ELEMENTARBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

FR. AUTENHEIMER

ELEMENTARBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

MIT ZAHLREICHEN ANWENDUNGEN AUS DER ANALYSIS, GEOMETRIE, MECHANIK UND PHYSIK

FÜR

HÖHERE LEHRANSTALTEN UND DEN SELBSTUNTERRICHT

FÜNFTE VERBESSERTE AUFLAGE

BEARBEITET

VON

Dr. ALFRED DONADT
OBERLEHRER AN DER THOMASSCHULE IN LEIPZIG

Mit 156 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN

LEIPZIG 1901
VERLAG VON BERNH. FRIEDR. VOIGT.

Vorrede

zur vierten Auflage

Das Eigentümliche dieses Buches liegt teils in der Anordnung, teils in der Auswahl des Stoffes, den es bietet.

Die Differentialrechnung wird nicht im Zusammenhange behandelt. Auf die Differentiation der Funktionen mit einer Variabeln folgen sogleich Anwendungen des ersten Differentialverhältnisses auf die Bestimmung vom Maximum und Minimum dieser Funktionen, auf ebene Kurven und auf die Entwickelung der gewöhnlichsten unendlichen Reihen.

Sodann werden einfache Integrale abgeleitet und dieselben dazu benutzt, um Beispiele aus der Geometrie, der analytischen und technischen Mechanik, der Physik, der mathematischen und physikalischen Geographie etc. zu lösen. Wer die Infinitesimalrechnung studiert, hat auch schon einen Kurs der mechanischen Naturlehre durchgemacht. Deshalb konnte dieser Abschnitt nicht nur Beispiele über Rektifikationen, Quadratur und Kubatur der Kurven, sondern auch Aufgaben über Schwerpunkte, Trägheitsmomente, mechanische Arbeit, Reibung, Anziehung nach dem Gesetze der Gravitation, Wärme etc. bieten. Die Zahl der durchgeführten Aufgaben dieser Abteilung beträgt 148. Diese Beispiele sollen einerseits üben im Anschreiben der Differentialgleichung und im Integrieren derselben, andererseits aber auch das Interesse für den Gegenstand wecken. Es hat dabei nicht die Meinung, dass der Studierende eine jede dieser Aufgaben durcharbeite, bevor er zu einem weiteren Teile der Theorie übergeht. Er wird aus der gebotenen Zahl jene auswählen, welche ihm am meisten zusagen.

Erst nach diesen anschaulichen Uebungen folgt im zweiten Teil der Differentialrechnung: die Wiederholung der Differentiation und die Differentiation der Funktionen mit mehreren Veränderlichen, nebst den gewöhnlichen Anwendungen auf Geometrie und Analysis. Hierauf folgen im zweiten Teil der Integralrechnung: eine Erweiterung der theoretischen Partien, die vielfachen Integrale, die Wiederholung der Integration etc. Angereiht sind 49 ausgeführte Aufgaben aus verschiedenen Gebieten.

Der theoretische Teil ist somit nach methodischen Gesichtspunkten geordnet und auf das Notwendigste beschränkt. Dagegen ist das Gebiet der Anwendung sehr erweitert und dadurch der Beweis erbracht, dass mit wenig Lehren nach den verschiedensten Seiten hin erspriessliche Resultate gewonnen werden können. Das ist es auch, was Manchem bei Durchsicht des Buches auffällt und ihn für die Sache gewinnt. Die Mehrzahl derer, welche mathematischen Studien obliegen, haben weder die Absicht, noch die Kraft, die Mathematik um ihrer selbst willen zu studieren. Sie betrachten diese Wissenschaft als Hilfsmittel, um die Vorträge in den Fach-Kursen verstehen zu können. Diesen Studierenden soll Vortrag und Lehrbuch nach Möglichkeit entgegenkommen. Seit längerer Zeit geschieht es auch mehr und mehr, dass im Unterricht der höheren Mathematik den theoretischen Partien solche Beispiele, wie sie unser Buch bietet, nachfolgen. Wir kennen Dozenten, die zu diesem Zwecke das Buch benutzen. Es sind uns auch Briefe zugekommen, welche zeigen, mit welcher Freude die Verfasser dem Studium des Buches obliegen.

Gegenüber der dritten Auflage enthält diese Auflage einige Modifikationen und Erweiterungen.

So wurden Aufgaben beigefügt über Quantität der Bewegung, das Potential und die mechanische Wärmetheorie.

Zum Schlusse glauben wir noch darauf hinweisen zu dürfen, dass unsere Arbeit unter den Litteraturnachweisen figuriert, welche der im Jahre 1894 verstorbene Herr Prof. Dr. Rudolf Wolf in Zürich in seinem „Handbuch der Astronomie, ihre Geschichte und Litteratur“, Band I, 1890, auf Seite 108 im Abschnitt über Mathematik aufführt.

WINTERTHUR, im März 1895

Der Verfasser

Vorrede
zur fünften Auflage

Bei der Bearbeitung der fünften Auflage, mit der nach dem Ableben des Verfassers der Unterzeichnete von der Verlagsbuchhandlung betraut worden ist, sind die folgenden Grundsätze massgebend gewesen.

Wie aus der Vorrede zur vierten Auflage ersichtlich ist, wollte der Verfasser den Schwerpunkt des Buches auf die Anwendungen gelegt wissen und zeigen, welche vielseitigen Resultate mit nur wenigen allgemeinen Lehren gewonnen werden können. Dadurch sind nach der Meinung des Unterzeichneten die theoretischen Teile des Buches zu kurz gekommen, so dass es in erster Linie wünschenswert und nötig schien, die theoretischen Teile umzuarbeiten oder wenigstens an manchen Stellen zu erweitern. Eine Umarbeitung in diesem Sinne haben deshalb insbesondere die folgenden Kapitel erfahren: die Einleitung, die Begründung der Differentialrechnung, die Theorie der unendlichen Reihen, die Lehre von den bestimmten Integralen, die Ableitung der höheren Differentialquotienten, die Taylor'sche Reihe. Der Unterzeichnete weiss wohl, dass man in einigen dieser Kapitel eine noch weitergehende Ausführlichkeit und Strenge der Ableitung verlangen kann, und hätte gern in ihnen und noch in einigen andern Punkten Erweiterungen beigefügt, doch legte ihm der Charakter des Buches gewisse Beschränkung auf: das Buch sollte ein Elementarbuch bleiben.

Ferner galt es bei der neuen Auflage die gelegentlich der Besprechungen der vierten Auflage von verschiedenen Seiten geäusserten Wünsche und Verbesserungsvorschläge auf ihre Berechtigung zu prüfen und ihnen nach Möglichkeit Rechnung zu tragen.

Infolge davon sind die Aufgaben über das Trägheitsmoment vor die Aufgaben über lebendige Kraft gesetzt worden, weil dadurch eine Anzahl von Aufgaben über lebendige Kraft eine viel einfachere und elegantere Lösung zulassen. Die Ableitung einer Anzahl von Differentialquotienten einfacher Funktionen ist umgearbeitet worden, so z. B. die Differentiation eines Produktes und eines Quotienten, des Logarithmus, der trigonometrischen und cyklometrischen Funktionen, der Funktion einer Funktion und der unentwickelten Funktionen; näher erläutert ist der Zusammenhang zwischen Potential und Kraft. Entsprechend der Behandlung des Körperelementes in Polarkoordinaten ist auch das Flächenelement und der Inhalt einer Fläche in Polarkoordinaten an der geeigneten Stelle beigefügt worden.

Es kann hier nicht der Platz sein, alle kleinen Einzelheiten, bei denen Aenderungen von geringerer oder grösserer Wichtigkeit gemacht worden sind, aufzuzählen; hervorgehoben sei blos noch, dass nicht nur sämtliche Beispiele sorgfältig nachgerechnet, fehlerhafte oder mindergeeignete durch neue ersetzt wurden, sondern dass eine ganze Reihe neuer Beispiele hinzugefügt worden ist, insbesondere bei der Zerlegung in Partialbrüche und in der Theorie der Differentialgleichungen. Auch alle Zahlenangaben wurden nachgeprüft und nachgerechnet.

Als Neuerung sei noch bemerkt, dass für die natürlichen Logarithmen die jetzt immer mehr gebrauchte Bezeichnung l, dass für die partiellen Differentialquotienten die Jacobi'sche Bezeichnung mit gebogenem ∂ und dass für die Quadratwurzel aus der negativen Einheit überall das gebräuchliche i eingeführt wurden.

Am Schlusse ist dem Buche ein ausführliches Sachregister in alphabetischer Anordnung beigefügt worden, das den Gebrauch des Buches erleichtern soll, zugleich aber auch die Reichhaltigkeit und Vielseitigkeit seines Inhaltes zeigt.

LEIPZIG, Ostern 1901

Dr. Alfred Donadt

Inhaltsverzeichnis

Zweiter Teil der Integralrechnung.

Berichtigungen.

Seite 143 in Fig. 41 lies β_1 statt β;

„ 162, Zeile 19 von oben lies $\frac{4}{3}$ statt $\frac{\pi}{3}$.

Einleitung.

1. Die kontinuierliche Zahlenreihe. Die gesamte Arithmetik hat ihre Grundlage in dem Begriffe der Zahl und der daraus folgenden unbegrenzten Reihe der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, . . ., in der jede folgende um eine „Eins“ grösser ist als die vorhergehende. Die niedere Arithmetik zeigt, dass die direkten Operationen (Addieren, Multiplizieren und Potenzieren) in dem Bereiche dieser Reihe stets ausführbar sind und als Resultat wieder eine Zahl derselben Zahlenreihe ergeben. Anders verhält es sich mit den inversen Operationen. Die Forderung, dass auch sie stets ausführbar seien, führt zu mehrfachen Erweiterungen des Zahlbegriffs.

Zunächst führt das Subtrahieren auf den Begriff der negativen Zahlen, durch dessen Einführung die vorher einseitig begrenzte Zahlenreihe nach beiden Seiten unbegrenzt wird. Das Dividieren bedingt die Einführung der beliebigen Bruchteile der Einheit und der aus diesen ableitbaren Brüche. Durch diese werden in die von $-\infty$ bis $+\infty$ gehende Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen Zwischenglieder eingeschaltet, so dass der Unterschied zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern durch weiteres Einschalten von Brüchen beliebig klein, d. h. kleiner als eine von vornherein festgesetzte noch so kleine Grösse gemacht werden kann. Das Radizieren nötigt zur Einführung der irrationalen Zahlen und damit zu einer weiteren Einschaltung in der Zahlenreihe, da jede irrationale Zahl, wie aus dem Mechanismus des Radizierens folgt, stets zwischen zwei Brüchen, deren Unterschied beliebig klein gemacht werden kann, liegt, ohne einem dieser ihren Wert einschliessenden Brüche je gleich zu werden.

Die Gesamtheit der so gewonnenen Zahlen wird das Gebiet der reellen Zahlen genannt. Aufgabe der niederen Arithmetik ist es zu zeigen, wie die Rechenoperationen in diesem Gebiete vorgenommen werden.

Während also die Einführung der Brüche gestattet, den Sprung, der beim Uebergange von einer Zahl der natürlichen Zahlenreihe zur nächsten gemacht wird, nach Belieben zu verkleinern, geben die irrationalen Zahlen die Möglichkeit, auch die hierbei noch bleibenden Lücken auszufüllen.

Diese Eigenschaft des Zahlengebietes wird noch deutlicher durch die folgende Versinnlichung. Nimmt man auf einer Geraden einen Punkt A (den Ausgangspunkt) an und ordnet ihm einen Punkt E (den Einheitspunkt) so zu, dass durch die Grösse der Strecke AE die Einheit, durch ihre Richtung die positive Richtung festgesetzt ist, so entspricht jeder ganzen positiven oder negativen Zahl a ein ganz bestimmter Punkt der Geraden, den man erhält, wenn man a Längeneinheiten AE in entsprechender Richtung von A aus abträgt. Auch jedem Bruche $\frac{a}{b}$ entspricht ein bestimmter Punkt, den man konstruiert, indem man AE in b gleiche Teile teilt und a solcher Teile in gehöriger Richtung von A aus abträgt. Auch jeder irrationalen Zahl entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Geraden. Man erhält z. B. die beiden der Zahl $\sqrt{2}$ entsprechenden Punkte, wenn man über AE als Seite das Quadrat konstruiert und dessen Diagonale von A aus auf beiden Seiten der Geraden abträgt. Die der Zahl $\sqrt{3}$ entsprechenden Punkte werden erhalten, wenn man das gleichseitige Dreieck mit AE als Seite konstruiert und seine doppelte Höhe auf beiden Seiten von A abträgt. — Umgekehrt schliesst man, dass *jedem* Punkte der Geraden eine *ganz bestimmte* Zahl aus dem Gebiete der reellen Zahlen entspricht und dass daher, wie der Uebergang von einem Punkte der Geraden zu einem andern nicht sprungweise, sondern mit Durchlaufung aller möglichen zwischen beiden liegenden Punkte, d. h. in *stetiger* Weise geschieht, auch der Uebergang von einer Zahl des reellen Zahlengebietes zu einer andern in stetiger Weise geschehen kann, dass also das Gebiet der reellen Zahlen ein *stetiges oder kontinuierliches* ist.

Diese Eigenschaft der Zahlenreihe bildet die Grundlage der höhern Analysis, und es liegt auf der Hand, dass eine Anwendung der Zahlgrösse auf die stetigen Raum- und Zeitgrössen nicht möglich wäre, wenn nicht auch die Zahlgrösse als eine stetige vorausgesetzt werden könnte.

2. Die veränderliche, insbesondere die stetig veränderliche Grösse. Eine Grösse heisst eine *Veränderliche* oder eine *Variable*, wenn sie mehrere oder auch unendlich viele Werte annehmen kann. Im Gegensatz dazu heisst eine Grösse, die nur *einen* Wert hat, mag das eine bestimmte oder eine allgemeine Zahl sein, eine *Konstante*. Um äusserlich einen Unterschied zwischen veränderlichen und konstanten Grössen zu machen, bezeichnet man die veränderlichen mit den letzten Buchstaben x, y, z, u, v, . . ., die konstanten mit den ersten a, b, c, . . .

Kann eine Veränderliche x *jeden beliebigen* Wert annehmen, so heisst sie eine *unbeschränkt Veränderliche*; in der Natur des Begriffs dieser Grösse liegt es, dass, wenn a ein Wert derselben ist, sie auch jeden Wert annehmen kann, der der Ungleichung $|x - a| < \delta$ genügt, wo $|x - a|$ den absoluten Betrag der Differenz und δ eine beliebig kleine Grösse bezeichnet.

Kann eine Veränderliche x *nicht* jeden beliebigen Wert annehmen, so heisst sie *beschränkt veränderlich* und die Gesamtheit der Werte, die sie annehmen kann, ihr *Bereich*. Ist z. B. eine Veränderliche dadurch definiert, dass sie nur die Werte der ganzen Zahlen annehmen kann, so ist die natürliche Zahlenreihe ihr Bereich.

Ist eine beschränkt Veränderliche dadurch definiert, dass sie innerhalb des durch die beiden Zahlen x_1 und x_2 ($x_2 > x_1$) begrenzten Bereiches jeden beliebigen Wert annehmen kann, so heisst sie innerhalb dieses Bereiches stetig oder kontinuierlich veränderlich. Ist a irgend ein Wert innerhalb des Bereiches (x_1, x_2), so wird die Stetigkeit der Veränderlichen dadurch definiert, dass sie jeden Wert annehmen kann, für den dieselbe Ungleichung wie oben $|x - a| < \delta$ gilt. Ob die Grenzen x_1 und x_2 dem Bereiche der Veränderlichen angehören oder nicht, hängt von der Definition ab. Definiert man z. B. x solle kleiner als x_2 sein, so gehört die obere Grenze x_2 dem Bereiche nicht an, während sie dem Bereiche angehört, wenn man definiert, x solle nicht grösser als x_2 sein.

Man sagt, eine veränderliche Grösse x komme einem bestimmten Werte a unendlich nahe, wenn durch stetige Veränderung von x die Differenz $|x - a|$ beliebig klein gemacht werden kann, ohne dass damit gesagt ist, dass x gleich a werden könne. Insbesondere sagt man, eine Veränderliche werde unendlich klein, wenn sie der Null unendlich nahe kommen kann. Kann eine stetig veränderliche Grösse Werte annehmen, die grösser sind als jede noch so gross angenommene Zahl, so sagt man die Veränderliche werde unendlich gross.

Den Bereich einer unbeschränkt Veränderlichen kann man mit $(-\infty, +\infty)$ bezeichnen.

3. Begriff und Bezeichnung der Funktionen. Denkt man sich in der Gleichung $y = x^2 + 2x + 3$ die Grösse x veränderlich, so ändert sich auch der Wert von y, d. h. der Wert des gesamten Ausdrucks auf der rechten Seite, und zwar entspricht jedem Werte von x ein bestimmter Wert von y. Wenn z. B.

der Wert . . . . $x = 0,\quad 1,\quad 2,\quad -1,\quad -2,\quad \frac{1}{2},\ \sqrt{2}$ . .

so wird der von $y = 3,\quad 6,\quad 11,\quad 2,\quad 3,\ 4\frac{1}{4},\ 5 + 2\sqrt{2}$ . . .

Ist ebenso in der Gleichung $y = \log x$ die Grösse x veränderlich, so wird auch y, d. h. der Logarithmus von x, sich ändern.

Die Abhängigkeit der Grösse y von der Grösse x wird dadurch angedeutet, dass man nach Johann Bernoulli sagt, es sei y eine Funktion von x. Die Abhängigkeit wird bezeichnet durch

$$y = f(x).$$

Man liest diese Gleichung: „y gleich Funktion x“. Statt f(x) wird auch F(x), $\varphi(x)$, $\psi(x)$ . . . geschrieben.

Das Zeichen f(x) enthält keineswegs das bestimmte analytische Gesetz der Abhängigkeit; es wird damit nur die Abhängigkeit der Grösse y von der Veränderlichen x im allgemeinen bezeichnet.

In gleichem Sinne ist auch die Gleichung $z = f(x, y)$ aufzufassen. Es wird durch sie angegeben, dass z in irgend einer Weise von den zwei veränderlichen Grössen x, y abhängig sei. Hängt eine Grösse von drei andern ab, so kann man ihren Zusammenhang andeuten durch $u = f(x, y, z)$; u. s. w.

Für die Mathematik hat aber nur der Fall eine Bedeutung, dass der Zusammenhang zwischen x und y durch eine Gleichung gegeben ist; dann heisst y eine analytische Funktion von x.

In der Gleichung

$$y = f(x)$$

kann man der Variabeln x beliebige Werte innerhalb ihres Bereiches beilegen; man nennt sie deshalb die unabhängig Veränderliche oder auch das Argument der Funktion, während y, da sein Wert von dem von x abhängt, die abhängig Veränderliche heisst.

Gehört zu jedem Werte von x nur ein Wert von y, so heisst die Funktion eindeutig, dagegen mehrdeutig, wenn zu einem Werte von x mehrere Werte von y gehören.

Denkt man sich die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufgelöst, so erhält man eine neue Gleichung $x = \varphi(y)$, durch die x als abhängig Veränderliche von der unabhängig Veränderlichen y definiert wird. Diese Funktion heisst die inverse oder umgekehrte der ersteren.

Man weiss, dass das Volumen v einer Kugel vom Halbmesser r abhängt, deshalb kann man schreiben $v = f(r)$. Sollte aber der Halbmesser als Funktion des Volumens dargestellt werden, so würde v zur unabhängig Veränderlichen, und es könnte geschrieben werden $r = \varphi(v)$.

Wenn eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen x und y in Hinsicht der einen Grösse aufgelöst ist, so wird die Funktion eine entwickelte oder explicite genannt. So sind $y = a + bx + cx^2$; $y = \log x$ explicite Funktionen von x. Ist aber die Gleichung hinsichtlich keiner der Veränderlichen aufgelöst, so heisst die Funktion unentwickelt oder implicit. Solche Funktionen sind z. B.

$$a^2 + axy + b = 0; \quad \sqrt{x^2 + y^2} - \log\frac{x}{y} = 0.$$

Sie werden gewöhnlich durch den Ausdruck $f(x, y) = 0$ bezeichnet.

4. Einteilung der Funktionen. Die Funktionen werden nach Leibnitz eingeteilt in algebraische und transcendente. Die algebraischen entstehen durch die Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzierung mit konstantem Exponenten. Ihre einfachsten Formen sind

$$a + x, \quad ax, \quad \frac{a}{x}, \quad x^m.$$

Sie sind alle enthalten in dem allgemeinen Ausdrucke

$$\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots)^n}{(A + Bx + Cx^2 + \ldots)^m}.$$

Im weitesten Sinne sagt man y sei eine algebraische Funktion von x, wenn der Zusammenhang beider Grössen vermittelt wird durch eine algebraische Gleichung von der Form

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_{n-1} y + A_n = 0,$$

worin die $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Polynome von x, also etwa

$$A_i = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

sind.

Die transcendenten Funktionen umfassen alle übrigen Funktionen, wozu aus dem Gebiete der Rechenoperationen vornehmlich die Potenzen mit veränderlichem Exponenten, die sogenannte Exponentialfunktion, und deren Umkehrung, der Logarithmus, gehören.

Die Exponentialfunktion hat die Form $y = a^x$; dabei muss jedoch a positiv sein, wenn zu jedem reellen Werte von x ein reeller Wert von y gehören soll; soll die Funktion eindeutig sein, so ist noch festzusetzen, dass, wenn einem x mehrere Werte von y entsprechen, (was eintritt, wenn x ein Bruch mit geradem Nenner ist) der positive Wert von y zu nehmen sei.

In der inversen Funktion $x = {}^a\log y$ müssen dieselben Voraussetzungen gemacht werden: es muss a eine positive Konstante sein und die Veränderliche y auf den Bereich $(0, +\infty)$ beschränkt werden.

5. Die Kreisfunktionen. Zu diesen aus der Arithmetik bekannten Funktionen kommen aus der Geometrie noch die goniometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cotang} x$ und deren Umkehrungen, die cyklometrischen Funktionen. Beide Arten werden auch Kreisfunktionen genannt und gehören zu den transcendenten Funktionen.

Während in der Trigonometrie die Grösse des Winkels gewöhnlich in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückt wird, bedarf die Analysis, da das Argument der Funktionen nur eine Zahlgrösse sein kann, eines anderen Masses für den Winkel, durch das der Winkel als reine Zahl definiert wird. Zu diesem Zwecke wird die Grösse des Winkels gemessen durch das Verhältnis der Länge des zum Winkel gehörenden Kreisbogens zum Halbmesser des Kreises oder, was dasselbe ist, durch die Länge des zum Winkel gehörenden Bogens des mit dem Radius 1 um den Scheitel geschlagenen Kreises. So entspricht jedem Winkel eine bestimmte Zahl, die das analytische Mass des Winkels heisst.

Die Verwandlung des gewöhnlichen Masses in das analytische und umgekehrt geschieht mittels der Formel

$$x : 2\pi = \alpha : 360 \cdot 60 \cdot 60,$$

in der x das analytische Mass, α das gewöhnliche Mass des Winkels in Sekunden bedeutet.

Aus den Elementen der Trigonometrie ist bekannt, dass die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen, dass aber die Funktionen $y = \operatorname{tang} x$ und $y = \operatorname{cotang} x$ jeden Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen können, und dass ferner die Funktionen einfach periodisch sind, da

$$y = \sin x = \sin(x \pm 2n\pi);$$
$$y = \cos x = \cos(x \pm 2n\pi);$$
$$y = \operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(x \pm n\pi);$$
$$y = \operatorname{cotang} x = \operatorname{cotang}(x \pm n\pi),$$

worin n eine beliebige ganze Zahl ist.

Die aus den goniometrischen sich ergebenden inversen Funktionen, die sogenannten cyklometrischen Funktionen

$$x = \operatorname{arc}\sin y;\ x = \operatorname{arc}\cos y;\ x = \operatorname{arc}\operatorname{tang} y \text{ und } x = \operatorname{arc}\operatorname{cotang} y$$

sind wegen jener Periodizität unendlich vieldeutig, auch sind die beiden ersten nur für den Bereich $(-1, +1)$ der Grösse y definiert.

Um die cyklometrischen Funktionen als eindeutige in Rechnung ziehen zu können, bedarf es gewisser Festsetzungen, die im Folgenden bestehen:

I. arc sin y bedeutet die zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegende Zahl, deren Sinus den Wert y hat, wobei für y die Ungleichung besteht

$$-1 \leqq y \leqq +1;$$

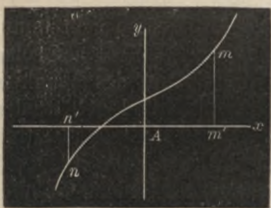
II. arc cos y bedeutet die zwischen 0 und π liegende Zahl, deren Cosinus den Wert y hat, wobei $-1 \leqq y \leqq +1$ ist;

III. arc tang y bedeutet die zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegende Zahl, deren Tangente den Wert y hat, wobei $-\infty \leqq y \leqq +\infty$ ist;

IV. arc cotang y bedeutet die zwischen 0 und π liegende Zahl, deren Cotangente den Wert y hat, wobei $-\infty \leqq y \leqq +\infty$ ist.

6. Geometrische Darstellung der Funktionen. Jede Funktion $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ mit einer unabhängig Veränderlichen lässt sich nach Descartes auf folgende Weise darstellen.

Fig.1.



Es seien Ax, Ay (Fig. 1) zwei rechtwinkelige Koordinatenachsen. Auf beiden setze man die positive Richtung, damit zugleich die negative fest und wähle eine beliebige Strecke als Längeneinheit. Man trage eine Reihe aufeinander folgender Werte von x, vom Anfangspunkte A aus, auf der Abscissenachse Ax ab, errichte in den Endpunkten dieser Abscissen Lote auf der Abscissenachse, mache diese Lote, Ordinaten genannt, gleich den entsprechenden Werten von y und verbinde die Endpunkte der Ordinaten; dann entsteht im allgemeinen eine krumme Linie, die das Gesetz der Funktion zur Anschauung bringt. Werden in beistehender Figur die Richtungen Ax und Ay als positive gewählt, so sind die Abscisse Am' und die Ordinate mm' des Punktes m positiv, dagegen die Abscisse An' und die Ordinate nn' des Punktes n beide negativ. Abscisse und Ordinate eines Punktes heissen dessen Koordinaten. Der Punkt, dessen Koordinaten x, y sind, heisst kurzweg Punkt (x, y).

Auf diese Weise konstruiert, gibt die Gleichung $y^2 = 2px$ eine Parabel, $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ eine Ellipse, $y = \log x$ die Logistik. Die Gleichung $y = ax + b$ vom ersten Grade ist der einzige Fall, wo die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten eine gerade Linie liefert.

7. Stetigkeit der Funktionen. Durch die geometrische Darstellung einer Funktion $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ erhält man eine Kurve mit unendlich vielen, unmittelbar aufeinander folgenden Punkten. Die Stetigkeit der Kurve, also auch die Stetigkeit der Funktion, liegt nun darin, dass immer je zwei dieser aufeinander folgenden Punkte unendlich nahe aneinander liegen, dass also unendlich kleine Aenderungen der Abscissen auch unendlich kleine Aenderungen der Ordinaten zur Folge haben. Wo dies zutrifft, heisst die Funktion eine stetige oder kontinuierliche.

Sobald je zwei aufeinander folgende Ordinaten, die einen unendlich kleinen Abstand voneinander haben, eine endliche oder unendlich grosse Differenz geben, so erleidet die Kurve, also auch die Funktion, eine Unterbrechung der Stetigkeit, sie macht einen plötzlichen Sprung von einem Ordinatenwerte zum nächstfolgenden. Dieser Unterbrechung der Stetigkeit der Funktion entspricht ein bestimmter Wert von x. Die Funktion heisst an dieser Stelle diskontinuierlich.

Analytisch kann man nach § 2 das Kennzeichen der Stetigkeit einer Funktion folgendermassen aussprechen: Ist $y = f(x)$ eine in dem Bereiche (x_1, x_2) der Veränderlichen x eindeutig definierte Funktion, so ist diese Funktion innerhalb des Bereiches (x_1, x_2) stetig, wenn es nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse ε möglich ist, eine zweite Grösse δ zu finden, dass für alle Werte von h, die kleiner sind als δ, und für jedes x innerhalb des Bereiches die Ungleichung

$$|f(x \pm h) - f(x)| < \varepsilon$$

besteht. Alle Punkte, an denen diese Bedingung nicht erfüllbar ist, heissen Unstetigkeitspunkte. Als Unstetigkeitspunkte sind besonders diejenigen aufzufassen, in denen die Funktion unendlich oder unbestimmt wird, weil dann die obige Bedingung der Stetigkeit fehlt. Das Verhalten der Funktion an einer solchen Stelle muss dann besonders untersucht werden. Auch ist es von Wichtigkeit zu untersuchen, wie sich eine Funktion von x, die nicht auf einen endlichen Bereich beschränkt ist, für ein unendlich gross werdendes x verhält.

I. Die Funktionen $a + x$; ax; a^x; $\sin x$ und $\cos x$ sind stetig in dem Bereiche $(-\infty, +\infty)$ der Variabeln x, ebenso x^n, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet. Die Funktionen $\sqrt{x}$, $\log x$ sind stetig in dem Bereiche $(0, +\infty)$ der Veränderlichen.

Es ist z. B.

$$\sin(x \pm h) - \sin x = 2 \cdot \cos\left(x \pm \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\pm \frac{h}{2}\right);$$

der erste Faktor ist für jedes x endlich, der zweite kann durch passende Wahl von h beliebig klein gemacht werden. Wie klein also auch ε von vornherein angenommen wird, h kann stets so gewählt werden, dass

$$\left|2\cos\left(x \pm \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\pm \frac{h}{2}\right)\right| < \varepsilon$$

wird; also ist die Funktion $\sin x$ überall stetig.

Aehnlich kann die Behauptung von den andern Funktionen erwiesen werden.

II. Die Funktion $\frac{a}{x^n}$, worin n eine ganze, positive Zahl bezeichnen soll, ist stetig zwischen den Werten $x = -\infty$ und $x = 0$, sowie zwischen den Werten $x = 0$ und $x = +\infty$. Dagegen erleidet sie eine Unterbrechung der Stetigkeit für $x = 0$, weil ihr Wert für $x = 0$ unendlich gross wird und zwar $= +\infty$, wenn x durch eine Reihe positiver Werte zu Null wird, und $= -\infty$, wenn x durch eine Reihe negativer Werte in die Null übergeht.

III. Ebenso ist $\frac{a}{(b-x)^2}$ für $b = x$ und $\frac{x+2}{x^2+2x-8}$ für $x = 2$, sowie für $x = -4$ diskontinuierlich, weil für diese Werte die Nenner zu Null, also die Funktionen $= +\infty$ oder $-\infty$ werden.

IV. Die Funktionen $\operatorname{cotang} x$, $\operatorname{cosec} x$ werden diskontinuierlich für $x = \pm n\pi$, wo n irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Denn es ist

$$\operatorname{cotang} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

und der Nenner $\sin x$ wird $= 0$ für $x = \pm n\pi$. Ganz ebenso kann gezeigt werden, dass $\operatorname{tang} x$, $\sec x$ diskontinuierlich werden für $x = \pm \frac{2n+1}{2}\pi$, wo n eine ganze positive Zahl sein soll.

V. Die Funktion $y = \sin\frac{1}{x-a}$ zeigt an der Stelle $x = a$ ein ganz unbestimmtes Verhalten. Denn setzt man $x = a + h$ und $h = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist, h also durch passend gewähltes n beliebig klein gemacht werden kann, so ist $f(x+h) = \sin\frac{2n+1}{2}\pi$, schwankt also bei wachsendem n fortwährend zwischen -1 und $+1$, und diese Schwankungen folgen immer rascher aufeinander, je grösser n, d. h. je kleiner h wird, je näher also x an a kommt.

VI. Die Funktion $y = a + \frac{b}{x}$ wird für $x = +\infty$ zu a, hat also an dieser Stelle einen bestimmten endlichen Wert.

Die Funktion $y = \sin x$ bleibt für $x = \infty$ endlich, hat aber, wie aus V. hervorgeht, keinen bestimmten Wert.

Die Funktion $y = {}^a\log x \; (a > 1)$ wird für $x = \infty$ ebenfalls ∞.

VII. Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei in dem Bereiche (x_1, x_2) der Variabeln x stetige Funktionen von x, so sind auch

$$\varphi(x) \pm \psi(x); \quad \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

in dem Bereiche (x_1, x_2) stetige Funktionen von x. Denn es ist

$$\left|\varphi(x \pm h) \pm \psi(x \pm h) - (\varphi(x) \pm \psi(x))\right| = \left|\varphi(x \pm h) - \varphi(x) \pm (\psi(x \pm h) - \psi(x))\right|,$$

und diese Summe kann mit den einzelnen Summanden beliebig klein gemacht werden.

Es ist ferner identisch

$$\left|\varphi(x \pm h) \cdot \psi(x \pm h) - \varphi(x) \cdot \psi(x)\right| = \tfrac{1}{2}\left|(\varphi(x \pm h) - \varphi(x)) \cdot (\psi(x \pm h) + \psi(x)) + (\psi(x \pm h) - \psi(x)) \cdot (\varphi(x \pm h) + \varphi(x))\right|,$$

wird also mit $|\varphi(x \pm h) - \varphi(x)|$ und $|\psi(x \pm h) - \psi(x)|$ beliebig klein.

Auch der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ist mit Ausnahme jeder Stelle $x = a$, an der der Nenner verschwindet, eine stetige Funktion. Man hat nämlich identisch

$$\left|\frac{\varphi(x \pm h)}{\psi(x \pm h)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right| = \left|\frac{\varphi(x \pm h) \cdot \psi(x) - \varphi(x) \cdot \psi(x \pm h)}{\psi(x \pm h) \cdot \psi(x)}\right|$$
$$= \left|\frac{(\varphi(x \pm h) - \varphi(x)) \cdot \psi(x) - (\psi(x \pm h) - \psi(x)) \cdot \varphi(x)}{\psi(x \pm h) \cdot \psi(x)}\right|,$$

worin der Zähler mit $|\varphi(x \pm h) - \varphi(x)|$ und $|\psi(x \pm h) - \psi(x)|$ beliebig klein gemacht werden kann. — Wird für $x = a$ der Nenner zu Null, und ist für diesen Wert von x der Zähler $\varphi(x)$ von Null verschieden, so ist der Quotient an dieser Stelle unendlich oder unbestimmt, d. h. diskontinuierlich. Wird aber gleichzeitig mit dem Nenner auch der Zähler für $x = a$ zu Null, so muss die Stetigkeit der Funktion an dieser Stelle nach besonderen Methoden untersucht werden.

8. Begriff der Grenze.

I. Der gemeine Bruch $\frac{1}{6}$ in einen Dezimalbruch verwandelt gibt $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots.$ Stellt man diesen Dezimalbruch durch die Reihe

$$\frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \ldots. + \frac{6}{10^n}$$

dar und lässt darin n immer grösser und grösser werden, so nähert sich die Summe der Glieder der Reihe mehr und mehr dem Werte $\frac{1}{6}$, so dass der Unterschied zwischen $\frac{1}{6}$ und der Summe jener Reihe beliebig klein wird, wenn n hinreichend gross wird. Je grösser man n nimmt, um so grösser wird der Wert der Summe, aber er wird nie bei noch so grossem n den Wert $\frac{1}{6}$ übersteigen. Man sagt dann, der Bruch $\frac{1}{6}$ sei die Grenze (limes) der Summe jener Reihe für unendlich grosse n und schreibt

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \ldots. + \frac{6}{10^n}\right) = \frac{1}{6}.$$

II. Die Seite des einem Kreise mit dem Radius r einbeschriebenen regelmässigen n-ecks ist $2r \cdot \sin\frac{180^0}{n}$, mithin der Umfang

$$2nr \cdot \sin\frac{180^0}{n}.$$

Dieser Umfang wird sich immer mehr dem Umfange des Kreises nähern, je grösser die Anzahl n der Seiten wird. Für ein unendlich grosses n erreicht der Umfang des Vielecks den Kreisumfang. Folglich nähert sich das Produkt $n \cdot \sin \frac{180^0}{n}$ aus einem ohne Ende wachsenden und einem ohne Ende abnehmenden Faktor einer konstanten Grösse, der Zahl $\pi = 3{,}14159 \ldots$ In diesem Sinne kann π als Grenze jenes Produktes angesehen werden, also

$$\lim_{n=\infty} n \cdot \sin \frac{180^0}{n} = \pi.$$

III. Die Fläche dieses Vielecks ist

$$r^2 \cdot n \cdot \sin \frac{180^0}{n} \cdot \cos \frac{180^0}{n} = \frac{1}{2} r^2 \cdot n \cdot \sin \frac{360^0}{n}.$$

Nimmt jetzt n ins Unendliche zu, so verwandelt sich die Fläche in die Kreisfläche πr^2, so dass man hat

$$\lim_{n=\infty} n \cdot \sin \frac{360^0}{n} = 2\pi.$$

9. Grenzwerte der Funktionen. Lässt man die Variable x einer stetigen Funktion $y = f(x)$ sich stetig einem ausgezeichneten Werte nähern, und nähert sich hierbei der Wert der Funktion mehr und mehr einer bestimmten endlichen konstanten Grösse A, ohne diese dem absoluten Werte nach überschreiten zu können, so wird diese Grösse A der Grenzwert oder auch kurz die Grenze der Funktion an jener Stelle a genannt. Man schreibt dies

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

Es ist dann stets möglich eine Grösse δ so klein zu bestimmen, dass, wenn $|x - a| < \delta$ ist, der Wert $|A - y| < \varepsilon$ bleibt, wo ε beliebig klein ist.

Als solche ausgezeichneten Stellen kommen wesentlich die Stellen $a = 0$ und $a = \infty$ in Betracht.

I. Die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{a + x^2} \quad (a > 0)$$

ist für jedes endliche, positive oder negative x kleiner als $\frac{1}{a}$; lässt man aber, ob von der positiven oder negativen Seite ist gleichgültig, x sich stetig der Null nähern, so nähert sich die Funktion der Grösse $\frac{1}{a}$ als einem Grenzwerte, der für $x = 0$ erreicht wird; es ist also

$$\lim_{x=0} \frac{1}{a + x^2} = \frac{1}{a}.$$

Soll der Unterschied

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a + x^2} = \frac{x^2}{a^2 + a x^2}$$

beliebig klein, also $\frac{x^2}{a^2 + ax^2} < \varepsilon$ bleiben, so ist dies erfüllbar, wenn man $|x| < a|\sqrt{\varepsilon}|$ wählt.

II. Die Funktion

$$y = f(x) = a + \frac{b}{x^2},$$

in der a und b positive Konstanten seien, ist für jedes endliche x grösser als a. Lässt man aber x grösser und grösser werden, so bleibt zwar f (x) stets grösser als a, nähert sich aber dem Werte a immer mehr, so dass man hat

$$\lim_{x=\infty}\left(a + \frac{b}{x^2}\right) = a.$$

III. Die Funktion

$$y = f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

die für $x > 0$ ein echter Bruch ist, wird für $x = 0$ zu 1.

Denn es ist

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{x}, \text{ also } \frac{\sin x}{x} < 1,$$

und

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tang} x}, \text{ also } \frac{\sin x}{x} > \cos x;$$

es gilt also die Ungleichung

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Lässt man x gegen die Null abnehmen, so nähert sich cos x immer mehr der Eins und erreicht sie für $x = 0$.

Für diese Abnahme hat man daher

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dabei ist der folgende Satz benutzt worden, der bei Grenzbestimmungen sehr häufig angewandt wird.

Wenn die Funktion f (x) der Ungleichung genügt

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x),$$

und es haben beim Uebergang zur Grenze $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ denselben Grenzwert A, so ist auch

$$\lim f(x) = A.$$

Zufolge der Ungleichung kann man nämlich setzen

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda(\psi(x) - \varphi(x)),$$

wo λ ein echter Bruch ist. Geht man zur Grenze über, so ist

$$\lim f(x) = A + \lambda \cdot (A - A), \text{ d. h. } \lim f(x) = A.$$

Erster Teil der Differentialrechnung.

I. Differentiation der Funktionen einer Variabeln.

10. Entwickelung des Differentialbegriffes. Lässt man in der Gleichung

$$y = f(x), \tag{1}$$

durch die y als eindeutige stetige Funktion von x in dem Bereiche (x_1, x_2) definiert werde, x innerhalb dieses Bereiches sich um $\triangle x$ ändern, so wird sich im allgemeinen auch y um einen Wert ändern, der mit $\triangle y$ bezeichnet werde. Für diesen geänderten Zustand hat man

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x)$$
$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x).$$

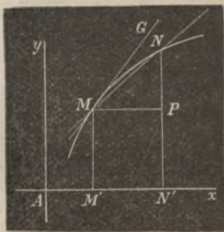
Um ein Mass für diese Veränderung des Funktionswertes im Vergleich zur Aenderung des Argumentes in dem Intervalle x und $x + \triangle x$ zu haben, bilde man den Differenzenquotienten

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}. \tag{2}$$

Lässt man in dieser Gleichung $\triangle x$ ohne Aufhören gegen die Null abnehmen, so konvergiert auch $\triangle y$ zufolge der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion gegen die Null. Wird $\triangle x = 0$, so wird auch $f(x + \triangle x) - f(x) = 0$, also $\triangle y = 0$ und das Verhältnis $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ geht für diesen Grenzzustand in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ über. Gleichwohl entspricht dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$, wenn er aus der Gleichung $y = f(x)$ aus obigem Vorgange entstanden ist, in der Regel ein *bestimmter* Wert, der endlich, Null oder auch unendlich sein kann, im allgemeinen aber wieder eine Funktion von x ist. (Die Ausnahme, wo der Ausdruck $\frac{0}{0}$ bei diesem Grenzübergange unbestimmt bleibt, kommt hier nicht weiter in Betracht.)

Dabei ist noch zu unterscheiden, ob $\triangle x$ positiv oder negativ ist, sich also von der positiven oder negativen Seite der Null nähert. In weitaus den meisten Fällen ist dies zwar für die Berechnung des Grenzwertes gleichgültig, doch muss insbesondere an den Grenzen des Bereiches der Variabeln x darauf geachtet werden; denn ist der Bereich (x_1, x_2) der Veränderlichen ein beschränkter, so kann $\triangle x$ an der unteren Grenze nur positiv, an der oberen x_2 nur negativ gegen die Null konvergieren.

Fig. 2.



Um das Vorstehende zu erläutern, stelle man die Gleichung $y = f(x)$ nach § 6 geometrisch dar. Es seien (Fig. 2) die Abscissen $AM' = x$, $AN' = x + \triangle x$; die Ordinaten $MM' = y$, $NN' = y + \triangle y$. Zieht man MP parallel zur Abscissenachse, so ist $MP = \triangle x$, $NP = \triangle y$. Wird durch die Kurvenpunkte M und N eine Sekante gelegt, so erhält man vermöge des rechtwinkeligen Dreiecks NMP

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \operatorname{tang} NMP.$$

Zieht man durch den Kurvenpunkt M eine geometrische Tangente MG an die Kurve und lässt $\triangle x$ ohne Aufhören abnehmen, so rückt der Punkt N gegen M hin, die Sekante dreht sich um M und nähert sich ohne Aufhören der Richtung der Tangente. Wenn $\triangle x$ verschwindet, so fällt die Sekante mit der Tangente MG zusammen, und das vorstehende Verhältnis $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ geht über in die trigonometrische Tangente des Winkels α, den die Berührungslinie MG mit der Abscissenachse bildet. Man hat daher

$$\text{(3)} \qquad \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{0}{0} = \operatorname{tang} \alpha.$$

Ist die Kurve in M stetig, so ist es gleichgültig, ob der Punkt N von der positiven (rechten) oder von der negativen (linken) Seite gegen M heranrückt; die Sekante MN wird in beiden Fällen zur Tangente MG.

Da die Grösse $\operatorname{tang} \alpha$ bei jeder Kurve von der Lage des Berührungspunktes abhängt, so ist $\operatorname{tang} \alpha$ eine Funktion der Abscisse, also der Grenzwert $\frac{0}{0}$ eine Funktion von x. Ist die Tangente in M der Abscissenachse parallel, so tritt der Fall ein, dass $\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{0}{0} = 0$ wird; ist dagegen die Tangente in M der Ordinatenachse parallel, so ist $\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{0}{0} = \infty$.

Lässt man in $y = f(x)$ die unabhängig Veränderliche x sich stetig ändern, so ändert sich im allgemeinen auch der aus Gleichung (3) hervorgehende Wert $\operatorname{tang} \alpha$. Allein dieser gibt die Neigung der Kurve zur Abscissenachse, mithin auch die Schnelligkeit an, mit der sich y, d. h. die Funktion, ändert. Dieser Grenzwert (3) ist daher von grosser Wichtigkeit. Es ist deshalb nötig, für denselben eine besondere Bezeichnung einzuführen, die den Ursprung des Wertes $\frac{0}{0}$ erkennen lässt. Man gelangt zu derselben durch folgende Betrachtung.

Bevor die Differenz $\triangle x$ zu Null wird, durchläuft sie eine Reihe von Werten, die kleiner sind als jede noch so kleine angebbare Grösse, d. h. eine Reihe unendlich kleiner Werte. Einem solchen unendlich kleinen Werte von $\triangle x$ entspricht auch im allgemeinen ein unendlich kleiner Wert von $\triangle y$. Die unendlich kleinen Werte der Differenzen $\triangle x$, $\triangle y$ bezeichnet man nach Leibnitz mit dx, dy, vertauscht also $\triangle$ mit d, nennt dx, dy Differentiale, und zwar dx das Differential von x, dy das Differential von y und definiert diese Differentiale durch die Gleichung

$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha, \tag{4}$$

d. h. man ersetzt in (3) das Zeichen $\frac{0}{0}$ durch $\frac{dy}{dx}$. Euler hat auch in (4) dx nicht als unendlich kleine Grösse, sondern als Null gedacht. Allein es kann $\frac{dy}{dx}$ auch dann als das exakte Mass von $\operatorname{tang} \alpha$ angesehen werden, wenn man sich vorstellt, es erreiche das Verhältnis die Grenze $\operatorname{tang} \alpha$, wenn dx die Null als Grenze erreicht.

Bei dieser Auffassung bleibt dx eine Grösse, die mit x gleichartig ist. Bezeichnet z. B. x eine Linie, so ist dx auch eine Linie; bezeichnet x eine Fläche, so ist dx ebenfalls eine Fläche u. s. w. Das Gleiche gilt von dy in Bezug auf y. Es kann daher mit dx, dy multipliziert und dividiert werden, ohne dass das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$ aufhört als Grenzwert von $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ zu dienen.

Das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$, falls es einen bestimmten Wert hat, gegen den $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ konvergiert, wenn $\triangle x$ von der positiven oder negativen Seite der Grenze Null sich nähert, wird der Differentialquotient oder das Differentialverhältnis der Funktion $y = f(x)$ genannt. Der Vorgang, durch den die Differentiale der Funktionen abgeleitet werden, heisst Differentiation und der Inbegriff der Regeln, die bei der Differentiation der Funktionen aufgestellt werden, die Differentialrechnung.

11. Das charakteristische Dreieck. Denkt man sich in der vorhergehenden Figur eine Reihe aufeinander folgender Kurvenpunkte M, N, . . und die entsprechenden Dreiecke MPN, deren Katheten $\triangle x$ und $\triangle y$ sind, eingezeichnet, so kann aus der Form dieser Dreiecke auf den Verlauf der Kurve geschlossen werden. Nimmt man dabei die Abscissendifferenzen $\triangle x$ gleich gross, d. h. konstant an, so werden im allgemeinen die Ordinatendifferenzen $\triangle y$ ungleich ausfallen. Was von den Differenzen gilt, trifft auch zu für die Differentiale dx und dy. Das Dreieck mit den Katheten dx und dy heisst das charakteristische Dreieck.

In ihm wird das Differential der unabhängig Veränderlichen als konstant betrachtet.

Aus einer Vergleichung dieser Dreiecke ergeben sich folgende Schlüsse. Lässt man die Abscisse zunehmen und nimmt dabei auch die Ordinate zu, so ist dy positiv; nimmt aber die Ordinate ab, so geht y in $y - dy$ über, d. h. das Differential dy wird negativ. Aendern sich daher die Variabeln x und y in gleichem Sinne, so haben auch dx und dy gleiche Vorzeichen; ändern sie sich in entgegengesetztem Sinne, so sind auch die Vorzeichen von dx und dy entgegengesetzte.

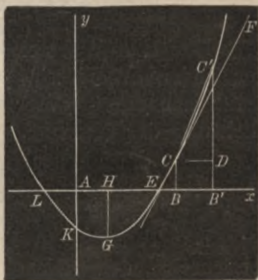
Wenn die Tangente an die Kurve parallel zur Abscissenachse wird, so ist $\tang \alpha = 0$, also wird auch im entsprechenden charakteristischen Dreiecke $dy = 0$. Wird die Tangente parallel zur Ordinatenachse, so wird $\tang \alpha = \pm \infty$; also wird auch dy unendlich mal so gross als dx.

12. Differentiation der Funktion

$$y = x^2 - x - 2. \tag{1}$$

Stellt man diese Gleichung geometrisch dar, so entsteht eine Parabel GEC (Fig. 3). Nun sei $AB = x$ die Abscisse und $BC = y$ die Ordinate eines Kurvenpunktes C. Lässt man x um $BB' = \triangle x$ zunehmen und zieht die Ordinate $B'C'$, sodann CD parallel zu Ax, so wird y um $\triangle y = DC'$ wachsen. Zieht man durch die Kurvenpunkte C, C' eine Sekante, so gibt das entstandene rechtwinkelige Dreieck

Fig. 3.



$$\tang C'CD = \frac{\triangle y}{\triangle x}. \tag{2}$$

Aus Gleichung (1) folgt aber

$$y + \triangle y = (x + \triangle x)^2 - (x + \triangle x) - 2,$$
$$\triangle y = 2x \cdot \triangle x - \triangle x + (\triangle x)^2,$$
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 2x - 1 + \triangle x. \tag{3}$$

Lässt man nun in den Formeln (2) und (3) die Grösse $\triangle x$ ohne Aufhören abnehmen, so nähert sich der Kurvenpunkt C' dem Punkte C und die Sekante CC' der Berührungslinie CF, die durch C geht. Bildet diese Berührungslinie den Winkel α mit der positiven Richtung der Abscissenachse, so erhält man somit als Grenzwert des Verhältnisses (2)

$$\tang \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Allein das Verhältnis (3) nähert sich hierbei dem Grenzwerte $2x - 1$ und erreicht denselben für ein verschwindend kleines $\triangle x$; folglich wird sein

$$\tang \alpha = 2x - 1. \tag{4}$$

Um die Bedeutung dieses Grenzwertes (4) hervortreten zu lassen, lege man der Abscisse x stetige Werte von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$

bei; dann durchläuft der Punkt C alle auf der Kurve liegenden Punkte, und da die Tangente CF, die diesem Punkte in seiner Bewegung folgt, die Richtung der Kurve im jeweiligen Berührungspunkte angibt, so erhält man durch den Inbegriff der Werte (4) eine Vorstellung von der Richtungsveränderung der Kurve, also auch von der Schnelligkeit, mit der sich die Ordinate oder die Funktion ändert, wenn sich die Abscisse stetig ändert.

Die Tangente durch den Punkt G, der nach unten am weitesten von der Abscissenachse absteht, muss parallel zur Abscissenachse sein. Setzt man also $\alpha = 0$, so folgt aus (4)

$$2x - 1 = 0, \qquad x = 0{,}5.$$

Dieser Wert von x ist die Abscisse AH des tiefsten Punktes G. Setzt man diesen Wert $x = 0{,}5$ in Gleichung (1), so erhält man als Ordinate des tiefsten Punktes: $GH = -2{,}25$.

In den Punkten E und L schneidet die Parabel die Abscissenachse. Für diese Punkte ist $y = 0$, also nach (1)

$$x^2 - x - 2 = 0, \qquad x = 0{,}5 \pm 1{,}5.$$

Der eine Wert $x = 0{,}5 + 1{,}5 = 2$ ist die Abscisse des Punktes E, der andere Wert $x = 0{,}5 - 1{,}5 = -1$ die Abscisse des Punktes L. Setzt man diese Werte für x in Gleichung (4), so erhält man für die Richtung der Kurve

$$\text{im Punkte E} \ldots \operatorname{tang}\alpha = +3,$$
$$\text{im Punkte L} \ldots \operatorname{tang}\alpha = -3.$$

Die Tangente in E bildet also mit der positiven Richtung der Abscissenachse den gleichen Winkel, den die Tangente in L mit der negativen Richtung dieser Achse macht.

Die Kurve schneidet die Ordinatenachse in K. Für diesen Punkt ist $x = 0$, also nach (4) $\operatorname{tang}\alpha = -1$.

Für $x = \pm \infty$ wird $\operatorname{tang}\alpha = \pm \infty$; also stehen die Kurven-Elemente, die rechts und links von der Ordinatenachse unendlich weit vom Anfangspunkte entfernt liegen, senkrecht auf der Abscissenachse.

13. Differentiation einer Potenz mit ganzem positiven Exponenten.

Es sei

$$y = x^n, \tag{1}$$

wo der Exponent jede positive ganze Zahl bezeichnen kann. Wenn x in $x + \triangle x$ übergeht, so wird y zu $y + \triangle y$. Deshalb wird sein

$$y + \triangle y = (x + \triangle x)^n. \tag{2}$$

Durch Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze erhält man

$$y + \triangle y = x^n + n x^{n-1} \triangle x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\triangle x)^2 +$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} (\triangle x)^3 + \ldots$$

Zieht man $y = x^n$ hiervon ab und dividiert durch $\triangle x$, so folgt

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \triangle x + \frac{n(n-1)\ (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^{n-3} (\triangle x)^2 + \ldots$$

Lässt man hierin $\triangle x$ gegen die Null konvergieren, so nähert sich der Wert der rechten Seite der Grenze $n x^{n-1}$; folglich erhält man für den Fall, wo $\triangle x$ verschwindend klein wird,

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$$

oder auch, indem man x^n statt y schreibt und mit dx multipliziert,

(3) $$d x^n = n x^{n-1} dx.$$

Das Differential der Potenz x^n wird also erhalten, wenn man den Exponenten n zur Vorzahl macht, den Exponenten um 1 vermindert und mit dem Differentiale der Grundzahl x multipliziert.

Beispiele.

$$y = x; \qquad dy = dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = 1;$$

$$y = x^3; \qquad dy = 3x^2 dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2;$$

$$f(x) = x^7; \qquad d f(x) = 7x^6 dx \quad \text{oder} \quad \frac{d f(x)}{dx} = 7x^6.$$

14. Differential einer Funktion mit konstantem Faktor. Die gegebene Funktion sei

(1) $$y = a f(x),$$

worin a einen konstanten Faktor bezeichnet. Setzt man $f(x) = u$, so ist nach dem bisherigen Verfahren

$$y + \triangle y = a(u + \triangle u),$$
$$\triangle y = a(u + \triangle u) - a u = a \triangle u.$$

Setzt man hierin $a u$ statt y und geht zum Differential über, so ist

$$d a u = a d u,$$

(2) $$d a f(x) = a d f(x).$$

Hieraus folgt, dass der konstante Faktor bei der Differentiation unverändert aus der Funktion in das Differential übergeht, und dass dieser Faktor vor oder hinter das Differentialzeichen d gesetzt werden kann.

Beispiele.

I. Wenn $y = 2x^3$, so wird $dy = 6x^2 dx$;
$y = 4 a x^5$, $dy = 20 a x^4 dx$.

II. Der Radius eines Kreises sei x, seine Fläche F; es ist $F = \pi x^2$. Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$dF = 2 \pi x dx.$$

Geht daher x in $x + dx$ über, so nimmt die Kreisfläche zu um eine Ringfläche, deren Länge $2\pi x$ und deren Breite dx ist. Diese Ringfläche ist das Differential der Kreisfläche.

Dividiert man den Wert von dF durch jenen von F, so ist

$$\frac{dF}{F} = 2\frac{dx}{x}.$$

Beim Uebergange von x in $x + dx$ nimmt daher die Fläche zweimal so stark zu als der Radius. Wenn z. B. die Zunahme dx zu $\frac{1}{10\,000}$ von x angenommen wird, so beträgt die Zunahme dF $\frac{2}{10\,000}$ von der Fläche F. Dies gilt streng genommen nur von unendlich kleinen Aenderungen.

III. Der Radius einer Kugel sei x, ihr Volumen V; dann ist $V = \frac{4}{3}\pi x^3$, folglich durch Differentiation

$$dV = 4\pi x^2 dx.$$

Nimmt daher x um dx zu, so wächst das Volumen um eine Hohlkugel von der Oberfläche $4\pi x^2$ und der Dicke dx, nimmt also zu im Verhältnis

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dx}{x}.$$

15. Differential eines Aggregates. Dieses Aggregat sei

(1) $$y = A + f(x) + \varphi(x) + \ldots,$$

worin A ein konstantes Glied bezeichnet. Setzt man $f(x) = u$, $\varphi(x) = v$, und führt die gleichzeitigen Werte $x + \triangle x$, $y + \triangle y$, $u + \triangle u$, $v + \triangle v$ ein, so kommt

$$y + \triangle y = A + (u + \triangle u) + (v + \triangle v) + \ldots$$
$$\triangle y = \triangle u + \triangle v + \ldots$$

Geht man von der Differenz zum Differentiale über, so ist

(2) $$dy = du + dv + \ldots$$
$$dy = df(x) + d\varphi(x) + \ldots$$

Somit ist das Differential eines Aggregates gleich der Summe aus den Differentialen der einzelnen Glieder und das Differential eines konstanten Gliedes gleich Null.

Beispiele.

I. $y = a + bx + cx^2$, $\quad dy = b\,dx + 2cx\,dx$;

$y = x^m - bx^n$, $\quad dy = (mx^{m-1} - nbx^{n-1})\,dx$.

II. Sind p und q die Katheten, s die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, so ist $s^2 = q^2 + p^2$. Denkt man sich nun die Kathete q konstant, lässt jedoch p stetig wachsen, so nimmt auch die Hypotenuse stetig zu. Die Differentiation gibt

$$s\,ds = p\,dp.$$

Es entstehen also zwei Rechtecksflächen von gleichem Inhalte. Da nun s immer grösser ist als p, so wird ds kleiner als dp, d. h. die Hypotenuse ändert sich weniger rasch als die Kathete.

III. In einer cylindrischen Röhrenleitung vom inneren Durchmesser D und der Länge L bewege sich Wasser mit der Geschwindigkeit v; wird auf diese Geschwindigkeit ein Gefälle H verwendet, so ist nach Prony

$$H = (a\,v + b\,v^2)\frac{L}{D},$$

in welcher Gleichung a und b konstante Zahlenwerte bedeuten. Nimmt nun auf einmal H um dH zu, so wird die Geschwindigkeit v um dv steigen, während alle anderen Grössen der Gleichung dieselben bleiben. Welches Verhältnis besteht zwischen diesen Zunahmen?

Die Differentiation der gegebenen Gleichung gibt

$$d\,H = (a + 2\,b\,v)\frac{L}{D}\,d\,v,$$

woraus das Differentialverhältnis $dH : dv$ hervorgeht. Dividiert man aber die zweite Gleichung durch die erste, so wird

$$\frac{d\,H}{H} = \frac{a + 2\,b\,v}{a + b\,v} \cdot \frac{d\,v}{v}.$$

Nun ist a sehr klein gegen b (nur circa 0,05 von b); daher der Zähler des zweiten Bruches fast nahe zweimal so gross als dessen Nenner. Mithin wächst das Gefälle zweimal so rasch als die Geschwindigkeit.

IV. Bezeichnet t die Temperatur des Wassers und q die Anzahl Wärmeeinheiten oder Kalorien, die nötig sind, um 1 *kg* Wasser von 0 Grad auf die Temperatur t zu erwärmen, so ist nach Regnault

$$q = t + 0{,}000\,02\,t^2 + 0{,}000\,000\,3\,t^3. \tag{1}$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{d\,q}{d\,t} = 1 + 0{,}000\,04\,t + 0{,}000\,000\,9\,t^2. \tag{2}$$

Nun ist dq die Wärme, die 1 *kg* Wasser erfordert, wenn seine Temperatur um dt zunehmen soll. Ist nun c jene Wärme, die für 1 *kg* nötig ist, damit die Temperatur um 1^0 steige, also die spezifische Wärme des Wassers, so verhalten sich, innerhalb der kleinen Aenderungen, die Temperaturzunahmen dt und 1^0 wie die entsprechenden Wärmezunahmen dq und c, so dass man hat

$$d\,t : 1 = d\,q : c, \text{ woraus } \frac{d\,q}{d\,t} = c,$$

daher nach Gleichung (2) die spezifische Wärme des Wassers

$$c = 1 + 0{,}000\,04\,t + 0{,}000\,000\,9\,t^2.$$

16. Differential eines Produktes von Funktionen derselben Variabeln.

Es sei

$$y = u\,v, \tag{1}$$

wobei $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ stetige Funktionen derselben Veränderlichen x sind. Nimmt x um $\triangle x$ zu, so wird y um $\triangle y$, u um $\triangle u$ und v um $\triangle v$ zunehmen, so dass man erhält

$$y + \triangle y = (u + \triangle u)(v + \triangle v),$$
$$\triangle y = u \triangle v + v \triangle u + \triangle u \triangle v,$$
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = u \frac{\triangle v}{\triangle x} + v \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle u}{\triangle x} \frac{\triangle v}{\triangle x} \triangle x.$$

Wenn $\triangle x$ ohne Ende gegen 0 abnimmt, so nimmt das Produkt $\frac{\triangle u}{\triangle x} \frac{\triangle v}{\triangle x} \triangle x$ bis zum Verschwinden ab, d. h. es nähert sich das dritte Glied der rechten Seite dem Werte 0; folglich erhält man durch den Uebergang von der Differenz zum Differentiale

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

oder, indem man mit dx multipliziert,

$$dy = u\,dv + v\,du. \tag{2}$$

Somit ist das Differential des Produktes zweier Funktionen derselben Veränderlichen gleich dem ersten Faktor multipliziert mit dem Differentiale des zweiten, plus dem zweiten Faktor, multipliziert mit dem Differentiale des ersten.

Dividiert man die Gleichung (2) durch die Gleichung (1), so erhält man die Form

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}. \tag{3}$$

Ist $y = uvw$ ein Produkt dreier Funktionen derselben Veränderlichen, so erhält man durch dasselbe Verfahren

$$dy = uv\,dw + uw\,dv + vw\,du$$

oder

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}.$$

Das in diesen Gleichungen enthaltene Gesetz ist leicht erkennbar.

Beispiele.

$y = (1 - x)(1 + x^2)$, $\quad dy = (-1 + 2x - 3x^2)\,dx$;

$y = (a + x)(a - x)$, $\quad dy = -2x\,dx$;

$y = (a^2 - x^2)\,x^5$, $\quad dy = x^4(5a^2 - 7x^2)\,dx$.

17. Differential des Quotienten zweier Funktionen derselben Veränderlichen.

Es sei

$$y = \frac{u}{v}, \tag{1}$$

wo $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ stetige Funktionen derselben Veränderlichen x sind. Wächst x um $\triangle x$, so geht y in $y + \triangle y$, u in $u + \triangle u$ und v in $v + \triangle v$ über, so dass man erhält

$$y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v},$$

$$\triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v} - \frac{u}{v} = \frac{v \triangle u - u \triangle v}{v(v + \triangle v)},$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v \frac{\triangle u}{\triangle x} - u \frac{\triangle v}{\triangle x}}{v(v + \triangle v)}.$$

Beim Uebergange zur Grenze erhält man, da $\triangle v$ im Nenner mit $\triangle x$ gegen Null konvergiert,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2},$$

oder nach Multiplikation mit dx

(2) $$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Das Differential eines Bruches aus zwei Funktionen derselben Veränderlichen ist also gleich dem Nenner, multipliziert mit dem Differentiale des Zählers, minus dem Zähler mal dem Differentiale des Nenners, alles durch das Quadrat des Nenners dividiert.

Dividiert man die Gleichung (2) durch die Gleichung (1), so erhält man

(3) $$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$$

Einfacher folgt diese Gleichung aus der Gleichung (3) des § 16; ist nämlich $y = \frac{u}{v}$, so ist $u = v y$, und man hat $\frac{du}{u} = \frac{dv}{v} + \frac{dy}{y}$, woraus die Gleichung (3) sofort erhellt.

Beispiele.

$$y = \frac{x}{a + x}, \qquad dy = \frac{a\,dx}{(a + x)^2};$$

$$y = \frac{a + x}{a - x}, \qquad dy = \frac{2a\,dx}{(a - x)^2}.$$

$$y = \frac{a}{b^2 + x^2}, \qquad dy = \frac{-2ax\,dx}{(b^2 + x^2)^2};$$

$$y = \frac{a + bx}{(1 - x)^2}, \qquad dy = \frac{2a + b + bx}{(1 - x)^3}\,dx.$$

18. Differential einer Potenz mit beliebigem Exponenten. Für einen ganzen positiven Exponenten gilt nach § 13 die Regel

(1) $$dx^n = n x^{n-1}\,dx.$$

Nun sei zunächst die Potenz x^{-n} zu differentiieren, in der der Exponent eine ganze negative Zahl sein soll. Setzt man

$$y = x^{-n}, \tag{2}$$

so wird $y = \frac{1}{x^n}$ oder auch $y x^n = 1$.

Hierin ist die linke Seite ein Produkt aus veränderlichen Faktoren, die rechte Seite aber konstant; daher gibt die Differentiation

$$x^n\, dy + n y x^{n-1}\, dx = 0,$$

woraus folgt, wenn durch x^n dividiert wird,

$$dy = -n y x^{-1}\, dx,$$

oder indem man rechts den Wert von y aus (2) einführt,

$$dy = -n x^{-n-1}\, dx. \tag{3}$$

Daher gilt für negative Exponenten die gleiche Regel wie für positive.

Es sei ferner der Exponent ein positiver oder negativer Bruch. Die Potenzen dieser Art haben die Form

$$y = x^{\frac{p}{q}}, \tag{4}$$

worin p und q positive oder negative ganze Zahlen bezeichnen. Potenziert man (4) mit q, so folgt $y^q = x^p$. Daher durch Differentiation

$$q y^{q-1}\, dy = p x^{p-1}\, dx; \quad dy = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}\, dx.$$

Da aber nach (4) $y^{q-1} = x^{\frac{p}{q}(q-1)}$, so wird

$$dy = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}\, dx. \tag{5}$$

Das Gesetz, das in (5) enthalten ist, stimmt mit dem in (1) und (3) überein. Daher gilt für gebrochene Exponenten die gleiche Regel wie für ganze.

Im Vorstehenden wurden die Exponenten als rationale Zahlen vorausgesetzt. Allein die Regel gilt auch, wenn die Exponenten irrationale Zahlen sind, weil man diese immer als Grenzen ihrer rationalen Näherungswerte auffassen kann.

Beispiele.

$$dx^{-1} = -x^{-2}\, dx; \qquad dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\, dx;$$

$$dx^{-4} = -4 x^{-5}\, dx; \qquad dx^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\, dx;$$

$$d\left(\frac{a}{x^2}\right) = d(a x^{-2}) = -2 a x^{-3}\, dx = -\frac{2 a\, dx}{x^3};$$

$$d\left(\frac{a + b x}{x}\right) = d(a + b x) x^{-1} = d(a x^{-1} + b) = -\frac{a\, dx}{x^2}.$$

19. Differential einer Quadratwurzel. Es sei

(1) $$y = \sqrt{\varphi(x)}.$$

Setzt man $\varphi(x) = z$, so kann man schreiben

$$y = z^{\frac{1}{2}}.$$

Folglich erhält man nach Gleichung (5) § 18 über das Differential einer Potenz

$$dy = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{dz}{2\sqrt{z}},$$

oder, wenn man wieder die ursprünglichen Zeichen einführt,

(2) $$d\sqrt{\varphi(x)} = \frac{d\varphi(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}}.$$

Somit ist das Differential einer Quadratwurzel gleich dem Differentiale der Grösse unter dem Wurzelzeichen, dividiert durch das Doppelte der Quadratwurzel.

Beispiele.

$$d\sqrt{ax} = \sqrt{a}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad d\sqrt{a-x} = -\frac{dx}{2\sqrt{a-x}}$$

$$d\sqrt{2ax - x^2} = \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

$$d(a+x)\sqrt{a-x} = \frac{(a-3x)\,dx}{2\sqrt{a-x}};$$

$$d\left[\frac{x - \sqrt{x^2-1}}{2x}\right] = \frac{-dx}{2x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

20. Differential eines Logarithmus. Die gegebene Funktion sei

(1) $$y = {}^{a}\log x.$$

Setzt man die gleichzeitigen Werte $x + \triangle x$ und $y + \triangle y$ ein, so erhält man

$$y + \triangle y = {}^{a}\log(x + \triangle x),$$
$$\triangle y = {}^{a}\log(x + \triangle x) - {}^{a}\log x,$$
$$\triangle y = {}^{a}\log\frac{x + \triangle x}{x} = {}^{a}\log\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{x}{\triangle x}$, so erhält man

(2) $$\frac{\triangle y}{\triangle x}\,x = \frac{x}{\triangle x}\,{}^{a}\log\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right).$$

Wählt man $\triangle x$ so, dass $\frac{x}{\triangle x}$ eine ganze positive Zahl ist, die mit n bezeichnet werde, so geht (2) über in

$$(3) \qquad \frac{\triangle y}{\triangle x}\, x = n\; {}^a\!\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = {}^a\!\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Hierin nähert sich die rechte Seite mehr und mehr einer bestimmten Grenze, je kleiner $\triangle x$, je grösser also n wird. So erhält man für gemeine, briggische Logarithmen für

Werte von $n = 100 \quad ; \; 1\,000 \quad ; \; 10\,000$

die entsprechenden von $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0{,}432\,1 : \; 0{,}434\,1 ; \; 0{,}434\,3.$

Für $n = 10\,000$ ist der letzte Wert so genau, dass er, wie in § 71 gezeigt wird, mit dem Grenzwerte verwechselt werden darf. Aus (3) folgt daher, wenn $\triangle x$ zu $d\,x$ übergeht,

$$\frac{d\,y}{d\,x}\, x = 0{,}434\,3$$

also, wenn $y = \log x$ gesetzt wird, für briggische Logarithmen

$$(4) \qquad d \log x = 0{,}434\,3 \,\frac{d\,x}{x}.$$

Um nun den genauen Grenzwert der rechten Seite von (3) für ein beliebiges Logarithmensystem zu ermitteln, entwickele man $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Satze in eine Reihe und erhält

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} +$$
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{4!} + \dots +$$
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.$$

Die Glieder sind sämtlich positiv; mit wachsendem n wachsen nicht nur die einzelnen Glieder vom 3. ab, sondern es wächst auch ihre Anzahl und damit ihre Summe, aber $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ behält einen endlichen Wert. Offenbar ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$.

Ersetzt man die echten Brüche $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$ u. s. w. alle durch 1 und schreibt für $\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots \frac{1}{n!}$ die grösseren Werte $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}, \dots \frac{1}{2^{n-1}}$, so folgt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}};$$

aber es ist

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3;$$

folglich gilt für jeden Wert von n

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Schreibt man nun

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = S_m + R,$$

worin S_m die Summe der m ersten Glieder der Entwickelung, R die Summe der übrigen bezeichnet, so dass

$$S_m = 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \dots$$
$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-2}{n}\right)\frac{1}{(m-1)!},$$

$$R = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!} +$$
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{1}{(m+1)!} + \dots +$$
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!},$$

so kann man schreiben

$$R = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!}\Bigg[1 + \left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{1}{m+1}$$
$$+ \left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots$$
$$+ \left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{(m+1)(m+2)\dots n}\Bigg].$$

Ersetzt man hierin die echten Brüche $\left(1-\frac{1}{n}\right)$; $\left(1-\frac{2}{n}\right)$; . . sämtlich durch die grössere Zahl 1 und schreibt in der Klammer für $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$; $\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}$; u. s. w. die grösseren Werte $\frac{1}{(m+1)^2}$; $\frac{1}{(m+1)^3}$; . . . . , so ist jedenfalls

25 125

$$R < \frac{1}{m!}\left(1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \dots + \frac{1}{(m+1)^{n-m}}\right)$$

oder

$$R < \frac{1}{m!}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{m+1}\right)^{n-m+1}}{1 - \frac{1}{m+1}}$$

also erst recht

$$R < \frac{1}{m!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} \qquad \text{oder} \qquad R < \frac{1}{m!}\,\frac{m+1}{m}.$$

Man hat also

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < S_m + \frac{1}{m!}\,\frac{m+1}{m}.$$

Lässt man jetzt m unverändert, n aber über alle Grenzen wachsen, so konvergieren in S_m die Brüche $\frac{1}{n}$; $\frac{2}{n}$; $\frac{3}{n}$; ... gegen die Null und S_m nähert sich dem Grenzwerte

$$S_m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(m-1)!}.$$

Setzt man $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ diesem Grenzwerte gleich, so ist der Fehler, der dabei gemacht wird, positiv, aber kleiner als $\frac{1}{m!}\,\frac{m+1}{m}$, kann also durch passende Wahl von m beliebig klein gemacht werden. Man hat also

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots,$$

wobei man einen um so genaueren Wert erhält, je mehr Glieder man berechnet. Löst man die Brüche rechts in Dezimalbrüche auf, so findet man als Summe der Reihe

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\,281\,828\,\dots$$

Diesen Zahlenwert bezeichnet man mit e, so dass e durch die Gleichung

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

definiert wird. Die Zahl e ist, wie Hermite bewiesen hat, transcendent, d. h. sie ist nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten.

Die Ableitung setzte n als ganze Zahl voraus; es ist aber gleichgültig, wie n ins Unendliche wächst, ob es eine kontinuierliche oder diskrete Zahlenreihe durchläuft. Ersetzt man nämlich n durch die stetige Variable v, so liegt v, wenn es keine ganze Zahl ist, stets zwischen zwei ganzen Zahlen n und n + 1, so dass

$$n < v < (n+1), \text{ oder } \left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{v}\right) > \left(1+\frac{1}{n+1}\right),$$

also erst recht

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{v}\right)^{v} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

ist. Nun konvergieren aber

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

beide mit wachsendem n gegen die Grenze e, also ist allgemein

$$\lim_{v=\infty} \left(1+\frac{1}{v}\right)^{v} = e.$$

Man erhält nunmehr aus Gleichung (3)

$$\frac{dy}{dx}\, x = {}^{a}\log e$$

oder

$$(7) \qquad d\,{}^{a}\log x = {}^{a}\log e \frac{dx}{x}.$$

in dieser Gleichung ersetzt ${}^{a}\log e$ die Zahl 0,434 3 der Gleichung (4).

Man hat nun e als Basis eines Logarithmensystems gewählt, nennt die entsprechenden Logarithmen natürliche oder hyperbolische und pflegt sie kurz durch l zu bezeichnen. Für sie ist $l\,e = 1$, so dass die Gleichung (7) lautet

$$(8) \qquad d\,l\,x = \frac{dx}{x}.$$

Das Differential des natürlichen Logarithmus einer veränderlichen Grösse wird also erhalten, wenn man das Differential der veränderlichen Grösse durch diese Veränderliche dividiert.

Die Formeln (3) der § 16 und 17 folgen sofort aus (8). Ist nämlich

$$y = u\,v \quad \text{oder} \quad y = \frac{u}{v},$$

so hat man

$$l\,y = l\,u + l\,v \quad \text{oder} \quad l\,y = l\,u - l\,v,$$

also durch Differentiation

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$$

Beispiele.

$$d\,l\,x^2 = \frac{2\,dx}{x}; \qquad d(x\,l\,x) = (1 + l\,x)\,dx;$$

$$d\,l(a+x) = \frac{dx}{a+x}; \qquad d\,l\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$d\,(l\,x)^n = n\,(l\,x)^{n-1} \cdot \frac{dx}{x} \qquad d\left(\frac{x}{l\,x}\right) = \frac{(l\,x - 1)\,dx}{(l\,x)^2}.$$

21. Differential der Exponentialgrösse a^x. In dieser Grösse sei die Basis konstant. Schreibt man

(1) $$y = a^x$$

und nimmt auf beiden Seiten die Logarithmen, so ist

(2) $$l\,y = x\,l\,a.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich nach § 20 und 14

$$\frac{dy}{y} = dx\,l\,a.$$

Schreibt man hierin a^x für y, so folgt

(3) $$d\,a^x = a^x\,dx\,l\,a.$$

Das Differential der Exponentialgrösse a^x ist also gleich dieser Grösse, multipliziert mit dem Differentiale des Exponenten und dem natürlichen Logarithmus der Basis.

Wenn die Grösse a zur Basis der natürlichen Logarithmen wird, also den Wert $e = 2{,}718\,28$ . . hat, so ist $l\,e = 1$ und Gleichung (3) geht über in

(4) $$d\,e^x = e^x\,dx.$$

Durch Division dieser Gleichung durch e^x folgt

$$\frac{d\,e^x}{e^x} = dx.$$

Denkt man sich nun die Gleichung $y = e^x$ geometrisch dargestellt und lässt man x sich stetig ändern, so entsteht die Proportion $dy : y = dx : 1$. Wenn, wie dies gewöhnlich geschieht, dx konstant bleibt, so ist auch das Verhältnis $dy : y$ der ganzen Kurve entlang konstant.

Beispiele.

$$d\,e^x(x-1) = e^x\,x\,dx; \qquad d\,e^{l\,x} = e^{l\,x} \cdot \frac{dx}{x};$$

$$d\,e^{-x^2} = -\,2\,x\,e^{-x^2}\,dx; \qquad d\,e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

22. Differential der Exponentialgrösse $(\varphi(x))^x$. Schreibt man

(1) $$y = u^x$$

und nimmt auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man

$$l\,y = x\,l\,u.$$

Wird differentiiert und berücksichtigt, dass u eine Funktion von x ist, so erhält man nach § 20 und 16

$$\frac{dy}{y} = x\,\frac{du}{u} + l\,u\,dx,$$

und hieraus, wenn der Wert von y eingeführt wird,

(2) $$dy = x\,u^{x-1}\,du + u^x\,l\,u\,dx \text{ oder}$$

$$dy = x\,(\varphi(x))^{x-1}\,d\,\varphi(x) + (\varphi(x))^x\,l\,\varphi(x)\,dx.$$

Somit besteht das Differential aus zwei Teilen; der eine Teil wird erhalten, wenn man in $(\varphi(x))^x$ den Exponenten konstant, der andere Teil, wenn man die Basis konstant betrachtet.

Beispiele.

$$y = x^x; \qquad dy = x^x(1 + l\,x)\,dx;$$

$$y = (a - x)^x; \quad dy = \left(-x\,(a - x)^{x-1} + (a - x)^x\,l\,(a - x)\right)dx.$$

23. Differential eines Sinus. Es sei

(1) $$y = \sin x;$$

lässt man x in $x + \triangle x$ übergehen, so wird y zu $y + \triangle y$ und man erhält

$$y + \triangle y = \sin(x + \triangle x)$$

$$\triangle y = \sin(x + \triangle x) - \sin x$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)\sin\frac{\triangle x}{2}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}.$$

Lässt man $\triangle x$ gegen die Null konvergieren, so konvergiert

$$\frac{\sin\frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} \text{ gegen die 1 (§ 9), } \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \text{ gegen } \cos x.$$

Man hat daher

(2) $$d\sin x = \cos x\,dx.$$

D a s D i f f e r e n t i a l d e s S i n u s e i n e s B o g e n s i s t a l s o g l e i c h d e m C o s i n u s d i e s e s B o g e n s , m u l t i p l i z i e r t m i t d e m D i f f e r e n t i a l e d e s B o g e n s .

Beispiele.

$$d \sin 2x = \cos 2x \, d\, 2x = 2 \cos 2x \, dx;$$

$$d \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} d \frac{\varphi}{2} = \tfrac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d \varphi;$$

$$d \sqrt{\sin x} = \frac{d \sin x}{2 \sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x \, dx}{2 \sqrt{\sin x}};$$

$$d\, l (\sin x)^2 = \frac{d (\sin x)^2}{\sin x^2} = \frac{2 \cos x \, dx}{\sin x}.$$

24. Differential eines Cosinus. Ist

$$(1) \qquad y = \cos x,$$

so erhält man analog der Entwickelung des § 23

$$\triangle y = \cos (x + \triangle x) - \cos x,$$

$$= - 2 \sin \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \sin \frac{\triangle x}{2},$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = - \sin \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}},$$

also, da $\sin \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)$ für $\triangle x = 0$ zu $\sin x$ wird,

$$(2) \qquad d \cos x = - \sin x \, dx.$$

Folglich ist das Differential des Cosinus eines Bogens gleich dem Sinus dieses Bogens, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, multipliziert mit dem Differentiale des Bogens.

Beispiele.

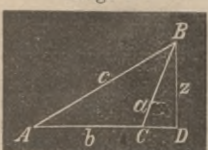
$$d \cos nx = - \sin nx \, d\, nx = - n \sin nx \, dx;$$

$$d \sin x \cos x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = (1 - 2 \sin^2 x) \, dx;$$

$$d\, l (\cos x)^n = \frac{d \cos x^n}{\cos x^n} = \frac{- n \sin x \cos x^{n-1} dx}{\cos x^n} = - n \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

25. Aufgabe. In einem Dreiecke sei ein Winkel fehlerhaft gemessen worden. Es soll angegeben werden, welchen Einfluss dieser Fehler auf die dem Winkel gegenüberliegende Seite ausübt.

Fig. 4.



Sind a, b, c die Seiten (Fig. 4) und α, β, γ die ihnen gegenüberliegenden Winkel, so besteht folgender Zusammenhang

$$(1) \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2 ac \cos \beta.$$

Denkt man sich hierin a und c als richtig gemessen, also als konstante Grössen, gibt aber dem Winkel β eine kleine Aenderung, so wird sich auch die gegenüberliegende Seite b ändern. Die Differentiation von (1) gibt

$$(2) \qquad b\,d\,b = a\,c\sin\beta\,d\,\beta.$$

Da nun aber hierin $c\sin\beta$ ersetzt werden kann durch $b\sin\gamma$, so geht (2) über in

$$(3) \qquad d\,b = a\sin\gamma\,d\,\beta.$$

Fällt man von dem Scheitel des Winkels, der geändert worden, das Lot $BD = z$ auf die gegenüberliegende Seite, so ist $z = a\sin\gamma$; folglich aus (3)

$$(4) \qquad d\,b = z\,d\,\beta.$$

Betrachtet man nun $d\,\beta$ als Fehler, der dem Winkel β anhaftet, so ist $d\,b$ als der Fehler anzusehen, der sich daraus für die Seite b ergibt. Dieser Fehler ist daher dem Lote z proportional. Für alle möglichen Werte von β schwankt z zwischen 0 und a. Den grössten Wert a erreicht z, wenn das Dreieck in C rechtwinkelig ist; also tritt auch bei dieser Dreiecksform der grösste Fehler an der Seite b ein.

Ist β_1 das Bogenmass in Minuten von $d\,\beta$, so hat man (§ 5)

$$d\,\beta : 2\,\pi = \beta_1 : 360 \cdot 60,$$

woraus

$$d\,\beta = 0{,}000\;290\;88\,\beta_1,$$

also

$$d\,b = 0{,}000\;290\;88\,\beta_1\,z$$

folgt. Für 1000 *m* Lothöhe und 0,5′ Winkelfehler wird hiernach der Fehler der gegenüberliegenden Seite

$$d\,b = 0{,}145\;44\;m.$$

26. Differential der Tangente und Cotangente. Es ist

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotang} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Da die Differentiale von $\sin x$ und $\cos x$ bekannt sind, so erhält man nach der Regel über die Differentiation eines Bruches (§ 17)

$$d\operatorname{tang} x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\,d\,x, \qquad d\operatorname{cotang} x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\,d\,x.$$

$$d\operatorname{tang} x = \frac{d\,x}{\cos^2 x}, \qquad d\operatorname{cotang} x = -\frac{d\,x}{\sin^2 x}.$$

Um die übrigen, weniger gebräuchlichen, trigonometrischen Funktionen zu differentiieren, berücksichtige man die Relationen

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

$$\operatorname{sin\,vers} x = 1 - \cos x, \qquad \operatorname{cos\,vers} x = 1 - \sin x.$$

Es folgt unter Anwendung vorangegangener Regeln

$$d \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} d x, \quad d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} d x,$$

$$d \sin \operatorname{vers} x = \sin x \, d x, \quad d \cos \operatorname{vers} x = -\cos x \, d x.$$

27. Differentiale der cyklometrischen Funktionen. Es sei

(1) $$y = \operatorname{arc} \sin x;$$

dann ist $x = \sin y$; durch Differentiation dieser Gleichung folgt

$$d x = \cos y \, d y = \sqrt{1 - \sin^2 y} \, d y = \sqrt{1 - x^2} \, d y,$$

woraus sich ergibt

(2) $$d y = d \operatorname{arc} \sin x = \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ist

(3) $$y = \operatorname{arc} \cos x,$$

so ist $x = \cos y$ und

$$d x = -\sin y \, d y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} \, d y = -\sqrt{1 - x^2} \, d y,$$

woraus

(4) $$d y = d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{d x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Funktion

(5) $$y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x$$

ist die Umkehrung von $x = \operatorname{tang} y$. Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man $d x = \frac{d y}{\cos^2 y}$. Nun ist nach bekannten trigonometrischen Formeln

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$ so dass man erhält $d x = (1 + x^2) \, d y$,

oder

(6) $$d y = d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{d x}{1 + x^2}.$$

Ist endlich

(7) $$y = \operatorname{arc} \operatorname{cotang} x,$$

so gehört diese Funktion zu $x = \operatorname{cotang} y$, aus der durch Differentiation folgt $d x = -\frac{d y}{\sin^2 y}$; nun ist $\sin^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{cotang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$; man erhält also $d x = -(1 + x^2) \, d y$ oder

(8) $$d y = d \operatorname{arc} \operatorname{cotang} x = -\frac{d x}{1 + x^2}.$$

Der Vollständigkeit wegen seien noch angegeben

$$(9) \quad d \operatorname{arc} \sec x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; \quad d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

die in analoger Weise abgeleitet werden können.

Beispiele.

$$d \arcsin \frac{x}{a} = \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$d \arccos \sqrt{1-x} = \frac{-d\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(1-x)}} = \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}};$$

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{d\sqrt{\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}};$$

$$d \operatorname{arc} \operatorname{cotang}(x^2) = -\frac{d(x^2)}{1+x^4} = -\frac{2x\,dx}{1+x^4}.$$

28. Differentiation der Funktionen von Funktionen. Die veränderliche Grösse einer Funktion ist öfters eine Funktion einer andern veränderlichen Grösse. Dies ist z. B. der Fall in den Ausdrücken

$$l(x+2x^2), \quad l \sin x, \quad \operatorname{tang}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Solche Funktionen können durch eine passende Substitution oder Transformation immer auf eine der einfachen Funktionen gebracht werden, deren Differentiale bisher abgeleitet wurden. Einige Beispiele werden dies zeigen.

I. Es sei zu differentiieren $y = (a + b x^m)^n$.

Setzt man $a + b x^m = z$, so ist $y = z^n$, also $dy = n z^{n-1} dz$ und $dz = m b x^{m-1} dx$. Drückt man z wieder durch x aus, so folgt

$$dy = n(a + b x^m)^{n-1} \cdot m b x^{m-1} dx.$$

II. Die gegebene Funktion sei $y = \sin\sqrt{a^2-x^2}$.

Schreibt man $\sqrt{a^2-x^2} = z$, so ist $y = \sin z$, $dy = \cos z\, dz$. Führt man in die letzte Gleichung ein $\cos z = \cos\sqrt{a^2-x^2}$ und $dz = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, so wird

$$dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \cos\sqrt{a^2-x^2}.$$

III. Es sei gegeben $y = l\,\varphi(x)$.

Setzt man $\varphi(x) = z$, so ist $y = l z$, $dy = \frac{dz}{z}$; mithin

$$d\,l\,\varphi(x) = \frac{d\,\varphi(x)}{\varphi(x)}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar

$$d\,l\,(a - x) = -\frac{d\,x}{a - x}, \quad d\,l \sin x = \frac{\cos x}{\sin x}\,d\,x.$$

IV. Zu differentiieren $y = a^{x + 2x^2}$.

Für $x + 2x^2 = z$ erhält man $y = a^z$, $d\,y = a^z\,d\,z\,l\,a$, $d\,z = (1 + 4x)\,d\,x$; folglich, indem man z durch x ausdrückt,

$$d\,y = a^{x + 2x^2} \cdot (1 + 4x)\,d\,x \cdot l\,a.$$

V. Es sei ferner $y = e^{a^x}$.

Schreibt man $a^x = z$, so ist $y = e^z$, $d\,y = e^z\,d\,z$, $d\,z = a^x\,l\,a\,d\,x$; folglich

$$d\,y = e^{a^x} \cdot a^x\,l\,a\,d\,x.$$

Auf diese Weise können folgende Gleichungen abgeleitet werden

$$d \cos l\,x = -\frac{d\,x}{x} \sin l\,x; \quad d \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = -\frac{2\,d\,x}{1 + x^2};$$

$$d\,l\,\frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}} = -\frac{d\,x}{x\sqrt{1 - x^2}};$$

$$d\,(\sin x)^x = x\,(\sin x)^{x-1} \cos x\,d\,x + (\sin x)^x\,d\,x\,l \sin x.$$

29. Allgemeine Darstellung des Differentials einer Funktion einer Funktion. Ist y eine stetige Funktion von z, und z eine stetige Funktion von x, also

(1) $$y = F(z); \quad z = f(x),$$

so ist auch y eine stetige Funktion von x, die geschrieben werden kann

(2) $$y = F[f(x)],$$

so dass y eine Funktion einer Funktion von x ist. Differentiiert man die Gleichungen (1), so ist nach der bisherigen Bezeichnungsweise

(3) $$d\,y = d\,F(z); \quad d\,z = d\,f(x).$$

Allein $d\,F(z)$ nimmt in der Ausführung die Form $F'(z)\,d\,z$, $d\,f(x)$ die Form $f'(x)\,d\,x$ an, worin

(4) $$F'(z) = \frac{d\,y}{d\,z}; \quad f'(x) = \frac{d\,z}{d\,x}$$

die Differentialquotienten bezeichnen. Man erhält aus (4)

$$d\,y = F'(z)\,d\,z; \quad d\,z = f'(x)\,d\,x.$$

Setzt man in die erste dieser Gleichungen die Werte von y, z und $d\,z$ ein, so erhält man als gesuchtes Differential

(5) $$d\,F[f(x)] = F'[f(x)] \cdot f'(x)\,d\,x.$$

Man kann die Differentialquotienten (4) noch in der Form andeuten

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dF(z)}{dz}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{df(x)}{dx},$$

also die Differentiale bezeichnen mit

$$dy = \frac{dF(z)}{dz} \cdot dz, \qquad dz = \frac{df(x)}{dx} \cdot dx,$$

und daher die Gleichung (5) schreiben in der Form

$$(6) \qquad dF[f(x)] = \frac{dF[f(x)]}{df(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot dx,$$

oder mit Beibehaltung der Bezeichnung (1)

$$(7) \qquad dy = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot dx.$$

Ist y eine stetige Funktion von z, z eine solche von x, so ist das Differential von y gleich dem Produkte aus dem Differentialquotienten von y nach z, dem Differentialquotienten von z nach x und dem Differentiale von x.

Ist die Abhängigkeit der Grösse y von der Grösse x vermittelt durch die Gleichungen

$$(8) \qquad y = F(u); \qquad u = f(z); \qquad z = \varphi(x),$$

so gilt entsprechend (7)

$$(9) \qquad dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} dx.$$

30. Das Differential einer Funktion zweier Funktionen. Die in den §§ 15, 16, 17, 29 abgeleiteten Differentialformeln sind besondere Fälle eines allgemeinen Satzes über das Differential zusammengesetzter Funktionen.

Es seien u und v stetige Funktionen von x, und y eine stetige Funktion von u und v, also

$$(1) \qquad y = f(u, v); \qquad u = \varphi(x); \qquad v = \psi(x).$$

Lässt man x in $x + \triangle x$ übergehen, so werden gleichzeitig y, u und v zu $y + \triangle y$, $u + \triangle u$ und $v + \triangle v$, und es ergibt sich

$$y + \triangle y = f(u + \triangle u, v + \triangle v)$$

$$\triangle y = f(u + \triangle u, v + \triangle v) - f(u, v)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(u + \triangle u, v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle x}.$$

Dafür aber kann geschrieben werden

$$(2) \qquad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(u + \triangle u, v + \triangle v) - f(u, v + \triangle v)}{\triangle u} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x}$$

$$+ \frac{f(u, v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle v} \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x}.$$

Nun ist $f(u, v + \triangle v) - f(u, v)$ die Differenz zweier Werte derselben Funktion, in denen die Variable u denselben Wert, die Variable v verschiedene Werte hat, so dass gewissermassen u als konstant betrachtet und nur v als variabel angesehen wird. Geht man zur Grenze über, so ist

$$\lim_{\triangle v = 0} \frac{f(u, v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle v}$$

der Differentialquotient der Funktion $f(u, v)$, wenn u als konstant, v als variabel angesehen wird. Solche Differentiation nennt man partielle Differentiation und das Resultat den partiellen Differentialquotienten der Funktion $f(u, v)$ nach v und schreibt nach Jacobi mit gebogenem ∂

$$(3) \qquad \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \lim_{\triangle v = 0} \frac{f(u, v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle v}$$

und ebenso

$$(3') \qquad \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \lim_{\triangle u = 0} \frac{f(u + \triangle u, v) - f(u, v)}{\triangle u}.$$

Geht man jetzt in Gleichung (2) zur Grenze $\triangle x = 0$ über, so wird

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{du}{dx}; \quad \frac{\triangle v}{\triangle x} = \frac{dv}{dx};$$

$$\frac{f(u, v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle v} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}.$$

Da aber die Differenz

$$\frac{f(u + \triangle u, v + \triangle v) - f(u, v + \triangle v)}{\triangle u} - \frac{f(u + \triangle u, v) - f(u, v)}{\triangle u}$$

unter der gemachten Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion mit abnehmendem $\triangle x$ die Grenze 0 hat, so ist

$$\lim_{\triangle u = 0} \frac{f(u + \triangle u, v + \triangle v) - f(u, v + \triangle v)}{\triangle u} = \lim_{\triangle u = 0} \frac{f(u + \triangle u, v) - f(u, v)}{\triangle u}$$

$$= \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}.$$

Die Gleichung (2) kann nunmehr geschrieben werden

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

oder

$$(5) \qquad dy = \frac{\partial (f u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} dv.$$

Ist also $y = f(u, v)$ und $u = \varphi(x)$; $v = \psi(x)$, so erhält man das vollständige Differential von y, indem man $f(u, v)$ partiell nach u und v differentiiert, diese partiellen Differentialquotienten entsprechend mit den Differentialen von u und v multipliziert und addiert.

Beispiele.

I. $y = u + v.$ (§ 15).

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1; \quad \text{also } dy = du + dv.$$

II. $y = u \cdot v.$ (§ 16).

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u; \quad \text{also } dy = v\,du + u\,dv.$$

III. $y = \frac{u}{v}.$ (§ 17).

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}; \quad \text{also } dy = \frac{1}{v}du - \frac{u}{v^2} \cdot dv$$

$$= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

IV. $y = f(u).$ (§ 29).

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{dy}{du}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0; \quad \text{also } dy = \frac{dy}{du} \cdot du.$$

31. Differentiation unentwickelter Funktionen. Die allgemeine Form solcher Funktionen (§ 3) ist $f(x, y) = 0$. Hierbei ist es gleichgültig, welche der Grössen x, y die unabhängig Veränderliche sei. Diese Gleichung wird differentiiert nach den Regeln, die über Summen, Produkte, Quotienten etc. entwickelter Funktionen aufgestellt wurden. Dadurch wird jedes Glied im Differentiale entweder dx oder dy als Faktor enthalten. Fasst man alsdann die Glieder mit dx, ebenso diejenigen mit dy zusammen, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$P\,dy + Q\,dx = 0,$$

in der P die Summe der Glieder mit dem Faktor dy und Q diejenige der Glieder mit dem Faktor dx bezeichnen, und aus der

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{P} \quad \text{folgt.}$$

I. Gegeben $\quad y\,lx + x\,a^y + b = 0,$

so folgt $\quad lx\,dy + \frac{y}{x}dx + a^y\,dx + x\,a^y\,dy\,la = 0,$

$$(lx + x\,a^y\,la)\,dy + \left(\frac{y}{x} + a^y\right)dx = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\,x^{-1} + a^y}{lx + x\,a^y\,la}.$$

II. Ist $$b \sin^2 (x + y) - a = 0,$$
so wird $$2 b \sin (x + y) \cos (x + y) (d x + d y) = 0,$$
$$\frac{d y}{d x} = -1.$$

Aus der gegebenen Gleichung ergibt sich, dass $\sin (x + y)$, also auch $x + y$ konstant ist. Daher wird das Differential von $x + y$ zu Null, d. h. es ist $d x + d y = 0$, woraus auch sofort das obige Differentialverhältnis hervorgeht.

32. Allgemeines Verfahren, unentwickelte Funktionen zu differentiieren. Wird in der Gleichung (1) des § 30 $y = 0$, lautet also die zwischen u und v, wo u und v irgend welche stetige Funktionen von x sind, bestehende Gleichung

$$f(u, v) = 0, \tag{1}$$

so ist $\frac{d y}{d x} = 0$ und die Formel (4) des § 30 geht über in

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{d u}{d x} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{d v}{d x} = 0. \tag{2}$$

Setzt man jetzt $u = x$ und führt für v als neue Bezeichnung y ein, so lautet die Gleichung (1)

$$f(x, y) = 0, \tag{3}$$

durch die y als unentwickelte Funktion von x definiert wird. Man erhält, da $\frac{d x}{d x} = 1$ ist, aus (2)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{d y}{d x} = 0$$

und hieraus

$$\frac{d y}{d x} = - \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}}. \tag{4}$$

Die Gleichung (4) kann auch geschrieben werden

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} d y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} d x = 0. \tag{5}$$

Eine Vergleichung mit Gleichung (2) des § 31 zeigt, dass die dort mit P und Q bezeichneten Grössen die Werte

$$P = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}; \quad Q = \frac{\partial f(x. y)}{\partial x}$$

haben.

Nennt man die beiden Teile der Gleichung (5) die partiellen Differentiale der Gleichung $f(x, y) = 0$, so ist das vollständige (totale) Differential der Gleichung $f(x,y) = 0$ gleich der Summe der partiellen Differentiale.

Beispiele.

I. Aus der allgemeinen Gleichung vom zweiten Grade mit zwei Veränderlichen

$$A y^2 + B y x + C x^2 + D y + E x + F = 0$$

ergibt sich durch Differentiation:

Differential in Hinsicht y . . $= (2 A y + B x + D) d y,$
Differential in Hinsicht x . . $= (2 C x + B y + E) d x,$

vollständiges Differential als Summe der partiellen

$$(2 A y + B x + D) d y + (2 C x + B y + E) d x = 0,$$

Differentialquotient . . . . $\frac{d y}{d x} = - \frac{2 C x + B y + E}{2 A y + B x + D}.$

II. Gegeben $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2} \sin y + l \frac{a - x}{a - y} = 0$; daher

Differentialq. in Hinsicht x . . $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{- x \sin y}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{a - x}.$

Differentialq. in Hinsicht y . . $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \sqrt{a^2 - x^2} \cos y + \frac{1}{a - y}.$

Differentialquotient . . . . $\frac{d y}{d x} = \frac{\frac{x \sin y}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{a - x}}{\sqrt{a^2 - x^2} \cos y + \frac{1}{a - y}}.$

II. Maximum und Minimum der Funktionen.

33. Erklärung von Maximum und Minimum und Bestimmungsweise derselben. Denkt man sich die Gleichung $y = f(x)$ oder $f(x, y) = 0$ geometrisch dargestellt und lässt die unabhängig Veränderliche x sich stetig ändern, so ist es möglich, dass die abhängig Veränderliche y, d. h. die Funktion von x, bis zu einem gewissen Werte A B (Fig. 5 u. 6) wächst und dann wieder abnimmt. In diesem Falle nennt man jenen grössten Wert der Funktion ein Maximum. Die Funktion kann aber

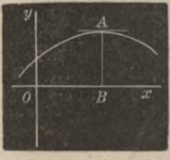
Fig. 5.


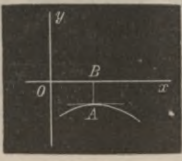
Fig. 6.


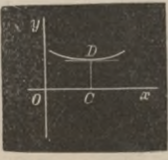
Fig. 7.


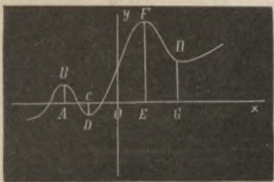
Fig. 8.


auch bis zu einem gewissen Werte C D (Fig. 7 und 8) abnehmen und sodann wieder wachsen. Alsdann heisst jener kleinste Wert der Funktion ein Minimum. Maxima und Minima heissen auch extreme Werte der Funktionen.

Es ist möglich, dass eine Funktion keine Maxima- oder Minima-Werte hat, oder dass sie deren mehrere besitzt.

Uebrigens bezieht sich die Benennung Maximum und Minimum immer nur auf die unmittelbar benachbarten Werte. Wie aus Fig. 9, die eine Funktion darstellt, die zwei Maxima A B und E F und zwei Minima C D und G H hat, ersichtlich ist, kann wohl ein Minimum grösser als ein Maximum sein. Es ist z. B. $GH > AB$. Dieselbe Figur lehrt ferner, dass, wenn eine stetige Funktion mehrere extreme Werte hat, diese nicht lauter Maxima oder Minima sein können, da nicht zwei Maxima oder Minima unmittelbar aufeinander folgen können, sondern dass Maxima und Minima abwechseln.

Fig. 9.



Legt man durch die Punkte A und D in den Figuren 5 bis 8 Tangenten an die Kurven, so müssen diese Tangenten parallel zur Abscissenachse x sein, weil die Nachbarordinaten zu beiden Seiten von A B kleiner als A B, und zu beiden Seiten von C D grösser als C D sind.

Wegen dieser Lage der Tangenten durch A und D muss nach § 10 der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der gegebenen Funktion $= 0$ sein.

Leitet man also den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ ab, setzt ihn $= 0$, bestimmt daraus alle möglichen Werte von x und führt sie in die gegebene Funktion ein, so können die daraus hervorgehenden Funktionswerte Maxima- und Minima-Werte sein. Es ist jedoch nicht notwendig, dass sie solche sind. Denn die Werte von x, die aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ hervorgehen, können auch, wie die beiden Figuren 10 und 11 zeigen, andere eigentümliche Punkte E, H der Kurven anzeigen. In beiden Kurven ist die Tangente durch die Kurvenpunkte E, H ebenfalls parallel zur Abscissenachse; allein beim ersten Punkte tritt eine Wendung in der Krümmung, beim zweiten eine Unterbrechung im Laufe eines oder mehrerer Kurvenäste ein. Der Punkt E heisst Wendepunkt, der zweite eine Spitze der Kurve.

Fig. 10.

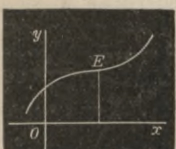
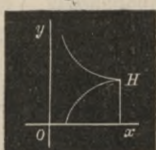


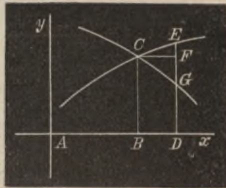
Fig. 11.



34. Kennzeichen der Maxima und Minima der Funktionen. Es sei $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ gegeben. Man stelle diese Funktion geometrisch dar. Die rechtwinkeligen Koordinaten eines Kurvenpunktes seien $AB = x$, $BC = y$ (Fig. 12). Lässt man x übergehen in $x + dx$, so geht y über entweder in $DE = y + dy$ oder in $DG = y - dy$, je nachdem die Ordinate um E F zunimmt oder um G F abnimmt. Im ersten Falle haben dx und dy gleiche, im zweiten Falle entgegengesetzte Vorzeichen. Daraus folgt:

a) Wenn in einer Funktion y die unabhängig Veränderliche x wächst und dabei d x und d y gleiche Vorzeichen haben, so wächst auch die Funktion y. Haben dagegen d x und d y entgegengesetzte Zeichen, so nimmt die Funktion y ab.

Fig. 12.



b) Wenn in einer Funktion y die unabhängig Veränderliche x wächst und hierbei das Differential d y stetig von positiven Werten durch die Null in negative Werte übergeht, so wird die Funktion y wachsen bis zu dem Werte von x, der $dy = 0$ macht, und sodann abnehmen. Folglich wird y ein Maximum, wenn $dy = 0$.

c) Wenn für wachsende Werte von x das Differential d y stetig aus negativen Werten durch die Null in positive übergeht, so wird y abnehmen bis zu dem Werte von x, der $dy = 0$ macht, und dann wieder wachsen. Folglich wird y ein Minimum, wenn $dy = 0$.

d) Wenn für wachsende Werte von x das Differential d y stetig aus positiven Werten durch die Null in positive oder aus negativen Werten durch die Null in negative übergeht, so wird im ersten Falle die Funktion y immer wachsen, im zweiten immer abnehmen. Also entspricht dem Werte von x, der $dy = 0$ macht, ein Wendepunkt der Kurve.

e) Wenn für die wachsenden Werte von x das Differential d y stetig aus positiven oder aus negativen Werten in die Null übergeht und der Wert von x, der $dy = 0$ macht, eine Grenze der Stetigkeit der Funktion gibt, die den Lauf der Kurve unterbricht, so entspricht diesem Werte von x eine Spitze der Kurve.

35. Aufgabe. Eine gerade Linie von der Länge a in zwei solche Teile zu teilen, dass das Rechteck aus beiden Teilen ein Maximum wird.

Ist der eine Teil der Strecke x, so ist der andere $a - x$ und die Rechtecksfläche $y = x(a - x)$. Mithin wird sein

$$y = ax - x^2, \qquad \frac{dy}{dx} = a - 2x.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = 0$, so folgt $a - 2x = 0$, $x = \frac{1}{2}a$. Nun kann x, dem Sinne der Aufgabe entsprechend, von $x = 0$ bis $x = a$ wachsen. Wächst x von 0 bis $\frac{1}{2}a$, so bleibt d y positiv, also wächst auch y; nimmt x von $\frac{1}{2}a$ bis a zu, so wird d y negativ, also nimmt y ab. Folglich wird y ein Maximum für $x = \frac{1}{2}a$. Mithin muss die Strecke in zwei gleiche Teile geteilt werden, wenn das Rechteck ein Maximum werden soll. Unter allen Rechtecken von gleichem Umfange hat somit das Quadrat den grössten Inhalt.

36. Aufgabe. Zu zeigen, dass unter allen Rechtecken, die in einen Kreis beschrieben werden können, das Quadrat den grössten Umfang und die grösste Fläche hat.

Ist der Durchmesser des Kreises $= a$, der Winkel, den die Diagonale a des Rechtecks mit einer Rechtecksseite bildet $= \alpha$, der Umfang des Rechtecks $= u$ und dessen Fläche $= y$, so wird sein

$$u = 2a(\sin\alpha + \cos\alpha), \qquad \frac{du}{d\alpha} = 2a(\cos\alpha - \sin\alpha),$$

$$y = a^2 \sin\alpha\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{d\alpha} = a^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Setzt man $\frac{du}{d\alpha} = 0$ und $\frac{dy}{d\alpha} = 0$, so folgt in beiden Fällen

$$\sin\alpha = \cos\alpha, \qquad \alpha = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Der Winkel α kann sich hier von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ändern. Wächst α von 0 bis $\frac{1}{4}\pi$, so bleibt sowohl du, als auch dy positiv; also wachsen auch u und y. Wächst α von $\frac{1}{4}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$, so werden du und dy negativ; also nehmen u und y ab. Somit wird sowohl u als y ein Maximum für $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, also wenn das einbeschriebene Rechteck ein Quadrat ist.

37. Aufgabe. Es seien a, b zwei konstante Seiten eines Dreiecks und γ der von ihnen eingeschlossene Winkel. Bei welchem Werte von γ wird die Dreiecksfläche F ein Maximum?

Betrachtet man a als Grundlinie des Dreiecks, so ist $b\sin\gamma$ dessen Höhe; folglich wird sein

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \qquad \frac{dF}{d\gamma} = \frac{1}{2}ab\cos\gamma.$$

Aus der Bedingung $dF = 0$ folgt $\cos\gamma = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}\pi$. Nun kann γ sich von 0 bis π ändern. Nimmt γ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ zu, so bleibt dF positiv, also wächst F; nimmt γ weiter von $\frac{1}{2}\pi$ bis π zu, so wird dF negativ, also nimmt F ab. Folglich wird F für $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ ein Maximum. Die gegebenen Seiten müssen also rechtwinkelig zu einander stehen, wenn die Dreiecksfläche ein Maximum sein soll.

38. Aufgabe. Ein gerader Cylinder habe ein konstantes Volumen V. Aendert man das Verhältnis der Cylinderhöhe h und des Halbmessers x der Grundfläche, so ändert sich auch die Oberfläche F des Cylinders. Bei welchem Verhältnis von h und x wird F ein Minimum?

Für das Volumen und die Oberfläche des Cylinders hat man

$$V = \pi x^2 h, \qquad F = 2\pi x^2 + 2\pi x h.$$

Weil die Fläche F sich nur auf ein gegebenes Volumen beziehen soll, so muss in der zweiten Gleichung für F die Grösse V eingeführt werden. Man erreicht dies, wenn man aus beiden Gleichungen h eliminiert. Dadurch erhält man folgende eine einzige unabhängige Grösse x enthaltende Gleichungen

$$F = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}, \qquad \frac{dF}{dx} = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}.$$

Setzt man den Wert von $dF = 0$, so findet man

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \qquad h = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}}.$$

Nimmt x von 0 bis zu dem Werte $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ zu, so bleibt dF negativ und F wird kleiner; nimmt es noch weiter zu, so wird dF positiv und F wird grösser. Folglich wird F ein Minimum für $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Bei diesem Werte von x wird $h = 2x$, d. h. die Oberfläche eines Cylinders von gegebenem Körperinhalte ist ein Minimum, wenn die Höhe gleich dem Durchmesser, der Achsenschnitt des Cylinders also ein Quadrat ist.

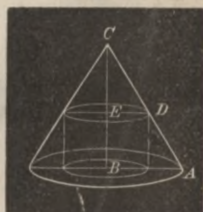
Ein Gefäss, das eine warme Flüssigkeit enthält, wird am wenigsten Wärme durch die Oberfläche verlieren, wenn diese Oberfläche ein Minimum ist. Folglich wird bei einem cylindrischen Gefässe, das diese Bedingung erfüllt, die Höhe gleich dem Durchmesser sein müssen.

39. Aufgabe. Man soll den grössten Cylinder suchen, der aus einem gegebenen geraden Kreiskegel geschnitten werden kann.

Ist (Fig. 13) der Halbmesser AB der Kegelgrundfläche $= r$, die Höhe BC des Kegels $= h$, der Halbmesser DE des Cylinders $= x$, die Höhe BE des Cylinders $= y$ und das Volumen des Cylinders $= V$, so erhält man

$$(1) \qquad V = \pi x^2 y.$$

Fig. 13.



In dieser Gleichung ist V durch x und y ausgedrückt; allein x und y hängen von einander ab, so dass eine dieser Grössen durch die andere ausgedrückt werden muss. Nun besteht folgende Proportion

$$\frac{CE}{DE} = \frac{CB}{AB}, \qquad \frac{h-y}{x} = \frac{h}{r}.$$

Eliminiert man hieraus und aus (1) die Grösse y, so kommt

$$(2) \qquad V = \frac{\pi h}{r}(r x^2 - x^3), \qquad \frac{dV}{dx} = \frac{\pi h}{r}(2 r x - 3 x^2).$$

Setzt man diesen Differentialquotienten $= 0$, so folgt

$$(3) \qquad x = 0 \text{ und } x = \tfrac{2}{3} r.$$

Für $x = 0$ wird der Inhalt des Cylinders $= 0$, also zu einem Minimum. Lässt man x von 0 bis $\frac{2}{3}r$ wachsen, so bleibt dV positiv, also wächst auch V. Wächst x weiter bis r, so wird dV negativ, also nimmt V ab. Mithin wird V ein Maximum für $x = \frac{2}{3}r$. Setzt man diesen Wert in obige Proportion, so findet man

$$y = \tfrac{1}{3} h.$$

Der grösste in einen Kegel beschriebene Cylinder hat also zur Höhe ein Drittel von der Höhe des Kegels. Der Inhalt dieses grössten Cylinders ist $\frac{4}{9}$ vom Inhalte des Kegels.

40. Aufgabe. Zieht man in einem Kreisausschnitte vom Halbmesser R und dem Zentriwinkel 2α eine Sehne, die die Endpunkte des Kreisbogens verbindet, so entsteht ein Dreieck, gebildet von dieser

Sehne und zwei Radien. Für welchen Zentriwinkel wird die Fläche dieses Dreiecks ein Maximum?

Der Inhalt F dieser Dreiecksfläche ist

$$(1)\qquad F = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 2\alpha.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$(2)\qquad \frac{dF}{d\alpha} = R^2 \cos 2\alpha.$$

Setzt man dieses Differentialverhältnis $= 0$, so muss sein $\cos 2\alpha = 0$, also $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$. Hierfür ist in der That F ein Maximum; denn lässt man 2α wachsen von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, so bleibt $\cos 2\alpha$ positiv, wird aber sofort negativ, wenn 2α diese Grenze überschreitet und bleibt negativ, bis der Bogen $\frac{3}{2}\pi$ erreicht ist. Hier entsteht für F ein Minimum. Für $2\alpha = 0$ und $= \pi$ wird $F = 0$; für $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$ wird $F = \frac{1}{2}R^2$ und für $2\alpha = \frac{3}{2}\pi$ wird $F = -\frac{1}{2}R^2$.

41. Aufgabe. Aus jedem Kreisausschnitte lässt sich der Mantel eines Kegels bilden. Der Kubikinhalt V des Kegels hängt ab vom Zentriwinkel x des Kreisausschnittes. Nähert sich x der Null oder 2π, so nimmt V rasch ab. Für einen bestimmten Wert des Zentriwinkels wird der Kubikinhalt des Kegels zu einem Maximum. Man soll diesen Winkel bestimmen.

Wenn y der Radius der Grundfläche und h die Höhe des Kegels ist, so ist dessen Volumen

$$(1)\qquad V = \tfrac{1}{3}\pi y^2 h.$$

Allein die Grösse V soll hierin durch den Zentriwinkel x und nicht durch y und h ausgedrückt sein. Daher müssen Werte für y und h gefunden werden, die nur die eine Variable x enthalten.

Ist r der Radius des Kreisausschnittes, so ist x r der Bogen, und dieser gleich $2\pi y$, d. h. gleich dem Umfange der Kegelgrundfläche. Man findet also

$$(2)\qquad y = \frac{xr}{2\pi}.$$

Ferner erhält man aus dem Achsenschnitte des Kegels, der in zwei rechtwinkelige Dreiecke mit den Seiten r, h und y zerfällt,

$$(3)\qquad h^2 = r^2 - y^2 = r^2 - \frac{x^2 r^2}{4\pi^2} = \frac{r^2}{4\pi^2} \cdot (4\pi^2 - x^2).$$

Setzt man diese Werte von y und h aus (2) und (3) in (1) ein, so erhält man für das Volumen des Kegels

$$(4)\qquad \begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2}{4\pi^2} x^2 \cdot \frac{r}{2\pi} \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2} \\ &= c\sqrt{4\pi^2 x^4 - x^6}, \end{aligned}$$

wenn die Konstante $\frac{r^3}{24\pi^2}$ zur Abkürzung $= c$ gesetzt wird.

Durch Differentiation von (4) ergibt sich

$$\frac{dV}{dx} = c\frac{8\pi^2x^3 - 3x^5}{\sqrt{4\pi^2x^4 - x^6}}.$$

Für $\frac{dV}{dx} = 0$ wird, nachdem man durch x^3 dividiert hat,

$$8\pi^2 = 3x^2,$$

woraus $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ folgt.

Bezeichnet ξ das Bogenmass von x, so ist

$$\xi = 360^0 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 293^0,94.$$

Der Zentriwinkel des Ausschnittes muss also nahe 294^0 betragen.

42. Aufgabe. In der Physik, Mechanik, Astronomie, praktischen Geometrie etc. sei eine Grösse x durch Beobachtung zu ermitteln. Bei n aufeinander folgenden Versuchen finde man dafür die Werte a_1, a_2, a_3, . . a_n. Da diese Grössen vom wahren Werte x etwas abweichen, so sind $x - a_1$, $x - a_2$, . . $x - a_n$ der absoluten Grösse nach die Fehler der Beobachtungen.

Nun hat Gauss gezeigt, dass die aus der Beobachtung zu bestimmende Grösse x am richtigsten wird, wenn die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler ein Minimum ist. Nach dieser „Methode der kleinsten Quadrate" muss also die Funktion

$$y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + .. + (x - a_n)^2$$

ein Minimum sein. Nun ist

$$\frac{dy}{dx} = 2\left[(x - a_1) + (x - a_2) + .. + (x - a_n)\right].$$

Setzt man diesen Differentialquotienten $= 0$, so folgt

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n}{n}.$$

Dieser Wert von x ist das arithmetische Mittel aus sämtlichen Beobachtungen. Lässt man x von 0 bis zu diesem Mittel wachsen, so bleibt dy negativ, also nimmt y ab. Nimmt x noch weiter zu, so wird dy positiv, also wächst y. Folglich wird y ein Minimum für diesen mittleren Wert von x.

Aus einer Anzahl Beobachtungen wird der richtigste Wert erhalten, wenn man das arithmetische Mittel dieser Beobachtungen nimmt.

43. Aufgabe. In einem Dreiecke sind eine Standlinie c (Fig. 14) und die beiden anliegenden Winkel α und β gemessen. Man soll bestimmen, welchen Einfluss der Fehler, der am Winkel α haftet, auf die gegenüberliegende Seite a ausübt.

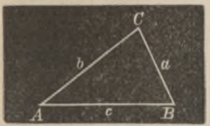
Man hat die Relation

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma, \qquad a \sin\gamma = c \sin\alpha$$

oder, da $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$, so hat man auch

$$a \sin(\alpha + \beta) = c \sin\alpha.$$

Fig. 14.



Nimmt man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so kommt

$$l\,a + l \sin(\alpha + \beta) = l\,c + l \sin\alpha.$$

Denkt man sich hierin α und a veränderlich und β und c konstant, so erhält man durch Differentiation

$$\frac{d\,a}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,d\,\alpha - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}\,d\,\alpha.$$

Bringt man rechts auf gleichen Nenner, so folgt durch Zusammenziehung

$$(1) \qquad \frac{d\,a}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha \sin(\alpha + \beta)}\,d\,\alpha.$$

Denkt man sich nun, die Seite A C drehe sich um den Punkt A herum so, dass der Winkel α stetig von 0 in π übergehe, so durchläuft der Punkt C die Gerade B C und deren Verlängerung. Den Aenderungen $d\,\alpha$ des Winkels α entsprechen dabei die Aenderungen $d\,a$ der Seite a. In jeder Lage des Punktes C entsteht ein besonderes Verhältnis zwischen $d\,a$ und a. Während der Punkt C auf der Geraden B C fortschreitet, ändert das Verhältnis $d\,a : a$ seinen Wert. In einer gewissen Lage des Punktes C wird dieses Verhältnis ein Minimum.

Um dieses zu bestimmen, bedenke man, dass das Verhältnis $d\,a : a$ nach Gleichung (1) abhängt vom Werte des veränderlichen Nenners $\sin\alpha \sin(\alpha + \beta)$. Es wird $d\,a : a$ grösser, wenn dieser Nenner abnimmt, und ein Minimum, wenn der Nenner ein Maximum wird. Bezeichnet man diesen Nenner mit y, so ist

$$\frac{d\,y}{d\,\alpha} = \sin\alpha \cos(\alpha + \beta) + \cos\alpha \sin(\alpha + \beta),$$

$$(2) \qquad \frac{d\,y}{d\,\alpha} = \sin(2\,\alpha + \beta).$$

Setzt man diesen Differentialquotienten $= 0$, so erhält man

$$2\,\alpha + \beta = 0, \qquad 2\,\alpha + \beta = \pi, \qquad 2\,\alpha + \beta = 2\,\pi, \ldots$$

Die Bedingung $2\,\alpha + \beta = 0$ kann nicht bestehen, weil sonst einer der Winkel α, β negativ sein müsste, was dem Sinne der Aufgabe nicht entspricht. Die Bedingung $2\,\alpha + \beta = 2\,\pi$ ist ebenfalls unzulässig, weil $2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\,\pi$ und $2\,\alpha + \beta < 2(\alpha + \beta + \gamma)$ ist. Deshalb wird $\sin(2\,\alpha + \beta) = 0$, wenn $2\,\alpha + \beta = \pi$, also wenn

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\pi - \beta).$$

Lässt man in der Gleichung (2) den Winkel α von 0 bis $\frac{1}{2}(\pi - \beta)$ wachsen, so bleibt $d\,y$ positiv, also wächst y. Wächst α noch weiter, so wird dy negativ, also nimmt y ab, folglich wird y ein Maximum, also $\frac{da}{a}$ ein Minimum, wenn $\alpha = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$.

Setzt man diesen Wert von α in die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, so folgt

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\pi - \beta).$$

Folglich wird $\gamma = \alpha$ für den Fall, dass $da : a$ ein Minimum wird.

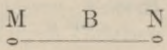
Ist nun $d\alpha$ die Grösse, um die α fehlerhaft gemessen wurde, so wird da der Fehler der Seite a sein. Der kleinste Fehler, der beim Messen eines Winkels an der gegenüberstehenden Seite entsteht, tritt somit ein, wenn die Standlinie und die berechnete Seite einander gleich sind.

Setzt man nun $a = c$ voraus und berechnet den Einfluss, den der Winkel β auf die gegenüberstehende Seite b hat, so ergibt sich in gleicher Weise, dass die Standlinie c und die gesuchte Seite b einander gleich sein müssen, wenn der Fehler der Seite b ein Minimum sein soll. Daraus folgt, dass, wenn aus einer Seite und den beiden etwas fehlerhaft gemessenen anliegenden Winkeln die übrigen Stücke zu berechnen sind, die Fehler dieser Stücke ein Minimum werden, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

44. Aufgabe. In der geraden Linie, die zwei leuchtende Punkte M und N verbindet, soll diejenige Stelle B bestimmt werden, in der die schwächste Beleuchtung stattfindet. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Lichtstärke umgekehrt proportional sei dem Quadrate der Entfernung von der Lichtquelle.

Sind die Entfernungen $MN = a$ und $MB = x$, ferner die Lichtintensitäten im Abstande 1 von M und von N gleich m^3 und n^3, so wird die Lichtintensität y in B sein

$$(1) \qquad y = \frac{m^3}{x^2} + \frac{n^3}{(a-x)^2}.$$



Aus dieser Gleichung folgt zur Bestimmung des Minimums von y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2m^3}{x^3} + \frac{2n^3}{(a-x)^3} = 0, \text{ woraus}$$

$$(2) \qquad x = \frac{ma}{m+n}, \quad \text{oder} \quad x : a = m : (m+n).$$

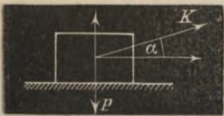
Setzt man den Wert von x aus (2) in (1), so erhält man als schwächste Lichtintensität in B

$$y = \frac{(m+n)^3}{a^2}.$$

45. Aufgabe. Ein Körper vom Gewichte P werde auf einer Horizontalebene fortgezogen mit einer Kraft K, die mit der Horizontalebene den Winkel α bildet. Diese Kraft K habe nur die Reibung, die P auf der Unterlage verursacht, zu überwinden. Bei welchem Winkel α wird die Zugkraft K ein Minimum?

Zerlegt man K (Fig. 15) in die beiden rechtwinkeligen Seitenkräfte $K \cos \alpha$ und $K \sin \alpha$, so liegt $K \cos \alpha$ in der Richtung der Bewegung und ist somit gleich der Reibung, die der Körper auf der Horizontalebene veranlasst, während $K \sin \alpha$ vertikal aufwärts wirkt und den Druck P gegen diese Ebene vermindert. Der Normaldruck auf die Reibfläche ist somit $= P - K \sin \alpha$.

Fig. 15.



Ist nun f der Reibungskoeffizient (§ 203), d. h. die Reibung für den Normaldruck $= 1$, so ist die Reibung $= f(P - K \sin \alpha)$, mithin die Bedingung des Gleichgewichtes

$$(1) \qquad K \cos \alpha = f(P - K \sin \alpha),$$

$$K = \frac{f P}{\cos \alpha + f \sin \alpha}.$$

Hierin ist der Zähler $f P$ konstant, es muss also der Nenner

$$(2) \qquad y = \cos \alpha + f \sin \alpha$$

ein Maximum sein, wenn K ein Minimum werden soll. Nun ist

$$(3) \qquad \frac{d y}{d \alpha} = - \sin \alpha + f \cos \alpha.$$

Dieser Differentialquotient wird $= 0$, wenn $\operatorname{tang} \alpha = f$.

Lässt man α von 0 bis zu dem Werte, der aus $\operatorname{tang} \alpha = f$ entspringt, wachsen, so bleibt $d y$ positiv, also wächst y. Nimmt α noch weiter zu, so wird $d y$ negativ, also y kleiner. Folglich wird y für $\operatorname{tang} \alpha = f$ ein Maximum, also K ein Minimum. Dieser Minimalwert von K ist

$$K = \frac{f P}{\cos \alpha + \operatorname{tang} \alpha \cdot \sin \alpha} = f P \cos \alpha,$$

oder da $\quad \cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + f^2}}$, so wird

$$(4) \qquad K = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} P.$$

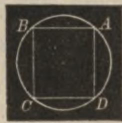
Bei Fuhrwerken auf schlechten Strassen kann $f = 0{,}07$ angenommen werden. Nun erhält man für $\operatorname{tang} \alpha = 0{,}07$ einen Winkel $\alpha = 4^0$. Folglich ist die günstigste Richtung der Zugstange um 4 Grade zur horizontalen Fahrbahn geneigt.

46. Aufgabe. Aus einem cylindrischen Baumstamme einen rechtwinkeligen Balken zu schneiden, der in horizontaler Lage an beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet, eine möglichst grosse Tragkraft besitze.

Die Aufgabe sei unter der Voraussetzung zu lösen, dass die Tragkraft bei gegebener Balkenlänge zunehme mit der Breite $A B = y$ (Fig. 16) und dem Quadrate der Höhe $B C = x$ des Querschnittes. (Siehe § 216, Gleichung 2.)

Ist bei gegebener Länge a die Tragkraft des Balkens für die Einheit der Breiten- und Höhendimension, T die Tragkraft für die Dimensionen x, y, so ist

Fig. 16.



(1) $$T = a x^2 y.$$

Hierin ist eine der Grössen x, y durch die andere auszudrücken. Ist nun der Durchmesser des Stammes $= D$, so ist $x^2 = D^2 - y^2$; folglich

(2) $$T = a(D^2 y - y^3), \qquad \frac{dT}{dy} = a(D^2 - 3y^2).$$

Damit T ein Maximum werde, setze man $\frac{dT}{dy} = 0$, woraus folgt

3) $$D^2 - 3y^2 = 0, \qquad y = \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

Führt man diesen Wert von y in $x^2 = D^2 - y^2$ ein, so wird sein

(4) $$x = D\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

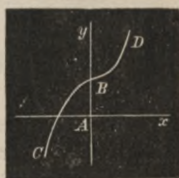
Mithin hat man die Proportion $y^2 : x^2 : D^2 = 1 : 2 : 3$. Da hiernach $y : x = 1 : \sqrt{2}$, so ist annähernd

$$y : x = 5 : 7.$$

47. Aufgabe. Zu prüfen die Maxima- oder Minima-Werte von

(1) $$y = a + x^3.$$

Fig. 17.



Die Konstruktion der Gleichung gibt eine Kurve von der Form CBD (Fig. 17). Sie schneidet die Ordinatenachse in einem Punkte B, dessen Koordinaten $x = 0$ und $y = a = AB$ sind. Durch Differentiation von (1) folgt

(2) $$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Dieser Differentialquotient wird $= 0$, wenn $x = 0$. Also ist die Tangente an die Kurve durch den Punkt B parallel zu Ax. Lässt man x von $-\infty$ bis 0 wachsen, so bleibt dy positiv; also wächst y. Nimmt x von 0 bis $+\infty$ zu, so ist dy ebenfalls positiv, also wächst y fort. Mithin geht dy aus positiven Werten durch die Null in positive Werte über. Der Durchgang findet statt für $x = 0$. Mithin ist der Punkt B ein Wendepunkt der Kurve.

Für $x = \pm b$ wird $\frac{dy}{dx} = 3b^2$; man erhält daher für je zwei gleiche Abscissen mit entgegengesetzten Zeichen zwei Kurvenpunkte, für die $\frac{dy}{dx}$ den gleichen Wert hat. Also sind die Tangenten durch diese Kurvenpunkte parallel. Wächst x von 0 aus in positivem und negativem Sinne, so wächst auch $\frac{dy}{dx}$, d. h. diese Tangenten nehmen mehr und mehr eine Richtung an, die senkrecht steht zur Abscissenachse, und erreichen diese Richtung für $x = \pm \infty$.

48. Aufgabe. Zu ermitteln, welche Eigentümlichkeit eine Kurve darbietet für $\frac{dy}{dx} = 0$, wenn deren Gleichung ist

$$y = a + b(1 - x)^{\frac{3}{2}}, \tag{1}$$

wo die Quadratwurzel positiv genommen werde.

Durch Differentiation dieser Gleichung findet man

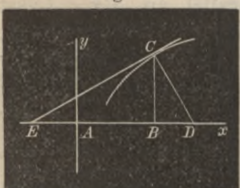
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} b \sqrt{1 - x}. \tag{2}$$

Dieser Differentialquotient wird $= 0$, wenn $x = 1$. Lässt man x von $-\infty$ bis $+1$ wachsen, so bleibt dy negativ, also nimmt während der ganzen Aenderung y ab. Wächst x über $+1$ hinaus, so werden dy und y imaginär. Also hört der Lauf der Kurve für $x = 1$ auf. Mithin ist der Kurvenpunkt, dessen Koordinaten $x = 1$, $y = a$ sind, eine Spitze der Kurve, deren Tangente parallel zur Abscissenachse liegt. Der Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ entspricht mithin kein Maximum oder Minimum der Funktion. Für $x = -\infty$ wird $\frac{dy}{dx}$ unendlich gross, also steht die Kurvenrichtung für diesen Wert der Abscisse senkrecht zur Abscissenachse.

III. Anwendung der Differentialrechnung auf ebene Kurven.

49. Ausdrücke für die Tangente und Normale, Subtangente und Subnormale einer Kurve. Es sei $y = f(x)$ oder $\varphi(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve, bezogen auf rechtwinkelige Koordinatenachsen Ax, Ay. Die Koordinaten eines Kurvenpunktes C (Fig. 18) seien $AB = x$, $BC = y$. Man ziehe durch C die Tangente CE und die Normale CD zur Kurve, d. h. die Senkrechte auf die Tangente, und verlängere beide Linien, bis sie die Abscissenachse in E und D schneiden. Man nennt dann die Strecke CE der Tangente die Länge der Tangente, ihre Projektion auf die Abscissenachse, die Strecke EB, die Subtangente, die Strecke CD der Normale die Länge der Normale, ihre Projektion auf die Abscissenachse, die Strecke DB, die Subnormale des Punktes C (x, y).

Fig. 18.



Die Bestimmung der Richtungen der Tangente und Normale einer Kurve, der Länge der Tangente und der Länge der Normale, der Subtangente und Subnormale wird bisweilen die *Methode der Tangenten* genannt.

Da in den beiden rechtwinkeligen Dreiecken BCE und BCD die Winkel BEC und BCD einander gleich sind, so erhält man

$$\frac{BC}{BE} = \operatorname{tang} CEB = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{BD}{BC} = \operatorname{tang} BCD = \frac{dy}{dx}, \text{ folglich}$$

$$(1) \qquad \text{Subtangente } BE = y\frac{dx}{dy}, \qquad \text{Subnormale } BD = y\frac{dy}{dx}.$$

Hieraus folgen sofort die folgenden Formeln:

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{Länge der Tangente } CE = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \\ \text{Länge der Normale } CD = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \end{cases}$$

50. Anwendung auf die Parabel. Die Scheitelgleichung der Parabel ist $y^2 = 2px$. Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Setzt man hierin die Ordinate $y = 0$, so wird $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. h. die Berührungslinie im Scheitel der Parabel steht senkrecht auf der Abscissenachse. Setzt man $y = \infty$, so folgt $\frac{dy}{dx} = 0$, d. h. die Tangente, die den Parabelast im Unendlichen berührt, ist parallel zur Abscissenachse.

Mit Hilfe des Wertes von $\frac{dy}{dx}$ erhält man ferner (Fig. 18)

$$\text{Subtangente } BE = \frac{y^2}{p} = 2x;$$

$$\text{Subnormale } BD = p.$$

Da nun $AB = x$, $BE = 2x$, so ist $AE = AB$, d. h. *die Subtangente der Parabel ist gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes. Die Subnormale ist konstant, nämlich gleich dem halben Parameter der Parabel.*

51. Anwendung auf die Ellipse. Die Gleichung der Ellipse für den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Koordinatenachsen ist

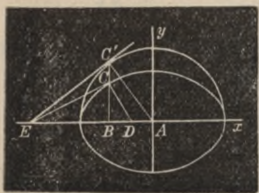
$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

worin a, b (Fig. 19) die halben Achsen bezeichnen. Durch Differentiation folgt

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Wird hierin $x = 0$ gesetzt, so ist $\frac{dy}{dx} = 0$, d. h. die Tangenten, die durch die Endpunkte der kleinen Achse gehen, sind parallel zur grossen Achse. Wenn $x = \pm a$, also $y = 0$, so wird $\frac{dy}{dx} = \pm \infty$, d. h. die Tangenten durch die Endpunkte der grossen Achse sind auf dieser Achse senkrecht.

Fig. 19.



Zieht man einen Durchmesser durch die Ellipse, so haben die Endpunkte desselben gleich grosse Koordinaten mit entgegengesetzten Zeichen, es hat also für beide Punkte die Grösse $\frac{x}{y}$, also auch $\frac{dy}{dx}$ denselben Wert mit demselben Zeichen. Folglich sind die Tangenten durch die Endpunkte irgend eines Durchmessers zu einander parallel.

Ferner ergibt sich vermöge des Wertes von $\frac{dy}{dx}$:

$$(3) \qquad \text{Subt. } BE = -\frac{a^2 - x^2}{x}, \qquad \text{Subn. } BD = -\frac{b^2}{a^2}x.$$

Somit ist die Subtangente von der Ordinate y und der kleinen Achse der Ellipse unabhängig. Man ziehe deshalb über derselben grossen Achse 2a zwei Ellipsen mit verschiedenen kleinen Achsen; entsprechen hierbei die Ellipsenpunkte C, C′ derselben Abscisse AB, so müssen beide Kurvenpunkte die gleiche Subtangente BE haben, d. h. die Tangenten durch die Punkte C, C′ gehen nach demselben Punkte E der Abscissenachse.

Gesetzt die Ellipse durch C′ sei ein Kreis, der sogenannte grosse Scheitelkreis. Errichtet man auf dessen Radius C′A die Senkrechte C′E, so wird dadurch der Punkt E gefunden; zieht man dann von E nach dem Ellipsenpunkte C eine Gerade, so muss CE eine Tangente an die Ellipse sein.

Die Subnormale ändert ihr Zeichen mit dem Zeichen von x, d. h. der Endpunkt D der Subnormalen befindet sich immer auf der gleichen Seite der Ordinatenachse mit dem Kurvenpunkte C.

52. Anwendung auf die Hyperbel. Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ist

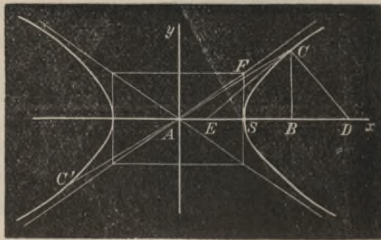
$$(1) \qquad a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2,$$

worin a, b (Fig. 20) die halben Achsen bezeichnen. Durch Differentiation folgt

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Für $y = 0$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$, also steht die Tangente im Scheitel der Hyperbel senkrecht auf der Hauptachse.

Fig. 20.



Die Sehne C C', die durch den Mittelpunkt A der Hyperbel geht, heisst Durchmesser. Die Koordinaten seiner Endpunkte haben gleiche Werte mit entgegengesetzten Zeichen. Also hat der Quotient $\frac{x}{y}$, folglich auch $\frac{dy}{dx}$ für beide Endpunkte C, C' die gleichen Werte mit gleichen Zeichen. Die Berührungslinien durch die Endpunkte eines Durchmessers sind also parallel.

Mit Benutzung des Wertes von $\frac{dy}{dx}$ erhält man ferner

$$(3) \qquad \text{Subt. } BE = x - \frac{a^2}{x}, \qquad \text{Subn. } BD = \frac{b^2}{a^2}x.$$

Nun ist $AB = x$ die Abscisse des Punktes C, folglich

$$AE = AB - BE = \frac{a^2}{x}.$$

Wenn hierin x wächst, also der Berührungspunkt C der Tangente vom Anfangspunkte A sich entfernt, so wird AE kleiner. Wenn $x = \infty$, so ist $\frac{a^2}{x} = 0$, also $AE = 0$, mithin geht die Tangente durch den Mittelpunkt. Diese Tangente, die die Hyperbel im Unendlichen berührt und durch den Mittelpunkt geht, heisst Asymptote der Hyperbel.

Um die Richtung der Asymptote zur Abscissenachse zu erhalten, setze man den Wert von y aus (1) in (2); es kommt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}.$$

Setzt man hierin $x = \infty$, was für die Asymptote als Tangente nötig ist, so wird $\frac{a}{x} = 0$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$. Ist AF die Asymptote, so muss hiernach sein

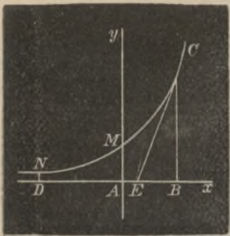
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} FAB = \frac{b}{a}.$$

Errichtet man im Scheitel S der Hyperbel das Lot SF auf Ax, das die Asymptote in F schneidet, so muss $SF = b$ sein, weil

$$\operatorname{tang} FAS = \frac{FS}{AS} = \frac{b}{a}.$$

53. Anwendung auf die Kurve der Exponentialgleichung $y = e^x$. In dieser Gleichung bezeichnet e die Basis der natürlichen Logarithmen. Die Abscisse x ist der Ausdehnung von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig. Folg-

Fig. 21.



lich hat die Kurve CMN (Fig. 21) zwei Aeste, die von der Ordinatenachse aus nach positiver und negativer Seite ins Unendliche verlaufen. Für $x = 0$ wird $y = e^0 = 1 = AM$. Die Differentiation der Gleichung gibt

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Setzt man hierin $x = -\infty$, so wird $\frac{dy}{dx} = 0$ und auch zugleich $y = 0$. Somit ist die Abscissenachse eine Tangente an den Kurvenast MN im Unendlichen. Setzt man $x = +\infty$, so wird $\frac{dy}{dx} = \infty$, folglich wird die Richtung des Kurvenastes MC im Unendlichen senkrecht zur Abscissenachse. In M ist $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 1$, also die Tangente durch M unter 45^0 zur Abscissenachse geneigt.

Ferner ist $$\text{Subt. } BE = y\frac{dx}{dy} = 1.$$

Die Subtangente ist mithin konstant und zwar $= AM$ für jede Lage des Berührungspunktes C.

54. Gleichung der Tangente und Normale einer Kurve. Es sei $y = f(x)$ oder $\varphi(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve. Die Koordinaten eines Kurvenpunktes C (Fig. 22) seien x, y. Man soll durch diesen Punkt eine Tangente CE und eine Normale CD legen und deren Gleichungen ableiten.

Fig. 22.

Die Gleichung einer geraden Linie hat gewöhnlich die Form

$$(1) \qquad y' = ax' + b,$$

worin x', y' die laufenden Koordinaten eines Punktes der Geraden bezeichnen. Wird diese Gleichung differentiiert, so findet man

$$\frac{dy'}{dx'} = a.$$

Folglich ist der Koeffizient a der Abscisse in der Gleichung der Geraden die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Gerade mit der Abscissenachse einschliesst. Soll die Gerade (1) durch den Kurvenpunkt C gehen, so müssen für diesen Punkt die Koordinaten x', y' der Geraden in diejenigen des Punktes C der Kurve übergehen, so dass

$$y = ax + b.$$

Zieht man diese Gleichung von (1) ab, so folgt

$$(2) \qquad y' - y = a(x' - x).$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Kurvenpunkt (x, y) geht. Solcher Geraden gibt es aber unendlich viele mit verschiedenen Richtungen zur Abscissenachse. Damit die Gerade (2) zur Tangente C E an die Kurve wird, muss sein

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} = a.$$

Setzt man diesen Wert von a in (2), so erhält man die gesuchte Gleichung der Tangente im Punkte (x, y)

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x). \tag{3}$$

Die Gleichung der Normale geht ebenfalls aus (2) hervor; es ist nur der Wert von a zu bestimmen.

Die Normale bildet mit der positiven Richtung der Abscissenachse den Winkel $CDx = 90 + CEB$. Mithin wird sein

$$\operatorname{tang} CDx = -\operatorname{cotang} CEB = -\frac{1}{\operatorname{tang} CEB} = -\frac{dx}{dy}.$$

Setzt man diesen Wert von $\operatorname{tang} CDx$ für a in die Gleichung (2), so erhält man als Gleichung der Normale im Punkte (x, y)

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x). \tag{4}$$

55. Anwendung auf die Gleichung des Kreises. Die allgemeine Gleichung des Kreises ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \tag{1}$$

worin a, b (Fig. 23) die Koordinaten des Mittelpunktes und R den Halbmesser bezeichnen. Die Differentiation dieser Gleichung gibt

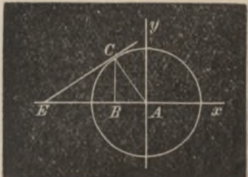
$$(x - a)\,dx + (y - b)\,dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - a}{y - b}. \tag{2}$$

Folglich sind die Gleichungen der Tangente und der Normale des Kreises

$$(3)\quad \begin{cases} y' - y = -\dfrac{x - a}{y - b}(x' - x), \\[2ex] y' - y = +\dfrac{y - b}{x - a}(x' - x). \end{cases}$$

Fig. 23.



Gehen die Koordinatenachsen durch den Kreismittelpunkt, so ist $a = b = 0$, und die vorstehenden Gleichungen gehen über in

$$y' - y = -\frac{x}{y}(x' - x), \qquad y' - y = +\frac{y}{x}(x' - x).$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen $y' = 0$, so ist x' die Abscisse A E des Durchschnittes der Tangente C E mit der Abscissenachse. Für diesen Punkt ist deshalb

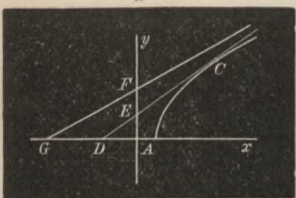
$$-y = -\frac{x}{y}(AE - x).$$

Multipliziert man mit y und setzt den Wert von y^2 aus der Gleichung $y^2 = R^2 - x^2$ ein, so folgt $AE = \frac{R^2}{x}$. Der Abschnitt AE ist somit der Abscisse x umgekehrt proportional.

Setzt man in die Gleichung der Normale $y' = 0$, so findet man auch $x' = 0$. Dies sind die Koordinaten des Punktes, in dem die Normale die Abscissenachse schneidet. Mithin geht die Normale des Kreises durch den Mittelpunkt.

56. Asymptoten der Kurven. In der Gleichung $y = f(x)$ oder $\varphi(x, y) = 0$ sei die eine Variable oder auch beide einer Ausdehnung fähig bis ins Unendliche, entweder in positiver oder negativer oder in beiden Richtungen. Stellt man die Gleichung geometrisch dar, so wird die Kurve (Fig. 24) einen oder mehrere Aeste haben, die ins Unendliche verlaufen. Man lege eine Tangente CD an die Kurve durch einen Punkt C, verschiebe den Berührungspunkt C vom Anfangspunkte A der Achsen ohne Aufhören weg. Nähert sich hierbei die Tangente einer bestimmten Grenzlage FG, die eine oder auch beide Koordinatenachsen in endlicher Entfernung von A aus schneidet, und erreicht sie diese Grenzlage in dem Augenblicke, wo der Berührungspunkt ins Unendliche rückt, so heisst die Tangente in dieser Grenzlage Asymptote der Kurve.

Fig. 24.



Die Koordinaten des Punktes C seien x, y, die laufenden Koordinaten der Tangente CD aber x', y'; dann ist die Gleichung der Tangente

$$(1) \qquad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

Die Tangente schneide die Achsen in D und E. Setzt man in Gleichung (1) $y' = 0$, so wird $x' = AD$; folglich hat man zur Bestimmung des Abschnittes AD auf der Abscissenachse

$$-y = \frac{dy}{dx}(AD - x),$$

woraus folgt

$$(2) \qquad AD = x - y\frac{dx}{dy}.$$

Setzt man in (1) $x' = 0$, so wird $y' = AE$; folglich hat man zur Bestimmung des Abschnittes AE auf der Ordinatenachse

$$AE - y = -x\frac{dy}{dx},$$

und hieraus

$$(3) \qquad AE = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Man bestimme aus der Gleichung der Kurve den Wert $\frac{dy}{dx}$, führe ihn in (2) oder (3) ein und lasse sodann x oder y oder auch beide unendlich gross werden. Bleibt hierbei einer der Abschnitte (2) und (3) oder auch beide endlich, so hat die Kurve wenigstens eine Asymptote. Wenn aber die genannten Abschnitte bei jedem Versuche unendlich gross werden, so hat die Kurve keine Asymptote.

57. Anwendung auf die gleichseitige Hyperbel. Die Gleichung dieser Kurve ist

$$xy = a.$$

Hieraus folgt
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}$$
und somit nach § 56, Fig. 24

$$\text{Abschnitt } AD = 2x = \frac{2a}{y}, \qquad \text{Abschnitt } AE = \frac{2a}{x} = 2y.$$

Setzt man hierin $x = \pm\infty$, so wird $y = 0$ und $AE = 0$. Da dieser Wert von AE für $x = +\infty$ und auch $x = -\infty$ ein endlicher ist, so ist sowohl die positive wie die negative Seite der Abscissenachse eine Asymptote der Kurve.

Setzt man $y = \pm\infty$, so wird $x = 0$ und $AD = 0$; mithin sind auch die beiden Seiten der Ordinatenachsen Asymptoten der Kurve.

58. Anwendung auf die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte. Die Scheitelgleichung für die Kegelschnitte lautet

$$y^2 = 2mx + nx^2, \tag{1}$$

folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m + nx}{y}. \tag{2}$$

Setzt man diesen Wert von $\frac{dy}{dx}$ in die vorstehenden Ausdrücke (§ 56, Fig. 24) für AD und AE und eliminiert y vermittelst der Gleichung der Kurve, so folgt

$$AD = -\frac{mx}{m + nx} = -\frac{m}{n + \frac{m}{x}}, \tag{3}$$

$$AE = \pm\frac{mx}{\sqrt{2mx + nx^2}} = \pm\frac{m}{\sqrt{n + \frac{2m}{x}}}. \tag{4}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich für $x = \pm\infty$

$$AD = -\frac{m}{n}, \qquad AE = \pm\frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Bei der Parabel ist $n = 0$, also werden die Abschnitte AD und AE unendlich gross. Mithin hat die Parabel keine Asymptoten. Für die Hyperbel sind m und n bestimmte, endliche Werte und zudem n positiv; folglich hat diese Kurve zwei Asymptoten, die wegen des doppelten Zeichens von AE symmetrisch zur Abscissenachse liegen. Die Ellipse hat keine Asymptoten, weil weder x noch y ins Unendliche wachsen können.

IV. Entwickelung der Funktionen in Reihen.

59. Ueber Reihen im allgemeinen. Es seien

$$(1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_n$$

die aufeinander folgenden Glieder einer Reihe, so gebildet, dass jedes Glied aus dem vorhergehenden in gesetzmässiger Weise abgeleitet werden kann. Hierbei nennt man die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... die Stellenanzeiger der Glieder und das Glied u_n mit dem Stellenanzeiger n das allgemeine Glied der Reihe. Aus der Reihe (1) kann eine zweite Reihe

$$(2) \qquad s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots s_n$$

gebildet werden, deren Glieder durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} s_0 = u_0; \\ s_1 = u_0 + u_1; \\ s_2 = u_0 + u_1 + u_2; \\ s_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \end{cases}$$

definiert sind. Man nennt diese zweite Reihe die Summenreihe der ersten.

Kann die Zahl n der Reihe (1) beliebig gross werden, so heisst die Reihe eine unendliche. Wenn das allgemeine Glied s_n der Reihe (2) in diesem Falle so beschaffen ist, dass s_n sich mit wachsendem n einer bestimmten endlichen Grösse s immer mehr und mehr nähert, so dass $\lim_{n=\infty} s_n = s$ ist, so heisst die Reihe (1) konvergent und s ihre Summe. Nähert sich aber s_n keinem bestimmten Grenzwerte, indem es entweder über alle Grösse wächst oder unbestimmt bleibt, so heisst die Reihe (1) divergent. Da also die Existenz einer bestimmten Summe das unterscheidende Merkmal der konvergenten und divergenten Reihen ist, so versteht man unter einer Reihe nicht nur die Folge der Glieder u_0, u_1, u_2, ..., sondern nennt in prägnantem Sinne die Summe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

die Reihe.

Nur die konvergenten unendlichen Reihen sind für die Analysis brauchbar; daher ist es nötig, Kennzeichen für die Konvergenz der unendlichen Reihen aufzusuchen.

Analytisch kann die Konvergenz einer Reihe dadurch ausgesprochen werden, dass n so gross bestimmt werden kann, dass die Ungleichung

$$(4) \qquad |s - s_n| < \delta,$$

wo δ eine beliebig kleine Grösse ist, besteht und für weiter wachsende n bestehen bleibt.

Aus diesem Begriffe der Konvergenz folgt zunächst, dass die Beschaffenheit einer endlichen Anzahl von Gliedern im Anfange der Reihe keinen Einfluss auf die Konvergenz oder Divergenz hat, und dass man sie, besonders wenn sie ein unregelmässiges Verhalten haben, bei der Untersuchung der Reihe ausschliessen kann.

Bezeichnet m eine beliebige Zahl, so muss bei hinreichend grossem n auch die Differenz

$$|s - s_{n+m}| < \delta$$

sein, damit die Reihe konvergent ist. Aus dieser Ungleichung und der Ungleichung (4) folgt aber, dass dann auch die Ungleichung

$$|s_{n+m} - s_n| < \delta$$

für hinreichend grosse n besteht, dass also

$$(5) \qquad |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}| < \delta$$

gilt. Als notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der unendlichen Reihen folgt daher, dass sich ein Glied u_n bestimmen lässt, so dass von diesem an die Summe beliebig vieler folgender Glieder der Reihe ihrem absoluten Werte nach kleiner als eine beliebig kleine Grösse δ bleibt.

Diese Bedingung kann aber nur erfüllt werden, wenn die Glieder u_{n+1}; u_{n+2}; ... selbst beliebig klein werden, so dass für die Konvergenz der Reihe die Bedingung

$$(6) \qquad |u_n| < \delta \quad \text{oder} \quad \lim_{n=\infty} u_n = 0$$

für beliebig grosse n gelten muss, dass also bei fortwährend wachsendem n die Glieder unendlich klein werden.

Während aber die Bedingung (6) notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, ist sie nicht hinreichend, d. h. man kann aus dieser Eigenschaft einer Reihe nicht auf ihre Konvergenz schliessen. Das zeigt sofort die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots;$$

ihr allgemeines Glied $u_n = \frac{1}{n}$ kann zwar mit wachsendem n kleiner gemacht werden, als jede beliebig kleine Grösse δ, aber doch wächst die Summe der Reihe über alle Grenzen, denn die Summe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n+2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+2}$$

ist stets grösser als $(n+1) \cdot \frac{1}{2n+2}$, also stets grösser als $\frac{1}{2}$, so dass die notwendige Ungleichung (6) nicht erfüllt ist.

60. Die unendliche geometrische Reihe. Das Vorstehende möge zunächst an dem Beispiele der geometrischen Reihe erläutert werden. Sie lautet

$$(1) \qquad a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots,$$

und es ist, wie aus der niedern Arithmetik bekannt,

$$(2) \qquad s_n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Es ist nun zu untersuchen, ob und wann sich diese Grösse s_n bei unendlich wachsendem n einer bestimmten endlichen Grösse nähert. Offenbar hängt diese Entscheidung von dem Verhalten von q^{n+1} ab.

Wenn $|q| < 1$, also q ein positiver oder negativer echter Bruch ist, so werden die Potenzen von q immer kleiner und kleiner, mit wachsendem n nähert sich q^{n+1} der Null, so dass

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} s_n = s = a\cdot\frac{1}{1-q},$$

die Reihe (1) also konvergent ist.

Ist $q > 1$, so wachsen die Potenzen von q mit wachsendem Exponenten, q^{n+1} wird für $n = \infty$ auch $+\infty$, und die Reihe (1) ist divergent.

Ist $q < -1$, so wachsen die Potenzen von q ihrem absoluten Werte nach mit n über alle Grenzen, q^{n+1} wird bald $+\infty$, bald $-\infty$, je nachdem $(n+1)$ gerade oder ungerade ist, also schwankt auch s_n beständig zwischen $-\infty$ und $+\infty$, die Reihe ist also divergent.

Ist $q = \pm 1$, so wird s_n selbst unbestimmt; zur Entscheidung gehe man auf die Reihe selbst zurück und findet

$$\text{für } q = +1 \qquad s_n = a + a + a + \dots \qquad = n\cdot a,$$

wächst also mit n über alle Grenzen;

$$\text{für } q = -1 \qquad s_n = a - a + a \mp \dots,$$

schwankt also fortwährend zwischen den Werten 0 und a.

Die unendliche geometrische Reihe

$$a + aq + aq^2 + \dots$$

ist also nur konvergent, wenn der absolute Wert des Quotienten q kleiner als 1 ist, und hat dann die Summe

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Die vorstehende Untersuchung zeigt zugleich, wie eine Reihe divergent sein kann, indem ihre Summe über alle Grösse wächst, oder unbestimmt von einem Werte zu einem anderen schwankt, mögen diese nun ∞ oder endlich sein.

61. Reihen mit nur positiven Gliedern. Es werde vorausgesetzt, dass die unendliche Reihe

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

nur positive Glieder habe, weil solche Reihen besondere Eigenschaften haben, und weil die Eigenschaften der anderen Reihen aus ihnen abgeleitet werden.

Ist die Reihe (1) konvergent, und bezeichnen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ beliebige Grössen, die sämtlich den bestimmten endlichen Wert A nicht übersteigen, so ist auch die Reihe

$$(2) \qquad a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

konvergent. Zufolge der Voraussetzung ist nämlich

$$(a_{n+1} u_{n+1} + a_{n+2} u_{n+2} + \ldots) < A (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots)$$

und da die rechte Seite dieser Ungleichung beliebig klein gemacht werden kann, so ist auch

$$a_{n+1} u_{n+1} + a_{n+2} u_{n+2} + \ldots < \delta$$

erfüllt, d. h. die Reihe (2) ist konvergent.

Gibt man im besonderen den Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nur die Werte $+1$ und -1, so folgt

I. Eine aus lauter positiven Gliedern bestehende konvergente unendliche Reihe bleibt konvergent, wenn man die Vorzeichen beliebig vieler Glieder ändert.

Gibt man einer beliebigen Anzahl der Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ den Wert 0, so folgt

II. Eine aus lauter positiven Gliedern bestehende konvergente unendliche Reihe bleibt konvergent, wenn man beliebig viele Glieder weglässt.

Aendert man in der Reihe (1), deren Summe s sei die Anordnung der Glieder, so möge aus (1) die neue Reihe

$$(3) \qquad u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_m + \ldots$$

hervorgehen. Ist nun

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$
$$s'_m = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_m,$$

so kann offenbar m so gross gewählt werden, dass die n Glieder von s_n sämtlich in s'_m enthalten sind, und dass s'_m noch Glieder enthält, deren Stellenanzeiger grösser als n sind, dass also

$$s'_m = s_n + (u_p + u_q + u_r + \ldots),$$

wo $p, q, r, \ldots$ grösser als n sind. Nun soll aber (1) nur positive Glieder enthalten und konvergent sein, also ist

$$u_p + u_q + u_r + \ldots < \delta,$$

folglich $s'_m < s_n + \delta$, also

$$\lim_{m=\infty} s'_m = \lim_{n=\infty} s_n = s, \text{ d. h.}$$

III. Die Konvergenz einer aus lauter positiven Gliedern bestehenden unendlichen Reihe ist von der Anordnung der Glieder unabhängig.

62. Das Prinzip der Reihenvergleichung. Das Verfahren, durch das im § 60 die Konvergenzbedingungen der geometrischen Reihe abgeleitet wurden, setzt voraus, dass man die Summe s_n bilden kann. Das ist aber in den meisten Fällen nicht möglich; man kann zuweilen leichter die Grösse s als die Grösse s_n angeben.

Zur Bestimmung der Konvergenz oder Divergenz unendlicher Reihen benutzt man dann das folgende unmittelbar klare Prinzip.

Ist die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

konvergent, so ist auch die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe

$$(2) \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

konvergent, wenn

$$v_0 < u_0 ; \quad v_1 < u_1 ; \quad v_2 < u_2 ; \dots ;$$

ist aber die Reihe (1) divergent, so ist die Reihe (2) um so mehr divergent, wenn

$$v_0 > u_0 ; \quad v_1 > u_1 ; \quad v_2 > u_2 ; \dots .$$

Da aber eine endliche Anzahl Glieder auf die Konvergenz oder Divergenz keinen Einfluss haben (§ 59), so kann das Prinzip auch ausgesprochen werden:

Die Reihe (2) ist mit der Reihe (1) konvergent, wenn von einem bestimmten, wenn auch noch so grossen Werte m ab die Ungleichungen

$$v_m < u_m ; \quad v_{m+1} < u_{m+1} ; \dots$$

bestehen. die Reihe (2) aber ist mit der Reihe (1) divergent, wenn

$$v_m > u_m ; \quad v_{m+1} > u_{m+1} ; \dots$$

Aus diesem Prinzip der Reihenvergleichung folgt das wichtigste Kriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen, wenn man als Vergleichsreihe die geometrische Reihe benutzt.

Die unendliche geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots (q > 0)$$

ist konvergent für $q < 1$; es wird also die unendliche aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

konvergent sein, wenn für bestimmte, wenn auch noch so grosse n die Ungleichungen

$$u_n < q^n , \quad u_{n+1} < q^{n+1} ; \quad u_{n+2} < q^{n+2} ; \dots$$

bestehen. Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ wird also erst recht konvergent sein, wenn

$$u_{n+1} < u_n q ; \quad u_{n+2} < u_{n+1} q ; \dots$$

oder

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q , \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < q ; \dots$$

für noch so grosse n gelten. Da nun $q < 1$, so hat man den Satz:

Die aus lauter positiven Gliedern bestehende unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

ist konvergent, wenn

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

aber divergent, wenn

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

ist. Ist dagegen

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

so kann die Konvergenz oder Divergenz nach diesem Kriterium nicht entschieden werden; man muss dann die Konvergenz oder Divergenz auf andere Weise zu ermitteln suchen.

Beispiele.

I. In der Reihe

$$1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{a^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \frac{a^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)} + \ldots,$$

die für $a > 0$ aus lauter positiven Gliedern besteht, ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a}{n+1} = 0:$$

also ist die Reihe stets konvergent, welchen Wert a auch habe.

Aus § 61, I, folgt dann, dass a auch negativ sein kann.

II. In der Reihe

$$1 + a + 1 \cdot 2 \cdot a^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot a^n + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1) \cdot a^{n+1} + \ldots (a > 0)$$

ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} (n+1)a = \infty,$$

also ist die Reihe für jeden Wert von a divergent.

III. In der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$

ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 1.$$

Vergleicht man aber die Reihe mit der Reihe

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots,$$

so ist, da die Ungleichungen

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}; \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}; \ldots \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, \ldots$$

gelten, die erste Reihe konvergent, wenn die zweite es ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots \\ &\qquad + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n=\infty} s_n = 2;$$

folglich ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

konvergent.

IV. In der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Die Divergenz der Reihe ist in § 59 dadurch bewiesen worden, dass gezeigt wurde, die Summe $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n+2}$ ist stets grösser als der endliche Wert $\frac{1}{2}$.

63. Reihen mit positiven und negativen Gliedern. Wenn die Glieder einer Reihe verschiedene Vorzeichen haben, so kann man eine neue Reihe dadurch bilden, dass man allen Gliedern das positive Vorzeichen gibt, oder für alle Glieder ihre absoluten Werte setzt. Aus dem Satze I des § 61 folgt dann unmittelbar, dass die ursprüngliche Reihe konvergent ist, wenn die neue Reihe der absoluten Werte konvergent ist, da diese letztere konvergent bleibt, wenn man die Vorzeichen beliebig vieler Glieder ändert.

Die aus positiven und negativen Gliedern bestehende Reihe

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

ist also sicher konvergent, wenn die Reihe

(2) $$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

konvergent ist; dies aber ist der Fall, wenn

(3) $$\lim_{n=\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

ist. Die Gleichung (3) ist somit das Kriterium für die Konvergenz der Reihe (1).

Werden nun die Glieder der Reihe (2), die in der ursprünglichen Reihe (1) das positive Vorzeichen hatten, mit u'_i, die Glieder aber, die in der ursprünglichen Reihe (1) negativ waren, mit u''_i bezeichnet, so folgt aus Satz II des § 61, dass die Reihen

(4) $$\begin{cases} |u'_0| + |u'_1| + |u'_2| + |u'_3| + \ldots + |u'_m| + \ldots \\ |u''_0| + |u''_1| + |u''_2| + |u''_3| + \ldots + |u''_m| + \ldots, \end{cases}$$

die aus (2) hervorgehen, wenn man jedesmal eine Anzahl Glieder weglässt, jede für sich konvergent sind, und dass, wenn s' und s'' die Summen der Reihen (4) bezeichnen, die Summe der Reihe (2) gleich $s' + s''$, folglich die Summe s der Reihe (1)

(5) $$s = s' - s''$$

ist. Zugleich folgt aus Satz III des § 61, dass in den Reihen (4) und damit in der Reihe (1) die Anordnung der Glieder beliebig ist. Es gilt also

I. Eine aus positiven und negativen Gliedern in unbeschränkter Anzahl bestehende Reihe ist konvergent, wenn die aus den absoluten Werten der Glieder gebildete Reihe konvergent ist, wenn also

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

ist; die Summe der Reihe ist gleich der Differenz aus der Summe der positiven Glieder und der Summe der negativen Glieder; dabei hat die Anordnung der Glieder keinen Einfluss auf den Wert der Summe.

Eine aus positiven und negativen Gliedern bestehende Reihe kann aber auch konvergent sein, ohne dass die aus den absoluten Werten der Glieder gebildete Reihe konvergent ist.

Es sei zunächst die Reihe eine alternierende, d. h. eine solche, in der die Vorzeichen abwechseln,

(6) $$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \pm \ldots .$$

Wenn in dieser Reihe die Glieder von einem bestimmten Gliede u_i an mehr und mehr abnehmen, so dass schliesslich $\lim u_m = 0$ $(m > i)$, so kann man stets das Glied u_k $(k > i)$ so wählen, dass

$$s_n = u_0 - u_1 + u_2 \mp \ldots - u_{k-1} + (u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - \ldots),$$

wobei die Differenzen $u_k - u_{k+1}$; $u_{k+2} - u_{k+3}$; ... sämtlich positiv sind, also auch der Wert der Klammer positiv ist. Schreibt man aber s_n in der Form

$$s_n = u_0 - u_1 + u_2 \mp \ldots + u_k - (u_{k+1} - u_{k+2} \pm \ldots),$$

so sind die Differenzen $u_{k+1} - u_{k+2}$; $u_{k+3} - u_{k+4}$; ... ebenfalls sämtlich positiv, somit der Wert in der Klammer positiv. Setzt man nun

$$\sigma_{k-1} = u_0 - u_1 + u_2 \mp \ldots - u_{k-1}$$
$$\sigma_k = u_0 - u_1 + u_2 \mp \ldots - u_{k-1} + u_k,$$

so sind σ_{k-1} und σ_k, weil sie nur aus endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, bestimmte Werte, und es gilt die Ungleichung

$$\sigma_k > s_n > \sigma_{k-1};$$

da aber die Differenz $\sigma_k - \sigma_{k-1} = u_k$ mit wachsendem k beliebig klein gemacht werden kann, so nähert sich s_n einem bestimmten endlichen Werte. Es gilt also der Satz

II. Eine aus positiven und negativen Gliedern bestehende Reihe, bei der die Vorzeichen abwechseln, ist stets konvergent, wenn die absoluten Werte der Glieder von einer bestimmten Stelle an fortwährend abnehmen und gegen die Null konvergieren.

Hiernach ist die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \ldots,$$

deren Glieder abnehmen und abwechselnde Zeichen haben, konvergent, während die Konvergenzbedingung des Satzes I nicht erfüllt ist, weil die Reihe nicht mehr konvergent ist, wenn man alle Glieder positiv nimmt (§ 59).

Von dieser Reihe hat Dirichlet eine merkwürdige Eigenschaft bewiesen, dass nämlich der Wert der Summe der Reihe von der Anordnung der Glieder abhängig ist. Ist

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \mp \ldots$$

und setzt man

$$\sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

wobei die Anordnung so getroffen ist, dass auf je zwei positive Glieder ein negatives folgt, so kann man schreiben

$$s = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \ldots$$
$$\frac{s}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \qquad + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) \qquad + \ldots$$

und erhält durch Addition

$$\frac{3}{2}s = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = \sigma.$$

Hieraus folgt die Notwendigkeit, zweierlei Arten unendlicher Reihen mit positiven und negativen Gliedern zu unterscheiden: man nennt unbedingt konvergente Reihen solche, bei denen die Anordnung der Glieder keinen Einfluss auf den Wert der Summe hat, bedingt konvergente diejenigen, deren Summenwert von der Anordnung der Glieder abhängt.

Das Kriterium, ob eine Reihe eine unbedingt konvergente ist, spricht der Satz I aus.

64. Reihen mit variabeln Gliedern. Sind die Glieder einer unendlichen Reihe rationale Funktionen einer Variabeln x, etwa

$$(1) \qquad u_0 = \varphi_0(x);\; u_1 = \varphi_1(x);\; u_2 = \varphi_2(x);\; \ldots$$

und ist die unendliche Reihe

$$(2) \qquad \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots$$

nicht nur für einen einzelnen Wert von x, sondern für alle Werte von x, die innerhalb eines gewissen Bereiches (x_1, x_2) liegen, konvergent, so sagt man: durch die Gleichung

$$(3) \qquad y = f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots. = \sum_{i=0}^{i=\infty} \varphi_i(x)$$

sei eine Funktion von x innerhalb des Konvergenzbereiches (x_1, x_2) definiert. Dabei ist aber zu unterscheiden, ob die Reihe (2) unbedingt oder bedingt konvergent ist; ersteres ist der Fall, wenn die Reihe

$$(4) \qquad |\varphi_0(x)| + |\varphi_1(x)| + |\varphi_2(x)| + \ldots$$

für jeden Wert von x innerhalb des Konvergenzbereiches ebenfalls konvergent ist; andernfalls ist der Wert von f(x) an die Anordnung der Glieder der Reihe (2) gebunden. Auch ist in jedem Falle besonders zu untersuchen, wie sich die Reihe (2) an den Grenzen des Konvergenzbereiches verhält.

Gibt man der Variabeln x innerhalb des Konvergenzbereiches einen bestimmten Wert, so liegt es im Begriffe der Konvergenz (§ 59), dass nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse ε es möglich ist, eine bestimmte Anzahl n der ersten Glieder der Reihe so abzusondern, dass die Summe der übrig bleibenden Glieder kleiner als ε ist, dass also

$$(5) \qquad |s - s_n| < \varepsilon$$

gilt und für weiter wachsende n in Geltung bleibt. Denkt man sich dem x andere und andere Werte innerhalb des Konvergenzbereiches beigelegt, so muss zwar jene Bedingung bestehen bleiben, aber es ist wohl denkbar, dass einem andern Werte von x auch eine andere bestimmte Zahl n entspricht; die Zahl n braucht für die verschiedenen Werte von x nicht dieselbe zu sein, sie kann für einzelne Werte von x über alle Grenzen wachsen.

Kann aber eine bestimmte Zahl n so angegeben werden, dass für sie für **alle** Werte von x innerhalb des Konvergenzbereiches die Ungleichung (5) besteht, so heisst die Reihe (3) innerhalb des Konvergenzbereiches **gleichförmig** konvergent.

Da die einzelnen Glieder der Reihe (2) rationale Funktionen von x sind, so sind sie nach § 7 stetige Funktionen von x. Wie aber der Satz von der beliebigen Reihenfolge der Glieder eines Aggregates nicht ohne weiteres auf Aggregate mit unendlich vielen Gliedern übertragen werden kann, so kann man auch aus der Stetigkeit der einzelnen Funktionen $\varphi_i(x)$ nicht auf die Stetigkeit der durch die Reihe (3) definierten Funktion f(x) unvermittelt schliessen.

Unter der Voraussetzung, dass $f(x) = \Sigma\varphi_i(x)$ innerhalb des Konvergenzbereiches gleichförmig konvergent sei, kann leicht gezeigt werden, dass f(x) sich innerhalb des Konvergenzbereiches stetig mit x ändert.

Ist x_0 ein bestimmter Wert im Innern des Bereiches, so bilde man

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ \varphi_i(x_0 \pm h) - \varphi_i(x_0) \right\};$$

es ist zu beweisen, dass nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse ε eine andere Grösse δ so bestimmt werden kann, dass

$$| f(x_0 \pm h) - f(x_0) | < \varepsilon \text{ für alle } h < \delta \ (\S\ 7).$$

Wird ε in zwei Teile geteilt $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, so kann auch

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ \varphi_i(x_0 \pm h) - \varphi_i(x_0) \right\}$$

in zwei Teile

$$s_n = \sum_{i=0}^{i=n} \left\{ \varphi_i(x_0 \pm h) - \varphi_i(x_0) \right\} \text{ und}$$

$$s'_n = \sum_{i=n+1}^{i=\infty} \left\{ \varphi_i(x_0 \pm h) - \varphi_i(x_0) \right\}$$

zerlegt und zufolge der gleichförmigen Konvergenz zu den Werten $(x_0 \pm h)$ und x_0 dasselbe n so bestimmt werden, dass

$$| s'_n | < \varepsilon_2$$

wird, wenn für h eine Grenze δ_2 festgesetzt wird. Da s_n eine rationale und somit stetige Funktion von x ist, kann jederzeit $h < \delta_1$ bestimmt werden, so dass $| s_n | < \varepsilon_1$ wird. Wird die grössere der beiden Zahlen δ_1 und δ_2 mit δ bezeichnet, so ist

$$| s_n + s'_n | < \varepsilon \text{ für } h < \delta,$$

die Funktion f(x) ist also stetig.

65. Die Potenzreihen. Von besonderer Wichtigkeit unter den Reihen mit variabeln Gliedern sind Reihen, die nach ganzen positiven

Potenzen der Veränderlichen x fortschreiten, die sogenannten Potenzreihen. Sie haben die Form

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n,$$

wobei die $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Konstanten sind, die in der Regel nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden.

Aus den allgemeinen Bedingungen für die Konvergenz unendlicher Reihen folgt, dass die Reihe unbedingt konvergent ist, wenn

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \quad \text{oder} \quad \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \left| x \right| < 1$$

ist. Konvergiert also der Quotient $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ mit wachsendem n gegen eine bestimmte Grösse λ, so ist die Reihe (1) konvergent, sobald $|x| < \lambda$ ist. Es gilt also der Satz:

I. Ist $\lim\limits_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < \lambda$, so ist die Potenzreihe (1) unbedingt konvergent für alle Werte von x innerhalb des Bereiches $-\lambda < x < +\lambda$.

Ob die Reihe auch an den Grenzen $-\lambda$ und $+\lambda$ des Konvergenzbereiches konvergent ist, muss im Einzelfalle besonders untersucht werden.

Ist $\lambda = \infty$, so ist die Reihe für jeden Wert von x konvergent; für $\lambda = 0$ ist die Reihe für jeden Wert von x divergent.

Man hat demnach die Potenzreihen in zwei Arten zu teilen, in solche, die für alle Wert von x und in solche, die nur für Werte von x innerhalb eines endlichen Bereiches konvergent sind. Die Reihen, die für keinen Wert von x konvergent sind, sind naturgemäss von der Betrachtung auszuschliessen.

Zu den ersteren gehört die in § 62 I betrachtete Reihe, wenn man a durch x ersetzt,

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots;$$

als Beispiel der zweiten Art diene die Reihe

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots;$$

in ihr ist

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n} = 1;$$

also ist die Reihe konvergent für alle x, die der Ungleichung

$$-1 < x < +1$$

genügen. An den Grenzen selbst zeigt die Reihe verschiedenes Verhalten; sie lautet für $x = +1$ $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$ und ist bedingt konvergent (§ 63)

für $x = -1$ $\quad -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots$ und ist divergent (§ 59).

Die Reihe II des § 62, wenn a durch x ersetzt wird, lautet

$$1 + x + 1 \cdot 2 \cdot x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3 + \ldots$$

und ist für jeden Wert von x divergent.

Unabhängig von dieser Folgerung aus den allgemeinen Konvergenzbedingungen gilt für die Potenzreihen der folgende Fundamentalsatz:

II. Wenn die absoluten Werte der einzelnen Glieder einer Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ für einen bestimmten Wert x_0 von x sämtlich unter der festen endlichen Grösse g bleiben, so konvergiert die Potenzreihe für alle x, die der Ungleichung $|x| < |x_0|$ genügen, und innerhalb des durch diese Ungleichung bestimmten Bereiches gleichförmig.

Es sei also für jeden Wert von n

$$|a_n x^n_0| < g. \tag{3}$$

Setzt man

$$|x| = \xi \text{ und } |x_0| = \xi_0,$$

so ist weil $|a_n x^n_0| = |a_n| \cdot |x^n_0|$,

$$|a_n| < g \cdot \xi^{-n}_0, \text{ also } |a_n x^n| < g \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^n;$$

so dass weiter

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots < g\left(1 + \frac{\xi}{\xi_0} + \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 + \ldots\right). \tag{4}$$

Da nun $\frac{\xi}{\xi_0} < 1$, so ist die geometrische Reihe

$$1 + \frac{\xi}{\xi_0} + \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 + \ldots$$

und damit auch die vorgelegte Reihe $\Sigma a_n x^n$ konvergent.

Teilt man diese in zwei Teile und nennt wie früher

$$s'_n = \sum_{i=n+1}^{i=\infty} a_i x^i,$$

so genügt dieser Teil offenbar der Ungleichung

$$s'_n = \sum_{i=n+1}^{i=\infty} |a_i x^i| < \sum_{i=n+1}^{i=\infty} g \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^i$$

$$< g \cdot \frac{\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\xi}{\xi_0}},$$

worin man die rechte Seite durch hinreichend grosse Wahl von n, so lange $\frac{\xi}{\xi_0} < 1$, d. h. für jedes $\xi < \xi_0$ beliebig klein machen kann; folglich ist die Reihe unter den gemachten Voraussetzungen gleichförmig konvergent.

Da zufolge der Gleichung (4) die Reihe auch konvergent ist, wenn die einzelnen Glieder durch ihre absoluten Werte ersetzt werden, so konvergiert die Potenzreihe in dem Bereiche $|x| < |x_0|$ unter den gemachten Voraussetzungen unbedingt. Aus Satz II kann sofort gefolgert werden:

Wenn die Koeffizienten der unendlichen Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ von einem bestimmten Gliede an sämtlich kleiner als die endliche Grösse g sind, so ist die Reihe konvergent für alle x, die der Ungleichung $|x| < 1$ genügen.

Da ferner aus der gleichförmigen Konvergenz auf die Stetigkeit geschlossen werden kann, so gilt

III. Die durch eine unendliche Potenzreihe definierte Funktion ist innerhalb des Konvergenzbereiches der Reihe eine stetige Funktion der variabeln Grösse.

Differentiiert man die durch die Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots \tag{5}$$

definierte Funktion, indem man die einzelnen Glieder differentiiert, so erhält man

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + (n+1)\,a_{n+1} x^n + \ldots \tag{6}$$

Wenn aber

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lambda, \text{ so hat auch } \lim_{n=\infty} \left| \frac{n\,a_n}{(n+1)(a_{n+1})} \right| = \lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

den Wert λ; folglich ist die Reihe (6) in dem nämlichen Bereiche wie die Reihe (5) konvergent.

IV. Für jeden Wert von x innerhalb des Konvergenzbereiches einer Potenzreihe ist die aus den Differentialquotienten der einzelnen Glieder gebildete Reihe eine ebenfalls unbedingt und gleichförmig konvergente, deshalb auch stetige Potenzreihe.

66. Satz der unbestimmten Koeffizienten. Wenn die beiden Potenzreihen

$$(1)\quad \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots, \end{cases}$$

die innerhalb des Bereiches $-\lambda < x < +\lambda$ gleichförmig konvergent sind, für jedes x aus diesem Bereiche einander gleich sein sollen, so kann das nur geschehen, wenn die Koeffizienten der gleich hohen Potenzen von x gleich sind.

Nach der Voraussetzung ist nämlich

$$(2) \qquad a_0 + x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots) = b_0 + x(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots),$$

worin die in Klammern stehenden Werte innerhalb des Bereiches $(-\lambda, +\lambda)$ ebenfalls konvergent sind und endliche Summen haben. Lässt man $x = 0$ werden, so liegt dieser Wert im Konvergenzbereiche, also bleiben die Werte der Klammern endlich, folglich muss

$$(3) \qquad a_0 = b_0$$

sein. Lässt man jetzt a_0 und b_0 auf beiden Seiten in (2) weg und dividiert durch x, so erhält man

$$a_1 + x(a_2 + a_3 x + \ldots) = b_1 + x(b_2 + b_3 x + \ldots)$$

für alle Werte im Bereiche $(-\lambda, +\lambda)$, woraus durch genau dieselben Schlüsse

$$(4) \qquad a_1 = b_1$$

gefolgert wird. So fortfahrend kann man beweisen, dass

$$(5) \qquad a_2 = b_2 : \quad a_3 = b_3 ; \ldots \quad a_n = b_n ; \ldots$$

gelten müssen.

Aus diesem Satze der unbestimmten Koeffizienten ergibt sich die für das Folgende wichtige Bemerkung, dass eine Funktion innerhalb eines gewissen Bereiches nur in einer einzigen Weise durch eine Potenzreihe darstellbar ist.

67. Binomische Reihe für beliebige Exponenten. In den elementaren Lehrbüchern entwickelt man die Potenz $(a + z)^m$ der zweiteiligen Grösse $a + z$ für den Fall in eine Reihe, dass der Exponent eine ganze positive Zahl bezeichnet. Es soll nun gezeigt werden, dass diese Entwickelung in eine Reihe auch zulässig ist, wenn der Exponent eine negative oder gebrochene Zahl darstellt.

Setzt man voraus, dass a und $a + z$ positiv sind, so ist $(a + z)^m$ für jeden Wert von m reell und kann in die reellen Faktoren $a^m \cdot \left(1 + \frac{z}{a}\right)^m$ zerlegt werden. Setzt man x an Stelle von $\frac{z}{a}$, so handelt es sich um die Entwickelung von $(1 + x)^m$.

Nach dem Satze der unbestimmten Koeffizienten nehme man an

$$(1) \qquad (1 + x)^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots .$$

Hierin sind die von x unabhängigen Konstanten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zu bestimmen.

Für $x = 0$ erhält man $a_0 = 1$. Um die folgenden Konstanten zu bestimmen, differentiiere man (1) und erhält

$$m(1 + x)^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

oder, indem man durch m dividiert und mit $(1 + x)$ multipliziert,

$$(2) \qquad (1+x)^m = \frac{1}{m} a_1 + \left(\frac{1}{m} a_1 + \frac{2}{m} a_2\right) x + \left(\frac{2}{m} a_2 + \frac{3}{m} a_3\right) x^2 + \left(\frac{3}{m} a_3 + \frac{4}{m} a_4\right) x^3 + \ldots$$

Setzt man jetzt die Koeffizienten der gleich hohen Potenzen von x in den Entwickelungen von (1) und (2) einander gleich, so findet man

$$\frac{1}{m} a_1 = a_0 \qquad \text{folglich} \qquad a_1 = m \cdot 1$$

$$\frac{1}{m} a_1 + \frac{2}{m} a_2 = a_1 \qquad\qquad a_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2};$$

$$\frac{2}{m} a_2 + \frac{3}{m} a_3 = a_2 \qquad\qquad a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\frac{3}{m} a_3 + \frac{4}{m} a_4 = a_3 \qquad\qquad a_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

etc. etc.

