Encyklopädie.

Lehrbuch der Differentialrechnung

von Prof. Dr. August Haas.

III. Teil.

Jaeckel

Lehrbuch

der

Differentialrechnung.

Dritter Teil:

Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven.

Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren und 138 Erklärungen.

Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Prof. Dr. August Haas.

Zweite vermehrte Auflage.

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

Vorwort.

Der vorliegende III. Teil der Differentialrechnung enthält die einfachsten und wichtigsten Anwendungen, welche erstere in dem Gebiet der ebenen Kurven gestattet. Um dem Buch den Grundzug möglichst leichter Verständlichkeit zu wahren, mussten sowohl die Auswahl und Anordnung des gebotenen Stoffes als auch dessen Behandlungsweise nach didaktischen Gesetzen im Rahmen des Kleyerschen Systems erfolgen. Vom Leichteren zum Schwereren fortschreitend, wird der Leser mit den mannigfaltigen Methoden und der grossen Fruchtbarkeit der Differentialrechnung vertraut gemacht; jede der dabei auftretenden Rechnungen bildet für sich betrachtet eine Uebung im Gebrauch der im II. Band entwickelten Regeln. Ferner liefern die behandelten Kurven, die mit möglichst grosser Genauigkeit vom Verfasser dargestellt worden sind, in ihrer Gesamtheit ein Bild der wichtigsten Linien, welche in der Geschichte der Geometrie, beim Studium der höheren Mathematik und bei den Aufgaben des Technikers auftreten. Ausserdem enthalten die Erklärungen sämtliche Angaben zum Nachzeichnen dieser Linien; dadurch wird der Leser in den Stand gesetzt, sich selbst eine für viele Zwecke nützliche Sammlung dieser Kurven anzulegen oder anfertigen zu lassen; hierzu empfiehlt der Verfasser die am Schluss des Buches gegebene Reihenfolge der Figuren. Von den Aufgaben dieses Bandes hat der Verfasser eine grosse Zahl selbst gebildet; ein anderer Teil stammt aus Prüfungsaufgaben, aus den wissenschaftlichen Abhandlungen von Schulprogrammen und aus mathematischen Zeitschriften; der Rest ist unseren besten Aufgabensammlungen, die im Literaturverzeichnis aufgeführt sind, entnommen. Dass der Verfasser die gebührende namentliche Anführung der Quelle bei den Aufgaben der letzten Art unterlassen hat, bittet er dadurch zu entschuldigen, dass die meisten derselben mit mehr oder weniger geringfügigen Abänderungen in fast allen Sammlungen enthalten und in unzählige Kollegheft übergegangen sind, und daher wohl als Gemeingut betrachtet werden dürfen.

Der Verlagsbuchhandlung spricht der Verfasser für das freundliche Entgegenkommen und die treffliche Ausstattung dieses Bandes den verbindlichsten Dank aus.

Stuttgart, im Juni 1894.

August Haas.

Verzeichnis der vorzugsweise benützten neueren Werke.

1) Baltzer, Analytische Geometrie. Leipzig 1882.
2) Dölp, Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung. Giessen 1891.
3) Frenet, Calcul infinitesimal. Paris 1866.
4) Heath, Geometrische Optik. Berlin 1894.
5) Magnus, Sammlung von Aufgaben. Berlin 1833.
6) Reuschle, Praxis der Kurvendiskussion. Stuttgart 1886.
7) Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Leipzig 1873.
8) — — Höhere Kurven. Leipzig 1873.
9) Schlömilch, Handbuch der Mathematik. Breslau 1881.
10) — — Kompendium der höheren Analysis. Braunschweig 1866.
11) — — Aufgabensammlung. Leipzig 1868.
12) Serret, Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1884.
13) Sohnke-Amstein, Sammlung von Aufgaben. Halle 1885.
14) Stegemann-Kiepert, Grundriss der Differentialrechnung. Hannover 1888.
15) Sturm, Cours d'analyse. Paris 1884.
16) Wiener, Darstellende Geometrie. Leipzig 1884.

Druckfehlerverzeichnis.

Seite 15, Aufgabe 12: $y = (r - a) \sin \frac{at}{r} - a \sin \left(t - \frac{at}{r}\right)$ zu lesen statt $+$.

Seite 60, Auflösung: $\frac{dy}{dx} = -x^{-\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}}$ statt $+x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$.

Seite 110, Satz: $f''(x+h) < 0$ und $f''(x+h) > 0$ statt $f''(x+h) < 0$ und $f''(x+h) < 0$.

Seite 160, Antwort. Im Nenner für ϱ: $\varphi'(t_0)\,\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\,\psi'(t_0)$ statt $\psi''(t_0)$ am Schluss.

Inhaltsverzeichnis.

Differentialrechnung.

III. Teil.

Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven.

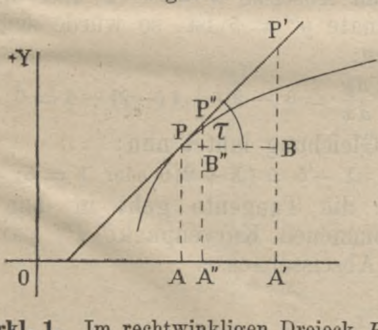
A. Von den Tangenten, Polaren, Normalen und Asymptoten der ebenen Kurven.

I. Die Tangente.

1) Die Kurvengleichung habe in rechtwinkligen Koordinaten die Form $y = f(x)$.

Frage 1. Wie lässt sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Gleichung der Tangente finden, welche in einem Punkt P einer gegebenen Kurve an diese gelegt werden kann, wenn die Gleichung der Kurve in der entwickelten Form $y = f(x)$ gegeben ist und der Berührungspunkt die Koordinaten x und y hat?

Figur 1.



Erkl. 1. Im rechtwinkligen Dreieck $PP'B$ ist:

$$P'B = A'P' - AP = Y - y;$$

ferner ist:

$$PB = OA' - OA = X - x,$$

somit:

$$tg\tau = \frac{P'B}{PB} = \frac{Y-y}{X-x}.$$

Antwort. Hat irgend ein Punkt P' der Tangente die Koordinaten X und Y und bezeichnet τ den Neigungswinkel der Tangente gegen die positive Abscissenachse, so folgt aus der Figur 1 die Gleichung:

$$\frac{Y-y}{X-x} = tg\tau.$$

Bekanntlich wird aber $tg\tau$ angegeben durch den Wert des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ im Punkt P; die Einsetzung dieses Wertes in obige Gleichung ergibt:

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{dy}{dx}$$

oder die Gleichung der Tangente lautet:

$$1) \ldots Y - y = \frac{dy}{dx}\cdot(X-x)$$

oder:

$$2) \ldots Y - y = f'(x)\cdot(X-x),$$

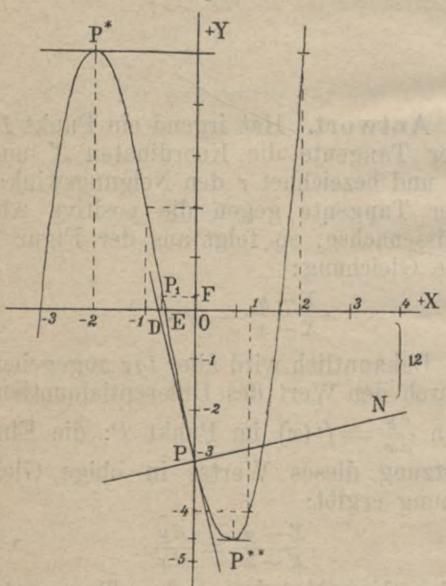
vorausgesetzt, dass $\frac{dy}{dx}$ im Punkt P einen bestimmten Wert besitzt.

Nach der Differentialrechnung II. Teil, Seite 13 gibt aber der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für den fest angenommenen Wert x den Wert der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels τ der Tangente in dem Punkt P der Kurve an, dessen Abscissenachse $= x$ ist; daher $tg\tau = \frac{dy}{dx}$ und daraus die nebenstehende Gleichung 1), welche für die Koordinaten X und Y von jedem beliebigen Punkt P' der Tangente ihre Richtigkeit behält. Man nennt X und Y die laufenden Koordinaten, im Gegensatz zu den festen Koordinaten x und y des Berührungspunktes P.

Erkl. 2. Nach der Differentialrechnung II. Teil, Seite 182, Erkl. 164 ist das Differential dy der Zuwachs $B''P''$, welchen die Ordinate AP erfährt, wenn man vom Berührungspunkt P auf der Tangente weiter geht bis zum Punkt P'', dessen Abscisse OA'' um die unendlich kleine Grösse $AA'' = dx$ grösser ist als $OA = x$. Die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke $PP'B$ und $PP''B''$ ergibt die Gleichung:

$$\frac{P'B}{PB} = \frac{P''B''}{PB''} \text{ oder } \frac{Y-y}{X-x} = \frac{dy}{dx}.$$

Figur 2.



Erkl. 3. Nach der Lehre von den Determinanten (siehe Weichold, Lehrbuch der Determinanten) hat man:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x & y & 1 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X-x & Y-y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-x & Y-y \\ dx & dy \end{vmatrix} = (X-x)\,dy - (Y-y)\,dx$$

$$\text{oder } (X-x)\,dy = (Y-y)\,dx.$$

Eine kleine Rechnung führt die Gleichung 1) in die Form über:

$$3) \ldots \frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy}$$

wobei dy das zum unendlich kleinen dx gehörige Differential vorstellt.

Endlich kann:

$$(X-x)\,dy = (Y-y)\,dx$$

auch in der Form einer Determinante geschrieben, nämlich:

$$4) \ldots \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x & y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Soll z. B. die Gleichung der Tangente gefunden werden an die Kurve

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$$

im Punkt P, dessen Abscisse $x = 0$ ist und dessen Ordinate y aus dieser Gleichung $= -3$ folgt, so rechnen wir:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 4;$$

für den gegebenen Punkt erhält also $\frac{dy}{dx}$ den Wert -4 und die Gleichung der Tangente ist nach der Formel 1):

$$Y + 3 = X(-4)$$

$$\text{oder } 4X + Y + 3 = 0$$

Diese Gerade schneidet also von der Abscissenachse ein Stück $OD = -\frac{3}{4}$ ab (s. Figur 2). Wäre die Tangentengleichung für den Punkt P^* verlangt, dessen Abscisse $x^* = -2$ und dessen Ordinate $y^* = 5$ ist, so würde sich ergeben:

$$\frac{dy}{dx} = 3(-2)^2 + 4(-2) - 4 = 0;$$

die Gleichung lautet nun:

$$Y - 5 = (X + 2)\,0 \text{ oder } Y = 5;$$

d. h. die Tangente geht in dem angenommenen Kurvenpunkt P^* parallel zur Abscissenachse.

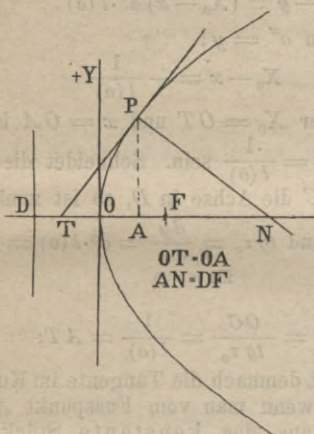
Erkl. 4. Zur Zeichnung der Kurve in Figur 2 dienen folgende Werte:

$x = -3$	-2	-1	$-0{,}62$	0	$0{,}7$	1	$1{,}6$	2
$y = 0$	5	2	0	-3	$-4{,}5$	-4	0	$+5$

Der Punkt $(0{,}7, -4{,}5)$ ist der tiefste, der Punkt $(-2, 5)$ der höchste.

Aufgabe 1. Gegeben sei die Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ ist. Gesucht ist die Gleichung der Tangente und eine Konstruktion der letztern.

Figur 3.



Erkl. 5. Die Konstruktion der Parabel ist im II. Band der Differentialrechnung in Erkl. 1 angegeben.

Auflösung. Die Koordinaten des Berührungspunktes P seien wieder x und y, dann folgt aus $y^2 = 2px$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sqrt{2px})}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y};$$

somit folgt:

$$Y - y = (X - x)\frac{p}{y}$$

oder:

$$yY = pX - px + y^2 = pX + px = p(X + x),$$

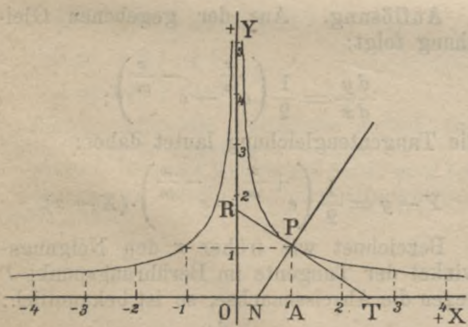
d. h. die gesuchte Tangentengleichung lautet:

$$yY = p(X + x).$$

Für $Y = 0$ folgt $X = -x$, d. h. es ist $OT = OA$ oder die Tangente schneidet von der negativen Abscissenachse ein Stück ab gleich der Abscisse des Berührungspunktes, woraus sich folgende äusserst einfache Tangentenkonstruktion ergibt: Mache $OT = OA$ und ziehe PT, so ist dies die gesuchte Tangente.

Aufgabe 2. Wie heisst die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x, y)$ an die Hyperbel $x^2y^3 = 1$?

Figur 4.



Erkl. 6. Zur Zeichnung der Kurve dienen folgende Werte:

$x = 0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}5$	1	2	3	4	5	10
$y = 4{,}64$	$2{,}92$	$1{,}59$	1	$0{,}63$	$0{,}48$	$0{,}39$	$9{,}34$	$0{,}21$

Auflösung. Aus $x^2y^3 = 1$ bilden wir:

$$y = x^{-\frac{2}{3}};$$

dies liefert:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}};$$

daher lautet die Gleichung der Tangente:

$$Y - y = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}(X - x).$$

Für $x = 1$ wird auch $y = 1$ und die Tangente im Punkt (1,1) ist:

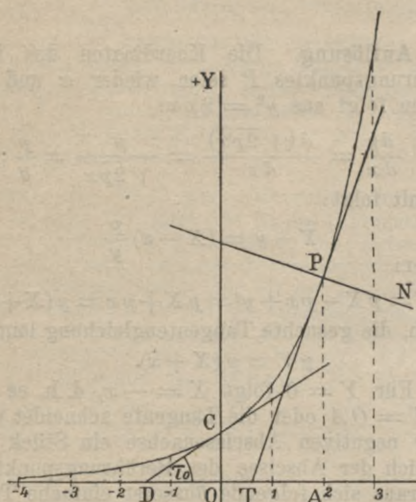
$$Y - 1 = -\frac{2}{3}(X - 1) \text{ od. } 2X + 3Y - 5 = 0$$

sie schneidet demnach von der Abscissenachse das Stück $OT = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ und von der Ordinatenachse das Stück:

$$OR = \frac{5}{3} = 1{,}67$$ ab (siehe Figur 4).

Aufgabe 3. Desgleichen für die Exponentialkurve $y = a^x$. (Siehe Differentialrechnung II. Teil, Seite 43.)

Figur 5.



Erkl. 7. Wählen wir zur Herstellung der Figur 5 $a = 2$, so haben wir für die Koordinaten folgende Werte zu nehmen:

$x = -3$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
$y = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Auflösung. Die Gleichung $y = a^x$ ergibt zunächst $\frac{dy}{dx} = a^x \cdot l(a)$; daraus folgt als Tangentengleichung:

$$Y - y = (X - x)\, a^x \cdot l(a).$$

Letztere liefert eine einfache Konstruktion der Tangente; für die Koordinaten X_0 und $Y_0 = 0$ des Punktes T, in welchem die Tangente die Abscissenachse schneidet (siehe Figur 5), folgt nämlich:

$$-y = (X_0 - x)\, a^x \cdot l(a)$$

und wegen $a^x = y$:

$$X_0 - x = -\frac{1}{l(a)}.$$

Da aber $X_0 = OT$ und $x = OA$ ist, so muss $AT = \frac{1}{l(a)}$ sein. Schneidet die Tangente in C die Achse in D, so ist zunächst:

$$OC = 1 \text{ und } tg\,\tau_0 = \underset{\text{für } x=0}{\frac{dy}{dx}} = a^0 \cdot l(a) = l(a),$$

somit ist:

$$OD = \frac{OC}{tg\,\tau_0} = \frac{1}{l(a)} = AT;$$

man erhält demnach die Tangente im Kurvenpunkt P, wenn man vom Fusspunkt A der Ordinate aus das konstante Stück OD nach links abträgt und den Endpunkt T mit P verbindet.

Aufgabe 4. Desgleichen für die Kettenlinie:

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

Erkl. 8. Ist ein vollkommen biegsamer Faden in zwei Punkten A und A_1 befestigt und nur der Wirkung der Schwere unterworfen, so bildet er in einer vertikalen Ebene eine Kurve, welche Kettenlinie heisst. Legt man das Koordinatensystem derart, dass die Ordinatenachse vertikal durch den tiefsten Punkt B geht und der Ursprung O um m Längeneinheiten unter dem genannten Punkt liegt, so lautet die Gleichung der Kurve wie oben angegeben wurde; die Kurve ist dann gegen die Y-Achse symmetrisch.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right);$$

die Tangentengleichung lautet daher:

$$Y - y = \frac{1}{2}\left(e^{+\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) \cdot (X - x).$$

Bezeichnet wie früher τ den Neigungswinkel der Tangente im Berührungspunkt P gegen die Abscissenachse, so ist bekanntlich:

$$tg\,\tau = \frac{dy}{dx}.$$

Nun hat man aber:

$$y^2 = \frac{m^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} + 2 + 2^{-\frac{2x}{m}}\right) = \frac{m^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} - 2 + 2^{-\frac{2x}{m}} + 4\right),$$

Diese Kurve kann auch aus der Exponentialkurve $y = me^{\frac{x}{m}}$ abgeleitet werden. Die letztere liefert für jeden Wert von x ein reelles y. Für $x = 0$ wird $y = m$, für $x = -\infty$ ist $y = 0$; für $x = \infty$ ist $y = \infty$. Die Kurve CBD erstreckt sich also, wenn m positiv gedacht wird, auf der positiven Seite ins Unendliche und nähert sich der negativen Abscissenachse immer mehr und mehr ohne sie je zu erreichen. Wir denken uns jetzt diese Kurve CBD so um die Ordinatenachse gedreht, dass sie die Lage C_1BD_1 annimmt. Das Stück NN_1 der auf der Abscissenachse errichteten Senkrechten MN_1N, welches von den beiden Kurven begrenzt wird, werde in P halbiert; dann ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes P die Kettenlinie; denn da $y = me^{\frac{x}{m}}$ die Gleichung der Kurve CBD ist, so hat man:

$$y = me^{-\frac{x}{m}}$$

als Gleichung der Kurve C_1BD_1. Nun ist:

$$MP = \frac{1}{2}(MN_1 + MN)$$

und wenn man OM durch x bezeichnet,

$$MN = me^{\frac{x}{m}},\quad MN_1 = me^{-\frac{x}{m}},$$

folglich wenn $MP = y$ gesetzt wird:

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

welches die Gleichung der Kettenlinie ist.

Für $m = 1$ und $\frac{m}{2} = \frac{1}{2}$ liefert die Rechnung folgende Werte für:

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$x =$	-3	-2	-1	0	$+1$
$y =$	10,07	3,76	1,54	1	1,54

$x =$	$+2$	$+3$
$y =$	3,76	10,07

Hiermit kann die Kettenlinie einfach auf Millimeterpapier eingetragen werden.

Näheres über die Kettenlinie findet man bei Gudermann, Theorie der Potentialfunktionen, Berlin 1833.

woraus:

$$\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} - 2 + 2^{-\frac{2x}{m}}\right) = \frac{y^2 - m^2}{m^2}$$

und

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}.$$

Daraus folgt:

$$tg\tau = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}.$$

Dieser Ausdruck liefert folgende einfache Konstruktion der Tangente. Aus dem tiefsten Punkt B der Kurve beschreibe man mit der Ordinate $PM = y$ des Kurvenpunktes P einen Kreisbogen, welcher die Abscissenachse in E schneidet; ziehe BE und fälle von P auf BE das Lot PT, so ist dieses die Tangente. Denn es ist:

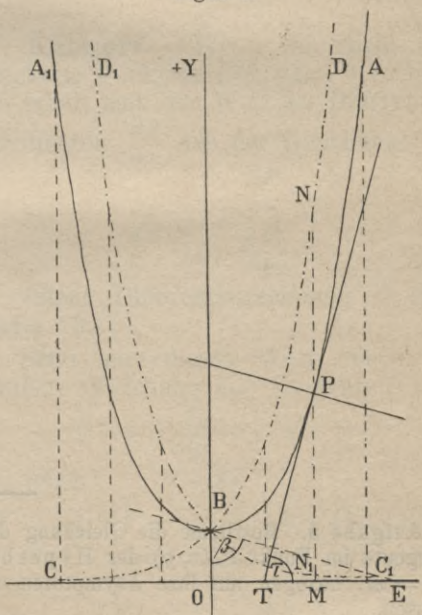
$$OB = m,\ BE = y,\ OE = \sqrt{y^2 - m^2},$$

$$tg\beta = \frac{OE}{OB} = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}$$

und da $\tau = \beta$, so ist auch:

$$tg\tau = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}.$$

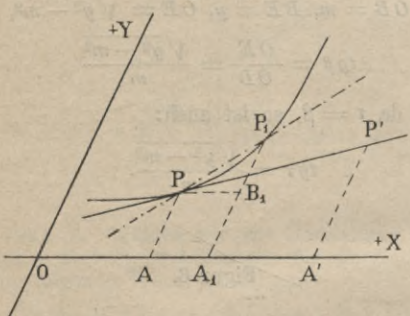
Figur 6.



2) Die Kurvengleichung habe in schiefwinkligen Koordinaten die Form $y = f(x)$.

Frage 2. Wie lässt sich in einem schiefwinkligen Koordinatensystem die Gleichung der Tangente finden, die im Punkt P der Kurve $y = f(x)$ an die letztere gezogen werden kann.

Figur 7.



Antwort. Die Gleichung der Tangente im Punkt P mit den schiefwinkligen Koordinaten x und y hat jedenfalls die Form:

$$Y - y = a(X - x);$$

dabei bedeutet a einen konstanten Faktor, dessen Wert jetzt zu bestimmen ist. Ziehen wir durch P eine Sekante PP_1, so hat diese eine Gleichung von der Form:

$$Y - y = a_1(X - x);$$

lassen wir die Sekante sich um den Punkt P drehen, so geht dieselbe, wenn P_1 mit P zusammenfällt, über in die Tangente PP' und dabei ändert a_1 seinen Wert derart, dass a den Grenzwert von a_1 vorstellt, den a_1 erreicht beim Uebergang der Sekante in die Tangente. Nun ist aber, wenn die Koordinaten OA_1 und A_1P_1 von P_1, die natürlich der Gleichung:

$$a_1 = \frac{Y - y}{X - x}$$

genügen müssen, mit $x + \Delta x$ u. $y + \Delta y$ bezeichnet werden, wobei $\Delta x = PB_1$ und $\Delta y = B_1P_1$ ist,

$$a_1 = \frac{(y + \Delta y) - y}{(x + \Delta x) - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Daraus folgt, dass:

$$a = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \text{ ist.}$$

Man hat demgemäss als Tangentengleichung:

$$5) \;.\;.\;.\; Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

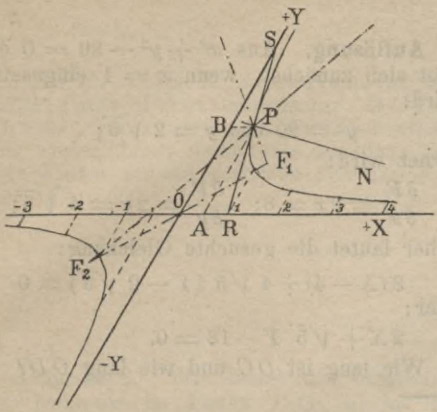
d. h. die Tangentengleichung hat im schiefwinkligen Koordinatensystem die nämliche Form wie im rechtwinkligen (siehe Frage 1).

Aufgabe 5. Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x, y)$ der Hyperbel $xy = m$, bezogen auf ihre Asymptoten als Achsen.

Auflösung. Aus $xy = m$ folgt:

$$y = \frac{m}{x} \text{ und } \frac{dy}{dx} = -\frac{m}{x^2} = -\frac{xy}{x^2} = -\frac{y}{x};$$

Figur 8.



daher lautet die verlangte Gleichung:

$$Y - y = -\frac{y}{x}(X - x)$$

oder:

$$(X - x)y + (Y - y)x = 0$$

oder:

$$yX + xY = 2m.$$

Heissen wir die Koordinaten des Punktes R X_0 und $Y_0 = 0$, so gibt die Gleichung:

$$X_0 = \frac{2m}{y} = \frac{2xy}{y} = 2x;$$

d. h. es ist $OR = 2OA$; in gleicher Weise erhält man auch $OS = 2OB$. Man erhält also die Tangente in P dadurch, dass $OR = 2OA$ gemacht und RP gezogen wird.

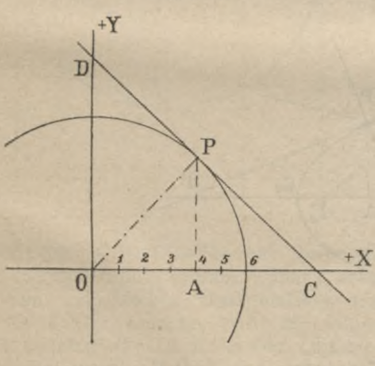
Erkl. 9. Zur Zeichnung der Kurve in Figur 8 wählen wir $m = 1$ und erhalten für:

$\pm x = 0{,}1$	0,2	0.3	0,5	1	2	3	4	5	u. s. f.
$\pm y = 10$	5	3,3	2	1	0,2	0,33	0,25	0,2	

3) Die Kurvengleichung habe in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten die Form $F(x, y) = 0$.

Frage 3. Wie erhält man die Gleichung der Tangente in einem Kurvenpunkt P mit den rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten x und y, wenn die Kurvengleichung in der nicht-entwickelten Form $F(x, y) = 0$ gegeben ist?

Figur 9.



Antwort. Wenn die nicht entwickelte Funktion $F(x, y) = 0$ vorliegt, so erhält man den Wert des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

(Siehe Differentialrechnung II. Teil, Seite 233.)

Setzt man diesen Wert ein in die frühere Gleichung der Tangente:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

so folgt:

$$6) \ldots \; Y - y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(X - x)$$

oder:

$$7) \ldots \; \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0.$$

Aufgabe 6. Berechne die Gleichung der Tangente, welche an den Kreis $x^2 + y^2 - 36 = 0$ gelegt werden kann in dem Punkt mit der Abscisse $x = +4$ und der positiven Ordinate y (siehe Figur 9).

Erkl. 10. Nach der ebenen Geometrie steht bekanntlich die Tangente auf dem Halbmesser nach dem Berührungspunkt senkrecht; die Tangente ist hiernach einfach das Lot auf dem Halbmesser.

Auflösung. Aus $x^2 + y^2 - 36 = 0$ ergibt sich zunächst, wenn $x = 4$ eingesetzt wird:

$$y^2 = 20 \text{ und } y = 2\sqrt{5};$$

ferner wird:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 8; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 4\sqrt{5};$$

daher lautet die gesuchte Gleichung:

$$8(X-4) + 4\sqrt{5}\,(Y - 2\sqrt{5}) = 0$$

oder:

$$2X + \sqrt{5}\,Y - 18 = 0.$$

Wie lang ist OC und wie lang OD?

Aufgabe 7. Die Gleichung der Tangente aufzustellen für die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Erkl. 11. Die analytische Geometrie beweist, dass die Tangente PF im Punkt P der Ellipse den einen der beiden Winkel halbiert, welche die von den Brennpunkten F_1 und F_2 gezogenen Strahlen F_1P und F_2P bilden (siehe Differentialrechnung II. Teil, Seite 2); die Brennpunkte liefert ein Kreisbogen aus einem Endpunkt D_2 der kleinen Achse D_1D_2 der Ellipse mit dem Halbmesser a, d. h. der halben grossen Achse; dadurch lässt sich die Tangente in einem beliebigen Punkt P einfach konstruieren: Man sucht die Brennpunkte F_1 und F_2, zieht F_1P und F_2P und halbiert den Winkel (siehe Figur 10).

Auflösung. Hier erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

woraus:

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) = 0$$

oder:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0;$$

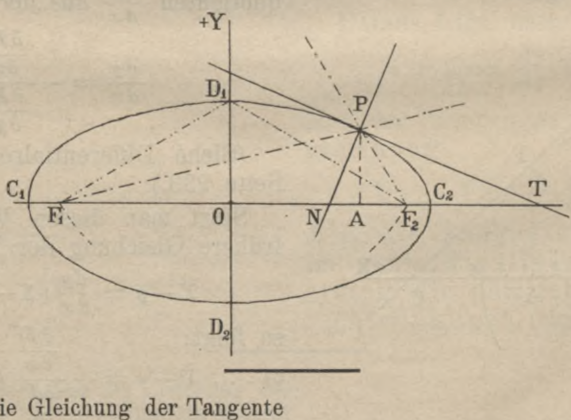
aber:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

daher lautet die Tangentengleichung der Ellipse im Punkt (x, y):

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - 1 = 0.$$

Figur 10.



Aufgabe 8. Die Gleichung der Tangente aufzustellen für den Punkt $P(x, y)$ der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Auflösung. Man erhält hier:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2};$$

daraus folgt:

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)-\frac{2y}{b^2}(Y-y)=0$$

oder:

$$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}-\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=0\,;$$

da aber:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ist, so folgt als Gleichung die Tangente der Hyperbel im Punkt (x, y):

$$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}-1=0.$$

Erkl. 12. Ueber die Konstruktion der Hyperbel (siehe Differentialrechnung II. Teil, Seite 2). Die Tangente im Punkt P erhält man wieder durch Halbierung des einen der zwei Winkel der Brennstrahlen F_1P und F_2P (siehe Figur 8).

Aufgabe 9. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $P\,(x, y)$ an die Cissoide $x^3 = y^2(2a-x)$?

Auflösung. Hier erhält man aus:

$$F(x,y) = x^3 - y^2(2a-x)$$

zunächst:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y\,(2a-x);$$

somit bekommt die Tangentengleichung die Form:

$$(3x^2+y^2)(X-x) - 2y\,(2a-x)\cdot(Y-y) = 0$$

oder:

$$\begin{aligned}(3x^2+y^2)\,X + 2y\,(\overset{x}{y}-2a)\,Y &= (3x^2+y^2)\,x - 2y^2(2a-x)\\ &= 3x^3 + xy^2 - 2x^3\\ &= xy^2 + x^3\\ &= xy^2 + y^2(2a-x)\\ &= 2ay^2 \text{ d. h.:}\end{aligned}$$

die Tangente der Cissoide im Punkt $P\,(x, y)$ lautet:

$$(3x^2+y^2)\,X + 2y\,(x-2a)\,Y - 2ay^2 = 0.$$

Der Kurvenpunkt D hat die Koordinaten $x = a$ und $y = a$; demnach hat die Tangente in D siehe Figur 11) die Gleichung:

$$2X - Y - a = 0,$$

woraus wir schliessen können, dass die Tangente in D durch den Mittelpunkt des Halbmessers OM gehen muss (siehe Figur 11).

Zur Herleitung der Kurvengleichung bemerke man:

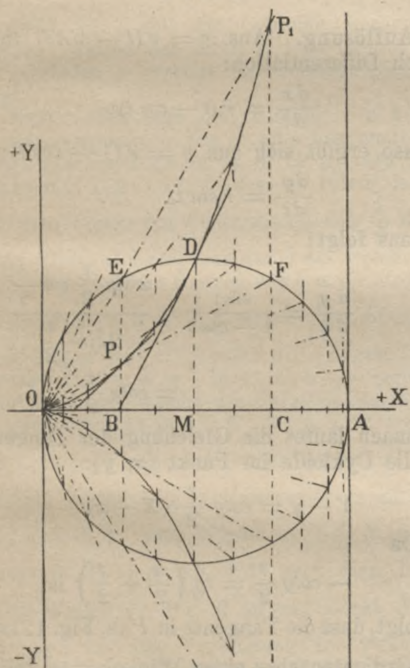
$$OB = AC = x$$
$$CF^2 = OC\cdot AC = x\,(2a-x)$$
$$PB : CF = OB : OC$$

also:

$$PB = \frac{CF\cdot OB}{OC} \text{ oder } y = \frac{\sqrt{x\,(2a-x)}\cdot x}{2a-x},$$

woraus $y^2(2a-x) = x^3$ folgt.

Figur 11.



Erkl. 13. Die Cissoide hat ihren Namen von dem Epheublatt (χισσος Epheu) erhalten. Von dem griechischen Mathematiker Diokles etwa 150 v. Chr. erdacht, wird sie folgendermassen konstruiert: Im Kreis vom Durchmesser $OA = 2a$ werde $MD \perp OA$ gemacht und Bogen $DE =$ Bogen DF beliebig angenommen. OF schneidet dann das Lot BE in einem Kurvenpunkt P. Nimmt man $OB = x$ und $BP = y$, so genügen diese Koordinaten der Gleichung:

$$x^3 = y^2(2a-x).$$

4) Die Kurve sei gegeben durch die zwei Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$.

Frage 4. Wie erhält man die Gleichung der Tangente in einem Kurvenpunkt P mit den Koordinaten x und y, wenn die letzteren als Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t gegeben sind, so dass:

$$x = \varphi(t) \text{ und } y = \psi(t)$$

ist?

Antwort. Aus $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ schliessen wir $dx = \varphi'(t)\,dt$ und $dy = \psi'(t)\,dt$ und erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Die Gleichung der Tangente:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

erhält dadurch die Form:

$$8) \ldots Y - y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}(X - x).$$

Aufgabe 10. Es soll die Gleichung der Tangente bestimmt werden, welche im Punkt $P(x, y)$ an die Cykloide gelegt werden kann, welche bestimmt wird durch die zwei Gleichungen:

$$x = r(t - \sin t) \text{ und } y = r(1 - \cos t);$$

ferner ist die Konstruktion der Tangente zu finden.

Erkl. 14. Wenn ein Kreis eine gerade Linie OX im Punkt O berührt und sich dann auf dieser unbegrenzten Geraden, ohne zu gleiten, weiter rollt; so beschreibt der anfängliche Berührungspunkt eine krumme Linie, welche Cykloide oder Radlinie heisst. Ein sinnliches Bild gibt der Kopf eines Nagels im Reif eines Wagenrades, der beim Rollen des Rades eine Cykloide in der Luft beschreibt. In Fig. 12 sei $OB = x$, $PB = y$. $MA = r$. Wird der Winkel PMA in Bogenmass ausgedrückt und mit t bezeichnet (siehe Differentialrechnung II. Teil, Erkl. 43), so folgt Bogen $AP = rt$. Nun muss aber dieser Bogen ebenso lang sein als die Strecke OA wegen der rollenden Bewegung des Kreises; oder wir haben $OA = rt$.

Wegen $PC = r\sin t$ und $MC = r\cos t$ folgt:

$$x = CB = OA - PC = rt - r\sin t$$

und

$$y = BP = MA - MC = r - r\cos t$$

Erkl. 15. Beim Beginn der Bewegung im Punkt O ist $t = 0$; mit fortschreitender Bewegung gewinnt der Winkel t fortwährend wachsend einmal den Wert 180^0, dann hat der erzeugende Punkt in P die Höhe $B_1P_1 = 2r$ über der Basislinie erreicht und die Abscisse OB_1 ist offenbar gleich dem halben Umfang des Kreises geworden (s. Fig. 13) Im weitern Verlauf nehmen die Ordinaten ab und für $t = 360^0$ ist der erzeugende Punkt in P_2 wieder auf der Basislinie angekommen; hierbei hat sich der ganze Kreisumfang auf der Abscissenachse ab-

Auflösung. Aus $x = r(t - \sin t)$ folgt durch Differentiation:

$$\frac{dx}{dt} = r(t - \cos t);$$

ebenso ergibt sich aus $y = r(1 - \cos t)$:

$$\frac{dy}{dt} = r\sin t.$$

Daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{t}{2}.$$

Demnach lautet die Gleichung der Tangente an die Cykloide im Punkt (x, y):

$$Y - y = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\cdot(X - x).$$

Da

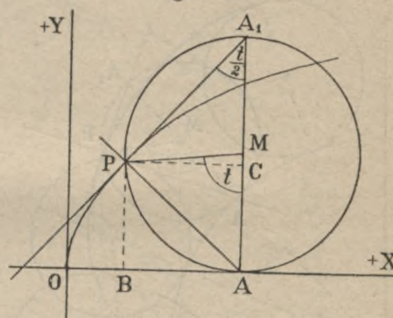
$$-\operatorname{cotg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2}\right) \text{ ist,}$$

so folgt, dass die Tangente in P (s. Fig. 12) mit der Ordinatenachse einen Winkel $= \frac{t}{2}$ bildet und deshalb durch den Gegenpunkt A_1 von A hindurchgehen muss, oder es ist, wenn $AMA_1 \perp OX$ gemacht wird, A_1P die verlangte Tangente in P.

gewickelt; d. h. es ist $OP_2 = 2\pi r$. Bei der Fortsetzung der Bewegung hebt sich der erzeugende Punkt wieder von der Basislinie und erzeugt während t von 360^0 bis 720^0 wächst, einen Kurvenbogen, welcher dem eben erhaltenen kongruent ist. Da sich nun die Bewegung des rollenden Kreises unbegrenzt fortsetzt und dabei der erzeugende Punkt immer wieder auf die Basislinie kommt, so besteht die Cykloide aus unendlich vielen Zweigen, die alle unter sich kongruent sind. Es lässt sich aber die Bewegung auch vom Punkt O aus rückwärts nach links fortgesetzt denken, wobei ebenfalls unendlich viele, der vorigen kongruente, Zweige der Kurve gewonnen werden. Je zwei aufeinander folgende derselben bilden einen Rückkehrpunkt I. Art. Dem Winkel t können hiernach alle Werte von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ beigelegt werden und die Rückkehrpunkte werden erhalten für:

$$t = 0, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 4\pi, \quad \pm 6\pi \text{ u. s. f.}$$

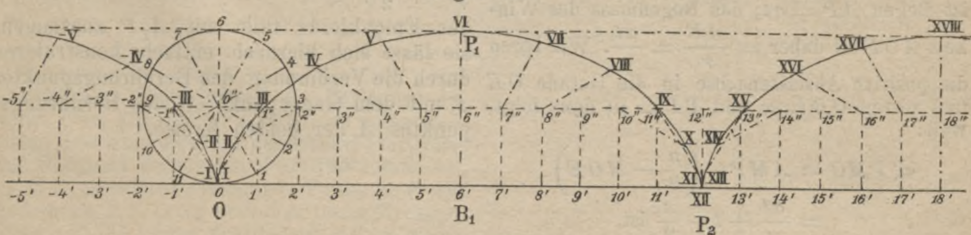
Figur 12.



Erkl. 16. Soll die Cykloide konstruiert werden, welche der Kreis k beim Rollen auf der Geraden g erzeugt, so verfährt man wie folgt:

Zuerst teilt man den Umfang von k vom Berührungspunkt O aus in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile, z. B. in 12 mit den Teilpunkten 0, 1, 2 ·· 11, so dass zu jedem der erhaltenen Bogen ein Centriwinkel von $\frac{1}{3} R$ gehört. Hierauf macht man auf g die Strecke von 0 bis 12' gleich dem Umfang von k u. die Strecken $0\,1' = 1'\,2' = 2'\,3'$ u. s. w. $= \frac{1}{12}$ Umfang, so dass Bogen $0\,1'$ = Strecke $0\,1'$, Bogen 12 = Strecke $1'\,2'$ u. s. w. In $1', 2', 3' \cdots$ errichtet man die Lote, welche die Parallele durch den Kreismittelpunkt in $1'', 2'', 3''$ u. s. w. treffen. An $1'\,1''$ legt man in $1''$ einen Winkel $= \frac{1}{3} R$ an und macht $1''\,\mathrm{I}$ = Halbmesser r; an $2'\,2''$ legt man in $2''$ einen Winkel $= 2 \cdot \frac{1}{3} R$ an und macht $2''\,\mathrm{II} = r$; an $3'\,3''$ legt man in $3''$ einen Winkel $= 3 \cdot \frac{1}{3} R$ an und macht $3''\,\mathrm{III} = r$ u. s. w. Die Verbindung der Punkte 0, I, II, III u. s. w. liefert dann die gesuchte Kurve (siehe Figur 13).

Figur 13.



Aufgabe 11. Die Gleichung der Tangente abzuleiten, die im Punkt P mit den Koordinaten x und y an die eine Epicykloide gelegt werden kann, wenn die letztere gegeben ist durch die zwei Gleichungen:

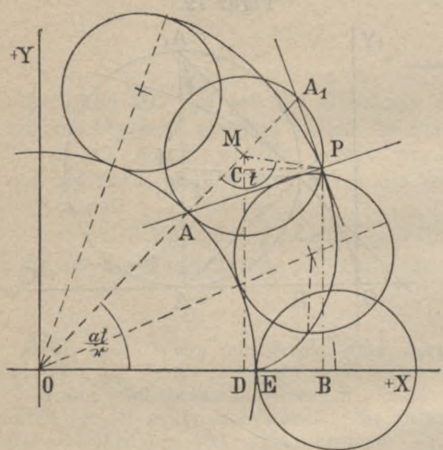
$$x = (a+r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t + t\right)$$

und

$$y = (a+r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t + t\right)$$

und die Konstruktion der Tangente aufzufinden.

Figur 14.



Erkl. 17. Wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Halbmesser a aussen auf einem festen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Halbmesser r ohne zu gleiten fortrollt, so beschreibt ein bestimmter Punkt P des Umfangs vom rollenden Kreis eine Kurve, welche Epicykloide heisst. Es bezeichne der Punkt E die Lage, in welcher der die Kurve erzeugende Punkt auf den festen Kreis fällt, wir können ihn als den Ausgangspunkt der Bewegung ansehen, und ist A der Berührungspunkt der beiden Kreise für die Lage P des erzeugenden Punktes, dann muss der Bogen EA des festen Kreises die gleiche Länge besitzen wie der Bogen AP des rollenden Kreises. Setzen wir den Winkel AMP in Bogenmass $= t$, so ist Bogen $AP = at$; das Bogenmass des Winkels AOE ist daher $= \frac{AE}{r} = \frac{at}{r}$. Wir legen die positive Abscissenachse in die Gerade OE und setzen $OB = x$ und $BP = y$; dann folgt, weil:

$$\sphericalangle PMC = AMP - \left(\frac{\pi}{2} - MOE\right)$$
$$= \frac{at}{r} + t - \frac{\pi}{2} \text{ ist,}$$

Auflösung. Aus:

$$x = (a+r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t + t\right)$$

folgt:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{r}(a+r)\sin\frac{a}{r}t$$
$$+ a\left(\frac{a}{r}+1\right)\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)$$
$$= \frac{a(a+r)}{r}\cdot\left[\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right) - \sin\frac{a}{r}t\right]$$
$$= \frac{2a(a+r)\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)}{r}.$$

Ferner liefert:

$$y = (a+r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a}{r}(a+r)\cos\frac{a}{r}t$$
$$- a\left(\frac{a}{r}+1\right)\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)$$
$$= \frac{a(a+r)}{r}\left[\cos\frac{a}{r}t - \cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]$$
$$= \frac{2a(a+r)\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)}{r};$$

somit erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)$$

und die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x, y)$ der Epicykloide lautet daher:

$$Y - y = tg\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)(X - x).$$

Daraus schliessen wir, dass die Tangente mit der Abscissenachse den Winkel $\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}$ bildet. Verlängern wir in Fig. 14 die Zentrale OAM bis A_1 und ziehen A_1P, so ist $\sphericalangle MA_1P = \frac{t}{2}$ und wegen $AOE = \frac{a}{r}t$ schneidet A_1P die Abscissenachse ebenfalls unter dem Winkel $\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}$; d. h. die Tangente im Punkt P der Epicykloide fällt mit A_1P zusammen; sie lässt sich hiernach einfach konstruieren durch die Verbindung des Berührungspunktes P mit dem Gegenpunkt A_1 des Berührungspunktes A der beiden Kreise.

$$x = OD + CP = (a+r)\cos\frac{a}{r}t + a\sin\left(\frac{at}{r} + t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (a+r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t + t\right);$$

denn $\sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = -\cos\psi$,

ferner:

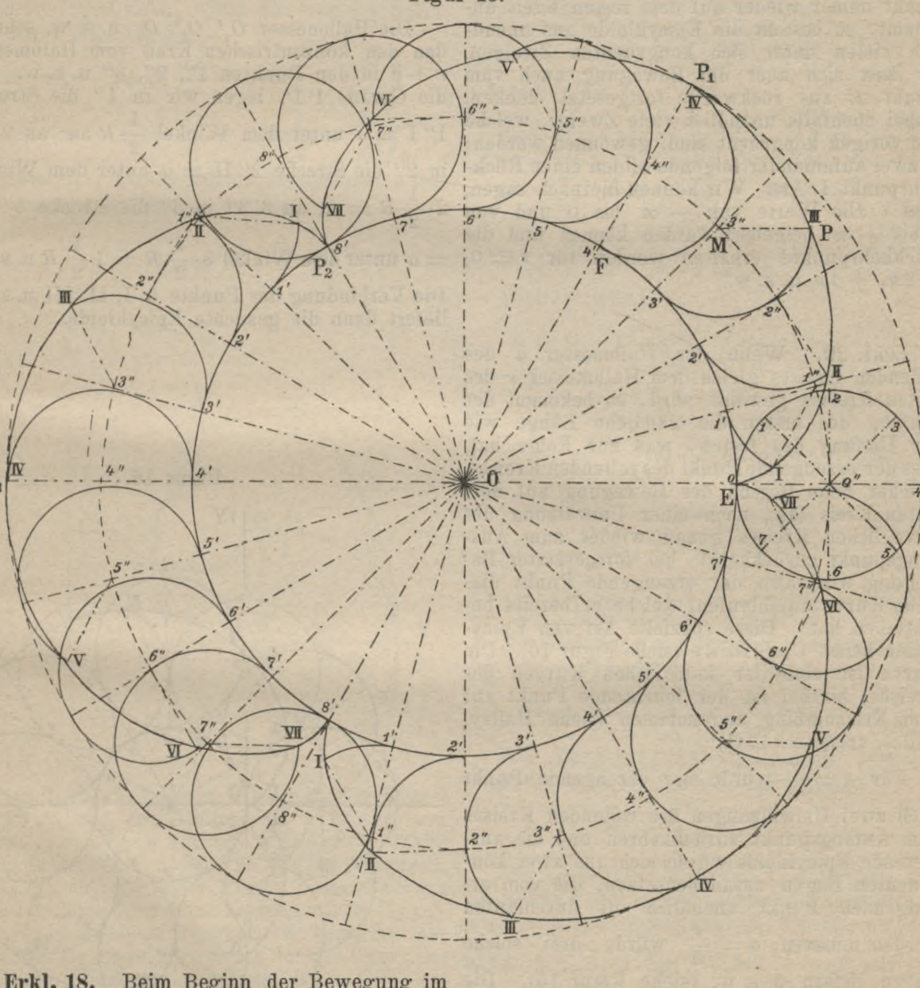
$$y = DM - CM = (a+r)\sin\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t + t - \frac{\pi}{2}\right)$$

oder:

$y = (a+r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t + t\right)$, denn $\cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin\psi$

wie oben angegeben worden ist.

Figur 15.



Erkl. 18. Beim Beginn der Bewegung im Punkt E (s. Fig. 15) ist $t = 0$; bei fortschreitender Bewegung gewinnt der Winkel t fortwährend wachsend einmal den Wert 180^0; dann hat der die Epicykloide erzeugende Punkt in P_1 die Entfernung $P_1F = 2a$ über dem festen Kreis erreicht und die Länge des Bogens EF ist gleich

dem halben Umfang des rollenden Kreises geworden. Im weitern Verlauf nähert sich der erzeugende Punkt wieder dem festen Kreis und für $t = 360^0$ kommt derselbe in P_2 zum zweitenmal auf dem letztern an; jetzt hat sich der ganze Umfang des rollenden Kreises auf dem festen abgewickelt, d. h. es ist Bogen

$$EAFP_2 = 2\pi a.$$

Bei der Fortsetzung der Bewegung hebt sich der erzeugende Punkt wieder vom festen Kreis und erzeugt während t von 360^0 bis 720^0 wächst, einen neuen Kurvenzweig, welcher dem soeben erhaltenen kongruent ist. Da sich nun die Bewegung des rollenden Kreises ins Unbegrenzte fortsetzt und dabei der erzeugende Punkt immer wieder auf dem festen Kreis ankommt, so besteht die Epicykloide aus unendlich vielen unter sich kongruenten Zweigen. Es lässt sich aber die Bewegung auch vom Punkt E aus rückwärts fortgesetzt denken, wobei ebenfalls unendlich viele Zweige, welche den vorigen kongruent sind, gewonnen werden; je zwei aufeinander folgende bilden einen Rückkehrpunkt I. Art. Wir können hiernach sagen, dass t alle Werte von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ beigelegt werden können und die Rückkehrpunkte erhalten werden für $t = 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ u. s. w.

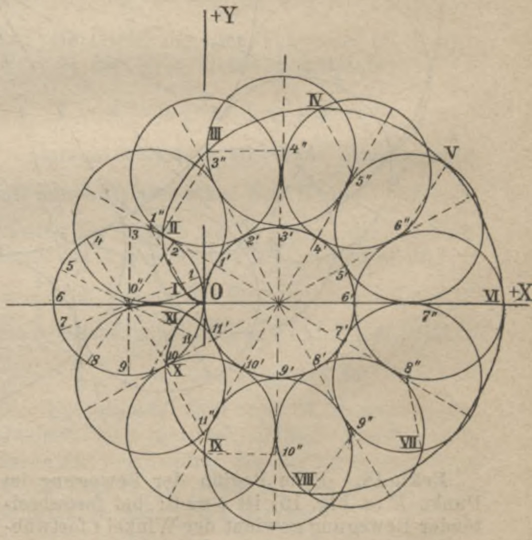
Erkl. 20. Wenn der Halbmesser a des rollenden Kreises gleich dem Halbmesser r des festen Kreises gewählt wird, so bekommt der Umfang des ersten die nämliche Länge wie der Umfang des festen, was zur Folge hat, dass der erzeugende Punkt des rollenden Kreises, welcher beim Beginn der Bewegung auf dem festen Kreis lag, nach einer Umwälzung des beweglichen Kreises genau wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt; bei fortgesetzter Bewegung wird also der erzeugende Punkt dieselbe Kurve durchlaufen, welche er bereits beschrieben hat. Diese spezielle Art von Epicykloide heisst Cardioide (siehe Figur 16). Die Kurve ist eine der kaustischen Kurven des Kreises; hierbei ist der leuchtende Punkt auf dem Kreisumfang angenommen (siehe Halley, Philos. transact. 1741).

Für $a = \frac{r}{2}$ würde der erzeugende Punkt nach zwei Umwälzungen des rollenden Kreises zum Anfangspunkt zurückkehren und die auftretende Epicykloide würde sich aus zwei kongruenten Bogen zusammensetzen, die vom erzeugenden Punkt unendlich oft durchlaufen werden müssten; $a = \frac{r}{3}$ würde drei solche Bogen liefern u. s. w. (siehe Figur 15). Die Wahl $a = \frac{2}{3} r$ würde zur Folge haben, dass die dreifache Peripherie des rollenden Kreises gleich der doppelten des festen Kreises gleichkäme und der beschreibende Punkt nach drei vollen Umwälzungen zum Anfangspunkt zurück-

Erkl. 19. Zur Konstruktion der Epicykloide, welche der Kreis vom Halbmesser a beim Rollen auf dem Kreis vom Halbmesser r in Fig. 15 erzeugt, ist folgendermassen zu verfahren. Der rollende Kreis berühre den andern im Punkt 0. Wir teilen den Umfang des erstern in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile ein, z. B. in 8 in den Teilpunkten 0, 1, 2, 3 $\cdots$ 7; dann gehört zu jedem der erhaltenen Bogen ein Centriwinkel $= \frac{4}{8} R = \frac{1}{2} R$. Hierauf machen wir auf dem festen Kreis den Bog. $0\,1' =$ Bog. $0\,1$, Bogen $1'2' =$ Bogen 12, Bogen $2'3' =$ Bogen $2\,3$ u. s. w., also je $= \frac{1}{8}$ Umfang des rollenden Kreises.

Die Halbmesser O_1', O_2', O_3' u. s. w. schneiden den konzentrischen Kreis vom Halbmesser $r + a$ in den Punkten $1''$, $2''$, $3''$ u. s. w. An die Gerade $1'1''$ legen wir in $1''$ die Strecke $1''\mathrm{I} = a$ unter dem Winkel $\frac{1}{2} R$ an; an $2'2''$ in $2''$ die Strecke $2''\mathrm{II} = a$ unter dem Winkel $2 \cdot \frac{1}{2} R = R$, an $3'3''$ in $3''$ die Strecke $3''\mathrm{III} = a$ unter dem Winkel $3 \cdot \frac{1}{2} R = 1\frac{1}{2} R$ u. s. w. Die Verbindung der Punkte 0, I, II, III u. s. w. liefert dann die gesuchte Epicykloide.

Figur 16.



kehren müsste; auch hier wäre die Epicykloide geschlossen; sie bestände aus drei unter sich kongruenten Zweigen. Allgemein wird man sagen können, dass die Kurve sich schliesst, wenn das Verhältnis $\frac{a}{r}$ gleich dem Verhältnis $\frac{n_1}{n_2}$ zweier ganzen Zahlen n_1 und n_2 ist. Ist dagegen $\frac{a}{r}$ irrational, so besteht die Kurve aus unendlich vielen sich nicht schliessenden Bogen.

Erkl. 21. Wird der Halbmesser r des festen Kreises unendlich gross angenommen, so geht der letztere in eine gerade Linie über, auf welcher der Kreis vom Halbmesser a rollt, wobei ein fester Punkt seines Umfangs eine Cykloide beschreibt; es geht daher die Epicykloide für $r = \infty$ in eine Cykloide über, oder es ist die Cykloide nur ein spezieller Fall der Epicykloide.

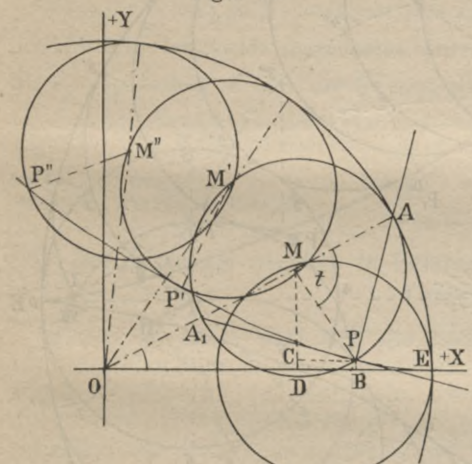
Aufgabe 12. Die Gleichung der Tangente abzuleiten, welche im Punkt P mit den Koordinaten x und y an eine Hypocykloide gelegt werden kann, wenn die letztere durch die zwei Gleichungen:

$$x = (r-a)\cos\frac{at}{r} + a\cos\left(t - \frac{at}{r}\right),$$

$$y = (r-a)\sin\frac{at}{r} \mp a\sin\left(t - \frac{at}{r}\right)$$

gegeben ist; ferner soll die Konstruktion der Tangente aufgefunden werden.

Figur 17.



Erkl. 22. Wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Halbmesser a innen auf einem festen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Halbmesser r, ohne zu gleiten, fortrollt, so beschreibt ein fester Punkt P des Umfangs vom rollenden Kreis eine Kurve, welche Hypocykloide heisst (s. Fig. 17). Es bezeichne der Punkt E die Lage, in welcher der die Kurve erzeugende Punkt auf den festen Kreis fällt, wir können ihn als den Ausgangspunkt der Bewegung ansehen, und ist A der Berührungspunkt der beiden Kreise für die Lage P des erzeugenden Punktes, so muss der Bogen AE des festen Kreises die gleiche Länge wie der Bogen AP des rollenden Kreises besitzen. Setzen wir den

Auflösung. Aus:

$$x = (r-a)\cos\frac{at}{r} + a\cos\left(t - \frac{at}{r}\right)$$

leiten wir ab:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{r}(r-a)\sin\frac{at}{r} - a\left(1-\frac{a}{r}\right)\sin\left(t-\frac{at}{r}\right)$$

$$= -\frac{a}{r}(r-a)\left[\sin\frac{at}{r} + \sin\left(t-\frac{at}{r}\right)\right]$$

$$= -\frac{2a(r-a)}{r}\sin\frac{t}{2}\cos\left(\frac{at}{r}-\frac{t}{2}\right).$$

Weiter liefert:

$$y = (r-a)\sin\frac{at}{r} - a\sin\left(t-\frac{at}{r}\right):$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a}{r}(r-a)\cos\frac{at}{r} - a\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos\left(t-\frac{at}{r}\right)$$

$$= \frac{a(r-a)}{r}\left[\cos\frac{at}{r} - \cos\left(t-\frac{at}{r}\right)\right]$$

$$= -\frac{2a(r-a)}{r}\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\left(\frac{at}{r}-\frac{t}{2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{at}{r}-\frac{t}{2}\right) = -tg\left(\frac{t}{2}-\frac{at}{r}\right).$$

Die Gleichung der Tangente im Punkt x, y der Hypocykloide lautet daher:

$$Y - y = -tg\left(\frac{t}{2}-\frac{at}{r}\right)(X-x).$$

Die Tangente bildet demnach mit der positiven Abscissenachse den Winkel:

$$180 - \left(\frac{t}{2}-\frac{at}{r}\right).$$

Die Zentrale OM in Fig. 17 schneidet den rollenden Kreis ausser im Berührungspunkt A noch in dessen Gegenpunkt A_1. Die Gerade A_1P bildet mit A_1A den Winkel $\frac{t}{2}$ und mit der Abscissenachse nach links den Winkel:

$$\frac{t}{2}-\frac{at}{r}$$

nach dem Satz vom Aussenwinkel eines Dreiecks. Wir schliessen hieraus, dass die

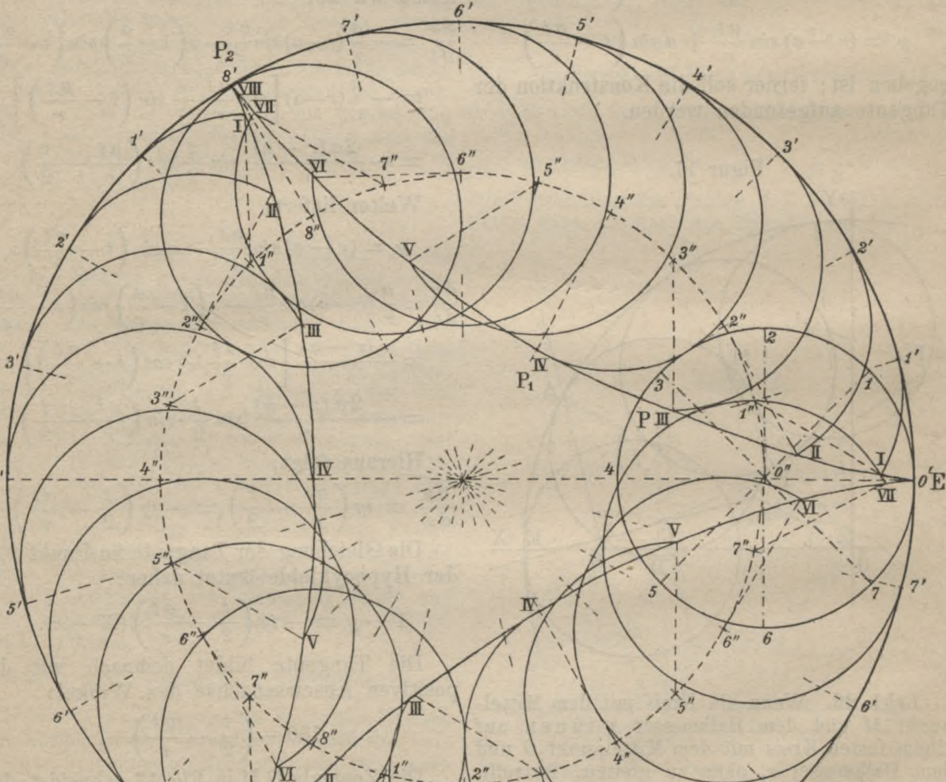
Winkel AMP in Bogenmass $= t$, so ist Bogen $AP = at$; das Bogenmass des Winkels AOE ist daher $= \frac{AE}{r} = \frac{at}{r}$. Wir legen die positive Abscissenachse in die Gerade OE und nehmen $OB = x$ und $BP = y$. Dann folgt, weil $\sphericalangle MPC = \sphericalangle AMP - MOE = t - \frac{at}{r}$ ist (nach dem Satz vom Aussenwinkel eines Dreiecks):

$$\begin{aligned} x &= OD + CP \\ &= (r-a)\cos\frac{a}{r}t + a\cos\left(t - \frac{at}{r}\right), \\ y &= MD - MC \\ &= (r-a)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(t - \frac{at}{r}\right), \end{aligned}$$

wie oben angegeben worden ist.

Tangente in P mit der Geraden A_1P zusammenfallen muss. Darnach lässt sich die Tangente durch die Verbindung des Berührungspunktes P mit dem Gegenpunkt A_1 des Berührungspunktes A der beiden Kreise sehr einfach herstellen.

Figur 18.



Erkl. 23. Was in der Erkl. 18 über die Epicykloide ausgeführt worden ist, gilt vollständig auch für die Hypocykloide. Der Leser

wird gebeten, dieselbe zu wiederholen und sich zu überzeugen, dass auch hier t alle Werte von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ durchlaufen kann; die Kurve setzt sich auch hier aus unendlich viel kongruenten Zweigen zusammen, von denen je zwei benachbarte einen Rückkehrpunkt erster Art bilden, die erhalten werden für $t = 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ u. s. w.

Erkl. 24. Die in der Erkl. 19 für die Epicykloide gegebene Konstruktion lässt sich wörtlich auf die Hypocykloide anwenden; nur ist statt des Kreises um O mit dem Halbmesser $r + a$ hier der Halbmesser $r - a$ zu nehmen (siehe Figur 18).

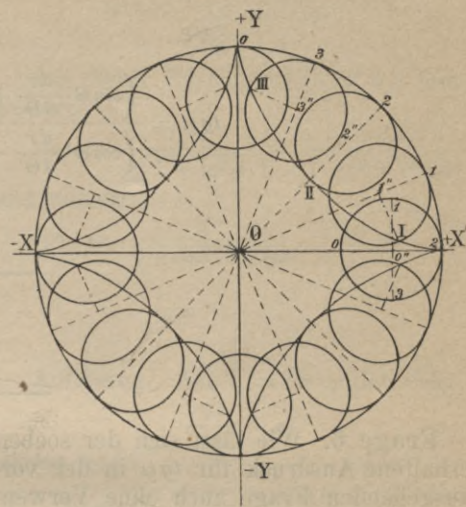
Erkl. 25. Wenn bei der Hypocykloide der Halbmesser a des rollenden Kreises gleich der Hälfte des Halbmessers r des festen Kreises gewählt wird, so erhält $\frac{at}{r}$ den Wert $\frac{t}{2}$ und die Gleichungen der Kurve gehen über in:

$$x = r \cos \frac{t}{2}, \quad y = 0;$$

d. h. die Hypocykloide ist in diesem Fall eine mit der Abscissenachse zusammenfallende Strecke, nämlich der durch den Punkt E gehende Durchmesser des festen Kreises.

Für $a = \frac{r}{3}$ wird die Hypocykloide eine aus drei Zweigen bestehende geschlossene Kurve; für $a = \frac{r}{4}$ besteht sie aus vier Zweigen und heisst dann Sternkurve oder Astroide (siehe Figur 19). Die Kurve schliesst sich immer, wie in Erkl. 20 ausgeführt worden ist, wenn $\frac{a}{r}$ ein rationales Verhältnis darstellt.

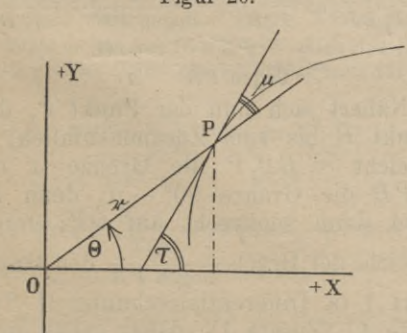
Figur 19.



5) Die Kurve sei gegeben in Polarkoordinaten durch eine Gleichung von der Form $r = f(\Theta)$

Frage 5. Wie lässt sich die Richtung der Tangente in einem bestimmten Punkt P einer Kurve bestimmen, wenn die letztere durch eine Gleichung $r = f(\Theta)$ zwischen den Polarkoordinaten r und Θ gegeben ist?

Figur 20.



Antwort. Die Richtung der Tangente im gegebenen Punkt P mit den Koordinaten r und Θ ist bestimmt durch die Grösse des Winkels μ, welchen der Radiusvektor OP mit der Tangente bildet. Dieser Winkel μ lässt sich berechnen. Bezeichnet τ den Winkel der Tangente gegen die Abscissenachse, so gibt die Figur 20 die Beziehung $\mu = \tau - \Theta$ und deshalb:

$$tg\, \mu = \frac{tg\, \tau - tg\, \Theta}{1 + tg\, \tau \cdot tg\, \Theta}.$$

Setzt man jetzt:

$$x = r \cos \Theta \text{ und } y = r \sin \Theta,$$

so folgt:

$$tg\,\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta} + r\cos\Theta}{\cos\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta} - r\sin\Theta}$$

(siehe Differentialrechnung II. Teil, Seite 258);

daher durch Substitution:

$$tg\,\mu = \frac{\left(\sin\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta} + r\cos\Theta\right)\cos\Theta - \left(\cos\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta} - r\sin\Theta\right)\sin\Theta}{\left(\cos\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta} - r\sin\Theta\right)\cos\Theta + \left(\sin\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta} + r\cos\Theta\right)\sin\Theta},$$

was ausgerechnet ergibt:

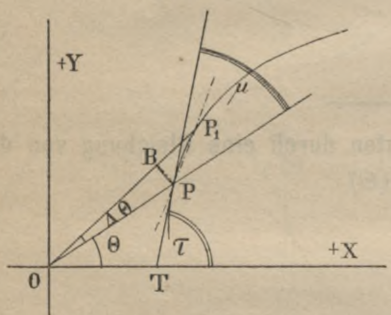
$$9) \ldots tg\,\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\Theta}}$$

oder auf andere Weise geschrieben:

$$10) \ldots tg\,\mu = \frac{r\,d\Theta}{dr}.$$

Frage 6. Wie lässt sich der soeben erhaltene Ausdruck für $tg\,\mu$ in der vorausgehenden Frage auch ohne Verwendung von rechtwinkligen Koordinaten gewinnen?

Figur 21.



Erkl. 25a. Um die Gleichung der Tangente in Polarkoordinaten aufzustellen, welche im Punkt P mit den Polarkoordinaten r, Θ der Kurve $r = f(\Theta)$ gelegt werden kann, denken wir uns auf der Tangente einen beliebigen Punkt P' mit den laufenden Koordinaten r_1 und Θ_1; dann gibt:

$$x = r\cos\Theta,\quad X = r_1\cos\Theta,$$
$$y = r\sin\Theta,\quad Y = r_1\sin\Theta,$$

in $Y - y = tg\,\tau\,(X - x)$ eingesetzt, die Polargleichung der Tangente:

$$13) \ldots r_1\left(\sin(\Theta_1 - \Theta)\frac{dr}{d\Theta} + r\cdot\cos(\Theta_1 - \Theta)\right) + r^2 = 0.$$

Antwort. In der Nähe des Berührungspunktes P mit den Polarkoordinaten r und Θ wählen wir einen zweiten Kurvenpunkt P_1 mit den Polarkoordinaten $OP_1 = r + \Delta r$ und $\sphericalangle P_1OX = \Theta + \Delta\Theta$; dann beschreiben wir aus O den Kreisbogen PB, so dass $BP_1 = \Delta r$ wird, und ziehen die Sehne PB, sowie PP_1; dann ist zunächst zu beachten, dass $\sphericalangle BP_1P$ sich ändert, wenn P_1 sich dem Punkt P nähert und den Wert μ erreicht im Augenblick des Zusammenfallens von P_1 mit P, denn BP_1 fällt in die Richtung von OP und P_1P in jene der Tangente PT.

Nach dem Sinussatz der Trigonometrie hat man nun im $\triangle PP_1B$:

$$\frac{\sin BP_1P}{\sin P_1PB} = \frac{PB}{P_1B} = \frac{PB}{\text{Bogen } PB}\cdot\frac{\text{Bogen } PB}{P_1B}$$
$$= \frac{PB}{\text{Bogen } PB}\cdot\frac{r\cdot(\Delta\Theta)}{\Delta r}.$$

Nähert sich nun der Punkt P_1 dem Punkt P bis zum Zusammenfallen, so erreicht $\sphericalangle BP_1P$ die Grenze μ und P_1PB die Grenze $90^0 - \mu$, denn BP wird dann senkrecht auf OP; ferner erreicht der Bruch $\frac{PB}{\text{Bogen } PB}$ den Grenzwert 1 (s. Differentialrechnung II. Teil, Seite 47, Zusatz 1); daher erhält man:

$$\frac{\sin\mu}{\sin(90^0-\mu)} = \operatorname*{Limes}_{\Delta\Theta=0} \frac{r\cdot\Delta\Theta}{\Delta r} = \operatorname*{Limes}_{\Delta\Theta=0} \frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\Theta}}$$

oder:

$$tg\,\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\Theta}} = \frac{r\,d\Theta}{dr}.$$

Aus dieser Formel erhalten wir dann weiter:

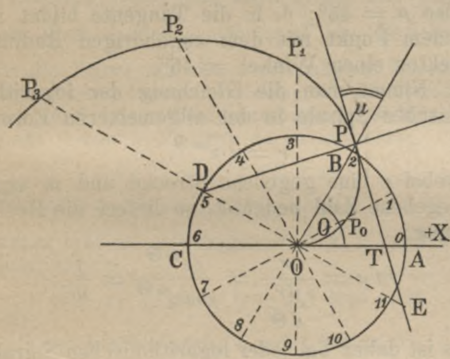
$$11)\ \ldots\ \sin\mu = \frac{tg\,\mu}{\sqrt{1+tg^2\mu}} = \frac{r\,d\Theta}{\sqrt{dr^2+r^2d\Theta^2}}$$

und ebenso:

$$12)\ \ldots\ \cos\mu = \frac{dr}{\sqrt{dr^2+r^2d\Theta^2}}.$$

Aufgabe 13. Welchen Winkel μ bildet die Tangente in einem Punkt P der archimedischen Spirale $r = c\Theta$ mit dem zugehörigen Radiusvektor? Dabei stelle c eine gegebene Strecke vor.

Figur 22.



Erkl. 26. Die Gleichung $r = c\Theta$ spricht aus, dass der Radiusvektor gleich dem Bogen des Kreises vom Halbmesser c ist, gerechnet von der festen Achse OX bis zur Richtung des Radiusvektors; z. B. muss, wenn $OA = c$ angenommen wurde, $OP =$ Bogen AB sein.

Wählen wir $c = 10$ mm und teilen den Kreis in 12 gleiche Teile ein, so erhält man für:

$\Theta = 0$	$30^0\left(=\frac{\pi}{6}\right)$	$60^0\left(=\frac{2\pi}{6}\right)$	
$r = 0$	5,23	10,47	
$\Theta =$	$90^0\left(=\frac{3\pi}{6}\right)$	$120^0\left(=\frac{4\pi}{6}\right)$	u. s. f.
$r =$	15,71	20,94 mm	

Gewöhnlich nimmt man eine möglichst kleine Zirkelöffnung z und trägt diese auf dem Um-

Auflösung. Aus $r = c\Theta$ ergibt sich:

$$\frac{dr}{d\Theta} = c;$$

daraus folgt:

$$tg\,\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\Theta}} = \frac{r}{c} = \frac{c\Theta}{c} = \Theta;$$

d. h. die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet, ist immer gleich dem Azimut Θ. Für $\Theta = 0$ wird auch $\mu = 0$; d. h. im Anfangspunkt der Spirale fällt die Tangente mit der festen Achse OX zusammen. Mit Θ wächst auch μ und für $\Theta = \infty$ wird $tg\,\mu = \infty$, folglich $\mu = 90^0$; d. h. die Tangente in einem unendlich fernen Punkt der Spirale steht auf dem zugehörigen Radiusvektor senkrecht.

Macht man $DE \perp OP$ und $DP \perp$ auf der Tangente, so ist im rechtwinkligen Dreieck DPO der Winkel $PDO = \mu$; daher:

$$OD = OP\cdot cotg\,\mu = \frac{OP}{tg\,\mu} = \frac{r}{\Theta} = \frac{c\Theta}{\Theta} = c,$$

d. h. der Punkt D liegt auf dem aus O beschriebenen Kreis vom Halbmesser c. Daraus lässt sich folgende Tangentenkonstruktion ableiten: Verbinde den Kurvenpunkt P mit O, errichte den Halbmesser $OD \perp OP$ und $= c$; ziehe DP und errichte in D auf DP die Senkrechte, so ist die letztere die gesuchte Tangente.

fang des Kreises vom Halbmesser c so oft als möglich ab; ergibt sich der Kreisumfang auf diese Weise etwa $= 96z$, so macht man für:

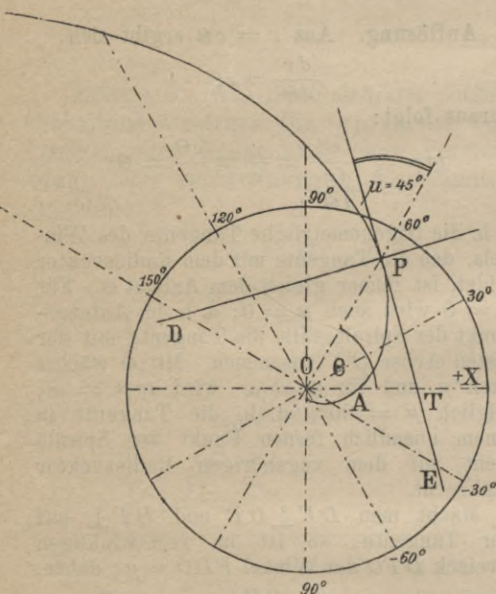
$\Theta = 30^0$	$\Theta = 60^0$	$\Theta = 90^0$	u. s. f.
$r = 8z$	$r = 16z$	$r = 24z$	

und verbindet die Endpunkte.

Erkl. 27. Diese Spirale wurde von Konon aus Samos gebürtig, aber in Alexandria lebend, gefunden; sie wurde von seinem Freund Archimedes (287 bis 212 v. Chr.) genau untersucht und nach ihm genannt.

Aufgabe 14. Welchen Winkel μ bildet die Tangente in einem Punkt P der logarithmischen Spirale $r = e^{\Theta}$ mit dem Radiusvektor?

Figur 23.



Auflösung. Die Gleichung der logarithmischen Spirale $r = e^{\Theta}$ liefert:

$$\frac{dr}{d\Theta} = e^{\Theta};$$

daher ist:

$$tg\,\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\Theta}} = \frac{e^{\Theta}}{e^{\Theta}} = 1,$$

also $\mu = 45^0$; d. h. die Tangente bildet in jedem Punkt mit dem zugehörigen Radiusvektor einen Winkel $= 45^0$.

Nimmt man die Gleichung der logarithmischen Spirale in der allgemeineren Form:

$$r = c \cdot e^{m\Theta},$$

wobei c eine gegebene Strecke und m eine gegebene Zahl bedeutet, so liefert die Rechnung:

$$tg\,\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\Theta}} = \frac{ce^{m\Theta}}{cme^{m\Theta}} = \frac{1}{m};$$

es ist daher bei jeder logarithmischen Spirale der Winkel zwischen der Tangente und dem Radiusvektor von konstanter Grösse.

Erkl. 28. Die Gleichung $r = e^{\Theta}$ ergibt für $\Theta = 0$, $r = e^0 = 1$; lässt man nun Θ von 0 bis ∞ wachsen, so erhält r entsprechende, ebenfalls ins Unendliche reichende Werte; z. B. liefert:

$\Theta = 0$	$30^0\left(=\frac{\pi}{6}\right)$	$60^0\left(=\frac{2\pi}{6}\right)$	$90^0\left(=\frac{3\pi}{6}\right)$	$120^0\left(=\frac{4\pi}{6}\right)$
$r = 1$	1,69	2,85	4,81	8,12

$\Theta = 150^0\left(=\frac{5\pi}{6}\right)$	$180^0 (= \pi)$	u. s. f.
$r =$ 13,7	23,1	

Gibt man dagegen Θ negative Werte von 0 bis $-\infty$ 8, so nimmt r ab von 1 bis 0; z. B. liefert:

$\Theta = -30^0\left(=-\frac{\pi}{6}\right)$	$-60^0\left(=-\frac{\pi}{3}\right)$	$-90^0\left(=-\frac{\pi}{2}\right)$	u. s. f.
$r =$ 0,59	0,35	0,21	(siehe Figur 23).

Daraus folgt, dass sich die Spirale dem Anfangspunkt 0 unbegrenzt nähert, ohne ihn je zu erreichen.

Erkl. 29. Die logarithmische Spirale wurde von Jakob Bernoulli (1654 bis 1705) sehr eingehend studiert.

Aufgabe 15. Den Winkel μ zu berechnen, welchen die Tangente in einem Punkt P der Lemniscate, deren Polargleichung:

$$r^2 = a^2 \cdot \cos 2\Theta$$

ist, mit dem Radiusvektor bildet, und die Konstruktion der Tangente anzugeben.

Erkl. 30. Wir nehmen auf einer Geraden zwei feste Punkte F_1 und F_2 an im gegebenen Abstand $F_1F_2 = 2c$ und suchen den geometrischen Ort des beweglichen Punktes P für den Fall, dass das Rechteck $F_1P \cdot F_2P$ von konstantem Inhalt und zwar gleich dem Quadrat über $\frac{1}{2}F_1F_2$, also $= c^2$ ist. Beziehen wir die Kurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Abscissenachse die Gerade F_1F_2 und dessen Koordinatenanfang im Mittelpunkt O von F_1F_2 liegt, so ist zunächst:

$$F_1P^2 = (c+x)^2 + y^2$$

und

$$F_2P^2 = (c-x)^2 + y^2;$$

daraus erhalten wir wegen $F_1P \cdot F_2P = c^2$ die Gleichung:

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2} \cdot \sqrt{(c-x)^2+y^2} = c^2$$

oder:

$$[(c+x)^2+y^2]\,[(c-x)^2+y^2] = c^4$$

oder ausmultipliziert, vereinfacht und zusammengezogen:

$$1) \ldots (x+y)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = 0.$$

Wir führen nun Polarkoordinaten r und Θ ein durch die Gleichungen:

$$x = r\cos\Theta \text{ und } y = r\sin\Theta;$$

dies ergibt:

$$r^4 - 2c^2 \cdot r^2(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta) = 0$$

oder:

$$r^2 - 2c^2\sin 2\Theta = 0.$$

Setzen wir noch $2c^2 = a^2$, so folgt:

$$2) \ldots r^2 = a^2\cos 2\Theta,$$

was zu beweisen war.

Erkl. 31. Aus der Bedingungsgleichung:

$$F_1P \cdot F_2P = c^2$$

lässt sich eine Konstruktion der Lemniscate ableiten. Wir schreiben die Gleichung in der Form:

$$F_1P : c = c : F_2P$$

Auflösung. Es ist:

$$tg\,\mu = \frac{r\,d\Theta}{dr}.$$

Nun gibt die Differentiation der Kurvengleichung:

$$2r\,dr = -2a^2\sin 2\Theta \cdot d\Theta.$$

Daraus erhalten wir:

$$\frac{d\Theta}{dr} = -\frac{r}{a^2\sin 2\Theta},$$

also:

$$\frac{r\,d\Theta}{dr} = -\frac{r^2}{a^2\sin 2\Theta} = -\frac{a^2\cos 2\Theta}{a^2\sin 2\Theta} = -\operatorname{cotg} 2\Theta,$$

somit ist:

$$tg\,\mu = -\operatorname{cotg} 2\Theta = tg(90^0 + 2\Theta),$$

woraus wir schliessen, dass:

$$\mu = 90^0 + 2\Theta^0$$

ist. Die Tangente PT bildet in Figur 24 demnach mit dem Strahl OPU einen Winkel:

$$UPT = 90^0 + 2\Theta;$$

dieser ist aber leicht herzustellen; legen wir den Winkel $POX = \Theta$ auch nach unten an oder ziehen wir OP', wobei der Punkt P' der symmetrische zu P ist, so ist:

$$\sphericalangle POP' = 2\Theta.$$

Das Mittellot MN von PP' schneidet OP' um N und liefert das gleichschenklige Dreieck ONP mit dem Winkel:

$$OPN = 2\Theta;$$

daher ist auch der Scheitelwinkel:

$$UPV = 2\Theta;$$

macht man jetzt noch PT senkrecht PV, so ist:

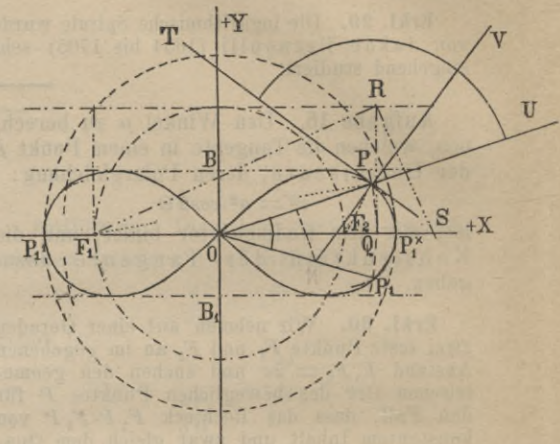
$$\sphericalangle UPT = 90^0 + 2\Theta;$$

es muss also jetzt PT die Tangente und NPV die Normale der Lemniscate im Punkt P sein.

und sehen daraus, dass wenn $F_1 P$ beliebig lang gewählt wird, dann $F_2 P$ die dritte Proportionale zu $F_1 P$ und c sein muss. Um einen Kurvenpunkt P zu erhalten, nehmen wir auf $F_1 F_2$ den Punkt Q beliebig an, errichten das Lot $QR = c$, ziehen $F_1 R$ und senkrecht dazu RS, das $F_1 F_2$ in S schneidet, dann ist $QR = c$ die mittlere Proportionale zu $F_1 Q$ und QS. Wir beschreiben nun aus F_1 einen Bogen mit dem Halbmesser $F_1 Q$ und aus F_2 einen Bogen mit dem Halbmesser QS; der Schnittpunkt dieser beiden Bogen ist dann ein Punkt der Kurve. Werden die Bogen nach der andern Seite der Abscissenachse gezeichnet, so erhält man einen zweiten Kurvenpunkt, und durch Vertauschung der beiden Halbmesser folgt dann sofort noch ein weiteres Punktepaar; die Strecken $F_1 Q$ und QS liefern also vier Kurvenpunkte; ein neuer Punkt Q_1 ergibt wieder vier andere u. s. w.

Errichten wir das Lot $F_1 A = c$, ziehen OA und machen $P_1 O = OP_1^* = OA$, so sind die Punkte P_1 und P_1^* die Schnittpunkte der Kurve mit der Abscissenachse. — Machen wir die Lote OB und $OB_1 = \frac{c}{2}$ und ziehen durch B und B_1 die Parallelen zur Abscissenachse, so schneiden diese den Kreis um O mit dem Halbmesser $OF_1 = c$ in vier Punkten, welches die höchsten, beziehungsweise die tiefsten der Lemniscate sind. Diese geht zweimal durch den Punkt O hindurch und hat die Form eines liegenden Achters. Der Beweis hiefür folgt später.

Figur 24.



Aufgabe 16. Den Winkel μ zu bestimmen, den die Tangente im Punkt P der Kreisevolvente, deren Gleichung:

$$\Theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - arc\left(tg = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right)$$

ist, mit dem Radiusvektor bildet, zu berechnen und die Konstruktion der Tangente anzugeben.

Erkl. 32. Um den Koordinatenanfang O sei ein Kreis vom Halbmesser a gezeichnet. Auf seinem Umfang seien die Punkte A, B, C, D u. s. w. beliebig angenommen und in B, C, D u. s. w. die Tangenten gezogen. Ferner werde auf jeder der letzteren vom Berührungspunkt aus nach der halben Seite hin ein Stück abgeschnitten, welches gleich der Länge des Bogens vom festen Punkt A bis zum Berührungspunkt ist; also:

$$BB_1 = \text{Bogen } AB,$$
$$CC_1 = \text{Bogen } AC,$$
$$DD_1 = \text{Bogen } AD \text{ u. s. w.}$$

Die Endpunkte A, B_1, C_1, D_1 u. s. w. bilden dann in ihrer Kontinuität eine Kurve, welche die Kreisevolvente genannt wird. Stellt man sich einen vollkommen biegsamen Faden ohne Dicke vor, der unzähligemal um

Auflösung. Unter Benützung der früher entwickelten Formeln:

$$\frac{d\sqrt{1+x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ und}$$

$$\frac{d\,arc\,(tg = x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

entwickeln wir zuerst:

$$\frac{d\left(\frac{1}{a}\sqrt{r^2-a^2}\right)}{dr} = \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}},$$

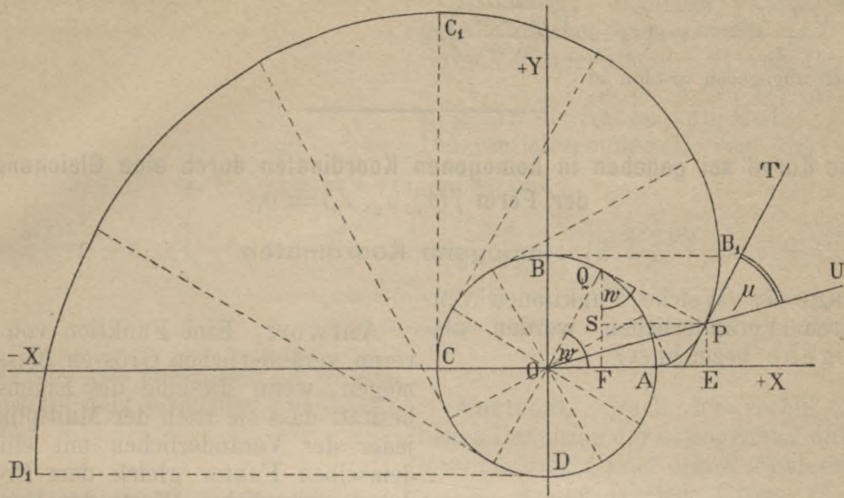
$$d\left(arc\,tg = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right) : dr$$

$$= \frac{d\left(arc\,tg = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right)}{d\left(\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right)}{dr}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{r^2-a^2}{a^2}} \cdot \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}}$$

$$= \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}}.$$

Figur 25.



den Kreis gewickelt ist, und stellt sich weiter vor, dass dieser Faden vom Kreis abgewickelt werde, indem er in seinem Endpunkt A angespannt gehalten wird, so beschreibt dieser Punkt bei der Abwickelung die genannte Kurve; ihr Name Evolvente kommt vom lateinischen Zeitwort evolvere = hervorwickeln, hervorwälzen.

Erkl. 33. Wir wählen die Gerade OA zur Achse und O zum Pol; eine spätere Lage des Fadens sei QP, der Winkel $AOQ = w$, $\sphericalangle AOP = \Theta$, $AO = a$, $OP = r$, dann ist nach dem Entstehungsgesetz der Kurve die Tangente QP gleich der Länge des Bogens AQ oder:

$$QP = arc\,AQ = aw.$$

In dem Dreieck OPQ ist:

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2$$

oder:

$$r^2 = a^2 + a^2 w$$

oder:

$$1) \ldots r = a\sqrt{1 + w^2}.$$

Ferner ist:

$$QP = OQ \cdot tg\,POQ$$

oder:

$$a\,tg(w - \Theta) = \text{Bogen } AQ = aw;$$

also auch:

$$2) \ldots tg(w - \Theta) = w.$$

Aus den beiden Gleichungen 1) und 2) kann man w herausschaffen. Die erste liefert:

$$w = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$$

und die zweite:

$$w - \Theta = arc\,(tg = w)$$

oder:

$$\Theta = w - arc\,(tg = w);$$

Die Differentiation der Kurvengleichung:

$$\Theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - arc\left(tg = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right)$$

liefert daher:

$$\frac{d\Theta}{dr} = \frac{r}{a\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{r}{a\sqrt{r^2 - a^2}}$$

$$= \frac{r}{a\sqrt{r^2 - a^2}} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{ar};$$

hieraus folgt jetzt:

$$\frac{r\,d\Theta}{dr} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$$

oder es ist:

$$tg\,\mu = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck OPQ der Figur 25 ist:

$$OP = r, \quad OQ = a,$$

somit:

$$QP = \sqrt{r^2 - a^2}.$$

Stellt nun PT die Tangente vor und $\sphericalangle UPT$ demnach den Winkel μ, so folgt:

$$tg\,\mu = \frac{QP}{OQ} = tg\,POQ,$$

daher:

$$\sphericalangle \mu \text{ oder } \sphericalangle UPT = \sphericalangle POQ;$$

d. h. es muss die Tangente $PT \parallel OQ$ sein.

Wir kommen also zu dem Ergebnis, dass die Evolvententangente in P zum Halbmesser OQ des zugehörigen Berührungspunkts Q der Kreistangente parallel ist.

wird hier der vorhin gefundene Wert eingesetzt, so folgt:

$$\Theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - arc\left(tg = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right),$$

wie oben angegeben worden ist.

6) Die Kurve sei gegeben in homogenen Koordinaten durch eine Gleichung von der Form $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

a) Homogene Koordinaten.

Frage 7. Welche Funktionen von mehreren Veränderlichen werden als homogene bezeichnet?

Antwort. Eine Funktion von mehreren veränderlichen Grössen heisst homogen, wenn dieselbe die Eigenschaft besitzt, dass sie nach der Multiplikation jeder der Veränderlichen mit ein und demselben Faktor gleich dem Produkt des ursprünglichen Werts der Funktion und einer gewissen Potenz dieses Faktors ist.

Ist $f(x_1, x_2, x_3) \cdots$ eine Funktion $n$ten Grades von den drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3, und wir lassen überall tx_1, tx_2, tx_3 an die Stelle der vorigen x_1, x_2, x_3 treten, so heisst $f(x_1, x_2, x_3)$ homogen, wenn für jeden Wert von t die Beziehung eintritt

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^n \cdot f(x_1, x_2, x_3)$$

Dabei kann der Exponent n eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl oder auch gleich 0 sein; er heisst der Grad der homogenen Funktion. Z. B. ist:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

eine homogene Funktion ersten Grades, denn:

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = 6tx_1 - 2tx_2 + 3tx_3 = t(6x_1 - 2x_2 + 3x_3) = t \cdot f(x_1, x_2, x_3).$$

Ferner ist:

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^3 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2$$

eine homogene Funktion zweiten Grades, denn:

$$\begin{aligned} f(tx_1, tx_2, tx_3) &= at^2x_1^2 + btx_1 \cdot tx_2 + ct^2x_2^2 + dtx_1 \cdot tx_3 + etx_2 \cdot tx_3 + t^2x_3^2 \\ &= t^2(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + x_3^2) \\ &= t^2 f(x, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Ferner ist $x_1^{2/3} + x_2^{2/3} - x_3^{2/3}$ homogen vom Grad 2/3, denn:

$$(tx_1)^{2/3} + (tx_2)^{2/3} - (tx_3)^{2/3} = t^{2/3}(x_1^{2/3} + x_2^{2/3} - x_3^{2/3}) \text{ u. s. f.}$$

Frage 8. Welche Sätze gelten über homogene Funktionen?

Antwort. Bedeutet u eine homogene Funktion $n$ten Grades von mehreren Veränderlichen, z. B. von den drei x_1, x_2, x_3, d. h. ist $u = f(x_1, x_2, x_3)$, so gelten die Sätze von Euler: (siehe Differentialrechnung II. Teil, Erkl. 94).

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot x_3 = n\cdot f(x_1, x_2, x_3) = nu,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} x_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} x_1 x_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} x_2 x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} x_3^2$$
$$= n(n-1) f(x_1, x_2, x_3) = n(n-1)u \text{ u. s. w.}$$

Frage 9. Wie lassen sich die vorigen Sätze Eulers über homogene Funktionen beweisen?

Antwort. Nach der vorhin gegebenen Definition der homogenen Funktion $u = f(x_1, x_2, x_3)$ der drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3, ist für jede Grösse t:

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^n\cdot f(x_1, x_2, x_3),$$
$$= t^n\cdot u.$$

Nehmen wir $t = 1 + \alpha$, so folgt:

1) . . . $f(x_1 + \alpha x_1, x_2 + \alpha x_2, x_3 + \alpha x_3) = (1+\alpha)^n\cdot u;$

nach dem Taylorschen Satz (Differentialrechnung II. Teil, Seite 73) entwickelt folgt:

2) . . . $$f(x_1 + \alpha x_1, x_2 + \alpha x_2, x_3 + \alpha x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3\right)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} x_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} x_1 x_3\right.$$
$$\left.+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} x_2 x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} x_3^2\right) + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} x_1^3 + \cdots\right) + \cdots$$

Andererseits ist nach dem binomischen Lehrsatz:

3) . . . $$(1+\alpha)^n\cdot u = \left[1 + \frac{n}{1}\cdot\alpha + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 + \cdots\right]u$$
$$= u + nu\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} u\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot u\alpha^3 + \cdots$$

Wegen der Uebereinstimmung der linken Seiten der beiden Gleichungen 2) und 3) müssen die Koëffizienten gleich hoher Potenzen von α rechter Hand in Gl. 2) und 3) ebenfalls die gleichen sein; daraus folgern wir:

4) . . . $$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = nu;$$

5) . . . $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} x_1^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x_2^2} x_2^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} x_1 x_3 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} x_2 x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} x_3^2$$
$$= n(n-1)u;$$

$$6)\ \ldots \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} x_1^3 + \frac{3\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3} x_1 x_2 + \frac{3\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} x_1 x_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} \partial x_2^3 + \frac{3\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3} x_1^2 x_3$$
$$+ \frac{3\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2} x_1 x_3^2 + \frac{3\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_3} x_2^2 x_3 + \frac{3\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3^2} x_2 x_3^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3} x_3^3$$
$$\text{u. s. w.} \qquad = n(n-1)(n-2)\cdot u.$$

Von diesen Beziehungen ist die erste die wichtigste, welche ausspricht den

Satz. Die Summe der partiellen Differentialquotienten einer homogenen Funktion, von denen jeder mit der entsprechenden Veränderlichen multipliziert ist, ist gleich dem Produkt der gegebenen Funktion und der Gradzahl.

Dieser Satz gilt für jede homogene Funktion von beliebig vielen Veränderlichen.

Aufgabe 17. Es soll die Richtigkeit der Eulerschen Sätze über homogene Funktionen an:

$$u = ax_1^2 + 2bx_1 x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 x_3 + 2ex_2 x_3 + gx_3^2$$

durch Ausführung der Differentiation gezeigt werden.

Auflösung. Aus der gegebenen Funktion:

$$u = f(x_1, x_2, x_3)$$

leiten wir ab:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2ax_1 + 2bx_2 + 2dx_3,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2bx_1 + 2cx_2 + 2ex_3,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2dx_1 + 2ex_2 + 2gx_3,$$

woraus sich ergibt:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2ax_1^2 + 2bx_1x_2 + 2dx_1x_3 + 2bx_1x_2 + 2cx_2 + 2ex_2x_3 + 2dx_1x_3 + 2ex_2x_3 + 2gx_3^2$$
$$= 2(ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_3 + 2ex_2x_3 + gx_3^2)$$
$$= 2u.$$

Nehmen wir als Zahlenbeispiel:

$$u = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - 5x_2x_3 + x_3^2$$

so wird für $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 4$, $u = -43$; ferner:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -10$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -4x_7 - 5y_2 + 2x_3 = -15$$
$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 4 - 30 - 60 = -86 = 2(-43).$$

Aufgabe 18. Desgleichen für die homogene Funktion ersten Grades:

$$u = \frac{3x_1^2 + 2x_2^2}{2x_1 + 5x_2}.$$

Auflösung. Hier erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{(2x_1 + 5x_2)6x_1 - (3x_1^2 + 2x_2^2)2}{(2x_1 + 5x_2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{(2x_1 + 5x_2)4x_2 - (3x_1^2 + 2x_2^2)5}{(2x_1 + 5x_2)^2};$$

daraus:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{3x_1^2 + 2x_2^2}{2x_1 + 5x_2} = u.$$

Aufgabe 19. Desgleichen für die homogene Funktion vom Grade $-\frac{1}{2}$:

$$u = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \frac{\sqrt{x_1}}{x_3}.$$

Auflösung. Hier folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1} \cdot x_3}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{1}{2x_2\sqrt{x_2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -\frac{\sqrt{x_1}}{x_3^2};$$

woraus:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{x_1}}{2x_3} - \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \frac{\sqrt{x_1}}{x_3}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x_1}}{x_3} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}\right) = -\frac{1}{2}u.$$

Frage 10. Wie lässt sich aus einer nicht homogene Funnktion eine homogene bilden?

Antwort. Wir betrachten zuerst eine nicht homogene Funktion ersten Grades mit zwei Veränderlichen, z. B. $6x - 3y + 5$; setzen wir in derselben:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \text{ und } y = \frac{x_2}{x_3},$$

wobei x_1, x_2 und x_3 drei neue Grössen darstellen sollen, so erhalten wir:

$$6\frac{x_1}{x_3} - 3\frac{x_2}{x_3} + 5$$

und aus letzterem durch Multiplikation mit x_3:

$$6x_1 - 3x_2 + 5x_3.$$

Denken wir uns die Grössen x_1, x_2 und x_3 als veränderlich, so ist:

$$f(x_1, x_2 + x_3) = 6x_1 - 3x_2 + 5x_3$$

offenbar eine homogene Funktion des ersten Grades von x_1, x_2 und x_3. Dieselbe geht wieder in die alte Form $6x - 3y + 5$ zurück, wenn wir nehmen:

$$x_1 = x, \; x_2 = y \text{ und } x_3 = 1.$$

Liegt eine nicht homogene Funktion zweiten Grades mit zwei Veränderlichen vor, z. B.:

$$7x^2 - 8x + 9y + 10,$$

so setzen wir wieder:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \text{ und } y = \frac{x_2}{x_3}$$

und erhalten nach der Multiplikation mit x_3^2 eine homogene Funktion zweiten Grades der drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3, nämlich:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 - 8x_1x_3 + 9x_2x_3 + 10x_3^2.$$

Hieraus folgt allgemein der

Satz. Hat man eine nicht homogene Funktion vom Grad n mit den zwei Veränderlichen x und y, so wird durch Einsetzung von $x = \frac{x_1}{x_3}$ und $y = \frac{x_2}{x_3}$ und durch Multiplikation mit x_3^n eine homogene Funktion des nten Grades von x_1, x_2 und x_3 erhalten. Aehnlich wird das Verfahren im Fall einer nicht homogenen Funktion von drei Veränderlichen x, y, z; man setzt dann:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4} \text{ u. s. f.}$$

Aufgabe 20. Die Gleichung:

$$x^2y + y^2 - x = 0$$

in homogener Form darzustellen.

Auflösung. Die Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \text{ und } y = \frac{x_2}{x_3}$$

und die Multiplikation mit x_3^3 ergibt:

$$x_1^2x^2 + x_2^2x_3 - x_1x_2^3 = 0.$$

Aufgabe 21. Desgleichen:

$$x^3y - xy^3 + 2y^2 - x = 0.$$

Auflösung. Hier ergibt die vorige Substitution:

$$x_1^3x_2 - x_1x_2^3 + 2x_2^2x_2^3 - x_1x_3^3 = 0.$$

Wird gesetzt:

$$x_3 = 1, \; x_1 = x \text{ und } x_2 = y,$$

so geht die homogene Gleichung in die frühere Form zurück.

Frage 11. Welche geometrische Bedeutung kann drei bestimmten Werten von drei veränderlichen Grössen x_1, x_2 und x_3 gegeben werden?

Antwort. Geben wir den drei Veränderlichen x_1, x_2 und x_3 drei bestimmte Werte, z. B. x_1', x_2' und x_3', so sind dadurch auch die Werte:

$$x' = \frac{x_1'}{x_3'} \text{ und } y' = \frac{x_2'}{x_3'}$$

bestimmt.

Nehmen wir nun x' und y' als die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten in einem gewöhnlichen Koordinatensystem, so ist dadurch die Lage eines Punktes P' bestimmt; d. h. drei Werte x_1, x_2 und x_3 bestimmen durch die Verhältnisse $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ einen Punkt.

Frage 12. Welche geometrische Bedeutung kann einer Gleichung:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

vom $n$ten Grade zwischen den drei Veränderlichen x_1, x_2 und x_3 gegeben werden, wenn die linke Seite in x_1, x_2 und x_3 homogen ist?

Antwort. Betrachten wir zuerst eine Gleichung vom ersten Grad:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

so liefert die Division mit x_3:

$$a_1 \frac{x_1}{x_3} + a_2 \frac{x_2}{x_3} + a_3 = 0.$$

Nehmen wir nun:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \text{ und } y = \frac{x_2}{x_3}$$

als die Cartesischen Koordinaten eines Punktes an, so folgt:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0;$$

d. h. die Gleichung einer geraden Linie. Eine in x_1, x_2 und x_3 homogene Gleichung vom ersten Grad repräsentiert demnach eine gerade Linie. Betrachten wir jetzt die Gleichung zweiten Grades:

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{13} x_1 x_2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0,$$

so ergibt dieselbe:

$$a_{11} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + 2 a_{12} \frac{x_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{x_3} + a_{22} \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + 2 a_{13} \frac{x_1}{x_3} + 2 a_{23} \frac{x_2}{x_3} + a_{33} = 0.$$

Setzen wir wieder:

$$\frac{x_1}{x_3} = x \text{ und } \frac{x_2}{x_3} = y,$$

so geht die vorige Gleichung über in:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{12} x + 2 a_{13} y + a_{33} = 0,$$

d. h. in die Gleichung eines Kegelschnitts.

Die nämliche Schlussweise lässt sich auf eine homogene Gleichung vom $n$ten Grad in x_1, x_2 und x_3 anwenden und führt zum

Erkl. 33a. Der Leser findet Näheres über die geometrische Bedeutung und Anwendung der homogenen Koordinaten in Cranz, Analytische Geometrie.

Satz. Eine in x_1, x_2, x_3 homogene Gleichung vom Grade n stellt eine Kurve $n$ter Ordnung dar. Drei Werte x_1', x_2' und x_3', welche der homogenen Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ Genüge leisten, geben durch die Verhältnisse $\frac{x_1'}{x_3'}$ und $\frac{x_2'}{x_3'}$ einen Punkt auf der Kurve an.

---

b) Die Gleichung der Tangente in homogenen Koordinaten.

Frage 13. Wie erhält man die Gleichung der Tangente im Punkt P einer Kurve, wenn die Gleichung der letzteren in der homogenen Form:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

gegeben ist und der Punkt P die Koordinaten x_1, x_2, x_3 hat?

