

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

3138

L. inw. ....

36

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297587

xxx  
660



# GRUNDZÜGE

DER

# GRAPHISCHEN STATIK

UND DEREN ANWENDUNG AUF DEN

# CONTINUIRLICHEN TRÄGER.

VON

**DR. KARL STELZEL,**

A. Ü. PROFESSOR DER BAUMECHANIK UND GRAPHISCHEN STATIK  
AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN GRAZ.

15863

MIT 57 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN UND 3 LITHOGRAPH. TAFELN.

VIII B.



GRAZ 1882.

VERLAG VON LEUSCHNER & LUBENSKY

K. K. UNIV.-BUCHHANDLUNG.

148

~~147~~

XXX  
660

Alle Rechte vorbehalten.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKOW

II 3138

DRUCK VON B. G. TEUBNER, IN LEIPZIG.

Akc. Nr. 2862/49

## VORWORT.

---

Die Grundzüge der graphischen Statik sind im Folgenden soweit entwickelt, als zur Bestimmung der äusseren Kräfte an Dach- und Brückenconstructions erforderlich ist. Den Ausgangspunkt bildet der Satz vom Kräfteparallelogramme; wird der Begriff der algebraischen Summe zweier Strecken bekannt vorausgesetzt, so lässt sich der Satz etwas kürzer aussprechen; ich habe die angegebene Fassung vorgezogen.

Anschliessend wurde der continuirliche Träger behandelt, der eine der schönsten Anwendungen der graphischen Statik bietet. Alle benützten Quellen habe ich gleich an den betreffenden Stellen gewissenhaft angegeben und dadurch dem historischen Momente wenigstens theilweise Rechnung getragen. Es wäre zu wünschen, dass dieser Vorgang allgemeiner beliebt würde, um ein Eingehen auf die Originalarbeiten zu erleichtern.

Dem sehr geehrten Herrn Verleger spreche ich für die splendide Ausstattung meinen verbindlichsten Dank aus.

Graz, im Mai 1882.

Der Verfasser.

Vorwort

Die vorliegende Schrift ist das Ergebnis einer längeren Arbeit, die ich in den Jahren 1870 bis 1872 im Auftrag der Königl. Preuss. Regierung in Berlin vollendet habe. Die Aufgabe war es, die Verhältnisse der deutschen Industrie im Vergleich mit den Verhältnissen in England zu untersuchen und die Ursachen der Unterschiede zu erörtern. Die Untersuchung ist in drei Theile getheilt. Der erste Theil enthält eine Beschreibung der deutschen Industrie im Allgemeinen, der zweite eine Beschreibung der englischen Industrie im Allgemeinen, und der dritte eine Vergleichende Darstellung der beiden Industrien. Die Darstellung ist insofern als vergleichende dargestellt, als die Verhältnisse der deutschen Industrie nicht nur im Vergleich mit den Verhältnissen der englischen Industrie, sondern auch im Vergleich mit den Verhältnissen der französischen, österreichischen und sardinischen Industrie dargestellt sind. Die Darstellung ist insofern als vergleichende dargestellt, als die Ursachen der Unterschiede nicht nur im Vergleich mit den Ursachen der Unterschiede der englischen Industrie, sondern auch im Vergleich mit den Ursachen der Unterschiede der französischen, österreichischen und sardinischen Industrie dargestellt sind. Die Darstellung ist insofern als vergleichende dargestellt, als die Mittel zur Beseitigung der Unterschiede nicht nur im Vergleich mit den Mitteln zur Beseitigung der Unterschiede der englischen Industrie, sondern auch im Vergleich mit den Mitteln zur Beseitigung der Unterschiede der französischen, österreichischen und sardinischen Industrie dargestellt sind.

Die Verfassung

## Grundzüge der graphischen Statik.

### Kräfte in derselben Ebene.

§ 1. Das Kräfteparallelogramm. Trägt man vom gemeinschaftlichen Angriffspunkte zweier Kräfte auf die Richtungen derselben Liniensegmente auf, welche die Kräfte der Grösse und Richtung nach darstellen, und ergänzt diese zu einem Parallelogramme, so ist die durch den Angriffspunkt der Kräfte gehende Diagonale des Parallelogrammes der Grösse und Richtung nach die Resultirende der beiden Kräfte.

Diesen Satz vom Parallelogramme der Kräfte setzen wir bekannt voraus. Wir bezeichnen den Angriffspunkt einer Kraft mit  $A$ , die Kraft mit  $G$ ; verschiedene Angriffspunkte und verschiedene Kräfte unterscheiden wir durch Zeiger, welche wir den Buchstaben  $A$  und  $G$  anhängen. Bei der Darstellung von Kräften durch Liniensegmente (Strecken) setzen wir den Buchstaben  $A$  an den Anfang,  $G$  an das Ende derjenigen Strecke, welche der Grösse und Richtung nach die Kraft repräsentirt; der Sinn der Kraft ist dann durch  $A - G$  gegeben und in manchen Fällen durch einen auf oder neben gesetzten Pfeil angezeigt.

Sind, Fig. 1,  $G_1$  und  $G_2$  die beiden Kräfte, welche den Punkt  $A$  in Angriff nehmen, so ist ihre Resultirende  $G_{1-2}$  durch die durch den Punkt  $A$  gehende Diagonale  $AG_{1-2}$  des Parallelogrammes  $AG_1G_{1-2}G_2$  dargestellt, welches durch die beiden Strecken  $AG_1$  und  $AG_2$  bestimmt ist. Da  $G_1G_{1-2} \# AG_2$  ( $G_2G_{1-2} \# AG_1$ ), so ergibt sich der Endpunkt  $G_{1-2}$  derjenigen Strecke, welche die Resultirende  $G_{1-2}$  repräsentirt, auch dadurch, dass man an die Strecke  $AG_1$  ( $AG_2$ ), welche der Grösse, Richtung und Lage nach der Kraft  $G_1$  ( $G_2$ ) entspricht, die Strecke anreicht, welche der Grösse, Richtung und Lage der Kraft  $G_2$  ( $G_1$ ) entspricht. Wie man sieht,

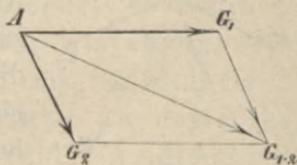


Fig. 1.

ist es für die Bestimmung der Resultierenden  $G_{1-2}$  gleichgiltig, ob man — vom Punkte  $A$  ausgehend — auf die Kraft  $G_1$  die Kraft  $G_2$  folgen lässt, oder umgekehrt  $G_1$  auf  $G_2$ ; eine Bemerkung, von der wir wiederholt Gebrauch machen werden.

Das Dreieck  $AG_1G_{1-2}$ , dessen beide Seiten  $AG_1$  und  $G_1G_{1-2}$  die den Punkt  $A$  in Angriff nehmenden Kräfte repräsentieren, dessen dritte Seite  $AG_{1-2}$  die Resultierende derselben darstellt, heisst Kräftedreieck. Bei diesem „repräsentieren“, „darstellen“ hat man zu beachten, dass jede Seite im Sinne des auf sie gesetzten Pfeiles zu nehmen ist. Denkt man sich die Dreiecksseiten erzeugt durch die Bewegung eines Punktes von  $A$  über  $G_1$  und  $G_{1-2}$  zurück nach  $A$ , so werden zwei Seiten im Sinne des auf sie gesetzten Pfeiles, die dritte dem Sinne des auf sie gesetzten Pfeiles entgegen durchlaufen. Der Umfahrungssinn ist unterbrochen, discontinuirlich. Hiernach kann man sagen: In einem Kräftedreiecke mit discontinuirlichem Umfahrungssinne ist die Kraft, welche den Umfahrungssinn der beiden anderen unterbricht, die Resultierende dieser beiden Kräfte.

Nimmt man die Kraft  $G_{1-2}$  im entgegengesetzten Sinne, so hält sie den beiden Kräften  $G_1$  und  $G_2$  Gleichgewicht. Denkt man sich wieder die Dreiecksseiten erzeugt durch die Bewegung eines Punktes von  $A$  über  $G_1$  und  $G_{1-2}$  zurück nach  $A$ , so werden alle Dreiecksseiten im selben Sinne durchlaufen. Der Umfahrungssinn ist ununterbrochen, continuirlich. Somit kann man sagen: Ist der Umfahrungssinn eines Kräftedreieckes ein continuirlicher, so sind die Kräfte im Gleichgewichte.

§ 2. Resultierende beliebig vieler Kräfte an demselben Angriffspunkte. Es sei die Resultierende der den Punkt  $A$ , Fig. 2, in

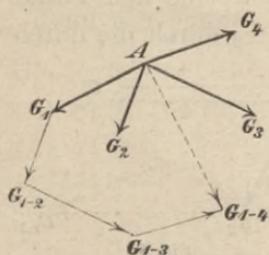


Fig. 2.

Angriff nehmenden Kräfte  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  und  $G_4$  zu bestimmen. Die Aufgabe lässt sich auf das Kräfteparallelogramm zurückführen, indem man zunächst die ersten zwei Kräfte zusammensetzt, die Resultierende derselben mit der dritten vereinigt u. s. w. Zu dieser Zusammensetzung bedient man sich zweckmässig des Kräftedreieckes.

Zieht man  $G_1G_{1-2} \# AG_2$ , so ist  $AG_{1-2}$  (in der Figur nicht ausgezogen) die Resultierende der beiden Kräfte  $G_1$  und  $G_2$ . Macht man ferner  $G_{1-2}G_{1-3} \# AG_3$ , so ist  $AG_{1-3}$  die Resultierende der beiden Kräfte  $G_{1-2}$  und  $G_3$ , also die Resultierende

der drei Kräfte  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$ . Ist schliesslich  $G_{1-3}G_{1-4} \neq AG_4$ , so ist  $AG_{1-4}$  die Resultirende der vier gegebenen Kräfte. Dabei wurden die Kräfte in bestimmter Aufeinanderfolge zusammengesetzt. Es fragt sich nun, ob nicht eine andere Aufeinanderfolge der Kräfte eine andere Resultirende ergeben hätte. Dies lässt sich leicht in folgender Weise entscheiden:

Jede beliebige Aufeinanderfolge der Kräfte lässt sich aus einer anderen allmählich durch Vertauschen von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Kräften ableiten. Es ist daher die Resultirende gewiss dann unabhängig von der Aufeinanderfolge, in welcher die Kräfte zusammengesetzt werden, wenn sie durch Vertauschen von irgend zwei unmittelbar aufeinander folgenden Kräften nicht geändert wird. Nun haben wir im vorigen Paragraphen gesehen, dass die Resultirende dieselbe bleibt, ob wir  $G_2$  an  $G_1$  oder umgekehrt  $G_1$  an  $G_2$  reihen. Wir erhalten somit stets dieselbe Resultirende, in welcher Aufeinanderfolge auch die Kräfte zusammengesetzt werden.

Der polygonale Linienzug  $AG_1G_{1-2}G_{1-3} \dots$ , dessen Seiten die einzelnen Kräfte der Grösse und Richtung (aber nicht der Lage) nach darstellen, heisst Kräftepolygon. In jeder Seite liegt wieder ein bestimmter Sinn, der durch einen auf sie gesetzten Pfeil angezeigt ist. Denkt man sich das Kräftepolygon durch Bewegung eines Punktes von  $A$  über  $G_1$ ,  $G_{1-2} \dots$  zurück nach  $A$  erzeugt, so werden die den gegebenen Kräften parallelen Seiten des Polygons im Sinne des auf sie gesetzten Pfeiles, die Resultirende aber im entgegengesetzten Sinne durchlaufen; der Umfahrungssinn ist unterbrochen. Nimmt man die Resultirende  $G_{1-4}$  im entgegengesetzten Sinne, so hält sie den gegebenen Kräften Gleichgewicht. Ein Punkt, der sich von  $A$  über  $G_1 \dots$  zurück nach  $A$  bewegt, durchläuft sämtliche Seiten im selben Sinne; der Umfahrungssinn ist continuirlich. Man kann daher sagen: Ist der Umfahrungssinn eines Kräftepolygons ein continuirlicher, so sind die Kräfte im Gleichgewichte. Ist aber der Umfahrungssinn eines Kräftepolygons unterbrochen, so ist die Kraft, welche den Umfahrungssinn der übrigen an demselben Angriffspunkte wirkenden Kräfte unterbricht, die Resultirende derselben.

§ 3. Zerlegung einer Kraft in Componenten, die mit ihr an demselben Angriffspunkte wirken. Die Aufgabe: eine Kraft in zwei oder mehrere Componenten zu zerlegen, ist im allgemeinen eine unbestimmte. Es kommt ja nur darauf an, einen Linienzug zu con-

struiren, dessen Anfangspunkt mit dem Angriffspunkte und dessen Endpunkt mit dem Endpunkte der gegebenen Kraft zusammenfällt.

Handelt es sich insbesondere um die Zerlegung einer Kraft in zwei Componenten — was auf die Construction eines Dreieckes hinausläuft — so ist die Aufgabe unter denselben Bedingungen bestimmt, unter welchen sich ein Dreieck construiren lässt. Es müssen entweder beide Componenten der Grösse nach, drei Seiten des Dreieckes; oder beide Componenten der Richtung nach, eine Seite des Dreieckes und die beiden anliegenden Winkel; oder eine Componente der Grösse und Richtung nach, zwei Seiten des Dreieckes und der eingeschlossene Winkel; oder eine Componente der Grösse, die andere der Richtung nach, zwei Seiten und der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel, gegeben sein. In allen übrigen Fällen ist die Aufgabe nicht bestimmt.

§ 4. Zwei Kräfte in derselben Ebene an verschiedenen Angriffspunkten. Kräfte- und Seilpolygon. Wenn der Schnittpunkt  $S$  der beiden Kräfte  $G_1$  und  $G_2$ , die an den Punkten  $A_1$  und  $A_2$  angreifen, auf die Zeichenfläche fällt, so lässt sich die Resultirende derselben nach dem Satze vom Kräfteparallelogramme leicht construiren. Da es nämlich gestattet ist, den Angriffspunkt einer Kraft in ihrer Richtung zu verschieben, so verlegen wir die Angriffspunkte der beiden gegebenen Kräfte in den Schnittpunkt  $S$ . Wir haben dann zwei Kräfte an demselben Angriffspunkte, deren Resultirende auf bekannte Weise gefunden werden kann.

Fällt jedoch der Schnittpunkt der beiden Kräfte nicht auf die Zeichenfläche — wie dies z. B. bei parallelen Kräften immer der Fall ist — so führt ein kleiner Kunstgriff zum Ziele. In der Verbindungslinie der Angriffspunkte  $A_1$  und  $A_2$  der beiden gegebenen Kräfte (welche Punkte  $A_1$  und  $A_2$  man beliebig in den Kräften gelegen annehmen kann) denkt man sich nämlich zwei gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $A_1G_1''$  und  $A_2G_2''$  (Fig. 3),

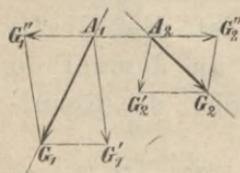


Fig. 3.

wirkend und fasst sie als Componenten der beiden gegebenen Kräfte  $A_1G_1$  und  $A_2G_2$  auf; die noch fehlenden Componenten dieser letzteren ergeben sich durch Construction der betreffenden Kräfte-dreiecke  $A_1G_1''G_1$  und  $A_2G_2''G_2$ ; es sind  $A_1G_1''$  und  $G_1''G_1$  die Componenten von  $G_1$ ;  $A_2G_2''$  und  $G_2''G_2$  die Componenten von  $G_2$ ; u. z.  $G_1''G_1$  und

$G_2''G_2$  der Grösse und Richtung,  $A_1G_1''$  und  $A_2G_2''$  der Grösse, Richtung und Lage nach. Lässt man in  $A_1$  und  $A_2$  bezüglich die Kräfte

$A_1 G'_1 \# G''_1 G_1$  und  $A_2 G'_2 \# G''_2 G_2$  wirken, so kann die Kraft  $G_1$  durch ihre Componenten  $A_1 G'_1$  und  $A_1 G''_1$ ,  $G_2$  durch  $A_2 G'_2$  und  $A_2 G''_2$  ersetzt werden. Es haben dann die zwei gegebenen Kräfte dieselbe Resultirende, wie die vier Kräfte:  $A_1 G'_1$ ,  $A_1 G''_1$ ,  $A_2 G'_2$  und  $A_2 G''_2$ . Von diesen vier Kräften heben sich  $A_1 G''_1$  und  $A_2 G''_2$  gegenseitig auf; die übrigen zwei  $A_1 G'_1$  und  $A_2 G'_2$  haben somit dieselbe Resultirende, wie alle vier, also dieselbe Resultirende, wie die gegebenen zwei Kräfte. Wir haben somit die zwei gegebenen Kräfte durch zwei andere von verschiedener Grösse und Richtung ersetzt. Durch passende Wahl von  $A_1 G'_1$  kann man es nun immer dahin bringen, dass der Schnittpunkt dieser beiden Ersatzkräfte auf die Zeichenfläche fällt, wodurch dieser Fall auf den oben behandelten zurückgeführt ist.

Die hier geforderte Zerlegung der beiden gegebenen Kräfte führt man am besten seitwärts mit Hilfe einer neuen Figur durch.

Von einem beliebigen Punkte  $O$  an reihe man die Kräfte ihrer Grösse und ihrer Richtung entsprechend aneinander; dabei setzen wir blos den Zeiger der Kraft an das Ende der betreffenden Strecke; wir machen  $O1 \# A_1 G_1$ ,  $12 \# A_2 G_2$ , gehen also so vor, wie bei

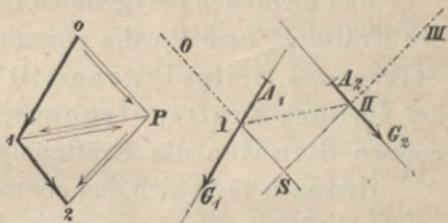


Fig. 4.

der Construction des Kräftepolygones für zwei Kräfte  $G_1$  und  $G_2$ , die denselben Punkt  $O$  in Angriff nehmen. Die Kraft  $G_1$  in zwei Componenten zu zerlegen, verbinden wir einen willkürlich gewählten Punkt  $P$  mit den Punkten  $O$  und  $1$ ; dann sind  $OP$  und  $P1$  (im Sinne der nebengezeichneten Pfeile wirkend) Componenten von  $G_1$ . Diese denken wir uns in zwei Geraden  $OI$  und  $III$  wirken, die beziehungsweise zu  $OP$  und  $P1$  parallel sind und sich auf  $G_1$  schneiden. Nach obigem ist dadurch zunächst die eine Componente von  $G_2$  der Grösse, Richtung und Lage nach vollkommen bestimmt; denn sie muss in der Geraden  $III$  wirken, der Componente von  $G_1$ , die in diese Gerade fällt, der Grösse nach gleich aber entgegengesetzt gerichtet sein; die Lage derselben ist also durch  $III$ , Grösse und Richtung durch  $1P$  gegeben. Damit ist aber auch die zweite Componente von  $G_2$  vollkommen bestimmt; denn Grösse und Richtung derselben liefert die Strecke  $\overline{P2}$ ; und da sie durch den Punkt  $II$  gehen muss, so ist auch ihre Lage  $II III \parallel \overline{2P}$  gegeben. Wir können somit die zwei Kräfte  $G_1$  und  $G_2$  durch vier Kräfte ersetzen, welche

in den Geraden  $OI$ ,  $III$  und  $IIII$  wirken. Von diesen sind die beiden in  $III$  wirkenden gleichgross aber entgegengesetzt gerichtet; sie heben sich daher gegenseitig auf. Somit können die beiden übrigen in  $OI$  und  $IIII$  wirkenden Kräfte allein die beiden gegebenen  $G_1$  und  $G_2$  ersetzen; d. h. sie haben dieselbe Resultirende wie diese. Der Schnittpunkt  $S$  von  $OI$  und  $IIII$  ist daher ein Punkt der Resultirenden von  $G_1$  und  $G_2$ . Grösse und Richtung derselben ist durch  $\overline{O2}$  gegeben; wie leicht einzusehen, wenn man sich die beiden in  $OI$  und  $IIII$  wirkenden Kräfte  $\overline{OP}$  bezüglich  $\overline{P2}$  im Punkte  $S$  angreifend denkt. Die Resultirende ist somit vollständig bestimmt.

Durch eine entsprechende Wahl des Punktes  $P$  und der Lage der Geraden  $OI$  wird man es immer dahin bringen, dass der Punkt  $S$  auf die Zeichenfläche fällt, die Resultirende also gezeichnet werden kann.

Man nennt den polygonalen Linienzug  $OIIII$  ein Seilpolygon der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ ; die einzelnen Geraden  $OI$ ,  $III$ ,  $IIII$  heissen Seiten des Seilpolygones;  $O12$  heisst das Kräftepolygon,  $P$  der Pol des Kräftepolygones,  $O$  der Anfangspunkt;  $OP$ ,  $1P$ ,  $2P$  heissen Strahlen des Kräftepolygones.

Hiernach lässt sich das oben erklärte Verfahren, die Resultirende zweier Kräfte zu bestimmen, in folgender Weise angeben: Man construire den gegebenen Kräften entsprechend Kräfte und Seilpolygon; das Kräftepolygon, indem man von einem beliebigen Anfangspunkte  $O$  an die Kräfte ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach aneinander reiht; also  $\overline{O1} \# A_1G_1$ ,  $\overline{12} \# A_2G_2$  macht; und von einem willkürlichen Pole  $P$  Strahlen zu den Ecken  $O$ ,  $1$ ,  $2$  des Kräftepolygones zieht. Parallel diesen Strahlen zieht man die einzelnen Seilpolygonseiten; die erste  $OI // OP$  der Lage nach beliebig; durch den Schnittpunkt  $I$  derselben mit der Kraft  $G_1$  ziehe man  $III // 1P$ ; durch den Schnittpunkt  $II$  von  $III$  und  $A_2G_2$  schliesslich  $IIII // 2P$ . Durch den Schnittpunkt  $S$  der äussersten Seilpolygonseiten, d. i. der Seite  $OI$ , welche der ersten Kraft vorangeht, mit derjenigen Seite  $IIII$ , welche auf die zweite Kraft folgt, geht die Resultirende der beiden Kräfte  $G_1$  und  $G_2$ ; Grösse, Richtung und Sinn derselben ist durch  $\overline{O2}$  gegeben.

Man bemerke nochmals: In den einzelnen Seilpolygonseiten wirken Kräfte, deren Grösse bestimmt ist durch den Strahl des Kräftepolygones, zu dem die betreffende Seilpolygonseite parallel gezogen wurde; in der mittleren Seilpolygonseite wirken zwei gleich-

grosse Kräfte, die sich aufheben; in den äussersten Seilpolygonseiten zwei Kräfte, welche die gegebenen ersetzen; hierin liegt der Grund, dass durch den Schnittpunkt dieser äussersten Seilpolygonseiten die Resultirende der gegebenen Kräfte hindurchgehen muss.

Dass zu zwei gegebenen Kräften unendlich viele Seilpolygone construirt werden können, ist nach Vorhergehendem selbstverständlich.

Bei der Construction des Kräftepolygones haben wir auf die Kraft  $G_1$  die Kraft  $G_2$  folgen lassen und dementsprechend auch das Seilpolygon construirt. Es fragt sich nun, ob sich bei der noch möglichen Aufeinanderfolge  $G_1$  auf  $G_2$  nicht eine andere Resultirende, wenigstens der Lage nach, ergeben hätte. Dass Grösse und Richtung der Resultirenden ungeändert bleiben, zeigt ein Blick auf das der zweiten Aufeinanderfolge entsprechende Kräftepolygon  $0'2'1'$ , Fig. 5. Dass auch die Lage nicht geändert wird, ergibt sich auf folgende Weise: Für die erste Aufeinanderfolge ist  $0\ I\ III\ III$  das zugehörige Seilpolygon; durch den Schnittpunkt  $S$  von  $0\ I$  und  $II\ III$  geht die Resultirende parallel zu  $\overline{02}$ . Die erste Seite des der zweiten Aufeinanderfolge entsprechenden Seilpolygones ist, wie  $0\ I$ , parallel zu  $0\ P$ ; wir lassen sie mit  $0\ I$  zusammenfallen; ihr Schnittpunkt mit  $G_2$  sei  $II'$ ; durch  $II'$  ist  $II'I' \parallel 2'P$  gezogen;  $I'$  ihr Schnittpunkt mit  $A_1G_1$ ; schliesslich ist  $I'III' \parallel 2'P \parallel II\ III$ ; somit  $0\ II'I'III'$  das Seilpolygon für die zweite Aufeinanderfolge der Kräfte. Durch den Schnittpunkt  $S'$  der beiden Seiten  $0\ II'$  und  $I'III'$  muss die Resultirende hindurchgehen, andererseits aber soll sie auch durch den Punkt  $S$  gehen; sie muss daher, wenn  $S'$  von  $S$  verschieden ist, ganz in die Gerade  $0\ I$  fallen; das ist aber nicht möglich, da die Resultirende zweier Kräfte durch

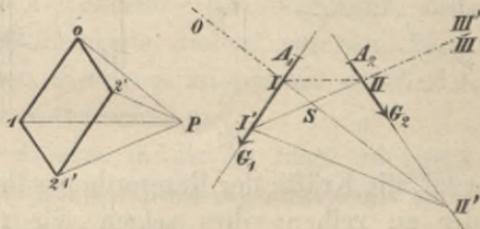


Fig. 5.

den Schnittpunkt derselben hindurchgehen muss, nicht aber beide Kräfte in verschiedenen Punkten schneiden kann. Es muss daher  $S'$  mit  $S$  zusammenfallen; d. h.: die Resultirende ändert auch ihre Lage nicht. Da  $I'S'III' \parallel II\ III$  und  $S'$  mit  $S$  zusammenfällt, so fällt auch  $II'III'$  mit  $II\ III$  zusammen. Wenn wir also die ersten zwei Seiten der beiden Seilpolygone, welche den Annahmen über die Aufeinanderfolge der Kräfte entsprechen, zusammenfallen lassen, so fallen auch die letzten zwei Seilpolygonseiten zusammen; nur die mittleren haben verschiedene Lagen.

Mit Hilfe des Kräfte- und Seilpolygones kann man somit in allen Fällen auf gleiche Weise Grösse, Richtung und Lage der Resultirenden zweier Kräfte in einer Ebene finden. In Fig. 6 ist die

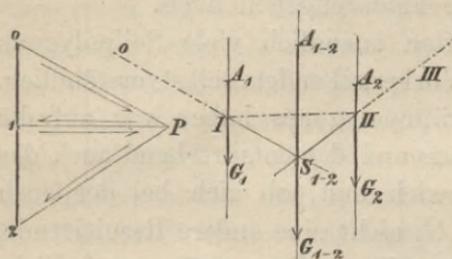


Fig. 6.

Construction für zwei parallele gleichgerichtete Kräfte durchgeführt. Das Kräftepolygon geht hier in eine gerade Linie, Kräfte-linie, über; die Resultirende ist der Grösse, Richtung und dem Sinne nach durch die Strecke  $\overline{12}$  dargestellt. Ihre Lage zu bestimmen, wurde das Seilpolygon

$OIIII$  für den willkürlich gewählten Pol  $P$  construirt; es ist  $OI \parallel OP$ ,  $III \parallel 1P$ ,  $IIIII \parallel 2P$ . Der Schnittpunkt  $S_{1-2}$  der beiden Seilpolygonseiten  $OI$  und  $IIIII$  ist ein Punkt der Resultirenden, welche parallel zu  $\overline{02}$ , somit vollkommen bestimmt ist.

In Fig. 7 haben wir zwei parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $A_1G_1$  und  $A_2G_2$ . Vom Punkte 0 aus sind die Kräfte

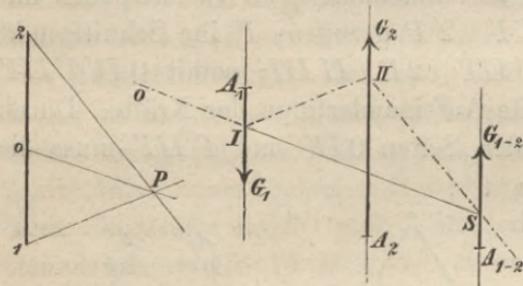


Fig. 7.

ihrer Sinne und ihrer Grösse entsprechend aneinander gereiht; es ist  $01 \# A_1G_1$ ;  $12 \# A_2G_2$ . Bei der gewählten Bezeichnungsweise ist in diesem Falle Grösse, Sinn und Aufeinanderfolge der Kräfte nur dann aus dem Kräftepolygone unzweideutig zu entnehmen, wenn man fest-

setzt, die Kräfte der Rangordnung ihrer Zeiger entsprechend aneinander zu reihen; dies setzen wir für die Zukunft immer voraus. Die Resultirende ist der Grösse, Richtung und dem Sinne nach durch  $\overline{02}$  dargestellt; sie liegt auf der Seite der grösseren Kraft, wie die Construction des Seilpolygones  $OIIII$  zeigt.

In Fig. 8 haben wir endlich zwei parallele, entgegengesetzt gerichtete, gleichgrosse Kräfte, ein sogenanntes Kräftepaar; die Resultirende derselben ist Null. Construirt man für eine beliebige Lage des Poles  $P$  das Seilpolygon  $OIIII$ , so werden, da der Endpunkt des Kräftepolygones auf den Anfangspunkt fällt, die beiden äussersten Seilpolygonseiten zu einander parallel; ihr unendlich ferner Schnittpunkt ist ein Punkt der Resultirenden. Für eine an-

dere Lage des Poles  $P$  wird man, im allgemeinen, einen anderen unendlich fernen Punkt erhalten; aber jeder solche Punkt ist ein Punkt der gesuchten Resultirenden. Diese geht also durch sämtliche unendliche ferne Punkte der Ebene, d. h. sie liegt in der unendlich fernen Geraden der Ebene. Zwei parallele, gleichgrosse, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte haben daher eine Resultirende Null, die in der unendlich fernen Geraden der Ebene liegt.

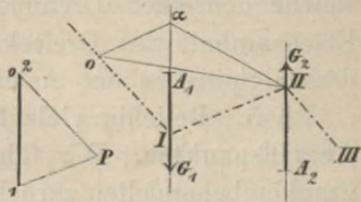


Fig. 8.

In den äussersten Seilpolygonseiten haben wir wieder zwei Kräfte wirkend zu denken, welche die gegebenen ersetzen; die Grössen dieser Kräfte sind bestimmt durch die Strahlen des Kräftepolygons, zu welchen die Seilpolygonseiten parallel sind; der Sinn der Kräfte ergibt sich auf bekannte Weise.

Im vorliegenden Falle sind beide äusserste Seilpolygonseiten dem Strahle  $OP$  parallel; es wirken also in beiden gleichgrosse Kräfte. Wie man leicht sieht, sind diese Kräfte entgegengesetzt gerichtet; in  $OI$  wirkt  $OP$ , in  $IIIII$  wirkt  $PO$ ; diese beiden Kräfte bilden also ein Kräftepaar. Je nach der Lage des Poles werden diese, in den äussersten Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte verschiedene Grösse und verschiedene Richtung haben; immer aber werden sie die beiden gegebenen, parallelen, gleich grossen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte ersetzen. Hieraus folgt, dass man ein Kräftepaar durch unendlich viele andere ersetzen kann. Welche Beziehung dabei zwischen diesen Kräftepaaren stattfindet, wollen wir sogleich etwas näher untersuchen.

Jedes Kräftepaar strebt die Ebene, in der es liegt, in einem gewissen Sinne zu drehen. Man sieht, der Drehungssinn des Paares  $OP$  und  $PO$  ist derselbe, wie der des gegebenen Kräftepaares. Macht man  $I\alpha = \overline{I2}$  (Fig. 8) und zieht  $\alpha O \parallel P1 \parallel III$ , so ist  $\triangle OI\alpha \cong \triangle POI$ , daher  $OI = OP$ . Verbindet man nun den Punkt  $II$  mit  $O$  und  $\alpha$ , so ist  $\triangle \alpha III$  ein Dreieck, dessen Basis  $\alpha I$  gleich ist einer Kraft des gegebenen Kräftepaares und dessen Spitze  $II$  in der anderen Kraft liegt. Ebenso ist  $\triangle OIII$  ein Dreieck, dessen Basis  $OI$  gleich ist der in der ersten Seilpolygonseite wirkenden Kraft  $OP$  und dessen Spitze  $II$  in der letzten Seilpolygonseite liegt. Diese beiden Dreiecke  $\triangle I\alpha II$  und  $\triangle IOII$  haben gleichen Flächeninhalt; denn sie haben dieselbe Grundlinie  $III$  und ihre Spitzen liegen in einer zur Grundlinie Parallelen  $O\alpha$ . Was hier für das Kräftepaar  $OP$

und  $PO$  bewiesen wurde, gilt in gleicher Weise für jedes andere, welches das gegebene  $A_1G_1$  und  $A_2G_2$  ersetzen soll. Man kann daher sagen: Ein Kräftepaar kann durch unendlich viele andere, welche denselben Drehungssinn haben, ersetzt werden, wenn der Flächeninhalt des Dreieckes, dessen Basis die eine Kraft ist und dessen Spitze in der anderen Kraft liegt, ungeändert bleibt.

§ 5. **Beliebige viele Kräfte in einer Ebene an verschiedenen Angriffspunkten.** Wir führen diesen Fall auf den im vorigen Paragraphen behandelten zurück, indem wir zuerst die Resultirende zweier Kräfte bestimmen; diese mit der dritten Kraft zusammensetzen u. s. w.

Es seien, Fig. 9, die vier Kräfte  $G_1, G_2, G_3$  und  $G_4$ , die an den Punkten  $A_1, A_2 \dots A_4$  angreifen, zusammenzusetzen. Wir be-

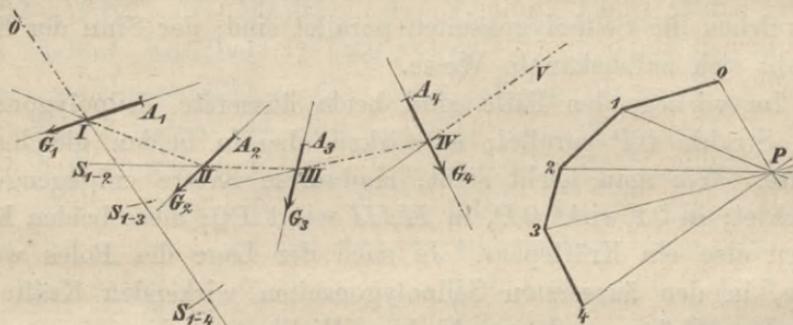


Fig. 9.

stimmen zunächst die Resultirende der beiden Kräfte  $G_1$  und  $G_2$ . Dazu tragen wir, von einem beliebigen Punkte  $O$  an, die beiden Kräfte  $G_1$  und  $G_2$  ihrer Richtung und Grösse entsprechend nacheinander auf; nehmen den Pol  $P$  willkürlich an, ziehen die Strahlen  $OP, 1P, 2P$  und zu diesen bezüglich  $OI, I III, II III$  parallel. Die Resultirende  $G_{1-2}$  der beiden Kräfte  $G_1$  und  $G_2$  ist dann ihrer Grösse und Richtung nach durch die Diagonale  $O2$  des Kräftepolygones, ihrer Lage nach aber dadurch bestimmt, dass sie durch den Schnittpunkt  $S_{1-2}$  der beiden Seilpolygonseiten  $OI$  und  $II III$  hindurchgehen muss. In der mittleren Seilpolygonseite  $I III$  wirken zwei Kräfte, die sich gegenseitig aufheben; in den Seiten  $OI$  und  $II III$  zwei Kräfte, welche die beiden gegebenen  $G_1$  und  $G_2$  ersetzen. Nun construiren wir die Resultirende der beiden Kräfte  $G_{1-2}$  und  $G_3$ . Das zugehörige Kräftepolygon ergibt sich, wenn man  $2\bar{3} \# A_3G_3$  macht; als Pol behalten wir den oben gewählten Punkt  $P$ ; dann können wir auch für das den beiden Kräften  $G_{1-2}$  und  $G_3$  entsprechende Seilpolygon die beiden Seiten  $OIS_{1-2}$  und  $S_{1-2}II III$

des früheren beibehalten. Parallel  $\overline{3P}$  ziehen wir  $IIIIV$ ; somit ist  $OS_{1-2}IIIIV$  das Seilpolygon für die beiden Kräfte  $G_{1-2}$  und  $G_3$ . Grösse und Richtung der Resultirenden  $G_{1-3}$  dieser beiden Kräfte ist durch die Diagonale  $03$  des Kräftepolygones bestimmt, die Lage derselben aber dadurch, dass sie durch den Schnittpunkt  $S_{1-3}$  der beiden Seilpolygonseiten  $OIS_{1-2}$  und  $IIIIV$  hindurchgehen muss. In diesen beiden Seiten wirken wieder zwei Kräfte, welche  $G_{1-2}$  und  $G_3$ , daher auch  $G_1, G_2$  und  $G_3$  ersetzen; in der Seite  $S_{1-2}IIIII$  zwei Kräfte, die sich gegenseitig aufheben. Kommt noch die Kraft  $G_4$  hinzu, so ziehen wir  $\overline{34} \# A_4G_4$  und  $IVV // 4P$ . Die Resultirende der Kräfte  $G_{1-3}$  und  $G_4$ , also auch der Kräfte  $G_1, G_2, G_3$  und  $G_4$  ist dann der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale  $\overline{04}$  des Kräftepolygones, der Lage nach durch den Schnittpunkt  $S_{1-4}$  der beiden Seiten  $OIS_{1-4}$  und  $S_{1-4}IVV$  bestimmt. In diesen beiden Seiten wirken zwei Kräfte, welche  $G_{1-3}$  und  $G_4$ , also auch die gegebenen vier Kräfte ersetzen. Grösse und Richtung dieser Kräfte geben die Strahlen des Kräftepolygones, zu welchen die betreffenden Seilpolygonseiten parallel gezogen wurden. In  $OIS_{1-4}$  wirkt  $0P$ ; in  $S_{1-4}IVV$  die Kraft  $P4$ .