Führt man diese Werte von $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ in (1) ein, so erhält man als gesuchte Reihe

$$(3) \qquad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^n + \ldots$$

Ist der Exponent m eine ganze positive Zahl, so ist die Reihe endlich; sie hat $(m+1)$ Glieder. Ist aber m negativ oder ein Bruch, so ist die Reihe unendlich. Für diese ist

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n=\infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = \lim_{n=\infty} \left| \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1} \right| = 1;$$

also ist die Reihe (3) konvergent in dem Bereiche

$$-1 < x < +1.$$

Die Reihe (3) wird häufig angewendet auf Wurzelgrössen mit zweiteiliger Grundzahl. Man bringt sie auf die Form von Potenzen, wie folgende Ausdrücke zeigen.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}; \qquad \sqrt[3]{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \alpha} = (a^2 - e^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{a}{(1+cx)^2} = a(1+cx)^{-2}.$$

Für $\sqrt{1+x}$ erhält man z. B.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots$$

Diese Reihe kann zur Wurzelausziehung von bestimmten Zahlen benutzt werden, wie folgendes Beispiel zeigt.

$$\sqrt{1{,}05} = (1 + \tfrac{1}{20})^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{20}) - \tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{20})^2 + \tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{20})^3 - \tfrac{5}{128}(\tfrac{1}{20})^4 + \ldots$$
$$= 1{,}024\,695\,1\ldots$$

Dabei kommt es aber immer darauf an, dass die Zahl in zwei Teile zerfalle, wovon der eine das Quadrat einer bestimmten Zahl und der andere Teil klein sei.

Soll z. B. $\sqrt{7}$ bestimmt werden, so kann man wie folgt zerlegen

$$7 = 9 - 2 = 9(1 - \tfrac{2}{9});\quad \text{daher}\quad \sqrt{7} = 3(1 - \tfrac{2}{9})^{\frac{1}{2}};$$

$$7 = \tfrac{25}{4} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{25}{4}(1 + \tfrac{3}{25});\quad \sqrt{7} = \tfrac{5}{2}(1 + \tfrac{3}{25})^{\frac{1}{2}};$$

$$7 = \tfrac{121}{16} - \tfrac{9}{16} = \tfrac{121}{16}(1 - \tfrac{9}{121});\quad \sqrt{7} = \tfrac{11}{4}(1 - \tfrac{9}{121})^{\frac{1}{2}}\ \text{u. s. w.}$$

68. Reihe für die Exponentialgrösse a^x. Man nehme an, es lasse sich a^x in eine konvergente Reihe von folgender Form entwickeln

$$a^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

worin $a_0, a_1, a_2, \ldots$ unbekannte konstante Grössen bezeichnen, die zu bestimmen sind.

Setzt man zuerst $x = 0$, so folgt $a^0 = 1 = a_0$. Hierdurch erhält man

$$(1)\qquad a^x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich

$$(2)\qquad a^x = \frac{1}{l\,a}(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots).$$

Da die rechten Seiten von (1) und (2) einander gleich sein müssen, so geben nach § 66 die Vorzahlen der gleichen Potenzen von x folgende Relationen

$$a_1 = l\,a;\qquad \text{folglich}\quad a_1 = l\,a;$$

$$2a_2 = a_1 \cdot l\,a;\qquad ,,\quad a_2 = \frac{1}{1\cdot 2}(l\,a)^2;$$

$$3a_3 = a_2 \cdot l\,a;\qquad ,,\quad a_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(l\,a)^3;$$

$$4a_4 = a_3 \cdot l\,a;\qquad ,,\quad a_4 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(l\,a)^4;$$

$$\ldots\ldots\qquad\qquad \ldots\ldots$$

Setzt man diese Werte von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in (1) ein, so erhält man die gesuchte Exponentialreihe

$$(3) \qquad a^x = 1 + (l\,a)\,x + \frac{(l\,a)^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(l\,a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{(l\,a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \ldots$$

Wenn $a = e$ als Basis der natürlichen Logarithmen (§ 20) angenommen wird, so ist $l\,e = 1$ und die Reihe (3) geht über in

$$(4) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

Setzt man hierin $x = 1$, so erhält man den numerischen Wert der Basis

$$(5) \qquad e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots = 2{,}718\,281\,828\,459 \ldots$$

Zur Bestimmung des Konvergenzbereiches hat man

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n=\infty} \left| \frac{n+1}{l\,a} \right| = \infty;$$

also sind die Reihen (3) und (4) konvergent im Bereiche

$$-\infty < x < +\infty.$$

69. Reihe für $l\,(1 + x)$. Da $l\,x$ selbst nicht in eine nach positiven Potenzen von x fortschreitende Potenzreihe entwickelt werden kann, weil $l\,x$ an der Stelle $x = 0$ unstetig wird, so setze man voraus, dass $l\,(1 + x)$ in eine konvergente Reihe entwickelt werden könne von der Form

$$(1) \qquad l\,(1 + x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

worin die konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \ldots$ unbekannt, somit noch zu ermitteln sind.

Setzt man $x = 0$, so folgt $l\,1 = 0 = a_0$. Durch Differentiation von (1) erhält man

$$(2) \qquad \frac{1}{1 + x} = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + \ldots$$

Führt man nun die Division von $1 : (1 + x)$ nach den gewöhnlichen Regeln aus, oder entwickelt man $(1 + x)^{-1}$ nach dem binomischen Satze in eine Reihe, so kommt

$$(3) \qquad \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

Die beiden Werte von $\frac{1}{1 + x}$ in (2) und (3) sind Reihen, die nach den Potenzen derselben Veränderlichen x fortschreiten. Also sind die Koeffizienten gleich hoher Potenzen dieser Reihen einander gleich. Dies gibt

$$a_1 = 1; \quad 2\,a_2 = -1; \quad 3\,a_3 = 1; \quad 4\,a_4 = -1; \ldots$$

Führt man diese Werte von $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in (1) ein und setzt $a_0 = 0$, so erhält man die gesuchte logarithmische Reihe

$$(4) \quad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Als Bereich der Konvergenz dieser Reihe ist bereits in § 65 $-1 < x < +1$ bestimmt worden. wobei zugleich gezeigt wurde, dass an der oberen Grenze bedingte Konvergenz stattfindet. Setzt man $x = +1$, so erhält man

$$l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots \text{ (§ 63).}$$

70. Anwendung dieser Reihe zur numerischen Berechnung der natürlichen Logarithmen. Da die Reihe für $l(1+x)$ die Berechnung der natürlichen Logarithmen nur für die Zahlen von 0 bis 2 gestattet, vertausche man, um zu einer für alle Zahlen brauchbaren Reihe zu gelangen, x mit $-x$, und erhält

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Zieht man diese Gleichung von der für $l(1+x)$ ab, so wird

$$(1) \qquad l\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right),$$

und hierin kann $\frac{1+x}{1-x}$ für $0 < x < 1$ jede noch so grosse Zahl, für $-1 < x < 0$ jeden echten Bruch darstellen.

Setzt man nun

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{y}, \text{ also } x = \frac{z}{2y+z},$$

so gibt dadurch die letzte Reihe

$$(2) \qquad l(z+y) = l\,y + 2\left[\frac{z}{2y+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2y+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2y+z}\right)^5 + \ldots\right].$$

Dies ist nun die Reihe, nach der numerische Rechnungen auszuführen sind. Dabei werden um so weniger Glieder der Reihe zu berechnen sein, je kleiner z und je grösser y ist. Gewöhnlich nimmt man $z = 1$ und hat

$$(3) \qquad l(1+y) = l\,y + 2\cdot\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

I. Für $y = 1$ erhält man aus (3)

$$l\,2 = 2\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{3}\right)^7 + \tfrac{1}{9}\left(\tfrac{1}{3}\right)^9 + \ldots\right],$$

$$l\,2 = 0{,}693\ 147\ 180\ 6\ \ldots$$

II. Für $y = 2$ ist nach (3)

$$l\,3 = l\,2 + 2\left[\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{5}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{5}\right)^7 + \ldots\right],$$

$$l\,3 = 1{,}098\;612\;288\;7\ldots$$

III. Für $y = 9$ folgt

$$l\,10 = l\,9 + 2\left[\tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{19}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{19}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{19}\right)^7 + \cdots\right],$$

und da $l\,9 = 2\,l\,3 = 2{,}197\;224\;577\;4\ldots$, so findet man

$$l\,10 = 2{,}302\;585\;093\;0\ldots$$

Um die Logarithmen aller ganzen Zahlen zu erhalten, müssen vermittelst der Reihe (2) oder (3) nur die Logarithmen der Primzahlen berechnet werden. Alle übrigen Zahlen zerlege man in ihre Primfaktoren und nehme die Summe der Logarithmen dieser Faktoren.

71. Bestimmung der gemeinen Logarithmen. Die Basis der gemeinen oder Briggischen Logarithmen ist 10, die der natürlichen $e = 2{,}718\;28\ldots$ Hat man nun die Relation

$$e^y = 10^x = A,$$

so ist y der natürliche und x der gemeine Logarithmus derselben Zahl A. Nimmt man von beiden Potenzen die natürlichen Logarithmen, so ist

$$y = x\,l\,10.$$

Daraus folgt, dass der gemeine Logarithmus multipliziert werden muss mit $l\,10 = 2{,}302\;585\;09\ldots$, um den natürlichen Logarithmus derselben Zahl zu ergeben, und dass umgekehrt der natürliche Logarithmus multipliziert werden muss mit

$$\frac{1}{l\,10} = \frac{1}{2{,}302\;585\;09\ldots} = 0{,}434\;294\;48\ldots$$

um den gemeinen Logarithmus dieser Zahl zu geben.

Diese letztere Zahl wird Modulus der gemeinen Logarithmen genannt. Sind also nach dem Vorhergehenden die natürlichen Logarithmen der Zahlen berechnet, so können durch Multiplikation derselben mit dem Modulus die gemeinen Logarithmen aus ihnen abgeleitet werden.

Nach § 20, Gleichung (7), hat man für irgend ein Logarithmensystem

$$d\,{}^a\log x = {}^a\log e \cdot \frac{dx}{x}.$$

Für natürliche Logarithmen wird $l\,e = 1$, für briggische dagegen ist

$$\log e = \log 2{,}718\;281\;82\ldots = 0{,}434\;294\;48\ldots$$

Dieser letztere Wert ist daher für den in § 20, Gleichung (4) enthaltenen Annäherungswert zu nehmen.

72. Reihen für den Sinus und den Cosinus. Es sollen die trigonometrischen Zahlen $\sin x$ und $\cos x$ durch den Bogen x ausgedrückt werden. Man nehme an, es lasse sich $\sin x$ entwickeln nach der Gleichung

$$(1)\qquad \sin x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

worin $a_1, a_2, a_3, \ldots$ konstante Zahlen bezeichnen, die zu bestimmen sind. Das von x unabhängige Glied in (1) ist weggelassen, weil für $x = 0$ auch $\sin x = 0$ wird.

Differentiiert man (1) und dividiert durch dx, so kommt

$$(2)\quad \cos x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots$$

Differentiiert man auch (2) und ändert das Vorzeichen, so wird

$$(3)\quad \sin x = -2a_2 - 6a_3 x - 12a_4 x^2 - 20a_5 x^3 - \ldots$$

Setzt man nun $x = 0$, so erhält man aus (2) $a_1 = 1$ und aus (3) $a_2 = 0$.

Setzt man sodann die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x aus (3) und (1) einander gleich, so findet man

$$\begin{aligned} -6a_3 &= a_1; &\quad \text{folglich}\quad a_3 &= -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3};\\ -12a_4 &= a_2; &\quad \text{„}\quad a_4 &= 0;\\ -20a_5 &= a_3; &\quad \text{„}\quad a_5 &= +\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5};\ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Führt man schliesslich die für $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gefundenen Werte in (1) und (2) ein, so erhält man die gesuchten von Newton herrührenden Reihen

$$(5)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

$$(6)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$$

Je eine der Reihen (5) und (6) ist der Differentialquotient der anderen. Ist daher die eine konvergent für irgend welche Werte von x, so ist es die andere für diese Werte ebenfalls.

Nun ist in (5)

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} \right| = \lim_{n=\infty} \left| 2n(2n+1) \right| = \infty,$$

also ist der Konvergenzbereich beider Reihen durch

$$-\infty < x < +\infty$$

bestimmt.

Hiernach sind also die Reihen für jeden endlichen Wert von x konvergent. Die Glieder der Reihe können allerdings, je nach dem Werte von x, bis zu einer gewissen Stelle wachsen, müssen aber von da an abnehmen.

73. Numerische Berechnung des Sinus und des Cosinus. In den eben entwickelten Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ ist natürlich x das analytische Mass des Winkels.

Ist nun z. B. Sinus und Cosinus von 1^0 zu bestimmen, so folgt aus

$$1^0 : 360^0 = x : 2\pi,$$

$$x = \frac{3{,}141\ 592\ 653}{180} = 0{,}017\ 453\ 292.$$

Führt man diesen Wert von x in die Sinus- und Cosinusreihe, Gleichungen (5) und (6) von § 72 ein und berechnet die Glieder der Reihe bis auf die achte Dezimalstelle, so wird man bemerken, dass nur die beiden ersten Glieder der Reihen von Einfluss auf die Resultate sind, indem man erhält

$$\sin 1^0 = 0{,}017\,453\,29 - 0{,}000\,000\,89 = 0{,}017\,452\,40,$$
$$\cos 1^0 = 1{,}000\,000\,00 - 0{,}000\,152\,31 = 0{,}999\,847\,69.$$

Die Reihen von $\sin x$ und $\cos x$ lassen behufs numerischer Rechnungen folgende Umgestaltung zu. Setzt man in dieselben $x = m\frac{\pi}{2}$ ein, so gehen sie über in

$$\sin(m \cdot 90^0) = \frac{m\pi}{2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\;4\cdot 5}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^5 - \ldots$$

$$\cos(m\cdot 90^0) = 1 - \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^4 - \ldots$$

Berechnet man die Werte von $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4}, \frac{\pi^3}{8}, \ldots$, so erhält man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(m\cdot 90^0) = &+ 1{,}570\,796\,3\,m - 0{,}645\,964\,1\,m^3 \\ &+ 0{,}079\,692\,6\,m^5 - 0{,}004\,681\,8\,m^7 \\ &+ 0{,}000\,160\,4\,m^9 - 0{,}000\,003\,6\,m^{11} \\ &+ 0{,}000\,000\,1\,m^{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(m\cdot 90^0) = &+ 1{,}000\,000\,0 \quad - 1{,}233\,700\,6\,m^2 \\ &+ 0{,}253\,669\,5\,m^4 - 0{,}020\,863\,5\,m^6 \\ &+ 0{,}000\,919\,3\,m^8 - 0{,}000\,025\,2\,m^{10} \\ &+ 0{,}000\,000\,5\,m^{12}. \end{aligned}$$

Sind Sinus und Cosinus von 1^0 zu berechnen, so setzt man in diesen Gleichungen $m = \frac{1}{90}$ und findet die obigen Werte. Für 1 Minute hat man zu setzen $m \cdot 90 \cdot 60 = 1$, also $m = \frac{1}{90\cdot 60}$ u. s. w.

Vermittelst dieser Gleichungen rechnet man nur die Werte von Sinus und Cosinus für Winkel bis auf 45^0. Folglich ist der grösste Wert von $m = \frac{1}{2}$, also sind diese Reihen sehr konvergierend.

74. Reihen für Logarithmus-Sinus und Logarithmus-Cosinus. Sondert man bei der Sinusreihe (5), § 72, den Faktor x ab, so erhält man

$$(1) \qquad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots\right);$$

setzt man zur Abkürzung

$$(2) \quad y = \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} - \ldots,$$

so geht Gleichung (1) über in

$$\sin x = x\,(1 - y).$$

Nimmt man hier die natürlichen Logarithmen, so kommt

$$l \sin x = l\,x + l\,(1 - y).$$

Wird die Grösse $l\,(1 - y)$ vermittelst der Reihe (4), § 69, in eine Reihe aufgelöst, so erhält man

$$l \sin x = l\,x - \left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots\right).$$

Man führe hierin den Wert von y aus (2) ein und erhält

$$\begin{aligned} l \sin x = l\,x - \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} &- \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots \\ - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} &+ \frac{x^6}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots \\ &- \frac{x^6}{1 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} + \ldots \end{aligned}$$

Setzt man nun $x = \frac{1}{2} m \pi$ und geht von den natürlichen Logarithmen zu den gemeinen über, indem man den Modul 0,434 29.. mit M bezeichnet, so erhält man

$$\begin{aligned} \log \sin (m \cdot 90^0) = \log \frac{\pi}{2} + \log m - M \Bigg[&\frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 m^2 \\ &+ \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 m^4 + \ldots \Bigg]. \end{aligned}$$

Verfährt man mit der Cosinusreihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$

ebenso, indem man die Grösse rechts $= 1 - y$ setzt und $l\,(1 - y)$ in eine Reihe auflöst etc., so erhält man

$$\begin{aligned} \log \cos (m \cdot 90^0) = - M \Bigg[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 m^2 &+ \frac{1}{3 \cdot 4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 m^4 \\ &+ \frac{1}{3^2 \cdot 5} \left(\frac{\pi}{2}\right)^6 m^6 + \ldots \Bigg]. \end{aligned}$$

Hätte man vermittelst dieser Reihen die Grössen $\log \sin 2^0$ und $\log \cos 2^0$ zu berechnen, so würde man setzen $m \cdot 90 = 2$, also $m = \frac{2}{90}$; für 1 Sekunde hätte man $m \cdot 90 \cdot 60 \cdot 60 = 1$, also $m = \frac{1}{90 \cdot 60 \cdot 60}$ zu setzen. Da der grösste in der Anwendung vorkommende Wert von $m = \frac{1}{2}$ ist, nämlich für 45^0, so sind diese Reihen numerisch konvergierend.

75. Reihe für Tang x. Dividiert man die Reihe für sin x durch die von cos x (§ 72), so erhält man als gesuchte Reihe

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$$

Topographische Aufnahmen können ein verhältnismässig grosses Gebiet umfassen. Nimmt man an, sie seien eingeschlossen in den Mantel eines Kreiskegels, dessen Spitze in den Mittelpunkt der Erde fällt, so schneidet der Mantel auf der Erdoberfläche, diese kugelförmig gedacht, eine Kalotte aus, auf der die wahren Längen sich vorfinden. Allein die Kalotte werde ersetzt durch die Grundfläche des Kegels, die die Kalotte berührt, oder durch die Grundfläche, die durch den Umfang der Kalotte geht.

Nun ergibt ein ebener Schnitt des Kegels längs der Achse einen Bogen auf der Kalotte und zwei Gerade auf den Kegelgrundflächen. Der Zentriwinkel, den die Seitenkanten des Achsenschnittes bilden, sei 2 x und der Radius der Kugel R; dann sind der halbe Bogen auf der Kalotte = R x und die Radien der Kegelgrundflächen = R tang x und R sin x. Diese Linien verhalten sich untereinander wie x : tang x : sin x.

Setzt man x sehr klein voraus, so hat man annähernd

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3}; \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3}.$$

Daher die relativen Fehler, wenn tang x und sin x für x genommen werden,

$$\frac{\operatorname{tang} x - x}{x} = \frac{x^2}{3}; \qquad \frac{x - \sin x}{x} = \frac{x^2}{6}.$$

Mithin ist der Fehler auf der inneren Grundfläche zweimal so klein als auf der äusseren.

Für einen Zentriwinkel von 1° hat man

$$x : 2\pi = 0{,}5^0 : 360^0; \qquad x = \frac{\pi}{360}.$$

Daher ergibt sich hierfür

$$\frac{\operatorname{tang} x - x}{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{3{,}141\,592\,65\ldots}{360}\right)^2 = 0{,}000\,025\,38\ldots$$

Der Fehler beträgt daher auf der äusseren Grundfläche für einen Bogen, der 0,5° umfasst, sehr annähernd $^1/_{40\,000}$ von der Bogenlänge.

Nimmt man den Erdhalbmesser zu 6 400 000 *m* an, so beträgt die Länge dieses Fehlers

$$6\,400\,000 \cdot \frac{\pi}{360} \cdot \frac{1}{40\,000} = 1{,}396\,m.$$

76. Reihe für Arcussinus. In der Gleichung

$$(1) \qquad y = \operatorname{arc} \sin x$$

bezeichnet x den Sinus, dessen Bogenmass = y ist. Es soll der Bogen y ausgedrückt werden durch eine Reihe, deren Glieder den Sinus x enthalten. Man setze zu diesem Zwecke

$$(2) \qquad \operatorname{arc\,sin} x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \dots .$$

in welcher Gleichung die Grössen $a_1, a_2, a_3, \dots$ unbestimmte Konstanten bezeichnen. Da für $x = 0$ auch der Bogen $= 0$ wird, so ist das Glied ohne x weggelassen.

Die Differentiation dieser Gleichung gibt

$$(3) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + 7a_7 x^6 + \dots$$

Bringt man die linke Seite dieser Gleichung auf die Form $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und entwickelt dieselbe nach dem binomischen Satze, so folgt

$$(4) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots$$

Da nun die rechten Seiten von (3) und (4) einander gleich sein müssen, so geben die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x folgende Werte

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0;\ a_3 = \frac{1}{6};\ a_4 = 0;\ a_5 = \frac{3}{40};\ a_6 = 0;\ a_7 = \frac{5}{112};\ \dots$$

$$a_{2n} = 0;\quad a_{2n+1} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Vermöge dieser Werte wird die Gleichung (2)

$$(5) \qquad \operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

Setzt man hierin nach (1) $x = \sin y$ und beachtet, dass die Koeffizienten ein bestimmtes Bildungsgesetz befolgen, so hat man als gesuchte Reihe

$$(6) \qquad y = \sin y + \frac{1 \cdot (\sin y)^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3\,(\sin y)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\,(\sin y)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (\sin y)^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$$

Der Konvergenzbereich der Reihe (5) ergibt sich aus

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}\right| = 1.$$

Danach ist die Reihe für

$$-1 < x < +1$$

konvergent. Sie konvergiert aber auch noch an den Grenzen des Bereichs, denn ihre Glieder sind für $x = 1$ kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe $1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$, deren Konvergenz in § 62 nachgewiesen ist. Mithin ist die Reihe (6) für jeden Wert von y konvergent.

Für einen Winkel von 30^0 ist $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\pi}{6}$. Für diese Werte geht die Reihe (6) über in

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 16} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 64} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 256} + \ldots\right],$$

$$\pi = 3\left[1 + \frac{1}{24} + \frac{3}{640} + \frac{5}{7\,168} + \frac{35}{294\,912} + \frac{63}{2\,883\,584} + \ldots\right].$$

Die Glieder dieser Reihe nehmen ziemlich rasch ab, also kann daraus der Wert von π bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnet werden.

77. Reihe für Arcustangens. In der Gleichung

$$(1) \qquad y = \operatorname{arc\,tang} x$$

bezeichnet x die trigonometrische Tangente des Bogens y. Man soll den Bogen y durch eine Reihe ausdrücken, deren Glieder die Variable x enthalten.

Man nehme als hypothetische Gleichung an

$$(2) \qquad \operatorname{arc\,tang} x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots,$$

worin $a_1, a_2, a_3, \ldots$ konstante Grössen bezeichnen, die zu bestimmen sind. Dabei ist der Koeffizient der Potenz x^0 gleich Null genommen, weil für $x = 0$ auch der Bogen $= 0$ wird.

Differentiiert man (2), so kommt

$$(3) \qquad \frac{1}{1 + x^2} = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + 5 a_5 x^4 + \ldots$$

Führt man die Division von 1 durch $(1 + x^2)$ aus, so findet man

$$(4) \qquad \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

Vermöge der Gleichungen (3) und (4) hat man zwei Reihen für dieselbe Grösse $1 : (1 + x^2)$. Also müssen die Koeffizienten derselben Potenzen von x in beiden Reihen gleich sein. Dies gibt

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{1}{3}; \quad a_4 = 0; \quad a_5 = +\frac{1}{5}; \ldots$$

$$a_{2n} = 0; \quad a_{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n + 1}.$$

Führt man diese Werte von $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in (2), so folgt

$$(5) \qquad \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Setzt man hierin nach (1) $x = \operatorname{tang} y$, so erhält man folgende von Leibnitz gefundene Reihe

$$(6) \qquad y = \operatorname{tang} y - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 y + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 y - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 y + \ldots$$

Aus

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} \right| = \lim_{n=\infty} \left| \frac{2n+1}{2n-1} \right| = 1$$

ergibt sich der Konvergenzbereich der Reihe (5) zu

$$-1 < x < +1.$$

Doch auch an den Grenzen ist die Reihe konvergent. Sie lautet für $x = 1$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots;$$

da in dieser alternierenden Reihe die Glieder immer mehr abnehmen, ist sie konvergent (§ 63, II), aber nur bedingt, d. h. ihr Wert ist von der Reihenfolge der Glieder abhängig.

Setzt man $\tan y = 1$, so wird $y = \frac{\pi}{4}$. Für diese Werte wird die Reihe (6) geben

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots \tag{7}$$

Mithin, wenn man je zwei Glieder zusammenzieht und mit 4 multipliziert,

$$\pi = 8\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \frac{1}{17\cdot 19} + \ldots\right]. \tag{8}$$

Für 30^0 wird $y = \frac{\pi}{6}$ und $\tan y = \frac{1}{\sqrt{3}}$; daher nach (6)

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\right). \tag{9}$$

Mittels der Reihen (8) und (9) kann der Wert von π berechnet werden.

Um aber die Reihe (7) noch rascher konvergierend zu machen, zerlege man den Bogen $\frac{\pi}{4}$ in zwei solche Teile, dass man hat

$$\frac{1}{4}\pi = 4\alpha - \beta, \tag{10}$$

und nehme $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ an; alsdann ist

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}. \tag{11}$$

Da ferner $\tang \frac{1}{4}\pi = 1$, so wird vermöge (10) sein

$$1 = \tang(4\alpha - \beta) = \frac{\tang 4\alpha - \tang\beta}{1 + \tang 4\alpha \cdot \tang\beta},$$

woraus folgt

$$\tang\beta = \frac{\tang 4\alpha - 1}{\tang 4\alpha + 1}.$$

Setzt man hierin den Wert von $\tang 4\alpha$ aus (11) ein, so ergibt sich

$$\tang\beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{\frac{120}{119} + 1} = \frac{1}{239}.$$

Führt man nun in Gleichung (6) die entsprechenden Werte $y = \alpha$ und $\tang\alpha = \frac{1}{5}$, sowie $y = \beta$ und $\tang\beta = \frac{1}{239}$ ein, so findet man

$$4\alpha = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 5^2} + \frac{1}{5\cdot 5^4} - \frac{1}{7\cdot 5^6} + \frac{1}{9\cdot 5^8} - \cdots\right),$$

$$\beta = \frac{1}{239}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 239^2} + \frac{1}{5\cdot 239^4} - \frac{1}{7\cdot 239^6} + \cdots\right).$$

Zieht man die eine Reihe von der andern ab, so erhält man den Wert von $\frac{1}{4}\pi$. Folglich entsteht nach einer einfachen Umformung der Brüche in den Klammern die von Machin angegebene Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{4}{3\cdot 100} + \frac{4^2}{5\cdot 100^2} - \frac{4^3}{7\cdot 100^3} + \frac{4^4}{9\cdot 100^4} - \frac{4^5}{11\cdot 100^5} + \cdots\right)$$
$$- \frac{1}{239}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 57\,121} + \frac{1}{5\cdot 57\,121^2} - \frac{1}{7\cdot 57\,121^3} + \cdots\right).$$

Vermittelst dieser Reihe findet man leicht

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,46\ldots$$

Der Beweis, dass die Zahl π ebenso wie die Zahl e (§ 20) transcendent ist, ist von Lindemann gegeben, womit zugleich die Quadratur des Zirkels als unlösbar bewiesen worden ist.

78. Bemerkungen zum Funktionsbegriff. Während von den bisher eingeführten Funktionen nur die rationalen elementar berechenbar waren (d. h. zu jedem bestimmten Werte des Argumentes konnte bei ihnen der Wert der Funktion durch eine endliche Anzahl von Operationen berechnet werden), ist nunmehr durch die Entwickelung der übrigen Funktionen in Potenzreihen eine Methode angegeben, nach der man zur Berechnung des Funktionswertes nur Summationen und Multiplikationen auszuführen hat, deren Resultat den gesuchten Funktionswert um so genauer und angenäherter ergibt, je weiter die Rechnung ausgeführt wird.

Der Rechner ist selbst in jedem Falle in der Lage, von vornherein die Genauigkeit zu bestimmen, bis zu der er die betreffenden Werte angeben will.

Dadurch ist aber auch das Wesen dieser Funktionen genauer aufgedeckt. Die Funktionsbezeichnungen $y = \log x$, $y = \sin x$ und dergl. sind nur als Symbole anzusehen, durch die die Abhängigkeit der Grösse y von der Grösse x ausgedrückt wird, doch erst durch die Möglichkeit der Berechnung ist die Art der Abhängigkeit bestimmt, die bisher nur durch äusserliche Angaben (Umkehrung einer Rechenoperation, geometrische Definition) angedeutet war.

Man kann jetzt von den bisherigen Definitionen ganz absehen und die transcendenten Funktionen nur durch ihre Potenzreihen definieren, also z. B. sagen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ sind nur symbolische Bezeichnungen für

$$y = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$

In der That ist es möglich, aus diesen Potenzreihen alle wichtigen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, insbesondere das Additionstheorem und ihre Periodizität abzuleiten.

79. Ableitung der Moivre'schen Binominalformel aus der Exponential-, Sinus- und Cosinusreihe. Die Exponentialreihe (4), § 68, für einen positiven und negativen Exponenten ist

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichung erhält man

$$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\right),$$

$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots\right).$$

Setzt man hierin ix statt x, wobei i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeutet, so erhält man mit Rücksicht auf die Sinus- und Cosinusreihe

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots\right)$$
$$= \cos x,$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots\right) = i \sin x.$$

Durch diese Gleichungen ist der merkwürdige Zusammenhang der Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Funktionen gegeben.

Addiert man diese beiden Gleichungen, so folgt

(1) $$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Setzt man hierin n x statt x, so wird sein

(2) $$e^{nix} = \cos n x + i \sin n x.$$

Erhebt man aber die Gleichung (1) auf die nte Potenz, so kommt

(3) $$e^{nix} = (\cos x + i \sin x)^n.$$

Die linken Seiten von (2) und (3) sind identisch, also sind auch ihre rechten Seiten gleich; dies führt zu der gesuchten Moivre'schen Formel

(4) $$(\cos x + i \sin x)^n = \cos n x + i \sin n x.$$

80. Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen durch die Potenzen der einfachen. Entwickelt man die linke Seite der eben erhaltenen Moivre'schen Formel nach dem binomischen Satze, so folgt

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^n = \cos^n x &+ \frac{n}{1} \cos^{n-1} x \, i \sin x \\ &- \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} x \sin^2 x \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} i \sin^3 x \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \ldots\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich der rechten Seite der Moivre'schen Formel $= \cos n x + i \sin n x$. Mithin müssen die reellen, ebenso die imaginären Teile beider gleichen Ausdrücke gleich sein. Dies gibt die gesuchten Gleichungen

$$\begin{aligned}\sin n x = n \cos^{n-1} x \sin x &- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} x \sin^3 x \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos n x = \cos^n x &- \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} x \sin^2 x \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} x \sin^4 x + \ldots\end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen der Reihe nach $n = 2, 3, 4, \ldots$, so erhält man folgende Relationen, wenn man noch $\sin^2 x$ durch $1 - \cos^2 x$ ersetzt,

$$\begin{aligned}\sin 2 x &= \sin x (2 \cos x), \\ \sin 3 x &= \sin x (4 \cos^2 x - 1), \\ \sin 4 x &= \sin x (8 \cos^3 x - 4 \cos x), \\ \sin 5 x &= \sin x (16 \cos^4 x - 12 \cos^2 x + 1),\end{aligned}$$

etc.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$
$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1,$$
$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x,$$
etc.

Löst man diese Gleichungen in Hinsicht der Potenzen von $\sin x$, $\cos x$ auf, so erhält man

$$2\sin^2 x = -\cos 2x + 1,$$
$$4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x,$$
$$8\sin^4 x = \cos 4x - 4\cos 2x + 3,$$
$$16\sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x,$$
etc.

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1,$$
$$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x,$$
$$8\cos^4 x = \cos 4x + 4\cos 2x + 3,$$
$$16\cos^5 x = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x,$$
etc.

Erster Teil der Integralrechnung.

I. Ableitung von Integralen.

81. Begriff und Bezeichnung der Integration. Ist

(1) $$y = F(x)$$

eine in dem Bereiche (x_1, x_2) der Variabeln x eindeutige stetige Funktion, so ist es die Aufgabe der Differentialrechnung, das Differential dieser Funktion für jedes x in dem Bereiche (x_1, x_2) zu berechnen. Wenn $\lim\limits_{\triangle x = 0} \dfrac{F(x + \triangle x) - F x}{\triangle x} = f(x)$ gesetzt wird, so war

(2) $$d y = f(x) d x.$$

Die Umkehrung dieser Aufgabe ist die G r u n d a u f g a b e d e r I n t e g r a l r e c h n u n g: Gegeben die in dem Bereiche (x_1, x_2) stetige eindeutige Funktion $f(x)$; es soll eine stetige Funktion $F(x)$ gebildet werden, deren Differential für jedes x in dem Bereiche (x_1, x_2) gleich $f(x) d x$ ist.

Man nennt diese Funktion $F(x)$ nach J a k. B e r n o u l l i das Integral des Differentials $f(x) d x$.

Um die Integration durch ein Zeichen anzudeuten, schreibt man vor das Differential, das zu integrieren ist, das Zeichen $\int$; dieses Zeichen hat für die Integralrechnung dieselbe Bedeutung wie der Buchstabe d für die Differentialrechnung. Man schreibt hiernach

(3) $$y = F(x) = \int f(x) d x.$$

Die Gleichungen (2) und (3) sind völlig gleichwertig, d. h. eine folgt aus der andern. Aus diesen Erklärungen folgt unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx; \tag{4}$$

die Zeichen d und $\int$ heben sich also auf, wenn sie aufeinander folgen.

Das Integrieren verhält sich zum Differentiieren genau so, wie das Subtrahieren zum Addieren, das Dividieren zum Multiplizieren; es ist die inverse Operation.

Für einzelne einfache Differentiale kann das Integral leicht angegeben werden. So ist z. B.

Differential:		Integral:
dx,	. . . . . .	x;
$2x\,dx$,	. . . . . .	x^2;
$\frac{dx}{x}$,	. . . . . .	$l\,x$;
$\cos x\,dx$,	. . . . . .	$\sin x$;
$\frac{dx}{1+x^2}$,	. . . . . .	$\operatorname{arc\,tang} x$;

wie man sich durch Differentiation des Integrals überzeugen kann.

In der Differentialrechnung werden für ganze Klassen von Funktionen die Differentiale abgeleitet; aus jeder dieser Formeln folgt durch Umkehrung eine Integralformel. Zwar ist dadurch keine Methode des Integrierens gewonnen, aber es werden die Grundformeln der Integralrechnung erhalten, die der Ausgangspunkt für weitere Rechnung werden.

82. Die willkürliche Konstante. Zunächst ist die Frage zu beantworten, ob die Aufgabe der Integralrechnung ein- oder mehrdeutig sei, d. h. ob es nur eine einzige Funktion $F(x)$ gibt, die der Gleichung

$$y = F(x) = \int f(x)\, dx \tag{1}$$

genügt.

Vorausgesetzt, es gäbe noch eine zweite Funktion, so könnte sie durch $F(x) + \Phi(x)$ dargestellt werden, wobei $\Phi(x)$ ihren Unterschied von $F(x)$ bezeichnet, so dass die Gleichung

$$\int f(x)\, dx = F(x) + \Phi(x) \tag{2}$$

bestände. Daraus würde folgen

$$dF(x) + d\Phi(x) = f(x)\, dx;$$

da aber schon $dF(x) = f(x)\, dx$ ist, so muss $d\Phi(x)$ für jeden Wert von x im Bereiche (x_1, x_2) gleich Null sein, was nur möglich ist, wenn $\Phi(x)$ von x unabhängig, also eine Konstante ist (§ 15). Man hat demnach das Resultat: wenn

$$dy = f(x)\, dx \tag{3}$$

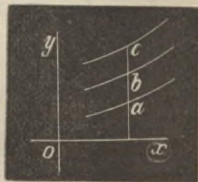
ist, so ist

$$y = \int f(x)\,dx + C. \tag{4}$$

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Differential das Integral zu finden, hat also unendlich viele Lösungen; ist aber eine derselben gefunden, so hat man alle übrigen; sie unterscheiden sich voneinander nur durch eine additive Konstante, die willkürliche Integrationskonstante.

Die Bedeutung dieser Konstanten ergibt sich durch folgende Betrachtung. Gleichung (1) stellt eine Kurve dar, deren Abscisse x (Fig. 25) und deren Ordinate y ist; während Gleichung (3) die Neigung dieser Kurve zur Abscissenachse angibt und zwar mittels des Verhältnisses $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Nun sind aber unendlich viele Kurven denkbar, die für dieselbe Abscisse in a, b, c . . gleiche Neigung zur Abscissenachse haben. In den Anwendungen kann im allgemeinen nur eine dieser Kurven der Aufgabe entsprechen und zwar jene, die durch einen gegebenen Punkt geht. In Gleichung (4) ist nun die Konstante C nichts anderes als eine Ordinate, die einen Punkt wie a, b, . . feststellt, durch den die Kurve gehen soll. Dieser Bedingung wegen fügt man dem aus der Integration unmittelbar hervorgegangenen Werte immer eine Konstante C bei. Ihre Anwendung zeigen die folgenden Aufgaben aus der Geometrie, Physik, Mechanik etc.

Fig. 25.



83. Integration des Differentials $x^n\,dx$. Wird die Funktion $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ differentiiert, so findet man $x^n\,dx$. Folglich erhält man durch die umgekehrte Operation

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Somit wird das Integral der Formel $x^n\,dx$ erhalten, wenn man dx zu x macht und die entstandene Potenz x^{n+1} durch den neuen Exponenten dividiert.

Diese Regel ist gültig für jeden Wert von n. Allein sie führt in dem speziellen Falle, wo $n = -1$ wird, zu dem unbrauchbaren Ausdrucke

$$\int x^{-1}\,dx = \frac{1}{0} + C.$$

Nun ist aber $x^{-1}\,dx = \frac{dx}{x}$ und somit das Integral

$$\int \frac{dx}{x} = l\,x + C.$$

Enthält das Differential einen konstanten Faktor a, so kann man schreiben

$$\int a\,x^n\,dx = a\int x^n\,dx = a\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Denn diese drei Ausdrücke liefern, wenn sie differentiiert werden, ein und dasselbe Differential. Somit geht der konstante Faktor unverändert aus dem Differential in das Integral über, und es kann ein solcher Faktor vor oder hinter das Integralzeichen gesetzt werden.

Beispiele.

$$\int a\,dx = ax + C; \qquad \int 2x^3\,dx = \frac{1}{2}x^4 + C;$$

$$\int \frac{2}{3}x\,dx = \frac{1}{3}x^2 + C; \qquad \int \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^5}} = \int x^{-\frac{5}{2}}\,dx = -\frac{2}{3}\frac{1}{x\sqrt{x}} + C.$$

84. Logarithmische und exponentielle Integrale. Durch Umkehrung der Differentiation folgt unmittelbar

$$\int \frac{dx}{x} = l\,x + C; \qquad \int \frac{-dx}{x} = l\frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{a+x} = l\,(a+x) + C; \qquad \int \frac{dx}{a-x} = -\,l\,(a-x) + C;$$

$$\int \frac{b\,dx}{a+bx} = l\,(a+bx) + C; \qquad \int \frac{d\,f(x)}{f(x)} = l\,f(x) + C.$$

Alle gebrochenen Differentiale, deren Zähler das Differential des Nenners ist, führen durch die Integration auf Logarithmen. So ist

$$\int \frac{2x\,dx}{a^2+x^2} = l\,(a^2+x^2) + C; \qquad \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = l\sin x + C.$$

Um $\frac{dx}{a+bx}$ zu integrieren, multipliziere man Zähler und Nenner mit b, dem Faktor von x, und schreibe dann $d(bx)$ statt $b\,dx$; dann folgt

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\int \frac{d(bx)}{a+bx} = \frac{1}{b}\,l\,(a+bx) + C.$$

Die Gleichungen (4) und (3), § 21, geben unmittelbar

$$\int e^x\,dx = e^x + C; \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{l\,a} + C;$$

$$\int e^{2x}\,2\,dx = e^{2x} + C; \qquad \int a^{\varphi(x)}\,d\varphi(x) = \frac{a^{\varphi(x)}}{l\,a} + C.$$

Nach dieser Regel kann jedes exponentielle Differential integriert werden, wenn die Exponentialgrösse mit dem Differentiale des Exponenten multipliziert ist. Um z. B. $a^{nx}\,dx$ integrieren zu können, multipliziere und dividiere man mit n und schreibe $d(nx)$ statt $n\,dx$; es folgt

$$\int a^{nx}\,dx = \frac{1}{n}\int a^{nx}\,d(nx) = \frac{a^{nx}}{n\,l\,a} + C.$$

85. Trigonometrische Integrale. Durch Umkehrung der Differentiation folgt

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C; \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotang} x + C;$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \sec x + C; \quad \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x + C.$$

Damit das Integral von $\sin 2x\,dx$ ermittelt werde, ist es nötig, dass sowohl in $\sin 2x$ als in dx derselbe Bogen vorkomme. Nun ist aber $dx = \frac{1}{2}\,d(2x)$; somit hat man

$$\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Ganz ebenso ergibt sich

$$\int \cos 4\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}\int \cos 4\varphi\,d(4\varphi) = \frac{1}{4}\sin 4\varphi + C;$$

$$\int \sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int \sin ax\,d(ax) = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

86. Kreisfunktionen. Die Differentiale des § 27 geben

$$(1)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + C; \quad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\cos x + C;$$

$$(2)\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x + C; \quad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{cotang} x + C;$$

$$(3)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc}\sec x + C.$$

I. Um den Ausdruck $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ auf die erste dieser Gleichungen zurückzuführen, schreibe man

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

und betrachte hierin nicht x, sondern $\frac{x}{a}$ als Sinus; dann wird sein

$$(4) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

II. Ganz ebenso findet man nach (2)

$$(5) \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{d\left(\frac{bx}{a}\right)}{1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tang} \frac{bx}{a} + C.$$

III. Um $\frac{x\,dx}{1 + x^4}$ zu integrieren, setze man $x^2 = z$, und $2x\,dx = dz$; dann erhält man

$$\int \frac{x\,dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} z + C = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} x^2 + C.$$

IV. Setzt man in Gleichung (4) statt x die Grösse $b + y$, also $dx = dy$, $x^2 = b^2 + 2by + y^2$, so folgt

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - b^2 - 2by - y^2}} = \arcsin \frac{b + y}{a} + C.$$

Schreibt man hierin $a^2 - b^2 = A$, $-2b = B$, also $b = -\frac{B}{2}$ und $a^2 = \frac{4A + B^2}{4}$, so wird

$$(6) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{A + By - y^2}} = \arcsin \frac{2y - B}{\sqrt{4A + B^2}} + C.$$

Für $A = 0$ geht diese Gleichung über in

$$(7) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{By - y^2}} = \arcsin \frac{2y - B}{B} + C.$$

87. Integration einer Summe von Differentialen. Es ist

$$\int [f(x)\,dx + \varphi(x)\,dx + \ldots] = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx + \ldots$$

Denn differentiiert man auf beiden Seiten, so erhält man gleiche Werte. Folglich wird eine Summe von Differentialen integriert, indem man jedes Glied integriert und die erhaltenen Integrale addiert. Selbstverständlich ist nur eine Integrationskonstante hinzuzufügen. So ist

$$\int (a + b x + c x^2)\, d x = a x + \frac{b x^2}{2} + \frac{c x^3}{3} + C;$$

$$\int (a^2 - x^2)\, d x = a^2 x - \frac{x^3}{3} + C;$$

$$\int (x \sqrt{x} + a \sqrt[3]{x})\, d x = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{3 a}{4} x^{\frac{4}{3}} + C.$$

Da nach § 80 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2 x)$ und $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2 x)$, so hat man

$$\int \sin^2 x\, d x = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2 x)\, d x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2 x + C;$$

$$\int \cos^2 x\, d x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2 x)\, d x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2 x + C.$$

Es ist $(a - x)^2 d x = (a^2 - 2 a x + x^2)\, d x$; folglich durch Integration

$$\int (a - x)^2\, d x = a^2 x - a x^2 + \frac{x^3}{3} + C.$$

Um das Produkt $(a + x)(b - x)\, d x$ zu integrieren, führe man die Multiplikation aus. Man erhält

$$(a + x)(b - x)\, d x = [a b + (b - a) x - x^2]\, d x.$$

Folglich, indem man integriert,

$$\int (a + x)(b - x)\, d x = a b x + (b - a) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C.$$

88. Integration nach vorausgegangener Differentiation.

I. Differentiiert man $\sqrt{a^2 + x^2}$ und $\sqrt{a^2 - x^2}$, so kommt

$$d \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x\, d x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \qquad d \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{- x\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Mithin erhält man, wenn die Gleichungen integriert werden,

$$(1) \quad \int \frac{x\, d x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2} + C, \int \frac{x\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

II. Differentiiert man die Grösse $l \frac{1 + x}{1 - x}$, so wird

$$d\, l \frac{1 + x}{1 - x} = 2 \frac{d x}{1 - x^2};$$

und indem man durch 2 dividiert und integriert,

$$(2) \qquad \int \frac{d x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} l \frac{1 + x}{1 - x} + C.$$

III. Differentiiert man $l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$, so folgt

$$d\,l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)=\frac{dx+\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Mithin durch Umkehrung der Operation

$$(3)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$$

IV. Differentiiert man $x^{n-1}\sqrt{bx-x^2}$, so folgt

$$d\left(x^{n-1}\sqrt{bx-x^2}\right)=(n-1)\,x^{n-2}\sqrt{bx-x^2}\,dx+\frac{x^{n-1}(b-2x)\,dx}{2\sqrt{bx-x^2}}.$$

Bringt man rechts auf gleiche Benennung und ordnet, so folgt

$$d\left(x^{n-1}\sqrt{bx-x^2}\right)=\frac{(2n-1)\,b}{2}\,\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{bx-x^2}}-\frac{n\,x^n\,dx}{\sqrt{bx-x^2}}.$$

Dividiert man durch n, versetzt die Glieder und integriert, so kommt

$$(4)\qquad \int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{bx-x^2}}=-\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{bx-x^2}+\frac{(2n-1)\,b}{2n}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{bx-x^2}}.$$

Für $n=1$ erhält man hieraus

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{bx-x^2}}=-\sqrt{bx-x^2}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}}.$$

Somit unter Benutzung von Gleichung (7), § 86,

$$(5)\qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{bx-x^2}}=-\sqrt{bx-x^2}+\frac{b}{2}\arcsin\frac{2x-b}{b}+C.$$

V. Es ist $\quad d\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}}=\frac{1}{2}\,\frac{dx}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{b-x}}$,

daher auch $\quad \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{b-x}}=2\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}}+C.$

VI. Man erhält ferner durch Differentiation von $\sin^n x$ und $\cos^n x$:

$$d\sin^n x=n\sin^{n-1}x\cos x\,dx,\quad d\cos^n x=-n\cos^{n-1}x\sin x\,dx;$$

daher, wenn man durch n dividiert und integriert,

$$(6)\qquad \int\sin^{n-1}x\cos x\,dx=\frac{1}{n}\sin^n x+C;$$

$$(7)\qquad \int\cos^{n-1}x\sin x\,dx=-\frac{1}{n}\cos^n x+C.$$

Für n = 2, 3 erhält man hieraus

$$\int \sin x \cos x \, d x = \frac{1}{2} \sin^2 x + C; \quad \int \sin x \cos x \, d x = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C.$$

$$\int \sin^2 x \cos x \, d x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C; \quad \int \cos^2 x \sin x \, d x = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

Die Gleichungen (6) und (7) gelten auch, wenn n negativ wird. Für n = — 1 erhält man z. B.

$$\int \frac{\cos x \, d x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} + C; \quad \int \frac{\sin x \, d x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C.$$

VII. Differentiiert man $\sin^n x \cos x$ und $\cos^n x \sin x$, so kommt

$$d \sin^n x \cos x = -\sin^{n+1} x \, d x + n \sin^{n-1} x \cos^2 x \, d x,$$

$$d \cos^n x \sin x = \cos^{n+1} x \, d x - n \cos^{n-1} x \sin^2 x \, d x.$$

Setzt man in den letzten Gliedern $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ und $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, so folgt

$$d \sin^n x \cos x = -(1 + n) \sin^{n+1} x \, d x + n \sin^{n-1} x \, d x,$$

$$d \cos^n x \sin x = (1 + n) \cos^{n+1} x \, d x - n \cos^{n-1} x \, d x.$$

Mithin durch Versetzung der Glieder, Division mit (1 + n) und durch Integration

$$(8) \quad \int \sin^{n+1} x \, d x = -\frac{1}{1+n} \sin^n x \cos x + \frac{n}{1+n} \int \sin^{n-1} x \, d x;$$

$$(9) \quad \int \cos^{n+1} x \, d x = \frac{1}{1+n} \cos^n x \sin x + \frac{n}{1+n} \int \cos^{n-1} x \, d x.$$

Für n = 1, 2, 3 erhält man

$$(10) \quad \int \sin^2 x \, d x = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + C;$$

$$(11) \quad \int \cos^2 x \, d x = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + C;$$

$$(12) \quad \int \sin^3 x \, d x = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C;$$

$$(13) \quad \int \cos^3 x \, d x = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C;$$

$$(14) \quad \int \sin^4 x \, d x = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x\right) + C;$$

$$(15) \quad \int \cos^4 x \, d x = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x\right) + C.$$

Führt man in (8) und (9) — n statt + n ein und versetzt die Glieder, so erhält man

$$\int \frac{d\,x}{\sin^{n+1} x} = -\frac{1}{n}\frac{\cos x}{\sin^n x} + \frac{n-1}{n}\int \frac{d\,x}{\sin^{n-1} x};$$

$$\int \frac{d\,x}{\cos^{n+1} x} = \frac{1}{n}\frac{\sin x}{\cos^n x} + \frac{n-1}{n}\int \frac{d\,x}{\cos^{n-1} x}.$$

Für $n = 1$ geben diese beiden Formeln

$$\int \frac{d\,x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotang} x + C; \quad \int \frac{d\,x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C \quad (\S\ 85).$$

VIII. Wendet man dieses Verfahren auf $x^n\, l\, x$ an, so kommt zunächst

$$d\, x^n\, l\, x = n\, x^{n-1}\, d\, x\, l\, x + x^{n-1}\, d\, x,$$

sodann durch Division durch n und Integration

$$(16) \qquad \int x^{n-1}\, l\, x\, d\, x = \frac{x^n}{n}\, l\, x - \frac{x^n}{n^2} + C.$$

IX. Ebenso gibt dasselbe Verfahren mit Zugrundelegung von $x^n\, a^x$:

$$d\, x^n\, a^x = n\, x^{n-1}\, a^x\, d\, x + x^n\, a^x\, l\, a\, d\, x,$$

$$(17) \qquad \int x^n\, a^x\, d\, x = \frac{x^n\, a^x}{l\, a} - \frac{n}{l\, a}\int x^{n-1}\, a^x\, d\, x.$$

Für $n = 1.\ 2$ erhält man hieraus:

$$\int x\, a^x\, d\, x = \frac{a^x}{l\, a}\left(x - \frac{1}{l\, a}\right) + C;$$

$$\int x^2\, a^x\, d\, x = \frac{a^x}{l\, a}\left(x^2 - \frac{x}{l\, a} + \frac{1}{(l\, a)^2}\right) + C.$$

Auf diese Weise können offenbar unzählige Integrale abgeleitet werden, ohne dass irgend welche neue Lehren der Integralrechnung in Anwendung kommen.

Formeln, wie sie durch die Gleichungen (4), (8), (9), (17) repräsentiert werden, heissen Rekursionsformeln, weil durch sie ein Integral auf ein anderes ähnlicher, aber einfacherer Art zurückgeführt wird. Sie spielen in der Integralrechnung eine wichtige Rolle.

89. Integration durch Einführung einer neuen veränderlichen Grösse.

I. Es sei zu integrieren $d\, x \sqrt{a + b\, x}$. Setzt man $a + b\, x = z$, so ist

$$d\, x = \frac{d\, z}{b}; \qquad d\, x \sqrt{a + b\, x} = \frac{1}{b} z^{\frac{1}{2}}\, d\, z,$$

$$\int d\, x \sqrt{a + b\, x} = \frac{1}{b}\int z^{\frac{1}{2}}\, d\, z = \frac{2}{3\, b} z^{\frac{3}{2}} + C,$$

oder wenn z wieder ersetzt wird,

$$(1) \qquad \int d\, x \sqrt{a + b\, x} = \frac{2}{3\, b}(a + b\, x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

II. Es sei zu integrieren $\frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)^3}}$.

Setzt man $x - a = z$, so wird $dx = dz$, $x = z + a$ und

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)^3}} = \frac{z+a}{z^{\frac{3}{2}}}\,dz = \left(a\,z^{-\frac{3}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}\right)dz.$$

Mithin

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)^3}} = -2\,a\,z^{-\frac{1}{2}} + 2\,z^{\frac{1}{2}} + C,$$

(2) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)^3}} = 2\left(\sqrt{x-a} - \frac{a}{\sqrt{x-a}}\right) + C,$$

$$= \frac{2\,(x-2\,a)}{\sqrt{x-a}} + C.$$

III. Zu integrieren $\frac{l\,x}{x}\,dx$.

Setzt man $l\,x = z$, so ist $\frac{dx}{x} = dz$ und $\frac{l\,x}{x}\,dx = z\,dz$,

$$\int \frac{l\,x}{x}\,dx = \int z\,dz = \frac{1}{2}\,z^2 + C,$$

(3) $$\int \frac{l\,x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,(l\,x)^2 + C.$$

IV. Es sei das Integral von $\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$ zu bestimmen.

Setzt man $\cos x = z$, so ist $\sin x\,dx = -dz$, also

$$\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\frac{dz}{z^2},$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\int z^{-2}\,dz = \frac{1}{z} + C,$$

(4) $$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C.$$

V. Für $1 + l\,x = z$ wird

(5) $$\int \frac{dx}{x}\sqrt{1 + l\,x} = \int \sqrt{z}\,dz = \frac{2}{3}\,z^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1 + l\,x)^3} + C.$$

VI. Das im Vorstehenden an einigen Beispielen entwickelte Verfahren der Integration durch **Einführung einer neuen Variabeln** ist eines der **wichtigsten** Hilfsmittel der Integralrechnung. Es wird besonders dann mit Vorteil anwendbar sein, wenn durch diese Substitution das neue Integral einfacher wird als das ursprüngliche.

Soll nach diesem Verfahren $f(x)\,dx$ integriert werden, so setze man

$$x = \varphi(z); \qquad dx = \varphi'(z)\,dz, \tag{6}$$

wobei von der Funktion φ vorausgesetzt werden muss, dass durch sie x eindeutig durch z, aber auch z eindeutig durch x bestimmt ist; man erhält dann

$$f(x)\,dx = f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = F(z)\,dz,$$

also

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = \int F(z)\,dz; \tag{7}$$

nach Ausführung der Integration nach z ist dann an Stelle von z wieder x einzuführen.

90. Das teilweise Integrieren. Sind u und v Funktionen derselben veränderlichen Grösse, so erhält man durch Differentiation

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

und hieraus durch Versetzung der Glieder und durch Integration

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1}$$

Der durch diese Formel ausgesprochene Satz heisst der Satz der teilweisen oder partiellen Integration und ist neben dem im § 89 angegebenen Verfahren das zweite fundamentale Hilfsmittel der Integralrechnung.

Lässt sich der zu integrierende Ausdruck $f(x)\,dx$ als ein Produkt $u\,dv$ darstellen, worin von dem Differentiale dv das Integral leicht angebbar oder aus dem Früheren bekannt ist, dann kann mittels der Formel (1) das Integral $\int f(x)\,dx = \int u\,dv$ in die beiden Teile uv und $\int v\,du$ in der Weise zerlegt werden, so dass nunmehr das zweite Integral entweder nach bekannten Formeln hergestellt werden kann oder wenigstens einfacher ist als das ursprünglich vorgelegte. Im letzteren Falle führt dann die Formel (1) vielfach auf eine Rekursionsformel (§ 88). Die nächstfolgenden Beispiele zeigen die Anwendung der Gleichung (1).

Beispiele.

I. Zu integrieren $l\,x\,dx$. Setzt man

$$l\,x = u, \qquad dx = dv,$$

so folgt unter Anwendung der Gleichung (1)

$$\int l\,x\,dx = x\,l\,x - x + C. \tag{2}$$

II. Zu integrieren $\cos x \sin x\,dx$. Zerlegt man wie folgt

$$\sin x = u; \qquad \cos x\,dx = dv,$$

so folgt zunächst $du = \cos x\,dx$; $v = \sin x$; folglich

$$\int \cos x \sin x\,dx = \sin^2 x - \int \cos x \sin x\,dx.$$

Daher durch Zusammenziehen der Glieder

$$(3)\qquad \int \cos x \sin x \, d x = \frac{1}{2} \sin^2 x + C \quad (\S\ 88).$$

III. Um das Differential $\frac{x^{n+1}\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ zu integrieren, setze man

$$u = x^n, \qquad d v = \frac{x\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

dann erhält man unter Anwendung der Gleichung (1) rechts in § 88: $v = -\sqrt{a^2 - x^2}$; mithin wird

$$u v = - x^n \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad v\, d u = - n x^{n-1} \sqrt{a^2 - x^2}\, d x.$$

Allein die letzte Gleichung gibt, indem man Zähler und Nenner des zweiten Teiles mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ multipliziert,

$$v\, d u = - \frac{n a^2 x^{n-1}\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{n x^{n+1}\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Setzt man diese Werte von $u v$ und $v d u$ in (1), so folgt

$$\int \frac{x^{n+1}\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - x^n \sqrt{a^2 - x^2} + n a^2 \int \frac{x^{n-1}\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - n \int \frac{x^{n+1}\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Zieht man die beiden gleichartigen Glieder zusammen und dividiert durch $(n + 1)$, so kommt

$$(4)\qquad \int \frac{x^{n+1}\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{x^n}{n + 1} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{n a^2}{n + 1} \int \frac{x^{n-1}\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ganz ebenso findet man

$$(5)\qquad \int \frac{x^{n+1}\, d x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x^n}{n + 1} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{n a^2}{n + 1} \int \frac{x^{n-1}\, d x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Für $n = 1$ ergibt sich aus diesen beiden Rekursionsformeln

$$\int \frac{x^2\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{d x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\int \frac{x^2\, d x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{d x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Wenn man die zweiten Teile nach den Gleichungen (4), § 86, und (3), § 88, integriert, so entsteht

$$(6)\qquad \int \frac{x^2\, d x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$(7)\qquad \int \frac{x^2\, d x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2}\, l \left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C.$$

Die vorstehende Gleichung (4) kann benutzt werden, um das Differential $x^{n-1}\,dx\sqrt{a^2 - x^2}$ zu integrieren. Man multipliziere und dividiere dieses Differential mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ und erhält

$$x^{n-1}\,dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2 x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Man integriere, führe den Wert des letzten Gliedes aus Gleichung (4) ein und ziehe zwei gleichartige Glieder zusammen; es ergibt sich

$$(8)\quad \int x^{n-1}\,dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^n}{1+n}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{1+n}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ganz ebenso findet man mittels (5) die Gleichung

$$(9)\quad \int x^{n-1}\,dx\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x^n}{1+n}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{1+n}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Für $n = 1, 2$ ergeben beide Gleichungen

$$(10)\quad \int dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$(11)\quad \int dx\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\,l\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C;$$

$$\int x\,dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^2}{3}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\int x\,dx\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x^2}{3}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Allein die letzten Teile dieser zwei Gleichungen können mit Hilfe der Gleichungen (1), § 88, integriert werden, wodurch man erhält

$$(12)\quad \int x\,dx\sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$(13)\quad \int x\,dx\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{1}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Für $n = 3$ erhält man aus (9)

$$\int x^2\,dx\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x^3}{4}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{4}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Führt man den Wert des letzten Integrals aus (7) hier ein, so kommt

$$(14)\quad \int x^2\,dx\sqrt{a^2 + x^2} =$$

$$\frac{x^3}{4}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2}\,l\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\right] + C.$$

91. Integration durch Reihen. Es sei

$$(1)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a^2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

eine in dem Bereiche $-\lambda < x < +\lambda$ konvergente unendliche Potenzreihe. Multipliziert man die beiden Seiten der Gleichung (1) mit dx und integriert, indem man rechts die einzelnen Glieder integriert, so erhält man

$$(2)\qquad \int f(x)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots + C.$$

Umgekehrt würde die Reihe (1) aus der Reihe (2) durch Differentiation der einzelnen Glieder hervorgegangen sein; nach Satz IV des § 65 haben daher diese beiden Reihen denselben Konvergenzbereich.

Für jeden Wert von x innerhalb des Konvergenzbereiches einer unendlichen Potenzreihe ist die durch die Integration der einzelnen Glieder gebildete Reihe ebenfalls unbedingt und gleichförmig konvergent, stellt also eine stetige Funktion des Arguments dar.

Auch an den Grenzen des Konvergenzbereiches kann die Reihe (2) noch konvergieren, wenn vielleicht die ursprüngliche Reihe (1) an den Grenzen nicht mehr konvergent ist.

In zweierlei Weise kann die Aufgabe unendliche Reihen zu integrieren gestellt werden: die zu integrierende Funktion ist entweder direkt durch eine Potenzreihe definiert oder sie wird erst zum Zwecke des Integrierens in eine unendliche Reihe verwandelt. Im letzteren Falle ist die Integration durch unendliche Reihen ein weiteres fundamentales Hilfsmittel der Integralrechnung in Bezug auf solche Funktionen, deren Integral durch die elementaren Funktionen in endlicher Anzahl nicht darstellbar ist.

I. Durch Division von 1 durch $(1 + x)$ findet man

$$(3)\qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

Diese Reihe ist konvergent für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$. Multipliziert man mit dx und integriert, so kommt

$$(4)\qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Die Konstante der Integration ist $= 0$, weil für $x = 0$ beide Seiten der Gleichung verschwinden. Die erhaltene Reihe (4) ist die in § 69 abgeleitete logarithmische Reihe. An der oberen Grenze $x = 1$ konvergiert die Reihe (4), während die integrierte Reihe (3) für diesen Wert nicht mehr konvergent ist.

II. Für den Sinus von x hat man die Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots,$$

die für jeden Wert von x konvergent ist. Multipliziert man mit dx und integriert, so erhält man

$$-\cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \ldots + C.$$

Für x = 0 wird — 1 = C. Führt man diesen Wert von C ein und multipliziert mit — 1, so erhält man die bekannte Cosinusreihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

III. Sei zu integrieren $\frac{e^x}{x} dx$, so hat man (§ 68)

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots,$$

folglich ist

$$\int \frac{e^x dx}{x} = l\,x + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n \cdot n} + \dots + C. \tag{5}$$

IV. Ebenso findet man, da

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \dots + C. \\ \displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx = l\,x - \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6} + \dots + C. \end{cases}$$

II. Bestimmte Integrale.

92. Begriff und Bezeichnung. Ist die Differentialgleichung $dy = f(x)\,dx$ gegeben, so folgt nach § 81 durch Integration

$$y = \int f(x)\,dx + C, \tag{1}$$

oder indem man $\int f(x)\,dx$ durch $F(x)$ bezeichnet,

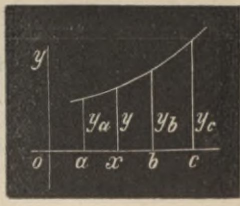
$$y = F(x) + C. \tag{2}$$

Der Ausdruck rechts in (1) und (2) wird das **unbestimmte** Integral von $f(x)\,dx$ genannt, weil der Wert von C noch willkürlich ist.

Nimmt man nun an, es gehe y in y_a über, wenn x zu a wird (Fig. 26), so erhält man aus (2)

(3) $$y_a = F(a) + C.$$

Fig. 26.



Zieht man (3) ab von (2), so folgt

(4) $$y - y_a = F(x) - F(a).$$

Diese Differenz, in der a bestimmt und x als veränderlich gedacht wird, heisst das partikuläre Integral von f(x) d x.

Lässt man x übergehen in b, wodurch y zu y_b werde, so gibt hierfür Gleichung (4)[1]

(5) $$y_b - y_a = F(b) - F(a).$$

Hierin denkt man sich a und b als bestimmte Grenzwerte, zwischen denen die Variable x liegen soll. Also liegt auch das Integral von f(x) d x zwischen F(b) und F(a). Indem nun x übergeht von a in b, ändert sich das Integral um die Differenz F(b) — F(a). Man sagt alsdann, es sei das Differential f(x) d x integriert worden von x = a bis x = b oder auch, es sei das Integral von a bis b genommen worden. Um den Vorgang anzudeuten, schreibt man nach Fourier

(6) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dabei nennt man a die untere, b die obere Grenze von x und den ganzen Wert rechts in (6) das bestimmte Integral von f(x) d x.

Setzt man daher in das unbestimmte Integral zuerst die obere, sodann die untere Grenze der Variabeln und zieht das letztere Resultat vom ersteren ab, so erhält man das bestimmte Integral für diese Grenzen.

Der Uebergang von F(a) in F(b) muss im Sinne von § 7 stetig erfolgen. Das geschieht in unendlich kleinen, aufeinander folgenden Intervallen, so dass von Intervall zu Intervall das Integral (die Ordinate der Kurve in Fig. 26) um unendlich kleine Werte sich ändert. Die endliche Differenz F(b) — F(a) kann daher als Summe aus diesen unendlich kleinen Werten angesehen werden. Daher kommt es, dass nach Leibnitz vor das Differential der Anfangsbuchstabe $\int$ des Wortes Summe geschrieben wird.

93. Aenderung der Integrationsgrenzen. Dehnt man die Variable x von a bis c aus, wo $c > b > a$ vorausgesetzt wird (Fig. 26), so folgt

(1) $$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a).$$

Daher

(2) $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

d. h. um ein bestimmtes Integral zwischen den Grenzen x = a bis x = c zu erhalten, kann man integrieren von x = a bis x = b und sodann von x = b bis x = c und die Resultate addieren.

Vertauscht man die Integrationsgrenzen in (1), so folgt

$$\int_c^a f(x)\,d\,x = F(a) - F(c).$$

Daher muss sein

$$(3) \qquad \int_a^c f(x)\,d\,x = -\int_c^a f(x)\,d\,x,$$

d. h. wenn man die obere und untere Grenze der Variabeln verwechselt, so ändert das Integral sein Vorzeichen.

94. Auswertung bestimmter Integrale.

I. Das unbestimmte Integral von $x^2\,d\,x$ ist

$$\int x^2\,d\,x = \frac{x^3}{3} + C.$$

Es soll daraus das bestimmte Integral abgeleitet werden für $x = b$ und $x = a$.

Für die obere Grenze b ist das Integral $= \frac{b^3}{3} + C$,

für die untere Grenze a dagegen . . $= \frac{a^3}{3} + C$;

folglich durch Subtraktion dieser beiden Resultate

$$\int_a^b x^2\,d\,x = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Für $a = 0$ geht diese Gleichung über in

$$\int_0^b x^2\,d\,x = \frac{1}{3}\,b^3.$$

Wird a negativ, so erhält man

$$\int_{-a}^{+b} x^2\,d\,x = \frac{1}{3}(b^3 + a^3).$$

II. Aus dem unbestimmten Integral

$$\int \frac{d\,x}{a + x} = l\,(a + x) + C$$

erhält man für die Grenzen x und 0:

Wert des Integrals für x als Grenze $= l\,(a + x) + C$,
Wert des Integrals für $x = 0$ . . . $= l\,a + C$.

Daher durch Subtraktion des letzteren Wertes

$$\int_0^x \frac{d\,x}{a + x} = l\,(a + x) - l\,a = l\,\frac{a + x}{a}.$$

Wird hierin a als obere Grenze eingeführt, so kommt

$$\int_0^a \frac{d\,x}{a + x} = l\,2\,a - l\,a = l\,2.$$

III. Es ist $\int \sin x\,dx = \cos x + C$.

Für $x = \frac{\pi}{2}$ als obere Grenze wird das Integral $= 0 + C$,

für $x = 0$ als untere Grenze . . . . $= 1 + C$;

daher

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -1.$$

IV. Nach § 90, Gleichung (6) ist

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

Nimmt man als obere Grenze $x = a$ und als untere $x = 0$, so wird der Bruch $\frac{x}{a}$ rechts in arc sin: für die obere Grenze $= 1$, für die untere $= 0$. Allein der Bogen, dessen Sinus $= 1$, ist $= \frac{\pi}{2}$ und der Bogen, dessen Sinus $= 0$, ist selbst $= 0$. Daher wird

das Integral für die obere Grenze $= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + C$

und für die untere Grenze . . $= 0 + C$,

somit

$$\int_0^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{4}a^2\pi.$$

und

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

V. Nach § 88, V. ist

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{b-x}} = \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} + C.$$

Daher

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{b-x}} = \pi.$$

VI. Nach § 68, Gleichung (4), hat man folgende Reihe

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{a^4x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Wird mit $\frac{dx}{x}$ multipliziert und integriert, so kommt

$$\int \frac{e^{ax}\,dx}{x} = l\,x + a\,x + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \ldots + C.$$

Daher das bestimmte Integral für die Grenzen x_1 und x_0:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{ax}\,dx}{x} = l\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + a(x_1 - x_0) + \frac{a^2}{1\cdot 2\cdot 2}(x_1{}^2 - x_0{}^2) + \ldots$$

VII. Weitere Beispiele zur Uebung.

$$\int_0^5 3x^2\,dx = 125; \qquad \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = 2{,}797\,..;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}; \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{2}{3};$$

$$\int_0^a dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{4}a^2\pi; \qquad \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx = \frac{1}{3}a^3;$$

$$\int_0^1 (a+bx)\,dx = a + \frac{1}{2}b; \qquad \int_0^1 e^x\,dx = 2{,}718\,28\,..$$

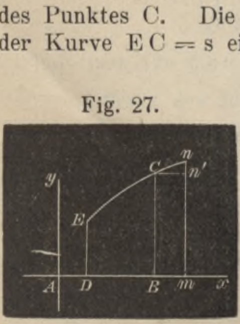
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1; \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x\,dx = 0; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x\,dx = 0.$$

III. Länge ebener Kurven.

95. Ausdruck für das Element eines Bogens. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve CE (Fig. 27). Es seien $x_0 = AD$, $y_0 = DE$ die Koordinaten des Punktes E, $x = AB$, $y = BC$ die Koordinaten des Punktes C. Die Ordinaten DE und BC schliessen einen Bogen der Kurve $EC = s$ ein, dessen Differential zu bestimmen ist.

Fig. 27.



Die Bogenlänge s hängt von der Abscisse $AB = x$ ab, ist also eine Funktion von x. Wenn x in $x + \triangle x = Am$ übergeht, so wird y zu $y + \triangle y = mn$ und s zu $s + \triangle s = En$. Zieht man Cn' parallel zur Abscissenachse, so ist $nn' = \triangle y$. Legt man noch eine Sehne durch die Kurvenpunkte C und n, so ist die Länge dieser Sehne

$$\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} = \triangle x \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2}.$$

Allein das Bogenstück Cn ist länger als die Sehne, mithin wird sein

$$\frac{\triangle s}{\triangle x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2}} > 1.$$

Wenn hierin $\triangle x$ ohne Aufhören abnimmt, so nähert sich der Bogen $\triangle s$ der Sehne als einer Grenze und erreicht dieselbe, wenn $\triangle x$ zu dx wird. Alsdann wird $\triangle s$ zu ds und man hat

$$\frac{ds}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 1.$$

Diese drei unendlich kleinen Differentiale dx, dy, ds bilden ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse ist

$$(1) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Wenn nach dieser Vorstellung die Grösse x um dx zunimmt, so nimmt auch der Bogen s um ds zu. Das Differential ds heisst **Bogenelement**.

Wird die Gleichung (1) integriert, so erhält man

$$(2) \qquad s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

als Ausdruck für den Bogen EC. Die Ausführung dieses Integrals heisst auch die **Rektifikation** der Kurven.

96. Gerade Linie. Die Gleichung der geraden Linie ist

$$y = ax + b, \quad \text{folglich} \quad \frac{dy}{dx} = a.$$

Setzt man diesen Wert von $\frac{dy}{dx}$ in die Gleichung (1), § 95, so erhält man für das Bogenelement

$$ds = dx \sqrt{1 + a^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$s = \sqrt{1 + a^2} \int dx = x \sqrt{1 + a^2} + C.$$

Mithin die Länge der Geraden innerhalb der Abscissen x und x_0, diese als Grenzen des Integrals gedacht,

$$s = (x - x_0) \sqrt{1 + a^2}.$$

97. Länge der Kreislinie. Die Mittelpunktsgleichung des Kreises ist $y^2 + x^2 = a^2$. Durch Differentiation dieser Gleichung folgt

$$y\,dy + x\,dx = 0, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2},$$

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wird diese Gleichung unter Berücksichtigung von Gleichung (4), § 86, integriert, so erhält man

$$s = a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Wird x zwischen den Grenzen b und c genommen, so erhält man für den Bogen, der über der Abscissendifferenz c — b liegt, den Ausdruck

$$s = a\int_b^c \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\left[\arcsin\frac{c}{a} - \arcsin\frac{b}{a}\right],$$

ferner für den Bogen, der über der Abscisse x liegt,

$$s = a \arcsin\frac{x}{a}$$

und für den Viertelkreis

$$s = a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi a.$$

98. Rektifikation der Parabel. Aus der Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ der Parabel folgt $y\,dy = p\,dx$. Folglich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2}{p^2}(p^2 + y^2),$$

$$ds = \frac{dy}{p}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

Wird nach Gleichung (11), § 90, integriert, so kommt

$$s = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{p^2 + y^2} = \frac{1}{2p}\left[y\sqrt{p^2+y^2} + p^2 l\left(y + \sqrt{p^2+y^2}\right)\right] + C.$$

Für $y = 0$ wird auch Bogen $s = 0$. Setzt man diese gleichzeitigen Werte in diese Gleichung, so erhält man

$$0 = \frac{p}{2}\,l\,p + C.$$

Führt man diesen Wert der Konstanten C in die Formel für s ein, so ist die Länge des Parabelbogens vom Scheitel bis zum Punkte (x, y)

$$s = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2}\,l\left(\frac{y + \sqrt{p^2+y^2}}{p}\right).$$

99. Rektifikation der zweiten kubischen Parabel. Die Gleichung dieser Kurve ist $y^3 = a^2x^2$. Hieraus folgt

$$ax = y^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{3}{2a}y^{\frac{1}{2}}.$$

Mithin das Bogenelement

$$ds = dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = dy\sqrt{1 + \frac{9}{4a^2}y}.$$

Um dieses Differential integrieren zu können, führe man eine neue Variable z ein, so dass

$$1 + \frac{9}{4a^2} y = z, \quad \text{also} \quad dy = \frac{4a^2}{9} dz$$

ist; man erhält für das Bogenelement

$$ds = \frac{4a^2}{9} z^{\frac{1}{2}} dz$$

und für den Bogen, indem man integriert,

$$s = \frac{4a^2}{9} \cdot \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + C = \frac{8a^2}{27}\left(1 + \frac{9}{4a^2} y\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Nun sind die Koordinaten des Anfangspunktes der Achsen $x = 0$, $y = 0$. Zählt man den Bogen s von diesem Punkte an, so ist für $y = 0$ auch $s = 0$. Für diese Werte von y und s wird die letzte Gleichung

$$0 = \frac{8a^2}{27} + C.$$

Führt man diesen Wert der Konstanten C ein, so wird die Länge des Kurvenbogens zwischen den Ordinaten 0 und y sein

$$s = \frac{8a^2}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4a^2} y\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

100. Rektifikation der Ellipse. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$. Setzt man hierin $x = a \sin\varphi$, so folgt $y = b\cos\varphi$, mithin $dx = a\cos\varphi\, d\varphi$, $dy = -b\sin\varphi\, d\varphi$. Folglich ist das Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\varphi \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Nun ist aber $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$, folglich

$$a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = a^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right).$$

Führt man hierin die numerische Exzentrizität ε durch die Gleichung $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ ein, so folgt

$$ds = a\, d\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi} \quad (\varepsilon^2 < 1).$$

Um integrieren zu können, entwickele man die Wurzelgrösse nach dem binomischen Satze in eine Reihe. Man erhält

$$(1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi - \frac{1}{8}\varepsilon^4\sin^4\varphi - \frac{1}{16}\varepsilon^6\sin^6\varphi - \ldots$$

Diese Reihe ist gleichförmig konvergent, da sie nach Potenzen von $(\varepsilon\sin\varphi) = z$ fortschreitet, da die Koeffizienten der Glieder fortwährend abnehmen und $|\varepsilon \sin \varphi| < 1$ ist; die Integration der Reihe kann also gliedweise ausgeführt werden. Vermittelst dieser Reihe wird

$$(1) \qquad ds = a\, d\varphi \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2\varphi - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \sin^4\varphi - ..\right).$$

Die Glieder auf der rechten Seite können integriert werden nach der Gleichung (8), § 88:

$$\int \sin^n\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}\varphi \cos\varphi + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi.$$

Man erhält für $n = 2, 4, 6, ..$ und die Grenzen $x = 0$ bis $x = x$, also für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$:

$$\int_0^\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \sin^4\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right),$$

$$\int_0^\varphi \sin^6\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{6}\sin^5\varphi\cos\varphi$$

$$+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{3}{8}\varphi\right),$$

etc. etc. etc.

Hierfür wird nun nach Gleichung (1) der Bogen s sein

$$(2) \qquad \frac{s}{a} = \varphi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$$-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\varphi - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi\right)$$

$$-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\varphi - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{1}{6}\sin^5\varphi\cos\varphi\right)$$

— etc. etc.

Wird dieses Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$, also zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ genommen, so erhält man den vierten Teil vom Umfange u der Ellipse. Folglich ist

$$(3) \qquad u = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^3\right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{7}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\varepsilon^4\right)^2 - ..\right].$$

Betrachtet man die Erde als elliptisches Sphäroid, so bezeichnet $2\pi a$ die Länge des Aequators und u die eines Meridians. Nun hat man für die Erde nach Listing

$$\varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{288}{289}\right)^2 = 0{,}006\,908\,44.$$

Mithin

$$u = 2\pi a \cdot 0{,}998\,268\,1,$$

d. h. es verhält sich der Aequator zum Meridian annähernd wie 1 000 : 998,3.

Nach französischen Messungen gehen 10 000 000 Meter auf einen Meridianquadrant; folglich wird sein

$$\frac{\pi}{2} \cdot a \cdot 0{,}998\,268\,1 = 10\,000\,000\ m,$$

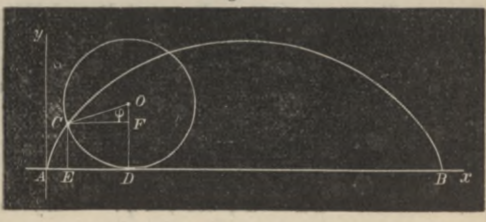
und daher der Halbmesser des Aequators

$$a = 6\,377\,224\ m.$$

101. Rektifikation der Cykloide. Wenn ein Kreis auf einer geraden Linie fortrollt, so beschreibt ein bestimmter Punkt des Kreisumfanges während des Rollens eine Kurve, die gemeine Cykloide genannt wird.

Es sei C D (Fig. 28) der Rollkreis, A B die Gerade oder Grundlinie und C der Punkt, der während des Rollens die Cykloide beschreibt. Wenn der Kreis um den Bogen C D, in der Richtung von A nach B, fortrollt, so muss das Stück A D der Grundlinie gleich dem Bogen C D, ebenso die ganze Grundlinie gleich dem Umfange des Rollkreises sein.

Fig. 28.



Nun sei $a = OC$ der Halbmesser des Kreises, $a\varphi$ = Bogen C D, also φ der dem Zentriwinkel C O D entsprechende Bogen für den Halbmesser = 1; ferner sei $x = AE$ die Abscisse und $y = CE$ die Ordinate des Kurvenpunktes C; dann ist, wenn C F parallel zu A B gelegt wird,

$$AE = AD - CF, \qquad CE = OD - OF, \text{ also}$$

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = a(1 - \cos\varphi).$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi; \qquad dy = a \sin\varphi\, d\varphi.$$

Bezeichnet s den cykloidischen Bogen A C, so wird das Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\, d\varphi \sqrt{2(1 - \cos\varphi)}.$$

Nun ist $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, folglich $ds = 2a \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$,

$$s = 4a \int \sin\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2} = -4a\cos\frac{\varphi}{2} + C.$$

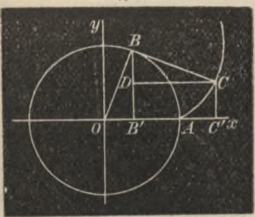
Mithin der Bogen für die Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Dehnt man hierin φ bis 2π aus, dreht man also den Rollkreis vollständig, so ist, da $\cos\pi = -1$, die Länge der ganzen Cykloide $= 8a$, d. h. das Vierfache vom Durchmesser des Rollkreises.

102. Rektifikation der Kreisevolvente. Wenn sich ein Kreisbogen AB (Fig. 29) vom Umfange des Kreises abwickelt und sich dabei in eine Gerade CB so ausstreckt, dass diese Gerade fortwährend Tangente an den Kreis bleibt, so beschreibt der Endpunkt C der Tangente eine Kurve, die Evolvente des Kreises heisst.

Fig. 29.



Der Halbmesser des Kreises sei a, die Länge AB des abgewickelten Bogens $= a\varphi$, wobei φ den Bogen bezeichnet, der dem Zentriwinkel BOA für den Halbmesser $= 1$ entspricht. Man lege rechtwinkelige Koordinatenachsen durch den Mittelpunkt; die Abscissenachse gehe durch den Anfangspunkt A der Kurve. Die Koordinaten des Kurvenpunktes C seien $OC' = x$, $CC' = y$. Zieht man noch BB' senkrecht und CD parallel zur Abscissenachse, so ist

$$OC' = OB' + DC, \qquad CC' = BB' - BD.$$

Da nun Tangente CB = Bogen AB und Winkel CBD = Winkel AOB, so geben die vorstehenden Gleichungen

$$x = a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi; \qquad y = a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi.$$

Der Bogen AC werde mit s bezeichnet; dann ist $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Nun ist aber

$$dx = a\varphi\cos\varphi\, d\varphi, \qquad dy = a\varphi\sin\varphi\, d\varphi.$$

Mithin das Bogenelement $ds = a\varphi\, d\varphi$, und der Bogen

$$s = a\int_0^{\varphi} \varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} a\varphi^2.$$

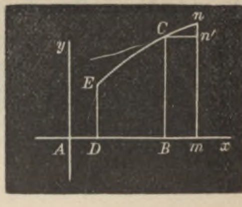
IV. Fläche ebener Kurven.

103. Ausdruck für das Flächenelement und die Fläche. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve CE (Fig. 30). Man bestimme die Fläche, die zwischen zwei Ordinaten DE und BC, der Abscissenachse und der Kurve liegt.

Die Koordinaten des Kurvenpunktes E seien $AD = x_0$, $DE = y_0$, die von C seien $AB = x$, $BC = y$. Die zu bestimmende Fläche hängt ab von der Abscisse x, ist also eine Funktion von x. Man bezeichne deshalb diese Fläche mit $F(x)$. Nimmt x zu um $\triangle x$, so wird y zu $y \pm \triangle y$ und $F(x)$ zu $F(x) + \triangle F(x)$.

Nun sei $\triangle x = Bm$. Zieht man die Ordinate mn, so wird $mn = y \pm \triangle y$ und die Fläche $BmnC = \triangle F(x)$ sein. Ist die Kurve von C aus steigend, also $mn = y + \triangle y$, so wird die Fläche $BmnC$ grösser sein als das Rechteck $Bmn'C$, dessen Grundlinie $\triangle x$ und dessen Höhe y, und kleiner als das Rechteck, dessen Grundlinie $\triangle x$ und dessen Höhe $y + \triangle y$ ist. Mithin wird sein

Fig. 30.



$$\frac{\triangle F(x)}{\triangle x} > y, \qquad \frac{\triangle F(x)}{\triangle x} < y + \triangle y.$$

Der Wert des Verhältnisses $\frac{\triangle F(x)}{\triangle x}$ liegt hiernach zwischen den Grenzen y und $y + \triangle y$. Lässt man $\triangle x$ abnehmen, d. h. rückt man die Ordinate mn näher an BC, so bleibt die Grenze y fest, während die Grenze $y + \triangle y$ sich mehr und mehr der Grösse y nähert und diese erreicht, wenn die endlichen Differenzen in Differentiale übergehen. Deshalb muss sein

$$(1) \qquad \frac{dF(x)}{dx} = y \text{ oder } dF(x) = y\,dx.$$

Man nennt die Grösse $y\,dx$ das **Differential der Fläche** $F(x)$. Das Produkt $y\,dx$ ist ein Rechteck von der Höhe y und der Breite dx. In diesem Sinne nennt man $y\,dx$ Flächenelement und stellt sich vor, dass die Fläche $F(x)$ um $dF(x)$ oder um $y\,dx$ zunehme, wenn x in $x + dx$ übergeht.

Integriert man die letzte Gleichung zwischen den Grenzen x_0 und x, so erhält man die gesuchte Fläche

$$(2) \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} y\,dx.$$

Die Berechnung der Fläche ebener Kurven, auch **Quadratur** genannt, besteht hiernach in der Bestimmung des Integrals $\int y\,dx$.

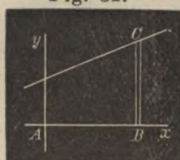
104. Trapezfläche. Es sei $y = ax + b$ die Gleichung einer Geraden. Die Koordinaten eines Punktes der Geraden (Fig. 31) seien $AB = x$, $BC = y$. Die Fläche zwischen den beiden Koordinatenachsen, der Ordinate BC und der Geraden werde mit $F(x)$ bezeichnet. Den beiden Abscissen x und $x + dx$ entsprechen zwei Ordinaten, die ein Flächenelement $dF(x) = y\,dx$ einschliessen. Führt man den Wert von y aus der Gleichung der Geraden hier ein, so folgt

$$dF(x) = (ax + b)\,dx.$$

Wird diese Gleichung integriert, so erhält man

$$F(x) = \frac{ax^2}{2} + bx + C.$$

Fig. 31.



Hierin ist die unbestimmte Konstante C zu ermitteln. Lässt man die Abscisse A B = x zu 0 abnehmen, so wird auch die darüber liegende Fläche F (x) = 0. Setzt man daher x = 0 in die letzte Gleichung, so folgt 0 = C, d. h. die Konstante fällt aus der Gleichung weg.

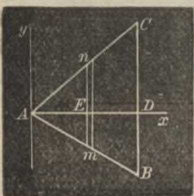
Wird x ausgedehnt bis zu dem bestimmten Werte h, so folgt aus der letzten Gleichung

$$F(h) = \frac{a h^2}{2} + b h.$$

Es ist dies die Trapezfläche über der Abscisse h.

105. Dreiecksfläche. Es sei B C = a (Fig. 32) die Basis und A D = h die Höhe eines Dreiecks. Die Spitze A werde als Anfangspunkt der Koordinatenachsen und die Höhenlinie als Abscissenachse angenommen. Der Abscisse A E = x entspreche eine Ordinatensumme E m + E n = y, für die man vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke A m n und A B C hat y : a = x : h.

Fig. 32.



Der Inhalt des Flächenelementes längs der Ordinate m n wird deshalb sein

$$y\,dx = \frac{a}{h}\,x\,dx.$$

Folglich die Dreiecksfläche, indem man integriert,

$$\int y\,dx = \frac{a}{h} \cdot \frac{x^2}{2} + C.$$

Lässt man die Abscisse x abnehmen zu 0, so wird auch die Dreiecksfläche $\int y\,dx = 0$, folglich geht die letzte Gleichung für x = 0 über in 0 = C. Mithin fällt C weg, und es ist

$$\text{Dreieck } A\,m\,n = \frac{a}{h}\,\frac{x^2}{2}.$$

Dehnt man hierin x bis h aus, so erhält man

$$\text{Dreieck } A\,B\,C = \frac{a}{h} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{a\,h}{2}.$$

106. Parabelfläche. Die auf Parabelachse und Scheiteltangente als Koordinatenachsen bezogenen Koordinaten eines Punktes der Parabel seien x, y. Man soll die Fläche bestimmen, die zwischen diesen beiden Koordinaten und dem entsprechenden Parabelbogen liegt.

Zu den Abscissen x und x + d x gehören zwei Ordinaten, die ein Flächenelement einschliessen von der Breite d x und der Höhe y, also dem Inhalte y d x. Vermöge der Gleichung der Parabel ist aber $y = \sqrt{2\,p\,x}$. Mithin wird das Flächenelement

$$y\,dx = \sqrt{2\,p\,x}\,dx = \sqrt{2\,p} \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

und folglich die Fläche, indem man integriert,

$$\int y\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Für $x = 0$ wird auch die Fläche $\int y\,dx = 0$. Mithin wird auch $C = 0$. Es ist deshalb die gesuchte Fläche

$$\int y\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{2px} = \frac{2}{3}xy.$$

Nun ist xy die der Parabelfläche umschriebene Rechtecksfläche. Folglich ist die Parabelfläche $\frac{2}{3}$ von der umschriebenen Rechtecksfläche.

107. Andere Auffassung des bestimmten Integrals. In § 92 wurde die Grösse $dy = f(x)\,dx$ als Differential der Ordinate aufgefasst, wodurch sich das bestimmte Integral als Differenz zweier endlicher Ordinaten darstellte.

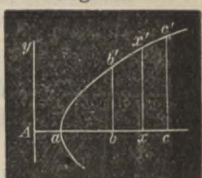
Hier erscheint $f(x)\,dx$ als Differential einer Fläche (Fig. 33), begrenzt von einer Kurve $ab'c'\ldots$, deren Gleichung $y = f(x)$ ist (§ 103). Folglich stellt das Integral $\int f(x)\,dx$ die Fläche dieser Kurve dar. Nun erhalte man durch Integration

$$(1) \qquad \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Gesetzt die Fläche zwischen der Kurve und der Abscissenachse verschwinde für $x = Aa = a$, so erhält man aus (1)

$$0 = F(a) + C, \qquad C = -F(a).$$

Fig. 33.



Setzt man diesen Wert der Konstanten C in (1) ein, so folgt

$$(2) \qquad \int f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Dieser Wert des Integrals ist die Fläche über der Abscissendifferenz $x - a$. Wenn also $Ax = x$, so ist $F(x) - F(a)$ die Fläche axx', also das partikuläre Integral.

Dehnt man den Wert der Abscisse in (2) von $Aa = a$ bis $Ab = b$ aus, so geht (2) über in

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dieses Integral ist die Fläche abb' über der Abscissendifferenz $b - a$ und wird wegen der bestimmten Grenzen, zwischen denen die Variable x eingeschlossen ist, das bestimmte Integral von $f(x)\,dx$ genannt.

Ist $c > b > a$, so hat man mit Rücksicht auf die Figur, gerade wie in § 92 und 93,

$$\text{Fläche} \quad a\,c\,c' = \int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a),$$

$$\text{Fläche} \quad a\,b\,b' = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$\text{Fläche} \quad b\,c\,c'\,b' = \int_b^c f(x)\,dx = F(c) - F(b),$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Der Wert des Integrals $\int_b^c f(x)\,dx$, als Fläche gedacht, ist ein Produkt aus zwei Faktoren. Der eine Faktor ist die Abscissendifferenz $c - b$ als Grundlinie eines Rechtecks, der andere die Höhe dieses Rechtecks. Diese Höhe ist ein mittlerer Wert aus den verschiedenen Ordinaten, die zwischen den Endordinaten $f(b)$ und $f(c)$ liegen, und kann mit $f[b + \alpha(c - b)]$ bezeichnet werden, wobei der Wert von α zwischen 0 und 1 liegt. Diese mittlere Ordinate muss nämlich eine Abscisse haben, die zwischen $A\,b$ und $A\,c$ liegt; eine solche Abscisse ist $b + \alpha(c - b)$. Mithin ist das Integral

$$\text{(3)} \qquad \int_b^c f(x)\,dx = (c - b)\,f[b + \alpha(c - b)].$$

In dieser Gleichung sind die einzelnen Rechtecke als algebraische Grössen aufzufassen. Wenn $c > b$ oder $c < b$, so wird $c - b$ das positive oder negative Zeichen haben. Ordinaten, die über der Abscissenachse liegen, werden gewöhnlich als positiv, solche unterhalb derselben als negativ angesehen. Aus diesem Grunde kann die mittlere Ordinate in (3) positiv oder negativ sein; das Integral (3) aber ist positiv, wenn beide Faktoren rechts gleiche, negativ, wenn sie ungleiche Zeichen haben.

108. Das bestimmte Integral eine Summe aus unendlich kleinen Teilen. Es sei, wie im vorigen Paragraph, $f(x)\,dx$ das Differential von $F(x)$. Lässt man nun die Grösse x in $x + dx$ übergehen, so nimmt $F(x)$ um $f(x)\,dx$ zu. Teilt man die Abscissendifferenz $c - b$ in n Teile, wovon jeder $= dx$ ist, und lässt man x, vom Werte b aus, übergehen in $b + dx$, $b + 2\,dx, \ldots b + (n - 1)\,dx$, so stellt die Summe aus den entsprechenden Zuwachsen der Funktion den totalen Zuwachs derselben, d. h. die Grösse $F(c) - F(b)$ dar. Mithin wird sein

$$\int_b^c f(x)\,dx = f(b)\,dx + f(b + dx)\,dx + f(b + 2\,dx)\,dx + \ldots$$
$$+ f[b + (n - 1)\,dx]\,dx.$$

Die einzelnen Glieder der Reihe rechts sind Flächenelemente auf den Grundlinien dx und mit den respektiven Höhen $f(b)$, $f(b + dx)$, $f(b + 2\,dx), \ldots$ Die Summe dieser Flächenelemente ist die totale Fläche, eingeschlossen zwischen den Endordinaten $f(b)$ und $f(c)$.

Verwandelt man die Fläche zwischen diesen Endordinaten in ein Rechteck von der Länge c — b, diese der Abscissenachse nach gemessen, so ist die mittlere Höhe dieses Rechtecks

$$\frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\,dx.$$

Ganz unabhängig von diesen geometrischen Grundlagen kann diese zweite Auffassung des bestimmten Integrals in folgender Weise rein analytisch gegeben werden.

Es seien a und b zwei bestimmte endliche Grössen und f(x) eine in dem Bereiche (a, b) einschliesslich der Grenzen stetige und endliche Funktion von x. Teilt man das Intervall b — a in n gleiche Teile, wo n eine beliebige positive ganze Zahl ist, und bezeichnet $\frac{b-a}{n}$ mit $\triangle x$, so dass $\triangle x > 0$, wenn $b > a$, aber $\triangle x < 0$, wenn $b < a$ ist, dann nennt man den Grenzwert, dem sich der Ausdruck

$$f(a)\triangle x + f(a+\triangle x)\triangle x + f(a+2\triangle x)\triangle x + \dots \\ + f\big(a+(n-1)\triangle x\big)\triangle x$$

bei wachsendem n, also bei gegen die Null abnehmendem $\triangle x$ nähert, das bestimmte Integral von f(x) nach x zwischen den Grenzen a und b und bezeichnet es mit $\int_a^b f(x)\,dx$, so dass die Definitionsgleichung lautet

$$(1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\triangle x = 0}\Big\{f(a)\triangle x + f(a+\triangle x)\triangle x \\ + f(a+2\triangle x)\triangle x + \dots + f\big(a+(n-1)\triangle x\big)\triangle x\Big\}.$$

Durch den Uebergang zu unendlich kleinen Grössen kann man diese Definitionsgleichung auch schreiben

$$(2)\quad \int_a^b f(x)\,dx = f(a)\,dx + f(a+dx)\,dx + f(a+2\,dx)\,dx + \dots \\ + f\big(a+(n-1)\,dx\big)\,dx.$$

Hierin werden die Produkte $f(a)\,dx$; $f(a+dx)\,dx$; etc. die Elemente des bestimmten Integrals genannt.

Da nach der Voraussetzung $f(a)$; $f(a+\triangle x)$; $f(a+2\triangle x)$; ... sämtlich endliche Grössen sind, so wird die rechte Seite in (1) dem absoluten Werte nach kleiner sein, als die Grösse, die man erhält, wenn man für alle $f(a)$; $f(a+\triangle x)$; ... die grösste dieser Grössen setzt, und grösser als das, was man erhält, wenn man die kleinste setzt. Ist $f(a+p\triangle x)$ diese grösste, und $f(a+q\triangle x)$ diese kleinste, so ist der absolute Wert der rechten Seite von (1) sicher kleiner als $\triangle x \cdot n \cdot f(a+p\triangle x)$ und grösser als $\triangle x \cdot n \cdot f(a+q\triangle x)$, also sicher

$$< (b-a)\,f(a+p\triangle x) \quad \text{und} \quad > (b-a)\,f(a+q\triangle x).$$

Folglich ist die rechte Seite von (1) gleich dem Produkte aus (b — a) und einem Werte von f(x), für den x zwischen a und b liegt. Bezeichnet man diesen Wert von x mit $(a + \alpha(b - a))$, worin $0 < \alpha < 1$, so ist, da die angestellten Betrachtungen für jedes $\triangle x$, also auch für den Grenzwert gelten,

$$(3) \quad \int_a^b f(x)\,dx = (b - a) \cdot f[a + \alpha(b - a)], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Den Ausdruck $f[a + \alpha(b - a)]$ nennt man den mittleren Wert der Funktion $f(x)$ in dem Bereiche (a, b), denn es ist

$$\begin{aligned} f[a + \alpha(b - a)] &= \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{\triangle x = 0} \frac{1}{b - a} \cdot \Big[f(a)\triangle x + f(a + \triangle x)\triangle x + \ldots \Big] \\ &= \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle x}{b - a} \cdot \Big[f(a) + f(a + \triangle x) + \ldots \Big] \\ &= \lim_{\triangle x = 0} \frac{1}{n} \cdot \Big[f(a) + f(a + \triangle x) + \ldots . \\ &\qquad\qquad + f(a + (n - 1)\triangle x) \Big], \end{aligned}$$

d. h. gleich der Summe aller Werte von $f(x)$, wenn x stetig alle Werte von a bis b annimmt, dividiert durch die Anzahl dieser Werte.

Ist nun

$$(4) \qquad dF(x) = f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad F(x) = \int f(x)\,dx,$$

so folgt aus der Definition des Differentials

$$F(x + \triangle x) - F(x) = [f(x) + \varepsilon]\triangle x,$$

worin ε mit $\triangle x$ gegen die Null konvergiert. Setzt man in diese Gleichung für x der Reihe nach die Werte a; $a + \triangle x$; $a + 2\triangle x$; ... $a + (n - 1)\triangle x$, so erhält man

$$\begin{aligned} F(a + \triangle x) - F(a) &= [f(a) + \varepsilon_1]\triangle x, \\ F(a + 2\triangle x) - F(a + \triangle x) &= [f(a + \triangle x) + \varepsilon_2]\triangle x, \\ F(a + 3\triangle x) - F(a + 2\triangle x) &= [f(a + 2\triangle x) + \varepsilon_3]\triangle x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(b) - F(a + (n - 1)\triangle x) &= [f(a + (n - 1)\triangle x) + \varepsilon_n]\triangle x, \end{aligned}$$

worin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ sämtlich mit $\triangle x$ gegen die Null konvergieren. Die Addition dieser Gleichungen gibt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) = f(a)\triangle x + f(a + \triangle x)\triangle x + \ldots + f(a + (n - 1)\triangle x)\triangle x \\ + \triangle x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n). \end{aligned}$$

Geht man zur Grenze über, so erhält man

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx + \lim_{\triangle x = 0} \triangle x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n).$$

Ist nun ε die grösste der Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, so ist

$$\lim_{\triangle x = 0} n \triangle x \cdot \varepsilon > \lim_{\triangle x = 0} \triangle x (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n);$$

aber da $n \triangle x = b - a$, so ist

$$\lim_{\triangle x = 0} n \triangle x \cdot \varepsilon = (b - a) \cdot \lim_{\triangle x = 0} \varepsilon = 0, \text{ folglich gilt}$$

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

wobei $F(x)$ nach (4) das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ ist. Lässt man die obere Grenze b variabel, gleich x, so hat man

$$(6) \qquad \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

und nennt dieses bestimmte Integral mit fester unterer und variabler oberer Grenze die Integralfunktion von $f(x)$.

Aus der Gleichung (5) folgen leicht die bereits in § 93 aufgestellten Gleichungen

$$(7) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

und

$$(8) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

wo c zwischen a und b liegt.

Die Voraussetzungen für diese Untersuchungen waren

I. $f(x)$ darf in dem Bereiche (a, b) nicht unstetig sein;

II. $f(x)$ darf in diesem Bereiche nicht unendlich werden;

III. a und b müssen endliche Grössen sein.

Ist eine dieser Voraussetzungen nicht erfüllt, so kann die Bedeutung des Integrals von vornherein weder behauptet noch geleugnet werden, vielmehr ist in jedem einzelnen Falle eine besondere Untersuchung nötig, die im folgenden angedeutet werde.

I. Wird $f(x)$ etwa für den zwischen a und b liegenden Wert x_m unstetig, so dass dem Argumente x_m zwei verschiedene Funktionswerte entsprechen, wenn also $f(x)$ an der Stelle x_m einen Sprung macht, so zerlege man das Integral in die beiden Teile

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_m} f(x)\,dx + \int_{x_m}^b f(x)\,dx,$$

worin in dem ersten Integrale dem x_m der letzte Funktionswert vor dem Sprunge, in dem zweiten der erste Funktionswert nach dem Sprunge entspricht. Macht die Funktion $f(x)$ in dem Bereiche (a, b) mehrere solcher Sprünge, so ist entsprechend das Integral in mehrere Teile zu zerlegen, nur dürfen in einem Teile des Bereiches (a, b) nicht unendlich viele Sprünge stattfinden.

II. Wird $f(x)$ für den Wert $x = x_n$ innerhalb des Bereiches (a, b) unendlich, so zerlege man

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ in } \int_a^{x_n} f(x)\,dx + \int_{x_n}^b f(x)\,dx$$

und untersuche das Integral $\int_a^{x_n} f(x)\,dx$ für eine obere Grenze $x_n - \varepsilon$, für die f(x) nicht unendlich wird. Dann ist

$$\int_a^{x_n - \varepsilon} f(x)\,dx = F(x_n - \varepsilon) - F(a);$$

nähert sich jetzt $F(x_n - \varepsilon) - F(a)$ für abnehmende Werte von ε einer bestimmten Grenze, so ist das Integral zulässig, und diese Grenze dann der Wert des Integrals; anderenfalls ist das Integral nicht brauchbar. In derselben Weise verfährt man mit dem Integrale $\int_{x_n}^b f(x)\,dx$; man bestimmt erst $\int_{x_n+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ und lässt ε dann gegen die Null abnehmen.

Genau so ist zu verfahren, wenn die Funktion f(x) an einer der Grenzen unendlich wird.

III. Wird eine der Grenzen unendlich, hat man also das Integral

$$\int_a^{\pm\infty} f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int_{\pm\infty}^b f(x)\,dx,$$

so bestimme man das Integral

$$\int_a^{\alpha} f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int_{\alpha}^b f(x)\,dx$$

und untersuche, was geschieht, wenn nachher $\alpha = \pm\infty$ gesetzt wird. Ist der erhaltene Wert endlich, so hat das Integral Bedeutung; ist aber der Wert unendlich, so ist das Integral für die Rechnung zu verwerfen.

Beispiele. In dem Integrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

wird f(x) für die obere Grenze unendlich; doch hat das Integral Bedeutung; denn

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad \text{und} \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

In dem Integrale $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ ist die obere Grenze ∞; nun ist

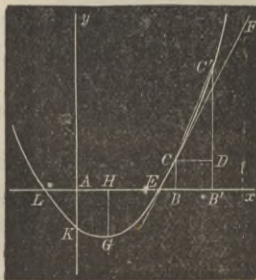
$$\int_0^x e^{-x}\,dx = -e^{-x} + 1, \text{ also } \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1 \text{ (§ 94).}$$

109. Fläche einer Kurve, deren Gleichung ist

$$y = x^2 - x - 2.$$

Diese Gleichung gibt nach § 12 eine Kurve, die die Abscissenachse (Fig. 34) in E und L schneidet. Der Kurventeil E K L liegt unterhalb der Abscissenachse. Für $y = 0$ erhält man $x = AE = 2$ und $x = AL = -1$. Sind die Koordinaten des Punktes C $x = AB$, $y = BC$, so ist das Flächenelement längs der Ordinate $BC = y\,dx = (x^2 - x - 2)\,dx$; folglich die Fläche zwischen der Kurve und der Abscissenachse für unbestimmte Grenzen

Fig. 34.



$$\int y\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C.$$

Ist $AB' = 4$, so ist die Fläche $EB'C'$

$$\int_2 y\,dx = \left(\frac{64}{3} - \frac{16}{2} - 8 + C\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 + C\right) = 8\,\frac{2}{3}.$$

Ferner die Fläche E K L unterhalb der Abscissenachse

$$\int_{-1}^{+2} y\,dx = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 + C\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + C\right) = -4\,\frac{1}{2}.$$

Der Inhalt dieses Flächenteiles hat das negative Vorzeichen, weil die Ordinaten zwischen L und E negativ sind. Die algebraische Summe aus den zwei berechneten Flächenteilen ist daher $8\frac{2}{3} - 4\frac{1}{2} = 4\frac{1}{6}$. Dieses Resultat kann indessen auch direkt erhalten werden. Es ist nämlich

$$\int_{-1}^{+4} y\,dx = \left(\frac{64}{3} - \frac{16}{2} - 8 + C\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + C\right) = 4\,\frac{1}{6}.$$

Dieser Wert $4\frac{1}{6}$ als Rechteck gedacht, hat nach § 107, Gleichung (3), zur Grundlinie $B'L = c - b = 4 - (-1) = 5$ und somit zur mittleren Höhe $f[b + \alpha(c - b)] = 4\frac{1}{6} : 5 = \frac{5}{6}$. Dieser Ordinate entspricht, zufolge der gegebenen Gleichung, eine Abscisse $= 2{,}26$. Es ist daher

$$b + \alpha(c - b) = 2{,}26, \qquad -1 + \alpha[4 - (-1)] = 2{,}26,$$

$$\alpha = 0{,}65.$$

Man erkennt hieraus die Bedeutung der Grösse α im Ausdrucke der Gleichung (3), § 107.

110. Fläche der Ellipse. Die Gleichung der Ellipse für den Mittelpunkt ist $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$. Mithin das Flächenelement

$$y\,dx = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

und das unbestimmte Integral hiervon nach Gleichung (10), § 90

$$\frac{b}{a}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right] + C.$$

Für $x = 0$ wird die rechte Seite dieser Gleichung $= C$, da $\arcsin 0$ verschwindet, also $C = 0$. Mithin ist die Fläche über der Abscisse x:

$$\frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right].$$

Um den vierten Teil der Ellipsenfläche zu erhalten, muss man x von 0 bis a nehmen. Nun wird die rechte Seite dieser Gleichung

für die obere Grenze $x = a$ zu $\frac{ba}{2}\arcsin 1 = \frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$,

für die untere Grenze $x = 0$ zu 0.

Folglich die Differenz dieser Werte

$$\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}ab.$$

Mithin ist die ganze Ellipsenfläche $= \pi ab$.

111. Fläche des Kreises. Ersetzt man im Vorhergehenden das Verhältnis $b:a$ durch 1, so erhält man die Gleichungen für die Quadratur des Kreises.

In § 14 wurde auch als Differential der Kreisfläche die Formel angegeben

$$dF = 2\pi x\,dx.$$

Mithin erhält man für die Kreisfläche und den Kreisring

$$F = \int_0^R 2\pi x\,dx = \pi R^2; \qquad F = \int_r^R 2\pi x\,dx = \pi(R^2 - r^2).$$

112. Fläche der Hyperbel. Die Gleichung der Hyperbel für den Mittelpunkt ist $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Folglich das Flächenelement

$$y\,dx = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$$

Integriert man nach Gleichung (11), § 90, so wird

$$(1) \quad \int y\,dx = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\, l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right] + C.$$

In diesen Gleichungen muss $x > a$ sein. Um deshalb die Fläche zu finden, die zwischen der Abscissenachse, der Ordinate y und dem betreffenden Hyperbelbogen liegt, muss man dieses Integral von $x = a$ bis $x = x$ nehmen. Nun wird die rechte Seite von (1) für $x = a$ zu

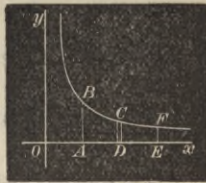
$$-\frac{b}{2a}\cdot a^2\, l\, a + C.$$

Zieht man diesen Wert des Integrals von (1) ab, so erhält man die gesuchte Fläche

$$(2) \quad \int_a^x y\,dx = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\, l\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right].$$

113. Quadratur der gleichseitigen Hyperbel. Die Asymptoten dieser Hyperbel stehen rechtwinkelig aufeinander. Nimmt man dieselben als Koordinatenachsen O x, O y (Fig. 35) an, so ist die Gleichung der Hyperbel $y' x' = m^2$. Der Einfachheit wegen schreibe man $\frac{y'}{m} \cdot \frac{x'}{m} = 1$ und bezeichne die Brüche mit y und x; dann erhält man als Gleichung der Hyperbel

Fig. 35.



$$xy = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{x}.$$

Wenn die Abscisse O A = 1, so ist die entsprechende Ordinate A B = 1. Es seien x = O D, y = C D die Koordinaten eines Hyperbelpunktes C. Lässt man x um d x zunehmen, so ist das Flächenelement längs der Ordinate C D

$$y\,dx = \frac{dx}{x}.$$

Folglich die Fläche zwischen der Abscissenachse und der Kurve für unbestimmte Grenzen von x

$$(1) \qquad \int \frac{dx}{x} = l\,x + C.$$

Rückt man die Ordinate C D gegen die Ordinatenachse hin, bis sie mit ihr zusammenfällt, so ist auch die zwischenliegende Fläche = 0; folglich gibt (1)

$$0 = -\infty + C.$$

Also ist die Konstante $C = \infty$. Setzt man x = 1 in (1) ein, so stellt die linke Seite der Gleichung die Fläche y O A B dar; folglich

$$\text{Fläche } yOAB = C = \infty.$$

Hieraus erkennt man die geometrische Bedeutung der Konstanten C.

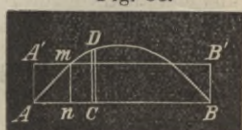
Ist E F eine Ordinate für die Abscisse O E = a, so ist

$$(2) \qquad \int_1^a \frac{dx}{x} = l\,a = \text{Fläche } ABFE.$$

Diese Fläche ist somit der natürliche Logarithmus ihrer Abscisse a. Wegen dieser Eigenschaft werden die natürlichen Logarithmen auch *hyperbolische* genannt (S. 27).

114. Fläche der Sinuskurve. Eine Halbkreislinie, beschrieben mit dem Radius 1, werde in eine Gerade A B (Fig. 36) ausgestreckt. Das Stück A C = x derselben bezeichnet daher einen Bogen des Kreises. Trägt man eine Reihe solcher Bogen ab und errichtet in den Endpunkten derselben Ordinaten D C, die = sin x sind, und verbindet die Endpunkte dieser Ordinaten, so entsteht die Sinuskurve. Die Gleichung derselben ist daher, wenn die Ordinaten mit y bezeichnet werden,

Fig. 36.



$$(1) \qquad y = \sin x.$$

Mithin das Flächeninhalt längs der Ordinate $CD = y\,dx = \sin x\,dx$. Allein es ist

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Folglich das Flächenstück ACD und die ganze Fläche ADB

$$(2) \qquad \int_0^x \sin x\,dx = 1 - \cos x; \qquad \int_0^\pi \sin x\,dx = 2.$$

Verwandelt man diese Fläche in ein Rechteck $ABB'A'$ mit einer Höhe $BB' = h$, so ist der Inhalt desselben $= \pi h$; daher

$$\pi h = 2; \qquad h = \frac{2}{\pi} = 0{,}636\,6\,..$$

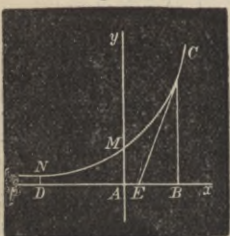
Schneidet die Gerade $A'B'$ die Kurve in m, so ist die Ordinate $mn = h$. Ist der entsprechende Bogen $An = \alpha$, so wird $h = \sin\alpha = 0{,}636\,6$; daher $\alpha = 39{,}5^0$.

115. Quadratur der logarithmischen Linie. Die Gleichung dieser Linie CMN (Fig. 37) ist

$$(1) \qquad x = l\,y.$$

Für Werte von y, die kleiner sind als 1, wird x negativ; solche Werte geben den Kurvenast MN, der sich immer mehr der Abscissenachse nähert und dieselbe für $y = 0$, also $x = -\infty$ erreicht. Wenn $y = 1$, so wird $x = 0$. Diese Werte geben den Durchschnitt M der Kurve mit der Ordinatenachse. Wenn y von 1 an wächst, so entfernt sich der Kurvenast MC von beiden Achsen. Geht man von den Logarithmen der Gleichung (1) zu den Zahlen über, so ist $y = e^x$; folglich das Flächenelement $y\,dx = e^x\,dx$. Mithin durch Integration

Fig. 37.



$$(2) \qquad \int_0^x e^x\,dx = e^x - 1,$$

$$(3) \qquad \int_{-x}^0 e^x\,dx = 1 - e^{-x}.$$

Wenn $x = AB$, so stellt das Integral (2) die zwischen den Ordinaten BC und AM liegende Fläche dar. Wenn $-x = AD$, so ist das Integral (3) die Fläche zwischen den Ordinaten DN und AM. Wird die Abscisse in (3) bis $-\infty$ erweitert, so wird $e^{-x} = 0$; folglich ist die zwischen der Abscissenachse und der Kurve gelegene Fläche, von der Ordinatenachse an nach links ins Unendliche reichend, $= 1$.

116. Quadratur der Cykloide. Nach § 101, Fig. 28, ist das Element der Fläche ACE

$$y\,dx = a^2 (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2 (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi.$$

Setzt man hierin $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$, so wird

$$y\,dx = a^2\left(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi.$$

Hiervon ist das Integral

$$\int y\,dx = a^2\left(\frac{3\varphi}{2} - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right) + C.$$

Nimmt man dieses Integral rechts zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$, so erhält man

$$\text{Fläche AEC} = a^2\left(\frac{3\varphi}{2} - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right).$$

Wenn hierin φ bis zu 2π ausgedehnt wird, so erhält man den Inhalt der ganzen Fläche zwischen der Cykloide und der Grundlinie $= 3\pi a^2$. Derselbe ist also das Dreifache vom Inhalte des Rollkreises.

Verwandelt man diese Fläche in ein Rechteck mit der Grundlinie $AB = 2\pi a$, so wird die Höhe desselben $3\pi a^2 : 2\pi a = \frac{3}{2}a$. Dieser Wert ist das arithmetische Mittel aus den unendlich vielen Ordinaten, die zwischen A und B, je in einem Abstande dx voneinander, errichtet werden können. Wird diese mittlere Ordinate erreicht, nachdem sich der Rollkreis um einen Winkel $\varphi = \alpha$ gedreht hat, so folgt (S. 113) aus der allgemeinen Gleichung $y = a(1 - \cos\varphi)$ für diese Ordinate

$$\frac{3}{2}a = a(1 - \cos\alpha);\ \cos\alpha = -0{,}5,$$

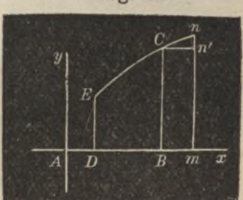
welcher Gleichung die Werte $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ und $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ entsprechen. Bei diesen Winkeln schneidet daher die obere Rechtecksseite die Cykloide.

V. Inhalt der Rotationsflächen.

117. Ausdruck für das Element der Rotationsfläche. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve EC (Fig. 38). Dieselbe mache eine ganze Drehung um die Abscissenachse. Man soll den Inhalt der von der Kurve beschriebenen Oberfläche bestimmen.

Die Koordinaten des Kurvenpunktes C seien x, y, die Länge der Generatrice $CE = s$. Da s eine Funktion von x ist, so wird auch die Rotationsfläche von x abhängen und durch $F(x)$ bezeichnet werden können. Nimmt x um $\triangle x = Bm$ zu, so ändert sich $F(x)$ um $\triangle F(x)$, y um $\triangle y = nn'$ und s um $\triangle s = Cn$. Die Aenderung von $\triangle y$ kann positiv oder negativ sein, je nachdem die Kurve von C aus steigt oder fällt. Legt man durch die Kurvenpunkte C und n eine Sehne, so ist deren Länge $= \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$. Diese Sehne ist kürzer als der Bogen $\triangle s$. Dreht

Fig. 38.



sich die Sehne mit der Kurve um die Abscissenachse, so beschreibt die Sehne den Mantel eines Kegelstumpfes. Da die Halbmesser dieses Mantels y und $y \pm \triangle y$ sind, so ist sein Inhalt $= \pi (y + y \pm \triangle y) \cdot \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$. Dieser Kegelmantel ist kleiner als die Zone $\triangle F(x)$, die vom Bogen $\triangle s$ beschrieben wird; folglich wird sein

$$\frac{\triangle F(x)}{\pi (2y \pm \triangle y) \triangle x \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2}} > 1.$$

Nimmt hierin $\triangle x$ ohne Aufhören ab, so nähert sich die Zone dem Kegelmantel als einer Grenze. Diese Grenze wird erreicht, wenn $\triangle x$ zu dx wird. Alsdann reduziert sich $2y \pm \triangle y$ auf $2y$, die Verhältnisse $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, $\frac{\triangle F(x)}{\triangle x}$ werden zu Differentialquotienten, und man erhält

$$\frac{dF(x)}{2\pi y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 1.$$

Da $dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ durch das Differential ds des Bogens (§ 95) ersetzt werden kann, so findet man als Differential der Rotationsfläche

(1) $$dF(x) = 2\pi y\, ds.$$

Die Grösse $2\pi y\, ds$ ist das Flächenelement, das von ds, im Abstande y von der Achse, bei der Rotation beschrieben wird. Durch Integration der Gleichung (1) erhält man den Inhalt der Rotationsfläche

(2) $$F(x) = 2\pi \int y\, ds.$$

Die Herstellung dieses Integrals heisst auch Komplanation der Rotationsflächen.

118. Inhalt des Mantels eines geraden Kegels. Die Achse des Rotationskegels sei h, der Halbmesser der Grundfläche r, der Halbmesser eines Schnittes im Abstande x von der Kegelspitze, normal zur Achse, gleich y; es ist

$$y : x = r : h, \qquad y = \frac{r}{h} x, \qquad dy = \frac{r}{h} dx,$$

mithin das Element ds der Seitenlinie des Kegels

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h} dx.$$

Somit ist die unendlich schmale Zone $2\pi y\, ds$, die ds bei der Drehung um die Achse beschreibt,

$$dF(x) = \frac{2\pi r \sqrt{h^2 + r^2}}{h^2} x\, dx,$$

und der Mantel des Kegels für unbestimmte Grenzen von x, indem man integriert,

$$F(x) = \frac{2\pi r\sqrt{h^2+r^2}}{h^2} \cdot \frac{x^2}{2} + C.$$

Folglich der Kegelmantel zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = h$

$$F(h) = \pi r\sqrt{h^2+r^2}.$$

119. Oberfläche der Kugel und der Kugelzone. Die Kugeloberfläche entsteht durch Drehung eines Kreises um seinen Durchmesser. Ist der Halbmesser des Kreises r, so wird sein

$$y^2 = r^2 - x^2, \qquad dy = -\frac{x}{y}dx,$$

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{r\,dx}{y}.$$

Hiernach wird das Flächenelement $2\pi y\,ds$ der Kugel $= 2\pi r\,dx$ und die ganze Kugelfläche, indem man von $x = -r$ bis $x = +r$ integriert,

$$2\pi r\int_{-r}^{+r} dx = 4\pi r^2.$$

Stehen die beiden parallelen Ebenen, die eine Kugelzone ausschneiden, vom Mittelpunkte der Kugel nach derselben Seite hin um h und h′ ab, so ist der Inhalt dieser Zone

$$2\pi r\int_{h}^{h'} dx = 2\pi r(h' - h).$$

120. Oberfläche des Paraboloides. Diese Oberfläche entsteht durch Rotation einer Parabel um ihre Achse. Die Scheitelgleichung der Parabel ist

$$y = \sqrt{2px}, \quad \text{folglich} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}},$$

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}.$$

Mithin das Element $2\pi y\,ds$ der Rotationsfläche, die mit F(x) bezeichnet werde,

$$dF(x) = 2\pi\sqrt{p}\sqrt{2x+p}\,dx.$$

Um integrieren zu können, setzt man

$$2x + p = z, \qquad \text{also} \qquad dx = \frac{1}{2}dz,$$

und erhält

$$dF(x) = \pi\sqrt{p}\,z^{\frac{1}{2}}dz; \qquad F(x) = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\,z^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p}(2x+p)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Für $x = 0$ wird auch die Paraboloidfläche $F(x) = 0$. Diese Werte, in die letzte Gleichung eingesetzt, geben

$$0 = \frac{2}{3}\pi p^2 + C.$$

Führt man diesen Wert von C in die Gleichung für $F(x)$ ein, so erhält man die Paraboloidfläche von der Höhe x, vom Scheitel an gerechnet,

$$F(x) = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\left[(2x + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

121. Oberfläche des Ellipsoides. Diese Oberfläche entsteht durch Rotation einer Ellipse um ihre grosse Achse. Nun ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{folglich} \quad dy = \frac{b}{a}\frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Mithin wird das Flächenelement

$$2\pi y\,ds = 2\pi\frac{b}{a}dx\sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}.$$

Setzt man $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, so dass ε die numerische Exzentrizität der Ellipse bedeutet, so wird das Flächenelement gleich

$$2\pi\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}\,dx.$$

Dividiert man noch unter dem Wurzelzeichen durch ε^2 und integriert nach Gleichung (10), § 90, so erhält man

$$2\pi\frac{b\varepsilon}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon^2}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right] + C.$$

Für $x = 0$ muss dieses Integral $= 0$ sein; folglich ist auch $C = 0$.

Zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ liegt die halbe Oberfläche des Ellipsoides. Der vorstehende Ausdruck gibt hierfür, da $a^2 - a^2\varepsilon^2 = b^2$ ist,

$$\pi b^2 + \frac{\pi a b}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon.$$

Wenn das Ellipsoid in eine Kugel übergeht, so ist $b = a$, $\varepsilon = 0$ und

$$\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon} = 1.$$

Folglich die halbe Oberfläche der Kugel $= 2\pi a^2$.

122. Oberfläche des abgeplatteten Sphäroides. Dreht sich die Ellipse, deren Mittelpunktsgleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist, um ihre Achse $2b$, so beschreibt dieselbe ein abgeplattetes Sphäroid. Das Bogenelement

$$ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{a}{b}\frac{\sqrt{b^4 + y^2(a^2 - b^2)}}{bx}dy$$

beschreibt während der Drehung ein Flächenelement gleich

$$2\pi x\,ds = \frac{2\pi a}{b^2}\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\,dy.$$

Setzt man $a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$ und dividiert unter dem Wurzelzeichen durch $a^2\varepsilon^2$, so wird das Flächenelement

$$(1) \qquad 2\pi x\,ds = \frac{2\pi a^2\varepsilon}{b^2}\,dy\sqrt{\frac{b^4}{a^2\varepsilon^2} + y^2}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = b$ gibt die halbe Oberfläche des Körpers. Nun ist nach Gleichung (11), § 90:

$$\int dy\sqrt{\frac{b^4}{a^2\varepsilon^2} + y^2} = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{b^4}{a^2\varepsilon^2} + y^2} + \frac{b^4}{2a^2\varepsilon^2}\,l\left(y + \sqrt{\frac{b^4}{a^2\varepsilon^2} + y^2}\right) + C.$$

Folglich ist für die halbe Oberfläche des Sphäroides

$$\int_0^b dy\sqrt{\frac{b^4}{a^2\varepsilon^2} + y^2} = \frac{b^2}{2a\varepsilon}\left[a + \frac{b^2}{a\varepsilon}\,l\,\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right],$$

und diese halbe Oberfläche selbst, unter Benutzung des Integrales von (1),

$$(2) \qquad F = \pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon}\,l\,\frac{a}{b}(1+\varepsilon).$$

Hierin lässt sich der logarithmische Faktor wie folgt umgestalten. Aus $a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$ folgt

$$a^2(1-\varepsilon^2) = b^2; \qquad \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)},$$

und indem man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt,

$$2\,l\,\frac{a}{b} = -\,l(1+\varepsilon) - l(1-\varepsilon).$$

Dividiert man hier durch 2 und addiert auf beiden Seiten $l(1+\varepsilon)$, so wird

$$l\,\frac{a}{b}(1+\varepsilon) = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

wodurch nun Gleichung (2) übergeht in

$$(3) \qquad F = \pi a^2 + \frac{\pi b^2}{2\varepsilon}\,l\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Löst man $l\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ nach Gleichung (1), § 70, in eine Reihe auf, so hat man für die halbe Oberfläche

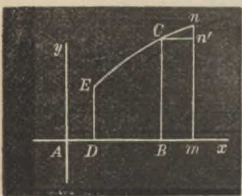
$$(4) \qquad F = \pi a^2 + \pi b^2\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^4}{5} + \frac{\varepsilon^6}{7} + \ldots\right).$$

Die Reihe in der Klammer ist konvergent für alle Werte von ε zwischen $\varepsilon = -1$ bis $\varepsilon = +1$, also für alle denkbaren Werte von ε. Wenn $b = a$, so wird $\varepsilon = 0$ und $F = 2\pi a^2$, wie es sein soll.

VI. Inhalt der Rotationskörper.

123. Ausdruck für das Element eines Rotationskörpers. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve CE (Fig. 39). Man ziehe zwei Ordinaten CB und ED dieser Kurve und bestimme das Volumen, das die Fläche BCED bei einer ganzen Rotation um die Abscissenachse beschreibt.

Fig. 39.



Die Koordinaten des Kurvenpunktes C seien $AB = x$, $BC = y$. Da die Fläche, die den Körper beschreibt, von x abhängt, so ist auch der Inhalt dieses Körpers eine Funktion von x. Man bezeichne diesen Inhalt mit $F(x)$. Lässt man x um $\triangle x = Bm$ zunehmen, so ist die entsprechende Ordinate $mn = y \pm \triangle y$. Dadurch wächst das Volumen des Rotationskörpers um $\triangle F(x)$. Somit ist $\triangle F(x)$ das von der Flächenzunahme BmnC beschriebene Volumen. Wenn $mn = y + \triangle y$, so ist $\pi (y + \triangle y)^2 \triangle x$ ein Cylinder, der um $\triangle F(x)$ und $\pi y^2 \triangle x$ ein Cylinder, der in $\triangle F(x)$ beschrieben gedacht werden kann. Der erstere Cylinder ist grösser, der letztere kleiner als $\triangle F(x)$. Folglich hat man

$$\frac{\triangle F(x)}{\pi (y + \triangle y)^2 \triangle x} < 1, \qquad \frac{\triangle F(x)}{\pi y^2 \triangle x} > 1$$

oder auch

$$\frac{\triangle F(x)}{\triangle x} < \pi (y + \triangle y)^2, \qquad \frac{\triangle F(x)}{\triangle x} > \pi y^2.$$

Wenn hierin $\triangle x$ abnimmt, so nähert sich $y + \triangle y$ der Grösse y als einer Grenze. Wird $\triangle x$ zu dx, so wird aus beiden Ungleichungen die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{dF(x)}{dx} = \pi y^2, \quad dF(x) = \pi y^2 dx.$$

Die Grösse $\frac{dF(x)}{dx}$ ist der Differentialquotient des Rotationskörpers und $dF(x)$ sein Differential, die Grösse $\pi y^2 dx$ ein Cylinder von der Grundfläche πy^2 und der unendlich kleinen Höhe dx. In diesem Sinne sagt man, es nehme das Volumen des Körpers um $\pi y^2 dx$ zu, wenn x in $x + dx$ übergeht. Die Ermittelung von $F(x)$ heisst auch Kubatur.

124. Inhalt eines geraden Kreiskegels. Seine Höhe sei h, der Halbmesser seiner Grundfläche r. Legt man in den Abständen x und $x + dx$ von der Kegelspitze ebene Schnitte durch den Körper, senkrecht zur Achse, und bezeichnet den Halbmesser des ersteren dieser Schnitte mit y, so ist

$$x : y = h : r, \qquad y = \frac{r}{h} x,$$

mithin das zwischen den beiden Schnitten enthaltene Körperelement

$$\pi y^2 \, d x = \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 \, d x.$$

Das unbestimmte Integral hiervon ist

$$\pi \frac{r^2}{h^2} \int x^2 \, d x = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{x^3}{3} + C.$$

Folglich ist der Inhalt des ganzen Kegels

$$\pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, d x = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

und der Inhalt eines abgestumpften Kegels, dessen Grundflächen um h und h' von der Spitze abstehen,

$$\pi \frac{r^2}{h^2} \int_{h'}^h x^2 \, d x = \frac{\pi r^2}{3 h^2} (h^3 - h'^3).$$

125. Inhalt einer Kugel. Die Kugel entsteht durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser. Nimmt man diesen Durchmesser als Abscissenachse und einen seiner Endpunkte als Anfangspunkt der Achsen an, so ist die Gleichung des Kreises

$$y^2 = 2 r x - x^2.$$

Legt man in den Abständen x und $x + d x$ vom Anfangspunkte zwei ebene Schnitte durch die Kugel, senkrecht auf die Drehachse, so ist das zwischen ihnen liegende Körperelement

$$\pi y^2 \, d x = \pi (2 r x - x^2) \, d x.$$

Die Integration dieses Differentials gibt

$$(1) \qquad \pi \int (2 r x - x^2) \, d x = \pi \left(r x^2 - \frac{x^3}{3} \right) + C.$$

Folglich ist der Inhalt der ganzen Kugel

$$(2) \qquad \pi \int_0^{2 r} (2 r x - x^2) \, d x = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

der Inhalt einer körperlichen Zone, deren parallele Grundflächen um h und h' vom Anfangspunkte der Achsen abstehen, nach Gleichung (1)

$$(3) \qquad \pi \left(r h^2 - \frac{h^3}{3} \right) - \pi \left(r h'^2 - \frac{h'^3}{3} \right)$$

und der Inhalt eines Kugelsegments von der Höhe h

$$(4) \qquad \pi \int_0^h (2 r x - x^2) \, d x = \pi \left(r h^2 - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3 r - h).$$

Nach § 14 ist das Volumenelement einer Kugel

$$dV = 4\pi x^2 dx,$$

folglich, indem man integriert, das Volumen der vollen und der hohlen Kugel

(5) $$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3; \quad V = \tfrac{4}{3}\pi (R^3 - r^3).$$

126. Inhalt des Ellipsoides. Dasselbe entsteht durch Drehung einer Ellipse um ihre grosse Achse. Aus der Gleichung $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ der Ellipse könnte der Wert des Körperelementes $\pi y^2 dx$ wie bei der letzten Aufgabe über die Kugel dargestellt werden. Allein statt dessen setze man $x = a \cos \varphi$ und erhält vermöge der Gleichung der Ellipse $y = b \sin \varphi$ und durch Differentiation $dx = -a \sin \varphi \, d\varphi$.

Mit Hilfe dieser Werte erhält man

(1) $$\pi y^2 dx = -\pi a b^2 \sin^3\varphi \, d\varphi.$$

Nun ist aber nach Gleichung (12), § 88

$$\int \sin^3\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{3}\sin^2\varphi \cos\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi + C,$$

folglich der Inhalt des Ellipsoides für unbestimmte Grenzen

$$\pi \int y^2 dx = \frac{\pi a b^2}{3}(\sin^2\varphi \cos\varphi + 2\cos\varphi) + C.$$

Für $x = 0$ bis $x = a$ erhält man das halbe Ellipsoid. Diesen Grenzen entsprechen aber die Werte $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 0$. Mithin ist das halbe Ellipsoid

(2) $$-\pi a b^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3\varphi \, d\varphi = \frac{2}{3}\pi a b^2.$$

127. Inhalt des abgeplatteten Sphäroides. Dieser Körper entsteht, wenn sich eine Ellipsenfläche um ihre kleine Achse dreht. Es gelte die Bezeichnung der vorigen Aufgabe. Legt man zwei ebene Schnitte durch den Körper in den Abständen y und $y + dy$ vom Mittelpunkte des Körpers, senkrecht zur kleinen Achse, so ist das von diesen Schnitten eingeschlossene Körperelement $= \pi x^2 dy$. Da nun aber

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi, \qquad dy = b\cos\varphi \, d\varphi,$$

so wird das Körperelement

(1) $$\pi x^2 dy = \pi a^2 b \cos^3\varphi \, d\varphi.$$

Das Integral hiervon ist aber nach Gleichung (13), § 88

$$\pi a^2 b \int \cos^3\varphi \, d\varphi = \frac{\pi a^2 b}{3}(\cos^2\varphi \sin\varphi + 2\sin\varphi) + C.$$

Um das halbe Sphäroid zu erhalten, muss y zwischen den Grenzen 0 und b, also φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ genommen werden. Somit ist der Inhalt des halben Körpers

$$\pi\, a^2\, b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\,\varphi = \frac{2}{3}\,\pi\, a^2\, b. \tag{2}$$

Wird die Erde als elliptisches Sphäroid angesehen, so kann ihr Inhalt vermittelst dieser Formel berechnet werden. Man schreibe

$$\frac{4}{3}\,\pi a^2 b = \frac{1}{6\,\pi^2} \cdot \frac{b}{a}\,(2\,\pi\, a)^3.$$

Nun ist der Erdumfang $2\,\pi\, a = 5\,400$ geogr. Meilen und $\frac{b}{a} = \frac{288}{289}$; folglich der Inhalt der Erde

$$\frac{1}{6\,\pi^2} \cdot \frac{288}{289}\,(5\,400)^3 = 26\,500 \text{ Millionen Kubikmeilen.}$$

128. Inhalt eines Paraboloides. Es drehe sich eine Parabelfläche um ihre Achse. Da die Gleichung der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$, so ist das scheibenförmige Körperelement dieses Rotationskörpers

$$\pi\, y^2\, d\,x = 2\,\pi\, p\, x\, d\,x, \tag{1}$$

folglich das Paraboloid von der Höhe x, vom Scheitel an gerechnet,

$$2\,\pi\, p \int_0^x x\, d\,x = \pi\, p\, x^2 = \frac{1}{2}\,\pi\, x\, y^2, \tag{2}$$

d. h. gleich der Hälfte vom umschriebenen Cylinder.

Die Schicht zwischen den Grenzen x_0 und x, entsprechend den Ordinaten y_0 und y, wird

$$\pi\, p\,(x^2 - x_0{}^2).$$

Allein es ist $x^2 - x_0{}^2 = (x + x_0)(x - x_0)$. Setzt man $x - x_0 = h$, so wird der vorstehende Inhalt

$$\frac{\pi\, h}{2}\,(2\,p\,x + 2\,p\,x_0) = \frac{\pi\, h}{2}\,(y^2 + y_0{}^2).$$

Der Inhalt des Kegelstumpfes mit den Grundflächen $\pi\, y^2$ und $\pi\, y_0{}^2$ und der Höhe h ist

$$\frac{\pi\, h}{3}\,(y^2 + y_0{}^2 + y\, y_0).$$

Folglich der Unterschied zwischen der Parabelschicht und dem ihr einbeschriebenen Kegelstumpfe gleich

$$\frac{\pi\, h}{6}\,(y - y_0)^2. \tag{3}$$

129. Inhalt eines Hyperboloides. Wenn sich eine Hyperbelfläche um ihre grosse Achse dreht, so beschreibt sie zwei getrennte Körper, die man Hyperboloide nennt. Die Gleichung der Hyperbel für den Mittelpunkt ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2),$$

mithin das Körperelement, senkrecht zur Drehachse

$$(1) \qquad \pi\, y^2\, d\, x = \pi\, \frac{b^2}{a^2}\, (x^2 - a^2)\, d\, x,$$

und das Hyperboloid, das mit $F(x)$ bezeichnet werde, indem man integriert,

$$(2) \qquad F(x) = \pi\, \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) + C.$$

Lässt man hierin x bis auf a abnehmen, so verschwindet das Hyperboloid, weil dasselbe nur bis zum Scheitel reicht. Da für $x = a$ somit $F(x) = 0$ wird, so erhält man aus der Gleichung (2)

$$(3) \qquad 0 = \pi\, \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a^3}{3} - a^3 \right) + C.$$

Setzt man den Wert der Konstanten C aus (3) in (2) ein, oder, was auf das Gleiche herauskommt, zieht man Gleichung (3) von (2) ab, oder integriert man (1) zwischen den Grenzen $x = a$ bis $x = x$, so erhält man das Hyperboloid zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = x$; nämlich

$$(4) \qquad F(x) = \pi\, \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x + \frac{2\, a^3}{3} \right).$$

VII. Bestimmung von Kurven aus gegebenen Eigenschaften.

130. Sinn der Aufgaben. Bei der Untersuchung über das Maximum und Minimum der Funktionen, der Methode der Tangenten (§ 49 und 54), der Quadratur, Rektifikation der Kurven etc., wurde immer eine bestimmte Funktion vorausgesetzt und eine gewisse Eigenschaft derselben nachgewiesen. Man kann aber auch die umgekehrte Aufgabe stellen, aus einer gegebenen Eigenschaft der Funktion die Funktion und die ihr entsprechende Kurve abzuleiten. Einzelne Beispiele werden das Verfahren zeigen.

131. Form einer Kurve mit konstanter Subtangente. Diese Konstante sei $= a$; da der Ausdruck der Subtangente nach § 49, Gleichung (1) $= y\, \frac{d\, x}{d\, y}$ ist, so wird im Sinne der Aufgabe sein

$$y\, \frac{d\, x}{d\, y} = a, \qquad d\, x = a\, \frac{d\, y}{y}.$$

Wird die letztere Gleichung integriert, so kommt

$$x = a\, l\, y + C.$$

Gesetzt es sei für $y = 1$ die Abscisse $x = 0$, so wird auch die Konstante $C = 0$. Folglich ist die Gleichung der gesuchten Kurve

$$x = a\, l\, y, \qquad \text{oder} \qquad y = e^{\frac{x}{a}}.$$

132. Form einer Kurve mit konstanter Subnormale. Ist diese Konstante $= a$, so hat man nach Gleichung (1), § 49

$$y \frac{dy}{dx} = a, \qquad y\,dy = a\,dx.$$

Durch Integration der letzten Gleichung erhält man

$$\frac{y^2}{2} = ax + C.$$

Wenn für $x = 0$ auch $y = 0$ sein soll, so wird auch $C = 0$. Die Gleichung der gesuchten Kurve ist somit

$$y^2 = 2ax,$$

d. h. die einer Parabel, deren Parameter den Wert $2a$ hat.

133. Form einer Kurve mit konstanter Länge der Tangente. Der Ausdruck für die Länge der Tangente ist nach Gleichung (2), § 49, $y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. Ist a der konstante Wert, so wird man haben

$$y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{y}\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Um diese letztere Gleichung integrieren zu können, setze man

$$(1) \qquad \sqrt{a^2 - y^2} = yz,$$

worin z eine von y abhängige Veränderliche bezeichnet; dann wird

$$dx = z\,dy.$$

Auf das Differential $z\,dy$ wende man Gleichung (1) von § 90

$$\int z\,dy = zy - \int y\,dz$$

über das teilweise Integrieren an und erhält

$$(2) \qquad x = zy - \int y\,dz.$$

Allein aus Gleichung (1) folgt $y = \frac{a}{\sqrt{1 + z^2}}$. Führt man diesen Wert von y in den letzten Teil von (2) ein, so folgt unter Anwendung von Gleichung (3) des § 88

$$\int y\,dz = a\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = a\,l\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) + C.$$

Mit Hilfe dieses Ausdruckes wird (2)

$$x = zy - a\,l\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) + C,$$

oder, wenn man den Wert von z durch y ersetzt,

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - a\,l\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right] + C.$$

Für $y = a$ werde $x = 0$. Diese gleichzeitigen Werte geben $C = 0$. Somit ist die Gleichung der gesuchten Kurve

$$(3) \qquad x = \sqrt{a^2 - y^2} - a\, l\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right].$$

134. Form einer Kurve mit konstanter Länge der Normale. Ist die Konstante $= a$, so wird nach Gleichung (2) des § 49

$$y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a, \quad \text{folglich} \quad dx = \pm \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Integriert man die letzte Gleichung nach Formel (1) des § 88, so kommt

$$x = \pm \int \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm \sqrt{a^2 - y^2} + C.$$

Wenn $y = 0$, so sei $x = a$. Für diese Werte wird $C = 0$; somit

$$x = \pm \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit dem Halbmesser a.

135. Zerlegung eines Rechteckes durch eine Kurve in Teile von gegebenem Verhältnis. Diese Kurve gehe vom Anfangspunkte der Achsen, den Seiten des Rechtecks, aus und entferne sich bis zum Punkte (x, y) von beiden Achsen. Der Kurvenbogen, der zwischen diesem Anfangspunkte und dem Punkte (x, y) liegt, schliesse mit der Abscisse x und der Ordinate y eine Fläche ein, die einen gegebenen Teil vom umschriebenen Rechtecke xy sein soll. Welches ist diese Kurve?

Das Flächenelement der Kurve ist $y\,dx$, also die Fläche $\int y\,dx$. Soll diese Fläche $\frac{1}{n}$ vom Rechteck xy sein, wo n eine positive Zahl, die grösser als 1 ist, bezeichnet, so hat man

$$\int y\,dx = \frac{1}{n}\,xy.$$

Differentiiert man diese Gleichung, so fällt links das Integralzeichen weg, und man erhält

$$y\,dx = \frac{1}{n}\,y\,dx + \frac{1}{n}\,x\,dy$$

und indem man auf beiden Seiten $\frac{1}{n}\,y\,dx$ abzieht, mit n multipliziert und die Variabeln sondert, nämlich y auf die eine, x auf die andere Seite der Gleichung bringt,

$$\frac{dy}{y} = (n-1)\frac{dx}{x}.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$l\,y = (n-1)\,l\,x + C.$$

Für $x = 1$ sei $y = p$; folglich $l\,p = C$. Führt man diesen Wert der Konstanten ein, so folgt

$$l\left(\frac{y}{p}\right) = l\,x^{n-1}.$$

Wenn aber die Logarithmen gleich sind, so müssen es auch die Zahlen sein; folglich ist die Gleichung der gesuchten Kurve

$$y = p\,x^{n-1}.$$

Für $n = \frac{4}{3}$ wird $y^3 = p^3 x$. Diese Gleichung gehört der kubischen Parabel an. Sie teilt das Rechteck in Teile, die sich verhalten wie $3:1$.

Für $n = 1\frac{1}{2}$ wird $y^2 = p^2 x$. Diese Kurve ist eine Parabel, die das Rechteck in zwei Teile teilt, die sich wie $2:1$ verhalten.

Für $n = 2$ wird $y = p\,x$ zur Gleichung einer Geraden, die als Diagonale das Rechteck in zwei gleiche Teile teilt.

136. Entstehung einer Rotationsfläche von gegebenem Inhalte durch Drehung einer Kurve. Diese Kurve gehe vom Anfangspunkte der Achsen aus und werde um die Abscissenachse gedreht. Dabei beschreibe der Bogen, der zwischen diesem Anfangspunkte und dem Punkte (x, y) der Kurve liegt, eine Oberfläche, die das n fache sein soll vom Kreise mit dem Halbmesser y. Welches ist diese Kurve?

Das Bogenelement der Kurve ist $dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. Dasselbe beschreibt während einer vollen Drehung um die Achse ein Flächenelement $= 2\pi y\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. Somit ist die Rotationsfläche gleich

$$2\pi\int y\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

und da die Kreisfläche vom Halbmesser y gleich πy^2, so hat man vermöge der Aufgabe die Bedingungsgleichung

$$2\pi\int y\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = n\pi y^2.$$

Dividiert man durch π und differentiiert, so folgt

$$2y\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = 2n\,y\,dy.$$

Dividiert man durch $2y\,dy$ und quadriert, so kommt

$$dx = \pm\sqrt{n^2-1}\,dy.$$

Wird integriert, so erhält man die gesuchte Gleichung

$$x = \pm\sqrt{n^2-1}\cdot y,$$

worin die Konstante $C = 0$ genommen wurde, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ sein soll. Dies ist die Gleichung einer geraden Linie. Folglich ist die Rotationsfläche eine Kegelfläche und πy^2 die Grundfläche des Kegels. Die Aufgabe ist für jeden Wert von $n > 1$ lösbar. Folglich können Mantelfläche und Grundfläche von Rotationskegeln alle möglichen Verhältnisse zu einander haben.

137. Entstehung eines Rotationskörpers von gegebenem Inhalte durch Drehung einer von einer Kurve begrenzten ebenen Fläche. Diese Kurve gehe vom Anfangspunkte der Achsen aus. Der Kurvenast, der zwischen diesem Anfangspunkte und dem Punkte (x, y) der Kurve liegt, werde um die Abscissenachse gedreht. Dabei beschreibe die Fläche zwischen der Kurve, der Abscisse x und der Ordinate y ein Volumen, das $\frac{1}{n}$ betrage vom Cylinder, dessen Länge die Abscisse x und dessen Halbmesser die Ordinate y ist. Man soll diese Kurve bestimmen.

Das Volumenelement des Rotationskörpers ist nach Gleichung (1), § 123 $= \pi y^2 dx$, also das Volumen $= \pi \int y^2 dx$. Der Inhalt des Cylinders ist $= \pi y^2 x$. Folglich wird man nach der Aufgabe haben

$$\pi \int y^2 dx = \frac{1}{n} \pi y^2 x.$$

Dividiert man durch π und differentiiert, so kommt

$$y^2 dx = \frac{1}{n} y^2 dx + \frac{2}{n} y x dy,$$

ferner durch Sonderung der Veränderlichen

$$2 \frac{dy}{y} = (n-1) \frac{dx}{x}$$

und endlich durch Integration der letzten Gleichung

$$2\, l y = (n-1)\, l x + C.$$

Für $x = 1$ sei $y = a$; folglich wird $2\, l a = C$. Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

$$2\, l \left(\frac{y}{a}\right) = (n-1)\, l x$$

oder

$$l \left(\frac{y}{a}\right)^2 = l x^{n-1}.$$

Geht man noch von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man als gesuchte Gleichung

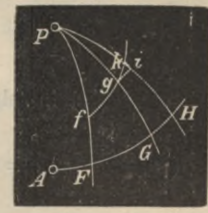
$$y^2 = a^2 x^{n-1}.$$

Soll der Rotationskörper $\frac{1}{2}$ sein vom umschriebenen Cylinder, so wird $n = 2$ und $y^2 = a^2 x$. Folglich ist der Rotationskörper ein Paraboloid.

Soll der Rotationskörper $\frac{1}{3}$ sein vom umschriebenen Cylinder, so wird $n = 3$ und $y = \pm a x$; folglich ist der Rotationskörper ein Kegel.

138. Die loxodromische Linie auf der Kugelfläche. Die Oberfläche der Kugel sei eingeteilt durch Parallelkreise und Meridiane wie diejenige der Globen, auf denen die Erdoberfläche abgebildet wird. Zieht man nun auf der Kugelfläche eine Linie so, dass sie die Meridiane unter konstantem Winkel schneidet, so heisst diese Linie die loxodromische Kurve (Bahn eines Schiffes auf dem Meere). Man soll ihre Gleichung ableiten.

Fig. 40.



Es seien (Fig. 40) P der Pol, A G der Aequator und f g die loxodromische Linie. Legt man durch die Punkte f und g Meridiane, so werde der Aequator von ihnen geschnitten in F und G. Geht der erste Meridian durch A, so stellen die Bogen A F, A G die Längen und F f, G g die Breiten der Punkte f und g dar. Länge und Breite eines Punktes können als Koordinaten derselben angesehen werden. Nun seien:

a der Halbmesser der Kugel,

α der Winkel, unter dem die Meridiane von der Kurve geschnitten werden,

λ_0, β_0 Länge und Breite eines Punktes auf einer Kugelfläche mit dem Halbmesser 1, entsprechend dem Punkte f und

λ, β dasselbe, entsprechend dem Punkte g, so dass die Bogen auf der Kugel mit dem Halbmesser a das a fache von λ_0, β_0, etc. sind.

Lässt man λ zunehmen um $d\lambda$, so wird β übergehen in $\beta + d\beta$. Es sei der Bogen G H auf dem Aequator $= a\,d\lambda$. Man lege durch H den Meridian; wird dieser von der loxodromischen Linie in h, von dem durch g gehenden Parallelkreise in i geschnitten, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck g h i, mit dem rechten Winkel bei i und dem Winkel $g h i = \alpha$, so dass

$$(1) \qquad g i = h i \cdot \operatorname{tang} \alpha.$$

Nun ist $G H = a\,d\lambda$, d. h. gleich dem Bogenelemente $d\lambda$, multipliziert mit dem Radius des Aequators. Gerade so ist das Bogenelement g i gleich dem Differentiale $d\lambda$, multipliziert mit dem Radius $a \cos\beta$ des Parallelkreises in g. Da ferner $h i = a\,d\beta$, so geht (1) über in

$$(2) \qquad d\lambda = \operatorname{tang} \alpha \cdot \frac{d\beta}{\cos\beta}.$$

Dies ist nun die Differentialgleichung der gesuchten Kurve. Um sie zu integrieren, beachte man, dass $\operatorname{tang}\alpha$ konstant ist und dass den Ordinaten β_0, β die Abscissen λ_0, λ entsprechen, so dass

$$(3) \qquad \lambda - \lambda_0 = \operatorname{tang} \alpha \cdot \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\beta}{\cos\beta}.$$

Um $\dfrac{d\beta}{\cos\beta}$ integrieren zu können, setze man $\sin\beta = x$; dann wird $\cos\beta\, d\beta = d x$, also durch Division durch $\cos^2\beta$

$$(4) \qquad \frac{d\beta}{\cos\beta} = \frac{d x}{\cos^2\beta} = \frac{d x}{1 - \sin^2\beta} = \frac{d x}{1 - x^2}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (2) des § 88

$$(5)\qquad \int \frac{d\,x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} + C = l \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Daher geht (4) über in

$$\int \frac{d\,\beta}{\cos\beta} = l \sqrt{\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}} + C$$

und somit (3) in folgende Gleichung der loxodromischen Linie:

$$(6)\qquad \lambda - \lambda_0 = \operatorname{tang}\alpha \left[l \sqrt{\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}} - l \sqrt{\frac{1+\sin\beta_0}{1-\sin\beta_0}} \right].$$

Allein diese Gleichung wird für den Gebrauch auf Schiffen in folgender Weise umgeformt.

Es ist

$$\cos 2\,\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

oder, indem man $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ setzt,

$$\cos 2\,\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{und} \quad \cos 2\,\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

mithin, indem man α für $2\,\alpha$ einführt,

$$\sin\frac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

und durch Division

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Setzt man hierin $\frac{\pi}{2} + \alpha$ statt α, so geht diese Gleichung über in

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}.$$

Daher folgt aus (6) die gesuchte Gleichung

$$(7)\qquad \lambda - \lambda_0 = \operatorname{tang}\alpha \cdot \left[l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta_0}{2}\right)\right].$$

Für die Fahrt eines Schiffes auf dem Meere sind λ_0, β_0 und λ, β die Längen und Breiten der Anfangs- und Endstation der Bahn. Werden diese als gegeben betrachtet, so erhält man mittels (7) die Grösse $\operatorname{tang}\alpha$, d. h. die Richtung, die das Schiff mit Hilfe des Kompasses einschlagen muss.

Für $\lambda_0 = 0$ und $\beta_0 = 0$ geht (7) über in die Gleichung

$$(8)\qquad \lambda = \operatorname{tang}\alpha \cdot l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)$$

einer loxodromischen Linie, die in dem Punkte beginnt, wo der erste Meridian den Aequator schneidet.

139. Die loxodromische Linie auf der Oberfläche des abgeplatteten Sphäroides. Diese Oberfläche entsteht durch Drehung einer Ellipse um ihre kleine Achse. Teilt man diese Oberfläche durch Parallelkreise und Meridiane ein und legt eine Linie so, dass sie die Meridiane unter konstantem Winkel schneidet, so heisst diese Linie die loxodromische Kurve.

Gelten die Figur und Bezeichnungen der vorigen Aufgabe, so sind die Meridiane P F, P G, P H etc. kongruente Ellipsen, deren Mittelpunktsgleichung ist

$$(1) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Das unendlich kleine Dreieck g h i gibt auch hier den Zusammenhang

$$(2) \qquad g\,i = h\,i \cdot \operatorname{tang} \alpha,$$

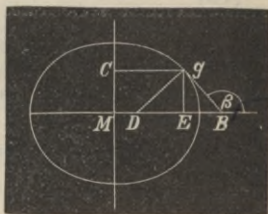
in dem g i das Bogenelement des Parallelkreises durch g und h i das Bogenelement des Meridians darstellen. Diese Bogenelemente haben aber vermöge der abgeplatteten Form des Körpers andere Werte als für die Kugel. Es sind daher zunächst diese Werte zu bestimmen.

Auf dem Aequator ist $G\,H = a\,d\lambda$, auf dem Parallelkreise in gleicher Weise

$$(3) \qquad g\,i = x\,d\lambda,$$

wo $x = M\,E$ (Fig. 41) die Abscisse des Punktes g der Ellipse, also auch den Radius g C des Parallelkreises durch g bezeichnet.

Fig. 41.



Wenn man, um x zu finden, (1) differentiiert, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Nun ist $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels β_1, den die Tangente g B an die Ellipse mit der positiven Richtung der Abscissenachse bildet. Zieht man die Gerade g D senkrecht auf g B, so wird Winkel $g\,D\,B = \beta$. Nun ist $\beta_1 = \frac{\pi}{2} + \beta$, daher

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

und

$$(4) \qquad \operatorname{tang} \beta = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Ist ε die numerische Exzentrizität der Ellipse, so ist

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon, \qquad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Setzt man diesen Wert von b in (4) ein, so wird

$$(5) \qquad x = \frac{a \cos \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta}}$$

und somit nach (3) die eine Seite des unendlich kleinen Dreiecks

$$(6) \qquad g\,i = \frac{a \cos \beta \, d \lambda}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta}}.$$

Die andere Seite h i dieses Dreiecks ist das Bogenelement d s des Meridians, für das in § 100 folgender Ausdruck sich angegeben findet

$$(7) \qquad d\,s = a\,d\,\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi},$$

worin $a \sin \varphi = x$ ist. In Gleichung (7) ist nun φ durch β auszudrücken. Setzt man $a \sin \varphi$ für x in (5) ein, so folgt

$$(8) \qquad \sin \varphi = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta}}.$$

Nun gibt die Differentiation von (8)

$$(9) \qquad d\,\varphi = \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 \beta}\, d\,\beta.$$

Setzt man die Werte von $\sin \varphi$ aus (8) und $d\,\varphi$ aus (9) in (7) ein, so findet man

$$(10) \qquad d\,s = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)\, d\,\beta}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta)^{\frac{3}{2}}}$$

In diesem Ausdrucke für d s ist das positive Zeichen genommen worden, weil s und β zugleich wachsen.

Dieser Wert von d s ist nun nichts anderes als die Seite h i des unendlich kleinen Dreiecks. Mit Hilfe desselben und der Gleichung (6) gibt (2)

$$(11) \qquad d\,\lambda = \operatorname{tang} \alpha \cdot \frac{(1 - \varepsilon^2)\, d\,\beta}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta) \cos \beta}.$$

Diese Gleichung ist für das Sphäroid, was Gleichung (2) des vorigen Paragraphen für die Kugel, nämlich die Differentialgleichung für die loxodromische Linie.

Um sie zu integrieren, bringe man sie auf die Form

$$d\,\lambda = \operatorname{tang} \alpha \left[\frac{d\,\beta}{\cos \beta} - \frac{\varepsilon^2 \cos \beta \, d\,\beta}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta}\right].$$

Da $\varepsilon \cos \beta \, d\,\beta = d\,(\varepsilon \sin \beta)$, so erhält man

$$(12) \qquad \lambda - \lambda_0 = \operatorname{tang} \alpha \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\,\beta}{\cos \beta} - \varepsilon \operatorname{tang} \alpha \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\,(\varepsilon \sin \beta)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta}.$$

Das erste dieser Integrale ist in der vorigen Aufgabe angegeben. Um das zweite abzuleiten, setze man $z = \varepsilon \sin \beta$; es wird

$$d\,(\varepsilon \sin \beta) = d\,z; \qquad \varepsilon^2 \sin^2 \beta = z^2,$$

$$\frac{d\,(\varepsilon \sin \beta)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta} = \frac{d\,z}{1 - z^2};$$

folglich nach der vorigen Aufgabe, Gleichung (5)

$$\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} l \frac{1+z}{1-z} + C = \frac{1}{2} l \frac{1+\varepsilon \sin\beta}{1-\varepsilon\sin\beta} + C.$$

Daher gibt Gleichung (12)

$$(13) \qquad \lambda - \lambda_0 = \operatorname{tang}\alpha \left[l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right) - l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta_0}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{tang}\alpha \left[l \frac{1+\varepsilon\sin\beta}{1-\varepsilon\sin\beta} - l \frac{1+\varepsilon\sin\beta_0}{1-\varepsilon\sin\beta_0}\right].$$

Für $\beta_0 = 0$ beginnt die Kurve im Aequator im Abstande λ_0 vom ersten Meridiane. Für $\beta = 90^0$ wird $\lambda = \infty$, d. h. die Kurve kann den Pol nicht erreichen.

Wenn die Abplattung eine schwache ist, so bleibt das zweite Glied rechts ohne merklichen Einfluss auf den Wert $\lambda - \lambda_0$, wie dies für die Erde der Fall ist.

140. Form der Kettenlinie. Ist eine vollkommen biegsame Kette an ihren Endpunkten befestigt, so wird sie sich senken und eine Kurve bilden, deren Form bestimmt werden soll, unter der Voraussetzung, dass das Gewicht der Kette I) der Länge ihrer horizontalen Projektion, II) der Länge der Kette proportional sei.

Die Kurve wird in einer Vertikalebene liegen, die durch die Aufhängepunkte A, B (Fig. 42) geht. Man lege in dieser Ebene durch den tiefsten Punkt C der Kurve zwei rechtwinkelige Achsen C x, C y, wovon die erstere horizontal liegt. Es seien:

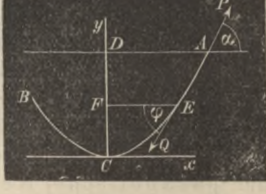
y, x die Koordinaten C F und E F eines Kurvenpunktes E,

α, φ die Winkel, die die Kurve in den Punkten A und E mit der horizontalen Richtung bildet,

P, Q die Spannungen der Kette in den Punkten A und E, in den Richtungen der Tangenten an die Kurve wirksam, und

a, h die horizontale und vertikale Projektion des Kurventeiles A C.

Fig. 42.



Zerlegt man die Kräfte P und Q in die horizontalen Seitenkräfte $P\cos\alpha$, $Q\cos\varphi$, und in die vertikalen Seitenkräfte $P\sin\alpha$, $Q\sin\varphi$, so kann man sich denken, es werde das Kurvenstück A E durch die Kraft $P\cos\alpha$ nach rechts, durch $Q\cos\varphi$ nach links gezogen. Damit dieses Stück in horizontaler Richtung keine Bewegung annimmt, muss also sein

$$(1) \qquad Q\cos\varphi = P\cos\alpha.$$

Diese Gleichung gilt, wo auch der Punkt E auf der Kurve angenommen werde. Daher ist die Spannung der Kette in horizontaler Richtung konstant. Bezeichnet man diese Spannung mit T, so ist

$$(2) \qquad Q\cos\varphi = T.$$

Erste Voraussetzuug. Es sei q das Gewicht der Kette für jede Längeneinheit, in der Richtung der horizontalen Projektion gemessen, also a q das Gewicht des Stückes A C und (a — x) q das Gewicht des Stückes A E.

Die Kraft $P \sin \alpha$ wirkt in A aufwärts, die Kraft $Q \sin \varphi$ in E abwärts. Zu dieser letzteren Kraft kommt noch das Gewicht (a — x) q des Kurvenstückes A E. Die Kräfte in vertikaler Richtung abwärts und aufwärts müssen ebenfalls gleich sein. Dies gibt

$$(3) \qquad Q \sin \varphi + (a - x) q = P \sin \alpha.$$

Dividiert man die Werte von $Q \sin \varphi$ und $Q \cos \varphi$, die die Gleichungen (2) und (3) liefern, durcheinander, so hat man

$$(4) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{P \sin \alpha - (a - x) q}{T}.$$

Für den tiefsten Punkt wird $\varphi = 0$ und $x = 0$; mithin erhält man für diesen Punkt

$$0 = \frac{P \sin \alpha - a q}{T}.$$

Folglich muss der Zähler dieses Wertes = 0 sein, woraus folgt

$$(5) \qquad a = \frac{P \sin \alpha}{q}.$$

Setzt man diesen Wert von a in Gleichung (4) ein, so kommt

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{q x}{T}.$$

Allein nach Gleichung (4), § 10, ist $\operatorname{tang} \varphi = \frac{d y}{d x}$. Folglich wird

$$d y = \frac{q}{T} x \, d x.$$

Durch Integration dieser Formel erhält man die Gleichung

$$(6) \qquad y = \frac{q x^2}{2 T}$$

der Kurve, in der die Konstante C weggelassen wurde, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist. Diese Gleichung

$$x^2 = \frac{2 T}{q} y$$

zeigt, dass die Kurve eine Parabel ist. Man nennt daher diese Kurve die parabolische Kettenlinie. Sie kommt vor bei Draht- und Kettenbrücken, indem die Brückenbahn, die an den Drahtseilen oder Ketten hängt, auf gleiche horizontale Entfernungen gleiche Belastungen hat; ferner bei Seilen und Ketten, die gleichbleibenden Querschnitt haben und durch starke Spannungen nur eine schwache Biegung annehmen etc.

Aus der Gleichung (3) folgt, dass die vertikale Spannung von oben nach unten abnimmt und im tiefsten Punkte = 0 wird. Setzt man in Gleichung (6) für x den Wert von a ein, so wird y zur Ordinate des höchsten Punktes. Man erhält dafür

$$h = \left(\frac{a\,q}{2\,T}\right) a.$$

Was von dem Kurventeile AC gezeigt wurde, gilt auch vom Stücke BC.

Zweite Voraussetzung. Ist q das Gewicht der Kette für jede Längeneinheit derselben, so wird das Gewicht des Stückes $AE = q \cdot AE$ sein etc. Rückt der Punkt E um das Bogenelement ds aufwärts, so nehmen φ zu um $d\varphi$, x um dx, y um dy. Daher wird auch die vertikale Spannung $Q \sin\varphi$ zunehmen um $d(Q \sin\varphi)$. Diese Zunahme ist aber nichts anderes als das Gewicht q ds des Elementes der Kettenlinie. Daher

$$d(Q \sin\varphi) = q\,ds.$$

Führt man hier den Wert von Q aus (2) ein und beachtet, dass T konstant ist, so wird

$$d \operatorname{tang}\varphi = \frac{q}{T}\,ds. \tag{7}$$

Allein es ist nach § 10 und § 95

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx}; \qquad ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Führt man diese Werte in (7) ein, nachdem man $\frac{dy}{dx} = z$ und $\frac{q}{T} = m$ gesetzt hat, so folgt

$$m\,dx = \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}. \tag{8}$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man nach (3), § 88

$$m\,x = l\left(z + \sqrt{1+z^2}\right), \tag{9}$$

wo die Konstante der Integration weggelassen ist, weil für $x = 0$ auch z, d. h. $\frac{dy}{dx} = 0$ wird.

Geht man in (9) von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$e^{mx} = z + \sqrt{1+z^2}.$$

Isoliert man hier die Wurzelgrösse und quadriert, so kommt

$$e^{2mx} - 2\,z\,e^{mx} = 1$$

und, indem man $\frac{dy}{dx}$ für z setzt,

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{mx} - e^{-mx}\right) dx. \tag{10}$$

Schreibt man behufs der Integration

$$d y = \frac{1}{2 m} e^{m x} d(m x) + \frac{1}{2 m} e^{-m x} d(-m x),$$

so gibt die Integration dieser Gleichung nach § 84

$$y = \frac{1}{2 m}[e^{m x} + e^{-m x}] + C.$$

Für $x = 0$ wird auch $y = 0$; daher erhält man für diese Werte

$$0 = \frac{1}{2 m}[1 + 1] + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so ergibt sich als Gleichung der gemeinen Kettenlinie

$$(11) \qquad y = \frac{1}{2 m}[e^{m x} + e^{-m x} - 2].$$

Für $x = a$ wird $y = h$ zur Ordinate des höchsten Punktes der Kurve.

Aus (10) folgt

$$(12) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{2}(e^{m x} - e^{-m x}).$$

Wird hierin $x = a$, so verwandelt sich φ in α; daher

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2}(e^{a m} - e^{-a m}).$$

Aus Gleichung (7) folgt durch Integration

$$(13) \qquad \operatorname{tang} \varphi = m s,$$

worin s den Bogen, von C bis E reichend, bezeichnet.

Geht hierin φ in α über, so wird s zum Bogenstücke CA, das mit S bezeichnet sei. Daher

$$\operatorname{tang} \alpha = m S.$$

Setzt man die beiden Werte von $\operatorname{tang} \varphi$ aus (12) und (13) einander gleich, so wird

$$(14) \qquad s = \frac{1}{2 m}(e^{m x} - e^{-m x}).$$

Entwickelt man die Exponentialgrössen in Reihen, so erhält man nach § 68, Gleichung (4)

$$e^{m x} = 1 + m x + \frac{(m x)^2}{2} + \frac{(m x)^3}{2 \cdot 3} + \frac{(m x)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

$$e^{-m x} = 1 - m x + \frac{(m x)^2}{2} - \frac{(m x)^3}{2 \cdot 3} + \frac{(m x)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots$$

Für ein endliches m, was stets vorausgesetzt werden kann, sind diese Reihen für jeden Wert von x konvergent; daher erhält man

$$(15)\qquad y = \frac{1}{2} m x^2 \left[1 + \frac{(m x)^2}{3 \cdot 4} + \frac{(m x)^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots \right].$$

$m = \frac{g}{H}$.

$$(16)\qquad s = x \left[1 + \frac{(m x)^2}{2 \cdot 3} + \frac{(m x)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots \right].$$

Wird $m = q : T$ sehr klein, sei es, dass q klein oder T gross ist, so wird s nahe gleich x und y sehr klein. In diesem Falle geht Gleichung (15) nahezu über in (6), d. h. die Kettenlinie nähert sich der Parabel.

Wenn die Fläche C E F mit M bezeichnet wird, so wird das Flächenelement $d M = x d y$. Setzt man hier den Wert von $d y$ aus (10) ein, so folgt

$$(17)\qquad M = \frac{1}{2} \int (e^{m x} - e^{-m x}) x \, d x.$$

Nun kann $x e^{m x} d x$ integriert werden nach Gleichung (1) von § 90, indem man setzt $x = u$; $e^{m x} d x = d v$; folglich $v = \frac{1}{m} e^{m x}$, und man erhält

$$\int e^{m x} x \, d x = \frac{x}{m} e^{m x} - \frac{1}{m^2} e^{m x},$$

$$\int e^{-m x} x \, d x = - \frac{x}{m} e^{-m x} - \frac{1}{m^2} e^{-m x}.$$

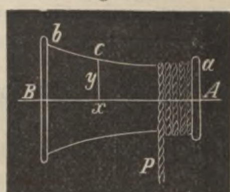
Daher durch Einführen dieser Werte in Gleichung (17)

$$(18)\qquad M = \frac{1}{2 m} \left[x (e^{m x} + e^{-m x}) - \frac{1}{m} (e^{m x} - e^{-m x}) \right].$$

Die Konstante ist weggelassen, weil für $x = 0$ auch $M = 0$ wird.

141. Form einer Seiltrommel für gleiche statische Momente der Last am Seile. Die Achse A B der Trommel (Fig. 43) liege horizontal; ein Schnitt durch die Oberfläche der Trommel längs der Achse gebe die Kurve a c b. Dreht sich die Fläche A B b a um die Achse, so erzeugt sie einen Rotationskörper, über den ein Seil gewickelt sei, an dem eine Last P hänge. Das Seil beginne seine Aufwickelung auf Seite A des kleineren Trommelhalbmessers r. Auf dieser Seite hat das herabhängende Seils eine grösste Länge, die mit L bezeichnet werde. Wickelt sich das Seil auf, so wird der herabhängende Teil kürzer; daher auch leichter; also muss der Halbmesser der Trommel dafür grösser werden, wenn das statische Moment, womit Last und Seil die Trommel drehen, konstant bleiben soll.

Fig. 43.



In einer Entfernung x von a aus, längs der Achse gemessen, sei der Halbmesser der Trommel y und die Länge des herabhängenden Seilstückes z. Bezeichnet man das Gewicht des Seiles für jede Längeneinheit mit p, so zieht bei A ein Gewicht abwärts $= P + pL$ am Hebelarme r und bei c ein Gewicht $= P + pz$ am Hebelarme y. Gemäss der Aufgabe sollen die statischen Momente dieser Kräfte gleich sein; daher

$$(1) \qquad (P + pz)\,y = (P + pL)\,r.$$

Diese Bedingungsgleichung gestattet nun, den Zusammenhang zwischen den Koordinaten x, y der Kurve a c b wie folgt zu bestimmen.

Die Momente (1) sind konstant; setzt man daher

$$(2) \qquad (P + pz)\,y = m,$$

worin die Grösse m konstant ist, so folgt

$$z = \frac{m}{py} - \frac{P}{p},$$

woraus durch Differentiation sich ergibt

$$(3) \qquad dz = -\frac{m}{p} \cdot \frac{dy}{y^2}.$$

Nun ist d z ein Längenelement des Seiles; steigt das Seil um d z, so geht z in z — d z über. Dreht sich dabei die Trommel um einen unendlich kleinen Winkel $d\alpha$, als Bogen gedacht zum Halbmesser 1, so wird ein Punkt der Trommel im Abstande y von der Achse einen Weg $= y\,d\alpha$ zurücklegen. Daher wird sein

$$(4) \qquad y\,d\alpha = -dz.$$

Setzt man nun die beiden Werte von d z aus (3) und (4) einander gleich, so folgt

$$(5) \qquad y\,d\alpha = \frac{m}{p} \cdot \frac{dy}{y^2}.$$

Ist die Dicke des Seiles e, so wird bei jeder vollen Umdrehung der Trommel das herabhängende Seilstück um e in der Richtung der Achse fortrücken, d. h. das Fortrücken ist e für den Drehwinkel 2π; somit $= dx$ für den Drehwinkel $d\alpha$. Aus der Proportion $2\pi : d\alpha = e : dx$ folgt daher

$$(6) \qquad d\alpha = \frac{2\pi}{e}\,dx.$$

Setzt man diese Werte von $d\alpha$ aus (5) und (6) einander gleich, so ist

$$\frac{2\pi}{e}\,dx = \frac{m}{p} \cdot \frac{dy}{y^3}$$

und folglich durch Integration

$$(7) \qquad \frac{2\pi}{e}\,x = -\frac{m}{2py^2} + C.$$

Für $x = 0$ geht y in r über; für diese Werte wird (7) zu

$$0 = -\frac{m}{2pr^2} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (7) ab, so erhält man den gesuchten Zusammenhang

$$(8)\qquad \frac{2\pi}{e}x = \frac{m}{2p}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{y^2}\right].$$

Ist die Länge der Trommel $= b$, so geht für $x = b$ der Radius y über in R. Für diese Werte wird (8) zu

$$\frac{2\pi}{e}b = \frac{m}{2p}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right].$$

Eliminiert man aus den letzten zwei Gleichungen die Grösse $\frac{4\pi p}{e\,m}$, so erhält man als gesuchte Gleichung der Kurve

$$(9)\qquad y^2 = \frac{1}{\frac{1}{r^2} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)\frac{x}{b}}.$$

VIII. Bestimmung von Schwerpunkten.

142. Vom Schwerpunkte im allgemeinen. Alle materiellen Teile eines Körpers werden vermöge der Schwere gegen den Mittelpunkt der Erde gezogen. Für Körper auf der Erdoberfläche können die Richtungen der Kräfte, die den einzelnen Teilen entsprechen, als parallel angesehen werden. Der Angriffspunkt der Mittelkraft dieser parallelen Kräfte heisst der Schwerpunkt des Körpers. Für gewisse einfache Körperformen lässt sich der Schwerpunkt sogleich angeben. So ist der Schwerpunkt einer homogenen Kugel in ihrem Mittelpunkte, der Schwerpunkt eines homogenen Cylinders in der Mitte seiner Achse etc. Es seien

$P, P', P'', ..$ die Gewichte solcher Teile eines Körpers, deren Schwerpunkte man kennt,

$x, x', x'', ..$ die horizontalen Abstände der Schwerpunkte dieser Teile von einer horizontalen Drehachse und

z der horizontale Abstand des Schwerpunktes des ganzen Körpers von dieser Achse.

Dann ist $(P + P' + P'' + ..)z$ das statische Moment des ganzen Körpers und $Px + P'x' + P''x'' + ..$ die Summe der statischen Momente der einzelnen Teile des Körpers. Da beide Werte für den Zustand des Gleichgewichtes einander gleich sein müssen, so hat man

$$(1)\qquad z = \frac{Px + P'x' + P''x'' + ..}{P + P' + P'' + ..} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P},$$

wo der griechische Buchstabe Σ (Sigma) anzeigt, dass eine Summe gleichartiger Teile herzustellen sei. Ist einer dieser Teile das Differential des Ganzen, so geht das Summenzeichen Σ in das Integralzeichen $\int$ über.

Wenn V, V′, V″, .. die Rauminhalte der Teile des Körpers und p das Gewicht der Kubikeinheit der homogenen Masse ist, so ist P = V p, P′ = V′ p, ... Setzt man diese Werte in Gleichung (1), so erhält man

$$(2) \qquad z = \frac{V x + V' x + V'' x'' + \ldots}{V + V' + V'' + \ldots} = \frac{\Sigma V x}{\Sigma V}.$$

Sind die Körperteile Prismen mit gleichen Höhen h und den Grundflächen F, F′, F″, .., so wird V = F h, V′ = F′ h, .. Setzt man diese Werte in (2), so kann man Zähler und Nenner durch h dividieren und erhält

$$(3) \qquad z = \frac{F x + F' x' + F'' x'' + \ldots}{F + F' + F'' + \ldots} = \frac{\Sigma F x}{\Sigma F}.$$

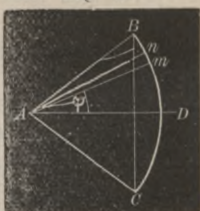
Sind die Körperteile Prismen von gleichen Querschnitten q mit den Längen L, L′, L″, .., so wird V = L q, V′ = L′ q, .., und man erhält aus (2) durch Division des Zählers und Nenners durch q

$$(4) \qquad z = \frac{L x + L' x' + L'' x'' + \ldots}{L + L' + L'' + \ldots} = \frac{\Sigma L x}{\Sigma L}.$$

Das statische Moment kann also, je nach der Aufgabe, durch P x, V x, F x oder L x ausgedrückt werden.

143. Schwerpunkt eines Kreisbogens. Ist der Halbmesser A D (Fig. 44) senkrecht auf der Sehne B C, die durch die Endpunkte des Bogens geht, so liegt der Schwerpunkt des Bogens in diesem Halbmesser. Es sei r der Halbmesser, b die Bogenlänge, a die Sehne, $r\alpha$ = Bogen B D, $r\varphi$ = Bogen D m und der Abstand des Schwerpunktes des Bogens vom Mittelpunkte A = z.

Fig. 44.



Lässt man φ in $\varphi + d\varphi$ übergehen, so geht der Bogen $r\varphi$ in $r(\varphi + d\varphi)$ = D n über, so dass das Bogenelement m n = $r\,d\varphi$ wird. Die Entfernung dieses Elementes von A, in der Richtung A D gemessen, ist $= r\cos\varphi$; folglich das statische Moment des Bogenteiles für eine Drehachse durch A, parallel zu B C, gleich $r\,d\varphi \cdot r\cos\varphi = r^2 \cos\varphi\, d\varphi$.

Wird der Bogen D B in unendlich viele Elemente $r\,d\varphi$ abgeteilt, das Moment eines jeden angeschrieben und die Summe dieser Momente gebildet, so erhält man das Moment des Bogens D B. Diese Summierung ergibt sich nach § 108 durch Integration des vorstehenden Differentials. Man erhält

$$r^2 \int_0^\alpha \cos\varphi\, d\varphi = r^2 \sin\alpha.$$

Ebenso gross ist das Moment des Bogens C D. Das Moment des ganzen Bogens ist daher $= 2 r^2 \sin\alpha = r a$. Nun ist aber auch das Moment des ganzen Bogens für dieselbe Drehachse = b z. Durch Gleichsetzung beider Momente folgt der gesuchte Abstand

$$z = r \frac{a}{b}$$

d. h. der Abstand des Schwerpunktes verhält sich zum Halbmesser wie die Sehne zum Bogen.

Für einen Halbkreis ist $a = 2r$, $b = \pi r$; also

$$z = \frac{2}{\pi} r.$$

144. Schwerpunkt eines Parabelbogens. Aus der Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ der Parabel folgt durch Differentiation $y\,dy = p\,dx$. Mithin erhält man für das Element des Bogens s, liegend zwischen dem Scheitel der Parabel und dem Punkte (x, y),

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{p}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

Das statische Moment dieses Bogenteilchens ds in Bezug auf die Abscissenachse als Drehachse ist

$$y\,ds = \frac{1}{p}\,y\,dy\sqrt{p^2 + y^2}.$$

Wird dieses Differential integriert, so erhält man die Summe der statischen Momente aller Teile des Bogens s. Nun ist nach Gleichung (13), § 90

$$\int y\,dy\sqrt{p^2 + y^2} = \frac{1}{3}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Folglich die gesuchte Summe der Momente, indem man das Integral von $y = 0$ bis $y = y$ nimmt,

$$(1) \qquad \int_0^y y\,ds = \frac{1}{3p}\left[(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right].$$

Das statische Moment des Bogenteiles ds in Bezug auf die Ordinatenachse als Drehachse ist

$$x\,ds = \frac{y^2\,dy}{2p^2}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

Nach Gleichung (14), § 90, ist aber

$$\int y^2\,dy\sqrt{p^2 + y^2} =$$

$$\frac{y^3}{4}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{8}\left[y\sqrt{p^2 + y^2} - p^2\,l\left(y + \sqrt{p^2 + y^2}\right)\right] + C.$$

Dieses Integral, zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = y$ genommen und mit $\frac{1}{2p^2}$ multipliziert, ist die Summe der statischen Momente aller Teile des Bogens s in Bezug auf die Ordinatenachse. Diese Summe ist daher

$$(2) \quad \frac{y^3}{8p^2}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{1}{16}\left[y\sqrt{p^2 + y^2} - p^2\,l\,\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}\right].$$

Dividiert man die Momente (1) und (2) durch die Länge des Parabelbogens, wie sie in § 98 angegeben ist, so erhält man die Abstände des Schwerpunktes des Bogens von der Abscissen- und der Ordinatenachse.

145. Schwerpunkt der Cykloide. Nach § 101 ist das Bogenelement der Cykloide

$$ds = a\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\, d\varphi.$$

Dieses Element hat den Abstand $y = a(1 - \cos\varphi)$ von der Grundlinie, also ist sein statisches Moment in Bezug auf die Grundlinie als Drehachse

$$y\, ds = a^2 (1 - \cos\varphi)\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\, d\varphi.$$

Nun ist $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$; folglich

$$y\, ds = 8\, a^2 \sin^3\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2}.$$

Das Integral hiervon ist nach Gleichung (12), § 88

$$\int y\, ds = 8\, a^2\left[-\frac{1}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3}\cos\frac{\varphi}{2}\right] + C.$$

Dieses Integral zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ ist das statische Moment für den Bogen s, reichend vom Anfangspunkte bis zum Punkte (x, y). Dieses Moment ist daher

$$(1) \qquad \int_0^y y\, ds = \frac{8\, a^2}{3}\left[2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - 2\cos\frac{\varphi}{2}\right].$$

Für die halbe Cykloide ist hierin y bis 2 a und φ bis π auszudehnen. Somit ist das statische Moment der halben Cykloide

$$(2) \qquad \int_0^{2a} y\, ds = \frac{16\, a^2}{3}.$$

Dividiert man die Momente (1) und (2) durch die Länge der betreffenden Bogenteile, so erhält man die Abstände der Schwerpunkte dieser Bogen von der Grundlinie. Für die Länge der halben Cykloide ist (§ 101) $s = 4\, a$; folglich der gesuchte Abstand

$$z = \frac{16\, a^2}{3} : 4\, a = \frac{4}{3}\, a.$$

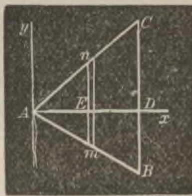
146. Schwerpunkt einer Dreiecksfläche. Es sei $BC = a$ (Fig. 45) die Basis und $AD = h$ die Höhe eines Dreiecks. Man nehme diese Höhe zur Abscissenrichtung an. Entspricht der Abscisse $AE = x$ eine Ordinatensumme $mE + nE = y$, so wird vermöge der ähnlichen Dreiecke Amn und ABC sein

$$y : a = x : h.$$

Der Inhalt des Flächenelementes längs der Ordinate m n wird deshalb sein

$$y\,d\,x = \frac{a}{h}\,x\,d\,x.$$

Fig. 45.