Antwort. Wir denken uns die gleiche Kurve auf ein Cartesisches Koordinatensystem bezogen; ihre Gleichung in demselben sei $y = \varphi(x)$; der Berührungspunkt P habe die Koordinaten x, y und irgend ein Punkt P' auf der Tangente die Koordinaten X, Y, dann ist nach Seite 1 die Gleichung der Tangente:

$$1) \ldots \quad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Zu homogenen Koordinaten übergehend, haben wir zu setzen:

$$2) \ldots \quad x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3} \text{ und } X = \frac{X_1}{X_3},\ \ Y = \frac{X_2}{X_3}.$$

Daraus folgt:

$$dx = \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{x_3{}^2}$$

und ebenso:

$$dy = \frac{x_3\,dx_2 - x_2\,dx_3}{x_3{}^2};$$

demnach hat man:

$$3) \ldots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x_3\,dx_2 - x_2\,dx_3}{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}.$$

Weil der Berührungspunkt P der gegebenen Kurve angehört, haben wir:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Die vollständige Differentiation dieser Gleichung ergibt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 = 0.$$

Weiter ist nach dem Satz von Euler:

$$4) \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}x_3 = 0.$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit x_3 und die zweite mit dx_3 erweitert, so liefert die Subtraktion:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_3\,dx_2 - x_3\,dx_3) = 0;$$

woraus:

$$5) \ldots \quad \frac{x_3\,dx_2 - x_2\,dx_3}{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}};$$

also ist auch nach Gl. 3):

$$6) \ldots \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}.$$

Durch Einsetzung von Gl. 2) und 6) in Gl. 1) erhalten wir nun:

$$\frac{X_2}{X_3} - \frac{x_2}{x_3} = -\left(\frac{X_1}{X_3} - \frac{x_1}{x_3}\right) \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$

oder:

$$7) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{X_1}{X_3} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{X_2}{X_3} - \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2\right) = 0.$$

Aus Gl. 4) folgt aber:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 = -\frac{\partial f}{\partial x_3} x_3;$$

dadurch geht Gl. 7) über in:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{X_1}{X_3} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{X_2}{X_3} + \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

oder mit X_3 durchmultipliziert erhalten wir als **die gesuchte Gleichung der Tangente in homogenen Koordinaten im Punkt** (x_1, x_2, x_3) **der Kurve** $f(x_1, x_2, x_3) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3 = 0.$$

Aufgabe 22. Die Gleichung der Tangente der Kurve:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 - x_1 x_3^2 = 0$$

im Kurvenpunkt x_1, x_2, x_3 aufzustellen.

Auflösung. Aus:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 - x_1 x_3^2 = 0$$

erhalten wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 x_1 x_2 - x_3^2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 + 2 x_2 x_3; \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_2^2 - 2 x_1 x_3;$$

daher lautet die Tangentengleichung:

$$(2 x_1 x_2 - x_3^2) X_1 + (x_1^2 + 2 x_2 x_3) X_2 + (x_2^2 - 2 x_1 x_3) X_3 = 0.$$

Soll zu Cartesischen Koordinaten übergegangen werden, so setzen wir am einfachsten:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1;$$

ferner:

$$X_1 = X, \ X_2 = Y, \ X_3 = 1;$$

und erhalten als Tangentengleichung der Kurve $x^2 y + y^2 - x = 0$ im Punkt (x, y) offenbar:

$$(2xy - 1) X + (x^2 + 2y) Y + y^2 - 2x = 0$$

oder:

$$(2xy - 1) X + (x^2 + 2y) Y = 2x - y^2.$$

Aufgabe 23. Die Gleichung der Tangente im Punkt (x_1, x_2, x_3) an den Kegelschnitt:

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0$$

aufzustellen.

Auflösung. Hier erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3),$$

wenn angenommen wird, dass $a_{i,k} = a_{k,i}$ sei.

$$i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3,$$

also $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ u. s. w.

Daher lautet die Tangentengleichung:

$$(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) X_1 +)a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) X_2 + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) X_3 = 0.$$

Frage 14. Nach welcher Methode erhält man für eine Kurve $F(x, y) = 0$ in Cartesischen Koordinaten x und y am raschesten und in einfachster Form die Tangentengleichung?

Antwort. Aus der gegebenen Kurvengleichung $F(x, y) = 0$ bildet man zuerst durch die Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \text{ und } y = \frac{x_2}{x_3}$$

und durch nachfolgende Multiplikation mit x_3^n, wo n den Grad von $F(x, y) = 0$ angibt, zuerst die homogene Gleichung:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ (siehe Frage 7 und 10).}$$

Dann bildet man:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

zur Herstellung der Tangentengleichung in homogenen Koordinaten:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3 = 0.$$

Hierauf setzt man in der letzten Gleichung:

$$X_1 = X, \; X_2 = Y, \; X_3 = 1, \; x_1 = x, \; y_1 = y \text{ und } x_3 = 1$$

und erhält auf diese Weise die Tangentengleichung in Cartesischen Koordinaten für $F(x, y) = 0$, wie folgendes Beispiel zeigen wird:

Aufgabe 24. Die Gleichung und Konstruktion der Tangente an das Descartessche Blatt:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

zu finden.

Auflösung. Durch die Einsetzung von:

$$\frac{x_1}{x_3} = x \text{ und } \frac{x_2}{x_3} = y$$

und die Multiplikation mit x_3 folgt zunächst:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 - 3a x_1 x_2 x_3 = 0,$$

woraus:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3a x_2 x_3; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 - 3a x_1 x_3; \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = -3a x_1 x_2.$$

Dies gibt:

$$(x_1^2 - a x_2 x_3) X_1 + (x_2^2 - a x_1 x_3) X_2 - a x_1 x_2 X_3 = 0.$$

Wenn nun:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1; \quad X_1 = X, \quad X_2 = Y \text{ und } X_3 = 1$$

gesetzt wird, so folgt als Tangentengleichung:

$$(x^2 - ay) X + (y^2 - ax) Y - axy = 0.$$

Zur Konstruktion der Tangente im Punkt P berechnen wir in Figur 26 den Abschnitt OT, welchen die Tangente auf der Abscissenachse abschneidet; es ist:

$$OT = OA - AT = x - t_x \quad \text{(siehe bei Subtangente)}$$

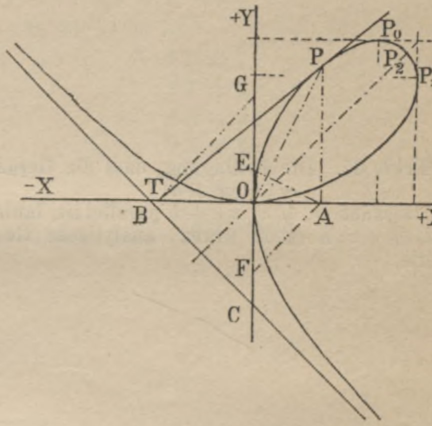
$$= x - \frac{y(ax - y^2)}{x^2 - ay} = \frac{x^3 + y^3 - 2axy}{x^2 - ay} = \frac{axy}{x^2 - ay} = \frac{ax}{x\left(\frac{x}{y}\right) - a} = \frac{ax}{x \cdot cotg\,\Theta - a},$$

wobei $\sphericalangle POA = \Theta$ gesetzt ist.

Dieser Ausdruck lässt sich nun konstruieren wie folgt:

Ziehe OP und $AE \perp OP$, mache $EF = OG = a$, verbinde F mit A und ziehe $GT \parallel AF$. Dann ist PT die gesuchte Tangente.

Figur 26.



Erkl. 34. Setzen wir in die Gleichung $x^3 + y^3 - 3axy = 0$:

$$y = xt,$$

so erhalten wir:

$$x^3 + x^3t^3 - 3ax^2t = 0$$

und daraus:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3} \text{ und } y = \frac{3at^2}{1 + t^3},$$

also zwei Gleichungen, in denen die Koordinaten irgend eines Punktes der Kurve als rationale Funktionen des Parameters t ausgedrückt erscheinen.

Um die durch die obige Gleichung gegebene Kurve bildlich darzustellen, benützen wir folgende Tabelle:

t	x	y	t	x	y
-1	$-\infty$	∞	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4} \cdot a = 0{,}79\,a$	$\sqrt[3]{2} \cdot a = 1{,}26\,a$
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{54}{19}a = -2{,}84\,a$	$\frac{36}{19}a = 1{,}70\,a$	1	$\frac{3}{2}a = 1{,}5\,a$	$\frac{3}{2}a = 1{,}5\,a$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{12}{7}a = -1{,}71\,a$	$\frac{6}{7}a = 0{,}86\,a$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} \cdot a = 1{,}26\,a$	$\sqrt[3]{4} \cdot a = 1{,}59\,a$
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{26}a = -1{,}04\,a$	$\frac{9}{26}a = 0{,}35\,a$	2	$\frac{2}{3}a = 0{,}67\,a$	$\frac{4}{3}a = 1{,}33\,a$
0	0	0	3	$\frac{9}{28}a = 0{,}32\,a$	$\frac{27}{28}a = 0{,}96\,a$
$\frac{1}{3}$	$\frac{27}{28}a = 0{,}96\,a$	$\frac{9}{28}a = 0{,}32\,a$	∞	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}a = 1{,}33\,a$	$\frac{2}{3}a = 0{,}67\,a$	-3	$\frac{9}{26}a = 0{,}35\,a$	$-\frac{27}{26}a = -1{,}04\,a$
$\frac{2}{3}$	$\frac{54}{35}a = 1{,}54\,a$	$\frac{36}{35}a = 1{,}03\,a$	-2	$\frac{6}{7}a = 0{,}86\,a$	$-\frac{12}{7}a = -1{,}71\,a$
			-1	∞	$-\infty$

Wir tragen dann für jeden dieser Werte von x als Abscisse den zugehörigen Wert von y als Ordinate ab; auf diese Weise lassen sich genügend viele Punkte der Kurve konstruieren.

7) Tangente an einer Kurve parallel zu einer gegebenen Geraden.

Frage 15. Es seien die Gleichungen einer Kurve und einer geraden Linie gegeben. Wie erhält man die Gleichung derjenigen Tangente an die Kurve, welche der gegebenen Geraden parallel ist?

Antwort. Die Kurve habe die Gleichung $y = f(x)$ und die Gerade die Gleichung $y = ax + b$ und zwar bezogen auf das gleiche rechtwinklige oder schiefwinklige Koordinatensystem. Wäre der Berührungspunkt P der gesuchten Tangente bekannt (siehe Fig. 27), so würde die Gleichung der Tangente, wenn wir die Koordinaten des Berührungspunktes mit x, y bezeichnen, lauten:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - y)$$

oder:

$$Y = \frac{dy}{dx} X + y - \frac{dy}{dx} x.$$

Da aber diese Gerade der gegebenen Geraden parallel sein soll, so muss zuerst

$$\frac{dy}{dx} = a \text{ oder } f'(x) = a$$

sein, und da der Berührungspunkt auf der gegebenen Kurve liegt, so muss ferner $y = f(x)$ sein. Die Koordinaten x und y des Berührungspunktes müssen also den beiden Gleichungen $f'(x) = a$ und $y = f(x)$ genügen. Diese reichen aber zur Bestimmung von x und y aus. Setzt man nun, nachdem diese Bestimmung erfolgt ist, die gefundenen Werte in die Gleichung der Tangente:

$$Y - y = a(X - x)$$

ein, so ist die Aufgabe gelöst.

Hat die Kurvengleichung die Form $F(x, y) = 0$, so ist bekanntlich nach Differentialrechnung II. Teil, S. 233:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Zur Bestimmung der Koordinaten x, y des Berührungspunktes dient jetzt die Gleichung:

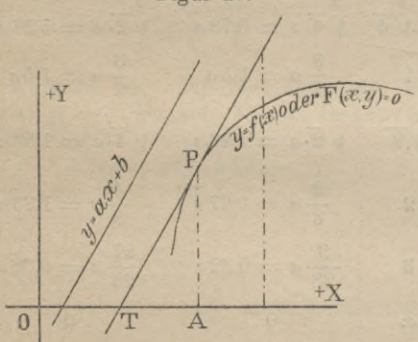
$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = a \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + a\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ und } F(x, y) = 0.$$

Im übrigen bleibt der Gang der vorige.

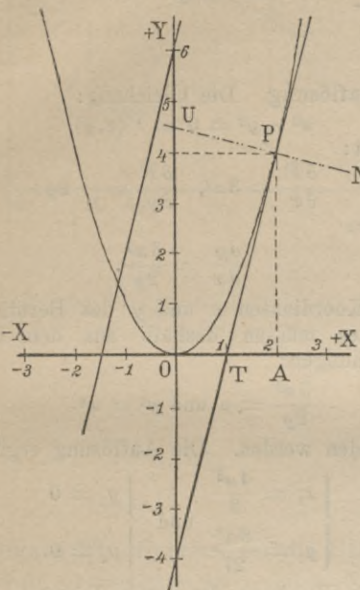
Erkl. 35. Die Bedingung, dass die Gerade $y = cx + d$ der Geraden $y = ax + b$ parallel ist, lautet einfach $c = a$ (siehe Cranz, analytische Geometrie.

Figur 27.



Aufgabe 25. Die Gleichung der Tangente zu bestimmen, welche an die Parabel $y = x^2$ parallel zu der Geraden $y = 4x - 6$ gezogen werden kann.

Figur 28.



Auflösung. Aus der Kurvengleichung $y = x^2$ erhalten wir $\frac{dy}{dx} = 2x$; da die Gleichung der Geraden $y = 4x - 6$ ist, so muss $2x = 4$ oder $x = 2$ sein; die Koordinaten x und y des Berührungspunktes haben hiernach die Werte $x = 2$ und $y = 2^2 = 4$. Die Tangentengleichung lautet daher:

$$Y - 4 = 4(X - 2)$$

oder geordnet:

$$4X - Y - 4 = 0$$

In Figur 28 ist:

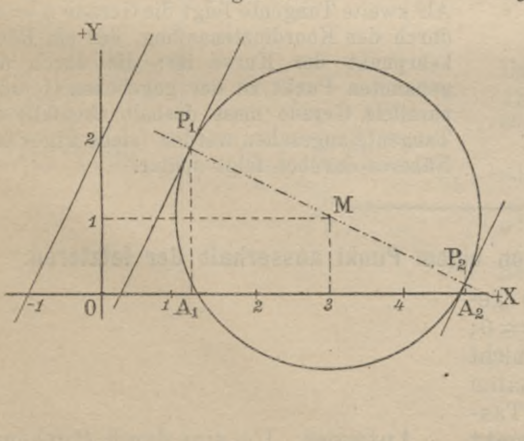
$$OT = 1$$
$$AT = 1$$
$$AN = 16$$
$$ON = 18$$
$$OU = 4\frac{1}{2}$$
$$\varrho = 35{,}02.$$

Aufgabe 26. Desgleichen an den Kreis:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

parallel zu der Geraden $y = 2x + 2$.

Figur 29.



Auflösung. Die Gleichung:

$$F(x, y) = (x-3)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$$

gibt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-3) \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = 2(x-1);$$

daher: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-3}{y-1}.$$

Da wir der Gleichung der Geraden $a = 2$ entnehmen, so müssen die Koordinaten x und y des Berührungspunktes der Gleichung:

$$-\frac{x-3}{y-1} = 2 \text{ oder } x = 5 - 2y$$

genügen und ausserdem der Kurvengleichung:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Diese beiden ergeben nun die Wertepaare:

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}212 \\ y_1 = 1{,}894 \end{cases} \text{ und } \begin{cases} x_2 = 4{,}788 \\ y_2 = 0{,}106; \end{cases}$$

es sind demnach zwei Tangenten parallel der gegebenen Geraden möglich und deren Gleichungen lauten:

$$Y - 1{,}894 = 2\,(X - 1{,}212)$$

und

$$Y - 0{,}106 = 2\,(X - 4{,}788)$$

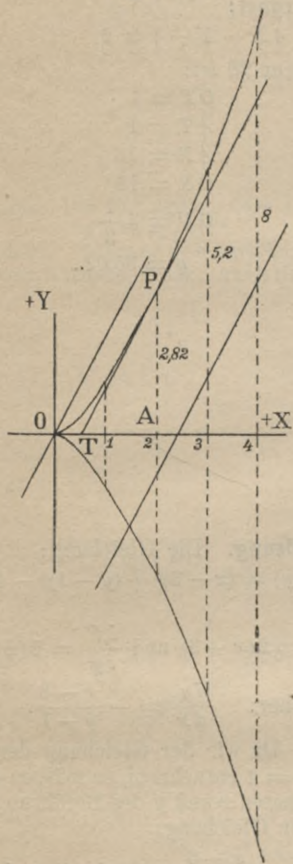
oder vereinfacht:

$$2X - Y - 0{,}53 = 0 \text{ und } 2X - Y - 9{,}47 = 0$$

(siehe Figur 29).

Aufgabe 27. Desgleichen an die Neilische Parabel $y^2 = x^3$ parallel zur Geraden $y = ax + b$.

Figur 30.



Auflösung. Die Gleichung:

$$x^3 - y^2 = 0 = F(x, y)$$

liefert:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y;$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}.$$

Die Koordinaten x und y des Berührungspunktes müssen deshalb aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{3x^2}{2y} = a \text{ und } y^2 = x^3$$

gefunden werden. Die Auflösung ergibt:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4a^2}{9} \\ y_1 = \dfrac{8a^3}{27} \end{cases} \text{ und } \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung der ersten Tangente lautet daher:

$$Y - \frac{8a^3}{27} = a\left(X - \frac{4a^3}{a}\right)$$

oder:

$$Y = aX - \frac{4a^3}{27}.$$

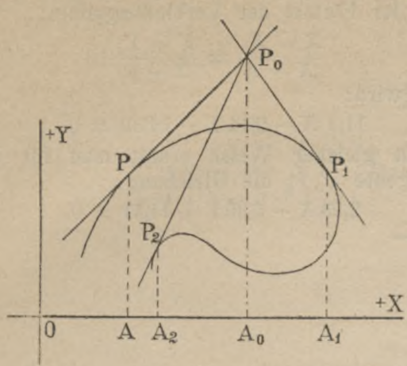
Es gibt daher an die Neilische Parabel zu jeder Geraden eine parallele Tangente. Als zweite Tangente folgt die Gerade $y = ax$ durch den Koordinatenanfang, der ein Rückkehrpunkt der Kurve ist; die durch den genannten Punkt zu der gegebenen Geraden parallele Gerade muss deshalb ebenfalls als Tangente angesehen werden (siehe Figur 30). Näheres darüber folgt später.

8) Tangente an einer Kurve von einem Punkt ausserhalb der letzteren.

Frage 16. Es sei eine Kurve gegeben, durch ihre Gleichung $F(x, y) = 0$; ferner ein fester Punkt P_0, der nicht der Kurve angehört; seine Koordinaten seien X_0, Y_0. Wie lassen sich die Tangenten finden, welche von P vom Punkt P_0 an die Kurve gezogen werden können? (Siehe Figur 31.)

Antwort. Um eine durch P gehende Gerade P_0P zu erhalten, welche die Kurve im Punkt P berühren soll, müssen

Figur 31.



die unbekannten Koordinaten x und y des Berührungspunktes P berechnet werden. Weil P ein Kurvenpunkt ist, haben seine Koordinaten der Gleichung $F(x, y) = 0$ genüge zu leisten und weil P_0 und P Punkte der Tangente in P sind, müssen x, y und X_0 und Y_0 auch noch gleichzeitig die Gleichung der Tangente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0$$

befriedigen (siehe Seite 7); d. h. es muss auch:

$$2) \ldots \frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y - \left(\frac{\partial F}{\partial x} X_0 + \frac{\partial F}{\partial y} Y_0\right) = 0$$

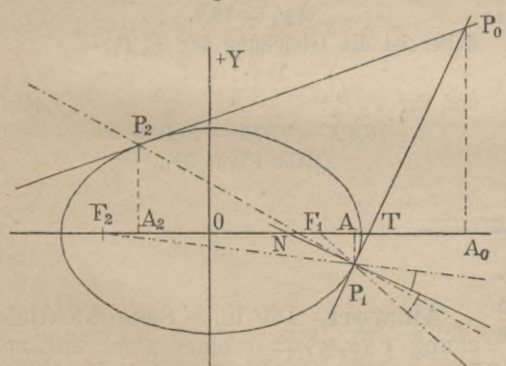
sein. Aus den beiden Gleichungen 1) und 2) lassen sich die Werte von x und y, d. h. die Koordinaten des Berührungspunktes berechnen. Die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte $P(x, y)$ und $P_0(X_0, Y_0)$ ist dann die Gleichung der Tangente.

Aufgabe 28. Gegeben sei die Ellipse

$$F(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0,$$

sowie der Punkt P_0, dessen Koordinaten $X_0 = 5$ und $Y_0 = 4$ sind. Es sollen die Gleichungen der Tangenten aufgestellt werden, welche von P_0 an die Ellipse möglich sind.

Figur 32.



Auflösung. Wir berechnen aus

$$F(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0:$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 18y.$$

die Gleichung der Tangente in einem Punkt P der Kurve mit den Koordinaten x, y lautet daher:

$$8x(X - x) + 18y(Y - y) = 0.$$

Da auf dieser Tangente auch der Punkt P_0 mit $X_0 = 5$ und $Y_0 = 4$ liegen muss, so ist die Bedingung zu erfüllen:

$$8x(5 - x) + 18y(4 - y) = 0$$

oder:

$$8x^2 + 18y^2 - 40x - 72y = 0$$

oder:

$$4x^2 + 9y^2 - 20x - 36y = 0$$

neben:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 \qquad = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir für den Berührungspunkt P_1:

$$\begin{cases} x_1 = 2{,}86 \\ y_1 = -0{,}59 \end{cases}$$

und für den Berührungspunkt P_2:

$$\begin{cases} x_2 = -1{,}39 \\ y_2 = 1{,}77. \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangente $P_0 P_1$ folgt aus der Formel der Verbindungslinie:

$$\frac{X - X_0}{X - x_1} = \frac{Y - Y_0}{Y - y_1}$$

und wird:

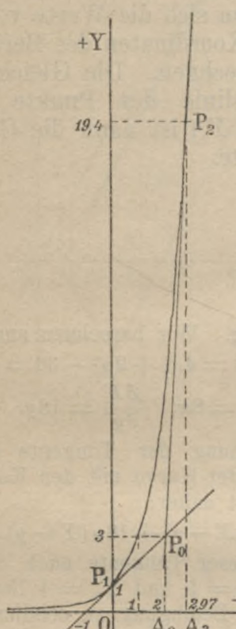
$$11{,}4\,X - 2{,}14\,Y - 14{,}39 = 0.$$

In gleicher Weise erhält man für die Tangente $P_0 P_2$ die Gleichung:

$$2{,}23\,X - 6{,}39\,Y + 14{,}41 = 0.$$

Aufgabe 29. Gegeben sei die Exponentialkurve $y = e^x$, sowie der Punkt P_0, dessen Koordinaten $X_0 = 2$ und $Y_0 = 3$ sind. Die Gleichungen der durch P_0 gehenden Tangenten aufzustellen.

Figur 33.



Auflösung. Aus $e^x - y = 0$ folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = -1;$$

daher lautet die Tangentengleichung:

$$e^x (x - X) + y + Y = 0.$$

Wird in diese $X = 2$ und $Y = 3$ eingesetzt, so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$x e^x - y - 2e^x + 3 = 0$$

oder wegen $e^x = y$ und $x = ly$:

$$y\,ly - 3y + 3 = 0.$$

Letztere liefert $y_1 = 1$ und $y_2 = 19{,}4$; daher ist $x_1 = 0$ und $x_2 = 2{,}97$ oder der Berührungspunkt P_1 hat die Koordinaten:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

und der andere P_2:

$$\begin{cases} x_2 = 2{,}97 \\ y_2 = 19{,}4. \end{cases}$$

daher ist die Gleichung für $P_0 P_1$:

$$X - Y + 1 = 0$$

und für $P_0 P_2$:

$$16{,}4\,X - 0{,}97\,Y - 27{,}9 = 0$$

(siehe Figur 33).

Frage 17. Wieviel gibt es Tangenten von einem beliebig gewählten Punkt P_0 an eine algebraische Kurve $n$ten Grades?

Antwort. Die linke Seite der Gleichung $F(x, y) = 0$ einer algebraischen Kurve n ten Grades ist eine Funktion desselben Grades in x und y. Hat der gegebene Punkt P_0, von dem aus die Tangenten gezogen werden sollen, die Koordinaten X_0 und Y_0, so müssen die Koordinaten x, y eines Berührungspunktes ausser der Gleichung:

$$1) \ldots F(x, y) = 0$$

auch noch der Gleichung:

$$2) \ldots \frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y - \left(\frac{\partial F}{\partial x} X_0 + \frac{\partial F}{\partial y} Y_0\right) = 0$$

genügen (siehe Frage 3). Da Gleich. 1) vom Grad n ist, so scheint es, dass die Gleich. 2) ebenfalls vom Grad n in x und y sein werde. Nun lässt sich aber zeigen, dass sich der Grad von Gleich. 2) um 1 erniedrigt, wenn man die Gleich. 1) berücksichtigt. Schreiben wir nämlich die letztere:

$$F(x, y) = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1 + u_0,$$

wobei u_n die Gesamtheit der Glieder vom Grad n, n_{n-1} jene vom Grad u_{n-1} ist u. s. f., so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daraus erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y = \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} x + \frac{\partial u_n}{\partial y} y\right) + \left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} x + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} y\right) + \cdots + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} x + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) y.$$

Nun stellen aber

$$u_n, u_{n-1}, u_{n-2} \cdots u_1$$

homogene Funktionen von x und y vor vom Grad n, $n-1 \cdots 1$; nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen (siehe Frage 8) hat man daher:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} x + \frac{\partial u_n}{\partial y} y = n u_n; \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} x + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} y = (u-1) u_{n-1} \text{ u. s. f.}$$

Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y &= n u_n + (n-1) u_{n-1} + (n-2) u_{n-2} + \cdots + [n-(n-2)] u_2 + [n-(n-1)] u_1 \\ &= n (u_n + n_{n-1} + n_{n-2} + \cdots + u_1) - u_{n-1} - 2 n_{n-2} - \cdots - (n-1) u_1. \end{aligned}$$

Da aber der Berührungspunkt (x, y) auf der gegebenen Kurve liegt, hat man:

$$u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 = -u_0,$$

wobei u_0 eine konstante Grösse vorstellt, daher geht die Gleich. 2) über in:

$$2a) \ldots \frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial y} Y + u_{n-1} + 2 u_{n-2} + \cdots + (n-1) u_1 + n u_0 = 0$$

und weil $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ Funktionen vom $n-1$ ten Grad sind, so ist bewiesen, dass die Gleich. 3) den Grad $n-1$ hat.

Die Koordinaten x und y des Berührungspunktes sind demnach zu berechnen aus der Gleichung n ten Grades 1) und der Gleich. $n-1$ ten Grades 3); es

Erkl 36. Ist $\varphi(x) = 0$ eine algebraische Gleichung vom Grad n und $\psi(x)$ eine solche vom Grade m, so gibt es mn Werte von x, welche beide Gleichungen befriedigen.

gibt also $n(n-1)$ Wertsysteme x, y, welche beiden Gleichungen genügen; geometrisch ausgedrückt heisst dies, es gibt $n(n-1)$ Berührungspunkte oder wir haben den

Satz. Es lassen sich im allgemeinen von einem Punkt P_0 an die algebraische Kurve n ten Grades $n(n-1)$ Tangenten ziehen.

Frage 18. Wieviel gibt es Tangenten an einer Kurve n ten Grades, welche zu einer gegebenen Geraden g parallel sind?

Antwort. Der vorhin erhaltene Satz, dass von einem Punkt P_0 an eine algebraische Kurve n ten Grades im Allgemeinen $n(n-1)$ Tangenten möglich sind, behält seine Richtigkeit auch dann, wenn wir den Punkt P_0 der zuerst auf der gegebenen Geraden g in beliebiger Lage gedacht sein soll, auf g ins Unendliche wandern lassen; von dem unendlich fernen Punkt P_0 müssen dann auch noch $n(n-1)$ Tangenten gezogen werden können; die letzteren haben dann mit g den unendlich fernen Punkt gemein oder sie sind parallel zu g. Hiernach lässt sich der Satz aussprechen:

Satz. An eine algebraische Kurve n ten Grades gibt es im allgemeinen $n(n-1)$ Tangenten, welche zu einer gegebenen Geraden parallel sind.

Zusatz. Von diesen $n(n-1)$ Tangenten in den beiden letzten Sätzen kann eine gerade Anzahl imaginär sein; ferner können von diesen Tangenten eine oder einige mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen; weiter können von den Tangenten im Endlichen mehrere in der nämlichen Geraden liegen. Die Zahl der Tangenten im engeren Sinn wird ausserdem erniedrigt, wenn die Kurve Singularitäten, wie z. B. mehrfache Punkte, aufweist; doch lässt sich hierauf an dieser Stelle nicht eingehen.

---

9. Uebungsbeispiele.

Zur Bestimmung der Gleichung der Tangente für einen Punkt P mit den Koordinaten (x, y) der folgenden Kurven:

Aufgabe 30.

$y = x^2$

$x = 2$; $y = 4$ (siehe Figur 28).

Auflösung.

$$2xX - Y - x^2 = 0$$
$$4X - Y - 4 = 0.$$

Aufgabe 31.

$y = x^2 - 6x + 10$

$x = 1$; $y = 5$ (Figur folgt).

Auflösung.

$$(2x-6)X - Y - x^2 + 10 = 0.$$
$$4X + Y - 9 = 0.$$

Aufgabe 32.

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$$
$$x = 3;\ y = 3 - \sqrt{3} \text{ (Figur folgt).}$$

Auflösung.

$$(x-2)X + (y-3)Y - 2x - 3y + 9 = 0$$
$$X - \sqrt{3}\,Y = 9 - \sqrt{3}$$

Aufgabe 33.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$$
$$x = 1{,}21$$
$$y = 1{,}89 \text{ (siehe Figur 29).}$$

Auflösung.

$$(x-3)X + (y-1)Y - 3x - y + 6 = 0$$
$$2X - Y - 0{,}53 = 0.$$

Aufgabe 34.

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$
$$x = 2{,}87;\ y = -0{,}59 \text{ (siehe Figur 32).}$$

Auflösung.

$$4xX + 9yY - 36 = 0$$
$$11{,}48\,X - 5{,}31\,Y - 36 = 0$$

Aufgabe 35.

$$4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 = 0$$
$$x = 1;\ y = 3 \text{ (Figur folgt).}$$

Auflösung.

$$(4x-16)X + (9y-27)Y - 16x - 27y + 109 = 0$$
$$X = 1.$$

Aufgabe 36.

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 - 288 = 0$$
$$x = 0{,}99;\ y = 3{,}54 \text{ (Figur folgt).}$$

Auflösung.

$$(25x - 7y)X + (-7x + 25y)Y - 288 = 0$$
$$Y = 3{,}54.$$

Aufgabe 37.

$$xy = 1$$
$$x = \frac{1}{2};\ y = 2 \text{ (Figur folgt).}$$

Auflösung.

$$yX + xY - 2 = 0$$
$$4X + Y - 4 = 0.$$

Aufgabe 38.

$$y = x^3$$
$$x = 1;\ y = 1 \text{ (Figur folgt).}$$

Auflösung.

$$3x^2X - Y - 2y = 0$$
$$3X - Y - 2 = 0.$$

Aufgabe 39.

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
$$x = 1;\ y = 0 \text{ (Figur folgt).}$$

Auflösung.

$$(3x^2 - 12x + 11)X - Y - 2x^3 + 6x^2 - 6 = 0$$
$$2X - Y - 2 = 0.$$

Aufgabe 40.

$$x^2y - 1 = 0$$
$$x = 1;\ y = 1 \text{ (Figur folgt).}$$

Auflösung.

$$2yX + xY - 3xy = 0$$
$$2X + Y - 3 = 0.$$

Aufgabe 41.

$$y^2 = x^3$$
$$x = 1;\ y = 1 \text{ (siehe Figur 30).}$$

Auflösung.

$$3x^2X - 2yY - y^2 = 0$$
$$3X - 2Y - 1 = 0.$$

Aufgabe 42.

$$x^2y + x + y - 1 = 0$$
$$x = -1;\ y = +1 \text{ (Figur folgt).}$$

Auflösung.

$$(2xy+1)X + (x^2+1)Y + 2(x+y) - 3 = 0$$
$$X - 2Y + 3 = 0.$$

Aufgabe 43.

$$x^3 + y^3 = c^3.$$

Auflösung.

$$x^2X + y^2Y - c^3 = 0.$$

Aufgabe 44.

$$y^2(1-x) - x^3 = 0.$$

Auflösung.

$$2x^3Y - y(3x^2 + y^2)X + xy(x^2 + y^2) = 0.$$

Aufgabe 45.

$y = x^4$

$x = 1;\; y = 1$ (Figur folgt).

Auflösung.

$4x^3 X - Y - 3y = 0$

$4X - Y - 3 = 0.$

Aufgabe 46.

$y^3 = x^4.$

Auflösung.

$4x^3 X - 3y^2 Y - x^4 = 0.$

Aufgabe 47.

$x^3 - x^2 y - xy^2 + y^3 + x^2 + y^2 - 1 = 0$

(Figur folgt).

Auflösung.

$(3x^2 - 2xy - y^2 + 2x) X + (-x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y) Y + x^2 + y^2 - 3 = 0.$

Aufgabe 48.

$x^4 - 36x + 216y = 0$ (Figur folgt).

Auflösung.

$(4x^3 - 9) X + 54 Y - 27x + 162y = 0.$

Aufgabe 49.

$x^4 - 2x^2 y + 3xy^2 - y^3 = 0$ (Figur folgt).

Auflösung.

$(4x^3 - 4xy + 3y^2) X + (-2x^2 + 6xy - 3y^2) Y - 2x^2 y + 3xy^2 - y^3 = 0.$

Aufgabe 50.

$x^5 + y^5 = c^5.$

Auflösung.

$x^4 X + y^4 Y - c^5 = 0.$

Aufgabe 51.

$x^{2n+1} + y^{2n+1} = c^{2n+1}.$

Auflösung.

$x^{2n} X + y^{2n} Y - c^{2n+1} = 0.$

Aufgabe 52.

$y^4 (1 - x) - x^5 = 0.$

Auflösung.

$4x^5 Y - y(5x^4 + y^4) X + xy(x^4 + y^4) = 0.$

Aufgabe 53.

$y^6 (1 - x) - x^7 = 0.$

Auflösung.

$6x^7 Y - y(7x^6 + y^6) X + xy(x^6 + y^6) = 0.$

Aufgabe 54.

$y^4 - 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2) y^2 - 2bx^2 y + b^2 x^2 = 0.$

(Gleichung der Konchoide; Erklärung und Figur folgt später.

Auflösung.

$[2y^3 - 3by^2 + (x^2 + b^2 - a^2) y - bx^2](Y - y) + (y - b)^2 \cdot x \cdot (X - x) = 0.$

Aufgabe 55.

$y^4 - 2(2r^2 + 2rx - x^2) y^2 - 4rx^3 + x^4 = 0.$

(Gleichung der Kardioide) siehe Fig. 16.

Auflösung.

$y[y^2 + x^2 - 2r(r + x)](Y - y) + [(y^2 + x^2)x - r(y^2 + 3x^2)](X - x) = 0.$

Aufgabe 56.

$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2 \cdot (x^2 - y^2) = 0.$

(Gleichung der Lemniscate) siehe Aufgabe 15 und Figur 24.

Auflösung.

$(x^2 + y^2 - c^2) x X + (x^2 + y^2 + c^2) y Y + c^2 (y^2 - x^2) = 0.$

Aufgabe 57.

$y = m e^{\frac{x}{m}}.$

(Gleichung der logarithmischen Linie) siehe Aufgabe 3 und 4, sowie Figur 5 und 6.

Auflösung.

$m(Y - y) = y(X - x).$

Aufgabe 58.

$$x = rt - b\sin t \qquad \text{oder } x = r\,arc\left(\cos = \frac{r-y}{b}\right) - \sqrt{b^2 - (r-y)^2}$$
$$y = r - b\cos t$$

(Gleichung der gedehnten Cykloide für $b < r$, der verschlungenen Cykloide für $b > r$) siehe Aufgabe 10.

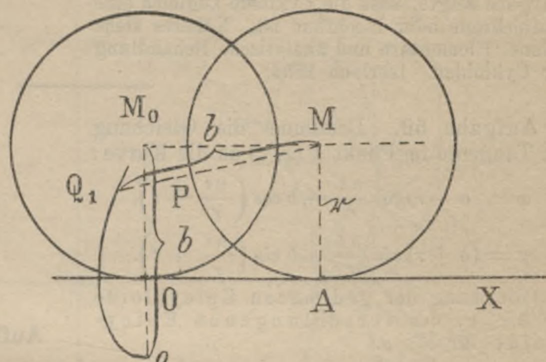
Auflösung.

$$b\sin t\,[X - (rt - b\sin t)] - (r - b\cos t)\,[Y - (r - b\cos t)] = 0.$$

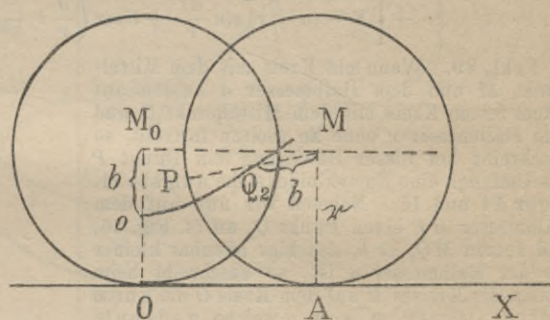
oder: $y\,(Y - y) = \sqrt{b^2 - (r-y)^2}\,(X - x)$

Erkl. 37. Wenn ein Kreis mit dem Mittepunkt M und dem Halbmesser r ohne zu gleiten auf einer festen Geraden OX fortrollt, so beschreibt nach Aufgabe 10 ein Punkt P des Umfangs des Kreises eine Cykloide. Wählen wir auf dem Halbmesser OP einen Punkt Q und bezeichnen MQ mit b, so beschreibt dieser gleichzeitig eine Kurve (siehe Fig. 34 a und b); die letztere heisst eine gedehnte Cykloide, wenn der beschreibende Punkt Q innerhalb des rollenden Kreises liegt, also $b < r$ ist; dagegen wird sie verschlungene Cykloide genannt, wenn Q ausserhalb des Kreises, also $b > r$ gewählt wird. — Die Konstruktion ergibt sich aus jener der gewöhnlichen Cykloide, welche in Erkl. 16 gelehrt wurde, dadurch, dass wie dort die Lage der Halbmesser 0 0″, I 1″, II, 2″ u. s. w. bestimmt und auf denselben von den Mittelpunkten 0″, 1″, 2″ ··· die Strecke b abträgt (siehe Figur 35). Daselbst beschreibt der Punkt Q_2 die gedehnte Cykloide Q_2 III_2 IV_2 V_2 ··· und der Punkt Q_1 die verschlungene Cykloide Q_1 III_1 IV_1 V_1 u. s. w. Dort sind die Bezeichnungen I_2 und I_1 verwechselt; auch sollte es heissen statt XVI_2 : XVI_1 und statt XX_2 : XX_1 und bei XII fehlen die Indices $_1$ und $_2$. Der Leser wird um Korrektur gebeten.

Figur 34 a.

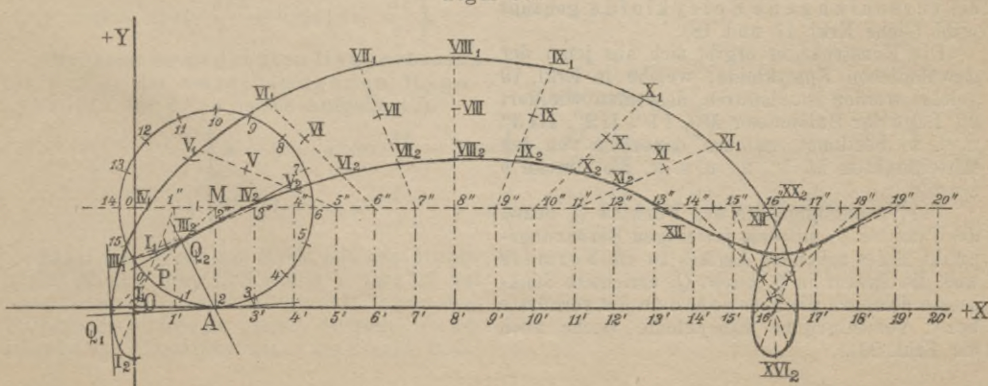


Figur 34 b.



Die Verbindungslinie des Punktes Q_1 oder des Punktes Q_2 mit dem jeweiligen Berührungspunkt des rollenden Kreises ist die Normale der Kurve, und die hiezu senkrechte Gerade stellt dann die Tangente der gedehnten Cy-

Figur 35.



kloide in Q_1, bezw. der verschlungenen in Q_2 dar. Der Beweis folgt leicht aus der später entwickelten Normalengleichung der Kurve.

Erkl. 38. Schon Galilei hat die Cykloiden geometrisch betrachtet. Dann Descartes, Roberval, Pascal und die beiden älteren Bernoulli, die sie auch Roulette, Trochoide und als Linie des kürzesten Falles Brachystochrone nannten. Huygens zeigte, dass die Cykloide zugleich eine Tautochrone oder Isochrone ist. Näheres siehe Zehme, Elementare und analytische Behandlung der Cykloiden. Iserlohn 1854.

Aufgabe 59. Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x, y)$ an die Kurve:

$$x = (a+r)\cos\frac{at}{r} - b\cos\left(\frac{at}{r}+t\right),$$

$$y = (a+r)\sin\frac{at}{r} - b\sin\left(\frac{at}{r}+t\right).$$

(Gleichung der gedehnten Epicykloide für $b < a$, der verschlungenen Epicykloide für $b > a$.)

Auflösung.

$$\left[X-(a+r)\cos\frac{at}{r}+b\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]\left[a\cos\frac{at}{r}-b\cos\left(\frac{at}{r}+r\right)\right]$$
$$+\left[Y-(a+r)\sin\frac{at}{r}+b\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]\left[a\sin\frac{at}{r}-b\sin\left(\frac{at}{r}+r\right)\right]=0.$$

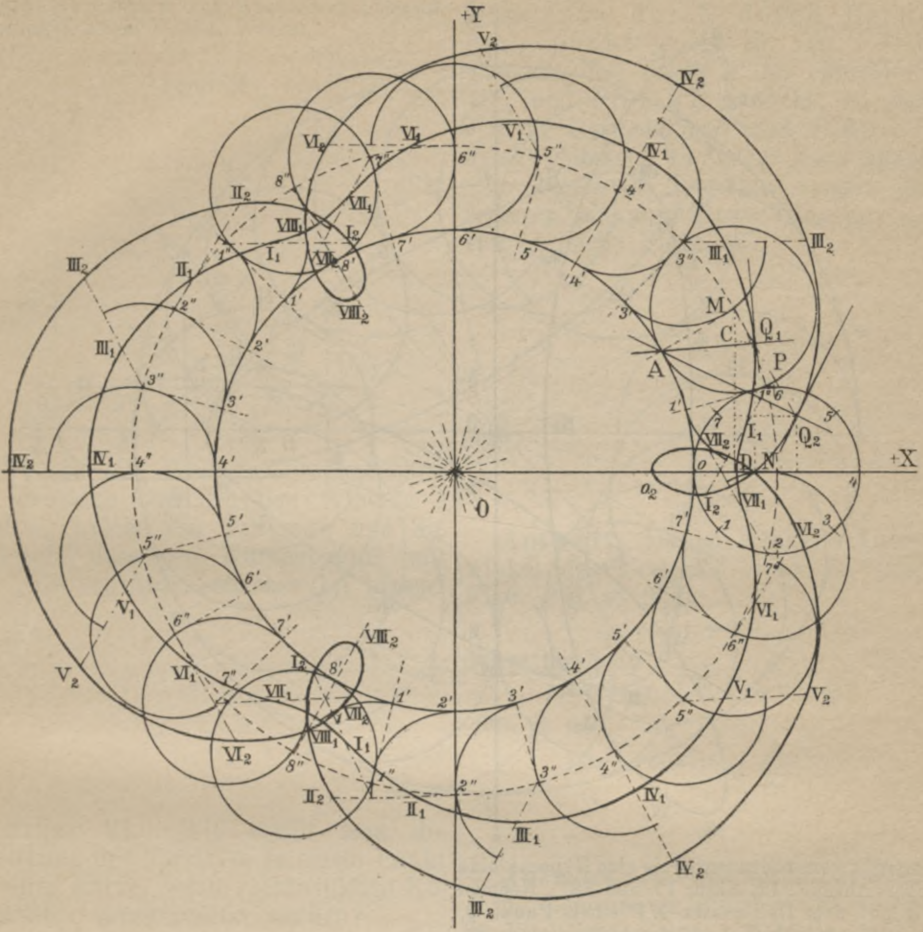
Erkl. 39. Wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Halbmesser a aussen auf einem festen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Halbmesser r ohne zu gleiten fortrollt, so beschreibt bei dieser Bewegung ein Punkt P des Umfangs eine Epicykloide (siehe Aufgabe 11, Figur 14 und 15. Nehmen wir nun auf dem Halbmesser MP einen Punkt Q_1 an (s. Fig. 36) und setzen $MQ_1 = b$, das hier offenbar kleiner als der Halbmesser a ist, so beschreibt beim Rollen des Kreises M auf dem Kreis O die Kurve O_1 I_1 Q_1 III_1 IV_1 u. s. w., welche gedehnte Epicykloide heisst und die oben angegebene Gleichung hat.

Ein Punkt Q_2 auf der Verlängerung des Halbmessers MP, der also vom Mittelpunkt M eine Entfernung $MQ_2 = b$ hat, die grösser als a ist, beschreibt in gleicher Weise beim Rollen des Kreises die Kurve O_2 I_2 Q_2 III_2 IV_2 u. s. w. die verschlungene Epicykloide genannt wird (siehe Erkl. 17 und 18).

Die Konstruktion ergibt sich aus jener der gewöhnlichen Epicykloide, welche in Erkl. 19 gelehrt worden ist, dadurch, dass man wie dort die Lage der Halbmesser $M0$, $\mathrm{I}1''$, $\mathrm{II}2''$, $\mathrm{III}3''$ u. s. w bestimmt und auf denselben von den Mittelpunkten M, $1''$, $2''$ u. s. w. die Strecke b abträgt.

Die Verbindungslinie des Punktes Q_1 bezw. des Punktes Q_2 mit dem jeweiligen Berührungspunkt A des rollenden Kreises ist die Normale und die darauf in Q_1 bezw. Q_2 errichtete Senkrechte demnach die Tangente an die verkürzte bezw. verschlungene Epicykloide (siehe auch die Erkl. 20).

Figur 36.



Aufgabe 60. Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x, y)$ an die Kurve:

$$x = (r - a) \cos \frac{at}{r} + b \cos \left(t - \frac{at}{r}\right),$$

$$y = (r - a) \sin \frac{at}{r} - b \sin \left(t - \frac{at}{r}\right).$$

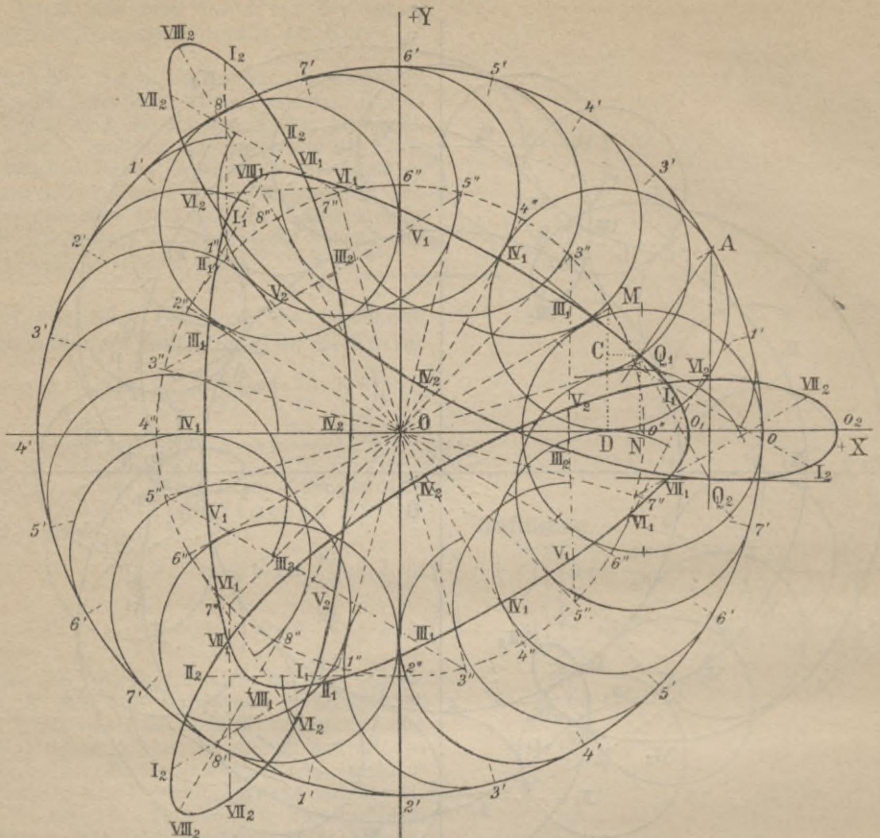
(Gleichung der gedehnten Hypocykloide für $b < a$, der verschlungenen Hypocykloide für $b > a$ (siehe Aufgabe 12).

Auflösung.

$$\left[X - (r-a)\cos\frac{at}{r} - b\cos\left(t - \frac{at}{r}\right)\right]\left[a\cos\frac{at}{r} - b\cos\left(t - \frac{at}{r}\right)\right]$$
$$+ \left[Y - (r-a)\sin\frac{at}{r} + b\sin\left(t - \frac{at}{r}\right)\right]\left[a\sin\frac{at}{r} + b\sin\left(t - \frac{at}{r}\right)\right] = 0.$$

Erkl. 40. Wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Halbmesser a innen auf einem festen Kreis vom Mittelpunkt O und dem Halbmesser r ohne zu gleiten fortrollt, so beschreibt bei dieser Bewegung ein Punkt P des

Figur 37.



Umfangs vom rollenden Kreis eine Hypocykloide (siehe Aufgabe 12, Figur 17 und 18). Nehmen wir auf dem Halbmesser MP einen Punkt Q_1 an und setzen $MQ_1 = b$, das kleiner als a ist, so beschreibt beim Rollen des Kreises M im Innern des Kreises O der Punkt Q_1 eine Kurve $O_1\,\mathrm{I}_1\,Q_1\,\mathrm{III}_1\,\mathrm{IV}_1$ u. s. w., welche gedehnte Hypocykloide genannt wird. Wählen wir dagegen auf der Verlängerung vom Halbmesser MP den Punkt Q_2 und setzen wieder $MQ_2 = b$, so heisst der Weg $O_2\,\mathrm{I}_2\,Q_2\,\mathrm{III}_2\,\mathrm{IV}_2$ u. s. w. von Q_2 verschlungene Hypocykloide. Die gemeinschaftliche Gleichung ist oben angegeben. Für $a = \frac{r}{2}$ geht die Hypocykloide in eine Ellipse über mit den Achsen $r - 2b$ und $r + 2b$ (siehe Erkl. 25).

Die Konstruktion der Kurve, der Normalen und der Tangente ist wörtlich wie bei der vorigen Aufgabe 59 über Epicykloiden.

Erkl. 41. Die Theorie der Epicykloiden und Hypocykloiden ist aus der technischen Aufgabe hervorgegangen, den Zähnen der Räder einer Maschine die beste Form zu geben. Der Astronom Römer hat diese Aufgabe im Jahr 1674 mittels obiger Kurven gelöst. Weitere Arbeiten über die letzteren lieferten de la Hire 1694, Halley, Newton, Euler und andere. Näheres siehe Weissenborn, die cyklischen Kurven, Eisenach 1856.

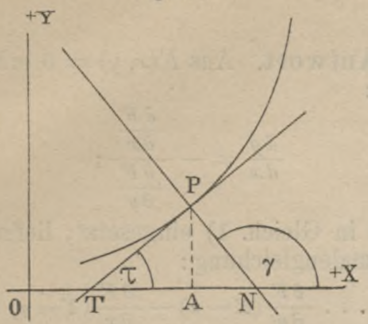
II. Die Normale ebener Kurven.

Frage 19. Was versteht man unter der Normalen in einem Punkt einer ebenen Kurve?

Antwort. Unter der Normalen in einem Punkt einer Kurve versteht man

Erkl. 42. Normal stammt vom lateinischen normalis = nach dem Winkelmass gemacht, also unter einem rechten Winkel.

Figur 38.



die Gerade, welche senkrecht zur Tangente durch deren Berührungspunkt gelegt ist. Ist PT die Tangente im Punkt P an eine Kurve PP_1 und $PN \perp PT$ gemacht, so stellt PN die Normale im Punkt P dar. Es gehört demnach zu jedem Kurvenpunkt eine bestimmte Normale, wenn dem ersteren eine bestimmte Tangente entspricht (siehe Figur 38).

Frage 20. Welcher Zusammenhang ist demnach zwischen den Winkeln τ und ν, welche die Tangente und die Normale desselben Kurvenpunkts mit der positiven Abscissenachse OX bilden?

Antwort. Da der Winkel ν Aussenwinkel des Dreiecks TPN ist (siehe Figur 38), so folgt:

$$\nu = \tau + 90^0;$$

daher hat man:

$$tg\,\nu = tg\,(\tau + 90^0) = -\cot g\,\tau$$

oder es ist:

$$1) \ldots tg\,\nu = -\frac{1}{tg\,\tau}.$$

Frage 21. Wie erhält man die Gleichung der Normalen in einem Punkt P einer Kurve, wenn rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt werden?

Antwort. Hat der Berührungspunkt P die Koordinaten x und y und werden die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Normalen mit X und Y bezeichnet, so lautet die Gleichung der Normalen offenbar:

$$Y - y = (X - x) \cdot tg\,\nu$$

Da aber $tg\,\nu = -\frac{1}{tg\,\tau}$ ist, so folgt:

$$Y - y = -(X - x) \cdot \frac{1}{tg\,\tau} \text{ oder } X - x + tg\,\tau \cdot (Y - y) = 0.$$

Da jedoch $tg\,\tau = \frac{dy}{dx}$ ist, so folgt als Gleichung der Normalen im Punkt (x, y):

$$2) \ldots X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0.$$

Frage 22. Welche Form erhält demnach die Normalengleichung der Kurve $y = f(x)$ für den Punkt (x, y)?

Antwort. Da aus $y = f(x)$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ direkt ermittelt werden kann, so benützt man hier die vorige Gleichung der Normalen:

$$X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0.$$

Frage 23. Desgleichen für die Kurve, deren Gleichung in der nicht entwickelten Form $F(x, y) = 0$ vorliegt?

Antwort. Aus $F(x, y) = 0$ erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}};$$

dies in Gleich. 1) eingesetzt, liefert als Normalengleichung:

$$3) \ldots \frac{\partial F}{\partial y}(X - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(Y - y) = 0.$$

Frage 24. Desgleichen für die Kurve, welche gegeben ist durch $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$?

Antwort. Aus $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ erhalten wir:

$$dx = \varphi'(t)\,dt \text{ und } y = \psi'(t)\,dt;$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Diesen Wert in Gleich. 1) eingesetzt, ergibt als Normalengleichung:

$$(X - x)\,\varphi'(t) + (Y - y)\,\psi'(t) = 0$$

oder:

$$4) \ldots (X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Aufgabe 61. Gesucht wird die Gleichung der Normalen an die Parabel $y^2 = 2px$ im Punkt (x, y). (Siehe Aufgabe 1.)

Auflösung. Aus $y = \sqrt{2px}$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y},$$

daher ist nach Gleichung 1) die Normalengleichung:

$$X - x + (Y - y)\cdot\frac{p}{y} = 0$$

oder:

$$yX + pY = y(x + p).$$

Die Konstruktion der Normalen folgt direkt aus der der Tangente.

Aufgabe 62. Desgleichen für die Hyperbel $x^2 y^3 = 1$. (Siehe Aufgabe 2.)

Auflösung. Aus $y = x^{-\frac{2}{3}}$ leiten wir ab:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}};$$

dies in Gleichung 1) eingesetzt, liefert als Normalengleichung:

$$X - x - \frac{2}{5}x^{-\frac{5}{3}}(Y - y) = 0$$

oder wegen $y = x^{-\frac{2}{3}}$ nach einer kleinen Umrechnung:

$$x^{\frac{7}{3}} X - \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} Y = x^{\frac{10}{3}} - \frac{2}{3}.$$

Nehmen wir $x = y = 1$, so folgt:

$$X - \frac{2}{3} Y = \frac{1}{3};$$

also folgt für $X_1 = 0$, $Y_1 = -\frac{1}{2}$, und $Y_2 = 0$ gesetzt, liefert:

$$X_2 = \frac{1}{3};$$

d. h. die Normale im Punkt $P(1, 1)$ schneidet von der Ordinatenachse das Stück $OB = -\frac{1}{2}$ und von der Abscissenachse das Stück $ON = \frac{1}{3}$ ab (siehe Figur 4).

Aufgabe 63. Desgleichen für die Exponentialkurve $y = a^x$. (Siehe Aufgabe 3 und Figur 5.)

Auflösung. Die Gleichung $y = a^x$ liefert:

$$\frac{dy}{dx} = a^x la;$$

damit ergibt die Normalengleichung (siehe Frage 21):

$$X - x + a^x la (Y - y) = 0$$

oder wegen $y = a^x$:

$$X + a^x \cdot la Y - (x + a^{2x} la) = 0.$$

Für $x = 0$ und $y = 1$ erhalten wir daraus:

$$X + la Y - la = 0$$

als Gleichung der Normalen im Schnittpunkt C der Kurve mit der Ordinatenachse.

Wählen wir noch $a = e$, so wird:

$$la = le = 1$$

und die Gleichung der Normalen heisst dann im besagten Punkt:

$$X + Y = 1,$$

d. h. die Normale schneidet von beiden Achsen ein Stück $= 1$ ab.

Aufgabe 64. Desgleichen für die Kreislinie $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Auflösung. Die Normalengleichung:

$$(X - x) \frac{\partial F}{\partial y} - (Y - y) \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

(siehe Aufgabe 23)

ergibt hier wegen $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$:

$$(X - x)y - (Y - y)x = 0$$

oder:

$$yX - xY = 0;$$

d. h. die Normale in jedem Punkt (x, y) des Kreises geht durch den Mittelpunkt.

Aufgabe 65. Die Gleichung der Normalen im Punkt (x, y) der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

aufzustellen (siehe Aufgabe 7 und Fig. 10).

Auflösung. Da:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

so gibt die Normalengleichung in Frage 23:

$$(X - x)\frac{y}{b^2} - (Y - y)\cdot\frac{x}{a^2} = 0$$

oder:

$$\frac{y}{b^2} X - \frac{x}{a^2} Y = \frac{xy\cdot(a^2 - b^2)}{a^2 b^2},$$

woraus als Gleichung der Normalen an die Ellipse folgt:

$$\frac{a^2 X}{x} - \frac{b^2 Y}{y} = a^2 - b^2.$$

Die Konstruktion der Normalen im Punkt P beschränkt sich auf die Halbierung desjenigen Winkels der Brennstrahlen, durch den die Tangente nicht geht (siehe Figur 10).

Aufgabe 66. Desgleichen für die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(siehe Aufgabe 8 und Figur 8).

Auflösung.

$$\frac{a^2 X}{x} + \frac{b^2 Y}{y} = a^2 + b^2.$$

Aufgabe 67. Die Gleichung der Normalen im Punkt (x, y) an die Cykloide:

$$x = r(t - \sin t) \text{ und } y = r(1 - \cos t)$$

aufzustellen (siehe Aufgabe 10 und Figur 12 und 13).

Auflösung. Wir benutzen hier die Normalengleichung:

$$(X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\cdot\frac{dy}{dt} = 0$$

(siehe Frage 24).

Aus $x = r(t - \sin t)$ ziehen wir $\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t)$

und aus $y = r(1 - \cos t)$ ziehen wir $\frac{dy}{dt} = r \sin t$

und erhalten $(X - x)(1 - \cos t) + (Y - y)\sin t = 0;$

daraus folgt durch eine kleine Umrechnung als Gleichung der Normalen an die Cykloide:

$$Y - y = -(X - x)\cdot tg\,\frac{t}{2}.$$

Zu $Y_0 = 0$ gehört $X_0 = x + y\cdot cotg\,\frac{t}{2}$. Verbinden wir in Figur 12 den Kurvenpunkt $P(x, y)$ mit dem Berührungspunkt A des erzeugenden Kreises, so ist $\sphericalangle PAB = \frac{t}{2}$; daher:

$$OA = OB + BA = x + y\,cotg\,\frac{t}{2} = X_0;$$

d. h. PA ist die Normale an die Kurve.

Aufgabe 68. Desgleichen für die Epicykloide:

$$x = (a+r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)$$

$$y = (a+r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)$$

(siehe Aufgabe 11 und Figur 14 und 15).

Auflösung. Wie in Aufgabe 11 ist zu setzen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2a(a+r)}{r}\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2a(a+r)}{r}\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\left(\frac{a}{4}t+\frac{t}{2}\right).$$

Hierdurch geht die allgemeine Normalengleichung in Frage 24:

$$(X-x)\frac{dx}{dt}+(Y-y)\frac{dy}{dt}=0$$

oder:

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}$$

über in:

$$\frac{2a(a+r)}{r}\sin\frac{t}{2}\left[\cos\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)X+\sin\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)Y\right]$$

$$=\frac{2a(a+r)}{r}\sin\frac{t}{2}\left\{\left[(a+r)\cos\frac{a}{r}t-a\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]\cdot\cos\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)\right\}$$

$$+\left[(a+r)\sin\frac{a}{r}t-a\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)$$

oder nach $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$:

$$\cos\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)X+\sin\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)Y=(a+r)\cos\frac{t}{2}-a\cos\frac{t}{2}$$

oder:

$$\cos\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)X+\sin\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)Y=r\cos\frac{t}{2}.$$

Diese Gleichung wird offenbar befriedigt durch die Werte:

$$X_0=r\cos\frac{a}{r}t \text{ und } Y_0=r\sin\frac{a}{r}t;$$

d. h. durch die Koordinaten des Berührungspunktes A, denn es ist:

$$r\cdot\cos\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\frac{a}{r}t+r\sin\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)\sin\frac{a}{r}t$$

$$=r\left[\cos\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)\cos\frac{a}{r}t+\sin\left(\frac{a}{r}t+\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\right]=r\cos\frac{t}{2}.$$

man erhält daher die Normale durch die Verbindung des Kurvenpunktes P mit dem jeweiligen Berührungspunkt A des erzeugenden Kreises.

Aufgabe 69. Desgleichen für die Hypocykloide:

$$x=(r-a)\cos\frac{at}{r}+a\cos\left(t-\frac{at}{r}\right)$$

$$y=(r-a)\sin\frac{at}{r}-a\sin\left(t-\frac{at}{r}\right)$$

(siehe Aufgabe 12 und Figur 17 und 18).

Auflösung. Wir bilden wie in Aufgabe 12:

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2a(r-a)}{r}\sin\frac{t}{2}\cos\left(\frac{at}{r}-\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{2a(r-a)}{r}\sin\frac{t}{2}\sin\left(\frac{at}{r}-\frac{t}{2}\right).$$

Die allgemeine Normalengleichung:

$$X \cdot \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$$

gibt nach der Einsetzung der obigen Werte für x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors:

$$-\frac{2a(r-a)}{r} \sin \frac{t}{2}$$

genügend vereinfacht:

$$\cos\left(\frac{at}{r} - \frac{t}{2}\right) X + \sin\left(\frac{at}{r} - \frac{t}{2}\right) Y = r \cos \frac{t}{2}.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch die Werte:

$$X_0 = r \cos \frac{a}{r} t \text{ und } Y_0 = r \sin \frac{a}{r} t,$$

d. h. durch die Koordinaten des Berührungspunktes A in Figur 17. Wir schliessen daraus, dass die Normale des Punktes P der Hypocykloide erhalten wird durch die Verbindung dieses Punktes mit dem jeweiligen Berührungspunkt A des erzeugenden Kreises.

Uebungsbeispiele.

Zur Bestimmung der Gleichung der Normalen für einen Punkt P mit den Koordinaten x und y der folgenden Kurven:

Aufgabe 70. (30, Figur 28.)

$y = x^2$

$x = 2;\ y = 4.$

Auflösung.

$X + 2xY - x - 2x^3 = 0$

$X + 4Y - 18 = 0.$

Aufgabe 71. (31.)

$y = x^2 - 6x + 10$

$x = 1;\ y = 5.$

Auflösung.

$X + (2x - 6)Y - 2x^3 + 18x^2 - 57x + 60 = 0$

$X - 4Y + 19 = 0.$

Aufgabe 72. (32.)

$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$

$x = 3;\ y = 3 - \sqrt{3}.$

Auflösung.

$(y-3)X - (x-2)Y + 3x - 2y = 0$

$\sqrt{3}\,X + Y = 3 + 2\sqrt{3}.$

Aufgabe 73. (35, Figur 29.)

$(x-3)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$

$x = 1{,}21;\ y = 1{,}89.$

Auflösung.

$(y-1)X - (x-3)Y + x - 3y = 0$

$0{,}89\,X + 1{,}79\,Y - 6{,}88 = 0.$

Aufgabe 74. (34, Figur 32.)

$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

$x = 2{,}87;\ y = -0{,}59.$

Auflösung.

$9yX - 4xY - 5xy = 0$

$5{,}31\,X + 11{,}48\,Y - 8{,}47 = 0.$

Aufgabe 75. (35.)

$$4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 = 0$$
$$x = 1;\ y = 3.$$

Auflösung.

$$9(y-3)X - 4(x-4)Y - 5xy + 27x - 16y = 0.$$
$$y = 3.$$

Aufgabe 76. (36.)

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 - 288 = 0$$
$$x = 0{,}99;\ y = 3{,}54.$$

Auflösung.

$$(25y - 7x)X - (25x - 7y)Y + 7(x^2 - y^2) = 0.$$
$$X = 0{,}99.$$

Aufgabe 77. (37.)

$$xy = 1$$
$$x = \frac{1}{2},\ y = 2.$$

Auflösung.

$$xX - yY - x^2 + y^2 = 0$$
$$2x - 4Y + 15 = 0.$$

Aufgabe 78. (38).

$$y = x^3$$
$$x = 1,\ y = 0.$$

Auflösung.

$$X + 3x^2Y - x - 3x^5 = 0$$
$$X + 3Y - 4 = 0.$$

Aufgabe 79. (39.)

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
$$x = 1;\ y = 0.$$

Auflösung.

$$X + (3x^2 - 12x + 11)Y - x - y(3x^2 - 12x + 11) = 0$$
$$X + 2Y - 1 = 0.$$

Aufgabe 80. (40, Figur 49.)

$$x^2y = 1$$
$$x = 1,\ y = 1.$$

Auflösung.

$$xX - 2yY - x^2 + 2y^2 = 0$$
$$X - 2Y + 1 = 0.$$

Aufgabe 81. (41.)

$$y^2 = x^3$$
$$x = 1,\ y = 1.$$

Auflösung.

$$2yX + 3x^2Y - 3x^2y - 2xy = 0$$
$$2X + 3Y - 5 = 0.$$

Aufgabe 82. (42.)

$$x^2y + x + y - 1 = 0$$
$$x = -1;\ y = +1.$$

Auflösung.

$$(1 + x^2)^2 X + (x^2 - 2x - 1)Y - (1 + x^2)^2 - y(x^2 - 2x - 1) = 0$$
$$2X + Y - 1 = 0.$$

Aufgabe 83. (45.)

$$y = x^4$$
$$x = 1;\ y = 1.$$

Auflösung.

$$X + 4x^3Y - 4x^7 - x = 0$$
$$X + 4Y - 5 = 0.$$

Aufgabe 84. (46.)

$$y^3 = x^4.$$

Auflösung.

$$3y^2X + 4x^3Y - 4x^3Y - 3xy^2 = 0$$

Aufgabe 85.

$$y^5 = c^2x^3.$$

Auflösung.

$$5xX + 3yY = 5x^2 + 3y^2.$$

Aufgabe 86. (47.)

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Auflösung.

$$(-x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y)\,X - (3x^2 - 2xy - y^2 + 2x)\,Y + x^3 + 5x^2y - 5xy^2 - y^3 = 0.$$

Aufgabe 87. (48.)

$$x^4 - 36x + 216y = 0.$$

Auflösung.

$$54X + (9 - 4x^3)\,Y - 54x - (9 - 4x^3)\,y = 0.$$

Aufgabe 88. (49.)

$$x^4 - 2x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0.$$

Auflösung.

$$(-2x^2 + 6xy - 3y^2)(X - x) - (4x^3 - 4xy + 3y^2)(Y - y) = 0.$$

Aufgabe 89. (43.)

$$x^3 + y^3 = c^3.$$

Auflösung.

$$x^2Y - y^2X = xy\,(x - y).$$

Aufgabe 90. (50.)

$$x^5 + y^5 = c^5.$$

Auflösung.

$$x^4Y - y^4X = xy\,(x^3 - y^3).$$

Aufgabe 91. (51.)

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = c^{2n+1}.$$

Auflösung.

$$x^{2n}Y - y^{2n}X = xy\,(x^{2n-1} - y^{2n-1}).$$

Aufgabe 92. (44.)

$$y^2(1 - x) - x^3 = 0.$$

Auflösung.

$$y\,(3x^2 + y^2)\,Y + 2x^3X = (3x^2 + y^2)\,y^2 + 2x^4.$$

Aufgabe 93.

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

(Gleichung der Kettenlinie).

Auflösung.

$$X - x + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)(Y - y) = 0.$$

Die Konstruktion der Normalen folgt aus der Tangente in Aufgabe 4 (siehe Figur 6).

Aufgabe 94.

$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$$

(Blatt des Descartes).

Auflösung.

$$(ax - y^2)\,X + (x^2 - ay)\,Y - a\,(x^2 - y^2) - xy\,(x + y) = 0.$$

Die Konstruktion der Normalen folgt aus der Tangentenkonstruktion in Aufgabe 24 (siehe Figur 26).

Aufgabe 95.

$$x^3 = y^2(2r - x)$$

(Gleichung der Cissoide).

Auflösung.

$$2y\,(2r - x)(X - x) + (3x^2 + y^2)(Y - y) = 0$$

(siehe Aufgabe 9 und Figur 11).

Aufgabe 96.

$y^4 - 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2bx^2y + b^2x^2 = 0.$

(Gleichung der Conchoide) siehe Aufgabe 54 und 146, Figur 45.

Auflösung.

$$[2y^3 - 3by^2 + (x^2 + b^2 - a^2)y - bx^2](X - x) - (y - b)^2 \cdot x(Y - y) = 0.$$

Aufgabe 97.

$y^4 - 2(2r^2 + 2rx - x^2)y^2 - 4rx^3 + x^4 = 0$

(Gleichung der Cardioide).

siehe Aufgabe 55 und Figur 16.

Auflösung.

$$y \cdot [x^2 + y^2 - 2r(r + x)]\, y \cdot (X - x) - [(x^2 + y^2)x - r(3x^2 + y^2)](Y - y) = 0.$$

Die Konstruktion der Normalen folgt aus jener der Hypocykloide (siehe Aufgabe 69).

Aufgabe 98.

$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$

(Gleichung der Lemniscate).

Auflösung.

$$(x^2 + y^2 + c^2)\, yX + (c^2 - x^2 - y^2)\, x \cdot Y - 2xyc^2 = 0.$$

Die Konstruktion siehe Aufgabe 15 und Figur 24.

Aufgabe 99.

$y = ml(x).$

Auflösung.

$$Y - y = -\frac{x}{m}(X - x).$$

Aufgabe 100.

$x = at - b\sin t$

$y = a - b\cos t$

(Gleichung der gedehnten, beziehungsweise verschlungenen Cykloide), siehe Aufgabe 58 und Figur 34.

Auflösung.

$$X(a - b\cos t) + Yb\sin t - at(a - b\cos t) = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch die Werte $X_0 = at$, $Y_0 = 0$; d. h. durch die Koordinaten des Berührungspunktes A des rollenden Kreises, d. h. es ist AQ_2 die Normale der gedehnten und AQ_1 jene der verschlungenen Cykloide.

Aufgabe 101.

$$x = (a + r)\cos\frac{at}{r} - b\cos\left(\frac{at}{r} + t\right)$$

$$y = (a + r)\sin\frac{at}{r} - b\sin\left(\frac{at}{r} + t\right)$$

(Gleichung der gedehnten, beziehungsw. verschlungenen Epicykloide), siehe Aufgabe 59 und Figur 36.

Auflösung.

$$\left[X - (a + r)\cos\frac{at}{r} + b\cos\left(\frac{at}{r} + r\right)\right]\left[a\sin\frac{at}{r} - b\sin\left(\frac{at}{r} + t\right)\right]$$
$$- \left[Y - (a + r)\sin\frac{at}{r} + b\sin\left(\frac{at}{r} + r\right)\right]\left[a\cos\frac{at}{r} - b\cos\left(\frac{at}{r} + t\right)\right] = 0.$$

Diese Gleichung wird offenbar befriedigt durch die Werte:

$$X_0 = r\cos\frac{at}{r} \text{ und } Y_0 = r\sin\frac{at}{r};$$

d. h. durch die Koordinaten des jeweiligen

Berührungspunktes A der beiden Kreise oder die Normalen an die Kurve im Punkt Q geht durch den Berührungspunkt A; man erhält also die Normale durch die Verbindung von Q mit A. Siehe AQ_1 und AQ_2 in Fig. 36.

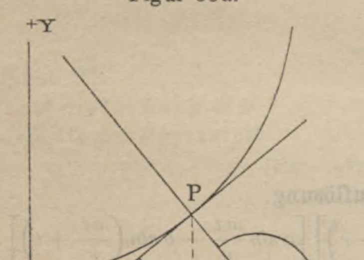
Ersetzt man in den obigen Formeln a durch $-a$ und b durch $-b$, so erhält man die Gleichung für die Normalen der gedehnten, beziehungsweise verschlungenen Hypocykloide und findet, dass die vorige Normalenkonstruktion auch für die Hypocykloiden gilt. Siehe AQ_1 und AQ_2 in Figur 37.

III. Längen von Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale einer ebenen Kurve.

1) In rechtwinkligen Koordinaten.

Frage 25. Es sei in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Gleichung einer Kurve in der Form $y = f(x)$ oder in der Form $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ gegeben. In einem Kurvenpunkt P sei an die Kurve die Tangente und Normale gegeben. Wie können die Stücke der Tangente und Normale vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der Abscissenachse, sowie die Projektionen dieser zwei Strecken auf diese Achse, Subtangente und Subnormale genannt, berechnet werden?

Figur 38a.



Antwort. In der Figur 38a seien $OA = x$ und $AP = y$ die Koordinaten des Kurvenpunktes P. Die Tangente in P schneidet die Abscissenachse in T und die Normale trifft letztere in N; zu berechnen sind demnach die Stücke $PT = t$ und $PN = n$. Die Projektion von t ist auch die Abscissenachse offenbar AT oder AT ist die Subtangente; wir bezeichnen sie kurz mit t_x; ebenso ist AN die Projektion von n; diese Strecke, die Subnormale heisse n_x; es sind also auch für t_x und n_x Ausdrücke zu finden.

Im rechtwinkligen Dreieck PTA haben wir $\sphericalangle PTA = \tau$ und nach Früherem ist $tg\,\tau = \frac{dy}{dx}$, woraus wir weiter finden:

$$\sin\tau = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

und

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Ferner gibt die Figur:

$$t = \frac{y}{\sin\tau};$$

daher:

$$t = \frac{y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}} = y\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1};$$

oder es ist:

1) die Tangente

$$t = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Weiter folgt:

$$AT \text{ oder } t_x = \frac{y}{tg\tau};$$

daher hat man:

2) die Subtangente

$$t_x = y\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right).$$

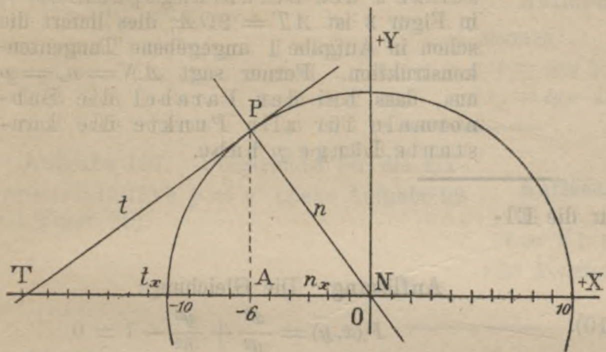
Im Dreieck APN ist $n = \frac{y}{\cos\tau}$; daher hat man:

3) die Normale $n = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Endlich erhält man AN oder $n_x = y\cdot tg\tau$, somit ist:

4) die Subnormale $n_x = y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Figur 39.



Aufgabe 102. Gegeben sei die Gleichung des Kreises $x^2+y^2=100$. Berechne für den Punkt, dessen Abszisse $x=-6$ ist, die Grössen t, t_x, n und n_x (siehe Figur 39).

Auflösung. Da $x=-6$ ist, so hat man wegen $x^2+y^2-100=0$ die positive Ordinate $y=8$ zu setzen.

Die Differentiation der Kurvengleichung ergibt $2x\,dx+2y\,dy=0$, woraus:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

folgt; daher bekommen wir:

$$PT = t = 8\sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac{40}{3} = 13{,}33\cdots$$

$$AT = t_x = 8\cdot\frac{4}{3} = \frac{32}{3} = 10{,}66\cdots$$

$$NP = n = 8\sqrt{1+\frac{9}{16}} = 10$$

$$AN = n_x = 8\cdot\frac{3}{4} = 6.$$

Aufgabe 103. Gegeben sei die Gleichung der Parabel $y^2=2px$. Berechne für den Kurvenpunkt P mit den Koordinaten x und y die Grössen t, t_x, n und n_x (siehe Aufgabe 1 und Figur 3.

Auflösung. Aus $y^2=2px$ leiten wir durch beiderseitige Differentiation zunächst ab:

$$2y\,dy = 2p\,dx,$$

dabei erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \text{ und } \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}.$$

Setzen wir diese Werte in die Formeln 1) bis 4) ein, so geht hervor:

$$PT = t = \frac{y}{p} \sqrt{p^2 + y^2}; \; AT = t_x = 2x; \; NP = n = \sqrt{p^2 + y^2} \text{ und } AN = n_x = p,$$

d. h. **bei der Parabel ist die Subtangente t_x gleich der doppelten Abscisse x des Berührungspunktes** — in Figur 3 ist $AT = 2OA$; dies liefert die schon in Aufgabe 1 angegebene Tangentenkonstruktion. Ferner sagt $AN = n_x = p$ aus, dass **bei der Parabel die Subnormale für alle Punkte die konstante Länge p habe.**

Aufgabe 104. Desgleichen für die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

(siehe Aufgabe 7, 65 und Figur 10).

Auflösung. Die Gleichung:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

liefert:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = + \frac{2y}{b^2};$$

dies gibt:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{b^2 x}{a^2 y} \text{ und } \frac{dx}{dy} = - \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Daraus folgt:

$$PT = t = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{\frac{y^2 (b^4 x^2 + a^4 y^2)}{b^4 x^2}} = \frac{y}{b^2 x} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}.$$

Setzt man aus der Kurvengleichung:

$$y^2 = \frac{b^2 (a^2 + x^2)}{a^2} \text{ und } a^2 - b^2 = e^2$$

ein, so bekommt man durch eine kleine Rechnung:

$$t = \frac{1}{ax} \sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2 x^2)}.$$

Ebenso folgt:

$$NP = n = \frac{1}{a^2} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2} = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - e^2 x^2}.$$

Ferner erhält man (abgesehen vom Vorzeichen):

$$AT = t_x = y \frac{dx}{dy} = \frac{a^2 - x^2}{x} \text{ und } AN = n_x = y \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2}.$$

Aufgabe 105. Desgleichen für die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

(siehe Aufgaben 8, 66 und Figur 8).

Auflösung. Setzt man:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2},$$

so erhält man ähnlich wie vorhin:

$$t = \frac{1}{ax} \sqrt{(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)}$$

$$n = \frac{b}{a^2} \sqrt{e^2x^2 - a^4}$$

$$t_x = \frac{x^2 - a^2}{x} \text{ und } n_x = \frac{b^2 x}{a^2}.$$

Aufgabe 106. Desgleichen für Sinuskurve $y = \sin x$ (siehe Differentialrechnung II. Teil, Figur 25).

Auflösung. Hier wird $\frac{dy}{dx} = \cos x$ und danach:

$$t = tg\, x \sqrt{1 + \cos^2 x};\; n = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}$$

$$t_x = tg\, x \text{ und } n_x = \sin x \cdot \cos x.$$

Aufgabe 107. Desgleichen für die Exponentialkurve $y = e^x$ (siehe Aufgabe 29 und Figur 33).

Auflösung. Da hier $\frac{dy}{dx} = e^x$, so folgt:

$$t = \sqrt{1 + e^{2x}};\; n = e^x \sqrt{1 + e^{2x}};\quad t_x = 1,$$

also konstant und

$$n_x = e^{2x} = y^2.$$

Aufgabe 108. Desgleichen für die Kettenlinie:

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

(siehe Aufgaben 4 und 93).

Auflösung. Nach Aufgabe 4 ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m};$$

daher:

$$t = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - n^2}};\; n = \frac{y^2}{m}$$

$$t_x = \frac{my}{\sqrt{y^2 - m^2}} \text{ und } n_x = \frac{y}{m}\sqrt{y^2 - m^2}.$$

Aufgabe 109. Desgleichen für die Cykloide:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi) \text{ und } y = r(1 - \cos\varphi)$$

(siehe Aufgaben 8, 66 und Figuren 12, 13).

Auflösung. Nach Aufgabe ~~8~~ 10 ist:

$$\frac{dy}{dx} = cotg\, \frac{\varphi}{2};$$

daher:

$$t = r(1 - \cos\varphi) \cdot \sqrt{1 + tg^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = 2r \sin\frac{\varphi}{2}\, tg\, \frac{\varphi}{2}$$

$$n = r(1 - \cos\varphi) \cdot \sqrt{1 + cotg^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 2r \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$t_x = \frac{2r \sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} \text{ und } n_x = 2r \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} = r \sin\varphi.$$

Erkl. 43. In der Aufgabe 66 ist gezeigt, dass AP die Normale der Kurve ist.

Um Verwechslungen zu vermeiden, ist hier der Wälzungswinkel φ genannt statt t wie in der Aufgabe 8 und 66.

Aufgabe 110. Berechne die Subtangente der Kurve:

$$x = e^{\frac{x-y}{y}}.$$

Auflösung. Aus $x = e^{\frac{x-y}{y}}$ erhält man durch Differentiation:

$$dx = \frac{x}{y^2}(y\,dx - x\,dy);$$

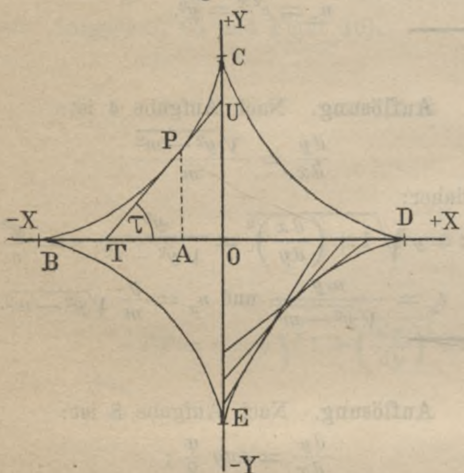
woraus folgt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{xy - y^2}; \text{ daher ist } t_x = y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{x-y}.$$

Aufgabe 111. Berechne das von den Koordinatenachsen begrenzte Stück der Tangente im Punkt x, y an die Astroide:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Figur 40.



Auflösung. Nach der Figur 40 ist für die Tangente im Punkt P zunächst:

$$OT = OA + AT = x + t_x = x + y \cdot \frac{dx}{dy}.$$

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck TOU die gesuchte Strecke:

$$TU = \frac{OT}{\cos\tau} = OT \cdot \sqrt{1 + tg^2\tau},$$

wobei $tg\tau = \frac{dy}{dx}$ zu nehmen ist; daher folgt:

$$TU = \left(x + y \cdot \frac{dx}{dy}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Die Kurvengleichung:

$$F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

liefert nun allgemein:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -x^{-\frac{1}{3}}y^{+\frac{1}{3}}.$$

Weil aber die Abscisse x des gewählten Berührungspunktes negativ ist, müssen wir hier

$$\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{3}}y^{+\frac{1}{3}}$$

nehmen und erhalten so durch Einsetzung:

$$TU = \left(x + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}} = \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a;$$

d. h. das Stück der Tangente, welches von den Koordinatenachsen begrenzt wird, besitzt die konstante Länge a; die vorlingende Kurve erscheint daher als die Enthüllende einer Geraden von der konstanten Länge a, welche auf die Koordinatenachsen gestützt fortgleitet; sie ist die nämliche Kurve, welche in Erkl. 25 Sternkurve oder Astroide genannt wurde (siehe Figur 19).

---

2) Uebungsbeispiele.

Zur Berechnung der Längen von Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale, Kurvengleichungen:

	t	n	t_x	n_x
Aufgabe 112. (30, 70.) $y = x^2$ $x = 2,\ y = 4$	$\sqrt{y\left(y+\frac{1}{4}\right)}$ $\sqrt{17}$	$y\sqrt{1+4y}$ $4\sqrt{17}$	$\frac{x}{2}$ 1	$2x^3$ 16
Aufgabe 113. (31, 71.) $y = x^2 - 6x + 10$ $x = 1,\ y = 6$	$y\sqrt{1+\frac{1}{(2x-6)^2}}$ $\frac{5}{4}\sqrt{17}$	$y\sqrt{1+(2x-6)^2}$ $5\sqrt{17}$	$\frac{y}{2x-6}$ $\frac{5}{4}$	$(2x-6)\,y$ 20
Aufgabe 114. (32, 72.) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ $x = 3,\ y = 3 - \sqrt{3}$	$\frac{2y}{x-2}$ $2{,}54$	$\frac{2y}{y-3}$ $1{,}46$	$\frac{y(y-3)}{x-2}$ $2{,}19$	$\frac{y(x-2)}{-2y}$ $0{,}73$
Aufgabe 115. (35, 73.) $(x-3)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$ $x = 1{,}21$ $y = 1{,}89$	$\frac{2y}{x-3}$ $2{,}1$	$\frac{2y}{y-1}$ $4{,}3$	$\frac{y(y-1)}{x-3}$ $0{,}94$	$\frac{y(x-3)}{y-1}$ $3{,}8$
Aufgabe 116. (34, 74.) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ $x = 2{,}87$ $y = -0{,}59$	$\frac{y}{4x}\sqrt{16x^2+81y^2}$ $0{,}65$	$\frac{1}{9}\sqrt{16x^2+81y^2}$ $1{,}4$	$\frac{9y^2}{4x}$ $0{,}3$	$\frac{4x}{9}$ $1{,}27$
Aufgabe 117. (35, 75.) $4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 = 0$ $x = 1$ $y = 3$	$y\sqrt{1+\frac{81(y-3)^2}{16(x-4)^2}}$ 3	$y\sqrt{1+\frac{16(x-4)^2}{81(y-3)^3}}$ ∞	$\frac{9y(y-3)}{4(x-4)}$ 0	$\frac{4y(x-4)}{9(y-3)}$ ∞

	t	n	t_x	n_x
Aufgabe 118. (36, 76.) $25x^2-14xy+25y^2-288=0$ $x=0{,}989$ $y=3{,}54$	$y\sqrt{1+\frac{(25y-7x)^2}{(25x-7y)^2}}$ ∞	$y\sqrt{1+\frac{(25x-7y)^2}{(25y-7x)^2}}$ $3{,}54$	$\frac{y(25y-7x)}{25y-7x)}$ ∞	$\frac{y(25x-7y)}{25y-7x}$ 0
Aufgabe 119. (37, 77.) $xy=1$ $x=\frac{1}{2}$ $y=2$	$y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{17}$	$y\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$ $2\sqrt{17}$	x $\frac{1}{2}$	$\frac{y^2}{x}$ 8
Aufgabe 120. (38, 78.) $y=x^3$ $x=1$ $y=1$	$\frac{x}{3}\sqrt{9x^4+1}$ $1{,}05$	$y\sqrt{1+9x^4}$ $3{,}16$	$\frac{x}{3}$ $0{,}33$	$3x^2y$ 3
Aufgabe 121. (39, 79.) $y=x^3-6x^2+11x-6$ $x=1$ $y=0$	$y\sqrt{1+\frac{1}{(3x^2-12x+11)^2}}$ 0	$y\sqrt{1+(3x^2-12x+11)^2}$ 0	$\frac{3x^2-12x+11}{y}$ 0	$y(3x^2-12x+11)$ 0
Aufgabe 122. (40, 80.) $x^2y=1$ $x=1$ $y=1$	$y\sqrt{1+\frac{x^2}{4y^2}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{5}$	$y\sqrt{1+\frac{4y^2}{x^2}}$ $\sqrt{5}$	$\frac{x}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{2y^2}{x}$ 2
Aufgabe 123. (41, 81.) $y^2=x^3$ $x=1$ $y=1$	$y\sqrt{1+\frac{4}{9x}}$ $\frac{1}{3}\sqrt{13}$	$y\sqrt{1+\frac{9x}{4}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{13}$	$\frac{2}{3}x$ $\frac{2}{3}$	$\frac{3x^2}{2}$ $\frac{3}{2}$

	t	n	t_x	n_x
Aufgabe 124. (42, 82.) $x^2y+x+y-1=0$, $x=-1$, $y=+1$	$y\sqrt{1+\frac{(x^2+1)^4}{(x^2-2x-1)^2}}$ $\sqrt{5}$	$y\sqrt{1+\frac{(x^2-2x-1)^2}{(x^2+1)^4}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{5}$	$\frac{(1-x)(1+x)^2}{x^2-2x-1}$ 2	$\frac{(1-x)(x^2-2x-1)}{(1+x^2)^3}$ $\frac{1}{2}$
Aufgabe 125. (45, 83.) $y=x^4$, $x=1$, $y=1$	$\frac{x}{4}\sqrt{16x^6+1}$ $\frac{1}{4}\sqrt{17}$	$y\sqrt{16x^6+1}$ $\sqrt{17}$	$\frac{x}{4}$ $\frac{1}{4}$	$4x^7$ 4
Aufgabe 126. (46, 84.) $y^3=x^4$	$y\sqrt{1+\frac{9y^4}{16x^6}}$	$y\sqrt{1+\frac{16x^6}{9x^4}}$	$\frac{3x}{4}$	$\frac{4x^3}{3y}$
Aufgabe 127. (85.) $y^5=x^3$	$y\sqrt{1+\frac{25y^8}{9x^4}}$	$y\sqrt{1+\frac{9x^4}{25y^8}}$	$\frac{5x}{3}$	$\frac{3x^2}{5y^3}$
Aufgabe 128. (9, 95.) $x^3=y^2(2r-x)$ (Cissoide)	$\frac{xr}{3r-x}\sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}}$	$\frac{rx\sqrt{x(8r-3x)}}{(2r-x)^2}$	$\frac{x(2r-x)}{3r-x}$	$\frac{x^2(3r-x)}{(2r-x)^2}$
Aufgabe 129. (24, 94.) $x^3+y^3-3axy=0$ (Blatt des Descartes).	$\frac{y}{x^2-ay}\sqrt{(x^2-ay)^2+(ax-y^2)^2}$	$\frac{y}{ax-y^2}\sqrt{(x^2-ay)^2+(ax-y^2)^2}$	$\frac{y(ax-y^2)}{x^2-ay}$	$\frac{y(x^2-ay)}{ax-y^2}$
Aufgabe 130. (4.) $y=me^{\frac{x}{m}}$	$\sqrt{y^2+m^2}$	$\frac{y}{m}\sqrt{y^2+m^2}$	m	$\frac{y^2}{m}$
Aufgabe 131. (99.) $y=ml(x)$	$l(x\sqrt{m^2+n^2})$	$\frac{y}{x}\sqrt{m^2+x^2}$	$x\,l(x)$	$\frac{y}{x}$

Aufgabe 132. (55, 97.)

$y^4 - 2(2r^2 + 2rx - x^2)y^2 - 4rx^3 + x^4 = 0$ (Cardioide).

Auflösung.

$$t_x = \frac{y^2[x^2 + y^2 - 2r(r+x)]}{r(3x^2+y^2) - x(x^2+y^2)}.$$

Aufgabe 133. (54, 96, 146.)

$y^4 - 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2bx^2y + b^2x^2 = 0$ (Conchoide).

Auflösung.

$$t_x = -\frac{[2y^3 - 3by^2 + (x^2 + b^2 - a^2)y - bx^2]y}{(y-b)^2 \cdot x}.$$

Aufgabe 134. (15, 98.)

$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$ (Lemniscate).

Auflösung.

$$t_x = -\frac{(x^2 + y^2 + c^2)y^2}{(x^2 + y^2 - c^2)x}.$$

Aufgabe 135. (58, 100.)

$x = a\, arc\left(cos = \frac{a-y}{b}\right) - \sqrt{b^2 - (a-y)^2}$

(gedehnte oder verschlungene Cykloide).

Auflösung.

$$t_x = \frac{y^2}{\sqrt{b^2 - (a-y)^2}}.$$

Aufgabe 136. (59, 101.)

$$x = (r+a)\cos\frac{at}{r} + a\cos\left(t + \frac{at}{r}\right)$$

$$y = (r-a)\sin\frac{at}{r} - a\sin\left(t + \frac{at}{r}\right)$$

(Gleichung der Epicykloide).

Auflösung.

$$t_x = y \cdot cotg \cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{at}{r}\right).$$

Aufgabe 137. (60, 101.)

$$x = (r-a)\cos\frac{at}{r} + a\cos\left(t - \frac{at}{r}\right)$$

$$y = (r-a)\sin\frac{at}{r} - a\sin\left(t - \frac{at}{r}\right)$$

(Gleichung der Hypocykloide).

Auflösung.

$$t_x = -\,cotg \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{at}{r}\right).$$

Aufgabe 138.

$$x = c \cdot log\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{c^2 - y^2}.$$

Erkl. 44. Diese Kurve hat die Eigenschaft, dass für jeden Punkt derselben das Stück der Tangente gerechnet vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der Abscissenachse die konstante Länge c hat. Man hat diese Kurve T r a c t r i x oder Z u g l i n i e genannt. Sie entsteht nämlich, wenn das eine Ende eines völlig biegsamen Fadens von der Länge c an dessen anderm Ende sich ein schwerer Punkt befindet, auf der Abscissenachse in einer horizontalen Ebene fortbewegt wird; der schwere Punkt beschreibt dann die Tractrix; dieselbe besteht aus vier kongruenten Zweigen. Legt man den Ursprung durch den Punkt 0, in welchem die

Auflösung.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm y}{\sqrt{c^2 - y^2}}$$

$$t = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = c = \text{konstant}$$

$$n = \frac{cy}{\sqrt{c^2 - y^2}}, \quad t_x = \sqrt{c^2 - y^2},$$

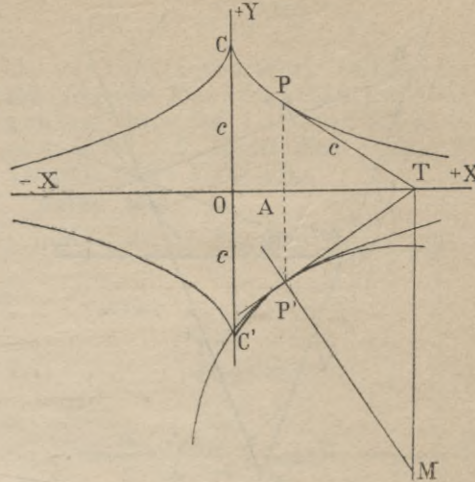
$$n_x = \frac{y^2}{\sqrt{c^2 - y^2}}.$$

Tangente der Kurve die Abscissenachse senkrecht schneidet, so sind die Punkte

$$C\begin{cases} x = 0 \\ y = c \end{cases} \text{ und } C'\begin{cases} x = 0 \\ y = -c \end{cases}$$

Rückkehrpunkte I. Art und die Abscissenachse ist Asymptote der Kurve. Die Konstruktion der Kurve ergibt sich aus ihrer Eigenschaft, zur Evolute zwei gleiche und symmetrisch zur Abscissenachse liegende Kettenlinien zu haben. Der Beweis hierfür folgt später bei der Evolvente der Kettenlinie, ebenso die Nebenrechnungen. Diese Kurve wurde genau untersucht von Huygens (siehe Hugenii Op. varia, T. II, pag. 57.

Figur 41.



3) In Polarkoordinaten.

Frage 26. Es sei in einem Polarsystem die Gleichung einer Kurve in der Form $r = f(\Theta)$ gegeben. Der Kurvenpunkt P mit den Polarkoordinaten (r, Θ) werde mit dem Mittelpunkt O verbunden und in O auf OP das Lot errichtet; ferner sollen in P an die Kurve die Tangente AE und die Normale PD gelegt werden. Wie können die Stücke AE und PD der Tangente und Normale, vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit dem in O auf OP errichteten Lot gemessen, sowie die Projektionen OE und OD dieser Strecken auf das letztere, die hier ebenfalls Subtangente und Subnormale heissen, berechnet werden? (Siehe Figur 42).

Antwort. Bezeichnen wir wieder wie in Frage 5 den Winkel zwischen dem Radius OP und der Tangente PE mit μ, so ist:

$$tg\,\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\Theta}} = \frac{r}{r'},$$

wenn $r' = \frac{dr}{d\Theta}$ gesetzt wird. Im rechtwinkligen Dreieck OEP ist die Kathete $OP = r$, die Kathete $OE =$ der Subtangente t_ι^*, die Hypotenuse $PE =$ dem Tangentenstück t^*; daher folgt:

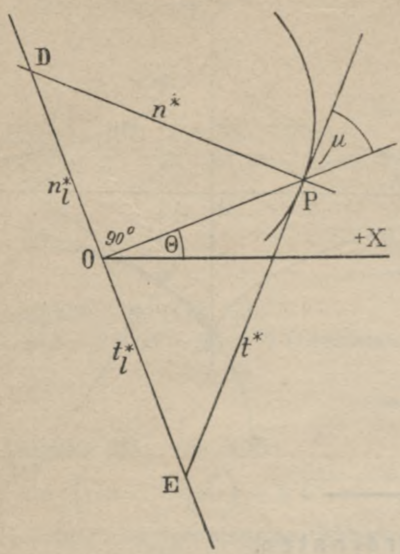
$$t_\iota = r\,tg\,\mu = r \cdot \frac{r}{r'} = \frac{r^2}{r'}$$

und

$$t^* = \sqrt{r^2 + t_\iota^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{r'^2}} = r\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck OPD ist die Kathete $OD =$ der Subnormale n_ι^*;

Figur 42.



die Hypotenuse $PD =$ dem Normalenstück n^* und $\sphericalangle ODP = \mu$; daher folgt:

$$n_\iota^* = r \, cotg \, \mu = r'$$

und

$$n^* = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

Somit hat man:

$$1) \ldots t^* = r \sqrt{1 + \left(r \cdot \frac{d\Theta}{dr}\right)^2}$$

$$2) \ldots n^* = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2}$$

$$3) \ldots t_\iota^* = r^2 \cdot \frac{d\Theta}{dr}$$

und

$$4) \ldots n_\iota = \frac{dr}{d\Theta}.$$

Aufgabe 139. Berechne die Grössen t^*, n^*, t_ι^* und n_ι^* für die archimedische Spirale $r = c\Theta$ (siehe Aufgabe 13, Figur 22).

Auflösung. Da $\frac{dr}{d\Theta} = c$ und $\frac{d\Theta}{dr} = \frac{1}{c}$ ist, erhält man aus obigen Formeln:

$$t^* = \frac{r}{c} \sqrt{r^2 + c^2}; \; n^* = \sqrt{r^2 + c^2}$$

$$t_\iota^* = \frac{r^2}{c} = c\,\Theta^2 \text{ und } n_\iota^* = c.$$

Aufgabe 140. Desgleichen für die logarithmische Spirale $r = e^\Theta$ (s. Aufgabe 14 und Figur 23).

Auflösung. Da hier:

$$\frac{dr}{d\Theta} = e^\Theta = r$$

ist, folgt:

$$t^* = r\sqrt{2}; \; n^* = r\sqrt{2}; \; t_\iota^* = r \text{ und } n_\iota = r.$$

---

4) Uebungsbeispiele zur Bestimmung des Winkels zwischen Radius vektor und der Tangente, der Länge der Tangente, der Subtangente und der Subnormalen eines Punktes einer Kurve in Polarkoordinaten.

Aufgabe 141. Welchen Winkel μ bildet der Radius vektor nach einem Punkt P der Kurve $r\Theta = c$ mit der Tangente in P und wie gross sind die Subtangente t_ι^* und die Subnormale n_ι^*?

Erkl. 45. $r\Theta = c$ ist die Gleichung der hyperbolischen Spiralen. Nehmen wir an, es sei O der Pol, OX die Polachse; P sei ein Punkt der Kurve mit den Polarkoordinaten $OP = r$ und $\sphericalangle POX = \Theta$; endlich sei c eine

Auflösung. Es ist:

$$\frac{d\Theta}{dr} = -\frac{\Theta}{r}$$

$$tg\,\mu = \frac{r\,d\Theta}{dr} = -\Theta$$

also:

$$\mu = arc\,(tg = -\Theta).$$

gegebene Strecke, die wir in O senkrecht auf OX auftragen, so dass $OA = c$ ist; hierauf ziehen wir noch $AB \parallel OX$ und beschreiben den Bogen PQ, dann ist $PQ = r\Theta = c$; d. h. der Bogen von der Polachse bis zum Kurvenpunkt P hat die konstante Länge $c = OA$. Für einen zweiten Kurvenpunkt P_1 (r_1, Θ_1) wird Bogen $P_1Q_1 = r_1\Theta_1 = c$ etc. Für $\Theta = 0$ wird $r = \frac{c}{\Theta} = \infty$. Lassen wir Θ nach und nach wachsen, so wird r immer kleiner und kleiner und für $\Theta = \infty$ wird $r = 0$. Der Punkt P nähert sich daher dem Pol O immer mehr und mehr, ohne ihn je zu erreichen oder mit anderen Worten: die Spirale macht unendlich viel sich immer und mehr verengende Windungen um den Pol O, den sie niemals erreicht (siehe Fig. 43).

Erkl. 46. Um die hyperbolische Spirale, die ihren Namen wegen der Aehnlichkeit ihrer Gleichung mit der Asymptotengleichung der Hyperbel hat, zu zeichnen, beschreibt man um den Pol mit verschiedenen Halbmessern r, r_1, r_2 Bogen, die an der Polarachse OX beginnen und trägt von den Punkten Q, Q_1, Q_2 mittelst kleiner Zirkelweiten die Bogen PQ, P_1Q_1, $P_2Q_2 = c = OA$ ab. Da für den unendlich grossen Halbmesser der Bogen auch noch $= c$ sein muss der letztere aber geradlinig wird, so liegt der unendlich ferne Punkt der Spirale auf der Geraden AB, im Abstand c von OX; welche Asymptote der Spirale ist (s. Figur 43).