Beliebige Kräfte in einer Ebene zusammensetzen, wird man daher so vorgehen: Von einem beliebigen Punkte  $O$  an reiht man die Kräfte ihrer Richtung und Grösse entsprechend aneinander; man construirt das Kräftepolygen  $01234\dots$ . Die Ecken desselben verbindet man mit einem willkürlich gewählten Punkte  $P$ , dem Pole des Kräftepolygones. Zu diesen Verbindungslinien (Strahlen) zieht man zwischen den einzelnen Kräften parallele Gerade; man construirt das Seilpolygon. Die erste Seite desselben  $OI // 0P$  ist der Lage nach willkürlich; durch ihren Schnittpunkt  $I$  mit  $A_1G_1$  wird  $III // 1P$ ; durch den Schnittpunkt  $II$  von  $III$  und  $A_2G_2$  wird  $IIIII // 2P$  u. s. w. gezogen. Grösse und Richtung der Resultirenden aller Kräfte ist gegeben durch die Diagonale des Kräftepolygones, welche den Anfangspunkt  $O$  mit dem Endpunkte verbindet (sämmliche Kräfte unterspannt); ihre Lage ist bestimmt durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten; d. i. derjenigen Seite  $OI$ , welche der ersten Kraft vorausgeht, mit derjenigen  $IVV$ , welche auf die letzte Kraft folgt. In diesen beiden Seilpolygonseiten wirken zwei Kräfte, welche die sämmlichen gegebenen ersetzen; hierin liegt eben der Grund, dass durch ihren Schnittpunkt die Resultirende sämmlicher Kräfte hindurchgehen muss. Die Richtung und Grösse der in der ersten Seite wirkenden Kraft ist be-

stimmt durch den Strahl des Kräftepolygones, der vom Anfangspunkte  $O$  zum Pole  $P$  gezogen; Richtung und Grösse der in der letzten Seilpolygonseite wirkenden Kraft aber durch den Strahl, der vom Pole  $P$  zum Endpunkte des Kräftepolygones gezogen ist. In allen mittleren Seiten wirken zwei gleichgrosse aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die sich gegenseitig aufheben.

Bei dieser Zusammensetzung der Kräfte wurde eine bestimmte Aufeinanderfolge derselben vorausgesetzt. Es erübrigt nun noch zu zeigen, dass Grösse, Richtung und Lage der Resultirenden von der Aufeinanderfolge der einzelnen Kräfte unabhängig ist.

Jede beliebige Aufeinanderfolge kann aus einer anderen durch allmähliches Vertauschen von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Kräften abgeleitet werden. Daher ist, wenn Grösse, Richtung und Lage der Resultirenden durch das Vertauschen von zwei beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden Kräften nicht geändert wird, die Resultirende von der Aufeinanderfolge der Kräfte unabhängig. Dass durch Vertauschen von irgend zwei unmittelbar aufeinander folgenden Kräften Grösse und Richtung der Resultirenden nicht geändert wird, ist nach dem in § 2 Gesagten sofort klar. Dass aber auch die Lage der Resultirenden nicht geändert wird, ergibt sich ohne weiteres nach § 4, Seite 7. Damit ist auch bewiesen, dass die Aufeinanderfolge der Kräfte ohne Einfluss auf Richtung, Lage und Grösse ihrer Resultirenden ist.

**§ 6. Gleichgewicht beliebig vieler Kräfte in einer Ebene.** Auf die im vorigen Paragraph angegebene Weise kann man in jedem Falle die Resultirende gegebener Kräfte finden. Lässt man sie in entgegengesetzter Richtung wirken, d. h. fügt man den gegebenen Kräften eine neue hinzu, welche ebenso gross wie die Resultirende der gegebenen ist, mit dieser in derselben Geraden aber in entgegengesetztem Sinne wirkt, so herrscht Gleichgewicht. Der Endpunkt des Kräftepolygones, das aus den ursprünglich gegebenen und der hinzugefügten Kraft construirt ist, fällt dann mit dem Anfangspunkte desselben zusammen; das Kräftepolygon schliesst sich; die Resultirende aller Kräfte ist Null. Also: wenn Gleichgewicht herrscht, dann ist die Resultirende aller Kräfte Null. Nicht aber umgekehrt; wenn die Resultirende aller Kräfte Null ist, so herrscht im allgemeinen noch nicht Gleichgewicht; dazu muss noch eine weitere Bedingung erfüllt werden, die sich auf folgende Weise ergibt.

Schliesst sich das Kräftepolygon, d. h. fällt der Endpunkt desselben mit dem Anfangspunkte zusammen, so fällt auch der letzte

Strahl des Kräftepolygones mit dem ersten zusammen. Die erste und letzte Seilpolygonseite, welche parallel zu diesen Strahlen gezogen werden, sind daher auch zu einander parallel. In der ersten Seilpolygonseite wirkt eine Kraft, deren Grösse durch die Länge des ersten Strahles im Kräftepolygone, deren Richtung durch die Richtung vom Anfangspunkte  $O$  zum Pole  $P$  gegeben ist. In der letzten Seilpolygonseite wirkt eine Kraft, deren Grösse gleichfalls durch die Länge des ersten Strahles im Kräftepolygone, deren Richtung durch die Richtung vom Pole zum Anfangspunkte  $O$  bestimmt ist. In den beiden äussersten Seilpolygonseiten sind daher — wenn das Kräftepolygon sich schliesst — zwei parallele, gleichgrosse aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte thätig. Soll nun Gleichgewicht sein, so müssen diese beiden Kräfte sich aufheben. Dies ist aber nur möglich, wenn sie in derselben Geraden wirken; also wenn die beiden äussersten Seilpolygonseiten aufeinander fallen, das Seilpolygon sich schliesst. Kräfte in einer Ebene sind im Gleichgewichte, wenn die ihnen entsprechend construirten Kräfte und Seilpolygone sich schliessen.

Schliesst sich das Kräfte- nicht aber das Seilpolygon, so haben wir sämtliche Kräfte auf zwei parallele, gleichgrosse aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte (auf ein Kräftepaar) zurückgeführt, die sich nicht weiter vereinigen lassen. Schliesst sich das Seilpolygon, nicht aber das Kräftepolygon, so haben wir in den äussersten aufeinanderfallenden Seilpolygonseiten, also in derselben Geraden, zwei Kräfte thätig, die mit einander vereinigt die Resultirende sämtlicher Kräfte darstellen. Dieser Fall kann eintreten, wenn der Pol auf der Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kräftepolygones mit dem Endpunkte desselben liegt.

§ 7. Zwei Seilpolygone für dasselbe Kräftepolygon aber verschiedene Pole. Die gleichvielten Seiten zweier Seilpolygone, welche für dasselbe Kräftepolygon aber verschiedene Pole construirt sind, schneiden sich auf einer Geraden, die zur Verbindungslinie der beiden Pole parallel ist. Der Beweis dafür lässt sich z. B. auf folgende Weise führen. Seien Fig. 10  $A_1 G_1, A_2 G_2, A_3 G_3$  die gegebenen Kräfte;  $O 1 2 3$  das Kräftepolygon. Für den Pol  $P$  ergebe sich das Seilpolygon  $O III III IV$ ; für den Pol  $P'$  das Seilpolygon  $O' I' II' III' IV'$ . Der Schnittpunkt der beiden Seiten  $O I$  und  $O' I'$  sei  $S_1$ ; der Schnittpunkt von  $III$  und  $I' II'$  sei  $S_2$ . Die Kraft  $G_1$  kann man nun ersetzen durch zwei Kräfte, welche in den beiden Geraden  $O I$  und  $III$  wirken; Grösse und Sinn dieser Kräfte geben bezüglich

die Strahlen  $OP$  und  $P1$ . Andererseits kann man die Kraft  $G_1$  aber auch ersetzen durch zwei Kräfte, welche in den beiden Geraden  $O'I'$  und  $I'II'$  wirken; diese Kräfte sind der Grösse und dem Sinne nach durch  $OP'$  und  $P'1$  gegeben. Kehrt man den Sinn der letzten beiden Kräfte um, nimmt man also in den beiden Geraden  $O'I'$  und  $I'II'$  zwei Kräfte wirkend an, deren Grösse und Sinn bezüglich durch  $P'O$  und  $1P'$  bestimmt sind, so halten sich die vier Kräfte:  $OP$  (in  $OI$ ),  $P1$  (in  $III$ ),  $P'O$  (in  $O'I'$ ) und  $1P'$  (in  $I'II'$ ) Gleichgewicht. Der Sinn dieser vier Kräfte ist im Kräftepolygone durch

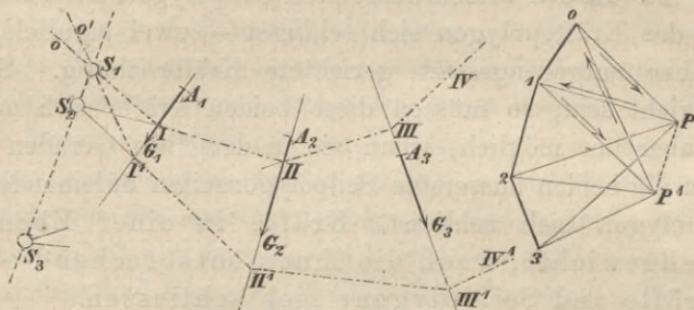


Fig. 10.

Pfeile besonders angezeigt. Die Resultirende von zweien muss daher ebenso gross sein, wie die Resultirende der beiden übrigen Kräfte; mit dieser in derselben Geraden, aber im entgegengesetzten Sinne wirken. Wir setzen nun die beiden in  $O'I'$  und  $OI$  wirkenden Kräfte  $P'O$  und  $OP$  für sich, ebenso die beiden in  $III$  und  $I'II'$  wirkenden Kräfte  $P1$  und  $1P'$  für sich zusammen. Die Resultirende der beiden ersten  $P'O$  und  $OP$  ist — wie man aus dem Kräftepolygone sieht — der Grösse und Richtung nach  $P'P$ ; die der beiden letzten  $P1$  und  $1P'$  der Grösse und Richtung nach  $PP'$ . Diese beiden Resultirenden haben also, wie es sein muss, dieselbe Grösse, aber entgegengesetzte Richtung. Die erste geht durch den Schnittpunkt  $S_1$  von  $OI$  und  $O'I'$ ; die zweite durch den Schnittpunkt  $S_2$  von  $III$  und  $I'II'$ . Beide wirken in Geraden, welche bezüglich durch  $S_1$  und  $S_2$  parallel zu  $PP'$  gezogen sind. Sollen diese beiden parallelen, gleichgrossen aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte sich aufheben, so müssen sie in derselben Geraden wirken; es muss also die Gerade, die durch  $S_1$  parallel zu  $PP'$  gezogen ist, zusammenfallen mit der Geraden, die durch  $S_2$  parallel zu  $P'P$  gezogen wurde, d. h. es muss die Verbindungslinie von  $S_1$  und  $S_2$  zu  $PP'$  parallel sein.

Ebenso kann man beweisen, dass die Verbindungslinie von  $S_2$

und  $S_3$  zu  $PP'$  parallel ist. Die beiden Geraden  $S_1S_2$  und  $S_2S_3$  gehen aber durch denselben Punkt  $S_2$  zur selben Geraden parallel; sie fallen daher zusammen; etc. Damit ist der oben aufgestellte Satz bewiesen.

Als erste Anwendung dieses Satzes lösen wir die Aufgabe: für eine einzige Kraft  $G$  (z. B. die Resultierende eines gegebenen Kräftesystemes) ein Seilpolygon zu zeichnen, welches durch zwei bestimmte Punkte  $F$  und  $J$  geht, wenn die Poldistanz  $B$  gegeben ist.

01 sei das Kräftepolygon; der Pol liegt in einer zu  $01$  im Abstände  $B$  parallelen Geraden; wir nehmen an, er liege in  $C'$ . Die erste Seilpolygonseite ziehen wir durch  $F$  parallel zu  $0C'$ ; durch ihren Schnittpunkt  $S'$  mit der gegebenen Wirkungslinie der Kraft  $G$  ist die zweite Seite parallel zu  $1C'$  zu ziehen; sie wird im allgemeinen nicht durch den Punkt  $J$  gehen. Die erste Seite des zu

suchenden Seilpolygons muss gleichfalls durch  $F$  gehen; die gleichvielten Seiten beider Seilpolygone müssen sich daher auf einer Geraden  $F\alpha$  schneiden, die durch  $F$  parallel zu  $01$  geht; denn wegen der gegebenen Poldistanz ist die Verbindungslinie der Pole (für das eben construirte und das zu suchende Seilpolygon) zu  $01$  parallel.

Die zweite Seite des eben construirten Seilpolygons schneidet diese Gerade  $F\alpha$  in  $\alpha$ ; durch diesen Punkt muss (nach dem obigen Satze) auch die zweite Seite des zu suchenden Seilpolygons hindurchgehen, und da auch  $J$  ein Punkt der zweiten Seite sein soll, so ist  $\alpha J$  diese zweite Seite; ihr Schnittpunkt  $S$  mit  $G$  giebt einen zweiten Punkt der ersten Seite des gesuchten Seilpolygons  $FSJ$ . Zieht man zu  $FS$  und  $SJ$  durch  $0$  und  $1$  Parallele, so müssen sich diese in der Entfernung  $B$  von  $01$  im zugehörigen Pole  $C$  schneiden.

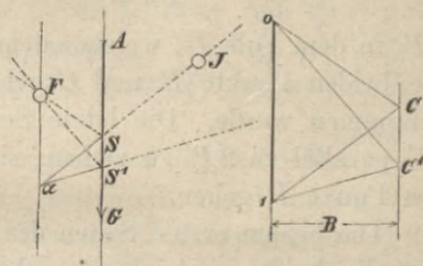


Fig. 11.

§ 8. Seilpolygon durch drei gegebene Punkte. Bei Untersuchungen über die Stabilität von Bogenträgern handelt es sich darum, ein Seilpolygon zu zeichnen, welches durch drei gegebene Punkte geht. Diese Aufgabe kann man mit Hilfe des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes lösen.

Es sei für die beiden Kräfte  $A_1G_1$  und  $A_2G_2$  ein Seilpolygon zu construiren, dessen drei Seiten durch die drei gegebenen Punkte  $B, C$  und  $D$  hindurchgehen, u. z. soll  $B$  auf der ersten,  $C$  auf der

zweiten,  $D$  auf der dritten Seite liegen. Es kommt da darauf an, die Lage des Poles im Kräftepolygon zu bestimmen; denn die Seilpolygonseiten müssen zu den Strahlen des Kräftepolygons parallel sein. Ein Seilpolygon, das durch die beiden Punkte  $B$  und  $C$ , Fig. 12, hindurchgeht, lässt sich leicht zeichnen. Wir ziehen durch den Punkt  $B$  die erste Seite  $O'I'$  beliebig und durch den Anfangspunkt  $O$  des Kräftepolygons dazu eine Parallele  $OP'$ . Als

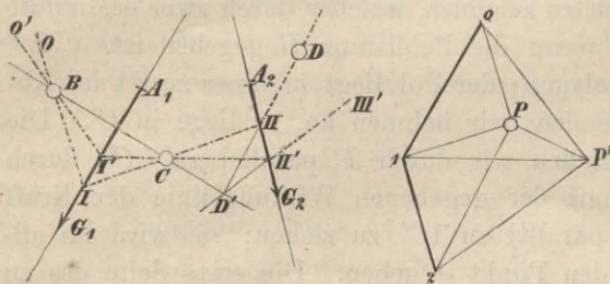


Fig. 12.

zweite Seilpolygonseite nehmen wir die Linie  $I'CI'$ . Eine zu dieser durch die Ecke 1 parallel gezogene Gerade schneidet  $OP'$  in dem Pole  $P'$ , welcher dem Seilpolygone entspricht, das durch die beiden Punkte  $B$  und  $C$  geht und dessen erste Seite  $O'I'$  angenommen wurde. Die letzte Seilpolygonseite ist durch den Punkt  $II'$  parallel zu  $2P'$  zu ziehen; sie wird im allgemeinen nicht durch den Punkt  $D$  gehen.

Die beiden ersten Seiten des zu suchenden Seilpolygons schneiden die beiden ersten Seiten des obenbezeichneten in den Punkten  $B$  und  $C$ , also auf der Geraden  $BC$ ; es müssen sich daher nach dem vorigen Paragraphen auch die dritten Seiten dieser beiden Seilpolygone auf der Geraden  $BC$  schneiden. Ist  $D'$  der Schnittpunkt von  $II'III'$  und  $BC$ , so ist  $DD'$  die dritte Seite des zu suchenden Seilpolygons; denn diese muss durch die beiden Punkte  $D$  und  $D'$  gehen. Jetzt kann man das Seilpolygon leicht fertig zeichnen. Der Durchschnittspunkt von  $DD'$  und  $A_2G_2$  bestimmt nämlich einen Punkt  $II$  der mittleren Seite; ein zweiter Punkt derselben ist  $C$ ; also ist  $IICI$  die mittlere Seite des gesuchten Seilpolygons. Damit ist auch die erste  $BI$  gegeben. Zieht man durch  $P'$  eine Parallele zu  $BC$  und durch die Punkte 0, 1, 2 Parallele zu  $BI, ICI, IID$ , so müssen sich diese vier Geraden in demselben Punkte, dem gesuchten Pole  $P$ , schneiden.

Die Aufgabe wäre somit gelöst; es hat sich dabei darum gehandelt, zuerst ein Seilpolygon durch zwei der gegebenen Punkte zu legen. So gut wir als diese Punkte  $B$  und  $C$  genommen haben, konnten wir auch  $C$  und  $D$  wählen. Wir gelangen dadurch zu einer einfacheren Lösung.

Der Pol  $P$  liegt auf einer Geraden, die durch den oben erhaltenen Pol  $P'$  parallel zu  $BC$  gezogen ist. Wir construiren nun ein Seilpolygon, das durch die beiden Punkte  $C$  und  $D$  geht. Die durch  $C$  gehende Seite soll, wie früher,  $I' C II'$  sein; dann ist die letzte Seite  $II' D$ . Zieht man  $2P'' \parallel II' D$ ,  $1P' \parallel I' C II'$  so ist der Schnitt  $P''$  von  $2P''$  und  $1P'$  der Pol, der dem Seilpolygone durch die beiden Punkte  $C$  und  $D$  entspricht. Die erste Seite dieses Seilpolygons geht parallel zu  $P'' O$ . Der Pol  $P$  des gesuchten Seilpolygons (durch alle drei Punkte  $B, C$  und  $D$ ) muss nun nach obigem auf einer Geraden, die durch  $P''$  parallel  $CD$  gelegt ist, liegen. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der durch  $P'$  parallel zu  $BC$  gezogenen giebt den Pol  $P$ .

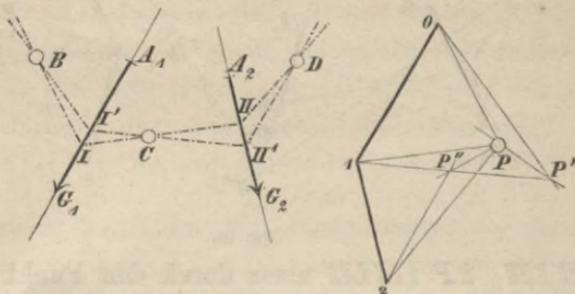


Fig. 13.

Hiernach ergibt sich folgende Construction für das Seilpolygon, das den beiden Kräften  $A_1 G_1$  und  $A_2 G_2$  entspricht und durch die drei Punkte  $B, C$  und  $D$  geht. Man zeichne das Kräftepolygon  $012$ ; ziehe  $BI'$  beliebig und  $OP' \parallel BI'$ ; hierauf  $1P' \parallel I' C II'$  und durch den Punkt  $P'$  eine Parallele zu  $BC$ ; dann  $2P'' \parallel II' D$  und durch  $P''$  (Schnittpunkt von  $1P'$  und  $2P''$ ) eine Parallele zu  $CD$ . Der Schnittpunkt der durch  $P'$  zu  $BC$  Parallelen mit der durch  $P''$  zu  $CD$  Parallelen giebt den Pol  $P$ , mit dem das gesuchte Seilpolygon construirt werden kann.

Etwas eleganter wird die Lösung, wenn man zur Construction des Poles  $P'$  als mittlere Seite des Seilpolygons die Verbindungslinie von  $C$  und  $D$ ; zur Construction des Poles  $P''$  als mittlere Seite die Linie  $BC$  nimmt. Die Lösung gestaltet, Fig. 14, sich dann so: Man bringe die Verbindungslinien  $BC$  und  $CD$  bezüglich mit  $A_2 G_2$  und  $A_1 G_1$  zum Schnitt in  $II'$  und  $I'$ , ziehe

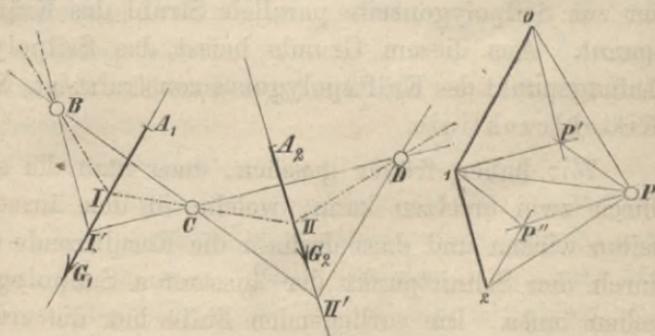


Fig. 14.

Man bringe die Verbindungslinien  $BC$  und  $CD$  bezüglich mit  $A_2 G_2$  und  $A_1 G_1$  zum Schnitt in  $II'$  und  $I'$ , ziehe

dann  $0P' \parallel BI'$ ,  $1P' \parallel I'CD$ ,  $1P'' \parallel BCII'$ ,  $2P'' \parallel II'D$ ; schliesslich

$P'P \parallel BC \parallel 1P'$   
und  $P''P \parallel CD$

$\parallel 1P'$ ; dann ist  $P$   
der gesuchte Pol.

Das gesuchte Seil-

polygon ergibt

sich so: man ziehe  
 $BI \parallel 0P$ ,  $III$

$\parallel 1P$ ; ( $III$  muss  
durch  $C$  gehen);

$IIIII \parallel 2P$  ( $IIIII$  muss durch den Punkt  $D$  gehen).

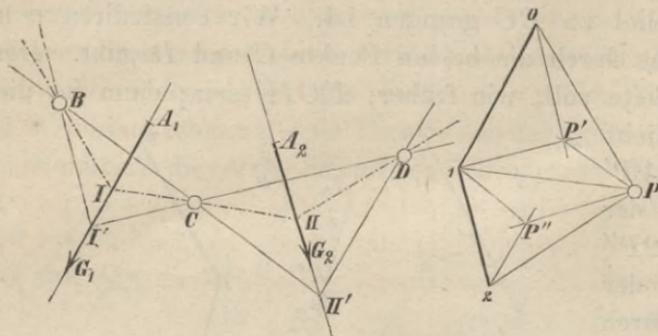


Fig. 15.

§ 9. Die Mitteldrucklinie. Die Lage des Poles ist im allgemeinen willkürlich. Für gewisse Untersuchungen, z. B. über Stabilität von Gewölben, ist es zweckmässig, dem Pole eine besondere Lage zuzuweisen u. z. ihn in den Anfangspunkt des Kräftepolygons zu verlegen. Dann werden die einzelnen Strahlen des Kräftepolygons zum Theil Seiten, zum Theil Diagonalen des Kräftepolygons. Jeder Strahl repräsentirt dann die Resultirende der Kräfte, welche er unterspannt. Die Seiten des entsprechenden Seilpolygons sind dann theils Seiten, theils Diagonalen des Kräftepolygons parallel. In jeder Seilpolygonseite sind aber Kräfte wirkend zu denken, deren Grösse der Strahl des Kräftepolygons giebt, zu dem die Seilpolygonseite parallel ist. Da nun jeder Strahl die Resultirende der Kräfte, welche er unterspannt, darstellt, so ist in der zu dem Strahl parallelen Seilpolygonseite, welche auf die letzte der unterspannten Kräfte folgt, die Resultirende der Kräfte wirkend zu denken, welche der zur Seilpolygonseite parallele Strahl des Kräftepolygons unterspannt. Aus diesem Grunde heisst das Seilpolygon, das für den Anfangspunkt des Kräftepolygons construirt ist, Mittelkraft- oder Mitteldrucklinie.

Wir haben früher gesehen, dass man die sämmtlichen Kräfte durch zwei ersetzen kann, welche in den äussersten Seilpolygonseiten wirken und dass deshalb die Resultirende sämmtlicher Kräfte durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten hindurchgehen muss. Im vorliegenden Falle hat die erste Seilpolygonseite eine ganz willkürliche Lage und die in ihr wirkende Kraft ist Null; es ist daher jeder Punkt der letzten Seilpolygonseite ein Punkt der Resultirenden sämmtlicher Kräfte; die in der letzten Seite wirkende

Kraft muss allein sämtliche Kräfte ersetzen; d. h. sie ist die Resultirende derselben.

Für eine bestimmte Lage des Poles erhalten wir im allgemeinen unendlich viele Seilpolygone; nur wenn ein Punkt einer Seilpolygonecke angenommen wird, ist das ganze Seilpolygon bestimmt. Fällt der Pol mit dem Anfangspunkte des Kräftepolygones zusammen, so erhalten wir immer nur ein Seilpolygon, eine Mitteldrucklinie. Es hat dies darin seinen Grund, dass mit dieser speciellen Lage des Poles auch eine Ecke (II) des Seilpolygones bestimmt ist.

§ 10. Zerlegen einer Kraft in zwei Componenten. Sehr oft handelt es sich darum, eine Kraft in zwei Componenten zu zerlegen, die in bestimmten Geraden wirken. Diese Aufgabe ist nur dann lösbar, wenn die bestimmten Geraden sich in einem und demselben Punkte der gegebenen Kraft-Resultirenden schneiden. Fällt dieser Schnittpunkt in endliche Entfernung — wenn auch nicht auf die Zeichenfläche — so erhält man Grösse und Richtung der Componenten mit Hilfe des Kräftedreieckes. Dieses allein führt aber dann nicht mehr zum Ziele, wenn der Schnittpunkt der drei Kräfte in unendliche Entfernung fällt, also eine Kraft in zwei zu ihr parallele Componenten zerlegt werden soll. In diesem Falle kann man auf folgende Weise vorgehen:

Wir zerlegen, Fig. 16, zunächst die Kraft  $G_{1-2}$  in zwei beliebige Componenten, die sich auf der Zeichenfläche in  $S_{1-2}$  schneiden. Diese Zerlegung führen wir seitwärts mit Hilfe des Kräftedreieckes  $OP2$  durch. Zieht man  $OS_{1-2} \parallel OP$  und  $S_{1-2}III \parallel 2P$ , so kann man die gegebene Kraft durch zwei Kräfte ersetzen, welche in den beiden Geraden  $OS_{1-2}$  und  $S_{1-2}III$  wirken, deren Grösse und Richtung bezüglich durch  $OP$  und  $P2$  bestimmt ist. (Wir construiren also zur gegebenen Kraft Kräfte- und Seilpolygon.) Diese zwei Kräfte sollen wieder durch andere ersetzt werden, welche in den beiden Geraden  $A_1 G_1$  und  $A_2 G_2$  wirken. Dazu fassen wir  $OP$  als die eine Componente der zu suchenden Kraft  $G_1$ ,  $P2$  als die eine Componente der zu suchenden Kraft  $G_2$  auf. Da nun diese beiden Componenten die Kräfte  $G_1$  und  $G_2$  ersetzen sollen, so müssen die beiden anderen noch zu be-

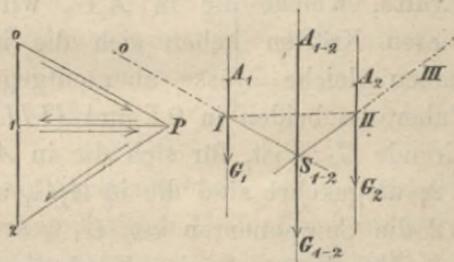


Fig. 16.

stimmenden sich gegenseitig aufheben; also in derselben Geraden wirken, gleiche Grösse aber entgegengesetzte Richtung haben. Die eine Componente von  $G_1$ , welche in  $OS_{1-2}$  liegt, geht durch den Schnittpunkt  $I$  von  $OS_{1-2}$  und  $A_1G_1$ ; ebenso geht die eine Componente von  $G_2$  durch den Punkt  $II$ . Es müssen daher auch die anderen — zu suchenden — Componenten dieser beiden Kräfte bezüglich durch die beiden Punkte  $I$  und  $II$  gehen. Da aber beide Componenten in derselben Geraden wirken sollen, so müssen beide Componenten durch die Punkte  $I$  und  $II$  gehen; also in der Verbindungslinie  $III$  wirken.

Wir kennen somit von jeder der beiden Kräfte  $G_1$  und  $G_2$ , deren Lagen gegeben sind, eine Componente der Grösse, Richtung und Lage nach, die zweite der Richtung und Lage nach; dadurch sind die beiden Kräfte selbst bestimmt. Man hat nur entsprechend

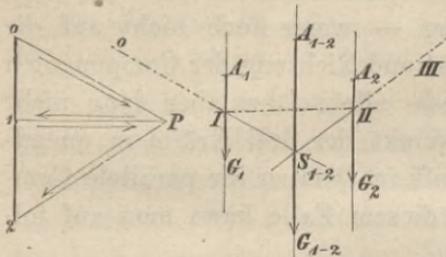


Fig. 17.

den gegebenen Richtungen der Kräfte und den vollkommen bestimmten Componenten Kräfte-dreiecke zu construiren. Zieht man  $P1 \parallel III$ , so sind — wie man sofort sieht —  $\overline{OP}$  und  $\overline{P1}$  die beiden in  $OI$  und  $III$  wirkenden Kräfte, welche die in  $A_1G_1$  wirkende Kraft  $\overline{O1}$  ersetzen.

Ebenso sind  $\overline{1P}$  und  $\overline{P2}$  die beiden in  $III$  und  $IIII$  wirkenden Kräfte, welche die in  $A_2G_2$  wirkende Kraft  $\overline{12}$  ersetzen. Von diesen Kräften heben sich die in  $III$  wirkenden auf, denn sie haben gleiche Grösse, aber entgegengesetzte Richtung. Es ersetzen daher die beiden in  $OI$  und  $IIII$  wirkenden Kräfte, deren Resultirende  $G_{1-2}$  ist, für sich die in  $A_1G_1$  und  $A_2G_2$  wirkenden  $\overline{O1}$  und  $\overline{12}$ ; umgekehrt sind die in  $A_1G_1$  und  $A_2G_2$  thätigen Kräfte  $\overline{O1}$  und  $\overline{12}$  die Componenten von  $G_{1-2}$ .

Der Vorgang, eine Kraft  $G_{1-2}$  in zwei zu ihr parallele, in bestimmten Geraden  $A_1G_1$  und  $A_2G_2$  wirkende Componenten zu zerlegen, ist demnach folgender: Man construire für die gegebene Kraft Kräfte- und Seilpolygon, bezüglich  $OP2$  und  $OS_{1-2} III$ ; die erste Seilpolygonseite schneide  $A_1G_1$  in  $I$ , die zweite  $A_2G_2$  in  $II$ ; die zu  $III$  durch den Pol  $P$  Parallele  $P1$  bestimmt auf der Kräftelinie die gesuchten Componenten  $\overline{O1}$  und  $\overline{12}$ ; u. z. wirkt  $\overline{O1}$  in  $A_1G_1$ ;  $\overline{12}$  in  $A_2G_2$ , da die auf einer Kraft sich schneidenden Seilpolygonseiten parallel sind den Strahlen des Kräftepolygons, welche die Kraft unterspannt.

Nimmt man die beiden in den Geraden  $A_1G_1$  und  $A_2G_2$  wirkenden Kräfte in entgegengesetzter Richtung, so halten sie der gegebenen Kraft  $G_{1-2} = \overline{02}$  Gleichgewicht. Kräfte- und Seilpolygon, welche diesen drei Kräften entsprechend construiert sind, müssen sich daher schliessen. Wir nehmen auf die in  $A_{1-2}G_{1-2}$  wirkende Kraft  $\overline{02}$  die Kraft  $\overline{21}$  (in  $A_2G_2$ ), auf diese die Kraft  $\overline{10}$  (in  $A_1G_1$ ) folgend an. Das entsprechende Seilpolygon ergibt sich so: Parallel zu  $OP$  ist die erste Seilpolygonseite  $OS_{1-2}$ ; die zweite  $S_{1-2}II$  ist parallel zu  $2P$ ; die dritte  $III//1P$ ; die vierte  $IO//OP$ ; sie fällt mit der ersten zusammen. Hat man also für die gegebene Kraft  $G_{1-2}$  Kräfte- und Seilpolygon construiert, so schliesst die Seite  $III$  das Seilpolygon, welches der gegebenen Kraft  $G_{1-2}$  und den beiden in den Geraden  $A_1G_1$  und  $A_2G_2$  wirkenden, der Kraft  $G_{1-2}$  Gleichgewicht haltenden Kräften entspricht. Aus diesem Grunde heisst die Linie  $III$  Schlusslinie des Seilpolygones.

§ 11. Horizontaler Träger, der an den Enden frei aufliegt. Der Träger  $AB$ , Fig. 18, liegt an den Enden frei auf und ist mit den Lasten  $G_1, G_2 \dots G_4$  belastet; es sind die Drücke bezüglich

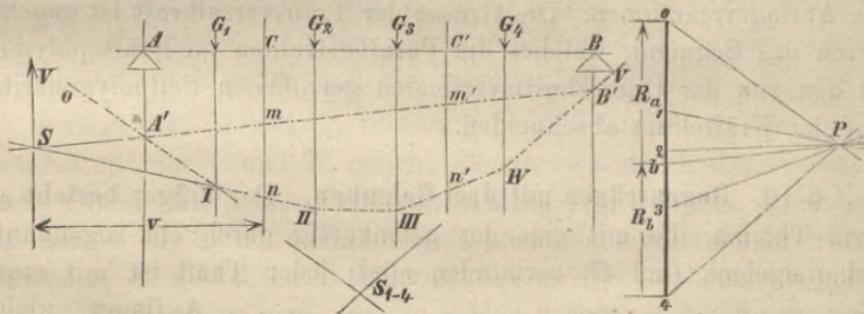


Fig. 18.

die ihnen gleichen Widerstände, Auflagerreactionen, zu bestimmen, welche auf die Auflagerpunkte wirken, bezüglich dieselben ersetzen.

Wir denken uns die Auflagerpunkte weggenommen und sie durch die vorläufig noch unbekanntenen Auflagerreactionen  $R_a$  und  $R_b$  ersetzt; es müssen dann  $R_a$  und  $R_b$  mit den gegebenen Kräften im Gleichgewichte sein. Da diese letzteren zu einander parallel und vertical gerichtet sind, also in keiner anderen Richtung eine Verschiebung des Trägers anstreben, so müssen auch  $R_a$  und  $R_b$  vertical gerichtet sein. Es kommt nun darauf an, der Resultirenden  $G_{1-4}$  der Kräfte  $G_1$  bis  $G_4$  durch zwei Kräfte Gleichgewicht zu halten, welche in den durch die Auflagerpunkte gezogenen Verti-

calen, den Pfeilervverticalen, wirken. Dazu construiren wir, den gegebenen Kräften entsprechend, das Kräfte- und Seilpolygon;  $01234$  und  $0III...V$ . Durch den Schnittpunkt  $S_{1-4}$  der äussersten Seilpolygonseiten geht die Resultirende  $G_{1-4}$ . Sind nun  $A'$  und  $B'$  die Schnittpunkte von  $0I$  und  $IVV$  mit den Pfeilervverticalen, so ist  $A'B'$  die Schlusslinie des Seilpolygones, welches der Kraft  $G_{1-4}$  (also auch den Kräften  $G_1$  bis  $G_4$ ) und den in den Pfeilervverticalen wirkenden, den Kräften  $G_{1-4}$  Gleichgewicht haltenden Kräften  $R_b$  und  $R_a$  entspricht. Eine durch den Pol  $P$  zu dieser Schlusslinie Parallele  $Pb$  bestimmt auf der Kräftelinie zwei Segmente:  $\overline{4b}$  und  $\overline{b0}$ , welche nach dem vorigen Paragraph die Auflagerreactionen  $R_b$  und  $R_a$  repräsentiren.

