THEORIE

ELASTISCHER KÖRPER.

EINE EINLEITUNG

ZUR

MATHEMATISCHEN PHYSIK UND TECHNISCHEN MECHANIK

VON

DR. JACOB J. WEYRAUCH,

PROFESSOR AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE IN STUTTGART.

MIT 42 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

Vorwort.

Im vorliegenden Werke handelt es sich darum, eine möglichst scharfe Entwicklung der allgemeinen Gesetze elastischer oder wirklicher Körper im Anschlusse einerseits an die elementaren Lehren der Mechanik und andererseits an die Anwendungsgebiete der Physik und Technik zu liefern. Welche Ausdehnung diese Anwendungsgebiete bereits erlangt haben, braucht nicht erst hervorgehoben zu werden, die Festigkeitslehre, Wärmelehre, Hydrodynamik, Akustik, Optik u. s. w. gehören dazu. Um so mehr muss es auffallen, wie wenig Beachtung der Feststellung und Durchdringung gerade der allgemeinen Beziehungen seit *Lamé* gewidmet wurde. Man beschäftigte sich mit zahlreichen Specialproblemen, welche in der That den wesentlichen Inhalt der üblichen Untersuchungen elastischer Körper ausmachen.

Schon bei Beginn unserer Bearbeitung des Gegenstandes zeigte sich, dass eine systematische Darstellung ohne umfassende neue Untersuchungen, ja selbst ohne Einführung neuer Begriffe und Functionen gar nicht möglich sei. Ein Blick auf das Inhaltsverzeichniss wird den Eingeweihten darüber aufklären. Auch die am meisten behandelten Beziehungen zwischen stetigen Verschiebungen und stetigen Spannungen sind von so beschränkter Gültigkeit und vielfach so unsicher formulirt, dass sie ohne theilweise Bestätigung durch die Erfahrung eine wenig zuverlässige Grundlage für weitgehende Schlüsse abgeben würden. Gewöhnlich hat man von vornherein nur gewisse verschwindend kleine stetige Verschiebungen im Gleichgewichte befindlicher isotroper fester Körper von constanter Temperatur mit stetigen Oberflächenkräften, nebst den davon herrührenden stetigen Spannungen, im Auge und schon die Orientirung im Raume ist misslich.

Was von allgemeinen Lehren existirt, findet sich verhältnissmässig vollständig und ausgezeichnet klar bei *Lamé*, wo also angeknüpft werden konnte. Nach verschiedenen Richtungen haben uns die Schriften von *Beer*, *Grashof*, *Kirchhoff* und Anderen wesentlichen Nutzen gewährt. Eigentliche Anwendungsprobleme sind von den folgenden Entwicklungen ausgeschlossen. Dieselben gehören nicht nothwendig zur Sache, lassen sich nach sehr verschiedenen Gesichtspunkten wählen, werden anderwärts ausführlich behandelt und beruhen meistens auf Voraussetzungen, deren Berechtigung sich nur vom Standpunkte ihrer Wissenschaften beurtheilen lässt. Für Denjenigen, welcher die Grundgesetze als Werkzeuge zu selbstständigen Arbeiten sucht, wirkt ihr Zwischenstreuen störend und auf den Anfänger beim Selbststudium verwirrend.

Indessen ist zuzugeben, dass Beispiele und Anwendungen zur Klarstellung der allgemeinen Gesetze nützlich und selten entbehrlich sind. Aus diesem Grunde soll der vorliegenden Darstellung der Grundlehren in Bälde eine Sammlung von „Aufgaben zur Theorie elastischer Körper“ folgen. Hier wird sich Gelegenheit bieten, auch besonderen Bedürfnissen entgegenzukommen und manche weitere Untersuchung auf allgemeinem Gebiete vorzunehmen. Man kann dann auswählen, ohne Lücken im grundlegenden Entwicklungsgange befürchten zu müssen.

Von mathematischen Vorkenntnissen nehmen wir soviel in Anspruch, als sich Jeder auf den Mittelschulen oder doch nach einjährigem Besuche der Hochschule erworben haben kann.

Stuttgart, im Januar 1884.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

I. Abschnitt.

Grundbegriffe.

Seite

Eingang 1
§ 1. Materielle Systeme. Körper 2
§ 2. Elasticität der Körper 4
§ 3. Spannungen 6
§ 4. Verrückungen. Verschiebungen 8
§ 5. Dehnung. Drehungen 10
§ 6. Schiebung. Gleitungen 13
§ 7. Verschiebungsgeschwindigkeiten 15
§ 8. Stetige und unstetige Functionen 18
§ 9. Vollständiges Differential. Potential 21
§ 10. Grundgleichungen der Bewegung 24
§ 11. Bewegungsgleichungen für Körperelemente 27
§ 12. Stetige Spannungen 29

II. Abschnitt.

Beziehungen zwischen stetigen Spannungen.

Eingang 32
§ 13. Spannungen für beliebige Flächenelemente 32
§ 14. Die Hauptspannungen 34
§ 15. Totalspannungen. Das Spannungsellipsoid 38
§ 16. Die Stellungsfläche 40
§ 17. Hauptschubspannungen 43
§ 18. Specielle Fälle. Untersuchungen in der Ebene 45
Hauptformeln 45
Specialfall I 47
Specialfall II 48
§ 19. Potential der Spannungen 50
§ 20. Ueber die Gesetze stetiger Spannungen 53

III. Abschnitt.

Beziehungen zwischen stetigen Verschiebungen.

Eingang 55
§ 21. Verschiebungen für beliebige Richtungen 55
§ 22. Dehnungen, Drehungen, Gleitungen und Schiebungen beliebiger Richtungen 58
§ 23. Die Hauptverschiebungen 60
§ 24. Grenzverschiebungen 63
§ 25. Die Hauptdehnungen 66
§ 26. Das Verschiebungsellipsoid 69
§ 27. Die Deformationsfläche. Dilatation 71
§ 28. Verschiebungen in einem Zeitelement 73
§ 29. Derivirte verschiedener Verschiebungsfunctionen 75
§ 30. Potentialbewegung 78
§ 31. Potentiale der Verschiebungen und Verschiebungsgeschwindigkeiten 80
§ 32. Ueber kleine Verschiebungen 83

IV. Abschnitt.

Zweite Auffassung der Spannungs- und Bewegungsgesetze.

Seite

Eingang 86
§ 33. Modification des Spannungsbegriffs 87
§ 34. Bewegung beliebiger Körper 89
§ 35. Bewegung von Körperelementen 91
§ 36. Stetige Spannungen. Potentialspannungen 94
§ 37. Princip der Coexistenz elastischer Bewegungen 96

V. Abschnitt.

Arbeit. Lebendige Kraft. Energie.

Eingang 100
§ 38. d'Alembert's Princip und Princip der virtuellen Verrückungen . . 100
§ 39. Umformungen 102
§ 40. Virtuelle Arbeiten der Massenkräfte und Flächenkräfte 105
§ 41. Die Verschiebungsarbeit 108
§ 42. Aequivalent von lebendiger Kraft und Arbeit 110
§ 43. Das Hamilton'sche Princip 112
§ 44. Energie der Körper 114

VI. Abschnitt.

Ausdrücke für die Spannungen auf Grund der Erfahrung.

Eingang 116
§ 45. Vollkommene Flüssigkeiten 116
§ 46. Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung 117
§ 47. Feste Körper. Elasticitätsmodul. Elasticitätszahl. Ausdehnungscoefficient 119
§ 48. Potentialverschiebungen isotroper fester Körper 121
§ 49. Potentialspannungen beliebiger isotroper Körper 124
Allgemeines 124
Potentialverschiebungen 126
§ 50. Potentialspannungen flüssiger und fester Körper 127
Vollkommene Flüssigkeiten 127
Reibende Flüssigkeiten 127
Isotrope feste Körper 127
§ 51. Festigkeit. Zulässige Spannung. Sicherheit 128

VII. Abschnitt.

Ausdrücke für die Spannungen nach der Molekulartheorie.

Eingang 132
§ 52. Grundgleichungen 133
§ 53. Spannungen beliebiger Körper. Erste Ableitung 135
§ 54. Spannungen beliebiger Körper. Zweite Ableitung 137
§ 55. Körper mit Elasticitätsaxen. Erste Ableitung 140
§ 56. Körper mit Elasticitätsaxen. Zweite Ableitung 141
§ 57. Beliebige isotrope Körper. Erste Ableitung 142
§ 58. Beliebige isotrope Körper. Zweite Ableitung 145
§ 59. Isotrope feste Körper 148
Erste Ableitung 148
Zweite Ableitung 149
§ 60. Flüssigkeiten. Aether 151

VIII. Abschnitt.

Bewegungsgleichungen. Verschiebungsarbeit.

Seite

Eingang . . . 153
§ 61. Beliebige Körper . . . 153
Allgemeines . . . 153
Erste Auffassung . . . 154
Zweite Auffassung . . . 155
§ 62. Die Continuitätsgleichung. Condensation . . . 156
Allgemeines . . . 156
Erste Auffassung . . . 156
Zweite Auffassung . . . 157
§ 63. Hydrodynamische Grundgleichungen . . . 158
§ 64. Reibende Flüssigkeiten . . . 159
§ 65. Beliebige isotrope Körper. Erste Ableitung . . . 161
Allgemeines . . . 161
Erfahrungsformeln für feste Körper . . . 162
Flüssigkeiten . . . 163
Beliebige Körper . . . 163
Constante Temperatur (Aether) . . . 163
§ 66. Beliebige isotrope Körper. Zweite Ableitung . . . 164
§ 67. Clapeyron's Theorem . . . 166
Erste Ableitung . . . 166
Zweite Ableitung . . . 167
§ 68. Princip der kleinsten Verschiebungsarbeit . . . 168
Erste Ableitung . . . 168
Zweite Ableitung . . . 170

IX. Abschnitt.

Beliebige Punktsysteme. Energie.

Eingang . . . 172
§ 69. Allgemeine Beziehungen . . . 172
§ 70. Wirkung von Potentialkräften . . . 175
§ 71. Centralkräfte allein . . . 177
§ 72. Kräfte in den Verbindungsgeraden . . . 180
§ 73. Berechnung von Punktsystemen . . . 183
§ 74. Die Verschiebungsarbeit . . . 185
Allgemeines . . . 185
Gewöhnlicher Fall . . . 186
§ 75. Coexistenz kleiner Bewegungen . . . 188
§ 76. Energie bei innern Radialkräften . . . 190
Allgemeines . . . 190
Specieller Fall . . . 192
§ 77. Ueber die Reduction auf Centralkräfte . . . 192

X. Abschnitt.

Gleichgewicht von Stabsystemen.

Eingang . . . 196
§ 78. Statisch bestimmte und statisch unbestimmte, stabile und labile Stabsysteme . . . 196
§ 79. Aeussere und innere Stabilität und Labilität . . . 203
§ 80. Nothwendige, überzählige und abgängige Stäbe und Reactionen. . 207
§ 81. Gezogener oder gedrückter Stab . . . 210
§ 82. Beliebige stabile Systeme aus isotropen festen Stäben . . . 213

Seite
§ 83. Systeme mit überzähligen Stäben 215
§ 84. Systeme mit überzähligen Reactionen 218
§ 85. Verschiebungsarbeit von Systemen aus isotropen festen Stäben . . 222

XI. Abschnitt.

Schwingungen und Wellen.

Eingang 226
§ 86. Begriffe der Wellenlehre 226
§ 87. Einfache Schwingungen eines materiellen Punktes 229
§ 88. Wellen in homogenen Punktreihen 232
§ 89. Interferenz der Wellen. Combinirte Schwingungen 235
Einzelschwingungen gleicher Geraden 235
Einzelschwingungen beliebiger Geraden 237
§ 90. Princip von Huyghens 238
§ 91. Verschiebungen durch einfache Schwingungen 241
Allgemeines 241
Isotrope Medien 243
Beliebige homogene Medien 244
Potentialschwingungen und Schwingungen ohne Dilatation . 244
§ 92. Weitere Verschiebungsfunctionen 245

XII. Abschnitt.

Ueber elastische Schwingungen.

Eingang 248
§ 93. Grundgleichungen für Schwingungen von Flüssigkeiten 249
§ 94. Einfache Schwingungen von Flüssigkeiten 251
Allgemeines 251
Longitudinalschwingungen 252
Transversalschwingungen 253
§ 95. Schallgeschwindigkeit in Gasen 253
§ 96. Schallgeschwindigkeit in tropfbaren Flüssigkeiten und Dämpfen . 256
Allgemeines 256
Tropfbare Flüssigkeiten 256
Gesättigte Dämpfe 257
Ueberhitzte Dämpfe 258
§ 97. Grundgleichungen für Schwingungen beliebiger isotroper Körper . 260
Erste Ableitung 260
Zweite Ableitung 261
Zusammenfassung 261
Potentialschwingungen (Schall) 262
Schwingungen ohne Dilatation (Licht) 263
§ 98. Einfache Schwingungen isotroper Körper 263
Allgemeines 263
Longitudinalschwingungen 264
Transversalschwingungen 264
§ 99. Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in isotropen Körpern 264
Allgemeines 264
Erfahrungsformeln für feste Körper 265
Beliebige isotrope Körper 266
§ 100. Berücksichtigung der Temperaturänderung 266
Allgemeines 266
Erfahrungsformeln für feste Körper 268
Beliebige isotrope Körper 268
§ 101. Schwingungen anisotroper Körper 269
§ 102. Das Polarisationsellipsoid 272
Wortverzeichniss 276

I. Abschnitt.

Grundbegriffe.

Jede von einem Punkte m aus mögliche *Richtung* kann man sich dargestellt denken durch eine Gerade g, welche in m beginnt und deren *Sinn* (Beschreibungssinn, Pfeil) von m weggewendet ist. Den Winkel, welchen g mit einer anderen Richtung g_0 einschliesst, werden wir im Allgemeinen durch (gg_0) bezeichnen, womit zugleich angedeutet ist, dass der Winkel von g_0 aus nach g hin beschrieben sein soll. Nach Festsetzung des positiven Drehungssinns der Winkel ist $(gg_0) = -(g_0g)$. Kommt der Winkel von g mit einer anderen, nicht auf m bezogenen Richtung in Frage, so denken wir uns die letztere unter Beibehaltung ihres Sinnes parallel mit sich selbst von m aus angetragen. Bei Coordinatenaxen sind positive und negative Axenrichtungen zu unterscheiden. Bedeuten x, y, z die Coordinaten, so werden unter den *Richtungen* x, y, z immer die positiven Axenrichtungen verstanden sein.

Die *Lage eines Punktes* n gegen m ist bestimmt durch die Entfernung l beider Punkte und die Richtung g des Punktes n, wobei der den Sinn von g andeutende Pfeil von m aus auf n hinweist. Zwei Punkte n und ν, welche mit m in gleicher *Richtungslinie* liegen, können noch entgegengesetzte Richtungen haben. Nennt man $l \cos(gg_0)$ die *Projection* von l für die Richtung g_0, so findet sich deren Werth positiv oder negativ, je nachdem die geometrische Projection von l auf die Richtungslinie von g_0 in die Richtung g_0 selbst oder in die entgegengesetzte Richtung fällt. Wir können in diesem Sinne die einer Richtung g_0 entgegengesetzte Richtung als *negative Richtung* g_0 bezeichnen.

Die Entfernung l der Punkte m, n ist eine absolute Grösse, die Richtung g von n müssen wir nach ihren Winkeln mit andern Richtungen, z. B. den Richtungen x, y, z eines rechtwinkligen Coordinatensystems beurtheilen. Dasselbe mag in „Ruhe“ oder in Bewegung sein, Entfernung und Richtung von n sind in jedem Augenblicke eindeutig bestimmt durch die Projectionen $l \cos(gx)$, $l \cos(gy)$,

$l \cos(gz)$, wobei der positive Drehungssinn jedes einzeln Winkels beliebig gewählt werden kann. Die Projectionen haben positive oder negative Werthe, je nachdem sie von m aus in den positiven oder negativen Richtungen x, y, z liegen.

Was bis jetzt für die lagebestimmenden Elemente l, g eines Punktes n gesagt wurde, gilt ganz ebenso für beliebige andere Grössen, welche sich von einem Punkte m aus durch Strecken l verschiedener Richtungen darstellen lassen.

Um bei Ansatz von Gleichungen consequent zu verfahren, wählen wir die Coordinatenaxen stets so, dass für einen gegen die Richtung x oder y, z nach dem Coordinatenursprunge gewendeten Beobachter der Schenkel g den Winkel $(gg_0) = (zy)$ bezw. (xz), (yx) wie der Zeiger der Uhr rechts herum beschreibt. Auch andere Winkel (gg_0), sowie Winkelgeschwindigkeiten, Momente u. s. w. werden wir hinsichtlich solcher ihrer Ebene senkrechter Richtungen h als positiv betrachten, von welchen aus gesehen der Drehungssinn des den Winkel beschreibenden Schenkels, der Geschwindigkeit, des Moments u. s. w. wie die Bewegung des Uhrzeigers *rechtsläufig* ist.

§ 1. Materielle Systeme. Körper.

Wird eine beliebige Zusammenstellung materieller Punkte ausschliesslich andrer der Betrachtung unterworfen, so pflegt man ihre Gesammtheit ein *materielles System* zu nennen. Zwischen den Theilen des Systems unter sich wie zwischen solchen und nicht zum System gehörigen Punkten können Kräfte wirken. Erstere heissen *innere Kräfte*, letztere *äussere Kräfte*.

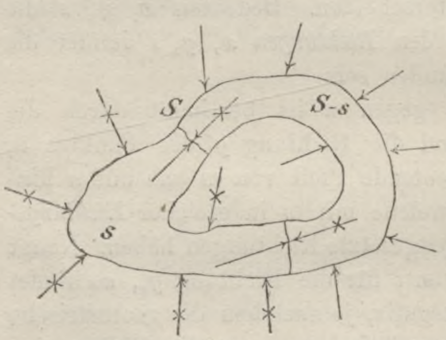

Fig. 1.

Jeder Theil s eines Systems S lässt sich als neues System behandeln, in welchem Falle alle Kräfte, welche von dem Reste $S - s$ des ursprünglichen Systems auf das Theilsystem s wirken, in Bezug auf dieses zu den äusseren Kräften gehören, während sie in Hinsicht S innere Kräfte waren. In Fig. 1 sind für das ganze System S die im Schnitte angedeuteten Kräfte innere Kräfte, alle übrigen äussere Kräfte. Für das Theilsystem s hat man die durchkreuzten und für das Theilsystem $S - s$ die nicht durchkreuzten Kräfte zu den äusseren zu rechnen.

Als *Körper* im weiteren Sinne wird jedes materielle System bezeichnet. Gewöhnlich versteht man jedoch unter Körpern speciell solche Theile der Materie, deren Elemente, abgesehen von den molekülarer Beschaffenheit entsprechenden Zwischenräumen, einen durch beliebig viele Flächen eingeschlossenen Raum ausfüllen. Die eingrenzenden Flächen heissen dann *Oberfläche des Körpers*, während der eingegrenzte Raum das *Volumen des Körpers* genannt wird. So wollen wir den Begriff Körper in der Folge auffassen.

Wird durch einen Körper ein mathematischer *Schnitt* gelegt, so kann man sich in demselben zwei *Flächen* zusammen hängen denken. Wie jede von einem Punkte m aus mögliche Richtung durch eine Gerade g dargestellt wurde, welche in m beginnt und deren Sinn (Pfeil) von m weggerichtet ist, so lässt sich die Lage jedes einem Punkte m anliegenden Flächenelements f_n nach seiner in m beginnenden, das Flächenelement selbst durchdringenden *Normalenrichtung* $g = n$ beurtheilen. Während die *Stellung eines Schnittelements durch* m mit der zu ihm normalen Richtungslinie $n\nu$ vollständig bestimmt ist, trifft dies für die *Lage eines Flächenelements bei* m nicht zu und sind die beiden im Schnittelemente $n\nu$ zusammenhängenden Flächenelemente f_n, f_ν nach ihren Normalenrichtungen $g = n$ und $g = \nu$ zu unterscheiden. Man hat, wenn x, y, z irgend welche Richtungen bedeuten,

$$\cos(\nu x) = -\cos(nx)$$
$$\cos(\nu y) = -\cos(ny)$$
$$\cos(\nu z) = -\cos(nz).$$

Die äusseren Kräfte, welche an einem Körper angreifen, können *Massenkräfte* oder *Oberflächenkräfte* sein. Erstere wirken auf die Massentheilchen ohne Rücksicht auf die Begrenzung des Körpers (wie die Erdanziehung, Centrifugalkraft, Ergänzungskräfte der relativen Bewegung), letztere beeinflussen die Oberflächentheilchen unabhängig von den gerade anliegenden Massenpunkten (wie der Atmosphärendruck, Reibungen, Stützenreactionen), sie rühren von angrenzenden fremden Körpern her. Die Massenkräfte per Masseneinheit heissen *specifische Massenkräfte* und jede Flächenkraft per Flächeneinheit wird *specifische Flächenkraft* genannt. Da man die auf ein Flächenelement wirkende Kraft in eine *Normalkraft* und eine *Tangentialkraft* zerlegen kann, so darf auch von specifischer Normalkraft und specifischer Tangentialkraft die Rede sein. Die Normalkraft wirkt als *Zug* oder *Druck*, je nachdem sie das afficirte Flächenelement von dem anliegenden wegzuziehen oder gegen dasselbe hinzudrücken sucht. Per Flächeneinheit haben wir specifischen Zug und specifischen Druck.

Um dem jetzt festgelegten Begriffe der Oberflächenkräfte gerecht zu werden, fassen wir die Oberfläche eines Körpers als Grenzschnitt verschiedener Systeme auf, der von beiden Seiten mit Flächenelementen entgegengesetzter Normalenrichtungen belegt ist. Die Oberflächenkräfte entsprechen den ausserhalb des Grenzschnitts gelegenen Flächenelementen und da wir es mit Oberflächenelementen stets nur in Verbindung mit Oberflächenkräften zu thun haben, so ist für die Zukunft jede weitere Ueberlegung überflüssig, wenn allgemein die vom Körper nach Aussen gerichteten Normalen als Normalenrichtungen n der Oberflächenelemente betrachtet werden.

Die Theilchen eines Körpers haben eine *innere Bewegung*, wenn sie ihre Lagen gegen einander ändern, sie haben in Bezug auf einen nicht zum System gehörigen Punkt p eine *äussere Bewegung*, wenn sie ihre Lage hinsichtlich dieses Punktes ändern. Je nachdem es sich um Untersuchung der einen oder anderen Bewegung handelt, pflegt man dem Coordinatensystem eine feste Lage gegen die anfängliche Gruppirung der Theilchen oder aber gegen Punkt p zu geben. Alle Bewegungen sind eingeschlossen, wenn nicht nur den Körperpunkten, sondern auch dem Coordinatensystem eine beliebige Bewegung zugeschrieben wird, in welchem Falle aber die auf das Coordinatensystem bezogene, durch die Winkel (gx), (gy), (gz) bestimmte relative Richtung g von der Bewegung des Coordinatensystems mit abhängt.

Denkt man sich einen Körper in einem beliebigen Augenblicke in lauter unendlich kleine Theilchen zerlegt, so entspricht jedem dieser *Körperelemente* neben bestimmten räumlichen Verhältnissen auch eine bestimmte Masse. Man kann nun bei Untersuchung irgend welcher Veränderungen im Körper die eingetheilten *Massenelemente* verfolgen, welche im Allgemeinen Volumen, Form und Ort ändern, oder die eingetheilten *Volumenelemente* ins Auge fassen, welche im Allgemeinen wechselnde Massen enthalten.

§ 2. Elasticität der Körper.

Ein Körper würde als *starr* zu gelten haben, wenn keinerlei Ursachen eine Aenderung der relativen Lagen irgend welcher Theile oder Theilchen desselben bewirken könnten. Alle beobachteten Körper lassen jedoch solche Aenderungen zu. Man kann also unter Voraussetzung starrer Körper im Allgemeinen nur Annäherungen an die Wirklichkeit erhalten.

Als *Elasticität* bezeichnet man das Streben der Körper, gewisse durch äussere Kräfte hervorgerufene Gruppirungsänderungen der Theilchen wieder rückgängig zu machen, oder auch die Fähigkeit zur Wiederherstellung der ursprünglichen Gruppirung nach Entfernung der äusseren Kräfte. Die Kräfte, welche darauf hinarbeiten, und von der Einwirkung der Theilchen auf einander herrühren, heissen *elastische Kräfte*, die Bewegungen, welche damit verbunden sind, nennt man *elastische Bewegungen*, und die rückgängig werdenden Veränderungen *elastische Veränderungen* im Gegensatze zu *bleibenden Veränderungen.*

Ein Körper heisst *vollkommen elastisch* oder *vollkommen unelastisch*, je nachdem angenommen wird, dass die betrachteteten Gruppirungsänderungen wieder vollständig verschwinden oder vollständig bleiben. In allen anderen Fällen hat man es mit *unvollkommen elastischen Körpern* zu thun. Ob überhaupt vollkommen verschwindende Gruppirungsänderungen vorkommen, gilt bei festen Körpern für zweifelhaft; in der Elasticitätstheorie nimmt man es an, so lange die erzeugenden Kräfte ein gewisses Maass, die *Elasticitätsgrenze*, nicht überschreiten.

Die mit bestimmten äusseren Kräften erreichbare elastische Gruppirungsänderung tritt vielfach nicht sofort vollständig ein. Man hat bei festen Körpern unter constanten äusseren Kräften noch nach Tagen und Monaten kleine Formänderungen beobachtet. Ebenso brauchen die Theilchen nach Entfernung der äusseren Kräfte längere Zeit, bis sie wieder vollständig zur Ruhe kommen. Diese Erscheinungen sind noch nicht genügend erklärt, man bezeichnet sie als *elastische Nachwirkung.*

Ein Körper heisst *homogen*, wenn er in allen Punkten gleiche Dichtigkeit und (gleichen Ursachen gegenüber) das gleiche elastische Verhalten zeigt, so dass Dichtigkeit und Elasticität keine Functionen der Coordinaten sind, andernfalls heisst er *heterogen.* Der Körper ist *isotrop*, wenn er in jedem Punkte nach allen Richtungen das gleiche elastische Verhalten zeigt, so dass die Elasticität keine Function der Richtung ist, im anderen Falle wird er als *heterotrop* oder *anisotrop* bezeichnet. Ist das elastische Verhalten in einem Punkte für alle diejenigen Richtungen dasselbe, welche mit einer bestimmten Richtung g irgend welche numerisch gleiche Winkel einschliessen, so heisst g eine *Elasticitätsaxe* in diesem Punkte. Bei isotropen Körpern haben wir in jedem Punkte unendlich viele Elasticitätsaxen.

Untersuchungen für nicht starre Körper dürfen dann unter Voraussetzung starrer Körper geführt werden, wenn der Einfluss der Gruppirungsänderungen der Theilchen auf die zu bestimmenden Grössen klein genug ist, um vernachlässigt werden zu können. Aber auch in solchen Fällen kann es nöthig sein, die elastischen Veränderungen mit in Betracht zu ziehen, wenn nämlich die durch die allgemeine Mechanik gelieferten Beziehungen für starre Körper zur Lösung nicht ausreichen, sondern die verlangten Grössen nur unter Zuhülfenahme von Gleichungen bestimmbar sind, in welchen Glieder von höherer Ordnung als die den elastischen Veränderungen entsprechenden nicht vorkommen. Die von der Mechanik gelieferten Beziehungen, in welchen die von den Gruppirungsänderungen herrührenden Glieder verschwinden, bleiben daneben natürlich doch bestehen, es können Widersprüche durch Mitberücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse nicht auftreten.

§ 3. Spannungen.

Infolge Einwirkung der äusseren Kräfte und anderer Ursachen entstehen bei allen Körpern innere Kräfte, welche für die in beliegen gedachten Schnitten und Schnittelementen zusammenliegenden Flächen irgend welche Flächenkräfte erzeugen und so auch die Wirkung der äusseren Kräfte weitertragen. Die Beanspruchungen per Quadrateinheit oder specifischen Flächenkräfte hierbei sollen allgemein *Spannungen* heissen. Wir können dann auch von *Normalspannungen*, *Tangentialspannungen* und *Totalspannungen* sprechen und Spannungscomponenten nach beliebigen Richtungen durch Zerlegung ableiten. Die Normalspannungen suchen die in einem Schnittelemente zusammenhängenden Flächenelemente aus einander zu ziehen oder gegen einander zu drücken und werden daher in *Zugspannungen* und *Druckspannungen* unterschieden; die Tangentialspannungen suchen die fraglichen Flächenelemente längs einander zu verschieben und werden auch *Schubspannungen* genannt.

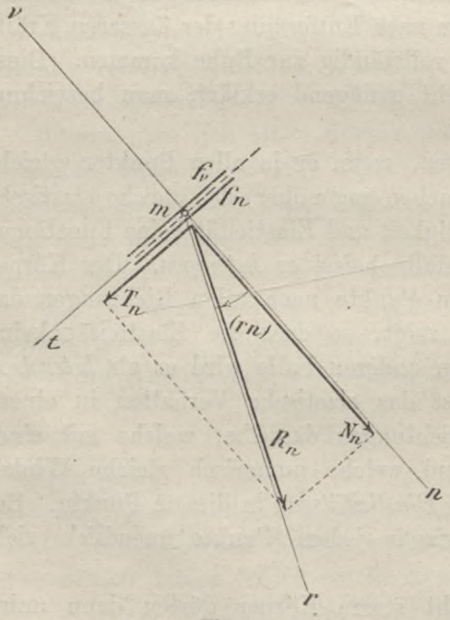

Fig. 2.

Als *Richtung einer Kraft* bei m soll die von m aus im Wirkungssinne der Kraft gezogene Richtung g gelten. Die Richtung r der Totalspannung R_n auf ein m anliegendes Flächenelement f_n wird dann das letztere selbst treffen oder nicht, je nachdem R_n das Flächenelement f_n von dem anliegenden f_ν zu entfernen oder diesem zu nähern sucht, je nachdem also die Normalcomponente N_x Zug oder Druck bedeutet. Nennen wir nun N_n im ersten Falle positiv, im zweiten negativ, bezeichnen die resultirende Schubspannung durch T_n und fassen R_n, T_n als Absolutwerthe auf, so folgen (Fig. 2)

$$(1) \qquad N_n = R_n \cos(rn), \qquad T_n^2 = R_n^2 - N_n^2 = R_n^2 \sin^2(rn).$$

Es seien x, y, z beliebige zu einander senkrechte Richtungen. Dann hat man die Componenten von R_n in denselben bezw.

$$(2) \qquad X_n = R_n \cos(rx), \qquad Y_n = R_n \cos(ry), \qquad Z_n = R_n \cos(rz),$$

die Totalspannung ist der Absolutwerth

$$(3) \qquad R_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2},$$

und für die Componenten der Schubspannung T_n in den Richtungen x, y, z und ihre Richtung t bestehen die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} T_n \cos(tx) = X_n - N_n \cos(nx), \\ T_n \cos(ty) = Y_n - N_n \cos(ny), \\ T_n \cos(tz) = Z_n - N_n \cos(nz). \end{cases}$$

Für den Winkel der Richtung r mit einer beliebigen Richtung s gibt die analytische Geometrie

$$\cos(rs) = \cos(rx)\cos(sx) + \cos(ry)\cos(sy) + \cos(rz)\cos(sz).$$

Hieraus folgt durch Einführen der Cosinuswerthe (2) die Projection oder resultirende Compenente von R_n in der Richtung s

$$(5) \qquad S_n = R_n \cos(rs) = X_n \cos(sx) + Y_n \cos(sy) + Z_n \cos(sz)$$

und beispielsweise die Normalspannung mit $s = n$

$$(6) \qquad N_n = X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz).$$

Für beliebige in der Ebene des Flächenelements wirkende Componenten der Schubspannung T_n wäre in (5) $\cos(ns) = 0$.

Kennt man für ein Flächenelement die Spannungscomponenten X_n, Y_n, Z_n nach drei zu einander senkrechten Richtungen x, y, z, so lassen sich Grösse und Richtung der Totalspannung R_n aus (2) (3), Grösse und Vorzeichen der Normalspannung N_n aus (1) oder (6), Grösse und Richtung der Schubspannung T_n aus (4) und die resultirenden Spannungscomponenten S_n nach beliebigen Richtungen s aus (5) berechnen. S_n ergibt sich positiv oder negativ, je nachdem der Wirkungssinn dieser Kraft mit der Richtung s übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist (je nachdem die Projection der Totalspannung R_n auf die Richtungslinie von s in der Richtung s selbst liegt oder nicht). Mit dieser Auffassung negativer Spannungen S_n entspricht in obigen Gleichungen die Hauptbezeichnung einer Spannung deren Richtung g, während der Index die Normalenrichtung n des afficirten Flächenelements angibt. Bei Normalspannungen stimmen beide Buchstaben der Bezeichnung überein.

Werden für zwei dem Punkte m anliegende Flächenelemente beliebiger Normalenrichtungen n, s die Richtungen r der Totalspannungen R_n, R_s durch $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ bezeichnet und

(7) $$P_{ns} = X_n X_s + Y_n Y_s + Z_n Z_s$$

gesetzt, dann folgt mit Rücksicht auf (2) und den dem obenstehenden Ausdruck für $\cos(rs)$ analogen für $\cos(\mathfrak{n}\mathfrak{s})$

(8) $$P_{ns} = R_n R_s \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{s}).$$

Findet sich beispielsweise $P_{ns} = 0$, dann wirken R_n, R_s senkrecht zu einander. Die Summe der Projectionen oder resultirenden Componenten von R_n in der Richtung s und von R_s in der Richtung n ist

$$G_{ns} = S_n + N_s = R_n \cos(\mathfrak{n}s) + R_s \cos(\mathfrak{s}n).$$

Aus (7)—(9) aber folgen mit $s = n$

(10) $$P_{nn} = R_n^2, \qquad G_{nn} = 2N_n.$$

Die hier aufgestellten Gleichungen gelten nicht nur für Flächenkräfte im Innern eines Körpers, sondern für ganz beliebige Flächenkräfte und beispielsweise auch für die specifischen Oberflächenkräfte.

§ 4. Verrückungen. Verschiebungen.

Wir nehmen ein beliebig bewegtes rechtwinkliges Coordinatensystem an. Zu Anfang unserer Betrachtung lag der Punkt m bei x, y, z und von ihm aus in der auf das Coordinatensystem bezogenen Richtung $g = n$ ein Punkt n um die beliebige Strecke $mn = \Delta n$ entfernt. Infolge irgend welcher Ursachen ist m nach $x + \xi$ $y + \eta$, $z + \zeta$ gerathen, während sich n in den Richtungen x, y, z um ξ_1, η_1, ζ_1 fortbewegt hat. Die Wege der Punkte m, n in Hinsicht des angenommenen Coordinatensystems werden auch *Verrückungen* genannt, während die relativen Wege von m gegen n per Einheit der ursprünglichen Entfernung mn *Verschiebungen* heissen sollen. Um aus den Verschiebungen von n gegen m die entsprechenden relativen Wege zu erhalten, hat man einfach mit der ursprünglichen Entfernung mn zu multipliciren. Verrückungen und Verschiebungen können ganz wie Kräfte in Componenten zerlegt werden und ist z. B. die resultirende Componente der Verrückung von m in beliebiger Richtung s

(1) $$\sigma = \xi \cos(sx) + \eta \cos(sy) + \zeta \cos(sz),$$

während die Richtung r der als Absolutwerth aufgefassten Totalverrückung

(2) $$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

bestimmt ist durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \xi = \varrho \cos(rx), \qquad \eta = \varrho \cos(ry), \qquad \zeta = \varrho \cos(rz).$$

Negative Verrückungen in gegebenen Richtungen g sind analog negativen Spannungen zu beurtheilen.

Sind die Punkte m, n aus den anfänglich eingenommenen Orten m_0, n_0 nach mn_1 gelangt und denkt man sich von m aus in der ursprünglichen Richtung $g = n$ des Punktes n die Entfernung $m_0 n_0 = mn$ angetragen, so ist nn_1 der Weg, welchen n hinsichtlich m zurückgelegt hat. In Fig. 3 ist die Darstellung dieser Verhältnisse der Klarheit halber auf die Ebene beschränkt. Verlängert man die Gerade mn bis zum Punkte p, auf welchen das Perpendikel aus n_1 trifft, so sind np und pn_1 die relativen Wege des Punktes n in der ursprünglichen Richtung und senkrecht zur selben. Wir nennen nun

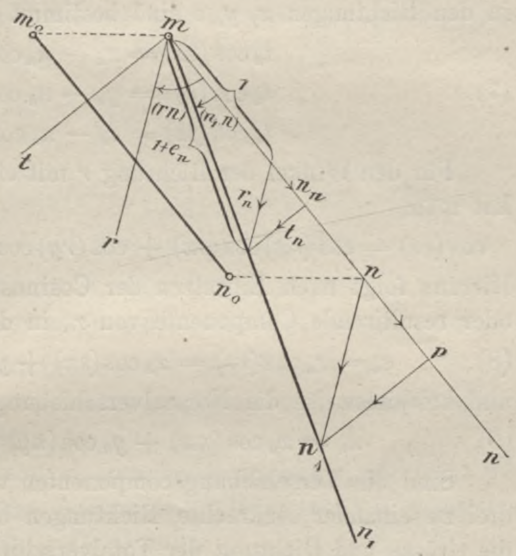

Fig. 3.

$$n_n = \frac{np}{mn}, \quad t_n = \frac{pn_1}{mn},$$
$$r_n = \frac{nn_1}{mn}$$

bezw. die *Normalverschiebung*, *Transversalverschiebung* und *Totalverschiebung*. Da die Richtung des Punktes n von m aus auf ein Coordinatensystem bezogen ist, so werden n_n, t_n, r_n von der relativen Bewegung der Punkte m, n in Hinsicht desselben abhängig.

Als *Richtung einer Verschiebung* von n gegen m soll die von m aus parallel und im Sinne der relativen Bewegung von n hinsichtlich m gezogene Richtung g gelten. Fassen wir r_n, t_n als Absolutwerthe auf, bezeichnen ihre Richtungen durch r, t und nennen n_n positiv oder negativ, je nachdem die entsprechende Bewegung in der ursprünglichen Richtung von n oder entgegengesetzt derselben stattgefunden hat, dann folgen

$$(4) \qquad n_n = r_n \cos(rn), \qquad t_n^2 = r_n^2 - n_n^2 = r_n^2 \sin^2(rn).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\xi_1 - \xi = \Delta\xi, \qquad \eta_1 - \eta = \Delta\eta, \qquad \zeta_1 - \zeta = \Delta\zeta,$$

so ergeben sich die Componenten von r_n in den Richtungen x, y, z

$$(5)\qquad \begin{cases} x_n = \dfrac{\Delta\xi}{\Delta n} = r_n \cos(rx) \\ y_n = \dfrac{\Delta\eta}{\Delta n} = r_n \cos(ry) \\ z_n = \dfrac{\Delta\zeta}{\Delta n} = r_n \cos(rz). \end{cases}$$

Die Totalverschiebung ist der Absolutwerth

$$(6)\qquad r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}$$

und die Richtung t der Transversalschiebung wie ihre Componenten in den Richtungen x, y, z sind bestimmt durch die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{aligned} t_n \cos(tx) &= x_n - n_n \cos(nx) \\ t_n \cos(ty) &= y_n - n_n \cos(ny) \\ t_n \cos(tz) &= z_n - n_n \cos(nz). \end{aligned}$$

Für den Winkel der Richtung r mit einer beliebigen Richtung s hat man

$$\cos(rs) = \cos(rx)\cos(sx) + \cos(ry)\cos(sy) + \cos(rz)\cos(sz).$$

Hieraus folgt nach Einsetzen der Cosinuswerthe (5) die Projection oder resultirende Componente von r_n in der Richtung s

$$(8)\qquad s_n = r_n \cos(rs) = x_n \cos(sx) + y_n \cos(sy) + z_n (sz)$$

und beispielsweise die Normalverschiebung mit $s = n$

$$(9)\qquad n_n = x_n \cos(nx) + y_n \cos(ny) + z_n \cos(nz).$$

Sind die Verschiebungscomponenten von n gegen m für irgend drei zu einander senkrechte Richtungen bekannt, so ergeben sich die Grösse und Richtung der Totalverschiebung aus (5), (6), Grösse und Vorzeichen der Normalverschiebung n_n aus (4) oder (9), Grösse und Richtung der Transversalverschiebung aus (7) und die resultirende Verschiebungscomponente s_n in beliebiger Richtung s nach (8). Negative Verschiebungen s_n sind analog negativen Spannungen aufzufassen. In obigen Gleichungen entspricht die Hauptbezeichnung einer Verschiebung deren Richtung g, während der Index die ursprüngliche Richtung des verschobenen Punktes angibt. Für Normalverschiebungen stimmen Hauptbezeichnung und Index überein.

§ 5. **Dehnung. Drehungen.**

Wir bleiben bei den Verschiebungen des § 4. Setzt man die neue Entfernung der Punkte m, n

$$mn_1 = (1 + e_n) mn,$$

dann soll e_n die *Dehnung* der Verbindungslinie mn heissen, es ist deren Längenänderung per Einheit der anfänglichen Länge. Aus

$$(mn_1)^2 = (mn + np)^2 + (pn_1)^2$$

folgt durch Division mit $(mn)^2$ die Beziehung

$$(1) \qquad (1+e_n)^2 = (1+n_n)^2 + t_n^{\,2} = 1 + 2n_n + r_n^{\,2}.$$

Für den Winkel der neuen Richtung des Punktes n mit dessen anfänglicher Richtung hat man (Fig. 3)

$$(2) \qquad \cos(n_1 n) = \frac{1+n_n}{1+e_n}, \quad \sin^2(n_1 n) = \frac{t_n^{\,2}}{(1+e_n)^2},$$

und werden die anfänglichen Coordinatendifferenzen der Punkte n, m durch Δx, Δy, Δz bezeichnet, so ist die neue Richtung n_1 bestimmt durch die Gleichungen

$$\cos(n_1 x) = \frac{\Delta x + \Delta \xi}{(1+e_n)\Delta n}, \quad \cos(n_1 y) = \frac{\Delta y + \Delta \eta}{(1+e_n)\Delta \eta},$$

$$\cos(n_1 z) = \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{(1+e_n)\Delta n}.$$

Dieselben gehen wegen

$$\cos(nx) = \frac{\Delta x}{\Delta n}, \quad \cos(ny) = \frac{\Delta y}{\Delta n}, \quad \cos(nz) = \frac{\Delta z}{\Delta n}$$

und mit Rücksicht auf § 4, (5) über in die folgenden

$$(3) \qquad \begin{cases} (1+e_n)\cos(n_1 x) = \cos(nx) + x_n = a_n\,, \\ (1+e_n)\cos(n_1 y) = \cos(ny) + y_n = b_n\,, \\ (1+e_n)\cos(n_1 z) = \cos(nz) + z_n = c_n\,; \end{cases}$$

a_n, b_n, c_n sind die Projectionen oder resultirenden Componenten von $1+e_n$ in den Richtungen x, y, z.

Es sei h diejenige von m ausgehende Richtung senkrecht zur Ebene nn_1, von welcher aus gesehen der Winkel $(n_1 n)$ in positivem Sinne beschrieben erscheint. Dann sollen

$$(4) \qquad i_x = t_n \cos(hx), \quad i_y = t_n \cos(hy), \quad i_z = t_n \cos(hz),$$

$$(5) \qquad i_s = t_n \cos(hs)$$

die *Drehungen* des Punktes n um Axen in den Richtungen x, y, z, s durch m heissen. Der Name ist deshalb gewählt, weil in dem speciellen aber wichtigen Falle, dass die Transversalverschiebung t_n gegen 1 verschwindet, diese den Winkelweg des Punktes n um eine Axe in der Richtung h darstellt, während gleichzeitig nach einem bekannten Satze über die Zerlegung kleiner Drehungen die Componenten von t_n für Axen in den Richtungen x, y, z, s durch m wie in (4), (5) ausgedrückt sind. Mit Rücksicht auf bekannte Formeln der analytischen Geometrie können wir auch schreiben

$$i_x \sin(n_1 n) = t_n \left[\cos(ny)\cos(n_1 z) - \cos(nz)\cos(n_1 y)\right]$$

$$i_y \sin(n_1 n) = t_n \left[\cos(nz)\cos(n_1 x) - \cos(nx)\cos(n_1 z)\right]$$

$$i_z \sin(n_1 n) = t_n \left[\cos(nx)\cos(n_1 y) - \cos(ny)\cos(n_1 x)\right]$$

$$i_s = t_n \left[\cos(hx)\cos(sx) + \cos(hy)\cos(sy) + \cos(hz)\cos(sz)\right].$$

Substituirt man in diese Gleichungen $\cos(n_1 x)$, $\cos(n_1 y)$, $\cos(n_1 z)$ nach (3), $\sin(n_1 n)$ mit positivem Vorzeichen nach (2) und berücksichtigt (4), so folgen

$$(6)\qquad \begin{cases} i_x = z_n \cos(ny) - y_n \cos(nz), \\ i_y = x_n \cos(nz) - z_n \cos(nx), \\ i_z = y_n \cos(nx) - x_n \cos(ny), \end{cases}$$

$$(7)\qquad i_s = i_x \cos(sx) + i_y \cos(sy) + i_z \cos(sz).$$

In (6) kann man zufolge (3) auch a_n, b_n, c_n an Stelle von x_n, y_n, z_n setzen und mit Rücksicht auf § 4, (5) bis (7) lassen sich die Drehungen durch die Totalverschiebungen r_n oder Transversalverschiebungen t_n und deren Richtungscosinusse ausdrücken. Aus (4) folgt

$$(8)\qquad i_x^2 + i_y^2 + i_z^2 = t_n^2 = r_n^2 - n_n^2 = (1 + e_n)^2 - (1 + n_n)^2.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (6) bezw. mit $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ und addirt, so entsteht

$$(9)\qquad i_n = i_x \cos(nx) + i_y \cos(ny) + i_z \cos(nz) = 0,$$

wie übrigens wegen $n \perp h$ schon aus (5), (7) folgt. Durch Multiplication von (6) mit x_n, y_n, z_n und Addition folgt die Beziehung

$$(10)\qquad x_n i_x + y_n i_y + z_n i_z = 0,$$

welche sich auch mit $s = r$, t aus (5), (7) ergibt, wenn r und t die zu h senkrechten Richtungen der Totalverschiebung und Transversalverschiebung bedeuten (§ 4). Nach (6) haben wir speciell für

$$\begin{array}{llll} n = x, & i_x = 0, & i_y = -z_x, & i_z = y_x, \\ n = y, & i_x = z_y, & i_y = 0, & i_z = -x_y, \\ n = z, & i_x = -y_z, & i_y = x_z, & i_z = 0. \end{array}$$

Hat für einen Punkt der anfänglichen Richtung n keine Dehnung stattgefunden, so folgen mit $e_n = 0$ bei nothwendig negativem n_n

$$(11)\qquad t_n^2 = -2n_n + n_n^2, \quad r_n^2 = -2n_n, \quad \cos(n_1 n) = 1 + n_n,$$

$$(12)\qquad \begin{cases} x_n = \cos(n_1 x) - \cos(nx), \\ y_n = \cos(n_1 y) - \cos(ny), \\ z_n = \cos(n_1 z) - \cos(nz). \end{cases}$$

Hat keine Normalverschiebung stattgefunden, dann gelten mit $n_n = 0$ bei immer positivem e_n

$$(13)\qquad t_n^2 = r_n^2 = 2e_n + e_n^2, \quad (1 + e_n)^2 = 1 + t_n^2, \quad \cos(n_1 n) = 1 : (1 + e_n),$$

$$(14)\qquad x_n = t_n \cos(tx), \quad y_n = t_n \cos(ty), \quad z_n = t_n \cos(tz).$$

Hat schiesslich keine Transversalverschiebung oder Drehung stattgefunden, so werden mit $t_n = 0$

(15) $$e_n = n_n, \quad r_n^2 = n_n^2, \quad (n_1 n) = 0,$$

(16) $$x_n = n_n \cos(nx), \quad y_n = n_n \cos(ny), \quad z_n = n_n \cos(nz).$$

§ 6. Schiebung. Gleitungen.

Was sich bis jetzt über die relative Bewegung eines Punktes n hinsichtlich eines andern Punktes m ergeben hat, gilt auch für beliebige Punkte eines materiellen Systems. Zu weiterer Klarlegung der Verschiebungsverhältnisse empfiehlt es sich, noch die folgenden Functionen q_{ns}, g_{ns}, p_{ns} einzuführen.

Es seien in Bezug auf Punkt m die anfänglichen Richtungen zweier Punkte n, s wie diese selbst, ihre Totalverschiebungen durch r_n, r_s und deren Richtungen r durch $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ bezeichnet. Für den Winkel, welchen die neuen Richtungen n_1, s_1 der Punkte n, s einschliessen, hat man

$$\cos(n_1 s_1) = \cos(n_1 x)\cos(s_1 x) + \cos(n_1 y)\cos(s_1 y) + \cos(n_1 z)\cos(s_1 z).$$

Durch Substitution der Cosinuswerthe § 5, (3) und der entsprechenden für s_1

$$\cos(s_1 x) = \frac{\cos(sx) + x_s}{1 + e_s}, \quad \cos(s_1 y) = \frac{\cos(sy) + y_s}{1 + e_s}, \quad \cos(s_1 z) = \frac{\cos(sz) + z_s}{1 + e_s}$$

folgt die Gleichung

$$\begin{aligned}(1 + e_n)(1 + e_s)\cos(n_1 s_1) &= [\cos(nx) + x_n][\cos(sx) + x_s] \\ &+ [\cos(ny) + y_n][\cos(sy) + y_s] \\ &+ [\cos(nz) + z_n][\cos(sz) + z_s] \\ &= a_n a_s + b_n b_s + c_n c_s.\end{aligned}$$

Führt man die rechts angedeuteten Multiplicationen aus und berücksichtigt die Formeln (5) (8) des § 4, sowie die dem obigen Ausdrucke für $\cos(n_1 s_1)$ entsprechenden Ausdrücke für $\cos(ns)$ und $\cos(\mathfrak{n}\mathfrak{s})$, so entsteht

(1) $$\begin{cases}(1 + e_n)(1 + e_s)\cos(n_1 s_1) = \cos(ns) + r_n \cos(\mathfrak{n} s) \\ \qquad + r_s \cos(\mathfrak{s} n) + r_n r_s \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{s}).\end{cases}$$

Wir setzen nun

(2) $$\begin{cases}q_{ns} = a_n a_s + b_n b_s + c_n c_s - \cos(ns) \\ \quad = (1 + e_n)(1 + e_s)\cos(n_1 s_1) - \cos(ns),\end{cases}$$

(3) $$g_{ns} = s_n + n_s = r_n \cos(\mathfrak{n} s) + r_s \cos(\mathfrak{s} n),$$

(4) $$p_{ns} = x_n x_s + y_n y_s + z_n z_s = r_n r_s \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{s})$$

und haben dann

(5) $$q_{ns} = g_{ns} + p_{ns}.$$

Die Functionen q_{ns}, g_{ns}, p_{ns} kommen in der Folge sehr oft vor, weshalb wir bequeme Namen dafür haben müssen. Es sollen q_{ns} die *Schiebung*, g_{ns} die *Normalgleitung* und p_{ns} die *Totalgleitung* der Punkte n, s hinsichtlich des Punktes m heissen. Wo man es nur mit einer der Grössen g_{ns}, p_{ns} zu thun hat, kann dieselbe natürlich kurz als *Gleitung* bezeichnet werden. g_{ns} ist die Summe der Projectionen oder resultirenden Componenten von r_n in der Richtung s und von r_s in der Richtung n. Wie die Verschiebungen r_n, n_n, t_n, so sind auch g_{ns}, p_{ns} von der Bewegung der betrachteten Punkte m, n, s hinsichtlich des angenommenen Coordinatensystems abhängig, sie können endliche Werthe annehmen, ohne dass die Punkte ihre Lagen gegeneinander, ihre von jedem Coordinatensystem unabhängige *Gruppirung* ändern; die Dehnungen e_n und Schiebungen q_{ns} dagegen sind lediglich durch Aenderungen dieser Gruppirung bedingt, jede sonstige Bewegung der Gruppe ist ohne Einfluss auf sie.

Multiplicirt man die Gleichungen (3) des § 5 bezw. mit cos (sx), cos (sy), cos (sz) und die oben angeschriebenen Cosinusausdrücke bezw. mit cos (nx), cos (ny), cos (nz), so ergeben sich für den Winkel der neuen Richtung von n mit der anfänglichen von s und für den Winkel der neuen Richtung von s mit der anfänglichen des Punktes n

$$(6) \quad \begin{cases} (1+e_n)\cos(n_1 s) = \cos(ns) + s_n \\ \qquad\qquad = a_n \cos(sx) + b_n \cos(sy) + c_n \cos(sz), \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} (1+e_s)\cos(s_1 n) = \cos(ns) + n_s \\ \qquad\qquad = a_s \cos(nx) + b_s \cos(ny) + c_s \cos(nz). \end{cases}$$

Specielle Fälle dieser Beziehungen bilden die Formeln § 5, (3) welche mit $s = x, y, z$ aus (6) entstehen.

Waren die anfänglichen Richtungen n, s zu einander senkrecht, so ist oben $\cos(ns) = 0$, sind die neuen Richtungen n_1, s_1 zu einander senkrecht, so wird $q_{ns} + \cos(ns) = 0$, und stehen die Richtungen $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ der Totalverschiebungen zu einander senkrecht, so hat man $p_{ns} = 0$.

Haben für die Punkte n, s keine Dehnungen stattgefunden, so gelten neben § 5, (11), (12)

$$(8) \quad \begin{cases} q_{ns} = \cos(n_1 s_1) - \cos(ns), \\ g_{ns} = \cos(n_1 s) + \cos(s_1 n) - 2\cos(ns); \end{cases}$$

haben keine Normalverschiebungen stattgefunden, so finden sich neben § 5, (13), (14)

$$(9) \quad p_{ns} = t_n t_s \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{s}), \qquad g_{ns} = t_n \cos(\mathfrak{n}s) + t_s \cos(\mathfrak{s}n),$$

und haben keine Transversalverschiebungen stattgefunden, so entstehen ausser § 5, (15), (16)

(10) $$p_{ns} = n_s s_n \cos(ns), \qquad g_{ns} = (n_n + s_s)\cos(ns).$$

Die Gruppirung der Punkte eines materiellen Systems hat keine Aenderung erfahren, wenn hinsichtlich irgend eines Systempunktes m für alle in beliebigen Anfangsrichtungen n gewesenen Punkte $e_n = 0$ und gleichzeitig für je zwei in beliebigen Richtungen ns gewesenen Punkte $q_{ns} = 0$ ist. Da die Winkeländerungen und q_{ns} von den Dehnungen herrühren, so genügt es auch, wenn alle Dehnungen der Entfernungen je zweier Punkte verschwinden. Die ausreichenden Bedingungen hierfür sind aus dem X. Abschnitt zu entnehmen. Für beliebig bewegte starre Körper sind stets alle Dehnungen und Schiebungen gleich Null, womit dann $r_n^2 = -2n_n$, $g_{ns} = -p_{ns}$ werden.

Wird der Punkt s mit dem Punkte n identisch oder stimmen die Bewegungen zweier Punkte bis auf verschwindende Grössen überein, so folgen aus (3), (4) mit $s = n$

(11) $$p_{nn} = r_n^2, \qquad g_{nn} = 2n_n.$$

§ 7. Verschiebungsgeschwindigkeiten.

Wir betrachten jetzt hinsichtlich eines zur Zeit t angenommenen beliebig bewegten Coordinatensystems die Bewegungen beliebiger Punkte im Zeitelement dt. Dann sind alle Wege proportional den entsprechenden Geschwindigkeiten. Die augenblicklichen Geschwindigkeiten in den Richtungen x, y, z mögen für den Punkt $m\,(x, y, z)$ durch u, v, w und für einen in beliebiger Richtung n um Δn entfernten Punkt n durch u_1, v_1, w_1 bezeichnet sein. Die resultirende Geschwindigkeitscomponente von m in beliebiger Richtung s ist dann

(1) $$s = u\cos(sx) + v\cos(sy) + w\cos(sz) = \frac{\sigma}{dt},$$

während die Richtung r der als Absolutwerth aufzufassenden Totalgeschwindigkeit

(2) $$r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{\varrho}{dt}$$

bestimmt ist durch die Gleichungen

(3) $$u = r\cos(rx) = \frac{\xi}{dt}, \quad v = r\cos(ry) = \frac{\eta}{dt}, \quad w = r\cos(rz) = \frac{\zeta}{dt},$$

$\xi, \eta, \zeta, \sigma, \varrho$ sind die in § 4 betrachteten Verrückungen. Negative Geschwindigkeiten in gegebenen Richtungen g sind analog negativen Verrückungen aufzufassen.

Die Wege im Zeitelement dt hinsichtlich unseres Coordinatensystems sind

in den Richtungen	x	y	z
für den Punkt m	$u\,dt$	$v\,dt$	$w\,dt$,
„ „ „ n	$u_1\,dt$	$v_1\,dt$	$w_1\,dt$.

Durch Subtraction und mit den Bezeichnungen

$$\Delta u = u_1 - u, \quad \Delta v = v_1 - v, \quad \Delta w = w_1 - w$$

folgen die relativen Wege von n gegen m in den Richtungen x, y, z für die Zeit dt

$$\text{(4)} \qquad \Delta\xi = \Delta u\,dt, \quad \Delta\eta = \Delta v\,dt, \quad \Delta\zeta = \Delta w\,dt,$$

sodass Δu, Δv, Δw die entsprechenden relativen Geschwindigkeiten bedeuten. Wie hier die Wege in den Richtungen x, y, z, so lassen sich auch die relativen Wege von n gegen m in beliebigen Richtungen aus den gleichgerichteten Geschwindigkeiten beider Punkte bezüglich unseres Coordinatensystems ableiten.

Wir wollen nun aber nach Analogie mit den Verschiebungen die Geschwindigkeiten der relativen Bewegung von n gegen m pro Einheit der anfänglichen Entfernung Δn einführen. Dieselben sollen *Verschiebungsgeschwindigkeiten* heissen und sie ergeben sich, wenn man die wirklichen Geschwindigkeiten der relativen Bewegung von n gegen m durch Δn oder die Verschiebungen durch dt dividirt. Umgekehrt folgen aus irgend welchen Verschiebungsgeschwindigkeiten die gleichgerichteten Geschwindigkeiten der relativen Bewegung zur Zeit t durch Multiplication mit Δn, die gleichgerichteten Verschiebungen im Zeitelement dt durch Multiplication mit dt und die gleichgerichteten Wege im Zeitelement dt durch Multiplication mit $\Delta n\,dt$. Hinsichtlich der Richtungen der Verschiebungsgeschwindigkeiten ist auf das in § 4 für die Verschiebungen Gesagte zu verweisen.

Es mögen ϱ_n, τ_n, ν_n die *Totalverschiebungsgeschwindigkeit*, *Transversalverschiebungsgeschwindigkeit*, *Normalverschiebungsgeschwindigkeit* und r, t die Richtungen der beiden ersteren bedeuten. Dann hat man unmittelbar oder aus § 4

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \nu_n = \varrho_n \cos(rn) = \dfrac{n_n}{dt}, \\ \tau_n^2 = \varrho_n^2 - \nu_n^2 = \varrho_n^2 \sin^2(rn) = \left(\dfrac{t_n}{dt}\right)^2 \end{cases}$$

und die Componenten der Verschiebungsgeschwindigkeit ϱ_n in den Richtungen x, y, z

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} u_n = \varrho_n \cos(rx) = \dfrac{\Delta u}{\Delta n} = \dfrac{x_n}{dt}, \\ v_n = \varrho_n \cos(ry) = \dfrac{\Delta v}{\Delta n} = \dfrac{y_n}{dt}, \\ w_n = \varrho_n \cos(rz) = \dfrac{\Delta w}{\Delta n} = \dfrac{z_n}{dt}. \end{cases}$$

Die Totalverschiebungsgeschwindigkeit ist der Absolutwerth

$$(7)\qquad \varrho_n = \sqrt{u_n^2 + v_n^2 + w_n^2} = \frac{r_n}{dt},$$

während die Componenten nach x, y, z der ebenfalls als Absolutwerth aufzufassenden Transversalverschiebungsgeschwindigkeit und damit deren Richtung bestimmt sind durch die Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{cases} \tau_n \cos(tx) = u_n - \nu_n \cos(nx), \\ \tau_n \cos(ty) = v_n - \nu_n \cos(ny), \\ \tau_n \cos(tz) = w_n - \nu_n \cos(nz). \end{cases}$$

Für die resultirende Componente von r_n in beliebiger Richtung s hat man

$$(9)\qquad \sigma_n = \varrho_n \cos(rs) = u_n \cos(sx) + v_n \cos(sy) + w_n \cos(sz)$$

und speciell für die Normalverschiebungsgeschwindigkeit mit $s = n$

$$(10)\qquad \nu_n = u_n \cos(nx) + v_n \cos(ny) + w_n \cos(nz).$$

Setzen wir die in § 5 eingefürten Drehungen für das Zeitelement dt

$$(11)\qquad i_x = \iota_x dt, \qquad i_y = \iota_y dt, \qquad i_z = \iota_z dt, \qquad i_s = \iota_s dt,$$

dann sollen ι_x, ι_y, ι_z, ι_s die *Drehungsgeschwindigkeiten* des Punktes n für Axen in den Richtungen x, y, z, s durch m heissen, es sind die Componenten der Transversalverschiebungsgeschwindigkeit τ_n für diese Axen. Mit Rücksicht auf (6) folgen aus § 5

$$(12)\qquad \begin{cases} i_x = w_n \cos(ny) - v_n \cos(nz), \\ i_y = u_n \cos(nz) - w_n \cos(nx), \\ i_z = v_n \cos(nx) - u_n \cos(ny); \end{cases}$$

$$(13)\qquad \iota_s = \tau_n \cos(hs) = \iota_x \cos(sx) + \iota_y \cos(sy) + \iota_z \cos(sz),$$

$$(14)\qquad \iota_n = 0 = \iota_x \cos(nx) + \iota_y \cos(ny) + \iota_z \cos(nz),$$

$$(15)\qquad \iota_x^2 + \iota_y^2 + \iota_z^2 = \tau_n^2, \qquad u_n \iota_x + v_n \iota_y + w_n \iota_z = 0,$$

während die positive Richtung h der momentanen Drehungsaxe von n um m bestimmt ist durch die Gleichungen

$$(16)\qquad \iota_x = \tau_n \cos(hx), \qquad \iota_y = \tau_n \cos(hy), \qquad \iota_z = \tau_n \cos(hz).$$

Von dieser Richtung aus gesehen erscheint die Drehung dem Bewegungssinne des Uhrzeigers entsprechend rechtsläufig oder positiv. Die Gleichungen (12) liefern speciell

$$\begin{array}{llll} \text{für } n = x, & \iota_x = 0, & \iota_y = -w_x, & \iota_z = v_x, \\ n = y, & \iota_x = w_y, & \iota_y = 0, & \iota_z = -u_y, \\ n = z, & \iota_x = -v_z, & \iota_y = u_z, & \iota_z = 0. \end{array}$$

Beziehen wir schliesslich auch die noch unberücksichtigten Functionen der §§ 5, 6 auf ein Zeitelement dt und führen ein

(17) $$e_n = \varepsilon_n dt, \quad q_{ns} = \varphi_{ns} dt, \quad g_{ns} = \gamma_{ns} dt, \quad p_{ns} = \psi_{ns} dt,$$

so sind ε_n, φ_{ns}, γ_{ns}, ψ_{ns} bezw. als *Dehnungsgeschwindigkeit*, *Schiebungsgeschwindigkeit*, *Normalgleitungsgeschwindigkeit* und *Totalgleitungsgeschwindigkeit* zu bezeichnen. Wenn alle Grössen mit dem Index s den Punkt s betreffen und $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ die Richtungen r der Totalverschiebungsgeschwindigkeiten ϱ_n, ϱ_s bedeuten, dann folgen aus § 6, (3) (4)

(18) $$\gamma_{ns} = \sigma_n + \nu_n = \varrho_n \cos(\mathfrak{n}s) + \varrho_s \cos(\mathfrak{s}n),$$

(19) $$\psi_{ns} = u_n u_s + v_n v_s + w_n w_s = \varrho_n \varrho_s \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{s}).$$

Nach § 5, (1) und § 6, (5) hat man ferner

(20) $$2\varepsilon_n = 2\nu_n + (\varrho_n^2 - \varepsilon_n^2)\, dt,$$

(21) $$\varphi_{ns} = \gamma_{ns} + \psi_{ns} dt = (1 + \varepsilon_n dt)(1 + \varepsilon_s dt)\cos(n_1 s_1) - (ns).$$

In diesen Gleichungen dürfen nicht unter allen Umständen die Glieder mit dem Factor dt gegen ν_n, γ_{ns} vernachlässigt werden, da erstere mit letzterem von gleicher Grössenordnung sein können (§§ 5, 6). Wenn jedoch weder unendlich grosse noch unendlich kleine Verschiebungsgeschwindigkeiten in Betracht kommen sollen und der Kleinheit des Winkels

(22) $$\vartheta dt = (sn) - (s_1 n_1)$$

wegen

$$\cos(s_1 n_1) = \cos(sn)\cos\vartheta dt + \sin(sn)\sin\vartheta dt$$
$$= \cos(ns) + \vartheta dt \sin(sn)$$

gesetzt wird, erhält man aus (20) (21)

(23) $$\varepsilon_n = \nu_n, \qquad \varphi_{ns} = \gamma_{ns} = \vartheta \sin(sn).$$

Die Dehnungsgeschwindigkeit ist gleich der Normalverschiebungsgeschwindigkeit und die Schiebungsgeschwindigkeit gleich der Normalgleitungsgeschwindigkeit.

§ 8. Stetige und unstetige Functionen.

Eine Function wird bezüglich ihrer Variabeln x, y, z, ... als *stetig* bezeichnet, wenn sich für stetige Aenderungen der Variabeln auch die Function stetig ändert; sie heisst nach einer Variabeln x bei $x = u$ *unstetig*, wenn an dieser Stelle für eine unendlich kleine Aenderung von x eine endliche Aenderung von φ entsteht und also

$$\text{für } x = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm \infty$$

wird. In Fig. 4 beispielsweise ist die Function

$$y = \varphi(x)$$

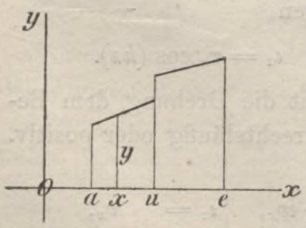

Fig. 4.

stetig von $x = a$ bis $x = u - \delta$ und von $x = u + \delta$ bis e, wobei δ beliebig klein werden kann, beim Ueberschreiten von $x = u$ aber tritt eine Unstetigkeit ein.

Hat man eine Function φ von $x, y, z, \ldots$, welche für bestimmte $y, z, \ldots$ zwischen $x = a$ und $x = e$ an beliebig vielen Stellen $x = u, v, \ldots w$ Unstigkeiten erleidet, so ist das Integral

$$(1) \qquad \int_a^e \varphi\, dx = \int_a^{u-\delta} \varphi\, dx + \int_{u+\delta}^{v-\delta} \varphi\, dx + \cdots + \int_{w+\delta}^{e} \varphi\, dx$$

mit $\delta = 0$ doch vollständig bestimmt, wenn φ selbst zwischen je zwei aufeinander folgenden $a, u, v, \ldots w, e$ in beliebiger Weise eindeutig ausgedrückt ist. Speciell mit $\varphi = \frac{\partial F}{\partial x}$ wird

$$(2) \begin{cases} \displaystyle\int_a^e \frac{\partial F}{\partial x} dx = (F_{u-\delta} - F_a) + (F_{v-\delta} - F_{u+\delta}) + \cdots + (F_e - F_{w+\delta}), \\ \displaystyle\int_a^e \frac{\partial F}{\partial x} dx = F_e - F_a - \sum_a^e (F_{u+\delta} - F_{u-\delta}). \end{cases}$$

Man findet also dann den Integralwerth der unstetigen Function, wenn man von dem zwischen den gleichen Grenzen genommenen Integrale der stetig gedachten Function die Sprungwerthe des Integrals subtrahirt.

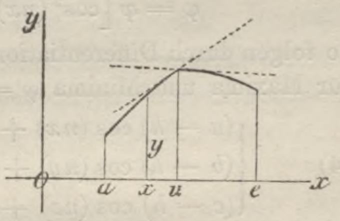

Fig. 5.

Ist eine Function φ selbst stetig, so können doch ihre Derivirten unstetige Functionen sein. So erkennt man z. B. in Fig. 5

$$y = \varphi(x)$$

als stetige Function von x. Dagegen erleidet die erste Derivirte

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x),$$

welche die Tangente des Neigungswinkels der verzeichneten Curve bei x darstellt, für $x = u$ eine Unstetigkeit, die geometrische Tangente an die Curve überschlägt beim Uebergange von $x = u - \delta$ zu $x = u + \delta$ auch für ein unendlich kleines δ einen endlichen Raum.

Es seien $\varphi, \psi, \ldots$ verschiedene Functionen derselben Variabeln x, y, z, welche nun die Coordinaten eines Körperpunktes m bezeichnen sollen. Die Functionen erleiden in beliebigen Schnitten (und Schnittelementen) Unstetigkeiten. Für die Integrale von $\varphi, \psi, \ldots$ bleibt es dann bei dem oben Gesagten. Stellen wir ferner irgend welche Beziehungen zwischen stetigen $\varphi, \psi, ..$ auf, so gelten diese auch in dem angenommenen Körper mit unstetigen φ, $\psi, \ldots$, vorausgesetzt nur, dass alle in die erhaltenen Beziehungen eintretenden Grössen auf die gleiche Seite jeder in Frage kommenden Unstetigkeit bezogen werden. So wollen wir uns in Zukunft bei Unstetigkeiten der Spannungen, Verrückungen, Verschiebungen und Geschwindigkeiten die Beziehungen für die entsprechenden stetigen Grössen aufgefasst und angewandt denken. Es lassen sich dabei doch alle Körperpunkte erreichen, da wir uns den erwähnten Unstetigkeitsschnitten von beiden Seiten bis auf die Entfernung Null hin nähern können.

Betrachten wir noch die stetige Function der Richtung n

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi = a \cos^2 (nx) + b \cos^2 (ny) + c \cos^2 (nz) \\ \quad + 2d \cos (nx) \cos (ny) + 2e \cos (ny) \cos (nz) \\ \quad + 2f \cos (nz) \cos (nx), \end{cases}$$

worin a, b, c, d, e, f von n unabhängige Grössen bedeuten, und suchen zu bestimmen, für welche Richtungen n Maxima und Minima von φ eintreten, wenn die Richtungen x, y, z zu einander senkrecht sind. Diese Aufgabe kommt im Laufe unserer Untersuchungen für verschiedene Formen von φ vor, weshalb es sich empfiehlt, sie hier allgemein zu lösen. Setzt man in (3) links

$$\varphi = \varphi \left[\cos^2 (nx) + \cos^2 (ny) + \cos^2 (nz)\right],$$

so folgen durch Differentiation nach (nx), (ny), (nz) als Bedingungen für Maxima und Minima $\varphi = h$

$$(4) \qquad \begin{cases} (a - h) \cos (nx) + d \cos (ny) + f \cos (nz) = 0, \\ (b - h) \cos (ny) + d \cos (nx) + e \cos (nz) = 0, \\ (c - h) \cos (nz) + f \cos (nx) + e \cos (ny) = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\cos (nz)$ aus den beiden ersten und von $\cos (ny)$ aus der ersten und dritten Gleichung entstehen

$$(5) \qquad \cos (ny) = \frac{s_1}{s_2} \cos (nx), \qquad \cos (nz) = \frac{s_1}{s_3} \cos (nx),$$

worin

$$(6) \qquad \begin{cases} s_1 = (h - a) e + fd, \\ s_2 = (h - b) f + de, \\ s_3 = (h - c) d + ef, \end{cases}$$

und substituirt man die Ausdrücke (5) in

$$\cos^2 (nx) + \cos^2 (ny) + \cos^2 (nz) = 1,$$

so ergiebt sich mit

$$(7) \qquad w = \pm \sqrt{(s_1 s_2)^2 + (s_2 s_3)^2 + (s_3 s_1)^2}$$

die erste der folgenden Gleichungen, während die beiden anderen mit Rücksicht auf (5) hinzutreten

$$(8) \qquad \cos(nx) = \frac{s_2 s_3}{w}, \quad \cos(ny) = \frac{s_3 s_1}{w}, \quad \cos(nz) = \frac{s_1 s_2}{w}.$$

Wenn wir in (6) den Werth h irgend eines Maximums oder Minimums von φ einsetzen, so liefern uns vorstehende Gleichungen mit den beiden Werthen von w zwei entgegengesetzte Richtungen n, welchen dieses h entspricht.

Um nun die Werthe der Maxima und Minima von φ selbst zu erhalten, substituire man die Ausdrücke (8) in die erste Gleichung (4), womit

$$(a - \varphi)s_2 s_3 + d s_3 s_1 + f s_1 s_2 = 0,$$

oder nach Einführen der s aus (6)

$$(9) \; (h-a)(h-b)(h-c) - (h-a)e^2 - (h-b)f^2 - (h-c)d^2 - 2def = 0,$$

und nach Potenzen von h geordnet

$$(10) \begin{cases} h^3 - h^2(a+b+c) + h(ab+bc+ca-d^2-e^2-f^2) \\ \qquad\qquad - (abc - ae^2 - bf^2 - cd^2 + 2def) = 0. \end{cases}$$

Diese kubische Gleichung hat in den später in Betracht kommenden Fällen drei, im Allgemeinen verschiedene, reelle Wurzeln, so dass auch im Allgemeinen drei verschiedene Maxima oder Minima von φ existiren, welche je zwei entgegengesetzten Richtungen n entsprechen.

§ 9. **Vollständiges Differential. Potential.**

Ist W eine Function von $x, y, z, \ldots$, dann wird das *vollständige Differential* von W gleich der Summe der *partiellen Differentiale* nach $x, y, z, \ldots$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz + \cdots$$

und man kann durch Integration dieser Gleichung

$$(1) \qquad W = F(x, y, z, \cdots) + \text{const.}$$

wieder erlangen, ohne dass irgend eine Beziehung zwischen $x, y, z, \cdots$ gegeben zu sein braucht. Es kommt nun in der Mechanik häufig vor, dass ein Differentialausdruck

$$(2) \qquad dW = a dx + b dy + c dz + \cdots$$

vorliegt und die Frage aufgeworfen ist, ob der Ausdruck, in welchem $a, b, c, \cdots$ beliebige Functionen von $x, y, z, \cdots$ sind, ein vollständiges Differential bildet, ob sich also W als Function unabhängig veränderlicher $x, y, z, \cdots$ darstellen lässt. Um für solche Fälle ein allgemein gültiges Kriterium zu erlangen, setzt man voraus, es *sei* (2) ein vollständiges Differential und sieht zu, welche Bedingung daraus folgt.

Wenn aber die rechte Seite von (2) das vollständige Differential einer Function $x, y, z, \cdots$ ist, dann muss die Integration auf eine Gleichung der Form (1) führen. Die Differentiation derselben ergibt

$$(3) \qquad dW = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \cdots;$$

demnach waren

$$(4) \qquad a = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial F}{\partial z}, \cdots$$

und da die Reihenfolge der Differentiation gleichgültig ist, so entstehen die Beziehungen

$$(5) \qquad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \qquad \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}, \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial z}, \cdots$$

Das gesuchte Kriterium ist damit erlangt, der gegebene Differentialausdruck ist das vollständige Differential einer Function von $x, y, z, \cdots$, wenn die Factoren von $dx, dy, dz, \cdots$ partielle Differentialquotienten nach $x, y, z, \cdots$ einer und derselben Function F sind oder die Beziehungen (5) bestehen.

Sind die angeführten Bedingungen nicht erfüllt, dann ist W als Function unabhängig variabler $x, y, z, \cdots$ nicht darstellbar und die Integration von (2) erst mit Hülfe neuer Beziehungen ausführbar. Geben letztere $x, y, z, \cdots$ als Functionen einer bestimmten Variabeln t (welche auch mit einer der Grössen $x, y, z, \cdots$ identisch sein kann), dann lässt sich (2) in die Form bringen

$$(6) \qquad dW = \psi(t) dt$$

und wir erhalten durch Integration

$$(7) \qquad W = f(t) + \text{const.}$$

Während jedoch im ersten Falle W nur von den jeweiligen Werthen $x, y, z, \cdots$ und jede Aenderung von W

$$W - W = F(x, y, z, \cdots) - F(x_1, y_1, z_1, \cdots)$$

nur von den Anfangs- und Endwerthen der $x, y, z, \cdots$ abhängt, kommt es jetzt nach (6) auch auf die Beziehungen zwischen $x, y, z, \cdots$ und t, d. h. darauf an, wie sich während des ganzen Uebergangs $x, y, z, \cdots$ mit t geändert haben.

Enthält der als vollständiges Differential gedachte Ausdruck (2) nur drei Variable x, y, z, dann sind dieselben entweder die Coordinaten eines Punktes m oder sie lassen sich als solche darstellen. Durch jede Gleichung der Form

$$(8) \qquad W = C$$

bei beliebigem constantem C ist nach (1) eine Fläche bestimmt und es werden solche Flächen *Niveauflächen* genannt. So oft m dieselbe Niveaufläche durchschneidet, hat W denselben Werth und bei der Bewegung von m auf einer Niveaufläche würde W constant bleiben. Gehen wir von $m(x, y, z)$ aus in beliebiger Richtung n um dn vor, wobei dx, dy, dz die Projectionen von dn in den Richtungen x, y, z oder $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten des erreichten Punktes n sein mögen, dann ist nach (2) die Aenderung von W

$$dW = a dx + b dy + c dz. \tag{9}$$

Durch Division mit dn folgt

$$\frac{dW}{dn} = a \cos(nx) + b \cos(ny) + c \cos(nz). \tag{10}$$

Denken wir uns a b, c von m oder n aus mit Berücksichtigung der Vorzeichen in den Richtungen x, y, z angetragen und die Richtung der Resultante $p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ durch r bezeichnet, dann folgen

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{\partial W}{\partial x} = p \cos(rx), \\ b &= \frac{\partial W}{\partial y} = p \cos(ry), \\ c &= \frac{\partial W}{\partial z} = p \cos(rz). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Beim Vorgehen um dn in der Richtung n wird nach (10)

$$\frac{dW}{dn} = p\,[\cos(rx)\cos(nx) + \cos(ry)\cos(ny) + \cos(rz)\cos(nz)],$$

das heisst

$$\frac{dW}{dn} = p \cos(rn). \tag{12}$$

In diesem Falle lässt sich das Differential von W nach beliebiger Richtung n analog ausdrücken, wie die Differentiale nach x, y, z. In (11) und (12) stehen rechts die Componenten von p in denjenigen Richtungen x, y, z, n, nach welchen differentiirt wird. Liegen die Punkte m, n auf einer Niveaufläche, dann muss nach (8), (12) $\cos(rs) = 0$ sein und damit ist bewiesen, dass p in allen Punkten einer Niveaufläche senkrecht zu letzterer gerichtet ist.

Es seien in dem vollständigen Differential (9) x, y, z die Coordinaten eines materiellen Punktes hinsichtlich irgend eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Bedeuten dann a, b, c die Componenten X, Y, Z einer auf den Punkt wirkenden Kraft in den Richtungen x, y, z, also p die resultirende Kraft, dann wird

$$F = \int (X dx + Y dy + Z dz) \tag{13}$$

nach *Hamilton* eine *Kraftfunction* der X, Y, Z genannt. Sind a, b, c die Coordinatengeschwindigkeiten u, v, w unseres Punktes, und p die resultirende Geschwindigkeit, so würde dementsprechend

(14) $$F = \int (u dx + v dy + w dz)$$

eine *Geschwindigkeitsfunction* der u, v, w heissen, und wenn a, b, c die Verrückungen ξ, η, ζ des fraglichen Punktes in den Richtungen x, y, z und p die Totalverrückung vertreten, dann könnte man

(15) $$F = \int \xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

eine *Verrückungsfunction* für die ξ, η, ζ nennen. Handelt es sich um ein ganzes System von Punkten, für welches eine Kraftfunction, Geschwindigkeitsfunction oder Verrückungsfunction existirt, dann tritt in (13), (14) oder (15) rechts ein auf alle Punkte bezügliches Σ vor die Klammer, der Summenausdruck bildet das vollständige Differential von F.

Während hervorragende Autoren für (13) die Bezeichnung Kraftfunction beibehalten haben, wird diese Grösse in neueren Schriften vielfach *Potential der Kräfte* genannt und für (14) der von *Helmholtz* eingeführte Name *Potential der Geschwindigkeiten* gewählt, wonach man (15) *Potential der Verrückungen* nennen könnte. Wir wollen von diesen Namen Gebrauch machen, um dem Worte Function seine allgemeine Bedeutung zu wahren und weil dann Ausdrücke wie Potentialbewegung, Potentialverrückungen bestimmte Begriffe klar wiedergeben, während die sonst üblichen, von *Green* und *Clausius* unterlegten, speciellen Begriffe von Potentialfunction und Potential, bei welchen es sich immer um Kräfte handelt, welche statisch nach dem umgekehrten Quadrat der Entfernung wirken, hier nicht direct in Frage kommen.

In der Folge werden wir zur Klarlegung der Gesetze stetiger Spannungen und Verschiebungen noch andere Potentiale als die jetzt erwähnten einzuführen haben, die man zum Unterschiede von letzteren als *Richtungspotentiale* bezeichnen kann (§§ 19, 31, 36).

§ 10. Grundgleichungen der Bewegung.

Es handle sich zur Zeit t um die augenblicklichen Bewegungsverhältnisse der Körperpunkte in Hinsicht eines beliebig bewegten Coordinatensystems. Für einen bei x, y, z liegenden Punkt der Masse m mögen die resultirenden Componenten der auf fragliche Bewegung hinwirkenden Kräfte und die Geschwindigkeiten dieser Bewegung in den Richtungen x, y, z durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und u, v, w bezeichnet sein. Dann hat man bekanntlich

$$m\frac{du}{dt} = \mathfrak{X}, \qquad m\frac{dv}{dt} = \mathfrak{Y}, \qquad m\frac{dw}{dt} = \mathfrak{Z},$$

und daraus

$$m\left(\frac{dw}{dt}y - \frac{dv}{dt}z\right) = \mathfrak{Z}y - \mathfrak{Y}z,$$

$$m\left(\frac{du}{dt}z - \frac{dw}{dt}x\right) = \mathfrak{X}z - \mathfrak{Z}x,$$

$$m\left(\frac{dv}{dt}x - \frac{du}{dt}y\right) = \mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y.$$

Die drei ersten Gleichungen sagen aus, dass die Kräfte in den Richtungen x, y, z die Beschleunigungen in diesen Richtungen erzeugen, während nach den drei letzten Gleichungen die Momente genannter Kräfte hinsichtlich der Coordinatenaxen x, y, z die Beschleunigungen der Rotationen um diese Axen hervorbringen.

Wir denken uns nun einen beliebigen Theil des Körpers abgegrenzt und betrachten diesen als System für sich. Für jeden Punkt des Systems gelten die vorstehenden Gleichungen. Werden jedoch entsprechende Gleichungen aller Systempunkte addirt, so fallen rechts die innern Kräfte wegen doppelten Auftretens mit entgegengesetzten Vorzeichen bei gleichen Hebelarmen aus, es genügt die äusseren Kräfte in Betracht zu ziehen.

Die äusseren Kräfte sind theils Massenkräfte, theils Oberflächenkräfte. Werden für die Richtungen x, y, z die Componenten der specifischen Massenkräfte durch X, Y, Z und diejenigen der specifischen Oberflächenkräfte in Uebereinstimmung mit § 3 durch X_n, Y_n, Z_n bezeichnet, dann hat man

$$(1)\qquad \begin{cases} \Sigma m\dfrac{du}{dt} = \Sigma mX + \int X_n dO \\ \Sigma m\dfrac{dv}{dt} = \Sigma mY + \int Y_n dO \\ \Sigma m\dfrac{dw}{dt} = \Sigma mZ + \int Z_n dO; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \Sigma m\left(\dfrac{dw}{dt}y - \dfrac{dv}{dt}z\right) = \Sigma m(Zy - Yz) + \int (Z_n y - Y_n z)dO \\ \Sigma m\left(\dfrac{du}{dt}z - \dfrac{dw}{dt}x\right) = \Sigma m(Xz - Zx) + \int (X_n z - Z_n x)dO \\ \Sigma m\left(\dfrac{dv}{dt}x - \dfrac{du}{dt}y\right) = \Sigma m(Yx - Xy) + \int (Y_n x - X_n y)dO. \end{cases}$$

Die Integrale sind auf alle Oberflächenelemente dO und die Summen Σ auf alle Massenpunkte m_1, m_2, $\cdots$ auszudehnen, wobei man sich den in diesen Σ auftretenden Grössen die Indices der betreffenden Massenpunkte gegeben denken kann.

Betrachten wir jetzt ein bei x, y, z gelegenes, unendlich kleines Volumentheilchen dK von beliebiger Form, welches Massenpunkte der Gesammtmasse μdK enthält, so dass μ die mittlere Masse pro

Volumeneinheit oder *specifische Masse* bedeutet. Die Geschwindigkeiten des Massenmittelpunktes der eingeschlossenen Massenpunkte in den Richtungen x, y, z mögen u, v, w heissen. Man hat dann nach elementaren Sätzen der Lehre vom Schwerpunkt

$$(3)\quad \Sigma m X = \mu dK X, \qquad \Sigma m Y = \mu dK Y, \qquad \Sigma m Z = \mu dK Z;$$

$$(4)\quad \Sigma m \frac{du}{dt} = \mu dK \frac{du}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dv}{dt} = \mu dK \frac{dv}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dw}{dt} = \mu dK \frac{dw}{dt}.$$

Enthält nun der oben behandelte Körpertheil, für welchen die Gleichungen (1), (2) gelten, beliebig viele und zum Beispiel auch unendlich viele der soeben betrachteten Körpertheilchen, dann folgen aus (1)

$$(5)\quad \begin{cases} \int \left(\frac{du}{dt} - X\right) \mu dK = \int X_n dO, \\ \int \left(\frac{dv}{dt} - Y\right) \mu dK = \int Y_n dO, \\ \int \left(\frac{dw}{dt} - Z\right) \mu dK = \int Z_n dO, \end{cases}$$

und aus (2), da für die Punkte eines bestimmten Theilchens dK die Differenzen der x, y, z gegen diese Grössen selbst verschwinden,

$$(6)\quad \begin{cases} \int \left[y\left(\frac{dw}{dt} - Z\right) - z\left(\frac{dv}{dt} - Y\right)\right] \mu dK = \int (y Z_n - z Y_n) dO, \\ \int \left[z\left(\frac{du}{dt} - X\right) - x\left(\frac{dw}{dt} - Z\right)\right] \mu dK = \int (z X_n - x Z_n) dO, \\ \int \left[x\left(\frac{dv}{dt} - Y\right) - y\left(\frac{du}{dt} - X\right)\right] \mu dK = \int (x Y_n - y X_n) dO. \end{cases}$$

Die Gleichungen (5), (6) gelten ebensowohl für unendlich kleine, wie für beliebige endliche Körper und Körpertheile. Die Integrale links sind auf alle Körperelemente und die rechts auf alle Oberflächenelemente auszudehnen.

Es wurde oben erwähnt, dass für die Gleichungen (1), (2) die innern Kräfte des betrachteten Systems wegen doppelten Auftretens mit entgegengesetzten Vorzeichen ausfallen. Die Oberflächenkräfte wirken von ausserhalb des Systems gelegenen Punkten auf die zum Systeme gehörigen. Da aber jedem auf einen Systempunkt wirkenden Bestandtheil einer Oberflächenkraft eine genau gleich grosse Kraft vom Systempunkte aus entgegenwirkt, so muss auch jeder resultirenden specifischen Oberflächenkraft eine gleich grosse *Oberflächenspannung* von entgegengesetzter Richtung entsprechen. Da wir ferner durch jedes Schnittelement im Körper die Grenze eines als System betrachteten Körpertheils führen können, *so sind überhaupt die resultirenden Spannungen je zweier in einem Schnittelemente zusammenhängender Flächenelemente numerisch gleich und entgegengesetzt gerichtet.*

§ 11. Bewegungsgleichungen für Körperelemente.

Wir denken uns vom Punkte m (x, y, z) aus ein parallelepipedisches Körpertheilchen $dK = dx\,dy\,dz$ abgegrenzt, dessen Kanten in den Richtungen x, y, z der Coordinatenaxen liegen. Auf die Oberfläche desselben werden von den angrenzenden Theilen her

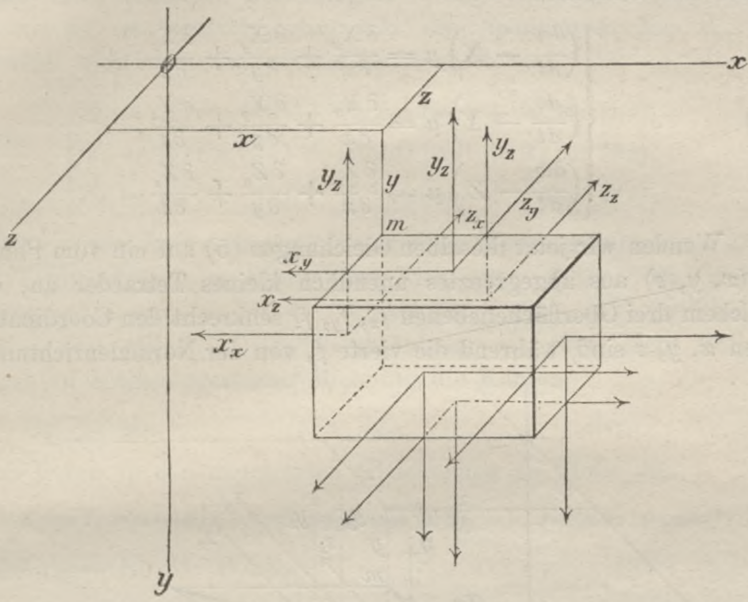

Fig. 6.

irgendwelche Kräfte wirken, deren Componenten parallel den Coordinatenaxen für die m zunächst liegenden Seitenebenen wie in Fig. 6 bezeichnet sein sollen. Auf dieses Theilchen wenden wir die Gleichungen (5) des vorigen § an und erhalten:

$$\left(\frac{du}{dt} - X\right)\mu\,dK = \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}dx - X_x\right)dy\,dz$$
$$+ \left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y}dy - X_y\right)dz\,dx$$
$$+ \left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z}dz - X_z\right)dx\,dy,$$

$$\left(\frac{dv}{dt} - Y\right)\mu\,dK = \left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x}dx - Y_x\right)dy\,dz$$
$$+ \left(Y_y + \frac{\partial Y_y}{\partial y}dy - Y_y\right)dz\,dx$$
$$+ \left(Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z}dz - Y_z\right)dx\,dy,$$

$$\left(\frac{dw}{dt} - Z\right)\mu dK = \left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial x}dx - Z_x\right)dy\,dz$$
$$+ \left(Z_y + \frac{\partial Z_y}{\partial y}dy - Z_y\right)dz\,dx$$
$$+ \left(Z_z + \frac{\partial Z_z}{\partial z}dz - Z_z\right)dx\,dy,$$

oder nach Reduction

$$(1) \qquad \begin{cases} \left(\frac{du}{dt} - X\right)\mu = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \left(\frac{dv}{dt} - Y\right)\mu = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \left(\frac{dw}{dt} - Z\right)\mu = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Wenden wir jetzt dieselben Gleichungen (5) auf ein vom Punkte m (x, y, z) aus abgegrenztes unendlich kleines Tetraeder an, von welchem drei Oberflächenebenen f_x, f_y, f_z senkrecht den Coordinatenaxen x, y, z sind, während die vierte f_n von der Normalenrichtung n

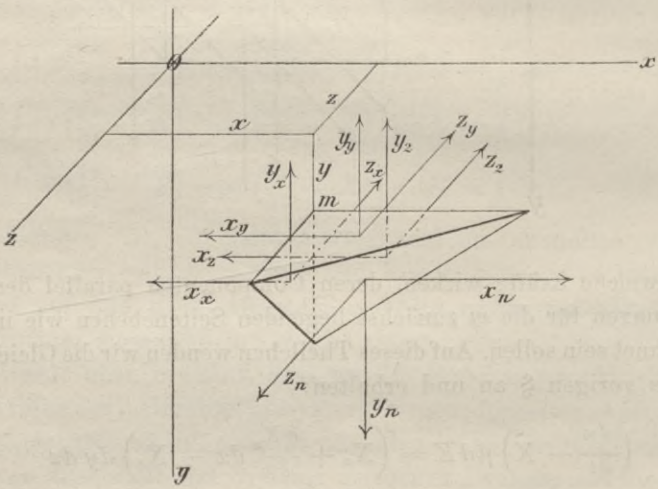

Fig. 7.

ist (Fig. 7). Denkt man sich die von m ausgehenden Kanten unseres Elements zunächst in den Richtungen x, y, z liegend und bezeichnet die Oberflächenkräfte den Festsetzungen in § 3 entsprechend, dann folgen:

$$\left(\frac{du}{dt} - X\right)\mu dK = X_n f_n - X_x f_x - X_y f_y - X_z f_z,$$
$$\left(\frac{dv}{dt} - Y\right)\mu dK = Y_n f_n - Y_x f_x - Y_y f_y - Y_z f_z,$$
$$\left(\frac{dw}{dt} - Z\right)\mu dK = Z_n f_n - Z_x f_x - Z_y f_y - Z_z f_z,$$

worin dK des Volumen des Tetraeders und also

$$3dK = f_x\,dx = f_y\,dy = f_z\,dz,$$

$$f_n = f_x \cos(nx) = f_y \cos(ny) = f_z \cos(nz).$$

Die drei Gleichungen, wie auch (1), führen bei verschwindenden Spannungen auf die der Bewegung des Schwerpunkts freier Massenpunkte entsprechenden Beziehungen. *Setzen wir jedoch voraus, dass die mit dK multiplicirten Ausdrücke den Spannungen X_n, Y_n, Z_n gegenüber nicht unendlich gross sind,* so entstehen:

$$(2) \quad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{cases}$$

Es wurde oben vorläufig angenommen, dass die Kanten dx, dy, dz des Tetraeders von m aus in den Richtungen x, y, z der Coordinatenaxen liegen, womit die Winkel (nx), (ny), (nz) zwischen 0 und $\pm 90^0$ fallen. Diese Beschränkung ist aber nicht nöthig. Liegen in entgegengesetzter Richtung die Kanten

$$dx, \qquad dy, \qquad dz,$$

dann treten in den angesetzten Gleichungen an Stelle von

$$f_n = f_x \cos(nx), \qquad f_n = f_y \cos(ny), \qquad f_n = f_z \cos(nz),$$

beziehungsweise die Werthe

$$f_n = -f_x \cos(nx), \quad f_n = -f_y \cos(ny), \quad f_n = -f_z \cos(nz),$$

während gleichzeitig die Oberflächenkräfte auf

$$f_x, \qquad f_y, \qquad f_z$$

ihr Vorzeichen wechseln, sodass die Gleichungen ungeändert bleiben.

Wenn auch die Formeln (1), (2) unter der oben erwähnten Voraussetzung für alle Normalenrichtungen n gelten, so brauchen doch die in (2) rechts auftretenden Flächenkräfte nicht für alle n die gleichen Werthe zu haben. Dieselben können sich sprungweise ändern, was z. B. häufig mit den specifischen Oberflächenkräften der Fall ist. Dagegen wissen wir aus § 10, dass die Kräfte auf zwei in einem bestimmten Schnittelemente zusammenhängenden Flächenelemente stets gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind.