Ferner erhält man die Subtangente

$$OE = t_\iota^* = r^2 \cdot \frac{d\Theta}{dr} = -c,$$

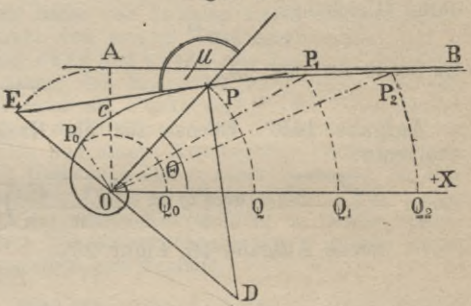
also von konstantem Wert. Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion der Tangente: Mache $OE \perp OP$ und $OE = OA = c$, ziehe EP, so ist diese Gerade die Tangente (siehe Figur 43).

Ferner wird:

$$OD = n_\iota^* = -\frac{r^2}{c}, \quad t^* = \frac{c}{\Theta}\sqrt{1+\Theta^2}$$

$$\text{und } n^* = \frac{c}{\Theta^2}\sqrt{1+\Theta^2}.$$

Figur 43.



Aufgabe 142. Ebenso für die parabolische Spirale $r^2 = c\Theta$.

Auflösung.

$$tg\,\mu = 2\Theta, \text{ also } \mu = arc\,(tg = 2\Theta);$$

$$t^* = 2\sqrt{c\Theta\left(\Theta^2 + \frac{1}{4}\right)},$$

$$n^* = \sqrt{\frac{c}{\Theta}\left(\Theta^2 + \frac{1}{4}\right)}, \quad t_\iota^* = \frac{2r^3}{c},$$

$$n_\iota^* = \frac{c}{2r}.$$

Aufgabe 143. Ebenso für die Kurve Lituus, deren Polargleichung

$$r = \sqrt{\frac{c}{\Theta}}$$

ist.

Erkl. 47. Setzen wir $\Theta = 0$, so wird $r = \infty$; lassen wir Θ wachsen, so wird r immer kleiner und kleiner und der Punkt P nähert sich dem Pol O. Die Spirale macht unzählig viele sich immer mehr und mehr verengende Windungen um den Pol O, den sie nie erreicht. Beschreibt man den Bogen PQ, so ist die Fläche des Sektors $POQ = r^2\Theta = c$, also eine konstante Grösse. Die Kurve wurde zuerst untersucht von Cotes. Harmonia mensurarum 1722. Lituus gleich Krummstab.

Auflösung.

also:

$$tg\,\mu = -2\Theta,$$

$$\mu = arc\,(tg = -2\Theta)$$

$$t^* = 2\sqrt{\frac{c}{\Theta}\left(\Theta^2 + \frac{1}{4}\right)}$$

$$n^* = \sqrt{\frac{c}{\Theta^3}\left(\Theta^2 + \frac{1}{4}\right)}$$

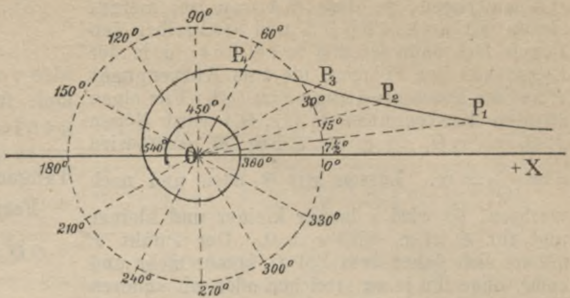
$$t_\iota^* = -\frac{2c}{r}$$

$$n_\iota^* = -\frac{r^3}{2c}.$$

Erkl. 48. Zur Zeichnung der Kurve dienen folgende Werte für $c = 1$:

$\Theta =$	$7\frac{1}{2}^0$	15^0	30^0	60^0	90^0
$r =$	2,76	1,95	1,38	0,98	0,80
$\Theta =$	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0
$r =$	0,69	0,62	0,56	0,52	0,49
$\Theta =$	270^0	300^0	330^0	360^0	450^0
$r =$	0,46	0,44	0,42	0,40	0,36
$\Theta =$	540^0	630^0	720^0		
$r =$	0,33	0,30	0,28.		

Figur 44.



Aufgabe 144. Ebenso für die allgemeine logarithmische Spirale, deren Gleichung:

$$r = ce^{m\Theta}$$

ist (siehe Aufgabe 14).

Auflösung.

$$t_\iota^* = \frac{r}{m}, \quad n_\iota^* = mr.$$

Aufgabe 145. Ebenso für die Kreisevolvente:

$$\Theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - arc\left(tg = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right)$$

(siehe Aufgabe 16, Figur 25).

Auflösung.

$$t^* = \frac{r^2}{a}; \quad n^* = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

$$t_\iota^* = \frac{r}{a}\sqrt{r^2 - a^2}; \quad n_\iota^* = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Aufgabe 146. Suche eine Tangentenkonstruktion für die Conchoide, deren Polargleichung

$$r = \frac{b}{\sin\Theta} + a$$

ist (siehe Aufgabe 54, 96 und 133).

Auflösung. Aus der Polargleichung:

$$r = \frac{b}{\sin\Theta} + a$$

bilden wir:

$$\frac{dr}{d\Theta} = -\frac{b\cos\Theta}{\sin^2\Theta};$$

dieser Wert gibt uns aber auch die Grösse der Polarsubnormalen an und letztere kann daher einfach konstruiert werden wie folgt: OP schneidet die gegebene Gerade g in N; durch N ziehen wir NQ parallel der Ordinatenachse bis zum Schnitt Q mit dem im Pol O auf dem Radius OP errichteten Lot; dann ist OQ die Polarsubnormale und QP die Normale in P; denn:

$$ON = OC : \sin ONC = \frac{b}{\sin\Theta}$$

und

$$OQ = ON \cdot \cot g\, OQN$$

$$= \frac{b}{\sin\Theta} \cdot \cot g\,\Theta = \frac{b\cos\Theta}{\sin^2\Theta}.$$

Ist so PQ gefunden, so gibt das Lot in P die gesuchte Tangente.

Erkl. 49. Es sei eine Gerade g und ausserhalb derselben ein Punkt O gegeben. Eine zweite Gerade drehe sich um diesen Punkt O und es bewege sich auf der letztern ein Punkt P so, dass seine Entfernung PN vom Durchschnittspunkt N der beiden Geraden eine gegebene Grösse a habe. Der geometr. Ort des Punktes P heisst die Conchoide. Wählen wir den Punkt O zum Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, eine Gerade durch O parallel zur gegebenen Geraden g zur Abscissenachse und bezeichnen wir den senkrechten Abstand OC des Punktes O von der Geraden g durch b; so wird, weil $\triangle OCN \sim \triangle OAP$ ist, $CN : OC = OA : AP$; also:

$$CN = \frac{bx}{y}$$

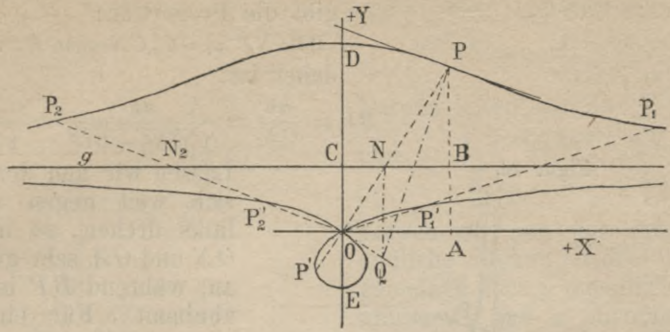
$$NB = CB - CN = x - \frac{bx}{y} = \frac{x}{y}(y - b)$$

$$BP = AP - AB = y - b, \quad NP = a;$$

daher nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$NP^2 = NB^2 + BP^2$$

Figur 45.



oder:

$$a^2 = \frac{x^2}{y^2}(y-b)^2 + (y-b)^2;$$

woraus:

$$a^2 y^2 = (x^2+y^2)(y-b)^2$$

oder:

$$y^4 - 2by^3 + (x^2+b^2-a^2)y - 2bx^2y + b^2x^2 = 0$$

wie in Aufgabe 54, 96, 133.

Durch die Einführung der Polarkoordinaten $x = r\cos\Theta$ und $y = r\sin\Theta$ geht die vorgelegte Gleichung über in:

$$a^2 r^2 \sin^2\Theta = r^2\cdot(r\sin\Theta - b)^2;$$

daraus folgt:

$$r\sin\Theta - b = a\sin\Theta,$$

daher:

$$r = \frac{b}{\sin\Theta} + a,$$

eine Formel, welche aus der Figur hätte direkt abgelesen werden können.

Erkl. 50. Die Konstruktion der Conchoide geschieht einfach dadurch, dass man von O aus eine Reihe von Strahlen zieht und auf jedem Strahl von seinem Durchschnittspunkt mit g nach oben und unten eine konstante Strecke a abträgt; der Endpunkt jeder dieser Strecken ist dann ein Punkt der Kurve. Dieselbe ist gegen die Ordinatenachse OC symmetrisch; der obere und untere Kurvenzweig erstrecken sich der Geraden g immer näher kommend, ins Unendliche, d. h. g ist die Asymptote. Für $a = b$ hat der untere Kurvenzweig in O eine Spitze, für $a > b$ einen Doppelpunkt in O und unter demselben eine Schleife.

Erkl. 51. Die Conchoide hat ihren Namen von ihrer muschelförmigen Form — conchylium (*κογχυλιον*) = Muscheltier. Sie wurde von Nikomedes (150 v. Chr.) gefunden und zur Verdoppelung des Würfels und Dreiteilung des Winkels angewendet.

IV. Die Asymptoten.

1) Analytische Bestimmung der Asymptoten in Cartesischen Koordinaten.

Frage 27. Was versteht man unter einer Asymptote einer ebenen Kurve?

Antwort. Unter einer Asymptote einer Kurve versteht man eine gerade Linie, welche sich derart neben einem sich ins Unendliche erstreckenden Kurvenzweig hinzieht, dass die Entfernung eines Kurvenpunkts von der Geraden unter jede angebbare Grenze heruntersinkt, während dieser Punkt auf dem Kurvenzweig bleibend unbegrenzt weit hinausrückt.

Dass es wirklich Kurven mit Asymptoten gibt, kann sehr leicht an der Conchoide (siehe Figur 45) gezeigt werden. Der Kurvenpunkt P hat von der Geraden g die Entfernung BP. Die Aehn-

Erkl. 52. Das Wort Asymptote stammt aus dem Griechischen und ist zusammengesetzt aus dem verneinenden *α*, aus *συν* = zusammen und *πιπτειν* = fallen.

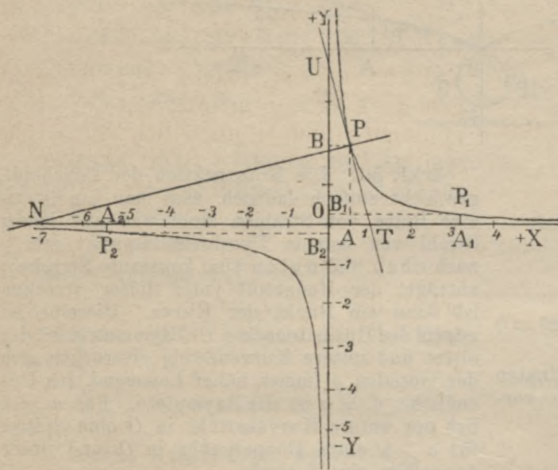
lichkeit der Dreiecke PNB und OCN gibt die Proportion:

$$BP : NP = OC : CN \text{ oder } BP : a = b : CN;$$

daher ist:

$$BP = \frac{ab}{CN} = \frac{ab}{\sqrt{ON^2 - OC^2}} = \frac{ab}{\sqrt{ON^2 - b^2}}.$$

Figur 46.



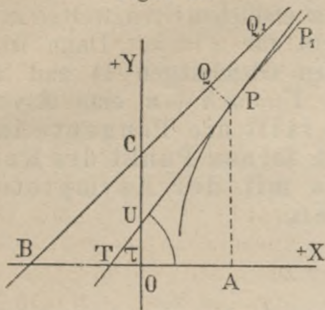
Lassen wir nun den Strahl OP sich weit gegen rechts oder links drehen, so nehmen CN, ON und OA sehr grosse Werte an, während BP immer weiter abnimmt. Für ein unendlich grosses ON wird auch $OA = x$ unendlich; dagegen sinkt BP zu einer unendlichen Grösse herab; d. h. es ist g eine Asymptote der beiden Zweige der Conchoide.

Ein zweites Beispiel für Asymptoten bietet die Hyperbel. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem suchen wir den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Koordinaten x und y der Gleichung $xy = 1$ genügen. Aus $y = \frac{1}{x}$ ersehen wir, dass y immer kleiner wird, je grösser wir x wählen; für ein unendlich grosses x wird y unendlich klein; für sehr grosse negative Werte von x, erhält y sehr kleine negative Werte oder die Kurve erscheint jetzt auf der andern Seite der Abscissenachse; letztere ist also Asymptote. Die nämliche Betrachtung auf $x = \frac{1}{y}$ angewendet, führt zur Erkenntnis, dass die Ordinatenachse eine zweite Asymptote der rechtwinkligen Hyperbel darstellt. Siehe Figur 46. Weitere Beispiele bieten die Figuren 4, 5, 8, 11, 26, 33.

Frage 28. Von welchem andern Gesichtspunkt lässt sich eine Asymptote noch betrachten?

Antwort. Wir nehmen an, eine Kurve $y = f(x)$ besitze einen ins Unendliche sich erstreckenden Kurvenzweig PP_1 und eine Asymptote QQ_1 an den letztern; diese letztere Gerade habe die Gleichung $Y = mX + n$. Nehmen wir auf der Kurve einen Punkt P mit den Koordinaten x und y, so berechnet sich sein Abstand $PQ = a$ von

Figur 47.



Erkl. 53. Die Tangente im unendlich fernen Punkt eines Kurvenzweigs kann nur dann als Asymptote bezeichnet werden, wenn sowohl $\frac{dy}{dx}$ als auch $y - x\frac{dy}{dx}$ bestimmte Grenzen besitzen für $x = \infty$. Ist dies nicht der Fall, so ist die etwa vorhandene Asymptote nicht mehr die Grenzlage der Tangente. Nehmen wir z. B. die Kurve $y = \frac{\sin x}{x}$, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2},$$

daher:

$$\underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{dy}{dx} = 0,$$

denn $\cos x$ und $\sin x$ bewegen sich nur zwischen den Grenzen $+1$ und -1.

Weiter folgt:

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x} - \frac{x\cos x - \sin x}{x} = -\cos x,$$

somit:

$$\underset{x=\infty}{\text{Limes}}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \underset{x=\infty}{\text{Lim.}} \cos x = \text{unbestimmt.}$$

Daraus schliessen wir, dass die Tangente im unendlich fernen Punkt keine bestimmte Grenzlage hat. Andrerseits folgt aus $y = \frac{\sin x}{x}$, dass für wachsende Werte von x die zugehörigen Werte von y immer weiter abnehmen und für ein unendlich grosses x die Ordinate y gegen Null strebt; daraus schliessen wir, dass die Abscissenachse zwar eine Asymptote, aber keine Tangente der Kurve darstellt.

der Asymptote nach der Formel der analytischen Geometrie:

$$a = \frac{y - mx - n}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Daraus leiten wir ab:

$$y = mx + n + a\sqrt{1 + m^2}$$

und

$$\frac{y}{x} = m + \frac{a}{x}\sqrt{1 + m^2}.$$

Lassen wir nun den Punkt P ins Unendliche rücken, wobei x und im allgemeinen auch y unendlich grossen Wert annimmt, und a unendlich klein wird, weil QQ_1 Asymptote ist, so folgt:

$$\underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{y}{x} = m = \underset{x=\infty}{\text{Limes}}\left(m + \frac{a}{x}\sqrt{1 + m^2}\right) = m,$$

denn das zweite Glied $\frac{a}{x}\sqrt{1+m^2}$ verschwindet für $x = \infty$. Nun ist aber nach Differentialrechnung II. Teil in Frage 37:

$$\underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{y}{x} = \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{\frac{dy}{dx}}{1} = \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{dy}{dx};$$

also muss:

$$1) \ldots \text{Limes} \frac{dy}{dx} = m$$

sein für $x = \infty$. Weiter leiten wir aus der Gleichung für a ab:

$$y - mx - a\sqrt{1 + m^2} = n, \text{ also:}$$

$$\underset{x=\infty}{\text{Limes}}\left(y - mx - a\sqrt{1 + m^2}\right) = n,$$

oder da $a\sqrt{1 + m^2}$ verschwindet:

$$\underset{x=\infty}{\text{Limes}}(y - mx) = \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{m - \frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}$$

$$= \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \underset{x=\infty}{\text{Limes}}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = n;$$

also haben wir:

$$2) \ldots \underset{x=\infty}{\text{Limes}}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = n.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x, y)$ an die gegebene Kurve lautet nach Seite 1:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

oder:

$$Y = \frac{dy}{dx}X + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right).$$

Lassen wir nun den Berührungspunkt P ins Unendliche rücken, so wird es für die Tangente im unendlich fernen Punkt P eine Grenzlage geben, wenn sowohl $\frac{dy}{dx}$ als auch $y - x\frac{dy}{dx}$ sich bestimmten endlichen Grenzwerten m bezw. n nähern für $x = \infty$. Dann ist aber nach den Gleichungen 1) und 2) die Gerade $Y = mX + n$ eine Asymptote und es fällt die Tangente im unendlich fernen Punkt des Kurvenzweigs mit der Asymptote zusammen.

Frage 29. Welche Methode zur Bestimmung der Asymptoten lässt sich aus den vorigen Erörterungen gewinnen? (Siehe Figur 47).

Antwort. Um eine Asymptote einer Kurve $y = f(x)$ zu ermitteln, suchen wir zuerst, ob der Wert des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ für $x = \infty$ sich einer bestimmten Grenze m nähert oder nicht. Im letztern Fall hat die Kurve keine Asymptote; im erstern Fall untersuchen wir weiter, ob der Ausdruck $y - x\frac{dy}{dx}$ für $x = \infty$ ebenfalls einen Grenzwert n ergibt. Trifft dies zu, so ist $Y = mX + n$ die Gleichung der Asymptote; ihre Neigung τ gegen die Abscissenachse bestimmt sich durch $tg\tau = m$ und von der Ordinatenachse schneidet sie das Stück $OC = n$ ab. Zur Berechnung des Stückes OT, welches die Tangente im Punkt $P(x, y)$ von der Abscissenachse abschneidet, erhalten wir dadurch, dass wir in der Tangentengleichung:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

die Ordinate $Y_0 = 0$ wählen; dadurch folgt:

$$OT = X_0 = x - y\cdot\frac{dx}{dy}.$$

Lassen wir den Punkt P ins Unendliche hinausrücken und die Tangente in die Asymptote übergehen, so nähert sich dabei der Wert OT dem Wert OB; bezeichnen wir also das Stück OB, welches die Asymptote von der Abscissenachse abschneidet, mit q, so ist offenbar:

$$q = \operatorname*{Limes}_{x=\infty}\left(x - y\cdot\frac{dx}{dy}\right).$$

Bei der Bestimmung der Asymptote empfiehlt es sich, nicht bloss die Grenzwerte m und n, sondern auch den Grenzwert q zu berechnen.

Besitzt die Kurve mehrere Asymptoten, so zeigt dies die Rechnung dadurch, dass die Grenzbestimmung von $\frac{dy}{dx}$ auf eine Gleichung höheren Grades in m führt. Jeder Wurzel m dieser Gleichung kann dann eine Asymptote entsprechen. Ferner ist zu beachten, dass Kurvenzweige auftreten können mit Asymptoten parallel zur Ordinatenachse, so dass für den Berührungspunkt im Unendlichen die Abscisse x endlich und die Ordinate y unendlich gross ist. Solche Asymptoten lässt das seitherige Verfahren vollständig bei Seite liegen; dieselben werden aber leicht dadurch gefunden, dass man die vorhin gelehrte Rechnung nochmals wiederholt für $y = \infty$. Um also keine von den Asymptoten, welche die Kurve wirklich besitzt, zu verfehlen, muss man bei der Bestimmung von den Grössen m, n und q zuerst $x = \infty$ setzen und nachher auch $y = \infty$ setzen. Danach hat man zu bestimmen:

1) . . . $tg\tau = m = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \frac{dy}{dx}$.

2) . . . $OU = n = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$

3) . . . $OT = q = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \left(x - y\frac{dx}{dy}\right)$

und 1*, 2* und 3* wie vorhin für $y = \infty$.

Aufgabe 147. Bestimme die Asymptoten der Kurve $xy = 1$ (siehe Figur 46).

Auflösung. Da $y = \frac{1}{x}$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -y^2$$

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} = 2y$$

$$x - y\frac{dx}{dy} = x + yx^2 = 2x = \frac{2}{y}$$

Daraus erhalten wir:

$$m = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\infty^2} = 0.$$

$$n = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$q = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = 2\,\infty = \infty.$$

d. h. es fällt eine Asymptote mit der Abscissenachse zusammen.

Weiter bekommen wir:

$$m^* = \operatorname*{Limes}_{y=\infty} \frac{dy}{dx} = 2\infty = \infty$$

$$n^* = \operatorname*{Limes}_{y=\infty} \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = 2\cdot\infty = \infty$$

und

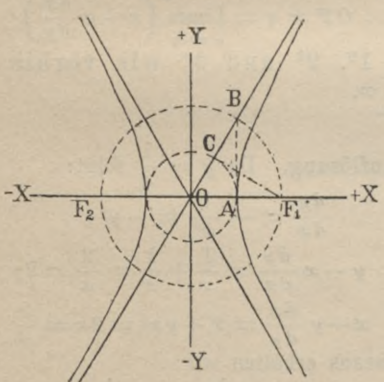
$$q^* = \operatorname*{Limes}_{y=\infty} \left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = \frac{2}{\infty} = 0;$$

woraus wir schliessen, dass auch die Ordinatenachse eine Asymptote der Hyperbel $xy = 1$ ist.

Aufgabe 148. Berechne die Asymptoten der Hyperbel:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

(siehe Aufgabe 5, 8, 66, 105).



Figur 48.

Auflösung. Aus der Gleichung:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

leiten wir zunächst ab:

$$1) \ldots y = \pm \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

aus der wir ersehen, dass für $x = \infty$ auch $y = \infty$ wird und umgekehrt, also bei der Grenzbestimmung von m, n und p nur $x = \infty$ anzunehmen ist. Die Differentiation ergibt:

$$2) \ldots \frac{dy}{dx} = \pm \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}};$$

aus diesem Wert folgt:

$$3) \ldots y - x\frac{dy}{dx} = y \mp \frac{bx^2}{a\sqrt{x^2 - a^2}} = \mp \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

und

$$4) \ldots x - y\cdot\frac{dx}{dy} = x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2}{x}$$

Hieraus gewinnen wir:

$$m = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \frac{dy}{dx} = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \pm \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \pm \frac{b}{a\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} = \pm \frac{b}{a};$$

also gibt es hier für m zwei Grenzwerte, nämlich:

$$m_1 = +\frac{b}{a} \text{ und } m_2 = -\frac{b}{a}.$$

Weiter folgt:

$$n = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \pm \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

d. h. es ist sowohl für das obere Vorzeichen $n_1 = 0$ als auch für das untere Vorzeichen $n_2 = 0$.

Erkl. 54. In Figur 48 ist:

$$OA = a,\ OF_1 = OF_1 = e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Der Kreis um O mit dem Halbmesser e treffe das in A errichtete Lot in B, dann ist:

$$AB^2 = OB^2 - OA^2 = b^2,$$

also:

$$AB = b,\ tg\,AOB = \frac{AB}{OA} = \frac{b}{a};$$

hiernach ist $\sphericalangle AOB = \tau$ und OB die Asymptote. Ebenso beweist man, dass die Tangente von F_1 an den um O mit a beschriebenen Kreis im Schnittpunkt C auf die Asymptote berührt. Der Leser wird hieraus leicht die Konstruktion der Asymptoten finden, wenn die Punkte O, A, F gegeben sind und ebenso die von F_1 aus A und den Asymptoten.

Endlich bekommen wir:

$$q = \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{a^2}{x} = 0.$$

Daraus schliessen wir, dass die Kurve zwei Asymptoten hat, welche beide durch den Koordinatenanfang gehen und von denen die Neigung τ_1 und τ_2 gegen die Abscissenachse sich bestimmen aus:

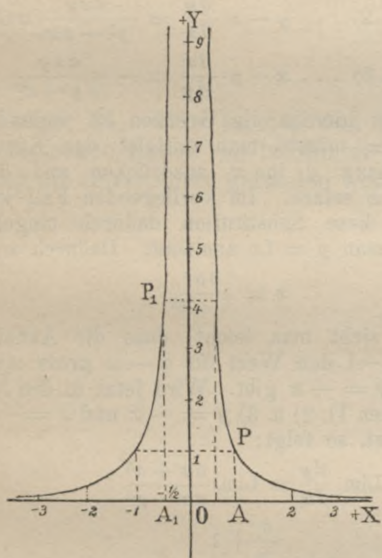
$$tg\,\tau_1 = +\frac{b}{a} \text{ und } tg\,\tau_2 = -\frac{b}{a}.$$

Ihre Gleichungen lauten daher:

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Aufgabe 149. Desgleichen für $x^2y = 1$.

Figur 49.



Auflösung. Aus $x^2y = 1$ folgt:

$$y = \frac{1}{x^2};$$

mit wachsendem x nimmt y immer ab und für $x = \pm\infty$ wird $y = 0$; daher ist die Abscissenachse Asymptote. Ebenso gibt die Betrachtung von

$$x = \pm y^{-\frac{1}{2}},$$

dass für $y = \infty$ der Wert von α der Null zustrebt; es ist demnach die Ordinatenachse eine zweite Asymptote der Hyperbel dritten Grades x und y (siehe Figur 49).

Aufgabe 150. Desgleichen für $y = e^x$ (siehe Aufgabe 29 und Figur 33).

Auflösung. Aus $y = e^x$ erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = e^x = y$$

$$y - x\frac{dy}{dx} = e^x - x \cdot e^x = x \cdot e^x\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$x - y\frac{dx}{dy} = x - 1.$$

Daher:

$$m = \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \frac{dy}{dx} = \infty$$

$$n = \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \infty \text{ und } q = \underset{x=\infty}{\text{Limes}} \left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = \infty;$$

die Tangente im unendlich entfernten Punkt $\begin{matrix} x = \infty \\ y = \infty \end{matrix}$ liegt also ganz im Unendlichen.

Ferner ist auch aus $y = e^x$ ersichtlich, dass für wachsende negative Werte von x die Werte von y abnehmen und für $x = -\infty$ $y = 0$ wird. Daraus schliessen wir, dass die Abscissenachse eine Asymptote der Experimentalkurve $y = e^x$ sein muss.

Aufgabe 151. Desgleichen für das Cartesische Blatt:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(siehe Aufgabe 24, 94, 129 und Figur 26).

Auflösung. Die vorliegende Gleichung gibt durch Differentiation:

$$3x^2\,dx + 3y^2\,dy - 3ay\,dx - 3ax\,dy = 0,$$

woraus folgt:

$$1) \ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$$2) \ldots\; y - x\frac{dy}{dx} = \frac{axy}{y^2 - ax} \text{ und}$$

$$3) \ldots\; x - y\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{axy}{ay - x^2}.$$

Um hieraus die Grenzen zu finden für $x = \infty$ müsste man mittelst der Kurvengleichung y in x ausdrücken und dann $x = \infty$ setzen. Im vorliegenden Fall kann man diese Substitution dadurch umgehen, dass man $y = tx$ annimmt. Dadurch wird:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}.$$

Nun sieht man leicht, dass die Annahme $t = -1$ den Wert für $x - \infty$ gross macht und $y = -x$ gibt. Wird jetzt in den Ausdrücken 1), 2) u. 3) $y = -x$ und $x = -\infty$ gesetzt, so folgt:

$$m = \text{Lim.}\frac{dy}{dx} = \text{Lim.}\frac{ax + x^2}{ax - x^2}$$

$$= \text{Lim.}\frac{\frac{a}{x} + 1}{\frac{a}{x} - 1} = -1, \text{ also } \tau = 135^0;$$

$$n = \text{Limes}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \text{Limes}\frac{ax^2}{ax - x^2} = \text{Limes}\frac{a}{\frac{a}{x} - 1} = -a$$

und

$$q = \text{Limes}\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = \text{Limes} - \frac{ax^2}{ax + x^2} = \text{Limes} - \frac{a}{\frac{a}{x} + 1} = -a.$$

Die Kurve besitzt demnach eine Asymptote BC; sie bildet mit der Abscissenachse einen Winkel von 135^0 und schneidet von jeder Achse das Stück $-a$ ab (siehe Figur 26.)

---

2) Algebraische Bestimmung der Asymptoten in Cartesischen Koordinaten.

Frage 30. Mit welchem Nachteil ist die vorhin gegebene analytische Bestimmung der Asymptoten behaftet?

Antwort. Zur Bestimmung der Grenzwerte m, n und p für unendlich grosse Werte von x (beziehungsweise y) ist es notwendig, die Grössen:

$$\frac{dy}{dx}, \quad y - x\frac{dy}{dx} \text{ und } x - y\frac{dy}{dx}$$

entweder in x (bezw. y) allein auszudrücken. Dies erfordert die Ausrechnung von y in x aus der vorgelegten Kurvengleichung und die Einsetzung des gefundenen Ausdrucks für y in die vorhin genannten Grössen, was oft sehr schwer, noch häufiger aber gar nicht durchzuführen ist. Diese Schwierigkeiten können bei a l g e b r a i s c h e n K u r v e n ganz vermieden werden durch die Anwendung der folgenden Methode.

Frage 31. Wie können von einer algebraischen Kurve von bekannter Gleichung die Asymptoten gefunden werden?

Antwort. Bevor wir die Methode allgemein darstellen, soll dieselbe an einem Beispiele des leichtern Verständnisses wegen erläutert werden. Wir wählen die Kurve, deren Gleichung:

$$y^3 - 2y^2x - yx^2 + 2x^3 + y^2 - 6xy + 5x^2$$
$$- 2y + 2x + 1 = 0$$

lauten soll; die linke Seite ist eine ganze rationale Funktion des dritten Grades in x und y; dieselbe ist geordnet nach Graden; die vier ersten Glieder sind vom III., die drei nächsten vom II., die zwei folgenden vom I. und das letzte Glied ist vom 0 ten Grad, so dass also:

$$y^3 - 2y^2x - yx^2 + 2x^3$$

das Aggregat der Glieder III. Grades vorstellt.

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Gerade $Y = mX + n$ eine Asymptote, d. h. eine Tangente in einem unendlich fernen Punkt der obigen Kurve vorstellt. Soll irgend ein Punkt (x, y) der Kurve auf dieser Geraden liegen, so muss:

$$y = mx + n \text{ oder } m = \frac{y}{x} - \frac{n}{x}$$

sein. Rückt dieser Punkt ins Unendliche, so wird:

$$m = \operatorname*{Limes}_{x=\infty}\left(\frac{y}{x} - \frac{n}{x}\right) = \operatorname*{Limes}_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right),$$

denn $\frac{n}{x}$ verschwindet für x. Um m zu finden, müssen wir also aus der Kurvengleichung den Grenzwert von $\frac{y}{x}$ für $x = \infty$ berechnen. Zu diesem Zweck schreiben wir letztere nach der Division durch x^3:

$$\frac{y^3}{x^3} - 2\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 2 + \frac{1}{x}\left(\frac{y^2}{x^2} - 6\frac{y}{x} + 5\right) + \frac{1}{x^2}\left(-2\frac{y}{x} + 2\right) + \frac{1}{x^3} = 0.$$

Lassen wir jetzt x unendlich gross werden, so ist Limes $\frac{y}{x} = m$ und wenn m eine endliche Grösse ist, so haben die Klammerausdrücke:

$$\frac{y^2}{x^2} - 6\frac{y}{x} + 5 \text{ und } -2\frac{y}{x} + 2$$

endliche Werte, daher verschwinden:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{y^2}{x^2} - 6\frac{y}{x} + 5\right),\ \frac{1}{x^2}\left(-2\frac{y}{x} + 2\right) \text{ und } \frac{1}{x^3} \text{ für } x = \infty;$$

es bleibt demnach nur übrig:

$$\frac{y^3}{x^3} - 2\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 2 = 0$$

oder man hat m zu berechnen aus der Gleichung III. Grades:

$$m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0.$$

Dieselbe hat die drei Wurzeln:

$$m_1 = +1,\ m_2 = -1 \text{ und } m_3 = +2;$$

woraus wir schliessen, dass die Kurve von **drei** verschiedenen Geraden in unendlich fernen Punkten geschnitten wird; die **Richtungen** derselben berechnen sich offenbar aus:

$$tg\,\tau_1 = 1,\quad tg\,\tau_2 = -1 \text{ und } tg\,\tau_3 = +2.$$

Wir benutzen nun zuerst den Wert $m_1 = 1$ und betrachten die Gerade $Y = X + n$. Ihre Schnittpunkte mit der gegebenen Kurve finden wir, indem wir bedenken, dass die Koordinaten x, y eines solchen Schnittpunkts der Gleichung der Geraden sowie jener der Kurve genügen müssen. Setzen wir daher in die letztere $y = x + n$ ein, so berechnen sich die Abscissen der Schnittpunkte aus der Gleichung:

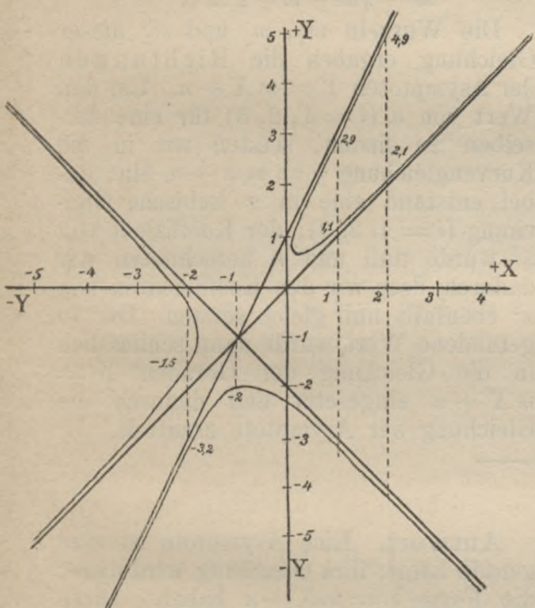
$$(x+n)^3 - 2(x+n)^2 x - (x+n)^2 x + 2x^3 + (x+n)^2 - 6(x+n)x + 5x^2$$
$$- 2(x+n) + 2x + 1 = 0$$

oder aus:

$$0 \cdot x^3 - 2nx^2 + (n^2 - 4n)x + n^3 + n^2 - 2n + 1 = 0.$$

Da der Koëffizient von x^3 Null geworden ist, so ist eine Wurzel x dieser Gleichung ∞, d. h. die Gerade $Y = X + n$ schneidet die Kurve in einem unendlich fernen Punkt, was auch n sein möge. Diese Gerade wird aber die Kurve im Unendlichen berühren, d. h. in zwei zusammenfallenden, unendlich fernen Punkten schneiden, wenn in der obigen Gleichung noch eine weitere Wurzel ∞ wird. Dies tritt ein, wenn der Koëffizient von x^2 auch null ist, d. h. für $n = 0$. Daraus schliessen wir, dass die Gerade $Y = X$ eine Asymptote der Kurve sein muss (siehe Figur 50).

Figur 50.



Nun betrachten wir mit Benutzung des Wertes $m_2 = -1$ die Gerade $Y = -X + n$. Wir finden die Abscissen der Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve, wenn wir in die Kurvengleichung $y = -x + n$ einsetzen, dies führt ausgerechnet zur Gleichung:

$$0 \cdot x^3 + 6x^2(n+2) - x(5n^2 + 8n - 4) + n^3 + n^2 - 2n + 1$$

Weil der Koëffizient von x^3 verschwindet, ist eine Wurzel dieser Gleichung unendlich gross, oder jede Gerade $Y = -X + n$ schneidet die Kurve in einem unendlich fernen Punkt. Unter allen diesen unter sich parallelen Geraden gibt es aber eine, welche die Kurve in jenem Punkt berührt, nämlich jene, für welche noch ein Wurzelwert unendlich und der Koëffizient von x^2 zu null wird. Wir sehen, dass für das n dieser Geraden der Wert -2 genommen werden muss, d. h. $Y = -X - 2$ stellt eine zweite Asymptote der Kurve dar.

Um endlich noch die dritte zu finden mit $m = +2$ bilden wir die Gleichung $Y = 2X + n$ und führen wieder die Substitution $y = 2x + n$ in der Kurvengleichung durch. Dabei erhalten wir:

$$0 \cdot x^3 + 3x^2(n-1) + x(4n^2 - 2n - 2) + n^3 + n^2 + 2n + 1 = 0.$$

Um den Koëffizienten von x^2 verschwinden zu machen, müssen wir $n = 1$ wählen; d. h. die Gleichung der dritten Asymptote ist $Y = 2X + 1$.

Frage 32. Welchen Gang hat danach die Untersuchung bei der Asymptotenbestimmung der Kurve:

$$y^3 - 2y^2x - yx^2 + 2x^3 + y^2 - 6xy + 5x^2 - 2y + 2x + 1 = 0$$

genommen?

Antwort. Aus der Kurvengleichung III. Grades bildete man das Aggregat der Glieder III. Grades, nämlich:

$$y^3 - 2y^2x - yx^2 + 2x^3;$$

dieses wurde durch x^3 dividiert, wobei man:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) + 2$$

erhielt. Nun setzte man $\frac{y}{x} = m$ und bildete die Gleichung:

$$m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0.$$

Die Wurzeln m_1, m_2 und m_3 dieser Gleichung ergaben die Richtungen der Asymptoten $Y = mX + n$. Um den Wert von n_i $(i = 1, 2, 3)$ für eine derselben zu finden, setzten wir in die Kurvengleichung $y = m_i x + n_i$ ein; dabei entstand eine in x kubische Gleichung $(i = 1, 2, 3)$; der Koëffizient von x^3 wurde null und n berechneten wir dadurch, dass wir den Koëffizienten von x^2 ebenfalls null gleich setzten. Der so gefundene Wert wurde dann schliesslich in die Gleichung der Geraden $Y = mX + n$ eingesetzt und dadurch die Gleichung der Asymptote ermittelt.

Frage 33. Es sei $F(x, y)$ eine ganze rationale Funktion vom $r$ten Grad in x und y. Wie können die Asymptoten der Kurve $F(x, y) = 0$ gefunden werden?

Antwort. Eine Asymptote ist eine gerade Linie, ihre Gleichung wird daher die Form $Y = mX + n$ haben. Diese Gerade muss nun, um Asymptote zu sein, mit der Kurve einen Punkt P mit den Koordinaten x und y gemeinschaftlich haben, ferner muss dieser Punkt P im Unendlichen liegen, also (im allgemeinen) $x = \infty$ und $y = \infty$ sein; endlich muss die Gerade in diesem unendlich fernen Punkt die Kurve berühren oder anders ausgedrückt, noch in einem zweiten Punkt treffen, der aber mit dem vorigen Punkt P im Unendlichen zusammenfällt.

Weil der Punkt $P(x, y)$ der Kurve und der Geraden angehören muss, hat man für x und y die Bedingungsgleichungen $F(x, y) = 0$ u. $y = mx + n$. Die letztere ergibt:

$$m = \frac{y}{x} - \frac{n}{x}.$$

Nun soll aber P im Unendlichen liegen, oder $x = \infty$ sein; daher muss m gleich dem Grenzwert angenommen werden, dem sich $\frac{y}{x} - \frac{n}{x}$ nähert für $x = \infty$; also:

$$m = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \left(\frac{y}{x} - \frac{n}{x}\right);$$

weil aber $\frac{n}{x}$ für $x = \infty$ verschwindet, so folgt einfacher:

$$m = \operatorname*{Limes}_{x=\infty} \frac{y}{x}.$$

Diesen Grenzwert können wir nun aus der Kurvengleichung $F(x, y) = 0$ herleiten. Wir ordnen dieselbe, indem wir zuerst die Glieder vom Grade r, dann jene vom Grade $r - 1$ u. s. f. zusammenfassen; dadurch erhält $F(x, y) = 0$ die Form:

$$\begin{aligned} 1) \ldots F(x, y) = {} & a_0 x^r + a_1 x^{r-1} y + a_2 x^{r-2} y^2 + \cdots\cdots\cdots + a_{r-1} x y^{r-1} + a_r y^r \\ & + b_0 x^{r-1} + b_1 x^{r-2} y + b_2 x^{r-3} y^2 + \cdots\cdots\cdots + b_{r-2} x y^{r-2} + b_{r-1} y^{r-1} \\ & + c_0 x^{r-2} + c_1 x^{r-3} y + \cdots\cdots + c_{r-3} x y^{r-3} + c_{r-2} y^{r-2} \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + q_0 x + q_1 y \\ & + \text{konstantes Glied} = 0. \end{aligned}$$

Dividieren wir nun das Ganze mit x^r durch, so folgt:

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \left(\frac{y}{x}\right) + a_2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots + a_{r-1} \left(\frac{y}{x}\right)^{r-1} + a_r \left(\frac{y}{x}\right)^r \\ & + \frac{1}{x}\left[b_0 + b_1 \left(\frac{y}{x}\right) + b_2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots + b_{r-2} \left(\frac{y}{x}\right)^{r-2} + b_{r-1} \left(\frac{y}{x}\right)^{r-1}\right] \\ & + \frac{1}{x^2}\left[c_0 + c_1 \left(\frac{y}{x}\right) + c_2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots + c_{r-3} \left(\frac{y}{x}\right)^{r-3} + c_{r-2} \left(\frac{y}{x}\right)^{r-2}\right] \\ & + \cdots\cdots \\ & + \frac{1}{x^{r-1}}\left[q_0 + q_1 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)\right] \\ & + \frac{1}{x^n} \cdot \text{konstantes Glied} = 0. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun x unendlich gross an, wobei Limes $\frac{y}{x}$ in m übergeht, so wird unter der Voraussetzung, dass dieser Grenzwert endlich ist, der ganze vorige Ausdruck sich vereinfachen und übergehen in:

$$a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{y}{x}\right) + a_2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots + a_{r-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{r-1} + a_r\left(\frac{y}{x}\right)^r = 0;$$

denn die erste Klammer:

$$b_0 + b_1 \cdot \left(\frac{y}{x}\right) + b_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots + b_{r-2}\left(\frac{y}{x}\right)^{r-2} + b_{r-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{r-1}$$

hat, weil Limes $\frac{y}{x}$ endlich ist, ebenfalls endlichen Wert; wird derselbe mit $\frac{1}{x}$ multipliziert, so hat das Produkt den Wert null; das Gleiche gilt von sämtlichen nachfolgenden Gliedern, welche also alle wegfallen. Zur Berechnung von m dient demnach nur die Gleichung:

$$2) \; \ldots \; a_r m^r + a_{r-1} m^{r-1} + a_{r-2} m^{r-2} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0.$$

Ist m_1 eine der r Wurzeln derselben und setzen wir diesen Wert für m in die Gleichung der Geraden $Y = mX + n$ ein, so dass wir die Gleichung:

$$3) \; \ldots \; Y = m_1 X + n$$

erhalten, so bleibt immer noch n zu bestimmen übrig; denn m_1 gibt uns nur die Richtung der Geraden:

$$Y = m_1 X + n$$

an, welche die Eigenschaft hat, die Kurve in einem unendlich fernen Punkt zu schneiden. Wir suchen nun die Punkte zu bestimmen, in welchen die Gerade $Y = m_1 X + n$ bei beliebigem Wert von n die Kurve schneidet.

Die Koordinaten (x, y) eines solchen Schnittpunktes haben die beiden Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $y = m_1 x + n$ zu befriedigen; setzen wir $y = m_1 x + n$ in die erste Gleichung ein, so enthält $F(x, m_1 x + n) = 0$ nur noch die Unbekannte x. Dabei bekommen wir:

$$\begin{aligned} F(x, m_1 x + n) = {} & a_0 x^r + a_1 x^{r-1}(m_1 x + n) + a_2 x^{r-2}(m_1 x + n)^2 + \cdots \\ & \qquad + a_{r-1} x (m_1 x + n)^{r-1} + a_r (m_1 x + n)^r \\ & + b_0 x^{r-1} + b_1 x^{r-2}(m_1 x + n) + b_2 x^{r-3}(m_1 x + n)^2 + \cdots \\ & \qquad + b_{r-2} x (m_1 x + n)^{r-2} + b_{r-1}(m_1 x + n)^{r-1} \\ & + c_0 x^{r-2} + c_1 x^{r-3}(m_1 x + n) + c_2 x^{r-4}(m_1 x + n)^2 + \cdots \\ & \qquad + c_{r-3} x (m_1 x + n)^{r-3} + c_{r-2}(m_1 x + n)^{r-2} \\ & + \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ & + q_0 x + q_1 (m_1 x + n) + \text{konstantes Glied} = 0 \text{ oder geordnet:} \end{aligned}$$

$$x^r\left[a_0+a_1m_1+a_2m_1^2+a_3m_1^3+\cdots+a_{r-1}m_1^{r-1}+a_rm_1^r\right]$$
$$+x^{r-1}\left[a_1n+2a_2n+3a_3n+\cdots+(r-1)a_{r-1}n+ra_rn+b_0+b_1m_1+b_2m_1^2+\cdots+b_{r-2}m_1^{r-2}+b_{r-1}m_1^{r-1}\right]$$
$$+x^{r-2}\left[a_2n^2+3a_3m_1n^2+\cdots+b_1n+\cdots+c_0+c_1m_1+\cdots+c_{r-2}m_1^{r-2}\right]$$
$$+\cdots\cdots=0.$$

Diese Gleichung vom $r$ten Grad in x liefert nun r Werte für x; d. h. die Gerade $Y=m_1X+n$ schneidet die gegebene Kurve in r Punkten. Da aber m_1 so gewählt wurde, dass der Koëffizient von x^r, nämlich:

$$a_0+a_1m_1+a_2m_1^2+\cdots+a_rm_1^r$$

verschwindet, so ist eine dieser r Wurzeln unendlich gross oder die Gerade $Y=m_1X+n$ schneidet die Kurve in einem unendlich fernen Punkt, dem früher erwähnten Punkt P. Soll die genannte Gerade aber in P berühren, so muss noch ein zweiter Wurzelwert unendlich gross werden; die Bedingung dafür ist, dass auch der Koëffizient von x^{r-1} verschwindet; es muss demnach auch:

$$a_1n+2a_2n+3a_3n+\cdots+(r-1)a_{r-1}n+ra_rn+b_0+b_1m+b_2m_1^2+b_3m_1^3+\cdots+b_{r-1}m_1^{r-1}=0$$

sein. Soll demnach die Gerade:

$$Y=m_1X+n$$

eine Asymptote der Kurve darstellen, so hat man der Grösse n den Wert beizulegen:

$$4)\ \ldots\ n=-\frac{b_0+b_1m_1+b_2m_1^2+\cdots+b_{r-1}m_1^{r-1}}{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+r\cdot x_r}.$$

Zu jedem der r Wurzeln $m_1, m_2\cdots m_r$ der Gleichung 2) gehört ein besonderer Wert von n, der sich, wie vorhin gezeigt wurde, aus Gleichung 4) berechnet, wenn nach einander m_1 durch m_2, m_3 u. s. f. ersetzt.

Frage 34. Welches ist darnach die Methode der Asymptotenbestimmung bei algebraischen Kurven, deren Gleichungen ganze rationale Funktionen von x und y sind?

Antwort. Ist die Kurvengleichung vom $r$ten Grad, so hat die Kurve r Asymptoten (von denen aber einige imaginär sein können). Man nimmt aus ihr das Aggregat der Glieder höchster, also $r$ter Ordnung:

$$a_0x^r+a_1x^{r-1}y+\cdots+a_{r-1}xy^{r-1}+y^r$$

heraus; dividiert dasselbe durch x^r, setzt darin $\frac{y}{x} = m$ und bestimmt m aus der Gleichung:

$$a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \cdots + a_{r-1} m^{r-1} + a_r m^r = 0.$$

Ist m eine Wurzel dieser Gleichung, so setzt man $y = mx + n$ in die Gleichung $F(x, y) = 0$, entwickelt nach Potenzen von x und nimmt den Koëffizienten von x^{r-1} gleich Null an. Dadurch gewinnt man die Bestimmungsgleichung für n. Die Asymptote hat dann die Gleichung $Y = mX + n$.

Aufgabe 152. Bestimme die Asymptoten der Kurve:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(siehe Aufgabe 151).

Auflösung. Das Aggregat der Glieder des höchsten Grades, nämlich des dritten ist hier $x^3 + y^3$; wir bildeten daher:

$$\frac{x^3 + y^3}{x^3} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3;$$

setzen $\frac{y}{x} = m$ und suchnn m aus der Gleichung $1 + m^3 = 0$. Letztere gibt:

$$m_1 = -1, \quad m_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i, \quad m_3 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} \cdot i.$$

Daraus ersehen wir, dass die Kurve nur eine reelle Asymptote $Y = -X + n$ hat; die beiden andern sind imaginär. Wenn $y = -x + n$ in $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ eingesetzt wird, folgt:

$$0 \cdot x^3 + 3x^2(n + a) - 3nx(x + a) + n^3 = 0$$

der Koëffizient von x^2 gleich Null gesetzt, gibt $n = -a$; d. h. die Gleichung der Asymptote lautet $Y = -X - a$.

Aufgabe 153. Desgleichen für:

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

(Reuschle, Praxis d. Kurvendiskussion p. 116.)

Auflösung. Aus $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ bilden wir:

$$(x^3 - x^2y - xy^2 + y^3) : x^3 = 1 - \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^3;$$

$\frac{y}{x} = m$ bestimmen wir m aus:

$$1 - m - m^2 + m^3 = 0$$

und erhalten:

$$m_1 = -1, \quad m_2 = +1 \text{ und } m_3 + = 1.$$

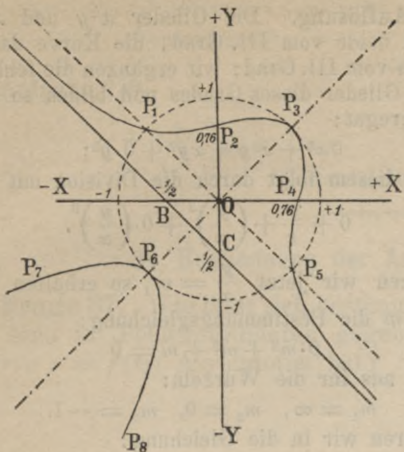
Wird $y = -x + n$ eingesetzt, so erhalten wir:

$$0 \cdot x^3 + 2(2n + 1)x^2 - 2n(2n + 1)x + n^3 + n^2 - 1 = 0,$$

der Koëffizient von x^2 verschwindet, wenn wir

$$n = -\frac{1}{2}$$

Figur 51.



annehmen. Die erste Asymptote besitzt daher die Gleichung:

$$Y = -X - \frac{1}{2}.$$

Die Gleichheit von den beiden Wurzeln m_2 und m_3 deutet darauf hin, dass in der Richtung der Geraden $Y = X + n$ zwei unendlich ferne Punkte liegen. Setzen wir $y = x + n$ in die Kurvengleichung, so liefert uns diese:

$$0 \cdot x^3 + (0 \cdot n + 2)\, x^2 + 2n\,(n+1)\, x + n^3 + n^2 - 1 = 0.$$

Unsere Bedingung für n ist daher:

$$0 \cdot n + 2 = 0 \text{ oder } n = \infty.$$

Die zweite Asymptote — und weil wir für $m = 1$ nur einen Wert für n erhielten — auch die dritte Asymptote haben beide die Gleichung:

$$Y = X + \infty$$

d. h. sie fallen beide ins Unendliche oder die unendlich ferne Gerade hat mit der Kurve eine doppelte Berührung in der Richtung der Geraden $Y = X$.

Frage 35. In welchem Fall versagt das vorige Verfahren?

Antwort. Dasselbe beruht auf der Annahme, dass die Gerade $Y = mX + n$ die Kurve in einem unendlich fernen Punkt berühre, dessen Abscisse x unendlich gross ist.

Diese Annahme ist aber nimmer zutreffend für eine Asymptote, welche auf der Abscissenachse senkrecht steht, für welche daher $m = \infty$ ist.

Hat also die Gleichung 2) in Frage 33, welche uns m liefert, eine unendlich grosse Wurzel, so muss die genauere Lage der betreffenden Asymptote auf anderm Wege ermittelt werden.

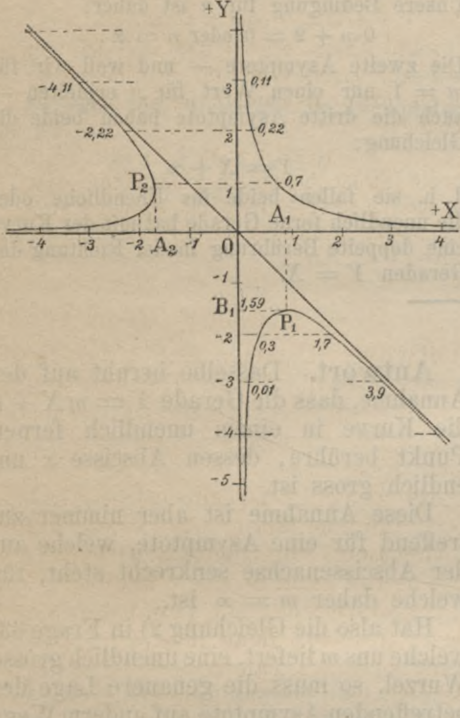
Frage 36. Wie können die zur Abscissenachse senkrechten Asymptoten gefunden werden?

Antwort. Hat die Gleichung 2) für m eine unendlich grosse Wurzel, so muss die zugehörige Asymptote, weil sie zur Ordinatenachse parallel geht, eine Gleichung von der Form $X = q$ besitzen und die Kurve im Punkt $x = q$ und $y = \infty$ berühren. Zur Bestimmung von q führen wir in der Kurvengleichung $F(x, y) = 0$ die Substitution $x = q$ durch und lassen y unendlich werden, aus der dadurch entstehenden Gleichung kann dann q gefunden werden.

Aufgabe 154. Bestimme die Asymptoten der Kurve:

$$x^2y + xy^2 - a^3 = 0.$$

Figur 52.



Auflösung. Die Glieder x^2y und xy^2 sind beide vom III. Grad, die Kurve daher auch vom III. Grad; wir ergänzen die fehlenden Glieder dieses Grades und bilden so das Aggregat:

$$0x^3 + x^2y + xy^2 + 0 \cdot y^3;$$

aus diesem folgt durch die Division mit x^3:

$$0 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 0 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^3.$$

Setzen wir jetzt $\frac{y}{x} = m$, so erhalten wir für m die Bestimmungsgleichung:

$$0 \cdot m^3 + m^2 + m = 0$$

und aus ihr die Wurzeln:

$$m_1 = \infty, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = -1.$$

Führen wir in die Gleichung:

$$0 \cdot x^3 + x^2y + xy^2 + 0y^3 - a^3 = 0$$

die Grösse $y = mx + n$ ein, so bekommen wir:

$$0 \cdot x^3 + nx^2(2m + 1) + n^2x - a^3 = 0$$

Für $m_2 = 0$ gibt das seith. Verfahren $n_2 = 0$.
„ $m_3 = -1$ „ „ „ „ $n_3 = 0$.

Die Kurve besitzt demnach die beiden Asymptoten $Y = 0$, d. h. die Abscissenachse und $Y = -X$, d. h. die Gerade, welche den Winkel zwischen der negativen Abscissenachse und der positiven Ordinatenachse halbiert. Der Wert $m_1 = \infty$ deutet endlich noch auf eine dritte Asymptote, welche auf der Abscissenachse senkrecht steht und eine Gleichung von der Form $X = q$ haben muss. Setzen wir $x = q$ in $x^2y + xy^2 - a^3 = 0$ ein, so folgt $q^2y + qy^2 - a^3$ oder durch y^2 dividiert:

$$q - \frac{q^2}{y} - \frac{a^3}{y^2} = 0.$$

Für $y = \infty$ geht diese Gleichung über in $q = 0$; d. h. die dritte Asymptote fällt mit der Ordinatenachse zusammen.

Uebungsbeispiele.

Aufgabe 155.

$$xy^2 - x + 2y - 1 = 0.$$

Auflösung. Die Kurve hat 3 Asymptoten; deren Gleichungen sind:

$$y = +1, \quad y = -1 \text{ und } x = 0.$$

Aufgabe 156.

$$x^3 - 2xy - y = 0.$$

Auflösung. Die Kurve hat zur Asymptote die Gerade $x = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 157.

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = 0.$$

Auflösung. Die Kurve hat zur Asymptote die Gerade $x = a$.

Aufgabe 158.

$$y^4 - 96\,a^2y^2 + 100\,a^2x^2 - x^4 = 0$$
(Teufelskurve).

Auflösung. Die Kurve hat die beiden Asymptoten $y = +x$ und $y = -x$.

Aufgabe 159.

$$y = a\sqrt{\frac{a-x}{x^2}}.$$

Auflösung. Die Ordinatenachse ist Asymptote der Kurve.

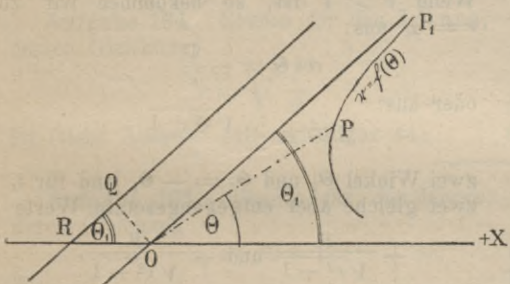
Weitere Beispiele folgen später.

---

3) Bestimmung der Asymptoten in Polarkoordinaten.

Frage 37. Wie lässt sich bestimmen, ob eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = f(\Theta)$ Asymptoten hat?

Figur 53.



Antwort. Hat die Kurve einen (oder mehrere Punkte) im Unendlichen, z. B. den Punkt P_1, so ist der zu P_1 gehörige Radius vektor $OP_1 = r_1$ unendlich lang und wir werden den Winkel Θ_1, den OP_1 mit der festen Geraden OX bildet, erhalten, wenn wir in der Polargleichung $r = f(\Theta)$ für r den Wert ∞ (oder für $\frac{1}{r}$ den Wert 0) setzen. Ist aus dieser Gleichung der Wert von Θ_1 gefunden, so bestimmen wir nun die Länge der Polarsubtangente t_ι^* der Tangente QP_1 in P_1; d. h.:

$$OQ = t_\iota^* = r^2 \cdot \frac{d\Theta}{dr} \text{ für } \begin{cases} r = \infty \\ \Theta = \Theta_1 \end{cases}$$

wobei $OQ \perp OP_1$ sein muss (s. Frg. 26).

Dann ist hier t_ι^* zugleich die Länge des Lotes vom Pol O auf die Asymptote in P_1 und Θ_1 der Winkel, welchen die Asymptote mit der festen Geraden OX bildet, denn liegt P_1 unendlich fern, so ist die Tangente $PQ \parallel P_1O$ und da OQ als Polarsubnormale $\perp OP_1$ ist, so muss auch $OQ \perp P_1Q$ und Winkel $P_1RX = P_1OX = \Theta_1$ werden. Fällt nun der Wert für t_ι^* endlich aus, so hat die Kurve eine Asymptote, dagegen besitzt sie keine, wenn $t_\iota^* = \infty$ oder wenn t_ι^* imaginär ist. Wir zeigen dies an folgenden Beispielen.

Aufgabe 160. Zu untersuchen, ob der durch die Polargleichung:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\Theta}$$

gegebene Kegelschnitt Asymptoten hat.

Auflösung. In der Gleichung:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\Theta}$$

wird r unendlich, wenn der Nenner

$$1 + e\cos\Theta = 0 \text{ oder } \cos\Theta = -\frac{1}{e} \text{ ist.}$$

Mit den obigen Bezeichnungen haben wir für den unendlich fernen Punkt P_1 mit den Polarkoordinaten r_1 und Θ_1 die Werte $r_1 = \infty$,

$$\Theta_1 = arc\left(cos = -\frac{1}{e}\right).$$

Aus:

$$\frac{dr}{d\Theta} = \frac{pe sin\Theta}{(1+e cos\Theta)^2}$$

bilden wir:

$$t_\iota^* = \frac{r^2 d\Theta}{dr} = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\Theta}} = \frac{p}{e sin\Theta} = \frac{p}{\pm e\sqrt{1-cos^2\Theta}};$$

für $\Theta = \Theta_1 = -\frac{1}{e}$ folgt der spezielle Wert:

$$t_\iota^* = \frac{p}{\pm e\sqrt{1-\frac{1}{e^2}}} = \frac{p}{\pm\sqrt{e^2-1}}.$$

Daraus ersehen wir, dass die Subnormale t_ι^* imaginär ist, wenn $e < 1$, d. h. wenn der Kegelschnitt eine Ellipse ist; weiter wird t_ι^* unendlich, wenn $e = 1$ angenommen, d. h. wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist. Ellipse und Parabel haben daher keine Asymptoten. Wenn $e > 1$ ist, so bekommen wir zu $r = \infty$ aus:

$$cos\,\Theta = -\frac{1}{e}$$

oder aus:

$$sin\,\Theta = \pm\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}$$

zwei Winkel Θ_1 und $\Theta_2 = -\Theta_1$ und für t_ι^* zwei gleiche aber entgegengesetzte Werte

$$+\frac{p}{\sqrt{e^2-1}} \text{ und } -\frac{p}{\sqrt{e^2-1}},$$

welche beide reell sind. Hiernach gelangen wir zum Schluss, dass die Hyperbel zwei reelle Asymptoten haben muss.

Aufgabe 161. Es soll die Asymptote der Conchoide, deren Polargleichung:

$$r = \frac{b}{sin\Theta} + a$$

ist, gefunden werden (siehe Aufgabe 146 und Figur 45.

Auflösung. Aus: $r = \frac{b}{sin\Theta} + a$ schliessen wir, dass r unendlich gross wird für $sin\Theta = 0$; d. h. wenn $\Theta = 0^0$ (oder $= 180^0$) ist. Da ferner:

$$t_\iota^* = \frac{(b + a sin\Theta)^2}{b cos\Theta}$$

ist, so erhält t_ι^* für $\Theta = 0$ den Wert b, somit ist die Gerade g Asymptote der Kurve.

Aufgabe 162. Es soll die Asymptote der Cissoide gefunden werden, deren Gleichung:

$$x^3 = y^2(2a - x)$$

ist (siehe Aufgabe 9 und Figur 11).

Auflösung. Wir bilden mit $x = r\,cos\Theta$, $y = r\,sin\Theta$ zuerst aus der gegebenen Gleichung:

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2$$

die Polargleichung und erhalten:

$$r \cos\Theta = 2a \sin^2\Theta$$

oder:

$$r = \frac{2a \sin^2\Theta}{\cos\Theta};$$

hieraus ersehen wir, dass r unendlich wird für $\cos\Theta = 0$, d. h. für $\Theta = 90^0$. Für die Polarsubtangente liefert die Rechnung:

$$t_\iota^* = \frac{2a \sin^3\Theta}{1 + \cos^2\Theta} \text{ und } \Theta = 90^0$$

ergibt den speziellen Wert $t_\iota^* = 2a$. Die Asymptote geht demnach in der Entfernung $2a$ vom Koordinatenumfang auf der Abscissenachse senkrecht.

Uebungsbeispiele.

Aufgabe 163. Die Asymptote der hyperbolischen Spiralen, deren Gleichung $r\Theta = c$ ist, soll bestimmt werden (siehe Aufgabe 141 und Figur 43).

Auflösung. Es wird $r_1 = \infty$ für $\Theta_1 = 0$ und $t_\iota^* = c$; d. h. die Kurve hat eine Asymptote, welche der festen Geraden OX parallel geht in der Entfernung c vom Punkt O.

Aufgabe 164. Ebenso für den Lituus, dessen Gleichung:

$$r = \sqrt{\frac{c}{\Theta}}$$

ist (siehe Aufgabe 143 und Figur 44).

Auflösung. Es wird $r_1 = \infty$ für $\Theta_1 = 0$; für diese Werte wird $t_\iota^* = 0$; die Achse OX ist daher die Asymptote.

Aufgabe 165. Ebenso für die Kurve, deren Gleichung:

$$r = a(tg\Theta - 1)$$

ist.

Auflösung. Die Kurve hat zwei Asymptoten in der Entfernung a vom Pol in den Richtungen $\Theta_1 = 90^0$ und $\Theta_2 = 270^0$.

Aufgabe 166. Ebenso für die Kurve, deren Gleichung:

$$r^2 = a^2 \cdot \frac{\sin^3\Theta}{\cos\Theta}$$

ist.

Auflösung. Die Ordinatenachse ist eine Asymptote.

Aufgabe 167. Ebenso für die Kurve, deren Gleichung:

$$r = \frac{a \cos^2\Theta}{\cos\Theta}$$

ist.

Auflösung. Die Kurve hat zur Asymptoten eine Gerade, welche in der Entfernung $-a$ auf der festen Achse OX senkrecht steht.

Aufgabe 168. Ebenso für die Kurve, deren Gleichung:

$$r = \frac{a}{\cos^2\Theta}$$

ist.

Auflösung. Die Kurve hat zwei Asymptoten, welche die feste Achse OX unter den Winkeln $\Theta_1 = 45^0$ bezw. $\Theta_2 = 135^0$ schneiden in den Entfernungen $\frac{a}{2}$ bezw. $-\frac{a}{2}$ vom Pol O.

Aufgabe 169. Ebenso für die Quadratrix des Dinostratus, welche die Gleichung:

$$\frac{y}{x} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2a}x\right)$$

hat. (Figur und nähere Erklärung folgt bei den Wendepunkten.)

Auflösung. Setzen wir:

$$\frac{y}{x} = tg\Theta \text{ und } x = r\cos\Theta,$$

so folgt die Polargleichung:

$$r = \frac{a\left(1 - \frac{2\Theta}{\pi}\right)}{\cos\Theta}.$$

r wird ∞ für $\Theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$ u. s. w.

$$t_n^* = \frac{a^2\left(1 - \frac{2\Theta}{\pi}\right)^2}{a\left(1 - \frac{2\Theta}{\pi}\right)\sin\Theta - \frac{2a}{\pi}\cos\Theta}$$

nimmt hiermit die Werte an $\pm 2a$, $\pm 4a$, $\pm 6a$ u. s. w. Die Kurve hat also unendlich viele Asymptoten, welche auf der Abscissenachse senkrecht stehen.

V. Pol und Polare.

Frage 38. Es sei wie in Frage 17 $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer algebraischen Kurve vom Grade n, wo n eine ganze Zahl bedeutet und X_0, Y_0 seien die Koordinaten eines ganz beliebigen Punktes P_0 der Ebene. Kommt dann der dort gefundenen Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y - \left(\frac{\partial F}{\partial x}X_0 + \frac{\partial F}{\partial y}Y_0\right) = 0$$

auch eine geometrische Bedeutung zu?

Antwort. Schreiben wir:

$$1) \ldots F(x, y) = 0$$

in der Form:

$$F(x, y) = 0 = u_n + n_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1 + u_0,$$

wobei u_n das Aggregat der Glieder $n$ten Grades, u_{n-1} das Aggregat der Glieder $n-1$ ten Grades u. s. f. sind, so kann, wie in Frage 17 ausgeführt worden ist, die Gleichung:

$$2) \ldots \frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y - \left(\frac{\partial F}{\partial x}X_0 + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot Y_0\right) = 0$$

in die Form:

$$3) \ldots \frac{\partial F}{\partial x}X_0 + \frac{\partial F}{\partial y}Y_0 + u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-2} + \cdots + (n-1)u_1 + n\cdot u_0 = 0$$

gebracht werden.

Da nun vorausgesetzt wurde, die Gleichung $F(x, y) = 0$ sei vom $n$ten Grad, so sind $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ vom Grad $n-1$ in x und y; daraus ersehen wir, dass die ganze Gleich. 2) bezw. 3) vom Grad $n-1$ ist. Dieselbe stellt also geometrisch eine neue Kurve vom Grad $n-1$ vor. Aus der in Frage 16 gegebenen Entwicklung ist ersichtlich, dass die Koordinaten x, y jedes Berührungspunktes einer vom Punkt P_0 an die Kurve $F(x, y) = 0$ gezogenen Tangente der Gleichung 2) Genüge leisten; wir schliessen hieraus, dass die durch die Gleithung 2) dargestellte Kurve durch die $n(n-1)$ Berührungspunkte gehen muss, welche die von P_0 an $F(x, y) = 0$ gezogenen Tangenten ergeben (siehe Figur 17). Wir können aber für ganz beliebige Werte X_0, Y_0 die Gleichung 2) bilden ganz unabhängig davon, ob von dem zugehörigen Punkt P_0 mit den Koordinaten X_0, Y_0 reelle Tangenten an die Kurve möglich sind oder nicht und dann die zum Punkt P_0 gehörige und durch die Gleichung 2) bestimmte Kurve $n-1$ ten Grades untersuchen. Zu diesem Zweck führen wir zwei neue Begriffe ein.

Frage 39. Was versteht man unter dem Pol und was unter der ersten Polaren bei einer algebraischen Kurve n ten Grades? (n eine ganze Zahl.)

Antwort. Es seien X_0, Y_0 die Koordinaten eines beliebigen Punktes P_0 der Ebene und

$$F(x, y) = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1 + u_0 = 0$$

die Gleichung einer Kurve n ten Grades. Dann sagt man, es sei der Punkt P_0 der Pol und die Kurve $n-1$ ten Grades:

$$\frac{\partial F}{\partial x} X_0 + \frac{\partial F}{\partial y} Y_0 + u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \cdots + (n-1)u_{n-1} + nu_0 = 0$$

die zu P_0 gehörige erste Polare bezüglich der gegebenen Kurve n ten Grades $F(x, y) = 0$. Sind vom Pol P_0 reelle Tangenten an die Kurve n ten Grades möglich, so geht die Polare durch die $n(n-1)$ Berührungspunkte.

Aufgabe 170. Die Gleichung der Polaren zu finden für den Pol P_0 (X_0, Y_0) bezüglich des Kreises:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Auflösung. Aus:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

ziehen wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \; u_2 = x^2 + y^2, \; u_1 = 0, \; u_0 = -r^2;$$

daher lautet die Gleichung der Polaren:

$$2xX_0 + 2yY_0 - 2r^2 = 0$$

oder:

$$X_0 x + Y_0 y - r^2 = 0;$$

die Polare ist also eine gerade Linie

Nehmen wir den Pol auf der Abscissenachse an, also $Y_0 = 0$, so erhalten wir einfacher:

$$x = \frac{r^2}{X_0},$$

d. h. eine auf der Abscissenachse senkrechte Gerade.

Für $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$ folgt $x = \infty$; d. h. der Kreismittelpunkt hat zur Polare die unendlich ferne Gerade. Für $X_0 \gtrless {0 \atop r}$, $Y_0 = 0$ ist offenbar $x > r$ oder die Polare liegt ausserhalb des Kreises. Für $X_0 = r$, $Y_0 = 0$, wobei P_0 auf den Kreis fällt, nimmt auch x den Wert r an; d. h. die Polare fällt mit der Tangente in P_0 zusammen und geht in diesem Fall durch ihren Pol. Für $X_0 > r$, $Y_0 = 0$, d. h. für einen Pol ausserhalb des Kreises wird $x < r$ oder die Polare schneidet den Kreis. Endlich liefert $X_0 = \infty$, d. h. der unendlich ferne Punkt der Abscissenachse die Polare $x = 0$, oder der zur Abscissenachse senkrechte Durchmesser ist die Polare ihres unendlich fernen Punktes.

Erkl. 55. Die Theorie der Kreispolaren findet der Leser ausführlich behandelt in Kleyer-Sachs, Lehrbuch der Geometrie und Cranz, Lehrbuch der analytischen Geometrie, II. Teil.

Aufgabe 171. Die Gleichung der Polaren zu finden für den Pol $P_0(X_0, Y_0)$ bezüglich der Parabel:

$$y^2 = 2px.$$

Auflösung. $F(x, y) = y^2 - 2px = 0$ liefert:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2p, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

$$u_2 = y^2, \quad u_1 = -2px, \quad u_0 = 0;$$

daher folgt als Polarengleichung:

$$-2pX_0 + 2Y_0 y - 2px = 0$$

oder die Gleichung der Geraden:

$$px - Y_0 y + pX_0 = 0.$$

Für den Pol $X_0 = -\frac{p}{2}$, $Y_0 = 0$, d. h. für die Koordinate des Brennpunktes folgt:

$$x = -\frac{p}{2};$$

dies ist aber die Gleichung der Direktrix; in der Parabel hat demnach der Brennpunkt zur Polare die Direktrix.

Erkl. 56. Da für einen Kegelschnitt die Gleichung $F(x,y) = 0$ vom zweiten Grad ist, so ist die Gleichung der Polaren für jeden Kegelschnitt vom ersten Grad; die Polare ist daher für diese Kurven eine gerade Linie.

Näheres über die Polaren der Parabel, Ellipse und Hyperbel wolle der Leser nachschlagen in Cranz, Analytische Geometrie.

Der Leser wird gebeten für die Aufgaben 170, 171, 172 und 173 nachzuschlagen Aufgaben 1, 6, 7 und 8.

Aufgabe 172. Wie lautet die Gleichung der Polaren des Pols $P_0(X_0, Y_0)$ bezüglich der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0?$$

(Siehe Figur 32.)

Auflösung. Weil hier:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ist, so haben wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad u_2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

$$u_1 = 0, \quad u_0 = -1;$$

die Polarengleichung ist hiernach:

$$\frac{2X_0 x}{a^2} + \frac{2Y_0 y}{b^2} - 2 = 0$$

oder einfacher:

$$\frac{X_0 x}{a^2} + \frac{Y_0 y}{b^2} - 1 = 0.$$

Aufgabe 173. Desgleichen bezüglich der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

(siehe Figur 54).

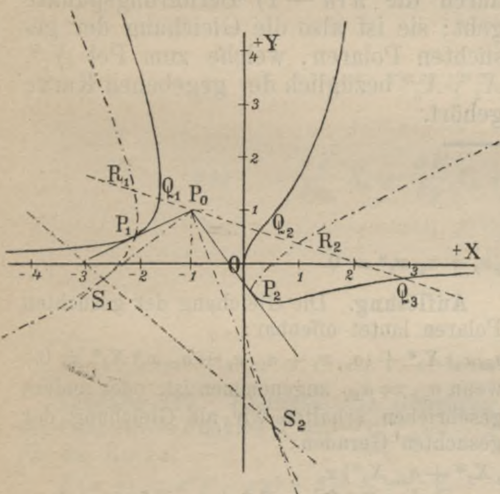
Auflösung. Gerade wie oben folgt:

$$\frac{X_0 x}{a^2} - \frac{Y_0 y}{b^2} - 1 = 0.$$

Aufgabe 174. Bestimme die Gleichung der ersten Polaren des Punktes $P_0 (X_0 = -1, Y_0 = -1)$ in Bezug auf die Kurve:

$$x^2 y + y^2 - x = 0.$$

Figur 54.



Auflösung. Die Kurvengleichung:

$$F(x, y) = x^2 y + y^2 - x = 0$$

ergibt:

$$u_3 = x^2 y, \quad u_2 = y^2, \quad u_1 = -x, \quad u_0 = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2y;$$

daher lautet die Polarengleichung:

$$(2xy - 1) X_0 + (x^2 + 2y) Y_0 + y^2 - 2x = 0$$

oder mit den gegebenen Werten für $X_0 = -1$ und $Y_0 = -1$:

$$x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y - 1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, $R_1 P_1 S_1 R_2 P_2 S_2$, welche die gegebene Kurve dritten Grades in den beiden reellen Punkten P_1 und P_2 schneidet; die vier anderen Schnittpunkte sind imaginäre. Von P_0 gehen demnach an die gegebene Kurve die beiden reellen Tangenten $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ (siehe Figur 54). Für die Hyperbel ist $S_1 S_2$ die Polare des Punktes P_0.

Frage 40. Wie lautet die Gleichung der ersten Polaren in homogenen Koordinaten?

Antwort. Es habe die vorgelegte Kurve in homogenen Koordinaten die Gleichung:

$$1^{*}) \ldots f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

und die Koordinaten des Pols P_0 seien mit X_1^*, X_2^*, X_3^* bezeichnet. Dann müssen zunächst die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Berührungspunkts jedenfalls der Gleichung 1*) Genüge leisten. Ferner müssen die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Berührungspunkts und jene des auf der zugehörigen Tangente liegenden Punktes P_0, d. h. X_1^*, X_2^*, X_3^*, gleichzeitig die allgemeine Tangentengleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3 = 0$$

befriedigen (siehe Frage 13). Daraus folgt, dass zwischen den genannten sechs Koordinaten die Beziehung erfüllt sein muss:

$$2^{*}) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_1} X_1^{*} + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2^{*} + \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3^{*} = 0.$$

Ist nun wie seither der Punkt P_0 ein fester, so haben X_1^{*}, X_2^{*}, X_3^{*} bestimmte Werte, während die Koordinaten x_1, x_2, x_3 veränderlich sind. Ist die Gleichung 1*) vom $n$ten Grad, so hat die Gleichung 2*) offenbar den Grad $n-1$ in den Veränderlichen x_1, x_2 und x_3; d. h. sie stellt die Gleichung einer Kurve $n-1$ten Grades dar, welche durch die $n(n-1)$ Berührungspunkte geht; sie ist also die Gleichung der gesuchten Polaren, welche zum Pol X_1^{*}, X_2^{*}, X_3^{*} bezüglich der gegebenen Kurve gehört.

Aufgabe 175. Man bestimme die Gleichung der Polaren des Punktes X_1^{*}, X_2^{*}, X_3^{*} in Bezug auf den Kegelschnitt:

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0.$$

(Siehe Aufgabe 23.)

Auflösung. Die Gleichung der gesuchten Polaren lautet offenbar:

$$(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) X_1^{*} + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) X_2^{*} + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) X_3^{*} = 0,$$

wenn $a_{ik} = a_{ki}$ angenommen ist, oder anders geschrieben erhalten wir als Gleichung der gesuchten Geraden:

$$(a_{11} X_1^{*} + a_{12} X_2^{*} + a_{13} X_3^{*}) x_1 + (a_{21} X_1^{*} + a_{22} X_2^{*} + a_{23} X_3^{*}) x_2$$
$$+ (a_{31} X_1^{*} + a_{32} X_2^{*} + a_{33} X_3^{*}) x_3 = 0.$$

Aufgabe 176. Ebenso in Bezug auf die Kurve III. Ordnung:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{112} x_1^3 + 3 a_{112} x_1^2 x_2 + 3 a_{113} x_1^2 x_3 + 3 a_{122} x_1 x_2^2 + 6 a_{123} x_1 x_2 x_3 + 3 a_{133} x_1 x_3^2$$
$$+ a_{222} x_2^3 + 3 a_{223} x_2^2 x_3 + 3 a_{233} x_2 x_3^2 + a_{333} x_3^2.$$

Auflösung. Hier wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3 (a_{111} x_1^2 + 2 a_{112} x_1 x_2 + 2 a_{113} x_1 x_3 + a_{122} x_2^2 + 2 a_{123} x_2 x_3 + a_{133} x_3^2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3 (a_{112} x_1^2 + 2 a_{122} x_1 x_2 + 2 a_{123} x_1 x_3 + a_{222} x_2^2 + 2 a_{223} x_2 x_3 + a_{233} x_3^2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 3 (a_{113} x_1^2 + 2 a_{123} x_1 x_2 + 2 a_{133} x_1 x_3 + a_{223} x_2^2 + 2 a_{233} x_2 x_3 + a_{333} x_3^2).$$

Geordnet und mit 3 durchdividiert erhalten wir als Gleichung der Polaren des Punktes $X_1^{*} X_2^{*} X_3^{*}$:

$$(a_{111} X_1^{*} + a_{112} X_2^{*} + a_{113} X_3^{*}) x_1^2 + 2 (a_{112} X_1^{*} + a_{122} X_2^{*} + a_{123} X_3^{*}) x_1 x_2$$
$$+ 2 (a_{113} X_1^{*} + a_{123} X_2^{*} + a_{133} X_3^{*}) x_1 x_3 + (a_{122} X_1^{*} + a_{222} X^{*}_2 + a_{223} X_3^{*}) x_2^2$$
$$+ 2 (a_{123} X_1^{*} + a_{223} X_2^{*} + a_{233} X_3^{*}) x_2 x_3 + (a_{133} X_1^{*} + a_{233} X_2^{*} + a_{333} X_3^{*}) x_3^2 = 0.$$

Man nennt diesen Kegelschnitt auch die konische Polare des Punktes P_0 in Bezug auf die gegebene Kurve dritten Grades. Ueber ihre Eigenschaften siehe Cranz, Analytische Geometrie.

Frage 41. Nach welcher anderen Methode kann man für eine Kurve $F(x, y) = 0$ in Cartesischen Koordinaten x und y die Gleichung der Polaren zu einem gegebenen Pol X_0, Y_0 auch noch erhalten?

Antwort. Wie in Frage 14 bildet man aus $F(x, y) = 0$ zuerst die homogene Gleichung:

$$1^*) \ldots f(x_1, x_2, x_3) = 0;$$

dann bildet man aus der letzteren die Polarengleichungen:

$$2^*) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_1} X_1^* + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2^* + \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3^* = 0$$

und setzt hierauf in der letzteren:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = 1;\ X_1^* = X_0,\ X_2^* = Y_0 \text{ und } X_3^* = 1.$$

Hiebei kommt man dann auf die Gleichung:

$$2\text{a}) \ldots \frac{\partial F}{\partial x} X_0 + \frac{\partial F}{\partial y} Y_0 + u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + (n-1) u_2 + n u_0 = 0,$$

wenn in $F(x, y) = 0$ u_{n-1} die Gesamtheit der Glieder $n-1$ ten Grades, n_{n-2} jene $n-2$ ten Grades u. s. w. ist. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel:

Aufgabe 177. Bestimme die Gleichung der Polaren des Punktes $X_0 = -1$, $Y_0 = -2$ für die Kurve:

$$F(x, y) = x^3 y - xy^3 + 2y^2 - x = 0.$$

Auflösung. Wir setzen $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ in $F(x, y) = 0$ ein und multiplizieren mit x_3^4 durch; dadurch erhalten wir:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3 + 2x_2^2 x_3^2 - x_1 x_3^3 = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - x_3^3,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + 4x_2 x_3^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 4x_2^2 x_3 - 3x_1 x_3^2.$$

Die Gleichung der Polaren ist hiernach in homogenen Koordinaten:

$$(3x_1^2 x_2 - x_2^3 - x_3^2) X_1^* + (x_1^3 - 3x_1 x_2 + 4x_2 x_3^2) X_2^* + (4x_2^2 x_3 - 3x_1 x_3^2) X_3^* = 0$$

und in Cartesischen Koordinaten:

$$(3x^2 y - y_3 - 1) X_0 + (x^3 - 3xy^2 + 4y) Y_0 + 4y^2 - 3x = 0.$$

Demnach für $X_0 = -1$ und $Y_0 = -2$:

$$2x^3 + 3x^2 y - 6xy^2 - y^3 - 4y^2 + 4y + 3x - 1 = 0.$$

Uebungsbeispiele.

Aufgabe 178. Suche die Polare für den Punkt $P_0 (X_0 = 4,\ Y_0 = 4)$ in Bezug auf den Kreis:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13.$$

Auflösung.

$$3x + 2y = 20.$$

Aufgabe 179. Ebenso für den Pol P_0 ($X_0 = 4$, $Y_0 = 5$) in Bezug auf den Kreis:

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y = 8.$$

Auflösung.

$$5x + 6y = 48.$$

Aufgabe 180. Suche die Koordinaten des Pols X_0, Y_0 der Polaren $Ax + By + C = 0$ in Bezug auf den Kreis:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Auflösung.

$$X_0 = -\frac{Ar^2}{C}, \quad Y_0 = -\frac{Br^2}{C}.$$

Aufgabe 181. Suche den Koordinaten X_0, Y_0 des Pols der Geraden $3x + 4y = 7$ in Bezug auf den Kreis:

$$x^2 + y^2 = 14.$$

Auflösung.

$$X_0 = 6, \quad Y_0 = 8.$$

Aufgabe 182. Ebenso für die Gerade $2x + 3y = 7$ in Bezug auf den Kreis:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12.$$

Auflösung.

$$X_0 = -11, \quad Y_0 = -16.$$

Aufgabe 183. Suche die Gleichung der Polaren für den Pol $X_0 = 5$, $Y_0 = 4$ bezüglich der Ellipse:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$$

(Siehe Aufgabe 28 und Figur 32.)

Auflösung.

$$5x + 9y - 9 = 0.$$

Aufgabe 184. Ebenso für den Pol $X_0 = 3$, $Y_0 = 2$ bezüglich der Parabel:

$$y^2 = 2x.$$

Auflösung.

$$x - 2y + 3 = 0.$$

Aufgabe 185. Ebenso für den Pol $X_0 = 1$, $Y_0 = -2$ bezüglich der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Auflösung.

$$9x + 32y - 144 = 0.$$

Aufgabe 186. Beweise, dass bei jedem Kegelschnitt jede durch den Pol gehende Gerade die Kurve in zwei Punkten schneidet, welche zum Pol und zum Schnittpunkt der Polaren harmonisch liegen.

Aufgabe 187. Beweise, dass bei jedem Kegelschnitt die Polaren sämtlicher Punkte einer Geraden durch einen festen Punkt gehen, welcher der Pol dieser festen Geraden ist.

B. Der Lauf ebener Kurven.

I. Das Steigen und Fallen.

Frage 42. Wie lässt sich aus der Gleichung $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ einer auf ein Cartesisches Koordinatensystem bezogenen Kurve beurteilen, ob die Kurve steigt oder fällt?

Antwort. Gehen wir von einem beliebigen Kurvenpunkt P aus mit der Abscisse x und der Ordinate $y = f(x)$, so wird die Kurve in P steigen, wenn zu einer grösseren Abscisse $x_1 = x + h$

eine grössere Ordinate $y_1 = f(x+h)$ eines Punktes P' gehört und demnach $y_1 - y = f(x+h) - f(x)$ für einen noch so kleinen Wert von h positiv ist. Dann muss aber auch wegen des positiven h der Wert des Bruches:

$$\frac{y_1 - y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

positiv sein und es auch noch bleiben für $h = 0$, d. h. es muss auch $f'(x)$ positiv sein. Dagegen wird die Kurve im Punkt P fallen, wenn die Ordinate $y_1 = f(x+h)$ des Nachbarpunktes P' mit der um h grösseren Abscisse $x_1 = x + h$ kleiner als $y = f(x)$ ist. Hiermit erhalten in diesem Fall für das gegen Null strebende h die Brüche:

$$\frac{y_1 - y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

und somit auch $f'(x)$ negative Werte.

Wir schliessen darnach auf den Satz:

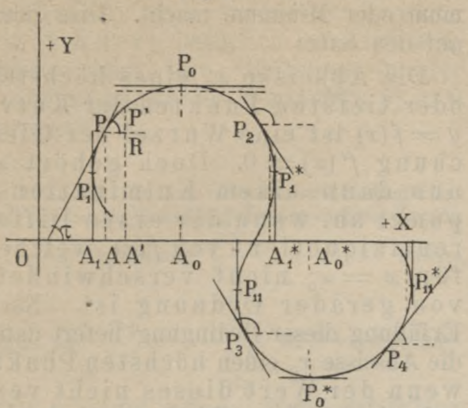
Die Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, steigt, solange $y' = f'(x)$ positiv bleibt; sie fällt dagegen, solange $y' = f'(x)$ negative Werte hat. (Siehe auch Differentialgleichung II. Teil, Satz 53.)

Hat die gegebene Kurve die Gleichung $F(x, y) = 0$, so bilden wir:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

und wenden dann den soeben ausgesprochenen Satz an.

Figur 55.



Erkl. 57. Bekanntlich ist für den Punkt P:

$$y' = f'(x) = tg\,\tau,$$

wo τ den Neigungswinkel der Tangente gegen die positive Seite der Abscissenachse bedeutet. Für positive Werte von y' ist der Winkel τ zwischen 0 und 90^0 gelegen, während negative Werte von y' Winkel ergeben zwischen 90^0 und 180^0. Man findet nun leicht geometrisch bestätigt, dass die Kurve in P steigt, wenn $0 < \tau < 90^0$; dass sie dagegen fällt, wenn $90^0 < \tau < 180^0$ ist (siehe Figur 55). In den Punkten P und P_4 ist die Kurve steigend, dagegen in P_2 und P_3 fallend.

Erkl. 58. In dem nebenstehenden Satz ist von der Funktion $y = f(x)$ oder $F(x, y)$ vorausgesetzt, dass sie und ihre erste Ableitung endlich und stetig sei, wenigstens in dem Gebiet von x, welches dem zu untersuchenden Kurvenzweig entspricht.

II. Die äussersten Punkte einer Kurve.

Frage 43. Wie erhält man die höchsten und tiefsten Punkte einer Kurve in Bezug auf die Abscissenachse, wenn die Gleichung der Kurve in der entwickelten Form $x = f(x)$ vorliegt?

Antwort. Die Ordinate y_0 eines höchsten Punktes P_0 ist, verglichen mit den Ordinaten der links und rechts benachbarten Punkte, die grösste, dagegen ist die Ordinate y_0^* eines tiefsten Punktes P_0^* die kleinste; wir erhalten also die Abscisse x_0 eines höchsten oder tiefsten Punktes der Kurve $y = f(x)$ als einen Wert der Veränderlichen x, welcher

Erkl. 59. Wenn für $x = x_0$ der Wert von $f'(x)$ zu Null wird, so ist im zugehörigen Punkt $P(x_0, y_0)$ die Tangente parallel zur Abscissenachse wegen $tg\,\tau = 0$, d. h. die durch diesen Punkt P parallel der Abscissenachse gezogene Gerade schneidet die Kurve in zwei zusammenfallenden Punkten. Zu dieser Klasse von Punkten gehören nun nicht nur die höchsten und tiefsten Punkte C und C^*, sondern auch die Wendepunkte mit horizontalen Tangenten (siehe Differentialrechnung II. Teil, Figur 50 u. 51, Seite 150), sowie die Doppelpunkte und mehrfachen Punkte; alle diese besonderen Punkte werden durch die nachfolgende Bedingung ausgeschieden. Näheres darüber folgt in späteren Abschnitten.

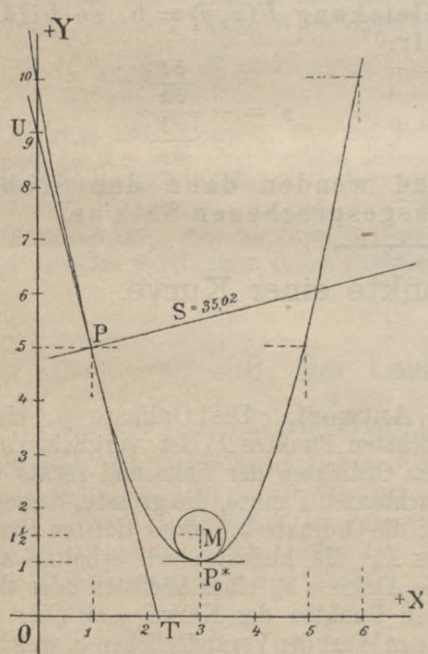
Erkl. 60. Von der Funktion $y = f(x)$ ist vorausgesetzt, dass sie nebst ihren in Betracht kommenden Ableitungen für $x = x_0$ u. s. w. endlich und stetig sei.

die Funktion $y = f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum macht. Dies führt auf den Satz:

Die Abscisse x_0 eines höchsten oder tiefsten Punktes der Kurve $y = f(x)$ ist eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$. Doch gehört x_0 nur dann einem Kulminationspunkt an, wenn der erste Differentialquotient von $f(x)$, welcher für $x = x_0$ nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist. Nach Erfüllung dieser Bedingung liefert dann die Abscisse x_0 einen höchsten Punkt, wenn der Wert dieses nicht verschwindenden Differentialquotienten **ungerader** Ordnung für $x = x_0$ **negativ** ist; andernfalls ergibt x_0 einen **tiefsten** Punkt der Kurve (s. Differentialrechnung II. Teil, Seite 151). Die zu x_0 gehörige Ordinate y_0 findet man schliesslich aus der Gleichung $y_0 = f(x_0)$ der gegebenen Kurve.

Aufgabe 188. Untersuche den Lauf der Kurve, deren Gleichung $y = x^2 - 6x + 10$ ist.

Figur 56.



Auflösung. Aus der Kurvengleichung ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-3);$$

es wird also $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ negativ für alle Werte von x, welche kleiner als 3 sind; positiv $x > 3$ und $= 0$ für $x = 3$. Daraus schliessen wir, dass die Kurve, welche von der positiven Ordinatenachse ein Stück $= 10$ abschneidet, fällt bis zum Punkt P_0^*, dessen Abscisse $x_0 = 3$ und dessen Ordinate $y_0 = 1$ ist; für die letztere erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\tau = 0.$$

Die Tangente geht parallel zur Abscissenachse, und wegen $\frac{d^2y}{d^2x} = 2$ ist P_0^* ein tiefster Punkt, von dem aus die Kurve steigt und zwar bis ins Unendliche. Es ist also P_0^* der Scheitel der Parabel, von der wir leicht weitere Punkte erhalten können.

Setzen wir z. B. $y = 5$, so liefert die Kurvengleichung die Werte $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$, d. h. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 5 \end{cases}$ und $\begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 5 \end{cases}$ sind zwei Punkte der Parabel (siehe Figur 56).

Frage 44. Wie erhält man die höchsten und tiefsten Punkte einer Kurve bezüglich der Abscissenachse, wenn ihre Gleichung in der nichtentwickelten Form $F(x, y) = 0$ vorliegt?

Antwort. Nach der Differentialrechnung II. Teil, Frage 129, müssen die beiden zusammengehörigen Werte x_0, y_0, welche einem Maximum oder Minimum entsprechen, berechnet werden aus den zwei Gleichungen:

$$F(x, y) = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Dabei gehört x_0, y_0 einem Maximum an oder hier einem höchsten Punkt, wenn dieses Wertepaar, in die Ausdrücke $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ eingesetzt, den letzteren gleiche Vorzeichen geben. Werden dagegen die Vorzeichen dieser beiden Ausdrücke verschieden, so bedeuten x_0, y_0 die Koordinaten eines Minimums oder eines tiefsten Punktes.

Erkl. 61. In der nebenstehenden Regel ist vorausgesetzt, dass die gefundenen Koordinaten x_0, y_0 die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ nicht befriedigen und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ nicht verschwindet für $x = x_0$ und $y = y_0$. Würde der letztere Fall eintreten, so müsste $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ u. s. w. untersucht werden.

Erkl. 62. Wenn x_0, y_0 die drei Gleichungen:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

befriedigen, so ist der Punkt $P(x_0, y_0)$ ein besonderer Punkt der Kurve. (S. darüber später.)

Frage 45. Wie erhält man bezüglich der Ordinatenachse die nächsten und die fernsten Punkte einer Kurve aus ihrer Gleichung $y = f(x)$?

Antwort. In solchen Punkten wie P_1 und $P_1{}^*$ der Figur 55 steht die Tangente auf der Abscissenachse senkrecht oder es ist daselbst: $\tau = 90^0$ u. $tg\tau = \infty$. Vorausgesetzt, dass die Kurve $y = f(x)$ endlich und stetig verläuft, erhalten wir also die Abscisse x_0 eines nächsten oder fernsten Punktes durch Auflösung der Gleichung $f'(x) = \infty$ oder $\frac{1}{f'(x)} = 0$.

Die Entscheidung, ob x_0 zu einem nächsten oder zu einem fernsten Punkt gehört, liefert die Ueberlegung, dass für ein beliebig kleines h bei einem nächsten Punkt die Abscisse $x_0 - h$ keine reelle Ordinate ergibt, und dass ebenso bei einem fernsten Punkt die Abscisse $x_0 + h$ auf imaginäre Werte der Ordinaten führen muss, weil die betreffenden Parallelen zur Achse Y die Kurve nimmer schneiden.

Frage 46. Wie erhält man bezüglich der Ordinatenachse die nächsten und fernsten Punkte einer Kurve aus ihrer Gleichung $F(x, y) = 0$?

Antwort. Da $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ ist und für die angedeuteten Punkte:

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\tau = \infty$$

werden muss, so haben die Koordinaten x_0, y_0 eines besagten Punktes den beiden Gleichungen zu genügen:

$$F(x, y) = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Dabei darf nicht zugleich $\frac{\partial F}{\partial x}$ für $x = x_0$ und $y = y_0$ verschwinden.

Die weitere Behandlung ist die nämliche wie in Frage 44 unter Vertauschung von y mit x, $\frac{dy}{dx}$ mit $\frac{dx}{dy}$ u. s. w.

Aufgabe 189. Suche die äussersten Punkte der Kurve, deren Gleichung:

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$$

ist.

Auflösung. Wir bilden aus:

$$F(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$$

zuerst:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - 2).$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung verschwindet für $x = 2$. Daraus schliessen wir, dass sowohl der höchste als auch der tiefste Punkt die Abscisse $x = 2$ besitzen; die zugehörigen Ordinaten liefert die gegebene Gleichung, wenn in ihr $x = 2$ angenommen wird, nämlich $y_0 = 5$ und $y_0^* = 1$, oder P_0 hat die Koordinaten:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 5 \end{cases} \text{ und } P_0^* \begin{cases} x_0^* = 2 \\ y_0^* = 1 \end{cases}.$$

Weiter folgt aus $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - 3)$, dass der nächste und fernste Punkt auf einer Parallelen zur Abscissenachse in der Höhe $y = 3$ liegen. Setzt man diesen Wert in die gegebene Gleichung ein, so erhalten wir für die Abscissen $x_1 = 0$ und $x_1^* = 4$, oder die Koordinaten des nächsten Punktes P_1 sind:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 3 \end{cases} \text{ und des fernsten Punktes } P_1^* \begin{cases} x_1^* = 4 \\ y_1^* = 3 \end{cases}.$$

Schreiben wir die Gleichung 1) in der Form:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 4 = 0,$$

so sehen wir, dass die zugehörige Kurve ein durch die vier gefundenen Punkte gehender Kreis ist vom Halbmesser $r = 2$ und den Mittelpunktskoordinaten: $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$.

Der Leser wird gebeten, die Zeichnung selbst anzufertigen.

Aufgabe 190. Bestimme die äussersten Punkte der Kurve, deren Gleichung:

$$4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 = 0.$$

Auflösung. Für den höchsten Punkt erhält man: $\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 5 \end{cases}$, für den tiefsten: $\begin{cases} x_0^* = 4 \\ y_0^* = 1 \end{cases}$; für den nächsten an der Ordinatenachse: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}$ und für den fernsten: $\begin{cases} x_1^* = 7 \\ y_1^* = 3 \end{cases}$.

Die Kurvengleichung in die Form:

$$4(x-4)^2 + 9(y-3)^2 - 36 = 0$$

oder in die Form:

$$\frac{(x-4)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} - 1 = 0$$

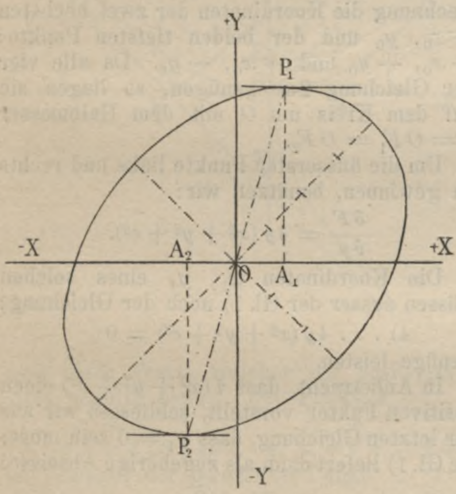
gebracht, zeigt, dass die Kurve eine Ellipse sein muss mit dem Mittelpunkt $\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 3 \end{cases}$ und den Halbachsen 3 und 2.

Der Leser wird gebeten, die Zeichnung selbst zu entwerfen.

Aufgabe 191. Desgleichen für die Kurve, deren Gleichung:

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 - 288 = 0.$$

Figur 57.



Auflösung. Für den höchsten Punkt P_1 erhält man: $\begin{cases} x_0 = +0{,}99 \\ y_0 = +3{,}54 \end{cases}$, für den tiefsten P_2: $\begin{cases} x_0^* = -0{,}99 \\ y_0^* = -3{,}54 \end{cases}$; ferner für den am meisten nach links liegenden Q_1: $\begin{cases} x_1 = -3{,}54 \\ y_1 = -0{,}99 \end{cases}$ und für den entferntesten rechts Q_2: $\begin{cases} x_1^* = +3{,}54 \\ y_1^* = +0{,}99 \end{cases}$.

Die Kurve ist eine Ellipse mit den Halbachsen 3 und 4; letztere hat eine Neigung von 45^0 gegen die Abscissenachse.

(S. Differentialrechnung II. Teil, Erkl. 216.)

Die äussersten Punkte links und rechts, Q_1 und Q_2, sind in der Figur 57 nicht eingezeichnet. Der Leser wird gebeten, dieselben nachzutragen.

Aufgabe 192. Untersuche den Lauf der Kurve, deren Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$$

ist.

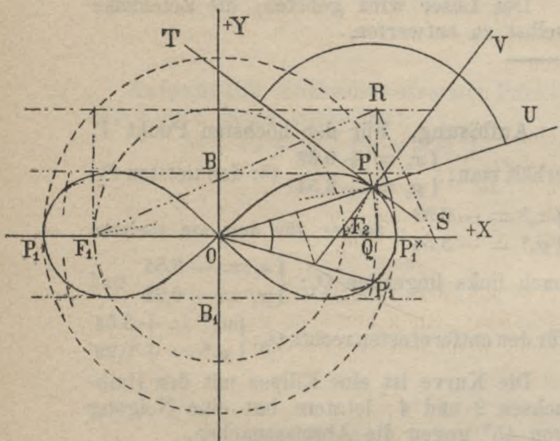
(L e m n i s c a t e, siehe die Aufgaben 15 und 98.)

Auflösung. Die Gleichung der Kurve:

$$1) \ldots F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$$

lässt erkennen, dass die Kurve Symmetrie zeigen muss bezüglich der Abscissenachse, denn sie enthält nur x^2 und nicht x allein; das Gleiche gilt in Bezug auf die Ordinatenachse; ist also der Punkt P mit den Koordinaten x und y ein Punkt der Kurve, so gehören auch die drei Punkte mit den

Figur 58.



Koordinaten $x, \; -y; \; -x, \; y$ und $-x, \; -y$ der Kurve an. Ferner zeigt sich, dass die Kurvengleichung durch die Werte $x = 0$ und $y = 0$ befriedigt wird; die Kurve geht demnach durch den Ursprung O.

Zur Bestimmung der höchsten und tiefsten Punkte bilden wir nun:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2 - c^2).$$

Die Koordinaten x_0 und y_0 eines solchen müssen also der Gleichung 1) genügen, sowie der Gleichung:

$$2) \ldots 4x(x^2 + y^2 - c^2) = 0$$

oder der Gleichung:

$$2\text{a}) \ldots x^2 + y^2 = c^2,$$

weil hier x von Null verschieden sein muss.

Setzen wir diesen Ausdruck in die Gl. 1) ein, so ergibt sie:

$$3) \ldots x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2}.$$

Aus Gl. 2a) und 3) erhalten wir nun:

$$x_0 = \frac{c}{2}\sqrt{3} \text{ und } y_0 = \frac{c}{2}$$

als die Koordinaten eines höchsten Punktes P_0. Mittels dieser Werte folgen ohne weitere Rechnung die Koordinaten der zwei höchsten $-x_0, \; y_0$ und der beiden tiefsten Punkte: $+x_0, \; +y_0$ und $-x_0, \; -y_0$. Da alle vier der Gleichung 2a) genügen, so liegen sie auf dem Kreis um O mit dem Halbmesser $c = OF_1 = OF_2$.