Durch den Schnittpunkt zweier Seilpolygonseiten geht immer die Resultirende derjenigen Kräfte, welche die Strahlen des Kräftepolygones unterspannt, zu welchen die Seilpolygonseiten parallel gezogen sind. § 4. Hieraus folgt leicht: Durch den Schnittpunkt der von einer Querschnittsverticalen getroffenen Seilpolygonseite geht die Resultirende der auf einer Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte, d. i. die Transversalkraft. Zu diesen Kräften gehören auch die Auflagerreactionen. Die Grösse der Transversalkraft ist gegeben durch das Segment, welches die Parallelstrahlen im Kräftepolygone zu den von der Querschnittsverticalen getroffenen Seilpolygonseiten auf der Kräftelinie abschneiden.

§ 12. Bogenträger mit drei Gelenken. Der Träger besteht aus zwei Theilen, die mit einander gelenkartig durch ein sogenanntes Scheitelgelenk (bei  $C$ ) verbunden sind; jeder Theil ist mit einem

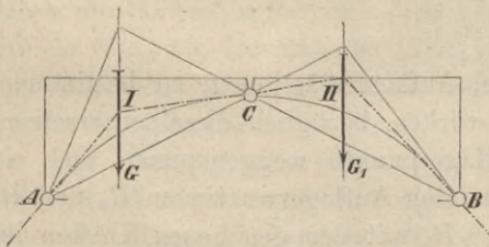
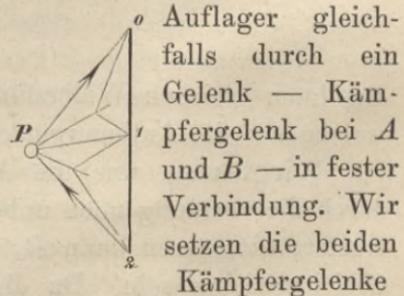


Fig. 19.



in einer Horizontalen und den Träger gegen das Scheitelgelenk symmetrisch voraus.

Der Träger sei in beliebiger Weise belastet; die Resultirenden der zu beiden Seiten des Scheitels befindlichen Lasten seien  $G$  (links) und  $G_1$  (rechts); es sollen die Auflagerreactionen  $R_a$

und  $R_b$ , die in Geraden durch die Kämpfergelenke wirken, bestimmt werden.

Wir denken uns den Träger ins freie Gleichgewicht gebracht, die Auflager also durch die Auflagerreactionen  $R_a$  und  $R_b$  ersetzt. Die Grösse und Richtung derselben ist jetzt derart zu bestimmen, dass  $R_a$  und  $R_b$  im Vereine mit  $G$  und  $G_1$  den Träger als Ganzes, sowie seine Theile im Gleichgewichte halten. Fürs Gleichgewicht des Trägers als Ganzes ist es nothwendig und hinreichend, dass die Resultirende von  $R_a$  und  $G$  und die Resultirende von  $R_b$  und  $G_1$  in derselben Geraden wirken, gleiche Grösse, aber entgegengesetzten Sinn haben. Fürs Gleichgewicht eines Trägertheils, z. B. des linken, muss die Resultirende von  $R_a$  und  $G$  durch das Scheitelgelenk gehen; zufolge der ersten Bedingung also auch die Resultirende von  $R_b$  und  $G_1$ ; man kann auch sagen: es muss die Auflagerreaction  $R_a$  und die Einwirkung des rechten Theiles auf den linken (d. i. die Resultirende von  $R_b$  und  $G_1$ ) der Kraft  $G$  das Gleichgewicht halten; analoge Bemerkungen gelten für den rechten Theil. Es muss also eine Componente von  $G$  durch das Kämpfergelenk von  $A$  gehen und Grösse und Richtung von  $R_a$  haben; eine Componente von  $G_1$  mit der Grösse und Richtung von  $R_b$  muss durch das Kämpfergelenk  $B$  gehen, die anderen Componenten von  $G$  und  $G_1$  müssen durch das Scheitelgelenk gehen und sich gegenseitig aufheben.

Zerlegt man  $G$  und  $G_1$  in Componenten, von denen die ersten bezüglich durch  $A$  und  $B$  gehen, die zweiten durch das Scheitelgelenk  $C$  und sich gegenseitig aufheben, so sind — nach dem oben Gesagten — die ersten Componenten in entgegengesetzter Richtung genommen, die gesuchten Auflagerreactionen. Wie man sieht, kommt die Aufgabe darauf hinaus, für die beiden gegebenen Kräfte ein Seilpolygon durch die drei Punkte  $A, B$  und  $C$  zu construiren. In Fig. 19 ist dies nach § 8 geschehen. Es stellen  $\overline{2P}$  und  $\overline{PO}$  die gesuchten Auflagerreactionen dar.

§ 13. Zerlegung einer Kraft in drei Componenten, die mit ihr in derselben Ebene liegen. Die Lösung dieser Aufgabe ist nur dann möglich und bestimmt, wenn die Geraden, in welchen die drei Componenten wirken sollen, sich in drei verschiedenen Punkten schneiden, von denen keiner in der gegebenen Kraft liegt. Dann aber lässt die Aufgabe eine äusserst einfache Lösung zu, wenn der Schnitt der gegebenen Kraft mit einer der Geraden, sowie der Schnitt der beiden anderen Geraden auf die Zeichenfläche fällt.

Es sei, Fig. 20, die Kraft  $G_{1-3}$  in drei Componenten zu zerlegen, welche in den drei Geraden  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  wirken. Der Schnittpunkt der Geraden  $G_1$  und  $G_2$  sei  $II$ ; der Schnittpunkt der Kraft  $G_{1-3}$  und der Geraden  $G_3$  sei  $III$ . Wir zerlegen zunächst die Kraft  $G_{1-3}$  in zwei Componenten, von welchen die eine in die Gerade  $G_3$ , die andere in die Gerade  $II III$  fällt. Ist  $\overline{O3}$  die

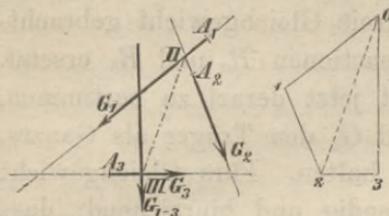


Fig. 20.

gegebene Kraft  $G_{1-3}$  und  $\overline{32} \parallel G_3$ ,  $\overline{O2} \parallel II III$ , so sind  $\overline{O2}$  und  $\overline{23}$  die in den Geraden  $G_3$  und  $II III$  wirkenden Componenten von  $G_{1-3}$  der Grösse und Richtung nach. Zerlegt man  $\overline{O2}$  weiter in zwei Componenten  $\overline{O1}$  und  $\overline{12}$ , die zu  $G_1$  und  $G_2$  parallel sind, so hat man in  $\overline{O1}$ ,  $\overline{12}$  und  $\overline{23}$  die gesuchten Componenten gefunden.

Nach dem in § 9 Gesagten ist sofort klar, dass  $G_1 II III G_{1-3}$  die Mittelkraftlinie für die in den Geraden  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  wirkenden Kräfte  $\overline{O1}$ ,  $\overline{12}$  und  $\overline{23}$  ist. Wie man mit Hilfe eines allgemeinen Seilpolygons diese Zerlegung vornehmen kann, überlassen wir dem Leser zur Uebung.

§ 14. Das Seilpolygon als Momentencurve. Mit Hilfe des Seilpolygons kann man leicht das Moment einer Kraft um einen gegebenen Punkt, d. i. das Product aus der Intensität der Kraft in die Entfernung des Punktes von der Kraft angeben. Es ist nämlich dieses Moment gleich dem Producte aus der Poldistanz in das Segment, welches die auf der Kraft sich schneidenden Seilpolygoneiten auf der durch den Momentenpunkt zur Krafrichtung parallelen Geraden abschneiden.

Ist, Fig. 21,  $G$  die Kraft,  $e$  die Entfernung des Punktes  $C$  von der Kraft, so ist  $eG$  das Moment. Wir zeichnen nun Kräfte- und Seilpolygon  $OGP$  und  $OIII$ ; das Segment, das die Seilpolygoneiten  $OI$  und  $III$  auf der durch den Momentenpunkt  $C$  zur Krafrichtung Parallelen abschneiden, sei  $\overline{mn} = s$ ; dann ist  $\triangle Imn \sim \triangle POG$ ; daher

$$\overline{mn} : e = \overline{OG} : B = G : B;$$

also

$$eG = sB, \text{ w. z. b. w.}$$

Ob man dabei  $\overline{mn}$  auf dem Krätemassstab,  $B$  auf dem Längenmass-

stab misst, oder umgekehrt, ist gleichgiltig. Denn ist der Längenmassstab  $1^{\text{centimeter}} = \lambda^{\text{meter}}$ ; der Kräftemassstab  $1^{\text{cent}} = \mu^{\text{tonnen}}$ ; die Poldistanz  $B^{\text{centimeter}}$  und das Segment  $mn$  gleich  $s^{\text{centimeter}}$ , so ist, wenn die Poldistanz am Längen-, das Segment  $mn$  am Kräftemassstabe gemessen wird, das Moment gleich:

$$\lambda B \times \mu s = \lambda \mu B s \square^{\text{Metertonnen}};$$

wird aber die Poldistanz am Kräfte-, das Segment  $s$  am Längenmassstabe gemessen, so ist das Moment gleich:

$$\mu B \times \lambda s = \lambda \mu B s \square^{\text{Metertonnen}},$$

wie früher.

Ist nun  $G$  die Resultirende beliebig vieler aufeinander folgender Kräfte eines Kräftesystemes, sind  $0I$  und  $III$  die entsprechenden äussersten Seilpolygonseiten,  $B$  die Entfernung des Poles im Kräftepolygone von derjenigen Diagonale desselben, welche die betreffenden Kräfte unterspannt, und ist  $mn$  parallel zu dieser Resultirenden, so ist das Moment derselben um  $C$  durch  $Bs$  bestimmt.

Von besonderer Wichtigkeit ist die oben bewiesene Eigenschaft des Seilpolygones für parallele Kräfte; das Kräftepolygon wird dann eine Gerade, der Pol hat von allen Kräften dieselbe Entfernung. Dadurch wird es möglich, die Momente einzelner Kräfte oder beliebig vieler aufeinander folgender eines Kräftesystems auf die einfachste Weise mit einander zu vergleichen.

Es sei  $AB$  ein horizontaler, an den Enden frei aufliegender Träger, mit  $G_1 \dots G_4$  belastet;  $A'I \dots B'$  das Seilpolygon,  $B'A'$  die Schlusslinie. Die Resultirende  $V$  der auf einer Seite eines beliebigen Querschnittes  $C$  wirkenden Kräfte geht durch den Schnittpunkt  $S$  der von der Querschnittsverticalen getroffenen Seilpolygonseiten.

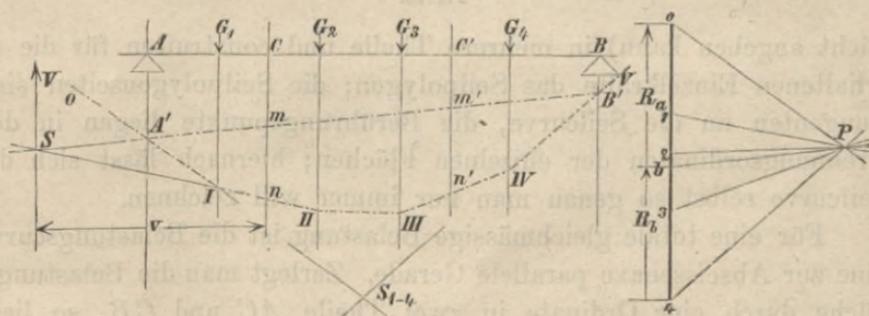


Fig. 22.

Die Grösse dieser Resultirenden ist bestimmt durch das Segment, das die Strahlen des Kräftepolygones auf der Kräftelinie abschneiden,

zu welchen die von der Querschnittsverticalen getroffenen Seilpolygonseiten parallel gezogen sind; im vorliegenden Falle  $\overline{b1}$ . Ist  $v$  der Abstand der Resultirenden von  $C$ , so ist  $Vv$  das Moment derselben um  $C$ . Dieses Moment erhält man nun auch nach dem obigen Satze durch das Product  $\overline{mn} \times B$ , wie sich auch sofort wieder aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $Smn$  und  $Pb1$  ergibt. Für irgend einen anderen Querschnitt  $C'$  ist das Moment  $\overline{m'n'} \times B$ . Es repräsentiren also die Ordinaten des Seilpolygones, von der Schlusslinie in verticaler Richtung gemessen, die Momente an allen Querschnitten. Man erhält so auf die einfachste Weise ein Bild vom Verlaufe der Momente.

Werden die einzelnen Kräfte unendlich klein, ihre Anzahl aber unendlich gross, und rücken dabei die Kräfte einander unendlich nahe, so werden die einzelnen Seilpolygonseiten unendlich kurz, wir erhalten eine stetig vertheilte Belastung; das Seilpolygon geht in eine stetig gekrümmte Linie, in die Seilcurve über; an die Stelle einer Seilpolygonseite tritt die Tangente an die Seilcurve.

Sei  $MN$  die Belastungcurve, die Ordinate derselben giebt die Last pro Längeneinheit. Die Seilcurve zu zeichnen, zerlegen wir die Belastungsfläche  $AMNB$  durch passend gewählte Ordinaten (so dass man die Schwerpunkte der einzelnen Theile sowie ihre Grösse

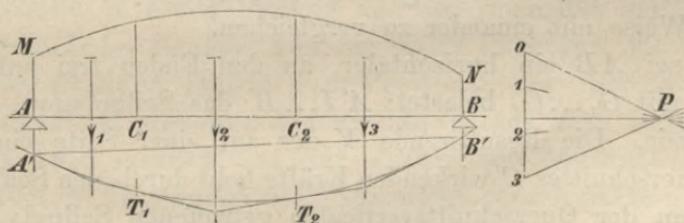


Fig. 23.

leicht angeben kann) in mehrere Theile und construiren für die so erhaltenen Einzelkräfte das Seilpolygon; die Seilpolygonseiten sind Tangenten an die Seilcurve, die Berührungspunkte liegen in den Trennungsoordinaten der einzelnen Flächen; hiernach lässt sich die Seilcurve selbst so genau man nur immer will zeichnen.

Für eine totale gleichmässige Belastung ist die Belastungcurve eine zur Abscissenaxe parallele Gerade. Zerlegt man die Belastungsfläche durch eine Ordinate in zwei Theile  $AC$  und  $CB$ , so liegt der Schwerpunkt eines jeden in seiner Mitte; entspricht den beiden Einzelkräften  $AC$  und  $CB$  das Seilpolygon  $A'SS'B'$ , so sind die Seiten  $A'S$ ,  $SS'$  und  $S'B'$  Tangenten an die Seilcurve,  $A'$ ,  $C'$  und

$B'$  die Berührungspunkte. Die Verticale durch den Schnittpunkt  $S_1$  der Tangenten  $A'S_1$  und  $S_1B'$  halbirt die Sehne  $A'B'$ , da der Schwerpunkt der ganzen Belastung in der Mitte von  $AB$  liegt.

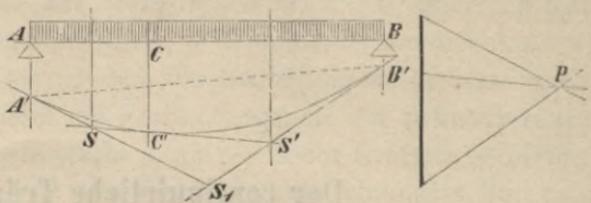


Fig. 24.

Denkt man sich die zerlegende Ordinate bewegt, so bewegen sich auch die Schwerpunkte der einzelnen Theile u. z. so, dass die Punkte  $S$  und  $S'$  auf den Tangenten  $A'S_1$  und  $S_1B'$  projectivisch ähnliche Punktreihen beschreiben; die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte ist immer wieder Tangente an die Seilcurve; in Verbindung mit dem oben Gesagten folgt hieraus:

Bei gleichmässiger Belastung ist die Seilcurve eine Parabel mit verticaler Axe. Man kann somit für alle vorkommenden Belastungen das Seilpolygon zeichnen.

## Der continuirliche Träger<sup>1)</sup>.

### I. Die elastische Linie.

§ 15. Einleitung. Erklärungen und Voraussetzungen. Ein gerader Stab, der an den Enden gestützt oder eingeklemmt, überdies an mittleren Stellen gestützt ist, heisst ein continuirlicher Träger. Ein Theil des Trägers zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Stützen heisst ein Feld oder eine Oeffnung; die horizontale Entfernung zweier unmittelbar aufeinander folgenden Stützen bestimmt die Länge des Feldes. Die aufeinander folgenden Stützen bezeichnen wir mit:  $0, 1, 2 \dots, A, B, C \dots, n - 1, n$ ; die Feldlängen mit  $l_1, l_2 \dots l_n$ .

Wir denken uns einen solchen Träger nur von verticalen Kräften, die alle in derselben verticalen Ebene — der Kraftebene — wirken, in Angriff genommen; zu diesen verticalen Kräften gehören die Belastungen, das Eigengewicht — das in jedem Querschnitte im Schwerpunkte desselben angreifend zu denken ist — inbegriffen, und die Stützenreactionen. Die Axe des Trägers sowie sämtliche Unterstützungsstellen werden also in der Kraftebene liegend vorausgesetzt. Den Träger denken wir uns mit den Stützpunkten derart verbunden, dass er an denselben reibungslos gleiten und sich drehen, nicht aber von den Stützpunkten abheben könne. Wird durch irgend welche Belastung ein solches Abheben von einer Stütze angestrebt, so kommt dies dadurch zum Ausdrucke, dass der betreffende Stützendruck negativ ausfällt; die Reaction der Stütze hat dann nicht die Richtung von der Stütze zum Träger, sondern die umgekehrte, vom Träger zur Stütze.

Kommt eine ungleiche Höhenlage der Stützen in Frage, so ist diese nur insofern zulässig, als die Grundhypothese gerader Stäbe, nämlich  $dx = ds$  erhalten bleibt. Die Höhendifferenz zweier aufeinander folgender Stützpunkte ist also verhältnissmässig sehr klein, abhängig von ihrer Entfernung.

1) Die Theorie der elastischen Linie wird als bekannt vorausgesetzt.

Wir nehmen ferner an, dass eine Hauptaxe des Querschnittes — eine Axe, für welche das Trägheitsmoment des Querschnittes ein Maximum oder Minimum wird, z. B. eine Symmetrie-Axe — in der Kräfteebene liege; es ist dies die Bedingung dafür, dass auch nach der Biegung des Stabes die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Querschnitte — die elastische Linie — in der Kräfteebene bleibe.

Im Folgenden lösen wir nun die Aufgaben: einerseits bei gegebener Belastung für irgend einen Querschnitt Transversalkraft und Moment zu bestimmen, sowie diejenigen Querschnitte zu finden, für welche Transversalkraft und Moment am grössten werden; andererseits ist diejenige Belastung aufzusuchen, welche für einen gegebenen Querschnitt die grösste Transversalkraft, beziehungsweise das grösste Moment zur Folge hat.

Wir nehmen dabei die Transversalkraft  $V$  — d. i. die Resultirende der auf der einen Seite des Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte — positiv (negativ), wenn sie als Resultirende der links vom Querschnitte wirkenden äusseren Kräfte nach aufwärts (abwärts) gerichtet ist. Da wegen des Gleichgewichtes aller äusseren Kräfte am ganzen Träger die auf beiden Seiten eines Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte im Gleichgewichte sein müssen, so wird die Resultirende der rechts vom Querschnitte wirkenden äusseren Kräfte nach abwärts (aufwärts) gerichtet sein, je nachdem die Resultirende der links vom Querschnitte wirkenden äusseren Kräfte nach aufwärts (abwärts) gerichtet ist. Die Transversalkraft als Resultirende der rechts vom Querschnitte wirkenden äusseren Kräfte ist daher positiv (negativ) zu nehmen, wenn diese Resultirende nach abwärts (aufwärts) gerichtet ist.

Das Biegemoment  $M$ , kurz das Moment, wird positiv genommen, wenn die Resultirende der links vom Querschnitte wirkenden äusseren Kräfte im Sinne der Uhrzeigerbewegung, oder wenn die Resultirende der rechts vom Querschnitte wirkenden äusseren Kräfte dem Sinne der Uhrzeigerbewegung entgegen zu drehen, den Träger also nach oben concav zu biegen strebt.

Bei gegebener Belastung die Transversalkraft und das Moment für einen beliebigen Querschnitt zu finden, denken wir uns den Träger ins freie Gleichgewicht gebracht; statt der Stützen also Kräfte — Stützenreactionen — thätig, welche die Wirkung der Stützen ersetzen. Wären diese Kräfte — unter welchen auch parallele, gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete vorkommen können — bekannt, so liesse sich ihnen und der gegebenen Belas-

tung entsprechend das Seilpolygon construiren und nach früher bewiesenen Eigenschaften desselben die Aufgabe lösen.

Von vorne herein sind jedoch nur die Lage der Stützen und die Belastungsverhältnisse des Trägers gegeben; das Seilpolygon für die Belastung des Trägers kann demnach construirt werden. Die Stützenreactionen sind allgemein durch die Bedingung bestimmt, dass sie im Vereine mit der Belastung den Träger im freien Gleichgewichte halten müssen. Es ist klar, dass einer bestimmten Belastung des Trägers unzweideutig bestimmte Stützenreactionen entsprechen; diese aber lassen sich beim continuirlichen Träger nicht bloss mit Hilfe statischer Gesetze finden, da die Aufgabe: eine Kraft in mehr als zwei zu ihr parallele Kräfte zu zerlegen, nicht nur eine Lösung zulässt; zur Ermittlung der Stützenreactionen kommen jetzt die Elasticitätsverhältnisse in Betracht. Es sind nun die Beziehungen zwischen den Elasticitätsverhältnissen und dem Seilpolygone für die Belastung des Trägers aufzusuchen, welche nothwendig, aber auch hinreichend sind, die Stützenreactionen zu finden und damit die Aufgabe zu lösen.

In Folge der Belastung und seiner Continuität wird sich der Träger im Allgemeinen an jeder Last nach oben concav, an jeder Stütze nach oben convex biegen; es treten also im Allgemeinen an den Stützen negative Momente auf. Wir ziehen nun den Gleichgewichtszustand eines beliebigen Feldes, das in nebenskizzirter Weise belastet sein mag, in Betracht<sup>1)</sup>; dazu denken wir uns den Träger unmittelbar links von der Stütze  $A$  und rechts von der Stütze  $B$  geschnitten. Der Belastung des Trägers müssen dann die beiden Stützenreactionen  $R_a$  und  $R_b$  und die Momente  $M_a$  und  $M_b$ , welche an den Schnittstellen wirken, Gleichgewicht halten; die beiden Momente werden im negativen Sinne drehend angenommen, das Moment  $M_a$  dem Sinne der Uhrzeigerbewegung entgegen,  $M_b$  im Sinne der Uhrzeigerbewegung; wir setzen diese beiden Momente bekannt voraus, gegeben durch die beiden Kräftepaare  $\pm G$  und  $\pm G'$ , von welchen die Kräfte  $-G$  und  $-G'$  in den Verticalen durch die Stützpunkte  $A$  und  $B$  wirken sollen.

Das Seilpolygon für die Kräfte  $+G, -G \dots G_1 \dots G_n, -G'$  und  $+G'$ , welchen die Stützenreactionen  $R_a$  und  $R_b$  Gleichgewicht halten müssen, lässt sich construiren; es ist  $0\alpha AI \dots IVB\beta\gamma$ ; die Stützenreactionen  $R_a$  und  $R_b$  ergeben sich nun auf bekannte Weise:

1) Culmann: Die graphische Statik. I. Auflage. Zürich 1866. Seite 274.

verlängert man die äussersten Seilpolygonseiten  $0\alpha$  und  $\beta\gamma$  bis zu ihren Schnittpunkten  $A'$  und  $B'$  mit den Pfeilverticalen, und zieht durch den Pol  $P$  die Gerade  $Ps \parallel A'B'$ , so ist  $4s = R_b$  und  $s0 = R_a$ .

Bei derselben Belastung ist für den an den Enden frei aufliegenden Träger  $AIII \dots B$  das Seilpolygon,  $AB$  (in der Figur

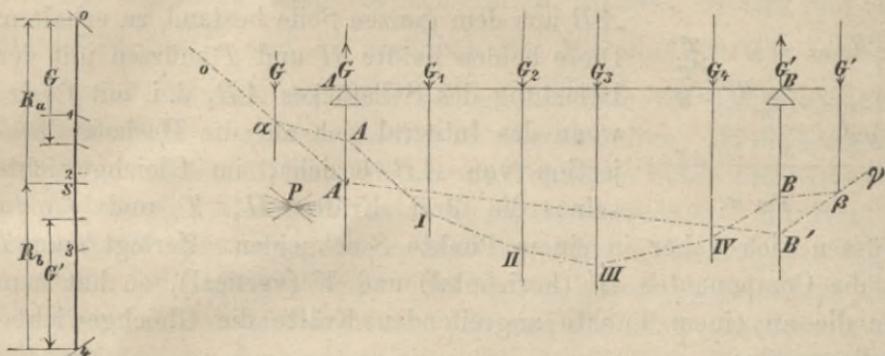


Fig. 25.

nicht ausgezogen) die Schlusslinie; das Seilpolygon für ein Feld des continuirlichen Trägers unterscheidet sich daher von dem des entsprechenden einfachen Trägers nur durch die Lage der Schlusslinie. Hat man das Seilpolygon für die Belastung des Feldes gezeichnet und sind die Längen  $AA'$  und  $BB'$  bekannt, so ist damit schon das Seilpolygon für das Feld des continuirlichen Trägers bestimmt,  $R_a$  und  $R_b$  gefunden und die obige Aufgabe gelöst anzusehen.

Diese Längen  $AA'$  und  $BB'$  sind aber nichts anderes, als die auf die Poldistanz als Momentenbasis reducirten Momente  $M_a$  und  $M_b$ , die oben als bekannt vorausgesetzt wurden; es kommt somit Alles darauf an, zunächst diese sogenannten Normalmomente kennen zu lernen. Sie stehen, wie die Näherungsgleichung der elastischen Linie  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$  erkennen lässt, in innigem Zusammenhange mit der Krümmung der elastischen Linie an den betreffenden Stellen; je grösser die Momente, desto grösser die Krümmung, desto kleiner die Krümmungshalbmesser. In welcher Weise die obige Gleichung zur Construction der elastischen Linie und diese wieder zur Bestimmung der Normalmomente verwerthet werden kann, hat Mohr<sup>1)</sup> gezeigt.

1) Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstructions vom Professor Mohr am Polytechnicum zu Stuttgart. Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereines zu Hannover. Band XIV. 1868. Seite 19—51.

§ 16. **Construction der elastischen Linie.** Es sei  $AB$  ein Stück eines Seiles, dessen veränderliche Belastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection gleich  $q$  ist;  $A$  sei der tiefste Punkt,  $B$  mit den Coordinaten  $x, y$  ein beliebiger Punkt des Seiles. An den Schnittstellen hat man in Richtung der Tangenten Kräfte  $H$  und  $T$  anzubringen, um das Gleichgewicht, das vor dem Herausschneiden von

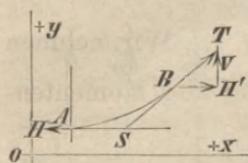


Fig. 26.

$AB$  aus dem ganzen Seile bestand, zu erhalten. Diese beiden Kräfte  $H$  und  $T$  müssen mit der Belastung des Seilstückes  $AB$ , d. i. mit  $\int q dx$ , wenn das Integral sich auf die Horizontalprojection von  $AB$  bezieht, im Gleichgewichte sein; die drei Kräfte  $H$ ,  $T$  und  $\int q dx$  müssen sich daher in einem Punkte  $S$  schneiden. Zerlegt man  $T$  in die Componenten  $H'$  (horizontal) und  $V$  (vertical), so hat man für die an einem Punkte angreifenden Kräfte die Gleichgewichtsbedingungen:

$$H = H' \text{ und } V = \int q dx.$$

Es ist also die Horizontal-Componente der Seilspannung constant. Da aber  $T$  die Richtung der Tangente an den Punkt  $B$  der Seilcurve hat, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H'} = \frac{V}{H} = \frac{\int q dx}{H},$$

woraus als allgemeine Differentialgleichung der Seilcurve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}$$

sich ergibt. Vergleicht man diese Gleichung mit der für die elastische Linie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ},$$

beachtet dabei, dass  $H$  und  $E$  constant,  $q$ ,  $M$  und im Allgemeinen auch  $J$  veränderlich sind, so folgt, dass die elastische Linie eine Seilcurve ist, deren constanter Horizontalzug durch  $E$ , deren veränderliche Verticalbelastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection durch  $\frac{M}{J}$  dargestellt wird<sup>1)</sup>.

Ist in einem gegebenen Falle  $J$  constant, so kann man auch sagen: die elastische Linie ist eine Seilcurve, deren constanter Horizontalzug durch  $EJ$ , deren veränderliche Last pro Längeneinheit

der Horizontalprojection durch  $M$  dargestellt wird; also eine Seilcurve construirt mit der Poldistanz  $EJ$ , wenn man die Momentenfläche als Belastungsfläche nimmt. Die Lage des Poles in der Entfernung  $EJ$  von der Kräftelinie ist dadurch bestimmt, dass die elastische Linie durch gegebene Punkte hindurchgehen muss.

Die elastische Linie zu construiren, handelt es sich um die Massstäbe für  $\frac{M}{J}$  und  $E$ , bezüglich für  $M$  und  $EJ$ . Wir nehmen zunächst  $J$  constant an; dann ist die Seilcurve für die Momentenfläche als Belastungsfläche nach § 14 zu construiren. Ist die Längeneinheit das Meter, die Krafteinheit die Tonne, so haben die Elemente der Belastungsfläche den Namen Quadratmetertonnen. Mit Beziehung auf die eben angegebenen Einheiten sind  $E$  Tonnen pro Quadratmeter,  $J$  Biquadratmeter oder Quadratmeterquadratmeter;  $EJ$  daher auch Quadratmetertonnen.  $M$  und  $EJ$  sind daher an demselben Massstabe abzugreifen; dieser kann entsprechend angenommen und die elastische Linie gezeichnet werden.

Die Ordinaten der elastischen Linie sind am Längensmassstabe abzugreifen; in der Regel sind die  $EJ$  (Poldistanz) gegen die  $M$  (Kräfte) so gross, dass die Ordinaten der elastischen Linie unbrauchbar klein sich ergeben. Nimmt man die Poldistanz nicht  $EJ$ , sondern  $\frac{1}{n} EJ$ , so werden die Ordinaten der elastischen Linie im selben Verhältnisse grösser, also  $n$ mal so gross; dies folgt aus den bekannten Eigenschaften des Seilpolygones (§ 14), wie aus der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{\frac{1}{n} EJ} = n \frac{M}{EJ}.$$

Man erhält ein verzerrtes Bild der elastischen Linie, in welchem der Massstab für die Ordinaten  $n$ mal so gross ist, wie der Massstab für die Abscissen; eine Ordinate am Massstabe der Abscissen gemessen, ergibt sich  $n$ mal so gross, als an dem ihr entsprechenden Massstabe. Wählt man das Verhältniss der Massstäbe für  $EJ$  und  $M$  gleich dem Verhältnisse, in welchem die Abscissen der Zeichnung zu den wirklichen Längen stehen, so erhält man die Ordinaten der elastischen Linie in natürlicher Grösse<sup>1)</sup>. Ist z. B. der Massstab für die Abscissen  $1^{\text{centim.}} = 1^{\text{m}}$ , also  $1:100$  gewählt, so ist der Massstab für die Kräfte ( $M$ ) 100mal so gross zu nehmen, wie für die Poldistanz (Horizontalzug  $EJ$ ); also wenn für die Kräfte  $1^{\text{mm}}$

1) Mohr a. a. O. Seite 23.

= 100 Quadratmetertonnen genommen wird, so ist für die Poldistanz ( $EJ$ )  $1^{\text{mm}} = 10\,000$  Quadratmetertonnen. Die Ordinaten der elastischen Linie erhält man daher 100mal so gross, als dem angenommenen Längenmassstabe entspricht, also in natürlicher Grösse.

Bei veränderlichem  $J$  sind  $E$  und  $\frac{M}{J}$  von derselben Dimension; beide bedeuten Kräfte pro Flächeneinheit. Man kann nach Wahl des Massstabes  $\frac{M}{J}$  graphisch darstellen und mit dem constanten Horizontalzuge (Poldistanz)  $E$  die elastische Linie construiren. Ein bequemes Verfahren werden wir später kennen lernen.

### § 17. Bestimmung der Durchbiegung von belasteten Trägern.

Die im Allgemeinen angegebene Construction der elastischen Linie wird man nur dann anwenden, wenn sie schneller als die Rechnung zum Ziele führt. In den meisten Fällen handelt es sich nur um die Kenntniss der grössten Einsenkung. Diese aber erhält man immer dann bequemer durch Rechnung, wenn man den Ort derselben leicht angeben kann. Die elastische Linie ist nichts Anderes, als die Momentencurve für eine gegebene Belastungsfläche; der Ort der grössten Einsenkung fällt also mit dem Orte des grössten Momentes zusammen; dieses wieder ist bestimmt durch den Vertikalschnitt, welcher die Belastungsfläche in zwei den Auflagerdrücken gleiche Theile zerlegt; an dem Orte des grössten Momentes wird die Tangente an die Seilcurve zur Schlusslinie parallel. Zieht man den Gleichgewichtszustand des auf der einen Seite dieses Vertikalschnittes liegenden Theiles der elastischen Linie — als Seilcurve — in Betracht, und stellt für diesen Theil die Bedingung fürs Gleichgewicht gegen Drehung um den Stützpunkt auf, so hat man eine Gleichung, in welcher nur die gesuchte grösste Einsenkung als Unbekannte auftritt und hieraus leicht gefunden werden kann<sup>1)</sup>. Wir wollen das Verfahren an einigen Beispielen zeigen.

**Durchbiegung eines an den Enden frei aufliegenden Trägers mit constantem Querschnitte, der seiner ganzen Länge nach mit  $q$  pro Längeneinheit belastet ist.** Wir denken uns die elastische Linie mit dem Horizontalzuge  $EJ$  construirt; in Fig. 27 ist die Hälfte gezeichnet; die Belastungsfläche ist eine Parabelfläche, deren Ordinate in der Trägermitte gleich  $\frac{1}{8}ql^2$ , deren Grösse gleich  $\frac{1}{8}ql^2 \times \frac{2}{3}l = \frac{1}{12}ql^3$  ist. In Folge der Symmetrie der Anordnung

1) Mohr a. a. O. Seite 26.

werden die beiden Auflagerdrücke einander gleich; die grösste Einsenkung ergibt sich in der Mitte des Trägers; es kommt das Gleichgewicht des Seilstückes  $A'H$  in Betracht. Auf dieses Seilstück wirken drei Kräfte: in  $A'$  die Seilspannung  $T$ , in  $H$  der Horizontalzug  $EJ$  und auf die Länge  $A'H$  stetig verteilt die halbe Momentenfläche, deren Schwerpunkt von  $A'$  um  $\frac{5}{16} l$  absteht.

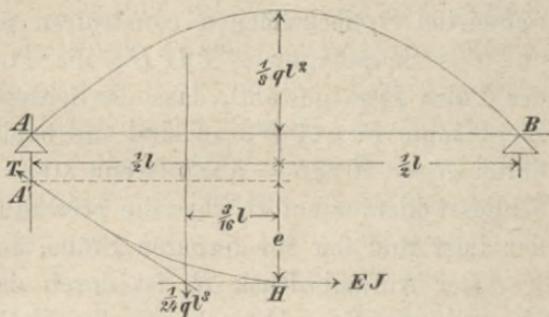


Fig. 27.

Die Bedingung fürs Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt  $A'$  ist:

$$\frac{1}{24} q l^3 \times \frac{5}{16} l - e \times EJ = 0,$$

woraus

$$e = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ}$$

folgt.