Dieses Flächenelement hat von der Ordinatenachse A y den Abstand x; folglich ist sein statisches Moment in Bezug auf die Ordinatenachse als Drehachse

$$\frac{a}{h}\,x^2\,d\,x,$$

folglich die Summe der statischen Momente aller Flächenteile des Dreiecks

$$\frac{a}{h}\int_0^h x^2\,d\,x = \frac{1}{3}\,a\,h^2.$$

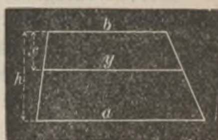
Nun ist die Dreiecksfläche $= \frac{1}{2}\,a\,h$, also ihr Moment in Bezug auf die Ordinatenachse $= \frac{1}{2}\,a\,h\,z$. Setzt man diese Momente einander gleich, so kommt

$$z = \tfrac{2}{3}\,h.$$

Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist somit um $\frac{2}{3}$ der Höhe von der Spitze entfernt.

147. Schwerpunkt einer Trapezfläche. Die parallelen Seiten des Trapezes (Fig. 46) seien a und b, wobei $a > b$, die Höhe h. Legt man im Abstande x von b aus eine Gerade $= y$ durch das Trapez, parallel zu b, so wird die Fläche in zwei Trapeze geteilt, deren Inhalte zusammen gleich sind dem Inhalte des Ganzen. Dies gibt folgende Gleichung

Fig. 46.



$$\frac{b+y}{2}\,x + \frac{a+y}{2}\,(h-x) = \frac{a+b}{2}\,h,$$

woraus folgt
$$y = b + \frac{a-b}{h}\,x.$$

Zieht man im Abstande d x von y die Parallele zu y, so entsteht das Flächenelement y d x, dessen Abstand von b gleich x ist. Mithin wird das statische Moment dieses Flächenelementes in Bezug auf die Parallele b als Drehachse

$$y\,x\,d\,x = b\,x\,d\,x + \frac{a-b}{h}\,x^2\,d\,x.$$

Wird diese Gleichung zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = h$ integriert, so erhält man als Summe der statischen Momente aller Flächenteile des Trapezes

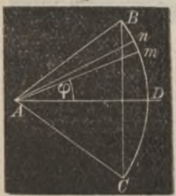
$$\int_0^h\left(b\,x + \frac{a-b}{h}\,x^2\right)d\,x = \frac{b\,h^2}{2} + \frac{a-b}{h}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{6}\,h^2(2\,a+b).$$

Wenn der Abstand des Schwerpunktes von der Parallelen $b = z$ ist, so wird das Moment der ganzen Trapezfläche $= \frac{1}{2}(a + b)\,h\,z$. Setzt man diese Momente einander gleich, so ergibt sich

$$z = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b}.$$

148. Schwerpunkt eines Kreisausschnittes. Der Schwerpunkt des Kreisausschnittes ABC (Fig. 47) liegt auf dem Halbmesser AD, der senkrecht auf der Sehne BC steht. Der Abstand dieses Schwerpunktes vom Mittelpunkte A sei $= z$, der Halbmesser $= r$, der Bogen $Dm = r\varphi$, der Bogen $BD = r\alpha$. Geht φ in $\varphi + d\varphi$ über, so nimmt der Bogen $r\varphi$ um $r\,d\varphi = mn$ zu. Zwischen den Radien Am und An liegt eine unendlich kleine Dreiecksfläche, deren Grundlinie $mn = r\,d\varphi$ und deren Höhe $Am = r$ ist. Ihre Fläche wird daher sein $= \frac{1}{2} r^2\, d\varphi$. Der Schwerpunkt dieser Dreiecksfläche hat den Abstand $\frac{2}{3} r$ von A. Die Projektion dieser Entfernung auf AD ist $\frac{2}{3} r \cos\varphi$. Somit ist das statische Moment dieses Flächenteiles in Bezug auf eine Drehachse, die durch den Mittelpunkt A geht und parallel zur Sehne BC liegt, gleich

Fig. 47.



$$\tfrac{1}{2} r^2\, d\varphi \cdot \tfrac{2}{3} r \cos\varphi = \tfrac{1}{3} r^3 \cos\varphi\, d\varphi.$$

Das Integral dieses Ausdruckes zwischen den Grenzen $\varphi = -\alpha$ und $\varphi = +\alpha$ ist

$$\tfrac{2}{3} r^3 \sin\alpha.$$

Dieses Integral ist die Summe der statischen Momente aller Dreiecke Amn, die im ganzen Kreisausschnitte enthalten sind. Da nun die Fläche des ganzen Kreisausschnittes $= r^2\alpha$ ist, so wird ihr Moment in Bezug auf die gleiche Achse sein $= r^2\alpha z$. Aus der Gleichsetzung dieser Momente folgt

$$z = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird der Kreisausschnitt zum Halbkreise, und die Formel für z geht über in

$$z = \frac{4}{3\pi} r.$$

149. Schwerpunkt eines Kreisabschnittes. Es sei CBD (Fig. 48) dieser Abschnitt. Zieht man einen Radius AD senkrecht auf die Sehne BC, so wird der Schwerpunkt auf diesem Radius liegen. Wenn der Mittelpunkt A des Kreises zum Anfangspunkte und dieser Radius zur Abscissenachse genommen wird, so ist die Gleichung des Kreises $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Das Flächenelement, das zur Länge die Doppelordinate $2y$ und zur Breite dx hat, ist

$$2y\,dx = 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx,$$

Fig. 48.

und das statische Moment desselben, wenn die Ordinatenachse zur Drehachse genommen wird,

$$2\,x\,y\,d\,x = 2\,x\sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x.$$

Man integriere diese Ausdrücke nach den Gleichungen (10) und (12), § 90, und nehme die Integrale zwischen den Grenzen x = x und x = r; man erhält dann

$$2\int_x^r y\,d\,x = \frac{r^2\pi}{2} - x\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 \arcsin\frac{x}{r};$$

$$2\int_x^r x\,y\,d\,x = \frac{2}{3}(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Das erste dieser Integrale ist die Fläche, das zweite das statische Moment des Kreisabschnittes. Dividiert man den letztern Wert durch den erstern, so erhält man

$$z = \frac{\frac{2}{3}(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}}{\frac{r^2\pi}{2} - x\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 \arcsin\frac{x}{r}}$$

als Entfernung des Schwerpunktes des Kreisabschnittes vom Mittelpunkte des Kreises. Für den Halbkreis wird x = 0, also

$$z = \frac{4}{3\pi}\,r \text{ (wie in § 148).}$$

150. Schwerpunkt der Fläche zwischen einer Cykloide und ihrer Grundlinie. Aus den Gleichungen $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$ der Cykloide (§ 101) erhält man als Wert des Flächenelementes

$$y\,d\,x = a^2(1 - \cos\varphi)^2\,d\,\varphi.$$

Der Schwerpunkt dieses Elementes hat einen Abstand $= 0{,}5\,y$ von der Grundlinie; folglich ist das statische Moment dieses Elementes in Bezug auf die Grundlinie als Drehachse

$$\tfrac{1}{2}y^2\,d\,x = \tfrac{1}{2}a^3(1 - \cos\varphi)^3\,d\,\varphi.$$

Nun ist

$$(1 - \cos\varphi)^3 = 1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi,$$

$$\int \cos^2\varphi\,d\,\varphi = \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi + C,$$

$$\int \cos^3\varphi\,d\,\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi + C.$$

Folglich

$$\int (1 - \cos\varphi)^3\,d\,\varphi = \varphi - 3\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{3}{2}\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi - \frac{2}{3}\sin\varphi + C.$$

Mithin die Summe der statischen Momente aller Flächenteile zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$

$$\frac{1}{2}\int y^2\,dx = \frac{1}{2}a^3\left[\frac{5\varphi}{2} - \frac{11}{3}\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi\right].$$

Dividiert man dieses Integral durch das Integral $\int y\,dx$ der Fläche, wie dasselbe in § 116 dargestellt ist, so erhält man den Abstand z des Schwerpunktes der Fläche von der Grundlinie.

Für die ganze cykloidische Fläche erhält man

$$\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^3\,d\varphi = \frac{5\pi}{2}a^3,$$

und da die ganze Fläche $= 3\pi a^2$, so ist das statische Moment derselben $= 3\pi a^2 z$; folglich wird sein

$$3\pi a^2 z = \tfrac{5}{2}\pi a^3; \qquad z = \tfrac{5}{6}a.$$

151. Schwerpunkt einer Parabelfläche. Die Scheitelgleichung der Parabel ist $y^2 = 2px$ und das Flächenelement derselben $= y\,dx$. Der Abstand des Schwerpunktes der Fläche $y\,dx$ von der Ordinatenachse ist $= x$, von der Abscissenachse $= 0{,}5\,y$; folglich ihr statisches Moment

in Bezug auf die Ordinatenachse $\quad x\,y\,dx = \sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx,$

in Bezug auf die Abscissenachse $\quad 0{,}5\,y^2\,dx = p\,x\,dx.$

Also das statische Moment der Fläche zwischen der Abscisse x und der Ordinate y

in Bezug auf die Ordinatenachse $\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2x^2y}{5},$

in Bezug auf die Abscissenachse $p\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}px^2.$

Nun ist die Parabelfläche $= \frac{2}{3}$ vom umschriebenen Rechteck, also $= \frac{2}{3}xy$; mithin der Abstand des Schwerpunktes der Parabelfläche

von der Ordinatenachse $\frac{2}{5}x^2y : \frac{2}{3}xy = \frac{3}{5}x,$

von der Abscissenachse $\frac{1}{2}px^2 : \frac{2}{3}xy = \frac{3}{8}y.$

152. Schwerpunkt einer Flächenzone der Kugel. Die Mittelpunktsgleichung eines Kreises ist $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, das Bogenelement desselben $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{r}{y}dx$. Dreht sich der Kreis um seine Abscissenachse, so beschreibt das Bogenelement eine Flächenzone $2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi r\,dx$. Das statische Moment dieses Flächenteils in Bezug auf die Ordinatenachse ist $= 2\pi r\,x\,dx$; folglich das statische Moment einer Zone von unbestimmter Breite

$$2\pi r\int x\,dx = \pi r x^2 + C.$$

Hat die Zone die Höhe h und steht ihr grösserer begrenzender Kreis um x vom Mittelpunkte der Kugel ab, so ist das Moment der Zone, wenn sie auf derselben Seite des Kugelmittelpunktes liegt,

$$2\pi r \int_x^{x+h} x\,dx = \pi r\left[(x+h)^2 - x^2\right] = \pi r(2xh + h^2).$$

Ist nun z der Abstand des Schwerpunktes der Zone vom Kugelmittelpunkte, so ist, da der Inhalt der Zone $= 2\pi r h$, das Moment der Zone $= 2\pi r h z$; folglich kommt durch Gleichsetzung dieser Momente

$$z = x + \frac{h}{2}.$$

Der Schwerpunkt liegt also in der Mitte der Höhe der Zone.

153. Schwerpunkt einer Kugelschicht. Die Mittelpunktsgleichung des Kreises ist $y^2 = r^2 - x^2$. Dreht sich dieser Kreis um die Abscissenachse, so beschreibt die Ordinate y eine Kreisfläche vom Inhalte πy^2, folglich ist das scheibenförmige Volumenelement der Kugelschicht $\pi y^2\,dx = \pi(r^2 - x^2)\,dx$ und der Inhalt einer Schicht, deren begrenzende Kreise um h und h' vom Kugelmittelpunkte, nach derselben Seite hin, abstehen,

$$\pi \int_h^{h'} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2(h' - h) - \frac{h'^3 - h^3}{3}\right].$$

Das statische Moment des Volumenelementes in Bezug auf die Ordinatenachse als Drehachse ist $= \pi(r^2 - x^2)\,x\,dx$; folglich das Moment obiger Schicht

$$\pi \int_h^{h'} (r^2 x - x^3)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[r^2(h'^2 - h^2) - \frac{1}{2}(h'^4 - h^4)\right].$$

Folglich der Abstand z des Schwerpunktes der Schicht vom Kugelmittelpunkte

$$z = \frac{1}{2}\,\frac{r^2(h'^2 - h^2) - \frac{1}{2}(h'^4 - h^4)}{r^2(h' - h) - \frac{1}{3}(h'^3 - h^3)}$$

Für die Halbkugel wird $h' = r$, $h = 0$; somit Abstand

$$z = \frac{3}{8}r.$$

154. Schwerpunkt einer Pyramide. Es sei a die Grundfläche und h die Höhe der Pyramide. Legt man im Abstande x von der Spitze der Pyramide einen ebenen Schnitt durch den Körper, parallel zur Grundfläche, und bezeichnet diesen Schnitt durch y, so ist

$$y : a = x^2 : h^2, \qquad y = \frac{a}{h^2}x^2.$$

Das Volumenelement hat zur Grundfläche y und zur Dicke dx, also zum Inhalte $y\,dx = \frac{a}{h^2}x^2\,dx$. Folglich ist der Inhalt der ganzen Pyramide

$$\frac{a}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{1}{3}ah.$$

Das statische Moment des Volumenelementes in Bezug auf eine Achse durch die Spitze der Pyramide, die parallel zur Grundfläche liegt, ist $x y d x = \frac{a}{h^2} x^3 d x$; folglich das statische Moment der ganzen Pyramide

$$\frac{a}{h^2} \int_0^h x^3 d x = \frac{1}{4} a h^2.$$

Für den Abstand z des Schwerpunktes der Pyramide von der Spitze ergibt sich deshalb der Wert

$$z = \tfrac{1}{4} a h^2 : \tfrac{1}{3} a h = \tfrac{3}{4} h.$$

155. Schwerpunkt eines Paraboloids. Derselbe liegt in der Achse des Körpers; sein Abstand vom Scheitel sei z. Die Scheitelgleichung der Parabel, durch deren Rotation das Paraboloid entsteht, ist $y^2 = 2 p x$; folglich das Volumenelement des Rotationskörpers $\pi y^2 d x = 2 \pi p x d x$, und das statische Moment desselben für eine Drehachse, die durch den Scheitel geht und senkrecht auf der Achse des Paraboloids steht, $= 2 \pi p x^2 d x$. Das statische Moment eines Paraboloids von der Achsenlänge x ist daher

$$2 \pi p \int_0^x x^2 d x = \frac{2}{3} \pi p x^3.$$

Da aber der Inhalt des Paraboloids $= \pi p x^2$ (§ 128), so wird sein

$$\pi p x^2 \cdot z = \tfrac{2}{3} \pi p x^3; \qquad z = \tfrac{2}{3} x.$$

156. Guldin's Regel zur Bestimmung des Inhaltes von Rotationsflächen. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen Kurve, bezogen auf rechtwinklige Koordinatenachsen; dann ist das Element des Bogens s dieser Kurve $d s = \sqrt{d x^2 + d y^2}$. Multipliziert man dieses Element mit seinem Abstande y von der Abscissenachse, so erhält man sein Moment für diese Achse $= y \sqrt{d x^2 + d y^2}$, folglich das Moment des ganzen Bogens $= \int y \sqrt{d x^2 + d y^2}$.

Ist nun z der Abstand des Schwerpunktes des Bogens s von der Abscissenachse, so ist das Moment des Bogens auch $= s z$. Folglich erhält man durch Gleichsetzung dieser Momente

$$\int y \sqrt{d x^2 + d y^2} = z s. \tag{1}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit 2π, so ist

$$2 \pi \int y \sqrt{d x^2 + d y^2} = 2 \pi z \cdot s. \tag{2}$$

Nun ist aber die linke Seite die Oberfläche, die durch eine volle Rotation des Bogens s um die Abscissenachse entsteht (§ 117). Folglich ist der Inhalt einer Rotationsfläche gleich dem Wege $2 \pi z$, den der Schwerpunkt der Generatrice s während der Rotation beschreibt, multipliziert mit der Länge der Generatrice.

Beispiel 1. Ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse $= a$, und dessen Katheten b und c sind, drehe sich um die Kathete b; es beschreibt die Kathete c eine Kreisfläche und die Hypotenuse einen Kegelmantel.

Der Schwerpunkt von c liegt in der Mitte dieser Linie, also ist der Weg des Schwerpunktes von c bei einer vollen Drehung $= \pi c$; folglich die Kreisfläche $= \pi c^2$.

Der Schwerpunkt der Hypotenuse beschreibt bei jener Drehung den Weg πc; also ist der dadurch entstandene Kegelmantel $= \pi c a$.

Beispiel 2. Ein Kreis und eine Gerade liegen in einer Ebene. Der Halbmesser des Kreises sei $= r$, der Abstand seines Mittelpunktes von der Geraden $= a$, wobei $a > r$ vorausgesetzt wird. Dreht sich nun der Kreis um die Gerade als Achse, so beschreibt die Kreislinie eine ringförmige Oberfläche, die für eine volle Rotation $= 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 a r$ ist, weil die Länge der Generatrice $= 2\pi r$ und der Weg des Schwerpunktes derselben $= 2\pi a$.

Beispiel 3. Der Abstand des Schwerpunktes einer Halbkreislinie von ihrem Mittelpunkte sei $= z$, der Halbmesser derselben $= r$. Dreht man diese Linie um ihren Durchmesser, so beschreibt sie eine Rotationsfläche $= 2\pi z \cdot \pi r = 4\pi^2 r z$. Allein diese Rotationsfläche ist eine Kugelfläche, deren Inhalt auch $= 4\pi r^2$; folglich erhält man durch Gleichsetzung

$$z = \frac{2}{\pi} r.$$

157. Guldin's Regel zur Bestimmung des Inhaltes von Rotationskörpern. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve und F die Fläche, die zwischen der Kurve, der Abscissenachse und zwei Ordinaten liegt, so ist das Element der Fläche $dF = y\,dx$. Der Schwerpunkt dieses Elementes hat einen Abstand $= \frac{1}{2} y$ von der Abscissenachse; folglich ist das statische Moment dieses Elementes in Bezug auf die Abscissenachse als Drehachse $= \frac{1}{2} y^2\,dx$ und die Summe der Momente aller Flächenteile, die F enthält, $= \frac{1}{2}\int y^2\,dx$.

Wenn der Schwerpunkt der Fläche F um z von der Abscissenachse absteht, so ist Fz das Moment dieser Fläche; folglich muss sein

$$\frac{1}{2}\int y^2\,dx = F z.$$

Durch Multiplikation mit 2π ergibt sich

$$\pi\int y^2\,dx = 2\pi z \cdot F.$$

Nun ist $\pi\int y^2\,dx$ das Volumen, das die Fläche F bei einer vollen Rotation um die Abscissenachse beschreibt (§ 123). Folglich ist das Volumen eines Rotationskörpers gleich dem Wege $2\pi z$, den der Schwerpunkt der Fläche bei ihrer Rotation zurücklegt, multipliziert mit dem Inhalte F dieser Fläche.

Beispiel 1. Ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten a und b seien, drehe sich um seine Hypotenuse. Welches Volumen beschreibt die Dreiecksfläche bei einer Drehung?

Ist der Winkel, der der Kathete a gegenüberliegt $= \alpha$, so ist das Lot von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse $= b \sin \alpha$; folglich der Abstand des Schwerpunktes der Dreiecksfläche von der Hypotenuse $= \frac{1}{3} b \sin \alpha$, und der Weg, den dieser Schwerpunkt bei einer vollen Rotation beschreibt $= \frac{2}{3} \pi b \sin \alpha$. Da die Dreiecksfläche $= \frac{1}{2} a b$, so ist das gesuchte Volumen

$$V = \frac{2}{3} \pi b \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} a b.$$

Allein es ist die Hypotenuse $= \sqrt{a^2 + b^2}$, folglich $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Hiernach wird das gesuchte Volumen

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

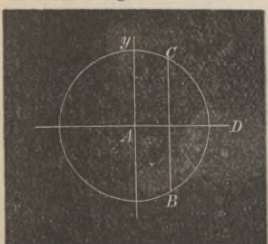
Beispiel 2. Man soll den Abstand z des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche von ihrem Durchmesser bestimmen.

Wenn sich die Halbkreisfläche um ihren Durchmesser 2 r dreht, so entsteht ein Volumen $= \frac{4}{3} \pi r^3$. Die Fläche des Halbkreises ist $= \frac{1}{2} \pi r^2$, folglich muss sein

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot 2 \pi z, \qquad z = \frac{4}{3 \pi} r.$$

Beispiel 3. Ein Kreisabschnitt C B D (Fig. 49) drehe sich um den Durchmesser A y als Achse, der zur Sehne B C parallel liegt. Man soll das vom Kreisabschnitte bei einer vollen Umdrehung beschriebene Volumen V bestimmen.

Fig. 49.



Man lege die Achse A x senkrecht zu B C. Es seien r der Halbmesser, x, y die rechtwinkeligen Koordinaten des Kreispunktes C; dann ist die Sehne $B C = 2 y$, und somit das zu B C parallele Flächenelement $= 2 y \, dx$. Bei einer vollen Drehung um die Achse A y beschreibt sein Schwerpunkt den Weg $2 \pi x$; also ist das von ihm beschriebene Volumenelement $= 2 \pi x \cdot 2 y \, dx$. Allein es ist $x^2 = r^2 - y^2$, folglich $x \, dx = - y \, dy$. Hierfür wird das Volumenelement $= - 4 \pi y^2 \, dy$; folglich

$$V = \int_y^0 - 4 \pi y^2 \, dy = \frac{4}{3} \pi y^3.$$

Der Inhalt dieses ringförmigen Körpers ist also von r unabhängig und gleich einer Kugel vom Halbmesser y.

IX. Aufgaben über die Bewegung.

158. Gleichförmige Bewegung. Eine Bewegung heisst gleichförmig, wenn das Bewegliche in gleichen Zeitelementen gleiche Wege zurücklegt. Eine gleichförmige Bewegung kann nur eintreten, wenn während der Dauer der Bewegung auf das Bewegliche keine Kraft einwirkt oder die auf dasselbe einwirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung ist der Weg, der in der Zeiteinheit (Sekunde, Minute etc.) zurückgelegt wird.

Bezeichnet v diese Geschwindigkeit und x den in t Zeiteinheiten zurückgelegten Weg, so ist

$$x = v\,t.$$

159. Gleichförmig veränderte Bewegung. Wenn das Bewegliche in gleichen Zeitelementen ungleiche Wege durchläuft, so heisst die Bewegung ungleichförmig. Eine solche Bewegung kann nur eintreten, wenn auf das Bewegliche eine Kraft beschleunigend oder verzögernd einwirkt. Dadurch ändert sich die Geschwindigkeit. Unter Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke versteht man alsdann den Weg, den das Bewegliche in der nächsten Zeiteinheit gleichförmig zurücklegen würde, wenn dasselbe, ohne Einwirkung einer Kraft, sich selbst überlassen wäre.

Nimmt die Geschwindigkeit in gleichen Zeitteilen um gleichviel zu oder ab, so ist die Bewegung *gleichförmig beschleunigt* oder *gleichförmig verzögert*. Diese Bewegung ist die Folge einer konstant wirkenden Kraft. Die bei einer solchen Bewegung in der Sekunde eintretende Geschwindigkeitsänderung heisst *Beschleunigung*. Die Beschleunigung ist positiv bei der beschleunigten, negativ bei der verzögerten Bewegung.

Beginnt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung von der Ruhe aus und ist ihre Beschleunigung $= g$, so nimmt die Geschwindigkeit in t Sekunden um $g\,t$ zu. Dieser Wert ist nichts anderes als die Geschwindigkeit v nach der Zeit t. Folglich wird sein

$$v = g\,t.$$

160. Ungleichförmig veränderte Bewegung. Sind die Zunahmen oder Abnahmen an Geschwindigkeit in gleichen Zeitelementen ungleich, so ist die Bewegung ungleichförmig verändert. Eine solche Bewegung ist die Folge einer variabeln Kraft. In einem bestimmten Augenblicke haben diese Kraft und die Geschwindigkeit gewisse Werte. Denkt man sich, es bleibe von diesem Augenblicke an die Kraft konstant, so tritt eine gleichförmig veränderte Bewegung ein, und es wird alsdann die in der nächsten Sekunde erfolgte Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit die Beschleunigung der Bewegung in diesem Augenblicke genannt.

161. Differentialformeln der Bewegung. Bei einer beliebig veränderlichen Bewegung sei v die Geschwindigkeit und g die Beschleunigung nach Verfluss von t Sekunden, sowie x der in dieser Zeit zurückgelegte Weg.

Die Grössen v und x sind Funktionen von t. Es nehme t um $\triangle$ t zu; dadurch werde x um $\triangle$ x grösser. Ist die Bewegung beschleunigt, so wird dabei v um $\triangle$ v wachsen. Während der Zeit $\triangle$ t wird also der Weg $\triangle$ x zurückgelegt, und es geht v stetig in $v + \triangle v$ über. Am Anfange der Zeit $\triangle$ t haben wir also die Geschwindigkeit v, am Ende derselben die grössere Geschwindigkeit $v + \triangle v$. Würde die kleinere Geschwindigkeit durch die ganze Zeit $\triangle$ t hindurch vorhanden sein, so wäre nach § 158 der zurückgelegte Weg $= v \cdot \triangle t$; würde aber die grössere Geschwindigkeit $v + \triangle v$ während der Zeit $\triangle$ t vorhanden sein, so wäre der zurückgelegte Weg $= (v + \triangle v) \triangle t$. Der erstere dieser Werte ist kleiner als der wirklich durchlaufene Weg $\triangle$ x, der letztere grösser. Es wird deshalb sein

$$\triangle x > v \triangle t, \qquad \triangle x < (v + \triangle v) \triangle t$$

oder auch

$$\frac{\triangle x}{\triangle t} > v, \qquad \frac{\triangle x}{\triangle t} < v + \triangle v.$$

Lässt man hierin $\triangle$ t ohne Aufhören abnehmen, so nehmen auch $\triangle$ x und $\triangle$ v ab. Dabei konvergiert $v + \triangle v$ gegen das Glied v als einer Grenze. Diese Grenze wird erreicht, wenn $\triangle$ t zum Differential d t, also auch $\triangle$ x zu d x wird. Für diesen Grenzzustand ist also

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = v.$$

Zu dem gleichen Resultate gelangt man, wenn die Bewegung eine verzögerte ist. Die Geschwindigkeit wird also erhalten, wenn man das Differential des Weges durch das Differential der Zeit dividiert.

Die Beschleunigung g ist ebenfalls eine Funktion von t. Nimmt t um $\triangle$ t zu, so geht bei beschleunigter Bewegung g in $g + \triangle g$ und v in $v + \triangle v$ über. Am Anfange der Zeit $\triangle$ t hat also die Bewegung die Beschleunigung g, am Ende dieser Zeit die Beschleunigung $g + \triangle g$. Würde während der ganzen Zeit $\triangle$ t nur die kleinere Beschleunigung g oder nur die grössere $g + \triangle g$ vorhanden sein, so wäre die Geschwindigkeitszunahme $g \triangle t$ im ersten Falle kleiner, die Geschwindigkeitszunahme $(g + \triangle g) \triangle t$ im zweiten Falle grösser als die wirkliche $\triangle$ v. Folglich wird sein

$$\triangle v > g \triangle t, \qquad \triangle v < (g + \triangle g) \triangle t,$$

also auch

$$\frac{\triangle v}{\triangle t} > g, \qquad \frac{\triangle v}{\triangle t} < g + \triangle g.$$

Geht hierin $\triangle$ t in d t über, so geht $g + \triangle g$ in g als einer Grenze über, und es folgt aus den beiden Ungleichungen die Formel

$$(2) \qquad \frac{dv}{dt} = g.$$

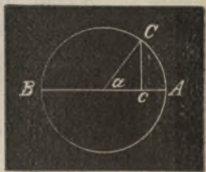
Für eine verzögerte Bewegung erhält man das gleiche Resultat. Die Beschleunigung einer Bewegung wird also erhalten, wenn man das Differential der Geschwindigkeit durch das Differential der Zeit dividiert. Eliminiert man d t aus den beiden Gleichungen (1) und (2) so folgt

$$(3) \qquad v\,dv = g\,dx.$$

Mit Hilfe dieser drei Differentialformeln der Bewegung sollen die folgenden Aufgaben gelöst werden.

162. Gleichförmige Kreisbewegung. Der Punkt C (Fig. 50) bewege sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit V in einem Kreise. Welche Geschwindigkeit v hat die Projektion c dieses Punktes auf dem Durchmesser A B dieses Kreises?

Fig. 50.



Es sei a der Halbmesser des Kreises und w die konstante Winkelgeschwindigkeit, d. h. der Weg, den ein Punkt im Abstande = 1 von der Achse in der Sekunde durchläuft. Nach der Zeit t habe der Punkt C einen Bogen $AC = a\alpha$ durchlaufen und dessen Projektion c einen Weg $x = Ac$ auf dem Durchmesser, von A aus gezählt; dann ist

$$(1) \qquad x = a(1 - \cos\alpha).$$

Folglich, indem man (1) differentiiert und durch das Differential d t der Zeit dividiert,

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = a \sin\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}.$$

Allein es ist $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{d\alpha}{dt} = w$ und $aw = V$. Hierfür gibt Gleichung (2) den gesuchten Wert

$$v = V \sin\alpha,$$

Es ändert sich mithin die Geschwindigkeit der Projektion proportional dem Sinus des Drehwinkels α.

Für die Punkte A und B wird $\alpha = 0$ und π; daher $v = 0$; dagegen für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ wird $v = V$ und $= - V$.

163. Gleichförmig beschleunigte Bewegung. Bei dieser Bewegung ist die Beschleunigung g konstant und positiv. Die Integration der Differentialformel $dv = g\,dt$ gibt

$$v = gt + C.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, nehme man an, das Bewegliche habe zur Zeit $t = 0$ eine Geschwindigkeit V. Setzt man diese zwei gleichzeitigen Werte in die vorstehende Gleichung ein, so folgt $V = C$. Hierdurch wird

$$(1) \qquad v = V + gt.$$

Führt man diesen Wert von v in die Differentialformel $dx = v\,dt$ ein, so ist

$$dx = (V + gt)\,dt.$$

In dieser Gleichung sind nur t und x veränderlich. Die Integration gibt

$$x = V\,t + \frac{g\,t^2}{2} + C.$$

Hat zur Zeit $t = 0$ das Bewegliche noch keinen Weg zurückgelegt, so ist $x = 0$, wenn $t = 0$. Setzt man diese Werte in die letzte Gleichung, so findet man $C = 0$. Daher ist

(2) $$x = V\,t + \frac{g\,t^2}{2}.$$

Eliminiert man t aus (1) und (2), so folgt

(3) $$v^2 = V^2 + 2\,g\,x.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $V = 0$, so geben die vorstehenden Gleichungen

(4) $$v = g\,t, \qquad x = \tfrac{1}{2}\,g\,t^2, \qquad v = \sqrt{2\,g\,x}.$$

Diese drei Gleichungen gelten für den freien Fall der Körper im leeren Raume, wenn auf die Veränderlichkeit der Schwere keine Rücksicht genommen wird.

Beim freien Falle beträgt die Beschleunigung für mittlere Breiten

$$g = 9{,}81\,m.$$

164. Gleichförmig verzögerte Bewegung. Die Beschleunigung g ist konstant und negativ. Die Differentialformel $d\,v = g\,d\,t$ ist daher zu schreiben

$$d\,v = -\,g\,d\,t.$$

Durch Integration erhält man hieraus

$$v = -\,g\,t + C.$$

Für $t = 0$ sei die Geschwindigkeit $v = V$. Vermöge dieser gleichzeitigen Werte geht die letzte Gleichung über in $V = C$. Setzt man diesen Wert der Konstanten ein, so folgt

(1) $$v = V - g\,t.$$

Diesen Wert von v setze man in die Formel $d\,x = v\,d\,t$ ein, und erhält

$$d\,x = (V - g\,t)\,d\,t,$$

woraus durch Integration folgt

$$x = V\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + C.$$

Da für $t = 0$ auch $x = 0$ ist, so erhält man hierfür $C = 0$. Folglich ist der zurückgelegte Weg

(2) $$x = V\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Durch Elimination von t aus (1) und (2) ergibt sich

(3) $$v^2 = V^2 - 2\,g\,x.$$

Da die Bewegung eine verzögerte ist, so tritt ein Moment ein, wo das Bewegliche zur Ruhe kommt. In diesem Augenblicke wird

$v = 0$. Die der Grösse $v = 0$ entsprechenden Werte von t und x bezeichne man mit T und X und führe sie in (1) und (3) ein; dann erhält man

$$0 = V - gT, \quad 0 = V^2 - 2gX,$$

woraus folgt

$$T = \frac{V}{g}, \quad X = \frac{V^2}{2g}. \tag{4}$$

Diese Formeln finden Anwendung, wenn ein Körper im leeren Raume vertikal aufwärts geworfen wird. Dabei bezeichnet T die Zeit bis zur Erreichung des höchsten Punktes und X die totale Steighöhe.

165. Freier Fall der Körper im leeren Raume, mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Schwere. Es seien R der Halbmesser der Erde, a der Abstand des Anfangspunktes der Bewegung vom Erdmittelpunkte, x der Fallraum des Körpers nach t Sekunden und g, g' die Beschleunigung der Bewegung in den Abständen R und $a - x$ vom Mittelpunkte der Erde.

Da die Anziehung des Mittelpunktes der Erde auf einen Körper ausserhalb ihrer Oberfläche abnimmt wie das Quadrat der Entfernung zunimmt, so hat man

$$g : g' = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{(a-x)^2}. \tag{1}$$

Setzt man den hieraus hervorgehenden Wert von g' in die Differentialformel $v\,dv = g\,dx$ an die Stelle von g, so folgt

$$v\,dv = g\frac{R^2}{(a-x)^2}\,dx.$$

Setzt man, um diese Formel integrieren zu können, $a - x = z$, so wird $dx = -dz$ und daher

$$v\,dv = -gR^2z^{-2}\,dz$$

und durch Integration

$$\frac{v^2}{2} = gR^2z^{-1} + C,$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{a-x} + C. \tag{2}$$

Für den Anfang der Bewegung ist $v = 0$ und $x = 0$. Für diese Werte wird die letzte Gleichung

$$0 = \frac{gR^2}{a} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (2) ab, so erhält man die Geschwindigkeit

$$v = R\sqrt{\frac{2gx}{a(a-x)}}. \tag{3}$$

Um die Fallzeit zu bestimmen, setzt man diesen Wert von v in die Differentialformel $dx = v\,dt$, und erhält

$$dt = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}}\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx.$$

Setzt man behufs der Integration $x = y^2$, so wird $dx = 2y\,dy$ und

$$dt = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}}\sqrt{a-y^2}\,dy. \tag{4}$$

Allein nach Formel (10), § 90, hat man

$$\int\sqrt{a-y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{a-y^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{a}} + C.$$

Folglich ist das Integral der Gleichung (4), wenn x statt y^2 geschrieben wird,

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\sqrt{x}\sqrt{a-x} + a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}\right] + C.$$

Für den Anfang der Bewegung ist $t = 0$ und $x = 0$; folglich auch $C = 0$. Mithin wird die Fallzeit

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\sqrt{x}\sqrt{a-x} + a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}\right]. \tag{5}$$

In diesen Formeln kann sich x ausdehnen von $x = 0$ bis $x = a - R$. Wenn $x = a - R$, so fällt der Körper auf die Erdoberfläche. Für $x > a - R$, also für den Fall, wo sich der Körper im Innern der Erde bewegen sollte, gilt das Gesetz (1) der Anziehung nicht mehr.

Wenn der Fallraum sehr klein ist, und die Bewegung in der Nähe der Erdoberfläche vor sich geht, so kann man in den Formeln (1), (3) und (5) die Grösse $a - x$ mit a vertauschen, ebenso a mit R, wodurch man erhält, wenn man in (5) den Sinus des sehr kleinen Bogens $\sqrt{\frac{x}{a}}$ mit dem Bogen verwechselt,

$$g' = g, \quad v = \sqrt{2gx}, \quad t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left[\sqrt{Rx} + R\sqrt{\frac{x}{R}}\right]$$

und nach einer einfachen Reduktion der letzten Formel

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Diese letzten Formeln enthalten die gewöhnlichen Fallgesetze, wie sie in § 163 gefunden wurden.

166. Freier Fall der Körper im Innern der Erde. Befindet sich ein Körper innerhalb der Erdoberfläche, so wird er vom Mittelpunkte der Erde aus durch eine Kraft angezogen, die der Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte der Erde proportional ist.

Es sei der Erdhalbmeser $AM = R$ (Fig. 51), $AC = x$ die Tiefe, in der sich der bewegte Körper nach der Zeit t befindet, und die Geschwindigkeit in $C = v$. Ferner seien die Beschleunigungen in A und C gleich g und g'; dann ist

$$(1) \qquad g' : g = (R - x) : R.$$

Setzt man den Wert von g' aus dieser Proportion in die Gleichung $v\,dv = g\,dx$ an die Stelle von g, so erhält man

$$v\,dv = \frac{g}{R}(R - x)\,dx$$

und durch Integration

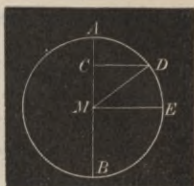
$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{R}\left(Rx - \frac{x^2}{2}\right) + C.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit in $A = 0$, so hat man als zusammengehörende Werte dieser Gleichung $x = 0$, $v = 0$. Dies gibt auch $C = 0$. Mithin erhält man aus der letzten Gleichung als Wert der Geschwindigkeit

$$(2) \qquad v = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{2Rx - x^2}.$$

Ist CD senkrecht auf AM, so ist $\sqrt{2Rx - x^2} = CD$; mithin ist die Geschwindigkeit des Körpers, der sich auf dem Durchmesser AMB bewegt, der Ordinate CD proportional; sie ist in A und $B = 0$ und in M ein Maximum. Ist der Körper in B angekommen, so wird er wieder von M aus angezogen wie früher in A; er wird also den Durchmesser rückwärts gerade so durchlaufen wie vorwärts. Der Körper macht mithin eine schwingende Bewegung, ähnlich der eines Pendels.

Fig. 51.



Um die Schwingungszeit T, d. h. die Zeit, in der der Körper von A nach B gelangt, zu bestimmen, setze man obigen Wert von v in die Differentialformel $dx = v\,dt$, und es folgt

$$(3) \qquad dt = \sqrt{\frac{R}{g}}\frac{dx}{\sqrt{2Rx - x^2}}.$$

Das Differential rechts kann integriert werden unter Benutzung der Gleichung (7), § 86. Man erhält

$$(4) \qquad t = \sqrt{\frac{R}{g}}\arcsin\frac{x - R}{R} + C.$$

Für $t = 0$ wird auch $x = 0$; wofür die letzte Gleichung wird

$$0 = \sqrt{\frac{R}{g}}\arcsin(-1) + C.$$

Nun ist aber $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ oder $= +\frac{3\pi}{2}$. Allein der erstere Wert ist hier zu nehmen, weil die Aenderung der Sinusgrösse $\frac{x-R}{R}$ für $x = 0$ bis $x = R$ dem vierten Quadranten als Bogen entspricht. Folglich ist

$$0 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (2) ab, so kommt

$$\text{(5)} \qquad t = \sqrt{\frac{R}{g}}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{R-x}{R}\right].$$

Es ist aber Quadrant A E — Bogen D E = Bogen A D; mithin

$$\text{(6)} \qquad t = \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos\frac{R-x}{R}.$$

Dieser Wert von t ist die Zeit zum Durchlaufen eines beliebigen Weges x. Die Zeit zum Durchlaufen des Halbmessers A M wird erhalten, wenn man $x = R$ setzt. Dies gibt $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$. Für $x = 2R$ erhält man die Zeit zum Durchlaufen des ganzen Durchmessers A B, d. h. die ganze Schwingungszeit

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

167. Freier Fall der Körper unter der Voraussetzung, dass der Luftwiderstand der Geschwindigkeit proportional sei. Es bezeichne g die konstante Beschleunigung der Schwere, v die Geschwindigkeit des Körpers nach t Sekunden, x die dieser Zeit entsprechende Fallhöhe und k diejenige konstante Grösse, um die die Beschleunigung der Schwere bei der Geschwindigkeit $v = 1$ vom Luftwiderstande vermindert wird.

Nach dieser Bezeichnungsweise ist $g - kv$ die wirkliche Beschleunigung des Körpers nach t Sekunden. Setzt man dieselbe in die Differentialformel $dv = g\,dt$ an die Stelle von g, so erhält man

$$dv = (g - kv)\,dt,$$

$$dt = \frac{dv}{g - kv}.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$t = -\frac{1}{k}\,l\,(g - kv) + C.$$

Für den Anfang der Bewegung sei $v = 0$; da auch $t = 0$, so erhält man durch Substitution dieser Werte

$$0 = -\frac{1}{k}\,l\,g + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

$$t = \frac{1}{k} l \frac{g}{g - k v}.$$

Hierin ist die Zeit durch die Geschwindigkeit ausgedrückt. Multipliziert man mit k und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man für die Geschwindigkeit

$$(1) \qquad v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Wenn die Zeit t bis ins Unendliche wächst, so nähert sich in Gleichung (1) die Geschwindigkeit der Grenze $\frac{g}{k}$, also einem konstanten Werte.

Setzt man den Wert von v aus (1) in die Differentialformel $dx = v\,dt$, so kommt

$$(2) \qquad dx = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})\,dt.$$

Nun ist aber $e^{-kt}dt = -\frac{1}{k}e^{-kt}d(-kt)$ und das Integral hiervon nach § 84

$$\int e^{-kt}dt = -\frac{1}{k}e^{-kt} + C.$$

Somit erhält man durch Integration von Gleichung (2)

$$(3) \qquad x = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt}\right) + C.$$

Da für $t = 0$ auch $x = 0$ ist, so erhält man hierfür aus (3)

$$0 = \frac{g}{k^2} + C.$$

Führt man den Wert von C aus dieser Gleichung in (3) ein, so erhält man den durchlaufenen Weg

$$(4) \qquad x = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(e^{-kt} - 1).$$

Wächst hierin t bis ins Unendliche, so wird auch der Weg x unendlich gross.

168. Vertikaler Wurf eines Körpers unter der Voraussetzung, dass der Luftwiderstand der Geschwindigkeit proportional sei. Wird der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit V vertikal aufwärts geworfen, so ist, wenn die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe gelten, die Beschleunigung nach t Sekunden $= -g - kv$. Beide Teile der Beschleunigung sind negativ, weil sowohl Schwere als Luftwiderstand der Bewegung entgegenwirken. Somit hat man

$$dv = (-g - kv)\,dt,$$

$$dt = -\frac{dv}{g + kv},$$

$$t = -\frac{1}{k}\,l\,(g + kv) + C.$$

Wenn $t = 0$, ist $v = V$; folglich geht für diese Werte die Gleichung über in

$$0 = -\frac{1}{k}\,l\,(g + kV) + C.$$

Eliminiert man C aus den beiden letzten Gleichungen, so kommt

$$t = \frac{1}{k}\,l\,\frac{g + kV}{g + kv}.$$

Hieraus erhält man als Wert der Geschwindigkeit nach der Zeit t

$$(1) \qquad v = -\frac{g}{k} + \frac{1}{k}(g + kV)\,e^{-kt}.$$

Setzt man diesen Wert von v in die Differentialformel $dx = v\,dt$, so ist

$$dx = -\frac{g}{k}\,dt + \frac{1}{k}(g + kV)\,e^{-kt}\,dt.$$

Integriert man wie in der vorigen Aufgabe, so findet man

$$x = -\frac{g}{k}\,t - \frac{1}{k^2}(g + kV)\,e^{-kt} + C.$$

Für $t = 0$ ist $x = 0$; mithin

$$0 = -\frac{1}{k^2}(g + kV) + C.$$

Durch Subtraktion dieser beiden letzten Gleichungen erhält man den Weg

$$(2) \qquad x = -\frac{g}{k}\,t + \frac{g + kV}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

Bei Zunahme von t nimmt v ab. Setzt man $v = 0$ in Formel (1), so bezeichnet der entsprechende Wert von t diejenige Zeit, die zum Erreichen des höchsten Punktes nötig ist. Führt man diese Zeit in (2) ein, so gibt der entsprechende Wert von x diejenige Höhe an, bis zu der der Körper sich erhebt, bevor er umkehrt und fällt.

169. Freier Fall in einem Medium, dessen Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Wenn k, wie in den beiden vorigen Aufgaben, die Aenderung der Beschleunigung bezeichnet, die dem Widerstande des Mediums bei der Geschwindigkeit $= 1$ entspricht, so ist kv^2 diese Aenderung bei der Geschwindigkeit v. Da diese Aenderung die Beschleunigung der Schwere g, die wir als konstant voraussetzen, vermindert, so ist die wirkliche Beschleunigung der Bewegung

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2.$$

Setzt man der Einfachheit wegen $\frac{g}{k} = a^2$, so erhält man durch Sonderung der Veränderlichen

$$(1) \qquad k\,d\,t = \frac{d\,v}{a^2 - v^2} = \frac{1}{a} \frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2}.$$

Betrachtet man nun rechts die Grösse $\frac{v}{a}$ statt v als die Variable, so erhält man durch Integration von (1) unter Anwendung von Formel (2) des § 88

$$k\,t = \frac{1}{2\,a}\, l\, \frac{1 + \frac{v}{a}}{1 - \frac{v}{a}} + C.$$

Da für $t = 0$ auch $v = 0$ sein soll, so wird auch die Konstante $C = 0$; deshalb erhält man als Wert der Zeit

$$t = \frac{1}{2\,a\,k}\, l\, \frac{a + v}{a - v}.$$

Multipliziert man mit $2\,a\,k$ und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so folgt

$$(2) \qquad \frac{a + v}{a - v} = e^{2\,a\,k\,t} \quad \text{oder} \quad \frac{a - v}{a + v} = \frac{1}{e^{2\,a\,k\,t}}.$$

Nimmt hierin die Zeit t zu, so wächst die Exponentialgrösse im Nenner rechts sehr rasch. Für $t = \infty$ wird diese rechte Seite $= 0$; folglich muss auch der Zähler $a - v = 0$ sein, woraus folgt

$$v = a = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Dauert also die Bewegung unendlich lange, so wird die Geschwindigkeit gleich der Konstanten a, somit die Bewegung gleichförmig. Fällt also ein Körper im Wasser nach obigem Gesetze, so nähert sich seine Bewegung mehr und mehr einer gleichförmigen, je länger sie dauert.

Setzt man die Beschleunigung $g - k\,v^2$ in die Differentialformel $v\,d\,v = g\,d\,x$ an die Stelle von g, so kommt

$$v\,d\,v = (g - k\,v^2)\,d\,x,$$

$$d\,x = \frac{v\,d\,v}{g - k\,v^2}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner rechts mit $-2\,k$, so kann man schreiben

$$d\,x = -\frac{1}{2\,k} \cdot \frac{-2\,k\,v\,d\,v}{g - k\,v^2}.$$

Nunmehr ist der Zähler des zweiten Bruches das Differential des Nenners, also das Integral dieser Gleichung nach § 84

$$x = -\frac{1}{2k} l (g - k v^2) + C.$$

Für den Anfang der Bewegung ist $v = 0$ und $x = 0$; dies gibt

$$0 = -\frac{1}{2k} l g + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

(3) $$x = \frac{1}{2k} l \frac{g}{g - k v^2}.$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (2) und (3) die Geschwindigkeit v, so erhält man den Zusammenhang zwischen dem Wege x und der entsprechenden Zeit t.

Man gelangt aber auch zu diesem Zusammenhange auf folgende Weise. Aus Gleichung (2) folgt

$$v = a \frac{e^{2akt} - 1}{e^{2akt} + 1}.$$

Setzt man diesen Wert von v in die Formel $dx = v\,dt$, so kommt

$$dx = a \frac{e^{2akt} - 1}{e^{2akt} + 1} dt.$$

Multipliziert man behufs der Integration Zähler und Nenner rechts mit $k e^{-akt}$, so kann man schreiben

$$dx = \frac{1}{k} \frac{e^{akt} \cdot akdt + e^{-akt}(-akdt)}{e^{akt} + e^{-akt}}.$$

Da der Zähler rechts das Differential des Nenners ist, abgesehen von der Konstanten $\frac{1}{k}$, so gibt die Integration

$$x = \frac{1}{k} l (e^{akt} + e^{-akt}) + C.$$

Für den Anfang der Bewegung ist $t = 0$ und $x = 0$. Dies gibt

$$0 = \frac{1}{k} l 2 + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man die Fallhöhe

(4) $$x = \frac{1}{k} l \frac{e^{akt} + e^{-akt}}{2}.$$

170. Vertikaler Wurf der Körper in einem Medium, dessen Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Gelten die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe, so ist die Beschleunigung der Schwere, sowie diejenige des Widerstandes negativ zu nehmen. Die wirkliche

Beschleunigung wird somit $= -g - k v^2$ sein. Setzt man diesen Wert für g in die Differentialformel $dv = g\,dt$, so erhält man

$$dt = -\frac{dv}{g + k v^2}$$

oder, indem man im Nenner mit k dividiert und multipliziert,

$$dt = -\frac{1}{k} \cdot \frac{dv}{\frac{g}{k} + v^2}.$$

Nun ist nach Gleichung (5), § 86

$$\int \frac{dv}{a^2 + v^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{a} + C.$$

Mithin wird sein, wenn man $a^2 = \frac{g}{k}$ setzt,

$$t = -\frac{1}{\sqrt{g k}} \operatorname{arc\,tang} v \sqrt{\frac{k}{g}} + C.$$

Für den Anfang der Bewegung ist $t = 0$ und $v =$ der Anfangsgeschwindigkeit V. Mit Hilfe dieser Werte wird die vorstehende Gleichung

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{g k}} \operatorname{arc\,tang} V \sqrt{\frac{k}{g}} + C.$$

Folglich erhält man durch Elimination der Konstanten C

$$(1) \qquad t = \frac{1}{\sqrt{g k}} \left[\operatorname{arc\,tang} V \sqrt{\frac{k}{g}} - \operatorname{arc\,tang} v \sqrt{\frac{k}{g}} \right].$$

Um den Zusammenhang zwischen der Zeit und dem durchlaufenen Wege zu finden, löse man die Gleichung (1) zuerst in Hinsicht v auf und setze zu diesem Zwecke

$$(2) \qquad \sqrt{\frac{k}{g}} = \frac{1}{a}; \quad \operatorname{arc\,tang} V \sqrt{\frac{k}{g}} = \alpha; \quad \operatorname{arc\,tang} v \sqrt{\frac{k}{g}} = \varphi;$$

man erhält dann aus diesen Gleichungen (2)

$$(3) \qquad \frac{1}{\sqrt{g k}} = \frac{a}{g}, \qquad \frac{V}{a} = \operatorname{tang} \alpha, \qquad \frac{v}{a} = \operatorname{tang} \varphi$$

und aus Gleichung (1)

$$\alpha - \varphi = \frac{g t}{a};$$

folglich auch, wenn man auf beiden Seiten die Tangenten nimmt,

$$(4) \qquad \operatorname{tang}(\alpha - \varphi) = \operatorname{tang} \frac{g t}{a}.$$

Allein nach einer bekannten trigonometrischen Relation ist

$$\operatorname{tang}(\alpha - \varphi) = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\varphi}.$$

Setzt man hierin die Werte aus (3) und (4), so kommt

$$\operatorname{tang}\frac{g\,t}{a} = a\,\frac{V - v}{a^2 + V\,v}; \qquad v = a\,\frac{V - a\operatorname{tang}\frac{g\,t}{a}}{a + V\operatorname{tang}\frac{g\,t}{a}};$$

$$(5) \qquad v = a\,\frac{V\cos\frac{g\,t}{a} - a\sin\frac{g\,t}{a}}{V\sin\frac{g\,t}{a} + a\cos\frac{g\,t}{a}}.$$

Führt man diesen Wert von v in die Gleichung $d\,x = v\,d\,t$ ein, so ist

$$d\,x = a\,\frac{V\cos\frac{g\,t}{a} - a\sin\frac{g\,t}{a}}{V\sin\frac{g\,t}{a} + a\cos\frac{g\,t}{a}}\,d\,t.$$

Da hierin der Zähler des Bruches das Differential des Nenners ist, so gibt die Integration (§ 84)

$$x = a\,l\left[V\sin\frac{g\,t}{a} + a\cos\frac{g\,t}{a}\right] + C.$$

Für den Anfang ist $t = 0$ und $x = 0$. Hierfür wird

$$0 = a\,l\,a + C.$$

Mithin durch Subtraktion dieser Gleichungen die gesuchte Relation

$$(6) \qquad x = a\,l\left[\frac{V}{a}\sin\frac{g\,t}{a} + \cos\frac{g\,t}{a}\right].$$

Um den Zusammenhang zwischen den Grössen x und v zu ermitteln, könnte die Zeit t aus den Gleichungen (1) und (6) eliminiert werden. Allein man erhält diesen Zusammenhang auch, wenn man in die Differentialformel $v\,d\,v = g\,d\,x$ statt g die dieser Aufgabe entsprechende Beschleunigung $- g - k\,v^2$ setzt. Dies gibt

$$d\,x = -\frac{v\,d\,v}{g + k\,v^2}.$$

Auf der rechten Seite bewirkt man, dass der Zähler das Differential des Nenners wird, indem man schreibt

$$d\,x = -\frac{1}{2\,k}\cdot\frac{2\,k\,v\,d\,v}{g + k\,v^2}.$$

Folglich erhält man durch Integration

$$x = -\frac{1}{2\,k}\,l\,(g + k\,v^2) + C.$$

Für $x = 0$ wird $v =$ der Anfangsgeschwindigkeit V. Diese Werte geben

$$0 = -\frac{1}{2k} l(g + kV^2) + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man den gesuchten Zusammenhang

$$x = \frac{1}{2k} l \frac{g + kV^2}{g + kv^2}. \tag{7}$$

Setzt man in der Gleichung (1) die Geschwindigkeit $v = 0$, so gibt der entsprechende Wert von t, den wir mit T bezeichnen wollen, die Zeit an, die der Körper zur Erreichung des höchsten Punktes nötig hat. Mit Berücksichtigung der Relation (2) erhält man

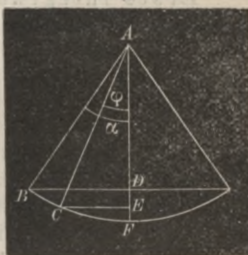
$$T = \frac{a\alpha}{g}.$$

Wird dieser Wert von T in Gleichung (6) eingeführt und der entsprechende Wert von x mit X bezeichnet, so erhält man die ganze Steighöhe

$$X = a l \left(\frac{V}{a} \sin\alpha + \cos\alpha\right).$$

171. Bewegung des Pendels im leeren Raume. Es sei A (Fig. 52) der Aufhängepunkt eines mathematischen Pendels und AF die vertikale Lage der Pendelstange. Diese Stange werde in die Lage AB versetzt, die mit der vertikalen Lage AF den Winkel α bildet, und sodann sich selbst überlassen. Man soll den entstehenden Bewegungszustand bestimmen.

Fig. 52.



Der schwere Punkt in B hat das Bestreben, in vertikaler Richtung zu fallen und eine der Schwere entsprechende Beschleunigung anzunehmen. Man zerlege diese Beschleunigung g in die beiden Seitenbeschleunigungen $g\cos\alpha$ und $g\sin\alpha$. Die erstere fällt in die Richtung der Pendelstange und kommt nicht zur Wirkung. Die Seitenbeschleunigung $g\sin\alpha$ steht senkrecht zur Pendelstange AB und fällt in die Vertikalebene, die durch AB geht. Mit dieser Beschleunigung beginnt die Bewegung. In der Lage AC, die mit AF den Winkel φ bilden soll, ist die Beschleunigung $= g\sin\varphi$. Die Richtung dieser sich mit φ ändernden Beschleunigung fällt immer in die genannte Vertikalebene. Der Weg BF des schweren Punktes ist also eine ebene Kurve und zwar ein Kreisbogen.

Die Länge der Pendelstange sei a, der in der Zeit t durchlaufene Bogen $BC = x$; dann ist, wenn α und φ im Bogenmass ausgedrückt werden, $x = a(\alpha - \varphi)$. Denkt man sich α und a konstant, so erhält man durch Differentiation dieser Gleichung

$$dx = -a\,d\varphi. \tag{1}$$

Setzt man in die Differentialformel $v\,dv = g\,dx$ der Bewegung statt g die veränderliche Beschleunigung $g \sin \varphi$, und statt dx den in (1) enthaltenen Wert, so folgt

$$v\,dv = -g\,a \sin \varphi\, d\varphi.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$\frac{v^2}{2} = g\,a \cos \varphi + C. \tag{2}$$

Für $\varphi = \alpha$ wird $v = 0$. Hierfür erhält man aus (2)

$$0 = g\,a \cos \alpha + C$$

und durch Subtraktion dieser Gleichung von (2)

$$v = \sqrt{2\,g\,a\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}. \tag{3}$$

Zieht man BD und CE horizontal, so ist Abstand $DE = a(\cos \varphi - \cos \alpha)$. Folglich ist die Geschwindigkeit des Pendels, nachdem er den Bogen BC durchlaufen hat $= \sqrt{2\,g \cdot DE}$, d. h. ebenso gross als wenn er den vertikalen Abstand der Endpunkte dieses Bogens durchlaufen hätte. Für $\varphi = 0$ ist die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,a\,(1 - \cos \alpha)}$ ein Maximum. Da v ebensowohl für $\varphi = -\alpha$ wie für $\varphi = +\alpha$ zu Null wird, so sind die Ausweichungen des Pendels zu beiden Seiten der Vertikalen AF gleich gross.

Um die Schwingungszeit zu bestimmen, setze man den Wert von v aus (3) in die Differentialformel $dx = v\,dt$, und vertausche noch dx mit $-a\,d\varphi$, Formel (1); man erhält alsdann

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{2\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}}. \tag{4}$$

Erste Integration. Um den Ausdruck rechts in (4) zu integrieren, entwickle man $\cos \varphi$ und $\cos \alpha$ nach § 72 in Reihen:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots$$

Wenn nun α ein sehr kleiner Bogen ist, so dass in diesen Reihen die Glieder mit den vierten Potenzen von α und φ und die folgenden vernachlässigt werden können, so wird sein

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}; \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \quad 2\,(\cos \varphi - \cos \alpha) = \alpha^2 - \varphi^2.$$

Setzt man den letzten Wert in (4) ein, so erhält man

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}.$$

Um diese Gleichung nach Formel (4), § 27, durch blosse Umkehrung integrieren zu können, schreibe man zuerst

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \frac{d\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2}},$$

woraus man durch Integration

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{\varphi}{\alpha} + C$$

erhält.

Für $t = 0$ wird $\varphi = \alpha$. Hierfür wird $\arccos 1 = 0$, somit auch $C = 0$. Deshalb ist

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{\varphi}{\alpha}. \tag{5}$$

Lässt man hierin φ abnehmen von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = 0$, so erhält man die dem Bogen BF entsprechende Zeit $= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$, weil der Bogen $= \frac{\pi}{2}$, wenn der zugehörige Cosinuswert $= 0$ ist.

Nimmt φ ab von $\varphi = +\alpha$ bis $\varphi = -\alpha$, so wird $\arccos(-1) = \pi$. Die dieser Aenderung entsprechende Zeit ist die Schwingungszeit, die mit T bezeichnet werde. Folglich ist

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{6}$$

Nach Verfluss der Zeit T kehrt das Pendel um und macht nach entgegengesetzter Richtung eine Schwingung von gleicher Dauer u. s. w. Diese Formel (6) gilt streng genommen nur für unendlich kleine Schwingungswinkel. Für unendlich kleine Schwingungsweiten ist also die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional.

Zweite Integration. Wenn man, um die Formel (4) zu integrieren, in obigen Reihen für $\cos\varphi$ und $\cos\alpha$ die Glieder bis zur vierten Potenz der Bogen nimmt, so erhält man durch Subtraktion

$$2(\cos\varphi - \cos\alpha) = \alpha^2 - \varphi^2 - \tfrac{1}{12}(\alpha^4 - \varphi^4),$$

oder da $\alpha^4 - \varphi^4 = (\alpha^2 + \varphi^2)(\alpha^2 - \varphi^2)$, so ist

$$2(\cos\varphi - \cos\alpha) = (\alpha^2 - \varphi^2)\left[1 - \tfrac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)\right].$$

Hierfür wird nun Formel (4)

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 - \varphi^2}\sqrt{1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)}}. \tag{7}$$

Entwickelt man die zweite Wurzelgrösse mit dem Exponenten $-\frac{1}{2}$ nach dem binomischen Satze in eine Reihe und bricht bei der zweiten Potenz von φ ab, so erhält man

$$\left[1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{24}(\alpha^2 + \varphi^2).$$

Führt man diesen Wert in (7) ein, so kommt

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{d\,t} = -\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{g}}}\left[\frac{1 + \frac{1}{24}\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\,\mathrm{d}\,\varphi + \frac{1}{24}\,\frac{\varphi^2\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\right].$$

Die Grösse d t dieser Formel werde integriert von $\mathrm{t} = 0$ bis $\mathrm{t} = \frac{1}{2}\mathrm{T}$, wenn mit T die ganze Schwingungszeit bezeichnet wird. Diesen Grenzen entsprechen die Grössen $\varphi = \alpha$ und $\varphi = 0$; also müssen die Integrale rechts von (8) zwischen den Grenzen $\varphi = \alpha$ und $\varphi = 0$ genommen werden. Vertauscht man diese Grenzen, so ändert das Integral rechts, nach Formel (3), § 93, sein Zeichen. Deshalb wird sein

$$\text{(9)} \qquad \frac{\mathrm{T}}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{g}}}\left[\int_0^\alpha \frac{1 + \frac{1}{24}\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\,\mathrm{d}\,\varphi + \frac{1}{24}\int_0^\alpha \frac{\varphi^2\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\right].$$

Nun ist aber nach § 86, Formel (4) und nach § 90, III., Formel (6)

$$\int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \frac{\pi}{2}; \qquad \int_0^\alpha \frac{\varphi^2\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man diese Werte in (9) ein, so erhält man

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{g}}}\left[\left(1 + \frac{1}{24}\alpha^2\right)\pi + \frac{1}{48}\alpha^2\pi\right].$$

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{g}}}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right).$$

Der Wert von T in (10) ist im Verhältnis von 1 zu $(1 + \frac{1}{16}\alpha^2)$ grösser als der in (6). Für eine Ablenkung der Pendelstange von der vertikalen Richtung $= 5^0$ ist der entsprechende Bogen $\alpha = 0{,}087\,266$. Hierfür wird

$$1 + \tfrac{1}{16}\alpha^2 = 1{,}000\,476.$$

Hat das Pendel einen unendlich kleinen Schwingungswinkel oder einen Winkel von 5^0, so macht es im ersteren Falle 1 000 476 Schwingungen in derselben Zeit, in der es im zweiten Falle 1 000 000 Schwingungen macht.

Dritte Integration. Setzt man

$$1 - \cos\varphi = \mathrm{z},$$

so erhält man durch Differentiation

$$\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi = \mathrm{d\,z}, \qquad \mathrm{d}\,\varphi = \frac{\mathrm{d\,z}}{\sin\varphi} = \frac{\mathrm{d\,z}}{\sqrt{2\,\mathrm{z} - \mathrm{z}^2}}.$$

Setzt man ferner $1 - \cos\alpha = b$ und zieht hiervon $1 - \cos\varphi = z$ ab, so folgt

$$\cos\varphi - \cos\alpha = b - z.$$

Vermittelst dieser Werte wird das Differential der Zeit in Formel (4)

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{dz}{\sqrt{2z - z^2}\sqrt{2(b - z)}},$$

oder indem man $\sqrt{2z}$ aus dem einen Divisor in den andern versetzt,

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}\sqrt{1 - \frac{z}{2}}}.$$

Allein nach dem binomischen Satze ist

$$\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^2}{4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^3}{8} + \ldots$$

Setzt man diesen Wert in die vorstehende Formel und integriert, so kommt

$$(11)\quad t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int\frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^2}{4} + \ldots\right).$$

Es bezeichne wie oben T die ganze Schwingungszeit. Um durch die Integration von (11) die Grösse $\frac{T}{2}$ zu erhalten, muss das Pendel den Bogen α durchlaufen, d. h. es muss φ von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = 0$ abnehmen. Diesen Grenzen entsprechen, zufolge der Gleichung $1 - \cos\varphi = z$, die Grenzen $z = b$ und $z = 0$. Somit ist b die untere und 0 die obere Grenze für das Integral rechts in (11). Vertauscht man diese Grenzen, so ändert nach Formel (3), § 93, das Integral sein Vorzeichen. Multipliziert man zudem noch mit 2, so kommt

$$(12)\quad T = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^b\frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^2}{4} + \ldots\right).$$

Nun ist nach Formel (7), § 86

$$\int\frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}} = \arcsin\frac{2z - b}{b} + C,$$

folglich

$$(13)\quad \int_0^b\frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}} = \pi.$$

Es geht nämlich der Bogen von $-\frac{1}{2}\pi$ durch die Null in $+\frac{1}{2}\pi$ über für $z = 0$ bis $z = b$.

Ferner ist nach Formel (4), § 88

$$\int\frac{z^n\,dz}{\sqrt{bz - z^2}} = -\frac{z^{n-1}}{n}\sqrt{bz - z^2} + \frac{2n - 1}{2n}b\int\frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{bz - z^2}}.$$

Da in diesem Integral das erste Glied rechts wegfällt für $z = 0$ und für $z = b$, so wird sein

$$\int_0^b \frac{z^n\,dz}{\sqrt{bz - z^2}} = \frac{2n-1}{2n}\,b\int_0^b \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{bz - z^2}}.$$

Bezeichnet man die linke Seite mit A_n, so ist hiernach

$$A_n = \frac{2n-1}{2n}\,b\,A_{n-1}.$$

Folglich erhält man, da nach (13) $A_0 = \pi$:

$$\text{für } n = 1, \qquad A_1 = \frac{1}{2}\,b\,A_0 = \frac{1}{2}\,b\,\pi,$$

$$\text{für } n = 2, \qquad A_2 = \frac{3}{4}\,b\,A_1 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,b^2\,\pi,$$

$$\text{für } n = 3, \qquad A_3 = \frac{5}{6}\,b\,A_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,b^3\,\pi, \text{ u. s. w.}$$

Setzt man diese Werte in (12) ein, so erhält man die gesuchte Gleichung für die Schwingungszeit

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3 + \ldots\right].$$

Bezeichnet man noch FD (Fig. 52) mit h, so wird $b = \frac{h}{a}$; daher geht die letzte Gleichung über in die häufig vorkommende Form

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2a}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2a}\right)^3 + \ldots\right]$$

172. Bewegung eines Projektils in einer Geschützröhre. Diese Bewegung soll betrachtet werden unter der Voraussetzung, dass sich die ganze Pulverladung gleichzeitig entzünde; dass erst nach dieser gänzlichen Entzündung die Bewegung des Projektils beginne; dass das Pulvergas sich nach dem Mariotte'schen Gesetze ausdehne, dass während der Bewegung des Geschosses in der Röhre kein Gas entweiche und dass das Geschoss keinen Widerstand an der Wand der Röhre finde. Diese Voraussetzungen sind nur annähernd richtig, deshalb werden auch die folgenden Resultate nur als Annäherungen zu betrachten sein. Es bezeichne:

L die Länge der Geschützröhre im Innern,

a die Ausdehnung der Ladung, in der Richtung der Röhre,

V die Geschwindigkeit, mit der das Geschoss die Mündung der Röhre verlässt,

v die Geschwindigkeit, die das Geschoss in der Röhre im Abstande x von der Ladung besitzt, g, g' die Beschleunigungen im ersten Augenblicke der Bewegung und im Abstande x von der Ladung. Nach dem Mariotte'schen Gesetze ist alsdann

$$g' : g = a : (a + x); \qquad g' = g \frac{a}{a + x}.$$

Setzt man diesen Wert von g' in die Differentialformel $v\,dv = g\,dx$ an die Stelle von g, so erhält man

$$v\,dv = a\,g \frac{dx}{a + x}$$

und durch Integration

$$(1) \qquad \frac{v^2}{2} = a\,g\,l\,(a + x) + C.$$

Wenn $x = 0$, so ist auch $v = 0$. Hierfür erhält man aus (1)

$$0 = a\,g\,l\,a + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (1) ab, so folgt

$$\frac{v^2}{2} = a\,g\,l \frac{a + x}{a}.$$

Dehnt man hierin x bis L — a aus, also so weit, als das Gas auf das Geschoss wirken kann, so geht v in V über, und man erhält aus der letzten Formel

$$(2) \qquad V^2 = 2\,a\,g\,l \left(\frac{L}{a}\right).$$

Ist V bekannt, so kann hieraus g, also auch die Intensität des Pulvergases berechnet werden.

Es sei

$$V = 400\ m, \qquad a = 0{,}1\ m, \qquad L = 1{,}5\ m;$$

dann findet man durch Substitution dieser Werte in Formel (2)

$$g = 295\,415\ m,$$

d. h. würde das Pulvergas eine Sekunde lang mit derjenigen Intensität, die es im ersten Augenblicke seiner Entstehung besitzt, konstant auf das Geschoss einwirken, so würde dasselbe in dieser Zeit eine Geschwindigkeit = 295 415 *m* annehmen. Unter dieser Voraussetzung würde eine gleichförmig beschleunigte Bewegung entstehen, die eine Vergleichung mit dem freien Falle der Körper zulässt.

Wenn das Gewicht des Geschosses = 6 *kg*, der grösste Druck des Gases auf das Geschoss = x und die Beschleunigung beim freien Falle = 9,81 ist, so entsteht die Proportion

$$9{,}81 : 295\,415 = 6 : x; \quad \text{woraus} \quad x = 180\,682\ kg.$$

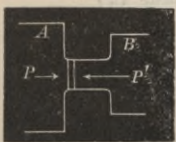
Beträgt der Querschnitt des Geschosses 80 *qcm*, so ist obiger Druck auf 1 *qcm* = 2 259 *kg*. Dieser Druck entspricht circa 2 187 Atmosphären.

173. Geschwindigkeit, mit der Gas aus einem Gefässe in ein anderes überströmt. Damit das Gas aus einem Gefässe A (Fig. 53) in ein Gefäss B überströmen kann, muss seine Spannung in A grösser sein als in B. Beim Uebergange aus A in B wird die Spannkraft des Gases in A stetig abnehmen. Es seien:

P, P' die Spannungen des Gases in A und B, für jede Flächeneinheit,
p die Pressung des Gases für jede Flächeneinheit an einer solchen Stelle des Abflusskanales, wo seine Geschwindigkeit $= v$ ist,
F der Querschnitt des Kanales an dieser Stelle.
V die Geschwindigkeit, mit der das Gas in das Gefäss B eintritt und
G das Gewicht der Kubikeinheit Gas vom Drucke s einer Atmosphäre und der Temperatur 0;

es wird dieses Gewicht für den Druck p gleich $G\dfrac{p}{s}$; steigt aber die

Fig. 53.



Temperatur von 0 auf t, so wird das Volumen $= 1 + \alpha t$, wo α die Zunahme des Volumens für je 1 Grad bezeichnet. Daher wird das Gewicht der Kubikeinheit für t Grade und der Pressung p gleich

$$(1) \qquad \frac{G\,p}{s(1+\alpha t)}.$$

Legt man an der Stelle, wo das Gas eine Geschwindigkeit v hat, einen Schnitt durch den Kanal, normal zur Richtung der Bewegung, so wird dieser Querschnitt im Zeitelemente $d\,t$ um das Wegelement $d\,x$ vorgeschoben und die Geschwindigkeit v geht über in $v + d\,v$. Der Querschnitt F kann längs des Weges $d\,x$ als konstant angesehen werden. Das Volumen, das er beschreibt, ist $= F\,d\,x$; somit das Gewicht des Volumenelementes Gas nach (1)

$$(2) \qquad \frac{G\,p}{s(1+\alpha t)} \cdot F\,d\,x.$$

Während v in $v + d\,v$ übergeht, wird p zu $p - d\,p$. Der Druck auf das Volumenelement von der Seite A ist $= F\,p$, von der Seite $B = F(p - d\,p)$; somit der Unterschied dieser Kräfte $= F\,d\,p$. Diese Kraft treibt das Gewicht (2) vorwärts, und da diese Kraft während des Weges $d\,x$ als konstant angesehen werden kann, so wird die Bewegung gleichförmig beschleunigt.

Bezeichnet man die entsprechende Beschleunigung mit g', diejenige der Schwere mit g, so hat man

$$g' : g = F\,d\,p : \frac{G\,p}{s(1+\alpha t)} \cdot F\,d\,x,$$

weil zwei konstante Kräfte, die auf eine und dieselbe Masse (2) wirken, Beschleunigungen hervorbringen, die den Kräften proportional sind.

Setzt man den hieraus folgenden Wert von g' in die Differentialformel $v\,d\,v = g\,d\,x$ an die Stelle von g und berücksichtigt, dass $d\,v$ und $d\,p$ entgegengesetzte Zeichen haben, so erhält man

$$\frac{v\,d\,v}{g} = -\frac{s(1+\alpha t)}{G} \cdot \frac{d\,p}{p}.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt, wenn man t während des Vorganges als konstant voraussetzt,

$$(3) \qquad \frac{v^2}{2g} = -\frac{s(1+\alpha t)}{G} l\, p + C.$$

Für den Anfang der Bewegung ist $v = 0$ und $p = P$; setzt man diese Werte in (3) ein, so kommt

$$0 = -\frac{s(1+\alpha t)}{G} l\, P + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (3) ab, so folgt

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{s(1+\alpha t)}{G} l \frac{P}{p}.$$

Geht hierin p in P′ über, so wird v zu V; folglich ist die gesuchte Geschwindigkeit

$$(4) \qquad V = \sqrt{2g\frac{s}{G}(1+\alpha t)\, l \frac{P}{P'}}.$$

Bei numerischen Rechnungen ist zu setzen

$g = 9{,}81\ m$; $s = 10\,333\ kg$ für $1\ qm$; $\alpha = 0{,}003\,67$;

ferner für atmosphärische Luft $G = 1{,}293\ kg$. Um den natürlichen Logarithmus zu erhalten, wende man den gemeinen an und multipliziere ihn mit 2,302 58.

X. Aufgaben über mechanische Arbeit.

174. Begriff von mechanischer Arbeit. Wenn der Angriffspunkt einer Kraft in der Richtung der Kraft fortschreitet, so ist die Wirkung, die die Kraft hervorbringt, sowohl proportional der Intensität der Kraft, als auch dem von ihr zurückgelegten Wege, also proportional dem Produkte aus der Intensität und dem Wege. Dieses Produkt wird die Arbeit der Kraft genannt.

Wenn ein Gewicht von 5 *kg* auf eine Höhe von 4 *m* gehoben wird, so ist die erforderliche Arbeit $5 \times 4 = 20$ Kilogramm-Meter.

Wird ein Widerstand von 10 Pfunden längs eines Weges von 5 Fuss überwunden, so ist die auf diesen Widerstand verwendete Arbeit $10 \times 5 = 50$ Fuss-Pfunde.

175. Einschlagen eines Nagels in eine homogene Masse. Der Widerstand, den der Nagel beim Eindringen findet, bestehe aus zwei Teilen: aus dem Widerstande, den die Spitze des Nagels erfährt, und aus einem Teile, der von der Reibung der Oberfläche des Nagels an der Substanz herrührt. Nehmen wir den ersteren Teil konstant und den letzteren proportional der Tiefe x an, bis zu der der Nagel schon als eingetrieben angesehen werden kann, so ist der gesamte Widerstand $= a + b x$, worin a und b konstante Grössen bezeichnen.

Dringt der Nagel um den Weg dx ein, so kann der längs des Weges dx wirkende Widerstand als konstant angesehen werden. Die Arbeit für diesen Wegteil ist deshalb

$$(a + bx)\,dx.$$

Wenn L die Länge des Nagels bezeichnet, so ist die gesamte Arbeit zum Einschlagen des Nagels

$$\int_0^L (a + bx)\,dx = aL + \frac{bL^2}{2}.$$

176. Arbeit, um Wasser in einer kommunizierenden Röhre zu verschieben. Die Röhre habe zwei vertikale, gleich weite cylindrische Schenkel; diese seien bis auf eine gewisse Höhe mit Wasser gefüllt, so dass das Niveau in beiden Schenkeln gleich hoch steht. Bringt man nun in den einen Schenkel einen luftdicht anschliessenden Kolben, ähnlich dem einer Pumpe, und drückt den Kolben abwärts, so wird das Wasser in der Röhre verschoben. Man soll die darauf verwendete Arbeit ermitteln. Es sei

γ das Gewicht der Kubikeinheit Wasser,
q der Querschnitt der Wassersäule und
x der Weg, um den der Kolben abwärts geschoben worden;

dann ist der Höhenunterschied der Wasserspiegel in beiden Schenkeln $= 2x$; daher drückt auf den Kolben eine Wassersäule von der Höhe $2x$, also dem Volumen $2xq$ und dem Gewichte $2xq\gamma$. Das ist aber auch der Druck, den der Kolben gegen das Wasser ausübt.

Rückt der Kolben vor um den Weg dx, so wird dabei eine Arbeit verrichtet $= 2xq\gamma \cdot dx$. Somit ist die Arbeit, die der Kolben verrichtet, indem er um x sinkt,

$$\int_0^x 2xq\gamma \cdot dx = 2\gamma q \int_0^x x\,dx = \gamma q x \cdot x.$$

Nun ist $\gamma q x$ das Gewicht des Wassers, das aus dem einen Schenkel nach dem anderen verschoben worden, und x die Höhe, um die diese Wassermenge im anderen Schenkel steigen muss.

Es sei der erste Schenkel ein Luftkasten, wie er unter Wasser bei Gründungsarbeiten angewendet wird. Denkt man sich den Kolben ersetzt durch verdichtete Luft, die von einem Kompressor her in diesen Kasten getrieben wird, so sinkt das Wasser im Kasten und entweicht in das den Kasten umgebende Wasser. Dieses bildet den zweiten Schenkel der Röhre, nur mit dem Unterschiede, dass das Wasser im zweiten Schenkel nicht steigt. Daher ist der Druck des Kolbens (der Luft) in der Tiefe x nur $= \gamma q x$; also das Arbeitselement $= \gamma q x\,dx$ und die gesuchte Arbeit, um das Wasser aus dem Kasten zu treiben,

$$\gamma q \int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}\gamma q x \cdot x.$$

Geht der Wasserspiegel im Kasten über aus einer Tiefe h_0 in h, wo $h > h_0$, so ist die auf den Vorgang verwendete Arbeit

$$\gamma\, q \int_{h_0}^{h} x\, d\, x = \frac{1}{2} \gamma\, q\, (h^2 - h_0{}^2).$$

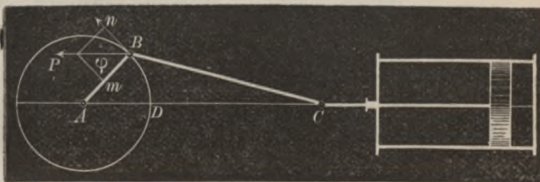
Hiernach wird das Wasservolumen $q\,(h - h_0)$ niedergedrückt durch eine Wassersäule vom Querschnitte q und der mittleren Höhe $\frac{1}{2}(h + h_0)$.

177. Uebertragung mechanischer Arbeit durch die Kurbel. Der Druck des Kolbens einer Dampfmaschine, einer Pumpe etc. wirkt in der Richtung A C (Fig. 54), längs der sich der Kolben hin- und herbewegt. Der Druck, den somit die Schubstange C B gegen den Zapfen B der Kurbel B A ausübt, ist, in der Richtung A C genommen, gleich dem Kolbendrucke. Nun sei:

P der Kolbendruck, längs des ganzen Hubes konstant gedacht,
r der Halbmesser des Kurbelkreises B D, und
φ der Winkel B A D, den die Kurbel mit der Richtung A C bildet, im Bogenmass ausgedrückt.

Man zerlege die Kraft P, wirkend am Kurbelzapfen B, in zwei Seitenkräfte $B\,n = P \sin \varphi$ und $B\,m = P \cos \varphi$, wovon die erstere tangential an den Kurbelkreis und die letztere gegen die Kurbelwelle A wirkt. Die letztere Kraft wird durch den Widerstand der Kurbelwelle aufgehoben, während die erstere die Kurbel dreht, also arbeitet.

Fig. 54.



Wenn φ und $d\,\varphi$ zunimmt, so rückt der Kurbelzapfen um $r\,d\,\varphi$ vor. Die Kraft $P \sin \varphi$ kann während des Wegelementes $r\,d\,\varphi$ als konstant angesehen werden, und da ihre Richtung mit der des Weges zusammenfällt, so ist die Arbeit der Kraft längs des Weges $r\,d\,\varphi = P\,r \sin \varphi\, d\,\varphi$. Da nun $\int \sin \varphi\, d\,\varphi = -\cos \varphi + C$, so ist die Arbeit der tangentiellen Seitenkraft während eines Kolbenganges

$$P\,r \int_0^{\pi} \sin \varphi\, d\,\varphi = 2\,P\,r,$$

also gleich dem Produkte aus dem Drucke auf den Kolben in den Weg 2 r des Kolbens. Es geht somit durch die Kurbelbewegung keine Arbeit verloren, abgesehen von den vorkommenden Reibungen.

Wenn der mittlere Druck auf den Kurbelzapfen, in der Richtung der Tangente an den Kurbelkreis, P′ ist, so ist seine Arbeit während eines Kolbenganges, also längs einer halben Peripherie des Kurbelkreises $= P'\,\pi\,r$. Da diese Arbeit $= 2\,P\,r$ sein muss, so folgt

$$P' = \frac{2}{\pi} P = 0{,}636\,P.$$

178. Arbeit, die auf die Drehung einer rechtwinkeligen Fläche in einem Medium verwendet werden muss. Der Erfahrung zufolge ist der Widerstand, den Wasser, Luft etc. der Bewegung entgegensetzen, proportional der Fläche, die normal zur Richtung der Bewegung gegen das Medium stösst und sehr nahe proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit der Bewegung. Es seien

a die Kante, um die sich das Rechteck dreht,
b die darauf senkrechte Kante des Rechteckes,
v die Geschwindigkeit der Fläche im Abstande b von der Achse,
p der Widerstand, den das Medium einer Fläche $= 1$ entgegensetzt, wenn sich diese mit einer Geschwindigkeit $= 1$ bewegt.

Legt man in der Rechtecksfläche, in den Abständen x und $x + dx$ zwei Gerade parallel zur Achse, so schliessen dieselben ein Flächenelement $= a\,dx$ ein. Die Geschwindigkeit, mit der sich dieses Flächenelement dreht, sei u; dann ist

$$u : v = x : b, \qquad u = \frac{v}{b} x.$$

Würde die Fläche $a\,dx$ sich mit der Geschwindigkeit $= 1$ bewegen, so fände sie einen Widerstand $= p\,a\,dx$; folglich ist der Widerstand dieses Flächenelementes bei der Geschwindigkeit u

$$(1) \qquad p\,a\,dx \cdot u^2 = \frac{p\,a\,v^2}{b^2} \cdot x^2\,dx,$$

und der Widerstand der ganzen Rechtecksfläche

$$(2) \qquad \frac{p\,a\,v^2}{b^2} \int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3} p\,a\,b\,v^2.$$

Dieser Widerstand ist somit nur $\frac{1}{3}$ von jenem, den die Fläche bei fortschreitender Bewegung finden würde.

Der Angriffspunkt der Kraft (1) rückt in der Zeiteinheit um den Weg u, in der Richtung von u, vor, folglich ist die auf das Flächenelement $a\,dx$ verwendete Arbeit

$$p\,a\,dx \cdot u^3 = \frac{p\,a\,v^3}{b^3} \cdot x^3\,dx,$$

und die Arbeit für die ganze Rechtecksfläche

$$(3) \qquad \frac{p\,a\,v^3}{b^3} \int_0^b x^3\,dx = \frac{1}{4} p\,a\,b\,v^3.$$

Diese Arbeit ist somit der dritten Potenz der Rotationsgeschwindigkeit proportional und gleich $\frac{1}{4}$ der Arbeit $p\,a\,b\,v^3$, die die Fläche bei fortschreitender Bewegung nötig hätte.

Der Widerstand (2), als Kraft gedacht mit einem Angriffspunkte, der um x_0 von der Achse abstehe, bewege sich mit der Geschwindigkeit u_0; dann ist die Arbeit, die auf diesen Widerstand verwendet wird,

$$\tfrac{1}{3} p\,a\,b\,v^2 \cdot u_0 = \tfrac{1}{3} p\,a\,v^3 \cdot x_0.$$

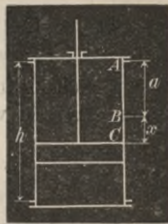
Diese Arbeit muss aber gleich sein dem Werte (3); daher folgt

$$x_0 = \tfrac{3}{4} b,$$

d. h. der Mittelpunkt des Widerstandes hat einen Abstand von der Achse gleich $\frac{3}{4}$ von der Breite des Rechteckes.

179. Arbeit des Dampfes bei einer Expansionsmaschine. Bei dieser Maschine füllt der Dampf, der bei jedem Kolbenzuge in den Dampfcylinder tritt, denselben nicht ganz an, sondern es wird die Kommunikation des Cylinders und der Dampfleitungsröhre unterbrochen, nachdem der Kolben einen Weg $AB = \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$ (Fig. 55) des ganzen Hubes h durchlaufen hat. Der Dampf wirkt also nur während des Teiles $AB = a$ der Hublänge mit dem anfänglichen konstanten Drucke P, dehnt sich nachher aus und wirkt während dieser Periode der Ausdehnung mit einem Drucke auf den Kolben, der mit der Ausdehnung des Dampfes abnimmt. Bezeichnet P' den Dampfdruck auf den Kolben, nachdem dieser einen Weg $BC = x$ während der Periode der Expansion durchlaufen hat, so sollen mit Rücksicht auf die Abnahme des Druckes zwei Fälle unterschieden werden.

Fig. 55.



a) Druckabnahme nach dem Mariotte'schen Gesetze. Setzt man voraus, der Dampf dehne sich aus wie ein permanentes Gas, ohne dabei seine Temperatur zu ändern, so nimmt die Spannung in gleichem Verhältnis ab, wie das Volumen zunimmt; daher

$$\frac{P'}{P} = \frac{\text{Volumen von A bis B}}{\text{Volumen von A bis C}} = \frac{a}{a+x} \text{ oder}$$

$$(1) \qquad P' = P\frac{a}{a+x}.$$

Wenn der Kolben sich von C aus um den unendlich kleinen Weg dx bewegt, so kann der Dampfdruck P' während dieses Weges als konstant angesehen werden. Somit ist die Arbeit der Kraft P' längs des Weges dx

$$(2) \qquad P'\,dx = aP\frac{dx}{a+x},$$

und die Arbeit während der ganzen Periode der Expansion

$$(3) \qquad aP\int_0^{h-a}\frac{dx}{a+x} = aP\,l\,\frac{h}{a}.$$

Addiert man zu dieser Arbeit noch die Arbeit aP, die der Dampf längs des Weges AB, also vor dem Eintritte der Dampfabsperrung verrichtet, so erhält man als gesamte Arbeit während eines Kolbenzuges

$$aP\left(1 + l\,\frac{h}{a}\right).$$

Für briggische Logarithmen ist dieser Ausdruck

$$aP\left(1 + 2{,}3026\log\frac{h}{a}\right).$$

b) Druckabnahme nach dem Poisson'schen Gesetze. Indem der Dampf arbeitet, verwandelt sich ein Teil der Wärme, die er enthält, in Arbeit, so dass seine Temperatur sinkt und ein Teil Dampf kondensiert wird. Der noch übrig gebliebene Dampf hat daher, nachdem der Kolben einen Weg x zurückgelegt hat, eine kleinere Spannung als nach dem Gesetze (1). Diese Spannung P′ ergibt sich aus der Gleichung

$$(4) \qquad \frac{P'}{P} = \left(\frac{a}{a+x}\right)^n,$$

worin nach Zeuner für trockenen Dampf $n = 1{,}133$ angenommen werden kann. Daher wird das Arbeitselement $P' \, dx$ unter Benutzung von (4)

$$P' \, dx = P\left(\frac{a}{a+x}\right)^n dx = P a^n (a+x)^{-n} dx.$$

Das Integral hiervon zwischen den Grenzen 0 und $h - a$ ist

$$\int^{h-a} P' \, dx = \frac{P a^n}{1-n} [h^{1-n} - a^{1-n}].$$

Nun ist $a^n = a \cdot a^{n-1}$; daher der umgeformte Ausdruck

$$(5) \qquad \int_0^{h-a} P' \, dx = \frac{a P}{n-1}\left[1 - \left(\frac{a}{h}\right)^{n-1}\right].$$

Nach beiden Resultaten (3) und (5) ist die gesuchte Expansionsarbeit ein Vielfaches von aP. Bei schwacher Expansion müssen die Faktoren von aP sehr nahe übereinstimmen, in allen Fällen aber wird der Faktor von aP in (5) kleiner als der in (3).

Für eine Ausdehnung von 1 auf 4 wird z. B. $\frac{h}{a} = 4$, und da für trockenen Dampf $n = 1{,}133$, so erhält man als Faktor von aP

nach (3) . . . . $2{,}302\,6 \log 4 = 2{,}302\,6 \cdot 0{,}602\,1 = 1{,}386$;

nach (5) $\frac{1}{0{,}133}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{0{,}133}\right] = 7{,}518\,8 \cdot 0{,}168\,4 = 1{,}266.$

180. Arbeit zum Zusammendrücken eines Gases. Ein Gefäss enthalte Gas vom Volumen v und dem Drucke p. Dieses Gas werde zusammengedrückt, so dass es in einem gegebenen Augenblicke ein Volumen v′ und einen Druck p′ besitze. Welche Arbeit ist auf diese Zusammendrückung zu verwenden?

Der Einfachheit wegen denke man sich das Gas eingeschlossen in einem Cylinder vom Querschnitte q. Dabei entspreche dem Volumen v die Höhe h und, durch Vorschieben des Kolbens, dem Volumen v′ eine Höhe x; dann wird sein

$$(1) \qquad v' = q x.$$

Denkt man sich die Grössen p und p′ als Druck, ausgeübt auf die Flächeneinheit, so wird in dem Augenblicke, da das Volumen des Gases auf v′ gesunken ist, der Druck des Gases auf den Kolben $= p' q$ sein.

Rückt nun der Kolben um dx vor, d. h. geht x in $x - dx$ über, so wird v′ zu $v' - dv'$; denn bei diesem Vorgange nehmen x und v' zugleich ab. Während dieser unendlich kleinen Verschiebung kann man den Druck $p'q$ als konstant betrachten; daher dessen Arbeit $= p'q(-dx)$, oder weil nach (1) $dv' = q\,dx$, so ist das Arbeitselement auch

$$(2) \qquad -p'\,dv'.$$

a) Findet bei der Zusammendrückung keine Aenderung der Gastemperatur statt, so gilt über die Druckabnahme das Mariotte'sche Gesetz, wonach man hat

$$(3) \qquad \frac{p'}{p} = \frac{v}{v'}.$$

Führt man den Wert von p' aus (3) in (2) ein, so wird das Arbeitselement

$$-p'\,dv' = -p\,v\frac{dv'}{v'},$$

folglich die Arbeit zum Zusammendrücken zwischen dem Anfangsvolumen v und dem Endvolumen v', da p v konstant ist,

$$(4) \qquad -p\,v\int_{v}^{v'}\frac{dv'}{v'} = -p\,v\,l\frac{v'}{v} = p\,v\,l\frac{v}{v'}.$$

b) Wenn die Arbeit, die auf die Zusammendrückung verwendet wird, sich in Wärme verwandelt und die Temperatur des Gases erhöht, so gilt über die Druckzunahme folgendes Gesetz von Poisson

$$(5) \qquad \frac{p'}{p} = \left(\frac{v}{v'}\right)^{n},$$

worin der Exponent n grösser als 1 und z. B. für atmosphärische Luft nach Regnault $= 1{,}394\,5$ ist.

Führt man den Wert von p' aus (5) in das Arbeitselement (2) ein, so wird dasselbe

$$-p'\,dv' = -p\,v^{n}\,v'^{-n}\,dv'$$

und die gesuchte Arbeit zum Zusammendrücken des Volumens v auf v', da p und v konstant sind,

$$-\int_{v}^{v'} p'\,dv' = \frac{p\,v^{n}}{1-n}\left[v^{1-n} - v'^{1-n}\right].$$

Nun ist aber $v^{n} = v \cdot v^{n-1}$; daher geht der Ausdruck rechts über in

$$(6) \qquad -\int_{v}^{v'} p'\,dv' = \frac{p\,v}{n-1}\left[\left(\frac{v}{v'}\right)^{n-1} - 1\right].$$

Die Arbeit nach (6) fällt immer grösser aus als nach (4); es ist also immer

$$(7) \qquad \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{v}{v'}\right)^{n-1} - 1\right] > l\,\frac{v}{v'}.$$

So wird z. B. für $v = 2\,v'$ und $n = 1{,}394\,5$ die linke Seite von (7) $= 0{,}797$, die rechte aber nur $= 0{,}693$.

XI. Aufgaben über lebendige Arbeit.

Bestimmung von Trägheitsmomenten.

181. Arbeitsgrösse, die auf einen Körper verwendet werden muss, um ihn aus der Ruhe in Bewegung zu versetzen. Es wirke auf den Körper eine stetige, jedoch beliebig veränderliche Kraft beschleunigend ein. Nachdem der Körper den Weg x zurückgelegt hat, sei der Wert dieser Kraft = k, die Geschwindigkeit des Körpers = v und seine Beschleunigung = g'; ferner sei das Gewicht des Körpers = P und die Beschleunigung der Schwere = g. Es besteht dann zwischen den Kräften und den entsprechenden Beschleunigungen folgende Proportion

$$(1) \qquad g' : g = k : P; \qquad k = \frac{P}{g} g'.$$

Legt nun der Körper den unendlich kleinen Weg dx zurück, so kann angenommen werden, die Kraft k bleibe während dieses Weges konstant; also ist die auf die Beschleunigung der Masse des Körpers verwendete Arbeit = k dx. Setzt man obigen Wert von k hier ein, so folgt

$$k\,d\,x = \frac{P}{g} g'\,d\,x.$$

Allein nach der Differentialformel (3) der Bewegung, § 161, ist $g'\,d\,x = v\,d\,v$. Dies gibt

$$k\,d\,x = \frac{P}{g} v\,d\,v.$$

Beginnt die Bewegung von der Ruhe aus, so erhält man die Arbeit der Kraft k längs des Weges x, indem man integriert,

$$\int_0^x k\,d\,x = \frac{P}{g}\int_0^v v\,d\,v = \frac{P}{g}\cdot\frac{v^2}{2}.$$

Diese auf die Masse des Körpers verwendete Arbeit $\frac{P v^2}{2 g}$ nennt man lebendige Arbeit, auch wohl lebendige Kraft L des Körpers.

Da das Verhältnis P : g konstant bleibt, in welcher Entfernung das Gewicht P vom Mittelpunkte der Erde gedacht wird, so wird dasselbe als Ausdruck für die Masse M des Körpers angesehen. Man hat daher

$$(3) \qquad M = \frac{P}{g}.$$

Führt man diesen Wert von M in (2) ein, so folgt als Ausdruck für die lebendige Arbeit

$$(4) \qquad L = \frac{P}{g}\cdot\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} M v^2,$$

d. h. die lebendige Kraft einer bewegten Masse wird gemessen durch das Produkt aus der halben Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit.

Aus (3) ergibt sich auch

$$(5) \qquad P = M g,$$

d. h. das Gewicht eines Körpers ist gleich seiner Masse, multipliziert mit der Beschleunigung des freien Falles.

Führt man endlich den Wert von M aus (3) in (1) ein, so ergibt sich

$$(6) \qquad k = M g',$$

d. h. die Kraft, die in einem gegebenen Augenblicke auf einen Körper einwirkt und dadurch eine Beschleunigung g' veranlasst, ist gleich dieser Beschleunigung, multipliziert mit der Masse des Körpers.

182. Arbeitsgrösse, die ein Körper in sich aufnimmt, wenn er frei herabfällt. Es sei der Halbmesser der Erde $= r$, die Fallhöhe $= h$, das Gewicht des fallenden Körpers an der Erdoberfläche $= q$. Nachdem der Körper durch eine Höhe x herabgefallen, also eine Entfernung $= r + h - x$ vom Mittelpunkte der Erde besitzt, sei sein Gewicht $= q'$; dann hat man nach dem Newton'schen Gesetze der Gravitation

$$q : q' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{(r+h-x)^2}; \quad q' = q \frac{r^2}{(r+h-x)^2}.$$

Nimmt x um dx zu, so kann angenommen werden, es bleibe q' während dieses unendlich kleinen Weges konstant; folglich ist die Arbeit der Kraft q' längs des Weges dx

$$q' \, dx = q r^2 \frac{dx}{(r+h-x)^2}.$$

Wird diese Gleichung integriert, so erhält man die Arbeit der Schwere während einer endlichen Fallhöhe x. Um integrieren zu können, setze man $r + h - x = y$; alsdann ist $dx = -dy$ und $q' \, dx = -q r^2 y^{-2} dy$; folglich

$$\int q' \, dx = q r^2 y^{-1} + C = q r^2 \left(\frac{1}{r+h-x}\right) + C,$$

und die gesuchte Arbeit für den Fallraum h

$$\int_0^h q' \, dx = q r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+h}\right) = q h \left(\frac{r}{r+h}\right).$$

Wenn der Fallraum klein ist, so dass h gegen r vernachlässigt werden kann, so geht der letzte Ausdruck in das Produkt $q h$ aus Gewicht in Fallhöhe über. Ist dagegen r gegen h klein, wie dies z. B. bei Meteorsteinen, die auf die Erde fallen, angenommen werden kann, so wird diese Arbeit $= q r$. Diese Arbeit gibt ein solcher Meteorstein beim Aufschlagen auf die Erdoberfläche an die Masse der Erde ab. Eine grössere Arbeit als $q r$ kann kein Körper durch die blosse Wirkung der Schwere aufnehmen, selbst wenn er aus einer unendlich grossen Entfernung gegen die Erde fiele.

Bemerkung. Nehmen wir an, die Arbeit $q r$, die ein Meteorstein beim Herabfallen an die Erde abgibt (indem von jenem Teile, den die Reibung in der Atmosphäre absorbiert, abgesehen wird), verwandle sich in Wärme und es produzieren je 424 *kgm* Arbeit (mechanisches Aequivalent der Wärme) eine Kalorie Wärme, so entwickeln sich aus diesem Falle $q\,r:424$ Kalorien. Es sei $q = 1$ *kg* und $r = 6\,365'000$ *m*; dann ist die Wärmemenge, die jedes Kilogramm des herabfallenden Meteors beim Aufschlagen erzeugt, gleich

$$6\,365\,000:424 = 15\,012 \text{ Kalorien,}$$

d. h. soviel Wärme, dass $15\,012:79 = 190$ *kg* Eis damit geschmolzen werden könnten. Würde die Masse des Meteors diese Wärme allein aufnehmen und seine spezifische Wärme 0,2 betragen (durchschnittlicher Wert der spezifischen Wärme der Steinmassen), so würde die Temperatur derselben werden

$$15\,012:0{,}2 = 75\,060^0 \text{ C.}$$

Setzt man voraus, die Erde sei durch Verdichtung vieler, kleiner, im Weltraume zerstreuter Massen entstanden, so lässt sich auf diesem Wege die hohe Temperatur, in der die Erdmasse sich nach dem Ballungsakte befunden haben muss, erklären. Die betreffende Aufgabe ist in § 373 behandelt.

183. Eindringen einer Kanonenkugel in einen Erdwall. Beim Eindringen hat die Kugel die Kohäsion der Erde und die Reibung der Oberflächen zu überwinden, sowie den ausweichenden Erdteilen Geschwindigkeit zu erteilen. Die beiden ersten Widerstände können als konstant angesehen werden, der letztere wächst mit dem Quadrate der Geschwindigkeit der Kugel, ähnlich wie der Widerstand, den ein Schiff im Wasser findet, wenn es sich bewegt. Nun seien

p, q das Gewicht und der grösste Querschnitt der Kugel,

v_0 ihre Anfangsgeschwindigkeit,

v ihre Geschwindigkeit, nachdem sie bereits um eine Tiefe x vorgedrungen ist, und

t die auf den Weg x verwendete Zeit.

Denkt man sich zuerst den Querschnitt der Kugel $= 1$, so wird der Widerstand, den sie bei der Geschwindigkeit v findet, durch den Ausdruck $a + b\,v^2$ dargestellt werden können, wo a und b konstante Grössen bezeichnen. Daher ist der Widerstand für eine Kugel mit dem Querschnitte q gleich

$$q\,(a + b\,v^2). \tag{1}$$

Rückt nun die Kugel um den Weg $d\,x$ vor, so kann angenommen werden, es bleibe der Widerstand (1) längs dieses Weges konstant, daher verbraucht das Erdreich die Arbeit $q\,(a + b\,v^2)\,d\,x$.

Einen ebenso grossen Betrag von Arbeit muss aber die Kugel gleichzeitig abgeben. Da ihre lebendige Arbeit in dem Augenblicke, da sie die Geschwindigkeit v besitzt, nach § 181 $= \frac{p\,v^2}{2\,g}$ ist, so nimmt diese Arbeit ab um $d\left(\frac{p\,v^2}{2\,g}\right) = \frac{p}{g}\,v\,d\,v$. Durch Gleichsetzen folgt daher

$$\frac{p}{g}\,v\,d\,v = -\,q\,(a + b\,v^2)\,d\,x.$$

Das negative Zeichen rechts wird nötig, weil v in v — d v übergeht, wenn x zu x + d x wird. Die vorstehende Gleichung gibt

$$(2)\qquad dx = -\frac{p}{g\,q}\cdot\frac{v\,d\,v}{a + b\,v^2}.$$

Behufs der Integration multipliziere man Zähler und Nenner des zweiten Bruches mit 2 b, so dass im Zähler v d (2 b v) statt v d v vorkommt; dann wird der Zähler gerade das Differential des Nenners; daher aus (2) durch Integration

$$(3)\qquad x = -\frac{p}{2\,b\,g\,q}\,l\,(a + b\,v^2) + C.$$

Für $v = v_0$ wird $x = 0$. Diese Werte verwandeln (3) in

$$0 = -\frac{p}{2\,b\,g\,q}\,l\,(a + b\,v_0{}^2).$$

Folglich ergibt sich durch Subtraktion von (3)

$$(4)\qquad x = \frac{p}{2\,b\,g\,q}\,l\,\frac{a + b\,v_0{}^2}{a + b\,v^2}.$$

Die grösste Tiefe, zu der die Kugel vordringen kann, sei X; dann geht in (4) x über in X für v = 0. Daher

$$(5)\qquad X = \frac{p}{2\,b\,g\,q}\,l\left(1 + \frac{b}{a}\,v_0{}^2\right).$$

Die Zeit findet sich wie folgt. Denkt man sich die Kugel im Raume frei schwebend der Wirkung der Kräfte p und q $(a + b\,v^2)$ ausgesetzt, so veranlassen beide Kräfte gleichförmig veränderte Bewegungen. Dem Gewichte p entspricht die Beschleunigung g = 9,81 *m*, der andern Kraft entspreche die Beschleunigung g'; es findet dann folgende Proportion statt

$$(6)\qquad p : q\,(a + b\,v^2) = g : g'.$$

Allein es ist auch nach § 161 die Grösse $g' = \frac{d\,v}{d\,t}$. Setzt man diesen Wert von g' in (6) ein, so folgt

$$d\,t = -\frac{p}{g\,q}\cdot\frac{d\,v}{a + b\,v^2}.$$

Die rechte Seite ist hier negativ zu nehmen, weil v abnimmt, wenn t zunimmt. Man schreibe noch, um Formel (5), § 86, auf die Integration anwenden zu können,

$$d\,t = -\frac{p}{g\,q\sqrt{a\,b}}\cdot\frac{d\left(v\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{1 + \left(v\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}$$

und erhält

$$t = -\frac{p}{g\,q\sqrt{a\,b}}\,\mathrm{arc\,tang}\,v\sqrt{\frac{b}{a}} + C.$$

Für $v = v_0$ wird $t = 0$. Diese Werte geben daher

$$0 = -\frac{p}{gq\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tang} v_0 \sqrt{\frac{b}{a}} + C.$$

Folglich erhält man durch Subtraktion der letzten zwei Gleichungen

$$(7) \qquad t = \frac{p}{gq\sqrt{ab}}\left[\operatorname{arc\,tang} v_0 \sqrt{\frac{b}{a}} - \operatorname{arc\,tang} v \sqrt{\frac{b}{a}}\right].$$

Dem Wege X entspreche die Zeit T. Diese wird aus (7) erhalten, wenn $v = 0$ gesetzt wird. Daher

$$(8) \qquad T = \frac{p}{gq\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tang} v_0 \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Bei sandiger Ackererde und für mittlere Verhältnisse kann man, wenn in Metern und Kilogrammen gerechnet wird, annehmen

$$a = 400\,000\ kg; \quad b = 40.$$

Ist für eine gusseiserne Kugel

$$p = 12\ kg; \quad q = 0{,}017\ qm; \quad v_0 = 480\ m,$$

so wird, da $g = 9{,}81\ m$ und die natürlichen Logarithmen erhalten werden, wenn man die briggischen mit 2,303 multipliziert,

$$X = 0{,}9 \cdot 2{,}303 \log (1 + 23{,}04) = 2{,}87\ m.$$
$$T = 0{,}018 \operatorname{arc\,tang} 4{,}8.$$

Der Bogen, dessen Tangente $= 4{,}8$ ist, umfasst 78,279 Grade. Daher ergibt sich seine Länge u aus der Proportion:

$$u : \pi = 78{,}279 : 180; \quad u = 1{,}366\,2.$$

Mithin wird

$$T = 0{,}018 \cdot 1{,}366\,2 = \tfrac{1}{40}\ \text{Sekunde}.$$

Diese Kugel dringt also 2,87 m tief in die Erde ein und braucht dazu $\frac{1}{40}$ Sekunde.

184. Ausdruck für das Trägheitsmoment. Es drehe sich ein Körper um eine feste Achse. Während bei einer fortschreitenden Bewegung alle Teile des Körpers dieselben Wege beschreiben, also auch dieselbe Geschwindigkeit haben, beschreiben bei einer drehenden Bewegung die Körperteile nur ähnliche Wege mit verschiedenen Geschwindigkeiten, die um so grösser sind, je weiter die Körperteile von der Drehungsachse entfernt sind.

Ist ω die Winkelgeschwindigkeit, d. h. der von einem Radiusvektor in der Zeiteinheit überstrichene Winkel, so sind

$$v_1 = r_1\,\omega; \qquad v_2 = r_2\,\omega; \qquad v_3 = r_3\,\omega, \ldots$$

die linearen Geschwindigkeiten der in den Entfernungen r_1, r_2, r_3, ... von der Drehungsachse befindlichen Massenteilchen des Körpers.

Zur Berechnung der Arbeit, die für die Drehung des Körpers erforderlich ist, kann in der Formel $\frac{1}{2}\,m v^2$ die Grösse v wegen der verschiedenen Werte, die sie für die verschiedenen Körperteilchen besitzt, nicht verwendet werden. Man denkt sich deshalb die verschiedenen in den Entfernungen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ von der Drehungsachse rotierenden Massenteilchen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ durch eine einzige ideale Masse ersetzt, die im Abstande 1 von der Drehungsachse bei derselben Winkelgeschwindigkeit dieselbe lebendige Kraft wie der rotierende Körper besitzt. Da diese Masse wegen der Grösse 1 ihres Hebelarmes zugleich ihr Moment darstellt, nennt man sie das Trägheitsmoment des rotierenden Körpers und bezeichnet sie mit T.

Nun sind die lebendigen Kräfte der einzelnen Massenteilchen des sich drehenden Körpers $\frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2$; $\frac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2$; $\frac{1}{2} m_3 (r_3 \omega)^2; \ldots,$ folglich die lebendige Kraft des ganzen Körpers

$$L = \tfrac{1}{2} m_1 r_1{}^2 \omega^2 + \tfrac{1}{2} m_2 r_2{}^2 \omega^2 + \tfrac{1}{2} m_3 r_3{}^2 \omega^2 + \ldots$$

$$= \tfrac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + m_3 r_3{}^2 + \ldots) = \tfrac{1}{2} \omega^2 \cdot \Sigma m r^2.$$

Diese soll aber $\frac{1}{2} \omega^2 \cdot T$ sein; also ist

$$(1) \qquad T = m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + m_3 r_3{}^2 + \ldots = \Sigma m r^2,$$

d. h. das Trägheitsmoment eines Körpers ist gleich der Summe der Produkte aller Massenelemente und den Quadraten ihrer Abstände von der Drehungsachse.

Zwischen der lebendigen Kraft L des Körpers und dem Trägheitsmomente T besteht die Gleichung

$$(2) \qquad L = \tfrac{1}{2} \omega^2 \cdot T,$$

die aus der Kenntnis des Trägheitsmomentes leicht die lebendige Arbeit eines rotierenden Körpers berechnen lehrt.

Der Ausdruck (1) für das Trägheitsmoment eines Körpers vereinfacht sich, wenn dessen Dichtigkeit gleichförmig ist. Sind für diesen Fall n die Masse der Volumeneinheit und $u_1, u_2, u_3, \ldots$ die sehr kleinen Raumteile des Körpers, so sind $n u_1, n u_2, \ldots$ die Massen dieser Teile. Setzt man diese für $m_1, m_2, \ldots$ in (1) ein, so erhält man

$$(3) \qquad n (u_1 r_1{}^2 + u_2 r_2{}^2 + u_3 r_3{}^2 + \ldots) = n \Sigma u r^2.$$

Hierin können die Grössen $u_1, u_2, \ldots$ auch als Teile einer Fläche oder Linie angesehen werden, ähnlich wie in § 142 bei Bestimmung von Schwerpunkten.

Das Summenzeichen Σ geht in das Integralzeichen $\int$ über, wenn $m r^2$ oder $n u r^2$ das Differential des Trägheitsmomentes der Masse ist.

Man kann sich die ganze Masse eines Körpers in einem Punkte konzentriert denken, in einer solchen Entfernung z von der Drehachse, dass das Trägheitsmoment der Masse dadurch unverändert bleibt. Dieser Punkt in der Entfernung z von der Achse heisst Mittelpunkt der Trägheit.

185. Trägheitsmoment einer materiellen geraden Linie. Erster Fall. Eine Gerade B D (Fig. 56) drehe sich um eine Achse A, die die Gerade senkrecht schneidet. Die Masse der Längeneinheit der Geraden sei $= m$. Zwischen den Abständen x und $x + dx$ auf der Geraden, von der Achse aus gemessen, liegt das Linienelement dx, dessen Masse $= m\,dx$ ist; folglich ist das Trägheitsmoment dieses Elementes $= m x^2 dx$.

Fig. 56.

Hat die Gerade, von der Achse an beginnend, eine Länge $AD = a$, so ist mithin ihr Trägheitsmoment

$$(1) \qquad T = m \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} m a^3.$$

Hat der Mittelpunkt der Trägheit der Masse ma der ganzen Linie den Abstand z von der Achse, so ist das Trägheitsmoment der Linie $m a z^2$. Folglich ergibt sich durch Gleichsetzung beider Momente

$$(2) \qquad z = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Reicht die Gerade BD nicht bis zur Achse A, und setzt man $AD = a$ und $AB = a'$, so ist das Trägheitsmoment von BD

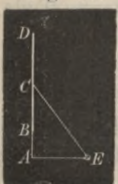
$$(3) \qquad T = m \int_{a'}^{a} x^2 dx = \frac{1}{3} m (a^3 - a'^3).$$

Da das Trägheitsmoment der ganzen Linie auch $= m(a - a') z^2$, so erhält man durch Gleichsetzung beider Momente

$$(4) \qquad z^2 = \tfrac{1}{3}(a^2 + a a' + a'^2).$$

Zweiter Fall. Die Gerade BD (Fig. 57) drehe sich um die Achse E, die senkrecht auf der Geraden steht. Der Abstand AE der Geraden von der Achse sei $= b$, der Abstand AC auf der Geraden $= x$. Da das Massenelement der Geraden $= m\,dx$ und sein Abstand CE von der Achse $= \sqrt{b^2 + x^2}$, so ist das Trägheitsmoment des Teilchens $= m(b^2 + x^2)\,dx$. Folglich das Trägheitsmoment der Geraden für eine unbestimmte Länge

Fig. 57.



$$T = m \int dx (b^2 + x^2) = m\left(b^2 x + \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Wenn $AB = a'$, $AD = a$, so ist das Trägheitsmoment von BD

$$(5) \quad T = m \int_{a'}^{a} dx (b^2 + x^2) = m b^2 (a - a') + \frac{m}{3}(a^3 - a'^3)$$

$$= m(a - a') \cdot \left[b^2 + \frac{1}{3}(a^2 + a a' + a'^2)\right].$$

Das Trägheitsmoment von BD ist aber auch $m(a - a') z^2$; folglich

$$(6) \qquad z^2 = b^2 + \tfrac{1}{3}(a^2 + a a' + a'^2).$$

186. Trägheitsmoment eines Rechtecks, das sich um eine seiner Seiten dreht. Die Dimension des Rechtecks längs der Achse sei b, die darauf senkrechte a. Legt man durch die Fläche, parallel zur Achse, zwei Gerade in den Abständen x und x + dx, so schliessen sie ein Flächenelement ein $= b\,dx$, das an die Stelle der Masse tritt, dessen Trägheitsmoment mithin $= b\,x^2\,dx$ ist. Daher wird das Trägheitsmoment des ganzen Rechteckes sein

$$T = \int_0^a b\,x^2\,dx = a\,b \cdot \frac{a^2}{3}.$$

Man kann sich auch denken, in dieser Aufgabe sei die Masse der Flächeneinheit = 1 angenommen, wie auch in der folgenden.

187. Trägheitsmoment eines Kreises, der sich um einen seiner Durchmesser dreht. Die Gleichung des Kreises für rechtwinkelige Achsen, die durch den Mittelpunkt desselben gehen (Fig. 58), ist

Fig. 58.

(1) $$y^2 + x^2 = r^2.$$

Legt man in den Abständen y und y + dy zwei Gerade durch den Kreis, parallel zur Achse, so schliessen sie mit dem Kreise ein Flächenelement ein von der Länge 2x und der Breite dy, also vom Inhalte 2x dy. Das Trägheitsmoment desselben ist daher $= 2\,x\,dy \cdot y^2$.

Damit dieser Ausdruck integriert werden kann, muss darin eine der Variabeln x oder y durch die andere ausgedrückt werden. Man erhält mit Hilfe von (1)

(2) $$2\,x\,dy \cdot y^2 = 2\,y^2 \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy.$$

Dieses Differential kann integriert werden nach Formel (8), § 90; man erhält für n = 3

$$\int y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\,dy = \frac{y^3}{4} \cdot \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^2}{4} \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} + C,$$

somit unter Benutzung von Formel (6), § 90

$$\int y^2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2}\,dy = \frac{y^3}{4} \cdot \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^2}{4}\left[-\frac{y}{2}\sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{y}{r}\right] + C.$$

Um das Trägheitsmoment für die eine Hälfte der Kreisfläche zu erhalten, hat man das Integral zwischen y = 0 und y = r zu nehmen. Man erhält

(3) $$\int_0^r y^2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2}\,dy = \frac{r^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Dieser Ausdruck muss wegen des Faktors 2 in (2) verdoppelt werden, um das Trägheitsmoment für die eine Hälfte der Kreisfläche zu geben; für die andere ist das Moment aber ebenso gross. Daher ist das gesuchte Trägheitsmoment für die ganze Fläche

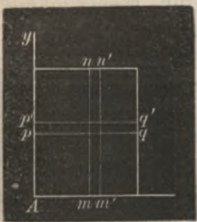
(4) $$T = \frac{r^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 4 = \frac{\pi}{64} d^4,$$

wenn d den Durchmesser des Kreises bezeichnet.

Man hätte auch das unbestimmte Integral zwischen $y = -r$ bis $y = +r$ nehmen können, um sofort das Trägheitsmoment der ganzen Fläche zu erhalten.

188. Trägheitsmoment eines rechtwinkeligen Parallelepipeds, das sich um eine seiner Kanten dreht. Die drei Kanten des Körpers seien a, b, c, die Masse der Kubikeinheit $= m$. Die Drehung erfolge um die Längenkante a. Legt man in der Grundfläche des Prismas, von dem Endpunkte A (Fig. 59) der Drehachse aus, zwei rechtwinkelige Achsen Ax, Ay; zieht in den Abständen x und $x + dx$ die Parallelen mn, $m'n$, zu Ay und in den Abständen y und $y + dy$ die Parallelen pq, $p'q'$ zu Ax, so schliessen diese vier Linien ein Flächenelement $= dx\,dy$ ein, das als Grundfläche eines Prismas mit der Höhe a angesehen werden kann. Das Volumen dieses Prismas ist $a\,dx\,dy$, sein Abstand von der Drehachse $= \sqrt{x^2 + y^2}$, also sein Trägheitsmoment $= m\,a\,dx\,dy\,(x^2 + y^2)$.

Fig. 59.



Lässt man in diesem Ausdrucke vorerst y konstant und integriert in Hinsicht x von $x = 0$ bis $x = b$, so erhält man das Trägheitsmoment der Körperschicht $p\,p'\,q'\,q$ gleich

$$m\,a\,dy \int_0^b dx\,(x^2 + y^2) = m\,a\,dy\left(\frac{b^3}{3} + b\,y^2\right).$$

Lässt man sodann in diesem Ausdrucke rechts die Grösse y von $y = 0$ bis $y = c$ sich ändern, so beschreibt das Körperelement $p\,p'\,q'\,q$ das ganze Volumen des Prismas. Integriert man daher jenes Differential zwischen $y = 0$ und $y = c$, so erhält man das gesuchte Trägheitsmoment des ganzen Körpers

$$(1) \qquad T = m\,a \int_0^c dy\left(\frac{b^3}{3} + b\,y^2\right) = \frac{m}{3}\,a\,b\,c\,(b^2 + c^2).$$

Das Trägheitsmoment des Körpers ist aber auch $= m\,a\,b\,c\,z^2$; folglich

$$(2) \qquad z^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2).$$

189. Trägheitsmoment eines homogenen geraden Kreiscylinders, der sich um seine geometrische Achse dreht. Es sei r der Halbmesser, h die Länge und m die Masse der Kubikeinheit des Cylinders. Legt man zwei cylindrische Flächen mit den Radien x und $x + dx$, konzentrisch zur Achse, so schliessen diese Flächen ein Volumen $= 2\pi x\,dx\,h$ und eine Masse $= 2\pi h\,m\,x\,dx$ ein. Folglich ist das Trägheitsmoment dieser Masse mit Rücksicht auf die Drehachse $= 2\pi h\,m\,x^3\,dx$ und das Trägheitsmoment des ganzen Cylinders

$$(1) \qquad T = 2\pi h\,m \int_0^r x^3\,dx = \frac{1}{2}\pi h\,m\,r^4.$$

Das Trägheitsmoment des Cylinders ist aber auch $= m\,\pi\,r^2\,h\,z^2$; folglich wird sein

$$(2) \qquad z = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,r.$$

Für einen hohlen Cylinder, dessen Radien r und r' sind, ist das Trägheitsmoment

$$(3) \qquad T = 2\pi h m \int_{r'}^{r} x^3 \, dx = \frac{1}{2} \pi h m (r^4 - r'^4)$$

und

$$(4) \qquad z^2 = \frac{1}{2}(r^2 + r'^2).$$

190. Trägheitsmoment eines homogenen geraden Kreiskegels, der sich um seine geometrische Achse dreht. Der Radius der Grundfläche sei r, die Höhe des Kegels h und die Masse der Kubikeinheit m. In den Abständen x und x + dx von der Kegelspitze lege man zwei Schnitte durch den Körper normal zur Achse. Ist der Halbmesser des erstern Schnittes y, so kann der zwischen beiden liegende Körper als Cylinder angesehen werden von der Grundfläche πy^2 und der Höhe dx; sein Trägheitsmoment ist deshalb, zufolge der letzten Aufgabe, gleich

$$\tfrac{1}{2} \pi m y^4 \, dx.$$

Nun geben aber ähnliche Dreiecke die Relation

$$y : r = x : h, \qquad y = \frac{r}{h} x.$$

Hierdurch wird das vorstehende Differential

$$\frac{1}{2} \pi m \frac{r^4}{h^4} x^4 \, dx.$$

Folglich das Trägheitsmoment für den ganzen Kegel

$$(1) \qquad T = \frac{1}{2} \pi m \frac{r^4}{h^4} \int_0^h x^4 \, dx = \frac{\pi}{10} m h r^4.$$

Für einen abgekürzten Kegel, dessen Grundflächen um h und h' von der Spitze abstehen, wird das Trägheitsmoment

$$(2) \qquad T = \frac{\pi}{10} m r^4 \frac{h^5 - h'^5}{h^4}.$$

191. Trägheitsmoment einer homogenen Kugel in Bezug auf einen Durchmesser als Drehachse. Die Mittelpunktsgleichung eines grössten Kreises der Kugel ist $y^2 = r^2 - x^2$. Hierbei nehme man die Abscissen x auf der Drehachse. Legt man in den Abständen x und x + dx vom Mittelpunkte zwei Schnitte durch die Kugel, senkrecht zur Drehachse, so schliessen sie einen Cylinder ein, dessen Masse $= \pi m y^2 \, dx$ und dessen Trägheitsmoment nach § 189 gleich ist

$$\tfrac{1}{2} \pi m y^4 \, dx.$$

Nun ist aber hier y durch x auszudrücken. Man erhält

$$y^4 = (r^2 - x^2)^2 = r^4 - 2r^2x^2 + x^4.$$

Folglich das Trägheitsmoment der ganzen Kugel

$$(1) \qquad T = \frac{1}{2} \pi m \int_{-r}^{r} (r^4 - 2r^2x^2 + x^4) \, dx = \frac{8}{15} \pi m r^5.$$

Da die Masse der ganzen Kugel $= \frac{4}{3}\pi r^3 m$, so erhält man zur Bestimmung des Abstandes z des Mittelpunktes der Trägheit von der Achse die Gleichung

(2) $$z^2 = \tfrac{2}{5} r^2.$$

Das Trägheitsmoment einer hohlen Kugel, deren Halbmesser r und r' sind, wird nach vorstehendem Ausdrucke sein

(3) $$T = \tfrac{8}{15}\pi m (r^5 - r'^5).$$

Nun ist die Masse dieser hohlen Kugel

$$M = \tfrac{4}{3}\pi m (r^3 - r'^3).$$

Hierdurch wird das Trägheitsmoment der hohlen Kugel gleich

(4) $$T = \frac{2}{5} M \frac{r^5 - r'^5}{r^3 - r'^3}.$$

Ist nun $r - r' = b$ eine sehr kleine Grösse, so erhält man, wenn $r' = r - b$ auf die dritte und fünfte Potenz erhoben wird und die höheren Potenzen von b vernachlässigt werden,

$$r'^3 = r^3 - 3 r^2 b, \qquad r'^5 = r^5 - 5 r^4 b.$$

Hierdurch wird das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale

(5) $$T = \tfrac{2}{3} M r^2.$$

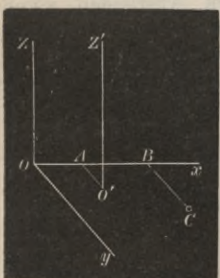
Wenn die Kugelschale zur Kugeloberfläche, und m als Masse der Flächeneinheit angenommen wird, so ist $M = 4\pi r^2 m$; folglich das Trägheitsmoment der Kugelfläche

(6) $$T = \tfrac{8}{3}\pi m r^4.$$

Bemerkung. Dieser letzte Ausdruck kann wie folgt direkt gefunden werden. Wenn das Bogenelement, das dem Punkte (x, y) des grössten Schnittkreises entspricht, d s ist, so ist das Flächenelement, das von d s bei der Rotation beschrieben wird $= 2\pi y\, ds$, seine Masse $= 2\pi m y\, ds$ und sein Trägheitsmoment $= 2\pi m y^3 ds$. Drückt man d s und y durch x aus und integriert, so erhält man den vorstehenden Wert als Trägheitsmoment der Kugelfläche.

192. Allgemeines Theorem über die Trägheitsmomente. Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Achse, die durch seinen Schwerpunkt geht, so kann man daraus wie folgt das Trägheitsmoment des Körpers für jede andere Achse finden, die der erstern parallel ist.

Fig. 60.



Es sei O z (Fig. 60) die Achse durch den Schwerpunkt des Körpers und O' z' die ihr parallele Achse, für die das Trägheitsmoment zu suchen ist. In C befinde sich das unendlich kleine Massenelement m. Man lege durch C die Ebene, senkrecht zu O z, die O z und O' z' in O und O' schneiden möge, und nehme in dieser Ebene die rechtwinkeligen Achsen O x, O y an. Die Koordinaten von O' seien $OA = x_0$,

$O'A = y_0$, die von C dagegen $OB = x$, $CB = y$. Setzt man $OO' = a$, $OC = r$ und $O'C = r'$, so erhält man

$$a^2 = x_0{}^2 + y_0{}^2, \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad r'^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Löst man die Klammern in der letzten Gleichung auf und benutzt die ersteren Gleichungen, so folgt

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y.$$

Multipliziert man mit dem Massenelemente m und integriert, so findet man

$$\int r'^2\,m = \int r^2\,m + a^2 \int m - 2\,x_0 \int x\,m - 2\,y_0 \int y\,m.$$

Nun sind aber $x\,m$ und $y\,m$ die statischen Momente des Teilchens m mit Rücksicht auf die Achse Oz, die durch den Schwerpunkt geht, also $\int x\,m$, $\int y\,m$ die Summe der statischen Momente aller Teile des Körpers. In Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Achse sind aber die Summen der statischen Momente aller Teile des Körpers gleich 0, folglich verschwinden $\int x\,m$ und $\int y\,m$ aus der Gleichung.

Ferner ist $\int m = M$ die Masse des Körpers. Hiernach erhält man

$$\int r'^2\,m = \int r^2\,m + a^2\,M.$$

Die Grösse $\int r^2\,m$ ist das Trägheitsmoment des Körpers für die Achse Oz durch den Schwerpunkt. Also hat man zu diesem Momente noch zu addieren das Produkt aus der Masse M des Körpers in das Quadrat des Abstandes a des Schwerpunktes von der neuen Rotationsachse. Bezeichnet man $\int r^2\,m$ mit $k^2\,M$, so wird das gesuchte Trägheitsmoment

$$\int r'^2\,m = M\,(a^2 + k^2).$$

Es sei z. B. das Trägheitsmoment eines geraden Kreiscylinders anzugeben, der sich um eine seiner Kanten dreht.

Dieses Moment setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der eine $\int r^2\,m$ ist das Trägheitsmoment des Cylinders, der sich um seine geometrische Achse dreht, und das nach § 189 beträgt

$$\tfrac{1}{2}\,\pi\,m'\,h\,r^4,$$

wenn m' die Masse der Volumeneinheit bezeichnet; der andere Teil ist das Produkt aus der Masse $M = \pi\,r^2\,h\,m'$ des Cylinders und der Grösse r^2, weil die beiden Achsen um r von einander abstehen. Dieser Teil ist daher

$$\pi\,r^2\,h\,m' \cdot r^2$$

und somit das gesuchte Trägheitsmoment

$$\tfrac{1}{2}\,\pi\,m'\,h\,r^4 + \pi\,r^2\,h\,m' \cdot r^2 = \tfrac{3}{2}\,\pi\,m'\,h\,r^4.$$

193. Lebendige Arbeit eines homogenen geraden Cylinders, der sich um seine Achse dreht. Diese Arbeit kann leicht aus der allgemeinen Gleichung (2) des § 184 zwischen der lebendigen Kraft eines rotierenden Körpers und seinem Trägheitsmomente

$$L = \frac{1}{2} \omega^2 T$$

berechnet werden.

Bezeichnet r den Halbmesser, h die Höhe und m die Masse der Volumeneinheit des Cylinders, so ist nach § 189

$$T = \frac{1}{2} \pi h m r^4.$$

Ist nun v die Geschwindigkeit eines Punktes des Umfanges des Cylinders, so gilt

$$\omega = \frac{v}{r},$$

man erhält also

$$L = \frac{1}{4} \pi h m r^2 \cdot v^2 = \frac{1}{4} M v^2,$$

worin $M = \pi h m r^2$ die Masse des ganzen Cylinders bezeichnet. Um diesem Cylinder eine fortschreitende Bewegung mit der Geschwindigkeit v zu erteilen, ist also doppelt soviel Arbeit nötig als zur Hervorbringung der Rotation.

194. Arbeit, die auf die Drehung einer homogenen Kugel um einen ihrer Durchmesser als Drehachse zu verwenden ist. Es sei r der Halbmesser, v die Geschwindigkeit eines Punktes des Aequators und m die Masse der Volumeneinheit der Kugel. Aus dem in § 191, Gleichung (1), berechneten Trägheitsmomente

$$T = \frac{8}{15} \pi m r^5$$

folgt, da auch hier

$$\omega = \frac{v}{r}$$

ist, für die gesamte lebendige Arbeit der rotierenden Kugel

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{r^2} \cdot \frac{8}{15} \pi m r^5$$

$$= \frac{4}{15} \pi m r^3 \cdot v^2 = \frac{1}{5} M v^2,$$

worin $M = \frac{4}{3} \pi r^3 m$ die Masse der Kugel ausdrückt. Da die lebendige Arbeit der Kugel beim Fortschreiten mit der Geschwindigkeit v gleich $\frac{1}{2} M v^2$ ist, so ist die letztere Arbeit $\frac{5}{2}$ mal so gross als die der Rotation entsprechende.

Die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Erde ist circa 64 mal so gross als die der Rotation unter dem Aequator. Wäre nun die Dichtigkeit der Erdmasse überall die gleiche, so würde der Fortschreitung $\frac{5}{2} \times 64^2 = 10\,240$ mal soviel lebendige Arbeit entsprechen als der Rotation.

195. Lebendige Arbeit einer dünnen Kugelschale, die sich um einen ihrer Durchmesser dreht. Es bezeichne r den Radius, b die sehr kleine Dicke, m die Masse der Kubikeinheit und v die Geschwindigkeit des Aequators der Kugelschale. Auch hier ist wieder $\omega = \frac{v}{r}$ und da nach § 191, Gleichung (5), das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale $T = \frac{2}{3} M r^2$, so folgt

$$L = \frac{1}{3} M v^2 = \frac{1}{3} (4 \pi m r^2 b) \cdot v^2.$$

Hierin ist $M = 4 \pi m r^2 b$ die Masse der ganzen Kugelschale, und $\frac{1}{2} M v^2$ die lebendige Arbeit dieser materiellen Fläche, wenn alle Masse in ihrem Aequator vereinigt wäre. Daher beträgt die Arbeit L gerade $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{2} M v^2$.

196. Lebendige Arbeit einer Kugel, die sich um einen ihrer Durchmesser dreht und deren Dichtigkeit von Schicht zu Schicht sich ändert. Das Gesetz, nach dem die Aenderung der Dichtigkeit erfolge, sei

$$(1) \qquad m_1 = m_0 + c(r - x),$$

worin bezeichnen: r den Halbmesser der Kugel, x einen Teil von r vom Mittelpunkte aus gezählt, m_0 und m_1 die Massen der Kubikeinheit in den Abständen r und x vom Kugelmittelpunkte und c die Grösse, um die die Masse für die Längeneinheit von aussen nach innen sich ändert. Die Grösse c ist positiv, wenn die Dichtigkeit von aussen nach innen zunimmt, negativ im umgekehrten Falle.

Denkt man sich zwei konzentrische Kugelflächen mit den Radien x und $x + dx$ konstruiert, so schliessen sie eine Kugelschale ein, auf die der Ausdruck für L des vorigen Paragraphen angewendet werden kann, wenn man darin setzt: x für r, dx für b, m_1 für m und $v\left(\frac{x}{r}\right)$ als Geschwindigkeit am Aequator der Kugelschale vom Halbmesser x. Daher wird die lebendige Arbeit dieser Kugelschale

$$\frac{1}{3} (4 \pi x^2 dx) [m_0 + c(r - x)] v^2 \frac{x^2}{r^2}.$$

Unendlich viele solcher Kugelschalen setzen aber die ganze Kugel zusammen; daher wird die in der ganzen Kugel enthaltene Arbeit

$$(2) \qquad \frac{4\pi}{3} \frac{v^2}{r^2} \int_0^r [(m_0 + cr) x^4 - c x^5] dx = \frac{4\pi}{15} r^3 v^2 \left(m_0 + \frac{cr}{6}\right).$$

Für $c = 0$ wird die Masse der Kugel homogen, und es geht dieser Wert über in jenen, der in § 194 gefunden wurde.

Die Kugelflächen mit den Radien x und $x + dx$ schliessen ein Volumenelement ein, dessen Masse ist

$$4 \pi x^2 dx [m_0 + c(r - x)].$$

Daher wird die Masse der ganzen Kugel sein

$$(3)\qquad 4\pi\int_0^r [(m_0 + c\,r)\,x^2 - c\,x^3]\,d\,x = \frac{4\pi}{3} r^3 \left(m_0 + \frac{c\,r}{4}\right).$$

Denkt man sich nun diese Masse in einem solchen Abstande y von der Achse, dass ihre lebendige Arbeit gleich der in (2) sei, so wird ihre Geschwindigkeit $= v\left(\frac{y}{r}\right)$ und ihre lebendige Arbeit gleich

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3} r^3 \left(m_0 + \frac{c\,r}{4}\right) v^2 \frac{y^2}{r^2}.$$

Setzt man die Werte von (2) und (4) einander gleich, so folgt

$$(5)\qquad y^2 = \tfrac{2}{5}\,\frac{m_0 + \frac{1}{6}c\,r}{m_0 + \frac{1}{4}c\,r}\,r^2.$$

Für $c = 0$ wird $y^2 = \frac{2}{5} r^2$ oder $y = 0{,}63\,r$, d. h. die lebendige Arbeit einer homogenen Kugel bleibt dieselbe, wenn man sich ihre Masse im Abstande 0,63 r vom Mittelpunkte der Kugel denkt.

Für $x = 0$ gehe die Masse m_1 in m über, es sei also m die Masse der Kubikeinheit im Mittelpunkte der Kugel; hierfür geht (1) über in $m = m_0 + c\,r$, woraus folgt

$$c = \frac{m - m_0}{r}.$$

Setzt man diesen Wert von c in (3), (2) und (5) ein, so wird

$$\text{Masse der Kugel} \;\ldots\ldots = \frac{1}{3}\pi r^3 (m + 3\,m_0),$$

$$\text{lebendige Arbeit derselben} \;. = \frac{2}{45}\pi r^3 (m + 5\,m_0)\,v^2,$$

$$\text{Wert von} \;\ldots\ldots\; y^2 = \frac{4}{15}\,\frac{m + 5\,m_0}{m + 3\,m_0}\,r^2.$$

Denkt man sich die Masse der Kugel in ihren Aequator verlegt, also in eine Entfernung r von der Achse gebracht, so steigt ihre lebendige Arbeit im Verhältnis von

$$(6)\qquad 1 : \frac{15}{4}\,\frac{m + 3\,m_0}{m + 5\,m_0}.$$

Gesetzt die Dichtigkeit der Erde, diese als Kugel gedacht, befolge das Gesetz (1) und es seien

$$m_0 = 2{,}65\,s \quad \text{und} \quad m = 14{,}29\,s,$$

wo s das Verhältnis zwischen der Masse und dem spezifischen Gewichte bezeichnet. Hierfür wird

$$\text{Wert} \;\ldots\ldots\; y = 0{,}574\,r,$$
$$\text{Verhältnis (6)} \;\ldots = 1 : 3{,}02.$$

XII. Aufgaben über die Quantität der Bewegung.

197. Begriff von Quantität der Bewegung. Ist m die Masse und v die Geschwindigkeit eines in Bewegung befindlichen Körpers, so nennt man Quantität der Bewegung dieses Körpers das Produkt m v aus Masse und Geschwindigkeit.

Statt Quantität der Bewegung sagt man häufig Menge der Bewegung, Bewegungsmenge, auch Bewegungsmoment.

Die folgenden Aufgaben werden die Entstehung und Bedeutung dieses Produktes darlegen.

198. Berechnung der Quantität der Bewegung. Wirkt auf einen Körper vom Gewichte P, der im Raume frei schwebt, eine beliebig veränderliche Kraft, so wird er eine beschleunigte Bewegung annehmen. Wenn nach der Zeit t k der Wert der Kraft, v die Geschwindigkeit und g' die Beschleunigung der Bewegung ist, so gilt für diesen Vorgang die in § 181 angegebene Proportion

$$(1) \qquad g' : g = k : P; \quad k = \frac{P}{g} g'.$$

Nimmt nun t um dt zu, so wird auch v um dv wachsen; daher wird nach Gleichung (2) auf S. 164 sein

$$(2) \qquad g' = \frac{dv}{dt}.$$

Eliminiert man g' aus (1) und (2) und ersetzt P nach Gleichung (5) des § 181 durch m g, so folgt

$$(3) \qquad k\,dt = m\,dv$$

und durch Integration, da m als konstant anzusehen ist,

$$(4) \qquad \int_0^t k\,dt = m v - m v_0,$$

worin v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit für $t = 0$ bezeichnet.

In dieser Gleichung ist m v die Quantität der Bewegung des Körpers am Ende und $m v_0$ diejenige am Anfange der Zeit t; daher das Resultat der Integration die Zunahme der Quantität der Bewegung während der Zeit t.

Wenn $v_0 = 0$, so reduziert sich das Integral auf m v.

Ist die Kraft k konstant, so kann auch die linke Seite in (4) integriert werden. Man erhält für $v_0 = 0$:

$$(5) \qquad k t = m v,$$

d. h. die Kraft, multipliziert mit der Dauer ihrer Einwirkung, ist gleich der Quantität der Bewegung des Körpers.

I. Wird hiernach z. B. eine Lokomotive auf horizontaler Bahn durch eine konstante Kraft angetrieben; ist das Gewicht der Lokomotive

30 000 *kg* und die Geschwindigkeit 10 *m* nach 30 Sekunden, so wird nach (5)

$$k \cdot 30 = \frac{30\,000}{9{,}81} \cdot 10; \quad k = 1\,019 \, kg,$$

d. h. es muss die Kraft, die der Lokomotive die Bewegung erteilt, 1 019 *kg* betragen. Dabei ist der Teil der Kraft, der die Widerstände der Lokomotive überwindet, nicht inbegriffen.

Sollte die Geschwindigkeit von 10 *m* in kürzerer Zeit, z. B. in 10 Sekunden, erreicht werden, so müsste auch die Kraft k das dreifache des obigen Wertes haben.

II. Während eine Kanone abgeschossen wird, macht sich der Druck des Pulvergases in jedem Augenblicke vorwärts auf das Geschoss und rückwärts auf das Geschütz gleich stark geltend. Kann das Geschütz sich frei bewegen, so nehmen beide Körper Bewegungen an und zwar so, dass in demselben Momente beide Körper gleich grosse Quantitäten der Bewegung haben. Denn es ist für beide das Produkt k t in (5) dasselbe, also ist dies auch mit m v der Fall.

Gilt M V für das Geschütz, m v für das Geschoss in dem Augenblicke, da dasselbe abfliegt, so wird

$$M\,V = m\,v.$$

Nimmt man hier v = 600 *m* und das Verhältnis m : M = 1 : 200, so wird V = 3 *m*, d. h. das Geschütz beginnt seinen Rücklauf mit 3 *m* Geschwindigkeit.

199. Zusammenhang zwischen der Quantität der Bewegung und der lebendigen Arbeit. Ist L die lebendige Arbeit, die die obige Kraft k dem Körper in der Zeit t erteilt, und Q die gleichzeitig erzeugte Quantität der Bewegung, so ist

$$L = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 \quad \text{und} \quad Q = m\,v;$$

folglich erhält man durch Elimination von m die Relation

$$L = \tfrac{1}{2}\,v\,Q.$$

Nun ist L Arbeit, also ist es auch v Q. Allein v bezeichnet einen Weg; daher wird Q eine Kraft sein.

Die Quantität der Bewegung muss also als Kraft aufgefasst werden, ebenso angesammelt in der Masse des Körpers wie die lebendige Arbeit.

In der oben erwähnten Lokomotive ist angesammelt:

$$\text{Quantität der Bewegung } m\,v = \frac{30\,000}{9{,}81} \cdot 10\,kg = 30\,570\,kg.$$

$$\text{Lebendige Arbeit } \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{30\,000}{9{,}81} \cdot 10^2\,mkg = 152\,850\,mkg.$$

200. Quantität der Bewegung, enthalten in einer prismatischen Stange, die sich um eine Achse dreht. Die Achse A (Fig. 56, S. 198) durchschneide die Längenrichtung der Stange senkrecht. Es sei A D = a die Länge und F der Querschnitt der Stange, m die Masse der Kubikeinheit des homogenen Materials und v die Geschwindigkeit am freien Ende der Stange.

Legt man in den Entfernungen x und $x + dx$ von der Achse Querschnitte durch die Stange, so schliessen diese ein Volumen $F\,dx$ ein, dessen Masse $= m\,F\,dx$ ist. Bewegt sich dieses Teilchen mit der Geschwindigkeit v', so wird

$$v' : v = x : a; \quad v' = v\frac{x}{a}.$$

Daher die Quantität der Bewegung dieses Teilchens $m\,F\,dx \cdot v'$ oder

$$\frac{m\,F\,v}{a}\,x\,dx,$$

und die Summe der Quantitäten der Bewegung für unbestimmte Grenzen

$$\frac{m\,F\,v}{a}\int x\,dx = \frac{m\,F\,v}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + C,$$

und für die Länge AD

$$\frac{m\,F\,v}{a}\int_0^a x\,dx = \frac{m\,F\,v}{a} \cdot \frac{a^2}{2}.$$

Nun ist $m\,F\,a = M$ die Masse der Stange; daher die gesuchte Quantität der Bewegung

$$\tfrac{1}{2}\,M\,v,$$

also die Hälfte von jener Quantität der Bewegung, die die Stange bei fortschreitender Bewegung erhält.

Dehnt sich die Stange nur über den Teil $B\,D = a$ aus und ist Abstand $A\,B = a'$, so wird die Quantität der Bewegung

$$\frac{m\,F\,v}{a + a'}\int_{+a'}^{a+a'} x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{m\,F\,v}{a + a'}\,[(a + a')^2 - a'^2] = \frac{1}{2}\,M\,v\,\frac{a + 2\,a'}{a + a'},$$

wo wieder $M = m\,F\,a$ ist.

201. Quantität der Bewegung einer homogenen Kugel, die sich um einen ihrer Durchmesser dreht. Es sei r der Halbmesser der Kugel, m die Masse ihrer Kubikeinheit und v die Geschwindigkeit ihres Aequators.

Die Gleichung eines grössten Kreises (Fig. 58, S. 199), der durch die Drehachse geht, ist

$$(1) \qquad y^2 = r^2 - x^2.$$

Nun soll die Quantität der Bewegung eines Volumenteilchens bestimmt werden, durch deren Integration die gesuchte Quantität erhalten wird. Legt man zu diesem Behufe zwei Cylinderflächen durch die Kugel, parallel zur Drehachse und zwar mit den Radien y und $y + dy$, so schliessen diese Flächen eine Schicht ein mit dem innern Radius y, der Wanddicke dy und der Länge $2x$, also dem Volumen $2\pi\,y\,dy \cdot 2x$; daher ist die Masse dieses unendlich kleinen Teilchens

$$(2) \qquad 2\pi\,y\,dy \cdot 2x \cdot m.$$

Ist ihre Geschwindigkeit v′, so wird v′ : v = y : r; mithin

$$v' = v\frac{y}{r}.$$

Multipliziert man diesen Wert von v′ mit der Masse (2), so erhält man als Quantität der Bewegung eines unendlich kleinen Teilchens

$$(3) \qquad \frac{4\pi m v}{r} x y^2 d y.$$

Damit dieser Ausdruck integriert werden kann, darf nur eine der Variabeln x oder y darin vorkommen. Man erreicht dies, indem man aus (1) und (3) eine der Variabeln eliminiert. Die Elimination von x gibt

$$(4) \qquad \frac{4\pi m v}{r} y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, d y$$

und diejenige von y

$$(5) \qquad - \frac{4\pi m v}{r} x^2 \sqrt{r^2 - x^2}\, d x.$$

Die Integration einer dieser zwei Ausdrücke besteht nun in der Summierung aller Elemente, die in (3) enthalten sind. Dabei muss (4) genommen werden von y = 0 bis y = r und (5) von x = r bis x = 0.

Das Differential (4) ist, abgesehen von dem konstanten Faktor, dasselbe wie in § 187. Dort war erhalten, Gl. (3),

$$\int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, d y = \frac{r^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Daher ist die Quantität der Bewegung als Integral von (4)

$$(6) \qquad \tfrac{1}{4}\pi r^3 m v \pi.$$

Dieses Produkt lässt sich zerlegen in die Faktoren

$$\frac{4}{3}\pi r^3 m \quad \text{und} \quad \frac{3\pi v}{16}.$$

Der erste dieser Faktoren ist die Masse M der Kugel; daher die gesuchte Quantität der Bewegung nach (6)

$$(7) \qquad \frac{3\pi}{16} M v.$$

Folglich beträgt diese $\frac{3\pi}{16}$ von jener Quantität, die die Kugel beim Fortschreiten besitzt.

202. Druck beim Anpralle eines Körpers gegen eine Wand. Körper und Wand seien elastisch. Trifft der Körper mit der Masse m die Wand in normaler Richtung mit einer Geschwindigkeit v, so wird diese durch den Widerstand der Wand auf Null reduziert und hierauf bei Wiederherstellung der Form der Wand in — v verwandelt.

Der Stoss dauere t Sekunden. Wenn in einem bestimmten Augenblicke der Druck des Körpers auf die Wand = k ist, so gilt für den unendlich kleinen Zeitteil d t die Gleichung (3) auf S. 207.

Bei Integration derselben bezeichne man den mittleren Wert von k mit k'; da die Geschwindigkeit zwischen den Grenzen — v und + v zu nehmen ist, so erhält man

$$k' t = \int_{-v}^{+v} m\,d v = 2 m v.$$

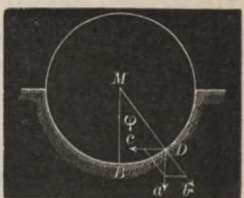
Der mittlere Druck, multipliziert mit der Dauer des Stosses, ist hiernach gleich der doppelten Quantität der Bewegung des Körpers.

XIII. Aufgaben über die Reibung.

203. Von der Reibung im allgemeinen. Wenn zwei Körper sich berühren und gegen einander gepresst werden, so greifen die Erhöhungen der einen berührenden Fläche in die Vertiefungen der anderen ein. Soll der eine Körper über den anderen verschoben werden, so müssen diese Hervorragungen umgebogen oder abgerissen werden. Der Widerstand, den diese Verschiebung in der Richtung der Bewegung erfährt, heisst Reibung. Ist N der Druck, den beide Körper, senkrecht zur Berührungsfläche, gegen einander ausüben und f der Reibungskoeffizient, d. h. die Reibuug, die der Normaldruck = 1 hervorbringt, so ist die Reibung = f N.

204. Reibung eines horizontalliegenden cylindrischen Wellzapfens. Der Halbmesser des Zapfens sei = r, die Länge seiner cylindrischen Auflagefläche = L, der vertikale Druck des Zapfens auf das genau anschliessende Lager für jede Einheit der horizontalen Projektion der Berührungsfläche = p und der Reibungskoeffizient = f.

Fig. 61.



Es sei M die Achse und φ der Winkel (Fig. 61), den der vertikale Halbmesser M B mit dem beliebigen Halbmesser M D bildet. Legt man in den Abständen $r \cos \varphi$ und $r \cos(\varphi + d\varphi)$ von M aus abwärts zwei horizontale Querschnitte, so ist der Unterschied ihrer Flächen $= 2 r L \cos \varphi\, d\varphi$ und der Druck a darauf in vertikaler Richtung $a = 2 r L p \cos \varphi\, d\varphi$. Man zerlege diesen Druck in zwei Seitenkräfte b und c, wovon b senkrecht zur Cylinderfläche und c horizontal wirkt. Die Kräfte c in jedem Horizontalschnitte heben sich auf, während die Kraft b bei der Drehung eine Reibung = b f hervorbringt. Nun ist aber $b = a : \cos \varphi$; folglich das Element der Reibung gleich

$$2 r L p f\, d\varphi.$$

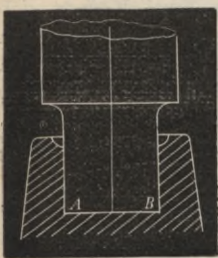
Schliesst sich die Hälfte des cylindrischen Zapfens an die Unterlage an, so ist dieses Differential von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ zu integrieren. In diesem Falle erhält man als gesuchte Reibung

$$2 r L p f \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot 2 r L p \cdot f.$$

Nun ist $2\,r\,L\,p$ der Druck des Zapfens und $2\,r\,L\,p \cdot f$ die Reibung des Zapfens, wenn die Bewegung längs der Achse stattfindet. Folglich verhält sich die Reibung in drehender Richtung zu der in fortschreitender wie $\pi : 2$.

205. Reibung eines vertikalstehenden cylindrischen Wellzapfens. Es sei A B (Fig. 62) die kreisförmige, horizontal liegende Fläche des Zapfens, die auf ihrer Unterlage, dem Zapfenlager, Reibung hervorbringt. Der Radius des Zapfens sei $= r$, der Reibungskoeffizient $= f$, der Druck des Zapfens auf das Lager für jede Flächeneinheit $= p$.

Fig. 62.



Beschreibt man mit den Radien x und $x + dx$ vom Mittelpunkte der Reibfläche aus zwei Kreise, so schliessen sie ein Flächenelement $= 2\pi x\,dx$ ein. Der Druck auf dasselbe ist $= 2\pi p x\,dx$ und die Reibung, die dieser Druck bei der Drehung veranlasst, $= 2\pi p f x\,dx$, also die Reibung auf der ganzen Kreisfläche

$$2\pi p f \int_0^r x\,dx = \pi r^2 p \cdot f,$$

d. h. ebenso gross wie für die fortschreitende Bewegung bei gleichem Drucke.

Multipliziert man das Differential $2\pi p f x\,dx$ der Reibung mit dem Wege $2\pi x$, den diese Reibung bei einer Drehung beschreibt, so erhält man als Element der Arbeit, die von der Reibung absorbiert wird, für jede Umdrehung $= 4\pi^2 p f x^2\,dx$; somit als absorbierte Arbeit auf der ganzen Kreisfläche

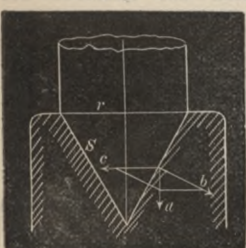
$$4\pi^2 p f \int_0^r x^2\,dx = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r \cdot p \pi r^2 f$$

und die Arbeit der Reibung auf einer konzentrischen Ringfläche, deren Radien r und r' sind, für je eine Umdrehung

$$4\pi^2 p f \int_{r'}^r x^2\,dx = \frac{4}{3}\pi^2 p f (r^3 - r'^3).$$

206. Reibung eines vertikalstehenden konischen Wellzapfens. Es sei r (Fig. 63) der Halbmesser, s die Seitenlinie und p der Druck des Zapfens auf das Lager für jede Einheit der horizontalen Projektion des Zapfens.

Fig. 63.



Legt man mit den Radien x und $x + dx$ zwei horizontale Schnitte durch den Zapfen, so ist der Unterschied dieser Schnitte eine ringförmige Fläche $= 2\pi x\,dx$ und der Druck darauf in vertikaler Richtung $a = 2\pi p x\,dx$. Man zerlege diesen Druck in zwei Seitenkräfte b und c, wovon b normal zur Kegelfläche und c horizontal wirkt. Die horizontalen Seitenkräfte in jedem horizontalen Schnitte heben sich auf, während die Normalkräfte bei der Drehung Reibung hervorbringen. Aus der Aehnlichkeit zweier Dreiecke, wie sie sich unmittelbar aus der Figur ergeben, erhält man die Proportion

$$b : a = s : r,$$

folglich

$$b = \frac{a\,s}{r} = \frac{2\pi p s}{r} x\,d\,x.$$

Die Reibung auf dem Flächenelemente des Lagers ist $= b\,f$, wenn f der Reibungskoeffizient; folglich die Reibung auf der ganzen Kegelfläche

$$\frac{2\pi p s f}{r}\int_0^r x\,d\,x = \frac{s}{r}\cdot \pi r^2 p \cdot f.$$

Mithin verhält sich bei gleichem Drucke $\pi r^2 p$ die Reibung in drehender Richtung zur Reibung in fortschreitender wie $s : r$. Je kleiner somit der Winkel ist, den die Seitenlinie des Kegels mit der Achse bildet, um so grösser ist die Reibung. Die Ursache liegt in der keilförmigen Wirkung des Zapfens im Lager.

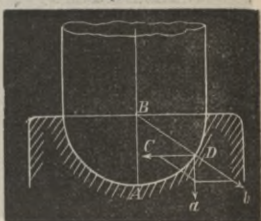
Die Arbeit, die das Element b f der Reibung bei der Drehung absorbiert, ist $= b\,f \cdot 2\pi x$; folglich die Arbeit, die durch die Reibung des ganzen Zapfens absorbiert wird, bei einer Rotation

$$\frac{4\pi^2 p s f}{r}\int_0^r x^2\,d\,x = \frac{4}{3}\pi s \cdot \pi r^2 p \cdot f.$$

Geht s in r über, so entsteht aus der Kegelfläche eine Kreisfläche, und man erhält die Resultate der vorigen Aufgabe.

207. Reibung eines kugelförmigen Zapfens. Der Mittelpunkt der Kugel sei B (Fig. 64), der Radius derselben $= r$, der Druck des Zapfens auf das Lager, in der Richtung der Achse A B, für die Einheit der horizontalen Projektion des Zapfens $= p$ und der Reibungskoeffizient $= f$.

Fig. 64.



Man lege einen ebenen Schnitt längs der Achse und bezeichne in demselben den Winkel A B D, den die Achse A B mit irgend einem anderen Halbmesser B D bildet, mit φ; lasse den Bogen $A D = r\varphi$ übergehen in $r(\varphi + d\,\varphi)$; dann wächst dieser Bogen um das Element $r\,d\,\varphi$, das bei einer vollen Drehung eine konische Fläche $= 2\pi r \sin\varphi \cdot r\,d\,\varphi$ beschreibt. Die horizontale Projektion dieser Fläche ist $= 2\pi r^2 \cdot \sin\varphi \cos\varphi\,d\,\varphi$, der Druck darauf $a = 2\pi r^2 p \cdot \sin\varphi \cos\varphi\,d\,\varphi$. Man zerlege diesen Druck in zwei Seitenkräfte b und c, wovon b normal zur Kugelfläche und c horizontal wirkt. Die horizontalen Seitenkräfte, in einem und demselben Horizontalschnitte liegend, heben sich auf, während der Druck b die Reibung b f hervorbringt. Da $b = a : \cos\varphi$, so ist diese Reibung auf dem Flächenelement $= 2\pi r^2 p f \sin\varphi\,d\,\varphi$ und die Reibung auf einem ganzen Kugelsegment

$$2\pi r^2 p f \int_0^{\varphi} \sin\varphi\,d\,\varphi = 2\pi r^2 p f\,(1 - \cos\varphi).$$

Geht der Zapfen in eine Halbkugel über, so beträgt seine Reibung

$$2\,\pi\,r^2\,p\,f \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = 2\cdot\pi\, r^2\, p\cdot f.$$

Folglich verhält sich bei gleichem Drucke $\pi\,r^2\,p$ die Reibung der drehenden Bewegung zur Reibung $\pi\,r^2\,p\,f$ der fortschreitenden wie $2:1$.

Multipliziert man die Reibung b f, die das Flächenelement des Zapfens verursacht, mit dem Wege $2\,\pi\,r\sin\varphi$, so erhält man die Arbeit, die diese Reibung bei einer Drehung absorbiert, gleich

$$4\,\pi^2\,r^3\,p\,f\sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Da

$$\int \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) + C,$$

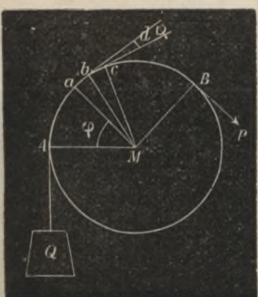
so erhält man die Arbeit, die die Reibung eines Zapfens von der Form einer Halbkugel bei einer Rotation verbraucht, gleich

$$4\,\pi^2\,r^3\,p\,f \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot 2\,\pi\,r\cdot\pi\,r^2\,p\,f.$$

Mithin verhält sich diese Arbeit zu der eines cylindrischen Zapfens, bei gleichen Werten von r und p, wie $\frac{3}{4}\pi:1$.

208. Reibung eines gespannten Seiles, das um einen festen Cylinder gewickelt ist. Es sei A B (Fig. 65) die Achse des gebogenen Seiles, liegend in einer Ebene, die normal zur Achse des Cylinders ist. Am einen Ende des Seiles hänge die Last Q, am andern wirke die Kraft P, die die Last am Herunterfallen verhindert. Das Seil drückt an jeder Berührungsstelle an den Cylinder und bringt somit eine Summe von Reibungen hervor. Die Kraft P, unterstützt durch diese Reibungen, steht mit der Last Q im Gleichgewichte.

Fig. 65.



Es sei r der Halbmesser des Cylinders samt der halben Dicke des Seiles, φ der Winkel, den der Radius A M von der Berührungsstelle A aus mit irgend einem andern Radius a M bildet und f der Reibungskoeffizient. Man lasse den Bogen $A\,a = r\,\varphi$ übergehen in $A\,b = r(\varphi + d\,\varphi)$ und in $A\,c = r(\varphi + 2\,d\,\varphi)$, so dass die Bogenelemente $a\,b = b\,c = r\,d\,\varphi$ werden. Würde nun das Seil keine Reibung hervorbringen, so wäre die Spannung des Seilstückes a b, die mit p bezeichnet werde, gleich der Spannung des Seilstückes b c. Allein vermöge dieser Reibung nimmt die Spannung p, beim Uebergange vom Elemente a b in b c, ab um d p, so dass sie in b c noch $p - d\,p$ ist. Beide Spannungen p und $p - d\,p$ schliessen den Winkel $d\,\varphi$ ein, bringen also eine Mittelkraft hervor. Da $p - d\,p$ mit p verwechselt werden kann, so ist diese Mittelkraft die Diagonale eines Parallelogramms, mit zwei Seiten $= p$, und einem von ihnen eingeschlossenen Winkel

$= d\varphi$. Die Diagonale oder Mittelkraft ist daher $= 2\,p \sin\frac{d\varphi}{2}$. Da aber $d\varphi$ unendlich klein ist, so kann der Sinus mit dem Bogen verwechselt werden. Die Mittelkraft wird daher $= p\,d\varphi$ und die von ihr hervorgebrachte Reibung $= f\,p\,d\varphi$ sein. Dies ist die Grösse, um die die Spannung p längs eines Bogenteiles $r\,d\varphi$ abnimmt. Folglich wird sein

$$d p = - f\,p\,d\varphi.$$

Hierin haben dp und $d\varphi$ das entgegengesetzte Zeichen, weil p abnimmt, wenn φ wächst. Durch Division durch p kommt

$$\frac{d p}{p} = - f\,d\varphi.$$

Die linke Seite muss integriert werden von Q bis P, die rechte von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$, wenn $r\alpha$ den vom Seile umschlungenen Bogen A B bezeichnet. Dies gibt

$$l\,P - l\,Q = - f\alpha; \quad l\frac{Q}{P} = f\alpha.$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so folgt

$$\frac{Q}{P} = e^{f\alpha}.$$

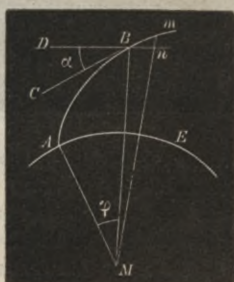
Diese Formel zeigt, dass der Radius des Cylinders keinen Einfluss auf die Reibung hat, dass sie lediglich von dem Winkel abhängt, den die Normalen in A und B bilden, und dass die Kraft P beim Zunehmen des Winkels α ausserordentlich rasch abnimmt.

Wenn $f = \frac{1}{3}$; wenn ferner

die Umwickelung	=	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	vom Umfange,
so wird Q	=	1,69	2,85	8,12	65,94	4 348	von P.

209. Die logarithmische Spirale als Böschungslinie einer Sandmasse. Es sei A E (Fig. 66) die kugelförmige Oberfläche der Erde, M ihr Mittelpunkt, und A B E ein vertikaler Schnitt durch einen Sandkörper, der auf der Oberfläche der Erde liegt. Besteht dieser Sandkörper aus gleichartigen Teilen, die durch gleiche Kräfte der Adhäsion zusammenhängen, so wird die Böschungslinie B A des Sandkörpers unter der Einwirkung der Schwere sich so gestalten, dass die Tangente B C an dieselbe mit dem Erdhalbmesser B M einen konstanten Winkel bildet, wo auch der Berührungspunkt B in derselben angenommen wird.

Fig. 66.



Zieht man die Horizontale D B n und bezeichnet man mit α den Winkel D B C, so wird nach einem einfachen Satze aus der Lehre von der schiefen Ebene tang α gleich dem Koeffizienten f der Reibung sein, die ein weiteres Heruntergleiten der Sandteile über die geneigte Oberfläche verhindert. Ferner sei $AM = r$ der Halbmesser der Erde, $BM = \varrho$ der Abstand des Punktes B vom Mittelpunkte der Erde und $AMB = \varphi$. Wenn man φ um $d\varphi$ zunehmen lässt, wodurch BM nach mM rücke, so wird in dem unendlich kleinen Dreiecke Bmn sein:

$$Bn = \varrho\, d\varphi, \quad mn = d\varrho, \quad \tang \alpha = \frac{mn}{Bn} = \frac{d\varrho}{\varrho\, d\varphi}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, indem man $f = \tang \alpha$ setzt,

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = f\, d\varphi.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$l\varrho = f\varphi + C.$$

Für $\varphi = 0$ wird $\varrho = r$. Diese Werte geben

$$l\, r = C.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen kommt als gesuchte Relation

$$l\left(\frac{\varrho}{r}\right) = f\varphi.$$

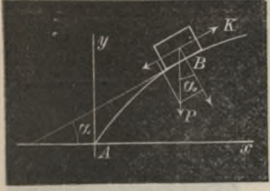
Geht man noch von den Logarithmen zu den Zahlen über, so ist

$$\varrho = r\, e^{f\varphi}.$$

Für Flüssigkeiten ist $f = 0$, also $e^{f\varphi} = 1$, folglich $\varrho = r$, d. h. die Oberfläche von Flüssigkeiten ist kugelförmig.

210. Arbeit zum Hinaufziehen eines Körpers über eine geneigte Fläche mit Rücksicht auf die Reibung. Der Körper bewege sich längs des in einer vertikalen Ebene befindlichen, stetig gekrümmten Weges AB (Fig. 67). In dieser Ebene ziehe man die Achse Ax horizontal, die Achse Ay vertikal. Es seien: x, y die Koordinaten des Punktes B, in dem der Druck des Körpers gegen die Kurve konzentriert gedacht werden kann; α der Winkel, den die Tangente an die Kurve durch diesen Punkt mit Ax bildet; P das konstante Gewicht des Körpers, im Schwerpunkte desselben wirksam, und f der Reibungskoeffizient.

Fig. 67.



Das Gewicht des Körpers wirkt vertikal abwärts. Zerlegt man dasselbe in die Seitenkräfte $P \sin \alpha$ und $P \cos \alpha$, so wird $P \sin \alpha$ parallel zur Tangente wirken und den Körper über die schiefe Fläche hinab zu treiben streben, während $P \cos \alpha$ normal zur Kurve wirkt und eine Reibung $= P f \cos \alpha$ hervorbringt. Die Kraft k, die in der Richtung der Tangente wirken muss, um die Bewegung aufwärts zu veranlassen, wird also sein

$$k = P \sin \alpha + P f \cos \alpha.$$

Erfolgt die Bewegung längs eines Bogenelementes ds, so ändert sich α, also auch die Zugkraft k nur um unendlich wenig, d. h. es kann die Kraft k längs des Wegteiles d s als konstant angenommen werden. Somit ist das Arbeitselement (Produkt aus Kraft und Weg)

$$k\,d\,s = P(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,d\,s.$$

Nun ist aber

$$\sin\alpha = \frac{d\,y}{d\,s}; \quad \cos\alpha = \frac{d\,x}{d\,s}.$$

Folglich

$$k\,d\,s = P(d\,y + f\,d\,x).$$

In dem Ausdrucke rechts sind P und f konstant und y eine Funktion von x. Wird integriert zwischen $x = 0$ und $x = x$, so erhält man als Arbeit zur Fortschaffung des Körpers längs des Weges A B

$$\int k\,d\,s = P\,y + P\,f\,x.$$

Diese Arbeit besteht somit aus zwei Teilen; aus der Arbeit $P\,y$, die den Körper längs der Vertikalprojektion y und aus der Arbeit $P\,f\,x$, die den Körper längs der Horizontalprojektion x des Weges A B fortzuschaffen vermag.

XIV. Aufgaben über die Festigkeit der Materialien.

211. Von der Festigkeit der Körper im allgemeinen. Die Formänderung (Verlängerung, Verkürzung etc.) eines festen Körpers durch eine äussere Kraft ist bis zu einer gewissen Grenze, die man die Grenze der Elastizität nennt, dieser Kraft proportional. Innerhalb dieser Grenze stellt der Körper seine Form wieder her, wenn die äussere Kraft zu wirken aufhört. Ueberschreitet die Formänderung diese Grenze, so ändern sich die Verschiebungen der Teile anders, als die sie bewirkenden Kräfte. Ueberschreiten diese Kräfte ein gewisses Mass, so erfolgt die Trennung der Teile, der Bruch. Der Widerstand des Körpers gegen die Einwirkung äusserer Kräfte heisst seine Festigkeit.

Die absolute Festigkeit ist der Widerstand gegen das Zerreissen, die rückwirkende gegen das Zerdrücken, die relative gegen die Biegung und die Torsionsfestigkeit gegen die Verdrehung oder Verwindung.

212. Empirisches Gesetz der Ausdehnung und Verkürzung. Wird ein prismatischer Stab vom Querschnitte F an einem Ende festgehalten und durch eine am andern Ende wirkende Kraft P ausgedehnt oder verkürzt, so leistet er einen Widerstand, der für die Einheit des Querschnittes $= s$ sei; dann wird der Widerstand des Stabes für den ganzen Querschnitt sein

(1) $$P = F\,s.$$

Man nennt die Grösse s Modul der Festigkeit, auch spezifische Spannung. Steigt diese, so dass der Stab bricht, so wird s zum Bruchmodul.

Das Gesetz (1) gilt beim Zusammendrücken für verschiedene Längen des Stabes nur, wenn der Stab geradlinig erhalten wird.

Hat der Stab eine Länge L, und erreicht er durch die Kraft P eine Ausdehnung a, so ist innerhalb der Grenze der Elastizität, wie Versuche ergeben haben, die Kraft P direkt proportional dem Querschnitte F, der Längenänderung a und umgekehrt proportional der Länge L des Stabes. Bezeichnet E einen von der Natur des Materials abhängigen Koeffizienten, so ist

$$P = E \cdot F \cdot \frac{a}{L}. \tag{2}$$

Setzt man hierin $F = 1$ und $\frac{a}{L} = 1$, so wird $P = E$. Der Faktor E ist also eine Kraft und zwar jene, die einen prismatischen Stab vom Querschnitte 1 soweit verstrecken kann, dass die Zunahme an Länge gleich der ursprünglichen Länge wird. Man nennt ihn Modul der Elastizität.

213. Arbeit, die die Längenänderung eines prismatischen Stabes bewirkt. Geht der Stab, wie er im letzten Paragraphen vorausgesetzt wurde, aus der Längenänderung x in die Längenänderung $x + dx$ über, so wird die Kraft P nach Gleichung (2) von § 212 zu

$$P + dP = E \cdot F \frac{(x + dx)}{L}.$$

Da dieser Wert sich jedoch nur um unendlich wenig von P unterscheidet, so kann die Kraft P während der Längenänderung dx konstant $= P$ angenommen werden. Multipliziert man diese Kraft mit dem Wege dx, den ihr Angriffspunkt zurücklegt, so erhält man das Arbeitselement, indem das Glied mit dx^2 vernachlässigt wird,

$$P\,dx = E \cdot F \frac{x}{L}\,dx,$$

und die Arbeit für unendlich viele aufeinander folgende Wegelemente

$$\int P\,dx = E \cdot F \frac{x^2}{2L} + C.$$

Geht man mit der Längenänderung von 0 bis a, so erhält man als Arbeit zur Erreichung dieser Längenänderung, jedoch innerhalb der Grenze der Elastizität

$$\int_0^a P\,dx = \frac{1}{2} E \cdot F \frac{a^2}{L}.$$

Nach dem Gesetze (2) ist aber

$$a = \frac{P \cdot L}{E \cdot F}.$$

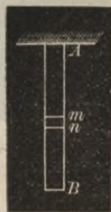
Führt man diesen Wert von a in die vorige Gleichung ein, so erhält man, wenn noch nach (1) der Bruch $\frac{P}{F}$ durch s ersetzt wird, als gesuchte Arbeit

$$\int_0^a P\,dx = \frac{1}{2}\frac{s^2}{E}\cdot F\cdot L.$$

Nun ist $F\cdot L$ das Volumen des Stabes. Die Arbeit ist somit dem Quadrate der spezifischen Spannung und dem Volumen des Stabes proportional.

214. Ausdehnung eines vertikal aufgehängten prismatischen Stabes durch sein eigenes Gewicht. Ist der Stab A B (Fig. 68) am oberen Ende befestigt, so wird er sich durch sein eigenes Gewicht verlängern.

Fig. 68.



Es sei F der Querschnitt des Stabes, L seine Länge in horizontaler Lage, p das Gewicht des Stabes für jede Längeneinheit und $x = A\,m$ ein Teil der Länge des Stabes in unausgedehntem Zustande. Man lege in den Abständen $x = A\,m$ und $x + dx = A\,n$ horizontale Querschnitte durch den Stab. Da das unterhalb von m liegende Stück m B eine Länge $= L - x$ vor der Ausdehnung hat und demselben ein Gewicht $(L - x)\,p$ zukommt, so wird nach (2) (§ 212) der Teil m n durch dieses unter ihm befindliche Gewicht ausgedehnt und zwar proportional der Kraft $(L - x)\,p$ und der primitiven Länge dx, sowie umgekehrt proportional dem Querschnitte F und dem Modul E der Elastizität. Diese Ausdehnung wird also sein

$$\frac{(L-x)\,p}{E\cdot F}\,dx.$$

Die Ausdehnung für alle Elemente zwischen den Punkten A und B ist deshalb, da x von 0 bis L genommen werden muss,

$$\frac{p}{E\cdot F}\int_0^L (L-x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{p\,L^2}{E\cdot F}.$$

Die gesamte Länge des Stabes wird mithin unter der Wirkung des Gewichtes sein

$$L + \frac{1}{2}\frac{p\,L^2}{E\cdot F}.$$

Würde noch eine Last P am unteren Ende angehängt, so wäre die Zunahme an Länge vermöge dieser Last nach § 212, Formel (2)

$$\frac{P\cdot L}{E\cdot F}$$

und die gesamte Länge des Stabes somit

$$L\left(1 + \frac{P}{E\cdot F} + \frac{1}{2}\frac{p\,L}{E\cdot F}\right).$$

Da $p L$ das Gewicht des Stabes bezeichnet, so wird die durch das eigene Gewicht bewirkte Ausdehnung halb so gross, als wenn dieses Gewicht am untern Ende aufgehängt wäre.

215. Vertikal aufgehängter und belasteter Körper von gleicher absoluter Festigkeit. Ein Stab AD (Fig. 69) sei am obern Ende A aufgehängt und am untern Ende D durch ein Gewicht P belastet. Man soll bestimmen, in welcher Weise der Querschnitt des Körpers von oben nach unten abzunehmen hat, damit die Gefahr des Bruches in jedem Querschnitte des Körpers dieselbe sei.

Fig. 69.

Es bezeichnen: L die Länge des Stabes, p das Gewicht der Kubikeinheit des homogenen Stoffes, s den Modul der absoluten Festigkeit, $x = DB$ einen variabeln Teil der Länge des Stabes, und y, y_0 die Querschnitte des Körpers in B und D.

Die Längenfasern, die durch den Querschnitt y gehen, haben dem Gewichte P, sowie dem Gewichte des Körperteiles DB zu widerstehen. Lässt man x um $BC = dx$ zunehmen, so ist das Volumen zwischen den Querschnitten in B und $C = y\,dx$ und das Gewicht derselben $= p\,y\,dx$; somit das Gewicht des Körperteiles $DB = p\int y\,dx$. Da nun nach (1) (§ 212) die absolute Festigkeit der Fasern im Querschnitte y gleich $s y$ ist, so muss sein

$$s y = P + p \int y\,dx.$$

Differentiiert man diese Gleichung auf beiden Seiten, indem man berücksichtigt, dass s, P, p konstant sind, so ergibt sich $s\,dy = p\,y\,dx$, oder indem man durch y und s dividiert,

$$\frac{dy}{y} = \frac{p}{s}\,dx.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$l\,y = \frac{p}{s}\,x + C.$$

Setzt man hierin $x = 0$, so wird $y = y_0$, und die letzte Gleichung geht über in $l\,y_0 = C$. Mithin wird sein

$$l\,\frac{y}{y_0} = \frac{p}{s}\,x. \tag{1}$$

Geht man in dieser Gleichung von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man als gesuchte Relation

$$y = y_0\,e^{\frac{p x}{s}}. \tag{2}$$

Da der unterste Querschnitt y_0 gerade so stark sein muss, dass die absolute Festigkeit $s y_0$ in diesem Querschnitte gleich dem Gewichte P wird, so hat man $P = s y_0$. Hierdurch wird die letzte Formel

$$(3) \qquad y = \frac{P}{s} e^{\frac{p x}{s}}.$$

Jede dieser beiden Gleichungen bestimmt die Form des Stabes.

Anmerkung. Das Volumenelement $y\,dx$ des Stabes wird mit Hilfe der letzten Gleichung zu

$$y\,dx = \frac{P}{s} e^{\frac{p x}{s}} dx.$$

Um integrieren zu können, setze man $\frac{p x}{s} = u$, und hat $dx = \frac{s}{p} du$ und

$$y\,dx = \frac{P}{p} e^u du.$$

Mithin ist das Volumen des Körpers für unbestimmte Grenzen

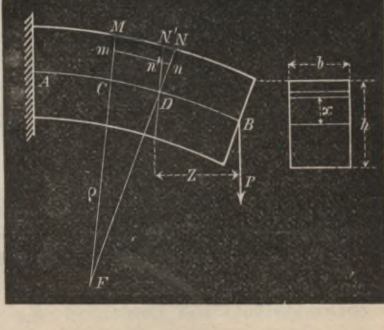
$$\int y\,dx = \frac{P}{p} e^u + C.$$

Ersetzt man hierin u wieder durch x und nimmt das Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = L$, so erhält man als Volumen des ganzen Stabes

$$(4) \qquad \int_0^L y\,dx = \frac{P}{p}\left(e^{\frac{p L}{s}} - 1\right).$$

216. Relative Festigkeit eines rechtwinkeligen Stabes. Ist dieser Stab an einem Ende eingespannt und drückt am andern eine Kraft auf ihn, senkrecht zu seiner Längenrichtung, so wird sich der Stab biegen. Dadurch dehnen sich die Fasern auf der konvexen Seite aus, auf der konkaven ziehen sie sich zusammen. Wenn der Widerstand des Materials gegen die Ausdehnung und die Zusammenpressung gleich gross ist, was wir hier voraussetzen wollen, so bleibt die mittlere Faserschicht A C D B (Fig. 70) des Stabes ohne Längenänderung. Deshalb wird diese Schicht die neutrale Schicht genannt.

Fig. 70.



Es seien C M und D N zwei Querschnitte durch den Körper, die im unbelasteten Zustande des Stabes normal sind zu den Längenkanten. Während der Biegung gehen diese Schnitte auf der einen Seite auseinander und nähern sich auf der andern, bleiben jedoch senkrecht zur Neutralschicht, werden sich also in einer Stelle F schneiden. Zieht man den Schnitt D N' parallel zu C M, so kann angenommen werden, es habe sich dieser Querschnitt beim Eintreten der Biegung um eine Achse D in die Lage D N gedreht. Somit hat sich die Faser m n′ ausgedehnt um n′ n, die Faser M N′ um N′ N, etc.

Nun seien;

b, h, L Breite, Höhe und Länge des Stabes,

x = D n der veränderliche Abstand einer Faser m n von der Neutralschicht,

s, s′ die Kräfte, womit prismatische Stäbe vom Querschnitte 1 in der Lage N und n verstreckt werden,

P die Kraft, die am freien Ende auf den Stab, senkrecht zur Längenrichtung, einwirkt und

z der Abstand der Drehachse D von der Richtung der Kraft P.

Es sollen nun das Festigkeitsmoment und das Elastizitätsmoment abgeleitet werden.

A. Festigkeitsmoment. Die Kräfte s und s′ sind den Ausdehnungen N N′ und n n′, die sie veranlassen, proportional, und diese verhalten sich wie die Abstände D N und D n; daher wird sein

$$s : s' = \frac{h}{2} : x; \quad s' = \frac{2\,s}{h}\,x.$$

Legt man in den Abständen x und x + d x von der Neutralschicht und parallel zu ihr zwei Flächen durch den Körper, so schliessen sie eine Schicht ein vom Querschnitte b d x. Geht man nun vom Querschnitte 1 zum Querschnitte b d x über, so geht die verstreckende Kraft s′ über in

$$s'\,b\,d\,x = \frac{2\,s\,b}{h}\,x\,d\,x.$$

Diese Kraft wirkt in n am Hebelarme D n = x; ihr statisches Moment für die Drehachse in D ist daher

$$\frac{2\,s\,b}{h}\,x^2\,d\,x, \tag{1}$$

somit die Summe der statischen Momente aller Kräfte, die auf der konvexen Seite Ausdehnung und auf der konkaven Verkürzung herbeiführen,

$$\frac{2\,s\,b}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^2\,d\,x = \frac{s}{6}\,b\,h^2.$$

Da z den Abstand der Drehachse D von der Richtung der Kraft P bezeichnet, so ist das äussere Moment P z, das den Stab biegt, gleich dem Momente der Widerstand leistenden Molekularkräfte. Daher das gesuchte Festigkeitsmoment

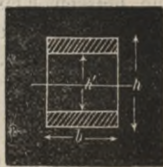
$$P\,z = \frac{s}{6}\,b\,h^2. \tag{2}$$

Diese Gleichung zeigt, dass für eine und dieselbe Spannung s des Materials in den äussersten Schichten P und z umgekehrt proportional sind. Für $z = L$ werde P zu P'. Daher

$$P' = \frac{s}{6} \cdot \frac{b h^2}{L}.$$

Man nennt diesen Wert von P' das **Tragvermögen** des Stabes. Dasselbe ist somit proportional der Breite, dem Quadrate der Höhe und umgekehrt proportional der Länge des Stabes.

Fig. 71.



Hat der Querschnitt des Stabes die Form von Fig. 71, so muss man das Differential (1) von $\frac{1}{2}h'$ bis $\frac{1}{2}h$ integrieren, um die Summe der statischen Momente der ausdehnenden Kräfte zu erhalten. Somit ist die Summe der statischen Momente sowohl der ausdehnenden als der zusammendrückenden Kräfte für diesen Querschnitt, d. h. das Festigkeitsmoment

$$(3) \qquad P z = \frac{s}{6} \frac{b(h^3 - h'^3)}{h}.$$

B. **Elastizitätsmoment.** Es seien

E der Modul der Elastizität des Materials,

$l = CD$ der sehr kleine Abstand der Querschnitte CM und DN auf der Neutralschicht,

$\triangle l = nn'$ die Verstreckung der Schicht mn' im Abstande x von der Neutralschicht und

$\varrho = DF$ der Krümmungshalbmesser des Kurvenstückes CD.

Die Kraft, die einen prismatischen Stab vom Querschnitte F und der Länge l um $\triangle l$ ausdehnt, ist nach Formel (2) des § 212

$$(4) \qquad E \frac{\triangle l}{l} F.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Dnn' und DCF folgt

$$\frac{nn'}{CD} = \frac{Dn}{DF} \quad \text{oder} \quad \frac{\triangle l}{l} = \frac{x}{\varrho}.$$

Setzt man diesen Wert von $\frac{\triangle l}{l}$ in (4) ein und vertauscht F mit $b\,dx$, so erhält man als Kraft, die eine unendlich dünne Schicht im Abstande x von der Neutralachse verstreckt,

$$E \frac{x}{\varrho} b\,dx,$$

und als statisches Moment dieser Kraft für die Drehung um die Achse D

$$E \frac{b}{\varrho} x^2\,dx.$$

Daher die Summe der Momente für alle Schichten des Querschnittes

$$(5) \qquad P z = \frac{E}{12} \frac{b h^3}{\varrho} \quad \text{und} \quad \varrho \cdot P z = \frac{E}{12} b h^3,$$

und ebenso für den Querschnitt der Fig. 71

$$(6) \qquad Pz = \frac{E}{12} \cdot \frac{b(h^3 - h'^3)}{\varrho} \quad \text{und} \quad \varrho \cdot Pz = \frac{E}{12} b(h^3 - h'^3).$$

Die letzten Gleichungen (5) und (6) zeigen, dass ϱ dem Abstande z umgekehrt proportional ist. Wenn $z = 0$, wird $\varrho = \infty$, d. h. der Stab hat am Angriffspunkte der Kraft P keine Krümmung. Wenn $z = L$, wird ϱ am kleinsten. Folglich ist die Biegung am befestigten Ende am stärksten. Man ersieht, dass die Produkte $\varrho \cdot Pz$, weil nur abhängig von E und den Dimensionen des Querschnittes, konstant sind; sie heissen Elastizitätsmomente.

