

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

3135

L. inw.

191

N. 4. 75

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297584

xxx

573

Elementare Theorie und Berechnung
eiserner Dach- und Brücken-
Konstruktionen



Erste Abteilung

Berechnung der Spannungszahlen



Elementare Theorie und Berechnung
eiserner Dach- und Brücken-
Konstruktionen

Von

August Ritter, Dr. phil.

Geh. Reg.-Rat und vormals Professor an der technischen Hochschule zu Aachen

Mit 495 Textabbildungen

Sechste Auflage

A. Nr. 26 753



Leipzig 1904

Baumgärtners Buchhandlung

cy. 14.
62

xxx
573

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

II 3135

Akc. Nr. 285649

Vorrede zur ersten Auflage.

Die Bestimmung der Spannungen, welche in den einzelnen Konstruktionsteilen der Dach- und Brückenkonstruktionen durch Belastungen derselben hervorgebracht werden, ist in neuerer Zeit, seit Einführung des Schmiedeeisens als Baumaterial, eine der wichtigsten Aufgaben der Ingenieurmechanik geworden.

Das Gesetz des Hebels — in seiner allgemeineren Form das Gesetz der statischen Momente — läßt sich auf einfache Weise zur allgemeinen Lösung dieser Aufgabe benutzen. Die auf dieses Gesetz sich gründende Methode der statischen Momente leistet eben so viel als irgend eine andere der bisher bekannten Methoden, übertrifft sie aber an Allgemeinheit und durch den für Praktiker wichtigen Vorzug, daß sie so gut wie gar keine Vorkenntnisse voraussetzt und jene Aufgabe in eine der elementarsten Aufgaben der Mechanik verwandelt.

Die Resultate dieser ungemein fruchtbaren Methode sind klar und scharf wie die Resultate der Geometrie und von unmittelbarer praktischer Anwendbarkeit. Es gibt kaum einen anderen Zweig der Ingenieurmechanik, der für die praktische Verwertung eines geringen Maßes von Kenntnissen ein so lohnendes Feld böte und der so geeignet wäre, den Anfänger mit dieser Wissenschaft zu befreunden, wie eine auf jene Methode gegründete Theorie der Dach- und Brückenkonstruktionen.

Diese Gründe veranlaßten den Verfasser, die nachfolgenden — ursprünglich für eine Reihe von Zeitschriftartikeln bestimmten — Anwendungen jener Methode in einem besonderen Werke zu veröffentlichen und damit einem größeren Leserkreise zur Benutzung zu überweisen.

Die beiden ersten Abschnitte, welche die Grundzüge jener Methode erklären, sind ihrem wesentlichen Inhalte nach schon früher veröffentlicht.*) Die Methode selbst ist so einfach, daß

*) Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover, Band VII, Heft 4.

es für den Kundigen nur eines Blickes auf Seite 5 bedarf, um den Geist derselben zu erfassen; es liegt daher in der Natur der Sache, daß Aufgabenberechnungen und Anwendungen auf ausgeführte Konstruktionen den bei weitem größeren Teil des Inhaltes bilden.

Die in den Rechnungen vorkommenden Gleichungen sind fast ausschließlich numerische Gleichungen vom ersten Grade, bei denen von Schwierigkeiten keine Rede sein kann; überhaupt beschränken sich die zum Verständnis dieses Werkes erforderlichen Vorkenntnisse etwa auf dasjenige Maß, welches der Bauhandwerker von einer guten Baugewerbeschule mitbringt.

Wenn die Rechnungen beim ersten Anblick weitläufig erscheinen, so erklärt sich das aus der großen Ausführlichkeit und Vollständigkeit, mit welcher der Verfasser die Berechnung jedes einzelnen Konstruktionsteiles mitteilen zu müssen glaubte, um auch ungeübte Rechner, namentlich Praktiker, in den Stand zu setzen, die Aufgaben vollständig nachzurechnen. Wo gleichartige Rechnungsoperationen mehrfach wiederkehren, sind dieselben mit kleiner Schrift gedruckt, um dem Geübteren das Überschlagen des für ihn Überflüssigen zu erleichtern.

Der Verfasser glaubt, daß in dieser Form das vorliegende Werk von dem ausführenden Ingenieur wie auch beim Unterrichte auf höheren und niederen technischen Lehranstalten als Hilfsbuch mit Nutzen wird gebraucht werden können, und darf sich dabei sowohl auf seine eigenen Erfahrungen, als auch auf diejenigen seines Kollegen v. Kaven berufen, der in seinen Vorträgen über Eisenbahnbau die hier entwickelten Prinzipien bereits anzuwenden Gelegenheit hatte, und dem der Verfasser für vielfache anregende Mitteilungen und nützliche Ratschläge zu großem Danke verpflichtet ist.

Hannover, den 6. Oktober 1862.

August Ritter.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Bei der Bearbeitung dieser neuen Auflage hat der Verfasser durch Hinzufügung neuer Zahlenbeispiele die Brauchbarkeit des Buches zu erhöhen gesucht, daneben auch die Gelegenheit nicht unbenutzt gelassen, einzelne Lücken auszufüllen und Mängel, die sich inzwischen beim Gebrauche des Buches herausgestellt hatten, zu beseitigen.

Die Art und Weise, in welcher die Methode der statischen Momente in der ersten Auflage zur Berechnung von Dach- und Brückenkonstruktionen benutzt wurde, konnte zu Zweifeln hinsichtlich der allgemeinen Anwendbarkeit dieser Methode Veranlassung geben. Es konnte der Einwand erhoben werden, daß die Anwendung derselben als eine aus „Konstruktion“ und „Rechnung“ gemischte Operation sich darstelle, insofern bei der Berechnung der Spannungszahlen stets das Vorhandensein einer in großem Maßstabe ausgeführten Zeichnung vorausgesetzt wurde, auf welcher die Lage der Drehpunkte und die Längen der Hebelarme hinlänglich genau abgemessen werden konnten. Als ein fernerer Mangel konnte der Umstand erscheinen, daß bei allen in der ersten Auflage gegebenen Anwendungen stets nur gezeigt wurde, wie man bei einem der Form nach bereits fertig gegebenen Träger die Spannungszahlen berechnet — nicht aber, wie man zum Auffinden jener Form selbst gelangt.

Diesen beiden Einwänden zu begegnen, ist der Zweck des XI. Abschnittes in der neuen Auflage. Der erste Paragraph dieses Abschnittes zeigt, wie man in solchen Fällen, wo auf die Hilfe der Konstruktion verzichtet werden muß, die Bestimmung der Spannungszahlen ausschließlich auf dem Wege der Rechnung zu Ende führen kann, insofern die Drehpunkte und Hebelarme ebenfalls in sehr einfacher Weise auf dem Wege der Rechnung gefunden werden können. In den hierauf folgenden Paragraphen dieses Abschnittes ist alsdann gezeigt, wie man die Methode der

statischen Momente auch zum Auffinden rationeller Konstruktionsformen benutzen kann — solcher Formen nämlich, welche die Träger haben müssen, um gewissen vorgeschriebenen Bedingungen Genüge zu leisten.

Es sind außerdem einige in der ersten Auflage etwas dürftig ausgestattete Abschnitte bei der neuen Bearbeitung in größerer Ausführlichkeit behandelt worden, wie z. B. in der ersten Abteilung die Berechnung der „Gitterbrücken“, und in der zweiten Abteilung die Theorie der „kombinierten Systeme“. Die letztere ist durch Berücksichtigung des Einflusses der Temperaturänderungen vervollständigt und überdies gibt der XVI. Abschnitt in der Berechnung einer „kombinierten Gitter- und Hängebrücke“ eine Anwendung jener Theorie in größerem Maßstabe.

Da in diesem letzten Abschnitte einige Sätze aus der „Biegungstheorie“ und der Theorie der „elastischen Linie“ zur Anwendung kommen, so erschien es zweckmäßig, im XV. Abschnitte die betreffenden Hilfssätze einzuschalten, welche zum Teil des Verfassers „Lehrbuch der Méchanik“ entlehnt wurden.

Wenn in den letzteren beiden Abschnitten hier und da Anwendungen der Differential- und Integralrechnung vorkommen, obwohl der Titel des Buches eine „elementare Theorie“ ankündigt, so glaubt der Verfasser sich mit der Voraussetzung entschuldigen zu dürfen, daß trotz jener kleinen Ungehörigkeit die Hinzufügung des im letzten Abschnitte berechneten umfangreichen Zahlenbeispielles dem größeren Teile der Leser nicht unwillkommen sein würde, und hofft derselbe, daß das in seinen übrigen Teilen wiederum ganz elementar gehaltene Buch auch in dieser neuen mannigfach veränderten Gestalt als nützlich sich erweisen wird.

Hannover, den 1. November 1869.

August Ritter.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die vorliegende dritte Auflage ist — abgesehen von einigen unwesentlichen Verbesserungen und Berichtigungen — ein unveränderter Abdruck der zweiten Auflage und bedarf daher keiner weiteren Vorrede. Der Verfasser glaubt jedoch die ihm hier gebotene Gelegenheit benutzen zu müssen, um den Untersuchungen des sechzehnten Abschnittes an dieser Stelle einige erläuternde Bemerkungen beizufügen, zu welchem ihm eine inzwischen unter dem Titel „Beiträge zur Theorie der kombinierten Gitter- und Hängebrücken von Hugo B. Buschmann“ erschienene Broschüre Veranlassung gibt.

In der genannten Abhandlung wird die Zulässigkeit der Beweisführung angefochten, mittelst welcher in den Paragraphen 56 . . . 61 die Gleichungen abgeleitet werden für die von der mobilen Last hervorgebrachten Spannungen des Gitterbalkens. Herr B. behauptet: dieselbe beruhe auf ganz willkürlichen Voraussetzungen, und glaubt die Unzulässigkeit derselben nachzuweisen, indem er hinzufügt: es würde aus jener Beweisführung folgen, daß bei gewissen Belastungszuständen — nämlich bei Belastung der beiden Endstrecken der Brückenbahn — in der Mitte des Gitterbalkens ein negatives Biegemoment hervorgebracht werde, d. h. eine solche Biegung, bei welcher die Konvexität der Biegungskurve nach oben gerichtet ist; hierdurch werde aber für den mittleren Teil der hängenden Kette eine Vergrößerung des Krümmungshalbmessers, und damit zugleich eine Verkürzung des Kettenteiles selbst bedingt, von welcher letzteren doch vernünftigerweise nicht die Rede sein könne.

Diese Schlußfolgerung beruht jedoch in ihrem letzteren Teile auf einem Irrtum. Herr B. übersieht, daß bei den unendlich kleinen Formänderungen der Kettenlinie — und von unendlich kleinen Formänderungen kann überhaupt nur die Rede sein — die Annahme von horizontalen Verschiebungen der Ketten-

punkte durchaus nicht ausgeschlossen ist. Wenn die Krümmungshalbmesser des mittleren Kettenteiles sämtlich sich vergrößerten, und zugleich der Abstand zwischen den beiden Endpunkten dieses Bogenstückes dabei unverändert bliebe, dann würde allerdings ein solches Flacherwerden des zu jener unveränderlichen Sehne gehörigen Bogens zugleich eine Verringerung seiner Länge bedingen. Wenn jedoch die Endpunkte dieses Kettenteiles zugleich in horizontaler Richtung nach außen hin ausweichen, so ist es sehr wohl möglich, daß mit jener Vergrößerung der Krümmungshalbmesser nicht nur keine Verkürzung, sondern sogar eine Verlängerung des Kettenteiles verbunden ist. Letztere findet in der That statt, nicht nur bei dem oben erwähnten, sondern überhaupt bei jedem Belastungszustande.

Aachen, den 1. November 1872.

August Ritter.

Inhalt.

Erste Abteilung

Berechnung der Spannungszahlen

Erster Abschnitt

	Seite
§ 1. Vorbemerkungen	1
§ 2. Methode der statischen Momente	3
§ 3. Dach von hundert Fuß Spannweite. (Exerzierhaus der Kaserne am Welfenplatze in Hannover)	8
§ 4. Dach von 32 m Spannweite	12

Zweiter Abschnitt

§ 5. Anwendung der Methode auf die Berechnung der Brückenkonstruktionen	14
§ 6. Parabolischer Träger von 16 m Spannweite mit einfachem Diagonalsystem	18
§ 7. Abgeleitete Formen	23
§ 8. Theorie der parabolischen Träger	29

Dritter Abschnitt

§ 9. Anwendung der Methode auf die Berechnung von Fachwerkbrücken mit parallelen Gurtungen	33
§ 10. Fachwerkbrücke von 16 m Spannweite mit einfachem Diagonalsystem	37
§ 11. Abgeleitete Formen	41
§ 12. Bemerkungen über die Zulässigkeit der in bezug auf die Belastungsweise gemachten Voraussetzungen	47
§ 13. Fachwerkträger mit gleichseitigen Dreiecken. (Trentbrücke bei Newark)	50
§ 14. Zusammengesetzte Fachwerkträger und Gitterbrücken	58

Vierter Abschnitt

§ 15. Sichelförmiger Träger von 208 Fuß Spannweite mit einfachem Diagonalsystem. (Dachkonstruktion der Zentralbahnhofshalle in Birmingham)	73
--	----

	Seite
§ 16. Abgeleitete Formen	85
§ 17. Scheinbare Mängel der Methode	92
§ 18. Theorie der sichelförmigen Träger	94

Fünfter Abschnitt

§ 19. Hängendes Perrondach von 6 m Vorsprungsweite	106
§ 20. Perrondach ohne Hängestange	112

Sechster Abschnitt

§ 21. Sprengwerkbrücke von 24 m Spannweite	114
§ 22. Bogenbrücke von 40 m Spannweite. (Theißbrücke bei Szegedin).	126
§ 23. Stabilität der Pfeiler	149
§ 24. Theorie der Scharnierbrücken	152

Siebenter Abschnitt

§ 25. Transformation der Spannungszahlen für veränderte Spannweiten	158
a. Parabolische Träger	160
b. Fachwerkbrücken mit parallelen Gurtungen	161
c. Bogen- und Hängebrücken	163

Achter Abschnitt

§ 26. Hängebrücke von 120 m Spannweite der Hauptöffnung und je 60 m Spannweite der Nebenöffnungen	165
§ 27. Stabilität der Mittelpfeiler	181
§ 28. Stabilität der Landpfeiler	186

Neunter Abschnitt

§ 29. Kuppelförmige Dachkonstruktionen	188
§ 30. Kuppel von 100 m Spannweite	190
§ 31. Vorteilhaftestes Krümmungsprofil der Kuppeln	203
§ 32. Kuppel mit gegliederten Rippen und Ringen	205

Zehnter Abschnitt

§ 33. Balkenbrücken mit mehreren Öffnungen	214
§ 34. Balkenbrücke von 160 m Spannweite der Mittelöffnung und je 130 m Spannweite der Seitenöffnungen	219
§ 35. Vorteilhafteste Einteilung der Spannweite	230

Elfter Abschnitt

§ 36. Bestimmung der Drehpunkte und Hebelarme auf dem Wege der Rechnung	236
§ 37. Anwendung der Methode der statischen Momente zur Ermittlung einer gewisse vorgeschriebene Bedingungen erfüllenden Form des Trägers	242

	Seite
§ 38. Schwedlerscher Träger	245
§ 39. Träger mit gleichen Maximalspannungen der Diagonalen	251
§ 40. Träger mit gleichen Spannungen im Bogen. (Pauli'scher Träger)	257

Zweite Abteilung

**Bestimmung der erforderlichen Querschnittsdimensionen
nebst Untersuchungen über die Elastizitätswiderstände be-
lasteter Träger**

Zwölfter Abschnitt

§ 41. Bestimmung der Querschnitte für die Teile der Hauptkonstruktion	269
§ 42. Absteifung gegen Seitendruck des Windes und horizontale Stöße	271
§ 43. Berechnung der Zwischenträger	275

Dreizehnter Abschnitt

§ 44. Durchbiegung belasteter Träger	289
§ 45. Senkung des Scheitels bei parabolischen Trägern	293
§ 46. Durchbiegung der Fachwerk- und Gitterbrücken	296

Vierzehnter Abschnitt

§ 47. Theorie der zusammengesetzten Systeme	299
§ 48. Fachwerkträger ohne Diagonalen	306
§ 49. Einfluß der Temperaturänderungen	310

Fünfzehnter Abschnitt

§ 50. Widerstand des prismatischen Balkens gegen Biegung	315
§ 51. Elastische Linie	325
§ 52. Widerstand gegen Zerknicken	340

Sechzehnter Abschnitt

Berechnung einer kombinierten Gitter- und Hängebrücke von
60 m Spannweite.

§ 53. Voruntersuchung zur Ermittlung des vorteilhaftesten Höhenver- hältnisses	347
§ 54. Berechnung der durch Temperaturänderungen hervorgebrachten Spannungen	351
§ 55. Berechnung der von der permanenten Belastung hervorgebrachten Spannungen	354
§ 56. Berechnung der von einer ungleichförmig über die Brückenlänge verteilten Belastung hervorgebrachten Spannungen	355
§ 57. Ermittlung der ungünstigsten Belastungszustände für den Gitter- balken	360
§ 58. Berechnung der von der mobilen Last in den Gurtungen des Gitter- balkens hervorgebrachten Spannungen	363

	Seite
§ 59. Berechnung der Maximalspannungen in den Gurtungen des Gitterbalkens	366
§ 60. Berechnung der von der mobilen Last hervorgebrachten Abscherungskraft	368
§ 61. Berechnung der Maximalspannungen in den Gitterstäben	369
§ 62. Berechnung der Spannungen in den Windketten und Windstreben	370
§ 63. Einfluß der Dehnung der Spannketten	374
§ 64. Rekapitulation der Rechnungsergebnisse	377
§ 65. Vorteilhafteste Aufhängerweise für den Gitterbalken	380
§ 66. Rechtfertigung der angewendeten Methode	384



ERSTER ABSCHNITT.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Bei größeren Dach- und Brückenkonstruktionen ist richtige und möglichst sparsame Verteilung des Materials Haupterfordernis, nicht allein, weil die Kosten des Materials vergleichsweise groß sind gegen die Arbeitskosten bei solchen Bauwerken, sondern vielmehr deshalb, weil das verwendete Material eine tote Last bildet, von deren Kleinheit oft die Möglichkeit des ganzen Unternehmens abhängt. Eine gute Konstruktion soll der Forderung genügen, daß überall die Widerstandsfähigkeit des Materials vollkommen ausgenutzt und nirgends überflüssiges Material verwendet wird. Diese Bedingung läßt sich auch so formulieren: alle Teile der Konstruktion sollen — ein jeder bei dem für ihn ungünstigsten Belastungszustande — das Maximum der für zulässig erachteten Spannung erreichen.

Bei Stäben, welche der Länge nach gezogen oder gedrückt werden, ist diese Bedingung erfüllbar, weil in allen Punkten der Querschnittsfläche eines solchen Stabes stets gleiche Spannung stattfindet. Bei Stäben, deren Biegungswiderstand in Anspruch genommen wird, hingegen nie, da die von der Biegung herrührenden Spannungen immer ungleichmäßig im Innern des Stabes sich verteilen. Eine gute Konstruktion soll daher wo möglich aus Teilen zusammengesetzt sein, in denen nur Längsspannungen — keine Biegungsspannungen — vorkommen, also aus gezogenen und gedrückten Stangen.

In der Praxis hat sich das Streben nach diesem Ziele bereits bemerkbar gemacht; in dem Maße, wie man zu immer größeren Unternehmungen vorschritt, hat man derartigen Konstruktionen mehr und mehr sich angenähert. Das Streben, Material zu sparen, führte vom massiven rechteckigen Balken zum I- und II-förmigen

Querschnitt und indem man ferner die massive Blechwand durch einzelne Stangen ersetzen lernte, gelangte man schließlich zu jenen Stangenverbindungen, in denen nur Längsspannungen vorkommen. Die eisernen Dächer, sowie die Gitter- und Fachwerkbrücken der neueren Zeit sind Beispiele derartiger Konstruktionen.

Die oben genannte Bedingung erfordert, daß die Stangen in den Verbindungspunkten durch einfache Gelenkbolzen (Scharniere) verbunden werden. Wenn statt des einfachen Gelenkbolzens, welcher die Drehung der Stange um ihren Endpunkt nicht hindert, mehrfache Vernietung angewendet wird, wie man das noch gegenwärtig bei vielen Gitter- und Fachwerkbrücken sieht, so wird der Zweck teilweise verfehlt, da in diesem Falle Biegungsspannungen unvermeidlich den Längsspannungen sich zugesellen. Abgesehen von der unvorteilhafteren Materialverwendung tritt dann noch der bei größeren, wichtigen Bauten nicht unerhebliche Übelstand ein, daß die wirklichen Maximalspannungen der Kontrolle mehr oder weniger sich entziehen, während bei theoretisch richtigen Konstruktionen die Spannung in jedem Teile auf das Genaueste ermittelt werden kann. Es ist bemerkenswert, daß gerade die den Anforderungen der Theorie entsprechenden Konstruktionen auch zugleich auf die einfachste Weise sich berechnen lassen.

Bei allen nachfolgend gewählten Beispielen wird durchweg vorausgesetzt, daß je zwei Stangen da, wo sie zusammentreffen, durch einen Gelenkbolzen verbunden sind. Zugleich wird angenommen, daß diese Gelenkpunkte ausschließlich die Belastungspunkte bilden. Eine solche Lastverteilung kann immer verwirklicht werden durch Einschaltung besonderer Zwischenträger, welche gleichsam als kleinere Brücken die Abteilungen zwischen den einzelnen Gelenkpunkten überbrücken. Wie weit es zweckmäßig ist, diese Zwischenträger als gesonderte Teile zu konstruieren oder vielmehr sie mit der Hauptkonstruktion nachher zu verschmelzen, diese Frage wird in einem späteren Abschnitt erörtert werden.

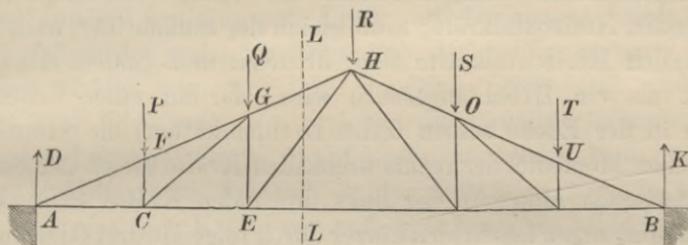
Was das Eigengewicht der Konstruktion betrifft, so soll dasselbe wie eine gleichförmig über die ganze Spannweite ausgebreitete Belastung angesehen werden, welche ebenfalls nach dem obigen Gesetze auf die einzelnen Belastungspunkte sich verteilt — eine Annahme, deren Zulässigkeit gleichfalls gelegentlich einer näheren Prüfung unterzogen werden soll.

§ 2.

Methode der statischen Momente.

Die Gewichte P, Q, R, S, T bilden die Totalbelastung der in Fig. 1 dargestellten Konstruktion und sind als in den oberen

Fig. 1.



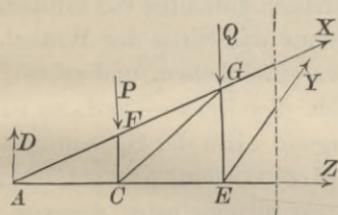
Knotenpunkten resp. F, G, H, O, U aufgehängt zu betrachten. Diese fünf Belastungen erzeugen an den beiden Auflagerpunkten A und B die Gegendrücke D und K , welche zusammen so viel wie die ganze Belastung betragen und nach den bekannten Regeln der Statik leicht berechnet werden können. Wenn z. B. die ganze Spannweite AB durch die Vertikalen der Belastungspunkte in sechs gleiche Teile zerlegt wird, so ergeben sich für diese Gegendrücke die Werte:

$$D = \frac{1}{6} T + \frac{2}{6} S + \frac{3}{6} R + \frac{4}{6} Q + \frac{5}{6} P$$

$$K = \frac{5}{6} T + \frac{4}{6} S + \frac{3}{6} R + \frac{2}{6} Q + \frac{1}{6} P.$$

Trennt man durch einen Schnitt nach der Linie LL die ganze Stangenverbindung in zwei Teile, so wird jeder der beiden Teile,

Fig. 2.



z. B. der Teil A (Fig. 2), nur dann im Gleichgewichte bleiben, wenn bei jeder der durchschnittenen Stangen an der Schnittstelle eine Kraft hinzugefügt wird, welche die Wirkung des abgeschnittenen Teiles genau ersetzt. Diese Kraft muß allemal mit der Richtung der Stange zusammenfallen, da sie sonst die

Stange um ihren Endpunkt drehen würde; sie ist eben das, was man die Spannung der Stange nennt.

Die Spannungen X , Y , Z der drei durchschnittenen Stangen sind also Kräfte, welche in Verbindung mit den übrigen Kräften D , P , Q den Teil A im Gleichgewicht erhalten. Die Richtungen sämtlicher Kräfte liegen in einer und derselben vertikalen Ebene und für solche Kräfte gelten bekanntlich folgende drei Gleichgewichtsbedingungen: erstens, die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Kräfte muß gleich der Summe der vertikal abwärts wirkenden Kräfte sein; zweitens: die Summe der nach rechts wirkenden Horizontalkräfte muß gleich der Summe der nach links wirkenden Horizontalkräfte sein; drittens: muß (indem das ganze Stück als ein Hebel angesehen wird, der an einer beliebigen Stelle in der Ebene seinen festen Drehpunkt hat) die Summe der statischen Momente der rechts drehenden Kräfte gleich der Summe der statischen Momente der links drehenden Kräfte sein. Diese drei Bedingungen lassen sich kürzer durch folgende drei Gleichungen ausdrücken:

$$\sum (H) = 0, \quad \sum (V) = 0, \quad \sum (M) = 0,$$

worin allgemein: H die horizontale Seitenkraft, V die vertikale Seitenkraft, M das statische Moment einer Kraft bedeutet, und das Zeichen \sum ausdrückt, daß die Kräfte oder Momente mit Berücksichtigung ihrer Richtungen als positive und negative Größen zu einer algebraischen Summe zusammengefaßt werden sollen. Da auch jene unbekanntenen Spannungen zu diesen Größen ihre Beiträge liefern, so lassen sich aus diesen drei Gleichungen die drei unbekanntenen Größen X , Y , Z berechnen. In gleicher Weise können durch andere Schnitte und Wiederholung desselben Verfahrens die Spannungen der übrigen Stangen bestimmt werden.

Diese Methode führt zwar immer sicher zum Ziele, leidet aber an zwei wesentlichen Mängeln. Erstlich enthalten die Größen H und V in jenen Gleichungen die Cosinus und Sinus der Winkel, welche die Stangen mit der Horizontalen einschließen, und müssen diese Größen also zuvor bestimmt werden. Zweitens — und das ist der Hauptübelstand — muß man, um irgend eine der Spannungen zu bestimmen, im allgemeinen allemal drei Gleichungen auflösen.

Es gibt eine einfache Methode von allgemeiner Anwendbarkeit, welche frei von diesen Übelständen ist. Dieselbe besitzt außerdem den Vorzug, daß sie nur das Gesetz des Hebels (in seiner allgemeineren Form das Gesetz der statischen Momente)

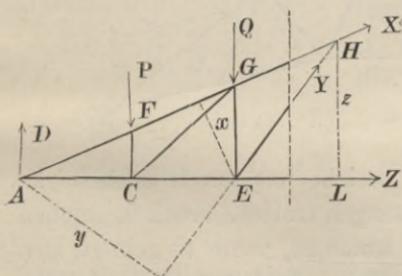
als bekannt voraussetzt, somit von jedem, der die Anfangsgründe der Mechanik kennt, mit Verständnis angewendet werden kann. Diese Methode besteht darin, daß man von jenen drei Gleichungen ausschließlich die dritte, nämlich die Gleichung der statischen Momente, zur Lösung der Aufgabe benutzt. Man kann nämlich die Freiheit der Wahl des Drehpunktes für die statischen Momente sich zu nutze machen in der Weise, daß man zur Bestimmung der einen unbekannt Kraft allemal den Durchschnittspunkt der beiden anderen unbekannt Kräfte als Drehpunkt wählt. Dadurch fallen die statischen Momente der beiden anderen unbekannt Kräfte weg, weil ihre Hebelarme Null sind, und man erhält eine Gleichung, aus welcher die gesuchte Spannung als einzige unbekannt Größe direkt bestimmt werden kann.

Als Hilfsgrößen kommen in der Rechnung nur die Hebelarme der einzelnen Kräfte vor und diese brauchen nicht berechnet zu werden, sondern lassen sich mit hinlänglicher Genauigkeit in der Zeichnung direkt abmessen.

Die allgemeine Regel, welche sich hieraus ergibt, läßt sich in folgenden Worten aussprechen:

Man denke sich die Konstruktion in zwei Teile zerlegt durch einen Schnitt, welcher wo möglich nur drei Stangen trifft, und denke sich an den Schnittstellen die Kräfte X , Y , Z angebracht, welche die Spannungen der drei durchgeschnittenen Stangen bilden. Man stelle für einen jener beiden Teile die Gleichung der statischen Momente auf und wähle, wenn man X bestimmen will, den Durchschnittspunkt von Y und Z als Drehpunkt. Will man Y bestimmen, so wähle man den Durchschnittspunkt von X und Z als Drehpunkt. Will man Z bestimmen, so wähle man den Durchschnittspunkt von X und Y als Drehpunkt.

Fig. 3.



Bei der oben gewählten Aufgabe würde man also z. B. zur Bestimmung der Kraft X den Durchschnittspunkt E (Fig. 3) der beiden Kräfte Y , Z als

Drehpunkt wählen und erhielte dann die Gleichung:

$$X \cdot x - P \cdot \overline{CE} + D \cdot \overline{AE} = 0,$$

oder:

$$X = \frac{P \cdot \overline{CE} - D \cdot \overline{AE}}{x}.$$

Zur Bestimmung von Y wählt man den Durchschnittspunkt A der beiden Kräfte X, Z als Drehpunkt und erhält die Gleichung:

$$-Y \cdot y + P \cdot \overline{AC} + Q \cdot \overline{AE} = 0,$$

oder:

$$Y = \frac{P \cdot \overline{AC} + Q \cdot \overline{AE}}{y}.$$

Zur Bestimmung von Z wählt man den Durchschnittspunkt H der beiden Kräfte X, Y als Drehpunkt und erhält die Gleichung:

$$-Z \cdot z - Q \cdot \overline{EL} - P \cdot \overline{CL} + D \cdot \overline{AL} = 0,$$

oder:

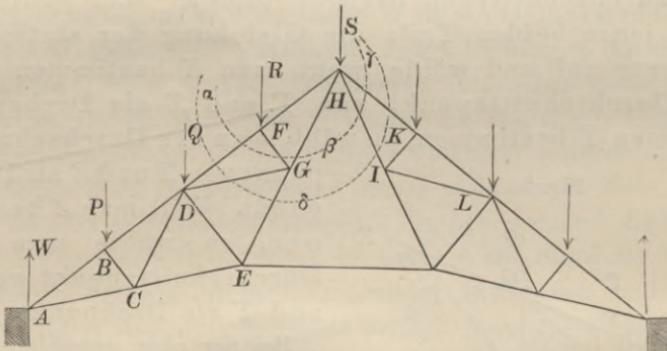
$$Z = \frac{-Q \cdot \overline{EL} - P \cdot \overline{CL} + D \cdot \overline{AL}}{z}.$$

Es ist überflüssig, nachzuweisen, daß in gleicher Weise jede der übrigen Spannungen bestimmt werden kann.