Durchbiegung eines an den Enden frei aufliegenden Trägers mit constantem Querschnitte, der im Abstände  $\alpha$  von der linken Stütze mit einer Einzellast  $G$  belastet ist. Hier ist zunächst der Ort der grössten Einsenkung aufzusuchen. Zu dem Zwecke bestimmen wir die Auflagerdrücke, welche der einfachen Momentenfläche als Belastungsfläche entsprechen. Die einfache Momentenfläche ist in diesem Falle ein Dreieck; sie sei durch  $ABC$  (Fig. 28) dargestellt; die Ordinate an der Stelle der Last sei  $b$ , also  $DC = b$ . Wir zerlegen das Dreieck

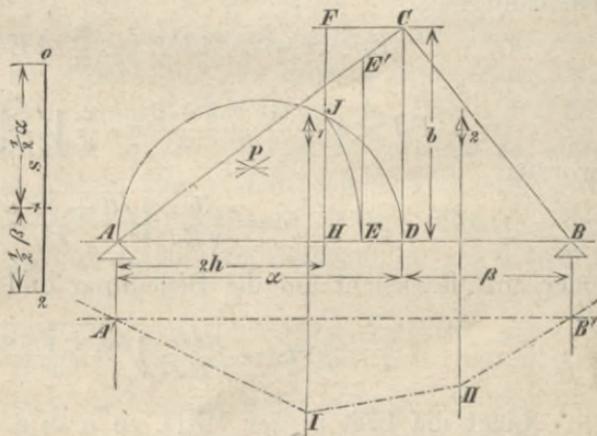


Fig. 28.

$ABC$  in die beiden Dreiecke  $ADC = \Delta_1$  und  $DBC = \Delta_2$ , deren Schwerpunkte bezüglich um  $\frac{1}{3} \alpha$  und  $\frac{1}{3} \beta$  von  $CD$  abstehen, und

denken uns diese in Rechtecke von der Basis  $b$  verwandelt; die Höhen derselben sind  $\frac{1}{2} \alpha$  und  $\frac{1}{2} \beta$ . Mit diesen auf die Basis  $b$  reducirten Dreiecksflächen construiren wir das Kräftepolygon  $012$  und das Seilpolygon  $A'III B'$ ; die Poldistanz ist  $EJ$ ; die Lage des Poles  $P$  so gewählt, dass die Schlusslinie  $A' B'$  horizontal wird. Zieht man  $Ps \parallel A' B'$ , so sind die beiden Auflagerdrücke gegeben durch  $R_a = \overline{s0} \times b = h \times b$  (wenn  $\overline{s0} = h$ ) und  $R_b = \overline{2s} \times b$ . Man schliesst hieraus sofort, dass die grösste Einsenkung immer zwischen der Last und der ihr ferneren Stütze auftritt.

Der Auflagerdruck  $R_a$  ist durch das Rechteck  $bh$  oder durch ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $b$  und  $2h$  z. B.  $AHF$  gegeben. Man hat, um den Ort der grössten Einsenkung zu finden, vom  $\triangle ADC$  durch eine Vertikale ein Dreieck gleich  $AHF$  abzuschneiden. Beschreibt man über  $AD$  als Durchmesser einen Halbkreis, der die Gerade  $HF$  in  $J$  schneidet, macht  $AE = AJ$ ,  $EE' \perp AE$ , so ist — wie man leicht findet —  $\triangle AEE' = \triangle AHF$ , also in  $E$  die grösste Einsenkung. Wie gleichfalls leicht zu beweisen, ist  $2h = \frac{2l - \alpha}{3} = \frac{l + \beta}{3}$ ; somit  $AE = \sqrt{2h \cdot \alpha} = \sqrt{\frac{l + \beta}{3} \cdot \alpha}$ ;

$$EE' = \frac{b}{\alpha} \sqrt{\frac{l + \beta}{3} \cdot \alpha}.$$

Zur Bestimmung der grössten Einsenkung  $e$  hat man nun die Gleichung:

$$EJ \times e - \triangle AEE' \times \frac{2}{3} AE = 0$$

$$EJ \times e - \frac{1}{2} \frac{b}{\alpha} \frac{l + \beta}{3} \alpha \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\frac{l + \beta}{3} \alpha} = 0,$$

woraus

$$e = \frac{b}{9EJ} \sqrt{\frac{(l + \beta)^3 \alpha}{3}}$$

oder, mit Rücksicht auf die Bedeutung und den Werth von  $b$ :

$$e = \frac{\alpha \beta G}{9EJl} \sqrt{\frac{(l + \beta)^3 \alpha}{3}}.$$

Liegt die Last in der Mitte, so  $\alpha = \beta = \frac{1}{2} l$  und

$$e = \frac{Gl^3}{48EJ}.$$

Durchbiegung eines an den Enden frei aufliegenden Trägers mit constantem Querschnitte, der mit zwei Lasten  $G_1$  und  $G_2$  in

den Entfernungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  von der linken Stütze belastet ist. Die Belastungsfläche setzt sich aus den Dreiecken  $AFC$  und  $HBD$  und dem Trapeze  $FHDC$  zusammen. Die entsprechenden Auflagerdrücke zu bestimmen, zerlegen wir das Trapez in die beiden Dreiecke  $CFD = \triangle_2$  und  $DFH = \triangle_3$ , verwandeln alle Dreiecke in Rechtecke von derselben Basis (in der Figur 29 gleich der Höhe  $FH$  des Trapezes) und construiren das Kräftepolygon  $01234$ ; dadurch ist der Massstab für die Poldistanz  $EJ$  schon bestimmt. Wir construiren nun das Seilpolygon  $A'I \dots B'$ ; die durch den Pol  $P$

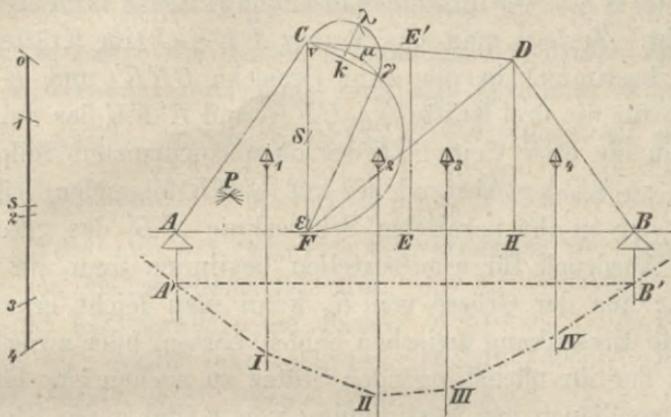


Fig. 29.

zur Schlusslinie  $A'B'$  parallel gezogene Gerade  $Ps$  bestimmt auf der Kräftelinie die Segmente:  $\overline{4s} = R_b$  und  $\overline{s0} = R_a$ . Fällt der Punkt  $s$  in eine der Strecken  $\overline{01}$  oder  $\overline{34}$ , so ist der Ort der grössten Einsenkung nach der vorigen Aufgabe zu bestimmen. Liegt aber  $s$  auf der Strecke  $\overline{13}$ , so ergibt sich die grösste Einsenkung zwischen den beiden Lasten; es handelt sich darum, das Trapez  $FHDC$  durch eine vertikale Ordinate in zwei Theile zu zerlegen so, dass der an  $FC$  liegende zum andern sich verhält, wie  $\overline{1s} : \overline{s3}$ , allgemein wie  $m : n$ . Ist  $FC = a$ ,  $HD = b$ ,  $FH = h$ ,  $y$  die Ordinate,  $x$  der Abstand derselben von  $FC$ , so dienen zur Bestimmung von  $y$  und  $x$  die Gleichungen:

$$a^2 - y^2 = \frac{m}{m+n} (a^2 - b^2); \quad x = \frac{a-y}{a-b} h.$$

Schreibt man die erste Gleichung in der Form:

$$\sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{\frac{m \sqrt{a^2 - b^2}}{m+n} \sqrt{a^2 - b^2}}$$

so hat man folgende Construction: Der über  $CF$  als Durchmesser beschriebene Halbkreis  $K_1$  wird von  $F$  aus mit dem Radius  $b$  in  $\gamma$

geschnitten; dann ist  $C\gamma = \sqrt{a^2 - b^2}$ ; auf  $CF$  trägt man zwei Strecken  $C\delta$  und  $C\varepsilon$  auf, so dass  $C\delta : C\varepsilon = m : (m + n)$ , zieht  $\delta k // \varepsilon\gamma$ , so ist  $Ck = \frac{m}{m+n} \sqrt{a^2 - b^2}$ . Der über  $C\gamma$  als Durchmesser beschriebene Halbkreis wird von der Senkrechten  $k\lambda \perp C\gamma$  in  $\lambda$  geschnitten; daher ist  $C\lambda = \sqrt{Ck \times C\gamma} = \sqrt{a^2 - y^2}$ . Schneidet man den Halbkreis  $K_1$  von  $C$  aus mit dem Radius  $C\lambda$  in  $\mu$ , so ist  $F\mu = \sqrt{a^2 - C\lambda^2} = y$ . Macht man endlich  $F\nu = y$  und zieht durch  $\nu$  eine Horizontale, welche die Gerade  $CD$  in  $E'$  schneidet, so ist  $\nu E' = x = FE$ . Die grösste Einsenkung selbst ergibt sich nun auch leicht. Zerlegt man das Trapez  $FEE'C$  (im Kräftepolygone durch  $\bar{1}s$  bestimmt) in die zwei Dreiecke  $CFE'$  und  $E'FE$  und construirt für die drei Kräfte  $\Delta_1$ ,  $CFE'$  und  $E'FE$  das Seilpolygon, wobei man die erste Seite  $A'I$  des oben construirten Seilpolygones beibehält, so ist der Abstand der auf  $E'FE$  folgenden Seilpolygonseite von der zu ihr parallelen Schlusslinie  $A'B'$  das gesuchte  $e$ .

Den Ausdruck für  $e$  aufzustellen bestimme man auf bekannte Weise  $R_a$ ; aus der Grösse von  $R_a$  kann man leicht erkennen, ob die grösste Einsenkung zwischen beiden Lasten, oder zwischen einer Last und der ihr nächstliegenden Stütze zu suchen ist. Ist ersteres der Fall, so dienen zur Bestimmung von  $y$  und  $x$  die Gleichungen:

$$R_a = \Delta AFC + \frac{a^2 - y^2}{a - b} \cdot \frac{h}{2}; \quad x = \frac{a - y}{a - b} \cdot h.$$

Die Bedingung fürs Gleichgewicht des Stückes der elastischen Linie zwischen der linken Stütze und dem tiefsten Punkte derselben ist nun:

$$EJ e - \Delta AFC \cdot \frac{2}{3} \alpha - \Delta FE'C \left( \alpha + \frac{1}{3} x \right) - \Delta FE'E \left( \alpha + \frac{2}{3} x \right) = 0,$$

aus welcher  $e$  gerechnet werden kann.

Wie man für einen an den Enden frei aufliegenden Balken mit constantem Querschnitte, der ein System von Einzellasten trägt, die grösste Einsenkung finden kann, ist nach dem oben Gesagten ohne weitere Bemerkung klar.

**Construction der elastischen Linie für ein Feld eines continuirlichen Trägers mit veränderlichem Querschnitte.** Wir setzen den Querschnitt sprungweise veränderlich voraus. Nach dem im Allgemeinen Gesagten ist  $\frac{M}{J}$  als Belastungsfläche anzusehen; man kann diese der Veränderlichkeit des Querschnittes und des Momentes entsprechend construiren, die so erhaltene Fläche durch vertikale

Ordinaten in Lamellen zerlegen und mit dem constanten Horizontalzuge  $E$  das Seilpolygon (die elastische Linie) zeichnen.

Die einzelnen Seilpolygonseiten, die sich auf den Schwerpunktsvertikalen der Lamellen schneiden, sind dabei Tangenten an die elastische Linie; die Berührungspunkte liegen in den Grenz-Ordinaten der einzelnen Lamellen. In dieser Weise kann man auch vorgehen, wenn für einen Träger mit stetig veränderlichem Querschnitte die elastische Linie zu zeichnen ist.

Zerlegt man die Momentenfläche  $M$  durch dieselben Ordinaten wie die Belastungsfläche  $\frac{M}{J}$  in Lamellen, innerhalb welcher  $J$  constant ist, so haben die einzelnen Lamellen der beiden Flächen dieselben Schwerpunktsvertikalen; denn alle Ordinaten einer Lamelle von  $\frac{M}{J}$  werden im selben Verhältnisse verändert. Es sei nun für eine beliebige Lamelle (Fig. 30)  $\overline{ab} = \frac{M}{J}$ ,  $P$  der Pol des Kräftepolygons;

die auf der Schwerpunktsvertikalen der Lamelle sich schneidenden Seilpolygonseiten sind zu  $aP$  und  $bP$  parallel; die Richtung von  $bP$  erhält man offenbar aber auch durch  $b'P'$ , wenn man von  $a$  aus  $ab' = M$  aufträgt, auf der Geraden  $aP$  den Punkt  $P'$  in

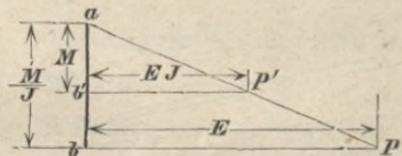


Fig. 30.

der Entfernung  $EJ$  von  $ab$  nimmt. Hält man sich gegenwärtig, dass bei passender Wahl der Lamellen für  $M$  und  $\frac{M}{J}$  die Schwerpunktsvertikalen derselben zusammenfallen, dass durch das Kräftepolygon nur die Richtungen der Seilpolygonseiten festgelegt sind, mit Annahme der ersten Seite das ganze Seilpolygon bestimmt ist, so ergibt sich zur Construction der elastischen Linie das aus folgendem Beispiele ersichtliche Verfahren<sup>1)</sup>.

Die Curve  $ABCDE$  Fig. 31 giebt die Momente im Massstabe  $1^{\text{mm}} = 20$  Metertonnen; die Längen sind im Verhältniss 1:1000; die stufenförmige Linie  $J$  stellt der Verlauf der Trägheitsmomente dar. Wir zerlegen die Momentenfläche in Lamellen, so dass innerhalb jeder das Trägheitsmoment constant ist und das Zeichen des Momentes sich nicht ändert. Wir bestimmen nun näherungsweise die Schwerpunktsvertikalen 1... und die Grössen der einzelnen Lamellen und tragen von einem beliebigen Punkte 0 aus die Grössen der-

1) Mohr a. a. O. Seite 27 und 28.

selben im Massstabe  $1^{\text{mm}} = 100$  Quadratmetertonnen auf; positive Momentenflächen nach abwärts, negative nach aufwärts. Den Pol  $P_1$  nehmen wir in der Entfernung  $EJ_1$  beliebig; den Massstab für die Poldistanzen wählen wir  $1^{\text{mm}} = 100\,000$  Quadratmetertonnen; die ersten zwei Seilpolygonseiten sind nun parallel den Strahlen  $OP_1$  und  $1P_1$  zu ziehen; die zweite Seilpolygonseite trifft die Schwerpunktsvertikale 2 in II; die Richtung der nächsten Seilpolygonseite zu

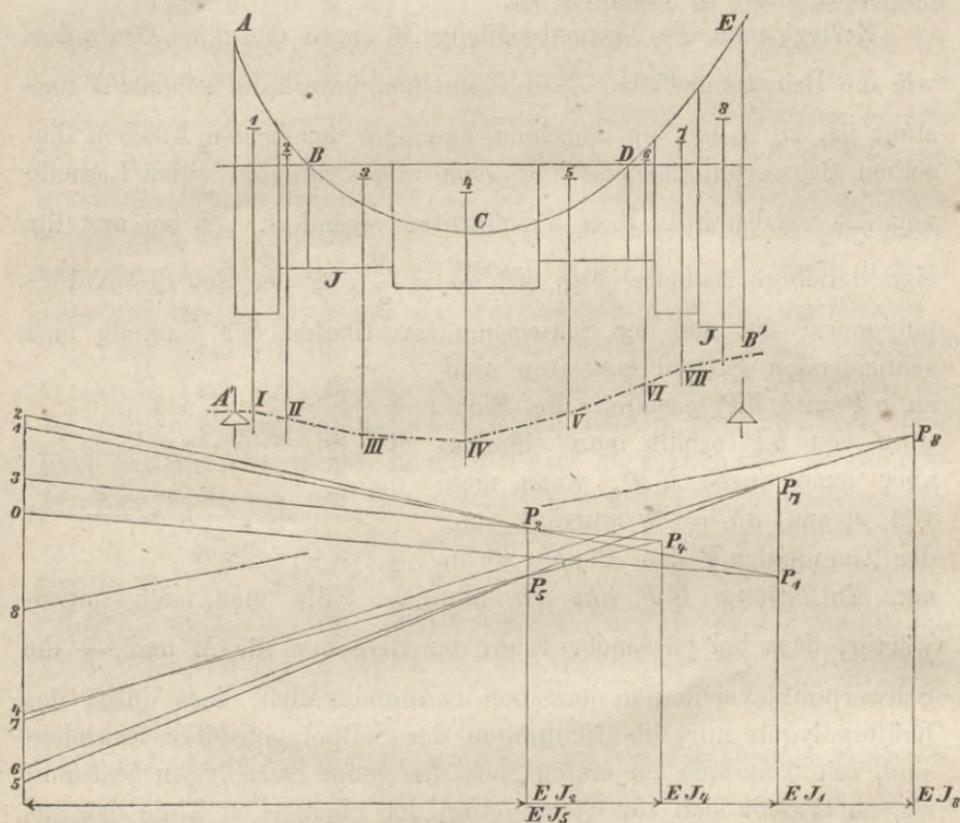


Fig. 31.

bestimmen, wählen wir auf der Geraden  $1P_1$  einen Pol  $P_2$  in der Entfernung  $EJ_2$  von der Kraftlinie und ziehen  $II\ III\ \parallel\ 2P_2$ ; auf  $2P_2$  nehmen wir  $P_3$  in der Entfernung  $EJ_3 \dots$  u. s. f. Die Grenzordinaten der Lamellen treffen das Seilpolygon in Punkten, deren Abstände von der Schlusslinie  $A'B'$  in vertikaler Richtung gemessen, die Durchbiegung des Balkens an den betreffenden Stellen in natürlicher Grösse geben.

Bei der willkürlich gewählten Lage des Poles wird die Schlusslinie  $A'B'$  nur zufällig die Richtung der Verbindungslinie der beiden

Stützen haben. Soll dies der Fall sein, will man also die elastische Linie wirklich zeichnen, nicht blos deren Ordinaten an verschiedenen Stellen richtig erhalten, so hat man nur die Ecken *III*... entsprechend zu übertragen. Man erhält dann ein Polygon, dessen Seiten Tangenten an die elastische Linie sind; die Berührungspunkte liegen in den Grenzordinaten der Lamellen.

Hieraus ist ersichtlich, wie man in allen Fällen bei gegebener Momentenfläche und gegebenem Querschnitte die elastische Linie zeichnen kann. Umgekehrt, kennt man die elastische Linie, so kann man — zufolge der bekannten Eigenschaften des Seilpolygones — sofort die Grösse gewisser Momentenflächen angeben. Soll die elastische Linie, wie sie irgend einer Belastung des continuirlichen Trägers entspricht, zur Bestimmung zugehöriger Momentenflächen verwendet werden, so ist sie unabhängig von diesen zu construiren nach Bedingungen, die wir nun aufsuchen wollen. Wir setzen dabei zunächst constanten Querschnitt und gleich hohe Stützen voraus.

## II. Der continuirliche Träger mit constantem Querschnitte bei gleich hohen Stützen.

§ 18. Allgemeines. Das zweite Seilpolygon. Zufolge der Voraussetzung, dass sich der Träger bei keiner Belastung von den Stützen abheben könne, muss die elastische Linie bei jeder Belastung durch sämtliche Stützen hindurchgehen; die äussersten Seiten des Seilpolygones, das wir mit der Momentenfläche als Belastungsfläche und der Poldistanz *EJ* zeichnen, müssen die elastische Linie in den Stützpunkten berühren; diese äussersten Seiten heissen daher auch Pfeilertangenten. Da wir zur Construction der elastischen Linie immer ein ihr umschriebenes Polygon benützen, so führt die eben angegebene, nur allein bekannte Bedingung für die elastische Linie zur Aufgabe: die Pfeilertangenten zu construiren. Wir fassen zunächst ein Feld ins Auge.

Die Belastungsfläche *AA'CEDB'B* eines Feldes setzt sich im Allgemeinen aus drei Theilen zusammen; der erste *AA'C* und der dritte *DB'B* entsprechen negativen, der zweite *CED* positiven Momenten; das Polygon *A'CEDB'* kann für die gegebene Belastung gezeichnet werden; die Lage der Schlusslinie *AB* für den continuirlichen Träger ist durch die Segmente *AA'* und *BB'*, welche die gesuchten Stützenmomente repräsentiren, bestimmt; da es sich jetzt nur um die äussersten Seiten des für die Momentenfläche als

Belastungsfläche construirten Seilpolygones handelt — also gleichsam um die Lage der Resultirenden von Kräften, wobei man von der Aufeinanderfolge der einzelnen Kräfte unabhängig ist — so theilt man sie zweckmässig<sup>1)</sup> in die negative: das Trapez  $AA'B'B$  und in die positive  $A'CEDB'$ ; das Trapez zerlegt man wieder in die Dreiecke  $AA'B$  und  $BA'B'$ . Construiert man diesen Flächen entsprechend mit der Poldistanz  $EJ$  ein Seilpolygon, das durch die Stützen geht, so sind nur die äussersten Seiten desselben Tangenten an die elastische Linie; dafür ergeben sich andere wesentliche Vortheile.

Während die Grösse und die Lage der Schwerpunktsvertikalen jeder der Flächen  $AA'C$ ,  $CED$ ,  $DB'B$  abhängig ist von beiden

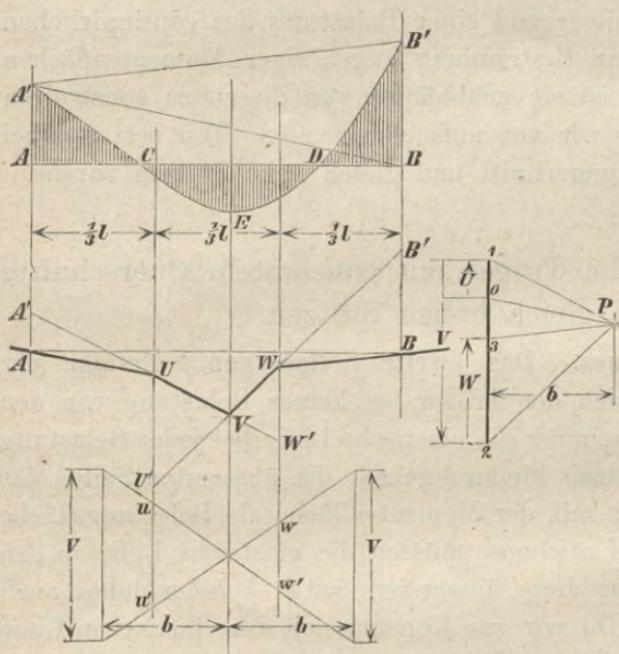


Fig. 32.

Stützenmomenten und der Belastung des Feldes, hängt die Grösse des Dreieckes  $AA'B$  nur vom Stützenmoment links ( $AA'$ ), des Dreieckes  $BA'B'$  nur vom Stützenmoment rechts, die Grösse der Fläche  $A'CEDB'$  nur von der Belastung des Feldes ab; überdies ist die Lage der Schwerpunktsvertikalen jeder Fläche bekannt; die Schwerpunkte der beiden Dreiecke sind  $\frac{1}{3} l$  bezüglich von der linken und rechten Stütze entfernt; sie liegen auf den sogenannten Drittelvertikalen; die Schwerpunktsvertikale der positiven Momentenfläche lässt sich in einem gegebenen Falle leicht finden. Unbekannt sind nur die Grössen der Dreiecke  $AA'B$  und  $BA'B'$ , nach deren Bestimmung die gesuchten Stützenmomente  $AA'$  und  $BB'$  und damit alle gesuchten Grössen angeben lassen. Wir setzen

$$\triangle AA'B = \frac{1}{2} AA' \times l = \frac{1}{2} M_a l = U; \quad \triangle BA'B' = \frac{1}{2} BB' \times l = \frac{1}{2} M_b l = W$$

und

$$Fl. A'CEDB' = \mathfrak{M} l = V.$$

1) Mohr a. a. O. Seite 29.

Das aus diesen drei Kräften construirte Seilpolygon heisst das zweite Seilpolygon<sup>1)</sup>; die äussersten Seiten desselben für die Poldistanz  $EJ$  sind die Pfeilertangenten. Hat man das zweite Seilpolygon gezeichnet und zieht durch den Pol des Kräftepolygones zu den auf den Drittelvertikalen sich schneidenden Seilpolygonseiten parallele Strahlen, so bestimmen diese auf der Kräftelinie die Flächen  $\frac{1}{2} M_a l$  und  $\frac{1}{2} M_b l$ . Wird die Poldistanz nicht  $EJ$ , sondern  $\frac{EJ}{l}$  genommen, so erhält man auf der Kräftelinie direct die Segmente  $\frac{1}{2} M_a$  und  $\frac{1}{2} M_b$ . Es empfiehlt sich daher

$$U = \frac{1}{2} M_a \frac{l}{\lambda}, \quad W = \frac{1}{2} M_b \frac{l}{\lambda}, \quad V = \mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}, \quad \text{Poldistanz } b = \frac{EJ}{\lambda}$$

zu setzen und wenn möglich  $\lambda = l$  zu wählen. Es handelt sich nun darum, das zweite Seilpolygon zu zeichnen.

Von den zur Construction des zweiten Seilpolygones in einem Felde nothwendigen Kräften ist nur eine:  $V = \mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}$  der Grösse, Richtung und Lage nach bekannt; von den beiden übrigen  $U = \frac{1}{2} M_a \frac{l}{\lambda}$  und  $W = \frac{1}{2} M_b \frac{l}{\lambda}$  sind nur die Wirkungslinien gegeben; ihre Grösse und Richtung ist so zu bestimmen, dass das zweite Seilpolygon durch die Stützpunkte des Feldes hindurchgeht. Für eine bestimmte Belastung ist die Grösse der positiven Momentenfläche sowie die Lage der Schwerpunktsvertikalen derselben bekannt anzusehen. Wir verwandeln die positive Momentenfläche in ein Rechteck von der Basis  $l$ , der Höhe  $\mathfrak{M}$  und tragen  $\mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}$  auf der Kräftelinie als  $V = \overline{12}$  auf; der Pol liegt in der Entfernung  $\frac{EJ}{\lambda}$  in einer zur Kräftelinie parallelen Geraden, seine Lage in dieser Geraden ist nicht bekannt; wir nehmen an, sie sei  $P$ . Die beiden auf der Schwerpunktsvertikalen von  $V$  sich schneidenden Seilpolygonseiten — die mittleren Seilpolygonseiten genannt — sind dann parallel zu  $1P$  und  $2P$ ; sie treffen die Drittelvertikalen in den Punkten  $U$  und  $W$ , durch welche auch die Pfeilertangenten hindurchgehen müssen. Beachtet man, dass — bei gegebener Poldistanz, sonst aber beliebiger Lage des Poles — die mittleren Seiten des

1) Winkler, Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins 1872. Seite 27—32 und 61—65. Im Folgenden citiren wir immer das mehr zugängliche Werk Winkler's: Theorie der Brücken. Aeussere Kräfte gerader Träger. 2. Aufl. 1875.

zweiten Seilpolygones auf den Drittelvertikalen constante Segmente  $UU'$  und  $WW'$  abschneiden (jedes Segment repräsentirt das Moment von  $V$  in Bezug auf einen Punkt der betreffenden Drittelvertikalen), so sieht man sofort ein, dass das zweite Seilpolygon gezeichnet werden kann, sobald die Pfeilertangenten gegeben sind.

§ 19. Construction des zweiten Seilpolygones bei gegebenen Pfeilertangenten. Es seien  $AU$  und  $WB$  die Pfeilertangenten; durch die Punkte  $U$  und  $W$  müssen die mittleren Seilpolygonseiten hindurchgehen; ihre Abschnitte auf den Drittelvertikalen zu bestimmen, ziehen wir im Abstände  $b = \frac{EJ}{\lambda}$  von der Schwerpunktsvertikalen von  $V$  zwei zu ihr parallele Gerade, tragen auf diesen Segmente gleich  $\mathfrak{M} \frac{l}{\lambda} = \overline{12}$  auf und verbinden deren Endpunkte

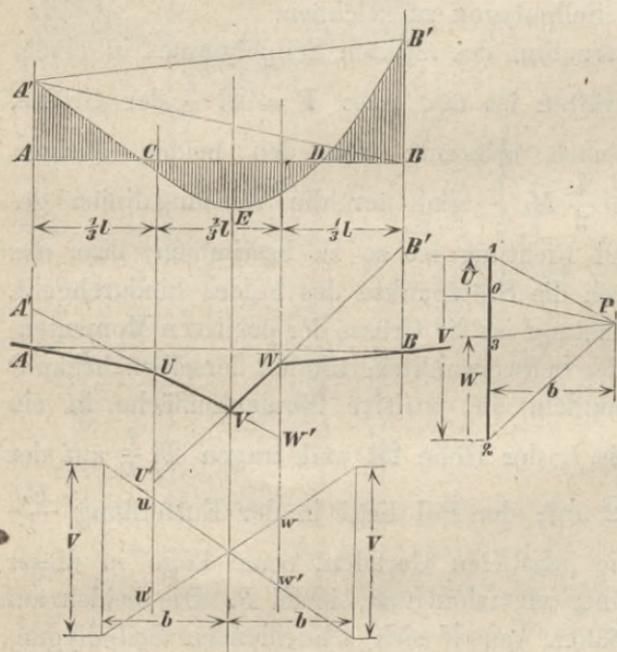


Fig. 33.

durch zwei sich kreuzende Linien  $uw'$  und  $u'w$ , die sogenannten Kreuzlinien<sup>1)</sup>. Die Kreuzlinien sind nichts anderes als ein Seilpolygon für die positive Momentenfläche; sie bilden auf den Drittelvertikalen die Segmente  $uu'$  und  $ww'$ ; trägt man diese von  $U$  und  $W$  aus auf, macht also  $UU' = uu'$ ,  $WW' = ww'$ , so sind  $UW$  und  $U'W'$  die mittleren Seilpolygonseiten, welche sich offenbar in einem Punkte der Schwerpunktsvertikalen von  $V$  schneiden, also mit dem Schnittpunkte der Kreuzlinien in derselben Vertikalen liegen müssen. Das zweite Seilpolygon ist daher  $AU'VW'B$ . Die Normalmomente ergeben sich so: Zieht man durch 1 und 2 im Kräftepolygone Strahlen bezüglich parallel zu  $UV$  und  $VW$ , so schneiden sie sich

1) Ritter, Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. Zürich 1871. Seite 14. — Winkler a. a. O. Seite 197.

im Pole  $P$ , wird durch diesen  $P0 \parallel AU$  und  $P3 \parallel WB$  gezogen, dann ist  $\overline{01} = \frac{1}{2} M_a \frac{l}{\lambda}$ ;  $\overline{23} = \frac{1}{2} M_b \frac{l}{\lambda}$ .

§ 20. Construction der Normalmomente<sup>1)</sup>. Diese Momente kann man auch aus dem Seilpolygone erhalten. Verlängert man die mittleren Seiten  $UV$  und  $VW$  bis zu ihren Schnittpunkten  $A'$  und  $B'$  mit den Pfeilervertikalen, so ist zufolge der Construction:

$$\triangle AA'U \sim \triangle 01P; \quad \triangle BB'W \sim \triangle 32P,$$

daher:

$$\overline{AA'} : \frac{1}{3} l = \overline{01} : b = \frac{1}{2} M_a \frac{l}{\lambda} : \frac{EJ}{\lambda}; \quad \overline{BB'} : \frac{1}{3} l = \overline{23} : b = \frac{1}{2} M_b \frac{l}{\lambda} : \frac{EJ}{\lambda}$$

$$\overline{AA'} = \frac{\frac{1}{6} M_a l^2}{EJ} = \frac{M_a l^2}{6b\lambda}; \quad \overline{BB'} = \frac{\frac{1}{6} M_b l^2}{EJ} = \frac{M_b l^2}{6b\lambda},$$

d. h.: Die einer Stütze zunächstliegenden Seiten des zweiten Seilpolygones bestimmen auf der Vertikalen durch dieselbe ein Segment, welches dem betreffenden Normalmomente proportional ist.

Nimmt man — bei unverändertem Kräftemasstabe — die Pol-distanz  $b = \frac{1}{6} \lambda$ , so werden im Allgemeinen sämtliche Ordinaten des Seilpolygones in demselben Verhältnisse vergrößert oder verkleinert; die äussersten Seiten sind dann nicht mehr Tangenten an die elastische Linie; man gewinnt dafür den Vortheil, dass die einer Stütze zunächst liegenden Seiten des zweiten Seilpolygones auf den Pfeilervertikalen Segmente abschneiden, aus denen die Normalmomente leicht gefunden werden können; denn

$$\text{für } b = \frac{1}{6} \lambda \text{ wird } \overline{AA'} = M_a \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ und } \overline{BB'} = M_b \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2,$$

also

$$M_a = \overline{AA'} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2; \quad M_b = \overline{BB'} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2.$$

In der Regel sind die mittleren Felder eines continuirlichen Trägers gleich lang, die äusseren davon verschieden; man nimmt dann  $b = \frac{1}{6} l$ , wenn  $l$  die Länge eines mittleren Feldes bezeichnet, und erhält, wie wir später sehen werden, alle Normalmomente direct.

1) Ritter a. a. O. Seite 19. — Vergl. auch Lippich, Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes etc. Separat-Abdruck aus der allgemeinen Bauzeitung. Wien 1871. Seite 18 und 19.

§ 21. Der einfache an den Enden eingespannte Träger. Eigenschaften der Kreuzlinien. Der einfache an den Enden eingespannte Träger bietet ein Beispiel für den oben behandelten Fall, dass die Pfeilertangenten gegeben sind. Wir ziehen hier noch besonders den an den Enden horizontal eingespannten Träger in Betracht. Die Grösse  $Ml$  der positiven Momentenfläche, sowie die Lage ihrer Schwerpunktsvertikalen sei bestimmt. Zur Construction des zweiten Seilpolygones nehmen wir (Fig. 34)  $b = \frac{1}{6} l$ ; in der Entfernung  $b$

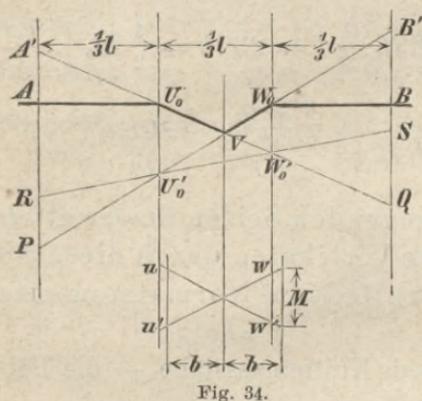


Fig. 34.

von der Schwerpunktsvertikalen ziehen wir zwei zu ihr parallele Gerade, tragen auf diesen die Segmente  $M$  auf und ziehen die Kreuzlinien; diese bestimmen auf den Drittelvertikalen die Segmente  $uu'$  und  $ww'$ ; macht man nun  $U_0 U'_0 = uu'$ ;  $W_0 W'_0 = ww'$ , so ist  $A U_0 V W_0 B$  das zweite Seilpolygon; werden die mittleren Seiten bis zu ihren Schnittpunkten  $A'$  und  $B'$  mit den Pfeilervertikalen verlängert, so

sind  $AA'$  und  $BB'$  die Momente an den Einmauerungsstellen.

Man kann nun wie früher das Kräftepolygon zeichnen; da die Pfeilertangenten parallel sind, so fällt der letzte Strahl im Kräftepolygone mit dem ersten zusammen; daraus folgt sofort, dass die Summe der negativen Momentenflächen gleich der positiven Momentenfläche ist; oder dass der oberhalb der Schlusslinie liegende Theil der Belastungsfläche gleich dem unterhalb liegenden ist.

Man beachte, dass es bei allen diesen Constructionen darauf ankommt, die Kreuzlinien genau zu zeichnen, um die Segmente  $uu'$  und  $ww'$  richtig zu erhalten, da von diesen die Momente  $AA'$  und  $BB'$  abhängen; für  $b = \frac{1}{6} l$  stellen  $ww'$  und  $uu'$  diese Momente selbst vor; denn da  $U_0 U'_0 = uu'$  und wegen  $\triangle U_0 U'_0 W_0 \cong W_0 BB'$ :  $U_0 U'_0 = BB'$ , so

$$uu' = BB' \text{ und } ww' = AA'.$$

Man kann daher auch sagen: Die Kreuzlinien bestimmen auf den Drittelvertikalen Segmente, welche die Momente eines horizontal eingespannten Trägers von derselben Länge bei derselben Belastung repräsentiren.