Die Werte von Pz in (2) und (5), ebenso in (3) und (6) sind einander gleich. Durch Gleichsetzen folgt

$$(7) \qquad \frac{s}{E} = \frac{h}{2\varrho},$$

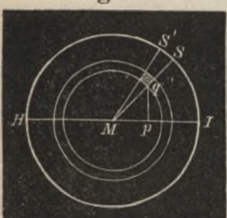
eine Relation, die sich unmittelbar auch aus den ähnlichen Dreiecken DNN' und DCF ergibt. Man kann daher mittels (7) das Festigkeitsmoment aus dem Elastizitätsmomente ableiten und umgekehrt.

Wird die Spannung s angenommen, so kann mittels (7) der Krümmungshalbmesser ϱ berechnet werden.

217. Relative Festigkeit eines cylindrischen Stabes. Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in der letzten Aufgabe, nur dass der rechtwinkelige Querschnitt mit einem kreisförmigen vom Halbmesser R vertauscht wird. Die neutrale Schicht ACDB (Fig. 70) geht durch die Mitte sämtlicher Querschnitte, schneidet diese also längs Durchmessern. Man nennt einen solchen Schnitt HI (Fig. 72) gewöhnlich Neutralachse des Querschnittes.

Beschreibt man vom Mittelpunkte M aus mit den Halbmessern r und $r + dr$ zwei Kreise, so schliessen sie einen ringförmigen Querschnitt von der Breite dr ein. Legt man sodann zwei Radien MS und MS' unter den Winkeln $SMI = \varphi$ und $S'MI = \varphi + d\varphi$, so schneiden diese Radien ein Flächenelement aus dem Ringe aus von der Länge $r\,d\varphi$, also vom Inhalte $r\,d\varphi \cdot dr$, da dieses Element als Rechteck angesehen werden kann. Dieses Flächenelement hat den Abstand $pq = r \sin\varphi$ von der Neutralachse. Die Ausdehnung, die die Fasern von der Länge l an der Stelle dieses Flächenelementes bei der Biegung erhalten, sei $\triangle l = nn'$ (Fig. 70). Dann ist die Kraft, die einem prismatischen Stabe vom Querschnitte F und der Länge l eine Ausdehnung $\triangle l$ beibringt, nach Formel (2) von § 212

Fig. 72.



$$(1) \qquad E \frac{\triangle l}{l} F.$$

Setzt man hierin statt F das Flächenelement $r\,d\varphi \cdot dr$ und nach der vorigen Aufgabe

$$\frac{\triangle l}{l} = \frac{x}{\varrho} = \frac{r \sin\varphi}{\varrho},$$

so erhält man als Wert der Kraft, die das Stäbchen vom unendlich kleinen Querschnitte ausdehnt,

$$\frac{E}{\varrho} r^2 d r \cdot \sin \varphi \, d \varphi.$$

Der Hebelarm dieser Kraft, bei einer Drehung um die Neutralachse, ist $= r \sin \varphi$, also das statische Moment der Kraft

$$\frac{E}{\varrho} r^3 d r \cdot \sin^2 \varphi \, d \varphi.$$

Betrachtet man hierin r zunächst als konstant und integriert von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, so erhält man die Summe der statischen Momente der Kräfte, die die Fasern der ringförmigen Schicht ausdehnen und zusammendrücken. Nun ist

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d \varphi = \pi.$$

Folglich das statische Moment für jene Schicht gleich

$$\pi \frac{E}{\varrho} r^3 d r.$$

Integriert man dieses Differential von $r = R'$ bis $r = R$, so erhält man die Summe der statischen Momente der Kräfte, die die Fasern innerhalb eines Ringes von der Breite $R - R'$ ausdehnen und zusammendrücken, gleich

$$\frac{\pi}{4} \frac{E}{\varrho} (R^4 - R'^4).$$

Da dieses Moment nach der vorigen Aufgabe auch $= P z$ ist, so wird

$$(2) \qquad P z = \frac{\pi}{4} \frac{E}{\varrho} (R^4 - R'^4).$$

Die Grösse $\frac{\pi E}{4} (R^4 - R'^4)$, also auch $\varrho \cdot P z$, hängt nur vom Querschnitte des Stabes und von seiner materiellen Beschaffenheit ab und wird Moment der Elastizität des Stabes genannt.

Für $z = 0$ wird $\varrho = \infty$, also ist der Stab am freien Ende nicht gebogen. Je grösser z ist, um so kleiner wird ϱ. Folglich tritt die grösste Biegung an der befestigten Stelle ein. Für diese ist mithin

$$P = \frac{\pi}{4} \frac{E}{\varrho} \frac{R^4 - R'^4}{L}.$$

Die Relation (7) des vorigen Paragraphen verwandelt sich hier in

$$\frac{s}{E} = \frac{R}{\varrho}.$$

Mit Hilfe derselben erhält man aus dem Elastizitätsmomente das Festigkeitsmoment

$$(3) \qquad P z = \frac{\pi}{4} s \frac{R^4 - R'^4}{R}.$$

Für $z = L$ wird das Tragvermögen des Stabes

$$P = \frac{\pi}{4} s \frac{R^4 - R'^4}{R \cdot L}.$$

Wenn $R' = 0$, so erhält man für den massiven Cylinder

$$(4) \qquad P = \frac{\pi E}{4} \cdot \frac{R^4}{L \varrho}; \quad P = \frac{\pi s}{4} \frac{R^3}{L}.$$

Mithin ist das Tragvermögen P eines Cylinders der dritten Potenz des Halbmessers direkt und der Länge umgekehrt proportional.

Anmerkung. Wenn ein hohler und ein voller Cylinder aus demselben Materiale gleiche Länge und gleiches Gewicht haben, wenn R und R′ die Radien des hohlen, r der des vollen Cylinders ist, so gilt für ihre Tragvermögen P_1 und P_2 aus (3) und (4) die Proportion

$$P_1 : P_2 = \frac{R^4 - R'^4}{R} : r^3.$$

Aus der Gleichheit der Gewichte und Längen beider Cylinder folgt aber

$$\pi (R^2 - R'^2) = \pi r^2 \text{ oder } r = \sqrt{R^2 - R'^2};$$

damit geht die obige Proportion über in

$$P_1 : P_2 = \frac{R^2 + R'^2}{R} : \sqrt{R^2 - R'^2},$$

woraus folgt

$$P_1 = \frac{R^2 + R'^2}{R \sqrt{R^2 - R'^2}} \cdot P_2,$$

d. h. die Tragfähigkeit des hohlen Cylinders ist grösser als die des vollen, und zwar wird das Verhältnis beider um so grösser, je näher R′ dem R kommt.

Ist $R' = nR$, wo $n < 1$, so wird

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 + n^2}{\sqrt{1 - n^2}}.$$

Man erhält für

$$n = 0{,}5; \quad 0{,}9; \quad 0{,}99$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 1{,}44; \quad 4{,}15; \quad 14{,}03.$$

Daher ist es erklärlich, warum ein Strohhalm dem Wetter und der Schwere seiner Aehre so leicht widersteht; überhaupt wird in der Natur die Röhrenform ausser im Pflanzenreiche, auch bei den Federn und Knochen der Tiere beobachtet, wodurch bei geringem Materiale und kleinem Gewichte doch eine grosse Festigkeit erreicht wird.

218. Torsion eines cylindrischen Stabes. Es werde ein senkrechter Kreiscylinder an einem Ende festgehalten und am andern durch ein statisches Moment, dessen Kraft in einer zur Achse normalen Ebene wirkt, verdreht.

Dadurch nimmt jede Faser, die vor der Torsion parallel zur Achse liegt, die Form einer Schraubenlinie an. Der Uebergang von der geraden Linie zu dieser Schraubenlinie bringt eine Längenänderung der Faser hervor, die zunächst bestimmt werden soll. Es sei

L die Länge des Cylinders vor der Torsion,
R sein Halbmesser,
α der Drehwinkel am freien Ende, abgetragen als Bogen eines Kreises, dessen Radius die Einheit ist, und
x die Entfernung irgend einer Längenfaser von der Achse.

Erste Voraussetzung. Wird angenommen, die beiden Grundflächen bleiben ebene Kreise, deren Abstand sich nicht ändere, so werden alle Längenfasern verstreckt bis auf jene, die mit der Achse zusammenfällt. Die Verstreckung wächst proportional dem Abstande von der Achse. Wickelt man die Cylinderfläche mit dem Radius x in eine Ebene ab, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten L und αx und dessen Hypotenuse mit $L + y$ bezeichnet werde. Daher wird

$$(L + y)^2 = L^2 + \alpha^2 x^2$$

oder, indem man die Klammer entfernt und y^2 gegen $2Ly$ vernachlässigt,

$$y = \frac{\alpha^2}{2L} x^2.$$

Die Verstreckung y ist daher proportional dem Quadrate des Abstandes x von der Achse.

Zweite Voraussetzung. Man nehme an, die Fasern verstrecken sich während der Torsion nicht. Um zu prüfen, was unter dieser Annahme im Innern des Cylinders vorgeht, lege man durch denselben und zwar bevor die Torsion beginnt, Schnitte senkrecht zur Achse; diese ebenen Schnitte gehen bei der Verdrehung in Rotationsflächen über, deren Meridiane in Ebenen liegen, die die Achse enthalten. Die Rotationsfläche durch die Mitte der Achse bleibt eben; solche Flächen, die sich gleich weit von dieser befinden, erhalten gleiche Krümmung. Am stärksten ist die Krümmung an den Endflächen des Cylinders. Die Gleichung des Meridians der Grundflächen ist folgende.

Wickelt man die Cylinderfläche, deren Radius x ist, in eine Ebene ab, so entsteht, vom mittleren ebenen Querschnitte an gerechnet, ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse $\frac{1}{2}L$, dessen eine Kathete $\frac{1}{2}\alpha x$ ist, und dessen andere durch $\frac{1}{2}L - z$ ausgedrückt werde. Das Dreieck gibt

$$\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{\alpha^2 x^2}{4} + \left(\frac{1}{2}L - z\right)^2,$$

woraus folgt, wenn z^2 gegen Lz vernachlässigt wird,

$$z = \frac{\alpha^2}{4L} x^2.$$

Die Kurve, deren rechtwinkelige Koordinaten x und z sind, ist mithin eine Parabel, durch deren Drehung um die Cylinderachse die Grundfläche des Cylinders entsteht.

Dritte Voraussetzung. Die beiden ersten Voraussetzungen entsprechen der Wirklichkeit nicht, denn sie verlangen, dass ausser der Kraft, die die Drehung bewirkt, auch noch äussere Kräfte vorhanden seien, die Längenverschiebungen herbeiführen. Allein solche Kräfte fehlen. Daher wird man annehmen müssen, dass die äussern cylindrischen Schichten sich verstrecken, die innern sich verkürzen und dass die Summe der verstreckenden Kräfte gleich sei der Summe der verkürzenden Kräfte, dass sie sich mithin aufheben. Wo die Ausdehnung in die Verkürzung übergeht, liegt eine Schicht, die keine Längenänderung erleidet und die neutrale Schicht genannt wird. Diese Schicht kann cylindrisch angenommen werden. Sodann werde noch vorausgesetzt, dass jene ebenen Schnitte, die vor der Torsion senkrecht zur Achse standen, auch während der Torsion eben bleiben und nur ihre Abstände unter einander ändern. Unter dieser Voraussetzung soll nun bestimmt werden: der Halbmesser der neutralen Schicht und das statische Moment der Kraft, die eine beabsichtigte Verdrehung herbeiführen kann.

I. Halbmesser der neutralen Schicht.

Es sei a dieser Halbmesser und E der Modul der Elastizität (§ 216) des Materials für die Längenänderung. Da jede Faser in der neutralen Schicht ihre Länge beibehält, so bildet sie abgewickelt die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete der Bogen $\alpha\,a$ und dessen andere Kathete somit $\sqrt{L^2 - \alpha^2 a^2}$ ist. Eine Faser im Abstande x von der Achse ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen beide Katheten $\alpha\,x$ und $\sqrt{L^2 - \alpha^2 x^2}$ sind. Folglich ist die Länge einer solchen $= \sqrt{L^2 - \alpha^2 a^2 + \alpha^2 x^2}$ und ihre Ausdehnung

$$\sqrt{L^2 - \alpha^2 a^2 + \alpha^2 x^2} - L.$$

Diese Ausdehnung wird $= 0$ für $x = a$ und negativ für $x < a$, sie wird also im letztern Falle zu einer Verkürzung.

Die Kraft, die in der Richtung der Faser diese Längenänderung für jede Querschnittseinheit herbeiführt, wird nach § 212, Formel (2), sein

$$(1) \qquad E\,\frac{\sqrt{L^2 - \alpha^2 a^2 + \alpha^2 x^2} - L}{L}.$$

Zerlegt man diese Kraft in zwei Seitenkräfte, senkrecht und parallel zur Achse, so ist die letztere Seitenkraft

$$(2) \qquad E\,\frac{\sqrt{L^2 - \alpha^2 a^2 + \alpha^2 x^2} - L}{L} \cdot \frac{\sqrt{L^2 - \alpha^2 a^2}}{\sqrt{L^2 - \alpha^2 a^2 + \alpha^2 x^2}}.$$

Diese Kraft ist proportional dem Querschnitte der Faser, auf die sie wirkt. Multipliziert man sie daher mit $2\pi\,x\,dx$, so erhält man die Kraft, die eine Schicht ausdehnt, die zwischen zwei Cylinderflächen liegt, beschrieben mit den Radien x und $x + dx$. Integriert man sodann noch zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = R$, so erhält man die Summe der ausdehnenden und zusammendrückenden Kräfte, die in der Richtung der Achse liegen. Diese Summe ist

$$2\pi E\frac{\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2}}{L}\int_0^R\left(x-\frac{L x}{\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 x^2}}\right)d x$$

$$=2\pi E\frac{\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2}}{L}\left[\frac{R^2}{2}-\frac{L}{\alpha^2}\left(\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 R^2}-\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2}\right)\right].$$

Da aber die Kräfte in der Richtung der Achse in jedem Querschnitte sich das Gleichgewicht halten, so muss dieses Integral $=0$ sein. Folglich erhält man zur Bestimmung von a die Gleichung

$$\frac{R^2}{2}-\frac{L}{\alpha^2}\left(\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 R^2}-\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2}\right)=0,$$

woraus sich ergibt

$$a^2=\frac{R^2}{2}\left(1-\frac{\alpha^2 R^2}{8 L^2}\right). \tag{3}$$

Für einen kleinen Torsionswinkel α ist daher annähernd

$$a=\frac{R}{\sqrt{2}}=0{,}707\, R,$$

d. h. für schwache Verdrehungen beträgt der Halbmesser der Neutralschicht 0,707 vom Halbmesser des Cylinders.

II. Statisches Moment der verdrehenden Kraft.

Dieses Moment setzt sich aus zwei Teilen zusammen: dem Teile, der aus der Längenverschiebung, und demjenigen, der aus der Querverschiebung entspringt.

A. Erstes Moment. Die Kraft (1), die eine Faser vom Querschnitte 1 in der Richtung der Schraubenlinie ausdehnt, gibt folgende Seitenkraft senkrecht zur Achse, also in der Richtung der Drehung

$$E\frac{\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 x^2}-L}{L}\cdot\frac{\alpha x}{\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 x^2}}.$$

Diese Kraft verschwindet für $x=a$, weil in der neutralen Schicht keine Resultante vorhanden ist; sie wird für Werte zwischen $x=a$ bis $x=R$ positiv und für Werte zwischen $x=a$ und $x=0$ negativ. Multipliziert man sie mit dem Flächenelemente $2\pi x\,d x$ und dem Hebelarme x und integriert innerhalb der Grenzen $x=0$ bis $x=R$, so ergibt sich

$$\frac{2\pi\alpha E}{L}\int_0^R\left(x^3-\frac{L x^3}{\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 x^2}}\right)d x \tag{4}$$

als statisches Moment der Torsion, das aus der Längenänderung hervorgeht. Nun ist

$$\int\frac{x^3 d x}{\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 x^2}}=\frac{x^2\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 x^2}}{\alpha^2}$$

$$-\frac{2\left(L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3\alpha^4}.$$

Folglich der Wert des bestimmten Integrals (4)

$$\frac{2\pi\alpha E}{L}\left[\frac{R^4}{4}-\frac{L R^2\sqrt{L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 R^2}}{\alpha^2}+\frac{2L(L^2-\alpha^2 a^2+\alpha^2 R^2)^{\frac{3}{2}}}{3\alpha^4}\right.$$
$$\left.-\frac{2L(L^2-\alpha^2 a^2)^{\frac{3}{2}}}{3\alpha^4}\right].$$

Entwickelt man in Reihen und setzt den Wert von a aus (3) ein, so erhält man, wenn die Glieder von der fünften Potenz von α an vernachlässigt werden, als gesuchtes Moment

$$(5)\qquad \frac{\pi E}{24}\cdot\frac{R^6\alpha^3}{L^3}.$$

B. Zweites Moment. Wird ein prismatischer Stab von der Länge L, im Innern des Cylinders parallel zur Achse gedacht, an einem Ende in der Querrichtung um $\triangle L$ verschoben, so ist die verschiebende Kraft P, nach § 212, proportional der Verschiebung $\triangle L$, dem Querschnitte F und umgekehrt proportional der Länge L. Bezeichnet T eine Konstante, die von der Natur des Materials abhängt, so ist diese Kraft

$$(6)\qquad P = T\frac{\triangle L}{L}F.$$

Wird $F = 1$ und $\frac{\triangle L}{L} = 1$, so ist $P = T$. Daher bedeutet T die Kraft, die einen prismatischen Stab vom Querschnitte 1 soweit in der Querrichtung verschieben kann, dass die Verschiebung gleich wird der ursprünglichen Länge. Man nennt daher T Modul der Elastizität für Torsion.

Legt man mit den Radien x und $x + dx$ zwei Cylinderflächen, so schliessen sie eine Schicht ein vom Querschnitte $2\pi x\,dx$. Setzt man diesen Wert für F in (6) und ersetzt $\triangle L$ durch die Verschiebung αx, so erhält man als Kraft, die diese Schicht verdreht,

$$T\frac{\alpha x}{L}\cdot 2\pi x\,dx.$$

Das statische Moment, womit diese Kraft der Drehung widersteht, wird erhalten, wenn man die Kraft multipliziert mit dem Hebelarme x. Dehnt man dieses Moment auf alle Schichten aus, die den Cylinder zusammensetzen, so erhält man das gesuchte Moment

$$(7)\qquad \frac{2\pi T\alpha}{L}\int_0^R x^3\,dx = \frac{\pi T}{2}\cdot\frac{R^4\alpha}{L}.$$

Hiernach wird das gesamte Moment M, womit der Cylinder der Drehung Widerstand leistet, als Summe aus (7) und (5)

$$(8)\qquad M = \frac{\pi T}{2}\cdot\frac{R^4\alpha}{L}+\frac{\pi E}{24}\cdot\frac{R^6\alpha^3}{L^3}.$$

Zwischen den Kräften T und E besteht folgender Zusammenhang. Wenn T eine Querverschiebung herbeiführt, die so gross ist als die ursprüngliche Länge L des Stabes, so wird die Länge des Stabes zur Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit den Katheten L und L, erhält also den Wert $L\sqrt{2}$. Die Zunahme an Länge wird also $L\sqrt{2} - L$, während die Kraft E eine Zunahme $= L$ hervorbringt. Diese Zunahmen verhalten sich wie $(\sqrt{2} - 1) : 1$. Gerade ebenso verhalten sich auch die Kräfte, die sie veranlassen. Daher ist

$$T : E = (\sqrt{2} - 1) : 1,$$

woraus folgt $T = 0{,}414\, E$. Nach Navier nimmt man hierfür gewöhnlich $T = 0{,}4\, E$.

Führt man diesen Wert von T in (8), so wird

$$(9) \qquad M = \frac{\pi E}{5} \frac{R^4 \alpha}{L} \left[1 + \frac{5}{24}\left(\frac{R\alpha}{L}\right)^2\right].$$

Man ersieht aus Gleichung (8), dass der Teil des gesamten Momentes, den die Längenänderungen liefern, sehr klein ist gegenüber dem andern Teile; weshalb gewöhnlich nur der von der Querverschiebung herrührende in Rechnung kommt. In diesem Falle erhält man aus (9)

$$(10) \qquad M = \frac{\pi E}{5} \cdot \frac{R^4 \alpha}{L}.$$

Diese Formel findet bei der Coulomb'schen Drehwage, bei den cylindrischen Wellen zur Uebertragung der Kraft etc. ihre Anwendung.

Für einen hohlen Cylinder erhält man aus (7), indem man das Integral von $x = r$ bis $x = R$ nimmt,

$$(11) \qquad M = \frac{\pi E}{5 L} \alpha (R^4 - r^4).$$

Es sei s die Kraft, die an der Oberfläche des Cylinders einem Stäbchen vom Querschnitte 1 eine Querverschiebung $= R\alpha$ zu geben vermag. Da der Kraft T eine Verschiebung L entspricht, so besteht die Relation

$$\frac{s}{T} = \frac{R\alpha}{L},$$

die der Gleichung (7) des § 216 entspricht. Führt man hieraus den Wert von T in (10) und (11) ein, so erhält man für den massiven und hohlen Cylinder

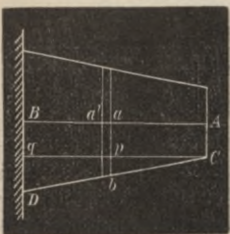
$$(12) \qquad M = \frac{\pi}{2} s R^3 \quad \text{und} \quad M = \frac{\pi}{2} \frac{s}{R} (R^4 - r^4).$$

Die Momente (9), (10) und (11), die den Drehwinkel enthalten, heissen Elastizitätsmomente, jene unter (12), die die Spannung s enthalten, Festigkeitsmomente. Man erkennt, dass das Verhältnis $M : \alpha$ für einen und denselben Cylinder konstant ist.

219. Torsion eines abgekürzten geraden Kreiskegels. Der Kreiskegel sei an der grösseren Grundfläche BD (Fig. 73) festgehalten und werde am anderen Ende AC durch ein statisches Moment M, das in der Ebene der kleinern Grundfläche wirkt, gedreht. Es seien:

R, r die Halbmesser der grösseren und kleineren Grundfläche,
L = AB die Achsenlänge des Kegels,
x = Aa ein veränderliches Stück auf der Kegelachse,
y = ab der Halbmesser eines zur Achse normalen Schnittes durch den Punkt a und
α, φ die Torsionswinkel des Kegels für die Längen x und L.

Fig. 73.



Der Winkel α ist eine Funktion von x, so dass α um $d\alpha$ zunimmt, wenn x um dx wächst. Wenn also aa' = dx ist und man durch a' einen Schnitt senkrecht zur Achse legt, so ist $d\alpha$ der Torsionswinkel für einen Cylinder von der Höhe dx, liegend zwischen den Querschnitten durch a und a'. Wird die Formel (10) der vorigen Aufgabe auf diesen Cylinder angewendet, also nur auf die Querverschiebungen Rücksicht genommen, so erhält man

$$d\alpha = \frac{5\,M}{\pi\,E}\,\frac{dx}{y^4}.$$

Zieht man die Gerade Cpq parallel zur Achse, so geben die ähnlichen Dreiecke Cpb und CqD die Proportion $(y - r):(R - r) = x:L$, woraus folgt

$$x = L\,\frac{y - r}{R - r}; \quad dx = L\,\frac{dy}{R - r}.$$

Setzt man diesen Wert von dx in den von $d\alpha$, so kommt

$$d\alpha = \frac{5\,M}{\pi\,E}\cdot\frac{L}{R - r}\cdot\frac{dy}{y^4}.$$

Um hieraus den Torsionswinkel für die ganze Länge des Kegels zu erhalten, hat man wie folgt zu integrieren

$$\int_0^{\varphi} d\alpha = \frac{5\,M}{\pi\,E}\cdot\frac{L}{R - r}\int_r^R y^{-4}\,dy,$$

daher als Wert des Drehwinkels am befestigten Ende

$$\varphi = \frac{5\,M}{3\,\pi\,E}\cdot\frac{L}{R - r}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$$

oder

$$\varphi = \frac{5\,M\,L}{3\,\pi\,E}\cdot\frac{R^2 + R\,r + r^2}{R^3\,r^3}.$$

Wird hierin r = R, so geht diese Formel über in die für den Cylinder, wie es sein muss.

XV. Aufgaben über die Anziehung nach dem Gesetze der Gravitation.

220. Gesetz der Anziehung. Zufolge des Newton'schen Gesetzes der Gravitation ist die Kraft, mit der zwei materielle Teilchen sich anziehen, direkt proportional den Massen dieser Teilchen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes.

Sind m, m' die Massen der Teile, r ihr Abstand und f eine Konstante, so ist die Anziehung beider Massen gleich

$$f\frac{m\,m'}{r^2}.$$

Setzt man in dem vorstehenden Ausdrucke $m = m' = 1$ und $r = 1$, so wird die Konstante f diejenige Kraft bezeichnen, die zwei Masseneinheiten in der Entfernung $= 1$ aufeinander ausüben.

221. Anziehung eines Punktes und einer geraden Linie, deren Richtung durch den Punkt geht. Es seien m die Masse des anziehenden Punktes A (Fig. 74), m' die Masse der Längeneinheit der Geraden, a und b die Entfernungen der Endpunkte B und D der Geraden vom anziehenden Punkte. Man bezeichne mit x den Abstand eines beliebigen Punktes der Geraden von A. Lässt man x in $x + dx$ übergehen, so entsteht auf der Geraden ein Teilchen von der Länge dx und der Masse $m'dx$. Die Anziehung dieses Teilchens und der Masse m ist daher nach § 220

Fig. 74.

$$f\frac{m\,m'\,dx}{x^2}.$$

Folglich die Anziehung der ganzen Linie und der Masse m

$$f\,m\,m'\int_a^b x^{-2}\,dx = f\,m\,m'\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Reicht die Gerade bis zum Punkte A, so ist $a = 0$, also erscheint die Anziehung $= \infty$. Allein die Aufgabe muss als eine physikalische aufgefasst werden, wonach die materiellen Teilchen in A und B Ausdehnung haben, also nicht zusammen fallen können, wie mathematische Punkte. Ausserdem ist zu beachten, dass das Teilchen in B eine verschwindend kleine Masse hat und selbst bei einem sehr kleinen Abstande von A nur eine kleine Anziehung auf A ausüben kann.

Um dieses zu zeigen, sei der Abstand der Schwerpunkte von A und $B = \alpha$, die Länge des Teilchens in $B = \alpha$, der Querschnitt der Geraden $= \alpha^2$, also das Volumen des Teilchens $= \alpha^3$. Ist in der Kubikeinheit der Geraden eine Masse m'' enthalten, so ist die Masse des Teilchens in B gleich $m''\alpha^3$ und daher die Anziehung zwischen A und B

$$f\frac{m\,m'\,\alpha}{\alpha^2} = f\frac{m\,m''\,\alpha^3}{\alpha^2} = f\,m \cdot m''\,\alpha.$$

Dieser Schlusswert ist wegen des Faktors α eine sehr kleine Grösse.

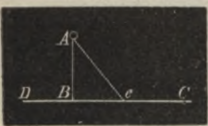
Wird $b = \infty$ angenommen, so erhält man als Anziehung eines Punktes und einer unendlich langen Linie

$$f\frac{m\,m'}{a} = f\frac{m \cdot m'\,a}{a^2} = f\frac{m\,M}{a^2},$$

wo $M = m'a$ die Masse der Linie AB bezeichnet. Diese Anziehung ist also ebenso gross, wie die einer Linie von der Länge a, im Abstande a von der Masse m konzentriert gedacht.

222. Anziehung einer Geraden und eines Punktes, der ausserhalb der Richtung der Geraden liegt. Es seien m die Masse des anziehenden Punktes A (Fig. 75), m' die Masse der Längeneinheit der Geraden CD und $a = AB$ die Länge des Lotes vom anziehenden Punkte nach der Geraden. Ferner sei $x = Bc$ ein beliebiges Stück der Geraden, von B aus gezählt. Geht x in $x + dx$ über, so entsteht auf der Geraden ein Teilchen von der Länge dx und der Masse $m'dx$. Der Abstand dieses Teilchens von der Masse m ist $Ac = \sqrt{a^2 + x^2}$, folglich die Anziehung der Massen $m'dx$ und m

Fig. 75.



$$(1) \qquad f\frac{m\,m'\,dx}{a^2 + x^2}.$$

Teilt man die Gerade in unendlich viele solcher Massenteile $m'dx$ und bestimmt ihre Anziehungen auf die Masse m, so erhalten diese Kräfte verschiedene Richtungen, weil sie alle nach A hin konvergieren.

Man zerlege deshalb diese Anziehungen in zwei Seitenanziehungen, wovon die einen normal sind zur Geraden, die andern aber mit der Richtung der Geraden zusammenfallen. Alsdann können die Kräfte nach derselben Richtung addiert werden.

1. Die Seitenkraft von (1) in der Richtung der Geraden CD ist

$$f\frac{m\,m'\,dx}{a^2 + x^2}\cos AcB = f\,m\,m'\frac{x\,dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um dieses Differential zu integrieren, setze man $a^2 + x^2 = z^2$, also $x\,dx = z\,dz$, und erhält statt des letzten Differentials

$$f\,m\,m'\frac{dz}{z^2}.$$

Hiervon ist das Integral für unbestimmte Grenzen

$$f\,m\,m'\int z^{-2}\,dz = -f\,m\,m'\frac{1}{z} + C.$$

Um die Anziehung des Stückes Bc auf die Masse m zu erhalten, muss das vorstehende Integral von $x = 0$ bis $x = x$, also entsprechend von $z = a$ bis $z = \sqrt{a^2 + x^2}$ genommen werden. Dies gibt

$$f\,m\,m'\int_a^{\sqrt{a^2+x^2}} z^{-2}\,dz = f\,m\,m'\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right).$$

Setzt man hierin $x = \infty$, so erhält man als Anziehung

$$f\frac{m\,m'}{a} = f\frac{m \cdot m'\,a}{a^2} = f\frac{m\,M}{a^2},$$

also dasselbe, was in der letzten Formel der vorigen Aufgabe.

Wenn der Teil DB der Geraden gleich ist Bc, so entsprechen beiden Teilen gleiche Anziehungen, jedoch mit entgegengesetzten Zeichen. Diese Anziehungen heben sich somit auf. Wenn aber $DB = x' < x$, so entsteht eine Kraft in der Richtung von C nach D gleich der Differenz

$$f\,m\,m'\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x'^2}}\right)\right]$$
$$= f\,m\,m'\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x'^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right).$$

II. Die Seitenkraft von (1) normal zur Geraden CD ist

$$f\frac{m\,m'\,dx}{a^2 + x^2}\sin AcB = f\,a\,m\,m'\frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Behufs der Integration setze man $a^2 + x^2 = x^2 z^2$, wo z eine neue Variable bezeichnet; dann ist

$$x^2 = \frac{a^2}{z^2 - 1}; \quad a^2 + x^2 = \frac{a^2 z^2}{z^2 - 1}; \quad dx = -\frac{a\,z\,dz}{(z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}; \quad \text{folglich}$$

$$f\,a\,m\,m'\frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -f\,m\,m'\frac{dz}{a\,z^2}.$$

Das Integral hiervon ist

$$f\,a\,m\,m'\int\frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = f\frac{m\,m'}{a\,z} + C.$$

Da aber $z = \sqrt{a^2 + x^2} : x$, so erhält man als Anziehung der Masse m und des Stückes Bc der Geraden

$$f\,a\,m\,m'\int_0^x\frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = f\frac{m\,m'}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Wenn das Stück BD der Geraden $= x'$ gesetzt wird, so erhält man als Anziehung der Masse m und der Geraden Dc eine Summe gleich

$$f\frac{m\,m'}{a}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x'}{\sqrt{a^2 + x'^2}}\right).$$

Werden x und x' unendlich gross, so kann man die Grössen $\sqrt{a^2 + x^2}$ mit x und $\sqrt{a^2 + x'^2}$ mit x' verwechseln, und erhält als

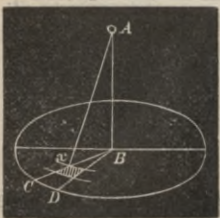
Anziehung der Masse m und einer nach beiden Seiten ins Unendliche verlängerten Geraden

$$2\,f\,\frac{m\,m'}{a}.$$

Bemerkung. Befindet sich in A der Pol eines Magneten und wird die Gerade DC von einem galvanischen Strome durchflossen, so gibt der letzte Ausdruck auch die Anziehung zwischen diesem Magneten und dem galvanischen Strome an. Dabei bezeichnet m die freie Flüssigkeit im magnetischen Pole und m' die Stromintensität.

223. Anziehung der Spitze und der Grundfläche eines geraden Kreiskegels. Es sei $AB = a$ (Fig. 76) die Achse und $BC = R$ der Halbmesser der Grundfläche des Kegels; ferner sei m die Masse des anziehenden Punktes in der Kegelspitze und m' die Masse der Flächeneinheit der Grundfläche.

Fig. 76.



Man ziehe den Radius BD so, dass der Winkel $CBD = \varphi$ eine unendlich kleine Grösse wird; beschreibt man sodann mit den Radien $Bx = x$ und $x + dx$ um B zwei Kreise, so liegt zwischen diesen Kreisen und jenen beiden Radien eine unendlich kleine Fläche, die als Rechteck betrachtet werden kann. Der Inhalt dieses Flächenelementes ist $= \varphi\,x\,dx$, dessen Masse $= m'\,\varphi\,x\,dx$ und dessen Abstand Ax von der Kegelspitze $= \sqrt{a^2 + x^2}$; die Anziehung dieses Massenelementes und der Spitze ist daher

$$f\,m\,m'\,\frac{\varphi\,x\,dx}{a^2 + x^2}.$$

Man zerlege diese Kraft in zwei Seitenkräfte, wovon die eine längs des Halbmessers xB und die andere parallel zur Achse, also senkrecht zur Grundfläche, wirkt. Die erstere Seitenkraft wird durch eine zur Achse AB symmetrisch gelegene Seitenkraft aufgehoben. Die letztere Seitenkraft ist

$$f\,m\,m'\,\varphi\,\frac{x\,dx}{a^2 + x^2}\sin A\,x\,B = f\,a\,m\,m'\,\varphi\,\frac{x\,dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dehnt man hierin den Bogen φ zu 2π aus, so erhält man die Anziehung zwischen der Masse m und der jener Ringfläche, deren Radien x und $x + dx$ sind, gleich

$$(1) \qquad 2\pi\,a\,f\,m\,m'\,\frac{x\,dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes von $x = 0$ bis $x = R$ gibt die gesuchte Anziehung der Spitze und Grundfläche des Kegels. Um die Integration zu vereinfachen, setze man $a^2 + x^2 = z^2$; es wird $x\,dx = z\,dz$; folglich das vorstehende Differential (1)

$$2\pi\,a\,f\,m\,m'\,z^{-2}\,dz$$

und da

$$2\pi a f m m' \int z^{-2} dz = -2\pi a f \frac{m m'}{z} + C,$$

so erhält man als gesuchte Anziehung, wenn z durch x ersetzt wird,

$$(2) \qquad 2\pi a f m m' \int_0^R \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 2\pi f m m' \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right).$$

Dieser Ausdruck gilt für jeden Wert von a, der von der Null verschieden ist.

224. Anziehung einer in der Spitze eines geraden Kegels befindlichen Masse und der Masse dieses homogonen Kegels. Es sei h die Höhe und s eine Seitenlinie des Kegels; ferner m die in der Spitze des Kegels befindliche Masse und m' die Masse der Kubikeinheit des Kegels.

Legt man in den Abständen x und x + dx von der Spitze zwei Querschnitte durch den Kegel, senkrecht auf die Achse, so schliessen sie eine cylindrische Scheibe von der Dicke dx und einem Halbmesser ein, der mit y bezeichnet werde.

Die Anziehung der Masse und dieser Scheibe kann ausgedrückt werden durch Formel (2) der vorigen Aufgabe, wenn daselbst m' mit m' dx, a mit x und R mit y vertauscht wird. Man erhält

$$2\pi f m m' dx \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Allein das Verhältnis $x : \sqrt{x^2 + y^2}$ ist gleich dem Verhältnis h : s, deshalb wird der vorstehende Ausdruck

$$2\pi f m m' dx \left(1 - \frac{h}{s}\right).$$

Mithin die Anziehung der Masse m auf den ganzen Kegel

$$2\pi f m m' \left(1 - \frac{h}{s}\right) \int_0^h dx = 2\pi f m m' h \left(1 - \frac{h}{s}\right).$$

225. Anziehung einer homogenen Halbkugel und einer im Mittelpunkte der Kugel befindlichen Masse. Diese im Mittelpunkte liegende Masse sei = m, die Masse der Kubikeinheit der Kugel = m' und der Halbmesser der Kugel = r.

Legt man in den Abständen x und x + dx von der begrenzenden Halbkreisfläche zwei Schnitte durch die Kugel, so schliessen sie eine cylindrische Scheibe ein von der Dicke dx; ihr Halbmesser sei y. Die Anziehung der Masse m und dieser Scheibe wird daher nach Formel (2), § 223, sein, indem man m' mit m' dx vertauscht,

$$2\pi f m m' dx \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Allein es ist $x^2 + y^2 = r^2$; folglich die vorstehende Anziehung

$$2\pi f m m' dx \left(1 - \frac{x}{r}\right).$$

Mithin die gesuchte Anziehung der Masse m und der Halbkugel

$$2\pi f m m' \int_0^r dx \left(1 - \frac{x}{r}\right) = \pi f m m' r.$$

Die Masse der Halbkugel ist $= \frac{2}{3}\pi r^3 m'$. Denken wir uns diese Masse in einem solchen Abstande z vom Mittelpunkte konzentriert, dass die Anziehung zwischen ihr und m dieselbe bleibt, wie wenn die Masse gleichförmig im Volumen der Halbkugel verteilt wäre, so wird sein

$$\pi f m m' r = \frac{2}{3} \frac{\pi r^3 m' m f}{z^2},$$

woraus folgt

$$z = r\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}816\, r.$$

Dieser Punkt im Abstande z vom Mittelpunkte der Kugel wird der Mittelpunkt der Anziehung der Masse genannt.

226. Anziehung einer homogenen Kugel und eines Punktes auf der Oberfläche der Kugel. Die Masse des anziehenden Punktes A (Fig. 77) auf der Kugel sei $= m$, die der Kubikeinheit der Kugel $= m'$ und der Halbmesser der Kugel $= r$.

Fig. 77.

Nimmt man A zum Anfangspunkte zweier rechtwinkeligen Achsen A x, A y, wovon die erstere durch den Mittelpunkt der Kugel geht und die letztere die Oberfläche derselben berührt, so ist die Gleichung des grössten Schnittkreises der Kugel, der diese Achsen enthält, $y^2 = 2rx - x^2$. Wenn man in den Abständen x und $x + dx$ zwei Schnitte durch den Körper, senkrecht auf A x legt, so schliessen sie eine cylindrische Scheibe von der Dicke dx und einem Halbmesser y ein. Die Anziehung der Masse m und dieser Scheibe ist nach Formel (2), § 223, für $m' dx$ statt m'

$$2\pi f m m' dx \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Allein es ist $x^2 + y^2 = 2rx$; folglich lautet das vorstehende Differential

$$2\pi f m m' dx \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2r}}\right).$$

Mithin die Anziehung der Masse m und der anliegenden Halbkugel

$$2\pi f m m' \int_0^r dx \left(1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2r}}\right) = 2\pi f m m' r \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

Bezeichnet z den Abstand des Punktes A vom Mittelpunkte der Anziehung dieser Halbkugel, so wird sein

$$\frac{2}{3} \frac{f m m' \pi r^3}{z^2} = 2\pi f m m' r \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

woraus folgt

$$z = \frac{r}{\sqrt{3 - \sqrt{2}}} = 0{,}794\, r.$$

Die Anziehung des Punktes A auf die ganze Kugel ist

$$2\pi f m m' \int_0^{2r}\left(1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2r}}\right) dx = \frac{4}{3}\pi f m m' r.$$

Ist der Abstand des Punktes A vom Mittelpunkte der Anziehung der Kugel $= z$, so muss sein

$$\frac{4}{3}\frac{\pi f m m' r^3}{z^2} = \frac{4}{3}\pi f m m' r,$$

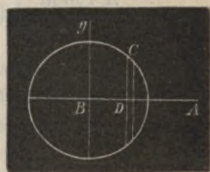
woraus folgt

$$z = r,$$

d. h. jede homogene Kugel zieht einen Punkt auf ihrer Oberfläche so an, wie wenn die Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

227. Anziehung zwischen einer homogenen Kugel und einem Punkte ausserhalb der Kugel. Die Masse des anziehenden Punktes A (Fig. 78) ausserhalb der Kugel sei $= m$, die Masse der Kubikeinheit der Kugel $= m'$; ferner der Abstand von A bis zum Mittelpunkte B der Kugel $= b$, der Halbmesser der Kugel $= r$.

Fig. 78.



In einem grössten Schnittkreise, gehend durch A, nehme man zwei rechtwinkelige Koordinatenachsen BA und By an. Die Koordinaten eines Punktes C in diesem grössten Kreise seien $BD = x$, $DC = y$; also wird sein $y^2 = r^2 - x^2$. Legt man in den Abständen x und $x + dx$ von B aus zwei Schnitte durch die Kugel, senkrecht auf die Abscissenachse, so schliessen sie eine cylindrische Scheibe ein von der Dicke dx und dem Halbmesser y. Der Abstand derselben von A aus ist $AD = b - x$. Folglich ist die Anziehung zwischen dieser Scheibe und der Masse m, nach Formel (2), § 223

$$2\pi f m m' dx\left(1 - \frac{b - x}{\sqrt{(b-x)^2 + y^2}}\right).$$

Allein es ist

$$(b - x)^2 + y^2 = b^2 + r^2 - 2bx.$$

Mithin das vorstehende Differential

$$2\pi f m m' dx\left(1 - \frac{b - x}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2bx}}\right).$$

Behufs der Integration setze man $b^2 + r^2 - 2bx = u$; dann ist

$$x = \frac{b^2 + r^2 - u}{2b}; \quad dx = -\frac{du}{2b}.$$

Folglich das obige Differential

$$-\frac{\pi f m m'}{b}\left(1 - \frac{b^2 - r^2}{2b} u^{-\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2b}\right) du.$$

Das unbestimmte Integral dieser Formel ist

$$-\frac{\pi f m m'}{b}\left(u-\frac{b^2-r^2}{b}u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3b}u^{\frac{3}{2}}\right)+C$$

oder, indem man den Wert von u einführt,

$$-\frac{\pi f m m'}{b}\left(b^2+r^2-2bx-\frac{b^2-r^2}{b}\sqrt{b^2+r^2-2bx}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3b}(b^2+r^2-2bx)^{\frac{3}{2}}\right)+C.$$

Um die Anziehung zwischen der ganzen Kugel und dem Punkte A zu geben, muss dieses Integral zwischen den Grenzen $x=-r$ bis $x=r$ genommen werden. Der Wert dieses Integrals ist

für die obere Grenze

$$=-\frac{\pi f m m'}{b}\left((b-r)^2-\frac{b^2-r^2}{b}(b-r)-\frac{1}{3b}(b-r)^3\right)+C,$$

für die untere Grenze

$$=-\frac{\pi f m m'}{b}\left((b+r)^2-\frac{b^2-r^2}{b}(b+r)-\frac{1}{3b}(b+r)^3\right)+C.$$

Zieht man den letztern Wert vom erstern ab, so erhält man nach einer einfachen Reduktion die gesuchte Anziehung gleich

$$\frac{4}{3}\pi f m m'\frac{r^3}{b^2}.$$

Nun ist aber $\frac{4}{3}\pi m' r^3 = M$ die Masse der Kugel; folglich ihre Anziehung auf die Masse m ausserhalb derselben gleich

$$f\frac{mM}{b^2}.$$

Die Kugel zieht also den Punkt A gerade so an, wie wenn ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

XVI. Aufgaben über das Potential.

228. Ausdruck für das Potential. Diese Grösse tritt auf in der Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus.

Nach dem Coulomb'schen Gesetze ziehen sich ungleichartige Teile von Elektrizität und Magnetismus an, gleichartige stossen sich ab und zwar nach dem gleichen Gesetze (§ 220), das Newton über die Anziehung ponderabler Massen nachgewiesen hat. Es ist daher die anziehende, ebenso die abstossende Kraft zwischen zwei elektrischen wie zwei magnetischen Massenelementen proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes.

Bezeichnen m, m' die Massen der Teile und r ihren Abstand, so ist daher der Ausdruck für die Kraft zwischen beiden Teilen

$$(1)\qquad f\frac{m m'}{r^2},$$

worin f jene Kraft darstellt, die zwei Masseneinheiten in der Entfernung 1 aufeinander ausüben.

Bei den wägbaren Stoffen wird die Masse ausgedrückt durch das Gewicht, dividiert durch die Beschleunigung beim freien Falle (§ 181). Da nun Elektrizität und Magnetismus nicht wägbar sind, so hat auch der Ausdruck „Masse" nicht denselben Sinn wie bei ponderablen Stoffen. Masse bezeichnet dann soviel wie Menge.

Ziehen sich die Massen an, so betrachtet man die Grösse (1) als positiv; stossen sie sich ab, als negativ.

Nun nehme man die Masse m als Einheit an und denke sich dieselbe in einem bestimmten Punkte P konzentriert; nehme ebenso $f = 1$; dann geht (1) über in

$$\frac{m'}{r^2}. \tag{2}$$

Diese Grösse ist also die Kraft, die ein Massenelement m' im Abstande r auf eine in P befindliche Masseneinheit ausübt.

Nun nennt man den Quotienten $m' : r$ aus Masse und Abstand r das Potential der Masse m' in Bezug auf die Masseneinheit in P. Bezeichnet man das Potential mit V, so ist

$$V = \frac{m'}{r}. \tag{3}$$

Zwischen dem Potentiale (3) und der ihm entsprechenden Kraft (2) besteht nun eine einfache Relation. Man erhält nämlich durch Differentiation von (3), indem man m' als konstant betrachtet,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{m'}{r^2}. \tag{4}$$

Der Differentialquotient des Potentials, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, ist also die Kraft (2). Kennt man daher die eine der beiden Grössen, so kann die andere aus ihr abgeleitet werden.

229. Physikalische Bedeutung des Potentials. Das Massenteilchen m' befinde sich im Abstande r von der Masseneinheit in P. Lässt man r übergehen in $r + dr$, so durchläuft die Kraft (2) den Weg dr und verrichtet eine Arbeit gleich

$$\frac{m'}{r^2}dr, \tag{1}$$

da hier die Kraftrichtung und Wegrichtung zusammenfallen. Das Integral dieser Differentialformel ist für unbestimmte Grenzen von r:

$$m'\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{m'}{r} + C$$

und für die Grenzen r und s, wobei $s > r$ vorausgesetzt werde,

$$m'\int_r^s \frac{dr}{r^2} = \frac{m'}{r} - \frac{m'}{s}. \tag{2}$$

Nach dem Gesetze (2) des § 228 nimmt die Anziehung mit der Zunahme der Entfernung rasch ab. Bezeichnet daher s die Entfernung des Punktes P bis an die Grenze des Kraftfeldes, so wird das zweite Glied rechts in Gleichung (2) zu Null, und man erhält als Arbeit, die verrichtet wird, indem die Masse m' den Weg s — r, in der Richtung von r, durchläuft, den Ausdruck

$$\frac{m'}{r}.$$

Diese Grösse ist also nichts anderes als das Potential der Anziehung. Das Potential bedeutet daher Arbeit (potentielle Energie).

Bilden die Grössen m', m'', m''', .. ein System von Massenteilchen, die auf die Masseneinheit im Punkte P einwirken, so wird das Potential eines jeden Teilchens in der gleichen Weise, wie soeben gezeigt, abgeleitet; daher das Potential des ganzen Systems für die Masseneinheit in P, wenn das Potential mit V bezeichnet wird,

$$V = \frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \frac{m'''}{r'''} + \ldots = \Sigma \frac{m'}{r'}.$$

Wenn in dieser Summe die Massenteilchen in irgend einer geometrisch bestimmten Weise zusammenhängen und die Grösse m' hinter dem Summenzeichen Σ das Differential der gesamten einwirkenden Elektrizitätsmenge bezeichnet, so geht dieses Summenzeichen in das Integralzeichen $\int$ über.

230. Potential einer materiellen geraden Linie in Bezug auf einen Punkt P in der Geraden. Ueber diese Gerade sei Elektrizität gleichförmig verteilt und zwar eine Menge m' für jede Längeneinheit; im Punkte P befinde sich die Masseneinheit. Ein Punkt der Geraden habe von P aus den Abstand x. Lässt man x zunehmen um d x, so enthält dieses Element d x die Elektrizitätsmenge m' d x. Dividiert man diese durch ihren Abstand x von der Masseneinheit, so erhält man folgendes Differential des Potentials

$$\text{(1)} \qquad dV = m' \frac{dx}{x}.$$

Folglich wird, indem man durch d x dividiert, die Grösse

$$\frac{dV}{dx} = - \frac{m'}{x}$$

nach Gleichung (4) von § 228 die Anziehung der Elektrizität der Geraden auf die Masseneinheit sein, was auch durch § 221 bestätigt wird.

Das Integral von (1) gibt das Potential

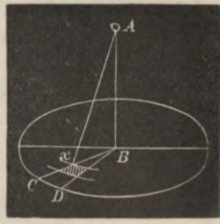
$$V = m' l x + C,$$

das für die Grenzen a und b, wobei b > a sein soll, übergeht in

$$V = m' l \left(\frac{b}{a}\right).$$

231. Potential der Grundfläche eines senkrechten Kreiskegels in Bezug auf die Spitze des Kegels. In der Grundfläche des Kegels sei die Elektrizität gleichförmig verteilt; jede Flächeneinheit enthalte die Menge m'. Die angezogene Masseneinheit liege in der Spitze des Kegels.

Fig. 79.



Es sei (Fig. 79) $AB = a$ die Achse und $BC = r$ der Halbmesser der Grundfläche des Kegels. Man ziehe den Radius BD so, dass der Winkel $CBD = \varphi$ unendlich klein wird; beschreibt man sodann mit den Radien $Bx = x$ und $x + dx$ von B aus in der Grundfläche zwei Kreise, so liegt zwischen diesen Kreisen und den beiden Radien eine unendlich kleine Fläche $= \varphi\, x\, dx$, enthaltend die Elektrizitätsmenge $m' \varphi\, x\, dx$. Der Abstand dieses Massenelementes von der Kegelspitze ist $= \sqrt{a^2 + x^2}$; folglich das Potential dieses Elementes

$$\frac{m' \varphi\, x\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \tag{1}$$

In diesem Ausdrucke ist zunächst φ auf 2π auszudehnen, wodurch man als Potential eines unendlich schmalen Kreisringes

$$dV = \frac{m' \cdot 2\pi\, x\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \tag{2}$$

erhält.

Um in Hinsicht x zu integrieren, setze man $a^2 + x^2 = z^2$; alsdann wird $x\, dx = z\, dz$; dadurch geht (2) über in

$$dV = m' \cdot 2\pi\, dz;$$

daher ist das Integral für beliebige Grenzen

$$V = m' \cdot 2\pi z + C = m' \cdot 2\pi \sqrt{a^2 + x^2} + C$$

und für die ganze Grundfläche

$$V = m' \cdot 2\pi \left(\sqrt{a^2 + r^2} - a\right). \tag{3}$$

Um nun die Anziehung der Spitze und Grundfläche zu erhalten, ist zu beachten, dass die anziehenden Kräfte nicht parallel sind, also nicht direkt addiert werden können. Man wird aber nach Gleichung (4) von § 228 aus dem Potentiale nach bestimmter Richtung die Kraft erhalten, wenn man das Potential nach dieser Richtung differentiiert. Da sich nun die längs Ax gerichtete Kraft zerlegt in eine Komponente, parallel zur Grundfläche, und in eine solche, parallel zur Achse a, so wird man Gleichung (3) differentiieren, das eine Mal in Hinsicht einer Variabeln, parallel zur Grundfläche, das andere Mal in Hinsicht des Abstandes a. Allein der Richtungen, parallel zur Grundfläche, gibt es unendlich viele; eine bezügliche Variable kommt in (3) gar nicht vor. Also muss der Ausdruck rechts in (3) mit Rücksicht auf diese Differentiation als konstant angesehen werden, es wird daher $dV = 0$, d. h. die Kräfte, die parallel zur Grundfläche gerichtet sind, heben sich auf. S. § 235.

Die Differentiation von (3) in Hinsicht a gibt

$$\frac{dV}{da} = m' \cdot 2\pi \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} - 1 \right),$$

welcher Wert des Differentialquotienten mit umgekehrtem Zeichen zu nehmen ist, um nach Formel (4), § 228, die Anziehung längs der Achse zu geben.

Wird $a = 0$, so fällt die Spitze des Kegels in die Mitte der Grundfläche. Dann wird mit Hilfe von (3) das Potential

$$V = m' \cdot 2\pi r = 2 \frac{M}{r},$$

wenn die im Kreise enthaltene Elektrizitätsmenge $m' \cdot \pi r^2$ mit M bezeichnet wird.

232. Potential einer Cylinderfläche in Bezug auf einen Punkt in der Achse des Cylinders. Ueber die Cylinderfläche mit dem Radius r sei Elektrizität gleichförmig verteilt; es sei m' die Menge derselben für die Flächeneinheit. Im Punkte P der Achse befinde sich die angezogene Masseneinheit. Legt man in den Abständen x und $x + dx$ von P aus Querschnitte durch den Cylinder, senkrecht zur Achse, so schneiden diese ein Flächenelement aus von der Breite dx und dem Umfange $2\pi r$, also dem Inhalte $2\pi r\,dx$. Dieses enthält die Elektrizitätsmenge $m' \cdot 2\pi r\,dx$. Alle Teile dieses Elementes haben einen Abstand $\sqrt{r^2 + x^2}$ von P, also ist ihr Potential

$$(1) \qquad dV = \frac{m' \cdot 2\pi r\,dx}{\sqrt{r^2 + x^2}},$$

und das Potential einer Cylinderfläche, die sich um eine Länge x von P aus ausdehnt, indem man (1) integriert,

$$(2) \qquad V = m' \cdot 2\pi r\, l\, \frac{x + \sqrt{r^2 + x^2}}{r}.$$

Dividiert man Gleichung (1) durch dx, so erhält man als Anziehung längs der Achse

$$\frac{dV}{dx} = \frac{m' \cdot 2\pi r}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{M}{x\sqrt{r^2 + x^2}},$$

worin M die Elektrizitätsmenge $m' \cdot 2\pi r \cdot x$ bezeichnet.

In jedem Querschnitte, senkrecht zur Achse, wirken Kräfte radial und heben sich auf.

233. Potential der Oberfläche einer Halbkugel in Bezug auf deren Mittelpunkt. Auf dieser Oberfläche mit dem Radius r befinde sich auf der Flächeneinheit die Elektrizitätsmenge m', die anziehend wirke auf die elektrische Masseneinheit im Mittelpunkte P der Kugel. Legt man parallel zum grössten Schnittkreise (Grundfläche), der die Halbkugel begrenzt, zwei ebene Schnitte in den Abständen x und $x + dx$, so schneiden sie eine Flächenzone aus von der Höhe dx, also dem Inhalte $2\pi r\,dx$ und der Elektrizitätsmenge $m' \cdot 2\pi r\,dx$. Alle Teile dieser Masse haben den gleichen Abstand r von P; daher ist das Potential dieses Elementes

$$(1) \qquad dV = m' \cdot 2\pi\,dx$$

und das Potential der halben Oberfläche der Kugel, indem man (1) integriert,

$$V = m' \cdot 2\pi r = \frac{M}{r},$$

wo $M = m' \cdot 2\pi r^2$ die auf der Halbkugel befindliche Elektrizitätsmenge darstellt.

Die anziehenden Kräfte, die von der Oberfläche nach P gerichtet sind, zerlegen sich in solche, die parallel, und in solche, die senkrecht zur Grundfläche gerichtet sind. Die ersteren heben sich gegenseitig auf; die letzteren, parallel zu x gelegen, werden erhalten, wenn man (1) dividiert durch dx. Daher sind diese Kräfte

$$\frac{dV}{dx} = m' \cdot 2\pi = \frac{M}{r^2}.$$

234. Potential der Oberfläche einer Kugel in Bezug auf einen beliebig gelegenen Punkt. Die Menge der Elektrizität, die auf der Oberfläche der Kugel gleichförmig verteilt ist, sei für jede Flächeneinheit m'; die angezogene elektrische Masseneinheit befinde sich in P, in einem Abstande a vom Mittelpunkte O der Kugel, deren Radius r sei.

Wenn zwischen O und P zwei Querschnitte durch die Kugelfläche, senkrecht zu OP, in den Abständen x und $x + dx$ von O aus gelegt werden, so schliessen diese Schnittebenen eine Kugelzone ein von der Höhe dx; ihr Flächeninhalt beträgt $2\pi r\,dx$ und die auf ihr angesammelte Elektrizitätsmenge $m' \cdot 2\pi r\,dx$. Alle Teilchen dieser unendlich schmalen Zone haben einen gleichen Abstand u von P; daher ist das Potential dieses Elementes

$$(1) \qquad dV = \frac{m' \cdot 2\pi r\,dx}{u}.$$

In diesem Ausdrucke kommen rechts zwei Variable u und x vor, es muss daher vor der Integration die eine durch die andere ausgedrückt werden. Die Linie u reiche von P aus nach einem Punkte Q, der auf der unendlich schmalen Zone liegt. Daher entsteht das Dreieck OPQ mit den Seiten a, u und r. Fällt man in diesem Dreieck von Q aus auf die gegenüberliegende Seite OP das Perpendikel $QT = y$, so wird jenes Dreieck in zwei rechtwinkelige Dreiecke PQT und OQT zerlegt, aus denen folgt

$$u^2 = (a - x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad y^2 = r^2 - x^2.$$

Daher ergibt sich durch Elimination von y aus diesen beiden Gleichungen

$$u^2 = a^2 + r^2 - 2ax$$

und durch Differentiation dieser Gleichung

$$(2) \qquad u\,d\,u = -\,a\,d\,x,$$

wodurch also x durch u ausgedrückt ist. Nimmt man nun x, in der Richtung von O aus nach P hin als negativ, von O aus auf der Verlängerung von a als positiv an, so wird d x in (1) negativ. Daher gibt die Elimination von d x aus (1) und (2)

$$(3) \qquad d\,V = \frac{m' \cdot 2\,\pi\,r}{a}\,d\,u.$$

Um dieses Differential zu integrieren, muss man über die Lage des Punktes P zur Kugel entscheiden. Es kann nun P ausserhalb der Kugel, innerhalb der Kugelfläche und auf dieser liegen.

I. Punkt P ausserhalb der Kugelfläche. Dann ist der kleinste Wert von $u = a - r$, der grösste $u = a + r$. Die Integration der Gleichung (3) zwischen diesen Grenzen gibt

$$(4) \qquad V = \frac{m' \cdot 2\,\pi\,r}{a} \cdot 2\,r = \frac{M}{a},$$

worin $M = m' \cdot 4\,\pi\,r^2$ die ganze Elektrizitätsmenge der Kugelfläche bezeichnet.

Das Potential einer gleichförmig mit Elektrizität belegten Kugelfläche auf einen äusseren Punkt ist also ebenso gross, wie wenn die gesamte Elektrizitätsmenge der Kugelfläche in deren Mittelpunkte vereinigt wäre.

Das Differential des Potentials (4) in Hinsicht a, als Variable gedacht, ist mit entgegengesetztem Zeichen genommen die Anziehung der Kugel und der Masseneinheit in P in der Richtung von a. Daher ist diese Anziehung

$$(5) \qquad -\frac{d\,V}{d\,a} = \frac{M}{a^2}.$$

Sie ist also ebenso gross, wie wenn die Elektrizität der Kugelfläche in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Die Kräfte der Elektrizität, die senkrecht zur Richtung von a liegen, heben sich gegenseitig auf.

II. Punkt P innerhalb der Kugelfläche. Der kleinste Wert von u ist $r - a$, der grösste $= r + a$. Für diese Grenzen von u wird das Integral von (3)

$$(6) \qquad V = \frac{m' \cdot 2\,\pi\,r}{a} \cdot 2\,a = \frac{M}{r}.$$

Hiernach bleibt das Potential einer homogenen Kugelfläche auf einen innern Punkt konstant, wie auch der Punkt P im Innern seine Lage ändert, z. B. wenn er von der Mitte nach der Oberfläche rückt.

Die Kraft in der Richtung des Abstandes a ist $= 0$, weil im Potential $M : r$ die Grösse a nicht vorkommt, also das Differential von (6) in Hinsicht a zu dem Resultate führt $\frac{dV}{da} = 0$.

III. Punkt P auf der Kugelfläche. Der kleinste Wert von u ist 0, der grösste 2 a; hierfür wird

$$\int_0^{2a} du = 2a.$$

Also ist das Potential genau dasselbe wie unter II.

Der Fall III geht aus den beiden andern Fällen hervor, wenn $a = r$ angenommen wird. Alsdann erhält man in allen Fällen als Potential den Wert wie in Gleichung (6), während man als Anziehung erhält: aus I nach (5) den Wert $\frac{M}{r^2}$, aus II aber Null. Der erstere dieser Werte ist der richtige, was sich wie folgt ergibt.

Es sei (Fig. 80) O der Mittelpunkt der Kugel, P der Punkt, wo die angezogene Masseneinheit konzentriert gedacht wird, b B ein durch P und O gehender Durchmesser und C D ein Schnitt, senkrecht zu b B; dieser Schnitt teilt die Kugelfläche in zwei Teile. Der eine Teil C B D wird von P aus nach links, der andere C b D nach rechts gezogen. Die Komponenten dieser Kräfte, die senkrecht zu C D stehen, heben sich nach dem Vorhergehenden auf. Rückt man nun P gegen b hin fort, so nimmt die Kugelmütze C b D ab, die andere nimmt zu; gleichwohl heben sich die zu C D senkrechten Komponenten auf. Die Kugelmütze rechts geht dabei mehr und mehr in die ganze Kugelfläche über und es wird daher auch ihre Kraftkomponente mehr und mehr den Wert $\frac{M}{r^2}$ annehmen. Dieser ist als Grenzwert zu betrachten, der entsteht, wenn P mit b zusammenfällt. Dann verschwindet die Kugelmütze links, also fällt auch die von ihr früher ausgeübte Wirkung aus.

Fig. 80.

235. Allgemeine Ausdrücke für den Zusammenhang zwischen Kraft und Potential. Es seien α, β, γ die rechtwinkeligen Koordinaten der angezogenen Masseneinheit in P und x, y, z die Koordinaten eines unendlich kleinen Massenteilchens m', das zu einem Systeme von Massenteilchen gehört, die anziehend auf P wirken; ferner r der Abstand des Punktes P von m'; dann ist

$$(1) \qquad r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2.$$

Das Potential der Masse m' hat den Wert

$$(2) \qquad V = \frac{m'}{r},$$

und die Anziehung zwischen m' und der Masseneinheit in P ist

$$(3) \qquad \frac{m'}{r^2}.$$

Zerlegt man diese Kraft in drei Komponenten X, Y, Z nach den drei Richtungen der Koordinatenachsen, indem man die Kraft (3) auf diese Achsen projiziert, so erhält man als Seitenkräfte

$$(4)\quad \begin{cases} X = \dfrac{m'}{r^2} \cdot \dfrac{x-\alpha}{r}; \\[2ex] Y = \dfrac{m'}{r^2} \cdot \dfrac{y-\beta}{r}; \\[2ex] Z = \dfrac{m'}{r^2} \cdot \dfrac{z-\gamma}{r}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung (1) folgt aber

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = x - \alpha; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-\alpha}{r};$$

$$r\frac{\partial r}{\partial y} = y - \beta; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-\beta}{r};$$

$$r\frac{\partial r}{\partial z} = z - \gamma; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-\gamma}{r}.$$

Daher wird

$$X = \frac{m'}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{m'}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

und ebenso

$$Y = \frac{m'}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial \frac{m'}{r}}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y};$$

$$Z = \frac{m'}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial \frac{m'}{r}}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Gibt es mehrere Massenteilchen $m', m'', m''', \ldots$, so hat man die einzelnen Kräfte in derselben Weise zu zerlegen und die entsprechenden Komponenten zu addieren, um die Gesamtwirkung längs jeder Achse zu erhalten.

Die Komponenten der Gesamtwirkung sind alsdann

$$(5)\quad \begin{cases} X = \Sigma \dfrac{m'}{r'^2} \cdot \dfrac{x'-\alpha}{r'} = -\dfrac{\partial \Sigma \frac{m'}{r'}}{\partial x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}; \\[2ex] Y = \Sigma \dfrac{m'}{r'^2} \cdot \dfrac{y'-\beta}{r'} = -\dfrac{\partial \Sigma \frac{m'}{r'}}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y}; \\[2ex] Z = \Sigma \dfrac{m'}{r'^2} \cdot \dfrac{z'-\gamma}{r'} = -\dfrac{\partial \Sigma \frac{m'}{r'}}{\partial z} = -\dfrac{\partial V}{\partial z}, \end{cases}$$

worin wie in § 229

(6) $$V = \Sigma \frac{m'}{r'}$$

bedeutet.

Es sind also die Differentialquotienten des Potentials nach den Richtungen der Achsen mit entgegengesetztem Zeichen genommen, die Komponenten der Kraft in den Richtungen der Achsen.

XVII. Aufgaben über das Gleichgewicht und die Bewegung des Wassers.

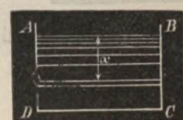
236. Druck des Wassers gegen die Wände der Gefässe. Der Druck des Wassers, soweit derselbe nur von der Schwere der Wasserteile herrührt, wächst proportional mit der Tiefe unter der Oberfläche. Dieser Druck, in senkrechter Richtung auf ein unendlich kleines Flächenteilchen der Wand ausgeübt, ist gleich dem Gewichte einer prismatischen Wassersäule, die dieses Flächenteilchen zur Grundfläche und seine Tiefe unter dem Niveau zur Höhe hat.

Ist dF das Flächenteilchen, h seine Tiefe unter dem Niveau und γ das Gewicht der Kubikeinheit Wasser, so ist das Volumen jener Wassersäule $= h\,dF$, also der Normaldruck auf das Flächenteilchen $= \gamma\, h\, dF$.

237. Horizontaler Druck des Wassers auf eine rechtwinkelige, vertikale Gefässwand. Der benetzte Teil der Wand sei $ABCD$ (Fig. 81), die Breitenkante $AB = b$ liege horizontal, die Flächenkante $AD = h$ vertikal.

Legt man in den Tiefen x und $x + dx$ unter dem Wasserspiegel zwei horizontale Ebenen durch die Wand, so schliessen sie ein rechtwinkeliges Flächenelement $= b\,dx$ ein. Auf alle Stellen dieses Elementes ist der Wasserdruck derselbe. Bezeichnet γ wie oben das Gewicht der Kubikeinheit Wasser, so ist der Druck auf $b\,dx$ gleich $\gamma\, b\, x\, dx$; folglich der Druck auf die ganze Wandfläche

Fig. 81.



(1) $$\gamma b \int_0^h x\,dx = \frac{1}{2} \gamma b h^2.$$

Wenn man denkt, der Druck $\gamma\, b\, x\, dx$ auf das Flächenelement $b\,dx$ strebe eine Drehung an, um die Kante AB als Drehachse, so wirkt dieser Druck am Hebelarme x, sein statisches Moment ist daher $= \gamma\, b\, x^2\, dx$; folglich die Summe der statischen Momente aller Kräfte, die auf die Wand wirken, in Bezug auf die angenommene Drehachse

(2) $$\gamma b \int_0^h x^2\,dx = \frac{1}{3} \gamma b h^3.$$

Denkt man sich den Gesamtdruck (1) in einer Tiefe z unter der Drehachse A B so wirksam, dass sein statisches Moment gleich ist der Summe (2), so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\gamma\,b\,h^2\cdot z = \tfrac{1}{3}\gamma\,b\,h^3,$$

woraus folgt

$$z = \tfrac{2}{3}\,h.$$

Der Angriffspunkt der Resultante aller parallelen Kräfte, die auf die Wand wirken, liegt in einer Tiefe $= \frac{2}{3}h$ unter der Oberfläche des Wassers. Man nennt diesen Angriffspunkt den Mittelpunkt des Druckes auf die Wand.

Der Druck auf eine untergetauchte, rechtwinkelige Wand, deren obere Kante um h′ und deren untere um h unter dem Wasserspiegel liegt, ist vermöge des Differentials $\gamma\,b\,x\,d\,x$

$$\gamma\,b\int_{h'}^{h} x\,d\,x = \frac{1}{2}\gamma\,b\,(h^2 - h'^2), \tag{3}$$

und die Summe der statischen Momente der Kräfte, die normal auf die Wand wirken, in Bezug auf eine in der Oberfläche des Wassers liegende Drehachse ist

$$\gamma\,b\int_{h'}^{h} x^2\,d\,x = \frac{1}{3}\gamma\,b\,(h^3 - h'^3).$$

Folglich liegt der Mittelpunkt des Druckes auf diese Wand in einer Tiefe unter dem Wasserspiegel

$$z = \frac{2}{3}\,\frac{h^3 - h'^3}{h^2 - h'^2} = \frac{2}{3}\,\frac{h^2 + h\,h' + h'^2}{h + h'}.$$

238. Horizontaler Druck des Wassers auf eine vertikale, dreikantige Gefässwand. Es sei A B C (Fig. 82) der benetzte Teil der Wand, die horizontale Basis $AB = b$, die Dreieckshöhe $= h$.

Fig. 82.

Man lege in den Tiefen x und $x + d\,x$ unter A B zwei horizontale Linien durch die Wand. Ist die erste derselben y, so ist

$$y : b = (h - x) : h, \qquad y = \frac{b}{h}(h - x),$$

folglich das Flächenelement zwischen jenen zwei Horizontalen

$$y\,d\,x = \frac{b}{h}(h - x)\,d\,x.$$

Bezeichnet γ das Gewicht der Kubikeinheit des Wassers, so ist der Druck auf dieses Flächenelement

$$\gamma\,x\,y\,d\,x = \gamma\,\frac{b}{h}(h\,x - x^2)\,d\,x,$$

folglich der Druck auf die ganze Wand

$$\gamma\,\frac{b}{h}\int_0^h (h\,x - x^2)\,d\,x = \frac{1}{6}\gamma\,b\,h^2, \tag{1}$$

und die Summe der statischen Momente aller Kräfte, die normal auf die Dreiecksfläche wirken, in Bezug auf A B als Drehachse

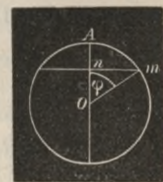
$$(2) \qquad \gamma \frac{b}{h} \int_0^h (h\,x^2 - x^3)\,d\,x = \frac{1}{12} \gamma\, b\, h^3.$$

Liegt der Mittelpunkt des Druckes in einer Tiefe z unter der Oberfläche, so muss das Moment von (1) gleich dem Momente (2) sein. Dies gibt

$$z = \tfrac{1}{2}\,h.$$

239. Druck des Wassers auf die Grundfläche eines cylindrischen Gefässes mit horizontaler Achse. Das Gefäss sei ganz mit Wasser gefüllt; zieht man durch den Mittelpunkt O (Fig. 83) der Kreisfläche den Halbmesser O A = R vertikal aufwärts, so ist A ihr höchster Punkt.

Fig. 83.



Zieht man die halbe Sehne m n horizontal, setzt Bogen A m = R φ, so ist die ganze Sehne längs m n gleich 2 R sin φ. Nimmt φ um d φ zu, so wächst der Abstand A n = R (1 − cos φ) um sein Differential, d. h. um R sin φ d φ. Dadurch entsteht ein horizontal liegendes Flächenelement von der Länge 2 m n = 2 R sin φ und der Breite R sin φ d φ; es ist daher dieses Flächenelement

$$d\,F = 2\,R^2 \sin^2\varphi\, d\,\varphi.$$

Wenn γ das Gewicht der Kubikeinheit Wasser bezeichnet, so ist

$$(1) \qquad \text{Druck auf } d\,F = 2\,\gamma\, R^3 \sin^2\varphi\,(1 - \cos\varphi)\,d\,\varphi.$$

Multipliziert man diesen Druck mit A n als Hebelarm, so erhält man das Moment dieses Druckes für eine horizontale Drehachse durch A. Also ist, wenn $(1 - \cos\varphi)^2$ entwickelt wird,

$$(2) \qquad \text{Moment } = 2\,\gamma\, R^4 (\sin^2\varphi - 2 \sin^2\varphi \cos\varphi + \sin^2\varphi \cos^2\varphi)\,d\,\varphi.$$

Die Differentiale von (1) und (2) müssen integriert werden von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$, um Druck und Moment für die ganze Kreisfläche zu liefern. Nun ist nach den Formeln (10), (6) und (14), § 88

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\,\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\,\varphi = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\,\varphi = \int_0^\pi (\sin^2\varphi - \sin^4\varphi)\,d\,\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{3\,\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

Folglich ist

Druck auf die Grundfläche . . . . = $\gamma\,\pi\,R^3$;
Statisches Moment in Bezug auf die Horizontale durch A = $\frac{5}{4}\,\gamma\,\pi\,R^4$.

Der Mittelpunkt des Druckes auf die ganze Grundfläche liegt daher in einer Tiefe unter dem höchsten Punkte A gleich

$$\tfrac{5}{4}\,\gamma\,\pi\,R^4 : \gamma\,\pi\,R^3 = \tfrac{5}{4}\,R.$$

240. Allgemeines Theorem über den Druck des Wassers auf eine ebene Gefässwand. Es sei F der benetzte Inhalt einer ebenen Gefässwand.

In den Tiefen x und x + d x vom Niveau ziehe man in der Wandfläche zwei horizontale Linien. Diese beiden Horizontalen schliessen ein Flächenelement = d F ein. Folglich liegt der Schwerpunkt der Wand, nach § 142, in einer Tiefe unter der Oberfläche des Wassers

$$z' = \frac{\int x \, d F}{F}.$$

Multipliziert man diese Formel mit γ F, wobei γ das Gewicht der Kubikeinheit Wasser ist, so folgt

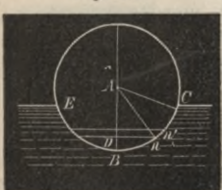
$$\gamma F z' = \gamma \int x \, d F.$$

Nun ist γ d F der Druck des Wassers auf die Fläche d F in der Tiefe 1, also γ x.d F der Druck auf diese Fläche in der Tiefe x und somit $\gamma \int x \, d F$ der Druck des Wassers auf die ganze Wand. Ferner ist F z' das Volumen einer prismatischen Wassersäule von der Grundfläche F und der Höhe z'; also γ F z' das Gewicht dieses Wasserkörpers.

Hieraus folgt, dass der Normaldruck des Wassers auf eine beliebige ebene Gefässwand gleich ist dem Gewichte einer prismatischen Wassersäule, die die Wand zur Grundfläche und den Abstand des Schwerpunktes der Wand vom Niveau zur Höhe hat. Dreht sich also die Wand im Wasser um ihren Schwerpunkt, so bleibt der Normaldruck des Wassers auf dieselbe gleich.

241. Tiefe der Eintauchung eines homogenen Cylinders in Wasser. Es seien R der Radius und L die Länge des Kreiscylinders; ferner das Gewicht der Kubikeinheit: γ des Wassers und s des Cylinders. Die Achse des Kreiscylinders liege horizontal.

Fig. 84.



Es sei A (Fig. 84) der Mittelpunkt und A B der vertikal abwärts gehende Halbmesser der Grundfläche. Der Cylinder tauche bis zur Horizontalen C E ein. Es sei ferner R α = Bogen B C und R φ = dem variabeln Bogen B n. Geht φ in $\varphi + d\varphi$ über, so rücke der Punkt n nach n'. Legt man durch diese Punkte horizontale Ebenen durch den Cylinder, so liegt zwischen ihnen ein Körperelement von der Breite 2 D n = 2 R sin φ, der Länge L und einer Dicke, die das Differential des Abstandes B D = R (1 — cos φ), also = R sin φ d φ ist. Sein Volumen ist daher = $2 R^2 L \sin^2\varphi \, d\varphi$.

Wird dieser Ausdruck innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha$ integriert, so erhält man das Volumen des eingetauchten Teiles vom Cylinder, also auch das Volumen des verdrängten Wassers. Das genannte bestimmte Integral, mit γ multipliziert, gibt das Gewicht des verdrängten Wassers. Setzt man dieses Gewicht gleich dem Gewichte des Cylinders, so erhält man

$$s \pi R^2 L = 2 R^2 L \gamma \int_0^\alpha \sin^2\varphi \, d\varphi$$

oder nach Ausführung der Integration

$$\pi \frac{s}{\gamma} = \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\,\alpha.$$

Hieraus kann die Tiefe der Tauchung durch Bestimmung des Winkels α ermittelt werden.

Wird der Cylinder durch ein Gewicht P so belastet, dass die Achse desselben horizontal verbleibt, so sinkt der Cylinder tiefer. Geht hierbei der Winkel α in α' über, so hat man

$$s\,\pi\, R^2 L + P = 2\, R^2 L\, \gamma \int_0^{\alpha'} \sin^2\varphi\, d\,\varphi$$

oder auch

$$P = 2\, R^2 L\, \gamma \int_{\alpha}^{\alpha'} \sin^2\varphi\, d\,\varphi.$$

Mithin durch Ausführung der Integration und durch Subtraktion

$$P = R^2 L\, \gamma \left[(\alpha' - \alpha) - \frac{1}{2} (\sin 2\,\alpha' - \sin 2\,\alpha) \right].$$

242. Ausfluss des Wassers aus einer Oeffnung im Boden eines Gefässes bei konstanter Druckhöhe. Der Boden des Gefässes sei horizontal, der Querschnitt der Oeffnung $= a$, die Tiefe der Oeffnung unter dem Wasserspiegel oder die Druckhöhe $= h$, die Ausflussgeschwindigkeit $= v$ und die in der Zeiteinheit abfliessende Wassermenge $= M$.

Indem irgend ein Wasserteilchen vom Gewichte p vom Niveau des Wassers bis zur Oeffnung gelangt, also in vertikaler Richtung den Weg h zurücklegt, nimmt es eine Arbeit $= p\,h$ auf. Allein unter der Oeffnung hat es eine Geschwindigkeit $= v$, also nach § 181 eine lebendige Arbeit $= \frac{p\,v^2}{2\,g}$, wenn g die Beschleunigung beim freien Falle bezeichnet. Diese Arbeiten müssen gleich sein, woraus folgt

$$\dot{h} = \frac{v^2}{2\,g}, \qquad v = \sqrt{2\,g\,h}.$$

Die Geschwindigkeit v des Teilchens ist also ebenso gross, wie wenn es die Druckhöhe h frei durchfallen hätte. (Toricelli'sches Gesetz).

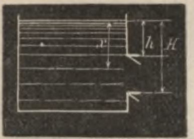
Abgesehen von der Kontraktion oder Zusammenziehung des Wasserstrahles beim Durchgange durch die Oeffnung ist

$$M = a\,v = a\sqrt{2\,g\,h}.$$

Diesen Wert von M nennt man auch wohl theoretische oder ideale Wassermenge.

243. Ausfluss des Wassers durch eine rechtwinkelige Oeffnung in der Wand eines Gefässes. Die Breite der Oeffnung, horizontal gedacht, sei $= b$, die konstanten Tiefen der obern und untern Kante der Oeffnung unter dem Niveau seien $= h$ und H.

Fig .85.



Es sei (Fig. 85) die variable Tiefe irgend eines Punktes der Oeffnung unter dem Niveau $= x$. Zieht man in den Tiefen x und $x + dx$ zwei horizontale Linien längs der Oeffnung, so schliessen sie ein Flächenelement $= b\,dx$ ein. Für alle Punkte dieser unendlich kleinen Oeffnung $b\,dx$ ist die Druckhöhe $= x$, also die Ausflussgeschwindigkeit $= \sqrt{2gx}$. Mithin ist die Wassermenge, die diese Oeffnung in jeder Sekunde liefert,

$$dM = b\,dx\sqrt{2gx}$$

und die Wassermenge, die durch die ganze Oeffnung tritt,

$$M = b\sqrt{2g}\int_h^H x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\,b\sqrt{2g}\left(H\sqrt{H} - h\sqrt{h}\right).$$

Ist v die mittlere Geschwindigkeit des Wassers unter der Oeffnung, so beträgt die Wassermenge in der Sekunde $= b(H - h)\,v$. Durch Gleichsetzung dieser Werte erhält man

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\frac{H\sqrt{H} - h\sqrt{h}}{H - h}.$$

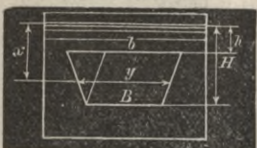
Wenn $h = 0$, so reicht die Oeffnung bis an den Wasserspiegel und es wird

$$M = \frac{2}{3}\,b\,H\sqrt{2gH}, \qquad v = \frac{2}{3}\sqrt{2gH}.$$

244. Ausfluss des Wassers durch eine trapezförmige Oeffnung in der Wand eines Gefässes. Die beiden Parallelen der Oeffnung, horizontal vorausgesetzt, seien b, B (Fig. 86) und ihre vertikalen Abstände vom Niveau h, H.

Ist x die Tiefe irgend eines Punktes der Oeffnung unter dem Niveau und y die Breite der Oeffnung in der Tiefe x, so ist

Fig. 86.



$$(b - B):(y - B) = (H - h):(H - x).$$

$$y = B + \frac{b - B}{H - h}\,H - \frac{b - B}{H - h}\,x.$$

Lässt man x um dx wachsen, so bildet sich in der Oeffnung ein Flächenelement $= y\,dx$. Die Geschwindigkeit, mit der das Wasser durch diese unendlich kleine Oeffnung fliesst, ist $= \sqrt{2gx}$; folglich die durch diese Oeffnung tretende Wassermenge in der Sekunde

$$dM = y\,dx\sqrt{2gx} = \left(B + \frac{b - B}{H - h}\,H - \frac{b - B}{H - h}\,x\right)dx\sqrt{2gx}.$$

Integriert man dieses Differential zwischen den Grenzen $x = h$ bis $x = H$, so erhält man als Ausflussmenge durch die ganze Oeffnung

$$M = \frac{2}{3}\left(B + \frac{b - B}{H - h}\,H\right)\left(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{2g} - \frac{2}{5}\,\frac{b - B}{H - h}\left(H^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}\right)\sqrt{2g}.$$

Wenn $b = B$ gesetzt wird, so geht dieser Ausdruck in den der vorigen Aufgabe über. Setzt man $h = 0$, so reicht die Oeffnung bis an die Oberfläche, und es ist alsdann die Wassermenge

$$M_1 = \frac{2}{3} b H \sqrt{2 g H} - \frac{2}{5} (b - B) H \sqrt{2 g H}.$$

Der erste Teil rechts ist die Wassermenge, die durch das Rechteck von der Breite b und Höhe H, der zweite Teil die Wassermenge, die durch das Dreieck mit der unten liegenden Basis $b - B$ und der Höhe H abfliesst.

Wenn $B = 0$ oder $b = 0$, so wird die Oeffnung ein Dreieck, das sich unter dem Wasserspiegel befindet.

Wenn $b = 0$ und zugleich $h = 0$, so verwandelt sich die Oeffnung in ein Dreieck, dessen Spitze bis an den Wasserspiegel reicht. In diesem Falle wird die Wassermenge

$$M_2 = \frac{2}{5} B H \sqrt{2 g H}.$$

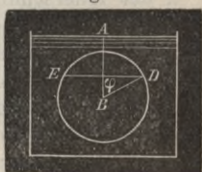
Wenn aber $B = 0$ und zugleich $h = 0$, so verwandelt sich die Oeffnung in ein Dreieck, dessen Basis im Wasserspiegel liegt, und es wird die Wassermenge

$$M_3 = \frac{4}{15} b H \sqrt{2 g H}.$$

Sind die Dreiecksflächen in den beiden letzten Fällen gleich gross, so verhalten sich die Wassermengen $M_2 : M_3 = 3 : 2$.

245. Ausfluss des Wassers durch eine kreisförmige Oeffnung in der vertikalen Wand eines Gefässes. Der Halbmesser BD (Fig. 87) der Oeffnung sei $= r$ und die Tiefe AB ihres Mittelpunktes B unter dem Wasserspiegel $= h$.

Fig. 87.



Nennt man den Winkel $ABD = \varphi$, so ist die horizontale Sehne $DE = 2 r \sin\varphi$ und die Tiefe dieser Sehne unter dem Niveau $= h - r\cos\varphi$. Wenn diese Tiefe um ihr Differential, also um $r \sin\varphi \, d\varphi$ zunimmt, so rückt die Sehne DE um diese Grösse $r \sin\varphi \, d\varphi$ abwärts, und es bildet sich zwischen beiden Sehnen ein Flächenelement $= 2 r^2 \sin^2\varphi \, d\varphi$. Die Geschwindigkeit, mit der das Wasser durch diese kleine Oeffnung tritt, ist $= \sqrt{2 g (h - r\cos\varphi)}$; folglich die Ausflussmenge durch diese Oeffnung

$$dM = 2 r^2 \sin^2\varphi \, d\varphi \sqrt{2 g (h - r\cos\varphi)}$$

oder

$$dM = 2 r^2 \sqrt{2 g h} \sin^2\varphi \, d\varphi \left(1 - \frac{r}{h}\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Unter Anwendung des binomischen Satzes erhält man

$$dM = 2 r^2 \sqrt{2 g h} \sin^2\varphi \, d\varphi \times$$

$$\left[1 - \frac{r}{2h}\cos\varphi - \frac{r^2}{8 h^2}\cos^2\varphi - \frac{r^3}{16 h^3}\cos^3\varphi - \frac{5 r^4}{128 h^4}\cos^4\varphi - \ldots\right].$$

Da wir $h > r$ voraussetzen, so nehmen die Glieder der Reihe in der Klammer rasch ab. Es kann also dieses Differential rechts als angenäherter Wert von dM angesehen werden. Die Ausflussmenge für die ganze Oeffnung wird erhalten, wenn man rechts von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integriert. Setzt man $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, so kommt

$$\int_0^\pi (1 - \cos^2\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi (\cos\varphi - \cos^3\varphi)\, d\varphi = 0$$

$$\int_0^\pi (\cos^2\varphi - \cos^4\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{8}, \qquad \int_0^\pi (\cos^3\varphi - \cos^5\varphi)\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^\pi (\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{16}, \qquad \text{etc.}$$

Mit Hilfe dieser Werte wird das Integral der obigen Formel

$$M = \pi r^2 \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{32}\frac{r^2}{h^2} - \frac{5}{1\,024}\frac{r^4}{h^4} - \ldots\right).$$

Reicht der Kreis bis an die Oberfläche des Wassers, so ist $h = r$ und die drei ersten Glieder in der Klammer geben $987 : 1\,024$. Folglich wird in diesem Falle die Ausflussmenge annähernd

$$M = \frac{987}{1\,024}\pi r^2 \sqrt{2gr}.$$

246. Entleeren eines mit Wasser gefüllten prismatischen Gefässes durch eine Oeffnung im Boden. Die Grundfläche des Gefässes liege horizontal. Es finde während der Entleerung kein Wasserzufluss statt. Es sei

A der horizontale Querschnitt des Gefässes,
a der Querschnitt der Oeffnung im Boden,
h die anfängliche Höhe des Wasserspiegels über dem Boden,
x die Höhe des Wasserspiegels über dem Boden, nachdem das Wasser t Sekunden lang abgeflossen ist,
V die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel im Gefässe in dem Augenblicke sinkt, in dem die Druckhöhe $= x$ ist, und
v die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers bei der Druckhöhe x.

Da die Geschwindigkeit v der Druckhöhe x entspricht, so ist $v = \sqrt{2gx}$. Da ferner durch beide Querschnitte A und a die gleiche Wassermenge strömt, so wird $AV = av$ sein. Hieraus folgt

$$V = \frac{a}{A}\sqrt{2gx}. \tag{1}$$

Geht die Zeit t über in $t + dt$, so wird x zu $x - dx$, d. h. in dem Zeitelemente dt sinkt der Wasserspiegel um dx. Es haben daher dt und dx entgegengesetzte Zeichen. Die Differentialformel der Bewegung $dx = v\,dt$ (§ 161) geht also über in $dx = -v\,dt$. Setzt man hierin obigen Wert von V ein, so folgt

$$dx = -\frac{a}{A}\sqrt{2gx}\,dt$$

oder, indem man der Integration wegen die Variabeln sondert,

$$dt = -\frac{A}{a\sqrt{2g}} x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Wird diese Gleichung integriert, so kommt

$$t = -\frac{A}{a\sqrt{2g}} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

Für den Anfang der Bewegung ist $t = 0$ und $x = h$. Diese Werte geben

$$0 = -\frac{A}{a\sqrt{2g}} \cdot 2h^{\frac{1}{2}} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man

$$(2) \qquad t = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{x}).$$

Hieraus ergibt sich die Tiefe, um die das Wasser in t Sekunden sinkt,

$$(3) \qquad h - x = \frac{a}{A}\sqrt{2gh} \cdot t - \frac{g}{2}\left(\frac{a}{A}\right)^2 t^2.$$

Die Zeit, die zum gänzlichen Entleeren des Gefässes nötig ist, sei T. Man erhält diese Zeit, wenn man in der Gleichung (2) $x = 0$ setzt und t mit T vertauscht. Somit ist

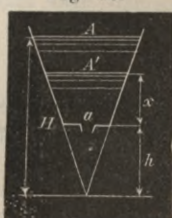
$$(4) \qquad T = \frac{2A}{a}\sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

Bliebe die Druckhöhe konstant $= h$, indem das abfliessende Wasser durch einen gleichen Zufluss ersetzt würde, so wäre die Ausflussgeschwindigkeit $= \sqrt{2gh}$ und die in der Sekunde austretende Wassermenge, ohne Rücksicht auf die Kontraktion des Wasserstrahles, $= a\sqrt{2gh}$. Sollte nun in t′ Sekunden eine Wassermenge $= Ah$ abfliessen, so müsste sein $Ah = a\sqrt{2gh} \cdot t'$, d. h.

$$(5) \qquad t' = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

Nun ist $t' = \frac{1}{2}T$, folglich die zur Entleerung des Gefässes nötige Zeit doppelt so gross als die Zeit, in der dieselbe Wassermenge bei gleichbleibender Druckhöhe abfliessen würde.

Fig. 88.



247. Entleeren eines mit Wasser gefüllten pyramidalen Gefässes. Das Gefäss habe die Gestalt einer abgestumpften Pyramide (Fig. 88). Die kleinere Grundfläche sei unten und liege horizontal. Es bezeichne

A die Fläche des Wasserspiegels beim ursprünglichen Wasserstande,

A′ die Fläche des Wasserspiegels, nachdem t Sekunden lang Wasser abgeflossen ist,

a die Fläche der Oeffnung im Boden des Gefässes,
V die Geschwindigkeit, mit der die Wasseroberfläche nach t Sekunden sinkt,
v die Ausflussgeschwindigkeit nach derselben Zeit,
H, h die Höhe des ursprünglichen Wasserstandes und der Bodenfläche über der Spitze der Pyramide und
x die Höhe des Wasserspiegels nach t Sekunden über dem Boden.

Vermöge der pyramidalen Form des Gefässes hat man

$$A' : A = (x + h)^2 : H^2.$$

Da durch alle Querschnitte die gleiche Wassermenge fliesst, so muss auch sein $A' V = a v$. Setzt man die beiden Werte von A' einander gleich und berücksichtigt, dass $v = \sqrt{2gx}$, so folgt

$$V = \frac{a}{A} \frac{H^2}{(x+h)^2} \sqrt{2gx}. \tag{1}$$

Nimmt t um dt zu, so vermindert sich x um dx. Die Differentialformel der Bewegung $dx = V dt$ wird also hier $dx = - V dt$. Setzt man den Wert von V hier ein, so folgt

$$dx = - \frac{a}{A} \frac{H^2}{(x+h)^2} \sqrt{2gx}\, dt$$

oder nach einigen Reduktionen behufs Sonderung der Veränderlichen

$$\frac{a}{A} H^2 \sqrt{2g} \cdot dt = - \left(h^2 x^{-\frac{1}{2}} + 2 h x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right) dx.$$

Die Integration dieser Formel gibt

$$\frac{a}{A} H^2 \sqrt{2g} \cdot t = - \left(2 h^2 x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} h x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) + C. \tag{2}$$

Für $t = 0$ wird $x = H - h = h'$. Hierfür gibt Gleichung (2)

$$0 = - \left(2 h^2 h'^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} h h'^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} h'^{\frac{5}{2}} \right) + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (2) ab, so kommt

$$\frac{a}{A} H^2 \sqrt{2g} \cdot t = 2 h^2 \left(\sqrt{h'} - \sqrt{x} \right) + \frac{4}{3} h \left(h' \sqrt{h'} - x \sqrt{x} \right) + \frac{2}{5} \left(h'^2 \sqrt{h'} - x^2 \sqrt{x} \right). \tag{3}$$

Entleert sich das Gefäss ganz, so wird $x = 0$; ist T der entsprechende Wert von t, so ist

$$T = \frac{A}{a H^2 \sqrt{2g}} \left(2 h^2 \sqrt{h'} + \frac{4}{3} h h' \sqrt{h'} + \frac{2}{5} h'^2 \sqrt{h'} \right). \tag{4}$$

Wenn die Bodenfläche so nahe an der Spitze der Pyramide liegt, dass man ohne wesentlichen Fehler $h = 0$ und $h' = H$ setzen kann, so folgt aus (4)

$$T = \frac{2}{5} \frac{A}{a} \sqrt{\frac{H}{2g}}. \tag{5}$$

Ist t' die Zeit, die nötig ist, damit aus diesem Gefässe bei konstanter Druckhöhe eine Wassermenge $= \frac{1}{3} A H$ ausfliesse, so ist

$$\frac{1}{3} A H = a \sqrt{2 g H} \cdot t'$$

oder

$$t' = \frac{1}{3} \frac{A}{a} \sqrt{\frac{H}{2g}}. \tag{6}$$

Durch Vergleichung von (5) und (6) folgt $T : t' = 6 : 5$, d. h. die zum Entleeren des ganzen Gefässes nötige Zeit T ist $\frac{6}{5}$ mal so gross als die Zeit t', innerhalb der eine gleiche Wassermenge bei der ursprünglichen konstanten Druckhöhe abfliessen würde.

248. Entleeren eines kugelförmigen Gefässes durch eine an der tiefsten Stelle der Kugel befindliche Oeffnung. Der innere Halbmesser des Gefässes sei r, der horizontale Querschnitt der Oeffnung a und die Höhe BD (Fig. 89) des ursprünglichen Wasserstandes über der Oeffnung h.

Der Wasserspiegel senke sich während t Sekunden von B nach C; es sei daher die Höhe des Wasserstandes DC nach dieser Zeit $= x$, der Inhalt der Wasseroberfläche nach der Zeit t gleich A, die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel nach t Sekunden sinkt, $= V$, die Geschwindigkeit des Wassers unter der Oeffnung nach dieser Zeit $= v$. Da durch die Querschnitte A und a gleich viel Wasser fliesst, so wird sein $A V = a v$. Allein es ist auch $v = \sqrt{2 g x}$ und

Fig. 89.

$$A = \pi [r^2 - (r - x)^2] = \pi (2 r x - x^2).$$

Folglich

$$V = \frac{a \sqrt{2 g x}}{\pi (2 r x - x^2)}. \tag{1}$$

Während t in $t + dt$ übergeht, wird x zu $x - dx$; die Differentialformel $dx = V dt$ wird also hier $dx = - V dt$. Führt man obigen Wert von V ein, so kommt

$$dt = - \frac{\pi}{a \sqrt{2 g}} (2 r x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$t = - \frac{\pi}{a \sqrt{2 g}} \left[\frac{4}{3} r x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right] + C.$$

Für $x = h = BD$ ist $t = 0$. Diese beiden Werte geben

$$0 = -\frac{\pi}{a\sqrt{2g}}\left[\frac{4}{3} r h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}}\right] + C.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen kommt

$$(2) \qquad t = \frac{2\pi}{a\sqrt{2g}}\left[\frac{2r}{3}(h^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{5}(h^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}})\right].$$

Dieser Wert von t ist die Zeit, die nötig ist, damit der Wasserspiegel um $BC = h - x$ sinke. Setzt man hierin $x = 0$, so erhält man die Zeit T zum Entleeren des Gefässes

$$(3) \qquad T = \frac{2\pi h}{a}\left(\frac{2r}{3} - \frac{h}{5}\right)\sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

Wenn hierin $h = r$ gesetzt wird, so erhält man die Zeit zum Entleeren des halbgefüllten Gefässes

$$(4) \qquad T_1 = \frac{14}{15} \cdot \frac{\pi r^2}{a}\sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

Wenn dagegen $h = 2r$ wird, so erhält man die Zeit zum Entleeren des ganz gefüllten Gefässes

$$(5) \qquad T_2 = \frac{16}{15} \cdot \frac{\pi r^2}{a}\sqrt{\frac{2r}{2g}}.$$

Mithin verhalten sich die beiden letzten Zeiten $T_1 : T_2 = 14 : 16\sqrt{2}$, also sehr annähernd wie $5 : 8$.

249. Reibung des Wassers in einer cylindrischen und konischen Röhrenleitung. Bei einer cylindrischen Röhrenleitung sei L die Länge, r der innere Halbmesser, v die Geschwindigkeit des Wassers in der Sekunde und h das Gefälle, das längs des Weges L durch die Reibung des Wassers an der Röhrenwand konsumiert wird.

Erfahrungsgemäss ist h proportional der Oberfläche $2\pi r L$, längs der die Reibung stattfindet, umgekehrt proportional dem Querschnitte πr^2 der Leitung und abhängig von einem Faktor von der Form $av + bv^2$, worin a und b konstante, durch Versuche zu bestimmende Grössen bezeichnen. Es ist mithin

$$(1) \qquad h = \frac{2\pi r L}{\pi r^2}(av + bv^2) = \frac{2L}{r}(av + bv^2).$$

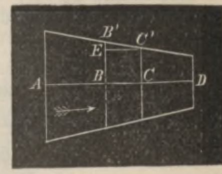
Das in dieser Formel enthaltene Gesetz soll nun auf eine konische Röhre übertragen werden. Es seien (Fig. 90)

$L = AD$ die Achsenlänge der Röhre,
R, r die Radien der Grundflächen des Kegels in A und D,
$x = AB$ ein variables Stück der Achse,
$y = BB'$ der Radius der Röhre an der Stelle B,
u, v die Geschwindigkeiten in den Querschnitten πy^2 und πr^2,

h, H die Gefälleverluste, die die Reibung des Wassers längs der Wege x und L hervorbringt, und

α der Winkel, den die Seitenlinie des Kegels mit der Achse bildet.

Fig. 90.



Lässt man x in $x + dx = AC$ übergehen, so wird y zu $y - dy = CC'$ und h zu $h + dh$. Zieht man $C'E$ parallel zur Achse, so gibt das unendlich kleine, rechtwinkelige Dreieck $B'C'E$ die Relation

$$C'B' = \frac{dx}{\cos\alpha}. \tag{2}$$

Während somit ein Kegelmantel von der Länge der Seitenlinie $B'C'$ durchlaufen wird, konsumiert die Reibung ein Gefälle $= dh$. Wendet man daher Formel (1) auf diese unendlich kurze Kegelfläche an, so erhält man unter Benutzung von (2)

$$dh = \frac{2\,dx}{y\cos\alpha}(au + bu^2). \tag{3}$$

Da aber durch die Querschnitte πy^2 und πr^2 gleichviel Wasser geht, so ist $y^2 u = r^2 v$ und da ferner $dx = -dy \operatorname{cotang}\alpha$, so geht Formel (3) über in

$$dh = -\frac{2\,dy}{\sin\alpha}\left(\frac{ar^2v}{y^3} + \frac{br^4v^2}{y^5}\right).$$

Die Integration dieser Formel gibt

$$h = \frac{r^2v}{\sin\alpha}\left(\frac{a}{y^2} + \frac{br^2v}{2y^4}\right) + C. \tag{4}$$

Für $h = 0$ wird $y = R$, und für $h = H$ wird $y = r$. Vermittelst dieser gleichzeitigen Werte erhält man aus (4)

$$0 = \frac{r^2v}{\sin\alpha}\left(\frac{a}{R^2} + \frac{br^2v}{2R^4}\right) + C,$$

$$H = \frac{r^2v}{\sin\alpha}\left(\frac{a}{r^2} + \frac{br^2v}{2r^4}\right) + C$$

und durch Subtraktion dieser zwei Gleichungen

$$H = \frac{r^2v}{\sin\alpha}\left[a\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{br^2v}{2}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4}\right)\right]. \tag{5}$$

Für $r = R$ wird diese Formel unbestimmt, während man die Formel (1) für den Cylinder erhalten sollte.

Bezeichnet man aber, um die Formel (1) aus (5) zu erhalten, die Seitenlinie des Kegels mit s, so ist $\sin\alpha = \frac{R - r}{s}$; folglich gibt Formel (5)

$$H = \frac{r^2vs}{R - r}\left[a\frac{R^2 - r^2}{R^2r^2} + \frac{br^2v}{2}\frac{R^4 - r^4}{R^4r^4}\right]$$

oder, indem man die Division durch R — r ausführt,

$$(6) \qquad H = v\,s\left[a\,\frac{R+r}{R^2} + \frac{b\,v}{2}\,\frac{(R^2+r^2)(R+r)}{R^4}\right].$$

Setzt man nunmehr in (6) $r = R$, so wird $s = L$, und man erhält in der That die Formel (1) für die cylindrische Leitung.

Man schreibe die Gleichung (5) wie folgt

$$H = \frac{v}{\sin\alpha}\left[a\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{b\,v}{2}\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)\right].$$

Ist nun r sehr klein gegen R, so können die Verhältnisse $r^2 : R^2$ und $r^4 : R^4$ gegen die Einheit vernachlässigt werden, und man erhält, wenn man noch $R - r = s \sin\alpha$ setzt,

$$H = \frac{s}{R-r}\left(a\,v + \frac{b\,v^2}{2}\right).$$

250. Stoss des Wassers gegen eine feste Ebene. Diese Ebene befinde sich im unbegrenzten Wasser, senkrecht zur Richtung der Bewegung des Wassers. Der Stoss des Wassers ist proportional dem Inhalte F der Fläche und nahe proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Wassers. Bezeichnet daher c eine Konstante, so wird der Stoss P des Wassers annähernd sein

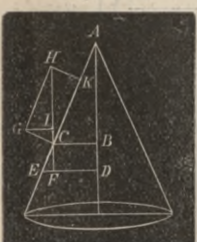
$$P = c\,F\,v^2.$$

Bildet die Richtung der Bewegung des Wassers mit der Ebene einen Winkel $= \alpha$, so zerlege man die Geschwindigkeit v in die beiden Seitengeschwindigkeiten $v \cos\alpha$ und $v \sin\alpha$. Mit der erstern dieser Seitengeschwindigkeiten gleitet das Wasser parallel zur Ebene fort, ohne Stoss hervorzubringen, während die Ebene mit der Geschwindigkeit $v \sin\alpha$ senkrecht getroffen wird. Vertauscht man daher in der obigen Formel v mit $v \sin\alpha$, so erhält man als gesuchten Stoss

$$P = c\,F\,v^2 \sin^2\alpha.$$

251. Stoss des Wassers gegen einen Kegel. Der Kegel liege im unbegrenzten Wasser. Dieses Wasser bewege sich mit einer Geschwindigkeit v in der Richtung der Achse des Kegels gegen dessen Mantelfläche. Die Achsenlänge des Kegels sei $= h$, der Halbmesser der Grundfläche $= r$, der Winkel, den die Seitenlinie mit der Achse bildet, $= \alpha$.

Fig. 91.



Entspricht der Achsenlänge $AB = x$ (Fig. 91) ein Radius $BC = y$, so wird für $x + dx = AD$ der Radius $y + dy = DE$. Zieht man CF parallel zur Achse, so ist im rechtwinkeligen Dreieck CEF die Hypotenuse $CE = \dfrac{dy}{\sin\alpha}$.

Dreht man das Element CE der Seitenlinie um die Kegelachse, um einen unendlich kleinen Winkel φ, so beschreibt es einen Weg $= \varphi\,y$, also eine Fläche $= \dfrac{\varphi\,y\,dy}{\sin\alpha}$. Gegen dieses Flächenelement strömt das Wasser, parallel zur Achse, mit einer Geschwindigkeit $HC = v$, also ist die Geschwindigkeit gegen das Flächenelement in normaler Richtung $GC = v \sin\alpha$ und diejenige parallel zur Seitenlinie $KC = v\cos\alpha$. Diese letztere bringt keinen Stoss hervor, während der erstern ein Stoss $= c\varphi v^2 y\,dy \sin\alpha$ entspricht.

Dieser Stoss werde durch das Parallelogramm der Kräfte zerlegt in eine Kraft $GJ = c\varphi v^2 y\,dy\sin\alpha\cos\alpha$ senkrecht und in eine $JC = c\varphi v^2 y\,dy \sin^2\alpha$ parallel zur Achse. Die erstere Kraft wird durch eine gleiche und entgegengesetzte aufgehoben. Erweitert man den Winkel φ zu 2π, so erhält man aus der letztern den Stoss dP auf eine Kegelfläche, deren Seitenlinie CE ist, gleich

$$dP = JC\cdot\frac{2\pi}{\varphi} = 2\pi c v^2 \sin^2\alpha\cdot y\,dy.$$

Mithin ist der Stoss P, parallel zur Achse, auf die ganze Kegelfläche

$$P = 2\pi c v^2 \sin^2\alpha \int_0^r y\,dy = c\pi r^2 v^2 \sin^2\alpha,$$

oder, da $\sin^2\alpha = \dfrac{r^2}{r^2+h^2}$ ist,

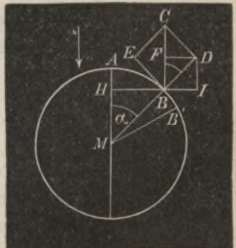
$$P = c\pi r^2 v^2 \frac{r^2}{r^2+h^2}.$$

Wird $h = 0$, so erhält man den Stoss des Wassers auf die Grundfläche $c\pi r^2 v^2$. Folglich verhält sich der Stoss gegen die Mantelfläche zum Stosse gegen die Grundfläche, immer in der Richtung der Achse gedacht, wie $r^2 : (r^2 + h^2)$.

Die vorstehende Formel gilt auch, wenn man das Wasser ruhend und den Kegel in Bewegung denkt. Ebenso gilt sie, wenn man statt Wasser die Luft oder ein anderes Medium voraussetzt.

252. Stoss des Wassers gegen eine Kugel. Die Kugel befinde sich ruhend in einer unbegrenzten, bewegten Wassermasse. Der Radius der Kugel sei r, die Geschwindigkeit des Wassers v.

Fig. 92.



Der Mittelpunkt der Kugel sei in M (Fig. 92), die Bewegung des Wassers erfolge in der Richtung des Halbmessers AM gegen die Kugelfläche. Der Radius MB bilde mit MA einen Winkel $= \alpha$, so dass der Bogen AB eines grössten Kreises der Kugel $= r\alpha$ wird. Lässt man $r\alpha$ um $BB' = r\,d\alpha$ zunehmen und dreht dieses Bogenelement um AM als Achse und zwar um einen unendlich kleinen Winkel φ, so beschreibt es einen Weg $= r\varphi\sin\alpha$, da der Halbmesser BH der Drehung $r\sin\alpha$ ist. Also ist das von $r\,d\alpha$ beschriebene Flächenelement $= r^2\varphi\sin\alpha\,d\alpha$. Gegen dieses Flächenelement strömt das Wasser mit einer Geschwindigkeit $CB = v$ in der Richtung AM; mithin ist die Geschwindigkeit des Wassers in der Richtung der Tangente an die Kugel: $EB = v\sin\alpha$, und die Geschwindigkeit normal zum Flächenelement: $DB = v \cos \alpha$; folglich der Stoss auf das Flächenelement $= c r^2 \varphi \sin \alpha \, d \alpha \cdot v^2 \cos^2 \alpha$. Man zerlege diese Kraft durch das Parallelogramm DFBJ in zwei Seitenkräfte, wovon die eine JB senkrecht und die andere FB parallel zur Richtung von AM wirkt. Die erstere Kraft wird durch eine gleiche, entgegengesetzte Kraft aufgehoben. Die letztere Kraft ist $= c r^2 v^2 \varphi \sin \alpha \cos^3 \alpha \, d \alpha$. Macht man mit dem Bogenelemente BB′ eine volle Drehung um AM als Achse, so erweitert sich φ zu 2π; also ist der Stoss gegen eine Zone von der Breite BB′

$$d P = 2 c \pi r^2 v^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha \, d \alpha.$$

Mithin der Stoss des Wassers gegen die der Strömung zugekehrte Hälfte der Kugel, indem man nach § 88, Formel (7), integriert,

$$P = 2 c \pi r^2 v^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos^3 \alpha \, d \alpha = \frac{c}{2} \pi r^2 v^2.$$

Der Stoss des Wassers gegen den grössten Querschnitt der Kugel in normaler Richtung zum Schnitte, ist $= c \pi r^2 v^2$. Folglich beträgt der Stoss auf die Oberfläche der Kugel nur die Hälfte von diesem.

Denkt man sich diesen grössten Schnittkreis der Kugel als Grundfläche eines Kegels mit der Spitze in A, so wird der Stoss auf diese Kegelfläche nach § 251 wegen $h = r$ ebenso gross wie auf die Halbkugelfläche.

XVIII. Vermischte Aufgaben.

253. Zunahme eines Kapitals durch seine Zinsen. Es bezeichne:

a, A das gegenwärtige und zukünftige Kapital,

z den Zinsfaktor, also z. B. $z = 1{,}04$, wenn das Kapital zu 4 Prozent, angelegt wird, und

t die Anzahl Jahre, während der a zu A heranwächst, wenn der Zins jeweilen zum Kapitale geschlagen wird.

Erste Annahme. Der Zins werde je am Ende eines Jahres fällig und zinstragend zum Kapitale gelegt. Dadurch wird das Kapital a samt Zins nach dem ersten Jahre $= a z$, nach dem zweiten $= a z^2$ etc. und nach t Jahren, wenn es nun mit A′ bezeichnet wird,

$$A' = a z^t. \tag{1}$$

Zweite Annahme. Es werde der Zins jeden Augenblick zum Kapitale geschlagen, das Wachstum des Kapitals erfolge also nicht absatzweise, sondern stetig, ähnlich demjenigen einer Pflanze. Wird die Zeit t in die Elemente dt zerlegt, so kann man annehmen, es erfolge die Kapitalzunahme stetig, wenn die Zinsen je nach solchen Zeitteilen dt zum Kapitale kommen.

Während nun t in $t + dt$ übergeht, wird A zu $A + dA$; also ist dA der Zins, den das Kapital in der Zeit dt abwirft. Dieser Zins ist aber auch $= (z - 1) A \, dt$; daher die Gleichung

$$d A = (z - 1) A \, d t,$$

und indem man durch A' dividiert und integriert,

$$(2) \qquad l\,A = (z - 1)\,t + C.$$

Wird $t = 0$, so geht hierin A in a über, und Gleichung (2) gibt

$$l\,a = C.$$

Zieht man diese Gleichung von (2) ab, so ist

$$(3) \qquad l\,\frac{A}{a} = (z - 1)\,t.$$

Folglich auch, indem man mit e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet und von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$(4) \qquad A = a\,e^{(z-1)\,t}.$$

Der Wert A ist grösser als A', was wie folgt gezeigt werden kann. Nimmt man von (1) die Logarithmen, so kommt

$$l\,\frac{A'}{a} = t\,l\,z.$$

Setzt man nun $z = 1 + p$, also z. B. für 4 Prozente $p = 0{,}04$ und entwickelt $l\,(1 + p)$ nach § 69 in eine Reihe, so wird

$$(5) \qquad l\,\frac{A'}{a} = t\left(p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \ldots\right).$$

Da aber auch nach Gleichung (3)

$$(6) \qquad l\,\frac{A}{a} = t\,p,$$

so erhält man durch Subtraktion der Gleichung (5) von (6)

$$(7) \qquad l\,\frac{A}{A'} = p^2\,t\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{3} + \frac{p^2}{4} - \frac{p^3}{5} + \ldots\right).$$

Für $p < 1$, was in der Regel der Fall ist, wird die Reihe in der Klammer positiv; also wird auch $A > A'$ für jeden positiven Wert von t. Für den Grenzfall $t = 0$ wird $A' = A$, wie es sein soll.

Für $p = 0{,}04$ und $a = 100$ ergibt sich aus (1), (4) und (7) folgende Zusammenstellung

t.		A'.	A.	$\frac{A}{A'}$.
1	Jahr	104,000	104,081	1,000 78
2	„	108,160	108,229	1,001 56
3	„	112,486	112,749	1,002 34
10	„	148,024	149,182	1,007 82
100	„	505,045	545,982	1,081 04

254. Abnahme der Lichtintensität im Wasser und in der Luft. Wenn sich Licht im Wasser oder in der Luft fortpflanzt, so wird seine Intensität geschwächt.

Man nehme die Lichtmenge beim Eintritte in das Medium zur Einheit an und bezeichne mit m die Lichtmenge, die im Medium bis zum

Wege x vordringt; dann wird m eine Funktion von x sein. Geht x in $x + dx$ über, so wird m zu $m - dm$. Die Aenderungen dx und dm haben also entgegengesetzte Zeichen. Nun ist der Verlust dm, der längs des unendlich kleinen Weges dx eintritt, diesem Wege, sowie der noch vorhandenen Lichtmenge m proportional, so dass man für konstante Medien hat

$$- dm = \frac{m\,dx}{a},$$

worin a eine Konstante bezeichnet, die von der Natur des Mittels abhängt und durch Versuche bestimmt werden muss.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$\frac{dm}{m} = - \frac{dx}{a},$$

und wenn man integriert,

$$l\,m = - \frac{x}{a} + C.$$

Beim Eintritte des Lichtes in das Medium ist $x = 0$, $m = 1$. Vermöge dieser beiden Werte gibt die letzte Gleichung $0 = C$; folglich

$$l\,m = - \frac{x}{a}, \qquad m = e^{-\frac{x}{a}},$$

wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Folglich nimmt die Lichtstärke in geometrischer Progression ab, wenn die Wege in arithmetischer Progression wachsen.

Nach Schmidt's Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie findet im Meerwasser eine Schwächung des Sonnenlichtes im Verhältnis von 14:5 auf einem Wege von 115 paris. Zollen statt. Setzt man also in die letzte Formel $x = 115$ Zoll $= 9\frac{7}{12}$ Fuss und $m = \frac{5}{14}$, so hat man zur Bestimmung der Konstanten

$$l\,\frac{5}{14} = - \frac{9\frac{7}{12}}{a}; \qquad a = 9{,}307\,6 \text{ par. Fuss.}$$

Wenn nach Schmidt das Licht in der Luft, von der Dichtigkeit an der Oberfläche der Erde, einen Weg von 45 300 paris. Fuss zurücklegt, so nimmt seine Stärke ab im Verhältnis von 3:2. Vermöge dieser Werte wird für die Luft

$$a = 111\,722 \text{ paris. Fuss.}$$

255. Abkühlung eines Körpers durch Ausstrahlung seiner Wärme in den leeren Raum. Es sei U die Differenz der Temperaturen eines sich abkühlenden Körpers und des leeren Raumes, in dem sich der Körper befindet. Durch Ausstrahlung sinkt diese Temperaturdifferenz. Nach Verfluss der Zeit t sei sie noch u.

Diese Temperaturdifferenz ist eine Funktion von t, folglich geht u in $u - du$ über, wenn t um dt zunimmt. Die in dem Zeitelemente dt vor sich gehende Abkühlung dx ist nahe der Dauer dt und der zu dieser Zeit herrschenden Temperaturdifferenz u proportional. Man kann daher annähernd setzen

$$du = -a\,u\,dt,$$

worin a eine Konstante bezeichnet und berücksichtigt ist, dass du und dt entgegengesetzte Zeichen haben. Man erhält

$$(1) \qquad \frac{du}{u} = -a\,dt,$$

also durch Integration

$$(2) \qquad l\,u = -a\,t + C.$$

Für $t = 0$ ist $u = U$. Hierfür wird (2)

$$l\,U = C.$$

Zieht man diese Gleichung von (2) ab, so kommt

$$(3) \qquad l\,\frac{u}{U} = -a\,t, \qquad u = U\,e^{-a\,t},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Diese Formel (3) entspricht den Beobachtungen über die Abkühlung nicht hinreichend. Nimmt man deshalb in Gleichung (1) statt der Konstanten a die Grösse $a - 2\,b\,t$, worin b eine zweite Konstante sein soll, so kann man statt (1) schreiben

$$\frac{du}{u} = (-a + 2\,b\,t)\,dt.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$l\,u = -a\,t + b\,t^2 + C.$$

Für $t = 0$ wird $u = U$. Hierfür wird $l\,U = C$. Zieht man diesen Wert der Konstanten ab, so kommt

$$l\,\frac{u}{U} = -a\,t + b\,t^2.$$

$$(4) \qquad u = U\,e^{-a\,t + b\,t^2}.$$

Dieses Gesetz (4) entspricht den Beobachtungen besser. Zwei durch Beobachtung ermittelte Werte von u und t reichen hin, die Konstanten a und b für einen und denselben Körper zu bestimmen.

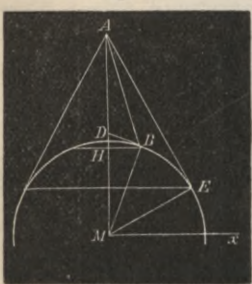
256. Erwärmung irgend eines physischen Punktes in der Atmosphäre durch die von der Erde ausgestrahlte Wärme. Wir nehmen an, die Intensität der Wärmestrahlen, die von der Erde aus nach irgend einem Punkte des Raumes gelangen, verhalte sich direkt wie die Grösse dF des Elementes der strahlenden Fläche, direkt wie der Sinus des Ausflusswinkels, d. h. des Winkels φ, den der ausgehende Wärmestrahl mit der Ebene des Elementes dF macht, und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung r des physischen Punktes im Raume vom Elemente.

Bezeichnet daher k eine Konstante, so wird der Ausdruck der Erwärmung durch das Element d F sein

(1) $$k \frac{dF}{r^2} \sin \varphi.$$

Nun sei A (Fig. 93) der physische Punkt der Atmosphäre, M der Mittelpunkt der Erdkugel und A E eine Tangente an dieselbe. Dreht man das Dreieck A E M um A M, so beschreibt der Punkt E die kreisförmige Grenze derjenigen Kugelkalotte, die Wärme nach A ausstrahlt. Wir setzen voraus, dass diese Wärme gleichförmig über die Kalotte verteilt sei, bestimmen das Flächenelement d F der Kalotte, seine Neigung zu der Richtung der Wärmestrahlen und drücken beide, sowie seinen Abstand r von A durch eine Variable aus, führen diese Werte in (1) ein und integrieren den entstandenen Ausdruck zwischen den Grenzen, die der ganzen Kalotte entsprechen, und erhalten so die gesuchte Erwärmung W des Punktes A.

Fig. 93.



Legt man zu diesem Zwecke längs A E und A M einen Schnitt durch die Kugel, so ist die Mittelpunktsgleichung des entstandenen Kreisschnittes, wenn R den Halbmesser der Erde bezeichnet,

(2) $$y^2 = R^2 - x^2,$$

wobei wir die Ordinaten y auf M A nehmen. Im Kreispunkte B, dessen Koordinaten x, y sind, liegt das Bogenelement $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, durch dessen Rotation um die Achse M A ein Flächenelement $= 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2}$ beschrieben wird. Mit Hilfe von (2) ist dieses Flächenelement $= -2\pi R\,dy$. Dieses Flächenelement von der Form des Mantels eines abgestutzten Kegels hat in allen Stellen gleiche Neigung zur Achse M A des Kegels. Zieht man die Tangente B D an den Kreis, setzt den Ausflusswinkel A B D $= \varphi$, so ist φ für alle Stellen des gedachten Flächenelementes gleich gross. Man kann daher setzen

(3) $$dF = -2\pi R\,dy.$$

Ist nun Abstand B A $= r$, M A $= R + h$, also h die Höhe des Punktes A über der Erdoberfläche, so erhält man aus dem Dreiecke M A B

$$(R + h)^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos(90 + \varphi).$$

Allein da $\cos(90 + \varphi) = -\sin\varphi$, so folgt

(4) $$\sin\varphi = \frac{2Rh + h^2}{2Rr} - \frac{r}{2R}.$$

Um die Variable y in (3) durch r auszudrücken, ziehe man B H senkrecht auf M A; dann gibt das rechtwinkelige Dreieck A H B

$$(R + h - y)^2 + x^2 = r^2,$$

woraus mit Berücksichtigung von (2) folgt

$$(R + h)^2 - 2(R + h)y + R^2 = r^2.$$

Mithin erhält man durch Differentiation

$$dy = -\frac{r\,dr}{R + h}.$$

Hierdurch wird der Ausdruck (3)

$$dF = \frac{2\pi R}{R + h}\,r\,dr. \tag{5}$$

Setzt man die Werte von $\sin\varphi$ und dF aus (4) und (5) in (1) ein, so erhält man das Differential dW der Erwärmung des Punktes A

$$dW = \frac{\pi k}{R + h}\left[(2Rh + h^2)\frac{dr}{r^2} - dr\right].$$

Folglich ist durch Integration

$$W = \frac{\pi k}{R + h}\left[-\frac{2Rh + h^2}{r} - r\right] + C. \tag{6}$$

Lässt man in diesem Integral das Flächenelement (5) vom Scheitel der Kalotte bis zur Grenze derselben vorrücken, so erhält man die Wirkung aller Wärmestrahlen, die nach A gehen. Folglich muss φ von $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ bis $\varphi = 0$ abnehmen, also r von $r = h$ bis $r = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}$ wachsen.

Für die untere Grenze $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, also $r = h$ wird das Integral (6)

$$-2\pi k + C.$$

Für die obere Grenze $\varphi = 0$, also $r = \sqrt{2Rh + h^2}$ wird (6) zu

$$-\frac{2\pi k}{R + h}\sqrt{2Rh + h^2} + C.$$

Die Differenz dieser Werte gibt die gesuchte Grösse

$$W = 2\pi k\left[1 - \frac{\sqrt{2Rh + h^2}}{R + h}\right].$$

Liegt der physische Punkt an der Erdoberfläche, so ist $h = 0$ und seine Erwärmung $= 2\pi k$ ein Maximum. Bei wachsendem h nimmt die Erwärmung ab, jedoch sehr langsam. Wenn $h = \infty$, so kann im Nenner R gegen h vernachlässigt werden und es wird $W = 0$.

Die Höhe der Atmosphäre beträgt gemäss der Aufgabe in § 258 annähernd $\frac{1}{122}$ vom Erdhalbmesser. Hierfür ist

$$\frac{\sqrt{2Rh + h^2}}{R + h} = 0{,}127.$$

Die Erwärmung der Luft oder die Absorption der Wärme durch die Luft an der Grenze der Atmosphäre weicht also nur um 0,127 von der an der Erdoberfläche ab.

257. Druck eines Gases mit Rücksicht auf dessen Gewicht. Die tropfbaren Flüssigkeiten denkt man sich als nicht zusammendrückbar. Daher wiegt die Kubikeinheit einer solchen Flüssigkeit gleich viel, in welcher Höhe der Flüssigkeit sie sich befinde. Anders verhält es sich mit den elastischen Flüssigkeiten. Bei diesen hat der Druck, den die oberen Schichten auf die unteren ausüben, zur Folge, dass die unteren durch diesen Druck sich verdichten. Es soll nun das Gesetz angegeben werden, nach dem der Druck, sowie die Dichte des Gases von oben nach unten zunimmt, unter der Voraussetzung, dass auf die Veränderlichkeit der Schwerkraft keine Rücksicht zu nehmen und die Temperatur des Gases überall dieselbe sei.

Es bezeichne: p_0 den Druck des Gases an der obersten Stelle des Gaskörpers, p denjenigen in der Tiefe x unter der obersten Stelle, beide Drucke für jede Flächeneinheit gedacht, und q_0, q das Gewicht von einer Kubikeinheit des Gases am obern und untern Ende des vertikalen Abstandes x.

Lässt man x (abwärts) zunehmen um dx so nimmt p zu um dp. Legt man daher in den Tiefen x und $x + dx$ zwei horizontale Ebenen durch das Gas, so herrscht auf der obern dieser Ebenen der Druck p, auf der untern der Druck $p + dp$. Dabei drückt p abwärts, $p + dp$ aufwärts; der Unterschied beider Drucke ist gleich dem Gewichte des Gases, das zur Höhe das Differential dx und zur Grundfläche die Flächeneinheit hat. Dieses Gewicht ist $= q\,dx$. Daher die Gleichung $p + q\,dx = p + dp$ oder

$$dp = q\,dx. \tag{1}$$

Allein hierin ändert sich q mit x. Nach dem Mariotte'schen Gesetze erhält man aber

$$q = q_0 \frac{p}{p_0}.$$

Führt man diesen Wert von q in (1), so folgt, indem man noch $\frac{q_0}{p_0} = c$ setzt,

$$dp = c\,p\,dx. \tag{2}$$

Um diese Differentialgleichung zu integrieren, sondere man die Veränderlichen, was man durch Division mit p erreicht. Daher ist

$$\frac{dp}{p} = c\,dx$$

und durch Integration

$$l\,p = cx + C.$$

Für $x = 0$ wird $p = p_0$; mithin

$$l\,p_0 = C,$$

und durch Subtraktion

$$l\,\frac{p}{p_0} = cx. \tag{3}$$

Diese Gleichung enthält nun das gesuchte Gesetz.

Geht man in (3) von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$p = p_0 \, e^{cx}, \tag{4}$$

worin e = 2,718 . . die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Entwickelt man die Exponentialgrösse der Gleichung (4) in eine Reihe, so wird

$$p = p_0 \left(1 + cx + \frac{c^2 x^2}{2} + \frac{c^3 x^3}{2 \cdot 3} + \cdot\cdot\right). \tag{5}$$

Es befinde sich Leuchtgas in einer ansteigenden Leitung. Das Gewicht von 1 *cbm* solchen Gases sei am obern Ende der Leitung = 0,7 *kg*, der Druck daselbst 1 Atmosphäre = 10 330 *kg* für 1 *qm* Fläche; wie gross ist dieser Druck an einer Stelle, die in vertikaler Richtung um 40 *m* tiefer liegt?

Es ist $q_0 = 0{,}7$; $p_0 = 10\,330$ und $x = 40$; folglich

$$c\,x = \frac{0{,}7 \cdot 40}{10\,330} = 0{,}002\,710\,6.$$

Daher unter Anwendung von Gleichung (5)

$$p = 10\,330\,(1 + 0{,}002\,71)\ kg = 10\,358\ kg.$$

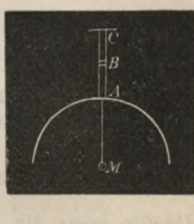
Der Druck ist also unten grösser um 28 *kg* für 1 *qm* Fläche als oben, was vom obern Drucke 0,27 Prozente ausmacht.

258. Bestimmung der Höhe der Atmosphäre. Diese Höhe soll bestimmt werden unter folgenden Voraussetzungen: 1) dass die Temperatur in der Atmosphäre von unten nach oben gleichförmig abnehme; 2) dass die Schwerkraft längs der Höhe der Atmosphäre konstant sei und 3) dass der Einfluss der Zentrifugalkraft, die auf die einzelnen Luftteile wirkt, unberücksichtigt bleiben könne.

Es sei A C (Fig. 94) eine vertikale Luftsäule, deren Querschnitt = 1 ist und deren Höhe bis zur Grenze C der Atmosphäre reicht. Es bezeichne

x = A B die Höhe irgend einer Station über der Erdoberfläche,
P, p den Druck der Luft für die Flächeneinheit in A und B,
T, t die Temperatur der Luft an diesen Stationen,
a das Gewicht der Kubikeinheit Luft bei 0 Grad Temperatur, an einer Stelle der Atmosphäre, wo die Spannkraft der Luft = 1 ist,
α die Grösse, um die das Volumen 1 der Luft bei je einem Grad der Erwärmung zunimmt, und
h die Höhe, um die man sich in der Atmosphäre erheben muss, wenn die Temperatur um 1 Grad sinkt; alsdann erhält man für die Temperaturabnahme folgende Relation

Fig. 94.



$$t = T - \frac{x}{h}. \tag{1}$$

Würde die Luft überall 0^0 Temperatur haben, so wäre das Gewicht der Kubikeinheit Luft in B gleich a p. Allein indem die Temperatur von 0 auf t steigt, geht das Volumen 1 über in $1 + \alpha t$, also sinkt das Gewicht a p auf

$$\frac{a\,p}{1 + \alpha\,t}. \tag{2}$$

Legt man in den Höhen x und $x + dx$ zwei horizontale Querschnitte durch die Luftsäule A C, so schliessen sie ein Prisma ein, dessen Querschnitt $= 1$, dessen Höhe $= dx$, dessen Volumen also $= dx$ ist. Dieses mit Luft erfüllte Prisma hat daher nach (2) ein Gewicht gleich

$$\frac{a\,p\,dx}{1 + \alpha\,t}. \tag{3}$$

Dasselbe wird unten mit einer Kraft p aufwärts und von oben mit einer Kraft $p - dp$ abwärts gedrückt, da p in $p - dp$ übergeht, wenn x zu $x + dx$ wird. Da das Prisma gleichwohl in Ruhe ist, so muss der Unterschied dp dieser Pressungen gleich dem Gewichte (3) des Prismas sein. Daher

$$dp = -\frac{a\,p\,dx}{1 + \alpha\,t}. \tag{4}$$

Hier müssen dp und dx entgegengesetzte Zeichen haben, weil p abnimmt, wenn x wächst. Dividiert man (4) durch p und setzt den Wert von t aus (1) ein, so folgt

$$\frac{dp}{p} = -\frac{a\,dx}{1 + \alpha T - \frac{\alpha}{h}x}. \tag{5}$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$l\,p = \frac{a\,h}{\alpha}\,l\left(1 + \alpha T - \frac{\alpha}{h}x\right) + C.$$

Für $x = 0$ ist $p = P$; folglich

$$l\,P = \frac{a\,h}{\alpha}\,l\,(1 + \alpha T) + C$$

also durch Subtraktion

$$l\,\frac{p}{P} = \frac{a\,h}{\alpha}\,l\left(1 - \frac{\alpha}{h}\cdot\frac{x}{1 + \alpha T}\right). \tag{6}$$

Diese Gleichung enthält das Gesetz der Abnahme des Luftdruckes in der Atmosphäre.

Für die Grenze der Atmosphäre ist $p = 0$; also $l\,\frac{p}{P} = -\infty$. Hierfür muss die Formel (6) übergehen in

$$l\left(1 - \frac{\alpha}{h}\,\frac{x}{1 + \alpha T}\right) = -\infty, \qquad 1 - \frac{\alpha}{h}\cdot\frac{x}{1 + \alpha T} = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung gibt als Höhe der Atmosphäre

$$(7) \qquad x = \frac{h}{\alpha}(1 + \alpha T).$$

Gay-Lussac stieg in einem Luftballon 6 980 m hoch. Dabei war die Temperatur in dieser Höhe — 9,50° und gleichzeitig am Boden 30,75° C. Nimmt man nun an, die Abnahme der Temperatur sei eine gleichförmige, so wird die Abnahme 1 Grad betragen für je

$$(8) \qquad h = \frac{6\,890}{30{,}75 + 9{,}50}\,m = 173\,m.$$

Für trockene Luft ist $\alpha = 0{,}003\,67$. Allein für den Zustand der Luft in der Atmosphäre kann als Mittel angenommen werden $\alpha = 0{,}003\,7$. Für diese Werte wird nach (7) die Höhe der Atmosphäre

$$(9) \qquad x = \frac{173}{0{,}003\,7}(1 + 0{,}003\,7 \cdot 30{,}75)\,m = 52\,077\,m.$$

Als Halbmesser der Erde kann man nehmen 6 365 000 m. Daher wird das Verhältnis zwischen der Höhe der Atmosphäre und dem Erdhalbmesser

$$\frac{52\,077}{6\,365\,000} = \frac{1}{122}.$$

Mittels der Werte h und x aus (8) und (9) erhält man als Temperatur an der Grenze der Atmosphäre

$$t = 30{,}75 - \frac{52\,077}{173} = -270{,}27\,^{0}.$$

Nach der mechanischen Wärmelehre (§ 266) beträgt der absolute Nullpunkt der Temperatur — 273°. Es ist wahrscheinlich, dass diese Temperatur auch diejenige des Weltraumes sein wird.

259. Höhenmessung durch das Barometer. Wird das Barometer von unten nach oben gebracht, so sinkt das Quecksilber in der Glasröhre und zwar um die Höhe einer Säule, die ebensoviel wiegt als die vertikale Luftsäule, um die das Instrument gehoben wurde. Hiernach lässt sich der Höhenunterschied zweier Stationen berechnen, wenn man die Barometerstände für diese Stationen kennt. Es seien

R der Halbmesser der Erde, beziehungsweise die Entfernung der untern Station vom Mittelpunkte der Erde,

x die Höhe der obern Station über der untern,

P, p die Pressungen der Luft an der untern und obern Station, für jede Flächeneinheit gedacht,

B, b die Barometerstände an diesen Stationen,

T, t die ihnen entsprechenden Temperaturen der Luft,

Q das Gewicht der Kubikeinheit Luft unter dem Drucke a einer Atmosphäre und für 0° Temperatur und

q das Gewicht der Kubikeinheit Luft an der obern Station.

Konstruiert man mit den Radien $R + x$ und $R + x + dx$ zwei Kugelflächen, deren Mittelpunkte mit dem Mittelpunkte der Erde zusammenfallen, so schliessen beide Kugelflächen eine unendlich dünne Luftschicht ein. Wir setzen voraus, dass die Dichtigkeit und Spannung der Luft in dieser Schicht überall dieselbe sei. Ein Teil dieser Schicht habe die Grundfläche 1; alsdann ist sein Volumen $= dx$, also sein Gewicht $= q\,dx$. Da nun der Druck auf diese Schicht von unten $= p$, von oben $= p - dp$ ist, so muss sein

(1) $$dp = -q\,dx.$$

Hier haben dp und dx entgegengesetzte Zeichen, weil p abnimmt, wenn x zunimmt.

Es handelt sich nun zunächst darum, Werte von q abzuleiten. Dies kann unter verschiedenen Voraussetzungen geschehen.

Erste Voraussetzung. Das Gewicht eines Körpers ändert sich mit seiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde. Allein man nehme an, es bleibe dasselbe innerhalb der verhältnismässig kleinen Höhe x konstant und die Temperatur T gehe gleichförmig in t über.

Denkt man sich eine Kubikeinheit Luft an irgend einer Stelle von 0^0 Temperatur und unter dem Drucke a einer Atmosphäre, so ist ihr Gewicht $= Q$; geht nun der Druck a über in p, so wird ihr Gewicht $= Q\dfrac{p}{a}$; steigt ausserdem die Temperatur auf t, so wird ihr Gewicht $= Q\dfrac{p}{a(1+\alpha t)}$. Daher ist

(2) $$q = Q\frac{p}{a(1+\alpha t)}.$$

Folglich, indem man q aus (2) in (1) einführt und durch p dividiert,

(3) $$\frac{dp}{p} = -\frac{Q}{a(1+\alpha t)}\,dx.$$

Um diese Differentialgleichung mit den Variabeln p, x und t integrieren zu können, denke man sich t konstant und nehme nach der Integration für t das Mittel aus den Grenzwerten. Man erhält auf diese Weise

$$l\,p = -\frac{Q\,x}{a\left(1+\alpha\dfrac{T+t}{2}\right)} + C.$$

Da für $x = 0$ die Grösse p in P übergeht, so wird

$$l\,P = C.$$

Zieht man von dieser Gleichung die vorige ab, so kommt

(4) $$l\frac{P}{p} = \frac{Q\,x}{a\left(1+\alpha\dfrac{T+t}{2}\right)}.$$

Diese Gleichung kann nun für Messung kleinerer Höhen zurecht gelegt werden. Man beachte, dass $P : p = B : b$, dass für Meter und Kilogramme

$$a = 10\,330\ kg \text{ für } 1\ qm; \quad Q = 1{,}293\ kg,$$

dass ferner für feuchte Luft $\alpha = 0{,}004$ und dass von natürlichen Logarithmen zu den briggischen übergegangen wird, indem man jene mit 2,302 585 .. multipliziert; man erhält so

$$x = \frac{10\,330}{1{,}293}\left[1 + \frac{0{,}004}{2}(T + t)\right] \cdot 2{,}302\,58 \log \frac{B}{b}$$

und daher die gesuchte Gleichung

$$(5) \qquad x = 18\,395\left(1 + \frac{T + t}{500}\right)\log \frac{B}{b}.$$

Um die Logarithmen zu vermeiden, kann man auf die Integration von $\frac{dp}{p}$ das in § 107, Formel (3), angegebene Verfahren anwenden. Hiernach betrachtet man das bestimmte Integral als ein Rechteck mit der Grundlinie $P - p$ und einer Höhe, die erhalten wird, wenn man das Mittel $\frac{1}{2}(P + p)$ aus den Grenzwerten von p nimmt. Man erhält daher als Annäherungswert

$$\int_p^P \frac{dp}{p} = (P - p) \cdot \frac{2}{P + p}.$$

Setzt man diesen Wert für $l\frac{P}{p}$ in Gleichung (4) ein, so folgt

$$2\frac{P - p}{P + p} = \frac{Q\,x}{a\left(1 + \frac{T + t}{500}\right)},$$

oder indem man B und b für P und p einführt und die oben angegebenen Werte von Q und a benutzt,

$$(6) \qquad x = 15\,977\left(1 + \frac{T + t}{500}\right)\frac{B - b}{B + b}.$$

Die Werte, die (5) und (6) liefern, weichen für geringe Höhen nur sehr wenig voneinander ab.

Zweite Voraussetzung. Es sei bei Berechnung des Gewichtes q auf die Veränderlichkeit der Schwere Rücksicht zu nehmen.

Nach dem Newton'schen Gesetze der Gravitation nimmt das Gewicht eines Körpers ab, wie das Quadrat seiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde zunimmt. Nun wurde der Wert von q in (2) ohne Rücksicht auf diese Abnahme angenommen; es muss dieser Wert daher noch mit dem Verhältnis $R^2 : (R + x)^2$ multipliziert werden. Also wird für die obere Station sein

$$(7) \qquad q = Q\frac{p}{a(1 + \alpha t)} \cdot \left(\frac{R}{R + x}\right)^2.$$

Setzt man diesen Wert von q in (1) ein, so folgt

$$(8) \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{Q\,dx}{a(1 + \alpha t)} \cdot \left(\frac{R}{R + x}\right)^2.$$

Behufs der Integration dieser Gleichung schreibe man

$$\frac{dp}{p} = -\frac{QR^2}{a(1+\alpha t)} \cdot (R+x)^{-2}\, d\,(R+x)$$

und betrachte t als konstant in obigem Sinne; es folgt dann

$$l\,p = \frac{QR}{a(1+\alpha t)} \cdot \frac{R}{R+x} + C.$$

Für $x = 0$ wird $p = P$; daher wird

$$l\,P = \frac{QR}{a\,(1+\alpha t)} + C$$

und durch Subtraktion

$$(9) \qquad l\frac{P}{p} = \frac{QR}{a(1+\alpha t)} \cdot \frac{x}{R+x},$$

woraus folgt

$$(10) \qquad x = \frac{a}{Q}(1+\alpha t)\left(1+\frac{x}{R}\right) l\frac{P}{p}.$$

Um hierin P und p durch die Barometerstände B und b zu ersetzen, hat man zu beachten, dass die Spannung der Luft abnimmt wie die Schwere, so dass man setzen muss

$$\frac{P}{p} = \frac{B}{b}\left(\frac{R+x}{R}\right)^2 = \frac{B}{b}\left(1+\frac{x}{R}\right)^2.$$

Nimmt man die Logarithmen, so wird

$$l\frac{P}{p} = l\frac{B}{b} + 2\,l\left(1+\frac{x}{R}\right).$$

Entwickelt man das letzte Glied nach § 69 in eine Reihe und nimmt von derselben nur das erste Glied, so erhält man

$$(11) \qquad l\frac{P}{p} = l\frac{B}{b} + \frac{2x}{R}.$$

Setzt man diesen Wert von $l\frac{P}{p}$ in (10) ein, so folgt, indem man das Glied mit $\frac{x^2}{R^2}$ vernachlässigt,

$$x = \frac{a}{Q}(1+\alpha t)\left[\frac{2x}{R} + \left(1+\frac{x}{R}\right) l\frac{B}{b}\right].$$

Die Werte von Q, a und t sind die gleichen wie oben. Geht man noch von den natürlichen Logarithmen über zu den briggischen, so erhält man nach Poisson

$$(12) \qquad x = 18\,336\left(1+\frac{T+t}{500}\right)\left[\frac{2x}{R} + \left(1+\frac{x}{R}\right)\log\frac{B}{b}\right].$$

Um mittels dieser Formel die Höhe x zu berechnen, berücksichtige man, dass $\frac{x}{R}$ ein sehr kleiner Bruch ist. Man vernachlässige denselben zunächst und erhält folgenden angenäherten Wert

$$x_{,} = 18\,336\left(1 + \frac{T+t}{500}\right)\log\frac{B}{b}.$$

Führt man sodann diesen Wert von $x_{,}$ auf der rechten Seite der Gleichung (12) ein, so erhält man den gesuchten Wert von x. Dabei kann $R = 6\,366\,000$ *m* angenommen werden.

Dritte Voraussetzung. Es sei Gleichung (7) zu integrieren für den Fall, dass die Temperatur t von unten nach oben abnehme, jedoch als Funktion von x eingeführt werde.

Wenn die Temperatur der Luft für jedes Höhenintervall r je um 1^0 abnimmt, so wird die Temperatur in der Höhe x sein

$$t = T - \frac{x}{r}.$$

Setzt man diesen Wert von t in (7) ein, so kommt

$$(13) \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{Q\,dx}{a\left(1 + \alpha T - \frac{\alpha}{r}x\right)}\cdot\left(\frac{R}{R+x}\right)^2.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, entwickele man $\left(\frac{R}{R+x}\right)^2$ nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe. Man erhält

$$\left(\frac{R}{R+x}\right)^2 = \left(1 + \frac{x}{R}\right)^{-2} = 1 - 2\frac{x}{R} + 3\frac{x^2}{R^2} - \ldots$$

Vernachlässigt man alle Glieder dieser Reihe bis auf die beiden ersten und setzt noch der Einfachheit wegen

$$1 + \alpha T = m; \qquad \frac{\alpha}{r} = n,$$

so geht (13) über in

$$(14) \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{Q}{a}\left[\frac{dx}{m - nx} - \frac{2}{R}\,\frac{x\,dx}{m - nx}\right].$$

Somit wird die Differentialgleichung (8) ersetzt durch (14). Um $\frac{x\,dx}{m - nx}$ dieser letztern Gleichung zu integrieren, setze man $m - nx = z$; dann wird

$$dx = -\frac{dz}{n}; \quad x = \frac{m - z}{n}; \quad \frac{x\,dx}{m - nx} = -\frac{m\,dz}{n^2 z} + \frac{dz}{n^2}.$$

Folglich

$$\int\frac{x\,dx}{m - nx} = -\frac{m}{n^2}\,l\,(m - nx) + \frac{m - nx}{n^2}.$$

Mit Hilfe dieser Werte gibt Gleichung (14)

$$l\,p = \frac{Q}{n\,a}\left[l\,(m - n\,x) - \frac{2\,m}{R\,n}\,l\,(m - n\,x) + \frac{2}{R\,n}\,(m - n\,x)\right] + C.$$

Für $x = 0$ wird $p = P$; folglich

$$l\,P = \frac{Q}{n\,a}\left[l\,m - \frac{2\,m}{R\,n}\,l\,m + \frac{2\,m}{R\,n}\right] + C$$

und durch Subtraktion

$$l\,\frac{P}{p} = \frac{Q}{n\,a}\left[\left(1 - \frac{2\,m}{R\,n}\right)l\,\frac{m}{m - n\,x} + \frac{2\,x}{R}\right]$$

oder auch, indem man die Werte von m und n wieder einführt,

$$(15)\qquad l\,\frac{P}{p} = \frac{Q}{a}\cdot\frac{r}{\alpha}\left[\left(1 - 2\,\frac{1 + \alpha\,T}{R}\cdot\frac{r}{\alpha}\right)l\,\frac{1 + \alpha\,T}{1 + \alpha\,T - \frac{\alpha}{r}\,x} + \frac{2\,x}{R}\right].$$

Setzt man den Wert von $l\,\frac{P}{p}$ aus (11) hier ein, so gibt (15)

$$\frac{a\,\alpha}{Q\,r}\left(l\,\frac{B}{b} + \frac{2\,x}{R}\right) - \frac{2\,x}{R} = \left(1 - 2\,\frac{1 + \alpha\,T}{R}\,\frac{r}{\alpha}\right)l\,\frac{1 + \alpha\,T}{1 + \alpha\,T - \frac{\alpha}{r}\,x}.$$

Multipliziert man mit -1, so kann der Bruch rechts, von dem der Logarithmus zu nehmen ist, umgekehrt werden, und man erhält

$$(16)\qquad l\left(1 - \frac{\alpha}{r}\cdot\frac{x}{1 + \alpha\,T}\right) = \frac{\frac{2\,x}{R} - \frac{a\,\alpha}{Q\,r}\left(\frac{2\,x}{R} + l\,\frac{B}{b}\right)}{1 - 2\,\frac{1 + \alpha\,T}{R}\cdot\frac{r}{\alpha}}.$$

Hieraus ist nun x zu bestimmen. Um einen angenäherten Wert von x, der mit $x_{,,}$ bezeichnet sei, zu erhalten, vernachlässige man alle Brüche mit dem Nenner R, entwickele die linke Seite in eine Reihe und verwende nur das erste Glied derselben; man erhält alsdann, entsprechend (4),

$$x_{,,} = (1 + \alpha\,T)\,\frac{a}{Q}\,l\,\frac{B}{b}.$$

Führt man diesen Wert von $x_{,,}$ in (16) ein, so kann der Wert von x, der im Ausdrucke links vorkommt, berechnet werden. Dabei sind $\alpha = 0{,}004$; $r = 173\ m$; $a = 10\,330\ kg$ und $Q = 1{,}293\ kg$ zu nehmen.

260. Dichtigkeit der Masse im Innern der Erde. Es soll die Dichtigkeit der Erdmasse in einer beliebigen Tiefe unter der Erdoberfläche bestimmt werden, unter der Voraussetzung, dass diese Dichtigkeit proportional mit der Tiefe unter der Erdoberfläche zunehme. Es sei

r der Halbmesser der Erde, diese als Kugel gedacht,

$a_0 = 2{,}65$ die Dichtigkeit der Erdmasse an der Oberfläche (J. R. Blum),

$a_m = 5{,}56$ die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse (Cornu u. Baille),
a die Dichtigkeit im Abstande x vom Mittelpunkte der Erde, also in der Tiefe $r - x$ unter der Oberfläche, und
b der Wert, um den die Dichtigkeit für jede Längeneinheit von der Oberfläche nach dem Innern zunimmt; mit diesen Bezeichnungen wird sein

$$a = a_0 + b\,(r - x). \tag{1}$$

Konstruiert man zwei Kugelflächen mit den Radien x und $x + dx$ vom Mittelpunkte der Erde aus, so schliessen dieselben ein Volumen $= 4\pi x^2 dx$ ein, von der gleichförmigen Dichte a. Die Masse dieses Volumenelementes ist also $= 4\pi x^2 dx\,[a_0 + b\,(r - x)]$; folglich die Masse der ganzen Erdkugel

$$4\pi \int_0^r \left[(a_0 + b\,r)\,x^2 dx - b\,x^3 dx\right] = 4\pi \left[(a_0 + b\,r)\frac{r^3}{3} - b\frac{r^4}{4}\right].$$

Die Masse der Erde ist aber auch $= \frac{4}{3}\pi r^3 a_m$. Folglich wird sein

$$4\pi \left[(a_0 + b\,r)\frac{r^3}{3} - b\frac{r^4}{4}\right] = \frac{4}{3}\pi r^3 a_m,$$

und hieraus folgt

$$b = 4\,\frac{a_m - a_0}{r}. \tag{2}$$

Setzt man diesen Wert von b in (1) ein, so folgt die gesuchte Relation

$$a = a_0 + 4\left(1 - \frac{x}{r}\right)(a_m - a_0), \tag{3}$$

oder indem man obige Zahlenwerte für a_0 und a_m einführt,

$$a = 14{,}29 - 11{,}64\,\frac{x}{r}. \tag{4}$$

Setzt man in (4) $x = 0$, so erhält man als Dichte der Masse im Mittelpunkte der Erde $a = 14{,}29$. Diese Dichte ist somit nahe gleich derjenigen des Quecksilbers.

Wird in (3) die Dichte a zu a_m, so folgt

$$x = 0{,}75\,r,$$

d. h. die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse liegt um $\frac{1}{4}$ vom Halbmesser der Erde unter der Erdoberfläche.

261. Bestimmung der Abplattung der Erde aus Gradmessungen. Schneidet man die Erde längs ihrer Rotationsachse AC (Fig. 95), so entsteht als Schnitt ein Meridian CEB. Dieser sei eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Das Verhältnis

$$\frac{a - b}{a} = \alpha \tag{1}$$

wird alsdann die Abplattung der Erde genannt.

Die Koordinaten des Ellipsenpunktes E seien $AF = x$, $EF = y$; dann ist die Gleichung der Ellipse für den Mittelpunkt

$$(2) \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

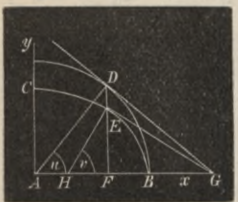
und das Bogenelement der Ellipse $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Beschreibt man über der halben grossen Achse A B einen Kreis B D, verlängert die Ordinate E F bis zum Durchschnitte D mit dem Kreise, zieht den Radius A D und setzt Winkel $DAB = u$, so ist $x = a \cos u$, folglich auch nach (2) $y = b \sin u$. Hieraus folgt

$$(3) \qquad dx = -a \sin u \, du, \qquad dy = b \cos u \, du;$$

$$(4) \qquad ds = du \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}.$$

Fig. 95.



Zieht man die Kreistangente D G bis zum Durchschnitte G mit der Abscissenachse und verbindet E mit G, so wird E G eine Tangente an die Ellipse (§ 51).

Wenn man die Normale E H durch den Punkt E zieht, so nennt man den Winkel E H x = v, den sie mit der grossen Achse bildet, die geographische Breite des Punktes (x, y). Da Tangente E G und Normale E H rechtwinkelig zu einander stehen, so ist nach § 54

$$\operatorname{cotang} v = -\frac{dy}{dx}.$$

Allein aus den beiden Gleichungen (3) folgt auch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotang} u.$$

Setzt man diese Werte von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich, so wird

$$a \operatorname{tang} u = b \operatorname{tang} v.$$

Hieraus folgt

$$\cos^2 u = \frac{a^2 \cos^2 v}{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}; \qquad \sin^2 u = \frac{b^2 \sin^2 v}{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v};$$

$$du = \frac{a\, b\, dv}{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}.$$

Führt man diese Werte in (4) ein, so ergibt sich das Differential des Meridians, ausgedrückt durch die geographische Breite,

$$ds = \frac{a^2 b^2 \, dv}{(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus (1) folgt $b = a(1 - \alpha)$ und, indem man quadriert und das Glied mit α^2 als einer sehr kleinen Grösse vernachlässigt,

$$b^2 = a^2 (1 - 2\alpha).$$

Hierdurch wird

$$\text{(5)} \qquad ds = \frac{a(1-2\alpha)\,dv}{(1-2\alpha\sin^2 v)^{\frac{3}{2}}}.$$

In dieser Gleichung (5) sind a, α, dv konstant. Lässt man v um $dv, 2\,dv, 3\,dv, ..$ wachsen, so nimmt der Nenner von (5) ab; folglich nehmen die entsprechenden Werte des Bogenelementes ds zu. Das nämliche wird stattfinden für eine Summe von Bogenelementen, also für Grade des Meridians. Die Grade des Meridians wachsen somit vom Aequator nach den Polen hin.

Um (5) zu integrieren, entwickele man den Nenner in eine Reihe und vernachlässige alle Glieder von der zweiten Potenz der Grösse α an; man erhält

$$(1-2\alpha\sin^2 v)^{-\frac{3}{2}} = 1 + 3\alpha\sin^2 v,$$

$$(1+3\alpha\sin^2 v)(1-2\alpha) = 1 - 2\alpha + 3\alpha\sin^2 v,$$

und da

$$\sin^2 v = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2v),$$

so ist

$$ds = a\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)dv - \frac{3a\alpha}{2}\cos 2v\,dv.$$

Mithin ergibt sich durch Integration dieser Formel

$$s = a\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)v - \frac{3a\alpha}{4}\sin 2v + C.$$

Nimmt man den Bogen zwischen den Breiten v und v', sodann zwischen den Breiten V und V' und bezeichnet die entsprechenden Bogen durch s' und S', so ist

$$s' = a\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)(v'-v) - \frac{3a\alpha}{4}(\sin 2v' - \sin 2v),$$

$$S' = a\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)(V'-V) - \frac{3a\alpha}{4}(\sin 2V' - \sin 2V).$$

Nun sollen die Unterschiede $v'-v$, $V'-V$ je einen Grad umfassen, also die Bogen s', S' die Längen dieser Grade sein. Da

$$\sin 2v' - \sin 2v = 2\sin(v'-v)\cos(v'+v),$$

so wird

$$s' = a\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)(v'-v) - \frac{3a\alpha}{2}\sin(v'-v)\cos(v'+v).$$

Da der Unterschied $v'-v$ nur einen Grad misst, so kann man $\sin(v'-v)$ mit dem Bogen $v'-v$ vertauschen und $v'+v = 2v_0$ setzen, wo v_0 die mittlere Breite bezeichnet. Dadurch folgt

$$s' = a(v'-v)\left[1-\frac{\alpha}{2}-\frac{3\alpha}{2}\cos 2v_0\right].$$

Wird die Reduktion für S' ebenso durchgeführt, und mit V_0 die mittlere Breite des Bogens S' bezeichnet, so erhält man durch Division, da $v' - v = V' - V$ als Werte von je einem Grade,

$$\frac{S'}{s'} = \frac{1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\cos 2V_0}{1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\cos 2v_0}.$$

Für $V_0 > v_0$ ist auch $S' > s'$, also das Verhältnis $S' : s'$ um eine kleine Grösse β grösser als die Einheit. Man kann mithin setzen

$$\frac{1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\cos 2V_0}{1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\cos 2v_0} = 1 + \beta.$$

Schafft man den Nenner weg und vernachlässigt die beiden Glieder mit dem Produkte $\alpha\beta$, so folgt als gesuchter Wert der Abplattung

$$(6) \qquad \alpha = \frac{2}{3}\frac{\beta}{\cos 2v_0 - \cos 2V_0}.$$

Im Jahre 1 735 machten Bouguer, Condamine und Godin in Peru eine Gradmessung und Picard um 1 669 eine solche in Frankreich bei Amiens, die um 1 739 durch Lacaille verifiziert wurde. Die Resultate dieser Messungen sind

Messung in Peru:	Messung bei Amiens:
$s' = 56\,753$ Toisen,	$S' = 57\,060$ Toisen,
$v_0 = 0^0\,0'$.	$V_0 = 49^0\,54'$.

Hieraus folgt

$$\frac{S'}{s'} = 1{,}005\,41; \qquad \beta = 0{,}005\,41;$$

$$\cos 2v_0 - \cos 2V_0 = 1 + \cos 80^0\,12' = 1{,}170\,209,$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\cdot\frac{0{,}005\,41}{1{,}170\,209} = \frac{1}{324}.$$

Hiernach würden sich die kleine und grosse Achse des elliptischen Meridians wie 323 : 324 verhalten.

XIX. Aus der mechanischen Wärmelehre.

262. Wesen der Wärme. Man denkt sich die Körper zusammengesetzt aus Körper- und Aetheratomen. Die erstern sind dem Gesetze der Schwere unterworfen, ziehen sich also gegenseitig an. Die Aetheratome bilden eine feine Flüssigkeit mit vollkommener Elastizität; ihre Teile stossen sich untereinander ab, werden aber von den Körperatomen angezogen. Dadurch bilden sich um die Körperatome herum

Aetherhüllen, deren Dichtigkeit nach dem Körperatom hin zunimmt. Diese Hüllen halten die Körperatome auseinander. Der Aether ist dem Gesetze der Schwere nicht unterworfen, seine Masse ist gegenüber derjenigen der Körperatome verschwindend klein.

Ein Körperatom, an der Oberfläche des Körpers liegend, kann von aussen her in Bewegung versetzt werden, ohne dass der ganze Körper in Bewegung gerät, so z. B. durch Stösse, durch Reiben der Oberfläche, durch plötzliches Abtrennen einzelner Körperteile mittels Werkzeugen u. s. w. Das in Bewegung geratene Körperatom rückt gegen benachbarte Atome. Dadurch werden die Aetherhüllen dieser Atome zusammengedrückt; in einem bestimmten Augenblicke erreicht die Verdichtung der Hüllen einen höchsten Grad. In diesem Augenblicke gehen die Körperatome auseinander; das erste kehrt zur ursprünglichen Lage zurück, schwingt über diese hinaus, kehrt wieder zurück u. s. w. Es nimmt eine hin- und hergehende Bewegung an mit sehr kleiner Schwingungsweite und grosser Geschwindigkeit. Die Bahn des Atoms kann geradlinig oder krummlinig sein; das Atom kann eine fortschreitende und zugleich eine rotierende Bewegung haben. Die Bahnen der fortschreitenden Bewegung sind nicht parallel untereinander, sondern schneiden sich unter allen denkbaren Winkeln.

In der Regel kommt eine grosse Anzahl von Atomen zugleich in schwingende Bewegung. Diese teilt sich dann zunächst den benachbarten Atomen mit und diese übertragen die Bewegung weiter. Diese Bewegungen hat man wegen der kleinen Bahnen stationäre genannt.

Ein Massenteilchen kann nur in Bewegung geraten, wenn ihm lebendige Arbeit (§ 181) mitgeteilt wird. Ist u die mittlere Geschwindigkeit eines Körperatoms und m seine Masse, so ist die in ihm angesammelte lebendige Arbeit

$$\tfrac{1}{2}\,m\,u^2.$$

Sind alle Körperatome in solcher schwingender Bewegung, so kann die im ganzen Körper enthaltene lebendige Arbeit dargestellt werden durch den Ausdruck

$$\Sigma\,\tfrac{1}{2}\,m\,u^2, \tag{1}$$

worin das Summenzeichen Σ sich über alle Atome des Körpers auszudehnen hat.

Diese in den schwingenden kleinsten Teilen des Körpers enthaltene lebendige Arbeit heisst Wärme des Körpers und zwar fühlbare oder freie Wärme.

Jeder Geschwindigkeit u entspricht eine bestimmte Temperatur. Diese ist also proportional dem Quadrate der mittleren Schwingungsgeschwindigkeit. Hört die schwingende Bewegung auf, d. h. ist $u = 0$, so ist auch die Temperatur $= 0$. Diesen Nullpunkt der Temperaturskala nennt man absoluten Nullpunkt und die Temperaturangaben, von diesem Nullpunkte an gerechnet, absolute Temperatur. Wie gezeigt wird, ist dieser Nullpunkt -273^0 C., d. h. der absolute Nullpunkt liegt um 273 Zentigrade tiefer als der Nullpunkt unserer Thermometer. Zeigt unser Thermometer z. B. 20^0, so ist die entsprechende absolute Temperatur $273^0 + 20^0 = 293^0$ C.

263. Mechanisches Aequivalent der Wärme. Als Einheit der Arbeit nimmt man gewöhnlich das Meter-Kilogramm (*mkg*) an und als Einheit der Wärme die Kalorie, d. h. jene Wärme, die nötig ist, um 1 *kg* Wasser von 0^0 um 1^0 C. zu erwärmen.

Da nun Wärme Arbeit ist, so wird in jeder Kalorie Wärme eine Anzahl Meter-Kilogramme enthalten sein. Diese Anzahl ist durch Versuche festgestellt, sie beträgt 424 *mkg*. Man nennt diese Grösse das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit, oder auch die Joule'sche Zahl, weil sie durch Joule zuerst sicher festgestellt wurde.

Der Sinn dieser Zahl ist folgender: Eine Kalorie Wärme kann erzeugt werden durch 424 *mkg* Arbeit; aber ebenso kann 1 Kalorie Wärme eine Arbeit von 424 *mkg* leisten. Dass dieses Verhältnis ein festes sein muss, ist selbstverständlich, gleichviel, ob durch Arbeit Wärme oder durch Wärme Arbeit entstehe, ob die Umwandlung langsam oder schnell vor sich gehe, in dieser oder jener Substanz u. s. w.

Der reziproke Wert von 424 ist die Wärme, welche 1 *mkg* liefern kann und wird Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit genannt; es gehen also aus 1 *mkg* Arbeit hervor $\frac{1}{424}$ Kalorien.

264. Latente Wärme. Geht Wärme in einen Körper über, so wird seine Temperatur erhöht und sein Volumen verändert. Der Teil Wärme, der die Temperatur steigert, ist die sensible Wärme nach Ausdruck (1); der andere Teil heisst latente Wärme. Diese zerlegt sich im allgemeinen in zwei Teile: Der eine überwindet die Molekularkräfte, die der Volumenänderung entgegen wirken, und heisst innere latente Wärme; der andere überwindet äussere Kräfte, die bei der Zunahme des Volumens zu überwinden sind, und heisst äussere latente Wärme.

Es sei Q die Wärme, die eine Gewichtseinheit Stoff aufnehme. Dadurch steige dessen Temperatur um t Grade; dann ist die entstandene fühlbare Wärme $= c\,t$, wenn c die spezifische Wärme des Körpers bezeichnet. Die auf latente Wärme verwendete Arbeit sei: auf die innere J, auf die äussere L; dann entspricht diesen Arbeiten eine Wärmemenge $= (J + L) : 424$. Daher

$$(2) \qquad Q = c\,t + \frac{J}{424} + \frac{L}{424}.$$

Nicht bei allen Vorgängen treten die drei Glieder rechts auf. Wenn z. B. ein permanentes Gas sein Volumen, seine Dichtigkeit und Temperatur ändert, so ist keine Arbeit auf die Aenderung des Molekularzustandes zu verwenden, es wird daher $J = 0$.

Wird dieses Gas ausserdem erwärmt, ohne dass sich sein Volumen ändert, so ist auch keine äussere Arbeit nötig, daher auch $L = 0$. Es verbleibt daher nur noch das erste Glied $c\,t$.

Wird Eis von 0^0 in Wasser von 0^0 verwandelt, so ist $t = 0$ und es kann auch $L = 0$ gesetzt werden, da das Volumen sich nicht wesentlich ändert. Daher bleibt nur das zweite Glied mit J bestehen. Da zum Schmelzen von 1 *kg* Eis 79 Kalorien nötig sind, so wird auf das Schmelzen, d. h. auf die Aenderung des Aggregatzustandes eine Arbeit verwendet

$$J = 424 \cdot 79 \; mkg = 33\,496 \; mkg.$$

Eine Pferdekraft leistet 75 *mkg* Arbeit in der Sekunde. Diese Kraft hätte also zum Schmelzvorgange eine Zeit zu arbeiten von

$$33\,496 : 75 = 447 \text{ Sekunden.}$$

Wird Wasser von 100^0 in Dampf von derselben Temperatur verwandelt, so ist $t = 0$ und es verbleiben die beiden andern Glieder. Die Arbeit J löst den Aggregatzustand auf, die Arbeit L schafft dem Dampfe, der sich bildet, den nötigen Raum zu seiner Existenz.

265. Ableitung der Joule'schen Zahl. Man denke sich 1 *kg* atmosphärische Luft in einem Cylinder durch einen Kolben abgeschlossen. Wird nun diese Luft erwärmt um 1^0, so aber, dass der Druck der Luft der gleiche bleibt, so wird der Kolben unter diesem Drucke ausweichen; also ist eine äussere Arbeit zu verrichten. In der letzten Gleichung (2) wird $J = 0$ und $t = 1^0$. Ferner bezeichnet c die spezifische Wärme der Luft für konstantes Volumen und Q diejenige für konstanten Druck. Diesen letzteren Wert wollen wir mit c' bezeichnen und die Zahl 424, die als Unbekannte aufzufassen ist, mit E; so folgt aus (2)

$$(3) \qquad E = \frac{L}{c' - c}.$$

Nun ist $c' = 0{,}237\,7$; $c = 0{,}168\,6$. Um L zu finden, nehme man die ursprüngliche Temperatur der Luft $= 0^0$ und den Druck = 1 Atmosphäre an; es ist alsdann das Volumen von 1 *kg* derselben $1 : 1{,}293\,2 = 0{,}773\,27$ *cbm*, da das Gewicht von 1 *cbm* Luft $1{,}293\,2$ *kg* beträgt. Gibt man dem Cylinder 1 *qm* Grundfläche, so wird seine Höhe $= 0{,}773\,27$ *m*. Diese Höhe nimmt bei Erwärmung um 1^0 zu um $0{,}003\,67 \cdot 0{,}773\,27 = 0{,}002\,837\,8$ *m*, da $0{,}003\,67$ als Ausdehnungskoeffizient zu betrachten ist. Also legt der Kolben während der Erwärmung den Weg $0{,}002\,837\,8$ *m* zurück mit einem Drucke $= 10\,330$ *kg*. Diese Werte geben $L = 10\,330 \cdot 0{,}002\,837\,8 = 29{,}3$ *mkg*. Daher wird

$$E = \frac{29{,}3}{0{,}069\,1}\,mkg = 424\,mkg.$$

Diese Methode rührt von Robert Mayer her; er gab den Wert von E im Jahre 1842 zu 365 *mkg* an. Es standen ihm aber die richtigen Werte von c' und c noch nicht zur Verfügung.

266. Gesetz von Gay-Lussac. Wenn p_0, v_0 und t_0 Druck, Volumen und Temperatur eines abgeschlossenen Gaskörpers und p, v und t dieselben Grössen für einen zweiten Zustand desselben Gaskörpers bezeichnen, so findet unter diesen Grössen folgende Beziehung statt.

Man bringe das Gas für beide Zustände auf 0^0 Temperatur, ohne dass ihre Spannung geändert werde. Dabei gehe v_0 in V_0 und v in V über. Auf diese Zustände wende man das Mariotte'sche Gesetz an, wonach bei gleicher Temperatur die Volumina sich umgekehrt verhalten wie die Drucke. Daher wird $V_0 : V = p : p_0$ oder

$$(4) \qquad \frac{pV}{p_0 V_0} = 1.$$

Erwärmt man nun das Gas für den ersten Zustand auf t_0 Grade, so nimmt sein Volumen zu im Verhältnis von $1:(1+\alpha t_0)$, wo α den Ausdehnungskoeffizienten für das Gas bezeichnet. Ebenso erwärme man das Gas des zweiten Zustandes auf t Grade. Diesen Zustandsänderungen entspricht Gleichung (4), wenn man ihre Zähler mit $1+\alpha t$ und ihre Nenner mit $1+\alpha t_0$ multipliziert und sodann $V(1+\alpha t)$ durch v und $V_0(1+\alpha t_0)$ durch v_0 ersetzt. Man erhält

$$\frac{p\,v}{p_0\,v_0} = \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_0}.$$

Diesen Zusammenhang stellt das Gay-Lussac'sche Gesetz dar. Dividiert man Zähler und Nenner rechts durch $\alpha = 0{,}003\,67$ und beachtet, dass $1:\alpha = 273$, so geht die letzte Gleichung über in

$$(5) \qquad \frac{p\,v}{p_0\,v_0} = \frac{273+t}{273+t_0} \quad \text{oder} \quad \frac{p\,v}{273+t} = \frac{p_0\,v_0}{273+t_0}.$$

Nun sind die Glieder der Summe $273+t$ gleichartig; also wird auch 273 eine Temperatur sein. Die Temperatur kann daher abnehmen um $273+t$, also um 273^0 unter den Nullpunkt der gebräuchlichen Thermometerscala. Diese Temperatur, von -273^0 an aufwärts gerechnet, heisst absolute Temperatur.

Aus der zweiten Form dieser Gleichung erkennt man, dass die Grösse p v, dividiert durch $273+t$, eine Konstante ist, die mit R bezeichnet werde.

Setzt man zur Bestimmung derselben $t_0 = 0$; $p_0 = 10\,330$ *kg* und für atmosphärische Luft $v_0 = 0{,}773\,27$ (§ 265), so wird für diese Gasart

$$R = \frac{p_0\,v_0}{273} = 29{,}3.$$

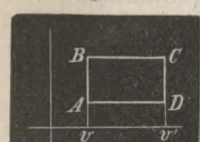
Es ist das die in Gleichung (3) vorkommende Arbeitsgrösse L. Aus (5) folgt nun das gesuchte Gesetz

$$(6) \qquad p\,v = R\,(273+t) = R\,T,$$

worin T die absolute Temperatur bezeichnet.

267. Kreislauf eines Gases mit Zustandsänderungen bei konstantem Volumen und konstantem Drucke. Stellt man die Gleichung (6) durch rechtwinkelige Koordinaten geometrisch dar, indem man v als Abscisse und p als Ordinate aufträgt (Fig. 96), so entsteht für ein gleichbleibendes t eine gleichseitige Hyperbel.

Fig. 96.



Gesetzt, die Werte v und p entsprechen dem Kurvenpunkte A. Lässt man nun bei gleichbleibendem v die Temperatur wachsen, so rückt A parallel zur Ordinatenachse vor und lässt man bei gleichbleibendem p die Temperatur zunehmen, so rückt A parallel zur Abscissenachse vor.

Wenn durch solche Temperaturänderungen A die Seiten eines Rechteckes A B C D beschreibt, dessen eine Seite A B parallel zur Ordinatenachse liegt, so wird das Gas nach Vollendung des Kreislaufes die ursprüngliche Temperatur t und Spannung p haben.

Der Kreislauf kann wie folgt durchgeführt werden. Es gelange A nach B, es bleibe also v konstant. Dieser Uebergang ist nur möglich, wenn dem Gase Wärme zugeführt wird; dabei steige t auf t' und p auf p'. Hierauf werde der Weg BC durchlaufen, es bleibe also p' konstant. Auch bei diesem Uebergange muss dem Gase so viel Wärme zugeführt werden, dass v zu v' und t' zu t'' heranwachse. Nun werde dem Gase bei gleichbleibendem Volumen Wärme entzogen; der Punkt beschreibe die Seite CD, es sinke t'' auf t''', während die Spannung zu p wird. Beim Rückgange von D nach A bleibt p konstant, v' nimmt ab auf v, t''' auf t. Auch dieser Vorgang ist nur möglich, wenn dem Gase Wärme entzogen wird.

Die zu diesem Kreislaufe benötigte Wärmemenge ergibt sich wie folgt. Die letzte Gleichung (6), angewendet auf die vier Eckpunkte des Rechteckes, wird zu

$$\begin{aligned} &\text{A.}\quad p\,v = R(273 + t), &&\text{C.}\quad p'\,v' = R(273 + t''),\\ &\text{B.}\quad p'\,v = R(273 + t'), &&\text{D.}\quad p\,v' = R(273 + t'''). \end{aligned}$$

Vollzieht man die Subtraktion (B) — (A), (C) — (B) etc., so kommt

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &v\,(p' - p) = R\,(t' - t), &&v'\,(p - p') = R\,(t''' - t''),\\ &p'\,(v' - v) = R\,(t'' - t'), &&p\,(v - v') = R\,(t - t'''). \end{aligned}\right.$$

Beim ersten Uebergange werde dem Gase die Wärmemenge q zugeführt, beim zweiten q'. Es sei ferner 1 *kg* das Gewicht des Gaskörpers; ferner dessen spezifische Wärme bei gleichem Drucke c' und bei gleichem Volumen c; dann wird für diese zwei Uebergänge

$$(2)\qquad q = c\,(t' - t), \qquad q' = c'\,(t'' - t').$$

Bei den beiden letzten Uebergängen wird dem Gase Wärme entzogen; der Entzug betrage beim dritten q'', beim vierten q'''; dann wird

$$(3)\qquad q'' = c\,(t'' - t'''); \qquad q''' = c'\,(t''' - t).$$

Führt man die Werte von t' — t, t'' — t' etc. aus (1) in (2) und (3) ein, so folgt, indem man den reziproken Wert von R mit r bezeichnet,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &q = r\,c\,v\,(p' - p), &&q' = r\,c'\,p'\,(v' - v),\\ &q'' = r\,c\,v'\,(p' - p), &&q''' = r\,c'\,p\,(v' - v). \end{aligned}\right.$$

Die Wärmezuschüsse sind als positiv, die Wärmeentzüge als negativ anzusehen. Bezeichnet Q ihre algebraische Summe, so ist

$$Q = (q - q'') + (q' - q''').$$

Allein die Differenzen in diesen Klammern sind vermöge (4)

$$q - q'' = -\,r\,c\,(v' - v)\,(p' - p), \qquad q' - q''' = r\,c'\,(v' - v)\,(p' - p).$$

Daher

$$(5)\qquad Q = r\,(c' - c)\,(v' - v)\,(p' - p).$$

Dieser Wert von Q kann nicht zu Null, auch nicht negativ werden, weil die Differenzen in den Klammern, so lange wenigstens die Vorgänge dem Rechtecke entsprechen, positive Werte haben. Also wird dem Gase mehr Wärme zugeführt als entzogen. Der Mehrbetrag Q verwandelt sich in Arbeit. In der That wird bei den beiden ersten

Uebergängen eine Arbeit verrichtet $= p'(v' - v)$, weil das Gas, in einem Cylinder mit der Grundfläche 1 eingeschlossen gedacht, den Kolben mit einem Drucke p' fortschiebt um den Weg $v' - v$. Beim Rückgange wird eine Arbeit verbraucht $= p(v' - v)$, weil der Kolben gedrückt wird mit p und dabei den Weg $v' - v$ durchläuft. Die Differenz dieser Arbeiten ist

$$(p' - p)(v' - v)$$

und daher nichts anderes als die Rechtecksfläche, die $v' - v$ zur Grundfläche und $p' - p$ zur Höhe hat.

Nun vermöge eine Kalorie Wärme (§ 265) eine Arbeit E zu verrichten; dann ist die Arbeit von Q Kalorien $= Q E$; daher

$$Q E = (p' - p)(v' - v).$$

Dividiert man diese Gleichung durch Gleichung (5), so folgt als Wert des mechanischen Aequivalentes der Wärme

$$E = \frac{R}{c' - c},$$

also derselbe Wert wie in § 265.

Erfolgt der Uebergang nur längs der beiden ersten Seiten des Rechteckes, so ist nur Wärmezuschuss nötig. Dieser beträgt

$$Q = q + q' = r[c\,v\,(p' - p) + c'\,p'\,(v' - v)].$$

Sind die Rechteckseiten unendlich klein, so kann $p' - p$ als das Differential von p und $v' - v$ als das von v angesehen werden. Die letzte Gleichung geht daher über in

$$d\,Q = r[c\,v\,d\,p + c'(p + d\,p)\,d\,v].$$

Hierin kann aber das Glied mit $d\,p\,d\,v$ vernachlässigt werden gegen die andern in der Klammer. Daher wird

$$(6) \qquad d\,Q = r(c\,v\,d\,p + c'\,p\,d\,v).$$

Bei dieser Auffassung schreitet A um unendlich kleine Intervalle vor in der Richtung einer Kurve (Druckkurve), die durch die Punkte A und C geht und deren Variable v und p sind.

Für den Uebergang längs eines endlichen Bogens dieser Kurve, von p, v (A) zu p', v' (C), gibt das Integral von (6) die erforderliche Wärmemenge. Diese ist daher

$$(7) \qquad Q = r \int_{v}^{v'} (c\,v\,d\,p + c'\,p\,d\,v).$$

Es durchlaufe der Punkt C die dritte und vierte Seite des Rechtecks; dann wird die Wärmemenge Q', die dem Gase entzogen werden muss, sein

$$Q' = q'' + q''' = r[c\,v'(p' - p) + c'\,p\,(v' - v)].$$

Wird wieder $p' - p = d\,p$ und $v' - v = d\,v$, so geht diese Gleichung über in

$$d\,Q' = r[c(v + d\,v)\,d\,p + c'\,p\,d\,v]$$

und nach Weglassung des Gliedes mit $d\,p\,d\,v$ und angedeuteter Integration in

$$Q' = r \int_{v'}^{v} (c\,v\,d\,p + c'\,p\,d\,v).$$

Dieser Wert von Q' ist gleich dem von Q in Gleichung (7), jedoch mit entgegengesetztem Zeichen, weil die Integrationsgrenzen vertauscht sind (§ 93). Durchläuft also der Kurvenpunkt die Druckkurve rückwärts, so muss dem Gase ebensoviel Wärme entzogen werden, als ihm beigebracht werden muss, wenn er vorwärts schreitet.

Es sollen nun spezielle Fälle betrachtet werden.

I. Der Uebergang erfolge vom Punkte A nach B; es sei also v konstant.

Daher wird in Gleichung (6) $d\,v = 0$ und die Integration dieser Gleichung gibt

$$Q = r\,c\,v\,(p' - p).$$

Die Wärme Q wird also nur auf die Zunahme $p' - p$ des Druckes verwendet.

II. Der Uebergang finde von B nach C statt; es bleibe also p konstant.

Da in Gleichung (7) $d\,p = 0$ ist, so gibt die Integration

$$Q = r\,c'\,p\,(v' - v).$$

Die Wärme Q wird also ausschliesslich auf die Ausdehnung des Volumens von v auf v' verwendet.

III. Der Uebergang vom Punkte (p, v) zum Punkte (p', v') erfolge so, dass dem Gase weder Wärme zugeführt noch ihm entzogen werde.

Ist dabei $v' > v$, so entspricht diesem Vorgange eine Expansion des Gases: das Volumen v geht in das grössere v' über und die Spannung sinkt. Wenn dagegen $v' < v$, so entspricht diesem Vorgange eine Kompression des Gases: das Volumen nimmt ab und die Spannung steigt.

Da in beiden Fällen $Q = 0$ ist, so muss in Gleichung (7) auch die Grösse hinter dem Integralzeichen $= 0$ sein. Also wird

$$c\,v\,d\,p + c'\,p\,d\,v = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung $\frac{c'}{c} = n$ und sondert die Variabeln, so kommt

$$\frac{d\,p}{p} + n\,\frac{d\,v}{v} = 0$$

und durch Integration

$$l\,p + n\,l\,v = l\,C,$$

wo $l\,C$ die Konstante der Integration bezeichnet. Da hieraus $l\,p\,v^n = l\,C$, so folgt

$$p\,v^n = C.$$

Mithin ist das Produkt $p v^n$ konstant, welche zusammengehörende Werte von p und v auch eingesetzt werden. Daher die Gleichung

$$p v^n = p' v'^n$$

oder in der gewöhnlichen Form

$$\frac{p}{p'} = \left(\frac{v'}{v}\right)^n. \tag{8}$$

Diese Gleichung enthält das Poisson'sche Gesetz (§ 179, b) über den Zusammenhang zwischen Druck und Volumen des Gases, wenn es seinen Zustand ändert, ohne dass ihm Wärme zugeführt oder entzogen wird. Diese Zustandsänderung heisst adiabatisch und die aus Gleichung (8) hervorgehende Kurve adiabatische Kurve.

Eliminiert man aus (6) von § 266 und (8) zuerst p, p', sodann v, v', so erhält man folgende Relationen

$$\frac{T}{T_,} = \left(\frac{v'}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

die mit den Aenderungen des Druckes oder des Volumens auch diejenige der Temperatur zeigt.

Die Arbeit, die auf die Zustandsänderung verwendet werden muss, ist in Gleichung (5) des § 179 dargestellt.