Um die äussersten Punkte links und rechts zu gewinnen, benützen wir:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2 + c^2).$$

Die Koordinaten $x_1, \; y_1$ eines solchen müssen ausser der Gl. 1) noch der Gleichung:

$$4) \ldots 4y(x^2 + y^2 + c^2) = 0$$

Genüge leisten.

In Anbetracht, dass $4(x^2 + y^2 + c^2)$ einen positiven Faktor vorstellt, schliessen wir aus der letzten Gleichung, dass $y_1 = 0$ sein muss; die Gl. 1) liefert dann als zugehörige Abscisse:

$$x_1 = c\sqrt{2};$$

d. h. die äussersten Punkte P_1 und $P_1{}^*$ liegen links und rechts auf der Abscissenachse in der Entfernung $c\sqrt{2}$ von O entfernt. (Konstruktion siehe Erkl. 31.) Hiermit sind sechs Punkte der Kurve gefunden. Um den Lauf derselben noch genauer festzustellen, schreiten wir zur Bildung von:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{x[c^2 - (x^2 + y^2)]}{y(c^2 + x^2 + y^2)}.$$

Für positive Werte von y hat der Nenner positiven Wert und $\frac{dy}{dx}$ ist dann positiv, solange bei positivem x der Ausdruck:

$$c^2 - (x^2 + y^2)$$

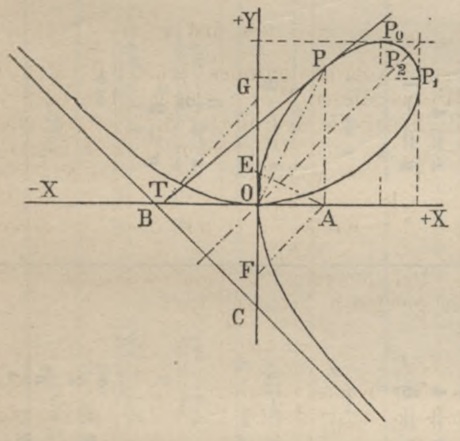
positiv bleibt. Daraus schliessen wir nach Obigem, dass die Kurve steigt von O bis P_0 und dann fällt von P_0 bis P_1^*. Das Verhalten in den übrigen Teilen ergibt die Symmetrie gegen die beiden Achsen. Das genauere Verhalten der Kurve im Punkt O wird später untersucht.

Aufgabe 193. Bestimme die äussersten Punkte des Descartesschen Blattes, dessen Gleichung:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

ist (siehe die Aufgaben 24, 94, 129, 151, 152).

Figur 59.



also einen Wert, welcher bei positivem a stets negativ bleibt. Der Punkt P_0:

$$x_0 = a\sqrt[3]{2} = 1{,}26\,a, \quad y_0 = a\sqrt[3]{4} = 1{,}59\,a$$

ist demnach der höchste Punkt.

Um die grössten Werte zu ermitteln, welche die Abscissen der Kurve erreichen können, setven wir: $\frac{dy}{dx} = \infty$, was auf die Bedingungsgleichung $1 - 2t^3 = 0$ führt; woraus:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}, \quad x_1 = a\sqrt[3]{4} \text{ und } y_1 = a\sqrt[3]{2}$$

folgt. Der Punkt P_1 mit diesen Koordinaten x_1, y_1 des begrenzten Kurvenstücks ist also am weitesten von der Ordinatenachse entfernt (siehe Figur 59).

Auflösung. Hier ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

Die Koordinaten vom höchsten und tiefsten Punkt müssen demnach der Bedingung genügen:

$$\frac{dy}{dx} = 0 = x^2 - ay,$$

eine Gleichung, in welcher ausser der Veränderlichen x auch noch y vorkommt. Um nun die Wurzeln x_i zu ermitteln, welche dieser Gleichung genügen, müsste man aus der Kurvengleichung:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

und aus der letzten Gleichung y herausschaffen. Einfacher aber gelangt man zum Ziele, wenn man nach der Substitution $x = yt$, welche:

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \text{ und } y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

macht, wie in Erkl. 34 und Aufgabe 151.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = 0$$

setzt. Hierbei erhält man:

$$t(2 - t^3) = 0;$$

d. h. es muss $t = 0$ oder $2 - t^3 = 0$ sein.

Aus $t = 0$ folgt $x = 0$, $y = 0$, ein Wertepaar von keiner Bedeutung, weil für diese Werte auch $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ werden.

Aus $2 - t^3 = 0$ folgt ohne weiteres:

$$t = \sqrt[3]{2},$$

daher auch:

$$x = a\sqrt[3]{2} \text{ und } y = a\sqrt[3]{4}.$$

Setzen wir diesen Wert ein in die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3},$$

so erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a},$$

Schluss dieser Auflösung s. neben.

Uebungsbeispiele.

Zur Bestimmung der höchsten und tiefsten, sowie der am weitesten links und rechts gelegenen Punkte einer Kurve.

	Höchst	Tiefst	Links	Rechts
Aufgabe 194. $x^2+y^2-4=0$	$x=0$, $y=+2$	$x=0$, $y=-2$	$x=-2$, $y=0$	$x=+2$, $y=0$
Aufgabe 195. $x^2-2x+y^2-2y-2=0$	$x=1$, $y=3$	$x=+1$, $y=-1$	$x=3$, $y=1$	$x=-1$, $y=1$
Aufgabe 196. $x^2-3x+y^2-6y+10\frac{1}{4}=0$	$x=1\frac{1}{2}$, $y=4$	$x=1\frac{1}{2}$, $y=2$	$x=\frac{1}{2}$, $y=3$	$x=2\frac{1}{2}$, $y=3$
Aufgabe 197. $4x^2+9y^2-36=0$	$x=0$, $y=+2$	$x=0$, $y=-2$	$x=-3$, $y=0$	$x=+3$, $y=0$
Aufgabe 198. $4x^2-32x+y^2-2y+61=0$	$x=4$, $y=3$	$x=4$, $y=-1$	$x=+3$, $y=+1$	$x=+5$, $y=1$
Aufgabe 199. $9x^2-25y^2-225=0$	—	—	$x=-5$, $y=0$	$x=+5$, $y=0$
Aufgabe 200. $25x^2-200x-y^2+4y+171=0$	—	—	$x=1$, $y=2$	$x=+7$, $y=2$
Aufgabe 201. $4x^2-20x-3y+41=0$	—	$x=\frac{5}{2}$, $y=2$	—	—
Aufgabe 202. $y=ax-x^2$	$x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a^2}{4}$	—	—	—

	Höchst	Tiefst	Links	Rechts
Aufgabe 203. $x^2 + y^2 - 2mxy - a^2 = 0$	$x = \frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$ $y = \frac{a}{\sqrt{1-m^2}}$	$x = -\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$ $y = -\frac{a}{\sqrt{1-m^2}}$	$x = -\frac{a}{\sqrt{1-m^2}}$ $y = -\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$	$x = \frac{a}{\sqrt{1-m^2}}$ $y = \frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$
Aufgabe 204. $y = x^3 + 6x^2 - 15x$	$x = -5$ $y = 100$	$x = 1$ $y = -8$	—	—
Aufgabe 205. $y = x(a-x)^2$	$x = \frac{1}{3}a$ $y = \frac{4}{27}a^3$	$x = a$ $y = 0$	—	—
Aufgabe 206. $y = (x-1)(2-x)^2$	$x = \frac{4}{3}$ $y = \frac{4}{27}$	$x = 2$ $y = 0$	—	—
Aufgabe 207. $(y-x)^3 + x + 6 = 0$	$x = -6 - \frac{1}{9}\sqrt{3}$ $y = -6 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$	$x = -6 + \frac{1}{9}\sqrt{3}$ $y = -6 - \frac{2}{9}\sqrt{3}$	—	—
Aufgabe 208. $x^2y + x + y - 1 = 0$ (siehe Figur 70, Seite 115)	$x = -0{,}4$ $y = 1{,}2$	$x = 2{,}4$ $y = -0{,}2$	—	—
Aufgabe 209. $y^2 = \frac{(2x-3p)^2 \cdot (2x-p)}{32p}$	$x = \frac{5}{6}p$ $y = \frac{1}{9}p\sqrt{3}$	$x = \frac{5}{6}p$ $y = -\frac{1}{9}p\sqrt{3}$	$x = \frac{p}{2}$ $y = 0$	$x = \frac{3}{2}p$ $y = 0$

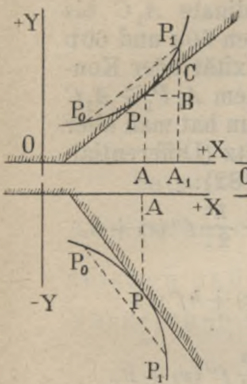
	Höchst	Tiefst	Links	Rechts
Aufgabe 210. $y = \frac{x\sqrt{2ax - x^2}}{a}$	$x = \frac{3}{2}a$ $y = \frac{3}{4}\sqrt{3}$	—	—	—
Aufgabe 211. $x^4 - x^2y^2 + y^3 = 0$	—	$x = \pm 2\sqrt{2}$ $y = 4$	—	—
Aufgabe 212. $x^2 - ax^3 + y^2 = 0$	$x = \frac{3}{4}$ $y = \frac{3a^2}{16}\sqrt{3}$	—	—	—
Aufgabe 213. $x^4 - 36x^2 + 216y = 0$ (siehe Figur 71)	—	$x = 0$ $y = 0$	—	—
Aufgabe 214. $y = \sin x$	$x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ etc. $y = 1$	$x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$ etc. $y = -1$	—	—
Aufgabe 215. $y = \cos x$	$x = 0, 2\pi, 4\pi$ etc. $y = 1$	$x = \pi, 3\pi, 5\pi$ etc. $y = -1$	—	—
Aufgabe 216. $y = tg\,x$	$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ etc. $y = \infty$	—	—	—
Aufgabe 217. $y = l\,\frac{1+x}{1-x}$	—	—	$x = -1$ $y = \infty$	$x = +1$ $y = \infty$

III. Konvexität, Konkavität und Wendepunkte.

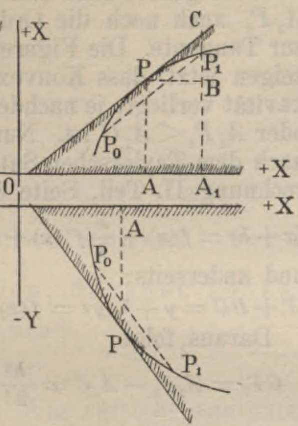
Frage 47. Welche zwei Fälle können beim Steigen und Fallen einer Kurve bezüglich der Abscissenachse unterschieden werden?

Antwort. Wenn die Kurve steigt, so kann sie der Abscissenachse entweder die erhabene Seite zuwenden wie in der Figur 60a, oder die hohle, wie in der Figur 60b. Ebenso kann beim Fallen der Kurve die erhabene oder die hohle Seite der Achse zugekehrt sein, wie in den Figuren 61a und 61b. Wir sagen nun, ein Bogen P_0PP_1 sei in Bezug auf eine Gerade — hier die X-Achse — konvex oder er wende der Geraden die konvexe Seite zu, wenn er zwischen der Sehne P_0P_1 und der Achse liegt, wie in den Figuren 60a und 61a; dagegen heisst der Bogen konkav oder der Achse die konvexe Seite zuwendend, wenn die Sehne zwischen dem Bogen und der Achse hindurchgeht, wie in den Figuren 60b und 61b.

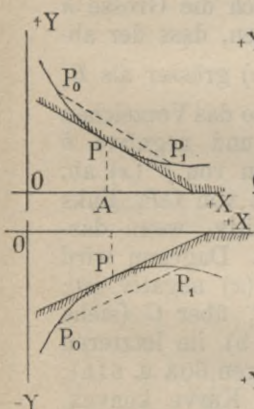
Figur 60a.



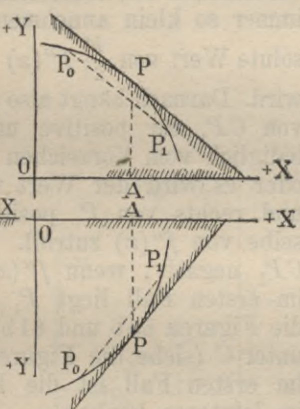
Figur 60b.



Figur 61a.



Figur 61b.

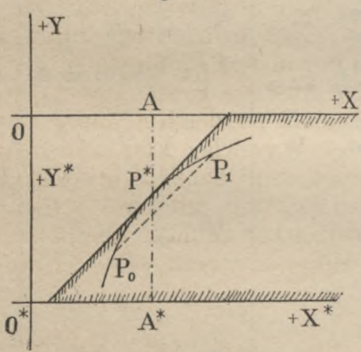


Frage 48. Welches ist das geometrische Kennzeichen dafür, ob eine Kurve in der nächsten Umgebung eines gegebenen Punktes in Bezug auf die Abscissenachse konvex oder konkav ist?

Antwort. Die Kurve ist im Punkt P konvex, wenn sie in der nächsten Umgebung von P ganz innerhalb des stumpfen Winkels gelegen ist, welchen die Tangente in P mit der Abscissenachse bildet, wie in den Figuren 60a und 61a. Dagegen ist die Kurve in P konkav, wenn sie sich ganz innerhalb des spitzigen Winkels befindet, wie in den Figuren 60b und 61b.

Frage 49. Wie lässt sich analytisch entscheiden, ob eine Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ sein soll, im Punkt P mit den Koordinaten x und y konvex oder konkav ist?

Figur 62.



Antwort. Wir nehmen die unendlich kleine Grösse h zur Bildung der Abscisse $x_1 = x + h$ des Punktes P_1 in nächster Nähe von P. Zur gleichen Abscisse gehört dann ausser der Ordinate $A_1 P_1$ auch noch die Ordinate $A_1 C$ bis zur Tangente. Die Figuren 60a und 60b zeigen jetzt, dass Konvexität oder Konkavität vorliegt, je nachdem $A_1 P_1 > A_1 C$ oder $A_1 P_1 < A_1 C$ ist. Nun hat man aber nach dem Taylorschen Satz (Differentialrechnung II. Teil, Seite 82):

$$A_1 P_1 = f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + R_3$$

und anderseits:

$$A_1 C = AP + BC = y + h\, tg\tau = f(x) + h f'(x).$$

Daraus folgt:

$$CP_1 = A_1 P_1 - A_1 C = \frac{h^2}{2!} f''(x) + R_3.$$

Vorausgesetzt, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ von Null verschieden ist, lässt sich die Grösse h immer so klein annehmen, dass der absolute Wert von $\frac{h^2}{2!} f''(x)$ grösser als R_3 wird. Darnach hängt also das Vorzeichen von CP_1 für positive und negative h lediglich vom Vorzeichen von $f''(x)$ ab, oder es wird der Wert von CP_1 links und rechts von P_1 positiv, wenn dasselbe von $f''(x)$ zutrifft. Dagegen wird CP_1 negativ, wenn $f''(x)$ negativ ist; im ersten Fall liegt P_1 über C (siehe die Figuren 60b und 61b), im letzteren unter C (siehe die Figuren 60a u. 61a); im ersten Fall ist die Kurve konvex, im letzteren konkav.

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die Ordinate y positiv ist. Trifft dies nimmer zu wie im Punkt P^* der Figur 62, so verschieben wir die Abscissenachse parallel zu sich selbst um ein genügend grosses Stück $OO^* = c$, so dass P^* über die neue Abscissenachse OX^* zu liegen kommt und die neue Ordinate $A^* P^*$ positiv wird. Die Figur zeigt nun, dass die Kurve in P^* gegen $O^* X^*$ konkav ist, wenn sie der Achse OX die konvexe Seite zuwendet und umgekehrt.

Im System $X^* O^* Y^*$ hat die Kurve wegen $y^* = y + c$ die Gleichung:

$$y^* = f(x) + c.$$

Die Kurve ist also gegen die neue Abscissenachse konkav und gegen die frühere konvex, wenn:

$$\frac{d^2 [f(x) + c]}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$$

negativ ist; ferner gegen die neue konvex und gegen die frühere konkav, wenn:

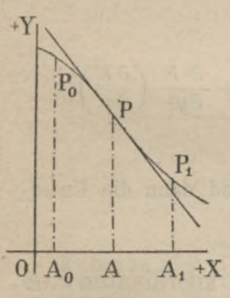
$$\frac{d^2 [f(x) + c]}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$$

positiv ist. Daraus folgt der

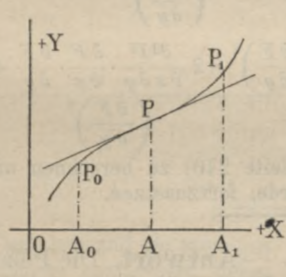
Satz. Eine Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ ist gegen die Abscissenachse konvex, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ gleiche Vorzeichen haben; dagegen konkav, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ von ungleichen Vorzeichen sind.

Frage 50. Was versteht man unter einem Wendepunkt einer Kurve?

Figur 63.



Figur 64.



Antwort. Bisher haben wir nur Bogen betrachtet, auf welchen $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ das Vorzeichen beibehalten hat, d. h. für alle Punkte des betrachteten Bogens positiv gewesen ist im Fall der Konvexität und negativ im Fall der Konkavität. Nun nehmen wir an, dass auf einem Bogen $P_0 P P_1$ für einen Punkt P_0 mit der Abscisse $x - h$ sehr nahe links vom Punkt P mit den Koordinaten x und y $f''(x)$ das Vorzeichen Plus habe, dagegen für einen sehr nahe rechts von P gelegenen Punkt P_1 mit der Abscisse $x + h$ das Vorzeichen Minus, oder umgekehrt links Minus und rechts Plus; dass also:

$$f''(x-h) > 0, \quad f''(x+h) < 0$$

oder:

$$f''(x-h) < 0 \text{ und } f''(x+h) > 0.$$

Dann wird die Kurve, welche links von P konvex ist, rechts von P konkav (s. Figur 63 u. 64) oder umgekehrt. Die Kurve macht in P eine Wendung oder Inflexion, und der Punkt P, in dem der Uebergang von der Konvexität zur Konkavität (oder umgekehrt) sich vollzieht, heisst Wendepunkt oder Inflexionspunkt.

Frage 51. Wie lassen sich aus der Gleichung $y = f(x)$ einer Kurve die Koordinaten der Wendepunkte bestimmen?

Antwort. Wenn bei einer stetigen Aenderung von x die Werte der Funktion $f''(x)$ vom Positiven zum Negativen übergehen sollen oder umgekehrt vom Negativen zum Positiven, so muss für einen gewissen Wert von x die Funktion $f''(x)$ entweder Null oder unendlich gross werden. Die Abscisse x eines Wendepunkts muss hiernach entweder $f''(x)$ zu Null oder zu unendlich machen. Ferner müssen wegen des Uebergangs von Konkavität zu Konvexität oder umgekehrt bei hinreichend kleiner Wahl der Grösse h die beiden Funktionswerte $f''(x-h)$ und $f''(x+h)$ entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Wir schliessen daraus auf den

Satz. Um die Wendepunkte der Kurve $y = f(x)$ zu erhalten, suche man die Werte von x, für welche $f''(x)$ Null oder unendlich gross wird. Bezeichnet x einen solchen Wert, so berechne man für eine sehr kleine Grösse h die Werte $f''(x-h)$ und $f''(x+h)$. Dann ist x die Abscisse eines Wendepunkts, wenn entweder $f''(x-h) > 0$ und $f''(x+h) < 0$ oder $f''(x+h) < 0$ und $f''(x+h) < 0$ ist. Bekommen dagegen $f''(x-h)$ und $f''(x+h)$ das gleiche Vorzeichen, so ist der zu x gehörige Punkt kein Wendepunkt.

Zusatz. Ist die Gleichung der Kurve in der nicht entwickelten Form $F(x, y) = 0$ gegeben, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

oder:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

(siehe Haas, Differentialrechnung II. Teil, Seite 240) zu berechnen und dann die Untersuchung, wie im obigen Satz angegeben wurde, fortzusetzen.

Frage 52. Wie geschieht die Bestimmung der Wendepunkte bei einer Kurve, welche durch die Gleichung:

$$r = \Phi(\Theta)$$

in Polarkoordinaten gegeben ist?

Antwort. Die Polarkoordinaten r, Θ können in rechtwinklige x und y übergeführt werden durch die Gleichungen:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Nach Aufgabe 319 der Differentialrechnung II. Teil, Seite 259, ist dann:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\cdot\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - r\cdot\frac{d^2r}{d\Theta^2}}{\left(\cos\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta} - r\sin\Theta\right)^3}.$$

Für einen Wendepunkt muss $\frac{dy^2}{dx^2}$ entweder gleich Null oder gleich unendlich sein; hierzu ist erforderlich, dass der Zähler des vorliegenden Bruches entweder den Wert Null oder den Wert unendlich hat. Daraus leiten wir ab den

Satz. Die Polarkoordinaten r, Θ eines Wendepunktes einer Kurve, welche durch eine Polargleichung $r = \Phi(\Theta)$ gegeben ist, müssen den Ausdruck:

$$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - r \cdot \frac{d^2 r}{d\Theta^2}$$

zu Null oder zu unendlich machen.

Aufgabe 218. Ist die Kurve mit der Gleichung:

$$y = x^2 - 6x + 10$$

gegen die Abscissenachse konvex oder konkav?

(Siehe Aufgabe 188 und Figur 56.)

Auflösung. Da $f''(x) = 2$ ist, hat $f''(x)$ für alle Abscissen positiven Wert; die vorliegende Parabel ist demnach im ganzen Verlauf konvex und hat keine Wendepunkte.

Aufgabe 219. Bestimme den Lauf der Kurve mit der Gleichung:

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$$

in Bezug auf Konvexität und Konkavität.

(Siehe die Aufgaben 32, 72, 114.)

Auflösung. Die Kurvengleichung liefert:

$$f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x-2}{y-3};$$

daraus folgt:

$$f''(x) = -\frac{(x-2)^2 + (y-3)^2}{(y-3)^3} = -\frac{4}{(y-3)^2}.$$

Die Kurve, ein Kreis mit dem Halbmesser 2 um den Mittelpunkt $y = 2$, $y = 3$, ist demnach konkav für alle $y > 3$ und konvex für alle $y < 3$.

Für $y = 3$ wird $f''(x)$ unendlich; doch sind die betreffenden Punkte P_1 und P_1^* keine richtigen Wendepunkte, denn die Kurve wird vollständig von den Tangenten in diesen äussersten Punkten eingeschlossen; der Kreis hat keine Wendepunkte. Das Gleiche gilt von sämtlichen Kegelschnitten.

Aufgabe 220. Den Lauf und die etwaigen Wendepunkte der Kurve anzugeben, deren Gleichung:

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

ist.

Auflösung. Da:

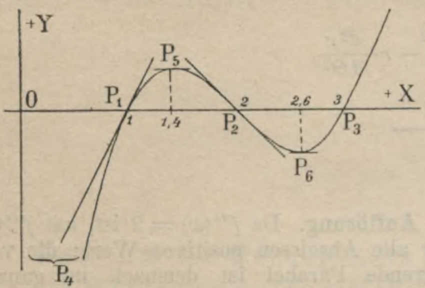
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

ist, so wird:

$$y = 0 \text{ für } x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ und } x_3 = 3;$$

hiermit sind die drei Schnittpunkte $P_{1,2,3}$ der Kurve mit der Abscissenachse gefunden. Setzen wir in der Kurvengleichung: $x = 0$, so folgt: $y = -6$; d. h. die Kurve schneidet die negative Ordinatenachse im Abstand 6 vom Ursprung O (siehe Figur 65).

Figur 65.



Nun bilden wir:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12.$$

Da die Gleichung $3x^2 - 12x + 11 = 0$ die beiden Wurzeln $x_5 = 1{,}4$ und $x_6 = 2{,}6$ hat und $\frac{d^2y}{dx^2}$ für x_5 negativ, dagegen für x_6 positiv ist, so folgt, dass der Punkt:

$$P_5 \begin{cases} x_5 = 1{,}4 \\ y_5 = 0{,}4 \end{cases} \text{ ein höchster}$$

und $P_6 \begin{cases} x_6 = 2{,}6 \\ y_6 = -0{,}4 \end{cases}$ ein tiefster Punkt der Kurve darstellt.

Die Funktion $f'(x)$ liefert positive Werte von $x = -\infty$ bis $x = 1{,}4$, negative von $x = +1{,}4$ bis $x = 2{,}6$ und wieder positive von $x = 2{,}6$ bis $x = \infty$. Daraus schliessen wir, dass die Kurve steigt von unten herauf bis P_5, dann fällt bis P_6, um von hier an wieder zu steigen. Im Punkt P_2 wird:

$$\frac{dy}{dx} = -1;$$

d. h. die Tangente macht dort mit der Achse einen Winkel von 135°; da ausserdem für $x = 2$: $f''(h) = 0$ und $f''(2-h) = -12h$ und $f''(2+h) = +12h$ wird, so ist P_2 ein Wendepunkt.

Aufgabe 221. Den Lauf des Descartesschen Blattes, welches die Gleichung:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

hat, genauer zu untersuchen.

(Siehe Aufgabe 193 und Figur 59.)

Auflösung. Bilden wir:

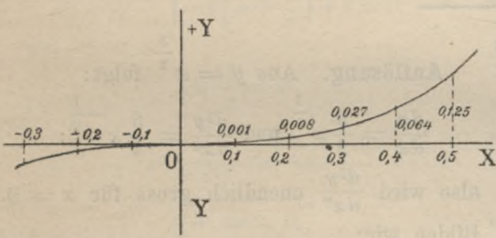
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3},$$

so sehen wir, dass das Vorzeichen des Bruches rechter Hand nur vom Nenner abhängen kann. Für $t = -1$ ($x = -\infty$, $y = \infty$) wird der Zähler des Bruches, also auch der ganze Bruch Null; die Kurve besitzt daher im Unendlichen einen Wendepunkt. Für die Werte von t, die zwischen -1 und 0 liegen, denen also negative Abscissen und positive Ordinaten entsprechen, ist $-t^3 > 0$, der Nenner und mit ihm der ganze Bruch positiv, oder die Kurve ist im zweiten Quadranten gegen die Abscissenachse konvex gekrümmt. Das Gleiche gilt für $t = 0$, d. h. die Kurve ist auch beim Durchgang durch den Koordinatenanfang noch konvex. Für weitere Werte von t, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ liegen, ist $2t^3 < 1$, der Nenner also positiv, und die Kurve bleibt solange konvex. Erst für

$t = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ im äussersten Punkt P_1 tritt der Zeichenwechsel ein, für die weiteren Werte von t bis für $t = \infty$ ($x = 0$, $y = 0$) wird der Bruch negativ, die Kurve kehrt also vom Punkt P_1 ab ihre konkave Seite der Abscissenachse zu. Im vierten Quadranten, also unterhalb der Abscissenachse, sind für $t = \infty$ bis $t = -1$ Nenner und Bruch positiv, d. h. die Kurve ist gegen diese Achse ebenfalls konkav gekrümmt; dieselbe kehrt endlich für $t = -1$ zum unendlich fernen Wendepunkt zurück und vereinigt sich dort mit dem ersten Kurvenzweig (siehe Figur 59).

Aufgabe 222. Bestimme die Wendepunkte der Kurve $y = x^3$.

Figur 66.



Erkl. 63. Um den Verlauf der Kurve in der Nähe des Wendepunktes deutlich zu zeigen, ist ein grosser Massstab zu Grunde gelegt worden. Zur Fortsetzung der Kurve nach oben und unten dienen die Werte:

$x = 1$	2	3	4	etc.
$y = 1$	8	27	64	

Die gleiche Bemerkung gilt für die beiden folgenden Figuren.

Auflösung. Aus:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

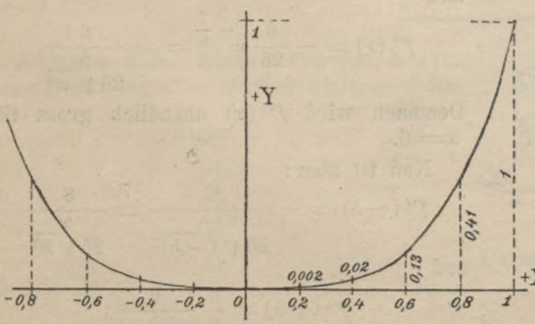
schliessen wir auf einen Wendepunkt im Ursprung, denn $x = 0$, $y = 0$ macht:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist für $x = 0 - h$ negativ, für $x = 0 + h$ positiv; es wechselt also das Vorzeichen; die Kurve ist oben konvex, unten konkav gegen die Abscissenachse, welche die Kurve in O berührt; sie heisst Wendeparabel (siehe Figur 66).

Aufgabe 223. Hat die Kurve $y = x^4$ einen Wendepunkt?

Figur 67.



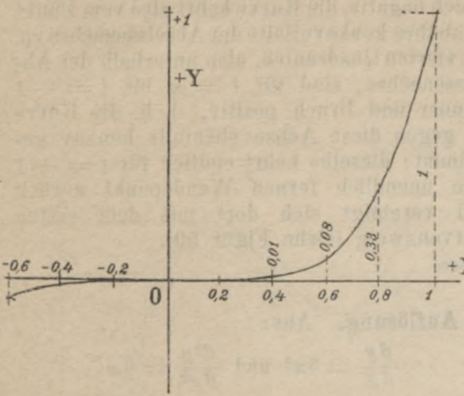
Auflösung. Wir erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3, \ \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2.$$

Der zweite Differentialquotient verschwindet für $x = 0$; aber der Ursprung $x = 0$, $y = 0$ ist kein Wendepunkt, weil $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = -h$ und für $x = -h$ positiv ist. Die Kurve hat die Form einer Parabel und heisst Flachparabel (siehe Figur 67 und Erkl. 63).

Aufgabe 224. Hat die Kurve $y = x^5$ einen Wendepunkt?

Figur 68.



Auflösung. Aus:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3$$

schliessen wir in Aufgabe 222 auf einen Wendepunkt im Koordinatenanfang.

Die Kurve ist in Figur 68 gezeichnet und heisst Wendeflachparabel. (Ihre Fortsetzung nach oben und unten bleibt dem Leser überlassen; siehe auch Erkl. 63).

Aufgabe 225. Bestimme die etwaigen Wendepunkte der Kurve, deren Gleichung $y^2 = x^3$ ist (Neilsche Parabel).

(Siehe Aufgabe 27, Figur 30.)

Auflösung. Aus $y = x^{\frac{3}{2}}$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}};$$

also wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich gross für $x = 0$.

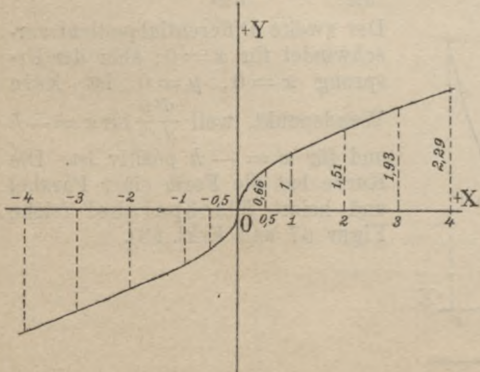
Bilden wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

für $x = h$ und $x = -h$, so wird der letztere Wert imaginär; die Kurve, welche gegen die Abscissenachse symmetrisch ist, hat also im Punkt 0 keinen Wendepunkt, sondern eine Spitze (siehe Figur 30).

Aufgabe 226. Ebenso von der Kurve mit der Gleichung $y^5 = x^3$.

Figur 69.



Auflösung. Hier wird:

$$y = x^{\frac{3}{5}};\ f'(x) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$$

und

$$f''(x) = -\frac{6}{25} x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{6}{25\sqrt[5]{x^7}}.$$

Demnach wird $f''(x)$ unendlich gross für $x = 0$.

Nun ist aber:

$$f''(-h) = -\frac{6}{25\sqrt[5]{(-h)^7}} = \frac{6}{25\sqrt[5]{h^7}}$$

und

$$f''(+h) = -\frac{6}{25\sqrt[5]{h^7}};$$

Erkl. 64. Zur genaueren Bestimmung des Laufs der Kurve in der Umgebung des Ursprungs dienen folgende Zahlenwerte;

$x = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5
$y = 0{,}25$	0,38	0,49	0,58	0,66

es wechselt also $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit h, das Vorzeichen, woraus wir schliessen, dass die Kurve im Punkt O einen Wendepunkt besitzt (s. Fig. 69).

Aufgabe 227. Ebenso von der Kurve mit der Gleichung:

$$x^2y+x+y-1=0.$$

Auflösung. Aus $y=\frac{1-x}{1+x^2}$ erhalten wir:

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$$

und

$$f''(x)=\frac{-2x^5+6x^4+4x^3+4x^2+6x-2}{(1+x^2)^4}.$$

Wir erhalten also die Abscissen der Wendepunkte als die Wurzeln der Gleichung:

$$2x^5-6x^4-4x^3-4x^2-6x+2=0.$$

Weil letztere in Bezug auf die Koëfficienten symmetrisch gebaut ist, lässt sie sich auflösen und liefert:

$$x_1=-1,\quad x_2=3{,}72,\quad x_3=0{,}27,$$
$$x_4=+i \text{ und } x_5=-i$$

woraus:

$$y_1=1,\quad y_2=-0{,}18,\quad y_3=0{,}68,$$
$$y_4=\infty \text{ und } y_5-=\infty.$$

Wir schliessen daraus auf das Vorhandensein von drei reellen Wendepunkten, P_1, P_2 und P_3, die in einer geraden Linie liegen. **Jede Kurve III. Grades hat im allgemeinen drei reelle in einer Geraden liegende Wendepunkte** (siehe Figur 70).

Erkl. 65. Es ist:

$$2x^5-6x^4-4x^3-4x^2-6x+2$$
$$=(x+1)(2x^4-8x^3+4x^2-8x+2).$$

Somit ist die erste Wurzel:

$$=-1.$$

$2x^4-8x^3+4x^2-8x+2=v$ gesetzt liefert:

$$2(x^4+1)-8(x^3+x)+4x^2=0;$$

daraus:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

Für:

$$x+\frac{1}{x}=z$$

und

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$$

folgt:

$$z^2-4z=0,$$

also:

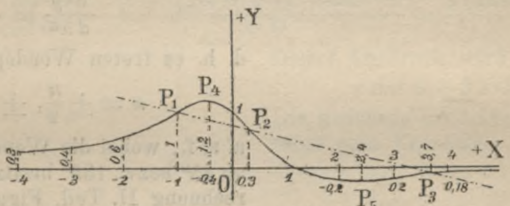
$$z_1=4 \text{ und } z_2=0;$$

woraus:

$$x_{3,4}=2\pm\sqrt{3} \text{ und } x_{4,5}=\pm i$$

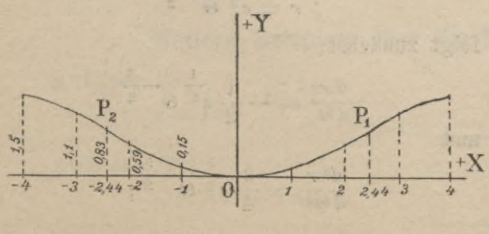
u. s. f. Näheres siehe Kleyer, Gleichungen.

Figur 70.



Aufgabe 228. Ebenso von der Kurve, deren Gleichung $x^4-36x^2+216y=0$ ist.

Figur 71.



Auflösung. Aus $y=\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{216}$ folgt:

$$f'(x)=\frac{x}{3}-\frac{x^3}{54}$$

und

$$f''(x)=\frac{1}{3}-\frac{x^2}{18}.$$

Daraus folgt, dass $f''(x)$ verschwindet für:

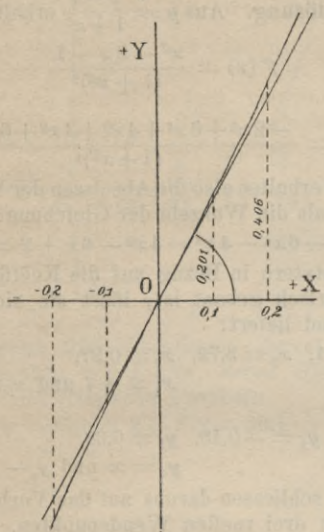
$$x=\pm\sqrt{6}=\pm 2{,}44.$$

Es treten also zwei Wendepunkte P_1 und P_2 auf mit den Koordinaten $x_2=\pm 2{,}44$ und

$y = 0{,}83$ (siehe Figur 71). Der Leser wird gebeten, den Lauf der Kurve weiter zu verfolgen.

Aufgabe 229. Ebenso von $y = l\,\frac{1+x}{1-x}$.

Figur 72.



Auflösung. Hier wird:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(1-x^2)^{-1}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

Letzterer Ausdruck wird zu Null für $x = 0$. Der Punkt 0 ist demnach ein Wendepunkt und da $\frac{dy}{dy}$ für $x = 0$ den Wert 2 ergibt, so folgt aus $\operatorname{tg}\tau = 2$; $\tau = 63^0\,26'$ als Neigung der Wendetangente. Den Abscissen $x = \pm 1$ entsprechen unendlich grosse Ordinaten (siehe Figur 72).

Erkl. 66. Zur Zeichnung der Kurve dienen folgende Werte:

$x = 0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}4$	$0{,}5$	$0{,}6$
$y = 0{,}20$	$0{,}41$	$0{,}62$	$0{,}85$	$1{,}10$	$1{,}37$
$x = 0{,}7$	$0{,}8$	$0{,}9$	1		
$y = 1{,}74$	$1{,}79$	$2{,}94$	∞.		

Aufgabe 230. Ebenso von $y = \cos x$.

Auflösung. Aus $y = \cos x$ erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x\,;$$

d. h. es treten Wendepunkte auf für:

$$x = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2}$$

u. s. f., wobei die Wendetangente Neigungen $= 45^0$ bezw. 135^0 besitzen (siehe Differentialrechnung II. Teil, Figur 25).

Aufgabe 231. Bestimme den Wendepunkt des Lituus $r = \sqrt{\frac{c}{\Theta}}$ (siehe Aufgabe 143 und Figur 44).

Auflösung. Auf

$$r = c^{\frac{1}{2}}\,\Theta^{-\frac{1}{2}}$$

folgt zunächst:

$$\frac{dr}{d\Theta} = -\frac{1}{2}\,c^{\frac{1}{2}}\,\Theta^{-\frac{3}{2}}$$

und

$$\frac{d^2r}{d\Theta^2} = \frac{3}{4}\,c^{\frac{1}{2}}\,\Theta^{-\frac{5}{2}}\,;$$

hiernach wird:

$$r^2+2\left(\frac{d\,r}{d\,\Theta}\right)^2-r\cdot\frac{d^2\,r}{d\,\Theta^2}=c\,\Theta^{-1}+\frac{2}{4}\,c\,\Theta^{-3}-\frac{3}{4}\,c\,\Theta^{-3}=c\,\Theta^{-1}\left(1-\frac{1}{4}\,\Theta^{-2}\right)$$

(siehe Frage 52).

Dieser Ausdruck erreicht nun den Wert null für $\Theta=\frac{1}{2}$ und wirklich ist der Punkt mit den Koordinaten $\Theta=\frac{1}{2}$, $r=\sqrt{2\,c}$ ein Wendepunkt; weiter wird der Ausdruck null für $\Theta=\infty$, allein für $\Theta=\infty$ wird $r=0$, dies sind aber die Koordinaten des Anfangspunktes, der von der Spirale nie erreicht wird. — Endlich wird der vorige Ausdruck unendlich gross für $\Theta=0$; dies würde $r=\infty$ und daher keinen Wendepunkt geben. Die Kurve besitzt demnach nur den einen Wendepunkt $\Theta=\frac{1}{2}$, $r=\sqrt{2\,c}$, der hienach leicht durch Konstruktion gefunden werden kann.

Aufgabe 232. Bestimme die Wendepunkte der Conchoide $r=a+\frac{b}{\sin\Theta}$ (siehe Aufgabe 146 und Figur 45).

Auflösung. Die Polargleichung liefert hier:

$$\frac{d\,r}{d\,\Theta}=-\frac{b\cos\Theta}{\sin^2\Theta}$$

und

$$\frac{d^2\,r}{d\,\Theta^2}=\frac{b\,(1+\cos^2\Theta)}{\sin^3\Theta}.$$

Der Ausdruck:

$$r^2+2\left(\frac{d\,r}{d\,\Theta}\right)^2-r\cdot\frac{d^2 r}{d\,\Theta^2}$$

geht mit diesen Werten über in:

$$\frac{(b+a\sin\Theta)^2}{\sin^2\Theta}+2\cdot\frac{b^2\cos^2\Theta}{\sin^4\Theta}-\frac{(b+a\sin\Theta)\,b\cdot(1+\cos^2\Theta)}{\sin^4\Theta}=\frac{a\,(a\sin^3\Theta+3\,b\sin^2\Theta-2\,b)}{\sin^3\Theta}.$$

Dieser Ausdruck wird Null für:

$$a\sin^3\Theta+3\,b\sin^2\Theta-2\,b=0.$$

Die genauere Untersuchung dieser Gleichung führt zum Ergebnis:

Wenn $b>a$, so hat die Kurve 4 Wendepunkte,
„ $b<a$, „ „ „ „ 2 „
„ $b=a$, „ „ „ „ 2 „

Der Leser wird ersucht, durch die Annahme von bestimmten Zahlenwerten für b und a sich von der Richtigkeit zu überzeugen.

Weitere Beispiele über die Bestimmung der Wendepunkte.

Aufgabe 233.

$y=(x-1)^2.$

Auflösung. Keine Wendepunkte.

Aufgabe 234.

$y=ax^2+bx+c.$

Auflösung. Keine Wendepunkte.

Aufgabe 235.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Auflösung.

$$x = -\frac{b}{3a}.$$

Aufgabe 236.

$$x^3 + y^3 + 6axy + 1 = 0.$$

Auflösung.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ und } \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 237.

$$ax^3 + by^3 - c^4 = 0.$$

Auflösung.

$$x = 0 \text{ und } x = c\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Aufgabe 238.

$$x^3 - 3ax^2 + c^2y = 0.$$

Auflösung.

$$x = a, \quad y = \frac{2a^3}{c^2}.$$

Aufgabe 239.

$$x^2y - x + y = 0.$$

Auflösung.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = +\sqrt{3} \\ y_2 = +\frac{1}{4}\sqrt{3}, \end{cases} \begin{cases} x_3 = -\sqrt{3} \\ y_3 = -\frac{1}{4}\sqrt{3}. \end{cases}$$

Aufgabe 240.

$$y = \frac{x\sqrt{2ax - x^2}}{a}.$$

Auflösung. $x = \frac{3}{2}a - \cos 30^0$ liefert einen Wendepunkt.

Aufgabe 241.

$$20000y = x^4 - 251x^3 + 20170x^2 - 566400x + 3888000.$$

Auflösung. Wendepunkte:

$$\begin{cases} x_1 = 38{,}75 \\ y_3 = -6{,}17, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 86{,}75 \\ y_2 = -33{,}48. \end{cases}$$

Aufgabe 242.

$$x^4 + y^4 - 2b^2x^2 - 2a^2y^2 + b^4 = 0.$$

Auflösung. Wendepunkte:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = -\left[\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Aufgabe 243.

$$xy^2 = 2a\sqrt{2ax - x^2}.$$

Auflösung. $x = \frac{3a}{2}$, Abscisse des Wendepunkts.

Aufgabe 244.

$$y = b + (x-a)^{\frac{m}{n}}.$$

Auflösung. $x = a$, Abscisse des Wendepunkts, und zwar ist für $m > n$ die Tangente des Wendepunkts parallel zur Abscissenachse und für $m < n$ senkrecht zur letzteren.

Aufgabe 245.

$$y = \sin x$$

Auflösung. $x = n\pi$, wo n eine ganze Zahl vorstellt; $y = 0$. (Siehe Figur 25 in Differentialrechnung II. Teil.)

Aufgabe 246.

$$y = \operatorname{tang} x.$$

Auflösung. Wie in Aufgabe 245. (Siehe Differentialrechnung II. Teil.)

Aufgabe 247.

$$y = \sin^3 x.$$

Auflösung. $x = n\pi$, $y = 0$, wo n eine ganze Zahl ist; ferner: $x = arc\,(tg = \pm\sqrt{2})$; ferner:

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Aufgabe 248. Bestimme die Wendepunkte der Kurve:

$$y = x \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a}\right),$$

der Quadratrix des Dinostratus.

Auflösung. Die Gerade $y = \frac{2a}{\pi}$ schneidet die Kurve in Wendepunkten, denn:

$$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{\pi x}{2a\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a}\right)}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi\left[\frac{\pi}{2a}x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a}\right)\right]}{a\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a}\right)}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck $= 0$, so finden wir:

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a}\right) = \frac{2a}{\pi x}$$

und wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung der Kurve einsetzen, so folgt:

$$y = \frac{2a}{\pi}.$$

Die Gerade, welche der Abscissenachse in der Entfernung $\frac{2a}{\pi}$ parallel läuft, schneidet die Kurve in unendlich vielen Wendepunkten, in denen $\frac{d^3y}{dx^3}$ nicht zu Null wird. Der Punkt F, in welchem diese Gerade die Kurve berührt und dessen Koordinaten $x = 0$, $y = \frac{a}{2\pi}$ sind, ist kein Wendepunkt; für ihn ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0},$$

Erkl. 67. Um den Koordinatenanfang O sei mit dem Halbmesser a ein Halbkreis BCD beschrieben; auf seinem Umfang werde der Punkt E beliebig gewählt; auf dem Halbmesser OE, der mit der positiven Abscissenachse den Winkel $BOE = \Theta$ bildet, soll nun der Punkt P so bestimmt werden, dass das Verhältnis des Bogens BE zum Viertelskreis BEC sich verhält wie die Strecke AB zum Halbmesser $OB = a$. Wir suchen den geometrischen Ort des Punktes P; dazu legen wir die positive Abscissenachse in die Richtung von OB, die positive Ordinatenachse in die Richtung von OC und bezeichnen hiernach OA mit x und AP mit y; dann wird:

$$AB = a - x,$$

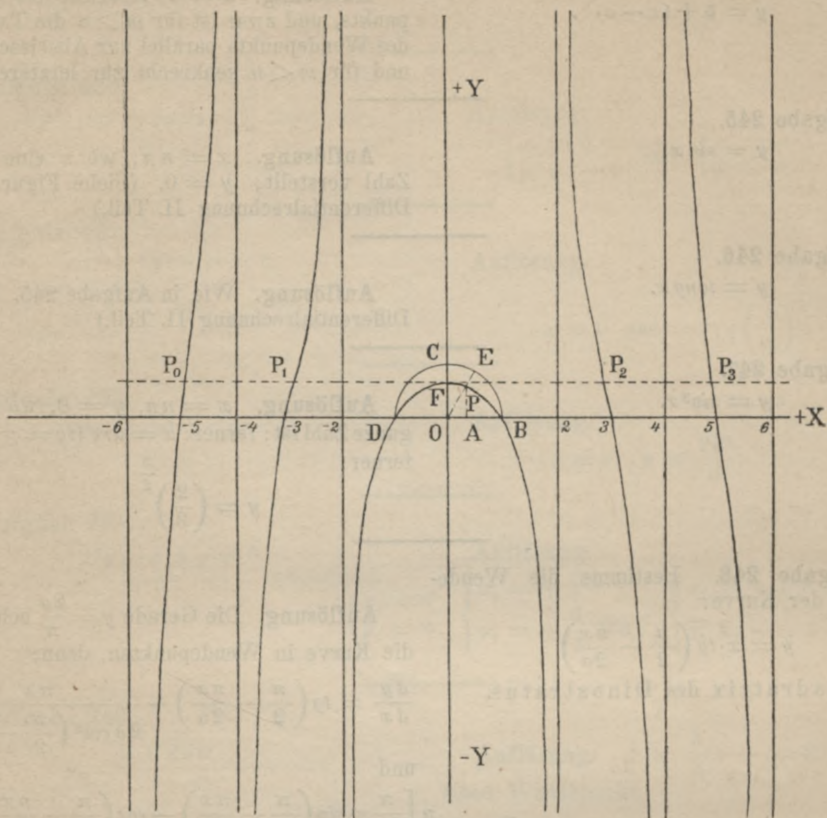
$$\text{Bogen } BE = a\Theta,$$

$$\text{Bogen } BEC = a\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Zufolge der Aufgabe muss nun die Bedingung erfüllt werden:

$$a\Theta : a\cdot\frac{\pi}{2} = (a-x) : a,$$

Figur 73.



woraus:

$$\Theta = \frac{\pi(a-x)}{2a}$$

folgt.

Ferner besteht zwischen x, y und Θ die Beziehung:

$$y = x \cdot tg\,\Theta.$$

Setzen wir für Θ den vorigen Wert ein, so erhalten wir als Gleichung der gesuchten Kurve:

$$y = x \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a}\right).$$

Die Kurve ist unter dem Namen der Quadratrix des Dinostratus bekannt.

Für $x = -5a,\ -3a,\ -a,\ a,\ +3a,\ +5a$ etc. wird $y = 0$; die Kurve schneidet also die Achse in unendlich vielen Punkten.

Für $x = -6a,\ -4a,\ -2a,\ +2a,\ +4a,\ +6a$ etc. ist:

$$tg\,\frac{\pi(a-x)}{2a} = \infty$$

und somit $y = \infty$. Die Kurve hat demnach unzählig viele, sich ins Unendliche erstreckende Zweige.

dessen wahrer Wert:

$$= -\frac{1}{3}\pi$$

gefunden wird.

Für $x = 0$ findet man:

$$OF = y = 0 \cdot tg\,\frac{\pi}{2} = 0 \cdot \infty$$

oder auch:

$$y = \frac{0 \cdot sin\,\frac{\pi}{2}}{cos\,\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}.$$

Um den wahren Wert dieses Ausdrucks zu finden, setzen wir:

$$OF = y = x \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a}\right) = x \cdot cotg\,\frac{\pi x}{2a} = \frac{x \cdot cos\,\frac{\pi x}{2a}}{sin\,\frac{\pi x}{2a}};$$

für $cos\,\frac{\pi x}{2a}$ und $sin\,\frac{\pi x}{2a}$ setzen wir nun nach der Differentialrechnung II. Teil, Seite 90, die Reihen und erhalten:

$$OF = y = \frac{x \cdot \left[1 - \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^4 x^4 - \cdots\right]}{\frac{\pi}{2a} x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^3 \cdot x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \left(\frac{\pi}{2a}\right)^5 x^5 - \cdots}$$

Vereinfacht man diesen Bruch durch x und setzt alsdann: $x = 0$, so kommt heraus:

$$y = \frac{2a}{\pi};$$

somit ist:

$$OF = \frac{2a}{\pi}.$$

Erkl. 68. Aus $OF = \frac{2a}{\pi}$ leiten wir die Gleichung ab:

$$a\,\frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{OF};$$

d. h. die Länge des Viertelskreises ist $= \frac{a^2}{OF}$; kennt man demnach die Länge von OF, so kann man die Länge des Viertelskreises finden.

Ebenso wird

$$\text{Bogen } BE = \frac{AB}{a} \cdot \frac{a^2}{OF} = \frac{AB \cdot a}{OF};$$

ist also die Lage vom Punkt P bekannt und damit auch die Länge von AB, so kann man nicht nur die Länge des Bogens BE finden, sondern auch die von einem beliebigen Teil desselben, denn:

$$\frac{1}{n} \text{ Bogen } BE = \frac{1}{n} \cdot AB \cdot \frac{a}{OF}.$$

Hiermit lässt sich also ein gegebener Bogen und zugleich der zugehörige Centriwinkel Θ beliebig teilen.

Daher hat die gefundene Linie bei den alten Geometern den Namen *τετραγωνιζουσα*, quadratrix, erhalten.

Dinostratus war ein Zeitgenosse des Plato.

Sehr eingehend hat sich Pappus mit dieser Linie beschäftigt.

Erkl. 69. Zur Zeichnung der Kurve unter Zugrundlegung des Wertes $a = 1$ dienen folgende Werte:

$x = 0$	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{2}{4}$	$\pm\frac{3}{4}$	± 1	$\pm\frac{5}{4}$	$\pm\frac{6}{4}$	$\pm\frac{7}{4}$	± 2	$\pm\frac{9}{4}$
$y = 0{,}637$	0,604	0,5	0,311	0	$-0{,}51$	$-1{,}25$	$-4{,}22$	∞	$+5{,}43$

$x = \pm\frac{10}{4}$	$\pm\frac{11}{4}$	± 3	$\pm\frac{13}{4}$	$\pm\frac{14}{4}$	$\pm\frac{15}{4}$	± 4	$\pm\frac{17}{4}$	$\pm\frac{18}{4}$	$\pm\frac{19}{4}$
$y = +2{,}5$	$+1{,}16$	0	$-1{,}37$	$-3{,}5$	$-9{,}05$	∞	10,26	4,25	1,97

$x = \pm 5$	$\pm\frac{21}{4}$	$\pm\frac{22}{4}$	$\pm\frac{23}{4}$	6.
$y = 0$	$-2{,}17$	$-5{,}25$	$-13{,}88$	∞.

Aufgabe 249. Bestimme die Wendepunkte der Kurve, deren Gleichung:

$$y = a \sin \frac{\pi x}{2a}$$

ist, der Quadratrix von Tschirnhausen.

Erkl. 70. Um den Punkt O werde mit dem Halbmesser a der Halbkreis BCD beschrieben; auf seinem Umfang sei der Punkt E wieder beliebig gewählt und auf dem Halbmesser OB soll der Punkt A so angenommen werden, dass sich wieder der Bogen BE zum Viertelskreis BEC verhalte wie die Strecke AB zum Halbmesser a.

Hierauf ziehe man $AP \parallel OC$ und $EP \parallel OB$; hierdurch erhält man den Punkt P, dessen geometrischer Ort zu bestimmen ist. Wir legen die Abscissenachse in die Gerade OB, die Ordinatenachse in das in B errichtete Lot, bezeichnen also AB mit x und AP mit y. Der Winkel BOE heisse φ; dann ist Bogen $BE = a\varphi$ und Viertelskreis $BEC = a \cdot \frac{\pi}{2}$; daher muss die Bedingung erfüllt werden:

$$x : a = a\varphi : \frac{a\pi}{2},$$

woraus:

$$\varphi = \frac{\pi x}{2a}$$

folgt.

Ferner ist $AP = GE = a \sin \varphi$; daher ist

$$y = a \sin \varphi \text{ oder } y = a \sin \frac{\pi x}{2a}$$

die Gleichung des gesuchten Ortes. Die Kurve ist unter dem Namen der Quadratrix von Tschirnhausen bekannt.

Da $\sin \frac{\pi x}{2a}$ nie grösser als $+1$ und kleiner als -1 werden kann, so kann auch y nie grösser als a und nicht kleiner als $-a$ werden. Die Kurve ist also ganz in dem Raum enthalten, der zwischen den beiden parallelen Geraden $y = +a$ und $y = -a$ liegt. Für $x = 0$ oder $= \pm 2a$, $\pm 4a$ etc. ist $y = 0$; für $x = \pm a$, $\pm 3a$, $\pm 5a$ u. s. w. wird $y = \pm a$.

Auflösung. Die Abscissenachse trifft die Kurve in unendlich vielen Wendepunkten, denn aus $y = a \sin \frac{\pi x}{2a}$ folgt:

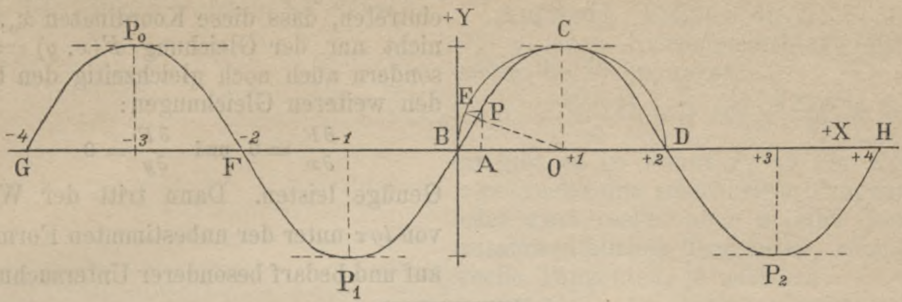
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \pi \cos \frac{\pi x}{2a},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{4a} \sin \frac{\pi x}{2a},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\pi^3}{8a^2} \cos \frac{\pi x}{2a}.$$

Für alle Werte von x, welche y gleich Null machen, d. h. für $x = 0$, oder $\pm 2a$, oder $\pm 4a$ u. s. w., wird auch $\frac{d^2y}{dx^2}$, nicht aber $\frac{d^3y}{dx^3}$ gleich Null. Die Durchschnittspunkte der Abscissenachse sind demnach Wendepunkte.

Figur 74.



Setzt man für x der Reihe nach irgend zwei Werte x_0 und $x_0 \pm 4na$, die um $4na$ von einander verschieden sind und wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet, so erhält y einen und denselben Wert, nämlich:

$$a \sin \frac{\pi x_0}{2a} \text{ und } a \cdot \sin \frac{\pi(x_0 + 4na)}{2a} = a \sin\left(\frac{\pi x_0}{2a} + 2\pi\right) = a \sin \frac{\pi x_0}{2a};$$

die Kurve besteht demnach aus unendlich vielen kongruenten Bogen (siehe Figur 74).

Erkl. 71. Zum Zeichnen der Kurve für $a = 1$ dienen folgende Werte:

$x = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{11}{4}$	3
$y = 0$	0,38	0,71	0,92	1	0,92	0,71	0,38	0	— 0,38	— 0,71	— 0,92	— 1

$x = \frac{13}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{15}{4}$	$4 \cdots$
$y = -0,92$	$-0,71$	$-0,38$	0

C. Doppelpunkte, Rückkehrpunkte, Selbstberührungspunkte, isolierte und vielfache Punkte.

a) Doppelpunkte im weiteren Sinne.

I) Die Kurvengleichung sei $F(x, y) = 0$.

Frage 53. Können auf einer ebenen Kurve Punkte auftreten, deren Tangentenbestimmung eine besondere Untersuchung erfordert?

Antwort. Es sei $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve; wir setzen voraus, dass sowohl die Funktion $F(x, y)$ als auch die Funktionen:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

stetig sein sollen. Für einen Kurvenpunkt P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0 bildet die Tangente mit der Abscissenachse einen Winkel τ, der sich berechnet aus:

$$tg\,\tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$$

für $x = x_0$, $y = y_0$. Nun kann der Fall eintreten, dass diese Koordinaten x_0, y_0 nicht nur der Gleichung $F(x, y) = 0$, sondern auch noch gleichzeitig den beiden weiteren Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Genüge leisten. Dann tritt der Wert von $tg\,\tau$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auf und bedarf besonderer Untersuchung.

Frage 54. Welchen Wert erhält man für $\frac{dy}{dx}$, wenn die Koordinaten x_0, y_0 eines Punktes P_0 die drei Gleichungen:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

befriedigen?

Antwort. Nach der Regel zur Bestimmung des Wertes von der Form $\frac{0}{0}$ (s. Differentialrechnung II. Teil, S. 121) folgt hier:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}}.$$

Daraus gewinnen wir durch algebraische Rechnung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2} = 0$$

und diese Gleichung liefert:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}.$$

Vorausgesetzt, dass nicht gleichzeitig auch:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

für $x = x_0$ und $y = y_0$ verschwinden, gibt uns der obige Ausdruck im allgemeinen zwei verschiedene Werte für $\frac{dy}{dx}$, und zwar sind dieselben reell und ungleich, wenn:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};$$

reell und gleich, wenn:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

und imaginär, wenn:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{ist.}$$

Frage 55. Welche Folgerung ist aus den vorigen Formeln zu ziehen?

Antwort. Erfüllen die Koordinaten x_0, y_0 eines Kurvenpunktes P_0 gleichzeitig die Bedingungen:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0,$$

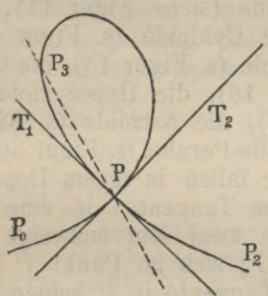
so gibt es im Punkt P_0 an der Kurve zwei reelle und verschiedene Tangenten, oder zwei reelle, aber in eine Gerade zusammenfallende Tangenten, oder gar reelle Tangenten, je nachdem:

$$\left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}\right)^2 \gtreqless \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}$$

für $x = x_0$, $y = y_0$.

Frage 56. Wie ist ein Kurvenpunkt beschaffen, in welchem zwei verschiedene Tangenten möglich sind?

Figur 75.



Erkl. 72. Jede Gerade PP_3, welche wir durch den Doppelpunkt ziehen, schneidet die Kurve im Punkt P schon in zwei Punkten, und P_3 ist dann ein dritter Schnittpunkt. Lassen wir nun die Gerade PP_3 sich um P drehen, so dass P_3 sich P unbegrenzt nähert, so wird PP_3 zur Tangente im Punkt P im Augenblick des Zusammenfallens von P_3 mit P. Daraus ersehen wir, dass die Tangente in einem Doppelpunkt mit der Kurve wenigstens drei zusammenfallende Punkte gemein hat.

Da eine Gerade mit einem Kegelschnitt zwei Punkte gemeinschaftlich haben kann, so können Kegelschnitte keine Doppelpunkte besitzen; die letzteren können erst bei Kurven höherer Grade auftreten.

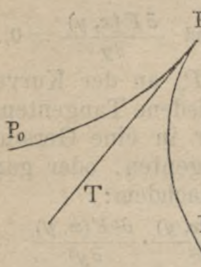
Antwort. Die Kurve muss zweimal durch den betreffenden Punkt hindurchgehen, so dass man beim Begehen der Kurve denselben Punkt zweimal passieren muss. Ein solcher Punkt heisst ein Doppelpunkt (siehe Figur 75). Beispiele dafür lieferten bis jetzt das Blatt des Cartesius (siehe Figur 26), die Lemniscate (s. Figur 24), die Conchoide (s. Figur 45), die verschlungenen Cykloiden (siehe Figur 34), Epicykloiden (s. Figur 36) und Hypocykloiden (siehe Figur 37).

Frage 57. Wie ist ein Punkt einer Kurve beschaffen, in welchem zwei Tangenten in Eine zusammenfallen?

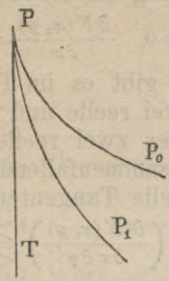
Antwort. Die Kurve kann zwei verschiedene Kurvenzweige besitzen, die in dem nämlichen Punkt endigen, so dass die Tangente in dem letzteren an den ersten Zweig mit jener an den andern Zweig zusammenfällt. Ein solcher Punkt heisst ein Rückkehrpunkt. So hat in Figur 76a die Kurve die beiden Zweige P_0P und P_1P; die Tangente PT ist beiden Zweigen gemeinschaftlich. Liegen die zwei Zweige wie vorhin auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangenten, so heisst der Rückkehrpunkt ein solcher erster Art; befinden sie sich dagegen auf der gleichen Seite wie in Figur 76b, so wird der Rückkehrpunkt als ein solcher zweiter Art bezeichnet. Der Rückkehrpunkt geht dadurch aus dem Doppelpunkt hervor, dass die beiden Tangenten PT_1 und PT_2 des letzteren sich gegen einander drehen und schliesslich die Schleife erdrückend zusammenfallen. Beispiel für einen Rückkehrpunkt lieferte die Cissoide (siehe Figur 11), die gewöhnliche Cykloide (s. Figur 13), die Epicykloide (s. Figur 15), die Cardioide (s. Figur 16), die Hypocykloide (siehe Figur 18), die Astroide (s. Figur 19), die Neilsche Parabel (s. Figur 30) u. s. w.

Ferner fallen in einem Doppelpunkt die beiden Tangenten in eine Gerade, wenn die zwei Kurvenzweige P_0PP_2 und P_3PP_4 sich im Punkt P berühren und die Tangente in P beiden Zweigen gemeinschaftlich ist. Einen solchen Punkt nennen wir einen Selbstberührungspunkt (s. Fig. 77a u. 77b). Nehmen wir z. B. zwei sich berührende Ellipsen, so bilden diese zusammen eine Kurve IV. Ordnung und der Berührungspunkt der zwei Ellipsen erscheint als ein Selbstberührungspunkt der Kurve IV. Ordnung.

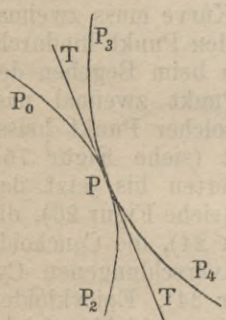
Figur 76a.



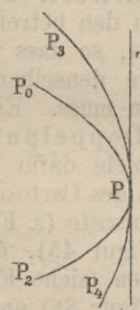
Figur 76b.



Figur 77a.



Figur 77b.



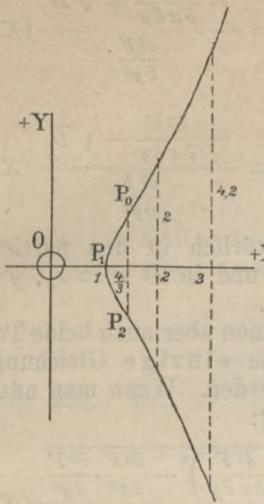
Erkl. 73. Was vorhin in Erkl. 72 über den Doppelpunkt gesagt wurde, lässt sich wörtlich auf den Rückkehr- und Selbstberührungspunkt übertragen (siehe Aufgabe 27 und Figur 30).

Denken wir uns im Selbstberührungspunkt (siehe Figur 77) die beiden Kurvenfortsätze PP_2 und PP_4 imaginär, so geht derselbe in einen Rückkehrpunkt über.

Frage 58. Was ist über einen Kurvenpunkt zu sagen, in welchem keine Tangenten möglich sind?

Antwort. Es gibt Kurven, deren Gesetz nicht nur von den aufeinanderfolgenden Kurvenpunkten, sondern auch von einzelnen Punkten der Ebene befolgt wird, welche sich in gar keinem äusseren Zusammenhang mit der Kurve befinden. In Figur 78 stellt O einen solchen Punkt vor der Kurve $x^3 - x^2 - y^2 = 0$, denn seine Koordinaten $x = 0$, $y = 0$

Figur 78.



befriedigen die Gleichung der Kurve; ein kleinerer Kreis, um O beschrieben, schneidet die Kurve gar nicht, und in O gibt es keine Tangente. Einen solchen Punkt nennt man einen isolierten oder konjugierten Punkt oder einen Einsiedler. — Um ein Beispiel hiefür zu erhalten, suchen wir den geometrischen Ort der Punkte, welche vom Kreis mit dem Halbmesser r die Entfernung r haben; hier genügen nicht nur die Punkte des Kreises vom Halbmesser $2r$ der ausgesprochenen Bedingung, sondern auch der Kreismittelpunkt; der letztere erscheint hier als ein isolierter Punkt.

Frage 59. Welches ist die gemeinschaftliche Bezeichnung für Doppelpunkte, Rückkehrpunkte, Selbstberührungspunkte und isolierte Punkte?

Antwort. Man heisst dieselben besondere oder singuläre Punkte; darnach haben wir den

Satz. Um die singulären Punkte der Kurve $F(x, y) = 0$ zu erhalten, suche man die Wertepaare x_0, y_0, welche die drei Gleichungen:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0$$

befriedigen. Ist x_0, y_0 ein solches Wertepaar, so ist der Punkt x_0, y_0 ein gewöhnlicher Doppelpunkt, oder ein Rückkehrpunkt erster Art, ein Rückkehrpunkt zweiter Art, ein Selbstberührungspunkt oder ein isolierter Punkt, je nachdem:

$$D = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 \gtreqless \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

ist für $x = x_0$ und $y = y_0$.

Frage 60. Welche Form erhält die Gleichung der Tangenten in einem Doppelpunkt?

Antwort. Da für den Doppelpunkt mit den Koordinaten x_0 und y_0:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}},$$

so gibt die Tangentengleichung:

$$Y - y_0 = \frac{dy}{dx}(X - x_0)$$

hier für die beiden Tangenten die zwei Gleichungen:

$$Y - y_0 = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \sqrt{D}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}} (X - x_0)$$

und

$$Y - y_0 = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \sqrt{D}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}} (X - x_0);$$

wobei natürlich in den partiellen Ableitungen und in D $x = x_0$, $y = y_0$ zu setzen ist.

Es können aber auch beide Tangenten durch eine einzige Gleichung ausgedrückt werden. Wenn man nämlich die Gleichung:

$$Y - y_0 = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}} (X - x_0)$$

zuerst in der Form schreibt:

$$\frac{(Y - y_0) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{X - x_0} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}},$$

dann quadriert, mit $(X - x_0)$ durchmultipliziert und mit $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ durchdividiert, so erhält man:

$$(Y - y_0)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 (Y - y_0)(X - x_0) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (X - x_0)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Wir haben also den

Satz. Sind x_0, y_0 die Koordinaten eines Doppelpunktes der Kurve $F(x, y) = 0$, so haben die beiden Tangenten in diesem Punkt die Gleichung:

$$(Y - y_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 (Y - y_0)(X - x_0) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (X - x_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0,$$

wobei in den partiellen Ableitungen $x = x_0$, $y = y_0$ zu nehmen ist; die linke Seite lässt sich als das Produkt von zwei linearen Faktoren in den laufenden Koordinaten x und y darstellen.

Frage 61. Welche Gleichung hat die Tangente in einem Rückkehrpunkt und Selbstberührungspunkt?

Antwort. Für diese Punkte ist $D = 0$, daher beschränkt sich $\frac{dy}{dx}$ auf:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}.$$

Hiermit geht die Tangentengleichung:

$$Y - y_0 = \frac{dy}{dx}(X - x_0)$$

über in:

$$(Y - y_0)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (X - x_0)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

folglich haben wir den

Satz. Sind x_0, y_0 die Koordinaten eines Rückkehr- oder Selbstberührungspunktes der Kurve $F(x, y) = 0$, so hat die (doppelt zu rechnende) Tangente die Gleichung:

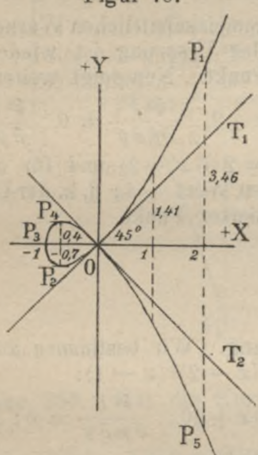
$$(Y - y_0)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (X - x_0)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Aufgabe 250. Hat die Kurve, deren Gleichung:

$$x^3 + x^2 - y^2 = 0$$

ist, einen besonderen Punkt?

Figur 79.



Auflösung. Wir bilden aus $F(x, y) = x^3 + x^2 - y^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial F}{\partial x^2} = 6x + 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2.$$

Den drei Gleichungen:

$$x^3 + x^2 - y^2 = 0$$
$$3x^2 + 2x = 0$$
$$2y = 0$$

genügt das Wertepaar $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$; also ist der Ursprung ein besonderer Punkt. Ferner wird für $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_2} = -2,$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 1 - (6x + 2)(-2),$$

somit $D = 4$; d. h. der gefundene besondere Punkt muss ein Doppelpunkt sein. Endlich folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm 2}{-2} = \pm 1,$$

also:

$$\tau_1 = 45^0,$$

beziehungsweise:

$$\tau_2 = 135^0$$

und darnach sind die Tangentengleichungen

$$Y + X = 0$$

und

$$Y - X = 0 \quad \text{(siehe Figur 79).}$$

Aufgabe 251. Hat die Kurve, deren Gleichung:

$$x^3 - y^2 = 0$$

ist, einen besonderen Punkt? (Siehe Aufgabe 27 und Figur 30).

Auflösung. Die drei Gleichungen:

$$F(x, y) = x^3 - y^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y = 0$$

geben die gemeinschaftlichen Wurzeln $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$; der Ursprung ist darnach ein besonderer Punkt.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \; \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2$$

geben für $x_0 = 0$ und y_0 zunächst:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2.$$

Hiermit wird auch $D = 0$; d. h. der Ursprung ist ein Rückkehrpunkt und zwar erster Art. Die Gleichung der Rückkehrtangente vereinfacht sich zu:

$$y = 0;$$

d. h. die letztere fällt mit der Abscissenachse zusammen.

Aufgabe 252. Bestimme den besonderen Punkt von der Kurve mit der Gleichung:

$$x^3 - x^2 - y^2 = 0$$

(siehe Figur 78).

Auflösung. Hier wird $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$. Die drei Gleichungen:

$$x^3 - x^2 - y^2 = 0, \; 3x^2 - 2x = 0 \text{ u. } -2y = 0$$

geben die gemeinschaftlichen Wurzeln $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; der Ursprung ist wieder ein besonderer Punkt. Nun folgt weiter:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x - 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2,$$

daher $D = 2(6x - 2)$ und für $x = 0$ erreicht D den Wert -4; d. h. der Ursprung 0 ist ein isolierter Punkt.

Aufgabe 253. Zu untersuchen, ob die Kurve mit der Gleichung:

$$3y^2 - (x-2)^2(x-1) = 0$$

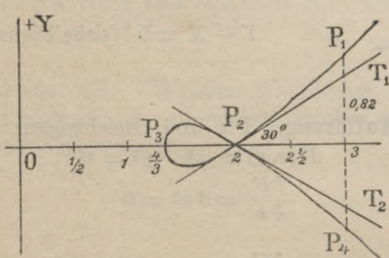
einen besonderen Punkt besitzt.

Auflösung. Wir bestimmen aus $F(x, y) = 3y^2 - (x-2)^2(x-1)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x-2)(-3x+4); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6x + 10; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6.$$

Figur 80.



Die drei Gleichungen:

$$3y^2 - (x-2)^2(x-1) = 0,$$
$$(x-2)(-3x+4) = 0$$
$$\text{und} \qquad 6y = 0$$

haben die gemeinschaftlichen Wurzeln $x_0 = 2$ und $y_0 = 0$. Diese Werte liefern:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6,$$

also:

$$D = \sqrt{0 - (-2)\,6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

der gefundene Punkt ist demnach ein Doppelpunkt. Für ihn wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3};$$

also ist:

$$\tau_1 = 30^0, \quad \tau_2 = 150^0$$

und die Tangentengleichung lautet:

$$6\,Y^2 + (X-2)(-2) = 0$$

oder:
$$3\,Y^2 - (X-2)^2 = 0$$

oder:
$$X + \sqrt{3}\,Y - 2 = 0$$

und
$$X - \sqrt{3}\,Y - 2 = 0$$

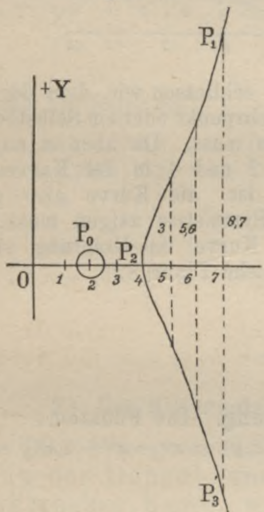
(siehe Figur 80).

Aufgabe 254. Hat die Kurve mit der Gleichung:

$$y^2 - (x-2)^2(x-4) = 0$$

einen besonderen Punkt?

Figur 81.



Auflösung. Hier erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x-2)(-3x+10), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,y,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6x+16, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2.$$

$F(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ verschwinden für $x_0 = 2$, $y_0 = 0$; diese Koordinaten liefern:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \text{ und } D = \sqrt{-8};$$

d. h. der Punkt $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ ist ein isolierter Punkt der Kurve. Sie schneidet die Abscissenachse im Punkt $x = 4$ und hat zwei Wendepunkte mit der Abscisse $x = 4\frac{2}{3}$ (siehe Figur 81).

Aufgabe 255. Hat die Kurve mit der Gleichung:

$$x^4 + x^2 y^2 - 6\,x^2 y + y^2 = 0$$

besondere Punkte?

Auflösung. Wir erhalten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4\,x^3 + 2\,x\,y^2 - 12\,x\,y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,x^2 y - 6\,x^2 + 2\,y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12\,x^2 + 2\,y^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 4\,x\,y - 12\,x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\,x^2 + 2.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden:

$$F(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y}.$$

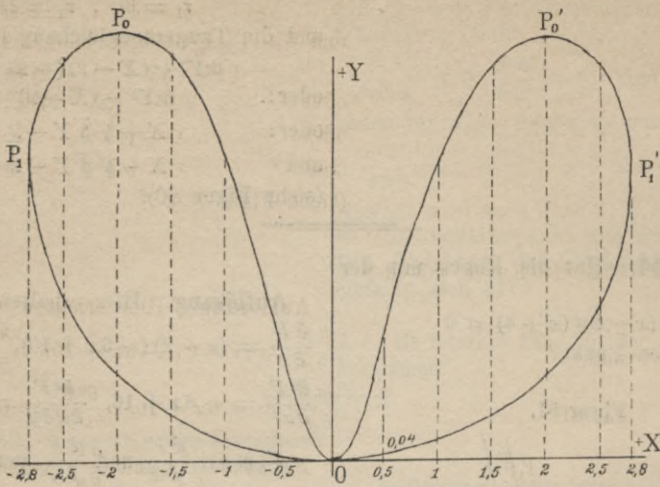
Diese Werte geben weiter:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \text{ und } D = 0.$$

Figur 82.



Erkl. 74. Zur graphischen Darstellung obiger Kurve dienen folgende Werte:

$\pm x =$	0,1	0,25	0,5	1	1,5
$y_1 =$	0	0,01	0,04	0,2	0,4
$y_2 =$	0,06	0,34	1,16	2,8	3,74

$\pm x =$	2	2,83 (Max.)
$y_1 =$	0,8	$^8/_3 = 2,7$
$y_2 =$	4 (Max.)	$^8/_3 = 2,7$.

Daraus schliessen wir, dass der Ursprung ein Rückkehrpunkt oder ein Selbstberührungspunkt sein muss. Da aber x nur auf den Potenzen 2 und 4 in der Kurvengleichung vertreten ist, die Kurve also gegen die Y-Achse Symmetrie zeigen muss, so folgt, dass die Kurve im Ursprung sich selbst berührt (siehe Figur 82).

Aufgabe 256. Bestimme die besonderen Punkte der Kurve mit der Gleichung:

$$x^5 - x^4 + 2x^2 y - y^2 = 0.$$

Auflösung. Die Funktion:

$$F(x,y) = x^5 - x^4 + 2x^2 y - y^2$$

liefert:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 5x^4 - 4x^3 + 4xy\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 - 2y,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 20x^3 - 12x^2 + 4y\,,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 4x\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2.$$

Die drei Gleichungen:

$$x^5 - x^4 + 2x^2 y - y^2 = 0\,,$$

$$5x^4 - 4x^3 + 4xy = 0$$

und

$$2(x^2 - y) = 0$$

gaben als gemeinsame Wurzeln $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; der Ursprung ist demnach ein besonderer Punkt. Seine Koordinaten machen $D = 0$; d. h. es liegt ein Rückkehrpunkt vor.

Schreiben wir die Kurvengleichung in der Form:

$$(y - x^2)^2 = x^5 \text{ oder } y = x^2 \pm \sqrt{x^5},$$

so sehen wir, dass die Kurve die beiden Zweige $y = x^2 + \sqrt{x^5}$ und $y = x^2 - \sqrt{x^5}$

hat. Von diesen ist der erstere in allen Punkten gegen die Abscissenachse konvex, denn für ihn ist:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = 2 + \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}};$$

der letztere Wert bleibt wegen des positiven Vorzeichens der Wurzel für sämtliche Abscissen positiv. Für den zweiten Zweig erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}};$$

d. h. auch dieser Zweig steigt vom Ursprung an bis zum Punkt $x_1 = \frac{16}{25}$ und liegt anfänglich auf der oberen Seite der Abscissenachse; der Ursprung erscheint demnach als Rückkehrpunkt zweiter Art. Da:

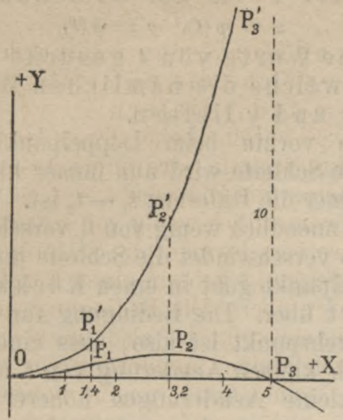
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$$

für:

$$x = \frac{64}{225}$$

zu Null wird, so bezeichnet $x_2 = \frac{64}{225}$ die Abscisse eines Wendepunkts des unteren Zweigs, der bei $x = 1$ die Abscissenachse durchschneidet und nach unten ins Unendliche geht (siehe Figur 83).

Figur 83.



Erklärung zur Figur 83.

$x = 1,42$	3,2	5
$y_1 = 0,2$ (W)	0,4 (Max)	0
$y_2 = 0,6$	3,7	10

beim Massstab 1 : 5.

2) Die Kurvengleichungen seien $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Frage 62. Wie geschieht die Bestimmung der Doppel- und Rückkehrpunkte einer Kurve, wenn die Koordinaten x, y ihrer Punkte als Funktionen eines unabhängigen Parameters t dargestellt sind?

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Antwort. Hier können Doppelpunkte in der Weise auftreten, dass zwei verschiedene Werte t_1, t_2 des Parameters dieselben Koordinatenwerte x, y ergeben, während die Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \text{ und } \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

für t_1 und t_2 verschiedene Werte annehmen und dadurch auch die Tangentengleichung:

$$\varphi'(t)(X - x) - \psi'(t) \cdot (Y - y) = 0$$

(siehe Frage 4, Seite 10)

für t_1 und t_2 verschieden ausfällt. Aendert sich t, beständig wachsend oder beständig abnehmend, von t_1 zu t_2, so beschreibt dabei der Kurvenpunkt P eine Schleife, welche zum Anfangspunkt zurückführt.

Erkl. 75. Wählen wir als Beispiel die verschlungene Cykloide (siehe Aufgabe 58 und Figur 35) mit den Gleichungen:

$$x = rt - b\sin t, \quad y = r - b\cos t \text{ und } b > r,$$

so ist zu beachten, dass x zu Null wird für $rt = b\sin t$ oder $\sin t = \frac{r}{b} \cdot t$. Heissen wir den positiven Wert der unabhängigen Veränderlichen t, welcher dieser Gleichung genügt, t_1, so genügt der nämlichen Bedingung offenbar auch der zweite Wert $t_2 = -t_1$. Zu t_1 gehört der Kurvenpunkt P_1 mit den Koordinaten $x_1 = 0$ und $y_1 = r - b\cos t_1$, auf der Y-Achse liegend, und zu t_2 der Punkt P_2 mit den Koordinaten $x_2 = 0$ und $y_2 = r - b\cos t_2 = r - b\cos(-t_1)$

$= r - b\cos t_1 = y_1$; d. h. P_2 fällt mit P_1 zusammen. Lassen wir demnach t beständig abnehmen vom positiven Wert t_1, der vorhin bestimmt wurde, bis zum Wert $t_2 = -t$, so beschreibt der Punkt P, von P_1 auf der Y-Achse ausgehend, nach links unten eine Schleife um den Ursprung O bis zum tiefsten Kurvenpunkt auf der negativen Y-Achse, und dann rechts den symmetrischen Bogen nach P_1 zurück. P_1 ist dann ein Doppelpunkt. — Eine Wiederholung tritt offenbar ein für $t_3 = t_1 + 2\pi$, $t_4 = -t_3$ auf der Geraden 16′ 16″, $t_5 = t_1 + 4\pi$, $t_6 = -t_5$ auf der Geraden 32′ 32″ u. s. f.

Um die Doppelpunkte der Kurve zu erhalten, müssen demnach aus der Form der Gleichungen:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

solche Werte von t gesucht werden, welche die nämlichen Werte für x und y liefern.

Die vorhin beim Doppelpunkt bemerkte Schleife wird nun immer kleiner, je kleiner die Differenz $t_1 - t_2$ ist. Wenn t_2 nur unendlich wenig von t_1 verschieden ist, so verschwindet die Schleife und der Doppelpunkt geht in einen Rückkehrpunkt über. Die Bedingung für einen Rückkehrpunkt ist also, dass einer unendlich kleinen Aenderung von t unendlich kleine Aenderungen höherer Ordnung von x und y entsprechen; oder der Rückkehrpunkt fordert, dass:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dy}{dt} = 0$$

ist.

Aufgabe 257. Bestimme die Rückkehrpunkte der Cykloide:

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t).$$

(Siehe Aufgabe 10 und Figur 13.)

Auflösung. Wir erhalten:

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = r\sin t.$$

Beide Differentialquotienten verschwinden für $t = 0,\ 2\pi,\ 4\pi$ u. s. w. Die zugehörigen Punkte sind daher Rückkehrpunkte und die Rückkehrtangenten sind normal zur Abscissenachse.

---

b) Mehrfache Punkte.

Frage 63. Wie ist die Tangentenbestimmung im Punkt P_0 einer Kurve $F(x, y) = 0$ weiter zu führen, wenn die Koordinaten x_0, y_0 des Punktes gleichzeitig folgenden Gleichungen genügen:

$$1) \ldots F(x, y) = 0,$$

$$2) \ldots \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$3) \ldots \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$4) \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0,$$

$$5) \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

und

$$6) \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Antwort. Da für den vorliegenden Punkt die seither benützte Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}$$

versagt, weil die rechte Seite unter der Form $\frac{0}{0}$ auftritt, schlagen wir zur Bestimmung der Werte von $\frac{dy}{dx}$ im Punkt x_0, y_0 folgenden Weg ein.

Wir differentiieren vollständig die Funktion $F(x, y) = 0$ und erhalten:

$$7) \ldots \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Diese Funktion ebenso behandelt mit der Beachtung, dass $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ Funktionen von x und y sind, liefert:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

oder:

$$8) \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

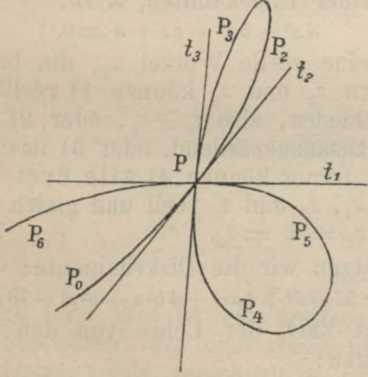
Die nochmalige Differentiation der letzten Gleichung ergibt:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \cdot \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$$

oder geordnet:

$$9) \ldots \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$
$$+ 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = 0.$$

Figur 84.



Wären $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ nicht $= 0$ für $x = x_0$ und $y = y_0$, so würde die Gleichung 7) den Wert von $\frac{dy}{dx}$ liefern wie früher:

$$= - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Wären $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, dagegen $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ nicht $= 0$, so würde Gleichung 8) den Wert von $\frac{dy}{dx}$ ergeben wie oben bei den Doppelpunkten. Im vorliegenden Fall dient nun die Gleichung 9) zur Bestimmung von $\frac{dy}{dx}$, denn sie vereinfacht sich wegen der Gleichungen 1) bis 6) für $x = x_0$ und $y = y_0$ zu:

$$10) \ldots \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$$

Wir sehen also, dass $\frac{dy}{dx}$ aus einer Gleichung dritten Grades zu bestimmen ist, die uns für $\frac{dy}{dx}$ im allgemeinen drei verschiedene Werte liefert. Daraus schliessen wir, dass im betrachteten Punkt P drei Tangenten an die Kurve gezogen werden können; es müssen demnach drei verschiedene Zweige durch den Punkt gehen, oder er muss ein dreifacher Punkt sein (s. Figur 84).

Daraus ziehen wir den

Satz. Erfüllen die Koordinaten x_0, y_0 eines Punktes P einer Kurve $F(x, y) = 0$ das System der Gleichungen:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

so ist der Punkt ein dreifacher; man findet die drei Werte von $\frac{dy}{dx}$, welche den drei Tangenten in dem betrachteten Punkt an die drei verschiedenen Zweige entsprechen, aus der Gleichung:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

für $x = x_0$, $y = y_0$, und die Gleichung einer solchen Tangente ist dann:

$$Y - y_0 = \frac{dy}{dx}(X - x_0)$$

Frage 64. Welche verschiedenen Fälle können bei einem dreifachen Punkt unterschieden werden?

Erkl. 76. Die mehrfachen Punkte von Kurven sind von Newton, Enumeratio 1704, IV und V, erkannt und beschrieben worden. Die Rückkehrpunkte finden zuerst Erwähnung in einem Brief von Johann Bernouilli an Leibniz 8. Juni 1695. Ferner finden wir sie erwähnt in L'Hopital Analyse des infiments petits. Vergleiche weiter: Maclaurin, Geometria organica, 1720; Euler, Introductio II c. 13; Cramer, Courbes algèbriques.

Antwort. Jede kubische Gleichung mit einer Unbekannten, z. B.:

$$a z^3 + b z^2 + c z + d = 0,$$

hat eine reelle Wurzel z_1, die beiden andern z_2 und z_3 können 1) reell und verschieden, also $z_2 \gtrless z_3$, oder 2) reell und zusammenfallend, oder 3) imaginär sein; ferner können 4) alle drei Wurzeln z_1, z_2 und z_3 reell und gleich sein, also $z_1 = z_2 = z_3$.

Setzen wir die Diskriminante:

$$D^* = 27 a^2 d^2 + 4 a c^3 + 4 b^3 d - b^2 c^2 - 18 a b c d,$$

so ist nach der Lehre von den Gleichungen:

1) z_2 und z_3 reell und verschieden für $D^* < 0$,
2) z_2 und z_3 reell und $z_2 = z_3$ „ $D^* = 0$,
3) z_2 und z_3 imaginär „ $D^* > 0$.

Weiter wird:

4) $z_1 = z_2 = z_3$,

wenn die Doppelbedingung D^{**} erfüllt ist:

$$\begin{cases} c = \dfrac{b^2}{3a} \\ d = \dfrac{b^3}{27a^2}. \end{cases}$$

Wenden wir dies auf die Gleichung 10) an, welche für $\frac{dy}{dx}$ vom dritten Grad ist, indem wir setzen:

$$a = \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}, \quad b = 3\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}, \quad c = 3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} \quad \text{und} \quad d = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3},$$

so wird:

$$11) \ldots D^* = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}\right)^3 \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + 4\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \cdot \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\right)^3$$
$$- 3\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2 - 6\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial y^3};$$

ferner:

$$12) \ldots D^{**} \begin{cases} \dfrac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2}{\dfrac{\partial^3 F}{\partial y^3}} \\ \text{und} \\ \dfrac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\right)^3}{\left(\dfrac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)^2}. \end{cases}$$

Wir können also jetzt sagen:

Ist für $x = x_0$ und $y = y_0$ 1) $D^* < 0$, so hat der dreifache Punkt P eine reelle und zwei weitere reelle und verschiedene Tangenten.

Ist 2) $D^* = 0$, so hat der dreifache Punkt P eine reelle und zwei weitere zusammenfallende Tangenten.

Ist 3) $D^* > 0$, so hat der dreifache Punkt eine reelle und zwei imaginäre Tangenten.

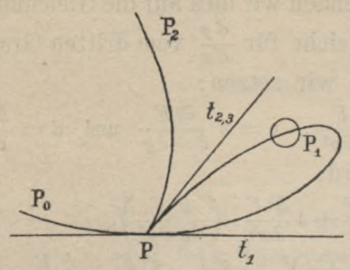
Ist 4) für $x = x_0$ und $y = y_0$ die Doppelbedingung D^{**} erfüllt, so hat der dreifache Punkt drei zusammenfallende Tangenten.

Frage 65. Wie ist ein dreifacher Punkt beschaffen, der eine reelle und zwei weitere reelle verschiedene Tangenten besitzt?

Antwort. Der betreffende Punkt erscheint als ein gewöhnlicher Kurvenpunkt, der mit einem Doppelpunkt zusammenfällt, und ist der gewöhnliche dreifache Punkt, wie ihn die Figur 84 zeigt.

Frage 66. Wie ist ein dreifacher Punkt beschaffen, der eine reelle Tangente und ausserdem zwei reelle zusammenfallende Tangenten besitzt?

Figur 85.



Antwort. In diesem Fall haben wir einen gewöhnlichen Kurvenpunkt, mit einem Rückkehrpunkt zusammenfallend, wie in Figur 85; dabei ist die Tangente t_1 einfach, die Tangente t_2, t_3 doppelt zu rechnen. Wir nennen ihn einen aufliegenden Rückkehrpunkt. Derselbe entsteht aus dem vorigen, wenn man die Tangenten t_2 und t_3 bei einer Drehung um P sich nähernd vorstellt derart, dass die obere Schleife immer mehr sich verengt und schliesslich sich in den Punkt P zurückzieht.

Frage 67. Welche Beschaffenheit hat der dreifache Punkt mit einer reellen und zwei imaginären Tangenten?

Antwort. Hier fällt ein gewöhnlicher Kurvenpunkt mit einem isolierten Punkt zusammen; dem Auge erscheint derselbe in der Zeichnung als ein einfacher und bedarf also, um hervorzutreten, besonderer Markierung, z. B. durch einen kleinen Kreis, wie in Figur 85. Wir bezeichnen ihn als einen aufliegenden Isolierpunkt.

Frage 68. Wie ist ein dreifacher Punkt beschaffen mit drei zusammenfallenden Tangenten?

Antwort. Wenn wir in Figur 85 die Rückkehrtangente um P nach rechts sich drehend denken, so dass die Schleife sich immer mehr zusammenzieht, so wird beim Zusammenfallen der Rückkehrtangente mit t_1 und dem Verschwinden der Schleife der Punkt P zu einem solchen mit drei zusammenfallenden Tangenten. Die nächste Figur 86 zeigt einen solchen; wir nennen denselben eine Spitze.

Zusammengefasst folgt der

Satz. Hat eine Kurve $F(x, y) = 0$ im Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0 einen dreifachen Punkt, so ist der letztere ein gewöhnlicher dreifacher Punkt oder ein aufliegender Rückkehrpunkt oder ein aufliegender Isolierpunkt, je nachdem für $x = x_0$

und $y = y_0$ der Ausdruck $D^* \lesseqgtr 0$, oder eine Spitze, wenn die Doppelbedingung D^{**} erfüllt wird.

Aufgabe 258. Zu zeigen, dass die Kurve, deren Gleichung:

$$x^4 - 2x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0$$

ist, einen dreifachen Punkt besitzt und den letzteren genauer zu kennzeichnen.

Auflösung. Wir erhalten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - 4xy + 3y^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x^2 + 6xy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -4x + 6y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6x - 6y,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 24x, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} = -4, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2} = 6.$$

Für $x = 0$ und $y = 0$ verschwinden alle partiellen Ableitungen I. und II. Ordnung; ebenso:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3};$$

der Ursprung ist demnach ein dreifacher Punkt. Berechnen wir D^*, so erhalten wir:

$$4(-4)^3(-6) - 3(-4)^2 6^2 = +1536 - 1728 = -192,$$

woraus wir schliessen, dass der dreifache Punkt ein gewöhnlicher ist wie in Figur 84.

Die Gleichung:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0$$

geht hier für $x = 0$, $y = 0$ über in:

$$-6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 18\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 12 \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

woraus wir erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 2;$$

d. h. die drei Tangenten bilden die Winkel 0, 45^0 und $63^0\,26'$ mit der Abscissenachse und haben die Gleichungen:

$$Y = 0, \quad Y = X \text{ und } Y = 2X.$$

Aufgabe 259. Desgleichen für die Kurve mit der Gleichung:

$$x^4 - x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0.$$

Auflösung. Aus:

$$F(x,y) = x^4 - x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0$$

ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - 2xy + 2y^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 + 4xy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2 - 2y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -2x + 4y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4x - 6y.$$

Alle diese Funktionen erreichen für $x = 0$, $y = 0$ den Wert Null; es ist demnach der Ursprung ein besonderer Punkt.

Wir bilden weiter:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 24x, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = -6;$$

von diesen verschwindet nur die erste und es folgt:

$$D^* = 4(-2)^3(-6) - 3\cdot(-2)^2\cdot 4^2 = 0;$$

die Kurve hat also im Ursprung einen aufliegenden Rückkehrpunkt.

Die kubische Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ geht über in:

$$-6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 12\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6\frac{dy}{dx} = 0;$$

oder es ist:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 1 \text{ und } \frac{dy}{dx} = 1;$$

d. h. die Kurve berührt die Abscissenachse und die Rückkehrtangente hat gegen die letztere die Neigung 45^0 (siehe Figur 85).

Aufgabe 260. Desgleichen für die Kurve mit der Gleichung:

$$x^4 - 2x^2y - 2xy^2 - y^3 = 0.$$

Auflösung. Für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden sämtliche partielle Differentialquotienten I. und II. Ordnung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - 4xy - 2y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2x^2 - 4xy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -4x - 4y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -4x - 6y;$$

ferner wird:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 24x,$$

also $= 0$ für $x = 0$ und $y = 0$, weiter folgt:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = -4; \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = -4; \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = -6$$

und demnach:

$$D^* = 4\cdot(-4)^3(-6) - 3\cdot(-4)^2\cdot(-4)^2 = +768,$$

woraus wir schliessen, dass der Ursprung ein aufliegender Isolierpunkt ist. Die kubische Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ geht hier über in:

$$-6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 12\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 12\frac{dy}{dx} = 0;$$

woraus wir die drei Werte erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -1 + i \text{ und } \frac{dy}{dx} = -1 - i;$$

die Kurve berührt demnach die Abscisse im Ursprung und besitzt dort zwei imaginäre Tangenten.

Aufgabe 261. Bestimme das Verhalten der Kurve mit der Gleichung:

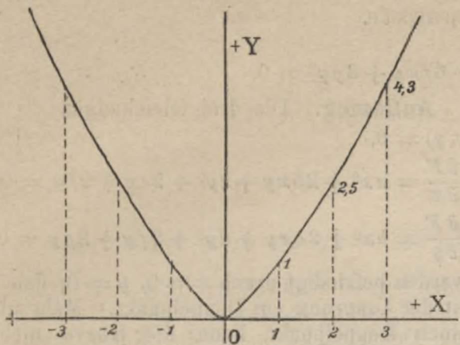
$$x^4 - y^3 = 0$$

im Ursprung.

Auflösung. Aus:

$$x^4 - y^3 = 0$$

Figur 86.



erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -6y,$$

die alle verschwinden für $x = 0$, $y = 0$.

Weiter folgt:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 24x, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = -6.$$

Weil für $x = 0$, $y = 0$ auch $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}$ zu Null wird, so genügen die partiellen Differentialquotienten III. Ordnung der Doppelbedingung D^{**}; d. h. der Ursprung ist eine Spitze (siehe Figur 86).

Frage 69. Was ist über einen Punkt P einer Kurve $F(x, y) = 0$ zu sagen, dessen Koordinaten x_0, y_0 alle partiellen Differentialquotienten bis zur III. Ordnung einschliesslich zu Null machen?

Antwort. In dem betreffenden Punkt kreuzen sich vier Kurvenzweige; der Punkt ist also ein vierfacher. Zur Bestimmung der Wurzeln $\frac{dy}{dx}$ dient die Gleichung vierten Grades, die man durch viermalige Differentiation von $F(x, y) = 0$ gewinnt (siehe Frage 63). Doch kann hierauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

Frage 70. Welche weiteren Besonderheiten können in einem vielfachen Punkte auftreten?

Antwort. Betrachten wir nur einen Doppelpunkt, so kann derselbe für den einen Zweig oder für beide Zweige Wendepunkt sein. Diesen Fall haben wir bei der Lemniscate (siehe Aufgabe 192 u. Figur 58). Oder es könnte der eine Zweig oder beide im Doppelpunkt sich verhalten wie die Wendeparabel oder Wendeflachparabel u. s. w. in ihren Scheiteln (siehe Aufgabe 222 und 224 nebst den zugehörigen Figuren). Aber die Betrachtung dieser Fälle liegt ausserhalb des Rahmens dieses Buches, wie auch die Besonderheiten, welche bei transcendenten Linien vorkommen, hier übergangen werden müssen.

c) Uebungsbeispiele über besondere Punkte.

1) Doppelpunkte.

Aufgabe 262.

$$F(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + 3ex^2 + 6fxy + 3gy^2 = 0.$$

Auflösung. Die drei Gleichungen:

$$F(x,y) = 0,$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial F}{\partial x} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2fy = 0,$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial F}{\partial y} = bx^2 + 2cxy + dy^2 + 2fy + 2gy = 0.$$

werden befriedigt durch $x = 0$, $y = 0$, daher ist der Ursprung ein Doppelpunkt. Mehr als einen Doppelpunkt kann die Kurve nicht haben, denn hätte eine Kurve dritten Grades zwei Doppelpunkte A und B, so würde die Gerade AB in A zwei und in B zwei Punkte mit der Kurve gemein haben, hätte also vier Punkte im Widerspruch mit der Thatsache, dass eine Gerade mit einer Kurve vom dritten Grad nur drei Punkte gemein haben kann.

Man hat ferner:

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = ax + by + e, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = bx + cy + f, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = cx + dy + g.$$

Für den Doppelpunkt $x = 0$, $y = 0$ erhalten diese Ausdrücke der Reihe nach die Werte e, f, g; daher ist die Gleichung der Doppelpunktstangenten:

$$ex^2 + 2fxy + gy^2 = 0.$$

Der Ursprung ist daher ein eigentlicher Doppelpunkt, wenn $eg - f^2 > 0$, ein Rückkehrpunkt, wenn $ef - g^2 = 0$, ein isolierter Punkt, wenn $eg - f^2 < 0$ ist.

Aufgabe 263.

$$y^2 = \frac{(2x - 3p)^2(2x - p)}{32p}$$

Auflösung.

$$x = \frac{3}{2}p, \; y = 0.$$

Aufgabe 264.

$$y^3 - x^3 - x^2 = 0.$$

Auflösung.

$x = 0$, $y = 0$; Tangenten $Y = +2X$,
$Y = -2X$.

Aufgabe 265.

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0$$

Blatt des Descartes (s. Aufgabe 193 u. Figur 59).

Auflösung.

$x = 0$, $y = 0$; Tangenten $X = 0$, $Y = 0$.

Aufgabe 266.

$$(x^2 + y^2)(b - y)^2 - a^2y^2 = 0$$

Gleichung der Conchoide (siehe Aufgabe 232 und Figur 45).

Auflösung. Aus 1):

$$F = (x^2 + y^2)(b - y)^2 - a^2y^2 = 0$$

findet man:

$$2) \ldots \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} = x(b - y)^2; \quad 3) \ldots \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} = (y - b)(x^2 + 2y^2 - by) - a^2y;$$

4) . . . $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (b-y)^2$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = x(y-b)$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = x^2 + 6y^2 - 6by + b^2 - a^2$.

Aus 2) folgt für Doppelpunkte $x = 0$ oder $y = b$.

Setzt man das erstere in 1) und 3) ein, so ergibt 1):

6) $y^2 = 0$ oder $(b-y)^2 = a^2$

und 3) gibt:

7) $y = 0$ oder $(y-b)(2y-b) = a^2$.

Hieraus folgt, dass der Ursprung $x = 0$, $y = 0$ den Gleichungen 1), 2) und 3) genügt; da er die Grössen 4) nicht zu Null macht, so ist er ein Doppelpunkt der Conchoide. Die beiden andern Werte für y unter 6) und 7) stimmen nicht überein; der in 5) noch angegebene Wert $y = b$ befriedigt 3) nur unter der Annahme $x = \infty$; beide Werte genügen auch 1) und machen 4) nicht gleich Null; $x = \infty$, $y = b$ sind demnach die Koordinaten eines zweiten Doppelpunktes.