Die Kreuzlinien genau zu construiren, bestimmt man deren Abschnitte auf Geraden, die von der Schwerpunktsvertikalen der positiven Momentenfläche  $V$  so weit als möglich abstehen; am besten eignen sich dazu die Pfeilervertikalen. Man wird diese Abschnitte bei gleichmässiger Belastung am bequemsten rechnen<sup>1)</sup>, indem man beachtet, dass jeder solche Abschnitt das auf die Basis  $b$  reducirte Moment der positiven Momentenfläche (bezüglich von  $\mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}$ ) in Bezug auf einen Punkt der betreffenden Pfeilervertikalen darstellt.

Eine andere Bedeutung der Abschnitte, welche die Kreuzlinien auf den Pfeilervertikalen abschneiden, ergibt sich auf folgende Art<sup>2)</sup>: Zufolge der Construction schneiden die mittleren Seiten auf den Pfeilervertikalen ebenso grosse Segmente  $A'P$  und  $B'Q$  ab, wie die Kreuzlinien. Verlängert man die Gerade  $U_0W_0$  bis zu ihren Schnittpunkten  $R, S$  mit den Pfeilervertikalen, so ist:

$$\begin{aligned} A'P &= A'R + RP = 2U_0U'_0 + W_0W'_0 = 2BB' + AA' \\ B'Q &= B'S + SQ = 2W_0W'_0 + U_0U'_0 = 2AA' + BB'. \end{aligned}$$

Werden die Momente an den Stützen eines horizontal eingespannten Trägers von derselben Länge bei derselben Belastung mit  $\mathfrak{M}_a$  und  $\mathfrak{M}_b$  bezeichnet, so ist unter der Voraussetzung  $b = \frac{1}{6} \lambda$ :

$$A'P = \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 (2\mathfrak{M}_b + \mathfrak{M}_a); \quad B'Q = \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 (2\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_b);$$

für  $\lambda = l$  wird  $A'P = \mathfrak{M}_a + 2\mathfrak{M}_b$ ;  $B'Q = 2\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_b$ .

Endlich bestimmen die Abschnitte der Kreuzlinien auf den Pfeilervertikalen die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel  $\nu_1$  (links) und  $\nu_2$  (rechts), welche bei einem einfachen an den Enden frei aufliegenden Träger von derselben Länge mit derselben Belastung (wie das fragliche Feld) die geometrischen Tangenten an die elastische Linie mit der Horizontalen einschliessen<sup>3)</sup>. Die Kreuzlinien schneiden nämlich auf den Pfeilervertikalen ebenso grosse Strecken ab, wie die mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones. Beim einfachen an den Enden frei aufliegenden Träger sind die Momente an den Stützen Null; es fallen daher die mittleren Seiten mit den Pfeilertangenten zusammen und diese bilden auf den Pfeilervertikalen die Segmente  $A'P$  und  $B'Q$ ; daher hat man für  $b = EJ$

$$l \tan \nu_1 = B'Q; \quad l \tan \nu_2 = A'R.$$

1) Lippich a. a. O. Seite 10–12. — Ritter a. a. O. Seite 24.

2) Winkler a. a. O. Seite 199.

3) Lippich a. a. O. Seite 10–12.

Ist  $b = kEJ$  und die zugehörigen Segmente  $A'P'$  und  $B'Q'$ , so wird

$$\tan \nu_1 = \frac{kB'Q'}{l}; \quad \tan \nu_2 = \frac{kA'P'}{l}.$$

§ 22. Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen. Wir fassen die Hauptergebnisse der bisherigen Untersuchungen zusammen. Bei gegebener Belastung kann das Seilpolygon für den continuirlichen Träger gezeichnet und damit jede bei gegebener Belastung in Frage kommende Aufgabe gelöst werden, sobald man die Momente an den Stützen, die Normalmomente, kennt. Diese kann man sofort angeben, wenn das zweite Seilpolygon gezeichnet vorliegt; dieses aber lässt sich construiren, wenn die Lage der Pfeilertangenten bekannt ist. Die Lage der Pfeilertangenten ist mit der richtigen Lage der mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones bestimmt. Nach dem oben Gesagten können die mittleren Seiten gezogen werden, sobald man von jeder einen Punkt — ihren Schnittpunkt ausgenommen — kennt.

Wir entwickeln zunächst im Folgenden die von Mohr<sup>1)</sup> gefundenen Eigenschaften des zweiten Seilpolygones, welche in jedem Felde des continuirlichen Trägers von jeder mittleren Seite einen Punkt finden und damit alle bei gegebener Belastung auftretenden Aufgaben lösen lassen. Wir befolgen dabei den zuerst von Lippich<sup>2)</sup> eingeschlagenen Weg.

§ 23. Ein nicht belastetes Feld des continuirlichen Trägers. Es sei ein Feld nicht, die übrigen in beliebiger Weise belastet. An den Stützen des nicht belasteten Feldes kann der Träger entweder in gleichem (an beiden Stützen nach oben convex oder concav) oder in verschiedenem Sinne gebogen sein (an der einen Stütze nach oben convex, an der andern concav); die Momente an den Stützen des nicht belasteten Feldes haben dann entweder gleiches oder ungleiches Zeichen; wir setzen letzteres voraus. Von den zur Construction des zweiten Seilpolygones nöthigen Kräften  $U, V, W$  ist — da die positive Momentenfläche für ein nicht belastetes Feld Null ist —  $V = 0$ ; die beiden Kräfte  $U$  und  $W$  wirken in den Drittelvertikalen nach entgegengesetzten Richtungen. Nehmen wir  $U$  positiv (nach abwärts), also  $W$  negativ, nach aufwärts gerichtet an, so hat das zweite Seilpolygon den hohlen Winkel bei  $U$  nach

1) Mohr a. a. O. Seite 32—34.

2) Lippich a. a. O. Seite 12—24. — Winkler a. a. O. Seite 199—206.

oben (wenn wie nun immer vorausgesetzt wird, der Pol rechts von der Kräftelinie angenommen wird), bei  $W$  nach unten, das Seilpolygon also beiläufig die Gestalt  $AUWB$  (Fig. 35); die zwei mittleren Seiten fallen in eine zusammen, welche bis zu den Schnittpunkten  $A'$  und  $B'$  mit den Pfeilervertikalen verlängert (nach § 20) die den Stützenmomenten proportionalen Segmente  $AA'$  und  $BB'$  liefert. Trägt man von den Schnittpunkten  $C$  und  $D$  einer beliebigen Geraden  $CD$  mit den Pfeilervertikalen die Stützenmomente nach  $CC'$  und  $DD'$  auf, so kann  $CC'D'D$  als Momentenfläche für

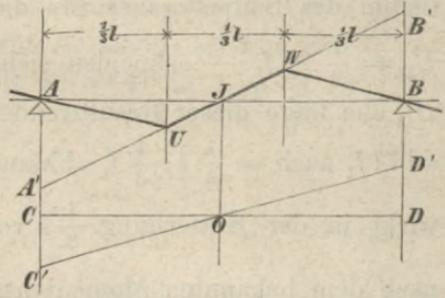


Fig. 35.

das nicht belastete Feld angesehen werden; der Schnitt  $O$  von  $CD$  und  $C'D'$  bestimmt den Punkt, an dem das Moment Null ist, d. i. den Wendepunkt oder Inflexionspunkt der elastischen Linie; dieser Punkt liegt mit dem Schnitt  $J$  von  $AB$  und  $A'B'$  wegen  $\frac{AA'}{CC'} = \frac{BB'}{DD'}$  in einer Vertikalen. Wir haben somit gefunden: Die mittlere Seite des zweiten Seilpolygons in einem nicht belasteten Felde schneidet die Verbindungslinie der Stützen in der Vertikalen durch den Inflexionspunkt<sup>1)</sup>.

Haben beide Momente gleiche Zeichen, so liegen  $O$  und  $J$  ausserhalb des Feldes in einer Vertikalen; es soll  $J$  auch dann ein Inflexionspunkt heissen.

§ 24. Zwei aufeinanderfolgende nicht belastete Felder. Es seien  $AB$  und  $BC$  (Fig. 36) die beiden nicht belasteten Felder,  $l$  und  $l_1$  ihre Längen; die übrigen Felder seien wieder in beliebiger Weise belastet. Die Kräfte zur Construction des zweiten Seilpolygons sind  $U = \frac{1}{2} M_a l$ ,  $W = \frac{1}{2} M_b l$ ;  $U_1 = \frac{1}{2} M_b l_1$  und  $W_1 = \frac{1}{2} M_c l_1$ , wenn  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$  die Momente an den Stützen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  bezeichnen. Wir nehmen im ersten Felde  $U$  positiv (nach abwärts),  $W$  negativ (nach aufwärts) gerichtet an;  $AUWB$  sei das zugehörige zweite Seilpolygon; dann ist, wie wir gleich sehen werden, das Seilpolygon im nicht belasteten Nachbarfelde vollkommen bestimmt. Die Kraft  $U_1$  wirkt in der linken Drittelvertikalen des Feldes  $BC$ ;

1) Mohr a. a. O. Seite 40. — Lippich a. a. O. Seite 12 und 13.

die ihr vorhergehende Seilpolygonseite ist  $WB$ ; sie trifft die linke Drittelvertikale von  $BC$  im Punkte  $U_1$ , durch welchen die auf die Kraft  $U_1$  folgende Seilpolygonseite  $U_1W_1$ , deren Richtung zu bestimmen ist, hindurchgehen muss.  $UW$  und  $U_1W_1$  — als äusserste Seiten des Seilpolygones für die beiden Kräfte  $W = \frac{1}{2} M_b l$  und  $U_1 = \frac{1}{2} M_b l_1$  — schneiden sich auf der Resultirenden von  $W$  und  $U_1$ ; die Lage dieser Resultirenden ist bloss vom Verhältniss  $W : U_1 = l : l_1$  auch  $= \frac{1}{3} l : \frac{1}{3} l_1$  abhängig, also bestimmt; die Resultirende wirkt in der Entfernung  $\frac{1}{3} l$  von  $U_1$  oder  $\frac{1}{3} l_1$  von  $W$ , da dann nach dem bekannten Momentensatze  $W \times \frac{1}{3} l_1 = U_1 \times \frac{1}{3} l$  ist; ihr Schnittpunkt mit  $UW$  sei  $R$ ; dann ist  $RU_1$  die auf die Kraft  $U_1$  folgende Seilpolygonseite. Die weitere Construction des zweiten

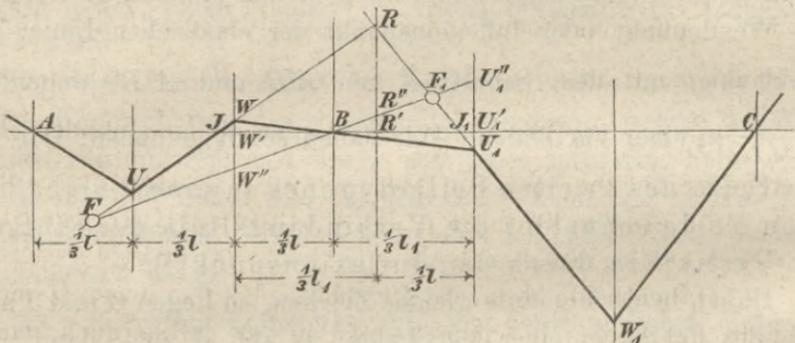


Fig. 36.

Seilpolygones im Felde  $BC$  ist selbstverständlich. Die im Abstände  $\frac{1}{3} l$  von  $U_1$  ( $\frac{1}{3} l_1$  von  $W$ ) gezogene Vertikale nennt Winkler die verschränkte Pfeilervertikale<sup>1)</sup>. Wir können somit sagen: Die mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones in zwei aufeinander folgenden nicht belasteten Feldern schneiden sich auf der verschränkten Pfeilervertikalen der beiden Feldern gemeinsamen Stütze<sup>2)</sup>.

Man sieht, mit der Lage einer mittleren Seite des zweiten Seilpolygones in einem Felde ist hier das zweite Seilpolygon in beiden Feldern vollkommen bestimmt. Vergl. § 22.

1) Winkler a. a. O. Seite 200. — Culmann nennt sie das „verschränkte“ Drittel (Ritter a. a. O. Seite 14).

2) Mohr a. a. O. Seite 32. — Lippich a. a. O. Seite 15.

Die Schnittpunkte von  $AB$  und  $UW$  ( $J$ ) sowie von  $BC$  und  $U_1W_1$  ( $J_1$ ) entsprechen nach dem vorigen Paragraphen den Wendepunkten der elastischen Linie. Es liegt die Frage nahe, in welcher Weise die Lage des einen von der des andern abhängt. Dazu suchen wir eine Beziehung zwischen den Entfernungen der Punkte  $J$  und  $J_1$  von gegebenen Geraden. Wie leicht zu sehen, ist Fig. 37:

$$WW' : RR' = JW' : JR'; \quad RR' : U_1U_1' = J_1R' : J_1U_1';$$

$$U_1U_1' : WW' = \frac{1}{3} l_1 : \frac{1}{3} l,$$

daher

$$\frac{JW'}{JR'} l_1 = \frac{J_1U_1'}{J_1R'} l.$$

Setzt man hierin  $JW' = JR' - \frac{1}{3} l_1$  und  $J_1U_1' = \frac{1}{3} l - J_1R'$ , so sieht man sofort, dass mit der Lage von  $J$  die von  $J_1$  bestimmt ist; mit der Lage des Inflexionspunktes in einem nicht belasteten Felde ist die Lage des Inflexionspunktes im benachbarten nicht belasteten Felde gegeben.

Man denke sich die Sache so: Für eine bestimmte Belastung der übrigen Felder habe sich für die zwei nicht belasteten Felder das oben gezeichnete zweite Seilpolygon und damit die Wendepunkte  $J$  und  $J_1$  ergeben. Nun ändere sich die Belastung, aber so, dass im Felde  $AB$  die mittlere Seite des zweiten Seilpolygones, welches der neuen Belastung entspricht, wieder durch den Punkt  $J$  geht; dann geht die mittlere Seite  $U_1W_1$  im benachbarten nicht belasteten Felde wieder durch den Punkt  $J_1$ . Während sich also die Seite  $UW$  um  $J$  dreht, dreht sich die Seite  $U_1W_1$  um  $J_1$ . Mit der Lage eines Punktes der mittleren Seilpolygonseite in einem Felde ist somit ein Punkt der mittleren Seite im Nachbarfelde gegeben; zieht man durch ihn eine mittlere Seite willkürlich, so ist das zweite Seilpolygon in beiden Feldern vollkommen bestimmt.

Zufolge der oben gezeigten Construction liegen immer  $J, W, R$  und  $W, B, U_1$  je in einer Geraden; während  $UW$  um  $J$  sich dreht, beschreiben  $W$  und  $R$  sowie  $W$  und  $U_1$  perspectivische Punktreihen; daher sind  $R$  und  $U_1$  projectivisch, und da sie den unendlich fernen Punkt entsprechend gemein haben, in perspectivischer Lage; die Verbindungslinien aller entsprechenden  $R$  und  $U_1$  gehen somit durch einen festen Punkt, der auf  $JB$  liegen muss, da  $W', R', U_1'$  einander entsprechende Punkte sind.

Es sei nun  $F$  ein beliebiger Punkt auf der mittleren Seite  $UW$  des zweiten Seilpolygones, das einer bestimmten Belastung des Trägers

entspricht. Die Belastung ändere sich, aber so, dass die mittlere Seite  $UW$  des zur neuen Belastung gehörigen Seilpolygones in den nicht belasteten Feldern immer wieder durch  $F$  gehe; dann folgt aus dem Beweise des vorigen Absatzes sofort, dass die mittlere Seite  $U_1W_1$  immer durch einen bestimmten Punkt  $F_1$  der Geraden  $FB$  hindurchgehen muss. Der Wichtigkeit des Satzes wegen beweisen<sup>1)</sup> wir ihn für den Punkt  $F$  auch so, wie zuerst für den Punkt  $J$ . Aus Fig. 37 erhält man leicht:

$$WW'' : RR'' = FW'' : FR''; \quad RR'' : U_1U_1'' = F_1R'' : F_1U_1'';$$

$$U_1U_1'' : WW'' = \frac{1}{3} l_1 : \frac{1}{3} l,$$

daher

$$\frac{FW''}{R''F} l_1 = \frac{F_1U_1''}{R''F_1} l,$$

welche Gleichung wieder erkennen lässt, dass mit der Lage des Punktes  $F$  die von  $F_1$  fixirt ist. Weiter folgt aus dieser Gleichung

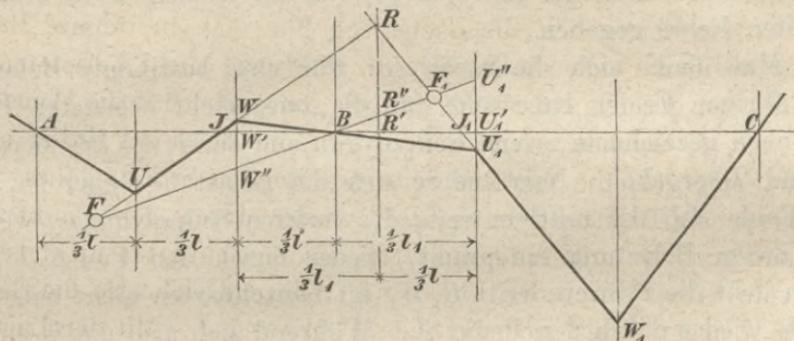


Fig. 37.

leicht: Nimmt man auf der Vertikalen durch  $F$  einen Punkt  $F'$  als einen Punkt der mittleren Seite  $UW$  an, so ist der Schnittpunkt von  $F'B$  mit der Vertikalen durch  $F_1$  ein Punkt der mittleren Seite  $U_1W_1$ ; was man auch so ausdrücken kann: Bewegt sich der Punkt  $F$  auf einer Vertikalen, so bewegt sich auch der Punkt  $F_1$  auf einer Vertikalen.

Kennt man also einen beliebigen Punkt der mittleren Seite des zweiten Seilpolygones in einem nicht belasteten Felde, so kann man sogleich einen Punkt der mittleren Seite des zweiten Seilpolygones im benachbarten nicht belasteten Felde angeben; entspricht der erste einem Wendepunkte der elastischen Linie, d. h. liegt er mit dem Punkte, an dem das Moment Null ist, in einer Vertikalen, so

1) Winkler a. a. O. Seite 200.

entspricht auch der zweite einem Wendepunkte<sup>1)</sup>. Der zweite Theil des Satzes gilt — es sei dies ausdrücklich betont — nur für gleich hohe Stützen.

§ 25. Beliebig viele unbelastete Felder. Die Fixpunkte des **continuirlichen Trägers**. Wir setzen vom linken Ende angefangen eine Reihe von Feldern nicht belastet voraus. Nach dem vorigen Satze sind wir im Stande, in jedem dieser Felder einen Punkt der mittleren Seite des zweiten Seilpolygons anzugeben, wenn nur in einem Felde ein Punkt der mittleren Seite des zweiten Seilpolygons bekannt ist.

Liegt der Träger am linken Ende frei auf, so ist daselbst das Moment Null; das zweite Seilpolygon im ersten Felde ist nur aus der Kraft  $W$  zu construiren; die mittlere Seite desselben fällt daher mit der Pfeilertangente an  $O$  zusammen; der Punkt  $O$  ist somit ein Punkt der mittleren Seite des zweiten Seilpolygons im ersten Felde.

Ist der Träger am linken Ende eingespannt, so ist damit die Pfeilertangente gegeben; ihr Schnittpunkt mit der linken Drittel-

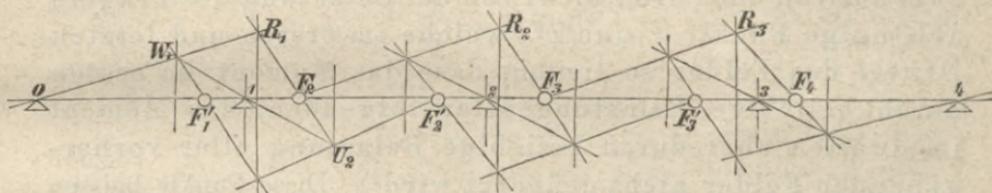


Fig. 38.

vertikale des ersten Feldes ist ein Punkt der mittleren Seite des zweiten Seilpolygons in demselben. Es ist also immer ein Punkt der mittleren Seite des zweiten Seilpolygons im ersten Felde bekannt. Im Folgenden nehmen wir das linke Trägerende frei aufliegend an.

Einen Punkt der mittleren Seite des zweiten Feldes zu finden, ziehen wir durch  $O$  eine beliebige Gerade  $OW_1$  und fassen diese als mittlere Seite eines zweiten Seilpolygons auf; durch ihren Schnittpunkt  $R_1$  mit der verschränkten Pfeilervertikalen der Stütze 1 geht die mittlere Seite zweiten Feldes;  $W_1 1$  ist die zugehörige Pfeilertangente; ihr Schnittpunkt  $U_2$  mit der linken Drittelvertikalen des zweiten Feldes giebt einen Punkt der mittleren Seite des zweiten Seilpolygons, dessen mittlere Seite im ersten Felde  $OW_1$  ist; somit ist  $R_1 U_2$  die mittlere Seite im zweiten Felde; sie trifft die Ver-

1) Mohr a. a. O. Seite 31–34.

bindungslinie der Stützen im Punkte  $F_2$ , durch welchen nach dem vorigen Paragraphen die mittleren Seiten aller bei Nichtbelastung der ersten zwei Felder möglichen zweiten Seilpolygone hindurchgehen müssen. Auf dieselbe Weise erhält man von  $F_2$  ausgehend  $F_3$  u. s. f. und indem man die Belastung noch ausserhalb des letzten Feldes sich denkt, im letzten Felde  $F_n$  (hier  $F_4$ ). Die Lage dieser Punkte ist unabhängig davon, welche der rechts liegenden Felder und wie dieselben auch belastet sind; nur abhängig von den Feldlängen. Eine zweite Reihe solcher Punkte  $F'$  ergibt sich, wenn man vom rechten Ende aus eine Anzahl Felder nicht belastet annimmt, die Belastung noch ausserhalb des ersten Feldes denkt. Die Punkte liegen, wie die Construction deutlich zeigt, stets in den äussern Dritteln. Wenn man beachtet, dass in den Punkten  $F_2$ ,  $F_3$  ... bei Belastung irgend eines rechts gelegenen Feldes das Moment Null ist, also ein in diesen Punkten von einer andern Ursache herrührendes Moment nicht geändert wird, so kann man sagen:

In jedem Felde eines continuirlichen Trägers giebt es zwei nur von der Form, nicht von der Belastung des Trägers abhängige Punkte  $F$  und  $F'$ , welche im ersten und letzten Drittel des Feldes so liegen, dass das Moment im ersten durch beliebige Belastung aller folgenden, das Moment im zweiten aber durch beliebige Belastung aller vorhergehenden Felder nicht geändert wird<sup>2)</sup>. Diese Punkte heissen Fixpunkte<sup>3)</sup>, Fundamentalpunkte<sup>4)</sup>, auch Inflexionspunkte<sup>5)</sup>.

Aus der Construction der Fixpunkte geht ganz klar hervor, dass mit der Entfernung  $a_2$  des Punktes  $F_2$  von der Stütze 1 die Entfernung des Punktes  $F_3$  von der Stütze 3 zunimmt; das Verhältniss ist durch die Gleichung  $\frac{F_2 W_2}{R_2 F_2} l_3 = \frac{F_3 U_3}{R_3 F_3} l_2$  bestimmt. Unter der Voraussetzung gleich langer Felder  $l_1 = l_2 = \dots = l$  lassen sich leicht Grenzlagen für diese Punkte finden. Liegt der Träger am linken Ende frei auf, so ist  $a_1 = 0$  und zufolge der Gleichung  $\frac{F_1 W_1}{R_1 F_1} l_2 = \frac{F_2 U_2}{R_2 F_2} l_1$ ,  $a_2 = \frac{1}{5} l$ .

Ist der Träger am linken Ende eingespannt, so ist  $a_1 = \frac{1}{3} l$

1) Mohr a. a. O. Seite 33—34. — Lippich a. a. O. Seite 17.

2) Culmann a. a. O. Seite 283.

3) Mohr a. a. O. Seite 34.

4) Lippich a. a. O. Seite 17.

5) Culmann a. a. O. Seite 283.

und  $a_2 = \frac{2}{9} l$ . Während also der eine Fixpunkt die Strecke  $\frac{1}{3} l$  durchläuft, macht der im Nachbarfelde den Weg von  $\frac{1}{5} l$  bis  $\frac{2}{9} l$ . Da nun unzweideutig jeder Lage des einen Punktes nur eine Lage des anderen entspricht, so muss es eine Lage geben, bei welcher die Entfernung des einen Punktes von der linken Stütze des betreffenden Feldes gleich ist der Entfernung des anderen von der linken Stütze des Nachbarfeldes. Beachtet man, dass bei gleichen Feldlängen die verschränkten Pfeilervertikalen mit den Pfeilervertikalen selbst zusammenfallen, so kann man in der obigen Gleichung (§ 24)  $\frac{2}{3} l - a$ ,  $l - a$ ,  $\frac{1}{3} l - a$  und  $a$  beziehungsweise statt  $FW''$ ,  $R''F$ ,  $F_1 U_1''$  und  $R''F_1$  setzen und hat zur Bestimmung von  $a$  die Gleichung

$$\frac{\frac{2}{3} l - a}{l - a} = \frac{\frac{1}{3} l - a}{a},$$

woraus

$$\frac{l}{a} = 3 + \sqrt{3}$$

oder

$$\frac{l - a}{a} = 2 + \sqrt{3}$$

folgt.

Für den am Ende frei aufliegenden continuirlichen Träger ist dieses  $a$  die grösste, für den am Ende eingespannten Träger die kleinste Entfernung des Fixpunktes von der linken Stütze. Die Entfernung des Fixpunktes von der Stütze schwankt also zwischen sehr engen Grenzen; bei dem am Ende frei aufliegenden Träger zwischen  $\frac{1}{5} l = 0,2 l$  und  $\frac{3 - \sqrt{3}}{6} l = 0,211 l$ . Hat in einem Felde der Fixpunkt  $F$  diese Entfernung von der linken Stütze, so haben in allen folgenden und in allen vorhergehenden Feldern die Punkte  $F$  dieselbe Entfernung von der linken Stütze des betreffenden Feldes; daraus folgt, dass diese Entfernung nur bei einer unendlich grossen Anzahl von Feldern erreicht werden kann.

§ 26. Momente und Transversalkräfte in den nicht belasteten Feldern. Es seien wieder vom linken Trägerende an eine Reihe von Feldern nicht belastet. Mit der Annahme einer Seite des zweiten Seilpolygons in einem dieser Felder ist das zweite Seilpolygon in allen vollkommen bestimmt.



da in den nicht belasteten Feldern die Fixpunkte den Stellen entsprechen, wo die Momente Null sind; die Ecken des Seilpolygones liegen daher abwechselnd ober und unter der Schlusslinie, woraus dann wieder der obige Satz gefolgert werden kann.

Nach bekannten Eigenschaften des Seilpolygones erhält man Grösse und Sinn der Resultirenden paralleler Kräfte, indem man zu den äussersten Seiten des entsprechenden Seilpolygones durch den Pol des Kräftepolygones parallele Strahlen zieht und deren Segment auf der Kräftelinie bestimmt. Ist  $a$  ( $b$ ) der Schnittpunkt des Strahles, welcher zu der der Kraft vorausgehenden (nachfolgenden) Seilpolygonseite parallel gezogen wurde, mit der Kräftelinie, so stellt  $ab$  der Grösse und Richtung nach die Kraft vor. Für einen beliebigen Querschnitt des Trägers erhält man daher die Transversalkraft als das Segment, welches auf der Kräftelinie die Strahlen abschneiden, die durch den Pol zu den von der Querschnittsvertikalen getroffenen Seilpolygonseiten parallel gezogen sind. Der eine Parallelstrahl ist für alle Querschnitte derselbe, parallel zur Schlusslinie; der andere kommt, indem man von einem Felde zum benachbarten übergeht, abwechselnd über und unter den ersten zu liegen; in einem Felde, an dessen linker Stütze ein positives (negatives) Moment auftritt, ist die Transversalkraft negativ (positiv); daraus schliesst man: Die Transversalkräfte in den aufeinanderfolgenden nicht belasteten Feldern sind abwechselnd positiv und negativ. Aus dem oben Gesagten folgt ferner: Die Stützenreactionen sind abwechselnd positiv und negativ<sup>1)</sup>. Ueber das Grössenverhältniss der Transversalkräfte in den aufeinanderfolgenden Feldern sowie der Stützenreactionen, kann man im Allgemeinen, ohne für die Feldlängen nähere Voraussetzungen zu machen, nichts angeben.

§ 27. Ein belastetes Feld. Wir nehmen jetzt ein Feld belastet, alle übrigen nicht belastet an. Das zweite Seilpolygon ist im belasteten Felde aus den Kräften  $U$ ,  $V$  und  $W$ , in den nicht belasteten Feldern bloß aus den Kräften  $U$  und  $W$  zu construiren. Ganz so wie in § 24 folgt, dass die einer Stütze  $B$  zunächstliegenden mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones im belasteten Felde und im benachbarten linken nicht belasteten Felde sich auf der verschränkten Pfeilervertikalen der Stütze schneiden müssen.

1) Winkler, Civilingenieur 1862. Seite 149.

Da wir nur ein einziges Feld belastet annehmen, so gehen in allen nicht belasteten Feldern die mittleren Seiten durch die Fixpunkte derselben; aus der Construction der Fixpunkte in Verbindung mit dem eben ausgesprochenen Satze folgt<sup>1)</sup>: Ist nur ein Feld belastet, so gehen die mittleren Seiten des zweiten Seilpolygons im belasteten Felde durch die Fixpunkte desselben.

Damit kann man — sobald die Fixpunkte bestimmt sind — das zweite Seilpolygon im belasteten Felde construiren; die mittleren Seiten schneiden nämlich auf den Fixpunktenvertikalen ebenso grosse

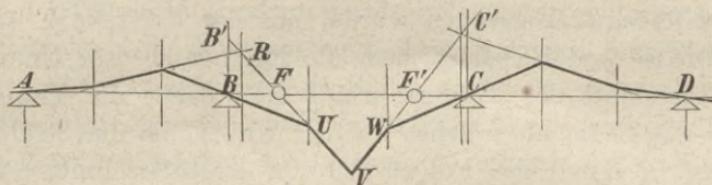


Fig. 40.

Segmente ab, wie die Kreuzlinien. Zeichnet man also die Kreuzlinien und trägt die Abschnitte, welche sie auf den Fixpunktvertikalen bilden, von  $F$  und  $F'$  nach abwärts auf, so kann man die mittleren Seiten  $UV$  und  $VW$  ziehen. Verlängert man diese bis zu ihren Schnittpunkten  $B'$  und  $C'$  mit den Pfeilervertikalen, so sind  $BB'$  und  $CC'$  den Momenten an den Stützen  $B$  und  $C$  proportional; es lassen sich die Momente selbst bestimmen, das erste Seilpolygon im belasteten Felde und nach dem vorigen Paragraphen auch in allen nicht belasteten Feldern zeichnen und somit Momente und Transversalkräfte für alle Querschnitte finden.

Zufolge der Construction liegt  $U$  rechts von  $F$  unter  $BF$ ; die der Kraft  $U$  folgende Seilpolygoneite  $UV$  steigt daher steiler an, als die ihr vorhergehende  $BU$ ; die Kraft  $U = \frac{1}{2} M_b \frac{l}{\lambda}$  ist daher nach aufwärts gerichtet; analoge Bemerkungen gelten für die Kraft  $W$ ; daraus folgt: Ist nur ein Feld belastet, so sind die Momente an den Stützen des belasteten Feldes stets negativ.

Es lässt sich das auch leicht einsehen. Jede Belastung eines Feldes strebt sämtliche Punkte der Trägeraxe herabzudrücken; dies wird zunächst an den Stützen des belasteten Feldes verhindert; demzufolge und wegen der Continuität des Trägers wird derselbe über den Stützen nach oben convex gebogen; einer solchen Biegung entspricht aber ein negatives Moment.

1) Lippich a. a. O. Seite 18—20. — Winkler, Aeussere Kräfte. Seite 203.

§ 28. **Zwei aufeinanderfolgende belastete Felder.** In jedem der beiden Felder ist das zweite Seilpolygon aus den Kräften  $U$ ,  $V$  und  $W$  zu construiren. Auf dieselbe Weise wie in § 24 lässt sich zeigen: Die der gemeinsamen Stütze der beiden Felder zunächstliegenden mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones schneiden sich auf der verschränkten Pfeilervertikalen der gemeinsamen Stütze<sup>1)</sup>.

Daraus folgt sofort wieder: Mit der Lage einer mittleren Seite in einem Felde ist die Lage der derselben Stütze zunächstliegenden mittleren Seite schon bestimmt; so sind mit der Annahme von  $VW$  im Felde  $AB$  die Punkte  $R$  und  $U_1$  der mittleren Seite  $U_1V_1$  im Felde  $BC$ , also diese selbst gegeben. Substituirt man in den Ausführungen des § 24 an Stelle der mittleren Seiten hier die der Stütze  $B$  zunächstliegenden mittleren Seiten  $VW$  und  $U_1V_1$ , so ist klar, dass mit der Wahl eines Punktes  $F$  auf  $VW$  ein Punkt  $F_1$  auf  $U_1V_1$  festgelegt ist. Es ist dies wieder so zu verstehen: Geht bei einer bestimmten Belastung die der Stütze  $B$  zunächst liegende mittlere Seite  $VW$  des zweiten Seilpolygones im Felde  $AB$  durch

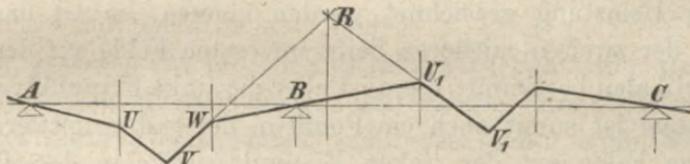


Fig. 41.

den Punkt  $F$ , die der Stütze  $B$  zunächst liegende mittlere Seite  $U_1V_1$  im Felde  $BC$  durch den Punkt  $F_1$ , so geht bei jeder andern Belastung, bei welcher  $VW$  durch  $F$  geht,  $U_1V_1$  durch  $F_1$ ; während sich  $VW$  um  $F$  dreht, dreht sich  $U_1V_1$  um  $F_1$ , gleichzeitig  $WU_1$  um  $B$ . Liegt der Punkt  $F$  in der Vertikalen durch den linken Fixpunkt des Feldes  $AB$ , so liegt  $F_1$  in der Vertikalen durch den linken Fixpunkt des Feldes  $BC$  und wird nach § 24 gefunden als der Schnitt dieser letzten Fixpunktvertikalen mit  $FB$ .

Ihrer besonderen Wichtigkeit wegen stellen wir die im Vorhergehenden gefundenen Eigenschaften des zweiten Seilpolygones kurz zusammen.

Die einer Stütze zunächst liegenden mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones schneiden sich auf der zur Stütze gehörigen Pfeilervertikalen. Eine Folge davon ist: Dreht sich die einer Stütze  $B$  zunächstliegende mittlere Seite des zweiten Seilpolygones um einen

1) Mohr a. a. O. Seite 32.

festen Punkt  $F$ , so dreht sich die derselben Stütze  $B$  zunächst liegende mittlere Seite im Nachbarfelde gleichfalls um einen festen Punkt  $F_1$ ; liegt  $F$  auf der linken Fixpunktvertikalen des einen Feldes, so liegt  $F_1$  auf der linken Fixpunktvertikalen des andern und ist der Schnitt dieser mit der Geraden  $FB$ .

§ 29. Construction des zweiten Seilpolygones bei gegebener Belastung. Bestimmung der Stützenmomente. Der Gang der Construction ergibt sich aus folgender Ueberlegung: In allen Feldern liegen die Ecken  $U$  und  $W$  des zweiten Seilpolygones auf den Drittelvertikalen; die derselben Stütze zunächst liegenden mittleren Seiten schneiden sich auf der verschränkten Pfeilervertikalen; es sind daher 1) alle Drittel- und verschränkten Pfeilervertikalen zu ziehen.

Im ersten Felde ist das zweite Seilpolygon nur aus den Kräften  $V$  und  $W$  zu construiren; die erste mittlere Seite fällt daher mit der Pfeilertangente zusammen; 0 Fig. 42 ist also ein Punkt der ersten mittleren Seite; da die mittleren Seiten auf den Pfeilervertikalen dieselben Segmente abschneiden wie die Kreuzlinien, welche bei gegebener Belastung gezeichnet werden können, so ist damit der Punkt  $b'_1$  der zweiten mittleren Seite im ersten Felde auf der linken Pfeilervertikalen bestimmt; diese ist aber die linke Fixpunktvertikale; nach Obigem ist somit auch ein Punkt  $a'_2$  der ersten mittleren Seite im zweiten Felde auf der linken Fixpunktvertikalen desselben gegeben; mit diesem lässt sich wieder der Punkt  $b'_2$  der zweiten mittleren Seite finden u. s. f.; man hat daher 2) die Fixpunkte, 3) die Kreuzlinien, 4) Punkte der mittleren Seiten auf den Fixpunktvertikalen zu bestimmen.