Diese Methode führt direkt zum Ziele bei allen solchen Stangenverbindungen, in denen jede einzelne Stange sich erreichen läßt durch einen Schnitt, welcher nicht mehr als drei Stangen trifft.

Bei komplizierteren Konstruktionen, wie die in Fig. 4 dargestellte, kann der Fall eintreten, daß einzelne Stangen übrig

Fig. 4.



bleiben, wie z. B. FG, DG, DE , welche nur durch Schnitte zu erreichen sind, die mehr als drei Stangen treffen. Auch in solchen Fällen kann man direkt zum Ziele kommen, wenn es gelingt, den Schnitt — der nach Belieben geradlinig oder krummlinig geführt werden kann — so zu legen, daß sämtliche geschnittene Stangen

Die Vorzüge der angegebenen Methode machen sich somit auch bei den komplizierteren Aufgaben, wie die zuletzt als Beispiel gewählte, noch geltend. Sie springen noch mehr in die Augen, wenn man erwägt, daß nur der Anfänger nötig haben wird, für die einzelnen Berechnungen besondere Figuren sich zu machen. Der Geübtere wird mit Leichtigkeit sämtliche Gleichungen direkt aus der Hauptfigur abschreiben lernen.

Nachdem an den obigen Beispielen die Methode in ihren allgemeinen Grundzügen erklärt worden ist, werden die Einzelheiten der Anwendung am besten an bestimmten Zahlenbeispielen zu erläutern sein. Zum Verständnis der nachfolgenden Rechnungen wird es ausreichen, wenn für einzelne Stangen, die als Repräsentanten anderer gleichliegender zu betrachten sind, die Konstruktion und Berechnung ausführlich mitgeteilt, für die übrigen dagegen nur die allgemeine Momentengleichung aufgestellt wird.

Was die Bedeutung des Vorzeichens der Momente betrifft, so ist es zwar an sich gleichgültig, ob man den rechtsdrehenden oder den linksdrehenden Momenten das positive Vorzeichen gibt. Um Irrungen zu vermeiden, empfiehlt es sich jedoch, eine gewisse Konsequenz in der Wahl des Vorzeichens zu beobachten, und sollen deshalb in den nachfolgenden Rechnungen durchweg die Momente der rechts herumdrehenden Kräfte*) als positive, die der links herumdrehenden Kräfte als negative Größen aufgeführt werden.

Es sollen ferner — wie schon bei den vorigen Beispielen gesehen ist — sämtliche Spannungen als Zugspannungen aufgefaßt werden. Positive Spannungen bedeuten also wirkliche Zugspannungen. Negative Spannungen bedeuten Druckspannungen.

§ 3.

Dach von hundert Fuß Spannweite.

(Exerzierhaus der Kaserne am Wolfenplatz in Hannover.)

Das Gewicht des ganzen Daches beträgt pro Quadratfuß der Grundrißfläche 11,3 \mathcal{U} . Für Schnee- und Winddruck wurden 20 \mathcal{U} pro Quadratfuß gerechnet. Die Totalbelastung beträgt demnach 31,3 \mathcal{U} pro Quadratfuß.

*) D. h. derjenigen Kräfte, welche das Stück so zu drehen streben, wie der Zeiger einer Uhr sich dreht.

Die Entfernung der einzelnen Binder voneinander beträgt $15\frac{1}{3}$ Fuß, die Spannweite 100 Fuß; auf jeden Binder kommen also:

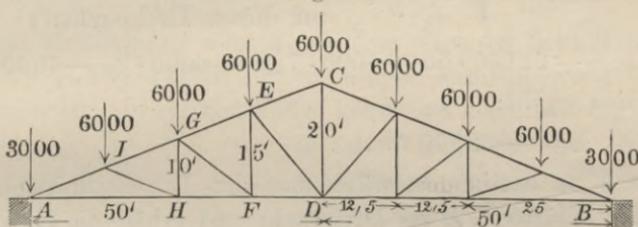
$$15\frac{1}{3} \cdot 100 \text{ Quadratfuß der Grundrißfläche,}$$

folglich

$$15\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 31,3 \text{ \$/ Druck}$$

oder in runder Summe 48000 \$ Totalbelastung. Für jede der acht Abteilungen (s. Fig. 8) beträgt daher die Belastung 6000 \$.

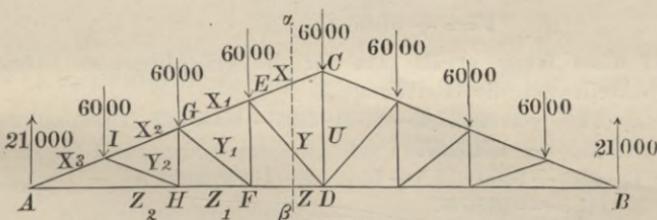
Fig. 8.



Wenn man sich — der in der Einleitung erwähnten Voraussetzung gemäß — in jeder Abteilung diese 6000 \$ mittelst eines besonderen Zwischenträgers zur Hälfte auf jeden der beiden angrenzenden Knotenpunkte übertragen denkt, so kommen auf jeden der sieben mittleren Knotenpunkte 6000 \$ Belastung, auf jeden der beiden Endpunkte 3000 \$, welche letzteren beiden Gewichte von den Auflagerpunkten direkt aufgenommen werden. Jeder der beiden Auflagerpunkte trägt im ganzen 24000 \$, und ist also mit Abrechnung der direkt aufgenommenen 3000 \$ der Gegendruck derselben gegen die Stangenverbindung 21000 \$

Es wirken also überhaupt neun äußere Kräfte auf die Stangenverbindung: sieben abwärtswirkende von je 6000 \$ auf die sieben mittleren Knotenpunkte, und zwei aufwärtswirkende von je 21000 \$ an den beiden Auflagerpunkten.

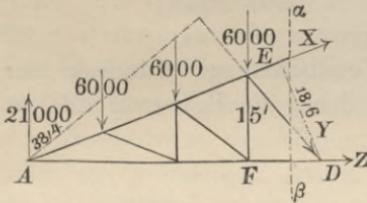
Fig. 9.



Um die Spannungen X , Y , Z im Mittelfelde (s. Fig. 9) zu bestimmen, denkt man sich durch einen Schnitt $\alpha\beta$ den einen

Teil (Fig. 10) von dem anderen getrennt und durch die an den Schnittstellen angebrachten Kräfte X , Y , Z den Gleichgewichtszustand wieder hergestellt. Sieht man das ganze Stück (Fig. 10) als einen Hebel an, der in D seinen festen Drehpunkt hat, so erhält man als Gleichung der statischen Momente in Beziehung auf diesen Drehpunkt:*)

Fig. 10.



$0 = X \cdot 18,6 + 21000 \cdot 50 - 6000 \cdot 12,5 - 6000 \cdot 25 - 6000 \cdot 37,5$,
woraus sich ergibt:

$$X = -32300 \text{ H.}$$

Um Y zu bestimmen, wählt man den Durchschnittspunkt A der beiden Kräfte X , Z als Drehpunkt und erhält die Gleichung:

$$0 = Y \cdot 38,4 + 6000 \cdot 12,5 + 6000 \cdot 25 + 6000 \cdot 37,5$$

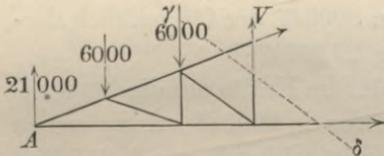
$$Y = -11700 \text{ H.}$$

Zur Bestimmung von Z dient die Momentengleichung in Beziehung auf den Punkt E :

$$0 = -Z \cdot 15 + 21000 \cdot 37,5 - 6000 \cdot 12,5 - 6000 \cdot 25$$

$$Z = +37500 \text{ H.}$$

Fig. 11.



Um die Spannung V der angrenzenden Vertikalstange zu ermitteln, legt man den Schnitt schräg in der Richtung $\gamma \delta$ (s. Fig. 11) und wählt den Durchschnittspunkt A der beiden mitdurchschnittenen Stangen als

Drehpunkt. Man erhält dann die Momentengleichung:

$$0 = -V \cdot 37,5 + 6000 \cdot 12,5 + 6000 \cdot 25$$

$$V = +6000 \text{ H.}$$

Auf diese Weise erhält man für die gleichliegenden Stücke der übrigen Abteilungen die Gleichungen:

$$0 = X_1 \cdot 13,9 + 21000 \cdot 37,5 - 6000 \cdot 12,5 - 6000 \cdot 25 \text{ (Drehpunkt } F)$$

$$X_1 = -40400 \text{ H.}$$

$$0 = Y_1 \cdot 23,5 + 6000 \cdot 12,5 + 6000 \cdot 25 \text{ (Drehpunkt } A)$$

$$Y_1 = -9570 \text{ H.}$$

*) Die Bestimmung der Hebelarme auf dem Wege der Rechnung findet man im 11. Abschnitte dieses Buches.

$$0 = -Z_1 \cdot 10 + 21000 \cdot 25 - 6000 \cdot 12,5 \text{ (Drehpunkt } G)$$

$$Z_1 = +45000 \text{ } \ell.$$

$$0 = -V_1 \cdot 25 + 6000 \cdot 12,5 \text{ (Drehpunkt } A)$$

$$V_1 = +3000 \text{ } \ell.$$

$$0 = X_2 \cdot 9,3 + 21000 \cdot 25 - 6000 \cdot 12,5 \text{ (Drehpunkt } H)$$

$$X_2 = -48400 \text{ } \ell.$$

$$0 = Y_2 \cdot 9,3 + 6000 \cdot 12,5 \text{ (Drehpunkt } A)$$

$$Y_2 = -8100 \text{ } \ell.$$

$$0 = -Z_2 \cdot 5 + 21000 \cdot 12,5 \text{ (Drehpunkt } J)$$

$$Z_2 = +52500 \text{ } \ell.$$

Zur Bestimmung von X_3 endlich wäre der Schnitt nach der Linie $\lambda \mu$ (s. Fig. 12) zu führen, welche ausnahmsweise nur zwei Stangen trifft. In solchen Fällen kann man einen beliebigen Punkt in der Richtung der mitdurchschnittenen Stange als Drehpunkt wählen, z. B. hier den Punkt D ; man erhält somit die Gleichung:

$$0 = X_3 \cdot 18,6 + 21000 \cdot 50$$

$$X_3 = -56500 \text{ } \ell.$$

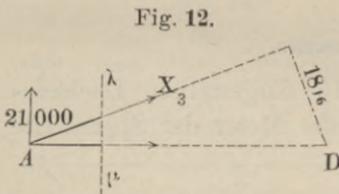
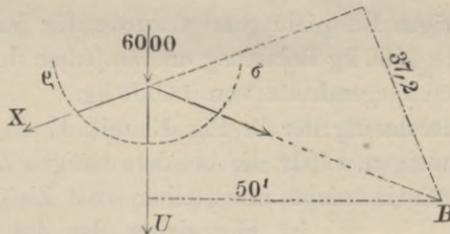


Fig. 12.

Die einzige Stange, deren Spannung nicht unmittelbar nach der vorigen Methode bestimmt werden kann, ist die Vertikalstange in der Mitte.

Um die Spannung U zu berechnen, muß die Spannung einer der angrenzenden Stangen schon vorher bestimmt sein. Nachdem

Fig. 13.



nun $X = -32300 \text{ } \ell$ bereits gefunden ist, kann man zur Bestimmung von U z. B. den Schnitt $\rho \sigma$ (s. Fig. 13) führen und den Punkt B als Drehpunkt wählen. Es führt dies zu der Momentengleichung:

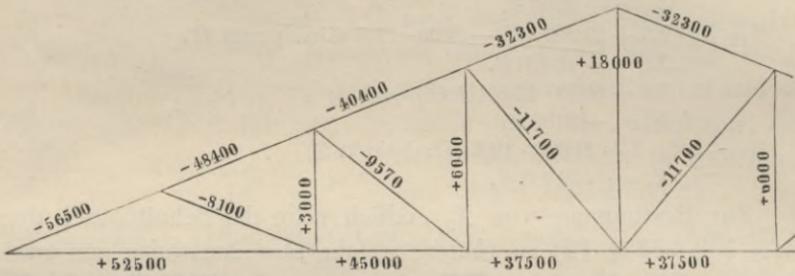
$$0 = -U \cdot 50 - 6000 \cdot 50 - (-32300) \cdot 37,2,$$

woraus sich ergibt:

$$U = +18000 \text{ } \ell.$$

Die Resultate der obigen Rechnung sind in Fig. 14 übersichtlich zusammengestellt.

Fig. 14.

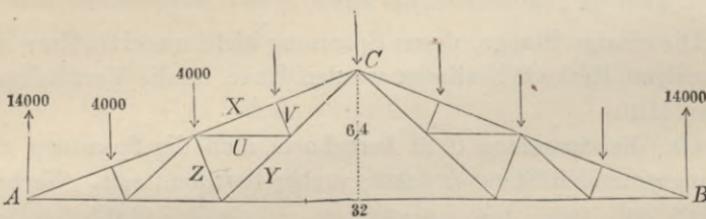


§ 4.

Dach von 32 m Spannweite.

Als Totalbelastung der in Fig. 15 dargestellten Dachkonstruktion sind 32000 kg, also für jedes Meter der Spannweite

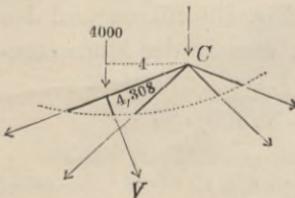
Fig. 15.



1000 kg angenommen. Man erhält demnach auf dieselbe Art, wie an dem vorigen Beispiele gezeigt wurde, für jeden der sieben Belastungspunkte 4000 kg Belastung und an jedem der beiden Auflagerpunkte einen Gegendruck von 14000 kg.

Bei der Berechnung der in Fig. 15 mit V , U , X , Y , Z bezeichneten Spannungen würde die bei dem vorigen Zahlenbeispiele angewendete Methode nicht unmittelbar zum Ziele führen. Es ist hier daher das am Schlusse des § 2 erklärte Verfahren anzuwenden.

Fig. 16.



Um die Spannung V zu berechnen, hat man sich den in Fig. 16 dargestellten Teil aus der ganzen Stangenverbindung herausgeschnitten zu denken und die Gleichung der statischen Momente aufzustellen in

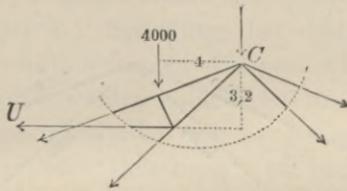
bezug auf den Punkt C als Drehpunkt; man erhält dann die Gleichung:

$$0 = -V \cdot 4,308 - 4900 \cdot 4,$$

oder

$$V = -3714 \text{ kg.}$$

Fig. 17.



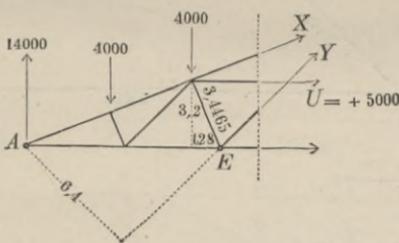
Auf ähnliche Weise findet man die Spannung U , indem man für den in Fig. 17 dargestellten Teil die Gleichung der statischen Momente aufstellt, nämlich aus der Gleichung:

$$0 = U \cdot 3,2 - 4000 \cdot 4$$

oder

$$U = +5000 \text{ kg.}$$

Fig. 18.



Nachdem die Spannung U gefunden ist, kann man nunmehr die Spannung X aus Fig. 18 bestimmen, indem man den Punkt E als Drehpunkt wählt und für U den gefundenen Wert substituiert, aus der Gleichung:

$$0 = X \cdot 3,4465 + 14000 \cdot 9,28 - 4000 (1,28 + 5,28) + 5000 \cdot 3,2,$$

oder:

$$X = -34725 \text{ kg.}$$

Ebenso findet man die Spannung Y , indem man den Punkt A als Drehpunkt wählt, aus der Gleichung:

$$0 = -Y \cdot 6,4 + 4000 (4 + 8) + 5000 \cdot 3,2,$$

oder:

$$Y = +10000 \text{ kg.}$$

Zur Bestimmung der in Fig. 15 mit Z bezeichneten Spannung würde man den Schnitt in schräger Richtung links an dem Punkte E vorbeizuführen haben und in bezug auf den Punkt A als Drehpunkt die Gleichung erhalten:

$$0 = Z \cdot 8,616 + 4000 (4 + 8) + 5000 \cdot 3,2,$$

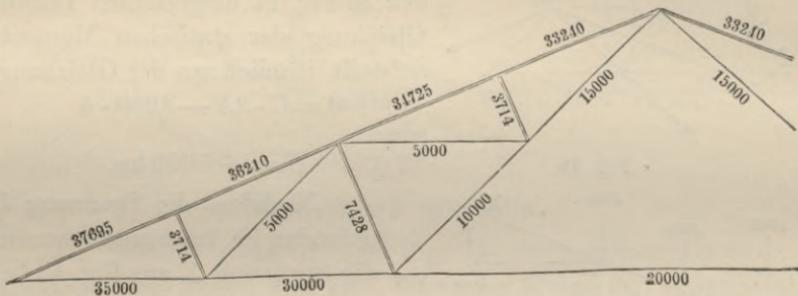
oder:

$$Z = -7428 \text{ kg.}$$

Von den übrigen neun Stangen (der linken Hälfte) kann eine jede erreicht werden durch einen Schnitt, welcher nicht mehr als drei Stangen trifft. Die Spannungen derselben können daher ohne weiteres mittels des bei dem vorigen Zahlenbeispiele angewendeten

Verfahrens berechnet werden. Die Resultate dieser Berechnung sind in Fig. 19 zusammengestellt. Da negative Spannungszahlen Druckspannungen bedeuten, so sind in der Figur diejenigen Stangen, deren Spannungszahlen negativ sind, durch Doppellinien als gedrückte Stangen gekennzeichnet, und dafür die Minuszeichen vor jenen Zahlen weggelassen.

Fig. 19.



ZWEITER ABSCHNITT.

§ 5.

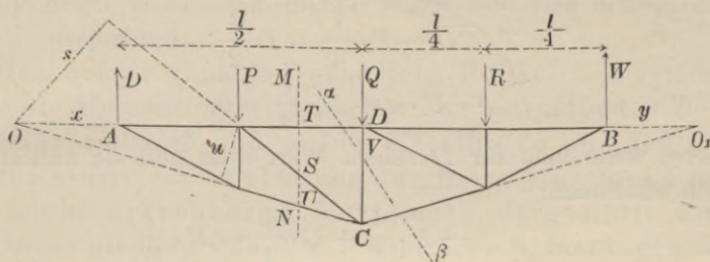
Anwendung der Methode auf die Berechnung von Brückenkonstruktionen.

Ein Hauptvorzug der empfohlenen Methode besteht, wie oben bereits hervorgehoben wurde, darin, daß man aus der Konstruktion ein beliebiges Stück herausgreifen und sofort durch eine einzige Gleichung die Spannung in demselben bestimmen kann. Dazu kommt aber noch ein zweiter, welcher sie zu der Berechnung der Brückenträger ganz besonders geeignet macht. Jene eine Gleichung läßt nämlich aus ihrem Bau sogleich erkennen, welche von den Belastungen auf Vermehrung und welche von den Belastungen auf Verminderung der Spannung in dem betreffenden Stücke hinwirken. Um also das Maximum der Spannung zu finden, braucht man nur alle diejenigen Belastungen aus der Gleichung fortzulassen, welche auf Verminderung hinwirken. Um das Minimum zu finden (welches eventuell als negative Größe Maximum der Druckspannung bedeutet), läßt man alle diejenigen Belastungen fort, welche auf Vermehrung der Spannung hinwirken. Selbst-

verständlich bezieht sich das lediglich auf die veränderlichen Belastungen.

Bei dem vorigen Beispiel kam dieser Umstand nicht in Betracht, weil bei jener Konstruktion — wie man sich leicht überzeugen kann — das Hinwegnehmen irgend einer der Belastungen in keinem Konstruktionsteile eine Verstärkung der (Zug- oder Druck-) Spannung hervorbringen konnte. Bei solchen Konstruktionsformen dagegen, wie sie für Brückenträger meistens gewählt werden — auch bei manchen Dachkonstruktionen, wie später gezeigt werden soll — ist es von Wichtigkeit, die Veränderlichkeit der Belastung*) zu berücksichtigen, weil nicht allemal bei voller Belastung die stärkste Spannung in jedem Konstruktionsteile eintritt.

Fig. 20.



So z. B. erhält man zur Bestimmung der Spannung S in vorstehender Konstruktion (Fig. 20), wenn man den Schnitt MN führt und O als Drehpunkt nimmt, die Momentengleichung:

$$S \cdot s - D \cdot x + P \left(x + \frac{l}{4} \right) = 0,$$

oder, wenn man für D seinen Wert $\frac{3}{4}P + \frac{Q}{2} + \frac{R}{4}$ setzt:

$$S = \frac{-P \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{l}{4} \right) + \frac{Q}{2} \cdot x + \frac{R}{4} \cdot x}{s}.$$

Das Glied, welches P enthält, ist negativ; die Glieder, welche Q und R enthalten, sind positiv. Man erkennt daran sofort, daß P auf Verminderung, Q und R dagegen auf Vermehrung der

*) Wie z. B. die temporären Belastungen, welche bei der Fahrt eines Bahnzuges über eine Eisenbahnbrücke oder für Dachkonstruktionen bei einseitigem Schnee- und Winddruck eintreten.

Spannung S hinwirken und findet, indem man das negative Glied, welches P enthält, fortläßt:

$$S(\max) = \frac{\frac{Q}{2}x + \frac{R}{4} \cdot x}{s}$$

als größte Zugspannung, und indem man die positiven Glieder, welche Q und R enthalten, fortläßt:

$$S(\min) = \frac{-P \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{l}{4}\right)}{s}$$

als kleinste Zugspannung oder größte Druckspannung.

Der Einfachheit wegen sind hier die Stangen selbst als gewichtlos und die Gewichte P , Q , R als temporäre Belastungen angesehen.

Die beiden Gleichungen für T und U :

$$\begin{aligned} T \cdot \overline{CD} - P \cdot \frac{l}{4} + D \frac{l}{2} &= 0, \\ -U \cdot u + D \cdot \frac{l}{4} &= 0, \end{aligned}$$

welche, wenn man für D seinen Wert setzt und sie auflöst, die Form annehmen:

$$\begin{aligned} T &= \frac{-P \cdot \frac{l}{8} - Q \cdot \frac{l}{4} - R \cdot \frac{l}{8}}{\overline{CD}} \\ U &= \frac{P \cdot \frac{3}{16}l + Q \cdot \frac{l}{8} + R \cdot \frac{l}{16}}{u}, \end{aligned}$$

lassen sogleich erkennen, daß diese beiden Konstruktionsteile bei voller Belastung am stärksten in Anspruch genommen werden.

Ebenso erhält man für V die Gleichung (Schnitt $\alpha\beta$, Drehpunkt O_1):

$$-V \cdot \left(y + \frac{l}{2}\right) - Q \left(y + \frac{l}{2}\right) - R \left(y + \frac{l}{4}\right) + W \cdot y = 0,$$

oder, wenn man für W seinen Wert $\frac{3}{4}R + \frac{Q}{2} + \frac{P}{4}$ substituiert, und sie für V auflöst:

$$V = \frac{-R \left(\frac{y+l}{4}\right) - Q \left(\frac{y+l}{2}\right) + P \cdot \frac{y}{4}}{y + \frac{l}{2}},$$

und hieraus ergibt sich:

$$V(\max) = + \frac{P \cdot \frac{y}{4}}{y + \frac{l}{2}}$$

als größte Zugspannung,

$$V(\min) = \frac{-R \cdot \left(\frac{y+l}{4}\right) - Q \left(\frac{y+l}{2}\right)}{y + \frac{l}{2}}$$

als kleinste Zugspannung oder größte Druckspannung.

Die Regel, welche sich hieraus ergibt, läßt sich in folgenden Worten aussprechen:

Man nehme zunächst sämtliche Punkte belastet an, stelle die Momentengleichung für den betreffenden Konstruktionsteil auf und ordne dieselbe so an, daß der Einfluß einer jeden Belastung durch ein einzelnes Glied von leicht erkennbarem Vorzeichen dargestellt wird. Man lasse alsdann von den temporären Belastungen das eine Mal alle diejenigen fort, welche negativ in der Gleichung vorkommen, das andere Mal alle diejenigen, welche positiv darin vorkommen.

Oder kürzer: in der Gleichung für die stärkste (Zug- oder Druck-) Spannung sollen die von den temporären Belastungen herrührenden Glieder immer einerlei Vorzeichen haben.

Nur in dem einen Falle, wenn es sich trifft, daß schon in jener allgemeinen Gleichung sämtliche temporäre Belastungen mit einerlei Vorzeichen vorkommen, führt die Auflösung derselben direkt zu dem Werte für die stärkste Spannung.

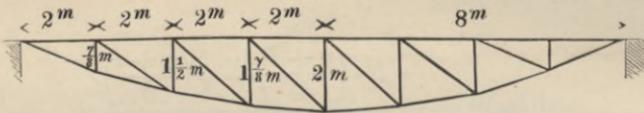
Nach dieser Regel wird bei Berechnung des nachfolgenden Zahlenbeispiels verfahren werden. Für jeden Konstruktionsteil soll zunächst die allgemeine Momentengleichung aufgestellt werden (d. h. für volle Belastung), sodann mit Weglassung der dem Maximum (oder Minimum), entgegenwirkenden Belastungen die Gleichung der stärksten Spannung.

§ 6.

Parabolischer Träger von 16 m Spannweite mit einfachem Diagonalen-System.

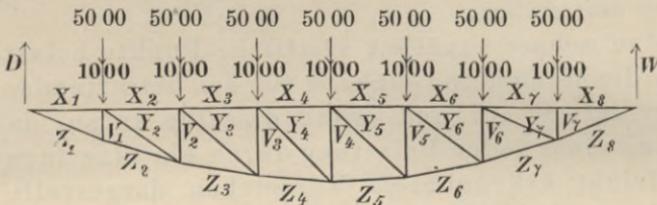
Die Dimensionen des Trägers sind in Fig. 21 eingeschrieben. Als Eigengewicht der Brücke sind 1000 kg, als temporäre oder

Fig. 21.



mobile Last 5000 kg pro laufendes Meter für ein Gleis angenommen, wovon auf jede der beiden Tragwände die Hälfte kommt. Da die Länge jedes der acht Felder zwei Meter beträgt, so kommen

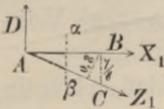
Fig. 22.



auf jeden Knotenpunkt 1000 kg permanente und 5000 kg mobile Belastung (s. Fig. 22).

Um die Spannung X_1 zu bestimmen, legt man den Vertikalschnitt $\alpha\beta$ durch das erste Feld und stellt für den Teil Fig. 23 die Momentengleichung auf in bezug auf den Punkt C als Drehpunkt:*)

Fig. 23.



$$0 = X_1 \cdot \frac{7}{8} + D \cdot 2.$$

Bei voller Belastung des Trägers ist der Gegen-
druck des Auflagerpunktes A :

$$D = 1000 \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} \right) + 5000 \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} \right)$$

Die Substitution dieses Wertes ergibt für X_1 die Gleichung:

$$0 = X_1 \cdot \frac{7}{8} + 1000 \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} \right) \cdot 2 + 5000 \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} \right) \cdot 2.$$

*) Die Bestimmung der Hebelarme auf dem Wege der Rechnung findet man im 11. Abschnitte dieses Buches.

In dieser Gleichung äußert sich der Einfluß der Belastung 5000 kg des Punktes B in zwei Gliedern: das eine $+ 5000 \cdot \frac{7}{8} \cdot 4$ enthält den Beitrag zum Auflagerdruck, das andere $- 5000 \cdot 2$ stellt die direkte Einwirkung dar. Nach der oben gegebenen Regel sollen diese beiden Glieder zu einem einzigen, nämlich $5000 \cdot (\frac{7}{8} \cdot 4 - 2)$ vereinigt werden und ist der Gleichung folgende Form zu geben:

$$0 = X_2 \cdot 1,5 + 1000 [(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8}) 4 + (\frac{7}{8} \cdot 4 - 2)] \\ + 5000 [(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8}) 4 + (\frac{7}{8} \cdot 4 - 2)].$$

Man erkennt nun sogleich, daß sämtliche mit 5000 multiplizierten Glieder positiv sind, daß also die Gleichung direkt aufzulösen ist, um die stärkste Spannung zu erhalten, woraus sich ergibt:

$$X_2 (\text{min}) = - 48000 \text{ kg.}$$

Für Y_2 nimmt man den Punkt R als Drehpunkt und erhält, wenn man sogleich für D seinen Wert einführt, die Momentengleichung:

$$0 = Y_2 \cdot 1,68 - 1000 (\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8}) \cdot 0,8 - 5000 (\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8}) \cdot 0,8 \\ + 1000 \cdot 2,8 + 5000 \cdot 2,8,$$

welcher, um den Einfluß jeder Belastung durch ein einziges Glied darzustellen, folgende Form zu geben ist:

$$0 = Y_2 \cdot 1,68 - 1000 [(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8}) 0,8 - (2,8 - \frac{7}{8} \cdot 0,8)] \\ - 5000 (\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8}) 0,8 + 5000 (2,8 - \frac{7}{8} \cdot 0,8).$$

Unter den sieben mit 5000 multiplizierten Gliedern, welche die Wirkung der temporären Last darstellen, befinden sich sechs negative und ein positives. Man läßt also der oben gegebenen Regel gemäß einmal das positive Glied fort und erhält dann:

$$0 = Y_2 \cdot 1,68 - 1000 [(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8}) 0,8 - (2,8 - \frac{7}{8} \cdot 0,8)] \\ - 5000 (\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8}) \cdot 0,8$$

$$Y_2 (\text{max}) = + 6250 \text{ kg.}$$

Das andere Mal läßt man die sechs negativen Glieder fort und erhält:

$$0 = Y_2 \cdot 1,68 - 1000 [(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8}) 0,8 - (2,8 - \frac{7}{8} \cdot 0,8)] \\ + 5000 (2,8 - \frac{7}{8} \cdot 0,8)$$

$$Y_2 (\text{min}) = - 6250 \text{ kg.}$$

(Es ergibt sich zugleich, daß $Y_2 = 0$ wird, wenn sämtliche Glieder beibehalten werden, also bei voller Belastung, ein Umstand, welcher

weiter unten in der Theorie der parabolischen Träger seine Erklärung finden wird.)