§ 12. Stetige Spannungen.

Die Anwendung der ersten Gleichung § 10, (6) auf das parallelepipedische Körperelement des vorigen § ergiebt

$$\left[x\left(\frac{dv}{dt} - Y\right) - y\left(\frac{du}{dt} - X\right)\right] \mu\, dK$$

$$= (x + dx)\left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz$$

$$- x Y_x\, dy\, dz + x\left(Y_y + \frac{\partial Y_y}{\partial y} dy - Y_y\right) dz\, dx$$

$$- x\left(Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z} dz - Y_z\right) dx\, dy$$

$$- (y + dy)\left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy\right) dz\, dx + y X_y\, dz\, dx$$

$$- y\left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz - X_z\right) dx\, dy$$

$$= x\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) dK + Y_x\, dK + \frac{\partial Y_x}{\partial x} dx\, dK$$

$$- y\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dK - X_y\, dK - \frac{\partial X_y}{\partial y} dy\, dK.$$

Diese Beziehung liefert mit Rücksicht auf § 11, (1) die erste der folgenden Gleichungen, während die beiden andern in ganz analoger Weise aus den zwei weiteren Gleichungen § 10, (6) hervorgehen.

$$(1) \qquad \begin{cases} X_y - Y_x + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} dy - \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} dx = 0, \\ Y_z - Z_y + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} dz - \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} dy = 0, \\ Z_x - X_z + \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} dx - \dfrac{\partial X_z}{\partial z} dz = 0. \end{cases}$$

Wir denken uns nun das hier betrachtete Körperelement und das im vorigen § eingeführte Elementartetraeder innerhalb eines Körpertheils liegen, in welchem alle Flächenkräfte stetige Functionen des durch Coordinaten und Normalenrichtungen bestimmten augenblicklichen Ortes der afficirten Flächenelemente sind, und Ausdrücke von der in § 11, (1) links ersichtlichen Form den X_n, Y_n, Z_n gegenüber nicht unendlich gross werden. Da sich alsdann die in § 11, (2) rechts auftretenden Kräfte innerhalb eines unendlich kleinen Raumes um m (x, y, z) nur um verschwindend wenig ändern, so gelten diese Gleichungen mit constanten Werthen der rechtsseitigen Kräfte für alle m anliegenden und unendlich benachbarten Flächenelemente beliebiger Normalenrichtungen n. Aus (1) aber entstehen folgende Grundbeziehungen stetiger Spannungen:

$$(2) \qquad X_y = Y_x, \qquad Y_z = Z_y; \qquad Z_x = X_z.$$

Man könnte bei obiger Anwendung der Gleichungen § 10, (6) die Angriffspunkte der Spannungen in den Mitten der afficirten Flächenelemente annehmen und auf der linken Seite der angeschriebenen Gleichung $x + \frac{dx}{2}$, $y + \frac{dy}{2}$ an Stelle von x, y setzen wollen. Wo man aber auch die Angriffspunkte der Flächenkräfte auf den zugehörigen Flächenelementen wählen und welchen Punkt innerhalb des Körperelements man für die Coordinaten links als massgebend betrachten mag, für stetige Spannungen entstehen immer die Gleichungen (2). Dasselbe ist der Fall, wenn man von § 10, (2) anstatt von § 10, (6) ausgeht.

II. Abschnitt.

Beziehungen zwischen stetigen Spannungen.

Allen bisher im Gebiete der Elasticitätslehre publicirten Untersuchungen liegt die Annahme zu Grunde, dass die Spannungen eines Körpers für jeden bestimmten Zeitpunkt stetige Functionen des augenblicklichen Ortes der afficirten Flächenelemente sind. Ist diese Voraussetzung für die einem Punkte m (x, y, z) unendlich nahe liegenden Flächenelemente erfüllt, so lassen sich eine Reihe von Beziehungen zwischen den Spannungen bei m ableiten, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Die entstehenden Gleichungen gelten auch in Körpern, welche in beliebig vielen Schnitten jeder Grösse und Form Unstetigkeiten der Spannungen enthalten, wenn nur die in § 8 erwähnten und in § 13 specieller gefassten Bedingungen erfüllt werden. Wie in § 10 kann unser Coordinatensystem in beliebiger Bewegung sein. Für viele Untersuchungen genügen, neben den allgemeinen Beziehungen der §§ 3, 10—12 schon die in § 13 entwickelten Gesetze stetiger Spannungen.

§ 13. Spannungen für beliebige Flächenelemente.

Um die Spannungen eines dem Punkte m (x, y, z) unendlich benachbarten Flächenelements zu erhalten, haben wir uns in § 11 den Punkt m als Ecke eines Tetraeders gedacht, von welchem drei Oberflächenebenen parallel den Coordinatenebenen lagen, während die vierte von der Normalenrichtung n war. *Sind für ein solches Körperelement die Ausdrücke*

$$\left(\frac{du}{dt} - X\right)\mu, \quad \left(\frac{dv}{dt} - Y\right)\mu, \quad \left(\frac{dw}{dt} - Z\right)\mu$$

den Spannungen gegenüber nicht unendlich gross, oder die letzteren den ersteren gegenüber nicht verschwindend klein, dann hat man nach § 11, (2) die Componenten der Totalspannung R_n in den Richtungen x, y, z

$$(1) \quad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{cases}$$

Werden diese Gleichungen quadrirt und dann addirt, so ergiebt sich bei den Bezeichnungen des § 3

$$(2)\begin{cases} R_n^2 = R_x^2 \cos^2(nx) + R_y^2 \cos^2(ny) + R_z^2 \cos^2(nz) \\ \qquad + P_{xy} \cos(nx)\cos(ny) + P_{yz} \cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad + P_{zx} \cos(nz)\cos(nx), \end{cases}$$

worin, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Richtungen r der Totalspannungen R_x, R_y, R_z für die m anliegenden Flächenelemente der Normalenrichtungen x, y, z bedeuten,

$$(3)\quad\begin{cases} P_{xy} = X_x X_y + Y_x Y_y + Z_x Z_y = R_x R_y \cos(\mathfrak{x}\mathfrak{y}), \\ P_{yz} = X_y X_z + Y_y Y_z + Z_y Z_z = R_y R_z \cos(\mathfrak{y}\mathfrak{z}), \\ P_{zx} = X_z X_x + Y_z Y_x + Z_z Z_x = R_z R_x \cos(\mathfrak{z}\mathfrak{x}). \end{cases}$$

Die drei letzten Glieder in (2) verschwinden, wenn R_x, R_y, R_z zu einander senkrecht sind. Setzt man die Ausdrücke (1) in § 3, (6) ein, so folgt die Normalspannung für das Flächenelement der Normalenrichtung n

$$(4)\begin{cases} N_n = X_x \cos^2(nx) + Y_y \cos^2(ny) + Z_z \cos^2(nz) \\ \qquad + G_{xy} \cos(nx)\cos(ny) + G_{yz} \cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad + G_{zx} \cos(nz)\cos(nx) \end{cases}$$

mit

$$(5)\quad G_{xy} = X_y + Y_x, \quad G_{yz} = Y_z + Z_y, \quad G_{zx} = Z_x + X_z.$$

Die Gleichungen (1)—(5) gelten unter der oben erwähnten Bedingung für jedes dem Punkte m unendlich benachbarte Flächenelement, auch dann, wenn die Spannungen in der Umgebung von m ihre Werthe sprungweise ändern, in welchem Falle nur die in (1)—(5) rechts auftretenden Kräfte für verschiedene Flächenelemente nicht gleiche Werthe zu haben brauchen. Setzen wir jedoch voraus, dass sämmtliche Spannungen in der Umgebung von m stetige Functionen des Ortes sind, dann gelten obige Gleichungen nach § 12 mit constanten Werthen der rechtsseitigen Kräfte für alle m anliegenden und unendlich benachbarten Flächenelemente beliebiger Normalenrichtungen n. Wir haben dann ferner

$$(6)\qquad X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z,$$

womit

$$(7)\qquad G_{xy} = 2X_y, \quad G_{yz} = 2Y_z, \quad G_{zx} = 2Z_x$$

und auch die Gleichungen (3) anders geschrieben werden können. Bildet man durch Substitution von (1) in § 3, (5) die Componente von R_n in beliebiger Richtung s, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (6)

$$(8)\begin{cases} S_n = R_n \cos(rs) = X_x \cos(nx)\cos(sx) + Y_y \cos(ny)\cos(sy) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Z_z \cos(nz)\cos(sz) \\ \qquad + X_y \left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\ \qquad + Y_z \left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\ \qquad + Z_x \left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right], \end{cases}$$

welche Gleichung selbstverständlich mit $s = n$ auf (4) führt. Weil der Ausdruck rechts seinen Werth nicht ändert, wenn s mit n vertauscht wird, so können wir aussprechen: *Werden zwei einem Punkte m unendlich nahe liegende Flächenelemente der Normalenrichtungen n und s durch Totalspannungen R_n, R_s afficirt, dann ist die Componente von R_n in der Richtung s gleich der Componente von R_s in der Richtung n.* Bezeichnen wie in § 3 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ die Richtungen r von R_n, R_s, so hat man demnach

$$(9)\qquad R_n \cos(\mathfrak{n}s) = R_s \cos(\mathfrak{s}n) \qquad \text{oder} \quad S_n = N_s,$$

$$(10)\quad G_{ns} = 2R_n \cos(\mathfrak{n}s) = 2R_s \cos(\mathfrak{s}n) \quad \text{„} \quad G_{ns} = 2S_n = 2N_s.$$

Specielle Fälle dieses allgemeinen Gesetzes stetiger Spannungen bilden die Beziehungen (6) oder (7), welche mit $ns = xy, yz, zx$ entstehen.

Da bei Ableitungen der Gleichungen (1) und (6) nur dem Punkte m (x, y, z) unendlich nahe liegende Flächenelemente in Frage kamen, so bestehen die für stetige Spannungen erhaltenen und weiter abzuleitenden Beziehungen auch in Körpern, welche in beliebig vielen Schnitten Unstetigkeiten der Spannungen aufweisen, wenn nur unser Elementartetraeder ganz auf einer Seite jedes solchen Schnittes gedacht wird, d. h. wenn sich alle in einer Gleichung auftretenden Spannungen auf die gleiche Seite jedes bestimmten Unstetigkeitsschnitts beziehen. So lassen sich aber alle Körperpunkte erreichen, wir können die Eintheilung in Elemente immer derart vornehmen, dass für jedes derselben die Spannungen stetige Functionen des Ortes sind.

Die Gleichungen (1) wie auch die übrigen zeigen wieder, dass für je zwei in einem Schnittelemente zusammenhängende Flächenelemente numerisch gleiche Spannungen entgegengesetzter Richtungen entstehen, was auch in Unstetigkeitsschnitten gültig bleibt (§ 10).

§ 14. Die Hauptspannungen.

Die mathematischen Maxima und Minima der Normalspannungen

$$(1)\begin{cases} N_n = X_x \cos^2(nx) + Y_y \cos^2(ny) + Z_z \cos^2(nz) + 2X_y \cos(nx)\cos(ny) \\ \qquad\qquad + 2Y_z \cos(ny)\cos(nz) + 2Z_x \cos(nz)\cos(nx) \end{cases}$$

bei einem Punkte $m(x, y, z)$ bezeichnen wir als *Hauptspannungen* daselbst. Da die Function N_n von der in § 8 betrachteten Form (3) ist, so ergeben sich die Verhältnisse der Hauptspannungen aus den dort abgeleiteten Gleichungen mit $\varphi = N_n$, $a = X_x$, $b = Y_y$, $c = Z_z$, $d = X_y$, $e = Y_z$, $f = Z_x$.

Die Werthe h der Hauptspannungen sind bestimmt durch die Gleichung

$$(2)\quad \begin{cases} (h - X_x)(h - Y_y)(h - Z_z) - (h - X_x) Y_z^2 - (h - Y_y) Z_x^2 \\ \qquad - (h - Z_z) X_y^2 - 2 X_y Y_z Z_x = 0, \end{cases}$$

welche auch wie folgt geschrieben werden kann

$$(3)\quad \begin{cases} h^3 - h^2 (X_x + Y_y + Z_z) \\ \quad + h (X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x - X_y^2 - Y_z^2 - Z_x^2) \\ \quad - (X_x Y_y Z_z - X_x Y_z^2 - Y_y Z_x^2 - Z_z X_y^2 + 2 X_y Y_z Z_x) = 0. \end{cases}$$

Da sich in § 15 zeigen wird, dass die Hauptspannungen durch die Halbaxen eines Ellipsoids dargestellt sind, so hat vorstehende Gleichung im Allgemeinen drei verschiedene reelle Wurzeln, welche wir durch $h = A$, $h = B$, $h = C$ bezeichnen. Substituirt man einen dieser Werthe in

$$(4)\quad \begin{cases} s_1 = (h - X_x) Y_z + X_y Z_x, \\ s_2 = (h - Y_y) Z_x + X_y Y_z, \\ s_3 = (h - Z_z) X_y + Z_x Y_z, \end{cases}$$

so folgen aus

$$(5)\quad \cos(nx) = \frac{s_2 s_3}{w}, \qquad \cos(ny) = \frac{s_3 s_1}{w}, \qquad \cos(nz) = \frac{s_1 s_2}{w}$$

mit den beiden Vorzeichen von

$$(6)\quad w = \pm \sqrt{(s_1 s_2)^2 + (s_2 s_3)^2 + (s_3 s_1)^2}$$

die zwei einander entgegengesetzten Normalenrichtungen n derjenigen Flächenelemente, welche durch diese Hauptspannung afficirt werden.

Nach § 8 bestehen für jede Hauptspannung h die Gleichungen

$$(7)\quad \begin{cases} (X_x - h)\cos(nx) + X_y \cos(ny) + Z_x \cos(nz) = 0, \\ (Y_y - h)\cos(ny) + X_y \cos(nx) + Y_z \cos(nz) = 0, \\ (Z_z - h)\cos(nz) + Z_x \cos(nx) + Y_z \cos(ny) = 0. \end{cases}$$

Der Vergleich dieser Formeln mit § 13, (1) zeigt uns bei Beachtung von § 3, (2), dass für jedes durch eine Hauptspannung afficirte Flächenelement der Normalenrichtung n die Beziehungen bestehen

$$(8)\quad \begin{cases} h\cos(nx) = X_n = R_n \cos(rx), \\ h\cos(ny) = Y_n = R_n \cos(ry), \\ h\cos(nz) = Z_n = R_n \cos(rz), \end{cases}$$

woraus durch Quadriren und Addiren $h^2 = R_n^2$: *Für die Flächenelemente, welche durch Hauptspannungen afficirt werden, existiren keine Schubspannungen, ihre Totalspannungen sind gleich den Absolutwerthen der Hauptspannungen.* Multiplicirt man die Gleichungen (8) bezw. mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addirt, so folgt nach § 3, (5) die Componente der h entsprechenden Totalspannung R_n in der Richtung s und damit nach § 13 auch die Componente von R_s in der Richtung n

$$(9) \qquad S_n = N_n = h \cos(ns) = \frac{G_{ns}}{2}.$$

Es seien nun h_1, h_2 zwei Hauptspannungen, n_1, n_2 die Normalenrichtungen der zugehörigen Flächenelemente, so hat man einmal mit $h = h_1$, $n = n_1$, $s = n_2$ und dann mit $h = h_2$, $n = n_2$, $s = n_1$,

$$G_{ns} = 2h_1 \cos(n_1 n_2) = 2h_2 \cos(n_2 n_1),$$

und da h_1, h_2 im Allgemeinen verschiedene Werthe haben, so muss $\cos(n_1 n_2) = 0$ sein: *Die Normalenrichtungen derjenigen Flächenelemente, welche durch verschiedene Hauptspannungen beansprucht werden, schliessen mit einander Winkel von 90⁰ ein und demgemäss stehen auch die drei Richtungslinien der Hauptspannungen auf einander senkrecht. Je zwei Hauptspannungen liegen in der Ebene, welcher die von der dritten Hauptspannung afficirten Flächenelemente anliegen.*

Werden die Axen x, y, z parallel den Hauptspannungen A, B, C beim Punkte $m\ (x, y, z)$ gelegt, so hat man daselbst $X_x = A$, $Y_y = B$, $Z_z = C$, $X_y = Y_z = Z_x = 0$ und damit vereinfachen sich die in § 13 erhaltenen Spannungsausdrücke für alle Flächenelemente bei m. Für ein Flächenelement der Normalenrichtung n folgen die Normalspannung und Spannungscomponente in beliebiger Richtung s

$$(10) \quad N_n = R_n \cos(rn) = A \cos^2(nx) + B \cos^2(ny) + C \cos^2(nz),$$

$$(11) \quad \begin{cases} S_n = R_n \cos(rs) = A \cos(nx)\cos(sx) + B \cos(ny)\cos(sy) \\ \qquad\qquad + C \cos(nz)\cos(sz). \end{cases}$$

Die Componenten der Totalspannung R_n in den Richtungen x, y, z werden

$$(12) \qquad \begin{cases} X_n = A \cos(nx) = R_n \cos(rx), \\ Y_n = B \cos(ny) = R_n \cos(ry), \\ Z_n = C \cos(nz) = R_n \cos(rz), \end{cases}$$

und für R_n selbst hat man

$$(13) \quad R_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2 = A^2\cos^2(nx) + B^2\cos^2(ny) + C^2\cos^2(nz),$$

während die Componenten der Schubspannung $T_n = \sqrt{R_n^2 - N_n^2}$ in den Richtungen x, y, z nach § 3 bestimmt sind durch die Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{cases} T_n \cos(tx) = (A - N_n)\cos(nx), \\ T_n \cos(ty) = (B - N_n)\cos(ny), \\ T_n \cos(tz) = (C - N_n)\cos(nz). \end{cases}$$

Nach (12) werden für (nx), (ny) oder (nz) gleich $\pm 90^0$ auch bezw. (rx), (ry) oder (rz) zu rechten Winkeln, die Totalspannungen aller Flächenelemente, deren Normalen senkrecht zu einer Hauptspannung sind, liegen in der Ebene der beiden andern Hauptspannungen.

In (3) beziehen sich die neben h vorkommenden Grössen auf drei beliebige, zu einander senkrechte Flächenelemente bei m. Da nun die Werthe der Hauptspannungen nicht von der Wahl dieser Flächenelemente oder der Richtungen unseres Coordinatensystems abhängen, so müssen auch die Coefficienten der Potenzen von h in (3) unabhängig von dieser Wahl sein. Schreiben wir nun die Coefficienten das eine Mal wie oben für beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen, das andere Mal für den Fall an, dass die Coordinatenaxen x, y, z parallel den Hauptspannungen A, B, C gelegt werden, so entstehen folgende Relationen:

$$(15)\qquad X_x + Y_y + Z_z = A + B + C = \Omega,$$

$$(16)\quad X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x - X_y^2 - Y_z^2 - Z_x^2 = AB + BC + CA,$$

$$(17)\quad X_x Y_y Z_z - X_x Y_z^2 - Y_y Z_x^2 - Z_z X_y^2 + 2 X_y Y_z Z_x = ABC.$$

Hierauf hätten wir auch aus den Eigenschaften cubischer Gleichungen schliessen können. Quadrirt man (15) und subtrahirt das Doppelte von (16), dann ergiebt sich

$$(18)\qquad R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Aus (15) und (18) schliessen wir: *Für je drei dem gleichen Punkte m anliegende Flächenelemente hat die Summe der Normalspannungen einen festen Werth und ebenso die Summe der Totalspannungsquadrate.* Liegt nur eine der Coordinatenaxen parallel einer Hauptspannung, so kommt in (15) und (18) einer der Summanden rechts und links vor, es folgt: *Für alle Paare in einem Punkte m zu einander senkrechter Flächenelemente, deren Normalenrichtungen senkrecht einer Hauptspannung liegen, haben die Summe der Normalspannungen und die Summe der Totalspannungsquadrate je einen festen Werth.*

Nach (15)—(17) ist eine der Hauptspannungen A, B, C gleich Null, wenn für beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen

$$(19)\quad X_x Y_y Z_z - X_x Y_z^2 - Y_y Z_x^2 - Z_z X_y^2 + 2 X_y Y_z Z_x = 0$$

ist; es sind zwei Hauptspannungen gleich Null, wenn neben (19) gilt

$$(20)\qquad X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x - X_y^2 - Y_z^2 - Z_x^2 = 0;$$

und sind alle drei Hauptspannungen gleich Null, so hat man noch

$$(21) \qquad X_x + Y_y + Z_z = 0.$$

Verschwindet eine Hauptspannung, so folgt aus (3) mit (19) zur Bestimmung der zwei übrigen

$$(22) \qquad \begin{cases} h^2 - h(X_x + Y_y + Z_z) + X_x Y_y + Y_y Z_z \\ \qquad\qquad + Z_z X_x - X_y^2 - Y_z^2 - Z_x^2 = 0; \end{cases}$$

verschwinden zwei Hauptspannungen, so liefert uns (3) mit (19), (20), oder auch (22) mit (20) für die verbleibende

$$(23) \qquad h = X_x + Y_y + Z_z,$$

und ist auch diese gleich Null, so existiren nach (10) bis (13) beim Punkte m überhaupt keine Spannungen.

§ 15. **Totalspannungen. Das Spannungsellipsoid.**

Für den Fall, dass die Axen der x, y, z parallel den Hauptspannungen A, B, C gelegt werden, ergaben sich in § 14

$$X_n = A\cos(nx), \qquad Y_n = B\cos(ny), \qquad Z_n = C\cos(nz).$$

Da nun bei rechtwinkligem Coordinatensystem die Summe der Cosinusquadrate von (nx), (ny) und (nz) gleich 1 ist, so folgt

$$(1) \qquad \frac{X_n^2}{A^2} + \frac{Y_n^2}{B^2} + \frac{Z_n^2}{C^2} = 1.$$

Werden die Componenten X_n, Y_n, Z_n von R_n als Coordinaten in den Richtungen x, y, z für m als Coordinatenursprung aufgefasst, so stellt (1) die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids dar, dessen Halbaxen gleich den Absolutwerthen von A, B, C sind. Diese Absolutwerthe der Hauptspannungen sind also die Maxima und Minima der Totalspannungen, während sich in § 14 nur ergeben hat, dass dieselben gleich den Totalspannungen der zugehörigen Flächenelemente sind.

Gehen wir nun zu besserer Beurtheilung des gefundenen Ellipsoids von einem beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystem aus. Für die Flächenelemente der Normalenrichtungen x, y, z mögen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Richtungen r der Totalspannungen R_x, R_y, R_z bedeuten, dann hat man nach § 3, (2)

$$\cos(\mathfrak{x}x) = \frac{X_x}{R_x}, \qquad \cos(\mathfrak{y}x) = \frac{X_y}{R_y}, \qquad \cos(\mathfrak{z}x) = \frac{X_z}{R_z}.$$

Werden nun für ein Flächenelement der beliebigen Normalrichtung n die Componenten der Totalspannung R_n, welche bei Zerlegung nach den im Allgemeinen schief zu einander liegenden Richtungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ entstehen, durch $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{Y}_n$, $\mathfrak{Z}_n$ bezeichnet, so ist die resultirende Componente in der Richtung x

$$X_n = \mathfrak{X}_n \cos(\mathfrak{x}x) + \mathfrak{Y}_n \cos(\mathfrak{y}x) + \mathfrak{Z}_n \cos(\mathfrak{z}x),$$

oder mit Rücksicht auf die darüber stehenden Cosinuswerthe

$$X_n = X_x \frac{\mathfrak{X}_n}{R_x} + X_y \frac{\mathfrak{Y}_n}{R_y} + X_z \frac{\mathfrak{Z}_n}{R_z}.$$

Aus dieser Beziehung mit der in § 11 ebenfalls für beliebige Flächenelemente gefundenen

$$X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)$$

folgen

$$\cos(nx) = \frac{\mathfrak{X}_n}{R_x}, \qquad \cos(ny) = \frac{\mathfrak{Y}_n}{R_y}, \qquad \cos(nz) = \frac{\mathfrak{Z}_n}{R_z},$$

woraus durch Quadriren und Addiren

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{X}_n^2}{R_x^2} + \frac{\mathfrak{Y}_n^2}{R_y^2} + \frac{\mathfrak{Z}_n^2}{R_z^2} = 1.$$

Denkt man sich $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als positive Axenrichtungen eines schiefwinkligen Coordinatensystems gewählt und die $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{Y}_n$, $\mathfrak{Z}_n$ für beliebige Flächenelemente als Coordinaten von m aus angetragen, so stellt (2) die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids dar, für welches R_x, R_y, R_z conjugirte Halbmesser sind, wir können aussprechen: *Trägt man von einem Punkte m aus die Totalspannungen R_n aller m anliegenden Flächenelemente nach Grösse und Richtung auf, dann liegen die Endpunkte der R_n auf einem Ellipsoide, für welches die Halbaxen gleich den Absolutwerthen der Hauptspannungen und die Totalspannungen für je drei zu einander senkrechte Flächenelemente conjugirte Halbmesser sind.* Dies Ellipsoid wurde von *Lamé* eingeführt, es soll hier *Spannungsellipsoid* heissen.

Sind zwei Hauptspannungen numerisch gleich, so wird das Spannungsellipsoid ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe von der Richtungslinie der dritten Hauptspannung gebildet wird. Ergeben sich alle drei Hauptspannungen gleich, so wird das Spannungsellipsoid eine Kugel.

Wir wollen hier noch einige weitere Beziehungen für die Totalspannungen R_n anschliessen. Nach § 13 hat man

$$(3) \qquad \begin{cases} R_n^2 = R_x^2 \cos^2(nx) + R_y^2 \cos^2(ny) + R_z^2 \cos^2(nz) \\ \qquad\qquad + 2P_{xy} \cos(nx)\cos(ny) \\ \qquad\qquad + 2P_{yz} \cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad\qquad + \ \ P_{zx} \cos(nz)\cos(nx). \end{cases}$$

Sind für zwei dem Punkte m anliegende Flächenelemente der Normalenrichtungen n, s die Totalspannungen durch R_n, R_s und deren Richtungen durch $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ bezeichnet, dann folgt aus § 3, (7) mit § 13, (1)

$$
(4)\begin{cases}
P_{ns} = R_n R_s \cos(ns) = R_x^2 \cos(nx)\cos(sx) + R_y^2 \cos(ny)\cos(sy) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + R_z^2 \cos(nz)\cos(sz) \\
\qquad\qquad + P_{xy}\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\
\qquad\qquad + P_{yz}\left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\
\qquad\qquad + P_{zx}\left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right].
\end{cases}
$$

Diese Gleichung liefert speciell für $s = x, y, z$

$$
(5)\qquad\begin{cases}
P_{nx} = R_x^2 \cos(nx) + P_{xy}\cos(ny) + P_{zx}\cos(nz), \\
P_{ny} = R_y^2 \cos(ny) + P_{xy}\cos(nx) + P_{yz}\cos(nz), \\
P_{nz} = R_z^2 \cos(nz) + P_{zx}\cos(nx) + P_{yz}\cos(ny).
\end{cases}
$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ und addirt, dann folgt wegen (3)

$$
(6)\qquad R_n^2 = P_{nx}\cos(nx) + P_{ny}\cos(ny) + P_{nz}\cos(nz),
$$

und multiplicirt man mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$, so entsteht durch Addition

$$
(7)\qquad\begin{cases}
P_{ns} = P_{nx}\cos(sx) + P_{ny}\cos(sy) + P_{nz}\cos(sz) \\
\quad\;\; = P_{sx}\cos(nx) + P_{sy}\cos(ny) + P_{sz}\cos(nz).
\end{cases}
$$

Da die Function R_n^2 von der in § 8 betrachteten Form (3) ist, so könnte man die Maxima und Minima der Totalspannungen aus den dort gefundenen Beziehungen ableiten und es würden sich diejenigen Gleichungen ergeben, welche aus (6) bis (21) des § 24 entstehen, wenn dort (abgesehen von h, s und den Indices) grosse lateinische Buchstaben an Stelle der kleinen und A, B, C an Stelle von R_1, R_2, R_3 gesetzt werden. Indessen sind die Maxima und Minima der Totalspannungen bereits durch § 14 bestimmt.

§ 16. Die Stellungsfläche.

Wir denken uns vom Punkte m aus die Spannungen R_n aller m anliegenden Flächenelemente nach Grösse und Richtung aufgetragen. Die Endpunkte der R_n liegen auf dem Spannungsellipsoide. Nimmt man den Ursprung rechtwinkliger Coordinaten im Punkte m selbst an, so ist die Gleichung eines m anliegenden Flächenelements der Normalenrichtung n

$$
x\cos(nx) + y\cos(ny) + z\cos(nz) = 0.
$$

Werden speciell die Axen der x, y, z parallel den Hauptspannungen A, B, C gelegt, so folgen aus § 14, (12)

$$\cos(nx) = \frac{X_n}{A}, \qquad \cos(ny) = \frac{Y_n}{B}, \qquad \cos(nz) = \frac{Z_n}{C},$$

und damit für unser Flächenelement

$$\frac{X_n}{A} x + \frac{Y_n}{B} y + \frac{Z_n}{C} z = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung entspricht nach der analytischen Geometrie einer dem Coordinatenursprung anliegenden Parallelebene zu der in der Richtung r von R_n (X_n, Y_n, Z_n) tangirenden Ebene der Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \pm K^2. \tag{2}$$

K^2 bedeutet eine beliebige positive Zahl. Es existirt also eine Fläche zweiten Grades von der Art, dass die Tangentialebene jedes Punktes, welcher von einer Spannungsrichtung r getroffen wird, parallel dem durch die entsprechende Spannung R_n afficirten Flächenelemente ist. Diese durch *Lamé* eingeführte Fläche vom Mittelpunkte m wird *Stellungsfläche* genannt. Denkt man sich dieselbe neben den Hauptspannungen gegeben, so lässt sich zu jeder Spannung R_n bei m die Lage des afficirten Flächelements und zu jedem Flächenelement f_n bei m die Richtung der afficirenden Spannung construiren. Im ersten Falle legt man durch den Punkt, in welchem r die Stellungsfläche durchdringt, eine Tangentialebene zu letzterer und zu dieser einen parallelen Schnitt durch m. Von den beiden im Schnitte zusammenhängenden Flächenelementen ist das von r getroffene oder nicht getroffene durch R_n afficirt, je nachdem die Normalspannung N_n Zug oder Druck bedeutet. Im zweiten Falle legt man parallel zum Flächenelemente, mit letzterem auf gleicher oder entgegengesetzter Seite von m, je nachdem N_n Zug oder Druck bedeutet (siehe unten), eine Tangentialebene an die Stellungsfläche und zieht von m aus nach dem Tangenzpunkte die Richtung r, in welcher dann auch das Spannungsellipsoid die Grösse von R_n abschneidet.

Zum Zwecke specieller Untersuchung der Stellungsfläche mögen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Absolutwerthe von A, B, C bezeichnen. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Es sind die drei Hauptspannungen und damit überhaupt alle N_n Zugspannungen oder alle Druckspannungen. Dann kann in (2) rechts nur das positive, bezw. nur das negative Vorzeichen gelten, wir erhalten in beiden Fällen

$$\frac{x^2}{\mathfrak{A}} + \frac{y^2}{\mathfrak{B}} + \frac{z^2}{\mathfrak{C}} = K^2. \tag{3}$$

Die Stellungsfläche ist also ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt mit dem des Spannungsellipsoids in m liegt, während Halbaxen in den Richtungslinien der Hauptspannungen sind

$$(4)\qquad a = K\sqrt{\mathfrak{A}},\qquad b = K\sqrt{\mathfrak{B}},\qquad c = K\sqrt{\mathfrak{C}}.$$

Bei dem Spannungsellipsoide waren die entsprechenden Halbaxen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

II. Es ist eine der Hauptspannungen von entgegengesetztem Vorzeichen wie die beiden andern, so dass auch die N_n zum Theil Zug und zum Theil Druck bedeuten. Wir wollen die beiden Hauptspannungen gleicher Art A und C nennen. Da nun die linke Seite von (2) einen positiven oder negativen Werth liefern kann, so besteht die Stellungsfläche aus zwei Theilflächen der Gleichungen

$$(5)\qquad \frac{x^2}{\mathfrak{A}} - \frac{y^2}{\mathfrak{B}} + \frac{z^2}{\mathfrak{C}} = K^2;$$

$$(6)\qquad \frac{x^2}{\mathfrak{A}} - \frac{y^2}{\mathfrak{B}} + \frac{z^2}{\mathfrak{C}} = -K^2.$$

Die erste Gleichung vertritt ein Hyperboloid von einem Fache, mit den in den Richtungslinien der Hauptspannungen A, B, C liegenden Halbaxen

$$(7)\qquad a = K\sqrt{\mathfrak{A}},\qquad b = K\sqrt{-\mathfrak{B}},\qquad c = K\sqrt{\mathfrak{C}}.$$

Die zweite Gleichung entspricht einem Hyperboloide von zwei Fächern mit den in den Richtungslinien von A, B, C liegenden Halbaxen

$$(8)\qquad a = K\sqrt{-\mathfrak{A}},\qquad b = K\sqrt{\mathfrak{B}},\qquad c = K\sqrt{-\mathfrak{C}}.$$

Beide Hyperboloide hängen zusammen durch den gemeinsamen Asymptotenkegel

$$(9)\qquad \frac{x^2}{\mathfrak{A}} - \frac{y^2}{\mathfrak{B}} + \frac{z^2}{\mathfrak{C}} = 0.$$

Die Richtung r von R_n trifft das einfache Hyperboloid oder das doppelte Hyperboloid, je nachdem die Normalcomponente N_n von gleichem Vorzeichen mit A, C oder mit B ist. Diejenigen Spannungen, welche den Tangentialebenen des Asymptotenkegels entsprechen, liegen in diesen Ebenen selbst, haben also keine Normalcomponenten.

Sind zwei Hauptspannungen numerisch gleich, so wird die Stellungsfläche zu einer Rotationsfläche, deren Rotationsaxe in die Richtungslinie der dritten Hauptspannung fällt. Ergeben sich alle Hauptspannungen von gleichem Werthe, so erhalten wir als Stellungsfläche eine dem Spannungsellipsoide concentrische Kugel.

§ 17. Hauptschubspannungen.

Die Minima der Schubspannungen T_n sind gleich Null und treten für diejenigen Flächenelemente ein, welche durch Hauptspannungen afficirt werden. Es handelt sich nun darum, die Maxima der T_n zu ermitteln, welche man als *Hauptschubspannungen* zu bezeichnen pflegt. Die Axen der x, y, z mögen dabei parallel den Hauptspannungen A, B, C liegen.

Für die Schubspannungen auf beliebige Flächenelemente hat man

$$T_n^2 = R_n^2 - N_n^2,$$

oder mit den Ausdrücken § 14, (10), (13) und wegen $1 - \cos^2 = \sin^2$,

$$(1)\quad \begin{cases} T_n^2 = A\cos^2(nx)\left[A\sin^2(nx) - 2B\cos^2(ny)\right] \\ \qquad\qquad + B\cos^2(ny)\left[B\sin^2(ny) - 2C\cos^2(nz)\right] \\ \qquad\qquad + C\cos^2(nz)\left[C\sin^2(nz) - 2A\cos^2(nx)\right]. \end{cases}$$

Die für rechtwinklige Coordinatenaxen gültige Gleichung

$$\cos^2(nx) + \cos^2(ny) + \cos^2(nz) = 1$$

liefert

$$\cos^2(nz) = \sin^2(nx) - \cos^2(ny) = \sin^2(ny) - \cos^2(nx),$$

$$\sin^2(nz) = \cos^2(nx) + \cos^2(ny),$$

und benutzen wir diese Beziehungen, um (nz) aus (1) zu eliminiren, so folgt für ein beliebiges Flächenelement

$$(2)\quad \begin{cases} T_n^2 = (A-C)^2\sin^2(nx)\cos^2(nx) + (B-C)^2\sin^2(ny)\cos^2(ny) \\ \qquad\qquad - 2(A-C)(B-C)\cos^2(nx)\cos^2(ny). \end{cases}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach den unabhängig variabeln Winkeln (nx), (ny) erhält man

$$2T_n\frac{\partial T_n}{\partial(nx)} = (A-C)\sin 2(nx)\left[(A-C)\cos 2(nx) - 2(B-C)\cos^2(ny)\right]$$

$$2T_n\frac{\partial T_n}{\partial(ny)} = (B-C)\sin 2(ny)\left[(B-C)\cos 2(ny) - 2(A-C)\cos^2(nx)\right]$$

und die Bedingungen für Maxima und Minima von T_n sind danach

$$(3)\quad \sin 2(nx)\left[(A-C)\cos 2(nx) + 2(B-C)\cos^2(ny)\right] = 0,$$

$$(4)\quad \sin 2(ny)\left[(B-C)\cos 2(ny) + 2(A-C)\cos^2(nx)\right] = 0.$$

Führen wir von je zwei in einem Schnittelemente zusammenhängenden Flächenelementen, welche durch gleiche Spannungen entgegengesetzter Richtungen afficirt werden, im Folgenden nur das eine an und wählen den positiven Drehungssinn der Winkel dem zu Anfang des ersten Abschnitts Gesagten entsprechend, so treten nach (3), (4) Maxima oder Minima von T_n für folgende Richtungswinkel ein (Fig. 8):

	(nx)	(ny)	(nz)
I	45°	— 45°	90°
II	— 45	— 135	90
III	90	45	— 45
IV	90	— 45	— 135
V	— 45	90	45
VI	— 135	90	— 45
VII	0	90	90
VIII	90	0	90
IX	90	90	0

Die Richtungswinkel der anliegenden Flächenelemente weichen sämmtlich um 180° von den vorstehenden ab. Mit VII bis IX kommt man auf die durch Hauptspannungen afficirten Flächenelemente, I bis VI müssen also Maxima der Schubspannungen liefern, wir können aussprechen: *Die sechs Schnittelemente, deren anliegende Flächenelemente durch Hauptschubspannungen afficirt werden, gehen je durch die Richtungslinie einer Hauptspannung (oder Axe des Spannungsellipsoids) und halbiren den Winkel zwischen den beiden andern Hauptspannungen (oder Axen des Spannungsellipsoids).*

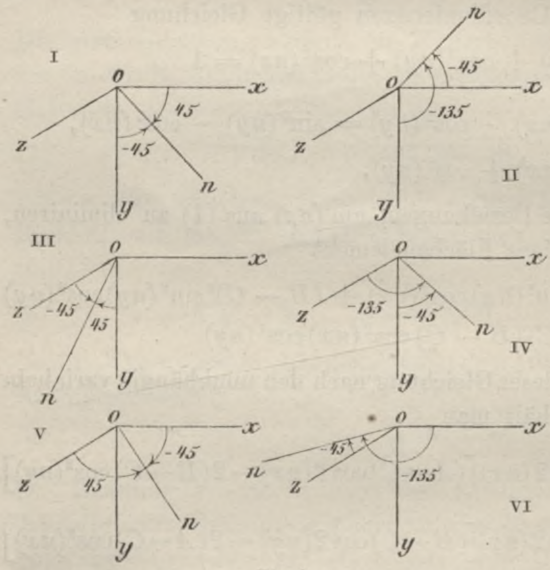

Fig. 8.

Wir bestimmen nun für die ermittelten, durch Hauptschubspannungen afficirten Flächenelemente die Normalspannung und Totalspannung aus § 14, (10), (13), die Componenten von R_n in den Richtungen x, y, z und die Winkel der Richtung r von R_n mit diesen x, y, z aus § 14, (12), die Hauptschubspannungen T_n selbst aus obiger Gleichung (2) und die Componenten von T_n in den Richtungen x, y, z aus § 14, (14). Es ergeben sich folgende Resultate.

Für die Fälle	I, II,	III, IV,	V, VI,
$N_n =$	$\frac{A+B}{2}$,	$\frac{B+C}{2}$,	$\frac{C+A}{2}$,
$R_n =$	$\sqrt{\frac{A^2+B^2}{2}}$,	$\sqrt{\frac{B^2+C^2}{2}}$,	$\sqrt{\frac{C^2+A^2}{2}}$,
$X_n =$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$,	0,	$\pm\frac{A}{\sqrt{2}}$,
$Y_n =$	$\pm\frac{B}{\sqrt{2}}$,	$\frac{B}{\sqrt{2}}$,	0,
$Z_n =$	0,	$\pm\frac{C}{\sqrt{2}}$,	$\frac{C}{\sqrt{2}}$,
$\cos(rx) =$	$\frac{A}{R_n\sqrt{2}}$,	0,	$\pm\frac{A}{R_n\sqrt{2}}$,
$\cos(ry) =$	$\pm\frac{B}{R_n\sqrt{2}}$,	$\frac{B}{R_n\sqrt{2}}$,	0,
$\cos(rz) =$	0,	$\pm\frac{C}{R_n\sqrt{2}}$,	$\frac{C}{R_n\sqrt{2}}$,
$T_n =$	$\left(\frac{A-B}{2}\right)$,	$\left(\frac{B-C}{2}\right)$,	$\left(\frac{C-A}{2}\right)$,
$T_n \cos(tx) =$	$\frac{A-B}{\sqrt{8}}$,	0,	$\mp\frac{C-A}{\sqrt{8}}$,
$T_n \cos(ty) =$	$\mp\frac{A-B}{\sqrt{8}}$,	$\frac{B-C}{\sqrt{8}}$,	0,
$T_n \cos(tz) =$	0,	$\mp\frac{B-C}{\sqrt{8}}$,	$\frac{C-A}{\sqrt{8}}$.

Hierin sind alle Wurzelausdrücke als Absolutwerthe aufzufassen, für T_n die Absolutwerthe der angegebenen Ausdrücke zu wählen und von zwei angesetzten Vorzeichen das obere oder untere massgebend je nachdem es sich um den ersten oder zweiten der obenstehenden Fälle handelt. Die Resultate zeigen u. A., dass die R_n, T_n jedes Flächenelements, welches durch eine Hauptschubspannung afficirt wird, senkrecht zu derjenigen Hauptspannung stehen, durch welche das Flächenelement geht und dass die in den Ebenen zweier Hauptspannungen liegenden Hauptschubspannungen mit den ersteren Winkel von 45° bilden. Die Hauptschubspannungen schliessen also wie die Hauptspannungen Winkel von 90° mit einander ein.

§ 18. **Specielle Fälle. Untersuchungen in der Ebene.**

In vielen Fällen ist von vornherein bekannt oder angenommen, dafs alle einer bestimmten Ebene anliegenden Flächenelemente nur von Normalspannungen afficirt werden. Liegen dann die Axen der

x, y in dieser Ebene, so hat man für stetige Spannungen in den bisher abgeleiteten Beziehungen $X_z = Z_x = 0$, $Y_z = Z_y = 0$ und damit treten wesentliche Vereinfachungen ein.

In jedem Punkte $m(x, y, z)$ bestehen zwischen Spannungen, Massenkräften und Beschleunigungscomponenten nach § 11 die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} = \mu\left(\dfrac{du}{dt} - X\right), \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} = \mu\left(\dfrac{dv}{dt} - Y\right), \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = \mu\left(\dfrac{dw}{dt} - Z\right), \end{cases}$$

worin $Y_x = X_y$ ist. Für ein m anliegendes Flächenelement der beliebigen Normalenrichtung n hat man die Componenten der in der Richtung r wirkenden Totalspannung R_n nach den Richtungen x, y, z

$$(2)\quad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) = R_n \cos(rx), \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) = R_n \cos(ry), \\ Z_n = Z_z \cos(nz) \qquad\qquad\qquad = R_n \cos(rz). \end{cases}$$

Die Componente von R_n in beliebiger Richtung s drückt sich aus

$$(3)\quad \begin{cases} S_n = R_n \cos(rs) = X_n \cos(sx) + Y_n \cos(sy) + Z_n \cos(sz) \\ \quad = X_x \cos(nx)\cos(sx) + Y_y \cos(ny)\cos(sy) + Z_z \cos(nz)\cos(sz) \\ \qquad + X_y\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \end{cases}$$

und es liefert diese Gleichung z. B. mit $s = n$ die Normalspannung

$$(4)\quad \begin{cases} N_n = R_n \cos(rn) = X_x \cos^2(nx) + Y_y \cos^2(ny) + Z_z \cos^2(nz) \\ \qquad + 2 X_y \cos(nx)\cos(ny), \end{cases}$$

während die Totalspannung R_n und resultirende Schubspannung wie in § 3 bestimmt bleiben. Da für $\cos(nz) = 0$ nach (2) auch $Z_n = 0$ ist, so wirken die R_n, N_n, T_n aller Flächenelemente, welche senkrecht zur xy-Ebene liegen, in der letzteren selbst.

Nach § 14 hat man zur Bestimmung der Hauptspannungen h

$$(h - X_x)(h - Y_y)(h - Z_z) - (h - Z_z) X_y^2 = 0.$$

Weil $h = Z_z$ eine Wurzel dieser Gleichung ist, so bildet

$$(5)\qquad Z_z = C$$

eine Hauptspannung und damit ist bewiesen, dafs jede Normalspannung, zu welcher keine Schubspannung gehört, als Hauptspannung betrachtet werden kann. Es fällt nun auch eine Axe des Spannungsellipsoides in die Richtungslinie von Z_z, während die beiden andern Hauptspannungen und Halbaxen des Spannungsellipsoides bestimmt sind durch

$$(6)\qquad (h - X_x)(h - Y_y) - X_y^2 = 0$$

oder

$$(7)\qquad h = \tfrac{1}{2}\left(X_x + Y_y \pm \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2}\right).$$

Für die Normalenrichtungen n der durch die Hauptspannungen A, B afficirten Flächenelemente hat man nach § 14, (7)

$$(8)\qquad \cos(ny) = \frac{h - X_x}{X_y^2}\cos(nx) = \frac{X_y}{h - Y_y}\cos(nx), \quad \cos(nz) = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf und bei Beachtung von (6) folgt aus $\cos^2(nx) + \cos^2(ny) + \cos^2(nz) = 1$

$$(9)\qquad \cos(nx) = \pm\sqrt{\frac{h - Y_y}{2h - X_x - Y_y}}.$$

Setzt man in (8) (9) für h den Werth einer der beiden Hauptspannungen A, B ein, so ergeben sich mit den beiden Vorzeichen in (9) die entgegengesetzten Normalenrichtungen derjenigen Flächenelemente, welche durch diese Hauptspannung afficirt werden. Für den Fall, dass die Axen der x, y, z in die Richtungen von A, B, C gelegt werden, gelten die Beziehungen der §§ 15—17 ohne Aenderung.

Specialfall I.

Es sei $Z_z = C = 0$. Dann haben wir nach der letzten Gleichung (2)

$$(10)\qquad Z_n = R_n \cos(rz) = 0, \qquad \cos(rz) = 0.$$

Die Spannungen R_n, N_n, T_n aller durch m gehenden Flächenelemente liegen in der xy-Ebene, auf welche also die Untersuchung in den meisten Fällen beschränkt werden kann. Aus (1) (2) folgen

$$(11)\qquad \frac{dw}{dt} = Z, \qquad Z_n = Z_z = 0.$$

Denkt man sich jetzt die Axen der x, y in die Richtungen der Hauptspannungen A, B gelegt, so liefert § 14 für ein Flächenelement der beliebigen Normalenrichtung n

$$(12)\qquad X_n = A\cos(nx), \quad Y_n = B\cos(ny), \quad Z_n = C\cos(nz) = 0,$$

$$(13)\qquad S_n = R_n\cos(rs) = A\cos(nx)\cos(sy) + B\cos(ny)\cos(sy),$$

$$(14)\qquad N_n = R_n\cos(rn) = A\cos^2(nx) + B\cos^2(ny),$$

$$(15)\qquad R_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 = A^2\cos^2(nx) + B^2\cos^2(ny) = N_n^2 + T_n^2.$$

Für die durch die Hauptschubspannungen afficirten Flächenelemente gelten die Formeln des § 17 mit $C = 0$.

Die Gleichung des Spannungsellipsoides für Coordinatenaxen in den Richtungen der Hauptspannungen ist nach § 15, (1) mit dem aus (12) folgenden Werthe von $Z_n : C$

$$\frac{X_n^2}{A^2} + \frac{Y_n^2}{B^2} = \sin^2(nz). \tag{16}$$

Das Spannungsellipsoid ist hiernach zur Umhüllungsfläche des nach Aussen durch die Ellipse

$$\frac{X_n^2}{A^2} + \frac{Y_n^2}{B^2} = 1 \tag{17}$$

begrenzten Theils der AB-Ebene geworden. Für alle Flächenelemente von gleichen Winkeln (nz) und die anliegenden Flächen elemente entgegengesetzter Normalenrichtungen liegen die Endpunkte der R_n auf den der AB-Ebene beiderseits anliegenden, sich deckenden Ellipsen, deren Halbaxen gleich den Absolutwerthen von $A \sin(nz)$ und $B \sin(nz)$ sind. Die Ellipse (17) entspricht den senkrecht zur AB-Ebene liegenden Flächenelementen. Für den jetzt betrachteten Fall $Z_z = 0$ genügen übrigens vielfach die folgenden bequemeren Formeln.

Specialfall II.

Es interessiren nur die Spannungen für Flächenelemente senkrecht zur xy-Ebene, wobei Z_n von Null verschieden sein kann. Wie oben gefunden, liegen die R_n, N_n, T_n dieser Flächenelemente in der xy-Ebene. Auf letztere lässt sich, abgesehen von ausserhalb gelegenen S_n, die Untersuchung beschränken, wobei die Lage der Flächenelemente nach ihren Spuren zu beurtheilen ist. Nennen wir nun in Uebereinstimmung mit früheren Festsetzungen einen Winkel positiv, wenn (für den aus der positiven Richtung der z-Axe auf die xy-Ebene Sehenden) der den Winkel beschreibende Schenkel sich wie der Zeiger der Uhr rechts herum dreht, bezeichnen durch α den positiven, von 0 bis 360° variirenden Winkel (der Spur) des Flächenelements mit der positiven

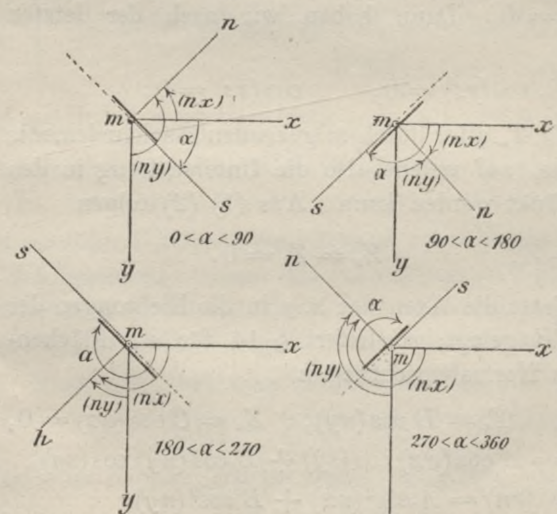

Fig. 9.

Richtung der x-Axe und durch s die Richtung des von x verschiedenen Schenkels von α, dann bestehen für beliebige Flächenelemente senkrecht zur xy-Ebene und ihre erwähnte Richtung s die Gleichungen (Fig. 9):

$$\alpha = 90^0 + (nx) = 180^0 + (ny), \qquad \alpha = (sx) = 90^0 + (sy),$$
$$\sin\alpha = \cos(nx) = -\sin(ny) = \sin(sx) = \cos(sy),$$
$$\cos\alpha = -\sin(nx) = -\cos(ny) = \cos(sx) = -\sin(sy).$$

Damit folgen aus (3) (4) Normalspannung und resultirende Schubspannung in der Richtung s, — die Indices der R_n, N_n, T_n, S_n mögen hier wegbleiben —

$$N = X_x \sin^2\alpha + Y_y \cos^2\alpha - 2X_y \sin\alpha\cos\alpha,$$
$$S = (X_x - Y_y)\sin\alpha\cos\alpha + X_y(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha),$$

oder auch

$$N = \frac{X_x + Y_y}{2} - \frac{X_x - Y_y}{2}\cos 2\alpha - X_y \sin 2\alpha, \tag{18}$$

$$S = \pm T = \frac{X_x - Y_y}{2}\sin 2\alpha - X_y\cos 2\alpha. \tag{19}$$

S ergibt sich positiv oder negativ, je nachdem seine Richtung mit der Richtung s übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist, $T = T_n$ stellt wie immer einen Absolutwerth dar. Die Componenten der Totalspannung R in den Richtungen x, y folgen aus (2)

$$\begin{cases} X_n = X_x \sin\alpha - X_y\cos\alpha, \\ Y_n = X_y\sin\alpha - Y_y\cos\alpha, \end{cases} \tag{20}$$

während $Z_n = 0$ ist. Bezeichnen wir noch den positiven oder negativen spitzen Winkel der Richtungslinie von R mit der Richtung n durch δ, womit in (3) für die hier allein interessirende Richtung s bei ziehendem N Winkel $(rs) = \delta - 90^0$, bei drückendem N Winkel $(rs) = \delta + 90^0$ wird, dann liefern (3) (4)

$$\begin{cases} N = R\cos(rn) = \pm R\cos\delta, \\ S = R\cos(rs) = \pm R\sin\delta, \quad \operatorname{tg}\delta = \dfrac{S}{N}, \end{cases} \tag{21}$$

die + Zeichen gelten für ziehende, die — Zeichen für drückende Normalspannungen N. Als Totalspannung schliesslich haben wir den Absolutwerth

$$R = \sqrt{N^2 + S^2} = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}. \tag{22}$$

Die speciellen Winkel α, welche den durch die Hauptspannungen A, B afficirten Flächenelementen entsprechen, sind nach (8) bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{X_y}{h - X_x} = -\frac{h - Y_y}{X_y}. \tag{23}$$

Die Werthe der Hauptspannungen folgen aus (7). Setzt man in (23) $h = A$, so ergibt sich die Richtungslinie der von A ergriffenen Flächenelemente und der Hauptspannungen B; setzt man $h = B$, so findet sich die Richtungslinie der von B ergriffenen Flächenelemente und der Hauptspannungen A.

Wird die x-Axe parallel der Hauptspannung A gelegt, und für diesen speciellen Fall der Richtungswinkel α des Flächenelements durch β bezeichnet, so entstehen aus (18—20) die einfacheren Beziehungen

$$(24) \qquad N = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\cos 2\beta,$$

$$(25) \qquad S = \frac{A-B}{2}\sin 2\beta,$$

$$(26) \qquad X_n = A\sin\beta, \qquad Y_n = -B\cos\beta.$$

Nach § 17 werden alle Flächenelemente senkrecht zur xy-Ebene, welche Winkel von 45^0 mit den Hauptspannungen einschliessen, durch Hauptschubspannungen afficirt. Wir erhalten aus vorstehenden Gleichungen

für $\beta = 45$ und -135^0 $\quad N = \dfrac{A+B}{2}, \qquad S = \dfrac{A-B}{2},$

$$R = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{A-B}{A+B},$$

„ $\beta = -45$ „ 135^0 $\quad N = \dfrac{A+B}{2}, \qquad S = \dfrac{B-A}{2},$

$$R = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{B-A}{A+B}.$$

Diese Resultate hätten sich auch aus § 17 ergeben und ebenso lassen sich dort oder aus obigen Gleichungen die anderen Verhältnisse für die durch Hauptschubspannungen ergriffenen Flächenelemente entnehmen.

§ 19. Potential der Spannungen.

Es seien die Richtungscosinus $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ beliebiger von einem Punkte $m(x, y, z)$ ausgehender Richtungen n durch α, β, γ bezeichnet. Ist dann bei m der Ausdruck

$$(1) \qquad 2(X_n d\alpha + Y_n d\beta + Z_n d\gamma)$$

das vollständige Differential einer Function von α, β, γ, so werden wir diese Function ein *Potential der Spannungen* daselbst nennen. Die Bedingungen für ein Spannungspotential lauten also nach § 9

$$(2) \qquad \frac{\partial X_n}{\partial\beta} = \frac{\partial Y_n}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial Y_n}{\partial\gamma} = \frac{\partial Z_n}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial Z_n}{\partial\alpha} = \frac{\partial X_n}{\partial\gamma}.$$

Nun bestehen für die Componenten der Totalspannung R_n in den Richtungen x, y, z nach § 11 die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} X_n = X_x\alpha + X_y\beta + X_z\gamma, \\ Y_n = Y_x\alpha + Y_y\beta + Y_z\gamma, \\ Z_n = Z_x\alpha + Z_y\beta + Z_z\gamma, \end{cases}$$

worin im Falle stetiger Spannungen die Coefficienten der α, β, γ unabhängig von den letzteren sind. Mit Rücksicht hierauf lassen sich die Bedingungen (2) schreiben:

$$(4)\qquad X_y = Y_x, \qquad Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z.$$

Da dieselben nach § 12 für stetige Spannungen erfüllt sind, so können wir aussprechen: *Für stetige Spannungen als Functionen des augenblicklichen Ortes existirt bei jedem Punkte m ein Spannungspotential.* Wir werden im IV. Abschnitte eine andere Auffassung stetiger Spannungen kennen lernen.

Welchen Werth hat unser Potential? Das Spannungspotential ist diejenige Function F, deren partielle Derivirten nach α, β, γ die Factoren von $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ in (1) sind. Nun folgen aus § 13, (4)

$$(5)\qquad 2X_n = \frac{\partial N_n}{\partial \alpha}, \qquad 2Y_n = \frac{\partial N_n}{\partial \beta}, \qquad 2Z_n = \frac{\partial N_n}{\partial \gamma}.$$

Daher erhalten wir

$$(6)\qquad dN_n = 2(X_n d\alpha + Y_n d\beta + Z_n d\gamma),$$

es kann die Normalspannung als Spannungspotential angesehen werden. Gleichung (6) gibt an, um wieviel sich die Normalspannung ändert, wenn wir die Richtungscosinus der Normale n des Flächenelements von α, β, γ aus um $d\alpha, d\beta, d\gamma$ wachsen lassen.

Man denke sich die Richtungen n auf die Punkte einer Kugel um $m(x, y, z)$ von beliebigem Radius $\mathfrak{r}$ bezogen. Für ein durch m gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axenrichtungen mit den Richtungen x, y, z übereinstimmen, mögen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Coordinaten eines Kugelpunktes n und $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}, \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ die Coordinaten eines von n aus in der Richtung s um ds entfernten Punktes s bedeuten. Die Richtungen der Punkte n, s von m aus seien durch n, g bezeichnet. Wir haben dann

$$(7)\qquad \cos(nx) = \alpha = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{r}}, \quad \cos(ny) = \beta = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{r}}, \quad \cos(nz) = \gamma = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{r}},$$

$$(8)\qquad \cos(sx) = \frac{d\mathfrak{x}}{ds}, \qquad \cos(sy) = \frac{d\mathfrak{y}}{ds}, \qquad \cos(sz) = \frac{d\mathfrak{z}}{ds}.$$

Mit Rücksicht auf

$$(9)\qquad \frac{ds}{\mathfrak{r}} = (gn) = d\sigma$$

folgen daraus

(10) $d\alpha = d\sigma \cos(sx)\,, \quad d\beta = d\sigma \cos(sy)\,, \quad d\gamma = d\sigma \cos(sz)\,,$

und durch Substitution dieser Werthe in (6) entsteht die Gleichung

$$dN_n = 2\Big[X_n \cos(sx) + Y_n \cos(sy) + Z_n \cos(sz)\Big] d\sigma,$$

oder nach § 3, (5) und weil $g \perp n$,

$$(11) \qquad \frac{dN_n}{d\sigma} = 2S_n = 2R_n \cos(rs) = 2T_n \cos(ts)\,,$$

worin r, t die Richtungen der Totalspannung R_n und resultirenden Schubspannung T_n bedeuten. Gehen wir also von der Normalenrichtung n aus nach der zu n senkrechten Richtung s hin um den kleinen Winkel $d\sigma$ vor, so ist der Differentialquotient $dN_n : d\sigma$ gleich der Componente S_n von R_n oder auch von T_n in der Richtung s.

Existirt bei $m(x, y, z)$ ein Potential der Spannungen, dann ist auch der Ausdruck

$$(12) \qquad 2(X_n d\mathfrak{x} + Y_n d\mathfrak{y} + Z_n d\mathfrak{z})$$

für die Punkte oder Flächenelemente einer um m gelegten kleinen Kugel vom Radius $\mathfrak{r} = dn$ das vollständige Differential einer Function von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Denn die Bedingung hierfür lautet

$$(13) \qquad \frac{\partial X_n}{\partial \mathfrak{y}} = \frac{\partial Y_n}{\partial \mathfrak{x}}\,, \qquad \frac{\partial Y_n}{\partial \mathfrak{z}} = \frac{\partial Z_n}{\partial \mathfrak{y}}\,, \qquad \frac{\partial Z_n}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{\partial X_n}{\partial \mathfrak{z}}\,,$$

woraus mit Rücksicht auf (3) und (7) wieder die Gleichungen (4) entstehen. Ferner haben wir aus (5) (7)

$$(14) \qquad 2X_n = \frac{\partial N_n}{\partial \mathfrak{x}} dn\,, \quad 2Y_n = \frac{\partial N_n}{\partial \mathfrak{y}} dn\,, \quad 2Z_n = \frac{\partial N_n}{\partial \mathfrak{z}} dn\,,$$

und damit aus (12)

$$(15) \qquad dN_n dn = 2(X_n d\mathfrak{x} + Y_n d\mathfrak{y} + Z_n d\mathfrak{z})\,,$$

sodass der Ausdruck (12) das vollständige Differential der Function $N_n dn$ wird. Letztere ist dn-mal so gross als das Potential der Spannungen und dieses gleich dem Integral von (12) für den Kugelradius $dn = 1$. Mit Rücksicht auf (8) folgt aus (15)

$$(16) \qquad \frac{dN_n}{ds} dn = 2S_n = 2N_s\,,$$

wie sich auch nach (11) mit $d\sigma = ds : dn$ ergibt.

Aus Gleichung (11) lassen sich u. A. folgende Schlüsse ziehen: *Geht man von einer beliebigen Richtung n aus nach irgend einer dazu senkrechten Richtung s hin um den kleinen Winkel dσ vor* (oder auch, geht man auf einer um m gelegten unendlich kleinen Kugelfläche von dem hinsichtlich m in der Richtung n gelegenen Punkte zu einem von n aus in der Richtung s um ds entfernten Punkte über), *dann ändert sich die Normalspannung umsomehr, je grösser die Com-*

ponente der Schubspannung T_n in der Richtung s ist. Die Normalspannung wächst (in positivem Sinne) *am stärksten in der Richtung $s = t$ der resultirenden Schubspannung, sie nimmt am stärksten ab* (in negativem Sinne zu) *in der t entgegengesetzten Richtung, und sie bleibt constant beim Vorgehen in jeder der zwei Richtungen senkrecht zu t. Nach keiner Richtung s wächst die Normalspannung, wenn $T_n = 0$ ist, in welchem Falle für die Richtung n eine Hauptspannung eintritt* (§ 14). *Existiren bei m überhaupt keine Schubspannungen, dann sind alle Normalspannungen von gleichem Werthe, und umgekehrt verschwinden im Falle gleicher Normalspannungen sämmtliche Schubspannungen.*

§ 20. **Ueber die Gesetze stetiger Spannungen.**

Vergleicht man die in § 3 aufgestellten Formeln für die Spannungen auf Flächenelemente beliebiger augenblicklicher Normalenrichtungen n mit den in § 4 gegebenen Beziehungen für die Verschiebungen der Punkte beliebiger anfänglicher Richtungen n, so zeigt sich, dass dieselben, abgesehen von den Bezeichnungen der Spannungen und Verschiebungen durch grosse und kleine lateinische Buchstaben, vollständig übereinstimmen (die Gleichungen für S_n, N_n, T_n, R_n, P_{ns}, G_{ns} mit denen für s_n, n_n, t_n, p_{ns}, g_{ns}). Die alle andern Spannungscomponenten bestimmenden Componenten der Totalspannung R_n in den Richtungen x, y, z sind nach § 11:

$$(1)\qquad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz), \end{cases}$$

und die alle andern Verschiebungscomponenten bestimmenden Componenten der Totalverschiebung r_n in den Richtungen x, y, z nach § 21:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_n = x_x \cos(nx) + x_y \cos(ny) + x_z \cos(nz), \\ y_n = y_x \cos(nx) + y_y \cos(ny) + y_z \cos(nz), \\ z_n = z_x \cos(nx) + z_y \cos(ny) + z_z \cos(nz). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind für stetige Spannungen und Verschiebungen die Coefficienten der Cosinus unabhängig von den Richtungen n. Während nun aber für stetige Verschiebungen weitere allgemeine Beziehungen neben den durch die erwähnten bedingten nicht existiren, haben wir für stetige Spannungen noch

$$(3)\qquad X_y = Y_x, \qquad Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z,$$

und damit überhaupt (§ 13)

$$(4)\qquad S_n = N_s, \qquad G_{ns} = 2S_n.$$

Wir können also sagen, dass die Gesetze stetiger Spannungen einen speciellen Fall der Gesetze stetiger Verschiebungen bilden, mit der Massgabe jedoch, dass die in den Gleichungen auftretenden Indices und Richtungen n für diese die anfänglichen Richtungen der verschobenen Punkte, für jene die augenblicklichen Normalenrichtungen der afficirten Flächenelemente bedeuten. Die Beziehungen zwischen stetigen Spannungen bei einem Punkte m lassen sich aus den im folgenden Abschnitte zu entwickelnden Beziehungen zwischen stetigen Verschiebungen bei m entnehmen, während das Umgekehrte nicht der Fall ist.

In einem Falle jedoch bestehen die Gesetze stetiger Spannungen auf Flächenelemente beliebiger augenblicklicher Normalenrichtungen n zugleich für stetige Verschiebungen der Punkte beliebiger anfänglicher Richtungen n, nämlich wenn für letztere die Gleichungen

(5) $$x_y = y_x\,, \qquad y_z = z_y\,, \qquad z_x = x_z$$

gelten, womit allgemein

(6) $$s_n = n_s\,, \qquad g_{ns} = 2s_n\,.$$

Wir werden sehen, dass dies immer zutrifft, wenn ein Potential der Verrückungen und damit auch ein Potential der Verschiebungen existirt (§§ 30, 31). Die Beziehungen für stetige Potentialverschiebungen sind demnach bereits abgeleitet.

Man kann sich fragen, ob die Spannungsgesetze nicht zweckmässig nach Erledigung der Verschiebungsgesetze durch Specialisirung zu entwickeln seien. Allein da die ersteren vielfach unabhängig von den letzteren zur Verwendung kommen und Potentialverschiebungen besonders wichtig sind, so erschien es zweckmässig, das Verständniss der betreffenden Gesetze nicht unnöthig zu erschweren und vom Einfacheren zum Complicirteren überzugehen. Uebrigens ist die erwähnte Specialisirung erst durch die hier vorgetragene allgemeine Theorie der Verschiebungen ermöglicht.

III. Abschnitt.

Beziehungen zwischen stetigen Verschiebungen.

Die Verrückungen und Verschiebungen in der Umgebung eines Körperpunktes m hat man bei allen bisherigen Elasticitätsuntersuchungen für einen bestimmten Zeitpunkt als stetige Functionen des anfänglichen Orts, der Coordinaten zu Beginn der Verrückungen, betrachtet. Ausserdem pflegte man die Verschiebungen gegen 1 verschwindend klein anzunehmen, eine Beschränkung, welche wir bei der folgenden Untersuchung stetiger Verschiebungen fallen lassen. Das Coordinatensystem, hinsichtlich dessen die Bewegung der Körperpunkte untersucht wird, soll seinerseits in beliebiger Bewegung sein. Die angenommenen Verrückungen kann man sich als wirklich eintretende oder als virtuelle vorstellen, unter *virtuellen Verrückungen* solche verstanden, welche zwar nach den allgemeinen Bedingungen des Systems (feste Punkte und Verbindungen, vorgeschriebene Bahnen u. s. w.) denkbar sind, ohne dass sie mit Rücksicht auf die augenblicklich massgebenden speciellen Ursachen (äussere Kräfte, Temperaturänderungen u. s. w.) wirklich einzutreten brauchen. Was für virtuelle Verrückungen gilt, muss also auch auf die *actuellen Verrückungen* Anwendung finden. Der betrachtete Körper darf in beliebig vielen Schnitten jeder Grösse und Form Unstetigkeiten der Verschiebungen enthalten, wenn nur die in § 8 erwähnten und § 21 specieller gefassten Bedingungen erfüllt werden.

§ 21. Verschiebungen für beliebige Richtungen.

Vor Eintritt der betrachteten Bewegungen waren die Coordinaten eines Punktes m x, y, z und diejenigen eines in der Richtung n um dn entfernten Punktes n $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Durch die fragliche Bewegung möge m nach $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ gelangt sein. *Wir setzen ξ, η, ζ und deren Differentialquotienten nach x, y, z zwischen m und n als solche stetige Functionen des Orts voraus, dass mit $\xi = f(x, y, z)$ dem Taylor'schen Lehrsatze zufolge die Aenderung von $x + dx$ sich ausdrückt*

$$f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \xi}{\partial z}\,dz + \cdots$$

und hierin die nicht angeschriebenen Glieder der Reihe rechts, welche mit Quadraten, Producten und höheren Potenzen von dx, dy, dz multiplicirt sind, vernachlässigt werden können. Analoges soll für die Aenderungen von $y+dy$, $z+dz$ gelten. Man hat also, wenn $d\xi$ das vollständige Differential von ξ nach den Veränderlichen x, y, z bedeutet,

$$f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) = \xi + d\xi.$$

In gleicher Weise ergeben sich die Aenderungen der Coordinaten $y+dy$ und $z+dz$ des Punktes n gleich $\eta + d\eta$ und $\zeta + d\zeta$. Die Componenten des Weges, welchen der Punkt n hinsichtlich des Punktes m zurückgelegt hat, werden damit in den Richtungen x, y, z (Fig. 10)

$$x + dx + \xi + d\xi - (x + \xi) - dx = d\xi,$$
$$y + dy + \eta + d\eta - (y + \eta) - dy = d\eta,$$
$$z + dz + \zeta + d\zeta - (z + \zeta) - dz = d\zeta,$$

und die Componenten der Totalverschiebung r_n in den Richtungen x, y, z drücken sich aus

$$(1)\quad \begin{cases} x_n = \dfrac{d\xi}{dn} = r_n \cos(rx), \\[2mm] y_n = \dfrac{d\eta}{dn} = r_n \cos(ry), \\[2mm] z_n = \dfrac{d\zeta}{dn} = r_n \cos(rz). \end{cases}$$

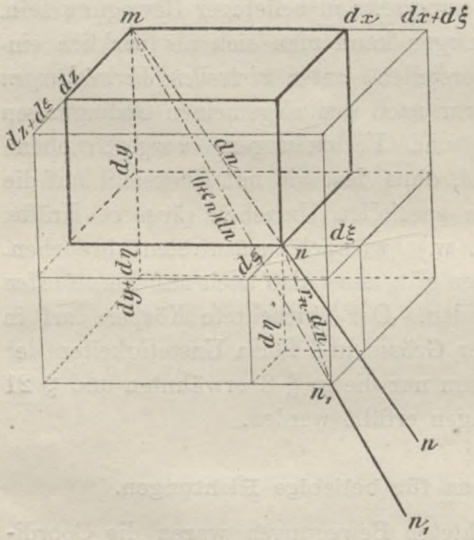

Fig. 10.

Dividiren wir die Ausdrücke der vollständigen Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ durch dn und berücksichtigen

$$\cos(nx) = \frac{dx}{dn},$$
$$\cos(ny) = \frac{dy}{dn},$$
$$\cos(nz) = \frac{dz}{dn},$$

so folgen

$$(2)\quad \begin{cases} x_n = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\cos(nx) + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\cos(ny) + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\cos(nz), \\[2mm] y_n = \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\cos(nx) + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\cos(ny) + \dfrac{\partial \eta}{\partial z}\cos(nz), \\[2mm] z_n = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\cos(nx) + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\cos(ny) + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\cos(nz). \end{cases}$$

Sind nun für die in Frage kommenden, m benachbarten Punkte *aller* Richtungen n die Verschiebungen x_n, y_n, z_n stetige Functionen des Orts, so werden die in (2) auftretenden partiellen Differentialquotienten eindeutig bestimmt; wir erhalten

$$(3)\quad \begin{cases} \text{für } n = x & x_x = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}, \quad y_x = \dfrac{\partial \eta}{\partial x}, \quad z_x = \dfrac{\partial \zeta}{d x}, \\ \;\;\text{„}\;\; n = y & x_y = \dfrac{\partial \xi}{\partial y}, \quad y_y = \dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \quad z_y = \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ \;\;\text{„}\;\; n = z & x_z = \dfrac{\partial \xi}{d z}, \quad y_z = \dfrac{\partial \eta}{\partial z}, \quad z_z = \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}, \end{cases}$$

und es stellen die drei ersten, drei folgenden und drei letzten partiellen Differentialquotienten die Componenten in den Richtungen x, y, z von r_x, bezw. r_y und r_z dar. Umgekehrt sind die Verschiebungen bei m so lange stetige Functionen des Orts, als die partiellen Differentialquotienten in (2) dieselben Werthe behalten. Dies ist in Körpern, welche in beliebigen Schnitten Unstetigkeiten der Verschiebungen aufweisen, dann der Fall, wenn wir vom Punkte m aus nur solche Punkte n in Betracht ziehen, welche mit m auf der gleichen Seite jedes in Betracht kommenden Unstetigkeitschnitts liegen, d. h. auch, wenn wir alle Differentialquotienten in (2) auf die Seite von m beziehen. So wollen wir uns bei Körpern mit Unstetigkeiten der Verschiebungen immer verfahren denken.

Mit den vorstehenden Werthen von x_n, y_n, z_n gelten nun sämmtliche Gleichungen der §§ 4—6 und folgt z. B. durch Substitution von (2) in § 4, (9) die Normalverschiebung des Punktes n

$$(4)\quad \begin{cases} n_n = x_x \cos^2(nx) + y_y \cos^2(ny) + z_z \cos^2(nz) \\ \qquad\qquad + g_{xy} \cos(nx)\cos(ny) + g_{yz}\cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad\qquad + g_{zx}\cos(nz)\cos(nx), \end{cases}$$

worin

$$(5)\quad \begin{cases} g_{xy} = x_y + y_x = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x}, \\ g_{yz} = y_z + z_y = \dfrac{\partial \eta}{\partial z} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ g_{zx} = z_x + x_z = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}. \end{cases}$$

Werden die Gleichungen (2) quadrirt und dann addirt, so folgt das Quadrat der Totalverschiebung unseres Punktes n

$$(6)\quad \begin{cases} r_n^2 = r_x^2 \cos^2(nx) + r_y^2 \cos^2(ny) + r_z^2 \cos^2(nz) \\ \qquad\qquad + 2p_{xy}\cos(nx)\cos(ny) + 2p_{yz}\cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad\qquad + 2p_{zx}\cos(nz)\cos(nx), \end{cases}$$

worin, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Richtungen r der Totalverschiebungen r_x, r_y, r_z bedeuten, mit Rücksicht auf § 6, (4)

$$(7)\qquad \begin{cases} p_{xy} = x_x x_y + y_x y_y + z_x z_y = r_x r_y \cos(\mathfrak{x}\mathfrak{y}), \\ p_{yz} = x_y x_z + y_y y_z + z_y z_z = r_y r_z \cos(\mathfrak{y}\mathfrak{z}), \\ p_{zx} = x_z x_x + y_z y_x + z_z z_x = r_z r_x \cos(\mathfrak{z}\mathfrak{x}). \end{cases}$$

Die drei letzten Glieder in (6) verschwinden, wenn r_x, r_y, r_z zu einander senkrecht sind.

Da die für Punkt n abgeleiteten Verschiebungen für alle m genügend benachbarten Punkte der anfänglichen Richtung n gelten, so wollen wir sie auch einfach Verschiebungen für die Richtung n oder *Verschiebungen der Richtung* n nennen. Die Gleichungen (2) zeigen, dass für zwei einander entgegengesetzte Richtungen n die Totalverschiebungen von gleicher Grösse und entgegengesetzten Richtungen sind. Alle Punkte, welche zu Anfang der betrachteten Verschiebungen auf einem Linienelement oder Flächenelement bei m lagen, sind auf einem solchen Linienelement oder Flächenelement geblieben. Da aber jede Linie aus Linienelementen und jede Fläche aus Flächenelementen zusammengesetzt ist, so wird eine Linie oder Fläche, welche innerhalb eines Körpertheils mit stetigen Verschiebungen vor Eintritt der letzteren durch gewisse Punkte belegt war, auch nachher bei veränderter Form durch die gleichen Punkte eingenommen sein. Zu beachten ist bei diesem Schlusse, dass man die Grenzen der Elemente beliebig wählen kann. Auch der Oberfläche eines Körpers oder Körpertheils mit stetigen Verschiebungen liegen nach wie vor die gleichen Punkte an, und ebenso bleiben die auf jeder Seite eines Unstetigkeitsschnitts oder diesem anliegend gewesenen Punkte auf der fraglichen Seite oder Grenzfläche. Auf *verschiedenen* Seiten eines Unstetigkeitsschnitts benachbart gewesene Punkte jedoch können sich beliebig entfernen und der Unstetigkeitsschnitt selbst kann seine Form ändern oder zu einem Hohlraum werden.

§ 22. **Dehnungen, Drehungen, Gleitungen und Schiebungen beliebiger Richtungen.**

Wir gehen von den in §§ 5, 6 aufgestellten Beziehungen aus. Für die Dehnung e_n der Verbindungsgeraden eines Punktes n, welcher anfänglich von m aus in der Richtung n lag, ergab sich

$$(1)\qquad (1+e_n)^2 = (1+n_n)^2 + t_n^2 = 1 + 2n_n + r_n^2.$$

Substituirt man in diese Gleichung n_n, r_n^2 nach § 21, (4), (6), so folgt

$$(2)\quad \begin{cases} (1+e_n)^2 = (1+e_x)^2\cos^2(nx) \\ \qquad\qquad + (1+e_y)^2\cos^2(ny) + (1+e_z)^2\cos^2(nz) \\ \qquad\qquad + 2q_{xy}\cos(nx)\cos(ny) + q_{yz}\cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad\qquad + 2q_{zx}\cos(nz)\cos(nx), \end{cases}$$

worin, wenn x_1, y_1, z_1 die aus x, y, z entstehenden Richtungen bedeuten,

$$(3)\qquad \begin{cases} q_{xy} = (1+e_x)(1+e_y)\cos(x_1 y_1) = g_{xy} + p_{xy}, \\ q_{yz} = (1+e_y)(1+e_z)\cos(y_1 z_1) = g_{yz} + p_{yz}, \\ q_{zx} = (1+e_z)(1+e_x)\cos(z_1 x_1) = g_{zx} + p_{zx}, \end{cases}$$

während die g und p in § 21 ausgedrückt sind. — Für die Drehungen i_z, i_y, i_x des Punktes n um Axen durch m in den Richtungen x, y, z gelten die Gleichungen des § 5 mit den in § 21 gegebenen Werthen der x_n, y_n, z_n. Da jetzt dieselbe Dehnung und dieselben Drehungen für alle m benachbarten Punkte der anfänglichen Richtung n gelten, so wollen wir dieselben auch einfach als Dehnung und Drehungen für die Richtung n oder *Dehnung und Drehungen der Richtung* n bezeichnen.

Sind bezüglich des Punktes m für zwei beliebige Punkte n, s die Totalverschiebungen durch r_n, r_s, deren Richtungen r durch $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$, die Dehnungen durch e_n, e_s und die neuen Richtungen durch n_1, s_1 bezeichnet, so haben wir mit

$$(4)\qquad g_{ns} = r_n \cos(\mathfrak{n} s) + r_s \cos(\mathfrak{s} n) = s_n + n_s,$$

$$(5)\qquad p_{ns} = r_n r_s \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{s}) = x_n x_s + y_n y_s + z_n z_s,$$

$$(6)\qquad q_{ns} = (1+e_n)(1+e_s)\cos(n_1 s_1) - \cos(ns)$$

die Beziehung

$$(7)\qquad q_{ns} = g_{ns} + p_{ns},$$

unter q_{ns}, g_{ns}, p_{ns} die Schiebung, Normalgleitung und Totalgleitung der Punkte n, s verstanden. Nach § 4, (8) mit § 21, (2) ist jetzt die Componente von r_n in der Richtung s

$$(8)\qquad \begin{cases} s_n = \left[x_x \cos(nx) + x_y \cos(ny) + x_z \cos(nz)\right]\cos(sx) \\ \quad + \left[y_x \cos(nx) + y_y \cos(ny) + y_z \cos(nz)\right]\cos(sy) \\ \quad + \left[z_x \cos(nx) + z_y \cos(ny) + z_z \cos(nz)\right]\cos(sz) \end{cases}$$

und die Componente von r_s in der Richtung n

$$(9)\qquad \begin{cases} n_s = \left[x_x \cos(sx) + x_y \cos(sy) + x_z \cos(sz)\right]\cos(nx) \\ \quad + \left[y_x \cos(sx) + y_y \cos(sy) + y_z \cos(sz)\right]\cos(ny) \\ \quad + \left[z_x \cos(sx) + z_y \cos(sy) + z_z \cos(sz)\right]\cos(nz). \end{cases}$$

Durch Addition dieser Ausdrücke folgt die Normalgleitung

$$(10)\begin{cases} g_{ns} = 2x_x \cos(nx)\cos(sx) + 2y_y \cos(ny)\cos(sy) + 2z_z \cos(nz)\cos(sz) \\ \qquad + g_{xy}\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\ \qquad + g_{yz}\left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\ \qquad + g_{zx}\left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right]. \end{cases}$$

Nach § 21, (2) sind die Componenten der Totalverschiebung r_s (der Richtung s) in den Richtungen x, y, z

$$x_s = x_x \cos(sx) + x_y \cos(sy) + x_z \cos(sz),$$
$$y_s = y_x \cos(sx) + y_y \cos(sy) + y_z \cos(sz),$$
$$z_s = z_x \cos(sx) + z_y \cos(sy) + z_z \cos(sz).$$

Multiplicirt man die erste, zweite und dritte dieser Gleichungen mit den entsprechenden Gleichungen § 21, (2), so entsteht zufolge (5)

$$(11)\begin{cases} p_{ns} = r_x^2 \cos(nx)\cos(sx) \\ \qquad + r_y^2 \cos(ny)\cos(sy) + r_z^2 \cos(nz)\cos(sz) \\ \qquad + p_{xy}\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\ \qquad + p_{yz}\left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\ \qquad + p_{zx}\left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right] \end{cases}$$

und werden (10) und (11) addirt, dann ergiebt sich die Schiebung

$$(12)\begin{cases} q_{ns} = (1+e_x)^2 \cos(nx)\cos(sx) + (1+e_y)^2 \cos(ny)\cos(sy) \\ \qquad\qquad + (1+e_z)^2 \cos(nz)\cos(sz) \\ \qquad + q_{xy}\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\ \qquad + q_{yz}\left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\ \qquad + q_{zx}\left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right] - \cos(ns). \end{cases}$$

Da jetzt dieselben Werthe von q_{ns}, g_{ns}, p_{ns} für alle dem Punkte m genügend benachbart gewesenen Punkte der anfänglichen Richtungen n, s gelten, so werden wir auch kurz von den q_{ns}, g_{ns}, p_{ns} für die Richtungen n, s oder von *Schiebung, Normalgleitung und Totalgleitung der Richtungen* n, s sprechen. Für $s = n$ folgen

$$(13) \quad g_{nn} = 2n_n, \qquad p_{nn} = r_n^2, \qquad q_{nn} = e_n(2 + e_n),$$

und damit geht Gleichung (7) in (1) über.

§ 23. Die Hauptverschiebungen.

Mit den Bezeichnungen (5) des § 21 hat man nach § 21, (4) und § 22, (10) die Normalverschiebung einer beliebigen Richtung n und die Normalgleitung zweier beliebiger Richtungen n, s

$$(1)\begin{cases} n_n = x_x \cos^2(nx) + y_y \cos^2(ny) + z_z \cos^2(nz) \\ \qquad\qquad + g_{xy}\cos(nx)\cos(ny) + g_{yz}\cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad\qquad + g_{zx}\cos(nz)\cos(nx), \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} g_{ns} = 2x_x\cos(nx)\cos(sx) \\ \qquad + 2y_y\cos(ny)\cos(sy) + 2z_z\cos(nz)\cos(sz) \\ \qquad + g_{xy}\Big[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\Big] \\ \qquad + g_{yz}\Big[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\Big] \\ \qquad + g_{zx}\Big[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\Big]. \end{cases}$$

Gleichung (2) liefert die Gleitungen von n mit x, y, z

$$(3)\qquad\begin{cases} g_{nx} = 2x_x\cos(nx) + g_{xy}\cos(ny) + g_{zx}\cos(nz), \\ g_{ny} = 2y_y\cos(ny) + g_{xy}\cos(nx) + g_{yz}\cos(nz), \\ g_{nz} = 2z_z\cos(nz) + g_{zx}\cos(nx) + g_{yz}\cos(ny). \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (2)

$$(4)\qquad\begin{cases} g_{ns} = g_{nx}\cos(sx) + g_{ny}\cos(sy) + g_{nz}\cos(sz) \\ \quad\;\; = g_{sx}\cos(nx) + g_{sy}\cos(ny) + g_{sz}\cos(nz) \end{cases}$$

und hieraus mit $s = n$ wegen $g_{nn} = 2n_n$

$$(5)\qquad 2n_n = g_{nx}\cos(nx) + g_{ny}\cos(ny) + g_{nz}\cos(nz).$$

Damit sind die Normalverschiebung jeder Richtung n und die Normalgleitung von n mit beliebigen andern Richtungen s durch die Normalgleitungen von n mit den Richtungen x, y, z ausgedrückt.

Die mathematischen Maxima und Minima der Normalverschiebungen bei einem Punkte m nennen wir *Hauptverschiebungen* daselbst. Da die Function n_n von der in § 8 untersuchten Form (3) ist, so folgen die Verhältnisse der Hauptverschiebungen aus den dort abgeleiteten Gleichungen mit $\varphi = n_n$, $a = x_x$, $b = y_y$, $c = z_z$, $d = \frac{1}{2}g_{xy}$, $e = \frac{1}{2}g_{yz}$, $f = \frac{1}{2}g_{zx}$.

Die Werthe h der Hauptverschiebungen sind bestimmt durch die Gleichung

$$(6)\begin{cases} 4(h - x_x)(h - y_y)(h - z_z) - (h - x_x)g_{yz}^2 - (h - y_y)g_{zx}^2 \\ \qquad\qquad - (h - z_z)g_{xy}^2 - g_{xy}\,g_{yz}\,g_{zx} = 0, \end{cases}$$

welche nach Potenzen von h geordnet lautet

$$(7)\begin{cases} 4h^3 - 4h^2(x_x + y_y + z_z) \\ \qquad + 4h\left(x_xy_y + y_yz_z + z_zx_x - \dfrac{g_{xy}^2 + g_{yz}^2 + g_{zx}^2}{4}\right) \\ \qquad - (4x_xy_yz_z - x_x\,g_{yz}^2 - y_y\,g_{zx}^2 - z_z\,g_{xy}^2 + g_{xy}g_{yz}g_{zx}) = 0. \end{cases}$$

Da sich in § 26 zeigen wird, dass die Totalverschiebungen r_n wie die Halbmesser eines Ellipsoids variiren, so sind auch sämmtliche n_n reell und es hat Gleichung (7) drei, im Allgemeinen verschiedene, reelle Wurzeln, welche wir durch $h = a$, $h = b$, $h = c$ bezeichnen. Substituirt man einen dieser Werthe in

$$(8) \qquad \begin{cases} s_1 = (h - x_x)\, 2 g_{yz} + g_{zx}\, g_{xy}, \\ s_2 = (h - y_y)\, 2 g_{zx} + g_{xy}\, g_{yz}, \\ s_3 = (h - z_z)\, 2 g_{xy} + g_{yz}\, g_{zx}, \end{cases}$$

so folgen nach § 8 aus

$$(9) \qquad \cos(nx) = \frac{s_2 s_3}{w}, \qquad \cos(ny) = \frac{s_3 s_1}{w}, \qquad \cos(nz) = \frac{s_1 s_2}{w}$$

mit den beiden Vorzeichen von

$$(10) \qquad w = \pm \sqrt{(s_1 s_2)^2 + (s_2 s_3)^2 + (s_3 s_1)^2}$$

die zwei einander entgegengesetzten Richtungen n, für welche diese Hauptverschiebung eintritt.

Nach § 8, (4) und obigen Gleichungen (3) bestehen für jede Hauptverschiebung h die Beziehungen

$$(11) \qquad 2h \cos(nx) = g_{nx}, \quad 2h \cos(ny) = g_{ny}, \quad 2h \cos(nz) = g_{nz},$$

worin n die Richtung für h bedeutet. Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (4) die Normalgleitung zweier Richtungen n, s, für deren eine die Hauptverschiebung h eintritt, während die andere ganz beliebig ist,

$$(12) \qquad g_{ns} = h \cos(ns).$$

Die Normalgleitung zweier zu einander senkrechter Richtungen n, s, *unter welchen sich die Richtung einer Hauptverschiebung befindet, ist gleich Null.* Wenn nun h_1, h_2 zwei Hauptverschiebungen, n_1, n_2 die zugehörigen Richtungen n, dann ergiebt sich mit $h = h_1$, $n = n_1$, $s = n_2$, bezw. $h = h_2$, $n = n_2$, $s = n_1$,

$$g_{ns} = h_1 \cos(n_1 n_2) = h_2 \cos(n_2 n_1),$$

und weil h_1, h_2 im Allgemeinen verschieden sind, so muss $\cos(n_1 n_2) = 0$ sein: *Die Richtungen* n, *welchen die drei Hauptverschiebungen entsprechen, bilden mit einander Winkel von* 90^0; *für je zwei dieser Richtungen existiren keine Normalgleitungen.*

Werden jetzt die Axen x, y, z parallel den Richtungen der Hauptverschiebungen a, b, c gelegt, so folgen aus (1), (2) die Normalverschiebung einer beliebigen Richtung n und die Normalgleitung je zweier beliebiger Richtungen n, s

$$(13) \qquad n_n = a \cos^2(nx) + b \cos^2(ny) + c \cos^2(nz),$$

(14) $g_{ns} = 2a\cos(nx)\cos(sx) + 2b\cos(ny)\cos(sy) + 2c\cos(nz)\cos(sz)$,

während die Gleitungen der Richtung n mit den Richtungen x, y, z nach (3) folgen

(15) $g_{nx} = 2a\cos(nx)$, $g_{ny} = 2b\cos(ny)$, $g_{nz} = 2c\cos(nz)$.

Auch die Gleichungen für r_n^2, p_{ns}, $(1 + e_n)^2$, q_{ns} lassen sich bei den angenommenen Axenrichtungen wegen $q_{xy} = p_{xy}$, $q_{yz} = p_{yz}$ $q_{zx} = p_{zx}$ noch anders als in den §§ 24, 25 ausdrücken.

Denken wir uns Gleichung (7) das eine Mal wie oben für beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen, das andere Mal für den Fall angeschrieben, dass die Coordinatenaxen parallel den Hauptverschiebungen liegen, so folgen

(16) $$x_x + y_y + z_z = a + b + c = \omega,$$

(17) $$4(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) - g_{xy}^2 - g_{yz}^2 - g_{zx}^2 = 4(ab + bc + ca),$$

(18) $$4x_x y_y z_z - x_x g_{yz}^2 - y_y g_{zx}^2 - z_z g_{xy}^2 + g_{xy} g_{yz} g_{zx} = 4abc.$$

Aus (16) schliesst man: *Die Summe der Normalverschiebungen für je drei im selben Punkte zu einander senkrechte Richtungen hat einen festen Werth.* — Liegt eine der Coordinatenaxen parallel einer Hauptverschiebung, so ist in (16) einer der Summanden links identisch mit derselben und daher folgt: *Für alle Paare in einem Punkte m zu einander senkrechter Richtungen, welche mit der Richtung einer Hauptverschiebung rechte Winkel einschliessen, hat die Summe der Normalverschiebungen denselben Werth.*

Nach (16) bis (18) ist eine Hauptverschiebung gleich Null, wenn für beliebige gerichtete Coordinatenaxen

(19) $$4x_x y_y z_z - x_x g_{yz}^2 - y_y g_{zx}^2 - z_z g_{xy}^2 + g_{xz} g_{yz} g_{zx} = 0;$$

es sind zwei Hauptverschiebungen gleich Null, wenn neben (19) erfüllt ist

(20) $$4(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) - g_{xy}^2 - g_{yz}^2 - g_{zx}^2 = 0;$$

und wenn alle drei Hauptverschiebungen verschwinden, so hat man auch

$$x_x + y_y + z_z = 0;$$

es existiren dann nach (13), (14) beim betrachteten Punkte m weder Normalverschiebungen noch Normalgleitungen, doch können Transversalverschiebungen vorkommen.

§ 24. Grenzverschiebungen.

Mit den Beziehungen (7) des § 21 haben wir nach § 21, (6) und § 22, (11) für die Totalverschiebung r_n einer beliebigen Richtung n und die Totalgleitung p_{ns} zweier beliebiger Richtungen n, s

$$(1)\begin{cases} r_n^2 = r_x^2\cos^2(nx) + r_y^2\cos^2(ny) + r_z^2\cos^2(nz) \\ \qquad + 2p_{xy}\cos(nx)\cos(ny) + 2p_{yz}\cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad + 2p_{zx}\cos(nz)\cos(nx), \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} p_{ns} = r_x^2\cos(nx)\cos(sx) + r_y^2\cos(ny)\cos(sy) + r_z^2\cos(nz)\cos(sz) \\ \qquad + p_{xy}\Big[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\Big] \\ \qquad + p_{yz}\Big[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\Big] \\ \qquad + p_{zx}\Big[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\Big]. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung liefert speciell für $s = x, y, z$

$$(3)\qquad \begin{cases} p_{nx} = r_x^2\cos(nx) + p_{xy}\cos(ny) + p_{zx}\cos(nz), \\ p_{ny} = r_y^2\cos(ny) + p_{xy}\cos(nx) + p_{yz}\cos(nz), \\ p_{nz} = r_z^2\cos(nz) + p_{zx}\cos(nx) + p_{yz}\cos(ny). \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addirt, so folgt

$$(4)\qquad \begin{cases} p_{ns} = p_{nx}\cos(sx) + p_{ny}\cos(sy) + p_{nz}\cos(nz) \\ \quad\;\; = p_{sx}\cos(nx) + p_{sy}\cos(sy) + p_{sz}\cos(sz) \end{cases}$$

und hieraus mit $s = n$ wegen $p_{nn} = r_n^2$

$$(5)\qquad r_n^2 = p_{nx}\cos(nx) + p_{ny}\cos(ny) + p_{nz}\cos(nz).$$

Die mathematischen Maxima und Minima der Totalverschiebungen bei einem Punkte m bezeichnen wir als *Grenzverschiebungen* daselbst. Da die Function r_n^2 von der in § 8 behandelten Form (3) ist, so gelten die dort abgeleiteten Beziehungen auch für die Grenzverschiebungen mit $\varphi = r_n^2$, $a = r_x^2$, $b = r_y^2$, $c = r_z^2$, $d = p_{xy}$, $e = p_{yz}$, $f = p_{zx}$.