In Fig. 42 sind die Fixpunkte nach § 25 construirt; die Kreuzlinien wurden beliebig angenommen; (doch muss ihr Schnittpunkt im mittleren Drittel liegen); für specielle Belastungsweisen werden wir die Construction der Kreuzlinien besonders besprechen; die Abschnitte der Kreuzlinien auf den Fixpunktvertikalen sind mit  $ab$  und  $cd$  bezeichnet und mit den Zeigern des betreffenden Feldes versehen.

Die punktweise Construction des zweiten Seilpolygones ist nun folgende: Im ersten Felde ist 0 ein Punkt der ersten mittleren Seite; daher wenn  $Ob'_1 = a_1 b_1$ ,  $b'_1$  ein Punkt der zweiten; die Gerade  $b'_1 1$  schneidet die linke Fixpunktvertikale des zweiten Feldes im Punkte  $a'_2$  der mittleren Seite des zweiten Feldes, welche der Stütze 1 zunächst liegt; somit ist, wenn  $a'_2 b'_2 = a_2 b_2$ ,  $b'_2$  ein Punkt der zweiten mittleren Seite;  $b'_2 2$  giebt den Punkt  $a'_3$  u. s. f. Man erhält so in

jedem Felde von jeder mittleren Seite einen Punkt. Geht man in gleicher Weise vom rechten Ende gegen das linke vor, so erhält man von jeder mittleren Seite einen zweiten Punkt; in jedem Felde

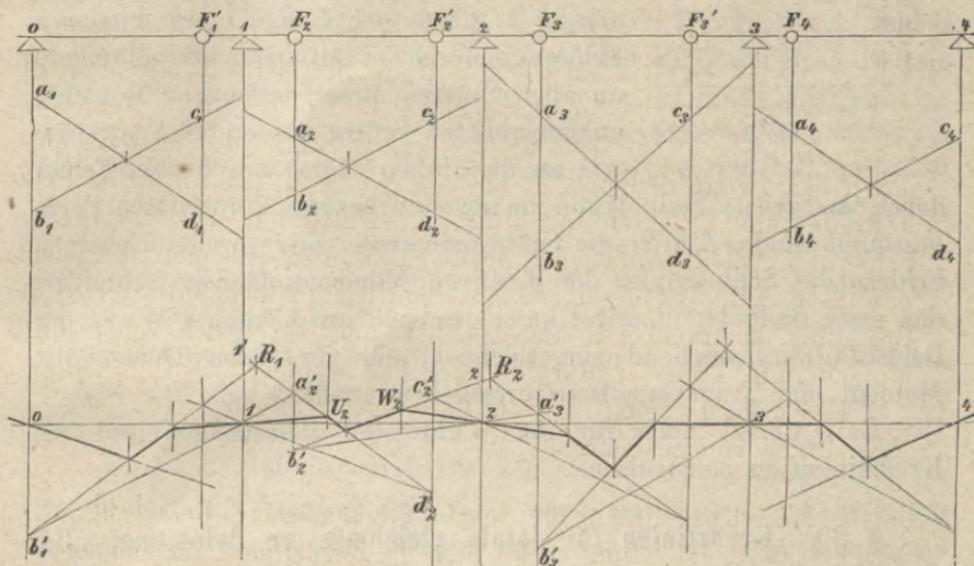


Fig. 42.

sind  $a'd'$  und  $b'c'$  die mittleren Seiten; ihre Schnittpunkte mit den Drittelvertikalen (bezüglich links und rechts) sind  $U$  und  $W$ ; damit sind auch die Pfeilertangenten, somit das ganze zweite Seilpolygon bestimmt.

Diese Construction des zweiten Seilpolygones hat Culmann<sup>1)</sup> angegeben; sie ist mit der grössten Sorgfalt durchzuführen, da Zeichenfehler von einem Felde ins andere übertragen werden; als Controlen hat man: 1) In jedem Felde liegt der Schnittpunkt der mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones mit dem Schnittpunkte der Kreuzlinien in einer Vertikalen. 2) Die einer Stütze zunächst liegenden mittleren Seiten schneiden sich auf der verschränkten Pfeilervertikalen der Stütze. 3) Die Durchschnittspunkte der einer Stütze zunächst liegenden mittleren Seiten mit den entsprechenden Drittelvertikalen liegen mit der Stütze auf einer Geraden.

Verlängert man in irgend einem Felde, z. B. im zweiten, die mittleren Seiten  $U_2V_2$  und  $V_2W_2$  bis nach  $1'$  und  $2'$ , so ist nach § 20,  $b = \frac{1}{6} \lambda$  vorausgesetzt,

$$M_1 = (\overline{11'}) \left( \frac{\lambda}{l_2} \right)^2; \quad M_2 = \overline{22'} \left( \frac{\lambda}{l_2} \right)^2.$$

1) Ritter a. a. O. Seite 16–19.

Die Momente selbst kann man hieraus erhalten, wie in Fig. 43 angedeutet. In der Regel sind alle mittleren Felder gleich lang; man nimmt dann zweckmässig  $\lambda$  gleich der Länge eines mittleren Feldes; dadurch erhält man die Momente an allen Stützen direct, indem die Momente an der rechten Stütze des ersten Feldes sowie an der linken Stütze des letzten Feldes

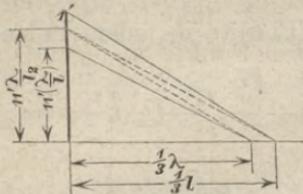


Fig. 43.

durch das zweite Seilpolygon im zweiten bezüglich vorletzten Felde bestimmt sind. Durch die Stützmomente sind in den einzelnen Feldern die Schlusslinien der positiven Momentenflächen festgelegt; das erste Seilpolygon selbst kann demnach auf bekannte Weise der Belastung entsprechend eingezeichnet und für jeden Querschnitt Moment und Transversalkraft angegeben werden.

Es erübrigt noch für die wichtigsten Belastungsweisen die Kreuzlinien zu construiren.

§ 30. Kreuzlinien für totale gleichmässige Belastung. Bei gleichmässiger Belastung erhält man die Kreuzlinien am bequemsten, indem man die durch Rechnung gefundenen Segmente, welche die Kreuzlinien auf den Pfeilervertikalen abschneiden, daselbst aufträgt und deren Endpunkte kreuzweise verbindet. Diese Segmente sind die auf die Basis  $b = \frac{1}{6} \lambda$  reducirten Momente der positiven Momentenfläche bezüglich von  $\mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}$  in Bezug auf die Pfeilervertikalen. Die positive Momentenfläche ist ein Parabelsegment, die Axe der Parabel vertikal; ihre Schwerpunktsvertikale geht durch die Trägermitte; ihre Grösse ist  $\mathfrak{M} l = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} q l^2 \cdot l = \frac{1}{12} q l^3$ ; daher  $\mathfrak{M} \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{12} q \frac{l^3}{\lambda} = \frac{1}{12} q \lambda^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^3$ , wenn  $q$  die Last pro Längeneinheit bezeichnet. Sind  $\mathfrak{N}_b$  und  $\mathfrak{N}_a$  die Segmente, welche die Kreuzlinien bezüglich auf der linken und rechten Pfeilervertikalen abschneiden, so hat man:

$$\mathfrak{N}_b \cdot \frac{1}{6} \lambda = \frac{1}{12} q \frac{l^3}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} l = \frac{1}{24} q \lambda^2 \frac{l^4}{\lambda^3} = \mathfrak{N}_a \cdot \frac{1}{6} \lambda,$$

also

$$\mathfrak{N}_a = \mathfrak{N}_b = \frac{1}{4} q \lambda^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4,$$

welche Strecken auf dem Momentenmassstabe abzugreifen sind.

§ 31. Der continuirliche Träger bei totaler gleichmässiger Belastung. Es seien für einen continuirlichen Träger mit drei Feldern die Momente und Transversalkräfte zu bestimmen. Das Verhältniss der Trägerlängen sei  $l_1 : l_2 : l_3 = 8 : 10 : 8$ . Nach dem in § 29 angegebenen allgemeinen Vorgange sind auf Tafel II die Drittel- und verschränkten Pfeilervertikalen gezogen, und die Fixpunkte bestimmt. Zur Construction der Kreuzlinien braucht man  $\lambda$ , sowie den Momentenmassstab. Wir nehmen  $\lambda = l_2$  und  $g\lambda^2 = 20$  Centimeter, setzen auch  $g\lambda = 4$  Centimeter. Es ist nämlich hier zweckmässig, nicht den Kräfte- und Momentenmassstab und die Poldistanz anzunehmen und darnach den Momentenmassstab zu construiren, sondern den Kräfte- und Momentenmassstab zu wählen und die Poldistanz entsprechend zu bestimmen. Man kann dann für alle continuirlichen Träger mit drei Feldern und dem Verhältnisse  $l_1 : l_2 : l_3 = 4 : 5 : 4$  dieselbe Zeichnung benützen.

Sind  $g\lambda^2$  und  $g\lambda$  durch die Längen  $m$  und  $n$  dargestellt, so repräsentirt bei der Poldistanz  $a$  — diese mit derselben Einheit wie  $\lambda$  gemessen —  $g\lambda$  das Moment  $ag\lambda$  und ist für den Momentenmassstab  $ag\lambda = n$  zu nehmen; wegen  $g\lambda^2 = m$  somit  $a = \frac{n}{m} \lambda$ .

Im zweiten Felde sind die Abschnitte der Kreuzlinien auf den Pfeilervertikalen (wegen  $\lambda = l_2$ ) gleich  $\mathfrak{R}_b = \mathfrak{R}_a = \frac{1}{4} g\lambda^2 = 0,25g l_2^2$ ; im ersten  $\mathfrak{R}_b = \mathfrak{R}_a = \frac{1}{4} g\lambda^2 \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0,1024g l_2^2$ . Hat man diese Segmente entsprechend aufgetragen, so wird das zweite Seilpolygon nach § 29 construirt; die Bezeichnung ist dieselbe wie in § 29, der Gang der Construction ohne weiteres klar. Die mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones im zweiten Felde bestimmen auf den Pfeilervertikalen die Momente  $M_1$  und  $M_2$ ; wegen der Symmetrie der Anordnung sind sie gleich;  $M_1 = M_2 = 0,082g l_2^2$ ; damit sind die Schlusslinien der positiven Momentenflächen in den einzelnen Feldern festgelegt.

Das erste Seilpolygon selbst zu zeichnen tragen wir (Tafel II Figur Momente) von der Horizontalen durch die Stützen auf den Vertikalen durch 1 und 2 die Momente auf; (wir nehmen also die Schlusslinie des Seilpolygones für den continuirlichen Träger horizontal an); die Schlusslinien der positiven Momentenflächen in den Feldern sind  $01'$ ,  $1'2'$  und  $2'3$ . In jedem Felde ist das erste Seilpolygon eine Parabel mit vertikaler Achse; der Pfeil in der Mitte des Feldes gleich  $\frac{1}{8} g l^2$ ; für das zweite Feld also  $\frac{1}{8} g l_2^2 = 0,125g l_2^2$ ;



und  $BE$  die Parabel in  $B$  berührt. Ist  $AH = HB$  und  $SH = \frac{1}{3}CH$ , so ist  $S$  der Schwerpunkt des Dreieckes  $ACB$ ; seine Entfernung von der rechten Pfeilervertikalen ist:  $\frac{1}{2}l + \frac{1}{3}\left(\beta - \frac{1}{2}l\right) = \frac{1}{3}(l + \beta)$ , von der linken  $\frac{1}{3}(l + \alpha)$ .

Wir bestimmen zunächst die Grösse der einfachen Momentenfläche  $\mathfrak{M}l$  und die Lage ihrer Schwerpunktsvertikalen durch Construction. Bekanntlich ist Fl.  $CDB = \frac{2}{3}\triangle CEB = \triangle CBJ = \triangle CBK$  wenn  $EJ = \frac{1}{3}EM$  und  $JK \parallel BC$ . Es ist daher

$$\text{Fl. } ACDB = \mathfrak{M}l = \triangle ABK = \frac{1}{2}LK \times l; \quad \frac{l}{\lambda} \mathfrak{M} = \frac{1}{2}LK \cdot \frac{l}{\lambda}.$$

Da  $FL = \frac{1}{3}FB$ , so kann man  $LK$  leicht finden.

Die Schwerpunktsvertikale der positiven Momentenfläche zu bestimmen, denken wir in den Vertikalen durch  $S$  und  $M$  gleichgerichtete Kräfte wirken, welche den Flächen  $ACB$  und  $BCK$  proportional sind. Nun hat man, wenn  $NK \parallel AB$ ,

$$\begin{aligned} \triangle ACB : \text{Fl. } CDB &= AC : CK = FC : CN = \frac{1}{2}FC : \frac{1}{2}CN \\ &= OM : \frac{1}{2}CN. \end{aligned}$$

Macht man auf der Vertikalen durch  $S$ :  $PQ = \frac{1}{2}CN$ , so schneiden sich  $MQ$  und  $PO$  in einem Punkte der gesuchten Schwerpunktsvertikalen. Die Kreuzlinien lassen sich jetzt construiren, indem man in der Entfernung  $\frac{1}{6}\lambda$  zur Schwerpunktsvertikalen zwei Parallele zieht, auf diesen  $\mathfrak{M} \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2}LK \cdot \frac{l}{\lambda}$  aufträgt und die Endpunkte der so erhaltenen Strecken kreuzweise verbindet.

Bequemer und genauer erhält man die Kreuzlinien wieder, wenn man die gerechneten Abschnitte, die sie auf den Pfeilervertikalen bilden, aufträgt und ihre Endpunkte kreuzweise verbindet.

Sind  $\mathfrak{N}_b$  und  $\mathfrak{N}_a$  die Abschnitte, welche die Kreuzlinien bezüglich auf der linken und rechten Pfeilervertikalen abschneiden, so hat man zu deren Berechnung die Gleichungen:

$$\frac{1}{6}\lambda^2 \mathfrak{N}_b = \frac{1}{3}(l + \alpha)\triangle ABC + \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) \text{Fl. } CDB,$$

$$\frac{1}{6}\lambda^2 \mathfrak{N}_a = \frac{1}{3}(l + \beta)\triangle ABC + \frac{1}{2}\beta \text{Fl. } CDB,$$

worin

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} FC \times l = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{p\beta^2}{l} \cdot \alpha \cdot l = \frac{1}{4} p\alpha\beta^2,$$

$$\begin{aligned} \text{Fl. } CDB &= \frac{2}{3} MD \times \beta = \frac{2}{3} (OD - OM) \beta = \frac{2}{3} \left( OD - \frac{1}{2} FC \right) \beta \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \frac{p\beta^2}{l} \left( \alpha + \frac{1}{2} \beta \right) - \frac{1}{8} p\beta^2 - \frac{1}{4} p \frac{\beta^2}{l} \alpha \right) \beta \\ &= \frac{1}{3} \frac{p\beta^2}{l} \left( \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{4} l \right) \beta = \frac{1}{12} p\beta^3. \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \lambda^2 \mathfrak{N}_b &= \frac{1}{3} (l + \alpha) \frac{1}{4} p\alpha\beta^2 + \left( \alpha + \frac{1}{2} \beta \right) \frac{1}{12} p\beta^3 = \frac{p\beta^2 (l + \alpha)^2}{24} \\ &= \frac{p(l^2 - \alpha^2)^2}{24} = \frac{p\beta^2 (2l - \beta)^2}{24} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} \lambda^2 \mathfrak{N}_a = \frac{1}{3} (l + \beta) \frac{1}{4} p\alpha\beta^2 + \frac{1}{2} \beta \cdot \frac{1}{12} p\beta^3 = \frac{1}{24} p\beta^2 (2l^2 - \beta^2).$$

Setzt man  $\beta = kl$ , wo  $k \leq 1$ , so wird:

$$\mathfrak{N}_b = p \frac{k^2 (2 - k)^2}{4} \frac{l^4}{\lambda^2} = \frac{k^2 (2 - k)^2}{4} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^4 \cdot p\lambda^2$$

$$\mathfrak{N}_a = p \frac{k^2 (2 - k^2)}{4} \frac{l^4}{\lambda^2} = \frac{k^2 (2 - k^2)}{4} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^4 \cdot p\lambda^2.$$

Ist die Belastung eine linksseitige, von der linken Stütze an die Länge  $\beta = kl$  belastet, so hat man  $\mathfrak{N}_b$  mit  $\mathfrak{N}_a$  zu vertauschen. Bezeichnet  $\mathfrak{N}_{b,r}^k$  den Abschnitt, den die Kreuzlinien auf der linken Pfeilervertikalen bilden, wenn das Feld von der rechten Stütze an auf die Strecke  $\beta = kl$  belastet ist;  $\mathfrak{N}_{b,l}^k$  den Abschnitt bei linksseitiger Belastung auf die Strecke  $kl$ ;  $\mathfrak{N}_{b,l}^{1-k}$  den Abschnitt auf der linken Pfeilervertikalen bei linksseitiger Belastung auf die Strecke  $l - \beta = (1 - k)l$  u. s. w.;  $\mathfrak{N}_{a,r}^k$ ,  $\mathfrak{N}_{a,l}^k$ ,  $\mathfrak{N}_{a,l}^{1-k}$  die entsprechenden Abschnitte auf der rechten Pfeilervertikalen; endlich  $\mathfrak{N}_i^a = \mathfrak{N}_i^b$  die Abschnitte bei totaler Belastung, so folgen aus dem Begriffe dieser Abschnitte als Momente um Punkte der Pfeilervertikalen sofort die Beziehungen:

$$\mathfrak{N}_{a,r}^k = \mathfrak{N}_{b,l}^k; \quad \mathfrak{N}_{a,l}^k = \mathfrak{N}_{b,r}^k$$

$$\mathfrak{N}_{a,l}^{1-k} + \mathfrak{N}_{a,r}^k = \mathfrak{N}_i^a, \text{ woraus wegen } \mathfrak{N}_{a,l}^{1-k} = \mathfrak{N}_{b,r}^{1-k}$$

$$\mathfrak{N}_{a,r}^k + \mathfrak{N}_{b,r}^{1-k} = \mathfrak{N}_i^a$$

folgt. Ebenso

$$\mathfrak{N}_{b,r}^k + \mathfrak{N}_{a,r}^{1-k} = \mathfrak{N}_i^a.$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass man die  $\mathcal{N}_a$  und  $\mathcal{N}_b$  bloß bei rechtsseitiger Belastung für eine Trägerhälfte besonders zu berechnen braucht, um sie für den ganzen Träger bei rechts- und linksseitiger Belastung zu erhalten. Die nachstehende Tabelle<sup>1)</sup> wird in vielen Fällen sehr gute Dienste leisten.

$kl$				
	Abschnitt auf der Pfeilervertikalen			
	links	rechts	links	rechts
0,0	0	0	0,250000	0,250000
0,1	0,009025	0,004975	0,240975	0,245025
0,2	0,032400	0,019600	0,217600	0,230400
0,25	0,047852	0,030273	0,202148	0,219727
0,3	0,065025	0,042975	0,184975	0,207025
0,4	0,102400	0,073600	0,147600	0,176400
0,5	0,140625	0,109375	0,109375	0,140625
0,6	0,176400	0,147600	0,073600	0,102400
0,7	0,207025	0,184975	0,042975	0,065025
0,75	0,219727	0,202148	0,030273	0,047852
0,8	0,230400	0,217600	0,019600	0,032400
0,9	0,245025	0,240975	0,004975	0,009025
1,0	0,250000	0,250000	0	0
$l$	$\left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 p \lambda^2$	$\left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 p \lambda^2$	$\left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 p \lambda^2$	$\left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 p \lambda^2$

Diese Abschnitte sind auf dem Momentenmassstabe abzugreifen.

Hat man hiernach die Kreuzlinien und das zweite Seilpolygon construiert, mit diesem die Stützenmomente gefunden, so erübrigt noch das erste Seilpolygon zu zeichnen. Am bequemsten geschieht dies<sup>2)</sup>, wenn man den Abschnitt  $BR$  sucht, den die Tangenten  $AE$  und  $BE$  auf der rechten Pfeilervertikalen bestimmen. Zieht man durch einen Punkt  $P$  in der Entfernung  $a = \frac{n}{m} \lambda$  von einer Vertikalen zwei Strahlen parallel zu  $AE$  und  $EB$ , so schneiden diese auf der Geraden ein Segment ab, das offenbar die Belastung  $p\beta$  repräsentirt; daher ist

1) Eine ausführliche Tabelle giebt Lippich a. a. O. Seite 58.

2) Winkler, Aeussere Kräfte. 2. Auflage. 1875. Seite 208.

$$BR = p\beta \frac{1}{a} \beta,$$

und weil die Strecke, welche  $p\beta$  darstellt, sowie  $\beta$  und  $a$  bekannt sind, so lässt sich hiernach  $BR$  leicht finden. Wie die Anordnung zu treffen ist, wenn für mehrere Querschnitte diese Längen zu bestimmen sind, zeigt Fig. 45. Die beiden Geraden  $04$  und  $B_4R_4$

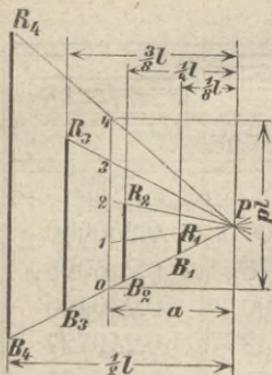


Fig. 45.

sind in den Abständen  $a$  und  $\frac{1}{2} l$  von einem beliebigen Punkte  $P$  zu einander parallel gezogen; wird auf die erste das Segment  $\overline{04} = pl$  aufgetragen und von  $P$  aus auf die zweite

nach  $B_4R_4$  projicirt, so ist  $B_4R_4 = pl \frac{1}{2} \frac{l}{a}$  das Segment auf der Pfeilervertikalen bei to-

taler Belastung. Ist  $B_3R_3$  im Abstände  $\frac{3}{8} l$  von  $P$  zu  $\overline{04}$  parallel

und  $\overline{03} = \frac{3}{4} pl$ , so ist  $B_3R_3 = \frac{3}{4} pl \frac{3}{8} \frac{l}{a}$  das Segment auf der rechten Pfeilervertikalen, wenn der Träger von der rechten Stütze auf  $\frac{3}{4}$  seiner Länge belastet ist u. s. w. Die Punkte  $R$  liegen auf einer Parabel, als Erzeugniss eines Strahlenbüschels  $P$  mit einem ihm projectivischen Parallelstrahlenbüschel.

§ 33. Continuirlicher Träger bei partieller gleichmässiger Belastung. Der Träger habe zwei Felder, das rechte Ende sei horizontal eingespannt, das linke überragend. Für die aus Tafel I ersichtliche Belastung die Momente und Transversalkräfte zu bestimmen.

Zur Construction der Fixpunkte bemerke man: Die verschränkte Pfeilervertikale der Stütze 1 fällt mit der Pfeilervertikalen selbst zusammen, weil die Felder gleiche Länge haben. Der linke Fixpunkt  $F'_1$  des ersten Feldes fällt mit der Stütze 0, der rechte Fixpunkt  $F'_2$  des zweiten Feldes mit dem Schnittpunkte der Pfeilertangente und rechten Drittelvertikalen zusammen. Die Fixpunkte  $F'_1$  und  $F'_2$  werden nun auf bekannte Weise construirt.

Im ersten Felde sind die Abschnitte der Kreuzlinien auf den Fixpunktvertikalen Null; im zweiten Felde sind sie, da  $k = 0,4$  zu setzen ist, nach der vorigen Tabelle auf der linken Pfeilervertikalen

gleich  $0,14760pl^2$ , auf der rechten  $0,17640pl^2$ , wenn man  $\lambda = l$  nimmt. Jetzt ist das zweite Seilpolygon zu construiren.

In Folge der Belastung des überragenden Theiles entsteht an der Stütze 0 ein negatives Moment, dessen Grösse sich leicht — graphisch oder durch Rechnung — bestimmen lässt; trägt man das entsprechende Segment  $-\frac{1}{32}pl^2 = 0,03125pl^2$  — von 0 nach  $a'_1$  nach aufwärts (weil negativ) auf, so ist  $a'_1$  ein Punkt der mittleren Seite im ersten Felde (§ 20), da  $\lambda = l$  gewählt wurde. Die Gerade  $a'_11$  giebt mit der linken Fixpunktvertikalen des zweiten Feldes den Schnitt  $a'_2$ ;  $a'_2b'_2 = a_2b_2$  aufgetragen ist  $b'_2F'_2$  eine mittlere Seite im zweiten Felde u. s. w. —  $0U_1W_11U_2V_2F'_22$  ist das zweite Seilpolygon; die mittleren Seiten bis zu den Pfeilervertikalen verlängert erhält man die Stützenmomente  $11'$  und  $22'$ .

Die Segmente  $0a'_1$ ,  $11'$  und  $22'$  tragen wir — um die Momentencurve zu zeichnen — (in Figur Momente) entsprechend auf. Im überragenden Theile ist die Momentencurve eine Parabel, die auf bekannte Weise gezeichnet wird; da das erste Feld nicht belastet ist, so ist die Momentencurve in diesem eine Gerade, welche durch die Punkte  $a'_1$  und  $1'$  gehen muss. Im zweiten Felde ist die Momentencurve nach dem vorigen Paragraphen zu construiren; dazu wurde in Fig. a der Abschnitt  $1'T$ , welchen die Tangenten auf der linken Pfeilervertikalen bilden, bestimmt; die weitere Construction bedarf keiner Erläuterung. Mit Hilfe der punktirten Linie  $a'_1F'_11''F'_22''$  erkennt man leicht den Einfluss der Belastung des überragenden Theiles für sich, sowie der Belastung des zweiten Feldes. Wie aus der Momentencurve die Transversalkräfte erhalten werden, ist bekannt.

§ 34. Kreuzlinien für eine Einzellast. Die Entfernung der Last von der linken Stütze sei  $\alpha$ , von der rechten  $\beta$ . Die positive Momentenfläche ist ein Dreieck  $ADB = \mathfrak{M}l = \frac{1}{2}CD \times l$ , wenn  $CD$  das Moment an der Stelle der Last repräsentirt. Ist  $AH = HB$  und  $SH = \frac{1}{3}DH$ , so ist  $S$  der Schwerpunkt des Dreieckes; wie

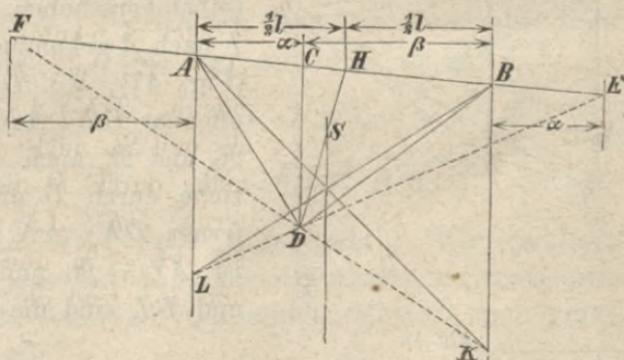


Fig. 46.

man sofort aus der Figur sieht, ist sein Abstand von der linken Pfeilervertikalen gleich  $\alpha + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} l - \alpha \right) = \frac{1}{3} (l + \alpha)$ ; von der rechten gleich  $\frac{1}{3} (l + \beta)$ . Der Schwerpunkt des Dreieckes liegt immer im mittleren Drittel; daraus folgt, dass der Schwerpunkt jeder positiven Momentenfläche im mittleren Drittel liegen muss, also der Schnittpunkt der Kreuzlinien nicht ausserhalb fallen kann.

Sind wieder  $\mathfrak{N}_b$  und  $\mathfrak{N}_a$  die Abschnitte der Kreuzlinien auf der linken und rechten Pfeilervertikalen, so hat man zu deren Bestimmung —  $b = \frac{1}{6} \lambda$  angenommen — die Gleichungen:

$$\frac{1}{6} \lambda \mathfrak{N}_b = \mathfrak{M} \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{1}{3} (l + \alpha) = \frac{1}{2} CD \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{1}{3} (l + \alpha)$$

$$\mathfrak{N}_b = CD \frac{l(l + \alpha)}{\lambda^2};$$

ebenso

$$\mathfrak{N}_a = CD \frac{l(l + \beta)}{\lambda^2}.$$

Wir führen die Construction unter der Voraussetzung  $\lambda = l$  durch; also

$$\mathfrak{N}_b = \frac{l + \alpha}{l} CD; \quad \mathfrak{N}_a = \frac{l + \beta}{l} CD.$$

Macht man  $BE = AC$ ;  $FA = CB$  und sind  $L$  und  $K$  die Schnitte von  $ED$  und  $FD$  mit den Pfeilervertikalen, so ist

$$AL = CD \frac{l + \alpha}{l} = \mathfrak{N}_b; \quad BK = CD \frac{l + \beta}{l} = \mathfrak{N}_a.$$

Diese Construction hat Lippich<sup>1)</sup> angegeben. Verschiebt man das Dreieck  $FCD$  so, dass  $FC$  in sich selbst verschoben wird, so hat es, wenn  $F$  nach  $A$  gekommen ist, die Lage  $ABN$  (Fig. 47), wo  $DN \parallel CB$ , und es ist offenbar  $DK \parallel AN$ . Hiernach kann man  $\mathfrak{N}_b$  und  $\mathfrak{N}_a$  auch so construiren<sup>2)</sup>: Man ziehe durch  $D$  die Gerade  $MN \parallel AB$ ; ferner  $DK \parallel AN$  und  $DL \parallel BM$ , dann ist  $AL = \mathfrak{N}_b$  und  $BK = \mathfrak{N}_a$  und  $AK$  und  $BL$  sind die Kreuzlinien.

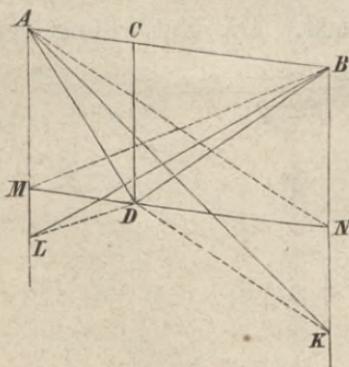


Fig. 47.

1) Lippich a. a. O. Seite 11.

2) Winkler, Aeussere Kräfte. Seite 210.

§ 35. Kreuzlinien für ein Einzellastensystem. Die Entfernungen der Lasten von der linken Stütze seien  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ , von der rechten  $\beta_1, \beta_2 \dots$ ;  $C_1 D_1, C_2 D_2 \dots$  sollen die Momente an den Stellen der Lasten darstellen, wenn jede Last allein am einfachen Träger liegt; dann ist  $-\lambda = l$  vorausgesetzt —

$$\mathfrak{R}_b = C_1 D_1 \frac{(l + \alpha_1)}{l} + C_2 D_2 \frac{(l + \alpha_2)}{l} + \dots$$

$$= C_1 D_1 + C_2 D_2 + \dots + \frac{C_1 D_1 \times \alpha_1 + C_2 D_2 \times \alpha_2 + \dots}{l}$$

$$\mathfrak{R}_a = C_1 D_1 + C_2 D_2 + \dots + \frac{C_1 D_1 \times \beta_1 + C_2 D_2 \times \beta_2 + \dots}{l}$$

Die ersten Summen in diesen Ausdrücken sind unmittelbar gegeben anzusehen; die zweiten sind nichts anderes als die auf die Basis  $l$  reducirten Momente der Kräfte  $CD$ , die in den Abständen  $\alpha, \beta$  von einem gegebenen Punkte wirken; sie werden durch Construction eines Seilpolygones mit der Poldistanz  $l$  gefunden. Wir zeigen das Verfahren für drei Kräfte.

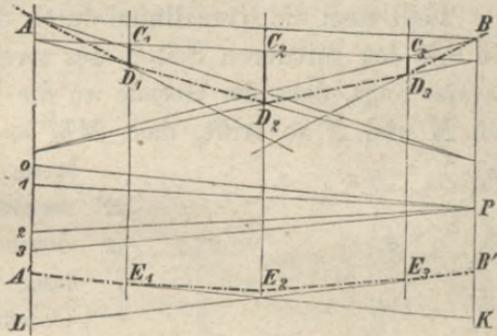


Fig. 48.

$AD_1 D_2 D_3 B$  sei die positive Momentenfläche; verlängert man die auf einer Kraft sich schneidenden Seilpolygonseiten bis zu ihren Schnittpunkten mit den Pfeilervertikalen und verbindet diese Schnittpunkte durch je eine Gerade, so erhält man die Momente  $C_1 D_1, C_2 D_2, C_3 D_3$ ; mit diesen construiren wir das Kräftepolygon  $0123$  und für den Pol  $P$  das Seilpolygon  $A'E_1 E_2 E_3 B'$ . Verlängert man die äussersten Seilpolygonseiten  $A_1 E_1$  und  $E_3 B'$  bis nach  $K$  und  $L$ , so ist

$$A'L = \Sigma \frac{\alpha}{l} CD; \quad B'K = \Sigma \frac{\beta}{l} CD$$

$$\mathfrak{R}_b = \overline{03} + A'L; \quad \mathfrak{R}_a = \overline{03} + B'K.$$

Diese Construction hat Lippich<sup>1)</sup> angegeben. Wir sind hiermit in der Lage für jede Belastung die Kreuzlinien zu construiren und damit nach § 29 für jeden Querschnitt Moment und Transversalkraft zu bestimmen.

1) Lippich a. a. O. Seite 49.

§ 36. Momente und Transversalkräfte im belasteten Felde bei Belastung des continuirlichen Trägers mit einer einzigen Last. Es sei das Feld  $AB$  mit einer Last belastet, die übrigen Felder aber nicht belastet;  $F$  und  $F'$  seien die Fixpunkte. Die Momente an den Stützen ergeben sich leicht, wenn man bemerkt, dass bei der angenommenen Belastungsweise die mittleren Seiten des zweiten Seilpolygons durch die Fixpunkte gehen. Nach § 34 wurden in Fig. 49 die Kreuzlinien  $M'K$  und  $N'L$  construiert; die Abschnitte derselben auf den Fixpunktvertikalen sind  $\overline{ab}$  und  $\overline{cd}$ ; macht man  $F'b' = \overline{ab}$  und  $F'd' = \overline{cd}$ , so sind  $F'd'$  und  $F'b'$  die mittleren Seiten des zweiten Seilpolygons; sie bestimmen die Momente  $AA'$  und  $BB'$ . Das erste Seilpolygon selbst kann man leicht zeichnen, indem man vom Schnittpunkte von  $A'B'$  mit der Kraftlinie  $CD$  aufträgt und  $D$  mit  $A'$  und  $B'$  verbindet.

Legt man die Kreuzlinien durch die Punkte  $A'$  und  $B'$ , so fallen sie mit den mittleren Seiten des zweiten Seilpolygons zusammen; daraus folgt, dass die Gerade  $ac$  die Pfeilervertikalen in den Punkten  $M$  und  $N$  so trifft, dass  $MM' = AA'$  und  $NN' = BB'$ ; man

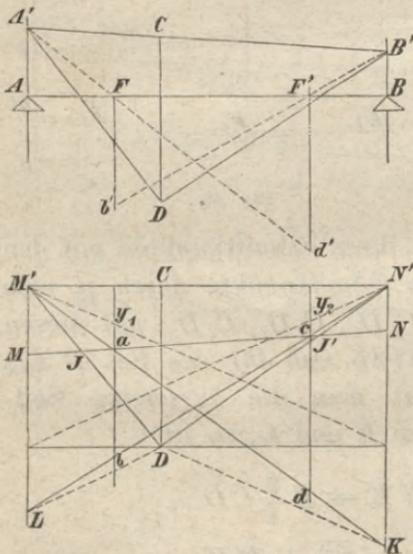


Fig. 49.

kann daher auch  $M'DN'$  als Momentencurve nehmen, wenn man deren Ordinaten in vertikaler Richtung von  $MN$  an misst. Aus der Construction der Kreuzlinien sieht man sofort, dass für alle möglichen Lagen der Last im Felde der Strahl  $N'D$  stets unter  $N'L$ , ebenso der Strahl  $M'D$  stets unter  $M'K$  liegen muss. Die Schnittpunkte  $J$  und  $J'$  der Geraden  $ac$  mit  $M'D$  und  $N'D$  — das sind die Punkte, an welchen bei gegebener Lage der Last gleichzeitig das Moment Null wird, welchen also Wendepunkte, Inflexionspunkte der elastischen Linie entsprechen — liegen daher der erste links von  $a$ , der zweite rechts von  $c$ . Die Lage dieser Punkte ist dabei unabhängig von der Grösse der Last, da man ja, wenn die Last sich ändert, den Kräfte-  
massstab oder die Poldistanz so wählen kann, dass  $CD$  dasselbe bleibt, somit an der Figur sich nichts ändert.