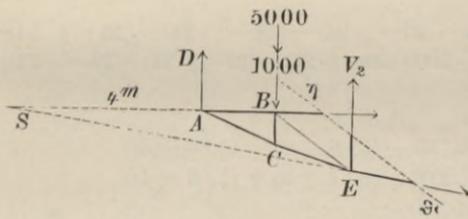
Für Z_2 wählt man den Punkt B als Drehpunkt und erhält, wenn man von vornherein die einzelnen Glieder in der eben erklärten Weise anordnet, die Momentengleichung:

$$0 = -Z_2 \cdot 0,835 + 1000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{7}{8}\right) \cdot 2 + 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{7}{8}\right) \cdot 2,$$

in welcher sämtliche mit 5000 multiplizierten Glieder einerlei Vorzeichen haben. Die Gleichung ist also direkt aufzulösen und gibt:

$$Z_2 \text{ (max)} = + 50300 \text{ kg.}$$

Fig. 26.



Zur Bestimmung von V_2 ist der Schnitt η zu führen (s. Fig. 26) und der Punkt S als Drehpunkt zu wählen. Die allgemeine Momentengleichung für V_2 erscheint, nachdem sie geordnet, in folgender Form:

$$0 = -V_2 \cdot 8 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8}\right) 4 - \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4\right)\right] - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8}\right) 4 + 5000 \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4\right).$$

Von den mit 5000 multiplizierten Gliedern ist das eine Mal das positive Glied fortzulassen, man erhält dann:

$$0 = -V_2 \cdot 8 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8}\right) 4 - \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4\right)\right] - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8}\right) 4$$

$$V_2 \text{ (min)} = - 7560 \text{ kg.}$$

Das andere Mal sind die sechs negativen Glieder fortzulassen und man erhält:

$$0 = -V_2 \cdot 8 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8}\right) 4 - \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4\right)\right] + 5000 \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4\right)$$

$$V_2 \text{ (max)} = + 560 \text{ kg.}$$

Diese Beispiele werden genügen, um die Anwendung der oben gegebenen Regeln zu erklären, und scheint es nicht erforderlich, auch die ferneren Rechnungen mit gleicher Ausführlichkeit zu behandeln. Für diejenigen Leser, welche die Aufgabe vollständig nachzurechnen beabsichtigen, wird es ausreichen, wenn in betreff der übrigen Stangen nur die Hauptgleichungen und die Resultate zum Vergleich mitgeteilt werden

$$0 = X_3 \cdot 1,875 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8}\right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2\right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4\right)\right] + 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8}\right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2\right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4\right)\right]$$

$$X_3 \text{ (min)} = - 48000 \text{ kg.}$$

$$0 = -Y_3 \cdot 5,47 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{5}{8} \right) 4 - \left(8 - \frac{6}{8} \cdot 4 \right) - \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4 \right) \right] \\ - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{5}{8} \right) 4 + 5000 \left(8 - \frac{6}{8} \cdot 4 \right) + 5000 \cdot \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4 \right)$$

$$Y_3 \begin{cases} \text{(maximum)} = + 6850 \text{ kg} \\ \text{(minimum)} = - 6850 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = -Z_3 \cdot 1,474 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) \right] \\ + 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) \right]$$

$$Z_3 \text{ (max)} = + 48900 \text{ kg.}$$

$$0 = -V_3 \cdot 30 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{5}{8} \right) 24 - \left(28 - \frac{6}{8} \cdot 24 \right) - \left(26 - \frac{7}{8} \cdot 24 \right) \right] \\ - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{5}{8} \right) 24 + 5000 \left(28 - \frac{6}{8} \cdot 24 \right) + 5000 \left(26 - \frac{7}{8} \cdot 24 \right)$$

$$V_3 \begin{cases} \text{(max)} = + 1500 \text{ kg} \\ \text{(min)} = - 8500 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = X_4 \cdot 2 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 8 + \left(\frac{5}{8} \cdot 8 - 2 \right) + \left(\frac{6}{8} \cdot 8 - 4 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 8 - 6 \right) \right] \\ + 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 8 + \left(\frac{5}{8} \cdot 8 - 2 \right) + \left(\frac{6}{8} \cdot 8 - 4 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 8 - 6 \right) \right]$$

$$X_4 \text{ (min)} = - 48000 \text{ kg.}$$

$$0 = Y_4 \cdot 21,2 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 24 - \left(30 - \frac{5}{8} \cdot 24 \right) - \left(28 - \frac{6}{8} \cdot 24 \right) - \left(26 - \frac{7}{8} \cdot 24 \right) \right] \\ - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 24 + 5000 \left[\left(30 - \frac{5}{8} \cdot 24 \right) + \left(28 - \frac{6}{8} \cdot 24 \right) + \left(26 - \frac{7}{8} \cdot 24 \right) \right]$$

$$Y_4 \begin{cases} \text{(max)} = + 7080 \text{ kg} \\ \text{(min)} = - 7080 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = -Z_4 \cdot 1,873 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{5}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right] \\ + 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{5}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right]$$

$$Z_4 \text{ (max)} = + 48100 \text{ kg.}$$

(Die nun folgenden Momentengleichungen beziehen sich jedesmal auf den Teil der Figur, welcher rechts von der betreffenden Schnittlinie liegt.)

$$0 = -V_4 \cdot 32 \\ + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \right) 24 - \left(32 - \frac{4}{8} \cdot 24 \right) - \left(30 - \frac{5}{8} \cdot 24 \right) - \left(28 - \frac{6}{8} \cdot 24 \right) - \left(26 - \frac{7}{8} \cdot 24 \right) \right] \\ + 5000 \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \right) 24 \\ - 5000 \left[\left(32 - \frac{4}{8} \cdot 24 \right) + \left(30 - \frac{5}{8} \cdot 24 \right) + \left(28 - \frac{6}{8} \cdot 24 \right) + \left(26 - \frac{7}{8} \cdot 24 \right) \right]$$

$$V_4 \begin{cases} \text{(max)} = + 1800 \text{ kg} \\ \text{(min)} = - 8800 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = -X_5 \cdot 1,875 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{5}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right] \\ - 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{5}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right]$$

$$X_5 \text{ (min)} = - 48000 \text{ kg.}$$

$$0 = Y_5 \cdot 21,88 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 24 - \left(30 - \frac{5}{8} \cdot 24 \right) - \left(28 - \frac{6}{8} \cdot 24 \right) - \left(26 - \frac{7}{8} \cdot 24 \right) \right] \\ + 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 24 \\ - 5000 \left[\left(30 - \frac{5}{8} \cdot 24 \right) + \left(28 - \frac{6}{8} \cdot 24 \right) + \left(26 - \frac{7}{8} \cdot 24 \right) \right]$$

$$Y_5 \begin{cases} \text{(max)} = + 6850 \text{ kg} \\ \text{(min)} = - 6850 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = Z_5 \cdot 1,996 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 8 + \left(\frac{5}{8} \cdot 8 - 2 \right) + \left(\frac{6}{8} \cdot 8 - 4 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 8 - 6 \right) \right] \\ - 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 8 + \left(\frac{5}{8} \cdot 8 - 2 \right) + \left(\frac{6}{8} \cdot 8 - 4 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 8 - 6 \right) \right]$$

$$Z_5 \text{ (max)} = + 48100 \text{ kg.}$$

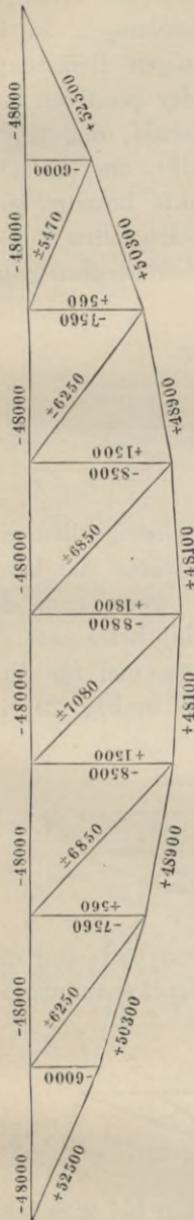
$$0 = -V_5 \cdot 10 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 4 - \left(10 - \frac{5}{8} \cdot 4 \right) - \left(8 - \frac{6}{8} \cdot 4 \right) - \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4 \right) \right] \\ + 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{4}{8} \right) 4 - 5000 \left[\left(10 - \frac{5}{8} \cdot 4 \right) + \left(8 - \frac{6}{8} \cdot 4 \right) + \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4 \right) \right]$$

$$V_5 \begin{cases} \text{(max)} = + 1500 \text{ kg} \\ \text{(min)} = - 8500 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = -X_6 \cdot 1,5 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) \right] \\ - 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) \right]$$

$$X_6 \text{ (min)} = - 48000 \text{ kg.}$$

Fig. 27.



$$0 = Y_6 \cdot 6 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 4 - \left(8 - \frac{6}{8} \cdot 4 \right) - \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4 \right) \right] + 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 4 - 5000 \left[\left(8 - \frac{6}{8} \cdot 4 \right) + \left(6 - \frac{7}{8} \cdot 4 \right) \right]$$

$$Y_6 \begin{cases} (\text{max}) = + 6250 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 6250 \text{ kg} \end{cases}$$

$$0 = Z_6 \cdot 1,84 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right] - 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right]$$

$$Z_6 (\text{max}) = + 48900 \text{ kg.}$$

$$0 = -V_6 \cdot 4,8 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 0,8 - \left(4,8 - \frac{6}{8} \cdot 0,8 \right) - 2,8 - \frac{7}{8} \cdot 0,8 \right] + 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 0,8 - 5000 \left[\left(4,8 - \frac{6}{8} \cdot 0,8 \right) + \left(2,8 - \frac{7}{8} \cdot 0,8 \right) \right] \right]$$

$$V_6 \begin{cases} (\text{max}) = + 560 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 7560 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = -X_7 \cdot 0,875 - 1000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 2 - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 2$$

$$X_7 (\text{min}) = - 48000 \text{ kg.}$$

$$0 = Y_7 \cdot 1,92 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8} \right) 0,8 - \left(2,8 - \frac{7}{8} \cdot 0,8 \right) \right] + 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8} \right) 0,8 - 5000 \left(2,8 - \frac{7}{8} \cdot 0,8 \right)$$

$$Y_7 \begin{cases} (\text{max}) = + 5470 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 5470 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = Z_7 \cdot 1,43 + 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) - 5000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) \right] \right]$$

$$Z_7 (\text{max}) = + 50300 \text{ kg.}$$

$$0 = -V_7 \cdot 2 - 1000 \cdot 2 - 5000 \cdot 2$$

$$V_7 (\text{min}) = - 6000 \text{ kg.}$$

$$0 = -X_8 \cdot 0,875 - 1000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 2 - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 2$$

$$X_8 (\text{min}) = - 48000 \text{ kg.}$$

$$0 = Z_8 \cdot 0,8 - 1000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 2 - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) 2$$

$$Z_8 (\text{max}) = + 52500 \text{ kg.}$$

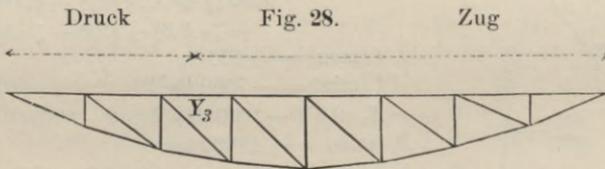
Die Resultate sind in Fig. 27 übersichtlich zusammengestellt.

§ 7.

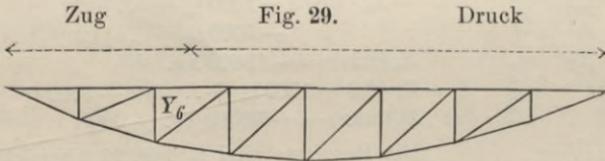
Abgeleitete Formen.

Ein Rückblick auf die vorstehenden Rechnungen zeigt, daß namentlich in betreff der Diagonal- und Vertikalstangen die Befolgung der oben gegebenen Regel von Nutzen war, weil gerade diese es sind, welche bei partieller Belastung des Trägers am stärksten gespannt

werden. Um sich das Gesetz zu veranschaulichen, nach welchem die Spannungen derselben von der Belastungsweise abhängen, braucht man nur die allgemeinen Momentengleichungen zu betrachten und den Träger jedesmal in demjenigen Belastungszustande zu zeichnen, welcher dem Fortlassen der positiven oder negativen Glieder entspricht. Man erkennt alsbald, daß irgend eine Diagonalstange, z. B. Y_3 (im dritten Felde), am stärksten gezogen wird, wenn alle rechts liegenden Punkte belastet sind, am stärksten gedrückt dagegen, wenn alle links liegenden Punkte belastet sind, wie dies in Fig. 28 durch die Überschriften „Zug“ und „Druck“ angedeutet ist.

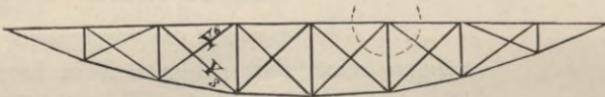


Wenn in demselben Felde statt der links ansteigenden eine rechts ansteigende Diagonale sich befände, so wären die Überschriften miteinander zu vertauschen. Denn: wenn man den Träger von der Rückseite (oder sein Spiegelbild) betrachtet, so erscheint die Diagonale Y_6 in der gleichen Lage, und für diese ergeben sich aus den Momentengleichungen die in Fig. 29 eingeschriebenen Abteilungen.



Sind gleichzeitig beide Diagonalen vorhanden und sind dieselben als Zugbänder konstruiert, welche eine Druckspannung an-

Fig. 30.



zunehmen unfähig sind, so wird jede von beiden nur bei derjenigen Belastungsweise in Tätigkeit versetzt, welche Zugspannung in ihr erzeugt, während die andere gleich einem schlaff gewordenen

annehmen können — wie das z. B. bei Holzkonstruktionen vorkommt — so führt eine der vorigen ganz ähnliche Beweisführung zu dem Ergebnis, daß für die Diagonalstangen nur die Minima und für die Vertikalstangen eines solchen Trägers nur die Maxima der oben berechneten Werte ihre Gültigkeit behalten. Was dagegen die Minima der letzteren betrifft, so überzeugt man sich durch den bloßen Anblick eines der Belastungspunkte leicht, daß, wenn die Diagonalen nicht ziehen können, die unmittelbare Belastung des Punktes die einzige ist, welche Druckspannung in der Vertikalen erzeugen kann. Diese variiert zwischen 1000 kg und 1000 kg + 5000 kg; es ist also überall

$$V(\min) = -6000 \text{ kg}$$

Fig. 33.

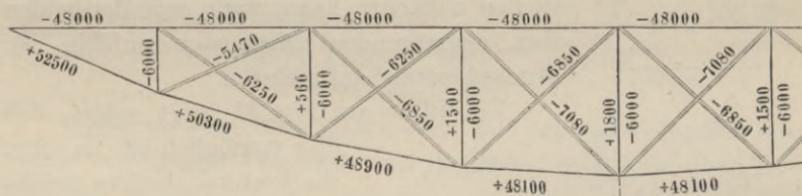


Fig. 34.

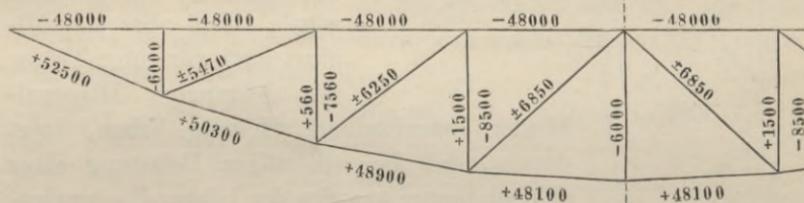
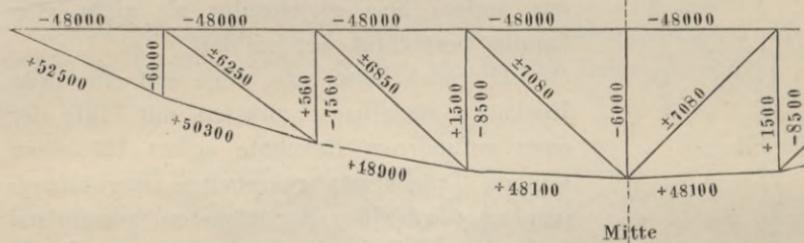


Fig. 35.



zu setzen. In Fig. 33 sind die Spannungszahlen eines solchen Trägers eingeschrieben und ist die Unfähigkeit der Diagonalen, Zugspannung anzunehmen, durch Doppellinien angedeutet.

Bei Trägern mit einfachen Diagonalsystemen, welche aber von dem Schema Fig. 27 dadurch sich unterscheiden, daß sie symmetrisch in bezug auf die vertikale Mittellinie geformt sind, handelt es sich nur um die Spannung des mittleren Vertikalständers; denn für die übrigen Stücke können die Spannungszahlen unmittelbar aus Fig. 27 abgeschrieben werden.

Was nun den mittleren Vertikalständer zunächst in Fig. 34 betrifft, so braucht man nur den Fußpunkt desselben zu betrachten, um zu erkennen, daß seine Spannung ausschließlich von den angrenzenden Parabelsehnen abhängt. Diese haben stets Zugspannung, können also in dem Vertikalständer nur Druckspannung erzeugen. Am größten wird dieselbe, wenn die volle Spannung von 48100 kg in den Sehnen eintritt, d. h. bei voller Belastung, wo jeder Vertikalständer 6000 kg trägt. Also ist für den Mittelständer

$$V(\text{min}) = - 6000 \text{ kg}$$

zu setzen.

Bei dem in Fig. 35 dargestellten Falle ist die Spannung des mittleren Vertikalständers noch leichter zu erkennen. Denn hier ist es offenbar nur die unmittelbare Belastung des Kopfes, welche überhaupt Spannung in dem Ständer hervorbringen kann, also Druckspannung. Mithin ist auch hier:

$$V(\text{min}) = - 6000 \text{ kg.}$$

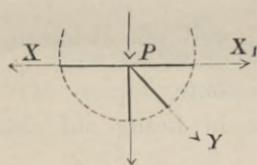
Wenn man endlich in dem Schema Fig. 27 überall die Plus- und Minuszeichen miteinander vertauscht, so erhält man die Spannungszahlen für einen parabolischen Träger, dessen konvexe Seite nach oben gewendet ist (s. Fig. 36). Die ganze Beweisführung und Rechnung nämlich, aus welcher die Zahlen von Fig. 27 hervorgingen, läßt sich Zeile für Zeile auf diese neue Konstruktion übertragen, sobald man konsequent alle Krafrichtungen umkehrt, dem entsprechend Plus- und Minuszeichen, Maximum und Minimum miteinander vertauscht und die ganze Figur auf den Kopf gestellt zeichnet. Man erhält damit eine neue schematische Figur (36), aus welcher dann durch eine der vorigen ganz analoge Betrachtung die vier abgeleiteten Formen Figg. 37, 38, 39 und 40 sich bilden lassen.

§ 8.

Theorie der parabolischen Träger.

An dem vorigen Beispiel ist gezeigt, daß man mittelst der Methode der statischen Momente einen gegebenen parabolischen Träger berechnen kann, ohne von der eigentlichen Theorie der parabolischen Träger etwas zu verstehen. Zwei Eigenschaften derselben wurden bei dieser Berechnung auf empirischem Wege gefunden, erstens: die Spannungen der horizontalen Stangen sind bei voller Belastung am größten und überall gleich; zweitens: die

Fig. 41.

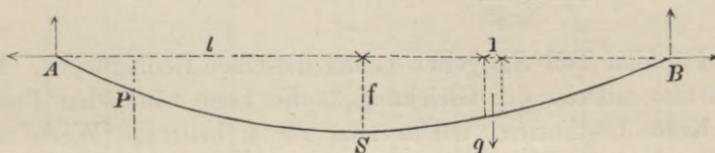


Spannungen der Diagonalstangen sind bei voller Belastung überall gleich Null. Letztere ist übrigens schon in der ersteren enthalten, denn, wenn $X = X_1$ ist (s. Fig. 41), so folgt daraus, daß $Y = 0$ sein muß, weil sonst die Horizontalkräfte an dem Punkte P sich nicht aufheben würden.

Es ist nützlich, zu untersuchen, von welchen Bedingungen jene Eigenschaften abhängen. Die Kenntnis dieser Bedingungen ist nötig — zwar nicht um in einem gegebenen Träger die Spannungen zu berechnen — wohl aber um für einen erst zu konstruierenden Träger, der diese Eigenschaften besitzen soll, die richtige Form zu finden.

Zu diesem Zwecke denke man sich eine an den beiden festen Punkten A und B in ihrer Gleichgewichtslage hängende Kette (s. Fig. 42), deren Belastung gleichmäßig über die Spannweite AB

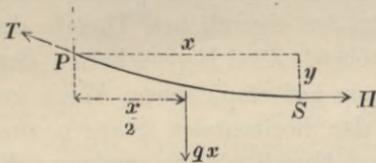
Fig. 42.



verteilt ist und pro Längeneinheit derselben q beträgt. An dem tiefsten Punkte S der Kette — also da, wo sie horizontal gerichtet ist — denke man sich die Kette durchschnitten und an der Schnittstelle eine Kraft H angebracht, welche den Gleichgewichtszustand wieder herstellt. Diese Kraft muß eine horizontale Richtung haben, weil sie sonst dem Kettenende eine von der

horizontalen abweichende Richtung erteilen würde. An einer beliebigen anderen Stelle P denke man sich die Kette ebenfalls durchgeschnitten und durch die Kraft T den Gleichgewichtszustand wieder hergestellt.

Fig. 43.



Das Stück SP (Fig. 43) wird von drei Kräften im Gleichgewicht gehalten: die erste ist H , die zweite T , die dritte ist die Mittelkraft sämtlicher Gewichte, welche das Stück SP belasten.

Letztere Kraft ist $q \cdot x$, wenn mit x die Horizontalentfernung der beiden Endpunkte S und P voneinander bezeichnet wird; sie wirkt im Abstände $\frac{x}{2}$ von jedem derselben, weil die Belastung gleichförmig über die Strecke x verteilt sein sollte.

Die Gleichung der statischen Momente in bezug auf den Punkt P als Drehpunkt ist:

$$1) H \cdot y = qx \cdot \frac{x}{2}.$$

Da der Punkt P beliebig gewählt war, so gilt diese Gleichung auch für jeden anderen, z. B. den Punkt A , für welchen l statt x und f statt y zu setzen ist, also:

$$2) H \cdot f = ql \cdot \frac{l}{2}.$$

Die Division der ersten Gleichung durch die zweite führt zu der dritten:

$$3) \frac{y}{f} = \frac{x^2}{l^2}.$$

Für den Teil SB gelten genau dieselben Bedingungen. Man kann also mittelst der Gleichung 3) die Lage sämtlicher Punkte der Kette bestimmen, indem man für x beliebige Werte substituirt und die Gleichung jedesmal für y auflöst. Diese Punkte liegen in einer Parabel, deren Form nur von den beiden Größen f und l abhängt.

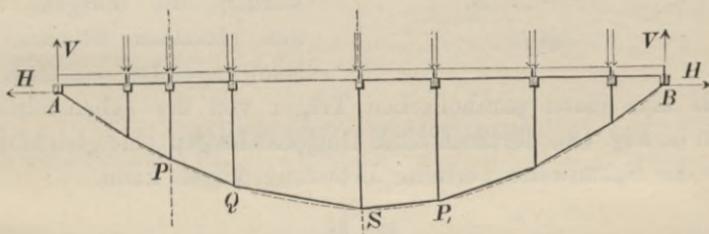
Als weitere Folgerungen aus der obigen Untersuchung ergeben sich noch folgende Sätze; erstens: die horizontale Seitenkraft von T ist in allen Punkten $= H$, also auch an den beiden Aufhängepunkten A und B ; zweitens: die vertikale Seitenkraft von T ist

gleich qx , an den Aufhängepunkten also gleich ql ; drittens: die Spannung T selbst ist jedesmal gleich $\sqrt{H^2 + V^2}$.

Auch dann noch werden einzelne Punkte der Kette in der Parabel bleiben, wenn durch andere Belastungsweise bewirkt wird, daß für sie die Gleichungen 1) und 2) ihre Gültigkeit behalten. Dieser Fall tritt ein, wenn zu beiden Seiten des Punktes S die Belastungen in einzelnen Punkten konzentriert werden, und zwar so, daß ein solcher Punkt von jeder der beiden angrenzenden Abteilungen die Hälfte zu tragen bekommt (s. Fig. 44). Denn für den Teil SP (s. Fig. 45) wird auch jetzt noch die Belastung (oder die Mittelkraft der vier Vertikaldrücke) = qx , und der Hebelarm dieser Kraft = $\frac{x}{2}$ sein, weil der Schwerpunkt in der Mitte liegt.

Eine solche Belastungsweise kann durch Vertikalständer bewirkt werden, welche steifen, gleichförmig belasteten Zwischen-

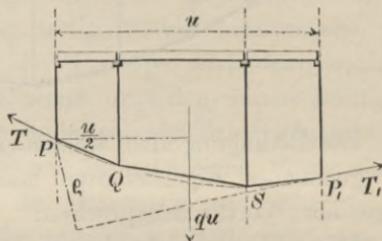
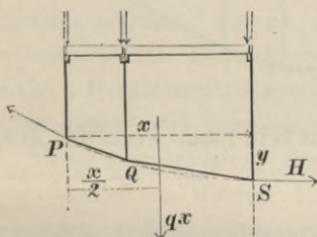
Fig. 44.



trägern als Stützen dienen und deren Drücke auf die Kette übertragen (s. Fig. 44). Da ein unbelasteter Teil einer gespannten

Fig. 45.

Fig. 46.



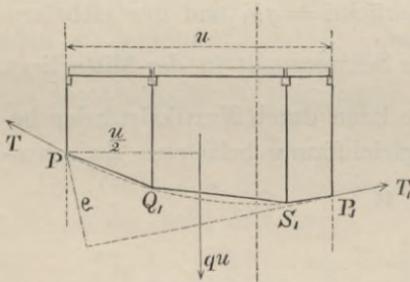
Kette immer geradlinig ist, so nimmt die ganze Kette ASB die Form eines der Parabel eingeschriebenen Polygons an. Dies gilt auch noch für den Fall, wenn der Scheitelpunkt S nicht mit zu den Belastungspunkten gehört. Denn: denkt man sich aus Fig. 44

das Stück PP_1 herausgeschnitten (s. Fig. 46) und durch die Kräfte T, T_1 den Gleichgewichtszustand wieder hergestellt, so erfordert das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt P , daß:

$$T_1 \cdot \rho = qu \cdot \frac{u}{2},$$

und diese Gleichgewichtsbedingung wird dadurch nicht verändert, daß statt der Zwischenpunkte S und Q andere Punkte, z. B. S_1 und Q_1 (s. Fig. 47), als Belastungspunkte angenommen werden.

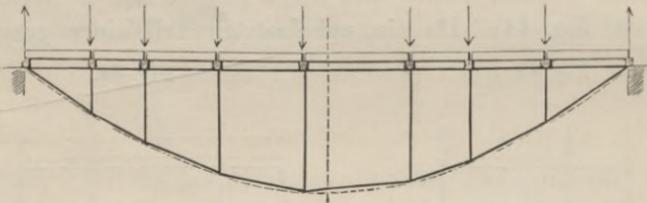
Fig. 47.



Sollen die beiden Punkte A und B nur vertikale Widerstände leiten, so müssen die beiden Horizontalkräfte H auf andere Weise, z. B. durch die Gegendrücke einer zwischen die Auflager gestemmten Horizontalstange, dargestellt werden, die übrigens auch aus einzelnen Stücken zusammengesetzt sein darf. So

erhält man einen parabolischen Träger von der nebenstehenden Form (s. Fig. 48), der auch ohne Diagonalstangen eine gleichförmig über die Spannweite verteilte Belastung tragen kann.

Fig. 48.



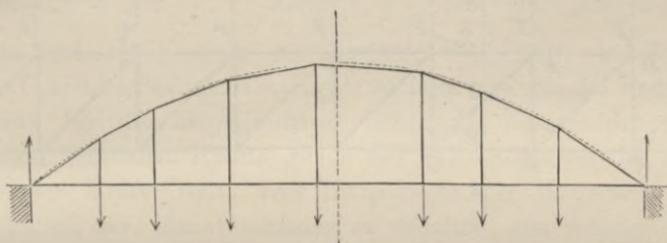
Die Bedingung also, welche erfüllt sein muß, wenn der Träger die genannten Eigenschaften besitzen soll, läßt sich einfach in folgenden Worten aussprechen:

Die Stützpunkte der Vertikalstangen müssen in einer Parabel liegen, deren Achse mit der vertikalen Mittellinie der Konstruktion zusammenfällt.

Die ganze obige Beweisführung endlich läßt sich, wenn die betreffenden Figuren umgekehrt und sämtliche Kräfte in ent-

gegengesetzter Richtung gedacht werden, unmittelbar übertragen auf einen parabolischen Träger, dessen Bogen nach oben hin seine konvexe Seite kehrt (s. Fig. 49), und braucht daher für diesen nicht wiederholt zu werden.

Fig. 49.



Eine weitere Fortsetzung und Verallgemeinerung der Theorie der parabolischen Träger findet sich weiter unten in der „Theorie der sichelförmigen Träger“.

DRITTER ABSCHNITT.

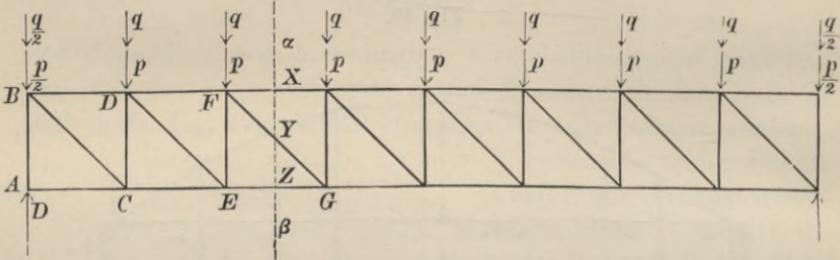
§ 9.

Anwendung der Methode auf die Berechnung von Fachwerkbrücken mit parallelen Gurtungen.