Setzt man in den Formeln 4) $x = 0$, $y = 0$, so erhält man als die Gleichung der Doppelpunktstangenten des Ursprungs:

$$bx^2 + (b^2 - a^2)y^2 = 0.$$

Ist $b > a$, so sind diese Tangenten imaginär; der Ursprung 0 wird in diesem Fall zwar durch die Konstruktion der Kurve nicht erhalten (siehe Erkl. 50), gehört aber als isolierter Punkt zu der durch Gleichung 1) definierten Kurve.

Ist $b = a$, so hat die Kurve in O einen Rückkehrpunkt und die Ordinatenachse ist Rückkehrtangente.

Ist $b < a$, so ist O ein eigentlicher Doppelpunkt.

Der zweite Doppelpunkt ist der unendlich ferne Punkt der Geraden g (siehe Figur 45). Für die Koordinaten desselben ist:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \text{ unbestimmt}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \infty.$$

Die Gleichung der Doppelpunktstangenten ist daher:

$$(y-b)^2 = 0;$$

der unendlich ferne Punkt der Geraden g ist somit ein Rückkehrpunkt und g die zugehörige Rückkehrtangente der Conchoide.

(Heger, pag. 522).

Aufgabe 267.

$$x^4 + x^2 - y^2 = 0.$$

Auflösung.

$x = 0$, $y = 0$; Tangenten $Y = +X$, $Y = -X$.

Aufgabe 268.

$$x^4 + y^4 - 2y^2 - 2x^2 + 1 = 0.$$

Auflösung.

$x_1 = +1$, $y_1 = 0$; Tangenten $Y = \sqrt{2}(X-1)$, $Y = -\sqrt{2}(X-1)$,

$x_2 = -1$, $y_1 = 0$; „ $Y = \sqrt{2}(X+1)$, $Y = -\sqrt{2}(X+1)$.

Aufgabe 269.

$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0.$

Auflösung.

$x_1 = 0,\ y_1 = -a$; Tangenten $Y = +\sqrt{\frac{2}{3}}\,X + a,\ Y = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,X + a,$

$x_2 = a,\ y_2 = 0$; „ $Y = +\sqrt{\frac{4}{3}}(X - a),\ Y = -\sqrt{\frac{4}{3}}(X - a),$

$x_3 = -a,\ y_3 = 0$; „ $Y = +\sqrt{\frac{4}{3}}(X + a),\ Y = -\sqrt{\frac{4}{3}}(X + a).$

Aufgabe 270.

$$y - \varphi(x) - (x - a)\left(\frac{x - b}{c}\right)^{\frac{p}{q}} = 0,$$

wobei $\varphi(x)$ eine analytische Funktion ist, welche innerhalb des in Betracht kommenden Gebietes endlich und stetig bleibt, deren Differentialquotienten ebenfalls endlich und stetig bleiben. a, b, c seien positive Zahlen, $\frac{p}{q}$ ein nicht weiter vereinfachbarer Bruch, q eine gerade Zahl und $a > b$ z. B.:

$\varphi(x) = x^2,\ a = 2,\ b = 1,\ p = 3,\ q = 2,$ gibt:

$$y - x^2 - (x - 2)\cdot\left(\frac{x - 1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Auflösung.

$$x = a,\ y = \varphi(a).$$

Der Leser kann sich hiernach leicht beliebig viele weitere Beispiele bilden.

Aufgabe 271.

$$x = \frac{(t - a)(t - b)}{t - c} + d;$$

$$y = \frac{(t - a)(t - b)}{t - c_1} + d_1.$$

Auflösung. Für die Kurve, welche durch die nebenstehenden Gleichungen dargestellt wird, ergibt sich derselbe Punkt P mit den Koordinaten $x = d,\ y = d_1$ für die beiden Parameterwerte $t = a$ und $t = b$.

Wir erhalten:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(t - a)(t - c) + (t - b)(t - c) - (t - a)(t - b)}{(t - c)^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t - a)(t - c_1) + (t - b)(t - c_1) - (t - a)(t - b)}{(t - c_1)^2}.$$

Für $t = a$ folgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a - b}{a - c},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{a - b}{a - c_1}$$

und für $t = b$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b - a}{b - c},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{b - a}{b - c_1}.$$

Daher ist der Punkt $x = d,\ y = d_1$ ein Doppelpunkt und die Gleichungen der Tangenten sind:

$$\frac{X - d}{a - c_1} - \frac{Y - d_1}{a - c} = 0,$$

$$\frac{X - d}{b - c_1} - \frac{Y - d_1}{b - c} = 0.$$

---

2) Rückkehrpunkte.

Aufgabe 272.

$$y^2 = \frac{8}{27} p (x-p)^3.$$

Auflösung.

$x = p$, $y = 0$ I. Art. Tangente $Y = 0$.

Aufgabe 273.

$$(y-x) - x^3 = 0.$$

Auflösung.

$x = 0$, $y = 0$ I. Art. Tangente $Y = X$.

Aufgabe 274.

$$(x^2 + y^2) x - 2py^2 = 0.$$

Auflösung.

$x = 0$, $y = 0$ I. Art. Tangente $Y = 0$.

Aufgabe 275.

$$x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y^2 + 2 = 0.$$

Auflösung.

$x = 0$, $y = 1$ I. Art. Tangente $Y + X - 2 = 0$.

Aufgabe 276.

$$(by - cx)^2 - (x-a)^5 = 0.$$

Auflösung.

$x = a$, $y = \frac{ac}{b}$ I. Art. Tangente $Y - \frac{ac}{b} = \frac{c}{b}(X - a)$.

Aufgabe 277.

$y^2 (2r - x) - x^3 = 0$ (Cissoide).

Auflösung.

$x = 0$, $y = 0$ I. Art. Tangente $Y = 0$.

Aufgabe 278.

$$y - b = (x-a)^{\frac{1}{3}} + (x-a)^{\frac{3}{4}}.$$

Auflösung.

$x = a$, $y = b$ II. Art. Tangente parallel zur Y-Achse.

Aufgabe 279.

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{a^2y^2}{4} = 0.$$

Auflösung.

$x = 0$, $y = 0$ II. Art. Tangente $Y = 0$.

Aufgabe 280.

$$(b^2y^2 + a^2x^2 - e^4)^3 + 27a^2b^2e^4x^2y^2 = 0$$

(Evolute der Ellipse),

wobei:

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Auflösung.

4 Rückkehrpunkte.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = +\frac{e^2}{a}, \quad x_4 = -\frac{e^2}{a}.$$

$$y_1 = +\frac{e^2}{b}, \quad y_2 = -\frac{e^2}{b}, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0.$$

Anmerkung 1. Man erhält hier:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6a^2 (b^2y^2 + a^2x^2 - e^4)^2 \cdot x + 54a^2b^2e^4y^2x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6b^2 (b^2y^2 + a^2x^2 - e^4)^2 y + 54a^2b^2e^4yx^2;$$

daraus bilden wir die beiden Gleichungen:

$$[(b^2y^2 + a^2x^2)^2 + 7b^2e^4y^2 - 2a^2e^4x^2 + e^8]\, x = 0,$$

$$[(b^2y^2 + a^2x^2)^2 - 2b^2e^4y^2 + 7a^2e^4x^2 + e^8)\, y = 0$$

und gewinnen daraus folgendes System von Werten:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=0 \\ x=0 \end{cases},\quad \text{II.}\ \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\dfrac{e^2}{b} \end{cases},\quad \text{III.}\ \begin{cases} x=\pm\dfrac{e^2}{a} \\ y=0 \end{cases},$$

$$\text{IV.}\ \begin{cases} x=\pm\dfrac{e^2}{a}\sqrt{-1} \\ y=\pm\dfrac{e^2}{b^2}\sqrt{-1} \end{cases},\quad \text{V.}\ \begin{cases} x=\pm\dfrac{e^2}{2a}\sqrt{-1} \\ y=\pm\dfrac{e^2}{2b}\sqrt{-1} \end{cases}.$$

Die beiden letzten Systeme geben keine reelle Punkte und das erste System befriedigt die Gleichung der Kurve nicht; das zweite und dritte System genügen dieser Gleichung; daher vier reelle Rückkehrpunkte in den Krümmungsmittelpunkten der vier Scheitel der Ellipse.

Vergleiche auch die später folgende Aufgabe im System über die Herleitung der Gleichung der Evolute der Ellipse nebst Figur.

Aufgabe 281.

$$(b^2y^2 - a^2x^2 + e^4)^3 + 27a^2b^2e^4x^2y^2 = 0,$$

wobei:

$$e^2 = a^2 + b^2$$

(Evolute der Hyperbel).

Auflösung.

2 reelle Rückkehrpunkte.

$$\begin{cases} x_1 = +\dfrac{e^2}{a} \\ y_1 = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{e^2}{a} \\ y_2 = 0 \end{cases}.$$

Man erhält die Doppelpunkte dieser Kurve, wenn man in den Werten I bis V der Koordinaten der oben bei der Ellipsenevolute gefundenen Punkte $b\sqrt{-1}$ statt b setzt.

Die beiden letzten Systeme geben ebenfalls keine reellen Punkte, weil:

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{e^2}{a}\sqrt{-1} \\ y=\dfrac{e^2}{b} \end{cases} \quad\text{und}\quad \begin{cases} x=\pm\dfrac{e^2}{2a}\sqrt{-1} \\ y=\pm\dfrac{e^2}{2b} \end{cases}$$

ist. Das erste System:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

befriedigt die Gleichung der Kurve auch hier nicht; das zweite System mit:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm\dfrac{e^2}{b}\sqrt{-1} \end{cases}$$

gibt hier keinen reellen Punkt. Das dritte System aber gehört zu reellen Punkten, welche Rückkehrspunkte und zugleich die Krümmungsmittelpunkte der beiden Scheitel der Hyperbel sind.

Die Figur folgt später bei der Behandlung der Evolute der Hyperbel.

Aufgabe 282.

$$y = \varphi(x) \pm \psi(x)(x-a)^{\frac{p}{q}}.$$

Dabei seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei analytische Funktionen, welche innerhalb des in

Auflösung. Rückkehrpunkt in $x = a$, $y = \varphi(a)$, $\dfrac{dy}{dx} = \varphi'(a)$.

Betracht kommenden Gebietes endlich und stetig bleiben, und deren sämtliche Ableitungen ebenfalls endlich und stetig sein sollen. a_1 sei eine konstante Grösse, $\frac{p}{q}$ ein positiver unächter, nicht weiter vereinfachbarer Bruch, und q eine gerade Zahl, z. B.:

$$\varphi(x) = x^3, \quad \psi(x) = x^4, \quad a = 2, \quad p = 5, \quad q = 4, \quad y = x^3 \pm x^4 (x-2)^{\frac{5}{4}}.$$

Aufgabe 283. Bestimme die Rückkehrpunkte der Epicykloide und Hypocykloide.
(Siehe Aufgabe 11, Figur 15, und Aufgabe 12, Figur 18.)

Auflösung. Rückkehrpunkte für $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ u. s. w.

---

3) Isolierte Punkte.

Aufgabe 284.
$$xy^2(x-9)(x-2)^2 = 0.$$

Auflösung.
$$x = 2, \quad g = 2.$$

Aufgabe 285.
$$5y^2 + 10y - x^3 + 2x^2 + 5 = 0.$$

Auflösung.
$$x = 0, \quad y = -1.$$

Aufgabe 286.
$$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0.$$

Auflösung.
$$x = 0, \quad y = 0.$$

Aufgabe 287.
$$y^2 - (2-x)^2(1-x) = 0.$$

Auflösung.
$$x = 2, \quad y = 0.$$

Aufgabe 288.
$$ax^2 + by^2 - cx^2 + y^2)^2 = 0.$$

Auflösung.
$$x = 0, \quad y = 0.$$

Aufgabe 289.
$$\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)^2 - \frac{c^2 - d^2 - b^2}{a^2c^2d^2}x^2y^2 - \frac{y^4}{c^2d^2} + \frac{c^2-d^2}{c^2d^2}y^2 = 0.$$

Auflösung. Zwei isolierte Punkte:
$$x = +a \qquad x = -a$$
$$y = 0, \qquad y = 0.$$

Aufgabe 290.
$$\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)^2 + \frac{2x^2y^2}{a^2cd} + \frac{y^4}{c^2d^2} + \frac{c^2+d^2}{c^2d^2}y^2 = 0.$$

Auflösung. Zwei isolierte Punkte:
$$x = +a \qquad x = -a$$
$$y = 0, \qquad y = 0.$$

Aufgabe 291.
$$y = ax + b\sqrt{\sin x - 1}.$$

Auflösung.
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} \\ y_1 = \frac{a\pi}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{5\pi}{2} \\ y_2 = \frac{5\pi a}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{9\pi}{2} \\ y_3 = \frac{9\pi a}{2} \end{cases} \quad \text{u. s. w.}$$

Aufgabe 292.

$$y = \varphi(x) + (x - a)\left(\frac{x \cdot b}{c}\right)^{\frac{p}{q}},$$

wobei $a < b$, q gerade, sonst wie in Aufgabe 282.

Auflösung.

$$x = a, \quad y = \varphi(a).$$

---

4) Selbstberührungspunkte.

Aufgabe 293.

$$x^4 + x^2y^2 - 12x^2y^2 + 4y^2 = 0.$$

Auflösung.

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Aufgabe 294.

$$x^5 - 2x^4 - 8x^3y - 6y^2 = 0.$$

Auflösung.

$$x = 0, \quad y = 0.$$

---

5) Mehrfache Punkte.

Aufgabe 295.

$$x^4 - ax^2y + by^3 = 0.$$

Auflösung.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{dreifacher Punkt mit } \frac{dy}{dx} = 0, \ \sqrt{\frac{a}{b}}, \ -\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Aufgabe 296.

$$x^4 - 2ax^2y + ay^3 + y^4 = 0.$$

Auflösung.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{dreifacher Punkt mit } \frac{dy}{dx} = 0, \ \sqrt{2}, \ -\sqrt{2}.$$

Aufgabe 297.

$$y^5 + ax^4 - bxy^2 = 0.$$

Auflösung.

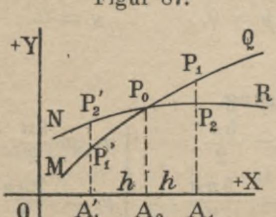
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{dreifacher Punkt mit Rückkehrpunkt erster Art und Wendepunkt.}$$

D. Von der Berührung der ebenen Kurven.

a) Berührung verschiedener Ordnung zwischen zwei Kurven.

Frage 71. Welche Bedingung muss erfüllt werden, damit zwei Kurven MQ und NR, deren Gleichungen $y = f(x)$, beziehungsweise $y = \varphi(x)$ sein sollen, einen gemeinschaftlichen Punkt P_0 besitzen?

Figur 87.



Antwort. Bezeichnen wir die Abscisse OA_0 des Punktes P_0 mit x_0, so muss die Ordinate $A_0P_0 = f(x_0)$ sein, weil P_0 auf MQ, und $= \varphi(x_0)$, weil P_0 auch auf NR liegen soll; daraus folgt als die gesuchte Bedingung:

$$f(x_0 = \varphi(x_0).$$

Nehmen wir nun $A_0A_1 = h$ sehr klein an, so gehört die Ordinate:

$$A_1P_1 = f(x_0 + h)$$

zu einem Punkt P_1 der ersten Kurve in unmittelbarer Nähe von P_0 und die Ordinate:

$$A_1 P_2 = \varphi(x_0 + h)$$

zu einem Punkt P_2 der zweiten Kurve, der ebenfalls sehr nahe an P_0 liegen wird. Der Taylorsche Satz gibt jetzt:

$$A_1 P_1 = f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \cdots$$

$$A_1 P_2 = \varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + h \varphi'(x_0) + \frac{h^2}{2} \varphi''(x_0) + \cdots, \text{ woraus:}$$

$$P_1 P_2 = f(x_0 + h) - \varphi(x_0 + h) = h[f'(x_0) - \varphi'(x_0)] + \frac{h^2}{2}[f''(x_0) - \varphi''(x_0)] + \cdots$$

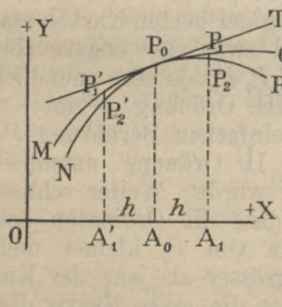
Bei hinreichend kleiner Wahl von h hängt das Vorzeichen der rechten Seite nur vom Vorzeichen von h ab, ist also nur $f(x_0) = \varphi(x_0)$; so wechselt $P_1 P_2$ das Vorzeichen, wenn h statt positiv negativ oder wenn der Punkt A_1 links statt rechts von A_0 angenommen wird; für $A_1' A_0 = -h$ wird offenbar:

$$A_1' P_2' > A_1' P_1';$$

also bekommt links $P_1' P_2'$ die entgegengesetzte Richtung von $P_1 P_2$ rechts; demnach müssen die beiden Kurven sich in P_0 schneiden (s. Figur 87).

Frage 72. Wie lautet die Bedingung, dass die beiden vorigen Kurven im Punkt P_0 sich berühren?

Figur 88.



Erkl. 77. Nehmen wir an, die beiden Kurven $y_0 = f(x_0)$ und $y_0 = \varphi(x_0)$ haben nicht nur den Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0, sondern auch noch den unendlich benachbarten Punkt $\mathfrak{P}_0$ mit den Koordinaten $x_0 + \Delta x$ und $y_0 + \Delta y$, wobei Δx und Δy unendlich klein sein sollen, gemeinschaftlich, so ist:

$f(x_0) = \varphi(x_0)$ und $f(x_0 + \Delta x) = \varphi(x_0 + \Delta x)$

Antwort. Die Tangente $P_0 T_0$ im Punkt P_0 an die Kurve MQ muss auch Tangente an die Kurve NR werden; bezeichnen wir wieder mit τ den Neigungswinkel der Tangente gegen die Abscissenachse, so erhalten wir nach früherem:

$$tg\,\tau = f'(x_0) \text{ und } tg\,\tau = \varphi'(x_0).$$

Daraus folgt: Die beiden Kurven haben in $P_0(x_0, y_0)$ eine gemeinschaftliche Tangente, wenn ausser $f(x_0) = \varphi(x_0)$ auch noch $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$ ist. Nehmen wir wie vorhin $A_0 A_1 = h$ unendlich klein an, so erhalten wir hier:

$$P_1 P_2 = \frac{h^2}{1 \cdot 2}[f''(x) - \varphi''(x)] + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}[f'''(x) - \varphi'''(x)] + \cdots$$

Hier wechselt $P_1 P_2$ sein Zeichen nicht mit jenem von h; auf beiden Seiten von A_0 sind die Ordinaten von der Kurve und

$$f(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0+\Delta x)=f(x_0)-\varphi(x_0)$$
$$+\Delta x\,[f'(x_0)-\varphi'(x_0)]$$
$$+\frac{\Delta x}{1\cdot 2}\cdot[f''(x_0)-\varphi''(x_0)]+\cdots$$

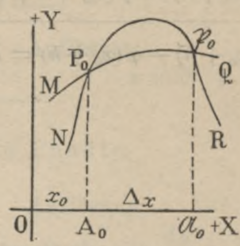
oder:

$$0=f'(x_0)-\varphi'(x_0)$$
$$+\frac{\Delta x}{1\cdot 2}[f''(x_0)-\varphi''(x_0)]+\cdots$$

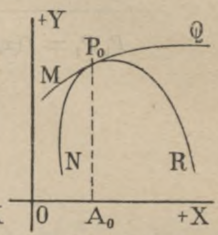
Sind die beiden Punkte P_0 und $\mathfrak{P}_0$ einander unendlich nahe, so ist Δx eine unendlich kleine Grösse; im Fall des Zusammentreffens von P_0 und $\mathfrak{P}_0$ verschwindet Δx und mit ihm die ganze rechte Seite der vorigen Gleichung mit Ausnahme von $f'(x_0)-\varphi'(x_0)$; wir sehen also, dass die Gleichung dann nur erfüllt sein kann, wenn $f'(x_0)=\varphi'(x_0)$ ist; d. h. die beiden Kurven haben zwei zusammenfallende Schnittpunkte gemein, oder sie berühren sich, falls $f'(x_0)=\varphi'(x_0)$ ist (siehe Figur 89a und 89b).

MQ grösser als jene von NR. Für Für $A_0A_1'=-h$ links erhält $P_1'P_2'$ die gleiche Richtung wie P_1P_2 rechts; die obere Kurve umschliesst in der nächsten Umgebung des Punktes P_0 die untere. Man bezeichnet dieses Verhalten der beiden Kurven im Punkt P_0 als eine Berührung I. Ordnung (s. Fig. 88).

Figur 89a.



Figur 89b.



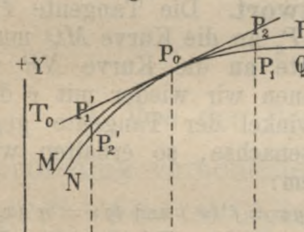
Frage 73. Wie verhalten sich die beiden vorigen Kurven im Punkt $P(x_0, y_0)$, wenn nicht nur $f(x_0)=\varphi(x_0)$ und $f'(x_0)=\varphi'(x_0)$, sondern auch noch $f''(x_0)=\varphi''(x_0)$ ist?

Antwort. Nehmen wir wieder $A_0A_1=h$ unendlich klein an, so wird hier nach dem Taylorschen Satz:

$$P_1P_2=\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}[f'''(x_0)-\varphi'''(x_0)]+\frac{h^4}{4!}[f^{\mathrm{IV}}(x_0)-\varphi^{\mathrm{IV}}(x_0)]+\cdots;$$

ferner wechselt P_1P_2 sein Vorzeichen, wenn h statt positiv negativ angenommen oder A_0, $A_1=-h$ links von A_0 gewählt wird; $P_1'P_2'$ links bekommt dann die entgegengesetzte Richtung von P_1P_2 rechts; wir schliessen daraus, dass einmal wegen $f'(x_0)=\varphi'(x_0)$ in P_0 eine Berührung der beiden Kurven stattfinden muss und zwar eine engere als vorhin, weil sich P_1P_2 als eine unendlich kleine Grösse III. Ordnung ergibt, während bei der einfachen Berührung P_1P_1 nur von der II. Ordnung unendlich klein gefunden wurde. Weiter schliessen wir daraus, dass die Ordinaten der Kurve NQ links von P_0 kleiner und rechts von P_0 grösser als jene der Kurve MQ sind, dass die erste Kurve die zweite im Punkt P_0 schneidet; beide Kurven schneiden und berühren sich gleichzeitig. Dieses Verhalten bezeichnet man als eine Berührung II. Ordnung (siehe Figur 90).

Figur 90.



Erkl. 78. Wir nehmen an, die beiden Kurven $y=f(x)$ und $y=\varphi(x)$ sollen drei gemeinschaftliche Punkte P_0, $\mathfrak{P}_0$ und Π_0 besitzen mit den Abscissen x_0, $x_0+\Delta x$ und $x_0+2\Delta x$, so dass:

1) . . . $f(x_0)=\varphi(x_0)$,

2) . . . $f(x_0+\Delta x)=\varphi(x_0+\Delta x)$

und

3) . . . $f(x+2\Delta x)=\varphi(x_0+2\Delta x)$

ist. Nach dem Taylorschen Lehrsatz entwickelnd bekommen wir hieraus:

$$4) \ldots f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\Delta x}{1} f'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_0) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots$$

$$5) \ldots \varphi(x_0 + \Delta x) = \varphi(x_0) + \frac{\Delta x}{1} \varphi'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} \varphi''(x_0) + \frac{\Delta x^3}{3!} \varphi'''(x_0) + \cdots$$

und

$$6) \ldots f(x + 2\Delta x) = f(x_0) + \frac{2\Delta x}{1} f'(x_0) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots$$

$$7) \ldots \varphi(x + 2\Delta x) = \varphi(x_0) + \frac{2\Delta x}{1} \varphi'(x_0) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \varphi''(x_0) + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \varphi'''(x_0) + \cdots$$

Wegen Gl. 1) und 2) folgt aus Gl. 4) und 5) durch Subtraktion und Division mit Δx:

$$8) \ldots 0 = f'(x_0) - \varphi'(x_0) + \frac{\Delta x}{2}[f''(x_0) - \varphi''(x_0)] + \frac{\Delta x^2}{3!}[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)] + \cdots$$

Ferner gibt die Subtraktion von Gl. 6) und 7) wegen Gl. 1) und 3):

$$9) \ldots 0 = f'(x_0) - \varphi'(x_0) + \frac{2\Delta x}{2}[f''(x_0) - \varphi''(x_0)] + \frac{(2\Delta x)^2}{3!}[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)] + \cdots$$

Durch Subtraktion der Gl. 8) von 9) folgt:

$$0 = \frac{\Delta x}{2}[f''(x_0) - \varphi''(x_0)] + \frac{\Delta x^2}{2}[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)] + \frac{7\Delta x^3}{8}[f^{\mathrm{IV}}(x_0) - \varphi^{\mathrm{IV}}(x_0)] + \cdots$$

oder:

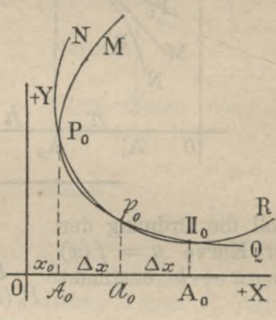
$$10) \ldots 0 = f''(x_0) - \varphi''(x_0) + \Delta x[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)] + \frac{7\Delta x^2}{8}[f^{\mathrm{IV}}(x_0) - \varphi^{\mathrm{IV}}(x_0)] + \cdots$$

Ist Δx eine unendlich kleine Grösse, so liegen die beiden Punkte $\mathfrak{P}_0$ und Π_0 unendlich nahe an P_0; für $\Delta x = 0$ fallen beide mit P_0 zusammen, und die Gleichungen 8) und 10) gehen über in:

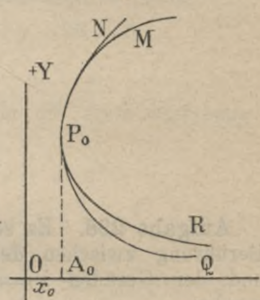
$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$ und $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so haben also die beiden Kurven drei zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich (siehe die Figuren 91a und 91b).

Figur 91a.



Figur 91b.



Frage 74. Wie verhalten sich die beiden vorigen Kurven im Punkt $P_0(x_0, y_0)$, wenn $f(x_0) = \varphi(x_0)$, $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$, $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$ und weiter noch $f'''(x_0) = \varphi'''(x_0)$ ist?

Erkl. 79. Die Geschichte der Berührung der Kurven führt auf Newton und Leibniz zurück. Grosse Förderung verdankt diese Theorie Jakob Bernoulli, später Lagrange, Plücker, Steiner, Möbius und anderen.

Antwort. Für $A_0 A_1 = h$ erhalten wir hier:

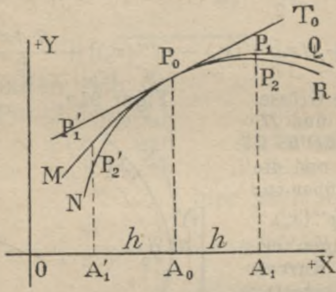
$$P_1 P_2 = \frac{h^4}{4!}[f^{\mathrm{IV}}(x) - \varphi^{\mathrm{IV}}(x)] + \frac{h^5}{5!}[f^{\mathrm{V}}(x_0) - \varphi^{\mathrm{V}}(x_0)] + \cdots;$$

mit einem Zeichenwechsel von h ist demgemäss kein solcher von $P_1 P_2$ verbunden oder es sind in unmittelbarer Nähe vom Punkt P_0 sowohl links als rechts die Ordinaten der Kurve $f(x_0)$ grösser als jene von $\varphi(x_0)$. Die beiden Kurven schmiegen sich, weil $P_1 P_2$ eine unendlich kleine Grösse IV. Ordnung ist, noch inniger aneinander und die eine Kurve umschliesst die zweite in der Umgebung von P_0 vollständig. Dieses Verhalten bezeichnet man als eine Berührung III. Ordnung (siehe Figur 92). In dieser Art weiter geschlossen, liefert $f^{IV}(x_0) = \varphi^{IV}(x_0)$ eine Berührung IV. Ordnung u. s. w.

Zusammengefasst folgt der

Satz. Wenn zwei Kurven $y = f(x)$ mit $y = \varphi(x)$ für einen bestimmten Wert x_0 dasselbe y haben, so dass also $f(x_0) = \varphi(x_0)$ ist, so gehen beide Kurven durch denselben Punkt P_0. Ist für x_0 zugleich $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$, so haben beide Kurven im Punkt P_0 eine gemeinschaftliche Tangente; es findet zwischen ihnen eine Berührung I. Ordnung statt. Ist ausserdem $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$, so findet eine Berührung II. Ordnung statt; wenn noch $f'''(x_0) = \varphi'''(x_0)$ ist, so zeigen die Kurven im Punkt P_0 eine Berührung III. Ordnung u. s. w.

Figur 92.



Aufgabe 298. Es soll die Ordnung der Berührung zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der Geraden $y = ax + b$ bestimmt werden.

Auflösung. Soll die Berührung im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ stattfinden, so muss sein:

$$f(x_0) = ax_0 + b \text{ und } f'(x_0) = a.$$

Hiermit sind für die beiden Grössen a und b zwei Bedingungsgleichungen aufgestellt: wird letzteren genügt, so hat die Gerade eine Berührung I. Ordnung. Im allgemeinen berührt demnach eine Gerade eine Kurve nur nach der I. Ordnung; doch können in besonderen Kurvenpunkten auch höhere Berührungen auftreten. Dies wird z. B. der Fall sein in einem Punkt x_0, y_0, für welchen $f''(x_0) = 0$ ist, weil auch $\varphi''(x_0) = \frac{d^2(ax+b)}{dx^2} = 0$ ist; dieser Bedingung genügen nach Frage 51 die gewöhnlichen Wendepunkte. Wir ziehen also den Schluss: In einem gewöhnlichen Wendepunkt berührt die Gerade nach der II. Ordnung. Als Beispiel diene der Scheitel der Parabel $y = x^3$ (siehe Aufgabe 222 und Figur 66.

Ist im Punkt (x_0, y_0) auch $f''(x_0) = 0$, so hat die Tangente wegen

$$\varphi'''(x_0) = \frac{d^3(ax + b)}{dx^3} = 0$$

eine Berühıung III. Ordnung. Ein Beispiel hiefür liefert der Scheitel der Flachparabel $y = x^4$ in Aufgabe 223 und Figur 67.

Eine Berührung IV. Ordnung hat wegen $f^{IV}(x_0) = 0$ und $\varphi^{IV}(x_0) = 0$ die Tangente im Scheitel der Wendeflachparabel $y = x^5$ in Aufgabe 224 und Figur 68.

Aufgabe 299. Zu bestimmen, ob zwischen den beiden Kurven:

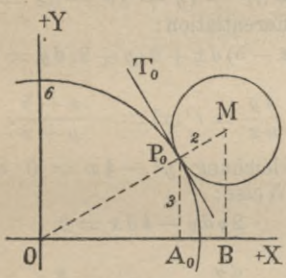
$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$

und

$$(x - 4\sqrt{3})^2 + (y - 4)^2 - 4 = 0$$

eine Berührung stattfindet.

Figur 93.



Erkl. 80. Die beiden vorliegenden Kurven sind zwei Kreise mit den Radien 6 und 2, die sich in P_0 berühren. Zwei Kreise ergeben im allgemeinen zwei Schnittpunkte P_0 und $\mathfrak{P}_0$. Fällt $\mathfrak{P}_0$ mit P_0 zusammen, so tritt Berührung I. Ordnung ein. Eine Berührung höherer Ordnung ist unmöglich, weil die beiden Kurven nicht mehr als zwei gemeinschaftliche Punkte besitzen können (siehe Figur 93).

Auflösung. Wir suchen zuerst, ob die beiden Kurven gemeinschaftliche Punkte besitzen. Die Koordinaten x_0 und y_0 eines solchen Punktes müssen beiden Gleichungen Genüge leisten und ihre Werte sind daher aus den beiden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$

und

$$x^2 + y^2 - 8x\sqrt{3} - 8y + 60 = 0$$

zu bestimmen. Die Subtraktion ergibt:

$$8 + \sqrt{3} + 8y - 96 = 0,$$

woraus:

$$y = 12 - \sqrt{3} \cdot x$$

folgt; diesen Wert in die erste Gleichung eingesetzt, liefert:

$$x^2 - 6\sqrt{3} \cdot x + 27 = 0,$$

daher:

$$\begin{cases} x_0 = 3\sqrt{3} \\ y_0 = 3; \end{cases}$$

d. h. die Kurven besitzen den gemeinschaftlichen Punkt P_0 mit den vorhin genannten Koordinaten.

Um festzustellen, dass P_0 ein Berührungspunkt ist, differentiieren wir die erste Gleichung und erhalten:

$$2dx + 2y\,dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

somit für x_0 und y_0:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}.$$

Die Differentiation der zweiten Gleichung liefert:

$$2(x - 4\sqrt{3})\,dx + 2(y - 4)\,dy = 0,$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - 4\sqrt{3}}{y - 4},$$

und für x_0 und y_0 folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{3 - 4} = -\sqrt{3}.$$

Aus der Uebereinstimmung der beiden ersten Differentialquotienten schliessen wir auf eine Berührung I. Ordnung im Punkt $P_0 \cdot (3\sqrt{3},\ 3)$. Dass die Berührung keine höhere ist, ergibt die Ungleichheit von $\frac{d^2y}{dx^2}$ der beiden gegebenen Funktionen für x_0 und y_0.

Aufgabe 300. Zu untersuchen, ob zwischen den beiden Kurven:

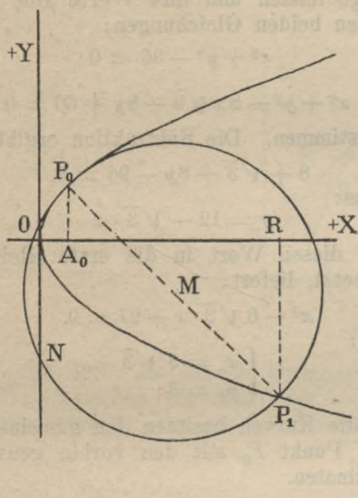
$$y^2 - 4x = 0$$

und

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y - 3 = 0$$

eine Berührung stattfindet.

Figur 94.



Erkl. 81. Das nebenstehende Beispiel zeigt, dass ein Kreis mit einer Parabel eine Berührung II. Ordnung haben kann. Während jeder beliebige Kreis, der seinen Mittepunkt M' auf der Parabelnormalen in P_0 und den Halbmesser $M'P_0$ hat, die Parabel in P_0 nach der I. Ordnung berührt, besitzt der Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten $x = 5$, $y = -2$ und dem Halbmesser $\varrho = \sqrt{32}$ eine Berührung II. Ordnung. Man sagt von dem letzteren Kreis, er osculiere die Parabel. Osculare = küssen.

Dass im Punkt P_0 drei Schnittpunkte von Parabel und Kreis zusammenfallen, ist schon aus der Gleichung vierten Grades in y:

$$y^4 - 2y^2 + 64y - 48 = 0$$

ersichtlich; denn sie lässt sich in der Form:

$$(y-2)^3 \cdot (y+6) = 0$$

schreiben; sie besitzt demnach die vier Wurzeln:

$$y_1 = -6,\quad y_0 = 2,\quad y_2 = 2,\quad y_3 = 2;$$

Auflösung. Zur Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte beider Kurven setzen wir $x = \frac{y^2}{4}$ in die zweite Gleichung ein, wodurch diese in:

$$y^4 - 24y^2 + 64y - 48 = 0$$

übergeht. Der letzten Gleichung genügen die beiden Wertepaare:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \text{ und } \begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 6. \end{cases}$$

Aus $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 9 = 0$ oder von $(x-5)^2 + (y+2)^2 - 32 = 0$ folgt durch Differentiation:

$$2(x-5)\,dx + 2(y+2)\,dy = 0;$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{x-5}{y+2}.$$

Die Gleichung $y^2 - 4x = 0$ ergibt in gleicher Weise:

$$2y\,dy - 4\,dx = 0,$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = \frac{y}{2}.$$

Für $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ wird:

$$f'(x) = 1,\quad \varphi'(x) = 1.$$

Aus $f'(x)$ leiten wir ab:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{(y+2) - (x-5)\cdot\frac{dy}{dx}}{(y+2)^2}$$

$$= \frac{(y+2) - (x-5)\cdot\left(-\frac{x-5}{y+2}\right)}{(y+2)^2}$$

$$= \frac{(y+2)^2 + (x-5)^2}{(y+2)^3} = \frac{32}{(y+2)^3}.$$

Ebenso erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2} = \frac{y}{4}.$$

Für $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ folgt:

$$f''(x) = \frac{1}{2},\quad \varphi''(x) = \frac{1}{2}.$$

d. h. der Kreis schneidet die Parabel in den vier Punkten:

$$P_1\begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 6, \end{cases} \qquad P_0\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2, \end{cases}$$

$$P_2\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2, \end{cases} \qquad P_3\begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 2, \end{cases}$$

und von diesen fallen P_0, P_2 und P_3 zusammen.

Entwickeln wir $f'''(x)$ und $\varphi'''(x)$, so nehmen diese für $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ die Werte -16, beziehungsweise $\frac{1}{4}$ an; es stimmen daher nur die ersten und zweiten Differentialquotienten der vorgelegten Funktionen überein, woraus wir schliessen, dass die Kurven im Punkt $P_0(1, 2)$ eine Berührung II. Ordnung zeigen. Der andere Punkt $P_1\begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 6 \end{cases}$ erweist sich als ein gewöhnlicher Schnittpunkt (siehe Figur 94).

Aufgabe 301. Es soll untersucht werden, ob die Kurven mit den Gleichungen:

$$1) \ldots 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 72 = 0,$$

beziehungsweise:

$$2) \ldots 2x^2 + 2y^2 - 9\sqrt{2}(x - y) + 36 = 0$$

sich berühren und von welcher Ordnung zutreffenden Falles diese Berührung ist.

Auflösung. Um die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kurven zu berechnen, denen die beiden Gleichungen 1) und 2) genügen müssen, erweitern wir die erste Gleichung mit 2, die zweite mit 5 und erhalten:

$$\begin{aligned} 10x^2 + 10y^2 + 12xy \qquad\qquad\qquad & - 144 = 0 \\ 10x^2 + 10y^2 \qquad - 45\sqrt{2}(x - y) & + 180 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\quad 12xy + 45\sqrt{2}(x - y) - 324 = 0$

und

$$3) \ldots y = \frac{3(36 - 5\sqrt{2}\,x)}{4x - 15\sqrt{2}}.$$

Diesen Wert für y in Gleichung 2) eingesetzt, erhalten wir nach den notwendigen Umrechnungen und Vereinfachungen:

$$4) \ldots x^4 - 12\sqrt{2}\,x^3 + 108x^2 - 216\sqrt{2}\,x + 324 = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch:

$$5) \ldots x_0 = 3\sqrt{2}.$$

Dadurch bekommen wir mitttels der Gl. 3) für die Koordinaten des Schnittpunktes P_0 der zwei Kurven die Werte:

$$6) \ldots \begin{cases} x_0 = 3\sqrt{2} \\ y_0 = -3\sqrt{2}. \end{cases}$$

Durch Differentiation der Gleichung 1) gewinnen wir:

$$10x\,dx + 10y\,dy + 6y\,dx + 6x\,dy = 0$$

und

$$7) \ldots \frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{5x + 3y}{3x + 5y}.$$

Für die Werte in Gleichung 6) wird also:

$$8) \ldots f'(x) = +1.$$

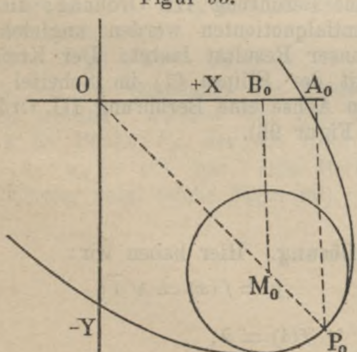
Durch Differentiation der Gleichung 2) erhalten wir:

$$4x\,dx + 4y\,dy - 9\sqrt{2}\,dx + 9\sqrt{2}\,dy = 0$$

und

$$8) \ldots \frac{dy}{dx} = \varphi(x) = \frac{9\sqrt{2} - 4x}{9\sqrt{2} + 4y}.$$

Figur 95.



Für die Werte in Gleichung 6) wird:

9) . . . $\varphi'(x) = +1.$

Aus Gleichung 8) und 9) schliessen wir auf eine Berührung I. Ordnung.

Bilden wir nun:

10) . . . $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{1152}{(3x+5y)^2}.$

Für die Werte von Gleichung 6) folgt:

11) . . . $f''(x) = \frac{8}{3\sqrt{2}}.$

Ebenso benützen wir Gleichung 8) zur Bildung von:

12) . . . $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) = -\frac{144}{(9\sqrt{2}+4y)^3};$

mit Benützung der Werte von Gleichung 6) gewinnen wir:

13) . . . $\varphi''(x) = \frac{8}{3\sqrt{2}}$

und schliessen jetzt aus Gleich. 11) und 13) auf eine Berührung II. Ordnung.

Ferner bestimmen wir aus Gleichung 7):

14) . . . $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = -\frac{55296}{(3x+5y)^5}$

und gewinnen mittels Gleichung 6):

15) . . . $f'''(x_0) = 5\frac{1}{3}.$

Endlich bestimmen wir aus Gleichung 12):

16) . . . $\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'''(x) = \frac{1728\,(9\sqrt{2}-4x)}{(9\sqrt{2}+4y)^5}.$

Dies gibt mittels der Werte in Gleich. 6):

17) . . . $\varphi'''(x_0) = 5\frac{1}{3}.$

Aus den Gleichungen 15) und 17) folgern wir eine Berührung III. Ordnung; die vier Differentialquotienten werden ungleich, so dass unser Resultat lautet: Der Kreis (2) hat mit der Ellipse (1) im Scheitel ihrer grossen Achse eine Berührung III. Ordnung (siehe Figur 95).

Erkl. 82. In dem nebenstehenden Beispiel liegt der Fall vor, dass ein Kreis mit einer Ellipse eine Berührung von der III. Ordnung hat. Im Punkt P_0 fallen vier Schnittpunkte zwischen Kreis und Ellipse zusammen. Dies lässt sich auch schon aus der Gleichung 4) folgern, denn sie kann in der Form:

$$\left(x - 3\sqrt{2}\right)^4 = 0$$

geschrieben werden, woraus zu schliessen ist, dass dieselbe die vierfache Wurzel $x_0 = 3\sqrt{2}$ besitzt und die Schnittpunkte die nämliche Abscisse, also nach Gleichung 3) auch die nämliche Abscisse $y_0 = -3\sqrt{2}$ haben und daher zusammenfallen.

Weil ein Kreis einen Kegelschnitt nur in vier Punkten schneiden kann, ist eine höhere Berührung als die dritte zwischen solchen Kurven unmöglich.

Aufgabe 302. Es sei die Parabel $y^2 = x$ gegeben. Welche Kurve:

$$y = ax^3 + bx + c$$

hat mit ihr eine möglichst innige Berührung im Punkt P_0, dessen Abscisse $x_0 = 4$ ist?

Erkl. 83. Die Gleichung der gesuchten Kurve enthält drei zu bestimmende Koëffizienten a, b, c; es sind also drei Bestimmungsgleichungen notwendig, welche keine andere sein können als:

Auflösung. Hier haben wir:

$$y = f(x) = \sqrt{x};$$

also:

$$f(4) = 2;$$

ferner:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ und } f'(4) = \frac{1}{4},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \text{ und } f''(4) = -\frac{1}{32}.$$

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$
und
$$f''(x_0) = \varphi''(x_0).$$

Daraus ersehen wir, dass für die beiden Kurven nur eine Berührung II. Ordnung gefordert werden kann.

Erkl. 84. Wäre zwischen der Parabel $y^2 = x$ und der parabolischen Kurve dritten Grades eine Berührung III. Ordnung gefordert worden, so hätte man die Gleichung der letzteren in der Form:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

wählen müssen. Die Gleichungen:

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \qquad f'(x_0) = \varphi'(x_0),$$
$$f''(x_0) = \varphi''(x_0) \text{ und } f'''(x_0) = \varphi'''(x_0)$$

dienten zur Bestimmung der vier Koëffizienten a, b, c, d.

Weiter:

$$y = \varphi(x) = ax^3 + bx + c, \quad \varphi(4) = 64a + 4b + c;$$
$$\varphi'(x) = 3ax^2 + b, \quad \varphi'(4) = 48a + b;$$
$$\varphi''(x) = 6ax, \qquad \varphi''(4) = 24a.$$

Zur Bestimmung der drei Koëffizienten a, b, c dienen daher, weil $f(4) = \varphi(4)$, $f'(4) = \varphi'(4)$ und $f''(4) = \varphi''(4)$ sein muss, die drei Gleichungen:

$$2 = 64a + 4b + c,$$
$$\frac{1}{4} = 48a + b, \quad -\frac{1}{32} = 24a;$$

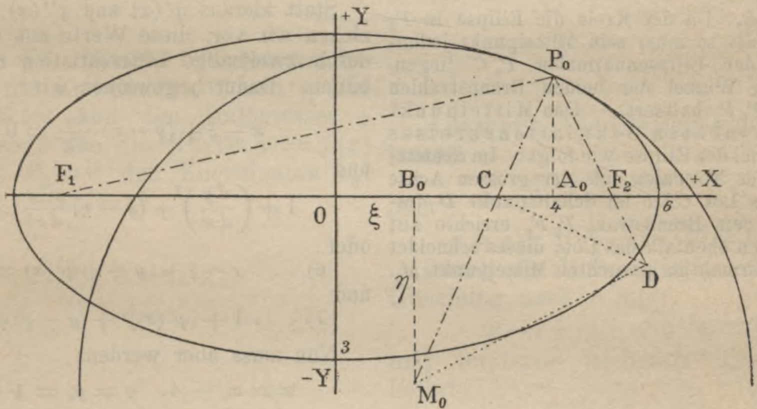
deren Auflösung ergibt:

$$a = -\frac{1}{768}, \quad b = \frac{5}{16} \text{ und } c = \frac{5}{6},$$

und die gesuchte Kurve hat die Gleichung:

$$y = -\frac{1}{768}x^3 + \frac{5}{16}x + \frac{5}{6}.$$

Figur 96.



Aufgabe 303. Gegeben sei die Ellipse mit der Gleichung:

$$x^2 + 4y^2 - 36 = 0.$$

Es soll die Gleichung des Kreises gefunden werden, welcher mit der vorigen Kurve im Punkt P_0, der die Koordinaten $x_0 = 4$, $y_0 = \sqrt{5}$ hat, eine Berührung II. Ordnung zeigt (siehe Figur 96).

Auflösung. Die Gleichung der gegebenen Kurve:

$$1) \ldots x^2 + 4y^2 - 36 = 0$$

könnten wir in der Form:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2} = f(x)$$

und daraus $f'(x)$ und $f''(x)$ bilden; es ist jedoch einfacher, die nicht entwickelte Form 1) beizubehalten und diese zweimal nach x zu differentiieren; dadurch erhalten wir:

$$2x + 8y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

und so:

$$f'(x) = -\frac{x}{4y};$$

ferner:

$$1 + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{x^2+4y^2}{4y^3} = -\frac{9}{y^3}.$$

Demnach ist:

$$2) \ldots y_0 = f(x_0) = \sqrt{5},$$

$$3) \ldots f'(x_0) = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$$

und

$$4) \ldots f''(x_0) = -\frac{9}{100}\sqrt{5}.$$

Die Gleichung des gesuchten Kreises nehmen wir in der Form an:

$$5) \ldots (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - \varrho^2 = 0;$$

dabei bedeuten ξ und η die Koordinaten des Mittelpunktes, und ϱ stellt den Halbmesser vor. Nach y aufgelöst, erhalten wir:

$$y = \eta + \sqrt{\varrho^2 (x-\xi)^2} = \varphi(x).$$

Statt hieraus $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ zu bilden, ziehen wir vor, diese Werte aus der Gl. 5) durch zweimalige Differentiation nach x zu bilden. Dadurch gewinnen wir:

$$x - \xi + (y-\eta)\frac{dy}{dx} = 0$$

und

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

oder:

$$6) \ldots x - \xi + (y-\eta)\varphi'(x) = 0$$

und

$$7) \ldots 1 + [\varphi'(x)]^2 + (y-\eta)\varphi''(x) = 0.$$

Nun muss aber werden:

$$x = x_0 - 4, \quad y = y_0 = \sqrt{5},$$

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$$

und

$$\varphi''(x_0) = f''(x_0) = -\frac{9}{25}\sqrt{5}.$$

Diese Werte in die Gleichungen 5), 6) und 7) eingesetzt, führen nun zu den drei Bedingungsgleichungen:

$$8) \ldots (4-\xi)^2 + (\sqrt{5}-\eta) - \varrho^2 = 0,$$

$$9) \ldots 4 - \xi - \frac{1}{5}\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}-\eta) = 0,$$

$$10) \ldots 1 + \frac{1}{5} - \frac{9}{100}\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-\eta) = 0.$$

Die letzte ergibt:

$$\eta = -\frac{5}{3}\sqrt{5};$$

hiermit liefert dann die vorletzte:

$$\xi = 1\frac{1}{3};$$

Erkl. 85. Da der Kreis die Ellipse in P_0 berühren soll, so muss sein Mittelpunkt jedenfalls auf der Ellipsennormalen P_0C liegen, welche den Winkel der beiden Brennstrahlen P_0F_1 und P_0F_2 halbiert. — Den M i t t e l p u n k t M_0 d e s g e s u c h t e n O s k u l a t i o n s k r e i s e s findet man bei der Ellipse wie folgt: Im Schnittpunkt C der Normalen mit der grossen Achse errichte das Lot CD; im Schnittpunkt D desselben mit dem Brennstrahl P_0F_2 errichte auf dem letzteren ebenfalls das Lot; dieses schneidet dann die Normale im gesuchten Mittelpunkt M_0.

dadurch folgt dann endlich aus Gleichung 8) der Halbmesser:

$$\varrho = \frac{8}{3}\sqrt{6}$$

und die gesuchte Kreisgleichung lautet:

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{3}\sqrt{5}\right)^2 - \frac{128}{3} = 0.$$

b) Der Oskulationskreis.

Frage 75. Was ist unter dem Oskulationskreis eines Punktes P_0 einer gegebenen Kurve zu verstehen?

Antwort. Unter dem Oskulationskreis eines gegebenen Punktes P_0 einer gegebenen Kurve versteht man denjenigen Kreis, welcher mit der gegebenen Kurve im Punkt P_0 eine Berührung II. Ordnung zeigt (siehe Aufgabe 300 und 303).

Frage 76. Welche Gleichungen bestimmen die Koordinaten ξ und η des Mittelpunktes und den Halbmesser ϱ des Kreises, der die Kurve $y = f(x)$ im Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0, $y_0 = f(x_0)$ oskuliert?

Antwort. Die Gleichung des Kreises lautet:

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - \varrho^2 = 0$$

oder:

$$y = \eta \pm \sqrt{\varrho^2 - (x-\xi)^2} = \varphi(x).$$

Durch die Differentiation der ersten Gleichung nach x folgt:

$$x - \xi + (y-\eta)\cdot\varphi'(x) = 0$$

und letzteres nochmals differentiiert, liefert:

$$1 + [\varphi'(x)]^2 + (y-\eta)\,\varphi''(x) = 0.$$

Nun muss:

$$\varphi(x_0) = f(x_0), \quad \varphi'(x_0) = f'(x_0)$$

und

$$\varphi''(x_0) = f''(x_0)$$

werden; daher lauten unsere gesuchten Gleichungen:

$$(x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 - \varrho^2 = 0,$$
$$x_0 - \xi + (y_0-\eta)f'(x_0) = 0,$$
$$1 + f'(x_0)^2 + (y_0-\eta)f''(x_0) = 0.$$

Lösen wir dieselben nach ξ, η und ϱ auf, so erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$\eta = y_0 + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)};$$

dies in die vorausgehende eingesetzt, gibt:

$$\xi = x_0 - \frac{f'(x_0)\,[1 + f'(x_0)^2]}{f''(x_0)}$$

und hiermit folgt aus der ersten:

$$\varrho = \frac{[1+f'(x_0)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}.$$

Darnach können wir sagen:

Satz. Der Oskulationskreis der Kurve $y=f(x)$ im Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0, $y_0=f(x_0)$ wird bestimmt durch die Abscisse des Mittelpunktes:

$$\xi = x_0 - \frac{f'(x_0)[1+f'(x_0)^2]}{f''(x_0)},$$

die Ordinate des Mittelpunktes:

$$\eta = y_0 + \frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}$$ und den Halbmesser $$\varrho = \frac{[1+f'(x_0)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}.$$

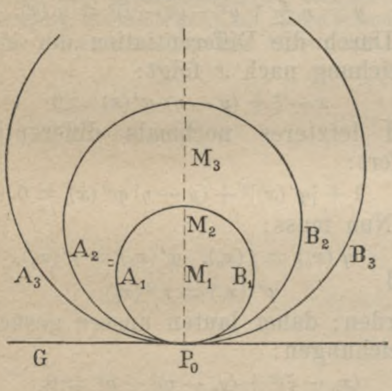
Anmerkung 2. Weitere Betrachtungen und Uebungen über den Oskulationskreis enthält der nächste Abschnitt über die Krümmung der Kurven.

E. Ueber die Krümmung der ebenen Kurven.

a) Die Krümmung des Kreises.

Frage 77. Was ist über die Krümmung eines Kreises im allgemeinen zu sagen?

Figur 97.

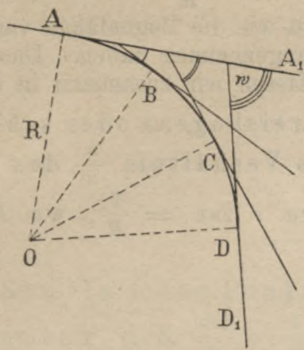


Antwort. Es berühre der Kreis $A_1P_0B_1$ die Gerade g in P_0; stellen wir uns vor, es entferne sich der Mittelpunkt M_1 auf dem Lot nach M_2 und der Halbmesser erhalte die Länge M_2P_0, so wird der neue Kreis $A_2P_0B_2$ zwischen der Geraden g und dem ersten Kreis hindurchgehen; man sieht, dass der Berührungskreis desto mehr der Geraden sich nähert, je grösser sein Halbmesser wird. Weil die Abweichung des Bogens $A_1P_0B_1$ in Bezug auf die berührende Gerade g eine grössere ist als jene des Bogens A_2B_2, sagt man, es sei $A_1P_0B_1$ stärker gekrümmt als $A_2P_0B_2$; hiernach ist leicht zu erkennen, dass die Krümmung eines Kreises von seinem Halbmesser abhängt und desto kleiner ausfällt, je grösser der Halbmesser gewählt wird.

Frage 78. Wie kann die Krümmung eines Kreisbogens gemessen werden?

Antwort. Zur Bestimmung der Krümmung des Kreisbogens AD ziehen wir im Anfangspunkt A die Tangente AA_1. Hierauf denken wir uns die Tangente längs des Bogens $ABCD$ fortgleitend. Jede neue Lage bildet mit der anfäng-

Figur 98.



lichen einen Winkel, der um so grösser ist, je weiter der neue Berührungspunkt von A entfernt liegt. Im Endpunkt D des Bogens hat die Tangente die Lage DD_1 erreicht, die von AA_1 um den Winkel w abweicht. Der letztere misst die Krümmung des ganzen Bogens AD und heisst die **absolute Krümmung desselben.**

Bezeichnet R den Halbmesser, s die Bogenlänge AD, so hat man wegen $AOD = w$, wenn w im Bogenmass ausgedrückt wird (s. Differentialrechnung II. Teil, Erkl. 43):

$$s = Rw.$$

Daraus folgt der

Satz. Die absolute Krümmung w eines Kreisbogens vom Halbmesser R ist $= \frac{s}{R}$.

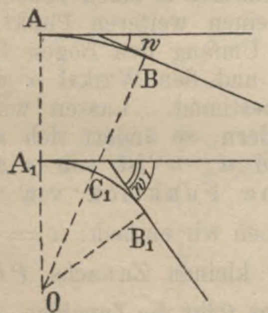
Für gleiche Bogen:

$$AB = BC = CD \text{ u. s. w.} = s_1$$

im nämlichen Kreis ergibt sich hiernach die gleiche absolute Krümmung $\frac{s_1}{R}$; dies muss auch noch dann zutreffen, wenn wir die Bogen AB, BC u. s. w. unendlich klein wählen.

Frage 79. Was ist unter dem Krümmungsmass eines Kreisbogens zu verstehen?

Figur 99.



Erkl. 86. Das Mass eines Winkels ist die Bogenlänge, die zum ersteren als Centriwinkel im Kreis vom Halbmesser 1 gehört; daher ist in obiger Figur:

$$\frac{w}{w_1} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{1}{R}.$$

Das Krümmungsmass $\frac{w}{w_1}$ ist also von der Bogenlänge AB unabhängig und allein bestimmt

Antwort. Ist auf dem Umfang des Kreises vom Halbmesser R der Bogen AB abgegrenzt, so liefern die Tangenten in den Endpunkten zunächst die absolute Krümmung w. Beschreiben wir um O einen zweiten Kreis, dessen Halbmesser r gleich der Längeneinheit ist, und machen auf dessen Umfang den Bogen $A_1B_1 = AB$, so gehört zu A_1B_1 die absolute Krümmung w_1; jetzt lässt sich w mit w_1 vergleichen; aus $w = \frac{AB}{R}$ und $w_1 = \frac{A_1B_1}{1}$ erhalten wir:

$$\frac{w}{w_1} = \frac{w}{AB} = \frac{1}{R}.$$

Das Verhältnis der absoluten Krümmung w des Bogens AB zur absoluten Krümmung w_1 eines gleich langen Bogens im Kreis vom Halbmesser 1 heisst nun das **Krümmungsmass** des Bogens oder seine **Krümmung im engeren Sinn**; wir haben soeben gefunden, dass dieses Verhältnis dem Verhältnis des durch den Halbmesser des Bogens, bezw. des Kreises.

Winkels w zur Bogenlänge gleich ist und den Wert $\frac{1}{R}$ hat, wie gross oder wie klein wir die Bogenlänge von vornherein angenommen haben. Dieses Ergebnis fassen wir zusammen in dem

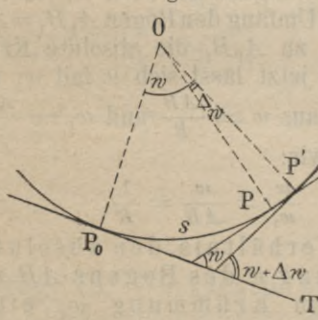
Satz. Das Krümmungsmass eines Kreisbogens oder schlechthin die Krümmung desselben, d. h. das Verhältnis $\frac{w}{s}$ des zugehörigen Centriwinkels zur Bogenlänge s ist $= \frac{1}{R}$, wo R den Halbmesser des Bogens bezeichnet.

Frage 80. Welche Folgerungen lassen sich aus der vorhin erhaltenen Formel ziehen?

Antwort. Die Gleichung $\frac{w}{s} = \frac{1}{R}$ lehrt, dass der Bogen s im Kreis vom Halbmesser R den Rten Teil so stark gekrümmt ist als der gleichlange Bogen im Kreis vom Halbmesser $= 1$. Weiter erfahren wir, dass die Krümmung eines Kreisbogens einen unendlich grossen Wert erhält, wenn der Halbmesser unendlich klein gewählt wird. Endlich lehrt uns obige Formel, dass die Krümmung eines Kreisbogens den Wert Null erhält, wenn der Halbmesser unendlich gross wird.

Frage 81. Was ist nun unter der Krümmung in einem bestimmten Punkt eines Kreises zu verstehen?

Figur 100.



Antwort. Wir wählen auf dem Kreis vom Halbmesser R einen festen Punkt P_0 und einen weiteren Punkt P, der auf dem Umfang den Bogen $P_0P = s$ abgrenzt und den Winkel w der Tangenten bestimmt. Lassen wir P die Lage ändern, so ändert sich auch der Wert von w; w ist von s abhängig oder eine Funktion von s; beim Kreis haben wir einfach: $w = \frac{s}{R}$. Für den sehr kleinen Zuwachs $PP' = \varDelta s$ des Bogens folgt die Zunahme $\varDelta w = \frac{\varDelta s}{R}$ des Tangentenwinkels; bilden wir nun $\frac{\varDelta w}{\varDelta s}$, so erhalten wir:

$$\frac{\varDelta w}{\varDelta s} = \frac{\varDelta s}{R \cdot \varDelta s} = \frac{1}{R};$$

wenn sich nun P' dem Punkt P unbegrenzt nähert, so geht $\frac{\varDelta w}{\varDelta s}$ in den

Differentialquotienten $\frac{dw}{ds}$ über, der natürlich auch $= \frac{1}{R}$ sein muss. Betrachten wir also w als Funktion von s, letzteres von einem festen Punkt P_0 an gerechnet, so hat $\frac{dw}{ds}$ für jeden Punkt P des Kreises den gleichen Wert $\frac{1}{R}$. Die Grösse $\frac{dw}{ds}$ heisst die Krümmung des Kreises im Punkt P; daher der

Satz. In jedem Punkt eines Kreises vom Halbmesser R ist die Krümmung, d. h. $\frac{dw}{ds} = \frac{1}{R}$; der Kreis ist gleichförmig gekrümmt, die Krümmung ist $= \frac{1}{\text{Halbmesser}}$.

Frage 82. Wie gross sind hiernach die Krümmungen unendlich grosser und unendlich kleiner Kreise?

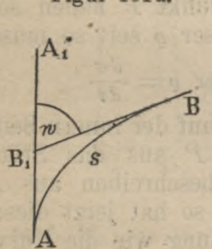
Antwort. Der unendlich grosse Kreis — die gerade Linie — hat die Krümmung Null und der unendlich kleine Kreis — der Punkt — die Krümmung unendlich.

---

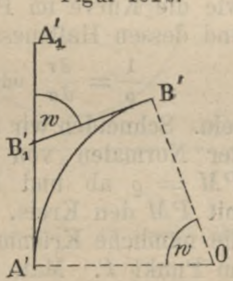
b) Die Krümmung einer beliebigen ebenen Kurve.

Frage 83. Was versteht man unter der absoluten und was unter der mittleren Krümmung eines Kurvenbogens?

Figur 101a.



Figur 101b.

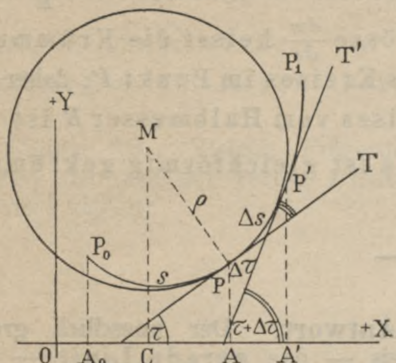


Antwort. Als absolute Krümmung eines Kurvenbogens $AB = s$, der keine besondere Punkte besitzt, bezeichnen wir den Winkel w, welchen die Tangente BB_1 im Endpunkt B mit der Tangente AA_1 im Anfangspunkt A des Bogens bildet. Unter der mittleren Krümmung des Bogens $AB = s$ versteht man das Verhältnis der absoluten Krümmung w zur Bogenlänge s; d. h. die Grösse $\frac{w}{s}$.

Zeichnen wir einen Kreis, in welchem der Bogen $A'B' = AB$ und die Tangenten $A'A_1'$ und $B'B'_1$ einen Winkel $= w$ bilden (siehe Figuren 101), so ist die Krümmung des Kreisbogens $A'B'$ ebenfalls $= \frac{w}{s}$ oder die mittlere Krümmung des Bogens AB ist gleich der Krümmung eines Kreises, dessen Halbmesser $R = \frac{s}{w}$ ist.

Frage 84. Was ist unter der Krümmung in einem bestimmten Punkt einer Kurve zu verstehen?

Figur 102.



Antwort. Auf irgend einer Kurve $P_0 P P_1$ mit der Gleichung $y = f(x)$ sei P_0 ein fester Punkt mit den Koordinaten x_0 und $y_0 = f(x_0)$, P ein beliebiger Punkt (x, y) und die Bogenlänge $P_0 P$ heisse s; die Tangente in P bilde mit der Abscissenachse den Winkel τ (siehe Figur 102), dann sind sowohl s als τ zwei Grössen, welche gewisse Funktionen der Abscisse x des Punktes P sind. Nehmen wir auf der Kurve den Punkt P' sehr nahe an P und den Koordinaten $x + \varDelta x$ u. $y + \varDelta y = f(x + \varDelta x)$ und setzen den Bogen $PP' = \varDelta s$, den Neigungswinkel der Tangente $T'P' = \tau + \varDelta \tau$, also $\sphericalangle TPT' = \varDelta \tau$, so ist die mitttere Krümmung des sehr kleinen Bogens $PP' = \frac{\varDelta \tau}{\varDelta s}$.

Setzen wir nun voraus, dass sich der Punkt P' dem Punkt P unbegrenzt nähere, so bewegt sich der Wert des Bruches $\frac{\varDelta \tau}{\varDelta s}$ gegen den Grenzwert $\frac{d\tau}{ds}$. Die Grenze für $\frac{\varDelta \tau}{\varDelta s}$, wenn $\varDelta s$ nach Null konvergiert, oder $\frac{d\tau}{ds}$ heisst die Krümmung der Kurve im Punkt P.

Frage 85. Was ist unter dem Krümmungskreis eines Punktes einer Kurve zu verstehen?

Antwort. Stellen wir uns einen Kreis vor, der die nämliche Krümmung wie die Kurve im Punkt P haben soll und dessen Halbmesser ϱ sei, so muss:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{d\sigma} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{d\sigma}{d\tau}$$

sein. Schneiden wir auf der innern Seite der Normalen von P aus das Stück $PM = \varrho$ ab und beschreiben aus M mit PM den Kreis, so hat jetzt dieser die nämliche Krümmung wie die Kurve im Punkt P. Man nennt diesen Kreis den Krümmungskreis, den Punkt M den Krümmungsmittelpunkt und ϱ den Krümmungshalbmesser des Punktes P (siehe Figur 102). Daraus fliesst der

Satz. Der Krümmungshalbmesser eines Punktes P einer Kurve hat den Wert $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$.

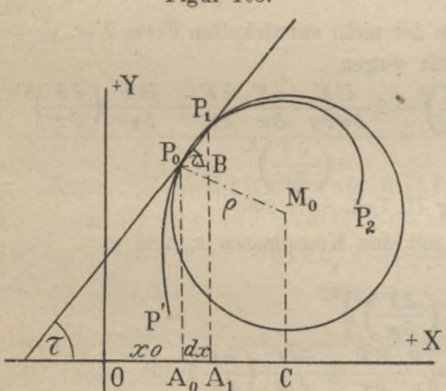
Frage 86. Welcher Winkel heisst der Kontingenzwinkel in einem gegebenen Kurvenpunkt?

Antwort. Auf dem Bogen $P_0 P = s$ nehmen wir den unendlich kleinen Bogen $PP' = ds$ an und ziehen die Tangenten in P und P'; den unendlich kleinen Winkel $d\tau$, welchen diese zwei Tangenten bilden, bezeichnet man als den Kontingenzwinkel im Punkt P. Nach dem Vorausgehenden können wir nun sagen:

Satz. Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt ist gleich dem Kontingenzwinkel, dividiert durch das Bogendifferential, und der Krümmungshalbmesser ist gleich dem Bogendifferential, dividiert durch den Kontingenzwinkel.

Frage 87. Welchen Wert hat der Krümmungshalbmesser im Punkt P_0 einer Kurve, wenn die letztere, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, die Gleichung $y = f(x)$ hat und der Punkt P die Koordinaten x_0, y_0 besitzt?

Figur 103.



Erkl. 87. Ist $tg\,\tau = \frac{dy}{dx}$, so ergibt die beiderseitige Differentiation:

$$\frac{d\tau}{cos^2 \eta} = d\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

also ist:

$$d\tau = d\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot cos^2 \tau$$

$$= d\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Antwort. Wir wählen unendlich nahe bei P_0 auf der Kurve den Punkt P_1 mit den Koordinaten $x_0 = dx$, $y_0 = dy$, so dass in der nebenstehenden Figur 103 $P_0 B = dx$ und $P_1 B = dy$ wird. Der unendlich kleine Bogen $P_0 P_1 = ds$ kann mit der Sehne $P_0 P_1$ vertauscht werden; wegen $P_0 P_1^2 = P_0 B^2 + BP_1^2$ oder $ds^2 = dx^2 + dy^2$ haben wir:

$$1) \ldots ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Die Verlängerung des unendlich kleinen Kurvenelements $P_0 P_1$ lässt sich als ein Stück der Kurventangente in P_0 ansehen und $\sphericalangle P_1 P_0 B = \tau$ setzen; daher haben wir:

$$tg\,\tau = \frac{P_1 B}{P_0 B} = \frac{dy}{dx} \text{ und } cos\,\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

folglich ist:

$$\tau = arc\left(tg = \frac{dy}{dx}\right)$$

und

$$d\tau = d\,arc\left(tg = \frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

somit:

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}}$$

oder:

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

somit haben wir den

Satz. Der Krümmungshalbmessser ϱ im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ der Kurve $y = f(x)$ berechnet sich aus:

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{[1+f'(x_0)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)} \quad \text{(siehe Frage 76);}$$

d. h. der Krümmungshalbmesser ist gleich dem Halbmesser des Oskulationskreises, der Krümmungskreis fällt mit dem Oskulationskreis und der Krümmungsmittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Oskulationskreises zusammen; die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes sind also nach Seite 160:

$$\xi = x_0 - \frac{f'(x_0)[1+f'(x_0)^2]}{f''(x_0)} \quad \text{und} \quad \eta = y_0 + \frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}.$$

Zusatz. Ist die Gleichung der Kurve in der nicht entwickelten Form $F(x, y) = 0$ gegeben, so erhält man aus den vorigen Formeln wegen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

(siehe Differentialrechnung II. Teil, Seite 240)

für den Krümmungshalbmesser ϱ im Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0 und y_0:

$$\varrho = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}_{x = x_0,\; y = y_0;}$$

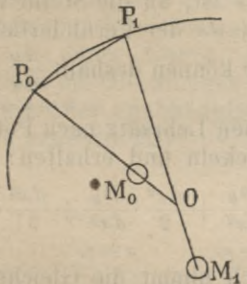
und für die Koordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes:

$$\xi = x_0 - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}_{x=x_0,\; y=y_0.} \quad \text{und} \quad \eta = y_0 + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}_{x=x_0,\; y=y_0.}$$

Frage 88. Welche andere Auffassung des Krümmungsmittelpunktes lässt sich noch geben?

Antwort. Es seien wieder P_0 und P_1 zwei benachbarte Pnnkte auf der Kurve; P_0M_0 und P_1M_1 seien die Normalen in

Figur 104.



P_0 und P_1, welche sich in O schneiden; auf $P_0 O$ sei M_0 der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt P_0 und auf $P_1 M_1$ der Punkt M_1 jener für P_1. Wir ziehen $P_0 P_1$; dann ergibt der Sinussatz der Trigonometrie:

$$P_0 O : P_0 P_1 = \sin P_0 P_1 O : \sin O,$$

woraus:

$$P_0 O = \frac{P_0 P_1 \cdot \sin P_0 P_1 O}{\sin O}$$

folgt, oder:

$$P_0 O = \frac{P_0 P_1}{arc\, P_0 P_1} \cdot \frac{\sphericalangle O}{\sin O} \cdot \frac{arc\, P_0 P_1}{\sphericalangle O} \cdot \sin P_0 P_1 O.$$

Lassen wir nun den Punkt P_1 gegen P_0 rücken, so wird beim Zusammenfallen von P_1 mit P_0 die Gerade $P_0 P_1$ zur Tangente und daher:

$$\sphericalangle P_0 P_1 O = 90^0 \text{ und } \sin P_0 P_1 O = 1.$$

Ferner hat man:

$$\text{Limes}\, \frac{P_0 P_1}{arc\, P_0 P_1} = 1, \quad \text{Limes}\, \frac{\sphericalangle O}{\sin O} = 1,$$

$$\text{Limes}\, \frac{arc\, P_0 P_1}{\sphericalangle O} = \text{Limes}\, \frac{\varDelta s}{\varDelta \tau} = \frac{ds}{d\tau};$$

hieraus folgt:

$$\text{Limes}\, P_0 O = \frac{ds}{d\tau} = P_0 M_0;$$

d. h. wenn die Normale $P_1 M_1$ sich der Normalen $P_0 M_0$ unbegrenzt nähert, so rückt der Schnittpunkt O beider Koordinaten auf der Normalen $P_0 O$ so weiter, dass er beim Zusammenfallen der beiden Normalen die Lage M_0 erreicht; daher der

Satz. Der Krümmungsmittelpunkt einer Kurve in einem gegebenen Punkt ist die Grenzlage des Schnittpunktes der durch diesen Punkt gelegten Normalen mit einer unendlich benachbarten Normalen.

Frage 89. Wie lassen sich aus dem vorigen Satz die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes gewinnen?

Antwort. Der Punkt P_0 habe die Koordinaten x_0 und $y_0 = f(x_0)$. Die Koordinaten des unendlich nahen Punktes P_1 seien $x_1 = x_0 + dx$ und $y_1 = y_0 + dy = f(x_0 + dx)$, wobei dx und dy zwei unendlich kleine Grössen vorstellen. Die Normale in P_0 hat die Gleichung:

$$1) \ldots X - x_0 + (Y - y_0) \frac{dy}{dx}\bigg|_{x = x_0} = 0$$

und jene in P_1 lautet:

$$2) \ldots X - x_1 + (Y - y_1) \frac{dy}{dx}\bigg|_{x = x_1} = 0.$$

Die Koordinaten X und Y des Schnittpunktes beider Normalen müssen den Gleichungen 1) und 2) Genüge leisten. Zu ihrer Ermittelung setzen wir in Gleichung 2):

$$x_1 = x_0 + dx, \quad y_1 = y_0 + dy$$

und beachten, dass $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$ aus $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ hervorgeht, wenn man in $\frac{dy}{dx}$, das eine Funktion von x ist, an die Stelle von x_0 den Wert $x_0 + dx$ der Veränderlichen treten lässt; wir können deshalb $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0+dx}$ nach dem Taylorschen Lehrsatz nach Potenzen von dx entwickeln und erhalten:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} + dx\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \frac{dx^2}{2}\cdot\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_0} + \frac{dx^3}{3\,!}\cdot\left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x=x_0} + \cdots$$

Dadurch nimmt die Gleichung 2) die Form an:

$$X - (x_0 + dx) + [Y - (y_0 + dy)]\cdot\left(\frac{dy}{dx} + dx\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dx^3}{3\,!}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \cdots\right)_{x=x_0} = 0.$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von der Gleichung 1), so bleibt:

$$dx - (Y - y_0)\left(dx\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots\right)_{x=x_0} + dy\left(\frac{dy}{dx} + dx\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots\right)_{x=x_0} = 0.$$

und die Division mit dx ergibt:

$$1 - (Y - y_0)\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots\right)_{x=x_0} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + dx\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots\right)_{x=x_0} = 0.$$

Lassen wir jetzt den Punkt P_1 mit P_0 zusammenfallen, so wird $dx = 0$ und die vorige Gleichung geht über in:

$$3) \ldots 1 - (Y - y_0)\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=x_0} = 0.$$

Fügen wir hinzu:

$$4) \ldots X - x_0 + (Y - y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 0,$$

so haben wir die zwei Gleichungen zur Bestimmung der Koordinaten X und Y des Schnittpunktes der beiden Normalen oder des Krümmungsmittelpunktes. Diese Gleichungen sind aber genau die nämlichen, welche in Frage 76 zur Bestimmung der Koordinaten ξ und η des Mittelpunktes des Oskulationskreises dienten;

Erkl. 88. Das Schneiden der Kurve durch den Krümmungskreis findet seine Erklärung darin, dass auf der Kurve die Krümmung von Punkt zu Punkt wechselt, während sie auf dem Kreis konstant bleibt. Ist in der unmittelbaren Nähe links von P_0 die Krümmung stärker, so wird sie rechts von P_0 schwächer als in P_0 und auf dem Kreis sein; der erste Teil der Kurve muss daher innerhalb des Kreises und der Teil rechts ausserhalb des Kreises liegen. Weil so der Krümmungskreis die zwei verschieden gekrümmten Teile der Kurve in P_0 trennt, so muss er die Kurve im Punkt P_0 notwendig schneiden (siehe Figur 103).

es ist daher $X = \xi$ und $Y = \eta$, und der Krümmungskreis mit dem Oskulationskreis zusammenfallend. Ersterer hat also im allgemeinen mit der Kurve eine Berührung II. Ordnung und schneidet in P_0 die Kurve; in besonderen Punkten kann auch eine Berührung III. Ordnung stattfinden, wie in den Scheiteln der Kegelschnitte (siehe Aufgabe 301).

Frage 90. Welche Ausdrücke liefert der Halbmesser ϱ des Krümmungskreises im Punkt P_0 einer Kurve, wenn die letztere durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ der unabhängigen Veränderlichen t gegeben ist?

Erkl. 89. Setzen wir:

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt,$$
$$d^2x = \varphi''(t)\,dt, \quad d^2y = \psi''(t)\,dt,$$

so können wir ϱ auch in der Form schreiben:

$$\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - d^2x \cdot dy}$$

(siehe Differentialrechnung II. Teil, Aufgabe 307, Zusatz).

Antwort. Nach Differentialrechnung II. Teil, Aufgabe 307, Seite 252, wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\cdot\psi''(t) - \varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Setzen wir diese Werte in die Formel für den Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

so erhalten wir für den Krümmungshalbmesser im Punkt P_0 mit den Koordinaten $y_0 = \varphi(t_0)$ und $y_0 = \psi(t_0)$:

$$\varrho = \frac{\left\{[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\varphi'(t_0)\cdot\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\cdot\psi''(t_0)}.$$

Die Formeln für die Koordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes, nämlich:

$$\xi = x_0 - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{und} \quad \eta = y_0 + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gehen durch die vorige Substitution über in:

$$\xi = \varphi(t_0) - \frac{\psi'(t_0)\left\{[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2\right\}}{\varphi'(t_0)\cdot\psi''(t_0) - \psi'(t_0)\cdot\varphi''(t_0)} \quad \text{und} \quad \eta = \psi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)\left\{[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2\right\}}{\varphi'(t_0)\cdot\psi''(t_0) - \psi'(t_0)\cdot\varphi''(t_0)}.$$

Frage 91. Welchen Ausdruck erhält man für den Krümmungshalbmesser ϱ im Punkt P_0 einer Kurve, welche durch eine Gleichung $r = \Phi(\Theta)$ in den Polarkoordinaten r und Θ gegeben ist?

Antwort. Gehen wir von der Gleichung $y = f(x)$ der Kurve in rechtwinkligen Koordinaten aus, so ist:

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Nun haben wir:

$$x = r\cos\Theta, \quad y = r\sin\Theta;$$

daraus folgt nach Differentialrechnung II. Teil, Aufgabe 319, Seite 258:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta}+r\cos\Theta}{\cos\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta}-r\sin\Theta} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2-r^2\cdot\frac{d^2r}{d\Theta^2}}{\left(\cos\Theta\cdot\frac{dr}{d\Theta}-r\sin\Theta\right)^3}.$$

Setzen wir diese Werte in die obige Formel für ϱ, so erhalten wir nach einer kleinen Umformung:

$$\varrho = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2-r\cdot\frac{d^2r}{d\Theta^2}}.$$

Im Punkt P_0, der die Koordinaten Θ_0 und $r_0 = \Phi(\Theta_0)$ hat, ist demnach:

$$\varrho = \frac{\left[r_0^2+\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2_{\Theta=\Theta_0}\right]^{\frac{3}{2}}}{r_0^2+2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2_{\Theta=\Theta_0}-r_0\cdot\left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right)_{\Theta=\Theta_0}}.$$

Ferner erhält man für die Koordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes:

$$\xi = r_0\cos\Theta_0 - \frac{\left[r_0^2+\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2_{\Theta=\Theta_0}\right]\left[r_0\cos\Theta_0+\sin\Theta_0\cdot\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)_{\Theta=\Theta_0}\right]}{r_0^2+2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2_{\Theta=\Theta_0}-r_0\left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right)_{\Theta=\Theta_0}}$$

und

$$\eta = r_0\sin\Theta_0 + \frac{\left[r_0^2+\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2\right]\left[-r_0\sin\Theta_0+\cos\Theta_0\cdot\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)\right]}{r_0^2+2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2-r_0\left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right)}.$$

$\Theta = \Theta_0$ genommen.

Anmerkung 3. Da es sich bei der Bestimmung des Krümmungshalbmessers ϱ nur um den absoluten Wert desselben handelt, wird man der im Zähler vorhandenen Quadratwurzel das Zeichen $+$ oder $-$ geben, je nachdem der Nenner positiv oder negativ ist, so dass ϱ positiv wird. Die Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes erfolgt durch die Berechnung der Koordinaten ξ und η. Heisst man den Winkel, den die Normale in der Richtung von der Kurve nach dem Krümmungsmittelpunkt hin mit der Richtung der positiven Abscissenachse einschliesst, ν, so ist:

$$\cos\nu = \frac{\xi - x_0}{\sqrt{(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2}} \quad \text{und} \quad \sin\nu = \frac{\eta - y_0}{\sqrt{(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2}}.$$

Diese zwei Gleichungen liefern den Winkel ν eindeutig, so dass kein Zweifel darüber herrschen kann, in welcher Richtung vom Kurvenpunkt (x_0, y_0) aus man den Krümmungshalbmesser ϱ abzutragen hat. Aus der Gleichung:

$$\eta = y_0 + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ folgt } \eta - y_0 = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\eta - y_0$ dasselbe Vorzeichen erhalten. Da aber $\eta - y_0$ die Differenz zwischen der Ordinate des Krümmungsmittelpunktes und der Ordinate des Berührungspunktes ist, so folgt, dass die Kurve dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt ihre konkave Seite zuwendet (siehe Seite 109 dieses Bandes).

---

c) Beispiele über die Bestimmung der Elemente ξ und η des Krümmungskreises.

Aufgabe 304. Für den Kreis:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Auflösung. Setzen wir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3}$$

in:

$$\varrho = \pm \frac{\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\xi = x_0 - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ebenso in:

$$\eta = y_0 + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

so wird:

$$\varrho = r,\ \xi = 0 \text{ und } \eta = 0.$$

Der Krümmungskreis fällt daher, wie sich von selbst versteht, in allen Punkten des gegebenen Kreises mit dem letzteren zusammen.

Aufgabe 305. Für die Parabel:

$$y^2 = 2px.$$

Erkl. 90. Macht man $OF = \frac{p}{2}$, so ist F der Brennpunkt (s. Differentialrechnung II. Teil, Seite 1). Zur Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes M_0 für den Punkt P_0 ziehe man die Normale P_0C (siehe die Aufgaben 1 und 61) und den Brennstrahl P_0F. Im Schnittpunkt C der Normalen und der Achse errichte man das Lot CD und mache dann $M_0D \perp P_0F$, dann ist M_0 der gesuchte Mittelpunkt, $M_0P_0 = \varrho$ und $Q'P_0Q_1$ der Krümmungskreis (siehe Figur 105). Beweis folgt später.

Auflösung. Aus $y^2 = 2px$ leiten wir ab:

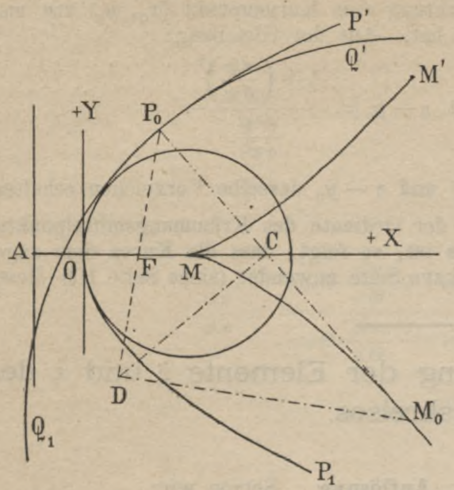
$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Darnach ist:

$$\varrho = \pm \frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{y^2}} = \frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(2x+p)^3}{p}}.$$

Figur 105.



Ferner:

$$\xi = \frac{y^2}{2p} + \frac{\frac{p}{y}\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}} = \frac{3y^2}{2p} + p = 3x + p,$$

$$\eta = y - \frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2} \quad \text{(siehe Erkl. 90)}$$

Im Scheitel O der Parabel $P'OP_0$ der Figur 105 ist $x = 0$ und $y = 0$, daher:

$$\varrho = p = AF = 2OF = OM$$

und

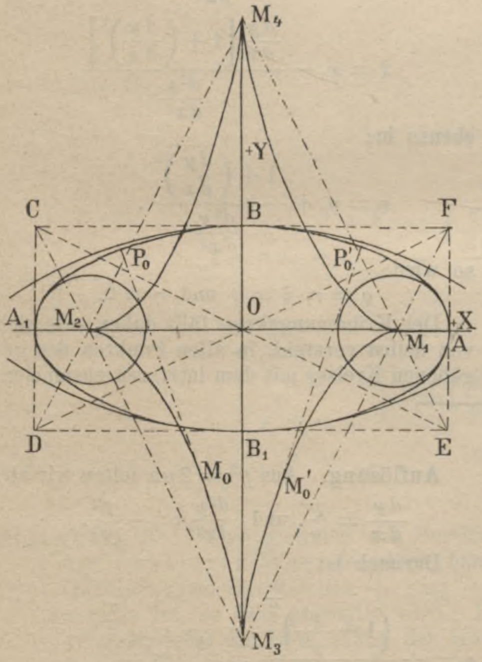
$$\xi = p = OM, \quad \eta = 0;$$

der Krümmungskreis hat daselbst eine Berührung III. Ordnung. Mit wachsendem x wächst auch ϱ, die Krümmung wird demnach nach aussen zu immer schwächer. Für $x = \infty$ wird $\varrho = 0$ (siehe Figur 105).

Aufgabe 306. Für die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Figur 106.



Erkl. 91. Setzen wir:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

Auflösung. Die Differentiation ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3};$$

hiermit erhalten wir:

$$\varrho = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4},$$

ferner:

$$\xi = \frac{x^3 (a^2 - b^2)}{a^4} \text{ und } \eta = -\frac{y^3 (a^2 - b^2)}{b^4},$$

oder für $a^2 - b^2 = \varepsilon^2$ erhalten wir:

$$\xi = \frac{x^3 \varepsilon^2}{a^4} \text{ und } \eta = -\frac{y^3 \varepsilon^2}{b^4}.$$

Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes ist schon Seite 158 angegeben worden.

Für $x = 0$ wird $y = \pm b$ und $\varrho = \frac{a^2}{b}$; dagegen erhält man für $x = \pm a$: $y = 0$ und $\varrho = \frac{b^2}{a}$. Nehmen wir $a > b$ an, so hat der Krümmungsradius in den Endpunkten der grossen Achse den kleinsten Wert $\frac{b^2}{a}$ und in den Endpunkten der kleinen Achse den grössten Wert $\frac{a^2}{b}$. Die betreffenden Krümmungskreise haben in den genannten vier Punkten eine Berührung III. Ordnung (s. Aufgabe 301 und Figur 95).

so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2x}{a^2} : \frac{2y}{b^2} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Nach der Regel über die Differentiation eines Bruches entwickeln wir:

Erkl. 92. Um die Krümmungsmittelpunkte für die Scheitel der Ellipse zu erhalten, beschreibe man um die letztere als Rechteck $CDEF$ und ziehe die Diagonalen CE und DF. Die Lote auf diese Geraden aus den Eckpunkten schneiden die Achsen AA_1 und BB_1 in den verlangten Punkten M_1, M_2, M_3, M_4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2y \cdot b^2 - b^2x \cdot a^2 \cdot \frac{dy}{dx}}{a^4y^2} = \frac{a^2b^2y - a^2b^2x \cdot \left(\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{a^4y^2}$$

$$= -\frac{a^2b^2y^2 + b^4x^2}{a^4y^3} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^2 \cdot (a^2 \cdot b^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

denn aus der Kurvengleichung folgt, dass $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sein muss.

Aufgabe 307. Für die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Erkl. 93. Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für Punkte der Hyperbel ist die nämliche wie bei der Ellipse (siehe Aufgabe 301 und Figur 95).

Auflösung. Ersetzen wir in den soeben erhaltenen Formeln b^2 durch $-b^2$, so erhalten wir für die Hyperbel:

$$\varrho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

$$\xi = \frac{x^3(a^2+b^2)}{a^4} \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{y^3(a^2+b^2)}{b^4}.$$

Aufgabe 308. Für die Kettenlinie:

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

(siehe die Aufgaben 4, 93, 108 und Figur 6).

Auflösung. Wir erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{m} \cdot e^{\frac{x}{m}} - \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2m}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{y}{m^2},$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} - 2 + e^{-\frac{2x}{m}}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} + 2 + e^{-\frac{2x}{m}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 = \frac{y^2}{m^2};$$

daher:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{y}{m}.$$

Dadurch geht:

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^{\,3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

über in:

$$\varrho = \frac{y^3}{m^3} : \frac{y}{m^2} = \frac{y^2}{m}.$$

Nach Aufgabe 108, Seite 59 ist auch die Normale $n = \frac{y^2}{m}$, d. h. der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie hat die gleiche Länge wie die Normale; dabei ist aber zu beachten, dass sie von der Kurve aus entgegengesetzt liegen (siehe Figur 6).

Ferner wird:

$$\xi = x - \frac{m}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right),$$

$$\eta = m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

Aufgabe 309. Für die Cissoide:

$$x^3 = y^2(2r - x)$$

(siehe die Aufgaben 9, 95, 128, 162, 277 und Figur 11).

Auflösung. Aus:

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(2r - x)^{\frac{1}{2}}}$$

leiten wir ab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3r - x)\cdot x^{\frac{1}{2}}}{(2r - x)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3r^2}{(2r - x)^{\frac{5}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}.$$

Hiermit erhalten wir:

$$\varrho = \frac{r(8r - 3x)^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{3(2r - x)^2}, \quad \xi = -\frac{rx(12r - 5x)}{3(2r - x)^2} \text{ und } \eta = \frac{8rx^{\frac{1}{2}}}{3(2r - x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ wird $\varrho = 0$, $\xi = 0$ und $\eta = 0$, d. h. in der Spitze O der Kurve ist der Krümmungshalbmesser gleich Null.

Aufgabe 310. Für das Descartessche Blatt:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

beziehungsweise:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3} \text{ und } y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$$

(siehe die Aufgaben 24, 94, 129, 151, 152, 193, 265 und Figur 59).

Auflösung. Aus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{t(2 - t^3)}{1 - 2t^3}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3} \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(1 + t^3)^4}{3a(1 - 2t^3)^3}$$

erhalten wir:

$$\varrho = \frac{3a}{2(1 + t^3)^4}\left[(1 - 2t^3)^2 + t^2(2 - t^3)^2\right]^{\frac{3}{2}} \text{ oder } \varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{x^2 - ay}{ax - y^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\cdot(ax - y^2)^3}{2a^3xy}.$$

Für $t = -1$, d. h. im Wendepunkt wird $\varrho = \infty$. Von da an nimmt er ab, erreicht im Koordinatenanfang für $t = 0$ den Wert $\frac{3a}{2}$, nimmt in seinem weiteren Verlauf noch mehr ab, um in P_1 für $t = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ den Wert $\frac{a}{2}$

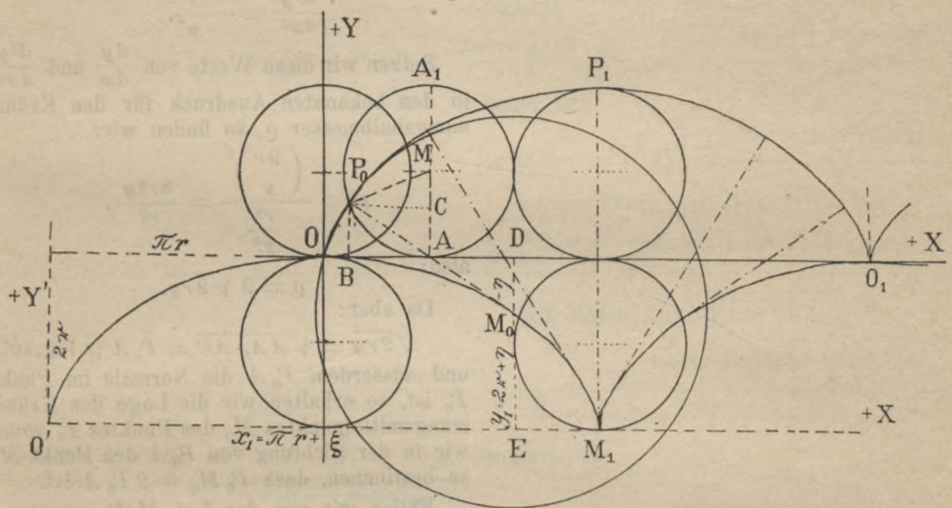
und bei P_2 für $t = 1$ sein Minimum $\frac{3a\sqrt{2}}{16}$ zu erreichen. Dann wächst er wieder, wie er vorher abgenommen hat. Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes ist sehr schwerfällig.

Für die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes erhalten wir:

$$\xi = \frac{3at^2}{2(1+t^3)^4}(t^9 + 6t^7 - 6t^6 - 6t^4 + 12t^3 + 15t - 8),$$

$$\eta = \frac{3a}{2(1+t^3)^4}(1 + 6t^2 - 6t^3 - 6t^5 + 12t^6 + 15t^8 - 8t^9).$$

Figur 107.



Aufgabe 311. Für die Cykloide:

1) . . . $x = r(t - \sin t)$,

2) . . . $y = r(1 - \cos t)$

(siehe Aufgabe 10 u. s. w.).

Auflösung. Die Gleichung:

$$y = r(1 - \cos t)$$

liefert:

$$\cos t = \frac{r-y}{r} \text{ oder } t = arc\left(\cos = \frac{r-y}{r}\right)$$

und

$$\sin t = \pm\frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r},$$

denn:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Setzen wir diese Werte in die erste Gleichung;

$$x = r(t - \sin t)$$

ein, so erhalten wir:

3) . . . $x = r\,arc\left(\cos = \frac{r-y}{r}\right) \mp \sqrt{2ry - y^2}.$

Statt die Gleichung 3) zu differentiieren, um $\frac{dy}{dx}$ zu gewinnen, differentiieren wir einfacher Gleichung 1) und 2), in welchen x

und y Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t sind, was gibt:

$$dx = r\,dt\,(1 - \cos t) = y\,dt,$$

$$dy = r\,dt\,\sin t = dt\,\sqrt{2ry - y^2}.$$

Durch Division folgt jetzt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2r}{y} - 1};$$

daher:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r}{y} - 1.$$

Beiderseitige Differentiation nach x ergibt:

$$2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2r}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx};$$

daher:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{y^2}.$$

Setzen wir diese Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in den bekannten Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ, so finden wir:

$$\varrho^2 = \frac{\left(\frac{2r}{y}\right)^3}{\frac{r^2}{y^4}} = \frac{8r^3y}{r^2},$$

also:

$$\varrho = 2\sqrt{2ry}.$$

Da aber:

$$\sqrt{2ry} = \sqrt{AA_1 \cdot AC} = P_0A \text{ (s. Fig. 107)}$$

und ausserdem P_0A die Normale im Punkt P_0 ist, so erhalten wir die Lage des Krümmungsmittelpunktes M_0 des Punktes P, wenn wir in der Richtung von P_0A den Punkt M_0 so bestimmen, dass $P_0M_0 = 2\,P_0A$ ist.

Fällen wir nun das Lot M_0D, so ist:

$$\xi = OD = OA + AD = OA + AB,$$

denn $\triangle AM_0D \cong AP_0B$, somit folgt:

$$\xi = rt + r\sin t = r(t + \sin t)$$

und

$$\eta = M_0D = -P_0B = -y = -r(1 - \cos t).$$

In den Kurvenpunkten O, O_1, O_2 u. s. w. auf der Abscissenachse ist $x = 0$, πr, $2\pi r$ u. s. w. und $y = 0$. Da der Krümmungshalbmesser sich aus $\varrho = 2\sqrt{2ry}$ berechnet, so wird ϱ in diesen R ü c k k e h r p u n k t e n der Cykloide gleich N u l l; in den höchsten Kurvenpunkten, wie in P_1, wo $y = 2r$ ist, erreicht ϱ den grössten Wert, nämlich:

$$4r = P_1M_1.$$

Aufgabe 312. Für die E p i c y k l o i d e:

$$x = (a + r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t + t\right),$$

$$y = (a + r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t + t\right)$$

(siehe Aufgabe 11 u. s. w.).

Auflösung. Aus:

$$x = (a + r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t + t\right) = \varphi(t)$$

bilden wir:

$$\varphi'(t) = \frac{a(a+r)}{r}\left[-\sin\frac{a}{r}t + \sin\left(\frac{a}{r}t + t\right)\right],$$

$$\varphi''(t) = \frac{a(a+r)}{r^2}\left[-a\cos\frac{a}{r}t + (a+r)\cos\left(\frac{a}{r}t + t\right)\right],$$

und ebenso aus

$$y = (a+r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t + t\right) = \psi(t):$$

$$\psi'(t) = \frac{a(a+r)}{r}\left[\cos\frac{a}{r}t - \cos\left(\frac{a}{r}t + t\right)\right],$$

$$\psi''(t) = \frac{a(a+r)}{r^2}\left[-a\sin\frac{a}{r}t + (a+r)\sin\left(\frac{a}{r}t + t\right)\right].$$

Hieraus folgt nach einer kleinen Vereinfachung:

$$\varphi'(t)]^2 + \psi'(t)]^2 = \frac{2a^2(a+r)^2}{r^2}[1-\cos t] = \frac{4a^2(a+r)^2\cdot\sin^2\frac{t}{2}}{r^2};$$

daher ist:

$$\left\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{8a^3(a+r)^3\cdot\sin^3\frac{t}{2}}{r^3}.$$

Ferner bilden wir ebenso:

$$\varphi'(t)\cdot\psi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t) = \frac{a^2(a+r)^2(1-\cos t)\cdot(2a+r)}{r^3} = \frac{2a^2(a+r)^2(2a+r)\cdot\sin^2\frac{t}{2}}{r^3}.$$

Mit diesen Ausdrücken bilden wir:

$$\varrho = \frac{[\varphi'(t_0)^2 + \psi'(t_0)^2]^{\frac{3}{2}}}{\varphi'(t_0)\,\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\cdot\psi'(t_0)} = \frac{8a^3(a+r)^3\sin^3\frac{t_0}{2}\cdot r^3}{r^3\cdot 2a^3\cdot(a+r)^3(2a+r)\sin^2\frac{t_0}{2}},$$

woraus:

$$\varrho = \frac{4a(a+r)\sin\frac{t_0}{2}}{2a+r}.$$

Für die Koordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes liefert die Rechnung:

$$\xi = \frac{r}{2a+r}\left[(a+r)\cos\frac{a}{r}t_0 + a\cos\left(\frac{a}{r}t_0 + t_0\right)\right]$$

und

$$\eta = \frac{r}{2a+r}\left[(a+r)\sin\frac{a}{r}t_0 + a\sin\left(\frac{a}{r}t_0 + t_0\right)\right] \text{ (siehe Erkl. 94).}$$

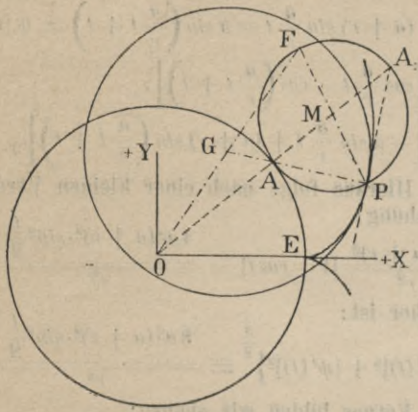
Der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt P der Epicykloide wird wie folgt durch Konstruktion gefunden: Man ziehe den Durchmesser $PMF = 2a$, verbinde O mit F, so schneidet die Verlängerung von PA die Gerade OF im Krümmungsmittelpunkt G. Dies lässt sich auf folgende Art beweisen. Im rechtwinkligen Dreieck AA_1P ist:

$$\sphericalangle AA_1P = \frac{t}{2},$$

daher:

$$AP = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Figur 108.



Ferner ist das Viereck APA_1F ein Rechteck, also auch:

$$A_1F = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Im Dreieck OA_1F ist $AG \parallel A_1F_1$, woraus die Proportion folgt:

$$AG : A_1F = OA : OA_1;$$

aus dieser leiten wir ab:

$$(AG + A_1F) : A_1F = (OA + OA_1) : OA_1$$

oder:

$$GP : A_1F = (OA + OA_1) : OA_1,$$

$$GP : 2a\sin\frac{t}{2} = 2(a+r) : 2a + r;$$

daher ist:

$$GP = \frac{4a(a+r)\sin\frac{t}{2}}{2a+r} = \varrho,$$

und weil PAG die Normale im Punkt P der Epicykloide darstellt (siehe Aufgabe 68), so ist in der That G der Krümmungsmittelpunkt für den Kurvenpunkt P.

Für $t = 0^0$, 360^0, 720^0 u. s. f. erhält man die auf dem festen Kreis liegenden Rückkehrpunkte I. Art der Epicykloide. In diesen Punkten wird ϱ gleich Null, also die Krümmung unendlich; den grössten Wert erreicht ϱ für $t = 180^0$, 540^0 u. s. w., also in den Scheitelpunkten der Epicykloide, nämlich:

$$\frac{4a(a+r)}{2a+r}.$$

Erkl. 94. Zur nebenstehenden Auflösung gehören folgende Nebenrechnungen:

$$\frac{d\cos\left(\frac{a}{r}t\right)}{dt} = -\sin\left(\frac{a}{r}t\right)\cdot\frac{d\left(\frac{a}{r}t\right)}{dt} = -\frac{a}{r}\sin\frac{a}{r}t,$$

$$\frac{d\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)}{dt} = -\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\cdot\frac{d\left(\frac{a}{r}t+t\right)}{dt} = -\left(\frac{a}{r}+1\right)\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)$$

$$= -\frac{a+r}{r}\cdot\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right),$$

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = \frac{a^2(a+r)^2}{r^2}\left[\sin^2\frac{a}{r}t - 2\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right) + \sin^2\left(\frac{a}{r}t+t\right)^2\right.$$
$$\left. + \cos^2\frac{a}{r}t - 2\cos\frac{a}{r}t\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right) + \cos^2\left(\frac{a}{r}t+t\right)^2\right]$$

$$= \frac{a^2(a+r)^2}{r^2}\left\{2 - 2\left[\cos\frac{a}{r}t\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right) + \sin\left(\frac{a}{r}t\cdot\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{2a^2(a+r)^2}{r^2}\left(1-\cos t\right),$$

denn:

$$\cos\frac{a}{r}t\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right) + \sin\frac{a}{r}t\cdot\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right) = \cos t;$$

$$\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t) = \frac{a^2(a+r)^2}{r^3}\left\{\left[-\sin\frac{a}{r}t + \sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]\right.$$
$$\left[-a\sin\frac{a}{r}t + (a+r)\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]$$
$$\left. - \left[\cos\frac{a}{r}t - \cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]\left[-a\cos\frac{a}{r}t + (a+r)\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{a^2(a+r)^2}{r^3}[2a+r-a\cos t-(a+r)\cos t]$$
$$= \frac{a^2(a+r)^2}{r^3}[2a+r-(2a+r)\cos t]$$
$$= \frac{a^2(a+r)^2\cdot(2a+r)(1-\cos t)}{r^3}.$$

Ferner ist:

$$\xi = \varphi(t) - \frac{\psi'(t)[\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2]}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}$$
$$= (a+r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right) - \frac{4a^3\cdot(a+r)^3\sin^2\frac{t}{2}\left[\cos\frac{a}{r}t-\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]}{r^3\cdot 2a^2(a+r)^2(2a+r)\sin^2\frac{t}{2}}$$
$$= \frac{r\cdot(a+r)\cos\frac{a}{r}t + ar\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)}{2ar}$$
$$= \frac{r}{2a+r}\left[(a+r)\cos\frac{a}{r}t + a\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]$$

und

$$\eta = \psi(t) + \frac{\varphi'(t)[\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2]}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\cdot\psi'(t)}$$
$$= (a+r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right) + \frac{4a^3(a+r)^3\sin^2\frac{t}{2}\left[-\sin\frac{a}{r}t+\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right]\cdot r^3}{r^3\cdot 2a^2(a+r)^2\cdot(2a+r)\cdot\sin^2\frac{t}{2}}$$
$$= \frac{r(a+r)\sin\frac{a}{r}t + ar\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)}{2a+r}$$
$$= \frac{r}{2a+r}\left[(a+r)\sin\frac{a}{r}t + a\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right].$$

Aufgabe 313. Für die Hypocykloide:

$$x = (r-a)\cos\frac{at}{r} + a\cos\left(t-\frac{at}{r}\right),$$
$$y = (r-a)\sin\frac{at}{r} + a\sin\left(t-\frac{at}{r}\right)$$

(siehe Aufgabe 12 und Figur 17 und 18).