Die Punkte  $M'$  und  $N'$  liegen stets über, der Punkt  $D$  stets

(d. h. für jede Lage der Last im Felde) unter  $ac$ ; das erste folgt unmittelbar daraus, dass die Momente an den Stützen des belasteten Feldes, wenn nur ein Feld belastet ist, immer negativ sind, § 27. Das letzte zu zeigen suchen wir, in welcher Weise sich die Lage der Punkte  $a$  und  $c$  auf den Fixpunktvertikalen ändert, während die Last von rechts nach links das fragliche Feld überschreitet.

In Fig. 50 sind für sechs verschiedene Lagen der Last die Linien  $ac$  die Schlusslinien des Seilpolygones für den continuirlichen Träger construiert; dabei ist angenommen, dass die Grösse der Last sich so ändere, dass das Moment  $CD$  an Stelle der Last ungeändert bleibt. Diese Darstellung zeigt aber deutlich:

Während die Last das fragliche Feld überschreitet, bewegen sich die Punkte  $a$  und  $c$  nach entgegengesetzten Richtungen stetig auf den Fixpunktvertikalen; dabei bleibt  $D$  stets unter  $ac$ . Hieraus schliesst man: An der Stelle der Last ist das Moment stets positiv, und da zwischen den

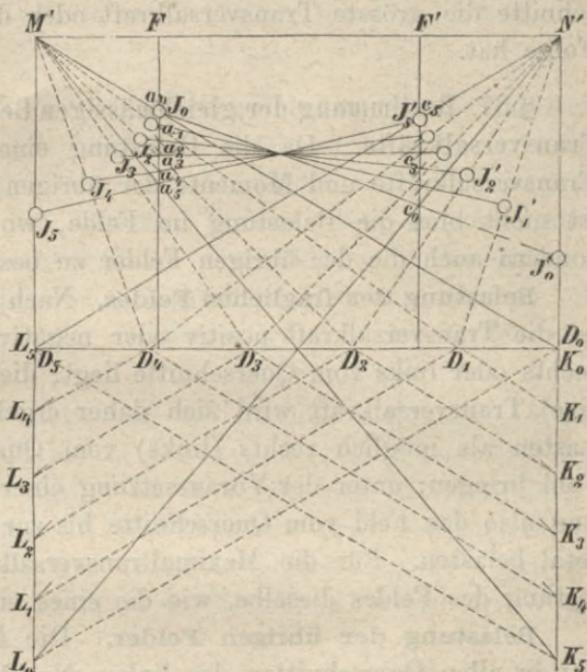


Fig. 50.

Fixpunkten das Moment nie Null werden kann: Zwischen den Fixpunkten ist das Moment bei jeder Lage der Last im Felde positiv.

Ferner folgt aus der obigen Darstellung<sup>1)</sup>: Bewegt sich eine Last von einer Stütze zur andern, so beschreiben die Inflexionspunkte des die Wirkungen dieser Last darstellenden Seilpolygones in demselben Sinne wie die Last die äusseren Strecken zwischen den Stützen und den Fixpunkten  $F$  und  $F'$ .

In den äusseren Theilen des Feldes, zwischen einer Stütze und dem ihr zunächst liegenden Fixpunkte, wird also das Moment, je nach der Lage der Last, bald positiv, bald negativ.

1) Culmann, Graphische Statik. 1. Auflage. Seite 284.

Zieht man durch den Pol des Kräftepolygones Strahlen parallel zu  $M'D$  und  $DN'$  und zur Schlusslinie  $MN$ , so muss, weil  $D$  zwischen  $M'$  und  $N'$  unter  $MN$  liegt (Fig. 49), der Parallelstrahl zu  $M'D$  ober, der zu  $N'D$  unter dem Parallelstrahl zur Schlusslinie liegen; daraus folgt: Für alle Querschnitte links von der Last ist die Transversalkraft positiv; für alle Querschnitte rechts negativ.

Die hier gefundenen Ergebnisse gestatten, diejenige gleichmässige Belastung anzugeben, welche in einem bestimmten Querschnitte die grösste Transversalkraft oder das grösste Moment zur Folge hat.

**§ 37. Bestimmung der gleichmässigen Belastung für die Maximal-Transversalkräfte.** Da die Belastung eines Feldes auch auf die Transversalkräfte und Momente der übrigen Felder Einfluss übt, so ist nicht blos die Belastung im Felde, wo der Querschnitt liegt, sondern auch die der übrigen Felder zu bestimmen.

**Belastung des fraglichen Feldes.** Nach dem vorigen Paragraph ist die Transversalkraft positiv oder negativ, je nachdem die Last rechts oder links vom Querschnitte liegt; die grösste positive (negative) Transversalkraft wird sich daher ergeben, wenn wir so viele Lasten als möglich rechts (links) vom Querschnitte ins fragliche Feld bringen; unter der Voraussetzung einer gleichmässigen Belastung also das Feld vom Querschnitte bis zur rechten (linken) Stütze total belasten. Für die Maximaltransversalkraft ist somit die Belastung des Feldes dieselbe, wie die eines einfachen Trägers.

**Belastung der übrigen Felder.** Die Belastung eines Feldes hat in allen Querschnitten des linken Nachbarfeldes eine negative, in allen Querschnitten des rechten Nachbarfeldes eine positive Transversalkraft zur Folge; in den weiteren Feldern ist die Transversalkraft abwechselnd positiv und negativ. Eine Last im Felde unmittelbar rechts (links) vom fraglichen liefert daher für alle Querschnitte desselben eine negative (positive) Transversalkraft. Für die grösste positive (negative) Transversalkraft in einem Felde darf daher das Feld unmittelbar rechts (links) davon nicht belastet sein, während das Feld links (rechts) vom fraglichen belastet sein muss; die übrigen Felder müssen abwechselnd belastet und nicht belastet sein. Wir können hiernach sagen<sup>1)</sup>:

In einem gegebenen Querschnitte erhält die Trans-

1) Winkler, Civilingenieur. 1862. Seite 152.

versalkraft den grössten positiven (negativen) Werth, wenn das fragliche Feld vom Querschnitte bis zur rechten (linken) Stütze total, der übrige Theil des Feldes nicht belastet ist; die anstossenden Felder müssen abwechselnd belastet und nicht belastet sein u. z. so, dass auf den belasteten Theil des fraglichen Feldes ein nicht belastetes Feld, auf den nicht belasteten Theil des fraglichen Feldes ein belastetes Feld folgt.

Für die Querschnitte unmittelbar links und rechts von einer Stütze fallen die nicht belasteten, bezüglich belasteten Theile unendlich klein aus.

**§ 38. Bestimmung der gleichmässigen Belastung für die Maximal-Momente.** Zwischen den Fixpunkten im mittleren Trägertheile treten immer nur (bei alleiniger Belastung des betreffenden Feldes) positive Momente auf; in den äusseren Theilen aber, zwischen einer Stütze und dem ihr nächstliegenden Fixpunkte, wird das Moment bald positiv, bald negativ; dementsprechend unterscheidet man, ob der fragliche Querschnitt im mittleren, oder in einem äusseren Theile liegt.

**1) Mittlerer Theil. Belastung des fraglichen Feldes.** Da für jede Lage der Last im Felde in jedem Querschnitte zwischen den Fixpunkten das Moment positiv ist, so erhält man in allen Querschnitten zwischen den Fixpunkten die grössten positiven Momente gleichzeitig bei totaler Belastung des ganzen Feldes; die grössten negativen Momente, wenn das Feld gar nicht belastet ist.

**Mittlerer Theil. Belastung der übrigen Felder.** Bei Belastung eines Feldes treten in allen Querschnitten der mittleren Theile der beiden benachbarten Felder negative Momente auf; in den weiteren Feldern abwechselnd positive und negative Momente. Die grössten positiven oder negativen Momente für alle Querschnitte des mittleren Theiles eines Feldes erhält man daher, wenn die Nachbarfelder gar nicht oder total, die weiteren abwechselnd belastet sind. Am ganzen Träger wechseln also belastete und nicht belastete Felder regelmässig miteinander ab.

**2) Aeussere Theile. Belastung des fraglichen Feldes.** Der Querschnitt liege zwischen der linken Stütze und dem linken Fixpunkte  $F$ . Man denke sich die Lage einer Einzellast gefunden, bei welcher im fraglichen Querschnitte  $C$  das Moment Null wird,  $C$  also

ein Inflexionspunkt der elastischen Linie ist. Der Punkt, an dem die Last liegt, heisse der Neutralpunkte für den Querschnitt  $C$ . Rückt die Last vom Neutralpunkte nach rechts, so rückt der Inflexionspunkt gleichfalls nach rechts; da aber an der Stütze das Moment stets negativ, an der Stelle der Last das Moment stets positiv und die Momentencurve zwischen der Stütze und Last eine Gerade ist, so ist für die neue Lage der Last das Moment im fraglichen Querschnitte  $C$  negativ. Jede Last rechts vom Neutralpunkte für den fraglichen Querschnitt hat in diesem ein negatives Moment zur Folge.

Rückt die Last vom Neutralpunkte nach links, so rückt der Inflexionspunkt gleichfalls nach links; so wie oben schliessen wir, dass der neuen Lage der Last ein positives Moment im fraglichen Querschnitte entspricht. Jede Last links vom Neutralpunkte für den fraglichen Querschnitt hat in diesem ein positives Moment zur Folge.

Analoge Sätze gelten für Querschnitte zwischen dem rechten Fixpunkte und der rechten Stütze. Hieraus schliesst man<sup>1)</sup>: In einem gegebenen Querschnitte  $C$  tritt das grösste Moment auf, wenn das fragliche Feld vom Neutralpunkte für den Querschnitt  $C$  bis zur linken oder rechten Stütze belastet, der übrige Theil des Feldes nicht belastet ist. Fürs positive Maximum ist der Querschnitt von der Last überdeckt, fürs negative nicht.

Für einen Querschnitt zwischen den Fixpunkten sind die Stützen des Feldes die Neutralpunkte; damit erhält man aus dem letzten Satze den unter (1) ausgesprochenen.

Kennt man also den Neutralpunkt für einen Querschnitt, so ist damit die gefährlichste Belastung bezüglich der Momente für den Querschnitt auch schon gegeben. Der Neutralpunkt wird gefunden, wenn man (Fig. 50) die Querschnittsvertikale mit dem geometrischen Orte der Punkte  $J$  — d. i. als Erzeugniss zweier entgegengesetzter projectivischer Strahlenbüschel eine Hyperbel, welche, wie sich aus dem Pascal'schen Satze ergibt, die Fixpunktvertikale berührt — soweit dieser allen Lagen einer Einzellast im Felde entsprechend zu zeichnen ist, in  $J$  schneidet, und die Gerade  $M'J$  (in der Figur nicht gezogen) mit  $D_5 D_0$  zum Schnitt bringt.

Einfacher aber ist zu einem angenommenen Neutralpunkte, also

1) Winkler, Civilingenieur. 1862. Seite 153—156.

einer angenommenen Belastung, den entsprechenden Querschnitt zu suchen; es kommt nur darauf an, für eine gegebene Lage der Last die Inflexionspunkte zu construiren nach § 36. Hat man für mehrere Neutralpunkte die Inflexionspunkte zu bestimmen — d. i. für mehrere angenommene gefährlichste Belastungsweisen die entsprechenden Querschnitte zu suchen — so wird das Verfahren unmittelbar aus Figur 50 klar. Zwischen den Pfeilervertikalen construirt man ein Rechteck  $M'N'D_0D_5$  von beliebiger Höhe; die Diagonalen  $M'D_0$  und  $N'D_5$  schneiden die Vertikalen durch die Fixpunkte  $F$  und  $F'$  in den Punkten  $a_0$  und  $c_5$ ; man mache  $a_0a_5 = Fa_0$  und  $c_5c_0 = F'c_5$  und theile die Strecken  $D_0D_5$ ,  $a_0a_5$  und  $c_5c_0$  in eine gleiche Anzahl gleicher Theile (in der Figur 5); die Theilungspunkte versehe man mit Zeigern aufsteigend: bei  $D$  von rechts nach links, bei  $a$  von oben nach unten, bei  $c$  von unten nach oben; verbindet man nun einen Punkt  $a$  mit dem gleichbezeichneten  $c$  und schneidet  $ac$  die Verbindungslinien von  $M'$  und  $N'$  mit dem gleichbezeichneten  $D$  in den Punkten  $J$  und  $J'$ , so sind diese die Inflexionspunkte für den Neutralpunkt  $D^1$ ).

**Belastung der übrigen Felder.** In Folge der Belastung eines Feldes treten im linken Theile des linken Nachbarfeldes positive, im linken Theile des rechten Nachbarfeldes negative Momente auf; in den darauffolgenden Feldern wieder abwechselnd positive und negative. — Daraus folgt<sup>2)</sup>: Für einen Querschnitt im linken Theile eines Feldes ergibt sich das grösste positive (negative) Moment, wenn das rechte (linke) Nachbarfeld total, das linke (rechte) gar nicht belastet ist; die darauffolgenden Felder müssen abwechselnd belastet und nicht belastet sein. Für einen Querschnitt im rechten Theile eines Feldes erhält man das grösste positive (negative) Moment, wenn das linke (rechte) Nachbarfeld total, das rechte (linke) gar nicht belastet ist, während die übrigen Felder wieder abwechselnd belastet und nicht belastet sind.

Geht man von der Belastung des fraglichen Feldes aus, so sieht man, dass an den belasteten Theil ein nicht belastetes Feld, an den nicht belasteten Theil ein belastetes Feld anstösst. Für alle Querschnitte in einem der drei Theile eines Feldes ist die gefährlichste Belastung der übrigen Felder dieselbe.

1) Mohr a. a. O. Seite 44.

2) Winkler, Civilingenieur. 1862. Seite 153—156.

§ 39. **Maximal-Transversalkräfte und Maximal-Momente bei gleichmässiger Belastung.** Nach dem Vorhergehenden kann man für jeden einzelnen Querschnitt diejenige gleichmässige Belastung angeben, welche das grösste Moment oder die grösste Transversalkraft zur Folge hat, und auch diese selbst bestimmen. Sollen die Curven der Maximal-Transversalkräfte und -Momente gezeichnet werden — Curven, deren Ordinaten an jeder Stelle das daselbst auftretende grösste Moment bezüglich die grösste Transversalkraft darstellen — so bestimmt man für eine hinreichende Anzahl von Querschnitten die Maximal-Transversalkraft und das Maximalmoment, trägt sie entsprechend als Ordinaten auf und verbindet deren Endpunkte durch eine stetige krumme Linie. Wir zeigen das Verfahren an einem Träger mit drei Feldern; das Verhältniss der Feldlängen sei  $l_1:l_2:l_3 = 8:10:8$ . Für diese Annahme wurden zunächst auf Tafel III die Fixpunkte construirt.

**Maximaltransversalkräfte.** Wir bestimmen zunächst für sechs Querschnitte  $a, b, c, d, e$  und  $0$  im zweiten Felde die grössten positiven Transversalkräfte. Die entsprechende Belastung (Fig. C) reicht immer vom fraglichen Querschnitte bis zur rechten Stütze; dabei ist für alle sechs Querschnitte das erste Feld total, das dritte gar nicht zu belasten.

Für diese sechs Belastungsfälle sind nun die Kreuzlinien zu construiren; wir benützen dazu die Tabelle auf Seite 67, wählen  $\lambda = l_2$ ,  $b = \frac{1}{6}\lambda$ ; dann sind fürs zweite Feld die Zahlen der Tabelle direct zu gebrauchen, fürs erste aber mit  $\left(\frac{l_1}{\lambda}\right)^4 = \left(\frac{8}{10}\right)^4 = 0,4096$  zu multipliciren.

Wir wählen für den Momentenmassstab  $p\lambda^2 = pl_2^2 = 24$  Centimeter; für den Kräftemassstab  $p\lambda = pl_2 = 4$  Centimeter; dann ist die Poldistanz  $a$  für das erste Seilpolygon gleich  $a = \frac{4}{24}\lambda = \frac{1}{6}\lambda = \frac{1}{6}l_2$ .

Diesen sechs Belastungsfällen entsprechend ist das zweite Seilpolygon zu zeichnen, nur soweit als zur Bestimmung der betreffenden Normalmomente nöthig ist; also für jede Belastung nur die mittleren Seiten des zweiten Seilpolygons im zweiten Felde. Bringt man  $a1$  (im ersten Felde) mit der linken Fixpunktvertikalen des zweiten Feldes (Fig. Zweites Seilpolygon) in  $A$  zum Schnitt, so ist  $A$  ein allen sechs Belastungsfällen entsprechenden zweiten Seilpolygonen gemeinschaftlicher Punkt; ein zweiter solcher Punkt ist  $F'_2$ . Von  $A$  und  $F'_2$  trägt man die Segmente der Kreuzlinien auf den Fixpunkt-

vertikalen nach abwärts auf, nach  $a, b \dots e$ . Verbindet man  $A$  und  $F'_2$  mit den Punkten  $a, b \dots e$  beziehungsweise auf der rechten und linken Fixpunktvertikalen, so schneiden diese Verbindungslinien auf den Pfeilervertikalen die betreffenden Normalmomente ab; die Schnittpunkte sind wieder mit  $a, b \dots e$  bezeichnet, rechts von der linken, links von der rechten Pfeilervertikalen. Zur Bestimmung der Transversalkräfte selbst handelt es sich jetzt um die Construction der Endtangenten an die Momentencurven. Die Segmente, welche diese auf der Vertikalen durch die Stütze 2 abschneiden, wurden in Fig.  $A$  nach § 32 construirt und auf die Pfeilervertikale (Stütze 2) nach  $aa, bb \dots$  übertragen; die Bezeichnung steht links von der Vertikalen. Verbindet man die Punkte  $a, b \dots$  auf der Vertikalen links mit den unteren Punkten  $a, b \dots$  auf der Pfeilervertikalen rechts und zieht (Fig. Transversalkräfte) zu diesen Verbindungslinien parallele Strahlen durch Punkte, die in der Entfernung  $a$  von den betreffenden Querschnittsordinaten auf der Horizontalen durch die Stützen liegen, so bestimmen diese Parallelstrahlen auf den Querschnittsordinaten Segmente, welche die gesuchten Maximal-Transversalkräfte darstellen. (Für den Querschnitt 0 ist der Strahl parallel  $F'_2 A$  zu ziehen.) Die Verbindung der Endpunkte dieser Segmente durch eine stetige krumme Linie giebt die Curve der positiven Maximal-Transversalkräfte im zweiten Felde.

Beachtet man, dass die beiden Belastungen für die positiven und negativen Maximal-Transversalkräfte sich zur totalen ergänzen, so erhält man aus der Transversalkraft bei totaler Belastung und der positiven Maximal-Transversalkraft für einen Querschnitt leicht die negative Maximal-Transversalkraft. In Fig. Maximal-Transversalkräfte entspricht die punktirte Gerade der totalen Belastung; misst man von dieser Geraden an die Ordinaten der positiven Maximal-Transversalkräfte, so hat man sofort die negativen Maximal-Transversalkräfte für die betreffenden Querschnitte; sie sind von der Horizontalen aus nach abwärts aufgetragen.

In einem Querschnitte des ersten Feldes tritt die grösste positive Transversalkraft auf, wenn das erste Feld vom Querschnitte bis zur rechten Stütze, das zweite gar nicht, das dritte total belastet ist. Für die angenommenen sechs Querschnitte, Fig.  $C$ , wurden wieder die zweiten Seilpolygone im zweiten Felde soweit als nothwendig construirt; da das zweite Feld nicht belastet ist, so handelt es sich nur um die mittleren Seiten. Der Punkt  $B$  auf der rechten Fixpunktvertikalen ist allen gemeinschaftlich; einen zweiten jeder mitt-

leren Seite findet man auf bekannte Weise auf der linken Fixpunktvertikalen; sie sind für die Querschnitte  $a, b, c, d, e$  des ersten Feldes mit  $a_1$  (fällt mit  $A$  zusammen),  $b_1, c_1 \dots$  bezeichnet; der Buchstabe wird von dem Strahle durchschnitten, der mit der Fixpunktvertikalen den Punkt bestimmt. Die Geraden  $BA, Bb_1, Ba_1 \dots$  schneiden auf der Vertikalen durch 1 die den angenommenen Belastungen im ersten Felde entsprechenden Momente ab; die Endpunkte der betreffenden Segmente sind wieder mit  $a, b \dots$  bezeichnet: die Buchstaben fürs erste Feld stehen links von der Vertikalen durch 1. Die Segmente der Endtangenten auf der Vertikalen durch 1 wurden in Figur  $B$  construirt. Die Bestimmung der Transversalkräfte selbst bedarf nach dem oben Gesagten keiner weiteren Erklärung.

In gleicher Weise wurden die positiven Maximal-Transversalkräfte im dritten Felde construirt. Aus den Curven der positiven Maximal-Transversalkräfte erhält man die der negativen, wenn man die Figur um eine Axe durch die Mitte des Trägers senkrecht auf der Zeichenfläche um  $180^\circ$  dreht.

**Maximalmomente.** In allen Querschnitten zwischen den Fixpunkten treten die grössten Momente gleichzeitig auf; die positiven bei totaler Belastung, die negativen bei Nichtbelastung des fraglichen Feldes, während die übrigen abwechselnd belastet sind. Bei totaler Belastung des ersten und dritten Feldes, Nichtbelastung des zweiten, hat man die grössten positiven Momente im linken (zugleich mittleren) Theile des ersten und im rechten Theile des dritten Feldes, gleichzeitig die grössten negativen Momente im mittleren Theile des zweiten Feldes; bei Nichtbelastung des ersten und dritten Feldes, totaler Belastung des zweiten, hat man die grössten negativen Momente im mittleren Theile des ersten und dritten Feldes, gleichzeitig die grössten positiven im mittleren Theile des zweiten. Für diese beiden Belastungsweisen kann man die Momente an den Stützen 1 und 2 sofort aus Fig. Zweites Seilpolygon entnehmen. Für die erste Belastungsweise sind diese Momente  $F'_2 A = F'_2 B$ ; für die zweite  $1t$ . Diese wurden nach Fig. Maximal-Momente übertragen und dann auf bekannte Weise die positiven und negativen Maximalmomente zwischen den beiden Fixpunkten construirt.

Für die Querschnitte in den äusseren Theilen der Felder ändert sich die gefährlichste Belastung von einem Querschnitte zum andern; sie reicht vom Neutralpunkte des Querschnittes bis zu einer Stütze, wobei fürs positive Maximum der Querschnitt von der

Last überdeckt, fürs negative nicht überdeckt ist. Im ersten Falle ist das Moment im Querschnitte durch die Ordinate einer Parabel, im letzten durch die Ordinate einer Geraden gegeben; wir bestimmen deshalb für die Querschnitte in den äusseren Theilen der Felder die negativen Maximal-Momente direct, die positiven wieder nach der Bemerkung, dass die beiden Belastungen fürs positive und negative Maximum in einem Querschnitte sich zur totalen ergänzen. Dabei nimmt man die Belastung, die Neutralpunkte an und sucht nach § 38 die zugehörigen Querschnitte.

In Fig. Gefährlichste Belastungen sind die Querschnitte des zweiten Feldes bestimmt, in welchen die Momente für die zur Construction der positiven Maximal-Transversalkräfte angenommenen Belastungen am grössten werden. Im nicht belasteten Trägertheile ist dabei die Momentencurve eine Gerade, eine der schon früher construirten Tangenten; die Ordinate derselben am betreffenden Querschnitte gemessen giebt das daselbst auftretende grösste negative Moment; z. B. die Ordinate  $cc$  der Tangente  $cc$  das grösste negative Moment für den Querschnitt  $J_c$  etc. In Figur Maximal-Momente sind diese Ordinaten an den entsprechenden Querschnitten aufgetragen und deren Endpunkte durch eine continuirliche krumme Linie verbunden. Wegen der Symmetrie der Anordnung braucht man die Momente für den rechten Theil nicht besonders zu construiren. Die positiven Maximal-Momente wurden wie oben angedeutet bestimmt.

In gleicher Weise wurden die negativen Maximal-Momente im linken Theile des dritten Feldes construiert. Das erste Feld ist nicht, das zweite total belastet; für die angenommenen Belastungsfälle des dritten Feldes wurden die Momente an der Stütze 2 wieder mit dem zweiten Seilpolygone im zweiten Felde bestimmt; es handelt sich da nur um die der Stütze 2 zunächst liegenden mittleren Seiten für die oben angegebenen Belastungen. Der Punkt  $C$  auf der linken Fixpunktvertikalen ist allen gemeinschaftlich; auf bekannte Weise findet man von jeder einen zweiten Punkt  $b_3, c_3 \dots$  auf der rechten Fixpunktvertikalen; die Linien  $Cb_3, Cc_3$  schneiden auf der Vertikalen durch 2 die gesuchten Stützenmomente ab; die Endpunkte der betreffenden Segmente sind wieder mit  $a, b \dots$  bezeichnet; die Buchstaben stehen rechts von der Pfeilervertikalen durch 2 und sind von den zugehörigen Strahlen geschnitten. Die weitere Construction ist selbstverständlich.

§ 40. **Influenzcurven.** Den Einfluss der Lage einer Einzellast auf Transversalkraft und Moment in einem gegebenen Querschnitte haben wir bisher nur insofern in Betracht gezogen, als das Zeichen der Transversalkraft oder des Momentes in Frage kam; es war dies auch vollständig ausreichend, diejenige gleichmässige Belastung zu bestimmen, welche für einen gegebenen Querschnitt die Transversalkraft, beziehungsweise das Moment am grössten macht. Bei gleichmässiger Belastung sind irgend zwei Lastelemente gleichwerthig; d. h. durch Vertauschen von irgend zwei Lastelementen ändert sich nichts. Anders verhält sich im Allgemeinen die Sache bei einem Systeme von Einzellasten. Die Wirkung eines Einzellastensystems auf Transversalkraft und Moment in einem Querschnitte lässt sich leicht beurtheilen, wenn man den Einfluss der Lage einer Einzellast auf das Zeichen und die Grösse der Transversalkraft beziehungsweise des Momentes anschaulich macht durch Curven, deren Ordinaten an der Stelle der Last gemessen die an einem Querschnitte auftretende Transversalkraft beziehungsweise das Moment darstellen. Solche Curven heissen Influenzcurven.

**Transversalkräfte.** Wir bestimmen zunächst bei gegebener Lage der Last die Transversalkräfte an allen Querschnitten des Feldes, in dem die Last liegt, Fig. 51. Es seien  $J$  und  $J'$  die der Last im Felde entsprechenden Inflexionspunkte. Der Theil des Feldes zwischen den beiden Punkten  $J$  und  $J'$  verhält sich für die unveränderlich angenommene Belastung wie ein an den Enden frei aufliegender Träger; denn da in  $J$  und  $J'$  keine Momente auftreten, so muss man — wenn der Trägertheil  $JJ'$  herausgeschnitten wird — die Belastung desselben durch zwei vertikale aufwärts gerichtete Kräfte im Gleichwichte halten können, die Theile  $AJ$  und  $J'B$  durch zwei bezüglich gleich grosse nach abwärts gerichtete Kräfte. Macht man  $JG = J'G' = G$ , so sind  $CC'$  und  $C''C$  die gesuchten Kräfte; zugleich ist, wie leicht einzusehen,  $CC'$  die Transversalkraft für alle Querschnitte links,  $CC''$  die Transversalkraft für alle Querschnitte rechts von der Last. So lange daher die Last rechts (links) von einem gegebenen Querschnitte liegt, ist die Transversalkraft für denselben gleich derjenigen  $V_a$  für den Schnitt unmittelbar rechts (links)

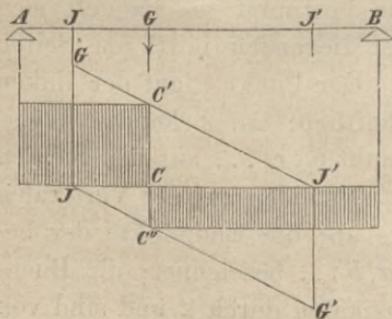


Fig. 51.

von der linken (rechten) Stütze. Die Influenzcurve für einen beliebigen Querschnitt erhält man somit aus den Influenzcurven für die Querschnitte unmittelbar neben den Stützen. Da aber  $V_b = V_a - G$ , so braucht man nur eine Influenzcurve zu construiren.

Bewegt sich die Last von der rechten Stütze nach links über den Träger, so rückt auch  $J$  vom linken Fixpunkte des Feldes nach links, aber langsamer; denn während die Last das Feld überschreitet, rückt  $J$  vom linken Fixpunkte bis zur linken Stütze; es kommt daher die Last dem Punkte  $J$  immer näher und da, wenn auch die Länge  $JJ'$  im Anfange abnimmt, ihre relative Längenänderung immer kleiner bleibt, als die relative Änderung der Entfernung der Last von  $J$  (vgl. Fig. 50), so wird  $CC'$ , d. i.  $V_a$  immer grösser. In Verbindung mit dem oben Gesagten folgt hieraus<sup>1)</sup>: Für einen gegebenen Querschnitt wird die Transversalkraft am grössten positiv oder negativ, je nachdem die Last unmittelbar rechts oder links vom Querschnitte liegt.

In Fig. 52 ist für sechs Lagen der Last nach dem hier gezeigten Verfahren  $V_a$  bestimmt<sup>2)</sup>; die Inflexionspunkte 0, 1 ... 5 wurden nach Fig. 50 gefunden; es ist  $D_0 C_1 C_2 \dots C_5$  die Influenzcurve für die Transversalkraft  $V_a$  im Querschnitte unmittelbar rechts von der linken Stütze; die Ordinate derselben von  $D_0 D_5$  gemessen giebt die Transversalkraft für die betreffende Lage der Last. Misst man die Ordinaten dieser Curve von der rechten Stütze bis zu

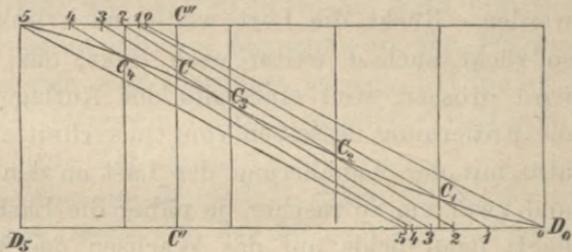


Fig. 52.

einem beliebigen Querschnitte  $C$  von  $D_0 D_5$  an, vom Querschnitte bis zur linken Stütze aber von  $C''5$  an, so hat man offenbar die Influenzcurve für den Querschnitt  $C$ , woraus dann sofort wieder der oben ausgesprochene Satz folgt.

Es erübrigt noch in den übrigen Feldern die Influenzcurve für die Transversalkräfte in einem Querschnitte zu zeichnen. Liegt die Last nicht im Felde, wo der Querschnitt liegt, so ist die Transversalkraft, also auch die Influenzcurve, für alle Querschnitte des fraglichen Feldes dieselbe; sie wird auf bekannte Weise mit Hilfe der

1) Culmann, Graphische Statik. 1. Auflage. Seite 286.

2) Mohr a. a. O. Seite 48.

Momentencurve (des ersten Seilpolygones für eine bestimmte Lage der Last) erhalten; es kommt nur darauf an, das Moment an der dem fraglichen Felde zunächst liegenden Stütze des Feldes, in dem die Last liegt, zu bestimmen. Man sieht leicht ein, dass die Influenzcurve in jedem Felde den höchsten oder tiefsten Punkt bei derjenigen Lage der Last hat, für welche dieses Stützenmoment am grössten wird. Ueber die Construction selbst ist nichts weiter zu bemerken.

**Momente.** Die Influenzcurve zu zeichnen, bestimmt man für verschiedene Lagen der Last das Moment am fraglichen Querschnitte, trägt dasselbe an der Stelle der Last als Ordinate auf und verbindet die Endpunkte der Ordinaten durch eine stetige krumme Linie.

Wir fassen zunächst die Influenzcurve für einen Querschnitt zwischen den Fixpunkten eines Feldes ins Auge, während die Last das Feld — in dem der fragliche Querschnitt liegt — von rechts nach links überschreitet. Sowie die Last die rechte Stütze des Feldes überschritten hat, tritt im fraglichen Querschnitte  $C$  ein positives Moment auf. Der Theil des Feldes zwischen den der Lage der Last entsprechenden Inflexionspunkten  $J$  und  $J'$  kann als einfacher Träger angesehen und das Moment in  $C$  demgemäss bestimmt werden. Rückt die Last weiter nach links gegen den Querschnitt, so rückt auch  $J$  weiter nach links, das Moment im Querschnitte wird grösser, weil einerseits der Auflagerdruck in  $J$ , andererseits die Entfernung desselben vom Querschnitte grösser wird. Es wächst also mit der Annäherung der Last an den Querschnitt das Moment, und zwar um so rascher, je näher die Last dem Querschnitte bereits liegt; denn beide auf das Wachsen des Momentes wirkenden Factoren werden immer grösser. Daraus kann man schliessen, dass die Influenzcurve beständig ihre erhabene Seite der Abscissenachse zukehrt, das Moment im Querschnitte am grössten wird, wenn die Last am Querschnitte liegt. Ueberschreitet die Last den Querschnitt, so wird das Moment kleiner; da für die Influenzcurve von der linken Stütze gegen den Querschnitt offenbar dasselbe Gesetz gilt, wie von der rechten gegen den Querschnitt, so hat die Influenzcurve im Querschnitte eine Spitze.

Durch ähnliche Betrachtungen kann man für einen Querschnitt in einem äusseren Theile des Feldes z. B. zwischen dem linken Fixpunkte und der linken Stütze Aufschlüsse über die Gestalt der Influenzcurve erhalten. Sowie die Last über die rechte Stütze ins fragliche Feld eintritt, wird im Querschnitte ein negatives Moment

entstehen, das — absolut genommen — beim Weiterschreiten der Last bis zu einer gewissen Grösse wächst, dann aber abnimmt, weil es wieder Null sein muss, wenn die Last im Neutralpunkte des Querschnittes angelangt ist. Vom Neutralpunkte an verhält sich die Sache wieder so, wie für einen Querschnitt zwischen den beiden Fixpunkten; für jede Lage der Last links vom Neutralpunkte ist das Moment im fraglichen Querschnitte positiv und wird am grössten, wenn die Last am Querschnitte liegt.

Für einen Fixpunkt fällt der Neutralpunkt mit der dem Fixpunkte ferneren Stütze des Feldes zusammen, woraus folgt, dass die Influenzcurve für einen Fixpunkt die Abscissenaxe tangirt.

Die Lage der Last, bei welcher das negative Moment in einem Querschnitte in einem äusseren Theile eines Feldes am grössten wird, kann man durch die oben angedeutete Construction der Influenzcurve angenähert finden; eine genauere Bestimmung derselben hat keinen Werth.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Influenzcurven für die Momente an den Stützen, da an diesen überhaupt die grössten Momente auftreten, diese Momente aber auch massgebend sind zur Bestimmung der Transversalkräfte und Momente für die Querschnitte derjenigen Felder, in welchen die Last nicht liegt. Eine einfache Construction der Influenzcurven für die Momente an den Stützen eines Feldes, über welches sich eine Einzellast bewegt, hat Mohr<sup>1)</sup> aus den Ausdrücken für die Stützenmomente abgeleitet. Diese Ausdrücke kann man auf folgende Art erhalten.

In Fig. 49 sind diese Momente  $M_a$  und  $M_b$  durch die Segmente  $MM'$  und  $NN'$  repräsentirt, wenn  $CD$  das Moment des einfachen Trägers an der Stelle der Last darstellt. Sind nun  $a$  und  $b$  die Entfernungen der Fixpunkte  $F$  und  $F'$  beziehungsweise von der linken und rechten Stütze,  $y_1$  und  $y_2$  die in den Fixpunktvertikalen gemessenen Abstände der Schlusslinien  $MN$  und  $M'N'$ ;  $\alpha$  ( $\beta$ ) der Abstand der Last von der linken (rechten) Stütze, so hat man:

$$y_1 = N'K \frac{a}{l} = \frac{a}{l} \frac{l + \beta}{l} CD$$

$$y_2 = M'L \frac{b}{l} = \frac{b}{l} \frac{l + \alpha}{l} CD.$$

$$MM' = y_1 + (y_1 - y_2) \frac{a}{l - a - b} = \frac{(l - b)y_1 - ay_2}{l - a - b}$$

1) Mohr a. a. O. Seite 45.

$$NN' = y_2 + (y_2 - y_1) \frac{b}{l - a - b} = \frac{(l - a)y_2 - by_1}{l - a - b}.$$

Hierin für  $y_1$  und  $y_2$  die Werthe gesetzt:

$$MM' = CD \frac{a}{l} \frac{2l - 3b - \alpha}{l - a - b}$$

$$NN' = CD \frac{b}{l} \frac{l - 3a + \alpha}{l - a - b}$$

oder

$$M_a = G \frac{\alpha(l - \alpha)}{l} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{2l - 3b - \alpha}{l - a - b}$$

$$M_b = G \frac{\alpha(l - \alpha)}{l} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{l - 3a + \alpha}{l - a - b}.$$

Hiernach findet man (Fig. 53)  $M_a$  auf folgende Weise: Man construire für einen an den Enden frei aufliegenden Träger die Lastmomentencurve für die Last  $\frac{a}{l}G$ , d. i. die Momentencurve, deren Ordinate an der Stelle der Last gemessen das daselbst auftretende

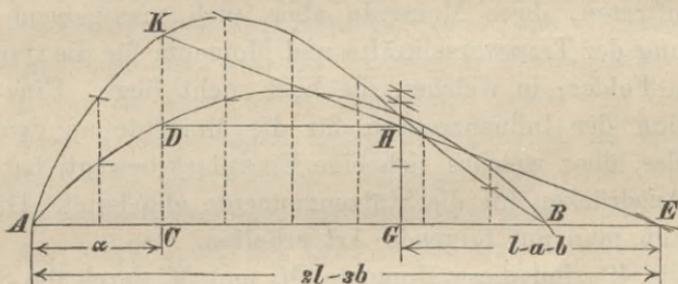


Fig. 53.