Die Quadrate h der Grenzverschiebungen sind bestimmt durch die Gleichung

$$(6)\begin{cases} (h - r_x^2)(h - r_y^2)(h - r_z^2) \\ -(h - r_x^2)p_{yz}^2 - (h - r_y^2)p_{zx}^2 - (h - r_z^2)p_{xy}^2 - 2p_{xy}p_{yz}p_{zx} = 0, \end{cases}$$

welche auch in folgender Form geschrieben werden kann

$$(7)\qquad \begin{cases} h^3 - h^2(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) \\ + h(r_x^2r_y^2 + r_y^2r_z^2 + r_z^2r_x^2 - p_{xy}^2 - p_{yz}^2 - p_{zx}^2) \\ - (r_x^2r_y^2r_z^2 - r_x^2p_{yz}^2 - r_y^2p_{zx}^2 - r_z^2p_{xy}^2 + 2p_{xy}p_{yz}p_{zx}) = 0. \end{cases}$$

Da sich in § 26 zeigen wird, dass die Grenzverschiebungen durch die Halbaxen eines Ellipsoids dargestellt sind, so hat vorstehende Gleichung im Allgemeinen drei verschiedene reelle Wurzeln, welche wir mit $h = r_1^2$, $h = r_2^2$, $h = r_3^2$ bezeichnen. Substituirt man einen dieser Werthe in

$$(8)\qquad \begin{cases} s_1 = (h - r_x^2)p_{yz} + p_{zx}p_{xy}, \\ s_2 = (h - r_y^2)p_{zx} + p_{xy}p_{yz}, \\ s_3 = (h - r_z^2)p_{xy} + p_{yz}p_{zx}, \end{cases}$$

so liefern die Gleichungen

$$(9)\qquad \cos(nx) = \frac{s_2 s_3}{w}, \qquad \cos(ny) = \frac{s_3 s_1}{w}, \qquad \cos(nz) = \frac{s_1 s_2}{w},$$

mit den beiden Vorzeichen von

$$(10)\qquad w = \pm \sqrt{(s_1 s_2)^2 + (s_2 s_3)^2 + (s_3 s_1)^2}$$

die zwei einander entgegengesetzten Richtungen n, für welche die entsprechende Grenzverschiebung eintritt.

Nach (3) und § 8, (4) bestehen für jede Grenzverschiebung $r_n = \sqrt{h}$ die Gleichungen

$$(11)\qquad h\cos(nx) = p_{nx}, \qquad h\cos(ny) = p_{ny}, \qquad h\cos(nz) = p_{nz}.$$

Multiplicirt man dieselben bezw. mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (5) für zwei Richtungen n, s, deren einer eine Grenzverschiebung $\sqrt{h}$ entspricht, bei beliebiger anderen

$$(12)\qquad p_{ns} = h\cos(ns).$$

Die Totalgleitung p_{ns} zweier zu einander senkrechter Richtungen n, s, für deren eine eine Grenzverschiebung eintritt, ist gleich Null. Die Totalverschiebungen dieser Richtungen sind senkrecht zu einander. Wenn nun h_1, h_2 die Quadrate zweier Grenzverschiebungen, n_1, n_2 die zugehörigen Richtungen n, so hat man einmal mit $h = h_1$, $n_1 = n_1$, $s = n_2$ und dann mit $h = h_2$, $n = n_2$, $s = n_1$,

$$p_{ns} = h_1 \cos(n_1 n_2) = h_2 \cos(n_2 n_1).$$

Da aber h_1, h_2 im Allgemeinen von einander verschieden sind, so muss $\cos(n_1 n_2) = 0$ sein: *Die Richtungen n, für welche die drei Grenzverschiebungen r_1, r_2, r_3 eintreten, schliessen mit einander rechte Winkel ein, für je zwei derselben existiren keine Totalgleichungen.*

Werden die Coordinatenaxen x, y, z den letzterwähnten Richtungen n parallel gelegt, dann nehmen die Gleichungen (1) bis (3) folgende einfachere Formen an

$$(13)\qquad r_n^2 = r_1^2 \cos^2(nx) + r_2^2 \cos^2(ny) + r_3^2 \cos^2(nz),$$

$$(14)\qquad p_{ns} = r_1^2 \cos(nx)\cos(sx) + r_2^2 \cos(ny)\cos(sy) + r_3^2 \cos(nz)\cos(sz),$$

$$(15)\qquad p_{nx} = r_1^2 \cos(nx), \qquad p_{ny} = r_2^2 \cos(ny), \qquad p_{nz} = r_3^2 \cos(nz).$$

Die Gleichungen für n_n, g_{ns}, q_{ns}, $(1 + e_n)^2$ lassen sich mit Rücksicht auf $q_{xy} = g_{xy}$, $q_{yz} = g_{yz}$, $q_{zx} = g_{zx}$ ebenfalls noch anders als in §§ 23, 25 schreiben.

Denken wir uns ähnlich dem Verfahren in § 23 Gleichung (7) einmal wie oben für beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen, ein andres Mal für den Fall angeschrieben, dass die Axen parallel den Richtungen n gelegt werden, für welche die Grenzverschiebungen eintreten, so entstehen folgende Gleichungen

$$(16)\qquad r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2,$$

$$(17)\quad r_x^2 r_y^2 + r_y^2 r_z^2 + r_z^2 r_x^2 - p_{xy}^2 - p_{yz}^2 - p_{zx}^2 = r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_3^2 r_1^2,$$

$$(18)\quad r_x^2 r_y^2 r_z^2 - r_x^2 p_{yz}^2 - r_y^2 p_{zx}^2 - r_z^2 p_{xy}^2 + 2\, p_{xy} p_{yz} p_{zx} = r_1^2 r_2^2 r_3^2.$$

Aus (16) folgt: *Für je drei im selben Punkt zu einander senkrechte Richtungen hat die Summe der Totalverschiebungsquadrate einen festen Werth.* Liegt eine der Coordinatenaxen parallel einer Richtung n, für welche eine Grenzverschiebung eintritt, so kommt das Quadrat der letzteren in (16) rechts und links vor, wir schliessen: *Für alle Paare im Punkte m zu einander senkrechter Richtungen, welche mit der einer Grenzverschiebuug entsprechenden Richtung n rechte Winkel einschliessen, hat die Summe der r_n^2 denselben Werth.*

Nach (16) bis (18) ist eine Grenzverschiebung gleich Null, wenn für beliebig gerichtete rechtwinkelige Coordinatenaxen

$$(19)\quad r_x^2 r_y^2 r_z^2 - r_y^2 p_{yz}^2 - r_y^2 p_{zx}^2 - r_z^2 p_{xy}^2 + 2\, p_{xy} p_{yz} p_{zx} = 0;$$

es sind zwei Grenzverschiebungen gleich Null, wenn neben (19) erfüllt ist

$$(20)\qquad r_x^2 r_y^2 + r_y^2 r_z^2 + r_z^2 r_x^2 - p_{xy}^2 - p_{yz}^2 - p_{zx}^2 = 0.$$

Wären schliesslich alle drei Grenzverschiebungen gleich Null, so würde noch hinzutreten

$$(21)\qquad r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 0.$$

In diesem Falle haben nach (13), (14) im Punkte m überhaupt keine Totalverschiebungen und Totalgleitungen hinsichtlich unseres Coordinatensystems stattgefunden. Mit $r_n = 0$, $p_{ns} = 0$ werden $(1 + e_n)^2 = 1 + 2 n_n$, $q_{ns} = g_{ns}$, die Gruppirungsänderungen und sonstige Bewegung haben sich ausgeglichen.

§ 25. Die Hauptdehnungen.

Mit den Bezeichnungen (3) des § 22 hat man nach § 22, (2), (12) für die Dehnung e_n einer beliebigen Richtung n und die Schiebung q_{ns} zweier beliebiger Richtungen n, s

$$(1)\quad \begin{cases} (1 + e_n)^2 = (1 + e_x)^2 \cos^2(nx) + (1 + e_y)^2 \cos^2(ny) \\ \qquad + (1 + e_z)^2 \cos^2(nz) + 2\, q_{xy} \cos(nx)\cos(ny) \\ \qquad + 2\, q_{yz} \cos(ny)\cos(nz) + 2\, q_{zx} \cos(nz)\cos(nx), \end{cases}$$

$$
(2)\quad \begin{cases} q_{ns} = e_x(2+e_x)\cos(nx)\cos(sx) + e_y(2+e_y)\cos(ny)\cos(sy) \\ \qquad + e_z(2+e_z)\cos(nz)\cos(sz) \\ \qquad + q_{xy}\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\ \qquad + q_{yz}\left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\ \qquad + q_{zx}\left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right]. \end{cases}
$$

Aus (2) folgen die Schiebungen von n mit x, y, z

$$
(3)\quad \begin{cases} q_{nx} = e_x(2+e_x)\cos(nx) + q_{xy}\cos(ny) + q_{zx}\cos(nz), \\ q_{ny} = e_y(2+e_y)\cos(ny) + q_{xy}\cos(nx) + q_{yz}\cos(nz), \\ q_{nz} = e_z(2+e_z)\cos(nz) + q_{zx}\cos(nx) + q_{yz}\cos(ny). \end{cases}
$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (2)

$$
(4)\quad \begin{cases} q_{ns} = q_{nx}\cos(sx) + q_{ny}\cos(sy) + q_{nz}\cos(sz) \\ \quad\; = q_{sx}\cos(nx) + q_{sy}\cos(ny) + q_{sz}\cos(nz), \end{cases}
$$

und hieraus mit $s = n$ wegen $q_{nn} = e_n(2+e_n)$

$$
(5)\quad e_n(2+e_n) = q_{nx}\cos(nx) + q_{ny}\cos(ny) + q_{nz}\cos(nz).
$$

Die mathematischen Maxima und Minima der Dehnungen e_n bei einem Punkte m bezeichnen wir als *Hauptdehnungen* daselbst. Sie treten mit den Maxima und Minima der $(1+e_n)^2$ ein und da diese Function von der in § 8 betrachteten Form (3) ist, so ergeben sich die Verhältnisse der Hauptdehnungen aus den dort abgeleiteten Gleichungen mit $\varphi = (1+e_n)^2$, $a = (1+e_x)^2 = k_x$, $b = (1+e_y)^2 = k_y$, $c = (1+e_z)^2 = k_z$, $d = q_{xy}$, $e = q_{yz}$, $f = q_{zx}$.

Die den Hauptdehnungen entsprechenden $h = (1+e_n)^2$ und damit die Hauptdehnungen selbst sind bestimmt durch die Gleichung

$$
(6)\begin{cases} (h-k_x)(h-k_y)(h-k_z) \\ \quad - (h-k_x)q_{yz}^2 - (h-k_y)q_{zx}^2 - (h-k_z)q_{zy}^2 - 2q_{xy}q_{yz}q_{zx} = 0, \end{cases}
$$

welche nach Potenzen von h geordnet lautet

$$
(7)\begin{cases} h^3 - h^2(k_x+k_y+k_z) + h(k_xk_y + k_yk_z + k_zk_x - q_{xy}^2 - q_{yz}^2 - q_{zx}^2) \\ \quad - (k_xk_yk_z - k_xq_{yz}^2 - k_yq_{zx}^2 - k_zq_{xy}^2 + 2q_{xy}q_{yz}q_{zx}) = 0. \end{cases}
$$

Da sich in § 27 zeigen wird, dass die den Hauptdehnungen entsprechenden $1+e_n$ durch die Halbaxen eines Ellipsoids dargestellt sind, so hat vorstehende Gleichung drei, im Allgemeinen verschiedene, reelle Wurzeln, welche wir durch $h = (1+e_1)^2$, $h = (1+e_2)^2$, $h = (1+e_3)^2$ bezeichnen, womit e_1, e_2, e_3 die Hauptdehnungen bebedeuten. Substituirt man einen dieser Werthe h in

$$(8)\quad \begin{cases} s_1 = (h - k_x)q_{yz} + q_{zx}q_{xy}, \\ s_2 = (h - k_y)q_{zx} + q_{xy}q_{yz}, \\ s_3 = (h - k_z)q_{xy} + q_{yz}q_{zx}, \end{cases}$$

so folgen aus

$$(9)\quad \cos(nx) = \frac{s_2 s_3}{w}, \qquad \cos(ny) = \frac{s_3 s_1}{w}, \qquad \cos(nz) = \frac{s_1 s_2}{w},$$

mit den beiden Vorzeichen von

$$(10)\qquad w = \pm\sqrt{(s_1 s_2)^2 + (s_2 s_3)^2 + (s_3 s_1)^2}$$

die zwei einander entgegengesetzten Richtungen n, für welche die entsprechende Hauptdehnung eintritt.

Nach (3) und § 8 (4) gelten für jede Hauptdehnung, wenn n die zugehörige Richtung bedeutet,

$$(11)\quad (h-1)\cos(nx) = q_{nx},\ (h-1)\cos(ny) = q_{ny},\ (h-1)\cos(nz) = q_{nz}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (4) die Schiebung zweier Richtungen n, s, für deren eine die h entsprechende Hauptdehnung eintritt, während die andere ganz beliebig ist,

$$(12)\qquad q_{ns} = (h - 1)\cos(ns).$$

Die Schiebung zweier zu einander senkrechter Richtungen, deren einer eine Hauptdehnung entspricht, ist gleich Null. Wenn nun h_1, h_2 die $(1 + e_n)^2$ zweier Hauptdehnungen, n_1, n_2 die zugehörigen Richtungen n, so hat man nach (12) mit $h = h_1$, $n = n_1$, $s = n_2$ bezw. mit $h = h_2$, $n = n_2$, $s = n_1$,

$$q_{ns} = (h_1 - 1)\cos(n_1 n_2) = (h_2 - 1)\cos(n_2 n_1),$$

und da h_1, h_2 im Allgemeinen von einander verschieden sind, so muss $\cos(n_1 n_2) = 0$ sein: *Die Richtungen n, für welche die drei Hauptdehnungen e_1, e_2, e_3 eintreten, bilden mit einander Winkel von 90^0, für je zwei derselben existiren keine Schiebungen.*

Legen wir die Axen der x, y, z parallel letztgenannten Richtungen, so gehen (1) bis (3) über in die folgenden Gleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} (1 + e_n)^2 = (1 + e_1)^2\cos^2(nx) + (1 + e_2)^2\cos^2(ny) \\ \qquad\qquad + (1 + e_3)^2\cos^2(nz), \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} q_{ns} = e_1(2 + e_1)\cos(nx)\cos(sx) + e_2(2 + e_2)\cos(ny)\cos(sy) \\ \qquad\qquad + e_3(2 + e_3)\cos(nz)\cos(sz), \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} q_{nx} = e_1(2 + e_1)\cos(nx), \\ q_{ny} = e_2(2 + e_2)\cos(ny), \\ q_{nz} = e_3(2 + e_3)\cos(nz). \end{cases}$$

Auch die Gleichungen für n_n, g_{ns}, r_n, p_{ns} lassen sich wegen $g_{xy} = -p_{zy}$, $g_{yz} = -p_{yz}$, $g_{zx} = -p_{zx}$ noch anders als in §§ 23, 24 ausdrücken.

Denken wir uns analog dem Vorgehen in den §§ 23, 24 Gleichung (7) einmal wie oben für beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen, das andere Mal für Coordinatenaxen parallel denjenigen Richtungen n gelegt, für welche die Hauptdehnungen eintreten, so folgen

$$(16)\qquad k_x + k_y + k_z = (1+e_1)^2 + (1+e_2)^2 + (1+e_3)^2,$$

$$(17)\qquad \begin{cases} k_x k_y + k_y k_z + k_z k_x - q_{xy}^2 - q_{yz}^2 - q_{zx}^2 = (1+e_1)^2(1+e_2)^2 \\ \qquad + (1+e_2)^2(1+e_3)^2 + (1+e_3)^2(1+e_1)^2, \end{cases}$$

$$(18)\qquad \begin{cases} k_x k_y k_z - k_x q_{yz}^2 - k_y q_{zx}^2 - k_z q_{xy}^2 + 2 q_{xy} q_{yz} q_{zx} \\ \qquad = (1+e_1)^2(1+e_2)^2(1+e_3)^2. \end{cases}$$

Gleichung (15) kann man aussprechen: *Für je drei im selben Punkt zu einander senkrechte Richtungen hat die Summe der* $(1+e_n)^2$ *einen festen Werth.* Liegt eine der Coordinatenaxen parallel einer Richtung n, welche einer Hauptdehnung entspricht, so kommt in (15) dasselbe $(1+e_n)^2$ rechts und links vor, daher: *Für alle Paare in einem Punkte zu einander senkrechter Richtungen, welche mit der einer Hauptdehnung entsprechenden Richtung n rechte Winkel einschliessen, ist die Summe der* $(1+e_n)^2$ *von gleichem Werth.*

Sind beim Punkte m die drei Hauptdehnungen gleich Null, so haben daselbst nach (13), (14) überhaupt keine Dehnungen und Schiebungen stattgefunden, der Körper kann seine Lage gegen das Coordinatensystem geändert haben, die gegenseitige Gruppirung der Theilchen bei m aber ist dieselbe geblieben (§ 6).

§ 26. Das Verschiebungsellipsoid.

Wir nehmen rechtwinklige Coordinatenaxen von beliegen Richtungen x, y, z an. Für letztere seien r_x, r_y, r_z die Totalverschiebungen und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ deren Richtungen r. Nach § 21, (1) hat man dann

$$\cos(\mathfrak{x}x) = \frac{x_x}{r_x}, \qquad \cos(\mathfrak{y}x) = \frac{x_y}{r_y}, \qquad \cos(\mathfrak{z}x) = \frac{x_z}{r_z}\cdot$$

Sind nun $\mathfrak{x}_n$, $\mathfrak{y}_n$, $\mathfrak{z}_n$ diejenigen Componenten einer beliebigen Totalverschiebung r_n, welche bei Zerlegung nach den im Allgemeinen schief gegen einander liegenden Richtungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ entstehen, so wird die resultirende Componente von r_n in der Richtung x

$$x_n = \mathfrak{x}_n \cos(\mathfrak{x}x) + \mathfrak{y}_n \cos(\mathfrak{y}x) + \mathfrak{z}_n \cos(\mathfrak{z}x),$$

oder mit Rücksicht auf die darüber stehenden Cosinuswerthe

$$x_n = x_x \frac{\mathfrak{x}_n}{r_x} + \qquad x_y \frac{\mathfrak{y}_n}{r_y} + \qquad x_z \frac{\mathfrak{z}_n}{r_z}\cdot$$

Nach § 21, (2) hat man für jede beliebige Richtung n

$$x_n = x_x \cos(nx) + y_n \cos(ny) + z_n \cos(nz).$$

Daher folgen

$$(1) \qquad \cos(nx) = \frac{\mathfrak{x}_n}{r_x}, \qquad \cos(ny) = \frac{\mathfrak{y}_n}{r_y}, \qquad \cos(nz) = \frac{\mathfrak{z}_n}{r_z},$$

und weil die Quadratsumme dieses Cosinus gleich 1 sein muss,

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{x}_n^2}{r_x^2} + \frac{\mathfrak{y}_n^2}{r_y^2} + \frac{\mathfrak{z}_n^2}{r_z^2} = 1.$$

Denken wir uns die Richtungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der Totalverschiebungen r_x, r_y, r_z als positive Axenrichtungen eines schiefwinkligen Coordinatensystems mit dem Ursprunge in m gewählt und die $\mathfrak{x}_n$, $\mathfrak{y}_n$, $\mathfrak{z}_n$ als Coordinaten angetragen, so stellt (2) die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids dar, für welches r_x, r_y, r_z conjugirte Halbmesser sind. Es variiren also die Totalverschiebungen r_n wie die in ihre Richtungen fallenden Halbmesser dieses Ellipsoids, und je drei conjugirte Halbmesser desselben stellen die r_n für drei zu einander senkrechte Richtungen n dar. Für diejenigen drei einander rechtwinkligen n, welchen die Grenzverschiebungen entsprechen, sollen aber nach § 24 die conjugirten Halbmesser r_n auf einander senkrecht stehen, die letzteren müssen also die Halbaxen bilden, wir können zusammenfassen: *Trägt man von einem Punkte m aus die Totalverschiebungen r_n aller Richtungen n nach Grösse und Richtung an, so liegen die Endpunkte der r_n auf einem Ellipsoide, für welches die Grenzverschiebungen r_1, r_2, r_3 Halbaxen und die r_n je dreier zu einander senkrechter n conjugirte Halbmesser sind.* Dies Ellipsoid werden wir *Verschiebungsellipsoid* *) nennen.

Legt man die Coordinatenaxen x, y, z parallel denjenigen Richtungen n, für welche die Grenzverschiebungen r_1, r_2, r_3 eintreten, so lautet die Gleichung des Verschiebungsellipsoids

$$(3) \qquad \frac{\mathfrak{x}_n^2}{r_1^2} + \frac{\mathfrak{y}_n^2}{r_2^2} + \frac{\mathfrak{z}_n^2}{r_3^2} = 1.$$

Die Axen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind jetzt zu einander senkrecht, liegen aber nicht wie im analogen Falle beim Spannungsellipsoide den Richtungen x, y, z parallel, es hat eine Drehung um den Ursprung m stattgefunden. Weiter erhält man bei den angenommenen x, y, z nach (1) und § 21, (1) für beliebige Richtungen n

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_n = r_1 \cos(nx) = r_n \cos(r\mathfrak{x}), \\ \mathfrak{y}_n = r_2 \cos(ny) = r_n \cos(r\mathfrak{y}), \\ \mathfrak{z}_n = r_3 \cos(nz) = r_n \cos(r\mathfrak{z}), \end{cases}$$

*) Der Name wird vielfach für das Ellipsoid des § 27 verwendet, eignet sich aber besser für das hier behandelte, sonst nicht abgeleitete Ellipsoid, welches nach Wesen und Entstehung dem Spannungsellipsoide entspricht.

welche Gleichungen wegen

$$r_n^2 = \mathfrak{x}_n^2 + \mathfrak{y}_n^2 + \mathfrak{z}_n^2$$

wieder auf § 24, (13) führen.

Sind zwei Grenzverschiebungen gleich gross, so wird das Verschiebungsellipsoid ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe mit der dritten Grenzverschiebung zusammenfällt, und sind alle drei Grenzverschiebungen gleich gross, so wird das Verschiebungsellipsoid eine Kugel.

§ 27. Die Deformationsfläche. Dilatation.

Durch die Verschiebungen bei m sind diejenigen Punkte, welche anfänglich von m aus in der Richtung n lagen, in eine neue Richtung n_1 gelangt und es hat sich ihre Entfernung dn um $e_n dn$ geändert. Die neue Entfernung und neue Richtung sind bestimmt durch die Projectionen von $(1+e_n)dn$ auf die rechtwinkligen Richtungen x, y, z. Diese Projectionen ergeben sich durch Multiplication der Werthe

$$(1)\qquad \begin{cases} a_n = (1+e_n)\cos(n_1 x), \\ b_n = (1+e_n)\cos(n_1 y), \\ c_n = (1+e_n)\cos(n_1 z) \end{cases}$$

mit dn, während sich a_n, b_n, c_n auf die Einheit der ursprünglichen Entfernung beziehen. Da nach § 5, (3)

$$\begin{aligned} (1+e_n)\cos(n_1 x) &= \cos(nx) + x_n, \\ (1+e_n)\cos(n_1 y) &= \cos(ny) + y_n, \\ (1+e_n)\cos(n_1 z) &= \cos(nz) + z_n, \end{aligned}$$

so folgen mit den in § 21 erhaltenen Werthen der x_n, y_n, z_n

$$(2)\qquad \begin{cases} a_n = (1+x_x)\cos(nx) + x_y\cos(ny) + x_z\cos(nz), \\ b_n = (1+y_y)\cos(ny) + x_z\cos(nz) + y_x\cos(nx), \\ c_n = (1+z_z)\cos(nz) + z_x\cos(nx) + z_y\cos(ny). \end{cases}$$

Die erste der drei vor (2) angeschriebenen Gleichungen liefert für die aus $n = x$, y, z entstandenen Richtungen x_1, y_1, z_1,

$$(3)\qquad \cos(x_1 x) = \frac{1+x_x}{1+e_x}, \quad \cos(y_1 x) = \frac{x_y}{1+e_y}, \quad \cos(z_1 x) = \frac{x_z}{1+e_z}.$$

Bezeichnen wir die bei Zerlegung von $1+e_n$ nach den Richtungen x_1, y_1, z_1 entstehenden Componenten durch $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$, so folgt die resultirende Componente in der Richtung x

$$a_n = \mathfrak{a}_n\cos(x_1 x) + \mathfrak{b}_n\cos(y_1 x) + \mathfrak{c}_n\cos(z_1 x),$$

oder mit Rücksicht auf die darüber stehenden Cosinuswerthe

$$a_n = (1 + x_x)\frac{\mathfrak{a}_n}{1 + e_x} + x_y \frac{\mathfrak{b}_n}{1 + e_y} + x_z \frac{\mathfrak{c}_n}{1 + e_z}.$$

Der Vergleich dieses Ausdrucks mit der ersten Gleichung (2) ergibt

$$(4)\qquad \cos(nx) = \frac{\mathfrak{a}_n}{1 + e_x}, \qquad \cos(ny) = \frac{\mathfrak{b}_n}{1 + e_y}, \qquad \cos(nz) = \frac{\mathfrak{c}_n}{1 + e_z},$$

und weil die Quadratsumme dieser Cosinus 1 sein muss,

$$(5)\qquad \left(\frac{\mathfrak{a}_n}{1 + e_x}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{b}_n}{1 + e_y}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{c}_n}{1 + e_z}\right)^2 = 1.$$

Denken wir uns die im Allgemeinen schief gegen einander liegenden Richtungen x_1, y_1, z_1 als positive Axenrichtungen eines Coordinatensystems mit dem Ursprunge in m gewählt und die $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ als Coordinaten angetragen, so stellt (5) die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids dar, für welches $1 + e_x$, $1 + e_y$, $1 + e_z$ conjugirte Halbmesser sind. Es variiren also die $1 + e_n$ wie die in ihre Richtungen fallenden Halbmesser dieses Ellipsoids und je drei conjugirte Halbmesser desselben bilden die $1 + e_n$ dreier zu einander senkrechter Richtungen n. Für diejenigen drei zu einander rechtwinkligen n, welchen die Hauptdehnungen entsprechen, sollen aber nach § 25 die conjugirten Halbmesser $1 + e_n$ zu einander senkrecht sein, letztere müssen also die Halbaxen bilden, wir können aussprechen: *Die Punkte, welche vor den Verschiebungen auf einer Kugeloberfläche vom Radius* 1 *lagen, liegen nach derselben auf der Oberfläche eines Ellipsoids, für welches die Kugelhalbmesser der den Hauptdehnungen entsprechenden n die Halbaxen und je drei zu einander senkrecht gewesene Kugelhalbmesser conjugirte Halbmesser sind.* Diese Ellipsoidfläche wurde für verschwindend kleine Verschiebungen, wie wir sie in § 32 besprechen werden, zuerst von *Clebsch* aufgefunden. Sie soll hier *Deformationsfläche* heissen.

Werden die Axen der x, y, z parallel den Richtungen n gelegt, für welche die Hauptdehnungen eintreten, so folgt aus (5)

$$(6)\qquad \left(\frac{\mathfrak{a}_n}{1 + e_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{b}_n}{1 + e_2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{c}_n}{1 + e_3}\right)^2 = 1,$$

welche Gleichung sich nun auf diejenigen zu einander senkrechten Axen x_1, y_1, z_1 bezieht, die aus den Richtungen n werden, für welche die Hauptdehnungen eintreten. Die Gleichungen (4), (1) aber liefern nun für beliege Richtungen n

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_n = (1 + e_1)\cos(nx) = (1 + e_n)\cos(n_1 x_1), \\ \mathfrak{b}_n = (1 + e_2)\cos(ny) = (1 + e_n)\cos(n_1 y_1), \\ \mathfrak{c}_n = (1 + e_3)\cos(nz) = (1 + e_n)\cos(n_1 z_1), \end{cases}$$

woraus wegen

$$(1 + e_n)^2 = \mathfrak{a}_n^2 + \mathfrak{b}_n^2 + \mathfrak{c}_n^2$$

wieder die Formel § 25, (13) entsteht.

Sind zwei Hauptdehnungen von gleichem Werthe und Vorzeichen, so wird die Deformationsfläche ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe mit der dritten Hauptdehnung zusammenfällt, und sind alle drei Hauptdehnungen gleich gross, so wird die Deformationsfläche eine Kugel.

Es bezeichne $\varkappa$ die positive oder negative Zunahme des Volumens per Volumeneinheit eines Massenelements. Da bei m aus einer Kugel vom Radius 1 ein Ellipsoid der Halbaxen $1 + e_1$, $1 + e_2$, $1 + e_3$ geworden ist, und mit Rücksicht auf die bekannten Ausdrücke für die Cubikinhalte von Kugel und Ellipsoid hat man

$$(1 + \varkappa)\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}(1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3),$$

woraus

$$\varkappa = (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) - 1. \tag{8}$$

Wir werden $\varkappa$ die *Dilatation* bei m nennen.

§ 28. Verschiebungen in einem Zeitelement.

Es handle sich um die unendlich kleinen Verschiebungen in einem Zeitelement dt. Dann gelten die Beziehungen des § 7. In Hinsicht eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems habe der Punkt $m(x, y, z)$ in den Richtungen x, y, z die Geschwindigkeiten u, v, w. *Sind dieselben zur Zeit t im gleichen Sinne stetige Functionen des Orts wie ξ, η, ζ in* § 21, dann hat der von m in der Richtung n um dn entfernte Punkt n die Geschwindigkeiten $u + du, v + dv, w + dw$, unter du, dv, dw die vollständigen Differentiale von u, v und w nach x, y, z verstanden. Es dürfen also in § 7 die Differentialzeichen d an Stelle der Δ gesetzt werden. Die relativen Wege von n gegen m nach den Richtungen x, y, z sind im Zeitelement dt

$$d\xi = du\,dt, \qquad d\eta = dv\,dt, \qquad d\zeta = dw\,dt, \tag{1}$$

und für beliebige partielle Differenziale nach x, y, z hat man

$$\partial\xi = \partial u\,dt, \qquad \partial\eta = \partial v\,dt, \qquad \partial\zeta = \partial w\,dt. \tag{2}$$

Damit können alle im laufenden Abschnitte abgeleiteten Verschiebungen und Verschiebungsfunctionen durch die Differentiale der Coordinatengeschwindigkeiten des Punktes $m(x, y, z)$ ausgedrückt werden. Dividirt man beliebige Verschiebungen durch dt, so ergeben sich die entsprechenden Verschiebungsgeschwindigkeiten. Wir können auch allgemein von *Verschiebungsgeschwindigkeiten, Drehungsgeschwindigkeiten und Dehnungsgeschwindigkeit der Richtung n*, von *Schiebungsgeschwindigkeit und Gleitungsgeschwindigkeiten der Richtungen*

n, s, von *Hauptverschiebungsgeschwindigkeiten*, *Grenzverschiebungsgeschwindigkeiten*, *Hauptdehnungsgeschwindigkeiten* und vom *Verschiebungsgeschwindigkeitsellipsoid* sprechen.

Es mögen folgende Bezeichnungen gelten

$$(3)\quad \begin{cases} u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & v_x = \dfrac{\partial v}{\partial x}, & w_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}, & v_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & w_y = \dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ u_z = \dfrac{\partial u}{\partial z}, & v_z = \dfrac{\partial v}{\partial z}, & w_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Dann hat man nach § 7, (6) und § 21, (2) (oder durch Division der vollständigen Differentiale des Orts von u, v, w mit dn) die Verschiebungsgeschwindigkeiten der Richtung n in den Richtungen x, y, z

$$(4)\quad \begin{cases} u_n = \dfrac{du}{dn} = u_x \cos(nx) + u_y \cos(ny) + u_z \cos(nz) \\ \qquad\qquad = \varrho_n \cos(rx) = \dfrac{x_n}{dt}, \\ v_n = \dfrac{dv}{dn} = v_x \cos(nx) + v_y \cos(ny) + v_z \cos(nz) \\ \qquad\qquad = \varrho_n \cos(ry) = \dfrac{y_n}{dt}, \\ w_n = \dfrac{dw}{dn} = w_x \cos(nx) + w_y \cos(ny) + w_z \cos(nz) \\ \qquad\qquad = \varrho_n \cos(rz) = \dfrac{z_n}{dt}. \end{cases}$$

Hiernach stellen die partiellen Differentialquotienten (3) die Componenten u_n, v_n, w_n der Totalverschiebungsgeschwindigkeit ϱ_n dar bezw. für $n = x, y, z$. Im Uebrigen lassen sich nun alle Beziehungen für die Verschiebungsgeschwindigkeiten aus den Gleichungen dieses Abschnitts für die entsprechenden Verschiebungen ohne Weiteres entnehmen. Beispielsweise hat man nach § 23, (1) (2) die Normalverschiebungsgeschwindigkeit einer beliebigen Richtung n und die Normalgleitungsgeschwindigkeit zweier beliebiger Richtungen n, s

$$(5)\quad \begin{cases} \nu_n = u_x \cos^2(nx) + u_y \cos^2(ny) + u_z \cos^2(nz) \\ \qquad + \gamma_{xy} \cos(nx)\cos(ny) + \gamma_{yz} \cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad + \gamma_{zx} \cos(nz)\cos(nx) = \dfrac{n_n}{dt}, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \gamma_{ns} = 2u_x \cos(nx)\cos(sx) + 2u_y \cos(ny)\cos(sy) \\ \qquad + 2u_z \cos(nz)\cos(sz) \\ \qquad + \gamma_{xy}\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\ \qquad + \gamma_{yz}\left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\ \qquad + \gamma_{zx}\left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right] = \dfrac{g_{ns}}{dt}, \end{cases}$$

worin nach § 21, (5) die Normalgleitungsgeschwindigkeiten der Richtungen xy, yz, zx

$$(7)\qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = u_y + v_x = \dfrac{\partial u}{dy} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{g_{xy}}{dt}, \\ \gamma_{yz} = v_z + w_y = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{g_{yz}}{dt}, \\ \gamma_{zx} = w_x + u_z = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{g_{zx}}{dt}. \end{cases}$$

Werden zur Zeit t die Coordinatenaxen in die Richtungen der Hauptverschiebungsgeschwindigkeiten gelegt, dann sind in (5) (6) $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, und $u_x = \alpha$, $v_y = \beta$, $w_z = \gamma$ die Hauptverschiebungsgeschwindigkeiten.

Die Schiebungsgeschwindigkeit φ_{ns} zweier einander senkrechter Richtungen n, s gibt nach § 32 an, wie schnell sich zwei unendlich benachbarte Flächenelemente, deren Normalenrichtung zur Zeit t mit der Richtungslinie von n (oder s) zusammenfiel, in der aus s (oder n) entstehenden Richtung pro Einheit ihrer ursprünglichen Entfernung längs einander verschieben. Für den gewöhnlichen Fall, dass nur endliche Verschiebungsgeschwindigkeiten in Betracht gezogen werden, darf man nach § 7 die Dehnungsgeschwindigkeit gleich der Normalverschiebungsgeschwindigkeit und die Schiebungsgeschwindigkeit gleich der Normalgleitungsgeschwindigkeit setzen, das heisst

$$(8)\qquad \varepsilon_n = \nu_n = \frac{n_n}{dt} = \frac{e_n}{dt}, \qquad \varphi_{ns} = \gamma_{ns} = \frac{g_{ns}}{dt} = \frac{q_{ns}}{dt}.$$

Damit wird die von den Richtungen der Coordinatenaxen unabhängige Summe

$$(9)\qquad \omega = \varrho\, dt = (u_x + v_y + w_z)dt = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dt,$$

nach § 27, (8) bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung gleich der Dilatation $\varkappa$ bei m und es kann ϱ als *Dilatationsgeschwindigkeit* daselbst bezeichnet werden.

§ 29. Derivirte verschiedener Verschiebungsfunctionen.

Für jede von einem Punkte $m(x, y, z)$ ausgehende Richtung n sind die Normalverschiebung, Totalverschiebung und Dehnung durch n_n, r_n, e_n und die Normalgleitung, Totalgleitung und Schiebung bezüglich einer beliebigen andern Richtung s durch g_{ns}, p_{ns}, q_{ns} bezeichnet. Setzen wir zur Abkürzung $\cos(nx) = \alpha$, $\cos(ny) = \beta$, $\cos(nz) = \gamma$, so folgen aus den Gleichungen (1)—(3) der §§ 23—25

$$(1)\qquad \frac{\partial n_n}{\partial \alpha} = g_{nx}, \qquad \frac{\partial n_n}{\partial \beta} = g_{ny}, \qquad \frac{\partial n_n}{\partial \gamma} = g_{nz},$$

$$(2)\qquad \frac{\partial r_n^2}{\partial \alpha} = 2p_{nx}, \quad \frac{\partial r_n^2}{\partial \beta} = 2p_{ny}, \quad \frac{\partial r_n^2}{\partial \gamma} = 2p_{ny},$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(1+e_n)^2}{\partial \alpha} = 2q_{nx} + 2\alpha, \quad \dfrac{\partial(1+e_n)^2}{\partial \beta} = 2q_{ny} + 2\beta, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(1+e_n)^2}{\partial \gamma} = 2q_{nz} + 2\gamma. \end{array}\right.$$

Mit diesen Werthen ergeben sich die vollständigen Differentiale für Richtungsänderungen bei m

$$(4)\qquad dn_n = g_{nx}d\alpha + g_{ny}d\beta + g_{nz}d\gamma,$$

$$(5)\qquad dr_n^2 = 2(p_{nx}d\alpha + p_{ny}d\beta + p_{nz}d\gamma),$$

$$(6)\qquad d(1+e_n)^2 = 2(q_{nx}d\alpha + q_{ny}d\beta + q_{nz}d\gamma).$$

Beim Ansatz der letzten Gleichung war zu beachten, dass $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ist.

Man gehe nun von der Richtung n aus auf eine beliebige zu n senkrechte s hin um den Winkel $d\sigma$ vor (womit alle von n um unendlich wenig abweichenden Richtungen erreicht werden können), dann folgen wie in § 19

$$(7)\qquad d\alpha = d\sigma \cos(sx), \quad d\beta = d\sigma \cos(sy), \quad d\gamma = d\sigma \cos(sz).$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in (4)—(6) erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) der §§ 23—25

$$(8)\qquad \frac{dn_n}{d\sigma} = g_{ns}, \quad \frac{dr_n^2}{d\sigma} = 2p_{ns}, \quad \frac{d(1+e_n)^2}{d\sigma} = 2q_{ns},$$

und weil allgemein $df^2 = 2f\,df$

$$(9)\qquad \frac{dn_n^2}{d\sigma} = 2n_n g_{ns}, \quad \frac{dr_n}{d\sigma} = \frac{p_{ns}}{r_n}, \quad \frac{de_n}{d\sigma} = \frac{q_{ns}}{1+e_n}.$$

Da für die Transversalverschiebung q_{ns} die Gleichung $t_n = r_n^2 - n_n^2$ besteht, so folgen mit (2), (9):

$$(10)\qquad \frac{dt_n^2}{d\sigma} = 2(p_{ns} - n_n g_{ns}), \quad \frac{dt_n}{d\sigma} = \frac{p_{ns} - n_n g_{ns}}{t_n},$$

wie auch aus $(1+e_n)^2 = (1+n_n)^2 + t_n^2$ entnommen werden konnte. Zu beachten ist, dass in (8)—(10) die n, s zwei zu einander senkrechte Richtungen bedeuten.

Aus den Gleichungen (8), (9) lassen sich u. a. folgende Schlüsse ziehen. Für diejenigen Richtungen n, welchen Maxima oder Minima von n_n, r_n, e_n d. h. Hauptverschiebungen bezw. Grenzverschiebungen und Hauptdehnungen entsprechen, sind die g_{ns} bezw. p_{ns} und q_{ns} hinsichtlich jeder zu n senkrechten Richtung s gleich Null. Wenn bei einem Punkte m alle g_{ns} bezw. p_{ns}, q_{ns} beliebiger zu einander senkrechter n, s verschwinden, dann sind daselbst alle Normalverschiebungen bezw. Totalverschiebungen oder Dehnungen von gleichem Werthe. Geht man von einer beliebigen Richtung n aus auf irgend eine dazu senkrechte Richtung s hin um den kleinen Winkel $d\sigma$ vor, so ändern sich n_n, r_n^2, $(1+e_n)^2$ um so mehr, je grösser die Zahlenwerthe bezw. von g_{ns}, p_{ns}, q_{ns} sind. Es bleiben n_n, r_n, e_n constant nach Richtungen s hin, für welche bezw. g_{ns}, p_{ns}, q_{ns} gleich Null sind, also beispielsweise nach solchen s, welchen bezw. eine Hauptverschiebung, Grenzverschiebung oder Hauptdehnung entspricht. Der erste Satz hat sich für beliebig gerichtete s schon früher ergeben und auch das zweite Resultat wurde bereits auf anderem Wege gefunden. Gleichung (10) zeigt, dass für Maxima und Minima der Transversalverschiebungen $p_{ns} = n_n\, g_{ns}$ ist.

Nach §§ 23—25, (3) hat man

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial g_{nx}}{\partial \alpha} = 2x_x, \qquad \frac{\partial g_{ny}}{\partial \beta} = 2y_y, \qquad \frac{\partial g_{nz}}{\partial \gamma} = 2z_z,$$

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial p_{nx}}{\partial \alpha} = r_x^2, \qquad \frac{\partial p_{ny}}{\partial \beta} = r_y^2, \qquad \frac{\partial p_{nz}}{\partial \gamma} = r_z^2,$$

$$\text{(13)} \qquad \frac{\partial q_{nx}}{\partial \alpha} = e_x(2+e_x), \qquad \frac{\partial q_{ny}}{\partial \beta} = e_y(2+e_y), \qquad \frac{\partial q_{nz}}{\partial \gamma} = e_z(2+e_z).$$

Durch Addition der drei ersten, drei folgenden und drei letzten Gleichungen entstehen mit Rücksicht auf (1)—(3)

$$\text{(14)} \qquad 2(x_x + y_y + z_z) = \frac{\partial^2 n_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 n_n}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 n_n}{\partial \gamma^2} = 2\omega,$$

$$\text{(15)} \qquad 2(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) = \frac{\partial^2 r_n^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 r_n^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 r_n^2}{\partial \gamma^2},$$

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} 2\left[(1+e_x)^2 + (1+e_y)^2 + (1+e_z)^2\right] \\ \qquad = \dfrac{\partial (1+e_n)^2}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial (1+e_n)^2}{\partial \beta^2} + \dfrac{\partial (1+e_n)^2}{\partial \gamma^2}. \end{cases}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind nach §§ 23 — 25 unabhängig von den Richtungen der rechtwinkligen Coordinatenaxen und daher sind auch die rechten Seiten für beliebige Richtungen n von gleichem Werth. Weitere Beziehungen lassen sich aus den Formeln am Schlusse der §§ 23—25 ableiten.

Alle hier erhaltenen Gleichungen gelten natürlich auf für die Verschiebungen in einem Zeitelement und damit entstehen ganz analoge Gleichungen für die Verschiebungsgeschwindigkeiten. Beispielsweise folgen aus (8)—(10) nach § 7:

(17) $$\frac{d\nu_n}{d\sigma} = \gamma_{ns}, \qquad \frac{d\varrho_n}{d\sigma} = \frac{\psi_{ns}}{\varrho_n},$$

(18) $$\frac{d\varepsilon_n}{d\sigma} = \varphi_{ns}, \qquad \frac{d\tau_n}{d\sigma} = \frac{\psi_{ns} - \nu_n \gamma_{ns}}{\tau_n}.$$

In der ersten Formel (18) ist ε_n endlich vorausgesetzt.

§ 30. Potentialbewegung.

Wir wollen nun den Fall ins Auge fassen, dass

(1) $$dF = \xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

das vollständige Differential einer Function F von x, y, z, des Potentials der Verrückungen ist. Dann bestehen nach § 9 und mit den Bezeichnungen § 21, (3) die Gleichungen

(2) $$x_y = y_x, \qquad y_z = z_y, \qquad z_x = x_z;$$

für die Normalgleitungen $g_{ns} = s_n + n_s$ der Richtungen $n\ s = xy, yz, zx$ hat man

(3) $$g_{xy} = 2x_y, \qquad g_{yz} = 2y_z, \qquad g_{zx} = 2z_x,$$

und damit nach § 22, (8) (9) für beliebige Richtungen n, s

(4) $$s_n = n_s, \qquad g_{ns} = 2s_n = 2n_s.$$

Die Beziehung $s_n = n_s$ oder deren specielle Fälle (2) sind nothwendige Bedingung und Folge eines Potentials der Verrückungen.

Bereits in § 20 wurde darauf hingewiesen, dass die Grundgleichungen für die im zweiten Abschnitte untersuchten stetigen Spannungen den Grundgleichungen der im dritten Abschnitte untersuchten stetigen Verschiebungen vollkommen entsprechen (die Gleichungen für $N_n, T_n, R_n, S_n, P_{ns}, G_{ns}, X_n, Y_n, Z_n$ denen für $n_n, t_n, r_n, s_n, p_{ns}, g_{ns}, x_n, y_n, z_n$), wenn die in den Formeln auftretenden Richtungen n, s im ersten Falle die augenblicklichen Normalenrichtungen der Flächenelemente bei m, im zweiten die anfänglichen Richtungen der Punkte daselbst bedeuten. Ein Unterschied in den Gesetzen der stetigen Spannungen des zweiten Abschnittes und der stetigen Verschiebungen des dritten Abschnittes musste indessen dadurch entstehen, dass den aus § 12 entnommenen Beziehungen $X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$ im Allgemeinen nicht analoge Gleichungen $x_y = y_x$, $y_z = z_y$, $z_x = x_z$ entsprechen, dass nicht wie $S_n = N_s$ auch $s_n = n_s$ war. Nachdem jedoch für Potentialverrückungen diese Bedingung erfüllt ist, gelten für die hierbei eintretenden Verschiebungen der einem Punkte m der anfänglichen Coordinaten x, y, z in den anfänglichen Richtungen n benachbart gewesenen Punkte genau dieselben Gesetze, welcher im zweiten Abschnitte für die Spannungen der einem Punkte m der augenblicklichen Coordinaten x, y, z in den augenblicklichen Normalenrichtungen n anliegenden Flächenelemente erhalten wurden. Man hat einfach dort Verschiebungen, Hauptverschiebungen, Verschiebungsellipsoid u. s. w. an Stelle von Spannungen, Hauptspannungen, Spannungsellipsoid u. s. w. zu setzen und, wenn man will, anstatt der grossen lateinischen Buchstaben als Hauptbezeichnungen die entsprechenden kleinen zu wählen, ohne die Indices zu ändern.

So sind beispielsweise jetzt die Grenzverschiebungen gleich den Absolutwerthen der Hauptverschiebungen. Zu letzteren gehören keine Transversalverschiebungen, womit auch deren Componenten, die Drehungen der Hauptverschiebungsrichtungen, verschwinden. Die sechs Richtungen, welchen Maxima der Transversalverschiebungen entsprechen, liegen in den Ebenen je zweier Hauptverschiebungen oder Grenzverschiebungen und schliessen mit denselben Winkel von 45^0 ein. Es existirt eine Fläche um m als Mittelpunkt von gleichem Gesetze wie das der Stellungsfläche und solcher Art, dass die Normale in jedem Punkte, welche von einer in m angetragenen Verschiebungsrichtung r getroffen wird, parallel der zur entsprechenden Totalverschiebung r_n gehörigen Richtung n ist. Diese Fläche mag *Richtungsfläche* heissen. Da allgemein

$$(1+e_n)^2 = 1 + 2n_n + r_n^2, \qquad (1+e_n)de_n = dn_n + r_n dr_n,$$

und hierin nun dn_n, dr_n gleichzeitig Null werden, so ist in denselben drei Fällen $de_n = 0$; die Hauptdehnungen, Grenzverschiebungen und Hauptverschiebungen treten für die gleichen Richtungen n ein und da dann für diese wegen $t_n = 0$ folgt

$$(1+e_n)^2 = 1 + 2n_n + n_n^2 = (1+n_n)^2,$$

so sind die Hauptdehnungen gleich den Hauptverschiebungen. Denkt man sich die Coordinatenaxen parallel den Richtungen der Hauptverschiebungen gewählt, dann behalten die anfänglich in den Richtungen x, y, z liegenden Kanten eines Körperelements bei m während der Verrückungen ihre Richtungen bei, das Körperelement hat neben Längenänderungen seiner Kanten hinsichtlich unseres Coordinatensystems nur eine Translationsbewegung ausgeführt, Körperpunkte, welche anfangs auf Parallelflächen zu Coordinatenebenen lagen, sind auch auf solchen Parallelflächen geblieben (§ 21).

Da nach § 9

$$(5) \qquad \xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z},$$

so folgt noch die von den Richtungen der Coordinatenaxen unabhängige Grösse

$$(6) \qquad \omega = x_x + y_y + z_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta^2 F,$$

$\Delta^2 F$ ist eine symbolische Bezeichnung für die Summe der angesetzten Derivirten einer Funktion F von x, y, z, welche wir in der Folge mehrfach anwenden werden.

Alle bisherigen Schlüsse gelten natürlich auch, wenn es sich speciell um die Bewegung in einem Zeitelement dt handelt, in welchem Falle

$$\xi = u\,dt, \qquad \eta = v\,dt, \qquad \zeta = w\,dt$$

werden. Ein Potential der Verrückungen $F = f dt$ hat dann nach (1) auch ein Potential der Geschwindigkeiten f zur Folge und umgekehrt. Existirt ein Potential der Geschwindigkeiten, dann entstehen aus obigen Gleichungen oder entsprechend § 9 direct aus

$$(7) \qquad df = u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

die Beziehungen

$$(8) \qquad u_y = v_x, \qquad v_z = w_y, \qquad w_x = u_z;$$

es ergeben sich die Normalgleitungsgeschwindigkeiten

$$(9) \qquad \gamma_{xy} = 2u_y, \qquad \gamma_{yz} = 2v_z, \qquad \gamma_{zx} = 2w_x,$$

und für beliebige Richtungen n, s hat man

$$(10) \qquad \sigma_n = \nu_s, \qquad \gamma_{ns} = 2\sigma_n = 2\nu_s,$$

unter σ_n, ν_n die Componenten der Totalverschiebungsgeschwindigkeiten ϱ_n, ϱ_s für die Richtungen s, n verstanden. Da nun

$$(11) \qquad u = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial f}{\partial z},$$

so folgt die Dilatationsgeschwindigkeit bei $m(x, y, z)$

$$(12) \qquad \varrho = u_x + v_y + w_z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Es ist überflüssig, die sich von selbst darbietenden Schlüsse noch weiter anzuführen.

§ 31. **Potentiale der Verschiebungen und Verschiebungsgeschwindigkeiten.**

Wir bezeichnen für jede von einem Punkte $m(x, y, z)$ ausgehende Richtung n die $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ durch α, β, γ. Ist dann bei m der Ausdruck

$$(1) \qquad 2(x_n d\alpha + y_n d\beta + z_n d\gamma)$$

das vollständige Differential einer Function von α, β, γ, dann soll diese Function ein *Potential der Verschiebungen* daselbst heissen. Die hierdurch bedingten Beziehungen für Verschiebungen, welchen ein Potential zukommt, lassen sich analog ableiten wie in § 9 die

Gleichungen für Potentialspannungen. Wir erhalten als Bedingungen für ein Verschiebungspotential

$$(2)\qquad \frac{\partial x_n}{\partial \beta} = \frac{\partial y_n}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial y_n}{\partial \gamma} = \frac{\partial z_n}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial z_n}{\partial \alpha} = \frac{\partial x_n}{\partial \gamma},$$

das heisst auch

$$(3)\qquad x_y = y_x, \qquad y_z = z_y, \qquad z_x = x_z.$$

Diese Bedingungen sind für die in § 30 betrachteten Verschiebungen erfüllt, daher: *Existirt bei einem Punkte m ein Potential der Verrückungen, dann existirt daselbst auch ein Potential der Verschiebungen, und umgekehrt.* Wenn hiermit die beiden Potentiale keineswegs identisch werden, so gelten doch die folgenden Beziehungen lediglich für Potentialbewegungen, wenigstens unter Voraussetzung von Verschiebungen der durch § 21, (2) bedingten Art.

Wie die Normalspannung bei m als Spannungspotential daselbst angesehen werden durfte, so kann die Normalverschiebung bei m als Verschiebungspotential gelten, womit für Potentialverschiebungen

$$(4)\qquad dn_n = 2(x_n d\alpha + y_n d\beta + z_n d\gamma).$$

Diese Bedeutung des Verschiebungspotentials ergibt sich sowohl wie in § 19, weil im Falle von (3)

$$(5)\qquad 2x_n = \frac{\partial n_n}{\partial \alpha} = g_{nx}, \quad 2y_n = \frac{\partial n_n}{\partial \beta} = g_{ny}, \quad 2z_n = \frac{\partial n_n}{\partial \gamma} = g_{nz}$$

sind, als auch aus § 29, (4) mit Rücksicht auf die Beziehungen (5). Gleichung (4) gibt an, um wieviel sich die Normalverschiebung ändert, wenn wir von einem Punkte der Richtungscosinus α, β, γ zu einem benachbarten der Richtungscosinus $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma$ übergehen. Weiter hat man nach § 19, (11) oder § 29, (8), wenn von irgend einer Richtung n aus nach einer beliebigen zu n senkrechten Richtung s hin um den kleinen Winkel $d\sigma$ vorgegangen wird (womit sich alle n unendlich benachbarten Richtungen erreichen lassen),

$$(6)\qquad \frac{dn_n}{d\sigma} = 2s_n = 2r_n \cos(rs) = 2t_n \cos(ts),$$

unter r, t die Richtungen der Totalverschiebung r_n und Transversalverschiebung t_n der Richtung n verstanden.

Man denke sich um m eine Kugelfläche von unendlich kleinem Radius dn gelegt und nehme ein Coordinatensystem vom Ursprunge m an, dessen Axenrichtungen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ mit den Richtungen x, y, z übereinstimmen. Sind dann $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Coordinaten eines beliebigen von m aus in der Richtung n gelegenen Kugelpunktes, so ist für die Punkte unserer Kugelfläche der Ausdruck

$$(7)\qquad 2(x_n d\mathfrak{x} + y_n d\mathfrak{y} + z_n d\mathfrak{z})$$

das vollständige Differential einer Function von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{r}$, falls wir es mit einer Potentialbewegung zu thun haben. Obige Gleichungen (3) sind die Bedingungen für eine solche und da entsprechend § 19

$$(8) \qquad x_n = \frac{\partial n_n}{\partial \alpha} dn, \qquad y_n = \frac{\partial n_n}{\partial \beta} dn, \qquad z_n = \frac{\partial n_n}{\partial \gamma} dn,$$

$$(9) \qquad dn_n dn = 2(x_n d\mathfrak{x} + y_n d\mathfrak{y} + z_n d\mathfrak{z}),$$

so ist $n_n dn$ die fragliche Function von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und gleich dn-mal dem Potential der Verschiebungen, während dieses gleich dem Integral von (7) für den Kugelradius $dn = 1$ wird. Gehen wir auf der Kugel vom Punkte $n(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ aus zu dem in der Richtung s um ds entfernten Punkte über, so ist die Aenderung von n_n durch (9) bestimmt und nach (6) mit $d\sigma = ds : dn$

$$(10) \qquad \frac{dn_n}{ds} dn = 2 s_n = 2 n_s .$$

Auf Grund von Gleichung (6) lässt sich aussprechen: *Geht man von irgend einer Richtung n aus nach einer beliebigen zu n senkrechten Richtung s hin um den kleinen Winkel $d\sigma$ vor* (oder auch, geht man auf einer um m gelegten unendlich kleinen Kugelfläche von dem hinsichtlich m in der Richtung n gelegenen Punkte zu einem von n aus in der Richtung s um ds entfernten Punkte über), *dann ändert sich die Normalverschiebung um so mehr, je grösser die Componente der Transversalverschiebung t_n in der Richtung s ist. Die Normalverschiebung wächst* (in positivem Sinne) *am stärksten in der Richtung $s = t$ der resultirenden Transversalverschiebung, sie nimmt am stärksten ab* (in negativem Sinne zu) *in der t entgegengesetzten Richtung und sie bleibt constant beim Vorgehen in jeder der zwei Richtungen senkrecht zu t. Nach keiner Richtung s wächst die Normalverschiebung, wenn $t_n = 0$ ist, in welchem Falle für die Richtung n eine Hauptverschiebung eintritt* (§ 23). *Existiren bei m überhaupt keine Transversalverschiebungen, dann sind alle Normalverschiebungen von gleichem Werthe, und umgekehrt verschwinden im Falle gleicher Normalverschiebungen sämmtliche Transversalverschiebungen.*

Werden die jetzt abgeleiteten Gleichungen speciell auf die Potentialbewegung in einem Zeitelement dt bezogen, so entstehen durch Division mit dt analoge Beziehungen für die Verschiebungsgeschwindigkeiten. Dieselben Beziehungen ergeben sich, wenn man als *Potential der Verschiebungsgeschwindigkeiten* eine Function von α, β, γ definirt, deren vollständiges Differential

$$(11) \qquad 2(u_n d\alpha + v_n d\beta + w_n d\gamma)$$

ist. Es folgen die Potentialbedingungen

$$(12) \qquad u_y = v_x, \qquad v_z = w_y, \qquad w_x = u_z,$$

das Potential wird die Normalverschiebungsgeschwindigkeit v_n, für welche dann

$$dv_n = 2\,(u_n\,d\alpha + v_n\,d\beta + w_n\,d\gamma), \tag{13}$$

$$\frac{dv_n}{d\sigma} = 2\sigma_n = 2\varrho_n \cos(rs) = 2\tau_n \cos(ts). \tag{14}$$

Gehen wir auf der oben erwähnten kleinen Kugelfläche um $m\,(x, y, z)$ vom Punkte $n\,(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ aus in der Richtung s um ds weiter, dann folgen

$$dv_n\,dn = 2(x_n\,d\mathfrak{x} + y_n\,d\mathfrak{y} + z_n\,d\mathfrak{z}), \tag{15}$$

$$\frac{dv_n}{ds}\,dn = 2\sigma_n = 2v_s. \tag{16}$$

Das Potential der Verschiebungsgeschwindigkeiten ist das Integral von (13) für den Kugelradius $dn = 1$. Den oben nach Gleichung (10) gegebenen Satz kann man jetzt auch auf die Verschiebungsgeschwindigkeiten übertragen.

§ 32. Ueber kleine Verschiebungen.

Es mögen nun beim Punkte $m\,(x, y, z)$ alle Dehnungen e_n gegen 1 verschwindend klein sein, womit auch e_n^2 gegen e_n verschwindet. Dann folgen aus § 25, (1), (2) die Dehnung einer beliebigen Richtung n und die Schiebung zweier beliebiger Richtungen n, s

$$(1)\left\{\begin{aligned} e_n = {} & e_x \cos^2(nx) + e_y \cos^2(ny) + e_z \cos^2(nz) \\ & + q_{xy} \cos(nx)\cos(ny) + q_{yz} \cos(ny)\cos(nz) \\ & + q_{zx} \cos(nz)\cos(nx), \end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned} q_{ns} = {} & 2e_x \cos(nx)\cos(sx) \\ & + 2e_y \cos(ny)\cos(sy) + 2e_z \cos(nz)\cos(sz) \\ & + q_{xy}\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\ & + q_{yz}\left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\ & + q_{zx}\left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right]. \end{aligned}\right.$$

Für die Dilatation bei m fanden wir in § 27

$$\varkappa = (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) - 1,$$

worin e_1, e_2, e_3 die Hauptdehnungen bei m bedeuten. Bei der jetzt zulässigen Vernachlässigung von Producten der e wird daraus in Verbindung mit § 25, (16)

$$\varkappa = e_1 + e_2 + e_3 = e_x + e_y + e_z. \tag{3}$$

Die Summe der Dehnungen für je drei zu einander senkrechte Richtungen hat einen festen Werth. Nach § 6, (2) können wir im vorliegenden Falle ausdrücken

(4) $$q_{ns} = \cos(n_1 s_1) - \cos(ns).$$

Weil aber für Coordinatenaxen parallel den zu den Hauptdehnungen gehörigen Richtungen n die Glieder mit q_{xy}, q_{yz}, q_{zx} in (2) wegfallen, so sind für gegen 1 verschwindende e_n auch die Schiebungen q_{ns} gegen 1 verschwindend klein. Setzen wir

(5) $$\Theta = (sn) - (s_1 n_1),$$

dann folgt der Kleinheit von Θ wegen

$$\cos(s_1 n_1) = \cos(sn)\cos\Theta + \sin(sn)\sin\Theta = \cos(ns) + \Theta\sin(sn)$$

und damit

(6) $$q_{ns} = \Theta\sin(sn).$$

Die Schiebung zweier anfänglich rechtwinkliger Richtungen n, s (Fig. 11) ist also gleich der Aenderung Θ des eingeschlossenen Winkels oder gleich dem Winkel, welchen nach den Verschiebungen eine der neuen Richtungen n_1, s_1 mit dem Perpendikel auf die andere einschliesst. Dabei ist $q_{ns} = \Theta$ positiv oder negativ, je nachdem der neue Winkel $(n_1 s_1)$ kleiner oder grösser als ein rechter ist. Die zwei einander senkrechten Richtungen n, s entsprechende Schiebung giebt bis auf verschwindende Grössen genau an, um wieviel sich zwei unendlich benachbarte Flächenelemente bei m, deren Normalenrichtungen mit der Richtungslinie von n (oder s) zusammenfiel, in der aus s (oder n) entstandenen Richtung per Einheit ihrer ursprünglichen Entfernung längs einander verschoben haben.

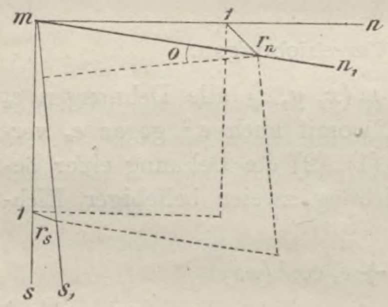

Fig. 11.

In §§ 5, 6 ergaben sich die Beziehungen

$$(1 + e_n)^2 = (1 + n_n)^2 + t_n^2 = 1 + 2n_n + r_n^2$$

$$q_{ns} = g_{ns} + p_{ns} \quad \text{mit} \quad p_{ns} = x_n x_s + y_n y_s + z_n z_s.$$

Wird nun vorausgesetzt, dass nicht nur wie oben die e_n gegen 1 und e_n^2 gegen e_n verschwinden, sondern dass auch t_n^2, r_n^2 gegen n_n zu vernachlässigen sind, dann liefert die erste Gleichung $e_n = n_n$. Wenn dies aber bei m allgemein gilt, also z. B. $e_x = x_x$, $e_y = y_y$, $e_z = z_z$ gesetzt werden kann, dann verlangt die Uebereinstimmung von (1) mit § 23, (1), dass auch $q_{xy} = g_{xy}$, $q_{yz} = g_{yz}$, $q_{zx} = g_{zx}$ seien, womit nach (2) und § 23, (2) allgemein $q_{ns} = g_{ns}$, die

Schiebung gleich der Normalgleitung, wird. Nimmt man umgekehrt p_{ns} gegen g_{ns} so klein an, dass bei m allgemein $q_{ns} = g_{ns}$ gerechnet werden darf, so verlangt die Uebereinstimmung von (2) mit § 23, (2), dass neben $q_{xy} = g_{xy}$, $q_{yz} = g_{yz}$, $q_{zx} = g_{zx}$ auch $e_x = x_x$, $e_y = y_y$, $e_z = z_z$ werde, womit Gleichung (1) nach § 23, (1) auf $e_n = n_n$ führt. Dies Resultat folgt auch direct daraus, dass für $s = n$, $q_{ns} = 2n_n$ wird (§ 22). Die Annahmen $e_n = n_n$ und $q_{ns} = g_{ns}$ bedingen also einander und setzen voraus, dass die Grössen r_n^2, t_n^2 gegen die n_n zu vernachlässigen sind. Da für $e_n = 0$, $r_n^2 = -2n_n$ und für $n_n = 0$, $(1 + e_n)^2 = 1 + t_n^2$ werden, so trifft dies nicht immer zu. Wenn jedoch angenommen wird, dass bei m alle Totalverschiebungen r_n gegen 1 verschwinden und dass e_n, q_{ns}, n_n, g_{ns} von niedrigerer Grössenordnung als r_n unberücksichtigt bleiben sollen, dann sind die Fälle, in welcher r_n^2 nicht gegen n_n verschwindet, von der Untersuchung ausgeschlossen und wir haben allgemein

$$(7) \qquad e_n = n_n, \qquad q_{ns} = g_{ns}.$$

Die Dehnung ist gleich der Normalverschiebung und die Schiebung gleich der Normalgleitung. Die in den gebräuchlichen Lehrbüchern der Elasticitätstheorie aufgestellten Beziehungen zwischen Spannungen und Verschiebungen gelten nur für diesen Fall. Auf ein wirkliches Durchdringen der Verschiebungsgesetze hat man damit von vornherein verzichtet. n_n, g_{ns} sind aus § 23 zu entnehmen. Für die Dilatation bei m folgt unter Voraussetzung von (7)

$$(8) \qquad \varkappa = \omega = x_x + y_y + z_z = a + b + c,$$

worin a, b, c die Hauptverschiebungen bedeuten. Die Berechtigung zu der Annahme, auf welchen die Gleichungen (7), (8) beruhen, hängt von Bedingungen und Zweck der Untersuchung, Wahl des Coordinatensystems und sonstigen Umständen ab, doch werden wir die Hauptverschiebungssumme ω in der Folge als Dilatation bezeichnen.

IV. Abschnitt.

Zweite Auffassung der Spannungs- und Bewegungsgesetze.

Bei Aufstellung der Spannungsgesetze in den Abschnitten I, II haben wir die Spannungen in üblicher Weise als Functionen des (durch Coordinaten und Normalenrichtungen bestimmten) augenblicklichen Ortes ihrer Flächenelemente dargestellt. Die Verschiebungen dagegen pflegt man als Functionen des anfänglichen Ortes der betreffenden Punkte aufzufassen. Will man nun von irgend welchen Verschiebungen auf die durch sie bedingten Spannungen schliessen, so macht sich der Umstand, dass beide Arten von Grössen als Functionen verschiedener Variabeln ausgedrückt sind, in wenig erwünschter Weise geltend. Man hat die hieraus entspringende Schwierigkeit dadurch zu umgehen gesucht, dass man alle Veränderungen klein genug annahm, um ganz allgemein die anfänglichen Coordinaten und Normalenrichtungen der Flächenelemente für die schliesslichen setzen zu können. Dies ist zulässig, wenn es sich um unendlich kleine Verrückungen, etwa um die Bewegung in einem Zeitelement handelt, wie bei den hydrodynamischen Grundgleichungen; es giebt jedoch Fälle, in welchen sich die Tragweite der Annahme nicht ohne Weiteres übersehen lässt. Aus diesem Grunde wohl hat *Kirchhoff* die Beziehungen zwischen Spannungen und Verschiebungen fester Körper ebenfalls auf den Fall beschränkt, dass alle Punkte derselben nur unendlich kleine Verrückungen erhalten (Vorles. üb. math. Physik. Mechanik, 1877, S. 121 u. 389), aus Lagen, für welche die sämmtlichen Spannungen gleich Null sind. Dann können aber auch nur unendlich kleine Spannungen entstehen und man hat eigentlich kein Recht, die betreffenden Gleichungen auf endliche Spannungen anzuwenden. Ein klarer Einblick in das Verhältniss zwischen Spannungsgesetzen und Verschiebungsgesetzen wird auf keinem der beiden Wege erreicht.

Nachdem in §§ 4—6 und Abschnitt III die Verschiebungsgesetze für Verrückungen von beliebiger Grösse aufgestellt wurden, soll im Folgenden gezeigt werden, dass man die Spannungsgesetze in gleicher Allgemeinheit darstellen kann. Im Zusammenhange damit steht eine zweite Auffassung der Bewegungsgleichungen. *Wir setzen voraus, dass, abgesehen von beliebig vielen Unstetigkeitsschnitten, die Punkte, welche vor den Verschiebungen ein Flächenelement bei m bildeten, auch nach den Verschiebungen auf einem solchen liegen* und also Punkte, welche anfangs zu einem Massenelement vereinigt waren, auch schliesslich ein solches ausmachen, wie es sich für die im vorigen Abschnitte betrachteten Verrückungen und Verschiebungen ergeben hat (§ 21).

§ 33. Modification des Spannungsbegriffs.

Es sei ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem gewählt. Zu Anfang unserer Betrachtung lag der Punkt m bei x, y, z und von ihm aus in der Normalenrichtung n ein beliebiges Flächenelement der Grösse f_n. Infolge irgend welcher Bewegung der im Eingang erwähnten Art geräth der Punkt m nach $x + \xi$, $y + \eta$,

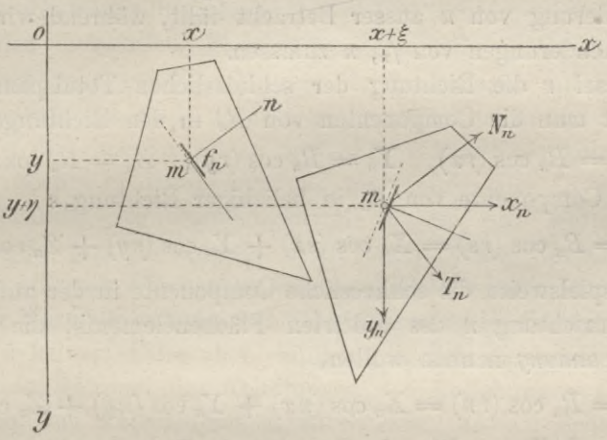

Fig. 12.

$z + \zeta$, während das Flächenelement seine Grösse und Normalenrichtung ändert. Die Verrückungen ξ, η, ζ wie die Aenderungen von f_n und n können beliebig gross sein (Fig. 12, 13).

Wie wir nun als Verschiebungen eines Punktes n bei m die relativen Wege pro Längeneinheit der ursprünglichen Entfernung beider Punkte bezeichneten, so wollen wir in diesem Abschnitte unter Spannungen eines Flächenelements f_n bei m die Kräfte pro Quadrateinheit des ursprünglichen Flächeninhalts verstehen. Wie ferner bei den Verschiebungen die Hauptbezeichnung der Verschiebungsrichtung und der Index der anfänglichen Richtung des verschobenen Punktes entsprach, so soll auch für die Spannungen die Hauptbezeichnung der Spannungsrichtung und der Index der anfänglichen Normalenrichtung des afficirten Flächenelements entsprechen. Die schliesslichen Flächenkräfte auf das Flächenelement der anfänglichen Grösse f_n und anfänglichen Normalenrichtung n in den Richtungen x, y, z werden also beispielsweise $f_n X_n$, $f_n Y_n$, $f_n Z_n$ sein. Hierin sind die Spannungen X_n, Y_n, Z_n nur dann auch Spannungen im früheren Sinne (Kräfte pro Quadrateinheit der augenblicklichen Flächengrösse), wenn die Aenderung von f_n gegen diesen Werth selbst verschwindet und nur dann Spannungen auf das frühere Flächenelement (der augenblicklichen Normalenrichtung n), wenn die Aenderung von n ausser Betracht fällt, während wir beliebig grosse Aenderungen von f_n, n zulassen.

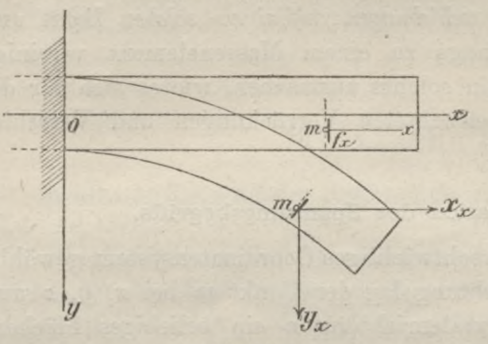

Fig. 13.

Es sei r die Richtung der schliesslichen Totalspannung R_n, dann hat man die Componenten von R_n in den Richtungen x, y, z

(1) $X_n = R_n \cos(rx), \quad Y_n = R_n \cos(ry), \quad Z_n = R_n \cos(rz)$

und die Componente von R_n in beliebiger Richtung s

(2) $S_n = R_n \cos(rs) = X_n \cos(sx) + Y_n \cos(sy) + Z_n \cos(sz),$

also beispielsweise die schliessliche Componente in der anfänglichen Normalenrichtung n des afficirten Flächenelements, die wir hier *Normalspannung* nennen wollen,

(3) $N_n = R_n \cos(rn) = X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz).$

Für R_n und die resultirende Componente T_n senkrecht zur anfänglichen Normalenrichtung, die jetzt *Transversalverspannung* heissen soll, folgen

(4) $R_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2, \qquad T_n^2 = R_n^2 - N_n^2 = R_n^2 \sin^2(rn).$

Wir fassen wieder R_n, T_n als Absolutwerthe auf, sodass die Componenten von T_n in den Richtungen x, y, z sich ausdrücken:

$$(5) \qquad \begin{cases} T_n \cos(tx) = X_n - N_n \cos(nx), \\ T_n \cos(ty) = Y_n - N_n \cos(ny), \\ T_n \cos(tz) = Z_n - N_n \cos(nz), \end{cases}$$

unter t die Richtung von T_n verstanden. Man beachte, dass für das schliessliche Flächenelement im Allgemeinen weder N_n normal wirkt, noch T_n eine Schubkraft ist.

Werden für zwei dem Punkte m anliegende Flächenelemente beliebiger anfänglicher Normalenrichtungen n, s die Richtungen r der Totalspannungen R_n, R_s durch $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ bezeichnet und

$$(6) \qquad P_{ns} = X_n X_s + Y_n Y_s + Z_n Z_s$$

gesetzt, dann folgt mit Rücksicht auf (1)

$$(7) \qquad P_{ns} = R_n R_s \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{s}).$$

Findet sich beispielsweise $P_{ns} = 0$, dann wirken R_n, R_s senkrecht zu einander. Die Summe der Projectionen oder resultirenden Componenten von R_n in der Richtung s und von R_s in der Richtung n ist

$$(8) \qquad G_{ns} = S_n + N_s = R_n \cos(\mathfrak{n}s) + R_s \cos(\mathfrak{s}n)$$

und aus (6)—(8) entstehen mit $s = n$

$$(9) \qquad P_{nn} = R_n^2, \qquad G_{nn} = 2N_n.$$

Wie in § 3, so lassen sich auch hier aus X_n, Y_n, Z_n alle weiteren Spannungsverhältnisse berechnen.

In allen bekannten Elasticitätsuntersuchungen wurde angenommen, dass man bei Beurtheilung der Spannungen auf beliebige Flächenelemente bei einem Punkte m die anfänglichen und schliesslichen f_n, n für einander setzen darf. Für solche Fälle können mit demselben Rechte in den obigen und weiter folgenden Gleichungen dieses Abschnitts die Spannungen als Kräfte pro schliesslicher Quadrateinheit und die Indices n als schliessliche Normalenrichtungen der afficirten Flächenelemente angesehen werden, womit auch N_n, T_n zur Normalspannung und Schubspannung im früheren Sinne werden. In keinem Falle aber empfiehlt es sich, die erwähnte Annahme schon während der Ableitungen der Beziehungen zwischen Spannungen und Verschiebungen zu machen, da die Spannungen ganz oder theilweise gerade durch die Aenderungen der Gruppirung bei m bedingt sind. Bei technischen Problemen speciell pflegen überhaupt nur die Beanspruchungen pro Quadrateinheit der anfänglichen Flächenelemente zu interessiren.

§ 34. Bewegung beliebiger Körper.

Es handle sich zur Zeit t um die augenblicklichen Bewegungsverhältnisse der Körperpunkte hinsichtlich eines beliebig bewegten Coordinatensystems. Wir gehen aus von den Lagen der Körperpunkte zur Zeit t_0, auf welche wir im Sinne des vorigen § auch die Flächenkräfte beziehen. Ein Punkt m der Masse m, welcher zur Zeit t_0 bei x, y, z lag, habe augenblicklich die Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, sowie in den Richtungen x, y, z die Geschwindigkeiten u, v, w, während $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die auf Bewegung in diesen Richtungen hinwirkenden Kräfte bedeuten. Dann sind zur Zeit t

$$(1)\quad u = \frac{\partial(x+\xi)}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t},\quad v = \frac{\partial(y+\eta)}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t},\quad w = \frac{\partial(z+\zeta)}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathfrak{X},\qquad m\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mathfrak{Y},\qquad m\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mathfrak{Z}.$$

Wir denken uns nun zur Zeit t einen beliebigen Theil des Körpers abgegrenzt und betrachten diesen als System für sich. Für jeden Punkt des Systems gelten die vorstehenden Gleichungen. Werden jedoch entsprechende Gleichungen aller Systempunkte addirt, so fallen rechts die innern Kräfte wegen doppelten Auftretens mit entgegengesetzten Vorzeichen aus und es genügt, die äusseren Kräfte in die Summen aufzunehmen.

Die äusseren Kräfte sind theils Massenkräfte, theils Oberflächenkräfte. Werden zur Zeit t für die Richtungen x, y, z die specifischen Massenkräfte eines Punktes m durch X, Y, Z und die Flächenkräfte des Oberflächenelements der anfänglichen Normalenrichtung n und anfänglichen Grösse $f_n = dO$ bestimmungsgemäss durch $X_n dO$, $Y_n dO$, $Z_n dO$ bezeichnet, dann hat man für unseren Körpertheil

$$(2)\quad \begin{cases} \sum m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sum mX + \int X_n dO, \\ \sum m\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \sum mY + \int Y_n dO, \\ \sum m\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \sum mZ + \int Z_n dO. \end{cases}$$

Die Integrale sind auf alle Oberflächenelemente und die Summen Σ auf alle Systempunkte zu erstrecken, wobei man den auf die Punkte m_1, m_2, · · bezüglichen Verrückungen und Massenkräften die Indices 1, 2, · · gegeben denken kann.

Betrachten wir jetzt ein zur Zeit t_0 von $m\,(x, y, z)$ aus abgegrenztes Massenelement, dessen Kanten damals von den Längen dx, dy, dz und den Coordinatenaxen parallel waren. Dieses Element vom Anfangsvolumen $dK = dx\,dy\,dz$ möge Massenpunkte der Gesammtmasse $\mu\,dK$ enthalten, sodass μ *die anfängliche specifische Masse* bedeutet, während sich die Gesammtmasse mit der Zeit nicht ändert. Die Wege des Massenmittelpunktes unseres Elements in den Richtungen x, y, z seien für das Zeitintervall von t_0 bis t durch ξ, η, ζ bezeichnet, womit dessen Geschwindigkeiten zur Zeit t wie in (1) ausgedrückt sind. Man hat dann nach der Lehre vom Schwerpunkt zur Zeit t, wenn X, Y, Z die mittleren specifischen Massenkräfte in den Richtungen x, y, z bedeuten:

$$(3)\quad \sum mX = \mu dK \cdot X, \quad \sum mY = \mu dK \cdot Y, \quad \sum mZ = \mu dK \cdot Z,$$

$$(4)\quad \begin{cases} \sum m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu dK \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ \sum m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu dK \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ \sum m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu dK \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Enthält nun der Körpertheil, für welchen die Gleichungen (2) aufgestellt wurden, beliebig viele und z. B. auch unendlich viele der betrachteten zur Zeit t_0 abgegrenzten Massenelemente, dann folgen aus (2) mit (3), (4)

$$(5)\quad \begin{cases} \int\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - X\right) \mu dK = \int X_n dO, \\ \int\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y\right) \mu dK = \int Y_n dO, \\ \int\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - Z\right) \mu dK = \int Z_n dO. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten ebensowohl für endliche Körper und Körpertheile, wie für einzelne Körperelemente. Die Integrale links und rechts sind bezw. auf alle anfänglichen Körperelemente dK und alle anfänglichen Oberflächenelemente dO zu erstrecken.

Aus der zweiten Gleichungsreihe oben folgen ganz wie in § 10

$$m\left(\frac{dw}{dt} y - \frac{dv}{dt} z\right) = \mathfrak{Z} y - \mathfrak{Y} z,$$

$$m\left(\frac{du}{dt} z - \frac{dw}{dt} x\right) = \mathfrak{X} z - \mathfrak{Z} x,$$

$$m\left(\frac{dv}{dt} x - \frac{du}{dt} y\right) = \mathfrak{Y} x - \mathfrak{X} y.$$

Die in § 10 erwähnte Bedeutung dieser Gleichungen trifft jetzt nicht mehr zu und damit schwinden auch die dort gezogenen Consequenzen derselben. Das im letzten Absatze des § 10 Gesagte gilt jedoch auch hier.

§ 35. **Bewegung von Körperelementen.**

Wir denken uns zur Zeit t_0 vom Punkte m (x, y, z) aus ein parallelepipedisches Körpertheilchen $dK = dx\,dy\,dz$ abgegrenzt, dessen Kanten in den Richtungen der Coordinatenaxen liegen. Dasselbe ist zu einer beliebigen späteren Zeit t an irgend einen andern Ort

$x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ gelangt und aus den sechs rechteckigen Seitenflächen sind ebenso viel Flächenelemente von andern Formen, Grössen und Normalenrichtungen geworden. Die zur Zeit t auf die Oberfläche des Massenelements wirkenden Kräfte bezeichnen wir gemäss § 33 und wenden die Gleichungen (5) des vorigen § auf dasselbe an. So entstehen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - X\right)\mu dK &= \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}dx - X_x\right)f_x \\
&+ \left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y}dy - X_y\right)f_y \\
&+ \left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z}dz - X_z\right)f_z, \\
\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y\right)\mu dK &= \left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x}dx - Y_x\right)f_x \\
&+ \left(Y_y + \frac{\partial Y_y}{\partial y}dy - Y_y\right)f_y \\
&+ \left(Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z}dz - Y_z\right)f_z, \\
\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - Z\right)\mu dK &= \left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial x}dx - Z_x\right)f_x \\
&+ \left(Z_y + \frac{\partial Z_y}{\partial y}dy - Z_y\right)f_y \\
&+ \left(Z_z + \frac{\partial Z_z}{\partial z}dz - Z_z\right)f_z
\end{aligned}$$

und wegen

$$dK = f_x dx = f_y dy = f_z dz$$

nach Reduction

$$(1)\quad \begin{cases}
\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - X\right)\mu = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\
\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y\right)\mu = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\
\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - Z\right)\mu = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{cases}$$

Schreiben wir ferner die Gleichungen § 34, (5) für ein Massenelement an, welches zur Zeit t_0 die Form eines Tetraeders mit von $m\,(x, y, z)$ ausgehenden Kanten dx, dy, dz in den Richtungen x, y, z hatte, während die vierte Seitenebene f_n von der Normalenrichtung n war. Es ergeben sich:

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - X\right) \mu dK = X_n f_n - X_x f_x - X_y f_y - X_z f_z,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y\right) \mu dK = Y_n f_n - Y_x f_x - Y_y f_y - Y_z f_z,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - Z\right) \mu dK = Z_n f_n - Z_x f_x - Z_y f_y - Z_z f_z.$$

Hierin sind

$$3dK = f_x dx = f_y dy = f_z dz,$$

$$f_n = f_x \cos(nx) = f_y \cos(ny) = f_z \cos(nz).$$

Setzen wir voraus, dass die mit dK multiplicirten Ausdrücke den Spannungen X_n, Y_n, Z_n gegenüber nicht unendlich gross sind, so folgen:

$$(2) \qquad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{cases}$$

Ganz wie in § 11 lässt sich zeigen, dass diese Gleichungen für beliebige anfängliche Normalenrichtungen n gelten, und wie dort brauchen die rechts auftretenden Kräfte nicht für alle n die gleichen Werthe zu haben.

In (1) sind Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den Richtungen x, y, z zur Zeit t

$$(3) \qquad u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Denkt man sich für die Beschleunigungen hier wie in § 11 allgemeine Bezeichnungen p_x, p_y, p_z eingeführt, so stimmen die Formen der Gleichungen (1), (2) in beiden Paragraphen genau überein. Doch besteht dem Wesen nach ein bedeutender Unterschied. Denn während sich die dortigen Gleichungen auf Körperelemente beziehen, welche zur Zeit t bei x, y, z liegen und rechtwinklig parallelepipedisch oder tetraedrisch geformt sind, handelt es sich jetzt um Elemente, für welche dies Alles zu irgend einer früheren Zeit t_0 galt, wogegen zur Zeit t die Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ (bei beliebig grossen ξ, η, ζ) sind und auch die Formen sich geändert haben. Während dort X_n, Y_n, Z_n die Componenten der Totalspannung R_n zur Zeit t in den Richtungen x, y, z für ein Flächenelement der augenblicklichen Normalenrichtungen n bedeuten, gilt das Gleiche jetzt für ein Flächenelement der anfänglichen Normalenrichtung n, wozu noch dort unter Spannungen die Flächenkräfte pro Quadrateinheit der augenblicklichen Flächengrösse und hier pro Quadrateinheit der anfänglichen Flächengrösse verstanden sind. Während in § 11 X_x, Y_y, Z_z normal ihren Flächenelementen und alle übrigen Kräfte in (1), (2) rechts in den Ebenen ihrer Flächenelemente wirken, ist dies in den obigen Gleichungen (1), (2) im Allgemeinen nicht der Fall. Während schliesslich früher μ die augenblickliche specifische Masse war, ist jetzt μ die anfängliche specifische Masse oder Masse pro anfänglicher Cubikeinheit unseres Massenelements. Wenn wir trotz dieser verschiedenen Bedeutung der erwähnten Grössen die früheren Bezeichnungen beibehalten haben, so geschah es, um das Gemeinsame in den Bewegungs- und Spannungsgesetzen hervortreten zu lassen, weil ferner für verschwindende Grössenänderungen der f_n die X_n, Y_n, Z_n auch Spannungen im bisherigen Sinne werden, weil für $t - t_0 = dt$ gleichlautende Gleichungen auch gleiche Bedeutung erlangen und weil wir nicht genug Alphabete besitzen.

§ 36. **Stetige Spannungen. Potentialspannungen.**

In den Gleichungen (1), (2) des vorigen § können die Spannungen rechts ihre Werthe von Punkt zu Punkt sprungweise ändern, es sind wie in den früheren Abschnitten beliebig viele Unstetigkeitsschnitte jeder Form zugelassen. Wir wollen jedoch jetzt den Fall ins Auge fassen, dass sich die betrachteten Massenelemente zwischen zwei aufeinander folgenden Unstetigkeitsschnitten oder überhaupt innerhalb eines Körpertheils befinden, für welchen die Spannungen augenblicklich stetige Functionen des anfänglichen Orts ihrer Flächenelemente sind. Da alsdann die in § 35, (2) rechts auftretenden Kräfte innerhalb eines unendlich kleinen Raumes bei m nur um verschwindende Grössen von einander abweichen, so gelten diese Gleichungen mit constanten Werthen der rechtsseitigen Kräfte für alle m unendlich benachbarten Flächenelemente beliebiger anfänglicher Normalenrichtungen n. Ein wesentlicher Unterschied gegenüber den früher erhaltenen Gesetzen stetiger Spannungen und allen bekannten Untersuchungen der letzteren besteht jedoch darin, dass jetzt die Grundbeziehungen

$$X_y = Y_x, \qquad Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z$$

nicht mehr zutreffen. Damit werden trotz übereinstimmender Formen der Gleichungen in § 11 und 35 die Spannungsgesetze des II. Abschnitts hinfällig, sie gelten nur für stetige Spannungen als Functionen des augenblicklichen Orts ihrer Flächenelemente.

Welche Gesetze treten nun aber in Kraft? Vergleichen wir die in § 33 aufgestellten Gleichungen für die Spannungen auf

Flächenelemente beliebiger anfänglicher Normalenrichtungen n mit den Formeln des § 4 für die Verschiebungen der Punkte beliebiger anfänglicher Richtungen n, so zeigt sich, dass dieselben, abgesehen von der Bezeichnung der Spannungen und Verschiebungen durch grosse und kleine lateinische Buchstaben, vollständig übereinstimmen (die Gleichungen für S_n, N_n, T_n, R_n, P_{ns}, G_{ns} mit denen für s_n, n_n, t_n, r_n, p_{ns}, g_{ns}). Die Gesetze stetiger Spannungen und Verschiebungen müssen also ebenfalls gleiche Formen erhalten, wenn noch die Spannungscomponenten X_n, Y_n, Z_n, durch welche alle Spannungsfunctionen für das Flächenelement der anfänglichen Normalenrichtung n bestimmt sind, sich analog ausdrücken lassen wie die Verschiebungscomponenten x_n, y_n, z_n, mit welchen wir alle Verschiebungsfunctionen für Punkte der anfänglichen Richtungen n kennen (§§ 3, 4). In § 33 ergaben sich

$$(1)\qquad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz), \end{cases}$$

und in § 21 erhielten wir

$$(2)\qquad \begin{cases} x_n = x_x \cos(nx) + x_y \cos(ny) + x_z \cos(nz), \\ y_n = y_x \cos(nx) + y_y \cos(ny) + y_z \cos(nz), \\ z_n = z_x \cos(nx) + z_y \cos(ny) + z_z \cos(nz). \end{cases}$$

In beiden Gleichungssystemen sind die rechtsseitigen Componenten unabhängig von der Richtung n. *Hiernach entsprechen bei einem Punkte m, welcher anfangs bei x, y, z lag, nach beliebig grossen Bewegungen der eingangs dieses Abschnitts erwähnten Art stetigen Spannungen auf Flächenelemente der anfänglichen Normalenrichtungen n genau dieselben Gesetze, welche wir im III. Abschnitte für stetige Verschiebungen der anfänglichen Richtungen n abgeleitet haben.* Man hat einfach dort Spannungen, Spannungscomponenten, Spannungsellipsoid u. s. w. für Verschiebungen, Verschiebungscomponenten, Verschiebungsellipsoid u. s. w. zu setzen und, wenn man will, an Stelle der kleinen lateinischen Hauptbezeichnungen die entsprechenden grossen zu setzen, ohne die Indices zu ändern. Zu beachten ist jedoch, dass jetzt unter Normalspannungen, Hauptspannungen, Transversalspannungen im Allgemeinen nicht wie früher normal und längs den augenblicklichen Flächenelementen wirkende Spannungen zu verstehen sind, sondern Kräfte parallel und senkrecht zur anfänglichen Normalenrichtung n. Ein Irrthum ist unmöglich, wenn man sich an die in § 33 festgestellte Bedeutung der Buchstabenbezeichnungen hält.

Für eine beliebige anfängliche Normalenrichtung n seien $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ durch α, β, γ bezeichnet. Ist dann der Ausdruck

$$(3) \qquad X_n\,d\alpha + Y_n\,d\beta + Z_n\,d\gamma$$

bei m das vollständige Differential einer Function von α, β, γ, dann soll diese Function ein Potential der Spannungen daselbst heissen. Die Bedingungen für die Existenz eines Spannungspotentials sind also (§ 9):

$$(4) \qquad \frac{\partial X_n}{\partial \beta} = \frac{\partial Y_n}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial Y_n}{\partial \gamma} = \frac{\partial Z_n}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial Z_n}{\partial \alpha} = \frac{\partial X_n}{\partial \gamma},$$

oder mit Rücksicht auf (1)

$$(5) \qquad X_y = Y_x, \qquad Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gelten die aus §§ 30, 31 folgenden Beziehungen, aber auch alle Gesetze des II. Abschnitts mit der Massgabe, dass jetzt n, s und die Indices der Spannungen die anfänglichen Normalenrichtungen (zur Zeit t_0) der betreffenden Flächenelemente bedeuten, während früher die schliesslichen Normalenrichtungen (zur Zeit t) damit gemeint waren. Wir werden solche Spannungen in der Folge *Potentialspannungen* nennen. Für Potentialspannungen sind die Hauptspannungen A, B, C und Grenzspannungen R_1, R_2, R_3 (Maxima und Minima der Totalspannungen R_n) bezw. numerisch gleich und den gleichen Richtungen entsprechend (§§ 15, 31). Für $t - t_0 = dt$ und überhaupt für unendlich kleine Verrückungen dürfen stetige endliche Spannungen immer als Potentialspannungen angesehen werden.

§ 37. Princip der Coexistenz elastischer Bewegungen.

Der Körperpunkt m, welcher zur Zeit t_0 bei x, y, z lag, ist zu irgend einer späteren Zeit t nach $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ gelangt. Wir denken uns von m aus zur Zeit t_0 ein parallelepipedisches Massenelement abgegrenzt, dessen Kanten damals in den Richtungen x, y, z lagen, während seine specifische Masse μ war. Zur Zeit t bestehen dann nach § 35 die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu X + \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z}, \\[2ex] \mu \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu Y + \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z}, \\[2ex] \mu \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu Z + \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Bei Erzeugung der fraglichen Bewegung können beliebige Ursachen zusammengewirkt haben.

Steht ein durch gegebene (von den innern Kräften unabhängige) äussere Kräfte ergriffener Körper mit andern Körpern derart in Berührung, dass er der Einwirkung der ersteren nicht frei folgen kann, so bilden die Gegenwirkungen der fremden Körper neue äussere Kräfte des betrachteten Systems, die äusseren Kräfte sind *Activkräfte* oder *Reactionen.* Es kann vorkommen, dass einzelne dieser Reactionen durch die gegebenen äusseren Kräfte nicht mitbestimmt sind, sondern von den inneren Kräften abhängen.

Den beliebigen Ursachencomplexen U', U'', $\cdot\cdot$ mögen einzeln Spannungen entprechen, welche wir, wie alle zugehörigen Grössen, mit den Indices der betreffenden U versehen. Dann hat man nach der ersten Gleichung (1)

$$\mu \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} = \mu X' + \frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} + \frac{\partial X_z'}{\partial z},$$
$$\mu \frac{\partial^2 \xi''}{\partial t^2} = \mu X'' + \frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} + \frac{\partial X_z'}{\partial z},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wirken alle Ursachencomplexe zusammen, so ist die specifische Massenkraft in der Richtung x

$$X = X' + X'' + \cdots,$$

gegebene Oberflächenkräfte des Körpers addiren sich ebenfalls. Wären nun noch die durch die inneren Kräfte bedingten Spannungen und Oberflächenkräfte

$$X_x = X_x' + X_x'' + \cdots,$$
$$X_y = X_y' + X_y'' + \cdots,$$
$$X_z = X_z' + X_z'' + \cdots,$$

so würde durch Addition des zweiten Gleichungssystems mit Rücksicht auf (1) folgen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi''}{\partial t^2} + \cdots = \frac{\partial^2 (\xi' + \xi'' + \cdot\cdot)}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u_0 + \frac{\partial \xi'}{\partial t} + \frac{\partial \xi''}{\partial t} + \cdots = u_0 + \frac{\partial (\xi' + \xi'' + \cdot\cdot)}{\partial t}$$
$$\xi = u_0 (t - t_0) + \xi' + \xi'' + \cdots$$

Analoge Schlüsse lassen sich aus den beiden letzten Gleichungen (1) ziehen. Wir können aussprechen: *Wenn mehrere Complexe von Ursachen einzeln Spannungen erzeugen, welche sich beim Zusammenwirken aller Ursachen addiren, dann entsteht die resultirende Bewegung durch Uebereinanderlagerung der anfänglichen und von den einzelnen Complexen erzeugten Bewegungen, es können die Einzelbewegungen als neben einander existirend betrachtet werden.* Erzeugt z. B. jeder Ursachencomplex für sich Gleichgewicht, so wird auch beim Zusammenwirken einzelner oder aller Complexe Gleichgewicht bestehen. Dies *Princip der Coexistenz* ist besonders für die Untersuchung elastischer Bewegungen wichtig, es wurde hinsichtlich der Lichtbewegung zuerst von *Huyghens* erkannt (§ 89).