IV. Der Uebergang von den Werten (p, v) zu den Werten (p', v') erfolge bei konstanter Temperatur. Dann ist nach (6) von § 266 das Produkt p v konstant; daher sein Differential

$$v\,dp + p\,dv = 0.$$

Vermöge dieser Relation wird die Klammergrösse in (6) zu

$$(c' - c)\,p\,dv. \tag{9}$$

Allein nach (6) von § 266 ist auch

$$p = \frac{R(273 + t)}{v}.$$

Vermittelst dieses Wertes von p geht (9) über in

$$R(c' - c)(273 + t)\frac{dv}{v},$$

und die Gleichung (6) in

$$dQ = \pm \frac{c' - c}{R} \cdot R(273 + t)\frac{dv}{v}. \tag{10}$$

Das doppelte Zeichen rechts ist anzuwenden, weil dQ für Expansion positiv, für Kompression negativ wird. Denn wenn ein Gas sich ausdehnt, so verrichtet es Arbeit; es wird ihm also ein entsprechender Teil Wärme entzogen. Also wird seine Temperatur sinken. Soll diese nun aber, der Voraussetzung nach, nicht sinken, so muss ihm Wärme zugeführt werden und zwar gerade jener Betrag, der sich in Arbeit umsetzt. Umgekehrt verhält es sich bei der Kompression. Hier wird Arbeit auf die Zusammendrückung verwendet. Dadurch steigt die

Temperatur des Gases. Soll sie nun nicht steigen, so muss genau soviel Wärme dem Gase entzogen werden, als ihm durch die Arbeit mitgeteilt wird. Nun ist der erste Bruch rechts in (10) der reziproke Wert von E; daher

$$dQ = \pm \frac{R}{E}(273 + t)\frac{dv}{v}.$$

Da hierin t konstant ist, so erhält man als Wärmeaufwand:

für die Expansion

$$Q = \frac{R}{E}(273 + t)\int_v^{v'} \frac{dv}{v} = \frac{R}{E}(273 + t)\, l\, \frac{v'}{v},$$

für die Kompression

$$Q' = -\frac{R}{E}(273 + t)\int_v^{v'} \frac{dv}{v} = \frac{R}{E}(273 + t)\, l\, \frac{v}{v'}.$$

Da die Grösse $R(273 + t)$ durch $p v$ ersetzt werden kann, so werden die vorstehenden Wärmemengen

$$Q = \frac{pv}{E}\, l\, \frac{v'}{v}; \quad Q' = \frac{pv}{E}\, l\, \frac{v}{v'},$$

und die Arbeiten, die der Expansion und Kompression entsprechen,

$$QE = pv\, l\, \frac{v'}{v}; \quad Q'E = pv\, l\, \frac{v}{v'}.$$

Die letzte dieser Gleichungen ist in § 180, a, dargestellt.

Die unter IV aufgeführten Vorgänge heissen isothermische; sie erfolgen nach dem Gesetze von Mariotte, die Druckkurve der Gase ist daher die gleichseitige Hyperbel.

268. Carnot'scher Kreislauf. Ein abgeschlossener Stoff macht einen Kreislauf durch, indem er unter dem Einflusse von Wärme verschiedene aufeinander folgende Zustände annimmt und am Schlusse wieder in den Anfangszustand zurückkehrt.

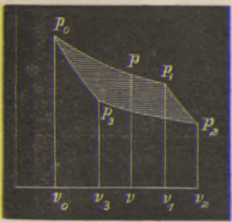
Unter den vielen denkbaren Kreisläufen zeichnet sich derjenige aus, den Sadi Carnot 1824 vorgeschlagen hat, und zwar deswegen, weil er, zur Gewinnung von Arbeit benützt, ein Minimum von Wärme erfordert, also den höchsten Wirkungsgrad der Wärme liefert.

Der Stoff sei in einem Cylinder eingeschlossen. Derselbe besitze im Anfangszustande ein Volumen v_0, einen Druck p_0 und eine absolute Temperatur T_0 (Fig. 97). Man führe dem Stoffe von aussen her eine Wärme Q_0 zu, so aber, dass seine Temperatur konstant bleibt, er also einen isothermischen Zustand durchläuft; es gehe dabei das Volumen in v_1 und der Druck in p_1 über, es sei also $p_0 p_1$ die Drucklinie dieses Vorganges.

Hierauf lasse man den Stoff einen adiabatischen Vorgang durchmachen, indem man dem Stoffe Wärme weder zuführt noch entzieht. Das Volumen dehne sich aus auf v_2; der Druck sinke auf p_2 und die Temperatur auf T_1.

Nunmehr drücke man den Stoff stetig zusammen, so aber, dass er einen **isothermischen** Zustand durchläuft bis sein Volumen v_3 und sein Druck p_3 wird. Man erreicht dies, wenn man dem Stoffe vorweg jene Wärme Q_1, die ihm durch den Kolbendruck mitgeteilt wird, nach aussen hin ableitet. Dabei soll aber die Druckkurve $p_2 p_3$ nicht beliebig lang, sondern so gewählt sein, dass ein neuer **adiabatischer** Vorgang die Druckkurve $p_3 p_0$ liefert, d. h. den Stoff in den Anfangszustand zurückführt. Damit ist der Kreislauf vollendet.

Fig. 97.



Die Arbeiten, die während der vier Vorgänge verrichtet wurden, sind in der Figur durch Flächen dargestellt und zwar: während des ersten Vorganges durch $v_0 p_0 p_1 v_1$, während des zweiten durch $v_1 p_1 p_2 v_2$, während des dritten durch $v_2 p_2 p_3 v_3$ und während des vierten durch $v_3 p_3 p_0 v_0$. Die beiden ersten Arbeiten sind produktiv, die beiden letztern verbrauchen wieder einen Teil davon, so dass die schraffierte Fläche die Arbeit angibt, die während des Kreislaufes gewonnen wird. Während des ersten Vorganges wurde die Wärme Q_0 zugeführt und während des dritten die Wärme Q_1 abgeleitet; die auf den Kreislauf verwendete nützliche Wärme ist daher $Q_0 - Q_1$ und die daraus entstandene Arbeit $E(Q_0 - Q_1)$. Daher die Gleichung

$$(1) \qquad E(Q_0 - Q_1) = \text{Fläche}\; p_0\, p_1\, p_2\, p_3.$$

Die Arbeit $E(Q_0 - Q_1)$ ist abhängig von den Temperaturen T_0 und T_1, wie auch der Stoff im Cylinder beschaffen sein mag.

Diese Abhängigkeit mag hier gezeigt werden für den Fall, dass der Stoff ein permanentes Gas ist.

Es bezeichne v ein im Diagramm liegendes Volumen v und p den zugehörenden Druck. Nimmt v um dv zu, so kann man annehmen, es bleibe während dieser Aenderung p konstant; daher entsteht das Arbeitselement $p\,dv$. Liegt der Punkt (p, v) auf der obern isothermischen Linie, so ist $p\,dv$ ein Teil jener Arbeit, die während der ersten Zustandsänderung verrichtet wurde; liegt aber der Punkt (p, v) auf der untern isothermischen Kurve, so ist $p\,dv$ ein Teil der Arbeit während der dritten Zustandsänderung. Daher die Arbeiten für diese beiden isothermischen Vorgänge

$$(2) \qquad E\,Q_0 = \text{Fläche}\; p_0\, p_1\, v_1\, v = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv;$$

$$(3) \qquad E\,Q_1 = \text{Fläche}\; p_2\, p_3\, v_3\, v_2 = \int_{v_3}^{v_2} p\,dv.$$

Allein für beide Vorgänge gelten auch die Gleichungen

$$p\,v = R\,T_0 \quad \text{und} \quad p\,v = R\,T_1$$

des **Gay-Lussac**'schen Gesetzes (6), § 266. Führt man die Werte von p, die diese Gleichungen geben, in (2) und (3) ein, so folgt, da R und T konstant sind,

$$E Q_0 = \int_{v_0}^{v_1} R T_0 \frac{dv}{v} = R T_0 \, l \frac{v_1}{v_0};$$

$$E Q_1 = \int_{v_3}^{v_2} R T_1 \frac{dv}{v} = R T_1 \, l \frac{v_2}{v_3},$$

und durch Division dieser Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{T_0}{T_1} \cdot \frac{l \frac{v_1}{v_0}}{l \frac{v_2}{v_3}}.$$

Nun sind aber die Verhältnisse, von denen in (4) die Logarithmen zu nehmen sind, einander gleich. Denn man erhält für den ersten adiabatischen Vorgang

nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze $\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} = \frac{T_0}{T_1}$

und nach dem Poisson'schen Gesetze $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^n$;

folglich durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen

$$(5) \qquad \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{n-1} = \frac{T_0}{T_1};$$

und für den zweiten adiabatischen Vorgang

nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze $\frac{p_0 v_0}{p_3 v_3} = \frac{T_0}{T_1}$

und nach dem Poisson'schen Gesetze $\frac{p_3}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v_3}\right)^n$;

daher durch Elimination der Drucke aus beiden Gleichungen

$$(6) \qquad \left(\frac{v_3}{v_0}\right)^{n-1} = \frac{T_0}{T_1}.$$

Aus (5) und (6) folgt nun aber

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_0}; \text{ also auch } \frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_3}.$$

Wegen dieser letzten Gleichung geht (4) über in

$$(7) \qquad \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{T_0}{T_1}.$$

Diese Gleichung enthält nun die Carnot'sche Proportion. Sie lautet: Die Wärme, die während des Kreislaufes dem Stoffe zugeführt wird, verhält sich zur Wärme, die ihm entzogen wird, wie die Temperatur während der Periode der Wärmezuleitung zur Temperatur während der Wärmeableitung.

Diese Proportion gilt auch für andere Stoffe als permanente Gase, z. B. für solche, die während des Kreislaufes teilweise den Aggregatzustand ändern, wie dies beim Wasserdampfe immer der Fall ist.

Aus Gleichung (7) folgt, indem man auf beiden Seiten 1 abzieht,

$$(8) \qquad \frac{Q_0 - Q_1}{Q_0} = \frac{T_0 - T_1}{T_0}.$$

Es ist aber $Q_0 - Q_1$ die beim Kreislaufe nützlich gewordene Wärme und $T_0 - T_1$ die Temperatursenkung. Folglich verhält sich die nützliche Wärme zur aufgewendeten Wärme wie die Temperatursenkung zur Anfangstemperatur.

Der Bruch links in (8) heisst Wirkungsgrad der Wärme; daher wird auch der zweite Bruch dasselbe bedeuten. Allein dieser gibt den Ausdruck

$$1 - \frac{T_1}{T_0}.$$

Daher wird der Wirkungsgrad gross, wenn wenig von der Einheit abgezogen werden muss, d. h. wenn T_0 gross und T_1 klein ist. Bei kalorischen Maschinen muss also der Kreislauf mit hoher Temperatur beginnen und mit niederer Temperatur schliessen.

Man kann sich nun einen geschlossenen Kreislauf denken, bei dem die Wärme Q_0 bei wachsender Temperatur zugeleitet und die Wärme Q_1 bei wechselnder Temperatur abgeleitet wird. Dabei gibt es aber immer eine höchste Temperatur T_0 und eine niederste T_1. Jene teilweisen Aenderungen, denen keine so weit auseinander gelegenen Grenztemperaturen entsprechen, geben einen kleinern Wirkungsgrad. Man wird also, bei gegebenem Wärmeaufwande, die obere Grenztemperatur T_0 so lange aufrecht erhalten als möglich, ebenso die untere T_1. Dann aber kann der Uebergang von einer Grenztemperatur zur andern nur ein adiabatischer sein.

Die ganze mechanische Wärmetheorie beruht auf dem Satze von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit und auf der Carnot'schen Proportion. Man nennt sie daher auch die beiden Fundamentalgesetze dieser Theorie.

269. Anwendung des Carnot'schen Gesetzes auf Wasserdampf. Der Stoff, der im Cylinder eingeschlossen ist, sei Wasser. Bei Beginn des Kreislaufes habe dasselbe eine Temperatur T und einen Druck p. Das Wasser besitzt also bereits seine fühlbare Wärme. Führt man ihm nun Wärme zu, so aber, dass die Temperatur dieselbe bleibt, so wird auch der Druck derselbe bleiben. Mithin wird die isothermische Linie geradlinig und parallel zur Abscissenachse.

Hört nunmehr die Zuleitung von Wärme auf, so kann im Cylinder vorhanden sein: eine Mischung von Wasser und Dampf, gesättigter Dampf allein oder überhitzter Dampf, je nach der Wärmemenge, die zugeleitet worden. Es beginne nun der adiabatische Vorgang (ohne Wärmezuleitung und ohne Wärmeableitung), bis die Temperatur auf T_1 und der Druck auf p_1 gesunken sei.

Von hier an trete ein isothermischer Vorgang ein mit der Temperatur T_1; dann wird auch die Spannung p_1 bleiben. Das ist nur möglich, wenn dem Stoffe im Cylinder Wärme entzogen wird und zwar so viel, als ihm Wärme durch das Zusammendrücken mittels des Kolbens übertragen wird; dann wird auch diese isothermische Linie parallel zur Abscissenachse.

Endlich werde der Kreislauf durch eine zweite adiabatische Linie geschlossen; dann wird sich während derselben aller Stoff im Cylinder in Wasser verwandeln von der Anfangstemperatur T.

Die von den vier Linien eingeschlossene Fläche gibt die gewonnene Arbeit an. Wäre sie ein Parallelogramm, so könnte man sie berechnen aus der Länge und Breite. Die Breite ist die Differenz $p - p_1$; dagegen kann als Länge nur dann die obere isothermische Linie angenommen werden, wenn die Breite sehr klein ist. Man nehme daher $p - p_1$ unendlich klein, also $= dp$ an. Dann wird die Länge dargestellt durch den Weg u, den der Kolben während der vollständigen Verdampfung durchläuft. Es soll also gerade so viel Wärme zugeleitet werden, dass alles Wasser sich in gesättigten Dampf verwandelt. Denkt man sich den Querschnitt des Cylinders $= 1$, so ist das vom Kolben beschriebene Volumen $= 1 \cdot u$; also kann u auch als Volumen aufgefasst werden. Die Rechtecksfläche ist nun $= u\,dp$ und die entsprechende Wärme $u\,dp : E$. Diese Grösse ist das erste Glied der Carnot'schen Proportion (8), S. 294, also die Grösse $Q_0 - Q_1$.

Dem Wasser im Cylinder muss zur Verdampfung nur latente Wärme (S. 284) zugeführt werden. Diese kann bestimmt werden aus den empirischen Formeln

$$(1) \qquad q = t + 0{,}000\,02\,t^2 + 0{,}000\,000\,3\,t^3,$$

$$(2) \qquad Q = 606{,}5 + 0{,}305\,t,$$

worin bezeichnen: Q die Wärme, die 1 *kg* Wasser von 0^0 zugeführt werden muss, um bei t Zentigraden in Dampf verwandelt zu werden, und q die fühlbare Wärme, d. h. jene, die das Wasser enthalten muss unmittelbar vor Beginn des Verdampfens.

Dann ist $Q - q$ die latente Wärme des Dampfes und bildet das zweite Glied der Carnot'schen Proportion. Der Spannungsabnahme dp entspricht eine Temperaturabnahme dT; daher geht Gleichung (8) von § 268 über in

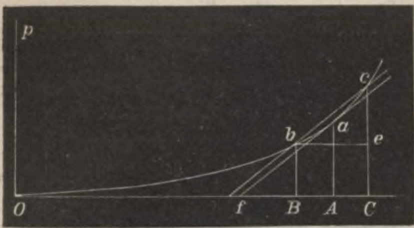
$$\frac{u\,dp}{E} : (Q - q) = dT : T,$$

woraus als Volumen u folgt

$$(3) \qquad u = \frac{E\,(Q - q)}{T} \cdot \frac{dT}{dp}.$$

Ueber den Zusammenhang zwischen t und p hat Regnault Versuche gemacht, die von -32 bis $+230$ Zentigraden reichen und Formeln angegeben, aus denen p berechnet werden kann, wenn man t kennt. Die eine dieser Formeln umfasst die Temperaturen von -32^0 bis 0^0, die andere diejenigen von 0^0 bis 100^0 und die dritte die von 100^0 bis 230^0. Aus diesen Formeln kann durch Differentiation das Verhältnis $\frac{dT}{dp}$ abgeleitet werden. Allein die Formeln sind kompliziert und dadurch unbequem. Dafür werde folgendes Annäherungsverfahren angewendet.

Fig. 98.



Stellt man den Zusammenhang zwischen Temperatur und Druck graphisch dar (Fig. 98), so entsteht eine Kurve O b c, die Druckkurve des gesättigten Dampfes genannt wird. Es sei O A = T und A a = p. Legt man durch den Kurvenpunkt a eine Tangente a f, so ist das in Gleichung (3) erhaltene Differentialverhältnis

$$\frac{d\,T}{d\,p} = \frac{A\,f}{A\,a}. \tag{4}$$

Macht man nun A B = A C, zieht die Ordinaten B b und C c, legt durch die Kurvenpunkte b und c eine Sekante b c, so wird diese um so mehr parallel zur Tangente werden, je näher B und C an A liegen. Nun schreitet die **Regnault**'sche Drucktabelle vor von Grad zu Grad. Nimmt man nun O A an, so wird als kleinster Wert zu wählen sein $A\,B = 1^0$, also $B\,C = 2^0$. Zieht man b e parallel zur Abscissenachse, so ist c e der Unterschied aus den Ordinaten C c und B b, die aus der Tabelle entnommen werden. Daher das Differentialverhältnis (4) sehr nahe = b e : c e.

Es sei, um die numerische Auswertung von u zu zeigen, das Volumen von 1 *kg* gesättigten Dampfe von 1 Atmosphäre Druck zu bestimmen.

Es ist $t = 100^0$; also nach (1) und (2)

$$q = 100{,}5; \quad Q = 637; \quad Q - q = 536{,}5 \text{ Kal.}$$

Ferner für 1 Atmosphäre Druck

$$T = 273^0 + 100^0 = 373^0; \quad p = 10\,330 \ kg$$

und für 101 und 99 Zentigraden nach **Regnault**

$$C\,c = 1{,}036\,3; \quad B\,b = 0{,}964\,9; \quad c\,e = 0{,}071\,4 \text{ Atm.}$$

Folglich diese Druckdifferenz für je 1 *qm* Fläche

$$c\,e = 10\,330 \cdot 0{,}071\,4.$$

Setzt man diese Werte in (3) ein, so ergibt sich

$$u = \frac{424 \cdot 536{,}5}{373} \cdot \frac{2}{10\,330 \cdot 0{,}071\,4} \ cbm = 1{,}653 \ cbm.$$

Daher der Raum, den dieser Dampf einnimmt,

$$0{,}001 \ cbm + 1{,}653 \ cbm = 1{,}654 \ cbm.$$

Nachdem nunmehr das spezifische Dampfvolumen berechnet ist, kann auch die Zerlegung der latenten Wärme des Dampfes in äussere und innere vorgenommen werden.

Beim Vorschieben des Kolbens während der Verdampfung legt der Kolben den Weg u mit einem Drucke p zurück, verrichtet also die Arbeit p u; daher die ihr entsprechende äussere latente Wärme

$$(5) \qquad \frac{p\,u}{424}.$$

Diese hat man nun von der ganzen latenten Wärme Q — q abzuziehen, um die innere latente Wärme zu erhalten.

Für obiges Beispiel wird bei Dampf von 1 Atmosphäre

äussere latente Wärme	$10\,330 \cdot 1{,}653 : 424 =$	40,27 Kal.
innere latente Wärme	$536{,}5 - 40{,}27 =$	496,23 „

270. Zustandsänderungen des Wasserdampfes während der Expansion. Es befinde sich im Cylinder einer Dampfmaschine feuchter Dampf (Mischung von Wasser und Dampf) von der Temperatur T. Dieser Cylinder habe Wände, die an den Wärmevorgängen im Innern keinen Anteil nehmen, er werde also als mathematischer Cylinder gedacht. Beginnt nun der erste adiabatische Vorgang des Carnot'schen Kreislaufes, so dehnt sich der Dampf aus, und es sinke dabei seine Temperatur auf T_1. Während dieses Vorganges verrichtet der Dampf Arbeit, indem er den Kolben fortschiebt. Diese Arbeit wird der Mischung, die der Cylinder enthält, in Form von Wärme entzogen. An der Wärmeabgabe beteiligen sich dabei sowohl der Dampf wie das Wasser. Indem der Dampf Wärme abgibt, kondensiert ein Teil davon zu Wasser; indem das heisse Wasser Wärme abgibt, nimmt zuerst der Dampf, der das Wasser berührt, diese Wärme auf. Allein der Dampf ist immer als gesättigt zu betrachten; also muss die Dampfmenge sich vermehren. Beide Vorgänge, das Kondensieren beim Dampfe und das Verdampfen beim Wasser, kombinieren sich so, dass am Ende der Expansion, gleichviel, mehr oder weniger Wasser im Cylinder sein kann als am Anfange. Man soll nun bestimmen, in welcher Weise sich das Verhältnis von Wasser und Dampf während der Expansion ändert.

Es sei q die fühlbare, ϱ die innere latente und r die gesamte latente Wärme des Dampfes. Besteht ein Kilogramm der Mischung bei Beginn der Expansion aus x *kg* Dampf und aus (1 — x) *kg* Wasser, so wird die im Dampf enthaltene innere latente Wärme $= x\,\varrho$ und somit die in der ganzen Mischung enthaltene Wärme sein

$$(1) \qquad q + x\,\varrho.$$

Während des ersten isothermischen Vorganges wird nämlich die äussere latente Wärme zur Arbeit verbraucht; es verbleibt also nur noch die im Ausdrucke (1) angegebene.

Sinkt nun während der Expansion die Temperatur T um d T, so ändert sich in (1) die Grösse q um d q und $x\,\varrho$ um $d\,(x\,\varrho)$. Zugleich wird eine kleine äussere Arbeit verrichtet. Diese beträgt nach (5) von § 269 für 1 *kg* Dampf $\frac{p\,u}{E}$ und für x *kg* Dampf $\frac{x\,p\,u}{E}$, worin x u das Volumen des Dampfes bei der Temperatur T bezeichnet. Sinkt also T um d T, so dehnt sich das Volumen x u aus um d (x u). Während dieser unendlich kleinen Aenderung kann man den Druck p als konstant betrachten; also wird die während dieser Aenderung verrichtete Arbeit $= \frac{p}{E} d(xu)$.

Während des adiabatischen Vorganges bleibt die in der Mischung vorhandene und in Arbeit umgesetzte Wärme konstant; daher muss das Differential dieser Summe = 0 sein. Mithin wird

$$(2) \qquad dq + d(x\varrho) + \frac{p}{E} d(xu) = 0.$$

Da nun ein Ganzes gleich seinen Teilen, so wird

$$\varrho = r - \frac{pu}{E}.$$

Führt man diesen Wert von ϱ in (2) ein, so wird

$$dq + d(xr) - \frac{1}{E} d(xpu) + \frac{p}{E} d(xu) = 0.$$

Betrachtet man xpu als Produkt aus p und xu, so gibt die Differentiation

$$d(xpu) = p\,d(xu) + xu\,dp.$$

Setzt man diesen Wert von $d(xpu)$ in die vorhergehende Gleichung ein, so ist

$$(3) \qquad dq + d(xr) - \frac{xu}{E} dp = 0.$$

Allein nach Gleichung (3), S. 295, ist

$$\frac{u}{E} = \frac{r}{T} \cdot \frac{dT}{dp},$$

mittels welchen Wertes von u Gleichung (3) übergeht in

$$(4) \qquad dq + d(xr) - xr\frac{dT}{T} = 0.$$

Nun nimmt q sehr nahe proportional zu mit der Temperatur. Man kann daher setzen $q = cT$, wo c die mittlere spezifische Wärme des Wassers bezeichnet. Daher wird auch $dq = c\,dT$.

Die Differentiation von $\frac{xr}{T}$ gibt

$$d\left(\frac{xr}{T}\right) = \frac{T x dr - xr dT}{T^2};$$

somit auch, wenn mit T multipliziert wird,

$$T d\left(\frac{xr}{T}\right) = x\,dr - xr\frac{dT}{T}.$$

Setzt man diese Werte in (4) ein, so kommt

$$c\,d\,T + T\,d\left(\frac{x\,r}{T}\right) = 0,$$

oder indem man durch T dividiert,

$$c\frac{d\,T}{T} + d\left(\frac{x\,r}{T}\right) = 0.$$

Das ist nun die gesuchte Differentialgleichung, deren Integration gibt

$$(5) \qquad c\,l\,T + \frac{x\,r}{T} = C.$$

Bezeichnen $T_,$, $r_,$ und $x_,$ für den Endzustand, was T, r und x für den Anfangszustand, so geht für letztere Gleichung (5) über in

$$c\,l\,T_, + \frac{x_, r_,}{T_,} = C.$$

Zieht man Gleichung (5) ab von dieser, so erhält man folgendes von Clausius abgeleitete Gesetz

$$\frac{x_, r_,}{T_,} - \frac{x\,r}{T} = c\,l\,\frac{T}{T_,}.$$

Für eine mittlere Temperatur von 130 Zentigraden kann $c = 1{,}02$ angenommen werden. Wird mit briggischen statt mit natürlichen Logarithmen gerechnet, so müssen diese mit 2,302 6 multipliziert werden. Daher lautet die zur numerischen Berechnung geeignete Formel

$$(6) \qquad \frac{x_, r_,}{T_,} - \frac{x\,r}{T} = 1{,}02 \cdot 2{,}302\,6 \log \frac{T}{T_,}.$$

I. Es dehne sich Dampf von 8 Atmosphären arbeitend aus, bis der Druck auf 0,8 Atmosphären gesunken ist. Er habe bei Beginn der Expansion einen Wassergehalt von 0,05; wie gross ist dieser im Endzustande?

Hier ist $x = 0{,}95$ und gemäss der Zeuner'schen Dampftabelle für 1 *kg* Dampf

$$r = 485{,}7 \text{ Kal.}; \quad T = 273^0 + 170{,}81^0 = 443{,}81^0;$$
$$r_, = 540{,}8 \text{ „ }; \quad T_, = 273^0 + 93{,}88^0 = 366{,}88^0;$$

daher nach der letzten Gleichung (6)

$$\frac{x_, \cdot 540{,}8}{366{,}88} - \frac{0{,}95 \cdot 485{,}7}{443{,}81} = 1{,}02 \cdot 2{,}302\,6 \log \frac{443{,}81}{366{,}88};$$
$$x_, = 0{,}836.$$

Am Ende der Expansion enthält also die Mischung 0,836 *kg* Dampf und 0,164 *kg* Wasser. Dieses ist also vermehrt worden um 0,164 *kg* — 0,05 *kg* = 0,114 *kg*.

II. Bei der eben erwähnten Expansion soll der Wassergehalt der Mischung am Ende der Expansion so gross sein wie am Anfange. Wie viel beträgt er?

Hier wird x, = x; daher nach Gleichung (6)

$$x\left(\frac{540{,}8}{366{,}88}-\frac{485{,}7}{443{,}81}\right)=1{,}02\cdot 2{,}3026\log\frac{443{,}81}{366{,}88}.$$

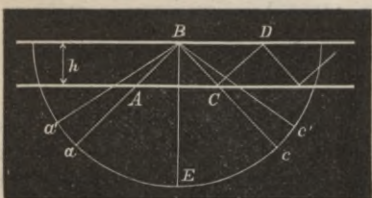
$$x = 0{,}507.$$

Die Mischung enthält also am Anfange und Ende der Expansion 0,507 *kg* Dampf und 0,493 *kg* Wasser.

271. Erklärung des Druckes der Gase. Bei jedem Körper, der Wärme enthält, sind dessen Atome in vibrierender Bewegung (§ 262). Bei den gasförmigen Körpern besteht nun die Eigentümlichkeit, dass deren Körperatome weit auseinander liegen und daher die Kraft, womit sie sich anziehen, verschwindend klein ist. Daher das Bestreben dieser Atome, sich immer weiter von einander zu entfernen und um so weiter, je grösser der Wärmegehalt, je intensiver die vibrierenden Bewegungen sind. Vermöge dieser Bewegungen stossen die Atome an die Wände der Gefässe, die das Gas einschliessen. Nach Daniel Bernoulli (Hydrodynamica, 1738) sollen diese Stösse die Ursache des Druckes sein, den das Gas auf die Wände ausübt. Es kann der Nachweis für diese Auffassung wie folgt gegeben werden.

Man lege zwei ebene, parallele Wände A C, B D (Fig. 99) durch den Gaskörper in einem sehr kleinen Abstande h von einander. Ein Gasteil mit der Masse m treffe in der Richtung A B die eine Wand in B mit der Geschwindigkeit u unter einem Winkel A B E = α zum Einfallslote B E; dann wird diese Masse in der Ebene A B E unter einem Winkel E B C = α und mit derselben Geschwindigkeit u nach der andern Wand geworfen längs B C; dann von C wieder zurückgeworfen längs C D, parallel zu A B u. s. w.

Fig. 71.



Beim Stosse in B zerlegt sich die Geschwindigkeit u in die Komponenten u sin α parallel zur Wand und u cos α senkrecht zur Wand. Die erstere Komponente kommt für den Stoss gegen die Wand ausser Betracht; die letztere geht aus + u cos α in − u cos α über und bewirkt den Druck auf die Wand mit einer Quantität der Bewegung (§ 202) = 2 m u cos α. Solche Stösse wiederholen sich in B, augenscheinlich mit ungleicher Geschwindigkeit; allein in der Rechnung denkt man sich unter u die mittlere Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung aller Massenteilchen.

Nun ist der Weg A B = $\frac{h}{\cos\alpha}$; also der Weg A B + B C, den ein Teilchen macht, um zum zweiten Male die nämliche Wand zu treffen = $\frac{2h}{\cos\alpha}$. Stösst aber dieses Teilchen unterwegs auf ein anderes Teilchen, so dass es den Weg A B C nicht durchläuft, so trifft dafür ein anderes in B ein.

Ist t die Zeit zum Durchlaufen des Weges A B C, so ist $t\,u = AB + BC = \frac{2\,h}{\cos\alpha}$; also

$$t = \frac{2\,h}{u\cos\alpha}.$$

In dieser Zeit erfolgt je ein Stoss in B; also erfolgen in 1 Sekunde so viel Stösse, so oft t in 1 enthalten ist. Daher die Anzahl der in 1 Sekunde in B aufschlagenden Atome $= \frac{u\cos\alpha}{2\,h}$ und die Quantität der Bewegung, die durch sie an die Wand abgegeben wird,

$$(1) \qquad 2\,m\,u\cos\alpha\cdot\frac{u\cos\alpha}{2\,h} = \frac{m\,u^2}{h}\cos^2\alpha.$$

Die Stossfläche in B wird aber auch getroffen von Atomen, die unter andern Winkeln zur Wand gelangen. Um auch deren Wirkung in Rechnung zu bringen, beschreibe man von B aus über der Wandfläche B D eine halbe Kugelfläche mit dem Radius $BE = 1$ und denke sich im entstandenen Kugelraume eine grosse Zahl von Radien gleichförmig verteilt; jetzt kann man annehmen, es gelangen die Atome längs dieser Radien nach B.

Lässt man den Bogen $Ea = \alpha$ zunehmen um $aa' = d\alpha$, und dreht den Ausschnitt $a\,B\,a'$ um $B\,E$ als Achse, so beschreiben die Radien B a und B a′ Kegelflächen, die einen Raum mit der Spitze in B und einer Kugelzone $a\,a'\,c'\,c$ als Grundfläche haben. Innerhalb dieses Raumes gelangen die Atome zur Wand unter dem Winkel α; die Anzahl dieser Atome sei n′.

Lässt man den Bogen α durch Intervalle $d\alpha$ sich ändern, und zwar von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so schliesst der Raum zwischen diesen Grenzen alle Richtungen ein, die Atome nach B führen. Die Zahl derselben sei n, so verhält sich n′ zu n wie die Kugelzone $a\,a'\,c'\,c$ zur halben Oberfläche der Kugel. Die Zone mit der Breite $aa' = cc'$ hat zum Inhalt $2\,\pi\,.\,aa' = 2\,\pi\sin\alpha\,d\alpha$, die andere Fläche den Inhalt $2\,\pi$; daher

$$(2) \qquad \frac{n'}{n} = \frac{2\,\pi\sin\alpha\,d\alpha}{2\,\pi} = \sin\alpha\,d\alpha.$$

Die n′ Atome verursachen nun einen Verlust an Quantität der Bewegung, gleich dem unter (1) angegebenen, multipliziert mit n′ oder mit einem aus (2) folgenden Werte; daher diese Quantität der Bewegung

$$(3) \qquad \frac{n\,m\,u^2}{h}\cos^2\alpha\sin\alpha\,d\alpha.$$

Beim Integrieren dieses Differentials setzen wir die Massen aller Teile gleich voraus oder betrachten m als mittlern Wert aller Atome; dann ist m konstant, ebenso sind n, u und h konstant. Es ist also nur in Hinsicht α zu integrieren. Nun ist nach § 88, S. 97

$$\int\cos^2\alpha\sin\alpha\,d\alpha = -\frac{1}{3}\cos^3\alpha + C;$$

daher für die angegebenen Grenzen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \sin \alpha \, d\alpha = \frac{1}{3}$$

und das Integral von (3)

$$\text{(4)} \qquad \frac{n\,m}{3\,h} u^2.$$

Allein auf die ganze Wandfläche mit dem Inhalte F ist dieser Wert (4) so viel mal so gross, als der Inhalt des gestossenen Flächenelementes in B in F enthalten ist. Ist dieses Verhältnis z, so ist die Wirkung auf die ganze Wandfläche

$$\frac{z\,n\,m}{3\,h} u^2.$$

Diese Wirkung muss nun von der Wand aufgehoben werden. Ist p die konstante Kraft, mit der jede Flächeneinheit der Wand Widerstand leistet, so wird F p der Widerstand der ganzen Wandfläche sein. Daher nach Gleichung (5) auf S. 207, wenn die Zeit t = 1 Sekunde, wie oben angenommen wurde,

$$F\,p = \frac{z\,n\,m}{3\,h} u^2.$$

Allein z n ist die Anzahl aller Atome, die die Fläche F treffen, und z n m = M die Masse derselben. Daher einfacher

$$F\,p = \frac{M}{3\,h} u^2.$$

Nun ist F h das Volumen zwischen den beiden Wänden, also auch das der Masse M. Bezeichnet man dasselbe mit v, so wird

$$\text{(5)} \qquad p\,v = \tfrac{1}{3} M u^2.$$

Um nun dieses Produkt p v mit dem des Gay-Lussac'schen, Gleichung (6), S. 286

$$\text{(6)} \qquad p\,v = R\,T$$

zu vergleichen, ist zu berücksichtigen, dass die Konstante R in (6) sich auf die Gewichtseinheit, 1 *kg*, bezieht. Nehmen wir daher auch M in (5) so an, dass es sich um die Wirkung von 1 *kg* Gas handelt, so wird nach Gleichung (5) auf S. 193 M g = 1; daher M = 1 : g und es geht (5) hierfür über in

$$\text{(7)} \qquad p\,v = \frac{u^2}{3\,g}.$$

Daher durch Gleichsetzen der Werte p v aus (6) und (7)

$$\text{(8)} \qquad u^2 = 3\,g\,R\,T.$$

Für atmosphärische Luft ist $R = 29{,}3$ (S. 286). Bezeichnet man das spezifische Gewicht irgend eines anderen Gases mit s, so erhält man aus (8) für dieses Gas

$$(9) \qquad u^2 = 3 \cdot 29{,}3 \cdot \frac{g\,T}{s}.$$

Nimmt man $T = 273$ absolute Grade an, so wird für atmosphärische Luft nach (8)

$$u^2 = 3 \cdot 9{,}81 \cdot 29{,}3 \cdot 273; \quad u = 485\,m.$$

Also beträgt die mittlere Schwingungsgeschwindigkeit der Gasteile in der Luft bei 0 Zentigraden 485 *m*.

Bei derselben Temperatur findet man mittels (9) für Sauerstoff 461 *m*, Stickstoff 492 *m*, Wasserstoff 1 884 *m*.

Im Gas machen die kleinsten Teile nicht nur eine fortschreitende, sondern auch eine drehende Bewegung, sei es, dass sich die Atome oder deren Gruppenverbindungen, Moleküle genannt, drehen. Die ganze lebendige Arbeit, die auf 1 *kg* Gas bei der fortschreitenden Bewegung verwendet wird, ist $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} u^2$. Wie gross ist diejenige, die die drehenden Bewegungen erfordern?

Ist c die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen und T seine Temperatur, so ist $c\,T$ die in 1 *kg* Gas enthaltene Wärme und daher $424\,c\,T$ die entsprechende lebendige Arbeit. Daher das Verhältnis zwischen der Arbeit bei fortschreitender Bewegung zur ganzen Arbeit

$$\frac{u^2}{2\,g} : 424\,c\,T$$

oder indem man den Wert von u^2 aus (8) einführt,

$$\frac{3\,R}{2 \cdot 424\,c} : 1.$$

Dieses Verhältnis ist somit unabhängig von der Temperatur.

Für atmosphärische Luft ist $R = 29{,}3$ und $c = 0{,}168\,6$. Daher das Verhältnis

$$0{,}615 : 1.$$

Von der Einheit entfallen daher bei atmosphärischer Luft 0,615 Teile Arbeit auf die fortschreitenden, der Rest mit 0,385 Teilen auf die drehenden Bewegungen.

Im Vorstehenden wurde ein homogenes Gas vorausgesetzt. Nun sei aber das Gas eine Mischung aus zwei verschiedenen Gasen, die indessen keine chemische Wirkung auf einander ausüben.

Es sei u die mittlere Geschwindigkeit der Gasteile der Mischung für fortschreitende Bewegung und L die in 1 *kg* dieses Gases enthaltene lebendige Arbeit; dann ist nach (7)

$$(10) \qquad p\,v = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{u^2}{2\,g} = \tfrac{2}{3}\,L.$$

Mithin beträgt das Produkt aus Druck und Volumen des Gases $\frac{2}{3}$ von der im Gase enthaltenen lebendigen Arbeit.

Denkt man sich nun die zwei Gase, die die Mischung bilden, je einzeln im Raume v abgesperrt, so wird nach (10)

$$p' v = \tfrac{2}{3} L' \quad \text{und} \quad p'' v = \tfrac{2}{3} L'',$$

wenn p', p'' die Drucke dieser Gase und L', L'' die in ihnen enthaltenen lebendigen Arbeiten bezeichnen. Addiert man die letzten zwei Gleichungen, so kommt

$$(11) \qquad (p' + p'') v = \tfrac{2}{3} (L' + L'').$$

Da aber $L' + L'' = L$, so folgt durch Vergleichung von (10) und (11)

$$p = p' + p''.$$

Der Druck der Mischung ist also gleich der Summe aus den Drucken der Gase, wenn diese allein den Raum ausfüllten.

Zweiter Teil der Differentialrechnung.

I. Wiederholte Differentiation entwickelter Funktionen einer Variabeln.

272. Erklärungen und Bezeichnungen. Wenn die in dem Bereiche (x_1, x_2) der unabhängig veränderlichen Grösse x eindeutige und stetige Funktion $y = f(x)$ für jeden Wert dieses Bereiches einen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ besitzt, so ist dieser Differentialquotient im allgemeinen in dem Bereiche (x_1, x_2) wieder eine Funktion der Variabeln x, die mit $f'(x)$ bezeichnet werde. Wie im ersten Teile der Differentialrechnung sich ergeben hat, ist die lineare Funktion $y = ax + b$ die einzige Funktion, deren Differentialquotient konstant ist $\left(\frac{dy}{dx} = a\right)$.

Ist die durch

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x)$$

definierte Funktion in dem Bereiche (x_1, x_2) wieder eindeutig und stetig, so kann man nach dem Differentialquotienten dieser neuen Funktion fragen, der dann durch die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d f'(x)}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f'(x + \triangle x) - f'(x)}{\triangle x}$$

definiert ist und aus $f'(x)$ nach denselben Regeln berechnet wird, durch die $f'(x)$ aus $f(x)$ gefunden wurde. Man nennt diesen Differentialquotienten den z w e i t e n Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion $f(x)$. Auch er wird im allgemeinen wieder eine Funktion von x sein, die mit $f''(x)$ bezeichnet werde. Der durch die Gleichung

$$(3) \qquad \frac{d f''(x)}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f''(x + \triangle x) - f''(x)}{\triangle x}$$

definierte Differentialquotient von $f''(x)$ heisst dann der dritte Differentialquotient der ursprünglichen Funktion $f(x)$.

So weitergehend erhält man den vierten, fünften, ... nten Differentialquotienten oder die höheren Differentialquotienten von $f(x)$, während man den bisher kurzweg Differentialquotient genannten nunmehr den ersten Differentialquotienten von $f(x)$ nennt.

Die höheren Differentialquotienten lassen sich aber ebenso wie der erste durch die ursprüngliche Funktion $f(x)$ selbst definieren, wie im Folgenden im Anschluss an Euler gezeigt werden soll.

Es sei die Gleichung $y = f(x)$ geometrisch dargestellt, den Abscissen

$$x; \quad x + \triangle x; \quad x + 2 \triangle x; \quad x + 3 \triangle x; \ldots$$

entsprechen die Ordinaten oder Funktionswerte

$$f(x); \quad f(x + \triangle x); \quad f(x + 2 \triangle x); \quad f(x + 3 \triangle x); \ldots$$

Zieht man diese Ordinaten voneinander, jede von der unmittelbar folgenden, ab, so erhält man die Reihe der Differenzen erster Ordnung

$$(4) \quad \begin{cases} \triangle f(x) = f(x + \triangle x) - f(x); \\ \triangle f(x + \triangle x) = f(x + 2 \triangle x) - f(x + \triangle x); \\ \triangle f(x + 2 \triangle x) = f(x + 3 \triangle x) - f(x + 2 \triangle x); \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Diese Differenzen sind einander gleich, wenn die Kurve $y = f(x)$ eine gerade Linie, also $y = ax + b$ ist. In jedem andern Falle sind sie ungleich. Zieht man sie wieder voneinander ab, so erhält man die Reihe der Differenzen zweiter Ordnung.

Wie man $f(x + \triangle x) - f(x)$ mit $\triangle f(x)$ bezeichnet, so kann $\triangle f(x + \triangle x) - \triangle f(x)$ mit $\triangle \triangle f(x)$ bezeichnet werden. Allein statt $\triangle \triangle f(x)$ schreibt man gewöhnlich $\triangle^2 f(x)$. Gemäss dieser Bezeichnung wird man haben

$$(5) \quad \begin{cases} \triangle^2 f(x) = \triangle f(x + \triangle x) - \triangle f(x); \\ \triangle^2 f(x + \triangle x) = \triangle f(x + 2 \triangle x) - \triangle f(x + \triangle x); \\ \triangle^2 f(x + 2 \triangle x) = \triangle f(x + 3 \triangle x) - \triangle f(x + 2 \triangle x); \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Aber auch diese Differenzen zweiter Ordnung sind im allgemeinen ungleich. Sie geben, je eine von der unmittelbar folgenden subtrahiert, die Differenzen dritter Ordnung. Da man entsprechend $\triangle \triangle^2 f(x)$ mit $\triangle^3 f(x)$ bezeichnen wird, so hat man

$$(6) \qquad \triangle^3 f(x) = \triangle^2 f(x + \triangle x) - \triangle^2 f(x).$$

In ganz derselben Weise erhält man die Differenz der nten Ordnung

$$(7) \qquad \triangle^n f(x) = \triangle^{n-1} f(x + \triangle x) - \triangle^{n-1} f(x).$$

Man kann die Differenzen der höheren Ordnung aber auch durch die ursprünglichen Funktionswerte ausdrücken; man findet leicht

$$(8)\quad \begin{cases} \triangle^2 f(x) = f(x + 2\triangle x) - f(x + \triangle x) - f(x + \triangle x) + f(x) \\ \qquad\quad = f(x + 2\triangle x) - 2f(x + \triangle x) + f(x); \\ \triangle^3 f(x) = f(x + 3\triangle x) - 2f(x + 2\triangle x) + f(x + \triangle x) \\ \qquad\qquad - f(x + 2\triangle x) + 2f(x + \triangle x) - f(x) \\ \qquad\quad = f(x + 3\triangle x) - 3f(x + 2\triangle x) + 3f(x + \triangle x) - f(x); \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Von diesen endlichen Differenzen kann nun zu den Differentialen übergegangen werden. Statt $\triangle f(x)$; $\triangle^2 f(x)$; $\triangle^3 f(x); \ldots \triangle^n f(x)$ schreibt man $d f(x)$; $d^2 f(x)$; $d^3 f(x); \ldots d^n f(x)$ und nennt diese Grössen der Reihe nach Differentiale der ersten, zweiten, dritten, ... nten Ordnung.

Bei der obigen Differenzenbildung wurde die Grösse $\triangle x$ längs der Abscissenachse als gleich, ihr Wert also als konstant angesehen. Diese Anordnung der Ordinaten in gleichen Abständen ist bei der Untersuchung der Krümmung der Kurve oder der Eigenschaften der Funktion von wesentlichem Vorteile. Dies gilt noch, wenn man von $\triangle x$ zu dx übergeht. Man nimmt deshalb allgemein das Differential dx der unabhängig veränderlichen Grösse als konstant an.

Nun ist aber

$$\frac{d f(x)}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x);$$

$$\frac{d f'(x)}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f'(x + \triangle x) - f'(x)}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x = 0} \frac{1}{\triangle x} \cdot \left[\frac{f(x + 2\triangle x) - f(x + \triangle x)}{\triangle x} - \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}\right]$$

$$= \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x + 2\triangle x) - 2f(x + \triangle x) + f(x)}{(\triangle x)^2}$$

$$= \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle^2 f(x)}{(\triangle x)^2} = f''(x);$$

$$\frac{d f''(x)}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{1}{\triangle x}\left[\frac{f(x + 3\triangle x) - 2f(x + 2\triangle x) + f(x + \triangle x)}{(\triangle x)^2} - \frac{f(x + 2\triangle x) - 2f(x + \triangle x) + f(x)}{(\triangle x)^2}\right]$$

$$= \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x + 3\triangle x) - 3f(x + 2\triangle x) + 3f(x + \triangle x) - f(x)}{(\triangle x)^3}$$

$$= \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle^3 f(x)}{(\triangle x)^3} = f'''(x);$$

u. s. w.

Beim Uebergange zu den Differentialen ist hiernach die Leibnitz'sche Bezeichnungsweise der höheren Differentialquotienten

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 y}{d x^2} = \lim\limits_{\triangle x = 0} \dfrac{\triangle^2 f(x)}{(\triangle x)^2}; \\ \dfrac{d^3 y}{d x^3} = \lim\limits_{\triangle x = 0} \dfrac{\triangle^3 f(x)}{(\triangle x)^3}; \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{d^n y}{d x^n} = \lim\limits_{\triangle x = 0} \dfrac{\triangle^n f(x)}{(\triangle x)^n} \end{cases}$$

begründet.

Die schon gebrauchten Bezeichnungen $f'(x)$ oder y' für den ersten, $f''(x)$ oder y'' für den zweiten, $f'''(x)$ oder y''' für den dritten; ... $f^{(n)}(x)$ oder $y^{(n)}$ für den nten Differentialquotienten rühren von Lagrange (Théorie des fonctions analytiques) her. Er nennt diese Differentialquotienten Derivationen oder Ableitungen der Funktion $f(x)$, und zwar $f'(x)$ die erste Ableitung, $f''(x)$ die zweite, u. s. w.

Hiernach hat man

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d y}{d x} = y' = f'(x) \quad \text{oder} \quad d y = f'(x)\, d x; \\ \dfrac{d^2 y}{d x^2} = y'' = f''(x) \quad \text{oder} \quad d^2 y = f''(x)\,(d x)^2; \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{d^n y}{d x^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x) \quad \text{oder} \quad d^n y = f^{(n)}(x)\,(d x)^n. \end{cases}$$

Zur Bildung der höheren Differentialquotienten einer gegebenen Funktion hat man nur wiederholt nach den früheren Regeln den ersten Differentialquotienten zu bilden, wie im Folgenden zunächst an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

273. Wiederholte Differentiation einfacher Funktionen.

I. Zu differentiieren sei die Funktion

$$f(x) = a x^3.$$

Die erste Differentiation gibt

$$d f(x) = 3 a x^2 d x \quad \text{oder} \quad \frac{d f(x)}{d x} = 3 a x^2.$$

Differentiiert man von neuem und beachtet, dass $d x$ als konstant anzusehen ist, so erhält man

$$d^2 f(x) = 6 a x (d x)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 f(x)}{d x^2} = 6 a x.$$

Hieraus erhält man durch nochmalige Differentiation

$$d^3 f(x) = 6 a (d x)^3 \quad \text{oder} \quad \frac{d^3 f(x)}{d x^3} = 6 a,$$

und hieraus

$$d^4 f(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 f(x)}{d x^4} = 0.$$

II. Zu differentiieren sei

$$y = A x^4 + B y^3 + C x^2 + D x + E.$$

Der erste Differentialquotient ist

$$\frac{d y}{d x} = 4 A x^3 + 3 B x^2 + 2 C x + D.$$

Hieraus folgt der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 12 A x^2 + 6 B x + 2 C;$$

der dritte ergibt sich zu

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = 24 A x + 6 B,$$

und hieraus folgt

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = 24 A; \quad \frac{d^5 y}{d x^5} = 0.$$

III. Gegebene Funktion . . . $y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$.

Erste Ableitung . . . . . $y' = \frac{d y}{d x} = \frac{-2 a^2 x}{(a^2 + x^2)^2}$.

Zweite Ableitung . . . . $y'' = \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-2 a^4 + 6 a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^3}$.

Dritte Ableitung . . . . $y''' = \frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{24 a^4 x - 24 a^2 x^3}{(a^2 + x^2)^4}$.

IV. $y = (a - b x)^p$.

$$\frac{d y}{d x} = (-b) p (a - b x)^{p-1}.$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = (-b)^2 p (p - 1) (a - b x)^{p-2}.$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = (-b)^3 p (p - 1) (p - 2) (a - b x)^{p-3}.$$

V. $y = \frac{1 + x}{1 - x}$.

$y' = 2 \frac{1}{(1 - x)^2}$.

$y'' = 2 \frac{2 \cdot 1}{(1 - x)^3}$.

VI. $f(x) = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$f'(x) = \frac{d f(x)}{d x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{d x^2} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

$$y''' = 2\,\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(1-x)^4}. \qquad f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x}.$$

$$y^{IV} = 2\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(1-x)^5}. \qquad f''''(x) = \frac{d^4 f(x)}{d\,x^4} = \frac{24 \sin x}{\cos^5 x} - \frac{8 \sin x}{\cos^3 x}.$$

274. Independente Darstellung der höheren Ableitungen. Während in dem vorigen Paragraphen die successive Bildung der höheren Ableitungen einer Funktion an einigen Beispielen gezeigt wurde, handelt es sich nunmehr um die Aufgabe für die allgemeine oder nte Ableitung der Hauptfunktionen independente Formeln aufzustellen. Das direkte Verfahren des vorigen Paragraphen führt in einigen Fällen zum Ziele.

I. $y = x^m$; es ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = m\,x^{m-1};$$

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = m\,(m-1)\,x^{m-2};$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^n y}{d\,x^n} = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}.$$

Ist m eine ganze positive Zahl, so wird die mte Ableitung konstant

$$\frac{d^m x}{d\,x^m} = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1;$$

die höheren werden sämtlich 0.

Tritt $a\,x + b$ an Stelle von x, hat man also

$$y = (a\,x + b)^m,$$

so wird

$$\frac{d^n y}{d\,x^n} = m\,(m-1)\ldots(m-n+1)\,a^n\cdot(a\,x+b)^{m-n}.$$

II. $y = l\,x$; es wird

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{d^2 y}{d\,x^2} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{d^3 y}{d\,x^3} = \frac{1\cdot 2}{x^3}; \ldots.$$

$$\frac{d^n y}{d\,x^n} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{x^n}.$$

III. $y = a^x$; es ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = a^x\,l\,a,$$

und hieraus folgt

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = a^x\,(l\,a)^2; \qquad \frac{d^3 y}{d\,x^3} = a^x\,(l\,a)^3;$$

allgemein

$$\frac{d^n y}{d\,x^n} = a^x\,(l\,a)^n;$$

ist $a = e$, also $y = e^x$, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = e^x; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x; \ldots \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = e^x.$$

IV. $y = \sin x$; es ist

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right);$$

und allgemein

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

und diese Grösse ist

$$\sin x; \quad \cos x; \quad -\sin x; \quad -\cos x,$$

je nachdem n durch 4 dividiert den Rest

$$0; \quad 1; \quad 2; \quad 3$$

gibt.

V. Ganz ebenso ist für

$$y = \cos x; \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right);$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

und das ist

$$\cos x; \quad -\sin x; \quad -\cos x; \quad \sin x,$$

je nachdem n durch 4 dividiert den Rest

$$0; \quad 1; \quad 2; \quad 3$$

gibt.

275. Wiederholte Differentiation einer Summe von Funktionen. Ist y gleich einer Summe von Funktionen

$$y = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots,$$

so folgt durch wiederholte Differentiation sofort

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) + \varphi^{(n)}(x) + \psi^n(x) + \ldots.$$

Eine solche Zerlegung einer Funktion in Summanden ist häufig nützlich für die independente Darstellung ihrer höheren Ableitungen.

Zum Beispiel sei

$$y = \frac{1}{1 - x^2};$$

man kann zerlegen

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right],$$

und hat

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^n (1+x)^{-1}}{d x^n} + \frac{d^n (1-x)^{-1}}{d x^n}\right]$$

und nunmehr nach I. § 274

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right].$$

276. Wiederholte Differentiation eines Produktes zweier Funktionen.

Es sei

$$(1) \qquad y = u \cdot v,$$

und u und v Funktionen der Variabeln x. Nach den bisherigen Regeln erhält man

$$\begin{aligned} y &= u v; \\ d y &= u\, d v + v\, d u; \\ d^2 y &= u\, d^2 v + 2\, d u\, d v + v\, d^2 u; \\ d^3 y &= u\, d^3 v + 3\, d u\, d^2 v + 3\, d^2 u\, d v + v\, d^3 u, \text{ etc.} \end{aligned}$$

somit als Differentialquotienten in Hinsicht x:

$$\frac{d y}{d x} = u \frac{d v}{d x} + v \frac{d u}{d x};$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = u \frac{d^2 v}{d x^2} + 2 \frac{d u}{d x} \cdot \frac{d v}{d x} + v \frac{d^2 u}{d x^2};$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = u \frac{d^3 v}{d x^3} + 3 \frac{d u}{d x} \cdot \frac{d^2 v}{d x^2} + 3 \frac{d^2 u}{d x^2} \cdot \frac{d v}{d x} + v \frac{d^3 u}{d x^3}; \text{ etc.}$$

Das Vorstehende kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$y = f(x)\,\varphi(x);$$

$$\frac{d y}{d x} = f(x)\,\varphi'(x) + f'(x)\,\varphi(x);$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f(x)\,\varphi''(x) + 2 f'(x)\,\varphi'(x) + f''(x)\,\varphi(x);$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = f(x)\,\varphi'''(x) + 3 f'(x)\,\varphi''(x) + 3 f''(x)\,\varphi'(x) + f'''(x)\,\varphi(x).$$

Hieraus schliesst man, dass allgemein sein wird

$$(2)\quad \frac{d^n y}{d x^n} = f(x)\varphi^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} f''(x)\varphi^{(n-2)}(x) + \dots + f^{(n)}(x)\varphi(x),$$

worin $\binom{n}{m}$ den mten Binomialkoeffizienten bezeichnet. Die Richtigkeit der Formel (2) wird durch den sogenannten „Schluss von n auf n + 1" verifiziert. Nimmt man nämlich an, die Formel sei für n bewiesen, so folgt daraus durch nochmalige Differentiation

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1} y}{d x^{n+1}} &= f(x)\varphi^{(n+1)}(x) \\ &+ \binom{n}{1} f'(x)\varphi^{(n)}(x) + \binom{n}{2} f''(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + f^{(n)}(x)\varphi'(x) \\ &+ \quad f'(x)\varphi^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f''(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + \binom{n}{1} f^{(n)}(x)\varphi'(x) \\ &+ f^{(n+1)}(x)\varphi(x);\end{aligned}$$

weil nun, wie bekannt, allgemein

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m},$$

so folgt

$$\frac{d^{n+1} y}{d x^{n+1}} = f(x)\varphi^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} f'(x)\varphi^{(n)}(x) + \binom{n+1}{2} f''(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + f^{(n+1)}(x)\varphi(x).$$

Da nun das Bildungsgesetz der Gleichung (2) für n = 1, 2, 3 direkt nachgewiesen ist, so gilt es allgemein für jeden Wert von n.

Auch die Formel (2) findet häufig Anwendung zur independenten Darstellung der höheren Ableitungen von Funktionen.

277. Differentiation der Funktionen von Funktionen. Nach § 29 hat eine solche Funktion die Form

$$y = F[f(x)].$$

Setzt man wie dort zur Abkürzung

$$z = f(x), \qquad \text{also} \qquad y = F(z),$$

so wird

$$d z = f'(x)\, d x, \qquad d y = F'(z)\, d z.$$

Betrachtet man bei der weiteren Differentiation das Differential d x der unabhängig Veränderlichen als konstant, so werden sowohl d z als d y als veränderlich anzusehen sein. Die beiden letzten Gleichungen geben daher als zweite und dritte Differentiale:

$$d^2 z = f''(x)\, d x^2; \qquad d^3 z = f'''(x)\, d x^3; \quad \text{u. s. w.}$$

$$d^2 y = F''(z)\, d z^2 + F'(z)\, d^2 z;$$

$$d^3 y = F'''(z)\, d z^3 + 3 F''(z)\, d z\, d^2 z + F'(z)\, d^3 z; \quad \text{u. s. w.}$$

Somit sind die Differentialverhältnisse in Hinsicht x:

$$\frac{dy}{dx} = F'(z)\frac{dz}{dx}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = F''(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + F'(z)\frac{d^2z}{dx^2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = F'''(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 3F''(z)\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} + F'(z)\frac{d^3z}{dx^3}; \text{ u. s. w.}$$

278. Wiederholte Differentiation der cyklometrischen Funktionen.

I. Es seien die höheren Ableitungen von

(1) $$y = \operatorname{arc\,sin} x$$

zu bilden. Aus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

folgt durch nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen

$$(1-x^2)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx}$$

oder in anderer Schreibart

(2) $$(1-x^2)\cdot y'' = x\cdot y'.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach Formel (2) des § 276 und beachtet, dass

$$\frac{d}{dx}(1-x^2) = -2x; \qquad \frac{d^2}{dx^2}(1-x^2) = -2,$$

alle höheren Differentialquotienten von $(1-x^2)$ aber 0 sind, so erhält man

$$(1-x^2)y^{(n)} + \frac{n-2}{1}\cdot y^{(n-1)}\cdot(-2x) + \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}\cdot y^{(n-2)}\cdot(-2)$$

$$= x\,y^{(n-1)} + \frac{n-2}{1}y^{(n-2)},$$

woraus leicht folgt

(3) $$(1-x^2)y^{(n)} = (2n-3)x\cdot y^{(n-1)} + (n-2)^2\cdot y^{(n-2)}.$$

Eine solche Formel, durch die $y^{(n)}$ aus $y^{(n-1)}$ und $y^{(n-2)}$ berechnet werden kann, heisst eine Recursionsformel. Aus ihr folgt für n = 2, 3, 4, ..

(4) $$\begin{cases} (1-x^2)y'' = xy'; \\ (1-x^2)y''' = 3xy'' + y'; \\ (1-x^2)y^{IV} = 5xy''' + 4y''; \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

II. Ist

(5) $$y = \operatorname{arc\,tang} x,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1},$$

so folgt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ oder}$$

$$(6) \qquad (1+x^2)\, y'' = -2xy'.$$

In genau derselben Weise, wie in I., erhält man

$$(1+x^2)\, y^{(n)} + \frac{n-2}{1} \cdot 2x \cdot y^{(n-1)} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot y^{(n-2)}$$
$$= -2xy^{(n-1)} - \frac{n-2}{1} \cdot 2y^{(n-2)},$$

woraus die Recursionsformel

$$(7) \qquad (1+x^2)\, y^{(n)} = -2(n-1)\, x \cdot y^{(n-1)} - (n-1)(n-2)\, y^{(n-2)}$$

folgt, die ebenso benutzt wird, wie die Formel (3).

III. Ist

$$(8) \qquad y = \text{arc} \cos x \quad \text{oder} \quad y = \text{arc cotang}\, x,$$

so ist wegen

$$\text{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \text{arc} \sin x; \qquad \text{arc cotang}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, x$$

$$(9) \qquad \frac{d^n \,\text{arc} \cos x}{dx^n} = -\frac{d^n \,\text{arc} \sin x}{dx^n}; \qquad \frac{d^n \,\text{arc cotang}\, x}{dx^n} = -\frac{d^n \,\text{arc tang}\, x}{dx^n}.$$

279. Die höhern Differentiale als unendlich kleine Grössen verschiedener Ordnung. Die unendlich kleinen Grössen können aus endlichen Grössen entstanden gedacht werden durch fortwährende Annäherung dieser Grössen gegen die Null. Der Zustand des unendlich Kleinen wird hierbei als erreicht angesehen, wenn die Grössen von der Null um weniger abweichen, als jede noch so kleine angebbare Grösse.

I. Der Quotient zweier unendlich kleiner Grössen kann endlich, unendlich gross oder unendlich klein sein, je nach dem Gange, den Zähler und Nenner des Quotienten befolgen, wenn sie durch stetige Abnahme gegen die Null konvergieren.

Lässt man in dem Verhältnis $\frac{\sin x}{x}$ die Grösse x von $\frac{\pi}{2}$ aus durch stetiges Abnehmen unendlich klein werden, so werden Zähler und Nenner unendlich klein, während das Verhältnis endlich bleibt und gleich der Einheit gesetzt werden kann.

Lässt man dagegen in dem Verhältnis $\frac{x}{\sin^2 x}$ den Bogen x unendlich klein werden, so wird dieses Verhältnis unendlich gross, obschon Zähler und Nenner unendlich klein sind. Denn schreibt man

$$\frac{x}{\sin^2 x} = \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x},$$

so ist für ein unendlich kleines x der erste Faktor $\frac{x}{\sin x}$ rechts endlich, während der zweite wegen des unendlich kleinen Nenners unendlich gross wird. Folglich ist auch das Produkt beider Faktoren und somit das gegebene Verhältnis unendlich gross.

In dem Verhältnisse $\frac{\operatorname{tang}^2 x}{a x + x^2}$ werden Zähler und Nenner unendlich klein für ein unendlich kleines x. Schreibt man nun

$$\frac{\operatorname{tang}^2 x}{a x + x^2} = \frac{\operatorname{tang} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{tang} x}{a + x},$$

so wird für ein unendlich kleines x der erste Faktor rechts $= 1$, während der zweite wegen des unendlich kleinen Zählers und des endlichen Nenners als unendlich klein angesehen werden muss. Nun ist das Produkt aus dem endlichen und dem unendlich kleinen Faktor unendlich klein, also auch das gegebene Verhältnis unendlich klein.

II. Ist das Verhältnis zweier unendlich kleiner Grössen im allgemeinen endlich, so sind diese Grössen von derselben Ordnung.

Sind a, b, c solche unendlich kleine Grössen derselben Ordnung, so werden die Verhältnisse $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ endliche Werte haben, ebenso die Verhältnisse $\frac{a^2}{b^2}, \frac{a c}{b^2}, \frac{a b}{c^2}$ als Produkte zweier endlicher Faktoren, sowie auch die Verhältnisse $\frac{a^3}{b^2 c}, \frac{a c^2}{b^3}$ als Produkt dreier endlicher Faktoren.

Ferner sind die Grössen $\left(\frac{a}{b}\right) c$, $\left(\frac{a}{c}\right) b$, $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{c}\right) a$ als Produkte endlicher Faktoren in einen unendlich kleinen Faktor selbst unendlich klein und zwar von derselben Ordnung wie c, b, a.

Die Grössen a, a b, a b c sind unendlich kleine Grössen verschiedener Ordnung. Sind a, b, c unendlich Kleine der ersten Ordnung, so nennt man die Produkte a b, a c, b c, a^2, b^2 zweier unendlich kleiner Grössen der ersten Ordnung unendlich Kleine der zweiten Ordnung, ferner die Produkte a b c, $a^2 b$, $b c^2$, c^3 unendlich Kleine der dritten, die Produkte $a^2 b c$, $a b^2 c$, $a b c^2$ unendlich Kleine der vierten Ordnung.

III. Denkt man sich das Differential d x als ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, so ist $d x^2$ unendlich klein von der zweiten, $d x^3$ unendlich klein von der dritten Ordnung.

Die Differentiale von $y = f(x)$ sind nach der Bezeichnung von Lagrange

$$d y = f'(x)\, d x, \quad d^2 y = f''(x)\, d x^2, \quad d^3 y = f'''(x)\, d x^3, \ldots$$

Da nun die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x), \ldots$ Funktionen von x sind, die keine Differentiale als Faktoren enthalten, so sind ihre Werte im allgemeinen endlich. Mithin ist d y von derselben Ordnung wie d x, $d^2 y$ von derselben Ordnung wie $d x^2$, und allgemein $d^n y$ von derselben Ordnung wie $d x^n$.

IV. Eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung wird gegen eine endliche Grösse vernachlässigt. Gesetzt, man habe die Gleichung

$$A\,dy + B\,dx + C\,dx\,dy + D\,d^2y = 0,$$

worin A, B, C, D endliche Grössen bezeichnen sollen, so kann man auch schreiben

$$A\frac{dy}{dx} + B + C\,dy + D\frac{d^2y}{dx} = 0.$$

In dieser Gleichung sind die beiden ersten Glieder endlich und die beiden letzten Glieder unendlich Kleine der ersten Ordnung; folglich werden sie vernachlässigt. Man hat daher

$$A\,dy + B\,dx = 0.$$

In der ersten, gegebenen Gleichung werden somit die Glieder der zweiten Ordnung gegen diejenigen der ersten Ordnung vernachlässigt. Allgemein gilt der Satz: In einer Gleichung fallen die Glieder einer höhern Ordnung gegen die Glieder einer niedern Ordnung weg.

V. Es bezeichne x einen Kreisbogen, beschrieben mit dem Halbmesser 1, s die Länge der Sehne, die seine Endpunkte verbindet, und f die Pfeilhöhe des Bogens; dann gilt

$$s = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right); \qquad f = 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Entwickelt man $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ und $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ nach § 72 in Reihen, so erhält man

$$x - s = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1}{3\cdot4\cdot5}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \ldots$$

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots$$

Ist nun x eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung, so wird die Differenz $x - s$ zwischen Bogen und Sehne der Grösse x^3 proportional, also eine unendlich kleine Grösse der dritten Ordnung, und die Pfeilhöhe eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung. Somit ist auch $x - s$ in f unendlich oft mal enthalten.

II. Entwickelung der Funktionen in Reihen.

280. Theorem von Rolle. Es sei f(x) eine in dem Bereiche (a, b) der variabeln Grösse x eindeutige und stetige Funktion, die an den beiden Grenzen des Bereiches den Wert 0 habe, so dass $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$ seien.

Da die Annahme, dass die Funktion innerhalb des ganzen Bereiches (a, b) den Wert 0 habe, ausgeschlossen werden kann, so muss über den Verlauf der Funktion in dem Bereiche (a, b) angenommen werden, dass sie von a aus entweder zunimmt oder abnimmt. Aber dieses Zu- oder

Abnehmen kann nicht durch den ganzen Bereich hindurch stattfinden, soll f(x) stetig und f(b) = 0 sein. Es muss daher zwischen x = a und x = b mindestens einen Wert x = z geben, für den das Zunehmen oder Abnehmen aufhört. Nach § 34 b) und c) müssen dann aber die Quotienten

$$\frac{f(z - \triangle x) - f(z)}{-\triangle x} \quad \text{und} \quad \frac{f(z + \triangle x) - f(z)}{\triangle x}$$

verschiedene Vorzeichen haben; der erstere +, der zweite −, wenn die Funktion von x = a zunimmt, dagegen der erstere −, der zweite +, wenn f(x) von x = a abnimmt.

Besitzt aber die Funktion f(x) für jeden Wert von x innerhalb des Bereiches (a, b) einen bestimmten Differentialquotienten, ist also

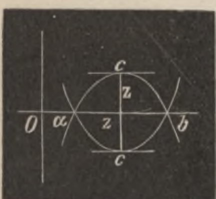
$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{f(z - \triangle x) - f(z)}{-\triangle x} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(z + \triangle x) - f(z)}{\triangle x} = f'(z),$$

so muss f'(z) = 0 sein, da eine positive und eine negative Grösse sich nur derselben Grenze nähern können, wenn diese Null ist.

Ist also die Funktion f(x) in dem Bereiche (a, b) eindeutig und stetig, besitzt sie ferner für jeden Wert von x innerhalb des Bereiches einen bestimmten Differentialquotienten und sind endlich die Funktionswerte f(a) = 0 und f(b) = 0, so gibt es in dem Bereiche (a, b) mindestens einen Wert von x, für den die Ableitung f'(x) den Wert Null hat.

Geometrisch kann dieser Satz, der das Theorem von Rolle heisst, in folgender Weise veranschaulicht werden. Man stelle y = f(x) geometrisch dar, indem man x zur Abscisse, f(x) zur Ordinate macht; dabei entstehe eine Kurve (Fig. 100), die die Abscissenachse in den Punkten x = a und x = b schneide. Dann gibt es ein Kurvenstück zwischen diesen zwei Punkten, das oberhalb oder unterhalb der Abscissenachse liegt. In beiden Fällen kann man an dieses Kurvenstück eine Tangente ziehen, die parallel der Abscissenachse ist, für die also die erste Ableitung f'(x) = 0 ist. Die Abscisse des Berührungspunktes c muss ein Wert z sein, der zwischen a und b liegt.

Fig. 100.



Bei den Voraussetzungen des Satzes von Rolle ist nicht ausgeschlossen, dass f'(x) in dem Bereiche (a, b) unendlich wird, d. h. dass die Tangente in einem Kurvenpunkte parallel der Ordinatenachse ist, wenn die Ableitung f'(x) nur überall insofern bestimmt ist, dass es gleichgültig ist, ob $\triangle$ x sich von der positiven oder der negativen Seite der Null nähert (§ 10).

281. Der Mittelwertsatz. Ist f(x) eine in dem Bereiche (a, b) eindeutige und stetige Funktion, die für jeden Wert des Bereiches (a, b) eine bestimmte Ableitung besitzt, und wird der Differenzenquotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = P \tag{1}$$

gesetzt, so ist

$$(2) \qquad \varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x) \cdot P$$

eine mit f(x) stetige Funktion, die gleichfalls überall eine bestimmte Ableitung besitzt, aber für $x = a$ und $x = b$ gleich Null wird. Folglich muss es nach dem Theorem von Rolle einen Wert z im Bereiche (a, b) geben, für den

$$\varphi'(z) = -f'(z) + P = 0$$

wird, d. h. es muss sein

$$(3) \qquad P = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z).$$

Jeden Wert von x zwischen a und b, also auch z kann man aber darstellen durch

$$z = a + \theta(b - a),$$

worin θ ein echter Bruch, $0 < \theta < 1$, ist. Gleichung (3) sagt dann aus:

Besitzt die in dem Bereiche (a, b) eindeutige und stetige Funktion f(x) für jeden Wert von x in diesem Bereiche eine bestimmte Ableitung, so gibt es zwischen a und b mindestens einen Wert von x, für den die Ableitung $f'(x)$ gleich dem Differenzenquotienten $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ist, dass also

$$(4) \qquad f(b) - f(a) = (b - a) f'[a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1,$$

ist.

Dieser Satz, der Mittelwertsatz genannt, sagt geometrisch Folgendes aus: Stellt man f(x) als eine Kurve dar, so gibt es zwischen den Abscissen a und b mindestens eine Stelle, in der die Tangente an die Kurve der die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verbindenden Sehne parallel ist. Auch hier kann der Fall eintreten, dass $f'(x)$ in dem Bereiche unendlich wird, d. h. dass die Tangente an die Kurve in einem Punkte der Ordinatenachse parallel wird.

Bringt man die Formel (4) auf zwei Werte x und $x + h$ innerhalb des Bereiches (a, b) in Anwendung, so geht die Formel (4) über in

$$(5) \qquad f(x + h) - f(x) = h \cdot f'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

wodurch die Differenz zweier Funktionswerte durch einen Mittelwert der ersten Ableitung dargestellt wird.

282. Reihe von Taylor. Es sei f(x) eine in dem Bereiche (a, b) eindeutige und stetige Funktion von x, deren Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x), \ldots$ sämtlich in dem Bereiche (a, b) eindeutig, stetig und endlich seien.

Bildet man die Funktion

$$(1) \qquad \varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x) f'(x) - (b - x)^2 \cdot P,$$

in der P von x unabhängig ist, so ist $\varphi(x)$ eine stetige Funktion mit bestimmtem Differentialquotienten, die für $x = b$ zu Null wird. Bestimmt man P so, dass auch $\varphi(a) = 0$ ist, setzt also

$$(b - a)^2 \cdot P = f(b) - f(a) - (b - a) f'(a),$$

so lässt sich auf die Funktion $\varphi(x)$ das Theorem von **Rolle** anwenden. Es muss also einen Wert z geben, für den

$$\varphi'(z) = -f'(z) + f'(z) - (b-z)f''(z) + 2(b-z)\cdot P = 0$$

oder

$$P = \tfrac{1}{2} f''(z) \tag{2}$$

ist. Führt man $z = a + \theta(b-a)$ ein, und setzt $x = a$, so erhält man aus (1)

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a + \theta(b-a)). \tag{3}$$

Diese Formel ist eine Erweiterung des Mittelwertsatzes. Eine weitere Verallgemeinerung erhält man in folgender Weise.

Bildet man analog der Formel (1) für ein beliebiges n die Funktion

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \dots \tag{4}$$
$$- \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^p}{p} \cdot P,$$

in der P und p von x unabhängig sind und P so bestimmt gedacht wird, dass $\varphi(a) = 0$ wird, dass also

$$\frac{(b-a)^p}{p} P = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) - \dots$$
$$- \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

so gilt für $\varphi(x)$, da auch $\varphi(b) = 0$, und wegen der über die Ableitungen von $f(x)$ gemachten Voraussetzungen das Theorem von **Rolle**, wonach

$$\varphi'(z) = -f'(z) + f'(z) - (b-z)\cdot f''(z) + (b-z)f''(z) - \frac{(b-z)^2}{1\cdot 2} f'''(z)$$
$$+ \frac{(b-z)^2}{1\cdot 2} f'''(z) + \dots \quad - \frac{(b-z)^n}{n!} f^{(n+1)}(z) + (b-z)^{p-1}\cdot P = 0.$$

Hierin heben sich je zwei aufeinanderfolgende Glieder bis auf die zwei letzten auf, so dass

$$(b-z)^{p-1}\cdot P = \frac{(b-z)^n}{n!} f^{(n+1)}(z)$$

oder

$$P = \frac{(b-z)^{n-p+1}}{n!} \cdot f^{(n+1)}(z) \tag{5}$$
$$= \frac{(b-a)^{n-p+1}}{n!} (1-\theta)^{n-p+1} f^{(n+1)}(a + \theta(b-a));\ 0 < \theta < 1.$$

Für $x = a$ folgt dann aus Gleichung (4) die Gleichung

$$(6) \qquad f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(b-a)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{n!\, p} (1-\theta)^{n-p+1} f^{(n+1)}(a + \theta(b-a)).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x + h$ an Stelle von b und x für a, so erhält man

$$(7) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n,$$

worin R_n zur Abkürzung für

$$(8) \qquad R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\, p} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h), \; 0 < \theta < 1,$$

gesetzt wurde.

Die durch die Gleichungen (7) und (8) dargestellte Formel heisst die Taylor'sche Formel. Sie gibt an, nach welchem Gesetze der Wert der Funktion $f(x)$, wenn die Variable x um die beliebige Grösse h zunimmt, von diesem Zuwachse h abhängt.

Ist $f(x)$ eine ganze rationale Funktion, so wird eine der Ableitungen $f'(x)$; $f''(x)$; ... zu Null. Die Formel enthält alsdann eine beschränkte Anzahl von Gliedern. In allen andern Fällen kann die Formel beliebig weit fortgesetzt werden, so lange die Voraussetzungen erfüllt sind, unter denen sie abgeleitet wurde, dass nämlich x und $x + h$ innerhalb des Bereiches (a, b) liegen, in dem die Funktion $f(x)$ eindeutig und stetig ist, und in dem ihre Ableitungen $f'(x)$; $f''(x)$; ... ebenfalls eindeutig, stetig und endlich sind.

Auf der rechten Seite der Gleichung (7) kommt in R_n, dem sogenannten Restgliede, noch der unbekannte echte Bruch θ vor; kann man aber zeigen, dass dieses letzte Glied R_n für beliebig wachsende Werte von n sich der Null immer mehr und mehr nähert, und sind alle Ableitungen der Funktion $f(x)$ in dem Bereiche (a, b) stetig und endlich, so geht die Taylor'sche Formel in die Taylor'sche Reihe

$$(9) \qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots \text{ in inf.}$$

über.

Diese lehrt, wenn man die Werte einer Funktion und aller ihrer Ableitungen für einen einzelnen bestimmten Wert x der Veränderlichen kennt, den Funktionswert für jeden andern Wert $x + h$ berechnen, wenn die Funktion in dem Bereiche x bis $x + h$ nebst allen ihren Ableitungen stetig und endlich ist, und wenn $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ ist.

Denn die Taylor'sche Reihe und die aus ihr zu bildenden Reihen sind, wie unendliche Reihen überhaupt, nur dann zulässig, wenn sie konvergent sind (§ 59).

283. Unendlich kleine Zunahme einer Funktion. Wird in der Taylor'schen Reihe

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2 \cdot 3} f'''(x) + \dots$$

$x \quad 0 \quad x f'(0) \quad \frac{x^2}{2} f''(0)$

die Grösse h unendlich klein, so ist das Glied mit h eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung, das mit h^2 eine solche der zweiten Ordnung u. s. w. Vernachlässigt man die Glieder von der zweiten Ordnung an, so wird der Unterschied

$$f(x+h) - f(x)$$

dem Zuwachse h proportional, also eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung.

Zwischen den unendlich kleinen Grössen der zweiten Ordnung ergibt sich aus (1) folgende Gleichung

$$[f(x+h) - f(x)] - h f'(x) = \frac{h^2}{2} f''(x),$$

d. h. es ist der Unterschied der beiden unendlich kleinen Grössen der ersten Ordnung, nämlich der Klammergrösse und dem Gliede mit h, der Grösse h^2 proportional, also ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung.

So besteht ferner die Gleichung

$$\Big\{[f(x+h) - f(x)] - h f'(x)\Big\} - \frac{h^2}{2} f''(x) = \frac{h^3}{2 \cdot 3} f'''(x)$$

zwischen unendlich kleinen Grössen der dritten Ordnung. Daher ist die Differenz der beiden unendlich kleinen Grössen der zweiten Ordnung links der Grösse h^3 proportional, also unendlich klein von der dritten Ordnung; u. s. w.

Ersetzt man h durch dx und f(x) durch y, so geht (1) über in

$$(2) \qquad f(x+dx) = y + dy + \frac{1}{2} d^2 y + \frac{1}{2 \cdot 3} d^3 y + \dots$$

eine Form der Reihe, die die Ordnung der Glieder sofort erkennen lässt.

284. Entwickelung der algebraischen Funktion $f(x) = \dfrac{a}{b+x}$ in eine Reihe. Durch Wiederholung der Differentiation erhält man

$$f'(x) = -\frac{a}{(b+x)^2}; \quad f''(x) = \frac{2a}{(b+x)^3}; \quad f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3 a}{(b+x)^4};$$

$$f^{IV}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 a}{(b+x)^5}; \text{ etc.}$$

Diese Ableitungen sind sämtlich stetig und endlich, so lange x nicht gleich $-b$ ist.

Mithin folgt durch Substitution dieser Werte in die Taylorsche Formel

$$\frac{a}{b+x+h} = \frac{a}{b+x} - \frac{a}{(b+x)^2}h + \frac{2a}{(b+x)^3}\cdot\frac{h^2}{2} - \frac{2\cdot 3a}{(b+x)^4}\cdot\frac{h^3}{2\cdot 3} + \frac{2\cdot 3\cdot 4a}{(b+x)^5}\cdot\frac{h^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \ldots$$

Setzt man hierin $x = 0$, so kommt

$$\frac{a}{b+h} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b^2}h + \frac{a}{b^3}h^2 - \frac{a}{b^4}h^3 + \frac{a}{b^5}h^4 - \ldots$$

und, indem man h mit x vertauscht,

$$\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b}\left[1 - \frac{x}{b} + \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^3 + \left(\frac{x}{b}\right)^4 - \ldots\right].$$

Diese Reihe kann auch durch unmittelbare Division von a durch $b + x$ erhalten werden; sie ist aber nur konvergent, wenn $|x| < |b|$ ist.

285. Entwickelung der Wurzelgrösse $\sqrt{x+h}$ in eine Reihe. Setzt man $f(x) = \sqrt{x}$, so ist

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}};\ f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}};\ f^{IV}(x) = -\frac{3\cdot 5}{16\sqrt{x^7}};\ldots$$

Führt man diese Werte in die Taylor'sche Reihe ein, so wird

$$\sqrt{x+h} = \sqrt{x} + \frac{h}{2\sqrt{x}} - \frac{h^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{h^3}{16x^2\sqrt{x}} - \frac{5h^4}{128x^3\sqrt{x}} + \ldots$$

Setzt man $\sqrt{x+h} = (x+h)^{\frac{1}{2}}$ und entwickelt nach dem binomischen Satze, so erhält man diese Reihe ebenfalls. Mithin ist diese Reihe nach § 67 konvergent, wenn der absolute Wert des Verhältnisses $\frac{h}{x}$ kleiner ist als 1. Für $x = 0$ wird die rechte Seite unendlich gross, während die linke sich auf $\sqrt{h}$ reduziert. Für diesen Wert von x ist die Reihe daher unbrauchbar, was schon daraus hervorgeht, dass für $x = 0$ die sämtlichen Ableitungen unendlich gross werden.

286. Entwickelung logarithmischer Ausdrücke in Reihen. Es sei $f(x) = l\,x$; es wird

$$f'(x) = \frac{1}{x};\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2};\quad f'''(x) = \frac{2}{x^3};\quad f^{IV}(x) = \frac{-2\cdot 3}{x^4};\ldots$$

Diese sind sämtlich endlich und stetig, so lange $x > 0$ ist.

Mit Hilfe dieser Werte wird $f(x+h)$ zu

$$(1)\qquad l(x+h) = l\,x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \frac{h^5}{5x^5} - \ldots$$

Setzt man $x = 1$, so erhält man die in § 69 abgeleitete Reihe

$$(2)\qquad l(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} - \ldots,$$

als deren Konvergenzbereich in § 69

$$-1 < h \leqq +1$$

angegeben ist.

Setzt man dagegen $h = 1$, so folgt

$$(3) \qquad l(1+x) = l\,x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{5x^5} - \ldots$$

Diese Reihe (3) ist konvergent für jeden Wert von $x = 1$ bis $x = +\infty$.

287. Entwickelung trigonometrischer Funktionen in Reihen. Es sei

$$f(x) = \sin x, \qquad \varphi(x) = \cos x;$$

dann erhält man durch Differentiation

$$f'(x) = \cos x; \quad f''(x) = -\sin x; \quad f'''(x) = -\cos x; \; f^{IV}(x) = \sin x; \ldots$$

$$\varphi'(x) = -\sin x; \; \varphi''(x) = -\cos x; \; \varphi'''(x) = \sin x; \quad \varphi^{IV}(x) = \cos x; \ldots$$

Sämtliche Differentialquotienten sind für jeden endlichen Wert von x stetig und endlich.

Setzt man diese Werte in die Taylor'sche Reihe ein, und schreibt y für h, so folgt

$$\sin(x+y) = \sin x + y\cos x - \frac{y^2}{2}\sin x - \frac{y^3}{2\cdot 3}\cos x + \frac{y^4}{2\cdot 3\cdot 4}\sin x + \ldots$$

$$\cos(x+y) = \cos x - y\sin x - \frac{y^2}{2}\cos x + \frac{y^3}{2\cdot 3}\sin x + \frac{y^4}{2\cdot 3\cdot 4}\cos x - \ldots$$

Für $x = 0$ erhält man hieraus die in § 72 gefundenen Reihen

$$\sin y = y - \frac{y^3}{2\cdot 3} + \frac{y^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots$$

deren Konvergenzbereich $-\infty < x < +\infty$ in § 72 auch angegeben worden ist.

288. Reihe von Maclaurin. Setzt man in der Formel (6) des § 282 x an Stelle von b, so erhält man

$$(1) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{n!\,p}\cdot(1-\theta)^{n-p+1}\cdot f^{(n+1)}\Big(a + \theta(x-a)\Big).$$

Liegt 0 in dem Bereiche (a, b) der Veränderlichen, so erhält man für $a = 0$ die durch die Gleichungen

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n \\ R_n &= \frac{x^{n+1}}{n!\,p}(1-\theta)^{n-p+1}\cdot f^{(n+1)}(\theta x),\; 0 < \theta < 1, \end{aligned} \right.$$

bestimmte Maclaurin'sche Formel, und falls

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0$$

ist, die Maclaurin'sche Reihe

$$(3) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots.$$

Sie dient dazu, eine Funktion in eine nach x fortschreitende Potenzreihe zu entwickeln, und ist anwendbar, wenn die Funktion in dem Bereiche von 0 bis x samt allen ihren Ableitungen stetig und endlich ist, und wenn das Restglied R_n gegen die Null konvergiert.

Unter den gleichen Voraussetzungen liefert die Formel (1) die vom Werte a ausgehende erweiterte Maclaurin'sche Reihe

$$(4) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots.$$

Nimmt man an, wie das in den §§ 67 bis 77 geschehen, es lasse sich f(x) in einer Reihe von der Form darstellen

$$(5) \qquad f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

worin A, B, C, .. unbekannte, konstante Vorzahlen bezeichnen, so erhält man die Werte dieser Vorzahlen wie folgt.

Durch Wiederholung der Differentiation von (5) kommt

$$\begin{aligned} f'(x) &= B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots \\ f''(x) &= \phantom{B +{}} 2C + 2\cdot 3Dx + 3\cdot 4Ex^2 + \ldots \\ f'''(x) &= \phantom{B + 2C + {}} 2\cdot 3D + 2\cdot 3\cdot 4Ex + \ldots \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man hierin, sowie in (5) $x = 0$, so folgt

$$A = f(0), \quad B = f'(0), \quad C = \frac{1}{2} f''(0), \quad D = \frac{1}{2\cdot 3} f'''(0)\ldots$$

Führt man diese Werte in (5) ein, so erhält man in der That die Maclaurin'sche Reihe (3).

289. Entwickelung der Exponentialgrösse a^x in eine Reihe. Man schreibe $f(x) = a^x$; dann wird man erhalten

$$f'(x) = a^x\, l\, a; \quad f''(x) = a^x (l\, a)^2; \quad f'''(x) = a^x (l\, a)^3;$$
$$f^{IV}(x) = a^x (l\, a)^4; \ldots$$

Mithin für $x = 0$:

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = l\, a; \quad f''(0) = (l\, a)^2; \quad f'''(0) = (l\, a)^3;$$
$$f^{IV}(0) = (l\, a)^4; \ldots$$

Führt man diese Werte in die Maclaurin'sche Reihe § 288 ein, so kommt

$$a^x = 1 + (l\, a)\frac{x}{1} + (l\, a)^2 \frac{x^2}{2} + (l\, a)^3 \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots$$

Es ist dies die in § 68 nach dem Satze der unbestimmten Koeffizienten entwickelte Reihe.

290. Entwickelung des Kreisbogens durch den zugehörigen Sinus. Ist f(x) ein Bogen, beschrieben mit dem Halbmesser = 1 und x der zugehörige Sinus, so erhält man aus den Recursionsformeln (4) des § 278

$$f(x) = \arc\sin x,$$

$$f'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x) = x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'''(x) = 3x^2(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} + (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f^{IV}(x) = 15x^3(1 - x^2)^{-\frac{7}{2}} + 9x(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$f^{V}(x) = 105x^4(1 - x^2)^{-\frac{9}{2}} + 90x^2(1 - x^2)^{-\frac{7}{2}} + 9(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

u. s. f.

Diese sind sämtlich endlich innerhalb des Bereiches $(-1, +1)$; man erhält aus ihnen für $x = 0$

$$f(0) = 0;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = 0;\ f'''(0) = 1;\ f^{IV}(0) = 0;\ f^{V}(0) = 9;$$

u. s. f.

Setzt man diese Werte in die Maclaurin'sche Reihe, so erhält man die gesuchte, schon in § 76 auf anderm Wege gefundene Reihe

$$\arc\sin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

deren Konvergenzbereich durch

$$-1 \leqq x \leqq +1$$

gegeben ist.

291. Das Restglied der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe. Die Möglichkeit, mit Hilfe der Taylor'schen oder Maclaurin'schen Reihe eine Funktion $f(x+h)$ oder $f(x)$ durch eine unendliche Reihe darzustellen, hängt, wie hervorgehoben, nicht nur von der Stetigkeit und Endlichkeit der Differentialquotienten aller Ordnungen ab, sondern ist an die Bedingung gebunden, dass das Restglied R_n mit wachsendem n gegen die Null konvergiert. In den Anwendungen der § 284 bis § 290 ist hierauf keine besondere Rücksicht genommen worden, weil die Konvergenzbedingungen der betreffenden Reihen schon früher abgeleitet waren.

Nunmehr soll an einigen Beispielen das Restglied genauer untersucht werden. Es war gefunden worden (§ 282) für das Restglied der Taylor'schen Reihe

$$(1) \qquad R_n = \frac{h^{n+1}}{n!\,p} \cdot (1 - \theta)^{n-p+1} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h),$$

$x^{n+1}\ (1-\theta)^{n-p+1}\ f^{(n+1)}(\theta x)$

und für das Restglied der Maclaurin'schen Reihe (§ 288)

$$(2) \qquad R_n = \frac{x^{n+1}}{n!\,p}(1-\theta)^{n-p+1} \cdot f^{(n+1)}(\theta x).$$

Diese Restglieder, in denen p eine beliebige Grösse war, erhalten eine besonders einfache Gestalt, wenn man

$$\text{I. } p = n + 1 \quad \text{und} \quad \text{II. } p = 1$$

setzt. Man erhält dann für die Taylor'sche Reihe die Restformen

$$(3) \quad \begin{cases} R_I = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h) \\[2ex] R_{II} = \dfrac{h^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h) \end{cases}$$

Lagr.

C.

und für die Maclaurin'sche Reihe

$$(4) \quad \begin{cases} R_I = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \\[2ex] R_{II} = \dfrac{x^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n \cdot f^{(n+1)}(\theta x). \end{cases}$$

Lin

C

Die erstere dieser Formen des Restgliedes beider Reihen rührt von Lagrange her, die zweite hat Cauchy angegeben. Im Folgenden sollen nur diese beiden Formen als erste und zweite Form benutzt werden. Jedoch ist noch hervorzuheben, dass in beiden Formen die Grösse θ, die unbekannt ist, verschiedene Werte haben wird: allein es genügt zu wissen, dass sie zwischen 0 und 1 liegt.

Es lautet nunmehr die Taylor'sche Reihe

$$(5) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h)$$

$$= f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h)$$

und die Maclaurin'sche Reihe

$$(6) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

$$= f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n \cdot f^{(n+1)}(\theta x).$$

Sehr einfach gestaltet sich die Untersuchung des Restgliedes beider Reihen in der Lagrange'schen Form bei solchen Funktionen, deren nte Ableitungen auch für unendlich grosse n in dem Bereiche $(x, x+h)$ endlich bleiben. Denn dann hängt die Frage, ob R_I bei wachsendem n die Grenze Null habe, nur von dem Produkte

$$Q = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

ab. Nun ist aber

$$Q = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdots \cdot \frac{h}{n-1} \cdot \frac{h}{n} \cdot \frac{h}{n+1},$$

also

$$Q^2 = \frac{h^2}{1^2} \cdot \frac{h^2}{2^2} \cdot \frac{h^2}{3^2} \cdots \cdot \frac{h^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{h^2}{n^2} \cdot \frac{h^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{h^2}{1 \cdot (n+1)} \cdot \frac{h^2}{2 \cdot n} \cdot \frac{h^2}{3 \cdot (n-1)} \cdots \cdot \frac{h^2}{(n-1) \cdot 3} \cdot \frac{h^2}{n \cdot 2} \cdot \frac{h^2}{(n+1) \cdot 1}.$$

Hierin ist aber der Nenner $(n+1)$ der kleinste, so dass

$$Q^2 < \left(\frac{h^2}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{oder} \quad Q < \left(\frac{h}{\sqrt{n+1}}\right)^{n+1}$$

ist. Bei endlichem h wird mit wachsendem n der Bruch $\frac{h}{\sqrt{n+1}}$ immer kleiner, daher hat seine $(n+1)$te Potenz die Null zur Grenze.

Daher gilt der Satz: Eine Funktion, deren nte Ableitung in einem Bereiche auch für $n = \infty$ endlich bleibt, lässt sich in diesem Bereiche durch eine Potenzreihe nach der Taylor'schen oder, falls der Bereich die Null einschliesst, nach der Maclaurin'schen Reihe darstellen.

Das Restglied der Taylor'schen oder Maclaurin'schen Reihe dient noch zu einem andern wichtigen Zwecke; es gestattet nämlich die Grenze des Fehlers zu bestimmen, den man begeht, wenn man zur Berechnung des Wertes einer Funktion die Taylor'sche oder Maclaurin'sche Reihe bei einem bestimmten Gliede abbricht.

Würde man die Grösse θ genau kennen, so könnte der Wert der Reihe schon aus einer kleinern Anzahl Glieder berechnet werden. Allein von der Grösse θ weiss man nur, dass sie zwischen 0 und 1 liegt. Wählt man nun θ so, dass das Restglied möglichst gross und ebenso, dass es möglichst klein wird, so gibt die rechte Seite der Reihe (5) oder (6) zwei Grenzwerte, zwischen denen der Wert von $f(x+h)$ oder $f(x)$ liegen muss. An dem auf diese Weise berechneten Werte der Funktion haftet daher ein Fehler, der kleiner ist als der Unterschied dieser Grenzwerte.

I. Anwendung auf die Exponentialreihe. Aus $f(x) = e^x$ folgt

$$f'(x) = e^x; \quad f''(x) = e^x; \ldots \quad f^{(n)}(x) = e^x; \quad f^{(n+1)}(x) = e^x.$$
$$f'(0) = 1; \quad f''(0) = 1; \ldots \quad f^{(n)}(0) = 1; \quad f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}.$$

Da die (n + 1)te Ableitung für jeden endlichen Wert von x auch für $n = \infty$ endlich bleibt, so konvergiert die Taylor'sche und die Maclaurin'sche Reihe für jeden endlichen Wert von x.

Die Maclaurin'sche Reihe gibt

$$(7)\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} e^{\theta x}.$$

Bricht man die Reihe (7) bei der fünften Potenz von x ab, so erhält man für $n = 4$, $\theta = 0$ und $\theta = 1$ folgende Grenzwerte der Funktion

$$e^x < 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Benutzt man daher den Wert von e^x, den eine dieser Reihen liefert, so ist der Fehler, der begangen wird, kleiner als das Glied $\dfrac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Setzt man $x = 1$, so findet man aus obigen Ungleichheiten

$$e < 2{,}750\,00 \quad \text{und} \quad e > 2{,}708\,33.$$

Der Unterschied dieser Werte ist $= 0{,}041\,67$ und beträgt vom wahren Werte von e

$$0{,}041\,67 : 2{,}718\,28 = 0{,}015\,3,$$

d. h. der Fehler bei Berechnung von e nach obigem Verfahren kann 1,53 Prozente des wahren Wertes nicht übersteigen.

II. Anwendung auf die logarithmische Reihe. Da lx nicht in eine Potenzreihe nach x entwickelbar ist (§ 69), sei

$$f(x) = l(1 + x);\ \text{man erhält}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}; \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \pm \frac{2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{(1+x)^n};$$

$$f'(0) = 1; \qquad f''(0) = -1; \qquad f'''(0) = 2; \ldots$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \mp \frac{2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n}{(1 + \theta x)^{n+1}};$$

und daher mittels der Maclaurin'schen Reihe, da $f(0) = 0$,

$$(8)\qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots$$

mit dem Restgliede, abgesehen vom Vorzeichen,

$$R = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad \text{oder} \quad = \frac{x^{n+1} \cdot (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Damit diese Reihe konvergent wird, muss das Restglied für ein unendlich grosses n verschwinden. Dieses Glied kann in der ersten Form geschrieben werden

$$\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

Für positive Werte von x wird dieser Ausdruck $=0$ für ein unendlich grosses n, wenn $x=1$ oder kleiner als 1 ist. Denn die Klammergrösse ist dann ein echter Bruch, da θ weder 0 noch 1 sein kann, dessen Potenz mit wachsendem Exponenten abnimmt und für $n=\infty$ verschwindet.

Für negative Werte von x gibt die zweite Form des Restgliedes, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\left(\frac{|x|-\theta|x|}{1-\theta|x|}\right)^{n}\cdot\frac{|x|}{1-\theta|x|}.$$

Nun ist der Bruch in der Klammer kleiner als 1 für jeden Wert von $|x|$, der kleiner ist als 1, d. h. wenn x zwischen 0 und -1 liegt. Daher wird die n^{te} Potenz desselben, für wachsende n, abnehmen und zu Null werden für $n=\infty$.

An diesem Resultate kann alsdann der zweite Faktor $\frac{|x|}{1-\theta|x|}$ nichts ändern, weil er einen endlichen Wert hat.

Die Reihe ist daher konvergent, wenn der Wert von x zwischen $+1$ und -1 liegt und auch dann noch, wenn er $=+1$ ist. (§ 69; 63).

III. Anwendung auf die binomische Reihe. Es sei $y=f(x)=x^m$, worin m eine beliebige endliche Zahl sei und y stets positiv genommen werde. Nach § 274 ist

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n};$$

daher erhält man unter Benutzung der Taylor'schen Reihe

$$(9)\qquad (x+h)^m = x^m+\frac{m}{1}h\,x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}h^2x^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}h^3x^{m-3}+\ldots+R,$$

wobei

$$(10)\left\{\begin{aligned} R_I &= \frac{m(m-1)\ldots.(m-n)}{1\cdot 2\ldots(n+1)}h^{n+1}\cdot(x+\theta h)^{m-n-1}\\ R_{II} &= \frac{m(m-1)\ldots.(m-n)}{1\cdot 2\ldots n}h^{n+1}(1-\theta)^n\cdot(x+\theta h)^{m-n-1}\end{aligned}\right.$$

ist.

Ist m eine ganze positive Zahl, so sind alle Ableitungen von der $(m+1)$ten an gleich Null, und die Reihe wird eine endliche; in allen andern Fällen ist die Reihe unendlich. Setzt man der Einfachheit wegen $x = 1$ und ersetzt dann h durch x, so erhält man die Entwickelung

$$(11)\quad (1+x)^m = m + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots.$$

mit dem Restgliede

$$(12)\quad \begin{cases} R_I = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\, x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1} \\[2ex] R_{II} = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\, x^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{m-n-1}. \end{cases}$$

Die Reihe (11) stimmt mit der Formel (3) des § 67 überein. Dort ist bereits der Konvergenzbereich $-1 < x < +1$ angegeben worden. Daher kann die Untersuchung des Restgliedes auf diesen Bereich beschränkt werden.

Die zweite Form des Restgliedes kann in Form von drei Faktoren geschrieben werden

$$(13)\quad R_{II} = \left(m\,x\cdot\frac{m-1}{1}x\cdot\frac{m-2}{2}x\ldots\frac{m-n}{n}x\right)\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot 1+\theta x)^{m-1}.$$

Der dritte Faktor $(1+\theta x)^{m-1}$ ist von n unabhängig, also eine endliche Grösse, da m als endlich vorausgesetzt wird.

Wird $|x| < 1$ vorausgesetzt, so ist der Quotient $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}$, mag x positiv oder negativ sein, ein echter Bruch, also wird die $n$te Potenz dieser Grösse für ein unendlich grosses n zu Null.

Zu untersuchen bleibt noch der erste Faktor des Restgliedes

$$m\,x\cdot\frac{m-1}{1}x\cdot\frac{m-2}{2}x\ldots\frac{m-n}{n}x;$$

dieses mit n unendliche Produkt wird die Null zur Grenze haben, wenn seine Faktoren von einer bestimmten Stelle an echte Brüche sind und für $n = \infty$ echte Brüche bleiben. Da nun $|x| < 1$, so nehmen die Faktoren mit wachsendem Werte von n ab; der letzte dieser Faktoren, nämlich $\dfrac{m-n}{n}x$ konvergiert bei endlichem m und wachsendem n mehr und mehr gegen $\pm x$ als Grenze, ist also mit x ein echter Bruch; folglich ist das Produkt für $n = \infty$ verschwindend klein.

Daher kann in dem Bereiche

$$-1 < x < +1$$

für jedes m die positive Funktion $(1+x)^m$ durch die Reihe

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots.$$

berechnet werden.

Schreibt man

$$(x+h)^m = \left(1+\frac{h}{x}\right)^m\cdot x^m,$$

so folgt, dass die Taylor'sche Reihe (9) konvergent ist, wenn $\left|\frac{h}{x}\right| < 1$ ist.

Der Fehler, den man begeht, wenn man die Reihe (11) beim $(n+1)$ten Gliede abbricht, ist, wie aus der ersten Form des Restgliedes hervorgeht, höchstens

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\, x^{n+1}\cdot(1+x)^{m-n-1} \quad \text{für } x > 0$$

oder $$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\, x^{n+1} \quad \text{für } x < 0.$$

Ist z. B. $m = \frac{1}{r}$, hat man also zu berechnen $\sqrt[r]{1+x}$ und bricht beim zweiten Gliede ab, setzt also

$$\sqrt[r]{1+x} = 1 + \frac{x}{r},$$

so ist der dabei begangene Fehler für $x > 0$ kleiner als $\frac{r-1}{2r^2}\cdot x^2$; für

$r = 2$ der Fehler also kleiner als $\frac{x^2}{8}$;

$r = 3$ der Fehler also kleiner als $\frac{x^2}{9}$.

So ist z. B.

$$\sqrt{1{,}000\,834} = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}000\,834 = 1{,}000\,417$$
$$\sqrt[3]{1{,}000\,834} = 1 + \tfrac{1}{3}\cdot 0{,}000\,834 = 1{,}000\,278$$

auf 6 Stellen genau; denn die Fehler sind kleiner als

$$\frac{0{,}000\,834^2}{8} < \frac{0{,}001^2}{8} < \frac{1}{8\cdot 10^6}$$
$$\frac{0{,}000\,834^2}{9} < \frac{0{,}001^2}{9} < \frac{1}{9\cdot 10^6}.$$

III. Differentiation der Funktionen mit mehreren Veränderlichen und der unentwickelten Funktionen.

292. Der Taylor'sche Satz für Funktionen mit zwei unabhängig veränderlichen Grössen. Die gegebene Funktion sei

$$u = f(x, y).$$

Lässt man x in $x + h$ übergehen und betrachtet y als konstant, so erhält man

$$f(x+h, y) = u + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{h^3}{2\cdot 3} + \ldots \tag{1}$$

In sämtlichen Gliedern dieser Gleichung lasse man y in $y + k$ übergehen und betrachte x als unveränderlich; dann wird

$$
\begin{array}{llllll}
u & \text{zu } u + \frac{\partial u}{\partial y} k & + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{k^2}{2} & + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \frac{k^3}{2 \cdot 3} & + \ldots \\
\frac{\partial u}{\partial x} & \text{„} \quad + \frac{\partial u}{\partial x} & + \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} k & + \frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y^2} \frac{k^2}{2} & + \ldots \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{„} \quad \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \, \partial y} k & + \ldots \\
\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} & \text{„} \quad \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} & + \ldots
\end{array}
$$

Führt man diese Werte in (1) ein, so kommt als gesuchte Reihe

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad f(x+h, y+k) = u &+ \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{k^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \frac{k^3}{2 \cdot 3} + \ldots \\
&+ \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \frac{h k^2}{2} + \ldots \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \frac{h^2 k}{2} + \ldots \\
&+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{h^2}{2 \cdot 3} + \ldots,
\end{aligned}
$$

die auch wie folgt geschrieben wird

$$
\begin{aligned}
(3) \quad f(x+h, y+k) = u &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k\right) \\
&+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} k^2\right) \\
&+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} k^3\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

Hierin ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ das partielle Differentialverhältnis, das entsteht, wenn man $f(x, y)$ nur in Hinsicht x differentiiert, $\frac{\partial u}{\partial y}$ das partielle Differentialverhältnis in Hinsicht y (§ 30); $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ das zweite partielle Differentialverhältnis von u, d. h. dasjenige Verhältnis, das aus $\frac{\partial u}{\partial x}$ durch nochmalige Differentiation in Hinsicht x sich bildet; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ dasjenige Verhältnis, das aus $\frac{\partial u}{\partial x}$ erhalten wird, wenn man in Hinsicht y allein differentiiert, etc.

Die Bedingungen für die Gültigkeit der Entwickelungen (2) und (3) ergeben sich aus den Bedingungen des § 282. Danach müssen die Werte x und $x + h$, y und $y + k$ einem Bereiche beider Veränderlichen angehören, in dem $f(x, y)$ und ihre sämtlichen partiellen Differentialquotienten eindeutig, stetig und endlich sind.

Lässt man in $f(x, y)$ zuerst y in $y + k$ und sodann x in $x + h$ übergehen, so muss eine Reihe für $f(x + h, y + k)$ entstehen, die der vorstehenden gleich ist, woraus folgt, dass in beiden Reihen die Glieder mit denselben Potenzen von h und k einander gleich sein müssen. Dies führt zu folgenden Relationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}, \text{ etc.}$$

Allein diese Gleichungen gelten nur, wenn die Differentialverhältnisse der betreffenden Ordnung stetig sind. Aus der Gleichung (5) des § 281 für den Mittelwertsatz folgt nämlich

$$f(x + h, y) - f(x, y) = h \frac{\partial}{\partial x} f(x + \theta h, y); \quad 0 < \theta < 1;$$

ersetzt man hierin y durch $y + k$, so folgt

$$f(x + h, y + k) - f(x, y + k) = h \frac{\partial}{\partial x} f(x + \theta h, y + k)$$

und durch Subtraktion beider Gleichungen

$$\begin{aligned} (4) \quad & f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y) \\ & = h\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x + \theta h, y + k) - \frac{\partial}{\partial x} f(x + \theta h, y)\right) \\ & = h k \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x + \theta h;\ y + \theta' k),\ 0 < \theta' < 1, \end{aligned}$$

wenn man auf die Klammer wieder den Mittelwertsatz anwendet. In ganz analoger Weise findet man

$$f(x, y + k) - f(x, y) = k \frac{\partial}{\partial y} f(x, y + \theta_1 k); \ 0 < \theta_1 < 1,$$

$$f(x + h, y + k) - f(x + h, y) = k \frac{\partial}{\partial y} f(x + h, y + \theta_1 k)$$

und hieraus

$$\begin{aligned} (5) \quad & f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y) \\ & = k\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x + h, y + \theta_1 k) - \frac{\partial}{\partial y} f(x, y + \theta_1 k)\right) \\ & = k h \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x + \theta'_1 h, y + \theta_1 k),\ 0 < \theta'_1 < 1. \end{aligned}$$

Aus der Vergleichung von (4) und (5) folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} f(x + \theta h, y + \theta' k) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x + \theta'_1 h, y + \theta_1 k).$$

Sind nun $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$ für das Wertepaar x, y stetige Funktionen, so geben die beiden Seiten dieser Gleichung für gegen 0 konvergierende h und k denselben Wert.

Daher hängt eine partielle Ableitung beliebig hoher Ordnung nicht von der Reihenfolge der Differentiationen ab, wenn die Funktion und ihre Ableitungen bis zu der betreffenden Ordnung stetig sind.

293. Differentiation der Funktionen mit mehreren unabhängig veränderlichen Grössen. Lässt man in der vorstehenden Taylor'schen Reihe für $f(x+h, y+k)$ die Grösse h in dx, k in dy übergehen, so folgt

$$f(x+dx, y+dy) - f(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{dy^2}{2} + \ldots$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot dx\, dy + \ldots$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \ldots$$

Die linke Seite ist das vollständige Differential von $f(x, y)$. Auf der rechten Seite sind die Glieder $\frac{\partial u}{\partial y} dy$ und $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ die partiellen Differentiale der Funktion und als solche unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung. Die Glieder mit den Faktoren dy^2, $dx\,dy$, dx^2 sind unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung und verschwinden gegenüber denen der ersten Ordnung. Um so mehr werden in der Reihe die Glieder mit den Faktoren dy^3, $dx\,dy^2$, etc. vernachlässigt werden können. Mithin ist das vollständige Differential

$$(1) \qquad df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy.$$

Auf demselben Wege findet man als Differential einer Funktion mit drei unabhängig veränderlichen Grössen

$$(2) \qquad df(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} dz.$$

Mithin erhält man das vollständige Differential einer Funktion mit mehreren unabhängig veränderlichen Grössen, wenn man die Funktion in Hinsicht einer jeden Veränderlichen besonders differentiiert und die erhaltenen Differentiale addiert.

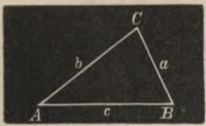
Man sieht, dass man dasselbe Resultat erhält, wie wenn man nach den Regeln verfährt, die in der ersten Abteilung über die Differentiation von Aggregaten, Produkten, Quotienten, etc. bei Funktionen mit einer Variabeln gelehrt wurden.

Beispiel. In einem Dreiecke ABC (Fig. 101) sei die Standlinie c mit der Messkette und die beiden anliegenden Winkel α und β mit einem Winkelinstrumente gemessen. Die Resultate dieser Messungen seien mit kleinen Fehlern behaftet. Man soll den Einfluss dieser Fehler auf die dem Winkel α gegenüberliegende Seite a bestimmen.

Man hat die Relation

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma.$$

Fig. 101.



Setzt man hierin $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$, so folgt

$$a \sin(\alpha + \beta) = c \sin \alpha.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen, so kommt

$$(1) \qquad l\,a + l \sin(\alpha + \beta) = l\,c + l \sin \alpha.$$

Die Differentiation dieser Gleichung gibt

$$\frac{d\,a}{a} + \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}(d\,\alpha + d\,\beta) = \frac{d\,c}{c} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} d\,\alpha,$$

$$\frac{d\,a}{a} = \frac{d\,c}{c} + \left[\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}\right] d\,\alpha - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} d\,\beta,$$

$$(2) \qquad \frac{d\,a}{a} = \frac{d\,c}{c} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} d\,\alpha - \operatorname{cotang}(\alpha + \beta)\, d\,\beta.$$

Betrachtet man in Formel (1) die Grössen c, α, β als unabhängig Veränderliche, also l a als die Funktion, so besteht das Differential von l a aus drei partiellen Differentialen. In der That ist in (2) das erste Glied rechts das partielle Differential von (1) in Hinsicht c, das zweite Glied dasjenige in Hinsicht α und das dritte dasjenige in Hinsicht β.

Sind nun d c, d α, d β die sehr kleinen Fehler der Grössen c, α, β, so wird d a der gesuchte Fehler der Seite a und $\frac{d\,a}{a}$ das Verhältnis dieses Fehlers zur Seite sein.

294. Höhere Differentiale einer Funktion mit mehreren unabhängig veränderlichen Grössen. Die gegebene Funktion sei

$$u = f(x, y);$$

ihr erstes Differential ist nach Formel (1) des § 293

$$(1) \qquad d\,u = \frac{\partial u}{\partial x} d\,x + \frac{\partial u}{\partial y} d\,y.$$

In diesem Ausdrucke sind die Differentialverhältnisse $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ Funktionen von x und y. Da aber x und y von einander unabhängig sind, so nimmt man ihre ersten Differentiale d x und d y als konstant an und erhält

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\,x + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} d\,y,$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} d\,x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\,y.$$

Da nun $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$, so wird das Differential von d u in Formel (1)

$$(2) \qquad d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\,x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} d\,x\, d\,y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\,y^2.$$

Wird diese Gleichung nochmals differentiiert, so erhält man zunächst

$$d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,d x + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}\,d y,$$

$$d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}\,d x + \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\,d y,$$

$$d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\,d x + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\,d y.$$

Deshalb wird das dritte Differential von u sein

$$(3)\qquad d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,d x^3 + 3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\,d x^2 d y + 3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\,d x\,d y^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\,d y^3.$$

Auf ähnliche Weise kann die Differentiation fortgesetzt und ebenso die Wiederholung der Differentiation einer Funktion mit mehr als zwei unabhängig Variabeln ausgeführt werden.

295. Wiederholte Differentiation einer unentwickelten Funktion mit einer unabhängig Veränderlichen. Es sei die Funktion $u = f(x, y) = 0$ zu differentiieren.

Betrachtet man x als die unabhängig Variable, so wird im Folgenden ihr Differential $d x$ als konstant anzusehen sein. Nach § 32 gibt die erste Differentiation

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{d y}{d x} = 0.$$

Hierdurch ist der Wert des Verhältnisses $\frac{d y}{d x} = \operatorname{tang}\alpha$ (§ 10) gegeben. Um auch das zweite Differentialverhältnis $\frac{d^2 y}{d x^2}$ zu bestimmen, verfährt man mit Gleichung (1) gerade so, wie in § 32 mit der gegebenen Funktion verfahren wurde, um das erste Differentialverhältnis abzuleiten, d. h. man differentiiert (1) partiell in Hinsicht x, dann partiell in Hinsicht y und setzt die Summe aus den erhaltenen Differentialverhältnissen = 0. Nun sind die partiellen Differentialverhältnisse von (1)

in Hinsicht x: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,\frac{d y}{d x}$,

in Hinsicht y: $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{d y}{d x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{d^2 y}{d x^2}$;

somit das vollständige Resultat der Differentiation aus (1)

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,\frac{d y}{d x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{d^2 y}{d x^2} = 0.$$

Setzt man hierin den Wert von $\frac{d y}{d x}$ aus (1), so kann $\frac{d^2 y}{d x^2}$ gefunden werden. Es ergibt sich

$$(3) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3}.$$

Man erkennt aus der Art, wie die Gleichungen (1) und (2) entstanden sind, dass in gegebenen Fällen keine andern Regeln zur Anwendung kommen, als wie sie im ersten Abschnitte über die Differentiation von Summen, Produkten, Quotienten, etc. bei entwickelten Funktionen aufgestellt wurden. Es ist daher auch überflüssig, hier noch weitere Differentiationen auszuführen.

296. Differentiation einer unentwickelten Funktion mit mehreren unabhängig Veränderlichen. Es sei $u = f(x, y, z) = 0$ zu differentiieren. Betrachtet man x, y als unabhängig veränderlich, so wird z von x, y abhängen. Setzt man in Formel (2) des § 293 die Grösse $f(x, y, z) = 0$, so erhält man als erstes Differential

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} d x + \frac{\partial u}{\partial y} d y + \frac{\partial u}{\partial z} d z = 0.$$

Bei Wiederholung der Differentiation beachte man, dass $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ Funktionen von x, y, z sind, dass die Differentiale dx, dy konstant genommen werden und dass das letzte Glied $\frac{\partial u}{\partial z} d z$ ein Produkt ist aus den veränderlichen Faktoren $\frac{\partial u}{\partial z}$ und dz. Folglich erhält man

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dz,$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dz,$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial z} d z\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz\right) dz + \frac{\partial u}{\partial z} d^2 z.$$

Mithin das Differential der Formel (1)

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial u}{\partial z} d^2 z = 0.$$

Aus (1) kann dz, aus (2) kann $d^2 z$ dargestellt werden. Auch hier kann nach den Regeln, die im ersten Abschnitte über die Differentiation der Funktionen mit einer unabhängig Variabeln aufgestellt wurden, verfahren werden, wenn man nur beachtet, dass die ersten Differentiale der unabhängig Veränderlichen konstant, das der abhängig Variabeln veränderlich angenommen wird.

Beispiel. Es sei zu differentiieren

$$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2-R^2=0.$$

Man erhält zunächst

$$(3) \qquad (a-x)dx+(b-y)dy+(c-z)dz=0.$$

Ist z die abhängig Veränderliche, so ergibt sich hieraus

$$(4) \qquad -dx^2-dy^2-dz^2+(c-z)d^2z=0.$$

Aus (1) folgt

$$dz=-\frac{(a-x)dx+(b-y)dy}{c-z}.$$

Führt man diesen Wert in (4) ein und ordnet nach den Potenzen von dx, dy, so erhält man

$$(5) \quad d^2z=\frac{(c-z)^2+(a-x)^2}{(c-z)^3}dx^2+\frac{2(a-x)(b-y)}{(c-z)^3}dx\,dy+\frac{(c-z)^2+(b-y)^2}{(c-z)^3}dy^2$$

oder auch

$$d^2z=\frac{R^2-(b-y)^2}{(c-z)^3}dx^2+\frac{2(a-x)(b-y)}{(c-z)^3}dx\,dy+\frac{R^2-(a-x)^2}{(c-z)^3}dy^2.$$

Handelt es sich darum, die partiellen Differentialverhältnisse der als abhängig angesehenen Veränderlichen z nach den unabhängig Veränderlichen x und y zu erhalten, so folgt, wenn man $u=0$ partiell nach x und nach y differentiiert,

$$(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

woraus $\frac{\partial z}{\partial u}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ berechnet werden können, falls $\frac{\partial u}{\partial z}$ nicht verschwindet. Differentiiert man (6) nach derselben Regel nochmals partiell nach x oder y, so erhält man

$$(7)\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0;\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,
\end{array}\right.$$

woraus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

berechnet werden können.

IV. Auflösung numerischer Gleichungen.

297. Gleichung mit einer Unbekannten. Es sei $f(x) = 0$ die aufzulösende Gleichung.

I. Methode von Newton. Lässt man x zunehmen um h, so erhält man nach der Taylor'schen Reihe

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''(x)\,\frac{h^2}{2} + \ldots$$

und folglich, wenn x mit a vertauscht wird,

$$(1) \qquad f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + f''(a)\,\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Gesetzt es sei a sehr nahe eine Wurzel der Gleichung und h ihr sehr kleiner Fehler, so dass h einen sehr kleinen, echten Bruch bezeichnet, so wird $a + h$ eine exakte Wurzel der Gleichung, also $f(a+h) = 0$ sein.

Vernachlässigt man nun in (1) die Glieder mit der zweiten und den höheren Potenzen von h, so erhält man annähernd

$$f(a) + f'(a)\,h = 0,$$

woraus folgt

$$(2) \qquad h = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Um also den Fehler h der Wurzel annähernd zu finden, bilde man den ersten Differentialquotienten der gegebenen Funktion, setze sodann in die Funktion und ihren Differentialquotienten statt x den angenäherten Wurzelwert, dividiere die erstere Grösse durch die letztere und nehme das Resultat mit entgegengesetztem Vorzeichen. Alsdann ist $a + h = b$ ein Wert, der der wahren Wurzel näher liegt als a. Verfährt man mit b wie mit a, so erhält man eine weitere Annäherung an die wahre Wurzel.

Ist h nicht klein genug, damit in der Gleichung (1) die Glieder mit $h^2, h^3, \ldots$ vernachlässigt werden können, so muss der Wert von a durch neue Versuche genauer ermittelt werden.

Beispiel. Es sei

$$f(x) = x^3 - 8x + 8 = 0;$$

es ist

$$f'(x) = 3x^2 - 8.$$

Für den angenäherten Wurzelwert $a = 1$ hat man

$$f(a) = 1^3 - 8 \cdot 1 + 8 = 1,$$

$$f'(a) = 3 \cdot 1^2 - 8 = -5.$$

Fehler der Wurzel $h = -\dfrac{1}{-5} = 0{,}2.$

Verbesserte Wurzel $b = 1 + 0{,}2 = 1{,}2.$

Verfährt man mit diesem Werte $b = 1{,}2$ wie soeben mit $a = 1$, so ist

$$f(b) = 1{,}2^3 - 8 \cdot 1{,}2 + 8 = 0{,}128,$$
$$f'(b) = 3 \cdot 1{,}2^2 - 8 = -3{,}68.$$

$$\text{Fehler der Wurzel } h = -\frac{0{,}128}{-3{,}68} = 0{,}035.$$

$$\text{Verbesserte Wurzel } c = 1{,}2 + 0{,}035 = 1{,}235.$$

Durch Fortsetzung des Verfahrens kann noch eine grössere Annäherung erzielt werden.

II. Regula falsi. Wenn man in der Gleichung $f(x) = 0$ die Unbekannte x um die sehr kleinen Grössen h und k zunehmen lässt, so hat man nach der Taylor'schen Reihe annähernd

$$f(x + h) - f(x) = f'(x)\,h,$$
$$f(x + k) - f(x) = f'(x)\,k,$$

indem man die Glieder mit der zweiten und den höheren Potenzen von h und k vernachlässigt; folglich durch Division dieser Gleichungen

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{f(x + k) - f(x)} = \frac{h}{k}.$$

Wird hierin $x + h = a$ und $x + k = b$ gesetzt und angenommen, dass x die wahre Wurzel der Gleichung bezeichnet, so wird $f(x) = 0$, $f(x + h) = f(a)$, $f(x + k) = f(b)$ und die vorstehende Formel gibt die Proportion

$$(3) \qquad \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{a - x}{b - x}.$$

Folglich verhalten sich die Funktionswerte wie die Fehler der Wurzel. Diese Proportion, Regula falsi genannt, ist um so richtiger, je kleiner die Fehler $h = a - x$ und $k = b - x$ sind. Aus obiger Proportion folgt

$$(4) \qquad x = a - \frac{(a - b)\,f(a)}{f(a) - f(b)}$$

ein Ausdruck, durch den die Wurzel x sehr annähernd berechnet werden kann.

Beispiel. Die aufzulösende Gleichung sei

$$(1 + x)^x = 100.$$

Nimmt man zuerst auf beiden Seiten die gemeinen Logarithmen, so wird die aufzulösende Gleichung sein

$$f(x) = x \log(1 + x) - 2 = 0.$$

Setzt man hierin $a = 3$ und $b = 3{,}3$ für x, so folgt

$$f(a) = 3 \log 4 - 2 \quad = -0{,}193\,820,$$
$$f(b) = 3{,}3 \log 4{,}3 - 2 = \quad 0{,}090\,446,$$
$$a - b = -0{,}3; \quad f(a) - f(b) = -0{,}284\,266,$$
$$\text{Wurzel } x = 3 + \frac{0{,}3 \cdot 0{,}193\,820}{0{,}284\,266} = 3{,}204.$$

Bezeichnet man diesen genäherten Wert von x mit c, so ist

$$f(c) = 3{,}204 \log 4{,}204 - 2 = -0{,}001\,784\,7.$$

Verfährt man mit $a = 3$ und $c = 3{,}204$ wie oben mit a und b, so erhält man

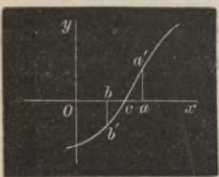
$$a - c = -0{,}204; \quad f(a) - f(c) = -0{,}192\,035\,3,$$

$$\text{Wurzel } x = 3 + \frac{0{,}204 \cdot 0{,}193\,82}{0{,}192\,035\,3} = 3{,}205\,9.$$

Auf diesem Wege kann die Wurzel bis zu einem beliebigen Grade der Annäherung bestimmt werden.

III. Geometrische Darstellung der beiden Auflösungsmethoden. Es seien Ox, Oy (Fig. 102) zwei rechtwinkelige Koordinatenachsen. Trägt man eine Reihe von Werten von x als Abscissen und die entsprechenden Werte von f(x) als Ordinaten auf, so erhält man eine Kurve b′ca′. Schneidet diese Kurve die Abscissenachse Ox in c, so wird $Oc = x$ eine wahre Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ sein. Nun seien $Oa = a$, $Ob = b$ zwei angenäherte Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. Setzt man in f(x) die Werte a und b statt x, so wird f(x) zu $f(a) = aa'$ und zu $f(b) = bb'$.

Fig. 102.



Da $ac = a - x$ und $bc = x - b$ sehr klein vorausgesetzt werden, so können die Kurvenstücke a′c und b′c als gerade Linien angesehen werden.

Alsdann ist

$$\operatorname{tang} a'ca = \frac{aa'}{ac} = \frac{f(a)}{a - x}.$$

Allein die Tangente durch a′ an die Kurve ist gleich dem ersten Differentialquotienten (§ 10) der Funktion, also $= f'(a)$; folglich wird sein, wenn man noch den Fehler $x - a$ der Wurzel $= h$ setzt,

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{h}, \text{ woraus } h = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Sind die Kurvenstücke a′c und b′c in einer geraden Linie, was sehr nahe der Fall sein wird, so hat man die Proportion

$$\frac{aa'}{bb'} = \frac{ac}{bc} \quad \text{oder} \quad \frac{f(a)}{-f(b)} = \frac{a - x}{x - b}.$$

Diese letztere Proportion stimmt mit der oben aufgestellten (3) überein, wenn auf beiden Seiten mit -1 multipliziert wird. Bei Ableitung dieser Proportion wurde vorausgesetzt $a > x$, $b < x$. Es ergibt sich dieselbe Proportion, wenn a und b zugleich grösser oder zugleich kleiner als x sind.

298. Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die aufzulösenden Gleichungen seien

(1) $$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0.$$

Aendern sich die Grössen x und y um h und k, so erhält man nach der Taylor'schen Reihe

$$(2) \qquad f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} k + \ldots$$

$$(3) \qquad F(x+h, y+k) = F(x,y) + \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} k + \ldots$$

Nun seien a und b zwei sehr angenäherte Wurzelwerte, h und k ihre Fehler, so dass $a+h$, $b+k$ wahre Wurzeln der Gleichungen bezeichnen.

Setzt man in den Gleichungen (2) und (3) a für x, b für y, bricht die Reihen wegen der Kleinheit von h und k bei den ersten Potenzen dieser Grössen ab und berücksichtigt, dass die linken Seiten dieser Gleichungen (2), (3) gleich 0 werden, so hat man

$$(4) \qquad 0 = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} h + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} k.$$

$$(5) \qquad 0 = F(a,b) + \frac{\partial F(a,b)}{\partial x} h + \frac{\partial F(a,b)}{\partial y} k.$$

Diese Gleichungen enthalten nur noch die Unbekannten h und k in der ersten Potenz, indem alle andern Ausdrücke aus den Funktionen und ihren partiellen Ableitungen erhalten werden, wenn man die bekannten Werte a, b für x, y einführt. Mithin ist die Aufgabe auf die Auflösung zweier Gleichungen vom ersten Grade zurückgeführt.

Sind diese Werte von h und k ermittelt, so setze man $a' = a + h$, $b' = b + k$ als angenäherte Wurzelwerte und bestimme ihre Fehler h' und k' auf dieselbe Weise, wie h und k bestimmt wurden, und erhält so eine weitere Annäherung.

Beispiel. $f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + 5 = 0,$

$$F(x,y) = y^2 + 3xy + 10 = 0.$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2; \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -4xy.$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3y; \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2y + 3x.$$

Für $x = 2{,}3$ und $y = -2$ wird

$$f(x,y) = -1{,}233; \quad F(x,y) = 0{,}2.$$

Da die Funktionen für diese Werte der Unbekannten klein ausfallen, so nehme man $a = 2{,}3$ und $b = -2$, führe sie in die ersten Differentialquotienten ein und schreibe die Gleichungen (4) und (5) an; es kommt

$$0 = -1{,}233 + 7{,}87\,h + 18{,}4\,k,$$
$$0 = 0{,}2 - 6\,h + 2{,}9\,k,$$

woraus man für die beiden Fehler der Wurzeln findet

$$k = 0{,}044, \quad h = 0{,}054.$$

Deshalb sind die angenäherten Wurzeln

$$a + h = 2{,}3 + 0{,}054 = 2{,}354; \quad b + k = -2 + 0{,}044 = -1{,}956.$$

Hierfür werden die gegebenen Funktionen

$$f(x, y) = 0{,}039; \quad F(x, y) = 0{,}013,$$

also sehr nahe $= 0$; mithin sind $x = 2{,}354$ und $y = -1{,}956$ sehr angenäherte Wurzelwerte.

299. Algebraische Gleichungen mit gleichen Wurzeln. Sind $a, b, c, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, so lässt sich $F(x)$ in das Produkt $(x - a)(x - b)(x - c) \ldots$ zerlegen. Sind drei dieser Wurzeln einander gleich, z. B. gleich a, so wird jenes Produkt den Faktor $(x - a)^3$ enthalten. Hat nun die Gleichung $F(x) = 0$ n gleiche Wurzeln a, so wird $F(x)$ in ein Produkt zerlegt werden können von der Form

$$(1) \qquad F(x) = (x - a)^n f(x).$$

Durch Differentiation dieser Gleichung folgt

$$(2) \qquad \frac{dF(x)}{dx} = n(x - a)^{n-1} f(x) + (x - a)^n \frac{df(x)}{dx}.$$

Wenn nun $n = 2$, so hat die Gleichung (1) zweimal, und der erste Differentialquotient (2) einmal den Faktor $x - a$. Wenn daher die Gleichung und ihr erster Differentialquotient einen gemeinschaftlichen Faktor von der Form $x - a$ enthalten, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln.

Durch Differentiation von (2) folgt

$$(3) \qquad \frac{d^2F(x)}{dx^2} = n(n-1)(x - a)^{n-2} f(x) + 2n(x - a)^{n-1} \frac{df(x)}{dx} + (x - a)^n \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Wenn $n = 3$, so enthält $F(x)$ den Faktor $x - a$ dreimal, der erste Differentialquotient (2) zweimal und der zweite Differentialquotient (3) einmal. Wenn somit der erste und zweite Differentialquotient einen gemeinschaftlichen Faktor von der Form $x - a$ haben, so hat die ursprüngliche Gleichung drei gleiche Wurzeln.

Auf diesem Wege ergibt sich folgender allgemeine Satz: *Wenn der $(n - 1)^{te}$ Differentialquotient der linken Seite der Gleichung $F(x) = 0$ mit dem vorhergehenden einen gemeinschaftlichen Faktor hat von der Form $x - a$, so hat die gegebene Gleichung n gleiche Wurzeln a.*

Beispiel 1. Aus $F(x) = x^3 - 3x + 2 = 0$

folgt
$$\frac{dF(x)}{dx} = 3x^2 - 3.$$

Nun haben die Polynome $x^3 - 3x - 2$ und $3x^2 - 3$ den gemeinschaftlichen Faktor $x + 1$; folglich hat die Gleichung $F(x) = 0$ die beiden gleichen Wurzeln $+ 1$. Die zweite Ableitung von $F(x)$ ist $= 6x$.

Diese hat mit der ersten $3x^2 - 3$ keinen gemeinschaftlichen Faktor. Somit hat auch die Gleichung nicht drei gleiche Wurzeln.

Dividiert man die gegebene Gleichung durch $(x + 1)^2$, so findet man als Quotienten $x - 2$; folglich ist

$$F(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2 (x - 2) = 0.$$

Beispiel 2. Die linke Seite der zweigliederigen Gleichung $x^n \pm a = 0$ hat zur ersten Ableitung $n x^{n-1}$. Da diese Ableitung und $x^n \pm a$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so sind die Wurzeln der Gleichung $x^n \pm a = 0$ alle ungleich.

V. Bestimmung der Werte der Funktionen, die die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

300. Bestimmung der Werte $\frac{0}{0}$ in speziellen Fällen. Wenn man im Bruche $\frac{1 - x}{1 - x^2}$ die Variable $x = 1$ setzt, so geht der Bruch über in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Dividiert man aber Zähler und Nenner des gegebenen Bruches durch $(1 - x)$, so folgt

$$\frac{1 - x}{1 - x^2} = \frac{1}{1 + x}.$$

Setzt man hierin $x = 1$, so findet man als gesuchten Wert $\frac{0}{0} = \frac{1}{2}$.

Wird in dem Bruche $\frac{\sin x}{x}$ die Veränderliche $x = 0$ gesetzt, so erscheint dieser Bruch ebenfalls unter der Form $\frac{0}{0}$. Allein nach § 287 ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots,$$

folglich

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots$$

Für $x = 0$ gibt diese Gleichung $\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} = 1$ als gesuchten Wert.

301. Allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Werte $\frac{0}{0}$. Man stelle den Zähler des Bruches durch $f(x)$, den Nenner durch $\varphi(x)$ dar, lasse x in $x + h$ übergehen und entwickele nach dem Taylor'chen Satze; man erhält alsdann

$$\frac{f(x + h)}{\varphi(x + h)} = \frac{f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \ldots}{\varphi(x) + \varphi'(x)h + \varphi''(x)\frac{h^2}{2} + \ldots}.$$

Geht nun der Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ über, so verschwinden in diesem Falle die ersten Glieder im Zähler und Nenner rechts. Setzt man also x = a und dividiert sodann rechts im Zähler und Nenner durch h, so folgt

$$(1)\qquad \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a) + f''(a)\frac{h}{2} + f'''(a)\frac{h^2}{2\cdot 3} + \ldots}{\varphi'(a) + \varphi''(a)\frac{h}{2} + \varphi'''(a)\frac{h^2}{2\cdot 3} + \ldots}.$$

Wird hierin h = 0 angenommen, so kommt

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Somit wird der Wert des Bruches, der für x = a unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, erhalten, wenn man die erste Ableitung des Zählers durch die erste Ableitung des Nenners dividiert und im Resultate x = a setzt.

Sollten auch die Grössen $f'(a)$ und $\varphi'(a)$ für x = a gleichzeitig verschwinden, so gibt die Formel (1), nachdem noch Zähler und Nenner durch $\frac{h}{2}$ dividiert sind,

$$(2)\qquad \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f''(a) + f'''(a)\frac{h}{3} + \ldots}{\varphi''(a) + \varphi'''(a)\frac{h}{3} + \ldots}.$$

Setzt man hierin h = 0, so folgt

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)}.$$

In diesem Falle hat man also die zweite Ableitung des Zählers durch die zweite Ableitung des Nenners zu dividieren und sodann x = a zu setzen, um den Wert $\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0}$ zu erhalten.

Man sieht hieraus, dass man haben würde

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)},$$

wenn im Ausdrucke (2) $f''(a)$ und $\varphi''(a)$ gleichzeitig zu Null würden, u. s. w.

Beispiel 1. Der Bruch $\frac{x-a}{x^3-a^3}$ wird für x = a zu $\frac{0}{0}$. Schreibt man

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x-a}{x^3-a^3}, \text{ so ist } \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{1}{3x^2}.$$

Für x = a wird daher der Wert von $\frac{0}{0}$ gleich

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{1}{3a^2}.$$

Beispiel 2. Es soll der Wert des Bruches $\frac{l\,x}{\sqrt{1-x}}$ für $x = 1$ bestimmt werden. Nun ist

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{l\,x}{\sqrt{1-x}}; \quad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = -\frac{2\sqrt{1-x}}{x}.$$

Für $x = 1$ wird $\frac{0}{0} = \frac{f'(1)}{\varphi'(1)} = 0$ der gesuchte Wert sein.

Beispiel 3. Es sei der Wert des Bruches $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3}$ für $x = 0$ zu prüfen. Man hat

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3}, \qquad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{2x - 2\sin x \cos x}{3x^2},$$

$$\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x}, \qquad \frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)} = \frac{4\cos x \sin x}{3}.$$

Setzt man hierin $x = 0$, so gehen die drei ersten Brüche in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ über und der letzte wird $= 0$; folglich ist auch der gegebene Bruch $= 0$ für $x = 0$.

Beispiel 4. Es sei der Wert des Bruches $\frac{x \cdot \cos x}{x - \sin x}$ für $x = 0$ zu ermitteln. Man hat

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x \cdot \cos x}{x - \sin x}; \qquad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\cos x - x \cdot \sin x}{1 - \cos x};$$

für $x = 0$ ist

$$\frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = \frac{1}{0} = \infty \text{ der gesuchte Wert.}$$

302. Zähler und Nenner enthalten einen Faktor von der Form $(x-a)^{\frac{m}{n}}$. Ein Bruch von der Form

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x-a)^{\frac{m}{n}}\,\varphi(x)}{(x-a)^{\frac{p}{q}}\,\psi(x)},$$

dessen Zähler und Nenner den Faktor $(x - a)$ mit irgend einem Exponenten enthalten, wird immer zu $\frac{0}{0}$ für $x = a$. Wenn die Exponenten des Faktors $x - a$ gebrochen sind, wie dies im vorstehenden Ausdrucke der Fall ist, so sind die Regeln des § 301 zur Bestimmung der Werte $\frac{0}{0}$ unzureichend. Denn so oft auch die Differentiation im Zähler und Nenner wiederholt wird, immer enthält jedes Glied des Zählers und Nenners der entstandenen Brüche den Faktor $x - a$, im Zähler versehen mit den Exponenten $\frac{m}{n} - 1$, $\frac{m}{n} - 2, \ldots$ und im Nenner mit den Exponenten $\frac{p}{q} - 1$, $\frac{p}{q} - 2, \ldots$ Sämtliche Glieder werden also $= 0$ für $x = a$; also nehmen die Quotienten aller aufeinander folgenden Ableitungen die Form $\frac{0}{0}$ an.

In diesem Falle entwickelt man Zähler und Nenner des gegebenen Bruches direkt, indem man $a + h$ für x einführt und sodann $h = 0$ setzt. In jedem besondern Falle ist also der Wert des Bruches

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$$

zu bestimmen für $h = 0$.

Beispiel. Das eben Gesagte findet seine Anwendung auf den Bruch

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x^2 - 4ax + 3a^2)^{\frac{1}{3}}}{(x^3 - a^3)^{\frac{1}{2}}}.$$

Derselbe wird zu $\frac{0}{0}$ für $x = a$; aber ebenso $\frac{f'(x)}{F'(x)}$, $\frac{f''(x)}{F''(x)}$, etc. Setzt man $a + h$ für x, so erhält man, wenn die Grössen in den Klammern reduziert werden,

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{(h^2 - 2ah)^{\frac{1}{3}}}{(3a^2h + 3ah^2 + h^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{h^{\frac{1}{6}}} \frac{(h - 2a)^{\frac{1}{3}}}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $h = 0$ wird dieser Bruch $= -\infty$; folglich wird auch der gegebene $= -\infty$ für $x = a$.

303. Bestimmung der Werte $\frac{\infty}{\infty}$. Der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ werde für $x = a$ zu $\frac{\infty}{\infty}$. Um dessen Wert zu bestimmen, schreibe man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}};$$

dann wird der Annahme zufolge die rechte Seite dieser Gleichung übergehen in die Form $\frac{0}{0}$ für $x = a$. Der Wert dieser Form kann aber nach dem Vorhergehenden bestimmt werden.

Durch passende Umformungen lassen sich die Werte der unbestimmten Formen $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$, etc. immer auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen und somit bestimmen.

Beispiel. Die Formel $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ gibt $\infty - \infty$ für $x = 0$. Bringt man nun beide Brüche auf gleichen Nenner, so erhält man dafür den Bruch

$$\frac{\sin x - x}{x \sin x},$$

der zu $\frac{0}{0}$ wird für $x = 0$. Nach dem obigen Verfahren findet man hierfür durch zweimalige Differentiation im Zähler und Nenner den Wert $\frac{0}{0} = 0$.

VI. Zerlegung gebrochener rationaler Funktionen in Partialbrüche.

304. Erklärungen. Die gebrochenen, rationalen Funktionen sind enthalten in der allgemeinen Form

$$\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{p\,x^{n-1} + q\,x^{n-2} + \ldots + s\,x + t}{x^n + P\,x^{n-1} + Q\,x^{n-2} + \ldots + S\,x + T},$$

worin der Exponent n eine ganze positive Zahl und die Grössen p, q, .. P, Q, .. konstante Koeffizienten bezeichnen. Der höchste Exponent ist im Zähler wenigstens um eine Einheit kleiner als im Nenner vorauszusetzen. Denn wenn der Zähler in Hinsicht x von gleichem oder höherem Range ist als der Nenner, so lässt sich immer die Division des Zählers durch den Nenner so weit fortführen, bis man auf einen Rest kommt, dessen Rang um die Einheit niedriger ist als der des Divisors. Auch darf vorausgesetzt werden, dass der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ irreduktibel ist, d. h. dass Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen algebraischen Teiler haben, oder was dasselbe ist, dass Zähler und Nenner für keinen gemeinschaftlichen Wert von x Null werden.

Man setze den Nenner der gegebenen Funktion $F(x) = 0$, und bestimme die n Wurzeln dieser Gleichung, was immer möglich ist, wenn die Vorzahlen P, Q, .. numerische Werte sind. Die reellen Wurzeln seien a, b, c, .. die komplexen Wurzeln haben die Form $\alpha \pm i\beta$ und kommen in der Art paarweise vor, dass $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$ gleichzeitig auftreten.

Es ist bekannt, dass der Nenner als ein Produkt angesehen werden kann aus den reellen, binomischen Faktoren $x - a$, $x - b$, $x - c$, .. und aus den komplexen Faktoren $x - (\alpha \pm i\beta)$, ..

305. Erster Fall der Zerlegung. Der Nenner könne zerlegt werden in ein Produkt ungleicher reeller Faktoren. In diesem Falle kann folgende Gleichung vorausgesetzt werden

$$(1)\quad \frac{p\,x^{n-1} + q\,x^{n-2} + \ldots + t}{x^n + P\,x^{n-1} + \ldots + T} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots$$

worin die Grössen A, B, C, .. unbestimmte, von x unabhängige Zahlen sein sollen.

Denn wenn mit dem Nenner multipliziert wird, so erhält man auf beiden Seiten Polynome vom $(n-1)$ten Grade. In denselben müssen, nach dem Satze der unbestimmten Koeffizienten (§ 66), die Vorzahlen gleich hoher Potenzen von x einander gleich sein. Dadurch erhält man n Bedingungsgleichungen, aus denen die n unbestimmten, konstanten Grössen A, B, C .. bestimmt werden können.

In der vorstehenden Formel werden die Brüche mit den einfachen Nennern $x-a$, $x-b$, .. **Partialbrüche** genannt.

Beispiel. $$\frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}.$$

Multipliziert man beiderseits mit x^2-4, so erhält man

$$2x+3 = A(x-2) + B(x+2),$$
$$2x+3 = (A+B)x - 2(A-B).$$

Die Vorzahlen gleich hoher Potenzen von x geben die Relationen

$$A+B = 2, \qquad -2(A-B) = 3,$$

woraus folgt

$$A = \frac{1}{4}, \qquad B = \frac{7}{4},$$

somit

$$\frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{1}{4(x+2)} + \frac{7}{4(x-2)}.$$

306. Zweiter Fall der Zerlegung. Der Nenner könne zerlegt werden in reelle Faktoren vom ersten Grade, wovon jedoch einzelne einander gleich seien.

Nach dem ersten Falle kann geschrieben werden

$$(2) \qquad \frac{px^3+qx^2+rx+s}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d}.$$

Wenn nun etwa $a = b = c$ wird, so geht hieraus hervor

$$\frac{px^3+\ldots+s}{(x-a)^3(x-d)} = \frac{A_,}{x-a} + \frac{D}{x-d},$$

wenn nämlich $A_,$ für $A+B+C$ gesetzt wird. Multipliziert man diese Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Nenner, so erhält man auf beiden Seiten Polynome vom 3ten Grade, die 4 Bedingungsgleichungen unter den Konstanten $p, q, .. A_,, D$ liefern. Unter diesen Konstanten sind aber nur zwei Grössen, nämlich $A_,$ und D, unbekannt. Folglich erhält man für $A_,$ und D im allgemeinen Werte, die sich widersprechen. Also ist die obige Voraussetzung (2) unzulässig.

Damit die hypothetische Gleichung, die die Zerlegung in Partialbrüche enthält, richtig sei, müssen in ihr so viele unbestimmte konstante Grössen vorkommen, als Bedingungsgleichungen entstehen. Dieser Forderung wird entsprochen durch die Formel

$$\frac{px^3+qx^2+rx+s}{(x-a)^3(x-d)} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-a)^3} + \frac{D}{x-d}.$$

Auf gleiche Weise lässt sich die Gleichung rechtfertigen

$$(3) \qquad \frac{px^5+qx^4+\ldots+t}{(x-a)^3(x-b)^2(x-c)} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-a)^3} + \frac{Dx+E}{(x-b)^2} + \frac{F}{x-c}.$$

Denn hier entstehen, wenn mit dem gemeinschaftlichen Nenner multipliziert wird, zu beiden Seiten Polynome vom 5ten Grade, die zwischen den Koeffizienten 6 Bedingungsgleichungen liefern, aus denen die 6 Unbekannten $A, B, .. F$ bestimmt werden können.

Gesetzt es sei die Zerlegung nach (3) ausgeführt, so dass die Grössen A, B, C als bekannt anzusehen sind, so kann der erste Bruch rechts in (3) durch folgende Formel weiter zerlegt werden

$$(4)\qquad \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-a)^3} = \frac{A'}{(x-a)^3} + \frac{B'}{(x-a)^2} + \frac{C'}{x-a}.$$

Denn durch Entfernung des gemeinschaftlichen Nenners entstehen zu beiden Seiten Polynome vom 2ten Grade. Dieselben liefern drei Bedingungsgleichungen, gerade so viele, als zur Bestimmung der Unbekannten A', B', C' nötig sind.

Nach dieser Zerlegungsweise (4) kann man nun statt des Bruches (3) schreiben

$$\frac{px^5 + qx^4 + .. + t}{(x-a)^3(x-b)^2(x-c)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{A_,}{(x-a)^2} + \frac{A_{,,}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{B_,}{x-b} + \frac{C}{x-c}.$$

Man sieht hieraus leicht, wie die Zerlegung vorzunehmen wäre, wenn der Nenner der gegebenen Funktion die Faktoren $(x-a)^n$, $(x-b)^m$ enthielte.

Beispiel. $$\frac{7x^2+9}{x^3-5x^2+3x+9} = \frac{7x^2+9}{(x-3)^2(x+1)}$$

$$= \frac{A}{(x-3)^2} + \frac{A_1}{x-3} + \frac{B}{x+1}.$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $(x-3)^2(x+1)$, so erhält man

$$7x^2 + 9 = A(x+1) + A_1(x-3)(x+1) + B(x-3)^2$$
$$= (A_1 + B)x^2 + (A - 2A_1 - 6B)x + (A - 3A_1 + 9B)$$

und hieraus für die unbekannten Zahlen A, A_1 und B die Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} A_1 + B = 7 \\ A - 2A_1 - 6B = 0 \\ A - 3A_1 + 9B = 9 \end{array}\right|$$

aus denen folgt

$$A = 18;\quad A_1 = 6;\quad B = 1,$$

und somit

$$\frac{7x^2+9}{x^3-5x^2+3x+9} = \frac{18}{(x-3)^2} + \frac{6}{(x-3)} + \frac{1}{x+1}.$$

307. Dritter Fall der Zerlegung. Der Nenner des zu zerlegenden Bruches enthalte komplexe Faktoren.

Die konjugierten komplexen Faktoren $x + \alpha + i\beta$ und $x + \alpha - i\beta$ geben, mit einander multipliziert, einen quadratischen Faktor von der Form

$$(x + \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Nun lässt sich die Richtigkeit der Zerlegung durch die Formel

$$\frac{px + q}{(x + \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{A + iB}{x + \alpha + i\beta} + \frac{A - iB}{x + \alpha - i\beta},$$

worin A und B zu bestimmende Konstanten sind, leicht nachweisen; denn multipliziert man mit dem gemeinschaftlichen Nenner, so kommt, da sich alle Glieder mit i aufheben,

$$px + q = 2Ax + 2A\alpha + 2B\beta,$$

$$A = \frac{1}{2}p, \quad B = \frac{q - p\alpha}{2\beta}.$$

Diese Zerlegung wird aber gewöhnlich nicht ausgeführt, um in den Partialbrüchen den imaginären Faktor i zu vermeiden. Der Bruch $\frac{px + q}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2}$ wird also bereits als in seiner einfachsten Gestalt angesehen.

Ist der quadratische Faktor im Nenner mehrmals vorhanden, z. B. dreimal, so ist das Schema der Zerlegung

$$\frac{px^5 + qx^4 + \ldots + t}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^3} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^3}$$

$$+ \frac{A_, x + B_,}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{A_{,,} x + B_{,,}}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Denn hier geben Zähler und Nenner Polynome vom 5ten Grade mit 6 Bedingungsgleichungen, aus denen die 6 Konstanten $A, B, A_,, \ldots$ bestimmt werden können.

308. Allgemeiner Fall. Die gebrochene Funktion habe einen Nenner von der Form $(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n (x - a)^m (x - b)^p \ldots$ Nach den entwickelten Gründen gibt die Zerlegung folgende Partialbrüche

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n} + \frac{A_, x + B_,}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^{n-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{A_{n-1} x + B_{n-1}}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} + \frac{C}{(x - a)^m} + \frac{C_,}{(x - a)^{m-1}} + \ldots + \frac{C_{m-1}}{x - a}$$

$$+ \frac{D}{(x - b)^p} + \frac{D_,}{(x - b)^{p-1}} + \ldots + \frac{D_{p-1}}{x - b} + \ldots$$

Beispiel. Es sei der Bruch zu zerlegen $\frac{6x + 2x^2}{(x^2 + 4x + 8)(x + 2)}$.

Da hier der quadratische Faktor die imaginären Faktoren

$$x^2 + 4x + 4 + 4 = (x + 2 + 2i)(x + 2 - 2i)$$

gibt, so wird das Schema der Zerlegung sein

$$\frac{6x + 2x^2}{(x^2 + 4x + 8)(x + 2)} = \frac{A + Bx}{x^2 + 4x + 8} + \frac{C}{x + 2},$$

$$6x + 2x^2 = (2A + 8C) + (A + 2B + 4C)x + (B + C)x^2.$$

Die Vorzahlen gleicher Potenzen von x geben die Bedingungsgleichungen

$$\left|\begin{aligned} 2A + 8C &= 0 \\ A + 2B + 4C &= 6 \\ B + C &= 2 \end{aligned}\right|,$$

aus denen

$$A = 4; \quad B = 3; \quad C = -1$$

gefunden werden; folglich ist

$$\frac{6x + 2x^2}{(x^2 + 4x + 8)(x + 2)} = \frac{4 + 3x}{x^2 + 4x + 8} - \frac{1}{x + 2}.$$

309. Anwendung der Differentialrechnung auf die Zerlegung in Partialbrüche. Die Bestimmung der unbekannten Konstanten in den Zählern der Partialbrüche ist nach dem Satze der unbestimmten Koeffizienten oft sehr weitläufig. Schneller führt die Anwendung der Differentialrechnung zum Ziele.

Erster Fall. Der Zähler der gebrochenen Funktion sei f(x), der Nenner F(x); dann hat man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots$$

Multipliziert man mit x — a, so folgt

$$f(x) . \frac{x - a}{F(x)} = A + B\frac{x - a}{x - b} + C\frac{x - a}{x + c} + \dots$$

Setzt man hierin $x = a$, so wird $F(a) = 0$, da a eine Wurzel dieser Gleichung ist. Folglich geht die vorstehende Formel über in

$$f(a) \cdot \tfrac{0}{0} = A.$$

Nun wende man die in § 301 angegebenen Regeln zur Bestimmung von $\frac{x - a}{F(x)} = \frac{0}{0}$ an. Die erste Ableitung des Zählers ist $= 1$, des Nenners $= F'(x)$; folglich für $x = a$

$$\frac{0}{0} = \frac{1}{F'(a)}.$$

Folglich $A = \frac{f(a)}{F'(a)}$; ebenso $B = \frac{f(b)}{F'(b)}$; $C = \frac{f(c)}{F'(c)}$ u. s. w.

Beispiel. Es sei zu zerlegen $\frac{x^2 + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$.

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ sind -1, -2, -3. Ferner ist

$$f(x) = x^2 + 4, \qquad F'(x) = 3x^2 + 12x + 11,$$

$$\begin{array}{llll} \text{für} & x = -1, & f(-1) = 5, & F'(-1) = 2, \\ & x = -2, & f(-2) = 8, & F'(-2) = -1, \\ & x = -3, & f(-3) = 13, & F'(-3) = 2, \end{array}$$

$$A = \frac{5}{2}, \qquad B = \frac{8}{-1} = -8, \qquad C = \frac{13}{2};$$

folglich hat man

$$\frac{x^2 + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = \frac{5}{2(x+1)} - \frac{8}{x+2} + \frac{13}{2(x+3)}.$$

Zweiter Fall. Man habe die Zähler der Partialbrüche in folgender Formel zu bestimmen:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^4} = \frac{A}{(x-a)^4} + \frac{B}{(x-a)^3} + \frac{C}{(x-a)^2} + \frac{D}{x-a}.$$

Multipliziert man mit dem Nenner und differentiiert die entstandene Gleichung, so erhält man successive

$$\begin{aligned} f(x) &= A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3, \\ f'(x) &= B + 2C(x-a) + 3D(x-a)^2, \\ f''(x) &= 2C + 6D(x-a), \\ f'''(x) &= 6D. \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen $x = a$, so erhält man

$$A = f(a), \quad B = f'(a), \quad C = \frac{1}{2} f''(a), \quad D = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(a).$$

Man sieht, wie zu verfahren ist, wenn der Nenner der Funktion $(x-a)^n$ wäre.

Beispiel. Es sei zu zerlegen $\frac{x^2 + 2}{(x-3)^4}$. Man erhält

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^2 + 2, \text{ folglich} & A = f(3) & = 11, \\ f'(x) = 2x, & B = f'(3) & = 6, \\ f''(x) = 2, & C = \frac{1}{2} f''(3) & = 1, \\ f'''(x) = 0, & D = & = 0; \end{array}$$

$$\frac{x^2 + 2}{(x-3)^4} = \frac{11}{(x-3)^4} + \frac{6}{(x-3)^3} + \frac{1}{(x-3)^2}.$$

Ferner sei der Nenner der gegebenen Funktion $(x-a)^2(x-b)$. Man wird voraussetzen

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}.$$

Schafft man den Nenner weg und bildet die Ableitungen der entstandenen Funktion, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x-b) + B(x-a)(x-b) + C(x-a)^2, \\ f'(x) &= A + B(x-a) + B(x-b) + 2C(x-a), \\ f''(x) &= 2B + 2C. \end{aligned}$$

Setzt man hierin $x = a$, so folgt

$$f(a) = A(a-b), \quad f'(a) = A + B(a-b), \quad f''(a) = 2B + 2C,$$

aus welchen Gleichungen A, B, C sich leicht ergeben.

Endlich sei der Nenner der gebrochenen Funktion $(x-a)^n \varphi(x)$, so dass man folgendes Schema der Zerlegung hat

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n \varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \frac{C}{(x-a)^{n-2}} + \ldots$$
$$+ \frac{H}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

worin $\psi(x)$ ein ganzes rationales Polynom ist von niederem Grade als $\varphi(x)$. Durch Beseitigung des Nenners erhält man

$$f(x) = A\varphi(x) + B(x-a)\varphi(x) + C(x-a)^2\varphi(x) + \ldots$$
$$+ H(x-a)^{n-1}\varphi(x) + \psi(x)\cdot(x-a)^n.$$

Wird diese Gleichung, wie in den beiden vorhergehenden Zerlegungen, wiederholt differentiiert und sodann $x = a$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned}
f(a) &= A\cdot\varphi(a),\\
f'(a) &= A\cdot\varphi'(a) + B\cdot\varphi(a),\\
f''(a) &= A\cdot\varphi''(a) + B\cdot 2\varphi'(a) + C\cdot 2\varphi(a),\\
f'''(a) &= A\cdot\varphi'''(a) + B\cdot 3\varphi''(a) + C\cdot 6\varphi'(a) + D\cdot 6\varphi(a),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich nun die unbestimmten Konstanten A, B, C, .. der Reihe nach (rekurrierend) bestimmen.

Beispiel. Es sei zu zerlegen

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 2}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1} = \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 2}{(x+1)^3\cdot(x-1)^2}.$$

Man setze zunächst

$$\frac{f(x)}{(x+1)^3\cdot\varphi(x)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

und hat die Gleichungen zur Bestimmung von A, B und C

$$\begin{aligned}
f(-1) &= A\cdot\varphi(-1);\\
f'(-1) &= A\cdot\varphi'(-1) + B\cdot\varphi(-1);\\
f''(-1) &= A\cdot\varphi''(-1) + 2B\cdot\varphi'(-1) + 2C\cdot\varphi(-1).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 2; & f(-1) &= -1;\\
f'(x) &= 4x^3 - 9x^2 - 4x + 5 \quad ; & f'(-1) &= -4;\\
f''(x) &= 12x^2 - 18x - 4 \quad ; & f''(-1) &= 26;
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= (x-1)^2; & \varphi(-1) &= 4;\\
\varphi'(x) &= 2(x-1); & \varphi'(-1) &= -4;\\
\varphi''(x) &= 2 \quad ; & \varphi''(-1) &= 2;
\end{aligned}$$

so dass die Gleichungen für A, B und C lauten

$$\left|\begin{array}{l} -1 = 4\,A \\ -4 = -4\,A + 4\,B \\ 26 = 2\,A - 8\,B + 8\,C \end{array}\right|,$$

aus denen $A = -\frac{1}{4}$; $B = -\frac{5}{4}$; $C = \frac{33}{16}$ folgen.

Weiter setze man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-1)^2 \cdot \varphi_1(x)} = \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

und hat die Gleichungen

$$f(1) = D \cdot \varphi_1(1);$$
$$f'(1) = D \cdot \varphi_1{}'(1) + E \cdot \varphi_1(1).$$

Nun ist $f(1) = 3$; $f'(1) = -4$
und

$$\varphi_1(x) = (x+1)^3; \qquad \varphi_1(1) = 8;$$
$$\varphi_1{}'(x) = 3(x+1)^2; \qquad \varphi_1{}'(1) = 12;$$

so dass die Gleichungen für D und E lauten

$$\left|\begin{array}{l} 3 = 8\,D \\ -4 = 12\,D + 8\,E \end{array}\right|,$$

aus denen

$$D = \frac{3}{8}; \quad E = -\frac{17}{16}$$

folgen. Nunmehr hat man die gesuchte Zerlegung

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 2}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1} = -\frac{1}{4(x+1)^3} - \frac{5}{4(x+1)^2}$$
$$+ \frac{33}{16(x+1)} + \frac{3}{8(x-1)^2} - \frac{17}{16(x-1)}.$$

Dritter Fall. Der Nenner enthalte zunächst nur einen quadratischen Faktor, so dass man hat

$$\frac{f(x)}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)\,\varphi(x)} = \frac{A x + B}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

wo $\psi(x)$ ein ganzes rationales Polynom ist von niederem Grade als $\varphi(x)$. Durch Entfernung des Nenners folgt

$$(1) \quad f(x) = (A x + B)\,\varphi(x) + \psi(x) \cdot (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2).$$

Setzt man hierin $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0$, also $x = -\alpha \pm i\beta$, so verschwindet der letzte Teil rechts, und es sind in der Gleichung nur noch die Unbekannten A, B, nebst konstanten Grössen mit oder ohne i enthalten. Die Gleichung lässt sich also auf die Form bringen $P + iQ = 0$. Diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn $P = 0$ und $Q = 0$. Aus diesen beiden Bedingungsgleichungen ergeben sich alsdann A und B.

Wenn der Nenner den quadratischen Faktor mehrmals enthält, so kann man setzen

$$\frac{f(x)}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n \varphi(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n}$$
$$+\frac{Cx+D}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{n-1}}+\cdots+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

wo $\psi(x)$ dieselbe Bedeutung hat wie oben. Entfernt man die Nenner, so folgt

$$(2)\quad f(x)=(Ax+B)\varphi(x)+(Cx+D)(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)\varphi(x)+\cdots$$
$$+(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n\psi(x).$$

Für $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$ verschwinden alle Glieder rechts bis auf das erste, es bleibt noch eine Gleichung, die die Form $P+iQ=0$ annimmt. Aus den Bedingungsgleichungen $P=0$ und $Q=0$ ergeben sich sodann die darin enthaltenen Unbekannten A und B.

Um C und D zu bestimmen, bilde man die erste Ableitung von (2). Man hat

$$f'(x)=A\varphi(x)+(Ax+B)\varphi'(x)+[C\varphi(x)+Cx\varphi'(x)+D\varphi'(x)]$$
$$\times(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)+(Cx+D)(2x+2\alpha)\varphi(x)+\ldots.$$

Setzt man hierin $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$, so folgt

$$f'(x)=A\varphi(x)+(Ax+B)\varphi'(x)+(Cx+D)(2x+2\alpha)\varphi(x),$$

in welche Gleichung $x=-\alpha\pm i\beta$ zu setzen ist. Auch diese Gleichung nimmt die Form $P+iQ=0$ an, so dass aus $P=0$ und $Q=0$ sich C und D ermitteln lassen. Natürlich müssen die Werte von A und B aus den vorigen benutzt werden.

Man sieht, wie zu verfahren ist, wenn zwei weitere Konstanten bestimmt werden sollen.

Beispiel. Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x^2-9}{x^3+3x^2+7x+5}=\frac{x^2-9}{(x^2+2x+5)(x+1)}.$$

Man setze zunächst

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+5}+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

und hat

$$f(x)=(Ax+B)\varphi(x)+\psi(x)\cdot(x^2+2x+5).$$

Damit $x^2+2x+5=0$ wird, hat man $x=2i-1$ zu setzen und erhält, da $\varphi(x)=x+1$,

$$(2i-1)^2-9=[A(2i-1)+B]\cdot 2i \quad\text{oder}$$
$$-12-4i=-4A+i(-2A+2B),$$

woraus für A und B die Gleichungen folgen

$$\left.\begin{array}{r}4A=12\\ 2A-2B=4\end{array}\right| \text{ oder } \begin{array}{l}A=3\\ B=1.\end{array}$$

Setzt man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{C}{x+1} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

so findet man C nach dem ersten Falle

$$C = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = -2;$$

man hat also die Zerlegung

$$\frac{x^2-9}{x^3+3x^2+7x+5} = \frac{3x+1}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x+1}.$$

VII. Maxima und Minima der Funktionen.

310. Funktionen mit einer Variabeln. Es wurde in § 33 erklärt, was unter dem Maximum und Minimum einer Funktion zu verstehen ist, und gezeigt, dass solche Werte, die man auch öfters ausgezeichnete (extreme) nennt, als Ordinaten einer Kurve $y = f(x)$ gedacht, nur möglich sind, wenn man eine Tangente so an die Kurve legen kann, dass sie parallel mit der Abscissenachse, d. h. dass das Differentialverhältnis $\frac{dy}{dx} = 0$ wird. Allein es konnte daselbst noch kein auf die Differentialrechnung gegründetes analytisches Merkmal angegeben werden, um diese Werte als grösste oder kleinste zu erkennen.

Es bezeichne x die einem Maximum oder Minimum entsprechende Abscisse OA (Fig. 103). Lässt man x um $h = AC = AC'$ zu- oder abnehmen, so ist nach dem Taylor'schen Satze, wenn bereits $\frac{dy}{dx} = 0$ gesetzt wird,

$$(1) \quad f(x+h) - f(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2\cdot 3} + \cdots$$

$$(2) \quad f(x-h) - f(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2} - \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2\cdot 3} + \cdots$$

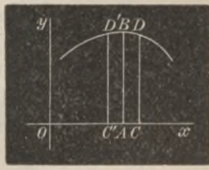
Man nehme nun h so klein an, dass in diesen Reihen die Glieder mit der dritten und den höheren Potenzen von h gegen die Glieder mit h^2 verschwinden (§ 279, IV). Unter dieser Voraussetzung ist also

$$(3) \qquad f(x+h) - f(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2};$$

$$(4) \qquad f(x-h) - f(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}.$$

Sind die beiden Nachbarwerte $CD = f(x+h)$ und $C'D' = f(x-h)$ zugleich kleiner als $AB = f(x)$, so ist $f(x)$ ein Maximum; sind sie zugleich grösser als $f(x)$, so ist $f(x)$ ein Minimum. Für ein Maximum müssen also die rechten Seiten in (3) und (4) negativ sein, was nur möglich ist, wenn der Faktor $\frac{d^2 y}{d x^2}$ negativ ist, da der andere Faktor h^2 immer positiv bleibt. Für ein Minimum müssen jene rechten Seiten positiv sein, was nur möglich ist, wenn $\frac{d^2 y}{d x^2}$ positiv ist.

Fig. 103.



Man bilde also, um die grössten oder kleinsten Werte der Funktion $y = f(x)$ zu finden, aus der Gleichung $y = f(x)$ oder auch aus der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ den ersten und zweiten Differentialquotienten, setze den ersten $\frac{d y}{d x} = 0$, bestimme die Wurzeln dieser Gleichung $\frac{d y}{d x} = 0$ und führe sie in die Grösse $\frac{d^2 y}{d x^2}$ ein. Diejenigen Wurzeln, die $\frac{d^2 y}{d x^2}$ negativ machen, liefern ein Maximum; diejenigen, die $\frac{d^2 y}{d x^2}$ positiv machen, ein Minimum.

Bewirken die Wurzeln, die aus $\frac{d y}{d x} = 0$ entspringen, dass auch $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ wird, so gehen die Formeln (1) und (2) über in

$$(5) \qquad f(x + h) - f(x) = \frac{d^3 y}{d x^3} \cdot \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \frac{d^4 y}{d x^4} \cdot \frac{h^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

$$(6) \qquad f(x - h) - f(x) = - \frac{d^3 y}{d x^3} \cdot \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \frac{d^4 y}{d x^4} \cdot \frac{h^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots$$

Man denke sich hierin h wieder so klein, dass die Glieder mit $h^4, h^5, \ldots$ gegen die Glieder mit h^3 verschwindend klein werden. Diese Glieder mit h^3, die den Wert der Differenzen $f(x + h) - f(x)$ und $f(x - h) - f(x)$ in (5) und (6) bestimmen, haben entgegengesetzte Zeichen. Diese Differenzen können alsdann nur gleiche Zeichen annehmen, wenn die ersten Glieder rechts zu Null werden. Allein der Faktor h^3 ist nicht $= 0$; folglich muss $\frac{d^3 y}{d x^3} = 0$ sein.

Alsdann können in den Reihen (5) und (6) die Glieder mit h^4, wegen der Kleinheit von h, grösser vorausgesetzt werden, als die Summe aller folgenden Glieder. Die Glieder mit h^4 haben gleiche Zeichen. Es wird also y ein Maximum, wenn diese Glieder negativ, also wenn $\frac{d^4 y}{d x^4}$ negativ ist; es wird y ein Minimum, wenn diese Glieder positiv, also wenn $\frac{d^4 y}{d x^4}$ positiv ist.

Sollten die Werte von x, welche $\frac{d y}{d x}$, $\frac{d^2 y}{d x^2}$ und $\frac{d^3 y}{d x^3}$ zu Null machen, bewirken, dass auch $\frac{d^4 y}{d x^4} = 0$ wird, so wäre dasselbe Verfahren auf die folgenden Differentialverhältnisse zu übertragen.

Es gilt also die folgende allgemeine Regel:

Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = a$, für die $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, nur dann einen ausgezeichneten Wert, wenn der erste für $x = a$ nicht verschwindende Differentialquotient von y nach x von gerader Ordnung ist, und zwar ist dieser ausgezeichnete Wert ein Maximum, wenn dieser nicht verschwindende Differentialquotient für $x = a$ negativ ist, aber ein Minimum, wenn dieser Differentialquotient für $x = a$ positiv ist.

Ist aber der erste für $x = a$ nicht verschwindende Differentialquotient von ungerader Ordnung, so ist $f(a)$ kein ausgezeichneter Wert der Funktion.

311. Aufgabe. Zu ermitteln die ausgezeichneten Werte der algebraischen Funktion

$$y = x^2 + ax + b.$$

Man erhält durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = 2x + a; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2.$$

Setzt man den ersten Differentialquotienten $2x + a = 0$, so wird $x = -\frac{a}{2}$.

Für diesen Wert von x wird die Funktion $y = b - \frac{a^2}{4}$ ein Minimum, weil der zweite Differentialquotient $= +2$, also positiv ist. Jede Funktion von der Form $x^2 + ax + b$ hat also einen ausgezeichneten Wert und zwar ein Minimum.

312. Aufgabe. Zu bestimmen, für welche Werte von x das Polynom

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 24$$

zu einem ausgezeichneten Werte wird.

Man hat

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 12x^2 - 72x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 + 24x - 72.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = 0$, so folgt

$$x^3 + x^2 - 6x = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3.$$

Für $x_1 = 0$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -72$, also negativ. Somit ist das Polynom für $x = 0$ ein Maximum und zwar $= 24$.

Für $x_2 = 2$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 120$, also positiv. Somit wird die Funktion hierfür zu einem Minimum. Dieses Minimum ist $= -40$.

Für $x_3 = -3$ endlich wird $\frac{d^2 y}{d x^2} = 180$, also wieder positiv, somit die Funktion zu einem Minimum, dessen Wert $= -165$.

313. Aufgabe. Man soll bestimmen, für welche Werte von x in der unentwickelten Funktion

$$(1) \qquad y^2 + 2xy + 4x^2 - 12 = 0$$

die Grösse y ein Maximum oder Minimum werde.

Indem man x als unabhängig Variable betrachtet und zweimal differentiiert, erhält man

$$(2) \qquad (2y + 2x)\,dy + (2y + 8x)\,dx = 0;$$

$$(3) \qquad (dy + dx)\,dy + (y + x)\,d^2 y + (dy + 4\,dx)\,dx = 0.$$

Dividiert man (2) durch dx und (3) durch dx^2, so ist

$$(y + x)\frac{dy}{dx} + (y + 4x) = 0;$$

$$(y + x)\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4 = 0.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $\frac{dy}{dx} = 0$, so folgt

$$(4) \qquad y + 4x = 0;$$

$$(5) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{4}{x + y}.$$

Mit Hilfe von (4) und (1) erhält man als korrespondierende Werte der Variabeln

$$x_1 = +1, \quad y_1 = -4; \quad \text{folglich} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = +\frac{4}{3},$$

$$x_2 = -1, \quad y_2 = +4; \quad \text{„} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{4}{3}.$$

Folglich wird für $x = +1$ die Grösse y zu einem Minimum und für $x = -1$ zu einem Maximum.

314. Aufgabe. Für welche Werte von x wird in der Formel

$$y = (a - x)^4 + b$$

die Grösse y ein Maximum oder Minimum?

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = -4(a - x)^3; \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = 12(a - x)^2.$$

Aus $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt $x = a$. Hierfür wird $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$. Also kann aus dem zweiten Differentialquotienten nicht entschieden werden, ob

$x = a$ einen ausgezeichneten Wert liefert. Allein durch weitere Differentiation erhält man

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = -24(a-x), \quad \frac{d^4 y}{d x^4} = +24.$$

Für $x = a$ wird nun auch der dritte Differentialquotient $= 0$ und da der vierte positiv ist, so wird y ein Minimum für $x = a$.

315. Aufgabe. Es sollen die ausgezeichneten Werte der Funktion

$$y = \sin^2 x \cos x$$

unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass sich der Bogen x von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ ändern könne.

Durch Differentiation kommt

$$\frac{dy}{dx} = -\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x,$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -7 \cos x \sin^2 x + 2 \cos^3 x.$$

Aus $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt, indem man $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ setzt,

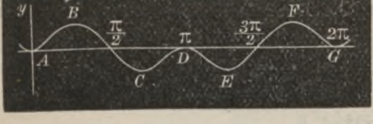
$$\sin x(-3\sin^2 x + 2) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\sin x = 0; \quad \sin x = +\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \sin x = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vermöge der Relation $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ entspricht der ersten Wurzel $\cos x = \pm 1$, der zweiten $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ und der dritten ebenfalls $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Um die Resultate besser übersehen zu können, konstruiere man die gegebene Gleichung. Man erhält eine Kurve von der Form ABCG (Fig. 104). Es entstehen sieben ausgezeichnete Werte, nämlich

Fig. 104.



Minima in A, C, E, G;

Maxima in B, D, F.

Man hat folgende Systeme zusammengehörender Werte für diese Punkte:

A, G $\sin x = 0$, $\quad \cos x = 1 \quad x = 0,\ 2\pi, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = +2.$

D .. $\sin x = 0$, $\quad \cos x = -1, \quad x = \pi, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -2.$

B .. $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos x = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{54^0 44'}{180^0}\pi, \frac{d^2 y}{dx^2} = -4\sqrt{\frac{1}{3}}.$

$$C \,..\, \sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos x = -\sqrt{\frac{1}{3}}, x = \frac{125^0 16'}{180^0}\pi, \frac{d^2 y}{dx^2} = 4\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

$$E \,..\, \sin x = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \cos x = -\sqrt{\frac{1}{3}}, x = \frac{234^0 44'}{180^0}\pi, \frac{d^2 y}{dx^2} = 4\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

$$F \,..\, \sin x = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \cos x = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{305^0 16'}{180^0}\pi, \frac{d^2 y}{dx^2} = -4\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

316. Aufgabe. Man soll den Kugelabschnitt von gegebenem Volumen bestimmen, dessen Mantelfläche ein Minimum ist.

Das Volumen des Kugelabschnittes sei = V, seine Mantelfläche = F, seine Höhe = h und der Radius der zugehörigen Kugel = r; dann ist

(1) $$F = 2\pi r h;$$

(2) $$V = \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3} h\right).$$

Um F als Funktion nur einer der Variabeln h oder r darzustellen, eliminiere man eine dieser letztern Grössen aus (1) und (2). Man erhält zunächst aus (2)

$$r = \frac{1}{3} h + \frac{V}{\pi h^2}$$

und sodann durch Einführen dieses Wertes von r in (1)

$$F = \frac{2\pi}{3} h^2 + 2 V h^{-1}.$$

Durch Differentiation ergibt sich, indem man V als konstant betrachtet,

$$\frac{dF}{dh} = \frac{4\pi}{3} h - 2 V h^{-2}, \quad \frac{d^2 F}{dh^2} = \frac{4\pi}{3} + 4 V h^{-3}.$$

Setzt man den ersten Differentialquotienten = 0, so folgt

$$h^3 = \frac{3V}{2\pi}.$$

Vermittelst dieses Wertes von h wird

$$\frac{d^2 F}{dh^2} = \frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi}{3}.$$

Da dieser Wert des zweiten Differentialquotienten positiv ist, so wird F ein Minimum für

$$h = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}.$$

Führt man diesen Wert von h in (2), so folgt r = h. Der Kugelabschnitt, dessen Mantelfläche ein Minimum ist bei gegebenem Körperinhalte, hat somit die Form einer Halbkugel.

317. Grösste Dichtigkeit des Wassers. Hallström hat die Ausdehnung des Wassers bei Temperaturen innerhalb 0,8 und 32,5 Grad

Celsius durch 64 Versuche bestimmt und unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate folgende Formel gefunden

$$s = 1 + 0{,}000\,052\,939\,t - 0{,}000\,006\,532\,2\,t^2 + 0{,}000\,000\,014\,45\,t^3,$$

worin s das spezifische Gewicht und t die Temperatur des Wassers bezeichnet. Es folgt

$$\frac{ds}{dt} = 0{,}000\,052\,939 - 0{,}000\,013\,064\,4\,t + 0{,}000\,000\,043\,35\,t^2,$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -0{,}000\,013\,064\,4 + 0{,}000\,000\,086\,70\,t.$$

Aus $\frac{ds}{dt} = 0$ ergibt sich

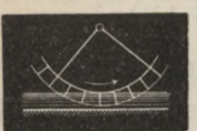
$$t = 4{,}108^0\,C.$$

Für diesen Wert von t wird $\frac{d^2 s}{dt^2}$ negativ, also s ein Maximum. Mithin ist die Dichtigkeit des Wassers, nach diesen Versuchen, am grössten bei $4{,}108^0$ C.

318. Maximalleistung eines unterschlächtigen Wasserrades. Eine Wassermasse M fliesse mit einer Geschwindigkeit V gegen die Schaufeln eines unterschlächtigen Wasserrades (Fig. 105). Die mittlere Umfangsgeschwindigkeit der Radschaufeln sei $= v$. Bei welchem Verhältnis zwischen V und v wird die Arbeit des Wassers ein Maximum?

Die Arbeit, die das Wasser in der Sekunde verrichtet, wird erhalten, wenn man den Druck, den das Wasser in der Richtung seiner Bewegung gegen die Schaufeln ausübt, multipliziert mit der Geschwindigkeit v, mit der der Druck der Bewegung des Rades folgt. Nun ist aber der Druck des fliessenden Wassers proportional der Masse M und der relativen Geschwindigkeit $V - v$, also $= a\,M\,(V - v)$, wobei a eine konstante Grösse bezeichnet. Folglich ist die gesuchte Arbeit, die mit A bezeichnet werden mag,

Fig. 105.



$$A = a\,M\,(V - v)\,v.$$

Hieraus folgt, indem man v und A als variabel betrachtet,

$$\frac{dA}{dv} = a\,M\,(V - 2\,v); \qquad \frac{d^2 A}{dv^2} = -2\,a\,M.$$

Aus $\frac{dA}{dv} = 0$ folgt $V - 2\,v = 0$, also $v = \frac{1}{2}V$, und da $\frac{d^2 A}{dv^2}$ negativ ist, so leistet das Rad am meisten, wenn seine Umfangsgeschwindigkeit die Hälfte ist von der Geschwindigkeit des die Schaufeln stossenden Wassers.

319. Der Keppler'sche Satz vom Maximum und Minimum. Die Gleichung $y = f(x)$ oder $\varphi(x, y) = 0$ liefere für einen gewissen Wert von x einen grössten Wert für y. Stellt man diese Gleichung geometrisch dar, zeichnet die grösste Ordinate ein und zieht noch in sehr kleinen, gleichen Abständen benachbarte Ordinaten, so weichen diese

Nachbarordinaten nur sehr wenig von der grössten ab. Mit andern Worten: es ändert sich die Funktion y sehr langsam in der Nähe ihres Maximums. Das Gleiche gilt ebenso von den Werten in der Nähe des Minimums.

Wenn (§ 318) die Geschwindigkeit v des Wasserrades von dem vorteilhaftesten Werte $v = \frac{1}{2} V$ allmählich abweicht, so nimmt die Arbeit des Rades anfangs nur langsam ab. Es ist dies eine vorteilhafte Eigenschaft des Wasserrades, weil die Geschwindigkeit des Rades innerhalb gewisser Grenzen variieren kann, ohne dass merklich an Leistung eingebüsst wird.

320. Maxima und Minima der Funktionen mit zwei unabhängig Variabeln. Es sei $z = f(x, y)$ eine Funktion mit den beiden unabhängig Veränderlichen x, y. Ferner seien h und k sehr kleine Grössen. Lässt man die Variabeln x, y durch sehr viele Werte stetig aus $x - h$ in $x + h$ und aus $y - k$ in $y + k$ übergehen und stellt jeden dieser Werte von x mit jedem Wert von y zusammen, so wird jedem Paare dieser Werte ein besonderer Wert von z entsprechen. Wenn nun für ein Paar dieser Werte von x, y die Grösse z grösser oder kleiner wird als für alle andern Paare, so wird z im einen Falle ein Maximum, im andern ein Minimum genannt.

Sind nun x, y solche Werte, die z zu einem Maximum oder Minimum machen, so muss die Differenz

$$(1) \qquad f(x + h, y + k) - f(x, y)$$

im Falle eines Maximums immer negativ, im Falle eines Minimums immer positiv sein, ob man sich die kleinen Werte von h und k positiv oder negativ denkt.

Nach dem Taylor'schen Satze ist nun, wenn $k = nh$ gesetzt wird,

$$(2) \qquad f(x + h, y + k) - f(x, y) = h\left(\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2n\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + n^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \ldots\ldots$$

Denkt man sich hierin h und k so klein, dass das erste Glied rechts die Summe aller folgenden Glieder überwiegt, so wird das Zeichen der Differenz (1) vom Zeichen der Grösse

$$(3) \qquad h\left(\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

abhängen. Allein das Zeichen dieser Grösse ändert sich mit dem Zeichen von h, das sowohl positiv als negativ sein kann. Die Differenz (1) kann also nicht für alle Werte von k und h entweder nur positiv oder nur negativ sein, ohne dass die Grösse (3) in der Reihe (2) verschwindet. Setzt man aber die Grösse (3) gleich Null, so ist zu beachten, dass dies nur möglich ist, wenn

$$(4) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

da h nicht $= 0$ gedacht wird. Und da in (4) die Grösse n als Verhältnis zwischen h und k willkürlich ist, so wird die Bedingung (4) nur erfüllt, wenn man zugleich setzt

$$(5) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Man denke sich nun in der Reihe (2) das Glied mit h weg und sodann h und k so klein, dass das Glied mit h^2 die Summe aller folgenden Glieder übertrifft. Ist dieses Glied für die Werte von x und y, die aus (5) hervorgehen, positiv, wie auch k und h beschaffen sein mögen, so wird z ein Minimum; ist es negativ, so wird z ein Maximum. Allein das Zeichen jenes Gliedes hängt nur ab von der Grösse

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2n \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + n^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

da der Faktor h^2 immer positiv ist. Der Einfachheit wegen schreiben wir für diese Grösse

$$A + 2nB + n^2 C,$$

wobei die Bedeutung der Grössen A, B, C durch Vergleichung mit (6) sich leicht ergibt. Dafür kann man setzen

$$C\left[\frac{A}{C} + 2n\frac{B}{C} + n^2\right].$$

Addiert man in der Klammer $\frac{B^2}{C^2} - \frac{B^2}{C^2}$, so kommt

$$(7) \qquad C\left[\frac{A}{C} - \frac{B^2}{C^2} + \left(\frac{B}{C} + n\right)^2\right].$$

In diesem Ausdrucke (7) ist $\left(\frac{B}{C} + n\right)^2$ immer positiv. Wenn man daher setzt

$$\frac{A}{C} - \frac{B^2}{C^2} \geqq 0, \quad \text{oder} \quad AC \geqq B^2,$$

so ist die Grösse in der viereckigen Klammer in (7) immer positiv, und es hängt alsdann das Zeichen von (7) nur vom Zeichen der Grösse C ab. Ist in diesem Falle C positiv, so wird z ein Minimum; ist C negativ, so wird z ein Maximum. Damit aber die Bedingung $AC \geqq B^2$ erfüllt werden kann, muss das Zeichen von AC immer positiv sein; also müssen A und C gleiche Zeichen haben. Hieraus ergeben sich folgende Regeln:

Man setze die beiden ersten Differentialverhältnisse $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ gleich Null und bestimme daraus sämtliche zusammengehörige Werte von x und y.