Auflösung. Die Rechnung, ganz ähnlich der vorigen, gibt:

$$\varrho = \frac{4a(r-a)\sin\frac{t}{2}}{r-2a}.$$

Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes lässt sich buchstäblich von der Epicykloide (s. Figur 108) auf die Hypocykloide übertragen.

Ferner erhält man für die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes die Ausdrücke:

$$\xi = \frac{r}{r-2a}\left[(r-a)\cos\frac{at}{r} - a\cos\left(t-\frac{at}{r}\right)\right],$$
$$\eta = \frac{r}{r-2a}\left[(r-a)\sin\frac{at}{r} + a\sin\left(t-\frac{at}{r}\right)\right].$$

Aufgabe 314. Für die Archimedische Spirale:

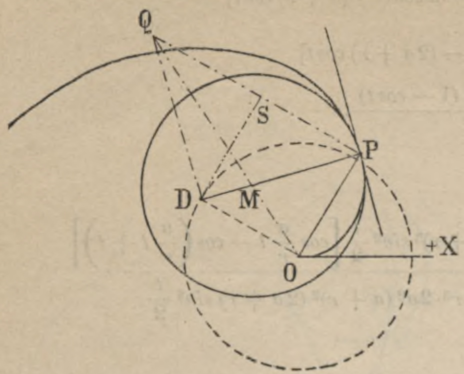
$$r = c\Theta$$

(siehe Aufgabe 13 und Figur 22).

Auflösung. Wir bilden:

$$\frac{dr}{d\Theta} = c \text{ und } \frac{d^2r}{d\Theta^2} = 0.$$

Figur 109.



Erkl. 95. Fällen wir das Lot DS, so ist im Rechteck $ODSP$ die Seite $DS = OP = r$ und $PS = OD = c$. Im rechtwinkligen Dreieck QDP ist:

$$SQ = \frac{DS^2}{PS} = \frac{r^2}{c},$$

daher ist:

$$PQ = c + \frac{r^2}{c} = \frac{r^2 + c^2}{c}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke PMQ und OMD folgt:

$$PM : MD = PQ : OD,$$

woraus:

$$(PM + MD) : PM = PQ + OD : PQ$$

oder:

$$PD : PM = PQ + OD : PQ,$$

$$\sqrt{r^2 + c^2} : PM = \frac{r^2 + c^2}{c} + c : \frac{r^2 + c^2}{c}$$
$$= r^2 + 2c^2 : r^2 + c^2,$$

daher:

$$PM = \frac{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2c^2},$$

somit:

$$PM = \varrho.$$

Die Formeln für die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes der Kurve $r = f(\Theta)$ in Frage 91 ergeben nun:

$$\xi = r\cos\Theta - \frac{(r^2 + c^2)(r\cos\Theta + c\sin\Theta)}{r^2 + 2c^2}$$

oder $r = c\Theta$ eingesetzt und vereinfacht:

$$\xi = \frac{c\,[\Theta\cos\Theta - (1 + \Theta^2)\sin\Theta]}{2 + \Theta^2};$$

ebenso:

$$\eta = r\sin\Theta + \frac{(r^2 + c^2)(-r\sin\Theta + c\cos\Theta)}{r^2 + 2c^2}$$

oder wieder $r = c\Theta$ eingesetzt und vereinfacht:

$$\eta = \frac{c\,[\Theta\sin\Theta + (1 + \Theta^2)\cos\Theta]}{2 + \Theta^2}.$$

Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ in Polarkoordinaten in Frage 91 ergibt hier:

$$\varrho = \frac{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2c^2} = \frac{(c^2\Theta^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}{c^2\Theta^2 + 2c^2},$$

also:

$$\varrho = \frac{c(1 + \Theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2 + \Theta^2}.$$

Zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes für den Punkt P der Spirale dient folgendes Verfahren: Wir konstruieren nach Aufgabe 13 die Normale PD mit der Subnormalen $OD = c$. In D errichten wir auf der Normalen das Lot und ziehen durch P die Parallele zu OD, welche das eben errichtete Lot in Q schneidet; die Verbindungslinie OQ schneidet dann die Normale im Krümmungsmittelpunkt M. Den Beweis siehe Erkl. 95.

Aufgabe 315. Für die logarithmische Spirale:

$$r = e^{\Theta}$$

(siehe Aufgabe 14 und Figur 23).

Auflösung. Die Differentiation von $r = e^{\Theta}$ liefert hier:

$$\frac{dr}{d\Theta} = e^{\Theta} = r$$

und ebenso:

$$\frac{d^2r}{d\Theta^2} = \frac{dr}{d\Theta} = r;$$

die Ausdrücke für ξ, η und ϱ werden hierdurch:

$$\xi = -r\sin\Theta,\quad \eta = r\cos\Theta \text{ und } \varrho = r\sqrt{2}.$$

Nun ist nach Aufgabe 140 auch die Polarnormale $PD = r\sqrt{2}$; wir kommen demnach zu dem Ergebnis, dass der Krümmungshalbmesser ϱ der log. Spirale gleich der Polarnormale ist und der Endpunkt D der letzteren den Krümmungsmittelpunkt darstellt (siehe Figur 23).

Das gleiche Ergebnis erhält man auch für die allgemeine logarithmische Spirale mit der Gleichung $r = c e^{m\Theta}$; dabei wird:

$$\frac{dr}{d\Theta} = m c e^{m\Theta} = m r, \quad \frac{d^2 r}{d\Theta} = m \frac{dr}{d\Theta} = m^2 r \text{ und } \varrho = r \sqrt{1 + m^2}.$$

Aufgabe 316. Für den Kegelschnitt:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\Theta}.$$

Auflösung. Aus der Polargleichung des Kegelschnitts:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\Theta}$$

bilden wir:

$$\frac{dr}{d\Theta} = \frac{p e \sin\Theta}{(1 + e\cos\Theta)^2} \text{ und } \frac{d^2 r}{d\Theta^2} = \frac{p e (\cos\Theta + e \sin^2\Theta + e)}{(1 + e\cos\Theta)^3}.$$

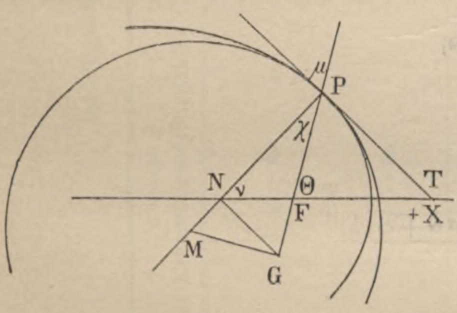
Hiermit wird:

$$\varrho = \frac{\left(\frac{p^2}{(1 + e\cos\Theta)^2} + \frac{p^2 e^2 \sin^2\Theta}{(1 + e\cos\Theta)^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{(1 + e\cos\Theta)^2} + \frac{2 p^2 e^2 \sin^2\Theta}{(1 + e\cos\Theta)^4} - \frac{p^2 e (\cos\Theta + e \sin^2\Theta + e)}{(1 + e\cos\Theta)^4}}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch eine kleine algebraische Rechnung umformen und geht schliesslich über in:

$$\varrho = \frac{p (1 + 2 e \cos\Theta + e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e\cos\Theta)^3}.$$

Figur 110.



Nun ist nach Früherem:

$$tg\,\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\Theta}} = \frac{1 + e\cos\Theta}{e \sin\Theta},$$

wobei μ den Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Tangente im Kurvenpunkt P vorstellt. Bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Normalen in P mit χ, so ist:

$$\chi = 90 - \mu, \quad tg\,\chi = \frac{e \sin\Theta}{1 + e\cos\Theta},$$

daher:

$$\sin\chi = \frac{e\sin\Theta}{\sqrt{1 + 2 e\cos\Theta + e^2}} \text{ und } \cos\chi = \frac{1 + e\cos\Theta}{\sqrt{1 + 2 e \cos\Theta + e^2}}.$$

Ist ν der Winkel der Normalen PN mit der Polarachse OT, so folgt:

$$\nu = \Theta - \chi;$$

also:

$$\sin\nu = \sin(\Theta - \chi) = \sin\Theta\cos\chi - \cos\Theta\sin\chi$$
$$= \frac{\sin\Theta\cdot(1 + e\cos\Theta) - \cos\Theta\cdot e\sin\Theta}{\sqrt{1 + 2 e\cos\Theta + e^2}} = \frac{\sin\Theta}{\sqrt{1 + 2 e\cos\Theta + e^2}}.$$

Aus dem Dreieck FPN leiten wir nach dem Sinussatz ab:

$$n : r = \sin\Theta : \sin\nu,$$

daher ist:

$$n = \frac{r \sin\Theta}{\sin\nu} = \frac{r \sin\Theta \cdot \sqrt{1 + 2e\cos\Theta + e^2}}{\sin\Theta},$$

mithin ist die Normale: $n = r\sqrt{1 + 2e\cos\Theta + e^2}$ und

$$\frac{n}{\cos^2\chi} = \frac{p\sqrt{1+2e\cos\Theta+e^2}}{1+e\cos\Theta} : \frac{(1+e\cos\Theta)^2}{1+2e\cos\Theta+e^2} = \frac{p(1+2e\cos\Theta+e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos\Theta)^3} = \varrho;$$

also ist: $\varrho = \frac{n}{\cos^2\chi}$.

Der Ausdruck $\frac{n}{\cos^2\chi}$ kann aber einfach konstruiert werden: Machen wir NG in $N \perp PN$, so ist:

$PG = \frac{n}{\cos\chi}$ und machen wir jetzt noch in G die Gerade $GM \perp PG$, so ist:

$$PM = \frac{PG}{\cos\chi} = \frac{n}{\cos^2\chi} = \varrho;$$

d. h. M ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Punktes P. Da diese Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für jeden beliebigen Kegelschnitt Geltung hat, so ist hiermit auch für die Richtigkeit der bei der Parabel (siehe Aufgabe 305, Fig. 105), Ellipse (siehe Aufgabe 303, Figur 96) und Hyperbel (siehe Aufgabe 307) angegebenen Konstruktionen der Beweis erbracht.

Erkl. 96. Es ist:

$$\frac{dr}{d\Theta} = \frac{p(-1)(-e\sin\Theta)}{(1+e\cos\Theta)^2} = \frac{pe\sin\Theta}{(1+e\cos\Theta)^2},$$

$$\frac{d^2r}{d\Theta^2} = pe\cdot\frac{(1+e\cos\Theta)^2\cos\Theta - \sin\Theta\cdot 2(1+e\cos\Theta)(-e\sin\Theta)}{(1+e\cos\Theta)^4}$$

$$= pe\cdot\frac{(1+e\cos\Theta)\cos\Theta + 2e\sin^2\Theta}{(1+e\cos\Theta)^3}$$

$$= \frac{pe}{(1+e\cos\Theta)^3}(\cos\Theta + e\cos^2\Theta + 2e\sin^2\Theta)$$

$$= \frac{pe(\cos\Theta + e\sin^2\Theta + e)}{(1+e\cos\Theta)^3},$$

$$\varrho = \frac{\left(\frac{p^2}{N^2} + \frac{p^2e^2\sin^2\Theta}{N^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{N^2} + \frac{2p^2e^2\sin^2\Theta}{N^4} - \frac{p^2e^2(\cos\Theta + e\sin^2\Theta + e)}{N^4}},$$

wobei $N = 1 + e\cos\Theta$ gesetzt ist; daraus folgt:

$$\varrho = \frac{\left(\frac{p^2}{N^2} + \frac{p^2e^2\sin^2\Theta}{N^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{N^2} + \frac{2p^2e^2\sin^2\Theta - p^2e\cos\Theta - p^2e^2\sin^2\Theta - p^2e^2}{N^4}}$$

$$= \frac{\left(\frac{p^2}{N^2} + \frac{p^2e^2\sin^2\Theta}{N^4}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot N^4}{p^2(1+e\cos\Theta)^2 + p^2e^2\sin^2\Theta - p^2e\cos\Theta - p^2e^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{p^2}{N^2} + \frac{p^2e^2\sin^2\Theta}{N^4}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot N^4}{p^2 + 2p^2e\cos\Theta - p^2e\cos\Theta} = \frac{\left(\frac{p^2}{N^2} + \frac{p^2e^2\sin^2\Theta}{N^4}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot N^4}{p^2(1+e\cos\Theta)}$$

$$= \frac{p\left[(1+e\cos\Theta)^2 + e^2\sin^2\Theta\right]^{\frac{3}{2}}}{N^3} = \frac{p(1+2e\cos\Theta+e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos\Theta)^3}.$$

Uebungsbeispiele.

	Abscisse ξ des Krümmungsmittelpunktes	Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes	Krümmungshalbmesser ϱ
Aufgabe 317.			
$y = x^2$	$\xi = -4x^3$	$\eta = 3x^2 + \frac{1}{2}$	$\varrho = \frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{2}$
$x = 0, \quad y = 0$	$= 0$	$= \frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}$
$x = 2, \quad y = 4$	$= -32$	$= 12\frac{1}{2}$	$= \frac{17}{2}\sqrt{17} = 35{,}02$
(siehe Figur 28 und Aufgabe 112).			
Aufgabe 318.			
$y = x^2 - 6x + 10$	$\xi = 3 - 4(x-3)^3$	$\eta = 3x^2 - 18x + 28\frac{1}{2}$	$\varrho = \frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{2}$
$x = 1, \quad y = 5$	$= 35$	$= 13\frac{1}{2}$	$= \frac{17}{2}\sqrt{17} = 35{,}02$
$x = 3, \quad y = 1$	$= 3$	$= 1\frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}$
(siehe Figur 56 und Aufgabe 113).			
Aufgabe 319.			
$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ (siehe Aufgabe 114 und 189).	$\xi = 2 =$ konstant	$\eta = 3 =$ konstant	$\varrho = 2 =$ konstant
Aufgabe 320.			
$(x-3)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$ (siehe Figur 29 und Aufgabe 73).	$\xi = 3 =$ konstant	$\eta = 1 =$ konstant	$\varrho = 2 =$ konstant

	Abscisse ξ des Krümmungsmittelpunktes	Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes	Krümmungshalbmesser ϱ
Aufgabe 321. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ $x = 2{,}87, \quad y = -0{,}59$ (siehe Figur 32 und Aufgabe 74).	$\eta = \frac{7x^3}{81}$ $= 2{,}29$	$\eta = -\frac{7y^3}{16}$ $= 0{,}09$	$\varrho = \frac{(16x^2 + 81y^2)^{\frac{3}{2}}}{16 \cdot 81}$ $= 1{,}56$
Aufgabe 322. $4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 = 0$ $x = 1, \quad y = 3$ (siehe Aufgabe 75).	$\eta = \frac{7(x-4)^3}{81}$ $= 2\frac{1}{3}$	$\eta = -\frac{7(y-3)^3}{16}$ $= 0$	$\varrho = \frac{[16(x-4)^2 + 81(y-3)^2]^{\frac{3}{2}}}{16 \cdot 81}$ $\varrho = 1\frac{1}{3}$
Aufgabe 323. $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 288 = 0$ $x = 0{,}99, \quad y = 3{,}54$ (siehe Figur 57 und Aufgabe 191).	$\frac{dy}{dx} = -\frac{25x - 7y}{-7x + 25y}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{115200(x^2+y^2) - 64512xy}{(-14x + 50y)^3}$ $\xi = 0{,}99$	$\eta = -1{,}68$	$\varrho = 5{,}22$
Aufgabe 324. $xy = 1$ $x = \frac{1}{2}, \quad y = 2$ (siehe Figur 46 und Aufgabe 119).	$\xi = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}x^{-3}$ $= 4\frac{3}{4}$	$\eta = \frac{3}{2x} + \frac{x^3}{2}$ $= 3\frac{1}{16}$	$\varrho = \frac{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}}{2x^3}$ $= \frac{17}{16}\sqrt{17} = 4{,}12$
Aufgabe 325. $y = x^3$ $x = 0, \quad y = 0$ $x = 1, \quad y = 1$ (siehe Figur 66 und Aufgabe 120).	$\xi = \frac{x - 9x^5}{2}$ $= 0$ $= -8{,}5$	$\eta = \frac{1 + 15x^4}{6x}$ $= \infty$ $= 2\frac{2}{3}$	$\varrho = \frac{(1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}}{6x}$ $= \infty$ $= 5{,}27$

	Abscisse ξ des Krümmungsmittelpunktes	Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes	Krümmungshalbmesser ϱ
Aufgabe 326. $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $x = 1, \quad y = 0$ (siehe Figur 65 und Aufgabe 220).	$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$ $\xi = 2\frac{2}{3}$	$\eta = -1\frac{2}{3}$	$\varrho = 1{,}86$
Aufgabe 327. $x^2 y = 1$ $x = 1, \quad y = 1$ (siehe Aufgabe 80 und Figur 49).	$\xi = \frac{4(x^6+1)}{3x^5}$ $= 2\frac{2}{3}$	$\eta = \frac{10 + x^6}{6x^2}$ $= 1\frac{5}{6}$	$\varrho = \frac{(x^6+4)^{\frac{3}{2}}}{6x^5}$ $= \frac{5\sqrt{5}}{6} = 1{,}86$
Aufgabe 328. $y^2 = x^3$ $x = 0, \quad y = 0$ $x = 1, \quad y = 1$ (siehe Aufgabe 81 und Figur 30).	$\xi = -\left(x + \frac{9y}{2x}\right)$ $= 0$ $= -5\frac{1}{2}$	$\eta = 4y + \frac{3x^2}{4y}$ $= 4y + 2t_y$ wobei t_y die Subnormale bezüglich der Ordinatenachse; daraus Konstruktion von M $= 0$ $= 5\frac{1}{3}$	$\varrho = \frac{(4x^2+9y^2)^{\frac{3}{2}}}{6xy}$ $= 0$ $= 7{,}8$
Aufgabe 329. $y = x^4$ $x = 0, \quad y = 0$ $x = 1, \quad y = 1$ (siehe Figur 67 und Aufgabe 223).	$\xi = \frac{2x(1-8x^6)}{3}$ $= 0$ $= -4\frac{2}{3}$	$\eta = \frac{1 + 28x^6}{12x^2}$ $= \infty$ $= 2\frac{5}{12}$	$\varrho = \frac{(1+16x^6)^{\frac{3}{2}}}{12x^2}$ $= \infty$ $= \frac{17}{12}\sqrt{17}$

	Abscisse ξ des Krümmungsmittelpunktes	Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes	Krümmungshalbmesser ϱ
Aufgabe 330. $y^3 = y^4$ $x = 0,\ y = 0$ (siehe Figur 86 und Aufgabe 261).	$\xi = -2x - \frac{16y^2}{3x}$ $= 0$	$\eta = 5y + \frac{9x^2}{4y}$ $= 5y + 3t_y$ $= 0$	$\varrho = \frac{(9x^2 + 16y^2)^{\frac{3}{2}}}{12xy}$ $= 0$
Aufgabe 331. $y^2 = x^5$	$\xi = \frac{x}{6}(2 - 25x^3)$	$\eta = \frac{4(1 + 10x^3)}{15x^{\frac{1}{2}}}$	$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{25}{4}x^3\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}}$
Aufgabe 332. $y^3 = x^5$ $x = 0,\ y = 0$ (siehe Figur 69 und Aufgabe 226).	$\xi = -\frac{x}{2}\left(1 + \frac{25}{3}x^{\frac{1}{3}}\right)$ $= 0$	$\eta = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{10}(35x^{\frac{4}{3}} + 9)$ $= 0$	$\varrho = \frac{(9x^2 + 25y^2)^{\frac{3}{2}}}{30xy}$ $= 0$
Aufgabe 333. $x^3 + y^3 = c^3$	$\xi = x - \frac{x}{2y} \cdot \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3}$	$\eta = y - \frac{y}{2x} \cdot \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3}$	$\varrho = \frac{(x^4 + y^4)^{\frac{3}{2}}}{2c^3xy}$
Aufgabe 334. $x^5 + y^5 = c^5$	$\xi = x - \frac{x}{4y^3} \cdot \frac{x^8 + y^8}{x^5 + y^5}$	$\eta = y - \frac{y}{4x^3} \cdot \frac{x^8 + y^8}{x^5 + y^5}$	$\varrho = \frac{(x^8 + y^8)^{\frac{3}{2}}}{4c^5x^3y^3}$
Aufgabe 335. $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$	$\xi = x - \frac{a^4y^6 + b^4x^6}{3b^2x^5y^2}$	$\eta = y + \frac{a^4y^6 + b^4x^6}{3a^2x^2y^5}$	$\varrho = \frac{[(a^2 - x^2)^3 + a^4b^2]^3}{9a^4b^2x^2(a^2 - x^2)^4}$

Aufgabe 336.

$$x^3 + xy^2 - y^2 = 0.$$

Auflösung.

$$\varrho = \frac{(4x^6 + 9y^4y^2 + 6x^2y^4 + y^6)^{\frac{3}{2}}}{6x^3y(x^2+y^2)^2}$$

Aufgabe 337.

$$x^5 + xy^4 - y^4 = 0.$$

Auflösung.

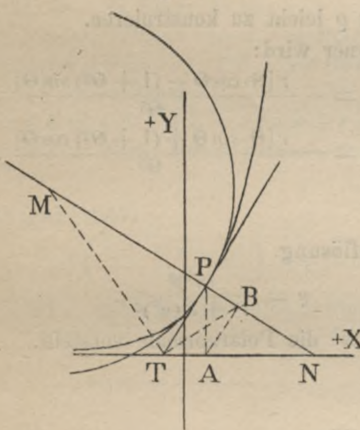
$$\varrho = \frac{(16x^{10} + 25x^8y^2 + 10x^4y^6 + y^{10})^{\frac{3}{2}}}{20x^5y(x^4+y^4)^2}$$

Aufgabe 338.

$$y = m e^{\frac{x}{m}}$$

Exponentialkurve; siehe Aufgabe 130 und Figur 45).

Figur 111.



Auflösung.

$$\varrho = \frac{(m^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{my},$$

$$\xi = x - m(e^{\frac{2x}{m}} + 1),$$

$$\eta = \frac{m(2e^{\frac{2x}{m}} + 1)}{e^{\frac{x}{m}}}.$$

Konstruktion: $AB \perp PN$ und $TM \perp TB$, denn:

$$AT = m \text{ (siehe Aufgabe 130)},$$
$$PT = \sqrt{m^2+y^2};$$

ferner:

$$PB : AP = AT : TP,$$

daher:

$$PB = \frac{AP \cdot AT}{TB} = \frac{my}{\sqrt{m^2+y^2}}$$

und

$$MP : TP = TP : PB,$$

also:

$$MP = \frac{TP^2}{PB} = \frac{(m^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{my} = \varrho \text{ (siehe Fig. 111).}$$

Aufgabe 339.

$$y^4 - 2by^3 + (x^2+b^2-a^2)y^2 - 2bx^2y + b^2x^2 = 0$$

oder:

$$r = a + \frac{b}{\sin\Theta}$$

(Conchoide; siehe Aufgabe 266 u. Fig. 45).

Auflösung.

$$\varrho = \frac{a[(y-b)^4 + 2b(y-b)^3 + a^2b^2]^{\frac{3}{2}}}{(y-b)^3[2a^2b - (y-b)^3 - 3b(y-b)^2]}$$

oder:

$$\varrho = \frac{(b^2 + 2ab\sin^3\Theta + a^2\sin^4\Theta)^{\frac{3}{2}}}{(a^2\sin^3\Theta + 3ab\sin^2\Theta - 2ab)\sin^3\Theta}.$$

ξ und η werden sehr komplizierte Ausdrücke.

Aufgabe 340.

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = 0$$

oder:

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\Theta$$

(Lemniskate; siehe Aufgabe 192 und Figur 58).

Auflösung.

$$\varrho = \frac{2c^2}{3\sqrt{x^2+y^2}} \text{ oder } \varrho = \frac{2c^2}{3r} = \frac{a^2}{3r}$$

(daraus ϱ konstruierbar),

$$\xi = \frac{x(a^2+x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)} = \frac{2a\cos^3\Theta}{3\sqrt{\cos 2\Theta}},$$

$$\eta = -\frac{y(a^2-x^2-y^2)}{3(x^2+y^2)} = -\frac{2a\sin^3\Theta}{3\sqrt{\cos 2\Theta}},$$

wobei $a = c\sqrt{2}$.

Aufgabe 341.

$$r\Theta = c$$

(hyperbolische Spirale; siehe Aufgabe 141 und Figur 43).

Auflösung.

$$\varrho = \frac{r(1+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}}{\Theta^3} = r\cdot\left(\frac{r^2+c^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{r}{\cos^3 OEP},$$

daraus ϱ leicht zu konstruieren.

Ferner wird:

$$\xi = -\frac{r[\Theta\cdot\cos\Theta - (1+\Theta^2)\sin\Theta]}{\Theta^3},$$

$$\eta = -\frac{r[\Theta\cdot\sin\Theta + (1+\Theta^2)\cos\Theta]}{\Theta^3}.$$

Aufgabe 342.

$$r^2 = c\Theta$$

(parabolische Spirale; siehe Aufgabe 142).

Auflösung.

$$\varrho = \frac{(n^*)^3}{r^2+3(n^*)^2},$$

wobei n^* die Polarnormale vorstellt.

Aufgabe 343.

$$r = \sqrt{\frac{c}{\Theta}}$$

(Lituus; siehe Aufgabe 143 und Fig. 44).

Auflösung.

$$\varrho = \frac{4c^2\cdot(n^*)^3}{r^2[4c^2-(n^*)^4]},$$

wobei n^* die Polarnormale vorstellt.

Aufgabe 344.

$$x = 2r\cos t - r\cos 2t,$$
$$y = 2r\sin t - r\sin 2t$$

(Cardioide; siehe Aufgabe 11 und Figur 16).

Auflösung.

$$\varrho = \frac{8}{3} r \sin\frac{t}{2},$$

$$\xi = \frac{1}{3} r(2\cos t + \cos 2t),$$

$$\eta = \frac{1}{3} r(2\sin t + \sin 2t).$$

Aufgabe 345.

$$x = r\cos^3\frac{t}{4},\quad y = r\sin^3\frac{t}{4}$$

(Astroide; siehe Aufgabe 12 und Figur 19).

Auflösung.

$$\varrho = -3r\sin\frac{t}{4}\cdot\cos\frac{t}{4} = -\frac{3}{2} r\sin\frac{t}{2},$$

Erkl. 97. Setzen wir in der Gleichung der Hypocykloide:

$$a = \frac{r}{4},$$

so folgt:

$$x = \frac{3}{4} r \cos\frac{t}{4} + \frac{r}{4}\cos 3\frac{t}{4} = \frac{r}{4}\left(\cos^3\frac{t}{4} + 3\cdot\cos\frac{t}{4}\right) = \frac{r}{4}\, 4\cdot\cos^3\frac{t}{4} = r\cos^3\frac{t}{4},$$

$$y = \frac{3}{4} r\sin\frac{t}{4} - \frac{r}{4}\sin\frac{3}{4}t = \frac{r}{4}\left(-\sin^3\frac{t}{4} + 3\sin\frac{t}{4}\right) = \frac{r}{4}\cdot 4\sin^3\frac{t}{4} = r\sin^3\frac{t}{4},$$

denn:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$
$$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha.$$

$$\xi = r\cos\frac{t}{4}\left(\cos^2\frac{t}{4} + 3\sin^2\frac{t}{4}\right),$$

$$\eta = r\sin\frac{t}{4}\left(\sin^2\frac{t}{4} + 3\cos^2\frac{t}{4}\right).$$

Aufgabe 346.

$$x = r\cos w + rw\sin w,$$
$$y = r\sin w - rw\cos w$$

(Kreisevolvente; siehe Aufgabe 16 und Figur 25).

Erkl. 98. In Figur 25 ist:

$OF = r\cos w$, $FQ = r\sin w$, $\sphericalangle PQF = w$,
$PQ = arcus\, AQ = rw$, $FE = rw\sin w$,
$QG = rw\cos w$; daher:

$$x = OE = OF + FE = r\cos w + rw\sin w,$$
$$y = EP = FQ - QG = r\sin w - rw\cos w.$$

Auflösung.

$$\varrho = rw,$$

d. h.:

$\varrho = PQ$ oder Q ist der Krümmungsmittelpunkt,

$\xi = r\cos w$ und $\eta = r\sin w$ sind die Koordinaten vom Krümmungsmittelpunkt und vom Berührungspunkt Q der Tangente PQ.

Aufgabe 347.

$$x = c\log\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{c^2 - y^2}$$

(Traktrix; siehe Aufgabe 138 u. Figur 41).

Auflösung.

$$\varrho = c\cdot\frac{\sqrt{c^2 - y^2}}{y}$$

Da:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad PT = a$$

ist, so findet man den Krümmungsmittelpunkt M als Schnitt der Senkrechten TM mit der Normalen in P (siehe Figur 41).

Ferner wird:

$$\xi = c\log\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right),$$

$$\eta = \frac{c^2}{y}.$$

Aufgabe 348.

$$r = a\,(2\cos\Theta + 1).$$

Auflösung.

$$\varrho = a\cdot\frac{(5 + 4\cos\Theta)^{\frac{3}{2}}}{3\,(3 + 2\cos\Theta)}.$$

Aufgabe 349.

$$x = a\cos w, \quad y = a\cos w\cdot\sin w$$

oder:

$$a^2 y^2 = x^2\,(a^2 - x^2).$$

Auflösung.

$$\varrho = \frac{\sqrt{(2a^4 - 5a^2x^2 + 4x^4)^3}}{a^2 x\,(3a^2 - 2x^2)}.$$

Wie kann die Kurve mittels eines Kreises vom Halbmesser a konstruiert werden, welchen Wert erhält ϱ für $x = 0$ und $x = a$ und wo wird ϱ ein Maximum?

Aufgabe 350.

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = q^4 - c^4$$

(Cassinische Kurve, siehe Figur 112).

Auflösung. Es wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(c^2 - x^2 - y^2)}{y(c^2 + x^2 + y^2)} = \frac{x(c^2 - r^2)}{y(c^2 + r^2)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q^4}{y^3} \cdot \frac{q^4 - c^4 + 3c^2(x^2 - y^2)}{(c^2 + x^2 + y^2)^3},$$

$$\varrho = -\frac{q^2 \sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{q^4 - c^4 + 3c^2(x^2 - y^2)}$$

oder:

$$\varrho = -\frac{2q^2 r^3}{c^4 - q^4 + 3r^4}.$$

Erkl. 99. Es seien zwei feste Punkte F_1 und F_2 gegeben in der Entfernung $F_1F_2 = 2c$; wir suchen den geometrischen Ort des Punktes P, für welchen das Rechteck aus $F_1P = r_1$ und $F_2P = r_2$ eine konstante Fläche $= q^2$ besitzt, also $r_1 r_2 = q^2$. Nehmen wir den Mittelpunkt O von F_1F_2 zum Anfang rechtwinkliger Koordinaten und OF_2 zur positiven Abscissenachse, so erhalten wir:

$$\sqrt{(c - x)^2 + y^2} \smile q^2,$$

woraus durch Quadrieren und Ausmultiplizieren die obige Gleichung folgt.

Für $x = r\cos\Theta$ und $y = r\sin\Theta$ geht sie über in die Polargleichung:

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\Theta = q^4 - c^4.$$

Aus der obigen Gleichung in x und y finden wir leicht:

$$y^2 = -(c^2 + x^2) + \sqrt{q^4 + 4c^2x^2}.$$

Wählen wir, um die Schnittpunkte auf der Ordinatenachse zu erhalten, $x = 0$, so folgt das zugehörige y aus der Gleichung:

$$y^2 = -c^2 + q^2;$$

dasselbe erhält demnach zwei reelle Werte:

$$y_0 = +\sqrt{q^2 - c^2} \text{ und } y_{00} = -\sqrt{q^2 - c^2},$$

wenn $q > c$ ist. Für $q > c$ hat die Kurve eine Ovalform. Wenn $q = c$ ist, so wird $y_0 = y_{00} = 0$; die Kurve ist in eine Lemniskate übergegangen (siehe Figur 24). Für $q < c$ werden y_0 und y_{00} imaginär, die Ordinatenachse schneidet die Kurve nicht und letztere besteht aus zwei getrennten, aber geschlossenen ovalen Stücken (siehe Figur 112). Nimmt man q etwas grösser als c, z. B. $\frac{9}{8}c$, so erscheint die Kurve in der Richtung der Ordinatenachse eingedrückt; für weiter wachsende q (z. B. für $q = 2c$) nähert sich ihre Form der Ellipse und zuletzt erscheint sie kreisförmig.

Diese letzteren Formen haben den Astronomen Cassini (1625 bis 1712) veranlasst, in ihnen die Form der Planetenbahnen zu suchen. Nach ihm sind die Kurven genannt. Sie treten auch in der Physik auf bei Plättchen optisch zweiachsiger Kristalle im polarisierten Licht. (Siehe Kleyer, Lehrbuch der Physik).

Erkl. 100. Die Konstruktion einer Cassinischen Kurve aus $F_1F_2 = 2c$ und der Strecke q ist die nämliche wie die in Erkl. 31 für die Lemniskate angegebene, nur mit dem Unterschied, dass man in Figur 24 das Lot $QR = q$ zu machen hat. Im rechtwinkligen Dreieck F_1RS ist dann:

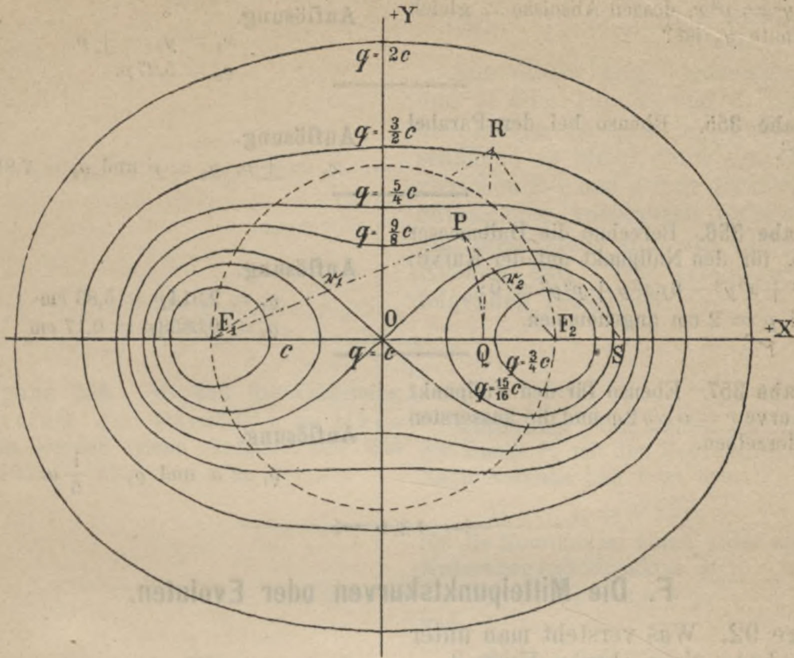
$$F_1Q = r_1 \text{ und } RS = r_2;$$

die Bogen aus F_1 mit r_1 und aus F_2 mit r_2 und umgekehrt liefern dann vier Punkte; ein weiterer Punkt Q_1 gibt dann vier neue u. s. f.

Zur Bestimmung der Schnittpunkte auf den Achsen dient folgende Tabelle:

q	x, wenn $y = 0$	y, wenn $x = 0$
$\frac{3}{4}c$	$\pm 1{,}25c$, $\pm 0{,}6614c$	
$\frac{15}{16}c$	$\pm 1{,}37c$, $\pm 0{,}348c$	
c	0, $\pm 0{,}1414c$	
$\frac{9}{8}c$	$\pm 1{,}508c$	$\pm 0{,}517c$
$\frac{5}{4}c$	$\pm 1{,}601c$	$\pm 0{,}75c$
$\frac{3}{2}c$	$\pm 1{,}802c$	$\pm 1{,}18c$
$2c$	$\pm 2{,}236c$	$\pm 1{,}732c$

Figur 112.



Erkl. 101. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ erhält den Wert 0 für $x^2 + y^2 = c^2$. Daraus schliessen wir, dass die höchsten und tiefsten Punkte für alle zum gleichen Wert von c gehörigen Cassinischen Kurven auf dem Kreis liegen, der aus O mit dem Halbmesser c beschrieben wird.

Aufgabe 351. Bei wie grosser Abscisse streicht eine mit $2p = 25$ mm gezeichnete Parabel $y^2 = 2px$ so schwach gewölbt hin, wie der Wasserspiegel eines Sees in Deutschland, wo der Krümmungshalbmesser des Erdmeridians 6370 km beträgt?

Auflösung. Bei der Abscisse $x = 3987{,}4$ m.

Aufgabe 352. Ebenso für die gleichseitige Hyperbel mit dem gleichen Parameter $2p = 25$ mm.

Auflösung. Bei der Abscisse $x = 7{,}06$ m.

Aufgabe 353. An welcher Stelle ist der Krümmungshalbmesser der kubischen Parabel $y^3 = p^2 x$ am kleinsten?

Auflösung. Beim Punkt P_1 mit den Koordinaten:

$$x_1 = 0{,}057556\,p,$$
$$y_1 = 0{,}3861\,p;$$

dabei wird:

$$\varrho_1 = 0{,}5647\,p.$$

Aufgabe 354. Wie gross ist der Krümmungshalbmesser in demjenigen Punkt der Parabel $y^3 = p^2 x$, dessen Abscisse x_2 gleich der Ordinate y_2 ist?

Auflösung.

$$x_2 = y_2 = \pm p,$$
$$\varrho_2 = 5{,}27 p.$$

Aufgabe 355. Ebenso bei der Parabel $y^3 = p x^2$.

Auflösung.

$$x_2 = \pm p,\quad y_2 = p \text{ und } \varrho_2 = 7{,}812 p.$$

Aufgabe 356. Berechne die Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 für den Nullpunkt auf der Kurve:

$$x^4 + x^2 y^2 - 6 p x^2 y + p^2 y^2 = 0;$$

dabei sei $p = 2$ cm angenommen.

Auflösung.

$$\varrho_1 = 2{,}914 p = 5{,}83 \text{ cm}$$
$$\varrho_2 = 0{,}0858 p = 0{,}17 \text{ cm}$$

Aufgabe 357. Ebenso für den Nullpunkt auf der Kurve $r = a \sin 2\varphi$ und die äussersten Punkte derselben.

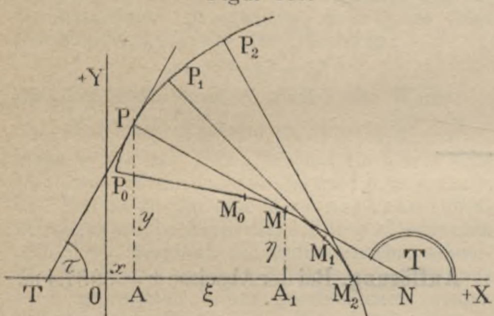
Auflösung.

$$\varrho_1 = a \text{ und } \varrho_2 = \frac{1}{5} a.$$

F. Die Mittelpunktskurven oder Evoluten.

Frage 92. Was versteht man unter der Evolute einer ebenen Kurve?

Figur 113.



Antwort. Wenn man zu sämtlichen Punkten P, P_1, P_2, P_3 u. s. w. einer Kurve die Krümmungskreise konstruiert denkt, so wird durch die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte M, M_1, M_2, M_3 u. s. w. eine neue Kurve bestimmt, welche die Evolute der ersten Kurve genannt wird. Durchläuft also ein Punkt die ursprüngliche Kurve $P_0 P_1 P_2$, so bewegt sich sein Krümmungsmittelpunkt auf der Evolute $M_0 M_1 M_2$ derselben (s. Fig. 113).

Frage 93. Wie erhält man die Gleichung der Evolute einer Kurve, deren Gleichung in der Form $y = f(x)$ oder in der Form $F(x, y) = 0$ gegeben ist?

Antwort. Sind x_0, y_0 die Koordinaten eines Punktes P_0 auf der Kurve, so ist zunächst:

$$1) \quad \ldots \quad y_0 = f(x_0)$$

oder:

$$1\text{a}) \quad \ldots \quad F(x_0, y_0) = 0.$$

Die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes M_0 berechnen sich nach Frage 87 aus den beiden Gleichungen:

$$2) \ldots \xi = x_0 - \frac{f'(x_0)\left\{1+[f'(x_0)]^2\right\}}{f''(x_0)},$$

$$3) \ldots \eta = y_0 + \frac{1+[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}.$$

Aus diesen drei Gleichungen 1), 2) und 3) oder 1a), 2) und 3) lassen sich die beiden Grössen x_0 und y_0 wegschaffen; es bleibt dann eine Gleichung zwischen ξ, η und den in der Gleichung 1) enthaltenen konstanten Grössen übrig, und diese stellt dann die Gleichung der Evolute dar. Wir erläutern dies an folgenden Beispielen:

Aufgabe 358. Es soll die Gleichung der Evolute der Parabel $y = \sqrt{2px}$ gefunden werden (siehe Aufgabe 305 und Figur 105).

Auflösung. Wir wählen auf ihr beliebig den Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0 und y_0. Nach Aufgabe 305 folgt aus:

$$1) \ldots y_0 = \sqrt{2px_0}$$

für die Koordinaten ξ und η des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes M_0:

$$2) \ldots \xi = 3x_0 + p$$

und

$$3) \ldots \eta = -\frac{y_0^3}{p^2}.$$

Daraus leiten wir ab:

$$x_0 = \frac{\xi - p}{3} \text{ und } y_0 = -p^{\frac{2}{3}} \cdot \eta^{\frac{1}{3}};$$

setzen wir diese Werte in die Gleichung 1) ein, so folgt:

$$-p^{\frac{2}{3}} \cdot \eta^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2p(\xi - p)}{3}},$$

woraus sich:

$$p^{\frac{4}{3}} \eta^{\frac{2}{3}} = \frac{2p(\xi - p)}{3}$$

und

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3$$

ergibt. Dies ist die Beziehung zwischen den Koordinaten ξ und η eines Punktes der Evolute und dem Parameter der Parabel oder die Gleichung der Evolute der gegebenen Kurve.

Aus $\eta = \pm\sqrt{\frac{8(\xi - p)^3}{27p}}$ ist ersichtlich, dass η nur reelle Werte annimmt, wenn $\xi - p$ positiv, also $\xi = p$ oder $\xi > p$ ist. Die Evolute beginnt daher in einem Punkt M der Abscissenachse, welcher vom Scheitel A die Entfernung p hat, und erstreckt sich dann in zwei zur Abscissenachse symmetrischen Zweigen MM' und MM_0 ins Unendliche; sie ist eine Neilsche Parabel (siehe Aufgabe 27 und Figur 30).

Aufgabe 359. Es soll die Gleichung der Evolute der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

gefunden werden (siehe Figur 106).

Auflösung. Auf der Ellipse wählen wir beliebig den Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0 und y_0; zwischen diesen besteht dann die Gleichung:

$$1)\ \ldots\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0.$$

Die Koordinaten ξ, η des zu P gehörigen Krümmungsmittelpunktes M_0 sind nach Aufgabe 306:

$$2)\ \ldots\ \xi=\frac{x_0^3(a^2-b^2)}{a^4}$$

und

$$3)\ \ldots\ \eta=-\frac{y_0^3(a^2-b^2)}{b^4}.$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$a^2-b^2=e^2$$

und erhalten dann aus Gleichung 2):

$$\frac{x_0}{a}=\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und aus Gleichung 3):

$$\frac{y_0}{b}=\left(-\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Setzen wir nun diese Werte in die Gleichung 1) ein, so erhalten wir als Gleichung der Evoluten:

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve $M_1M_3M_2M_4$ hat die beiden Achsen der Ellipse zu Symmetrieachsen, was vorauszusehen war, da ja auch die Ellipse selbst diese Symetrieen zeigt. Für $\eta=0$ wird:

$$\xi=\pm\frac{e^2}{a};$$

dies gibt die beiden auf der Abscissenachse gelegenen Punkte M_1 und M_2 auf der Abscissenachse. Ebenso wird für $\xi=0$:

$$\eta=\pm\frac{e^2}{b};$$

dies sind die Ordinaten der beiden Punkte M_3 und M_4 auf der Y-Achse.

Zur Abkürzung der Rechnung setzen wir

$$\frac{e^2}{a}=A \text{ und } \frac{e^2}{b}=B;$$

Erkl. 102. Die Punkte M_1 und M_2, bezw. M_3 und M_4 lassen sich leicht konstruieren. Die Tangenten in den vier Scheiteln der Ellipsen bilden ein Rechteck und die Lote aus den Ecken dieses Rechtecks auf seine Diagonalen schneiden die Achsen in den gesuchten Spitzen der Evolute der Ellipse.

dadurch erhält die Evolute die Gleichung:

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}-1=0.$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergibt:

$$4) \ldots \left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{d\xi}{A}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{d\eta}{B}=0;$$

daraus folgt:

$$5) \ldots \frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{A}}{\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{B}}=-\left(\frac{A\eta}{B\xi}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{B}{A}.$$

Die nochmalige Differentiation von Gl. 4) gibt:

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(\frac{d\xi}{A}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(\frac{d\eta}{B}\right)^2+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{d^2\eta}{B}=0.$$

Hieraus ziehen wir:

$$6) \ldots \frac{d^2\eta}{d\xi^2}=\frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{A^2}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{B^2}\cdot\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{3\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{B}}.$$

Da der Zähler des letzten Bruches stets positiv ist, so hat $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ das Vorzeichen des Nenners, also das Vorzeichen von η. Daher wendet die Kurve der Abscissenachse überall die konvexe Seite zu. Aus der Gleichung 5) folgt, dass die erste Ableitung $\frac{d\eta}{d\xi}$ verschwindet für $\eta=0$. Wir schliessen hieraus, dass die Tangenten in M_1 und M_2 mit der Abscissenachse zusammenfallen und M_1 u. M_2 zwei Spitzen sind. Da $\frac{d\eta}{d\xi}$ für $\xi=0$ unendlich gross wird, stehen die Tangenten in M_3 und M_4 auf der Abscissenachse senkrecht und fallen demnach mit der Ordinatenachse zusammen. Die Evolute hat daher auch in M_3 und M_4 zwei weitere Spitzen (siehe Figur 106).

Aufgabe 360. Es soll die Gleichung der Evolute der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

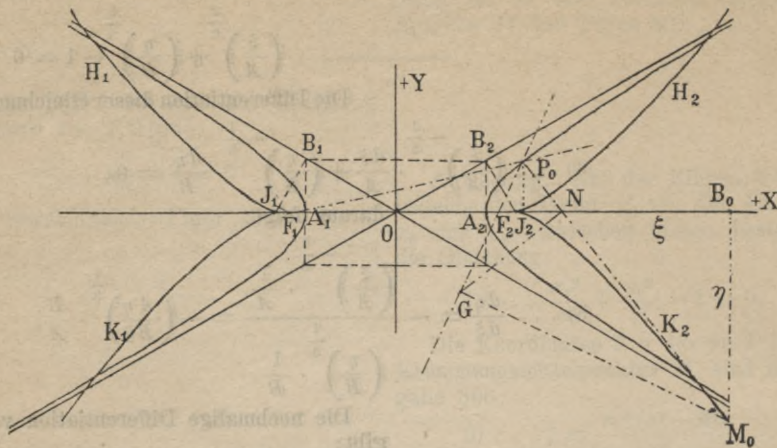
gefunden werden.

Auflösung. Da:

$$\xi=\frac{x_0^3(a^2+b^2)}{a^4} \text{ und } \eta=-\frac{y_0^3(a^2+b^2)}{b^4}$$

ist (siehe Aufgabe 307), so gibt eine der

Figur 114.



Erkl. 103. Die Punkte J_1 und J_2 lassen sich einfach konstruieren: Man errichtet im Scheitelpunkt A_2 das Lot, welches die Asymptote OB_2 in B_2 trifft. Das Lot in B_2 auf OB_2 schneidet dann die Achse im verlangten Punkt J_2. (Siehe Cranz, Analytische Geometrie).

obigen ganz ähnliche Rechnung für die Evolute die Gleichung:

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

dabei ist $e^2 = a^2 + b^2$ und $\frac{e^2}{a} = A$ und $\frac{e^2}{b} = B$ gesetzt worden.

Diese Kurve setzt sich aus zwei sich ins Unendliche erstreckenden Aesten $H_1 J_1 K_1$ und $H_2 J_2 K_2$ zusammen, welche in Bezug auf beide Achsen symmetrisch sind. Sie hat auf der Abscissenachse jenseits der Brennpunkte zwei Spitzen J_1 und J_2 und wendet dieser Achse überall die konvexe Seite zu (siehe Figur 114).

Frage 94. Gibt es noch weitere Beziehungen zwischen einer Kurve und ihrer Evolute?

Antwort. In Frage 88 ist der Satz bewiesen worden, dass der Krümmungsmittelpunkt, der in einer Kurve zu einem bestimmten Punkt gehört, die Grenzlage des Schnittpunktes der durch dessen Punkt gelegten Normalen mit einer unendlich benachbarten Normalen ist; da der Krümmungsmittelpunkt einen Punkt der Evolute der ursprünglichen Kurve darstellt, so tritt demnach ein Evolutenpunkt auf als die Grenzlage des Schnittpunktes einer Normalen mit einer zweiten unendlich nahen Normalen der Grundkurve. Diese enge Beziehung zwischen den Normalen der ursprünglichen Kurve und ihrer Evoluten tritt noch schärfer hervor durch den

Satz. Die Normalen einer Kurve berühren die Evolute derselben in den Krümmungsmittelpunkten.

Beweis. Wir denken uns, es sei die ursprüngliche Kurve durch die Gleichung $y = f(x)$ gegeben; dann sind die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes M vom Punkt P mit den Koordinaten x und y bekanntlich:

$$\xi = x - \frac{f'(x)\left\{1+[f'(x)]^2\right\}}{f''(x)} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{1+[f'(x)]^2}{f''(x)}.$$

Da y, $f'(x)$ und $f''(x)$ Funktionen von x sind, so sind auch ξ und η Funktionen von der Abscisse x des beliebig angenommenen Punktes P der Grundkurve; wir können also setzen:

$$\xi = \varphi(x) \quad \text{und} \quad \eta = \psi(x)$$

und zur Bildung der Differentialquotienten von diesen Funktionen bezüglich der unabhängigen Veränderlichen x schreiten. Hierbei erhalten wir:

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 - \frac{[f''(x)]\left\{f''(x) + 3[f'(x)]^2 f''(x)\right\} - f'(x)\left\{1+[f'(x)]^2\right\} f'''(x)}{[f''(x)]^2}$$

oder:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{-3[f''(x)]^2 \cdot [f'(x)]^2 + f'(x)\left\{1+[f'(x)]^2\right\} f'''(x)}{[f''(x)]^2}.$$

Ferner wird:

$$\frac{d\eta}{dx} = f'(x) + \frac{f''(x) \cdot 2f'(x) \cdot f''(x) - \left\{1+[f'(x)]^2\right\} \cdot f'''(x)}{[f''(x)]^2}$$

oder:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{3f'(x)[f''(x)]^2 - \left\{1+[f'(x)]^2\right\} f'''(x)}{[f''(x)]^2}.$$

Bilden wir jetzt:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{d\xi}{dx} : \frac{d\eta}{dx},$$

so folgt:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{1}{f'(x)}.$$

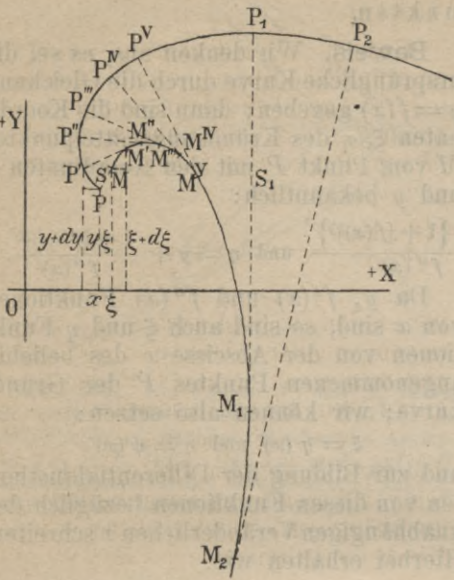
Bezeichnen wir in Figur 113 wie seither den Winkel, welchen die Tangente PT im Punkt $P(x, y)$ mit der positiven Abscissenachse bildet, mit τ, so ist:

$$y' = f'(x) = tg\,\tau.$$

Ist ferner T der Winkel der Tangente MN im Punkt M der Evolute mit der positiven Abscissenachse, so ist geradeso:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = tg\,T.$$

Figur 115.



Zwischen τ und T besteht hiernach die Beziehung, dass:

$$tg\,T = -\frac{1}{tg\,\tau}$$

ist, woraus wir weiter folgern, dass:

$$T = 90 + \tau$$

sein muss; d. h. die Evolutentangente MN in M und die Tangente PT im zugehörigen Punkt P der ursprünglichen Kurve bilden einen rechten Winkel miteinander. Die Gerade PM steht aber als Krümmungshalbmesser ebenfalls senkrecht auf der Tangente PT in P; sie muss daher mit der Evolutentangente MN in M zusammenfallen, weil es durch den Punkt M nur ein Lot auf die Tangente in P gibt.

Hiermit ist gezeigt, dass in der That die Normale im Punkt P die Evolute im Krümmungsmittelpunkt M berührt.

Wie die gleichlangen Sehnen eines Kreises einen konzentrischen Kreis einhüllen, so erscheint jetzt die Evolute als die von den Normalen der ursprünglichen Kurve eingehüllte Linie.

Hieran reihen wir den weiteren

Satz. Der Längenunterschied von zwei Krümmungshalbmessern PM und P_1M_1 ist gleich der Länge des Bogens MM_1 der Evolute zwischen den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten M und M_1 (siehe Figur 115).

Beweis. Zu dem Punkt P mit den Koordinaten x und y gehört der Evolutenpunkt M mit den Koordinaten:

$$\xi = \varphi(x) \text{ und } \eta = \psi(x),$$

sowie der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \pm \frac{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{f'(x)} = \chi(x).$$

Lassen wir x sich um die unendlich kleine Grösse dx ändern, so sind $x + dx$, $y + dy$ die Koordinaten des Kurvenpunktes P', der unendlich nahe an P liegt, und hierbei ist:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Zum Kurvenpunkt P' gehört der Evolutenpunkt M' mit den Koordinaten $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, wobei offenbar:

$$d\xi = \varphi'(x)\,dx \text{ und } d\eta = \psi'(x)\,dx$$

ist; ferner hat P' den Krümmungsradius

$\varrho + d\varrho$, wobei $d\varrho = d\chi(x)\,dx$ genommen werden muss. Zwischen M und M' liegt der unendlich kleine Bogen MM' der Evolute; heissen wir denselben $d\sigma$, so ist nach früheren Entwicklungen:

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}.$$

Um diesen zu berechnen, entnehmen wir dem Beweis des vorigen Satzes:

$$d\xi = \frac{-3[f'(x)]^2 \cdot [f''(x)]^2 + f'(x)\left\{1 + [f'(x)]^2\right\} f'''(x)}{[f''(x)]^2} \cdot dx$$

und

$$d\eta = \frac{3f'(x)[f''(x)]^2 - \left\{1 + [f'(x)]^2\right\} f'''(x)}{[f''(x)]^2} \cdot dy;$$

hiermit bilden wir:

$$\begin{aligned} d\xi^2 + d\eta^2 = &\Big\{9f'(x)^4 f''(x)^4 - 6f'(x)^3 f''(x)^2[1 + f'(x)^2] \cdot f'''(x) + f'(x)^2 \cdot [1 + f'(x)^2]^2 \cdot f'''(x)^2 \\ &+ 9f'(x)^2 \cdot f''(x)^2 - 6f'(x) f''(x)^2 [1 + f'(x)^2] f'''(x) \\ &+ [1 + f'(x)^2]^2 \cdot f'''(x)^2\Big\} \cdot \frac{dx^2}{f''(x)^4} \\ = &[1 + f'(x)^2]\Big\{9f'(x)^2 \cdot f''(x)^4 - 6f'(x) f''(x)^2 \cdot [1 + f(x)^2] \cdot f'''(x) \\ &+ [1 + f'(x)^2]^2 \cdot f'''(x)\Big\} \cdot \frac{dx^2}{f''(x)^4} \\ = &\frac{[1 + f'(x)^2]\left\{3f'(x) f''(x)^2 - [1 + f'(x)^2] \cdot f'''(x)\right\}^2}{f''(x)^4} \cdot dx^2; \end{aligned}$$

also folgt:

$$1) \ldots d\sigma = \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}\left\{3f'(x) f''(x)^2 - [1 + f'(x)^2] \cdot f'''(x)\right\}}{f''(x)^2} \cdot dx.$$

Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \pm \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

gibt durch Differentiation:

$$d\varrho = \pm \frac{\frac{3}{2}[1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} \cdot 2f'(x) \cdot f''(x) - [1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}} \cdot f'''(x)}{f''(x)^2} \cdot dx$$

oder:

$$2) \ldots d\varrho = \pm \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}\left\{3f'(x) f''(x)^2 - [1 + f'(x)^2 \cdot f'''(x)\right\}}{f''(x)^2} \cdot dx.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) schliessen wir, dass:

$$d\sigma = \pm d\varrho$$

ist; d. h. die unendlich kleine Grösse, um welche der Krümmungshalbmesser in P' grösser oder kleiner ist als jener im Punkt P, ist gleich der Länge des unendlich kleinen Bogens MM' der Evolute zwischen den Krümmungsmittelpunkten M und M'.

Gehen wir nun von der Annahme aus, dass die Krümmungshalbmesser auf dem endlichen Bogen PP_1 wachsen von $PM = \varrho$ in P bis zu $P_1 M_1 = \varrho_1$ in M_1, so können wir uns den zwischen M und M_1 gelegenen endlichen Bogen MM_1 der Evolute in unendlich viele, unendlich kleine Bogen $MM' = d\varrho'$, $M'M'' = d\sigma''$, $M''M''' = d\sigma'''$, $M'''M^{IV} = d\sigma^{IV}$ u. s. w. geteilt und die Tangenten $M'P' = \varrho'$, $M''P'' = \varrho''$, $M'''P''' = \varrho'''$ u. s. w. gezogen denken. Der vorige Satz gibt dann:

$$\varrho' = \varrho + d\sigma,$$

$$\varrho'' = \varrho' + d\sigma' = \varrho + d\sigma + d\sigma' = \varrho + \text{Bogen } MM',$$

$$\varrho''' = \varrho'' + d\sigma'' = \varrho + d\sigma + d\sigma' + d\sigma'' = \varrho + \text{Bogen } MM'',$$

$$\varrho^{IV} = \varrho''' + d\sigma''' = \varrho + d\sigma + d\sigma' + d\sigma'' + d\sigma''' = \varrho + \text{Bogen } MM'''$$

u. s. w.

Durch Fortsetzung dieser Schlussweise erhalten wir:

$$\varrho_1 = \varrho + (d\sigma + d\sigma' + d\sigma'' + \cdots) = \varrho + \text{Bogen } MM_1$$

oder:

$$\varrho_1 - \varrho = \text{Bogen } MM_1.$$

Frage 95. Welche Folgerung lässt sich aus den beiden letzten Sätzen ziehen?

Erkl. 104. In der Figur 25, Aufgabe 16 ist der Kreis $ABCD$ die Evolute, die Kurve $AB_1C_1D_1$ die Evolvente. In Figur 105, Aufgabe 305 ist die Parabel P_1OPP' die Evolvente; die Kurve M_0MM' die Evolute. In Figur 106, Aufgabe 306 ist die Ellipse ABA_1B_1 die Evolvente, die Kurve $M_1M_3M_2M_4$ die Evolute und in Figur 114, Aufgabe 360 ist die Hyperbel die Evolvente, die Kurve $H_1J_1K_1$ $H_2J_2K_2$ die Evolute.

Unter dem in nebenstehender Antwort entwickelten Gesichtspunkt hat Huyghens, der Erfinder der Evoluten, sie zuerst betrachtet und ihnen den Namen gegeben. An sie schlossen sich dann die Untersuchungen über Berührungen und Krümmung der Kurven von Leibniz und Newton an.

Antwort. Wir wollen die Vorstellung erwecken, dass ein vollkommen biegsamer, aber nicht dehnbarer Faden im Punkt P der ursprünglichen Kurve beginne und straff gespannt nach dem Krümmungsmittelpunkt M auf der Evolute gehe (siehe Figur 115); von da aus sei derselbe auf der Evolute $MM_1M_2\cdots$ aufgerollt; dann bildet das freie Ende PM des Fadens die Tangente im Punkt M der Evolute. Wenn wir jetzt den Faden sich auf der Evolute abwickeln lassen, während das freie Endstück gespannt bleibt, so hat, wenn die Abwicklung von M nach M' fortgeschritten ist, das Ende des Fadens den Punkt P' erreicht, denn es ist:

$$M'P' = MP + \text{Bogen } MM';$$

ist die Abwicklung in M'' angekommen, finden wir das Fadenende in P'', denn es ist:

$$M''P'' = MP + \text{Bogen } MM'M'' \text{ u. s. w.};$$

haben wir also die Abwicklung des Fadens auf der Evolute von M bis M_1 gehen lassen, so ist der Endpunkt P des Fadens auf der ursprünglichen Kurve von P nach P', P'' u. s. f. bis P_1 gegangen, weil

$$P_1M_1 = PM + \text{Bogen } MM_1;$$

d. h. der Endpunkt P des Fadens hat die Kurve PP_1 beschrieben.

Wir können dieses Resultat zusammenfassen in dem

Satz. Denkt man sich um eine Kurve $MM_1M_2\cdots$ einen vollkommen biegsamen, aber nicht dehnbaren Faden gelegt, dessen freies Ende PM straff gespannt ist, so beschreibt bei der Abwicklung des Fadens der freie Endpunkt P des immer straff gespannt bleibenden Endstücks eine Kurve $PP_1P_2\cdots$, von welcher die Kurve $MM_1M_2\cdots$ die Evolute, d. h. der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte M, M_1, $M_2\cdots$ u. s. w. ist. Die Kurve $PP_1P_2\cdots$ heisst aus diesem Grunde die **Evolvente**, d. h. die **abgewickelte** der **Evolute** $MM_1M_2\cdots$

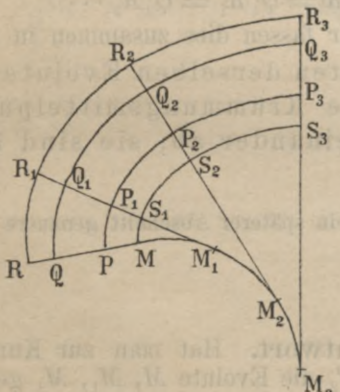
Frage 96. Wieviel Evoluten hat hiernach eine gegebene Kurve?

Erkl. 105. In Aufgabe 305 gibt es zur gegebenen Parabel nur eine Evolute; ebenso hat in Aufgabe 306 die Ellipse nur eine einzige Evolute u. s. w.

Antwort. Nur eine einzige; denn jedem Punkt P, P_1, $P_2\cdots$ der gegebenen Kurve $PP_1P_2\cdots$ entspricht nur ein einziger Krümmungsmittelpunkt M, M_1, $M_2\cdots$; die letzteren sind aber die Punkte der Evolute von $PP_1P_2\cdots$

Frage 97. Wieviel gibt es zu einer gegebenen Kurve Evolventen?

Figur 116.



Antwort. Soll zu einer gegebenen Kurve $MM_1M_2\cdots$ (siehe Figur 116) die Evolvente gefunden werden, so haben wir in M die Tangente zu ziehen und auf ihr einen Punkt P anzunehmen, von dem aus dann ein Faden längs der Tangente PM nach M und dann um die Kurve $MM_1M_2\cdots$ gelegt zu denken ist. Bei der Abwicklung des Fadens beschreibt P die Evolvente P, P_1, $P_2\cdots$ von M, M_1, $M_2\cdots$

Wählen wir aber auf der Tangente PM beliebig den Punkt Q, so bewegt sich dieser beim Abwickeln des Fadens auf einer neuen Kurve Q, Q_1, $Q_2\cdots$ Hierbei ist QM die Normale in Q, Q_1M_1 die Normale in Q_1 u. s. f.; d. h. M ist der Krümmungsmittelpunkt des Punktes Q, M_1 jener für Q_1 u. s. w. oder die neue Kurve $QQ_1Q_2\cdots$ hat ebenfalls die Evolute $MM_1M_2\cdots$ oder die letztere hat auch die Evolvente $QQ_1Q_2\cdots$

Wenn auf der Tangente PM noch ein dritter Punkt R angenommen wird, so legt dieser bei der Abwicklung eine dritte Kurve $RR_1R_2 \cdots$ zurück, für welche dasselbe gilt, was soeben für QQ_1Q_2 gefunden wurde.

Hieraus fliesst der

Satz. Jede Kurve hat eine einzige Evolute, aber zu jeder als Evolute angenommenen Kurve gibt es unendlich viele Evolventen.

Frage 98. Welche Eigenschaften haben die unendlich vielen Evolventen einer gegebenen Kurve?

Antwort. Die Kurven $PP_1P_2 \cdots$, $QQ_1Q_2 \cdots$, $RR_1R_2 \cdots$ der Figur 116, die sämtlich Evolventen der Kurve $MM_1M_2 \cdots$ sind, haben das gemeinsam, dass die Tangenten $MPQR$, $M_1P_1Q_1R_1 \cdots$ der Kurve $MM_1M_2 \cdots$ Normalen für sämtliche Evolventen sind; weiter haben die Punkte P, Q, R auf der ersten Normalen den gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkt M, die Punkte P_1, Q_1, R_1 den gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkt M_1 u. s. w.

Da weiter:

$$P_1M_1 = PM + \text{Bogen } MM_1$$

und

$$Q_1M_1 = QM + \text{Bogen } MM_1$$

ist, so folgt:

$$Q_1M_1 - P_1M_1 = QM - PM \text{ oder } Q_1P_1 = QP.$$

Ebenso beweist man, dass $Q_2P_2 = Q_1P_1$ ist; d. h. die Kurve Q, Q_1, $Q_2 \cdots$ hat von der Kurve P, P_1, P_2 überall den nämlichen Abstand. In gleicher Weise ist $QR = Q_1R_1 = Q_2R_2 \cdots$

Wir fassen dies zusammen in dem

Satz. Sind zwei Kurven Evolventen derselben Evoluten, so haben sie gleiche Normalen, gleiche Krümmungsmittelpunkte und stehen überall gleich weit von einander ab; sie sind äquidistant oder parallel.

Anmerkung 4. Ueber solche Parallelkurven wird ein späterer Abschnitt genauere Untersuchungen bringen.

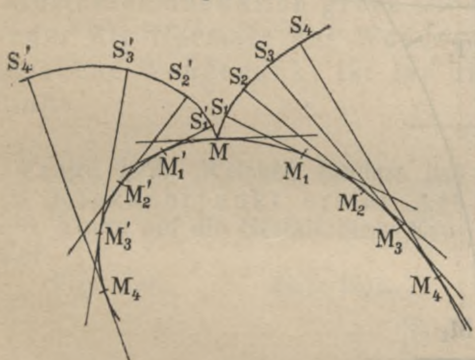
Frage 99. Wie lässt sich, wenn zu einer Kurve eine Evolvente gezeichnet ist, eine beliebige zweite Evolvente konstruieren?

Antwort. Hat man zur Kurve P, P_1, P_2 die Evolute M, M_1, M_2 gezeichnet, so erhält man eine zweite Evolvente, indem man sämtliche Evolutentangenten MP, M_1P_1, M_2P_2 um ein beliebiges konstantes Stück s verlängert oder um ein solches Stück verkürzt (siehe Figur 116).

Nehmen wir die Strecke $s = -PM$, so wird der Punkt M selbst der beschreibende Punkt; auch dieser durchwandert beim Abwickeln des Fadens eine Evolvente $MS_1S_2S_3$. Diesen Fall hatten wir schon bei der Kreisevolventen in Aufgabe 16 und Figur 25.

Frage 100. Welche andere geometrische Auffassung kann hiernach von einer Evolvente einer gegebenen Kurve noch gegeben werden?

Figur 117.



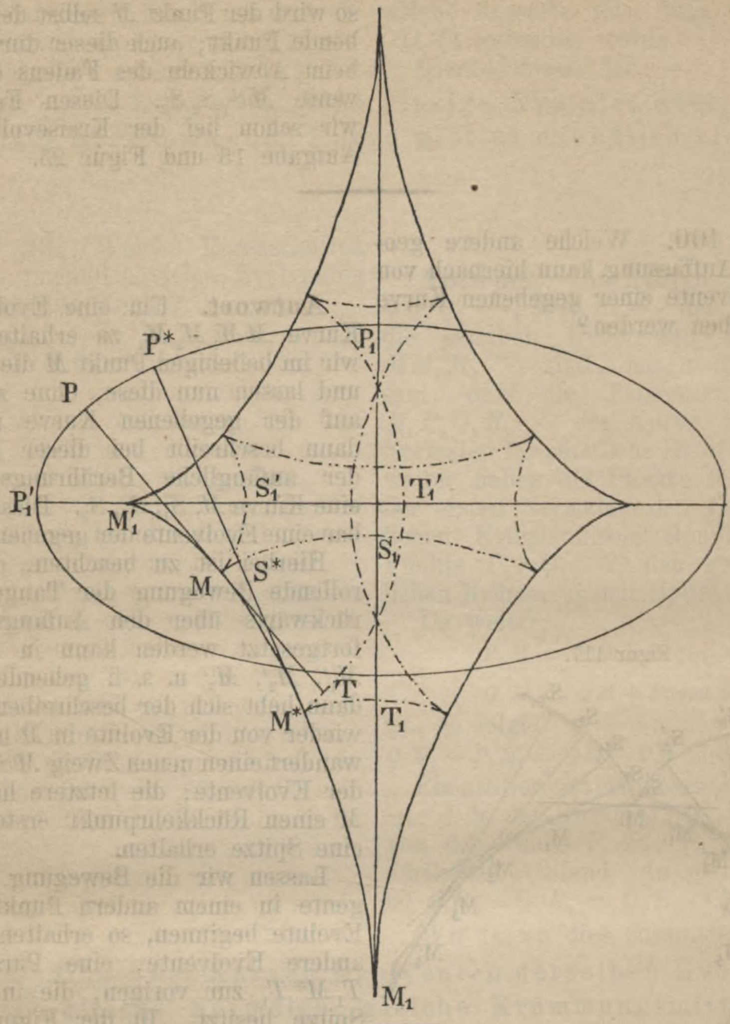
Antwort. Um eine Evolvente der Kurve $MM_1M_2M_3$ zu erhalten, ziehen wir im beliebigen Punkt M die Tangente und lassen nun diese, ohne zu gleiten, auf der gegebenen Kurve fortrollen; dann beschreibt bei dieser Bewegung der anfängliche Berührungspunkt M eine Kurve M, S_1, S_2, S_3. Diese ist offenbar eine Evolvente der gegebenen Kurve.

Hierbei ist zu beachten, dass diese rollende Bewegung der Tangente auch rückwärts über den Anfangspunkt M fortgesetzt werden kann in die durch M_1', M_2', M_3' u. s. f. gehenden Lagen; dann hebt sich der beschreibende Punkt wieder von der Evolute in M und durchwandert einen neuen Zweig $MS_1'S_2'S_3'\cdot\cdot$ der Evolvente; die letztere hat also in M einen Rückkehrpunkt erster Art — eine Spitze erhalten.

Lassen wir die Bewegung der Tangente in einem andern Punkt M^* der Evolute beginnen, so erhalten wir eine andere Evolvente, eine Parallelkurve $T_1M^*T_1$ zur vorigen, die in M^* eine Spitze besitzt. In der Figur 118 ist $M_1'MM^*M_1$ die Evolute der Ellipse $P_1'PP^*P_1$. Der Berührungspunkt der Tangente in M beschreibt bei seiner rollenden Bewegung auf der Evolute die Evolvente $S_1'MS^*S_1$; hierbei ist $MP = S_1'P_1' = S^*P^* = S_1P_1$. Die Kurve ist geschlossen und hat vier auf der Evolute liegende Spitzen.

Lassen wir die Bewegung der Tangente vom Berührungspunkt M^* ausgehen, so beschreibt der letztere die Evolvente $T_1M^*TT_1'$, wobei $M^*P^* = T_1'M_1' = TP = T_1P_1$ ist; auch diese Kurve hat vier auf der Evolute gelegene Spitzen.

Figur 118.



Frage 101. Welchen Einfluss hat ein **W e n d e p u n k t** einer Kurve auf die Gestalt ihrer Evolute?

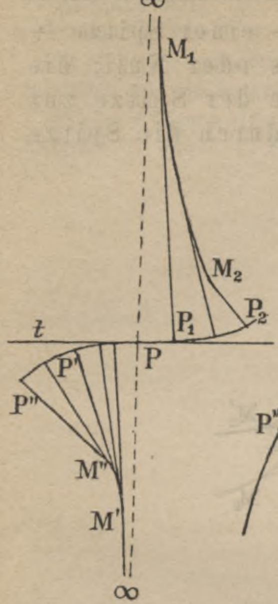
Erkl. 106. Geben wir die Gleichung der Kurve in der Form $y = f(x)$ und legen hierbei die Abscissenachse in eine beliebige Gerade g unter P, so muss nach Frage 51 für die Koordinaten x, y des Wendepunktes $f''(x)$ entweder $= 0$ oder $= \infty$ sein. Der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

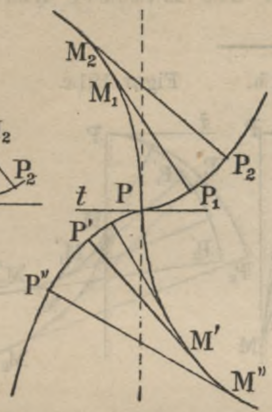
wird daher für P entweder unendlich oder Null.

Antwort. Auf der Kurve $P''P'P_1P_2$ sei P ein Wendepunkt. Ziehen wir in demselben die Tangente t, so ist der Kurvenzweig $P''P'P$ gegen eine beliebig unter P gezogene Gerade konkav und der Zweig PP_1P_2 konvex (siehe Frage 49); daher liegen die Krümmungsmittelpunkte M'', M' unter t, dagegen M_2, M_1 über t. Die Evolute muss demnach beim Uebergang von M'', M' nach M_1, M_2 die Seite wechseln, was bei der vorausgesetzten Stetigkeit nur im Unendlichen oder auf der im

Figur 119 a.



Figur 119 b.

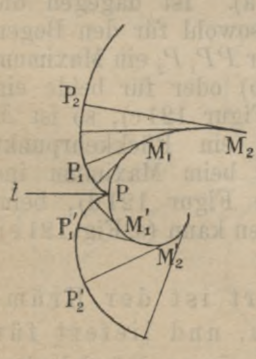


Punkt P selbst stattfinden kann. Im ersten Fall ist die Kurvennormale in P die Asymptote der Evolute, und die beiden dem unendlich fernen Krümmungsmittelpunkt M zustrebenden Zweige $M''M'$ und $M_1 M_2$ liegen auf entgegengesetzten Seiten der Asymptote (siehe Figur 119 a). Ein Beispiel liefert die Lemniscate in Figur 58. Im zweiten Fall schneidet die Evolute die gegebene Kurve in P und besitzt in P ebenfalls einen Wendepunkt (siehe Figur 119 b). Ein Beispiel liefert die Parabel $y^3 = x^5$ in Figur 69. Da ein weiterer Fall nicht denkbar ist, haben wir den

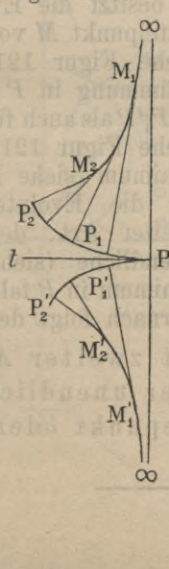
Satz. In einem Wendepunkt einer Kurve ist der Krümmungshalbmesser unendlich gross oder Null und ihre Evolute hat entweder die Normale des Wendepunktes zur Asymptote oder der gegebene Wendepunkt ist für die Evolute ebenfalls ein Wendepunkt.

Frage 102. Welchen Einfluss hat ein Rückkehrpunkt erster Art einer Kurve auf die Gestalt ihrer Evolute?

Figur 120 a.



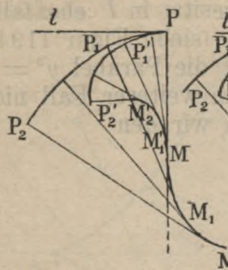
Figur 120 b.



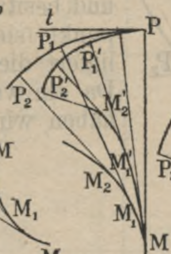
Antwort. Bei einem Rückkehrpunkt erster Art (einer Spitze) liegen die beiden Kurvenzweige und daher auch ihre hohlen Seiten auf verschiedenen Seiten der Tangente t; es muss daher ebenso wie beim Wendepunkt der Krümmungsmittelpunkt und die Evolute die Seite der Tangente t in P wechseln. Der Krümmungshalbmesser muss daher auch in der Spitze P entweder unendlich gross oder Null sein. Im ersten Fall ist die Kurvennormale in der Spitze Asymptote der Evolute (s. Figur 120 b). Ein Beispiel gibt die Evolute der Ellipse (s. Fig. 118) in ihren oberen und unteren Spitzen. Im zweiten Fall geht die Evolute durch die Spitze (siehe Figur 120 a). Beispiele hiefür sind die Spitzen von Cissoide (s. Figur 11), Neilscher Parabel s.) Figur 30), Cykloide (s. Figur 13), Epicykloide (s. Figur 15), Hypocykloide u. s. w. Wir fassen dies zusammen in dem

Satz. In einem Rückkehrpunkt erster Art — einer Spitze — ist der Krümmungshalbmesser unendlich gross oder Null; die Evolute hat im ersten Fall die Kurvennormale der Spitze zur Asymptote, im zweiten Fall geht die Evolute durch die Spitze hindurch.

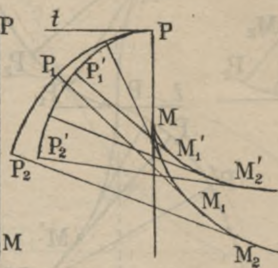
Figur 121 a.



Figur 121 b.

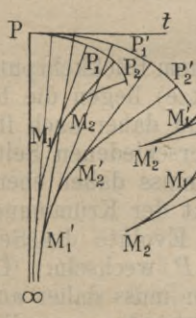


Figur 121 c.

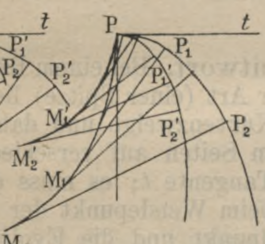


Frage 103. Welchen Einfluss hat ein Rückkehrpunkt zweiter Art — eine Schnabelspitze einer Kurve — auf die Gestalt ihrer Evolute?

Figur 121 d.



Figur 121 e.



Antwort. Bei einer Kurve:

$$P''P'PP_1P_2$$

mit einem Rückkehrpunkt zweiter Art P liegen alle Krümmungsmittelpunkte:

$$M'', M', M_1, M_2$$

auf der nämlichen Seite der Tangente in P, daher kann der Krümmungshalbmesser in P jeden beliebigen Wert annehmen. Nimmt die Krümmung auf dem Bogen $P_2'P_1'P$ ab bis P und ist sie dann weiter abnehmend auf dem Zweig PP_1P_2, so besitzt die Evolute im Krümmungsmittelpunkt M von P einen Wendepunkt (siehe Figur 121 a). Ist dagegen die Krümmung in P sowohl für den Bogen $P_2'P_1'P$ als auch für PP_1P_2 ein Maximum (siehe Figur 121 b) oder für beide ein Minimum (siehe Figur 121 c), so ist M für die Evolute ein Rückkehrpunkt zweiter Art, der beim Maximum ins Unendliche (siehe Figur 121 d), beim Minimum in P fallen kann (s. Fig. 121 e). Darnach folgt der

Satz. In einem Rückkehrpunkt zweiter Art ist der Krümmungshalbmesser Null, endlich oder unendlich, und liefert für die Evolute entweder einen Wendepunkt oder einen Rückkehrpunkt zweiter Art.

Anwendung auf einzelne Kurven.

Aufgabe 361. Die Gleichung der Evolute der Cykloide:

$$x = r(t - \sin t) \text{ und } y = r(1 - \cos t)$$

zu finden und zu untersuchen.

(Siehe Aufgabe 10, Figur 12 und 13; Aufgabe 67 und 311; Figur 107).

Auflösung. Nach Aufgabe 311 haben die Koordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes M_0 des Punktes P_0 der Cykloide die Werte:

1) . . . $\xi = r(t + \sin t), \quad \eta = -r(1 - \cos t).$

Hiermit ist eigentlich die Evolute schon bestimmt, denn die Koordinaten jeder ihrer Punkte sind dargestellt als Funktionen des unabhängigen Parameters t; auch könnte die Kurve Punkt für Punkt konstruiert werden nach der in Aufgabe 311 gefundenen Methode.

Eine genauere Einsicht in die Natur der Kurve gewinnen wir, wenn wir sie auf ein neues Koordinatensystem $X'O'Y'$ beziehen, dessen Achsen zu den seitherigen parallel gehen. Die neue Abscissenachse $O'X'$ bekommen wir durch eine Parallelverschiebung der Achse OX nach unten um die Strecke $2r$ und die neue Ordinatenachse $O'Y'$ folgt aus der ursprünglichen durch eine Parallelverschiebung nach links um die Strecke πr. Dann hat der Punkt M_0 im neuen System die Koordinaten:

2) . . . $x_1 = \pi r + \xi$ und $y_1 = 2r + \eta.$

Dadurch gehen die beiden obigen Gleichungen 1) über in:

3) . . . $x_1 = r(\pi + t - \sin t)$ und
$y_1 = r(1 + \cos t).$

Setzen wir jetzt noch:

4) . . . $t_1 = \pi + t,$

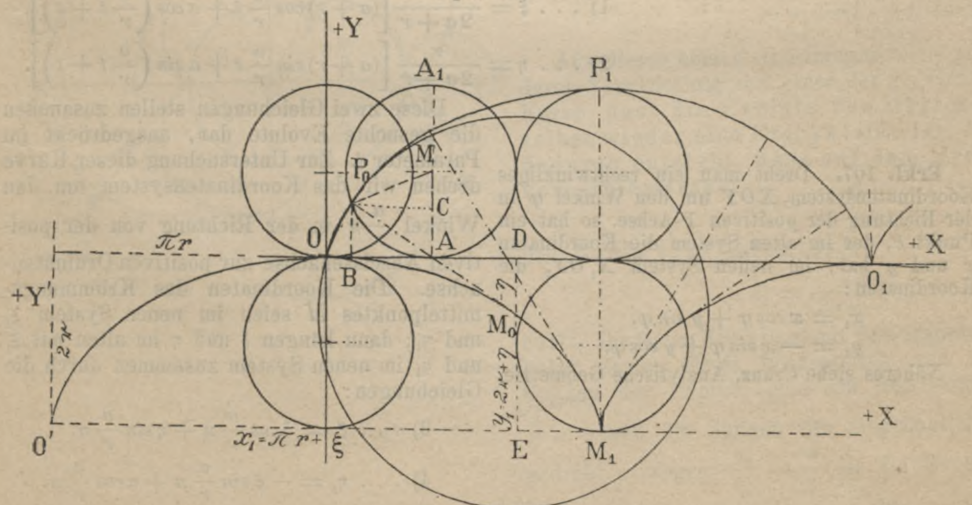
so wird:

5) . . . $\sin t_1 = \sin(\pi + t) = -\sin t$

und

6) . . . $\cos t_1 = \cos(\pi + t) = -\cos t.$

Figur 122.



Dies in Gl. 3) die Werte 5) und 6), so folgt als Gleichungen der Evolute im neuen System:

$$x_1 = r(t_1 - \sin t_1) \text{ und } y_1 = r(1 - \cos t_1).$$

Diese beiden Gleichungen stimmen vollständig mit denen der gegebenen Cykloide überein; an die Stelle von x, y und t sind nur x_1, y_1 und t_1 getreten; wir schliessen hieraus, dass die Evolute der Cykloide wieder eine Cykloide ist, welche der ersteren kongruent ist (siehe Figur 122).

Denken wir uns längs des Cykloidenbogens OM_0M_1 einen Faden gelegt und denselben vom Punkt O an abgewickelt, so erzeugt der Punkt O nach Frage 95 die Evolvente OP_0P_1. Ist die Abwicklung bis zum Punkt M_1 fortgeschritten, so hat der die Evolvente erzeugende Punkt die Lage M_1 erreicht. Nach Frage 94 ist daher die Länge des Cykloidenbogens OM_0M_1 gleich der Länge der Strecke P_1M_1, d. h. $= 4r$. Da aber OM_0M_1 die Hälfte des Cykloidenzweiges $O'OM_1$ darstellt, so kommen wir zu dem Satz, dass ein ganzer Cykloidenzweig die achtfache Länge des Halbmessers des erzeugenden Kreises hat.

Aufgabe 362. Desgleichen für die Evolute der Epicykloide:

$$x = (a+r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t + t\right),$$

$$y = (a+r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t + t\right).$$

(Siehe Aufgabe 11, Figur 14 und 15; Aufgabe 68 und 312).

Auflösung. Nach Aufgabe 312 haben die Koordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes M des Punktes $P(x, y)$ der Epicykloide die Werte:

$$1) \ldots \xi = \frac{r}{2a+r}\left[(a+r)\cos\frac{a}{r}t + a\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right],$$

$$2) \ldots \eta = \frac{r}{2a+r}\left[(a+r)\sin\frac{a}{r}t + a\sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\right].$$

Diese zwei Gleichungen stellen zusammen die gesuchte Evolute dar, ausgedrückt im Parameter t. Zur Untersuchung dieser Kurve drehen wir das Koordinatensystem um den Winkel $\frac{a}{r}\pi$ in der Richtung von der positiven Abscissenachse zur positiven Ordinatenachse. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes M seien im neuen System ξ_1 und η_1; dann hängen ξ und η im alten mit ξ_1 und η_1 im neuen System zusammen durch die Gleichungen:

$$3) \ldots \xi_1 = \xi\cos\frac{a}{r}\pi + \eta\sin\frac{a}{r}\pi,$$

$$4) \ldots \eta_1 = -\xi\sin\frac{a}{r}\pi + \eta\cos\frac{a}{r}\pi.$$

Erkl. 107. Dreht man ein rechtwinkliges Koordinatensystem XOY um den Winkel φ in der Richtung der positiven Y-Achse, so hat ein Punkt P, der im alten System die Koordinaten x und y hat, im neuen System X_1OY_1 die Koordinaten:

$$x_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$

$$y_1 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Näheres siehe Cranz, Analytische Geometrie.

Setzen wir die Werte für ξ und η aus Gl. 1) und 2) in Gl. 3) ein, so folgt:

$$\xi_1 = \frac{r(a+r)}{2a+r}\left(\cos\frac{a}{r}t\cos\frac{a}{r}\pi + \sin\frac{a}{r}t\cdot\sin\frac{a}{r}\pi\right)$$

$$+\frac{ar}{2a+r}\left[\cos\left(\frac{a}{r}t+t\right)\cos\frac{a}{r}\pi + \sin\left(\frac{a}{r}t+t\right)\cdot\sin\frac{a}{r}\pi\right]$$

$$=\frac{r(a+r)}{2a+r}\cdot\cos\frac{a}{r}(t-\pi) + \frac{ar}{2a+r}\cdot\cos\left(\frac{a}{r}t+t-\frac{a}{r}\pi\right).$$

Da nun:

$$\cos\left(\frac{a}{r}t+t-\frac{a}{r}\pi\right) = -\cos\left(\frac{a}{r}t+t-\frac{a}{r}\pi-\pi\right) = -\cos\left(\frac{a}{r}+1\right)(t-\pi),$$

so bekommen wir:

$$5)\ \ldots\ \xi_1 = \frac{r(a+r)}{2a+r}\cdot\cos\frac{a}{r}(t-\pi) - \frac{ar}{2a+r}\cdot\cos\left[\frac{a}{r}(t-\pi)+t-\pi\right]$$

und ebenso:

$$6)\ \ldots\ \eta_1 = \frac{r(a+r)}{2a+r}\cdot\sin\frac{a}{r}(t-\pi) - \frac{ar}{2a+r}\cdot\sin\left[\frac{a}{r}(t-\pi)+t-\pi\right].$$

Setzen wir jetzt:

$$7)\ \ldots\ r_1 = \frac{r^2}{2a+r},$$

$$8)\ \ldots\ a_1 = \frac{ar}{2a+r}$$

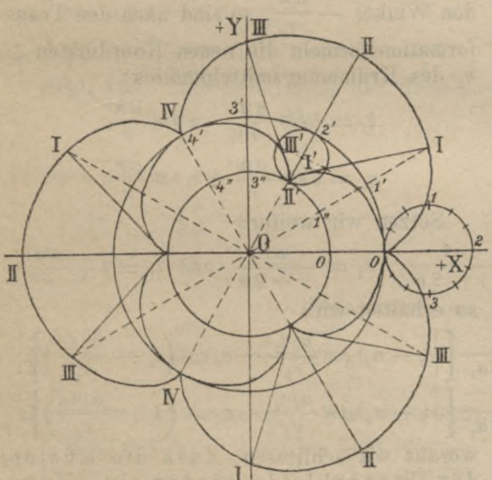
und

$$9)\ \ldots\ t_1 = t-\pi,$$

so gehen, weil

$$10)\ \ldots\ \frac{a_1}{r_1} = \frac{ar}{2a+r} : \frac{r^2}{2a+r} = \frac{a}{r}$$

Figur 123.



ist, die Gleichungen 5) und 6) über in:

$$11)\ \ldots\ \xi_1 = (a_1+r_1)\cos\frac{a_1}{r_1}t_1 - a_1\cdot\cos\left(\frac{a_1}{r_1}t_1+t_1\right)$$

und

$$12)\ \ldots\ \eta_1 = (a_1+r_1)\sin\frac{a_1}{r_1}t_1 - a_1\cdot\sin\left(\frac{a_1}{r_1}t_1+t_1\right).$$

Aus diesen beiden Gleichungen sieht man durch Vergleichung mit jenen der gegebenen Kurve, dass die Evolute der letzteren selbst wieder eine Epicykloide ist, die dadurch entsteht, dass auf dem Kreis vom Halbmesser:

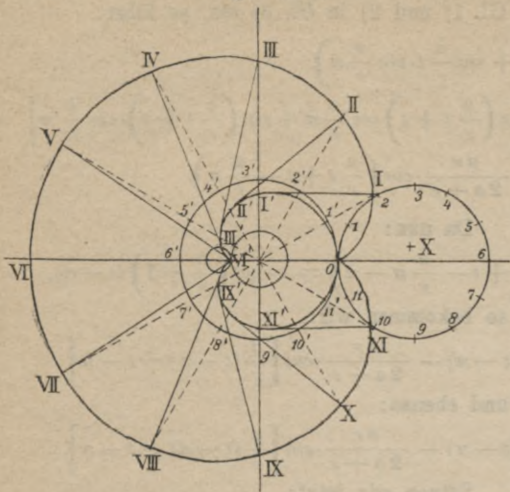
$$r_1 = \frac{a^2}{2a+r}$$

der Kreis vom Halbmesser:

$$a_1 = \frac{ar}{2a+r}$$

rollt. Ihr fester Kreis liegt mit dem ursprünglichen festen Kreis konzentrisch und die Spitzen der Evolute sind um den Winkel $\frac{a}{r}\pi$ gegen die Spitzen der ursprünglichen gedreht. Wegen $\frac{a_1}{r_1} = \frac{a}{r}$ ist die Evolute

Figur 124.



der Epicykloide der letzteren ausserdem noch ähnlich (siehe Figur 123).

Nehmen wir wie in Figur 15:

$$a = \frac{1}{3} r,$$

so ergibt sich für die Evolute:

$$r_1 = \frac{3}{5} r, \quad a_1 = \frac{r}{5} \quad \text{und} \quad \frac{a}{r}\pi = \frac{\pi}{3} \; [= 60^0]$$

(siehe Figur 123).

Für die Cardioide (siehe Fig. 16) ist:

$$a = r,$$

daher:

$$r_1 = \frac{r}{3}, \quad a_1 = \frac{r}{3} \text{ u. } \frac{a}{r}\pi = \pi \; [= 180^0]; \text{ d. h.}$$

die Evolute ist wieder eine Cardioide und zwar verkleinert im Verhältnis 3 : 1 und um 180^0 gedreht im Vergleich zur gegebenen Kurve (siehe Figur 124).

Aufgabe 363. Desgleichen für die Evolute der Hypocykloide:

$$x = (r - a) \cos \frac{at}{r} + a \cos \left(t - \frac{at}{r}\right),$$

$$y = (r - a) \sin \frac{at}{r} - a \sin \left(t - \frac{at}{r}\right).$$

(Siehe Aufgabe 12, Figur 17 und 18, Aufgabe 69 und Aufgabe 313.)

Auflösung. Nach Aufgabe 313 ist hier:

$$\xi = \frac{r}{r - 2a} \left[(r - a) \cos \frac{at}{r} - a \cos \left(t - \frac{at}{r}\right)\right],$$

$$\eta = \frac{r}{r - 2a} \left[(r - a) \sin \frac{at}{r} + a \sin \left(t - \frac{at}{r}\right)\right].$$

Drehen wir das Koordinatensystem um den Winkel $-\frac{a\pi}{r}$, so sind nach den Transformationsformeln die neuen Koordinaten ξ_1, η_1 des Krümmungsmittelpunktes:

$$\xi_1 = \xi \cos \frac{a\pi}{r} - \eta \sin \frac{a\pi}{r},$$

$$\eta_1 = \xi \sin \frac{a\pi}{r} + \eta \cos \frac{a\pi}{r}.$$

Setzen wir weiter:

$$r_1 = \frac{r^2}{r - 2a}, \quad a_1 = \frac{ar}{r - 2a} \quad \text{und} \quad t_1 = t + \frac{a\pi}{r},$$

so erhalten wir:

$$\xi_1 = \frac{r_1}{r_1 - 2a_1} \left[(r_1 - a_1) \cos \frac{a_1 t_1}{r_1} + a_1 \cos \left(t_1 - \frac{a_1 t_1}{r_1}\right)\right],$$

$$\eta_1 = \frac{r_1}{r_1 - 2a_1} \left[(r_1 - a_1) \sin \frac{a_1 t_1}{r_1} - a_1 \sin \left(t_1 - \frac{a_1 t_1}{r_1}\right)\right],$$

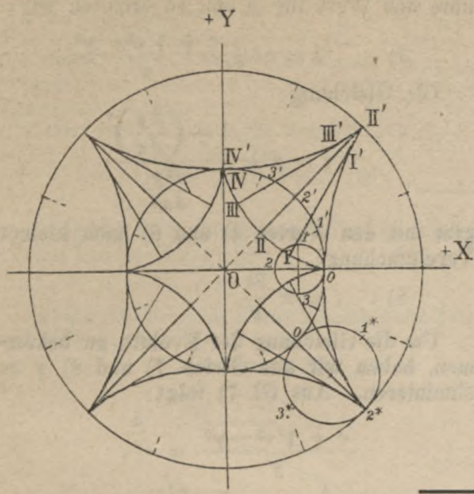
woraus wir schliessen, dass die Evolute der Hypocykloide wieder eine Hypocykloide ist, die dadurch entsteht, dass im Kreis vom Halbmesser:

$$r_1 = \frac{r^2}{r - 2a}$$

der Kreis vom Halbmesser:

$$a_1 = \frac{ar}{r - 2a}$$

Figur 125.



rollt. Ihr fester Kreis liegt mit dem gegebenen konzentrisch und die Spitzen der Evolute sind um den Winkel $-\frac{a\pi}{r}$ gegen jene der gegebenen gedreht; ausserdem sind wegen $\frac{a_1}{r_1} = \frac{a}{r}$ beide Kurven ähnlich.

Für $a = \frac{r}{4}$ heisst die Hypocykloide Astroide (siehe Erkl. 25 und Fig. 19 u. 40). Ihre Evolute ist demnach wieder eine Astroide, für welche:

$$r_1 = 2r, \quad a_1 = \frac{r}{2}$$

und der Drehungswinkel:

$$= -\frac{\pi}{4} = -45^0$$

zu nehmen ist. Dieselbe ist in Figur 125 dargestellt.

Aufgabe 364. Desgleichen für die Evolute der Zuglinie:

$$x = c \log\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{c^2 - y^2}.$$

(Siehe Aufgabe 138 und Figur 41.)

Erkl. 108. Zur Berechnung der Grössen:

$$\frac{dy}{dx} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2}$$

bedienen wir uns der Formeln:

$$1) \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

und

$$2) \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

(siehe Differentialrechnung II. Teil, Seite 256).

Auflösung. Der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

wird nach den Formeln 4) und 6) der nebenstehenden Erklärung:

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{c^2 - y^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{c^2 y}{(c^2 - y^2)^2}} = \frac{c\,(c^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y}.$$

Für die Koordinaten ξ, η des Krümmungshalbmessers gilt:

$$\xi = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\xi = x + \frac{y\left(1 + \frac{y^2}{c^2 - y^2}\right)(c^2 - y^2)^2}{\sqrt{c^2 - y^2} \cdot c^2 y}$$

$$= x + \sqrt{c^2 - y^2};$$

Aus der gegebenen Gleichung folgt zunächst:

$$\frac{dx}{dy} = c \cdot \frac{y}{c + \sqrt{c^2 - y^2}} \cdot \frac{y \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2y)}{\sqrt{c^2 - y^2}} - (c + \sqrt{c^2 - y^2})}{y^2} - \frac{\frac{1}{2}(-2y)}{\sqrt{c^2 - y^2}}$$

$$= \frac{c\left[-y^2 - c\sqrt{c^2 - y^2} - (c^2 - y^2)\right]}{y \cdot (c + \sqrt{c^2 - y^2})\sqrt{c^2 - y^2}} + \frac{y}{\sqrt{c^2 - y^2}},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-c^2}{y\sqrt{c^2 - y^2}} + \frac{y}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{-(c^2 - y^2)}{y\sqrt{c^2 - y^2}} = -\frac{\sqrt{c^2 - y^2}}{y},$$

also ist:

$$3) \ldots \frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{c^2-y^2}}{y}$$

und nach Formel 1):

$$4) \ldots \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{c^2-y^2}}.$$

Aus Gleichung 3) ergibt sich:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y \cdot \frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{c^2-y^2}} - \sqrt{c^2-y^2}}{y^2}$$

$$= \frac{y^2+c^2-y^2}{y^2\sqrt{c^2-y^2}} = \frac{c^2}{cy^2\sqrt{c^2-y^2}}$$

oder:

$$5) \ldots \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{c^2}{y^2\sqrt{c^2-y^2}}.$$

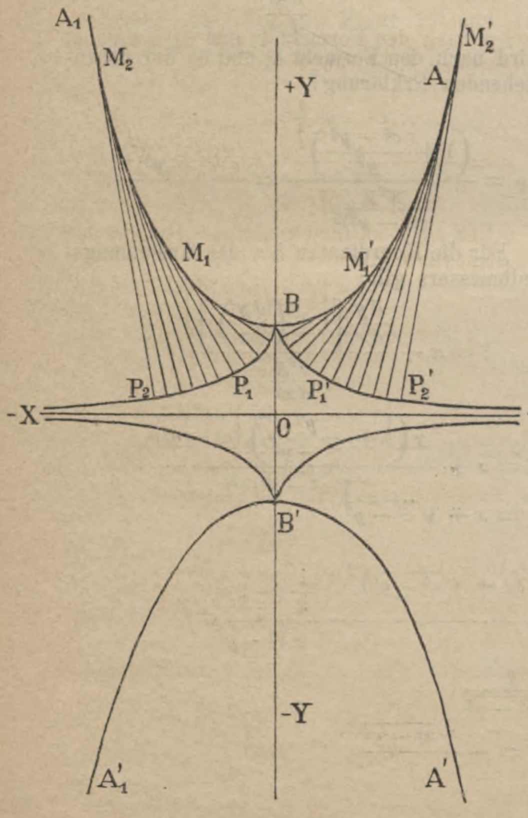
Die Werte aus Gleich. 3) und 5) in Gl. 2) eingesetzt, liefert:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{c^2}{y^2\sqrt{c^2-y^2}}}{-\frac{(c^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{y^3}} = \frac{c^2y}{(c^2-y^2)^2},$$

also haben wir:

$$6) \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c^2y}{(c^2-y^2)^2}.$$

Figur 126.



setzen wir hier aus der Gleichung der Zuglinie den Wert für x ein, so erhalten wir:

$$7) \ldots \xi = c \log \frac{c+\sqrt{c^2-y^2}}{y}.$$

Die Gleichung:

$$\eta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gibt mit den Werten 4) und 6) nach kleiner Vereinfachung:

$$8) \ldots \eta = \frac{c^2}{y}.$$

Um die Gleichung der Evolute zu bekommen, haben wir aus Gleich. 7) und 8) y zu eliminieren. Aus Gl. 7) folgt:

$$\frac{c+\sqrt{c^2-y^2}}{y} = e^{\frac{\xi}{c}},$$

$$c^2-y^2 = (ye^{\frac{\xi}{c}}-c)^2 = y^2e^{\frac{2\xi}{c}} - 2cye^{\frac{\xi}{c}} + c^2,$$

$$2cye^{\frac{\xi}{c}} = y^2(e^{\frac{2\xi}{c}}+1);$$

daher:

$$9) \ldots y = \frac{2ce^{\frac{\xi}{c}}}{e^{\frac{2\xi}{c}}+1}.$$

Dies in Gl. 8) eingesetzt ergibt:

$$\eta = \frac{c^2(e^{\frac{2\xi}{c}}+1)}{2ce^{\frac{\xi}{c}}}$$

oder:

$$10) \ldots \eta = \frac{c}{2}(e^{\frac{\xi}{c}} + e^{-\frac{\xi}{c}}).$$

Nach Aufgabe 4 stellt diese Kurve eine Kettenlinie dar, deren tiefster Punkt B Längenheiten über dem Koordinatenanfang auf der Ordinatenachse liegt. Unser Resultat lautet demnach: Die Evolute der Zuglinie ist eine Kettenlinie (s. Fig. 126).