Wir setzen jetzt die Gültigkeit des Princips der Coexistenz voraus. Unter Einwirkung der gegebenen äusseren Kräfte und sonst vorhandener Ursachen sei Gleichgewicht möglich, während augenblicklich eine innere Bewegung existirt. Geben wir den Spannungen, welche den fraglichen Gleichgewichtslagen $x + \xi'$, $y + \eta'$, $z + \zeta'$ entsprechen, den Index $'$, so folgen aus der ersten Gleichung (1)

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} = 0 = \mu X + \dfrac{\partial X_x'}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y'}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z'}{dz}, \\ \dfrac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} = 0 = \mu Y + \dfrac{\partial Y_x'}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y'}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z'}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta'}{\partial t^2} = 0 = \mu Z + \dfrac{\partial Z_x'}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y'}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z'}{\partial z}. \end{cases}$$

Sind ferner zur Zeit t die ganzen Verrückungen durch $\xi = \xi' + \xi''$, $\eta = \eta' + \eta''$, $\zeta = \zeta' + \zeta''$ und die ganzen Spannungen in analoger Weise bezeichnet, dann hat man für die Bewegung hinsichtlich der Gleichgewichtslagen

$$(3) \qquad \xi'' = \xi - \xi', \qquad \eta'' = \eta - \eta', \qquad \zeta'' = \zeta - \zeta',$$

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi''}{\partial t} = \dfrac{\partial(\xi - \xi')}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial \eta''}{\partial t} = \dfrac{\partial(\eta - \eta')}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial \zeta''}{\partial t} = \dfrac{\partial(\zeta - \zeta')}{\partial t}. \end{cases}$$

Darf schliesslich angenommen werden, dass die äusseren Massenkräfte und unabhängigen Oberflächenkräfte infolge der Verrückungen ξ'', η'', ζ'' keine Aenderungen erleiden, so folgen durch Subtraction entsprechender Gleichungen (2) und (1)

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi''}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2(\xi - \xi')}{\partial t^2} = \dfrac{\partial X_x''}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y''}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z''}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 \eta''}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2(\eta - \eta')}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Y_x''}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y''}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z''}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta''}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2(\zeta - \zeta')}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Z_x''}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y''}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z''}{\partial z}. \end{cases}$$

Vergleicht man diese Formeln mit (1), so ergiebt sich der Satz: *Unter Voraussetzung des Princips der Coexistenz folgen die Bewegungen der Körperpunkte um die den gegebenen äusseren Kräften entsprechen-*

den Gleichgewichtslagen denselben Gesetzen, wie die Bewegungen, welche die Körperpunkte um ihre anfänglichen Lagen bei Wegfall der erwähnten äusseren Kräfte ausführen würden. Die letzteren können also unberücksichtigt bleiben, wenn die fraglichen Bewegungen allein interessiren (elastische Schwingungen). Vorstehender Satz wurde für feste Körper zuerst von *Clebsch* ausgesprochen, doch lässt *Clebsch* anstatt der gegebenen (und von diesen herrührenden) äusseren Kräfte sämmtliche äusseren Kräfte wegfallen, was nicht scharf ist, da äussere Reactionen durch die untersuchten Bewegungen selbst bedingt sein können.

Lassen sich die Spannungen beispielsweise als lineare Functionen einer Anfangsspannung P, einer Temperaturänderung τ und der Verrückungen ξ, η, ζ oder von Differentialquotienten dieser Grössen darstellen, so tritt für die Ursachen P, τ, ξ, η, ζ und Theile derselben das Princip der Coexistenz ein (Abschnitte VI und VII).

V. Abschnitt.

Arbeit. Lebendige Kraft. Energie.

Wenn es sich um Ableitungen auf Grund der früher entwickelten Bewegungsgleichungen für Körperelemente handelt, so kann es zunächst freigestellt bleiben, ob diese Gleichungen nach § 11 oder § 35 aufgefasst werden sollen, ob x, y, z die Coordinaten eines Körperpunktes m zur Zeit t oder t_0 bedeuten und die Spannungen im Zeitpunkt t Functionen des Orts zur einen oder anderen Zeit sind. Man hat dabei nur für die Beschleunigungen in den Richtungen x, y, z zur Zeit t allgemeine Bezeichnungen p_x, p_y, p_z zu wählen und im Uebrigen bezüglich der Bezeichnungen nach den Angaben in §§ 3, 10, 11 und §§ 33, 34, 35 zu verfahren. Dies soll im Folgenden geschehen. Zu beachten ist, dass sich die Bewegungsgleichungen in beiden erwähnten Fällen auf ein selbst beliebig bewegtes Coordinatensystem beziehen, womit das Gleiche für die daraus folgenden Formeln gilt. Obgleich ξ, η, ζ in den vorzunehmenden Ableitungen nicht allgemein dieselbe Bedeutung wie im vorigen Abschnitte haben, schien es uns doch überflüssig, unterscheidende Indices anzuwenden.

§ 38. d'Alembert's Princip und Princip der virtuellen Verrückungen.

Es sei $\mu\, dK$ ein Massenelement, welches zur Zeit t oder t_0 von $m(x, y, z)$ aus abgegrenzt wurde und damals parallelepipedische Form mit Kanten in den Richtungen x, y, z hatte. Dann bestehen zur Zeit t bezw. im Sinne des § 11 oder § 35 die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = \mu(p_x - X), \\[2ex] \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} = \mu(p_y - Y), \\[2ex] \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = \mu(p_z - Z). \end{cases}$$

Multipliciren wir dieselben für jedes Element mit irgend welchen Grössen $\pm\xi\,dK$, $\pm\eta\,dK$, $\pm\zeta\,dK$, addiren und integriren über den ganzen Körper, so folgt mit den Bezeichnungen

$$G = \int (p_x\xi + p_y\eta + p_z\zeta)\mu\,dK, \tag{2}$$

$$\mathfrak{M} = \int (X\xi + Y\eta + Z\zeta)\mu\,dK, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{N} = \int \Big[&\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\xi + \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\eta \\ &+ \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\zeta\Big]dK\end{aligned}\right. \tag{4}$$

die Bezeichnung

$$G = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}. \tag{5}$$

Sind zur Zeit t die Beschleunigungen aller Körperelemente in Hinsicht unseres Coordinatensystems gleich Null, dann wird aus (5)

$$0 = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}. \tag{6}$$

Versteht man unter $\pm\xi$, $\pm\eta$, $\pm\zeta$ irgend welche beliebig grosse virtuelle Verrückungen der Körperpunkte $m(x, y, z)$ gegenüber deren Lagen zur Zeit t, fasst die ξ, η, ζ als Functionen des Orts zur Zeit t oder t_0 auf, je nachdem die Gleichungen (1) im Sinne des § 11 oder § 25 gelten sollen, und verfährt bei Unstetigkeiten der Spannungen, Verrückungen und deren Functionen nach Anweisung der §§ 13, 21, dann drückt (5) das *d'Alembert'sche Princip* und (6) das *Princip der virtuellen Verrückungen* für beliebige Körper aus. Wäre beispielsweise zur Zeit t eine Bewegung der Körperelemente hinsichtlich unsers Coordinatensystems nicht vorhanden, so würde bei Erfüllung von (6) auch Gleichgewicht bestehen bleiben.

Zieht man anstatt der Spannungen deren auf die einzelnen Körperpunkte wirkenden Componenten in Betracht und berücksichtigt in (2), (3) die Gleichungen (3), (4) der §§ 10, 34, so folgt aus (5) die bekannte Form des d'Alembert'schen Princips für ein System discreter materieller Punkte (§ 69)

$$\sum m\left[(p_x - X)\xi + (p_y - Y)\eta + (p_z - Z)\zeta\right] = 0$$

und hieraus bei verschwindenden Beschleunigungen die entsprechende Form des Princips der virtuellen Verrückungen

$$\sum m(X\xi + Y\eta + Z\zeta) = 0.$$

Zu beachten ist, dass sich in (2) bis (4) das Volumen $dK = dx\,dy\,dz$, wie überhaupt in der Folge Coordinaten, Dimensionen, Normalenrichtungen u. s. w., auf die Zeit t oder t_0 beziehen, je nachdem die Spannungen und Verrückungen als Functionen des Orts zur einen oder anderen Zeit aufgefasst werden.

§ 39. Umformungen.

Die Gleichungen (5), (6) des vorigen §, welche die Principien von *d'Alembert* und der virtuellen Verrückungen ausdrücken, lassen sich noch in andere Formen bringen. Führen wir ein

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F} = \int\Big[& \frac{\partial(\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\xi X_y + \eta Y_y + \zeta Z_y)}{\partial y} \\ & + \frac{\partial(\xi X_z + \eta Y_z + \zeta Z_z)}{\partial z}\Big] dK, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{D} = \int\Big[& X_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + X_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + X_z \frac{\partial \xi}{\partial z} + Y_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + Y_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + Y_z \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ & + Z_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + Z_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + Z_z \frac{\partial \zeta}{\partial z}\Big] dK \end{aligned}\right.$$

und beachten in (1)

$$\frac{\partial \xi X_x}{\partial x} = \xi \frac{\partial X_x}{\partial x} + X_x \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

sowie die analogen Beziehungen, dann folgt nach § 38, (4)

$$(3)\qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{F} - \mathfrak{D}.$$

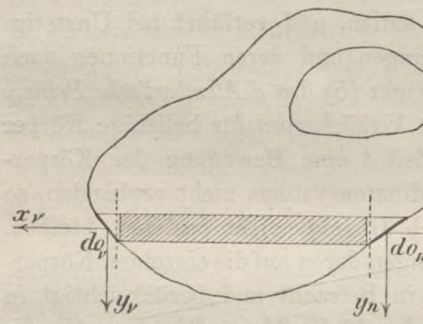

Fig. 14.

Betrachten wir jetzt einen Körperstreifen vom Querschnitte $dy\,dz$, welcher in der Richtung x vom Oberflächenelement dO_ν der Normalenrichtung ν bis zum Oberflächenelement dO_n der Normalenrichtung n reicht (Fig. 14). Die Integration von dO_ν bis dO_n ergibt (§ 8)

$$\int \frac{\partial(\xi X_x + \eta Y_x + Z_x)}{\partial x} dx = (\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x)_n - (\xi X_x + \eta Y_x + Z_x)_\nu$$
$$- \sum \frac{\Delta(\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x)}{\partial x} dx,$$

wenn sich die Klammerausdrücke mit den Indices n, ν auf die Flächenelemente der Normalenrichtungen x unmittelbar bei den Oberflächenelementen dO_ν und dO_n beziehen und die Summe Σ alle zur Zeit t zwischen dO_n und dO_ν existirenden Sprungwerthe von $(\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x)$ umfasst. Da nun

$$dy\,dz = dO_n \cos(nx) = - dO_\nu \cos(\nu x),$$

so wird bei Ausdehnung der Integration über den ganzen Körper

$$\int \frac{\partial(\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x)}{\partial x} dK = \int (\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x) \cos(nx)\, dO$$
$$- \sum \int \frac{\Delta(\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x)}{\partial x} dK.$$

In analoger Weise wie diese Gleichung finden sich durch Betrachtung von Körperstreifen parallel der y-Axe und z-Axe

$$\int \frac{\partial(\xi X_y + \eta Y_y + \zeta Z_y)}{\partial y} dK = \int (\xi X_y + \eta Y_y + \zeta Z_y) \cos(ny)\, dO$$
$$- \sum \int \frac{\Delta(\xi X_y + \eta Y_y + \zeta Z_y)}{\partial y} dK,$$
$$\int \frac{\partial(\xi X_z + \eta Y_z + \zeta Z_z)}{\partial z} dK = \int (\xi X_z + \eta Y_z + \zeta Z_z) \cos(nz)\, dO$$
$$- \sum \int \frac{\Delta(\xi X_z + \eta Y_z + \zeta Z_z)}{\partial z} dK.$$

Addirt man die drei letzten Gleichungen, berücksichtigt § 11, (2) und § 35, (2) und führt die Bezeichnungen

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R} = - \sum \int \Big[& \frac{\Delta(\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x)}{\partial x} + \frac{\Delta(\xi X_y + \eta Y_y + \zeta Z_y)}{\partial y} \\ & + \frac{\Delta(\xi X_z + \eta Y_z + \zeta Z_z)}{\partial z} \Big] dK, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \qquad \mathfrak{S} = \int (\xi X_n + \eta Y_n + \zeta Z_n)\, dO$$

ein, so ergibt sich

$$(6) \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R} = \mathfrak{N} + \mathfrak{D}.$$

Die Integrale in (1), (2), (4) sind auf alle Körperelemente dK auszudehnen, während das Integral (5) alle Oberflächenelemente dO umfasst.

Mit Rücksicht auf (3), (6) haben wir nun nach § 38, (5) als Ausdruck des d'Alembert'schen Princips

$$(7) \qquad G - \mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathfrak{F} - \mathfrak{D} = \mathfrak{S} - \mathfrak{D} + \mathfrak{R},$$

und nach § 38, (6) als Ausdruck des Princips der virtuellen Verrückungen

$$(8) \qquad - \mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathfrak{F} - \mathfrak{D} = \mathfrak{S} - \mathfrak{D} + \mathfrak{R}.$$

Wird die Arbeit der Massenkräfte vernachlässigt (oder werden letztere, wie häufig bei technischen Problemen, durch eine Anzahl Oberflächenkräfte ersetzt), dann hat man aus (8)

$$\mathfrak{N} = 0, \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R},$$

und speciell

$$(9) \qquad \text{für } \mathfrak{M} = 0, \mathfrak{R} = 0, \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{S} = \mathfrak{F}.$$

Die Arbeit $\mathfrak{R}$ lässt sich noch einfacher als in (4) ausdrücken. Wir fassen irgend einen Unstetigkeitsschnitt ins Auge (Fig. 15).

Für die einem bestimmten Schnittelemente anliegenden zwei Flächenelemente do_n, do_ν seien n, ν die das Schnittelement selbst treffenden Normalenrichtungen. Wir haben dann

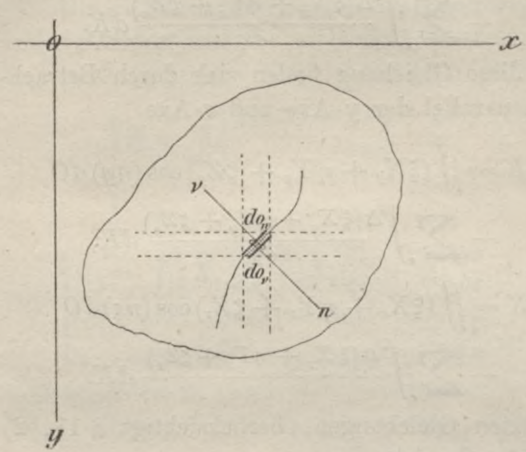

Fig. 15

$$\frac{\Delta \xi X_x}{\partial x} dx$$

$$= (\xi X_x)_\nu - (\xi X_x)_n,$$

worin sich $(\xi X_x)_\nu$, $(\xi X_x)_n$ auf diejenigen Seiten des Unstetigkeitsschnitts beziehen, von welchen die Richtungen ν, n ausgehen. Berücksichtigt man

$$dy\,dz = do_n \cos(nx)$$
$$= - do_\nu \cos(\nu x),$$

so wird für sämmtliche dem betrachteten Unstetigkeitsschnitte anliegenden Flächenelemente

$$-\int \frac{\Delta \xi X_x}{\partial x} dK = \int \xi X_x \cos(nx)\, do,$$

und für die Umhüllungsflächen aller im Körper vorkommenden Unstetigkeitsschnitte

$$-\sum \int \frac{\Delta \xi X_x}{\partial x} dK = \sum \int \xi X_x \cos(nx)\, do.$$

In analoger Weise mit den andern Gliedern von (4) verfahrend, erhält man

$$\mathfrak{R} = \sum \int \Big[(\xi X_x + \eta Y_x + \zeta Z_x) \cos(nx) + (\xi X_y + \eta Y_y + \zeta Z_y) \cos(ny) + (\xi X_z + \eta Y_z + \zeta Z_z) \cos(nz) \Big] do,$$

oder wegen § 11, (2) und § 35, (2)

$$\mathfrak{R} = \sum \int (\xi X_n + \eta Y_n + \zeta Z_n)\, do. \tag{10}$$

Das Integral ist auf die Umhüllungsflächen sämmtlicher Unstetigkeitsschnitte auszudehnen, welch' letztere bei Ansatz der Normalenrichtung n wie verschwindende Hohlräume zu behandeln sind, so dass die Normalenrichtungen der Oberflächenelemente do die zugehörigen Elemente der Unstetigkeitsschnitte selbst treffen (§ 1). Da aber jedem Flächenelemente do auf einer Seite eines Unstetigkeitsschnitts ein genau gleich grosses auf der andern Seite entspricht, und da diese Elemente nach § 10 durch gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Spannungen afficirt werden, so hat man auch bei unstetigen Spannungen

$$\text{für stetige Verrückungen } \mathfrak{R} = 0$$

und genügt stets, das Integral (10) auf die Unstetigkeitsschnitte der Verrückungen zu erstrecken. Auch die letzteren erfordern keine besondere Behandlung, wenn man ihre Umhüllungsflächen mit zur Oberfläche rechnet, wie schon die Form von (5), (10) erkennen lässt.

§ 40. **Virtuelle Arbeiten der Massenkräfte und Flächenkräfte.**

Es ist nicht nöthig, aber von Interesse, die Bedeutung der in §§ 38, 39 eingeführten virtuellen Arbeiten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}$ festzustellen. Man hat dabei zu beachten, dass die ξ, η, ζ zwischen je zwei auf einander folgenden Unstetigkeitsschnitten stetige Functionen des Ortes sind, und zwar des Ortes x, y, z zur Zeit t oder t_0, je nachdem die Spannungen in der einen oder anderen Weise aufgefasst werden.

Wir haben in § 38 freigestellt, die virtuellen Verrückungen der Punkte m aus ihren Lagen zur Zeit t durch ξ, η, ζ oder $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ zu bezeichnen. In beiden Fällen gelten sämmtliche Gleichungen der §§ 38, 39; fassen wir zunächst den ersten Fall ins Auge.

Die Bedeutung von $\mathfrak{M}$ ist sofort klar. Da ein Massenelement μdK bei m in den Richtungen x, y, z abgesehen von verschwindend kleinen Grössen die Wege ξ, η, ζ zurücklegt und X, Y, Z zur Zeit t die specifischen Massenkräfte in diesen Richtungen bezeichnen, so würde bei constanten Werthen der letzteren deren Arbeit auf genannten Wegen betragen

$$\mu dKX\xi + \mu dKY\eta + \mu dKZ\zeta,$$

wonach $\mathfrak{M}$ die Gesammtarbeit darstellt, welche die zur Zeit t auf Bewegung der Körperelemente hinsichtlich unseres Coordinatensystems wirkenden Massenkräfte für die angenommenen Verrückungen leisten würden.

Ebenso leicht ergibt sich die Bedeutung von $\mathfrak{S}$. Sind für ein Oberflächenelement dO bei m in den Richtungen der Coordinatenaxen ξ, η, ζ die Verrückungen und $X_n dO$, $Y_n dO$, $Z_n dO$ die Flächenkräfte zur Zeit t, dann folgt als entsprechende Arbeit dieser Kräfte

$$X_n dO\xi + Y_n dO\eta + Z_n dO\zeta.$$

Hiernach drückt $\mathfrak{S}$ die Gesammtarbeit aller zur Zeit t wirkenden Oberflächenkräfte für die angenommenen Verrückungen aus. In gleicher Weise ergibt sich $\mathfrak{R}$ als Arbeit der augenblicklichen Flächenkräfte auf die Umhüllungsflächen sämmtlicher Unstetigkeitsschnitte der Verrückungen für die vorausgesetzte Bewegung.

Für das Massenelement μdK ist die Arbeit der Flächenkräfte auf die Begrenzungsebenen, welche zur Zeit t oder t_0 senkrecht zur x-Axe waren,

$$dy\,dz\left[-\xi X_x-\eta Y_x-\zeta Z_x+\left(\xi X_x+\frac{\partial \xi X_x}{\partial x}dx\right)+\left(\eta Y_x+\frac{\partial \eta Y_x}{\partial x}dx\right)\right.$$
$$\left.+\left(\zeta Z_x+\frac{\partial \zeta Z_x}{\partial x}dx\right)\right]=\frac{\partial(\xi X_x+\eta Y_x+\zeta Z_x)}{\partial x}dK.$$

Auf analoge Weise ergeben sich die Arbeiten der Kräfte auf die Seitenflächen, welche senkrecht zur y-Axe und z-Axe waren,

$$\frac{\partial(\xi X_y+\eta Y_y+\zeta Z_y)}{\partial y}dK, \qquad \frac{\partial(\xi X_z+\eta Y_z+\zeta Z_z)}{\partial z}dK,$$

so dass die Arbeit $\mathfrak{F}$ des vorigen § von den zur Zeit t wirkenden Oberflächenkräften sämmtlicher Massenelemente $\mu\,dK$ herrührt. Dass der Modus der ursprünglichen Eintheilung in Elemente dK keinen Einfluss auf $\mathfrak{F}$ haben kann, ist selbstverständlich und folgt auch aus $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}+\mathfrak{R}$, worin $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$ die oben festgestellte Bedeutung haben.

Die mit den angenommenen Verrückungen verbundenen Verschiebungen jedes einem Punkte m zur Zeit t oder t_0 in beliebiger Richtung n unendlich benachbart gewesenen Körperpunktes n, können wir uns aus den (etwa von den Spannungen herrührenden) relativen Bewegungen dreier den Punkt n enthaltender Flächenelemente zusammengesetzt denken. Es betragen abgesehen von verschwindend kleinen Grössen die Wege von n hinsichtlich m in den Richtungen

	x	y	z
mit der Fläche senkrecht zur x-Axe	$\frac{\partial \xi}{\partial x}dx,$	$\frac{\partial \eta}{\partial x}dx,$	$\frac{\partial \zeta}{\partial x}dx,$
„ „ „ „ „ y-Axe	$\frac{\partial \xi}{\partial y}dy,$	$\frac{\partial \eta}{\partial y}dy,$	$\frac{\partial \zeta}{\partial y}dy,$
„ „ „ „ „ z-Axe	$\frac{\partial \xi}{\partial z}dz,$	$\frac{\partial \eta}{\partial z}dz,$	$\frac{\partial \zeta}{\partial z}dz.$

Beim Zusammentreffen der drei Bewegungen sind die Wege von n bezüglich m

in der Richtung x $\quad d\xi=\frac{\partial \xi}{\partial x}dx+\frac{\partial \xi}{\partial y}dy+\frac{\partial \xi}{\partial z}dz,$

„ „ „ y $\quad d\eta=\frac{\partial \eta}{\partial x}dx+\frac{\partial \eta}{\partial y}dy+\frac{\partial \eta}{\partial z}dz,$

„ „ „ z $\quad d\zeta=\frac{\partial \zeta}{\partial x}dx+\frac{\partial \zeta}{\partial y}dy+\frac{\partial \zeta}{\partial z}dz.$

Durch Division dieser Gleichungen mit der Entfernung $mn=dn$ zur Zeit t oder t_0 entstehen die Grundgleichungen des § 21 für die Verschiebungscomponenten x_n, y_n, z_n, welche nach § 4 alle anderen

Verschiebungsfunctionen bestimmen. Die Verschiebungen der Körperpunkte lassen sich hiernach aus den Verschiebungen der Seitenflächen von Körperelementen $\mu\, dK$ ableiten.

Als Arbeit, welche während der relativen Bewegungen hinsichtlich m der drei n enthaltenden Seitenflächen des Elements $\mu\, dK$ durch die zur Zeit t auf diese Flächen wirkenden Kräfte geleistet würde, hat man

$$\begin{aligned} & dy\, dz\left[X_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + Y_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + Z_x \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right] dx \\ + & dz\, dx\left[X_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + Y_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + Z_y \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right] dy \\ + & dx\, dy\left[X_z \frac{\partial \xi}{\partial z} + Y_z \frac{\partial \eta}{\partial z} + Z_z \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right] dz, \end{aligned}$$

die Verschiebungen der Seitenflächen aller Körperelemente erfordern also (etwa zur Ueberwindung der innern Kräfte) die Arbeit

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} = \int\Big(& X_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + Y_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + Z_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + X_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + Y_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + Z_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ & + X_z \frac{\partial \xi}{\partial z} + Y_z \frac{\partial \eta}{\partial z} + Z_z \frac{\partial \zeta}{\partial z}\Big) dK, \end{aligned}$$

und dies ist die im vorigen § eingeführte Arbeit $\mathfrak{D}$, wonach schliesslich $\mathfrak{R} = \mathfrak{F} - \mathfrak{D}$ denjenigen Theil der bereits besprochenen Arbeit $\mathfrak{F}$ (und zufolge $\mathfrak{F} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}$ bei stetigen Verrückungen denjenigen Theil der Arbeit der Oberflächenkräfte) darstellt, welcher nicht durch die fraglichen Verschiebungen bedingt ist.

Nehmen wir jetzt den Fall an, dass die virtuellen Verrückungen durch $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ anstatt durch ξ, η, ζ bezeichnet sind. Dann bedeuten, wie sofort klar und übrigens ganz wie oben folgt, in den Gleichungen der beiden letzten Paragraphen $-\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{S}$, $-\mathfrak{R}$, $-\mathfrak{F}$, $-\mathfrak{D}$ die Arbeiten der zur Zeit t wirkenden Massenkräfte, Oberflächenkräfte, Kräfte auf die Umhüllungsflächen der Unstetigkeitsschnitte, Oberflächenkräfte der Körperelemente und die durch Verschiebungen allein bedingte Arbeit der letzteren während der fraglichen Verrückungen; $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}$ aber drücken die entsprechenden Arbeiten der zur Zeit t wirkenden Kräfte auf den umgekehrten Wegen, ξ, η, ζ, aus.

Selbstverständlich gelten die in §§ 38, 39 abgeleiteten Beziehungen auch für *wirkliche* Verrückungen der Körperpunkte. Die hier dargelegte Bedeutung der in diesen Beziehungen auftretenden Arbeiten würde jedoch den wirklichen Massenkräften und Flächenkräften nur dann entsprechen (die letzteren würden nur dann die obigen Arbeiten leisten), wenn sie in der vorausgesetzten Weise constant wie zur Zeit t wären. Für unendlich kleine Verrückungen, wie beispielsweise für die Verrückungen in einem Zeitelement dt, darf man dies annehmen, in anderen Fällen jedoch können die fraglichen Kräfte während des Entstehens selbst nur kleiner Verrückungen sehr verschiedene Werthe durchlaufen.

§ 41. Die Verschiebungsarbeit.

Wir denken uns nun in §§ 38, 39 die Verrückungen durch $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ bezeichnet und verstehen wie im IV. Abschnitte unter ξ, η, ζ die wirklichen Verrückungen der Körperpunkte m von denjenigen Lagen aus, welche sie zur Zeit t_0 einnahmen. Spannungen, Verrückungen und die entsprechenden Verschiebungen sind Functionen der anfänglichen Coordinaten x, y, z und der anfänglichen Richtungen n. Während wir in § 39 setzten

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{D} = \int (X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + X_y x_y + Y_x y_x + Y_z y_z \\ \qquad\qquad + Z_y z_y + Z_x z_x + X_z x_z) dK, \end{cases}$$

werde bei beliebiger Veränderlichkeit der Spannungen und Verschiebungen als Bezeichnung eingeführt

$$(2)\quad \begin{cases} dD = \int (X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + X_y dx_y + Y_x dy_x \\ \qquad\qquad + Y_z dy_z + Z_y dz_y + Z_x dz_x + X_z dx_z) dK \end{cases}$$

und mit

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta = \int\limits_{t_0}^{t} (X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + X_y dx_y + Y_x dy_x \\ \qquad\qquad + Y_z dy_z + Z_y dz_y + Z_x dz_x + X_z dx_z), \end{cases}$$

$$(4)\qquad D = \int \vartheta dK.$$

Die Integrale in (1), (2), (4) sind auf alle Körperelemente dK zu erstrecken. Wir werden D die *Verschiebungsarbeit* des Körpers und ϑ die *specifische Verschiebungsarbeit bei m* nennen, während $\mathfrak{D}$ als *virtuelle Verschiebungsarbeit* bezeichnet werden mag. Sind die Spannungen während des Entstehens der Verschiebungen constant, dann führt (2) wieder auf die speciellere Formel (1).

Nach § 40 bedeuten für unsern Fall $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}$ in den Gleichungen der §§ 38, 39 Arbeiten, welche durch die wirklichen Verrückungen ξ, η, ζ bedingt würden, wenn die Arbeit leistenden Kräfte constant wie zur Zeit t wären, während $-\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{S}$, $-\mathfrak{R}$, $-\mathfrak{F}$, $-\mathfrak{D}$ die Arbeiten derselben Kräfte für die Rückführung der Körpertheilchen in die Anfangslagen darstellen. Die Bedeutung von D ergibt sich ganz wie diejenige von $\mathfrak{D}$ in § 40. Da die wirklichen Oberflächenkräfte des Körperelements dK während des Entstehens der zusammengehörigen (etwa auf das gleiche Zeitelement dt bezüglichen) Theile der Verschiebungen

$$dx_x, \quad dx_y, \quad dx_z, \quad dy_x, \quad dy_y, \quad dy_z, \quad dz_x, \quad dz_y, \quad dz_z$$

als constant gelten können, so findet sich die von diesem Theil der Verschiebungen herrührende wirkliche Arbeit der Oberflächenkräfte aller Körperelemente, wenn in (1) an Stelle der ganzen Verschiebungen deren vorstehende Differentiale gesetzt werden, womit (2) entsteht und (4) die ganze durch die Verschiebungen von t_0 bis t bedingte Arbeit der fraglichen Flächenkräfte darstellt. ϑ ist die entsprechende Arbeit per anfänglicher Volumeneinheit bei m.

Die Arbeit $\mathfrak{D}$ ist eine Function der zur Zeit t erreichten Spannungen und Verschiebungen im Körper. Diese können unter gegebenen Verhältnissen des Systems (z. B. bleibenden Verbindungen, vorgeschriebenen Bahnen, bestimmten Kräften und Beschleunigungen) je nach begleitenden Umständen verschiedene Werthe annehmen. Wir erhalten jedoch alle mit den gestellten Bedingungen verträglichen Variationen von $\mathfrak{D}$, wenn wir die Spannungen und Verschiebungen selbst beliebige zulässige Variationen vornehmen lassen. Die vollständige Variation von $\mathfrak{D}$ ist

$$\delta\mathfrak{D} = \delta_v\mathfrak{D} + \delta_s\mathfrak{D}, \tag{5}$$

worin von den unendlich kleinen Aenderungen der Spannungen bezw. der Verschiebungen allein herrühren

$$\left\{\begin{aligned}\delta_v\mathfrak{D} = \int (X_x\delta x_x + Y_y\delta y_y + Z_z\delta z_z + X_y\delta x_y + Y_x\delta y_x \\ + Y_z\delta y_z + Z_y\delta z_y + Z_x\delta z_x + X_z\delta x_z)\,dK,\end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned}\delta_s\mathfrak{D} = \int (x_x\delta X_x + y_y\delta Y_y + z_z\delta Z_z + x_y\delta X_y + y_x\delta Yy_x \\ + y_z\delta Y_z + z_y\delta Z_y + z_x\delta Z_x + x_z\delta X_z)\,dK.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Nach (2) stellt

$$\delta_v\mathfrak{D} = \delta D \tag{8}$$

in jedem Falle (bei beliebigen begleitenden Umständen) die Verschiebungsarbeit für die vorausgesetzten Aenderungen der Spannungen und Verschiebungen dar. Suchen wir auch einen Ausdruck für $\delta_s\mathfrak{D}$ abzuleiten.

Steht ein durch gegebene äussere Kräfte ergriffener Körper mit andern Körpern derart in Berührung, dass er der Einwirkung der ersteren nicht frei folgen kann, so bilden die Reactionen der fremden Körper neue äussere Kräfte des betrachteten Systems. Es kann vorkommen, dass einzelne dieser Reactionen durch die gegebenen Verhältnisse nicht mit bestimmt sind, sondern von Spannungen und Verschiebungen und damit indirect von den erwähnten begleitenden Umständen abhängen (§ 37). Demnach lässt sich die mit irgendwelchen Verrückungen verbundene Arbeit $\mathfrak{S}$ der Oberflächenkräfte zur Zeit t im Allgemeinen zerlegen in die Arbeit $\mathfrak{G}$ der bestimmten Oberflächenkräfte und die Arbeit $\mathfrak{U}$ der unbestimmten Reactionen,

(9) $$\mathfrak{S} = \mathfrak{G} + \mathfrak{U}.$$

Zu beachten ist, dass jeder Theil eines Körpers auch als Körper oder System für sich betrachtet werden kann (§ 1), sodass wir je nach der Abgrenzung des letzteren auch $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}$ erhalten können.

Welche Werthe die schliesslichen Spannungen, Verrückungen und Verschiebungen auch haben mögen, so besteht nach § 39, (7) die Beziehung

$$G - \mathfrak{M} = \mathfrak{R} = \mathfrak{F} - \mathfrak{D} = \mathfrak{S} - \mathfrak{D} + \mathfrak{R}.$$

Schreiben wir nun den Spannungen ohne Aenderung der Verrückungen, Massenkräfte und Beschleunigungen irgendwelche zulässige Variationen zu, dann ergibt die Anwendung vorstehender Gleichung auf den neuen Zustand

$$\begin{cases} G - \mathfrak{M} = \mathfrak{R} + \delta_s \mathfrak{R} = \mathfrak{F} + \delta_s \mathfrak{F} - \mathfrak{D} - \delta_s \mathfrak{D} \\ \qquad = \mathfrak{S} + \delta_s \mathfrak{U} - \mathfrak{D} - \delta_s \mathfrak{D} + \mathfrak{R} - \delta_s \mathfrak{R}, \end{cases}$$

worin $\delta_s \mathfrak{R}$, $\delta_s \mathfrak{F}$, $\delta_s \mathfrak{U}$, $\delta_s \mathfrak{R}$ die entsprechenden Aenderungen von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{R}$ bedeuten. Durch Subtraction der vorletzten von der letzten Gleichung folgt

(10) $$0 = \delta_s \mathfrak{R} = \delta_s \mathfrak{F} - \delta_s \mathfrak{D} = \delta_s \mathfrak{U} - \delta_s \mathfrak{D} + \delta_s \mathfrak{R}$$

und damit der gewünschte Ausdruck

(11) $$\delta_s \mathfrak{D} = \delta_s \mathfrak{F} = \delta_s \mathfrak{U} + \delta_s \mathfrak{R}.$$

Die Beziehung (5) aber lässt sich mit (8), (11) auch schreiben

(12) $$\delta \mathfrak{D} = \delta D + \delta_s \mathfrak{U} + \delta_s \mathfrak{R}.$$

§ 42. Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit.

In §§ 38, 39 mögen jetzt ξ, η, ζ die Verrückungen bezeichnen und hierunter die wirklichen Wege der Körperpunkte $m(x, y, z)$ hinsichtlich unseres beliebig bewegten Coordinatensystems im Zeitelemente dt verstanden sein. Sind dann u, v, w zur Zeit t die Geschwindigkeiten von m in den Richtungen x, y, z, so hat man

(1) $$\xi = u\,dt, \qquad \eta = v\,dt, \qquad \zeta = w\,dt,$$

u, v, w haben für die bestimmte Zeit t als Functionen des Orts allein zu gelten, können jedoch in beliebig vielen Schnitten jeder Form und Grösse Unstetigkeiten erleiden. Die augenblickliche lebendige Kraft bezüglich unsres Coordinatensystems ist für ein Massenelement $\mu\,dK$

$$\mu\,dK \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2},$$

und für den ganzen Körper

$$(2) \qquad L = \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \mu \, dK.$$

Aus den in §§ 38, 39 erhaltenen, einem beliebigen Körper entsprechenden Ausdrücken für G, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$ ergeben sich mit (1) der Reihe nach folgende für das Zeitelement dt gültigen Werthe, welche wir deshalb als Differentiale einführen. Aenderung der lebendigen Kraft

$$(3) \qquad dL = dt \int (p_x u + p_y v + p_z w) \mu \, dK;$$

Arbeit der Massenkräfte

$$(4) \qquad dM = dt \int (Xu + Yv + Zw) \mu \, dK;$$

Beitrag der Flächenkräfte zur lebendigen Kraft

$$(5) \quad \begin{cases} dN = dt \displaystyle\int \Big[\Big(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \Big) u + \Big(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \Big) v \\ \qquad\qquad\qquad + \Big(\dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} \Big) w \Big] dK. \end{cases}$$

Gesammtarbeit der Flächenkräfte

$$(6) \quad \begin{cases} dF = dt \displaystyle\int \Big[\frac{\partial (u X_x + v X_y + w X_z)}{\partial x} \\ \qquad + \dfrac{\partial (u X_y + v Y_y + w Z_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial (u X_z + v Y_z + w Z_z)}{\partial z} \Big] dK. \end{cases}$$

Durch die Verschiebungen allein bedingte Arbeit der Flächenkräfte, mit Rücksicht auf $X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$ (§§ 12, 36)

$$(7) \quad \begin{cases} dD = dt \displaystyle\int \Big[X_x \frac{\partial u}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} + X_y \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big) \\ \qquad\qquad + Y_z \Big(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \Big) + Z_x \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \Big) \Big] dK. \end{cases}$$

Arbeit der Oberflächenkräfte

$$(8) \qquad dS = dt \int (u X_n + v Y_n + w Z_n) dO.$$

Arbeit infolge örtlicher Unstetigkeiten der Geschwindigkeiten

$$(9) \qquad dR = dt \int (u X_n + v Y_n + w Z_n) dO.$$

Die Integrale (2)—(7) sind auf sämmtliche Körperelemente auszudehnen, das Integral (8) umfasst alle Oberflächenelemente und das Integral (9) die Elemente der Umhüllungsflächen sämmtlicher Unstetigkeitsschnitte. Fasst man die letzteren als verschwindende Hohlräume auf, so können ihre Umhüllungsflächen mit zur Oberfläche gerechnet, also dR in dS eingeschlossen werden.

Zwischen den Grössen (3)—(9) bestehen nach § 39, (6) (7) die Beziehungen

(10) $$dF = dS + dR = dN + dD,$$

(11) $$\begin{cases} dL = dM + dN = dM + dF - dD \\ \qquad = dM + dS + dR - dD. \end{cases}$$

Für ein von t_0 bis t reichendes Zeitintervall ist demnach

(12) $$L - L_0 = M + S + R - D,$$

und diese Gleichung drückt den *Satz von den lebendigen Kräften* für beliebige Körper aus: *In jedem Zeitintervall ist die Aenderung der lebendigen Kraft eines Körpers gleich den Arbeiten der Massenkräfte, Oberflächenkräfte und Kräfte auf die Umhüllungsflächen sämmtlicher Unstetigkeitsschnitte der Geschwindigkeiten minus der Verschiebungsarbeit.*

Wirken im Zeitelement dt auf die Oberfläche eines Körpers nur normale Kräfte von $N_n = -p$ pro Quadrateinheit, so folgt aus (8) mit § 3, (2) und $R_n = p$, $r = -n$,

$$dS = -dt\int\left[u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)\right]p\,dO,$$

oder wenn der Weg des Flächenelements dO in der Richtung seiner Normale durch s bezeichnet wird,

(13) $$dS = -\int ps\,dO.$$

Ist p überall gleich gross und bedeutet V das Gesammtvolumen des Körpers zur Zeit t, dann hat man wegen

(14) $$dV = \int s\,dO$$

die Arbeit der Oberflächenkräfte

$$dS = -p\,dV.$$

Werden auch die Umhüllungsflächen sämmtlicher Unstetigkeitsschnitte der Geschwindigkeiten im Zeitelement dt nur durch Normalspannungen $N_n = -p$ afficirt, so hat man der übereinstimmenden Form von (8) (9) wegen

(15) $$dR = -\int ps\,do.$$

Bewegen sich je zwei demselben Schnittelemente anliegenden Flächenelemente do in der Richtungslinie ihrer Normalen gar nicht oder um gleichviel, dann folgt

$$dR = 0.$$

§ 43. Das Hamilton'sche Princip.

Ein Massenelement $\mu\,dK$ lag zur Zeit t_0 bei a_0, b_0, c_0 (in § 35 x, y, z) und ist zur Zeit t nach a, b, c (in § 35 $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$) gelangt. Dann hat man die Geschwindigkeiten dieses Theilchens in den Richtungen x, y, z zur Zeit t nach § 35

$$u = \frac{\partial a}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial b}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial c}{\partial t},$$

wobei die runden ∂ andeuten, dass es sich um Differentiale nach t, allein für ein bestimmtes Theilchen handelt. Schreiben wir jedoch dem Elemente zu jeder Zeit t irgend welche unendliche kleine virtuelle Verrückungen zu und betrachten diese ebenfalls als Functionen der Zeit, so entsteht eine von der vorigen nur unendlich wenig abweichende Bewegung, deren Geschwindigkeiten in den Richtungen x, y, z zur Zeit t sind

$$u + \delta u = \frac{\partial(a + \xi)}{\partial t}, \quad v + \delta v = \frac{\partial(b + \eta)}{\partial t}, \quad w + \delta w = \frac{\partial(c + \zeta)}{\partial t}.$$

Der Willkürlichkeit unserer ξ, η, ζ wegen lassen sich so alle mit den Bedingungen des Systems verträglichen, von der wirklichen Bewegung nur unendlich wenig abweichenden Bewegungen erreichen. Durch Subtraction erhält man

$$\delta u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad \delta v = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad \delta w = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

als von den virtuellen Verrückungen herrührende Variationen der Geschwindigkeiten u, v, w.

Im Zeitelement dt haben wir für das Massenelement $\mu\, dK$

$$\partial(u\xi + v\eta + w\zeta) = u\partial\xi + v\partial\eta + w\partial\zeta + \xi\partial u + \eta\partial v + \zeta\partial w,$$

und, wenn bei Unstetigkeiten der Verrückungen nach Anleitung des § 21 verfahren wird, für den ganzen Körper

$$\partial\int(u\xi + v\eta + w\zeta)\mu\, dK = dt\int(u\delta u + v\delta v + w\delta w)\mu\, dK + \int(\xi\partial u + \eta\partial v + \zeta\partial w)\mu\, dK.$$

In dieser Gleichung ist das erste Integral rechts

(1) $$\delta L = \tfrac{1}{2}\,\delta\int(u^2 + v^2 + w^2)\mu\, dK$$

die Variation der lebendigen Kraft infolge der angenommenen Verrückungen und

(2) $$G = \int\left(\xi\frac{\partial u}{\partial t} + \eta\frac{\partial v}{\partial t} + \zeta\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mu\, dK$$

eine schon in § 38 eingeführte Function der Verrückungen und zur Zeit t wirkenden Kräfte. Wir haben allgemein

(3) $$\partial\int(u\xi + v\eta + w\zeta)\mu\, dK = (G + \delta L)dt,$$

und für ein von t_0 bis t reichendes Zeitelement

(4) $$\left[\int(u\xi + v\eta + w\zeta)\mu\, dK\right]_t - \left[\int(u\xi + v\eta + w\zeta)\mu\, dK\right]_{t_0} = \int_{t_0}^{t}(G + \delta L)dt,$$

wenn die beiden Klammerausdrücke die Werthe des eingesetzten Integrals zu den Zeiten t, t_0 bedeuten.

Für den speciellen Fall, dass die Verrückungen ξ, η, ζ zu Anfang und zu Ende unsers Zeitintervalls Werthe haben, welche die linke Seite von (4) zu Null machen, folgt

$$\int_{t_0}^{t}(G + \delta L)dt = 0. \tag{5}$$

Dies trifft z. B. zu, wenn alle virtuellen Verrückungen ξ, η, ζ selbst zu den Zeiten t, t_0 verschwinden, und es wird dann der Inhalt von (5) als *Hamilton'sches Princip* bezeichnet.

§ 44. **Energie der Körper.**

Jede mögliche Ursache von lebendiger Kraft oder Arbeit nennt man *Energie* und beurtheilt deren Werth nach ihrer Wirkung, sodass die Energie in Arbeitseinheiten gemessen werden kann. In § 42 ergab sich die Aenderung der lebendigen Kraft für ein Zeitelement dt

$$dL = dM + dN = dM + dS + dR - dD. \tag{1}$$

Fassen wir hier den allgemeinen Fall ins Auge, dass dem betrachteten Körper im Zeitelement dt, abgesehen von den in (1) auftretenden Grössen, noch in Summa die Energie dQ von Aussen zugeführt wird (Entziehung negativer Zufuhr) und setzen

$$dU = dS - dN + dQ = dD - dR + dQ, \tag{2}$$

so folgt

$$dL + dU = dE = dM + dS + dQ; \tag{3}$$

dU stellt hiernach denjenigen Theil der von Aussen empfangenen Energie dar, welcher nicht in die lebendige Kraft dL verwandelt wurde.

Soll nun die Energie unzerstörbar sein, so müssen sich alle nach einander auftretenden dU in irgend einer Form im Körper ansammeln, es muss dem letzteren wie ein gewisses L auch ein gewisses U entsprechen, sodass erst $L + U = E$ die ganze Arbeitsfähigkeit oder Gesammtenergie hinsichtlich des angenommenen Coordinatensystems bedeutet. Für ein von t_0 bis t reichendes Zeitintervall aber liefert (3)

$$L - L_0 + U - U_0 = E - E_0 = M + S + Q. \tag{4}$$

Die augenblickliche lebendige Kraft eines Körpers pflegt man auch seine *actuelle Energie* zu nennen, U soll hier die *virtuelle Energie* heissen (siehe auch §§ 69 bis 71), Gleichung (7) lässt sich dann aussprechen: In jedem Zeitintervall ist die Arbeit der äusseren Kräfte (Massenkräfte und Oberflächenkräfte) plus der sonst von Aussen zugeführten Energie gleich der Summe der Aenderungen von actueller und virtueller Energie des Körpers.

Die Gesammtenergie zur Zeit t drückt sich aus

$$(5)\quad E = L + U = L_0 + U_0 + M + S + Q = E_0 + M + S + Q.$$

Ist von t_0 bis t im Ganzen $M + S + Q = 0$, so wird

$$(6)\qquad E = L + U = L_0 + U_0 = E_0,$$

und beispielsweise folgt: Wenn einem Körper weder durch die Arbeit äusserer Kräfte noch sonst von Aussen Energie zugeführt wird, dann ist der Gewinn an actueller Energie stets gleich dem Verluste an virtueller Energie, die Gesammtenergie bleibt constant.

Sind zur Zeit t Beschleunigungen der Körperelemente und Arbeiten der Massenkräfte nicht zu berücksichtigen, oder ist überhaupt $dL - dM = 0$, dann entsteht aus (3)

$$dQ = dU - dS,$$

und wenn auf die Oberfläche des Körpers nur ein gleichmässig vertheilter Normaldruck von p pro Quadrateinheit wirkt, mit Rücksicht auf § 42

$$dQ = dU + p\,dV,$$

eine sehr bekannte Formel der mechanischen Wärmetheorie. Bei den Untersuchungen der letzteren pflegt man U als Energie schlechtweg zu bezeichnen.

VI. Abschnitt.

Ausdrücke für die Spannungen auf Grund der Erfahrung.

Die bisher abgeleiteten Gesetze sind an keinerlei Beziehungen zwischen Spannungen und Verschiebungen gebunden, sie gelten für beliebige Körper. Thatsächlich beobachten wir jedoch in vielen Fällen, dass Spannungen und Verschiebungen einander bedingen. Um den Zusammenhang zu erforschen, kann man entweder von Erfahrungsresultaten ausgehen oder ein allgemeines Gesetz der zwischen den Körperpunkten wirkenden Kräfte zu Grunde legen. Wir suchen zunächst auf dem ersten Wege soweit als möglich zu gelangen, um dann im folgenden Abschnitte den zweiten zu betreten.

§ 45. Vollkommene Flüssigkeiten.

Als vollkommene Flüssigkeiten pflegt man Körper zu bezeichnen, in welchen unter allen Umständen nur normal den afficirten Flächenelementen wirkende Druckspannungen vorkommen. Da somit die Schubspannungen gleich Null sind, so hat man nach § 3, (2) und § 11, (2) für nicht unendlich grosse Massenkräfte und Beschleunigungen bei jedem Punkte $m(x, y, z)$ zu jeder Zeit t

$$X_x \cos(nx) = R_n \cos(rx), \qquad Y_y \cos(ny) = R_n \cos(ry),$$
$$Z_z \cos(nz) = R_n \cos(rz),$$

oder wegen $\cos(rx) = -\cos(nx)$, $\cos(ry) = -\cos(ny)$, $\cos(rz) = -\cos(nz)$,

$$X_x = Y_y = Z_z = -R_n.$$

Die Spannungen auf drei zu einander senkrechte Flächenelemente sind gleich der Spannung auf ein bestimmtes Flächenelement. Weil aber die Richtungen x, y, z, n beliebig gewählt werden dürfen, so folgt für alle einem Punkte m unendlich benachbarten Flächenelemente

$$R_n = p, \qquad N_n = -p, \qquad T_n = 0,$$

worin p constant. Dies ergibt sich auch aus der in § 11 eingeführten Betrachtung des Elementartetraeders, indem bei bestimmten

Coordinatenaxen unter Beibehaltung einer der Flächen f_x, f_y, f_z durch Aenderung der andern alle Normalenrichtungen n von f_n erreicht werden können. Wenn nun der Druck für alle jedem beliebigen Körperpunkte m unendlich nahe liegenden Flächenelemente als constant anzusehen ist, so können sich die Spannungen von Punkt zu Punkt nur um unendlich wenig, also stetig ändern und daraus folgt, dass auch örtliche Unstetigkeiten der Oberflächenspannungen nicht auftreten, *jeder irgendwo auf die Oberfläche ausgeübte Druck pflanzt sich bis zu stetiger Vertheilung fort.*

§ 46. Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung.

Bei den wirklichen Flüssigkeiten sind die Schubspannungen nicht unter allen Umständen gleich Null, es wirken der Verschiebung aneinander liegender Flächenelemente gewisse Widerstände entgegen, die man gewöhnlich *Reibungswiderstände* nennt. Für ein dem Punkte $m(x, y, z)$ in der Normalenrichtung n unendlich benachbartes Flächenelement f_n wurde die Componente der Totalspannung R_n nach beliebiger Richtung s durch S_n bezeichnet. In § 28 haben wir die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Flächenelement f_n längs eines ihm unendlich nahe liegenden von gleicher Normalenrichtungslinie pro Einheit ihrer Entfernung in der zu n senkrechten Richtung s verschiebt, als Schiebungsgeschwindigkeit φ_{ns} erkannt. Es werde nun der Fall ins Auge gefasst, dass zur Zeit t bei $m(x, y, z)$ die in § 45 festgestellte Stetigkeit der Spannungen fortbesteht und sich für $s \perp n$ mit $\varphi_{ns} = \gamma_{ns}$ (§ 7) setzen lässt

$$S_n = f\gamma_{ns}, \tag{1}$$

worin f einen von n, s unabhängigen Coefficienten bedeutet, welcher zu bestimmter Zeit von Punkt zu Punkt, in einem bestimmten Punkte mit der Zeit variiren kann und *Reibungscoefficient* heissen soll.

Gleichung (1) liefert speciell für $ns = xy, yz, zx$

$$X_y = f\gamma_{xy} = Y_x, \quad Y_z = f\gamma_{yz} = Z_y, \quad Z_x = f\gamma_{zy} = X_z. \tag{2}$$

Bedeutet p den Druck, welcher im Falle $f = 0$ bei m entstehen würde (oder eine andere beliebige Function), dann hat man nach (2) mit § 28, (6) für zu einander senkrechte n, s

$$\begin{aligned} f\gamma_{ns} = (2fu_x - p)\cos(nx)\cos(sx) + (2fv_y - p)\cos(ny)\cos(sy) \\ + (2fw_z - p)\cos(nz)\cos(sz) \\ + X_y\Big[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\Big] \\ + Y_z\Big[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\Big] \\ + Z_x\Big[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\Big]. \end{aligned}$$

Für ganz beliebige n, s ergab in sich in § 13

$$\begin{aligned} S_n = X_x \cos(nx)\cos(sx) &+ Y_y \cos(ny)\cos(sy) \\ &+ Z_z \cos(nz)\cos(sz) \\ &+ X_y\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\ &+ Y_z\left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\ &+ Z_x\left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right]. \end{aligned}$$

Es folgen also nach (1)

$$(3) \qquad X_x = 2fu_x - p, \qquad Y_y = 2fv_y - p, \qquad Z_z = 2fw_z - p,$$

und mit (2) (3) die Componente der Totalspannung R_n des Flächenelements der Normalenrichtung n in beliebiger Richtung s

$$\begin{aligned} S_n = 2fu_x \cos(nx)\cos(sx) &+ 2fv_y \cos(ny)\cos(sy) \\ &+ 2fw_z \cos(nz)\cos(sz) - p\cos(ns) \\ &+ f\gamma_{xy}\left[\cos(nx)\cos(sy) + \cos(ny)\cos(sx)\right] \\ &+ f\gamma_{yz}\left[\cos(ny)\cos(sz) + \cos(nz)\cos(sy)\right] \\ &+ f\gamma_{zx}\left[\cos(nz)\cos(sx) + \cos(nx)\cos(sz)\right] \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf § 28, (6)

$$(4) \qquad S_n = f\gamma_{ns} - p\cos(ns).$$

Diese Gleichung liefert mit $s = n$ wegen $\gamma_{nn} = 2v_n$ die Normalspannung

$$(5) \qquad N_n = 2fv_n - p,$$

während (1) für $s \perp n$ daraus entsteht. Die Ableitung von (4) wäre, nach Art derjenigen von § 48, (2), mit einfacheren Formeln möglich gewesen, wenn wir die Coordinatenaxen parallel den Hauptspannungen und damit nach (1) auch parallel den Hauptverschiebungsgeschwindigkeiten gelegt hätten.

In (1) (4) (5) sind die Spannungen auf beliebige Flächenelemente bei $m(x, y, z)$ unabhängig von den Richtungen der Coordinatenaxen ausgedrückt. Die S_n, N_n, γ_{ns}, v_n können für beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen aus §§ 13, 28 entnommen werden. Nach (4) folgen die Componenten der Totalspannung R_n in den Richtungen x, y, z

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} X_n &= f\gamma_{nx} - p\cos(nx), \\ Y_n &= f\gamma_{ny} - p\cos(ny), \\ Z_n &= f\gamma_{nz} - p\cos(nz). \end{aligned}\right.$$

Durch Addition der Gleichungen (3) entsteht mit den Bezeichnungen

(7) $$\Omega = X_x + Y_y + Z_z = A + B + C,$$

(8) $$\varrho = u_x + v_y + w_z = \alpha + \beta + \gamma = \frac{\omega}{dt},$$

die Beziehung

(9) $$\Omega = 2f\varrho - 3p;$$

Ω, ϱ sind unabhängig von den Richtungen der rechtwinkligen Coordinatenaxen.

Die vorgeführte Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung auf Grund von (1) entspricht der Sache nach einer schon von *Newton* eingeführten und seitdem allgemein acceptirten Annahme. Nach den aufgestellten Gleichungen ist die Reibung ohne Einfluss, wenn sich die Flüssigkeit hinsichtlich des Coordinatensystems in Ruhe befindet.

§ 47. Feste Körper. Elasticitätsmodul, Elasticitätszahl, Ausdehnungscoefficient.

Als feste Körper bezeichnet man Körper, für welche die Möglichkeit eines spannungslosen Zustandes besteht oder fingirt wird. Von diesem anfänglichen Zustande aus werden alle Gruppirungsänderungen der Theilchen gerechnet. An Ursachen elastischer Gruppirungsänderungen ziehen wir auf Grund der Erfahrung Spannungen und Temperaturänderungen in Betracht, nach deren Aufhebung der ursprüngliche Zustand wieder eintreten muss.

Im spannungslosen Zustande werde vom Körperpunkte m aus ein rechtwinkliges Parallelepipedon der unendlich kleinen Kanten a_0, b_0, c_0 abgegrenzt. Infolge von Verschiebungen erlangen letztere die Dimensionen a, b, c. Angenommen, die Deformation sei lediglich bewirkt worden durch parallel der ersten Kante wirkende, auf die Endflächen gleichmässig vertheilte Normalkräfte von P pro Quadrateinheit. Erzeugt dann eine Aenderung dP von P weitere elastische Längenänderungen da, db, dc und werden gesetzt

(1) $$\frac{da}{a_0} = \frac{dP}{E}, \qquad \frac{db}{b_0} = -\frac{dP}{\varepsilon E}, \qquad \frac{dc}{c_0} = -\frac{dP}{\nu E},$$

dann sollen E der *Elasticitätsmodul* für die Richtung a $\left(\frac{1}{E}\right.$ der *Elasticitätscoefficient* für diese Richtung$\left.\right)$ und ε, ν die *Elasticitätszahlen* für die Richtungen b, c heissen. Nach (1) können wir auch schreiben

(2) $$E = \frac{dP}{da} a_0,$$

(3) $$\varepsilon = -\frac{dP}{E}\frac{b_0}{db} = -\frac{da}{a_0} : \frac{db}{b_0},$$

$$(4)\qquad \nu = -\frac{d\,P}{E}\,\frac{c_0}{d\,c} = -\frac{d\,a}{a_0} : \frac{d\,c}{c_0}.$$

Wird dagegen vorausgesetzt, die Deformation sei allein infolge einer gleichmässigen Temperaturänderung τ entstanden und sind da, db, dc die einer weiteren Temperaturänderung $d\tau$ entsprechenden Aenderungen von a, b, c, dann nennt man in

$$(5)\qquad \frac{d\,a}{a_0} = \alpha\,d\tau, \qquad \frac{db}{b_0} = \beta\,d\tau, \qquad \frac{dc}{c_0} = \gamma\,d\tau,$$

α, β, γ die *Ausdehnungscoefficienten* für die Richtungen a, b, c.

Anstatt bei den Definitionen (1)—(5) von dem Verhältnisse der Längenänderungen zu den Dimensionen im spannungslosen Zustande auszugehen, könnte man auch mit den augenblicklichen Längen vergleichen, d. h. a, b, c an Stelle von a_0, b_0, c_0 setzen. In (5) wird vielfach mit den Längen bei 0^0 C. Temperatur verglichen. Je nach den Längen, mit welchen man vergleicht, ändern sich natürlich im Allgemeinen auch die E, ε, ν, α, β, γ, doch sind Abweichungen ohne Aenderung der Zahlenwerthe letzterer Grössen zulässig, wenn, wie in allen praktischen Fällen, die Differenzen verschiedener a, b, c gegen die betreffenden Grössen selbst verschwinden.

Denkt man sich während der Entstehung der ganzen oben durch eine Normalkraft bewirkten Deformation anstatt der möglicherweise variabeln E, ε, ν constante Mittelwerthe eingeführt, welche die gleiche schliessliche Aenderung bedingen, so hat man nach (1)

$$(6)\qquad \frac{a-a_0}{a_0} = \frac{P}{E}, \qquad \frac{b-b_0}{b_0} = -\frac{P}{\varepsilon E}, \qquad \frac{c-c_0}{c_0} = -\frac{P}{\nu E},$$

$$(7)\qquad a = a_0\left(1+\frac{P}{E}\right), \quad b = b_0\left(1-\frac{P}{\varepsilon E}\right), \quad c = c_0\left(1-\frac{P}{\nu E}\right).$$

Denkt man sich ferner während der ganzen durch die Temperaturänderung τ erzeugten Deformation an Stelle der im Allgemeinen variabeln α, β, γ constante mittlere Ausdehnungscoefficienten gesetzt, welche die gleichen Längenänderungen im Ganzen bewirken, dann folgen aus (5)

$$(8)\qquad \frac{a-a_0}{a_0} = \alpha\tau, \qquad \frac{b-b_0}{b_0} = \beta\tau, \qquad \frac{c-c_0}{c_0} = \gamma\tau,$$

$$(9)\qquad a = a_0(1+\alpha\tau), \quad b = b_0(1+\beta\tau), \quad c = c_0(1+\gamma\tau).$$

Diese Mittelwerthe sind mit P, τ dann variabel, wenn es die zuerst definirten E, ε, ν, α, β, γ sind.

Ist der betrachtete Körper innerhalb des abgegrenzten Parallelepipedons isotrop, dann hat man in allen obigen Gleichungen

$$\varepsilon = \nu, \qquad \alpha = \beta = \gamma.$$

Ferner lehrt die Erfahrung, dass in diesem Falle gleichmässig vertheilte Normalkräfte auf die Seitenflächen und gleichmässige Temperaturänderungen des Prisma zwar Form und Volumenänderungen desselben, aber keine Verschiebung seiner ursprünglich parallelen Seitenflächen längs einander erzeugen, während solche durch Schubkräfte auf diese Seitenflächen bedingt sind.

§ 48. Potentialverschiebungen isotroper fester Körper.

Wir nehmen jetzt einen festen Körper an, welcher wenigstens in dem betrachteten kleinen Raume um einen Punkt m isotrop ist. Im spannungslosen Zustande, welchem für jenen Raum die Temperatur T_0 entspricht, sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem gewählt, hinsichtlich dessen durch Spannungen und Temperaturänderungen bei m irgendwelche Potentialverschiebungen daselbst entstehen (§§ 30, 31). Wir denken uns vor Eintritt der letzteren von $m(x, y, z)$ aus ein parallelepipedisches Massenelement abgegrenzt, dessen Kanten dx, dy, dz den Coordinatenaxen parallel sind. Das Element wird mit den Verschiebungen eine Formänderung erleiden. Wir setzen voraus, dass die Wirkungen verschiedener Ursachen dieser Formänderung sich addiren, dass der Elasticitätsmodul E und die Elasticitätszahl ε als constant gelten können, dass Schubkräfte auf die Seitenflächen des Körperelements eine Verschiebung paralleler Flächen längs einander erzeugen und dass die schliesslichen Spannungen bei m im Sinne des IV. Abschnitts stetige Functionen der anfänglichen Normalenrichtungen ihrer Flächenelemente sind.

Für Potentialverschiebungen sind die Hauptverschiebungen a, b, c, Hauptdehnungen e_1, e_2, e_3 und Grenzverschiebungen r_1, r_2, r_3 bezw. numerisch gleich und gleichen Richtungen entsprechend (§ 30). Diesen letzteren parallel legen wir vorläufig die Coordinatenaxen, sodass unser Körperelement auch nach den Verschiebungen ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit Kanten in den Richtungen x, y, z bildet. Da also keine Verschiebung paralleler Seitenflächen längs einander stattgefunden hat, so kann die Formänderung nur durch Normalkräfte auf die Seitenflächen und eine Temperaturänderung τ bedingt sein, es wird $G_{ns} = S_n + N_s$ für $ns = xy$, yz, zx gleich Null, die Spannungen auf Flächenelemente der Normalenrichtungen x, y, z sind Hauptspannungen A, B, C und diese Totalspannungen, womit auch die P_{xy}, P_{yz}, P_{zx} verschwinden (§ 33).

Es möge während der fraglichen Verschiebungen α den mittleren Ausdehnungscoefficienten bedeuten. Dann erzeugen specifische Längenänderungen der Kanten des Körperelements

in den Richtungen	$x,$	$y,$	$z,$
die A allein	$\frac{A}{E},$	$-\frac{A}{\varepsilon E},$	$-\frac{A}{\varepsilon E},$
„ B „	$-\frac{B}{\varepsilon E},$	$\frac{B}{E},$	$-\frac{B}{\varepsilon E},$
„ C „	$-\frac{C}{\varepsilon E},$	$-\frac{C}{\varepsilon E},$	$\frac{C}{E},$
die Temperaturänderung τ allein	$\alpha\tau,$	$\alpha\tau,$	$\alpha\tau.$

Die ganzen specifischen Längenänderungen der Kanten, die Hauptdehnungen oder Hauptverschiebungen werden somit

$$a = \frac{A}{E} - \frac{B + C}{\varepsilon E} + \alpha\tau,$$

$$b = \frac{B}{E} - \frac{C + A}{\varepsilon E} + \alpha\tau,$$

$$c = \frac{C}{E} - \frac{A + B}{\varepsilon E} + \alpha\tau.$$

Nach § 23 sind die Summen

(1) $$\omega = a + b + c = x_x + y_y + z_z,$$

(2) $$\Omega = A + B + C = X_x + Y_y + Z_z$$

unabhängig von den Richtungen der rechtwinkligen Coordinatenaxen. Aus den drei vorhergehenden Gleichungen folgen mit der Bezeichnung

(8) $$\varepsilon E = (\varepsilon + 1) 2G = \frac{\varepsilon - 2}{\alpha} J$$

durch Addition

(4) $$\omega = \frac{\varepsilon - 2}{\varepsilon} \frac{\Omega}{E} + 3\alpha\tau = \frac{\varepsilon - 2}{\varepsilon + 1} \frac{\Omega}{2G} + 3\alpha\tau = \alpha\left(\frac{\Omega}{J} + 3\tau\right),$$

und wenn weiter gesetzt wird

(5) $$\begin{cases} p = 2G\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 2}\left(\alpha\tau - \frac{\omega}{\varepsilon + 1}\right) = J\tau - 2G\frac{\omega}{\varepsilon - 2} \\ \qquad = 2G\alpha\tau - \frac{\Omega}{\varepsilon + 1}, \end{cases}$$

die Hauptspannungen

$$A = 2Ga - p, \qquad B = 2Gb - p, \qquad C = 2Gc - p.$$

Für jedes m anliegende Flächenelement der anfänglichen Normalenrichtung n hat man bei unserer Wahl der Coordinatenaxen das Quadrat der Totalspannung und die Normalspannung (im Sinne des IV. Abschnitts) nach § 21, (6) (4)

$$R_n{}^2 = A^2 \cos^2(nx) + B^2 \cos^2(ny) + C^2 \cos^2(nz),$$

$$N_n = A \cos^2(nx) + B \cos^2(ny) + C \cos^2(nz).$$

Durch Substitution der a, b, c aus den darüberstehenden Gleichungen ergeben sich

$$R_n^2 = 4G^2\left[a^2\cos^2(nx) + b^2\cos^2(ny) + c^2\cos^2(nz)\right]$$
$$- 4G\left[a\cos^2(nx) + b\cos^2(ny) + c\cos^2(nz)\right]p + p^2,$$
$$N_n = 2G\left[a\cos^2(nx) + b\cos^2(ny) + c\cos^2(nz)\right] - p,$$

oder mit Rücksicht auf die Ausdrücke für Totalverschiebung r_n und Normalverschiebung n_n der beliebigen Richtung n

$$(6)\qquad R_n^2 = 4G^2 r_n^2 - 4G n_n p + p^2,$$
$$(7)\qquad N_n = 2G n_n - p.$$

Nun gelten aber für die Transversalspannung und Transversalverschiebung der Richtung n die Gleichungen

$$T_n^2 = R_n^2 - N_n^2, \qquad t_n^2 = r_n^2 - n_n^2.$$

Daher folgt aus (6), (7) die einfache Beziehung

$$(8)\qquad T_n = 2G t_n.$$

Die Transversalspannungen von Flächenelementen der anfänglichen Normalenrichtungen n sind proportional den Transversalverschiebungen von Punkten der anfänglichen Richtungen n.

In (6) bis (8) haben wir die Beziehungen zwischen Spannungen und Verschiebungen unabhängig von den Richtungen der Coordinatenaxen ausgedrückt. Substituirt man (7) (8) in die Gleichungen § 33, (5), so ergeben sich bei Beachtung von § 4, (7) die Componenten der Totalspannung R_n in den Richtungen x, y, z beliebiger rechtwinkliger Coordinatenaxen

$$(9)\qquad \begin{cases} X_n = 2G x_n - p\cos(nx), \\ Y_n = 2G y_n - p\cos(ny), \\ Z_n = 2G z_n - p\cos(nz). \end{cases}$$

Diese Gleichungen multipliciren wir bezw. mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und erhalten durch Addition wegen § 33, (2) und § 4, (8) die Componente von R_n in beliebiger Richtung s

$$(10)\qquad S_n = 2G s_n - p\cos(ns).$$

Vertauscht man s mit n, so folgt mit Rücksicht auf $n_s = s_n$ auch $N_s = S_n$, wir können aussprechen: *Bei isotropen festen Körpern entstehen durch Potentialverschiebungen auch Potentialspannungen.* Das Resultat wird sich in § 58 auf anderem Wege für beliebige isotrope Körper ergeben. Für zu einander senkrechte Richtungen n, s liefert (10)

$$(11)\qquad S_n = 2G s_n.$$

Einen speciellen Fall dieser Beziehung bildet Gleichung (8), während (7) bis (9) aus (10) mit $s = n$, t, x, y, z folgen. Aus (9) entstehen mit $n = x$, y, z

(12) $\quad X_x = 2Gx_x - p, \quad Y_y = 2Gy_y - p, \quad Z_z = 2Gz_z - p;$

(13) $\quad X_y = 2Gx_y = Y_x, \quad Y_z = 2Gy_z = Z_y, \quad Z_x = 2Gz_x = X_z.$

Die Gleichungen (12) hätten wir aus (7) mit $n = x, y, z$ und die Gleichungen (13) aus (10) oder (11) mit $ns = xy, yz, zx$ erhalten können.

Alle aufgestellten Beziehungen gelten unter den oben ausgesprochenen Voraussetzungen unserer Ableitung für beliebig grosse Potentialverschiebungen. Die Proportionsconstante G, welche zum Elasticitätsmodul E und der Grösse J in der Beziehung (3) steht, soll als *Gleitungscoefficient* (oder auch *Schiebungscoefficient*) bezeichnet werden, während J *Temperaturcoefficient* heissen mag.

§ 49. Potentialspannungen beliebiger isotroper Körper.

Wie im vorigen Paragraphen fassen wir die Spannungen im Sinne des IV. Abschnitts auf. Es mögen nun infolge von Verschiebungen bei einem Punkte $m(x, y, z)$ Spannungen von solcher Art daselbst entstehen, dass allgemein für

(1) $\quad s \perp n \qquad S_n = Gg_{ns} = N_s$

gesetzt werden kann, worin G von den Richtungen n, s unabhängig ist, aber während des Entstehens der g_{ns} variabel sein darf. Gleichung (1) verlangt, dass nach Eintritt der betrachteten Verschiebungen für alle dem Punkte m anliegenden Flächenelemente beliebiger anfänglicher Normalenrichtungen n die Componenten der Totalspannungen R_n nach irgend welchen in den anfänglichen Ebenen dieser Flächenelemente gelegenen Richtungen s proportional den Normalgleitungen der Richtungen n, s sind. Thatsächlich enthält (1) alle bekannten, für isotrope Körper auf Grund der Erfahrung angenommenen Beziehungen als specielle Fälle; speciell für beliebige Potentialverschiebungen isotroper fester Körper hat sie sich in § 48 ergeben. Die Proportionsconstante G mag auch hier *Gleitungscoefficient* heissen.

Nach (1) stimmen die anfänglichen Normalenrichtungen n, s der Flächenelemente, für welche $G_{ns} = S_n + N_s$ verschwindet und also die Hauptspannungen entstehen, mit den anfänglichen Richtungen derjenigen Punkte überein, für welche $g_{ns} = s_n + n_s$ zu Null wird und demgemäss die Hauptverschiebungen eintreten. Legen wir die Coordinatenaxen vorläufig in diese Richtungen und bezeichnen durch p eine in der Folge zu bestimmende, hier willkürliche Function, so folgt aus § 23, (14) für beliebige zu einander senkrechte n, s

$$Gg_{ns} = (2Ga - p)\cos(nx)\cos(sx) + (2Gb - p)\cos(ny)\cos(sy) + (2Gc - p)\cos(nz)\cos(sz).$$

Da für Potentialspannungen die Beziehungen des II. Abschnitts gelten, wenn n und die Indices der Spannungen die anfänglichen Normalenrichtungen der zugehörigen Flächenelemente bedeuten, so hat man nach § 14, (11) für ganz beliebige n, s

$$S_n = A\cos(nx)\cos(sx) + B\cos(ny)\cos(sy) + C\cos(nz)\cos(sz).$$

Mit Rücksicht auf (1) ergeben sich aus den zwei letzten Gleichungen die Hauptspannungen

$$A = 2Ga - p, \qquad B = 2Gb - p, \qquad C = 2Gc - p,$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die darüber stehende Gleichung die Componente der Totalspannung R_n des Flächenelements der anfänglichen Normalenrichtung n in jeder Richtung s

$$(2) \qquad S_n = Gg_{ns} - p\cos(ns) = N_s.$$

Diese Gleichung führt für zu einander senkrechte n, s wieder auf (1) und liefert mit $s = n$ wegen $g_{nn} = 2n_n$ die Normalspannung

$$(3) \qquad N_n = 2Gn_n - p.$$

In (1) bis (3) haben wir die Beziehungen zwischen Spannungen und Verschiebungen unabhängig von den Richtungen der Coordinatenaxen ausgedrückt. Die S_n, N_n, g_{ns}, n_n sind für beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen aus §§ 13, 23 zu entnehmen. Gleichung (2) liefert die Componenten der Totalspannung R_n in den Richtungen x, y, z

$$(4) \qquad \begin{cases} X_n = Gg_{nx} - p\cos(nx), \\ Y_n = Gg_{ny} - p\cos(ny), \\ Z_n = Gg_{nz} - p\cos(nz), \end{cases}$$

und hieraus folgen mit $n = x, y, z$

$$(5) \qquad X_x = 2Gx_x - p, \qquad Y_y = 2Gy_y - p, \qquad Z_z = 2Gz_z - p,$$

$$(6) \qquad X_y = Gg_{xy} = Y_x, \qquad Y_z = Gg_{yz} = Z_y, \qquad Z_x = Gg_{zx} = X_z,$$

welche Beziehungen wir auch aus (3) und (1) erhalten konnten.

Mit den Bezeichnungen

$$(7) \qquad \Omega = X_x + Y_y + Z_z = A + B + C,$$

$$(8) \qquad \omega = x_x + y_y + z_z = a + b + c$$

entsteht durch Addiren der Gleichungen (5)

$$(9) \qquad \Omega = 2G\omega - 3p.$$

Durch Quadriren und Addiren von (4) folgt

$$(10) \qquad R_n^2 = G^2(g_{nx}^2 + g_{ny}^2 + g_{nz}^2) - 4Gn_n p + p^2,$$

und wenn hiervon das Quadrat von (3) subtrahirt wird, als Transversalspannung

(11) $$T_n = G\sqrt{g_{nx}^2 + g_{ny}^2 + g_{nz}^2 - 4n_n^2},$$

während selbstverständlich für R_n auch (2) und für T_n Gleichung (2) oder (1) gilt, wenn darin für s die Richtung von R_n oder T_n gesetzt wird. Dabei ist jedoch zu beachten, dass letztere Richtungen im Allgemeinen nicht mit den Richtungen der Totalverschiebung und Transversalverschiebung von Punkten der anfänglichen Richtung n übereinstimmen. Werden diese Verschiebungen wie früher durch r_n, t_n bezeichnet, so hat man *nicht* in allen Fällen

$$R_n = G(r_n + n_r) - p\cos(nr), \qquad T_n = G(t_n + n_t),$$

und sollen umgekehrt r, t in r_n, t_n die Richtungen von R_n, T_n bezeichnen, dann sind zwar vorstehende Gleichungen richtig, es bedeuten aber darin r_n, t_n nicht die Totalverschiebung und Transversalverschiebung der Richtung n. — Gleichung (11) liefert beispielsweise für Flächenelemente der anfänglichen Normalenrichtung $n = x, y, z$

(12) $$\begin{cases} T_x = G\sqrt{g_{xy}^2 + g_{zx}^2}, \\ T_y = G\sqrt{g_{yz}^2 + g_{xy}^2}, \\ T_z = G\sqrt{g_{zx}^2 + g_{yz}^2}, \end{cases}$$

wie schon aus (6) zu entnehmen war.

Potentialverschiebungen. Für diesen Fall folgt aus (2) die allgemeine Spannungscomponente mit $g_{ns} = 2s_n = 2n_s$

(13) $$S_n = 2Gs_n - p\cos(ns),$$

also speciell für beliebige Componenten von R_n oder T_n in der anfänglichen Ebene des Flächenelements mit

(14) $$s \perp n \qquad S_n = 2Gs_n.$$

Die Normalspannung bleibt durch (3) bestimmt, als Transversalspannung liefert (11)

(15) $$T_n = 2Gt_n,$$

worin t_n die Transversalverschiebung der Richtung n bedeutet. Da aber nach (13) der gleiche Ausdruck entsteht, wenn t die Richtung von T_n bezeichnet, so stimmen für Potentialverschiebungen die Richtung der Transversalspannung des Flächenelements der anfänglichen Normalenrichtung n und der Transversalverschiebung von Punkten der anfänglichen Richtung n überein. Aus (10) folgt

(16) $$R_n^2 = 4G^2r_n^2 - 4Gn_np + p^2,$$

unter r_n die Totalverschiebung der Richtung n verstanden. Die Componenten von R_n in den Richtungen x, y, z sind nach (13)

$$(17)\quad \begin{cases} X_n = 2Gx_n - p\cos(nx), \\ Y_n = 2Gy_n - p\cos(ny), \\ Z_n = 2Gz_n - p\cos(nz), \end{cases}$$

und diese Gleichungen oder (6) wie auch (14) liefern

$$(18)\quad X_y = 2Gx_y, \qquad Y_z = 2Gy_z, \qquad Z_x = 2Gz_x,$$

während die Beziehungen (5) ungeändert bleiben.

§ 50. Potentialspannungen flüssiger und fester Körper.

Durch die Gleichungen des vorigen Paragraphen sind die in den §§ 45, 46, 48 ermittelten Beziehungen für vollkommene Flüssigkeiten, reibende Flüssigkeiten und isotrope feste Körper unter gemeinsame Formen gebracht. Die in letzteren auftretende Grösse p, welche je nach der Körperart verschiedene Bedeutung haben kann, ist aus den früheren Ableitungen zu entnehmen.

Vollkommene Flüssigkeiten. Für diese sind der Definition zufolge sämmtliche Schubspannungen unter allen Umständen gleich Null, so dass für Verschiebungen in einem Zeitelement $G = 0$ und

$$(1)\quad X_x = Y_y = Z_z = N_n = -p$$

werden. Es bedeutet also p den für alle Flächenelemente bei einem Punkte $m(x, y, z)$ gleichen und normalen Druck pro Quadrateinheit. Weiteres siehe in § 45.

Reibende Flüssigkeiten. Um hier den vorliegenden, lückenhaften Erfahrungsresultaten zu genügen, ist G für Verschiebungen in einem Zeitelement dt unendlich gross anzunehmen. Mit

$$(2)\quad f = G\,dt$$

folgt dann aus § 49, (2) die allgemeine Spannungscomponente

$$(3)\quad S_n = f\gamma_{ns} - p\cos(ns),$$

und beispielsweise für $s = n$ und $s \perp n$

$$N_n = 2f\nu_n - p, \qquad S_n = f\gamma_{ns},$$

p ist der Druck, welcher bei $m(x, y, z)$ für alle Flächenelemente entstünde, wenn $f = 0$ wäre oder gar keine Verschiebungen stattfänden. Näheres in § 46.

Isotrope feste Körper. Bei solchen muss nach § 47 p für verschwindende Verschiebungen gleich Null werden. Auf Grund der Erfahrung ergab sich in § 48 für Potentialverschiebungen

$$(4)\quad p = J\tau - 2G\frac{\omega}{\varepsilon - 2} = 2G\alpha\tau - \frac{\Omega}{\varepsilon + 1},$$

womit die Gleichungen am Schlusse des vorigen Paragraphen den in § 48 aufgestellten identisch werden.

Setzt man allgemein $e_n = n_n$ (§ 32) und nimmt weiter an, dass die specifischen Längenänderungen der Kanten eines rechtwinkligen Körperelements nur von Normalspannungen auf die Seitenflächen und Temperaturänderungen herrühren, welche ganz so wirken, als wenn keine Schubspannungen vorhanden wären, dann ergeben sich wie in § 48, jedoch für beliebige Richtungen der rechtwinkligen Coordinatenaxen, die specifischen Längenänderungen der Kanten

$$x_x = \frac{X_x}{E} - \frac{Y_y + Z_z}{\varepsilon E} + \alpha\tau = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon E} X_x - \frac{\Omega}{\varepsilon E} + \alpha\tau,$$

$$y_y = \frac{Y_y}{E} - \frac{Z_z + X_x}{\varepsilon E} + \alpha\tau = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon E} Y_y - \frac{\Omega}{\varepsilon E} + \alpha\tau,$$

$$z_z = \frac{Z_z}{E} - \frac{X_x + Y_y}{\varepsilon E} + \alpha\tau = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon E} Z_z - \frac{\Omega}{\varepsilon E} + \alpha\tau.$$

Nach § 49 sind

$$x_x = \frac{X_x + p}{2G}, \qquad y_y = \frac{Y_y + p}{2G}, \qquad z_z = \frac{Z_z + p}{2G}.$$

Daher folgen

$$(5) \qquad \begin{cases} 2G = \dfrac{\varepsilon E}{\varepsilon+1}, & \dfrac{p}{2G} = \alpha\tau - \dfrac{\Omega}{\varepsilon E}, \\ & p = 2G\alpha\tau - \dfrac{\Omega}{\varepsilon+1}, \end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf § 49, (9)

$$(6) \qquad p = J\tau - 2G\frac{\omega}{\varepsilon - 2} \quad \text{mit} \quad J = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-2} 2G\alpha.$$

Unsere Annahmen ergeben also, dass die Gleichungen des vorigen Paragraphen mit gleichem p wie für Potentialverschiebungen auch für andere Verschiebungen isotroper Körper gelten. Im folgenden Abschnitte wird sich dies Resultat als Annäherung noch auf andern Wege finden (§ 59). Zu beachten ist, dass mit E, ε auch G während der Verschiebungen constant bleibt.

§ 51. Festigkeit. Zulässige Spannung. Sicherheit.

Jede Formänderung fester Körper besteht in einer auf gewissen Wegen erfolgenden Ueberwindung derjenigen Kräfte, mit welchen die Körpertheilchen auf einander wirken. Handelt es sich um *elastische Formänderungen*, so sind die neuen Lagen der Theilchen durch die Gesammtwirkung der *augenblicklichen* innern und äussern Kräfte bedingt. Treten *bleibende Formänderungen* ein, dann ist ein Gleichgewichtszustand zwischen den *anfänglichen* innern und äussern Kräften erreicht. Als *Bruch* bezeichnet man die Entfernung der Theilchen in beiden Bruchflächen aus dem gegenseitigen Wirkungsbereich. Der Widerstand gegen bleibende Formänderungen heisst *Elasticitätsgrenze*, der Widerstand gegen den Bruch *Festigkeit.* Beide werden gewöhnlich wie die Spannungen des IV. Abschnitts auf die Quadrateinheit der anfänglichen Flächenelemente bezogen. Die Festigkeit in einem Schnittelement kann je nach den Richtungen der auf Trennung wirkenden Spannungen verschieden sein. Bei isotropen Körpern pflegt man anzunehmen, dass für alle numerisch gleichen Winkel der Spannungsrichtung mit der Normalenrichtung des afficirten Flächenelements die gleiche Festigkeit besteht.

Sollen Trennungen in einem Körper nicht eintreten, so müssen die Spannungen unter den betreffenden Festigkeiten bleiben; sollen bleibende Formänderungen nicht eintreten, so müssen sie auch unter den Elasticitätsgrenzen bleiben. Das Verhältniss der Festigkeit zur Spannung heisst die *Bruchsicherheit*, das Verhältniss der Elasticitätsgrenze zur Spannung die *Grenzsicherheit.* Der reciproke Werth der Bruchsicherheit wird *Bruchsicherheitscoefficient*, der reciproke Werth der Grenzsicherheit *Grenzsicherheitscoefficient* genannt. Gewöhnlich spricht man jedoch einfach von m-facher *Sicherheit* oder vom *Sicherheitscoefficienten* $\frac{1}{m}$, indem als bekannt vorausgesezt wird, ob die Festigkeit oder Elasticitätsgrenze als Ausgangspunkt dient. Durch den Sicherheitscoefficienten sollen alle unvorhergesehenen und zahlenmässig unverfolgbaren Einflüsse berücksichtigt werden; mit ihm hat man den Ausgangswerth zu multipliciren, um die bei m-facher Sicherheit *zulässige Spannung* zu erhalten. Bei den Festigkeitsberechnungen im Ingenieurwesen ist dahin zu streben, dass bei allen Punkten einer Construction gegen alle in Frage kommenden Zerstörungsarten die gleiche Sicherheit besteht.

Eine scharfe Elasticitätsgrenze existirt nicht und mancherlei Versuche scheinen sogar darauf hinzudeuten, dass bei jeder Beanspruchung bleibende Formänderungen entstehen. Man könnte nun denjenigen Widerstand als Elasticitätsgrenze bezeichnen, welcher überwunden werden muss, wenn die Formänderungen für den augenblicklichen Zweck in Betracht kommende Werthe annehmen sollen. Diesem praktischen Standpunkte entspricht es bei vielen Materialien, die Elasticitätsgrenze mit *Fairbairn* und *Bauschinger* als *Proportionalitätsgrenze* aufzufassen, nämlich als diejenige Spannung, bis zu welcher E in § 47 als constant gelten kann und damit erfahrungsgemäss die bleibenden Formänderungen für technische Zwecke verschwindend klein sind. Denkt man sich beispielsweise einen geraden Stab von Stahl oder Schmiedeeisen bei constanter Temperatur nur durch eine gleichmässig über den Querschnitt vertheilte Kraft in der Richtung seiner Axe beansprucht (§ 81, Fig. 16) und trägt die Spannungen als Abscissen, die entsprechenden ganzen (elastischen plus bleibenden) Verlängerungen in beliebigem Masstabe als Ordinaten auf, so verläuft die entstehende Curve innerhalb gewisser Grenzen (Proportionalitätsgrenze p_z, p_d) fast geradlinig, geht dann bei Zug und Druck in Linien von geringer Krümmung über, welche

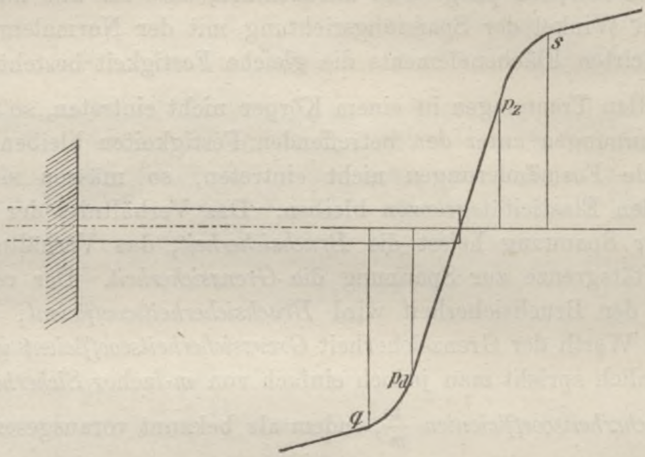

Fig. 16.

wieder durch mehr oder weniger scharf ausgebildete Kniee (*Streckgrenze* s und *Quetschgrenze* q) zu Theilen führt, innerhalb deren die Längenänderungen gegenüber den Belastungszunahmen wesentlich schneller wachsen.

Welche Bedingungen für das Eintreten des Bruchs gleichwerthig sind, lässt sich bis heute nicht erschöpfend angeben. Dass stossweise Einwirkungen ungünstig sind, ist theoretisch klar und durch die Erfahrung bestätigt. Ferner zeigte sich, dass die Dauer der Beanspruchung von Einfluss ist; dass ein Körper, welcher gewissen Kräften einmal widersteht, dieselben nicht unter allen Umständen beliebig oft aushält; dass Wechsel von Zug und Druck oder überhaupt Beanspruchungen in verschiedenen Richtungen ungünstiger als die entsprechenden gleichgerichteten wirken etc. Will man bei Angabe der Festigkeit hervorheben, dass es sich nur um den Widerstand gegen einmalige ruhende oder ganz allmählig anwachsende (ohne Erzeugung lebendiger Kraft, umkehrbare im Sinne der Wärmetheorie) Beanspruchung in einer Richtung handelt, dann spricht man von der *Tragfestigkeit* (für Zug, Druck, Schub u. s. w.).

Die Festigkeit als der Widerstand gegen Entfernung der Theilchen aus dem gegenseitigen Wirkungsbereich hängt natürlich nicht nur von den unbekannten Gesetzen der Grundkräfte zwischen den einzelnen Atomen, sondern auch von dem durch die Gruppirung der letzteren zu chemischen und physikalischen Molekülen bedingten Resultanten ab. Wie mannichfaltig diese ausfallen können, sehen wir an den Aenderungen der Festigkeit und Elasticitätsgrenze durch bleibende Formänderungen aller Art, Erschütterungen, Erhitzen, Härten, Schmelzen u. s. w. Man fürchtet dann auch für den Bestand des Materials ganz besonders unbeabsichtigte Aenderungen der molekülaren Beschaffenheit. Die zahlreichen Versuche, welche in neuester Zeit über die Festigkeitsverhältnisse angestellt wurden, haben dem praktischen Ingenieur wesentliche Dienste geleistet; eine wissenschaftliche Behandlung der Festigkeitslehre ist jedoch bis heute nicht möglich.

VII. Abschnitt.

Ausdrücke für die Spannungen nach der Molekulartheorie.

Verschiedene Autoren, wie *Lamé, Beer* und *Castigliano*, sind bei Beurtheilung der Spannungsverhältnisse fester Körper von Anschauungen der Molekulartheorie ausgegangen. Dabei wurde angenommen, dass die Kraft S zwischen zwei Körperpunkten in deren Verbindungsgeraden wirke, proportional den Massen m, n sei und im Uebrigen lediglich von der Entfernung l abhänge, wonach sich ausdrücken liesse

$$S = mn\,F(l).$$

Der letzten Annahme scheint die Erfahrung zu widersprechen. Wir sehen, dass die Körperpunkte bei Erwärmung wenigstens ihre mittleren Entfernungen vielfach merklich ändern, ohne Beeinflussung der Spannungen, welche Functionen der Kräfte S sind. Umgekehrt können die Spannungen bei constantem Körpervolumen mit Erhöhung der Temperatur sehr bedeutend wachsen. Auch auf anderen Gebieten hat sich obige Beziehung vorläufig nicht bewährt, wie die electrodynamischen Grundgesetze von *Riemann, Weber* und *Clausius* beweisen.

Wir werden in den folgenden Entwicklungen setzen

$$S = mn\,[F(l) - i],$$

worin mni ganz allgemein eine Function derjenigen Grössen bedeutet, welche neben der Entfernung l auf S Einfluss nehmen. Als Richtungslinie der S behalten wir die Verbindungsgerade auf einander wirkender Punkte bei. Letztere können dabei Rotationen um ihre Massenmittelpunkte ausführen; sollen sie auch als oscillirend gelten, so hat man sich die Schwingungsamplitude gegen die mittlere Entfernung verschwindend klein zu denken. Die Beschränkung der Untersuchung auf feste Körper lassen wir fallen und fassen stetige Spannungen im Sinne des IV. Abschnitts auf. *Demgemäss wird vorausgesetzt, dass, abgesehen von beliebig vielen Unstetigkeitsschnitten, die*

Punkte, welche vor den Verschiebungen ein Flächenelement bei m bildeten, auch nach den Verschiebungen auf einem solchen liegen.

Wer die Beziehungen zwischen Spannungen und Verschiebungen unabhängig von dem Einflusse der i will, hat die im Folgenden mit i, i_0, τ behafteten Glieder gleich Null zu setzen.

§ 52. Grundgleichungen.

Es handle sich wie im IV. Abschnitte um irgend welche Bewegung der Körperpunkte in Hinsicht eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems. Wir denken uns vor Eintritt der betrachteten Verrückungen einen Schnitt S durch den Körper gelegt. Die Massenpunkte zu beiden Seiten von S können auf einander wirken, m und n seien zwei solche Punkte der Massen m, n und der anfänglichen Entfernung Δn. Die Kraft zwischen m und n war also vor den Verrückungen zur Zeit t_0

$$mn\,[F(\Delta n) - i_0]$$

und ist nach den Verrückungen zu irgend einer späteren Zeit t

$$mn\,[F(\Delta n + e_n\,\Delta n) - i],$$

wenn e_n die Dehnung der Entfernung Δn und i_0 den Anfangswerth von i bedeutet.

Der Punkt m, welcher vor den Verrückungen bei x, y, z lag, ist infolge der letzteren nach $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ gerathen und der Punkt n, welcher anfänglich den Ort $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ einnahm, hat sich in den Richtungen x, y, z um $\xi + \Delta\xi$, $\eta + \Delta\eta$, $\zeta + \Delta\zeta$ fortbewegt. Die Componenten der Kraft, mit welcher Punkt n auf Punkt m wirkt, sind also nach den Verrückungen

in der Richtung x $\quad mn\,\dfrac{F(\Delta n + e_n\,\Delta n) - i}{1 + e_n}\,\dfrac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta n}$,

" " " y $\quad mn\,\dfrac{F(\Delta n + e_n\,\Delta n) - i}{1 + e_n}\,\dfrac{\Delta y + \Delta\eta}{\Delta n}$,

" " " z $\quad mn\,\dfrac{F(\Delta n + e_n\,\Delta n) - i}{1 + e_n}\,\dfrac{\Delta z + \Delta\zeta}{\Delta n}$.

Sämmtliche auf der n-Seite gelegenen Punkte gemeinsam erzeugen für Punkt m in den Richtungen x, y, z die Kräfte

$$m\sum n\,\frac{F(\Delta n + e_n\,\Delta n) - i}{1 + e_n}\,\frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta n},$$

$$m\sum n\,\frac{F(\Delta n + e_n\,\Delta n) - i}{1 + e_n}\,\frac{\Delta y + \Delta\eta}{\Delta n},$$

$$m\sum n\,\frac{F(\Delta n + e_n\,\Delta n) - i}{1 + e_n}\,\frac{\Delta z + \Delta\zeta}{\Delta n}.$$

So lassen sich die Einwirkungen aller Punkte der n-Seite auf jeden Punkt der m-Seite ausdrücken. Denken wir uns die Kräfte für diejenigen Punkte m summirt, zu welchen Verbindungsgeraden mn durch ein dem Punkte m (x, y, z) anliegendes Flächenelement der anfänglichen Grösse f_n und anfänglichen Normalenrichtung n gehen, dann hat man im Sinne des § 33 die Componenten der Totalspannung R_n dieses Flächenelements in den Richtungen x, y, z nach den Verrückungen

$$(1)\quad \begin{cases} X_n = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \dfrac{F(\Delta n + e_n \Delta n) - i}{1 + e_n} \dfrac{\Delta x + \Delta \xi}{\Delta n}, \\[2ex] Y_n = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \dfrac{F(\Delta n + e_n \Delta n) - i}{1 + e_n} \dfrac{\Delta y + \Delta \eta}{\Delta n}, \\[2ex] Z_n = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \dfrac{F(\Delta n + e_n \Delta n) - i}{1 + e_n} \dfrac{\Delta z + \Delta \zeta}{\Delta n}. \end{cases}$$

Der Index am ersten Summenzeichen gibt die Normalenrichtung des afficirten Flächenelements an. Die entsprechenden Spannungscomponenten vor den Verrückungen sind hiernach:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_n = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \dfrac{F(\Delta n) - i_0}{\Delta n} \Delta x, \\[2ex] \mathfrak{Y}_n = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \dfrac{F(\Delta n) - i_0}{\Delta n} \Delta y, \\[2ex] \mathfrak{Z}_n = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \dfrac{F(\Delta n) - i_0}{\Delta n} \Delta z. \end{cases}$$

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_n = I_n \tau = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \, (i - i_0) \dfrac{\Delta x}{\Delta n}, \\[2ex] \eta_n = K_n \tau = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \, (i - i_0) \dfrac{\Delta y}{\Delta n}, \\[2ex] \zeta_n = L_n \tau = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \, (i - i_0) \dfrac{\Delta z}{\Delta n}. \end{cases}$$

Nimmt man an, dass $i - i_0$ für die Punkte eines Körperelements bei m constant ist und setzt

$$(4)\quad i - i_0 = c\tau,$$

oder wird durch $c\tau$ ein Mittelwerth von $i - i_0$ bezeichnet, dann folgen

$$(5)\qquad \begin{cases} I_n = \dfrac{c}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \dfrac{\Delta x}{\Delta n}, \\ K_n = \dfrac{c}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \dfrac{\Delta y}{\Delta n}, \\ L_n = \dfrac{c}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \dfrac{\Delta z}{\Delta n}, \end{cases}$$

und sollen i_0, i als proportional den von einem beliebigen Nullpunkt aus gerechneten Temperaturen zu Anfang und zu Ende der Verrückungen gelten, dann kann man τ als Temperaturänderung während der letzteren betrachten. Dieser Fall ist hier von besonderem Interesse, weil er durch die Erfahrung bestätigt wird (§§ 59, 60), während andere als von Entfernungsänderungen der Punkte und Temperaturänderungen herrührende Einwirkungen auf die Spannungen bisher nur ganz vereinzelt beobachtet wurden.