Die Methode der statischen Momente kann auch bei der Berechnung gewöhnlicher Fachwerkbrücken mit Rechteckfeldern angewendet werden. Es ist kaum nötig, darauf hinzuweisen, daß die konsequente Durchführung des Prinzips auch dann noch zu richtigen Resultaten führen muß, wenn unter den durchschnittenen drei Stangen zwei parallele sich befinden, also der Drehpunkt für die Momentengleichung der dritten in unendliche Ferne rückt. Zwar werden in diesem Falle die Hebelarme sämtlicher in der Gleichung vorkommenden Kräfte unendlich groß, doch ist die hieraus entstehende Schwierigkeit nur eine scheinbare, da die unendlichen Größen sogleich gegeneinander wegfallen und die Auflösung der Gleichung dann den richtigen endlichen Wert für die zu bestimmende Spannung ergibt.

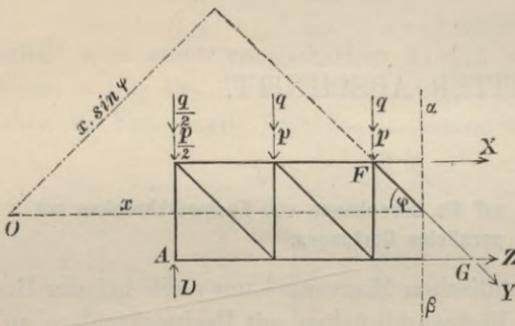
Um z. B. die Spannung Y der Diagonalstange FG bei dem in Fig. 50 dargestellten Träger zu bestimmen, würde man nach

Fig. 50.



den früher gegebenen Regeln zunächst durch den Schnitt $\alpha\beta$ die Konstruktion in zwei Teile zerlegen und nach Hinzufügung der Kräfte X, Y, Z dann für den einen Teil Fig. 51 die Momenten-

Fig. 51.



gleichung aufstellen in bezug auf den Durchschnittspunkt der beiden Kräfte X und Z als Drehpunkt. Diesen Punkt hat man sich auf der horizontalen Mittellinie in unendlicher Entfernung zu denken. Die Richtungen der Kräfte X, Z gehen durch den Drehpunkt selbst hindurch, also sind ihre Hebelarme Null. Für sämtliche Vertikalkräfte, welche auf das abgeschnittene Stück wirken, werden die Hebelarme unendlich groß. Die Kraft Y endlich würde, wenn der Drehpunkt O in der endlichen Entfernung x von der Schnittstelle läge, an dem Hebelarme $x \cdot \sin \varphi$ wirken. Denkt man sich den Punkt O immer weiter nach links bis ins Unendliche fortrückend, so wird $x = \infty$, der Hebelarm von Y also $= \infty \cdot \sin \varphi$.

Die Momentengleichung zur Bestimmung von Y würde daher zunächst in folgender Gestalt erscheinen:

$$0 = Y \cdot \infty \sin \varphi - D \cdot \infty + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2} \right) \infty + (p + q) \infty + (p + q) \cdot \infty$$

und mit Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors ∞ die Form annehmen:

$$0 = Y \cdot \sin \varphi - D + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2} \right) + (p + q) + (p + q).$$

Hierin bedeutet $Y \cdot \sin \varphi$ die vertikale Seitenkraft der Kraft Y . Diese Gleichung drückt also nichts anderes aus, als die Bedingung: es muß für das abgeschnittene Stück die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Kräfte gleich der Summe der vertikal abwärts wirkenden Kräfte sein. Der Hauptzweck der Momentenmethode — nämlich der, eine Gleichung zu erhalten, aus welcher die gesuchte Größe als einzige Unbekannte direkt bestimmt werden kann — würde also in diesem speziellen Falle auch durch unmittelbare Anwendung der Gleichung für die Vertikalkräfte erreicht worden sein.

Es zeigt sich bei dieser Gelegenheit aufs Neue die allgemeine Brauchbarkeit des Prinzips, welches jener Methode zum Grunde liegt, sofern sie selbst in solchen vereinzelt Fällen, wo eine andere Betrachtungsweise die kürzeste Lösung der Aufgabe zu bieten scheint, ihre Dienste nicht versagt, vielmehr mit dieser zusammen treffend direkt auf diesen kürzesten Weg hinweist.

Führt man in der obigen Gleichung für den Gegendruck des Auflagers seinen Wert:

$$D = (p + q) \left[\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \right]$$

ein, und stellt man — wie bei den vorigen Beispielen schon geschehen — die von den einzelnen Belastungen zu dem Druck D gelieferten Beiträge mit den direkt von ihnen hervorgebrachten Vertikalkräften an der gehörigen Stelle so zusammen, daß der Einfluß einer jeden Belastung durch ein einzelnes Glied von leicht erkennbaren Vorzeichen dargestellt wird, so erhält man die Gleichung:

$$0 = Y \cdot \sin \varphi - (p + q) \left[\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} - (1 - \frac{6}{8}) - (1 - \frac{7}{8}) - (\frac{1}{2} - \frac{4}{8}) \right]$$

oder endlich, wenn zur bequemen Übersicht die Glieder, welche die permanente Last p enthalten, von denjenigen, welche die veränderliche Last q enthalten, getrennt, und letztere wiederum in positive und negative Gruppen gesondert werden:

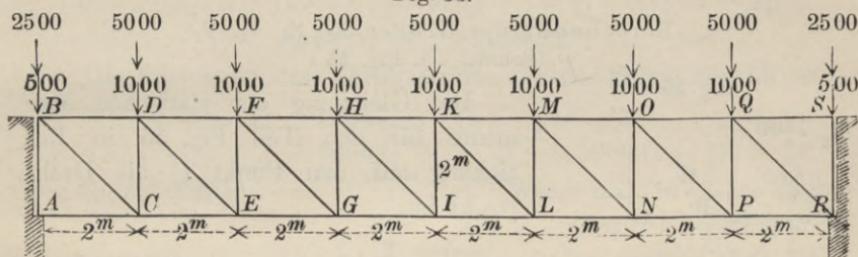
Diese Regel läßt sich auch so aussprechen: Diagonalstange und Vertikalstange haben da, wo sie an einem unbelasteten Knotenpunkte zusammenstoßen, Vertikalspannungen von einerlei Größe und entgegengesetztem Vorzeichen.

§ 10.

Fachwerkbrücke von 16 m Spannweite mit einfachem Diagonalsystem.

Abgesehen von den durch die veränderte Form bedingten Abweichungen sind hier dieselben Maße wie bei dem im zweiten Abschnitt berechneten parabolischen Träger gewählt, auch dieselben Belastungen, nämlich 1000 kg permanente und 5000 kg mobile Last für jedes Feld angenommen. Es ist ferner auch hier die Annahme gemacht, daß die Fahrbahn oben liegt, also die Belastungen unmittelbar auf die oberen Knotenpunkte wirken (s. Fig. 53).

Fig. 53.

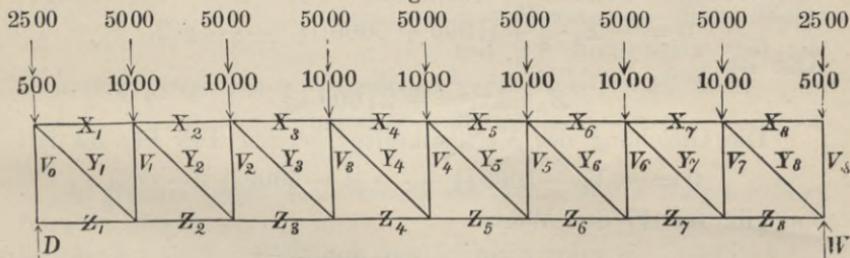


Berechnung der Größen V_0 und Z_1 .

Da V_0 und D die einzigen in dem Punkte A angreifenden Vertikalkräfte sind (s. Fig. 54), so ist immer:

$$V_0 + D = 0, \text{ also } V_0 = -D.$$

Fig. 54.



Es erreicht demnach V_0 seinen größten negativen Wert, wenn der Gegendruck des Auflagers am größten wird, d. h. bei voller Be-

lastung des Trägers. Für diesen Fall wird $D = \frac{48000}{2}$ kg, folglich ist:

$$V_0 (\text{min}) = -24000 \text{ kg.}$$

Da ferner Z_1 die einzige in dem Punkte A angreifende Horizontalkraft ist, so bleibt bei jeder Belastungsweise:

$$Z_1 = 0.$$

Berechnung der Größen X_8 und V_8 .

In dem Punkte S greifen immer nur zwei Vertikalkräfte an, nämlich erstens: die Belastung dieses Punktes, welche im Maximum 3000 kg beträgt und zweitens: die Kraft V_8 . Es ist folglich:

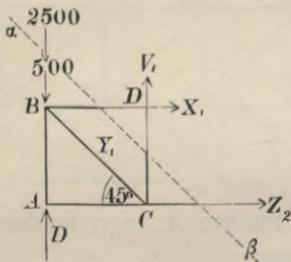
$$V_8 (\text{min}) = -3000 \text{ kg.}$$

Da ferner außer X_8 keine Horizontalkraft in dem Punkte S angreift, so ist in allen Fällen:

$$X_8 = 0.$$

Berechnung der Größen X_1 , Z_2 , V_1 , Y_1 .
(Schnitt $\alpha\beta$, Fig. 55.)

Fig. 55.



Die Gleichung der statischen Momente für den Teil Fig. 55 in Beziehung auf den Punkt C als Drehpunkt ist:

$$0 = X_1 \cdot 2 + (1000 + 5000) \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \dots + \frac{7}{8}\right) \cdot 2,$$

woraus sich ergibt:

$$X_1 (\text{min}) = -21000 \text{ kg.}$$

Wählt man den Punkt D als Drehpunkt, so erhält man die Momentengleichung:

$$0 = -Z_2 \cdot 2 + (1000 + 5000) \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{7}{8}\right) \cdot 2.$$

Also ist:

$$Z_2 (\text{max}) = +21000 \text{ kg.}$$

Die Gleichung der Vertikalkräfte für den Teil Fig. 55 ist:

$$0 = -V_1 - 1000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{7}{8}\right) - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{7}{8}\right)$$

und gibt für V_1 den Wert:

$$V_1 (\text{min}) = -21000 \text{ kg.}$$

Die Diagonale Y_1 bildet mit der Horizontalen einen Winkel von 45° . Die vertikale Seitenkraft von Y_1 oder

$$Y_1 \cdot \sin 45^\circ = Y_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist gleich $-V_1$ zu setzen, also:

$$Y_1 = -V_1 \cdot \sqrt{2} = +21\,000 \cdot \sqrt{2}$$

$$Y_1(\max) = +29\,700 \text{ kg.}$$

Bestimmung der Größen X_2, Z_3, V_2, Y_2 .
(Schnitt $\gamma\delta$, Fig. 56.)

Die Momentengleichung des Stücks Fig. 56 in bezug auf den Punkt E ist:

$$0 = X_2 \cdot 2 + (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) \right],$$

woraus sich ergibt:

$$X_2(\min) = -36\,000 \text{ kg.}$$

Zur Bestimmung von Z_3 wählt man den Punkt F als Drehpunkt und erhält:

$$0 = -Z_3 \cdot 2 + (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) \right]$$

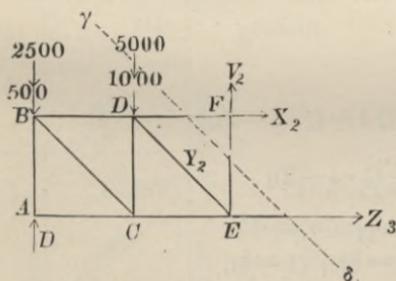
$$Z_3(\max) = +36\,000 \text{ kg.}$$

Die Gleichung der Vertikalkräfte für das Stück Fig. 56 ist:

$$0 = -V_2 - 1000 \left[\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} - \left(1 - \frac{7}{8} \right) \right]$$

$$-5000 \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} \right) + 5000 \left(1 - \frac{7}{8} \right).$$

Fig. 56.



Wenn man in dieser Gleichung einmal das negative und einmal das positive von den beiden mit 5000 multiplizierten Gliedern fortläßt, so erhält man:

$$V_2(\max) = -1875 \text{ kg.}$$

$$V_2(\min) = -15\,625 \text{ kg.}$$

Wenn man diese Werte mit $\sqrt{2}$ multipliziert und mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versieht, so erhält man:

$$Y_2(\max) = +22\,100 \text{ kg.}$$

$$Y_2(\min) = +2\,650 \text{ kg.}$$

In gleicher Weise erhält man für die Stücke in den übrigen Feldern folgende Gleichungen:

$$0 = X_3 \cdot 2 + (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right]$$

$$X_3(\min) = -45\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = -Z_4 \cdot 2 + (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{6}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right]$$

$$Z_4 = +45\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = -V_3 - 1000 \left[\frac{1}{8} + \dots \frac{5}{8} - (1 - \frac{5}{8}) - (1 - \frac{7}{8}) \right] \\ - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{5}{8} \right) + 5000 \left[(1 - \frac{5}{8}) + (1 - \frac{7}{8}) \right]$$

$$V_3 \begin{cases} (\text{max}) = + 375 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 10875 \text{ kg} \end{cases}$$

$$Y_3 \begin{cases} (\text{max}) = + 15\,400 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 530 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = X_4 \cdot 2 + (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{4}{8} \right) 8 + \left(\frac{5}{8} \cdot 8 - 2 \right) + \left(\frac{6}{8} \cdot 8 - 4 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 8 - 6 \right) \right]$$

$$X_4 = - 48\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = -Z_5 \cdot 2 + (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{4}{8} \right) 8 + \left(\frac{5}{8} \cdot 8 - 2 \right) + \left(\frac{6}{8} \cdot 8 - 4 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 8 - 6 \right) \right]$$

$$Z_5 = + 48\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = -V_4 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{4}{8} - (1 - \frac{5}{8}) - (1 - \frac{6}{8}) - (1 - \frac{7}{8}) \right) \right] \\ - 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{4}{8} \right) + 5000 \left[(1 - \frac{5}{8}) + (1 - \frac{6}{8}) + (1 - \frac{7}{8}) \right]$$

$$V_4 \begin{cases} (\text{max}) = + 3250 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 6750 \text{ kg} \end{cases}$$

$$Y_4 \begin{cases} (\text{max}) = + 9550 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 4600 \text{ kg.} \end{cases}$$

Die nun folgenden Momentengleichungen beziehen sich jedesmal auf den Teil der Konstruktion, welcher rechts von der betreffenden Schnittlinie liegt.

$$0 = -X_5 \cdot 2 - (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{5}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right]$$

$$X_5 (\text{min}) = - 45\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = Z_6 \cdot 2 - (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{5}{8} \right) 6 + \left(\frac{6}{8} \cdot 6 - 2 \right) + \left(\frac{7}{8} \cdot 6 - 4 \right) \right]$$

$$Z_6 (\text{max}) = + 45\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = -V_5 + 1000 \left[\frac{1}{8} + \dots \frac{4}{8} - (1 - \frac{5}{8}) - (1 - \frac{6}{8}) - (1 - \frac{7}{8}) \right] \\ + 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{4}{8} \right) - 5000 \left[(1 - \frac{5}{8}) + (1 - \frac{6}{8}) + (1 - \frac{7}{8}) \right]$$

$$V_5 \begin{cases} (\text{max}) = + 6750 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 3250 \text{ kg} \end{cases}$$

$$Y_5 \begin{cases} (\text{max}) = + 4600 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 9550 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = -X_6 \cdot 2 - (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) \right]$$

$$X_6 (\text{min}) = - 36\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = Z_7 \cdot 2 - (1000 + 5000) \left[\left(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8} \right) 4 + \left(\frac{7}{8} \cdot 4 - 2 \right) \right]$$

$$Z_7 (\text{max}) = + 36\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = -V_6 + 1000 \left[\frac{1}{8} + \dots \frac{5}{8} - (1 - \frac{6}{8}) - (1 - \frac{7}{8}) \right] \\ + 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{5}{8} \right) - 5000 \left[(1 - \frac{6}{8}) + (1 - \frac{7}{8}) \right]$$

$$V_6 \begin{cases} (\text{max}) = + 10875 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 375 \text{ kg} \end{cases}$$

$$Y_6 \begin{cases} (\text{max}) = + 530 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 15\,400 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$0 = -X_7 \cdot 2 - (1000 + 5000) \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) \cdot 2$$

$$X_7 (\text{min}) = - 21\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = Z_8 \cdot 2 - (1000 + 5000) \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{7}{8} \right) \cdot 2$$

$$Z_8 (\text{max}) = + 21\,000 \text{ kg.}$$

$$0 = -V_7 + 1000 \left[\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8} - (1 - \frac{7}{8}) \right] + 5000 \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{6}{8} \right) - 5000 (1 - \frac{7}{8})$$

$$V_7 \begin{cases} (\text{max}) = + 15\,625 \text{ kg} \\ (\text{min}) = + 1875 \text{ kg} \end{cases}$$

$$Y_7 \begin{cases} (\text{max}) = - 2650 \text{ kg} \\ (\text{min}) = - 22\,100 \text{ kg.} \end{cases}$$

Die Diagonale Y_8 trifft mit keinem Vertikalständer an einem unbelasteten Knotenpunkte zusammen, da der Punkt R wegen des hier angreifenden Auflagerdrucks W als ein solcher nicht angesehen werden darf. Es ist folglich die bei der Bestimmung der übrigen Größen Y befolgte Regel hier nicht anwendbar. Man erkennt indes leicht, daß die vertikale Seitenkraft von Y_8 also $\frac{Y_8}{\sqrt{2}}$ außer

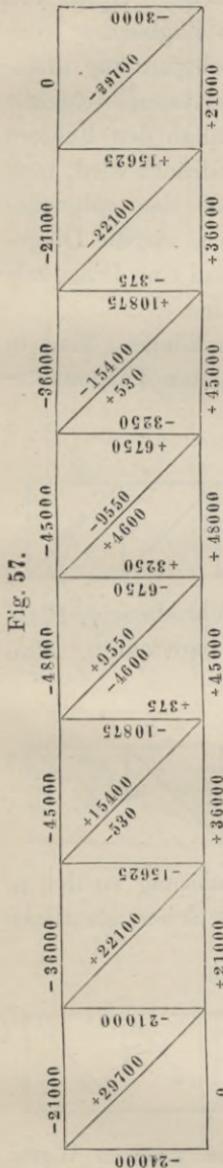
dem Gegendruck W des Auflagers und der Spannung des letzten Vertikalständers die einzige Vertikalkraft ist, welche an dem Punkte R angreift. Es ist folglich bei voller Belastung:

$$\frac{Y_8}{\sqrt{2}} + W - 3000 = 0$$

und erreicht demnach Y_8 seinen größten negativen Wert, wenn W am größten wird, d. h. bei vollendeter Belastung des Trägers, wobei $W = \frac{48000}{2}$ kg wird. Es ist daher:

$$Y_8 (\text{min}) = -21000 \cdot \sqrt{2} = -29700 \text{ kg.}$$

Die Resultate sind in Fig. 57 zusammengestellt.



§ 11.

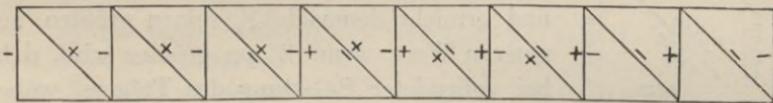
Abgeleitete Formen.

Die Betrachtung der oben gefundenen Momentengleichungen und Vergleichung der dem Fortlassen der positiven und negativen Glieder entsprechenden Belastungszustände mit den Resultaten läßt erkennen, daß das früher bei der Berechnung des parabolischen Trägers gefundene Gesetz hinsichtlich der Diagonalspannungen auch für einen Fachwerkträger gültig ist. Die Spannung der Diagonale eines bestimmten Feldes wird immer dann ein Maximum resp. Minimum, wenn die eine Seite des Trägers (von diesem Felde gerechnet) belastet ist.

Betrachtet man ferner den obigen Träger Fig. 57 von der Kehrseite, so erhält man die Spannungszahlen für einen Träger, dessen Diagonalen von links nach rechts ansteigen (statt von rechts nach links). Sollen die Diagonalen als Zugbänder konstruiert werden, welche unfähig sind, eine Druckspannung anzunehmen, so müssen in der Anordnung des Diagonalsystems folgende Änderungen vorgenommen werden: erstens, in allen den Feldern des obigen Trägers, wo die Diagonale immer gedrückt wird, muß dieselbe vertauscht werden mit einer Diagonale des entgegengesetzten Systems; zweitens, in allen den Feldern, wo die Diagonale abwechselnd gezogen und gedrückt wird, muß eine Diagonale des entgegengesetzten Systems hinzugefügt werden.

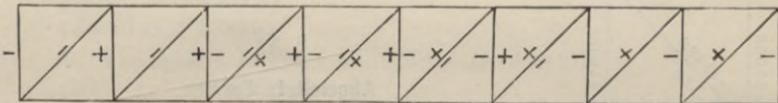
Um diese Änderungen leicht übersehen zu können, sind in Figg. 58 und 59 zwei Träger mit entgegengesetzten Diagonalen-

Fig. 58.



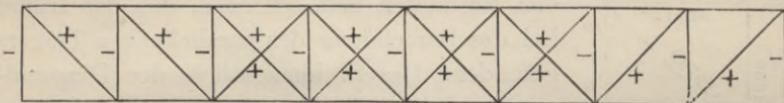
systemen übereinandergestellt und durch eingeschriebene Plus- und Minuszeichen die Arten der Spannungen angedeutet. Man

Fig. 59.



erkennt sogleich, daß die Ausführung jener Änderung zu der in Fig. 60 dargestellten Konstruktion führt, in welcher sämtliche

Fig. 60.



Diagonalen nur Zugspannungen annehmen. Die größten Werte dieser Zugspannungen kann man aus den Figg. 58 und 59 sofort abschreiben, wenn man sich zu den betreffenden Pluszeichen jedesmal den Betrag des Maximum aus Fig. 57 hinzugefügt denkt.

Da in einem Vertikalständer nur dann Zugspannung entstehen kann, wenn die an den unbelasteten Endpunkt (Fußpunkt) derselben anstoßende Diagonale Druckspannung annimmt, letzterer Fall aber in Fig. 60 nicht vorkommt, so kann hinsichtlich der Vertikalständer in Fig. 60 nur von Druckspannungen die Rede sein. Es kommen also nur die Werte V (min) in Betracht und zwar diejenigen, welche der neuen Anordnung des Diagonalsystems entsprechen, d. h. für die linke Seite die Werte aus Fig. 58, für die rechte Seite die Werte aus Fig. 59.

Was endlich die horizontalen Stangen X , Z betrifft, welche bei voller Belastung des Trägers am stärksten gespannt werden, so ist leicht zu erkennen, daß auf der linken Seite die links ansteigenden, auf der rechten die rechts ansteigenden Diagonalen bei voller Belastung in Tätigkeit geraten und sind demnach für die linke Seite die Werte aus Fig. 58, für die rechte Seite die Werte aus Fig. 59 als die für den neuen Träger geltenden anzusehen.

Auf diese Weise kann man die oben gefundenen Resultate benutzen, um ohne neue Rechnung für einen Träger von der Form Fig. 60 die Spannungszahlen in die Figur einzutragen, wie das in Fig. 61 geschehen ist.

Wenn umgekehrt die Diagonalstangen so konstruiert sind, daß sie nur Druckspannung annehmen können — wie das z. B. bei Holzkonstruktion zu geschehen pflegt — so muß der Träger die Form Fig. 62 erhalten, für welche die Spannungszahlen auf eine der vorigen ganz ähnliche Weise aus Fig. 57 abgeleitet werden können.

Liegt die Fahrbahn unten statt oben, so kann man die unteren Knotenpunkte sowohl

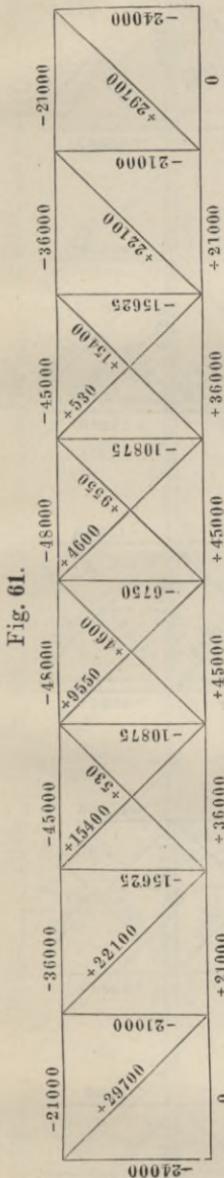


Fig. 62.

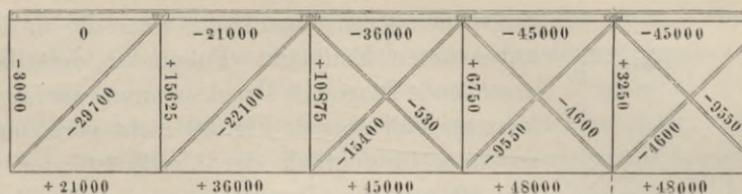


Fig. 64.

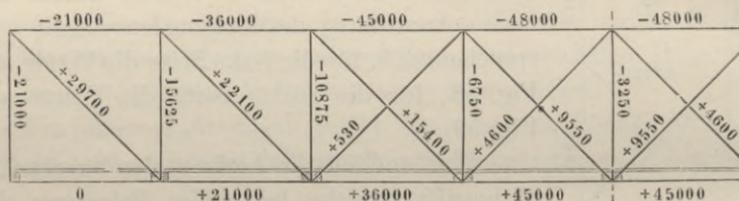


Fig. 65.

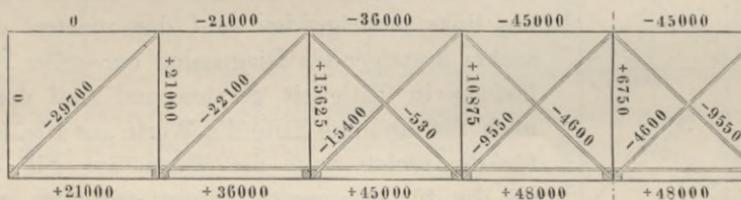


Fig. 67.

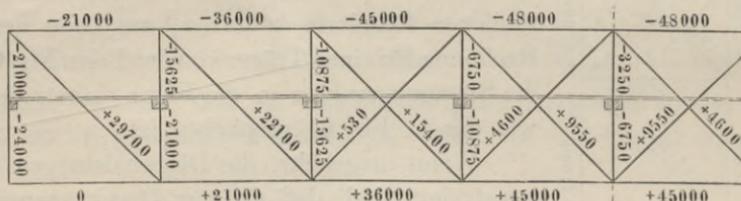


Fig. 68.

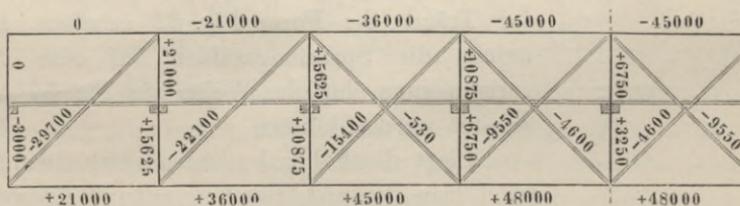
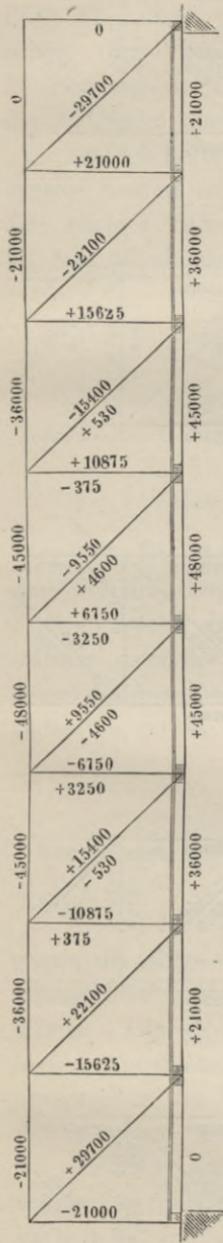


Fig. 63.



für die mobile als für die permanente Last als Belastungspunkte ansehen. Die Spannungszahlen der Horizontal- und Diagonalstangen werden dadurch nicht geändert. Nur für die Vertikalstangen ergeben sich andere Werte, welche mittelst des in § 9 gefundenen Satzes: „Diagonalstange und Vertikalstange haben da, wo sie an einem unbelasteten Punkte zusammen treffen, Vertikalspannungen von gleicher Größe und entgegengesetztem Vorzeichen“ leicht bestimmt werden können. Die unbelasteten Punkte sind hier die oberen, also findet man in Fig. 63 die Spannungszahl irgend eines Vertikalständers, indem man die Spannungszahl der rechts anstoßenden Diagonale durch $\sqrt{2}$ dividiert, und das Vorzeichen umkehrt. Aus Fig. 63 lassen sich dann gerade wie bei dem vorigen Fall die beiden abgeleiteten Formen Figg. 64 und 65 bilden.

Ist die Fahrbahn zwischen Kopf und Fuß an den Vertikalständern befestigt, so kann man diese Zwischenpunkte als Angriffspunkte für die permanenten und mobilen Belastungen ansehen. Es sind dann die oberen sowohl als die unteren Knotenpunkte als unbelastete anzusehen, mithin hat jede Diagonalstange mit den angrenzenden Teilen der beiden benachbarten Vertikalständern gleiche Vertikalspannung, nur von entgegengesetztem Vorzeichen. In Fig. 66 hat z. B. die Diagonale des dritten Feldes die beiden Spannungszahlen $+ 15400$ und $- 530$.

Diese Werte durch $\sqrt{2}$ dividiert und mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen, geben $- 10875$ und $+ 375$

als Spannungszahlen für den oberen Teil des links angrenzenden und den unteren Teil des rechts angrenzenden Vertikalständers.

Fig. 66.

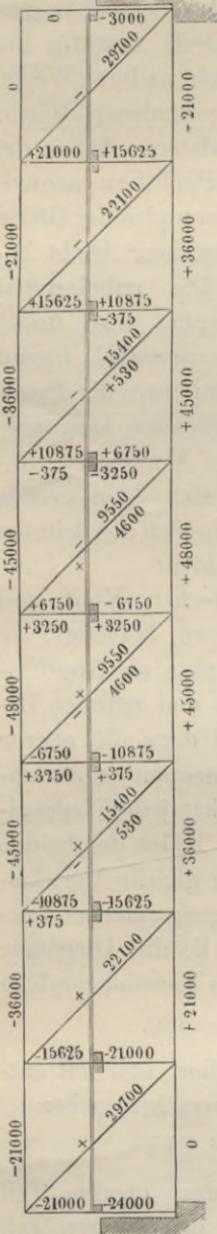


Fig. 69.

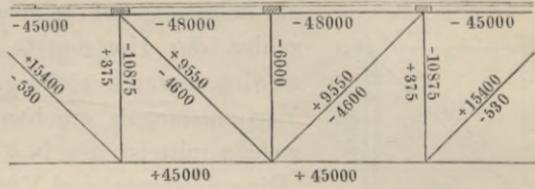


Fig. 70.