In obiger Entwicklung haben wir stillschweigend nur das negative Vorzeichen von $\frac{dy}{dx}$ und damit nur den oberen Teil der Zuglinie berücksichtigt. Es ist klar, dass dem unteren Zweig als Evolute eine zweite Kettenlinie entspricht, welche zu der ersten bezüglich der Abscissenachse symmetrische Lage hat.

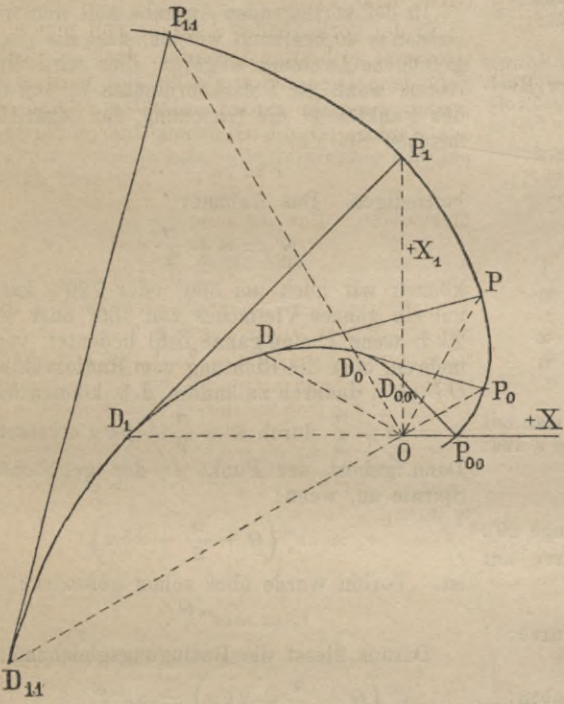
Erkl. 109. Zur Konstruktion der Zuglinie (siehe Aufgabe 138 und Figur 41) wird man daher am einfachsten von der Konstruktion der Kettenlinie (siehe Aufgabe 4, Figur 6), ausgehen; an letztere wird man hierauf einige Tangenten $M_2'P_2'$, $M_1'P_1'$, M_1P_1, M_2P_2 konstruieren und auf ihnen die Bogenlängen $M_2'B$, $M_1'B$, M_1B, M_2B abtragen. Dann ist $P_2'P_1'BP_1P_2$ die Zuglinie (siehe Figur 126).

Aufgabe 365. Desgleichen für die logarithmische Spirale:

$$r = e^{\Theta}.$$

(Siehe Aufgabe 14, Figur 23, Aufgabe 140 und 315.

Figur 127.



Auflösung. Nach Aufgabe 315 ist $\varrho = r\sqrt{2} =$ der Polarnormalen BD und die Polarsubnormale OD ist $= r = e^{\Theta}$. Der Krümmungsmittelpunkt D hat daher, bezogen auf den Pol O und die Polarachse OX, die Koordinaten $OD = r_1$ und Winkel $XOD = \Theta'$; dabei ist:

$$r_1 = e^{\Theta} \text{ und } \Theta' = \Theta + \frac{\pi}{2}$$

oder:

$$r_1 = e^{\Theta' - \frac{\pi}{2}}.$$

Errichten wir nun in O auf OX das Lot OX_1 und setzen:

$$\sphericalangle X_1OD = \Theta_1 = \Theta' - \frac{\pi}{2} = \Theta,$$

so ist der Punkt D, bezogen auf O und OX_1, durch die Gleichung bestimmt:

$$r_1 = e^{\Theta_1}.$$

Daraus schliessen wir, dass die Evolute der gegebenen Kurve ebenfalls eine logarithmische Spirale bildet und zwar eine solche, die der gegebenen kongruent ist.

Eine Drehung um 90^0 im entgegengesetzten Sinn der Bewegung des Uhrzeigers bringt die gegebene logarithmische Spirale $P_{00}P_0PP_1P_{11}$ zur Deckung mit ihrer Evoluten $D_{00}D_0DD_1D_{11}$ (siehe Fig. 127).

Aufgabe 366. Es soll eine logarithmische Spirale gefunden werden, welche mit ihrer eigenen Evoluten zusammenfällt.

Erkl. 110. Ziehen wir durch O die Gerade OA und setzen:

$$\sphericalangle XOA = \alpha, \quad XOP = \Theta,$$

$$XOD = \Theta + \frac{\pi}{2}, \quad AOD = \Theta_1,$$

so ist:

$$\Theta_1 + \alpha = \Theta + \frac{\pi}{2},$$

$$\Theta = \Theta_1 + \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Auflösung. Gehen wir von der allgemeinen Gleichung:

$$y = ce^{m\Theta}$$

aus, so ist nach Aufgabe 315 wie im vorigen Beispiel der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = r\sqrt{1 + m^2}$$

gleich der Polarnormalen PD und die Subpolarnormale $OD = r_1 = mce^{m\Theta}$. Diese bildet mit der Achse OX den Winkel:

$$XOD = \Theta + \frac{\pi}{2};$$

Die Gleichung:

$$r_1 = mce^{m\Theta}$$

gibt nun:

$$r_1 = mce^{m\left(\Theta_1+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = ce^{m\Theta_1}\cdot me^{m\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Wählen wir nun den Winkel α derart, dass:

$$me^{m\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

oder:

$$l(m) + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

oder:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{l(m)}{m}$$

wird, so erhalten wir für den Pol O und die Polarachse OA die Gleichung der Evolute:

$$r_1 = ce^{m\Theta_1},$$

welche mit der Gleichung der gegebenen Spirale übereinstimmt; d. h. die Evolute ist der Evolventen kongruent.

Erkl. 111. Zur Zeichnung der Kurve:

$$z = \frac{l(m)}{m}$$

dienen folgende Werte:

$m = 0$	0,2745	0,5	1	
$z = -\infty$	$-4{,}7124$	$-1{,}39$	0	
$m = 0$	2,718	5,51	∞	
$z = -\infty$	0,3769	0,27	0	
	Max.	Wendep.		

Bei beliebig gewähltem m berechnet man mit gewöhnlichen Logarithmen den Wert von z aus:

$$z = \frac{\log m}{0{,}43429\cdot m}$$

(siehe Differentialrechnung II. Teil, Frage 29).

Der Leser wird gebeten, die Kurve auf Millimeterpapier einzutragen.

Erkl. 112. Zur Darstellung der Kurve:

$$r = e^{0{,}2745\,\Theta}$$

(siehe Figur 128) dienen folgende Angaben:

P_{-3}	$\Theta = -\frac{3\pi}{4}$,	$r = 0{,}523$
P_{-2}	„ $-\frac{\pi}{2}$	„ 0,650
P_{-1}	„ $-\frac{\pi}{4}$	„ 0,806
P_0	„ 0	„ 1
P_1	„ $\frac{\pi}{4}$	„ 1,240
P_2	„ $\frac{\pi}{2}$	„ 1,540
P_3	„ $\frac{3\pi}{4}$	„ 1,909

bezeichnen wir den letztern mit Θ' und setzen:

$$\Theta' = \Theta + \frac{\pi}{2},$$

so folgt:

$$\Theta = \Theta' - \frac{\pi}{2}$$

und die Gleichung:

$$r_1 = mce^{\Theta'-\frac{\pi}{2}}$$

ist offenbar diejenige der Evolute. Von dieser lässt sich wieder leicht beweisen, dass sie eine logarithmische Spirale darstellt, welche der gegebenen kongruent ist, und dass die letztere durch eine Drehung um O mit ihrer Evolute zur Deckung gebracht werden kann (siehe Erkl. 110).

In der vorliegenden Aufgabe soll nun die Grösse m so bestimmt werden, dass die eben gefundene Drehung wegfällt; dies wird eintreten, wenn die Polarkoordinaten r_1 und Θ' des Punktes D die Gleichung der logarithmischen Spirale:

$$r = ce^{m\Theta}$$

befriedigen. Das Azimut:

$$\Theta' = \Theta + \frac{\pi}{2}$$

können wir auch um 360° oder 720°, kurz um ein ganzes Vielfaches von 360° oder um $2k\pi$, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, vermehren, ohne die Richtung vom Radiusvektor $OD = r_1$ dadurch zu ändern, d. h. können wir $\Theta' = \Theta + \frac{\pi}{2}$ durch $\Theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ersetzen. Dann gehört der Punkt D der gegebenen Spirale an, wenn:

$$r_1 = ce^{m\left(\Theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

ist. Vorhin wurde aber schon gefunden:

$$r_1 = mce^{m\Theta}.$$

Daraus fliesst die Bedingungsgleichung:

$$e^{m\left(\Theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = me^{m\Theta}$$

oder:

$$e^{m\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = m$$

oder:

$$m\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = l(m)$$

oder:

$$\frac{l(m)}{m} = \frac{\pi}{2}(1+4k),$$

worin k irgend eine ganze Zahl ist.

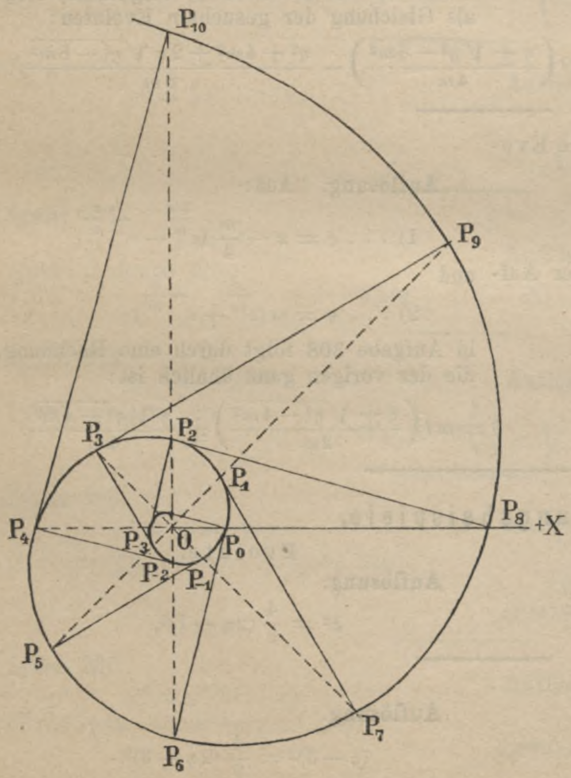
Betrachten wir die Funktion:

$$z = \frac{l(m)}{m},$$

P_4 ······	$\Theta = \pi$,	$r = 2{,}368$
P_5 ······	„ $\frac{5\pi}{4}$	„ 2,939
F_6 ······	„ $\frac{3\pi}{2}$	„ 3,645
P_7 ······	„ $\frac{7\pi}{4}$	„ 4,522
P_8 ······	„ 2π	„ 5,606
P_9 ······	„ $\frac{9\pi}{4}$	„ 6,959
P_{10} ······	„ $\frac{5\pi}{2}$	„ 8,634
	u. s. f.	

Erkl. 113. Die nebenstehenden Untersuchungen verdankt man Jakob Bernoulli, der sie die spira mirabilis nannte und als Typus der Beständigkeit und der Auferstehung betrachtete. Die Worte „eadem mutata resurgo“, welche er auf seinen Grabstein setzen liess, beweisen, wie hoch er seine Entdeckung schätzte (siehe Erkl. 29).

Figur 128.



deren Differentialquotient:

$$\frac{dz}{dm} = \frac{1 - l(m)}{m^2}$$

ist, so wächst z von $-\infty$ bis 0, wenn wir m von 0 bis 1 gehen lassen; dann wächst sie weiter von 0 bis $\frac{1}{e}$, wenn m von 1 bis $e = 2{,}718\cdots$ geht. Dann nimmt z ab von $\frac{1}{e} = 0{,}368\cdots$ bis 0, wenn man m von e bis ∞ wachsen lässt. $\frac{l(m)}{m}$ kann hiernach höchstens den positiven Wert 0,368 erreichen, dagegen jeden beliebigen negativen Wert annehmen. Da k beliebig ist, geben wir ihm zuerst den Wert 0 und suchen m aus der Gleichung:

$$\frac{l(m)}{m} = \frac{\pi}{2} = 1.57$$

zu bestimmen. Die vorige Untersuchung zeigt sofort, dass dies unmöglich ist. Nun wählen wir $k = -1$ und suchen m aus der Gleichung:

$$\frac{l(m)}{m} = \frac{\pi}{2}(1-4) = -\frac{3\pi}{2} = -4{,}7124.$$

Diese Bestimmung ist möglich und die Rechnung liefert:

$$m = \frac{1}{3{,}643} = 0{,}2745.$$

Die Evolute der Spirale:

$$r = ce^{0{,}2745\,\Theta}$$

muss demnach mit der Evolvente zusammenfallen.

$k = -2$, -3 würden neue derartige Kurven ergeben; wir sehen hieraus, dass unendlich viele logarithmische Spiralen die merkwürdige Eigenschaft haben, dass sie mit ihren Evoluten zusammenfallen.

In der Figur 128 ist jene dargestellt, welche der Gleichung:

$$r = e^{0{,}2745\,\Theta}$$

Genüge leistet. Die Grösse c spielt hierbei keine Rolle, weil:

$$r = ce^{0{,}2745\,\Theta}$$

die gleiche Kurve gibt, nur mit anderer Polarachse. Eine Drehung der Achse OX um seinen Winkel α gibt nämlich sofort die neue Gleichung:

$$r = e^{0{,}2745\,(\Theta - \alpha)} = \frac{e^{0{,}2745\,\Theta}}{e^{0{,}2745\cdot\alpha}}$$
$$= ce^{0{,}2745\,\Theta},$$

wenn $c = e^{-0{,}2745\,\alpha}$ genommen wird.

Aufgabe 367. Wie lautet die Gleichung der Evolute der logarithmischen Linie:

$$y = m e^{\frac{x}{m}}\ ?$$

(Siehe Aufgabe 130 und 338, sowie Figur 45 und Figur 111).

Auflösung. Nach Aufgabe 338 ist:

$$1) \ldots \xi = x - m\left(e^{\frac{2x}{m}} + 1\right)$$

und

$$2) \ldots \eta = \frac{m\left(2e^{\frac{2x}{m}} + 1\right)}{e^{\frac{x}{m}}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist x zu eliminieren. Zu diesem Zweck bilden wir aus Gl. 2) die Gleichung zweiten Grades:

$$e^{\frac{2x}{m}} - \frac{\eta}{2m} e^{\frac{x}{m}} + \frac{1}{2} = 0$$

und erhalten:

$$3) \ldots e^{\frac{x}{m}} = \frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 8m^2}}{4m}.$$

Diese gibt:

$$4) \ldots x = ml\left(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 8m^2}}{4m}\right)$$

und

$$5) \ldots e^{\frac{2x}{m}} = \frac{\eta^2 - 4m^2 \pm \eta\sqrt{\eta^2 - 8m^2}}{8m^2}.$$

Gl. 4) und 5) in Gl. 1) eingesetzt, folgt als Gleichung der gesuchten Evoluten:

$$\xi = ml\left(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 8m^2}}{4m}\right) - \frac{\eta^2 + 4m^2 \pm 2\eta\sqrt{\eta^2 - 8m^2}}{8m}.$$

Aufgabe 368. Desgleichen für die Evolute der Kettenlinie:

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

(Siehe Aufgabe 4, Figur 6; ferner Aufgabe 93, 108 und 308.)

Auflösung. Aus:

$$1) \ldots \xi = x - \frac{m}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

und

$$2) \ldots \eta = m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

in Aufgabe 308 folgt durch eine Rechnung, die der vorigen ganz ähnlich ist:

$$\xi = ml\left(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4m^2}}{2m}\right) \pm \frac{\eta\sqrt{\eta^2 - 4m^2}}{4m}.$$

Uebungsbeispiele.

Evolvente. — Evolute.

Aufgabe 369.

$$y = x^2$$

(Siehe Aufgabe 317).

Auflösung.

$$\xi^2 = \frac{4}{9}(2\eta - 1)^3.$$

Aufgabe 370.

$$y = x^2 - 6x + 10.$$

(Siehe Aufgabe 318.)

Auflösung.

$$(\xi - 3)^2 = \frac{4}{9}(2\eta - 3)^3.$$

Evolvente. — **Evolute.**

Aufgabe 371.

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$$

(Siehe Aufgabe 321.)

Auflösung.

$$\left(\frac{3\xi}{5}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2\eta}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Aufgabe 372.

$$4x^2 - 9y^2 - 36 = 0.$$

(Siehe Aufgabe 360.)

Auflösung.

$$\left(\frac{3\xi}{13}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{2\eta}{13}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Aufgabe 373.

$$4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y^2 + 109 = 0.$$

(Siehe Aufgabe 322.)

Auflösung.

$$\left(\frac{3\xi - 12}{5}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2\eta - 6}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Aufgabe 374.

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 - 288 = 0.$$

(Siehe Aufgabe 323.)

Auflösung.

$$\left(\frac{4(\xi + \eta)}{7}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3(-\xi + \eta)}{7}\right)^{\frac{2}{3}} = 8.$$

Aufgabe 375.

$$xy = 1.$$

(Siehe Aufgabe 324.)

Auflösung.

$$\left(\frac{\xi + \eta}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{-\xi + \eta}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Aufgabe 376.

$$y^2 = 5x^2 + 16x.$$

Auflösung.

$$\left(\frac{5x + 8}{8}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}.$$

Aufgabe 377.

$$y = x^3.$$

(Siehe Aufgabe 325.)

Auflösung.

$$15\left(2 \pm \sqrt{4 - 45\xi\eta}\right)^4 + 9^4\eta^4\left(\frac{1}{3} \mp \sqrt{4 - 45\xi\eta}\right) = 0.$$

Aufgabe 378.

$$y^2 = x^3.$$

(Siehe Aufgabe 328.)

Auflösung.

$$27\eta^2 = 16\left(\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 2\xi}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 2\xi}\right).$$

Aufgabe 379.

$$r^2 = a^2 \cos^2\varphi.$$

(Lemniscate; siehe Aufgabe 340).

Auflösung.

$$9\left(\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot \left(\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}}\right) = 4a^2.$$

(Rechnung mit Polarkoordinaten.)

Aufgabe 380.

$$x^3 = y^2(2r - x)$$

(Cissoide; siehe Aufgabe 309).

Auflösung.

$$27\eta^4 + 1152r^2\eta^2 + 4096r^3\xi = 0.$$

(Rechnung sehr weitläufig.)

G. Von den einhüllenden Kurven (Enveloppen).

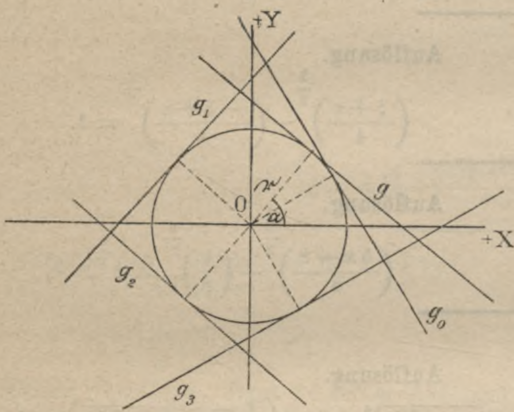
a) Ableitung der Gleichung der einhüllenden Kurve.

Frage 104. Was ist unter einer einhüllenden Kurve und was unter der eingehüllten Kurve zu verstehen?

Erkl. 114. Die einhüllende Kurve wird sehr häufig auch Enveloppe genannt, von envelopper = einhüllen.

Antwort. Diese beiden Begriffe kommen schon in der gewöhnlichen Geometrie vor. Alle geraden Linien g, welche von einem festen Punkt O den nämlichen senkrechten Abstand besitzen, werden von einem Kreis um O mit dem Halbmesser r eingehüllt (siehe Figur 129). Der letztere heisst die „einhüllende“ Kurve, während jede Gerade der unendlich grossen Schar als „eingehüllte“ bezeichnet wird. Bewegt sich ein Kreis vom Halbmesser r auf dem Umfang eines Kreises vom Halbmesser R, so werden alle Lagen der Kreisschar von zwei Kreisen, deren Halbmesser $R+r$ und $R-r$ sind, eingehüllt (siehe Fig. 130). Die „einhüllende Kurve“ setzt sich hier aus den beiden letzten Kreisen zusammen, während die „eingehüllte“ der bewegliche Kreis ist. — Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf einer festen Geraden OX liegt und dessen Halbmesser $r = ma$ ist, wobei a den Abstand des Mittelpunktes M vom festen Punkt O und m einen konstanten Faktor vorstellt, wird daher grösser, je weiter M von O entfernt ist. Alle diese Kreise geben als „Einhüllende“ zwei durch O gehende gerade Linien mit OX als Symmetrieachse (siehe Figur 131).

Figur 129.

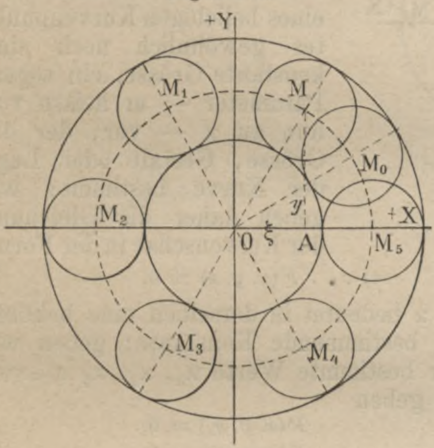


Hiernach sagen wir allgemein: Wenn eine Kurve nach einem gewissen Gesetz ihre Dimension oder Gestalt oder Lage beständig ändert, so berühren alle diese Kurven eine neue Kurve; und diese heisst die „Einhüllende“ des Systems der ersteren, der „eingehüllten“.

Frage 105. Welche Form hat die Gleichung der eingehüllten Kurve?

Antwort. Beziehen wir in dem ersten der obigen Beispiele die Gerade auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem und bezeichnen wir den Winkel, den das

Figur 130.



Lot aus O auf irgend eine der Geraden mit der Abscissenachse bildet, mit α_0, so hat die letztere Gerade die Gleichung:

$$x \cos \alpha_0 + y \sin \alpha_0 - r = 0;$$

eine zweite Gerade mit dem Winkel α_1 hätte die Gleichung:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - r = 0,$$

eine dritte:

$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - r = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Gleichung:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - r = 0,$$

in welcher x und y rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Geraden, α aber eine willkürlich zu bestimmende Konstante bedeutet, drückt also eine bestimmte oder individuelle Gerade aus, wenn dem α ein bestimmter Wert α_0, α_1, α_2 u. s. w. beigelegt wird; sie drückt aber immer andere beständig aufeinanderfolgende Gerade aus, wenn dem α verschiedene beständig aufeinanderfolgende Werte beigelegt werden. Die Gleichung:

$$1) \;.\;.\;.\; x \cos \alpha + y \sin \alpha - r = 0$$

ist daher die der Schar der „eingehüllten" Geraden.

Im zweiten Beispiel nehmen wir auf dem Kreis vom Halbmesser R einen beliebigen Punkt M_0 mit den Koordinaten ξ_0 η_0, dann ist zunächst:

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = R^2,$$

also:

$$\eta_0 = \sqrt{R^2 - \xi_0^2}.$$

Der Kreis um M_0 mit dem Halbmesser r hat dann die Gleichung:

$$(x - \xi_0)^2 + \left(y - \sqrt{R^2 - \xi_0^2}\right)^2 - r^2 = 0.$$

Einem andern Mittelpunkt M_1 mit den Koordinaten:

$$\xi_1 \text{ und } \eta_1 = \sqrt{R^2 - \xi_1^2}$$

entspräche die Gleichung:

$$(x - \xi_1)^2 + \left(y - \sqrt{R^2 - \xi_1^2}\right)^2 - r^2 = 0$$

u. s. w.

Die vorige Schlussweise lässt erkennen, dass hier die Gleichung:

$$2) \;.\;.\;.\; (x - \xi)^2 + \left(y - \sqrt{R^2 - \xi^2}\right)^2 - r^2 = 0$$

die der Schar der „eingehüllten" Kreise sein muss.

Im dritten Beispiel ist es sehr leicht,

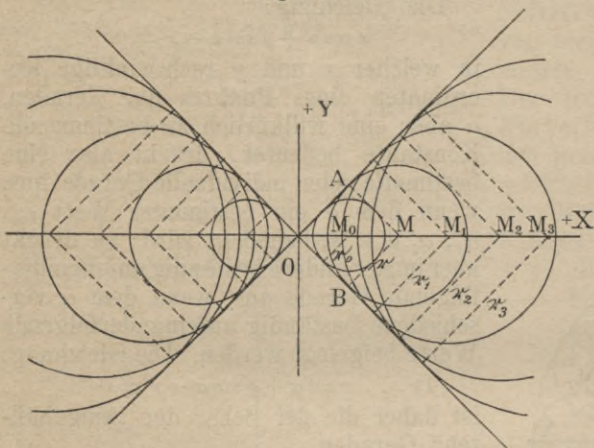
$$3) \;.\;.\;.\; \left(x - \frac{r}{m}\right)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

als Gleichung der Schar der eingehüllten Kreise zu erkennen.

Die Rolle, welche die Grösse α in der Gleichung 1) spielt, hat in der zweiten die Grösse ξ und in der dritten die Grösse r; α, ξ und r sind die Parameter derselben; alle drei Gleichungen lassen sich gemeinschaftlich in der Form:

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

Figur 131.



beziehungsweise:

$$F(x, y, \xi) = 0$$

und $$F(x, y, r) = 0$$

darstellen.

Wie in den angeführten Beispielen kommt nun in der Gleichung jeder ebenen Kurve ausser den Koordinaten x, y eines beliebigen Kurvenpunktes gewöhnlich noch eine konstante Grösse, ein sogen. Parameter — er heisse von nun an $\varkappa$ — vor, der die Grösse, Gestalt oder Lage der Kurve bestimmt; wir geben daher die Gleichung der Kurvenschar in der Form:

$$4) \ldots F(x, y, \varkappa) = 0.$$

$\varkappa$ bedeutet in derselben eine beliebig zu bestimmende Konstante; geben wir ihr bestimmte Werte $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ u. s. w., so geben

$$F(x, y, \varkappa_0) = 0,$$
$$F(x, y, \varkappa_1) = 0,$$
$$F(x, y, \varkappa_2) = 0$$

bestimmte individuelle Kurven C_0, C_1, C_2 u. s. w.

Lassen wir $\varkappa$ beständig aufeinanderfolgende Werte, so drückt die Gleich. 4) immer wieder andere beständig aufeinanderfolgende Kurven aus, kurz:

$F(x, y, \varkappa) = 0$ gibt die Schar der eingehüllten Kurven.

Frage 106. Wie gewinnt man aus der Gleichung:

$$F(x, y, \varkappa) = 0$$

der Schar der eingehüllten Kurve die Gleichung der einhüllenden Kurve?

Antwort. In dem ersten Beispiel, der Geraden mit konstantem Abstand r von O (siehe Frage 107 und 105), bedeute α irgend einen individuellen Wert des Parameters, so dass die Gleichung:

$$1) \ldots x \cos\alpha + y \sin\alpha - r = 0$$

die Gleichung einer bestimmten Geraden g vorstellt. Bedeutet $d\alpha$ eine sehr kleine Grösse, so gibt $\alpha - d\alpha$ eine neue Gerade g_0 mit der Gleichung:

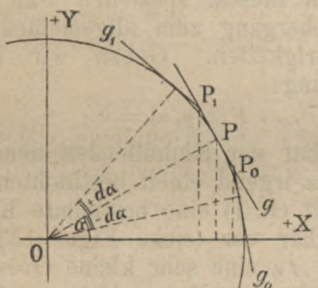
$$2) \ldots x \cos(\alpha - d\alpha) + y \sin(\alpha - d\alpha) - r = 0,$$

welche der Geraden g unmittelbar vorangehen und ihr sehr nahe liegen muss; ebenso liefert dann $\alpha + d\alpha$ eine dritte Gerade g_1 mit der Gleichung:

$$3) \ldots x \cos(\alpha + d\alpha) + y \sin(\alpha + d\alpha) - r = 0,$$

welche unmittelbar auf g folgen wird. Dadurch erhalten wir auf g den Schnittpunkt P_0 zwischen g_0 und g, und den Schnittpunkt P_1 zwischen g und g_1. Zwischen beiden liegt dann auf g der Punkt P, in welchem g von der Einhüllenden berührt wird (siehe Figur 132). Lassen wir g_0 sich gegen oben drehen, so nähert sich P_0 dem Punkt P, der von P_0 in dem Augenblick des Zusammenfallens von g_0 mit g erreicht wird; drehen wir ebenso g_1 nach unten, so findet ebenso eine Annäherung von P_1 an P statt, und P_1 fällt mit P zusammen, sobald g_1 in die Lage g gekommen ist.

Figur 132.



Die Koordinaten x_0, y_0 von P_0 genügen den beiden Gleichungen:

$$x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - r = 0$$

und

$$x_0 \cos(\alpha - d\alpha) + y_0 \sin(\alpha - d\alpha) - r = 0;$$

daher auch der dritten Gleichung:

$$4) \ldots \frac{[x_0 \cos(\alpha - d\alpha) + y_0 \sin(\alpha - d\alpha) - r] - [x_0 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - r]}{-d\alpha} = 0.$$

In gleicher Art erhalten wir für die Koordinaten x_1, y_1 des Punktes P_1 die drei Gleichungen:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - r = 0,$$

$$x_1 \cos(\alpha + d\alpha) + y_1 \sin(\alpha + d\alpha) - r = 0$$

und

$$5) \ldots \frac{[x_1 \cos(\alpha + d\alpha) + y_1 \sin(\alpha + d\alpha) - r] - [x_1 \cos\alpha + y_1 \sin x - r]}{d\alpha} = 0.$$

Lassen wir nun $d\alpha$ zu Null werden, so geht g_0 in g, P_0 in P, x_0, y_0 in x, y über; ferner g_1 in g, P_1 in P, x_1, y_1 in x, y; die Gleichungen 4) und 3) verwandeln sich aber gleichzeitig in die Gleichung:

$$6) \ldots \frac{\partial(x \cos\alpha + y \sin\alpha - r)}{\partial\alpha} = 0.$$

Die Koordinaten x, y des Berührungspunktes P müssen hiernach nicht nur die gegebene Gleichung:

$$1) \ldots x \cos\alpha + y \sin\alpha - r = 0,$$

sondern auch noch die Gleichung:

$$6^*) \ldots -x \sin\alpha + y \cos\alpha = 0$$

befriedigen. Aus den letzteren können wir den Parameter α herausschaffen durch Quadrierung und Addition von Gl. 1) und 6*); dies gibt dann:

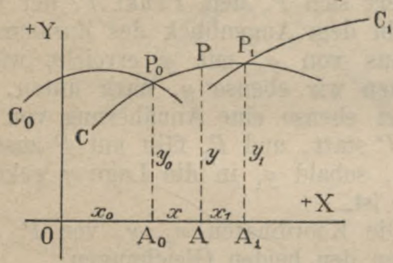
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Dieser Gleichung sind die Koordinaten x, y des Berührungspunktes unterworfen; sie ist daher die des „einhüllenden" Kreises.

Nach diesem speziellen Fall macht der Uebergang zum allgemeinen keine Schwierigkeiten. Geben wir in der Gleichung:

$$1) \ldots F(x, y, \varkappa) = 0$$

Figur 133.



der Schar der Einhüllenden dem Parameter $\varkappa$ irgend einen bestimmten Wert, so stellt Gl. 1) eine bestimmte Kurve C der Schar vor (siehe Figur 133). Ist weiter $\Delta\varkappa$ eine sehr kleine Grösse, so entspricht dem Parameter $\varkappa - \Delta\varkappa$ eine Kurve C_0, die C unmittelbar vorangeht und ihr sehr nahe liegen muss; ihre Gleichung lautet:

$$2) \ldots F(x, y, \varkappa - \Delta\varkappa) = 0.$$

Der Parameter $\varkappa + \Delta\varkappa$ liefert dann eine dritte Kurve C_1, die unmittelbar auf C folgen wird und dargestellt wird durch:

$$3) \ldots F(x, y, \varkappa + \Delta\varkappa) = 0.$$

C_0 schneide C in P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0; dann genügen dieselben den zwei Gleichungen:

$$F(x_0, y_0, \varkappa) = 0,$$
$$F(x_0, y_0, \varkappa - \Delta\varkappa) = 0$$

und daher auch:

$$4) \ldots \frac{F(x_0, y_0, \varkappa - \Delta\varkappa) - F(x_0, y_0, \varkappa)}{-\Delta\varkappa} = 0.$$

Ferner werde C von C_1 im Punkt P_1 geschnitten; seine Koordinaten seien x_1, y_1; diese sind an die zwei Gleichungen gebunden:

$$F(x_1, y_1, \varkappa) = 0,$$
$$F(x_1, y_1, \varkappa + \Delta\varkappa) = 0$$

und somit auch an:

$$5) \ldots \frac{F(x_1, y_1, \varkappa + \Delta\varkappa) - F(x_1, y_1, \varkappa)}{\Delta\varkappa} = 0.$$

Wenn wir nun $\Delta\varkappa$ gegen Null abnehmen lassen, so nähert sich C_0 der Kurve C, und P_0 rückt auf C weiter, etwa gegen P_1 rechts; ebenso kommt C_1 von rechts der Lage C immer näher; P_1 rückt auf C gegen P_0 zu. Im Augenblick des Verschwindens von $\Delta\varkappa$ sind sowohl C_0 als C_1 in die Lage von C gelangt, und P_0 und P_1 haben hierbei eine Grenzlage P auf C erreicht; der letztere muss dann auch der einhüllenden Kurve angehören, weil er der Berührungspunkt beider ist. Heissen seine Koordinaten x, y, so ist zu beachten, dass sie einmal der Gleichung 1) genügen müssen; ferner der Gleichung, welche aus Gl. 4) und 5) hervorgeht für $\Delta\varkappa = 0$; diese lautet aber für beide:

Erkl. 115. Diese Methode der Bestimmung der Einhüllenden fand Johann Bernoulli (1647 bis 1748).

$$6) \ldots \frac{\partial F(x, y, \varkappa)}{\partial \varkappa} = 0.$$

Durch Elimination von x aus Gl. 1) und 6) folgt dann eine Gleichung zwischen x und y allein, und die letztere ist die der gesuchten Einhüllenden.

Wir fassen dies zusammen in dem

Satz. Ist $F(x, y, \varkappa) = 0$ die Gleichung einer Kurvenschar mit dem Parameter $\varkappa$, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Kurve durch die Elimination von $\varkappa$ aus den beiden Gleichungen:

$$F(x, y, \varkappa) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, \varkappa)}{\partial \varkappa} = 0.$$

Aufgabe 381. Bestimme die Gleichung der Einhüllenden der Kreisschar:

$$(x - \varkappa)^2 + \left(y - \sqrt{R^2 - \varkappa^2}\right)^2 - r^2 = 0.$$

(Siehe Figur 130.)

Auflösung. Wir haben in dieser Aufgabe unser obiges zweites Beispiel.

Aus:

$$1) \ldots F(x, y, \varkappa) = (x - \varkappa)^2 + \left(y - \sqrt{R^2 - \varkappa^2}\right)^2 - r^2 = 0$$

bilden wir:

$$2) \ldots \frac{\partial F(x, y, \varkappa)}{\partial \varkappa} = -2(x - \varkappa) + 2\left(y - \sqrt{R^2 - \varkappa^2}\right) \frac{\varkappa}{\sqrt{R^2 - \varkappa^2}} = 0.$$

Zur Elimination von $\varkappa$ setzen wir aus Gleichung 2):

$$3) \ldots x - \varkappa = \frac{\varkappa\left(y - \sqrt{R^2 - \varkappa^2}\right)}{\sqrt{R^2 - \varkappa^2}};$$

dies in Gleichung 1) eingesetzt, ergibt:

$$4) \ldots y - \sqrt{R^2 - \varkappa^2} = \frac{\pm r}{R} \sqrt{R^2 - \varkappa^2}$$

und daher ist:

$$5) \ldots y = \frac{R \pm r}{R} \sqrt{R^2 - \varkappa^2}.$$

Wird Gl. 4) in Gl. 3) eingesetzt, so folgt:

$$6) \ldots x = \frac{\varkappa (R \pm r)}{R}.$$

Gl. 5) und 6) quadriert und addiert liefern:

$$7) \ldots x^2 + y^2 = (R \pm r)^2.$$

Dies ist nun die Gleichung der „Einhüllenden"; dieselbe besteht aus den beiden Kreisen:

$$x^2 + y^2 = (R + r)^2 \text{ und } x^2 + y^2 = (R - r)^2.$$

Aufgabe 382. Ebenso der Kreisschar:

$$\left(x - \frac{\varkappa}{m}\right)^2 + y^2 - \varkappa^2 = 0.$$

(Siehe Figur 131.)

Auflösung. Hier liegt unser drittes Beispiel vor (siehe Frage 104 und 105).

Die Gleichung:

$$1) \ldots F(x, y, \varkappa) = \left(x - \frac{\varkappa}{m}\right)^2 + y^2 - \varkappa^2 = 0$$

gibt:

$$2) \ldots \frac{\partial F(x, y, \varkappa)}{\partial \varkappa} = \left(x - \frac{\varkappa}{m}\right) \cdot \frac{1}{m} + \varkappa = 0.$$

Aus Gleichung 2) folgt:

$$x = \frac{m \varkappa}{1 - m^2};$$

dies in Gl. 1) eingesetzt, gibt als Gleichung der Einhüllenden:

$$y = \pm \frac{m x}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

Diese setzt sich demnach zusammen aus den beiden Geraden:

$$y = + \frac{m x}{\sqrt{1 - m^2}} \text{ und } y = - \frac{m x}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

Aufgabe 383. Eine gerade Linie von gegebener Länge a bewegt sich so, dass ihre Endpunkte auf zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden liegen. Man soll die Kurve finden, welche von jener Geraden berührt wird.

(Siehe Aufgabe 111 und Figur 134.)

Auflösung. Wir wählen die beiden festen Geraden als Achsen eines Koordinatensystems XOY wie in Figur 40. UT sei eine Lage der sich bewegenden Geraden von der Länge a und τ der Winkel, den sie mit der positiven Abscissenachse bildet; dann ist:

$$OT = - a \cos\tau \text{ und } OU = a \sin\tau.$$

Die Gleichung der Geraden TU lautet aber allgemein:

$$\frac{x}{OT} + \frac{y}{OU} = 1,$$

also hier:

$$\frac{x}{- a \cos\tau} + \frac{y}{a \sin\tau} - 1 = 0$$

oder wir haben:

$$1) \ldots F(x, y, \tau) = - x \sin\tau + y \cos\tau - a \sin\tau \cos\tau = 0.$$

In dieser Gleichung ist τ der veränderliche Parameter, d. h. die Grösse, welche wir seither $\varkappa$ genannt haben; hiernach müssen wir bilden:

$$2) \ldots \frac{\partial F(x, y, \tau)}{\partial \tau} = -x \cos\tau - y \sin\tau - a(\cos^2\tau - \sin^2\tau) = 0,$$

und nun muss τ aus Gl. 1) und 2) herausgeschafft werden. — Wird Gl. 1) mit $\sin\tau$ und Gl. 2) mit $\cos\tau$ erweitert, so liefert die nachfolgende Addition:

$$3) \ldots x = -a \cos^3\tau.$$

Wird dagegen Gl. 1) mit $\cos\tau$ und Gl. 2) mit $\sin\tau$ erweitert, so ergibt die nachfolgende Subtraktion:

$$4) \ldots y = a \sin^3\tau.$$

Aus Gl. 3) folgt:

$$\cos^2\tau = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}},$$

aus Gl. 4) folgt:

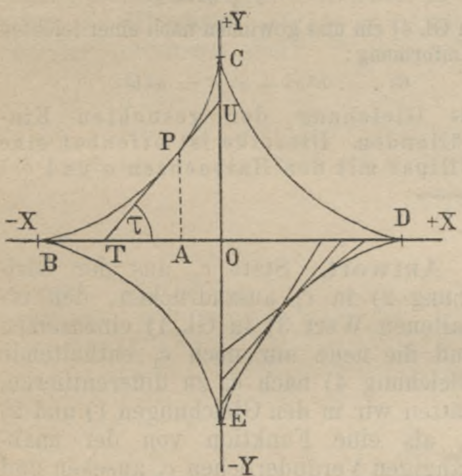
$$\sin^2\tau = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}};$$

daher lautet die Gleichung der eingehüllten Kurve:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Wir haben diese Kurve in Erkl. 25 Astroide genannt; dort erschien sie als Hypocykloide, während sie hier als die Einhüllende einer geraden Linie auftritt.

Figur 134.



Aufgabe 384. Im Koordinatensystem XOY sind die beiden parallelen Geraden $x = +a$ und $x = -a$ gezogen. Eine gerade Linie g bewegt sich so, dass $AB \cdot A'B'$ gleich einer konstanten positiven Grösse b^2 ist. Es soll die Kurve gefunden werden, welche von g eingehüllt wird.

(Siehe Figur 135.)

Auflösung. Geben wir die Gleichung der Geraden in der Form:

$$y = c_1 x + c_2$$

oder:

$$1) \ldots c_1 x - y + c_2 = 0,$$

so wird:

$$AB = c_1 a + c_2$$

und

$$A'B' = -c_1 a + c_2,$$

also muss wegen $AB \cdot A'B' = b^2$ hier:

$$2) \ldots c_2^2 - c_1^2 a^2 - b^2 = 0$$

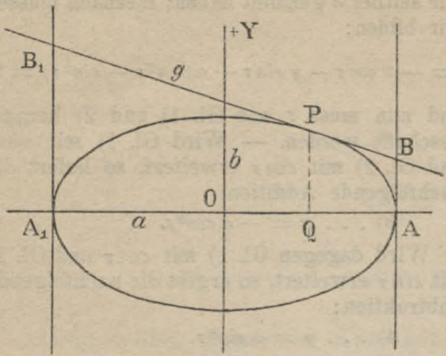
sein. Aus dieser Gleichung können wir c_2 in c_1 ausdrücken, also setzen:

$$3) \ldots c_2 = \pm\sqrt{b^2 + c_1^2 a^2}$$

und diesen Wert einführen in die Gleich. 1); dadurch gewinnt die letztere die Form:

$$4) \ldots c_1 x - y \pm \sqrt{b^2 + c_1^2 a^2} = 0 = F(x, y, c_1).$$

Figur 135.



Sie enthält den Parameter c_1; demnach haben wir zu bilden:

$$\frac{\partial F(x, y, c_1)}{\partial c_1} = 0;$$

dies gibt:

$$5) \ldots x \pm \frac{c_1 a^2}{\sqrt{b^2 + c_1^2 a^2}} = 0.$$

Zur Elimination von c_1 aus Gl. 4) und 5) setzen wir aus Gl. 5):

$$c_1 = \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

in Gl. 4) ein und gewinnen nach einer leichten Umformung:

$$6) \ldots b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

als Gleichung der gesuchten Einhüllenden. Dieselbe ist offenbar eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.

Frage 107. Wie hätte sich der Gang der Auflösung der vorigen Aufgabe abändern lassen?

Antwort. Statt c_2 aus der Gleichung 2) in c_1 auszudrücken, den erhaltenen Wert 3) in Gl. 1) einzusetzen und die neue nur noch c_1 enthaltende Gleichung 4) nach c_1 zu differentiieren, hätten wir in den Gleichungen 1) und 2) c_2 als eine Funktion von der unabhängigen Veränderlichen c_1 ansehen und daher diese beiden Gleichungen nach c_1 differentiieren können. Hierbei würde sich ergeben:

$$7) \ldots \frac{\partial (c_1 x - y + c_2)}{\partial c_1} = x + \frac{dc_2}{dc_1} = 0,$$

$$8) \ldots \frac{\partial (c_2^2 - c_1^2 a^2 - b^2)}{\partial c_1} = c_2 \cdot \frac{dc_2}{dc_1} - a^2 c_1 = 0.$$

Aus Gl. 7) und 8) die Grösse $\frac{dc_2}{dc_1}$ herausgeschafft, ergibt:

$$9) \ldots c_2 x + c_1 a^2 = 0.$$

Nun liegen die drei Gleichungen 1), 2) und 9) vor, die alle c_1 und c_2 enthalten. Bestimmen wir aus Gl. 1) und 9) die Werte von c_1 und c_2 und setzen sie in Gl. 2) ein, so ergibt sich wie vorhin die gesuchte Gleichung 6).

Hier fügen wir die Bemerkung bei, dass die Gleichung 1) der Geraden zwei Parameter c_1 und c_2 enthalten hat, die aber nicht von einander unabhängig, sondern durch die durch die Gleichung 2) gegebene Bedingung verknüpft gewesen sind. In der ersten Lösung wurde der zweite Parameter c_2 im ersten c_1 ausgedrückt und durch Substitution entfernt; in der zweiten Lösung wurde c_2 als Funktion von c_1 behandelt und erst nach der Differentiation herausgeschafft. Dies führt uns zur allgemeinen

---

Frage 108. Wie gewinnt man aus der Gleichung $F(x, y, \varkappa, \lambda) = 0$ einer Kurvenschar die Gleichung der Einhüllenden, wenn die beiden Parameter $\varkappa, \lambda$ durch die Gleichung $\varphi(\varkappa, \lambda) = 0$ miteinander verbunden sind?

Antwort. Man könnte λ aus der Gleichung:

$$2) \ldots \varphi(\varkappa, \lambda) = 0$$

in $\varkappa$ ausdrücken und den erhaltenen Wert 3):

$$\lambda = \psi(\varkappa)$$

in die Gleichung:

$$1) \ldots F(x, y, \varkappa, \lambda) = 0$$

einsetzen. Dies würde ergeben:

$$4) \ldots F[x, y, \varkappa, \psi(\varkappa)] = 0.$$

Nun wäre zu bilden:

$$5) \ldots \frac{\partial F[x, y, \varkappa, \psi(\varkappa)]}{\partial \varkappa} = 0.$$

Die Elimination von $\varkappa$ aus Gl. 5) und 1) führte dann zur gesuchten Gleichung 6) der Einhüllenden.

Statt diesen Weg einzuschlagen, beachten wir die Aenderung, welche λ erleidet infolge einer Aenderung von $\varkappa$. Da λ nur von $\varkappa$ abhängt, so ergibt die Gleichung 1):

$$7) \ldots \frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} = 0.$$

Andererseits ist nach Gleichung 2):

$$8) \ldots \frac{d\lambda}{d\varkappa} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}}$$

(siehe Differentialrechnung II. Teil, Seite 232 ff.); wenn wir den Wert von $\frac{d\lambda}{d\varkappa}$ aus Gl. 8) in Gl. 7) einsetzen, erhalten wir:

$$9) \ldots \frac{\partial F}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} = 0.$$

Aus Gl. 1), 2) und 9) können wir jetzt $\varkappa$ und λ eliminieren und gelangen dann wieder zur Gleichung 6) der einhüllenden Kurve. Wir zeigen die Anwendung dieser Methode nochmals an folgenden Beispielen:

Aufgabe 385. Eine Kurve ist gegeben durch ihre Gleichung:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$$

in den Linienkoordinaten u und v; es soll die Gleichung der Kurve in den Cartesischen Punktkoordinaten x und y gefunden werden.

Erkl. 116. Im Koordinatensystem XOY ist die Lage einer Geraden bestimmt durch ihre Abschnitte OS_1 und OS_2 auf den Koordinatenachsen, also auch durch die reciproken Werte der Längenzahlen dieser Strecken:

$$u = \frac{1}{OS_1} \text{ und } v = \frac{1}{OS_2}.$$

u und v nennt man die Koordinaten der Geraden oder kurzweg die Linienkoordinaten.

Liegt eine Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ vor und gibt man der Veränderlichen u eine Reihe aufeinanderfolgender Werte $u_1, u_2, u_3 \cdots$ und bestimmt gemäss der Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ die zugehörigen Werte $v_1, v_2, v_1 \cdots$, so bilden die Geraden $g_1, g_2, g_3 \cdots$, welche $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \cdots$ zu Koordinaten haben, in dieser Aufeinanderfolge einen polygonalen Zug P_1, P_2, P_3, P_4, dessen Eckpunkte die Schnittpunkte zweier aufeinanderfolgenden Geraden der Reihe $g_1, g_2, g_3 \cdots$ sind (siehe Figur 136).

Denkt man sich nun die Unterschiede $u_2 - u_1, u_3 - u_2, u_4 - u_3 \cdots$ immer kleiner, so werden auch die zugehörigen $v_1, v_2, v_3 \cdots$ immer dichter aufeinander folgen, die Zahl der Geraden g wird immer grösser und die Punkte P_1, P_2, P_3 erhalten immer kleinere Abstände. Geht man nun zur Grenze über und lässt u stetig wachsen, so ändert sich im allgemeinen auch v stetig; daher ändert sich dann auch die Gerade g stetig; die Punkte $P_1, P_2, P_3 \cdots$ folgen dann kontinuierlich aufeinander und bilden eine Kurve, während die Geraden g zu Tangenten dieser Kurve werden.

Die Geraden g, deren Koordinaten u und v einer Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ genügen, umhüllen daher eine Kurve. Die Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ bezeichnet man als die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten.

Soll also eine Gerade $ux + vy - 1 = 0$ Tangente der Kurve $\varphi(u, v) = 0$ sein, so müssen ihre Koordinaten u, v die Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ der Kurve befriedigen.

Im vorliegenden Beispiel stellt $a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0$ die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b in Linienkoordinaten dar; die Gleichung derselben Ellipse in Punktkoordinaten lautet wie eben gefunden:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 1 = 0.$$

Näheres über Linienkoordinaten siehe Cranz, Analytische Geometrie.

Auflösung. Die Gleichung der geraden Linie mit den Linienkoordinaten u und v lautet:

$$1) \ldots ux + vy - 1 = 0.$$

Bewegt sich diese Gerade derart, dass hierbei u und v der Bedingung:

$$2) \ldots a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0$$

Genüge leisten, so hüllt sie hierbei die gegebene Kurve ein. Wir erhalten daher die Gleichung derselben in den Punktkoordinaten x und y, wenn wir u und v als die beiden Parameter annehmen, welche durch die Gleichung 2) verknüpft sind, und im übrigen die soeben gefundene Methode anwenden.

Aus Gleichung 1) folgt:

$$x + y \cdot \frac{dv}{du} = 0;$$

ebenso aus Gleichung 2):

$$a^2u + b^2v \cdot \frac{dv}{du} = 0.$$

Die Elimination von $\frac{dv}{du}$ gibt jetzt:

$$3) \ldots b^2vx - a^2uy = 0.$$

Hieraus bilden wir:

$$4) \ldots v = \frac{a^2uy}{b^2x}$$

und setzen es in Gleichung 1) ein; dadurch erhalten wir:

$$5) \ldots u = \frac{b^2x}{b^2x + a^2y}$$

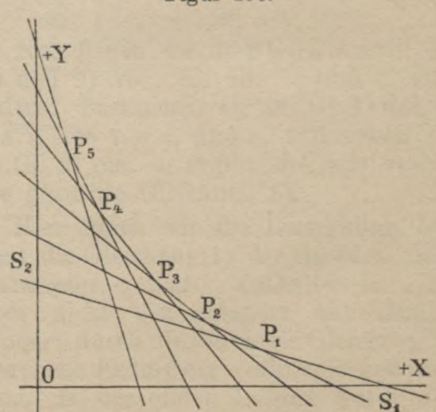
und aus Gleichung 4) dann:

$$6) \ldots v = \frac{a^2y}{b^2x + a^2y}.$$

Gl. 5) und 6) in Gl. 2) eingeführt, liefert als die gesuchte Gleichung:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 1 = 0.$$

Figur 136.



Frage 109. Wie lässt sich hiernach von einer Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ einer Kurve in Linienkoordinaten zur Gleichung derselben Kurve in Punktkoordinaten übergehen?

Antwort. Aus den vier Gleichungen:

$$ux + vy - 1 = 0,$$
$$\varphi(u, v) = 0,$$
$$x + y\frac{dv}{du} = 0$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} = 0$$

werden die drei Grössen x, y und $\frac{dv}{du}$ herausgeschafft; die erhaltene Gleichung gibt dann die Kurve in den Punktkoordinaten x und y.

Aufgabe 386. Es soll aus der Gleichung:

$$y^2 - 2px = 0$$

der Parabel in Punktkoordinaten die Gleichung der nämlichen Kurve in Linienkoordinaten gefunden werden.

Auflösung. Wir geben die Gleichung der Geraden in der Normalform:

$$1) \ldots ux + vy - 1 = 0$$

und betrachten in derselben u und v als die Veränderlichen, dagegen x und y als zwei Parameter, die durch die Gleichung:

$$2) \ldots y^2 - 2px = 0$$

verknüpft sind; es sind nämlich x, y die Koordinaten des Berührungspunktes der Geraden $ux + vy - 1 = 0$ auf der Parabel. Unsere Theorie fordert nun, wenn:

$$F(u, v, x, y) = 0$$

die Gleichung der Tangente und $\psi(x, y) = 0$ die Gleichung der gegebenen Kurve in Punktkoordinaten sind, dass:

$$\frac{\partial F(u, v, x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(u, v, x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

und ebenso:

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

wird; dies gibt hier:

$$\frac{\partial (ux + vy - 1)}{\partial x} + \frac{\partial (ux + vy - 1)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

und

$$\frac{\partial (y^2 - 2px)}{\partial x} + \frac{\partial (y^2 - 2px)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

oder ausgeführt:

$$3) \ldots u + v \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

und

$$4) \ldots y\frac{dy}{dx} - p = 0.$$

Die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus Gl. 3) und 4) ergibt:

$$5) \ldots u + \frac{p}{y} v = 0.$$

Jetzt müssen x und y aus den drei Gleichungen 1), 2) und 5) herausgeschafft werden. Aus Gl. 5) bilden wir:

$$6) \ldots y = -\frac{pv}{u};$$

diesen Wert in Gl. 1) verwendet, folgt:

$$7) \ldots x = \frac{u + pv^2}{u^2}.$$

Gl. 6) und 7) in Gl. 2) eingesetzt, erhalten wir als die gesuchte **Gleichung der Parabel in Linienkoordinaten:**

$$pv^2 + 2u = 0.$$

Frage 110. Wie lässt sich demnach aus der Gleichung $\psi(x, y) = 0$ einer Kurve in Punktkoordinaten die Gleichung derselben Kurve in Linienkoordinaten gewinnen?

Antwort. Mittels der vier Gleichungen:

$$ux + vy - 1 = 0,$$
$$\psi(x, y) = 0,$$
$$u + v \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

und
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

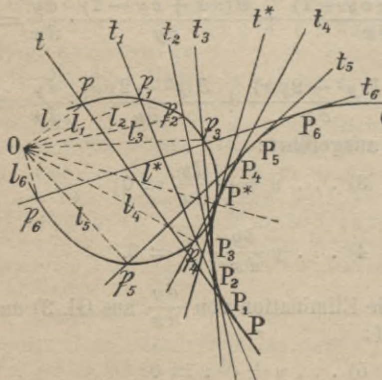
schafft man die drei Grössen x, y und $\frac{dy}{dx}$ heraus; die hierbei auftretende Gleichung in u und v ist dann die gesuchte Kurvengleichung in Linienkoordinaten.

---

b) Anwendung auf die Fusspunktkurven.

Frage 111. Was ist unter einer **Fusspunktkurve** einer ebenen Kurve zu verstehen?

Figur 137.



Antwort. Fällt man von einem **festen** Punkt O aus Lote auf sämtliche Tangenten einer ebenen Kurve, so bilden die Fusspunkte dieser Lote eine neue Kurve, welche die **Fusspunktkurve** der gegebenen Kurve für den Punkt O als **Pol** genannt wird. Fällt man z. B. vom Brennpunkt einer Parabel die Lote auf die Tangenten, so liegen alle Fusspunkte auf der Tangente im Scheitel der Parabel; die Fusspunktkurve der letzteren für den Brennpunkt als Pol ist demnach eine gerade Linie.

Die Fusspunkte der Lote aus einem Brennpunkt einer Ellipse auf die Tangenten liegen alle auf dem Kreis, der über der grossen Achse als Durchmesser gezeichnet werden kann; dieser letztere bildet also die Fusspunktkurve der Ellipse für den Brennpunkt als Pol.

Erkl. 117. In Figur 137 sind auf der Kurve C die Punkte P, P_1, P_2, P_3, P_4 beliebig gewählt; in diesen Punkten sind an C die Tangenten t, t_1, $t_2 \cdots$ gelegt und von O auf die letzteren die Lote l, l_1, $l_2 \cdots$ gefällt worden. Die Fusspunkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3 \cdots$ bestimmen die Fusspunktkurve der Kurve C für den Pol O.

Da der Fusspunkt P^* der Normalen l^*, welche von O an C möglich ist, auch der Fusspunktkurve angehört, so ist leicht ersichtlich, dass die letztere die Kurve in P^* berühren muss.

Frage 112. Wie kann aus der Gleichung einer gegebenen Kurve und den Koordinaten eines gegebenen Punktes als Pol die Gleichung der zugehörigen Fusspunkte hergeleitet werden?

Antwort. Wir zerlegen den Anfang des rechtwinkligen Koordinatensystems in den gegebenen Pol O, so dass für diesen:

$$x = 0 \text{ und } y = 0$$

ist; die Stammkurve besitze in diesem Koordinatensystem die Gleichung:

$$F(x, y) = 0.$$

Ein beliebiger Punkt P auf ihr besitze die Koordinaten x und y, so dass:

$$1) \ldots F(x, y) = 0$$

sein muss. Die Tangente t in P an die Stammkurve hat dann die Gleichung:

$$2) \ldots Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

[siehe Seite 1, Formel 1)];

die Normale n in P an diese Kurve hat die Gleichung:

$$X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0$$

[siehe Seite 47, Formel 2)]

und die parallele Gerade hierzu durch O, d. h. das Lot l aus dem Koordinatenanfang auf die Tangente t, hat dann die Gleichung:

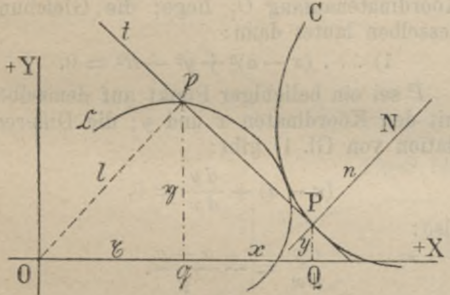
$$3) \ldots X + \frac{dy}{dx} Y = 0.$$

Werden die Koordinaten des Fusspunktes $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnet, so müssen dieselben, weil $\mathfrak{P}$ auf t liegt, der Gleichung 2) genügen, und weil $\mathfrak{P}$ auch auf l liegt, müssen sie auch die Gleichung 3) befriedigen. Hiernach berechnen sich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus:

$$4) \ldots \mathfrak{y} - y - \frac{dy}{dx}(\mathfrak{x} - x) = 0,$$

$$5) \ldots \mathfrak{x} + \frac{dy}{dx}\mathfrak{y} = 0.$$

Figur 138.



Mittels der gegebenen Gleichung 1):
$$F(x, y) = 0$$
kann weiter x und y herausgeschafft werden; die übrigbleibende Gleichung zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestimmt dann die Fusspunktkurve.

Für die Koordinaten $\mathfrak{O}\mathfrak{Q} = \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{y}$ des Fusspunktes $\mathfrak{P}$ selbst geben die Gleichungen 4) und 5) die Ausdrücke:

$$6) \ldots \mathfrak{x} = -\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

und

$$7) \ldots \mathfrak{y} = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Wir geben von dieser Herleitung der Fusspunktsgleichung zunächst folgendes Beispiel.

Aufgabe 387. Die Gleichung der Fusspunktkurve eines Kreises aufzustellen.

Erkl. 118. In Figur 139 ist O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises vom Halbmesser $OJ = OG = R$; ferner sei O_1 der Punkt, von welchem die Lote auf die Tangenten zu fällen sind. Der Punkt P auf dem Kreis hat in dem rechtwinkligen Koordinatensystem XO_1Y die Koordinaten $O_1Q = x$ und $QP = y$. In P ist die Kreistangente gezogen und auf sie ist von O_1 das Lot $O_1\mathfrak{P}$ gefällt, so dass $\mathfrak{P}$ ein Punkt der Fusspunktkurve ist mit den Koordinaten $O_1\mathfrak{Q} = \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{y}$. Die Kreispunkte P_1, P_2, G, P' und J ergeben dann weiter die Kurvenpunkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, G, $\mathfrak{P}'$, J. Die Kurve hat in O_1 einen Doppelpunkt und berührt den Kreis in G und J.

Erkl. 119. Wir ziehen im Kreis den beliebig gewählten Durchmesser POP' mit den Tangenten $P\mathfrak{P}$ und $P'\mathfrak{P}'$, dann ist $PP'\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$ ein Rechteck. Ziehen wir in diesem noch die Mittellinie ON, so wird $N\mathfrak{P} = N\mathfrak{P}' = R$; ferner liegt N auf dem Kreis über dem Durchmesser O_1O. Wir können daher die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ der gesuchten Fusspunktkurve auch dadurch herstellen, dass wir von O_1 aus einen beliebigen Strahl ON ziehen, der den durch O_1 gehenden Kreis über der Strecke $O_1O = a$ in N trifft, und dann von N aus nach links und rechts die Strecke R abtragen oder $N\mathfrak{P} = R$ und $N\mathfrak{P}' = R$ machen. Der geometrische Ort von $\mathfrak{P}$ stellt dann die gesuchte Kurve dar.

Auflösung. Wir wählen einen Kreis vom Halbmesser R, dessen Mittelpunkt O auf der Abscissenachse in der Entfernung a vom Koordinatenanfang O_1 liege; die Gleichung desselben lautet dann:

$$1) \ldots (x-a)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

P sei ein beliebiger Punkt auf demselben mit den Koordinaten x und y; die Differentiation von Gl. 1) gibt:

$$(x-a) + \frac{dy}{dx} = 0,$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y}.$$

Hierdurch gehen die obigen Gleichungen 4) und 5) über in:

$$4^*) \ldots \mathfrak{y} - y + \frac{x-a}{y}(\mathfrak{x} - x) = 0$$

und

$$5^*) \ldots \mathfrak{x} - \frac{x-a}{y} \cdot \mathfrak{y} = 0.$$

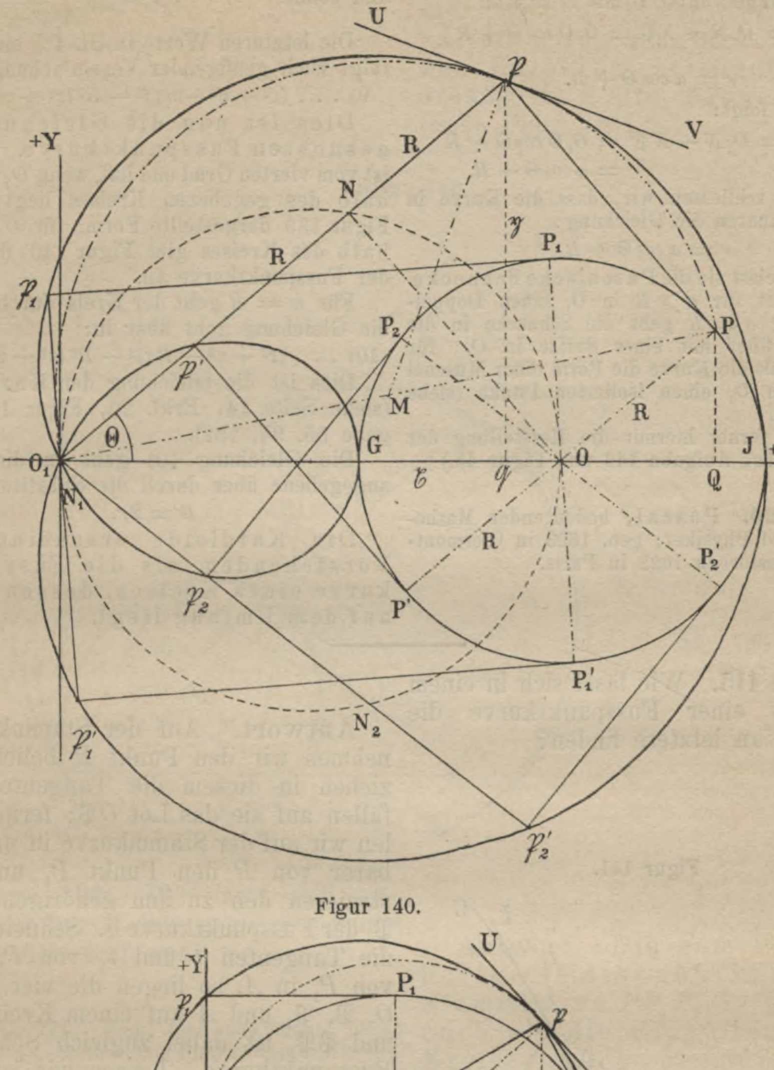
Unsere Aufgabe ist nun, aus Gl. 1), 4*) und 5*) die Grössen x und y zu eliminieren. Aus Gl. 5*) bilden wir:

$$6) \ldots y = \frac{(x-a)\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}};$$

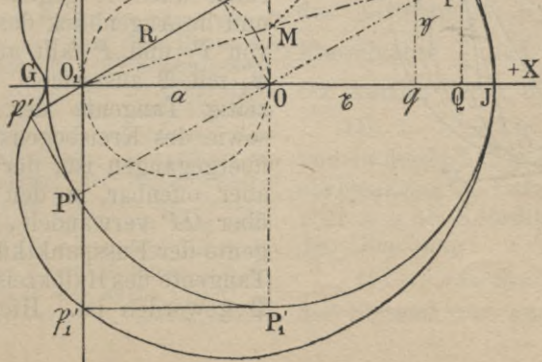
dies in Gl. 1) eingesetzt, liefert:

$$7) \ldots x - a = \pm \frac{R\mathfrak{x}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}}$$

Figur 139.



Figur 140.



Bezeichnen wir den Winkel $\mathfrak{P}O_1O$ mit Θ und die Länge von $O_1\mathfrak{P}$ mit r, so ist:

$$O_1\mathfrak{P} = O_1N + N\mathfrak{P} = O_1O\cos\Theta + R$$

oder:

$$r = a\cos\Theta + R.$$

Analog folgt:

$$O_1\mathfrak{P}' = O_1N - N\mathfrak{P}' = O_1O\cos\Theta - R$$
$$= a\cos\Theta - R.$$

Daraus schliessen wir, dass die Kurve in Polarkoordinaten die Gleichung:

$$r = a\cos\Theta \pm R$$

hat. Man heisst sie die Pascalsche Schnecke. Dieselbe hat für $a > R$ in O_1 einen Doppelpunkt; für $a = R$ geht die Schnecke in die Kardioide über mit einer Spitze in O_1; für $a < R$ erhält die Kurve die Form einer Muschel und hat in O_1 einen isolierten Punkt (siehe Figur 140).

(Vergl. ferner hiermit die Herstellung der Conchoide, Aufgabe 146 und Figur 45.)

Erkl. 120. Pascal, bedeutender Mathematiker und Physiker, geb. 1623 in Clermont-Ferrand, gestorben 1622 in Paris.

und somit: 8) . . . $y = \pm \dfrac{R\mathfrak{y}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}}$.

Die letzteren Werte in Gl. 4*) eingesetzt, folgt nach genügender Vereinfachung:

9) . . . $(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - a\mathfrak{x})^2 - R^2(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) = 0.$

Dies ist nun die Gleichung der gesuchten Fusspunktkurve. Dieselbe ist vom vierten Grad und hat, wenn O_1 ausserhalb des gegebenen Kreises liegt, die in Figur 139 dargestellte Form; für O_1 innerhalb des Kreises gibt Figur 140 die Form der Fusspunktkurve an.

Für $a = R$ geht der Kreis durch O_1 und die Gleichung geht über in:

10) . . . $(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - R\mathfrak{x})^2 - R^2(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) = 0.$

Dies ist die Gleichung der Kardioide (siehe Seite 14, Erkl. 20, Figur 16; Aufgabe 55, 97, 132).

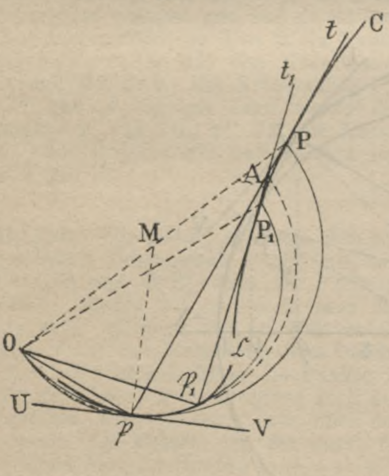
Die Gleichung 10) geht in die früher angegebene über durch die Substitution:

$$R = 2r.$$

Die Kardioide erscheint nach Vorstehendem als die Fusspunktkurve eines Kreises, dessen Pol O_1 auf dem Umfang liegt.

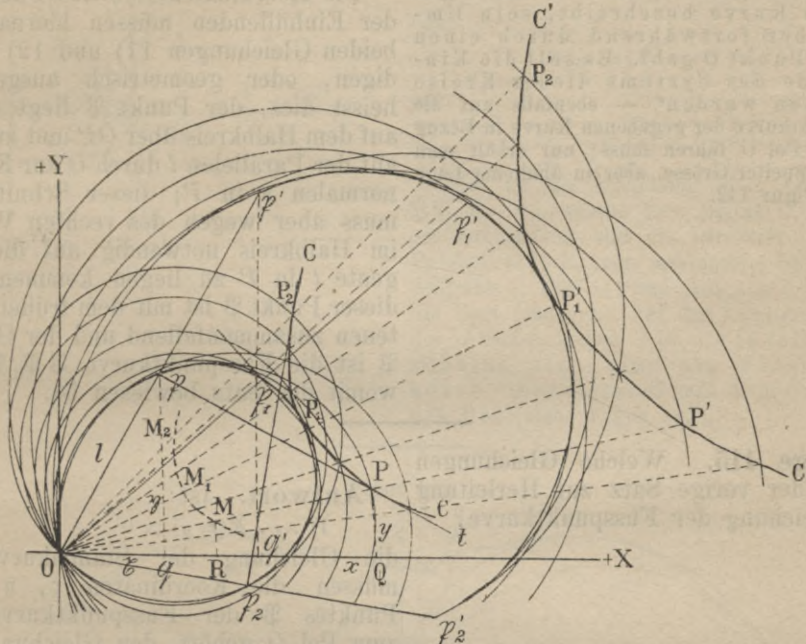
Frage 113. Wie lässt sich in einem Punkt $\mathfrak{P}$ einer Fusspunktkurve die Tangente an letztere finden?

Figur 141.



Antwort. Auf der Stammkurve C nehmen wir den Punkt P beliebig an, ziehen in diesem die Tangente t und fällen auf sie das Lot $O\mathfrak{P}$; ferner wählen wir auf der Stammkurve in unmittelbarer von P den Punkt P_1 und konstruieren den zu ihm gehörigen Punkt $\mathfrak{P}_1$ der Fusspunktkurve $\mathfrak{C}$. Schneiden sich die Tangenten t und t_1 von P, bezw. von P_1 in A, so liegen die vier Punkte O, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ und A auf einem Kreisbogen, und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ ist dabei zugleich Sehne der Fusspunktkurve. Lassen wir jetzt den Punkt P_1 sich dem Punkt P nähern, so rückt auch A gegen P, $\mathfrak{P}_1$ gegen $\mathfrak{P}$, und im Augenblick des Zusammenfallens von P_1 und P fällt auch A mit P und $\mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{P}$ zusammen, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ wird gleichzeitig Tangente der Fusspunktkurve, sowie des Kreisbogens, in den $OP\mathfrak{P}_1A$ übergegangen ist; der letztere hat sich aber offenbar in den Halbkreis $O\mathfrak{P}P$ über OP verwandelt, so dass die Tangente der Fusspunktkurve in $\mathfrak{P}$ zugleich Tangente des Halbkreises $O\mathfrak{P}P$ im Punkt $\mathfrak{P}$ geworden ist. Hieraus folgt, dass die Tangente im Fusspunkt $\mathfrak{P}$ an die Fusspunktkurve dadurch erhalten wird, dass man über OP den Halbkreis zeichnet und an diesen in $\mathfrak{P}$ die Tangente legt (siehe Figur 141).

Figur 142.



Frage 114. Wie lässt sich eine Fusspunktkurve einer gegebenen Kurve noch anders auffassen?

Erkl. 121. Zieht man von einem festen Punkt O aus nach einem Punkt P einer Kurve C den Radiusvektor $OP = r$ und verlängert den letzteren um sich selbst bis P', so dass:

$$OP' = 2\,OP \text{ oder } r' = 2r$$

ist, so beschreibt der Punkt P', wenn sich P auf der Kurve C bewegt, eine neue Kurve C', welche nach den Gesetzen der Geometrie zu C ähnlich und ähnlich liegend ist. Ist C ein Kreis, so muss auch C' ein Kreis sein (siehe Fig. 142).

Denken wir die vorhin angedeutete Konstruktion für die Figur 142 durchgeführt, so liefert die Verdoppelung der Radienvektoren für den Mittelpunkt M von OP den Punkt P selbst, für den Kreis um M mit dem Halbmesser OM einen Kreis um P mit dem Halbmesser OP; aus der Fusspunktkurve $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, welche die Einhüllende der Kreise um O ist, geht eine neue Kurve $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'$ hervor, welche

Antwort. Die zum Pol O gehörige Fusspunktkurve der Stammkurve $PP_1P_2\cdots$ erscheint auch als die Einhüllende aller Kreise, welche über den Durchmessern OP, OP_1, OP_2 u. s. w. gezeichnet werden können. Denn der Mittelpunkt M von OP hat die Koordinaten $\frac{x}{2}$ und $\frac{y}{2}$; dem Kreis über OP kommt daher die Gleichung zu:

$$11) \ldots X^2 + Y^2 - xX - yY = 0$$

und in dieser haben wir den Parameter y als Funktion des Parameters x anzusehen, weil x, y als Koordinaten des Punktes P der Gleichung:

$$1) \ldots F(x, y) = 0$$

der Stammkurve genügen müssen.

die Kreise um P einhüllen muss und zur ersteren $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ ähnlich ist und zu ihr ähnlich liegt; sie hat doppelte Dimensionen im Vergleich zur ersteren. Statt diese zu bestimmen, können wir auch die grosse Kurve aufsuchen und an ihr die Eigenschaften der Fusspunktkurve ermitteln.

Hiernach wird es verständlich, dass die Aufgabe: „Ein Kreis von veränderlichem Halbmesser bewegt sich so, dass sein Mittelpunkt P eine gegebene Kurve beschreibt, sein Umfang aber fortwährend durch einen festen Punkt O geht. Es soll die Einhüllende des Systems dieser Kreise gefunden werden" — ebenfalls auf die Fusspunktkurve der gegebenen Kurve in Bezug auf den Pol O führen muss; nur erhält man sie in doppelter Grösse, aber in ähnlicher Lage wie in Figur 142.

Die Differentiation von Gleichung 11) nach x ergibt:

$$12) \ldots X + Y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

(siehe Satz Seite 223).

Diese Gleichung ist dieselbe wie Gl. 3) in Frage 112, nämlich jene der Geraden l durch O parallel zur Normalen n in P.

Die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ des Punktes $\mathfrak{P}$ der Einhüllenden müssen hiernach die beiden Gleichungen 11) und 12) befriedigen, oder geometrisch ausgedrückt heisst dies, der Punkt $\mathfrak{P}$ liegt erstens auf dem Halbkreis über OP und zweitens auf der Parallelen l durch O zur Kurvennormalen n in P; dieser Schnittpunkt muss aber wegen des rechten Winkels im Halbkreis notwendig auf die Tangente t in P zu liegen kommen, oder dieser Punkt $\mathfrak{P}$ ist mit dem früher erhaltenen zusammenfallend und der Ort von $\mathfrak{P}$ ist die Fusspunktkurve $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots$, womit der Satz bewiesen ist.

Frage 115. Welche Gleichungen liefert der vorige Satz zur Herleitung der Gleichung der Fusspunktkurve?

Antwort. Ist:

$$1) \ldots F(x, y) = 0$$

die Gleichung der Stammkurve, so müssen die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ eines Punktes $\mathfrak{P}$ der Fusspunktkurve, die zum Pol O gehört, den Gleichungen:

$$2) \ldots \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - x\mathfrak{x} - y\mathfrak{y} = 0$$

und

$$3) \ldots \mathfrak{x} + \mathfrak{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

genügen. Die Elimination von x, y mittels dieser drei Gleichungen ergibt dann die Gleichung der Fusspunktkurve, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

Aufgabe 388. Die Fusspunktkurve der Parabel für den Scheitel als Pol zu bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung der Parabel:

$$1) \ldots y^2 - 2px = 0$$

folgt zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y};$$

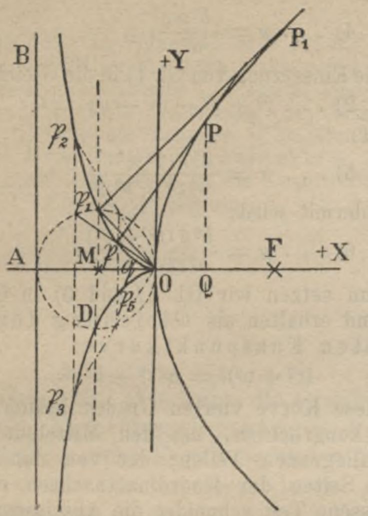
hiermit geht die obige Gleichung 3) über in:

$$3^*) \ldots \mathfrak{x} + \mathfrak{y} \cdot \frac{p}{y} = 0,$$

woraus:

$$4) \ldots y = -\frac{p\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$$

Figur 143.



sich ergibt. Dies in Gleich. 1) substituiert, erhalten wir:

$$5) \ldots x = \frac{p\mathfrak{y}^2}{2\mathfrak{x}^2}.$$

Gl. 4) und 5) in Gl. 2) eingesetzt, folgt:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \frac{p\mathfrak{y}^2}{2\mathfrak{x}} = 0$$

oder:

$$\mathfrak{x}^3 = \mathfrak{y}^2\left(-\mathfrak{x} - \frac{p}{2}\right)$$

oder:

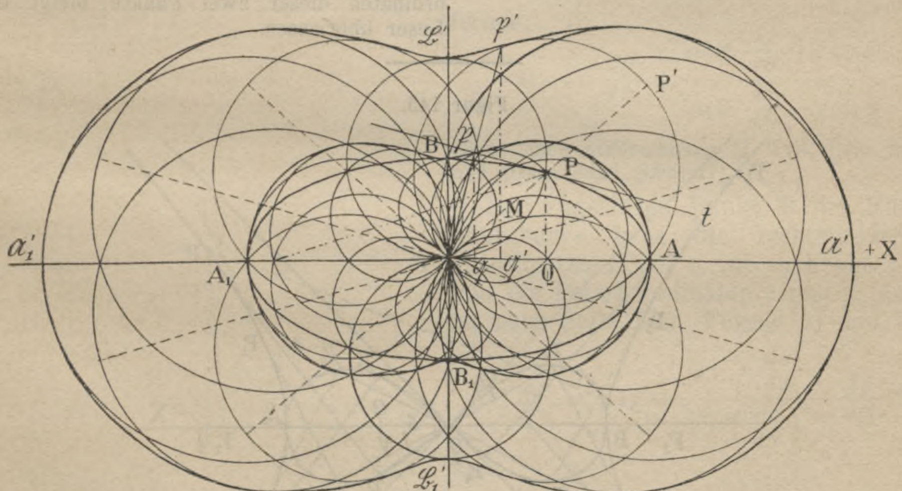
$$-\mathfrak{x}^3 = \mathfrak{y}^2\left[\frac{p}{2} - (-\mathfrak{x})\right]$$

oder:

$$(-\mathfrak{x})^3 = \mathfrak{y}^2\left[\frac{p}{2} - (-\mathfrak{x})\right].$$

Dies ist die Gleichung einer Cissoide $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots$, welche ihre Spitze O im Koordinatenanfang und die Direktrix AB der Parabel OP_1P_2 zur Asymptote hat (siehe Aufgabe 9, Fig. 11, und Aufgabe 1, Fig. 3). Sie liegt also ganz auf der negativen Seite der Abscissenachse. Die Cissoide erscheint also hier als Fusspunktkurve einer Parabel mit dem Scheitel als Pol (siehe Figur 143).

Figur 144.



Aufgabe 389. Desgleichen die Fusspunktkurve der Ellipse in Bezug auf den Mittelpunkt als Pol.

Erkl. 122. In Figur 144 ist ABA_1B_1 die gegebene Ellipse mit den Halbachsen $OA = a$ und $OB = b$. Auf der Kurve ist P ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten $OQ = x$

Auflösung. Die Ellipse mit den Halbachsen a und b hat zur Gleichung:

$$1) \ldots F(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

und $PQ = y$. In P ist mittels Halbierung des Winkels F_2PF_1 der zwei Brennstrahlen F_2P und F_1P die Tangente t konstruiert (siehe Aufgabe 7); auf sie ist ferner von O das Lot l gefällt und der Fusspunkt $\mathfrak{P}$ gewonnen worden. Der geometrische Ort von $\mathfrak{P}$ ist dann die gesuchte Fusspunktkurve $A\mathfrak{P}BA_1B_1$. Die letztere wurde in Figur 144 als die Einhüllende der Kreise über OP hergestellt; zu diesem Zweck ist OP in M halbiert und der Kreis aus M mit dem Halbmesser $= \frac{1}{2}\,OP$ gezeichnet worden; hierauf wurde die gleiche Konstruktion für eine ganze Reihe von Punkten auf der Ellipse durchgeführt; das System dieser Kreise ergab dann die einhüllende Kurve $A\mathfrak{P}BA_1B_1$, die aus vier kongruenten Stücken $A\mathfrak{P}B$ zusammengesetzt ist.

Weiter ist in Figur 144 aus P mit OP ein Kreis beschrieben worden und ebenso aus der vorigen Reihe von andern Punkten auf der Ellipse. Dieses zweite System von Kreisen lieferte eine neue einhüllende Kurve $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}'\mathfrak{B}' \cdots$ Der Punkt $\mathfrak{P}'$ liegt auf dem Strahl $O\mathfrak{P}$, so dass $O\mathfrak{P}' = 2\,O\mathfrak{P}$ ist. Die zweite Kurve ist der ersteren ähnlich und hat zu ihr ähnliche Lage; d. h. die zweite $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}'\mathfrak{B}' \cdots$ stellt ebenfalls die Fusspunktkurve der Ellipse dar, nur in verdoppelten Dimensionen. Es ist:

$$O\mathfrak{Q}' = 2\,O\mathfrak{Q} = 2\mathfrak{x}$$

und ebenso:

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}' = 2\,\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = 2\mathfrak{y}.$$

Dadurch gewinnt die Gl. 3) die Form:

$$3^*) \ldots \mathfrak{x} - \frac{b^2x}{a^2y}\,\mathfrak{y} = 0,$$

woraus:

$$4) \ldots y = \frac{b^2x\mathfrak{y}}{a^2\mathfrak{x}}.$$

Die Einsetzung von Gl. 4) in die Gleichung:

$$2) \ldots \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - \mathfrak{x}x - \mathfrak{y}y = 0$$

ergibt:

$$5) \ldots x = \frac{a^2\mathfrak{x}\,(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)}{a^2\mathfrak{x}^2 + b^2\mathfrak{y}^2}$$

und hiermit wird:

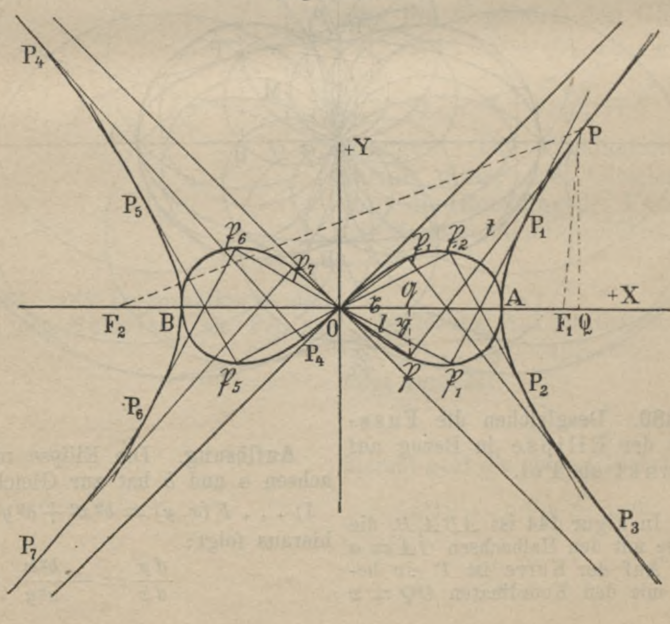
$$6) \ldots y = \frac{b^2\mathfrak{y}\,(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)}{a^2\mathfrak{x}^2 + b^2\mathfrak{y}^2}.$$

Nun setzen wir Gl. 5) und 6) in Gl. 1) ein und erhalten als Gleichung der gesuchten Fusspunktkurve:

$$(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)^2 = a^2\mathfrak{x}^2 + b^2\mathfrak{y}^2.$$

Diese Kurve vierten Grades besteht aus vier kongruenten, um den Mittelpunkt O herumliegenden Teilen; der von den positiven Seiten der Koordinatenachsen eingeschlossene Teil schneidet die Abscissenachse senkrecht in A, die Ordinatenachse ebenfalls senkrecht in B. Ist $a > b\sqrt{2}$, so besitzt derselbe einen höchsten Punkt, und zwischen diesem und dem Punkt B einen Wendepunkt (siehe Figur 144). Die Bestimmung der Koordinaten dieser zwei Punkte bleibt dem Leser überlassen.

Figur 145.



Aufgabe 390. Desgleichen die Fusspunktkurve der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf den Mittelpunkt als Pol.

Erkl. 123. In Figur 145 ist PAP_3BP_7 die gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten aufeinander senkrecht stehen. F_1 und F_2 sind ihre Brennpunkte. Die Halbierung des Winkels F_2PF_1 lieferte die Tangente t im Punkt P. Das Lot l von O ergab den Fusspunkt $\mathfrak{P}$. Der geometrische Ort von $\mathfrak{P}$ ist die Lemniscate:

$$A\mathfrak{P}O\mathfrak{P}_6B\mathfrak{P}_5O\mathfrak{P}_2.$$

Auflösung. Geben wir der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel die Form:

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0,$$

so gibt eine Rechnung, die der vorigen ganz ähnlich, als Gleichung der Fusspunktkurve:

$$(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)^2 - a^2(\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2) = 0.$$

Setzen wir in dieser:

$$a^2 = 2c^2,$$

so geht sie in die Gleichung 1) der Erkl. 30 über; d. h. die gefundene Fusspunktkurve der gleichseitigen Hyperbel ist eine Lemniscate. (Siehe Figur 24 und 58, sowie die Aufgaben 15, 98, 192, 340, 379.)

Frage 116. Wie kann die Gleichung der zum Ursprung O gehörigen Fusspunktkurve einer Kurve gefunden werden, wenn die letztere durch eine Gleichung:

$$1) \ldots r = f(\Theta)$$

in den Polarkoordinaten r und Θ gegeben ist?

Antwort. Hat ein beliebiger Punkt P auf der Stammkurve die Koordinaten x und y und die Polarkoordinaten r und Θ, so ist:

$$2) \ldots x = r\cos\Theta$$

und

$$3) \ldots y = r\sin\Theta,$$

ferner:

$$4) \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\Theta \cdot \frac{dr}{d\Theta} + r\cos\Theta}{\cos\Theta \cdot \frac{dr}{d\Theta} - r\sin\Theta}$$

(siehe Differentialrechnung II. Teil, Seite 258, und diesen Band, Seite 17).

Der zugehörige Punkt $\mathfrak{P}$ der Fusspunktkurve habe die rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ wie in Frage 112 und die Polarkoordinaten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{t}$, dann ist nach Seite 232, Formel 6) und 7):

$$5) \ldots \mathfrak{x} = -\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

und

$$6) \ldots \mathfrak{y} = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

ferner:

$$7) \ldots \mathfrak{r}^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2$$

und

$$8) \ldots tg\,\mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}.$$

Setzt man nun die Werte aus Gl. 2), 3) und 4) in Gl. 5) und 6) und die so gewonnenen Ausdrücke in Gl. 7) und 8) ein, so gibt die algebraische Rechnung:

$$9) \ldots \mathfrak{r} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2}}$$

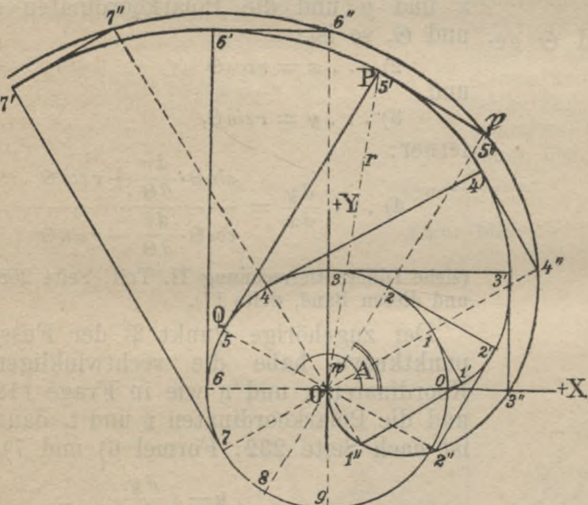
und

$$10) \ldots tg\,\mathfrak{t} = \frac{r\,tg\,\Theta - \frac{dr}{d\Theta}}{r + tg\,\Theta \cdot \frac{dr}{d\Theta}}.$$

Aus Gl. 9), 10) und 1) lässt sich eine Gleichung in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{t}$ herstellen, welche die der Fusspunktkurve sein muss.

Aufgabe 391. Bestimme die Fusspunktkurve der Kreisevolventen in Bezug auf den Kreismittelpunkt als Pol. (Siehe Aufgabe 16, Fig. 25, und Fig. 146.)

Figur 146.



Erkl. 124. In Figur 146 ist 0, 1, 2, 3 ··· der Grundkreis; in den Punkten 1, 2 ··· sind an ihn die Tangenten 11', 22', 33' ··· gelegt und gleich den Bogen 01, 02, 03 ··· gemacht worden; 0, 1', 2', 3' ··· ist daher die Kreisevolvente. Auf ihr ist P ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten $OP = r$ und dem Wälzungswinkel $XOQ = w$. Die Tangente $P\mathfrak{P}$ geht $\parallel OQ$ und das Lot $O\mathfrak{P} \parallel PQ$. Der geometrische Ort von $\mathfrak{P}$ ist die Kurve 0, 1'', 2'', 3'' ···, von der gezeigt wurde, dass sie eine archimedische Spirale darstellt, welche im Vergleich mit jener der Figur 122 um 90⁰ nach unten gedreht erscheint.

Auflösung. Hier haben wir nach Erkl. 33 und Seite 23 die Gleichungen:

$$r = a\sqrt{1 + w^2}$$

und

$$\Theta = w - arc\,(tg = w).$$

$$\frac{dr}{d\Theta} = \frac{a\,r}{\sqrt{1 + w^2}}.$$

Hierdurch liefert die obige Gleichung 9):

$$\mathfrak{r} = \sqrt{r^2 - a^2} = a w.$$

Aus der Figur 146 entnehmen wir, dass $O\mathfrak{P}PQ$ ein Rechteck ist, daher:

$$\sphericalangle w = XOQ = XO\mathfrak{P} + \mathfrak{P}OQ$$
$$= \mathfrak{t} + \frac{\pi}{2};$$

folglich ist:

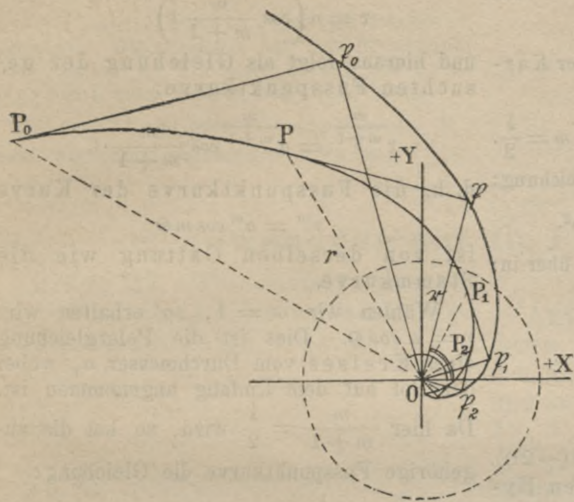
$$\mathfrak{r} = a\left(\mathfrak{t} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Nach Aufgabe 13 stellt diese Gleichung eine archimedische Spirale vor, welche gegen die in Figur 22 konstruierte um 90⁰ nach rechts gedreht erscheint.

Die Fusspunktkurve der Kreisevolvente ist hiernach eine archimedische Spirale.

Aufgabe 392. Bestimme die Fusspunktkurve der logarithmischen Spiralen $r = e^{\Theta}$ für den Punkt O als Pol.
(Siehe Aufgabe 14 und Figur 23.)

Figur 147.



Erkl. 125. In Figur 147 ist $P_0 P P_1 P_2 \cdots$ die gegebene logarithmische Spirale, welche nach der Anleitung der Erkl. 28 gezeichnet wurde. Die Tangenten in P_0, P_1, $P_2 \cdots$ bilden mit den zugehörigen Radien OP_0, OP, $OP_1 \cdots$ Winkel von je 45°. Die Lote aus O auf diese Tangenten ergeben die Fusspunkte $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2 \cdots$ und sie liegen auf einer zweiten logarithmischen Spiralen, welche der gegebenen kongruent ist und nur gegen sie verdreht ist.

Auflösung. Wir haben $r = e^{\Theta}$, daher $\frac{dr}{d\Theta} = e^{\Theta}$, somit:

$$\mathfrak{r} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2}} = \frac{e^{\Theta}}{\sqrt{2}}.$$

Ferner gibt:

$$tg\,\mathfrak{t} = \frac{r\,tg\,\Theta - \frac{dr}{d\Theta}}{r + tg\,\Theta \cdot \frac{dr}{d\Theta}} = \frac{tg\,\Theta - 1}{tg\,\Theta + 1}.$$

woraus:

$$tg\,\Theta = \frac{1 + tg\,\mathfrak{t}}{1 - tg\,\mathfrak{t}} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \mathfrak{t}\right);$$

also:

$$\Theta = \frac{\pi}{4} + \mathfrak{t},$$

folglich wird:

$$\mathfrak{r} = \frac{e^{\frac{\pi}{4} + \mathfrak{t}}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot e^{\mathfrak{t}};$$

d. h. die **Fusspunktkurve der logarithmischen Spirale ist ebenfalls eine logarithmische Spirale** (siehe Figur 147, vergl. auch Aufgabe 365 u. 366).

Aufgabe 393. Es soll die Gleichung der Fusspunktkurve für den Punkt O als Pol der Kurve $r^m = a^m \cos m\Theta$, wobei a und m konstante Faktoren vorstellen, gefunden werden.

Erkl. 126. Nehmen wir auf dem Umfang eines Kreises vom Durchmesser $OMQ = a$ den Punkt O an, legen die Abscissenachse durch O und den Kreismittelpunkt M und wählen auf dem Umfang den Punkt $\mathfrak{P}$ beliebig, so wird für:

$$O\mathfrak{P} = \mathfrak{r}, \quad \sphericalangle QO\mathfrak{P} = \mathfrak{t}, \quad OMQ = a,$$
$$OP = OQ \cos\mathfrak{t} \text{ oder } \mathfrak{r} = a \cos\mathfrak{t};$$

dies ist die Gleichung des **Kreises**, also $m = 1$.

Die Gleichung der Kardioide:

$$(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - R\mathfrak{x})^2 - R^2(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) = 0$$

in Aufgabe 327 geht mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{r}\cos\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{r}\sin\mathfrak{t}$ über in:

$$(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}R\cos\mathfrak{t})^2 - R^2 \cdot \mathfrak{r}^2 = 0$$

Auflösung. Aus $r^m = a^m \cos m\Theta$ folgt:

$$r = a(\cos m\Theta)^{\frac{1}{m}},$$

$$\frac{dr}{d\Theta} = -a \sin m\Theta (\cos m\Theta)^{\frac{1}{m} - 1},$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 = a^2 (\cos m\Theta)^{\frac{2}{m} - 2},$$

somit nach der Formel für $\mathfrak{r}$ [siehe Gl. 9) der Frage 116]:

$$1) \ldots \mathfrak{r} = a(\cos m\Theta)^{\frac{1}{m} - 1}.$$

Ferner wird für $tg\,\mathfrak{t}$ [siehe Gleich. 10) der Frage 116] erhalten:

$$tg\,\mathfrak{t} = tg\,(m+1) \cdot \Theta,$$

also $\mathfrak{t} = (m+1)\Theta$ und daher $\Theta = \frac{\mathfrak{t}}{m+1}$

oder:

$$(\mathfrak{r} - R\cos \mathfrak{t})^2 = R^2,$$

woraus:

$$\mathfrak{r} = R(1 + \cos\mathfrak{t}) = 2R\cos^2\frac{\mathfrak{t}}{2},$$

denn:

$$1 + \cos\mathfrak{t} = 2\cos^2\frac{\mathfrak{t}}{2}.$$

(Siehe Kleyer, Trigonometrie.)

Für $2R = a$ folgt als Gleichung der Kardioide:

$$\mathfrak{r} = a\cos^2\frac{\mathfrak{t}}{2} \text{ oder } \mathfrak{r}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\mathfrak{t}}{2}, \text{ also } m = \frac{1}{2}.$$

Die gleichseitige Hyperbel hat die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} - \frac{\mathfrak{y}^2}{a^2} = 1 \text{ oder } \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 = a^2.$$

Für $\mathfrak{x} = \mathfrak{r}\cos\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{r}\sin\mathfrak{t}$ geht sie über in:

$$\mathfrak{r}^2(\cos^2\mathfrak{t} - \sin^2\mathfrak{t}) = a^2.$$

Nach der Trigonometrie ist:

$$\cos^2\mathfrak{t} - \sin^2\mathfrak{t} = \cos 2\mathfrak{t};$$

daher:

$$\mathfrak{r}^2\cos 2\mathfrak{t} = a^2,$$

woraus da $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ ist:

$$\mathfrak{r}^2\cos(-2\mathfrak{t}) = a^2 \text{ und } \mathfrak{r}^{-2} = a^{-2}\cos(-2\mathfrak{t})$$

als Polargleichung der gleichseitigen Hyperbel folgt, also $m = -2$.

Die Gleichung einer Parabel, bezogen auf Achse und Scheiteltangente lautet $y^2 = 2px$; legen wir die Ordinatenachse durch den Brennpunkt und heissen die neuen Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$; nun muss:

$$\mathfrak{y}^2 = 2p\left(\mathfrak{x} + \frac{p}{2}\right) \text{ sein.}$$

Für $\mathfrak{x} = \mathfrak{r}\cos\mathfrak{t}_0$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{r}\sin\mathfrak{t}_0$ folgt:

$$\mathfrak{r}^2\sin^2\mathfrak{t}_0 - 2p\mathfrak{r}\cos\mathfrak{t}_0 - p^2 = 0.$$

Hieraus:

$$\mathfrak{r} = \frac{p\cos\mathfrak{t}_0 \pm \sqrt{p^2\cos^2\mathfrak{t}_0 + p^2\sin^2\mathfrak{t}_0}}{\sin^2\mathfrak{t}_0}$$

$$= \frac{p(1+\cos\mathfrak{t}_0)}{1-\cos^2\mathfrak{t}_0} = \frac{p}{1-\cos\mathfrak{t}_0} = \frac{p}{2\sin^2\frac{\mathfrak{t}_0}{2}}.$$

Für $\mathfrak{t}_0 = 180 - \mathfrak{t}$, $\frac{\mathfrak{t}_0}{2} = 90 - \frac{\mathfrak{t}}{2}$,

$$\sin\frac{\mathfrak{t}_0}{2} = \cos\frac{\mathfrak{t}}{2}$$

geht die obige Gleichung über in:

$$\mathfrak{r} = \frac{p}{2\cos^2\frac{\mathfrak{t}}{2}},$$

woraus:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{\frac{p}{2}}\cdot\cos^2\frac{\mathfrak{t}}{2}$$

oder:

$$\mathfrak{r}^{-1} = \left(\frac{p}{2}\right)^{-1}\cos^2\frac{\mathfrak{t}}{2},\ \mathfrak{r}^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\mathfrak{t}}{2},$$

und

$$2)\ \ldots\ m\Theta = \frac{m}{m+1}\mathfrak{t}.$$

Diesen Wert aus Gl. 2) in 1) eingesetzt erhalten wir:

$$\mathfrak{r} = a\left(\cos\frac{m}{m+1}\mathfrak{t}\right)^{\frac{1}{m}+1}$$

und hieraus folgt als Gleichung der gesuchten Fusspunktkurve:

$$\mathfrak{r}^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}}\cos\frac{m}{m+1}\cdot\mathfrak{t},$$

d. h. die Fusspunktkurve der Kurve

$$r^m = a^m\cos m\Theta$$

ist von derselben Gattung wie die Stammkurve.

Wählen wir $m = 1$, so erhalten wir: $r = a\cos\Theta$. Dies ist die Polargleichung eines Kreises vom Durchmesser a, wobei der Pol auf dem Umfang angenommen ist. Da hier $\frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}$ wird, so hat die zugehörige Fusspunktkurve die Gleichung:

$$\mathfrak{r}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\mathfrak{t}}{2} \text{ oder } \mathfrak{r} = a\cos^2\frac{\mathfrak{t}}{2}.$$

Dies ist die Polargleichung der Kardiode (siehe Aufgabe 387 und Erkl. 126).

Für $m = -2$ folgt:

$$r^{-2} = a^{-2}\cos(-2\Theta) \text{ oder } a^2 = r^2\cos 2\Theta.$$

Dies ist die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel (siehe Aufgabe 390). Hier wird $\frac{m}{m+1} = 2$; d. h. die entsprechende Fusspunktkurve besitzt die Gleichung:

$$\mathfrak{r}^2 = a^2\cos 2\mathfrak{t};$$

bekanntlich stellt diese eine Lemniscate vor [siehe Erkl. 30, Formel 2)].

Für $m = -\frac{1}{2}$ erhalten wir:

$$r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}\cos\left(-\frac{\Theta}{2}\right) \text{ oder } a = r\cos^2\frac{\Theta}{2}.$$

Diese Gleichung ist die einer Parabel, bezogen auf den Brennpunkt als Pol; aus ihr gewinnen wir $\frac{m}{m+1} = -1$ und hiermit:

$$\mathfrak{r}^{-1} = a^{-1}\cdot\cos(-\mathfrak{t}) \text{ oder } a = \mathfrak{r}\cos\mathfrak{t};$$

dies ist die Gleichung einer geraden Linie, nämlich der Direktrix der vorhin genannten Parabel.

oder schliesslich:

$$\mathfrak{r}^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(-\frac{\mathfrak{t}}{2}\right)$$

als Gleichung der Parabel folgt, also $m = -\frac{1}{2}$. Dabei ist der Brennpunkt der Pol und die positive Achse ist gegen den Scheitel zu gerichtet. Die Direktrix hat vom Brennpunkt den Abstand p. Für jeden Punkt auf dieser Geraden muss deshalb $\mathfrak{r} \cos \mathfrak{t} = p$ oder:

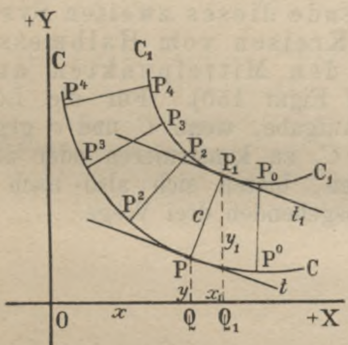
$$\mathfrak{r}^{-1} = p^{-1} \cos \mathfrak{t} \text{ oder } \mathfrak{r}^{-1} = p^{-1} \cos(-\mathfrak{t})$$

sein, wie vorhin gefunden worden ist.

c) Anwendung auf die Parallelkurven.