Moment darstellt; es sei  $ADB$  diese Parabel. Man mache  $AE = 2l - 3b$ ,  $GE = l - a - b$ ;  $GH \perp AB$  und projicire die Punkte der Parabel z. B.  $D$  auf  $GH$  nach  $H$ ; die Gerade  $EH$  schneidet die Parabelordinate  $CD$  in einem Punkte  $K$  der gesuchten Curve. In ähnlicher Weise lässt sich die Curve für  $M_b$  construiren.

Die Influenzcurve für  $M_a$  hat in der rechten, die für  $M_b$  in der linken Fixpunktvertikalen einen Wendepunkt. Das Maximum von  $M_a$ , der höchste Punkt der Influenzcurve für  $M_a$ , ergibt sich für

$$\alpha = l - b - \sqrt{\frac{1}{12}l^2 + \left(\frac{1}{2}l - b\right)^2}.$$

Vertauscht man hierin  $\alpha$  mit  $l - \alpha$  und  $b$  mit  $a$ , so hat man für das Maximum von  $M_b$  :

$$\alpha = a + \sqrt{\frac{1}{12} l^2 + \left(\frac{1}{2} l - a\right)^2},$$

welche Ausdrücke sich leicht construiren lassen<sup>1)</sup>.

Beschreibt man mit dem Halbmesser  $\frac{1}{3} r$  von einem der Dreitheilungspunkte des Feldes als Mittelpunkt einen Halbkreis und errichtet in der Mitte des Feldes eine Senkrechte auf  $AB$ , welche den Halbkreis in  $K$  schneidet, so sind durch  $F'K$  und  $F'K$  die Wurzelgrößen in den obigen Ausdrücken gegeben und  $\Pi_a$  und  $\Pi_b$  die gesuchten Punkte.

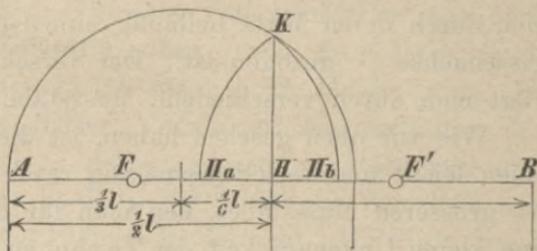


Fig. 54.

Sind in allen Feldern die Influenzcurven für die Stützenmomente construirt, so findet man mit diesen sehr leicht die Influenzcurven der Transversalkräfte und Momente für einen Querschnitt eines bestimmten Feldes in allen übrigen Feldern. Sollen nun für mehrere Querschnitte in jedem Felde die Influenzcurven der Transversalkräfte und -Momente gezeichnet werden, so construirt man zunächst in allen Feldern die Influenzcurven für  $M_a$  und  $M_b$ ; für eine gegebene Lage einer Last in einem Felde hat man dann sofort die Momente an den Stützen desselben und kann durch Ziehen von Geraden, die durch die betreffenden Fixpunkte gehen, die Momente in allen übrigen Feldern angeben, sowie die Transversalkräfte in denselben bestimmen; im fraglichen Felde (wo die Last liegt) selbst kann man, da durch die Stützenmomente die Schlusslinie der positiven Momentenfläche festgelegt ist, das erste Seilpolygon und somit die Momente construiren.

§ 41. **Maximal-Transversalkräfte und Maximal-Momente für ein Einzellastensystem.** Mit Hilfe der Influenzcurven kann man am bequemsten versuchsweise die Maximal-Transversalkräfte und Maximal-Momente in Folge der Wirkung eines Einzellastensystemes bestimmen. Man sieht sogleich, welche Felder zu belasten sind, je nachdem es sich um die grössten positiven oder negativen Transversalkräfte und -Momente handelt. Man wird die schwersten Lasten an die Querschnitte legen, welchen die grössten Ordinaten der be-

1) Lippich a. a. O. Seite 52.

treffenden Influenzcurven entsprechen. Zur Summation der Ordinaten, an welchen Lasten liegen, bedient man sich zweckmässig durchsichtiger Hornblättchen (oder passend aufgespannter Pausleinwand), auf welchen die Entfernungen der Lasten durch hinreichend lange, mit den Lastgewichten versehene, parallele Liniensegmente markirt sind, durch deren Mitte beiläufig eine Gerade senkrecht — als Abscissenachse — gezogen ist. Der verschiedenen Grösse der Lasten trägt man durch verschiedene Massstäbe Rechnung.

Wie wir oben gesehen haben, ist die Construction der Influenzlinien leicht und verhältnissmässig rasch durchzuführen und wegen des grösseren Massstabes, den man für die Einzellast wählen kann, eine kleine Ungenauigkeit der Zeichnung von geringerer Bedeutung.

### III. Der continuirliche Träger mit constantem Querschnitte bei ungleich hohen Stützen.

§ 42. **Einleitung. Gefährlichste Belastungsweise.** Soll ein Träger auf mehreren Stützen, die nicht in einer Geraden liegen, aufliegen, so muss er auch im nicht belasteten Zustande Deformationen, Biegungen erleiden; es müssen in den einzelnen Querschnitten auch im nicht belasteten Zustande Transversalkräfte und Momente auftreten. Der Träger kann trotzdem als gerader angesehen werden, wenn diese Biegungen so klein sind, dass die Grundhypothese gerader Träger  $dx = ds$  erhalten bleibt; wir setzen dies voraus.

Wird ein solcher Träger in irgend einer Weise belastet, so werden die schon vorhandenen Senkungen der elastischen Linie, die bereits auftretenden Schubkräfte und Momente Aenderungen erleiden; diese sind sehr nahe dieselben, die man erhält, wenn die ursprüngliche Deformation nicht vorhanden und nur die Belastung am Träger wirkend angenommen wird; denn da wir die ursprüngliche Deformation so klein annehmen, dass  $dx = ds$  gesetzt werden kann, so ist es gerade so, als ob man den Stab in seinem unverbogenen Zustande vor sich hätte. Man kann demnach den Einfluss der Belastung auf Transversalkräfte und Momente ganz getrennt vom Einflusse einer ungleichen Höhenlage der Stützen untersuchen.

**Gefährlichste Belastungsweise.** Nach dem oben Gesagten wirkt die Belastung auf den Träger bei ungleicher Höhenlage der Stützen, wenn dabei  $dx = ds$ , so, als ob der Stab in seinem unverbogenen Zustande sich befände. Es werden daher die grössten Transversal-

kräfte und Momente bei derselben Belastung auftreten, die sich bei gleich hohen Stützen ergibt. Die gefährlichste Belastungsweise ist daher von der Höhenlage der Stützen unabhängig.

§ 43. Einfluss einer ungleichen Höhe der Stützen auf Momente und Transversalkräfte. Für die einzelnen Querschnitte ergeben sich die Momente und Transversalkräfte sofort, wenn man die Normalmomente kennt. Diese aber findet man durch Construction des zweiten Seilpolygones. Die früher bewiesenen Eigenschaften des zweiten Seilpolygones sind von der gegenseitigen Höhenlage der Stützen ganz unabhängig; es kam bei der Ableitung derselben nur die horizontale Entfernung der Stützen in Betracht. Mit Hilfe dieser Eigenschaften kann man also auch jetzt das zweite Seilpolygon zeichnen; es ist nur aus den Kräften  $U$  und  $W$  zu construiren; die mittleren Seiten fallen in eine zusammen. Man braucht von jeder mittleren Seite in jedem Felde zwei Punkte, um das ganze Seilpolygon zeichnen und somit auch die Momente angeben zu können.

Zur weiteren Erklärung seien für den nebenskizzirten Träger (Fig. 55) die Normalmomente in Folge der ungleichen Höhenlage der Stützen zu bestimmen.

Der Punkt  $O$  ist ein Punkt der mittleren Seite im ersten Felde; nach § 24 erhalten wir mit ihm einen Punkt der mittleren Seite im

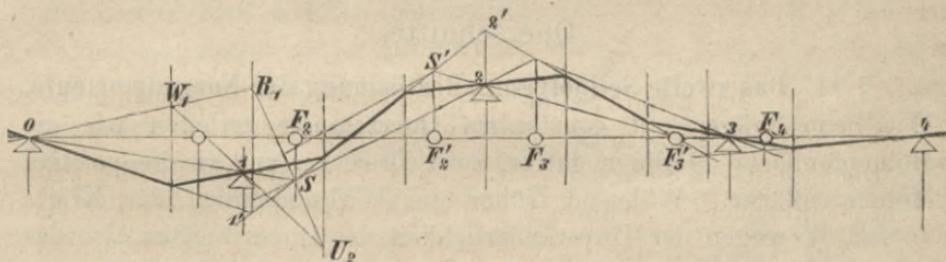


Fig. 55.

zweiten Felde, wenn wir  $O1$  und willkürlich  $OW_1R_1$  ziehen;  $W_11$  bis  $U_2$  verlängern und  $R_1U_2$  mit  $O1$  zum Schnitt in  $S$  bringen. Aus § 25 folgt, dass  $S$  auf der linken Fixpunktvertikalen des zweiten Feldes liegt, welche für gleich hohe Stützen construirt ist. Bringt man  $S2$  mit der linken Fixpunktvertikalen des dritten Feldes zum Schnitt, so ist dieser ein Punkt der mittleren Seite im dritten Felde u. s. w. In gleicher Weise vom rechten Ende gegen das linke vorgehend, erhält man in jedem Felde von jeder mittleren Seite einen zweiten Punkt und kann daher das zweite Seilpolygon zeichnen. Der Schnittpunkt einer mittleren Seite  $SS'$  mit der Ver-

bindungslinie der Stützen des Feldes 12 entspricht einem Wendepunkte  $J$  der elastischen Linie; bewegt sich die Stütze 1 in einer Vertikalen, so bewegt sich zufolge der Construction auch  $J$  in einer Vertikalen; die Stelle, wo das Moment im Felde Null wird, bleibt dieselbe; durch diese Höhenänderung wird das Verhältniss der aufeinanderfolgenden Stützenmomente nicht geändert. Verlängert man  $SS'$  bis zu ihren Schnittpunkten mit den Pfeilervertikalen, so sind die Segmente  $\overline{11'}$  und  $\overline{22'}$  den Stützenmomenten proportional. Man hat nämlich:

$$\overline{11'} = \frac{\frac{1}{6} M_1 l_2^2}{EJ}; \quad \overline{22'} = \frac{\frac{1}{6} M_2 l_2^2}{EJ},$$

also

$$M_1 = \frac{6 EJ \overline{11'}}{l_2^2}; \quad M_2 = \frac{6 EJ \overline{22'}}{l_2^2}.$$

Man kann sonach diese Momente auftragen, die Momentencurve zeichnen und mit dieser die Transversalkräfte construiren.

Bei einer ungleichen Höhenlage der Stützen wird man am besten den Einfluss dieser getrennt von dem der Belastung bestimmen.

#### IV. Der continuirliche Träger mit veränderlichem Querschnitte.

##### § 44. Das zweite Seilpolygon. Bestimmung der Normalmomente.

Wie beim Träger mit constantem Querschnitte zerlegen wir die Momentenfläche in die negative, zwei Dreiecke, und in die positive Momentenfläche. Während früher die Wirkungslinien der Kräfte  $U$  und  $W$  wegen der Unveränderlichkeit des Querschnittes also des Trägheitsmomentes sofort gegeben waren, die elastische Linie construirt werden konnte mit der constanten Poldistanz  $EJ$  und der Belastungsfläche  $M$ , hat man jetzt als Belastungsfläche  $\frac{M}{J}$ , als Poldistanz  $E$  zu nehmen. Es seien nun die drei Belastungsflächen, wie sie der angegebenen Zerlegung der Momentenfläche entsprechen, mit  $U$ ,  $W$  und  $V$  bezeichnet. Da die positive Momentenfläche bekannt, sowie die Veränderlichkeit des Querschnittes gegeben anzusehen ist, so kann man die Lage und Grösse von  $V$  finden: Man construirt nach § 17 für die positive Momentenfläche der Veränderlichkeit des Querschnittes entsprechend ein Seilpolygon; die Lage von  $V$  ist durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten

bestimmt. Zieht man in der Entfernung  $E$  von diesem Schnittpunkte eine Gerade parallel zur Krafrichtung, so schneiden die äussersten Seilpolygonseiten auf dieser Geraden ein Segment gleich  $V$  ab.

Bemerkt man, dass die Lage der Resultirenden eines Kräftesystemes nur vom Verhältniss der Kräfte abhängt, so ergibt sich die Lage von  $U$  und  $W$ , indem man für ein willkürlich angenommenes  $M_a$  und  $M_b$  die Lage der entsprechenden  $U$  und  $W$  bestimmt. Es sind also wie beim Träger mit constantem Querschnitte, von  $V$  die Lage und Grösse, von  $U$  und  $W$  die Lage bekannt.

Sind (Fig. 56) im Abstände  $x$  von der linken Stütze die Momente, wie sie den negativen Momentenflächen  $ABA'$  und  $ABB'$  — wobei  $AA' = M_a$  und  $BB' = M_b$  — und der positiven Momentenfläche entsprechen,  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M$ , so ist

$$U = \int \frac{M_1 dx}{J} = \int \frac{M_a}{l} \frac{l-x}{J} dx = \frac{M_a}{l} \int \frac{l-x}{J} dx$$

$$W = \int \frac{M_2 dx}{J} = \int \frac{M_b}{l} \frac{x}{J} dx = \frac{M_b}{l} \int \frac{x dx}{J}$$

$$V = \int \frac{M dx}{J},$$

und es können diese, sowie die Poldistanz  $E$  nach dem Momentenmassstabe aufgetragen werden. Das aus diesen drei Kräften construirte Seilpolygon heisst wieder das zweite Seilpolygon. Die Kräfte  $U$  und  $W$  wirken nicht mehr, wie beim Träger mit constantem Querschnitte, in den Drittelvertikalen; die Wirkungslinien von  $U$  und  $W$  sollen trotzdem auch hier Drittelvertikalen heissen.

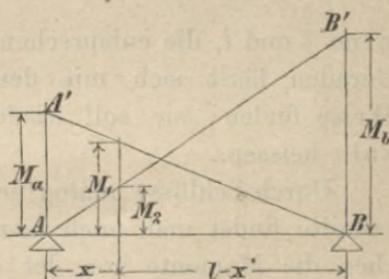


Fig. 56.

Aus dem zweiten Seilpolygone kann man leicht die Grössen  $U$  und  $W$  bestimmen; man hat nämlich (Fig. 57):

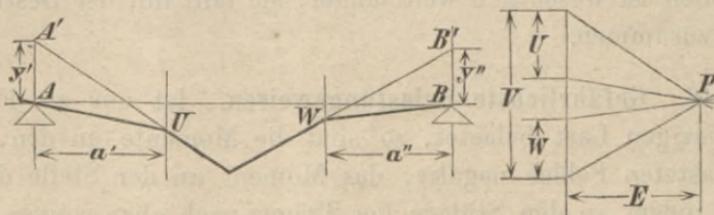


Fig. 57.

$$U = \frac{y'}{a'} E \quad \text{und} \quad W = \frac{y''}{a''} E.$$

Entsprechen den Momenten  $M'_a$  und  $M'_b$ , mit deren Hilfe die Lage von  $U$  und  $W$  bestimmt wurde, die Grössen  $U'$  und  $W'$ , so hat man:

$$U : U' = M_a : M'_a; \quad W : W' = M_b : M'_b,$$

also

$$U = \frac{M_a}{M'_a} U' = \frac{y'}{a'} E; \quad W = \frac{M_b}{M'_b} W' = \frac{y''}{a''} E,$$

daher

$$M_a = \frac{y'}{a'} \frac{M'_a}{U'} E; \quad M_b = \frac{y''}{a''} \frac{M'_b}{W'} E.$$

Man kann somit, wenn das zweite Seilpolygon gezeichnet ist, die Normalmomente bestimmen. Sind die Pfeilertangenten gegeben, so lässt sich das zweite Seilpolygon ganz analog dem Vorgange in § 19 construiren.

§ 45. Eigenschaften des zweiten Seilpolygones. Die einer und derselben Stütze zunächst liegenden mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones schneiden sich auf einer bestimmten Geraden, auf der Resultirenden der beiden Kräfte

$$W = \frac{M_b}{l} \int \frac{x dx}{J} \quad \text{und} \quad U_1 = \frac{M_b}{l_1} \int \frac{(l_1 - x) dx}{J_1},$$

wenn  $l$  und  $l_1$  die entsprechenden Feldlängen sind. Die Lage dieser Geraden lässt sich mit den Kräften  $U'$  und  $W'$  auf bekannte Weise finden; sie soll wieder die verschränkte Pfeilervertikale heissen.

Durch Schlüsse analog denen beim Träger mit constantem Querschnitte findet man auch hier zwei Reihen von Fixpunkten, in welchen die Momente von der Belastung der rechts beziehungsweise links gelegenen Felder unabhängig sind. Man kann sonach bei gegebener Belastung das zweite Seilpolygon zeichnen und aus diesem wie oben gezeigt die Normalmomente finden. Die Construction der Kreuzlinien ist wesentlich weitläufiger; sie fällt mit der Bestimmung von  $V$  zusammen.

§ 46. Gefährlichste Belastungsweisen. Ist nur ein Feld mit einer einzigen Last belastet, so sind die Momente an den Stützen des belasteten Feldes negativ, das Moment an der Stelle der Last positiv, indem an den Stützen der Träger nach oben convex, an der Last nach oben concav gebogen wird. Wie in § 36 folgt hieraus, dass die Transversalkraft für alle Querschnitte des fraglichen Feldes

links von der Last positiv, rechts von der Last negativ ist. Die gefährlichste Belastung des Feldes, in dem der fragliche Querschnitt liegt, ist daher dieselbe, wie für den Träger mit constantem Querschnitt. Die übrigen Felder müssen — wie leicht einzusehen — abwechselnd belastet und nicht belastet sein.

Zwischen den Fixpunkten ist das Moment bei jeder Lage der Last im Felde positiv, für alle Querschnitte zwischen den Fixpunkten ist daher die gefährlichste Belastung dieselbe, wie bei constantem Querschnitt. Für die Querschnitte zwischen einem Fixpunkte und der ihm zunächst liegenden Stütze werden die grössten Momente analog dem Vorgange beim Träger mit constantem Querschnitt bestimmt. Man sucht für eine angenommene Lage der Last den Querschnitt, an dem das Moment Null wird; sind die Kreuzlinien gezeichnet, so ergiebt sich die Lage der Last nach § 36; die Belastung für die positiven und negativen Maximalmomente findet man dann so wie beim Träger mit constantem Querschnitt.

Die Bestimmung der Maximaltransversalkräfte und Maximalmomente selbst ist nach § 39 vorzunehmen.





# Inhalt.

## Grundzüge der graphischen Statik.

### Kräfte in derselben Ebene.

	Seite
§ 1. Das Kräfteparallelogramm . . . . .	1
§ 2. Resultirende beliebig vieler Kräfte an demselben Angriffspunkte .	2
§ 3. Zerlegung einer Kraft in Componenten, die mit ihr an demselben Angriffspunkte wirken . . . . .	3
§ 4. Zwei Kräfte in derselben Ebene an verschiedenen Angriffs- punkten. Kräfte und Seilpolygon . . . . .	5
§ 5. Beliebige viele Kräfte in einer Ebene an verschiedenen Angriffs- punkten. . . . .	10
§ 6. Gleichgewicht beliebig vieler Kräfte in einer Ebene. . . . .	12
§ 7. Zwei Seilpolygone für dasselbe Kräftepolygon aber verschiedene Pole	13
§ 8. Seilpolygon durch drei gegebene Punkte . . . . .	15
§ 9. Die Mitteldrucklinie . . . . .	18
§ 10. Zerlegen einer Kraft in zwei Componenten . . . . .	19
§ 11. Horizontaler Träger, der an den Enden frei aufliegt . . . . .	21
§ 12. Bogenträger mit drei Gelenken . . . . .	22
§ 13. Zerlegen einer Kraft in drei Componenten . . . . .	23
§ 14. Das Seilpolygon als Momentencurve . . . . .	24

### Der continuirliche Träger.

#### I. Die elastische Linie.

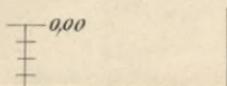
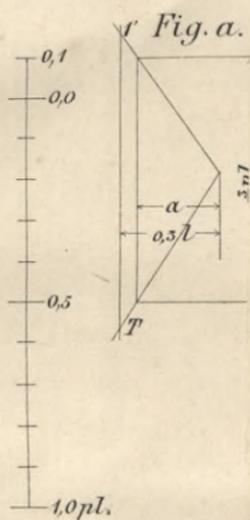
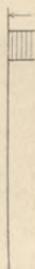
§ 15. Einleitung. Erklärungen und Voraussetzungen . . . . .	28
§ 16. Construction der elastischen Linie . . . . .	31
§ 17. Bestimmung der Durchbiegung von belasteten Trägern . . . . .	34

#### II. Der continuirliche Träger mit constantem Querschnitte bei gleich hohen Stützen.

§ 18. Allgemeines. Das zweite Seilpolygon . . . . .	41
§ 19. Construction des zweiten Seilpolygones bei gegebenen Pfeiler- tangente . . . . .	44
§ 20. Construction der Normalmomente . . . . .	45
§ 21. Der einfache an den Enden eingespannte Träger. Eigenschaften der Kreuzlinien . . . . .	46
§ 22. Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen . . . . .	48

	Seite
§ 23. Ein nicht belastetes Feld des continuirlichen Trägers . . . . .	48
§ 24. Zwei aufeinander folgende nicht belastete Felder . . . . .	49
§ 25. Beliebige viele unbelastete Felder. Die Fixpunkte des continuirlichen Trägers. . . . .	53
§ 26. Momente und Transversalkräfte in den nicht belasteten Feldern .	55
§ 27. Ein belastetes Feld . . . . .	57
§ 28. Zwei aufeinander folgende belastete Felder. . . . .	59
§ 29. Construction des zweiten Seilpolygones bei gegebener Belastung. Bestimmung der Stützenmomente . . . . .	60
§ 30. Kreuzlinien für totale gleichmässige Belastung . . . . .	62
§ 31. Der continuirliche Träger bei totaler gleichmässiger Belastung. .	63
§ 32. Kreuzlinien für partielle gleichmässige Belastung . . . . .	64
§ 33. Continuierlicher Träger bei partieller gleichmässiger Belastung . .	68
§ 34. Kreuzlinien für eine Einzellast . . . . .	69
§ 35. Kreuzlinien für ein Einzellastensystem . . . . .	71
§ 36. Momente und Transversalkräfte im belasteten Felde bei Belastung des continuirlichen Trägers mit einer einzigen Last. . . . .	72
§ 37. Bestimmung der gleichmässigen Belastung für die Maximaltransversalkräfte . . . . .	74
§ 38. Bestimmung der gleichmässigen Belastung für die Maximalmomente . . . . .	75
§ 39. Maximaltransversalkräfte und Maximalmomente bei gleichmässiger Belastung. . . . .	78
§ 40. Influenzcurven . . . . .	82
§ 41. Maximaltransversalkräfte und Maximalmomente für ein Einzellastensystem. . . . .	87
 III. Der continuirliche Träger mit constantem Querschnitte bei ungleich hohen Stützen.  	
§ 42. Einleitung. Gefährlichste Belastungsweise . . . . .	88
§ 43. Einfluss der ungleichen Höhe der Stützen auf Transversalkräfte und Momente . . . . .	89
 IV. Der continuirliche Träger mit veränderlichem Querschnitte.  	
§ 44. Das zweite Seilpolygon. Bestimmung der Normalmomente . . . . .	90
§ 45. Eigenschaften des zweiten Seilpolygones . . . . .	92
§ 46. Gefährlichste Belastungsweisen . . . . .	92

# Continuirlicht ein Ende über

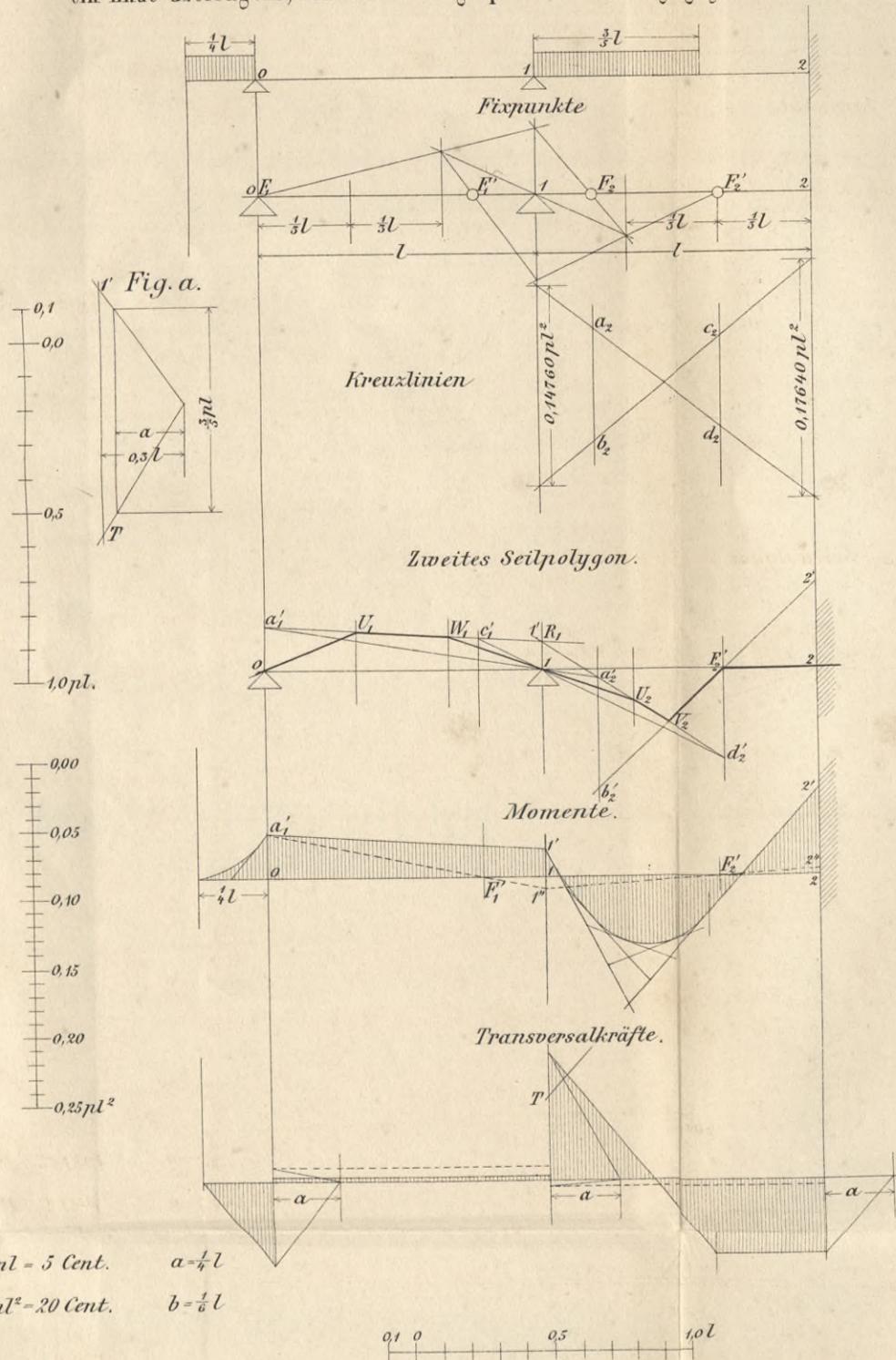


BIBLIOTEKA POLYTECHNIKI  
KRAKÓW

S. 61



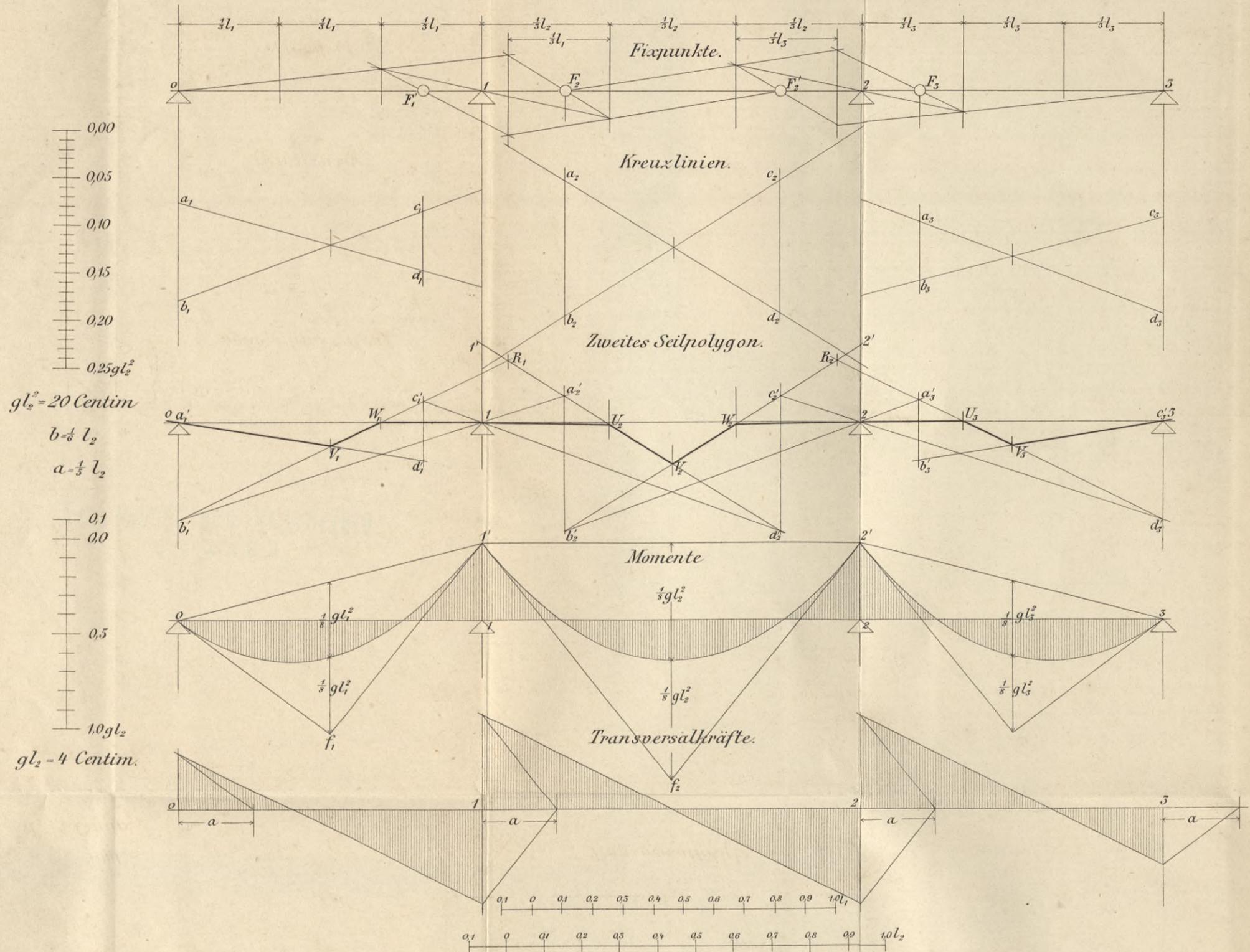
# Continuirlicher Träger mit constantem Querschnitte, ein Ende überragend, das andere eingespannt, Belastung gegeben.



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

# Continuirlicher Träger mit constantem Querschnitte bei totaler gleichmäßiger Belastung.

$$l_1 : l_2 : l_3 = 8 : 10 : 8$$

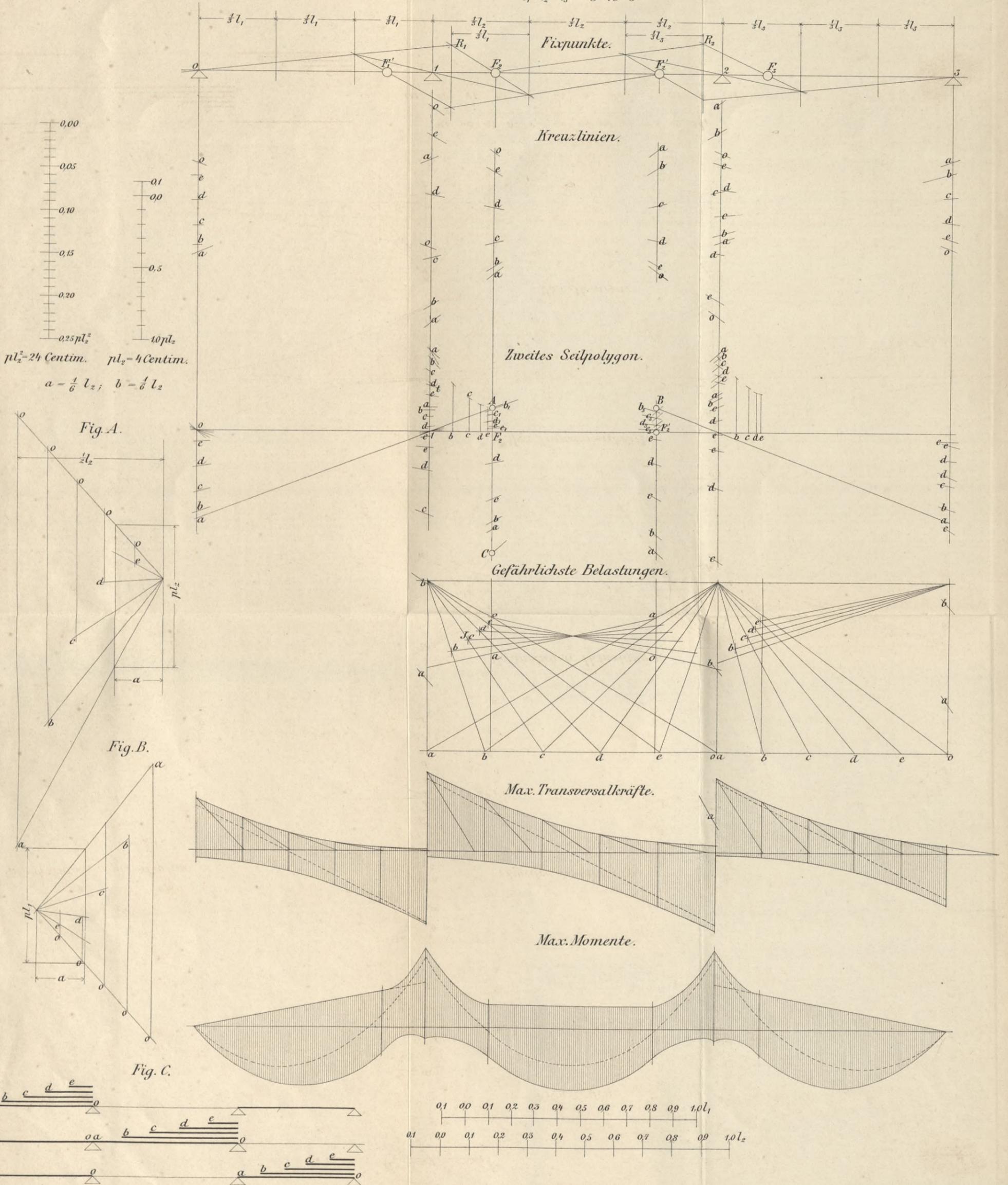


BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

# Continuirlicher Träger mit constantem Querschnitte.

Maximal-Transversalkräfte und -Momente bei gleichmäßiger Belastung.

$$l_1 : l_2 : l_3 = 8 : 10 : 8$$



BIBLIOTEKA POLITECHNIKI  
KRAKÓW

S. 61

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297587