Für feste Körper pflegt man die Verschiebungen von einem spannungslosen Zustande aus zu rechnen (§ 47), womit an Stelle von (2)

$$\mathfrak{X}_n = \mathfrak{Y}_n = \mathfrak{Z}_n = 0$$

treten.

Schliesslich bringen wir die Bezeichnungen

$$(6)\qquad \Omega = X_x + Y_y + Z_z = A + B + C,$$

$$(7)\qquad \omega = x_x + y_y + z_z = a + b + c,$$

in Erinnerung, welche in der Folge vielfach Verwendung finden werden.

§ 53. Spannungen beliebiger Körper. Erste Ableitung.

In den Gleichungen des vorigen § haben wir

$$\frac{\Delta x + \Delta \xi}{1 + e_n} = \Delta x + \frac{\Delta \xi - e_n \Delta x}{1 + e_n},$$

$$\frac{\Delta y + \Delta \eta}{1 + e_n} = \Delta y + \frac{\Delta \eta - e_n \Delta y}{1 + e_n},$$

$$\frac{\Delta z + \Delta \zeta}{1 + e_n} = \Delta z + \frac{\Delta \zeta - e_n \Delta z}{1 + e_n}.$$

Handelt es sich nun um diejenige Annäherung, welche bei den bisherigen Untersuchungen im Gebiete der Elasticitätslehre allein erreicht wurde, so vernachlässigt man, unter Voraussetzung einer geeigneten Fixirung des Coordinatensystems, die mit den rechts stehenden Brüchen multiplicirten Glieder gegen die mit Δx, Δy, Δz multiplicirten und setzt dem Taylor'schen Satze entsprechend

$$F(\Delta n + e_n \Delta n) = F(\Delta n) + e_n \Delta n \, F'(\Delta n),$$

worin $F'(\Delta n)$ die erste Derivirte von $F(\Delta n)$ nach Δn bedeutet. Damit folgen aus § 52, (1)

$$f_n X_n = \sum_n m \sum n \, F(\Delta n) \frac{\Delta x}{\Delta n} + \sum_n m \sum n F'(\Delta n) \, e_n \, \Delta x - \sum_n m \sum n i \frac{\Delta x}{\Delta n},$$

$$f_n Y_n = \sum_n m \sum n \, F(\Delta n) \frac{\Delta y}{\Delta n} + \sum_n m \sum n F'(\Delta n) \, e_n \, \Delta y - \sum_n m \sum n i \frac{\Delta y}{\Delta n},$$

$$f_n Z_n = \sum_n m \sum n \, F(\Delta n) \frac{\Delta z}{\Delta n} + \sum_n m \sum n F'(\Delta n) \, e_n \, \Delta z - \sum_n m \sum n i \frac{\Delta z}{\Delta n}.$$

Subtrahirt man vom ersten, zweiten und dritten dieser Ausdrücke die entsprechenden Gleichungen (2) des vorigen §, so ergeben sich mit Rücksicht auf die dortigen Bezeichnungen (3) als Componenten der schliesslichen Totalspannung R_n des Flächenelements der anfänglichen Normalenrichtung n in den Richtungen x, y, z

$$(1) \quad \begin{cases} X_n = \mathfrak{X}_n - \xi_n + \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \, F'(\Delta n) \, e_n \, \Delta x, \\ Y_n = \mathfrak{Y}_n - \eta_n + \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \, F'(\Delta n) \, e_n \, \Delta y, \\ Z_n = \mathfrak{Z}_n - \zeta_n + \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \, F'(\Delta n) \, e_n \, \Delta z, \end{cases}$$

unter $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{Y}_n$, $\mathfrak{Z}_n$ die entsprechenden Anfangsspannungen verstanden.

Die Gleichungen (1) sind unabhängig davon, ob die Spannungen stetige Functionen des Ortes sind oder nicht. Wir wollen nun die gewöhnliche Annahme machen, dass die Verschiebungen bei m stetige Functionen der anfänglichen Richtungen n von der Art sind, dass allgemein $e_n = n_n$ gesetzt werden kann. Nach § 21, (4) ist dann

$$e_n \, \Delta n^2 = n_n \, \Delta n^2 = x_x \, \Delta x^2 + y_y \, \Delta y^2 + z_z \, \Delta z^2 + g_{xy} \, \Delta x \, \Delta y + g_{yz} \, \Delta y \, \Delta z + g_{zx} \, \Delta z \, \Delta x.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (1) und bezeichnet die entstehenden Doppelsummen so, dass unter Weglassung des immer wiederkehrenden $\frac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \frac{F'(\Delta n)}{\Delta n^2}$ der zugehörige Gliederfactor eine Klammer mit dem Index des afficirten Flächenelements erhält, setzt also

$$(2)\qquad (\Delta x^a\,\Delta y^b\,\Delta z^c)_n = \frac{1}{f_n}\sum_n m \sum n\, F'(\Delta n)\,\frac{\Delta x^a\,\Delta y^b\,\Delta z^c}{\Delta n^2},$$

dann ergeben sich die folgenden Beziehungen für beliebige Körper mit stetigen Verschiebungen bei $m\ (x,\ y,\ z)$ und stetigen oder unstetigen Spannungen.

$$(3)\left\{\begin{aligned}
X_n &= \mathfrak{X}_n - \xi_n + x_x(\Delta x^3)_n + y_y(\Delta x\,\Delta y^2)_n + z_z(\Delta x\,\Delta z^2)_n\\
&\quad + g_{xy}(\Delta x^2\,\Delta y)_n + g_{yz}(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)_n\\
&\quad + g_{zx}(\Delta x^2\,\Delta z)_n,\\
Y_n &= \mathfrak{Y}_n - \eta_n + x_x(\Delta x^2\,\Delta y)_n + y_y(\Delta y^3)_n + z_z(\Delta y\,\Delta z^2)_n\\
&\quad + g_{xy}(\Delta x\,\Delta y^2)_n + g_{yz}(\Delta y^2\,\Delta z)_n\\
&\quad + g_{zx}(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)_n,\\
Z_n &= \mathfrak{Z}_n - \zeta_n + x_x(\Delta x^2\,\Delta z)_n + y_y(\Delta y^2\,\Delta z)_n + z_z(\Delta z^3)_n\\
&\quad + g_{xy}(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)_n + g_{yz}(\Delta y\,\Delta z^2)_n\\
&\quad + g_{zx}(\Delta x\,\Delta z^2)_n.
\end{aligned}\right.$$

Speciell für feste Körper hat man in (1), (3) $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{Y}_n = \mathfrak{Z}_n = 0$, wenn die Verschiebungen in üblicher Weise von einem spannungslosen Zustande aus gerechnet werden. Für beliebige (anfänglich) homogene Körper sind Klammersummen gleichen Ausdrucks bei allen Punkten $m\ (x,\ y,\ z)$ gleich gross.

§ 54. Spannungen beliebiger Körper. Zweite Ableitung.

Wir wollen hier die Ausdrücke für die Spannungen etwas consequenter als in § 53 ableiten, indem wir nur alle diejenigen Glieder vernachlässigen, welche mit Quadraten, Producten oder höheren Potenzen der Dehnungen und Verschiebungen multiplicirt sind. Auch dann kann man die Taylor'sche Reihe

$$F(\Delta n + e_n\,\Delta n) = F(\Delta n) + e_n\,\Delta n\,F'(\Delta n) + \frac{e_n^2\,\Delta n^2}{1\cdot 2}F''(\Delta n) + \cdots$$

mit dem zweiten Gliede abbrechen. Da aber

$$\frac{F(\Delta n) - i}{1 + e_n} = F(\Delta n) - i - \frac{F(\Delta n) - i}{1 + e_n}\,e_n$$

ist, so folgt

$$\frac{F(\Delta n + e_n\,\Delta n) - i}{1 + e_n} = F(\Delta n) - i + \left[F'(\Delta n) - \frac{F(\Delta n) - i}{\Delta n}\right]\frac{e_n\,\Delta n}{1 + e_n}$$

und wir erhalten mit

$$(1)\qquad \psi = F'(\Delta n) - \frac{F(\Delta n) - i}{\Delta n}$$

aus § 52, (1)

$$
(2)\quad \begin{cases}
f_n X_n = \sum\limits_n m \sum n\,[F(\Delta n) - i]\,\dfrac{\Delta x + \Delta \xi}{\Delta n} \\
\qquad\qquad + \sum\limits_n m \sum n\psi\,\dfrac{\Delta x + \Delta \xi}{1 + e_n}\,e_n, \\
f_n Y_n = \sum\limits_n m \sum n\,[F(\Delta n) - i]\,\dfrac{\Delta y + \Delta \eta}{\Delta n} \\
\qquad\qquad + \sum\limits_n m \sum n\psi\,\dfrac{\Delta y + \Delta \eta}{1 + e_n}\,e_n, \\
f_n Z_n = \sum\limits_n m \sum n\,[F(\Delta n) - i]\,\dfrac{\Delta z + \Delta \zeta}{\Delta n} \\
\qquad\qquad + \sum\limits_n m \sum n\psi\,\dfrac{\Delta z + \Delta \zeta}{1 + e_n}\,e_n.
\end{cases}
$$

Subtrahirt man hiervon die entsprechenden Gleichungen § 52, (2), so ergeben sich mit den dortigen Bezeichnungen (3) die Componenten der schliesslichen Totalspannung R_n des Flächenelements der anfänglichen Normalenrichtung n in den Richtungen x, y, z

$$
(3)\quad \begin{cases}
X_n = \mathfrak{X}_n - \xi_n + \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n\,[F(\Delta n) - i]\,\dfrac{\Delta \xi}{\Delta n} \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n\,\dfrac{\Delta x + \Delta \xi}{1 + e_n}\,\psi e_n, \\
Y_n = \mathfrak{Y}_n - \eta_n + \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n\,[F(\Delta n) - i]\,\dfrac{\Delta \eta}{\Delta n} \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n\,\dfrac{\Delta y + \Delta \eta}{1 + e_n}\,\psi e_n, \\
Z_n = \mathfrak{Z}_n - \zeta_n + \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n\,[F(\Delta n) - i]\,\dfrac{\Delta \zeta}{\Delta n} \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n\,\dfrac{\Delta z + \Delta \zeta}{1 + e_n}\,\psi e_n,
\end{cases}
$$

unter $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{Y}_n$, $\mathfrak{Z}_n$ die entsprechenden Anfangsspannungen verstanden.

Die Gleichungen (3) sind unabhängig davon, ob die Spannungen stetige Functionen des Ortes sind oder nicht. Da jedoch die Verschiebungen bei m stetige Functionen der anfänglichen Richtungen n sein sollen, so hat man nach § 21, (2)

$$
\begin{aligned}
\Delta \xi &= x_x\,\Delta x + x_y\,\Delta y + x_z\,\Delta z, \\
\Delta \eta &= y_x\,\Delta x + y_y\,\Delta y + y_z\,\Delta z, \\
\Delta \zeta &= z_x\,\Delta x + z_y\,\Delta y + z_z\,\Delta z;
\end{aligned}
$$

es folgt mit den Bezeichnungen § 52, (3)

$$\frac{1}{f_n}\sum_n m \sum n\,[F(\Delta n) - i]\,\frac{\Delta \xi}{\Delta n}$$
$$= x_x(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + x_y(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + x_z(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n)$$

und damit aus der ersten Gleichung (3) die erste der nachstehenden Gleichungen, während sich die beiden andern in ganz analoger Weise aus den zwei letzten Gleichungen (3) ergeben.

$$(4)\left\{\begin{aligned} X_n &= (1 + x_x)(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + x_y(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + x_z(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n) \\ &\qquad + \frac{1}{f_n}\sum_n m \sum n\psi e_n \frac{\Delta x + \Delta \xi}{1 + e_n}, \\ Y_n &= y_x(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + (1 + y_y)(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + y_z(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n) \\ &\qquad + \frac{1}{f_n}\sum_n m \sum n\psi e_n \frac{\Delta y + \Delta \eta}{1 + e_n}, \\ Z_n &= z_x(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + z_y(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + (1 + z_z)(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n) \\ &\qquad + \frac{1}{f_n}\sum_n m \sum n\psi e_n \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{1 + e_n}. \end{aligned}\right.$$

Bis jetzt haben wir nur die mit Quadraten, Producten und höheren Potenzen der Dehnungen multiplicirten Glieder vernachlässigt. Da aber

$$\frac{\Delta x + \Delta \xi}{1 + e_n} = \Delta x + \frac{\Delta \xi - e_n \Delta x}{1 + e_n},$$
$$\frac{\Delta y + \Delta \eta}{1 + e_n} = \Delta y + \frac{\Delta \eta - e_n \Delta y}{1 + e_n},$$
$$\frac{\Delta z + \Delta \zeta}{1 + e_n} = \Delta z + \frac{\Delta \zeta - e_n \Delta z}{1 + e_n},$$

so dürfen in (4) auch die gleichzeitig mit e_n und einem der rechts stehenden Brüche multiplicirten Glieder weggelassen werden. Es entstehen dann mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$(5)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x}_n &= \frac{1}{f_n}\sum_n m \sum n\psi e_n \Delta x, \\ \mathfrak{y}_n &= \frac{1}{f_n}\sum_n m \sum n\psi e_n \Delta y, \\ \mathfrak{z}_n &= \frac{1}{f_n}\sum_n m \sum n\psi e_n \Delta z, \end{aligned}\right.$$

aus (4) die folgenden Beziehungen.

$$(6)\left\{\begin{aligned} X_n &= (1 + x_x)(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + x_y(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + x_z(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n) + \mathfrak{x}_n, \\ Y_n &= y_x(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + (1 + y_y)(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + y_z(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n) + \mathfrak{y}_n, \\ Z_n &= z_x(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + z_y(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + (1 + z_z)(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n) + \mathfrak{z}_n. \end{aligned}\right.$$

Die Dehnung e_n ist durch § 25 bestimmt. Weil aber nach § 5, (1)

$$e_n = n_n + \frac{r_n^2 - e_n^2}{2},$$

so können wir, abgesehen von voraussetzungsgemäss zu vernachlässigenden Gliedern wie im vorigen § setzen

$$\begin{aligned} e_n \Delta n^2 = n_n \Delta n^2 = x_x \Delta x^2 + y_y \Delta y^2 + z_z \Delta z^2 \\ g_{xy} \Delta x \Delta y + g_{yz} \Delta y \Delta z + g_{zx} \Delta z \Delta x. \end{aligned}$$

Wird bei Substitution dieses Ausdrucks in (5) entsprechend dem Vorgehen in § 53 die symbolische Bezeichnung

$$(7) \qquad (\Delta x^a \Delta y^b \Delta z^c)_n = \frac{1}{f_n} \sum_n m \sum n\psi \frac{\Delta x^a \Delta y^b \Delta z^c}{\Delta n^2}$$

eingeführt, dann drücken sich in (6) die $\mathfrak{x}_n$, $\mathfrak{y}_n$, $\mathfrak{z}_n$ für beliebige Körper mit stetigen Verschiebungen und stetigen oder unstetigen Spannungen bei m (x, y, z) wie folgt aus.

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_n = x_x (\Delta x^3)_n + y_y (\Delta x \Delta y^2)_n + z_z (\Delta x \Delta z^2)_n \\ \qquad + g_{xy} (\Delta x^2 \Delta y)_n + g_{yz} (\Delta x \Delta y \Delta z)_n \\ \qquad + g_{zx} (\Delta x^2 \Delta z)_n, \\ \mathfrak{y}_n = x_x (\Delta x^2 \Delta y)_n + y_y (\Delta y^3)_n + z_z (\Delta y \Delta z^2)_n \\ \qquad + g_{xy} (\Delta x \Delta y^2)_n + g_{yz} (\Delta y^2 \Delta z)_n \\ \qquad + g_{zx} (\Delta x \Delta y \Delta z)_n, \\ \mathfrak{z}_n = x_x (\Delta x^2 \Delta z)_n + y_y (\Delta y^2 \Delta z)_n + z_z (\Delta z^3)_n \\ \qquad + g_{xy} (\Delta x \Delta y \Delta z)_n + g_{yz} (\Delta y \Delta z^2)_n \\ \qquad + g_{zx} (\Delta x \Delta z^2)_n. \end{cases}$$

Für feste Körper und beliebige homogene Körper gilt das am Schlusse des § 53 Gesagte.

§ 55. Körper mit Elasticitätsaxen. Erste Ableitung.

Als *Elasticitätsaxe* bei Punkt m (x, y, z) bezeichnen wir jede durch m gehende Gerade, bezüglich welcher vor Eintritt der betrachteten Verrückungen die auf m wirkenden Punkte nach Ort, Masse und Kraftäusserung symmetrisch angeordnet waren (§ 2). Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass Elasticitätsaxen bei m für die Punkte des Flächenelements f_n als parallel gelten können. Etwaige Unstetigkeiten sind nach den Angaben in §§ 8, 13, 21 zu behandeln.

Wir gehen zunächst von § 53 aus. Existirt irgend eine Elasticitätsaxe bei m, so kann man sich die x-Axe parallel derselben gelegt denken, womit alle Summen der Form

$$\frac{1}{f_n}\sum m \sum n\varphi(\Delta n, i, i_0)\Delta x^a \Delta y^b \Delta z^c$$

für $f_n = f_x$ verschwinden, wenn b oder c eine ungerade ganze Zahl bedeutet. Wir erhalten also aus § 53, (3) mit $n = x$

$$(1) \quad \begin{cases} X_x = \mathfrak{X}_x - \xi_x + x_x(\Delta x^3)_x + y_y(\Delta x\,\Delta y^2)_x + z_z(\Delta x\,\Delta z^2)_x, \\ Y_x = g_{xy}(\Delta x\,\Delta y^2)_x, \\ Z_x = g_{zx}(\Delta x\,\Delta z^2)_x. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass vor Eintritt der Verschiebungen die Spannungen auf Flächenelemente senkrecht zu Elasticitätsaxen Normalspannungen sind, wie schon aus dem Begriffe der Elasticitätsaxen folgt.

Kommen bei m zwei zu einander senkrechte Elasticitätsaxen vor, so legen wir ihnen die x-Axe und y-Axe parallel. Die obige Doppelsumme verschwindet dann auch für $f_n = f_y$, wenn c oder a eine ungerade ganze Zahl ist, und nach § 53, (3) gelten neben (1) die Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} X_y = g_{xy}(\Delta y\,\Delta x^2)_y, \\ Y_y = \mathfrak{Y}_y - \eta_y + x_x(\Delta y\,\Delta x^2)_y + y_y(\Delta y^3)_y + z_z(\Delta y\,\Delta z^2)_y, \\ Z_y = g_{yz}(\Delta y\,\Delta z^2)_y. \end{cases}$$

Hat man schliesslich drei zu einander senkrechte Elasticitätsaxen bei m, so denke man sich denselben die drei Coordinatenaxen parallel gelegt, womit die obige Doppelsumme noch für $f_n = f_z$ verschwindet, wenn a oder b eine ungerade ganze Zahl ist. Es bestehen also nach § 53, (3) neben (1) (2) auch die folgenden Beziehungen

$$(3) \quad \begin{cases} X_z = g_{zx}(\Delta z\,\Delta x^2)_z, \\ Y_z = g_{yz}(\Delta z\,\Delta y^2)_z, \\ Z_z = \mathfrak{X}_z - \xi_z + x_x(\Delta z\,\Delta x^2)_z + y_y(\Delta z\,\Delta y^2)_z + z_z(\Delta z^3)_z. \end{cases}$$

Für Flächenelemente beliebiger Normalenrichtungen n bleiben in allen Fällen die Gleichungen des § 53 bestehen. Für feste Körper sind $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{Y}_n = \mathfrak{Z}_n = 0$, wenn wie gewöhnlich die Verschiebungen von einem spannungslosen Zustande aus gerechnet werden, und für beliebige homogene Körper sind in allen Punkten m die Elasticitätsaxen parallel und Klammersummen gleichen Ausdrucks von gleichem Werth.

§ 56. Körper mit Elasticitätsaxen. Zweite Ableitung.

Wir haben hier auf Grund der Gleichungen des § 54 genau ebenso zu verfahren, wie im vorigen Paragraph auf Grund derjenigen des § 53.

Denkt man sich die x-Axe parallel einer Elasticitätsaxe bei m gelegt, so ergeben sich aus § 54, (6)—(8) mit $n = x$

$$(1)\quad \begin{cases} X_x = (1 + x_x)(\mathfrak{X}_x - \xi_x) + x_x(\Delta x^3)_x + y_y(\Delta x \Delta y^2)_x \\ \qquad\qquad + z_z(\Delta x \Delta z^2)_x, \\ Y_x = \quad y_x\,(\mathfrak{X}_x - \xi_x) + g_{xy}(\Delta x \Delta y^2)_x, \\ Z_x = \quad z_x\,(\mathfrak{X}_x - \xi_x) + g_{zx}(\Delta x \Delta z^2)_x. \end{cases}$$

Auch hier sind die Spannungen auf Flächenelemente senkrecht zu Elasticitätsaxen vor Eintritt der Verschiebungen Normalspannungen.

Kommen zwei zu einander senkrechte Elasticitätsaxen bei m vor, so legen wir denselben die x-Axe und y-Axe parallel und erhalten neben (1) die folgenden Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} X_y = \quad x_y\,(\mathfrak{Y}_y - \eta_y) + g_{xy}(\Delta y \Delta x^2)_y, \\ Y_y = (1 + y_y)(\mathfrak{Y}_y - \eta_y) + x_x(\Delta y \Delta x^2)_y + y_y(\Delta y^3)_y \\ \qquad\qquad + z_z(\Delta y \Delta z^2)_y, \\ Z_y = \quad z_y\,(\mathfrak{Y}_y - \eta_y) + g_{yz}(\Delta y \Delta z^2)_y. \end{cases}$$

Existiren schliesslich drei zu einander senkrechte Elasticitätsaxen bei m, und legen wir denselben die drei Coordinatenaxen parallel, dann entstehen neben (1), (2) noch die weiteren Beziehungen:

$$(3)\quad \begin{cases} X_z = \quad x_z\,(\mathfrak{Z}_z - \zeta_z) + g_{zx}(\Delta z \Delta x^2)_z, \\ Y_z = \quad y_z\,(\mathfrak{Z}_z - \zeta_z) + g_{yz}(\Delta z \Delta y^2)_z, \\ Z_z = (1 + z_z)(\mathfrak{Z}_z - \zeta_z) + x_x(\Delta z \Delta x^2)_z + y_y(\Delta z \Delta y^2)_z \\ \qquad\qquad + z_z(\Delta z^3)_z. \end{cases}$$

Für Flächenelemente beliebiger Normalenrichtungen n bleiben die Gleichungen des § 54 bestehen. Bezüglich fester Körper und beliebiger homogener Körper gilt das am Schlusse des vorigen Paragraphen Gesagte.

§ 57. **Beliebige isotrope Körper. Erste Ableitung.**

Ein Körper heisst hinsichtlich eines seiner Punkte m isotrop, wenn alle durch m gehenden Geraden Elasticitätsaxen sind, wenn also vor den betrachteteten Verrückungen die auf m wirkenden Punkte in Bezug auf jede durch m gelegte Gerade nach Ort, Masse und Kraftgesetz symmetrisch angeordnet waren (§ 55). Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass wenigstens für die in Frage kommenden Punkte eines Körperelements bei m Isotropie bestehe. Der Punkt m lag vor den Verrückungen bei x, y, z und liegt nach denselben bei $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$. Etwaige Unstetigkeiten sind nach §§ 8, 13, 21 zu behandeln. Ein Körper kann in obigem Sinne nie bis zu seiner Oberfläche isotrop sein, doch lassen sich die eventuellen Wirkungen der nach Aussen fehlenden Punkte durch Oberflächenkräfte ersetzen.

Da für alle Punkte unseres Körperelements bei m je drei zu einander senkrechte Gerade Elasticitätsaxen sind, so gelten sämmtliche Gleichungen der zwei letzten Paragraphen für beliebige Richtungen der Coordinatenaxen. Da ferner die wirkenden Punkte bezüglich jedes durch m gelegten Schnittelements gleich angeordnet waren, so haben wir nach § 52

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_x = \mathfrak{Y}_y = \mathfrak{Z}_z = -\mathsf{P}, \\ I_x = K_y = L_z = \quad I, \\ \xi_x = \eta_y = \zeta_z = \quad I\tau. \end{cases}$$

Die erste Gleichung zeigt, dass vor den betrachteten Verrückungen die Spannungen aller dem Punkte m anliegenden Flächenelemente gleich grosse Normalspannungen waren. Wir konnten hierauf schon aus §§ 55, 56 schliessen. In (1) ist $I\tau$ zunächst als Bezeichnung aufzufassen. Wenn jedoch angenommen wird, dass ausser Entfernungsänderungen der Körperpunkte nur Temperaturänderungen die Spannungen beeinflussen, so hat man τ als die während der Verrückungen eingetretene Temperaturänderung bei m anzusehen (§ 52).

Wir fassen nun zunächst die in §§ 53, 55 erlangte Annäherung ins Auge. In den dortigen Gleichungen gilt die symbolische Bezeichnung

$$(2)\qquad (\Delta x^a\,\Delta y^b\,\Delta z^c)_n = \frac{1}{f_n}\sum_n m \sum n F'(\Delta n)\,\frac{\Delta x^a\,\Delta y^b\,\Delta z^c}{\Delta n^2}$$

und wegen gleicher Anordnung der wirkenden Theilchen bezüglich jedes durch m gelegten Schnittelements sind von gleichem Werthe

$$(3)\qquad (\Delta x^3)_x = (\Delta y^3)_y = (\Delta z^3)_z = F,$$

$$(4)\qquad (\Delta x\,\Delta y^2)_x = (\Delta x\,\Delta z^2)_x = (\Delta y\,\Delta z^2)_y = (\Delta y\,\Delta x^2)_y = (\Delta z\,\Delta x^2)_z = (\Delta z\,\Delta y^2)_z = G.$$

Es ergeben sich also aus § 55 mit der abkürzenden Bezeichnung

$$(5)\qquad p = \mathsf{P} + I\tau - G\omega$$

die Spannungen auf Flächenelemente der anfänglichen Normalenrichtungen x, y, z

$$(6)\qquad \begin{cases} X_x = (F-G)x_x - p, \qquad Y_y = (F-G)y_y - p, \\ \qquad Z_z = (F-G)z_z - p, \end{cases}$$

$$(7)\qquad X_y = Y_x = Gg_{xy}, \quad Y_z = Z_y = Gg_{yz}, \quad Z_x = X_z = Gg_{zx}.$$

Durch Substitution dieser X_x, X_y, X_z in die erste Gleichung § 35, (2) entsteht

$$X_n = G\left[2x_n \cos(nx) + g_{xy}\cos(ny) + g_{yz}\cos(nz)\right] - p\cos(nx) + (F - 3G)x_x\cos(nx),$$

oder mit Rücksicht auf § 23, (3) die erste der folgenden Gleichungen, während die beiden andern in ganz analoger Weise aus den zwei letzten Gleichungen § 35, (2) hervorgehen.

$$(8)\quad \begin{cases} X_n = Gg_{nx} - p\cos(nx) + (F - 3G)x_x\cos(nx), \\ Y_n = Gg_{ny} - p\cos(ny) + (F - 3G)y_y\cos(ny), \\ Z_n = Gg_{nz} - p\cos(nz) + (F - 3G)z_z\cos(nz). \end{cases}$$

Multiplicirt man hier der Reihe nach mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addirt, so ergibt sich wegen § 33, (2) und § 23, (4) für das Flächenelement der anfänglichen Normalenrichtung n die Componente der schliesslichen Totalspannung R_n in beliebiger Richtung s

$$(9)\quad \begin{cases} S_n = Gg_{ns} - p\cos(ns) + (F - 3G)\big[x_x\cos(nx)\cos(sx) \\ \qquad + y_y\cos(ny)\cos(sy) \\ \qquad + z_z\cos(nz)\cos(sz)\big]. \end{cases}$$

Specielle Fälle dieser allgemeinen Formel bilden die Gleichungen (6)—(8).

Da die Coordinatenaxen beliebige zu einander senkrechte Richtungen erhielten, so haben wir nach (7) allgemein

$$(10)\qquad \text{für } s \perp n, \qquad S_n = Gg_{ns}.$$

Soll (9) für beliebige rechtwinklige n, s das gleiche Resullat liefern, so muss sein:

$$(11)\qquad F = 3G,$$

und damit folgt die für beliebige n, s gültige Beziehung

$$(12)\qquad S_n = Gg_{ns} - p\cos(ns).$$

Dieselbe liefert mit $s = n$ wegen $g_{nn} = 2n_n$ die Normalspannung

$$(13)\qquad N_n = 2Gn_n - p,$$

und mit $s = x, y, z$ die Componenten von R_n in den Richtungen x, y, z

$$(14)\quad \begin{cases} X_n = Gg_{nx} - p\cos(nx), \\ Y_n = Gg_{ny} - p\cos(ny), \\ Z_n = Gg_{nz} - p\cos(nz). \end{cases}$$

Hieraus folgen dann wieder mit $n = x, y, z$

$$(15)\quad X_x = 2Gx_x - p, \quad Y_y = 2Gy_y - p, \quad Z_z = 2Gz_z - p,$$

während die Gleichungen (7) ungeändert bleiben. Auf (14) hätten wir auch aus (8) und auf (15) aus (6) oder (13) schliessen können.

Durch Addition der drei letzten Gleichungen ergeben sich noch mit Rücksicht auf (5)

$$\Omega = 2G\omega - 3p = 5G\omega - 3(\mathsf{P} + J\tau), \tag{16}$$

$$p = \tfrac{2}{5}\left(\mathsf{P} + J\tau - \frac{\Omega}{2}\right), \tag{17}$$

sodass wir p durch die Spannungen oder Verschiebungen ausdrücken können.

Aus (12) folgt allgemein

$$S_n = N_s, \qquad G_{ns} = S_n + N_s = 2S_n, \tag{18}$$

es lassen sich also, wie auch schon aus (7) *oder* (10) *folgt, mit der hier erreichten Annäherung alle Spannungen als Potentialspannungen ansehen*, wir hätten die Ableitungen nach Feststellung der Gleichung (14) abbrechen und auf die Beziehungen des § 49 verweisen können, welche für beliebige isotrope Körper mit p nach (5) oder (17) Gültigkeit erlangen. Die Gültigkeit besteht so lange, als etwaige Aenderungen des nach (4) nur vom Anfangszustand abhängigen Gleitungscoefficienten G gegen diese Grösse selbst verschwinden. Da nach (10) G_{ns} und g_{ns} für die gleichen zu einander senkrechten n, s verschwinden, *so stimmen die anfänglichen Richtungen der Punkte, für welche die Hauptverschiebungen eintreten, mit den anfänglichen Normalenrichtungen derjenigen Flächenelemente überein, welchen die Hauptspannungen entsprechen.* Speciell für Potentialverschiebungen bestehen die Gleichungen (13) bis (18) des § 49.

§ 58. Beliebige isotrope Körper. Zweite Ableitung.

Das zu Anfang des § 57 und bezüglich der dortigen Gleichungen (1) Gesagte behält auch hier Gültigkeit. Im Weiteren haben wir jedoch von den Formeln der §§ 54, 56 auszugehen. Für diese besteht die symbolische Bezeichnung

$$(1)\quad \begin{cases} (\Delta x^a \Delta y^b \Delta z^c)_n \\ \quad = \dfrac{1}{f_n} \sum\limits_n m \sum n \left[F'(\Delta n) - \dfrac{F(\Delta n) - i}{\Delta n}\right] \dfrac{\Delta x^a \Delta y^b \Delta z^c}{\Delta n^2}, \end{cases}$$

sodass wegen gleicher Anordnung der wirkenden Punkte bezüglich jedes durch m gelegten Schnittelements nun gleichwerthig sind

$$(\Delta x^3)_x = (\Delta y^3)_y = (\Delta z^3)_z = K, \tag{2}$$

$$(3)\quad \begin{cases} (\Delta x \Delta y^2)_x = (\Delta x \Delta z^2)_x = (\Delta y \Delta z^2)_y = (\Delta y \Delta x^2)_y \\ \qquad = (\Delta z \Delta x^2)_z = (\Delta z \Delta y^2)_z = H. \end{cases}$$

Während bei der im vorigen Paragraph erlangten Annäherung F, G von $F(\Delta n)$ und i unabhängig waren, sind letztere Grössen auf K, H von Einfluss.

Aus § 56 ergeben sich mit (2) (3) und den abkürzenden Bezeichnungen

$$p = P + J\tau - H\omega, \tag{4}$$

$$2G = 2H - \mathsf{P} - J\tau, \tag{5}$$

die Spannungen auf Flächenelemente der anfänglichen Normalenrichtungen x, y, z

$$\begin{cases} X_x = (2G + K - 3H)x_x - p, \\ Y_y = (2G + K - 3H)y_y - p, \\ Z_z = (2G + K - 3H)z_z - p, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} X_y = Hg_{xy} - (\mathsf{P} + J\tau)x_y, & Y_x = Hg_{xy} - (\mathsf{P} + J\tau)y_x, \\ Y_z = Hg_{yz} - (\mathsf{P} + J\tau)y_z, & Z_y = Hg_{yz} - (\mathsf{P} + J\tau)z_y, \\ Z_x = Hg_{zx} - (\mathsf{P} + J\tau)z_x, & X_z = Hg_{zx} - (\mathsf{P} + J\tau)x_z. \end{cases} \tag{7}$$

Durch Substitution vorstehender X_x, X_y, X_z in die erste Gleichung § 35, (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} X_n = {} & H\left[2x_x \cos(nx) + g_{xy}\cos(ny) + g_{zx}\cos(nz)\right] \\ & - (\mathsf{P} + J\tau)\left[x_x \cos(nx) + x_y \cos(ny) + x_z \cos(nz)\right] \\ & - p\cos(nx) + (K - 3H)x_x \cos(nx), \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf § 21, (2) und § 23, (3) die erste der folgenden Gleichungen, während die beiden anderen in ganz gleicher Weise aus § 35, (2) hervorgehen.

$$\begin{cases} X_n = Hg_{nx} - (\mathsf{P} + J\tau)x_n - p\cos(nx) \\ \qquad\qquad + (K - 3H)x_x \cos(nx), \\ Y_n = Hg_{ny} - (\mathsf{P} + J\tau)y_n - p\cos(ny) \\ \qquad\qquad + (K - 3H)y_y \cos(ny), \\ Z_n = Hg_{nz} - (\mathsf{P} + J\tau)z_n - p\cos(nz) \\ \qquad\qquad + (K - 3H)z_z \cos(nz). \end{cases} \tag{8}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit cos (sx), cos (sy), cos (sz) und addirt, so ergibt sich bei Beachtung von § 4, (8) und § 23, (4) für das Flächenelement der anfänglichen Normalenrichtung n die Componente der Totalspannung R_n in beliebiger Richtung s

$$\begin{cases} S_n = Hg_{ns} - (\mathsf{P} + J\tau)s_n - p\cos(ns) \\ \quad + (K - 3H)\left[x_x \cos(nx)\cos(sx)\right. \\ \qquad\qquad + y_y \cos(ny)\cos(sy) \\ \qquad\qquad \left. + z_z \cos(nz)\cos(sz)\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Specielle Fälle dieser allgemeinen Beziehung bilden die Formeln (6)—(8).

Die Componente der Totalspannung R_s des Flächenelements der anfänglichen Normalenrichtung s in der Richtung n ist nach (9)

$$\begin{aligned} N_s = H g_{ns} &- (\mathsf{P} + J\tau) n_s - p \cos(ns) \\ + (K - 3H)\Big[& x_x \cos(nx) \cos(sx) \\ & + y_y \cos(ny) \cos(sy) \\ & + z_z \cos(nz) \cos(sz)\Big]. \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen entsteht mit Rücksicht auf (5) und $g_{ns} = s_n + n_s$

$$(10) \quad \begin{cases} G_{ns} = S_n + N_s = 2G g_{ns} - 2p \cos(ns) \\ \quad + 2(K - 3H)\big[x_x \cos(nx) \cos(sx) \\ \qquad + y_y \cos(ny) \cos(sy) \\ \qquad + z_z \cos(nz) \cos(sz)\big], \end{cases}$$

und durch Addition der zwei ersten Gleichungen (7)

$$G_{ns} = 2G g_{xy}.$$

Da aber die Coordinatenaxen beliebige zu einander senkrechte Richtungen erhalten haben, so ist allgemein

$$(11) \qquad \text{für } s \perp n, \qquad G_{ns} = 2G g_{ns}.$$

Soll (10) für beliebige rechtwinklige n, s das gleiche Resultat liefern, dann muss sein

$$(12) \qquad K = 3H,$$

und damit folgen aus (10) (9) die für ganz beliebige n, s gültigen Beziehungen

$$(13) \qquad G_{ns} = 2G g_{ns} - 2p \cos(ns),$$

$$(14) \quad \begin{cases} S_n = H g_{ns} - (\mathsf{P} + J\tau) s_n - p \cos(ns) \\ \quad = 2G s_n - H(s_n - n_s) - p \cos(ns). \end{cases}$$

Aus (14) erhält man mit $s = n$ die Normalspannung

$$(15) \qquad N_n = 2G n_n - p,$$

und mit $s = x, y, z$ die Componenten von R_n in diesen Richtungen

$$(16) \quad \begin{cases} X_n = H g_{nx} - (\mathsf{P} + J\tau) x_n - p \cos(nx), \\ Y_n = H g_{ny} - (\mathsf{P} + J\tau) y_n - p \cos(ny), \\ Z_n = H g_{nz} - (\mathsf{P} + J\tau) z_n - p \cos(nz). \end{cases}$$

Hieraus folgen wieder mit $n = x, y, z$

$$(17) \quad X_x = 2G x_x - p, \quad Y_y = 2G y_y - p, \quad Z_z = 2G z_z - p,$$

während die Gleichungen (7) ungeändert bleiben. Auf (16) hätten wir auch aus (8) und auf (17) aus (6) oder (15) schliessen können. Die Formeln (16) und (7) lassen sich mit Rücksicht auf den zweiten

Ausdruck (14) noch anders als oben schreiben. Durch Addition der drei letzten Gleichungen entstehen bei Beachtung von (4)

$$(18)\qquad \Omega = 2G\omega - 3p = (5H - \mathsf{P} - J\tau)\omega - 3(\mathsf{P} + J\tau),$$

$$(19)\qquad p = \frac{2G(\mathsf{P} + J\tau) - H\Omega}{5H - \mathsf{P} + J\tau} = \frac{4G(H - G) - H\Omega}{2G + 3H},$$

womit p auch durch die Spannungen ausgedrückt ist.

Da nach (14)

$$N_s = Hg_{ns} - (\mathsf{P} + J\tau)n_s - p\cos(ns),$$

so haben wir nur dann $N_s = S_n$ *und Potentialspannungen, wenn entweder* $n_s = s_n$ *ist und also ein Potential der Verschiebungen existirt oder* $\mathsf{P} + J\tau$ *gleich Null gesetzt werden kann oder schliesslich die mit* $\mathsf{P} + J\tau$ *multiplicirten Glieder zu vernachlässigen sind.* Dagegen verschwinden nach (11) G_{ns} und g_{ns} für die gleichen zu einander senkrechten n, s, so dass wie bei der vorigen Ableitung *die anfänglichen Richtungen der Punkte, für welche die Hauptverschiebungen eintreten, mit den anfänglichen Normalenrichtungen derjenigen Flächenelemente übereinstimmen, welchen die Hauptspannungen entsprechen.* Für Potentialspannungen gelten mit p, G nach (4), (5) die Gleichungen des § 49, welcher auch die speciellen Formeln für Potentialverschiebungen enthält. Selbstverständlich bestehen alle abgeleiteten Beziehungen nur so lange, als die Aenderungen von G und H gegen diese Grössen selbst verschwinden. Für $\mathsf{P} = 0$, $J\tau = 0$ hat man $H = G$ und stimmen dann die Formeln dieses und des vorigen Paragraphen bis auf den Ausdruck für G überein.

§ 59. **Isotrope feste Körper.**

Für feste Körper sollen wie in §§ 47, 49, 50 die Verschiebungen von einem Zustande aus gerechnet werden, in welchem alle Spannungen gleich Null sind. Wir haben es hier speciell mit isotropen festen Körpern zu thun.

Erste Ableitung. Es gelten die Gleichungen des § 57 oder § 49 mit

$$(1)\qquad \mathsf{P} = 0, \qquad p = J\tau - G\omega = \frac{2}{5}J\tau - \frac{\Omega}{5}.$$

Wesentliche Vereinfachungen treten nicht ein. Die folgenden Beziehungen sind im Hinblicke auf das Bedürfniss gegeben, G und J experimentell zu bestimmen.

Da G, J nur von der anfänglichen Gruppirung der Punkte abhängen, so kann man von beliebigen Verschiebungen ausgehen. Es möge beispielsweise

$$(2)\qquad \text{für } Y_y = Z_z = 0 \text{ und } \tau = 0 \qquad X_x = Ex_x$$

bezeichnet sein; dann folgt aus § 57, (15)

$$1 = \frac{2G}{E} - \frac{p}{X_x}.$$

Weil aber im vorliegenden Falle nach (1)

$$p = -\frac{\Omega}{5} = -\frac{X_x}{5},$$

so liefert die vorhergehende Gleichung

(3) $$G = \frac{2}{5} E.$$

Setzen wir ferner

(4) für $X_x = Y_y = Z_z = 0, \qquad x_x = y_y = z_z = \alpha\tau,$

so ergiebt sich aus (1) und § 57, (15)

$$\frac{p}{2G} = \frac{J}{5G}\tau = \alpha\tau,$$

das heisst

(5) $$J = 5G\alpha = 2E\alpha.$$

Direct lässt sich J bestimmen, wenn man

(6) für $x_x = y_y = z_z = 0 \qquad X_x = Y_y = Z_z = N_n = J\tau$

misst.

Die Beziehungen (3), (5) folgen noch schneller durch Vergleichung von (1) mit dem für Potentialverschiebungen in § 48 auf Grund der Erfahrung erhaltenen Werthe

$$p = J\tau - \frac{2G}{\varepsilon - 2}\omega = \frac{\varepsilon - 2}{\varepsilon + 1} J\tau - \frac{\Omega}{\varepsilon + 1},$$

worin bei der obigen Bedeutung von E, α

$$\varepsilon E = (\varepsilon + 1) 2G = \frac{\varepsilon - 2}{\alpha} J$$

ist. Sollen beide Ausdrücke für p übereinstimmen, so müssen τ die Temperaturänderung und

$$\varepsilon = 4, \qquad J = 5G\alpha = 2E\alpha$$

sein. In §§ 47, 48 wurden E, G, J, τ als Elasticitätsmodul, Gleitungscoefficient, Temperaturcoefficient und Ausdehnungscoefficient bezeichnet.

Zu beachten ist, dass sich die vielumstrittene Beziehung (3) hier ohne Annahme einer continuirlichen Materie ergab, welch' letztere Anschauung schon *Lamé* im Gebiete der Elasticitätslehre als unberechtigt verworfen hat.

Zweite Ableitung. Es bestehen die Beziehungen des § 58 mit

(7) $$\mathsf{P} = 0, \qquad 2G = 2H - J\tau,$$

(8) $$p = J\tau - H\omega = \frac{2GJ\tau - H\Omega}{5H - J\tau}.$$

Auch hier treten keine wesentlichen Vereinfachungen gegenüber den Formeln für beliebige isotrope Körper ein.

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber der vorigen Ableitung besteht darin, dass jetzt der Gleitungscoefficient G von i, τ abhängt und also je nach Umständen verschieden sein kann. Auch H wird nach § 58, 3 durch das schliessliche i beeinflusst. Speciell für $Y_y = Z_z = 0$ und $\tau = 0$ erhalten wir, wie oben vorgehend,

$$\text{mit } X_x = Ex_x \qquad H = \frac{2}{5}E.$$

Aber selbst hierin ist H und damit E direct von dem ungeändert gebliebenen i_0 abhängig, während im vorigen Falle i_0 für E nur indirect insofern in Frage kam, als es die Gruppirung der Punkte im spannungslosen Zustande beeinflussen konnte.

Die Grösse J ist wie bei der ersten Ableitung ausgedrückt, hängt also nur von der anfänglichen Gruppirung der Punkte ab und lässt sich nach (6) bestimmen. Wollte man auch wie oben

$$\text{für } X_x = Y_y = Z_z = 0 \qquad x_x = y_y = z_z = \alpha\tau$$

setzen, so würde nach (8) mit § 58, (17)

$$\frac{J\tau}{5H - J\tau} = \frac{p}{2G} = \alpha\tau,$$

das heisst

$$J = \frac{5\alpha}{1 + \alpha\tau} H,$$

worin aber H selbst vom schliesslichen i abhängt. Dagegen muss der Ausdruck rechts im Ganzen während der Verschiebungen constant sein, so lange J als unveränderlich gilt.

Bei allen festen Körpern ist α ein sehr kleiner Werth (für Eisen etwa 0,000012, für Glas 0,0000086), so dass angenähert

$$J = 5H\alpha.$$

Hiernach ist wieder J sehr klein gegen H und vernachlässigt man demgemäss in (7), (8) die mit J behafteten Glieder, so folgen

$$G = H, \qquad p = J\tau - G\omega = \frac{2}{5}J\tau - \frac{\Omega}{5},$$

welche Beziehung mit (1) übereinstimmt, nur dass G von anderem Ausdrucke ist und etwas vom schliesslichen i abhängt. Vernachlässigen wir consequenter Weise auch diesen Einfluss und lassen in § 58 die mit $J\tau$ und einer Verschiebung multiplicirten Glieder weg, so stimmen für isotrope feste Körper die Gleichungen beider Ableitungen überein und alle Spannungen werden Potentialspannungen. Für technische Zwecke genügen die Beziehungen der ersten

Ableitung immer, und bei Verwendung der bisherigen experimentellen Ergebnisse ist überhaupt eine grössere Genauigkeit als die dort erzielte nicht erreichbar. Dagegen dürfte die zweite Ableitung über manche Abweichungen Aufschluss geben, welche gegenüber den Resultaten der ersten Ableitung auftreten.

§ 60. **Flüssigkeiten. Aether.**

Die Flüssigkeitsbewegung bei einem Flüssigkeitspunkte m kann nach den für isotrope Körper gültigen Beziehungen der §§ 57, 58 jedenfalls nur dann beurtheilt werden, wenn vor Eintritt der Verschiebungen die Spannungen für alle m anliegenden Flächenelemente gleich gross sind (§ 57) und während derselben die Aenderungen von G, H gegen diese Grössen selbst verschwinden. Da letztere Bedingung für Bewegungen in einem Zeitelemente dt immer zutrifft, so lässt sich vermuthen, dass die in §§ 45, 46 gefundenen Beziehungen für vollkommene Flüssigkeiten und reibende Flüssigkeiten auch aus den Formeln der §§ 57, 58 hervorgehen, weil für alle einem Punkte anliegenden Flächenelemente der Druck bei ersteren immer von einerlei Werth ist, bei letzteren aber wenigstens bei Bewegungen vom Gleichgewichtszustande aus. In § 50 ist denn auch die betreffende Specialisirung für Potentialspannungen gezeigt und solche kommen nach § 58, (14) bei unendlich kleinem $(\mathsf{P} + J\tau)dt$ allein vor.

Es handelt sich jetzt noch um endliche elastische Verschiebungen isotroper Flüssigkeiten. Wir beschränken die Untersuchung auf Fälle, in welchen

$$X_x = Y_y = Z_z = N_n = -p, \tag{1}$$

$$X_y = Y_z = Z_x = T_n = 0 \tag{2}$$

gesetzt werden können. Da die Componente der Totalspannung R_n eines Flächenelements der anfänglichen Normalenrichtung n in beliebiger Richtung s nach der ersten Ableitung § 57 mit $g_{ns} = s_n + n_s$

$$S_n = G g_{ns} - p \cos (ns)$$

und nach der schärferen zweiten Ableitung in § 58

$$S_n = 2 G s_n - H(s_n - n_s) - p \cos (ns),$$

so wird mit der Annahme (1), (2) vorausgesetzt, dass in vorstehenden Ausdrücken die mit Verschiebungen behafteten Glieder verschwindende Grössen gegenüber S_n sind. Dies trifft z. B. zu im ersten Falle für $G = 0$ und $s_n = n_s$ (Potentialbewegung), ohne dass diese Bedingungen jedoch nöthig wären.

Fasst man eine unendlich kleine Bewegung ins Auge und bezeichnet durch V das anfängliche specifische Volumen bei m, so folgt aus dem der ersten Ableitung entsprechenden

$$p = \mathsf{P} + J\tau - G\omega,$$

mit $p - \mathsf{P} = d\mathsf{P}$, $\omega V = dV$

$$Vd\mathsf{P} = JVd\tau - GdV.$$

Das *Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz* $\mathsf{P}V = R(a + t)$, in welchem R, a Constante und t die Temperatur nach Celsius bedeuten, gibt speciell für Gase

$$Vd\mathsf{P} = R\,dt - \mathsf{P}\,dV,$$

es wären also in diesem Falle

$$JV = R, \qquad G = \mathsf{P}, \qquad d\tau = dt,$$

und bestätigt sich, wie schon bei festen Körpern, dass τ die Temperaturänderung ist. Nach der zweiten Ableitung tritt nur H an Stelle von G.

Man nimmt an, dass der freie (interstellare) *Aether* ein homogener isotroper Körper ist, welcher elastische Schwingungen fortpflanzt, ohne sich dabei zu erwärmen. Die Wechselwirkung der Aethertheilchen soll nur von ihren Massen und Entfernungen abhängen, $\tau = 0$ sein. Ist diese Voraussetzung bei m erfüllt, dann gelten nach der ersten Ableitung die Gleichungen des § 57 mit

$$p = \mathsf{P} - G\omega = \frac{1}{5}(2\mathsf{P} - \Omega)$$

und nach der zweiten diejenigen des § 58 mit

$$p = \mathsf{P} - H\omega = \frac{2G\mathsf{P} - H\Omega}{5H - P}.$$

Setzt man den Druck im ungestörten Zustande $\mathsf{P} = 0$, so ergeben sich die Gleichungen, welche bei $\tau = 0$ für isotrope feste Körper bestehen.

VIII. Abschnitt.

Bewegungsgleichungen. Verschiebungsarbeit.

Nachdem uns die Untersuchungen der zwei letzten Abschnitte zu Beziehungen zwischen Spannungen und Verschiebungen oder Verschiebungsgeschwindigkeiten fester und flüssiger Körper geführt haben, können die gefundenen Ausdrücke in den für beliebige Körper früher entwickelten Gleichungen Verwendung finden. Bezüglich der Bewegungsgleichungen für Körperelemente und des Ausdrucks für die Verschiebungsarbeit soll die fragliche Specialisirung hier vorgenommen werden. Weitere Untersuchungen werden sich anschliessen. Die Resultate gelten natürlich nur so lange wie die erwähnten Beziehungen, also im Allgemeinen für gegen 1 verschwindend kleine Verschiebungen, und bei festen Körpern, so lange wir unter der Elasticitätsgrenze bleiben (§ 51).

§ 61. Beliebige Körper.

Ein Körper bewege sich hinsichtlich eines beliebig bewegten Coordinatensystems. Für ein Element der Masse $\mu\, dK$, welches bei der Abgrenzung parallelepipedische Form, Kanten dx, dy, dz vom Körperpunkte $m\,(x, y, z)$ aus in den Richtungen x, y, z und also das Volumen $dK = dx\, dy\, dz$ hatte, seien zur Zeit t die specifischen Massenkräfte und Beschleunigungen hinsichtlich unseres Coordinatensystems in den Richtungen x, y, z durch X, Y, Z und p_x, p_y, p_z bezeichnet. Dann bestehen nach §§ 11, 35 zur Zeit t die folgenden Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = \mu(p_x - X), \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} = \mu(p_y - Y), \\ \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = \mu(p_z - Z). \end{cases}$$

Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$, addirt und setzt

(2) $$p_s = p_x \cos(sx) + p_y \cos(sy) + p_z \cos(sz),$$

(3) $$S = X \cos(sx) + Y \cos(sy) + Z \cos(sz),$$

womit p_s die Acceleration und S die specifische Massenkraft unseres Theilchens in der beliebigen Richtung s bedeuten, dann erhält man wegen § 3, (5) und § 33, (2) die allgemeinere Bewegungsgleichung

(4) $$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = \mu(p_s - S),$$

welche beispielsweise mit $s = x, y, z$ die Beziehungen (1) liefert. Speciell für Potentialspannungen lässt sich die Gleichung (4) auch schreiben

(5) $$\frac{\partial X_s}{\partial x} + \frac{\partial Y_s}{\partial y} + \frac{\partial Z_s}{\partial z} = \mu(p_s - S),$$

welche Form selbstverständlich ebenfalls auf (1) führt.

Erste Auffassung. Nach der in § 11 gegebenen ersten Auffassung der Bewegungsgleichungen bedeuten x, y, z die augenblicklichen Coordinaten der Körperpunkte und μ die augenblickliche Masse der Volumeneinheit. Die Spannungen sind im Sinne des § 3 aufzufassen, das Massenelement hat man sich zur Zeit t abgegrenzt zu denken.

Die Beziehungen (1) bis (5) bestehen für jedes Theilchen $\mu\, dK$ zu jeder Zeit t. Fassen wir verschiedene solcher Theilchen zu verschiedenen Zeiten ins Auge, so werden die Geschwindigkeiten u, v, w wie alle andern in den Formeln auftretenden Grössen Functionen von x, y, z, t. Die vollständige Aenderung der Geschwindigkeit u eines Theilchens im Zeitelement dt drückt sich also aus

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

worin dx, dy, dz die Wege des Theilchens in den Richtungen x, y, z während der Zeit dt bedeuten. Da hiernach

$$dx = u\, dt, \qquad dy = v\, dt, \qquad dz = w\, dt,$$

so liefert die darüberstehende Gleichung die erste der folgenden Beschleunigungen, während sich die beiden anderen in ganz analoger Weise ergeben.

(6) $$\begin{cases} p_x = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} u + \dfrac{\partial u}{\partial y} v + \dfrac{\partial u}{\partial z} w, \\ p_y = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} u + \dfrac{\partial v}{\partial y} v + \dfrac{\partial v}{\partial z} w, \\ p_z = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial x} u + \dfrac{\partial w}{\partial y} v + \dfrac{\partial w}{\partial z} w. \end{cases}$$

Führen wir noch die Geschwindigkeit unseres Massenelements in der beliebigen Richtung s ein

(7) $$s = u\cos(sx) + v\cos(sy) + w\cos(sz),$$

dann folgt aus (2), (6) für p_s in (4) die Formel

(8) $$p_s = \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}u + \frac{\partial s}{\partial y}v + \frac{\partial s}{\partial z}w,$$

welche die Gleichungen (6) mit enthält.

Als Verschiebungsarbeit im Zeitelement dt haben wir nach § 42, (7) mit den Bezeichnungen des § 28 für einen beliebigen Körper oder Körpertheil

(9) $$dD = dt\int(X_x u_x + Y_y v_y + Z_z w_z + X_y \gamma_{xy} + Y_z \gamma_{yz} + Z_x \gamma_{zx})\,dK.$$

Das Integral ist auf alle Elemente dK auszudehnen.

Zweite Auffassung. Nach der in § 35 eingeführten zweiten Auffassung der Bewegungsgleichungen beziehen sich die Coordinaten x, y, z der Körperpunkte und die Masse μ pro Volumeneinheit auf eine beliebige Zeit t_0. Die Spannungen hat man im Sinne des § 33 aufzufassen und das Körperelement zur Zeit t_0 abgegrenzt zu denken.

Zur Zeit t des Bestehens der Gleichungen (1) bis (5) hat das Massenelement nicht mehr parallelepipedische Form und ist nach $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ gelangt, wobei ξ, η, ζ beliebig grosse Functionen der anfänglichen Coordinaten x, y, z bedeuten. Die Beschleunigungen in (1) aber drücken sich jetzt nach § 35 aus

(10) $$p_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad p_y = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \qquad p_z = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Wenn ferner für unser Theilchen in der beliebigen Richtung s

(11) $$\sigma = \xi\cos(sx) + \eta\cos(sy) + \zeta\cos(sz)$$

den Weg von t_0 bis t und s die Geschwindigkeit zur Zeit t bedeuten, so folgt aus (2) mit (10)

(12) $$p_s = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}.$$

Als Verschiebungsarbeit von t_0 bis t haben wir nach § 41 für einen beliebigen Körper oder Körpertheil

(13) $$D = \int \vartheta\, dK,$$

worin alle Elemente dK zu berücksichtigen sind und

(14) $$\left\{\begin{aligned} \vartheta = \int_{t_0}^{t} (X_x\,dx_x + Y_y\,dy_y + Z_z\,dz_z + X_y\,dx_y + Y_x\,dy_x + Y_z\,dy_z \\ + Z_y\,dz_y + Z_x\,dz_x + X_z\,dx_z) \end{aligned}\right.$$

die specifische Verschiebungsarbeit bei m bedeutet.

§ 62. Die Continuitätsgleichung. Condensation.

Für irgend ein bestimmtes Massentheilchen sei σ die positive oder negative Zunahme der specifischen Masse pro anfänglicher Masseneinheit derselben und damit bei constanter Acceleration g auch die Zunahme des specifischen Gewichts pro anfänglicher Gewichtseinheit des letzteren. Bezeichnet dann wie früher $\varkappa$ die Dilatation unseres Theilchens vom Anfangsvolumen V_v und der anfänglichen specifischen Masse μ, dann besteht der constanten Gesammtmasse wegen die Beziehung

$$\mu V = \mu(1 + \sigma)(1 + \varkappa) V,$$

(1) $$(1 + \sigma)(1 + \varkappa) = 1.$$

Wir werden dieselbe in ihren verschiedenen Formen *Continuitätsgleichung* nennen, während σ *Condensation* heissen mag. Für Verschiebungen der hier allein interessirenden Art ist $1 + \varkappa$ und damit auch $1 + \sigma$ durch § 27, (8) bestimmt. Ist $\varkappa$ gegen 1 verschwindend klein, dann gilt nach (1) das Gleiche für σ und wird $\sigma\varkappa$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung. Darf also $\varkappa = \omega$ gesetzt werden (§ 32), so lautet die Continuitätsgleichung

(2) $$\omega + \sigma = 0, \qquad \omega = -\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Mit diesem Falle haben wir es im Folgenden zu thun. Für incompressible Körper wären σ, ω gleich Null.

Erste Auffassung. Es handle sich um die erste Auffassung der Bewegungsgleichungen und Spannungen. Dann beziehen wir in (2) den Anfangszustand auf die Zeit t und haben für das Zeitelement dt

(3) $$\sigma = \frac{d\mu}{\mu}, \qquad \omega = \varrho\, dt,$$

unter

(4) $$\varrho = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

die Dilatationsgeschwindigkeit verstanden. Die Contunitätsgleichung lautet also

(5) $$d\mu + \mu\omega = 0, \qquad \frac{d\mu}{dt} + \mu\varrho = 0.$$

Da sich die Coordinaten x, y, z unseres Theilchens fortwährend ändern, so wird μ von x, y, z, t abhängig, wir erhalten

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial t} dt + \frac{\partial \mu}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu}{\partial y} dy + \frac{\partial \mu}{\partial z} dz,$$

worin $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $dz = w\,dt$ die Wege des Theilchens in den Richtungen x, y, z für die Zeit dt bedeuten. Daher entsteht aus (5)

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial x} u + \frac{\partial \mu}{\partial y} v + \frac{\partial \mu}{\partial z} w + \mu \varrho = 0 \tag{6}$$

und hieraus durch Addition der mit μ multiplicirten Gleichung (4)

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu u}{\partial x} + \frac{\partial \mu v}{\partial y} + \frac{\partial \mu w}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Die speciellen Formen (6), (7) von (2) werden gewöhnlich (für Flüssigkeiten) als Continuitätsgleichung bezeichnet und wie folgt abgeleitet.

Man denke sich zur Zeit t von $m(x, y, z)$ aus ein parallelopipedisches Volumenelement der Kanten dx, dy, dz abgegrenzt und sehe zu, wie sich die Masse in diesem bestimmten Raume während der Zeit dt unter der Voraussetzung ändert, dass der Raum vom betrachteten Körper eingenommen bleibt. Es tritt in den Richtungen

$$x \qquad\qquad y \qquad\qquad z$$

ein die Masse

$$\mu\, dy\, dz \cdot u\, dt, \qquad \mu\, dz\, dx \cdot v\, dt, \qquad \mu\, dx\, dy \cdot w\, dt,$$

aus die Masse

$$\left(\mu u + \frac{\partial \mu u}{\partial x} dx\right) dy\, dz\, dt,$$
$$\left(\mu v + \frac{\partial \mu v}{\partial y} dy\right) dz\, dx\, dt,$$
$$\left(\mu w + \frac{\partial \mu w}{\partial z} dz\right) dx\, dy\, dt.$$

Durch Subtraction der drei letzten Ausdrücke von den darüber stehenden und Addition der Reste erhält man die ganze Zunahme der Masse in unserm Raume

$$-\left(\frac{\partial \mu u}{\partial x} + \frac{\partial \mu v}{\partial y} + \frac{\partial \mu w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Diese Zunahme kann man aber auch ausdrücken

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} dt \cdot dx\, dy\, dz.$$

Durch Gleichsetzen entsteht (7) und dann mit Rücksicht auf (4) auch die Gleichung (6).

Zweite Auffassung. Handelt es sich um die zweite Auffassung der Bewegungsgleichungen, dann beziehen wir in (2) den Anfangszustand auf die Zeit t_0. Zur Zeit t seien die Condensation σ und Dilatation ω erreicht. Da nun die Coordinaten x, y, z der Massenelemente den Anfangsorten entsprechen, so erhalten wir aus (2) für ien bestimmtes Massenelement der constanten x, y, z wegen

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung können wir mit Rücksicht auf (2) auch schreiben

$$(9)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial^2\xi}{\partial t\,\partial x} + \frac{\partial^2\eta}{\partial t\,\partial y} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial t\,\partial z}$$

oder, da die Reihenfolge der Differentiation gleichgültig ist, bei Beachtung von § 35, (3)

$$(10)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varrho.$$

Man hat nun (9) oder (10) als Continuitätsgleichung für die zweite Auffassung der Bewegungsgleichungen anzusehen. Die Form (2) ist beiden Auffassungen gemeinsam. In § 28 wurde ϱ als Dilatationsgeschwindigkeit bezeichnet, nach (2) kann man $-\varrho$ die *Condensationsgeschwindigkeit* nennen.

§ 63. Hydrodynamische Grundgleichungen.

Für vollkommene Flüssigkeiten haben wir nach § 45 bei Auffassung der Spannungen zur Zeit t als Functionen des augenblicklichen Orts

$$(1)\qquad \begin{cases} X_y = Y_x = Y_z = Z_y = Z_x = X_z = 0, \\ X_x = Y_y = Z_z = -p. \end{cases}$$

Damit gehen die Gleichungen (1) des vorigen § in die folgenden hydrodynamischen Grundgleichungen von *Euler* über

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(X - \dfrac{du}{dt}\right), \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(Y - \dfrac{dv}{dt}\right), \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(Z - \dfrac{dw}{dt}\right), \end{cases}$$

worin die Beschleunigungen rechts durch § 61, (6) bestimmt sind.

Zur Ermittelung der in (2) bei gegebenen Massenkräften auftretenden Unbekannten u, v, w, p, μ reichen diese drei Gleichungen nicht aus. Als vierte Beziehung dient die in § 62 abgeleitete Continuitätsgleichung

$$(3)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial\mu u}{\partial x} + \frac{\partial\mu v}{\partial y} + \frac{\partial\mu w}{\partial z} = 0,$$

welche sich mit

$$(4)\qquad \varrho = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\omega}{dt}$$

auch schreiben lässt

$$(5)\qquad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial\mu}{\partial x}u + \frac{\partial\mu}{\partial y}v + \frac{\partial\mu}{\partial z}w = -\mu\varrho.$$

Die fünfte Bedingungsgleichung hängt von der Natur der untersuchten Flüssigkeit (Wasser, Gas etc.) und specielleren Umständen ab. Wird diese Gleichung mit neuen Variabeln eingeführt (z. B. der Temperatur), so sind natürlich auch neue Beziehungen zur Bestimmung aller Unbekannten nöthig.

Soll die betrachtete Flüssigkeit als incompressibel gelten, wie bei den meisten Untersuchungen tropfbar flüssiger Körper, oder wird doch allen Elementen derselben im gegebenen Falle constantes Volumen zugeschrieben, so hat man

$$(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varrho = 0.$$

Es genügen dann für homogene Flüssigkeiten bei vier Unbekannten u, v, w, p die Gleichungen (2) und (6), für heterogene Flüssigkeiten bei fünf Unbekannten u, v, w, p, μ dieselben Gleichungen und

$$(7) \qquad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial x} u + \frac{\partial \mu}{\partial y} v + \frac{\partial \mu}{\partial z} w = 0.$$

Für die Verschiebungsarbeit im Zeitelement dt folgt nach § 61, (3) mit Rücksicht auf vorstehende Gleichungen (1) und (4)

$$(8) \qquad dD = -\int p\omega\, dK.$$

Die Verschiebungsarbeit ist also nur durch die Dilatation der Körperelemente bedingt. Soll der Druck in allen Theilen unserer Flüssigkeit als gleich gross gelten und bedeutet V das ganze Körpervolumen zur Zeit t, so entsteht mit

$$dV = \int \omega\, dK$$

die Beziehung

$$(9) \qquad dD = -p\, dV.$$

Die Verschiebungsarbeit ist in diesem Falle nach § 42, (14) gleich der Arbeit der Oberflächenkräfte und bei constantem Gesammtvolumen gleich Null.

§ 64. **Reibende Flüssigkeiten.**

Bei Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung ergaben sich in § 46 für die Spannungen als Functionen des augenblicklichen Orts u. A. folgende Beziehungen

$$(1) \qquad X_x = 2fu_x - p, \qquad Y_y = 2fv_y - p, \qquad Z_z = 2fw_z - p;$$

$$(2) \qquad X_y = f\gamma_{xy} = Y_x, \qquad Y_z = f\gamma_{yz} = Z_y, \qquad Z_x = f\gamma_{zx} = X_z,$$

worin die Bezeichnungen der Verschiebungsgeschwindigkeiten den Festsetzungen in § 28 entsprechen.

Kann der Reibungscoefficient f zur Zeit t in dem unendlich kleinen Raume um m (x, y, z) als constant gelten, dann folgen aus (1), (2)

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = 2f\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial X_y}{\partial y} = f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right).$$

Durch Addition entsteht mit

$$\varrho = u_x + v_y + w_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\omega}{dt} \tag{3}$$

und der symbolischen Bezeichnung

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \tag{4}$$

nach § 61, (1) die erste der folgenden Gleichungen, während sich die beiden anderen in ganz analoger Weise ergeben.

$$\left\{\begin{aligned} f\left(\Delta^2 u + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu\left(\frac{du}{dt} - X\right), \\ f\left(\Delta^2 v + \frac{\partial \varrho}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu\left(\frac{dv}{dt} - Y\right), \\ f\left(\Delta^2 w + \frac{\partial \varrho}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu\left(\frac{dw}{dt} - Z\right). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Diese Gleichungen mit den Substitutionen § 61, (6) treten bei reibenden Flüssigkeiten an Stelle der Beziehungen § 63, (2) für vollkommene Flüssigkeiten. Dagegen bleibt das in § 63 bezüglich der Gleichungen (3)—(7) Gesagte bestehen, sodass wir wieder ebenso viel Gleichungen als unbekannte Functionen haben.

Substituirt man die Ausdrücke (1), (2) in § 61, (9), dann ergibt sich die Verschiebungsarbeit im Zeitelement dt

$$\left\{\begin{aligned} dD = dt \int \Bigl(&u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 \\ &+ \frac{\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2}{2}\Bigr) 2f\,dK - dt \int p\varrho\, dK. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Der Klammerausdruck im ersten Integral ist nach §§ 23, 28 unabhängig von den Richtungen der Coordinatenaxen und gleich $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, wenn α, β, γ die Hauptverschiebungsgeschwindigkeiten bei m zur Zeit t bedeuten. Die Verschiebungsarbeit ist jetzt nicht mehr wie bei vollkommenen Flüssigkeiten durch die Dilatation der Körperelemente allein bedingt.

Speciell für Potentialbewegungen hat man

$$(7)\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y},\qquad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z},$$

und damit in (5) zufolge (4)

$$(8)\qquad \Delta^2 u=\frac{\partial \varrho}{\partial x},\qquad \Delta^2 v=\frac{\partial \varrho}{\partial y},\qquad \Delta^2 w=\frac{\partial \varrho}{\partial z}.$$

Für $f=0$ gehen alle Formeln in die für vollkommene Flüssigkeiten gültigen über.

§ 65. **Beliebige isotrope Körper. Erste Ableitung.**

Wir gehen jetzt von der in § 61 angeführten zweiten Auffassung der Bewegungsgesetze aus und beschränken in diesem § die Untersuchung auf solche elastische Verschiebungen, für welche zur Zeit t innerhalb des betrachteten unendlich kleinen Raumes um m die Spannungen als Potentialspannungen und der Gleitungscoefficient G als constant anzusehen sind, wie dies unter gewissen Voraussetzungen für beliebige isotrope Körper gilt (§§ 49, 57). Man hat dann

$$(1)\qquad X_x=2Gx_x-p,\qquad Y_y=2Gy_y-p,\qquad Z_z=2Gz_z-p,$$

$$(2)\qquad X_y=Gg_{xy}=Y_x,\qquad Y_z=Gg_{yz}=Z_y,\qquad Z_x=Gg_{zx}=X_z,$$

worin die Bezeichnungen der Verschiebungen den Festsetzungen in § 21 entsprechen.

Aus (1), (2) folgen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}=2G\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}-\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial y}=G\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial X_z}{\partial z}=G\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z}\right).$$

Durch Addition entsteht mit

$$(3)\qquad \omega=x_x+y_y+z_z=\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

und der symbolischen Bezeichnung

$$(4)\qquad \Delta^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

nach § 61, (1) die erste der folgenden Gleichungen, während sich die beiden anderen in ganz analoger Weise ergeben,

$$(5)\quad \begin{cases} G\left(\Delta^2 \xi + \dfrac{\partial \omega}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - X\right), \\ G\left(\Delta^2 \eta + \dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y\right), \\ G\left(\Delta^2 \zeta + \dfrac{\partial \omega}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - Z\right). \end{cases}$$

Die Gleichungen (5) genügen bei bekanntem Anfangszustand und bekannten Massenkräften zur Ermittelung der Unbekannten, wenn p durch ξ, η, ζ mitbestimmt ist. Andernfalls ist noch eine weitere Beziehung nöthig, welche von der Natur des betrachteten Körpers und anderen Umständen abhängt.

Substituirt man die Ausdrücke (1), (2) in § 61, (14) und führt die Integration aus, dann folgt die Verschiebungsarbeit

$$(6)\qquad D = \int \vartheta \, d\dot{K} \qquad \text{mit} \qquad \vartheta = G\Theta - \int_{t_0}^{t} p \, d\omega,$$

worin

$$(7)\quad \Theta = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{g_{xy}^2 + g_{yz}^2 + g_{zx}^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Θ ist nach § 23, (16), (17) unabhängig von den Richtungen der Coordinatenaxen, a, b, c sind die Hauptverschiebungen bei m. Um das letzte Integral in (6) ausführen zu können, muss eine Beziehung zwischen p und ω gegeben sein, wir müssen wissen, wie sich von Beginn der Verschiebungen an bis zur Realisirung ihrer schliesslichen Werthe p mit der Dilatation ω geändert hat. Für $d\omega = 0$ wäre $\vartheta = G\Theta$.

Speciell für Potentialverschiebungen hat man

$$(8)\qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

und damit in (5) mit Rücksicht auf (4)

$$(9)\qquad \Delta^2 \xi = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \Delta^2 \eta = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \qquad \Delta^2 \zeta = \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Erfahrungsformeln für feste Körper. Nach §§ 48, 50 wäre anzunehmen

$$(10)\qquad p = J\tau - 2G\frac{\omega}{\varepsilon - 2},$$

worin ε die Elasticitätszahl, τ die Temperaturänderung, sowie mit E Elasticitätsmodul und α Ausdehnungscoefficient

$$(11)\qquad J = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 2}\, 2G\alpha = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 2}\, E\alpha$$

der Temperaturcoefficient. Damit können wir die Beziehungen (5) auch ausdrücken

$$(12)\quad \begin{cases} G\left(\Delta^2\xi + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 2}\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) - J\frac{\partial\tau}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - X\right), \\ G\left(\Delta^2\eta + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 2}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) - J\frac{\partial\tau}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - Y\right), \\ G\left(\Delta^2\zeta + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 2}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) - J\frac{\partial\tau}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - Z\right), \end{cases}$$

und die specifische Verschiebungsarbeit bei m

$$(13)\qquad \vartheta = G\left(\Theta + \frac{\omega^2}{\varepsilon - 2}\right) - J\int_{t_0}^{t}\tau\, d\omega.$$

Flüssigkeiten. Die Uebereinstimmung der theoretischen und empirischen Resultate bezüglich der elastischen Bewegungen isotroper Flüssigkeiten verlangt nach § 60 in (5), (6) den Wegfall der mit G behafteten Glieder, womit entstehen

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(X - \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(Y - \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(Z - \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right), \end{cases}$$

$$(15)\qquad \vartheta = -\int p\, d\omega.$$

Die Continuitätsgleichung ist durch Gleichung (9) oder (10) des § 62 ausgedrückt.

Beliebige Körper. Nach den theoretischen Ermittelungen in § 57 haben wir

$$(16)\qquad p = \mathsf{P} + J\tau - G\omega,$$

mit welchem Werthe nun die Gleichungen (5) gelten, während aus (6), (7) folgt

$$(17)\qquad \vartheta = G\left(\Theta + \frac{\omega^2}{2}\right) - \mathsf{P}\omega - J\int_{t_0}^{t}\tau\, d\omega.$$

Beispielsweise erhalten wir für feste Körper mit $\mathsf{P} = 0$ dieselben Gleichungen, welche aus (11)—(13) mit $\varepsilon = 4$ entstehen, wie dies schon § 59 zu entnehmen gestattet.

Constante Temperatur (Aether). Wenn bei einem isotropen Körper P innerhalb des betrachteten unendlich kleinen Raumes constant ist (homogene isotrope Medien), dann ergeben sich aus (5) mit (16) für $\tau = 0$ die Gleichungen:

$$
(18)\qquad \begin{cases} G\left(\Delta^2\xi + 2\,\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - X\right), \\ G\left(\Delta^2\eta + 2\,\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - Y\right), \\ G\left(\Delta^2\zeta + 2\,\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - Z\right), \end{cases}
$$

$$
(19)\qquad \vartheta = G\left(\Theta + \frac{\omega^2}{2}\right) - \mathsf{P}\omega.
$$

Die Gleichungen (18) stimmen mit den bei $\tau = 0$ für feste Körper gültigen theoretischen Formeln überein, das constante P ist ohne Einfluss. Bezüglich ϑ gilt letzteres nur bei Bewegungen ohne Dilatation (Lichtschwingungen).

§ 66. **Beliebige isotrope Körper. Zweite Ableitung.**

Wir fassen wieder die Spannungen und Bewegungsgleichungen im Sinne des IV. Abschnitts auf, lassen jedoch die Beschränkung auf Potentialspannungen fallen und haben nach § 58

$$
(1)\qquad X_x = 2Gx_x - p, \qquad Y_y = 2Gy_y - p, \qquad Z_z = 2Gz_z - p;
$$

$$
(2)\qquad \begin{cases} X_y = (2G - H)\,x_y + Hy_x, & Y_x = (2G - H)\,y_x + Hx_y, \\ Y_z = (2G - H)\,y_z + Hz_y, & Z_y = (2G - H)\,z_y + Hy_z, \\ Z_x = (2G - H)\,z_x + Hx_z, & X_z = (2G - H)\,x_z + Hz_x, \end{cases}
$$

worin

$$
(3)\qquad 2G = 2H - \mathsf{P} - J\tau, \qquad p = \mathsf{P} + J\tau - H\omega,
$$

und die Bezeichnungen der Verschiebungen den Festsetzungen in § 21 entsprechen.

Fassen wir zunächst den wichtigsten Fall ins Auge, dass (wie z. B. bei den elastischen Bewegungen des freien Aethers, § 60) τ verschwindet und H, G, P innerhalb des betrachteten unendlich kleinen Raumes um m als constant gelten. Man hat dann

$$
\begin{cases} \frac{\partial X_x}{\partial x} = 2G\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial X_y}{\partial y} = (2G - H)\,\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + H\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}, \\ \frac{\partial X_z}{\partial z} = (2G - H)\,\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + H\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z}. \end{cases}
$$

Durch Addition dieser Ausdrücke entsteht aus § 61, (1) mit Rücksicht auf die Bezeichnungen § 65, (3), (4) die erste der nachstehenden Gleichungen, während sich die beiden andern in ganz analoger Weise ergeben.

$$(4)\quad\begin{cases}(2G-H)\,\Delta^2\xi + H\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - X\right),\\ (2G-H)\,\Delta^2\eta + H\dfrac{\partial\omega}{\partial y} - \dfrac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - Y\right),\\ (2G-H)\,\Delta^2\zeta + H\dfrac{\partial\omega}{\partial z} - \dfrac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - Z\right).\end{cases}$$

Bei Beachtung von (3) lassen sich diese Beziehungen auch wie folgt schreiben

$$(5)\quad\begin{cases}(H-\mathsf{P})\,\Delta^2\xi + 2H\dfrac{\partial\omega}{\partial x} = \mu\left(\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - X\right),\\ (H-\mathsf{P})\,\Delta^2\eta + 2H\dfrac{\partial\omega}{\partial y} = \mu\left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - Y\right),\\ (H-\mathsf{P})\,\Delta^2\zeta + 2H\dfrac{\partial\omega}{\partial z} = \mu\left(\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - Z\right).\end{cases}$$

Substituirt man die Ausdrücke (1), (2) in § 61, (14) und führt die Integration aus, so findet sich in der Formel für die ganze Verschiebungsarbeit eines Körpers

$$(6)\qquad D = \int \vartheta\, dK$$

die specifische Verschiebungsarbeit bei m

$$(7)\quad\begin{cases}\vartheta = G\Theta + \dfrac{G-H}{2}\left[(x_y - y_x)^2 + (y_z - z_y)^2 + (z_x - x_z)^2\right]\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \displaystyle\int_{t_0}^{t} p\, d\omega,\end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf (3)

$$(8)\quad\begin{cases}\vartheta = G\left(\Theta + \dfrac{\omega^2}{2}\right)\\ \qquad - \mathsf{P}\omega + \dfrac{\mathsf{P}}{4}\left[\omega^2 - (x_y - y_x)^2 - (y_z - z_y)^2 - (z_x - x_z)^2\right],\end{cases}$$

worin Θ durch § 65, (7) bestimmt ist.

Speciell für Potentialverschiebungen gelten die Beziehungen § 65, (8), (9) und nehmen damit die Gleichungen (4), (7), gleiche Formen wie (5) und (6) des vorigen § an. Ferner stimmen für $\mathsf{P} = 0$ mit $H = G$ entsprechende Resultate beider Ableitungen bis auf den Ausdruck für G überein, was Alles schon aus § 58 folgt.

Hätten wir nicht $\tau = 0$ vorausgesetzt, sondern die Formeln (1)—(3) in der nach § 58 zulässigen Allgemeinheit aufgefasst, so würde sich bei ganz analogem Vorgehen wie oben ergeben haben, dass die Gleichungen (4) und (7) gelten, wenn den linken Seiten von (4) und der rechten Seite von (7) bezw. die folgenden Ausdrücke addirt werden

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = 2\left(x_x \dfrac{\partial G}{\partial x} + x_y \dfrac{\partial G}{\partial y} + x_z \dfrac{\partial G}{\partial z}\right) - (x_y - y_x)\dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \qquad\qquad - (x_z - z_x)\dfrac{\partial H}{\partial z}, \\ \mathfrak{Y} = 2\left(y_x \dfrac{\partial G}{\partial x} + y_y \dfrac{\partial G}{\partial y} + y_z \dfrac{\partial G}{\partial z}\right) - (y_z - z_y)\dfrac{\partial H}{\partial z} \\ \qquad\qquad - (y_x - x_y)\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \mathfrak{Z} = 2\left(z_x \dfrac{\partial G}{\partial x} + z_y \dfrac{\partial G}{\partial y} + z_z \dfrac{\partial G}{\partial z}\right) - (z_x - x_z)\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \qquad\qquad - (z_y - y_z)\dfrac{\partial H}{\partial y}, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} -\mathfrak{B} = -\int_{t_0}^{t} \Theta\, dG \\ \qquad -\int_{t_0}^{t} \left[(x_y - y_x)^2 + (y_z - z_y)^2 + (z_x - x_z)^2\right] d\dfrac{G-H}{2}. \end{cases}$$

Für Potentialverschiebungen fallen die beiden letzten Glieder der Gleichungen (9) und das zweite Integral in (10) weg.

§ 67. **Clapeyron's Theorem.**

Wenn während der ganzen Verschiebungen von t_0 bis t die Spannungen constant wie zur Zeit t wären, so würde nach § 41, (3) (4) die Verschiebungsarbeit eines beliebigen Körpers sein

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{D} = \int (X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + X_y x_y + Y_x y_x + Y_z y_z + Z_y z_y \\ \qquad + Z_x z_x + X_z x_z)\, dK, \end{cases}$$

worin das Integral alle Körperelemente umfasst. Die wirkliche Verschiebungsarbeit wird nach wie vor durch D bezeichnet, $\mathfrak{D}$ haben wir auch virtuelle Verschiebungsarbeit genannt.

Erste Ableitung. Substituirt man in (1) die Ausdrücke der Spannungen nach § 65, (1) (2), so folgt für beliebige isotrope Körper

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{D} = 2\int \left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \dfrac{g_{xy}^{\,2} + g_{yz}^{\,2} + g_{zx}^{\,2}}{2}\right) G\, dK \\ \qquad - \int p\omega\, dK, \end{cases}$$

oder wegen

$$p\omega = \int_{t_0}^{t} p\, d\omega + \int_{t_0}^{t} \omega\, dp, \qquad \omega\, dp - p\, d\omega = \omega^2 d\frac{p}{\omega},$$

und mit Rücksicht auf § 65, (6) (7)

$$(3)\qquad \mathfrak{D} = 2D - \int dK \int_{t_0}^{t} \omega^2 d\frac{p}{\omega}.$$

Speciell für den Fall, dass während der Verschiebungen entweder $\frac{p}{\omega}$ constant oder $\omega = 0$ ist, liefert (3)

$$\mathfrak{D} = 2D.$$

Da für $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ nach den theoretischen Formeln $\frac{p}{\omega} = -G$ und nach den empirischen Formeln für feste Körper $\frac{p}{\omega} = -\frac{2G}{\varepsilon - 2}$, so können wir aussprechen: *Sind bei elastischen Verschiebungen isotroper Körper* $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ (feste Körper mit constanter Temperatur) *oder ist* $\omega = 0$ (beliebige Körper ohne Dilatation), *dann ist die wirkliche Verschiebungsarbeit halb so gross, als wenn die Spannungen von vornherein die schliesslichen Werthe hätten.*

Es seien jetzt zur Zeit t die Beschleunigungen der Körperelemente hinsichtlich unseres Coordinatensystems gleich Null, dann liefert § 39, (7)

$$0 = \mathfrak{M} + \mathfrak{S} - \mathfrak{D} + \mathfrak{R}.$$

Ist der Einfluss der Massenkräfte zu vernachlässigen (oder werden letztere wie vielfach bei technischen Problemen durch Oberflächenkräfte ersetzt) und kommen örtliche Unstetigkeiten der Verrückungen nicht vor, so folgt mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{R} = 0$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{D},$$

und speciell für $\frac{p}{\omega}$ constant oder $\omega = 0$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{D} = 2D.$$

Sind während elastischer Verschiebungen isotroper Körper entweder $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ (feste Körper mit constanter Temperatur) *oder* $\omega = 0$ (beliebige Körper ohne Dilatation) *und treten keine durch Massenkräfte und örtliche Unstetigkeiten der Verrückungen bedingte Arbeiten auf, dann ist im Falle schliesslichen Gleichgewichts oder verschwindender Beschleunigungen der Körperelemente die Arbeit sämmtlicher mit ihren Endwerthen constant gedachter Oberflächenkräfte gleich dem Doppelten der Verschiebungsarbeit.*

Dieses Resultat, soweit es sich auf feste Körper ($\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$) bezieht, ist zuerst von *Clapeyron* abgeleitet worden und wird nach ihm *Clapeyron'sches Theorem* genannt. Zu beachten ist, dass der beliebige isotrope Körper betreffende Theil des Satzes nicht nur für $\tau = 0$ gilt.

Zweite Ableitung. Setzen wir jetzt in (1) die Ausdrücke der Spannungen nach § 66, (1) (2) ein, so folgt

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{D} &= 2\int G\Theta\, dK \\ &+ \int\left[(x_y - y_x)^2 + (y_z - z_y)^2 + (z_x - x_z)^2\right](G - H)\, dK \\ &\qquad - \int p\omega\, dK, \end{aligned}\right.$$

oder mit Rücksicht auf den allgemeinsten Ausdruck für D, welcher aus § 66, (6) (7) nach Zufügen von § 66, (10) entsteht,

$$(5)\qquad \mathfrak{D} = 2(D + \mathfrak{V}) - \int dK \int_{t_0}^{t} \omega^2 d\frac{p}{\omega}.$$

Hat man während der Verschiebungen entweder $\frac{p}{\omega}$ constant oder $\omega = 0$, dann liefert (5)

$$\mathfrak{D} = 2(D + \mathfrak{V}).$$

Da für $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ nach § 58 $\frac{p}{\omega} = -H$ und des constanten i wegen G, H constant sind, so entsteht mit $\mathfrak{V} = 0$

$$\mathfrak{D} = 2D.$$

Dieselbe Beziehung ergibt sich für beliebige isotrope Körper im Falle $\omega = 0$, wenn während der Verschiebungen noch $\tau = 0$ ist. Nach unserer zweiten Ableitung sind also die oben ausgesprochenen Sätze für $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ genau, für $\omega = 0$ jedoch nur dann, wenn gleichzeitig $\tau = 0$ oder überhaupt $\mathfrak{V} = 0$ ist.

Für den schon in § 66 besonders hervorgehobenen Fall $\tau = 0$ können wir mit Rücksicht auf $p = \mathsf{P} - H\omega$ und $\mathfrak{V} = 0$ die Arbeit $\mathfrak{D}$ auch wie folgt ausdrücken

$$(6)\qquad \mathfrak{D} = 2D - \int dK \int_{t_0}^{t} \omega^2 d\frac{p}{\omega} = 2D + \int p\omega\, dK,$$

worin D durch § 66, (6) (8) bestimmt ist.

§ 68. Princip der kleinsten Verschiebungsarbeit.

Wenn die Spannungen während der ganzen Verrückungen von t_0 bis t ihre schliesslichen Werthe hätten, so würden nach den Festsetzungen in § 41 $\mathfrak{D}$ die Verschiebungsarbeit, $\mathfrak{U}$ die Arbeit der (von Spannungen und Verschiebungen) abhängigen Reactionen äusserer Stützen und $\mathfrak{R}$ die durch Unstetigkeiten der Verrückungen bedingte Arbeit sein. Die wirkliche Verschiebungsarbeit ist durch D bezeichnet. Werden nun den Spannungen und Verschiebungen zur Zeit t irgendwelche unendlich kleine, mit allen gegebenen Verhältnissen verträgliche Aenderungen zugeschrieben, so ist nach § 41 die vollständige Variation von $\mathfrak{D}$

$$(1)\qquad \delta\mathfrak{D} = \delta D + \delta_s\mathfrak{U} + \delta_s\mathfrak{R},$$

unter $\delta_s\mathfrak{U}$, $\delta_s\mathfrak{R}$ die Variationen von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{R}$ infolge der eintretenden Aenderungen der Spannungen allein verstanden. Dies gilt für beliebige Körper.

Erste Ableitung. Nehmen wir nun einen beliebigen isotropen Körper als gegeben an, so ist nach § 67, (3) die vollständige Variation von $\mathfrak{D}$

(2) $$\delta \mathfrak{D} = 2\delta D - \int \omega^2 \delta \frac{p}{\omega} dK,$$

und hieraus mit Rücksicht auf (1) die Variation der Verschiebungsarbeit

(3) $$\delta D = \delta_s \mathfrak{U} + \delta_s \mathfrak{R} + \int \omega^2 \delta \frac{p}{\omega} dK.$$

Wenn nun $\delta_s \mathfrak{U}$, $\delta_s \mathfrak{R}$ verschwinden und entweder $\frac{p}{\omega}$ constant oder $\omega = 0$ sind, liefern (2) (3)

$$\delta D = 0, \qquad \delta \mathfrak{D} = 0,$$

wonach die Arbeiten D, $\mathfrak{D}$ Maxima oder Minima wären. Wie schon in § 67 erwähnt, tritt der Fall $\frac{p}{\omega}$ constant nach den theoretischen und empirischen Formeln für $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ ein. Es lassen sich dann, wie auch im Falle $\omega = 0$, die Arbeiten D, $\mathfrak{D}$ nach § 65 als Summen von Quadraten darstellen, sodass die Minima in Frage kommen, wenn die Bedingungen für Maxima und Minima nur einmal erfüllt sind. Für diesen allein vorkommenden Fall können wir aussprechen: *Die Verschiebungsarbeit isotroper Körper ist ein Minimum, wenn neben* $\delta_s \mathfrak{U} = \delta_s \mathfrak{R} = 0$ *entweder* $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ (constante Temperatur bei festen Körpern) *oder* $\omega = 0$ (Verschiebungen ohne Dilatation bei beliebigen Körpern) *zu setzen sind* (oder wenn überhaupt die rechte Seite von (3) verschwindet). Mit andern Worten: *Wenn bei Verschiebungen isotroper Körper* $\delta_s \mathfrak{U} = \delta_s \mathfrak{R} = 0$ *und entweder* $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ *oder* $\omega = 0$ *sind, dann haben alle Spannungen, Verschiebungen und davon abhängigen Grössen solche Werthe, wie sie einem Minimum der Verschiebungsarbeit D oder virtuellen Verschiebungsarbeit $\mathfrak{D}$ entsprechen.*

Liesse sich beispielsweise die Verschiebungsarbeit als Function der von den Spannungen und Verschiebungen abhängigen Reactionen oder sonstigen Grössen $H, M, N, \ldots$ darstellen, so würden bei Eintritt des *Princips der kleinsten Verschiebungsarbeit* die wahren Werthe von $H, M, N, \ldots$ bestimmt sein durch die Gleichungen

(4) $$\frac{\partial D}{\partial H} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial M} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial N} = 0, \cdots$$

worin auch $\mathfrak{D}$ an Stelle von D gesetzt werden darf.

Die Arbeit $\delta_s \mathfrak{U}$ ist mit $\mathfrak{U}$ z. B. immer dann gleich Null, wenn die abhängigen Reactionen gegen Körperpunkte wirken, welche hinsichtlich des angenommenen Coordinatensystems fest liegen oder reibungslos über feste Stützen hingleiten, das heisst, wenn in den Richtungslinien der abhängigen Reactionscomponenten keine Begung (etwa Ausweichen) der Stützen stattfindet. Die Arbeit $\delta_s \mathfrak{R}$ ist mit $\mathfrak{R}$ unter Anderem gleich Null, wenn der ganze Körper als ein System von materiellen Punkten anzusehen ist, zwischen welchen lediglich Kräfte in den Verbindungsgeraden wirken (§ 73), oder wenn der Körper aus ebensolchen Stäben besteht, welche in reibungslosen Gelenken zusammenhängen (§ 85), oder wenn er überhaupt in eine Anzahl von Punktsystemen der ersterwähnten Art zerfällt, zwischen welchen (etwa infolge fehlender Reibung) immer nur normale Kräfte wirken (§ 42). Wollte man oben das Princip der kleinsten Verschiebungsarbeit zur Bestimmung der $H, M, N, \ldots$ auch dann anwenden, wenn die Bedingungen desselben nicht erfüllt sind, so würden mittelst desselben stets diejenigen Theile genannter Grössen bestimmbar sein, welche für $\delta_s\mathfrak{U} = \delta_s\mathfrak{R} = 0$ und $\mathsf{P} = \tau = 0$ oder $\omega = 0$ eintreten, wonach die auf anderem Wege ermittelten weiteren Beiträge dem Principe der Coexistenz gemäss zu addiren wären. In praktischen Fällen lassen sich jedoch nach Kenntniss des speciellen Ausdrucks von D durch Umformung der Gleichungen (4) auch direct zum Ziele führende Methoden ableiten.

Zweite Ableitung. Nach § 67, (5) hat man für beliebige isotrope Körper die vollständige Variation von $\mathfrak{D}$

$$\delta\mathfrak{D} = 2(\delta D + \delta\mathfrak{V}) - \int \omega^2 \delta \frac{p}{\omega} dK,$$

und hiernach mit Rücksicht auf (1) die Variation von D

$$\delta D = \delta_s\mathfrak{U} + \delta_s\mathfrak{R} - 2\delta\mathfrak{V} + \int \omega^2 \delta \frac{p}{\omega} dK.$$

Sind nun $\delta_s\mathfrak{U} = 0$, $\delta_s\mathfrak{R} = 0$, und während der Verschiebungen entweder $\frac{p}{\omega}$ constant oder $\omega = 0$, so folgt

$$\delta D = -2\delta\mathfrak{V} = \delta\mathfrak{D}.$$

Der Fall $\frac{p}{\omega}$ constant tritt für $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ ein, und da alsdann der constanten G, H wegen auch $\mathfrak{V} = 0$ ist, so erhalten wir

$$\delta D = 0, \qquad \delta\mathfrak{D} = 0.$$

Die gleiche Beziehung besteht im Falle $\omega = 0$ für $\tau = 0$. Nach unserer zweiten theoretischen Ableitung der Spannungen isotroper Körper ist also das oben ausgesprochene Princip für $\mathsf{P} = 0$, $\tau = 0$ genau erfüllt, für $\omega = 0$ jedoch nur dann, wenn gleichzeitig $\tau = 0$ oder aus anderem Grunde $\delta\mathfrak{V} = 0$ ist.