Man führe diese Werte von x und y in die zweiten Differentialverhältnisse $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ein. Wenn hierbei

a) die beiden Grössen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ gleiche Zeichen haben, und

b) wenn ihr Produkt grösser oder gleich ist dem Quadrat von $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,

so entsteht ein ausgezeichneter Wert für z und zwar ein Maximum, wenn das Zeichen von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ negativ; ein Minimum, wenn dieses Zeichen positiv ist.

Wenn diejenigen Werte von x und y, die die ersten Differentialverhältnisse zu Null machen, auch die zweiten zum Verschwinden bringen, so ist aus dem Bisherigen klar, dass alsdann nur dann ein Maximum oder Minimum entstehen kann, wenn für jene Werte von x, y auch die dritten Differentialverhältnisse zu Null werden und die vierten zusammen entweder negativ oder positiv bleiben, welche Werte auch h und k haben mögen.

321. Aufgabe. Eine gerade Linie von der Länge a in drei Teile zu teilen, dass das Produkt der Teile ein Maximum werde.

Die Teile seien $x, y, a - x - y$ und ihr Produkt z; es wird sein

$$z = x y (a - x - y).$$

Folglich sind die ersten Differentialverhältnisse

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a y - 2 x y - y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a x - 2 x y - x^2;$$

und die zweiten Differentialverhältnisse

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a - 2 x - 2 y.$$

Setzt man die ersten Differentialverhältnisse $= 0$, so folgt

$$a - 2 x - y = 0; \quad a - 2 y - x = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man

$$x = y = \tfrac{1}{3} a.$$

Führt man diese Werte von x und y in die zweiten Differentialverhältnisse ein, so wird

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2 a}{3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2 a}{3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{a}{3}.$$

Da die Werte von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ gleiche Zeichen haben und zudem ihr Produkt grösser ist als das Quadrat des Wertes von $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, so wird z zu einem ausgezeichneten Werte für $x = y = \frac{1}{3} a$ und zwar zu einem Maximum, weil das Zeichen von $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ negativ ist. Das Produkt der Teile wird also ein Maximum, wenn diese Teile einander gleich sind.

322. Aufgabe. Man soll die Form desjenigen rechtwinkeligen Prismas bestimmen, dessen Oberfläche bei gegebenem Körperinhalte ein Minimum ist.

Es seien x, y, z die Kanten des Körpers, V sein Volumen und F seine halbe Oberfläche; dann gelten die Formeln

$$V = xyz, \tag{1}$$

$$F = xy + xz + yz. \tag{2}$$

Führt man den Wert von z aus (1) in (2) ein, so folgt

$$F = xy + Vy^{-1} + Vx^{-1}.$$

Die ersten Differentialverhältnisse dieser Gleichung sind

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - Vx^{-2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x - Vy^{-2};$$

und die zweiten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2Vx^{-3}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2Vy^{-3}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1.$$

Setzt man die ersten Differentialverhältnisse $= 0$, so folgt

$$x = y = \sqrt[3]{V}.$$

Hierfür erhält man als Wert der zweiten Differentialverhältnisse

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1.$$

Da die Werte der beiden ersten dieser Verhältnisse positiv sind und da ihr Produkt zudem grösser ist als das Quadrat des Wertes von $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, so wird F ein Minimum für $x = y = \sqrt[3]{V}$. Allein mit Rücksicht auf (1) wird auch $z = x = y$. Mithin hat unter allen rechtwinkeligen Prismen von gegebenem Körperinhalte der Würfel die kleinste Oberfläche.

323. Aufgabe. Es sind zwei gerade Linien im Raume gegeben. Man soll ihren kürzesten Abstand bestimmen.

Bezieht man diese Geraden auf drei rechtwinkelige Achsen Ax, Ay, Az, nimmt die eine Gerade in der Achse Ax an, so wird die andere in dem Raume vorausgesetzt werden können, der von den drei Koordinaten-Ebenen xy, xz und yz gebildet wird. Die Projektionen dieser zweiten Geraden auf die Ebenen xy und xz sind gerade Linien; die Gleichungen dieser Projektionen seien

$$y = ax + \alpha; \quad z = bx + \beta, \tag{1}$$

wobei die Konstanten a, α und b, β als gegeben zu betrachten sind.

Der kürzeste Abstand beider Geraden sei $= p$; sein Endpunkt in der Achse Ax habe zur Abscisse x′, der andere Endpunkt zu Koordinaten x, y, z; es wird p zur Diagonale eines rechtwinkeligen

Prismas, dessen Kanten parallel zu den drei Achsen liegen und die Werte $x - x', y$ und z haben. Deshalb wird sein

$$(2) \qquad p^2 = (x - x')^2 + y^2 + z^2.$$

Führt man hierin die Werte von y und z aus (1) ein, so folgt

$$(3) \qquad p^2 = (x - x')^2 + (a x + \alpha)^2 + (b x + \beta)^2.$$

Wird hierin p^2 ein Minimum, so wird es auch p. Bezeichnet man deshalb p^2 mit u, so erhält man als erste Differentialverhältnisse, indem man x und x' als die beiden unabhängig Veränderlichen betrachtet,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - x') + 2a(ax + \alpha) + 2b(bx + \beta),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = -2(x - x'),$$

und als zweite Differentialverhältnisse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + 2a^2 + 2b^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x'} = -2.$$

Aus $\frac{\partial u}{\partial x'} = 0$ folgt $x = x'$, d. h. der Abstand p ist senkrecht auf A x, also auf der ersten Geraden. Da nun aber die Geraden vertauscht werden können, so folgt, dass dieser Abstand auf beiden Geraden senkrecht steht.

Setzt man $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ und führt $x' = x$ ein, so erhält man

$$x = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2}.$$

Führt man diesen Wert vou x in (3) ein und setzt $x = x'$, so folgt

$$p = \frac{a\beta - b\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dieser Wert von p ist ein Minimum; denn die Werte der zweiten Differentialverhältnisse $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}$ haben das gleiche positive Zeichen und ihr Produkt ist grösser als das Quadrat des Wertes von $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, d x'}$.

324. Aufgabe. Man soll von einem Punkte ausserhalb einer Ebene das Lot auf diese Ebene fällen.

Die Koordinaten des gegebenen Punktes ausserhalb der Ebene seien x', y', z' und die laufenden Koordinaten der Ebene x, y, z. Die Gleichung der Ebene sei

$$(1) \qquad z = a x + b y + c.$$

Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem Punkte (x, y, z) der Ebene durch eine Gerade. Die Länge dieser Geraden sei p. Legt man durch die Endpunkte von p Ebenen, die parallel sind zu den Koordinatenebenen xy, xz und yz, so schliessen sie ein rechtwinkeliges Prisma ein, dessen Kanten $x - x'$, $y - y'$ und $z - z'$ sind. Die Länge der Diagonale p dieses Prismas ist daher

$$p = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \tag{2}$$

Führt man den Wert von z aus (1) hier ein, so erhält man

$$p = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (a\,x + b\,y + c - z')^2}. \tag{3}$$

Damit nun p senkrecht auf der Ebene steht, muss der Wert von p ein Minimum werden. Die ersten partiellen Differentialverhältnisse von (3) sind

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{x - x' + a(a\,x + b\,y + c - z')}{p},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{y - y' + b(a\,x + b\,y + c - z')}{p}.$$

Setzt man diese Differentialverhältnisse $= 0$ und führt wieder den Wert von z aus (1) ein, so kommt

$$x - x' + a(z - z') = 0; \tag{4}$$

$$y - y' + b(z - z') = 0. \tag{5}$$

Vermöge dieser Bedingungsgleichungen (4) und (5) werden die zweiten Differentialverhältnisse

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1 + a^2}{p}; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1 + b^2}{p}; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} = \frac{a\,b}{p}.$$

Die beiden ersten dieser Verhältnisse sind positiv, ihr Produkt ist grösser als das Quadrat des dritten Verhältnisses; also wird p ein Minimnm, wenn die Gleichungen (4) und (5) stattfinden.

Die Formel (4) kann als die Gleichung der Projektion des Lotes p auf die Ebene xz und die Formel (5) als die der Projektion von p auf die Ebene yz angesehen werden. Man nennt daher diese Formeln kurzweg die Gleichungen der Geraden p.

Um die Länge des Minimalwertes von p zu finden, könnte man aus (1), (4) und (5) die Grössen x, y, z berechnen und in (3) einführen. Allein man kommt schneller zum Ziele, wenn man setzt

$$z' = a\,x' + b\,y' + c - c', \tag{6}$$

worin c' eine neue Konstante bezeichnet. Zieht man (6) von (1) ab, so kommt

$$z - z' = a(x - x') + b(y - y') + c'. \tag{7}$$

Setzt man hierin die Werte von $x - x'$, $y - y'$ aus (4) und (5), so wird

$$z - z' = \frac{c'}{1 + a^2 + b^2}.$$

Vermittelst dieses Wertes von $z - z'$ folgt aus (4) und (5)

$$x - x' = \frac{-ac'}{1 + a^2 + b^2},$$

$$y - y' = \frac{-bc'}{1 + a^2 + b^2}.$$

Führt man diese Werte von $x - x'$, $y - y'$ und $z - z'$ in (2) ein, so erhält man den gesuchten Abstand, indem man den Wert von c' aus (6) ersetzt,

$$p = \frac{z' - ax' - by' - c}{\pm \sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Handelt es sich bei Bestimmung von p nur um die Länge des Lotes, so ist in diesem letzten Ausdrucke das Zeichen der Wurzel so zu wählen, dass p positiv wird.

Nimmt man hierin $p = 0$ an, so muss auch der Zähler des Bruches verschwinden, so dass

$$z' = ax' + by' + c.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (1), so stellt sich in der That heraus, dass der Punkt (x', y', z') in diesem Falle in der gegebenen Ebene liegt.

VIII. Berührung und Krümmung ebener Kurven.

325. Grad der Berührung zweier Kurven. Die Gleichungen zweier Kurven in Bezug auf dasselbe Koordinatensystem seien

$$(1) \qquad y = f(x) \text{ und } y = \varphi(x),$$

von denen angenommen werde, dass sie endliche Differentialquotienten jeder Ordnung besitzen und deshalb nach der Taylor'schen Formel entwickelbar sind.

Man setze voraus, dass die Kurven einen Punkt A (Fig. 106) mit den Koordinaten x, y gemeinschaftlich haben. Nimmt x um eine sehr kleine Grösse h zu, so werden die entsprechenden Ordinaten B a, B b nach dem Taylor'schen Satze sein

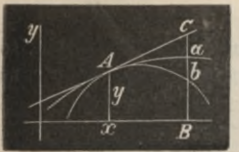
$$(2) \qquad f(x + h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2 \cdot 3} f'''(x) + \ldots$$

$$(3) \qquad \varphi(x + h) = \varphi(x) + h \varphi'(x) + \frac{h^2}{2} \varphi''(x) + \frac{h^3}{2 \cdot 3} \varphi'''(x) + \ldots$$

Wegen des gemeinschaftlichen Punktes A muss nun hierin $f(x) = \varphi(x)$ sein. Sollen die Kurven in A eine gemeinschaftliche Tangente A c haben, so muss auch $f'(x) = \varphi'(x)$ sein. In diesem Falle sagt man, die Kurven berühren einander im Punkte A. Zu einer Berührung gehört also mindestens, dass in den Reihen (2) und (3) je die ersten und ebenso die zweiten Glieder einander gleich sind.

Je kleiner der Unterschied ab der beiden Ordinaten $f(x+h)$ und $\varphi(x+h)$ für sehr kleine Werte von h wird, um so inniger berühren sich die beiden Kurven. Dieser Unterschied wird aber um so kleiner, je mehr Glieder der beiden Reihen einander gleich werden. In diesem Sinne gibt es Berührungen von verschiedener Ordnung.

Fig. 106.



Eine Berührung der ersten Ordnung tritt ein, wenn ausser $f(x) = \varphi(x)$ die ersten Ableitungen $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ gleich sind, eine solche der zweiten Ordnung, wenn noch die zweiten Ableitungen $f''(x)$ und $\varphi''(x)$ gleich werden; eine der dritten Ordnung, wenn zudem noch die dritten Ableitungen gleich sind, u. s. w.

Es sei nun die erste Kurve gegeben und ebenso der Punkt (x, y), in dem die zweite Kurve die erste berühren soll; alsdann muss die zweite Kurve, um eine Berührung mit der ersten Kurve einzugehen, in ihrer Form und Lage gewissen Bedingungen entsprechen. Das ist nur möglich, wenn die Gleichung $y = \varphi(x)$ der zweiten Kurve konstante Grössen enthält, die den gestellten Bedingungen gemäss gewählt werden können.

Es ist z. B. $y^2 = a + bx$ die Gleichung einer Parabel. Lässt man die Konstanten a und b derselben sich ändern, so ändert sich Form und Lage der Parabel, ohne dass sie aufhört, eine Parabel zu sein.

Zu einer Berührung erster Ordnung müssen nun die beiden Gleichungen

$$(4) \qquad f(x) = \varphi(x); \quad f'(x) = \varphi'(x)$$

erfüllt sein. Mittels dieser Gleichungen können zwei Konstante der Gleichung $y = \varphi(x)$ bestimmt werden. Für diese entsteht daher eine Berührung der ersten Ordnung. Enthält die Gleichung $y = \varphi(x)$ noch eine dritte Konstante, so kann diese willkürlich bleiben, ohne dass die Berührung der ersten Ordnung aufhört.

Soll die Berührung von der zweiten Ordnung sein, so lassen sich aus den drei Gleichungen

$$(5) \qquad f(x) = \varphi(x); \quad f'(x) = \varphi'(x); \quad f''(x) = \varphi''(x),$$

die erforderlich sind, drei Konstante der Gleichung $y = \varphi(x)$ bestimmen. Hat diese Gleichung nur zwei Konstante, so kann der letzten der Gleichungen (5) nicht genügt werden; hat sie vier Konstante, so bleibt eine derselben willkürlich u. s. w.

Die Gleichung einer Geraden ist

$$y = ax + b;$$

sie enthält nur zwei Konstante, die aus den Gleichungen (4) bestimmt werden können. Daher kann eine Gerade mit einer Kurve nur eine Berührung erster Ordnung haben; die Gerade ist die Tangente an die Kurve im betreffenden Punkte.

Die Gleichung eines Kreises ist

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2,$$

worin ϱ den Halbmesser des Kreises, α, β die Koordinaten seines Mittelpunktes und x, y die laufenden Koordinaten des Kreises bezeichnen.

Diese Gleichung enthält drei Konstante α, β, ϱ. Diese können so bestimmt werden, dass sie den Gleichungen (5) Genüge leisten. Also kann ein Kreis mit einer beliebigen Kurve eine Berührung der zweiten Ordnung annehmen.

326. Krümmungshalbmesser einer ebenen Kurve. Der Kreis, der mit einer Kurve im Punkte A eine Berührung der zweiten Ordnung hat, heisst Krümmungskreis der Kurve für das betreffende Kurvenelement und seine Halbmesser Krümmungshalbmesser der Kurve in dem Punkte A.

Die Gleichung der Kurve sei $y = f(x)$, diejenige des Krümmungskreises

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2; \tag{1}$$

dann müssen die Konstanten α, β, ϱ dieses Kreises so bestimmt werden, dass sie den Gleichungen (5) des vorigen Paragraphen genügen. Dies kann wie folgt geschehen.

Durch Differentiation von (1) erhält man, wenn x als unabhängig Variable, also dx als konstant angesehen wird,

$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0, \tag{2}$$

$$dx^2 + dy^2 + (y-\beta)\,d^2y = 0 \tag{3}$$

und hieraus

$$y - \beta = -\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \tag{4}$$

$$x - \alpha = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\,\frac{dy}{dx}, \tag{5}$$

und folglich unter Anwendung von (1), (4) und (5)

$$\varrho = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{6}$$

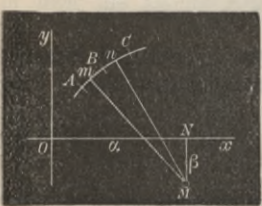
Die Gleichungen (4), (5) und (6) sind aus der Kreisgleichung allein hervorgegangen. Damit durch (4) und (5) die Koordinaten α, β des Kreismittelpunktes und durch (6) der Krümmungshalbmesser des Kreises, der die gegebene Kurve im Punkte (x, y) berührt, bestimmt werden können, hat man die aus der Gleichung der Kurve hervorgehenden Werte von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in diese Gleichungen einzuführen. Den Krümmungshalbmesser ϱ nimmt man schliesslich immer positiv.

Bezeichnet d s das Bogenelement zwischen den Kurvenpunkten (x, y) und (x + d x, y + d y), so ist $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Hierfür erhält man aus den drei letzten Gleichungen

$$y - \beta = -\frac{ds^2}{d^2y};\quad x - \alpha = \frac{ds^2}{d^2y}\frac{dy}{dx};\quad \varrho = \pm\frac{ds^3}{dx\,d^2y}.$$

327. Andere Ableitung des Krümmungshalbmessers. Kontingenzwinkel der Kurve. Es seien A, B, C (Fig. 107) drei aufeinander folgende, unendlich nahe an einander gelegene Punkte einer Kurve $y = f(x)$. Man denke sich durch je zwei dieser Punkte eine Gerade A B, B C gelegt und auf diesen Geraden in ihren Mitten m und n die Lote m M und n M errichtet, die sich in M schneiden; so ist M der Mittelpunkt des Kreises, der durch die drei Kurvenpunkte geht.

Fig. 107.



Es sollen nun der Halbmesser $AM = BM = \varrho$ und die Koordinaten $ON = \alpha$, $MN = \beta$ des Mittelpunktes dieses Kreises bestimmt werden.

Die Tangente durch den Punkt A, dessen Koordinaten x, y sind, bilde mit der Abscissenachse den Winkel γ. Geht x in $x + dx$, y in $y \pm dy$ über, so ändert sich γ um $d\gamma$, d. h. die Tangente durch den Punkt B, dessen Koordinaten $x + dx$, $y \pm dy$ sind, bildet mit der ersten Tangente den Winkel $d\gamma$. Geht man vom Kurvenelement in A über nach dem Kurvenelement in B, so macht hierbei die Richtung der Kurve eine Ablenkung $= d\gamma$. Man nennt diese Ablenkung den Kontingenzwinkel der Kurve.

Die Halbmesser A M und B M stehen auf jenen Tangenten senkrecht, sie schliessen also auch den Winkel $d\gamma$ ein. Nun hat man sich aber γ als Bogen zu denken, der mit dem Halbmesser = 1 beschrieben wird; folglich ist der Bogen $AB = \varrho\, d\gamma$, er ist aber auch $= ds$; daher

$$(1)\qquad \varrho\, d\gamma = ds,\quad \varrho = \frac{ds}{d\gamma}.$$

In dieser Gleichung ist nun noch der Wert von $d\gamma$ aus der Relation $\tang\gamma = \frac{dy}{dx}$ auszudrücken. Man erhält durch Differentiation

$$d\,\tang\gamma = \frac{d\gamma}{\cos^2\gamma} = \frac{d^2y}{dx}.$$

Da aber $\cos^2\gamma = \frac{1}{1+\tang^2\gamma} = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, so wird

$$d\gamma = \frac{d^2y}{dx}\cdot\frac{dx^2}{dx^2+dy^2} = \frac{d^2y\,dx}{ds^2}.$$

Führt man diesen Wert von $d\gamma$ in (1) ein, so erhält man

$$(2)\qquad \varrho = \frac{ds^3}{dx\,d^2y},$$

welche Formel mit der im vorigen Paragraphen abgeleiteten übereinstimmt. Es ist also $AM = BM = \varrho$ der Krümmungshalbmesser der Kurve, und man kann den Krümmungskreis einer Kurve in einem Punkte definieren entweder als den Kreis, der mit der Kurve in dem betreffenden Punkte eine Berührung zweiter Ordnung hat, oder als den Kreis, der durch drei benachbarte Punkte der Kurve geht.

328. Evoluten der Kurven. Denkt man sich für alle Punkte $B, B', \ldots$ (Fig. 108) einer Kurve $y = f(x)$ die Mittelpunkte $M, M' \ldots$ der entsprechenden Krümmungskreise aufgetragen, so werden die letztern Punkte eine Kurve bilden, die die Evolute der Kurve heisst. Die gegebene Kurve wird in Beziehung zu ihrer Evolute gewöhnlich Evolvente genannt.

Die Gleichung der Evolute lässt sich aus der Gleichung der Evolvente mit Hilfe der Gleichungen (§ 326)

$$(1) \qquad \alpha = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}; \qquad \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

wie folgt bestimmen. Man leite aus der Gleichung $y = f(x)$ die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ ab, drücke sie in einer Variabeln x oder y aus und führe sie in den vorstehenden Gleichungen (1) ein; sodann eliminiere man noch diese Variable x oder y aus den beiden Gleichungen; auf diese Weise wird eine Gleichung entstehen, die die Grössen α, β und gewisse Konstante enthält. Diese Gleichung ist die der Evolute.

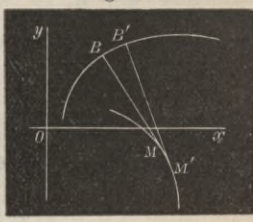
Lässt man in den Gleichungen (1), (2) und (3) des § 326

$$(2) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2,$$

$$(3) \qquad (x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy = 0,$$

$$(4) \qquad dx^2 + dy^2 + (y - \beta)\,d^2y = 0$$

Fig. 108.



die Grösse x sich ändern, so ändern sich auch y, α, β und ϱ. Man betrachte deshalb α, β und ϱ als Funktionen von x und bestimme den Zusammenhang von dx, dy und $d\alpha$, $d\beta$, sowie den Zusammenhang von $d\alpha$, $d\beta$ und $d\varrho$.

Differentiiert man (2) und (3), so kommt

$$(5) \qquad (x - \alpha)(dx - d\alpha) + (y - \beta)(dy - d\beta) = \varrho\, d\varrho,$$

$$(6) \qquad (dx - d\alpha)\,dx + (dy - d\beta)\,dy + (y - \beta)\,d^2y = 0.$$

Zieht man (4) von (6) ab, so folgt

$$-dx\,d\alpha - dy\,d\beta = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy},$$

d. h. die Tangente im Punkte M an die Evolute steht senkrecht auf der Tangente im Punkte B der Evolvente (§ 54). Allein der Krümmungshalbmesser BM ist auch senkrecht auf der Tangente durch B.

Folglich ist der Krümmungshalbmesser der Evolvente eine Tangente an die Evolute.

Zieht man (3) von (5) ab, so folgt

(8) $$(x - \alpha)\,d\alpha + (y - \beta)\,d\beta = -\varrho\,d\varrho.$$

Führt man dx aus (7) in (3) ein, so kommt

(9) $$(x - \alpha)\,d\beta - (y - \beta)\,d\alpha = 0.$$

Eliminiert man $x - \alpha, y - \beta$ aus (2), (8) und (9), so findet man den zweiten gesuchten Zusammenhang

(10) $$d\varrho^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Der Sinn dieser Relation (10) ist folgender: Geht ϱ in $\varrho + d\varrho$ über, so rückt der Punkt α, β nach $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta$. Zwischen diesen Kurvenpunkten liegt das unendlich kleine Bogenelement $\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$. Folglich ist dieses Bogenelement gleich der Aenderung $d\varrho$ des Krümmungshalbmessers.

Bringt man daher an die Stelle des Krümmungshalbmessers BM einen biegsamen, nicht dehnbaren, jedoch gespannten Faden, hält ihn in M fest und wickelt ihn auf der Evolute auf, so beschreibt sein Endpunkt B die Evolvente. Daher die Namen: auf der Evolute ist der Faden aufgewickelt, die Evolvente ist seine Abwickelung.

329. Krümmungshalbmesser und Evolute der Parabel. Für diese Kurve ist

$$y^2 = 2px; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Mit Hilfe dieser Werte wird der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \pm \frac{\left[1 + \frac{p^2}{y^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{p^2}{y^3}},$$

oder indem man reduziert und für ϱ das positive Zeichen nimmt,

(1) $$\varrho = \frac{[p^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{[p + 2x]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

Für den Scheitel ist $x = 0$, also $\varrho = p$, also der Krümmungshalbmesser gleich dem halben Parameter. Wenn x wächst, so nimmt auch ϱ zu. Für ein unendlich grosses x ist $\varrho = \infty$, d. h. es wird der Parabelast im Unendlichen geradlinig.

Nach § 49 ist der Ausdruck für die Länge der Normale n einer Kurve

$$n = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Mithin wird hier

$$n^2 = y^2 + p^2 \text{ und } \varrho = \frac{n^3}{p^2},$$

d. h. es ist der Krümmungshalbmesser der Parabel der dritten Potenz der Länge ihrer Normale proportional.

Setzt man obige Werte von $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ in die Gleichungen (4) und (5) des § 326, so wird

$$\alpha = p + \frac{3y^2}{2p} = p + 3x,$$

$$\beta = -\frac{y^3}{p^2} = -2x\sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Eliminiert man x oder y aus diesen Gleichungen, so erhält man als Gleichung der Evolute

$$(2) \qquad \beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

Die durch diese Gleichung (2) bestimmte algebraische Kurve 3ter Ordnung heisst semikubische oder Neil'sche Parabel. Für $\alpha = p$ wird $\beta = 0$. Lässt man α von $\alpha = p$ an wachsen, so geht die Evolute in zwei symmetrisch zur Achse gelegenen Aesten aus einander, die der Achse ihre konvexe Seite zukehren. Aus der Relation

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{p}$$

folgt, dass für $y = 0$ auch $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ wird, d. h. dass die Achse der Parabel die Aeste der Evolute im Punkte $\beta = 0$, $\alpha = p$ tangiert. Für $y = \pm\infty$ wird auch $\frac{d\beta}{d\alpha} = \pm\infty$, d. h. die äussersten Enden der Kuvenäste der Evolute stehen senkrecht auf der Parabelachse.

330. Krümmungshalbmesser und Evolute der Ellipse. Durch Differentiation der Ellipsengleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ erhält man

$$a^2y\,dy + b^2x\,dx = 0, \qquad a^2dy^2 + a^2y\,d^2y + b^2dx^2 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Folglich durch Substitution in den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser

$$(1) \qquad \varrho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Für den Endpunkt der grossen Achse ist $x = a$, $y = 0$, also $\varrho = b^2 : a$; für den Endpunkt der kleinen Achse $x = 0$, $y = b$, folglich $\varrho = a^2 : b$.

Führt man obige Werte von y und $\frac{dy}{dx}$ in den Ausdruck für die Länge der Normale n (§ 49) ein, so kommt

$$n^2 = y^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4}.$$

Mithin geht der vorstehende Ausdruck des Krümmungshalbmessers über in

$$\varrho = \frac{a^2}{b^4} n^3.$$

Da nun aber $b^2 : a$ der halbe Parameter der Ellipse ist, so setze man $b^2 : a = p$ und erhält

$$\varrho = \frac{n^3}{p^2},$$

welcher Ausdruck mit dem für die Parabel gefundenen übereinstimmt. Ebenso kann gezeigt werden, dass der Krümmungshalbmesser der Hyperbel der dritten Potenz der Länge ihrer Normale proportional ist.

Setzt man die Werte von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die Formeln (4) und (5) des § 326 ein, so erhält man

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3; \quad \beta = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y^3.$$

Hieraus

$$x^2 = a^2\left(\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad y^2 = b^2\left(\frac{b\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Setzt man diese Werte von x^2, y^2 in die Gleichung der Ellipse ein, so erhält man als Gleichung der Evolute

$$(2) \qquad \left(\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Diese Kurve besteht aus vier kongruenten Aesten, die in den Spitzen A, B, C, D zusammenlaufen (Fig. 109). Zwei dieser Spitzen liegen in der grossen und zwei in der Richtung der kleinen Achse. Ist M F der Krümmungshalbmesser der Ellipse in F, so ist M F eine Tangente an die Evolute in M. Rückt der Punkt F nach dem Scheitel S, so bewegt sich M nach A; rückt F nach dem Endpunkte H der kleinen Achse, so bewegt sich M nach D. Für $\beta = 0$ wird

Fig. 109.

$$\alpha = AE = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

Folglich $AS = \varrho = a - \frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{b^2}{a}$, wie oben. Für die Spitze D ist $\alpha = 0$, also $\beta = \mathrm{ED} = \frac{a^2 - b^2}{b}$, folglich $\mathrm{HD} = \varrho = b + \frac{a^2 - b^2}{b} = \frac{a^2}{b}$ (wie oben). Setzt man einen grösseren Wert von β als diesen in die Evolutengleichung, so wird α imaginär. Ebenso wird β imaginär, wenn $\alpha > \frac{a^2 - b^2}{a}$ angenommen wird. Mithin schliessen die Kurvenäste in den Spitzen A, B, C, D ab, und es sind daselbst die Achsen der Ellipse Tangenten an die Evolute.

331. Krümmungshalbmesser und Evolute der Cykloide. Die Gleichungen der Cykloide sind (§ 101), Fig. 110

$$\mathrm{AE} = x = a(\varphi - \sin\varphi); \quad \mathrm{CE} = y = a(1 - \cos\varphi),$$
$$dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi; \quad dy = a\sin\varphi\,d\varphi.$$

Werden die letztern Gleichungen wieder differentiiert, so ist zu beachten, dass dx konstant zu nehmen ist. Man erhält daher

$$0 = a(1 - \cos\varphi)\,d^2\varphi + a\sin\varphi\,d\varphi^2,$$
$$d^2 y = a\cos\varphi\,d\varphi^2 + a\sin\varphi\,d^2\varphi.$$

Eliminiert man $d^2\varphi$ aus diesen beiden Gleichungen, so folgt

$$d^2 y = -a\,d\varphi^2; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1 - \cos\varphi)^2}.$$

Da ferner $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi}$, so wird

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2}{1 - \cos\varphi}.$$

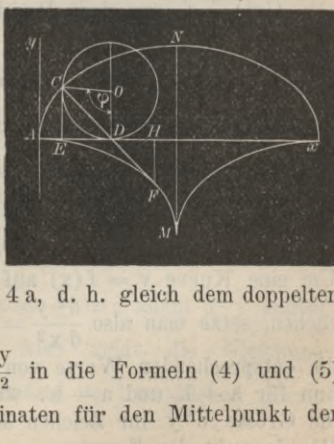
Setzt man diese Werte in die Formel für den Krümmungshalbmesser ein, so ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\varrho = 2a\sqrt{2(1 - \cos\varphi)} = 4a\sin\frac{\varphi}{2}.$$

oder auch

(1) $$\varrho = 2\sqrt{2ay}.$$

Fig. 110.



Für den Anfangspunkt A ist $y = 0$, also $\varrho = 0$; für den Scheitel N der Cykloide wird $y = 2a$, also $\varrho = \mathrm{MN} = 4a$, d. h. gleich dem doppelten Durchmesser des Rollkreises.

Setzt man die Werte von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ in die Formeln (4) und (5) des § 326 ein, so erhält man als Koordinaten für den Mittelpunkt der Krümmung

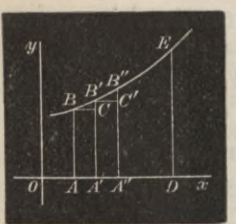
$$\alpha = x + 2a\sin\varphi; \quad \beta = -y.$$

Nun seien AD und OD die Koordinaten des Mittelpunktes des Rollkreises für den Winkel $\mathrm{COD} = \varphi$; ferner $\mathrm{AH} = \alpha$ und $\mathrm{FH} = \beta$

die Koordinaten des Endpunktes des Krümmungshalbmessers CF. Da $ED = \alpha \sin \varphi$, so ist wegen der Formel $\alpha = x + 2a \sin \varphi$, auch $DH = a \sin \varphi$; da ferner $y = -\beta$, d. h. $CE = FH$, so geht der Krümmungshalbmesser durch den Punkt D, wo der Rollkreis die Grundlinie berührt, und ist gleich dem Doppelten der Normale CD. Wegen der beständigen Kongruenz der Dreiecke CED und FHD beschreiben die Endpunkte C und F des Krümmungshalbmessers kongruente Cykloiden. Evolute und Evolvente sind somit kongruent.

332. Ueber einige Eigentümlichkeiten ebener Kurven. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve BB′ (Fig. 111). Entsprechen den Punkten B, B′, B″ die Abscissen x, $x + dx$ und $x + 2dx$, so werden ihre Ordinaten sein y, $y + dy$ und $y + 2dy + d^2y$. Wenn nun die Grössen $B''C' = dy + d^2y$ und $B'C = dy$ einander gleich sind, also wenn $d^2y = 0$ ist, so liegen drei aufeinander folgende Kurvenpunkte in einer geraden Linie, und es wird der Krümmungshalbmesser der Kurve an dieser Stelle unendlich gross. In der That wird nach Formel (6) des § 326, $\varrho = \infty$ für $d^2y = 0$.

Fig. 111.



Liegt die Kurve auf der Seite der positiven y und ist $B''C' > B'C$, also d^2y positiv, so kehrt die Kurve ihre konvexe Seite der Abscissenachse zu. Ist aber bei dieser Lage der Kurve d^2y negativ, so kehrt die Kurve ihre konkave Seite gegen die Abscissenachse. Befindet sich die Kurve auf Seite der negativen y, so findet die umgekehrte Regel statt. Daraus folgt allgemein: Die Kurve wendet ihre konvexe oder konkave Seite gegen die Abscissenachse, wenn y und d^2y gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Geht $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus dem Positiven durch die Null ins Negative über, so findet ein Uebergang aus der Konvexität in die Konkavität oder umgekehrt statt und zwar durch eine Kurvenstelle, für die der Krümmungshalbmesser unendlich gross ist. Geht $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus dem Positiven durch das Unendliche ins Negative über, so tritt auch hier ein Uebergang aus der Konvexität in die Konkavität ein und zwar durch eine Stelle, für die der Krümmungshalbmesser $= 0$ ist. Solche Uebergangspunkte nennt man Wende- oder Flexionspunkte (§ 33 u. 47). Um eine Kurve $y = f(x)$ auf etwa vorhandene Wendepunkte zu untersuchen, setze man also $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ und bestimme daraus die entsprechenden Werte von x. Ein solcher Wert sei $= a$. Wenn nun für $a + h$ und $a - h$, wobei h als sehr klein vorausgesetzt wird, die Grösse d^2y ihr Zeichen ändert, so entspricht der Abscisse a ein Wendepunkt der Kurve.

Schneiden sich mehrere Kurvenäste in einem Punkte in verschiedenen Richtungen, so nimmt $\frac{dy}{dx}$ ebenso viele verschiedene Werte an.

Dabei entscheiden die Zeichen zusammengehöriger Werte von y und $d^2 y$, ob die Kurvenäste, die von diesem Durchschnittspunkte ausgehen, ihre konkave oder konvexe Seite der Abscissenachse zukehren.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung einer Kurve

$$y^3 = x^5 \quad \text{oder} \quad y = x^{\frac{5}{3}};$$

man erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{10}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Für $d^2 y = 0$ wird $x = \pm \infty$. Diese Abscisse entspricht zwei Punkten, für die der Krümmungshalbmesser $\varrho = \infty$ wird, ohne dass ein Wendepunkt entsteht, weil $\infty \pm h$, an die Stelle von x gesetzt, das Zeichen von $d^2 y$ nicht ändert.

Für $\frac{d^2 y}{dx^2} = \infty$ wird $x = 0$; somit wird für beide Kurvenäste, die sich im Anfangspunkte treffen, der Krümmungshalbmesser $= 0$. Setzt man $0 \pm h$ für x in den Ausdruck für $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ein, so ändert diese Grösse ihr Zeichen; also hat die Kurve im Anfangspunkte eine Wendung. Da für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$, so ist die Abscissenachse eine Tangente an die Kurve.

Beispiel 2. Jede Kurve, deren Ordinate ein Polynom ist von der Form

$$y = x^3 + a x^2 + b x + c$$

hat einen Wendepunkt und somit ein Kurvenelement mit einem unendlich grossen Krümmungshalbmesser. Denn es ist

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 6x + 2a.$$

Setzt man $d^2 y = 0$, so wird $x = -\frac{a}{3}$. Für $-\frac{a}{3} + h$ und $-\frac{a}{3} - h$ ändert $d^2 y$ sein Zeichen. Also ist $x = -\frac{a}{3}$ die Abscisse eines Wendepunktes.

Setzt man $\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \infty$, so wird $x = \pm \infty$; allein $d^2 y$ ändert sein Zeichen nicht für $\pm \infty \pm h$. Also zeigt die Gleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \infty$ an, dass die beiden Kurvenäste im Unendlichen geradlinig sind.

Beispiel 3. Die Kurve, deren Gleichung

$$y = x \pm x\sqrt{x} \tag{1}$$

ist, hat zwei Kurvenäste AB und AD (Fig. 112), die im Anfangspunkte A unter gleicher Neigung zur Abscissenachse beginnen und nach der positiven Richtung der Abscissenachse auseinander gehen.

Fig. 112.

Denn für $x = 0$ wird auch $y = 0$; die Kurve geht also durch den Anfangspunkt. Für negative Werte von x wird y imaginär; also hat die Kurve keinen Punkt auf der Seite der negativen Abscissenachse. Ferner ist

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

Für $x = 0$ hat $\frac{dy}{dx}$ nur einen Wert, nämlich $= 1$. Also gehen beide Kurvenäste unter einem Winkel von 45^0 zur Abscissenachse vom Anfangspunkte aus. Für den gleichen Wert von x wird $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \infty$, also ist der Krümmungshalbmesser der Kurve im Anfangspunkte $= 0$.

Setzt man $0 + h$ in die Ausdrücke (2), wobei h eine sehr kleine Grösse bezeichnet, so nimmt $\frac{dy}{dx}$ zwei verschiedene Werte an; also gehen die Kurvenäste zunächst am Anfangspunkte aus einander. Der Kurvenast AB kehrt seine konvexe Seite der Abscissenachse zu, weil für jeden Wert von x die Grössen y und d^2y gleiche Zeichen haben.

Für $x = 1$ wird y in der Formel für den untern Kurvenast AD zu Null. In diesem Punkte C geht die Kurve durch die Abscissenachse. Für den Teil AC haben y und d^2y entgegensetzte, für CD gleiche Zeichen. Also kehrt AC der Abscissenachse die konkave, CD die konvexe Seite zu.

IX. Ebene Kurven in Bezug auf Polarkoordinaten.

333. Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten. Die Lage eines Kurvenpunktes B (Fig. 113) kann bestimmt werden durch dessen Abstand $AB = r$ von einem festen Punkte A und den Winkel $BAx = \varphi$, den dieser Abstand mit einer festen Geraden Ax bildet. Hierbei nennt man r den Radiusvektor oder Leitstrahl des Kurvenpunktes, A den Pol, Ax die Polarachse und φ den Polarwinkel. Die Grössen r und φ heissen die Polarkoordinaten des Punktes B. Die eine dieser Grössen ist eine Funktion der andern, weshalb im allgemeinen die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten sein wird

$$r = f(\varphi) \quad \text{oder} \quad F(r, \varphi) = 0.$$

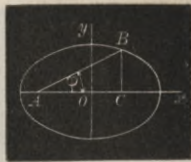
Ist die Gleichung einer Kurve in rechtwinkeligen Koordinaten gegeben, so kann die Polargleichung dieser Kurve abgeleitet werden, wenn man den Zusammenhang der rechtwinkeligen und der Polarkoordinaten kennt.

Die Gleichung der Ellipse für rechtwinkelige Koordinaten ist

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, \tag{1}$$

worin a, b die halben Achsen bezeichnen und die Abscissen x vom Mittelpunkte O aus gezählt werden. Nimmt man nun den Brennpunkt A zum Pol, bezeichnet den Leitstrahl A B mit r, den Winkel B A x mit φ und A O mit c, so ist

Fig. 113.



$$O\,C = x = r\cos\varphi - c; \quad B\,C = y = r\sin\varphi.$$

Setzt man diese Werte von x und y in (1) ein, so kommt

$$a^2 r^2 \sin^2\varphi + b^2 (r\cos\varphi - c)^2 = a^2 b^2.$$

Wird die zweiteilige Grösse entwickelt und $\sin^2\varphi$ durch $1 - \cos^2\varphi$ ersetzt, so kommt

$$a^2 r^2 = b^2 (a^2 - c^2) + 2 b^2 c r \cos\varphi + (a^2 - b^2) r^2 \cos^2\varphi,$$

Da aber $a^2 - c^2 = b^2$, so folgt

$$a^2 r^2 = b^4 + 2 b^2 c r \cos\varphi + c^2 r^2 \cos^2\varphi.$$

Die rechte Seite ist das vollständige Quadrat einer zweiteiligen Grösse; deshalb wird

$$a r = \pm (b^2 + c r \cos\varphi)$$

und hieraus

$$r = \frac{\pm b^2}{a \mp c\cos\varphi}. \tag{2}$$

Da der Nenner rechts immer positiv sein wird, weil $c < a$ und da r immer positiv sein soll, so folgt aus (2) als Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{b^2}{a \mp c\cos\varphi}. \tag{3}$$

Hierin ist das Zeichen — zu wählen, wenn der Polarwinkel, wie in der Figur geschehen, von dem Leitstrahle desjenigen Scheitels aus gezählt wird, der dem als Pol gewählten Brennpunkte nicht zunächst liegt, das Zeichen + aber, wenn von der entgegengesetzten Richtung aus gezählt wird. Nimmt man in (2) die Grösse b^2 mit entgegengesetztem Zeichen, so erhält man die Polargleichung der Hyperbel. Für die beiden getrennten Zweige der Hyperbel sind diese Gleichungen, wenn als Pol derjenige Brennpunkt genommen wird, der auf der positiven Seite der Abscissenachse liegt, und der Polarwinkel von der Richtung der positiven Abscissenachse aus gezählt wird,

$$r_{,} = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi}; \quad r_{,,} = \frac{-b^2}{a + c\cos\varphi}. \tag{4}$$

Auch hier sind nur positive Werte der Leitstrahlen zulässig. $r_{,}$ gilt für denjenigen Zweig, der den als Pol gewählten Brennpunkt einschliesst, $r_{,,}$ für den andern.

Für die Ellipse und diejenige Hyperbel, die den Pol einschliesst, hat man als gemeinsame Polargleichung

$$(5) \qquad r = \frac{b^2}{a - c \cos \varphi}.$$

Führt man den Parameter und die numerische Exzentrizität

$$\frac{b^2}{a} = p; \qquad \frac{c}{a} = \varepsilon$$

ein, so wird die Gleichung

$$(6) \qquad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

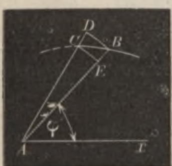
Leitet man in gleicher Weise aus der Gleichung $y^2 = 2px$ die Polargleichung der Parabel ab, so erhält man

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$

Also ist die Gleichung (6) die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten und zwar die einer Ellipse, einer Hyperbel oder einer Parabel, je nachdem $\varepsilon < 1$; $\varepsilon > 1$ oder $\varepsilon = 1$ ist.

334. Flächenelement in Polarkoordinaten. Es sei A (Fig. 114) der Pol, A x die Polarachse, $AB = r$ der Leitstrahl und Winkel $BAx = \varphi$. Lässt man φ in $\varphi + d\varphi = CAx$ übergehen, so entsteht ein Flächenelement C A B, das wir mit d F bezeichnen wollen. Dadurch wird der Leitstrahl $AC = r \pm dr$, je nachdem der Leitstrahl wächst oder abnimmt. Gesetzt es sei, übereinstimmend mit der Figur, $AC = r - dr$. Beschreibt man um A mit den Radien r und $r - dr$ die Kreisbogen $BD = r\,d\varphi$ und $EC = (r - dr)\,d\varphi$, so sind die Flächen der Kreisausschnitte

Fig. 114.



$$ABD = \tfrac{1}{2} r^2\, d\varphi, \qquad ACE = \tfrac{1}{2}(r - dr)^2\, d\varphi.$$

Diese beiden sind unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung, die sich um ein unendlich Kleines der zweiten und dritten Ordnung von einander unterscheiden. Also kann auch die zwischen diesen Grössen liegende Fläche A B C mit A B D verwechselt werden, d. h. es ist das Differential der Fläche

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2\, d\varphi.$$

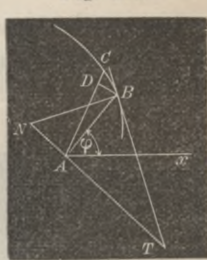
335. Bogenelement in Polarkoordinaten. Es gelte die Bezeichnung des vorhergehenden Paragraphen. Man bezeichne das unendlich kleine Bogenelement B C mit d s, betrachte dasselbe als eine Gerade und nehme an, es sei der unendlich kleine Bogen $BD = r\,d\varphi$ senkrecht auf seinem Radius A D; dann ist B D C ein rechtwinkeliges Dreieck, das zur Bestimmung von d s folgende Relation liefert

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2.$$

336. Subtangente und Subnormale in Polarkoordinaten. Errichtet man die Gerade N A T (Fig. 115) senkrecht zum Leitstrahle A B und zieht die Tangente B T und die Normale B N für den Kurvenpunkt B, so wird A T die Subtangente und A N die Subnormale der Kurve genannt. Somit bezeichnet man hier mit diesen Ausdrücken ganz andere Linien als für ein rechtwinkeliges Koordinatensystem (§ 49).

Man lasse φ in $\varphi + d\varphi$ übergehen, so dass Winkel C A B $= d\varphi$ wird, und beschreibe mit dem Halbmesser r von A aus den unendlich kleinen Bogen B D $= r\, d\varphi$; dann kann angenommen werden, es sei B D geradlinig und senkrecht zu A D. Dadurch wird Winkel D B C = B T A = A B N; also sind die Dreiecke D B C, A B T und A B N ähnlich und man hat

Fig. 115.



$$DC : DB = AB : AT, \quad dr : r\, d\varphi = r : AT;$$
$$DB : DC = AB : AN, \quad r\, d\varphi : dr = r : AN;$$

$$\text{Subtg. } AT = r^2 \frac{d\varphi}{dr}; \quad \text{Subn. } AN = \frac{dr}{d\varphi}.$$

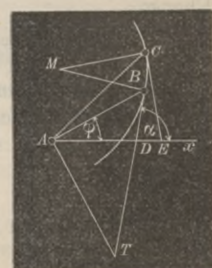
Ferner nennt man B T die Länge der Tangente, B N die Länge der Normale der Kurve im Punkte B. Aus den rechtwinkeligen Dreiecken A B T und A B N findet man durch den Pythagoreischen Lehrsatz leicht

$$\text{Länge der Tangente } BT = r\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2};$$
$$\text{Länge der Normale } \quad BN = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

337. Krümmungshalbmesser der Kurven in Polarkoordinaten. Es sei (Fig. 116) A x die Polarachse, A der Pol, A B $= r$ und Winkel B A x $= \varphi$. Man lasse φ in $\varphi + d\varphi =$ C A x übergehen, so dass Winkel B A C $= d\varphi$ wird. Errichtet man in den Punkten B und C die Tangenten B D und C E und die Normalen B M und C M, so wird B M = C M $= \varrho$ der Krümmungshalbmesser der Kurve für das Bogenelement B C sein.

Ist Winkel B D x $= \alpha$, so ist α eine Funktion von φ. Wenn φ in $\varphi + d\varphi$ übergeht, so wird α zu $\alpha + d\alpha$, d. h. es ist Winkel C E x $= \alpha + d\alpha$, also auch Winkel D C E $= d\alpha =$ B M C. Da das Bogenelement B C $= \varrho\, d\alpha$, aber auch $= ds$ ist, so hat man $\varrho\, d\alpha = ds$, woraus folgt

Fig. 116.



$$(1) \qquad \varrho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2\, d\varphi^2}}{d\alpha}.$$

Hierin ist noch α durch r und φ auszudrücken. Es ist Winkel A B D $= \alpha - \varphi$. Zieht man die Tangente B T und die Subtangente A T (senkrecht zum Leitstrahle A B), so folgte

$$\operatorname{tang} ABD = \frac{AT}{AB} = \frac{\text{Subtg.}}{r} = r\frac{d\varphi}{dr}.$$

Mithin

$$\alpha - \varphi = \operatorname{arc\,tang} r \frac{d\varphi}{dr}.$$

Differentiiert man diese Gleichung und nimmt φ als die unabhängig Variable an, so wird $d\varphi$ konstant sein. Man erhält daher nach § 27

$$d\alpha - d\varphi = \frac{d\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)}{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} = d\varphi\,\frac{dr^2 - r\,d^2r}{dr^2 + r^2 d\varphi^2},$$

und indem man $d\varphi$ auf die andere Seite bringt,

$$d\alpha = \frac{r^2 d\varphi^2 + 2\,dr^2 - r\,d^2r}{dr^2 + r^2 d\varphi^2}\,d\varphi.$$

Führt man diesen Wert von $d\alpha$ in (1) ein, so kommt die gesuchte Formel

$$(2)\qquad \varrho = \frac{[r^2 d\varphi^2 + dr^2]^{\frac{3}{2}}}{d\varphi\,[r^2 d\varphi^2 + 2\,dr^2 - r\,d^2r]} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

338. Anwendung auf den Kreis. Da der Radius r konstant ist, so wird $dr = 0$, daher wird das Flächenelement $= \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, also der Kreisauschnitt und die Kreisfläche

$$\frac{1}{2} r^2 \int_0^{\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \varphi, \quad \frac{1}{2} r^2 \int^{2\pi} d\varphi = \pi r^2.$$

Das Bogenelement ist $ds = r\,d\varphi$; folglich der Kreisbogen und der Kreisumfang

$$r \int_0^{\varphi} d\varphi = r\varphi, \qquad r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r.$$

Ebenso

$$\text{Subtg.} = \infty, \qquad \text{Subn.} = 0, \qquad \text{Krümmungsh. } \varrho = r.$$

339. Anwendung auf die archimedische Spirale. Bei dieser Kurve ist der Radiusvektor dem Polarwinkel proportional. Die Gleichung der Kurve wird daher sein

$$(1)\qquad r = a\varphi,$$

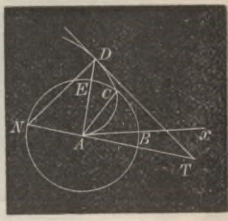
worin a denjenigen konstanten Radiusvektor bezeichnet, der dem Bogen $\varphi = 1$ entspricht.

Es sei A x (Fig. 117) die Polarachse, A der Pol. Beschreibt man mit dem Radius $AB = a$ einen Kreis, macht auf demselben den Bogen $BC = 1$, setzt den Winkel $EAB = \varphi$, so wird der Kreisbogen $ECB = a\varphi$. Dieser Bogen muss nun nach (1) gleich $AD = r$ sein. Es seien A T und A N die Subtangente und Subnormale der Kurve. Durch Differentiation von (1) folgt $dr = a\,d\varphi$; folglich erhält man

$$(2)\quad \begin{cases} \text{Subtangente } AT = \dfrac{r^2}{a} = a\varphi^2, \\ \text{Subnormale } AN = a. \end{cases}$$

Mithin liegt der Punkt N der Normale für jede Lage des Punktes D auf dem Kreise B C E. Für $\varphi = 1$ wird auch die Subtangente $= a$, und es bilden alsdann Subtangente und Subnormale den Durchmesser des Kreises, der senkrecht zu A C steht.

Fig. 117.



Das Element der Fläche ist

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2 d\varphi = \tfrac{1}{2} a^2 \varphi^2 d\varphi.$$

Folglich die Fläche zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$

$$(3)\quad F = \frac{1}{2}\frac{a^2\varphi^3}{3} = \frac{1}{6} r^2 \varphi = \frac{1}{6}\frac{r^3}{a}.$$

Das Bogenelement der Spirale ist

$$ds = \sqrt{a^2 d\varphi^2 + a^2\varphi^2 d\varphi^2} = a\,d\varphi \sqrt{1+\varphi^2}.$$

Mithin der Bogen zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$, nach § 90, Formel (11)

$$(4)\quad s = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + l\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right].$$

Um den Krümmungshalbmesser ϱ der Spirale zu finden, beachte man, dass in der Formel $dr = a\,d\varphi$ die Grösse $d\varphi$ konstant, also $d^2 r = 0$ ist. Mithin wird

$$(5)\quad \varrho = \frac{(a^2\varphi^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\varphi^2 + 2a^2} = a\frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2+\varphi^2}.$$

Der kleinste Wert von ϱ entsteht für $\varphi = 0$; er ist $\varrho = \frac{1}{2} a$. Mit wachsendem Werte von φ wird ϱ grösser. Für $\varphi = \infty$ wird auch $\varrho = \infty$.

Bei der gewöhnlichen archimedischen Spirale wird $a = \dfrac{1}{2\pi}$; also ist die Gleichung derselben

$$r = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

340. Anwendung auf die hyperbolische Spirale. Wenn man in der Gleichung $xy = a$ der gleichseitigen Hyperbel die rechtwinkeligen Koordinaten x, y mit den Polarkoordinaten φ und r vertauscht, so erhält man die Gleichung

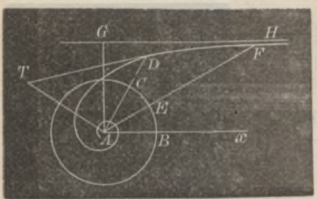
$$(1)\quad r\varphi = a$$

der hyperbolischen Spirale.

Es sei A x (Fig. 118) die Polarachse, A der Pol. Konstruiert man mit dem Halbmesser $AB = AC = 1$ einen Kreis, trägt darauf einen Bogen $\varphi = BC = 1$ ab, so muss der durch C gehende Radiusvektor $AD = a$ sein. Halbiert man den Bogen BC in E und zieht den Radiusvektor AEF, so muss $AF = 2a = 2AD$ sein, etc. Der Ast über F hinaus nähert sich mehr und mehr einer Geraden, die zu A x parallel liegt und bis ins Unendliche geht. In der Richtung von F nach D nähert sich die Kurve in unendlich vielen Windungen dem Pole und erreicht ihn für $\varphi = \infty$.

Die Differentiation von (1) gibt $r\,d\varphi + \varphi\,dr = 0$; folglich ist

Fig. 118.



$$(2) \qquad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r}{\varphi} = -\frac{r^2}{a}.$$

Mithin wird das Element der Fläche

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2\,d\varphi = -\tfrac{1}{2} a\,dr,$$

und somit die Dreiecksfläche ADF zwischen den Leitstrahlen $AF = 2a$ und $AD = a$ gleich

$$(3) \qquad -\tfrac{1}{2} a (a - 2a) = \tfrac{1}{2} a^2,$$

und die Fläche, die zwischen dem Leitstrahle $AD = a$ und den unendlich vielen Windungen der Spirale liegt, die von D aus bis zum Pole A reichen oder mit andern Worten: die Fläche für die Grenzen $\varphi = 1$ bis $\varphi = \infty$

$$-\tfrac{1}{2} a (0 - a) = \tfrac{1}{2} a^2.$$

Die vorige Fläche (3) und diese sind somit gleich gross und zusammen gleich dem Quadrate der Linie AD.

Ferner hat man

$$(4) \qquad \text{Subtangente } AT = r^2 \frac{d\varphi}{dr} = -a.$$

Mithin ist die Subtangente konstant. Für den Kurvenast, der sich im Unendlichen parallel zu A x fortzieht, wird die Subtangente AG senkrecht zu A x. Folglich wird die Tangente GH, die die Kurve im Unendlichen berührt, parallel zu A x im Abstande a eine Asymptote sein.

Um den Krümmungshalbmesser zu erhalten, hat man das erste Differential $r\,d\varphi + \varphi\,dr$ von (1) nochmals zu differentiieren. Man erhält, wenn $d\varphi$ als konstant angenommen wird,

$$2\,dr\,d\varphi + \varphi\,d^2 r = 0, \text{ also } \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{2r^3}{a^2}.$$

Mithin ergibt sich nach § 337

$$(5) \qquad \varrho = \frac{\left(r^2 + \frac{r^4}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{r^4}{a^2} - 2\frac{r^4}{a^2}} = r\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Zweiter Teil der Integralrechnung.

I. Differentialformeln mit einer Variabeln.

341. Rationale, gebrochene algebraische Differential-Formeln. In den §§ 304 bis 309 ist gezeigt worden, dass das allgemeine rationale gebrochene Differential

$$\frac{f(x)}{F(x)}\,dx,$$

unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ bestimmt werden können, immer vermittelst der Zerlegung in Partialbrüche auf die einfachen Formen

$$\frac{A\,dx}{a+x};\qquad \frac{A\,dx}{(a+x)^n};\qquad \frac{Ax+B}{(a+x)^2+b^2}\,dx;\qquad \frac{Ax+B}{[(a+x)^2+b^2]^n}\,dx$$

gebracht werden kann.

Das Integral der ersten dieser Formen ist bereits in § 84 angegeben. Es ist nämlich

$$\int\frac{A\,dx}{a+x} = A\cdot l(a+x)+C. \tag{1}$$

Um die übrigen Formeln zu integrieren, setze man $a + x = y$, also auch $dx = dy$.

Man erhält dann für die zweite Form

$$\frac{A\,dx}{(a+x)^n} = \frac{A\,dy}{y^n} = Ay^{-n}\,dy,$$

folglich, indem man integriert,

$$\int\frac{A\,dy}{y^n} = \frac{Ay^{-n+1}}{-n+1}+C$$

und wieder x statt y einführt,

$$\int\frac{A\,dx}{(a+x)^n} = -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(a+x)^{n-1}}+C. \tag{2}$$

Für die dritte der obigen Differentialformeln erhält man

$$\frac{A x + B}{(a + x)^2 + b^2} d x = \frac{A y d y}{y^2 + b^2} + \frac{B - A a}{y^2 + b^2} d y.$$

Nun ist aber nach § 84

$$\int \frac{A y d y}{y^2 + b^2} = \frac{A}{2} \int \frac{2 y d y}{y^2 + b^2} = \frac{A}{2} l (y^2 + b^2) + C$$

$$= \frac{A}{2} l [(a + x)^2 + b^2] + C$$

und nach § 86, Formel (5)

$$\int \frac{B - A a}{y^2 + b^2} d y = \frac{B - A a}{b} \operatorname{arc tang} \frac{y}{b} + C$$

$$= \frac{B - A a}{b} \operatorname{arc tang} \frac{x + a}{b} + C.$$

Durch Addition dieser beiden Werte folgt

$$(3) \qquad \int \frac{A x + B}{(a + x)^2 + b^2} d x = \frac{A}{2} l [(x + a)^2 + b^2]$$

$$+ \frac{B - A a}{b} \operatorname{arc tang} \frac{x + a}{b} + C.$$

Endlich erhält man für die vierte der obigen Formeln

$$\frac{(A x + B) d x}{[(a + x)^2 + b^2]^n} = \frac{A y d y}{(y^2 + b^2)^n} + \frac{B - A a}{(y^2 + b^2)^n} d y.$$

Um den ersten Teil rechts zu integrieren, setze man $y^2 + b^2 = z^2$, also $y d y = z d z$; dann wird

$$\frac{A y d y}{(y^2 + b^2)^n} = \frac{A z d z}{z^{2n}} = A z^{-2n+1} d z;$$

$$(4) \quad \int \frac{A y d y}{(y^2 + b^2)^n} = \frac{A z^{-2n+2}}{-2n + 2} + C = \frac{A}{2(1 - n)} \cdot \frac{1}{(y^2 + b^2)^{n-1}} + C.$$

Nun bleibt noch die Differentialformel

$$\frac{d y}{(y^2 + b^2)^n}$$

zu integrieren. Multipliziert und dividiert man diesen Quotienten mit $y^2 + b^2$, so kommt

$$(5) \quad \int \frac{d y}{(y^2 + b^2)^n} = \int \frac{y^2 d y}{(y^2 + b^2)^{n+1}} + \int \frac{b^2 d y}{(y^2 + b^2)^{n+1}}.$$

Integriert man nun den ersten Teil rechts nach der Formel (1) des § 90

$$\int u d v = u v - \int v d u,$$

indem man annimmt

$$u = y, \qquad dv = \frac{y\,dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}},$$

so erhält man zunächst aus der letzten Formel vermittelst (4)

$$v = -\frac{1}{2n(y^2 + b^2)^n},$$

folglich

$$\int \frac{y^2\,dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}} = \frac{-y}{2n(y^2 + b^2)^n} + \frac{1}{2n}\int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n}.$$

Führt man diesen Wert von $\int \frac{y^2\,dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}}$ in (5) ein und zieht die gleichartigen Glieder zusammen, so erhält man

$$\int \frac{b^2\,dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}} = \frac{y}{2n(y^2 + b^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n},$$

woraus, wenn man $(n+1)$ durch n ersetzt, folgt

$$(6) \qquad \int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n} = \frac{y}{2(n-1)\cdot b^2 \cdot (y^2 + b^2)^{n-1}}$$
$$+ \frac{2n-3}{2(n-1)\cdot b^2}\int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^{n-1}}.$$

Vermöge dieser **Rekursionsformel** ist das Integral $\int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n}$ auf $\int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^{n-1}}$ zurückgeführt. Durch wiederholte Anwendung derselben Formel gelangt man zuletzt zum Integral $\int \frac{dy}{y^2 + b^2}$, dessen Wert bekannt ist. (§ 78, Formel (5). Vermittelst der Gleichungen (4) und (6) kann nun das Differential der vierten Form integriert werden. Die wiederholte Anwendung von (6) liefert die Gleichungen

$$\int \frac{dy}{(y^2+b^2)^{n-1}} = \frac{y}{2(n-2)\cdot b^2\cdot(y^2+b^2)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2(n-2)\cdot b^2}\int \frac{dy}{(y^2+b^2)^{n-2}}$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+b^2)^{n-2}} = \frac{y}{2(n-3)\cdot b^2\cdot(y^2+b^2)^{n-3}} + \frac{2n-7}{2(n-3)\cdot b^2}\int \frac{dy}{(y^2+b^2)^{n-3}}$$

. . . .

$$\int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^2} = \frac{y}{2\cdot b^2(y^2 + b^2)} + \frac{1}{2b^2}\int \frac{dy}{y^2 + b^2},$$

da nun

$$\int \frac{dy}{y^2 + b^2} = \frac{1}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{b}$$

ist, so erhält man aus (4) und den aus (6) gefolgerten Gleichungen, wenn man schliesslich y durch $a + x$ wieder ersetzt, die allgemeine Formel:

$$(7) \quad \int \frac{(Ax+B)\,dx}{[(a+x)^2+b^2]^n} = \frac{A}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{[(a+x)^2+b^2]^{n-1}} + C$$

$$+ (B - Aa) \cdot \Bigg\{ \frac{a+x}{2\cdot(n-1)\cdot b^2\cdot[(a+x)^2+b^2]^{n-1}}$$

$$+ \frac{2n-3}{2^2\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot b^4} \cdot \frac{a+x}{[(a+x)^2+b^2]^{n-2}}$$

$$+ \frac{(2n-3)\cdot(2n-5)}{2^3\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot b^6} \cdot \frac{a+x}{[(a+x)^2+b^2]^{n-3}}$$

$$+ \frac{(2n-3)\cdot(2n-5)\cdot(2n-7)}{2^4\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot b^8} \cdot \frac{a+x}{[(a+x)^2+b^2]^{n-4}}$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{(2n-3)\cdot(2n-5)\cdot(2n-7)\ldots 3}{2^{n-1}\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\ldots 2\cdot 1\cdot b^{2(n-1)}} \cdot \frac{a+x}{[(a+x)^2+b^2]}$$

$$+ \frac{(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 3}{2^{n-1}\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1\cdot b^{2n-1}} \operatorname{arc\,tang} \frac{a+x}{b} \Bigg\}.$$

Damit sind die vier Fälle, die bei rationalen gebrochenen Funktionen auftreten können, erledigt; es hat sich dabei zugleich ergeben, dass die Integration des allgemeinen Differentials $\frac{f(x)}{F(x)}\,dx$ auf r a t i o n a l e, l o g a r i t h m i s c h e und c y k l o m e t r i s c h e Funktionen führt.

342. Irrationale, algebraische Differentialformeln. Enthält die Differentialformel algebraische Polynome, in denen die Variable mit gebrochenen Exponenten vorkommt, so kann die Formel durch passende Substitutionen rational gemacht werden. Es sei z. B. zu integrieren

$$(1) \qquad dy = \frac{a+\sqrt{x}}{b-\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Setzt man $x = z^6$, also $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[3]{x} = z^2$, $dx = z^5 dz$, so ist

$$(2) \qquad dy = \frac{a+z^3}{b-z^2} \cdot 6\,z^5\,dz.$$

Diese Formel ist rational und kann nach dem vorhergehenden Paragraphen integriert werden.

Die binomische Differentialformel

$$(3) \qquad x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx$$

kann in gewissen Fällen durch eine der beiden Substitutionen

$$a+bx^n = z^q \quad \text{oder} \quad a+bx^n = z^q x^n$$

rational gemacht werden.

Für die erste Substitution erhält man

$$nbx^{n-1}\,dx = q\,z^{q-1}\,dz;$$

$$dx = \frac{q}{nb}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}} z^{q-1}dz; \quad x^{m-1} = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{m-1}{n}}.$$

Somit

$$(4) \quad x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{nb}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}} z^{q+p-1}dz.$$

Diese Formel wird rational, wenn $\frac{m-n}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Wendet man die zweite Substitution an, so wird man finden, dass die Formel (3) rational wird, wenn $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

343. Differentialformeln mit der Grösse $\sqrt{A + Bx + Cx^2}$. Diese Grösse kann auch geschrieben werden

$$\sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x + x^2},$$

weshalb man, der Allgemeinheit unbeschadet, die Quadratwurzel aus obigem quadratischen Ausdruck in der Form $\sqrt{a + bx + x^2}$ voraussetzen kann.

Es ist bereits im § 86 eine Differentialformel, die diese Wurzelgrösse enthält, integriert worden. Auf demselben Wege, auf dem diese entstanden ist, erhält man auch das Integral von $dx\sqrt{a + bx - x^2}$.

Setzt man in Formel (10) von § 90

$$b + y = x, \quad dy = dx, \quad b^2 + 2by + y^2 = x^2,$$

so kommt

$$\int dy\sqrt{a^2 - b^2 - 2by - y^2} = \frac{b+y}{2}\sqrt{a^2 - b^2 - 2by - y^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{b+y}{a} + C.$$

Setzt man hierin $a^2 - b^2 = A$, $-2b = B$, so wird

$$(1) \quad \int dy\sqrt{A + By - y^2} = \frac{2y - B}{4}\sqrt{A + By - y^2} + \frac{4A + B^2}{8}\arcsin\frac{2y - B}{\sqrt{4A + B^2}} + C.$$

Um die Integrale der Formeln

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}, \quad dx\sqrt{a + bx + x^2}$$

zu erhalten, setze man in Formel (3) des § 88 und Formel (11) des § 90, wie oben, die Grössen $b + y = x$, $dy = dx$ und erhält

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2+b^2+2by+y^2}} = l\left(b+y+\sqrt{a^2+b^2+2by+y^2}\right)+C,$$

$$\int dy\sqrt{a^2+b^2+2by+y^2} = \frac{b+y}{2}\sqrt{a^2+b^2+2by+y^2}+C$$
$$+\frac{a^2}{2}l\left(b+y+\sqrt{a^2+b^2+2by+y^2}\right).$$

Setzt man hierin $a^2+b^2 = A$, $2b = B$, so wird

$$(2)\ \int \frac{dy}{\sqrt{A+By+y^2}} = l\left(\frac{B}{2}+y+\sqrt{A+By+y^2}\right)+C.$$

$$(3)\ \int dy\sqrt{A+By+y^2} = \frac{B+2y}{4}\sqrt{A+By+y^2}+C$$
$$+\frac{4A-B^2}{8}l\left(\frac{B}{2}+y+\sqrt{A+By+y^2}\right).$$

Es sei das Integral der Formel $\frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ zu finden, in der c positiv oder negativ sein kann. Durch Differentiation folgt

$$d\left(x^m\sqrt{a+bx+cx^2}\right) = m\,x^{m-1}\,dx\sqrt{a+bx+cx^2}$$
$$+\frac{x^m(b+2cx)\,dx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Bringt man die Glieder rechts unter den gleichen Nenner und ordnet, so kommt

$$d\left(x^m\sqrt{a+bx+cx^2}\right) = \frac{m\,a\,x^{m-1}\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}+\frac{2(m+1)\,b\,x^m\,dx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$+\frac{(m+1)\,c\,x^{m+1}\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Dividiert man durch $(m+1)c$, versetzt die Glieder und integriert, so erhält man

$$(4)\quad \int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x^m\sqrt{a+bx+cx^2}}{(m+1)c}$$
$$-\frac{(2m+1)b}{2(m+1)c}\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$-\frac{m\,a}{(m+1)c}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Für $m = 0$ geht diese Formel über in

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Das letzte Glied kann nach dem Vorhergehenden integriert werden und zwar nach (2), wenn c positiv oder nach (6) des § 86, wenn c negativ ist. Formel (4) ist eine Rekursionsformel, aus der man nunmehr, indem man der Reihe nach $m = 1, 2, 3, \ldots$ einsetzt, das Integral für einen bestimmten Wert von m berechnen kann.

Für $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ erhält man aus (4) die weitere Rekursionsformel

$$(5) \quad \int \frac{x^{m+1}\, d\, x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x^m}{m+1} \sqrt{1 - x^2} + \frac{m}{m+1} \int \frac{x^{m-1}\, d\, x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Um den Ausdruck $x^{n-1}\, d\, x \sqrt{a + b\, x + c\, x^2}$ zu integrieren, multipliziere und dividiere man mit $\sqrt{a + b\, x + c\, x^2}$; man erhält als Differential

$$\frac{x^{n-1}\, d\, x\, (a + b\, x + c\, x^2)}{\sqrt{a + b\, x + c\, x^2}},$$

das nach (4) integriert werden kann.

344. Transcendente Differentiale. Um die Differentiale $\frac{d\, x}{\sin x}$ und $\frac{d\, x}{\cos x}$ zu integrieren, schreibe man

$$\int \frac{d\, x}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, d\, x}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\, (\cos x)}{1 - \cos^2 x},$$

$$\int \frac{d\, x}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, d\, x}{\cos^2 x} = \int \frac{d\, (\sin x)}{1 - \sin^2 x}.$$

Setzt man $\cos x = y$ und $\sin x = z$, so erhält man

$$\int \frac{d\, x}{\sin x} = -\int \frac{d\, y}{1 - y^2}, \quad \int \frac{d\, x}{\cos x} = \int \frac{d\, z}{1 - z^2}.$$

Nun erhält man aber durch die Methode der Zerlegung in Partialbrüche

$$\frac{1}{1 - y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - y}.$$

Folglich wird

$$\int \frac{d\, x}{\sin x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d\, y}{1 + y} - \frac{1}{2} \int \frac{d\, y}{1 - y} = -\frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + y}{1 - y} + C.$$

$$(1) \quad \int \frac{d\, x}{\sin x} = -\frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} + C.$$

Ganz ebenso ergibt sich

$$(2) \quad \int \frac{d\, x}{\cos x} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C.$$

Setzt man $-n$ statt $+n$ in die Formeln (8) und (9) des § 88 und versetzt die Glieder, so erhält man wie dort

$$(3)\qquad \int\frac{dx}{\sin^{n+1}x}=-\frac{1}{n}\frac{\cos x}{\sin^n x}+\frac{n-1}{n}\int\frac{dx}{\sin^{n-1}x}.$$

$$(4)\qquad \int\frac{dx}{\cos^{n+1}x}=\frac{1}{n}\frac{\sin x}{\cos^n x}+\frac{n-1}{n}\int\frac{dx}{\cos^{n-1}x}.$$

Für $n=0$ sind diese Formeln unbrauchbar. In diesem Falle sind die Formeln (1) und (2) anzuwenden. Allein (1) und (2) kommen auch zur Anwendung, wenn man $n=2,4,6,\ldots$ in die Rekursionsformeln (3) und (4) einführt.

Man erhält für $n=1$ und 2:

$$(5)\qquad \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin x}+C;\qquad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}+C.$$

$$(6)\qquad \int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\frac{1}{4}\,l\,\frac{1+\cos x}{1-\cos x}+C.$$

$$(7)\qquad \int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{4}\,l\,\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C.$$

Es sei der Ausdruck $\sin^m x\cos^q x\,dx$, in dem m und q ganze Zahlen bezeichnen, zu integrieren. Man betrachte zunächst q als eine gerade Zahl, setze also $q=2n$; man kann dann schreiben

$$(8)\qquad \sin^m x\cos^{2n}x\,dx=\sin^m x\,(1-\sin^2 x)^n\,dx.$$

Entwickelt man $(1-\sin^2 x)^n$ nach dem binomischen Satze, so enthält der vorstehende Ausdruck eine endliche Anzahl Glieder von der Form $\sin^p x\,dx$, die vermittelst Formel (8) des § 88 integriert werden können.

Ist q eine ungerade Zahl, so setze man $q=2n+1$, wodurch man erhält

$$(9)\qquad \sin^m x\cos^{2n+1}x\,dx=\sin^m x\,(1-\sin^2 x)^n\cos x\,dx.$$

Wird hier nach dem binomischen Satze entwickelt, so erhält man Glieder von der Form $\sin^p x\cos x\,dx$, die nach Formel (6) des § 88 integriert werden können.

Auf demselben Wege können die Ausdrücke

$$\frac{\cos^q x}{\sin^m x}\,dx,\qquad \frac{\sin^q x}{\cos^m x}\,dx$$

integriert werden. Wenn q eine gerade Zahl ist, so erhält man die Formen

$$\frac{(1-\sin^2 x)^n\,dx}{\sin^m x},\qquad \frac{(1-\cos^2 x)^n}{\cos^m x},$$

die nach (3) und (4) dieses Paragraphen oder nach (8) und (9) des § 88 zu integrieren sind.

Wenn $q=2n+1$ eine ungerade Zahl ist, so wird

$$\frac{\cos^q x}{\sin^m x}\,dz=\frac{(1-\sin^2 x)^n\,d(\sin x)}{\sin^m x}.$$

Setzt man hierin $\sin x = z$, so kommt

$$(10) \qquad \frac{\cos^q x}{\sin^m x} d x = \frac{(1 - z^2)^n d z}{z^m}.$$

Diese rechte Seite ist eine rationale algebraische Funktion, die integriert werden kann.

Wendet man auf den Ausdruck

$$x^n \arcsin x \, d x$$

die Formel $\int u \, d v = u v - \int v \, d u$ des teilweisen Integrierens an, indem man setzt

$$d v = x^n d x, \quad u = \arcsin x,$$

so erhält man zunächst

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad d u = \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Führt man die Werte von u, v und d u ein, so folgt

$$\int x^n \arcsin x \, d x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} d x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Und hierin kann das zweite Glied rechts nach Formel (5) des § 343 integriert werden.

Es sei das Integral $\int e^{-x^2} d x$, das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt, abzuleiten. Entwickelt man e^{-x^2} nach Formel (4) des § 68 in eine Reihe, so kommt

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1 \cdot 2} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdot\cdot$$

Folglich wird, indem man mit d x multipliziert und integriert,

$$(11) \qquad \int_0^x e^{-x^2} d x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdot\cdot$$

Die erste dieser beiden Reihen ist für jeden endlichen Wert von x konvergent, also ist es auch die zweite Reihe.

345. Reihe von Johann Bernoulli. Durch wiederholte Anwendung der Formel

$$\int u \, d v = u v - \int v \, d u$$

des teilweisen Integrierens erhält man

$$\int f(x) \, d x = f(x) \cdot x - \int f'(x) \cdot x \, d x,$$

$$\int f'(x) \cdot x d x = f'(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int f''(x) \cdot \frac{x^2}{2} d x,$$

$$\int f''(x) \cdot \frac{x^2}{2} dx = f''(x) \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \int f'''(x) \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} dx,$$

. . . .

und durch Addition dieser Gleichungen

$$\int f(x) dx = f(x) \cdot x - f'(x) \cdot \frac{x^2}{2} + f''(x) \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3}$$
$$- f'''(x) \cdot \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + C.$$

Dies ist die von Johann Bernoulli zuerst angegebene Reihe. Sie ist, wie jede unendliche Reihe überhaupt, nur zulässig unter der Bedingung ihrer Konvergenz.

Um das Integral $\int l x \, dx$ nach dieser Formel abzuleiten, hat man

$f(x) = l x$; $\quad f'(x) = x^{-1}$; $\quad f''(x) = -x^{-2}$;
$f'''(x) = 2x^{-3}$; $\quad f^{IV}(x) = -6x^{-4}$; $\quad f^{V}(x) = 24x^{-5}$, etc.

Setzt man diese Werte in die vorstehende Reihe, so ergibt sich

$$\int l x \, dx = x\left(l x - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \ldots\right) + C.$$

II. Ueber bestimmte Integrale.

346. Ableitung von Integralformeln durch Variation einer Konstanten. Die gegebene Gleichung sei

$$(1) \qquad u = \int_a^b f(x, \alpha) dx,$$

in der α eine Konstante bezeichnet, die in irgend einer Weise mit der Variabeln x zusammenhängt. Setzen wir voraus, es sei α von den Grenzen a und b unabhängig. Denkt man sich α veränderlich und bezeichnet man den Wert von u, der entsteht, wenn α in $\alpha + \triangle \alpha$ übergeht, mit $u + \triangle u$, so ist

$$u + \triangle u = \int_a^b f(x, \alpha + \triangle \alpha) dx.$$

Folglich durch Subtraktion

$$\triangle u = \int_a^b [f(x, \alpha + \triangle \alpha) - f(x, \alpha)] dx,$$

oder indem man durch $\triangle \alpha$ dividiert,

$$(2) \qquad \frac{\triangle u}{\triangle \alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \triangle \alpha) - f(x, \alpha)}{\triangle \alpha} dx.$$

Allein es ist nach § 10

$$\lim_{\triangle \alpha = 0} \frac{f(x, \alpha + \triangle \alpha) - f(x, \alpha)}{\triangle \alpha} = \frac{d f(x, \alpha)}{d \alpha}$$

Geht man daher in (2) von der Differenz zum Differential über, so ist

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d f(x, \alpha)}{d\alpha} dx. \tag{3}$$

Um daher die Gleichung (1) in Hinsicht einer Konstanten α zu differentiieren, kann man die Differentiation der Grösse hinter dem Integralzeichen, ohne Rücksicht auf dieses Zeichen, ausführen. Die Konstante wird häufig Parameter und das Verfahren die Differentiation nach einem Parameter oder auch die Differentiation von Kurve zu Kurve genannt.

Dieser von Leibnitz ausgesprochene Satz kann dazu benutzt werden, um aus bereits bekannten Integralformeln andere abzuleiten, wie folgende Beispiele zeigen.

I. Es ist

$$\int e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} \int e^{-\alpha x} d(-\alpha x) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} + C,$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Differentiiert man in Hinsicht α, so kommt nach 1, 2, . . n maliger Wiederholung

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2}; \quad \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^3}; \ldots$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{2 \cdot 3 \ldots n}{\alpha^{n+1}}.$$

II. Es ist

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Differentiiert man 1, 2, . . m mal in Hinsicht n, so kommt

$$\int_0^1 x^n l x \, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}; \quad \int_0^1 x^n l^2 x \, dx = \frac{2}{(n+1)^3}; \ldots$$

$$\int_0^1 x^n l^m x \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{(n+1)^{m+1}}.$$

347. Vereinfachung gewisser Rekursionsformeln durch Anwendung von Integrationsgrenzen. Nach Formel (5) des § 343 ist z. B.

$$\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^m}{m+1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m}{m+1} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^1 \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m}{m+1} \int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1}$$

Nun beachte man, dass man nach § 86 und 88 hat

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

Mit Hilfe dieser Integrale ergeben sich nun aus (1) folgende neue, wenn $m = 1, 2, 3 \ldots$ gesetzt wird,

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^1 \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^1 \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7},$$

und daher allgemein

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\,..\,(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\,..\,2n}\frac{\pi}{2}.$$

$$(3) \qquad \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\,..\,2n}{3\cdot 5\cdot 7\,..\,(2n+1)}.$$

Diese Formeln können noch wie folgt umgewandelt werden. Setzt man $x = \sin\varphi$, führt also den Bogen φ statt x ein, so entspricht der untern Integrationsgrenze der Wert $\sin\varphi = 0$, also auch Bogen $\varphi = 0$; dagegen der obern Grenze der Wert $\sin\varphi = 1$, also der Bogen $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Das neue Integral ist also von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen.

Aus $x = \sin\varphi$ folgt aber

$$dx = \cos\varphi\,d\varphi, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = d\varphi.$$

Somit gehen (2) und (3) über in

$$(4) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\,..\,(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\,..\,2n}\frac{\pi}{2};$$

$$(5) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi = \frac{2\cdot 4\cdot 6\,..\,2n}{3\cdot 5\cdot 7\,..\,(2n+1)}.$$

Man erhält daher für $n = 1, 2, 3, ..$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\,d\varphi = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\,d\varphi = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man in (2) und (3)

$$x = \cos\varphi, \text{ so ist } dx = -\sin\varphi\,d\varphi,$$

$$\frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sin\varphi\, d\,\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = -\,d\,\varphi;$$

den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ entsprechen dann die Grenzen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 0$; da aber

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\,\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\,\varphi,$$

so gehen (2) und (3) über in

$$(6)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\varphi\, d\,\varphi = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\,\varphi;$$

$$(7)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi\, d\,\varphi = \frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\varphi\, d\,\varphi.$$

Eine andere Umwandlung ergibt sich, indem man $y = a(1-\cos\varphi)$ in (4) setzt. Man erhält

$$d\,y = a\sin\varphi\, d\,\varphi,\quad \cos\varphi = 1 - \frac{y}{a},\quad \sin^2\varphi = \frac{2\,a\,y - y^2}{a^2};$$

$$\sin^{2n}\varphi\, d\,\varphi = \frac{1}{a^{2n}}(2\,a\,y - y^2)^{n-1}\sqrt{2\,a - y^2}\, d\,y.$$

Die Grenzen der Integration von (4) ändern sich wie folgt. Für die untere Grenze $\varphi = 0$ wird $y = a(1-1) = 0$; für die obere $\frac{\pi}{2}$ dagegen $y = a\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = a$. Daher erhält man aus (4)

$$(8)\quad \int_0^a (2\,a\,y - y^2)^{n-1}\sqrt{2\,a\,y - y^2}\, d\,y = \frac{1\cdot 3\cdot 5\,..\,(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\,..\,2n}\,\frac{\pi}{2}\,a^{2n}.$$

Zu einem weitern Beispiele dieser Art kann Formel (8) des § 90 benutzt werden. Man erhält allgemein

$$\int_0^1 x^{n-1}\, d\,x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{1+n}\int_0^1 \frac{x^{n-1}\, d\,x}{\sqrt{1-x^2}}$$

und speziell für $n = 1, 2, 3, ..$ mit Benutzung der vorstehenden Resultate

$$\int_0^1 d\,x\,\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^1 x\, d\,x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^2\, d\,x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^1 x^3\, d\,x\sqrt{1-x^2} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5},$$

$$\int_0^1 x^4\, d\,x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^1 x^5\, d\,x\sqrt{1-x^2} = \frac{1\cdot 2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}\ \text{etc.}$$

348. Bestimmte Integrale für besondere Grenzen. Wenn allgemein

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

so erhält man nach § 92 als bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bei Anwendung dieser Formel hat man sich jedoch immer zu überzeugen, ob die Natur der Funktion die Grenzen a und b zulässt. In welchem Sinne dies gemeint ist, mögen folgende Beispiele zeigen.

I. Bei der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, § 113, wurde als Fläche zwischen der Kurve und der Abscissenachse gefunden

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l\left(\frac{b}{a}\right).$$

Dehnt man hierin die obere Grenze ins Unendliche aus, so wird der Wert des Integrals unendlich gross, also unbestimmt, während es zum Wesen des bestimmten Integrals gehört, immer einen bestimmten endlichen Wert zu besitzen. Lässt man a der Null sich nähern, so nähert sich der Wert des Integrals wieder der Grösse ∞. Dabei wurde a positiv vorausgesetzt. Nimmt man aber a negativ an, so wird das Integral imaginär. In der That zeigt auch die Figur zu § 113, dass die Kurve keine Punkte, also auch keine Flächenelemente auf der negativen Seite der Abscissenachse hat. Es können also auf dieser Seite auch keine Flächenelemente summiert werden. Somit müssen im vorstehenden Integral die Grenzen a und b positiv und endlich sein.

II. Aus dem unbestimmten Integral

$$\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$$

folgt

$$\int_a^b \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Dehnt man hierin die obere Grenze bis $b = \infty$ aus, so geht der Wert des Integrals rechts über in den Grenzzustand $\frac{1}{2a^2}$. Dieser Wert ist ein bestimmter endlicher Wert, es kann daher auch die obere Grenze bis $b = \infty$ ausgedehnt werden.

Nimmt die untere Grenze a, als positiv gedacht, gegen Null ab, so nähert sich das Integral der Grösse ∞ und erreicht sie für $a = 0$. Dieser Grenzwert darf also nicht in Anwendung kommen. Allein es kann auch a nicht negativ und b positiv sein, weil sonst die Variable x sich von $-a$ bis $+b$ ändern, also durch 0 gehen müsste. Sind dagegen a und b negative Abscissenwerte, so gilt für diese was für positive. Wenn daher α ein sehr kleiner, der Null nahe liegender Wert ist, so kann das vorstehende Integral wie folgt genommen werden

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2}, \qquad \int_{+\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2}.$$

349. Näherungsweise Bestimmung bestimmter Integrale. Lässt sich das bestimmte Integral

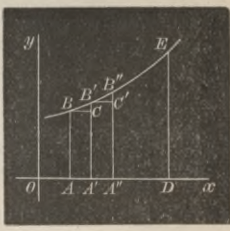
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

durch keine der bisher in Anwendung gekommenen Methoden finden, so bestimme man seinen Wert näherungsweise wie folgt. Es sei x die Abscisse und f(x) die Ordinate einer Kurve BE (Fig. 119). Ist diese Kurve stetig zwischen den Grenzen

$$x = a = OA \text{ und } x = b = OD,$$

so werden die diesen Grenzen entsprechenden Ordinaten $AB = f(a)$ und $DE = f(b)$ sein.

Fig. 119.



I. Trapezmethode. Man teile den Unterschied $AD = b - a$ in n gleiche Teile h, mache also $h = AA' = A'A'' = ..$, bezeichne der Einfachheit wegen die Ordinaten, die den Abscissen $a, a + h, a + 2h, .. a + nh$ entsprechen, mit $y_0, y_1, y_2, .. y_n$ und betrachte die Flächenteile zwischen je zwei benachbarten Ordinaten als Trapeze; dann sind die Inhalte dieser Trapeze

$$\frac{h}{2}(y_0 + y_1), \quad \frac{h}{2}(y_1 + y_2), .. \quad \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n).$$

Die Summe dieser Trapeze ist annähernd der Wert des bestimmten Integrals. Folglich wird die Formel

$$(1) \quad \int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + .. + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right]$$

um so näher den Wert des gesuchten Integrals geben, je kleiner das Intervall h genommen wird.

II. Simpson'sche Methode. Es gelte die bisherige Bezeichnung. Man teile den Abschnitt $AA'' = 2h$ in drei gleiche Teile und errichte in den beiden Teilpunkten die Ordinaten v und u; betrachtet man die dadurch zwischen den Ordinaten y_0 und y_2 entstandenen drei Flächenteile als Trapeze, so ist ihr Inhalt gleich

$$\frac{h}{3}(y_0 + v) + \frac{h}{3}(v + u) + \frac{h}{3}(u + y_2) = \frac{h}{3}(y_0 + 2v + 2u + y_2).$$

Diese drei Trapeze geben den Wert der Fläche $ABB''A''$ genauer als die beiden Trapeze zwischen den Ordinaten y_0, y_1 und y_1, y_2.

Dieser Wert ist jedoch zu gross oder zu klein, je nachdem die Kurve ihre konvexe oder konkave Seite der Abscissenachse zukehrt. Setzt man noch $v + u = 2y_1$, was sehr nahe richtig ist, so wird der Ausdruck für die Fläche im ersten Falle kleiner, im zweiten grösser, so dass eine teilweise Ausgleichung der Fehler entsteht.

Dadurch wird die zwischen y_0 und y_2 liegende Fläche

$$AA''B''B = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ganz ebenso ist die Fläche zwischen je zwei weitern Ordinaten mit geraden Stellenzeigern

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \quad \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6), \ldots$$

Durch Summation dieser Ausdrücke erhält man den angenäherten Wert der ganzen Fläche zwischen y_0 und y_n gleich

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\frac{h}{3}[y_0 + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + y_n].$$

Diese Formel, die verlangt, dass die beliebige Zahl n gerade gewählt wird, nennt man die Simpson'sche Regel.

III. Poisson'sche Methode. Das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$ sei $\varphi(x)$; dann ist

$$(3) \qquad \int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

und somit für die Grenzen a und b

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Differentiiert man (3), so kommt

$$(5) \qquad f(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x).$$

Der Wert von $\varphi(b) - \varphi(a)$ des bestimmten Integrals kann nun aus der Relation (5) ermittelt werden. Man erhält vermöge des Taylor'schen Satzes

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h f(a) + \frac{h^2}{2} f'(a) + \frac{h^3}{6} f''(a) + \ldots$$

$$\varphi(a+2h) = \varphi(a+h) + h f(a+h) + \frac{h^2}{2} f'(a+h) + \ldots$$

. . . .

$$\varphi(a+nh) = \varphi(a+nh-h) + h f(a+nh-h) + \frac{h^2}{2} f'(a+nh-h) + \ldots$$

Setzt man in diesen Gleichungen $nh = b - a$ und addiert sie, so kommt

$$(6) \quad \varphi(b) - \varphi(a) = h[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+nh-h)]$$
$$+ \frac{h^2}{2}[f'(a) + f'(a+h) + \ldots + f'(a+nh-h)]$$
$$+ \frac{h^3}{6}[f''(a) + f''(a+h) + \ldots + f''(a+nh-h)] + \ldots$$

Ganz ebenso wird sein

$$(7)\quad f(b) - f(a) = h\,[f'(a) + f'(a+h) + .. + f'(a + nh - h)]$$
$$+ \frac{h^2}{2}[f''(a) + f''(a+h) + .. + f''(a + nh - h)] + ..$$
$$(8)\quad f'(b) - f'(a) = h\,[f''(a) + f''(a+h) + .. + f''(a + nh - h)] + ..$$
. . . .

Man multipliziere (7) mit $-\frac{h}{2}$ und (8) mit $\frac{h^2}{12}$ und addiere nachher diese Gleichungen zu (6), setze dabei h als eine sehr kleine Grösse voraus, so dass in der Summe die Glieder, die h in einer höhern als der zweiten Potenz enthalten, vernachlässigt werden können; alsdann erhält man mit Rücksicht auf (4)

$$(9)\quad \int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + .. + f(a + nh - h) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$
$$- \frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right].$$

Das erste Glied rechts in (9) stimmt mit der Formel der Trapez-Methode überein. Wegen des zweiten Gliedes rechts bietet die Formel (9) jedoch eine grössere Genauigkeit dar als jene der Trapez-Methode.

Beispiel. Es soll der Wert des bestimmten Integrales

$$u = \int_0^{1,2} \frac{dx}{1 + x^3}$$

näherungsweise berechnet werden.

Teilt man die Abscissendifferenz $b - a = 1,2 - 0$ in sechs gleiche Teile, so erhält man als Werte der Abscissen und entsprechenden Ordinaten

Absc.	= 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
Ord.	= 1	0,9920	0,9398	0,8224	0,6614	0,5000	0,3665.

Setzt man diese Ordinaten von y_0 an bis y_6 in die vorstehenden Formeln und nimmt $h = 0,2$, so erhält man als Wert des Integrales:

I. Nach der Trapez-Methode

$$u = 0,2 \cdot 4,5991 = 0,9198.$$

II. Nach der Simpson'schen Regel

$$u = \frac{0,2}{3} \cdot 13,8267 = 0,9218.$$

III. Nach der Poisson'schen Formel hat man zunächst

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^3}, \quad f'(x) = -\frac{3x^2}{(1 + x^3)^2}.$$

Der Wert von $f'(x)$ wird für $x = 0 = a$ und $x = 1,2 = b$ zu

$$f'(a) = 0, \quad f'(b) = -0,5803.$$

Folglich ist das Glied

$$-\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] = \frac{0,04}{12} \cdot 0,5803 = 0,0019,$$

und da das erste Glied rechts in der Formel (9) gleich dem Werte ist, den die Trapez-Methode gibt, so ist der verbesserte Wert

$$u = 0{,}9198 + 0{,}0019 = 0{,}9217.$$

Man sieht, dass die drei Werte, namentlich die beiden letztern, nur wenig von einander abweichen.

III. Länge der Kurven im Raume.

350. Ausdruck für das Bogenelement. Denkt man sich die Kurve aus unendlich kleinen, geradlinigen Bogenelementen zusammengesetzt, so kann man durch je zwei aufeinander folgende eine Ebene legen. Eine solche Ebene heisst Krümmungsebene (Oskulationsebene) und der Winkel, den die zwei Bogenelemente einer Krümmungsebene bilden, Kontingenzwinkel (§ 327). Dieser Winkel ist das Mass der ersten Krümmung. Je zwei aufeinander folgende Krümmungsebenen schneiden sich und bilden einen Winkel, der als Mass der zweiten Krümmung der Kurve betrachtet wird.

Ist die Kurve auf drei rechtwinkelige Achsen bezogen, so kann sie als gegeben angesehen werden durch ihre Projektionen auf zwei der drei Koordinatenebenen xy, xz, yz.

Sind nun x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Koordinaten zweier einander unendlich nahe gelegener Punkte der Kurve, so kann man das dazwischen liegende Bogenstück, das wir mit ds bezeichnen wollen, als geradlinig ansehen. Alsdann ist ds die Diagonale eines rechtwinkeligen Prismas, dessen Kanten dx, dy und dz sind. Folglich wird sein

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \text{ oder}$$

$$(1) \qquad ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Die Winkel, die das Bogenelement ds mit der x-, der y- und der z-Achse macht, seien α, β, γ; dann ist

$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Durch (1) wird die Länge und durch (2) die Richtung der Kurve im Punkte (x, y, z) bestimmt. Erhebt man die Gleichungen (2) ins Quadrat und addiert sie, so folgt

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Um den Bogen s der Kurve zwischen den Abscissen x_0 und x zu finden, hat man nur das Integral

$$(3) \qquad s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

auszuführen, zu welchem Zwecke die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ aus den Gleichungen der Kurve abzuleiten, in einer Variabeln x auszudrücken und in Formel (3) einzuführen sind.

351. Länge einer Geraden im Raume. Die Gleichungen der Projektionen der Geraden auf die Ebenen xy und xz seien

$$y = ax + a'; \quad z = bx + b'.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = a; \quad \frac{dz}{dx} = b; \quad ds = dx\sqrt{1 + a^2 + b^2}$$

und mithin die gesuchte Länge

$$\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1 + a^2 + b^2} = (x - x_0)\sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

352. Länge einer Schraubenlinie. Die Achse eines Kreiscylinders vom Halbmesser a falle in die zAchse und seine Grundfläche in die Ebene xy. Es befinde sich auf der Cylinderfläche eine Schraubenlinie, die den konstanten Winkel α mit der Ebene xy bildet und in der xAchse beginnt. Die Koordinaten eines Kurvenpunktes seien x, y, z. Man lege durch diesen Punkt und die zAchse eine Ebene. Bildet sie mit der Ebene xz den Winkel φ, wobei φ im Bogenmass ausgedrückt wird, so ist

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = a\varphi\,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

Hieraus folgt

$$dx = -a\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = a\cos\varphi\, d\varphi, \quad dz = a\,\mathrm{tang}\,\alpha\, d\varphi,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2(1 + \mathrm{tang}^2\alpha)\,d\varphi^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\,d\varphi^2,$$

$$s = \frac{a}{\cos\alpha}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \frac{a}{\cos\alpha}(\varphi - \varphi_0).$$

353. Schnittlinie zweier Cylinderflächen. Die Achsen zweier Cylinder, die gleiche Halbmesser a haben, sollen sich schneiden und zwar unter rechtem Winkel. Es ist die Länge der Kurve zu bestimmen, längs der sich die Cylinderflächen durchdringen.

Nimmt man die Achse des ersten Cylinders in der zAchse, die der zweiten in der xAchse an, so ist die Gleichung der ersten Cylinderfläche auf der Ebene xy

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = a^2,$$

und die der zweiten auf der Ebene yz

$$(2) \qquad y^2 + z^2 = a^2.$$

Für die Durchschnittskurve müssen die Werte von x, y, z in beiden Gleichungen gleich sein. Setzt man die Werte von a^2 einander gleich, so folgt

$$(3) \qquad x^2 = z^2,$$

woraus sich ergibt $x = \pm z$, d. h. die beiden Durchschnittskurven projizieren sich auf der Ebene xz als zwei gerade Linien, die die zAchse unter Winkeln von 45^0 schneiden. Mithin liegen diese Kurven in Ebenen, die zur Ebene xz senkrecht stehen. Diese Ebenen schneiden sich längs der yAchse.

Aus (1) und (3) folgt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{z} = \pm 1.$$

Vermittelst dieser Werte erhält man

$$ds = dx\sqrt{2 + \frac{x^2}{y^2}}.$$

Führt man hierin den Wert von y aus (1) ein, so kommt

$$(4) \qquad ds = dx\sqrt{\frac{2a^2 - x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Um diese Formel zu integrieren, setze man

$$x = a \sin \varphi, \qquad dx = a \cos \varphi \, d\varphi$$

und erhält aus (4)

$$ds = a \cos \varphi \, d\varphi \frac{\sqrt{2 - \sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = a\sqrt{2}\, d\varphi \left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man die zweiteilige Grösse nach dem binomischen Satze in eine Reihe, so wird

$$(5) \quad ds = a\sqrt{2}\, d\varphi \left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{4} - \frac{\sin^4\varphi}{32} - \frac{\sin^6\varphi}{128} - \frac{5\sin^8\varphi}{2\,048} - \ldots\right).$$

Um den vierten Teil einer der beiden Kurven zu erhalten, muss x von 0 bis a, also φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ genommen werden. Die Grössen $\sin^2\varphi \, d\varphi$, $\sin^4\varphi \, d\varphi, \ldots$ werden integriert nach Formel (4) des § 347. Man erhält als bestimmte Integrale, entsprechend den Gliedern in der Klammer

$$\frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}; \quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}; \quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}; \quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}; \ldots$$

Bezeichnet daher s die Länge einer ganzen Kurve, so erhält man vermittelst dieser Werte aus (5)

$$s = 2\pi a \cdot \sqrt{2}\left(1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{256} - \tfrac{5}{2048} - \tfrac{175}{262144} - \ldots\right)$$

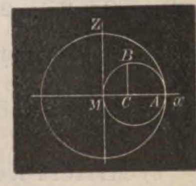
$$s = 1{,}216 \cdot 2\pi a.$$

Es verhält sich daher der Cylinderumfang zur Kurvenlänge wie 1 000 : 1 216.

354. Schnittlinie einer Cylinderfläche und einer Kugelfläche. Ein gerader Kreiscylinder gehe durch eine Kugel. Man soll die Länge der Kurve bestimmen, längs der sich beide Oberflächen schneiden, und zwar unter der Voraussetzung, dass der Mittelpunkt der Kugel auf der Cylinderfläche liege und dass der Durchmesser des Cylinders gleich dem Halbmesser der Kugel sei.

Man nehme den Mittelpunkt M der Kugel (Fig. 120) zum Ursprunge rechtwinkeliger Koordinaten und lege die y Achse parallel zu den Seitenlinien des Cylinders, also senkrecht zur Ebene der Zeichnung. Dann werden die Kugel- und Cylinderfläche geschnitten durch die Ebene x z längs zwei in der Figur abgebildeten Kreisen, die in A einander berühren.

Fig. 120.



Ein Punkt B des cylindrischen Schnittkreises habe zu Koordinaten $MC = x$, $BC = z$; dann ist $(CB)^2 = MC \cdot AC$. Wenn der Halbmesser der Kugel $= a$, so wird $AC = a - x$; daher die Gleichung der Cylinderfläche auf der Ebene x z

$$z^2 = ax - x^2. \tag{1}$$

Die Gleichung der Kugelfläche aber ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \tag{2}$$

Für die Kurve, längs der sich die Oberflächen schneiden, müssen die Koordinaten x, y, z einander gleich sein. Eliminiert man die Grösse z aus (1) und (2), so folgt als Gleichung der Kurve auf der Ebene x y

$$y^2 = a^2 - ax.$$

Die Kurve projiziert sich daher auf diese Ebene als Parabel.

Dem Punkte B entspricht eine Ordinate y, liegend im Cylindermantel. Sie schliesst mit dem Kugelradius a und der Sehne $MB = r$ ein rechtwinkeliges Dreieck ein, das kongruent ist dem Dreiecke MAB. Denn das erstere Dreieck mit den Seiten y, a und r gibt $y^2 = a^2 - r^2$; ebenso gibt das zweite Dreieck die Relation $(AB)^2 = a^2 - r^2$; folglich ist $y = AB$.

Nun sei Winkel $AMB = \alpha$; dann wird

$$y = a \sin \alpha; \qquad r = a \cos \alpha. \tag{3}$$

Lässt man nun x in $x + dx$ übergehen, so wird α zu $\alpha - d\alpha$ und r zu $r + dr$. Dabei rückt der Punkt B in der Richtung nach A hin vor um einen Bogen, der als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks angesehen werden kann mit den Katheten $r\, d\alpha$ und dr; die Länge des Bogens ist daher $\sqrt{(r\, d\alpha)^2 + dr^2}$. Gleichzeitig ändert sich y um dy. Daher ist die Gleichung für das Bogenelement der Schnittkurve

$$ds^2 = dy^2 + r^2 d\alpha^2 + dr^2.$$

Nun folgt aus (3)

$$dy = a \cos \alpha\, d\alpha; \qquad dr = -a \sin \alpha\, d\alpha.$$

Daher ist

$$ds = a\, d\alpha \sqrt{1 + \cos^2\alpha}. \tag{4}$$

Dieses Differential kann nur durch Annäherung integriert werden. Es sollen folgende zwei Verfahren zur Anwendung kommen.

a) Mittels Reihen. Die Wurzelgrösse gibt

$$(1 + \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{2} - \frac{\cos^4\alpha}{8} + \frac{\cos^6\alpha}{16} - \frac{5\cos^8\alpha}{128} + \frac{7\cos^{10}\alpha}{256} - \ldots$$

Multipliziert man mit $d\alpha$ und integriert zwischen den Grenzen $\alpha = 0$

bis $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so wird s zur halben Kurvenlänge. Die Integrale von $\cos^2\alpha\, d\alpha$, $\cos^4\alpha\, d\alpha$, .. können nach Formel (6) des § 347 ausgeführt werden. Man erhält der Reihe nach folgende bestimmte Integrale

$$\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4};\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6};\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8};\ \ldots$$

daher als Wert der ganzen Kurvenlänge

$$s = \pi\, a\left(1 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{64} + \tfrac{5}{256} - \tfrac{175}{16384} + \tfrac{441}{65536} + \ldots\right)$$

$$s = 1{,}218\,\pi \cdot a.$$

b) Mittels Konstruktion. Man denke sich den Bogen α als Abscisse abgetragen; ebenso $\sqrt{1 + \cos^2\alpha}$ als Ordinate. Lässt man nun α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so beschreibt die Ordinate eine Fläche, deren Inhalt das Integral von $d\alpha\sqrt{1 + \cos^2\alpha}$ ist. Diese Fläche hat zur Länge $\frac{\pi}{2}\cdot a$; ist h ihre mittlere Höhe, so ist das Integral (4) für die angegebene Ausdehnung

$$(6)\qquad s = \frac{\pi}{2}\, a\, h.$$

Allein die Krümmung der Kurve, die die Fläche begrenzt, ist unerheblich. Man überzeugt sich davon, wenn man eine Anzahl Ordinaten aufzeichnet und ihre Endpunkte stetig verbindet. Verbindet man die Endpunkte der Endordinaten durch eine Gerade, so entsteht ein Trapez, dessen Inhalt etwas zu klein ist; zieht man aber zu jener Verbindungslinie die Parallele durch die mittlere Ordinate, so wird die Fläche des Trapezes etwas zu gross. Das Mittel zwischen beiden Trapezflächen kann als ein sehr angenäherter Wert der Fläche angesehen werden.

Nun sind die Endordinaten 1 und $\sqrt{2} = 1{,}414\,2$; ihr Mittel daher 1,207 1 und nach (6) die Trapezfläche $= \frac{\pi}{2}\cdot 1{,}207\,1\, a$.

Die mittlere Ordinate, also die für $\frac{\pi}{4}$, ist $= \sqrt{1{,}5} = 1{,}224\,7$; daher nach (6) die Trapezfläche $= \frac{\pi}{2}\cdot 1{,}224\,7\, a$.

Nimmt man nun das Mittel aus beiden Werten und multipliziert mit 2, so erhält man als angenäherten Wert der Kurvenlänge

$$s = 1{,}216\,\pi \cdot a.$$

Würde sich die Durchschnittslinie auf die Ebene xy als gerade Linie projizieren, so wäre die Kurve ein ebener Schnitt durch die Cylinderfläche, also eine Ellipse und zwar mit den Achsen a und $a\sqrt{2}$ und, nach § 353, mit einer Länge $= 1{,}216\,\pi \cdot a$. Daher ist die wirkliche Schnittlinie nur um sehr wenig länger als diese Ellipse.

IV. Volumen der Körper.

355. Volumen eines Körpers in rechtwinkeligen Koordinaten. Die Gleichung der Oberfläche, die den Körper begrenzt, sei

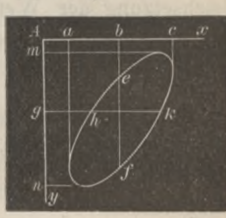
$$(1) \qquad z = f(x, y).$$

Man denke eine Cylinderfläche konstruiert, deren Seitenlinien sämtlich den Körper berühren und parallel der zAchse sind, also senkrecht auf der xyEbene stehen; diese Cylinderfläche schneide die Ebene xy längs einer Kurve ehfk (Fig. 121). Die Fläche, die diese Kurve einschliesst, kann als die Projektion des Körpers auf die Ebene xy angesehen werden. Zieht man von a und c aus Tangenten an diese Kurve, parallel zur yAchse, und ebenso von m und n Tangenten an dieselbe, parallel zur xAchse, so wird die Kurve von diesen vier Geraden eingeschlossen.

I. Man lege einen ebenen Schnitt durch den Körper parallel zur Ebene yz im Abstand $Ab = x$ vom Anfangspunkte aus. Diese Schnittebene schneide die Projektion längs der Geraden ef. Die Fläche dieses Schnittes sei X. Lässt man x um dx zunehmen, d. h. rückt X um dx parallel zu sich selbst fort, so beschreibt X das Volumenelement $X\,dx$. Dieses Volumenelement ist ein unendlich Kleines der ersten Ordnung. Lässt sich X in x allein ausdrücken, so hat man nur das Differential $X\,dx$ zu integrieren, um den Inhalt des ganzen Körpers zu erhalten. Die Grenzen von x sind hierbei die Werte Aa und Ac.

Man lege einen ebenen Schnitt durch den Körper, parallel zur Ebene xz, im Abstande $y = Ag$ vom Anfangspunkte aus. Diese Schnittebene schneide die Projektion längs der Geraden hk. Der Wert dieses Schnittes sei Y. Lässt man y um dy zunehmen, d. h. schiebt man Y um dy, parallel zu sich selbst, fort, so beschreibt Y das Volumenelement $Y\,dy$. Lässt sich Y durch die Variable y allein ausdrücken, so integriere man $Y\,dy$ und nehme das Integral zwischen den Grenzen Am und An und erhält so den Inhalt des ganzen Körpers.

Fig. 121.



II. Legt man Schnittebenen durch den ganzen Körper senkrecht zur xAchse, in den Abständen dx von einander, sodann Schnittebenen, senkrecht zur yAchse, die je um dy von einander abstehen; so teilen diese zwei Systeme von Schnittebenen den Körper in Prismen mit den Grundflächen $dx\,dy$ (diese Grundflächen parallel zur Ebene xy gedacht) und mit Höhen, die den verschiedenen Werten von z entsprechen, die sich aus der Gleichung (1) ergeben. Deshalb ist der Inhalt eines solchen Körperelementes $= z\,dx\,dy$ oder auch $= f(x, y)\,dx\,dy$. Dieses Körperelement ist ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung. Um daraus das unendlich Kleine $X\,dx$ der ersten Ordnung zu erhalten, denke man sich im Ausdrucke $f(x,y)\,dx\,dy$ die Grösse x konstant und integriere in Hinsicht y. Man erhält

$$(2) \qquad X\,dx = dx \int f(x,y)\,dy.$$

Hierin ist y zu nehmen von be bis bf, wenn $x = Ab$ ist.

Um den ganzen Körperinhalt zu erhalten, muss (2) integriert werden in Hinsicht x. Man erhält in Zeichen ausgedrückt

$$(3) \qquad \int X\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy.$$

Die Grenzen von x sind Aa und Ac.

Um aus dem Differentiale $f(x,y)\,dx\,dy$ der zweiten Ordnung das Differential $Y\,dy$ der ersten Ordnung abzuleiten, nehme man y als konstant an und integriere $f(x,y)\,dx\,dy$ in Hinsicht x. Man erhält

$$(4) \qquad Y\,dy = dy \int f(x,y)\,dx.$$

Hierbei ist x zu nehmen von $x = gh$ bis $x = gk$, wenn $Ag = y$ ist.

Um den ganzen Körperinhalt zu bestimmen, integriere man (4) in Hinsicht y zwischen den Grenzen $y = Am$ und $y = An$. Man erhält

$$(5) \qquad \int Y\,dy = \int dy \int f(x,y)\,dx.$$

Beide Integrale (3) und (5) geben den Inhalt des ganzen Körpers für die bezeichneten Grenzen. Die Reihenfolge der Integrationen, die an $f(x,y)\,dx\,dy$ auszuführen sind, ist dabei verwechselt. Schreibt man abgekürzt a und c für Aa und Ac; ebenso m und n für Am und An; h und k für gh und gk; e und f für be und bf, so wird man durch Gleichsetzung der Werte aus (3) und (5) erhalten

$$(6) \qquad \int_a^c dx \int_e^f f(x,y)\,dy = \int_m^n dy \int_h^k f(x,y)\,dx.$$

Setzt man bei den Integralen (3) und (5) die richtigen Grenzen stillschweigend voraus, so schreibt man auch statt dieser Integrale allgemein

$$(7) \qquad \iint f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ist die Projektion des Körpers in der Ebene xy ein Rechteck, dessen Ausdehnung längs der x Achse von a bis c und längs der y Achse von m bis n reicht, so verwandelt sich die vorstehende Formel (6) in

$$(8) \qquad \int_a^c dx \int_m^n f(x,y)\,dy = \int_m^n dy \int_a^c f(x,y)\,dx.$$

Sind somit die Grenzen der Variabeln x und y von einander unabhängig, so ist die Reihenfolge der beiden Integrationen, die am Differentiale $f(x,y)\,dx\,dy$ auszuführen sind, ohne Einfluss auf das Endresultat.

Die vorstehenden Integrale (6), (7), (8) nennt man zweifache oder doppelte Integrale.

III. Legt man durch den Körper Ebenen, senkrecht zur z Achse, die je um d z von einander abstehen, so liegen zwischen den drei Systemen von Schnittebenen rechtwinkelige Prismen, deren Seiten d x, d y und d z sind. Das Volumen eines solchen Körperelementes ist $= dx\,dy\,dz$. Dieser Ausdruck ist ein unendlich Kleines der dritten Ordnung. Zur Herstellung des ganzen Körperinhaltes sind somit in diesem Falle drei Integrationen auszuführen. Die allgemeine Andeutung dieses Inhaltes ist

$$\int dx \int dy \int dz = \int dy \int dz \int dx, \ldots$$

wofür man auch schreibt

$$(9) \qquad \int\int\int dx\,dy\,dz.$$

Hierbei sind die Grenzen der Variabeln ähnlich zu wählen wie in den Formeln (3), (5) oder (6), so dass schliesslich alle Körperelemente $dx\,dy\,dz$, die den ganzen Körper zusammensetzen, durch diese Integrationen summiert werden. In jedem gegebenen Falle hat man sich bei jeder der drei Integrationen Rechenschaft abzulegen von der geometrischen Bedeutung des Integrals und somit auch von den Grenzen der Veränderlichen. Geschieht dies, so erhält man dasselbe Endresultat, in welcher Reihenfolge die Integrationen von (9) vorgenommen werden. Diese letztern Integrale werden dreifache genannt.

Sind die Grenzen der drei Variabeln von einander unabhängig, so gilt für das dreifache Integral (9), was in diesem Falle von dem zweifachen Integral (8) gezeigt wurde.

356. Volumen einer Kugel. Die Gleichung der Kugelfläche ist, wenn ihr Mittelpunkt in den Anfangspunkt der Achsen fällt und der Radius mit a bezeichnet wird,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Folglich wird der Inhalt eines prismatischen Körperelementes mit der Grundfläche $dx\,dy$ und der Höhe z gleich sein

$$z\,dx\,dy = dx\,dy \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Betrachtet man hierin x als konstant und integriert diese Grösse in Hinsicht y, so erhält man ein scheibenförmiges Körperelement von der Dicke d x und der Grundfläche X. Man kann daher schreiben

$$X\,dx = dx \int dy \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Allein die Schnittfläche X durch den Körper, senkrecht auf die x Achse, im Abstande x von der Ebene y z, ist ein Kreis vom Inhalte $\pi(z^2 + y^2)$. Also ist

$$X = \pi(y^2 + z^2) = \pi(a^2 - x^2).$$

Vermöge dieses Wertes von X ist das Doppelintegral $\int\int z\,d\,x\,d\,y$ auf das einfache $\int X\,d\,x$ zurückgeführt. Das Volumen der Kugel ist hiernach

$$\int_{-a}^{+a} X\,d\,x = \pi \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\,d\,x = \frac{4}{3}\pi\,a^3.$$

357. Volumen eines Ellipsoides mit drei verschiedenen Achsen. Die Gleichung der Oberfläche dieses Körpers für den Mittelpunkt als Anfangspunkt ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

worin a, b, c die drei Halbachsen bezeichnen.

Ein Schnitt durch das Ellipsoid, senkrecht zur x Achse und im Abstande x vom Anfangspunkte, gibt eine Ellipse, deren Gleichung ist

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

In dieser Gleichung muss man x konstant denken; es wird für $z = 0$ die Grösse

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

zu der Halbachse dieser Ellipse, die parallel zur y Achse ist; ebenso ist

$$c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

die Halbachse dieser Ellipse, die parallel zur z Achse liegt.

Die Fläche einer Ellipse ist aber $= \pi\,A\,B$, worin A und B die halben Achsen bezeichnen. Daher ist die Fläche jenes Schnittes, senkrecht zur x Achse, gleich

$$X = \pi\,b\,c\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

und somit das Volumen des Ellipsoides für unbestimmte Grenzen

$$\int X\,d\,x = \pi\,b\,c\int\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)d\,x = \pi\,b\,c\left(x - \frac{x^3}{3\,a^2}\right) + C.$$

Folglich das Volumen des ganzen Ellipsoides

$$\int_{-a}^{+a} X\,d\,x = \frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c.$$

Hiernach ist das Volumen eines Ellipsoides $\frac{2}{3}$ vom Volumen des umschriebenen geraden Cylinders, dessen Seitenlinien parallel zu einer der Achsen liegen.

358. Volumen eines schief abgeschnittenen Cylinders. Der Halbmesser des Cylinders sei $= R$; fällt die Cylinderachse mit der z Achse zusammen, so wird die Gleichung des Durchschnittes mit der Ebene xy sein

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

Die Gleichung der Ebene, die den Cylinder schneidet, sei

$$(2) \qquad z = ax + by + c.$$

Es soll das Volumen des Cylinders bestimmt werden, der zwischen dieser Ebene und der Ebene xy liegt.

Das prismatische Volumenelement, dessen Grundfläche $dx\,dy$ auf der Ebene xy liegt, ist $= z\,dx\,dy$. Führt man hierin den Wert von z aus (2), so erhält man als Ausdruck des Volumenelementes

$$(ax + by + c)\,dx\,dy.$$

Das unbestimmte Integral dieser Formel in Hinsicht y ist gleich

$$(3) \qquad \left(axy + \frac{by^2}{2} + cy\right)dx + C,$$

worin C die Konstante der Integration bezeichnet. Die Grenzen von y sind vermöge (1)

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2} \text{ und } y = +\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Für diese Grenzen erhält man aus (3)

$$(4) \qquad 2(ax + c)\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Dies ist das Volumen eines Teiles des Cylinders, der zwischen zwei Ebenen liegt, die parallel zur Ebene yz laufen und von ihr um x und $x + dx$ abstehen. Das unbestimmte Integral von (4) ist nach § 90

$$-\frac{2a}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + c\left[x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin\frac{x}{R}\right] + C.$$

Um den Inhalt des ganzen Cylinders zu erhalten, muss man hier x von $-R$ bis $+R$ nehmen. Mithin wird der Inhalt des ganzen Cylinders gleich

$$\pi R^2 c.$$

Nun ist πR^2 die Grundfläche dieses Cylinders in der Ebene xy; somit ist c, d. h. das Stück, das die Ebene (2) auf der z Achse vom Anfangspunkte aus abschneidet, seine mittlere Höhe.

359. Volumen eines Körpers in Polarkoordinaten. Man nehme den Anfangspunkt der drei rechtwinkeligen Achsen x, y, z als Pol an. Es sei r der Radiusvektor eines Punktes, also der Abstand dieses Punktes vom Pole, φ der Winkel, den die Ebene durch r und die z Achse mit der Koordinatenebene xz bildet und Θ der Winkel, den r mit der Ebene xy einschliesst.

Denkt man sich vom Pole aus mit dem Radius r eine Kugelfläche beschrieben, so kann man, gemäss der Bezeichnung eines Punktes oder Ortes auf der Erdoberfläche, die Grösse φ die Länge und Θ die Breite des fraglichen Punktes auf der Kugelfläche nennen. In diesem Sinne wird die Ebene xy zur Aequatorebene, die z-Achse zur Drehachse und $r \cos \Theta$ zum Halbmesser des Parallelkreises, der durch den Punkt geht. Die Bogenelemente $r\,d\,\Theta$ auf dem Meridiane und $r \cos \Theta\, d\,\varphi$ auf dem Parallelkreise können als Seiten eines rechtwinkeligen Flächenelementes angesehen werden, dessen Inhalt $= r^2 \cos \Theta\, d\,\Theta\, d\,\varphi$. Dieses Flächenelement kann als Grundfläche einer Pyramide betrachtet werden, deren Spitze im Pole liegt. Beschreibt man mit dem Radius $r + d\,r$ eine zweite Kugelfläche, so kann der Teil dieser verlängerten Pyramide, der zwischen diesen beiden Kugelflächen liegt, als ein Prisma angenommen werden, dessen Grundfläche $r^2 \cos \Theta\, d\,\Theta\, d\,\varphi$ und dessen Höhe $d\,r$ ist. Das Volumen dieses Körperelementes ist daher gleich

$$r^2\, d\,r \cos \Theta\, d\,\Theta\, d\,\varphi.$$

Dieser Ausdruck muss in Hinsicht der drei Variabeln r, Θ, φ zwischen den Grenzen integriert werden, die sich aus der Form des zu suchenden Volumens ergeben. Macht man sich von Integration zu Integration eine Vorstellung von der geometrischen Bedeutung der Resultate, so findet man jene Grenzen leicht. In diesem Sinne ist die Reihenfolge der Integrationen ohne Einfluss auf das Endresultat.

360. Inhalt einer Kugel. Nimmt man im vorstehenden Ausdrucke des Volumenelementes zuerst das Integral nach φ zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, so erhält man dadurch einen Körperring längs des Parallelkreises vom Inhalte

$$2\pi\, r^2\, d\,r \cos \Theta\, d\,\Theta.$$

Das unbestimmte Integral hiervon in Hinsicht Θ ist

$$2\pi\, r^2\, d\,r \sin \Theta + C.$$

Nimmt man hierin Θ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, d. h. vom Süd- bis zum Nordpole, so erhält man den Inhalt einer Kugelschale von der Dicke $d\,r$ gleich

$$2\pi\, r^2\, d\,r\,(1 + 1) = 4\pi\, r^2\, d\,r.$$

Mithin wird der Inhalt einer hohlen Kugel mit den Radien r_0 und r sein

$$4\pi \int_{r_0}^{r} r^2\, d\,r = \frac{4}{3}\pi\,(r^3 - r_0{}^3).$$

Wird die zweite Integration zwischen den Grenzen Θ und $\frac{\pi}{2}$ ausgeführt, unter Beibehaltung des angegebenen Ganges, so erhält man als Inhalt eines Ausschnittes dieser Hohlkugel

$$\tfrac{2}{3}\pi\,(r^3 - r_0{}^3)(1 - \sin \Theta).$$

V. Inhalt krummer Oberflächen.

361. Ausdruck für das Flächenelement und die Fläche. Die Gleichung der Oberfläche sei

$$(1) \qquad z = f(x, y).$$

Man lege durch diese Oberfläche zwei Ebenen, parallel zur Ebene y z, in den Abständen x und x + d x vom Anfangspunkte der Achsen, ebenso zwei Ebenen, parallel zur Ebene x z, in den Abständen y und y + d y vom Anfangspunkte aus. Diese vier Ebenen schliessen ein Element der gegebenen Oberfläche ein, das als eben angesehen werden kann und das mit d F bezeichnet werde. Die Projektion von d F auf die Ebene x y ist das Rechteck d x d y. Bildet dieses Flächenelement mit der Ebene x y den Winkel α, so wird sein

$$(2) \qquad dF = \frac{dx\,dy}{\cos\alpha}.$$

Hierin ist $\cos\alpha$ durch die Koordinaten der Fläche (1) auszudrücken. Legt man zu diesem Zwecke durch das Flächenelement d F eine Ebene, so wird diese Ebene die krumme Oberfläche im Punkte (x, y, z) berühren und den Winkel α mit der Ebene x y bilden. Die Gleichung dieser Berührungsebene sei (vergleiche die Aufgabe in § 324)

$$(3) \qquad z = ax + by + c.$$

Irgend ein Lot auf diese Berührungsebene bildet mit der z Achse ebenfalls den Winkel α. Statt eines beliebigen Lotes nehme man dasjenige, das durch den Anfangspunkt der Achsen geht; die Gleichungen dieses Lotes sind nach den Formeln (4) und (5) des § 324

$$(4) \qquad x + az = 0; \quad y + bz = 0.$$

Allein die partiellen Differentialverhältnisse der Gleichung der Ebene (3) sind

$$(5) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b.$$

Im Berührungspunkte sind die Koordinaten x, y, z der krummen Oberfläche und der Berührungsebene dieselben. Man kann daher die Vorzahlen a und b, die in der Gleichung (3) der Berührungsebene und in den Gleichungen (4) des Lotes vorkommen, ableiten, wenn man die partiellen Differentialverhältnisse $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ der Gleichung (1) der krummen Oberfläche bildet.

Nun nenne man p die Länge des Lotes vom Anfangspunkte aus und x, y, z die Koordinaten seines Fusspunktes auf der Berührungsebene; dann wird sein

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$(6) \qquad \cos\alpha = \frac{z}{p} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Führt man die Werte von x und y aus (4) in (6) ein, so findet man

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

oder mit Rücksicht auf (5)

$$(6)\qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Setzt man diesen Wert von $\cos\alpha$ in (2) ein, so folgt als Wert des Flächenelementes

$$(8)\qquad dF = dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Wird hierin $\frac{\partial z}{\partial x} = a = 0$, so geht die Gleichung (3) über in $z = by + c$. Dies ist die Gleichung einer Ebene, die parallel zur x Achse liegt. Mithin wird d F zum Elemente einer cylindrischen Fläche, deren Seitenlinien parallel zur x Achse liegen.

Wird $\frac{\partial z}{\partial y} = b = 0$, so wird d F zum Elemente einer cylindrischen Fläche, deren Seitenlinien parallel zur y Achse laufen.

Sind $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ zugleich $= 0$, so verwandelt sich die Formel (8) in

$$dF = dx\,dy$$

als Ausdruck des Elementes einer Fläche, die in der Ebene x y liegt oder mit ihr parallel ist.

Die Gleichung (1) kann dazu benutzt werden, um z aus (8) zu eliminieren. Es kommen dann in diesem Differentiale nur die unabhängig Variabeln x und y vor.

Um das Integral zu erhalten, sind zwei Integrationen nötig: eine nach x und eine nach y. Der Vorgang dabei ist folgender.

Die beiden Ebenen, die in den Abständen x und $x + dx$ vom Anfangspunkte senkrecht zur x Achse gelegt sind, schliessen unendlich viele Flächenelemente wie d F ein. Sie haben, der x Achse nach gemessen, die Breite d x und dehnen sich über die Oberfläche aus, soweit dies die Grenzen von y zulassen. Integriert man daher in Hinsicht y, so erhält man den Teil der Oberfläche, der zwischen den genannten zwei Ebenen eingeschlossen ist. Die Andeutung für diese Ausdehnung ist

$$(9)\qquad dx\int dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Lässt man nun x sich ändern zwischen zwei Grenzen, so reihen sich unendlich viele Flächenelemente an einander, deren Ausdruck (9) ist, und bilden die gesuchte Fläche. Diesem Vorgange entspricht die Integration der Grösse (9) in Hinsicht x. Man erhält dann für unbestimmte Grenzen der Variabeln

$$(10)\qquad F = \int dx\int dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Man kann auch zuerst die Integration in Hinsicht x ausführen. Man erhält dann eine Fläche, die zwischen zwei Ebenen eingeschlossen ist, die senkrecht zur y Achse stehen und zwar in den Abständen y und $y + dy$. Der Ausdruck dafür ist

$$dy \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Solcher Flächenstreifen reihen sich längs der y Achse unendlich viele an einander. Es muss daher der letzte Ausdruck in Hinsicht y integriert werden, was man andeutet durch

$$(11) \qquad F = \int dy \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Werte (10) und (11) sind für dieselben Grenzen von x und ebenso für y gleich gross. Die Reihenfolge der Integrationen ist mithin gleichgültig. Man kann daher auch schreiben

$$F = \iint dx\,dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

362. Teil einer Ebene. Die Gleichung einer Ebene ist

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Für diese wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C}.$$

Daher das Flächenelement

$$(2) \qquad dF = dx\,dy \sqrt{1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2}.$$

Man denke sich hierin y, beziehungsweise dy konstant, integriere also nur in Hinsicht x und zwar zwischen den Grenzen x_0 und x_1; man erhält

$$(x_1 - x_0) \sqrt{1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2}.dy$$

als Wert einer Fläche, deren Projektion auf die Ebene xy die Grösse $x_1 - x_0$ zur Länge und dy zur Breite hat. Integriert man nun noch in Hinsicht y zwischen den Grenzen y_0 und y_1, so wird die gesuchte Fläche

$$(3) \qquad F = (x_1 - x_0)(y_1 - y_0) \sqrt{1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2}.$$

Diese Fläche ist von zwei Paar parallelen Ebenen eingeschlossen. Zwei dieser Ebenen stehen senkrecht zur x Achse in den Abständen x_0 und x_1 vom Anfangspunkte und die beiden andern senkrecht zur y Achse in den Abständen y_0 und y_1 vom Anfangspunkte.

363. Oberfläche der Kugel. Aus der Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{1}$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}. \tag{2}$$

Hierfür wird das Element der Kugelfläche

$$d F = d x\, d y \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}},$$

oder indem man auf gleiche Benennung bringt und Gleichung (1) berücksichtigt,

$$d F = \frac{R\, d x\, d y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}. \tag{3}$$

Um dieses Differential (3) in Hinsicht y zu integrieren, nimmt man x als konstant an. Man erhält

$$R\, d x \int \frac{d y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R\, d x \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} + C. \tag{4}$$

Dieses Integral stellt ein Flächenelement dar, das über der Ebene xy liegt und von zwei Schnittebenen eingeschlossen wird, die senkrecht zur x Achse liegen und um x und $x + dx$ vom Anfangspunkte abstehen. Dieses Element hat die Form eines abgekürzten Kegelmantels, dessen Seitenlinien unendlich klein sind. Bei konstantem x werden die Grenzen für y aus (1) erhalten, wenn man $z = 0$ setzt. Dies gibt $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$. Nimmt man das Integral (4) zwischen den Grenzen $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ und $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, so erhält man als Wert des ganzen Flächenelementes über der Ebene xy

$$\pi R\, d x. \tag{5}$$

Mithin wird die Kugelfläche über der Ebene xy

$$F = \pi R \int_{-R}^{+R} d x = 2 \pi R^2. \tag{6}$$

Würde man das Differential (3) zuerst in Hinsicht x integrieren, so wäre y konstant zu nehmen. Man erhielte zunächst ein Flächenelement über der Ebene xy, das zwischen zwei Ebenen liegt, die senkrecht sind zur y Achse und um dy aus einander stehen. Die Grenzen von x würden aus (1) erhalten, wenn man $z = 0$ setzt. Diese Grenzen wären also $x = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$.

Bemerkung. Die Gleichung einer Ebene sei

$$z' = a x' + b y' + c.$$

Damit diese Ebene die Kugel (1) im Punkte (x, y, z) berührt, muss sein

$$z = a x + b y + c.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt

$$z - z' = a (x - x') + b (y - y').$$

Führt man hierin obige Werte von $a = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $b = \frac{\partial z}{\partial y}$, wie sie aus der Gleichung (1) der Oberfläche hervorgehen, ein, so kommt

$$z - z' = -\frac{x}{z}(x - x') - \frac{y}{z}(y - y')$$

oder indem man mit z multipliziert und die Gleichung (1) berücksichtigt,

$$(7) \qquad x x' + y y' + z z' = R^2.$$

Dies ist somit die Gleichung der Ebene, die die Kugel im Punkte (x, y, z) berührt.

364. Cylinderfläche in einer Kugelfläche. Ein gerader Kreiscylinder gehe durch eine Kugel. Man soll den Teil der Cylinderfläche bestimmen, der innerhalb der Kugelfläche liegt, unter der Voraussetzung, dass der Mittelpunkt M der Kugel (Fig. 122) auf der Cylinderfläche liege, und dass der Durchmesser M A des Cylinders gleich dem Halbmesser a der Kugel sei.

Gelten die Bezeichnungen von § 354, so hat man als Gleichung der Kugel

$$(1) \qquad a^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Kurve, längs der sich die Cylinder- und Kugelfläche schneiden, gibt auf der Ebene x z eine Projektion, deren Gleichung ist

$$(2) \qquad z^2 = a x - x^2,$$

und eine Projektion auf der Ebene x y, deren Gleichung ist (§ 354)

$$(3) \qquad y^2 = a^2 - a x.$$

Für die Cylinderfläche ist $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, weil die Seitenlinien derselben parallel zur y Achse sind (S. 418). Es folgt dies auch aus Gleichung (2). Dagegen erhält man aus (2)

Fig. 122.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a - 2x}{2z} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{a x - x^2}}.$$

Mithin wird das Element der Cylinderfläche

$$d x\, d y \sqrt{1 + \frac{(a - 2x)^2}{4(a x - x^2)}} = \frac{a\, d x\, d y}{2\sqrt{a x - x^2}}.$$

Das unbestimmte Integral dieses Differentials in Hinsicht y ist

$$(4) \qquad \frac{a\, d x}{2\sqrt{a x - x^2}} \cdot y + C.$$

Zwei Ebenen, die senkrecht zur x Achse stehen und den Abstand d x von einander haben, schliessen zwei gleiche Flächenelemente des Cylinders ein. Das eine derselben liegt über, das andere unter der Ebene x y. Das Integral (4) stellt das eine dieser Elemente dar, das über der Ebene x y liegt. Um dieses Element in der Richtung der y Achse durch die Kugelfläche abzugrenzen, muss das Integral (4) genommen werden zwischen den Grenzen

$$-\sqrt{a^2 - a\,x} \text{ und } +\sqrt{a^2 - a\,x},$$

wie sie sich aus (3) ergeben. Für diese Grenzen wird (4) zu

$$(5) \qquad \frac{a\sqrt{a^2 - a\,x}}{\sqrt{a\,x - x^2}}\,d\,x = a\sqrt{a}\,\frac{d\,x}{\sqrt{x}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,$$

folglich das Integral (5) zwischen den Grenzen 0 und a

$$(6) \qquad a\sqrt{a}\int_0^a \frac{d\,x}{\sqrt{x}} = 2\,a^2.$$

Dieser Wert ist die Cylinderfläche über der Ebene x y. Somit ist die ganze Cylinderfläche, die von der Kugelfläche eingeschlossen wird, $= 4\,a^2$.

365. Kegelfläche. Es sei h die Höhe, a der Radius der Grundfläche und k die Seitenlinien eines senkrechten Kreiskegels.

Man nehme die z-Achse in der Achse des Kegels und die x- und y-Achsen in der Grundfläche desselben an. Ein Punkt auf der Seitenlinie k habe zu Koordinaten x, y, z. Denkt man sich nun das rechtwinkelige Dreieck, dessen Hypotenuse k und dessen Katheten a und h sind, und zieht vom Punkte (x, y, z), der in der Hypotenuse liegt, die Parallele zur Kathete a bis zur Achse, so ist die Länge dieser Parallelen $= \sqrt{x^2 + y^2}$ und der obere Abschnitt der Kathete h gleich $h - z$. Daher erhält man die Proportion

$$h : a = (h - z) : \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Hieraus ergibt sich folgende Gleichung der Kegelfläche

$$(1) \qquad z = h - \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die partiellen Differentialverhältnisse von (1) sind

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{h}{a}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{h}{a}\,\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mithin wird das Element der Kegelfläche

$$d\,x\,d\,y\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}\,\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{h^2}{a^2}\,\frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \frac{k}{a}\,d\,x\,d\,y.$$

Das Integral dieses Ausdruckes in Hinsicht y ist

$$(2) \qquad \frac{k}{a}\,d\,x \cdot y + C.$$

Dieses Integral stellt ein Flächenelement dar, das zwischen zwei Ebenen liegt, die senkrecht zur x-Achse stehen und um x und x + dx vom Anfangspunkte der Achsen entfernt sind.

Die erstere dieser beiden Ebenen schneidet die Grundfläche längs einer Sehne, die parallel zur y-Achse liegt und eine Länge $= 2\sqrt{a^2 - x^2}$ hat. Die Grenzen von y im Integral (2) sind daher $-\sqrt{a^2 - x^2}$ und $+\sqrt{a^2 - x^2}$. Diese Grenzen ergeben sich auch aus Formel (1), wenn man in ihr $z = 0$ setzt. Für diese Grenzen erhält man daher aus (2)

$$\frac{2k}{a} dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Mithin wird ein Teil des Kegelmantels der zwischen zwei Ebenen liegt, die parallel zur Ebene yz sind und einen beliebigen Abstand von einander haben, gleich

$$\frac{2k}{a}\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{k}{a}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right] + C.$$

Wird dieses Integral von $x = 0$ bis $x = a$ genommen, so erhält man den Inhalt des halben Kegelmantels $= \frac{1}{2}\pi a k$. Also ist der Inhalt des ganzen Kegelmantels $= \pi a k$.

366. Das Flächenelement und der Inhalt einer Fläche in Polarkoordinaten. Führt man das bereits in § 359 gebrauchte Polarkoordinatensystem ein, so lautet die Gleichung einer Oberfläche in diesen Koordinaten

$$(1) \qquad r = f(\varphi, \theta),$$

während die rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z eines Punktes mit diesen Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \cos\theta \\ z = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

verbunden sind. Nimmt man auf der Oberfläche einen Punkt an, dem die Koordinaten r, φ und θ zugehören, und lässt φ und θ sich um die Differentiale $d\varphi$ und $d\theta$ ändern, so wird der Endpunkt des Radiusvektor auf der Oberfläche ein kleines Flächenstück beschreiben, das als auf der Tangentialebene liegend angesehen werden kann. Die Projektion dieses Flächenstückes auf die Ebene xy wird begrenzt durch die durch die Aenderung $d\theta$ hervorgebrachte Aenderung von $r\cos\theta$, also durch $d(r\cos\theta)$, wobei φ ungeändert bleibt, und durch das durch die Aenderung von $d\varphi$ in der Ebene xy beschriebene Bogenelement $r \cdot \cos\theta\, d\varphi$; beide können als die Seiten eines rechtwinkeligen Flächenelementes angesehen werden, dessen Inhalt also ist

$$d(r\cos\theta) \cdot r \cdot \cos\theta\, d\varphi.$$

Aber bei ungeändertem φ ist

$$d(r\cos\theta) = \left(\frac{\partial r}{\partial\theta} \cdot \cos\theta - r \cdot \sin\theta\right) d\theta,$$

also das Flächenelement in der Ebene xy

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\cos\Theta - r\sin\Theta\right)d\Theta \cdot r\cos\Theta\, d\varphi.$$

Das Element dF der durch (1) dargestellten Fläche ist alsdann

$$(3)\qquad dF = \left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\cos\Theta - r\sin\Theta\right) r\cos\Theta\, d\Theta\, d\varphi \cdot \frac{1}{\cos\alpha},$$

wenn α den Winkel bezeichnet, den die Tangentialebene im Punkte (r, φ, Θ) mit der Ebene xy bildet. Für $\frac{1}{\cos\alpha}$ ist aber in rechtwinkeligen Koordinaten gefunden worden

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

welcher Ausdruck nunmehr in Polarkoordinaten zu entwickeln ist.

Aus den Gleichungen (2) folgen

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)\cos\Theta; \quad \frac{\partial x}{\partial \Theta} = \left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\cos\Theta - r\sin\Theta\right)\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\Theta; \quad \frac{\partial y}{\partial \Theta} = \left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\cos\Theta - r\sin\Theta\right)\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\Theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial \Theta} = \frac{\partial r}{\partial \Theta}\sin\Theta + r\cos\Theta.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \Theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \Theta},$$

so dass man erhält

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\Theta = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)\cos\Theta + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\Theta,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \Theta}\sin\Theta + r\cos\Theta = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\cos\Theta - r\sin\Theta\right)\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\cos\Theta - r\sin\Theta\right)\sin\varphi;$$

aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\sin\Theta + r\cos\Theta\right)\cos\varphi\cos\Theta}{\left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\cos\Theta - r\sin\Theta\right)\cos\Theta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\sin\Theta + r\cos\Theta\right)\sin\varphi\cos\Theta}{\left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\cos\Theta - r\sin\Theta\right)\cos\Theta}.$$

Nunmehr ergibt sich nach einigen leichten Reduktionen

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\right)^2+r^2\right]\cos^2\Theta}{\left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\cos\Theta-r\sin\Theta\right)^2\cos^2\Theta},$$

so dass die Formel (3) für das Flächenelement lautet

$$(4)\qquad dF=r\,d\varphi\,d\Theta\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \Theta}\right)^2+r^2\right]\cos^2\Theta}.$$

Hierin sind nun aus der Gleichung (1) die Grössen r, $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial r}{\partial \Theta}$ als Funktionen von φ und Θ auszudrücken.

Zur Berechnung eines Stückes der Oberfläche muss (4) nach den Variabeln φ und Θ integriert werden, wobei die Grenzen gemäss den Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen sind.

367. Die Oberfläche der Kugel. Besonders einfach gestaltet sich Formel (4) des § 366 für das Flächenelement, wenn r konstant ist, also für ein Element der Kugeloberfläche. Setzt man $r = a$, also $\frac{\partial r}{\partial \varphi}=0$, $\frac{\partial r}{\partial \Theta}=0$, so erhält man für das Flächenelement

$$(1)\qquad dF = a^2\cos\Theta\,d\varphi\,d\Theta.$$

Integriert man zunächst nach φ, so hat man die Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ zu nehmen und erhält

$$(2)\qquad 2\pi a^2\cos\Theta\,d\Theta$$

für die Fläche einer in der geographischen Breite Θ gelegenen Kugelzone von der Breite $d\Theta$. Die Oberfläche der ganzen Kugel erhält man, wenn man (2) nochmals nach Θ zwischen den Grenzen $\Theta = -\frac{\pi}{2}$ bis $\Theta = \frac{\pi}{2}$ integriert. Man erhält

$$(3)\qquad F = 4\pi a^2.$$

Integriert man (2) zwischen den Grenzen Θ und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man die Oberfläche einer Kalotte

$$(4)\qquad F_1 = 2\pi a^2(1-\sin\Theta).$$

368. Cylinderfläche in einer Kugelfläche. Eine Kugel, deren Gleichung in rechtwinkeligen Koordinaten

$$(1)\qquad x^2+y^2+z^2=a^2$$

sei, werde durch die Cylinderfläche

$$(2)\qquad x^2+y^2=ax$$

geschnitten. Diese Cylinderfläche geht durch den Mittelpunkt der Kugel und ihr Durchmesser ist gleich dem Radius der Kugel, wie im § 364, nur dass jetzt die Fig. 122 in der Ebene x y liegt.

Es sollen 1. der Teil der Kugeloberfläche, der innerhalb der Cylinderfläche liegt, und 2. der innerhalb der Kugelfläche liegende Teil der Cylinderfläche mit Anwendung von Polarkoordinaten berechnet werden. Durch die Ebenen x y und x z werden beide Flächenstücke in vier kongruente Teile zerlegt, so dass jedesmal nur ein solcher Teil zu berechnen ist.

Für ein Element des ersten Teiles als eines Teiles der Kugeloberfläche ist r konstant, r = a, daher gilt für ein solches Element

(3) $$d F_1 = a^2 \cdot \cos\Theta \, d\varphi \, d\Theta.$$

Setzt man in die Formel (2) für x und y die Werte

$$x = a\cos\varphi\cos\Theta,$$
$$y = a\cos\varphi\sin\Theta$$

ein, so ergibt sich, dass für jeden Punkt der Kurve, in der sich die Kugel- und die Cylinderfläche schneiden,

$$\Theta = \varphi$$

ist. Integriert man also (3) zunächst nach φ, indem man Θ konstant lässt, so sind für φ die Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \Theta$ zu nehmen, so dass diese erste Integration für einen Flächenstreifen parallel der x y Ebene den Wert

$$a^2\,\Theta\cos\Theta\,d\Theta$$

liefert. Die zweite Integration nach Θ ist für $\Theta = 0$ bis $\Theta = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Nach dem Satze der teilweisen Integration (§ 90) findet man leicht das unbestimmte Integral

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C;$$

also erhält man

$$\frac{1}{4}F_1 = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Theta\cos\Theta\,d\Theta = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2,$$

folglich für den ganzen zu berechnenden Teil der Kugelfläche

(4) $$F_1 = 2(\pi - 2)\,a^2.$$

Für einen Punkt der Cylinderfläche folgt aus (2) die Formel

$$r = \frac{a\cos\varphi}{\cos\Theta};$$

hieraus folgt

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} = -\frac{a\sin\varphi}{\cos\Theta}; \quad \frac{\partial r}{\partial\Theta} = \frac{a\cos\varphi\sin\Theta}{\cos^2\Theta}.$$

Durch Einführung dieser Werte in die Formel (4) des § 366 erhält man nach leichten Vereinfachungen

$$(5) \qquad dF_2 = \frac{a^2 \cos \varphi}{\cos^2 \Theta} \, d\varphi \, d\Theta$$

für ein Element der zu berechnenden Cylinderfläche. Die Integration dieser Formel nach φ bei konstantem Θ ist zwischen den Grenzen $\varphi = \Theta$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen, da für jeden Punkt der Schnittkurve beider Flächen $\varphi = \Theta$ ist. Diese erste Integration liefert

$$a^2 \cdot \frac{1 - \sin \Theta}{\cos^2 \Theta} \, d\Theta = a^2 \cdot \frac{d\Theta}{1 + \sin \Theta}.$$

Für die zweite Integration nach Θ beachte man

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)} = - \operatorname{cotang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C.$$

(§ 344. (5)).

Hiernach findet man

$$\frac{1}{4} F_2 = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{1 + \sin \Theta} = a^2 \cdot \operatorname{cotang} \frac{\pi}{4} = a^2,$$

folglich für die gesuchte Fläche

$$(6) \qquad F_2 = 4 a^2,$$

denselben Wert wie in § 364.

Die Addition beider Flächenteile gibt für die gesamte Oberfläche des Körpers, den die Cylinderfläche aus der Kugel ausschneidet, den Wert

$$(7) \qquad F = F_1 + F_2 = 2 \pi a^2;$$

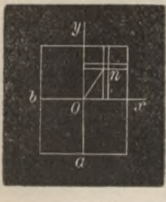
diese Oberfläche ist also gleich der halben Oberfläche der Kugel.

VI. Physikalische Aufgaben über mehrfache Integrale.

369. Torsion eines rechtwinkeligen Prismas. Die Kanten dieses Prismas seien a, b, c. Die Kante c stelle die Länge dar. Dieses Prisma werde an einem Ende seiner Länge festgehalten und am andern verdreht durch ein statisches Moment M, dessen Kraft in einer zur Kante c normalen Ebene liegt. Die Endfläche, in der das Moment M wirkt, sei ab (Fig. 123). Die Faser, die durch die Schwerpunkte aller Querschnitte geht, bleibt während der Torsion geradlinig. Diese Gerade bildet die Drehachse. Alle andern Punkte des Körpers werden um diese Achse herum in der Richtung der Drehung verschoben. Auf die Verschiebungen in der Längenrichtung (§ 218) werde hier keine Rücksicht genommen.

Man lege durch die Mitte O des Querschnittes ab zwei rechtwinkelige Achsen Ox, Oy, parallel zu den Kanten a, b. Es seien x, y die Koordinaten eines Punktes n der Rechtecksfläche. Erhält ein Punkt dieses Querschnittes ab, im Abstande 1 von dem Drehpunkte O, eine Drehung $= \alpha$, so wird die Drehung des Punktes n, im Abstande

Fig. 123.



$\sqrt{x^2 + y^2}$ von der Drehachse, sein $= \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Kraft, die ein Flächenelement $dx\,dy$ in diesem Abstande um die Grösse $\alpha \sqrt{x^2 + y^2}$ verschiebt, ist proportional dieser Fläche, proportional dieser Verschiebung, umgekehrt proportional der Länge des Körpers und abhängig von einer Konstanten T. Folglich ist diese Kraft gleich

$$\frac{T\alpha}{c}\,dx\,dy\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Multipliziert man diese Kraft mit dem Hebelarm On, an dem sie wirkt, so erhält man ihr statisches Moment gleich

$$\frac{T\alpha}{c}\,dx\,dy\,(x^2 + y^2).$$

Wird dieses Differential integriert in Hinsicht x von $-\frac{1}{2}a$ bis $+\frac{1}{2}a$ und das Resultat sodann in Hinsicht y von $-\frac{1}{2}b$ bis $+\frac{1}{2}b$, so erhält man die Summe der statischen Momente aller Kräfte, die die Flächenelemente des ganzen Querschnittes ab verschieben. Da die Grenzen von x und y von einander unabhängig sind, so ist die Reihenfolge, in der die beiden Integrationen ausgeführt werden, ohne Einfluss auf das Ergebnis. In Zeichen ist daher

$$M = \frac{T\alpha}{c}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx\,(x^2 + y^2).$$

Nun ist

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx\,(x^2 + y^2) = \frac{a^3}{12} + a y^2$$

und

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy\left(\frac{a^3}{12} + a y^2\right) = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2).$$

Folglich

$$M = \frac{T}{12}\frac{ab}{c}(a^2 + b^2)\,\alpha.$$

Drückt man α, statt im Bogenmass, in Graden aus, so erhält man

$$M = \frac{T}{12}\frac{ab}{c}(a^2 + b^2)\frac{\pi}{180}\alpha^0.$$

370. Trägheitsmoment einer Kugel. Man lege durch den Mittelpunkt der Kugel die drei rechtwinkeligen Achsen der x, y, z. Die Kugel drehe sich um die z Achse. Ist r der Radiusvektor eines Punktes im Innern der Kugel, φ die Länge und Θ die Breite dieses Punktes, so ist das Volumenelement der Kugel an dieser Stelle (§ 359)

$$r^2\,dr\cos\Theta\,d\Theta\,d\varphi$$

Ist m die Masse der Kubikeinheit des Materials in diesem Punkte, so ist die Masse dieses Volumenelementes

$$m\, r^2\, d\, r \cos \Theta\, d\, \Theta\, d\, \varphi.$$

Der Abstand dieses Elementes von der z Achse als Drehachse ist $= r \cos \Theta$. Multipliziert man das Quadrat dieses Abstandes (§ 184) mit der vorstehenden Masse, so erhält man das Trägheitsmoment des Volumenelementes gleich

$$m\, r^4\, d\, r \cos^3 \Theta\, d\, \Theta\, d\, \varphi,$$

worin m konstant ist, wenn die Kugel homogen ist. Das Integral hiervon in Hinsicht φ zwischen den Grenzen 0 und 2π ist

(1) $$2\pi\, m\, r^4\, d\, r \cos^3 \Theta\, d\, \Theta.$$

Dieser Ausdruck ist das Trägheitsmoment eines unendlich dünnen körperlichen Ringes, längs eines Parallelkreises gelegen, der die nördliche Breite Θ und den Abstand r vom Mittelpunkte hat.

Wird (1) integriert in Hinsicht Θ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, so erhält man das Trägheitsmoment einer unendlich dünnen Kugelschale vom Halbmesser r. Nun ist nach § 88, Formel (13)

$$\int \cos^3 \Theta\, d\, \Theta = \frac{1}{3} \cos^2 \Theta \sin \Theta + \frac{2}{3} \sin \Theta + C,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \Theta\, d\, \Theta = \frac{4}{3}.$$

Folglich ist das Trägheitsmoment dieser Kugelschale gleich

(2) $$\tfrac{8}{3} \pi\, m\, r^4\, d\, r$$

und somit das Trägheitsmoment der ganzen Kugel, wenn R den Halbmesser derselben bezeichnet,

$$\frac{8}{3} \pi\, m \int_0^R r^4\, d\, r = \frac{8}{15} \pi\, m\, R^5.$$

Es sei ferner die Dichtigkeit des Materials eine Funktion von r, so dass man etwa hat

(3) $$m = a \mp b\, r,$$

worin a die Masse der Kubikeinheit im Mittelpunkte und b die Ab- oder Zunahme der Masseneinheit für jede Längeneinheit des Radiusvektor bedeutet. Hiernach ist die Dichtigkeit in einer und derselben Kugelfläche, die ihren Mittelpunkt im Mittelpunkte der Kugel hat, dieselbe.

Setzt man den Wert von m aus (3) in (2) ein und integriert, so erhält man das Trägheitsmoment der Kugel gleich

$$\frac{8}{3} \pi \int_0^R (a \mp b\, r)\, r^4\, d\, r = \frac{8}{15} \pi\, R^5 \left(a \mp \frac{5}{6} b\, R\right).$$

371. Anziehung einer Kugel und eines materiellen Punktes nach dem Gesetze der Gravitation. Die Aufgabe, die in § 227 unter gewissen Beschränkungen gelöst wurde, soll hier allgemein behandelt werden. Es seien

m, m' zwei sich anziehende Massenteilchen in A und B (Fig. 124),
a, r die Abstände dieser Teile vom Mittelpunkte M der Kugel,
u der Abstand AB dieser Teile unter einander,
φ der Winkel, den a und r bilden,
ϱ die Masse der Kubikeinheit der Kugel, die in gleichen Abständen vom Mittelpunkte der Kugel gleiche Werte habe, und
f die Anziehung zweier Masseneinheiten im Abstande 1 von einander; dann ist

$$f\frac{m\,m'}{u^2} \tag{1}$$

der Ausdruck für die Anziehung der Massen m, m' nach dem Gesetze der Schwere.

Fig. 124.

Legt man durch die Abstände a und r eine Ebene, beschreibt in ihr mit den Radien r und $r + dr$ zwei Kreise, lässt sodann φ in $\varphi + d\varphi$ übergehen, so dass der Radius BM nach CM kommt, so wird der Bogen $BC = r\,d\varphi$ sein. Zwischen jenen zwei Kreisen und diesen zwei Radien liegt ein Flächenelement $= r\,dr\,d\varphi$. Dreht man die Ebene des Kreises um AM als Achse um einen Winkel $d\Theta$, so beschreibt der Punkt B einen Weg $= r\sin\varphi\,d\Theta$, also die Fläche $r\,dr\,d\varphi$ ein Volumen $= r^2\,dr\sin\varphi\,d\varphi\,d\Theta$. Die Masse dieses Volumenelementes ist $= \varrho\,r^2\,dr\sin\varphi\,d\varphi\,d\Theta$. Somit ist nach (1) die Anziehung dieses Massenelementes und der Masse m in A gleich

$$f\varrho m\frac{r^2\,dr\sin\varphi\,d\varphi\,d\Theta}{u^2}. \tag{2}$$

Zerlegt man diese Kraft in zwei Seitenkräfte, parallel und senkrecht zur Achse AM, so ist die erstere gleich

$$f\varrho m\frac{r^2\,dr\sin\varphi\,d\varphi\,d\Theta}{u^2}\cos BAM. \tag{3}$$

Nun folgt aus dem Dreiecke BAM

$$\left\{\begin{aligned} u^2 &= a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi \\ \cos BAM &= \frac{a - r\cos\varphi}{u}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Eliminiert man hieraus $r\cos\varphi$, so folgt

$$\cos BAM = \frac{a^2 - r^2 + u^2}{2au}.$$

Führt man diesen Wert in (3) ein, so erhält man

$$f\varrho m\frac{r^2\,dr\sin\varphi\,d\varphi\,d\Theta}{2au^3}(a^2 - r^2 + u^2). \tag{5}$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung (4) in Hinsicht φ und u folgt

$$u\,du = a\,r \sin\varphi\, d\varphi.$$

Führt man den Wert von $\sin\varphi\, d\varphi$ aus dieser Formel in (5) ein, so ist die Anziehung des Massenelementes der Kugel und des Teilchens m parallel zur Achse A M

$$\frac{f\varrho m}{2a^2} r\,dr\,d\Theta\, \frac{a^2 - r^2 + u^2}{u^2} du.$$

Das Integral dieses Ausdruckes in Hinsicht Θ, zwischen den Grenzen $\Theta = 0$ und $\Theta = 2\pi$, ist die Anziehung der Masse m und der Masse eines Ringes, der vom Flächenelement $r\,dr\,d\varphi$ bei einer vollen Umdrehung um A M gebildet wird. Diese Anziehung ist daher

$$(6) \qquad \frac{\pi f \varrho m}{a^2} r\,dr\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right)du.$$

Die Seitenkräfte, die die Massenelemente dieses Ringes auf m ausüben, in senkrechter Richtung zur Drehachse A M, heben sich gegenseitig auf.

Behufs der Integration der Formel (6) in Hinsicht u beachte man, dass

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}.$$

Folglich ist das Integral von (6) für unbestimmte Grenzen

$$(7) \qquad \frac{\pi f \varrho m}{a^2} r\,dr\left(u - \frac{a^2 - r^2}{u}\right) + C.$$

Man wähle hier die Grenzen von u so, dass dieser Ausdruck die Anziehung der Masse m auf eine ganze Kugelschale vom Halbmesser r und der Dicke dr darstellt.

I. Befindet sich die Masse m ausserhalb der Kugelschale, so sind die Grenzen von u gleich $a - r$ und $a + r$. Für diese Grenzen wird

$$u - \frac{a^2 - r^2}{u} = 4r.$$

Folglich das Integral (7) gleich

$$(8) \qquad f\,\frac{4\pi \varrho m}{a^2} r^2\,dr.$$

Allein es ist $4\pi\varrho r^2 dr$ die Masse der Kugelschale. Bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{M}$, so geht der Ausdruck (8) über in

$$f\,\frac{m\mathfrak{M}}{a^2}.$$

Also ist die Anziehung eines Massenteilchens, das sich ausserhalb der Kugelschale befindet, auf die Kugelschale gerade so, wie wenn die Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Besteht die Kugel aus unendlich vielen konzentrischen Kugelschalen, sei es, dass die Dichtigkeit der Masse von Schale zu Schale sich ändert, oder dass sie für alle gleich ist, so wird die Anziehung aller Schalen, d. h. der ganzen Kugel auf den ausser ihr liegenden Punkt dieselbe sein, wie wenn die Kugelmasse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Für eine homogene Kugel ist diese Anziehung nach (8)

$$(9) \qquad f\frac{4\pi\varrho m}{a^2}\int^r r^2 dr = \frac{4}{3} f\pi\varrho m \frac{r^3}{a^2} = f\frac{m\mathfrak{M}'}{a^2}.$$

wenn $\mathfrak{M}'$ die Masse der ganzen Kugel bezeichnet.

Ist ϱ nicht konstant, sondern eine Funktion von r, so dass z. B.

$$\varrho = p \mp q r,$$

so setze man diesen Wert von ϱ in (8) ein, und erhält als Anziehung der Kugel auf das ausser ihr liegende Massenteilchen m

$$(10) \qquad \frac{4 f\pi m}{a^2}\int_0^r (p \mp q r) r^2 dr = f\frac{4\pi r^3 m}{3a^2}\left(p \mp \frac{3}{4} q r\right).$$

II. Befindet sich der Punkt A, dessen Masse $= m$ ist, innerhalb der Kugelschale vom Halbmesser r und der Dicke dr, so müssen im Integral (7) die Grenzen von u zwischen $r - a$ und $r + a$ genommen werden. Hierfür wird

$$u - \frac{a^2 - r^2}{u} = 0.$$

Also verschwindet das Integral (7). Somit ist die Anziehung einer unendlich dünnen Kugelschale mit gleichförmiger Dichte auf einen materiellen Punkt, der sich innerhalb der Kugelschale befindet, gleich Null. Liegt der materielle Punkt innerhalb einer beliebigen Anzahl unendlich dünner, konzentrischer Kugelschalen, so gilt der Satz für jede dieser Schalen, gleichviel ob die Dichte der Masse von Schale zu Schale sich ändert oder sich gleich bleibt; also gilt er auch für eine Schale von endlicher Dicke.

Hieraus folgt, dass sich die Anziehung einer Kugel auf einen Punkt in ihrem Innern reduziert auf die Anziehung derjenigen konzentrischen Kugel, deren Oberfläche durch diesen Punkt geht. Je näher daher dieser Punkt dem Mittelpunkte der Kugel liegt, um so schwächer wird er von ihr angezogen.

Ist die Masse der Kugel homogen, also ϱ konstant, so ist die Anziehung der Kugel vom Halbmesser r auf das Massenteilchen m, das den Abstand a vom Kugelmittelpunkte hat, nach (8)

$$(11) \qquad f\frac{4\pi\varrho m}{a^2}\int_0^a r^2 dr = f\frac{4\pi a\varrho m}{3}.$$

Diese Anziehung hängt somit nicht vom Halbmesser der ganzen Kugel ab, sondern ist dem Abstande des anziehenden Punktes vom Mittelpunkte der Kugel proportional (Anwendung hiervon in § 166).

Aus dem Vorstehenden folgt ferner: Bestehen zwei Kugeln aus konzentrischen Schalen, wovon jede Schale eine homogene Masse hat, so ziehen sich diese Kugeln an, wie wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären.

372. Anziehung eines Berges und eines materiellen Punktes auf der Spitze des Berges. Der Berg habe die Form eines Rotationsparaboloides, dessen Achse A B (Fig. 125) vertikal liegt. Ein Schnitt durch den Berg längs der Achse wird eine Parabel A C E sein. Es seien

x, y die Koordinaten A B und B C eines Parabelpunktes C,

h, nh die Höhe A D und der Halbmesser D E der Grundfläche des Berges,

m die Masse des materiellen Punktes in der Spitze A,

ϱ die Masse der Kubikeinheit des Berges, die gleichförmig vorausgesetzt werde, und

f die Anziehung zweier Masseneinheiten im Abstande 1 von einander.

Da bei einer Parabel sich die Abscissen verhalten wie die Quadrate der Ordinaten, so ist $x : h = y^2 : n^2 h^2$, woraus als Gleichung der Oberfläche folgt

$$y^2 = n^2 h x. \tag{1}$$

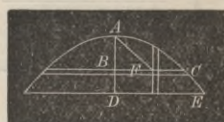
Man lege in den Abständen x und $x + dx$ vom Scheitel A zwei Horizontalebenen, und beschreibe zwei Cylinderflächen, deren Achsen mit A D znsammenfallen, mit den Radien $r = BF$ und $r + dr$, wobei $r < x$ sein soll; alsdann schliessen diese vier Flächen einen Ring ein, dessen Querschnitt $dx\,dr$ ist. Legt man endlich noch zwei Ebenen längs der Achse A D, die einen Winkel $d\varphi$ bilden, so schneiden diese Ebenen von jenem Ringe ein Volumenelement $= dx\,dr \cdot r\,d\varphi$ aus, dessen Masse $= \varrho\,dx\,r\,dr\,d\varphi$ sein wird. Dieses Teilchen hat den Abstand $AF = \sqrt{x^2 + r^2}$ von der Bergspitze. Folglich ist die Anziehung zwischen diesem Teilchen und der Masse m gleich

$$f \frac{m \varrho\,dx\,r\,dr\,d\varphi}{x^2 + r^2}. \tag{2}$$

Diese Kraft zerlege man in eine vertikale und eine horizontale Seitenkraft. Die erstere wird erhalten, wenn man die Mittelkraft (2) multipliziert mit

$$\cos FAB = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Fig. 125.



Mithin ist diese Seitenkraft gleich

$$f \frac{m \varrho\,x\,dx\,r\,dr\,d\varphi}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

Dieses Differential muss nun in Hinsicht der drei Variabeln φ, r und x integriert werden. Das Integral in Hinsicht φ, von 0 bis 2π genommen, nämlich der Ausdruck

$$2\pi f m \varrho \frac{x\,dx\,r\,dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4}$$

ist die Anziehung zwischen m und jenem Ringe, dessen Halbmesser r und dessen Querschnitt $d r d x$ ist. Die horizontalen Seitenkräfte, die aus (2) hervorgehen und sich an den Teilen dieses Ringes geltend machen, heben sich gegenseitig auf.

Um das Integral von (4) in Hinsicht r zu erhalten, denke man sich x konstant und setze $r^2 + x^2 = v^2$; es wird dann durch Differentiation $r d r = v d v$, also auch

$$\int \frac{r d r}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{d v}{v^2} = -\frac{1}{v} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Diese Integration von (4) gibt die Anziehung von m und einer Summe von Körperringen, die zwischen den Horizontalebenen liegen, die um x und $x + d x$ von der Spitze abstehen. Mithin ist das Integral zwischen den Grenzen $r = 0$ und $r = BC = y$ zu nehmen. Nun ist

$$\int_0^y \frac{r d r}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Folglich ist die Anziehung dieser horizontalen Schicht und der Masse m nach (4) und (1)

$$(5) \quad 2\pi f m \varrho x d x \int_0^y \frac{r d r}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi f m \varrho \left(d x - \frac{x d x}{\sqrt{n^2 h x + x^2}} \right).$$

Dieser Ausdruck muss noch in Hinsicht x integriert werden. Nach § 343 ist

$$\int \frac{x d x}{\sqrt{n^2 h x + x^2}} =$$

$$\sqrt{n^2 h x + x^2} - \frac{n^2 h}{2} l \left(\frac{n^2 h}{2} + x + \sqrt{n^2 h x + x^2} \right) + C.$$

Allein das Integral von (5) in Hinsicht x ist von $x = 0$ bis $x = h$ zu nehmen, um die Anziehung aller horizontalen Schichten des Berges auf m zu erhalten. Nun ist

$$\int_0^h \frac{x d x}{\sqrt{n^2 h x + x^2}} = h\sqrt{1 + n^2} - \frac{n^2 h}{2} l \frac{n^2 + 2 + 2\sqrt{1 + n^2}}{n^2}.$$

Die gesuchte Gesamtanziehung in vertikaler Richtung ist daher gleich

$$(6) \quad 2\pi f m \varrho h \left[1 - \sqrt{1 + n^2} + \frac{n^2}{2} l \frac{n^2 + 2 + 2\sqrt{1 + n^2}}{n^2} \right].$$

Dieser Ausdruck kann unter der Voraussetzung vereinfacht werden, dass der Berg sehr flach ist, d. h. dass die Zahl n bedeutend grösser ist als die Einheit. Man erhält zunächst aus (6)

$$(7) \; 2\pi f m \varrho h n \left[\frac{1}{n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{n}{2} l \left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) \right].$$

Entwickelt man nun $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ nach dem binomischen Satze und vernachlässigt die Glieder von der vierten Potenz von $\frac{1}{n}$ an, so ist

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2\,n^2}.$$

Hierfür wird nach der Formel (4) des § 69

$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

die logarithmische Grösse

$$l\left[1+\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}\right)\right] = \frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^3\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}\right)^3 - \ldots$$

Entfernt man rechts die Klammern, so heben sich die Glieder mit $\frac{1}{n^2}$ auf. Vernachlässigt man sodann alle Glieder von der vierten Potenz der Grösse $\frac{1}{n}$ an, so wird der Wert des vorstehenden logarithmischen Ausdruckes $= \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{6\,n^2}\right)$, also das Integral (7), das wir mit a bezeichnen wollen,

$$a = 2\,\pi\,f\,m\,\varrho\,h\,n\left[\frac{1}{n} - \left(1+\frac{1}{2\,n^2}\right) + 1 - \frac{1}{6\,n^2}\right],$$

$$a = 2\,\pi\,f\,m\,\varrho\,h\left(1 - \frac{2}{3\,n}\right). \tag{8}$$

Ist nun R der Halbmesser der Erde, diese als Kugel gedacht, ϱ' die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse und A die Anziehung der Erde auf das Massenteilchen m, das auf ihrer Oberfläche liegt, so ist nach Formel (11) § 371

$$A = f\,\frac{4\,\pi\,R\,\varrho'\,m}{3},$$

mithin das Verhältnis zwischen den Anziehungen a und A

$$\frac{a}{A} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\varrho}{\varrho'}\cdot\frac{h}{R}\left(1 - \frac{2}{3\,n}\right).$$

Ist nun $n = 5$, $h = 0{,}5$ geographische Meilen, und wie man annähernd annehmen kann (§ 260),

$$\varrho = 2{,}65, \quad \varrho' = 5{,}56, \quad R = 860 \text{ Meilen},$$

so wird

$$\frac{a}{A} = \frac{1}{2\,776}.$$

Mithin ist die Anziehung der Erde 2 776 mal so gross als die dieses Berges auf die Masse m.

373. Wärmeentwickelung bei der Bildung der Himmelskörper, nach der Hypothese der Entstehung dieser Körper durch Verdichtung aus Weltdunst. Nehmen wir an, die Materie, die die Himmelskörper bilden, habe sich ursprünglich im Weltraume im aufgelösten Zustande vorgefunden und sich sodann an einzelnen Stellen dieses Raumes, nach dem Gesetze der Gravitation, verdichtet. Jedes kleinste Teilchen der Materie hat hierbei auf alle übrigen eine anziehende Wirkung ausgeübt. Jeder dieser Anziehungen entspricht eine Arbeitsgrösse (§ 174), weil je eine Kraft längs eines Weges gewirkt hat. Denken wir uns alle diese Arbeitsgrössen, die dem Verdichtungsvorgange eines Himmelskörpers entsprechen, berechnet, und sodann diese Arbeitsgrössen nach der mechanischen Wärmetheorie in Wärme verwandelt. Diese Wärme wird sich über die verdichtete Masse des Körpers verbreitet und ihr eine entsprechend hohe Temperatur erteilt haben. Es seien

x_0 die ursprüngliche Entfernung zweier Massenteilchen m, $m_,$, die sich anziehen,

x ihre Entfernung in irgend einem Augenblicke ihrer Annäherung,

$x_,$ ihre Entfernung in dem verdichteten Himmelskörper und

f die Anziehung zweier Masseneinheiten, die den Abstand 1 haben; dann ist nach dem Gravitationsgesetze die Anziehung der Massen m, $m_,$ in der Entfernung x gleich

$$(1) \qquad f\frac{m\,m_,}{x^2},$$

und somit die Arbeit beim Uebergange aus dem Abstande x_0 in den Abstand $x_,$

$$f\,m\,m_,\int_{x_,}^{x_0}\frac{d\,x}{x^2} = f\,m\,m_,\left(\frac{1}{x_,} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Wegen des ursprünglich aufgelösten Zustandes der Materie ist x_0 vielmal grösser als $x_,$. Deshalb kann man $\frac{1}{x_0}$ gegen $\frac{1}{x_,}$ vernachlässigen. Dadurch wird die vorstehende Arbeit gleich.

$$(2) \qquad \frac{f\,m\,m'}{x_,}$$

Sind nun m_2, m_3 . . Massenteilchen wie m, $m_,$, die an dem Vorgange der Verdichtung teilnehmen, so wird m auf $m_,, m_2, m_3, \ldots$ wirken; ebenso $m_,$ auf $m, m_2, m_3, \ldots$; dann m_2 auf $m, m_,, m_3, \ldots$ d. h. jedes Teilchen wirkt auf jedes der übrigen. Jeder dieser Anziehungen entspricht eine Arbeit, die die Formel (2) zum Ausdrucke hat.

Um alle die Arbeiten zu finden, die zunächst aus der Anziehung von m auf alle übrigen Massenteile entspringen, lege man durch den

Mittelpunkt der verdichteten Kugelmasse und durch das Teilchen m eine feste Ebene und nenne

$r, r_{,}$ die Abstände der Teilchen $m, m_{,}$ vom Mittelpunkte der Kugelmasse,

$x_{,}$ wie oben den Abstand der Teile $m, m_{,}$,

Θ den Winkel, den die Abstände r und $r_{,}$ einschliessen,

φ den Winkel, den der Abstand $r_{,}$ mit der festen Ebene durch den Mittelpunkt bildet,

ϱ die Masse der Kubikeinheit der verdichteten Kugel, welche Masse als gleichförmig dicht vorausgesetzt werde, und

R den Halbmesser dieser verdichteten Kugel.

Man erhält zunächst die Gleichung

$$x_{,}^2 = r^2 + r_{,}^2 - 2\, r\, r_{,} \cos\Theta. \tag{3}$$

Man beschreibe um den Mittelpunkt der verdichteten Kugelmasse zwei Kugelflächen mit den Radien $r_{,}$ und $r_{,} + d\, r$, und denke sich zwischen diesen Flächen ein rechtwinkeliges Volumenelement, dessen Dimensionen $d\, r_{,}, r_{,}\, d\, \Theta$ und $r_{,} \sin\Theta\, d\, \varphi$ sind. Die Masse $m_{,}$ dieses Volumenelementes ist daher

$$m_{,} = \varrho\, r_{,}^2\, d\, r_{,} \sin\Theta\, d\, \Theta\, d\, \varphi. \tag{4}$$

Setzt man die Werte von $x_{,}$ und $m_{,}$ aus (3) und (4) in (2) ein, so folgt als Arbeit, die aus der Anziehung von m auf $m_{,}$ entspringt

$$f\, m\, \varrho \frac{r_{,}^2\, d\, r_{,} \sin\Theta\, d\, \Theta\, d\, \varphi}{\sqrt{r^2 + r_{,}^2 - 2\, r\, r_{,} \cos\Theta}}. \tag{5}$$

Integriert man diesen Ausdruck (5) der Reihe nach

in Hinsicht φ von 0 bis 2π
" Θ " 0 " π
" $r_{,}$ " 0 " R,

so erhält man die Arbeit a, die aus der Anziehung des Teilchens m auf alle übrigen Teilchen, die an der Verdichtung Anteil nehmen, hervorgeht. Diese Arbeit ist daher für die angegebenen Grenzen

$$a = f\, m\, \varrho \int\!\!\int\!\!\int \frac{r_{,}^2\, d\, r_{,} \sin\Theta\, d\, \Theta\, d\, \varphi}{\sqrt{r^2 + r_{,}^2 - 2\, r\, r_{,} \cos\Theta}}.$$

Die Integration in Hinsicht φ gibt

$$a = 2\pi\, f\, m\, \varrho \int\!\!\int \frac{r_{,}^2\, d\, r_{,} \sin\Theta\, d\, \Theta}{\sqrt{r^2 + r_{,}^2 - 2\, r\, r_{,} \cos\Theta}}.$$

Da $\sin\Theta\, d\, \Theta = -\, d\, (\cos\Theta)$, so kann man auch schreiben

$$a = 2\pi\, f\, m\, \varrho \int r_{,}^2\, d\, r_{,} \int \frac{-\, d\, (\cos\Theta)}{\sqrt{r^2 + r_{,}^2 - 2\, r\, r_{,} \cos\Theta}}. \tag{6}$$

Um die Integration in Hinsicht Θ auszuführen, berücksichtige man, dass

$$d \sqrt{a - b\cos\Theta} = \frac{-\, b\, d\, (\cos\Theta)}{2 \sqrt{a - b\cos\Theta}}$$

und folglich, von der Integrationskonstante abgesehen, durch Umkehrung

$$\int \frac{-\,d(\cos\Theta)}{\sqrt{a - b\cos\Theta}} = \frac{2}{b}\sqrt{a - b\cos\Theta}.$$

Hiernach wird sein

$$\int \frac{-\,d(\cos\Theta)}{\sqrt{r^2 + r_,^2 - 2\,r\,r_,\cos\Theta}} = \frac{1}{r\,r_,}\sqrt{r^2 + r_,^2 - 2\,r\,r_,\cos\Theta}.$$

Der Wert dieses Integrals zwischen den Grenzen $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi$ ist

$$(7)\qquad \frac{1}{r\,r_,}\left(\sqrt{r^2 + r_,^2 + 2\,r\,r_,} - \sqrt{r^2 + r_,^2 - 2\,r\,r_,}\right).$$

Hierin kann nun $r_,$ grösser oder kleiner als r sein. Wenn $r_, < r$, so wird der Wert von (7) $= \frac{2}{r}$; es liegt alsdann die anziehende Masse m ausserhalb aller der Kugelschalen, deren Halbmesser variieren können zwischen 0 und r. Wenn $r_, > r$, so wird der Wert von (7) $= \frac{2}{r_,}$; in diesem Fall liegt die Masse m innerhalb aller Kugelschalen, deren Halbmesser von r bis R wachsen können. Wegen der verschiedenen Werte $\frac{2}{r}$ und $\frac{2}{r_,}$ ist es daher nötig, die Integration in Hinsicht der dritten Variabeln getrennt auszuführen. Man erhält mithin aus (6)

$$(8)\qquad a = 2\,\pi\,f\,m\,\varrho\left(\int_0^r \frac{2\,r_,^2\,d\,r_,}{r} + \int_r^R \frac{2\,r_,^2\,d\,r_,}{r_,}\right).$$

Nun ist $\int_0^r \frac{2\,r_,^2\,d\,r_,}{r} = \frac{2}{3}\,r^2$, $\int_r^R 2\,r_,\,d\,r_, = R^2 - r^2$; daher die Summe dieser Werte $= R^2 - \frac{1}{3}\,r^2$. Führt man diesen Wert in (8) ein, so kommt

$$(9)\qquad a = 2\,\pi\,f\,m\,\varrho\,(R^2 - \tfrac{1}{3}\,r^2).$$

Beschreibt man vom Mittelpunkte der verdichteten Kugel aus zwei Kugelflächen mit den Radien r und $r + d\,r$, so schliessen beide Flächen unendlich viele Massenteile wie m ein. Denken wir uns alle diese Massenteile gleich gross, so entspricht jedem eine gleiche Arbeit $=$ a. Die Arbeit, die somit allen zwischen diesen zwei Kugelflächen eingeschlossenen Teilchen entspricht, ist der Anzahl dieser Teilchen, d. h. der eingeschlossenen Masse proportional. Vertauscht man daher in (9) die Masse m mit der Masse $4\,\pi\,\varrho\,r^2\,d\,r$ jener Kugelschale, so erhält man als Arbeit die aus der Anziehung aller Teile jener Schale auf alle Teile überhaupt hervorgeht, den Wert

$$8\,\pi^2\,f\,\varrho^2\left(R^2\,r^2 - \frac{r^4}{3}\right)d\,r.$$

Wird dieses Differential integriert von $r = 0$ bis $r = R$, so erhält man die Arbeit, die der Anziehung aller Teile auf alle Teile entspricht, gleich

(10) $$\tfrac{32}{15}\pi^2 f \varrho^2 R^5.$$

In diesem Ausdrucke sind die Arbeiten, die aus der Anziehung von m auf m, und von m, auf m hervorgehen, gleich gross. Da sich dies für je zwei andere Teilchen ebenso verhält, so ist die gesamte Arbeit, die aus dem Verdichtungsprozesse entspringt, nur die Hälfte von (10). Bezeichnet man diese Arbeit mit A, so ist mithin

(11) $$A = \tfrac{16}{15}\pi^2 f \varrho^2 R^5.$$

Man nenne s die mittlere Wärmemenge, die nötig ist, um eine Masseneinheit des Stoffes um 1° Celsius zu erwärmen; E = 424 Meter-Kilogramm die mechanische Arbeit (§ 263), die zur Hervorbringung einer Kalorie Wärme erforderlich ist, wenn sich die Arbeit vollständig in Wärme umsetzt, und t die ursprüngliche Temperatur, die der Himmelskörper infolge des Verdichtungsprozesses annehmen wird.

Nun ist die Masse des Himmelskörpers gleich

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho.$$

Wird diese Masse von 0 auf 1 Grad erwärmt, so ist hierzu eine Wärmemenge nötig $= \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho s$ Kalorien; für eine Erwärmung von 0 auf t Grade steigt diese Wärmemenge auf $\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho s t$. Jede dieser Kalorien kann entstanden gedacht werden aus einer Arbeit = E, also jene im ganzen Ball enthaltene Wärme aus einer Arbeit $= \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho s t E$. Diese Arbeit muss gleich sein der Grösse A in Formel (11) unter der Voraussetzung, dass während des Verdichtungsprozesses keine Wärme durch Ausstrahlung an den Weltraum verloren gegangen sei. Hieraus folgt

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho s t E = \tfrac{16}{15}\pi^2 \varrho^2 f R^5.$$

(12) $$t = \frac{4}{5}\,\frac{\pi \varrho f}{s E}\,R^2.$$

Da die Grössen f und E konstant sind, so ist mithin die ursprüngliche Temperatur t eines Himmelskörpers proportional seiner Oberfläche πR^2 und seiner Dichtigkeit ϱ.

Setzt man die Grösse s für alle Himmelskörper als konstant voraus und bezeichnet mit $t_{,}$ die ursprüngliche Temperatur, mit $R_{,}$ den Radius und mit $\varrho_{,}$ die Masse der Kubikeinheit eines andern Himmelskörpers, so ist nach (12)

(13) $$t_{,} = \frac{4}{5}\,\frac{\pi f \varrho_{,}}{s E}\,R_{,}^2.$$

Durch Division von (12) und (13) folgt

(14) $$\frac{t_{,}}{t} = \frac{\varrho_{,} R_{,}^2}{\varrho R^2}.$$

Um die ursprüngliche absolute Temperatur der Erde zu bestimmen, nenne man M die Masse der Erde, diese Masse als gleichförmig gedacht; G das Gewicht der Masse ϱ, die in der Kubikeinheit enthalten ist, wenn sich diese Masse auf der Erdoberfläche befindet, s die spezifische Wärme der Erdmasse, d. h. die Wärme, die nötig ist, um 1 Kilogramm der Erdmasse um 1 Zentigrad zu erwärmen; dann ist die Erdmasse gleich

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho = M \tag{15}$$

und nach dem Gesetze der Gravitation, indem man G als Anziehungskraft der Massen M und ϱ auffasst, die sich im Abstande R von einander befinden, gleich

$$f\frac{M\varrho}{R^2} = G. \tag{16}$$

Das Gewicht der Erdmasse ist $= \frac{4}{3}\pi R^3 G$. Wird dasselbe von 0 auf 1 Grad erwärmt, so ist eine Wärmemenge erforderlich $= \frac{4}{3}\pi R^3 G s$. Wird dieses Gewicht auf t Grad erwärmt, so bedarf es hierzu einer Wärmemenge $= \frac{4}{3}\pi R^3 G s t$. Dieser Wärmemenge entspricht die mechanische Arbeit $= \frac{4}{3}\pi R^3 G s t E$, da jede Kalorie eine Arbeit $= E$ produzieren kann. Diese Arbeit muss gleich der sein, die aus dem Verdichtungsprozesse der Erde entstanden ist. Man hat daher nach (11)

$$\frac{4}{3}\pi R^3 G s t E = A. \tag{17}$$

Multipliziert man die Gleichungen (11), (15), (16) und (17) mit einander, so folgt die gesuchte Formel

$$t = \frac{3}{5}\frac{R}{sE}. \tag{18}$$

Ist nun

$$s = 0{,}2, \quad E = 424\,mkg, \quad R = 6\,365\,000\,m,$$

so folgt als Wert der ursprünglichen Temperatur der Erde nach (18)

$$t = \frac{3 \cdot 6\,365\,000}{5 \cdot 0{,}2 \cdot 424} = 45\,035 \text{ Grade}. \tag{19}$$

Vermöge der Formel (14) und des Wertes von t aus (19) erhält man folgende Resultate (Halbmesser und Dichte der Himmelskörper nach dem Annuaire, 1864)

	Radius R.	Mittlere Dichte ϱ.	Temperaturverhältnisse $t_{\prime} : t$
Merkur	0,391	2,940	0,45
Venus	0,985	0,923	0,89
Erde	1,000	1,000	1,00
Mars	0,519	0,948	0,26
Jupiter	11,225	0,238	30,00
Saturn	9,022	0,138	11,23
Uranus	4,344	0,180	3,40
Sonne	112,060	0,252	3 164,50
Mond	0,273	0,557	0,04.

VII. Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen.