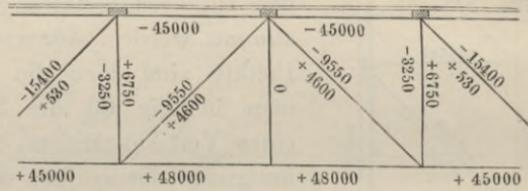


Fig. 71.

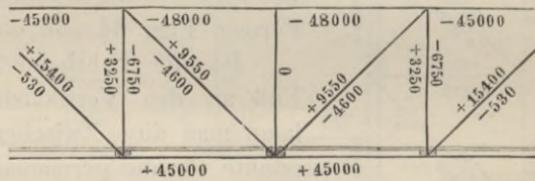


Fig. 72.

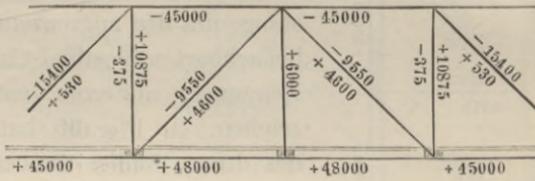
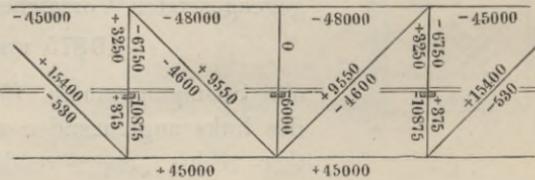


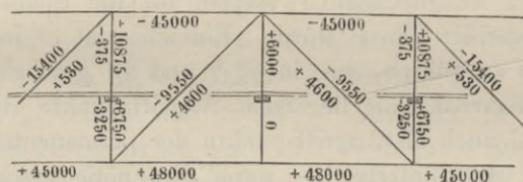
Fig. 73.



Die konsequente Befolgung dieser in § 9 gefundenen Regel führt, sowohl für diese, als auch für die beiden abgeleiteten Formen Figg. 67 und 68 ohne Schwierigkeit zu den richtigen Spannungszahlen der Vertikalständer. Hinsichtlich der Horizontal- und Diagonalstangen aber macht es durchaus keinen Unterschied, ob die Fahrbahn oben, unten oder in der Mitte liegt.

Endlich bei symmetrischen Trägern mit einfachem Diagonalsystem kommt nur der mittlere Vertikalständer in Frage, da für alle übrigen Stücke die Zahlen unmittelbar aus den Figg. 57, 63 und 66 abgeschrieben werden können. Es ist deshalb in den

Fig. 74.



Figg. 69, 70, 71, 72, 73 und 74 jedesmal nur das Mittelstück des Trägers dargestellt. Man erkennt bei Betrachtung dieser Figuren leicht, daß die Spannungszahl für den mittleren Vertikalständer entweder 6000 oder 0 sein muß, je nachdem derjenige seiner beiden Endpunkte, an welchen keine Diagonale grenzt, ein Belastungspunkt ist oder nicht.

§ 12.

Bemerkungen über die Zulässigkeit der in bezug auf die Belastungsweise gemachten Voraussetzungen.

Es ist hier der Ort, einige Bedenken zu erwähnen, welche gegen die obige Berechnungsweise erhoben werden könnten und auf welche schon im Eingange dieser Abhandlung hingewiesen wurde. Die den vorhergehenden Rechnungen zum Grunde gelegten Annahmen in betreff der Wirkungsweise der Belastungen entsprechen der Wirklichkeit nicht ganz genau, vielmehr bedürfen die Resultate streng genommen noch einer kleinen Korrektur.

Erstens: wirkt das Eigengewicht des Trägers wie eine Last, welche über die oberen sowohl als die unteren Knotenpunkte verteilt ist, und nicht, wie oben angenommen wurde, ausschließlich in denjenigen Knotenpunkten, welche in der Fahrbahnlinie liegen.

Um den Einfluß des hiermit begangenen Fehlers zu ermitteln, hat man sich zunächst klar zu machen, daß die anzubringende Korrektur nur auf die Vertikalständer sich beziehen kann, weil die Spannungen aller übrigen Teile ganz unabhängig sind von der Höhenlage der Belastungspunkte. Faßt man einen solchen Vertikalständer in Figg. 53 oder 54 ins Auge und denkt sich den von ihm zu tragenden Anteil an der permanenten Last in richtigem Verhältnis auf Kopf- und Fußpunkt desselben verteilt, so überzeugt man sich leicht, daß auch in diesem Falle, bei der jetzigen Lage der Lasten, die unmittelbare Anwendung der Methode der statischen Momente auf einfache und sichere Weise zu den entsprechenden Werten für die Spannungszahlen der Vertikalständer führen würde. Einfacher ist es indessen, die Rechnung so zu führen, wie in §§ 9 und 10 geschehen — also die in der Fahrbahnlinie liegenden Angriffspunkte der mobilen Last jedesmal auch als Angriffspunkte der permanenten Last anzusehen und erst hinterher — wenn dies nötig erscheint — in folgenderweise die Korrektur hinzuzufügen: man denke sich unmittelbar zur Seite jenes Vertikalständers noch einen Nebeständer, dessen Funktion es ist, die gemachten Annahmen in aller Strenge zu verwirklichen. Dieser Nebeständer muß also den vorher unrichtigerweise zu der Belastung des Fahrbahnpunktes gerechneten Teil der permanenten Last nunmehr wirklich auf denselben übertragen. Er wird als Stütze fungieren, wenn diese Last von oben nach unten, als Hängestange dagegen, wenn diese Last von unten nach oben übertragen werden soll. Seine Spannung ist also negativ, wenn er über der Fahrbahn, positiv, wenn er unter der Fahrbahn liegt, und dem absoluten Werte nach immer gleich dem zu übertragenden Gewicht. Denkt man sich nachher diesen Nebeständer mit dem Hauptständer zu einem Stück verschmolzen, so ist klar, daß die Hinzufügung der Spannungszahl des Nebständers zu der vorher gefundenen Zahl des Hauptständers für die totale Spannung nunmehr den richtigen Wert liefern muß.

Um dies an einem Beispiel deutlich zu machen: sei die wahre Massenverteilung in der Konstruktion Fig. 57 so beschaffen, daß von den 1000 kg permanenter Last zwei Drittel auf den Kopfpunkt und ein Drittel auf den Fußpunkt jedes Vertikalständers zu rechnen sind — während früher alle drei Drittel auf den Kopf-

punkt gerechnet wurden, da die Fahrbahn oben liegt. — Der hinzuzudenkende Nebenständer hat die Aufgabe, diese frühere Annahme zu verwirklichen, muß also das unten befindliche Drittel nach oben übertragen und bildet in diesem Falle eine Hängestange, an welcher 333 kg hängen. Es findet daher eine permanente Spannung von + 333 kg in demselben statt und diese wäre zu den vorher gefundenen Spannungszahlen der Vertikalständer überall hinzuzurechnen, um die genaueren Werte zu erhalten. Der mit V_3 bezeichnete Vertikalständer z. B. bekäme also nunmehr die Spannungszahlen:

$$V_3(\text{max}) = + 375 + 333 = + 708 \text{ kg}$$

$$V_3(\text{min}) = - 10875 + 333 = - 10542 \text{ kg.}$$

Wenn im entgegengesetzten Falle bei unten liegender Fahrbahn, z. B. in Fig. 63, ein Drittel der permanenten Last auf den Kopfpunkt gerechnet werden soll — statt daß früher alle drei Drittel unten gerechnet wurden — so würde jeder fingierte Nebenständer eine Stütze bilden, welche das oben liegende Drittel unterstützt und nach unten überträgt, erhielte also die Spannungszahl — 333 kg, welche überall den Spannungszahlen der Vertikalständer hinzuzufügen wäre. Für den mit V_3 bezeichneten Vertikalständer z. B. ergäben sich dann die Werte:

$$V_3(\text{max}) = + 3250 - 333 = + 2917 \text{ kg}$$

$$V_3(\text{min}) = - 6750 - 333 = - 7083 \text{ kg.}$$

Für diesen Fall ist, wie man sieht, die Korrektur so unbedeutend, daß die oben gemachten Annahmen allenfalls sich rechtfertigen lassen. Bei größeren Brücken dagegen, wo die permanente Last groß ist im Vergleich zur mobilen Last, würde diese Korrektur nicht überflüssig sein.

Ein zweiter Umstand, der zu Bedenken Veranlassung geben könnte, betrifft die Wirkungsweise der mobilen Last. Es ist im Eingange dieser Abhandlung in betreff der nachfolgenden Zahlenbeispiele die Voraussetzung angekündigt, daß jedes Feld durch einen besonderen Zwischenträger überbrückt sei, welcher die permanente Last der Fahrbahn und mit ihr die mobile Last trägt. Letztere wird durch den Zwischenträger auf die beiden Knotenpunkte an den Enden des von ihm überbrückten Feldes übertragen, und kommt also nur bei voller Belastung desselben die Hälfte davon auf jeden der Endpunkte. Die Spannung der Diagonalen und Vertikalen wurde nun oben unter der Voraussetzung

berechnet, daß alle Knotenpunkte an der einen Seite ganz unbelastet waren, die an der anderen Seite dagegen sämtlich ihre volle Belastung hatten. Streng genommen kann aber der Fall garnicht eintreten, daß bei allmählichem Fortschreiten der mobilen Last ein Knotenpunkt schon seine volle Belastung hat, während der nächstfolgende noch ganz unbelastet ist.

Wenn man indessen bedenkt, daß in der Wirklichkeit die mobile Last, wie z. B. ein über die Brücke fahrender Eisenbahnzug, keineswegs eine kontinuierlich und gleichförmig verteilte Belastung bildet, daß vielmehr an den Berührungsstellen zwischen Rad und Schiene der Druck sich konzentriert und daß im ungünstigsten Falle — wenn nämlich der Radstand gerade gleich der Entfernung zweier benachbarter Knotenpunkte ist — jene Annahme sogar in aller Strenge gerechtfertigt ist, so erscheint es, wenn die Zahl der Felder nicht gar zu klein ist, wohl motiviert, von der Genauigkeit ein klein wenig abzuweichen, in einer Richtung, welche höchstens hinsichtlich der Diagonalen und Vertikalen zu anderen, und zwar etwas größeren Querschnitten führen kann, und jenen ungünstigsten Ausnahmefall als Regel zu betrachten.

Vollends verschwinden die beiden hier erwähnten Bedenken in solchen Fällen, bei welchen einerseits durch die größere Anzahl der Felder die Ungenauigkeit der letzteren Voraussetzung sich noch mehr vermindert, und wo außerdem das Nichtvorhandensein der Vertikalständer eine von der vorigen etwas abweichende, der Wirklichkeit mehr entsprechende Berechnungsweise von selbst mit sich bringt. Aus diesem Grunde erscheint die nachfolgend berechnete Konstruktion vorzugsweise geeignet, um für die Anwendung der obigen Theorie als Beispiel gewählt zu werden.

§ 13.

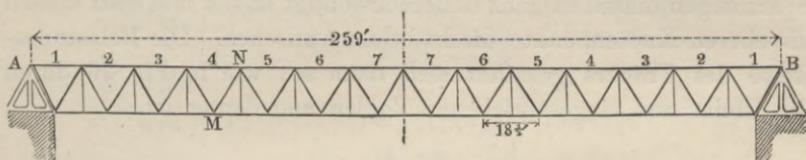
Fachwerkträger mit gleichseitigen Dreiecken.

(Trent-Brücke bei Newark.)

Jede Tragwand hat, wie Fig. 75 zeigt, 27 Felder von der Form gleichseitiger Dreiecke, deren Spitzen abwechselnd nach oben und nach unten gekehrt sind. Die Fahrbahn liegt unten und wird zur einen Hälfte direkt durch die unteren Knotenpunkte unterstützt, zur anderen Hälfte wird sie von den vertikalen Hängestangen getragen, welche an den oberen Knotenpunkten aufgehängt sind. Es

wird demnach von der permanenten sowohl als von der mobilen Last stets die eine Hälfte von den oberen, die andere Hälfte von den unteren Knotenpunkten getragen. Der ganze Träger ist aufgehängt an den beiden Bolzen *A* und *B*, deren jeder von einem

Fig. 75.



dreieckigen gußeisernen Bock getragen wird, welcher mit der Basis auf dem Landpfeiler ruht. Die Entfernung dieser beiden Aufhängepunkte beträgt 259 Fuß, die Seitenlänge jedes Dreiecks also $\frac{259}{14} = 18,5$ Fuß. Die Höhe der Tragwand ist $\frac{18,5}{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 9,25 \cdot 1,73$. Wenn man also, wie im folgenden geschehen soll, die Länge von 9,25 Fuß zur Längeneinheit wählt, so ist die Seitenlänge jedes Dreiecks = 2, die Höhe = 1,73, die ganze Länge des Trägers = 28 zu setzen.

Das Gewicht der ganzen Brücke beträgt 589 t, wovon auf jede der vier Tragwände $\frac{589}{4} = 147,25$ t kommen. Die mobile Last zu 1 t pro laufenden Fuß für jedes der beiden Gleise gerechnet, würde $\frac{2 \cdot 259}{4} = 129,5$ t für jede Tragwand betragen. Die totale Belastung eines Trägers ist also im Maximum:

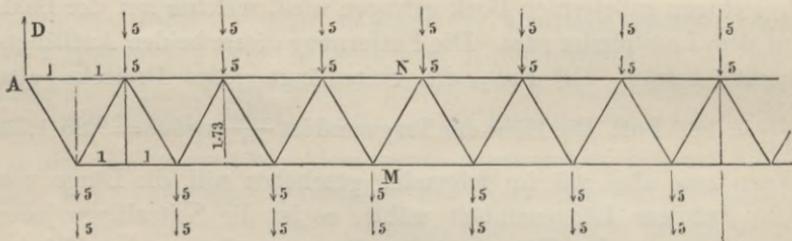
$$147,25 + 129,5 = 276,75 \text{ t};$$

davon kommen auf jeden Knotenpunkt $\frac{276,75}{28}$ t, wofür in runder Summe 10 t gerechnet sind. Von diesen 10 t wäre zwar genau genommen etwas mehr für die permanente als für die mobile Last zu rechnen — da diese beiden wie 147,25 : 129,5 sich verhalten — doch ist im folgenden der leichteren Rechnung wegen jede zu 5 t gerechnet — eine Annahme, welche hinsichtlich der horizontalen Stangen keine Änderung bedingt, nur für die Spannungen in den Streben zu etwas größeren Werten führt und allenfalls gerechtfertigt erscheint, wenn man erwägt, daß die Größe der mobilen Last nie so genau festgestellt werden

kann und auf manchen Bahnen zu mehr als 1 t pro laufenden Fuß angenommen wird.

Da die vertikalen Stangen, wie oben schon erwähnt, nur als Hängestangen fungieren, welche die halben Lasten auf die oberen Knotenpunkte übertragen, so kann man bei der Berechnung der Spannungen dieselben ganz unberücksichtigt lassen und statt dessen die oberen Knotenpunkte direkt belastet ansehen. Die Belastungsweise des Trägers gestaltet sich dann so, wie in Fig. 76 durch die Pfeile und eingeschriebenen Zahlen angedeutet ist.

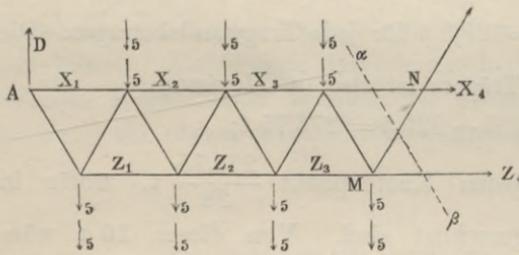
Fig. 76.



Berechnung der Spannungen X und Z in den oberen und unteren horizontalen Stangen.

Trennt man durch den Schnitt $\alpha\beta$ den Teil Fig. 77 von dem anderen Teile des Trägers und stellt man für das abgeschnittene Stück die Momentengleichungen auf, indem man einmal den Punkt M und einmal den Punkt N als Drehpunkt wählt,

Fig. 77.



so erhält man die Gleichungen:

$$0 = X_4 \cdot 1,73 + D \cdot 7 - 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$$

$$0 = -Z_4 \cdot 1,73 + D \cdot 8 - 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) - 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7).$$

Substituiert man in diesen Gleichungen für D seinen Wert:

$$D = 5 \frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{7}{2^8} + 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{7}{2^8} \right)$$

und stellt die von einer und derselben Belastung herrührenden Glieder jedesmal zusammen, so nehmen sie die Form an:

$$0 = X_4 \cdot 1,73 \\ + 5 \left[\left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{3}{2^8} \right) 7 + \left(\frac{3}{2^8} \cdot 7 - 1 \right) + \left(\frac{3}{2^8} \cdot 7 - 2 \right) \right. \\ \left. + \dots \left(\frac{3}{2^8} \cdot 7 - 6 \right) \right]. \\ + 5 \left[\left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{3}{2^8} \right) 7 + \left(\frac{3}{2^8} \cdot 7 - 1 \right) + \left(\frac{3}{2^8} \cdot 7 - 2 \right) \right. \\ \left. + \dots \left(\frac{3}{2^8} \cdot 7 - 6 \right) \right].$$

$$0 = -Z_4 \cdot 1,73 \\ + 5 \left[\left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{3}{2^8} \right) 8 + \left(\frac{3}{2^8} \cdot 8 - 1 \right) + \left(\frac{3}{2^8} \cdot 8 - 2 \right) \right. \\ \left. + \dots \left(\frac{3}{2^8} \cdot 8 - 7 \right) \right] \\ + 5 \left[\left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{3}{2^8} \right) 8 + \left(\frac{3}{2^8} \cdot 8 - 1 \right) + \left(\frac{3}{2^8} \cdot 8 - 2 \right) \right. \\ \left. + \dots \left(\frac{3}{2^8} \cdot 8 - 7 \right) \right].$$

Man erkennt bei dem Anblick dieser Gleichungen sofort, daß alle von der mobilen Last herrührenden Glieder einerlei Vorzeichen haben, daß also das Weglassen irgend einer Belastung die absoluten Werte von X_4 und Z_4 nur verkleinern kann.

Wenn man sich auf diese Weise davon überzeugt hat, daß bei diesem Träger (wie überhaupt bei allen Fachwerkbrücken) die horizontalen Stangen bei voller Belastung am stärksten gespannt werden, so kann man nun auch kürzer, indem man für D seinen numerischen Wert bei voller Belastung, nämlich:

$$D = 10 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{3}{2^8} \right) = 135 \text{ t}$$

einführt und die Glieder, welche die permanente und mobile Last enthalten, verschmilzt, den Gleichungen von vornherein die Form geben:

$$0 = X_4 \cdot 1,73 + 135 \cdot 7 - 10 (1 + 2 + \dots 6) \\ 0 = -Z_4 \cdot 1,73 + 135 \cdot 8 - 10 (1 + 2 + \dots 7).$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt die Werte:

$$X_4 (\text{min}) = -425 \text{ t} \\ Z_4 (\text{max}) = +462 \text{ t}.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die übrigen X und Z folgende Gleichungen:

$$0 = X_1 \cdot 1,73 + 135 \cdot 1 \\ X_1 (\text{min}) = -78 \text{ t} \\ 0 = -Z_1 \cdot 1,73 + 135 \cdot 2 - 10 \cdot 1 \\ Z_1 (\text{max}) = +150 \text{ t} \\ 0 = X_2 \cdot 1,73 + 135 \cdot 3 - 10 (1 + 2) \\ X_2 (\text{min}) = -216 \text{ t} \\ 0 = -Z_2 \cdot 1,73 + 135 \cdot 4 - 20 (1 + 2 + 3) \\ Z_2 (\text{max}) = +277 \text{ t}.$$

$$0 = X_3 \cdot 1,73 + 135 \cdot 5 - 10(1 + 2 + 3 + 4)$$

$$X_3 (\text{min}) = -332 \text{ t.}$$

$$0 = -Z_3 \cdot 1,73 + 135 \cdot 6 - 10(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

$$Z_3 (\text{max}) = +381 \text{ t.}$$

$$0 = X_5 \cdot 1,73 + 135 \cdot 9 - 10(1 + 2 + \dots 8)$$

$$X_5 (\text{min}) = -494 \text{ t.}$$

$$0 = -Z_5 \cdot 1,73 + 135 \cdot 10 - 10(1 + 2 + \dots 9)$$

$$Z_5 (\text{max}) = +520 \text{ t.}$$

$$0 = X_6 \cdot 1,73 + 135 \cdot 11 - 10(1 + 2 + \dots 10)$$

$$X_6 (\text{min}) = -540 \text{ t.}$$

$$0 = -Z_6 \cdot 1,73 + 135 \cdot 12 - 10(1 + 2 + \dots 11)$$

$$Z_6 (\text{max}) = +555 \text{ t.}$$

$$0 = X_7 \cdot 1,73 + 135 \cdot 13 - 10(1 + 2 + \dots 12)$$

$$X_7 (\text{min}) = -564 \text{ t.}$$

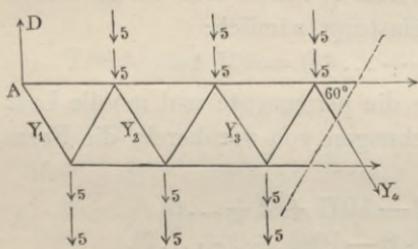
$$0 = -Z_7 \cdot 1,73 + 135 \cdot 14 - 10(1 + 2 + \dots 13)$$

$$Z_7 (\text{max}) = +566 \text{ t.}$$

Berechnung der Spannungen Y und U in den Streben.

Da die Streben einen Winkel von 60° mit der Horizontalen bilden, so sind die vertikalen Seitenkräfte der Strebenspannungen beziehentlich:

Fig. 78.



$Y \cdot \sin 60^\circ$ und $U \cdot \sin 60^\circ$
oder:

$$Y \cdot 0,866 \quad \text{und} \quad U \cdot 0,866.$$

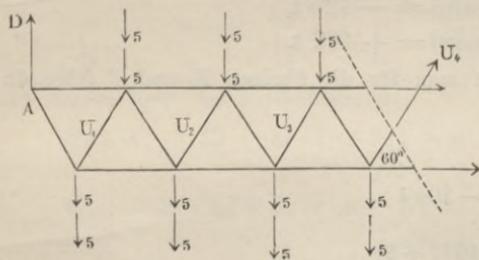
Man erhält also beispielsweise für die beiden Stücke Figg. 78 und 79, indem man für jedes derselben die algebraische Summe der Vertikalkräfte gleich Null setzt, zur Bestimmung von Y_4 und U_4 die beiden Gleichungen:

$$0 = Y_4 \cdot 0,866 - D + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6$$

$$0 = -U_4 \cdot 0,866 - D + 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7,$$

welche, wenn man darin für D seinen Wert

Fig. 79.



$$D = 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{2^7}{2^8} \right) + 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{2^7}{2^8} \right)$$

substituiert und die von den einzelnen Belastungen zu dem Drucke D gelieferten Beiträge jedesmal zusammenstellt mit den direkt von ihnen hervorgebrachten Vertikalkräften, die Form annehmen:

$$\begin{aligned}
 0 &= Y_4 \cdot 0,866 - 5 \left[\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} - (1 - \frac{2}{2^8}) - (1 - \frac{2}{2^8}) \right. \\
 &\quad \left. - \dots (1 - \frac{2}{2^8}) \right] \\
 &\quad - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} \right) + 5 \left[(1 - \frac{2}{2^8}) + (1 - \frac{2}{2^8}) \right. \\
 &\quad \left. + \dots (1 - \frac{2}{2^8}) \right] \\
 0 &= -U_4 \cdot 0,866 - 5 \left[\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} - (1 - \frac{2}{2^8}) - (1 - \frac{2}{2^8}) \right. \\
 &\quad \left. + \dots (1 - \frac{2}{2^8}) \right] \\
 &\quad - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} \right) + 5 \left[(1 - \frac{2}{2^8}) + (1 - \frac{2}{2^8}) \right. \\
 &\quad \left. + \dots (1 - \frac{2}{2^8}) \right].
 \end{aligned}$$

Die von der mobilen Last herrührenden Glieder haben nicht einerlei Vorzeichen in diesen Gleichungen; es kommt also die oben gegebene Regel zur Anwendung: man läßt einmal die positiven und einmal die negativen Glieder (von den die mobile Last betreffenden) fort, und es ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 0 &= Y_4 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} - \frac{6}{2^8} - \frac{5}{2^8} - \dots \frac{1}{2^8} \right) \\
 &\quad - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} \right) \\
 Y_4 (\text{max}) &= + 91 \text{ t.} \\
 0 &= Y_4 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} - \frac{6}{2^8} - \frac{5}{2^8} - \dots \frac{1}{2^8} \right) \\
 &\quad - 5 \left(\frac{6}{2^8} + \frac{5}{2^8} + \dots \frac{1}{2^8} \right) \\
 Y_4 (\text{min}) &= + 39 \text{ t.} \\
 0 &= -U_4 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} - \frac{7}{2^8} - \frac{6}{2^8} - \dots \frac{1}{2^8} \right) \\
 &\quad + 5 \left(\frac{7}{2^8} + \frac{6}{2^8} + \dots \frac{1}{2^8} \right) \\
 U_4 (\text{max}) &= - 32 \text{ t.} \\
 0 &= -U_4 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} - \frac{7}{2^8} - \frac{6}{2^8} - \dots \frac{1}{2^8} \right) \\
 &\quad - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots \frac{2}{2^8} \right) \\
 U_4 (\text{min}) &= - 81 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß für Y_4 nur das Maximum und für U_4 nur das Minimum in Betracht kommt, und hätte also die Berechnung von $Y_4 (\text{min})$ und $U_4 (\text{max})$ erspart werden können. Es ist jedoch im allgemeinen ratsam, für jede Stange Maximum und Minimum der Spannung zu berechnen und erst dann, wenn man sich überzeugt hat, daß beide einerlei Zeichen haben, den kleineren der beiden absoluten Werte unberücksichtigt zu lassen.

Genau auf dieselbe Weise wie hier an den beiden Stücken Y_4 und U_4 als Beispielen gezeigt wurde, erhält man für die übrigen Y und U die nachfolgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= Y_1 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{2^7}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} \dots + \frac{2^7}{2^8} \right) \\
&Y_1 \begin{cases} (\text{max}) = + 156 \text{ t} \\ (\text{min}) = + 78 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= -U_1 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{2^6}{2^8} - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1^7}{2^8} + \frac{2^7}{2^8} + \dots + \frac{2^6}{2^8} \right) + 5 \cdot \frac{1}{2^8} \\
&U_1 \begin{cases} (\text{max}) = - 72 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 144 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= Y_2 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \dots + \frac{2^5}{2^8} - \frac{2^7}{2^8} - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{2^5}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{2^5}{2^8} + \frac{1}{2^8} \right) \\
&Y_2 \begin{cases} (\text{max}) = + 133 \text{ t} \\ (\text{min}) = + 66 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= -U_2 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{2^4}{2^8} - \frac{2^6}{2^8} - \frac{2^5}{2^8} - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1^7}{2^8} + \dots + \frac{2^4}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{2^4}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \frac{1}{2^8} \right) \\
&U_2 \begin{cases} (\text{max}) = - 59 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 122 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= Y_3 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{2^3}{2^8} - \frac{1}{2^8} - \dots - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{2^3}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{2^3}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) \\
&Y_3 \begin{cases} (\text{max}) = + 112 \text{ t} \\ (\text{min}) = + 53 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= -U_3 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{2^2}{2^8} - \frac{2^5}{2^8} - \dots - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1^7}{2^8} + \dots + \frac{2^2}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{2^5}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) \\
&U_3 \begin{cases} (\text{max}) = - 46 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 101 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= Y_5 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1^9}{2^8} - \frac{2^8}{2^8} - \dots - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1^9}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{2^8}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) \\
&Y_5 \begin{cases} (\text{max}) = + 71 \text{ t} \\ (\text{min}) = + 24 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= -U_5 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1^8}{2^8} - \frac{2^9}{2^8} - \dots - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1^8}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{2^9}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) \\
&U_5 \begin{cases} (\text{max}) = - 17 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 61 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= Y_6 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1^7}{2^8} - \frac{1^9}{2^8} - \dots - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1^8}{2^8} + \dots + \frac{1^7}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{1^9}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) \\
&Y_6 \begin{cases} (\text{max}) = + 52 \text{ t} \\ (\text{min}) = + 9 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= -U_6 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1^6}{2^8} - \frac{1^8}{2^8} - \dots - \frac{1^5}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1^8}{2^8} + \dots + \frac{1^6}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{1^8}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) \\
&U_6 \begin{cases} (\text{max}) = - 0,8 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 42 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= Y_7 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1^5}{2^8} - \frac{1^8}{2^8} - \dots - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1^8}{2^8} + \dots + \frac{1^5}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{1^8}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) \\
&Y_7 \begin{cases} (\text{max}) = + 34 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 7,4 \text{ t.} \end{cases} \\
0 &= -U_7 \cdot 0,866 - 5 \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1^4}{2^8} - \frac{1^8}{2^8} - \dots - \frac{1}{2^8} \right) - 5 \left(\frac{1^8}{2^8} + \dots + \frac{1^4}{2^8} \right) \\
&\quad + 5 \left(\frac{1^8}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) \\
&U_7 \begin{cases} (\text{max}) = + 16 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 25 \text{ t.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Fig. 80.

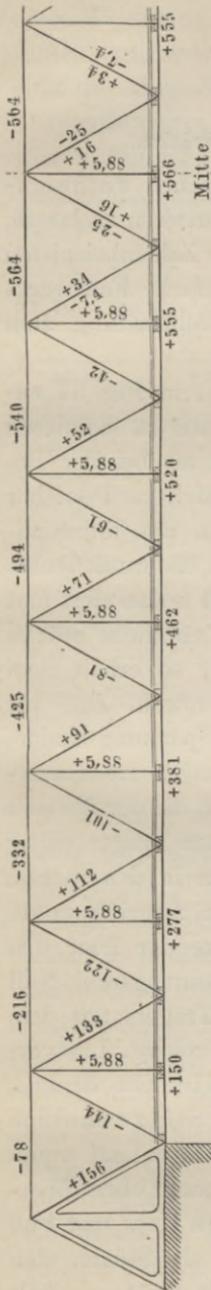
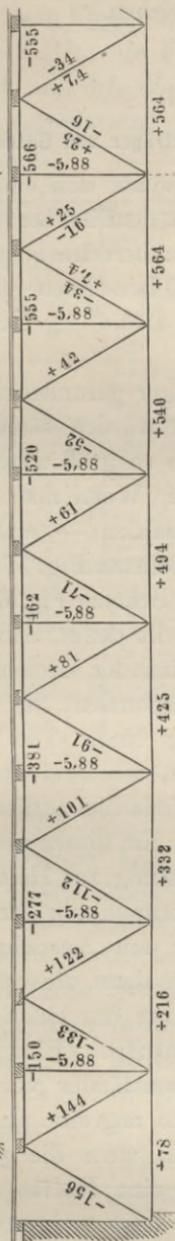


Fig. 81.