Dass die Verschiebungsarbeit fester Körper in gewissem Sinne ein Minimum ist, scheinen zuerst französische und italienische Gelehrte erkannt zu haben. Den ersten Beweis lieferte Ingenieur *Castigliano* für stabile Systeme der im X. Abschnitte untersuchten Art, gebildet aus prismatischen festen Stäben von constanter Temperatur (Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1880). *Castigliano* wandte das Princip auf zahlreiche technische Probleme fester

Körper an, die er sich als Punktsysteme dachte, in welchen die Kräfte zwischen je zwei Punkten nach gleichen Gesetzen wie in isotropen festen Stäben wirken. Bei weiteren Beweisen von *Fränkel*, auch auf Grund des Erfahrungsausdrucks von D für isotrope Körper, wurde ebenfalls die Temperatur constant angenommen (Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1882). In beiden Fällen traten die Arbeiten $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{R}$ nicht auf. Wir sahen oben, dass der Wegfall von $\delta_s\mathfrak{U}$, $\delta_s\mathfrak{R}$, $\delta\tau$ nothwendig und ausreichend für die Gültigkeit des Princips ist (siehe auch §§ 73, 84).

Während bisher allgemein angenommen wurde, das Princip der kleinsten Verschiebungsarbeit bestehe nur für feste Körper von constanter Temperatur, zeigt unsere Ableitung, dass dasselbe auch für beliebige isotrope Körper dann gilt, wenn die Verschiebungen ohne Dilatation stattfinden. In dieser Richtung bietet das Princip erneutes Interesse. Beispielsweise können wir bei Beachtung des Umstandes, dass für transversale Schwingungen des Aethers ω verschwindet, auf Grund beider Ableitungen aussprechen: *Das Licht pflanzt sich so durch den Weltraum fort, dass die Verschiebungsarbeit ein Minimum ist.*

IX. Abschnitt.

Beliebige Punktsysteme. Energie.

Im Folgenden handelt es sich um Gleichgewicht und Bewegung materieller Systeme, deren einzelne Punkte in beliebigen Entfernungen liegen. Da wir diese Punkte nach Belieben mit Masse ausstatten können, wenn die Bewegung der Massenmittelpunkte in Betracht gezogen wird und da auch die Entfernungen beliebig klein gewählt werden dürfen, so gelten die abzuleitenden Beziehungen ebensowohl für grösste wie für kleinste materielle Systeme und beispielsweise auch für Systeme, wie sie bisher als Körper und Körperelemente betrachtet wurden. Die Darstellung wird Rücksicht darauf nehmen, die Uebereinstimmung mit den früher erhaltenen Resultaten hervortreten zu lassen und einer allgemeinen Auffassung der Stabsysteme des folgenden Abschnitts zu dienen.

§. 69. Allgemeine Beziehungen.

Ein beliebiges Punktsystem bewege sich hinsichtlich irgend eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Die entsprechenden Geschwindigkeiten und resultirenden Kraftcomponenten in den Richtungen x, y, z zur Zeit t seien für einen Punkt m der Masse m durch u, v, w und X, Y, Z bezeichnet. Man hat dann

$$(1) \qquad m\frac{du}{dt} = X, \qquad m\frac{dv}{dt} = Y, \qquad m\frac{dw}{dt} = Z.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen für jeden Systempunkt mit irgend welchen Grössen $\pm \xi$, $\pm \eta$, $\pm \zeta$ und addiren sämmtliche Gleichungen, so folgt

$$(2) \quad G = \sum m\left(\frac{du}{dt}\xi + \frac{dv}{dt}\eta + \frac{dw}{dt}\zeta\right) = \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta).$$

Versteht man unter $\pm \xi$, $\pm \eta$, $\pm \zeta$ beliebig grosse virtuelle Verrückungen der Systempunkte gegenüber deren Lagen zur Zeit t, so drückt Gleichung (2) das *d'Alembert'sche Princip* und bei verschwindenden Beschleunigungen das *Princip der virtuellen Verrückungen* aus. Wäre beispielsweise zur Zeit t eine Bewegung hinsichtlich unseres Coordinatensystems nicht vorhanden, so würde im Falle $G = 0$ auch Gleichgewicht bestehen bleiben. Die Summe rechts in (2) stellt die Gesammtarbeit dar, welche die äusseren und inneren Kräfte auf den Wegen ξ, η, ζ leisten würden, wenn sie constant wie zur Zeit t wären.

Es mögen nun x, y, z die Coordinaten zur Zeit t und

$$(3)\qquad \xi = dx = u dt, \quad \eta = dy = v dt, \quad \zeta = dz = w dt$$

die wirklichen Verrückungen der Punkte m im Zeitelement dt bedeuten. Dann folgt aus (2)

$$\sum m(u\,du + v\,dv + w\,dw) = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

oder, wenn

$$(4)\qquad L = \sum m \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = \sum \frac{mV^2}{2}$$

die lebendige Kraft des Punktsystems in Hinsicht unseres Coordinatensystems bezeichnet,

$$(5)\qquad dL = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Für ein von t_0 bis t reichendes Zeitintervall hat man

$$(6)\qquad L - L_0 = \sum \int_{t_0}^{t} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

und diese Gleichung enthält den *Satz von den lebendigen Kräften: Die Gesammtänderung der lebendigen Kraft eines materiellen Systems während irgend eines Zeitintervalls ist gleich der Summe der Arbeiten aller äusseren und inneren Kräfte, welche innerhalb jener Zeit an den Punkten des Systems gewirkt haben.*

Fassen wir jetzt anstatt der wirklichen Bewegung alle möglichen unendlich wenig davon abweichenden Bewegungen ins Auge, indem wir jedem Systempunkt m für jeden Augenblick unendlich kleine virtuelle Verrückungen zuschreiben, welche als Functionen der Zeit gelten sollen. Die Geschwindigkeiten werden dann

$$u + \delta u = \frac{d(x + \xi)}{dt}, \quad v + \delta v = \frac{d(y + \eta)}{dt}, \quad w + \delta w = \frac{d(z + \zeta)}{dt},$$

wonach

$$\delta u = \frac{d\xi}{dt}, \qquad \delta v = \frac{d\eta}{dt}, \qquad \delta w = \frac{d\zeta}{dt}.$$

Weil aber allgemein

$$d(u\xi + v\eta + w\zeta) = u\,d\xi + v\,d\eta + w\,d\zeta + \xi\,du + \eta\,dv + \zeta\,dw,$$

so folgt für unseren Fall

$$d(u\xi + v\eta + w\zeta) = (u\,\delta u + v\,\delta v + w\,\delta w)dt$$
$$+ \left(\frac{du}{dt}\xi + \frac{dv}{dt}\eta + \frac{dw}{dt}\zeta\right)dt,$$

und mit Rücksicht auf (2) (4) für das ganze System

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big[\sum m(u\xi + v\eta + w\zeta)\Big]_t - \Big[\sum m(u\xi + v\eta + w\zeta)\Big]_{t_0} \\ &\qquad = \int_{t_0}^{t} (G + \delta L)dt, \end{aligned}\right.$$

worin die Klammerausdrücke links die Werthe der eingesetzten Summen zu den Zeiten t und t_0, δL aber die Variation der lebendigen Kraft infolge der angenommenen Verrückungen bedeuten. Für den Fall, dass die letzteren am Anfange und Schlusse unseres Zeitintervalls Werthe haben, welche die linke Seite von (7) zu Null machen, hat man

$$(8)\qquad 0 = \int_{t_0}^{t} (G + \delta L)dt.$$

Dies trifft z. B. zu, wenn alle ξ, η, ζ selbst zu den Zeiten t, t_0 verschwinden und es wird dann der Inhalt von (8) als *Hamilton'sches Princip* bezeichnet.

Bereits in § 44 wurde jede mögliche Ursache von lebendiger Kraft oder Arbeit *Energie* genannt und deren Werth nach ihrer Wirkung beurtheilt, wonach die Energie in Arbeitseinheiten gemessen werden kann. Wird nun unserem Punktsystem im Zeitelement dt ausser durch die in (1) (5) berücksichtigten äusseren Kräfte noch auf andere Art von Aussen in Summe die Energie dQ zugeführt und führen wir die Bezeichnungen ein

$$(9)\qquad dK = \sum_a (X dx + Y dy + Z dz),$$

$$(10)\qquad dU = dQ - \sum_s (X dx + Y dy + Z dz),$$

worin $\sum_a$, $\sum_s$ sich auf die äusseren und inneren Kräfte beziehen, so folgt aus (5)

$$(11)\qquad dL + dU = dE = dK + dQ.$$

Nach (9) (10) bezeichnen dK die Arbeit der äusseren Kräfte, $dU - dQ$ die Arbeit zur Ueberwindung der inneren Kräfte auf den Wegen dx, dy, dz, während dU nach (11) denjenigen Theil der von Aussen aufgenommenen Energie $dK + dQ$ darstellt, welcher nicht in die lebendige Kraft dL verwandelt wurde.

Soll die Energie unzerstörbar sein, so müssen sich alle nach einander auftretenden dU in irgend einer Form im System ansammeln und dem letzteren jederzeit, wie ein gewisses L, so auch ein gewisses U entsprechen, sodass erst $L + U = E$ die ganze Arbeitsfähigkeit oder Gesammtenergie in Hinsicht des fraglichen Coordinatensystems ausmacht. Für ein Zeitintervall von t_0 bis t aber liefert (11)

$$(12) \qquad L - L_0 + U - U_0 = E - E_0 = K + Q.$$

Wir nennen wieder L die *actuelle*, U die *virtuelle Energie* des Systems. Gleichung (12) sagt dann: In jedem Zeitintervall ist die Arbeit der äusseren Kräfte plus der sonst von Aussen zugeführten Energie gleich der Summe der Aenderungen von actueller und virtueller Energie des Systems.

Für die Gesammtenergie zur Zeit t hat man nach (12)

$$(13) \qquad E = L + U = L_0 + U_0 + K + Q = E_0 + K + Q.$$

Ist von t_0 bis t insgesammt $K + Q = 0$, so wird

$$(14) \qquad E = L + U = L_0 + U_0 = E_0.$$

Wenn beispielsweise einem Systeme weder durch die Arbeit äusserer Kräfte noch sonst von Aussen Energie zugeführt wird, dann ist der Gewinn an actueller Energie stets gleich dem Verluste an virtueller Energie, die Gesammtenergie bleibt constant. Dies folgt übrigens schon aus der Annahme einer Unzerstörbarkeit der Energie und heisst auf das grösste aller möglichen Systeme angewendet: Die Energie der Welt ist constant.

Zerfallen die äusseren Kräfte in Massenkräfte und Oberflächenkräfte, so entstehen aus (11)—(14) mit $K = M + S$ die Formeln (3)—(6) des § 44.

§ 70. Wirkung von Potentialkräften.

Die Gleichungen (12)—(14) des vorigen Paragraphen beruhen auf der Annahme, dass die Energie unzerstörbar sei, dass der alte Satz „Causa aequat effectum“ dann auf alle Veränderungen materieller Systeme Anwendung finde, wenn die Ursachen und Wirkungen in Arbeitseinheiten gemessen werden. Es ist das Verdienst *Robert Mayer's*, dies *Princip von der Erhaltung der Energie* erstmals klar erkannt und ausgesprochen, sowie insbesondere auf die Wärme als eine der möglichen Energieformen angewandt zu haben.

Man konnte sich nun fragen, ob nicht die Constanz der Energie unter Umständen als nothwendige Folge der mechanischen Grundbeziehungen zwischen Kräften und Beschleunigungen § 69, (1) ohne Zulassung anderer als der hierdurch bedingten Formen von Energie darstellbar sei. Dieser Fall kommt vor, wenn die wirkenden Kräfte ein Potential haben, wenn eine Function P der Coordinaten unserer

Systempunkte allein existirt, deren vollständiges Differential sich ausdrückt,

$$(1) \qquad d\mathsf{P} = -\sum (X dx + Y dy + Z dz).$$

Es folgt dann

$$(2) \qquad \mathsf{P}_0 - \mathsf{P} = \sum \int_{t_0}^{t} (X dx + Y dy + Z dz),$$

und aus dem Satze von den lebendigen Kräften § 69, (6)

$$(3) \qquad L + \mathsf{P} = C = L_0 + \mathsf{P}_0,$$

worin C constant und P_0, P allein von den Anfangslagen und Endlagen der Systempunkte abhängig sind. Durch diese Lagen zu den Zeiten t_0 und t ist auch die Aenderung $L - L_0$ der lebendigen Kraft bestimmt, während wir nach

$$L = C - \mathsf{P}$$

zunächst den *Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft* aussprechen können: *a*) *Wenn die Bewegungsänderung eines Punktsystems hinsichtlich irgend eines Coordinatensystems nur unter dem Einflusse solcher äusserer und innerer Kräfte stattfindet, welchen ein Potential zukommt, dann ist die lebendige Kraft der Bewegung zu allen Zeiten dieselbe, in welchen alle Systempunkte dieselben Lagen gegen das Coordinatensystem haben, wie auch ihre Bahnen und Geschwindigkeiten in der Zwischenzeit gewesen sein mögen.*

Die Constante C besteht aus zwei Theilen: der augenblicklichen lebendigen Kraft L und der bei Ausnutzung aller Arbeitsfähigkeit der dem Potential entsprechenden Kräfte noch erreichbaren lebendigen Kraft P, welche man nach *Rankine* bezw. die *actuelle* und *potentielle Energie* nennt. Gleichung (3) sagt dann: *b*) *Besteht für die Bewegung eines Punktsystems ein Potential der äusseren und inneren Kräfte, so ist der Gewinn an actueller Energie stets gleich dem Verluste an potentieller Energie, die Summe beider bleibt constant.*

Führen wir wie in § 69 als Bezeichnungen ein

$$(4) \qquad dK = \sum_a (X dx + Y dy + Z dz) = -\,d\mathsf{H},$$

$$(5) \qquad dU = -\sum_s (X dx + Y dy + Z dz),$$

so stellt dK die Arbeit der äusseren Kräfte und dU die Arbeit zur Ueberwindung der inneren Kräfte auf den Wegen dx, dy, dz dar. Für den Fall von Potentialen H, U der äusseren und inneren Kräfte folgen

$$(6)\qquad K = \sum_a \int_{t_0}^{t} (X dx + Y dy + Z dx) = \mathsf{H}_0 - \mathsf{H},$$

$$(7)\qquad U - U_0 = \sum_s \int_{t_0}^{t} (X dx + Y dy + Z dz),$$

worin H_0, U_0 nur von den Anfangslagen, H und U nur von den Endlagen der Systempunkte abhängen. Nennt man wieder U die *virtuelle Energie* des Systems, so ist letztere hier mit dem von den Kräften zwischen Systempunkten allein herrührenden Theile der potentiellen Energie, der *inneren potentiellen Energie*, identisch. Aus (1), (2) folgen mit (4) bis (7)

$$(8)\qquad d\mathsf{P} = dU - dK = dU + d\mathsf{H}, \qquad \mathsf{P}_0 - \mathsf{P} = U_0 - U + K.$$

Die Gesammtenergie des Systems aber, d. h. diejenige Arbeitsfähigkeit, welche von Systempunkten allein abhängt und beim Erlöschen aller äusseren Kraftquellen im System zu finden wäre, ist zur Zeit t nach (3) (8)

$$(9)\qquad E = L + U = L_0 + U_0 + K = E_0 + K.$$

Da K jedesmal verschwindet, wenn die Systempunkte dieselben Lagen wie zur Zeit t_0 einnehmen, so können wir Satz *a*) ergänzend aussprechen: *c*) *Steht ein Punktsystem lediglich unter dem Arbeitseinflusse äusserer und innerer Potentialkräfte, dann sind neben der actuellen und potentiellen Energie L, P auch die virtuelle* (hier innere potentielle) *Energie U und Gesammtenergie E zu allen Zeiten dieselben, in welchen alle Systempunkte dieselben Lagen gegen das Coordinatensystem haben.*

Kommen äussere Kräfte überhaupt nicht vor oder leisten die etwa vorhandenen keine Arbeit am System, so folgt aus (9) mit $K = 0$

$$(10)\qquad E = L + U = L_0 + U_0 = E_0,$$

und in Worten: *d*) *Wenn ein Punktsystem nur unter dem Arbeitseinflusse innerer Potentialkräfte steht, dann ist der Gewinn an actueller Energie stets gleich dem Verluste an virtueller Energie, die Gesammtenergie des Systems bleibt constant.* Für den Fall, dass alle Naturkräfte in Potentialkräfte auflösbar wären, würden also schon die Grundbeziehungen der Mechanik zu dem Schlusse führen: Die Energie der Welt ist constant.

§ 71. **Centralkräfte allein.**

Die Kräfte haben beispielsweise ein Potential, wenn sie von Systempunkten oder (bezüglich des Coordinatensystems) festen äusseren Punkten ausgehende Centralkräfte sind. Als *Centralkraft* zwischen zwei Punkten m, n bezeichnet man eine Kraft, welche anziehend oder abstossend in der Verbindungsgeraden wirkt und nur von der Entfernung $mn = l$ abhängt. Unter der ersten Voraussetzung ergeben sich, wie aus § 72 zu ersehen,

$$(1) \qquad d\mathsf{P} = \sum S\,dl, \qquad dU = \sum_s S\,dl, \qquad d\mathsf{H} = \sum_a S\,dl,$$

während die zweite verlangt

$$(2) \qquad S = mn\,F(l),$$

so dass die Integration der Gleichungen (1) ausführbar ist und P, U, H nur von den *relativen Lagen* der wirkenden Punkte gegen einander abhängen. Die Summe $\sum$ bezieht sich auf alle einander beeinflussenden Punktpaare, die Summe $\sum_s$ auf alle Paare einander beeinflussender Systempunkte und die Summe $\sum_a$ auf je zwei einander beeinflussende Punkte, deren einer innerhalb, der andere ausserhalb des Systems liegt.

Wir können nun die in § 70 abgeleiteten Sätze für den vorliegenden Fall wie folgt fassen. *Wenn ein Punktsystem nur unter dem Arbeitseinflusse von Centralkräften steht, welche von Systempunkten oder festen äusseren Punkten ausgehen, dann sind die actuelle, potentielle, virtuelle und gesammte Energie des Systems L, P, U, E zu allen Zeiten dieselben, in welchen alle Systempunkte dieselben relativen Lagen gegen einander und gegen die auf sie wirkenden äusseren Punkte haben. In jedem Zeitintervall ist der Gewinn an actueller Energie gleich dem Verluste an potentieller Energie, die Summe beider bleibt constant gleich C. Sind nur innere Centralkräfte wirksam, so werden die potentielle und virtuelle Energie identisch und die Gesammtenergie des Systems constant $E = C$.*

Helmholtz war der Erste, welcher das Princip von der Erhaltung der Energie als besondere Form des älteren Satzes von der lebendigen Kraft darstellte und zwar für den speciellen Fall der Einwirkung von Centralkräften allein, indem er annahm, dass sich alle Kräfte der Natur in Centralkräfte auflösen lassen. Das Charakteristische an diesem Falle besteht darin, dass die Energie nur von den Entfernungen der wirkenden Punkte abhängig erscheint, von deren relativen Lagen gegen einander, ohne Beziehung auf ein bestimmtes Coordinatensystem.

Bei Einwirkung beliebiger äusserer und innerer Potentialkräfte wird vielfach die Constante C des vorigen Paragraphen als Energie des Systems bezeichnet, womit aber die sonst angenommene Uebereinstimmung der Begriffe Energie und Arbeitsfähigkeit aufgegeben ist. Der Unterschied in der Auffassung tritt schon klar hervor im einfachsten Falle, der Bewegung eines Punktes unter Einwirkung einer Centralkraft. Punkt *m* in Fig. 17 habe hinsichtlich des

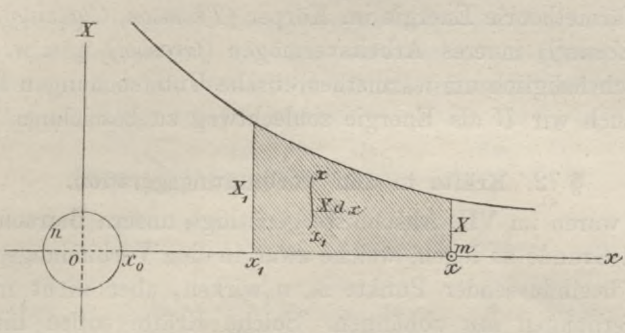

Fig. 17.

Coordinatensystems oder des anziehenden Punktes *n* die Geschwindigkeit *v*, dann ist die entsprechende actuelle Energie

$$L = \frac{m v^2}{2}.$$

Hat nun *m* die Bewegung im Unendlichen mit der Geschwindigkeit 0 begonnen, dann sind in § 70, (3) die ganze aus dem Potentiale entspringende Energie

$$\mathsf{P}_0 = C = \int_{x_0}^{\infty} X\,dx$$

und die noch vorhandene potentielle Energie

$$\mathsf{P} = \int_{x_0}^{x} X\,dx.$$

In jedem Augenblicke besteht die Beziehung

$$L + \mathsf{P} = C.$$

Dieses C würde nach der einen Auffassung die Energie des Systems darstellen.

Versteht man jedoch unter letzterer Bezeichnung die in den Systempunkten allein angehäufte Arbeitsfähigkeit, die Arbeit, welche die Systempunkte leisten könnten, wenn alle äusseren Kraftquellen plötzlich wegfielen, so sind für den Punkt *m* als System für sich die virtuelle Energie und Gesammtenergie des Systems

$$U = 0, \qquad E = L.$$

Nur wenn beide Punkte *m*, *n* zusammen ein System bilden und somit X eine innere Kraft desselben wird, hat man

$$U = \mathsf{P}, \qquad E = L + U = C.$$

Während in den Fällen der §§ 70, 71 die virtuelle Energie lediglich einen Theil der potentiellen ausmacht und beide identisch sind, wenn nur innere Potentialkräfte wirken, ist der Begriff im Uebrigen ein viel allgemeinerer, indem er dem entspricht, was man in der Wärmetheorie Energie im Körper *(Thomson, Clausius)*, innere Arbeit *(Zeuner)*, inneres Arbeitsvermögen *(Grashof)* u. s. w. nennt. Wo es sich lediglich um wärmetheoretische Untersuchungen handelt, pflegen auch wir U als Energie schlechtweg zu bezeichnen.

§ 72. **Kräfte in den Verbindungsgeraden.**

Wir waren im VII. Abschnitte genöthigt, unsern Betrachtungen Kräfte zu Grunde zu legen, welche zwar in den Verbindungsgeraden einander beeinflussender Punkte m, n wirken, aber nicht nur von den Entfernungen mn abhängen. Solche Kräfte sollen hier zum Unterschiede von Centralkräften *Radialkräfte* oder noch kürzer *Stabkräfte* genannt werden, während die entsprechenden Verbindungsgeraden *Stäbe* heissen mögen. Beschäftigen wir uns nun mit dem Falle, dass an einem Punktsystem neben beliebigen anderen Kräften auch Stabkräfte S vorkommen. Das Abhängigkeitsgesetz der einzelnen Stabkräfte möge zunächst ganz beliebig sein, doch wollen wir die S als positiv oder negativ ansehen, je nachdem sie die zugehörigen Punkte zu nähern oder zu entfernen suchen. (Als Verbindungsgerade braucht nicht gerade die wirkliche Linie mn in Rechnung zu kommen, wenn nur die Einflüsse eventueller Abweichungen in den folgenden Gleichungen verschwinden.)

Der Systempunkt m liege zur Zeit t bei x_m, y_m, z_m und ein mit ihm durch den Stab der Länge l verbundener Punkt n bei x_n, y_n, z_n, dann führen wir ein

$$(1) \qquad \cos\alpha_{mn} = \frac{x_n - x_m}{l}, \quad \cos\beta_{mn} = \frac{y_n - y_m}{l}, \quad \cos\gamma_{mn} = \frac{z_n - z_m}{l}.$$

Bezeichnen u_m, v_m, w_m die Geschwindigkeiten des Punktes m in den Richtungen x, y, z, so bestehen zur Zeit t die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} m\,\dfrac{du_m}{dt} = X_m + \sum\limits_m S\cos\alpha_{mn}, \\ m\,\dfrac{dv_m}{dt} = Y_m + \sum\limits_m S\cos\beta_{mn}, \\ m\,\dfrac{dw_m}{dt} = Z_m + \sum\limits_m S\cos\gamma_{mn}. \end{cases}$$

Hierin sollen die $\sum\limits_m$ nur solche *Stabkräfte* umfassen, welche aus Systempunkten oder bezüglich des Coordinatensystems festen äusseren

Punkten in m eintreffen, während X_m, Y_m, Z_m die resultirenden Componenten aller übrigen auf m wirkenden beliebigen Kräfte in den Richtungen x, y, z bedeuten.

Multiplicirt man die Gleichungen (2) der Reihe nach mit beliebig grossen virtuellen Verrückungen oder sonstigen Grössen ξ_m, η_m, ζ_m, verfährt analog mit den entsprechenden Gleichungen der übrigen Systempunkte und addirt alle Gleichungen, so entsteht mit den Bezeichnungen

$$G = \sum_k m\left(\frac{du_m}{dt}\xi_m + \frac{dv_m}{dt}\eta_m + \frac{dw_m}{dt}\zeta_m\right), \tag{3}$$

$$\mathfrak{K} = \sum_k (X_m \xi_m + Y_m \eta_m + Z_m \zeta_m), \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{D} = - \sum_k \Big(\xi_m \sum_m S\cos\alpha_{mn} &+ \eta_{mn} \sum_m S\cos\beta_{mn} \\ &+ \zeta_{mn} \sum_m S\cos\gamma_{mn}\Big), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

die Beziehung

$$G = \mathfrak{K} - \mathfrak{D}, \tag{6}$$

welche das d'Alembert'sche Princip und bei verschwindenden Beschleunigungen oder $G = 0$ das Princip der virtuellen Verrückungen für unsern Fall darstellt (§ 69). Die Summen $\sum\limits_k$ sind auf sämmtliche k Systempunkte zu erstrecken. In (6) bedeuten $-\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{K}$ die Arbeiten, welche die in (5) aufgenommenen Stabkräfte und die übrigen auf Systempunkte wirkenden Kräfte während der Verrückungen ξ, η, ζ leisten würden, wenn sie constant wie zur Zeit t wären, so dass $\mathfrak{D}$ die entsprechende Arbeit zur *Ueberwindung* der fraglichen Stabkräfte darstellt.

Wir wollen den Ausdruck (5) für den Fall, dass die Verrückungen gegenüber den anfänglichen Coordinaten verschwinden, noch etwas umformen. Für die Entfernung mn hat man vor den Verrückungen

$$l^2 = (x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 + (z_n - z_m)^2, \tag{7}$$

nach denselben

$$\left\{\begin{aligned} (l+\lambda)^2 = (x_n + \xi_n - x_m - \xi_m)^2 &+ (y_n + \eta_n - y_m - \eta_m)^2 \\ &+ (z_n + \zeta_n - z_m - \zeta_m)^2. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Durch Subtraction der ersten Gleichung von der zweiten folgt bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$\left\{\begin{aligned} l\lambda = (x_n - x_m)(\xi_n - \xi_m) &+ (y_n - y_m)(\eta_n - \eta_m) \\ &+ (z_n - z_m)(\zeta_n - \zeta_m), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

oder mit Rücksicht auf (1)

(10) $\lambda = (\xi_n - \xi_m)\cos\alpha_{mn} + (\eta_n - \eta_m)\cos\beta_{mn} + (\zeta_n - \zeta_m)\cos\gamma_{mn}$.

Der Beitrag einer an m und n wirkenden Kraft S zu $\mathfrak{D}$ ist nach (5)

$$- S(\xi_m \cos\alpha_{mn} + \eta_m \cos\beta_{mn} + \zeta_m \cos\gamma_{mn})$$
$$- S(\xi_n \cos\alpha_{nm} + \eta_n \cos\beta_{nm} + \zeta_n \cos\gamma_{nm}).$$

Dies gilt auch, wenn einer der Punkte m, n ausserhalb des Systems liegt; denn obwohl in diesem Falle der betreffende Punkt nicht in (5) auftritt, so können wir ihn doch deshalb in vorstehendem Ausdrucke berücksichtigen, weil er nun nach unserer Voraussetzung bezüglich der in $\mathfrak{D}$ aufgenommenen Stabkräfte eine feste Lage gegen das Coordinatensystem hat, womit seine ξ, η, ζ gleich Null werden. Aus (1) folgen

$$\cos\alpha_{nm} = -\cos\alpha_{mn}, \quad \cos\beta_{nm} = -\cos\beta_{mn}, \quad \cos\gamma_{nm} = -\cos\gamma_{mn},$$

und wir erhalten, wenn $\sum\limits_s$ sämmtliche s Stäbe zwischen Systempunkten oder Systempunkten und festen äusseren Punkten umfasst,

(11) $$\mathfrak{D} = \sum_s S\lambda.$$

Das d'Alembert'sche Princip drückt sich damit für unsern Fall aus

(12) $$\sum_k m\left(\frac{du}{dt}\xi + \frac{dv}{dt}\eta + \frac{dw}{dt}\zeta\right) + \sum_s S\lambda = \sum_k (X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

und das Princip des virtuellen Verrückungen

(13) $$\sum_s S\lambda = \sum_k (X\xi + Y\eta + Z\zeta).$$

Bedeuten

(14) $$\xi = dx = u\,dt, \qquad \eta = dy = v\,dt, \qquad \zeta = dz = w\,dt$$

die wirklichen Verrückungen der Systempunkte im Zeitelemente dt, so wird aus G die entsprechende Aenderung der lebendigen Kraft

(15) $$dL = \sum_k \frac{mV^2}{2} = \sum_k m(u\,du + v\,dv + w\,dw)$$

und aus $\mathfrak{D}$ die entsprechende Arbeit zur Ueberwindung der wirklichen Stabkräfte

(16) $$dD = \sum_s S\,dl.$$

Als Ausdruck des Satzes von den lebendigen Kräften aber folgt aus (12) (14)

(17) $$dL + dD = \sum_k (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Sind sämmtliche äusseren und inneren Kräfte eines Punktsystems Stabkräfte, welche von Systempunkten oder festen äusseren Punkten ausgehen, dann werden in (12), (13), (17) die rechten Seiten gleich Null.

§ 73. **Berechnung von Punktsystemen.**

Ein System von k Punkten enthalte zur Zeit t innere Kräfte in s der existirenden $k\frac{k-1}{2}$ Verbindungsgeraden (§ 79). Ueber das Gesetz der einzelnen Stabkräfte wird nichts vorausgesetzt, die zugehörigen Verbindungsgeraden bezeichnen wir wie in § 72 zur Unterscheidung von den übrigen als Stäbe. Aeussere Kräfte greifen in beliebig vielen der k Systempunkte an, sie sind zum Theil unmittelbar gegeben, zum Theil als Reactionen ausserhalb des Systems gelegener Stützen entstanden. Je nachdem eine Stütze die freie Bewegung des gestützten Punktes nach einer Richtung, zwei oder drei Richtungen vorschreibt, ist ihre Reaction durch eine Componente, zwei oder drei Componenten bestimmt. Im Ganzen mögen die zur Zeit t vorhandenen Stützenreactionen von r unabhängigen Componenten abhängen.

Wir gehen von irgend einem Anfangszustand aus, in welchem unter Einwirkung beliebiger äusserer und innerer Kräfte der Punkt m bei x_m, y_m, z_m und der mit ihm durch einen Stab der Länge 1 verbundene Punkt n bei x_n, y_n, z_n lag. Infolge beliebig grosser Verrückungen sind die Punkte m und n zur Zeit t nach $x_m + \xi_m$, $y_m + \eta_m$, $z_m + \zeta_m$ und $x_n + \xi_n$, $y_n + \eta_n$, $z_n + \zeta_n$ gelangt, während der verbindende Stab l die Länge $l + \lambda$ und die Beanspruchung S erreicht hat. Sind nun für Punkt m die resultirenden Componenten der äusseren Kräfte und die Geschwindigkeiten in den Richtungen x, y, z durch X_m, Y_m, Z_m und

$$(1) \qquad u_m = \frac{d\xi_m}{dt}, \qquad v_m = \frac{d\eta_m}{dt}, \qquad w_m = \frac{d\zeta_m}{dt}$$

bezeichnet, so lassen sich die Beziehungen § 72, (2) wie folgt schreiben

$$(2) \qquad \begin{cases} m\,\dfrac{du_m}{dt} = X_m + \sum\limits_m S\,\dfrac{x_n + \xi_n - x_m - \xi_m}{l+\lambda}, \\ m\,\dfrac{dv_m}{dt} = Y_m + \sum\limits_m S\,\dfrac{y_n + \eta_n - y_m - \eta_m}{l+\lambda}, \\ m\,\dfrac{dw_m}{dt} = Z_m + \sum\limits_m S\,\dfrac{z_n + \zeta_n - z_m - \zeta_m}{l+\lambda}. \end{cases}$$

Die Summen $\sum\limits_m$ sollen nun auf alle im Punkte m eintreffenden Stäbe erstreckt werden.

Denkt man sich die $l + \lambda$ nach § 72, (8) in (2) eingesetzt, so entstehen bei k Systempunkten $3k$ Gleichungen zwischen äusseren Kräften, Stabkräften, Verrückungen und Beschleunigungen. Von den $3k$ auftretenden Verrückungen sind ebensoviel durch die Bewegung der Stützen bestimmt, als unabhängige Reactionscomponenten vorkommen. Die $3k$ Gleichungen reichen also gerade aus, die $3k - r$ unabhängigen Verrückungen und r unabhängigen Reactionscomponenten zu berechnen, durch welche die neuen Lagen aller Systempunkte und sämmtliche äussere Kräfte bestimmt sind, vorausgesetzt, dass sich die Beschleunigungen und Stabkräfte als Functionen der in (2) auftretenden und bekannter Grössen eindeutig ausdrücken lassen. *Beispielsweise sind die Probleme des Gleichgewichts von Punktsystemen mit beliebig vielen Stäben vollständig bestimmt, wenn die Stabkräfte als Functionen der Stablängen und anderer augenblicklich bekannter Grössen α, β, ... gegeben werden.* Man drückt die S den Kraftgesetzen gemäss mittelst § 72, (8) durch die Verrückungen aus, substituirt die Ausdrücke

$$S = f(\xi, \eta, \zeta \dots) \tag{3}$$

in (2), findet mittelst $3k$ solcher k Gleichungen sämmtliche Verrückungen und nicht gegebenen äusseren Kräfte, wonach alle Stabkräfte aus Gleichungen der Form (3) folgen.

Die Verrückungen seien jetzt gegenüber den anfänglichen Coordinaten und die λ gegenüber den l verschwindend klein. Dann folgen aus (2) mit den Bezeichnungen § 72, (1)

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} m \frac{du_m}{dt} &= X_m + \sum_m S \cos \alpha_{mn}, \\ m \frac{dv_m}{dt} &= Y_m + \sum_m S \cos \beta_{mn}, \\ m \frac{dw_m}{dt} &= Z_m + \sum_m S \cos \gamma_{mn}, \end{aligned} \right.$$

während für λ die Ausdrücke § 72, (9) (10) gelten. Multiplicirt man die Gleichungen (4) der Reihe nach mit ξ_m, η_m, ζ_m (wobei ξ_m, η_m, ζ_m nicht nur die obigen Verrückungen, sondern auch irgend welche genügend kleine virtuelle Verrückungen bedeuten können), verfährt analog mit den entsprechenden Gleichungen der übrigen Systempunkte und addirt dann alle $3k$ Gleichungen, so folgt mit den Bezeichnungen G, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{D}$ des § 72 wie dort die Beziehung

$$G = \mathfrak{K} - \mathfrak{D}, \tag{5}$$

welche das d'Alembertsche Princip und bei verschwindenden Beschleunigungen oder $G = 0$ das Princip der virtuellen Verrückungen darstellt. $\mathfrak{K}$ drückt die Arbeit der äusseren Kräfte und $\mathfrak{D}$ die Arbeit zur Ueberwindung der inneren Kräfte während der fraglichen Verrückungen für den Fall aus, dass die Kräfte mit ihren Werthen zur Zeit t constant gedacht werden. *Die Gesammtarbeit der inneren Kräfte ist nach* § 72, (11) *nur durch Entfernungsänderungen der Systempunkte bedingt.*

Wie in § 72 würde sich die Beziehung (5) auch gefunden haben, wenn wir in $\sum_m$, $\mathfrak{D}$ neben den inneren Kräften Stabkräfte nach solchen äusseren Punkten aufgenommen hätten, welche hinsichtlich des Coordinatensystems festliegen. Nur hätten dann diese äusseren Kräfte in X_m, Y_m, Z_m unberücksichtigt zu bleiben und die vorerwähnte Deutung von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{D}$ der in § 72 gegebenen zu weichen.

In § 39 fanden wir für beliebige Körper mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{M} + \mathfrak{S}$

$$G = \mathfrak{K} - \mathfrak{D} + \mathfrak{R},$$

worin $\mathfrak{D}$ als Arbeit zur Ueberwindung der constant gedachten inneren Kräfte während der relativen Bewegungen der Punkte gegeneinander (§ 40) dieselbe Bedeutung wie hier hat. Für solche Körper, welche als Punktsysteme gelten, deren *sämmtliche* innere Kräfte Stabkräfte sind, besteht aber Gleichung (5) oder § 72, (6). Daher hat man für diesen Fall in allen Gleichungen der §§ 39 — 42, 44

$$\mathfrak{R} = 0, \qquad \delta_s \mathfrak{R} = 0, \qquad dR = 0.$$

Arbeiten infolge von Unstetigkeiten der Verrückungen treten nicht auf. Haben wir mehrere Theilsysteme, welche obiger Bedingung bezüglich der inneren Kräfte genügen (z. B. feste Stäbe), während zwischen ihnen Reibungen auftreten (etwa in Gelenken), so sind die letzten Gleichungen für das ganze Punktsystem nicht erfüllt.

§ 74. Die Verschiebungsarbeit.

Wir bleiben bei dem im § 73 betrachteten Fall innerer Stabkräfte. ξ_m, η_m, ζ_m mögen die wirklichen Verrückungen gegen die Lagen x_m, y_m, z_m bedeuten. Wären die Stabkräfte S während des Eintretens der ganzen Verrückungen constant wie zur Zeit t, so würde die zur Ueberwindung der inneren Kräfte nöthige Arbeit sich ausdrücken

(1) $$\mathfrak{D} = \sum_s S\lambda.$$

Für den allgemeineren Fall, dass die S während der Längenänderungen ihrer Stäbe variabel sind, führen wir ein

(2) $$D = \sum_s \int_0^\lambda S\,d\lambda$$

und bezeichnen diese Arbeit als *Verschiebungsarbeit.* $\mathfrak{D}$ mag die *virtuelle Verschiebungsarbeit* heissen. Für constante S führt (2) wieder auf die speciellere Formel (1).

Die Arbeit $\mathfrak{D}$ ist eine Function der zur Zeit t erreichten Beanspruchungen S und Längenänderungen λ oder Verrückungen ξ, η, ζ. Diese Grössen können unter gegebenen Verhältnissen des Systems (z. B. festen Punkten, vorgeschriebenen Bahnen, bestimmten Kräften und Beschleunigungen) je nach begleitenden Umständen verschiedene Werthe annehmen. Wir erhalten jedoch alle mit den gestellten Bedingungen verträglichen Variationen von $\mathfrak{D}$, wenn wir die S und λ oder ξ, η, ζ selbst ihre Werthe in beliebiger zulässiger Weise um unendlich wenig ändern lassen. Die vollständige Variation von $\mathfrak{D}$ ist

(3) $$\delta\mathfrak{D} = \delta_v\mathfrak{D} + \delta_s\mathfrak{D},$$

worin

(4) $$\delta_v\mathfrak{D} = \sum_s S\,\delta\lambda, \qquad \delta_s\mathfrak{D} = \sum_s \lambda\,\delta S$$

die Variationen von $\mathfrak{D}$, wenn die Verrückungen bei constanten Stabkräften und die Stabkräfte bei constanten Verrückungen ihre Werthe nur unendlich wenig ändern.

Nach (2) stellt

(5) $$\delta_v\mathfrak{D} = \delta D$$

in jedem Falle die Verschiebungsarbeit für die vorausgesetzten Aenderungen der Stabkräfte und Verrückungen dar. Sodann ist nach § 73, (5) wegen $\delta_s G = 0$

(6) $$\delta_s\mathfrak{D} = \delta_s\mathfrak{K} = \sum_k (\xi_m\,\delta X_m + \eta_m\,\delta Y_m + \zeta_m\,\delta Z_m).$$

Die Arbeit $\mathfrak{K}$ der constant gedachten äusseren Kräfte können wir uns zerlegt denken in die Arbeit $\mathfrak{G}$ der gegebenen oder durch die gegebenen Verhältnisse bestimmten äusseren Kräfte und in die Arbeit $\mathfrak{U}$ der von den S, λ abhängigen Reactionen

(7) $$\mathfrak{K} = \mathfrak{G} + \mathfrak{U}.$$

Aus (6) folgt hiernach

(8) $$\delta_s\mathfrak{D} = \delta_s\mathfrak{U}$$

und mit (3), (5)

(9) $$\delta\mathfrak{D} = \delta D + \delta_s\mathfrak{U}.$$

Gewöhnlicher Fall. Es sei nun S eine den Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes entsprechende Function der Stablänge l und irgend welcher anderer Grössen $a, b, c, \ldots$ Ist dann P der Werth von S zu Beginn der betrachteten Verrückungen und bedeuten $L, A, B, \ldots$ die partiellen Derivirten von S nach $l, a, b, \ldots$ für diesen Beginn, dann hat man nach den Aenderungen $\lambda, \alpha, \beta, \ldots$ von $a, b, c, \ldots$ dem Taylor'schen Satze zufolge,

(10) $$S = \mathsf{P} + L\lambda + A\alpha + B\beta + \cdots$$

Die mit Quadraten, Producten und höheren Potenzen der $\lambda, \alpha, \beta, \ldots$ multiplicirten Glieder verschwinden, wenn entweder erstere selbst oder ihre Coefficienten klein genug sind, was wir voraussetzen. Im Uebrigen kann das Gesetz (10) für alle Stabkräfte verschieden sein.

Mit der Bezeichnung

(11) $$\mathsf{T} = A\alpha + B\beta + \cdots$$

liefern die Gleichungen (1), (2)

(12) $$\mathfrak{D} = \sum_s (\mathsf{P}\lambda + L\lambda^2 + \mathsf{T}\lambda),$$

(13) $$D = \sum_s \left(\mathsf{P}\lambda + \frac{L\lambda^2}{2} + \int_0^\lambda \mathsf{T}\, d\lambda\right)$$

und hieraus folgt wegen

$$\mathsf{T}\lambda = \int_0^\lambda \mathsf{T}\, d\lambda + \int_0^\lambda \lambda\, d\mathsf{T}$$

die Beziehung

(14) $$\mathfrak{D} = 2D - \sum_s \mathsf{P}\lambda - \sum_s \int_0^\lambda (\mathsf{T}\, d\lambda - \lambda\, d\mathsf{T}).$$

Nach (9), (14) aber hat man für Punktsysteme, deren sämmtliche inneren Kräfte der Form (10) entsprechen, die vollständige Variation der Verschiebungsarbeit

(15) $$\delta D = \delta_s \mathfrak{U} + \sum_s (\mathsf{P}\delta\lambda - \mathsf{T}\delta\lambda + \lambda\delta\mathsf{T}).$$

Aus (15) folgt, dass für $\delta_s \mathfrak{U} = 0$ die Stabkräfte, Verrückungen und Functionen derselben Werthe haben, wie sie einem Maximum oder Minimum der Arbeiten $D, \mathfrak{D}$ entsprechen: *a*) wenn sämmtliche P und T verschwinden, die S also bei beliebigen Verhältnisszahlen L den Längenänderungen λ proportional sind; *b*) wenn in (15) die Summe $\sum\limits_s$ gleich Null ist, also beispielsweise, wenn bei verschwindendem $\sum\limits_s \mathsf{P}\,\delta\lambda$ nur innere Centralkräfte vorkommen. — Im Allgemeinen sind für den Fall innerer Centralkräfte die Arbeiten

$$D - \sum_s \mathsf{P}\lambda, \qquad \mathfrak{D} + \sum_s \mathsf{P}\lambda$$

Maxima oder Minima. — In allen bekannten Fällen lassen sich D, $\mathfrak{D}$ unter obigen Voraussetzungen als Summen von Quadraten darstellen und kommen dann bei nur einer Lösung lediglich Minima der D, $\mathfrak{D}$ in Frage.

§ 75. **Coexistenz kleiner Bewegungen.**

Der einem beliebigen Punktsystem angehörige Punkt m lag zur Zeit t_0 bei x_m, y_m, z_m und ist zu irgend einer späteren Zeit nach $x_m + \xi_m$, $y_m + \eta_m$, $z_m + \zeta_m$ gelangt. Sind dann alle inneren Kräfte Stabkräfte und die ξ, η, ζ gegenüber den x, y, z verschwindend klein, so bestehen nach § 73 zur Zeit t die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} m\,\dfrac{d^2\xi_m}{dt^2} = X_m + \sum\limits_m S\cos\alpha_{mn}, \\ m\,\dfrac{d^2\eta_m}{dt^2} = Y_m + \sum\limits_m S\cos\beta_{mn}, \\ m\,\dfrac{d^2\zeta_m}{dt^2} = Z_m + \sum\limits_m S\cos\gamma_{mn}. \end{cases}$$

Die Summen $\sum\limits_m$ beziehen sich auf alle in m eintreffenden Stäbe, α_{mn}, β_{mn}, γ_{mn} sind nur von den Anfangslagen der Punkte m, n abhängig und X_m, Y_m, Z_m bezeichnen die resultirenden Componenten der auf m wirkenden äusseren Kräfte in den Richtungen x, y, z. Diese äusseren Kräfte können zum Theil gegeben oder durch die gegebenen Kräfte allein bestimmt sein, zum Theil aber auch von den inneren Kräften mit abhängen. Bei Erzeugung der fraglichen Verrückungen dürfen beliebige Ursachen zusammengewirkt haben.

Es mögen nun irgend welchen Ursachencomplexen U', U'', $\cdots$ einzeln Spannungen entsprechen, welche wir, wie alle zugehörigen Grössen, durch die Indices der betreffenden U auszeichnen. Dann folgen aus der ersten Gleichung (1)

$$m\,\frac{d^2\xi'}{dt^2} = X' + \sum_m S'\cos\alpha_{mn},$$
$$m\,\frac{d^2\xi''}{dt^2} = X'' + \sum_m S''\cos\alpha_{mn},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wirken alle Ursachencomplexe zusammen, so addiren sich gegebene äussere Kräfte. Wäre auch allgemein

$$S = S' + S'' + \cdots,$$

so würden sich die von den inneren Kräften abhängigen äusseren Kräfte (Reactionen) ebenfalls summiren und durch Addition folgen

$$\frac{d^2\xi_m}{dt^2} = \frac{d^2\xi'}{dt^2} + \frac{d^2\xi''}{dt^2} + \cdots = \frac{d^2(\xi' + \xi'' + \cdots)}{dt^2},$$

$$\frac{d\xi_m}{dt^2} = u_0 + \frac{d\xi'}{dt} + \frac{d\xi''}{dt} - \cdots = u_0 + \frac{d(\xi' + \xi'' + \cdots)}{dt},$$

$$\xi_m = u_0(t - t_0) + \xi' + \xi'' + \cdots$$

Analoge Beziehungen entstehen aus den beiden letzten Gleichungen (1), wir können aussprechen: *Wenn mehrere Complexe von Ursachen einzeln Stabkräfte erzeugen, welche sich beim Zusammenwirken aller Ursachen addiren, dann entsteht die resultirende Bewegung durch Uebereinanderlagerung der anfänglichen und der von den einzelnen Complexen erzeugten Bewegungen, es können die Einzelbewegungen als nebeneinander existirend betrachtet werden.* Erzeugt z. B. jeder Ursachencomplex für sich Gleichgewicht, so wird auch beim Zusammenwirken aller Complexe Gleichgewicht bestehen.

Setzen wir jetzt die Gültigkeit dieses Princips der Coexistenz voraus. Unter Einwirkung der gegebenen äusseren Kräfte und sonstiger Ursachen möge Gleichgewicht hinsichtlich unseres Coordinatensystems möglich sein, während augenblicklich eine Bewegung existirt. Geben wir allen Grössen, welche dem Gleichgewichtszustande entsprechen, den Index $'$, so folgen aus (1)

$$(2)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2\xi'}{dt^2} = 0 = X' + \sum\limits_m S' \cos\alpha_{mn}, \\ m\dfrac{d^2\eta'}{dt^2} = 0 = Y' + \sum\limits_m S' \cos\beta_{mn}, \\ m\dfrac{d^2\zeta'}{dt^2} = 0 = Z' + \sum\limits_m S' \cos\gamma_{mn}. \end{cases}$$

Sind ferner zur Zeit t die ganzen Verrückungen durch $\xi_m = \xi' + \xi''$, $\eta_m = \eta' + \eta''$, $\zeta_m = \zeta' + \zeta''$ und die Stabkräfte und äusseren Kräfte in analoger Weise bezeichnet, dann haben wir für die Bewegung gegen die Gleichgewichtslagen

$$(3)\qquad \xi'' = \xi_m - \xi', \qquad \eta'' = \eta_m - \eta', \qquad \zeta'' = \zeta_m - \zeta';$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi''}{dt} = \dfrac{d(\xi_m - \xi')}{dt}, \\ \dfrac{d\eta''}{dt} = \dfrac{d(\eta_m - \eta')}{dt}, \\ \dfrac{d\zeta''}{dt} = \dfrac{d(\zeta_m - \zeta')}{dt}, \end{cases}$$

und hieraus, sowie durch Subtraction entsprechender Gleichungen (1) und (2)

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi''}{dt^2} = \dfrac{d^2(\xi_m - \xi')}{dt^2} = X'' + \sum_m S'' \cos\alpha_{mn}, \\ \dfrac{d^2\eta''}{dt^2} = \dfrac{d^2(\eta_m - \eta')}{dt^2} = Y'' + \sum_m S'' \cos\beta_{mn}, \\ \dfrac{d^2\zeta''}{dt^2} = \dfrac{d^2(\zeta_m - \zeta')}{dt^2} = Z'' + \sum_m S'' \cos\gamma_{mn}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind $X'' = Y'' = Z'' = 0$, wenn alle an m wirkenden äusseren Kräfte gegeben oder durch die gegebenen Kräfte allein bestimmt sind, während anderenfalls einer unbekannten Reactionscomponente eine bekannte Beschleunigungscomponente entspricht (§ 73), sodass die betreffende Gleichung zur Berechnung der Reactionscomponente dienen kann.

Vergleicht man die für die Beschleunigungen gefundenen Ausdrücke (5) mit (1), so ergibt sich bei Berücksichtigung von (3) (4) der Satz: *Unter Voraussetzung des Princips der Coexistenz folgen die Bewegungen der Systempunkte um die gegebenen äusseren Kräften entsprechenden Geichgewichtslagen denselben Gesetzen wie die Bewegungen, welche die Systempunkte um ihre anfänglichen Lagen bei Wegfall der erwähnten äusseren Kräfte ausführen würden* (§ 37).

Können wir (§ 74) bei verschwindend kleinen Verrückungen

$$S = \mathsf{P} + L\lambda + A\alpha + B\beta + \cdots$$

setzen, worin P, L, A, B, $\cdots$ Constante bedeuten, dann besteht für die Ursachen P, λ, α, β, $\cdot\cdot$ oder wegen § 72, (10) auch für die Ursachen P, ξ, η, ζ, α, β, $\cdot\cdot$ und Theile derselben das Princip der Coexistenz (X. Abschnitt).

§ 76. **Energie bei inneren Radialkräften.**

Als Radialkräfte oder Stabkräfte wurden bisher Kräfte bezeichnet, welche zwar in den Verbindungsgeraden einander beeinflussender Punkte m, n wirken, deren Abhängigkeitsgesetz aber ein ganz beliebiges ist. Ziehen wir jetzt den Fall in Betracht, dass sämmtliche inneren Kräfte eines Punktsystems Stabkräfte sind, welche irgend welche Gesetze der im VII. Abschnitte angewandten Form

$$(1)\qquad S = mn\,[F(l) - i]$$

befolgen, worin ganz allgemein i eine Function derjenigen Grössen bedeutet, welche neben der Entfernung l auf S Einfluss nehmen.

Die Centralkräfte bilden einen speciellen Fall dieser Stabkräfte und ebenso die in § 74, (10) ausgedrückten Kräfte. Den äusseren Kräften wird keinerlei Beschränkung auferlegt.

In § 72 ergab sich die Aenderung der lebendigen Kraft oder actuellen Energie eines Punktsystems mit inneren Radialkräften für ein Zeitelement dt

(2) $$dL = dK - dD,$$

worin jetzt

(3) $$dK = \sum_k (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

die Arbeit der äusseren Kräfte und

(4) $$dD = \sum_s S\,dl$$

die Arbeit zur Ueberwindung der inneren Kräfte oder Verschiebungsarbeit bedeutet. Nach (1) besteht für die inneren Kräfte eine Function I der Coordinaten oder specieller der Entfernungen auf einander wirkender Punkte allein, deren vollständiges Differential sich ausdrückt

(5) $$dI = \sum_s mn\,F(l)\,dl = dD + \sum_s mni\,dl.$$

Wir werden I die *innere potentielle Energie* nennen.

Für ein von t_0 bis t reichendes Zeitintervall folgen mit

(6) $$K = \sum_k \int_{t_0}^{t} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz), \qquad D = \sum_s \int_{t_0}^{t} S\,dl$$

und der Bezeichnung

(7) $$\mathfrak{W} = -\sum_s mn \int_{t_0}^{t} i\,dl$$

aus (5), (2) die Beziehungen

(8) $$I - I_0 = D - \mathfrak{W},$$

(9) $$L - L_0 + D = K = L - L_0 + I - I_0 + \mathfrak{W},$$

(10) $$L + I + \mathfrak{W} = L_0 + I_0 + K.$$

Da $I - I_0$ jedesmal verschwindet, wenn die Systempunkte ihre anfänglichen relativen Lagen wieder einnehmen, so lässt sich für $K = 0$ aussprechen: Wenn ein Punktsystem nur unter dem Arbeitseinflusse innerer Radialkräfte der Form (1) steht, so sind von einer beliebigen Zeit t_0 an gerechnet die Summe $L + \mathfrak{W}$ und innere potentielle Energie I zu allen Zeiten dieselben, zu welchen alle einander beeinflussenden Punkte dieselben relativen Lagen gegen einander haben;

bis zu jeder Zeit t ist der Gewinn an $L + \mathfrak{W}$ gleich dem Verluste an I, die Summe $L + \mathfrak{W} + I$ bleibt constant. Gleichung (9) aber sagt: Wenn ein Punktsystem unter dem Arbeitseinflusse beliebiger äusserer Kräfte und innerer Radialkräfte der Form (1) steht, dann ist in jedem Zeitintervall die Arbeit der äusseren Kräfte gleich der Summe der Aenderungen von (äusserer) actueller und innerer potentieller Energie.

Specieller Fall. In einem Systeme mögen nur actuelle und potentielle Energie der ungetheilten Systempunkte vorkommen und die Aenderungen dieser Gesammtenergie allein durch die Arbeit äusserer Kräfte und innerer Radialkräfte der Form (1) bedingt sein. Dann muss die neben $I - I_0$ zur Ueberwindung innerer Kräfte aufgewandte Arbeit $\mathfrak{W}$ zu Aenderung einer inneren Bewegung gedient haben und man kann von *äusserer und innerer actueller Energie* sprechen, ebenso wie in § 70 von äusserer und innerer potentieller Energie oder wie oben allgemeiner von Arbeit äusserer Kräfte und innerer potentieller Energie. Zu jeder Zeit t ist die ganze innere oder virtuelle Energie

(11) $$U = I + W,$$

unter W die innere actuelle Energie verstanden. Für ein Zeitintervall von t_0 bis t hat man

(12) $$W - W_0 = \mathfrak{W}, \qquad U - U_0 = I - I_0 + \mathfrak{W},$$

während die Gesammtenergie zur Zeit t nach (10)

(13) $$E = L + U = L_0 + U_0 + K = E_0 + K.$$

Speciell wenn keine äusseren Kräfte wirken, hat man

(14) $$E = L + U = L + W + I = L_0 + W_0 + I_0 = L_0 + U_0 = E_0,$$

und in Worten: Wenn ein Punktsystem, welches nur actuelle und potentielle Energie der Systempunkte enthält, lediglich unter dem Arbeitseinflusse innerer Radialkräfte der Form (1) steht, dann sind die potentielle Energie I und Summe der äusseren und inneren actuellen Energie $L + W$ zu allen Zeiten dieselben, in welchen alle Systempunkte dieselben relativen Lagen gegen einander haben; in jedem Zeitintervall ist der Gewinn an Energie $L + W$ gleich dem Verluste an Energie I oder der Gewinn an äusserer actueller Energie L gleich dem Verluste an virtueller Energie U, die Gesammtenergie des Systems E bleibt constant.

§ 77. Ueber die Reduction auf Centralkräfte.

Als *Helmholtz* im Jahre 1847 das Princip von der Erhaltung der Energie für den Fall von Centralkräften aussprach, fügte er hinzu, dass die Hauptaufgabe der Naturwissenschaft darin bestehe,

„die Naturerscheinungen zurückzuführen auf unveränderliche anziehende und abstossende Kräfte, deren Intensität (nur) von der Entfernung abhängt". Man kann nicht behaupten, dass seither in dieser Richtung wesentliche Fortschritte gemacht seien, im Gegentheil scheint das Misslingen der Rückführung electrodynamischer Erscheinungen auf Centralkräfte von einer Aufgabe abgelenkt zu haben, deren Lösbarkeit *Helmholtz* als Bedingung der vollständigen Begreiflichkeit der Natur erklärte.

Es kann dahingestellt bleiben, ob nicht alle Kräfte auf dynamische Einwirkungen zurückzuführen sind. Jedenfalls kommt es bei Versuchen zur Auflösung irgend welcher Kräfte in Centralkräfte darauf an, die Kräfte, soweit möglich, in Componenten zu zerlegen und alles als Bewegung Erkannte oder Erklärbare auf die gleiche, den Kräften oder Arbeiten entgegengesetzte Seite der Bewegungsgleichungen zu bringen. Letzterer Forderung hat man bisher nicht überall Rechnung getragen; sie führt dahin, zwei oder mehrere Bewegungen gleichzeitig zu betrachten. Da auch wir im VII. Abschnitte genöthigt waren, Radialkräfte zwischen den Körperpunkten an die Stelle von Centralkräften zu setzen, so möge kurz an einem Beispiele gezeigt werden, wie man sich die Reduction auf Centralkräfte unter Umständen denken kann. Wir gehen dabei von der Annahme aus, dass die Kräfte zwischen je zwei Systempunkten theilweise zur Aenderung einer der bisher betrachteten, sagen wir *offenen*, Bewegung coexistirenden inneren Bewegung dienen, oder von einer solchen herrühren.

Für einen Systempunkt m seien wie bisher die Geschwindigkeiten der *offenen Bewegung* und die resultirenden Componenten der äusseren Kräfte in den Richtungen x, y, z durch u_m, v_m, w_m und X_m, Y_m, Z_m bezeichnet. Ist nun s_{mn} die Beschleunigung der erwähnten inneren Bewegung in der Richtung auf den Systempunkt n, nach welchem die Kraft S führt, dann bestehen mit § 72, (1) die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} m\,\dfrac{d u_m}{dt} + \sum\limits_m s_{mn} \cos \alpha_{mn} = X_m + \sum\limits_m S \cos \alpha_{mn}, \\ m\,\dfrac{d v_m}{dt} + \sum\limits_m s_{mn} \cos \beta_{mn} = Y_m + \sum\limits_m S \cos \beta_{mn}, \\ m\,\dfrac{d w_m}{dt} + \sum\limits_m s_{mn} \cos \gamma_{mn} = Z_m + \sum\limits_m S \cos \gamma_{mn}. \end{cases}$$

Denkt man sich dieselben für alle Systempunkte angeschrieben und multiplicirt mit beliebigen virtuellen Verrückungen ξ_m, η_m, ζ_m, so folgt durch Addition mit den Bezeichnungen G, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{D}$ des § 72 und

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F} = \sum_k \Big(\xi_m\, m \sum_m s_{mn} \cos \alpha_{mn} + \eta_m\, m \sum_m s_{mn} \cos \beta_{mn} \\ + \zeta_m\, m \sum_m s_{mn} \cos \gamma_{mn}\Big), \end{aligned}\right.$$

die Beziehung

$$(3)\qquad G + \mathfrak{F} = \mathfrak{K} - \mathfrak{D}.$$

Zu $\mathfrak{F}$ tragen die inneren Beschleunigungen von m in der Richtung n und von n in der Richtung auf m bei,

$$\begin{aligned} &m s_{mn} (\xi_m \cos \alpha_{mn} + \eta_m \cos \beta_{mn} + \zeta_m \cos \gamma_{mn}) \\ + \, &n s_{nm} (\xi_n \cos \alpha_{nm} + \eta_n \cos \beta_{nm} + \zeta_n \cos \gamma_{nm}). \end{aligned}$$

Da aber $m s_{mn}$ und $n s_{nm}$ von derselben Wechselwirkung herrühren, so hat man

$$(4)\qquad m s_{mn} = n s_{nm} = mni,$$

$$(5)\qquad s = s_{mn} + s_{nm} = (m + n)\, i,$$

und mit Rücksicht auf

$$\cos \alpha_{nm} = - \cos \alpha_{mn},$$
$$\cos \beta_{nm} = - \cos \beta_{mn},$$
$$\cos \gamma_{nm} = - \cos \gamma_{mn},$$

als Beitrag der Beschleunigungen von m und n gegen einander

$$\begin{aligned} - mni \Big[(\xi_n - \xi_m) \cos \alpha_{mn} + (\eta_n - \eta_m) \cos \beta_{mn} + (\zeta_n - \zeta_m) \cos \gamma_{mn}\Big] \\ = - mni\lambda, \end{aligned}$$

unter λ entsprechend § 72, (9) die mit den virtuellen Verrückungen verbundene Aenderung der Entfernung $mn = l$ verstanden. Wir erhalten also, wenn $\sum\limits_s$ auf alle Radialkräfte S ausgedehnt wird,

$$(6)\qquad \mathfrak{F} = - \sum_s mni\lambda = - \sum_s \frac{mn}{m + n} s\lambda,$$

und können anstatt (3) schreiben

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_k m \left(\frac{du}{dt}\xi + \frac{dv}{dt}\eta + \frac{dw}{dt}\zeta\right) - \sum_s mni\lambda \\ = \sum_k (X\xi + Y\eta + Z\zeta) - \sum_s S\lambda, \end{aligned}\right.$$

worin für äusseres Gleichgewicht die erste Summe verschwindet.

Die Gleichung (7) gilt, bei beliebigem Abhängigkeitsgesetz der S und beliebigen Verrückungen, lediglich unter der Voraussetzung, dass die einzelnen S zum Theil (in positivem oder negativem Sinne) auf Erzeugung einer inneren Bewegung verwendet werden. Nehmen wir nun für S Centralkräfte irgend welchen Gesetzes

$$(8) \qquad S = mn\,F(l) = \frac{mn}{n+m} f(l)$$

an, so stimmt Gleichung (7) genau überein mit der für den Fall innerer Radialkräfte

$$(9) \qquad S = mn\left[F(l) - i\right] = \frac{mn}{n+m}\left[f(l) - s\right]$$

gültigen Grundgleichung § 72, (12). Es ist also hier ganz gleichgültig, ob wir nur die offene Bewegung ins Auge fassen und innere Radialkräfte (9) annehmen, oder ob wir in obiger Weise zweierlei Bewegungen zusammen betrachten und Centralkräfte voraussetzen.

X. Abschnitt.

Gleichgewicht von Stabsystemen.

Eine Anzahl materieller Punkte, welche wir auch *Knotenpunkte* nennen wollen, sei durch beliebig viele gerade gewichtslose Stäbe zu einem Systeme vereinigt. Aeussere Kräfte greifen allein in Knotenpunkten an. In diesen hängen die Stäbe durch reibungslose Gelenke zusammen, sodass nur in den Verbindungsgeraden innere Kräfte auftreten können. Da die Knotenpunkte ein Punktsystem der zuletzt betrachteten Art bilden, so bestehen für dies *System der Knotenpunkte* die im IX. Abschnitte erhaltenen Beziehungen. Sind die Stäbe durch feste Körper gebildet (deren Masse in den Knotenpunkten concentrirt gedacht wird), dann gelten für das *System der Körperpunkte* die für beliebige Körper und feste Körper abgeleiteten Gesetze.

Die vorerwähnten *Stabsysteme* spielen im Ingenieurwesen eine sehr bedeutende Rolle, da alle „Fachwerke" (aus einzelnen Stäben bestehende Brückenträger, Dachstühle, Pfeiler u. s. w.) unter obigen Voraussetzungen berechnet zu werden pflegen. Mit Rücksicht hierauf und zu besserer Beurtheilung bereits betrachteter Systeme sol das Gleichgewicht der fraglichen Stabsysteme hier allgemein untersucht werden. Besondere Beachtung werden wir den statisch unbestimmten Systemen schenken (§ 78), da für statisch bestimmte Systeme die Beziehungen der Elasticitätslehre nur von untergeordneter Bedeutung sind.

§ 78. Statisch bestimmte und statisch unbestimmte, stabile und labile Stabsysteme.

Ein Stabsystem von k Knotenpunkten und s wirksamen Stäben sei hinsichtlich eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Gleichgewicht. Aeussere Kräfte greifen in beliebig vielen Knotenpunkten an; sie sind zum Theil als Activkräfte (gewöhnlich Lasten) unmittelbar gegeben, zum Theil als *Reactionen* ausserhalb des Systems gelegener Stützen entstanden. Je nachdem eine Stütze die Bewegung des gestützten Knotenpunktes nach drei, zwei von einander unabhängigen Richtungen oder nach einer solchen vorschreibt (gewöhnlich hindert), kann ihre Reaction durch drei, zwei Componenten oder eine Componente bestimmt sein. Im Ganzen mögen die augenblicklichen Stützenreactionen von r *Reactionsbedingungen* oder von einander unabhängigen Componenten abhängen. Ueber die Gesetze der inneren Kräfte oder Stabkräfte S wird vorläufig nichts vorausgesetzt, doch werden wir die S als positiv oder negativ einführen, je nachdem der verbindende Stab, dessen Widerstand die Stabkräfte liefert, gezogen oder gedrückt wird.

Ein Stabsystem heisst statisch bestimmt oder statisch unbestimmt, je nachdem für gegebene äussere Activkräfte und bekannt gedachte Knotenpunktslagen die Stützenreactionen und Stabkräfte (unabhängig von den Gesetzen der letzteren) *durch die Statik allein bestimmt sind oder nicht.* — Unser Stabsystem sei nach einer beliebigen Bewegung zum Gleichgewichte gelangt. Der Knotenpunkt m kam dabei aus der Anfangslage x_m, y_m, z_m in die Lage $x_m + \xi_m, y_m + \eta_m, z_m + \zeta_m$ und ein mit ihm durch den Stab der anfänglichen Länge l verbundener Knotenpunkt n von x_n, y_n, z_n nach $x_n + \xi_n, y_n + \eta_n, z_n + \zeta_n$. Sind nun X_m, Y_m, Z_m die resultirenden Componenten der auf m in den Richtungen x, y, z wirkenden äusseren Kräfte und λ die Längenänderungen von l, so lauten die Bedingungen für das Gleichgewicht an m

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum_m S\,\dfrac{x_n + \xi_n - x_m - \xi_m}{l + \lambda} + X_m = 0, \\[2ex] \sum_m S\,\dfrac{y_n + \eta_n - y_m - \eta_m}{l + \lambda} + Y_m = 0, \\[2ex] \sum_m S\,\dfrac{z_n + \zeta_n - z_m - \zeta_m}{l + \lambda} + Z_m = 0, \end{cases}$$

worin sich die $\sum_m$ wie in § 73 auf sämmtliche in m eintreffenden Stäbe beziehen. Bei k Knotenpunkten liefert uns die Statik $3k$ solcher Gleichungen, welche durch die darin vorkommenden Grössen erfüllt sein müssen und zur Bestimmung von Unbekannten dienen können. Da bei bekannten Knotenpunktslagen wegen

$$(2)\qquad \begin{cases} (l + \lambda)^2 = (x_n + \xi_n - x_m - \xi_m)^2 + (y_n + \eta_n - y_m - \eta_m)^2 \\ \qquad\qquad + (z_n + \zeta_n - z_m - \zeta_m)^2 \end{cases}$$

auch die Stablängen bestimmt sind, so bleiben von Unbekannten nur die r unabhängigen Reactionscomponenten und s Stabkräfte, es muss für statisch bestimmte Stabsysteme $s + r \leqq 3k$ sein, während für $s + r > 3k$ ein Stabsystem immer statisch unbestimmt ist.

Ein Stabsystem heisst stabil oder labil, jenachdem bei bestimmten Stablängen (oder gegen die l verschwindenden λ) *und unbeweglichen Stützen* (oder gegen deren x, y, z verschwindenden ξ, η, ζ), *aber veränderlichen äusseren Kräften die Knotenpunkte unveränderliche Gleichgewichtslagen* (oder gegen die x, y, z verschwindende ξ, η, ζ) *haben oder nicht.* — Wir fassen wieder den oben betrachteten Fall ins Auge. Sollen alle Stablagen von den äusseren Kräften unabhängig (oder nur in verschwindendem Masse abhängig) sein, dann müssen wir den unter dieser Voraussetzung aus (1) folgenden $3k$ Gleichungen

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_m S \frac{x_n - x_m}{l} + X_m = 0, \\ &\sum_m S \frac{y_n - y_m}{l} + Y_m = 0, \\ &\sum_m S \frac{z_n - z_m}{l} + Z_m = 0, \end{aligned} \right.$$

mit den als Unbekannte allein verfügbar bleibenden s Stabkräften und r unabhängigen Reactionscomponenten genügen können, was nur für $s + r \geqq 3k$ der Fall ist. Für $s + r < 3k$ dagegen findet Gleichgewicht erst unter den allgemeineren Bedingungen (1) statt, und da diese zwischen Kräften und die Stablagen bestimmenden Grössen bestehen, so müssen fürs Gleichgewicht auch Lagebedingungen erfüllt sein. Treffen letztere beim Anbringen der äusseren Kräfte nicht zu, so findet auch kein Gleichgewicht statt und es verschiebt sich das System solange, bis Erfüllung eingetreten ist. Aendern wir dann etwas an den äusseren Kräften, so werden sich mit dem neuen System der Bedingungsgleichungen (1) auch die dadurch mitbestimmten Stablagen ändern, wir haben ein labiles Stabsystem.

Wir wissen jetzt, dass für statisch bestimmte Stabsysteme $s + r \leqq 3k$ und für stabile Stabsysteme $s + r \geqq 3k$ sein muss. Die Erfüllung dieser Bedingungen reicht jedoch nicht aus, um ein System statisch bestimmt oder stabil zu machen, es kommt nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Anordnung der Stäbe an. Man hat zu beachten, dass jede Stabkraft oder Reactionscomponente nur aus einer Gleichung bestimmt werden kann, in welcher sie vorkommt, und dass sich umgekehrt mit einer Stabkraft oder Reactionscomponente nur dann einer Gleichung genügen helfen lässt, wenn letztere die erstere enthält. Mit Rücksicht hierauf konnte Verfasser schon bei anderer Gelegenheit folgende Sätze geben:

a) Stabsysteme sind statisch bestimmt, wenn bei k Knotenpunkten die Anzahl der wirksamen Stäbe und unabhängigen Reactionscomponenten $s + r \leqq 3$ ist und dieselben den ihnen anliegenden Knotenpunkten so zugewiesen werden können, dass auf jeden Knotenpunkt mindestens drei Stäbe und Reactionscomponenten verschiedener Richtungslinien kommen. Im Grenzfalle $s + r = 3k$ tritt statisch bestimmte Stabilität ein, in allen andern Fällen haben wir statisch unbestimmte Systeme.

b) Stabsysteme sind stabil, wenn bei k Knotenpunkten die Anzahl der wirksamen Stäbe und unabhängigen Reactionscomponenten $s + r \geqq 3k$ ist und dieselben den ihnen anliegenden Knotenpunkten so zugewiesen werden können, dass auf jeden Knotenpunkt mindestens drei Stäbe und Reactionscomponenten verschiedener Richtungslinien kommen. Im Grenzfalle $s + r = 3k$ tritt statisch bestimmte Stabilität ein, in allen andern Fällen haben wir statisch unbestimmte Systeme.

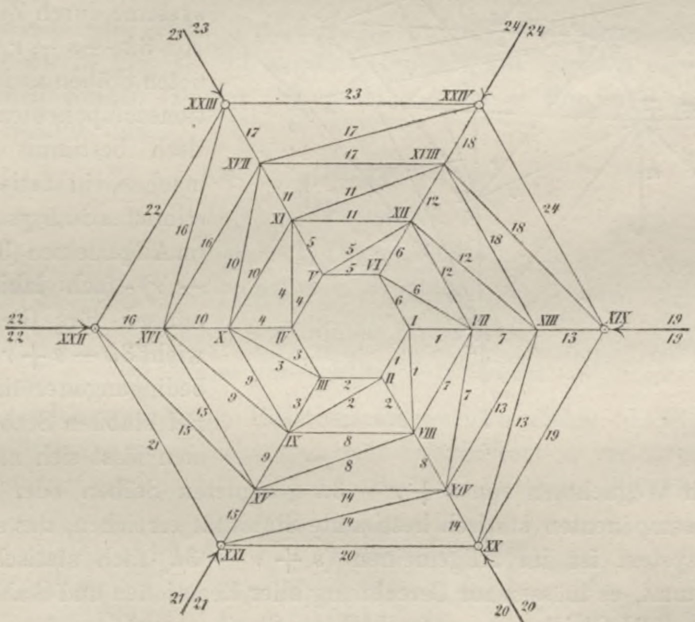

Fig. 18.

Die Zuweisung macht sich in praktischen Fällen sehr leicht und übersichtlich, wenn man die Knotenpunkte mit lateinischen, die zugewiesenen Stäbe und Reactionscomponenten mit den entsprechenden arabischen Ziffern bezeichnet. Wie schon angedeutet, sind in $s + r$ nur wirksame Stäbe und Reactionscomponenten zu berücksichtigen, man hat beispielsweise jeden Stab in s nur solange aufzunehmen, als er die unter Voraussetzung seiner Wirksamkeit auf ihn entfallende Beanspruchung S aushalten kann. Dagegen darf ein Stab, der nur Zug aufzunehmen hat, durch einen genügend widerstandsfähigen Faden gebildet sein, ja wir können Stäbe und Fäden ganz weglassen, wenn nur die in obigen Formeln auftretenden Kräfte S wirksam bleiben. In diesem Falle entsteht ein Punktsystem der in §§ 72—76 betrachteten Art und man kann also auch von statisch bestimmten und statisch unbestimmten, stabilen und labilen Punktsystemen sprechen. Bei stabilen Punktsystemen können Bewegungen der Systempunkte nur unter Ueberwindung von Stabkräften S vorkommen, bei labilen Punktsystemen sind auch andere Bewegungen möglich.

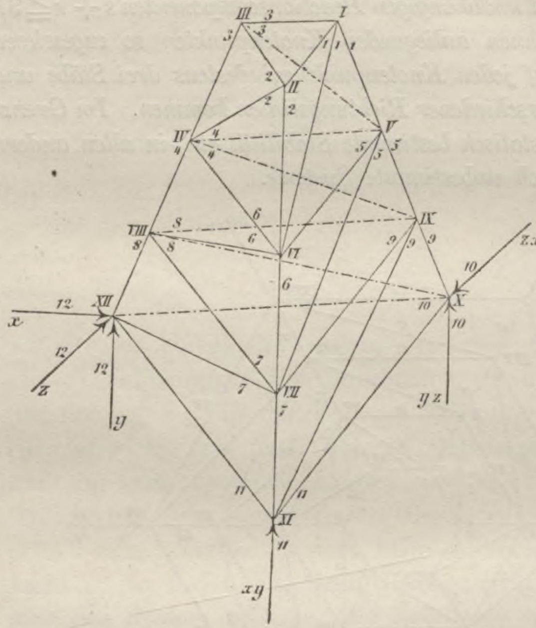

Fig. 19.

Nach a) lassen sich statisch bestimmte Stabsysteme durch Zufügen von $3k - s - r$ geeigneten Stäben und Reactionscomponenten statisch bestimmt stabil machen, ein statisch bestimmtes Stabsystem ist im Allgemeinen $(3k - s - r)$-fach labil, es müssen fürs Gleichgewicht $3k - s + r$ Lagebedingungen erfüllt sein. Bei stabilen Stabsystemen lässt sich nach b) durch Wegnehmen von $s + r - 3k$ geeigneten Stäben oder Reactionscomponenten statisch bestimmte Stabilität erreichen, das stabile Stabsystem ist im Allgemeinen $(s + r - 3k)$-fach statisch unbestimmt, es müssen zur Berechnung aller Reactionen und Stabkräfte $s + r - 3k$ Gleichungen ausserhalb der Statik gesucht werden. Jedes Stabsystem, welches weder den Bedingungen a) noch den Bedingungen b) genügt, ist theilweise statisch bestimmt labil, theilweise statisch unbestimmt stabil, kann aber natürlich auch statisch-bestimmt-stabile Stabgruppen enthalten.

Bei Untersuchung ebener Stabsysteme (wenn alle Stabaxen und äusseren Kräfte stets in gleicher Ebene liegen) kommen für jeden Knotenpunkt nur zwei statische Bedingungsgleichungen in Betracht, weshalb dann oben überall $2k$ an Stelle von $3k$ und in den Sätzen *a*) *b*) „zwei Stäbe“ an Stelle von „drei Stäbe“ gesetzt werden kann. Ebenso sind im gleichen Falle die Reactionen schon durch eine oder zwei Componenten bestimmt, jenachdem der gestützte Knotenpunkt frei verschiebbar ist oder festliegt.

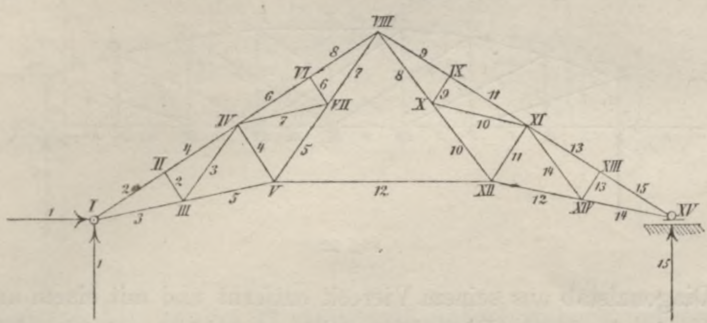

Fig. 20.

Fassen wir einige Beispiele ins Auge. Ein abgestumpftes n-Kant der in Fig. 18, 19 angedeuteten Art mit geraden oder gebrochenen Kanten (Pfeiler, Kuppeln) hat bei m Ringen $k = nm$ Knotenpunkte und

$$\begin{array}{ll} & nm \text{ Ringstäbe,} \\ & n(m-1) \text{ Kantenstäbe,} \\ & n(m-1) \text{ Diagonalstäbe,} \\ \hline \text{im Ganzen} & s = n(3m-2) \text{ Stäbe.} \end{array}$$

Es sind also zur statisch bestimmten Stabilität

$$3k - s = nm - n(3m-2) = 2n$$

von einander unabhängige Reactionscomponenten nöthig. In Fig. 18 ist die Stützung so gedacht, dass jede Stützenreaction von zwei unabhängigen Componenten abhängt. Bei dem Dreikant Fig. 19 soll

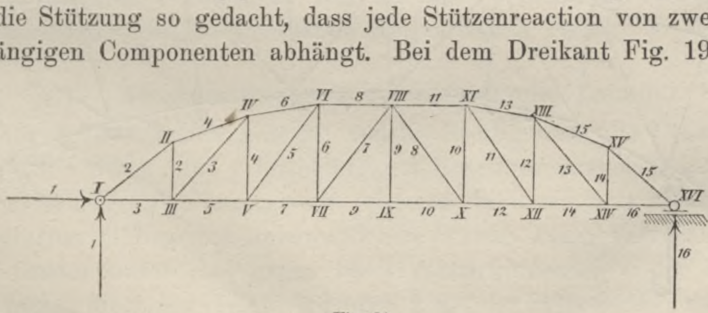

Fig. 21.

der Knotenpunkt XII festliegen, während X auf einer Linie und XI auf einer Fläche reibungslos gleitet. Die Zuweisung der Stäbe und Reactionscomponenten zeigt, dass die Anordnung derselben eine richtige ist. Es gilt dies auch noch, wenn beliebige Diagonalstäbe ihre Stellung im Viereck wechseln. Dagegen entsteht durch Zufügen eines weiteren Stabes oder einer weiteren Reactionscomponente ein statisch-unbestimmt-stabiles System und durch Wegnehmen eines solchen Elements ein statisch-bestimmt-labiles System. Wird

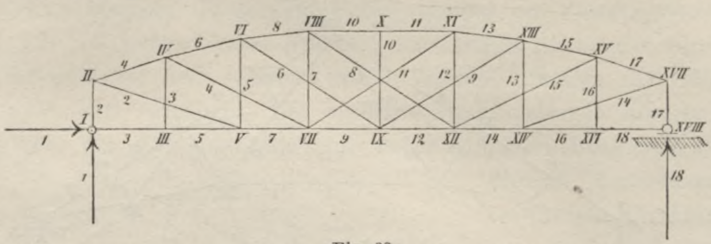

Fig. 22.

ein Diagonalstab aus seinem Viereck entfernt und mit einem andern kreuzweise in dessen Viereck gestellt, so erhält man ein statisch-unbestimmt-labiles Stabsystem. — Läuft das n-Kant in einen Knotenpunkt aus (Thurmdächer, Kuppeln), dann haben wir bei m Ringen $k = nm + 1$ Knotenpunkte, sowie

$$\begin{array}{lll} & nm & \text{Ringstäbe,} \\ & nm & \text{Kantenstäbe,} \\ & n(m-1) & \text{Diagonalstäbe,} \\ \hline \text{zusammen} & s = n(3m-1) & \text{Stäbe.} \end{array}$$

Das Stabsystem lässt sich durch

$$3k - s = 3(nm + 1) - n(3m - 1) = n + 3$$

nnabhängige Reactionscomponenten statisch-bestimmt-stabil machen.

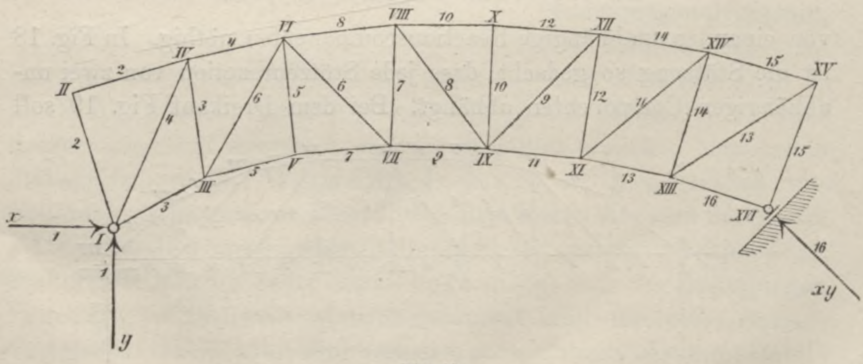

Fig. 23.

In Fig. 19 können alle Stäbe und Reactionscomponenten bleiben, da hier $n + 3 = 6$ ist und die hinzukommenden drei Stäbe sich dem neuen Knotenpunkte zuweisen lassen, in Fig. 18 verlangt die statisch-bestimmte Stabilität den Wegfall von drei Stäben oder

Reactionscomponenten. Die Auswahl kann verschieden getroffen werden, über die Richtigkeit entscheidet die Zuweisung. — Von den ebenen Stabsystemen Fig. 20—30 sind 20—23, 25, 26, 28 statisch-

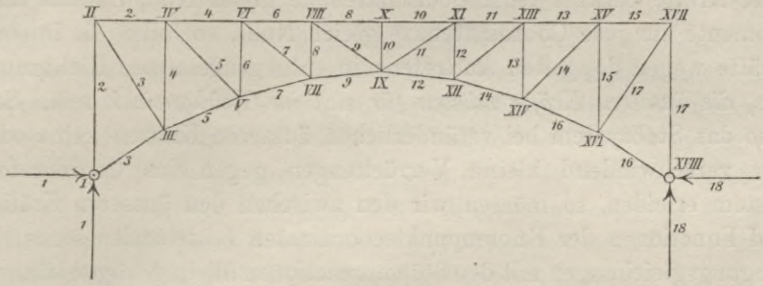

Fig. 24.

bestimmt stabil, 24 und 27 stabil und einfach statisch unbestimmt, 29 statisch-bestimmt und einfach labil, jede nicht senkrechte Kraft würde diesen Stab über die Stützen wegschieben. Das Stabsystem

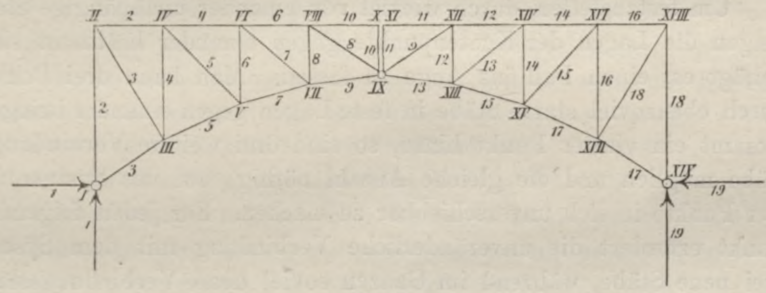

Fig. 25.

Fig. 30 ist bei s Stäben statisch-bestimmt und $(s - 2)$-fach labil, für $s = 2$ und 1 entstehen Fig. 26 und 27 und für $s = \infty$ die statisch-bestimmte, ∞-fach labile Kette (Faden, Seile).

§ 79. **Aeussere und innere Stabilität und Labilität.**

In § 78 hat sich gezeigt, welche Bedingungen die Gesammtheit der s Stäbe und r unabhängigen Reactionscomponenten eines Stabsystems erfüllen muss, wenn letzteres stabil sein soll, wenn also bei starren Stäben und unbeweglichen Stützen keine Verrückungen der Knotenpunkte (bei gegen die l verschwindenden λ der Stäbe und gegen die x, y, z verschwindenden ξ, η, ζ der Stützen aber nur die hierdurch bedingten verschwindend kleinen Coordinatenänderungen aller Knotenpunkte) entstehen sollen. Es fragt sich nun, unter welchen Voraussetzungen das Stabsystem insbesondere *äusserlich stabil* und *innerlich stabil* ist, sodass es bei starren Stäben gegen das Coordinatensystem bezw. in sich selbst unverschiebbar bleibt.

Denkt man sich die sechs Bedingungsgleichungen angeschrieben, welche durch die am ganzen System wirkenden äusseren und inneren Kräfte im Falle des Gleichgewichts erfüllt sein müssen (Summe aller Kräfte parallel jeder Coordinatenaxe gleich Null, Summe aller Momente um jede Coordinatenaxe gleich Null), so fallen die inneren Kräfte wegen doppelten Auftretens in entgegengesetzten Richtungen aus, *die äusseren Kräfte müssen für sich im Gleichgewichte sein.* Soll also das Stabsystem bei veränderlichen äusseren Kräften keine oder nur verschwindend kleine Verrückungen gegen das Coordinatensystem erleiden, so müssen wir den zwischen den äusseren Kräften und Functionen der Knotenpunktscoordinaten bestehenden sechs Bedingungsgleichungen mit den Stützenreactionen allein genügen können, was nur der Fall ist, wenn die Stützenreactionen von mindestens sechs unabhängigen Componenten abhängen, die sich den sie enthaltenden Gleichungen so zuweisen lassen, dass auf jede derselben wenigstens eine Componente kommt.

Um festzustellen, durch wieviel von einander unabhängige Stablängen die Lagen der Knotenpunkte gegen einander bestimmt sind, genügt es, einen Fall ins Auge zu fassen. Man kann drei Punkte durch ebensoviel starre Stäbe in feste Lagen gegen einander bringen. Kommt ein vierter Punkt hinzu, so sind drei weitere Verbindungsstäbe möglich und die gleiche Anzahl nöthig, um das System der vier Punkte in sich unverschiebbar zu machen. Für jeden folgenden Punkt erfordert die unveränderliche Verbindung mit dem System drei neue Stäbe, während im Ganzen soviel neue Verbindungsstäbe möglich werden, als bereits Punkte vorhanden sind. Auf diese Weise entsteht folgendes Schema:

Anzahl der Punkte	Anzahl der nöthigen Stäbe	Anzahl der möglichen Stäbe
1	0	0
2	1	1
3	3	3
4	6	6
5	9	10
6	12	15
.	.	.
.	.	.
k	$3k - 6$	$k\frac{k-1}{2}$.

Der Ausdruck $3k - 6$ setzt $k \geqq 3$ voraus, für $k = 1, 2, 3, 4$ ist die Anzahl der nöthigen Stäbe gleich derjenigen der möglichen Stäbe.

In § 78 ergab sich, dass bei r unabhängigen Reactionscomponenten mindestens $s = 3k - r$ Stäbe dazu gehören, ein Stabsystem stabil zu machen. Oben fanden wir, dass mindestens $r = 6$ sein muss, wenn das System äusserlich stabil sein soll. Da stabile Stabsysteme nothwendig auch äusserlich stabil sind (§ 78), so enthalten erstere wenigstens $r = 6$ unabhängige Reactionscomponenten und höchstens $s = 3k - 6$ unabhängige Stablängen. Beide Grenzzahlen treten im Falle innerer Stabilität ein. Für $s < 3k - 6$ haben wir innerlich labile Stabsysteme und sollen dieselben im Ganzen stabil werden, so muss zur Erfüllung der Bedingung $s + r \geqq 3k$ die Anzahl der unabhängigen Reactionscomponenten $r > 6$ sein. Wir können aussprechen: *Ein Stabsystem ist äusserlich stabil, wenn $r \geqq 6$ unabhängige Reactionscomponenten wirksam sind, welche sich den nicht senkrecht dazu liegenden Coordinatenaxen und Coordinatenebenen so zuweisen lassen, dass auf jede derselben wenigstens eine Componente kommt.* — *Ein Stabsystem ist innerlich stabil, falls es stabil erscheint* (§ 78), *wenn die zur äusseren Stabilität nöthigen Reactionscomponenten sämmtlich und allein wirksam gedacht werden.* Beispielsweise haben wir nach Obigem stets ein innerlich stabiles System, wenn die Knotenpunkte sich so ordnen (etwa numeriren) lassen, dass die drei ersten die Ecken eines Stabdreiecks bilden und jeder folgende mit mindestens drei ihm vorhergehenden verbunden ist. Doch sind auch andere Anordnungen möglich (Fig. 19), da die Knotenpunkte nicht einzeln hinzuzukommen brauchen. Im Gegensatze zu innerer und äusserer Stabilität stehen *innere und äussere Labilität.*

Wir bezeichnen ein Stabsystem als *äusserlich statisch bestimmt* oder *äusserlich statisch unbestimmt*, jenachdem bei gegebenen äusseren Activkräften und bekannt gedachten Knotenpunktslagen die Stützenreactionen (unabhängig von den Gesetzen der inneren Kräfte) durch die Statik allein bestimmt sind oder nicht. Ein statisch bestimmtes Stabsystem ist dann natürlich auch äusserlich statisch bestimmt. Dagegen kann ein innerlich stabiles System im Allgemeinen nur dann zugleich äusserlich stabil und statisch bestimmt sein, wenn gerade sechs in oben erwähnter Art zuweisbare Reactionscomponenten existiren. Denn die Statik liefert uns für innerlich stabile Systeme nur sechs von den inneren Kräften unabhängige Gleichungen. Die Stützenreactionen eines Stabsystems mit mehr als sechs unabhängigen Reactionscomponenten lassen sich also nur in Fällen innerer Labilität aus Beziehungen der Statik allein berechnen. Dies gilt auch für solche feste Körper, welche im Ganzen innerlich stabile Punktsysteme bilden. Um die innere Labilität zu erreichen, kann man constructive Mittel, wie Gelenke, Gleitungen u. s. w. einschalten, womit neue statische Beziehungen gewonnen werden. Kleine Verrückungen der Knotenpunkte, welche in den statischen Gleichungen verschwinden, sind ohne in Betracht kommenden Einfluss auf die Stützenreactionen äusserlich statisch bestimmter Stabsysteme.

Für Untersuchungen ebener Stabsysteme (wenn alle Stabaxen und äusseren Kräfte stets in gleicher Ebene bleiben) kommen in obigem Schema der Reihe nach nur

$$0 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad . \quad . \quad 2k - 3 \text{ nöthige Stäbe}$$

und zwischen den äusseren Kräften nur drei Bedingungsgleichungen in Betracht, sodass auch in den zwei letzten Absätzen überall $2k - 3$ an Stelle von $3k - 6$, „mindestens zwei“ an Stelle von „mindestens drei“ und „drei“ anstatt „sechs“ gesetzt werden können.

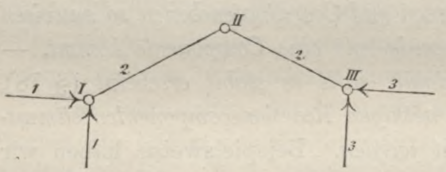

Fig. 26.

Betrachten wir noch die schon in § 78 vorgeführten Beispiele. Das abgestumpfte n-Kant Fig. 18, 19 erfordert zur statisch-bestimmten Stabilität $2n$ unabhängige Reactionscomponenten. Da nun ein statisch-bestimmtes Stabsystem nur bei sechs unabhängigen Reactionscomponenten (ebene Systeme bei 3) innerlich stabil sein kann, so ist das Dreikant Figur 19 innerlich stabil, während für $n > 3$ ein $(n - 3)$-fach innerlich labiles System entsteht. Wollten wir in diesem Falle durch Zufügen von Stäben innere Stabilität erreichen, so würde das n-Kant äusserlich $(2n - 6)$-fach statisch-unbestimmt werden. — Läuft das statisch-bestimmt-stabile n-Kant in eine Spitze aus, womit $n + 3$ unabhängige Reactionscomponenten existiren, so haben wir wieder für $n = 3$ neben der bei stabilen Stabsystemen immer vorhandenen äusseren Stabilität auch innere Stabilität, für $n > 3$ dagegen innere Labilität, das Stabsystem wird nur durch die über sechs hinaus vorhandenen unabhängigen Reactionscomponenten vor inneren Verschiebungen bewahrt. — Von den ebenen Stabsystemen Fig. 20—30 sind 20—24, 27, 28 äusserlich und innerlich stabil, 25, 26, 30 äusserlich stabil und innerlich labil, 29 äusserlich labil und innerlich stabil. Die

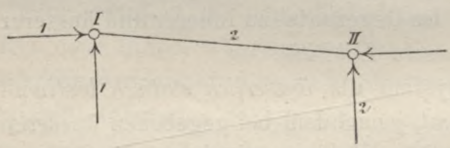

Fig. 27.