Frage 117. Was versteht man unter einer Parallelkurve zu einer gegebenen ebenen Kurve C?

Figur 148.

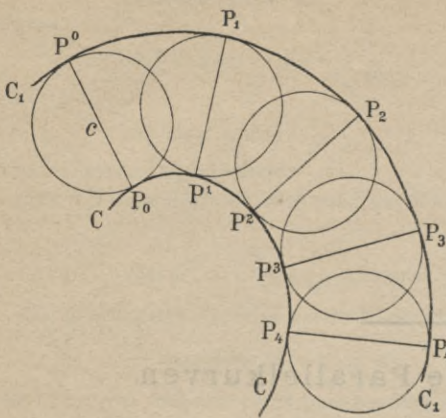


Antwort. Werden in den verschiedenen Punkten P^0, P, P^2, P^3 u. s. w. der Kurve C die Normalen konstruiert und auf denselben von den Fusspunkten P^0, P, P^2, $P^3 \cdots$ aus die Strecken P^0P_0, PP_1, P^2P_2 u. s. w. nach derselben Seite der Kurve C von konstanter Länge c abgetragen, so liegen die Endpunkte P_0, P_1, P_2 u. s. w. auf einer neuen Kurve C_1; und diese heisst die Parallelkurve zu C im Abstand c. — Wählen wir als C einen Kreis vom Halbmesser r, so erscheint als Parallelkurve wieder ein Kreis vom Halbmesser $r + c$ oder $r - c$, je nachdem die Strecke c nach der konvexen oder konkaven Seite des Kreises auf den Halbmessern abgetragen worden ist. Auf die Parallelkurven der Ellipse haben schon die Betrachtungen der Evoluten geführt (s. Frage 100 und Figur 118). Daselbst ist gezeigt worden, dass eine Kurve C und eine zu ihr parallele C_1 im Abstand c die nämliche Evolute besitzen. Hat die Kurve C im Punkt P den Krümmungshalbmesser ϱ, so hat die Kurve C_1 in dem P entsprechenden Punkte P_1 den Krümmungshalbmesser $\varrho + c$ oder $\varrho - c$.

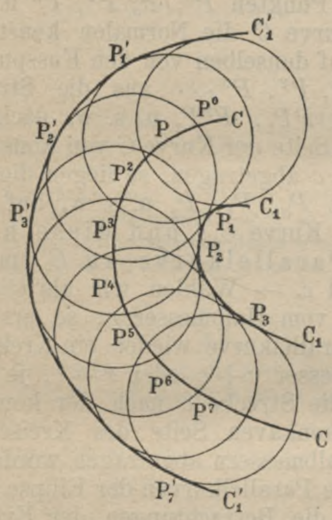
Frage 118. Welche andere Erzeugungsarten können von der Parallelkurve gegeben werden?

Antwort. Da die Tangente in P_1 an C_1 offenbar der Tangente in P an C parallel sein muss und von ihr die Ent-

Figur 149.



Figur 150.



fernung c hat; weil ferner das gleiche von den Tangenten in P_2 bezw. P^2, P_3 bezw. P^3 u. s. w. gilt, so erscheint die Kurve C_1 als die Einhüllende einer Geraden t_1, welche parallel der Tangente t der Kurve C in dem konstanten Abstand c gezogen ist (siehe Figur 148).

Der Kreis um den Durchmesser PP_1 berührt sowohl C als C_1; lassen wir ihn auf der Kurve C weiter rollen nach P^2, P^3 u. s. w. bei gleichbleibendem Halbmesser $\frac{c}{2}$, so berührt der Kreis fortwährend C und C_1; das System dieser Kreise hat demnach als Einhüllende die Kurve C_1 (s. Fig. 149). Beschreiben wir endlich um P mit dem Halbmesser c einen Kreis, so berührt auch dieser C_1 in P_1; das Gleiche finden wir für die Kreise um P^2, P^3 u. s. w. mit dem nämlichen Halbmesser c bezüglich der Punkte P_2, P_3 u. s. w. Die Kurve C_1 kann hiernach auch aufgefasst werden als die Einhüllende dieses zweiten Systems von Kreisen vom Halbmesser c und den Mittelpunkten auf C (siehe Figur 150). Für die Lösung der Aufgabe, wenn C und c gegeben sind, C_1 zu konstruieren oder zu berechnen, bieten sich also nach dem Vorausgehenden drei Wege.

Frage 119. Es sei in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Gleichung $F(x, y) = 0$ einer Kurve C gegeben. Die Gleichung der Parallelkurve zu C_1 im Abstand c zu finden.

Antwort. Der beliebig gewählte Punkt P auf C habe die Koordinaten x, y (siehe Figur 148), so dass:

$$1) \ldots F(x, y) = 0$$

ist. Die Normale in P hat die Gleichung:

$$X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0$$

(s. Formel 2, Seite 47), bezeichnen wir nun die Koordinaten von P_1 auf der Normalen im Abstand c von P mit x_1 und y_1, so ist der geometrische Ort von c

die gesuchte Kurve C_1. Die Werte x_1, y_1 müssen nun der obigen Gleichung der Normalen genügen; wir haben also:

$$2) \ldots x_1 - x + (y_1 - y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ferner muss $PP_1 = c$ sein; dies führt zur Gleichung:

$$3) \ldots (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - c^2 = 0.$$

Aus Gl. 1), 2) und 3) können nun x und y weggeschafft werden; die resultierende Gleichung in x_1 und y_1 stellt dann die der Parallelkurve C_1 dar.

Rechnet man aus Gl. 2) und 3) die Werte x_1 und y_1 aus, so erhält man:

$$4) \ldots x_1 = x \mp \frac{c\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

und

$$5) \ldots y_1 = y \pm \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Man beachte, dass die Gleich. 3) auch die Gleichung des Kreises aus dem Mittelpunkt $P(x, y)$ mit dem Halbmesser c darstellt.

In derselben sind x und y die beiden Parameter, welche durch die Gleich. 1) verbunden sind. Die Differentiation von Gl. 3) nach x führt auf die obige Gl. 2), d. h. die Auffassung der Parallelkurve C_1 als Einhüllende des Systems der Kreise vom Halbmesser c mit den Mittelpunkten P auf C gibt die nämliche Bedingungsgleichung, wie oben Gl. 2) und 3).

Aufgabe 394. Die Parallelkurve des Kreises:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

für den Abstand c zu finden.

Auflösung. Aus:

$$1) \ldots F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ und } \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{r}{y}.$$

Hiermit folgt aus Gleichung 4) und 5) von vorhin:

$$x_1 = x\left(1 \pm \frac{c}{r}\right), \quad y_1 = y\left(1 \mp \frac{c}{r}\right),$$

woraus:

$$x = \frac{r}{r \pm c}x_1 \text{ und } y = \frac{r}{r \pm c}x_1.$$

Diese Ausdrücke in Gl. 1) eingesetzt, folgt:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = (r \pm c)^2$$

als Gleichung der Parallelkurve. Dieselbe besteht aus den beiden Kreisen mit den Halbmessern $r+c$ und $r-c$.

Aufgabe 395. Ebenso für die Ellipse:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Auflösung. Wollten wir hier den seitherigen Gang einschlagen, würden sehr umfassende Rechnungen schliesslich zu einer Kurve achten Grades, der Parallelkurve, führen. Wir können die letztere aber auch dadurch bestimmen, dass wir die Koordinaten x_1, y_1 eines ihrer Punkte P_1 als Funktionen einer dritten Veränderlichen t darstellen. Zu diesem Zweck setzen wir die Koordinaten des Punktes P der Stammkurve:
$$x = a\cos t \text{ und } y = b\sin t$$
Dies ist zulässig, weil die Einsetzung dieser zwei Ausdrücke in die Gleichung der Ellipse auf $\sin^2 t+\cos^2 t = 1$ führt, also auf eine Beziehung, welche jeder Wert von t genügt. Aus $dx = -a\sin t\,dt$ und $dy = b\cos t\,dt$ ergibt sich $\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{b}\operatorname{cotg} t$. Setzen wir diesen Wert in 4) und 5) der Frage 119 ein, so erhalten wir:
$$x_1 = a\cos t \pm \frac{bc\cdot\operatorname{cotg} t}{\sqrt{a^2+b^2\operatorname{cotg}^2 t}}$$
und
$$y_1 = b\sin t \pm \frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2\operatorname{cotg}^2 t}}.$$
Das System dieser beiden Gleichungen drückt die gesuchte Parallelkurve aus. Verschiedene Werte von c geben verschiedene Formen der Parallelkurve (siehe Figur 118).

Erkl. 127. Die volle Entwicklung der Gleichung der Fusspunktkurve der Ellipse und der Parabel findet der Leser in Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Artikel 348.

Viel einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn die Parallelkurve statt in Punktkoordinaten x, y in den Linienkoordinaten u und v ausgedrückt werden soll (siehe Erkl. 116).

Vergleiche Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, Artikel 119.

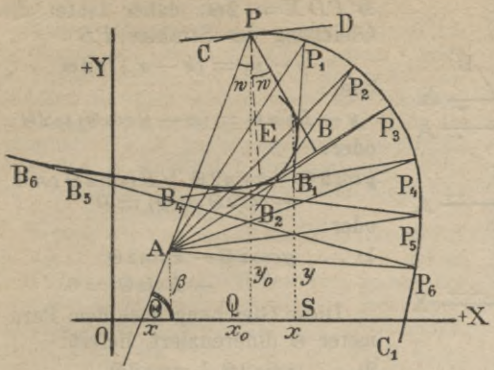
---

d) Anwendung auf die Brennlinien.

Frage 120. Was versteht man unter einer katakaustischen Kurve oder einer Brennlinie durch Zurückwerfung?

Antwort. Die Kurve CC_1 in Figur 151 sei ein ebener Schnitt einer beliebigen spiegelnden Fläche, gegen welche der leuchtende Punkt A in der Ebene der Kurve Strahlen aussendet. Ist AP ein in P auffallender Lichtstrahl, PD die Tangente und PE die Normale des Punktes P, so muss nach den Gesetzen über Spiegelung der reflektierte Strahl PB mit der Normalen PE den nämlichen Winkel bilden wie der einfallende Strahl oder es muss $\sphericalangle APE = EPB$ sein. Aber der leuchtende Punkt A schickt ausser diesem Strahl AP noch unendlich viele Licht-

Figur 151.



strahlen AP_1, AP_2, $AP_3 \cdots$ gegen die Kurve CC_1 aus, welche unter verschiedenen Winkeln gegen die zugehörigen Normalen auffallend, deshalb auch unter verschiedenen, den Einfallswinkeln gleichen Winkeln reflektiert werden. Die zurückgeworfenen Strahlen PB, P_1B_1, $P_2B_2 \cdots$ hüllen eine Kurve $BB_1B_2B_3B_4 \cdots$ ein, welche die katakaustische Kurve für den Lichtpunkt A und die Kurve CC_1 genannt wird.

Frage 121. Welchen Gang nimmt hiernach die Rechnung bei dem Aufsuchen der Gleichung der katakaustischen Kurve, welche zu einer gegebenen Kurve $F(x, y) = 0$ und dem Lichtpunkt A mit den rechtwinkligen Koordinaten α und β gehört?

Antwort. Aus der Gleichung eines beliebig einfallenden Strahles AP sucht man zunächst die Gleichung des reflektierten Strahles PB, welche eine veränderliche Konstante als Parameter enthalten wird, z. B. den Winkel Θ, den AP mit der Abscissenachse bildet. Das Aufsuchen der einhüllenden Kurve der Geraden PB erfolgt hierauf nach dem früher gelehrten Verfahren: Man differenziert die Gleichung von PB nach dem Parameter und eliminiert den letztern aus den beiden Gleichungen. Das Resultat ist dann die Gleichung der Katakaustika. Weil die Durchführung der Rechnung, soweit sie überhaupt möglich ist, auf sehr weitläufige Entwicklungen führt, beschränken wir uns hier auf die nachfolgenden beiden Beispiele.

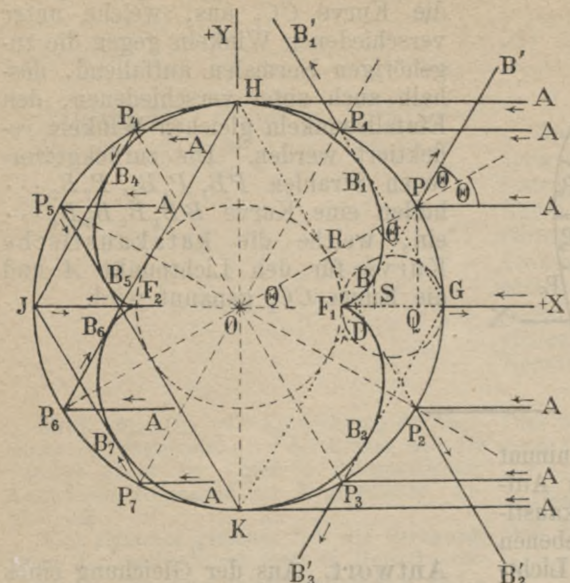
Aufgabe 396. Auf die Peripherie eines Kreises vom Halbmesser R treffen parallele Lichtstrahlen, welche dort zurückgeworfen werden. Es soll die Brennlinie bestimmt werden. (Siehe Figur 152.)

Auflösung. Durch den Kreismittelpunkt O legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Abscissenachse den einfallenden Lichtstrahlen parallel ist. Trifft ein Strahl AP den Umfang in P, so setzen wir die Koordinaten von P, nämlich:

$\Theta Q = x_0 = R \cos\Theta$ und $PQ = y_0 = R \sin\Theta$;

der zurückgeworfene Strahl PB' bildet dann

Figur 152.



Erkl. 128. Aus:

$$1) \;.\;.\; -x\sin 2\Theta + y\cos 2\Theta = -R\sin\Theta$$

und

$$2) \;.\;.\;.\; x\cos 2\Theta + y\sin 2\Theta = \frac{R}{2}\cos\Theta$$

folgt durch Elimination:

$$x = \frac{R}{2}\cdot(\cos 2\Theta\cos\Theta + 2\sin 2\Theta\sin\Theta)$$

$$= \frac{R}{4}(2\cos 2\Theta\cos\Theta + 4\sin 2\Theta\sin\Theta)$$

$$= \frac{R}{4}[3\cos 2\Theta\cos\Theta + 3\sin 2\Theta\sin\Theta - (\cos 2\Theta\cos\Theta - \sin 2\Theta\sin\Theta)]$$

$$= \frac{R}{4}(3\cos\Theta - \cos 3\Theta).$$

Ganz ähnlich erhält man auch y.

Erkl. 129. Denkt man sich obige Fig. 152 um die Gerade JG als Achse gedreht, so bebeschreibt der Halbkreis JHG eine Kugel und die Epicykloide F_2HF_1 eine Rotationsfläche; diese zwei Flächen sollen durch die Ebene, welche in O auf JG senkrecht steht, halbiert und die Teile rechts von HOK weggenommen gedacht werden. Die innere Seite der linken Halbkugel bilde einen Hohlspiegel, welcher von rechts her paralleles Licht empfangen soll. Dann entsteht offenbar in jedem Schnitt durch die Achse JO eine Brennlinie, welche der Epicykloide HF_2K kongruent ist und diese Brennlinien liegen sämtlich auf der vorhin erhaltenen Rotationsfläche — der Brennfläche der Halbkugel. Die Spitze, welche diese Fläche in F_2 hat, heisst Brennpunkt, eine Bezeich-

mit der Abscissenachse den Winkel $B'PDX = 2\Theta$; daher lautet die Gleichung des Strahles PB':

$$y - y_0 = (x - x_0)\,tg 2\Theta$$

oder:

$$y - R\sin\Theta = (x - R\cos\Theta)\,tg 2\Theta$$

oder:

$$y\cos 2\Theta - x\sin 2\Theta + R(\sin 2\Theta\cos\Theta - \cos 2\Theta\sin\Theta) = 0$$

oder:

$$1) \;.\;.\;.\; y\cos 2\Theta - x\sin 2\Theta + R\sin\Theta = 0.$$

Diese Gleichung nach dem Parameter Θ differenziert, liefert:

$$2) \;.\;.\;.\; y\sin 2\Theta + x\cos 2\Theta - \frac{R}{2}\cos\Theta = 0.$$

Aus Gl. 1) und 2) lässt sich Θ eliminieren; die umfassende Rechnung ergibt schliesslich die Gleichung der einhüllenden Kurve:

$$(4x^2 + 4y^2 - R^2)^3 = 27R^4y^2$$

Hierbei bedeuten x und y die Koordinaten ON, bezw. NB des Kurvenpunktes B, in welchem der rückwärts verlängerte reflektierte Strahl PB' die Brennlinie berührt.

Wir können aber auch aus Gl. 1) und 2) x und y in R und Θ ausdrücken und erhalten:

$$3) \;.\;.\;.\; x = \frac{R}{4}(3\cos\Theta - \cos 3\Theta) \text{ und}$$

$$4) \;.\;.\;.\; y = \frac{R}{4}(3\sin\Theta - \sin 3\Theta) \text{ (s. Erkl. 128.)}$$

Diese Gleichungen gestatten eine einfache geometrische Erklärung.

Nach Aufgabe 11 lauten die Gleichungen einer Epicykloide:

$$5) \;.\;.\;.\; x = (a + r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t + t\right)$$

$$6) \;.\;.\;.\; y = (a + r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t + t\right)$$

Setzen wir in 5):

$$r = \frac{R}{2},\quad a = \frac{R}{4},\quad \frac{a}{r} = \frac{1}{2},\quad \frac{a}{r}t = \Theta$$

also hier:

$$t = 2\Theta \text{ und } \frac{a}{r}t + t = 3\Theta,$$

so folgt:

$$x = \frac{3R}{4}\cdot\cos\Theta - \frac{R}{4}\cos 3\Theta$$

oder:

$$x = \frac{R}{4}(3\cos\Theta - \cos 3\Theta)$$

und ebenso aus 6):

$$y = \frac{R}{4}(3\sin\Theta - \sin 3\Theta).$$

nung, welche auch auf den Punkt F_2 der Brennlinien HFK übertragen wird.

Stellen wir uns vor, die rechte Hälfte HGK der Kugel sei aussen spiegelnd, dann erfolgt die Zurückwerfung der parallel zur Achse einfallenden Strahlen derart, dass die Rückverlängerungen der zurückgeworfenen Strahlen die Brennlinie HF_1K beziehungsweise die Brennfläche HF_1K einhüllen. Die letzteren, sowie der Brennpunkt F_1 sind also beim Konvexspiegel geometrischer Natur.

Denken wir uns ferner den Halbkreis HJK als die Grundfläche eines senkrechten hohlen Cylinderspiegels, welcher von rechts her paralleles Licht erhält, so wird in jeder horizontalen Ebene die Brennlinie HF_2K auftreten. Analog liegen die Verhältnisse bei einem konvexen Cylinderspiegel HGK bezüglich der geometrischen Brennlinie HF_1K.

Zur Herstellung der Brennlinie HF_2K lässt man Sonnenlicht auf das Innere eines blanken Ringes fallen. Auf einem weissen Blatt unter dem Ring wird dieselbe deutlich beobachtet werden können.

Näheres darüber siehe Kleyer, Lehrbuch der Physik, Abschnitt Optik.

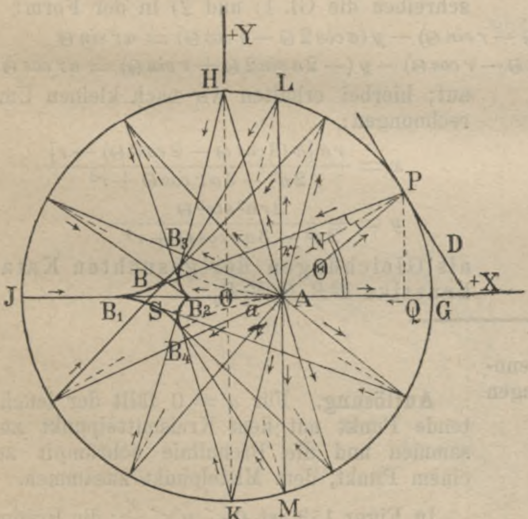
Dies sind aber unsere beiden vorigen Gleichungen 3) und 4); wir haben hiernach das Resultat:

Die Katakaustika des Kreises vom Halbmesser R für parallele Lichtstrahlen ist eine Epicykloide, welche von einem Kreis mit dem Halbmesser $\frac{R}{4}$ erzeugt wird, welcher auf einem Kreis rollt, welcher den Halbmesser $\frac{R}{2}$ hat und zum gegebenen konzentrisch ist.

In Figur 152 ist $OG = R$; ferner ist $OF_1 = OF_2$ ist $= \frac{R}{2}$ und $F_1G = \frac{R}{2}$. Rollt der Kreis über F_1G auf dem Kreis über OF_1, so erzeugt er die Epicykloide $F_1BB_1H\cdots$, welche von den reflektierten Strahlen PB', P_1B_1', $P_2B_2'\cdots$, beziehungsweise von den Verlängerungen derselben eingehüllt wird.

Aufgabe 397. Von einem leuchtenden Punkt A fällt Licht auf die Peripherie eines Kreises und wird dort reflektiert. Es soll die katakaustische Kurve bestimmt werden.

Figur 153.



Auflösung. Wir legen wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch den Kreismittelpunkt O; dabei soll die Abscissenachse durch den leuchtenden Punkt A gehen und OA mit a bezeichnet werden. Irgend ein Halbmesser OP des Kreises vom Halbmesser r bilde mit der Abscissenachse den Winkel $POX = \Theta$, dann hat OP die Gleichung:

$$x \sin\Theta - y\cos\Theta = 0;$$

aus ihr folgt als Gleichung der Tangente PD in P:

$$x\cos\Theta + y\sin\Theta - r = 0.$$

Die linke Seite der ersten Gleichung bezeichnen wir kurz mit N, die der letzteren mit T; dann ist die Gleichung irgend einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt beider Geraden, also durch P geht von der Form $N - \lambda T = 0$. Soll diese dritte Gerade durch den Punkt A mit den Koordinaten $x = a$, $y = 0$ gehen, so müssen die letzteren die eben gefundene Gleichung befriedigen, d. h. es muss:

$$a\sin\Theta - \lambda(a\cos\Theta - r) = 0 \text{ oder } \lambda = \frac{a\sin\Theta}{a\cos\Theta - r}$$

sein; hiermit wird die Gleichung von AP:

$$N - \frac{a\sin\Theta}{a\cos\Theta - r}\cdot T = 0.$$

Erkl. 130. Bezeichnen $N=0$ und $T=0$ die Gleichungen von zwei geraden Linien, so hat eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt von N und T geht, eine Gleichung von der Form $N-\lambda T=0$; ferner hat die vierte Gerade, welche zu diesen drei harmonisch ist, die Gleichung $N+\lambda T=0$.

Näheres siehe Cranz, Analytische Geometrie.

Der reflektierte Strahl PB ist nach den Gesetzen der Geometrie der vierte harmonische zu OP, DP und AP; nach der analytischen Geometrie ist also seine Gleichung:

$$N+\frac{a\sin\Theta}{a\cos\Theta-r}\cdot T=0$$

oder ausführlich angeschrieben:

$$(x\sin\Theta-y\cos\Theta)(a\cos\Theta-r)+(x\cos\Theta+y\sin\Theta-r)\,a\sin\Theta=0$$

oder:

$$2ax\sin\Theta\cos\Theta-r(x+a)\sin\Theta-ay(\cos^2\Theta-\sin^2\Theta)+ry\cos\Theta=0$$

oder:

$$1)\ \ldots\ ay\cos 2\Theta-ax\sin 2\Theta+r(r+a)\sin\Theta-ry\cos\Theta=0.$$

Dies ist die Gleichung des reflektierten Strahles PB; sie enthält den Parameter Θ. Um die Einhüllende desselben zu gewinnen, müssen wir die Gleichuug 1) nach Θ differenzieren; dabei tritt auf:

$$2)\ ay\sin 2\Theta+ax\cos 2\Theta-\frac{r}{2}(x+a)\cos\Theta-\frac{r}{2}y\sin\Theta=0.$$

Aus 1) und 2) lässt sich Θ eliminieren; eine umfassende Rechnung führt schliesslich zur Gleichung der Katakaustika:

$$[4a^2(x^2+y^2)-r^2(x+a)^2+y^2]^3=27r^4a^2y^2(x^2+y^2-a^2)^2.$$

Hierbei bedeuten x und y die Koordinaten OS, bezw. BS des Kurvenpunktes B, in welchem der zurückgeworfene Strahl PB die Brennlinie berührt. Zur Untersuchung derselben ziehen wir vor, x und y als Funktionen von r und Θ darzustellen. Wir schreiben die Gl. 1) und 2) in der Form:

$$x(a\sin 2\Theta-r\sin\Theta)-y(a\cos 2\Theta-r\cos\Theta)=ar\sin\Theta$$
$$x(2a\cos 2\Theta-r\cos\Theta)-y(-2a\sin 2\Theta+r\sin\Theta)=ar\cos\Theta$$

auf; hierbei erhalten wir nach kleinen Umrechnungen:

$$x=\frac{ra[a(3\cos\Theta-2\cos^3\Theta)-r]}{2a^2-3ar\cos\Theta+r^2}$$
$$y=\frac{2ra^2\sin^3\Theta}{2a^2-3ar\cos\Theta+r^2}$$

als Gleichungen der gesuchten Katakaustika $BB_1B_4B_2B_3$.

Aufgabe 398. Die Gestalt der Brennlinie des Kreises für verschiedene Lagen des leuchtenden Punktes zu finden.

Auflösung. Für $a=0$ fällt der leuchtende Punkt mit dem Kreismittelpunkt zusammen und die Brennlinie schrumpft zu einem Punkt, dem Mittelpunkt zusammen.

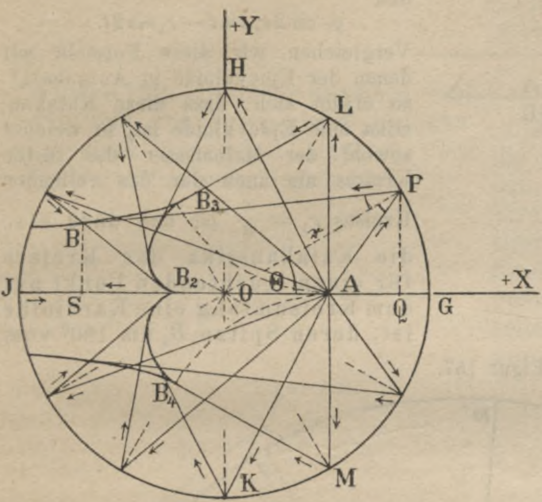
In Figur 153 ist $0<a<\frac{r}{2}$; die Brennlinie hat auf der Abscissenachse zwei Spitzen B_1 und B_2 mit den Koordinaten:

$$x_1=\frac{ra}{2a-r}\ \text{und}\ x_2=-\frac{ra}{2a+r}.$$

Von diesen beiden Brennpunkten liegt B_1

harmonisch zu O_1, A_1, G und B_2 harmonisch zu O_1, A und J. Ferner besitzt die Kurve noch zwei weitere Spitzen B_3 und B_4 in symmetrischer Lage gegen GJ. Sie liegen auf den Strahlen HB_3 und HB_4, welche durch die Reflexion von AL und AM, welche $\perp GJ$ von A ausgehen, entstehen; dabei ist dann noch $HB_3 = AL$, $MB_4 = AM$.

Figur 154.



Für $a = \frac{r}{2}$ rückt die Spitze B_1 ins Unendliche, B_2 kommt in die Mitte von OJ; B_3 und B_4 findet man wie vorhin (siehe Figur 154).

Für $\frac{r}{2} < a < r$, also $OA > \frac{r}{2}$ in Figur 155 tritt die Spitze B_1 auf der rechten Seite auf als geometrischer Brennpunkt.

Für $a = r$ liegt der leuchtende Punkt A auf dem Kreisumfang in G (siehe Figur 156). Die Gleichungen der Katakaustika geben in diesem Fall:

$$x = \frac{r^3(-1 + 3\cos\Theta - 2\cos^3\Theta)}{3r^2(1 - \cos\Theta)}$$

$$= \frac{r}{3}(-1 + 2\cos\Theta + 2\cos^2\Theta)$$

oder:

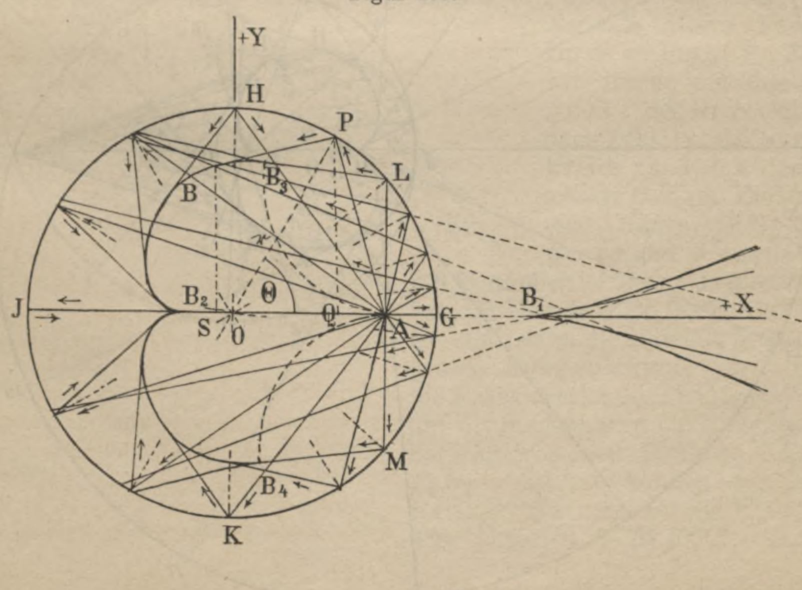
$$x = \frac{r}{3}(2\cos\Theta + \cos 2\Theta)$$

$$= \frac{2r}{3}\cos\Theta + \frac{r}{3}\cos 2\Theta$$

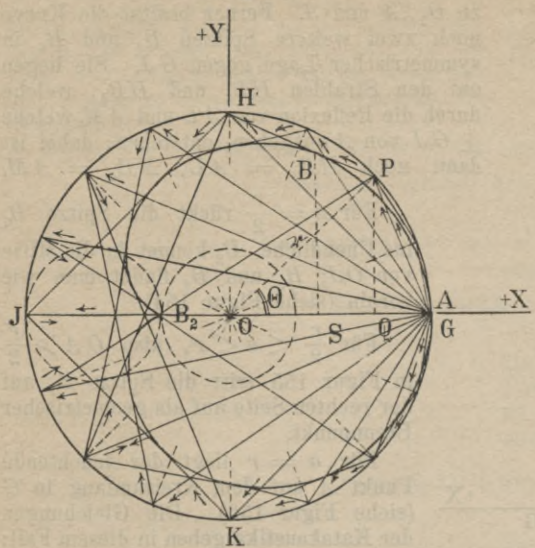
und

$$y = \frac{2r^3\sin^3\Theta}{3r^2(1 - \cos\Theta)} = \frac{2r}{3}(1 + \cos\Theta)\sin\Theta$$

Figur 155.



Figur 156.



oder:

$$y = \frac{2}{3} r \sin\Theta + \frac{r}{3} \sin 2\Theta.$$

Setzen wir hierin:

$$x = -x_1, \qquad y = -y_1,$$
$$\Theta = 180^0 + t, \quad r = 3r_1,$$

so erhalten wir:

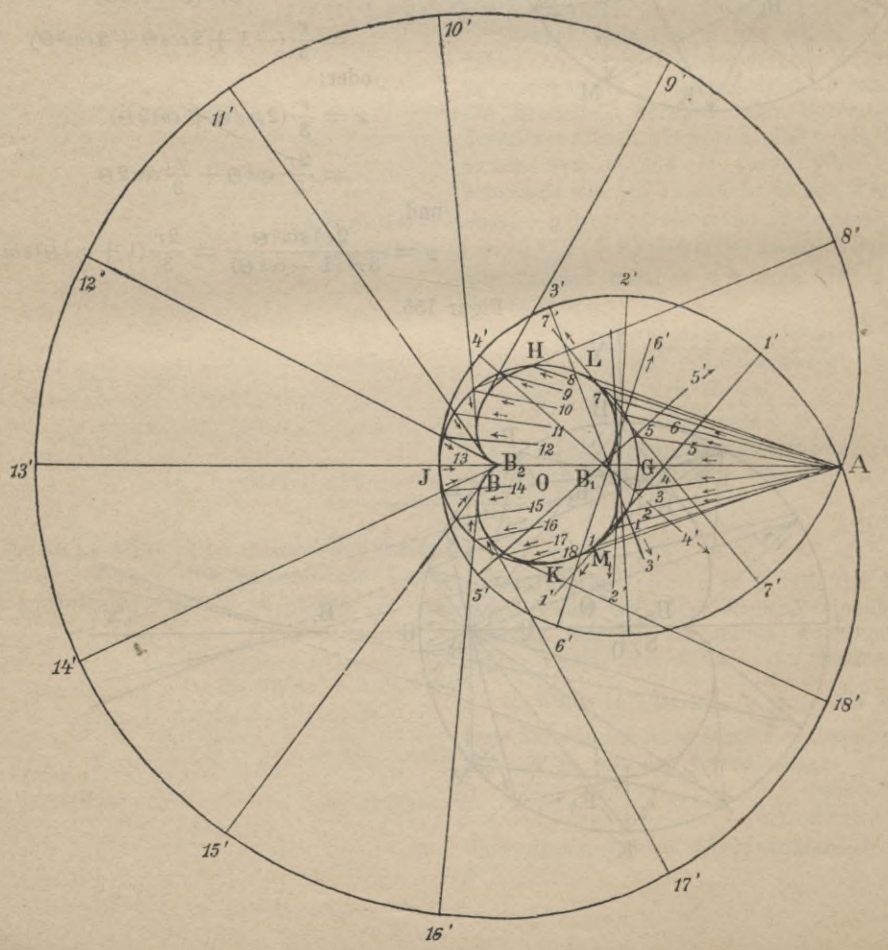
$$x_1 = 2r_1 \cos t - r_1 \cos 2t$$

und

$$y_1 = 2r_1 \sin t - r_1 \sin 2t.$$

Vergleichen wir diese Formeln mit denen der Epicykloide in Aufgabe 11, so ergibt sich, dass diese Katakaustika eine Epicykloide ist, in welcher sowohl der Halbmesser des festen Kreises als auch der des rollenden Kreises $r_1 = \frac{r}{3}$ ist und dass also **die Katakaustika des Kreises für einen leuchtenden Punkt auf dem Kreisumfang eine Kardioide ist**, deren Spitze B_2 um 180^0 vom

Figur 157.



leuchtenden Punkt A entfernt liegt (siehe Figur 156 und Figur 16, sowie Erkl. 20).

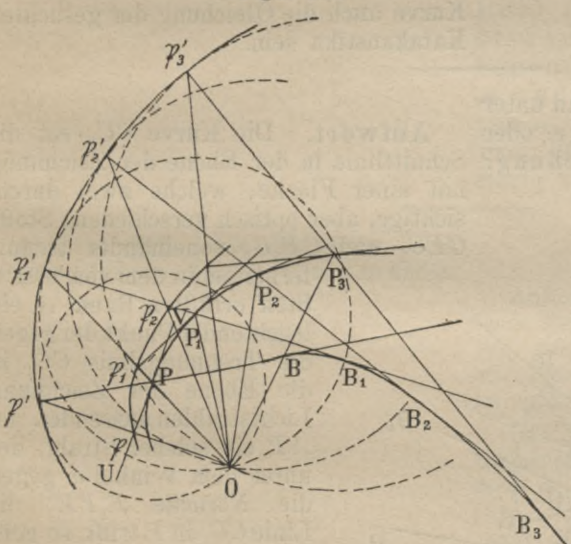
Für $a > r$ liegt der leuchtende Punkt A in endlicher Entfernung ausserhalb des Umfanges; dann bildet sich wiederum eine Spitze B_1, die aber nur ein geometrisches Bild des leuchtenden Punktes gibt (siehe Figur 157).

Der Fall $a = \infty$ ist schon in der Aufgabe 396 behandelt worden.

Frage 122. Bestehen zwischen einer Kurve und der zugehörigen Katakaustika eines gegebenen Punktes noch weitere geometrische Beziehungen?

Antwort. In Fig. 158 sei $PP_1P_2\cdot\cdot$ die reflektierende Stammkurve, O stelle den leuchtenden Punkt vor, OP einen Strahl, PB den dazu gehörigen reflektierten, der sich dadurch konstruieren lässt, dass $O\mathfrak{P}$ senkrecht auf die Tangente UPV in $\mathfrak{P}$ gefällt, $O\mathfrak{P}$ um sich selbst nach $\mathfrak{P}'$ verlängert und $\mathfrak{P}'P$ gezogen wird, dann ist $\triangle O\mathfrak{P}P \cong \mathfrak{P}\mathfrak{P}'P$ und $\sphericalangle OPU = BPV$, wie es das Spiegelungsgesetz fordert. Macht man jetzt:

Figur 158.



$$OM = MP = \frac{1}{2} OP$$

und zeichnet den Kreis $O\mathfrak{P}P$ mit dem Mittelpunkt M, so ist nach Frage 113 der geometrische Ort für $\mathfrak{P}$ die Fusspunktkurve der Stammkurve PP_1P_2 in Bezug auf den Punkt O und $\mathfrak{P}M$ ist die Normale dieser Fusspunktkurve im Punkt P. Zeichnen wir ferner um den Mittelpunkt P den Kreis $O\mathfrak{P}'$, so hat nach Erkl. 121 das System der Kreise um P mit dem Halbmesser OP zur Einhüllenden eine Kurve $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'\cdots$, welche der Fusspunktkurve $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ ähnlich ist und zu ihr ähnliche Lage hat. Die Gerade $\mathfrak{P}'PB$, welche parallel $\mathfrak{P}M$ ist, stellt dann die Normale in $\mathfrak{P}'$ an diese grosse Fusspunktkurve vor. Da nun die Katakaustika des Punktes O in Bezug auf die Stammkurve die Einhüllende der zurückgeworfenen Strahlen PB, P_1B_1, $P_2B_2\cdots$ ist, so können wir jetzt die Katakaustika auch als die Einhüllenden der Normalen $\mathfrak{P}'B$, $\mathfrak{P}_1'B_1$, $\mathfrak{P}_2'B_2\cdots$

der grossen Fusspunktkurve $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'$ auffassen. Nach Frage 94 ist aber die letztere die Evolute der genannten Kurve; d. h. die Katakaustika $B, B_1, B_2 \cdots$ ist die Evolute von der Kurve $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2' \cdots$ dies liefert den

Satz. Wenn man aus den aufeinander folgenden Punkten der reflektierenden Kurve als Mittelpunkte Kreise beschreibt, welche sämtlich durch den leuchtenden Punkt gehen, so ist die Einhüllende dieser Kreise eine Kurve, von welcher die Katakaustika der Stammkurve die Evolute ist.

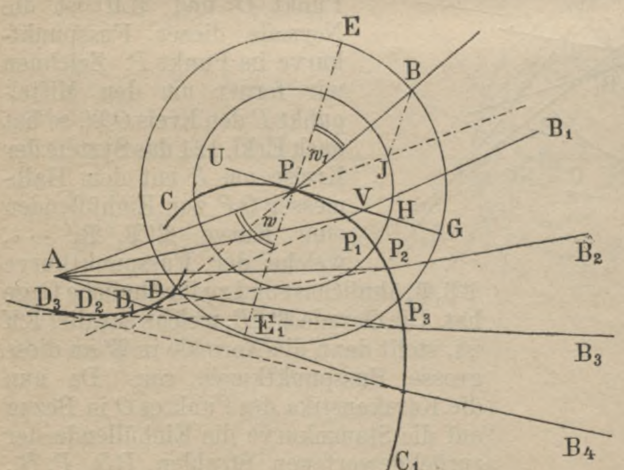
In Figur 157 erscheint die Katakaustika B_1LB_2M des Kreises $GHJK$ für den Lichtpunkt A als die Evolute der Paskalschen Schnecke $1'2' \cdots 18'$ (vergl. hierzu Fig. 139 sowie Frage 114 und Erkl. 121).

Lässt sich aus der Gleichung der Stammkurve P, P_1, P_2 die Gleichung der Fusspunktlinie $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'$ gewinnen, so wird die Gleichung der Evolute dieser Kurve auch die Gleichung der gesuchten Katakaustika sein.

Frage 123. Was versteht man unter einer diakaustischen Kurve oder einer Brennlinie durch Brechung?

Antwort. Die Kurve CC_1 sei die Schnittlinie in der Ebene der Zeichnung mit einer Fläche, welche zwei durchsichtige, aber optisch verschiedene Stoffe CEC_1 und CE_1C_1 voneinander trennt; ferner sei in dem vom ersten Stoff erfüllten Raum A ein leuchtender Punkt, der gegen die Trennungslinie CC_1 in die Ebene der Zeichnung Lichtstrahlen aussendet. Ist AP ein solcher Strahl, der unter dem Winkel w gegen die Normale E_1PE, die Linie CC_1 in P trifft, so geht derselbe nicht in der Verlängerung von AP in den vom zweiten Stoff erfüllten Raum CEC_1 über, sondern wird in P gebrochen und in einer Richtung PB weiter geführt, die mit der Normalen EPE_1 einen Winkel w_1 bildet, welcher mit w verbunden ist durch die Gleichung: $\frac{\sin w}{\sin w_1} = n.$

Figur 159.



Hierbei stellt n eine konstante Zahl vor, nämlich den Brechungsexponenten zwischen den beiden die Räume CE_1C_1 und CEC_1 erfüllenden Stoffe.

Enthält der erste Raum Luft und der andere Wasser, so ist $n = 1{,}33$.

Enthält der erste Luft und der zweite Glas, so ist $n = 1{,}56$.

Enthält der erste Alkohol und der zweite Glas, so ist $n = 1{,}2$.

(Siehe Kleyer, Lehrbuch der Physik, Lehre vom Licht.)

Erkl. 131. Kennt man den Brechungsexponenten zwischen den beiden Stoffen, welche CC_1 trennt, so lässt sich der gebrochene Strahl folgendermassen konstruieren:

Um den Fusspunkt P des einfallenden Strahles AP beschreibe man zwei Kreise mit den Halbmessern $PH = 1$ und $PG = n$. Die Verlängerung von AP schneide den kleineren Kreis in J, dann ziehe man JB parallel zur Normalen EPE_1 bis zum Schnitt B mit dem grossen Kreis, dann ist PB die Richtung des gebrochenen Strahles.

Für $n = -1$ geht die Brechung in Zurückwerfung über, so dass die letztere nur als ein spezieller Fall der Brechung erscheint.

Aber der leuchtende Punkt A schickt ausser diesem Strahl AP noch unendlich viele andere Lichtstrahlen gegen die Linie CC_1 aus, welche unter verschiedenen Winkeln gegen die zugehörigen Normalen auffallend, auch unter verschiedenen Winkeln gebrochen werden. Alle diese gebrochenen Strahlen PB, P_1B_1 u. s. w. hüllen eine neue Kurve $DD_1D_2 \cdot\cdot$ ein; sie heisst die Brennlinie durch Brechung oder die diakaustische Kurve der gegebenen Kurve für den Lichtpunkt A und den Brechungsexponenten n. Wir wenden dies auf folgende zwei Fälle der Brennlinie durch Brechung an:

Aufgabe 399. Die Brennlinie durch Brechung für eine gerade Linie zu finden.

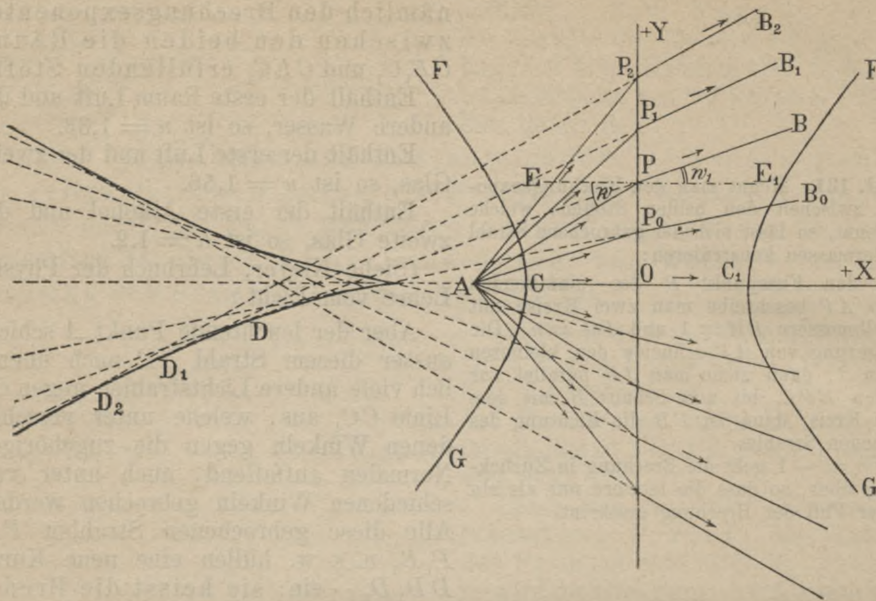
Auflösung. In Figur 160 sei A der leuchtende Punkt, OY die gerade Trennungslinie von zwei durchsichtigen Stoffen von verschiedener Brechbarkeit und zwar liege A im optisch dünneren Stoff.

Ist AP ein Lichtstrahl, welcher die trennende Gerade in P trifft, so wird derselbe in P so gebrochen, dass:

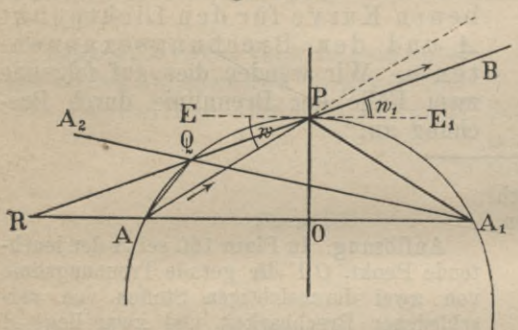
$$\frac{\sin APE}{\sin BPE_1} = \frac{\sin w}{\sin w_1} = n$$

ist, wenn n den bekannten Brechungsexponenten zwischen den beiden Stoffen vorstellt. Da nach unserer Voraussetzung die Strahlen vom optisch dünneren Stoff in einen dichteren übergehen, ist hier $n > 1$. Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Einhüllende des Systems der Geraden PB aufzusuchen. Wir legen das Koordinatensystem derart, dass OY die Ordinatenachse und AO senkrecht OY die Abscissenachse wird. Die Strecke AO bezeichnen wir mit d. Für

Figur 160.



Figur 161.



Erkl. 132. In Figur 160 ist $n = 1{,}5$ angenommen (was annähernd dem Uebergang von Luft in Glas entspricht).

$$AO \text{ ist} = d, \quad OC = \frac{2d}{3}.$$

Weil die Diakaustika $DD_1D_2 \cdots$ die Evolute der Hyperbel sein muss, so stehen die Rückverlängerungen der gebrochenen Strahlen sämtlich auf dem linken Hyperbelzweig senkrecht.

$OP = \varkappa$ hat der einfallende Strahl AP die Gleichung:

$$\frac{x}{-d} + \frac{y}{\varkappa} = 1.$$

Hierbei ist:

$$tg\, w = \frac{OP}{AO} = \frac{\varkappa}{d},$$

somit:

$$\sin w = \frac{\varkappa}{\sqrt{d^2 + \varkappa^2}},$$

daher:

$$\sin w_1 = \frac{1}{n} \sin w = \frac{\varkappa}{n\sqrt{d^2 + \varkappa^2}}$$

und

$$tg\, w_1 = \frac{\varkappa}{\sqrt{n^2 d^2 + \varkappa^2 (n^2 - 1)}}.$$

Die Gleichung des Strahles PB lautet nun:

$$y - \varkappa = x\, tg\, w_1$$

oder den vorhin gefundenen Wert eingesetzt:

$$1) \ldots y - \varkappa = \frac{x\varkappa}{\sqrt{n^2 d^2 + (n^2 - 1)\varkappa^2}},$$

dies umgeformt, führt zur Gleichung des gebrochenen Strahles PB:

$$2) \ldots \varkappa^2 x^2 - (y - \varkappa)^2 [n^2 d^2 + (n^2 - 1) x^2] = 0.$$

Derselbe enthält den Parameter $\varkappa$; um die Einhüllende zu finden, müssen wir nun nach Frage 106 die Gl. 2) nach $\varkappa$ differenzieren; dies ergibt:

$$3) \ldots \varkappa x^2 - (n^2 - 1)\varkappa (y - \varkappa)^2 + [n^2 d^2 + (n^2 - 1)\varkappa^2](y - \varkappa) = 0.$$

Zur Elimination von $\varkappa$ aus Gl. 2) und 3) erweitern wir Gl. 3) mit $\varkappa$ und erhalten:

$$4) \ldots \varkappa^2 x^2 - (n^2-1)\,\varkappa^2 (y-\varkappa)^2 + \varkappa\,[n^2 d^2 + (n^2-1)\,\varkappa^2]\,(y-\varkappa) = 0.$$

Hiervon Gl. 2) subtrahiert, liefert:

$$(y-\varkappa)^2 \cdot n^2 d^2 + \varkappa\,[n^2 d^2 + (n^2-1)\,\varkappa^2]\,(y-\varkappa) = 0$$

oder:

$$(y-\varkappa)\cdot n^2 d^2 + \varkappa\,[n^2 d^2 + (n^2-1)\,\varkappa^2] = 0,$$

woraus:

$$\varkappa^3 = -\frac{n^2 d^2 y}{n^2-1},$$

somit ist:

$$5) \ldots \varkappa = -\sqrt[3]{\frac{n^2 d^2 y}{n^2-1}},$$

denn es ist ja $n^2 > 1$, also $n^2 - 1 > 0$.

Wir multiplizieren jetzt Gleichung 3) mit $y - \varkappa$ und erhalten:

$$6) \ldots \varkappa x^2 (y-\varkappa) - (n^2-1)\,\varkappa\,(y-\varkappa)^3 + [n^2 d^2 + (n^2-1)\,\varkappa^2]\,[y-\varkappa]^2 = 0.$$

Die Gleichung 2) dazu addiert ergibt:

$$\varkappa x^2 (y-\varkappa) - (n^2-1)\,\varkappa\,(y-\varkappa)^3 + \varkappa^2 x^2 = 0,$$

$$x^2 y - (n^2-1)\,\varkappa\,(y-\varkappa)^3 = 0;$$

also:

$$7) \ldots y - \varkappa = \sqrt[3]{\frac{x^2 y}{n^2-1}}.$$

Durch Addition von Gleichung 5) und 7) folgt als Gleichung der einhüllenden Kurve:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 y}{n^2-1}} - \sqrt[3]{\frac{n^2 d^2 y}{n^2-1}};$$

vereinfacht geht sie über in:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2 y}{n^2-1}} - \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{\frac{n^2 d^2 y}{n^2-1}}$$

oder in:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{n^2 d^2}} - \sqrt[3]{\frac{y^2}{\frac{n^2}{n^2-1}\,d^2}} = 1$$

oder in:

$$8) \ldots \left(\frac{x}{nd}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{\frac{nd}{\sqrt{n^2-1}}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Hiermit ist für die Diakaustika eine Gleichung gefunden, welche mit der Evolutengleichung einer Hyperbel in Aufgabe 360 übereinstimmt. Hat letztere die Halbachsen aus b, also die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ist die Gleichung ihrer Evolute:

$$9) \ldots \left(\frac{x}{\frac{a^2+b^2}{a}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{\frac{a^2+b^2}{b}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

(siehe Aufgabe 360).

Erkl. 133. Legen wir durch die drei Punkte A, P und A_1, wobei $OA_1 = OA$, einen Kreis und verlängern den gebrochenen Strahl BF bis zum Schnittpunkt Q mit dem Kreis und dem Schnittpunkt R mit der Verlängerung von $A_1 A$, dann ist, wenn AQ und $A_1 QA_2$ gezogen wird, QR die Halbierungslinie des Winkels AQA_2, denn:

$$\sphericalangle RQA_2 = PQA_1 = PAA_1 = PA_1 A$$

und

$$\begin{aligned} \sphericalangle RQA &= QAP + QPA \\ &= QA_1 P + QA_1 A = PA_1 A. \end{aligned}$$

Nach einem bekannten Satz der Geometrie über das Verhältnis der Abschnitte, welche die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels auf der Gegenseite erzeugt, verhält sich nun:

$$A_1 Q : AQ = RA_1 : RA;$$

daher:

$$A_1 Q - AQ : AQ = AA_1 : RA$$

oder:

$$\begin{aligned} A_1 Q - AQ : AA_1 &= AQ : RA \\ &= \sin ARP : \sin RQA \\ &= \sin BPE_1 : \sin PAA_1 \\ &= \sin BPE_1 : \sin APE \\ &= \sin w_1 : \sin w = 1 : n, \end{aligned}$$

daher:

$$A_1 Q - AQ = \frac{1}{n} AA_1 = \frac{1}{n}\cdot 2d;$$

d. h. die Differenz der Entfernungen des Punktes Q von A und A_1 hat den konstanten Wert $\frac{2d}{n}$; der geometrische Ort von Q ist demnach die Hyperbel mit den Brennpunkten A und A_1 und der halben grossen Achse $= \frac{d}{n}$. Da BPR die Mediane des Winkels AQA_2 ist, so muss sie die Normale der Hyperbel in Q sein und die Evolute der letzteren berühren. Hiermit ist geometrisch bewiesen, dass die Diakaustika die Evolute einer Hyperbel mit den Brennpunkten A, A_1 und der halben reellen Achse $= \frac{d}{n}$ ist für $AO = d$.

Die Gleichung 8) wird mit der Gleich. 9) identisch für $a^2 + b^2 = d^2$ und $a = \frac{d}{n}$. Nun drückt aber $\sqrt{a^2+b^2}$ die Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkt der Ellipse aus, diese ist hier $= d$, d. h. $= AO$; daher ist A ein Brennpunkt und die halbe grosse Achse der Hyperbel hat die Länge:

$$OC = OC_1 = \frac{d}{n},$$

womit die Hyperbel und somit auch ihre Evolute gezeichnet werden kann. Unser Resultat lautet jetzt: Trennt eine gerade Linie zwei optisch verschiedene Stoffe und gehen von einem leuchtenden Punkt im dünnern Stoff Lichstrahlen aus, so ergeben diese nach der Brechung eine diakaustische Kurve, welche die Evolute einer Hyperbel ist, von welcher die trennende Gerade die imaginäre Achse und der leuchtende Punkt ein Brennpunkt ist. Ferner ist die halbe reelle Achse gleich der Entfernung des leuchtenden Punktes von der Trennungsgeraden, dividiert durch den Brechungsexponenten.

Wird der leuchtende Punkt A statt in dem dünneren im dichteren Stoff gewählt, so bleibt die ganze Entwicklung genau die gleiche, mit der einzigen Aenderung, dass $\frac{1}{n}$ statt n zu setzen ist. Die Gleichung der Diakaustika stimmt dann mit jener der Evolute einer Ellipse überein mit dem Brennpunkt A und der grossen Halbachse $a = nd$. Die Ausführung bleibt dem Leser überlassen.

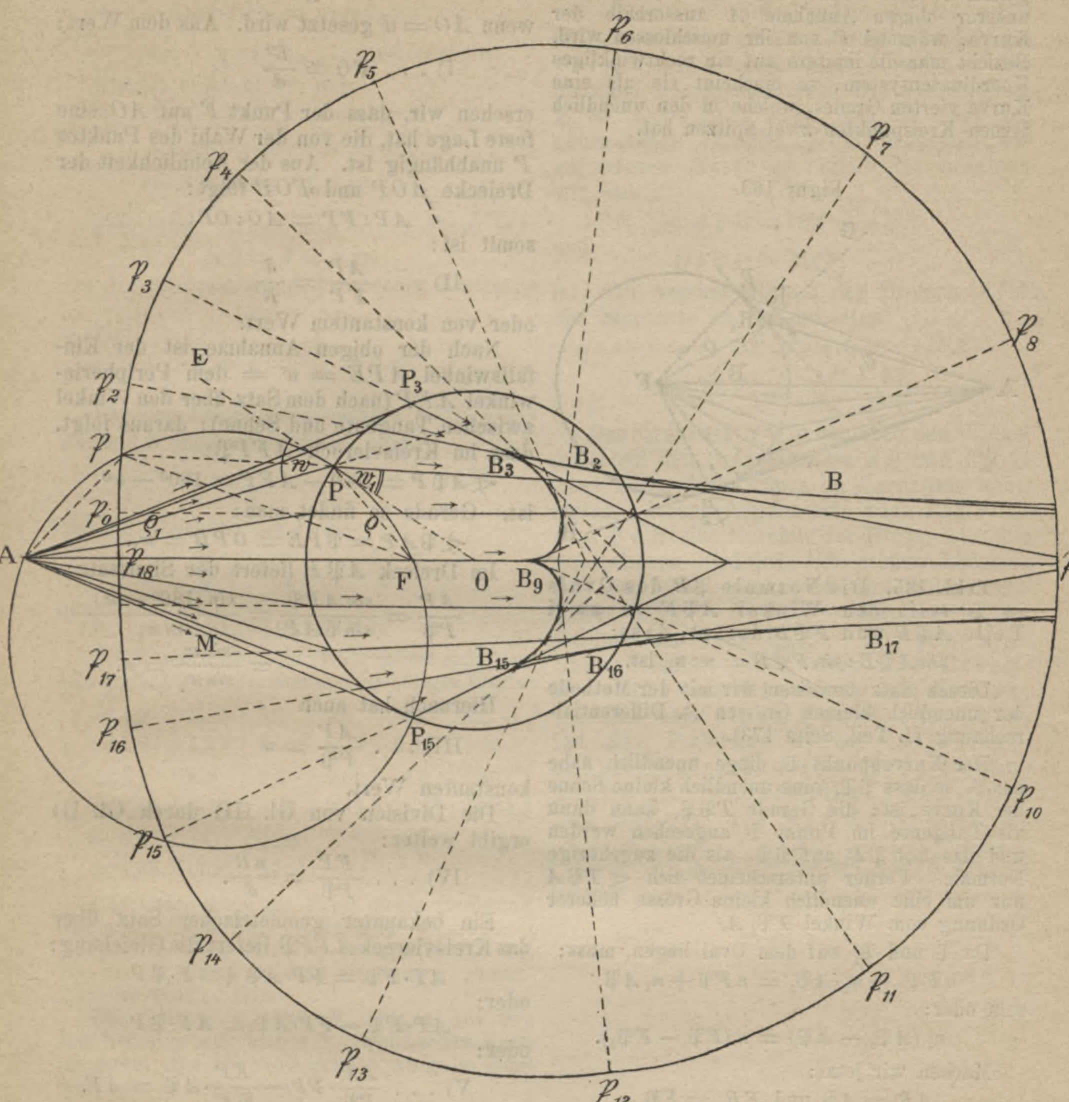
Aufgabe 400. Die Brennlinie durch Brechung für einen Kreis zu finden.

Erkl. 134. Sind A und F zwei feste Punkte in der Entfernung $AF = c$, bedeuten ferner n und n_1 zwei konstante Zahlen, ϱ_1 und ϱ die Entfernungen eines Punktes $\mathfrak{P}$ der Ebene von den vorigen Punkten A und F, und genügen diese Grössen der Bedingung $n\varrho + n_1\varrho_1 = c$, so ist der geometrische Ort von dem Punkt $\mathfrak{P}$ eine Kurve, welche nach Descartes, der dieselbe zuerst untersucht hat, das Oval von Descartes oder das Cartesianische Oval genannt wird. Je nachdem $n > n_1$ oder $n < n_1$, nimmt die Kurve verschiedene Formen an. Der Figur 163 liegt die Gleichung:

$$2\varrho + \frac{1}{3}\varrho_1 = 6$$

Auflösung. In Figur 162 sei A der leuchtende Punkt; ferner sei der Kreis um O mit dem Halbmesser $OP = r$ die Trennungslinie von zwei durchsichtigen Stoffen verschiedener Brechbarkeit und zwar liege der leuchtende Punkt A wieder im optisch dünneren Stoff. Ist AP ein Lichtstrahl, der den lichtbrechenden Kreis in P unter dem Winkel $APE = w$ trifft, und stellt PB den gebrochenen Strahl vor mit dem Brechungswinkel $OPB = w_1$, so muss $\frac{\sin w}{\sin w_1} = n$ sein, wenn n den Brechungsexponenten der beiden Stoffe vorstellt; hier ist $n > 1$ wegen des Uebergangs vom dünneren zum dichteren Stoff. — Um die einhüllende Kurve der ge-

Figur 162.



zu Grunde. Sie lässt sich leicht konstruieren durch die aus der vorigen Gleichung gezogenen Werte:

$\varrho = \frac{12}{7} = 1{,}71$	1,8	1,9	2	2,1
$\varrho_1 = \frac{54}{7} = 7{,}71$	7,2	6,6	6	5,4

$\varrho =$ 2,2	2,3	2,4
$\varrho_1 =$ 4,8	4,2	3,6.

brochenen Strahlen PB zu erhalten, schlagen wir folgenden geometrischen Weg ein.

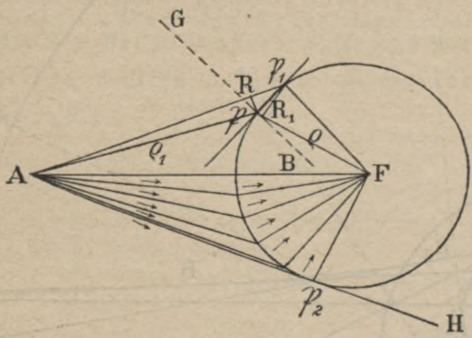
Wir ziehen das Mittellot von AP und die Kreistangente in P; aus dem Schnittpunkt M beider Geraden beschreiben wir den durch A und P gehenden Kreis, welcher AO in F und die Verlängerung des gebrochenen Strahles PB in $\mathfrak{P}$ schneidet. Da OP den neuen Kreis in P berührt, ist:

$$OP^2 = AO \cdot FO;$$

also haben wir:

Die Punkte A und F heissen die **Brennpunkte** des Ovals; von diesen liegt bei unserer obigen Annahme A ausserhalb der Kurve, während F von ihr umschlossen wird. Bezieht man die letztere auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so erscheint sie als eine Kurve vierten Grades, welche in den unendlich fernen Kreispunkten zwei Spitzen hat.

Figur 163.



Erkl. 135. Die Normale $\mathfrak{P}B$ des Ovals in $\mathfrak{P}$ teilt den Winkel $A\mathfrak{P}F$ in zwei Teile $A\mathfrak{P}B$ und $F\mathfrak{P}B$ derart, dass:

$$\sin A\mathfrak{P}B : \sin F\mathfrak{P}B = n : n_1 \text{ ist.}$$

Diesen Satz beweisen wir mit der Methode der unendlich kleinen Grössen (s. Differentialrechnung II. Teil, Seite 173).

Der Kurvenpunkt $\mathfrak{P}_1$ liege unendlich nahe bei $\mathfrak{P}$, so dass $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ eine unendlich kleine Sehne der Kurve ist; die Gerade $T\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ kann dann als Tangente im Punkt $\mathfrak{P}$ angesehen werden und das Lot $\mathfrak{P}B$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ als die zugehörige Normale. Ferner unterscheidet sich $\sphericalangle T\mathfrak{P}A$ nur um eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung vom Winkel $T\mathfrak{P}_1A$.

Da $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ auf dem Oval liegen, muss:

$$nF\mathfrak{P}_1 + n_1 \cdot A\mathfrak{P}_1 = nF\mathfrak{P} + n_1 A\mathfrak{P}$$

sein oder:

$$n_1 (A\mathfrak{P}_1 - A\mathfrak{P}) = n (F\mathfrak{P} - F\mathfrak{P}_1).$$

Machen wir jetzt:

$$AR = A\mathfrak{P} \text{ und } FR_1 = F\mathfrak{P}_1,$$

so wird:

$$n_1 \cdot \mathfrak{P}_1 R = n\mathfrak{P}R_1;$$

somit auch:

$$n_1 \cdot \frac{\mathfrak{P}_1 R}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1} = n \cdot \frac{\mathfrak{P}R_1}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}.$$

Wegen der unendlich kleinen Kreisbogen und Seiten dürfen wir die Dreiecke $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1R$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1R_1$ als rechtwinklig betrachten und setzen:

$$\frac{\mathfrak{P}_1 R}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1} = \cos \mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 A \text{ und } \frac{\mathfrak{P}R_1}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1} = \cos \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}F,$$

so dass:

$$n_1 \cos \mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 A = n \cos \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P} F$$

ist.

$$FO = \frac{OP^2}{AO} = \frac{R^2}{d},$$

wenn $AO = d$ gesetzt wird. Aus dem Wert:

$$\text{I)} \ldots FO = \frac{R^2}{d}$$

ersehen wir, dass der Punkt F auf AO eine feste Lage hat, die von der Wahl des Punktes P unabhängig ist. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AOP und FOP folgt:

$$AP : FP = AO : OP;$$

somit ist:

$$\text{II)} \ldots \frac{AP}{FP} = \frac{d}{R}$$

oder von konstantem Wert.

Nach der obigen Annahme ist der Einfallswinkel $APE = w =$ dem Peripheriewinkel AFP (nach dem Satz über den Winkel zwischen Tangente und Sehne); daraus folgt, dass im Kreisviereck $AFP\mathfrak{P}$:

$$\sphericalangle A\mathfrak{P}P = 180^0 - AFP = 180^0 - w^0$$

ist. Gerade so findet man:

$$\sphericalangle \mathfrak{P}AP = \mathfrak{P}PE = OPB = w_1.$$

Im Dreieck $A\mathfrak{P}P$ liefert der Sinussatz:

$$\frac{AP}{P\mathfrak{P}} = \frac{\sin AP\mathfrak{P}}{\sin \mathfrak{P}AP} = \frac{\sin(180^0 - w)}{\sin w_1} = \frac{\sin w}{\sin w_1} = n.$$

Hiernach hat auch

$$\text{III)} \ldots \frac{AP}{P\mathfrak{P}} = n$$

konstanten Wert.

Die Division von Gl. III) durch Gl. II) ergibt weiter:

$$\text{IV)} \ldots \frac{FP}{P\mathfrak{P}} = \frac{nR}{d}.$$

Ein bekannter geometrischer Satz über das Kreisviereck $AFP\mathfrak{P}$ liefert die Gleichung:

$$AP \cdot F\mathfrak{P} = FP \cdot A\mathfrak{P} + AF \cdot \mathfrak{P}P$$

oder:

$$AP \cdot F\mathfrak{P} - FP \cdot A\mathfrak{P} = AF \cdot \mathfrak{P}P$$

oder:

$$\text{V)} \ldots \frac{AP}{P\mathfrak{P}} \cdot FP - \frac{FP}{\mathfrak{P}P} \cdot A\mathfrak{P} = AF.$$

Setzen wir nun:

$$\text{VI)} \ldots AF = AO - FO = d - \frac{R^2}{d} = \frac{d^2 - R^2}{d},$$

sowie Gl. III) und IV) in Gl. V) ein, so folgt:

$$n \cdot F\mathfrak{P} - \frac{nR}{d} \cdot A\mathfrak{P} = \frac{d^2 - R^2}{d}.$$

Für $\frac{nR}{d} = n_1$, $F\mathfrak{P} = \varrho$, $A\mathfrak{P} = \varrho_1$, $\frac{d^2 - R^2}{d} = c$ geht diese Gleichung über in:

$$n\varrho - n_1 \varrho_1 = c.$$

Statt des Winkels $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 A$ darf Winkel TPA genommen werden; daher haben wir:

$$n_1 \cos TPA = n \cos \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P} F$$

oder:

$$n_1 \cos(90^0 - A\mathfrak{P}G) = n \cos(90^0 - F\mathfrak{P}B).$$

Hieraus erhalten wir jetzt:

$$n_1 \sin A\mathfrak{P}G = n \sin F\mathfrak{P}B$$

oder:

$$\sin A\mathfrak{P}G : \sin F\mathfrak{P}B = n : n_1,$$

oder:

$$\sin A\mathfrak{P}B : \sin F\mathfrak{P}B = n : n_1.$$

Erkl. 136. Wählt man wie in Figur 162:

$$AO = d = 8 \text{ cm}$$

und den Halbmesser des brechenden Kreises:

$$R = 3 \text{ cm},$$

so wird:

$$AF = c = \frac{55}{8} = 6{,}89.$$

Für den Brechungsexponenten $n = \frac{\sin w}{\sin w_1}$ wurde 1,5 angenommen; dies ergab:

$$\frac{nR}{d} = \frac{9}{16}$$

und als Gleichung des Ovals:

$$\frac{3}{2}\varrho - \frac{9}{16}\varrho_1 = \frac{55}{8}$$

oder:

$$24\varrho - 9\varrho_1 = 110.$$

Die Konstruktion des Ovals macht sich dann sehr einfach durch die zusammengehörigen Werte:

$\varrho = 5{,}2$	5,25	5,3	5,4	5,85	5,8
$\varrho_1 = 1{,}65$	1,77	1,90	2,19	2,44	3,25

$\varrho = 5{,}2$	6,0	7,0	8,0	9,0	10
$\varrho_1 = 1{,}65$	3,77	6,44	9,11	11,77	14,44

$\varrho = 5{,}2$	11	11,3
$\varrho_1 = 1{,}65$	17,11	17,91.

Der Leser möge die Form dieses Ovals mit jenem der Figur 163 vergleichen.

Seine Evolute hat vier Spitzen in B_3, B_9, B_{15} und B_{18}, von welchen die letztere ausserhalb des Blattes fällt.

Die Spitzen B_3 und B_{15} liegen auf den Randstrahlen AP_3 und AP_{15}, welche den Kreis berühren. Bei der vorliegenden Aufgabe kommen nur die zwei Aeste:

$$B_0 B B_2 B_3 \text{ und } B_{15} B_{16} B_{17} \cdots B_0$$

in Betracht.

Erkl. 137. Da in Figur 163 nach Erkl. 135:

$$\sin A\mathfrak{P}G : \sin B\mathfrak{P}F = n : n_1,$$

d. h. $\frac{\sin A\mathfrak{P}G}{\sin B\mathfrak{P}F} =$ konstant, $\sphericalangle B\mathfrak{P}F$ aber der Einfallswinkel des Strahls AP und $B\mathfrak{P}F$ der Brechungswinkel desselben ist, wenn man das Oval als brechende Kurve betrachtet, so folgt, dass der von A ausgehende Strahl $A\mathfrak{P}$ nach der Brechung durch den Punkt F geht. Wegen der vorhin bewiesenen Eigenschaft der Normalen

Da die Punkte A und F fest sind, so gibt uns die vorige Gleichung den geometrischen Ort des Punktes $\mathfrak{P}$ an. Die letztere stellt aber ein Cartesianisches Oval vor mit den Brennpunkten F und A, das hiernach der geometrische Ort des Punktes $\mathfrak{P}$ ist (siehe Erkl. 134). Um die Lage des gebrochenen Strahles $\mathfrak{P}PB$ bezüglich der gefundenen Kurve zu ermitteln, beachten wir, dass:

$$\sphericalangle A\mathfrak{P}P = 180^0 - AFP$$

und

$$\sphericalangle F\mathfrak{P}P = FAP$$

ist; nun wenden wir auf das Dreieck APF den Sinussatz an und erhalten:

$$\sin A\mathfrak{P}P : \sin F\mathfrak{P}P = \sin AFP : \sin FAP$$

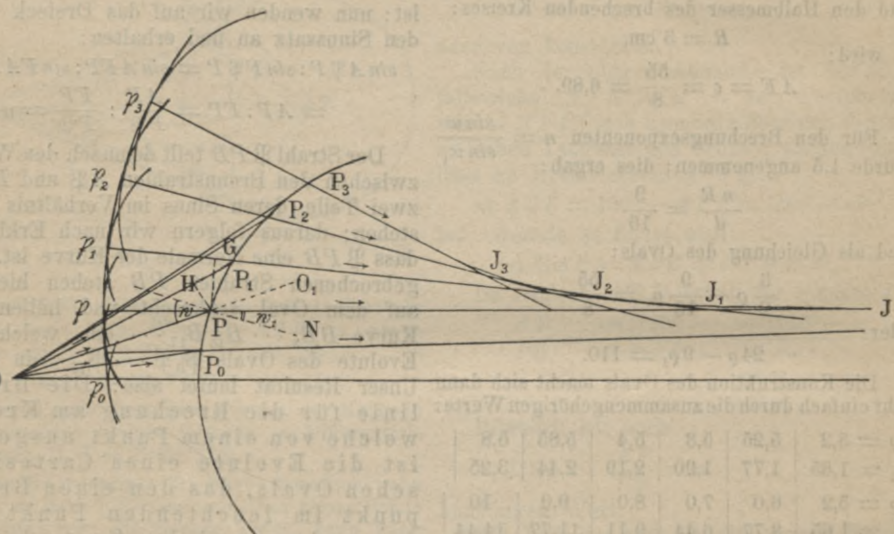
$$= AP : FP = \frac{AP}{P\mathfrak{P}} : \frac{FP}{P\mathfrak{P}} = n : n_1.$$

Der Strahl $\mathfrak{P}PB$ teilt demnach den Winkel zwischen den Brennstrahlen $A\mathfrak{P}$ und $F\mathfrak{P}$ in zwei Teile, deren Sinus im Verhältnis $n : n_1$ stehen; daraus folgern wir nach Erkl. 135, dass $\mathfrak{P}PB$ eine Normale der Kurve ist. Die gebrochenen Strahlen PB stehen hiernach auf dem Oval senkrecht und hüllen eine Kurve $BB_3 \cdots B_{15}B_{17} \cdots$ ein, welche die Evolute des Ovals $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P} \cdots \mathfrak{P}_{18}$ sein muss. Unser Resultat lautet also: Die Brennlinie für die Brechung am Kreise, welche von einem Punkt ausgehen, ist die Evolute eines Cartesianischen Ovals, das den einen Brennpunkt im leuchtenden Punkt und den andern auf der Zentralen im Abstand $\frac{R^2}{d}$ vom Kreismittelpunkt hat.

wird nun dies auch für jeden anderen von A aus auf die Kurve fallenden Strahl zutreffen. Wir sehen also, dass alle von A ausgehenden Strahlen nach der Brechung durch das Oval im andern Brennpunkt F wieder zusammenkommen.

Erkl. 138. Um das Studium der Brennlinien haben sich ausser Descartes verdient gemacht: Huyghens, Jakob und Johann Bernoulli, Malus, Quetelet, Laurent, Cayley, Glaisher u. a.

Figur 164.



Frage 124. Bestehen zwischen einer Kurve und der zugehörigen Diakaustika eines gegebenen Punktes allgemeine Beziehungen?

Antwort. In Figur 164 sei O der leuchtende Punkt und $P_0 P P_1 P_2$ die brechende Kurve; OP_0 sei der senkrecht auffallende Strahl, welcher ohne Ablenkung nach rechts weiter geht. Ferner bedeute OP einen beliebigen Strahl mit dem Einfallswinkel w und dem Brechungswinkel w_1 gegen die Kurvennormale in P, so dass PJ die Richtung des gebrochenen Strahles und hierbei $\sin w = n \sin w_1$ ist mit n als Brechungsexponent zwischen den beiden durch die Kurve $P_0 P P_1 P_2$ getrennten Stoffe.

Weiter nehmen wir einen zu dem Strahl OP unendlich nahen Strahl OP_1, der nach der Brechung in der Richtung $P_1 J_1$ weiter geht und PJ im Punkt J_1 trifft. Fällen wir $PH \perp OP_1$ und $PG \perp J_1 P_1$, so können wir wegen der unendlich kleinen Strecken $PP_1 \perp$ zur Normalen PN und $PH \perp OPO_1$ ansehen; dann wird:

$$\sphericalangle HPP_1 = O_1PN = w \text{ und } \sphericalangle GPP_1 = NPJ_1 = w_1,$$

daher:

$$P_1H = PP_1 \cdot \sin w \text{ und } P_1G = PP_1 \sin w_1.$$

Nehmen wir hierzu $OP = OH$ und $J_1P = J_1G$, so folgt:

$$OP_1 = OP + PP_1 \cdot \sin w, \qquad J_1P_1 = J_1P - PP_1 \cdot \sin w_1,$$

$$\frac{1}{n}OP_1 = \frac{1}{n}OP + \frac{1}{n}PP_1 \cdot \sin w, \quad J_1P_1 = J_1P - \frac{1}{n}PP_1 \cdot \sin w;$$

Die Addition liefert:

$$\frac{1}{n}OP_1 + J_1P_1 = \frac{1}{n}OP + J_1P.$$

Macht man nun in der Rückverlängerung von PJ_1 die Strecke $P\mathfrak{P} = \frac{1}{n}OP$ und ebenso $P_1\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{n}OP_1$, so folgt:

$$\mathfrak{P}_1P_1 + J_1P_1 = \mathfrak{P}P + J_1P;$$

d. h. es wird:

$$J_1\mathfrak{P}_1 = J_1\mathfrak{P}$$

und die gebrochenen Strahlen PJ und P_1J_1 sind normal zu dem geometrischen Ort von $\mathfrak{P}$. Der letztere ist aber die Einhüllende der Kreise aus den Mittelpunkten P, P_1 u. s. w. mit den Halbmessern:

$$P\mathfrak{P} = \frac{1}{n}OP, \quad P_1\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{n}OP_1 \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt der

Satz. Beschreibt man nun die Punkte, in welchen die vom leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen die brechende Linie treffen, Kreise, deren Halbmesser zu der Entfernung vom leuchtenden Punkt im Verhältnis der Brechungsexponenten stehen, so ist die Einhüllende dieser Kreisschar die Evolvente der Diakaustika.

Diesen Satz und jenen von Seite 254 verdankt man Quetelet. (Siehe Nouveaux Mémoires de l'Academie de Bruxelles 1826.)

Uebungsbeispiele.

Aufgabe 401. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die Gerade g mit der Gleichung $x = c$. Von einem Punkt P der letzteren sind die beiden Tangenten an den Kreis gelegt und die Verbindungslinie s der zwei Berührungspunkte gezogen worden. Es soll die Einhüllende von s gefunden werden, wenn sich P auf g bewegt.

Auflösung. Alle Gerade s gehen durch einen Punkt auf der Abscissenachse in der Entfernung $x_0 = \frac{r^2}{c}$ vom Mittelpunkt.

(Vergl. Aufgabe 170.)

Aufgabe 402. Die nämliche Aufgabe für die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

und die Gerade g mit der Gleichung $x = c$.

Auflösung. Ebenso:

$$x_0 = \frac{a^2}{c}.$$

(Vergl. Aufgabe 172.)

Aufgabe 403. Ein rechter Winkel bewegt sich so, dass der eine Schenkel durch einen festen Punkt F geht und der Scheitel an einer festen Geraden g hingleitet; man sucht die Einhüllende des andern Schenkels.

Auflösung. Wird die feste Gerade g zur Y-Achse und das Lot OF von F auf g zur Abscissenachse, so wird für $OF = \frac{p}{2}$ die Gleichung der Einhüllenden:

$$y^2 = 2px,$$

d. h. sie ist eine Parabel mit F als Brennpunkt.

Aufgabe 404. Um einen festen Punkt F dreht sich eine Gerade FG und schneidet eine feste Gerade g in G. Man soll die Einhüllende der Geraden GH finden, welche mit der drehenden Geraden FG den konstanten Winkel $FGH = \varphi$ bildet.

Auflösung. Wahl des Koordinatensystems wie vorhin. Gleichung der Einhüllenden für $OF = p$:

$$x^2 + y^2 = (x \sin\varphi + y \cos\varphi - p \sin\varphi)^2.$$

Die Einhüllende ist wieder eine Parabel mit F als Brennpunkt.

Aufgabe 405. Gegeben sind zwei feste Punkte $F_1 F_2$ in der Entfernung:

$$OF_1 = OF_2 = c.$$

Bestimme die Einhüllende einer geraden Linie g, für welche das Produkt der senkrechten Abstände $F_1 G_1$ und $F_2 G_2$ der Punkte F_1 und F_2 von g den konstanten Wert d^2 hat.

Auflösung. $F_1 O F_2$ sei Abscissenachse, das Lot im Halbierungspunkt O Ordinatenachse, dann lautet die Gleichung der Einhüllenden von g:

$$\frac{x^2}{d^2 + c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1.$$

Aufgabe 406. Bestimme die Einhüllende einer geraden Linie, für welche die Summe der senkrechten Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Auflösung. F_1 und F_2 seien wieder die gegebenen Punkte im Abstand $F_1 F_2 = 2c$; g sei eine Lage der Geraden und $F_1 G_1$ und $F_2 G_2$ die Lote auf g von F_1 und F_2; $F_1 G_1^2 + F_2 G_2^2$ soll $= s^2$ werden.

Wahl der Achsen wie vorhin. Gleichung der Einhüllenden:

$$\frac{2x^2}{s^2 - 2c^2} + \frac{2y^2}{s^2} = 1.$$

Aufgabe 407. Bestimme die Einhüllende aus der Differenz der Quadrate dieser senkrechten Abstände.

Auflösung. Eine Parabel.

Aufgabe 408. Eine Gerade g bewegt sich zwischen zwei sich schneidenden Geraden l_1 und l_2 so, dass das von ihr abgeschnittene Dreieck einen konstanten Inhalt k^2 hat. Welche Kurve wird von g eingehüllt?

Auflösung. Wählt man l_1 und l_2 zu Koordinatenachsen und bezeichnet $\sphericalangle(l_1, l_2)$ mit λ, so heisst die Gleichung der Einhüllenden:

$$xy = \frac{k^2}{2 \sin\lambda};$$

sie ist also eine Hyperbel.

Aufgabe 409. In der Ellipse mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sind zwei konjugierte Durchmesser gezogen und deren Endpunkte durch eine Sehne s verbunden worden. Welche Kurve hüllt s ein?

Auflösung. Gleichung der Einhüllenden:

$$\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1.$$

Aufgabe 410. Man bestimme die Einhüllende der Berührungssehnen aller derjenigen Tangentenpaare an die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

welche aufeinander senkrecht stehen.

Auflösung. Gleichung der Einhüllenden:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^4} x^2 + \frac{a^2 + b^2}{b^4} y^2 = 1.$$

Diese Kurve ist eine Ellipse, welche mit der gegebenen die beiden Brennpunkte gemeinschaftlich hat; beide sind konfokal.

Aufgabe 411. Ein rechter Winkel werde so verschoben, dass der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht und der Scheitel einen gegebenen Kreis durchläuft. Man sucht die Einhüllende des andern Schenkels.

Auflösung. Der Kreis habe den Halbmesser r, der feste Punkt heisse F und habe vom Kreismittelpunkt O den Abstand $OF = c$, das Koordinatensystem werde durch O als Ursprung und OF als Abscissenachse gelegt, dann ist die Gleichung der Einhüllenden:

$$(r^2 - c^2) x^2 + r^2 y^2 = r^2 (r^2 - c^2);$$

die Einhüllende ist also eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt.

Aufgabe 412. Ein rechter Winkel bewegt sich so, dass der eine Schenkel durch den Scheitel einer Parabel geht, während die Spitze des rechten Winkels auf dem Scheitel fortrückt. Man sucht die Einhüllende des andern Schenkels.

Auflösung. Heisst die Gleichung der Parabel:

$$y^2 = 2px,$$

so ist die Gleichung der Einhüllenden:

$$\frac{27}{2} p y^2 = (x - 2p)^3.$$

Die Kurve ist also eine Neilsche Parabel. (Siehe Aufgabe 388 und Figur 143).

Aufgabe 413. Von einem Punkt der Ellipse:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$$

werden Tangentenpaare an die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gezogen. Es wird die Einhüllende der Berührungssehnen verlangt.

Auflösung.

$$\frac{m^2 x^2}{a^4} + \frac{n^2 y^2}{b^4} = 1.$$

Aufgabe 414. Verlangt die Einhüllende einer Sehne eines Kegelschnittes, welche am Brennpunkt einen konstanten Winkel spannt.

Auflösung. Die Einhüllende ist ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen den Brennpunkt und die Direktrix gemein hat.

Aufgabe 415. Der Mittelpunkt eines veränderlichen Kreises bewegt sich auf des Abscissenachse so, dass das Quadrat des Halbmessers gleich der zugehörigen Abscisse x_0 des Mittelpunktes, multipliziert mit einer Konstanten c ist. Berechne die Gleichung der Einhüllenden dieser Kreisschar.

Auflösung. Die Einhüllende ist die Parabel:

$$y^2 = cx + \frac{1}{4}c^2.$$

Aufgabe 416. Bestimme die Einhüllende der Kreisschar, welche durch die Gleichung:

$$(x-a)^2 + y^2 = b^2$$

mit der Bedingung:

$$b^2 = 4ma$$

gegeben ist.

Auflösung. Die Einhüllende ist die Parabel:

$$y^2 = 4m(x+m).$$

Aufgabe 417. Bestimme die Einhüllende der Parabelschar, welche durch die Gleichung:

$$y = ax - (1+a^2)\frac{x^2}{4c}$$

gegeben ist.

Auflösung. Man findet:

$$x^2 = 4c(c-y),$$

d. h. eine Parabel; sie ist die Einhüllende der Parabeln, welche als Flugbahnen eines Geschosses auftreten, das mit konstanter Geschwindigkeit, aber unter veränderlicher Neigung gegen die horizontale Ebene abgeschossen wird.

Aufgabe 418. Gesucht wird die Einhüllende der konzentrischen Ellipsen, deren Achsen die nämlichen Richtungen haben und für welche die Summe der Achsen konstant ist, nämlich $= k$.

Auflösung. Es ergibt sich:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

Die Einhüllende ist somit eine Astroide. (Siehe Aufgabe 383 und Figur 134.)

Aufgabe 419. Gesucht wird die Einhüllende der konzentrischen Ellipsen, deren Achsen die nämliche Richtung haben und die gleiche Fläche πc^2 besitzen.

Auflösung. Die Einhüllende hat die Gleichung:

$$4x^2y^2 = c^4.$$

Aufgabe 420. Gesucht wird die Einhüllende einer Ellipse mit den Halbachsen a und b, deren Mittelpunkt sich auf einer zweiten kongruenten und parallelen Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

bewegt.

Auflösung. Die Einhüllende ist die Ellipse:

$$\frac{x^2}{(2a)^2}+\frac{y^2}{(2b)^2}=1.$$

Aufgabe 421. Die Einhüllende der logarithmischen Spiralen zu finden, deren Gleichung:

$$y=me^{\frac{x}{m}}$$

ist, wenn m als veränderlicher Parameter betrachtet wird.

Auflösung. Die Einhüllende ist die Gerade:

$$y=ex.$$

Aufgabe 422. Bestimme die Gleichung der Fusspunktkurve der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

in Bezug auf den Ursprung.

Auflösung.

$$(x^2+y^2)^2+b^2y^2-a^2x^2=0.$$

Aufgabe 423. Bestimme die Fusspunktkurve der Kardioide:

$$r=2a(1-\cos\varphi).$$

Auflösung. Die Gleichung der gesuchten Kurve in Polarkoordinaten r' und φ' wird:

$$r'=4a\sin^3\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi'}{3}\right).$$

Aufgabe 424. Bestimme die Gleichung der Parallelkurve der Parabel:

$$y=4mx$$

im Abstand r.

Auflösung.

$$\begin{aligned}r^6&-(3y^2+x^2+8mx-8m^2)r^4\\&+[3y^4+y^2(2x^2-2mx+20m^2)\\&+8mx^3+8m^2x^2-32m^3x+16m^4]r^2\\&-(y^2-4mx)^2[y^2+(x-m)^2]=0.\end{aligned}$$

Aufgabe 425. Bestimme die Gleichung der Parallelkurve der Astroide:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

im Abstand k.

Auflösung.

$$\begin{aligned}&[3(x^2+y^2-a^2)-4k^2]\\&\quad+[27axy-9k(x^2+y^2)\\&\quad-18a^2k+8k^3]^2=0.\end{aligned}$$

Aufgabe 426. Bestimme die Gleichung der Parallelkurve der Cykloide:

$$x=a(t-\sin t)$$
$$y=a(1-\cos t)$$

m Abstand k.

Auflösung.

$$x'=2at-(2a\sin t\pm k)\cos t,$$
$$y'=(2a\sin t\pm k)\sin t.$$

Verzeichnis der wichtigsten Formeln.

Tangentengleichungen.

Kurvengleichung $y = f(x)$ in Cartesischen Koordinaten; x, y die Koordinaten des Berührungspunktes: $Y - y = f'(x)(X - x)$. (Seite 2.)

Kurvengleichung $F(x, y) = 0$; x, y Koordinaten des Berührungspunktes:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0. \quad \text{(Seite 7.)}$$

Kurvengleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$:

$$Y - y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}(X - x). \quad \text{(Seite 10.)}$$

Kurvengleichung in homogenen Koordinaten; $f(x_1, x_2, x_3) = 0$; x_1, x_2, x_3 Koordinaten des Berührungspunktes:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3 = 0. \quad \text{(Seite 31.)}$$

Kurvengleichung in Polarkoordinaten μ der Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente:

$$tg\,\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\Theta}}, \quad sin\,\mu = \frac{r\,d\Theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\Theta^2}}, \quad cos\,\mu = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\Theta^2}}. \quad \text{(Seite 18.)}$$

Normalengleichung.

Kurvengleichung $y = f(x)$; Koordinaten des Kurvenpunktes x, y:

$$X - x + f'(x)(Y - y) = 0. \quad \text{(Seite 48.)}$$

Kurvengleichung $F(x, y) = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(X - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(Y - y) = 0. \quad \text{(Seite 48.)}$$

Kurvengleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$:

$$(X - x)\varphi'(t) + (Y - y)\psi'(t) = 0. \quad \text{(Seite 48.)}$$

Länge der Tangenten, Normalen, Subtangenten und Subnormalen.

In rechtwinkligen Koordinaten:

$$\text{Tangente } t = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

$$\text{Subtangente } t_x = y \cdot \frac{dx}{dy},$$

$$\text{Normale } n = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$\text{Subnormale } n_x = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}. \quad \text{(Seite 57.)}$$

Länge der Polartangente, Polarnormalen, Polarsubtangente und Polarsubnormalen.

Kurvengleichung $r = f(\Theta)$:

$$\text{Polartangente } t^* = r\sqrt{1 + \left(r\frac{d\Theta}{dr}\right)^2},$$

$$\text{Polarnormale } n^* = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2},$$

$$\text{Polarsubtangente } t_t^* = r^2 \frac{d\Theta}{dr},$$

$$\text{Polarsubnormale } n_t = \frac{dr}{d\Theta}. \quad \text{(Seite 66.)}$$

Polarengleichung.

Kurvengleichung $F(x, y) = 0$; Koordinaten des Pols X_0, Y_0:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y - \left(\frac{\partial F}{\partial x} X_0 + \frac{\partial F}{\partial y} Y_0\right) = 0.$$

Für $F(x, y) \equiv u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1 + u_0 = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} X_0 + \frac{\partial F}{\partial y} Y_0 + u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \cdots + (n-1)u_1 + nu_0 = 0. \quad \text{(Seite 90.)}$$

Kurvengleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$; Koordinaten des Pols X_1^*, X_2^*, X_3^*:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} X_1^* + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2^* + \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3^* = 0. \quad \text{(Seite 94.)}$$

Krümmungshalbmesser und Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes.

Kurvengleichung $y = f(x)$:

$$\varrho = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}, \quad \xi = x - \frac{f'(x)[1 + f'(x)^2]}{f''(x)}, \quad \eta = y + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}. \quad \text{(Seite 166.)}$$

Kurvengleichung $F(x, y) = 0$:

$$\varrho = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2},$$

$$\xi = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2 y}{dx^2}}, \quad \eta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}}. \quad \text{(Seite 166.)}$$

Kurvengleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$:

$$\varrho = \frac{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}{\varphi'(t)\cdot\psi''(t) - \varphi''(t)\cdot\psi'(t)}, \quad \xi = \varphi(t) - \frac{\psi'(t)[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]}{\varphi'(t)\cdot\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)},$$

$$\eta = \psi(t) + \frac{\varphi(t)[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]}{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}. \quad \text{(Seite 169.)}$$

Kurvengleichung $r = \Phi(\Theta)$:

$$\varrho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - r\cdot\frac{d^2 r}{d\Theta^2}}, \quad \xi = r\cos\Theta - \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2\right]\left[r\cos\Theta + \sin\Theta\cdot\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\Theta^2}},$$

$$\eta = r\sin\Theta + \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2\right]\left[-r\sin\Theta + \cos\Theta\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\Theta^2}}.$$

(Seite 170.)

Formeln von Euler.

Ist $u = f(x_1, x_2, x_3)$, so ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = nu = n_1 f(x_1, x_2, x_3),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} x_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} x_1 x_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} x_2 x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\cdot x_3^2$$
$$= n(n-1)u = n(n-1)f(x_1, x_2, x_3). \quad \text{(Seite 25.)}$$

Reihenfolge zum Zeichnen einer Sammlung höherer Kurven.

(Siehe Vorwort.)

I. Gruppe: Kreiskurven.

1) Figur 139. Fusspunktkurve des Kreises (Pascalsche Schnecke):

$$(x^2 + y^2 - Rx)^2 - R^2(x^2 + y^2) = 0 \text{ oder } r = a\cos\Theta \pm R,$$

Pol ausserhalb, also $a > R$.

2) Figur 140. Fusspunktkurve des Kreises (Pascalsche Schnecke):

$$(x^2 + y^2 - Rx)^2 - R^2(x^2 + y^2) = 0 \text{ oder } r = a\cos\Theta \pm R,$$

Pol innerhalb, also $a < R$.

3) Figur 157. Evolute der Kurve 1) (Katakaustika für den Kreis), leuchtender Punkt ausserhalb.

4) Figur 156. Katakaustika für den Kreis, leuchtender Punkt auf dem Umfang (Kardioide), siehe Nro. 11).

5) Figur 152. Katakaustika für den Kreis, leuchtender Punkt im Unendlichen (Epicykloide):

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{R}{4}(3\cos\Theta - \cos 2\Theta), \\ y &= \frac{R}{4}(3\sin\Theta - \sin 3\Theta). \end{aligned}\right.$$

II. Gruppe: Rollkurven.

6) Figur 13. Cykloide: $x = r(t - \sin t)$ und $y = r(1 - \cos t)$.

7) Figur 34. Gedehnte Cykloide: $x = rt - b\sin t$ und $y = r - b\cos t$ für $b < r$.

8) Figur 34. Verschlungene Cykloide: $x = rt - b\sin t$ und $y = r - b\cos t$ für $b > r$.

9) Figur 107. Evolute der Cykloide, wieder eine Cykloide.

10) Figur 15. Epicykloide: $x = (a + r)\cos\frac{a}{r}t - a\cos\left(\frac{a}{r}t + t\right)$ und

$$y = (a + r)\sin\frac{a}{r}t - a\sin\left(\frac{a}{r}t + t\right) \text{ für } a = \frac{r}{3}.$$

11) Figur 16. Epicykloide (Kardioide) für $a = r$ oder:

$$y^4 - 2(2r^2 + 2rx - x^2)y^2 - 4rx^3 + x^4 = 0.$$

12) Figur 36. Gedehnte Epicykloide: $x = (a + r)\cos\frac{at}{r} - b\left(\cos\frac{at}{r} + t\right)$,

$$y = (a + r)\sin\frac{at}{r} - b\sin\left(\frac{at}{r} + t\right) \text{ für } b < a.$$

13) Figur 36. Verschlungene Epicykloide: $x = (a + r)\cos\frac{at}{r} - b\left(\cos\frac{at}{r} + t\right)$,

$$y = (a + r)\sin\frac{at}{r} - b\sin\left(\frac{at}{r} + t\right) \text{ für } b > a.$$

14) Figur 123. Evolute der Epicykloide, wieder eine Epicykloide.

15) Figur 124. Evolute der Kardioide, wieder eine Kardioide.

16) Figur 18. Hypocykloide: $x = (r - a)\cos\frac{at}{r} + a\cos\left(t - \frac{at}{r}\right)$ und

$$y = (r - a)\sin\frac{at}{r} + a\sin\left(t - \frac{at}{r}\right) \text{ für } a = \frac{r}{3}.$$

17) Figur 19. Hypocykloide: (Astroide) für $a = \frac{r}{4}$.

18) Figur 134. Astroide als Enveloppe: $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$

19) Figur 37. Gedehnte Hypocykloide: $x = (r-a)\cos\frac{at}{r} + b\cos\left(t - \frac{at}{r}\right)$,

$$y = (r-a)\sin\frac{at}{r} - b\sin\left(t - \frac{at}{r}\right) \text{ für } b < a.$$

20) Figur 37. Verschlungene Hypocykloide: $x = (r-a)\cos\frac{at}{r} + b\cos\left(t - \frac{at}{r}\right)$,

$$y = (r-a)\sin\frac{at}{r} - b\sin\left(t - \frac{at}{r}\right) \text{ für } b > a.$$

21) Figur 125. Evolute der Astroide, wieder eine Astroide.

III. Gruppe: Kegelschnittkurven.

22) Figur 105. Parabel $y^2 = 2px$ mit Oskulationskreis im Scheitel und in einem Kurvenpunkt, ferner mit Evoluten (Neilsche Parabel): $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$. [Siehe Nro. 33)].

23) Figur 143. Parabel $y^2 = 2px$ mit Fusspunktkurve (Cissoide):

$$(-x)^3 = y^2\left[\frac{p}{2} - (-x)\right]. \text{ [Siehe Nro. 40)].}$$

24) Figur 106. Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit Evolute $\left(\frac{ax}{e}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{e}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ für $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

25) Figur 118. Parallelkurven der Ellipse.

26) Figur 144. Fusspunktkurve der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit Gl. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.

26a). Fig. 160. Ellipse mit Evoluten als Diakaustika einer Geraden und eines leuchtenden Punktes für $n > 1$.

27) Figur 114. Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit Evoluten $\left(\frac{ax}{e}\right)^2 - \left(\frac{by}{e}\right)^2 = 1$ für $e = \sqrt{a^2 + b^2}$.

28) Figur 145. Gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ mit Fusspunktkurve (Lemniscate):

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

29) Figur 160. Hyperbel mit Evoluten als Diakaustika einer Geraden und eines leuchtenden Punktes für $n < 1$.

IV. Gruppe: Kurven höherer Grade.

30) Figur 66. Wendeparabel $y = x^3$.

31) Figur 67. Flachparabel $y = x^4$.

32) Figur 68. Wendeflachparabel $y = x^5$ u. s. w.

32a) Figur 31 im II. Band. $y = x^5$ mit Differentialkurven.

33) Figur 30. Neilsche Parabel $y^2 = x^3$.

34) Figur 86. Spitzparabel $y^3 = x^4$.

35) Figur 69. Wendespitzparabel $y^3 = 5$ u. s. w.

36) Figur 49. Binomische Hyperbel $x^2y = 1$.

37) Figur 4. Binomische Hyperbel $x^2y^3 = 1$ u. s. w.

38) Figur 2. Parabel dritten Grades $y = x^3 + 2x^2 + 4x - 4$.

39) Figur 26. Blatt des Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

40) Figur 11. Cissoide $x^3 = y^2(2a - x)$.

41) Figur 70. Kurve $x^2y + x + y - 1 = 0$ mit drei Wendepunkten.

42) Figur 54. Kurve $x^2y + y^2 - x = 0$ mit beiden Polaren.

43) Figur 78. Kurve $x^3 - x^2 - y^2 = 0$ mit isoliertem Punkt.

44) Figur 52. Kurve $x^2y + xy^2 - a^3 = 0$ mit zwei Asymptoten.

45) Figur 19. Kurve $x^2y - 4y - 1 = 0$ mit drei Asymptoten.

46) Figur 45. Konchoide $y^4 - 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y - 2bx^2y + b^2x^2 = 0$ oder:

$$r = \frac{b}{\sin\Theta} + a.$$

47) Figur 24. Lemniscate $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0$ oder $r^2=a^2\cos 2\Theta$.
48) Figur 112. Cassinische Kurve $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=q^4-c^4$ für $q=2c$.
49) Figur 112. Cassinische Kurve $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=q^4-c^4$ für $q=\frac{3}{4}c$.
50) Figur 163. Oval des Descartes $n\varrho+n_1\varrho_1=c$.
51) Figur 162. Evolute des Ovals von Descartes als Diakaustika des Kreises.
52) Figur 82. Kurve $x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2=0$ mit Selbstberührung.
53) Figur 83. Kurve $x^5-x^4-2x^2y-y^2=0$ mit Schnabelspitze.

V. Gruppe: Trigonometrische Kurven.

54) Figur 25 im II. Band: $y=\sin x$.
55) Figur 25 im II. Band: $y=\cos x$.
56) Figur 27 im II. Band: $y=arc(\sin=x)$.
57) Figur 27 im II. Band: $y=arc(\cos=x)$.
58) Figur 26 im II. Band: $y=tg\,x$.
59) Figur 26 im II. Bund: $y=cotg\,x$.
60) Figur 28 im II. Band: $y=arc(tg=x)$.
61) Figur 28 im II. Band: $y=arc(cotg=x)$.
62) Figur 73. Quadratrix des Dinostratus: $y=x\,tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)$.
63) Figur 74. Quadratrix des Tschirnhausen: $y=a\sin\frac{\pi x}{2a}$.

VI. Gruppe: Exponential- und logarithmische Kurven.

64) Figur 32. $y=2^x$ mit Differentialkurven.
65) Figur 33. $y=e^x$.
66) Figur 6. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ (Kettenlinie).
67) Figur 126. Evolvente der Kettenlinie (Traktrix): $y=c\log\frac{c+\sqrt{c^2-y^2}}{y}-\sqrt{c^2-y^2}$.
68) Figur 41. Traktrix mit Krümmungsmittelpunkt.
69) Figur 72. Kurve $y=l\,\frac{1+x}{1-x}$.

VII. Gruppe: Spiralen.

70) Figur 22. Archimedische Spirale $y=c\Theta$ und Figur 109 Krümmungsmittelpunkt.
71) Figur 43. Hyperbolische Spirale $r\Theta=c$.
72) Figur 44. Lituus-Spirale $r=\sqrt{\frac{c}{\Theta}}$.
73) Figur 23. Logarithmische Spirale $r=e^{\Theta}$.
74) Figur 127. Evolute der logarithmischen Spiralen, wieder eine Evolute.
75) Figur 147. Fusspunktlinie der logarithmischen Spiralen, wieder eine Evolute.
76) Figur 128. Logarithmische Spirale $r=e^{0{,}2745\,\Theta}$, mit Evoluten zusammenfallend.
77) Figur 25. Kreisevolvente $\Theta=\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}-arc\left(tg=\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right)$

oder $r=a\sqrt{1+w^2}$ und $\Theta=w-arc\,tg=w$
78) Figur 146. Fusspunktkurve der Kreisevolventen (Archimedische Spirale).

4, m