Da der Träger in Beziehung auf die vertikale Mittellinie vollkommen symmetrisch geformt ist, so erhalten die gleichliegenden Stücke auf der anderen Hälfte genau dieselben Spannungen und brauchen deshalb nicht besonders berechnet zu werden.

Was die vertikalen Hängestangen betrifft, so hat jede derselben außer den 5 t mobiler Last noch ihren Anteil an der permanenten Last zu tragen. Die Fahrbahn, welche einen Teil des Eigengewichtes bildet, liegt unten und stützt sich zum Teil auf die unteren Durchschnittspunkte der Diagonalen, zum Teil auf die unteren Endpunkte der Vertikalstangen. Das Gewicht der Fahrbahn beträgt 24,75 t; davon kommt auf jede der 28 Abteilungen

$$\frac{24,75}{28} = 0,88 \text{ t.}$$

Jede Vertikalstange hat also im Maximum 5 t + 0,88 t zu tragen, und ist daher die Spannungszahl überall = + 5,88.

Die Resultate der obigen Rechnungen sind zur bequemeren Übersicht in Fig. 80 zusammengestellt.

Vertauscht man in Fig. 80 überall die Plus- und Minuszeichen, so gelten die Spannungszahlen für einen Träger von der

umgekehrten Form Fig. 81, welcher unten aufliegt und in welchem die Vertikalstangen als Stützen wirken.

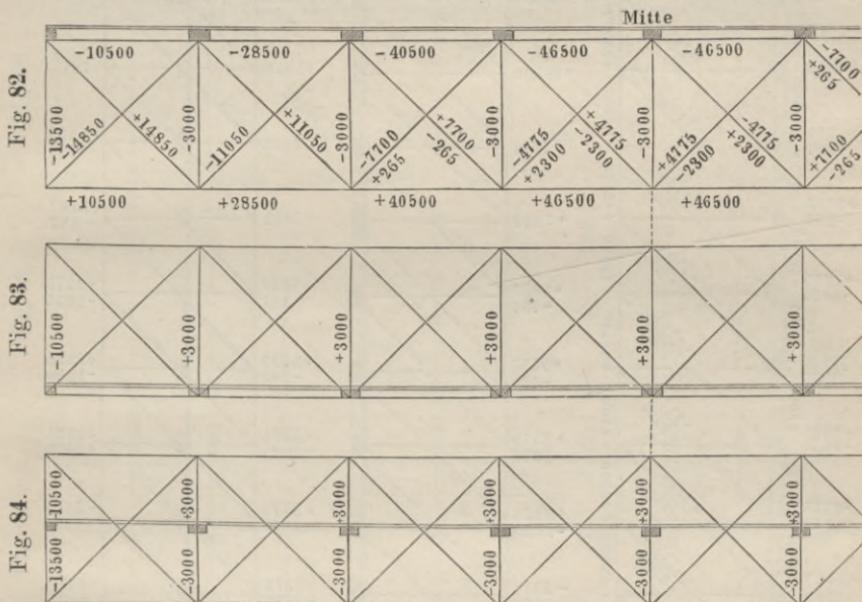
§ 14.

Zusammengesetzte Fachwerkträger und Gitterbrücken.

Um den Zusammenhang zwischen den einfachen Fachwerkträgern und Gitterträgern möglichst deutlich hervortreten zu lassen, soll den in diesem Paragraphen zu berechnenden Zahlenbeispielen als Grundform überall der in § 10 berechnete einfache Fachwerkträger von 16 m Spannweite und 48000 kg Totalbelastung zum Grunde gelegt werden.

Die für diesen einfachen Träger gefundenen, in Fig. 57 zusammengestellten Spannungszahlen würden sämtlich zu halbieren sein, wenn die Belastung nur halb so groß wäre, als bei der Berechnung oben angenommen wurde. Wenn man sich zwei solcher Träger mit halbierten Spannungszahlen — einen mit links ansteigenden Diagonalen nach dem Schema Fig. 57, einen mit rechts ansteigenden Diagonalen nach dem Schema Fig. 63 konstruiert und belastet — so hintereinander gestellt denkt, daß sämtliche Stücke mit Ausnahme der Diagonalen einander decken, so erhält man einen Träger mit gekreuzten Diagonalen, die sowohl Zug- als Druckspannung anzunehmen fähig sind. Die Spannungszahlen, welche man erhält, wenn man da, wo zwei Stangen zusammenfallen, die beiden Spannungszahlen jedesmal addiert, die der übrigen aber unverändert läßt, würden als für diesen neuen Träger gültig beizubehalten sein, wenn die Belastung zur Hälfte in den oberen, zur Hälfte in den unteren Knotenpunkten ihre Angriffspunkte hätte. Für jeden Vertikalständer mit Ausnahme der über den Auflagern befindlichen würde sich dann die Spannungszahl Null ergeben, weil in jedem das Maximum des einen Trägers mit dem Minimum des anderen zusammentrifft. Eine solche Lastverteilung kann man sich durch Nebenständer verwirklicht denken, welche, wenn die ganze Last oben angreift, als Stütze die eine Hälfte nach unten übertragen und, wenn die ganze Last unten angreift, als Hängestangen die eine Hälfte nach oben übertragen. Wenn dagegen die ganze Last zwischen Kopf und Fuß angreift, so kann man sich den unteren Teil als Stütze, den oberen als Hängestange fungierend denken. Jede Stütze erhält

also -3000 , jede Hängestange $+3000$ als Spannungszahl. Auf diese Weise sind die in **Figg. 82, 83, 84** eingeschriebenen Spannungszahlen entstanden. (Um die Figuren nicht unnötig zu überladen, sind in **Figg. 83** und **84** die Zahlen für die Horizontal- und Diagonalstangen weggelassen. Es gelten für sie dieselben Zahlen wie in **Fig. 82**.)



Wenn man zwei Träger mit halbierten Spannungszahlen — beide nach dem Schema **Fig. 57** konstruiert und belastet — um eine halbe Feldlänge gegeneinander verschoben hintereinander gestellt zeichnet und wiederum die Spannungszahlen von je zwei einander deckenden horizontalen Stangen addiert, so erhält man einen doppelten Fachwerkträger **Fig. 85**, für welchen die eingeschriebenen Spannungszahlen gültig bleiben, wenn der Träger so unterstützt ist, wie in **Fig. 85** angegeben. Liegt die Fahrbahn unten oder in halber Höhe des Trägers, so sind **Figg. 63** und **66** in gleicher Weise zu benutzen und man erhält daraus **Figg. 86** und **87**, in welchen letzteren beiden die Zahlen für die Diagonal- und Horizontalstangen weggelassen sind, da für sie dieselben Zahlen wie in **Fig. 85** gelten. Sollen bei einem solchen Träger die Diagonalen so konstruiert werden, daß sie nur Zugspannung annehmen können, so erhält derselbe — je nachdem

Fig. 85.

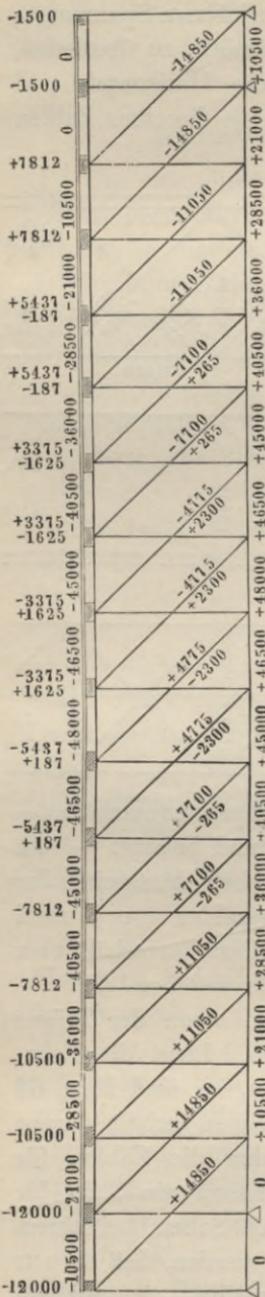


Fig. 86.

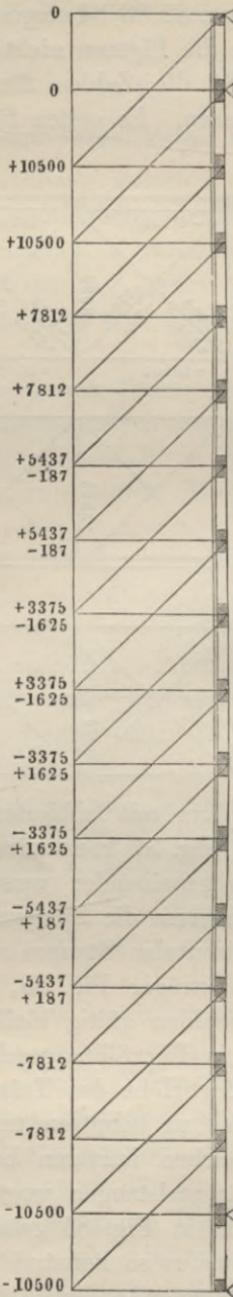


Fig. 87.

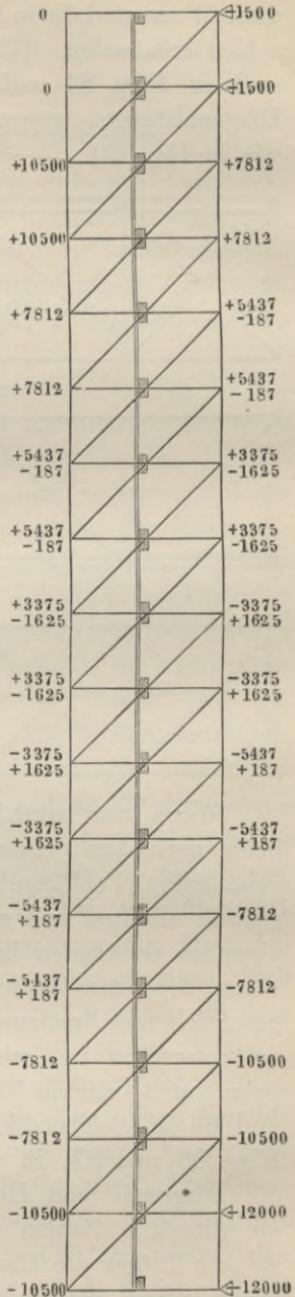


Fig. 91.

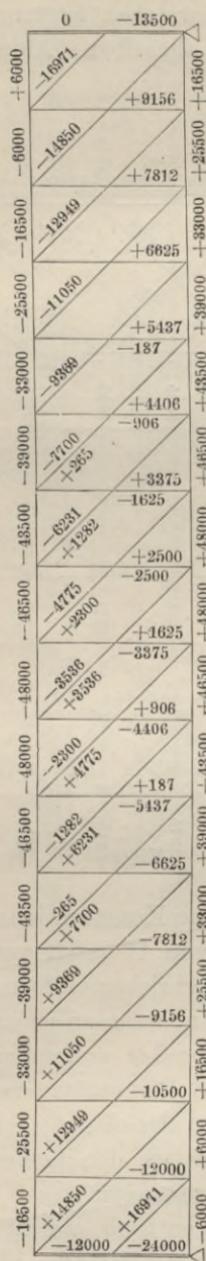


Fig. 92.

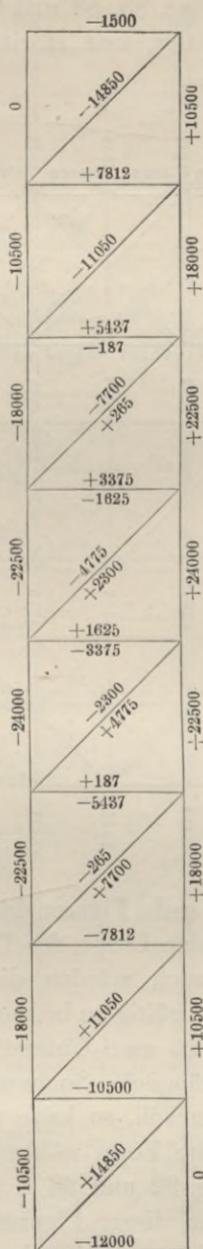
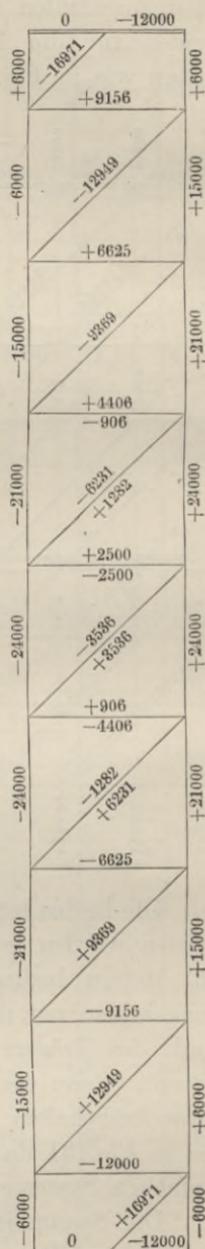


Fig. 93.



angesehen werden dürfen. Unter dieser Voraussetzung findet man die Spannungszahlen für Fig. 92, indem man die in Fig. 57 angegebenen Zahlen durch zwei dividiert. Die Spannungszahlen für Fig. 93 dagegen würden unter Zugrundelegung halber Belastungszahlen, also von 4000 kg permanenter und 20000 kg mobiler Belastung neu zu berechnen sein.

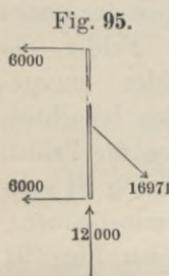
Hinsichtlich dieser Berechnung, welche im übrigen ganz auf dieselbe Art wie in § 10 ausgeführt werden kann, ist nur das eine zu bemerken, daß hier abweichend von allen früheren Fällen für den ersten und letzten Vertikalständer außer der in dem unteren Teile stattfindenden Druckspannung auch noch eine Biegungsspannung sich herausstellt (weshalb diese beiden Stangen in den Figuren durch Doppellinien gekennzeichnet sind). Man erhält nämlich, wie aus Fig. 94 zu ersehen ist, für die drei Stangen im ersten Felde die Gleichungen:

$$0 = X \cdot 2 + 12000 \cdot 1 \text{ (Drehpunkt } P), X = -6000 \text{ kg,}$$

$$0 = Y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 12000, Y = +16971 \text{ kg,}$$

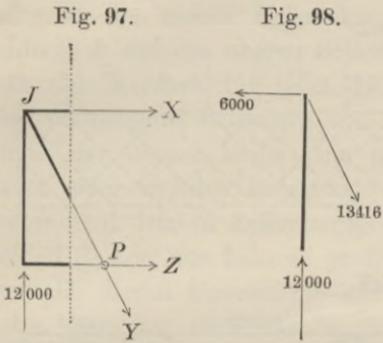
$$0 = -Z \cdot 2 - 12000 \cdot 1 \text{ (Drehpunkt } O), Z = -6000 \text{ kg.}$$

Da X und Z beide negativ, also Druckspannungen sind, so wird der erste Vertikalständer auf die in Fig. 95 dargestellte Art von den vier auf ihn wirkenden Kräften im Gleichgewicht gehalten und befindet sich — abgesehen von der außerdem noch in seiner unteren Hälfte stattfindenden Druckspannung von 12000 kg in demselben Zustande, wie ein an beiden Endpunkten unterstützter, in der Mitte mit 12000 kg belasteter Balken. Dieselbe Figur veranschaulicht zugleich den Spannungszustand des letzten Vertikalständers.



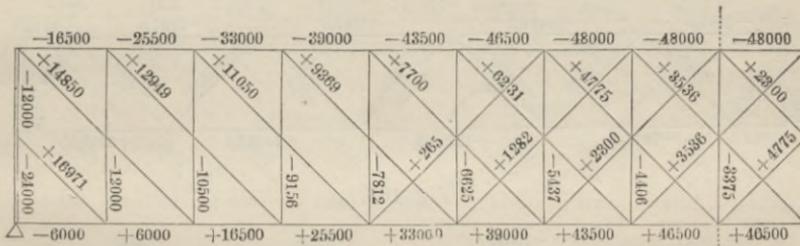
Um solche Biegungen zu vermeiden, kann man den Diagonalen des ersten und letzten Feldes auch die in Fig. 96 angegebene Stellung geben, in welchem Falle man z. B. für die drei Stangen des ersten Feldes statt der obigen die folgenden Gleichungen erhalten würde (siehe Figg. 97 und 98):

Verschiedenheit der Lage der Belastungspunkte und der Diagonalen. So z. B. würde man auf gleiche Weise, wie in § 11 erklärt wurde, für den Fall, daß die Diagonalen als Zugbänder konstruiert sind, also keine Druckspannungen annehmen können, statt der beiden vorigen die Fig. 100 und 101 erhalten, in welchen wegen symmetrischer Form die eine Hälfte des Trägers weggelassen werden durfte, da die einander symmetrisch gegenüberliegenden Stangen der linken und rechten Hälfte gleiche Spannungszahlen erhalten.



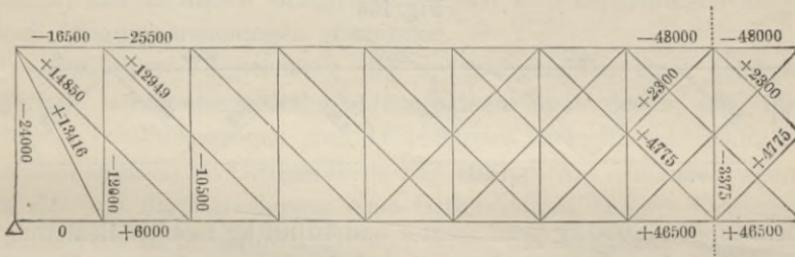
Denkt man sich in Fig. 91 die Vertikalstangen durch Diagonalstangen ersetzt, welche von links nach rechts unter einem Winkel von 45° ansteigen, so gelangt man zu dem in Fig. 102 dargestellten Gitterträger, welcher als aus den vier einfachen Fackwerk-

Fig. 100.



systemen Fig. 103, 104, 105 und 106 zusammengesetzt betrachtet werden kann.

Fig. 101.



systemen Fig. 103, 104, 105 und 106 zusammengesetzt betrachtet werden kann.

Der Berechnung der Spannungszahlen für diesen Gitterträger sollen dieselben Dimensionen (16 m Länge und 2 m Höhe) und Total-

Fig. 102.

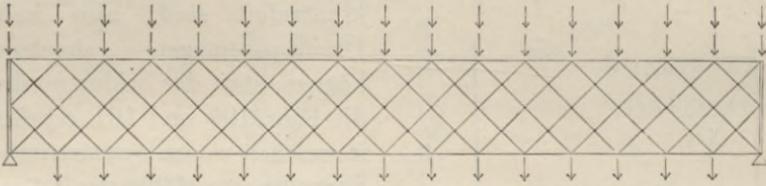


Fig. 103.

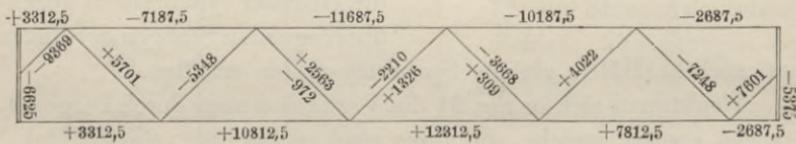


Fig. 104.

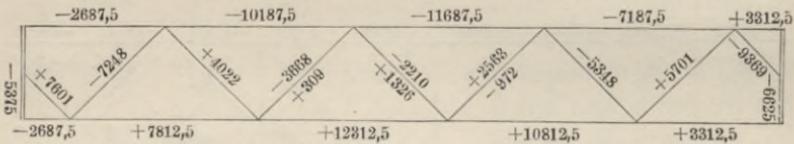


Fig. 105.

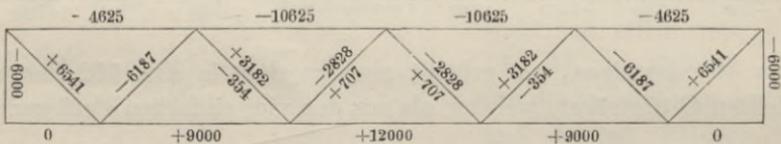
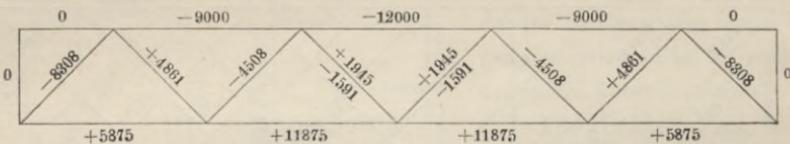


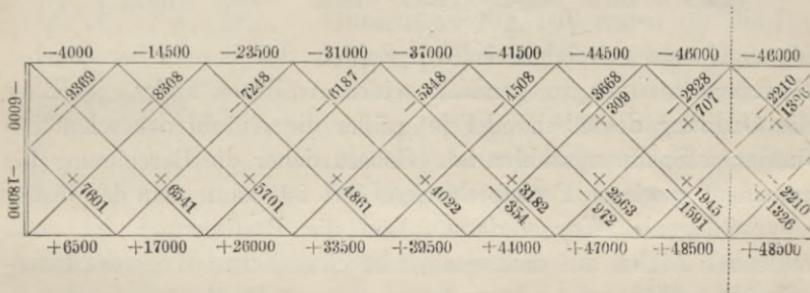
Fig. 106.



belastungen (8000 kg permanenter und 40 000 kg mobiler Belastung) zum Grunde gelegt werden, wie bei den vorigen Fällen. Es soll jedoch hinsichtlich der permanenten Belastung die von der vorigen abweichende und der Wirklichkeit besser entsprechende Annahme

gemacht werden, daß dieselbe zur Hälfte auf die obere und zur Hälfte auf die untere Reihe von Belastungspunkten sich verteilt, während die mobile Belastung wie bei dem vorigen Falle ausschließlich auf die oberen Belastungspunkte sich verteilt. Es ergibt sich hiernach für jeden Belastungspunkt der unteren Reihe eine permanente Belastung von 250 kg und für jeden Belastungspunkt der oberen Reihe eine permanente Belastung von 250 kg nebst einer mobilen Belastung von 2500 kg (mit Ausnahme des ersten und letzten Belastungspunktes, welche in jeder von den beiden Reihen nur halb so große Belastungen bekommen). Wenn man die diesen Belastungen entsprechenden Spannungszahlen für jedes der vier einfachen Systeme nach der früher angegebenen Methode berechnet und nachher diese vier Figuren wiederum zu einer Figur zusammensetzt, so erhält man die in Fig. 107 an-

Fig. 107.

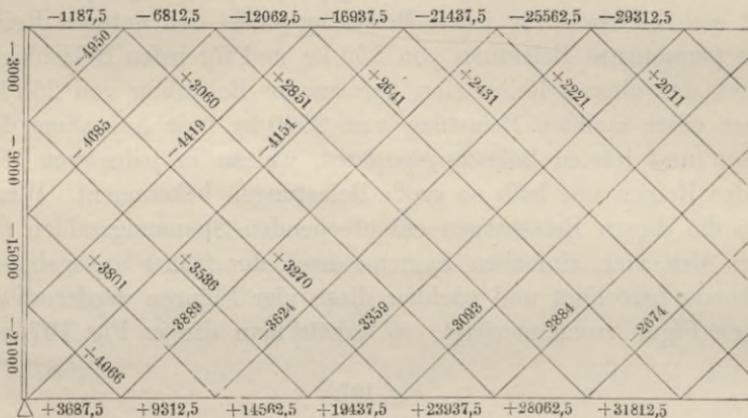


gegebenen Spannungszahlen. Auch hier sollen die Doppellinien, durch welche die beiden Vertikalstangen an den Enden des Trägers in den Figg. 102, 103, 104 und 107 gekennzeichnet sind, daran erinnern, daß in diesen Stangen außer den Druckspannungen auch noch Biegungsspannungen stattfinden.

Bei einer Vergleichung der Spannungszahlen eines solchen vierfach zusammengesetzten Gitterbalkens mit denen des für gleiche Totalbelastungen und Dimensionen berechneten achtfach zusammengesetzten Gitterbalkens Fig. 108 erkennt man, daß, wenn es sich um die Berechnung eines Gittersystems höherer Ordnung handelt, es nicht erforderlich sein wird, die Rechnung für jedes einzelne der einfachen Systeme in dieser Vollständigkeit durchzuführen. Die Spannungszahlen der horizontalen Stangen nehmen von der Mitte nach den beiden Enden hin allmählich ab, die

Spannungszahlen der Diagonalstangen dagegen nehmen von der Mitte nach den beiden Enden hin allmählich zu, und zwar nach

Fig. 108.



Zahlenreihen alsdann durch Einschaltung der fehlenden Zwischenzahlen ergänzen können.

Die Art und Weise, in welcher die Vertikalstangen an den Enden eines solchen Gitterträgers auf Biegung in Anspruch genommen werden, zeigen Figg. 109 und

Fig. 109.

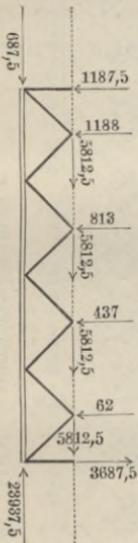
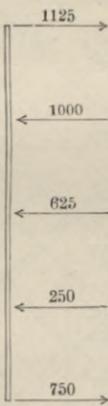


Fig. 110.



110. In ersterer sind an den Schnittstellen der Gitterstäbe statt der Spannungen selbst deren horizontale und vertikale Seitenkräfte angegeben, in letzterer sind von den auf die Vertikalstange überhaupt einwirkenden Kräften lediglich die biegenden Horizontalkräfte angegeben. Die von den Vertikalkräften außerdem noch hervorgebrachten Druckspannungen sind aus Fig. 108 zu entnehmen.

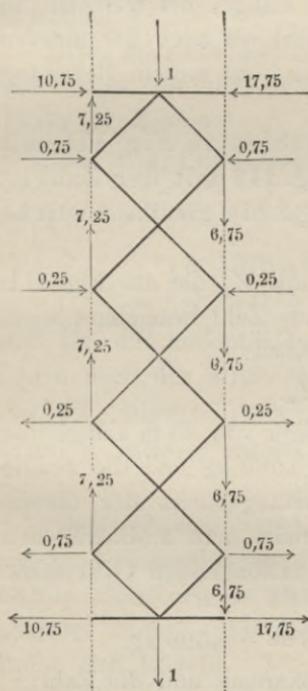
Bei dem achtfach zusammengesetzten Gitterträger Fig. 108 waren für die Belastungspunkte der oberen sowohl als der unteren Reihe permanente Belastungen von je 125 kg und für die Belastungspunkte der oberen Reihe außerdem mobile Belastungen von je 1250 kg in Rechnung gebracht. Hätte man statt dessen jede der

permanenten Belastungen = Eins angenommen und die mobilen Belastungen = Null gesetzt, so würde man die in Fig. 111 eingetragenen Spannungszahlen erhalten haben. Diese Zahlen kann man auch als Spannungszahlen des vorigen Trägers — und zwar als die dem unbelasteten Zustande entsprechenden — betrachten, sobald man nur das Gewicht von 125 kg dabei als Krafteinheit ansieht. Um die Spannungen in Kilogrammen ausgedrückt zu erhalten, würde man sämtliche Zahlen noch mit der Zahl 125 zu multiplizieren haben.

Dieselben Zahlen können aber in gleicher Weise auch für jeden beliebigen anderen achtfach zusammengesetzten Gitterträger, dessen Länge gleich der achtfachen Höhe ist und dessen permanente Belastungen je p kg betragen, als gültig betrachtet werden, sofern man nur diese Belastung von p kg als Krafteinheit ansieht, oder — um die Spannungen in Kilogrammen ausgedrückt zu erhalten — sämtliche Spannungszahlen noch mit der Zahl p multipliziert.

Wenn man ein anderes Mal die Spannungszahlen berechnete unter der Voraussetzung, daß die permanente Belastung = Null und die mobile Belastung = Eins ist für jeden Belastungspunkt der oberen sowohl wie der unteren Reihe, so würde man die in Fig. 112 eingetragenen Spannungszahlen erhalten. Für einen anderen Träger, welcher diesem geometrisch ähnlich ist, dessen mobile Belastungen aber oben und unten je m kg betragen, würde man diese Zahlen sämtlich mit der Zahl m zu multiplizieren haben, um die Spannungen in Kilogrammen ausgedrückt zu erhalten.

Fig. 113.



Die Spannungszahlen der Gitterstäbe in Fig. 111 repräsentieren gleichzeitige Spannungen, diejenigen der Figg. 112 und 108 dagegen ungleichzeitige Spannungen, insofern bei den letzteren beiden jede Spannungszahl einem besonderen Belastungszustande des Trägers entspricht. Die Funktionen der Gitterwand bei einem solchen mehrfach zusammengesetzten Gitterträger sind daher am besten in Fig. 111 zu erkennen, deren Zahlen mit $p + m$ multipliziert zugleich die Spannungen eines vollbelasteten Trägers repräsentieren. Denkt man sich durch diesen Träger zwei Vertikalschnitte nebeneinander hindurchgelegt — einen durch das zweite, den anderen durch das dritte Horizontalstangenpaar — und an dem zwischen diesen beiden Schnitten liegenden Teile des Gitterträgers die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlichen horizontalen und vertikalen Kräfte an den Schnittstellen wieder hinzugefügt, so erhält man die in Fig. 113 angegebenen Kraftwirkungen. Man erkennt aus dieser Figur, wie die ganze in einem Vertikalschnitte tätige Vertikalkraft zu gleichen Teilen auf die einzelnen Kreuzungspunkte der Gitterstäbe sich verteilt, daß die Differenz der beiden ganzen Vertikalkräfte gleich der Totalbelastung des Stückes ist, daß ferner die Horizontalkräfte von der Mitte nach oben und unten hin proportional dem

Abstände von der Mitte zunehmen. Diese Gesetzmäßigkeit würde noch deutlicher hervorgetreten sein, wenn statt des 8fachen ein 16fach zusammengesetztes System gewählt wäre. Je größer die Anzahl der Gitterstäbe ist, um so größer wird die Ähnlichkeit zwischen den Funktionen der Gitterwand und denen einer zwischen die obere und untere Gurtung eingeschalteten vollen Blechwand.

Die beiden Zahlenfiguren 111 und 112 kann man auf folgende Weise benutzen, um die wirklichen Spannungszahlen zu erhalten für irgend einen anderen achtfach zusammengesetzten Gitterträger von gleichem Verhältnis der Höhe zur Länge, bei welchem an jedem Belastungspunkte der oberen sowohl als auch der unteren Reihe die permanente Belastung p kg und die mobile Belastung m kg beträgt:

Man multipliziert sämtliche Zahlen in Fig. 111 mit der Zahl p , sämtliche Zahlen in Fig. 112 mit der Zahl m , und addiert nachher für jede Stange die zwei auf solche Weise erhaltenen Zahlen.