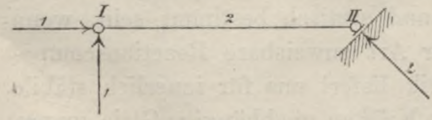

Fig. 28.

selten nöthige Zuweisung der Reactionscomponenten zu den Coordinatenaxen und Coordinatenebenen ist in Fig. 19, 23 beispielsweise angedeutet. Die innere Stabilität von 21, 23, 24 erkennt man auch ohne den Nachweis der Stabilität (bei nur drei unabhängigen Reactionscomponenten) sofort daran, dass von den auf das erste Stabdreieck nach rechts folgenden Knotenpunkten jeder mit zwei ihm vorhergehenden verbunden ist. Die Systeme 20—23, 25, 26, 28—30 sind äusserlich statisch-besimmt und demgemäss 25, 26, 30 innerlich labil. Fig. 24 und 27 zeigen äusserlich einfach

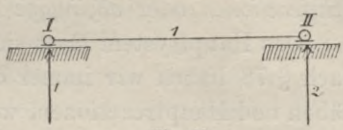

Fig. 29.

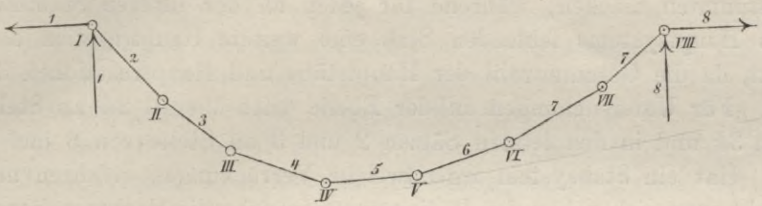

Fig. 30.

statisch-unbestimmte Systeme, doch liesse sich durch Entfernung einer beliebigen Diagonale aus 24 ein statisch-bestimmt-stabiles System herstellen.

§ 80. Nothwendige, überzählige und abgängige Stäbe und Reactionen.

Nach §§ 73, 78 ist die Gleichgewichtslage eines Stabsystems von k Knotenpunkten bei r Reactionsbedingungen oder unabhängigen Reactionscomponenten durch diese und $3k - r$ von einander unabhängige Knotenpunktscoordinaten bestimmt. An Stelle dieser $3k$ Unabhängigvariabeln können auch $3k$ von einander unabhängige Functionen derselben treten, beispielsweise a Reactionscomponenten und $3k - a$ Stablängen. Ob die fraglichen Grössen von einander unabhängig sind, hängt eben davon ab, ob sie die Lage des Stabsystems vollständig bestimmen. Dies trifft für a Reactionscomponenten und $3k - a$ Stablängen nach § 78 dann zu, wenn dieselben zusammen, ohne sonstige Reactionen und Stäbe ein statisch-bestimmt-stabiles System erzeugen. Wir werden deshalb bei beliebigen Stabsystemen von k Knotenpunkten und r unabhängigen Reactionscomponenten solche a Reactionscomponenten und $3k - a$ Stäbe, welche für sich ein statisch-bestimmt-stabiles System, das *Hauptsystem*, ausmachen, *Hauptstäbe* und *Hauptreactionen* oder auch *nothwendige Stäbe und Reactionen* nennen. Die bei statisch-unbestimmten Stabsystemen darüber hinaus vorhandenen Stäbe und Reactionscomponenten sollen *Reststäbe und Restreactionen* oder *überzählige Stäbe und Reactionen* und die bei labilen Stabsystemen daran fehlenden *Fehlstäbe* und *Fehlreactionen* oder *abgängige Stäbe und Reactionen* heissen.

Das Hauptsystem lässt sich in vielen Fällen verschieden wählen. Nach § 78 haben wir immer dann eine richtige Auswahl von Hauptstäben und Hauptreactionen, wenn sich dieselben den ihnen anliegenden Knotenpunkten so zuweisen lassen, dass auf jeden der letzteren gerade drei Stäbe und Reactionen verschiedener Richtungslinien kommen. Unter den a Hauptreactionen sind selbstverständig auch diejenigen sechs, welche das Hauptsystem zu einem äusserlich statischbestimmten machen, während für jeden an der inneren Stabilität des Hauptsystems fehlenden Stab eine weitere Hauptreaction auftritt, da die Gesammtzahl der Hauptstäbe und Hauptreactionen $3k$ ist. Für Untersuchungen in der Ebene tritt überall $2k$ an Stelle von $3k$ und in den letzten Sätzen 2 und 3 an Stelle von 3 und 6.

Hat ein Stabsystem irgendwelche Verrückungen erfahren und denkt man sich neben den Bedingungen, welche die Hauptreactionen bestimmen, die Längenänderungen der gewählten Hauptstäbe bekannt, so sind die neuen Längen und Lagen aller Stäbe bestimmt. Auch die Entfernungen l von nicht durch Hauptstäbe verbundenen Knotenpunkten oder von Knotenpunkten zu ausserhalb des Stabsystems gelegenen, bezüglich des Coordinatensystems festen Punkten sind im Allgemeinen geändert worden. Die Gesammtänderung einer solchen Entfernung $AB = l$ setzt sich zusammen aus den Aenderungen, welche die Längenänderungen aller Hauptstäbe bei Einhaltung der Hauptreactionsbedingungen einzeln ergeben. Die Aenderung Δl, welche von der Längenänderung Δs des Hauptstabes s herrührt, findet sich, wenn man diesen allein seine Länge s ändern lässt und zusieht, welchen Einfluss dies auf l ausübt. Alle anderen Hauptstäbe sind dabei als starr zu denken, und alle überzähligen Stäbe und Reactionen dürfen wegbleiben. Die Beziehung zwischen Δl und Δs kann auf geometrischem oder statischem Wege erhalten werden; wir wollen den letzteren, zuerst von *Mohr* betretenen wählen.

Es handle sich um Verrückungen, welche gegenüber den anfänglichen Coordinaten der Knotenpunkte verschwinden. Man denke sich an unserem statisch-bestimmt-stabilen Hauptsystem nur zwei Kräfte angebracht, welche bezw. in A gegen B und in B gegen A wirkend nach Eintritt des Gleichgewichts vom Werthe Q sind. Hierdurch können Hauptreactionen und in allen Hauptstäben innere Kräfte entstehen. Für den Stab s möge die entsprechende Kraft den Werth S haben. Dann folgt aus § 72, (13) oder § 73, (5)

(1) $$Q\Delta l + S\Delta s = \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta),$$

worin sich die Summe rechts auf alle durch Q erzeugten Hauptreactionen bezieht. Ist R die resultirende Reaction gegen einen gestützten Knotenpunkt, ϱ die resultirende Verrückung desselben und (ϱR) der Winkel, welchen die Richtung von ϱ mit der von R einschliesst (§§ 3, 4), dann lässt sich (1) auch schreiben

(2) $$Q\Delta l + S\Delta s = \sum R\varrho \cos(\varrho R).$$

Wir wollen speciell den alle Anwendungen umfassenden Fall betrachten, dass die rechte Seite von (2) gleich Null ist. Er tritt beispielsweise ein, wenn die durch Hauptreactionen gestützten Knotenpunkte festliegen oder nur senkrecht zu den Resultanten der Hauptreactionen verschiebbar sind; ferner immer dann, wenn $AB = l$ die Verbindungsgerade zweier Knotenpunkte ist, sodass die Q innere Kräfte darstellen oder als solche behandelt werden können und nach § 79 an unserem äusserlich statisch bestimmten Stabsysteme keine Stützenreactionen R entstehen. Mit

(3) $$S = \pi Q, \qquad \text{das heisst} \qquad \pi = S \text{ für } Q = 1,$$

folgt dann aus (2)

(4) $$\Delta l = -\pi \Delta s.$$

Damit ist bekannt, welchen Einfluss die Längenänderung eines Hauptstabes auf die Entfernung $AB = l$ ausübt. Erleiden nun beliebig viele Hauptstäbe Längenänderungen, so entspricht jedem einzelnen s ein besonderes π und wir erhalten die ganze Aenderung von l

(5) $$\Delta l = -\sum \pi \Delta s,$$

worin die Summe rechts auf alle Hauptstäbe zu erstrecken ist. *Die einem bestimmten $AB = l$ entsprechenden Verhältnisszahlen π der einzeln Hauptstäbe ergeben sich als Beanspruchungen der letzteren, wenn an dem durch die Hauptstäbe und Hauptreactionen allein gebildeten statich-bestimmt-stabilen Syteme lediglich zwei Kräfte $Q = 1$ angebracht werden, welche in der Verbindungsgeraden AB auf Annäherung der Punkte A, B wirken.* Dabei ist es gleichgültig, ob man sich die Q als innere Kräfte ziehend oder als äussere drückend vorstellt, und umgekehrt. Liegt einer der Punkte A, B ausserhalb unseres Stabsystems, so hat die ihn angreifende Kraft Q natürlich keinen Einfluss auf die Stabkräfte.

Gleichung (5) gilt für alle genügend kleinen Verrückungen, die wir annehmen wollen; sie sagt nur, dass, wenn die Längenänderungen der Hauptstäbe die in der Summe rechts aufgenommenen Werthe

Δs hätten, das angegebene Δl resultiren würde. Nehmen wir nun einmal die Längenänderungen pro anfänglicher Längeneinheit, die specifischen Längenänderungen, für alle Hauptstäbe gleich gross an. Ist damit nothwendig eine gleiche specifische Längenänderung von l verbunden, so folgt durch Multiplication von (3) mit dem constanten $\frac{l}{\Delta l} = \frac{s}{\Delta s}$

$$(6) \qquad l = -\sum \pi s\,.$$

Lässt sich also in einem Falle entscheiden, dass gleiche specifische Längenänderungen aller Hauptstäbe ohne ebensolche Aenderung von l nicht möglich wären, so weiss man, dass zwischen l und den Längen der Hauptstäbe die Beziehung 6) besteht. *Dies trifft immer dann zu, wenn das Hauptsystem innerlich stabil ist und l die Entfernung zweier Knotenpunkte oder die Projection einer solchen bedeutet;* denn innerlich stabile Stabsysteme bleiben sich bei gleichen specifischen Längenänderungen aller Stäbe ähnlich.

Welche Auswahl von Hauptstäben und Hauptreactionen wir auch treffen mögen, so muss natürlich (5) und eventuell auch (6) für ein bestimmtes l immer das gleiche Resultat liefern. Unsere Ableitung gilt für verschwindend kleine Verrückungen beliebiger Stabsysteme, mögen dieselben statisch bestimmt oder unbestimmt, stabil oder labil sein, doch ist zu beachten, dass die Verrückungen endlichen Aenderungen der äusseren Kräfte gegenüber im Allgemeinen nur dann verschwindend klein sind, wenn wir stabiles Stabsystem haben.

§ 81. **Gezogener oder gedrückter Stab.**

An einem prismatischen Stabe der Länge l und des Querschnitts F wirken als äussere Kräfte lediglich zwei auf die Endflächen gleichmässig vertheilte Kräfte $S = \sigma F$ parallel der Stabaxe. Dieselben können Zug oder Druck bedeuten, positiv oder negativ sein. Es handelt sich um Spannungen, Verrückungen und Längenänderungen des Stabes nach Eintritt des Gleichgewichts.

Wir nehmen in fester Lage gegen die anfängliche Gruppirung der Körperpunkte ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, dessen x-Axe mit der Stabaxe zusammenfällt, fassen die Spannungen im Sinne des IV. Abschnitts als Functionen des anfänglichen Orts auf und haben dann als Lösung der Bewegungsgleichungen § 35, (1) in jedem Stabpunkte x, y, z

$$(1) \quad X_x = \sigma\,, \quad Y_y = Z_z = X_y = Y_x = Y_z = Z_y = Z_x = X_z = 0.$$

Diese Lösung werde ins Auge gefasst, sie ist nach § 73 die einzig mögliche. Die Spannungen sind darnach Potentialspannungen, so dass die Beziehungen des II. Abschnitts gelten (§ 36).

Nach § 13 hat man für jedes Flächenelement der anfänglichen Normalenrichtung n die Spannungscomponenten in den Richtungen x, y, z

$$(2) \qquad X_n = \sigma \cos(nx), \qquad Y_n = 0, \quad Z_n = 0,$$

die Normalspannung und Spannungscomponente in beliebiger Richtung s

$$(3) \qquad N_n = \sigma \cos^2(nx), \qquad S_n = \sigma \cos(nx) \cos(sx),$$

die Totalspannung und Transversalspannung

$$(4) \qquad R_n = \sigma \cos(nx), \qquad T_n = \sigma \cos(nx) \sin(nx).$$

Von den Ausdrücken (4) sind nur die Absolutwerthe massgebend. Die Gleichungen (1) bis (4) gelten bei beliebigem Stabmaterial, wenn nur die Spannungen in der vorausgesetzten Weise Functionen der anfänglichen Coordinaten und Normalenrichtungen ihrer Flächenelemente sind.

Der Stab möge jetzt aus irgend einem isotropen Material bestehen. Dann folgt nach § 49, dessen Beziehungen auch nach der theoretischen Ableitung des VII. Abschnitts für Potentialspannungen isotroper Körper gelten, die Normalverschiebung der Richtung n

$$(5) \qquad n_n = \frac{N_n + p}{2G} = \frac{p + \sigma \cos^2(nx)}{2G},$$

woraus mit $n = x, y, z$

$$(6) \qquad \begin{cases} x_x = \dfrac{p + \sigma}{2G} = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}, \\[2ex] y_y = \dfrac{p}{2G} = \dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \\[2ex] z_z = \dfrac{p}{2G} = \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}. \end{cases}$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt die Dilatation an beliebiger Stabstelle

$$(7) \qquad \omega = \frac{3p + \sigma}{2G}.$$

Selbstverständlich kann man auch die übrigen für Potentialspannungen beliebiger und isotroper Körper gegebenen Formeln für den vorliegenden Fall specialisiren.

Wir wollen jetzt weiter voraussetzen, dass die Temperaturänderung τ für den ganzen Stab von gleichem Werthe ist, womit p constant wird. Der Ursprung der Coordinaten möge in einer der Endflächen liegen. Dann ergibt die Integration von (6) die Verrückungen eines beliebigen Stabpunktes $m\,(x, y, z)$ in den Richtungen x, y, z

$$\xi = \frac{p+\sigma}{2G}x + \varphi(y,z),$$

$$\eta = \frac{p}{2G}y + \chi(z,x),$$

$$\zeta = \frac{p}{2G}z + \psi(x,y).$$

Da jedoch bei isotropem Material gleichen Ursachen (für Spannungen und Temperaturänderungen) gleiche Verrückungen entsprechen, so behält der Stab seine anfängliche Axe und ebenen Endflächen bei und wir erhalten

$$\text{(8)} \qquad \xi = \frac{p+\sigma}{2G}x, \qquad \eta = \frac{p}{2G}y, \qquad \zeta = \frac{p}{2G}z,$$

wonach

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0.$$

Auch aus unserer zweiten theoretischen Ableitung § 58 lassen sich (8) (9) ableiten. Dieselbe verlangt für Potentialspannungen (wenn nicht $\mathsf{P} + J\tau = 0$ ist) auch Potentialverschiebungen, das heisst

$$x_y = y_x, \qquad y_z = z_y, \qquad z_x = x_z.$$

Da aber nach § 58 für den Fall (1) auch

$$g_{xy} = x_y + y_x = 0, \qquad g_{yz} = y_z + z_y = 0, \qquad g_{zx} = z_x + x_z = 0,$$

so folgt

$$x_y = y_x = y_z = z_y = z_x = x_z = 0,$$

was mit (9) übereinstimmt und die zuerst angeschriebenen Gleichungen für ξ, η, ζ wieder in (8) überführt.

Während der Längenänderung $d\lambda$ des Stabes hat man nach § 61, (14) mit (1) (6) die specifische Verschiebungsarbeit an jeder Stabstelle

$$\text{(10)} \qquad d\vartheta = \sigma\, d\frac{p+\sigma}{2G} = \sigma\frac{d\lambda}{l},$$

und die Verschiebungsarbeit für den ganzen Stab, wenn V das Anfangsvolumen bedeutet,

$$dD = d\vartheta \int dK = V d\vartheta = Fl\frac{\sigma d\lambda}{l} = S d\lambda.$$

Die der Längenänderung λ entsprechende Verschiebungsarbeit ist also

$$\text{(11)} \qquad D = \int_0^\lambda S d\lambda,$$

wobei die Aenderung des Gesammtvolumens

$$\text{(12)} \qquad \omega V = \frac{3p+\sigma}{2G}Fl = \frac{3pF+S}{2G}l.$$

Der Stab möge schliesslich durch einen isotropen festen Körper gebildet sein. Dann liefern die Erfahrungsformeln (§ 48) mit unbestimmten ε und unsere erste theoretische Ableitung mit (§ 57) $\varepsilon = 4$

$$(13)\qquad p = 2G\alpha\tau - \frac{\sigma}{\varepsilon + 1}, \qquad \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon} 2G = E,$$

wir erhalten die Verrückungen beliebiger Stabpunkte $m(x, y, z)$

$$(14)\qquad \begin{cases} \xi = \left(\alpha\tau + \frac{\sigma}{E}\right) x, \\ \eta = \left(\alpha\tau - \frac{\sigma}{\varepsilon E}\right) y, \\ \zeta = \left(\alpha\tau - \frac{\sigma}{\varepsilon E}\right) z, \end{cases}$$

die ganze Längenänderung des Stabes

$$(15)\qquad \lambda = \left(\alpha\tau + \frac{\sigma}{E}\right) l = \left(\alpha\tau + \frac{S}{EF}\right) l,$$

und die Verschiebungsarbeit

$$(16)\qquad D = \frac{lS^2}{2EF} + \alpha l \int_0^\tau S\, d\tau.$$

Das letzte Integral ist erst ausführbar, wenn man weiss, wie sich während der Entstehung von λ die Stabkraft S mit der Temperatur geändert hat.

Mit Rücksicht auf

$$(17)\qquad S = \left(\frac{\lambda}{l} - \alpha\tau\right) EF$$

lässt sich die Verschiebungsarbeit auch ausdrücken

$$(18)\qquad D = \frac{\lambda^2}{2l} EF - \alpha EF \int_0^\lambda \tau\, d\lambda.$$

Nach der zweiten theoretischen Ableitung wäre p durch § 59, (8) ausgedrückt, was aber für $\tau = 0$ keine und sonst nur verschwindend kleine Aenderungen von λ, D gegenüber (15) (16) zur Folge hat.

§ 82. **Beliebige stabile Systeme aus isotropen festen Stäben.**

Wie die Lagen und Beanspruchungen der Stäbe eines beliebigen (statisch bestimmten oder statisch unbestimmten, stabilen oder labilen) Stabsystems für den Fall des Gleichgewichts zu ermitteln sind, ist schon aus § 73 zu ersehen. Wir wollen jetzt die specielle Annahme machen, dass sämmtliche Stäbe prismatisch und durch isotrope feste Körper gebildet seien. Als anfänglicher Zustand werde ein Zustand vor Auftreten irgend welcher äusserer oder innerer Kräfte gewählt. Querschnitte, Material und Temperatur des spannungslosen Zustandes können für alle Stäbe verschieden sein.

Infolge äusserer Kräfte und für je einen ganzen Stab gleichmässiger Temperaturänderungen τ mögen Verrückungen der Knotenpunkte m entstehen, welche gegen deren anfängliche Coordinaten x_m, y_m, z_m verschwinden. Solche Verrückungen treten insbesondere als elastische Bewegungen von Stabsystemen ein, die sich den angebrachten äusseren Kräften gegenüber stabil verhalten. Nach Eintritt des Gleichgewichts seien an unserm Stabsystem von k Knotenpunkten s Stäbe wirksam und die Stützenreactionen durch r unabhängige Componenten bestimmt, so dass $3k - r$ von einander unabhängige Knotenpunktsverrückungen existiren.

Wie früher bezeichnen wir für einen beliebigen Knotenpunkt m die resultirenden Componenten der äusseren Kräfte in den Richtungen x, y, z durch X_m, Y_m, Z_m und die Beanspruchung eines von m nach dem Knotenpunkte $n\,(x_n\, y_n\, z_n)$ führenden Stabes der Länge l und des Querschnitts F durch $S = \sigma F$, womit σ die Stabkraft pro Quadrateinheit des Querschnitts, die *specifische Stabkraft* oder *Stabspannung* darstellt. Das Gleichgewicht am Knotenpunkte m verlangt dann (§ 73 oder § 78):

$$(1)\qquad \begin{cases} X_m + \sum\limits_m S\dfrac{x_n - x_m}{l} = 0, \\ Y_m + \sum\limits_m S\dfrac{y_n - y_m}{l} = 0, \\ Z_m + \sum\limits_m S\dfrac{z_n - z_m}{l} = 0, \end{cases}$$

worin sich die $\sum\limits_m$ auf alle in m eintreffenden Stäbe beziehen.

Da wir isotrope feste Stäbe vorausgesetzt haben, so ist nach § 81, (17)

$$(2)\qquad S = EF\left(\frac{\lambda}{l} - \alpha\tau\right)$$

oder mit Rücksicht auf § 72, (9)

$$(3)\qquad \begin{cases} S = \dfrac{EF}{l^2}\Big[(x_n - x_m)(\xi_n - \xi_m) + (y_n - y_m)(\eta_n - \eta_m) \\ \qquad\qquad + (z_n - z_m)(\zeta_n - \zeta_m)\Big]. \end{cases}$$

Eine solche Gleichung können wir für jeden der s Stäbe anschreiben, während $3k$ Gleichungen der Form (1) bestehen. Denken wir uns nun die S nach (3) in das Gleichungssystem (1) substituirt und die Temperaturänderungen τ gegeben, so haben wir $3k$ Gleichungen zur Berechnung der r unabhängigen Reactionen und $2k - r$ unabhängigen Verrückungen. Sind letztere aus ersteren bestimmt, dann folgen nach (3) auch sämmtliche Stabkräfte.

Während sich die vorstehende Berechnung stabiler und insbesondere statisch unbestimmter Stabsysteme durch Einfachheit des

Gedankengangs und Allgemeinheit auszeichnet, führen die Methoden der §§ 83 bis 85 in den meisten praktischen Fällen schneller zum Ziele. Bei statisch bestimmten Stabsystemen genügen die Gleichungen (1), um ohne Rücksicht auf (2) (3) alle Stabkräfte und Stützenreactionen bis auf verschwindend kleine Grössen genau zu berechnen, (doch besitzt die Ingenieurmechanik für diesen Zweck noch bequemere Methoden). *Die Knotenpunktsverrückungen, Temperaturänderungen und Stützenbewegungen haben also bei statisch bestimmten Stabsystemen keinen in Betracht kommenden Einfluss auf die Stabkräfte und Stützenreactionen.*

§ 83. Systeme mit überzähligen Stäben.

Durch Entfernung der überzähligen Stäbe und Reactionen eines statisch unbestimmt stabilen Stabsystems entsteht das statisch bestimmt-stabile Hauptsystem. Die Stabkräfte und Stützenreactionen des letzteren ergeben sich für beliebige äussere Kräfte ohne Rücksicht auf elastische Veränderungen. Wir legen uns nun die Frage vor, welchen Einfluss die hinzukommenden überzähligen Stabkräfte und Reactionen ausüben und welche Werthe sie selbst annehmen. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet die in § 80 gefundene Gleichung

(1) $$\Delta l = -\sum \pi \Delta s,$$

deren dort erwähnte Voraussetzungen wir anerkennen. Gleichung (1) gibt an, um wieviel sich die Entfernung $AB = l$ zweier Knotenpunkte oder eines Knotenpunktes und eines ausserhalb des Stabsystems gelegenen, hinsichtlich des Coordinatensystems festen Punktes während der Verrückungen ändert. Die Summe rechts bezieht sich auf alle Hauptstäbe, deren Längenänderungen die Δs und deren Beanspruchungen durch zwei in A und B auf Annäherung dieser Punkte wirkende Kräfte $Q = 1$ die π bedeuten. Zunächst handelt es sich um den Fall, dass das Hauptsystem lediglich durch Entfernung überzähliger Stäbe entsteht (mit welchen jedoch unter Umständen auch Reactionen ausser Wirksamkeit treten können), worauf im folgenden Paragraphen auch überzählige Reactionen berücksichtigt werden sollen.

Das anfangs spannungslose Stabsystem werde durch beliebige äussere Kräfte und Wärme beeinflusst. Hierdurch entstehen elastische Längenänderungen und Beanspruchungen aller Stäbe. Wir setzen für die Hauptstäbe

die anfänglichen Längen	s_1	s_2	s_3	...
die ganzen Beanspruchungen	S_1	S_2	S_3	...,

für die überzähligen Stäbe

die anfänglichen Längen s_{I} s_{II} s_{III} ...

die ganzen Beanspruchungen S_{I} S_{II} S_{III} ...

Erhalten dann die π, welche einem bestimmten überzähligen Stabe entsprechen, den Index des letzteren neben dem ihres Hauptstabes, so folgen aus (1)

$$\Delta s_{\mathrm{I}} = -\sum \pi_{\mathrm{I}}\, \Delta s = -\pi_{\mathrm{I}_1}\, \Delta s_1 - \pi_{\mathrm{I}_2}\, \Delta s_2 - \pi_{\mathrm{I}_3}\, \Delta s_3 - \cdots$$

$$\Delta s_{\mathrm{II}} = -\sum \pi_{\mathrm{II}}\, \Delta s = -\pi_{\mathrm{II}_1}\, \Delta s_1 - \pi_{\mathrm{II}_2}\, \Delta s_2 - \pi_{\mathrm{II}_3}\, \Delta s_3 - \cdots$$

$$\Delta s_{\mathrm{III}} = -\sum \pi_{\mathrm{III}}\, \Delta s = -\pi_{\mathrm{III}_1} \Delta s_1 - \pi_{\mathrm{III}_2} \Delta s_2 - \pi_{\mathrm{III}_3} \Delta s_3 - \cdots$$

. . . .

Die einzelnen Summen sind auf alle Hauptstäbe zu erstrecken. Da nun mit der Bezeichnung

$$e = \frac{s}{EF} \tag{2}$$

nach 81, (15) für jeden Stab

$$\Delta s = Se + \alpha \tau s, \tag{3}$$

so geht das angeschriebene Gleichungssystem in das nachstehende über

$$S_{\mathrm{I}}\, e_{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{I}}\, \tau_{\mathrm{I}}\, s_{\mathrm{I}} = -\pi_{\mathrm{I}_1}\, (S_1 e_1 + \alpha_1 \tau_1 s_1) - \pi_{\mathrm{I}_2}\, (S_2 e_2 + \alpha_2 \tau_2 s_2) - \cdots$$

$$S_{\mathrm{II}}\, e_{\mathrm{II}} + \alpha_{\mathrm{II}}\, \tau_{\mathrm{II}}\, s_{\mathrm{II}} = -\pi_{\mathrm{II}_1}\, (S_1 e_1 + \alpha_1 \tau_1 s_1) - \pi_{\mathrm{II}_2}\, (S_2 e_2 + \alpha_2 \tau_2 s_2) - \cdots$$

$$S_{\mathrm{III}} e_{\mathrm{III}} + \alpha_{\mathrm{III}} \tau_{\mathrm{III}} s_{\mathrm{III}} = -\pi_{\mathrm{III}_1} (S_1 e_1 + \alpha_1 \tau_1 s_1) - \pi_{\mathrm{III}_2} (S_2 e_2 + \alpha_2 \tau_2 s_2) - \cdots$$

. . . .

Die Beanspruchungen der Hauptstäbe s_1, s_2, s_3, ..., welche für die angenommenen äusseren Kräfte eintreten würden, wenn keine überzähligen Stäbe vorhanden wären, seien A_1, A_2, A_3, ... Hierzu kommen nun noch die Beanspruchungen infolge der Kräfte S_{I}, S_{II}, S_{III}, ... in den überzähligen Stäben, so dass die ganzen Beanspruchungen der Hauptstäbe betragen

$$\left|\begin{array}{l} S_1 = A_1 + S_{\mathrm{I}} \pi_{\mathrm{I}_1} + S_{\mathrm{II}}\, \pi_{\mathrm{II}_1} + S_{\mathrm{III}}\, \pi_{\mathrm{III}_1} + \cdots \\ S_2 = A_2 + S_{\mathrm{I}} \pi_{\mathrm{I}_2} + S_{\mathrm{II}}\, \pi_{\mathrm{II}_2} + S_{\mathrm{III}}\, \pi_{\mathrm{III}_2} + \cdots \\ S_3 = A_3 + S_{\mathrm{I}} \pi_{\mathrm{I}_3} + S_{\mathrm{II}}\, \pi_{\mathrm{II}_3} + S_{\mathrm{III}}\, \pi_{\mathrm{III}_3} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die darüber stehenden Beziehungen folgen zur Bestimmung der Beanspruchungen der überzähligen Stäbe die zuerst von *Mohr* (Zeitschr. d. Hannöv. Arch.- u. Ing.-Vereins 1874) gegebenen Gleichungen

$$
(5)\left\{\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}}\, e_{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{I}}\, \tau_{\mathrm{I}}\, s_{\mathrm{I}} &= -\sum \pi_{\mathrm{I}}\, \alpha\tau s - \sum \pi_{\mathrm{I}}\, eA - S_{\mathrm{I}} \sum \pi_{\mathrm{I}}\pi_{\mathrm{I}} e \\
&\quad - S_{\mathrm{II}} \sum \pi_{\mathrm{I}}\pi_{\mathrm{II}} e - S_{\mathrm{III}} \sum \pi_{\mathrm{I}}\, \pi_{\mathrm{III}} e - \cdots \\
S_{\mathrm{II}}\, e_{\mathrm{II}} + \alpha_{\mathrm{II}}\, \tau_{\mathrm{II}}\, s_{\mathrm{II}} &= -\sum \pi_{\mathrm{II}}\, \alpha\tau s - \sum \pi_{\mathrm{II}} eA - S_{\mathrm{I}} \sum \pi_{\mathrm{II}}\pi_{\mathrm{I}} e \\
&\quad - S_{\mathrm{II}} \sum \pi_{\mathrm{II}}\pi_{\mathrm{II}} e - S_{\mathrm{III}} \sum \pi_{\mathrm{II}}\, \pi_{\mathrm{III}} e - \cdots \\
S_{\mathrm{III}} e_{\mathrm{III}} + \alpha_{\mathrm{III}} \tau_{\mathrm{III}} s_{\mathrm{III}} &= -\sum \pi_{\mathrm{III}}\, \alpha\tau s - \sum \pi_{\mathrm{III}} eA - S_{\mathrm{I}} \sum \pi_{\mathrm{III}}\pi_{\mathrm{I}} e \\
&\quad - S_{\mathrm{II}} \sum \pi_{\mathrm{III}}\pi_{\mathrm{II}} e - S_{\mathrm{III}} \sum \pi_{\mathrm{III}}\pi_{\mathrm{III}} e - \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.
$$

Die Summen sind auf alle Hauptstäbe auszudehnen. Man hat soviel Gleichungen der Form (4) als Hauptstäbe und soviel der Form (5) als überzählige Stäbe existiren.

Die Berechnung der Stabkräfte eines statisch unbestimmt stabilen Stabsystems mit überzähligen Stäben kann nun bei bekannten Stabquerschnitten und beliebigen äusseren Kräften und Temperaturänderungen τ etwa in nachstehender Reihenfolge stattfinden.

a) Auswahl der überzähligen Stäbe, gewöhnlich mit Rücksicht auf möglichst bequeme Berechnung des verbleibenden Hauptsystems;

b) Annahme der Kräfte $Q = 1$, welche die durch den überzähligen Stab s_{I} verbundenen Knotenpunkte einander zu nähern suchen, Berechnung der durch die Q allein bedingten Stabkräfte $S = \pi_{\mathrm{I}}$ des Hauptsystems und Wiederholung dieses Verfahrens für alle überzähligen Stäbe;

c) Bildung der die A und τ nicht enthaltenden Summen $\sum$ in (5);

d) Berechnung der Beanspruchungen A, welche in den Hauptstäben durch die wirklichen äusseren Kräfte für den Fall eintreten, dass keine überzähligen Stäbe vorhanden sind;

e) Berechnung der ganzen Beanspruchungen der überzähligen Stäbe nach (5);

f) Berechnung der ganzen Beanspruchungen der Hauptstäbe nach (4).

Will man die von den äusseren Activkräften herrührenden Stabkräfte unabhängig von Temperatureinflüssen berechnen, so hat man in (5) die τ enthaltenden Glieder wegzulassen; bei Berechnung der Temperatureinflüsse allein würden in (5) die mit A behafteten Summen gleich Null zu setzen sein (§ 82). Kommen verschiedene Fälle äusserer Activkräfte in Frage, so brauchen nur die Berechnungen *d*) — *f*) wiederholt zu werden; für verschiedene Temperaturfälle genügt die Wiederholung von *e*) und *f*), da die Temperaturänderungen ohne Einfluss auf die A sind.

Haben wir es mit einem innerlich stabilen Stabsystem zu thun, so ergeben sich speciell für gleiche Temperaturänderungen τ und gleiche Ausdehnungscoefficienten α aller Stäbe aus (5) mit Rücksicht auf § 80, (6) die einfacheren Beziehungen

$$(6)\left\{\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}}\; e_{\mathrm{I}} &= -\sum \pi_{\mathrm{I}}\; e\,A - S_{\mathrm{I}}\sum \pi_{\mathrm{I}}\pi_{\mathrm{I}}\,e - S_{\mathrm{II}}\sum \pi_{\mathrm{I}}\pi_{\mathrm{II}}\,e\\
&\qquad - S_{\mathrm{III}}\sum \pi_{\mathrm{I}}\pi_{\mathrm{III}}\,e - \cdots,\\
S_{\mathrm{II}}\; e_{\mathrm{II}} &= -\sum \pi_{\mathrm{II}}\; e\,A - S_{\mathrm{I}}\sum \pi_{\mathrm{II}}\pi_{\mathrm{I}}\,e - S_{\mathrm{II}}\sum \pi_{\mathrm{II}}\pi_{\mathrm{II}}\,e\\
&\qquad - S_{\mathrm{III}}\sum \pi_{\mathrm{II}}\pi_{\mathrm{III}}\,e - \cdots,\\
S_{\mathrm{III}}\, e_{\mathrm{III}} &= -\sum \pi_{\mathrm{III}}\, e\,A - S_{\mathrm{I}}\sum \pi_{\mathrm{III}}\pi_{\mathrm{I}}\,e - S_{\mathrm{II}}\sum \pi_{\mathrm{III}}\pi_{\mathrm{II}}\\
&\qquad - S_{\mathrm{III}}\sum \pi_{\mathrm{III}}\pi_{\mathrm{III}}\,e - \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

Gleiche Temperaturänderungen τ aller Stäbe sind also in diesem Falle ohne Einfluss auf die Stabkräfte und Stützenreactionen (Balkenfachwerke).

§ 84. Systeme mit überzähligen Reactionen.

Wir lassen jetzt neben überzähligen Stäben auch beliebig viele überzählige Reactionen zu. Das Stabsystem, welches nach Entfernung der letzteren entsteht, ist entweder statisch bestimmt stabil (wenn keine überzähligen Stäbe vorhanden sind), oder es lässt sich nach § 83 berechnen. Wir haben also nur noch den Einfluss der überzähligen Reactionen zu ermitteln. Da jede überzählige Reaction durch eine vorgeschriebene Bewegung des gestützten Knotenpunktes in ihrer Richtungslinie bedingt ist, so entsprechen den überzähligen Reactionen eine gleiche Anzahl bekannter Entfernungsänderungen Δl, es lassen sich die ersteren aus Gleichungen der Form § 83, (1) ableiten.

Das anfangs spannungslose Stabsystem sei durch beliebige äussere Kräfte und Wärme beeinflusst. Hierdurch entstehen elastische Längenänderungen und Beanspruchungen aller Stäbe. Für die Hauptstäbe desjenigen Stabsystems, welches nach Entfernung der überzähligen Reactionen verbleibt, mögen wie in § 83 s_1, s_2, s_3, $\cdot\cdot$ die anfänglichen Längen und S_1, S_2, S_3, $\cdot\cdot$ die ganzen Beanspruchungen bedeuten. Für den gewöhnlichen Fall, dass durch Wegnahme genannter Reactionen ein statisch-bestimmt-stabiles Stabsystem entsteht, sind sämmtliche Stäbe hier eingeschlossen. Sind nun $l_{\mathrm{I}}, l_{\mathrm{II}}, l_{\mathrm{III}}, \cdot\cdot$ diejenigen Entfernungen je zweier Knotenpunkte oder eines Knotenpunktes und eines ausserhalb des Stabsystems gelegenen festen Punktes, welche infolge der überzähligen Reactionen R_{I}, R_{II}, $R_{\mathrm{III}}, \cdot\cdot$ bekannt bleiben, und erhalten die einem bestimmten l entsprechenden π den Index des letzteren neben dem ihres Hauptstabes, so folgen aus § 83, (1)—(3)

$$\begin{aligned}
\Delta l_{\mathrm{I}} &= -\sum \pi_{\mathrm{I}}\ Se - \sum \pi_{\mathrm{I}}\ \alpha \tau s,\\
\Delta l_{\mathrm{II}} &= -\sum \pi_{\mathrm{II}}\ Se - \sum \pi_{\mathrm{II}}\ \alpha \tau s,\\
\Delta l_{\mathrm{III}} &= -\sum \pi_{\mathrm{III}}\ Se - \sum \pi_{\mathrm{III}}\ \alpha \tau s,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die einzelnen Summen sind auf alle erwähnten Hauptstäbe zu erstrecken.

Die Beanspruchungen dieser Hauptstäbe s_1, s_2, s_3, $\cdot\ \cdot$, welche für die wirklichen äusseren Kräfte und Temperaturänderungen entstehen würden, wenn allein die überzähligen Reactionen wegblieben, seien A_1, A_2, A_3, $\cdot\ \cdot\ \cdot$ Hierzu kommen nun noch die Beanspruchungen infolge der überzähligen Reactionen R_{I}, R_{II}, R_{III}, $\cdot\ \cdot$, sodass die ganzen Beanspruchungen der Hauptstäbe betragen

$$(1)\qquad \begin{cases}
S_1 = A_1 + R_{\mathrm{I}}\,\pi_{\mathrm{I}_1} + R_{\mathrm{II}}\,\pi_{\mathrm{II}_1} + R_{\mathrm{III}}\,\pi_{\mathrm{III}_1} + \cdots,\\
S_2 = A_2 + R_{\mathrm{I}}\,\pi_{\mathrm{I}_2} + R_{\mathrm{II}}\,\pi_{\mathrm{II}_2} + R_{\mathrm{III}}\,\pi_{\mathrm{III}_2} + \cdots,\\
S_3 = A_3 + R_{\mathrm{I}}\,\pi_{\mathrm{I}_3} + R_{\mathrm{II}}\,\pi_{\mathrm{II}_3} + R_{\mathrm{III}}\,\pi_{\mathrm{III}_3} + \cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die darüber stehenden Gleichungen folgen

$$(2)\quad \begin{cases}
\Delta l_{\mathrm{I}} = -\sum \pi_{\mathrm{I}}\,\alpha\tau s - \sum \pi_{\mathrm{I}} e A - R_{\mathrm{I}} \sum \pi_{\mathrm{I}}\,\pi_{\mathrm{I}}\,e\\
\qquad\qquad - R_{\mathrm{II}} \sum \pi_{\mathrm{I}}\,\pi_{\mathrm{II}}\,e - R_{\mathrm{III}} \sum \pi_{\mathrm{I}}\,\pi_{\mathrm{III}}\,e - \cdots,\\
\Delta l_{\mathrm{II}} = -\sum \pi_{\mathrm{II}}\,\alpha\tau s - \sum \pi_{\mathrm{II}} e A - R_{\mathrm{I}} \sum \pi_{\mathrm{II}}\,\pi_{\mathrm{I}}\,e\\
\qquad\qquad - R_{\mathrm{II}} \sum \pi_{\mathrm{II}}\,\pi_{\mathrm{II}}\,e - R_{\mathrm{III}} \sum \pi_{\mathrm{II}}\,\pi_{\mathrm{III}}\,e - \cdots,\\
\Delta l_{\mathrm{III}} = -\sum \pi_{\mathrm{III}}\,\alpha\tau s - \sum \pi_{\mathrm{III}} e A - R_{\mathrm{I}} \sum \pi_{\mathrm{III}}\,\pi_{\mathrm{I}}\,e\\
\qquad\qquad - R_{\mathrm{II}} \sum \pi_{\mathrm{III}}\,\pi_{\mathrm{II}}\,e - R_{\mathrm{III}} \sum \pi_{\mathrm{III}}\,\pi_{\mathrm{III}}\,e - \cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}$$

Hiernach können die überzähligen Reactionen R_{I}, R_{II}, $R_{\mathrm{III}}, \cdot\ \cdot$ berechnet werden, worauf die Beanspruchungen der Hauptstäbe s_1, s_2, s_3, $\cdot\ \cdot$ aus (1) folgen.

Sind noch weitere Stäbe vorhanden, so hat man nach § 83, (1) (3) für jeden derselben

$$Se + \alpha\tau s = -\sum \pi\alpha\tau s - \sum \pi e S, \tag{3}$$

worin die linken Seiten dem betreffenden Stabe s, die rechten aber allen Hauptstäben entsprechen, deren ganze Beanspruchungen S nun bekannt sind. Die π rechts gehören der Gruppe des überzähligen Stabes s an, sie sind im Falle vorausgegangener Anwendung des Verfahrens § 83 schon bekannt. In manchen dem Ingenieur vorkommenden Fällen lassen sich die Hauptstäbe so wählen, dass infolge der Symmetrie eine directe Berechnung der überzähligen Stäbe überflüssig wird; auch eine zweite Wahl der Hauptstäbe (mit Einrechnung der vorher überzählig gewesenen) und gewisse Näherungsmethoden können zum Ziele führen.

Am häufigsten hat man es mit ein, zwei und drei überzähligen Reactionen zu thun. Für nur eine überzählige Reaction folgt aus (2)

$$\Delta l = -\sum \pi\alpha\tau s - \sum \pi e A - R \sum \pi^2 e,$$

$$R = -\frac{\Delta l + \Sigma \pi\alpha\tau s + \Sigma \pi e A}{\Sigma \pi^2 e}. \tag{4}$$

Bei zwei überzähligen Reactionen R_{I}, R_{II} liefern mit den Bezeichnungen

$$U = \Delta l_{\mathrm{I}} + \sum \pi_{\mathrm{I}}\, \alpha\tau s + \sum \pi_{\mathrm{I}}\, e A, \tag{5}$$

$$V = \Delta l_{\mathrm{II}} + \sum \pi_{\mathrm{II}}\, \alpha\tau s + \sum \pi_{\mathrm{II}}\, e A, \tag{6}$$

$$\mathfrak{a} = \sum \pi_{\mathrm{I}}^2 e, \quad \mathfrak{e} = \sum \pi_{\mathrm{I}} \pi_{\mathrm{II}} e, \quad \mathfrak{o} = \sum \pi_{\mathrm{II}}^2 e, \tag{7}$$

die Gleichungen (2)

$$U = -\mathfrak{a}R_{\mathrm{I}} - \mathfrak{e}R_{\mathrm{II}}, \qquad V = -\mathfrak{e}R_{\mathrm{I}} - \mathfrak{o}R_{\mathrm{II}},$$

woraus

$$R_{\mathrm{I}} = \frac{U\mathfrak{o} - V\mathfrak{e}}{\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{o}}, \tag{8}$$

$$R_{\mathrm{II}} = \frac{V\mathfrak{a} - U\mathfrak{o}}{\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{o}}. \tag{9}$$

Im Falle dreier überzähliger Reactionen R_{I}, R_{II}, R_{III} hat man mit (5)—(7) und

$$W = \Delta l_{\mathrm{III}} + \sum \pi_{\mathrm{III}}\, \alpha\tau s + \sum \pi_{\mathrm{III}}\, e A, \tag{10}$$

$$\mathfrak{m} = \sum \pi_{\mathrm{I}} \pi_{\mathrm{III}} e, \quad \mathfrak{n} = \sum \pi_{\mathrm{II}} \pi_{\mathrm{III}} e, \quad \mathfrak{r} = \sum \pi_{\mathrm{III}}^2 e, \tag{11}$$

nach den Formeln (2)

$$U = -\mathfrak{a}R_{\mathrm{I}} - \mathfrak{e}R_{\mathrm{II}} - \mathfrak{m}R_{\mathrm{III}},$$
$$V = -\mathfrak{e}R_{\mathrm{I}} - \mathfrak{o}R_{\mathrm{II}} - \mathfrak{n}R_{\mathrm{III}},$$
$$W = -\mathfrak{m}R_{\mathrm{I}} - \mathfrak{n}R_{\mathrm{II}} - \mathfrak{r}R_{\mathrm{III}},$$

und hieraus

$$(12) \qquad R_{\mathrm{I}} = -\frac{U(\mathfrak{o}\mathfrak{r} - \mathfrak{n}^2) + V(\mathfrak{m}\mathfrak{n} - \mathfrak{e}\mathfrak{r}) + W(\mathfrak{e}\mathfrak{n} - \mathfrak{m}\mathfrak{o})}{\mathfrak{a}(\mathfrak{o}\mathfrak{r} - \mathfrak{n}^2) + \mathfrak{e}(\mathfrak{m}\mathfrak{n} - \mathfrak{e}\mathfrak{r}) + \mathfrak{m}(\mathfrak{e}\mathfrak{n} - \mathfrak{m}\mathfrak{o})},$$

$$(13) \qquad R_{\mathrm{II}} = -\frac{U(\mathfrak{m}\mathfrak{n} - \mathfrak{e}\mathfrak{r}) + V(\mathfrak{a}\mathfrak{r} - \mathfrak{m}^2) + W(\mathfrak{e}\mathfrak{m} - \mathfrak{a}\mathfrak{n})}{\mathfrak{e}(\mathfrak{m}\mathfrak{n} - \mathfrak{e}\mathfrak{r}) + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{r} - \mathfrak{m}^2) + \mathfrak{n}(\mathfrak{e}\mathfrak{m} - \mathfrak{a}\mathfrak{n})},$$

$$(14) \qquad R_{\mathrm{III}} = -\frac{U(\mathfrak{e}\mathfrak{n} - \mathfrak{m}\mathfrak{o}) + V(\mathfrak{e}\mathfrak{m} - \mathfrak{a}\mathfrak{n}) + W(\mathfrak{a}\mathfrak{o} - \mathfrak{e}^2)}{\mathfrak{m}(\mathfrak{e}\mathfrak{n} - \mathfrak{m}\mathfrak{o}) + \mathfrak{n}(\mathfrak{e}\mathfrak{m} - \mathfrak{a}\mathfrak{n}) + \mathfrak{r}(\mathfrak{a}\mathfrak{o} - \mathfrak{e}^2)}.$$

Die Berechnung der Stabkräfte unseres statisch-unbestimmt-stabilen Stabsystems könnte nun bei bekannten Stabquerschnitten und beliebigen äusseren Kräften und Temperaturänderungen τ etwa in nachstehender Reihenfolge stattfinden.

a) Annahme der überzähligen Reactionen $R_{\mathrm{I}}, R_{\mathrm{II}}, \cdot\cdot$ und ihrer Wirkungsgeraden $l_{\mathrm{I}}, l_{\mathrm{II}}, \cdot\cdot$ so, dass positive R die Endpunkte der l zu nähern suchen.

b) Auswahl der nach Entfernung der überzähligen Reactionen etwa noch verbleibenden überzähligen Stäbe; die übrigen bilden das statisch-bestimmt-stabile Hauptsystem.

c) Unter Voraussetzung der Wirksamkeit des letzteren allein Berechnung der

Beanspruchungen der Hauptstäbe	s_1	s_2	s_3	$\cdot\cdot$
herrührend von äussern Kräften $R_{\mathrm{I}} = 1$	π_{I_1}	π_{I_2}	π_{I_3}	$\cdot\cdot$
„ „ „ „ $R_{\mathrm{II}} = 1$	π_{II_1}	π_{II_2}	π_{II_3}	$\cdot\cdot$

. . . .

d) Bildung der die A und τ nicht enthaltenden Summen Σ in den Gleichungen für die R.

e) Berechnung der Beanspruchungen $A_1, A_2, \cdot\cdot$, welche in den Hauptstäben durch die wirklichen äusseren Kräfte und Temperaturänderungen für den Fall entstehen, dass nur die überzähligen Reactionen wegbleiben, nach bekannten statischen Methoden oder nach § 83, dessen $S_1, S_2, \cdot\cdot$ dann unsere A sind.

f) Berechnung der überzähligen Reactionen nach (2) oder den oben stehenden speciellen Formeln.

g) Berechnung der ganzen Beanspruchungen der Hauptstäbe nach (1) und der etwa noch vorhandenen überzähligen Stäbe wie zu (3) angegeben.

Will man die von den äusseren Activkräften herrührenden Stabkräfte und Stützenreactionen unabhängig von Temperaturänderungen und Stützenbewegungen berechnen, so sind in den obigen Gleichungen die τ und Δl gleich Null zu setzen. Zur Berechnung des Einflusses der Stützenbewegungen allein wären alle A und τ enthaltenden Glieder wegzulassen. Bei Ableitung des Einflusses der Temperaturänderungen schliesslich hätten die Δl zu verschwinden, während die mit A behafteten Glieder nur im Falle des Vorhandenseins überzähliger Stäbe von Null verschiedene, durch § 83 bestimmte Werthe erhalten. Kommen verschiedene Fälle gegebener äusserer Kräfte, Temperaturänderungen und Stützenbewegungen in Frage, so sind unter allen Umständen nur die Berechnungen $e)-g)$ zu wiederholen, wozu man die nöthigen Gleichungen im Anschluss an $d)$ soweit als möglich reduciren wird. Hat man es mit einem innerlich stabilen Stabsystem zu thun und stellt eine der obigen Wirkungsgeraden l die Entfernung zweier Knotenpunkte oder die Projection einer solchen dar, dann entspricht diesem l im Falle gleicher Temperaturänderungen τ und gleicher Ausdehnungscoefficienten aller Hauptstäbe nach § 80, (6) die vereinfachende Beziehung

(15) $$\sum \pi \alpha \tau s = -\alpha \tau l.$$

Sind überzählige Stäbe vorhanden und bleibt das Stabsystem nach Entfernung des überzähligen Stabes s innerlich stabil, so folgt bei gleichen α, τ des Stabes s und der Hauptstäbe aus (3)

(16) $$Se = -\sum \pi e S.$$

§ 85. Verschiebungsarbeit von Systemen aus isotropen festen Stäben.

Obwohl wir alle die Verschiebungsarbeit betreffenden Fragen aus § 74 beantworten können, sollen doch die für Systeme aus isotropen festen Stäben eintretenden Beziehungen noch besonders abgeleitet werden. Wie in §§ 82—84 werden die Stäbe prismatisch, die Temperaturänderungen für je einen ganzen Stab gleich gross und die Längenänderungen der Stäbe gegenüber deren anfänglichen Längen im spannungslosen Zustande als verschwindend klein angenommen.

Wenn die Stabkräfte während des Entstehens der ganzen Längenänderungen constant wie nach Eintritt des Gleichgewichts wären, würde die Verschiebungsarbeit nach §§ 74, 81 sein

(1) $$\mathfrak{D} = \sum S\lambda = \sum \frac{lS^2}{EF} + \sum \alpha l S \tau.$$

Die wirkliche Verschiebungsarbeit aber drückt sich aus

(2) $$D = \sum \int_0^\lambda S\, d\lambda = \sum \frac{lS^2}{2EF} + \sum \alpha l \int_0^\lambda S\, d\tau,$$

sodass wegen

$$S\tau = \int S\, d\tau + \int \tau dS, \qquad \tau\, dS - S\, d\tau = \tau^2 d\,\frac{S}{\tau}$$

die Beziehung besteht

$$(3) \qquad \mathfrak{D} = 2D + \sum \alpha l \int_0^\lambda \tau^2 d\, \frac{S}{\tau}.$$

Die Summen Σ sind auf sämmtliche Stäbe auszudehnen. Die Integrale in (2) (3) werden ausführbar, wenn bekannt ist, wie sich während des Entstehens der λ die Stabkräfte mit der Temperatur geändert haben.

Für die vollständige Variation der virtuellen Verschiebungsarbeit $\mathfrak{D}$ hat man nach (3)

$$(4) \qquad \delta\mathfrak{D} = 2\delta D + \sum \alpha l \tau^2 \delta\, \frac{S}{\tau}.$$

Da aber nach § 73 auch

$$\delta\mathfrak{D} = \delta D + \delta_s \mathfrak{U},$$

so folgt die Variation der Verschiebungsarbeit

$$(5) \qquad \delta D = \delta_s \mathfrak{U} - \sum \alpha l \tau^2 \delta\, \frac{S}{\tau}.$$

Hierin bedeutet $\delta_s \mathfrak{U}$ die den Aenderungen der Stabkräfte allein (bei constanten Stablängen) entsprechende Variation der Arbeit der Stützenreactionen, insoweit dieselben eben von den Stabkräften abhängen.

Sind $\delta_s \mathfrak{U}$ und τ gleich Null, womit die rechte Seite von (5) verschwindet, so haben wir

$$\delta D = 0, \qquad \delta\mathfrak{D} = 0,$$

die Arbeiten D, $\mathfrak{D}$ werden Maxima oder Minima. Weil aber

$$(6) \qquad \text{für } \tau = 0, \qquad \mathfrak{D} = 2D = \sum \frac{lS^2}{EF}$$

eine Summe von stets positiven Werthen ist, so haben wir es immer mit einem Minimum zu thun, wenn für $\tau = 0$ nur eine Lösung existirt, was allein vorkommt (§ 73). Wir können aussprechen: *Die Verschiebungsarbeit während verschwindend kleiner Verrückungen von Stabsystemen ist ein Minimum, wenn* $\delta_s \mathfrak{U}$ *und* τ *gleich Null sind* (oder überhaupt die rechte Seite von (5) verschwindet). Auf die kleinen Verschiebungen stabiler Stabsysteme angewandt heisst dies: *Wenn während elastischer Verschiebungen stabiler Stabsysteme die Temperatur constant und* $\delta_s \mathfrak{U} = 0$ *ist, dann haben alle Stabkräfte und von diesen abhängigen Grössen solche Werthe, wie sie einem Minimum der Verschiebungsarbeit* D *oder virtuellen Verschiebungsarbeit* $\mathfrak{D}$ *entsprechen.* Die Arbeit $\delta_s \mathfrak{U}$ ist mit $\mathfrak{U}$ zum Beispiel immer dann gleich Null, wenn die von den Stabkräften abhängigen Reactionen gegen Knotenpunkte wirken, welche hinsichtlich des angenommenen Coordinatensystems festliegen oder reibungslos über feste Stützen weggleiten, d. h. auch wenn in den Richtungslinien der fraglichen Reactionen keine Bewegung der Stützen stattfindet.

Bei statisch-bestimmt-stabilen Stabsystemen sind alle Stabkräfte und Stützenreactionen bis auf verschwindend kleine Grössen durch die Bedingungen des Systems allein bestimmt (§ 82) und damit bei bekannten τ auch die Arbeit $\mathfrak{D}$, sowie bei bekannten Beziehungen zwischen den S und τ die Arbeit D. Kommen nun noch überzählige Stabkräfte und Reactionen $H, M, N, \cdots$ hinzu, dann wird die Verschiebungsarbeit auch von diesen abhängig, wir können D, $\mathfrak{D}$ als Functionen der $H, M, N, \cdots$ darstellen. Die wirklichen Werthe dieser überzähligen Grössen sind beim Eintreten des *Princips der kleinsten Verschiebungsarbeit* bestimmt durch die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial H} = \sum \dfrac{lS}{EF} \dfrac{\partial S}{\partial H} = 0, \\ \dfrac{\partial D}{\partial M} = \sum \dfrac{lS}{EF} \dfrac{\partial S}{\partial M} = 0, \\ \dfrac{\partial D}{\partial N} = \sum \dfrac{lS}{EF} \dfrac{\partial S}{\partial N} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

worin die Summen auf sämmtliche nothwendigen und überzähligen Stäbe auszudehnen sind. Sobald man $H, M, N, \cdots$ kennt, lassen sich alle Stabkräfte und Stützenreactionen aus dem Gleichungssystem § 82, (1) oder andern rein statischen Beziehungen bestimmen. Ebenso kann man die noch nothwendigen Stabkräfte und Reactionen aus den Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{cases} S_1 = A_1 + H\pi_{h_1} + M\pi_{m_1} + N\pi_{n_1} + \cdots, \\ S_2 = A_2 + H\pi_{h_2} + M\pi_{m_2} + N\pi_{n_2} + \cdots, \\ S_3 = A_3 + H\pi_{h_3} + M\pi_{m_3} + N\pi_{n_3} + \cdots, \end{cases}$$

erhalten, worin A denjenigen Werth der Stabkraft oder Reactionscomponente S darstellt, welcher den augenblicklich massgebenden äusseren Activkräften entsprechen würde, wenn nur das Hauptsystem vorhanden wäre, während $\pi_h, \pi_m, \pi_n, \cdots$ die Werthe von S bedeuten, welche im gleichen Falle bezw. durch $H = 1$, $M = 1$, $N = 1, \cdots$ allein erzeugt würden.

Wollte man das Princip der kleinsten Verschiebungsarbeit auf die Bestimmung überzähliger Grössen $H, M, N, \cdots$ in Fällen anwenden, für welche die Bedingungen seiner Gültigkeit nicht erfüllt sind, so würden sich stets mittelst desselben diejenigen Theile genannter Grössen ableiten lassen, welche für $\delta_s\mathfrak{U} = 0$, $\tau = 0$ entstehen, wonach die auf anderem Wege ermittelten Beiträge der τ, $\mathfrak{U}$ dem Principe der Coexistenz entsprechend zu addiren wären. Unter Umständen kann man aber durch Umformung von (7) schneller zum Ziele kommen.

Es sei $\mathfrak{S}$ diejenige Beanspruchung eines Stabes l, welche der wirklichen Längenänderung λ dann entsprechen würde, wenn die Bedingungen des obigen Princips erfüllt wären, dann ist die wirkliche Stabkraft

$$S = \mathfrak{S} + T. \tag{9}$$

Man denke sich nun an Stelle von T zwei äussere Kräfte von dieser Grösse in den durch l verbundenen Knotenpunkten angebracht, wodurch am Gleichgewichtszustande nichts geändert wird, dann lässt sich

$$\mathfrak{S} = S - T$$

als neben den äusseren Kräften T wirkende Stabkraft ansehen. Für die Gesammtheit der so erhaltenen Stabkräfte besteht das Princip der kleinsten Verschiebungsarbeit, und da die äusseren Kräfte T sich mit $H, M, N, \cdots$ nicht ändern, also allgemein

$$\partial \mathfrak{S} = \partial S$$

ist, so treten an Stelle von (7) die daraus folgenden Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \sum \frac{S-T}{EF}\frac{\partial S}{\partial H} = 0, \\ \sum \frac{S-T}{EF}\frac{\partial S}{\partial M} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{10}$$

deren Σ wie die von (7) alle Stäbe umfassen. Ist z. B. das Princip der kleinsten Verschiebungsarbeit nur deshalb nicht erfüllt, weil beliebige Temperaturänderungen τ einzelner oder aller Stäbe stattgefunden haben, so hat man nach § 81, (17)

$$T = -\alpha\tau\, EF \tag{11}$$

und die Gleichungen (9) gehen in die folgenden über

$$\left\{\begin{array}{l} \sum \left(\frac{S}{EF} + \alpha\tau\right) l \frac{\partial S}{\partial H} = 0, \\ \sum \left(\frac{S}{EF} + \alpha\tau\right) l \frac{\partial S}{\partial M} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{12}$$

Sind hieraus $H, M, N, \cdot\cdot$ bestimmt, so gilt für die weitere Berechnung das im Anschluss an (7) Gesagte. Vorstehende Berücksichtigung der Temperaturänderungen hat zuerst *Melan* gezeigt (Wochenschr. d. östr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1883).

XI. Abschnitt.

Schwingungen und Wellen.

Ein materieller Punkt ist in schwingender Bewegung, wenn er periodisch gleiche Orte durchläuft. Das gewöhnlichste Beispiel einer solchen Bewegung bietet das Pendel. Die Schwingungsbewegung entsteht, wenn durch Entfernen eines Punktes aus der Gleichgewichtslage Kräfte (z. B. Elasticitätskräfte) auftreten, welche ihn nach der letzteren zurückzutreiben suchen und die störende Ursache dann fortfällt. Unter dem Einflusse der erwähnten Kräfte allein würde sich der Punkt nach Aufbrauch der empfangenen lebendigen Kraft der Gleichgewichtslage wieder nähern. Da jedoch die rücktreibenden Kräfte bis zur Erreichung der Gleichgewichtslage wirken, so wächst ebenso lange die Geschwindigkeit, der Punkt erlangt eine lebendige Kraft, die ihn über die Ruhelage hinausführt, bis die alsdann entgegengesetzt wirkenden Kräfte eine Umkehr veranlassen u. s. f. In dieser Weise könnte das Spiel unbeschränkt fortdauern, wenn nicht neue Ursachen, wie die Abgabe lebendiger Kraft an andere Punkte, die Umwandlung in Wärme u. s. w. eine Erschöpfung bewirkten.

Die Theorie der elastischen Schwingungen ist von höchster Bedeutung für die mathematische Physik; die Akustik und Optik beruhen vorwiegend darauf. Wir werden im letzten Abschnitte die Grundgleichungen zur Untersuchung elastischer Schwingungen aufzustellen haben. Hier handelt es sich besonders darum, mit den einschlagenden Anschauungen bekannt zu machen und zwar an der Hand desjenigen Falles, welcher zur Erklärung des Schalls und Lichts herangezogen wird. Weitere Fälle sind bisher nur vereinzelt und wenig eingehend untersucht worden.

§ 86. Begriffe der Wellenlehre.

Als *Schwingungsphase* eines Punktes zur Zeit t bezeichnet man seinen Ort und Bewegungszustand für diese Zeit. Der letztere ist durch Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung bestimmt. Eine

Schwingung ist die Bewegung zwischen zwei gleichen Schwingungsphasen. Die nöthige Zeit T für eine solche Schwingung heisst *Schwingungsdauer*, die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit *Schwingungszahl* n. Bei constantem T wäre also

$$Tn = 1.$$

Die Abweichung eines schwingenden Punktes von der Ruhelage nennt man *Elongation* oder *Ausschlag*, der Absolutwerth a der grössten Elongation heisst *Schwingungsamplitude.*

Waren die Punkte eines Systems unter Mitwirkung von Kräften im Gleichgewichte, welche sie selbst auf einander ausübten, so werden sich die Störungen des Gleichgewichts einzelner Systempunkte fortpflanzen. Man betrachte irgend eine von dem gestörten Punkte S ausgehende Punktreihe l. Die Bewegung von S wirkt gleichgewichtstörend auf den benachbarten Punkt, durch diesen auf den folgenden und so weiter von Punkt zu Punkt, wir erhalten eine Wellenbewegung in der Reihe. Die Punkte zwischen zwei Punkten gleicher oder entsprechender (bei veränderlichen Schwingungen) Schwingungsphase bilden eine *Welle* der Punktreihe. Rückt die Störung in der Zeit dt um dl vor, so heisst

$$c = \frac{dl}{dt}$$

die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* der Wellenbewegung, sie ist von der *Oscillationsgeschwindigkeit* des einzelnen Punktes wohl zu unterscheiden. Den Weg, welchen die Störung während einer Schwingungsdauer T zurücklegt, nennt man *Wellenlänge*

$$\lambda = \int_0^T c\, dt.$$

Der Punkt E am Ende von λ beginnt seine Bewegung gerade, wenn der Anfangspunkt A sie beendigt hat. Da ferner von A nach E hin jeder folgende Punkt seine Bewegung etwas später beginnt als der vorhergehende, so werden sich selbst in dem Falle

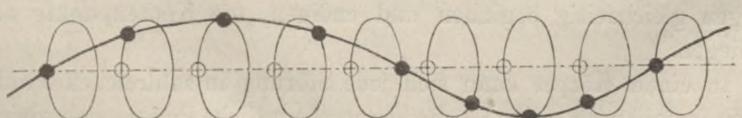

Fig. 31.

zu bestimmter Zeit t alle Punkte zwischen A und E in verschiedenen Schwingungsphasen befinden, wenn die Schwingungen aller Punkte gleiche Amplituden erlangen und überhaupt ungeändert bleiben.

Erfolgen die Schwingungen in der Richtungslinie der Fortpflanzung, so heissen sie *Longitudinalschwingungen*, stehen sie senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung, dann nennt man sie *Transversalschwingungen.* Es sind auch schiefe geradlinige *Schwingungen* denkbar, und ebenso können je nach den wirkenden Kräften elliptische, parabolische und andere krummlinige Schwingungen um die Gleichgewichtslage resultiren. Die Wasserwellen beispielsweise werden

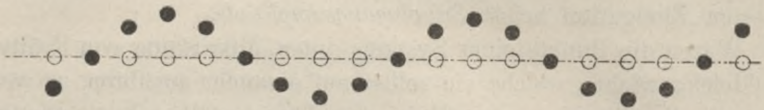

Fig. 32.

nach *Weber* durch annähernd elliptische Schwingungen, nach *Hagen* (bei unendlicher Tiefe) durch kreisförmige Schwingungen erzeugt. Wie die bekannte Form der Wasserwellen aus elliptischen Schwingungen entsteht, ist in Fig. 31 angedeutet. Fig. 32 stellt eine Welle aus Transversalschwingungen, Fig. 34 eine solche aus Longitudinalschwingungen und Fig. 33 eine aus schiefen geradlinigen Schwingungen dar. Man hat dabei stets die Lagen der schwingenden Punkte

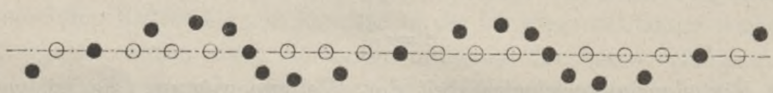

Fig. 33.

für den fraglichen Zeitpunkt t zu fixiren. Bei geradlinigen Schwingungen bilden die Punkte, welche zur Zeit t die Gleichgewichtslagen passiren, die augenblicklichen *Knotenpunkte* der Wellenbewegung, während die grössten Abweichungen nach der positiven und negativen Ausschlagrichtung hin als *Wellenberg* und *Wellenthal* bezeichnet werden. Durch Zusammenwirken geeigneter Ursachen können auch *stehende Wellen* resultiren, bei welchen alle Punkte ihre Schwin-

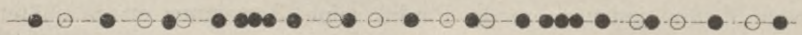

Fig. 34.

gungen gleichzeitig beginnen und endigen, die Knotenpunkte also festliegen.

In einem Körper kann sich jede Störung in zahlreichen Punktreihen fortpflanzen. Jede Fläche, deren sämmtliche Punkte sich gleichzeitig in gleicher Schwingungsphase befinden, heisst eine *Wellenfläche.* Die Punkte zwischen zwei Wellenflächen gleicher oder entsprechender Schwingungsphase bilden eine *Welle* des Punktsystems. Während die Fortpflanzung stets senkrecht den Wellenflächen erfolgt, können für die Schwingungen verschiedene Fälle eintreten.

Longitudinalschwingungen beispielsweise liegen normal und Transversalschwingungen tangential den Wellenflächen. Bei Uebertragung der lebendigen Kraft von kleineren auf grössere Wellenflächen werden sich die auf einzelne Schwingungen verwendeten lebendigen Kräfte und damit die Amplituden der letzteren im Allgemeinen ändern. Ginge die ganze lebendige Kraft von einer beliebig geformten Wellenfläche auf eine andere mit gleich dichtem Belag von Punkten gleicher Massen und Krafteinwirkungen über, so würden sich die lebendigen Kräfte zu Einzelschwingungen auf beiden umgekehrt wie die Grössen der Wellenflächen und speciell bei kugelförmigen Wellenflächen umgekehrt wie die Quadrate der Radien verhalten.

Hinsichtlich der Wellenbewegung wird das fortpflanzende Punktsystem *Medium* genannt. Bei *homogenen Medien* ist die Anordnung der wirkenden Punkte von jedem Systempunkt m aus die gleiche; bei in Bezug auf m *isotropen Medien* stimmt die Anordnung der wirkenden Punkte für alle durch m gehenden Geraden oder Ebenen überein. Der Ausdruck Anordnung betrifft in beiden Fällen Lagen, Massen und Kräfte im anfänglichen ungestörten Zustande. Es enthalten also in homogenen Medien alle Geraden von einerlei Richtung, in *homogenen isotropen Medien* alle Geraden beliebiger Richtungen Punktreihen gleicher und constanter Anordnung und Eigenschaften. Wir wollen solche Punktreihen in der Folge *homogene Punktreihen* nennen.

Nach den Lehren der Physik besteht der *Schall* in Longitudinalschwingungen der gewöhnlichen Materie, das *Licht* in Transversalschwingungen des Aethers.

§ 87. **Einfache Schwingungen materieller Punkte.**

Für einen Punkt, der wie seine Masse durch m bezeichnet sei, möge mit Entfernung aus der Gleichgewichtslage M eine zurücktreibende Kraftresultante proportional der Entfernung Mm auftreten. Hat dieser Punkt bei einer Störung keine Geschwindigkeit senkrecht zu Mm erhalten, so werden lineare Schwingungen um die Gleichgewichtslage entstehen, welche *einfache Schwingungen* heissen und im Folgenden untersucht werden sollen. Wir wählen eine Schwingungsrichtung von M aus als positive, die andere als negative. Zur Zeit t sei r der positive oder negative Weg des Punktes m von der Gleichgewichtslage aus und v seine positive oder negative Geschwindigkeit. Dann hat man die der beschleunigenden Kraft pro Masseneinheit proportionale Acceleration

$$(1) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = -kr.$$

Das negative Vorzeichen ist zu setzen, weil die Kraft für positive r in negativer, für negative r in positiver Richtung wirkt. Die Constante k kann als beschleunigende Kraft für $m = 1$, $r = 1$ definirt werden. Weil ferner

$$v = \frac{dr}{dt}, \qquad dv = \frac{d^2 r}{dt}, \qquad v dv = \frac{d^2 r}{dt^2} dr,$$

so folgt mit (1)

$$v dv = - k r dr,$$

und wenn $\frac{1}{2} C$ die Integrationsconstante bedeutet,

$$v^2 = C - k r^2.$$

Es möge a die Schwingungsamplitude und u den Absolutwerth der Geschwindigkeit für $r = 0$ bezeichnen. Dann liefert die letzte Gleichung mit $r = 0$ wegen $v = \pm u$ und mit $r = \pm a$ wegen $v = 0$

$$u^2 = C = k a^2, \tag{2}$$

womit weiter

$$v^2 = k(a^2 - r^2) = u^2 - k r^2, \tag{3}$$

$$dt = \frac{dr}{v} = \frac{dr}{\sqrt{k}\sqrt{a^2 - r^2}},$$

und wenn h die Integrationsconstante bedeutet

$$t = \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin \frac{r}{a} + h. \tag{4}$$

Die Integrationsconstante ist hiernach die Zeit derjenigen Passage der Gleichgewichtslage, von welcher aus wir in (4) die arcus rechnen wollen, und rechnen wir t von einer Gleichgewichtslage aus, so können wir $h = 0$ setzen

Aus der letzten Gleichung folgt die Elongation und dann auch die Geschwindigkeit zur Zeit t

$$\left\{ \begin{aligned} r &= a \sin \sqrt{k}\,(t - h), \\ v = \frac{dr}{dt} &= u \cos \sqrt{k}\,(t - h). \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Die Passagen von $r = 0$ finden daher zu folgenden Zeiten statt

$$t = \quad h, \qquad h + \frac{\pi}{\sqrt{k}}, \qquad h + \frac{2\pi}{\sqrt{k}}, \cdots$$

und wir erhalten die Schwingungsdauer als Zeit zwischen irgend einer dieser Passagen und der übernächsten

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n}, \tag{6}$$

unter n die Schwingungszahl verstanden. Da hiernach bei Beachtung von (2)

(7) $$\sqrt{k} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = \frac{u}{a},$$

so kann man (5) auch schreiben

(8) $$\begin{cases} r = a \sin 2\pi \dfrac{t-h}{T}, \\ v = u \cos 2\pi \dfrac{t-h}{T}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern beispielsweise

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{für } t-h = & 0, & \frac{T}{4}, & \frac{T}{2}, & \frac{3T}{4}, & T, & \frac{5T}{4}, & \dots \\ r = & 0, & a, & 0, & -a, & 0, & a, & \dots \\ v = & u, & 0, & -u, & 0, & u, & 0, & \dots \end{array}$$

und allgemein, wenn r_{I}, v_{I} der Zeit t_{I} und r, v der Zeit t entsprechen ν aber eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$\text{für } t = t_{\mathrm{I}} \pm \frac{2\nu}{2} T, \qquad r = r_{\mathrm{I}}, \quad v = v_{\mathrm{I}},$$

$$\text{„ } t = t_{\mathrm{I}} \pm \frac{2\nu+1}{2} T, \qquad r = -r_{\mathrm{I}}, \quad v = -v_{\mathrm{I}}.$$

Wir können nun Folgendes aussprechen:

a) Die Schwingungsdauer T und Schwingungszahl n sind unabhängig von der Amplitude a, alle Schwingungen für ein gleiches k sind isochron.

b) Von jedem Zeitpunkte t_{I} an folgen sich in Intervallen T gleiche und in Intervallen $\frac{T}{2}$ entgegengesetzte Schwingungsphasen.

c) Die Oscillationsgeschwindigkeit v erreicht für $r = 0$ numerische Maxima

$$v = \pm u = \pm \frac{2a\pi}{T} = a\sqrt{k}$$

und für $r = \pm a$ numerische Minima $v = 0$.

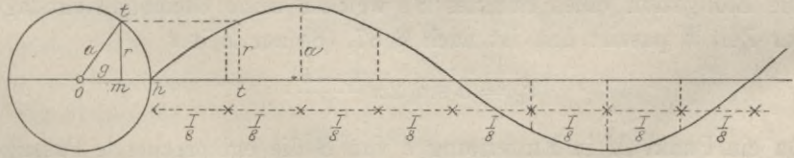

Fig. 35.

d) Beschreibt man (Fig. 35) um die Gleichgewichtslage einen Kreis mit dem Radius a und setzt den ganzen Winkelraum um o $2\pi = T$, dann sind für jede Zeit $t = h + (th)$ nach (8)

$$om = v, \qquad mt = r.$$

e) Haben die Schwingungen 1 und 2 bei gleichem k verschiedene Amplituden a_1, a_2, und werden ihre Phasen in den Fällen

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

und

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = -\frac{a_1}{a_2}$$

beziehungsweise als gleich und als entgegengesetzt bezeichnet, dann ergeben sich zu irgend einer Phase $m_1(r_1, v_1)$ der einen Schwingung die gleiche und entgegengesetzte Phase der anderen Schwingung wie Fig. 36 andeutet.

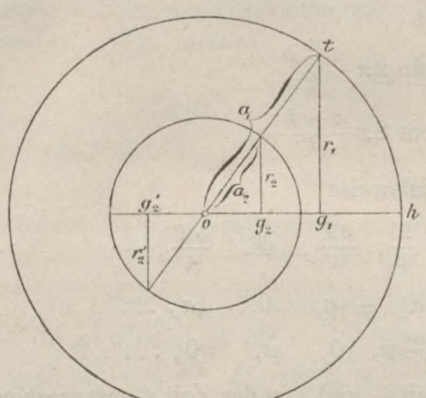

Fig. 36.

§ 88. **Wellen in homogenen Punktreihen.**

Es mögen sich nun die im vorigen Paragraph betrachteten Schwingungen eines Punktes in einer (genügend klein oder genügend weit vom Störungscentrum gedachten) homogenen Punktreihe mit constanter Geschwindigkeit c ohne Aenderung der Amplitude a fortpflanzen. Die parallelen Einzelschwingungen der verschiedenen Punkte können longitudinal, transversal oder schief sein. Im Folgenden deuten grosse lateinische Bezeichnungen von Reihenpunkten deren Ruhelagen an.

Nach § 86 hat man die Wellenlänge, wenn T die Schwingungsdauer, n die Schwingungszahl und u den Absolutwerth der Oscillationsgeschwindigkeit beim Passiren der Gleichgewichtslage bedeuten,

$$(1) \qquad \lambda = cT = \frac{c}{n} = 2\pi c\frac{a}{u} = \frac{2\pi c}{\sqrt{k}}.$$

Die Elongation eines Punktes S, welcher seine Gleichgewichtslage zur Zeit h passirt hat, ist nach § 87, (8) zur Zeit t

$$r_0 = a \sin 2\pi \frac{t-h}{T}.$$

Da ein Punkt M in Entfernung e von S die entsprechende Passage der Gleichgewichtslage um die Zeit $z = \frac{e}{l}$ später bewirkt, so ist für diesen zur Zeit t

$$r = a \sin 2\pi \frac{t-(h+z)}{T}.$$

Wir erhalten mit Rücksicht auf

$$\frac{z}{T} = \frac{e}{cT} = \frac{e}{\lambda}$$

die Elongation und Oscillationsgeschwindigkeit zur Zeit t für jeden Punkt M in beliebiger Entfernung e von einem anderen Punkte S, welch' letzterer zur Zeit h seine Gleichgewichtslage passirte,

$$(2)\quad \begin{cases} r = a \sin 2\pi\left(\frac{t-h}{T} - \frac{e}{\lambda}\right) = a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(ct - ch - e), \\ v = \frac{dr}{dt} = u \cos 2\pi\left(\frac{t-h}{T} - \frac{e}{\lambda}\right) = u \cos\frac{2\pi}{\lambda}(ct - ch - e). \end{cases}$$

Nach § 87 wissen wir, wie sich die Schwingungsphase eines bestimmten Punktes mit der Zeit ändert, aus (2) ersieht man, wie sich die Schwingungsphase zu bestimmter Zeit mit dem Orte und in beliebiger Entfernung e von einem gegebenen Orte mit der Zeit ändert. Wenn beispielsweise zur Zeit t r_{I}, v_{I} der Entfernung e_{I} und r, v der Entfernung e entsprechen, ν aber eine ganze Zahl bedeutet, dann folgen

$$\text{für } e = e_{\mathrm{I}} \pm \frac{2\nu}{2}\lambda, \qquad r = r_{\mathrm{I}}, \quad v = v_{\mathrm{I}},$$

$$\text{„}\ e = e_{\mathrm{I}} \pm \frac{2\nu+1}{2}\lambda, \qquad r = -r_{\mathrm{I}}, \quad v = -v_{\mathrm{I}}.$$

Die gestörte Punktreihe zerfällt also zu jeder bestimmten Zeit t in eine Folge von Strecken, an deren Enden die Gleichgewichtslage augenblicklich in gleicher Richtung passirt wird, während in den Streckenmitten entgegengesetzte Passagen stattfinden und alle Punkte zwischen den Streckengrenzen verschiedene Schwingungsphasen einnehmen. Die Punkte jeder solchen Strecke bilden eine Welle.

Kommen in einer Punktreihe Wellen von verschiedenen Ausgangspunkten S und vielleicht auch von verschiedenen Fortpflanzungsrichtungen vor, so ist es mitunter zweckmässig, alle Entfernungen auf ein und denselben Reihenpunkt A zu beziehen. Es sei l_h die Entfernung desjenigen Punktes S von A, welchem h in (2) entspricht. Da die Fortpflanzung der Schwingungen oben von S aus nach andern Punkten M erfolgte, so haben wir in beliebigen Entfernungen $l = AM$:

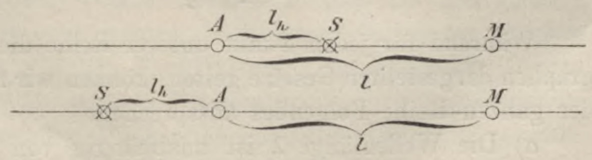

Fig. 37.

für Wellen in der Richtung von A nach M (Fig. 37) mit

$$(3)\qquad e = l \mp l_h, \qquad b = \pm l_h - ch,$$

$$
(4) \qquad \begin{cases} r = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - l + b), \\ v = u \cos \frac{2\pi}{\lambda}(ct - l + b); \end{cases}
$$

für Wellen in der Richtung von M nach A (Fig. 38) mit

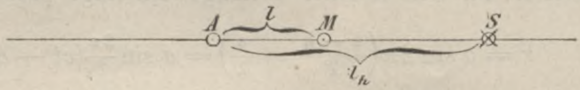

Fig. 38.

$$
(5) \qquad e = l_h - l, \qquad b = l_h + ch,
$$

$$
(6) \qquad \begin{cases} r = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct + l - b), \\ v = u \cos \frac{2\pi}{\lambda}(ct + l - b). \end{cases}
$$

Die Schwingungsphasen, welche verschiedene Wellen gleicher Fortpflanzungsrichtung zur Zeit t für einen bestimmten Punkt M (l) erzeugen, sind nach vorstehenden Gleichungen nur von b abhängig und wird deshalb b die *Wellenphase* genannt. Diese Phase ist für jede bestimmte Welle eine von Zeit und Ort unabhängige, in Längeneinheiten gemessene Constante. Wenn sich r_{I}, v_{I} auf eine Welle der Phase b_{I} und r, v auf eine Welle der Phase b beziehen, ν aber einz ganze Zahl bedeutet, dann folgen aus (4) für gleichlange Wellen gleicher Fortpflanzungsrichtung

$$
\text{im Falle} \quad b = b_{\mathrm{I}} \pm \frac{2\nu}{2}\lambda, \qquad r = r_{\mathrm{I}}, \qquad v = v_{\mathrm{I}},
$$

$$
\text{„} \quad \text{„} \quad b = b_{\mathrm{I}} \pm \frac{2\nu + 1}{2}\lambda, \qquad r = -r_{\mathrm{I}}, \quad v = -v_{\mathrm{I}},
$$

und aus (6) für gleichlange Wellen entgegengesetzter Fortpflanzungsrichtungen

$$
\text{im Falle} \quad b = 2s - b_{\mathrm{I}} \pm \frac{2\nu}{2}\lambda, \qquad r = r_{\mathrm{I}}, \quad v = v_{\mathrm{I}},
$$

$$
\text{„} \quad \text{„} \quad b = 2s - b_{\mathrm{I}} \pm \frac{2\nu + 1}{2}\lambda, \quad r = -r_{\mathrm{I}}, \quad v = -v_{\mathrm{I}}.
$$

Während für jeden Punkt unserer Reihe die im vorigen Paragraphen dargestellten Gesetze gelten, können wir für die Bewegungen der ganzen Reihe Folgendes aussprechen:

a) Die Wellenlänge λ ist unabhängig von der Schwingungsamplitude a, alle Wellen der gleichen k, c sind gleich lang.

b) Zu bestimmter Zeit t bestehen in Abständen λ gleiche und in Abständen $\frac{\lambda}{2}$ entgegengesetzte Schwingungsphasen.

c) Da nach (2) für $ct - e =$ Const. gleiche r, v eintreten, so bewegt sich jede bestimmte Schwingungsphase oder ganze Welle mit der Geschwindigkeit c durch die Punktreihe.

d) Denkt man sich zur Zeit t bei den Gleichgewichtslagen der Punkte M deren augenblickliche Elongationen senkrecht zur ruhenden Punktreihe als Ordinaten angetragen, so entsteht die in Fig. 35 ersichtliche Curve der Elongationen. Für Transversalschwingungen gibt diese Curve ein wirkliches (bei verschiedenen Masstäben der Abscissen und Ordinaten verzerrtes) Bild der Punktreihe zur Zeit t (Fig. 32). Bei Longitudinalschwingungen entsprechen den Knotenpunkten alternirend Verdichtungen und Verdünnungen der Punktreihe (Fig. 34). Um für alle Fälle ein Bild der Punktreihe zur Zeit t zu erhalten, hat man die Ordinatenaxe stets parallel den Schwingungsgeraden zu wählen (Fig. 33).

e) Zwei gleichlange Wellen gleicher Fortpflanzungsrichtung und beliebiger Amplituden a würden zu bestimmter Zeit für den Punkt $M(l)$ gleiche Schwingungsphasen erzeugen, wenn die Wellenphasen um ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ differirten, und sie würden für $M(l)$ entgegengesetzte Schwingungsphasen bewirken, wenn die Phasendifferenz der Wellen ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ wäre.

f) Zwei gleichlange Wellen entgegengesetzter Fortpflanzungsrichtungen und beliebiger Amplituden a würden zur Zeit t nur für diejenigen Punkte $M(l)$ gleiche Schwingungsphasen erzeugen, für welche l um ein gerades Vielfaches von der halben Summe der Wellenphasen abweicht $\left(l = \frac{b + b_{\mathrm{I}}}{2} \mp \frac{2\nu}{2}\lambda\right)$ und sie würden allein für diejenigen Punkte $M(l)$ entgegengesetzte Schwingungsphasen hervorbringen, bei welchen l um ein gerades Vielfaches von der halben Wellenphasensumme differirt $\left(l = \frac{b + b_{\mathrm{I}}}{2} \mp \frac{2\nu + 1}{2}\lambda\right)$.

§ 89. Interferenz der Wellen. Combinirte Schwingungen.

Als *Interferenz* der Wellen bezeichnet man die gleichzeitige Fortpflanzung zweier oder mehrerer Schwingungen in der gleichen Punktreihe oder im gleichen Punktsystem. Im Folgenden können die auf Punkt m übertragenen Einzelschwingungen von verschiedenen Wellen in derselben Punktreihe oder von Wellen in verschiedenen m enthaltenden Punktreihen herrühren. Der von den m beeinflussenden Kräften (Elasticitätskräften) abhängige Coefficient k ist für alle Wellen als gleich anzunehmen (§ 87). Bezeichnungen mit dem Index 1, 2,. . . . entsprechen den Wellen 1, 2, . . .

Einzelschwingungen gleicher Geraden. Die Einzelwellen mögen, wenn sie allein wirken, dem Punkte m zur Zeit t die positiven oder negativen Elongationen $r_1, r_2, \ldots$ in gleicher Geraden ertheilen, d. h. die durch die Einzelwellen bedingten beschleunigenden Kräfte sind zur Zeit t mkr_1, mkr_2, ... Es ist also zur Zeit t die ganze beschleunigende Kraft $mk(r_1 + r_2 + \cdots)$ und die resultirende Acceleration von m

$$(1) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r_1 + r_2 + \cdots).$$

Nach § 87 hat man

$$kr_1 = -\frac{d^2 r_1}{dt^2}, \qquad kr_2 = -\frac{d^2 r_2}{dt^2} \text{ u. s. w.},$$

sodass

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \cdots$$

Durch Integration folgt die resultirende Oscillationsgeschwindigkeit zur Zeit t

$$v = \frac{dr}{dt} = C + \frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt} + \cdots = C + v_1 + v_2 + \cdots,$$

und durch nochmalige Integration die resultirende Elongation

$$r = \text{Const.} + Ct + r_1 + r_2 + \cdots$$

Wenn nun andere beschleunigende Kräfte als die durch die Wellen bedingten nicht angenommen werden, so muss nach dem Eintreffen der ersten Welle für unsern Punkt $v = v_1$, $r = r_1$ sein und können auch mit dem Eintreffen weiterer Wellen Unstetigkeiten von v, r nicht entstehen, wir erhalten

$$(2) \qquad r = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots$$

$$(3) \qquad v = \frac{dr}{dt} = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

Für jeden Punkt m sind zu jeder Zeit t die resultirende Elongation und resultirende Oscillationsgeschwindigkeit gleich der Summe der Elongationen und Geschwindigkeiten, welche die Einzelwellen für sich erzeugen würden.

Nach § 87 haben bei bestimmtem k alle Einzelschwingungen gleiche Dauer T. Wenn sich nun $r_{\rm I}$, $v_{\rm I}$ auf die Zeit $t_{\rm I}$ und r, v auf die Zeit t beziehen, ν aber eine ganze Zahl bedeutet, so folgen aus (2) (3) mit Rücksicht auf § 87

$$\text{für } t = t_{\rm I} \pm \frac{2\nu}{2} T, \qquad r = r_{\rm I}, \qquad v = v_{\rm I},$$

$$\text{„} \quad t = t_{\rm I} \pm \frac{2\nu + 1}{2} T, \qquad r = -r_{\rm I}, \quad v = -v_{\rm I}.$$

Die resultirende Schwingung ist von gleicher Dauer und Art wie die Einzelschwingungen, es gelten für sie mit der aus (1) (2) entstehenden Grundgleichung des § 87 sämmtliche Beziehungen des letzteren.

Einzelschwingungen beliebiger Geraden. Die Einzelwellen mögen, wenn sie für sich wirken, dem Punkte m zur Zeit t die Verrückungen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \ldots$ von der Gleichgewichtslage aus ertheilen. Wir erhalten dann die den beschleunigenden Kräften pro Masseneinheit entsprechenden resultirenden Accelerationen in den Richtungen x, y, z zur Zeit t, ganz wie oben schliessend,

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -k(\xi_1 + \xi_2 + \cdots), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -k(\eta_1 + \eta_2 + \cdots), \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -k(\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgen, wie im vorigen Falle r, die ganzen Verrückungen von m zur Zeit t

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \cdots, \\ \eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots, \\ \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \cdots. \end{cases}$$

Weiter haben wir zur Zeit t die als Absolutwerth aufzufassende Totalverrückung

$$(6)\qquad \varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

die Winkel ihrer Richtung mit den Richtungen x, y, z

$$(7)\qquad \cos(rx) = \frac{\xi}{\varrho}, \qquad \cos(ry) = \frac{\eta}{\varrho}, \qquad \cos(rz) = \frac{\zeta}{\varrho},$$

die Coordinatengeschwindigkeiten

$$(8)\qquad u = \frac{d\xi}{dt}, \qquad v = \frac{d\eta}{dt}, \qquad w = \frac{d\zeta}{dt}$$

u. s. w. Es setzen sich also die von beliebig vielen Wellen beliebiger Punktreihen oder Punktsysteme und Fortpflanzungsrichtungen einzeln erzeugten Verrückungen und Geschwindigkeiten eines Punktes m dem Parallelogramm der Kräfte entsprechend zusammen.

Bei bestimmten k sind alle Einzelschwingungen isochron. Wenn sich nun Grössen mit dem Index $_{\text{I}}$ und ohne Index auf die Zeiten t_{I} und t beziehen, ν aber eine ganze Zahl bedeutet, so hat man

$$\text{für } t = t_{\text{I}} \pm \nu T, \qquad \xi = \xi_{\text{I}}, \qquad \eta = \eta_{\text{I}}, \qquad \zeta = \zeta_{\text{I}},$$
$$u = u_{\text{I}}, \qquad v = v_{\text{I}}, \qquad w = w_{\text{I}}.$$

Die resultirende Schwingung, welche geradlinig, elliptisch oder sonst krummlinig ausfallen kann, ist von gleicher Dauer wie die geradlinigen Einzelschwingungen.

Selbstverständlich können auch alle auf die betrachteten Punkte übertragenen Schwingungen einander vollständig aufheben, sodass Ruhe oder speciell für Schallschwingungen Stille und für Lichtschwingungen Finsterniss eintritt.

§ 90. Princip von Huyghens.

Wir setzen ein homogenes isotropes Medium voraus. Von jedem Punkte aus gehen Punktreihen der bisher betrachteten Art nach zahlreichen Richtungen. Es handelt sich um Fortpflanzung bestimmter Schwingungen, Longitudinalschwingungen, Transversalschwingungen u. s. w., in diesem Medium.

Ein Punkt S werde in Schwingung versetzt. Berücksichtigt man allein solche Schwingungen der Punkte unseres Mediums, welche von S aus in den Verbindungsgeraden übertragen werden, so übersieht man die Schwingungsverhältnisse aller Punkte aus dem Gesichtspunkte, dass diejenigen Punkte, welche im Gleichgewichtszustande auf irgend einer von S ausgehenden Geraden lagen, nun eine schwingende Punktreihe nach Art der in § 88 betrachteten bilden (Fig. 39).

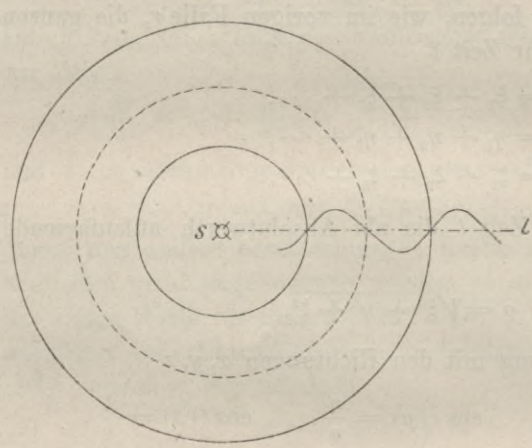

Fig. 39.

Die Schwingungen pflanzen sich vom Störungscentrum S aus in concentrischen Kugelflächen fort. Alle auf einer Kugelfläche um S gelegenen Punkte durchschreiten gleichzeitig gleiche Schwingungsphasen, bilden also eine Wellenfläche (§ 86). Auch der Wiedereintritt der Ruhe muss für die Punkte jeder solchen Kugelfläche gleichzeitig erfolgen. Die Richtungen der Fortpflanzung sind senkrecht den Elementen der Kugelflächen. Zu jeder bestimmten Zeit t zerfällt der Raum um O in eine Anzahl Kugelschaalen, deren Endflächen nur Punkte in gleicher Passage der Gleichgewichtslage enthalten, während die Punkte aller zwischenliegenden Kugelflächen sich in verschiedenen Schwingungsphasen befinden. Jede solche Kugelschaale heisst eine Kugelwelle. Bleibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c und damit auch die Wellenlänge λ constant (wie dies in homogenen isotropen Medien zutrifft), so befinden sich die Punkte aller Wellenflächen, deren Radien um ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ abweichen, in gleicher Schwingungsphase und die Punkte von Wellenflächen, deren Radien um ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ differiren, in entgegengesetzten Schwingungsphasen. Die Kugelwellen sind also von gleicher Dicke λ.

Den Grundgedanken der vorstehenden Anschauung hat schon 1664 *Robert Hooke* ausgesprochen, indem er das Licht auf Schwingungen eines elastischen Mediums zurückführte, deren Fortpflanzung nach den vom Störungscentrum ausgehenden Kugelradien erfolge. Indessen ist die Anschauung zwar für manche Zwecke genügend, aber nicht alle Fälle umfassend, nicht allgemein genug. Nach ihr würde z. B. in dem schraffirten Raume der Fig. 40 vollständige Finsterniss bezw. vollständige Stille herrschen, wenn S die Lichtquelle oder Schallquelle bedeutet. Die hier nothwendige allgemeinere Auffassung rührt von *Huyghens* her und wird nach ihm *Huyghens'sches Princip* genannt.

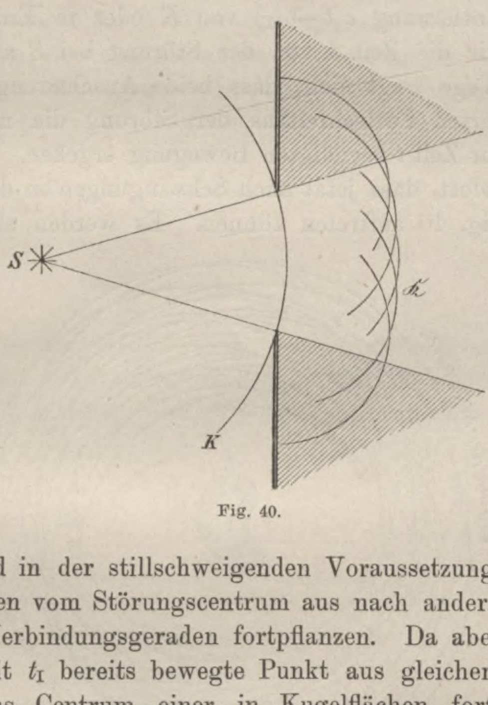

Fig. 40.