374. Erklärungen. — Sonderung der Veränderlichen. Eine Gleichung zwischen einer unabhängig veränderlichen Grösse x, einer Funktion y derselben und Differentialquotienten von y nach x heisst eine gewöhnliche Differentialgleichung mit zwei Veränderlichen und zwar eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, wenn sie nur den ersten Differentialquotienten von y enthält. Eine solche Gleichung hat die allgemeine Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

wofür man auch schreiben kann

$$f(x, y, dx, dy) = 0 \quad \text{oder} \quad f(x, y, y') = 0.$$

Die Aufgabe, die durch eine solche Gleichung gestellt wird, besteht in der Bestimmung von y als Funktion von x, so dass durch y und $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung (1) identisch, d. h. für alle Werte von x befriedigt wird. Dieses Lösen der Differentialgleichung erfordert im allgemeinen, wie im Folgenden sich ergeben wird, die Ausführung von Integrationen, weshalb man dieses Lösen auch Integration der Differentialgleichung und jede Funktion von x oder jede Gleichung zwischen y und x, die der Gleichung (1) genügt, ein Integral von (1) nennt.

Von den Differentialgleichungen erster Ordnung sollen zunächst die des ersten Grades betrachtet werden, bei denen y′ oder $\frac{dy}{dx}$ nur in der ersten Potenz vorkommt. Sie haben die allgemeine Form

$$f(x, y) + y' \cdot \varphi(x, y) = 0 \tag{2}$$

oder

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy = 0.$$

Die einfachste Gestalt, die die Gleichung (2) haben kann, ist

$$f(x)\, dx + \varphi(y)\, dy = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung besteht zwischen zwei Differentialen, wovon jedes nur eine Variable enthält. Man sagt deshalb, die Variabeln seien in der Gleichung (3) gesondert oder getrennt.

Die Integration von (3) giebt die Integralgleichung

$$\int f(x)\, dx + \int \varphi(y)\, dy = C, \tag{4}$$

worin C eine willkürliche Konstante bezeichnet. Ergibt die Ausführung der Integrationen etwa

$$\int f(x)\, dx = F(x); \quad \int \varphi(y)\, dy = \Phi(y),$$

so lautet das Integral der Gleichung (3)

(5 $$F(x) + \Phi(y) = C.$$

Die Hauptaufgabe bei der Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades ist nun die, durch irgend welche Hülfsmittel die Variabeln zu sondern. Denn kann diese Sonderung bewirkt werden, so hat man nur die einzelnen Differentiale nach den in den früheren Abschnitten angegebenen Regeln zu integrieren.

Diese Sonderung kann sehr oft durch blosse Umformung erzielt werden, so z. B. in den Gleichungen

$$Y\,dx + X\,dy = 0, \text{ woraus } \frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0,$$

$$XY\,dx + X'Y'\,dy = 0, \quad \text{„} \quad \frac{X}{X'}\,dx + \frac{Y'}{Y}\,dy = 0,$$

worin Y eine Funktion nur von y und X eine Funktion nur von x bezeichnet.

Bei gewissen Funktionen lässt sich die Sonderung der Variabeln erzielen durch Einführung einer neuen Veränderlichen. Wenn z. B.

(6) $$dy = f\left(\frac{y}{x}\right)dx,$$

so setze man $\frac{y}{x} = t$ und erhält

$$y = xt, \quad dy = x\,dt + t\,dx.$$

Folglich durch Substitution in (6)

$$x\,dt + t\,dx = f(t)\,dx,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}.$$

375. Sonderung der Variabeln bei linearen Differentialgleichungen. Man nennt eine Gleichung von der Form

(1) $$dy + f(x)\,y\,dx = \varphi(x)\,dx,$$

eine lineare, weil die abhängig Variable y und ihr Differential dy nur in der ersten Potenz vorkommen.

Behufs der Sonderung der Variabeln setze man

(2) $$y = Xt,$$

worin X eine Funktion von x und t eine neue Variable bezeichnet; man erhält durch Differentiation von (2)

(3) $$dy = X\,dt + t\,dX.$$

Führt man die Werte von y und dy aus (2) und (3) in (1) ein, so kommt

$$X\,dt + t\,dX + Xt\,f(x)\,dx = \varphi(x)\,dx.$$

Da der Wert von X willkürlich ist, so kann man denselben so wählen, dass die beiden Glieder, die X enthalten, zusammen $= 0$ werden.

Dies gibt folgende zwei Gleichungen

(4) $$dt + t f(x) dx = 0;$$

(5) $$t dX = \varphi(x) dx.$$

Aus (4) folgt

$$\frac{dt}{t} = - f(x) dx,$$

$$l t = - \int f(x) dx,$$

(6) $$t = e^{-\int f(x) dx}.$$

$\ln(e^n) = n$

$\ln x = y$

$\boxed{x = e^y}$

Setzt man diesen Wert von t in (5) ein, so wird

(7) $$dX = \varphi(x) dx e^{\int f(x) dx}.$$

Die Integration liefert

$$X = \int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx + C,$$

so dass also

(8) $$y = e^{-\int f(x) dx} \left(\int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx + C \right)$$ ✓

die Integralgleichung von (1) ist.

Es sei z. B. zu integrieren

$$dy + xy dx = a dx,$$

so ist $f(x) = x$, $\varphi(x) = a$. Setzt man $y = Xt$, so wird

$$l t = - \int x dx = - \frac{x^2}{2}; \quad t = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$dX = a e^{\frac{x^2}{2}} dx; \quad X = a \int e^{\frac{x^2}{2}} dx,$$

welcher Wert von X als bekannt angesehen werden kann. Folglich

$$y = a e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Da alle linearen Differentialgleichungen integriert werden können, kann man auch das Integral aller derjenigen Gleichungen angeben, die sich auf lineare zurückführen lassen. Solches ist stets möglich bei den Differentialgleichungen von der Form

(9) $$\psi'(y) dy + \psi(y) f(x) dx = \varphi(x) dx,$$

in der $\psi(y)$ eine von y allein abhängige Funktion ist. Setzt man nämlich

$$z = \psi(y); \quad \text{also } dz = \psi'(y) dy,$$

so geht Gleichung (9) über in

$$dz + z f(x) dx = \varphi(x) dx,$$

die mit (1) in der Form übereinstimmt.

Zu den Gleichungen (9) gehört die sogenannte Bernoulli'sche Differentialgleichung

$$(10) \qquad dy + y f(x) dx = y^n \cdot \varphi(x) dx;$$

denn durch Multiplikation mit $(1-n) y^{-n}$ folgt aus ihr

$$\frac{1-n}{y^n} dy + \frac{1-n}{y^{n-1}} f(x) dx = (1-n) \varphi(x) dx$$

und, wenn substituiert wird

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}; \quad dz = \frac{1-n}{y^n},$$

$$dz + (1-n) z \cdot f(x) dx = (1-n) \varphi(x) dx.$$

Das Integral dieser Gleichung ist nach (8)

$$z = e^{(n-1)\int f(x) dx} \left\{ (1-n) \int \varphi(x) e^{(1-n)\int f(x) dx} dx + C \right\},$$

aus der folgt

$$y = e^{-\int f(x) dx} \cdot \left\{ (1-n) \int \varphi(x) e^{(1-n)\int f(x) dx} dx + C \right\}^{\frac{1}{1-n}}.$$

376. Sonderung der Veränderlichen bei homogenen Differentialgleichungen. Eine Gleichung heisst homogen, wenn in ihr die Anzahl der Dimensionen der Veränderlichen in allen Gliedern dieselbe ist. Homogen sind demnach die Gleichungen

$$x y dy + x^2 dx + y^2 dx = 0,$$

$$dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = 0.$$

Nun sei allgemein

$$(1) \qquad f(x, y) dx = \varphi(x, y) dy$$

eine homogene Gleichung. Setzt man in ihr $y = xz$, so wird x in jedem Gliede der Gleichung mit demselben Exponenten vorkommen. Ist die Summe der Exponenten in jedem Gliede $= n$, so ist mithin x^n ein gemeinschaftlicher Faktor der Gleichung. Nach Entfernung dieses Faktors werden die Vorzahlen von dx und dy in (1) nur noch Funktionen von z sein. Aus (1) folgt deshalb

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \psi(z),$$

worin $\psi(z)$ eine Funktion von z allein bezeichnet. Differentiiert man $y = xz$, so folgt

$$dy = x dz + z dx.$$

Folglich wird durch Substitution dieses Wertes von dy in (2)

$$x dz + z dx = \psi(z) dx,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\psi(z) - z}. \tag{3}$$

In dieser Gleichung ist nun die Sonderung der Variabeln vollzogen.

Ihre Integration liefert

$$l(x) = \int \frac{dz}{\psi(z) - z} + C; \tag{4}$$

setzt man nach Ausführung des Integrals für z den Wert $\frac{y}{x}$ ein, so hat man das Integral von (1).

Es sei z. B. zu integrieren

$$(x - y)\,dx = x\,dy. \tag{5}$$

Setzt man $y = xz$, so wird (5) zu

$$(x - xz)\,dx = x\,dy$$

oder nach Entfernung des gemeinschaftlichen Faktors x

$$(1 - z)\,dx = dy. \tag{6}$$

Aus $y = xz$ folgt aber $dy = x\,dz + z\,dx$; hierfür wird (4)

$$(1 - z)\,dx = x\,dz + z\,dx; \quad (1 - 2z)\,dx = x\,dz,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{1 - 2z} = -\frac{1}{2}\,\frac{d(-2z)}{1 - 2z}.$$

Folglich kommt durch Integration

$$l\,x = -\tfrac{1}{2}\,l(1 - 2z) + \tfrac{1}{2}\,l\,a,$$

worin $\frac{1}{2}\,l\,a$ die Konstante der Integration bezeichnen soll. Man kann auch schreiben

$$l\,x = \frac{1}{2}\,l\,\frac{a}{1 - 2z},$$

$$l\,x^2 = l\,\frac{a}{1 - 2z}; \quad x^2 = \frac{a}{1 - 2z}.$$

Führt man schliesslich noch $z = \frac{y}{x}$ ein, so kommt das gesuchte Integral

$$x(x - 2y) = a. \tag{7}$$

Auf die homogenen Differentialgleichungen lässt sich die allgemeine Gleichung

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)\,dy + (a_2 x + b_2 y + c_2)\,dx = 0 \tag{8}$$

zurückführen. Setzt man nämlich

$$x = \xi + \alpha; \quad y = \eta + \beta,$$

so lautet die Gleichung (8)

$$(a_1 \xi + b_1 \eta + a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1)\,d\eta + (a_2 \xi + b_2 \eta + a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2)\,d\xi = 0.$$

Bestimmt man nun die willkürlichen Konstanten α und β so, dass sie den Gleichungen

$$(9) \qquad \left| \begin{array}{l} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0 \\ a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0 \end{array} \right|$$

Genüge leisten, so erhält man die homogene Gleichung

$$(a_1 \xi + b_1 \eta) \, d\eta + (a_2 \xi + b_2 \eta) \, d\xi = 0.$$

Die Auflösung der Gleichungen (9) ist aber nicht mehr möglich, wenn

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

ist. Für diesen Fall ist aber

$$b_2 = \frac{a_2 b_1}{a_1},$$

und (8) kann geschrieben werden

$$(a_1 x + b_1 y)\left(d y + \frac{a_2}{a_1} d x\right) + c_1 \, d y + c_2 \, d x = 0.$$

Führt man

$$a_1 x + b_1 y = z; \qquad d y = \frac{1}{b_1} d z - \frac{a_1}{b_1} d x$$

hierin ein, so erhält man schliesslich

$$(a_1 z + a_1 c_1) \, d z + [(a_2 b_1 - a_1) z - a_1^2 c_1 + a_1 b_1 c_2] \, d x = 0,$$

in der sich die Variabeln ohne weiteres sondern lassen. Nach der Integration ist dann $z = a_1 x + b_1 y$ wieder einzusetzen.

377. Vollständigkeit des Differentials einer Gleichung mit zwei Variabeln. Abgesehen von dem Falle, wo die Gleichung

$$(1) \qquad P \, d x + Q \, d y = 0,$$

in der P und Q Funktionen von x und y sind, durch Sonderung der Variabeln integriert werden kann, gibt es noch einen Fall, in dem eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) durchgeführt werden kann. Dies ist nämlich möglich, wenn die linke Seite ein vollständiges oder genaues Differential ist.

Ist nämlich

$$P \, d x + Q \, d y = d f(x, y),$$

so kann (1) durch die Gleichung $d f(x, y) = 0$ ersetzt werden und hat die Integralgleichung

$$f(x, y) = C.$$

Man sieht aber nicht immer sofort ein, ob die linke Seite der Gleichung (1) ein vollständiges Differential ist. Daher ist es nötig, die Bedingungen hierfür aufzustellen und zugleich anzugeben, wie $f(x, y)$ gefunden wird. Setzt man dazu $f(x, y) = u$ und differentiiert, so erhält man

$$(2) \qquad d u = \frac{\partial u}{\partial x} d x + \frac{\partial u}{\partial y} d y;$$

aus (1) und (2) folgen als Bedingungen, dass (1) ein vollständiges Differential ist,

$$(3) \qquad P = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Differentiiert man P in Hinsicht y, Q in Hinsicht x, so erhält man

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Da aber $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, indem es gleichgültig ist, ob man u zuerst in Hinsicht x, dann in Hinsicht y differentiiert oder umgekehrt, so wird sein

$$(4) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

als Bedingung dafür, dass die linke Seite von (1) ein vollständiges Differential ist, d. h. so aufgefasst werden kann, als sei es durch unmittelbare Differentiation aus der ursprünglichen Funktion abgeleitet worden. Die Integration der Gleichung (1) wird dann nach folgendem allgemeinen Verfahren ausgeführt.

Da P d x das partielle Differential von u in Hinsicht x ist, so wird u aus P d x durch Integration nach x bis auf einen von y abhängigen Teil erhalten, so dass man setzen kann

$$(5) \qquad u = \int P\,dx + Y.$$

Die Grösse Y vertritt hier die Stelle der Konstanten, ist aber allgemein als eine Funktion von y zu betrachten, die noch bestimmt werden muss. Bezeichnet man das Integral $\int P\,dx$ mit U, so ist

$$u = U + Y.$$

Diese Gleichung, in Hinsicht y differentiiert, gibt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dY}{dy}.$$

Da nun aber auch $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, so wird mithin

$$dY = Q\,dy - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy.$$

Somit erhält man durch Integration in Hinsicht y

$$Y = \int \left[Q - \frac{\partial U}{\partial y} \right] dy.$$

Führt man diesen Wert von Y in (5) ein, so erhält man den Wert von u und damit die gesuchte Integralgleichung in der Form

$$(6) \qquad u = \int P\,dx + \int Q\,dy - \int \frac{\partial \int P\,dx}{\partial y}\,dy = C.$$

Hätte man zuerst $Q\,dy$ nach y integriert, so würde man ebenso die Integralgleichung in der Form

$$(7) \qquad u = \int P\,dx + \int Q\,dy - \int \frac{\partial \int Q\,dy}{\partial x}\,dx = C$$

erhalten haben.

378. Integrierender Faktor. Wenn ein Differential

$$(1) \qquad M\,dx + N\,dy = 0$$

zwischen zwei Veränderlichen x, y kein vollständiges ist, so kann es durch einen Faktor z, der im allgemeinen eine Funktion von x, y sein wird, zu einem vollständigen gemacht werden.

Nach der Bedeutung von z wird also das Differential

$$(2) \qquad M z\,dx + N z\,dy = 0$$

ein vollständiges sein, also die Bedingung erfüllen

$$\frac{\partial (M z)}{\partial y} = \frac{\partial (N z)}{\partial x}.$$

Allein diese letzte Gleichung gibt, indem man die Differentiation ausführt,

$$(3) \qquad M \frac{\partial z}{\partial y} + z \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Wenn die Grösse z, die man den integrierenden Faktor oder Euler'schen Multiplikator nennt, aus dieser Gleichung (3) bestimmt werden kann, so multipliziere man (1) damit, und es wird diese Formel integriert werden können.

Allein z lässt sich aus (3) nur in besondern Fällen ermitteln. Unter diesen Fällen heben wir denjenigen hervor, wo z eine Funktion von nur einer der Variabeln x, y ist.

Ist z eine Funktion von x, so wird $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Hierfür folgt aus (3)

$$(4) \qquad \frac{dz}{z} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx.$$

Ist z eine Funktion von y, so wird $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ und man erhält aus (3)

$$(5) \qquad \frac{dz}{z} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}\,dy.$$

Wird der Ausdruck (4) oder (5) integriert, so erhält man den integrierenden Faktor z.

Beispiel. Es sei zu integrieren die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \left(1 + a\sqrt{1 + x^2}\right)dx + 2by\sqrt{1 + x^2}\,dy = 0.$$

Da mit M die Vorzahl von dx, mit N diejenige von dy bezeichnet wird, so ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2bxy}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Die Werte von $\frac{\partial M}{\partial y}$ und $\frac{\partial N}{\partial x}$ sind verschieden. Die Formel (6) ist also kein genaues Differential. Gesetzt, es gebe einen integrierenden Faktor z dieser Gleichung, der eine Funktion nur von x ist, so wird man nach (4) erhalten

$$\frac{dz}{z} = -\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Somit ist

$$l\,z = -\tfrac{1}{2}\,l\,(1+x^2) + \tfrac{1}{2}\,l\,c,$$

wenn die Integrationskonstante mit $\frac{1}{2}\,l\,c$ bezeichnet wird. Dies gibt auch

$$l\,z = l\sqrt{\frac{c}{1+x^2}}, \quad z = \sqrt{\frac{c}{1+x^2}}.$$

Multipliziert man die gegebene Gleichung mit diesem Werte von z, so kommt

$$\sqrt{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + a\right)dx + 2b\sqrt{c}\,y\,dy = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\sqrt{c}\left[l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + ax\right] + by^2\sqrt{c} = c',$$

oder indem man durch $\sqrt{c}$ dividiert und $c' : \sqrt{c}$ mit h bezeichnet,

$$(7) \qquad l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + ax + by^2 - h = 0.$$

Wird diese Formel differentiiert, so erhält man in der That die gegebene Gleichung (6). Somit ist (7) das Integral von (6).

Man sieht übrigens, dass in der vorgelegten Gleichung die Sonderung der Variabeln durch Division durch $\sqrt{1+x^2}$ ausgeführt, die Integration somit ohne einen integrierenden Faktor bewirkt werden kann.

379. Differentialgleichung mit dem Quadrate des Differentialverhältnisses. Enthält eine Differentialgleichung zwischen den Variabeln x, y das Differentialverhältnis $\frac{dy}{dx}$ in der ersten und zweiten Potenz, so heisst sie eine Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades und kann stets auf die allgemeine Form

$$(1) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P\left(\frac{dy}{dx}\right) + Q = 0$$

gebracht werden, wo P und Q Funktionen von x oder y oder beiden Variabeln sein können.

Der unmittelbare Weg, die Gleichung (1) zu integrieren, ist der, Gleichung (1) wie eine quadratische in Hinsicht $\frac{dy}{dx}$ aufzulösen. Man erhält zwei Wurzelwerte. Sind diese A und B, so geht die gegebene Gleichung über in das Produkt

$$\left(\frac{dy}{dx} - A\right)\left(\frac{dy}{dx} - B\right) = 0.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn der eine oder der andere der Faktoren $= 0$ ist. Daher entstehen folgende zwei Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$(2) \qquad dy = A\,dx; \quad dy = B\,dx.$$

Lassen sich diese integrieren, so multipliziere man ihre Integrale miteinander, und das Produkt ist das Integral der gegebenen Gleichung (1).

Als Beispiel diene die Gleichung $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$; durch Zerlegung in ein Produkt folgt

$$(3) \qquad \left(\frac{dy}{dx} - a\right)\left(\frac{dy}{dx} + a\right) = 0.$$

Daher ergeben sich die Gleichungen der ersten Ordnung

$$dy = a\,dx; \quad dy = -a\,dx$$

und, da a konstant ist, durch Integration

$$(4) \qquad y = ax + C; \quad y = -ax + C'.$$

Diese Gleichungen entsprechen zwei Geraden; die eine hat a, die andere $-a$ zur trigonometrischen Tangente des Winkels, den sie mit der Abscissenachse bildet. Die Linien liegen daher zu beiden Seiten dieser Achse und bilden mit ihr gleiche Winkel. Die Konstanten C, C' sind die Stücke, die sie auf der Ordinatenachse, vom Anfangspunkte aus, abschneiden. Hiernach erhält man entsprechend der Gleichung (3)

$$(y - ax - C)(y + ax - C') = 0$$

oder durch Ausführung der Multiplikation

$$y^2 - (C + C')y - a^2x^2 - a(C - C')x + CC' = 0.$$

Diese Gleichung ist das Integral der gegebenen Differentialgleichung. Sie stellt eine Hyperbel dar für jenen speziellen Fall, wo die beiden Kurven in zwei Gerade übergehen, die sich für $C' = C$ im Mittelpunkte schneiden.

In vielen Fällen führt jedoch die Auflösung der Gleichung (1) auf zwei solche Gleichungen (2), bei denen eine Sonderung der Veränderlichen nicht gelingt. Man kann alsdann folgendes Verfahren versuchen.

Es werde vorausgesetzt, dass Gleichung (1) in Hinsicht x oder y aufgelöst werden kann; dann führe man $\frac{dy}{dx} = p$ ein und erhält den Zusammenhang zwischen x, y und p unter einer der beiden Formen

$$x = \varphi(y, p); \quad y = \varphi(x, p).$$

Gesetzt es gelinge die Herstellung der zweiten dieser Gleichungen, so liefert ihre Differentiation nach x die Gleichung

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \quad \text{oder} \quad p\,dx = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp,$$

die in Bezug auf x und p von der ersten Ordnung und vom ersten Grade ist. Gelingt es, diese Gleichung zu lösen und ist etwa $F(x, p, C) = 0$ ihre Integralgleichung, so erhält man durch Elimination von p aus

$$y = \varphi(x, p) \quad \text{und} \quad F(x, p, C) = 0$$

die Integralgleichung der gegebenen Differentialgleichung (1). Man nennt dieses Verfahren die Methode der Integration durch Differentiation.

Zwei Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

I. Es sei zu integrieren

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ax - by = 0. \tag{5}$$

Nach dem zuerst angegebenen allgemeinen Verfahren erhält man folgende zwei Gleichungen der ersten Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{by - ax}; \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{by - ax}.$$

Da aber in denselben die Sonderung der Veränderlichen nicht direkt möglich ist, so wende man das soeben angegebene spezielle Verfahren an. Zu diesem Zwecke setze man $\frac{dy}{dx} = p$ in (5) ein, und erhält

$$by = p^2 + ax \tag{6}$$

also durch Differentiation, nachdem noch dy durch p dx ersetzt worden,

$$dx = \frac{2p\,dp}{bp - a}.$$

Diese Gleichung kann aber integriert werden. Setzt man $bp - a = bz$, so wird

$$dp = dz; \quad p = \frac{a + bz}{b};$$

$$dx = \frac{2}{b^2}\left[\frac{a\,dz}{z} + b\,dz\right]$$

und durch Integration

$$x = \frac{2}{b^2}[a\,l\,z + bz] + C;$$

$$x = \frac{2}{b^2}\left[a\,l\left(p - \frac{a}{b}\right) + bp - a\right] + C. \tag{7}$$

Eliminiert man nun aus dieser Gleichung (7) und der gegebenen Gleichung (6) die Grösse p, so erhält man das Integral von (5).

II. Es sei ferner zu integrieren

$$y\,dx - x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0. \tag{8}$$

Man erhält zunächst durch Einführung von p

$$(9) \qquad y = x\sqrt{1+p^2}$$

und durch Differentiation

$$dy = dx\sqrt{1+p^2} + x\frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Daher ist, wenn dy durch $p\,dx$ ersetzt wird,

$$\left(p - \sqrt{1+p^2}\right)dx = x\frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Multipliziert man noch auf beiden Seiten mit $p + \sqrt{1+p^2}$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{dx}{x} = -p\,dp - \frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt unter Benutzung von Formel (7), § 90

$$l\,x = \tfrac{1}{2}\left[l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) - p^2 - p\sqrt{1+p^2}\right] + C.$$

Setzt man den Wert $p = \pm\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{x}$ aus (9) hier ein, so erhält man das Integral von (8).

380. Integration der Differentialgleichungen durch Reihen. Bisweilen gelingt es eine Differentialgleichung durch eine konvergente Reihe zu integrieren. Wir zeigen das Verfahren nach der Maclaurin'schen Reihe und nach dem Satze der unbestimmten Koeffizienten.

I. Die Maclaurin'sche Reihe, § 288, Formel (4), ist

$$(1) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

Dafür schreibt man auch häufig

$$(2) \qquad y = y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a (x-a) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

wobei die Bedeutung von $y_a, \left(\frac{dy}{dx}\right)_a, \ldots$ durch Vergleichung mit (1) sich leicht ergibt.

Nach dieser Reihe soll integriert werden die Differentialgleichung

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2x} + y.$$

Man erhält durch Differentiation von (3)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{2x^2} + \frac{3}{2x} + y; \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{x^3} - \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{2x} + y;$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{9}{x^4} + \frac{3}{x^3} - \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{2x} + y;$$

$$\frac{d^5 y}{d x^5} = \frac{36}{x^5} - \frac{9}{x^4} + \frac{3}{x^3} - \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{2x} + y; \text{ u. s. w.}$$

Man bezeichne nun denjenigen Wert von y, der für $x = a$ entsteht, mit y_a und führe diese gleichzeitigen Werte von x und y in die vorstehenden Differentialverhältnisse ein und sodann die entstandenen Resultate in die Reihe (2); man erhält auf diese Weise

$$y = y_a + \left(\frac{3}{2a} + y_a\right)(x-a) + \left(-\frac{3}{2a^2} + \frac{3}{2a} + y_a\right)\frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2}$$
$$+ \left(\frac{3}{a^3} - \frac{3}{2a^2} + \frac{3}{2a} + y_a\right)\frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \left(-\frac{9}{a^4} + \frac{3}{a^3} - \frac{3}{2a^2} + \frac{3}{2a} + y_a\right)\frac{(x-a)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$+ \left(\frac{36}{a^5} - \frac{9}{a^4} + \frac{3}{a^3} - \frac{3}{2a^2} + \frac{3}{2a} + y_a\right)\frac{(x-a)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

In dieser Reihe vertritt die Grösse y_a die Stelle der Integrationskonstanten.

Nimmt man an, es werde für $a = 1$ die Grösse $y_a = 1$, so geht die vorstehende Reihe über in

$$(4) \quad y = 1 + \frac{5}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{1 \cdot 2} + 4\,\frac{(x-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 5\,\frac{(x-1)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + 31\,\frac{(x-1)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

Um zu prüfen, ob die Reihe (4) in dem angegebenen Sinne das Integral von (3) ist, bilde man die Differentialquotienten von (4) und vergleiche sie mit denen aus (3). Die von (4) sind

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2} + (x-1) + 2(x-1)^2 - \frac{5}{6}(x-1)^3 + \frac{31}{24}(x-1)^4 + \ldots$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + 4(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{31}{6}(x-1)^3 + \ldots$$
$$\frac{d^3 y}{dx^3} = +4 - 5(x-1) + \frac{31}{2}(x-1)^2 + \ldots$$
$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -5 + 31(x-1) + \ldots$$

Diese, sowie die aus (3) abgeleiteten Differentialquotienten geben für $x = 1$ und $y = 1$ die folgenden gleichen Werte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 1; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 4; \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = -5; \text{ u. s. w.}$$

Die Reihe (4) ist konvergent für Werte von $(x - 1)$, die zwischen -1 und $+1$ liegen, also für Werte von x zwischen 0 und 2.

II. Behufs der **Integration durch Reihen** wendet man oft mit Vorteil die hypothetische Gleichung

$$(5) \qquad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

an, worin A, B, C, .. konstante, von x und y unabhängige Faktoren bezeichnen, die nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmt werden.

Es sei zu integrieren

$$\frac{dy}{dx} = ax - y^2. \tag{6}$$

Aus (5) folgt $\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$

Setzt man diese beiden Werte von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich, so kommt

$$y^2 = ax - (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots).$$

Ersetzt man hierin y^2 durch den aus (5) hervorgehenden Wert, so erhält man

$$\begin{array}{c|c|l} A^2 + 2ABx + 2AC & x^2 + 2AD & x^3 + \ldots = ax - (B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots) \\ + B^2 & + 2BC & + \ldots \end{array}$$

In dieser Gleichung müssen die Vorzahlen gleich hoher Potenzen der Variabeln gleich sein. Dies führt zu folgenden Relationen

$$B = -A^2, \quad 2AB = a - 2C, \quad 2AC + B^2 = -3D, \ldots$$

$$C = A^3 + \frac{a}{2}, \quad D = -A^4 - \frac{Aa}{3}, \ldots$$

Setzt man diese Werte von B, C, D, .. in (5) ein, so erhält man die gesuchte Reihe

$$y = A - A^2x + \left(A^3 + \frac{a}{2}\right)x^2 - \left(A^4 + \frac{Aa}{3}\right)x^3 + \ldots$$

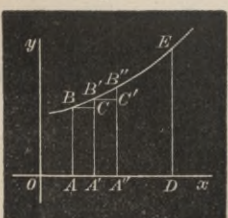
Diese Formel ist das Integral von (6). Die unbestimmte Grösse A bezeichnet die Konstante der Integration.

381. Integration der Differentialgleichungen durch Konstruktion. Es sei eine Gleichung von der allgemeinen Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

gegeben. Man soll durch Konstruktion den Zusammenhang zwischen den Variabeln x, y angeben.

Fig. 126.



Damit die Aufgabe bestimmt wird, muss ein Punkt B (Fig. 126) durch seine Koordinaten $OA = a$, $AB = b$, durch den die aus (1) hervorgehende Kurve BE gehen soll, gegeben sein. Setzt man nun die Werte $x = a$, $y = b$ in (1), so findet man den entsprechenden Wert von $\frac{dy}{dx}$. Dieser Wert ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Kurve im Punkte B mit der Abscissenachse Ox bildet.

Ist deshalb $B B'$ eine Tangente an die Kurve und $B C$ parallel zu $O x$, so ist jener Wert von $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} B' B C$. Lässt man nun a um eine sehr kleine Grösse $\triangle x = A A' = B C$ zunehmen, so wird der Zuwachs $C B'$ der Ordinate $A B$ aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $C B B'$ sehr annähernd erhalten gleich

$$C B' = B C \operatorname{tang} C B B'.$$

Allein $\operatorname{tang} C B B'$ ist berechnet und $\triangle x$ angenommen; also ist auch die Ordinate $A' B' = A B + B' C$ als gefunden zu betrachten. Entsprechende Werte der Gleichung (1) sind also

$$x = a + \triangle x; \quad y = b + \left(\frac{dy}{dx}\right) \triangle x.$$

Setzt man dieses Paar Werte in (1) ein, so erhält man einen neuen Wert von $\frac{dy}{dx}$. Dieser ist die trigonometrische Tangente des Winkels $C' B' B''$, den die Tangente $B' B''$ durch den Punkt B' mit der Abscissenrichtung $B' C'$ bildet. Lässt man also die Abscisse um die sehr kleine Grösse $\triangle x = A' A'' = B' C'$ zunehmen, so erhält man als Zuwachs $C' B''$ der Ordinate

$$C' B'' = B' C' \operatorname{tang} C' B' B''.$$

Hieraus ergibt sich der ganze Wert der Ordinate $A'' B'' = A' B' + C' B''$.

Auf diese Weise kann man eine hinreichende Anzahl von Punkten der Kurve konstruieren. Folglich kann man auch für irgend einen Wert von x den entsprechenden von y finden. Die Resultate werden um so richtiger, je kleiner die Abscissenzuwachse $\triangle x$ genommen werden.

Beispiel. Man soll die Differentialgleichung

$$(2) \qquad 2 x y\, dy - 3 y\, dx + 2 x\, dx = 0$$

konstruieren, unter der Voraussetzung, dass die Kurve durch den Punkt $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ gehe.

Man erhält aus (2)

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2x} - \frac{1}{y}.$$

Für $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ wird $\frac{dy}{dx} = 0{,}5$. Ist deshalb $O A = A B = 1$, so ist $\operatorname{tang} C B B' = 0{,}5$. Nimmt man nun $\triangle x = 0{,}05$, so wird

$$C B' = 0{,}05 \cdot 0{,}5 = 0{,}025,$$
$$A' B' = 1 + 0{,}025 = 1{,}025.$$

Setzt man $x = O A' = 1{,}05$ und $y = 1{,}025$ in (3) ein, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} C' B' B'' = 0{,}452\,962.$$

Nimmt man daher den Zuwachs $A' A'' = 0{,}05$, so wird

$$B'' C' = 0{,}050 \cdot 0{,}452\,962 = 0{,}022\,648,$$
$$A'' B'' = 1{,}025 + 0{,}022\,648 = 1{,}047\,648, \text{ u. s. w.}$$

Auf diese Weise erhält man für 6 auf einander folgende Punkte (x, y) der Kurve

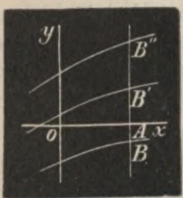
$x = 1$	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
$y = 1$	1,025	1,047 6	1,068 1	1,083 8	1,097 6.

Dieses Kurvenstück kehrt mithin die hohle Seite der x Achse zu.

382. Allgemeines Integral einer Differentialgleichung. Aus § 381 ergibt sich, dass jeder Differentialgleichung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ eine Kurve entspricht. Die Gleichung dieser Kurve ist das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Allein da der Punkt B (Fig. 127), durch den die Kurve gehen soll, beliebig gewählt werden kann, so entsprechen der Differentialgleichung unendlich viele Kurven B, B′, B″, ... Diese Kurven sind in ihrer Lage und im allgemeinen auch in ihrem Laufe verschieden. Sie haben die allen gemeinsame Eigenschaft, dass ihre Neigung zur Abscissenachse für irgend einen Punkt der Kurven eine Funktion ist der Koordinaten dieses Punktes, d. h. sobald die Koordinaten eines Punktes gewählt sind, ist auch der Lauf der Kurve, die durch denselben geht, bestimmt. Das Integral, um ebenso allgemein zu sein wie die Differentialgleichung, muss daher alle diese Kurven darstellen. Dies ist der Fall, wenn das Integral eine willkürliche Konstante enthält, die nicht in der Differentialgleichung vorkommt und durch deren Wahl zu irgend einer Kurve übergegangen werden kann.

Fig. 127.



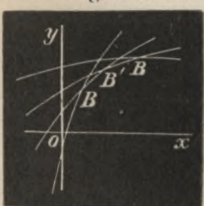
Der fragliche Uebergang ist aber auch in der That durch eine einzige wirkliche Konstante möglich. Um das einzusehen, ziehe man in der Ebene der Kurven eine Gerade AB′B″.. parallel zur Achse 0y, im Abstande $x = a$ zur Ordinatenachse. Alle Kurven werden diese Gerade schneiden und zwar in Punkten, die verschiedene Abstände von der Abscissenachse haben. Sobald nun auf dieser Geraden die Abstände AB, AB′, .. gewählt sind, ist auch die entsprechende Kurve bestimmt.

Das Integral mit der willkürlichen Konstanten heisst das allgemeine Integral. Legt man der Konstanten einen bestimmten Wert bei, so wird das Integral zu einem partikulären (§ 92).

383. Singuläres Integral einer Differentialgleichung. Es sei

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

Fig. 128.



das allgemeine Integral einer Differentialgleichung und die Grösse c die Konstante der Integration. Gibt man dieser Konstanten verschiedene Werte, so erhält man aus dem allgemeinen Integral (1) ebenso viele partikuläre Integrale. Diese stellen Kurven (Fig. 128) derselben Art dar, die sich möglicherweise schneiden können. Lässt man in dem Falle, dass sie sich schneiden, die Grösse c durch unendlich kleine Intervalle sich ändern, so werden die aufeinander folgenden Durchschnittspunkte B, B', B'',.. der entsprechenden Kurven eine neue Kurve bilden, die jede der andern Kurven berührt und deshalb einhüllende Kurve genannt wird. Die Gleichung dieser einhüllenden Kurve heisst ein singuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung. Das Differentialverhältnis $\frac{dy}{dx}$, wie es aus dem singulären und dem allgemeinen Integral (1) folgt, erhält den gleichen Wert für den Berührungspunkt der einhüllenden und der eingehüllten Kurve.

Um das singuläre Integral aus dem allgemeinen zu bestimmen, gehe man von einer Kurve aus, die einem bestimmten Werte von c entspricht, lasse sodann c in $c + dc$ übergehen; dann verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$F(x, y, c) + \frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} dc = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve dar, die der angenommenen unendlich nahe liegt. Durch Vergleichung von (2) und (1) folgt, dass der zweite Teil von (2) gleich Null sein muss. Dies ist der Fall, wenn entweder $dc = 0$ oder wenn das Differentialverhältnis

$$\frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = 0 \tag{3}$$

gesetzt wird. Aus $dc = 0$ folgt, dass c konstant sei, was zu keiner weitern Relation führt. Eliminiert man dagegen die Grösse c aus (1) und (3), wodurch man die Grössen x, y in beiden Gleichungen als gleich, d. h. als Koordinaten der Durchschnittspunkte zweier Kurven ansieht, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, die der einhüllenden Kurve angehört.

Man differentiiere daher das allgemeine Integral (1) einer Differentialgleichung in Hinsicht der Konstanten c, setze das entstandene Differentialverhältnis = 0 und eliminiere hieraus und aus (1) die Konstante c. Erhält man auf diese Weise eine Relation zwischen x und y, die die willkürliche Konstante c nicht mehr enthält und aus (1) nicht dadurch abgeleitet werden kann, dass man der Grösse c einen bestimmten Wert beilegt, so ist diese das singuläre Integral der Differentialgleichung. Erhält man auf diesem Wege keine Relation zwischen x und y, so durchschneiden sich die Kurven der partikulären Integrale nicht, somit fehlt auch ein singuläres Integral.

Bei Anwendung dieser Regel ist darauf zu achten, dass die Gleichung (1) nicht aufgelöst sei in Hinsicht c, also nicht in der Form

$$c + \varphi(x, y) = 0$$

vorkomme. Denn in dieser Form erhielte man

$$\frac{\partial [c + \varphi(x, y)]}{\partial c} = 1$$

statt der Gleichung (3). Es könnte also c nicht eliminiert werden.

Das singuläre Integral nennt man auch die besondere Auflösung der Differentialgleichung.

Beispiel 1. Es sei

$$y = a x + a^2 \tag{4}$$

das allgemeine Integral einer gewissen Differentialgleichung und a die Konstante der Integration. Diese Gleichung stellt eine gerade Linie dar. Lässt man a sich stetig ändern von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man unendlich viele gerade Linien. Die Durchschnittspunkte dieser Geraden bilden eine Kurve. Um die Gleichung dieser Kurve zu erhalten, differentiiere man (4) in Hinsicht a und setze das Differentialverhältnis $= 0$. Man erhält

$$x + 2a = 0. \tag{5}$$

Eliminiert man a aus (4) und (5), so folgt

$$y = -\frac{x^2}{4}. \tag{6}$$

Diese Gleichung ist das singuläre Integral. Die einhüllende Kurve ist somit eine Parabel, deren Scheitel im Anfangspunkte liegt und deren Achse mit der negativen Richtung der Ordinatenachse zusammenfällt.

Das Differentialverhältnis von (4) ist $\frac{dy}{dx} = a$ und das von (6) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}$. Für $a = -\frac{x}{2}$, welcher Wert aus (5) folgt, sind diese zwei Differentialverhältnisse einander gleich. Das Eigentümliche des singulären Integrals besteht hiernach darin, dass sein Differentialverhältnis gleich ist demjenigen des allgemeinen Integrals für einen bestimmten Wert von x.

Beispiel 2. Es sei die Differentialgleichung

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

gegeben. Man dividiere durch dx, so dass kommt

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{7}$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, so geht diese Gleichung über in

$$y - px = a\sqrt{1 + p^2},$$

und indem man differentiiert,

$$dy - x\,dp - p\,dx = \frac{a p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Da aber $dy = p\,dx$, so folgt hieraus

$$x\,dp + \frac{a p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt, wegen des gemeinschaftlichen Faktors dp, in folgende zwei Gleichungen

$$dp = 0, \quad x + \frac{a p}{\sqrt{1+p^2}} = 0. \tag{8}$$

Aus $d p = 0$ folgt, dass p gleich einer konstanten Grösse c sei. Setzt man c für p in (7) ein, so erhält man

$$(9) \qquad p - c x = a \sqrt{1 + c^2}.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (8) folgt dagegen

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wobei jedoch, vermöge der Bedingung, die in der zweiten der Gleichungen (8) ausgedrückt ist, nur das untere Zeichen genommen werden darf. Hierfür wird die Gleichung (7) zu

$$(10) \qquad y + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad y^2 + x^2 = a^2.$$

Nun können die Gleichungen (9) und (10) als Integrale von (7) angesehen werden. Gleichung (9) enthält eine willkürliche Konstante, die der Gleichung (10) fehlt. Die letztere geht nicht aus der ersteren hervor, indem man der Konstanten c einen besondern Wert beilegt, d. h. es ist (10) kein partikuläres Integral von (9).

Um zu zeigen, dass (10) ein singuläres Integral zu (9) ist, differentiiere man (9) in Hinsicht c und setze das Differentialverhältnis $= 0$; dann kommt

$$(11) \qquad -x = \frac{a c}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

Eliminiert man c aus (9) und (11), so erhält man in der That die Gleichung (10). Das allgemeine Integral (9) und das singuläre (10) geben denselben Wert des Differentialverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ für

$$c^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2},$$

welcher Wert von c^2 aus (11) folgt. Die Geraden, die durch Gleichung (9) für verschiedene Werte von c dargestellt werden, berühren sämtlich den Kreis der Gleichung (10).

VIII. Differentialgleichungen der zweiten Ordnung mit zwei Variabeln.

384. Form der Gleichungen. Eine Gleichung von der Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

heisst eine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung zwischen den zwei Variabeln x und y, weil das höchste Differentialverhältnis, das in ihr vorkommt, von dieser Ordnung ist. Hiernach wird die allgemeine Form der Differentialgleichung der zweiten Ordnung sein

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0,$$

wofür man auch schreiben kann

$$f(x, y, dx, dy, d^2 y) = 0 \text{ oder } f(x, y, y', y'') = 0.$$

Gelingt es, diese Gleichung zu integrieren, so entsteht eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, von der Form $\varphi(x, y, y', c) = 0$, die ein erstes Integral der Gleichung (1) heisst. Kann diese wieder integriert werden, so erhält man die primitive Gleichung oder das zweite Integral. Da bei jeder dieser Integrationen, der Allgemeinheit des Resultates wegen, eine willkürliche Konstante in die Gleichung treten muss, so wird das zweite Integral einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwei solche willkürliche Konstante enthalten, also die Form $F(x, y, c, c') = 0$ haben.

Die Gleichung (1) kann in ihrer vollen Allgemeinheit nicht integriert werden. Die Behandlung beschränkt sich daher auf gewisse spezielle Fälle. Sie entstehen, wenn eine oder zwei oder alle drei der Grössen $x, y, \frac{dy}{dx}$ in der Gleichung fehlen. Die zu integrierenden Gleichungen sind also

$$f(y'') = 0; \quad f(x, y'') = 0; \quad f(y, y'') = 0;$$
$$f(y', y'') = 0; \quad f(x, y', y'') = 0; \quad f(y, y', y'') = 0;$$
$$f(x, y, y'') = 0; \quad f(x, y, y', y'') = 0.$$

Diese Gleichungen werden in solche der ersten Ordnung mittels gewisser Substitutionen verwandelt, die im Folgenden, soweit hier nötig, gezeigt werden. Am allgemeinsten wird die Substitution verwertet

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{woraus folgt} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

385. Integration der ersten Gleichung. Diese wird sein

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + a = 0,$$

worin a eine Konstante bezeichnet. Für $dy = p\,dx$ geht sie über in

$$\frac{dp}{dx} = -a, \quad \text{oder} \quad dp = -a\,dx.$$

Folglich erhält man durch Integration

$$p = -ax + c.$$

Führt man hier den Wert von p ein, so wird

$$\frac{dy}{dx} = -ax + c \quad \text{oder} \quad dy = (-ax + c)\,dx;$$

daher ergibt sich durch Integration

$$(2) \qquad y = -\frac{ax^2}{2} + cx + c'.$$

Diese Gleichung (2) ist das Integral von (1). Denn durch zweimalige Differentiation von (2) entsteht die Gleichung (1). Das Integral, geometrisch dargestellt, liefert eine Parabel.

Wird $a = 0$ vorausgesetzt, so entsteht die Gleichung einer Geraden.

386. Integration der zweiten Gleichung. Diese Gleichung hat die Form

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \varphi(x) = 0.$$

Setzt man $dy = p\,dx$, so geht sie über in

$$dp = -\varphi(x)\,dx,$$

woraus man durch Integration erhält

$$p = -\int \varphi(x)\,dx + c.$$

Gesetzt man finde $\int \varphi(x)\,dx = f(x)$, so wird, wenn man p durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzt,

$$dy = -f(x)\,dx + c\,dx$$

und durch Integration

$$(2) \qquad y = -\int f(x)\,dx + cx + c'.$$

Diese Gleichung ist nun das gesuchte Integral von (1).

Beispiel. Es sei $\varphi(x) = -ax$, also $\frac{d^2 y}{d x^2} - ax = 0$; man erhält nach diesem Verfahren

$$y = \frac{a x^3}{6} + cx + c'.$$

387. Integration der dritten Gleichung. Ihre allgemeine Form wird sein

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + a\,\varphi(y) = 0.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{d^2 y}{dx} = dp$, so lautet (1)

$$\frac{dp}{dx} + a\,\varphi(y) = 0.$$

Da aber $dx = \frac{dy}{p}$, so geht diese Gleichung über in

$$p\,dp = -a\,\varphi(y)\,dy,$$

woraus sich durch Integration ergibt

$$p^2 = -2a \int \varphi(y)\,dy + c.$$

Bezeichnet man $\int \varphi(y)\,dy$ mit $f(y)$, so wird

$$p = \sqrt{c - 2a\,f(y)},$$

woraus, indem man p ersetzt durch $\frac{dy}{dx}$, folgt

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{c - 2af(y)}};$$

hieraus entsteht als Integral der Gleichung (1)

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{c - 2af(y)}} + c'. \tag{2}$$

Beispiel. Ist $\varphi(y) = \mp b^2 y$, so erhält man folgende in den Anwendungen vorkommende Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} \mp b^2 y = 0. \tag{3}$$

Durch Einführen von p ergibt sich

$$p\,dp = \pm b^2 y\,dy; \quad \frac{p^2}{2} = \pm \frac{b^2y^2}{2} + c,$$

oder indem man mit 2 multipliziert und die willkürliche Konstante $2c = a^2$ setzt,

$$p = \sqrt{a^2 \pm b^2 y^2}$$

und hieraus

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{a^2 \pm b^2y^2}}. \tag{4}$$

Diese Gleichung ist nun zu integrieren. Das Integral hängt aber vom Zeichen der Grösse b^2 ab.

I. Es sei b^2 positiv; dann gibt die Integration von (4) nach § 86

$$x = \frac{1}{b}\, l\left(by + \sqrt{a^2 + b^2y^2}\right) + c'. \tag{5}$$

Dieses Integral der gegebenen Gleichung enthält die willkürlichen Konstanten a und c′.

Die Gleichung (5) kann auch auf folgende Form gebracht werden; setzt man c′ auf die linke Seite, multipliziert mit b und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so kommt

$$e^{bx - bc'} = by + \sqrt{a^2 + b^2y^2}.$$

Nun ist aber $e^{bx - bc'} = e^{bx} \cdot e^{-bc'} = m e^x \cdot m' = M e^x$, wo m, m′ und M Konstante bezeichnen. Führt man diesen Wert ein, so wird

$$Me^x - by = \sqrt{a^2 + b^2y^2},$$

woraus folgt, wenn man diese Gleichung quadriert und nach y auflöst,

$$y = \frac{M}{2b} e^x - \frac{a^2}{2bM} e^{-x}.$$

Bezeichnet man schliesslich die konstanten Faktoren von e^x und e^{-x} mit A und B, so erhält man als gesuchte Gleichung

$$y = Ae^x + Be^{-x}. \tag{6}$$

II. Es sei b^2 negativ; dann erhält man durch Integration von (4) nach § 86

$$x = \frac{1}{b} \arcsin \frac{b\,y}{a} + c.$$

Hieraus folgt, indem man die willkürliche Konstante c versetzt, mit b multipliziert und vom Bogen zum Sinus übergeht,

$$\sin(b\,x - b\,c) = \frac{b\,y}{a}.$$

Allein durch Entwickelung des Sinus erhält man

$$y = \frac{a}{b}(\sin b\,x \cos b\,c - \cos b\,x \sin b\,c)$$

und hieraus, wenn man die konstanten Faktoren von $\sin b\,x$ und $\cos b\,x$ mit A und B bezeichnet, als gesuchtes Integral

$$y = A \sin b\,x + B \cos b\,x. \tag{7}$$

Die Gleichung (3) kann auch in folgender Weise integriert werden. Führt man eine neue Variable z ein, die der Bedingung

$$y = e^{\int z\,d\,x} \tag{8}$$

entspricht, so wird hieraus zunächst das zweite Differentialverhältnis abzuleiten sein. Dabei beachte man, dass das Differential von $\int z\,d\,x$ gleich $z\,d\,x$ ist. Man erhält

$$\frac{d\,y}{d\,x} = z\,e^{\int z\,d\,x}; \qquad \frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{d\,z}{d\,x}\,e^{\int z\,d\,x} + z^2\,e^{\int z\,d\,x},$$

somit durch Einführen des Wertes von y aus (8) und des vorstehenden von $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ in (3)

$$\frac{d\,z}{d\,x} + z^2 \mp b^2 = 0.$$

Nimmt man nun der Einfachheit wegen z konstant an, so wird in der letzten Gleichung $d\,z = 0$; also geht sie über in

$$z^2 = \pm\, b^2.$$

Hier sind wieder die beiden Zeichen von b^2 aus einander zu halten.

I. Ist b^2 positiv, so wird $z = \pm\, b$; daher der Exponent von (8)

$$\int b\,d\,x = b\,x + c \text{ und } \int - b\,d\,x = -\,b\,x + c'.$$

Es entstehen daher zwei Werte für y, die mit y_1 und y_2 bezeichnet seien. Diese Werte sind nach (8)

$$y_1 = e^{b\,x + c} = A\,e^{x}; \qquad y_2 = e^{-\,b\,x + c'} = B\,e^{-\,x}.$$

Jeder dieser Werte ist ein partikuläres Integral von (1), enthält jedoch nur je eine der willkürlichen Konstanten A und B. Daher wird das Integral die Summe dieser partikulären Integrale sein. Diese Summe entspricht der Gleichung (1) in der That in allgemeinster Weise; daher ist

$$y = A e^{x} + B e^{-x},$$

eine Gleichung, die genau mit (6) übereinstimmt.

II. Ist b^2 negativ, so wird $z = \pm i$; daher

$$\int b i d x = b x i + c \text{ und } \int - b i d x = - b i + c'.$$

Die beiden Werte von y sind daher

$$y_1 = e^{bxi+c} = m e^{bxi}; \quad y_2 = n e^{-bxi},$$

worin m und n willkürliche Konstante bezeichnen. Daher ist das allgemeine Integral

$$(9) \qquad y = m e^{bxi} + n e^{-bxi}.$$

Nach dem Moivre'schen Satze (§ 79) ist aber

$$e^{bxi} = \cos b x + i \sin b x; \quad e^{-bxi} = \cos b x - i \sin b x.$$

Daher folgt durch Einführen dieser Werte in (9)

$$y = (m + n) \cos b x + (m - n) i \sin b x,$$

oder wenn die Faktoren von $\sin b x$ und $\cos b x$ mit A und B bezeichnet werden,

$$y = A \sin b x + B \cos b x.$$

Diese Gleichung stimmt mit (7) überein.

388. Integration der vierten Gleichung. Es sollen zunächst folgende zwei Beispiele integriert werden.

I. Gegeben

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + a \frac{d y}{d x} = 0,$$

worin a eine Konstante bezeichnet. Führt man $p = \frac{d y}{d x}$ ein, so folgt

$$\frac{d p}{d x} + a p = 0$$

und durch Sonderung der Veränderlichen und nachherige Integration

$$\frac{d p}{p} = - a d x; \quad l p = c - a x.$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$p = e^{c - ax}; \quad d y = e^{c - ax} d x;$$

daher folgt durch Integration als gesuchte Gleichung

$$(2) \qquad y = - \frac{1}{a} e^{c - ax} + c',$$

worin c und c' die willkürlichen Konstanten bezeichnen.

II. Zum Integrieren sei vorgelegt

$$(3) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} - a\sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2} = 0.$$

Für $dy = p\,dx$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1 + p^2} \text{ oder } a\,dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}};$$

daher folgt durch Integration die Gleichung

$$a x + c = l\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right),$$

worin c die willkürliche Konstante bezeichnet. Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$e^{ax+c} = p + \sqrt{1 + p^2}.$$

Bringt man p auf die linke Seite und quadriert, so kommt

$$e^{2ax+2c} - 2 p e^{ax+c} = 1,$$

und indem man p ersetzt und durch e^{ax+c} dividiert,

$$2\,dy = (e^{ax+c} - e^{-ax-c})\,dx.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax+c} + e^{-ax+c}) + c'.$$

Setzt man noch $e^c = A$, so wird diese Gleichung als gesuchtes Integral zu

$$(4) \qquad y = \frac{1}{2a}\left(A e^{ax} + \frac{1}{A} e^{-ax}\right) + c'.$$

Hat man allgemein

$$(5) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} = f\left(\frac{d y}{d x}\right),$$

so gibt die Substitution $\frac{dy}{dx} = p$ zunächst

$$\frac{dp}{dx} = f(p) \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dp}{f(p)}, \quad \text{woraus sofort}$$

$$dy = \frac{p\,dp}{f(p)}$$

folgt. Die Integration dieser beiden Gleichungen gibt

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + c; \quad y = \int \frac{p\,dp}{f(p)} + c';$$

gelingt es aus diesen beiden Gleichungen p zu eliminieren, so ist die sich ergebende Gleichung das Integral von (5).

389. Integration der fünften Gleichung. Diese enthält die Grössen x, y' und y'' und habe die Form

$$(1)\qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + f(x) \frac{d y}{d x} + \varphi(x) = 0.$$

Setzt man $d y = p\, d x$, so geht sie über in folgende der ersten Ordnung zwischen x und p

$$(2)\qquad \frac{d p}{d x} + p\, f(x) + \varphi(x) = 0.$$

Kann man diese Gleichung integrieren und p durch x darstellen, so entsteht ein Ausdruck von der Form $p = F(x, c)$ und daraus, wenn p ersetzt wird, $d y = F(x, c)\, d x$; daher durch Integration

$$(3)\qquad y = \int F(x, c)\, d x + c'.$$

Diese Gleichung ist das Integral der gegebenen Gleichung (1).

Folgt dagegen aus dem Integral von (2) die Gleichung $x = F_1(p, c)$, so entsteht daraus durch Differentiation

$$d x = F'_1(p, c)\, d p.$$

Da aber $d x = \frac{d y}{p}$, so geht diese Gleichung über in

$$d y = p\, F'_1(p, c)\, d p.$$

Kann man diese Gleichung integrieren, so eliminiere man aus ihrem Integral und aus dem Werte von $x = F_1(p, c)$ die Grösse p, und erhält den Zusammenhang zwischen x und y.

Beispiel. Es sei zu integrieren

$$(4)\qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + x\left(a + \frac{d y}{d x}\right) = 0.$$

Durch Einführen von p erhält man sofort

$$\frac{d p}{d x} + x(a + p) = 0; \qquad \frac{d p}{a + p} = - x\, d x.$$

Folglich durch Integration

$$l(a + p) + l\, c = - \frac{x^2}{2},$$

wo $l\, c$ die willkürliche Konstante bezeichnet. Allein es ist $l(a + p) + l\, c = l\, c(a + p)$. Geht man sodann von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$(5)\qquad c\left(a + \frac{d y}{d x}\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}; \qquad c\, d y = \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - c\, a\right) d x.$$

Lässt sich das Integral von $e^{-\frac{x^2}{2}} d x$ darstellen, so ist dadurch das Integral der Gleichung (4) gewonnen.

Entwickelt man die Exponentialgrösse nach § 68 in eine Reihe, so kommt

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 8} x^6 + \ldots$$

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 8} \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Daher gibt die zweite der Gleichungen (5)

$$(6) \qquad y = -ax + \frac{1}{c}\left(x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \ldots\right) + c'.$$

Diese Gleichung ist in der That das Integral von (4), was sich leicht durch Vornahme der Probe ergibt. Leitet man nämlich aus (6) die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ab und setzt ihre Werte in (4) ein, so heben sich die Glieder gegenseitig auf.

390. Integration der sechsten Gleichung. Die Gleichung habe die Form

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + A \frac{dy}{dx} + By = 0.$$

Hierin können nun die Grössen A und B konstant oder auch Funktionen von y sein, dürfen aber x nicht enthalten.

I. Es seien A und B konstant. Da in (1) die Grössen y und ihre Ableitungen in der ersten Potenz vorkommen, nennt man sie eine lineare Gleichung.

Behufs der Integration nehme man an

$$(2) \qquad y = c e^{mx},$$

wo c und m konstante Zahlen bezeichnen; dann wird sein

$$\frac{dy}{dx} = c m e^{mx}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = c m^2 e^{mx}.$$

Setzt man diese Werte in (1) ein, so geht diese Gleichung über in

$$(3) \qquad m^2 + Am + B = 0.$$

Hiernach ist die Grösse m in (2) nur abhängig von A und B. Die Wurzeln der Gleichung (3) sind

$$(4) \qquad m = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}.$$

Hier begründet nun die Grösse unter dem Wurzelzeichen drei Fälle.

Erster Fall: $\frac{A^2}{4} - B$ sei positiv. Es entstehen zwei Wurzelwerte für m. Sind diese a und b, so entsprechen ihnen nach (2) auch zwei Werte von y, die mit $y_{,}$ und $y_{,,}$ bezeichnet seien, daher gibt (2)

$$y_{,} = c e^{ax}; \quad y_{,,} = c' e^{bx}.$$

Jeder dieser Werte leistet der Gleichung (1) Genüge; dasselbe ist auch der Fall mit ihrer Summe

$$y = c\,e^{a x} + c'\,e^{b x}, \tag{5}$$

die mit ihren zwei willkürlichen Konstanten c und c' als das allgemeine Integral von (1) zu betrachten ist.

Zweiter Fall: $\frac{A^2}{4} - B$ sei negativ. Es entstehen zwei Wurzelwerte von der Form

$$a + b\,i \quad \text{und} \quad a - b\,i.$$

Daher werden die entsprechenden Werte von y sein

$$y_{,} = c\,e^{a x} \cdot e^{b x i}; \quad y_{,,} = c'\,e^{a x} \cdot e^{-b x i},$$

die nach § 79 übergehen in

$$y_{,} = c\;e^{a x}(\cos b\,x + i \sin b\,x);$$
$$y_{,,} = c'\,e^{a x}(\cos b\,x - i \sin b\,x).$$

Daher lautet die Summe $y_{,} + y_{,,}$ oder das allgemeine Integral

$$y = e^{a x}[(c + c')\cos b\,x + i\,(c - c')\sin b\,x].$$

Bezeichnet man nun die konstanten Faktoren von $\cos b\,x$ und $\sin b\,x$ mit M und N, so wird

$$y = e^{a x}(M \cos b\,x + N \sin b\,x). \tag{6}$$

Dritter Fall: $\frac{A^2}{4} - B = 0$. Dann wird jede Wurzel der Gleichung (4) $= -\frac{A}{2}$ und die Gleichung (5) gibt als Integral

$$y = (c + c')\,e^{-\frac{A x}{2}} = c''\,e^{-\frac{A x}{2}}.$$

Allein hierin kommt nur eine willkürliche Konstante c'' vor. Es kann also dieser Wert von y nicht als das allgemeine Integral von (1) angesehen werden.

Macht man daher statt der Voraussetzung (2) die folgende

$$y = (c\,x + c')\,e^{m x}, \tag{7}$$

so leistet dieser Wert unter der Voraussetzung $m = -\frac{A}{2}$ der Gleichung (1) Genüge. Denn es folgt aus (7)

$$\frac{d\,y}{d\,x} = c\,e^{m x} + (c\,x + c')\,m\,e^{m x},$$

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = 2\,c\,m\,e^{m x} + (c\,x + c')\,m^2\,e^{m x}.$$

Führt man diese Werte in (1) ein, so gibt die linke Seite

$$(c\,x + c')[m^2 + A\,m + B] + c\,(2\,m + A).$$

Da nun der Voraussetzung nach $m = -\frac{A}{2}$, so werden die zwei letzten Klammerfaktoren $= 0$, also wird die ganze linke Seite von (1) zu Null.

Setzt man daher $m = -\frac{A}{2}$ in (7) ein, so wird das allgemeine Integral von (1) sein

$$(8) \qquad y = (c\,x + c')\,e^{-\frac{A\,x}{2}}.$$

II. Es seien A und B Funktionen von y. Man habe

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + f(y)\frac{d y}{d x} + \varphi(y) = 0.$$

Für $d y = p\,d x$ wird diese Gleichung sein

$$\frac{d p}{d x} + f(y)\,p + \varphi(y) = 0.$$

Ersetzt man hierin noch $d x$ durch $\frac{d y}{p}$, so erhält man die Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und p

$$p\,d p + p\,f(y)\,d y + \varphi(y)\,d y = 0.$$

Kann diese Gleichung integriert werden, so verfahre man damit entsprechend wie mit der Gleichung (2) in § 389.

Beispiel. Ist gegeben

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} - (a + y)\frac{d y}{d x} = 0,$$

so wird

$$d p = (a + y)\,d y; \quad p = a\,y + \frac{y^2}{2} + c,$$

und indem p ersetzt wird,

$$(2) \qquad d x = \frac{2\,d y}{y^2 + 2\,a\,y + 2\,c}.$$

Dieses Differential kann wie folgt auf die Form $\frac{d z}{1 + z^2}$ gebracht werden. Zunächst ist

$$2\,c + 2\,a\,y + y^2 = (2\,c - a^2) + (a + y)^2$$
$$= (2\,c - a^2)\left[1 + \left(\frac{a + y}{\sqrt{2\,c - a^2}}\right)^2\right].$$

Setzt man nun $\frac{a + y}{\sqrt{2\,c - a^2}} = z$, so wird

$$d y = d z\,\sqrt{2\,c - a^2}.$$

Führt man diese Werte in (2) ein, so folgt

$$dx = \frac{2}{\sqrt{2c - a^2}} \frac{dz}{1 + z^2},$$

also durch Integration als gesuchte Gleichung

$$x = \frac{2}{\sqrt{2c - a^2}} \operatorname{arctang} \frac{a + y}{\sqrt{2c - a^2}} + c'.$$

391. Integration der siebenten Gleichung. Diese Gleichung sei

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a y f(x) = 0.$$

Setzt man $y = e^z$, wo z eine Funktion von x sein soll, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} e^z; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} e^z + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 e^z$$

und durch Einführen dieser Werte in die gegebene Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + a f(x) = 0.$$

Wenn $\frac{dz}{dx} = p$ angenommen wird, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{dp}{dx} + p^2 + a f(x) = 0,$$

also in eine solche der ersten Ordnung, die indessen nur in besondern Fällen integriert werden kann.

392. Integration der achten Gleichung. Diese Gleichung habe die Form

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 f(x) \frac{dy}{dx} + y \varphi(x) = 0.$$

Man suche sie auf eine der früheren Formen zurückzuführen, was durch verschiedene Substitutionen erreicht wird.

I. Es sei

$$(2) \qquad y = u z,$$

in welcher Gleichung u und z von x abhängige Grössen bezeichnen. Durch Differentiation (2) folgt

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = z \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{dz}{dx} + u \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

Führt man diese Werte in (1) ein, so kommt

$$(3) \quad u \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\left[\frac{du}{dx} - u f(x)\right] \frac{dz}{dx} + z \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - 2 f(x) \frac{du}{dx} + u \varphi(x)\right] = 0.$$

Wählt man die Grösse u so, dass sie der Bedingung

$$\frac{d u}{d x} - u f(x) = 0 \tag{4}$$

entspricht, so verschwindet in (3) das Glied mit dem Faktor $\frac{d z}{d x}$. Aus (4) aber folgt sofort

$$\frac{d u}{u} = f(x) d x; \quad l u = \int f(x) d x,$$

und daher, wenn von den Logarithmen zu den Zahlen übergegangen wird,

$$u = e^{\int f(x) d x}. \tag{5}$$

Durch diesen Wert von u kann nun die Gleichung (3) umgeformt werden. Zunächst folgt aus (5) durch Differentiation

$$\frac{d u}{d x} = f(x) e^{\int f(x) d x}; \quad \frac{d^2 u}{d x^2} = [f'(x) + f(x)^2] e^{\int f(x) d x}.$$

Mittels dieser Werte und derjenigen aus (5) und (4) geht Gleichung (3) über in

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + [f'(x) - f(x)^2 + \varphi(x)] z = 0, \tag{6}$$

welche Gleichung mit der des § 391 übereinstimmt. Wenn in besondern Fällen die Klammergrösse konstant wird, so stimmt die Gleichung mit der in § 387 behandelten überein.

II. Es sei ferner

$$y = u e^v, \tag{7}$$

wo u und v Funktionen von x sein sollen. Die Differentiation von (7) gibt

$$\frac{d y}{d x} = e^v \frac{d u}{d x} + e^v u \frac{d v}{d x};$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = e^v \frac{d^2 u}{d x^2} + 2 e^v \frac{d u}{d x} \frac{d v}{d x} + e^v u \frac{d^2 v}{d x^2} + e^v u \left(\frac{d v}{d x}\right)^2.$$

Durch Einführen des Wertes von y aus (7) und dessen Ableitungen in (1) kommt

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + 2 \frac{d u}{d x} \frac{d v}{d x} + u \left(\frac{d v}{d x}\right)^2 - 2 f(x) \left(\frac{d u}{d x} + u \frac{d v}{d x}\right) + u \left(\frac{d^2 v}{d x^2} + \varphi(x)\right) = 0. \tag{8}$$

Nun bestimme man die Grösse v dadurch, dass man die letzte Klammergrösse zu Null macht. Dies gibt

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \varphi(x) = 0. \tag{9}$$

Diese Gleichung stimmt nun der Form nach mit der in § 386 überein. Man erhalte durch zweimalige Integration von (9)

$$(10)\qquad v = F(x),$$

also auch durch Differentiation dieser Gleichung

$$\frac{dv}{dx} = F'(x).$$

Mit Hilfe dieser Werte und der Relation (9) geht nun Gleichung (8) über in

$$(11)\quad \frac{d^2 u}{dx^2} + 2\,[F'(x) - f(x)]\,\frac{du}{dx} + [F'(x)^2 - 2\,f(x)\,F'(x)]\,u = 0.$$

Diese Gleichung hat die nämliche Form wie (1), allein die Klammergrössen können unter Umständen auf spezielle Formen führen.

Gesetzt man finde aus (11) als Integral $u = X$, so erhält man schliesslich, indem man diesen Wert von u und denjenigen von v aus (10) in (7) einführt, das gesuchte Integral

$$y = X\,e^{F(x)}.$$

B e i s p i e l. Es sei die Gleichung zu integrieren

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\,\frac{dy}{dx} + \left[\frac{n(n-1)}{x^2} + b^2\right] y = 0.$$

Durch Vergleichung mit (1) ergibt sich

$$f(x) = -\frac{n}{x};\quad \varphi(x) = \frac{n(n-1)}{x^2} + b^2.$$

Benutzt man die erstere der beiden Substitutionen, so wird der Exponent in Gleichung (5)

$$\int f(x)\,dx = \int -n\frac{dx}{x} = -n\,l\,x.$$

Daher gibt Gleichung (5)

$$u = e^{-n\,l\,x}.$$

Man kann aber diese Exponentialgrösse noch umformen. Nimmt man nämlich die Logarithmen, so wird $l\,u = -n\,l\,x = l\,x^{-n}$. Daher, indem man wieder zu den Zahlen zurückgeht,

$$(12)\qquad u = x^{-n}.$$

Zur Bestimmung der Klammergrösse in (6) hat man

$$f'(x) - f(x)^2 + \varphi(x) = \frac{n}{x^2} - \frac{n^2}{x^2} + \frac{n(n-1)}{x^2} + b^2 = b^2.$$

Daher geht Gleichung (6) über in

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + b^2 z = 0,$$

deren Integral nach Formel (7) des § 387 ist

$$(13)\qquad z = A \sin b x + B \cos b x.$$

Da aber nach (2) sein soll $y = u z$, so wird durch Multiplikation der Gleichungen (12) und (13) das gesuchte Integral sein

$$y = x^{-n} (A \sin b x + B \cos b x).$$

393. Ableitung des allgemeinen Integrals aus einem partikulären. Für die Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + f(x) \frac{d y}{d x} + y \varphi(x) = 0 \tag{1}$$

sei ein partikuläres Integral gefunden, d. h. ein solches, das der Gleichung (1) Genüge leistet und nur e i n e willkürliche Konstante enthält.

Ist P dieses partikuläre Integral, so wird P eine Funktion von x sein, so beschaffen, dass, wenn die Grössen P, dP und $d^2 P$ in (1) eingesetzt werden, der Ausdruck links identisch Null wird.

Nun sei aus P ein allgemeines Integral zu (1) abzuleiten. Man gehe von der Voraussetzung aus, es lasse sich darstellen durch

$$y = P z, \tag{2}$$

worin der Faktor z eine Funktion von x bezeichnet, die bestimmt werden soll. Durch Differentiation von (2) erhält man

$$\frac{d y}{d x} = P \frac{d z}{d x} + z \frac{d P}{d x},$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = P \frac{d^2 z}{d x^2} + 2 \frac{d P}{d x} \frac{d z}{d x} + z \frac{d^2 P}{d x^2}.$$

Führt man diese Werte von y, $\frac{d y}{d x}$ und $\frac{d^2 y}{d x^2}$ in (1) ein, so kommt

$$z \left(\frac{d^2 P}{d x^2} + f(x) \frac{d P}{d x} + P \varphi(x) \right) + P \frac{d^2 z}{d x^2} + \left(2 \frac{d P}{d x} + P f(x) \right) \frac{d z}{d x} = 0.$$

Hier ist nun die erste Klammergrösse identisch $= 0$, weil P ein Integral von (1) ist, ihr also Genüge leistet. Daher muss sein

$$P \frac{d^2 z}{d x^2} + \left(2 \frac{d P}{d x} + P f(x) \right) \frac{d z}{d x} = 0.$$

Setzt man nun $\frac{d z}{d x} = p$, so geht diese Gleichung über in

$$P \frac{d p}{d x} + \left(2 \frac{d P}{d x} + P f(x) \right) p = 0$$

und durch Sonderung der Veränderlichen in

$$\frac{d p}{p} + 2 \frac{d P}{P} + f(x) d x = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$l p + 2 l P - l k = - \int f(x) d x,$$

worin $l\,k$ die Konstante der Integration bezeichnet. Das Integral rechts könne ausgeführt werden; bezeichnet man es mit $F(x)$, so wird sein

$$(3) \qquad l\frac{p\,P^2}{k} = -\int f(x)\,dx = F(x).$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über und ersetzt p durch $\frac{dz}{dx}$, so wird

$$dz = k\,P^{-2}e^{F(x)}\,dx$$

und daher der gesuchte Wert

$$(4) \qquad z = k\int P^{-2}e^{F(x)}\,dx,$$

der nur noch mit P multipliziert werden muss, um das allgemeine Integral zu geben.

Beispiel. Für die Gleichung des § 390

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0,$$

worin A und B konstant sind, wurde das partikuläre Integral

$$(6) \qquad P = c\,e^{-\frac{Ax}{2}}$$

für den Fall gefunden, dass $\frac{A^2}{4} - B = 0$ ist. Es soll aus diesem Werte (6) das allgemeine Integral von (5) abgeleitet werden.

Hier ist $f(x) = A$; daher nach (3)

$$F(x) = -\int A\,dx = -Ax; \quad e^{F(x)} = e^{-Ax}.$$

Ferner folgt aus (6)

$$P^{-2} = \frac{1}{c^2}e^{Ax}.$$

Mithin nach (4)

$$z = k\int\frac{1}{c^2}e^{Ax}\cdot e^{-Ax}\,dx = \frac{k}{c^2}x + c'.$$

Das gesuchte allgemeine Integral nach (2) ist daher

$$(7) \qquad y = \left(\frac{k}{c^2}x + c'\right)e^{-\frac{Ax}{2}}.$$

Es stimmt dasselbe mit dem in § 390 in Formel (8) angegebenen überein.

394. Integration nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Wie die Differentialgleichungen der ersten Ordnung, so können auch solche höherer Ordnung durch Reihen integriert werden. Man wendet hierzu vorzugsweise die Methode der unbestimmten Koeffizienten an. Natürlich können die etwa erhaltenen unendlichen Reihen nur benutzt werden, so lange sie konvergent sind. Sind sie summierbar, so erhält das Integral die Form eines geschlossenen Ausdrucks.

Es sei folgende Gleichung zu integrieren

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \tag{1}$$

Man setze voraus, das Integral habe die Form

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n+1} + A_2 x^{n+2} + A_3 x^{n+3} + \ldots, \tag{2}$$

worin sowohl die Vorzahlen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ als auch der Exponent n als konstant, jedoch als noch unbestimmt vorausgesetzt werden. Die Differentiation von (2) gibt

$$\frac{dy}{dx} = n A_0 x^{n-1} + (n+1) A_1 x^n + (n+2) A_2 x^{n+1} + \ldots \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1) A_0 x^{n-2} + (n+1) n A_1 x^{n-1} + (n+2)(n+1) A_2 x^n + \ldots \tag{4}$$

Führt man nun die Werte von y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus (2), (3) und (4) in (1) ein, so entsteht eine Gleichung, die es möglich macht, die Konstanten bis auf zwei oder eine zu bestimmen. Die unbestimmt verbleibenden Konstanten sind dann diejenigen der Integration. Verbleiben zwei, so ist das Resultat das allgemeine Integral von (1); bleibt nur eine Konstante unbestimmt, so entsteht ein partikuläres Integral. Die Methode soll an den folgenden zwei Beispielen erläutert werden.

I. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a x y = 0. \tag{5}$$

Führt man hier die obigen Werte von y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein, so kommt

$$\begin{aligned} 0 = n(n-1) A_0 x^{n-2} + (n+1) n A_1 x^{n-1} + (n+2)(n+1) A_2 x^n \\ + \left.\begin{matrix}(n+3)(n+2) A_3 \\ + a A_0\end{matrix}\right| x^{n+1} + \left.\begin{matrix}(n+4)(n+3) A_4 \\ + a A_1\end{matrix}\right| x^{n+2} + \ldots \end{aligned}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung fehlt, so müssen die Vorzahlen aller Potenzen von x auf der rechten Seite zu Null werden.

Nimmt man auch $n = 0$ an, so geben zunächst die beiden ersten Glieder

$$0 \cdot A_0 = 0; \quad 0 \cdot A_1 = 0.$$

Daher bleiben A_0 und A_1 unbestimmt. Aus den folgenden Gliedern rechts ergeben sich die Bedingungen

$$2 \cdot 1\, A_2 \qquad\qquad = 0; \text{ somit } A_2 = 0.$$

$$3 \cdot 2\, A_3 + a\, A_0 = 0 \qquad A_3 = -\frac{a\, A_0}{2 \cdot 3}.$$

$$4 \cdot 3\, A_4 + a\, A_1 = 0 \qquad A_4 = -\frac{a\, A_1}{3 \cdot 4}.$$

$$5 \cdot 4\, A_5 + a\, A_2 = 0 \qquad A_5 = 0.$$

$$6 \cdot 5\, A_6 + a\, A_3 = 0 \qquad A_6 = +\frac{a^2\, A_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}.$$

$$7 \cdot 6\, A_7 + a\, A_4 = 0 \qquad A_7 = +\frac{a^2\, A_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}.$$

$$8 \cdot 7\, A_8 + a\, A_5 = 0 \qquad A_8 = 0.$$

$$9 \cdot 8\, A_9 + a\, A_6 = 0 \qquad A_9 = -\frac{a^3\, A_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}.$$

$$10 \cdot 9\, A_{10} + a\, A_7 = 0 \qquad A_{10} = -\frac{a^3\, A_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Setzt man diese Werte von n, A_0, A_1 etc. in (2) ein, so erhält man als gesuchtes allgemeines Integral

$$y = A_0 \left(1 - \frac{a\, x^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^2\, x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{a^3\, x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots\right)$$
$$+ A_1 \left(x - \frac{a\, x^4}{3 \cdot 4} + \frac{a^2\, x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{a^3\, x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \ldots\right).$$

Die Grössen A_0 und A_1 sind hier die Konstanten der Integration. Beide Reihen sind für jeden endlichen Wert von x konvergent.

II. Es sei ferner die Gleichung zu integrieren

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{a}{x} \frac{d y}{d x} + b\, y = 0. \tag{6}$$

Setzt man die Werte von y, $\frac{d y}{d x}$ und $\frac{d^2 y}{d x^2}$ aus (2), (3) und (4) hier ein, so wird

$$0 = \left.\begin{matrix} n(n-1)\, A_0 \\ n\, a\, A_0 \end{matrix}\right| x^{n-2} + \left.\begin{matrix} (n+1)\, n\, A_1 \\ (n+1)\, a\, A_1 \end{matrix}\right| x^{n-1} + \left.\begin{matrix} (n+2)(n+1)\, A_2 \\ (n+2)\, a\, A_2 \\ b\, A_0 \end{matrix}\right| x^n + \ldots$$

Hier müssen wieder die Vorzahlen der Potenzen von x gleich Null sein. Das erste Glied gibt

$$n(n - 1 + a)\, A_0 = 0.$$

Soll daher A_0 unbestimmt bleiben, so muss entweder $n = 0$ oder $n = 1 - a$ sein. Für diese Werte von n wird der Koeffizient des zweiten Gliedes: für den ersten $a\, A_1 = 0$, für den zweiten $(2 - a)\, A_1 = 0$. In beiden Fällen muss daher $A_1 = 0$ sein.

Für $n = 0$ bleibt also A_0 unbestimmt und A_1 wird zu Null. Hierfür geben die folgenden Glieder

$$2(1 + a) A_2 + b A_0 = 0; \text{ folgl. } A_2 = -\frac{b A_0}{2(1+a)}.$$

$$3(2 + a) A_3 + b A_1 = 0 \qquad A_3 = 0.$$

$$4(3 + a) A_4 + b A_2 = 0 \qquad A_4 = \frac{b^2 A_0}{2 \cdot 4 (1+a)(3+a)}.$$

$$5(4 + a) A_5 + b A_3 = 0 \qquad A_5 = 0.$$

$$6(5 + a) A_6 + b A_4 = 0 \qquad A_6 = -\frac{b^3 A_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 (1+a)(3+a)(5+a)}$$

. . . .

Für diese Werte geht (2) über in

$$(7) \qquad y = A_0 \left(1 - \frac{b x^2}{2(1+a)} + \frac{b^2 x^4}{2 \cdot 4 (1+a)(3+a)} - \frac{b^3 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 (1+a)(3+a)(5+a)} + \ldots\right).$$

Diese Reihe ist konvergent für jeden Wert von x, so lange kein Faktor $(1 + a)$; $(3 + a)$; $(5 + a)$; .. im Nenner verschwindet.

Da Gleichung (7) nur eine unbestimmte Konstante A_0 enthält, so ist sie ein partikuläres Integral von (6). Zu einem solchen wird das vorstehende Verfahren immer führen, welchen Wert von n man auch annehmen mag. Es zeigt dies, dass das Integral noch andere Glieder enthalten muss als solche, wie sie Gleichung (2) voraussetzt.

Das allgemeine Integral soll nun aus (7) nach dem in § 393 angegebenen Verfahren bestimmt werden. Dort ist mit P das partikuläre Integral bezeichnet. Daher kann man aus (7) ableiten

$$P^{-2} = A_0^{-2} (1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \ldots),$$

worin $\alpha, \beta, \ldots$ konstante Faktoren sind, die sich durch a und b ausdrücken lassen. Ferner ist im vorliegenden Falle

$$f(x) = \frac{a}{x}; \qquad F(x) = -\int \frac{a\,dx}{x} = -a\,l\,x;$$

daher

$$e^{F(x)} = e^{-a\,l\,x} = x^{-a}.$$

Da aber allgemein

$$z = k \int P^{-2} e^{F(x)}\,dx,$$

so wird

$$z = k A_0^{-2} \int (1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \ldots) x^{-a}\,dx,$$

$$z = k A_0^{-2} \left(\frac{x^{1-a}}{1-a} + \alpha \frac{x^{3-a}}{3-a} + \beta \frac{x^{5-a}}{5-a} + \ldots\right) + c'.$$

Auch hierin darf kein Nenner zu Null werden; a darf also keine ungerade, positive oder negative ganze Zahl sein.

Setzt man diesen Wert von z in die Gleichung $y = Pz$ ein, so wird das gesuchte allgemeine Integral sein

$$y = \left[1 - \frac{b x^2}{2(1+a)} + \frac{b^2 x^4}{2 \cdot 4 (1+a)(3+a)} - \ldots\right] \times \left[c\left(\frac{x^{1-a}}{1-a} + \alpha \frac{x^{3-a}}{3-a} + \ldots\right) + c'\right].$$

IX. Aufgaben über die Kettenlinie.

395. Allgemeine Gesetze der Kettenlinie. Wenn eine vollkommen biegsame Kette an beiden Endpunkten befestigt wird, so senkt sie sich vermöge der Gewichte, die an ihren Teilen hängen und bildet eine Kurve, die Kettenlinie genannt wird. Sie liegt in einer Vertikalebene, die durch die Aufhängepunkte geht. Die Form der Kurve wird bedingt durch das Gesetz, nach dem die Gewichte an der Kette über ihre Länge verteilt sind.

Es sei CAB (Fig. 129) eine solche Kettenlinie, C einer der Aufhängepunkte und A der tiefste Punkt. Man lege durch letztern Punkt in der Ebene der Kurve zwei rechtwinkelige Achsen Ax, Ay, wovon Ax horizontal ist, und bezeichne mit

- x, y die Koordinaten DE und AE eines Kurvenpunktes D,
- h, b dasselbe für den Aufhängepunkt C,
- α, φ die Winkel, die die Kurve in den Punkten C und D mit der horizontalen Richtung bildet und
- P, Q die Spannungen der Kette in den Punkten C und D, in der Richtung der Tangenten an die Kurve wirksam.

Man zerlege die Kräfte P und Q in die horizontalen Seitenkräfte $P\cos\alpha$, $Q\cos\varphi$ und die vertikalen $P\sin\alpha$, $Q\sin\varphi$. Damit das Kurvenstück CD keine horizontale Bewegung mache, müssen die Kräfte, die an dessen Endpunkten in horizontaler Richtung wirken, einander gleich sein, so dass man hat

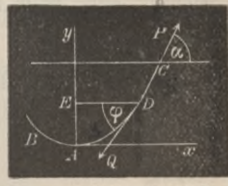
$$(1) \qquad Q\cos\varphi = P\cos\alpha.$$

Da hierin P und α konstant sind, so wird auch das Produkt $Q\cos\varphi$ konstant sein, wo auch der Angriffspunkt D der Kraft Q gedacht wird. Hieraus folgt, dass die Spannung der Kette in horizontaler Richtung konstant ist. Rückt der Punkt D abwärts, so wird φ kleiner, also auch die Spannung Q kleiner. Im tiefsten Punkte ist $\varphi = 0$, also $Q = P\cos\alpha$. Die Spannung der Kette nimmt somit von oben nach unten ab und wird im tiefsten Punkte ein Minimum.

Die Kraft $P\sin\alpha$, die das Kurvenstück DC in C aufwärts zieht, muss gleich sein der Kraft $Q\sin\varphi$, die in D abwärts wirkt, vermehrt um die Last G des Kurvenstückes CD. Diese Last G setzt sich zusammen aus dem Eigengewichte des Kurvenstückes und dem Gewichte, das ausserdem an ihm hängt oder auf dasselbe drückt. Hiernach muss sein

(2) $$Q \sin \varphi + G = P \sin \alpha.$$

Fig. 129.



Rückt der Punkt D der Kurve entlang abwärts, so vergrössert sich G, während φ, also auch $\sin \varphi$ abnimmt. Im tiefsten Punkte ist $\varphi = 0$ und $G = P \sin \alpha$. Rückt umgekehrt D aufwärts, so nimmt G ab und $Q \sin \varphi$ zu. Für den Punkt C ist $G = 0$ und $Q = P$.

Die Voraussetzungen, die im Folgenden gemacht werden, beziehen sich ausschliesslich auf die Grösse G.

396. Die parabolische Kettenlinie. Das Gewicht G sei der Länge der horizontalen Projektion des Kurvenstückes C D (Fig. 129), also der Abscissendifferenz $h - x$ proportional

Die Gesetze dieser Kurve sind bereits in § 140 behandelt. Es entsteht eine Parabel.

397. Die gemeine Kettenlinie. Das Gewicht G sei der Länge des Kurvenstückes proportional, mithin gleichförmig über die Kette verteilt.

Es seien (Fig. 129) s, s′ die Längen der Kurvenstücke A D und C D und q das Gewicht der Kette für jede Längeneinheit derselben, also q s das Gewicht des Stückes A D und $q s' = G$ dasjenige des Stückes C D. Für diesen letztern Wert geht (2) von § 395 über in

(1) $$Q \sin \varphi + q s' = P \sin \alpha.$$

Da die Länge der Kette $s + s'$, also ihr Gewicht $q(s + s')$ ist, so erhält man für den tiefsten Punkt

(2) $$q(s + s') = P \sin \alpha,$$

und für den Punkt D, indem man diese Gleichung von (1) abzieht,

(3) $$Q \sin \varphi = q s,$$

d. h. die Vertikalkraft $Q \sin \varphi$ in D ist gleich dem Gewichte des Kurvenstückes A D.

Dividiert man (3) durch Gleichung (1) des § 395, so folgt

(4) $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{q s}{P \cos \alpha}.$$

Setzt man der Abkürzung wegen

(5) $$\frac{q}{P \cos \alpha} = m$$

in (4) und berücksichtigt, dass $\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx}$, so geht (5) über in

(6) $$\frac{dy}{dx} = m s.$$

In dieser Gleichung kommen die drei Variabeln x, y und s vor. Man kann aber die letztere durch die beiden erstern ausdrücken durch die Relation $d s^2 = d x^2 + d y^2$. Zu diesem Zwecke differentiiere man Gleichung (6), indem man $d x$ als konstant ansieht, und ersetze $d s$; es folgt

$$(7) \qquad \frac{d^2 y}{d x} = m \sqrt{d x^2 + d y^2} = m\, d x \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2}.$$

Setzt man nun $\frac{d y}{d x} = p$, also auch $\frac{d^2 y}{d x} = d p$ und $d x = \frac{d y}{p}$, so wird

$$\frac{p\, d p}{\sqrt{1 + p^2}} = m\, d y.$$

Das Integral dieser Gleichung ist nach § 88

$$(8) \qquad \sqrt{1 + p^2} = m y + C.$$

Für $y = 0$ wird $\varphi = 0$, also auch $p = 0$; daher die Konstante $C = 1$. Hiernach wird die letzte Gleichung zu

$$(9) \qquad \sqrt{1 + p^2} = m y + 1.$$

Die Ordinate des Aufhängepunktes C ist mit b bezeichnet worden; also wird für diesen Punkt $p = \operatorname{tang} \alpha$ und die letzte Gleichung zu

$$\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} = m b + 1,$$

oder indem man den Wert von m aus (6) einführt,

$$P \cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} = q b + P \cos \alpha.$$

Allein es ist $\cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} = 1$; daher wird

$$(10) \qquad b = \frac{P}{q}(1 - \cos \alpha).$$

Quadriert man (9), so kommt

$$p^2 = m^2 y^2 + 2 m y.$$

Ersetzt man hierin p durch seinen Wert und zieht die Wurzel aus, so ist

$$(11) \qquad d x = \pm \frac{1}{m} \frac{d y}{\sqrt{y^2 + \frac{2 y}{m}}}.$$

Allein in dieser Gleichung darf für den Bogen A C von beiden Zeichen nur das obere genommen werden, weil $d y$ mit $d x$ zunimmt. Lässt man also das untere Zeichen weg und integriert nach § 343, Formel (2), indem man daselbst $A = 0$ nimmt, so wird

$$x = \frac{1}{m} l \left(\frac{1}{m} + y + \sqrt{y^2 + \frac{2 y}{m}}\right) + C.$$

Für den tiefsten Punkt wird $x = 0$ und $y = 0$, also auch

$$0 = \frac{1}{m} l \frac{1}{m} + C.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorigen wird

$$(12) \qquad x = \frac{1}{m} l \left(1 + m y + m \sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}}\right).$$

Diese Gleichung erscheint aufgelöst in Hinsicht x. Man kann aber auch y durch x ausdrücken. Zu diesem Zwecke multipliziere man mit m und gehe von den Logarithmen zu den Zahlen über, und erhält

$$e^{mx} = 1 + m y + m \sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}},$$

oder auch

$$\frac{e^{mx} - 1}{m} - y = \sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}}.$$

Quadriert man diese Gleichung, so folgt

$$\left(\frac{e^{mx} - 1}{m}\right)^2 = \frac{2y}{m} e^{mx}$$

und daraus die gesuchte Gleichung

$$(13) \qquad y = \frac{1}{2m}(e^{mx} + e^{-mx} - 2),$$

die genau mit der in § 140 übereinstimmt.

Setzt man $y = b = \frac{P}{q}(1 - \cos\alpha)$ aus (10) in (12) ein, so wird x zur Abscisse des Aufhängepunktes, die mit h bezeichnet wurde, und es folgt nach einigen Reduktionen

$$h = \frac{P \cos\alpha}{q} l \left(\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}\right).$$

Setzt man die beiden Werte von $\frac{dy}{dx}$ aus (6) und (11) einander gleich, so folgt

$$s = \sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}} = \sqrt{y^2 + \frac{2 P \cos\alpha}{q} y}.$$

Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ einer ebenen Kurve ist nach § 326

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Setzt man hierin die Werte von $\frac{dy}{dx}$ aus (6) und von $\frac{d^2 y}{dx^2}$ aus (7) ein, so folgt unmittelbar

$$\varrho = \frac{1}{m} + m s^2.$$

Für s = 0 erhält man als Wert des Krümmungshalbmessers im tiefsten Punkte

$$\varrho' = \frac{1}{m} = \frac{P \cos \alpha}{q}.$$

Setzt man für s die Länge der Kurve vom Aufhängepunkte bis zum tiefsten Punkte, also nach (2) die Grösse $\frac{P \sin \alpha}{q}$ ein, so erhält man als Krümmungshalbmesser im Aufhängepunkte

$$\varrho'' = \frac{P}{q \cos \alpha}.$$

Daher gilt die Proportion

$$\varrho' : \varrho'' = \cos^2\alpha : 1.$$

398. Form einer Kette, bei der der Querschnitt proportional der Spannung sich ändert. Die Kette habe nur ihr eigenes Gewicht zu tragen, soll aber in allen Querschnitten einen gleichen Grad der Sicherheit gegen das Zerreissen besitzen; also wird jede Flächeneinheit der Querschnitte gleich stark gespannt sein müssen.

Sind z, z′ die Querschnitte der Kette in C und D (Fig. 129), q das Gewicht der Volumeneinheit der Kette, so müssen der Voraussetzung nach die Querschnitte in C und D sich verhalten wie die Spannungen P und Q. Daher ist

$$z' = z \frac{Q}{P}.$$

Allein aus der Gleichung (1) des § 395 folgt $Q : P = \cos \alpha : \cos \varphi$; folglich wird

$$z' = z \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}. \tag{1}$$

Wir nehmen hier den Aufhängepunkt C als Anfangspunkt der Koordinaten, lassen x zunehmen um d x, wodurch der Querschnitt in D um den Weg d s′ abwärts rückt. Längs dieses Weges kann der Querschnitt z′ als konstant betrachtet werden; es entsteht daher während dieses Vorganges das Volumenelement z′ d s′. Dieses ist daher mit Rücksicht auf (1) gleich

$$z \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} d\, s'.$$

Nun ist $d\, s'^2 = d\, x^2 + d\, y^2$ und $\cos \varphi = \frac{d\, x}{d\, s'}$; daher das Element d v des Volumens

$$d\, v = z \cos \alpha \left[1 + \left(\frac{d\, y}{d\, x}\right)^2\right] d\, x. \tag{2}$$

Multipliziert man den Wert (2) mit q, so erhält man das Gewicht des Volumenelementes; integriert man sodann, so entsteht das Gewicht des Kettenstückes CD von der Länge s′. Dieses Gewicht ist aber nichts anderes als die Grösse G der Gleichung (2) des § 395. Daher wird diese Gleichung im vorliegenden Falle

$$Q \sin \varphi + q z \cos \alpha \int \left[1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right] d x = P \sin \alpha.$$

Versetzt man das zweite Glied von links nach rechts und dividiert durch $Q \cos \varphi = P \cos \alpha$, so wird

$$(3) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{P \sin \alpha - q z \cos \alpha \int \left[1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right] d x}{P \cos \alpha}.$$

Für $\varphi = 0$ wird

$$P \sin \alpha = q z \cos \alpha \int_0^h \left[1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right] d x$$

zum Gewichte des Kettenstückes vom Aufhängepunkte bis zum tiefsten Punkte.

Setzt man $\operatorname{tang} \varphi = \frac{d y}{d x}$ in (3) ein und differentiiert sodann, so folgt, da $P \sin \alpha$ und $P \cos \alpha$ konstant sind,

$$(4) \qquad \frac{d^2 y}{d x} = - \frac{q z}{P} \left[1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right] d x.$$

Setzt man nun

$$(5) \qquad \frac{q z}{P} = m \quad \text{und} \quad \frac{d y}{d x} = p,$$

so wird $\frac{d^2 y}{d x} = d p$; daher geht (5) über in

$$\frac{d p}{1 + p^2} = - m d x.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\operatorname{arctang} p = - m x + C.$$

Für $x = h$ ist aber $p = 0$; daher gibt die letzte Gleichung

$$0 = - m h + C.$$

Man erhält daher durch Subtraktion

$$\operatorname{arctang} p = m (h - x).$$

Geht man vom Bogen zur Tangente über, so gibt diese Gleichung

$$(6) \qquad p = \operatorname{tang} m (h - x).$$

Für $x = 0$ wird aber $p = \operatorname{tang} \alpha$; daher folgt

$$\operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} m h$$

und hieraus $\alpha = m h$ oder

$$(7) \qquad m = \frac{\alpha}{h}.$$

Setzt man die beiden Werte von m aus (5) und (7) einander gleich, so folgt

$$\alpha = \frac{q\,h\,z}{P}. \tag{8}$$

Allein h z ist das Volumen eines Prismas von der Länge h und dem Querschnitte z, also q h z das Gewicht desselben. Das Verhältnis dieses Gewichtes zur grössten Kettenspannung P gibt daher den Bogen α.

Für $p = \frac{d\,y}{d\,x}$ gibt Gleichung (6)

$$d\,y = \operatorname{tang} m\,(h - x)\,d\,x. \tag{9}$$

Um diese Gleichung zu integrieren, beachte man, dass

$$\int \operatorname{tang} x\,d\,x = \int \frac{\sin x\,d\,x}{\cos x} = -\,l \cos x,$$

und da $\operatorname{tang} m\,(h - x)\,d\,x = -\frac{1}{m} \operatorname{tang} m\,(h - x)\,d\,(-\,m\,x)$, so gibt (9)

$$y = \frac{1}{m}\,l \cos m\,(h - x) + C.$$

Für $x = h$ wird $y = b$; daher die Konstante $C = b$. Hierfür wird die letzte Gleichung

$$b - y = -\frac{1}{m}\,l \cos m\,(h - x),$$

oder auch, indem man den Wert von m aus (7) einführt,

$$b - y = -\frac{h}{\alpha}\,l \cos \frac{h - x}{h}\,\alpha. \tag{10}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Kurve. Darin ist $\frac{h - x}{h}$ ein echter Bruch, dessen Wert für $x = 0$ auf 1 steigt. Daher ist der Cosinus zu nehmen von einem Winkel, der kleiner als α ist. Der Logarithmus davon ist negativ, weshalb $b - y$ positiv erscheint, wie es sein soll.

Für $x = 0$ wird auch $y = 0$. Hierfür gibt Gleichung (10)

$$\alpha = -\frac{h}{b}\,l \cos \alpha. \tag{11}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Werte von α aus (8) und (11) gelangt man zu folgender Relation

$$l \cos \alpha = -\frac{q\,b\,z}{P},$$

die ähnlich wie (8) aufgefasst werden kann.

Sind b und h gegeben, so kann aus (11) die Grösse α berechnet und hierauf mit Hilfe von (10) die Kurve konstruiert werden.

Um das Volumen v der Kette zu finden, hat man nur Gleichung (2) zu integrieren. Führt man zu diesem Zwecke vorher den Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus (9) ein, so folgt

$$(12) \qquad v = z\cos\alpha \int [1 + \operatorname{tang}^2 m(h - x)]\,dx.$$

Nun ist $1 + \operatorname{tang}^2 m(h - x) = \frac{1}{\cos^2 m(h - x)}$ und nach § 85

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x, \text{ daher}$$

$$\int [1 + \operatorname{tang}^2 m(h - x)]\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 m(h - x)} = -\frac{1}{m}\operatorname{tang} m(h - x) + C.$$

Also gibt (12)

$$v = -\frac{z\cos\alpha}{m}\operatorname{tang} m(h - x) + C.$$

Für $x = 0$ wird auch $v = 0$; daher erhält man

$$0 = -\frac{z\cos\alpha}{m}\operatorname{tang} m h + C$$

und durch Subtraktion, indem man noch m mittels (7) ersetzt,

$$(13) \qquad v = zh\frac{\cos\alpha}{\alpha}\left[\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\frac{h - x}{h}\alpha\right].$$

Dehnt man x bis h aus, so erhält man das Volumen der Kette vom Aufhängepunkte bis zum tiefsten Punkte. Dieses ist daher

$$(14) \qquad v' = zh\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Zur Bestimmung der Länge benutzt man die Gleichung

$$ds' = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

von der schon bei Ableitung von (2) Gebrauch gemacht worden. Führt man den Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus (9) ein, so folgt

$$ds' = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 m(h - x)}\,dx = \frac{dx}{\cos m(h - x)}.$$

Allein es ist nach § 344, Formel (2)

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

Daher auch

$$s' = -\frac{1}{2m}\;\frac{1 + \sin m(h - x)}{1 - \sin m(h - x)} + C.$$

Für $x = 0$ wird auch $s' = 0$; mithin wird

$$0 = -\frac{1}{2m} l \frac{1 + \sin m h}{1 - \sin m h} + C$$

und durch Subtraktion

$$s' = \frac{1}{2m}\left[l \frac{1 + \sin m h}{1 - \sin m h} - l \frac{1 + \sin m (h - x)}{1 - \sin m (h - x)}\right].$$

Ersetzt man m durch seinen Wert aus (7), so erhält man als gesuchte Bogenlänge der Kurve

$$(15) \qquad s' = \frac{h}{2\alpha}\left[l \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - l \frac{1 + \sin \frac{h - x}{h} \alpha}{1 - \sin \frac{h - x}{h} \alpha}\right].$$

Für $x = h$ entsteht hieraus die Länge s'' der Kurve vom Aufhängepunkte bis zum tiefsten Punkte. Daher

$$(16) \qquad s'' = \frac{h}{2\alpha} l \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

Setzt man den Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus (9) und denjenigen von $\frac{d^2 y}{d x^2}$ aus (4) in den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser (§ 326) ein, so folgt unmittelbar für irgend einen Kurvenpunkt

$$\varrho = \frac{h}{\alpha} \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{h - x}{h} \alpha};$$

ferner für den Aufhängepunkt, wo $x = 0$ ist,

$$\varrho' = \frac{h}{\alpha} \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} = \frac{h}{\alpha \cdot \cos \alpha},$$

und endlich für den tiefsten Punkt, wo $x = h$ wird,

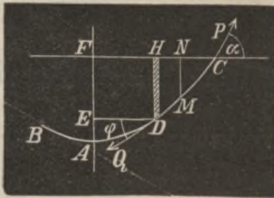
$$\varrho'' = \frac{h}{\alpha}.$$

399. Form eines von oben belasteten Tuches. Ein Tuch sei an zwei parallelen, vertikal stehenden Wänden längs horizontaler Linien festgehalten und zwischen den Wänden durch eine Masse belastet, deren Teile lose neben einander liegen (wie trockener Sand, Wasser etc.), so dass die obere Begrenzung dieser Masse eine horizontale Ebene bilde. Das Tuch soll in gespanntem Zustande so geformt sein, dass Vertikalebenen, senkrecht zu den Wänden gedacht, dasselbe längs kongruenter, gleich tief liegender Kurven schneiden. Man soll die Form dieser Kurven bestimmen unter der Voraussetzung, dass das Gewicht des Tuches und seine Steifigkeit nicht in Betracht kommen.

Es gelte die bisherige Bezeichnung. Es sei also C A B (Fig. 130) die Kurve, $AE = y$ die Ordinate und $DE = x$ die Abscisse des Kurvenpunktes D; dann wird, wenn die Vertikale $AF = b$, die Vertikale $DH = b - y$ sein.

I. Die auf dem Tuche liegende Last reiche von unten bis zum Punkte C. Dann wird das Kurvenstück CD einen Körper tragen von der Form eines Prisma. Grundfläche desselben ist die Fläche C D H und Höhe der Abstand zweier Vertikalebenen, die senkrecht zu den Wänden stehen. Ebenso liegt auf dem Kurvenstücke D A ein Prisma von der Grundfläche D A F H und gleicher Höhe.

Fig. 130.



Nimmt man die Höhe dieser Prismen = 1 an und bezeichnet, wie in der letzten Aufgabe, mit q das Gewicht der Volumeneinheit der Masse, so ist das Gewicht, das auf C D drückt, = q × Fläche C D H; dasjenige, das auf D A drückt, = q × Fläche D A F H. Daher gibt Gleichung (2) des § 395

$$q \times DAFH + q \times DCH = P \sin\alpha \text{ und}$$

$$(2) \qquad Q \sin\varphi = q \times DAFH.$$

Lässt man x zunehmen um d x, so beschreibt die Vertikale D H ein Flächenelement von der Breite d x und der Höhe b — y, also vom Inhalte (b — y) d x. Diese Grösse ist das Differential der Fläche A D H F; folglich das Integral von (b — y) d x die Fläche A D H F. Hierfür geht (1) über in

$$Q \sin\varphi = q \int (b - y)\, dx.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $Q \cos\varphi = P \cos\alpha$ (§ 395), so folgt

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{q}{P\cos\alpha} \int (b - y)\, dx.$$

Für $\varphi = 0$ muss auch die Fläche D A F H sich auf Null reduzieren, also $\int (b - y)\, dx = 0$ sein; für $\varphi = \alpha$ aber dehnt sich diese Fläche über A C F aus. Daher muss sein

$$(3) \qquad \text{Fläche } ACF = \int_0^h (b - y)\, dx.$$

Setzt man in Gleichung (2)

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad m = \frac{q}{P\cos\alpha}$$

ein, so geht sie über in

$$\frac{dy}{dx} = m \int (b - y)\, dx.$$

Die Differentiation dieser Gleichung gibt, da d x konstant ist,

$$(5) \qquad \frac{d^2 y}{dx} = m\,(b - y)\, dx.$$

Führt man $\frac{d y}{d x} = p$, also $\frac{d^2 y}{d x} = d p$ ein und ersetzt $d x$ durch $\frac{d y}{p}$, so wird

$$p \, d p = m (b - y) \, d y.$$

Folglich durch Integration

$$\frac{p^2}{2} = m \left(b y - \frac{y^2}{2} \right).$$

Für $y = 0$ wird auch $p = 0$; daher ist die Konstante der Integration weggelassen. Multipliziert man mit 2, zieht die Wurzel aus und ersetzt p durch $\frac{d y}{d x}$, so folgt

$$\text{(6)} \qquad d x \sqrt{m} = \frac{d y}{\sqrt{2 b y - y^2}},$$

welche Gleichung folgendes Integral liefert (§ 86)

$$x \sqrt{m} = \arcsin \frac{y - b}{b} + C.$$

Für $x = h$ wird $y = b$. Hierfür gibt die letzte Gleichung

$$h \sqrt{m} = C.$$

Daher durch Subtraktion

$$(h - x) \sqrt{m} = \arcsin \frac{b - y}{b},$$

oder auch, wenn man vom Bogen zum Sinus übergeht,

$$\text{(7)} \qquad b - y = b \sin (h - x) \sqrt{m}.$$

Für den tiefsten Punkt wird $x = 0$ und $y = 0$; ihm entspricht also die Gleichung $1 = \sin h \sqrt{m}$, der der Bogen $\frac{\pi}{2}$ Genüge leistet. Es muss daher sein

$$\text{(8)} \qquad h \sqrt{m} = \frac{\pi}{2}.$$

Führt man den Wert von m aus (4) hier ein, so ergibt sich als Spannung des Tuches in horizontaler Richtung

$$P \cos \alpha = q \left(\frac{2 h}{\pi} \right)^2.$$

Setzt man aber den Wert von $\sqrt{m}$ aus (8) in (7) ein, so erhält man als gesuchte G l e i c h u n g der K u r v e

$$\text{(9)} \qquad b - y = b \sin \left(\frac{h - x}{h} \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

In der Figur ist $h - x = C H$ und $b - y = D H$. Nimmt man den Punkt C zum Anfangspunkte der Koordinaten und bezeichnet die genannten Werte mit x' und y', so geht Gleichung (9) über in

$$y' = b \sin \frac{x'}{h} \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Aus (6) folgt, indem man $\frac{dy}{dx}$ durch $\operatorname{tang}\varphi$ ersetzt,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\pi}{2h}\sqrt{2by - y^2} \tag{11}$$

und hieraus für $y = b$, da φ in α übergeht,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{h}.$$

Diese letzten Werte können ebenso aus (9) oder (10) abgeleitet werden.

Reduziert man die obere Grenze des Integrals (3) auf x, so erhält man als Ausdruck für die Fläche ADHF

$$\int_0^x (b - y)\,dx = b\int_0^x \sin\left(\frac{h - x}{h}\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{2bh}{\pi}\cos\left(\frac{h - x}{h}\frac{\pi}{2}\right) \tag{12}$$

und hieraus als Wert der ganzen Fläche ACF

$$\int_0^h (b - y)\,dx = \frac{2bh}{\pi}.$$

Nun ist bh das um die Fläche beschriebene Rechteck; folglich ist die Fläche $\frac{2}{\pi} = 0{,}636\ldots$ von diesem Rechtecke.

Das Gewicht der Masse, die das Tuch auf eine Länge $= 1$, der Wand nach gemessen, zu tragen hat, wird erhalten, wenn man diese Fläche mit q multipliziert. Mithin wird z. B. das Gewicht der Masse CDH nach (12) sein

$$q\int_x^h (b - y)\,dx = q\frac{2bh}{\pi}\left[1 - \cos\left(\frac{h - x}{h}\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Die Länge der Kurve ergibt sich wie folgt. Es ist das Bogenelement

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Aus (9) folgt aber durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi b}{2h}\cos\left(\frac{h - x}{h}\frac{\pi}{2}\right).$$

Folglich wird das Bogenelement

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\pi b}{2h}\right)^2 \cos^2\left(\frac{h - x}{h}\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{13}$$

Um dieses Differential zu integrieren, wende man die Methode der Quadratur an, indem man Flächenelemente von der Form udx an einander reiht und zwar mit der Grundlinie dx und der Höhe u gleich der Wurzelgrösse in (13). Dadurch entsteht eine Fläche, ähnlich derjenigen auf S. 403, mit der Grundlinie h, zwei Endordinaten und einer Kurve. Die erste Endordinate entspricht der Abscisse $x = 0$ und hat einen Wert $= 1$; die letzte wird $= \sqrt{1 + \left(\frac{\pi b}{2 h}\right)^2}$ für $x = h$. Der Abscisse $x = \frac{1}{2} h$ entspricht ein Bogen $= \frac{\pi}{4}$; allein es ist $\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; also wird diese Ordinate $= \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi b}{2 h}\right)^2}$. Diese Ordinate ist nun das arithmetische Mittel aus den Höhen aller Flächenelemente. Denn geht man von dieser Ordinate aus um eine Grösse $h' < \frac{1}{2} h$ rückwärts und vorwärts, so trifft man auf Ordinaten, die um gleichviel abweichen von der mittleren und zwar im positiven und negativen Sinne, was sich aus der Eigenschaft der Funktion leicht nachweisen lässt. Daher ist die Fläche gleich einem Rechtecke mit der Grundlinie h und der Höhe $\sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi b}{2 h}\right)^2}$; also das Integral von (13), d. h. die Kurvenlänge vom Aufhängepunkte bis zum tiefsten Punkte

$$s = h \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi b}{2 h}\right)^2}.$$

Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser einer Kurve ist

$$\varrho = \frac{d s^3}{d x\, d^2 y}.$$

Nun gibt Gleichung (5) $d^2 y = m (b - y) d x^2$; daher wird

$$\varrho = \frac{1}{m (b - y)} \left(\frac{d s}{d x}\right)^3.$$

Da aber gemäss der Figur $d x = d s \cos \varphi$, so ist auch

$$\varrho = \frac{1}{m (b - y) \cos^3 \varphi}. \tag{14}$$

Hier kann nun $\cos \varphi$ nach (11) durch $\operatorname{tang} \varphi$ ausgedrückt werden. Es ist nämlich

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{2 h}\right)^2 (2 b y - y^2)}.$$

Mittels dieses Wertes und des von m aus (8) erhält man aus (14) den gesuchten Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \left(\frac{2 h}{\pi}\right)^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{\pi}{2 h}\right)^2 (2 b y - y^2)\right]^{\frac{3}{2}}}{b - y}.$$

Für $y = 0$ erhält man als Krümmungshalbmesser der Kurve im tiefsten Punkte

$$\varrho' = \frac{1}{b} \left(\frac{2 h}{\pi}\right)^2,$$

und für $y = b$ als Krümmungshalbmesser im Aufhängepunkte $\varrho'' = \infty$.

II. Die Last reiche um a über die Ebene CF hinauf. Dadurch wird die Höhe des Flächenelementes in DH gleich $a + b - y$ und daher die Fläche über dem Bogen AD gleich $\int (a + b - y)\, dx$. Also geht Gleichung (5) über in

$$\frac{d^2 y}{dx} = m(a + b - y)\, dx$$

und Gleichung (6) in

$$dx\sqrt{m} = \frac{dy}{\sqrt{2(a+b)y - y^2}},$$

deren Integral ist

$$x\sqrt{m} = \arcsin\frac{y - a - b}{a + b} + C.$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$ und die letzte Gleichung gibt

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C.$$

Folglich hat man durch Subtraktion

$$x\sqrt{m} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a + b - y}{a + b}.$$

Versetzt man $\frac{\pi}{2}$ und geht vom Bogen zum Sinus über, so wird

$$\frac{a + b - y}{a + b} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\sqrt{m}\right),$$

woraus als gesuchte Gleichung der Kurve folgt

$$(15) \qquad a + b - y = (a + b)\cos x\sqrt{m}.$$

Für $x = h$ wird $y = b$. Dafür gibt (15)

$$(16) \qquad \cos h\sqrt{m} = \frac{a}{a + b},$$

eine Gleichung, aus der $\sqrt{m}$ bestimmt werden kann. Dabei entspricht dem Bogen $h\sqrt{m}$ eine Anzahl Grade. Man kann nun für numerische Rechnungen die Grösse $\sqrt{m}$ in Graden ausdrücken und diese mit x multiplizieren, und erhält so die Anzahl Grade, deren Cosinus zu benutzen ist, um mittels (15) die entsprechende Ordinate zu erhalten. Da ferner

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{m}\sqrt{2(a+b)y - y^2},$$

so ergibt sich zur Bestimmung des Bogens α die Gleichung

$$(17) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{m}\sqrt{(2a + b)b}.$$

Die Fläche, vertikal über dem Bogen A D gelegen, ist unter Benützung von (15)

$$\int_0^x (a + b - y)\,dx = (a + b)\int_0^x \cos x\sqrt{m}\,dx = \frac{a + b}{\sqrt{m}} \sin x\sqrt{m},$$

und daher die Gewichte der Massen über den Bogen A D und A C

$$(18) \qquad q\frac{a + b}{\sqrt{m}} \sin x\sqrt{m} \quad \text{und} \quad q\frac{a + b}{\sqrt{m}} \sin h\sqrt{m}.$$

Das Bogenelement der Kurve ist mit Rücksicht auf (15)

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + (a + b)^2 m \sin^2 x\sqrt{m}}.$$

Daher ist das Integral nach dem auf S. 489 angewendeten Verfahren

$$s = h\sqrt{1 + (a + b)^2 m \sin^2 \frac{h\sqrt{m}}{2}}.$$

Aus den Werten von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ erhält man als Krümmungshalbmesser der Kurve

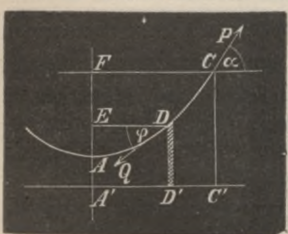
$$\varrho = \frac{\left[1 + m\left(2(a + b)y - y^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{m(a + b - y)}.$$

Für $a = 0$ gehen die unter II. aufgestellten Gleichungen über in die bezüglichen der Voraussetzung I.

400. Form eines von unten belasteten Tuches. Das Tuch sei wie in der vorigen Aufgabe angebracht, die Last jedoch von unten angehängt, so dass dieselbe bis auf eine wagerechte Ebene A′ C′ (Fig. 131) reiche. Statt dass die homogene Masse den Raum A D C F über dem Tuche ausfülle, nehme sie jetzt den Raum C D A A′ C′ ein, wo C C′ und A A′ als vertikale Ebenen zu denken sind.

Im übrigen gelte die bisherige Bezeichnung. Es seien also A der Anfangspunkt, $AE = y$ und $ED = x$ die Koordinaten des Kurvenpunktes D und Abstand $AA' = a$. Zieht man D D′ vertikal, so ist $DD' = a + y$. Geht sodann x in $x + dx$ über, so beschreibt D D′ das Flächenelement $(a + y)\,dx$ vom Gewicht $q(a + y)\,dx$; folglich ist das Gewicht der Last A D D′ A′ = $q\int (a + y)\,dx$. Daher nach (2) des § 395

Fig. 131.



$$Q \sin\varphi = q\int (a + y)\,dx.$$

Dividiert man durch Gleichung (1) des § 395, so folgt

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{q}{P\cos\alpha}\int (a + y)\,dx.$$

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$m = \frac{q}{P \cos \alpha}$$

und schreibt $\frac{dy}{dx}$ für tang φ, so geht (1) über in folgende Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = m \int (a + y)\, dx,$$

woraus durch Vornahme der Differentiation folgt

$$\frac{d^2 y}{dx} = m (a + y)\, dx. \tag{2}$$

Für $p = \frac{dy}{dx}$, also $dx = \frac{dy}{p}$ gibt Gleichung (2)

$$p\, dp = m (a + y)\, dy.$$

Mithin folgt durch Integration

$$p^2 = m (2ay + y^2).$$

Die Konstante der Integration fällt weg, weil für $y = 0$ auch $p = 0$ wird.

Diese Gleichung gibt, wenn p ersetzt wird,

$$dx \sqrt{m} = \frac{dy}{\sqrt{2ay + y^2}}, \tag{3}$$

also auch, indem man integriert,

$$x \sqrt{m} = l \left(a + y + \sqrt{2ay + y^2}\right) + C. \tag{4}$$

Zur Bestimmung der Konstanten C nehme man $x = 0$; dann wird $y = 0$, daher

$$0 = l\, a + C,$$

und durch Subtraktion ergibt sich folgende Gleichung der Kurve

$$x \sqrt{m} = l \frac{a + y + \sqrt{2ay + y^2}}{a}. \tag{5}$$

Für $y = b$ wird $x = h$. Hierfür liefert (5) zur Bestimmung der Grösse m die Gleichung

$$\sqrt{m} = \frac{1}{h} l \frac{a + b + \sqrt{2ab + b^2}}{a}. \tag{6}$$

Die Gleichung (5) kann auch auf folgende Form gebracht werden

$$y = \frac{a}{2} \left[e^{x \sqrt{m}} + e^{-x \sqrt{m}} - 2\right]. \tag{7}$$

Aus (3) folgt, da $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\, \varphi$ ist, $\text{tang}\, \varphi = \sqrt{m} \sqrt{2ay + y^2}$ und daher für die Aufhängestelle C

$$(8) \qquad \operatorname{tang} \alpha = \sqrt{m} \sqrt{(2a + b) b},$$

eine Relation, mittels der der Winkel α bestimmt werden kann.

Die Fläche $A D D' A'$ wird unter Benützung von (7)

$$(9) \int (a + y) \, d x = \frac{a}{2} \int \left(e^{x \sqrt{m}} + e^{-x \sqrt{m}}\right) d x = \frac{a}{2 \sqrt{m}} \left(e^{x \sqrt{m}} - e^{-x \sqrt{m}}\right).$$

Die Konstante der Integration ist $= 0$, weil für $x = 0$ die rechte und linke Seite der Gleichung verschwinden.

Diese Fläche kann aber auch noch wie folgt gefunden werden. Setzt man den Wert von $d x$ aus (3) in den Ausdruck $(a + y) d x$ für das Flächenelement ein, so wird dieses gleich

$$(10) \qquad \frac{(a + y) \, d y}{\sqrt{m} \sqrt{2 a y + y^2}}.$$

Nun ist nach § 343

$$\int \frac{d y}{\sqrt{2 a y + y^2}} = l \left(a + y + \sqrt{2 a y + y^2}\right),$$

$$\int \frac{y \, d y}{\sqrt{2 a y + y^2}} = \sqrt{2 a y + y^2} - \int \frac{a \, d y}{\sqrt{2 a y + y^2}}.$$

Folglich ist das Integral von (10) als gesuchte Fläche

$$(11) \qquad \int (a + y) \, d x = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{2 a y + y^2},$$

ein Ausdruck, der etwas einfacher erscheint als der obige.

Hiernach wird das Gewicht der am Bogen A C angehängten Last sein

$$(12) \qquad P \sin \alpha = \frac{q}{\sqrt{m}} \sqrt{2 a b + b^2}.$$

Für den Krümmungshalbmesser der Kurve ergibt sich mit Hilfe von (2) und (3)

$$\varrho = \frac{\left[1 + m \left(2 a y + y^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{m (a + y)}.$$

Im tiefsten Punkte ist $y = 0$; daher der Krümmungshalbmesser daselbst

$$(13) \qquad \varrho' = \frac{1}{a m}.$$

Für den Aufhängepunkt ist $y = b$; daher der bezügliche Krümmungshalbmesser

$$\varrho'' = \frac{\left[1 + m \left(2 a b + b^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{m (a + b)}.$$

Für den speziellen Fall, da $a = 0$ ist, d. h. die untere Begrenzung der aufgehängten Masse durch den tiefsten Punkt der Kurve geht, wird nach (8)

$$\operatorname{tang} \alpha = b \sqrt{m};$$

ferner nach (12) das am Bogen A C hängende Gewicht

$$P \sin \alpha = \frac{b\,q}{\sqrt{m}},$$

und endlich als bemerkenswert der Krümmungshalbmesser ϱ' im tiefsten Punkte nach (13) unendlich gross, d. h. dieser Punkt und die beiden benachbarten Punkte, die um $+dx$ und $-dx$ von ihm abstehen, liegen in gerader Linie.

Dagegen werden die Gleichungen (5), (6), (7) und (9) unbrauchbar. Um eine allgemeine Gleichung der Kurve zu erhalten, die auch auf den genannten speziellen Fall angewendet werden kann, bestimme man die Konstante C in (4) so, dass man $x = h$ und $y = b$ einführt. Dadurch geht (4) über in

$$h\sqrt{m} = l\left(a + b + \sqrt{2\,a\,b + b^2}\right) + C,$$

und daher lautet durch Subtraktion die gesuchte Gleichung

$$(x - h)\sqrt{m} = l\,\frac{a + y + \sqrt{2\,a\,y + y^2}}{a + b + \sqrt{2\,a\,b + b^2}}.$$

Wird hierin $a = 0$ angenommen, so erhält man als Gleichung der Kurve für den speziellen Fall

$$(x - h)\sqrt{m} = l\left(\frac{y}{b}\right).$$

Es werde die Kurve C D A durch eine starre Linie ersetzt und um C F als Achse gedreht, so dass sie vertikal über C F zu liegen komme. Dabei gehe die Last mit, und wird dann von oben die Kurve zusammendrücken und zwar mit den gleichen Kräften, mit denen sie vorher verstreckt wurde. Die Kurve bildet dann die Drucklinie eines Gewölbes.

X. Aufgaben über die elastische Linie.

401. Krümmung der elastischen Linie im allgemeinen. Wird ein prismatischer Stab von elastischer Beschaffenheit gebogen, so dehnen sich die Fasern desselben auf der einen Seite aus und verkürzen sich auf der andern. Wo die Ausdehnungen in die Verkürzungen übergehen, liegt eine neutrale Schicht, die keine Längenänderung erfährt. Diese neutrale Schicht ist eine Cylinderfläche. Diese Cylinderfläche wird durch eine Ebene, senkrecht zu den Seitenlinien der Cylinderfläche, in einer Kurve geschnitten, die elastische Linie heisst.

In den § 216 und 217 sind die Biegungsverhältnisse betrachtet, die an einem Stabe von rechtwinkeligem und kreisförmigem Querschnitte eintreten, der am einen Ende eingespannt und am andern durch eine Kraft verbogen wird, die senkrecht zur Längenrichtung des Stabes einwirkt. Es wurden daselbst folgende Gleichungen abgeleitet:

für den rechtwinkeligen Stab . . . $\varrho \, P x = \frac{E}{12} b h^3$,

für den Stab mit Querschnitt Fig. 71 $\varrho \, P x = \frac{E}{12} b (h^3 - h'^3)$,

für den cylindrischen Stab . . . . $\varrho \, P x = \frac{E}{64} \pi d^4$,

für den hohlen Cylinder . . . . . . $\varrho \, P x = \frac{E}{64} \pi (d^4 - d'^4)$

und die Grössen rechts Momente der Elastizität genannt. Da diese nur vom Modul E und den Querschnittsdimensionen abhängen, so bleiben ihre Werte dieselben, wie auch der Stab in Anspruch genommen wird. Daher gilt auch das in diesen Gleichungen enthaltene Gesetz allgemein für irgend einen Teil eines gebogenen Stabes mit irgend einem Querschnitte, wenn nur unter ϱ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie an einem bestimmten Punkte und unter $P x$ das statische Moment der Kraft verstanden wird, das diese Krümmung veranlasst. Dabei kann $P x$ auch als eine Summe von statischen Momenten aufgefasst werden, deren Glieder gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Das Moment der Elastizität kann für jeden Querschnitt, der auf eine gesetzmässige Weise geformt ist, abgeleitet werden. Wir setzen dasselbe daher im Folgenden als bekannt voraus, bezeichnen es mit M und erhalten

(1) $$\varrho \cdot P x = M.$$

Nun ist der Krümmungshalbmesser einer Kurve nach § 326

(2) $$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}}.$$

Allein in den folgenden Anwendungen kommen nur sehr schwache Krümmungen vor; daher sind die Winkel, die die Tangenten an die Kurve mit der Abscissenachse bilden, sehr klein, daher ist die Grösse $\frac{d y}{d x}$ im Zähler rechts gegenüber der Einheit sehr klein. Unter dieser Voraussetzung entwickele man diesen Zähler nach dem binomischen Satze in eine Reihe und vernachlässige die Glieder von der vierten oder zweiten Potenz der Grösse $\frac{d y}{d x}$ an. Für letzteres erhält man aus (2) als Annäherungsausdruck

(3) $$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varrho}.$$

402. Elastische Linie eines Stabes, der in horizontaler Lage am einen Ende eingespannt und am andern belastet ist. Es sei A B (Fig. 132) die elastische Linie, A die Befestigungsstelle und B der Aufhängepunkt der Last P.

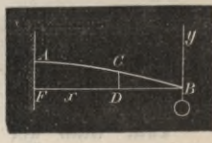
Man lege durch B zwei rechtwinkelige Achsen B x und B y in der Ebene der Kurve, wovon die erstere horizontal, die letztere vertikal aufwärts gerichtet ist. Es seien

x, y die Koordinaten B D und C D eines Kurvenpunktes C,
L, u dasselbe für den Kurvenpunkt A,
α, φ die Neigung der Kurve in B und C zur Achse B x.

Denkt man sich den Stabteil A C von veränderlicher Länge fest eingemauert, ohne dass er seine Form ändert, so ragt das Stück C B über die Mauer hervor und wird somit gedreht um C mittels der Kraft P am Hebelarme x, also mit dem Momente P x. Daher gilt unmittelbar die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen, woraus folgt

$$\varrho = \frac{M}{P\,x}. \tag{1}$$

Fig. 132.



Für $x = 0$ wird $\varrho = \infty$, d. h. der Stab ist am freien Ende geradlinig. Wächst x, so nimmt ϱ ab; die Krümmung nimmt also von B nach A hin zu. Der kleinste Krümmungshalbmesser wird erhalten, wenn man L für x in (1) einführt.

Setzt man den Wert von ϱ aus (1) in Gleichung (3) des letzten Paragraphen ein, so folgt

$$M \frac{d^2 y}{d x^2} = P\,x. \tag{2}$$

Nun ist aber

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{d x} d\left(\frac{d y}{d x}\right).$$

Wenn aber x zunimmt, nimmt $\frac{d y}{d x}$ ab; deshalb haben die Differentiale dieser zwei Grössen entgegengesetzte Zeichen. Man wird deshalb in der Gleichung (2) das Zeichen rechts ändern, so dass man hat

$$M \frac{d\left(\frac{d y}{d x}\right)}{d x} = -P\,x. \tag{3}$$

Multipliziert man mit d x und integriert, so kommt

$$M \frac{d y}{d x} = -\frac{P\,x^2}{2} + C. \tag{4}$$

Für $x = L$ wird wegen der horizontalen Lage des Stabes an der befestigten Stelle $\frac{d y}{d x} = 0$. Hierfür erhält man aus (4)

$$0 = -\frac{P\,L^2}{2} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

$$M \frac{d y}{d x} = \frac{P}{2}(L^2 - x^2). \tag{5}$$

Multipliziert man mit d x und integriert, so erhält man als Gleichung der elastischen Linie

$$\text{(6)} \qquad M\,y = \frac{P}{2}\left(L^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

Setzt man in (6) $x = L$, so wird $y = u$. Mithin hat man zur Bestimmung der grössten Senkung

$$u = \frac{P\,L^3}{3\,M}.$$

Da $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \varphi$, so folgt aus (5)

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{P}{2\,M}\,(L^2 - x^2);\quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{P\,L^2}{2\,M}.$$

403. Stab der vorigen Aufgabe, der noch eine über seine Länge gleichförmig verteilte Last zu tragen hat. Es gelte die bisherige Bezeichnung und Fig. 133.

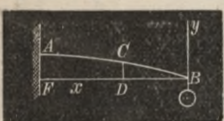
Die Last, die über die Länge gleichförmig verteilt ist, sei für jede Längeneinheit $= p$; dann ist die Last, die auf dem Kurvenstücke BC liegt, $= p\,x$, da x für BC genommen werden kann. Den Angriffspunkt dieser Last $p\,x$ kann man in der Mitte von BC voraussetzen; also ist das statische Moment dieser Last in Bezug auf C als Drehpunkt $= \frac{1}{2} p\,x^2$; somit das gesamte statische Moment, das den Stab um C zu drehen strebt, $= P\,x + \frac{1}{2} p\,x^2$. Setzt man dasselbe an die Stelle von $P\,x$ in die Gleichung (1) des § 401 ein, so kommt

$$\varrho = \frac{M}{P\,x + \frac{1}{2} p\,x^2}.$$

Wenn $x = 0$, so wird $\varrho = \infty$; also bleibt der Stab am freien Ende geradlinig. Die grösste Krümmung erhält er am befestigten Ende. Für diese Stelle wird der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{M}{P\,L + \frac{1}{2} p\,L^2}.$$

Fig. 133.



Wenn $p = 0$, so werde $\varrho = \varrho'$; wenn $P = 0$, so werde $\varrho = \varrho''$; deshalb wird sein

$$\varrho' = \frac{M}{P\,L};\quad \varrho'' = \frac{M}{\frac{1}{2} p\,L^2}.$$

Setzt man die Last $p\,L$, die gleichförmig über die ganze Länge verteilt ist, gleich der Last P am freien Ende voraus, so wird

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}\,\varrho'',$$

d. h. es wird die Krümmung des Stabes am befestigten Ende zweimal so gross, wenn die Last am freien Ende wirkt, als wenn sie gleichförmig über die ganze Länge verteilt ist.

Vertauscht man in Gleichung (3) des vorigen Paragraphen das Moment $Px + \frac{1}{2}px^2$ mit Px, so erhält man als Differentialgleichung der Kurve

$$(1) \qquad M\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -Px - \frac{1}{2}px^2.$$

Multipliziert man mit dx und integriert, so kommt

$$M\frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2} - \frac{px^3}{6} + C.$$

Für $x = L$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$; hierfür gibt die letzte Gleichung

$$0 = -\frac{PL^2}{2} - \frac{pL^3}{6} + C.$$

Durch Subtraktion folgt

$$(2) \qquad M\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2}(L^2 - x^2) + \frac{p}{6}(L^3 - x^3).$$

Multipliziert man mit dx und integriert, so erhält man als gesuchte Gleichung der elastischen Linie

$$(3) \qquad My = \frac{P}{2}\left(L^2x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{p}{6}\left(L^3x - \frac{x^4}{4}\right).$$

Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Für die grösste Senkung $u = AF$ des Stabes erhält man aus (3), indem man $x = L$ und $y = u$ setzt,

$$(4) \qquad u = \frac{PL^3}{3M} + \frac{pL^4}{8M}.$$

Ist keine Last am freien Ende aufgehängt, so wird $P = 0$. Ist dagegen $p = 0$, so gehen alle vorstehenden Formeln in die betreffenden der letzten Aufgabe über.

Wenn die gleichförmig verteilte Last gleich der am freien Ende ist, so wird $pL = P$ und somit die Senkung aus (4)

$$u = \frac{PL^3}{3M} + \frac{PL^3}{8M} = \frac{11}{24}\frac{PL^3}{M}.$$

Beträgt somit die Senkung 8 gleiche Teile, wenn nur die Last am freien Ende hängt, so bewirkt die ebenso grosse jedoch gleichförmig verteilte Last für sich allein 3 solcher Teile.

Soll die Last pL gleiche Senkung wie P hervorbringen, so muss nach (4) sein

$$\frac{PL^3}{3M} = \frac{pL^4}{8M}, \text{ also } P = \frac{3}{8}pL,$$

d. h. es muss in diesem Falle die Last am freien Ende $\frac{3}{8}$ sein von der gleichförmig verteilten Last.

Ist α der Winkel, den die Tangente an die Kurve am freien Ende mit der horizontalen Richtung bildet, so ist $\operatorname{tang} \alpha = \frac{d\,y}{d\,x}$ für $x = 0$. Für diese Werte erhält man aus (2)

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{P\,L^2}{2\,M} + \frac{p\,L^3}{6\,M}.$$

Für $p = 0$ werde $\alpha = \alpha'$ und für $P = 0$ werde $\alpha = \alpha''$. Hierfür erhält man aus der letzten Gleichung

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{P\,L^2}{2\,M}; \quad \operatorname{tang} \alpha'' = \frac{p\,L^3}{6\,M}.$$

Setzt man nun $p\,L = P$ voraus, so wird

$$\operatorname{tang} \alpha' = 3 \operatorname{tang} \alpha''.$$

Also wird die Tangente des Winkels α am freien Ende dreimal so gross in dem Falle, wenn die Last an diesem Ende hängt, als wenn dieselbe Last gleichförmig über die ganze Länge verteilt wird.

404. Stab, der von zwei gleich hoch gelegenen Stützen getragen und durch eine gleichförmig verteilte und eine konzentrierte Last gebogen wird. Diese Stützen A, A_1 (Fig. 134), an den Enden des Stabes angebracht, liegen in einer horizontalen Linie $A\,D\,A_1$. Es seien:

P die in F konzentrierte Last in den horizontalen Abständen $A\,D = a$, $A_1\,D = a_1$ von den Stützen, $a_1 < a$,

p die über den Stab gleichförmig verteilte Last für jede Längeneinheit, das Gewicht des Stabes inbegriffen,

x, y die rechtwinkeligen Koordinaten $A\,C, B\,C$ eines Kurvenpunktes B,

x_1, y_1 die Koordinaten $A_1\,C_1, B_1\,C_1$ eines Kurvenpunktes B_1,

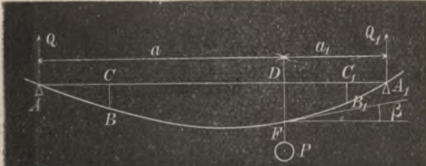
u die Senkung $D\,F$ des Aufhängepunktes,

β der Winkel, den die Tangente an die Kurve durch den Aufhängepunkt der Last P mit der horizontalen Richtung $A\,A_1$ bildet,

$L = a + a_1$ die Entfernung der Stützen,

Q, Q_1 die Pressungen auf die Stützen A, A_1.

Fig. 134.



Denkt man sich die Stütze in A weg und den Druck, den sie auszuhalten hat, durch die Kraft Q, die aufwärts wirkt, ersetzt, so entsteht ein Hebel, der seinen Drehpunkt in A_1 hat. Daran wirkt Q am Hebelarme L, P am Hebelarme a_1 und $p\,L$ am Hebelarme $\frac{1}{2}\,L$. Da nun das statische Moment von Q gleich sein muss der Summe der Momente der abwärts wirkenden Kräfte, so erhält man

$$Q\,L = P\,a_1 + \tfrac{1}{2}\,p\,L^2,$$

$$(1) \qquad Q = P\,\frac{a_1}{L} + \frac{1}{2}\,p\,L.$$

Ganz ebenso findet man

$$(2) \qquad Q_1 = P\frac{a}{L} + \frac{1}{2}pL.$$

Hiernach kann man die Kräfte Q, Q_1 als bekannt betrachten.

Denkt man sich das Kurvenstück $A_1 B$ eingemauert und AB hervorragend, so wirkt am letztern die Kraft Q aufwärts am Hebelarme x und die Last $p \cdot AB$ oder annähernd px am Hebelarme $\frac{1}{2}x$ abwärts. Somit ist das statische Moment dieser beiden Kräfte in Beziehung auf B als Drehpunkt $= Qx - \frac{1}{2}px^2$. Setzt man diesen Wert statt Px in die Formel (1) des § 401 ein, so kommt

$$(3) \qquad \varrho = \frac{M}{Qx - \frac{1}{2}px^2}.$$

Ganz ebenso findet man für das andere Kurvenstück

$$(4) \qquad \varrho_1 = \frac{M}{Q_1 x_1 - \frac{1}{2}p{x_1}^2}.$$

Für $x = 0$ und $x_1 = 0$ erhält man $\varrho = \infty$ und $\varrho_1 = \infty$, d. h. die elastische Linie ist an ihren Enden geradlinig.

Lässt man x_1 wachsen bis $x_1 = a_1$, so nimmt ϱ_1 fortwährend ab, da nach Voraussetzung $a_1 < a$, also $a_1 < \frac{L}{2}$ ist. Also hat das kürzere Kurvenstück seine stärkste Biegung im Aufhängepunkte F der Last P.

Lässt man x wachsen bis $x = a$, so nimmt ϱ bis zu einer gewissen Stelle hin ab, um von da wieder zuzunehmen. Um die Abscisse dieser Stelle zu finden, bezeichne man den Nenner $Qx - \frac{1}{2}px^2$ des Wertes von ϱ in (3) mit z, und erhält durch Differentiation

$$(5) \qquad \frac{dz}{dx} = Q - px; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -p.$$

Wenn nun ϱ ein Minimum werden soll, so muss z ein Maximum sein. Dies ist nach (5) der Fall für

$$\frac{dz}{dx} = Q - px = 0,$$

woraus folgt

$$x = \frac{Q}{p} = \frac{Pa_1}{pL} + \frac{L}{2}.$$

Dieser Wert von x ist grösser als $\frac{L}{2}$. Also wird die Stelle der stärksten Biegung nie zwischen der Stütze A und der Mitte der Kurve liegen. Sie wird aber zwischen die Mitte der Kurve und den Aufhängepunkt des Gewichtes P kommen, wenn dieser Wert von x kleiner als a ist. Sie wird in diesen Aufhängepunkt fallen, wenn dieser Wert von x gleich oder grösser als a wird.

An der Stelle des Stabes, wo der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie ein Minimum ist, werden die Fasern auf der konvexen Seite am stärksten verstreckt und auf der konkaven am stärksten zusammengedrückt; es befindet sich also hier der gefährdetste Querschnitt.

Bei einer schwachen Biegung des Stabes hat man auch hier wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben nach (3) von § 401 zu setzen

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varrho}.$$

Deshalb ist aus (3) und (4), da dx und $\frac{dy}{dx}$ sich entgegengesetzt ändern,

$$(6) \qquad M \frac{d^2 y}{d x^2} = -Q x + \frac{1}{2} p x^2.$$

$$(7) \qquad M \frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = -Q_1 x_1 + \frac{1}{2} p x_1^2.$$

Multipliziert man (6) mit dx und integriert, so kommt

$$(8) \qquad M \frac{dy}{dx} = -\frac{Q x^2}{2} + \frac{p x^3}{6} + C.$$

Setzt man hierin $x = a$, so wird $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang} \beta$. Das negative Zeichen ist hier deshalb zu nehmen, weil der Aufhängepunkt F zwischen der Stütze A_1 und dem tiefsten Punkte der Kurve liegt, weil also die Ordinate y vom tiefsten Punkte an gegen F hin abnimmt, während x wächst. Für den Punkt F wird daher die Gleichung (8)

$$-M \operatorname{tang} \beta = -\frac{Q a^2}{2} + \frac{p a^3}{6} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (8) ab, so folgt

$$(9) \qquad M \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2}(a^2 - x^2) - \frac{p}{6}(a^3 - x^3) - M \operatorname{tang} \beta.$$

Wird hier mit dx multipliziert und sodann integriert, so kommt

$$(10) \quad M y = \frac{Q}{2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{p}{6}\left(a^3 x - \frac{x^4}{4}\right) - M x \operatorname{tang} \beta.$$

Ganz ebenso findet man aus (7)

$$(11) \quad M y_1 = \frac{Q_1}{2}\left(a_1^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3}\right) - \frac{p}{6}\left(a_1^3 x_1 - \frac{x_1^4}{4}\right) + M x_1 \operatorname{tang} \beta.$$

Die Formeln (10) und (11) sind die Gleichungen der Kurvenäste AF und A_1 F.

Setzt man $x = a$ in (10) und $x_1 = a_1$ in (11), so werden y und y_1 beide zu u. Deshalb erhält man

$$(12) \quad u = \frac{Q a^3}{3M} - \frac{p a^4}{8M} - a \operatorname{tang} \beta; \quad u = \frac{Q_1 a_1^3}{3M} - \frac{p a_1^4}{8M} + a_1 \operatorname{tang} \beta.$$

Aus diesen beiden Werten von u folgt

$$(13) \qquad \operatorname{tang} \beta = \frac{Q a^3 - Q_1 a_1^3}{3 M L} - \frac{p a^4 - p a_1^4}{8 M L}.$$

Vermöge dieser Gleichung ist die Richtung der Kurve im Aufhängepunkte der Last P bestimmt. Wenn $a = a_1$, so wird auch $Q = Q_1$ und $\operatorname{tang} \beta = 0$; d. h. wenn die Last P in der Mitte zwischen den Stützpunkten aufgehängt ist, so fällt der tiefste Punkt mit dem Aufhängepunkte F zusammen.

Wenn aber a grösser ist als a_1, so erhält man den tiefsten Punkt aus der Gleichung (9), indem man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt. Dies gibt

$$0 = \frac{Q}{2}(a^2 - x^2) - \frac{p}{6}(a^3 - x^3) - M \operatorname{tang} \beta.$$

Der Wert von x, den diese Gleichung liefert, ist die Abscisse des tiefsten Punktes.

Wenn der Aufhängepunkt des Gewichtes P in der Mitte zwischen den Stützpunkten liegt, so sind die Kurvenäste zu beiden Seiten der grössten Ordinate symmetrisch, und man erhält aus (1), (3), (10), (12)

$$Q = Q_1 = \tfrac{1}{2}(P + pL);$$

$$\varrho = \varrho_1 = \frac{2M}{Px + pLx - px^2};$$

$$My = \frac{x}{4}(P + pL)\left(\frac{L^2}{4} - \frac{x^2}{3}\right) - \frac{px}{24}\left(\frac{L^3}{2} - x^3\right);$$

$$u = \frac{L^3}{384M}(8P + 5Lp). \tag{14}$$

Die letzte Gleichung (14) ist geeignet, um den Modul E der Elastizität eines Materials durch Versuche zu bestimmen.

Macht man die Versuche mit einem rechtwinkeligen Stabe und bezeichnet seine Höhe mit h, seine Breite mit b, und den Modul der Elastizität mit E, so ist nach § 216, Formel (5), das Moment der Elastizität

$$M = \frac{E}{12} b h^3.$$

Führt man diesen Wert von M in (14) ein, so erhält man

$$E = \frac{L^3}{32 b h^3 u}(8P + 5Lp).$$

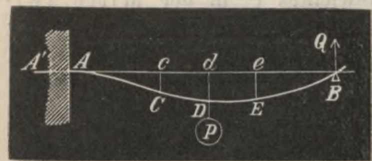
Bei Versuchen betrachtet man die Grösse p als das Gewicht der Längeneinheit des Stabes, der angewendet wird.

405. Prismatischer Stab, am einen Ende in horizontaler Lage eingespannt, am andern in gleicher Höhe unterstützt und in einem Punkte belastet. Das Stück A′A des Stabes (Fig. 135) sei eingespannt (eingemauert), das Ende B unterstützt, so dass B A A′ in horizontaler Richtung liegen. Die Last P sei im Punkte D angebracht; dadurch wird sich der Stab biegen und eine Kurve A D B bilden. Um ihre Gleichung abzuleiten, nehme man die Abscissen längs der Wagerechten A B und die Ordinaten darauf senkrecht an. Es seien

L die Stablänge AB zwischen der Einmauerung und der Stütze,
x, y die Koordinaten Ac, Cc des Kurvenpunktes C, zwischen A und D gelegen,
a, u die Koordinaten Ad, Dd des Aufhängepunktes D,
x', y' die Koordinaten de, Ee des Kurvenpunktes E, zwischen D und B gelegen, so dass x' von d aus gezählt wird,
ϱ, ϱ' die Krümmungshalbmesser der Kurve in C und E und
β der Winkel, den das Kurvenelement in D mit der Abscissenrichtung bildet.

Ersetzt man den Widerstand der Stütze in B durch eine Kraft Q, die daher aufwärts gerichtet ist, so wird das Gleichgewicht am Stabe fortbestehen.

Fig. 135.



Denkt man sich nun das Stück AC des Stabes eingemauert, so ragt noch das Stück cB hervor, das durch die Kräfte Q und P in entgegengesetzter Richtung gedreht wird um C als Drehachse. Dabei wirkt P abwärts am Hebelarme $cd = a - x$ und Q aufwärts am Hebelarme $cB = L - x$. Daher ist das resultierende statische Moment $= P(a - x) - Q(L - x)$. Setzt man diesen Wert in Gleichung (1) des § 401 an Stelle von Px, so folgt

$$(1)\qquad \varrho = \frac{M}{P(a-x) - Q(L-x)}.$$

Daher hängt der Krümmungshalbmesser vom Verhältnis der Kräfte P und Q ab, das im Nachfolgenden bestimmt wird.

Mit Hilfe dieses Wertes von ϱ gibt Gleichung (3) des § 401

$$M\frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x) - Q(L-x).$$

Wird mit dx multipliziert und integriert, so kommt

$$(2)\qquad M\frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) - Q\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right).$$

Eine Konstante der Integration ist nicht nötig, weil für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ wird.

Für den Aufhängepunkt D wird $x = a$ und $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\beta$; daher ist

$$(3)\qquad M\operatorname{tang}\beta = \tfrac{1}{2}Pa^2 - \tfrac{1}{2}Qa(2L - a).$$

Das Integral von (2) gibt als Gleichung der elastischen Linie AD

$$(4)\qquad My = P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right) - Q\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Auch hier fällt die Konstante der Integration weg, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Für den Punkt D gehen x in a und y in u über; daher folgt

$$\text{(5)} \qquad M u = \frac{1}{3} P a^3 - \frac{1}{2} Q a^2 \left(L - \frac{a}{3}\right).$$

Denkt man sich nun die Einmauerung des Stabes von C bis E fortgesetzt, so reicht über die Mauer hinaus noch das Stück E B. Dasselbe wird durch die Kraft Q um E als Achse gedreht am Hebelarme $e B = L - a - x'$. Das statische Moment dieser Kraft ist daher $= Q (L - a - x')$. Setzt man dasselbe in Gleichung (1) des § 401 für P x ein, so folgt

$$\text{(6)} \qquad \varrho' = - \frac{M}{Q (L - a - x')}.$$

Da die Krümmungsmittelpunkte für die Kurvenelemente in A und E auf entgegengesetzter Seite der elastischen Linie liegen, so haben ϱ und ϱ' entgegengesetzte Zeichen, weshalb ϱ' in (6) negativ angenommen ist.

Mit Hilfe von (6) gibt Gleichung (3) des § 401 für das Kurvenstück D B

$$M \frac{d^2 y'}{d x'} = - Q (L - a - x') \, d x',$$

woraus durch Integration folgt

$$\text{(7)} \qquad M \frac{d y'}{d x'} = - Q (L - a) x' + \frac{Q x'^2}{2} + C.$$

Für $x' = 0$ wird $\frac{d y'}{d x'} = \operatorname{tang} \beta$. Hierfür geht (7) über in

$$M \operatorname{tang} \beta = C$$

und durch Subtraktion in

$$\text{(8)} \qquad M \frac{d y'}{d x'} = - Q (L - a) x' + \frac{Q x'^2}{2} + M \operatorname{tang} \beta.$$

Diese Differentialgleichung liefert folgendes Integral

$$M y = - Q (L - a) \frac{x'^2}{2} + \frac{Q x'^3}{6} + M x' \operatorname{tang} \beta + C.$$

Für $x' = 0$ wird $y' = u$; daher $M u = C$ und somit die gesuchte Gleichung der Kurve D B

$$\text{(9)} \qquad M y' = - Q (L - a) \frac{x'^2}{2} + \frac{Q x'^3}{6} + M x' \operatorname{tang} \beta + M u.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x' = L - a$, so wird $y' = 0$, entsprechend dem Punkte B. Dafür gibt (9)

$$\text{(10)} \qquad 0 = - \tfrac{1}{3} Q (L - a)^3 + M (L - a) \operatorname{tang} \beta + M u.$$

Diese Gleichung kann benutzt werden, um Q zu bestimmen. Eliminiert man zu diesem Zwecke $M \operatorname{tang} \beta$ und $M u$ aus ihr mittels (3) und (5), so folgt

$$Q = P \frac{a^2 (3 L - a)}{2 L^3}. \tag{11}$$

Im Punkte A ist $x = 0$; hierfür wird der Krümmungshalbmesser nach (1)

$$\varrho = \frac{M}{P a - Q L}.$$

Nun ist der Nenner dieses Bruches positiv, wie sich mit Hilfe von (11) ergibt. Daher ist auch ϱ positiv.

Im Punkte D dagegen ist $x = a$; also der Krümmungshalbmesser nach (1)

$$\varrho = - \frac{M}{Q (L - a)}. \tag{12}$$

Daher ist dieser Krümmungshalbmesser negativ. Es ändert also ϱ sein Vorzeichen, wenn x von 0 bis a wächst. Im Augenblicke des Ueberganges von positivem zu negativem ϱ zeigt die Kurve einen Wendepunkt. Für diesen muss der Nenner in (1) zu Null werden. Allein aus $P (a - x) - Q (L - x) = 0$ folgt als Abscisse des Wendepunktes

$$x = \frac{P a - Q b}{P - Q.}.$$

Von A bis zum Wendepunkte nimmt der Krümmungshalbmesser zu, von da bis zum Punkte D wieder ab.

Setzt man in (6) $x' = 0$, so erhält man als Krümmungshalbmesser der Kurve in D denselben Wert wie oben in (12).

Von D aus in der Richtung nach B hin wird der Nenner in (6) kleiner, weil x' zunimmt; daher wird der Krümmungshalbmesser grösser und wird in B, wo $x' = L - a$ ist, unendlich gross.

Die Kurve hat einen tiefsten Punkt; derselbe kann vor oder hinter dem Aufhängepunkte der Last liegen. Befindet er sich auf dem Stücke DB, so muss für ihn das Differentialverhältnis $\frac{d y'}{d x'} = 0$ werden. Hierfür folgt aus (8), wenn der Wert von $M \operatorname{tang} \beta$ aus (3) eingeführt wird,

$$0 = - Q (L - a) x' + \frac{Q x'^2}{2} + \frac{P a^2}{2} - \frac{Q a}{2} (2 L - a).$$

Löst man diese quadratische Gleichung auf, so erhält man als Abscisse des tiefsten Punktes, diese von d aus gezählt,

$$x' = L - a \pm \sqrt{(L - a)^2 - \frac{P}{Q} a^2 + a (2 L - a)}$$

und nach Umformung als Abscisse, von A aus gezählt,

$$x' + a = L \left[1 - \sqrt{1 - \frac{P}{Q} \left(\frac{a}{L} \right)^2} \right].$$

Von den beiden Vorzeichen der Wurzelgrösse entspricht nur das negative dem Sinne der Aufgabe, weshalb auch nur dieses im letzten Ausdrucke beibehalten ist. Wird die Grösse unter dem Wurzelzeichen negativ, so liegt der tiefste Punkt auf dem Kurvenstücke A D und kann dann mit Hilfe der Gleichung (2) bestimmt werden.

406. Biegung eines prismatischen Stabes, der in der Längenrichtung zusammengedrückt wird. Der Stab sei eine Säule, A H (Fig. 136) die vertikale Richtung derselben, H der Unterstützungspunkt und A der Angriffspunkt der Last P. Diese Last erteile dem Stabe eine Biegung. Gesetzt eine Biegung würde nicht eintreten, so würden alle Fasern, die man sich als materielle gerade Linien, parallel zur Längenrichtung, denken kann, um gleichviel verkürzt. Sowie aber die Biegung eintritt, verkürzen sich die Fasern auf der konkaven Seite noch mehr, während die auf der konvexen sich wieder ausdehnen. Wie stark auch die Zusammendrückung auf der einen und die Ausdehnung auf der andern Seite sein mag (immer eine schwache Biegung vorausgesetzt), so bleibt der Wert des Elastizitätsmomentes M derselbe.

Es sei A C F H die Krümmung der elastischen Linie des Stabes. Man bezeichne mit

a die Höhe der Säule im gebogenen Zustande, also die Länge A H,
x, y die Koordinaten A B, B C eines Punktes C der Kurve,
ϱ den Krümmungshalbmesser der Kurve in C, und
u = D F die grösste Ausweichung (Pfeilhöhe) der Kurve.

Denkt man sich den Kurventeil C H eingemauert, so wird die Last den hervorragenden Teil A C um C herum abzudrehen streben, mit einem statischen Momente = P y. Deshalb wird nach § 401 sein

$$(1) \qquad \varrho \cdot P y = M, \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varrho},$$

Fig. 136.

woraus folgt, da y und $\frac{dy}{dx}$ sich entgegengesetzt ändern,

$$M \frac{d^2 y}{d x^2} = - P y.$$

Setzt man $\frac{P}{M} = c^2$, multipliziert mit 2 d y und integriert, so kommt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C - c^2 y^2,$$

wobei C die Konstante der Integration bezeichnet. Für y = u wird $\frac{dy}{dx} = 0$, da die Tangente durch den Punkt F der Kurve parallel zu A H liegt. Für den Punkt F wird daher die letzte Gleichung

$$0 = C - c^2 u^2.$$

Mithin erhält man durch Subtraktion

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = c^2 (u^2 - y^2)$$

und hieraus

$$c\,d\,x = \frac{d\,y}{\sqrt{u^2 - y^2}}.$$

In dieser Gleichung ist das Vorzeichen von d x und d y gleichgenommen, weil für den Bogen A F die Grössen x und y sich in gleichem Sinne ändern. Das Integral der letzten Gleichung ist

$$c\,x = \arcsin \frac{y}{u}.$$

Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $y = 0$ auch $x = 0$ wird. Geht man von dem Bogen zum Sinus über, so folgt als Gleichung der Kurve

(2) $$y = u \sin c\,x.$$

Setzt man hierin $y = 0$, so bezeichnet x die Abscisse aller Durchschnittspunkte der Kurve mit der Abscissenachse. Man erhält für diese Punkte

$$0 = u \sin c\,x.$$

Diese Gleichung erfordert, dass entweder $u = 0$, wodurch der Stab geradlinig bleibt, oder dass der Bogen c x ein Vielfaches von π ist. Bezeichnet daher n irgend eine ganze positive Zahl, so muss sein

(3) $$c\,x = n\,\pi; \quad x = \frac{n\,\pi}{c}.$$

Diese Gleichung gibt für x so viele Werte, als n Einheiten enthält. Für $n = 0$ wird auch $x = 0$. Dieser Wert von x entspricht dem Anfangspunkte A (Fig. 137). Wird für $n = 1$ $x = AD$, so ist $AD = \frac{\pi}{c}$. Wird $x = AG$ für $n = 2$, so wird $AG = \frac{2\pi}{c}$, woraus folgt, dass $AD = DG$. Ganz ebenso folgt $DG = GH, \ldots$ Man sieht, dass die Abscissenachse von der Kurve in gleiche Teile geteilt wird.

Fig. 137.

Setzt man der Reihe nach $x = \frac{1}{2} AD, \frac{3}{2} AD, \frac{5}{2} AD, \ldots$ in (2) ein, so wird y abwechselnd $+ u$ und $- u$, d. h. die Kurventeile weichen nach entgegengesetzter Seite gleichweit von der Abscissenachse ab und zwar in ihren Mitten, weil für $y = u$ in Formel (2) der Bogen $c\,x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ wird.

Bezeichnet n in Formel (3) die Anzahl aller Biegungen A D, D G, . ., so wird $x = a$ und man erhält

(4) $$a\,c = n\,\pi.$$

Hat die Kurve nur eine Biegung, so ist $n = 1$ und man erhält aus (4)

(5) $$c^2 = \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{P}{M}.$$

Um die Ausweichung u zu bestimmen, berechne man die Länge s der Kurve. Man erhält aus (2)

$$\frac{dy}{dx} = c\,u \cos c\,x.$$

Hierfür wird das Element eines Bogens der Kurve

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\,(1 + c^2 u^2 \cos^2 c\,x)^{\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man nach dem binomischen Satze und vernachlässigt die Glieder von der vierten Potenz der Grösse u an, so wird

$$ds = dx\left(1 + \frac{c^2 u^2}{2} \cos^2 c\,x\right).$$

Um die ganze Länge s der Kurve zu geben, muss diese Gleichung von $x = 0$ bis $x = a = \frac{n\pi}{c}$ (Formel 4) integriert werden. Nun ist

$$\cos^2 c\,x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\,c\,x),$$

$$ds = dx\left(1 + \frac{c^2 u^2}{4} + \frac{c^2 u^2}{4} \cos 2\,c\,x\right)$$

und da

$$\int_0^{\frac{n\pi}{c}} \cos 2\,c\,x\,dx = 0,$$

so wird

$$s = a\left(1 + \frac{c^2 u^2}{4}\right),$$

woraus die gesuchte Ausweichung folgt

$$u = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{s}{a} - 1}.$$

Wenn der Stab sich nicht biegt, so wird $s = a$, also $u = 0$, wie es sein soll.

Setzt man den Wert von P aus (5) in (1) ein, so erhält man als Krümmungshalbmesser der Kurve

$$\varrho = \frac{a^2}{\pi^2 y}.$$

An den Endpunkten ist $y = 0$, also $\varrho = \infty$. Den kleinsten Krümmungshalbmesser erhält man für $y = u$. Also nimmt die Krümmung des Stabes von den Endpunkten nach der Mitte hin zu.

XI. Aufgaben über fortschreitende Bewegungen.

407. Differentialformeln der Bewegung. Diese Formeln wurden für irgend eine Bewegung bereits in § 161 abgeleitet. Es ist hiernach

$$dx = v\,dt;\quad dv = g\,dt;\quad v\,dv = g\,dx, \tag{1}$$

wobei x den in der Zeit t durchlaufenen Weg, v und g die Geschwindigkeit und die Beschleunigung nach der Zeit t bezeichnen.

Nimmt man t als die unabhängig Veränderliche, also dt als konstant an, so erhält man durch Differentiation der ersten der Formeln (1)

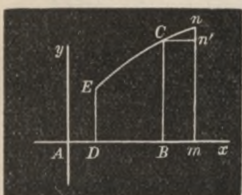
$$d^2x = dv\,dt.$$

Setzt man hierin den Wert von dv aus der zweiten der Formeln (1) ein, so folgt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g. \tag{2}$$

Es ist mithin die Beschleunigung g gleich dem zweiten Differentialverhältnis des Weges in Hinsicht der Zeit.

Fig. 138.



Es bewege sich ein Punkt in einer ebenen Kurve EC (Fig. 138), deren Gleichung für rechtwinkelige Koordinatenachsen gegeben sei. Die Koordinaten eines Kurvenpunktes C seien x, y, der Bogen EC = s. Nimmt x um dx = Cn' zu, so ändert sich y um dy = nn' und s um ds = Cn. Der Weg s werde in der Zeit t durchlaufen. Nach dieser Zeit sei die Geschwindigkeit = v. Man zerlege die Geschwindigkeit v, deren Richtung in das Kurvenelement ds fällt, in die zwei Seitengeschwindigkeiten $v\frac{dx}{ds}$ und $v\frac{dy}{ds}$ parallel und senkrecht zur Abscissenachse. Da nun aber $v = \frac{ds}{dt}$, vermöge der ersten der Gleichungen (1), so erhält man als Seitengeschwindigkeit

$$\text{in der Richtung der Abscissenachse} = \frac{dx}{dt},$$

$$\text{in der Richtung der Ordinatenachse} = \frac{dy}{dt},$$

und somit nach Formel (2) als Beschleunigung

$$\text{parallel zur Abscissenachse} \;\ldots = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\text{parallel zur Ordinatenachse} \;\ldots = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

408. Bewegung eines Körpers in einer Geraden, die die Mittelpunkte zweier Himmelskörper verbindet. Die Himmelskörper ziehen sich an, als wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten A, B (Fig. 139) vereinigt wären. Es seien

$a = AB$ der Abstand dieser Mittelpunkte,

$b = BC$ der Abstand eines Körpers in der Geraden AB, der von beiden Himmelskörpern nach dem Gesetze der Gravitation angezogen wird,

$x = CD$ der Weg, den dieser Körper in der Zeit t in der Richtung von C nach D durchläuft,

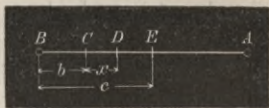
v_0, v die Geschwindigkeiten des Körpers am Anfange und Ende der Zeit t, also in den Punkten C und D,

g, g' die Beschleunigungen, die die Himmelskörper in A und B im Abstande 1 von ihren Mittelpunkten dem beweglichen Körper beizubringen vermöchten.

Nach dem Gesetze der Gravitation sind die Beschleunigungen, die von A und B aus in den Abständen $AD = a - b - x$ und $BD = b + x$ bewirkt werden,

$$\frac{g}{(a-b-x)^2}; \quad \frac{g'}{(b+x)^2}.$$

Fig. 139.



Diese Beschleunigungen haben entgegengesetzte Richtungen. Die erstere wächst mit t, die letztere nimmt ab. Daher wird sein

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{(a-b-x)^2} - \frac{g'}{(b+x)^2}.$$

Behufs der Integration dieser Gleichung setze man

$$BD = b + x = z, \quad dx = dz, \quad d^2x = d^2z;$$

dadurch geht die vorstehende Gleichung über in

$$(1) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{g}{(a-z)^2} - \frac{g'}{z^2}.$$

Multipliziert man mit $2\,dz$ und beachtet, dass alsdann die linke Seite das Differential von $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ ist, so erhält man durch Integration

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a-z} + \frac{2g'}{z} + C.$$

In dieser Gleichung ist C die Konstante der Integration und $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit v. Mithin ist

$$v^2 = \frac{2g}{a-z} + \frac{2g'}{z} + C.$$

Für $z = b = BC$ wird v zu v_0. Für diese Werte wird die letzte Gleichung

$$v_0{}^2 = \frac{2g}{a-b} + \frac{2g'}{b} + C.$$

Mithin erhält man durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen

$$(2) \qquad v^2 = v_0{}^2 + 2\,g\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{a-b}\right) + 2\,g'\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{b}\right).$$

Auf der Geraden AB gibt es eine Stelle E, wo die Anziehung beider Himmelskörper gleich gross ist. Setzt man den Abstand

$$BE = c, \quad AE = a - c,$$

so müssen die Beschleunigungen, die beide Himmelskörper an dieser Stelle hervorbringen, gleich gross sein, so dass man hat

$$\frac{g'}{c^2} = \frac{g}{(a-c)^2}.$$

Diese Gleichung ist in Hinsicht c eine quadratische. Es entsprechen also der Grösse c zwei Werte. Der eine davon bestimmt die Stelle E zwischen A und B, der andere eine Stelle in der Verlängerung AB auf Seite des kleineren Himmelskörpers. Der erstere dieser Werte ist

$$(3) \qquad c = \frac{a}{1 + \sqrt{\frac{g}{g'}}}.$$

Setzt man diesen Wert von c statt z in (2) ein, so erhält man diejenige Geschwindigkeit v, mit der das Bewegliche die Stelle E passiert.

Es bezeichne u_0 den kleinsten Wert von v_0, den das Bewegliche in C haben muss, um die Gleichgewichtslage in E gerade noch erreichen zu können. Vertauscht man daher v_0 mit u_0 und z mit c in (2), so muss $v = 0$ werden. Dies gibt die Relation

$$(4) \qquad u_0{}^2 = 2\,g\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c}\right) + 2\,g'\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right).$$

Ist v_0 kleiner als u_0, so erreicht das Bewegliche die Stelle E nicht, sondern kehrt nach B zurück. Ist v_0 grösser als u_0, so geht der Körper über E hinaus nach A hin.

Es sei A der Mittelpunkt der Erde, B der des Mondes. Daher ist

$$(5) \qquad g' = \frac{g}{75}; \qquad c = \frac{a}{1 + \sqrt{75}} = 0{,}1035\,a.$$

Man denke sich nun, es werde ein Körper von der Oberfläche des Mondes aus mit einer solchen Geschwindigkeit u_0 in der Richtung BA abgeworfen, dass er die Gleichgewichtslage in E gerade erreichen kann.

Ist nun r der Halbmesser der Erde, so ist sehr annähernd

$$\text{Halbmesser des Mondes} = \tfrac{3}{11}\,r; \quad \text{Abstand } AB = 60\,r.$$

Allein für $b = \dfrac{3}{11}\,r$; $g' = \dfrac{g}{75}$; $a = 60\,r$; $c = 0{,}1035 \cdot 60\,r$ gibt (4)

$$(6) \qquad u_0{}^2 = 0{,}04489 \cdot \frac{2\,g}{r}.$$

Nun bezeichne G die Beschleunigung auf der Erdoberfläche. Da die Grössen G und g den Abständen r und 1 vom Mittelpunkte der Erde entsprechen, so erhält man nach dem Gesetze der Gravitation

$$G : g = 1^2 : r^2,$$

$$g = r^2 G. \tag{7}$$

Führt man diesen Wert von g in (6) ein, so folgt

$$u_0{}^2 = 0{,}044\,89 \cdot 2\,G\,r. \tag{8}$$

Wird dieser Körper mit einer Geschwindigkeit, die u_0 nur um unendlich wenig übertrifft, vom Monde aus abgeworfen, so dass er mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit die Stelle E überschreitet, so wird er gegen die Erde hin fallen.

Die Geschwindigkeit, mit der dieser Körper die Grenze der Atmosphäre erreiche, sei $= u$. Die Höhe der Atmosphäre ist höchstens $= 0{,}01\,r$. Führt man nun in Formel (2) die Werte ein

$$v_0 = u_0; \quad a = 60\,r; \quad z = 58{,}99\,r; \quad b = \frac{3}{11}\,r; \quad g' = \frac{g}{75},$$

so geht v in u über, und man erhält

$$u^2 = u_0{}^2 + 0{,}924\,70 \cdot \frac{2\,g}{r}.$$

Setzt man hierin den Wert von u_0 aus (8) und den von g aus (7) ein, so wird

$$u^2 = 0{,}969\,59 \cdot 2\,G\,r. \tag{9}$$

Durch Vergleichung von (8) und (9) folgt das Verhältnis

$$\frac{u}{u_0} = 4{,}647\,5, \tag{10}$$

d. h. der Körper, der auf der Geraden B A die Gleichgewichtslage mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit passieren würde, träfe die Grenze der Atmosphäre mit einer etwas mehr als $4\frac{1}{2}$ mal so grossen Geschwindigkeit als diejenige ist, mit der er abgeworfen würde. Setzt man noch

$$G = 9{,}808\,m; \quad r = 6\,365\,000\,m,$$

so folgt aus (9) und (10)

$$u_0 = 2\,367\,m; \quad u = 11\,003\,m.$$

Die Höhe der Atmosphäre beträgt, der obigen Voraussetzung gemäss, höchstens $0{,}01\,r = 63\,650\,m$. Würde nun jener Körper die Atmosphäre gleichförmig durchfallen, so würde er hierzu nahe 6 Sekunden Zeit brauchen.

409. Bewegung eines Körpers in einer Kurve, die in einer vertikalen Ebene liegt, infolge seiner Schwere. Die Kurve A B (Fig. 140) gehe durch den Anfangspunkt A der rechtwinkeligen Achsen A x, A y. Es sei A x horizontal und A y vertikal abwärts gerichtet.

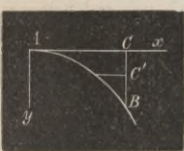
In horizontaler Richtung wirkt keine Kraft auf den Körper, also ist die Beschleunigung in dieser Richtung $= 0$. In vertikaler Richtung wirkt die Schwere auf ihn, die dem Körper die konstante Beschleunigung g erteile. Dann sind die Formeln für die Beschleunigung in der Richtung der Achsen

$$(1) \qquad \frac{d^2 x}{d t^2} = 0; \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = g.$$

Multipliziert man die erste Formel mit dx, die zweite mit dy und addiert sie, so erhält man

$$(2) \qquad \frac{dx\, d^2 x + dy\, d^2 y}{d t^2} = g\, dy.$$

Fig. 140.



Nun ist aber der Zähler links als Differential von

$$\tfrac{1}{2}(dx^2 + dy^2) = \tfrac{1}{2} ds^2.$$

Also kann man statt (2) schreiben

$$(3) \qquad \frac{1}{2} \frac{d(ds^2)}{dt^2} = g\, dy.$$

Allein es ist $\frac{ds}{dt} = v$; mithin erhält man für (3)

$$\tfrac{1}{2} d(v^2) = g\, dy.$$

Multipliziert man mit 2 und integriert, so kommt

$$(4) \qquad v^2 = 2gy + C.$$

Beginnt die Bewegung im Anfangspunkte, so ist für diesen Punkt $v = 0$ und $y = 0$, also auch die Konstante $C = 0$. Ist daher $BC = y$, so erhält man aus (4)

$$(5) \qquad v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2g \cdot BC}.$$

Beginnt die Bewegung in einer Tiefe $CC' = y_0$ unter dem Anfangspunkte, so ist in (4) $v = 0$ für $y = y_0$; hierfür folgt aus (4)

$$0 = 2gy_0 + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (4) ab, so wird

$$(6) \qquad v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2g \cdot BC'}.$$

Man sieht aus den Formeln (5) und (6), dass die Geschwindigkeit an jeder Stelle der Kurve dieselbe ist, wie wenn das Bewegliche die vertikale Höhe des durchlaufenen Bogens frei durchfallen hätte.

410. Anwendung des eben nachgewiesenen Gesetzes auf die Bewegung in der Cykloide. Liegt die Cykloide in einer Vertikalebene und ist ihre Grundlinie BC (Fig. 141) horizontal, so wird der Scheitel A der tiefste Punkt der Kurve und $AB = 2a$ der Durchmesser des Rollkreises sein.

Man lege die Abscissenachse Ax horizontal, die Ordinatenachse Ay vertikal aufwärts. Der Rollkreis bewege sich von der Mitte B der Grundlinie längs des Weges BC, so dass $BC =$ Bogen CD werde. Sind CMF

und DME zwei Durchmesser von der Länge $= 2a$, so wird Bogen $CD =$ Bogen $EF = a\varphi$ sein, wenn φ den Rollwinkel im Bogenmass bezeichnet. Ferner seien $x = EG$ und $y = AG = FN$ die Koordinaten eines Kurvenpunktes E; dann wird sein, da CF vertikal liegt,

$$x = EN + CB. \tag{1}$$

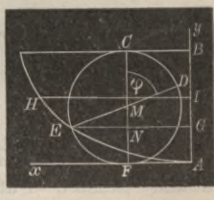
Allein es ist

$$EN = \sqrt{EM^2 - NM^2} = \sqrt{a^2 - (a-y)^2} = \sqrt{2ay - y^2},$$

$$CB = EF = a\varphi = a \cdot \arccos \frac{MN}{ME} = a \cdot \arccos \frac{a-y}{a}.$$

Setzt man diese Werte in (1) ein, so erhält man als Gleichung der Cykloide in rechtwinkligen Koordinaten

Fig. 141.



$$x = \sqrt{2ay - y^2} + a \cdot \arccos \frac{a-y}{a}. \tag{2}$$

Wird diese Gleichung differentiiert, so ergibt sich nach einigen einfachen Reduktionen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2a - y}{\sqrt{2ay - y^2}}. \tag{3}$$

In einem Kurvenpunkte H, dessen Ordinate $AI = h$ sei, beginne die Bewegung eines materiellen Punktes in der Cykloide infolge seiner Schwere. Die Zeit zum Durchlaufen des Bogens $HE = s$ sei t; hat er in E die Geschwindigkeit v, so wird diese Geschwindigkeit die gleiche sein, wie wenn er die Vertikale $IG = h - y$ frei durchfallen hätte. Es ist daher

$$v^2 = 2g(h - y).$$

Da aber $v = \frac{ds}{dt}$, so geht diese Formel über in

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(h - y). \tag{4}$$

Um hieraus ds zu entfernen, benutze man die Relation

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 = dy^2\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]$$

und setze hierin den Wert von $\frac{dx}{dy}$ aus (3) ein; man erhält

$$ds^2 = \frac{2a\,dy^2}{y}.$$

Führt man diesen Wert von ds in (4) ein, so kommt

$$\frac{2a\,dy^2}{y\,dt^2} = 2g(h - y),$$

oder indem man die Veränderlichen sondert und die Quadratwurzel auszieht,

$$(5) \qquad dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}.$$

Von den beiden Vorzeichen, die die Grösse rechts allgemein haben sollte, wurde nur das negative beibehalten, weil bei der Bewegung längs des Bogens HE die Zeit t zunimmt, während y abnimmt.

Das Integral von (5) ist nach Formel (7) des § 86

$$t = -\sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin \frac{2y - h}{h} + C.$$

Für $t = 0$ ist $y = h$; folglich

$$0 = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so folgt

$$(6) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2y - h}{h} \right].$$

Um die Zeit T zu erhalten, die das Bewegliche nötig hat, um in den tiefsten Punkt zu gelangen, muss in (6) die Ordinate y von $y = h$ bis $y = 0$ abnehmen. Hierbei geht der arcussinus von $+\frac{\pi}{2}$ durch die Null in $-\frac{\pi}{2}$ über. Diese Grenzwerte von arcussinus heben sich daher auf, und man hat

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

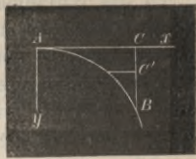
Man sieht hieraus, dass in der Formel für die Fallzeit T die Länge des Bogens HA nicht vorkommt. Es ist deshalb die Zeit zur Erreichung des tiefsten Punktes dieselbe, welcher cykloidische Bogen durchlaufen werde. Eine Kurve, die diese Eigenschaft besitzt, heisst autochron.

411. Horizontaler Wurf eines Körpers im leeren Raume. Es werde ein Körper im leeren Raume mit einer Anfangsgeschwindigkeit V in horizontaler Richtung abgeworfen. Von da an sei er nur der Einwirkung der Schwere ausgesetzt.

Die Bahn AB des Körpers (Fig. 142) wird in einer vertikalen Ebene liegen, die durch die anfängliche Richtung der Bewegung geht. Diese Richtung sei die Abscissenachse Ay und A der Anfangspunkt der Bewegung. Nimmt man die Ordinatenachse Ax vertikal abwärts und bezeichnet mit v die Geschwindigkeit nach der Zeit t, mit x, y die Koordinaten eines Kurvenpunktes B und mit g die Beschleunigung durch die Schwere, die als konstant vorausgesetzt werde, so hat man

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Fig. 142.



Um diese Formeln integrieren zu können, setze man

$$\frac{dx}{dt} = z; \quad \frac{dy}{dt} = u;$$

dann gehen die Formeln (1) über in

$$\frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{du}{dt} = g.$$

Multipliziert man hier mit dt und integriert, so kommt

$$z = C; \quad u = g\,t + C',$$

oder indem man die Werte von z und u wiederherstellt,

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = C; \quad \frac{dy}{dt} = g\,t + C'.$$

Für den Anfangspunkt der Bewegung ist

$$t = 0; \quad \frac{dx}{dt} = V; \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Hierfür erhält man aus (2) $C = V$ und $C' = 0$. Deshalb gehen die Formeln (2) über in

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = V; \quad \frac{dy}{dt} = g\,t.$$

Es sind mithin V und $g\,t$ die Geschwindigkeiten des Körpers parallel zu den Achsen Ax und Ay. Vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten (unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes) erhält man daher

$$v^2 = V^2 + g^2 t^2.$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dass die Geschwindigkeit v in der Richtung der Bahn vom Anfangspunkte aus im Wachsen begriffen ist, da die Zeit t zunimmt.

Multipliziert man (3) mit dt und integriert, so kommt

$$(4) \qquad x = V\,t; \quad y = \frac{g}{2} t^2.$$

Die Konstanten der Integration sind weggelassen, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ und $y = 0$ werden.

Eliminiert man aus den beiden Formeln (4) die Zeit t, so erhält man als Gleichung der Kurve

$$(5) \qquad y = \frac{g}{2\,V^2} x^2.$$

Die Bahn ist mithin eine Parabel, deren Scheitel im Anfangspunkte und deren Achse in der Ordinatenachse liegt.

412. Schiefer Wurf eines Körpers im leeren Raume. Es werde ein Körper in schräger Richtung AD (Fig. 143) unter einem Winkel α zum Horizonte aufwärts geworfen mit einer Geschwindigkeit V und sodann der Einwirkung der Schwere überlassen.

Die Bahn AEF des Körpers liegt in einer Vertikalebene, die durch die Anfangsrichtung der Bewegung geht. Man nehme in dieser Ebene, vom Anfangspunkte A aus, die beiden Achsen A x, A y an, wovon die erstere horizontal, die letztere vertikal aufwärts geht. Sind x, y die Koordinaten AB und BC eines Kurvenpunktes C, der in der Zeit t erreicht wird, und v die Geschwindigkeit in C, so muss im Sinne der Aufgabe sein, wenn g die Beschleunigung beim freien Falle bezeichnet,

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0; \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = -g. \tag{1}$$

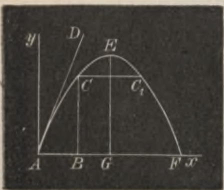


Fig. 143.

Setzt man $\frac{dx}{dt} = z$; $\frac{dy}{dt} = u$, so gehen die Formeln (1) über in

$$\frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{du}{dt} = -g.$$

Multipliziert man mit d t und integriert, so kommt

$$z = C; \quad u = -gt + C', \text{ also}$$

$$\frac{dx}{dt} = C. \quad \frac{dy}{dt} = -gt + C'. \tag{2}$$

Man zerlege die Anfangsgeschwindigkeit in die horizontale Seitengeschwindigkeit $V \cos \alpha$ und in die vertikale $V \sin \alpha$. Da nun aber $\frac{dx}{dt}$ die horizontale und $\frac{dy}{dt}$ die vertikale Seitengeschwindigkeit nach der Zeit t bezeichnen, so erhält man aus (2) für $t = 0$

$$V \cos \alpha = C; \quad V \sin \alpha = C'.$$

Setzt man diese Werte der Konstanten C, C' in (2) ein, so kommt

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = V \sin \alpha - gt. \tag{3}$$

Diese Seitengeschwindigkeiten sind die Seiten eines Rechtecks, dessen Diagonale die Geschwindigkeit v (in der Richtung der Tangente an der Bahn) ist. Man erhält deshalb nach dem pythagoreischen Lehrsatze

$$v^2 = V^2 - 2 V g t \sin \alpha + g^2 t^2. \tag{4}$$

Dieser Wert von v ist wegen der Einwirkung der Schwere veränderlich. Um das Minimum von v zu bestimmen, differentiiere man diese Gleichung, indem man t als unabhängig und v als abhängig Variable betrachtet, und setze den ersten Differentialquotienten $= 0$; man erhält

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-V g \sin \alpha + g^2 t}{v} = 0.$$

Hieraus folgt, da der Nenner v nicht unendlich gross sein kann, dass der Zähler verschwinden, also

$$- V g \sin\alpha + g^2 t = 0$$

sein muss. Bezeichnet man den hieraus hervorgehenden Wert von t mit T, so ist

$$T = \frac{V \sin\alpha}{g}. \tag{5}$$

Für diesen Wert von T wird die Geschwindigkeit v zu einem Minimum, weil das zweite Differentialverhältnis

$$\frac{d^2 v}{d t^2} = + \frac{g^2}{v}$$

positiv ist. Führt man T für t in (4) ein, so erhält man den kleinsten Wert der Geschwindigkeit

$$v = V \cos\alpha.$$

Mithin ist diese kleinste Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn gleich der konstanten horizontalen Seitengeschwindigkeit des Körpers (Formel 3).

Multipliziert man (3) mit d t und integriert, so kommt

$$x = V \cos\alpha \cdot t; \quad y = V \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2. \tag{6}$$

In diesen Wegformeln sind die Konstanten der Integration weggelassen, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ und $y = 0$ werden.

Die Ordinate y wird in den Punkten A und F, wo die Kurve die Abscissenachse schneidet, zu Null. Setzt man nun $y = 0$ in der zweiten der Gleichungen (6), so muss alsdann t die Zeit bezeichnen, die diesen zwei Punkten entspricht. Man erhält zunächst

$$0 = t\left(V \sin\alpha - \frac{g}{2} t\right).$$

Das Produkt rechts wird nun aber zu Null, wenn der eine oder andere der Faktoren zu Null wird. Setzt man den ersten Faktor $t = 0$, so entspricht diese Zeit dem Punkte A; setzt man aber den zweiten $= 0$, so findet man als Zeit

$$t_0 = \frac{2 V \sin\alpha}{g}. \tag{7}$$

Die Länge A F, die die Kurve auf der Abscissenachse abschneidet, heisst Wurfweite. Also bezeichnet t_0 die Zeit zum Durchlaufen der ganzen Kurve A E F über der Abscissenachse.

Eliminiert man t aus den beiden Formeln (6), so erhält man als Gleichung der Bahn

$$y = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2\alpha}. \tag{8}$$

In den Punkten A und F der Bahn wird die Ordinate zu Null. Setzt man daher $y = 0$ in (8), so bezeichnet x die Abscisse dieser zwei Punkte. Für diese wird daher

$$0 = x\left(\operatorname{tang}\alpha - \frac{g\,x}{2\,V^2\cos^2\alpha}\right).$$

Macht man den ersten der Faktoren, nämlich x, gleich Null, so entspricht er dem Punkte A; macht man aber den zweiten zu Null, so erhält man als Abscisse des Punktes F

$$(9) \qquad x_0 = \frac{2\,V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Es bezeichnet daher x_0 die Wurfweite AF.

Die Gleichung (8) zeigt, dass die Wurfbahn eine Parabel ist, deren Achse vertikal liegt.

Um den Scheitel oder höchsten Punkt E der Bahn zu finden, kann man den halben Wert von x_0 aus (9) als Abscisse AG derselben betrachten, ihn in (8) einführen und aus (8) die Ordinate GE des Scheitels berechnen.

Es kann aber auch die Abscisse des höchsten Punktes wie folgt aus (8) abgeleitet werden. Man bestimme denjenigen Wert von x, der y zu einem Maximum macht. Aus (8) erhält man

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \operatorname{tang}\alpha - \frac{g\,x}{V^2\cos^2\alpha}; \quad \frac{d^2 y}{d\,x^2} = -\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}.$$

Setzt man das erste Differentialverhältnis $= 0$, so folgt, indem man x mit X vertauscht,

$$(10) \qquad X = \frac{V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Für diesen Wert von x wird y ein Maximum, weil das zweite Differentialverhältnis negativ ist. Somit ist $X = AG$ die Abscisse des höchsten Punktes. Setzt man diesen Wert von x in (8) ein und vertauscht y mit Y, so erhält man als Ordinate GE des höchsten Punktes oder als Wurfhöhe

$$(11) \qquad Y = \frac{V^2\sin^2\alpha}{2\,g}.$$

Führt man den Wert von X aus (10) in die erste der Formeln (6) ein, so findet man für t gerade den Wert T, der in Formel (5) dargestellt ist. Mithin ist T die Zeit zur Erreichung des höchsten Punktes, und es ist die Geschwindigkeit des Körpers in diesem Punkte ein Minimum. Es nimmt somit die Geschwindigkeit vom Anfangspunkte aus bis zum höchsten Punkte ab.