Wenn also für irgend eine Stange mit Z_p die aus Fig. 111, mit Z_m die aus Fig. 112 zu entnehmende Zahl bezeichnet wird, so ist die wirkliche Spannungszahl derselben:

$$Z = p \cdot Z_p + m \cdot Z_m.$$

Setzt man für einen solchen Gitterträger von 64 m Länge und 8 m Höhe die permanente Belastung $p = 1500$ kg und die mobile Belastung $m = 2000$ kg für jeden Belastungspunkt der oberen und unteren horizontalen Reihe, so erhält man z. B. für den sechzehnten der von rechts nach links ansteigenden Gitterstäbe die Zahl:

$$Z = 1500 \cdot 0,707 + 2000 \cdot 1,768 = + 4596 \text{ kg}$$

als das Maximum oder die größte Zugspannung und die Zahl:

$$Z = 1500 \cdot 0,707 - 2000 \cdot 1,061 = - 1061 \text{ kg}$$

als das Minimum oder die größte Druckspannung dieser Stange. Für die Spannungen der übrigen von rechts nach links ansteigenden Gitterstäbe — in der Reihenfolge vom linksseitigen Ende nach der Mitte hin — ergeben sich auf gleiche Weise die folgenden Zahlen:

$$\begin{array}{cccccccc} + 21036, & + 19799, & + 18562, & + 17324, & + 16175, & + 15027, \\ + 13877, & + 12727, & + 11667, & + 10600, & + 9546, & + 8485, \\ + 7513, & + 6540, & \left\{ \begin{array}{l} + 5569 \\ - 265 \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} + 4596 \\ - 1061 \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} + 3713 \\ - 1944 \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} + 2828 \\ - 2828 \end{array} \right\}, \end{array}$$

welche Zahlen mit -1 multipliziert zugleich die Spannungszahlen der von links nach rechts ansteigenden Gitterstäbe bilden. Für die horizontalen Stangen erhält man — in der Reihenfolge vom Ende nach der Mitte hin — die Zahlen:

11375, 37625, 62125, 84875, 105875, 135125, 142625,
158375, 172375, 184625, 195125, 203875, 210875, 216125,
219625, 221375,

welche positiv genommen die Zugspannungen der unteren, und negativ genommen die Druckspannungen der oberen Gurtung darstellen.

Setzt man ein anderes Mal $p = 125$ kg und $m = 625$ kg, so erhält man für die links ansteigenden Gitterstäbe der linken Hälfte die Zahlen:

+ 4508, + 4243, + 3977, + 3712, + 3475, + 3237, + 3000,
+ 2762, + 2552, + 2342, + 2132, $\left\{ \begin{array}{l} + 1922 \\ - 66 \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} + 1740 \\ - 193 \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} + 1558 \\ - 320 \end{array} \right\}$,
 $\left\{ \begin{array}{l} + 1376 \\ - 447 \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} + 1193 \\ - 574 \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} + 1039 \\ - 729 \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} + 884 \\ - 884 \end{array} \right\}$

und für die horizontalen Stangen in der Reihenfolge von den Enden nach der Mitte hin die Zahlen:

2437,5, 8062,5, 13312,5, 18187,5, 22687,5, 26812,5, 30562,5,
33937,5, 36937,5, 39587,5, 41812,5, 43687,5, 45187,5, 46312,5,
47062,5, 47437,5.

Diese Zahlen verglichen mit denen von Fig. 108 zeigen, welche Umwandlungen die Spannungszahlen erleiden, wenn die mobile Belastung — statt auf die obere Reihe von Belastungspunkten allein — zu gleichen Teilen auf die obere und untere Reihe sich verteilt.

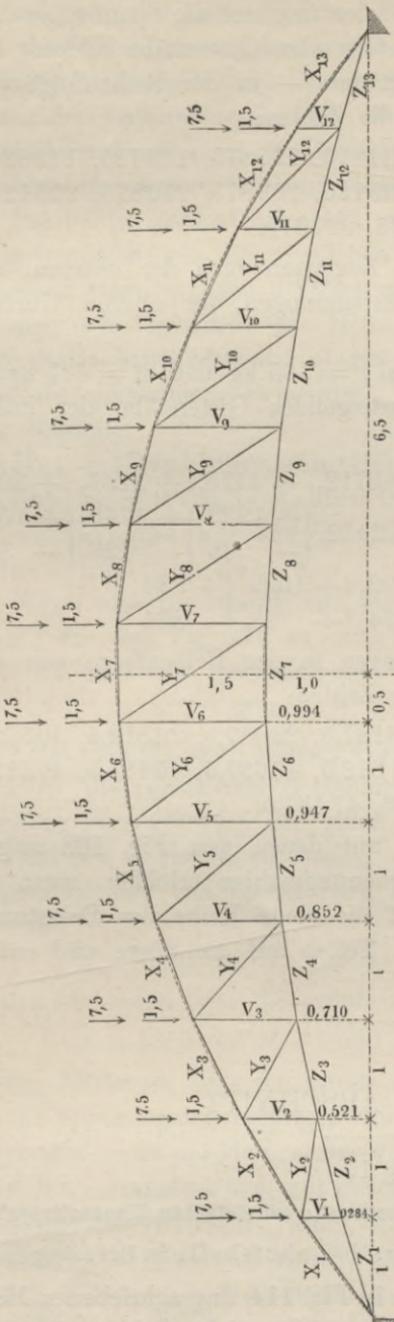
VIERTER ABSCHNITT.

§ 15.

Sichelförmiger Träger von 208 Fuß Spannweite mit einfachem Diagonalsystem.
(Dach-Konstruktion der Zentralbahnhofshalle in Birmingham.)

Als Längeneinheit für die in Fig. 114 eingeschriebenen Maße ist die Länge von 16 Fuß gewählt. Sämtliche Zahlen sind also

Fig. 114.



mit 16 zu multiplizieren, um die Längen in Fuß zu erhalten. Die ganze Spannweite beträgt demnach:

$$2 \cdot 6,5 \cdot 16 = 208 \text{ Fuß,}$$

die Pfeilhöhe des oberen Bogens:

$$(1 + 1,5) \cdot 16 = 40 \text{ Fuß,}$$

die Pfeilhöhe des unteren Bogens:

$$1 \cdot 16 = 16 \text{ Fuß,}^*)$$

die horizontale Länge jedes der 13 Felder:

$$1 \cdot 16 = 16 \text{ Fuß.}$$

Die Ordinaten des oberen Bogens betragen das 2,5fache von denen des unteren Bogens.

Als Belastung des Daches sind (inkl. Wind- und Schneedruck) 40 // pro Quadratfuß

*) Bei der ausgeführten Dachkonstruktion in Birmingham beträgt diese Pfeilhöhe 17 Fuß, der leichteren Rechnung wegen sind hier 16 Fuß angenommen. Im übrigen stimmen die hier gewählten Dimensionen mit denen des ausgeführten Daches überein (man vergl. Berl. Zeitschr. f. Bauwesen, Jahrg. 1858). Die Rechnung ist zunächst unter Voraussetzung eines einfachen Diagonalensystems geführt worden. In der folgenden Nummer unter der Überschrift „Abgeleitete Formen“ findet man die Berechnung eines solchen Trägers mit gekreuzten Zugbändern als Diagonalen, wie sie bei dem Dache in Birmingham angewendet wurden.

der Grundrißfläche gerechnet. Die Entfernung der einzelnen Binder voneinander beträgt 24 Fuß. Es kommen also auf jeden Binder:

$$208 \cdot 24 = 4992 \text{ Quadratfuß Grundrißfläche}$$

und

$$208 \cdot 2440 = 199680 \text{ // Belastung.}$$

Davon sind auf jedes der 13 Felder:

$$\frac{199680}{13} = 15360 \text{ //}$$

oder in runder Summe 7,5 t zu rechnen.

Das Eigengewicht des Trägers ergibt sich aus den gewählten Querschnittsdimensionen der einzelnen Stangen zu ungefähr 1,5 t für jedes Feld.

In den beiden Endfeldern werden die halben Belastungen direkt vom Auflager aufgenommen; auf jeden der zwölf Vertikalständer kommen also:

$$1,5 \text{ t permanenter Belastung}$$

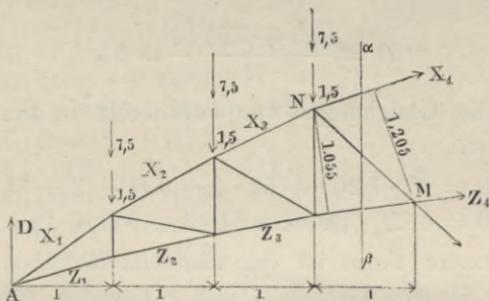
und

$$7,5 \text{ t veränderlicher Belastung.}$$

Berechnung der Spannungen X und Z in den oberen und unteren Bogenstücken.

Trennt man durch den Schnitt $\alpha\beta$ den in Fig. 115 dargestellten Teil von der übrigen Konstruktion und wählt man das

Fig. 115.



eine Mal den Punkt M , das andere Mal den Punkt N als Drehpunkt, so erhält man die beiden Momentengleichungen:

$$0 = X_4 \cdot 1,205 + D \cdot 4 - 1,5(1 + 2 + 3) - 7,5(1 + 2 + 3)$$

$$0 = -Z_4 \cdot 1,055 + D \cdot 3 - 1,5(1 + 2) - 7,5(1 + 2),$$

welche, wenn man darin für D seinen Wert:

$$D = 1,5 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} + \dots + \frac{1}{1^3} \right) + 7,5 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} + \dots + \frac{1}{1^3} \right)$$

substituiert und der im zweiten Abschnitt § 5 gegebenen Regel gemäß die von einer und derselben Belastung herrührenden Beiträge allemal in einem Gliede zusammenstellt, die Form annehmen:

$$\begin{aligned} 0 &= X_4 \cdot 1,205 \\ &+ 1,5 \left[\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} + \dots + \frac{1}{1^3} \right) 4 + \left(\frac{1}{1^3} \cdot 4 - 1 \right) + \left(\frac{1}{1^3} \cdot 4 - 2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{1^3} \cdot 4 - 3 \right) \right] \\ &+ 7,5 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} \dots + \frac{1}{1^3} \right) 4 \\ &+ 7,5 \left[\left(\frac{1}{1^3} \cdot 4 - 1 \right) + \left(\frac{1}{1^3} \cdot 4 - 2 \right) + \left(\frac{1}{1^3} \cdot 4 - 3 \right) \right] \\ 0 &= -Z_4 \cdot 1,055 \\ &+ 1,5 \left[\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} + \dots + \frac{1}{1^3} \right) 3 + \left(\frac{1}{1^3} \cdot 3 - 1 \right) + \left(\frac{1}{1^3} \cdot 3 - 2 \right) \right] \\ &+ 7,5 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} + \dots + \frac{1}{1^3} \right) 3 \\ &+ 7,5 \left[\left(\frac{1}{1^3} \cdot 3 - 1 \right) + \left(\frac{1}{1^3} \cdot 3 - 2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Man erkennt sogleich, daß sämtliche mit 7,5 multiplizierten Glieder positiv sind, daß also bei voller Belastung die Spannungen X_4 und Z_4 am stärksten werden. Die beiden Gleichungen können also unmittelbar aufgelöst werden und ergeben die Werte:

$$\begin{aligned} X_4 (\text{min}) &= -134,4 \text{ t} \\ Z_4 (\text{max}) &= +128,0 \text{ t}. \end{aligned}$$

Wenn man sich auf die eben angegebene Weise einmal überzeugt hat, daß in diesem sowohl als in den übrigen Feldern die Spannungen X und Z bei voller Belastung am stärksten werden, so kann man auch, indem man für D den entsprechenden numerischen Wert:

$$D = \frac{(1,5 + 7,5) 12}{2} = 54$$

substituiert, die Gleichungen von vornherein in der einfacheren Form aufstellen:

$$\begin{aligned} 0 &= X_4 \cdot 1,205 + 54 \cdot 4 - 9(1 + 2 + 3) \\ 0 &= -Z_4 \cdot 1,055 + 54 \cdot 3 - 9(1 + 2). \end{aligned}$$

Diese letztere Form ist der Einfachheit wegen zu der Bestimmung der übrigen Größen X und Z gewählt, für welche man genau auf dieselbe Weise die nachfolgenden Gleichungen erhält:

$$\begin{aligned} 0 &= X_1 \cdot 0,347 + 54 \cdot 1 \\ X_1 (\text{min}) &= -155,6 \text{ t} \\ 0 &= -Z_1 \cdot 0,41 + 54 \cdot 1 \\ Z_1 (\text{max}) &= +131,7 \text{ t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= X_2 \cdot 0,672 + 54 \cdot 2 - 9 \cdot 1 \\
X_2 (\text{min}) &= -147,3 \text{ t.} \\
0 &= -Z_2 \cdot 0,415 + 54 \cdot 1 \\
Z_2 (\text{max}) &= +130,2 \text{ t.} \\
0 &= X_3 \cdot 0,963 + 54 \cdot 3 - 9(1+2) \\
X_3 (\text{min}) &= -140,2 \text{ t.} \\
0 &= -Z_3 \cdot 0,767 + 54 \cdot 2 - 9 \cdot 1 \\
Z_3 (\text{max}) &= +129,1 \text{ t.} \\
0 &= X_5 \cdot 1,382 + 54 \cdot 5 - 9(1+2+3+4) \\
X_5 (\text{min}) &= -130,2 \text{ t.} \\
0 &= -Z_5 \cdot 1,272 + 54 \cdot 4 - 9(1+2+3) \\
Z_5 (\text{max}) &= +127,3 \text{ t.} \\
0 &= X_6 \cdot 1,481 + 54 \cdot 6 - 9(1+2+3+4+5) \\
X_6 (\text{min}) &= -127,6 \text{ t.} \\
0 &= -Z_6 \cdot 1,419 + 54 \cdot 5 - 9(1+2+3+4) \\
Z_6 (\text{max}) &= +126,9 \text{ t.} \\
0 &= X_7 \cdot 1,491 + 54 \cdot 7 - 9(1+2+3+4+5+6) \\
X_7 (\text{min}) &= -126,7 \text{ t.} \\
0 &= -Z_7 \cdot 1,491 + 54 \cdot 6 - 9(1+2+3+4+5) \\
Z_7 (\text{max}) &= +126,7 \text{ t.} \\
0 &= X_8 \cdot 1,41 + 54 \cdot 8 - 9(1+2+\dots 7) \\
X_8 (\text{min}) &= -127,6 \text{ t.} \\
0 &= -Z_8 \cdot 1,489 + 54 \cdot 7 - 9(1+2+\dots 6) \\
Z_8 (\text{max}) &= +126,9 \text{ t.} \\
0 &= X_9 \cdot 1,244 + 54 \cdot 9 - 9(1+2+\dots 8) \\
X_9 (\text{min}) &= -130,2 \text{ t.} \\
0 &= -Z_9 \cdot 1,414 + 54 \cdot 8 - 9(1+2+\dots 7) \\
Z_9 (\text{max}) &= +127,3 \text{ t.} \\
0 &= X_{10} \cdot 1,004 + 54 \cdot 10 - 9(1+2+\dots 9) \\
X_{10} (\text{min}) &= -134,4 \text{ t.} \\
0 &= -Z_{10} \cdot 1,265 + 54 \cdot 9 - 9(1+2+\dots 8) \\
Z_{10} (\text{max}) &= +128,0 \text{ t.} \\
0 &= X_{11} \cdot 0,706 + 54 \cdot 11 - 9(1+2+\dots 10) \\
X_{11} (\text{min}) &= -140,2 \text{ t.} \\
0 &= -Z_{11} \cdot 1,046 + 54 \cdot 10 - 9(1+2+\dots 9) \\
Z_{11} (\text{max}) &= +129,1 \text{ t.} \\
0 &= X_{12} \cdot 0,397 + 54 \cdot 12 - 9(1+2+\dots 11) \\
X_{12} (\text{min}) &= -147,3 \text{ t.} \\
0 &= -Z_{12} \cdot 0,76 + 54 \cdot 11 - 9(1+2+\dots 10) \\
Z_{12} (\text{max}) &= +130,2 \text{ t.} \\
0 &= X_{13} \cdot 0,347 + 54 \cdot 12 - 9(1+2+\dots 11) \\
X_{13} (\text{min}) &= -155,6 \text{ t.} \\
0 &= -Z_{13} \cdot 0,41 + 54 \cdot 12 - 9(1+2+\dots 11) \\
Z_{13} (\text{max}) &= +131,7 \text{ t.}
\end{aligned}$$

Aus den Resultaten der obigen Rechnungen ist zu ersehen, daß die stärksten Spannungen in den symmetrisch einander gegen-

überliegenden Bogenstücken der beiden Hälften gleiche Größe haben. Da nun die Felder auf der rechten Seite nur durch die entgegengesetzt ansteigenden Diagonalen von den gegenüberliegenden Feldern der linken Seite sich unterscheiden, so folgt hieraus, daß die stärksten Spannungen der Bogenstücke unabhängig sind von der Richtung der Diagonalen. Es macht also bei der Bestimmung der Spannung eines Bogenstückes keinen Unterschied, ob man einen linken oder einen rechten Eckpunkt des Feldes als Drehpunkt für die betreffende Momentengleichung wählt, d. h. einen inner- oder außerhalb der Diagonalenrichtung liegenden Punkt. Das ist aber nur möglich, wenn die Spannung der Diagonale Null ist, weil sonst mit Verlegung des Drehpunktes ein neues Moment in die betreffende Momentengleichung eintreten und das Resultat verändern würde. Es folgt hieraus, daß bei voller Belastung sämtliche Diagonalen in spannungslosem Zustande sich befinden.

Diese schon hier empirisch gefundene Eigenschaft des Trägers wird bei der Berechnung der Diagonalen direkt bestätigt und in der später folgenden „Theorie der sichelförmigen Träger“ theoretisch erklärt werden.

Berechnung der Spannungen Y in den Diagonalen.

Zur Bestimmung der Spannung Y_4 stellt man für den Teil Fig. 116 die Momentengleichung auf und wählt den Punkt O , in welchem die Richtungen X_4 und Z_4 einander schneiden, als Drehpunkt. Durch Konstruktion*) findet man, daß dieser Punkt in der Entfernung 2 links vom Punkte A liegt, und daß der Hebelarm der Kraft Y_4 in bezug auf diesen Drehpunkt gleich 4,68 ist. Man erhält also die Momentengleichung:

$$0 = Y_4 \cdot 4,68 - D \cdot 2 + 1,5 [(3 + 2) + (2 + 2) + (1 + 2)] \\ + 7,5 [(3 + 2) + (2 + 2) + (1 + 2)],$$

welche, wenn man darin für D seinen Wert:

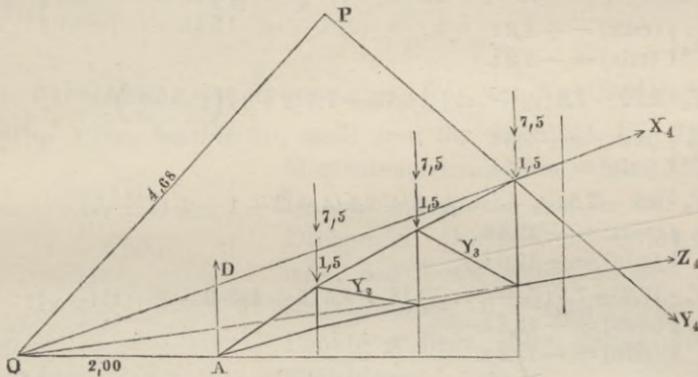
$$D = 1,5 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{3^3} \right) + 7,5 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{3^3} \right)$$

substituiert und die Gleichung so ordnet, daß die von einer und derselben Belastung herrührenden Glieder jedesmal zu einem einzigen Gliede zusammengefaßt erscheinen, die Form annimmt:

*) Die Bestimmung der Drehpunkte und Hebelarme auf dem Wege der Rechnung findet man im 11. Abschnitte dieses Buches.

$$\begin{aligned}
 0 = & Y_4 \cdot 4,68 + 1,5 \{ [3 + 2(1 - \frac{1}{13})] + [2 + 2(1 - \frac{1}{13})] \\
 & + [1 + 2(1 - \frac{1}{13})] - (\frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \dots + \frac{9}{13}) 2 \} \\
 & + 7,5 \{ [3 + 2(1 - \frac{1}{13})] + [2 + 2(1 - \frac{1}{13})] + [1 + 2(1 - \frac{1}{13})] \} \\
 & - 7,5 (\frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \dots + \frac{9}{13}) 2
 \end{aligned}$$

Fig. 116.



oder nach Zusammenziehung der in jedem solchen Gliede nebeneinanderstehenden numerischen Teile:

$$\begin{aligned}
 0 = & Y_4 \cdot 4,68 - 1,5 \left[\left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{9}{13} \right) 2 - (3 + 2 + 1) \left(1 + \frac{2}{13} \right) \right] \\
 & - 7,5 \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{9}{13} \right) 2 + 7,5 (3 + 2 + 1) \left(1 + \frac{2}{13} \right).
 \end{aligned}$$

Bei der Ausrechnung zeigt sich, daß das ganze mit 1,5 multiplizierte Glied = Null ist, und bestätigt sich also das oben bei Berechnung der Bogenstücke gefundene Gesetz, daß eine gleichförmig über die Spannweite verteilte Last, wie z. B. das Eigengewicht des Trägers, keine Spannung in den Diagonalen erzeugt. Man kann also die Gleichung auch gleich in der einfacheren Form schreiben:

$$0 = Y_4 \cdot 4,68 - 7,5 \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{9}{13} \right) 2 + 7,5 (3 + 2 + 1) \left(1 + \frac{2}{13} \right).$$

Man erhält hieraus, wenn man der im zweiten Abschnitte gegebenen Regel gemäß einmal das positive und einmal das negative Glied fortläßt, die Werte:

$$Y_4 \begin{cases} (\text{max}) = + 11,1 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 11,1 \text{ t} \end{cases}$$

An der Gleichheit der beiden absoluten Werte erkennt man wiederum, daß Y_4 den Wert Null annimmt, wenn beide Glieder beibehalten werden, d. h. bei voller Belastung des Trägers.

Auf gleiche Weise sind die Spannungen der übrigen Diagonalen berechnet, und ist, um überflüssige Weitläufigkeit zu vermeiden, den Gleichungen sogleich die letztere einfachere Form gegeben, also das die permanente Last enthaltende Glied von vornherein fortgelassen.

$$0 = Y_2 \cdot 0,92 - 7,5 \left(\frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{18} \right) 0,2 + 7,5 \left(1 + \frac{0,2}{18} \right)$$

$$Y_2 \begin{cases} (\text{max}) = + 8,3 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 8,3 \text{ t.} \end{cases}$$

$$0 = Y_3 \cdot 2,52 - 7,5 \left(\frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{18} \right) 0,75 + 7,5 (2 + 1) \left(1 + \frac{0,75}{18} \right)$$

$$Y_3 \begin{cases} (\text{max}) = + 9,5 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 9,5 \text{ t.} \end{cases}$$

$$0 = Y_5 \cdot 8,3 - 7,5 \left(\frac{1}{18} + \dots + \frac{8}{18} \right) 5 + 7,5 (4 + 3 + 1 + 2) \left(1 + \frac{5}{18} \right)$$

$$Y_5 \begin{cases} (\text{max}) = + 12,6 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 12,6 \text{ t.} \end{cases}$$

$$0 = Y_6 \cdot 17,6 - 7,5 \left(\frac{1}{18} + \dots + \frac{7}{18} \right) 15 + 7,5 (5 + 4 + 3 + 2 + 1) \left(1 + \frac{15}{18} \right)$$

$$Y_6 \begin{cases} (\text{max}) = + 13,8 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 13,8 \text{ t.} \end{cases}$$

Für die Diagonale des Mittelfeldes liegt der Drehpunkt in unendlicher Entfernung; es ist also nach der im dritten Abschnitt § 9 gegebenen Regel zu verfahren. Der Sinus des Winkels, den die Diagonale Y_7 mit der Horizontalen einschließt, ist = 0,831, man erhält also für Y_7 die Gleichung:

$$0 = Y_7 \cdot 0,831 \cdot \infty - 7,5 \left(\frac{1}{18} + \dots + \frac{6}{18} \right) \infty + 7,5 (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \left(1 + \frac{\infty}{18} \right)$$

oder, da das Endliche gegen das unendlich Große verschwindet:

$$0 = Y_7 \cdot 0,831 \cdot \infty - 7,5 \left(\frac{1}{18} + \dots + \frac{6}{18} \right) \infty + 7,5 (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \frac{\infty}{18}$$

und hieraus, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor ∞ wegläßt:

$$0 = Y_7 \cdot 0,831 - 7,5 \left(\frac{1}{18} + \dots + \frac{6}{18} \right) + 7,5 (6 + \dots + 1) \frac{1}{18}$$

$$Y_7 \begin{cases} (\text{max}) = + 14,6 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 14,6 \text{ t.} \end{cases}$$

Für die nun folgenden Momentengleichungen fällt der Drehpunkt auf die entgegengesetzte Seite, und wechseln daher sämtliche Momente ihre Vorzeichen:

$$0 = - Y_8 \cdot 16,1 + 7,5 \left(\frac{1}{18} + \dots + \frac{5}{18} \right) 28 - 7,5 (7 + \dots + 1) \left(\frac{28}{18} - 1 \right)$$

$$Y_8 \begin{cases} (\text{max}) = + 15,0 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 15,0 \text{ t.} \end{cases}$$

$$0 = - Y_9 \cdot 7,1 + 7,5 \left(\frac{1}{18} + \dots + \frac{4}{18} \right) 18 - 7,5 (8 + \dots + 1) \left(\frac{18}{18} - 1 \right)$$

$$Y_9 \begin{cases} (\text{max}) = + 14,6 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 14,6 \text{ t.} \end{cases}$$

$$0 = - Y_{10} \cdot 3,68 + 7,5 \left(\frac{1}{18} + \frac{2}{18} + \frac{3}{18} \right) 15 - 7,5 (9 + \dots + 1) \left(\frac{15}{18} - 1 \right)$$

$$Y_{10} \begin{cases} (\text{max}) = + 14,1 \text{ t} \\ (\text{min}) = - 14,1 \text{ t.} \end{cases}$$

$$V_3 \begin{cases} (\max) = + 8,1 \text{ t.} \\ (\min) = - 1,1 \text{ t.} \end{cases} \quad V_3 = + 6 \text{ t.}$$

Auf gleiche Weise ergeben sich für die übrigen Felder die nachstehenden Gleichungen:

$$0 = - V_4 \cdot 4,91 - 1,5 \left[\left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{9}{13} \right) 0,91 - (3 + 2 + 1) \left(1 + \frac{0,91}{13} \right) \right] \\ - 7,5 \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{9}{13} \right) 0,91 + 7,5 (3 + 2 + 1) \left(1 + \frac{0,91}{13} \right)$$

$$V_4 \begin{cases} (\max) = + 10,8 \text{ t} \\ (\min) = - 3,8 \text{ t.} \end{cases} \quad V_4 = + 6 \text{ t.}$$

$$0 = - V_5 \cdot 7,5 - 1,5 \left[\left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{8}{13} \right) 2,5 - (4 + \dots + 1) \left(1 + \frac{2,5}{13} \right) \right] \\ - 7,5 \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{8}{13} \right) 2,5 + 7,5 (4 + \dots + 1) \left(1 + \frac{2,5}{13} \right)$$

$$V_5 \begin{cases} (\max) = + 12,9 \text{ t} \\ (\min) = - 5,9 \text{ t.} \end{cases} \quad V_5 = + 6 \text{ t}$$

$$0 = - V_6 \cdot 12,6 - 1,5 \left[\frac{1}{13} + \dots + \frac{7}{13} \right] 6,6 - (5 + \dots + 1) \left(1 + \frac{6,6}{13} \right) \\ - 7,5 \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{7}{13} \right) 6,6 + 7,5 (5 + \dots + 1) \left(1 + \frac{6,6}{13} \right)$$

$$V_6 \begin{cases} (\max) = + 14,5 \text{ t} \\ (\min) = - 7,5 \text{ t.} \end{cases} \quad V_6 = + 6 \text{ t.}$$

$$0 = - V_7 \cdot 31,5 - 1,5 \left[\left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{6}{13} \right) 24,5 - (6 + \dots + 1) \left(1 + \frac{24,5}{13} \right) \right] \\ - 7,5 \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{6}{13} \right) 24,5 + 7,5 (6 + \dots + 1) \left(1 + \frac{24,5}{13} \right)$$

$$V_7 \begin{cases} (\max) = + 15,4 \text{ t} \\ (\min) = - 8,4 \text{ t.} \end{cases} \quad V_7 = + 6 \text{ t.}$$

Bei den nun folgenden Feldern fällt der Drehpunkt auf die entgegengesetzte Seite, und nehmen daher sämtliche Momente das entgegengesetzte Zeichen an.

$$0 = V_8 \cdot 60 + 1,5 \left[\left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{5}{13} \right) 68 - (7 + \dots + 1) \left(\frac{68}{13} - 1 \right) \right] \\ + 7,5 \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{5}{13} \right) 68 - 7,5 (7 + \dots + 1) \frac{68}{13} - 1)$$

$$V_8 \begin{cases} (\max) = + 15,8 \text{ t} \\ (\min) = - 8,8 \text{ t.} \end{cases} \quad V_8 = + 6 \text{ t.}$$

$$0 = V_9 \cdot 13,5 + 1,5 \left[\left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{4}{13} \right) 22,5 - (8 + \dots + 1) \left(\frac{22,5}{13} - 1 \right) \right] \\ + 7,5 \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{4}{13} \right) 22,5 - 7,5 (8 + \dots + 1) \left(\frac{22,5}{13} - 1 \right)$$

$$V_9 \begin{cases} (\max) = + 15,6 \text{ t} \\ (\min) = - 8,6 \text{ t.} \end{cases} \quad V_9 = + 6 \text{ t.}$$

$$0 = V_{10} \cdot 6,43 + 1,5 \left[\left(\frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{3}{13} \right) 16,43 - (9 + \dots + 1) \left(\frac{16,43}{13} - 1 \right) \right]$$

$$+ 7,5 \left(\frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{3}{13} \right) 16,43 - 7,5 (9 + \dots + 1) \left(\frac{16,43}{13} - 1 \right)$$

$$V_{10} \begin{cases} (\max) = + 14,8 \text{ t} \\ (\min) = - 7,8 \text{ t} \end{cases} \quad V_{10} = + 6 \text{ t.}$$

$$0 = V_{11} \cdot 3,3 + 1,5 \left[\left(\frac{1}{13} + \frac{2}{13} \right) 14,3 - (10 + \dots + 1) \left(\frac{14,3}{13} - 1 \right) \right]$$

$$+ 7,5 \left(\frac{1}{13} + \frac{2}{13} \right) 14,3 - 7,5 (10 + \dots + 1) \left(\frac{14,3}{13} - 1 \right)$$

$$V_{11} \begin{cases} (\max) = + 13,5 \text{ t} \\ (\min) = - 6,5 \text{ t} \end{cases} \quad V_{11} = + 6 \text{ t.}$$

$$0 = V_{12} \cdot 1,385 + 1,5 \left[\left(\frac{1}{13} \cdot 13,385 - (11 + \dots + 1) \left(\frac{13,385}{13} - 1 \right) \right) \right]$$

$$+ 7,5 \cdot \frac{1}{13} \cdot 13,385 - 7,5 (11 + \dots + 1) \left(\frac{13,385}{13} - 1 \right)$$

$$V_{12} \begin{cases} (\max) = + 11,6 \text{ t} \\ (\min) = - 4,6 \text{ t} \end{cases} \quad V_{12} = + 6 \text{ t.}$$

Im dritten Abschnitt § 12 wurde für die Berechnung der Vertikalständer die Regel empfohlen: „man nehme zunächst die Angriffspunkte der mobilen Last auch als Angriffspunkte der permanenten Last an, denke sich diese Annahme verwirklicht durch Nebenständer, deren Funktion es ist, den nicht unmittelbar daselbst angreifenden Teil der permanenten Last auf jene Punkte wirklich zu übertragen, und füge dann die Spannungszahlen dieser Nebenständer den vorher für die Vertikalständer gefundenen Spannungszahlen hinzu.“ Nach dieser Regel soll auch hier verfahren werden. Die eben gefundenen Zahlenwerte der Größen V entsprechen der Annahme, daß das ganze Eigengewicht des Trägers in den oberen Knotenpunkten seine Angriffspunkte hat. In Wirklichkeit wird nur ein Teil — und zwar der größere Teil — des Eigengewichts unmittelbar oben angreifen und etwa der dritte Teil desselben, also 0,5 t für jedes Feld auf die unteren Knotenpunkte zu rechnen sein. Denkt man sich neben jedem Hauptständer noch einen Nebenständer, welcher (in diesem Falle als Hängestange wirkend) diese 0,5 t auf die oberen Knotenpunkte überträgt, so wird die Spannungszahl desselben = + 0,5 t, und diese Zahl ist den vorher für die Größen V gefundenen Werten überall hinzuzufügen.