Das Einseitige der Anschauung Hooke's bestand in der stillschweigenden Voraussetzung, dass sich die Schwingungen vom Störungscentrum aus nach andern Punkten m *nur* in den Verbindungsgeraden fortpflanzen. Da aber jeder zu irgend einer Zeit t_I bereits bewegte Punkt aus gleichem Grunde wie früher S das Centrum einer in Kugelflächen fortschreitenden Bewegung bildet, so ist der Schwingungszustand des Punktes m zur Zeit t als Resultat der Interferenz aller augenblicklich m erreichenden Einzelwellen anzusehen. Unter Voraussetzung von Schwingungen des in § 87 angenommenen Kraftgesetzes oder des Princips der Coexistenz elastischer Bewegungen setzen sich die Schwingungen dem Parallelogramm der Kräfte gemäss zusammen, sie können als neben einander und unabhängig von einander existirend angesehen werden, wie dies auch die Erfahrung für Licht und Schall lehrt.

Bezüglich der grössten Entfernung, bis zu welcher die Bewegung von einem Punkte S aus bei ungehindertem Fortschreiten zur Zeit t gelangt, kommt man auf Grund der ersterwähnten Anschauung zu gleichen Resultaten wie mittelst des Princips von Huyghens. Denn sehen wir alle Punkte k der Kugelfläche K, bis zu welcher die Bewegung zu irgend einer Zeit t_{I} vorgedrungen war, als Centren von neuen Kugelwellen an, so wird zu der späteren Zeit t die Grenze des Vordringens der Störung von S aus durch die Berührungsfläche der äussersten Wellenflächen um die k gebildet sein. Diese Berührungsfläche ist aber ebenso lange eine K concentrische Kugelfläche $\mathfrak{K}$, als man von S aus ohne Hinderniss radial nach Punkten von $\mathfrak{K}$ gelangen kann, sie liegt bei constantem c in Entfernung $c(t - t_{\mathrm{I}})$ von K oder in Entfernung ct von S, wenn wir die Zeit t von der Störung bei S an rechnen. Auf gleichem Wege zeigt sich, dass beide Anschauungen für den Fall ungehinderten Fortschreitens der Störung die nämliche Wellenfläche der zur Zeit t beendigten Bewegung ergeben. Andererseits erkennt man sofort, dass jetzt auch Schwingungen in dem schraffirten Raume der Fig. 40 auftreten können. Es werden alle diejenigen Punkte auf directem Wege (nicht reflectirte) Schwingungen erhalten, zu welchen von irgend einem der früher gestörten Punkte eine den Schirm nicht treffende Gerade führt.

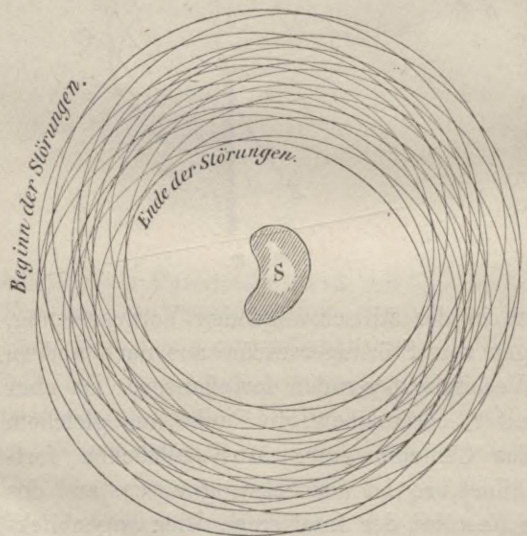

Fig. 41.

Findet die erste Störung gleichzeitig in einem endlichen Raume S statt (Fig. 41), so werden selbst im unbegrenzten Medium die Flächen beginnender und beendigter Bewegung keine Kugelflächen mehr sein, sondern die Umhüllungsflächen derjenigen Kugelflächen, welche mit den Radien ct_a und ct_e (bei constantem c, Zeiten t_a und t_e von Anfang und Ende der Störungen in S an gerechnet) um die äussersten Punkte S gelegt sind. Denn für jeden Punkt des Raumes S als eines Störungscentrums gilt die obige Darstellung. Die beiden Grenzflächen der

Bewegung müssen sich aber um so mehr Kugelflächen nähern, je weiter sie sich von S entfernen.

Ist das fortpflanzende Medium nicht homogen und isotrop, so findet eine ganz ähnliche Interferenz von Einzelwellen wie im oben behandelten Falle statt, doch ist c nicht mehr constant und sind die Wellenflächen keine Kugelflächen mehr.

§ 91. **Verschiebungen durch einfache Schwingungen.**

Wir haben in §§ 89, 90 gesehen, dass durch Interferenz von einfachen Schwingungen materieller Punkte combinirte Schwingungen sehr verschiedener Bahnen entstehen können, indem sich gleichgerichtete Wege und Geschwindigkeiten addiren und verschieden gerichtete dem Parallelogramme der Kräfte entsprechend zusammen setzen. Es sollen nun die von einem Punkte S ausgehenden einfachen Schwingungen eines homogenen Mediums unter gewissen Voraussetzungen noch weiter untersucht werden.

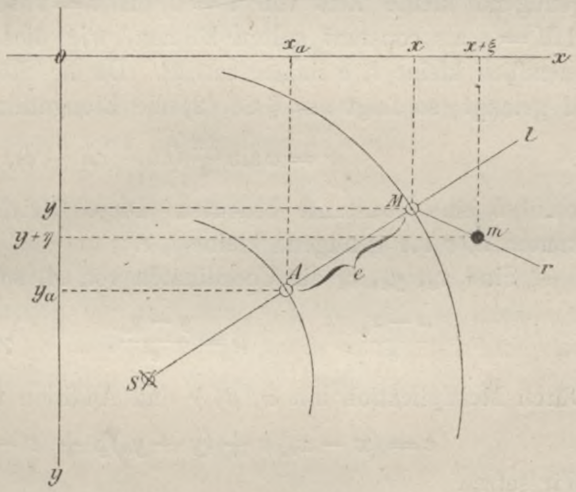

Fig. 42.

Wir wählen ein Coordinatensystem in fester Lage gegen die Gruppirung der Punkte im anfänglichen ungestörten Zustande. Ein beliebiger Punkt m habe seine Ruhelage M von S aus in der Richtung l bei x, y, z (Fig. 42).

Dann setzen wir

$$(1)\qquad \alpha = \cos(lx), \qquad \beta = \cos(ly), \qquad \gamma = \cos(lz),$$

womit

$$(2)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Von den beiden aus M gezogenen Richtungen der Schwingungen des Punktes m sei diejenige der positiven Elongationen r durch r bezeichnet. Mit

$$(3)\qquad \varphi = \cos(rx), \qquad \chi = \cos(ry), \qquad \psi = \cos(rz)$$

folgt dann für den Winkel von r mit l

$$(4)\qquad \cos(rl) = \alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi.$$

Die Verrückungen von m gegen M aber sind bestimmt durch die Gleichungen

(5) $$\xi = r\varphi, \qquad \eta = r\chi, \qquad \zeta = r\psi.$$

Die auf der Geraden SM gelegenen Punkte unseres homogenen Mediums bilden eine homogene Punktreihe (§ 86), die Constante k und Schwingungsdauer sind für alle ihre Punkte von gleichem Werthe. Dagegen können die Amplitude a und, solange nichts Gegentheiliges bewiesen ist, auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c nach Zeit und Ort verschieden sein. Die Aenderung der Amplitude a eines bestimmten Punktes ist durch das Verhältniss von Abgabe und Neuaufnahme lebendiger Kraft bedingt, die Aenderungen von a zu bestimmter Zeit auf einer Strecke von gegebener Länge sind um so geringer, je weiter sich die Strecke vom Störungscentrum befindet. Wir wählen nun zwischen S und M auf der Verbindungsgeraden einen Punkt A so nahe bei M, dass für die genügend kleine Zeit von $t = 0$ bis $t = t$ sowohl a als c auf $AM = e$ als constant gelten können, wie dies beispielsweise für unendlich kleine t, e immer zutrifft. Da die Störung über A nach M gelangt, so folgt aus § 88, (2) die Elongation von m zur Zeit t

$$r = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - ch - e),$$

worin h eine Constante bedeutet. Diese Gleichung gilt mit constanten a, c für genügend kleine t, e.

Sind x_a, y_a, z_a die Coordinaten von A, so hat man

$$\alpha = \frac{x - x_a}{e}, \qquad \beta = \frac{y - y_a}{e}, \qquad \gamma = \frac{z - z_a}{e}.$$

Durch Multiplication mit α, β, γ und Addition folgt

$$e = (x - x_a)\alpha + (y - y_a)\beta + (z - z_a)\gamma.$$

Wir setzen

(6) $$b = \alpha x_a + \beta y_a + \gamma z_a - ch$$

und erhalten die Elongation von m zur Zeit t

(7) $$r = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - \alpha x - \beta y - \gamma z + b),$$

worin b für die Punkte der Strecke AM constant ist. Die Oscillationsgeschwindigkeit von m zur Zeit t wird nun

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{2\pi c}{\lambda} a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(ct - \alpha x - \beta y - \gamma z + b)$$

oder mit der Bezeichnung

(8) $$q = a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(ct - \alpha x - \beta y - \gamma z + b)$$

einfacher ausgedrückt

$$(9)\qquad \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{2\pi c}{\lambda} q = \frac{2\pi}{\mathsf{T}} q,$$

unter T die Schwingungsdauer verstanden.

Aus (5), (9) ergeben sich die Coordinatengeschwindigkeiten des beliebigen Punktes $m(x, y, z)$

$$(10)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \xi}{\partial t} = \dfrac{2\pi c}{\lambda} \varphi q, \\ v = \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \dfrac{2\pi c}{\lambda} \chi q, \\ w = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = \dfrac{2\pi c}{\lambda} \psi q, \end{cases}$$

und hieraus die Coordinatenaccelerationen

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 c^2 \varphi r, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 c^2 \chi r, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 c^2 \psi r. \end{cases}$$

Im Folgenden haben wir es mit verschiedenen, wenn auch unendlich benachbarten, Richtungen oder Punktreihen l zu thun.

Isotrope Medien. Wir denken uns den Ursprung der Coordinaten in den Punkt S gelegt, womit b für die Punkte einer durch A gehenden Kugelfläche um S constant und im Sinne des § 89 die Phase der AM treffenden Kugelwellen wird. Da ferner die Richtung l der Fortpflanzung bei endlichem SM für alle m unendlich benachbarten Punkte als constant gelten kann, so ergeben sich aus (5), (7) mit der Bezeichnung (8) folgende Ausdrücke für die Verschiebungen bei m

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} \alpha \varphi q, & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} \alpha \chi q, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} \alpha \psi q, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} \beta \varphi q, & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} \beta \chi q, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} \beta \psi q, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial z} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} \gamma \varphi q, & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} \gamma \chi q, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} \gamma \psi q. \end{cases}$$

Durch nochmalige Differentiation entstehen

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \alpha^2 \varphi r, & \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \alpha^2 \chi r, & \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \alpha^2 \psi r, \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \beta^2 \varphi r, & \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \beta^2 \chi r, & \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \beta^2 \psi r, \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \gamma^2 \varphi r, & \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \gamma^2 \chi r, & \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \gamma^2 \psi r. \end{cases}$$

Aus (12) erhalten wir bei Beachtung von (4) die Dilatation bei m

$$(14) \qquad \omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{2\pi}{\lambda} q \cos(rl)$$

und deren Differentialquotienten

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \alpha r \cos(rl), \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \beta r \cos(rl), \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial z} = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \gamma r \cos(rl). \end{cases}$$

Die Gleichungen (13) liefern mit der Bezeichnung

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

wegen (2) die Werthe

$$(16) \quad \Delta^2 \xi = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varphi r, \quad \Delta^2 \eta = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \chi r, \quad \Delta^2 \zeta = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \psi r.$$

Durch (12) sind auch die Gleitungen g_{xy}, g_{yz}, g_{zx} bestimmt. In (14), (15) kann die Condensation σ an Stelle von $-\omega$ gesetzt werden. Die Gleichungen (11), (13), (16) lassen sich mit Rücksicht auf (5) noch einfacher ausdrücken. Aus (8) entnehmen wir

$$(17) \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha r, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{2\pi}{\lambda} \beta r, \qquad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{2\pi}{\lambda} \gamma r.$$

Beliebige homogene Medien. Anstatt in den Punkt S wollen wir den Ursprung der Coordinaten jetzt in den Punkt A legen. Betrachtet man dann

$$(18) \qquad \alpha x_a + \beta y_a + \gamma z_a = 0$$

als Gleichung einer senkrecht zu l durch A gelegten Ebene und

$$(19) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = e$$

als Gleichung einer der vorigen parallelen Ebene durch M, so gelangt die Störung von den unendlich nahe an A auf der ersten Ebene gelegenen Punkten gleichzeitig (wegen gleichem e) und mit gleicher Phase (wegen gleichem b) zu den unendlich nahe bei M auf der zweiten Ebene gelegenen Punkten. Das Gleiche gilt für alle AM unendlich benachbarten Punkte auf zu l senkrechten Ebenen zwischen A und M, man kann von einer Fortpflanzung der Störung in *ebenen Wellen* unendlich kleiner Flächen sprechen, für welche ebenfalls die oben abgeleiteten Gleichungen gelten. Diese Gültigkeit ist nun aber, weil keine kugelförmigen Wellenflächen vorausgesetzt wurden, nicht mehr auf homogene isotrope Medien beschränkt, sondern besteht für beliebige homogene Medien und beispielsweise auch für die homogenen Theilchen heterogener Medien.

Potentialschwingungen und Schwingungen ohne Dilatation. Für Potentialschwingungen hat man nach § 30, (5)

$$\Delta^2 \xi = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \Delta^2 \eta = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \qquad \Delta^2 \zeta = \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

und mit Rücksicht auf (15) (16) speciell im Falle einfacher Schwingungen

$$\varphi = \alpha \cos(rl), \qquad \chi = \beta \cos(rl), \qquad \psi = \gamma \cos(rl).$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit φ, χ, ψ und Addition

$$1 = \cos^2(rl), \qquad \cos(rl) = \pm 1.$$

Die Schwingungen sind Longitudinalschwingungen. Setzen wir umgekehrt einfache Longitudinalschwingungen voraus, so folgen wegen zusammenfallender Richtungslinien von r und l

$$\beta\varphi = \alpha\chi, \qquad \gamma\chi = \beta\psi, \qquad \alpha\psi = \gamma\varphi$$

und damit nach (12)

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

die Bedingungen für Potentialschwingungen. — Für Schwingungen ohne Dilatation ist $\omega = 0$ und im Falle einfacher Schwingungen nach (14) (15)

$$\cos(rl) = 0$$

Transversalschwingungen entsprechend. Umgekehrt hat man für einfache Transversalschwingungen mit $\cos(rl) = 0$ auch $\omega = 0$, es findet keine Dilatation statt. Wir können also aussprechen: *Bei einfachen Schwingungen sind Potentialschwingungen mit Longitudinalschwingungen und Schwingungen ohne Dilatation mit Transversalschwingungen identisch.*

§ 92. Weitere Verschiebungsfunctionen.

Es sollen nun auch die von einfachen Schwingungen herrührenden Normalverschiebungen, Totalverschiebungen und Dehnungen einer beliebigen Richtung n, sowie die Normalgleitungen, Totalgleitungen und Schiebungen je zweier beliebiger Richtungen n, s bei $m(x, y, z)$ abgeleitet werden, da einzelne der betreffenden Ausdrücke in der Folge zur Anwendung kommen.

Substituirt man § 91, (12) in § 21, (2), so folgen die Componenten der Totalverschiebung r_n irgend einer Richtung n in den Richtungen x, y, z

$$(1) \qquad \begin{cases} x_n = -\dfrac{2\pi}{\lambda} q \varphi \cos(ln), \\ y_n = -\dfrac{2\pi}{\lambda} q \chi \cos(ln), \\ z_n = -\dfrac{2\pi}{\lambda} q \psi \cos(ln). \end{cases}$$

Durch Quadriren und Addiren dieser Gleichungen ergibt sich

$$(2)\qquad r_n = \frac{2\pi}{\lambda} q \cos(ln),$$

wobei jedoch rechts nur der Absolutwerth zu nehmen ist. Bezeichnet man die Richtung der Totalverschiebung vorübergehend mit ϱ, so folgen aus (1), (2)

$$\cos(\varrho x) = \frac{x_n}{r_n} = \pm\varphi,$$

$$\cos(\varrho y) = \frac{y_n}{r_n} = \pm\chi,$$

$$\cos(\varrho z) = \frac{z_n}{r_n} = \pm\psi.$$

Die Totalverschiebungen sind parallel der Schwingungsgeraden.

Für die Componente von r_n in beliebiger Richtung s hat man allgemein

$$s_n = x_n \cos(sx) + y_n \cos(sy) + z_n \cos(sz)$$

und mit (1) in unserm Falle

$$(3)\qquad s_n = -\frac{2\pi}{\lambda} q \cos(ln)\cos(rs).$$

Durch Vertauschen von n, s entsteht

$$n_s = -\frac{2\pi}{\lambda} q \cos(ls)\cos(rn)$$

und wir erhalten die Normalgleitung der Richtungen n, s

$$(4)\qquad g_{ns} = s_n + n_s = -\frac{2\pi}{\lambda} q\Big[\cos(ln)\cos(rs) + \cos(ls)\cos(rn)\Big].$$

Die Normalverschiebung der Richtung n folgt aus (3) mit $s = n$

$$(5)\qquad n_n = -\frac{2\pi}{\lambda} q \cos(ln)\cos(rn)$$

und die Transversalverschiebung aus (2) (5)

$$(6)\qquad t_n = \frac{2\pi}{\lambda} q \cos(ln)\sin(rn),$$

wobei wieder rechts nur der Absolutwerth massgebend. Die Richtung von t_n ist durch § 4, (7) bestimmt. Nach (1) — (6) sind die Verschiebungen von Punkten der Richtungen $n \perp l$ gleich Null und ebenso die Componenten der Verschiebungen beliebiger Richtungen n in Richtungen $s \perp r$.

Die Totalgleitung zweier beliebiger Richtungen n, s drückt sich allgemein aus

$$p_{ns} = x_n x_s + y_n y_s + z_n z_s$$

und hier nach Substitution von (1) und der entsprechenden Werthe für die Richtung s

$$(7) \qquad p_{ns} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 q^2 \cos(ln)\cos(ls).$$

Die Gleichungen (7) (2) lassen ohne Weiteres auf die Verhältnisse der Grenzverschiebungen schliessen. Das Verschiebungsellipsoid erscheint als Umhüllungsfläche einer geraden Strecke, welche von m aus nach beiden Richtungen der Schwingungsgeraden bis zu Entfernungen

$$r_1 = \frac{2\pi}{\lambda} q$$

reicht. Schliesslich erhalten wir die Schiebung der beliebigen Richtungen n, s

$$(8) \qquad \begin{cases} q_{ns} = g_{ns} + p_{ns} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 q^2 \cos(ln)\cos(ls) \\ \qquad\qquad - \frac{2\pi}{\lambda} q \left[\cos(ln)\cos(rs) + \cos(ls)\cos(rn)\right] \end{cases}$$

und damit wegen

$$(1 + e_n)^2 = 1 + q_{nn}$$

für die Dehnung e_n der Richtung n

$$(9) \quad (1 + e_n)^2 = 1 - \frac{4\pi}{\lambda} q \cos(ln)\cos(rn) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 q^2 \cos^2(ln).$$

Auf diese Beziehung hätten wir auch aus (2) (5) schliessen können.

Für Potentialverschiebungen muss wegen $s_n = n_s$ für beliebige n, s sein

$$\cos(ln)\cos(rs) = \cos(ls)\cos(rn),$$

was nur für $r = \pm l$ zutrifft, wir haben dann Longitudinalschwingungen, wie sich bereits in § 91 ergeben hat.

XII. Abschnitt.

Ueber elastische Schwingungen.

Bei Untersuchung elastischer Schwingungen gehen wir von der zweiten Auffassung der Spannungs- und Bewegungsgesetze aus, für welche die Spannungen stetige Functionen der anfänglichen Coordinaten und Normalenrichtungen ihrer Flächenelemente sind. Rühren die Spannungen von den Schwingungen allein her, so gilt das Gleiche für die auftretenden äusseren Kräfte, es kommen äussere Massenkräfte nicht vor, die Schwingungen erfolgen um die Gleichgewichtslagen im anfänglichen ungestörten Zustande. Sind jedoch von den Schwingungen unabhängige äussere Kräfte vorhanden, welche für sich Gleichgewicht hinsichtlich des gewählten Coordinatensystems erzeugen könnten, so folgen unter Voraussetzung des Princips der Coexistenz die Schwingungen um die den unabhängigen Kräften entsprechenden Gleichgewichtslagen denselben Gesetzen, wie die Schwingungen um die Lagen im anfänglichen ungestörten Zustande bei gänzlichem Fehlen unabhängiger äusserer Kräfte (§ 37). Für die von letzteren und den Schwingungen herrührenden Spannungen besteht aber das Princip der Coexistenz dann, wenn in den Spannungsausdrücken des VI. und VII. Abschnitts die Coefficienten der Verschiebungsfunctionen und von τ während der Bewegung constant sind. Solche Fälle kommen hier allein in Frage. Da ferner die Schwingungen um die den unabhängigen äusseren Kräften entsprechenden Gleichgewichtslagen, welche bei Fehlen solcher Kräfte mit den anfänglichen Lagen identisch sind, allein interessiren, so können wir von unabhängigen äusseren Kräften, wie beispielsweise von äusseren Massenkräften, ganz absehen. Die Differentiale der Spannungen oder Verschiebungen in den Bewegungsgleichungen entsprechen denjenigen Werthen dieser Grössen, welche durch die Schwingungen allein bedingt sind, homogene Körper verhalten sich als homogene Medien und homogene isotrope Körper als homogene isotrope Medien.

Die Untersuchung elastischer Schwingungen von Flüssigkeiten erfolgte bisher nach besonderen Formen der hydrodynamischen

Grundgleichungen von *Euler*. Bei Beurtheilung der elastischen Schwingungen sonstiger isotroper Körper ging man entweder mit *Cauchy* von der Bewegung eines Punktes unter dem Einflusse aller ihn afficirenden aus oder man legte die von *Lamé* aus den Spannungsgesetzen abgeleiteten Schwingungsgleichungen isotroper fester Körper zu Grunde, für welche die Anfangsspannungen gleich Null sind. Das erste Verfahren ist sehr umständlich, und beide beruhen auf der Voraussetzung von Centralkräften zwischen den einzelnen Punkten, welche Annahme wir bereits fallen lassen mussten. Wir werden in § 97 auch die Grundgleichungen für elastische Schwingungen beliebiger isotroper Körper erhalten. Die neueren optischen Untersuchungen zu Grunde liegende Annahme eines gleichartigen Verhaltens von Aether und festen Körpern erscheint danach insofern zutreffend, als sich die Schwingungsgleichungen für beide Fälle in gemeinsame Formen bringen lassen.

Von den Grundgleichungen ausgehend wird sodann festzustellen sein, unter welchen Voraussetzungen Schwingungen der im vorigen Abschnitte betrachteten Art möglich sind. Wir machen dabei von den Beziehungen des § 91 Gebrauch. Wenn damit zunächst nur homogene isotrope und anisotrope Körper behandelt werden, so gelten doch die entstehenden Beziehungen auch für die einzelnen homogenen Theilchen heterogener Körper. Schliesslich sei bemerkt, dass die symbolische Bezeichnung

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

im Folgenden ohne weitere Erklärung Verwendung finden wird.

§ 93. Grundgleichungen für Schwingungen von Flüssigkeiten.

Wir geben in diesem Paragraphen die Grundformeln zur Untersuchung elastischer Schwingungen von Flüssigkeiten ohne Rücksicht auf die im XI. Abschnitte vorgetragenen Anschauungen und Resultate. Die folgenden Beziehungen lassen sich auch aus den in § 97 enthaltenen Gleichungen für beliebige isotrope Körper entnehmen; sie werden hier für sich abgeleitet, weil die Schwingungen von Flüssigkeiten (insbesondere der atmosphärischen Luft) vielfach allein interessiren.

Für beliebige Schwingungen der Theilchen um ihre Gleichgewichtslagen entnimmt man aus § 65, (14)

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0,$$

worin μ die specifische Masse im anfänglichen ungestörten Zustande bedeutet. Setzt man für gleichzeitige Aenderungen von p und ω

$$(1) \qquad p = f(\omega), \qquad \frac{\delta p}{\delta \omega} = e,$$

so folgen

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \dfrac{e}{\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \dfrac{e}{\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \dfrac{e}{\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

unter

$$(3) \qquad \omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

die Dilatation bei x, y, z verstanden.

Durch zweimalige Differentiation von (3) nach t entsteht

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x\, \partial t^2} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial y\, \partial t^2} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial z\, \partial t^2}$$

und indem man die aus (2) folgenden Ausdrücke der Differentialquotienten rechts substituirt

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{e}{\mu} \Delta^2 \omega.$$

Während wir in (2) (3) vier Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten ξ, η, ζ, ω haben, enthält Gleichung (4) nur noch eine Function ω der Unabhängigvariabeln x, y, z, t, sie lässt sich in einfacher Weise lösen, worauf ξ, η, ζ aus (2) folgen.

An Stelle von (2) — (4) können wegen § 61, (10) und mit der Bezeichnung

$$(5) \qquad c^2 = \frac{e}{\mu}$$

auch folgende Beziehungen treten

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c^2 \dfrac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + c^2 \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + c^2 \dfrac{\partial \omega}{\partial z} = 0; \end{cases}$$

$$(7) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varrho;$$

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c^2 \Delta^2 \omega,$$

und in (1) — (6) darf wegen

$$(9) \qquad \omega + \sigma = 0$$

die Condensation σ für $-\omega$ gesetzt werden.

Bei der raschen Aufeinanderfolge der Schwingungen kann während einer derselben für das schwingende Theilchen weder Wärmezufuhr noch Wärmeentziehung von Aussen in Betracht kommen. Die mechanische Wärmethorie nennt solche Aenderungen von p, ω *adiabatische Zustandsänderungen*, diesen entsprechen also die Beziehungen (1), womit e, c^2 für die hier in Frage kommenden Aenderungen constant werden. Die Lösung unserer Gleichungen (z. B. in § 94) ergibt, dass c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen ist.

Die Gleichungen (6) (7) lassen sich auch aus den hydrodynamischen Grundgleichungen von *Euler* ableiten, wenn angenommen wird, dass die Componenten u, v, w der Oscillationsgeschwindigkeit von m (x, y, z) klein genug sind, um in § 61, (6), je die drei letzten Glieder als kleine Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen zu dürfen. Es folgen dann aus § 63, (2) für Schwingungen um die Gleichgewichtslagen

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

worin nun μ die augenblickliche specifische Masse bedeutet. Da jedoch der geringen Veränderlichkeit von μ wegen der Quotient in

$$\mu = \mu_0 \frac{\mu}{\mu_0}$$

nur um verschwindend wenig von 1 abweicht, so können wir in obigen Gleichungen auch die anfängliche specifische Masse unter μ verstehen. Da ferner mit

$$\mu = \mu_0 (1 + \sigma)$$

in der Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu u}{\partial x} + \frac{\partial \mu v}{\partial y} + \frac{\partial \mu w}{\partial z} = 0$$

die Grössen σu, σv, σw bei der vorausgesetzten Kleinheit von u, v, w kleine Grössen zweiter Ordnung sind, so geht diese Gleichung in (7) über.

§ 94. Einfache Schwingungen von Flüssigkeiten.

Wir wollen nun feststellen, unter welchen Voraussetzungen einfache Schwingungen der im XI. Abschnitte untersuchten Art und damit auch alle daraus combinirten Schwingungen (§ 75) in Flüssigkeiten möglich sind. Dies ist dann der Fall, wenn die für einfache Schwingungen gültigen Beziehungen eine Lösung der Grundgleichungen des § 93 bilden. Die Schwingungen mögen vom Punkte S ausgehen. Für die einem Punkte m der Anfangslage M unendlich benachbarten Punkte sind Amplitude a und Fortpflanzungsgeschwindigkeit c als constant anzusehen. Wählen wir S (oder einen zwischen S und M gelegenen Punkt A, § 91) als Ursprung der Coordinaten und substituiren die alsdann gültigen Differentialquotientenwerthe nach § 91 in § 93, (2), so folgen für ein Theilchen bei m

$$(1) \qquad \begin{cases} e\alpha \cos(rl) + \mu\varphi c^2 = 0, \\ e\beta \cos(rl) + \mu\chi c^2 = 0, \\ e\gamma \cos(rl) + \mu\psi c^2 = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste, zweite und dritte dieser Gleichungen bezw. mit α, β, γ und addirt, so entsteht mit Rücksicht auf § 91, (2) (4)

$$(2) \qquad (e + \mu c^2)\cos(rl) = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen, welchen die in Flüssigkeiten möglichen einfachen Schwingungen entsprechen müssen.

Longitudinalschwingungen. Die erste Lösung bildet

$$(3) \qquad c^2 = -\frac{e}{\mu}.$$

Damit folgen aus (1)

$$\varphi = \alpha\cos(rl), \qquad \chi = \beta\cos(rl), \qquad \psi = \gamma\cos(rl).$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen mit φ, χ, ψ und Addition entsteht

$$1 = \cos^2(rl).$$

Die Gleichung (3) führt also auf Longitudinalschwingungen und liefert die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c derselben. Bedeuten g die Acceleration des freien Falls und V, V_0 die specifischen Volumina eines Massentheilchens augenblicklich und im ungestörten Zustande, so haben wir

$$\mu = \frac{1}{gV_0} = \frac{1}{gV}\frac{V}{V_0},$$

$$e = \frac{\delta p}{\delta\omega} = \frac{\delta p}{\delta V}V,$$

und weil hierin der geringen Aenderung des Volumens wegen $V : V_0 = 1$ gesetzt werden darf,

$$(4) \qquad c = \sqrt{-geV} = \sqrt{-gV^2\frac{\delta p}{\delta V}}.$$

Die Gleichung lässt sich für bestimmte Flüssigkeiten noch anders gestalten (§§ 95, 96).

Transversalschwingungen. Die zweite Lösung von (2) entsteht mit

$$\cos(rl) = 0,$$

wir hätten dann Transversalschwingungen. Da jedoch für diesen Fall jede der Gleichungen (1) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = 0 \tag{5}$$

liefert, so können Wellen von Transversalschwingungen in Flüssigkeiten nicht vorkommen, wenigstens nicht unter Voraussetzung der Bewegungsgleichungen § 93, (2), welche einen speciellen Fall der für beliebige isotrope Körper gültigen bilden. Weil ferner durch Interferenz von Longitudinalschwingungen wieder solche entstehen (§ 89), so müssen auch die Schallschwingungen der Flüssigkeiten Longitudinalschwingungen sein, falls sie aus einfachen Schwingungen der in § 87 untersuchten Art combinirt sein sollen. Die Akustik nimmt dies an, und da sich beliebige einfache Schwingungen an derselben Stelle nach (3) oder (4) gleich schnell fortpflanzen, so drücken diese Gleichungen ganz allgemein die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten aus, was nach §§ 95, 96 durch die Erfahrung bestätigt wird.

§ 95. Schallgeschwindigkeit in Gasen.

Wir gehen von der im vorigen § für beliebige Flüssigkeiten gefundenen Formel

$$c = \sqrt{-g V^2 \frac{\delta p}{\delta V}} \tag{1}$$

aus, worin der Differentialquotient einer adiabatischen Zustandsänderung entspricht. Für atmosphärische Luft pflegt man das *Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz*

$$p V = R T = R(a + t) \tag{2}$$

als gültig anzunehmen, worin R eine von p, V unabhängige Grösse und $T = a + t$ die absolute Temperatur bedeutet, welche um eine Constante a höher als die Temperatur t nach Celsius ist. Sodann besteht speciell für adiabatische Zustandsänderungen von Gasen die Beziehung

$$p V^k = \text{Const.}, \tag{3}$$

unter k das constante Verhältniss der specifischen Wärmen bei constantem p und constantem V verstanden. Gleichung (3) wird in der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet, war aber schon vor Ausbildung der letzteren als *Poisson'sches Gesetz* bekannt. Durch Differentiation von (3) folgt

$$V^k \delta p + p k V^{k-1} \delta V = 0,$$

sodass für Gase

$$\frac{\delta p}{\delta V} = -k\frac{p}{V}, \tag{4}$$

und damit aus (1) die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{kgpV} = \sqrt{gkRT}. \tag{5}$$

Wie schon in § 93 dürfen auch die Werthe von p, V im ungestörten Zustande an Stelle der augenblicklichen gesetzt werden. Nach (5) hängt c nur von T, nicht von dem Factor p oder V ab.

Für trockene atmosphärische Luft fand *Regnault* bei $g = 9{,}8089$ m, $p = 1$ Atmosphäre $= 10333$ kg und $T = a = 273^0$ das specifische Gewicht $1 : V = 1{,}29318$ kg. Wir erhalten hiernach für trockene Luft an Orten von $g = 9{,}8089$ aus (2)

$$R = \frac{10333}{1{,}29318 \cdot 273} = 29{,}269$$

und mit der Bezeichnung $\alpha = \frac{1}{a} = 0{,}003663$ und dem gegenwärtig gebräuchlichen Werthe $k = 1{,}41$

$$c = 20{,}118\sqrt{T} = 332{,}43\sqrt{1 + \alpha t}. \tag{6}$$

Diese Gleichung liefert

für $t =$	-20	-10	0	10	20	30	40^0 C.
$c =$	$319{,}96$	$326{,}29$	$332{,}43$	$328{,}47$	$344{,}40$	$350{,}22$	$355{,}92$ m.

Moll und *van Beck* erhielten 1823 durch Versuche für trockene Luft von 0^0 C. Temperatur $c = 332{,}25$ m, welcher Werth auch gegenwärtig noch als am zuverlässigsten gilt.

Da nach (2)

$$\frac{p}{T} = \frac{R}{V}$$

bei bestimmten p, T für alle dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze folgenden Gase gleich gross ist, so haben wir, wenn sich R, V auf ein beliebiges Gas und R_a, V_a auf atmosphärische Luft beziehen, δ aber die Dichtigkeit des ersteren in Hinsicht der letzteren bei gleichen p, T bedeutet,

$$R = R_a\frac{V}{V_a} = \frac{R_a}{\delta}.$$

Die Schallgeschwindigkeit in beliebigen Gasen kann also nach (5) auch ausgedrückt werden

$$c = \sqrt{kgR_a\frac{T}{\delta}} \tag{7}$$

und für trockene Gase nach (6)

$$c = 20{,}118\sqrt{\frac{T}{\delta}} = 332{,}4\sqrt{\frac{1 + \alpha t}{\delta}}. \tag{8}$$

Die Schallgeschwindigkeit ist hiernach um so grösser, je kleiner die Dichtigkeit und beispielsweise bei $p = 1$ Atmosphäre und $t = 0^0$

für atmosphärische Luft mit	$\delta = 1$	$c = 332{,}4$ m
Sauerstoff	1,10563	316,1
Stickstoff	0,97137	337,3
Wasserstoff	0,06926	1263,0
Kohlensäure	1,52901	268,8.

Die allgemeine Gleichung (5) lässt sich für beliebige g und feuchte Luft (oder Gase überhaupt) noch etwas anders ausdrücken. Nach der Aërostatik hat man

$$(9) \qquad R = \varphi \frac{C}{g}, \qquad \varphi = \frac{1}{1 - \varepsilon \frac{f}{p}},$$

worin C eine Constante und φ einen Correctionsfactor bedeutet, durch welchen die Feuchtigkeit dem Dalton'schen Gesetze entsprechend berücksichtigt wird. Dabei bezeichnen p den Druck der feuchten Luft, f denjenigen des beigemengten Dampfes allein, $1 - \varepsilon$ das Verhältniss der specifischen Gewichte von Dampf und trockener Luft für gleiche p, t. Mit (9) folgt aus (5)

$$(10) \qquad c = \sqrt{\varphi k C T}.$$

Hiernach ist die Acceleration g ohne Einfluss auf die Schallgeschwindigkeit. Dies Resultat wird durch 1822 von *Stampfer* und 1844 von *Bravais* vorgenommene Versuche bestätigt. Für trockene atmosphärische Luft von 0^0 C. Temperatur fand ersterer bei 1304 m Höhenunterschied der Endstationen die Geschwindigkeit 332,44 m und letzterer bei 2116 m Höhenunterschied 332,37 m, genau übereinstimmend mit dem zunächst für $g = 9{,}8089$ berechneten Ausdrucke (6).

Die Constante C in (10) ergibt sich aus (9) mit irgend welchen zusammengehörigen Werthen von R, g, φ, beispielsweise für atmosphärische Luft mit $R = 29{,}269$, $g = 9{,}8089$, $\varphi = 1$,

$$C = 9{,}8089 \cdot 29{,}269 = 287{,}09;$$

sodass entsprechend (6) für feuchte Luft an beliebigen Orten

$$(11) \qquad c = 20{,}118 \sqrt{\varphi T}.$$

Bei den Verhältnissen der Atmosphäre kann man in (9) etwa $\varepsilon = \frac{3}{8}$ setzen und wäre dann φ wie beim barometrischen Höhenmessen aus gewissen Beobachtungen zu bestimmen, doch weicht sein Werth so wenig von 1 ab, dass die Feuchtigkeit meist unberücksichtigt bleiben kann. Da in der Atmosphäre mit $1 - \varepsilon < 1$

der Correctionsfactor $\varphi < 1$ wird, so muss die Schallgeschwindigkeit bei feuchtem Wetter etwas grösser als bei trockenem von gleicher Temperatur sein.

§ 96. Schallgeschwindigkeit in tropfbaren Flüssigkeiten und Dämpfen.

Wir gehen wieder von der nach § 94 für beliebige Flüssigkeiten gültigen Formel

$$c = \sqrt{-g V^2 \frac{\delta p}{\delta V}} \tag{1}$$

aus. Der Differentialquotient entspricht einer adiabatischen Aenderung von p, V. Die mechanische Wärmetheorie liefert für adiabatische Zustandsänderungen von Flüssigkeiten

$$\frac{\delta p}{\delta V} = k \left(\frac{dp}{dV}\right) = - k \alpha_t V, \tag{2}$$

worin $k = c_p : c_v$ das Verhältniss der specifischen Wärmen bei constantem p und constantem V, und der eingeklammerte Differentialquotient das Verhältniss der Aenderungen von p und V bei constanter Temperatur bedeutet, α_t aber Compressionscoefficient genannt wird. Damit folgt aus (1)

$$c = \sqrt{-g k V^2 \left(\frac{dp}{dV}\right)} = \sqrt{\frac{gk}{\alpha_t} V}, \tag{3}$$

und ist z. B. für Gase nach § 95, (5)

$$\left(\frac{dp}{dV}\right) = - \frac{p}{V}, \qquad \alpha_t = \frac{1}{p}.$$

Tropfbare Flüssigkeiten. In (3) wäre p in Kilogrammen per Quadratmeter zu substituiren. Soll jedoch α_t in (2) auf ein in Atmosphären gemessenes p bezogen werden, dann hat man dort $10333\,p$ an Stelle von p zu setzen und damit auch in (3) unterm Wurzelzeichen mit 10333 zu multipliciren. So folgt für $g = 9{,}8089$

$$c = 318{,}36 \sqrt{\frac{k}{\alpha_t} V}, \tag{4}$$

welche Formel noch immer für beliebige Flüssigkeiten gilt. Sie liefert z. B. für reines Wasser von 1 Atmosphäre Druck

bei	$t =$	0	10	20	30° C.
mit	$V =$	0,00100014	0,00100026	0,00100175	0,00100426 cbm
	$k =$	1,0006	1,0012	1,0069	1,0160
	$\alpha_t =$	0,0000503	0,0000600	0,0000617	0,0000562
	$c =$	1420	1317	1287	1357 m.

Versuche, welche *Colladon* und *Sturm* 1827 im Genfer See bei 9^0 Temperatur vornahmen, ergaben $c = 1435$ m. Auch hier ist, wie bei Gasen, c wesentlich von der Temperatur abhängig. Bei Wasser hat nach den bisherigen Versuchen die Höhe des Drucks p so wenig Einfluss auf α_t, dass selbst der Sinn dieses Einflusses noch nicht zuverlässig festgestellt werden konnte.

Gesättigte Dämpfe. Für gesättigte Dämpfe mit Flüssigkeitsbeimischung hat man

$$V = ux + W, \tag{5}$$

wenn x die specifische Dampfmenge (Gewicht reinen Dampfes in 1 Kilogramm Gemisch), W das specifische Volumen der tropfbaren Flüssigkeit und $S = u + W$ dasjenige ihres reinen Dampfes beim augenblicklichen Drucke p bedeuten. Sodann lässt sich für adiabatische Zustandsänderungen gesättigter Dämpfe, insbesondere des Wasserdampfes, von nicht zu hohem Flüssigkeitsgehalt nach *Rankine* näherungsweise setzen

$$p\,V^m = \text{Const.}, \tag{6}$$

worin m von p und V unabhängig ist. Wir erhalten damit

$$\frac{\delta p}{\delta V} = -m\,\frac{p}{V}, \tag{7}$$

und aus (1) die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{mgpV} = \sqrt{mgp\,(ux + W)}. \tag{8}$$

Auch hier dürfen wir an Stelle der augenblicklichen p, V diejenigen im ungestörten Zustande setzen, das kleine W kann eventuell vernachlässigt werden.

Für gesättigten Wasserdampf ist nach *Zeuner* anzunehmen

$$m = 1{,}135 + 0{,}1\,x,$$

worin sich x auf den Anfangszustand, hier also auf den ungestörten Zustand, bezieht. Wir erhalten danach für nahezu reinen Wasserdampf von p Atmosphären Druck

$$c = \sqrt{1{,}135 \cdot 9{,}8089 \cdot 10333\,p\,V} = 339{,}2\,\sqrt{p\,V},$$

und beispielsweise

für $p =$	$\frac{1}{10}$	1	2	6	14	Atm.
mit $V =$	14,553	1,6505	0,8599	0,3064	0,1383	cbm
$c =$	409	436	445	460	472	m.

Verwendet man die von *Zeuner* für eine Anzahl Dämpfe in reinem gesättigtem Zustande gegebene Beziehung

$$p\,V^n = a, \tag{9}$$

worin n, a Constante bedeuten, so folgt aus (8)

$$(10) \qquad c = \sqrt{mg}\,(ap^{n-1})^{\frac{1}{2n}}.$$

Speciell für reinen Wasserdampf von p Atmosphären Druck erhält man mit $n = 1{,}0646$ und $a = 1{,}7049$

$$c = \sqrt{1{,}135 \cdot 9{,}8089 \cdot 10333 \cdot}\,(1{,}7049\;p^{0{,}0646})^{\frac{1}{2{,}1292}} = 435{,}7\;p^{0{,}03034},$$

also beispielsweise für $p = \frac{1}{10} \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad 14$ Atm.

$c = 406 \quad 436 \quad 445 \quad 460 \quad 472$ m

in guter Uebereinstimmung mit den oben berechneten Werthen.

Ueberhitzte Dämpfe. Für überhitzte Dämpfe entnahm der Verfasser aus Versuchen *Hirn's* mit Wasserdampf die Beziehung (Neue Theorie der überhitzten Dämpfe, Berlin, Gärtner 1876, Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing. 1876 und 77)

$$(11) \qquad p\,(V - S) = R\tau.$$

Darin bedeuten R eine Constante, S das dem augenblicklichen Drucke p entsprechende specifische Sättigungsvolumen, $\tau = T - T_s$ die Ueberhitzung oder Erhebung der augenblicklichen Temperatur T über die dem p entsprechende Sättigungstemperatur T_s. Da für idealpermanente Gase die Ueberhitzung gleich der absoluten Temperatur und das Sättigungsvolumen gleich dem von den Theilchen wirklich ausgefüllten Raume M ist, so entspricht jenen

$$p\,(V - M) = RT,$$

welche Beziehung *Dühring* auf speculativem Wege (Neue Grundgesetze d. rationellen Phys. u. Chemie, Leipzig 1878) und *Amagat* aus Versuchen für Gase erhalten haben. Durch Vernachlässigung von M entsteht das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz

$$pV = RT.$$

Setzt man in (11) $R : p = z$, so folgt für überhitzte Dämpfe

$$(12) \qquad V = z\tau + S,$$

ganz analog der für gesättigte Dämpfe gültigen Formel (5), indem sowohl z, S als u, W Functionen von p allein sind und τ sowohl als x das Maass der Entfernung vom unteren Grenzzustande bildet, welchem S oder W entspricht. Wie die Formeln für gesättigte Dämpfe, so sind diejenigen für überhitzte als Näherungsformeln anzusehen. Auf Grund von (11) liefert nun die mechanische Wärmetheorie

$$(13) \qquad \frac{\delta p}{\delta V} = -\frac{c_p}{c_v}\,\frac{c_p - c_v}{AR}\,\frac{p^2}{RT},$$

unter A, c_p, c_v das calorische Arbeitsäquivalent und die specifischen Wärmen bei constantem p und constantem V verstanden. Damit folgt aus (2) die Schallgeschwindigkeit in überhitzten Dämpfen

$$(14) \qquad c = \frac{pV}{R}\sqrt{\frac{c_p}{c_v}\frac{c_p - c_v}{AT}g}.$$

Nach *Regnault's* Versuchen mit Wasserdampf scheint c_p bei bestimmtem p fast constant zu sein. Denkt man sich während der hier in Frage kommenden geringen Aenderungen von p, V ein mittleres c_p verwendet, so führt (11) für adiabatische Zustandsänderungen auf (6) mit constantem

$$m = \frac{c_p}{c_p - AR},$$

welche Beziehung auch bei Versuchen von *Hirn* und *Cazin* mit Wasserdampf nahezu erfüllt war. Wir erhalten demnach für überhitzte Dämpfe zunächst wie oben für gesättigte und dann mit Rücksicht auf (11)

$$(15) \qquad c = \sqrt{mgpV} = c_s + \sqrt{mgR\tau},$$

worin

$$(16) \qquad c_s = \sqrt{mgpS}$$

die Schallgeschwindigkeit bei gleichem Drucke für $\tau = 0$ bedeutet.

Für Wasserdampf speciell erhält man mit $m = \frac{4}{3}$, $R = 50{,}88$, wenn p in Atmosphären ausgedrückt werden soll,

$$(17) \qquad \begin{cases} c = 367{,}6\sqrt{pV} = c_s + 25{,}80\sqrt{\tau} \\ c_s = 367{,}6\sqrt{pS} \end{cases}$$

und hieraus beispielsweise

für	$p = \frac{1}{10}$	1	2	6	14 Atm.
$\tau = 0$	$c_s = 443$	472	482	498	512 m
$\tau = 100$	$c = 701$	730	740	756	770
$\tau = 400$	$c = 959$	988	998	1014	1028.

Dass die Werthe c_s wesentlich grösser als die oben für reinen gesättigten Dampf berechneten Schallgeschwindigkeiten sind, liegt an den zur Verwendung gekommenen verschiedenen m. Die oben und hier berechneten Werthe müssen danach in dem constanten Verhältniss

$$\sqrt{\frac{1{,}135}{1{,}333}} = 0{,}9226$$

stehen. Erstere würden nur gelten, wenn der Dampf anfangs etwas unterhalb des reinen gesättigten Zustands war, letztere nur, wenn zu Anfang eine geringe Ueberhitzung stattfand, ohne dass deshalb beim Durchschreiten des rein gesättigten Anfangszustandes eine mathematische Unstetigkeit stattzufinden braucht, da der Dampf sich dann, wie schon in gewisser Nähe desselben, abwechselnd condensirt und überhitzt.

Setzen wir

$$(18)\qquad \mathsf{P} = T_s - \frac{pS}{R},$$

so lässt sich (11) auch schreiben

$$(19)\qquad pV = R\,(T - \mathsf{P}),$$

eine Form, welche mit anderm, speciellerem Ausdrucke für P zuerst *Zeuner* anwandte und mit welcher sich unter Anerkennung von (6) aus (15) ergibt

$$(20)\qquad c = \sqrt{mgR\,(T - \mathsf{P})}.$$

Die Gleichungen (13)—(20) gehen für $c_p - c_v = AR$, $S = 0$, $\tau = T$, $\mathsf{P} = 0$ in die unter Voraussetzung des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes gültigen über.

§ 97. **Grundgleichungen für Schwingungen beliebiger isotroper Körper.**

Wir geben in diesem § die Grundgleichungen zur Untersuchung elsatischer Schwingungen isotroper Körper ohne Rücksicht auf die Anschauungen und Resultate des XI. Abschnitts.

Erste Ableitung. Für beliebige Schwingungen der Theilchen um ihre Gleichgewichtslagen entnimmt man aus § 65

$$G\left(\Delta^2 \xi + \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$
$$G\left(\Delta^2 \eta + \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},$$
$$G\left(\Delta^2 \zeta + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

worin μ die specifische Masse im anfänglichen, ungestörten Zustande und

$$(1)\qquad \omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{dz}$$

die Dilatation bedeutet. Setzt man für gleichzeitige Aenderungen von p und ω

$$(2)\qquad p = f(\omega), \qquad \frac{\delta p}{\delta \omega} = e,$$

so lassen sich obige Gleichungen auch schreiben

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dfrac{G - e}{\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \dfrac{G}{\mu} \Delta^2 \xi, \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \dfrac{G - e}{\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial y} + \dfrac{G}{\mu} \Delta^2 \eta, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \dfrac{G - e}{\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial z} + \dfrac{G}{\mu} \Delta^2 \zeta. \end{cases}$$

Wir haben also drei Gleichungen für die drei Functionen ξ, η, ζ der Unabhängigvariabeln x, y, z, t.

Durch zweimalige Differentiation von (1) nach t folgt

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x\, \partial t^2} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial y\, \partial t^2} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial z\, \partial t^2},$$

und indem man die aus (3) folgenden Werthe der Differentialquotienten rechts einsetzt

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{2G - e}{\mu} \Delta^2 \omega.$$

Diese nur noch eine Function der Unabhängigvariabeln enthaltende Beziehung lässt sich in bekannter Weise lösen. Mit $G = 0$ gehen sämmtliche Gleichungen in die für Flüssigkeiten gültigen über.

Zweite Ableitung. Mindestens unter Voraussetzung constanter Temperatur, also z. B. für Schwingungen des freien Aethers, sind genauer als die zuerst angeschriebenen Gleichungen folgende aus § 66 entnommenen

$$(2G - H) \Delta^2 \xi + H \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

$$(2G - H) \Delta^2 \eta + H \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},$$

$$(2G - H) \Delta^2 \zeta + H \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

worin ω durch (1) bestimmt bleibt. Nimmt man die Beziehung (2) hinzu, so treten an Stelle von (3)

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dfrac{H - e}{\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \dfrac{2G - H}{\mu} \Delta^2 \xi, \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \dfrac{H - e}{\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial y} + \dfrac{2G - H}{\mu} \Delta^2 \eta, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \dfrac{H - e}{\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial z} + \dfrac{2G - H}{\mu} \Delta^2 \zeta, \end{cases}$$

womit ganz wie oben die Gleichung (4) entsteht. Unsere Gleichungen gehen jetzt mit $G = H = 0$ in die für Flüssigkeiten gültigen über.

Zusammenfassung. Führen wir als Bezeichnungen ein für die erste Ableitung

$$(6)\qquad c^2 = \frac{2G - e}{\mu}, \qquad C^2 = \frac{G}{\mu}$$

und für die zweite Ableitung

$$(7)\qquad c^2 = \frac{2G - e}{\mu}, \qquad C^2 = \frac{2G - H}{\mu},$$

so lauten die Grundgleichungen für elastische Schwingungen beliebiger isotroper Körper nach beiden Ableitungen

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (c^2 - C^2)\dfrac{\partial \omega}{\partial x} + C^2 \Delta^2 \xi, \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = (c^2 - C^2)\dfrac{\partial \omega}{\partial y} + C^2 \Delta^2 \eta, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = (c^2 - C^2)\dfrac{\partial \omega}{\partial z} + C^2 \Delta^2 \zeta, \end{cases}$$

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c^2 \Delta^2 \omega.$$

Auch hier wie in § 93 entspricht der Differentialquotient (2) adiabatischen Aenderungen von p, ω, weicht aber nur für die bereits behandelten Gase und Dämpfe wesentlich von demjenigen für constante Temperatur ab und ist für Schwingungen des freien Aethers mit diesem identisch. Mit $C = 0$ gehen die Formeln (6)—(9) in die für Flüssigkeiten gültigen über.

Die Lösung unserer Grundgleichungen (z. B. in § 98) ergibt, dass in homogenen isotropen Medien nur Longitudinalschwingungen und Transversalschwingungen vorkommen können, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten und also getrennt von einander fortpflanzen. Die ersteren sind Potentialschwingungen mit Dilatation von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c, die letzteren Schwingungen ohne Dilatation von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit C. Da beide Arten von Schwingungen nicht immer gleichzeitig interessiren, so führen wir noch die Grundgleichungen zu gesonderten Untersuchungen derselben an.

Potentialschwingungen. Für solche hat man nach § 30, (5)

$$\Delta^2 \xi = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \Delta^2 \eta = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \qquad \Delta^2 \zeta = \frac{\partial \omega}{\partial z},$$

womit die Gleichungen entstehen

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial \omega}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c^2 \Delta^2 \omega,$$

wie wir sie bereits für Flüssigkeiten fanden. Neben ihnen gelten selbstverständlich die Beziehungen des III. Abschnitts und insbesondere auch diejenigen der §§ 30, 31. Nach vorstehenden Formeln sind beispielsweise die Schallschwingungen zu beurtheilen.

Schwingungen ohne Dilatation. Für diese haben wir nach (8) (1) die Gleichungen

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = C^2 \Delta^2 \xi, \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = C^2 \Delta^2 \eta, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = C^2 \Delta^2 \zeta, \end{cases}$$

$$(13)\qquad \omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

neben welchen die allgemeinen Beziehungen des III. Abschnitts, jedoch nicht diejenigen der §§ 30, 31 gelten. Nach den jetzt erhaltenen Gleichungen sind beispielsweise die Lichtschwingungen zu beurtheilen.

§ 98. **Einfache Schwingungen isotroper Körper.**

Es handelt sich nun darum, festzustellen, unter welchen Voraussetzungen einfache Schwingungen der im XI. Abschnitte betrachteten Art und damit auch die daraus combinirten Schwingungen (§ 75) in isotropen Körpern möglich sind. Dies ist dann der Fall, wenn die für einfache Schwingungen gültigen Beziehungen eine Lösung der Grundgleichungen des vorigen § bilden. Die Schwingungen mögen von einem Punkte S ausgehen. Für die dem Punkte m der Anfangslage M unendlich benachbarten Punkte sind Amplitude a und Fortpflanzungsgeschwindigkeit c als constant anzusehen. Wir wählen S (oder einen zwischen S und M gelegenen Punkt A, § 91) als Ursprung der Coordinaten, womit sämmtliche Beziehungen des § 91 gelten. Machen wir davon Gebrauch, zunächst in den der ersten Ableitung entsprechenden Gleichungen § 97, (3), so folgen für ein Theilchen bei m

$$(1)\qquad \begin{cases} G\varphi + (G - e)\,\alpha \cos(rl) - \mu\varphi c^2 = 0, \\ G\chi + (G - e)\,\beta \cos(rl) - \mu\chi c^2 = 0, \\ G\psi + (G - e)\,\gamma \cos(rl) - \mu\psi c^2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen multipliciren wir der Reihe nach mit α, β, γ und erhalten durch Addition mit Rücksicht auf § 91, (2) (4)

$$(2)\qquad (2G - e - \mu c^2)\cos(rl) = 0.$$

Werden die Ausdrücke des § 91 in den der zweiten Ableitung angehörigen Gleichungen § 97, (5) verwendet, so erhält man an Stelle von (1)

$$(3)\qquad \begin{cases}(2G-H)\varphi+(H-e)\alpha\cos(rl)-\mu\varphi c^2=0,\\(2G-H)\chi+(H-e)\beta\cos(rl)-\mu\chi c^2=0,\\(2G-H)\psi+(H-e)\gamma\cos(rl)-\mu\psi c^2=0,\end{cases}$$

woraus bei gleichem Vorgehen wie oben wieder Formel (2) entsteht. Dieselbe hat zwei Lösungen, welche Longitudinalschwingungen und Transversalschwingungen entsprechen.

Longitudinalschwingungen. Die erste Lösung bildet

$$(4)\qquad c^2=\frac{2G-e}{\mu},$$

womit aus (1) oder (3) folgen

$$\varphi=\alpha\cos(rl),\quad \chi=\beta\cos(rl),\quad \psi=\gamma\cos(rl).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit α, β, γ und addirt, so entsteht

$$1=\cos^2(rl).$$

Gleichung (4) führt demnach auf Longitudinalschwingungen und liefert die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c derselben. Sie lässt sich je nach Umständen noch anders ausdrücken.

Transversalschwingungen. Die zweite Lösung von (2) liefert

$$\cos(rl)=0,$$

wir haben dann Transversalschwingungen. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben ergibt jede der Gleichungen (1), welche der ersten Ableitung entsprechen,

$$(5)\qquad C^2=\frac{G}{\mu},$$

und jede der Gleichungen (3), welche die zweite Ableitung ergab,

$$(6)\qquad C^2=\frac{2G-H}{\mu}.$$

Isotrope Körper gestatten also von einfachen Schwingungen nur Longitudinalschwingungen und Transversalschwingungen, aus welchen dann auch alle anderen auf einfache Schwingungen rückführbaren Schwingungen combinirt sein müssen.

§ 99. Fortpflanzungsgeschwindigkeit in isotropen Körpern.

Im vorigen Paragraph ergab sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinalschwingungen

$$(1)\qquad c=\sqrt{\frac{2G-e}{\mu}}\qquad\text{mit}\qquad e=\frac{\delta p}{\delta\omega},$$

und diejenige von Transversalschwingungen nach der ersten Ableitung

$$C = \sqrt{\frac{G}{\mu}}, \tag{2}$$

sowie nach der zweiten Ableitung bei constanter Temperatur

$$C = \sqrt{\frac{2G - H}{\mu}} = \sqrt{\frac{H - \mathsf{P}}{\mu}}. \tag{3}$$

Der Differentialquotient in (1) entspricht einer adiabatischen Zustandsänderung, welcher nur für Aetherschwingungen mit der isothermischen identisch gilt. Doch wurde bisher allein bei der Schallgeschwindigkeit von Flüssigkeiten die Temperaturänderung seit *Laplace* gewöhnlich durch eine Correction der *Newton*'schen Formel) berücksichtigt. Wir wollen in diesem Paragraph ebenfalls den Einfluss der Temperaturänderungen vernachlässigen, im nächsten Paragraph aber darauf Rücksicht nehmen.

Erfahrungsformeln für feste Körper. Auf Grund von Erfahrungsresultaten ergaben sich in § 50 für isotrope feste Körper

$$p = J\tau - 2G\frac{\omega}{\varepsilon - 2}, \qquad 2G(\varepsilon + 1) = E\varepsilon = J\frac{\varepsilon - 2}{\alpha}. \tag{4}$$

Hiernach erhält man aus (1)

$$e = J\frac{\partial \tau}{\partial \omega} - \frac{2G}{\varepsilon - 2}, \tag{5}$$

und bei Vernachlässigung der Temperaturänderung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinalschwingungen, beispielsweise Schallschwingungen,

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2}\,\frac{2G}{\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}\,\frac{E}{\mu}}. \tag{6}$$

Das Verhältniss zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalschwingungen wird damit

$$\frac{c}{C} = \sqrt{2\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2}}. \tag{7}$$

Diese Gleichung liefert

für $\varepsilon =$	3	3,25	3,5	3,75	4
$c : C =$	2	1,90	1,82	1,77	1,73.

Zuverlässige directe Versuche über die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern liegen nicht vor. Setzt man $g = 9{,}8089$, der theoretischen Ableitung entsprechend $\varepsilon = 4$ und für Eisen $E = 20\,000\,000\,000$ kg per qm, $\mu g = 7700$ kg per cbm, so folgt die Schallgeschwindigkeit im Eisen $c = 5530$ m oder 16,64 mal so gross wie nach *Moll* und *van Beck* in trockener atmosphärischer Luft von 0^0C. *Chladni* leitete aus Schwingungen von Stäben die Zahl 16,7 ab.

Beliebige isotrope Körper. Nach der ersten theoretischen Ableitung in § 57 haben wir

$$(8) \qquad p = \mathsf{P} + J\tau - G\omega,$$

wonach in (1)

$$(9) \qquad e = J\frac{\delta\tau}{\delta\omega} - G.$$

Bei Vernachlässigung der Temperaturänderungen folgt damit

$$(10) \qquad c = \sqrt{\frac{3G}{\mu}},$$

und das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten longitudinaler und transversaler Schwingungen

$$(11) \qquad \frac{c}{C} = \sqrt{3} = 1{,}732\,.$$

Die Formeln (10) (11) stimmen mit den nach (6) (7) im Falle $\varepsilon = 4$ für feste Körper gültigen überein. Für letztere ist in (10) $G = \frac{2}{5}E$, sodass auch wird

$$c = \sqrt{\frac{6E}{5\mu}}.$$

Die zweite theoretische Ableitung in § 58 liefert bei constanter Temperatur

$$(12) \qquad p = \mathsf{P} - H\omega, \qquad 2G = 2H - \mathsf{P},$$

unter P den Druck im anfänglichen ungestörten Zustande verstanden. Damit folgt

$$(13) \qquad e = -H,$$

und wir erhalten aus (1) (3)

$$(14) \qquad c = \sqrt{\frac{2G + H}{\mu}} = \sqrt{\frac{3H - \mathsf{P}}{\mu}},$$

$$(15) \qquad \frac{c}{C} = \sqrt{\frac{2G + H}{2G - H}} = \sqrt{3 + \frac{2\mathsf{P}}{H - \mathsf{P}}}.$$

Für feste Körper gehen diese Gleichungen mit $\mathsf{P} = 0$, $H = G$ in (10) (11) über.

§ 100. Berücksichtigung der Temperaturänderung.

Um die Schallgeschwindigkeit beliebiger isotroper Körper mit Rücksicht auf die Temperatur berechnen zu können, müssen wir die von einfachen Longitudinalschwingungen herrührenden Spannungen ableiten. Nach § 92, (3) ist für Longitudinalschwingungen die Componente der Totalverschiebung r_n von Punkten der anfänglichen Richtung n in der Richtung s

(1) $$s_n = n_s = -\frac{2\pi}{\lambda} q \cos(ln) \cos(ls),$$

wobei die Richtung r der positiven Elongationen mit der Fortpflanzungsrichtung l übereinstimmt. Mit (1) geben nun sowohl die Erfahrungsformeln für feste Körper, wie die beiden theoretischen Ableitungen die Componente der Totalspannung R_n des Flächenelements der anfänglichen Normalenrichtung n in der Richtung s

(2) $$\begin{cases} S_n = N_s = 2Gs_n - p\cos(ns) \\ \quad = -\frac{4\pi}{\lambda} Gq \cos(ln)\cos(ls) - p\cos(ns). \end{cases}$$

Diese Gleichung liefert mit $s = n$ die Normalspannung

(3) $$N_n = -\frac{4\pi}{\lambda} Gq \cos^2(ln) - p,$$

und beliebige Componenten von R_n senkrecht zu n

(4) $$\text{für } s \perp n, \qquad S_n = -\frac{4\pi}{\lambda} Gq \cos(ln)\cos(ls).$$

Beispielsweise erhalten wir für $n = l$

$$N_n = -\frac{4\pi}{\lambda} Gq - p, \qquad S_n = 0.$$

Bei Longitudinalschwingungen isotroper Körper sind die Spannungen beliebiger Wellenflächen normal den afficirten Flächenelementen.

Betrachten wir nun einen Körpertheil, welcher durch zwei unendlich benachbarte Wellenflächen begrenzt ist. Die Oberfläche desselben ist durch constante Normalspannungen

(5) $$N = \frac{4\pi}{\lambda} Gq + p = p - 2G\omega$$

afficirt (ω nach § 91, für N Druck positiv). Daher wird bei constantem G

(6) $$e = \frac{\delta p}{\delta \omega} = 2G + \frac{\delta N}{\delta \omega},$$

worin die Differentialquotienten adiabatischen Zustandsänderungen entsprechen. Für solche gibt die Wärmetheorie in unserem Falle, wenn k das Verhältniss der specifischen Wärmen bei constantem Drucke N und constantem Volumen V bedeutet und Differentialquotienten in Klammern sich auf constante Temperatur beziehen,

$$\frac{\delta N}{\delta V} = k\left(\frac{dN}{dV}\right),$$

oder auch, wegen $Vd\omega = dV$,

(7) $$\frac{\delta N}{\delta \omega} = k\left(\frac{\delta N}{\delta \omega}\right).$$

Es folgt damit aus (6)

(8) $$e = 2G + k\left(\frac{dN}{d\omega}\right),$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinalschwingungen

(9) $$c = \sqrt{\frac{2G - e}{\mu}} = \sqrt{-\frac{k}{\mu}\left(\frac{dN}{d\omega}\right)}.$$

Sollten neben den betrachteten Longitudinalschwingungen gleichzeitig noch andere Verschiebungen bei m eintreten, so lässt sich Gleichung (9) nach dem augenblicklichen Stande der Wärmetheorie nur dann als bewiesen ansehen, wenn beim Zusammenwirken beider die Spannungen normal den Wellenflächen bleiben.

Erfahrungsformeln für feste Körper. Mit § 99, (4) wird nach (5)

$$N = J\tau - 2G\omega\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2},$$

woraus bei constanter Temperatur

(10) $$\left(\frac{dN}{d\omega}\right) = -2G\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2}.$$

Daher erhalten wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinalschwingungen (Schallgeschwindigkeit) mit Rücksicht auf die Temperaturänderung

(11) $$c = \sqrt{k\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2}\frac{2G}{\mu}} = \sqrt{k\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}\frac{E}{\mu}},$$

und ihr Verhältniss zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalschwingungen

(12) $$\frac{c}{C} = \sqrt{2k\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2}}.$$

Bei Vernachlässigung des Temperatureinflusses wäre $k = 1$ zu setzen, womit die Formeln § 99, (6) (7) entstehen.

Beliebige isotrope Körper. Mit § 99, (8) liefert (5) auf Grund der ersten theoretischen Ableitung als von den Schwingungen allein herrührend

$$N = J\tau - 3G\omega.$$

Hieraus folgt bei constanter Temperatur

(13) $$\left(\frac{dN}{d\omega}\right) = -3G,$$

sodass nach (9) für beliebige isotrope Körper

(14) $$c = \sqrt{k\frac{3G}{\mu}}$$

und das Verhältniss beider Fortpflanzungsgeschwindigkeiten

$$(15) \qquad \frac{c}{C} = \sqrt{3k} = 1{,}732\sqrt{k}.$$

Diese Formeln stimmen mit den nach (11) (12) mit $\varepsilon = 4$ für feste Körper gültigen überein. Für letztere hat man dann auch

$$c = \sqrt{k\frac{6E}{5\mu}}.$$

Setzt man nach *Edlund*

	für	Silber	Messing	Kupfer	Stahl	Gold	Platin
	$k =$	1,0203	1,0170	1,0168	1,0098	1,0091	1,0068
so folgt	$c:C =$	1,750	1,747	1,746	1,741	1,740	1,738

während bei Vernachlässigung der Temperaturänderung mit $k = 1$ das Verhältniss für beliebige isotrope Körper 1,732 wird.

Nach der zweiten theoretischen Ableitung sind G, H nicht constant, wenn eine Temperaturänderung stattfindet. Wollte man in jedem Falle Mittelwerthe einführen, so würden die Gleichungen (9) und § 97, (5) gültig und darin wegen

$$p = \mathsf{P} + J\tau - H\omega$$

nach (5) von den Schwingungen herrühren

$$N = J\tau - (2G + H)\omega.$$

Wir erhielten also

$$\left(\frac{dN}{d\omega}\right) = -2G + H,$$

und an Stelle von (14) (15)

$$c = \sqrt{\frac{k}{\mu}(2G + H)}, \qquad \frac{c}{C} = \sqrt{k\frac{2G + H}{2G - H}}.$$

Doch ist damit wohl bei veränderlicher Temperatur keine grössere Genauigkeit als oben zu erreichen, während für den Fall constanter Temperatur mit $k = 1$ die bereits gegebenen Gleichungen § 99, (14) (15) daraus entstehen.

§ 101. Schwingungen anisotroper Körper.

Für beliebige Schwingungen der Theilchen um ihre Gleichgewichtslagen entnimmt man aus § 61

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = \mu\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} = \mu\,\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = \mu\,\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}, \end{cases}$$

worin μ die specifische Masse im anfänglichen ungestörten Zustande bedeutet. Hiernach könnte die Untersuchung elastischer Schwingungen ohne Rücksicht auf die Anschauungen und Resultate des XI. Abschnitts vorgenommen werden. Die Spannungen sind nach der ersten Ableitung durch § 53, nach der zweiten durch § 54 und speciell für Körper mit Elasticitätsaxen durch § 55 oder § 56 bestimmt.

Es handelt sich nun wieder darum, zu untersuchen, in welchen Fällen einfache Schwingungen der im vorigen Abschnitte behandelten Art und alle daraus combinirten Schwingungen in unseren Körpern möglich sind, oder mit anderen Worten, unter welchen Voraussetzungen die für einfache Schwingungen gültigen Beziehungen eine Lösung der obigen Gleichungen bilden. Die Schwingungen mögen vom Punkte S ausgehen. Für die einem Punkte m der Anfangslage M unendlich benachbarten Punkte sind die Amplitude a und Fortpflanzungsgeschwindigkeit c als constant anzusehen. Wir legen den Ursprung der Coordinaten in einen Punkt A zwischen S und M (für heterogene Körper müsste AM wegen nothwendiger Homogenität um die Streckenpunkte unendlich klein sein), womit die Beziehungen des § 91 gelten.

Nach den der ersten theoretischen Ableitung entsprechenden Spannungsausdrücken des § 53 erhält man mit den Bezeichnungen

$$(2)\qquad \begin{cases} A_n = \alpha(\Delta x^3)_n + \beta(\Delta x^2 \Delta y)_n + \gamma(\Delta x^2 \Delta z)_n, \\ B_n = \alpha(\Delta x \, \Delta y^2)_n + \beta(\Delta y^3)_n + \gamma(\Delta y^2 \Delta z)_n, \\ C_n = \alpha(\Delta x \, \Delta z^2)_n + \beta(\Delta y \, \Delta z^2)_n + \gamma(\Delta z^3)_n; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_n = \alpha(\Delta x^2 \Delta y)_n + \beta(\Delta x^2 \Delta y)_n + \gamma(\Delta x \, \Delta y \, \Delta z)_n, \\ \mathfrak{B}_n = \alpha(\Delta x^2 \Delta z)_n + \beta(\Delta x \, \Delta y \, \Delta z)_n + \gamma(\Delta x \, \Delta z^2)_n, \\ \mathfrak{C}_n = \alpha(\Delta x \, \Delta y \, \Delta z)_n + \beta(\Delta y^2 \Delta z)_n + \gamma(\Delta y \, \Delta z^2)_n, \end{cases}$$

die Componenten in den Richtungen x, y, z des von den Schwingungen allein herrührenden Theils der Totalspannung R_n auf ein Flächenelement der anfänglichen Normalenrichtung n bei m

$$(4)\qquad \begin{cases} X_n = -\,\xi_n - \frac{2\pi}{\lambda} q(\varphi A_n + \chi \mathfrak{A}_n + \psi \mathfrak{B}_n), \\ Y_n = -\,\eta_n - \frac{2\pi}{\lambda} q(\varphi \mathfrak{A}_n + \chi B_n + \psi \mathfrak{C}_n), \\ Z_n = -\,\zeta_n - \frac{2\pi}{\lambda} q(\varphi \mathfrak{B}_n + \chi \mathfrak{C}_n + \psi C_n). \end{cases}$$

Hierin stellen ξ_n, η_n, ζ_n nach § 52, (3) den Einfluss der mit den Schwingungen verbundenen Temperaturänderung dar. *Für die Ableitungen dieses und des folgenden Paragraphen wird angenommen, dass* *ein solcher Einfluss nicht in Betracht kommt.* Denken wir uns in (4) der Reihe nach $n = x, y, z$ gesetzt, so entstehen die Ausdrücke für

$$X_x\, Y_x\, Z_x, \qquad X_y\, Y_y\, Z_y, \qquad X_z\, Y_z\, Z_z.$$

Bilden wir ihre partiellen Differentialquotienten nach x, y, z unter Beachtung von § 91, (17), substitutiren dieselben, zugleich mit den Ausdrücken § 91, (11) in (1) und führen als abkürzende Bezeichnungen ein

$$(5) \qquad \begin{cases} A = \alpha A_x + \beta A_y + \gamma A_z, \\ B = \alpha B_x + \beta B_y + \gamma B_z, \\ C = \alpha C_x + \beta C_y + \gamma C_z; \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \alpha \mathfrak{A}_x + \beta \mathfrak{A}_y + \gamma \mathfrak{A}_z, \\ \mathfrak{B} = \alpha \mathfrak{B}_x + \beta \mathfrak{B}_y + \gamma \mathfrak{B}_z, \\ \mathfrak{C} = \alpha \mathfrak{C}_x + \beta \mathfrak{C}_y + \gamma \mathfrak{C}_z, \end{cases}$$

so ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen für einfache Schwingungen

$$(7) \qquad \begin{cases} A\varphi + \mathfrak{A}\chi + \mathfrak{C}\psi = \mu c^2 \varphi, \\ \mathfrak{A}\varphi + B\chi + \mathfrak{B}\psi = \mu c^2 \chi, \\ \mathfrak{C}\varphi + \mathfrak{B}\chi + C\psi = \mu c^2 \psi. \end{cases}$$

Wir eliminiren aus der ersten und zweiten ψ, aus der ersten und dritten χ, setzen

$$(8) \qquad \begin{cases} S_1 = (\mu c^2 - A)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{A}, \\ S_2 = (\mu c^2 - B)\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \\ S_3 = (\mu c^2 - C)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \end{cases}$$

und erhalten die Ausdrücke

$$(9) \qquad \chi = \frac{S_1}{S_2}\varphi, \qquad \psi = \frac{S_1}{S_2}\varphi.$$

Substituirt man dieselben in

$$\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1,$$

so entstehen mit

$$(10) \qquad W = \sqrt{(S_1 S_2)^2 + (S_2 S_3)^2 + (S_3 S_1)^2},$$

die Gleichungen

$$(11) \qquad \varphi = \frac{S_2 S_3}{W}, \qquad \chi = \frac{S_3 S_1}{W}, \qquad \psi = \frac{S_1 S_2}{W}.$$

Verwendet man in (8) irgend eine mögliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit c, so ergeben sich aus (10), (11) mit den beiden Vorzeichen von W die zwei einander entgegengesetzten Schwingungsrichtungen, welchen dieses c entspricht.

Um die möglichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu erhalten, setzen wir die Ausdrücke (9) und dann die Werthe der S nach (8) in eine der Bedingungsgleichungen (7) ein, womit entsteht

$$(12)\quad \begin{cases} (\mu c^2 - A)(\mu c^2 - B)(\mu c^2 - C) - (\mu c^2 - A)\mathfrak{B}^2 \\ \quad - (\mu c^2 - B)\mathfrak{C}^2 - (\mu c^2 - C)\mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0, \end{cases}$$

oder nach Potenzen von

$$(13)\qquad h = \mu c^2$$

geordnet

$$(14)\quad \begin{cases} h^3 - h^2(A + B + C) \\ \quad + h(AB + BC + CA - \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{C}^2) \\ \quad - (ABC + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} - A\mathfrak{B}^2 - B\mathfrak{C}^2 - C\mathfrak{A}^2) = 0. \end{cases}$$

Da die möglichen μc^2 nach § 102 durch die Halbaxen eines Ellipsoids dargestellt sind, so hat die cubische Gleichung (12) oder (14) drei im Allgemeinen verschiedene reelle Wurzeln, womit auch im Allgemeinen drei verschiedene Forpflanzungsgeschwindigkeiten existiren, welchen ebensoviel besondere durch (11) bestimmte Schwingungsgeraden entsprechen.

Wir sind oben bei Bildung der Ausdrücke für X_n, Y_n, Z_n von der ersten theoretischen Ableitung ausgegangen. Verwendet man statt dessen die der zweiten theoretischen Ableitung entsprechenden Formeln § 54, (6) (8), so ergeben sich mit den Bezeichnungen (3) und

$$(15)\quad \begin{cases} A_n = \alpha(\Delta x^3)_n + \beta(\Delta x^2 \Delta y)_n + \gamma(\Delta x^2 \Delta z)_n \\ \quad + \alpha(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + \beta(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + \gamma(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n), \\ B_n = \alpha(\Delta x \Delta y^2)_n + \beta(\Delta y^3)_n + \gamma(\Delta y^2 \Delta z)_n \\ \quad + \alpha(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + \beta(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + \gamma(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n), \\ C_n = \alpha(\Delta x \Delta z^2)_n + \beta(\Delta y \Delta z^2)_n + \gamma(\Delta z^3)_n \\ \quad + \alpha(\mathfrak{X}_n - \xi_n) + \beta(\mathfrak{Y}_n - \eta_n) + \gamma(\mathfrak{Z}_n - \zeta_n), \end{cases}$$

wieder die obigen Gleichungen (4), womit auch alle weiteren Beziehungen dieses und des folgenden Paragraphen gültig bleiben. Die Resultate der beiden Ableitungen weichen alle nur bezüglich der Ausdrücke für die A_n, B_n, C_n beliebiger n von einander ab.

§ 102. Das Polarisationsellipsoid.

Multipliciren wir die Bedingungsgleichungen wirklicher Schwingnngsrichtungen § 101, (7) der Reihe nach mit φ, χ, ψ, addiren und geben der einer eventuellen Schwingungsrichtung $r(\varphi, \chi, \psi)$ entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Index r, so folgt

$$(1)\quad \mu c_r^2 = A\varphi^2 + B\chi^2 + C\psi^2 + 2\mathfrak{A}\varphi\chi + 2\mathfrak{B}\chi\psi + 2\mathfrak{C}\psi\varphi.$$

Diese Gleichung ist von der in § 5 behandelten Form (3). Nach ihr allein würden je nach den Schwingungsrichtungen r unendlich viele Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c_r möglich sein, deren mathematische Maxima und Minima sich aus § 5 finden mit $n = r$, $\varphi = \mu c_r^2$, $a = A$, $b = B$, $c = C$, $d = \mathfrak{A}$, $e = \mathfrak{B}$, $f = \mathfrak{C}$. Man erhält dann die im vorigen Paragraphen für die wirklichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten oder $h = \mu c^2$ gefundenen Formeln, so dass die drei wirklichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die Maxima und Minima sämmtlicher durch (1) bei beliebigen φ, χ, ψ ausgedrückter Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind. Dass nur diese drei der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten (1) actuell werden, rührt daher, dass zwischen c und φ, χ, ψ neben (1) auch die speciellen Bedingungen § 101 (7) erfüllt sein müssen.

Betrachten wir nun zunächst alle durch (1) bei beliebigen r bestimmten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Wir führen als Hülfsfunction ein

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f_{rs} = A\varphi\cos(sx) + B\chi\cos(sy) + C\psi\cos(sz)&\\ + \mathfrak{A}\left[\varphi\cos(sy) + \chi\cos(sx)\right]&\\ + \mathfrak{B}\left[\chi\cos(sz) + \psi\cos(sy)\right]&\\ + \mathfrak{C}\left[\psi\cos(sx) + \varphi\cos(sz)\right]&\end{aligned}\right.$$

und haben dann speciell

$$(3)\qquad f_{rr} = \mu c_r^2,$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} f_{rx} &= A\varphi + \mathfrak{A}\chi + \mathfrak{C}\psi,\\ f_{ry} &= B\chi + \mathfrak{A}\varphi + \mathfrak{B}\psi,\\ f_{rz} &= C\psi + \mathfrak{B}\chi + \mathfrak{C}\varphi,\end{aligned}\right.$$

sowie nach (1) und (2)

$$(5)\qquad \mu c_x^2 = A, \qquad \mu c_y^2 = B, \qquad \mu c_z^2 = C,$$

$$(6)\qquad f_{xy} = \mathfrak{A}, \qquad f_{yz} = \mathfrak{B}, \qquad f_{zx} = \mathfrak{C}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (4) einmal mit φ, χ, ψ, ein anderes Mal mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addirt in beiden Fällen, so folgen die allgemeinen Beziehungen

$$(7)\qquad \mu c_r^2 = \varphi f_{rx} + \chi f_{ry} + \psi f_{rz},$$

$$(8)\qquad f_{rs} = f_{rx}\cos(sx) + f_{ry}\cos(sy) + f_{rz}\cos(sz).$$

Für die wirklichen Schwingungen hat man $\mu c_r^2 = \mu c^2 = h$ und neben vorstehenden Gleichungen nach (4) und § 101, (7) noch die folgenden

$$(9)\qquad f_{rx} = h\varphi, \qquad f_{ry} = h\chi, \qquad f_{rz} = h\psi,$$

also aus (8) bei beliebigem s

$$(10)\qquad f_{rs} = h\cos(rs).$$

Wenn die Richtung r (φ, χ, ψ) wirklichen Schwingungen entspricht, so ist für alle zu r senkrechten Richtungen s die Function $f_{rs} = 0$. Es seien nun h_1, h_2 zwei wirkliche μc^2 und r_1, r_2 die zugehörigen Schwingungsrichtungen, dann hat man das eine Mal mit $h = h_1$, $r = r_1$, $s = r_2$, und das andere Mal mit $h = h_2$, $r = r_2$, $s = r_1$ nach (10)

$$f_{rs} = h_1 \cos(r_1 r_2) = h_2 \cos(r_2 r_1),$$

und weil h_1, h_2 im Allgemeinen von einander verschieden sind, so muss im Allgemeinen $\cos(r_1 r_2) = 0$ sein. *Die drei wirklichen Schwingungsgeraden eines Punktes m schliessen mit einander Winkel von 90^0 ein und für je zwei derselben ist $f_{rs} = 0$.*

Denken wir uns die Coordinatenaxen parallel den wirklichen Schwingungsgeraden von m gelegt, so sind nach (6) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$, während die Gleichungen (5) den wirklichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten entsprechen, für welche wir entsprechend den Schwingungsrichtungen x, y, z setzen wollen

$$\text{(11)} \qquad \mu c^2 = A_1, \qquad \mu c^2 = B_1, \qquad \mu c^2 = C_1.$$

Die für beliebige r (φ, χ, ψ) gültigen Gleichungen (1), (2), (4) gehen dann über in die folgenden

$$\text{(12)} \qquad \mu c_r^2 = A_1 \varphi^2 + B_1 \chi^2 + C_1 \psi^2,$$

$$\text{(13)} \qquad f_{rs} = A_1 \varphi \cos(sx) + B_1 \chi \cos(sy) + C_1 \psi \cos(sz),$$

$$\text{(14)} \qquad f_{rx} = A_1 \varphi, \qquad f_{ry} = B_1 \chi, \qquad f_{rz} = C_1 \psi$$

und wegen

$$\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1$$

folgt mit (14)

$$\text{(15)} \qquad \left(\frac{f_{rx}}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{f_{ry}}{B_1}\right)^2 + \left(\frac{f_{rz}}{C_1}\right)^2 = 1.$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids der Halbaxen A_1, B_1, C_1, wir können aussprechen: *Die Punkte, welche von m aus in den Richtungen x, y, z Coordinaten gleich den Functionen f_{rx}, f_{ry}, f_{rz} beliebiger Richtungen r und damit radii vectores gleich ϱ in*

$$\text{(16)} \qquad \varrho^2 = f_{rx}^2 + f_{ry}^2 + f_{rz}^2 = A_1^2 \varphi^2 + B_1^2 \chi^2 + C_1^2 \psi^2$$

haben, liegen auf der Oberfläche eines Ellipsoids, dessen Halbaxen parallel den drei wirklichen Schwingungsgeraden und gleich den zugehörigen wirklichen μc^2 sind. Das gefundene Ellipsoid dient hiernach demselben Zweck, wie des von *Cauchy* zur Erklärung der Doppelbrechung von Krystallen abgeleitete *Polarisationsellipsoid* und soll deshalb auch so genannt werden, es ist durch §§ 101, 102 vollständig bestimmt.

Denken wir uns die rechtwinkligen Coordinatenaxen das eine

Mal beliebig und das andere Mal parallel den wirklichen Schwingungsgeraden gelegt, so entstehen aus § 101, (14) die folgenden Beziehungen

$$(18)\quad \begin{cases} A+B+C=A_1+B_1+C_1, \\ AB+BC+CA-\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2-\mathfrak{C}^2=A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1, \\ ABC+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}-A\mathfrak{B}^2-B\mathfrak{C}^2-C\mathfrak{A}^2=A_1B_1C_1, \end{cases}$$

Hiernach ist eine der drei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c gleich Null, wenn für ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem entsteht

$$(19)\qquad ABC+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}-A\mathfrak{B}^2-B\mathfrak{C}^2-C\mathfrak{A}^2=0,$$

es sind zwei gleich Null, wenn neben (19) erfüllt ist

$$(20)\qquad AB+BC+CA-\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2-\mathfrak{C}^2=0,$$

und es werden überhaupt keine einfachen Schwingungen fortgepflanzt, wenn auch noch

$$(21)\qquad A+B+C=0$$

hinzutritt. — Ist eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich Null, so folgt aus § 101, (14) mit (19) zur Bestimmung der beiden übrigen

$$(22)\quad h^2-h(A+B+C)+AB+BC+CA-\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2-\mathfrak{C}^2=0;$$

sind zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich Null, so liefert diese Gleichung oder § 101, (14) zur Bestimmung der verbleibenden

$$(23)\qquad h=A+B+C.$$

Sind zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich gross, so ist das Polarisationsellipsoid ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe in die der dritten Fortpflanzungsgeschwindigkeit entsprechende Schwingungsgerade fällt. Die Schwingungen senkrecht zu dieser können nach allen möglichen Richtungen erfolgen. Mit diesem Falle hatten wir es schon bei isotropen Körpern zu thun.

Wortverzeichniss.

	Seite
Activkräfte	97
Adiabatische Aenderung	251
Aeussere Bewegung	2
Aeussere Kräfte	2
Aether	152
Anfänglicher Zustand	119
Anisotrop	5
Arbeiten, virtuelle	105
Ausdehnungscoefficient	120
Ausschlag	227
Bruch	128
Bruchsicherheit	129
Bruchsicherheitscoefficient	129
Centralkräfte	177
Clapeyron's Theorem	167
Coexistenz kleiner Bewegungen	188
Condensation	156
Condensationsgeschwindigkeit	158
Continuitätsgleichung	156
Deformationsfläche	72
Dehnung	10
Dehnung einer Richtung	59
Dehnungsgeschwindigkeit	18
Dehnungsgeschwindigkeit einer Richtung	73
Differential, partielles	21
Differential, vollständiges	21
Dilatation	73
Dilatationsgeschwindigkeit	75
Drehungen	11
Drehungen einer Richtung	59
Drehungsgeschwindigkeiten	17
Drehungsgeschwindigkeiten einer Richtung	73
Druck	3
Druck, specifischer	3
Druckspannung	6
Energie	114
Energie, actuelle	114, 175, 176
Energie, äussere actuelle	192
Energie, innere actuelle	192
Energie, potentielle	176
Energie, innere potentielle	177, 191
Energie, virtuelle	114, 175, 180
Elasticität	4
Elasticitätsaxe	5, 140
Elasticitätscoefficient	119
Elasticitätsgrenze	5, 129
Elasticitätsmodul	119
Elasticitätszahl	119
Elastische Bewegungen	5
Elastische Formänderungen	5, 128
Elastische Kräfte	5
Elastische Nachwirkung	5
Elastische Veränderungen	5
Elastisch, unvollkommen	5
Elastisch, vollkommen	5
Elementartetraeder	28
Elongation	227
Fachwerke	196
Fehlstäbe	208
Fehlreactionen	208
Festigkeit	129
Flächenelemente	3
Flächenkräfte	3
Flächenkräfte, specifische	3
Flüssigkeiten, vollkommene	116
Flüssigkeiten, reibende	117
Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Schwingungen	227
Functionen, stetige	18
Geschwindigkeitsfunction	24
Gleitungen	14

Seite

Gleitungscoefficient 124
Gleitungsgeschwindigkeiten . . . 73
Gleitungsgeschwindigkeit zweier Richtungen 73
Grenzsicherheit 129
Grenzsicherheitscoefficient 129
Grenzverschiebungen 64
Grenzverschiebungsgeschwindigkeiten 74
Gruppirung von Punkten 14

Hauptdehnungen 67
Hauptdehnungsgeschwindigkeiten. 74
Hauptreactionen 227
Hauptschubspannungen 43
Hauptspannungen 35
Hauptstäbe 207
Hauptsystem 207
Hauptverschiebungen 61
Hauptverschiebungsgeschwindigkeiten 74
Heterogen 5
Heterotrop 5
Homogen 5

Innere Bewegung 4
Innere Kräfte 2
Interferenz 235
Isotrop 5, 142

Knotenpunkte 196, 228
Kraftfunction 23
Körper 2
Körperelemente 4
Körper, feste 119
Körper, starre 4

Labilität 199
Labilität, äussere 205
Labilität, innere 205
Lage eines Flächenelements . . . 3
Lage eines Punktes 1
Longitudinalschwingungen . . . 228

Mariotte-Gay-Lussac'sches Gesetz 253
Masse, specifische 26
Masse, anfängliche specifische . . 90
Massenelemente 4
Massenkräfte 3
Massenkräfte, specifische 3
Medium 229
Medien, homogene 229

Seite

Medien, isotrope 229

Niveauflächen 22
Normalenrichtung von Flächenelementen 3
Normalenrichtung von Oberflächenelementen 4
Normalgleitung 14
Normalgleitung zweier Richtungen 60
Normalgleitungsgeschwindigkeit . 18
Normalgleitungsgeschwindigkeit zweier Richtungen 73
Normalkraft 3
Normalspannung 6, 88
Normalverschiebung 9
Normalverschiebung einer Richtung 60
Normalverschiebungsgeschwindigkeit 16
Normalverschiebungsgeschwindigkeit einer Richtung 73

Oberfläche eines Körpers 3
Oberflächenkräfte 3
Oberflächenspannung 26
Oscillationsgeschwindigkeit . . . 227

Poisson'sches Gesetz 253
Polarisationsellipsoid 274
Potentialbewegung 78
Potential der Geschwindigkeiten. 24
Potential der Kräfte 24
Potential der Spannungen. . . 50, 96
Potential der Verrückungen . . . 24
Potential der Verschiebungen . . 80
Potential der Verschiebungsgeschwindigkeiten 82
Potentialschwingungen 244
Potentialspannungen 96
Potentialverschiebungen 81
Princip der Coexistenz 98
Princip der kleinsten Verschiebungsarbeit. 169, 187, 283
Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft 176
Princip der Erhaltung der Energie. 175
Princip der virtuellen Verrückungen. 101, 172
Princip von d'Alembert. . . 101, 172
Princip von Hamilton 114
Princip von Huyghens 239

	Seite
Projection	1
Proportionalitätsgrenze	129
Punktreihen, homogene	229
Quetschgrenze	130
Radialkräfte	180
Reactionen	97, 196
Reactionen, abgängige	208
Reactionen, nothwendige	207
Reactionen, überzählige	208
Reactionsbedingungen	197
Rechtsläufig	2
Reibungscoefficient	117
Reibungswiderstände	117
Restreactionen	208
Reststäbe	208
Richtung g	1
Richtung g, negative	1
Richtungen x, y, z	1
Richtung einer Kraft	6
Richtung einer Verrückung	8
Richtung einer Verschiebung	9
Richtungsfläche	79
Richtungslinie	1
Richtungspotentiale	24
Richtungssinn	1
Schallgeschwindigkeit	253
Schiebung	14
Schiebung einer Richtung	60
Schiebungscoefficient	124
Schiebungsgeschwindigkeit	18
Schiebungsgeschwindigkeit zweier Richtungen	73
Schnitte	3
Schubspannungen	6
Schwingende Bewegung	226
Schwingung	227
Schwingungen, einfache	229
Schwingungsamplitude	227
Schwingungsdauer	227
Schwingungsphase	226
Schwingungszahl	226
Sicherheit	129
Sicherheitscoefficient	129
Spannungen	6, 87
Spannungen, stetige	30
Spannung, zulässige	129
Spannungsellipsoid	39
Spannungspotential	51

	Seite
Stabkraft	180
Stabkraft, specifische	214
Stabspannung	214
Stabsysteme	196
Stäbe, abgängige	208
Stäbe, nothwendige	207
Stäbe, überzählige	208
Stabilität	198
Stabilität, äussere	203
Stabilität, innere	203
Statische Bestimmtheit	197
Statische Bestimmtheit, äussere	205
Stellung eines Schnittelements	3
Stellungsfläche	41
Streckgrenze	130
Tangentialkraft	3
Tangentialspannungen	6
Temperaturcoefficient	124
Totalgleitung	14
Totalgleitung zweier Richtungen	60
Totalgleitungsgeschwindigkeit	18
Totalgleitungsgeschwindigkeit zweier Richtungen	73
Totalspannung	6, 88
Totalverschiebung	9
Totalverschiebung einer Richtung	90
Totalverschiebungsgeschwindigkeit	16
Totalverschiebungsgeschwindigkeit einer Richtung	73
Tragfestigkeit	130
Transversalschwingungen	228
Transversalspannung	88
Transversalverschiebung	9
Transversalverschiebung einer Richtung	60
Transversalverschiebungsgeschwindigkeit	16
Transversalverschiebungsgeschwindigkeit einer Richtung	60
Unelastisch, vollkommen	5
Unstetigkeitsschnitte	19, 34, 57
Verrückungen	8
Verrückungen, actuelle	55
Verrückungen, virtuelle	55
Verrückungsfunction	24
Verschiebungen	8
Verschiebungen von Richtungen	58

	Seite
Verschiebungen, stetige	57
Verschiebungsarbeit	108, 186
Verschiebungsarbeit, specifische	108
Verschiebungsarbeit, virtuelle	108, 186
Verschiebungsellipsoid	70
Verschiebungsgeschwindigkeiten	16
Verschiebungsgeschwindigkeiten von Richtungen	73
Verschiebungsgeschwindigkeits-ellipsoid	74
Volumen eines Körpers	3
Volumenelemente	4
Welle	227, 228
Wellen, ebene	244
Wellen, stehende	228
Wellenberg	228
Wellenfläche	228
Wellenphase	234
Wellenthal	228
Wellenlänge	227
Zug	3
Zug, specifischer	3
Zugspannungen	6

Fehlerverzeichniss.

S. 22 ist $W - W_1$ an Stelle $W - W$ zu setzen.
S. 47 im Nenner der Formel (8) hat X_y an Stelle von $X_y{}^2$ zu treten.
S. 84 soll in Fig. 11 der Winkel durch Θ anstatt durch O bezeichnet sein.
S. 112 ist die Nummer (14) an die Formel $dS = -p\,dV$ zu rücken.
S. 141 oben hat das erste Summenzeichen den Index n zu erhalten.
S. 171 soll in Zeile 9 von oben 85 statt 84 stehen.
S. 231 und 232 ist in Fig. 35 und 36 überall v für g zu setzen.
S. 263 in Formel 13) ist der Ausdruck für ω gleich Null zu setzen.