Wenn der Parabelpunkt C in der Zeit $T - t'$ erreicht wird, so muss, wegen der gleichförmigen Bewegung in horizontaler Richtung, ein Punkt C′ der Bahn, der mit C gleichen Abstand von der Achse EG hat, erreicht werden in der Zeit $T + t'$. Setzt man diese beiden Zeiten für t in Formel (4) ein, so erhält man gleiche Werte für v, d. h.

die Geschwindigkeiten des Körpers in gleichen Tiefen unter dem höchsten Punkte der Bahn sind gleich. Diese Werte sind

$$v = \sqrt{V^2 \cos^2\alpha + g^2 t'^2}.$$

Da aber $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, so ist die Wurfweite nach (9) auch

$$x_0 = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Denkt man sich hierin die Grössen V und g konstant, dagegen α veränderlich, so wird auch x_0 veränderlich. Für $2\alpha = 90^0$ ist $\sin 2\alpha = 1$, also x_0 ein Maximum. Wird somit ein Körper unter einem Winkel von 45^0 zum Horizonte abgeworfen, so ist unter sonst gleichen Umständen seine Wurfweite grösser als für jeden andern Winkel.

Denken wir uns zwei Wurfwinkel, die gleich weit über und unter 45^0 liegen, etwa um β, so ist für den einen Winkel

$$\sin 2\alpha = \sin 2(45 + \beta) = \sin(90 + 2\beta)$$

und für den andern

$$\sin 2\alpha = \sin 2(45 - \beta) = \sin(90 - 2\beta).$$

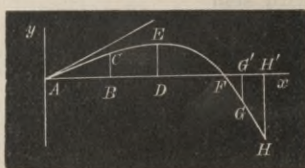
Allein diese beiden Werte von $\sin 2\alpha$ sind gleich gross; also ist auch für beide Winkel $45 + \beta$ und $45 - \beta$ die Wurfweite gleich gross.

413. Schiefer Wurf eines Körpers in der Luft. Der Luftwiderstand sei dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional und wirke in der Richtung der Tangente an die Bahn.

Wegen der letztern Voraussetzung wird die Bahn A C (Fig. 144) des Körpers eine ebene Kurve sein und in der Vertikalebene liegen, die durch die Anfangsrichtung der Bewegung geht. Es gelten die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe. Ausserdem sei s = A C der Bogen der Kurve, der vom Anfangspunkte bis zum Punkte mit den Koordinaten x, y reicht, $u = V \cos \alpha$ die horizontale Geschwindigkeit im Anfangspunkte und m die Beschleunigung, die der Luftwiderstand dem Körper in der Richtung der Bahn entzieht, bei der Geschwindigkeit = 1.

Die Geschwindigkeit im Punkte C ist $= \frac{ds}{dt}$, also die Beschleunigung, die in diesem Punkte dem Körper in der Richtung der Tangente an die Bahn entzogen wird $= m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$. Zerlegt man sie in eine horizontale und vertikale Seitenbeschleunigung, so wird man dafür erhalten

Fig. 144.



$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dx}{ds}; \quad m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dy}{ds}.$$

Die erstere bewirkt, dass die Bewegung in horizontaler Richtung verzögert wird; daher ist die Beschleunigung in dieser Richtung

$$(1) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \frac{ds}{dt} \frac{dx}{dt}.$$

Die letztere hat das entgegengesetzte Zeichen von dy, so dass in vertikaler Richtung sein muss

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = -g - m \frac{d s}{d t} \frac{d y}{d t}.$$

Man betrachte t als die unabhängig Variable, also dt als konstant, dividiere Gleichung (1) durch $\frac{dx}{dt}$ und beachte, dass nunmehr der Zähler $\frac{d^2 x}{d t^2}$ links das Differential des Nenners $\frac{dx}{dt}$ ist; dann erhält man als Integral dieser Gleichung

$$l\left(\frac{dx}{dt}\right) = -ms + C.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, setzt man $s = 0$; dann wird die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ zur Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung, also zu u. Diese Werte geben $l\,u = C$. Folglich erhält man durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorstehenden

$$l \frac{\frac{dx}{dt}}{u} = -ms,$$

oder indem man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = u e^{-ms}.$$

Multipliziert man die Gleichungen (1) und (2) mit dt^2, so kommt

$$d^2 x = -m\,ds\,dx; \quad d^2 y = -g\,dt^2 - m\,ds\,dy$$

und hieraus durch Elimination von $m\,ds$

$$d^2 y = -g\,dt^2 + \frac{dy}{dx} d^2 x,$$

woraus folgt

$$g\,dt^2 = \left(\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dx^2}\right) dx.$$

Die Grösse in der Klammer ist das Differential von $-\frac{dy}{dx}$; daher wird sein

$$(4) \qquad g\,dt^2 = -dx\,d\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Führt man den Wert von dt aus (3) hier ein und multipliziert auf beiden Seiten mit $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, so kommt

$$(5) \qquad g\,e^{2ms}\,ds = -u^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Gesetzt, die Bahn weiche nur wenig von der horizontalen Achse A x ab, so dass man s mit x verwechseln und $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegen die Einheit vernachlässigen kann. Unter dieser Voraussetzung gehen die Formeln (3) und (5) über in

$$(6)\qquad dt = \frac{1}{u} e^{mx} dx.$$

$$(7)\qquad g e^{2mx} dx = -u^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Das Integral von (6) ist

$$t = \frac{1}{mu} e^{mx} + C.$$

Setzt man, um die Konstante zu bestimmen, $x = 0$, so wird auch $t = 0$. Dies gibt

$$0 = \frac{1}{mu} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man

$$(8)\qquad t = \frac{1}{mu}(e^{mx} - 1).$$

Die Integration der Formel (7) liefert

$$\frac{g e^{2mx}}{2m} = -u^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + C.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C hat man die gleichzeitigen Werte $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha$. Hierfür wird die Gleichung

$$\frac{g}{2m} = -u^2 \operatorname{tang}\alpha + C.$$

Folglich ergibt sich durch Subtraktion und Auflösung in Hinsicht $\frac{dy}{dx}$

$$(9)\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha + \frac{g}{2mu^2}(1 - e^{2mx}).$$

Multipliziert man mit dx und integriert, so kommt

$$y = x \operatorname{tang}\alpha + \frac{g}{2mu^2}\left(x - \frac{e^{2mx}}{2m}\right) + C.$$

Für $x = 0$ wird auch $y = 0$, so dass diese Gleichung wird

$$0 = -\frac{g}{4m^2u^2} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

$$(10)\qquad y = \left(\operatorname{tang}\alpha + \frac{g}{2mu^2}\right)x - \frac{g}{4m^2u^2}(e^{2mx} - 1).$$

Die Gleichung (10) bestimmt die Bahn und (8) die Zeit.

Für den höchsten Punkt der Bahn ist $\frac{dy}{dx} = 0$. Hierfür folgt aus (9), wenn x mit x' vertauscht wird,

$$e^{2mx'} = 1 + \frac{2mu^2}{g} \operatorname{tang} \alpha,$$

oder indem man die Logarithmen nimmt,

$$x' = \frac{1}{2m} l\left(1 + \frac{2mu^2}{g} \operatorname{tang} \alpha\right).$$

Dieser Wert von x' ist die Abscisse AD des höchsten Punktes E.

Setzt man in (10) $y = 0$, so wird x zur Abscisse derjenigen Punkte A und F, in denen die Bahn die Abscissenachse schneidet. Bezeichnet man diesen Wert von x mit x'', so erhält man

$$(11) \qquad \left(\operatorname{tang} \alpha + \frac{g}{2mu^2}\right) x'' = \frac{g}{4m^2u^2}\left(e^{2mx''} - 1\right).$$

Diese Gleichung liefert zwei Werte von x''. Der eine $x'' = 0$ entspricht dem Anfangspunkte A, der andere gibt die Wurfweite AF.

Kennt man in einem besondern Falle x'', α und u, so kann vermittelst (11) der Wert von m berechnet werden. Ebenso könnte m aus (8) ermittelt werden, wenn man entsprechende Werte von x und t durch Beobachtung finden würde.

Weicht die Bahn von der Horizontalachse so wesentlich ab, dass s nicht mit x verwechselt und $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ nicht gegen 1 vernachlässigt werden kann, so werden die Differentialformeln der Bewegung sehr zusammengesetzt.

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$ in (5) ein, so erhält man

$$(12) \qquad -\frac{g e^{2ms}}{u^2} ds = dp \sqrt{1 + p^2}.$$

Das Integral hiervon ist nach § 84 und 90, Formel (11),

$$(13) \quad b - \frac{g e^{2ms}}{2mu^2} = \frac{p}{2}\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2} l\left(p + \sqrt{1+p^2}\right),$$

worin b die Konstante der Integration bezeichnen soll. Um sie zu bestimmen, setze man $s = 0$, wofür wird $p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha$. Folglich ist

$$b - \frac{g}{2mu^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} + \frac{1}{2} l\left(\operatorname{tang} \alpha + \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}\right).$$

Diese Gleichung bestimmt den Wert von b. Der Einfachheit wegen wollen wir jedoch für diesen Wert das Zeichen b beibehalten.

Nun ist $\qquad ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + p^2}.$

Setzt man diesen Wert von ds in (12) ein, so folgt

$$-g e^{2ms} dx = u^2 dp.$$

Eliminiert man hieraus und aus (13) die Grösse e^{2ms}, so kommt

$$(14) \qquad m\,dx = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + l\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) - 2b}.$$

Multipliziert man hier mit $\frac{dy}{dx} = p$, so wird

$$(15) \qquad m\,dy = \frac{p\,dp}{p\sqrt{1+p^2} + l\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) - 2b}.$$

Aus (4) folgt

$$g\,dt^2 = -dx\,dp.$$

Setzt man hierin den Wert von dx aus (14) ein und zieht die Quadratwurzel aus, so erhält man

$$(16) \qquad \sqrt{mg}\cdot dt = \frac{-dp}{\left[2b - p\sqrt{1+p^2} - l\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Hier ist deswegen das negative Zeichen der Quadratwurzel genommen, weil für die aufsteigende Bewegung p ab- und t zunimmt, also dp und dt ungleiche Zeichen haben müssen.

Da ferner

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

so erhält man den Wert von v^2, wenn man hierin die Werte von dx, dy und dt aus (14), (15) und (16) einführt. Es wird

$$(17) \qquad v^2 = \frac{g}{m}\cdot\frac{1+p^2}{2b - p\sqrt{1+p^2} - l\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)}.$$

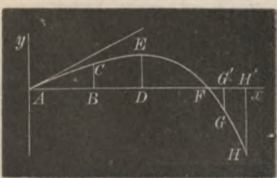
Die Formeln (14), (15) und (16) können nur durch Annäherungsmethoden integriert werden. Eine dieser Methoden besteht in der Reihenentwickelung. Sie ist jedoch nur unter der Voraussetzung der Konvergenz der Reihen zulässig.

Eine andere Methode besteht darin, dass man diese Differentialgleichungen nach § 381 konstruiert. Betrachtet man für alle drei Kurven p als Abscisse, so wird x die Ordinate der Kurve (14), y diejenige von (15) und t die von (16). Alle drei Kurven gehen durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$, $p = \operatorname{tang}\alpha$. Sind nun für aufeinander folgende Werte von $p = \operatorname{tang}\alpha$ bis $p = 0$ die entsprechenden Werte von x, y, t gefunden, so erhält man den aufsteigenden Ast der Kurve und die Zeit zur Erreichung irgend eines Punktes dieser Kurve. Sodann bestimmt man für Werte von p, die von 0 aus abnehmen, d. h. negativ werden, den absteigenden Ast, etc.

Man erhält auf diese Weise eine Kurve, deren Aeste nicht mehr symmetrisch sind zur Vertikalen ED (Fig. 145), die durch den höchsten Punkt geht. Die Wurfweite ist nicht mehr so gross wie für die Bewegung im leeren Raume, ihr Maximum tritt auch nicht mehr für einen Winkel α von 45^0, sondern für einen kleinern ein. Der absteigende Ast neigt sich rascher gegen die Abscissenachse als der aufsteigende. Denkt man sich die absteigende Bewegung bis ins Unendliche möglich, so wird das Verhältnis $\frac{dy}{dx} = p$ immer grösser und zuletzt unendlich gross. Für diese Bewegung ist aber p negativ. Vertauscht man deshalb $-p$ mit $+p$ in (14), so kommt

$$(18)\qquad m\,dx = \frac{-dp}{-p\sqrt{1+p^2} + l(-p+\sqrt{1+p^2}) - 2b}.$$

Fig. 145.



Nun ist aber $l\,1 = 0$; also auch $l(1+p^2-p^2) = 0$; allein

$$1+p^2-p^2 = \left(\sqrt{1+p^2}-p\right)\left(\sqrt{1+p^2}+p\right).$$

Folglich ist

$$l\left(\sqrt{1+p^2}-p\right) + l\left(\sqrt{1+p^2}+p\right) = 0.$$

Hiernach wird (18) zu

$$m\,dx = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + l\left(\sqrt{1+p^2}+p\right) + 2b}.$$

Denkt man sich hierin p so gross, dass $p\sqrt{1+p^2}$ mit p^2 vertauscht und $l\left(\sqrt{1+p^2}+p\right)+2b$ gegen p^2 vernachlässigt werden kann, so wird

$$m\,dx = \frac{dp}{p^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$(19)\qquad m\,x = -\frac{1}{p} + C.$$

Es erfolge die Bewegung in dem sehr steilen Kurventeile GH. Hierbei gehe die Abscisse $AG' = x'$ über in $AH' = x$ und es verwandele sich p' in p, so dass x' und p' entsprechende Werte für den Punkt G sind. Man erhält für denselben aus (19)

$$m\,x' = -\frac{1}{p'} + C,$$

also durch Subtraktion und Division durch m

$$G'H' = x - x' = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right).$$

Da p ins Unendliche wächst, so nähert sich die Grösse

$$x = x' + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right)$$

mehr und mehr der konstanten Grenze

$$x = x' + \frac{1}{m\,p'}.$$

Also nähert sich auch der absteigende Ast mehr und mehr einer vertikalen Geraden, die diesen endlichen Abstand von der Ordinatenachse hat. Diese vertikale Gerade ist mithin eine Asymptote dieses Astes.

Nimmt man auch in (17) die Grösse p negativ und so gross, dass der Nenner des zweiten Bruches rechts mit p^2 vertauscht werden kann, so erhält man

$$v = \sqrt{\frac{g}{m}}.$$

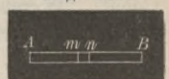
Somit ist $\sqrt{\frac{g}{m}}$ die Grenze, der sich die Geschwindigkeit des Körpers bei der absteigenden Bewegung mehr und mehr nähert. An dieser Grenze ist der Luftwiderstand gleich der Schwerkraft.

414. Wärmeleitung in einem prismatischen Stabe. Einem dünnen prismatischen Stabe werde am einen Ende Wärme mitgeteilt. Diese Wärme pflanzt sich im Stabe fort und vermindert sich durch Verluste an die umgebende Luft. Man soll das Gesetz der Temperaturabnahme von einem Ende des Stabes nach dem andern hin bestimmen.

Das Ende A des Stabes (Fig. 146) nehme von irgend einer Wärmequelle her in gleichen Zeiten gleiche Wärmemengen auf, so dass sich die Wärme über den Querschnitt in A gleichförmig verteile; ferner werde die Temperatur der umgebenden Luft, etwa durch Hinzuströmen neuer Luft, konstant auf Null erhalten. Nach einer gewissen Zeit muss in der Bewegung der Wärme durch den Stab der Beharrungszustand eintreten, so dass die Temperatur in einem und demselben Querschnitte des Stabes konstant bleibt. Es seien

q der Querschnitt des Stabes,
u der Umfang dieses Querschnittes,
T, t die Temperaturen in A und m und
x = A m der veränderliche Abstand eines Querschnittes durch den Stab von der Wärmequelle aus.

Fig. 146.



Die Temperatur t ist eine Funktion von x. Nimmt x um $dx = mn$ zu, so vermindert sich t vermöge der Abkühlung um dt. Zwischen den Querschnitten in m und n liegt ein Prisma von der Länge dx. Wegen dieser geringen Länge kann angenommen werden, es bewege sich die Wärme gleichförmig längs des Weges dx. In diesem Falle ist aber die durch den Querschnitt in m in jeder Zeiteinheit gehende Wärmemenge proportional dem Querschnitte q, der Differenz dt der Temperaturen in m und n und umgekehrt proportional der Länge dx des Prismas. Bezeichnet k eine von der Natur des Stabes abhängige Konstante, so ist also die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt in m gehende Wärmemenge

$$kq\frac{dt}{dx}. \tag{1}$$

Lässt man hierin x in $x + dx$, also t in $t - dt$ übergehen, so erhält man, da dx konstant angenommen wird,

$$k\,q\,\frac{d(t-dt)}{dx} = k\,q\left(\frac{dt}{dx} - \frac{d^2t}{dx}\right)$$

als Ausdruck für die Wärmemenge, die durch den Querschnitt in n gleichzeitig geht. Die Differenz

$$(2) \qquad k\,q\,\frac{d^2t}{dx}$$

dieser Wärmemengen ist offenbar gleich derjenigen Wärme, die die Oberfläche des Prismas m n durch die Abkühlung in gleicher Zeit verliert.

Nun ist aber dieser Wärmeverlust proportional der sich abkühlenden Oberfläche u d x und der Temperatur t des Prismas. Wenn also h den Wärmeverlust bezeichnet, den ein Prisma von derselben Substanz, von der Oberfläche 1, bei der Temperatur von 1 Grad, in der Zeiteinheit erleidet, so ist der Wärmeverlust des Prismas m n in derselben Zeit $= h\,u\,t\,dx$. Mithin erhält man folgende Gleichung

$$q\,k\,\frac{d^2t}{dx} = h\,u\,t\,dx,$$

$$(3) \qquad \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{u\,h}{q\,k}\,t.$$

Würde man die Wärme als eine Flüssigkeit betrachten, so wäre im Ausdrucke (1) die Grösse $k\,\frac{dt}{dx}$ die Geschwindigkeit und im Ausdrucke (3) die Grösse $k\,\frac{d^2t}{dx^2}$ die Beschleunigung der Wärmebewegung im Stabe. Diese Beschleunigung wäre daher der Temperatur t proportional. Wenn auf eine und dieselbe frei schwebende Masse Kräfte einwirken, so verhalten sich diese Kräfte wie die Beschleunigungen, die sie hervorbringen. Bei der in Frage liegenden Wärmebewegung vertritt also die Temperatur die Stelle der Kraft.

Multipliziert man Gleichung (3) mit d t, so kommt

$$(4) \qquad \frac{dt\,d^2t}{dx^2} = \frac{u\,h}{q\,k} \cdot t\,dt.$$

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{u\,h}{q\,k} = m^2$$

und beachte, dass $dt\,d^2t = \frac{1}{2}\,d(dt)^2$; dann ergibt sich durch Integration von (4)

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = m^2t^2 + b,$$

indem man mit b die Konstante der Integration bezeichnet. Hieraus folgt

$$(5) \qquad dx = -\frac{dt}{\sqrt{b + m^2 t^2}}.$$

Von den beiden Vorzeichen, mit denen hier die Quadratwurzel behaftet ist, muss nur das negative genommen werden, weil t abnimmt, wenn x wächst. Das Integral von (5) ist nach Formel (3) des § 88

$$x = -\frac{1}{m} l \left[m t + \sqrt{b + m^2 t^2}\right] + c.$$

Um die Konstante c zu bestimmen, setze man $x = 0$. Dadurch wird t zu T. Für diese Werte erhält man also

$$0 = -\frac{1}{m} l \left[m T + \sqrt{b + m^2 T^2}\right] + c.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

$$x = \frac{1}{m} l \frac{m T + \sqrt{b + m^2 T^2}}{m t + \sqrt{b + m^2 t^2}}.$$

Multipliziert man mit m und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$e^{m x} = \frac{m T + \sqrt{b + m^2 T^2}}{m t + \sqrt{b + m^2 t^2}}.$$

Der Zähler rechts ist eine konstante Grösse. Bezeichnet man sie mit a, so erhält man hieraus

$$\sqrt{b + m^2 t^2} = -m t + a e^{-m x}.$$

Wird diese Gleichung quadriert, so heben sich die Glieder mit t^2 auf und es wird

$$b = -2 m a t e^{-m x} + a^2 e^{-2 m x}.$$

Dividiert man durch den Faktor von t und bezeichnet mit A und B die konstanten Faktoren der vorkommenden Exponentialgrössen, so erhält man

$$(6) \qquad t = A e^{-m x} + B e^{m x}.$$

Um die Werte der Konstanten A und B zu ermitteln, setze man zunächst $x = \infty$. Dadurch muss die Temperatur t unendlich klein werden. Der erste Teil rechts in (6) wird hierbei in der That unendlich klein, während der zweite unendlich gross ausfällt. Folglich muss $B = 0$ sein. Hiernach folgt aus (6)

$$t = A e^{-m x}.$$

Setzt man hierin $x = 0$, so muss t in T übergehen; folglich ist $A = T$. Somit wird die Temperatur t in der Entfernung x von der Wärmequelle sein

$$(7) \qquad t = T e^{-m x}.$$

Gesetzt man beobachte in den Abständen x' und x'' von der Wärmequelle die Temperaturen t' und t'' im Stabe, so ist nach (7), indem man den Wert von m wieder einführt,

$$t' = T\,e^{-x'\sqrt{\frac{u\,h}{q\,k}}};\quad t'' = T\,e^{-x''\sqrt{\frac{u\,h}{q\,k}}}.$$

Dividiert man diese zwei Gleichungen durcheinander und nimmt die Logarithmen, so erhält man nach einer einfachen Reduktion

$$\sqrt{\frac{h}{k}} = \frac{l\,t' - l\,t''}{x'' - x'}\sqrt{\frac{q}{u}}.$$

Durch diese Relation kann das Verhältnis $\frac{h}{k}$ zwischen dem Abkühlungs- und Leitungsvermögen der Substanz ermittelt werden.

Sind t, t', t''.. die Temperaturen in Querschnitten, die die Abstände $x, x + \alpha, x + 2\alpha, ..$ von A aus haben, so wird nach (7) sein

$$t = T\,e^{-mx};\quad t' = T\,e^{-m(x+\alpha)};\quad t'' = T\,e^{-m(x+2\alpha)}\ldots.$$

Hieraus folgt

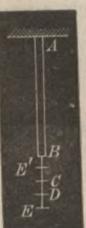
$$\frac{t + t''}{t'} = \frac{t' + t'''}{t''} = \ldots = e^{m\alpha} + e^{-m\alpha}.$$

Nimmt man daher im Stabe Querschnitte an, die in gleichen Abständen aufeinander folgen, so bieten je drei benachbarte die Eigentümlichkeit, dass die Summe aus den Temperaturen der äussern Querschnitte dividiert durch die Temperatur des innern Querschnittes einen Wert liefert, der der ganzen Länge des Stabes nach konstant ist. Dieses Resultat ist durch Versuche von Despretz bestätigt.

XII. Aufgaben über schwingende Bewegungen.

415. Längenschwingungen eines elastischen Stabes. Ein prismatischer Stab AB (Fig. 147) sei in vertikaler Lage am obern Ende befestigt. Am untern Ende B werde ein solches Gewicht P angehängt, dass der Stab eine kleine Ausdehnung BC annimmt. In dieser Stellung sind der Widerstand des Stabes und das Gewicht mit einander im Gleichgewichte. Wird ein zweites Gewicht angehängt, so dehnt sich der Stab um eine weitere Grösse CE aus. Nimmt man dieses zweite Gewicht ab, so zieht sich der Stab vermöge seiner Elastizität zusammen. Diese Elastizität wirkt beschleunigend auf das untere Ende des Stabes, bis dasselbe zur Stelle C zurückgekehrt ist. In C hat also das untere Ende seine grösste Geschwindigkeit; folglich wird es von hier aus die Bewegung aufwärts um eine gewisse Grösse CE' fortsetzen. Wenn der Modul der Elastizität für Ausdehnung und Kompression derselbe und die Elastizität für die eintretenden Längenänderungen eine vollkommene ist, so wird die Verkürzung CE' = CE. Auf die Verkürzung folgt wieder

Fig. 147.



die Ausdehnung, etc., so dass das untere Ende auf- und abgehende Schwingungen macht, die in gleichen Zeiten vollendet werden. Man soll die Schwingungszeit bestimmen. Es bezeichne

L, q die primitive Länge AB und den Querschnitt des Stabes,
$a = BC$ die durch das Gewicht P bewirkte Ausdehnung,
$b = CE$ die durch ein zweites Gewicht hervorgebrachte Ausdehnung,
E den Modul der Elastizität des Stabes und
g die Beschleunigung beim freien Falle der Körper.

Ist $x = CD$ eine variable Ausdehnung, die in der Zeit t von der Gleichgewichtslage C aus erreicht wird, so ist nach dem in § 212 ausgesprochenen Gesetze die Kraft P, die die Ausdehnung a bewirkt,

$$(1) \qquad P = E \frac{a}{L} q.$$

Folglich ist die Kraft, die dem Stabe eine Ausdehnung $= a + x$ beibringt, gleich

$$(2) \qquad E \frac{a + x}{L} q.$$

Diese Kraft kann auch als Widerstand des Stabes angesehen werden, den er der Ausdehnung entgegensetzt. Folglich ist die Differenz

$$(3) \qquad E \frac{a + x}{L} q - P = E \frac{x}{L} q$$

der Widerstand, den der Stab der Bewegung des Gewichtes P abwärts entgegensetzt.

Die Beschleunigung, mit der diese Bewegung in D erfolgt, sei g'. Statt dass also das Gewicht P frei herabfällt und die Beschleunigung g annimmt, bewegt es sich mit einer Beschleunigung g'. Die diesen Bewegungen entsprechenden Beschleunigungen verhalten sich wie die Kräfte, so dass man hat

$$g' : g = E \frac{x}{L} p : E \frac{a}{L} q,$$

$$g' = \frac{g}{a} x.$$

Da aber der Ausdruck für die Beschleunigung auch $\frac{d^2 x}{d t^2}$ ist, so hat man ohne Rücksicht auf das Gewicht des Stabes

$$(4) \qquad \frac{d^2 x}{d t^2} = - \frac{g}{a} x.$$

Hier ist das negative Zeichen genommen, weil einer verzögerten Bewegung eine negative Beschleunigung entspricht.

Multipliziert man mit $2\,dx$ und integriert, indem man dt als konstant betrachtet, so erhält man

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C - \frac{g}{a} x^2.$$

Die Grösee $\frac{dx}{dt}$ bezeichnet die Geschwindigkeit des Stabes in D.

Für $x = CE = b$, d. h. für den tiefsten Punkt, wird $\frac{dx}{dt} = 0$. Dies gibt

$$0 = C - \frac{g}{a} b^2.$$

Folglich erhält man durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}(b^2 - x^2),$$

woraus folgt

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}}.$$

Diese Quadratwurzel erhält das positive Zeichen, weil x und t beim Sinken von D gleichzeitig zunehmen. Die Integration gibt

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin \frac{x}{b}. \tag{5}$$

Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $x = 0$ auch $t = 0$ wird.

Aus (5) erhält man durch Umkehrung

$$x = b \cdot \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right); \tag{6}$$

die Gleichungen (5) und (6) bestimmen die eintretende Schwingungsbewegung vollständig.

Für $x = b$ wird t zur halben Dauer T einer Schwingung. Die Schwingungszeit ist mithin

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{7}$$

Diese Zeit stimmt überein mit der Schwingungszeit eines einfachen Pendels, dessen Länge $= a$ ist. Da nun aber a immer sehr klein ist, so fallen diese Schwingungen sehr rasch aus. Führt man den Wert von a aus (1) in (7) ein, so erhält man

$$T = \pi\sqrt{\frac{PL}{gEq}}.$$

416. Querschwingungen eines elastischen Stabes. Ein prismatischer Stab AB (Fig. 148) sei in horizontaler Lage am einen Ende A befestigt, am andern hänge ein Gewicht P, so dass dadurch der Aufhängepunkt B eine kleine Senkung $BC = a$ annehme. Wird noch ein zweites Gewicht angehängt, so nehme seine Senkung um den kleinen Wert $CE = b$ zu. Wird dieses zweite Gewicht abgenommen, so

Fig. 148.

geht der Aufhängepunkt, vermöge der Elastizität des Materials, in die Höhe und macht von da an um die Gleichgewichtslage C herum Schwingungen von gleicher Schwingungsdauer und gleicher Ausweichung von C aus, unter der Voraussetzung vollkommener Elastizität.

Die Bewegung beginne vom Punkte C aus abwärts. In der Zeit t lege der Aufhängepunkt einen Weg $CD = x$ zurück. Ist L die Länge des Stabes und M das Elastizitätsmoment (§ 401) desselben, so ist nach § 402 die Kraft, die die Senkung a bewirkt,

$$P = \frac{3\,M}{L^3}\,a, \tag{1}$$

somit auch die Kraft, die einer Senkung $BD = a + x$ entspricht, gleich

$$\frac{3\,M}{L^3}\,(a + x). \tag{2}$$

Der Unterschied dieser Kräfte (1) und (2) ist der Widerstand, den der Stab der weitern Bewegung abwärts entgegensetzt. Bezeichnen daher g′ und g die Beschleunigungen des Gewichtes P, hervorgerufen am Stabe und beim freien Falle, so erhält man ohne Rücksicht auf das Gewicht des Stabes $g' : g = \frac{3\,M}{L^3}\,x : P$; daher vermöge (1)

$$g' = \frac{g}{a}\,x. \tag{3}$$

Hiernach erhält man, wie in der vorigen Aufgabe, als Differentialformel der Bewegung, indem man wegen der verzögerten Bewegung g′ mit negativem Zeichen einführt,

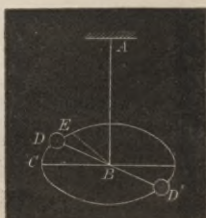
$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{g}{a}\,x, \tag{4}$$

somit auch als Wert T einer Schwingungszeit

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \pi\sqrt{\frac{P\,L^3}{3\,g\,M}}. \tag{5}$$

417. Schwingungen eines Torsionspendels. Ein elastischer Cylinder AB (Fig. 149) vom Halbmesser r und der Länge L befinde sich in vertikaler Lage. Sein oberes Ende A sei befestigt. Durch das untere Ende B gehe eine horizontale gerade Stange mit gleichen Armen BD, BD′, die gleiche Gewichte tragen. Ist der Cylinder nicht verdreht, so besteht Gleichgewicht. Diese Gleichgewichtslage sei in BC. Dreht man den Arm BC in einer horizontalen Ebene um einen Winkel $EBC = \alpha$ und lässt sodann den Arm los, so macht er Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Es sei die Schwingungsdauer zu bestimmen.

Fig. 149.



Indem der Arm BC nach BE gelangt, wird der Cylinder verdreht, und es ist das statische Moment der Kraft, die die Fasern des Cylinders verdreht, nach § 218 Formel (10)

$$(1) \qquad \frac{\pi E r^4}{5 L} \alpha,$$

wobei E den Modul der Elastizität des Materials bezeichnet. Man überlasse nun das Pendel in der Lage B E sich selbst. Nimmt alsdann der Drehwinkel α während der Zeit t um $\alpha - \varphi$ ab, wobei φ den veränderlichen Winkel D B C bezeichnet, so ist jenes Torsionsmoment (1) nur noch

$$(2) \qquad \frac{\pi E r^4}{5 L} \varphi.$$

Mit diesem statischen Momente werden die Gewichte in D und D' gegen die Gleichgewichtslage getrieben. Die treibende Kraft hört erst auf für $\varphi = 0$, d. h. erst in der Gleichgewichtslage; also wird die Bewegung bis dahin beschleunigt; jenseits der Gleichgewichtslage wird sie verzögert. Es entsteht eine schwingende Bewegung mit konstanter Schwingungszeit und konstanter Schwingungsweite bei vollkommener Elastizität des Cylinders.

Man denke sich sämtliche schwingende Massen, unter Anwendung der Lehre vom Trägheitsmomente (§ 184) in ihrem Mittelpunkte der Trägheit vereinigt, d. h. in einem Punkte, in dem sie den gleichen Einfluss auf die Drehung ausüben, wie die vereinzelten Massen (der Arme und Gewichte) in ihren jetzigen Lagen. Der Abstand dieses Mittelpunktes der Trägheit von der Drehachse sei $= a$ und das Gewicht der in diesem Punkte vereinigten Massen $= P$. Denkt man sich das statische Moment (2) am Hebelarme a, in der Richtung der Bewegung, wirkend, so ist die diesem Momente entsprechende Kraft gleich

$$\frac{\pi E r^4}{5 a L} \varphi.$$

Das Gewicht P drehe sich in D mit der Beschleunigung g'. Bezeichnet daher g die Beschleunigung beim freien Falle, so müssen sich die Kräfte, die auf eine und dieselbe Masse wirken, wie ihre Beschleunigungen verhalten, so dass man hat

$$g' : g = \frac{\pi E r^4}{5 a L} \varphi : P; \quad g' = \frac{g}{P} \cdot \frac{\pi E r^4}{5 a L} \varphi.$$

Ist $x = \text{Bogen}\, C D = a \varphi$, so wird der Ausdruck für die Beschleunigung auch $\frac{d^2 x}{d t^2} = a \frac{d^2 \varphi}{d t^2}$. Daher erhält man in gleicher Weise wie in den beiden letzten Aufgaben

$$a \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - \frac{g}{P} \cdot \frac{\pi E r^4}{5 a L} \varphi.$$

Bezeichnet man den konstanten Faktor von φ rechts mit u, so erhält man

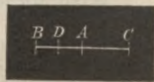
$$(3) \qquad \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - \frac{u}{a} \varphi.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit den Formeln (4) der beiden letzten Aufgaben überein. Man erhält deshalb für die Schwingungszeit den Wert

$$(4) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{a}{u}} = \pi \sqrt{\frac{P}{g} \cdot \frac{a^2}{\left(\frac{\pi E r^4}{5 L}\right)}}.$$

418. Schwingungen eines elastischen Mittels. Dieses Mittel (Luft, Aether), habe überall gleiche Dichte. Eines seiner Teilchen werde durch eine momentane äussere Einwirkung in einer gewissen Richtung AB (Fig. 150) verschoben. Dadurch wird das Mittel in der Richtung der Bewegung verdichtet. Die dadurch vergrösserte Expansivkraft des Mittels erschöpft die Bewegung des Teilchens und treibt es wieder in die Anfangslage A zurück. Bei dieser rückgängigen Bewegung wirkt die Expansivkraft des Mittels beschleunigend bis zum Punkte A. Also nimmt die Geschwindigkeit bis zu dieser Stelle zu und es muss das Teilchen über A hinaus in der Richtung nach C hin sich bewegen. Auf dieser Seite tritt die gleiche Erscheinung ein wie auf der Seite von B. Also schwingt das Teilchen um die Gleichgewichtslage A hin und her.

Fig. 150.



Nach der Zeit t habe das Teilchen den Weg $AD = x$ von der Gleichgewichtslage aus durchlaufen. Der Widerstand des Mittels ist eine Funktion von x, die für $x = 0$ verschwinden muss. Würde man also diese Funktion in eine Reihe nach ganzen Potenzen von x auflösen, so dürfte kein Glied ohne x vorkommen. Diese Reihe müsste also die Form haben

$$A x + B x^2 + C x^3 + \cdots$$

Da nun aber die grössten Werte von x als sehr klein vorausgesetzt werden, so kann man annehmen, es verschwinden die Glieder mit der zweiten und den höheren Potenzen von x gegen das erste Glied. Der Widerstand des Mittels kann deshalb $= A x$ und die ihm proportionale Beschleunigung $= k x$ gesetzt werden. Allein diese Beschleunigung, als einer verzögerten Bewegung entsprechend, ist negativ. Deshalb wird die Differentialformel der Bewegung

$$(1) \qquad \frac{d^2 x}{d t^2} = - k x.$$

Multipliziert man mit $2 dx$ und integriert, so kommt

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C - k x^2.$$

Ist nun die grösste Ausweichung $AB = a$, so wird die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = 0$ für $x = a$; dies gibt

$$0 = C - k a^2$$

und durch Subtraktion

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k (a^2 - x^2).$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{k}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wobei der Quadratwurzel das positive Zeichen gegeben wird, weil x und t gleichzeitig wachsen. Durch Integration erhält man

$$t\sqrt{k} = \arcsin\frac{x}{a}.$$

Die Integrationskonstante ist weggelassen, weil für $x = 0$ auch $t = 0$ wird. Geht man vom Bogen zum Sinus über, so wird

$$x = a \sin\left(t\sqrt{k}\right). \tag{3}$$

Wird diese Wurzel differentiiert und die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ mit v bezeichnet, so erhält man

$$v = a\sqrt{k}\cos\left(t\sqrt{k}\right). \tag{4}$$

Man könnte auch diesen Wert von v erhalten, wenn man den Wert von x aus (3) in (2) einführt.

Ist nun T die Zeit, die das Teilchen zu einer Hin- und Herbewegung braucht, so wird es überhaupt am Anfange und Ende der Zeitdauer T die nämliche Stelle der Bahn in der gleichen Richtung passieren. Diese Zeit wollen wir hier Schwingungszeit nennen.

Die Sinus und Cosinus von Bogen, die um ein Vielfaches von 2π von einander abweichen, sind einander gleich mit gleichen Zeichen. Bezeichnet daher n irgend eine ganze Zahl und schreibt man

$$2\pi n + t\sqrt{k} = \left(\frac{2\pi n}{\sqrt{k}} + t\right)\sqrt{k},$$

so erhält man aus (3) und (4)

$$x = a \sin\left[\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{k}} + t\right)\sqrt{k}\right], \tag{5}$$

$$v = a\sqrt{k}\cos\left[\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{k}} + t\right)\sqrt{k}\right]. \tag{6}$$

Setzt man hierin der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$, so wird die Zeit t je um $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ vergrössert; dabei erhalten x und v für alle diese Substitutionen gleichen Wert. Folglich ist $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ die konstante Schwingungszeit, so dass man hat

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}. \tag{7}$$

Führt man den Wert von $\sqrt{k}$ aus dieser Formel in (5) und (6) ein, so kommt

(8) $$x = a \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

(9) $$v = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Für $t = 0, T, 2T, ..$ wird $x = 0$ und v ein Maximum. Bezeichnet man diesen grössten Wert, den das bewegliche Teilchen in der Gleichgewichtslage besitzt, mit V, so erhält man aus (9)

(10) $$V = \frac{2\pi a}{T}.$$

Die Sinus und Cosinus von Bogen, die um π von einander abweichen, haben gleiche Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen. Lässt man daher in (8) und (9) die Zeit t um eine halbe Schwingungsdauer, also um $\frac{1}{2}$ T, zunehmen, so erhält man

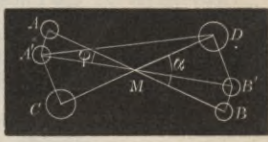
$$x = a \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right) = -a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$v = a\sqrt{k} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right) = -a\sqrt{k} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Somit hat das schwingende Teilchen nach jeder halben Schwingungszeit gleichen Abstand von der Gleichgewichtslage und gleiche Geschwindigkeit, beides jedoch in entgegengesetzter Richtung.

419. Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde, nach Cavendish. Es sei AB (Fig. 151) ein sehr dünner, prismatischer Körper von Holz, an dessen beiden Enden A und B zwei gleiche Bleikugeln angebracht sind. Ist der Stab in der Mitte M zwischen diesen Kugeln an einem dünnen Drahte aufgehängt, so wird der Stab eine horizontale Lage annehmen. Dreht man denselben in einer horizontalen Ebene in eine andere Lage A′B′ und lässt ihn los, so wird er vermöge der Elastizität des Aufhängedrahtes zurückkehren und um die Gleichgewichtslage AB hin- und herschwingen.

Fig. 151.



Bringt man nun in der Schwingungsebene, in einer Geraden CMD, in gleichen Entfernungen von M, zwei gleiche Kugeln von dichtem Stoffe, z. B. von Blei, in fester Lage an, so werden die Kugeln A und B von diesen Kugeln angezogen und vermöge der Elastizität des Drahtes in Schwingungen versetzt. Diese Anziehung findet statt nach dem Gesetze der Gravitation, und zwar so, als wenn die Massen der Kugeln in ihren Mittelpunkten vereinigt wären. Es seien

$a = AM$ die Entfernung der beiden Kugeln A, B von der Drehachse,
$b = CM$ die Entfernung der Kugeln C, D von dieser Achse,
α der Winkel DMB, den die Anfangslage MB mit der Geraden MD bildet,
φ der veränderliche Winkel AMA′, den die schwingende Pendelstange in der Zeit t von der Anfangslage AM aus beschreibt,

f die Beschleunigung, die die Anziehung der Kugel C auf eine Masseneinheit der Kugel A hervorbringt, wenn beide Kugeln den Abstand 1 von einander haben,

m die Masse einer der Kugeln C, D;

dann werden die Beschleunigungen, die die Kugeln C und D der Kugel A' beizubringen vermögen, sein

$$\text{Kugel C in der Richtung } CA' = f\frac{m}{CA'^2},$$

$$\text{Kugel D in der Richtung } DA' = f\frac{m}{DA'^2}.$$

Man zerlege diese Beschleunigungen in Seitenbeschleunigungen, die senkrecht und parallel sind zur Pendelstange A' B'. Die letzteren gehen für die Drehung verloren, nur die erstern entsprechen der Drehung. Diese sind

$$f\,m\frac{\sin MA'C}{A'C^2}, \quad f\,m\frac{\sin MA'D}{A'D^2}.$$

Die erstere dieser Beschleunigungen nimmt mit φ zu, die letztere ab, sie haben also entgegengesetzte Vorzeichen. Die wirkliche Beschleunigung, die die Kugeln C und D der Kugel A' beibringen, ist daher

$$(1) \qquad f\,m\left(\frac{\sin MA'C}{A'C^2} - \frac{\sin MA'D}{A'D^2}\right).$$

Allein die Dreiecke C M A' und D M A' geben die Proportionen

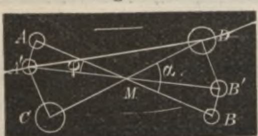
$$b : A'C = \sin MA'C : \sin(\alpha - \varphi),$$
$$b : A'D = \sin MA'D : \sin(\alpha - \varphi).$$

Führt man hieraus die Werte von $\sin MA'C$ und $\sin MA'D$ in (1) ein, so kommt

$$(2) \qquad b\,f\,m\sin(\alpha - \varphi)\left[\frac{1}{A'C^3} - \frac{1}{A'D^3}\right].$$

Hierin sind noch die Abstände A' C und A' D durch a, b, α, φ auszudrücken. Es ist für die schon genannten Dreiecke

Fig. 151.



$$A'C^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \varphi),$$
$$A'D^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A'MD.$$

Allein $\cos A'MD = -\cos(\alpha - \varphi)$; folglich

$$A'D^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \varphi).$$

Der Schwingungswinkel φ wird sehr klein ausfallen. Unter dieser Voraussetzung kann man daher annehmen

$$\cos\varphi = 1, \quad \sin\varphi = \varphi; \quad \cos(\alpha - \varphi) = \cos\alpha + \varphi\sin\alpha.$$

Deshalb wird sein

$$A'C^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos\alpha + \varphi\sin\alpha),$$
$$A'D^2 = a^2 + b^2 + 2ab(\cos\alpha + \varphi\sin\alpha).$$

Setzt man zur Vereinfachung

(3) $p^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha;\quad q^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha,$

so wird

$$A'C^2 = p^2 - 2ab\varphi\sin\alpha,$$
$$A'D^2 = q^2 + 2ab\varphi\sin\alpha.$$

Erhebt man diese Ausdrücke auf die Potenz $-\frac{3}{2}$ und vernachlässigt die Glieder der Reihen, in denen φ die erste Potenz überschreitet, so kommt

$$(4)\qquad \frac{1}{A'C^3} = \frac{1}{p^3} + \frac{3ab\sin\alpha}{p^5}\varphi.$$

$$(5)\qquad \frac{1}{A'D^3} = \frac{1}{q^3} - \frac{3ab\sin\alpha}{q^5}\varphi.$$

Zieht man (5) von (4) ab, nach Vorschrift von Formel (2), multipliziert sodann mit

$$\sin(\alpha - \varphi) = \sin\alpha - \varphi\cos\alpha,$$

indem man die Glieder mit φ^2 vernachlässigt, und setzt zur Abkürzung

$$(6)\qquad \sin\alpha\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right) = h,$$

$$(7)\qquad +3ab\sin^2\alpha\left(\frac{1}{p^5} - \frac{1}{q^5}\right) - \cos\alpha\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right) = k,$$

so wird der Ausdruck (2) für die Beschleunigung der Kugel A' vermöge der Anziehung sein

$$(8)\qquad fmb(h + k\varphi).$$

Die Elastizität des Aufhängedrahtes widersteht der Drehung mit einer Kraft, die dem Torsionswinkel φ proportional ist (§ 218). Also wird auch die dieser Kraft entsprechende Beschleunigung der Grösse φ proportional sein, also mit $n\varphi$ bezeichnet werden können. Da der Einfluss der Kugeln C und D auf die Kugel B' gleich gross ist wie auf A', so ist also vom Doppelten der Beschleunigung (8) die Grösse $n\varphi$ abzuziehen, um die wirkliche Beschleunigung zu ergeben.

Diese Beschleunigung ist aber auch $\frac{d^2x}{dt^2}$, wo x den Bogen AA' $= a\varphi$ bezeichnet. Da nun $dx = a\,d\varphi$ und $d^2x = a\,d^2\varphi$, so wird mithin die Differentialgleichung der Bewegung sein

$$(9)\qquad a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2fmb(h + k\varphi) - n\varphi.$$

Multipliziert man mit $2d\varphi$ und integriert, indem man dt als konstant betrachtet, so kommt

$$(10)\qquad a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 4fmbh\varphi + (2fmbk - n)\varphi^2.$$

Die Konstante der Integration ist $= 0$, weil für $\varphi = 0$ das Pendel in der Anfangslage AM sich befindet, also auch die Geschwindigkeit $\frac{a\,d\varphi}{dt}$ daselbst $= 0$ ist.

In einer bestimmten Lage der Pendelstange halten sich der Torsionswiderstand des Drahtes und die Anziehung der Kugeln das Gleichgewicht. In dieser Lage bilde die Stange mit der Anfangslage den Winkel φ'. Während also die Gerade AM die Ruhelage ist ohne Anziehung der Kugeln, so ist die Richtung, die mit AM den Winkel φ' bildet, die Ruhelage unter Einwirkung der Kugeln.

Setzt man in (9) $\varphi = \varphi'$, so wird die Beschleunigung $a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$; dies gibt

$$2\,f\,m\,b\,k - n = -\frac{2\,f\,m\,b\,h}{\varphi'}.$$

Führt man diesen Wert von $2\,f\,m\,b\,k - n$ in (10) ein, so folgt

$$(11) \qquad a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2\,f\,m\,b\,h}{\varphi'}(2\,\varphi'\,\varphi - \varphi^2).$$

Da nun $\frac{a\,d\varphi}{dt}$ die Geschwindigkeit bezeichnet, so muss diese Grösse zu beiden Seiten eines Schwingungsbogens $= 0$ sein. Für $\frac{a\,d\varphi}{dt} = 0$ erhält man aber aus (11)

$$2\,\varphi'\,\varphi - \varphi^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(2\,\varphi' - \varphi) = 0.$$

Das Produkt $\varphi(2\,\varphi' - \varphi)$ kann aber nur $= 0$ werden, wenn einer der Faktoren $= 0$ ist. Daraus folgt

$$\varphi = 0, \quad \varphi = 2\,\varphi'.$$

Der erste Wert von φ entspricht dem Anfange, der andere dem Ende einer Schwingung; also ist der Schwingungsbogen das Doppelte von der Ablenkung φ'.

Sondert man die Veränderlichen in (11) und nimmt für $d\varphi$ und dt bei der Quadratwurzelausziehung gleiche Zeichen, weil φ und t gleichzeitig wachsen, so wird

$$dt\sqrt{\frac{2\,f\,m\,b\,h}{a\,\varphi'}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{2\,\varphi'\,\varphi - \varphi^2}}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist nach § 86, Formel (7)

$$t\sqrt{\frac{2\,f\,m\,b\,h}{a\,\varphi'}} = \arcsin\frac{2\,\varphi - 2\,\varphi'}{2\,\varphi'} + C.$$

Für $t = 0$ ist $\varphi = 0$; folglich

$$0 = \arcsin(-1) + C,$$

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C,$$

so dass man durch Subtraktion erhält

$$t\sqrt{\frac{2\,f\,m\,b\,h}{a\,\varphi'}} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\varphi - \varphi'}{\varphi'}.$$

Für $\varphi = 2\,\varphi'$ wird t zur Zeit T einer einfachen Schwingung; folglich ist

$$T\sqrt{\frac{2\,f\,m\,b\,h}{a\,\varphi'}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

$$(12) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{a\,\varphi'}{2\,f\,m\,b\,h}}.$$

Um diese Formel zur Bestimmung der mittleren Dichte der Erdmasse brauchbar zu machen, sei

L die Länge eines Sekundenpendels,
g die Beschleunigung beim freien Falle,
M die Masse der Erde,
s das Gewicht der Kubikeinheit der Erdmasse von mittlerer Dichte und
r der Erdhalbmesser der als kugelförmig gedachten Erde;

man erhält aus Formel (6) des § 171 für die Länge des Sekundenpendels, wenn man daselbst $T = 1$ setzt,

$$g = \pi^2 L$$

und als Beschleunigung desselben durch die Erdmasse, wenn man eine der Kugeln A oder B als schweren Körper des Sekundenpendels sich denkt,

$$g = f\,\frac{M}{r^2}.$$

Setzt man diese beiden Werte von g einander gleich, so folgt

$$(13) \qquad \pi^2 L = f\,\frac{M}{r^2}.$$

Eliminiert man f aus (12) und (13), so wird

$$(14) \qquad T = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a\,\varphi'}{2\,b\,h\,L}\cdot\frac{M}{m}}.$$

Die Massen M und m sind den Gewichten der Erde und der Bleikugeln C, D proportional. Nehmen wir daher an, es bezeichnen M, m die Gewichte dieser Körper, so ist

$$M = \tfrac{4}{3}\,\pi\,r^3\,s.$$

Führt man diesen Wert von M in (14) ein, so folgt der gesuchte Wert

$$(15) \qquad s = \frac{3}{2\,\pi}\cdot\frac{b\,h}{a\,\varphi'}\cdot\frac{L}{r}\cdot T^2\,m.$$

Bei Versuchen, die Cavendish von 1797 bis 1798 anstellte, wurde der Zoll als Längenmass und das Gewicht von 1 Kubikzoll Wasser als Einheit der Gewichte angenommen. Bei diesen Versuchen ergaben sich nach Schmidt's mathematischer und physikalischer Geographie im Mittel

Gewicht einer der Bleikugeln C, D = 9 662,3,
Länge der Arme . . . $a = b = 36,65$,
Winkel . . . . $\alpha = 13^0\,58'\,26''$,
Bogen (für den Radius = 1) $\varphi' = 0,007\,937\,3$,
Schwingungszeit . . . . . . $T = 424,5$ Sekunden.

Berechnet man vermittelst der Werte von a, b, α die Grössen p und q nach (3), sodann nach (6) die Grösse h, so erhält man

$$\log h = 6,531\,56 - 10.$$

Ferner hat man für das Verhältnis $\frac{L}{r}$ den briggischen Logarithmus

$$\log\left(\frac{L}{r}\right) = 3,193\,29 - 10.$$

Für diese Daten wird nach (15)

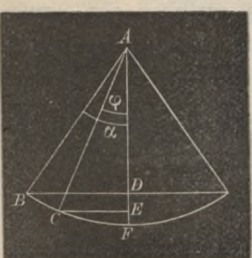
$$s = 5,52,$$

d. h. ein Kubikzoll Erdmasse wiegt durchschnittlich 5,52 mal so viel als 1 Kubikzoll Wasser; also ist die mittlere Dichte der Erdmasse = 5,52.

420. Schwingungen des Pendels in der Luft. Die Luft setzt der Bewegung einen Widerstand entgegen, der für sehr langsame Bewegungen sehr nahe der ersten, für rasche Bewegungen sehr nahe der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist. Wir setzen sehr kleine Schwingungsbogen voraus und nehmen an, es sei der Luftwiderstand der Geschwindigkeit proportional. Die Pendelstange habe eine Länge = a und mache eine grösste Ablenkung von der vertikalen Lage = α.

Es sei (Fig. 152) A B die äusserste, A F die vertikale Lage der Pendelstange, also Winkel B A F = α. In der Zeit t bewege sich die Stange von A B nach A C, wo sie mit der Vertikalen den Winkel C A F = φ bilde. Wird der vom schweren Punkte B durchlaufene Weg B C mit s bezeichnet, so ist $s = a(\alpha - \varphi)$. Ist g die Beschleunigung beim freien Falle, so wird $g \sin\varphi$ die Beschleunigung der Bewegung in der Richtung der Tangente an den Schwingungsbogen in C. Diese Beschleunigung wird durch den Luftwiderstand vermindert um den Betrag $k\frac{ds}{dt}$, worin $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit in C und k eine Konstante bezeichnet. Somit ist die Beschleunigung des Pendels

Fig. 152.



$$(1) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin\varphi - k\frac{ds}{dt}.$$

Aus $s = a(\alpha - \varphi)$ folgt

$$ds = -a\,d\varphi; \quad d^2 s = -a\,d^2\varphi.$$

Ferner ist nach § 72

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2\cdot 3} + \frac{\varphi^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots$$

Vernachlässigt man in der letzten Reihe, wegen der Kleinheit von φ, die Glieder von φ^3 an, so wird (1) vermöge dieser Werte zu

$$(2) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{a}\varphi = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist eine lineare (§ 375) und stimmt mit der in § 390 I behandelten überein.

Behufs der Integration dieser Gleichung (2) setze man

$$(3) \qquad \varphi = c\,e^{\beta t};$$

worin c und β konstante Grössen und e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnen. Durch Differentiation von (3) folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \beta c\,e^{\beta t}; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \beta^2 c\,e^{\beta t}.$$

Setzt man diese Werte von φ, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ in (2) ein, so kommt

$$(4) \qquad \beta^2 + \beta k + \frac{g}{a} = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung in Hinsicht β findet man

$$(5) \qquad \beta = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{g}{a}}.$$

Die Grösse k ist sehr klein, folglich die Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen negativ. Setzt man daher zur Abkürzung

$$(6) \qquad \frac{k}{2} = m; \quad \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{g}{a}} = n i,$$

so gibt (5) für β folgende zwei Werte

$$-m + n i \quad \text{und} \quad -m - n i.$$

Verfährt man nun, wie auf S. 468 Abteilung „zweiter Fall" geschehen, so erhält man als allgemeines Integral

$$(7) \qquad \varphi = e^{-mt}[\mathfrak{M}\cos n t + \mathfrak{N}\sin n t].$$

Das Differentialverhältnis dieser Gleichung ist

$$(8) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -m e^{-mt}(\mathfrak{M}\cos n t + \mathfrak{N}\sin n t) \\ + n e^{-mt}(-\mathfrak{M}\sin n t + \mathfrak{N}\cos n t).$$

Für den Anfangszustand der Bewegung ist $t = 0$, $\varphi = \alpha$ und die Geschwindigkeit $a\frac{d\varphi}{dt} = 0$. Vermöge dieser Werte erhält man aus (7) und (8)

$$\alpha = \mathfrak{M}; \quad 0 = -m\mathfrak{M} + n\mathfrak{N}.$$

Also sind die Werte der Konstanten

$$\mathfrak{M} = \alpha; \quad \mathfrak{N} = \frac{m}{n}\alpha.$$

Setzt man diese Werte in (7) und (8) ein, so erhält man

$$\varphi = \alpha\, e^{-mt}\left(\cos n t + \frac{m}{n}\sin n t\right), \tag{9}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\alpha}{n} e^{-mt}(m^2 + n^2)\sin n t. \tag{10}$$

Nun ist aber nach (6)

$$m^2 = \frac{k^2}{4}; \quad -n^2 = \frac{k^2}{4} - \frac{g}{a}; \quad m^2 + n^2 = \frac{g}{a}.$$

Vermittelst dieser Werte wird (10)

$$a\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\alpha g}{n} e^{-mt}\sin n t. \tag{11}$$

Die Gleichung (9) bestimmt den Wert von φ und (11) die Geschwindigkeit für irgend eine Zeit.

Am Ende jeder Schwingung ist die Geschwindigkeit $\frac{a\,d\varphi}{dt} = 0$. Hierfür gibt (11)

$$0 = -\frac{\alpha g}{n} e^{-mt}\sin n t.$$

Diese Gleichung findet statt, wenn $\sin n t = 0$, also wenn $n t$ ein Vielfaches von π ist. Setzt man

$$n t = \pi, \quad \text{also} \quad t = \frac{\pi}{n}, \tag{12}$$

so bezeichnet dieser Wert von t die Zeit der ersten Schwingung. Setzt man

$$n t = 2\pi, \quad \text{also} \quad t = \frac{2\pi}{n},$$

so bezeichnet t die Zeit der zwei ersten Schwingungen, etc. Man ersieht hieraus, dass die Zeit für jede Schwingung den gleichen Wert hat oder dass die Schwingungszeit konstant ist.

Bezeichnet T diese konstante Schwingungszeit, so hat man aus (12)

$$T = \frac{\pi}{n},$$

oder indem man aus (6) den Wert von n einführt,

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{a k^2}{4 g}}}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Denkt man sich den Luftwiderstand weg, so ist $k = 0$ und es geht diese Formel über in die für kleine Schwingungsbogen in § 171 angegebene. Die Schwingungszeit desselben Pendels im Luft erfüllten Raume ist also grösser als im leeren Raume im Verhältnis von

$$1 : \sqrt{1 - \frac{a k^2}{4 g}}.$$

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ die Schwingungsbogen, die während der ersten, zweiten, dritten,.. Schwingung durchlaufen werden. Aus (9) folgt als Ablenkung der Pendelstange von der vertikalen Richtung

$$\text{für } t = 0 \qquad \varphi = +\alpha,$$

$$\text{für } t = \frac{\pi}{n} \qquad \varphi = -\alpha e^{\frac{-m\pi}{n}},$$

$$\text{für } t = \frac{2\pi}{n} \qquad \varphi = +\alpha e^{\frac{-2m\pi}{n}},$$

$$\text{für } t = \frac{3\pi}{n} \qquad \varphi = -\alpha e^{\frac{-3m\pi}{n}}, \text{ etc.}$$

Es liegen somit vom tiefsten Punkte aus links und rechts die Bogen

$$\text{für die 1te Schwingung } +\alpha \qquad \text{und } -\alpha e^{-\frac{m\pi}{n}},$$

$$\text{für die 2te Schwingung } -\alpha e^{-\frac{m\pi}{n}} \quad \text{und } +\alpha e^{-\frac{2m\pi}{n}},$$

$$\text{für die 3te Schwingung } +\alpha e^{-\frac{2m\pi}{n}} \quad \text{und } -\alpha e^{-\frac{3m\pi}{n}}, \text{ etc.}$$

Wenn nun die Bogen rechts mit entgegengesetzten Zeichen zu denen links addiert werden, so erhält man die ganzen Schwingungsbogen. Diese sind somit

$$\varphi_1 = +\alpha\left(1 + e^{-\frac{m\pi}{n}}\right) \qquad = +\varphi',$$

$$\varphi_2 = -\alpha\left(1 + e^{-\frac{m\pi}{n}}\right)e^{-\frac{m\pi}{n}} \qquad = -\varphi' e^{-\frac{m\pi}{n}},$$

$$\varphi_3 = +\alpha\left(1 + e^{-\frac{m\pi}{n}}\right)e^{-\frac{2m\pi}{n}} \qquad = +\varphi' e^{-\frac{2m\pi}{n}},$$

$$\varphi_4 = -\alpha\left(1 + e^{-\frac{m\pi}{n}}\right)e^{-\frac{3m\pi}{n}} \qquad = -\varphi' e^{-\frac{3m\pi}{n}}, \text{ etc.}$$

Die Schwingungsbogen bilden hiernach die Glieder einer geometrischen Progression, deren Exponent die Grösse $-e^{-\frac{m\pi}{n}}$ ist. Diese Bogen nehmen allmählich ab, so dass sich die Bewegung nach und nach erschöpft.

Aus (11) folgt durch Differentiation, indem man die Geschwindigkeit $\frac{a\,d\varphi}{dt}$ mit v bezeichnet,

$$\frac{dv}{dt} = \alpha g e^{-mt}\left(\frac{m}{n}\sin nt - \cos nt\right).$$

Setzt man diesen Differentialquotienten $= 0$, so findet man denjenigen Wert der Zeit t, für den die Geschwindigkeit v ein Maximum wird. Es folgt aus $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\frac{m}{n}\sin nt - \cos nt = 0,$$

$$\operatorname{tang} nt = \frac{n}{m} = \sqrt{\frac{4g}{ak^2} - 1}.$$

Wenn hierin $k = 0$ gesetzt wird, so wird $\operatorname{tang} nt = \infty$, $nt = \frac{\pi}{2}$, d. h. im luftleeren Raume tritt die grösste Geschwindigkeit in der Mitte der Schwingungszeit ein. Allein im lufterfüllten Raume ist k nicht $= 0$, also auch $\frac{4g}{ak^2} - 1$ nicht unendlich gross; folglich wird tang n t endlich, also $nt < \frac{\pi}{2}$. Die grösste Geschwindigkeit findet also statt vor Ablauf der ersten Hälfte einer jeden Schwingungszeit. Die grösste Geschwindigkeit, die wir mit u bezeichnen wollen, tritt ein, wenn die Beschleunigung $\frac{d^2 s}{dt^2} = 0$, also wenn nach Formel (1) ist

$$g \sin\varphi = ku,$$

oder da $\sin\varphi$ mit φ vertauscht werden kann, wenn

$$\varphi = \frac{k}{g} u.$$

Diese Ablenkung φ der Stellung des Pendels von der Vertikalen bei der grössten Geschwindigkeit ist somit der Konstanten k direkt proportional.

Setzt man in (9) $\varphi = 0$, so wird t zu derjenigen Zeit, die zur Erreichung des tiefsten Punktes nötig ist. In diesem Falle muss also sein

$$\frac{m}{n}\sin nt + \cos nt = 0,$$

$$\operatorname{tang} nt = -\frac{n}{m} = -\sqrt{\frac{4g}{ak^2} - 1}.$$

Die Grösse unter diesem Quadratwurzelzeichen ist eine sehr grosse Zahl, die für $k = 0$ unendlich wird; folglich wird der Winkel n t nur wenig von $\frac{\pi}{2}$ abweichen, jedoch wegen des negativen Vorzeichens der

Quadratwurzel grösser sein als $\frac{\pi}{2}$, d. h. das Pendel braucht zum Niedergange mehr Zeit als zum Aufgange.

421. Schwingungen des physischen Pendels im leeren Raume. Denkt man sich die Masse des Pendels in unendlich kleine Teile zerlegt mit verschiedenen Abständen von der Drehachse, so haben diese Teile die Tendenz, für sich so zu schwingen, wie der schwere Punkt eines einfachen Pendels. Den Teilen zunächst der Drehachse entspricht daher eine kleinere, den entfernteren eine grössere Schwingungsdauer. Da aber die Teile ein starres Ganzes bilden, so kommen die unendlich vielen ungleichen Schwingungszeiten nicht zur Verwirklichung, sondern es bildet sich eine mittlere Schwingungsdauer. Der Punkt am Pendel, dem diese Schwingungszeit angehört, heisst Schwingungsmittelpunkt und sein Abstand von der Drehachse Länge des physischen Pendels. Dieser Schwingungsmittelpunkt ist zu unterscheiden vom Schwerpunkte des Pendels. Beide fallen nur dann sehr nahe zusammen, wenn die Masse der Pendelstange sehr klein ist.

Es gelten die Bezeichnungen von § 420. Ausserdem bezeichne M die Masse des Pendels, also d M ein Massenelement. Dieses habe den Abstand ϱ von der Drehachse und werde in dem Augenblicke, da die Zeit t abgelaufen ist, getrieben von einer Kraft k mit einer Beschleunigung g'; dann ist nach § 181, Formel (6)

$$k = g' \, dM.$$

Geht t über in t + d t und der Bogen s in s + d s, so erhält man als Ausdruck für die Beschleunigung

$$g' = \frac{d^2 s}{d t^2};$$

daher ergibt sich durch Elimination von g' der Wert der Kraft

$$k = \frac{d^2 s}{d t^2} dM.$$

Diese Kraft liegt in der Richtung der Tangente an den Schwingungsbogen und durchläuft in der Zeit d t den gleich gerichteten Weg d s, verrichtet also eine Arbeit, die nach § 174 erhalten wird, wenn man die Kraft, die während der unendlich kleinen Zeit d t als konstant angenommen werden kann, mit dem Wege multipliziert. Diese Arbeit ist daher $= \frac{d^2 s}{d t^2} ds \cdot dM$.

Diese Arbeit kommt her vom Sinken der Masse d M in vertikaler Richtung. Hat d M nach der Zeit t in vertikaler Richtung eine Tiefe x unter der Drehachse, so nimmt x während der Zeit d t zu um d x. Daher sinkt das Gewicht g d M des Teilchens in der Richtung des Gewichtes um d x und verrichtet dabei die Arbeit $g\,dM \cdot dx$. Durch Gleichsetzen dieser beiden Arbeiten folgt

$$g \, dM \cdot dx = \frac{d^2 s}{d t^2} ds \cdot dM.$$

Für dasselbe Massenteilchen d M mit gleich bleibendem Abstande ϱ von der Achse erhält man die Arbeit, die während der Zeit t verrichtet wird, wenn man die vorstehende Gleichung integriert. Das Integral ist

$$(1) \qquad g\,dM \cdot x + C = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot dM,$$

worin C die Konstante der Integration und $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Teilchens d M nach der Zeit t bezeichnet.

Für $t = 0$ wird diese Geschwindigkeit $= 0$, während x übergehe in x_0. Hierfür gibt Gleichung (1)

$$g\,dM \cdot x_0 + C = 0,$$

daher folgt durch Subtraktion

$$(2) \qquad g\,dM\,(x - x_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot dM.$$

Hier sind nun x und s durch die Variable φ auszudrücken. Man erhält

$$x - x_0 = \varrho\,(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

und indem man $\cos\varphi$ und $\cos\alpha$ nach § 72 in Reihen entwickelt und die Glieder von der vierten Potenz der Bogen φ und α an vernachlässigt,

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}\,\varrho\,(\alpha^2 - \varphi^2).$$

Da $ds = \varrho\,d\varphi$, so geht für diese Werte Gleichung (2) über in

$$g\,(\alpha^2 - \varphi^2) \cdot \varrho\,dM = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \varrho^2\,dM.$$

Denkt man sich nun den Winkel φ konstant und dehnt das Massenteilchen d M über die ganze Länge des Pendels aus, so erhält man für den Augenblick, da die Zeit t erreicht ist, das Integral

$$(3) \qquad g\,(\alpha^2 - \varphi^2)\int \varrho\,dM = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \int \varrho^2\,dM.$$

Nun ist ϱ der Abstand des Teilchens d M von der Achse, also $\varrho\,dM$ das statische Moment des Teilchens und $\int \varrho\,dM$ die Summe der statischen Momente aller Pendelteile. Diese Summe ist daher gleich dem statischen Momente der ganzen Masse M. Allein der Hebelarm dieser Masse ist der Abstand des Schwerpunktes der Masse M von der Achse. Wird er mit a bezeichnet, so ist $\int \varrho\,dM = a\,M$. Ferner ist das zweite Integral $\int \varrho^2\,dM$ nichts anderes als das Trägheitsmoment (§ 184) des Pendels. Bezeichnet man dasselbe mit E, so erhält man aus (3)

$$a\,g\,M\,(\alpha^2 - \varphi^2) = E\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2$$

und durch Sonderung der Veränderlichen

$$d\,t = -\sqrt{\frac{E}{a\,g\,M}}\,\frac{d\,\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}.$$

Hierin sind die Vorzeichen von $d\,t$ und $d\,\varphi$ entgegengesetzt genommen, weil beim Beginne der Bewegung φ abnimmt, wenn t wächst. Die Integration gibt

$$t = \sqrt{\frac{E}{a\,g\,M}}\arccos\frac{\varphi}{\alpha}.$$

Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $t = 0$ auch $\varphi = \alpha$ und $\arccos 1 = 0$ wird.

Bezeichnet T die Zeit zu einer einfachen Schwingung, so findet man $t = \frac{1}{2}T$ für $\varphi = 0$, also als Zeit $\frac{1}{2}T$ für $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. Daher ist

$$T = \pi\sqrt{\frac{E}{a\,g\,M}}.$$

Ist nun die Länge des physischen Pendels $= L$, so ist L auch die Länge eines einfachen, mathematischen Pendels, das mit obigem physischen Pendel gleiche Schwingungszeit hat; daher wird nach § 171 auch

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{4}$$

Setzt man die beiden Werte von T einander gleich, so folgt

$$L = \frac{E}{a\,M}. \tag{5}$$

Ist nun r der Abstand des Mittelpunktes der Trägheit der Masse M von der Drehachse, so ist das Trägheitsmoment $E = M\,r^2$. Setzt man diesen Ausdruck für E in Gleichung (5) ein, so folgt

$$r^2 = a\,L; \tag{6}$$

hierin bezeichnen r den Abstand des Trägheitsmittelpunktes, a den Abstand des Schwerpunktes, L den Abstand des Schwingungsmittelpunktes vom Aufhängepunkte.

Wenn man daher vom Schwerpunkte des Pendels eine Gerade senkrecht zur Drehachse zieht, so ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Drehachse der Aufhängepunkt. In dieser Geraden liegen nun: der Schwerpunkt, der Mittelpunkt der Trägheit und der Schwingungsmittelpunkt und zwar in der Anordnung, dass der Schwerpunkt dem Aufhängepunkte am nächsten liegt, dann der Trägheitsmittelpunkt und zuletzt der Schwingungsmittelpunkt folgt. Dabei ist der Abstand r nach (6) die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden andern Abständen a und L.

I. Besteht das physische Pendel aus einer prismatischen Stange mit der Masse M und der Länge $\mathfrak{l}$, so wird $a = \frac{1}{2}\mathfrak{l}$ und $r = \mathfrak{l}\sqrt{\frac{1}{3}}$ (§ 185) und daher nach (6)

$$L = \tfrac{2}{3}\,\mathfrak{l}.$$

II. Das Pendel bestehe aus einer dünnen prismatischen Stange und einer am untern Ende derselben angehängten Kugel.

Es sei M die Masse der Kugel, $\mathfrak{b}$ ihr Halbmesser und $\mathfrak{l}$ der Abstand ihres Mittelpunktes von der Drehachse; ferner sei m die Masse der Stange und es könne die Länge $\mathfrak{l} - \mathfrak{b}$ derselben mit $\mathfrak{l}$ vertauscht werden; dann hat man zunächst zur Bestimmung von a folgende Gleichung der statischen Momente

$$(M + m)\,a = M\,\mathfrak{l} + \tfrac{1}{2}\,m\,\mathfrak{l}.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel für eine Achse durch ihren Mittelpunkt ist nach § 191 $= \frac{2}{5} M \mathfrak{b}^2$, also nach § 192 für die Drehachse $= \frac{2}{5} M \mathfrak{b}^2 + M \mathfrak{l}^2$ und, da das Trägheitsmoment der Stange $= \frac{1}{3} m \mathfrak{l}^2$, so wird die Länge des physischen Pendels nach (5)

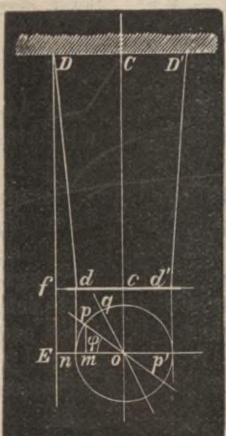
$$L = \frac{\frac{1}{3}\,m + \left[\frac{2}{5}\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{l}}\right)^2 + 1\right] M}{\frac{1}{2}\,m + M} \cdot \mathfrak{l}.$$

Da nun a und L bekannt sind, kann nunmehr auch nach (6) die Grösse r, also die Lage des Trägheitsmittelpunktes gefunden werden.

Bei zusammengesetzten, unregelmässigen Körperformen ist es schwierig, ja unmöglich, den Wert r durch Rechnung genau zu ermitteln. In diesem Falle bestimmt man a und L durch Versuche: a, indem man den Körper durch Auflegen auf eine Schneide zum Balancieren bringt und L, indem man ihn um eine Achse schwingen lässt, alsdann seine Schwingungsdauer T beobachtet und hierauf L mittels Gleichung (4) berechnet.

422. Schwingungen des Bifilarmagnetometers. Bei diesem Apparate, der zum Messen magnetischer und elektrischer Kräfte dient, wird der horizontale Magnetstab an zwei langen, feinen, wenig von einander abstehenden Fäden oder Drähten aufgehängt, die symmetrisch zur Vertikalen liegen, die durch den Schwerpunkt des Magnetstabes geht. Um diese Vertikale dreht sich der Magnetstab in kleinen Schwingungsbogen, indem er sich abwechselnd etwas hebt und senkt, hin und her.

Fig. 153.



Es seien C c (Fig. 153) die vertikale Achse, d d′ der horizontale Magnetstab und D d, D′ d′ die Aufhängedrähte. In der Ruhelage befinden sich Drähte und Stab mit der Achse in einer Vertikalebene. In dieser Ebene liege auch die Vertikale D f. Es sei

a = c d = c d′ der Abstand der untern Aufhängepunkte von der Achse;

b = C D = C D′ derjenige der obern Aufhängepunkte von der Achse;
L = D d die Länge eines Drahtes und
h = D f deren vertikale Projektion; es ist alsdann

$$L^2 = h^2 + (b - a)^2. \tag{1}$$

Man gebe dem Magnetstabe eine grösste Drehung; er komme dabei aus der Gleichgewichtslage O n nach O q und lege einen Winkel α zurück. Lässt man ihn los, so wird er sinken und sich drehen. Er komme zunächst aus der Lage O q in die Lage O p und bilde mit der Gleichgewichtslage den Winkel φ; er durchlaufe also den Winkel $\alpha - \varphi$. Während dieses Vorganges bewegt sich der Punkt p in einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt in D und in einer Cylinderfläche mit der Achse C c und dem Halbmesser a.

Man nehme nun drei rechtwinkelige Achsen an, mit dem Ursprunge in D. Liegt die z Achse in D f E, die x Achse in D D′, so wird die y Achse senkrecht auf der Ebene x z stehen. Befindet sich der Magnetstab in der Gleichgewichtslage O n, so ist D f = z, E n = x und y = 0. Allein in der Lage O p ist E m = x, m p = y und z hat sich verkürzt, so dass die drei Koordinaten der Kugelfläche geben

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2.$$

Die horizontalen Koordinaten liefern folgende Gleichung der genannten Cylinderfläche

$$y^2 + (b - x)^2 = a^2.$$

Für die Bahn des Punktes p müssen die Werte von x, ebenso von y und z in den beiden letzten Gleichungen gleich sein. Eliminiert man aus ihnen y, so folgt

$$z^2 = L^2 + b^2 - a^2 - 2\,b\,x. \tag{2}$$

Die Koordinaten x, y in der horizontalen Ebene sind

$$x = b - a\cos\varphi; \quad y = a\sin\varphi. \tag{3}$$

Führt man den Wert von L^2 aus (1) und von x aus (3) in (2) ein, so folgt

$$z = \sqrt{h^2 - 2\,a\,b\,(1 - \cos\varphi)}. \tag{4}$$

Indem der Stab aus der Lage o q in die Lage o p gelangt, verfliesse eine Zeit t. Lässt man t um d t zunehmen, so ändern sich φ, x, y und z um ihre Differentiale. Ihr Zusammenhang ergibt sich durch Differentiation von (3) und (4). Man erhält

$$d\,x = a\sin\varphi\,d\varphi; \quad d\,y = a\cos\varphi\,d\varphi; \quad d\,z = \frac{-\,a\,b\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{h^2 - 2\,a\,b\,(1 - \cos\varphi)}}. \tag{5}$$

Nun sei M die Masse des Stabes, also nach § 181, Formel (5), g M das Gewicht des Stabes. Während der Zeit d t sinkt dasselbe um den Weg d z und produziert eine Arbeit (Produkt aus Kraft und Weg, wenn Richtung der Kraft und des Weges zusammenfallen) = g M d z. Diese Arbeit teilt sich der Masse des Stabes mit und überwindet allfällige Widerstände.

A. Schwingungen ohne Rücksicht auf Widerstände.

Wenn keine Nebenhindernisse in Betracht kommen, so wird die Arbeit, die während der Periode des Sinkens durch das Gewicht produziert wird, vollständig vom Stabe in Form von lebendiger Arbeit aufgenommen, aber auch später während der Periode des Steigens wieder verbraucht, weil nunmehr das Gewicht um ebensoviel zu heben ist, als es gesunken war.

Ist nun d M ein Massenelement des Stabes im Abstande ϱ von der Drehachse, s der Bogen, den dasselbe durchläuft, wenn der Winkel α in φ übergeht, v und g′ die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Masse d M im Augenblicke, da die Zeit t eintritt, so wird nach § 407 sein

$$v = \frac{d\,s}{d\,t}; \quad g' = \frac{d^2\,s}{d\,t^2}. \tag{6}$$

Längs des Weges d s werde die Masse d M getrieben durch eine Kraft k, die während der Zeit d t als konstant angesehen werden kann. Sie veranlasst die Beschleunigung g′ und ist daher nach § 181 $= g'\,d\,M$. Daher wird mit Benutzung von (6)

$$k = \frac{d^2\,s}{d\,t^2}\,d\,M.$$

Nun seien x′, y′, z′ die Koordinaten des Massenpunktes d M nach der Zeit t. Man zerlege die Kraft k in die drei rechtwinkeligen Seitenkräfte

$$\frac{d^2\,x'}{d\,t^2} \cdot d\,M, \quad \frac{d^2\,y'}{d\,t^2} \cdot d\,M, \quad \frac{d^2\,z}{d\,t^2} \cdot d\,M,$$

wo z′ mit z vertauscht ist, weil allen Punkten des schwingenden Körpers die gleiche vertikale Bewegung zukommt.

Die erste dieser Kräfte wirkt längs des Weges d x′, die zweite längs d y′, die dritte längs d z. Es entstehen also in der Richtung der drei Koordinatenachsen folgende Arbeiten

$$\frac{d^2\,x'}{d\,t^2}\,d\,x' \cdot d\,M, \quad \frac{d^2\,y'}{d\,t^2}\,d\,y' \cdot d\,M, \quad \frac{d^2\,z}{d\,t^2}\,d\,z \cdot d\,M.$$

Ihre Summe muss gleich sein der Arbeit, die das Gewicht g d M der Masse d M längs des Weges d z verrichtet, also $= g\,d\,M \cdot d\,z$. Daher wird

$$g\,d\,M \cdot d\,z = \left[\frac{d^2\,x'}{d\,t^2}\,d\,x' + \frac{d^2\,y'}{d\,t^2}\,d\,y' + \frac{d^2\,z}{d\,t^2}\,d\,z\right] d\,M.$$

Diese Gleichung gibt für das Massenelement d M, wenn sie in Hinsicht t integriert, also wenn d t als konstant gedacht wird,

$$g\,d\,M \cdot z + C = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\,x'}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,y'}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)^2\right] d\,M.$$

Hier ist C die Konstante der Integration, ferner sind die Glieder in den runden Klammern die Geschwindigkeiten der Masse d M in der Richtung der Koordinatenachsen und zwar nach der Zeit t. Daher wird die Gesamtklammergrösse $= v^2$ sein. Die letzte Gleichung gibt daher

$$g\,d\,M \cdot z + C = \tfrac{1}{2}\,v^2 \cdot d\,M.$$

Für $t = 0$ wird auch $v = 0$; dabei gehe z über in z_0. Hierfür wird die letzte Gleichung

$$g\,d\,M \cdot z_0 + C = 0.$$

Daher folgt durch Subtraktion

$$g(z - z_0)\,d\,M = \tfrac{1}{2} v^2 \cdot d\,M.$$

Diese Gleichung soll nun auf alle Massenelemente ausgedehnt werden. Zu diesem Zwecke hat man

$$d\,s^2 = \varrho^2\,d\,\varphi^2 + d\,z^2,$$

$$v^2 = \left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)^2 = \varrho^2\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)^2,$$

$$g(z - z_0)\,d\,M = \frac{1}{2}\left[\varrho^2\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)^2\right] d\,M.$$

In der letzten Gleichung sind $g(z - z_0)$, $\dfrac{d\,\varphi}{d\,t}$ und $\dfrac{d\,z}{d\,t}$ für alle Punkte des schwingenden Körpers dieselben. Wenn sie als Konstante abgesondert werden, so gibt die Integration für den Moment, da φ erreicht ist,

$$2\,g(z - z_0)\int d\,M = \left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 \int \varrho^2\,d\,M + \left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)^2 \int d\,M.$$

Allein es ist $\int d\,M$ die Masse M und $\int \varrho^2\,d\,M$ das Trägheitsmoment (§ 184) des schwingenden Körpers, das mit E bezeichnet werde. Daher kann die letzte Gleichung wie folgt geschrieben werden

$$(7) \qquad 2\,g\,M(z - z_0) = E\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 + M\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)^2.$$

Damit diese Differentialgleichung integriert werde, müssen $z - z_0$ und $d\,z$ durch φ ausgedrückt werden.

Setzt man zu diesem Zwecke zunächst in (4)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

indem man nur die Glieder der Reihe bis zur vierten Potenz von φ in Rechnung bringt, so folgt

$$z = h\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{12}\right)\frac{a\,b\,\varphi^2}{h^2}}.$$

Die Entwickelung der Wurzelgrösse nach dem binomischen Satze gibt hierfür bis zu den Gliedern mit der vierten Potenz von φ

$$(8) \qquad z = h\left(1 - \frac{a\,b\,\varphi^2}{2\,h^2} + \frac{a\,b\,\varphi^4}{24\,h^2} - \frac{a^2\,b^2\,\varphi^4}{8\,h^4}\right).$$

Für $\varphi = \alpha$ geht z in z_0 über; daher ist in gleicher Weise

$$z_0 = h\left(1 - \frac{a\,b\,\alpha^2}{2\,h^2} + \frac{a\,b\,\alpha^4}{24\,h^2} - \frac{a^2\,b^2\,\alpha^4}{8\,h^4}\right),$$

folglich durch Subtraktion

$$z - z_0 = \frac{ab}{2h}(\alpha^2 - \varphi^2)\left[1 - \left(\frac{1}{12} - \frac{ab}{4h^2}\right)\alpha^2 - \left(\frac{1}{12} - \frac{ab}{4h^2}\right)\varphi^2\right].$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{12} - \frac{ab}{4h^2} = k,$$

so wird

$$(9) \qquad z - z_0 = \frac{ab}{2h}(\alpha^2 - \varphi^2)(1 - k\alpha^2 - k\varphi^2).$$

Durch Differentiation von (8) folgt, indem man die Glieder von φ^3 an vernachlässigt,

$$(10) \qquad dz = -\frac{ab\varphi\, d\varphi}{h}.$$

Dieser Wert ist nur ein Annäherungswert von dem in (5), allein er macht die Durchführung der Integration möglich.

Setzt man nun die Werte von $z - z_0$ und dz aus (9) und (10) in (7) ein, so folgt

$$\frac{abgM}{h}(\alpha^2 - \varphi^2)(1 - k\alpha^2 - k\varphi^2) = \left(E + \frac{a^2b^2M}{h^2}\varphi^2\right)\frac{d\varphi^2}{dt^2},$$

$$\sqrt{\frac{abgM}{hE}} \cdot dt = \frac{-d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} \frac{\left[1 + \frac{a^2b^2M}{h^2E}\varphi^2\right]^{\frac{1}{2}}}{[1 - k\alpha^2 - k\varphi^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Hierin sind für dt und $d\varphi$ entgegengesetzte Vorzeichen genommen, weil beim Uebergange von α in φ die Zeit t zunimmt, während φ abnimmt.

Beim zweiten Bruche rechts bringe man den Nenner in den Zähler mit dem Exponenten $-\frac{1}{2}$, entwickele nach dem binomischen Satze und vernachlässige die Glieder von φ^4 und $\varphi^2\alpha^2$ an; dann gibt dieser Bruch

$$\left(1 + \frac{a^2b^2M}{2h^2E}\varphi^2\right)\left(1 + \frac{k\alpha^2}{2} + \frac{k\varphi^2}{2}\right) =$$

$$1 + \frac{k\alpha^2}{2} + \left(\frac{k}{2} + \frac{a^2b^2M}{2h^2E}\right)\varphi^2.$$

Daher lautet mittels dieses Wertes die Differentialgleichung

$$\sqrt{\frac{abgM}{hE}} \cdot dt = \frac{-d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\left[1 + \frac{k\alpha^2}{2} + \left(\frac{k}{2} + \frac{a^2b^2M}{2h^2E}\right)\varphi^2\right],$$

die nunmehr zu integrieren ist. Nach § 90 hat man

$$-\int \frac{\varphi^2\, d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \frac{\varphi}{2}\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \frac{\alpha^2}{2}\arccos\frac{\varphi}{\alpha}.$$

Daher folgt die Integralgleichung

$$\sqrt{\frac{a b g M}{h E}} \cdot t = \left(1 + \frac{k \alpha^2}{2}\right) \arccos \frac{\varphi}{\alpha}$$
$$+ \left(\frac{k}{2} + \frac{a^2 b^2 M}{2 h^2 E}\right)\left(\frac{\varphi}{2}\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \frac{\alpha^2}{2} \arccos \frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

Die Konstante der Integration fällt weg, weil $\varphi = \alpha$ wird für $t = 0$.

Diese Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit t und dem Schwingungsbogen φ an. Ist nun T die Zeit zu einer Schwingung, so wird $\varphi = 0$ für $t = \frac{1}{2} T$. Hierfür geht die letzte Gleichung über in

$$\text{(11)} \qquad T = \pi \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{3}{4} k + \frac{a^2 b^2 M}{4 h^2 E}\right)\right] \sqrt{\frac{h E}{a b g M}}.$$

Je kleiner der Bogen α wird, um so mehr nähert sich T einem Grenzwerte T_0. Dieser wird erreicht für $\alpha = 0$; daher

$$\text{(12)} \qquad T_0 = \pi \sqrt{\frac{h E}{a b g M}}.$$

Bezeichnet $T_{,}$ die Schwingungszeit eines einfachen Pendels von der Länge h, so ist für sehr kleine Schwingungsbogen nach § 171

$$T_{,} = \pi \sqrt{\frac{h}{g}};$$

daher besteht der Zusammenhang

$$T_0 = T_{,} \sqrt{\frac{E}{a b M}}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass die Grösse $\frac{E}{a b M}$ eine Verhältniszahl sein muss, was auch am folgenden Beispiele ersehen werden kann.

Ist der schwingende Körper prismatisch von der Länge $\mathfrak{l}$ und der Masse M, so ist sein Trägheitsmoment $= \frac{1}{3} M \mathfrak{l}^2$ (§ 185 (1)); daher das Verhältnis

$$\frac{E}{a b M} = \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{l}^2}{a b}.$$

Wenn z. B. $a = 6$; $b = 8$ und $\mathfrak{l} = 48$ Millimeter, so wird dieser Bruch $= 16$; daher $T_0 = 4 T_{,}$. Dieser Apparat schwingt also viermal so langsam als ein einfaches Pendel von der Fadenlänge h.

Die Gleichung (12) kann auch wie folgt abgeleitet werden. In Gleichung (7) ist der Weg $d z$ in vertikaler Richtung sehr klein gegenüber dem Wege $d \varphi$ in drehender Richtung. Vernachlässigt man daher das letzte Glied dieser Gleichung, so folgt unter Benützung des Annäherungswertes von $z - z_0$ aus (9)

$$\frac{a b g M}{h}(\alpha^2 - \varphi^2) = E \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2$$

und

$$d t = - \frac{d \varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} \sqrt{\frac{h E}{a b g M}},$$

welche Gleichung durch Integration sofort den Wert von T_0 in (12) liefert.

B. Schwingungen mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Die Arbeit, die das Gewicht des schwingenden Körpers beim Sinken verrichtet, wird zum Teile auf die Ueberwindung der Nebenhindernisse verwendet. Unter diesen steht der Luftwiderstand oben an; er sei der Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ der Drehbewegung proportional. Zugleich werde vorausgesetzt, es könne dz gegen $d\varphi$ vernachlässigt werden, wie dies bei Ableitung der Gleichung (13) geschehen.

Durch Differentiation von (13) erhält man

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{abgM}{hE}\varphi,$$

eine Gleichung für die Beschleunigung, in der das Glied noch fehlt, das den Einfluss des Luftwiderstandes darstellt. Ist dasselbe $2n\frac{d\varphi}{dt}$, wo n eine Konstante bezeichnet, so geht die letzte Gleichung über in

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2n\frac{d\varphi}{dt} - \frac{abgM}{hE}\varphi.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{abgM}{hE} = r^2, \tag{14}$$

so ist die zu integrierende Gleichung der Bewegung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n\frac{d\varphi}{dt} + r^2\varphi = 0. \tag{15}$$

Diese Gleichung stimmt mit der in § 390 unter I. behandelten überein. Setzt man daher

$$\varphi = c\,e^{mt},$$

wo c und m Konstante bezeichnen, so wird $\frac{d\varphi}{dt} = c\,m\,e^{mt}$ und $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = c\,m^2 e^{mt}$; daher ergibt sich durch Einsetzen dieser Werte in (15) die Gleichung

$$m^2 + 2nm + r^2 = 0,$$

die für m folgende Wurzelwerte liefert

$$m = -n \pm \sqrt{n^2 - r^2}.$$

Nun ist n, vom Luftwiderstande herrührend, gegenüber r^2 sehr klein, daher $n^2 - r^2$ negativ. Bezeichnet man

$$n^2 - r^2 = -\gamma^2, \tag{16}$$

so werden die beiden Werte von m sein

$$-n + \gamma i \quad \text{und} \quad -n - \gamma i.$$

Daher wird nach (6) des § 390 das Integral von (15) sein

$$(17) \qquad \varphi = e^{-nt}(\mathfrak{M} \sin \gamma t + \mathfrak{N} \cos \gamma t),$$

worin $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ konstante Grössen bezeichnen, die noch zu bestimmen sind.

Für $t = 0$ wird $\varphi = \alpha$. Hierfür gibt die Gleichung $\mathfrak{N} = \alpha$. Um $\mathfrak{M}$ zu bestimmen, differentiiere man (17). Das Differential ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = -n e^{-nt}(\mathfrak{M} \sin \gamma t + \alpha \cos \gamma t) + e^{-nt}(\gamma \mathfrak{M} \cos \gamma t - \alpha \gamma \sin \gamma t),$$

woraus sich für $t = 0$ ergibt

$$0 = -n\alpha + \gamma \mathfrak{M}; \quad \mathfrak{M} = \frac{\alpha n}{\gamma}.$$

Setzt man diese Werte von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ in (17) ein, so entsteht die gesuchte Gleichung

$$(18) \qquad \varphi = \frac{\alpha}{\gamma} e^{-nt}(n \sin \gamma t + \gamma \cos \gamma t).$$

Für $n = 0$ fällt der Einfluss des Luftwiderstandes weg. In diesem Falle wird nach (14) und (16)

$$\gamma = r = \sqrt{\frac{abgM}{hE}},$$

und daher der Wert von φ nach (18)

$$\varphi = \alpha \cos\left(t\sqrt{\frac{abgM}{hE}}\right),$$

welche Gleichung auch wie folgt geschrieben werden kann

$$t = \sqrt{\frac{hE}{abgM}} \arccos \frac{\varphi}{\alpha}.$$

Setzt man hierin $\varphi = 0$, so wird t zu $\frac{T}{2}$, d. h. zur halben Schwingungszeit und der Bogen rechts zu $\frac{\pi}{2}$. Daher die Schwingungszeit

$$T = \pi\sqrt{\frac{hE}{abgM}}.$$

Dieser Wert von T stimmt mit T_0 in (12), aber auch mit T in (11) überein, wenn daselbst wie hier der Bogen α sehr klein vorausgesetzt wird.

Um die Schwingungszeit für die Bewegung in der Luft zu bestimmen, differentiiere man (18) und beachte die Relation (16); es kommt als Geschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\alpha r^2}{\gamma} e^{-nt} \sin \gamma t.$$

Nun muss die Geschwindigkeit am Anfange und Ende einer jeden Schwingung $= 0$ sein, eine Bedingung, die erfüllt wird durch die letzte Gleichung für $\sin \gamma t = 0$. Also muss der Bogen γt für den Beginn der Bewegung $= 0$ sein; für das Ende der ersten Schwingung $= \pi$, der zweiten $= 2\pi$, der dritten $= 3\pi$, .. Aus $\gamma t = \pi$, $\gamma t = 2\pi$, .. folgt aber, dass die Zeit zu zwei Schwingungen zweimal, zu drei Schwingungen dreimal so gross ist als zu einer Schwingung, d. h. es ist die Schwingungszeit konstant. Bezeichnet man sie mit $T_{,,}$, so folgt aus $\gamma t = \pi$

$$T_{,,} = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\sqrt{r^2 - n^2}}.$$

Setzt man nun

$$D = \frac{a b g M}{h}, \quad \text{also} \quad r^2 = \frac{D}{E},$$

und schreibt ferner

$$n^2 = \frac{D,}{E},$$

so folgt als Wert der Schwingungszeit

$$T_{,,} = \pi \sqrt{\frac{E}{D - D,}}.$$

Ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand ist $D, = 0$, also die Schwingungszeit wie nach (12)

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{D}}.$$

Daraus folgt, dass $T_{,,} > T$, d. h. dass der Apparat in der Luft langsamer schwingt als im leeren Raume.

Die Schwingungsbogen nehmen in ähnlicher Weise ab wie diejenigen des gewöhnlichen Pendels. Es sei in dieser Beziehung auf S. 545 verwiesen.

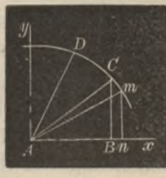
XIII. Aufgaben über die Zentralbewegung.

423. Differentialgleichungen der Bewegung durch Zentralkräfte. Im leeren Raume erhalte ein materieller Punkt durch einen Stoss eine Bewegung. Nach Beendigung dieses Stosses wird sich der Punkt geradlinig und gleichförmig fortbewegen. Ausserhalb dieser geraden Bahn habe eine Kraft ihren festen Sitz und wirke von dem Augenblicke an, wo jener Stoss aufhört, kontinuierlich auf jenen materiellen Punkt. Dadurch wird der Punkt aus seiner geraden Richtung abgelenkt und eine Kurve beschreiben, die in einer Ebene liegt, die durch die ursprüngliche Richtung der Bewegung und durch den Sitz der anziehenden Kraft geht. Diese Kraft heisst Zentralkraft, ihr Sitz Mittelpunkt der Bewegung und die Bewegung im allgemeinen Zentralbewegung.

Der Mittelpunkt der Bewegung sei A (Fig. 154). Man lege durch ihn in der Ebene der Bahn C D zwei rechtwinkelige Achsen A x, A y und bezeichne mit

x, y die Koordinaten A B, B C eines Kurvenpunktes C,
s den Bogen D C der Bahn, der in der Zeit t von D aus durchlaufen wird,
v die Geschwindigkeit nach der Zeit t,
r den Abstand (Radius vector, Leitstrahl) des Punktes C vom Mittelpunkte und
g die Beschleunigung, die die Zentralkraft dem Beweglichen nach der Zeit t in der Richtung des Leitstrahls A C beibringt.

Fig. 154.



Zerlegt man diese Beschleunigung in zwei Seitenbeschleunigungen $g\frac{x}{r}$ und $g\frac{y}{r}$, wovon die erstere parallel zu A x, die letztere parallel zu A y liegt, so wird sein, wenn man diese Beschleunigungen in entgegengesetzter Richtung zu den positiven Achsen voraussetzt,

$$(1) \qquad \frac{d^2 x}{d t^2} = -g\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = -g\frac{y}{r}.$$

Erstes Keppler'sches Gesetz. Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit y, die zweite mit x und zieht sie von einander ab, so folgt

$$(2) \qquad \frac{x\,d^2 y - y\,d^2 x}{d t^2} = 0.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist das Differential von $x\,dy - y\,dx$; multipliziert man daher (2) mit der Konstanten d t und integriert, so erhält man

$$(3) \qquad \frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = c,$$

worin c die Konstante der Integration bezeichnet. Um die Bedeutung dieser Formel zu erkennen, führe man Polarkoordinaten ein, setze also

$$(4) \qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

woraus durch Differentiation folgt

$$(5) \qquad \begin{cases} dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi, \\ dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

Führt man diese Werte von x, y, d x, d y in (3) ein, so kommt

$$(6) \qquad r^2\,d\varphi = c\,dt.$$

Nun sei der Sektor D A C, der in der Zeit t vom Leitstrahle beschrieben wird, = F. Dreht sich der Leitstrahl in dem Zeitelement d t um den Winkel $d\varphi$ aus der Lage A C in die Lage A m, so ist das Flächenelement d F = C A m gleich (nach § 334)

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2\,d\varphi.$$

Mithin wird dF mit Rücksicht auf Formel (6) zu

$$dF = \tfrac{1}{2} c\, dt.$$

Durch Integration dieser Formel erhält man

$$F = \tfrac{1}{2} c t, \tag{7}$$

wobei die Konstante der Integration weggelassen ist, weil t und F gleichzeitig verschwinden.

Aus (7) folgt, dass bei jeder Zentralbewegung die vom Leitstrahle beschriebene Fläche der darauf verwendeten Zeit proportional ist. Keppler hat dieses Gesetz (durch Beobachtung der Bewegung der Planeten um die Sonne) für das Planetensystem zuerst ausgesprochen.

Um die Bedeutung der Konstanten c zu erhalten, beachte man, dass $r \frac{d\varphi}{dt}$ die Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zum Radiusvektor ist. Bezeichnet V die Anfangsgeschwindigkeit, R den Leitstrahl nach dem Anfangspunkte der Bewegung, (V/R) den Winkel, den die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit dem Leitstrahle bildet, so folgt aus (6)

$$c = V \cdot R \cdot \sin(V/R).$$

Ausdruck für die Geschwindigkeit. Multipliziert man die erste der Gleichungen (1) mit dx, die zweite mit dy und addiert sie, so kommt

$$\frac{dx\, d^2x + dy\, d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{r}(x\,dx + y\,dy). \tag{8}$$

Hierin ist der Zähler links das Differential von

$$\tfrac{1}{2}(dx^2 + dy^2)$$

und die Grösse $x\,dx + y\,dy$ rechts das Differential von

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = \tfrac{1}{2} r^2.$$

Deshalb geht die Formel (8) über in

$$d\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) = -\frac{g}{r}\, d(r^2).$$

Nun ist aber $d(r^2) = 2r\,dr$, also wird die rechte Seite dieser Gleichung zu $-2g\,dr$. Führt man diesen Wert ein und integriert, wobei g als veränderlich zu betrachten ist, so kommt

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = A - 2\int g\, dr. \tag{9}$$

Hierin bezeichnet A die Integrationskonstante. Da $dx^2 + dy^2 = ds^2$ und die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so erhält man aus (9)

$$v^2 = A - 2\int g\, dr. \tag{10}$$

Vermittelst dieser Formel kann die Geschwindigkeit des Beweglichen bestimmt werden, wenn g als Funktion von r gegeben ist.

Allgemeiner Zusammenhang zwischen dem Gesetze der Kraft und dem der Bahn. Führt man die Werte von d x, d y aus (5) in (9) ein, so folgt

$$(11) \qquad \frac{r^2 d\varphi^2 + d r^2}{d t^2} = A - 2\int g\, d r.$$

Eliminiert man d t aus (6) und (11), so wird

$$(12) \qquad \frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2 d r^2}{r^4 d\varphi^2} = A - 2\int g\, d r.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$-\frac{2 c^2}{r^3} d r + d\left(\frac{c^2 d r^2}{r^4 d\varphi^2}\right) = -2 g\, d r,$$

woraus folgt

$$(13) \qquad g = \frac{c^2}{r^3} - \frac{c^2}{2 d r} d\left(\frac{d r}{r^2 d\varphi}\right)^2.$$

Allein es ist

$$d\left(\frac{d r}{r^2 d\varphi}\right)^2 = 2\frac{d r}{r^2 d\varphi} d\left(\frac{d r}{r^2 d\varphi}\right)$$

und indem man φ als unabhängig Veränderliche, also $d\varphi$ als konstant betrachtet,

$$d\left(\frac{d r}{r^2 d\varphi}\right) = \frac{1}{d\varphi} d\left(\frac{d r}{r^2}\right) = -\frac{1}{d\varphi} d^2\left(\frac{1}{r}\right).$$

Setzt man diese Werte in (13) ein, so wird

$$(14) \qquad g = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{d\varphi^2} d^2\left(\frac{1}{r}\right)\right].$$

Die Beschleunigung g ist aber der Zentralkraft proportional. Folglich kann vermittelst der Gleichung (14) das Gesetz, nach dem die Zentralkraft wirkt, abgeleitet werden, wenn r als Funktion von φ ausgedrückt, d. h. wenn die Gleichung der Bahn bekannt ist. Umgekehrt kann aber auch aus dieser Formel die Gleichung der Kurve abgeleitet werden, wenn man das Gesetz der Kraft kennt. Die folgenden Aufgaben werden die Anwendung der Formel (14) zeigen. Zuerst soll die Bahn als gegeben angesehen und die Wirkung der Kraft gesucht werden; an zweiter Stelle werde das Gesetz der Kraft als gegeben betrachtet und die Bahn des bewegten Körpers bestimmt.

424. Bei einer Zentralbewegung sei die Bahn des Beweglichen eine gerade Linie. Man soll das Gesetz der Zentralkraft suchen. Diese Gerade sei C D (Fig. 155), der Pol A der Mittelpunkt der Anziehung, der Leitstrahl A D = r; er bilde mit der festen Richtung A C den Winkel φ. Schneidet die Gerade auf dieser Richtung ein Stück A C = a ab und bildet mit a den Winkel α, so ist

Fig. 155.

$$AC : AD = \sin ADC : \sin ACD,$$

$$a : r = \sin(\alpha + \varphi) : \sin \alpha,$$

$$r = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Diese letzte Formel ist die Polargleichung der geraden Linie. Betrachtet man in ihr a und α als konstant, r und φ als veränderlich, so erhält man durch Differentiation

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{a \sin \alpha} d\varphi; \quad d^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{a \sin \alpha} d\varphi^2.$$

Setzt man diesen Wert von $d^2\left(\frac{1}{r}\right)$ in Formel (14) des § 423 ein, so wird

$$g = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} - \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{a \sin \alpha}\right] = 0.$$

Aus $g = 0$ folgt aber, dass ein Körper sich nur dann in einer geraden Linie bewegen kann, wenn ausserhalb dieser Geraden keine Kraft auf den Körper wirkt.

425. Es bewege sich ein materieller Punkt infolge einer Zentralkraft in einem Kreise. Man soll das Gesetz dieser Kraft bestimmen. Hier ist der Leitstrahl r konstant, also $d\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. Hierfür geht die Formel (14) des § 423 über in

$$g = \frac{c^2}{r^3}. \tag{1}$$

Mithin ist die Zentralkraft umgekehrt proportional der dritten Potenz des Halbmessers der Bahn.

Aus der Formel (10) des § 423 folgt, da r konstant, also $dr = 0$ ist,

$$v^2 = A.$$

Da aber A eine Konstante ist, so wird auch die Geschwindigkeit v konstant. Also die Kreisbewegung gleichförmig.

Bezeichnet T die Zeit zu einem Umlaufe, so ist der Weg des Beweglichen in dieser Zeit

$$Tv = 2\pi r.$$

Setzt man T für t in Formel (7) des § 423, so wird F zur Kreisfläche πr^2; folglich gibt diese Formel

$$\pi r^2 = \tfrac{1}{2} c T.$$

Eliminiert man T aus den beiden letzten Formeln, so erhält man den Wert der Konstanten $c = rv$. Führt man diesen Wert von c in (1) ein, so kommt

$$g = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Mithin ist bei einer Kreisbewegung die Zentralkraft direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Radius der Bahn.

Es werde ein Körper in horizontaler Richtung auf der Erdoberfläche abgeworfen. Vermöge der Anziehungskraft der Erde wird er aus der anfänglichen Richtung abgelenkt. Je nach der Geschwindigkeit, die ihm durch die Wurfkraft erteilt wurde, wird er zur Erde fallen oder sich in einem Kreise um die Erde herum bewegen oder sich von der Erde entfernen.

Nun ist die durch die Anziehungskraft der Erde bewirkte Beschleunigung

$$g = 9{,}808\, m$$

und der Halbmesser der Erde annähernd

$$r = 6\,365\,000\, m.$$

Damit also der Körper sich in einem Kreise um die Erde bewege, muss nach Formel (2) seine Geschwindigkeit in der Sekunde sein

$$v = \sqrt{g\,r} = \sqrt{9{,}808 \cdot 6\,365\,000} = 7\,902\, m.$$

Wird der Körper mit einer kleinern Geschwindigkeit als 7 902 *m* abgeworfen, so fällt er zur Erde. Diese Geschwindigkeit ist nahe 17 mal so gross als die Rotationsgeschwindigkeit der Erde unter dem Aequator.

426. Ein materieller Punkt bewege sich in einem Kegelschnitte infolge einer Zentralkraft, die ihren Sitz in einem Brennpunkte der Kurve hat. Man soll das Gesetz der Kraft bestimmen. Die Gleichung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten ist nach § 333, Formel (6)

$$(1) \qquad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

worin bezeichnen: p den halben Parameter, ε das Verhältnis des Abstandes der Brennpunkte zum Abstande der beiden Scheitel, d. h. die numerische Exzentrizität, und φ den Winkel, den der Leitstrahl r mit dem Teile der grossen Achse bildet, der vom Zentrum der Bewegung nach dem nächsten Scheitel führt.

Diese Gleichung drückt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel aus, je nachdem

$$\varepsilon < 1, \ \varepsilon = 1, \ \varepsilon > 1.$$

Aus (1) folgt

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p};$$

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\varepsilon \sin \varphi \, d\varphi}{p}; \quad d^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\varepsilon \cos \varphi \, d\varphi^2}{p}.$$

Setzt man diese Werte in Formel (14) des § 423 ein, so erhält man

$$g = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon \cos \varphi}{p}\right],$$

oder indem man obigen Wert von $\frac{1}{r}$ einführt,

$$g = \frac{c^2}{p\,r^2}. \tag{2}$$

Bei der Bewegung in einem Kegelschnitte muss somit die Zentralkraft dem Quadrate des Leitstrahls umgekehrt proportional sein. Wenn der Kegelschnitt zu einem Kreise wird, so ist $p = r$; also geht in diesem Falle die Formel (2) über in Formel (1) des § 425.

Keppler hat zuerst durch Beobachtung gezeigt, dass die Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet, und Newton zeigte, gestützt auf dieses sogenannte zweite Keppler'sche Gesetz, dass die Sonne die Planeten im umgekehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernungen anziehe.

427. Die Zentralkraft sei umgekehrt proportional dem Quadrate des Leitstrahls. Man soll die Gleichung der Bahn und die Bewegungsverhältnisse ableiten. Bringt diese Zentralkraft demselben materiellen Punkte in den Entfernungen r, r' die Beschleunigungen g, g' in der Richtung der Leitstrahlen bei, so wird der Voraussetzung nach sein

$$g : g' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2},$$

$$g = \frac{g' r'^2}{r^2}.$$

Setzt man $g' r'^2 = k$, so erhält man als Ausdruck für die Beschleunigung

$$g = \frac{k}{r^2}. \tag{1}$$

Hierfür wird

$$\int g\,dr = \int \frac{k}{r^2}\,dr = -\frac{k}{r} + n, \tag{2}$$

worin n die Konstante der Integration sein soll. Setzt man diesen Wert von $\int g\,dr$ in Formel (12) des § 423 ein, so folgt

$$\frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = A - 2n + \frac{2k}{r}. \tag{3}$$

Wenn man hierin setzt

$$A - 2n = \beta; \quad r = \frac{1}{\varrho}, \tag{4}$$

so wird zunächst $$dr = -\frac{d\varrho}{\varrho^2},$$

und somit Gleichung (3), indem man sie nach $d\varphi$ auflöst,

$$d\varphi = \frac{\pm c\,d\varrho}{\sqrt{\beta + 2k\varrho - c^2\varrho^2}}. \tag{5}$$

Fügt man unter dem Wurzelzeichen im Nenner $\frac{k^2}{c^2} - \frac{k^2}{c^2}$ hinzu, so ergibt sich

$$d\varphi = \frac{\pm c\, d\varrho}{\sqrt{\beta + \frac{k^2}{c^2} - \left(c\varrho - \frac{k}{c}\right)^2}}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(6) \qquad \beta + \frac{k^2}{c^2} = \gamma^2; \quad c\varrho - \frac{k}{c} = u,$$

so erhält man

$$(7) \qquad d\varphi = \frac{\pm du}{\sqrt{\gamma^2 - u^2}},$$

Denken wir uns φ und r gleichzeitig wachsend, so werden ϱ und u abnehmen. Also müssen in diesem Falle $d\varphi$ und du entgegengesetzte Zeichen haben. Nun gibt die Integration von (7) für das untere der beiden Vorzeichen

$$\varphi - \varphi' = \arccos \frac{u}{\gamma},$$

worin $-\varphi'$ die Konstante der Integration bezeichnet. Geht man vom Bogen zum Cosinus über, so wird

$$(8) \qquad \frac{u}{\gamma} = \cos(\varphi - \varphi').$$

Aendern sich φ und r in entgegengesetztem Sinne, so erhalten $d\varphi$ und du gleiche Zeichen. Statt (7) kann man in diesem Falle schreiben

$$-d\varphi = \frac{-du}{\sqrt{\gamma^2 - u^2}},$$

woraus durch Integration, indem man die Konstante mit φ'' bezeichnet,

$$-\varphi + \varphi'' = \arccos \frac{u}{\gamma} \quad \text{oder}$$

$$(9) \qquad \frac{u}{\gamma} = \cos(-\varphi + \varphi'') = \cos(\varphi - \varphi'') \text{ erhalten wird.}$$

Setzt man $u = \gamma$, so erhält man aus (8) und (9) $\varphi = \varphi' = \varphi''$, und aus (6)

$$\varrho = \frac{k + \sqrt{\beta c^2 + k^2}}{c^2}.$$

Dieser Wert von ϱ ist ein Maximum, wie aus (5) folgt, wenn man $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$ setzt; also ist der entsprechende Wert von r ein Minimum. Dieser kleinste Leitstrahl r_0 ist somit

$$r_0 = \frac{c^2}{k + \sqrt{\beta c^2 + k^2}}.$$

Zählt man nun den Winkel $\varphi - \varphi' = \psi$ von diesem Leitstrahle aus, so erhält man aus (8) und (9) zugleich

$$u = \gamma \cos \psi,$$

oder indem man die Werte von γ und u aus (6) einführt,

$$c\varrho - \frac{k}{c} = \sqrt{\beta + \frac{k^2}{c^2}} \cos \psi,$$

also auch, wenn man wieder $\varrho = \frac{1}{r}$ setzt und nach r auflöst,

$$r = \frac{c^2}{k\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\beta c^2}{k^2}} \cos \psi\right]}.$$

Schreibt man der Einfachheit wegen

$$(10) \qquad \frac{c^2}{k} = p; \quad 1 + \frac{\beta c^2}{k^2} = \varepsilon^2,$$

so wird

$$(11) \qquad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \psi}.$$

Dies ist die Polargleichung eines Kegelschnittes (§ 426), wenn der Pol in einem Brennpunkte liegt; der halbe Parameter desselben ist $= p$, das Verhältnis zwischen dem Abstande beider Brennpunkte und dem Abstande beider Scheitel oder die numerische Exzentrizität $= \varepsilon$ und der Winkel zwischen dem Radiusvektor r und seinem kleinsten Werte r_0 gleich ψ.

Diese Gleichung gibt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem ε kleiner, gleich oder grösser als die Einheit ist. Allein in der Relation (10)

$$(12) \qquad 1 + \frac{\beta c^2}{k^2} = \varepsilon^2$$

ist die Grösse $\frac{c^2}{k^2}$ immer positiv. Also wird der Ausdruck links in (12) kleiner, gleich oder grösser als die Einheit, je nachdem β negativ, gleich Null oder positiv ist. Es entsteht somit

eine Ellipse, wenn $\varepsilon < 1$, also β negativ,
eine Parabel, „ $\varepsilon = 1$, „ $\beta = 0$,
eine Hyperbel, „ $\varepsilon > 1$, „ β positiv.

Für die Parabel hat man als halben Parameter nach (10) und (11)

$$p = \frac{c^2}{k}.$$

Folglich ist die Gleichung der Parabel für den Scheitel in rechtwinkeligen Koordinaten

$$y^2 = \frac{2c^2}{k} x.$$

Sind a und b die halbe grosse und halbe kleine Achse der Ellipse und Hyperbel, so ist aus der Lehre von den Kegelschnitten bekannt

$$p = \frac{b^2}{a}; \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Somit geben die Formeln (10)

$$(13) \qquad \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{k}; \quad 1 + \frac{\beta c^2}{k^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Aus diesen beiden Formeln findet man

$$(14) \qquad a = -\frac{k}{\beta}; \quad b^2 = -\frac{c^2}{\beta}.$$

Für die Ellipse ist β negativ, also b^2 positiv; für die Hyperbel ist β positiv, also b^2 negativ, wie es sein soll.

Die Bedeutung der Konstanten β ergibt sich wie folgt. Die Gleichung (10) des § 423 gibt, wenn man den Wert von $\int g\,d\,r$ aus (2) einführt,

$$(15) \qquad v^2 = A - 2n + \frac{2k}{r}.$$

Wenn nun V die anfängliche Geschwindigkeit, die dem Beweglichen durch einen Stoss im Raume beigebracht wurde, und R den entsprechenden Leitstrahl bezeichnet, so folgt aus der letzten Gleichung

$$V^2 = A - 2n + \frac{2k}{R},$$

also auch, wenn man nach (4) $A - 2n$ durch β ersetzt,

$$(16) \qquad \beta = V^2 - \frac{2k}{R}.$$

Nun entsteht eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wenn β negativ, null oder positiv ist. Es wird daher die Bahn

eine Ellipse, wenn $V^2 < \frac{2k}{R}$,

eine Parabel, „ $V^2 = \frac{2k}{R}$,

eine Hyperbel, „ $V^2 > \frac{2k}{R}$.

Somit entscheidet die Geschwindigkeit V, die dem Beweglichen durch den Stoss anfänglich erteilt wird, über die Art des Kegelschnittes.

Wenn V^2 gerade gleich ist dem Werte $\frac{2k}{R}$, so entsteht eine Parabel. Lässt man von diesem Werte an V^2 stetig abnehmen bis Null oder stetig zunehmen bis Unendlich, so entstehen unendlich viele elliptische oder hyperbolische Bahnen. Man kann daher unendlich viel gegen 1 wetten, dass materielle Punkte im Raume, die sich infolge der Gravitation bewegen, eher elliptische oder hyperbolische als parabolische Bahnen haben.

Addiert man (16) zu (15), so folgt zur Bestimmung der Geschwindigkeit

$$(17) \qquad v^2 = V^2 + 2k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Setzt man den Wert von $\beta = A - 2n$ aus (14) in (15) ein, so kommt

$$(18) \qquad v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Wird nun die elliptische Bahn zu einem Kreise vom Halbmesser R, so wird in der letzten Formel $r = a = R$. Bezeichnet man den korrespondierenden Wert von v mit $V_{,}$, so folgt aus (18)

$$V_{,}^2 = \frac{k}{R}.$$

Dieser Wert von $V_{,}^2$ ist halb so gross als derjenige von V^2, der eine Parabel zur Folge hat. Lässt man daher $V_{,}$ wachsen bis $V\sqrt{2}$ und abnehmen bis auf Null, so erhält man zwei Gruppen von elliptischen Bahnen, zwischen denen der Kreis liegt.

Aber es wird $r = a = R$ nur, wenn in Gleichung (11) $\varepsilon = 0$ oder

$$1 + \beta\frac{c^2}{k^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \beta + \frac{k^2}{c^2} = 0$$

wird. Setzt man die Werte der Konstanten β und c, wie sie durch den Anfangszustand bestimmt werden, ein, so lautet diese Gleichung

$$V^2 - \frac{2k}{R} + \frac{k^2}{R^2V^2\sin^2(V|R)} = \left(V - \frac{k}{RV}\right)^2 + \frac{k^2}{R^2V^2}\cdot\operatorname{cotang}^2(V|R) = 0,$$

d. h. es müssen

$$V^2 = \frac{k}{R} \quad \text{und} \quad \operatorname{cotang}(V|R) = 0$$

sein. Soll also die Bahn ein Kreis werden, so muss die Anfangsgeschwindigkeit senkrecht auf dem Radiusvektor stehen.

428. Anwendung auf die Bewegung der Himmelskörper. Es seien M, m die Massen der Sonne und eines Planeten. Diese Körper ziehen sich an, wie wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären. Die Entfernung dieser Mittelpunkte sei r. Bezeichnet ferner f die Anziehung zweier Masseneinheiten in der Entfernung 1 von einander, so ist nach dem Newton'schen Gesetze der Gravitation $f\frac{Mm}{r^2}$ die Anziehungskraft der Sonne und des Planeten; folglich $f\frac{M}{r^2}$ die Beschleunigung, die die Sonne jeder Masseneinheit des Planeten und $f\frac{m}{r^2}$ die Beschleunigung, die der Planet jeder Masseneinheit der Sonne in der

Richtung des Abstandes r erteilt (§ 181). Denkt man sich die Sonne ruhend, so nimmt der Planet in der Richtung von r die Summe dieser Beschleunigungen an, so dass seine Beschleunigung sein wird

$$f\frac{M + m}{r^2}.$$

Setzt man diesen Wert gleich der Grösse g in der Formel (1) des § 427, nämlich

$$g = \frac{k}{r^2},$$

so folgt als Wert der Konstanten

$$(1) \qquad k = f(M + m).$$

Führt man diesen Wert von k in die Formeln des § 427 ein, so erhält man die Elemente der Bahn und der Bewegung des Planeten mit Rücksicht auf die Massen. Da aber die Bahnen der Planeten geschlossene Kurven, also Ellipsen sind, so soll hier nur noch für diese Bahnen die Zeit zum Durchlaufen irgend eines Bahnteiles ermittelt werden.

Eliminiert man aus den Gleichungen (3) des § 427 und (6) des § 423:

$$\frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2}{r^4}\left(\frac{d\,r}{d\,\varphi}\right)^2 = A - 2\,n + \frac{2\,k}{r},$$

$$r^2\,d\,\varphi = c\,d\,t$$

die Grösse $d\,\varphi$, so folgt, wenn man $A - 2\,n = \beta$ setzt und nach $d\,t$ auflöst,

$$(2) \qquad d\,t = \frac{\pm\, r\,d\,r}{\sqrt{\beta\,r^2 + 2\,k\,r - c^2}}.$$

Den Scheitel der Ellipse, für den r ein Minimum ist, nennt man Perihel, den andern Aphel. Man zähle die Zeit t vom Perihel aus.

Bewegt sich der Planet von diesem Scheitel zum Aphel, so wächst r mit t, und es ist somit für diese Bewegung das obere Zeichen in (2) zu nehmen.

Für die Ellipse liegt r immer zwischen den beiden Stücken, in die die grosse Achse von einem Brennpunkte geteilt wird, also zwischen den Werten $a(1 - \varepsilon)$ und $a(1 + \varepsilon)$; man kann daher setzen

$$(3) \qquad r = a\,(1 - \varepsilon \cos u),$$

worin a die halbe grosse Achse, ε das Verhältnis zwischen dem Abstande der Brennpunkte und dem der Scheitel und u eine Variable, die sogenannte exzentrische Anomalie, bezeichnet. Hieraus folgt

$$(4) \qquad d\,r = a\,\varepsilon \sin u\,d\,u.$$

Setzt man noch nach den Formeln (14) und (12) des § 427

$$\beta = -\frac{k}{a}, \quad c^2 = a\,k\,(1 - \varepsilon^2),$$

so erhält man durch Verwendung von (3) und (4)

$$r\,d\,r = a^2\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon\cos u)\sin u\,d\,u,$$
$$\beta\,r^2 + 2\,k\,r - c^2 = a\,k\,\varepsilon^2\sin^2 u,$$

indem man zunächst $(1 - \varepsilon\cos u)^2$ entwickelt und $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ setzt. Führt man diese Werte in (2) ein, so kommt nach der obigen Voraussetzung

$$d\,t = a\sqrt{\frac{a}{k}}\,(1 - \varepsilon\cos u)\,d\,u.$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wenn man mit t' die Integrationskonstante bezeichnet,

$$t + t' = a\sqrt{\frac{a}{k}}\,(u - \varepsilon\sin u).$$

Für $u = 0$ ist nach (3) $r = a(1 - \varepsilon)$. In diesem Falle befindet sich der Planet im Perihel. Somit ist für $u = 0$ auch $t = 0$. Dies gibt $t' = 0$. Die vorstehende Gleichung wird daher

$$(5) \qquad \frac{t}{a}\sqrt{\frac{k}{a}} = u - \varepsilon\sin u.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Für irgend einen Wert von r kann vermittelst (3) der Winkel u und somit die Zeit t berechnet werden. Ueberhaupt können vermittelst der zwei Formeln (3) und (5) je zwei der Grössen r, u, t bestimmt werden, wenn man die dritte kennt.

Die Zeit, die ein Planet zu einem Umlaufe braucht, sei T. Lässt man in (5) den Bogen von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ wachsen, so wächst t von $t = 0$ bis $t = T$. Für eine Umlaufszeit wird daher die Formel (5)

$$\frac{T}{a}\sqrt{\frac{k}{a}} = 2\,\pi.$$

Setzt man hierin den Wert von k aus (1) ein, so folgt

$$(6) \qquad T^2 = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{f\,(M + m)}.$$

Somit hängt die Umlaufszeit T eines Planeten nur von der grossen Achse seiner Bahn und von den Massen der Sonne und des Planeten ab. Würde sich ein Körper von der gleichen Masse m des Planeten in einem Kreise um die Sonne bewegen, dessen Radius = a ist, so hätte er gleiche Umlaufszeit mit dem Planeten. Und da die Bewegung jenes Körpers im Kreise gleichförmig ist (§ 425), so ist seine Geschwindigkeit die mittlere von der Geschwindigkeit des Planeten.

Sind T', m', a' Umlaufszeit, Masse und halbe grosse Achse der Bahn irgend eines andern Planeten, so folgt aus (6)

$$T'^2 = \frac{4\,\pi^2\,a'^3}{f\,(M + m')}.$$

Dividiert man Gleichung (6) durch die letzte, so folgt

$$(7) \qquad \frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3}\cdot\frac{M + m'}{M + m}.$$

Wenn somit $m = m'$ oder wenn m und m' gegen M vernachlässigt werden können, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die dritten Potenzen der halben grossen Achsen ihrer Bahnen. Keppler hat dieses Gesetz durch Beobachtung gefunden, wobei er allerdings die Massen der Planeten nicht berücksichtigte. Es enthält demnach die Formel (7) das berichtigte dritte Keppler'sche Gesetz.

XIV. Partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

429. Art der Gleichungen. Eine Gleichung zwischen zwei unabhängig veränderlichen Grössen x, y und einer abhängig veränderlichen Grösse z, die ausser diesen Veränderlichen noch die ersten partiellen Differentialquotienten der Variabeln z nach den Grössen x und y enthält, heisst eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den drei Veränderlichen x, y, z. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung wird sein

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{1}$$

Ist $z = f(x, y)$ so bestimmt, dass z nebst seinen partiellen Ableitungen nach x und y die Gleichung (1) identisch, d. h. für alle Werteverbindungen von (x, y) erfüllt, so heisst $z = f(x, y)$ ein Integral von (1). Die Aufgabe, die eine partielle Differentialgleichung stellt, ist, alle Integrale der Gleichung zu bestimmen.

Fehlen in der Gleichung (1) einige der Grössen x, y, ..., so entstehen spezielle Fälle. Selbstverständlich muss aber wenigstens einer der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ darin enthalten sein.

Im Folgenden sollen nur einige der einfachsten Gleichungen zur Behandlung kommen.

430. Gleichungen mit einem partiellen Differentialverhältnis.

I. Als einfachste Gleichung sei gegeben

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \tag{1}$$

worin z eine Funktion von x und y bezeichne. Wäre z eine Funktion nur von x, so erhielte man durch Integration

$$z = ax + c;$$

die Grösse c wäre dann die Konstante der Integration. Allein im vorliegenden Falle hat man c durch eine Grösse $\varphi(y)$ zu ersetzen, die anzeigt, dass z nicht nur von x, sondern in irgend einer Weise auch von y abhängt; denn $\varphi(y)$ bezeichnet eine beliebige Funktion von y. Dadurch erhält man das Integral von (1) in der Form

$$z = ax + \varphi(y), \tag{2}$$

und diese Gleichung leistet (1) vollständig Genüge, weil die Differentiation von (2) nach x für jede Wertverbindung von x und y gerade die Gleichung (1) liefert.

Um den Gleichungen (1) und (2) eine geometrische Deutung zu geben, denke man sich drei zu einander rechtwinklige Achsen der x, y, z, die erstern zwei etwa horizontal, die letztere also vertikal. Alsdann stellt $z = f(x, y)$ allgemein eine Oberfläche dar, und es sind x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes derselben. Im vorliegenden Falle wird $z = f(x, y)$ ersetzt durch Gleichung (2).

Die Form der Oberfläche lässt sich wie folgt beurteilen: Setzt man $y = 0$ in (2), so ist $\varphi(0)$ eine Konstante, also (2) die Gleichung einer Geraden, die in der xz Ebene und der fraglichen Oberfläche liegt. Die Oberfläche wird also von der xz Ebene längs einer Geraden geschnitten. Das ist aber auch der Fall mit irgend einer Ebene, die zur xz Ebene parallel liegt, also senkrecht zur y Achse steht, sofern überhaupt ein Durchschneiden vorkommt; denn setzt man $y = 1, 2, 3, ..$ in (2), so wird $\varphi(y)$ immer konstant, also Gleichung (2) diejenige einer geraden Linie sein. Die Oberfläche ist daher eine Cylinderfläche; ihre Seitenlinien bilden nach (1) mit der xy Ebene einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente die Grösse a ist.

Setzt man $x = 0$ in (2), so wird $z = \varphi(y)$ zur Gleichung der Kurve, längs der die Cylinderfläche von der yz Ebene geschnitten wird. Allein diese Kurve ist unbestimmt, weil es auch $\varphi(y)$ ist. Daher entsprechen alle denkbaren Kurven der Aufgabe, so lange nicht aus irgend welchen anderweitigen Daten dieser Schnitt eine bestimmte Form erhält. Würde man aber z. B. verlangen, er solle eine Parabel sein, deren Achse mit der z Achse, und deren Scheitel mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, so würde $z = \varphi(y)$ übergehen in $y^2 = 2pz$ und es würden dann alle Schnitte, parallel zur yz Ebene, kongruente Parabeln werden.

II. Es sei zu integrieren

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{ay + x^2}}. \tag{3}$$

Betrachtet man im Ausdrucke rechts nur x als veränderlich, so erhält man durch Integration

$$z = l\left(x + \sqrt{ay + x^2}\right) + \varphi(y), \tag{4}$$

wo die Konstante der Integration wie in (2) durch $\varphi(y)$ bezeichnet ist. Dass Gleichung (4) das Integral von (3) ist, ergibt sich sofort, wenn von (4) das partielle Differential in Hinsicht x genommen wird.

Gleichung (4) stellt wieder eine Oberfläche dar. Um eine Vorstellung von der Form derselben zu erhalten, lege man Ebenen durch, senkrecht zur y Achse, in bestimmten Abständen von der xz Ebene; man mache z. B. $y = 0, 1, 2, ..$; dann wird die Oberfläche geschnitten längs Kurven, für die (3) die Steigung angibt, d. h. die Neigung zur Ebene xy und zwar mittels der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die Bogenelemente mit der xy Ebene bilden. Für $y = 0$, also für die Schnittkurve in der Ebene xz, erhält man die gleichzeitigen Werte

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad z = l\,2x + \varphi(0).$$

Ganz ebenso können Ebenen durch die Oberfläche gelegt werden, parallel zu der yz Ebene und der yx Ebene. Man erkennt, dass der Aufgabe wegen der Unbestimmtheit von $\varphi(y)$ unendlich viele Oberflächen entsprechen.

III. Endlich sei zu integrieren

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y).$$

Man erhält nach dem bisherigen Verfahren, indem man mit ∂x multipliziert, y als konstant betrachtet und integriert

$$z = \int f(x, y)\, \partial x + \varphi(y).$$

431. Gleichungen mit zwei partiellen Differentialverhältnissen. Es sei zu integrieren die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \qquad M\frac{\partial z}{\partial x} + N\frac{\partial z}{\partial y} = P,$$

worin M, N und P Funktionen von x, y, z bezeichnen.

Ist $z = f(x, y)$ das gesuchte Integral von (1), so ist nach § 293 das Differential davon

$$(2) \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (1) und (2) den Quotienten $\frac{\partial z}{\partial y}$, so erhält man

$$N\,dz - P\,dy - \frac{\partial z}{\partial x}(N\,dx - M\,dy) = 0.$$

In dieser Gleichung ist aber $\frac{\partial z}{\partial x}$ unbestimmt; daher kann sie nur bestehen, wenn gleichzeitig

$$(3) \qquad N\,dz - P\,dy = 0 \quad \text{und} \quad N\,dx - M\,dy = 0$$

werden; diesen Gleichungen kann man auch, wenn P von Null verschieden ist, die Form geben

$$(4) \qquad \frac{dx}{M} = \frac{dy}{N} = \frac{dz}{P}.$$

Ist man aber im stande, diese beiden gleichzeitigen Differentialgleichungen zu integrieren, so kann man das allgemeine Integral von (1) angeben.

Es seien die Integralgleichungen von (3) oder (4)

$$(5) \qquad u = f_1(x, y, z) = c_1; \quad v = f_2(x, y, z) = c_2,$$

worin die Funktionen f_1 und f_2 keine der auftretenden willkürlichen Konstanten c_1 und c_2 enthalten.

Sind die Gleichungen (5) die Integralgleichungen von (4), so müssen, wenn man (5) vollständig differentiiert, die daraus hervorgehenden Gleichungen eine Folge von (4) sein oder die Gleichungen (4) identisch erfüllen, weil eben die Funktionen f_1 und f_2 keine willkürlichen Konstanten mehr enthalten.

Die Differentiation von (5) gibt

$$\frac{\partial u}{\partial x} d x + \frac{\partial u}{\partial y} d y + \frac{\partial u}{\partial z} d z = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} d x + \frac{\partial v}{\partial y} d y + \frac{\partial v}{\partial z} d z = 0.$$

Setzt man dz aus (4) hier ein, so erhält man

$$(6) \quad \begin{cases} M \frac{\partial u}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial y} + P \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ M \frac{\partial v}{\partial x} + N \frac{\partial v}{\partial y} + P \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Da aber aus den Gleichungen (5) für die Differentialquotienten von z nach x und y folgen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial z}},$$

so folgt aus den Gleichungen (6) beide Male die Gleichung

$$M \frac{\partial z}{\partial x} + N \frac{\partial z}{\partial y} - P = 0,$$

die gegebene Differentialgleichung (1).

Daher ergibt sich: ein Integral der gleichzeitigen Differentialgleichungen (3) ist auch ein Integral der Differentialgleichung (1) und zugleich auch der homogenen Gleichung (6).

Dann aber genügt auch eine beliebige Funktion

$$(7) \qquad u = \varphi(v)$$

zwischen den beiden Integralen der Differentialgleichungen (3) der Differentialgleichung (1). Aus (7) folgen nämlich die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

aus denen durch Multiplikation mit M, N und P und Addition die Gleichung folgt

$$M\frac{\partial u}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial y}+P\frac{\partial u}{\partial z}-\varphi'(v)\cdot\left[M\frac{\partial v}{\partial x}+N\frac{\partial v}{\partial y}+P\frac{\partial v}{\partial z}\right]=0.$$

Diese Gleichung ist aber wegen der Gleichungen (6) unabhängig von der beliebigen Funktion φ erfüllt. Daher ist, was für eine Funktion φ auch sein möge,

$$M\frac{\partial[u-\varphi(v)]}{dx}+N\frac{\partial[u-\varphi(v)]}{\partial y}+P\frac{\partial[u-\varphi(v)]}{\partial z}=0.$$

Aber aus $u-\varphi(v)=0$ folgen

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial[u-\varphi(v)]}{\partial x}}{\frac{\partial[u-\varphi(v)]}{\partial z}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial[u-\varphi(v)]}{\partial y}}{\frac{\partial[u-\varphi(v)]}{\partial z}};$$

und daher ist (7) ein Integral auch der Gleichung (1) und zwar das allgemeine Integral, weil es in allgemeinster Weise den Zusammenhang zwischen x, y und z angibt.

Die Integration der partiellen linearen Differentialgleichung (1) beruht daher darauf, dass man zwei verschiedene Integrale der gleichzeitigen Differentialgleichungen (3) zu bestimmen sucht und diese vermittelst einer willkürlichen Funktion φ zum allgemeinen Integrale verbindet.

Dieses Verfahren hat zuerst Lagrange gelehrt, weshalb die Hilfsgleichungen (3) seinen Namen führen.

Wenn M, N und P nur x und y oder nur eine Variable enthalten, oder, wenn sie konstant sind, entstehen spezielle Fälle. Einige solche sollen im Folgenden als Beispiele zur Behandlung kommen.

I. Es sei $P=0$, ferner seien M und N konstant, so dass die vorgelegte Gleichung lautet

(8) $$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Die gleichzeitigen Differentialgleichungen (3) lauten alsdann

$$dz=0;\quad b\,dx=a\,dy,$$

und ihre Integrale sind

(9) $$z=c_1;\quad bx-ay=c_2.$$

Danach ist das allgemeine Integral der Gleichung (8)

(10) $$z=\varphi(bx-ay).$$

Davon, dass diese Gleichung der Gleichung (8) Genüge leistet, kann man sich durch Differentiation überzeugen; man erhält

$$\frac{\partial z}{\partial x}=b\,\varphi'(bx-ay);\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-a\,\varphi'(bx-ay);$$

durch Einsetzen dieser Werte in (8) wird deren linke Seite identisch gleich Null.

Die erste der Gleichungen (9) stellt eine Ebene A dar, die parallel zur xyEbene liegt; die zweite eine Gerade B in dieser Ebene, die mit der xzEbene einen konstanten Winkel bildet. Da nun die Grösse c_1 willkürlich ist, so kann man sich denken, sie nehme alle möglichen Werte an; dann schreitet die Ebene A fort und mit ihr die Gerade B. Bliebe hierbei c_2 konstant, so beschriebe B eine Ebene, parallel zur zAchse gelegen. Allein c_2 ist ebenso willkürlich wie c_1. Lässt man daher c_2 sich ändern, so schreitet B in der Ebene A fort. Während dieser gleichzeitigen Aenderungen beschreibt B eine konoidische Oberfläche; die Krümmung derselben hängt von dem Verhältnis zwischen c_1 und c_2 ab; für dasselbe folgt aber aus (9) und (10) die Beziehung

$$c_1 = \varphi(c_2).$$

II. Es seien P, M und N konstant; dann nimmt die Gleichung (1), wenn man durch P dividiert, und $a = \frac{M}{P}$, $b = \frac{N}{P}$ setzt, die Form

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \tag{11}$$

an. Die Hilfsgleichungen (3) lauten jetzt

$$b\,dz = dy; \quad b\,dx = a\,dy,$$

deren Integrale sind

$$bz - y = c_1; \quad bx - ay = c_2, \tag{12}$$

so dass das allgemeine Integral von (11) durch die Formel

$$bz - y = \varphi(bx - ay) \tag{13}$$

gegeben ist.

Die beiden Gleichungen (12) stellen eine gerade Linie dar. Denkt man sich dieselbe auf die Koordinatenebenen projiziert, so entspricht die erste der Gleichungen (12) der Projektion auf die yzEbene, die zweite der Projektion auf die xyEbene. Lässt man c_1 sich ändern, so schreitet die Gerade in einer Ebene fort, die parallel zur zAchse ist; lässt man aber nur c_2 sich ändern, so bewegt sich die Gerade in einer Ebene, parallel zur xAchse gelegen. Aendern sich c_1 und c_2 zugleich, so beschreibt die Gerade eine krumme Fläche. Da aber die Grössen $\frac{1}{b}$ und $\frac{a}{b}$ konstant sind, so behalten die Projektionen der Geraden zu den Achsen eine gleiche Neigung. Die krumme Fläche ist daher eine Cylinderfläche, deren Gleichung die Gleichung (13) ist. Die Art der Krümmung hängt vom Zusammenhange zwischen c_1 und c_2 ab, der aus (13) folgt

$$c_1 = \varphi(c_2).$$

III. Die Gleichung (1) gehe über in

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0; \tag{14}$$

es seien also $M = x$, $N = y$ und $P = 0$; dann geben die Gleichungen (3)

$$dz = 0; \quad dx = \frac{x}{y}dy.$$

Dividiert man die zweite dieser Gleichungen durch x und integriert sodann beide, so kommt

$$z = c_1; \; l\,x = l\,y + l\,c_2,$$

worin c_1 und $l\,c_2$ die Konstanten der Integration bezeichnen. Die letzte Gleichung gibt $l\,\frac{x}{y} = l\,c_2$, woraus folgt $\frac{x}{y} = c_2$. Daher erhält man folgende Integrale der gleichzeitigen Hilfsgleichungen (3)

$$(15) \qquad z = c_1; \quad \frac{x}{y} = c_2;$$

aus ihnen folgt das allgemeine Integral der Gleichung (14)

$$(16) \qquad z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Die Form der Oberfläche, die (16) darstellt, kann wieder erkannt werden aus den Gleichungen (15). Es stellt $z = c_1$ eine Ebene dar, parallel zur x y Ebene, und $\frac{x}{y} = c_2$ eine Gerade, die in dieser Ebene liegt und die z Achse schneidet. Lässt man c_1 und c_2 sich ändern, so schreitet die Gerade längs der z Achse fort und dreht sich um dieselbe. Sie beschreibt eine konoidische Fläche, deren Form von dem Gesetze $c_1 = \varphi\,(c_2)$ abhängt.

IV. Die Gleichung (1) sei in einem weiteren speziellen Falle

$$(17) \qquad y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

so dass $M = y$, $N = -x$ und $P = 0$ seien; daher werden die Hilfsgleichungen (3) sein

$$d\,z = 0; \quad x\,d\,x + y\,d\,y = 0.$$

Die Integration dieser Gleichungen gibt

$$(18) \qquad z = c_1; \quad x^2 + y^2 = c_2,$$

aus denen das allgemeine Integral folgt

$$(19) \qquad z = \varphi\,(x^2 + y^2)$$

Diese Gleichung gehört einer Rotationsfläche an, deren Achse zusammenfällt mit der z Achse. Die erste der Gleichungen (18) stellt nämlich eine Ebene dar, senkrecht zur z Achse, und die zweite einen Kreis, der in dieser Ebene liegt und dessen Mittelpunkt in die z Achse fällt. Rückt die Ebene durch Variation von c_1 fort und ändert sich gleichzeitig auch der Radius $\sqrt{c_2}$ des Kreises, so wird die Oberfläche beschrieben.

V. Es sei zu integrieren

$$(20) \qquad (x - a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial z}{\partial y} = z - c;$$

die Gleichungen (4) geben sofort

$$\frac{d\,z}{z - c} - \frac{d\,y}{y - b} = 0; \quad \frac{d\,x}{x - a} - \frac{d\,y}{y - b} = 0,$$

woraus durch Integration folgt

$$l(z-c) - l(y-b) = l\,c_1; \quad l(x-a) - l(y-b) = l\,c_2,$$

worin $l\,c_1$ und $l\,c_2$ die Konstanten der Integration darstellen. Zieht man links die Glieder zusammen und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$(21) \qquad \frac{z-c}{y-b} = c_1; \quad \frac{x-a}{y-b} = c_2,$$

woraus als Integral von (20)

$$(22) \qquad \frac{z-c}{y-b} = \varphi\left(\frac{x-a}{y-b}\right)$$

folgt.

Diese Gleichung stellt eine Kegelfläche dar. Die Gleichungen (21) sind vom ersten Grade; sie sind die Gleichungen der Projektion der Kegelseitenlinie auf die Ebenen yz und xy. Die Seitenlinie schreitet fort, sowie die Grössen c_1 und c_2 sich ändern und beschreibt die Oberfläche. Alle Seitenlinien, wie sie auch im Raume liegen mögen, schneiden sich in einem Punkte, dessen Koordinaten a, b, c sind. Um dies zu zeigen, schreibe man die Gleichungen (21) wie folgt

$$z - c = c_1(y-b); \quad x - a = c_2(y-b).$$

Nimmt man nun $y = b$ an, so verschwinden die rechten Seiten dieser Gleichungen, also muss auch zugleich $x = a$ und $z = c$ werden. Dieser Punkt ist daher die Spitze des Kegels.

VI. Ist

$$(23) \qquad a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

die zu integrierende Gleichung, so dass $M = a$, $N = b$, $P = z$ ist, so lauten die Hilfsgleichungen (4)

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}; \quad \frac{dx}{a} = \frac{dz}{z};$$

die Integrale hiervon sind

$$bx - ay = c_1; \quad x + l\,c_2 = a\,l\,z,$$

wenn die zweite Integrationskonstante mit $l\,c_2$ bezeichnet wird. Geht man in der zweiten Gleichung von den Logarithmen zu den Zahlen über, so folgt

$$c_2 e^x = z^a \text{ oder } z^a \cdot e^{-x} = c_2,$$

woraus das allgemeine Integral

$$(24) \qquad z^a = e^x \varphi(bx - ay)$$

folgt.

VII. Endlich sei zu integrieren

$$(25) \qquad xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = xy,$$

in der $M = xz$; $N = yz$; $P = xy$ ist; man erhält aus (4)

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy};$$

von ihnen liefert die erste sofort das Integral

$$l\,x - l\,y = l\,c_1 \quad \text{oder} \quad \frac{x}{y} = c_1.$$

Um ein zweites Integral zu erhalten, erweitere man die drei Hilfsgleichungen mit xyz, wodurch kommt

$$y\,dx = x\,dy = z\,dz;$$

hieraus folgt

$$y\,dx + x\,dy = 2\,z\,dz.$$

Jetzt ist die linke Seite ein vollständiges Differential, so dass man ohne weiteres als zweite Integralgleichung

$$xy = z^2 + c_2$$

erhält. Die Verbindung der beiden Integrale gibt

$$(26) \qquad z^2 = xy + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

als allgemeines Integral von (25).

XV. Partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

432. Form der Gleichungen. Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängig veränderlichen Grössen x, y und der abhängig veränderlichen Grösse z enthält im allgemeinen ausser den ersten partiellen Differentialverhältnissen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ auch mindestens einen der partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung von z nach x und y, also eine der Grössen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

vom letzteren ist im § 292 nachgewiesen, dass im Falle der Stetigkeit der Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

ist. Eine allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung hat daher die Form

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Allgemeine Methoden zur Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung zu finden, ist bisher nicht gelungen. Es werden deshalb im Folgenden nur einige der einfachsten speziellen Fälle behandelt werden.

433. Gleichungen mit einem partiellen Differentialverhältnis.

I. Es sei die Gleichung zu integrieren

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Wäre hierin z eine Funktion nur von x, so gäbe die Integration $\frac{\partial z}{\partial x} = c$, wo c die willkürliche Konstante bezeichnet. Da aber z auch von y abhängt, so hat man $\varphi(y)$ für c zu nehmen, und erhält in der allgemeinsten Weise als Integral von (1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(y). \tag{2}$$

Wird diese Gleichung in Hinsicht x wieder differentiiert, so ist $\partial \varphi(y) = 0$, und man erhält die ursprüngliche Gleichung, ein Beweis, dass (2) der Gleichung (1) Genüge leistet.

Wird (2) in der Form $\partial z = \varphi(y) \partial x$ integriert, indem man y als konstant ansieht, so erhält man als gesuchtes Integral

$$z = x \varphi(y) + f(y), \tag{3}$$

in dem f(y) die neue willkürliche Konstante bezeichnet.

Gleichung (3) stellt eine Oberfläche dar. Legt man durch sie eine Ebene, parallel zur Ebene xz in einem bestimmten Abstande von der letztern, so wird y konstant. Bezeichnet man nun die konstanten Grössen $\varphi(y)$ und f(y) mit a und b, so geht (3) über in

$$z = a x + b. \tag{4}$$

Der Durchschnitt jener Ebene mit der Oberfläche ist daher, wie (4) zeigt, eine gerade Linie. Dies wird der Fall sein für jeden Wert von y. Diese Geraden schneiden die Ebene yz in Punkten, die stetig aufeinander folgen können. Sie bilden daher eine Kurve, deren Gleichung erhalten wird, wenn man x = 0 in (3) setzt. Daher ist diese Gleichung

$$z = f(y).$$

Macht man z = 0 in (3), so ergibt sich als Gleichung der Kurve, längs der die Oberfläche von der xy Ebene geschnitten wird,

$$x = -\frac{f(y)}{\varphi(y)}.$$

II. Es sei gegeben

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F(x, y).$$

Multipliziert man mit ∂x, betrachtet y als konstant und integriert, so wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int F(x, y) \partial x + \varphi(y).$$

Dabei vertritt $\varphi(y)$ die Stelle der Integrations-Konstanten. Wird mit ∂x multipliziert, so erhält man das gesuchte Integral

$$z = \int \partial x \left[\int F(x, y) \partial x + \varphi(y) \right] + f(y),$$

wobei $f(y)$ die nämliche Bedeutung hat wie oben $\varphi(y)$.

Ganz in gleicher Weise kann $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F(x, y)$ integriert werden.

III. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F(x, y)$$

integriere man zuerst in Hinsicht x und das Resultat in Hinsicht y oder umgekehrt. Zunächst hat man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y} = F(x, y) \partial x$$

und daher durch Integration, indem y als konstant angesehen wird,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int F(x, y) \partial x + \varphi(y).$$

Multipliziert man mit ∂y, betrachtet x als konstant und integriert, so erhält man als gesuchtes Integral

$$z = \int \partial y \left[\int F(x, y) \partial x + \varphi(y) \right] + f(x).$$

Wenn $F(x, y) = c$, so wird, wenn $\int \varphi(y) d y$ durch $F(y)$ ersetzt wird,

$$\partial z = [c x + \varphi(y)] \partial y,$$

(5)
$$z = c x y + F(y) + f(x).$$

Diese Gleichung (5) stellt wieder eine Oberfläche dar. Für $y = 0$ wird die Gleichung der Kurve, längs der die Ebene xz von ihr geschnitten wird, sein

$$z = F(0) + f(x).$$

Da $f(x)$ willkürlich ist, so sind unendlich viele solcher Kurven möglich. Nimmt man $x = 0$ an, so enthält Gleichung (5) alle Punkte der Oberfläche, die der Ebene yz angehören. Diese Punkte liegen in einer Kurve, deren Gleichung ist

$$z = F(y) + f(0).$$

Auch hier ist $F(y)$ willkürlich; es können also unendlich viele Kurven dieser Art in der Ebene yz angenommen werden. Man erkennt hieraus die Mannigfaltigkeit der Oberflächen, die in (5) enthalten sind.

434. Gleichung mit dem ersten und zweiten Differentialverhältnis derselben Variabeln. Es sei zu integrieren

(1)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P \frac{\partial z}{\partial y} = Q,$$

wo P und Q Funktionen von x und y sein sollen. Setzt man

$$(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = u, \quad \text{also} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y} = d\,u$$

in Gleichung (1), so geht sie über in

$$(3) \qquad d\,u + P\,u\,d\,y = Q\,d\,y.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach überein mit der in § 375 behandelten. Um darin die Sonderung der Veränderlichen durchzuführen, nehme man

$$(4) \qquad u = Y\,t,$$

wo Y und t zwei veränderliche Grössen bezeichnen; dann wird

$$(5) \qquad d\,u = Y\,d\,t + t\,d\,Y.$$

Führt man die Werte von u und du aus (4) und (5) in (3) ein, so kommt

$$Y(d\,t + P\,t\,d\,y) + t\,d\,Y = Q\,d\,y.$$

Wählt man nun Y so, dass

$$(6) \qquad t\,d\,Y = Q\,d\,y$$

wird, so muss auch sein

$$d\,t + P\,t\,d\,y = 0.$$

Allein aus dieser Gleichung folgt, indem man durch t dividiert und integriert,

$$(7) \qquad l\,t = -\int P\,d\,y; \quad t = e^{-\int P\,d\,y}.$$

Setzt man diesen Wert von t in (6) ein, so wird

$$d\,Y = Q\,d\,y\,e^{\int P\,d\,y}.$$

Betrachtet man x als konstant und integriert, so kommt

$$(8) \qquad Y = \int Q\,\partial\,y\,e^{\int P\,d\,y} + \varphi(x).$$

Können die in (7) und (8) angedeuteten Integrationen ausgeführt werden, so kann auch Y als bekannt betrachtet werden. Mit Hilfe von (7) und (8) gibt daher Gleichung (4)

$$u = Y\,e^{-\int P\,d\,y},$$

und da nach (2) $\partial z = u\,\partial y$, so wird nunmehr

$$\partial z = Y\,\partial\,y\,e^{-\int P\,d\,y}$$

und daher das Integral der gegebenen Gleichung

$$(9) \qquad z = \int Y\,\partial\,y\,e^{-\int P\,d\,y} + f(x).$$

Sind P und Q konstant, so wird

$$\int P\,d\,y = P\,y;\quad t = e^{-P\,y};\quad Y = \frac{Q}{P}\,e^{P\,y} + \varphi(x).$$

$$(10)\qquad z = \frac{1}{P}\left[Q\,y - \varphi(x)\cdot e^{-P\,y}\right] + f(x).$$

135. Gleichung mit zwei zweiten Differentialverhältnissen. Es sei die Gleichung zu integrieren

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Man nehme an, das Integral lasse sich darstellen durch

$$(2)\qquad z = e^{m\,x + n\,y},$$

wo m und n willkürliche Konstante bezeichnen. Die Differentiation von (2) gibt folgende partielle Differentialverhältnisse

$$\frac{\partial z}{\partial x} = m\,e^{m\,x+n\,y};\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = n\,e^{m\,x+n\,y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = m^2\,e^{m\,x+n\,y};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n^2\,e^{m\,x+n\,y}.$$

Setzt man die Werte von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in (1) ein, so folgt

$$(3)\qquad m^2 = a^2\,n^2;\quad \text{also}\quad m = \pm\,a\,n.$$

Es besteht also zwischen den willkürlichen Konstanten m und n ein bestimmter durch (3) gegebener Zusammenhang.

Ersetzt man in (2) die Grösse m durch $\pm\,a\,n$, so erhält man zwei Werte von z, die mit z' und z'' bezeichnet seien; dann wird

$$z' = e^{n\,(y+a\,x)};\quad z'' = e^{n\,(y-a\,x)}.$$

Diese Werte sind partikuläre Integrale von (1). Also wird auch die Summe $z' + z''$ ein Integral von (1) sein und auch dann noch, wenn jeder der partikulären Werte mit einer Konstanten multipliziert wird. Der Wert von z ist daher

$$(4)\qquad z = A\,e^{n\,(y+a\,x)} + B\,e^{n\,(y-a\,x)},$$

wo A und B die neuen Konstanten bezeichnen. Nun ist aber in (4) die Grösse n willkürlich und einer beliebigen Ausdehnung fähig. Gibt man der Grösse n eine Reihe von Werten $n', n'', \ldots$, so liefert (4) ebenso viele Integrale, als Werte von n angenommen werden. Die Summe dieser Integrale entspricht der Gleichung (1) allgemeiner als Gleichung (4). Man erhält daher als Ausdruck für das allgemeine Integral

$$(5)\qquad z = \Sigma\,A\,e^{n\,(y+a\,x)} + \Sigma\,B\,e^{n\,(y-a\,x)}.$$

Allein das erste Glied rechts ist eine Funktion von $y + a\,x$, das zweite von $y - a\,x$. Diese Funktionen seien allgemein bezeichnet mit

$F(y + ax)$ und $f(y - ax)$. Daher kann (5) auch ausgedrückt werden durch

$$z = F(y + ax) + f(y - ax). \tag{6}$$

Dass dieser Wert von z das Integral ist von (1), zeigt die Probe. Die partiellen Differentialverhältnisse von (6) sind nämlich, da a konstant,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a F'(y + ax) - a f'(y - ax),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F'(y + ax) + f'(y - ax),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 F''(y + ax) + a^2 f''(y - ax), \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F''(y + ax) + f''(y - ax). \tag{8}$$

Setzt man die Werte von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ aus (6) und (7) in (1) ein, so heben sich sämtliche Glieder auf und es leistet das Integral (6) der Gleichung (1) Genüge. Die Gleichung (6) stellt eine krumme Oberfläche dar, deren Form abhängt von dem Gesetze, dem die Funktionen auf der rechten Seite unterworfen sind. Das Integral (6) kann aber auch noch zu andern Zwecken verwendet werden, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden wird.

Ganz analog der Gleichung (1) kann die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{9}$$

integriert werden. Man nehme als Integral an

$$z = e^{mx + ny}$$

und erhält durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = mn\, e^{mx + ny}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n^2 e^{mx + ny},$$

woraus durch Einsetzen in (9) die Bedingungen

$$m = an \quad \text{oder} \quad n = 0$$

folgen. So erhält man die partikulären Integrale

$$z' = e^{n(ax + y)}; \quad z'' = e^{mx}$$

und durch dieselben Betrachtungen wie oben als allgemeines Integral von (9)

$$z = F(y + ax) + f(x), \tag{10}$$

worin F und f beliebige Funktionen bezeichnen.

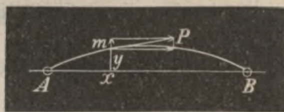
436. Schwingungen einer gespannten Saite. Eine Saite, an beiden Enden festgehalten, werde gespannt und hierauf in Bewegung versetzt, so dass die Schwerpunkte ihrer Querschnitte in einer Ebene, die durch die festen Endpunkte geht, hin- und herschwingen. Man soll deren Schwingungsdauer bestimmen.

Die Saite bildet in der Schwingungsebene Kurven. Man nehme die Gerade, die durch die Endpunkte A und B (Fig. 156) der Saite geht, als Abscissenachse und A als Anfangspunkt an. Es sei A m B eine Kurve, die die Saite bildet zur Zeit t. Ferner seien

x, y die Koordinaten eines Kurvenpunktes m,
s die Bogenlänge A m,
P die Spannung der Saite im Punkte m,
p das Gewicht jeder Längeneinheit der Saite und l die Entfernung A B der festen Punkte.

Lässt man x übergehen in $x + dx$, so wird y zu $y + dy$ und s zu $s + ds$. Die Spannung P liegt in der Richtung des Bogenelementes d s. Nun zerlege man P in zwei Seitenkräfte, die eine parallel, die andere senkrecht zu A B. Für die letztere erhält man $P \frac{\partial y}{\partial s}$. Wenn x in $x + dx$ übergeht, so geht $P \frac{\partial y}{\partial s}$ über in $P \frac{\partial y}{\partial s} + d\left(P \frac{\partial y}{\partial s}\right)$. Also wirken an den Endpunkten von d s zwei Kräfte, senkrecht zu A B, d. h. in der Richtung der Bewegung.

Fig. 156.



Der Unterschied beider Kräfte ist $d\left(P \frac{\partial y}{\partial s}\right)$. Nun kann man längs der Strecke d s die Grösse P als konstant annehmen, also wird $d\left(P \frac{\partial y}{\partial s}\right) = P \frac{\partial^2 y}{\partial s}$. Daher wird das Bogenelement d s in dem Augenblicke, da die Zeit t abgelaufen ist, in der Richtung der Bewegung getrieben mit der Kraft $P \frac{\partial^2 y}{\partial s}$. Man kann annehmen, diese Kraft bleibe während des nun folgenden Zeitelementes d t konstant; also wird während dieser Zeit eine gleichförmig beschleunigte Bewegung entstehen (§ 159).

Das Gewicht des Bogenelementes d s ist p d s. Man denke sich nun, dieses Element sei abgelöst von der Saite und sei nur dem Einflusse der Kraft $P \frac{\partial^2 y}{\partial s}$ ausgesetzt, es bewege sich also im Raume frei. Entspricht der genannten Kraft die Beschleunigung g', dem Gewichte p d s die Beschleunigung g, so verhalten sich die Beschleunigungen wie die Kräfte, die sie hervorbringen; daher gilt

$$g' : g = P \frac{\partial^2 y}{\partial s} : p\, ds.$$

Allein nach § 407 ist die Beschleunigung in der Richtung der Bewegung auch

$$g' = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Eliminiert man g' aus den beiden Gleichungen, so kommt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g \frac{P}{p} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}. \tag{1}$$

Nun machen wir die Voraussetzung, die Ablenkung der Kurve von der Geraden A B sei so klein, dass d s mit d x vertauscht werden könne. Dann kann auch die Spannung P der ganzen Länge der Saite nach als konstant angesehen werden. Setzt man zur Abkürzung

$$g\frac{P}{p} = a^2, \tag{2}$$

so geht Gleichung (1) über in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit derjenigen überein, die in § 435 integriert ist. Ihr Integral wird daher sein

$$y = F(x + at) + f(x - at). \tag{3}$$

Nun hat D'Alembert gezeigt, wie aus den Anfangs- und Grenzbedingungen die willkürlichen Funktionen F und f bestimmt werden können.

Es werde angenommen, für den Anfang der Bewegung, also für $t = 0$, seien die Werte von y und von $\frac{\partial y}{\partial t}$ bekannt; es sei etwa

$$\left.\begin{aligned} &(4) & y &= \varphi(x) \\ &(5) & \frac{\partial y}{\partial t} &= \varphi_{,}(x) \end{aligned}\right\} \text{für } t = 0,$$

und es seien $\varphi(x)$ und $\varphi_{,}(x)$ für alle Werte von $x = 0$ bis $x = 1$ gegeben.

Aus der Gleichung (3) folgt alsdann

$$F(x) + f(x) = \varphi(x),$$

$$F'(x) - f'(x) = \frac{1}{a}\varphi_{,}(x).$$

Setzt man $\frac{1}{a}\int \varphi_{,}(x)\,dx = \psi(x)$, so kann auch $\psi(x)$ bis auf eine willkürliche Konstante als bekannt angesehen werden; man hat alsdann

$$F(x) + f(x) = \varphi(x); \tag{6}$$

$$F(x) - f(x) = \psi(x), \tag{7}$$

aus denen

$$\left\{\begin{aligned} F(x) &= \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{2}, \\ f(x) &= \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{2} \end{aligned}\right. \tag{8}$$

folgen, durch welche Gleichungen F(x) und f(x) für alle Werte x in dem Bereiche $x = 0$ bis $x = 1$ bestimmt sind.

Aus (3) folgt aber, dass man y für alle möglichen Werte von x (0 bis 1) und t (0 bis ∞) kennt, wenn man die Funktionen F(z) von $z = 0$ bis $z = \infty$, und f(z) von $z = 1$ bis $z = -\infty$ kennt. Es kommt also darauf an, diese Funktionen innerhalb des übrig bleibenden Teiles des Intervalles, also

$$F(z) \text{ für das Intervall } 1 < z < \infty,$$
$$f(z) \text{ für das Intervall } 0 > z > -\infty$$

zu ermitteln.

Dies geschieht mit Hilfe der gegebenen Grenzbedingungen, nach denen $y = 0$ ist für $x = 0$ und $x = l$. Man hat also aus (3) für jeden Wert von t

$$F(at) + f(-at) = 0,$$
$$F(l + at) + f(l - at) = 0,$$

d. h. für jeden positiven Wert von z

$$(9) \qquad \begin{cases} F(z) = -f(-z); \\ F(l + z) = -f(l - z). \end{cases}$$

Die erstere dieser Gleichungen führt die Bestimmung von $f(z)$ für $z < 0$ auf die von $F(z)$ für $z > 0$ zurück, so dass jetzt nur noch $F(z)$ in dem Bereiche $l < z < \infty$ bestimmt werden muss. Diese Bestimmung geschieht zunächst durch die zweite Gleichung (9), wenn man z von 0 bis l wachsen lässt; denn für diese Werte variiert das Argument von f zwischen l und 0, wofür $f(z)$ aus der zweiten Gleichung (8) bekannt ist. Die zweite Gleichung (9) liefert also $F(z)$ in dem Bereiche $z = l$ bis $z = 2l$, so dass jetzt $F(z)$ in dem Intervalle 0 bis $2l$, $f(z)$ in dem Intervalle l bis $-2l$ bekannt sind.

Setzt man nun in der zweiten Gleichung (9) $l + z'$ an Stelle von z und setzt $z' > 0$ voraus, so lautet sie

$$F(2l + z') = -f(-z'),$$

woraus wegen der ersten Gleichung (9) folgt

$$(10) \qquad F(2l + z') = F(z'), \quad (z' > 0),$$

d. h. die Funktion $F(z)$ ist mit $2l$ periodisch. Jetzt ist durch (10) die Funktion $F(z)$ für jedes z von $z = 2l$ bis $z = \infty$ bestimmt.

Wird in der ersten Gleichung (9) $2l + z'$ an Stelle von z gesetzt, so erhält man

$$F(2l + z') = -f(-2l - z'),$$

also wegen (10) und der ersten Gleichung (9)

$$(11) \qquad f(-2l - z') = f(-z'), \quad (-z' < l),$$

d. h. auch $f(z)$ ist mit $2l$ periodisch.

Somit ist $F(z)$ bekannt für das Intervall von

$z = 0$ bis $z = l$ aus der ersten Gleichung (8),
$z = l$ bis $z = 2l$ aus der zweiten Gleichung (9),
$z = 2l$ bis $z = \infty$ aus der Gleichung (10),

und $f(z)$ für das Intervall von

$z = 0$ bis $z = l$ aus der zweiten Gleichung (8),
$z = 0$ bis $z = -\infty$ aus der ersten Gleichung (9).

Nunmehr ist die Grösse y in (3) und damit die Gleichung der Kurve in (3) vollständig bestimmt.

Setzt man aber in (10) $z' = x + at$, in (11) $-z' = x - at$, so erhält man

$$(12) \qquad \begin{cases} F(x + at + 2l) = F(x + at), \\ f(x - at - 2l) = f(x - at). \end{cases}$$

Daher nimmt y immer dieselben Werte wieder an, wenn at um $2l$, t also um $2\frac{l}{a}$ zunimmt.

Setzt man aber $2l + at = at'$, so ist wegen der Gleichungen $F(x + at) = F(x + at')$; $f(x - at) = f(x - at')$ und $dt = dt'$

$$\frac{\partial F(x + at)}{\partial t} = \frac{\partial F(x + at')}{\partial t'}; \quad \frac{\partial f(x - at)}{\partial t} = \frac{\partial f(x - at')}{d t'},$$

so dass auch $\frac{\partial y}{\partial t}$ wieder dieselben Werte erhält, wenn at um $2l$ zunimmt.

Daraus folgt, dass jedesmal nach dem Verlaufe der Zeit $\frac{2l}{a}$ die Saite in den früheren Zustand zurückkehrt, dass also diese Zeit die Zeit einer Schwingungsdauer ist.

Wird diese Zeit mit T bezeichnet, so erhält man also

$$T = \frac{2l}{a} = 2l\sqrt{\frac{p}{P \cdot g}}.$$

Die Schwingungsdauer ist also der Länge der Saite, der Quadratwurzel aus ihrem spezifischen Gewichte direkt der Quadratwurzel aus der Spannung umgekehrt proportional.

437. Wärmeleitung in einem homogenen prismatischen Stabe. Der Stab befinde sich in einem gewissen Zustande der Erwärmung, hierauf werde er in ein Medium versetzt, worin die Temperatur Null herrsche; gleichzeitig werde dafür gesorgt, dass die beiden Enden des Stabes sofort die Temperatur Null annehmen. Von nun an beginnt der Stab Wärme an das Medium abzugeben. Man soll den Wärmezustand des Stabes nach einer gegebenen Zeit bestimmen. Es sei

q der Querschnitt des Stabes, möglichst klein vorausgesetzt,
u der Umfang seines Querschnittes,
x die Entfernung eines Querschnittes von dem einen Stabende,
y die Temperatur in diesem Querschnitte nach der Zeit t, in allen Punkten des Querschnittes gleich gross vorausgesetzt,
a die Länge des Stabes,
h, k die äussere und innere Leitungsfähigkeit der Wärme, also z. B. h die Wärme, die in der Zeiteinheit durch die Oberfläche 1 aus dem Stabe an das Medium übergeht, wenn der Unterschied der Temperaturen im Stabe und Medium 1^{0} beträgt,
s die spezifische Wärme und
p das Gewicht der Kubikeinheit des Stabes.

Legt man Querschnitte durch den Stab in den Abständen $x - dx$, x, $x + dx$ und $x + 2dx$ vom Anfangspunkte aus, so entstehen drei Volumenelemente α, β, γ. Bewegt sich die Wärme in der Richtung von α nach γ, so nimmt β Wärme auf von α und gibt solche ab an γ und an die Umgebung. Dieser Wärmeaustausch finde nach der Zeit t statt und dauere während des Zeitelementes dt. Nun verliert β mehr Wärme als es bekommt; der Unterschied wird gleich sein der Abnahme am Wärmegehalte des Stabteilchens.

Das Prisma β hat das Volumen $q\,dx$, also das Gewicht $p\,q\,dx$; es enthält daher bei der Temperatur y die Wärmemenge $s\,p\,q\,dx \cdot y$. Nimmt x um dx zu, so ändert sich diese Wärmemenge um ihr Differential, also um $s\,p\,q\,dx\,dy$.

Von α erhält β durch innere Leitung in der Zeiteinheit auf die Stablänge 1 bei 1° Temperaturdifferenz eine Wärmemenge kq, also in der Zeit dt und bei der Temperaturdifferenz dy die Wärmemenge $k\,q\,dt\,dy$ und bei der Länge dx die Wärme $k\,q\,\frac{\partial y}{\partial x}\,dt$. Wenn sich x um dx ändert, so ändert sich auch diese Wärmemenge um ihr Differential, also um $k\,q\,\frac{\partial^2 y}{\partial x}\,dt$. Hiervon muss nun noch abgezogen werden die Wärmemenge $h\,u\,dx\,y\,dt$, die die Oberfläche $u\,dx$ des Prismas in der Zeit dt verliert. Daher gilt die Gleichung

$$s\,p\,q\,dx\,dy = k\,q\,\frac{\partial^2 y}{\partial x}\,dt - h\,u\,dx\,y\,dt,$$

oder auch

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{k}{sp}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{hu}{spq}\,y.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(1) \qquad \frac{k}{sp} = b; \quad \frac{hu}{spq} = r,$$

so wird die vorstehende Gleichung sein

$$(2) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = b\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - r\,y.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung kann nun noch beseitigt werden, indem man setzt

$$(3) \qquad y = v\,e^{-rt}.$$

Denn die Differentiation von (3) gibt, da v veränderlich ist,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}\,e^{-rt} - r\,v\,e^{-rt}; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}\,e^{-rt}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,e^{-rt}.$$

Führt man die Werte von $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und y in (2) ein, so folgt als vereinfachte Differentialgleichung der Wärmebewegung

$$(4) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = b\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

die nunmehr integriert werden soll.

Ein Integral dieser Gleichung ist

$$v = A \sin m x \cdot e^{-b m^2 t}, \tag{5}$$

worin A und m willkürliche Konstante bezeichnen. Behufs der Verifikation differentiiere man (5) in Hinsicht x, nachher in Hinsicht t; es kommt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = m A \cos m x \cdot e^{-b m^2 t}; \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -m^2 A \sin m x \cdot e^{-b m^2 t};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -b m^2 A \sin m x \cdot e^{-b m^2 t}.$$

Setzt man diese Werte von $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial v}{\partial t}$ in (4) ein, so werden in der That beide Seiten gleich. Es ist daher (5) ein Integral von (4).

Nun ist zu prüfen, inwiefern Gleichung (5) den Bedingungen entspricht, die gemäss der Aufgabe gestellt werden müssen.

Die erste Bedingung ist die, dass die Temperatur an den Enden des Stabes gleich Null sein müsse. Für $x = 0$ und $x = a$ muss also y in (3) und somit auch v in (3) und (5) zu Null werden. Für $x = 0$ wird nun v in (5) ohne Weiteres zu Null; dagegen für $x = a$ nur, wenn $m = \frac{\pi}{a}$ oder ein Vielfaches von $\frac{\pi}{a}$ ist. Nimmt man die willkürliche Grösse $m = \frac{\pi}{a}$ an, so wird $\sin m x = \sin \frac{\pi x}{a}$ und diese Grösse wird $= 0$ für $x = a$. Durch diese Modifikation von (5) erhält man

$$v = A \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 b t}. \tag{6}$$

Die zweite Bedingung, der das Integral (6) entsprechen soll, ist die, dass dasselbe den ursprünglichen Wärmezustand des Stabes angibt für $t = 0$. Hierfür wird nun (6) zu

$$v = A \sin \frac{\pi x}{a}, \tag{7}$$

woraus man nach (3) schliesst, dass A die Anfangstemperatur an jener Stelle bezeichnet, für die $\sin \frac{\pi x}{a} = 1$, also $x = \frac{1}{2} a$ ist. Von da aus nimmt vor- und rückwärts die Temperatur ab wie der Sinus von $\frac{\pi x}{a}$. Somit setzt Gleichung (6) einen ganz speziellen ursprünglichen Wärmezustand voraus. Unter unendlich vielen Wärmezuständen, die willkürlich geschaffen werden, wird sich nur einer finden, der dem Gesetze (6) der Wärmeverteilung entspricht. Es kann daher das Integral (6) nur ein partikuläres sein.

Um das allgemeine Integral zu finden, das alle denkbaren anfänglichen Wärmezustände in sich schliesst, lasse man in (5) die Konstanten A und m sich ändern. Für A erhalte man der Reihe nach A_1,

$A_2, A_3, ..$ und für m, gemäss Formel (6), die entsprechenden Werte $\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, ..$; alsdann bekommt man durch Einführen dieser Werte in (6) ebenso viele partikuläre Integrale, deren Summe

$$(8) \quad v = A_1 \sin\frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 b t} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 b t} + A_3 \sin\frac{3\pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2 b t} + ..$$

ebenfalls ein Integral von (4) sein wird. Enthält diese Reihe unendlich viele Glieder, so kann ihr Wert als das allgemeine Integral von (4) angesehen werden. Die Reihe (8) konvergiert rasch, denn die Exponentialgrösse mit wachsendem, negativem Exponenten nimmt sehr rasch ab.

Setzt man in (8) $t = 0$, so reduzieren sich die Exponentialgrössen auf 1. Wird der dabei entstehende Wert von v mit $\varphi(x)$ bezeichnet, so erhält man

$$(9) \quad \varphi(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + A_3 \sin\frac{2\pi x}{a} + ..$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve dar, die die Abscissenachse in den Punkten $x = 0$ und $x = a$ schneidet. Speziellen Werten von x, wie $x_1, x_2, ..$ entsprechen die Ordinaten $\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..$ Diese sind nichts anderes als die ursprünglichen Temperaturen des Stabes an Stellen, die um $x_1, x_2, ..$ vom Anfangspunkte abstehen. Sind diese Temperaturen gegeben, so kann die Kurve gezeichnet werden, und es sind dann die Vorzahlen $A_1, A_2, ..$ keine willkürlichen Grössen mehr, sondern Ergebnisse der Rechnung.

Man stelle sich in der That die Aufgabe, diese Vorzahlen zu berechnen. Teilt man zu dem Zwecke a in $n + 1$ gleiche Teile, bezeichnet die Abscissen der aufeinander folgenden Teilpunkte mit $x_1, x_2, .. x_n$, die entsprechenden Vorzahlen mit $A_1, A_2, .. A_n$, so liefert (9) folgende spezielle Gleichungen

$$\varphi(x_1) = A_1 \sin\frac{\pi x_1}{a} + A_2 \sin\frac{2\pi x_1}{a} + .. + A_n \sin\frac{n\pi x_1}{a};$$

$$\varphi(x_2) = A_1 \sin\frac{\pi x_2}{a} + A_2 \sin\frac{2\pi x_2}{a} + .. + A_n \sin\frac{n\pi x_2}{a};$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi(x_n) = A_1 \sin\frac{\pi x_n}{a} + A_2 \sin\frac{2\pi x_n}{a} + .. + A_n \sin\frac{n\pi x_n}{a}.$$

Da so viele Gleichungen vorhanden sind als unbekannte Grössen $A_1, A_2, ..$, so könnten diese auf gewöhnlichem Wege ermittelt werden. Es mag dies auch für eine kleine Anzahl von Unbekannten geschehen. Allein hier soll folgender Weg eingeschlagen werden.

Ein Glied der Reihe (9) sei $A_c \sin\frac{c\pi x}{a}$, wo c eine ganze Zahl bezeichnet, die zwischen 0 und n liegt. Man multipliziere die vorstehenden Gleichungen mit $\frac{a}{n+1}$ und ausserdem noch

$$\text{die erste mit } \sin\frac{c\pi x_1}{a},\quad \text{die dritte mit } \sin\frac{c\pi x_3}{a},\,..$$

$$\text{die zweite mit } \sin\frac{c\pi x_2}{a},\quad \text{die letzte mit } \sin\frac{c\pi x_n}{a},$$

und addiere sodann die Gleichungen. Man erhält zunächst als Summe der Glieder links

$$\left[\varphi(x_1)\sin\frac{c\pi x_1}{a} + \varphi(x_2)\sin\frac{c\pi x_2}{a} + .. + \varphi(x_n)\sin\frac{c\pi x_n}{a}\right]\frac{a}{n+1}.$$

Lässt man hierin n unendlich gross werden, so wird $\frac{a}{n+1}$, als unendlich kleiner Teil der Geraden a, zu dx. Die Glieder in der Klammer sind Ordinaten einer Kurve, entsprechend den Abscissen x_1, x_2, .. Der Abscisse x gehört die Ordinate $\varphi(x)\sin\frac{c\pi x}{a}$ zu; das Produkt der letztern mit dx ist ein Element der Fläche, die die Kurve und Abscissenachse einschliessen. Integriert man dieses Flächenelement zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$, so erhält man die ganze Fläche, bezw. die Summe der Glieder links der vorstehenden n Gleichungen. Diese ist daher

$$(10) \qquad \int_0^a \varphi(x)\sin\frac{c\pi x}{a}\,dx.$$

Ist $A_e \sin\frac{e\pi x}{a}$ irgend ein Glied der Reihe (9), so stehen im obigen System von Gleichungen n Glieder vertikal untereinander mit der Vorzahl A_e. Diese geben die Summe

$$A_e\left[\sin\frac{c\pi x_1}{a}\sin\frac{e\pi x_1}{a} + \sin\frac{c\pi x_2}{a}\sin\frac{e\pi x_2}{a} + ..\right]\frac{a}{n+1}.$$

Es liegt also wieder eine Quadratur vor. Der allgemeine Ausdruck der Ordinate ist $A_e \sin\frac{c\pi x}{a}\sin\frac{e\pi x}{a}$; daher die Fläche zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$

$$(11) \qquad A_e\int_0^a \sin\frac{c\pi x}{a}\sin\frac{e\pi x}{a}\,dx.$$

Es kommt eine Vertikalreihe vor, bei der c und e übereinstimmen. Lässt man für diese Reihe e in c übergehen, so erhält man aus (11)

$$(12) \qquad A_c\int_0^a \left(\sin\frac{c\pi x}{a}\right)^2 dx.$$

Man denke sich in (11) die Grössen c und e verschieden. Aendert sich dann, wie die Integration dies voraussetzt, die Variable x von 0 bis a, so nehmen die Faktoren $\sin \frac{c\pi x}{a}$ und $\sin \frac{e\pi x}{a}$ positive und negative Vorzeichen an, dasselbe wird auch der Fall sein mit ihren Produkten. Eine Zusammenstellung zeigt, dass je einem positiven Produkt ein gleiches negatives entspricht, so dass das Integral (11) zu Null wird. Ein Beweis für diesen Satz kann auch wie folgt geführt werden. Es ist

$$\sin \frac{c\pi x}{a} \sin \frac{e\pi x}{a} = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{(e-c)\pi x}{a} - \cos \frac{(e+c)\pi x}{a}\right],$$

wie sich sofort ergibt, wenn die Cosinuswerte rechts nach der Formel $\cos(\alpha \pm \beta)$ entwickelt werden. Daher hat man statt des Integrals (11)

$$(13) \qquad \frac{1}{2}\int_0^a dx\left[\cos \frac{(e-c)\pi x}{a} - \cos \frac{(e+c)\pi x}{a}\right].$$

Allein es ist $\int \cos \frac{\delta\pi x}{a} dx = \frac{a}{\delta\pi} \sin \frac{\delta\pi x}{a}$; folglich

$$\int_0^a \cos \frac{\delta\pi x}{a} = 0,$$

da δ eine ganze Zahl bezeichnet. Daher verschwinden beide Glieder im Integrale (13); also ist auch das Integral (11) gleich Null.

Somit reduziert sich die Summe aller Glieder auf der rechten Seite des vorstehenden Systems von Gleichungen auf das Integral (12). Nun ist nach § 87 bis auf eine Konstante

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x,$$

$$\int \left(\sin \frac{c\pi x}{a}\right)^2 dx = \frac{a}{c\pi}\left(\frac{c\pi x}{2a} - \frac{1}{4}\sin \frac{2c\pi x}{a}\right),$$

und daher das Integral der letzten Gleichung für die angegebenen Grenzen $= \frac{a}{2}$ und das Integral (12) $= \frac{a}{2} A_c$. Setzt man diesen Wert dem Integrale (10) gleich, so folgt

$$(14) \qquad A_c = \frac{2}{a}\int_0^a \varphi(x) \sin \frac{c\pi x}{a} dx.$$

Hiermit ist das Bildungsgesetz der Vorzahlen $A_1, A_2, \ldots$ gefunden. Da dasselbe nur von den Grenzen abhängt, kann man für x einen beliebigen andern Buchstaben, z. B. z schreiben, so dass das allgemeine Glied der Reihe (9) lautet

$$\frac{2}{a} \sin \frac{c\pi x}{a} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{c\pi z}{a} dz.$$

Daher kann die Summe aller Glieder dieser Reihe dargestellt werden durch

$$(15) \qquad \varphi(x) = \frac{2}{a} \Sigma \sin \frac{c \pi x}{a} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{c \pi z}{a} dz,$$

worin c von 1 bis ∞ auszudehnen ist.

Mit Hilfe des Wertes von A_c in (14) wird nun das allgemeine Glied der Reihe (8)

$$\frac{2}{a} \sin \frac{c \pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{c \pi}{a}\right)^2 b t} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{c \pi z}{a} dz.$$

Summiert man die Glieder der Reihe, indem man das Zeichen Σ vor das allgemeine Glied setzt, multipliziert sodann noch nach Vorschrift von (3) mit e^{-rt}, so kommt

$$(16) \quad y = \frac{2}{a} e^{-rt} \Sigma \sin \frac{c \pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{c \pi}{a}\right)^2 b t} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{c \pi z}{a} dz.$$

Diese Gleichung gibt die Temperatur y des Stabes für jeden Wert von x und nach jeder gegebenen Zeit, so unregelmässig auch die Wärme im Anfangszustande verteilt gewesen sein mag.

Mit wachsender Zeit nehmen die Glieder der Reihe (8), der Exponentialgrösse wegen, sehr rasch ab und reduzieren sich bald auf das erste Glied. Alsdann fällt das Summenzeichen Σ aus (16) weg, zugleich wird $c = 1$ und die Gleichung geht über in

$$(17) \quad y = \frac{2}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\left(r + \frac{\pi^2 b}{a^2}\right) t} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{\pi z}{a} dz.$$

Welches auch der Wert von $\varphi(z)$ sein mag, das bestimmte Integral ist immer eine Konstante; wird sie mit B bezeichnet, so wird (17) zu

$$y = \frac{2 B}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\left(r + \frac{\pi^2 b}{a^2}\right) t}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass im Stabe vom Anfangszustande an die Tendenz herrscht, eine Wärmeverteilung herbeizuführen, die der Grösse $\sin \frac{\pi x}{a}$, also dem Sinus der Bogen des Halbkreises proportional ist. Diese Grösse kam aber schon im partikulären Integrale (7) vor; also wird der Zustand, den das partikuläre Integral darstellt, bald erreicht und bis zur gänzlichen Abkühlung verbleiben.

Denkt man sich die Wärme anfangs ganz regellos verteilt, z. B. so, dass die Temperatur in der Mitte des Stabes kleiner ist als in benachbarten Teilen rechts und links, so wird die Wärme von beiden Seiten her nach der Mitte sich bewegen, wie nach den Enden des Stabes. In einem gewissen Augenblicke hört der Zufluss nach der Mitte hin auf, von da an sinkt zu beiden Seiten die Temperatur unter jene der Mitte und es ist nunmehr jener Zustand nahezu erreicht, der durch das partikuläre Integral ausgedrückt wird.

Sachregister

(Die Zahlen bezeichnen die Seite)

Buchdruckerei von Straubing & Müller, Weimar.