Als genauere Werte für die Spannungszahlen der Vertikalständer ergeben sich hiernach folgende Zahlen:

$$V_1 (\max) = + 6,5 \text{ t}$$

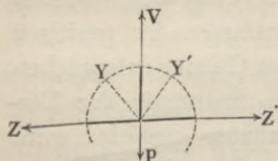
$$V_2 (\max) = + 6,5 \text{ t.}$$

mit rechts ansteigenden Diagonalen findet das Umgekehrte statt. Um die Spannungszahlen eines solchen zu finden, braucht man nur die Fig. 120 von der Kehrseite zu betrachten. Wenn in irgend einem Felde die links ansteigende Diagonale durch eine rechts ansteigende ersetzt werden soll, so ist die Spannungszahl mit der des symmetrisch gegenüberliegenden Feldes zu vertauschen.

Nimmt man den Fall an, daß die links ansteigende Diagonale eines bestimmten Feldes aus einem Faden besteht, der nur Zugspannung annehmen kann, und daß gleichzeitig für solche Belastungszustände, welche sonst Druckspannung in dieser Diagonale erzeugen würden, eine rechts ansteigende von gleicher Beschaffenheit in diesem Felde angebracht ist, so wird diese zweite ihre Dienste leisten, jedesmal dann, wenn die erste erschlaffend ihre Dienste versagt, und umgekehrt. Die beiden gekreuzten Fäden werden also dasselbe leisten, was sonst eine Stange leistete, und ihre Spannungszahlen erhält man aus Fig. 120, indem man ausschließlich die positiven Zahlen auswählt: für die links ansteigende Diagonale die unmittelbar gefundene, für die rechts ansteigende die symmetrisch gegenüberliegende.

Um bei einem solchen Träger mit gekreuzten Zugdiagonalen das Verhalten der Vertikalständer zu prüfen, ist es nötig, zuvor zu untersuchen, welches von den beiden Diagonalensystemen durch den jedesmaligen Belastungszustand in Tätigkeit versetzt wird, weil der Schnitt, welcher zur Momentengleichung des Vertikalständers führt, immer der Richtung der gespannten Diagonalen folgen muß, um nur drei Stangen zu treffen. Bei voller Belastung des Trägers ist keins der beiden Diagonalensysteme in Tätigkeit und wird zugleich die Zugspannung in den unteren Bogenstücken am stärksten. Hieraus folgt, daß auch die Zugspannung eines Vertikalständers bei voller Belastung am stärksten

Fig. 121.

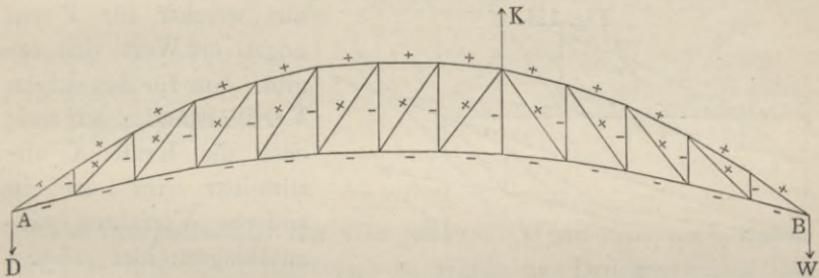


wird. Denn außer der permanenten Last p sind die Zugkräfte Z und Z' die einzigen an dem Fußpunkte des Vertikalständers angreifenden Kräfte, welche Zugspannung in ihm hervorbringen können (s. Fig. 121). Die beiden angrenzenden Diagonalen Y und Y' können, wenn sie gespannt werden, nur Druckspannung in dem Vertikalständer erzeugen, da ihre vertikalen Seitenkräfte stets aufwärts, also der Kraft V gleich

gerichtet sind. Bei voller Belastung werden Z und Z' am größten, folglich auch ihre abwärts gerichtete Mittelkraft, während Y und Y' Null sind. Also erreicht die Kraft V bei voller Belastung ihr Maximum.

Noch klarer tritt dies hervor, wenn man untersucht, welche Wirkung bei dem vollbelasteten Träger die Entlastung irgend eines Knotenpunktes hat. Die Entlastung eines Knotenpunktes ist gleichbedeutend mit dem Hinzufügen einer aufwärts wirkenden Kraft. Da bei vollbelastetem gleichwie bei ganz unbelastetem Zustande sämtliche Diagonalen untätig sind, so braucht man nur zu untersuchen, welche Wirkung auf den leer und gewichtlos gedachten Träger eine aufwärts wirkende Kraft K ausübt. Diese Wirkung läßt sich am besten übersehen, wenn man sich den Träger bloß mit denjenigen Diagonalen, welche durch die Kraft K in Tätigkeit versetzt werden, zeichnet und die übrigen ganz fortläßt. Derselbe gewinnt dann das Ansehen der Fig. 122, in welcher

Fig. 122.

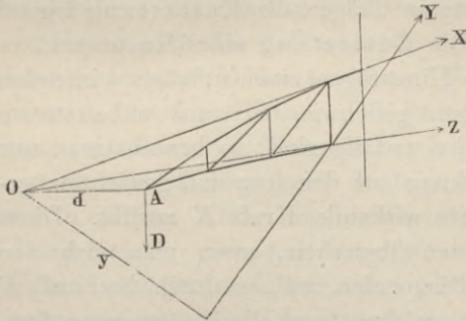


der besseren Übersicht wegen alle gedrückten Teile mit Minuszeichen, alle gezogenen mit Pluszeichen versehen sind. Die Kraft K erzeugt an den beiden festen Auflagerpunkten A , B die abwärts gerichteten Gegendrucke D , W . Um in irgend einem Felde diejenige von den beiden Diagonalen, welche durch die Kraft K in Tätigkeit gesetzt wird, zu finden, legt man einen Vertikalschnitt durch dasselbe und bildet für denjenigen der beiden Teile, welcher die Kraft K nicht enthält, die Momentengleichung in bezug auf den Durchschnittspunkt O der beiden Bogenrichtungen (s. Fig. 123). Man erkennt dann sogleich, welche von den beiden Diagonalen dem Auflagerdruck D entgegenwirken muß, um das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt O herzustellen, daß es z. B. im

vierten Felde die rechts ansteigende Diagonale ist, für welche aus der Gleichung:

$$0 = D \cdot d - Y \cdot y \text{ oder } Y = + \frac{D \cdot d}{y}$$

Fig. 123.

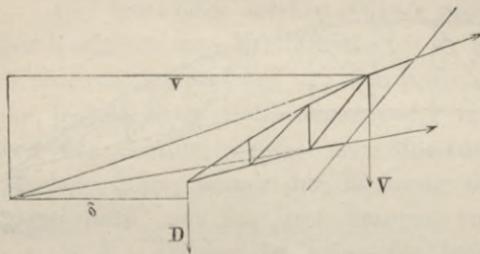


ein positiver Wert sich ergibt (während die links ansteigende einen negativen erhalten würde).

Sobald man auf diese Weise die Richtung der gespannten Diagonale in jedem Felde bestimmt hat, kann man dann durch ein gleiches Verfahren die Frage entscheiden, ob ein Vertikalständer gedrückt oder gezogen wird. So z. B. erhält man für den dritten Vertikalständer (s. Fig. 124) die Gleichung:

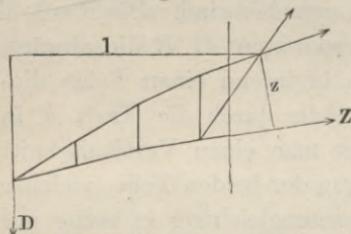
$$0 = D \cdot \delta + V \cdot v,$$

Fig. 124.



aus welcher für V ein negativer Wert sich ergibt. Nur für denjenigen Vertikalständer, auf welchen die Kraft K unmittelbar wirkt, ist ein anderes Verfahren einzuschlagen; hier müssen die beiden angrenzenden

Fig. 125.



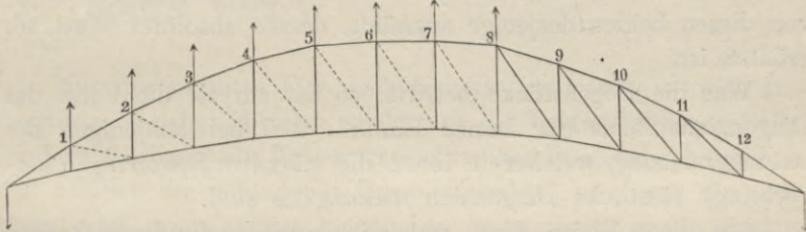
Stücke des unteren Bogens zu Rate gezogen werden. Da nun in dem ganzen unteren Bogen Druckspannung durch die Kraft K erzeugt wird, wie man aus der Form der allgemeinen Momentengleichung für Z, nämlich (s. Fig. 125):

$$0 = - D l - Z z$$

sogleich erkennt, so wirken auf den Fußpunkt dieses Vertikalständers (s. Fig. 122) von beiden Seiten her Druckkräfte, deren vertikal aufwärts wirkende Mittelkraft auch in ihm Druckspannung hervorbringt.

Wenn man sich auf diese Weise davon überzeugt hat, daß die Entlastung irgend eines Knotenpunktes in jedem Vertikalständer Druckspannung erzeugt, daß also, wenn die Zugspannung eines Vertikalständers recht groß sein soll, nirgends eine Entlastung stattfinden darf, so kann man nur ferner die Frage entscheiden, wie weit mit der Entlastung fortgefahren werden muß, damit die Druckspannung eines bestimmten Vertikalständers recht groß werde. Offenbar wird in dem neunten Vertikalständer die durch Entlastung des achten begonnene Druckwirkung eine fernere Steigerung erhalten durch Entlastungen des siebenten, sechsten, ... zweiten, ersten Vertikalständers, da jede von ihnen für sich allein eine ähnliche Wirkung ausübt und überdies — worauf es hier hauptsächlich ankommt — in den beiden Nachbarfeldern des neunten Vertikalständers das gleiche Diagonalsystem spannt (s. Fig. 126). Die Entlastung der acht ersten Vertikalständer ent-

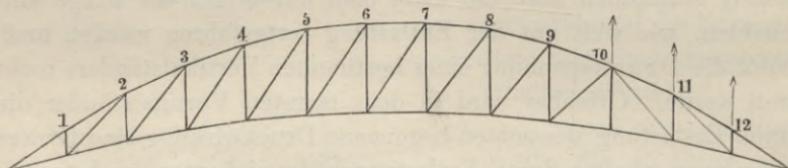
Fig. 126.



spricht der Belastung der vier letzten. Wenn man noch weiter fortführe mit der Entlastung, so würde die Druckspannung des neunten Vertikalständers sich wieder vermindern. Denn, da jetzt in den beiden Nachbarfeldern desselben nur ein Diagonalsystem (und zwar das links ansteigende) gespannt ist, so hat nunmehr die Momentengleichung für V_9 (min) ihre Gültigkeit, und diese zeigt, daß jede Verminderung der Belastungen des neunten, zehnten, elften und zwölften Vertikalständers die Druckspannung in dem Stücke V_9 wieder verkleinert. Es behält also der oben für V_9 (min) gefundene Wert auch bei diesem Träger mit gekreuzten Zugdiagonalen seine Geltung als Minimum. Nur ist zu berücksichtigen, daß noch ein zweites Minimum hier in Betracht kommt, nämlich dasjenige, zu welchem man auf ähnliche Weise gelangt, wenn man anfänglich irgend einen rechts von dem neunten befindlichen Vertikalständer entlastet annimmt, das hierdurch ge-

spannte Diagonalsystem in den Träger hineinzeichnet und dann die Entlastung von der rechten Seite her bis zu dem neunten Vertikalständer fortschreitend sich denkt (s. Fig. 127). Man er-

Fig. 127.

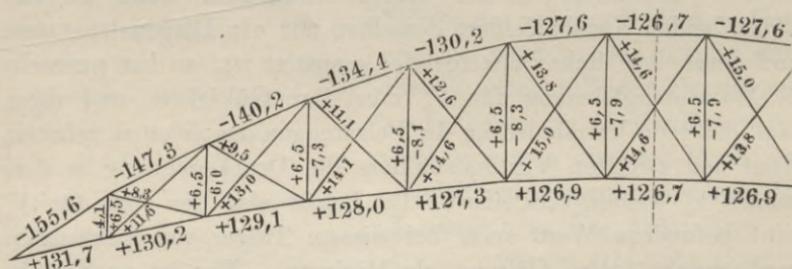


kennt sogleich, daß bei diesem Belastungszustande der neunte Vertikalständer genau in derselben Lage sich befindet wie in dem Schema Fig. 120 der vierte, daß also V_4 (min) das andere Minimum für den neunten Vertikalständer bildet. Man erhält also die negative Spannungszahl eines Vertikalständers, indem man diese beiden Minima miteinander vergleicht, nämlich das unmittelbar gefundene mit dem des symmetrisch gegenüberliegenden, und von diesen beiden dasjenige auswählt, dessen absoluter Wert am größten ist.

Was die Bogenstücke betrifft, so hat auf sie die Form des Diagonalsystems gar keinen Einfluß, weil bei demjenigen Belastungszustande, welcher in ihnen die stärksten Spannungen hervorbringt, sämtliche Diagonalen wirkungslos sind.

Auf diese Weise kann man die bereits gefundenen Zahlen benutzen, um ohne neue Rechnung die in Fig. 128 eingeschriebenen

Fig. 128.

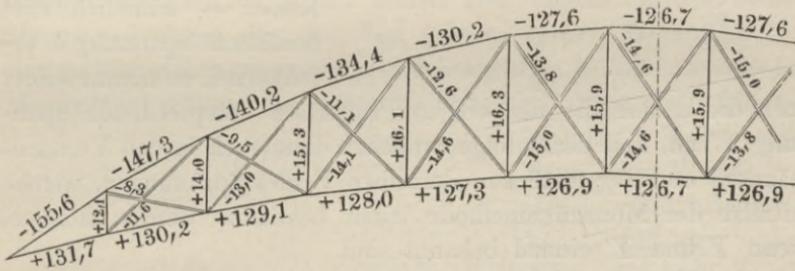


Spannungszahlen eines sichelförmigen Trägers mit gekreuzten Zugdiagonalen aus ihnen zu bilden.

Durch eine der vorigen ganz analoge Argumentation gelangt man zu dem Resultate, daß für einen Träger mit gekreuzten

Druckdiagonalen, d. h. solchen, die nur Druckspannung anzunehmen fähig sind (wie z. B. bei Holzkonstruktionen vorkommen kann), hinsichtlich der Vertikalständer nur die Maxima der oben gefundenen Werte Gültigkeit behalten, und daß von Druckspannung bei den Vertikalständern eines solchen Trägers überall nicht die Rede sein kann, weil eine solche immer mit Zugspannung der angrenzenden Diagonalen verbunden sein würde. Die in Fig. 129 eingeschriebenen Spannungszahlen eines solchen Trägers bedürfen hiernach kaum einer weiteren Erklärung.

Fig. 129.



Nur das verdient hier noch bemerkt zu werden — eine Bemerkung, welche übrigens nicht nur die beiden letzteren Fälle, sondern überhaupt alle Träger mit gekreuzten Diagonalen betrifft — daß nämlich die gefundenen Spannungszahlen nur dann die richtigen sind, wenn keine künstlichen Spannungen in das System hineingebracht sind. Solche künstliche Spannungen können in dem einfachen Systeme nicht vorkommen, denn in einem solchen läßt jede Stange sich erreichen durch einen Schnitt, welcher nicht mehr als drei Stangen trifft. Wenn also keine äußeren Kräfte auf das System wirken, so erscheint die Momentengleichung einer beliebigen Stange Y in Beziehung auf den Durchschnittspunkt der beiden mitdurchschnittenen Stangen immer in der Form:

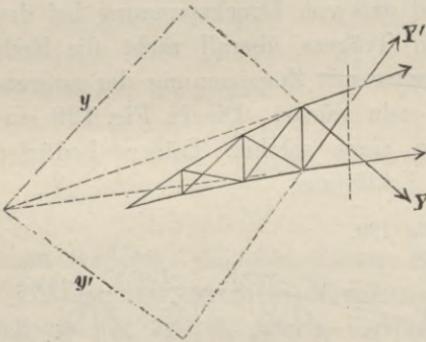
$$0 = Y \cdot y.$$

In allen solchen Fällen aber, wo in einem Viereck zwei Stangen einander kreuzen, trifft der Schnitt vier Stangen, und die Spannungen der beiden gekreuzten Stangen haben in Beziehung auf den Durchschnittspunkt der beiden mitdurchschnittenen Stangen immer entgegengesetzte Drehungsrichtungen. Ihre Momentengleichung erhält also die Form (s. Fig. 130):

$$0 = Y \cdot y - Y' \cdot y'.$$

Diese Gleichung erfordert immer nur, daß:

Fig. 130.



$$\frac{Y}{Y'} + \frac{y'}{y},$$

läßt übrigens die absoluten Werte von Y und Y' völlig unbestimmt.

Wenn also der einen Diagonale auf irgend eine Weise — etwa durch Anziehen von Schrauben oder Keilen — künstlich eine bestimmte Spannung Y erteilt wird, so nimmt sofort

auch die andere die der obigen Proportion entsprechende Spannung Y' an, und demzufolge entstehen dann auch in den Vertikalstäben und Bogenstücken desselben Feldes Spannungen, welche mittelst der Momentenmethode leicht bestimmt werden können, wenn Y und Y' einmal bekannt sind.

Die oben berechneten Spannungszahlen gelten ausschließlich unter der Voraussetzung, daß in der unbelasteten Konstruktion alle Stücke vollkommen spannungslos sind. In diesem Falle wird bei einem Träger mit gekreuzten Zug- (oder Druck-) Diagonalen in jedem Felde stets nur eine der beiden Diagonalen zur Wirkung kommen, während sonst der Fall eintreten könnte, daß beide zugleich in Tätigkeit geraten.

§ 17.

Scheinbare Mängel der Methode.

Es kommen bei Anwendung der Methode der statischen Momente mitunter — so namentlich bei der zuletzt berechneten Konstruktion — Fälle vor, bei denen es scheinen könnte, als ob die Methode, wenn sie überhaupt zum Ziele führt, doch nur einen äußerst geringen Grad von Genauigkeit und Zuverlässigkeit zu erreichen gestattet.

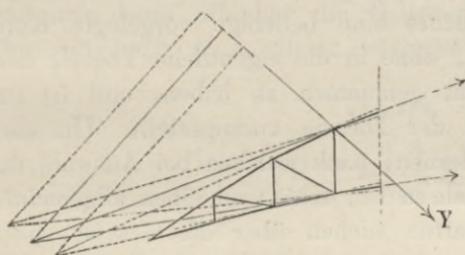
Um die Momentengleichung einer Stange zu bilden, mußte als Drehpunkt der Durchschnittspunkt der beiden mitdurchschnittenen Stangen konstruiert werden. Wenn nun die Richtungen der beiden letzteren nahezu parallel sind, so ist die genaue

Bestimmung dieses Punktes und das Messen der betreffenden Hebelarme mit Schwierigkeiten verbunden. Die Folge davon wird sein, daß zwei verschiedene Rechner zu verschiedenen Resultaten gelangen werden, indem der eine diese, der andere jene Länge für einen bestimmten Hebelarm durch Konstruktion findet.

Auf den ersten Blick scheint dies ein großer Mangel der empfohlenen Methode zu sein. Bei näherer Überlegung verschwindet jedoch derselbe und stellt sich vielmehr heraus, daß man noch Nutzen aus jenem Umstande ziehen kann.

Zunächst ist klar, daß man den Fehler in ganz bestimmte Grenzen einschließen kann, indem man absichtlich den beiden Stangenrichtungen das eine Mal eine zu große, das andere Mal eine zu kleine Konvergenz gibt und beide Male aus der betreffenden Momentengleichung die gesuchte Spannung Y (s. Fig. 131) be-

Fig. 131.



rechnet. Man erhält dann zwei Werte, von denen man behaupten kann, daß der wahre Wert jedenfalls zwischen denselben liegen muß. Die Vergleichung dieser beiden Grenzwerte mit den Größen jener absichtlich ge-

wählten Abweichungen läßt zugleich erkennen, in welchem Grade die Spannung der Stange durch Ungenauigkeiten in der praktischen Ausführung modifiziert werden kann.

Jene Unbestimmtheit nämlich, wie sie dort dem Rechner in der Zeichnung entgegentrat, ist nichts anderes als eine Abspiegelung der Schwankungen, denen in der ausgeführten Konstruktion die wirkliche Spannung der Stange unterworfen sein kann. Je nachdem der ausführende Arbeiter von der ihm vorgezeichneten Werkzeichnung in der einen oder anderen Richtung abweicht, wird auch die Spannung der betreffenden Stange sich ändern und dem einen oder anderen der beiden Grenzwerte sich nähern. Durch jene Methode werden also die Gefahren, welche eine ungenaue praktische Ausführung mit sich bringen kann, gleichsam nachgeahmt und bildlich veranschaulicht in einem Grade, welcher von keiner anderen Methode erreicht wird.

Der andere Einwurf aber, welcher noch gemacht werden könnte, nämlich, daß die Methode der statischen Momente nicht ausschließlich auf Rechnung, sondern zum Teil auf Konstruktion und Messung sich gründet, kann noch weniger als begründet anerkannt werden. Denn rechnen soll man nur da, wo die Rechnung rascher zum Ziele führt als andere Methoden. Wo also die Konstruktion als eine Abkürzung der Rechnung sich erweist, da ist kein rechter Grund einzusehen, warum man durchaus rechnen sollte, zumal da ein Versehen beim Messen viel weniger leicht vorkommen kann als beim Rechnen.

§ 18.

Theorie der sichelförmigen Träger.

Das vorige Zahlenbeispiel bot abermals einen Beweis für die schon früher aufgestellte Behauptung, daß man mittelst der Methode der statischen Momente eine beliebige vorgelegte Konstruktion berechnen könne, ohne in die eigentliche Theorie derselben vorher eine Einsicht genommen zu haben, und ist aus diesem Grunde absichtlich der Theorie vorangestellt. Um aber die Prinzipien kennen zu lernen, nach welchen bei Auswahl der Konstruktionsform zu verfahren ist, muß man einen allgemeinen Überblick sich zu verschaffen suchen über die Gesetze, nach welchen die Spannungen in einem solchen Träger sich verteilen. Zu diesem Zwecke soll die im zweiten Abschnitt § 8 begonnene „Theorie der parabolischen Träger“ hier weiter fortgeführt und vervollständigt werden.

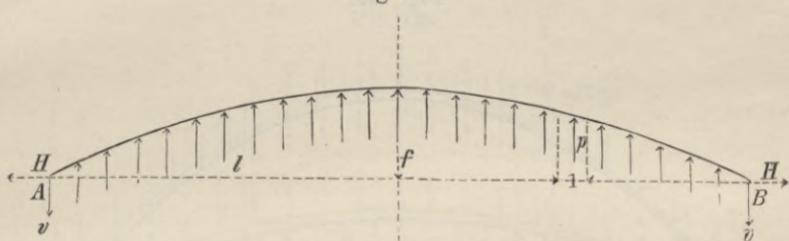
Wenn man die im Eingange jener Theorie betrachtete Figur (42) einer gleichförmig belasteten hängenden Kette um die horizontale Achse AB sich herumgedreht denkt, so nehmen sämtliche Vertikalkräfte entgegengesetzte Richtungen an und man erhält die in Fig. 132 dargestellte Form einer nach oben hin gezogenen gespannten Kette, deren Belastungen man als negative Belastungen bezeichnen könnte. Die für Fig. 42 gefundene Gleichung:

$$Hf = \frac{pl^2}{2}$$

ist ohne weiteres als für diese neue Form ebenfalls gültig anzusehen, weil das obige Beweisverfahren unmittelbar auf diesen Fall sich übertragen läßt.

Ebenso gilt für eine zwischen zwei festen Punkten nach oben hin ausgespannte Kette, welche mit positiver Belastung P (pro

Fig. 132.

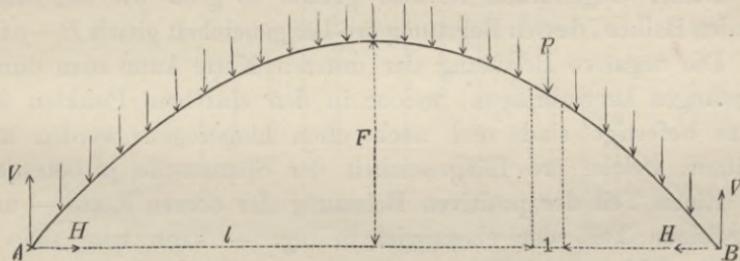


Längeneinheit der Spannweite) versehen ist und die Pfeilhöhe F hat (s. Fig. 133), die Gleichung:

$$HF = \frac{Pl^2}{2},$$

und man kann offenbar die Belastung P so wählen, daß die Horizontalkraft H in dieser letzteren Kette dieselbe Größe hat

Fig. 133.



wie in der vorigen. Als Bedingung dieser Gleichheit ergibt sich, wenn man die Werte von H aus beiden Gleichungen einander gleichsetzt, oder kürzer, wenn man die eine durch die andere dividiert, die dritte Gleichung:

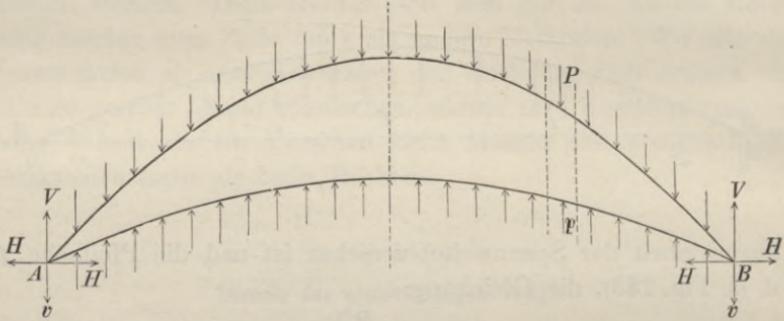
$$\frac{f}{F} = \frac{p}{P},$$

welche ausdrückt, daß die absoluten Werte der Belastungen sich verhalten müssen, wie die Pfeilhöhen der beiden Ketten.

Wenn man dieselben beiden Punkte A und B als gemeinschaftliche Stützpunkte für beide Ketten annimmt (s. Fig. 134), so wird offenbar der von diesen Punkten zu leistende horizontale

Gegendruck gleich Null werden, denn die eine Kette erfordert gerade so viel Gegendruck von innen als die andere von außen

Fig. 134.



her. Es wird also jeder der beiden Punkte nur noch einen vertikalen Gegendruck D zu leisten haben, welcher gleich dem Überschusse von V über v ist; nämlich:

$$D = V - v = Pl - pl = (P - p)l.$$

Dieser Gegendruck ist also gerade so groß wie bei einem geraden Balken, dessen Belastung pro Längeneinheit gleich $P - p$ ist.

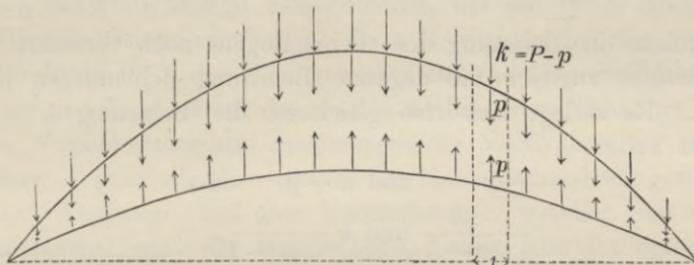
Die negative Belastung der unteren Kette kann man durch Zugstangen hervorbringen, welche in den einzelnen Punkten der Kette befestigt sind und nach oben hingezogen werden mit Kräften, welche pro Längeneinheit der Spannweite p betragen.

Einen Teil der positiven Belastung der oberen Kette — und zwar einen Teil, der ebensoviel beträgt — kann man sich in ähnlicher Weise durch Hängestangen hervorgebracht denken, welche an den einzelnen Punkten der oberen Kette befestigt sind und nach unten hin gezogen werden mit Kräften, welche pro Längeneinheit der Spannweite gleich p sind. Den anderen Teil $P - p$, welcher mit k bezeichnet werden soll, kann man durch äußerlich aufgelegte Belastung darstellen (s. Fig. 135).

Wenn man alsdann das obere Ende jeder Zugstange mit dem unteren Ende der darüber befindlichen Hängestange gehörig verbindet, so daß ein Stück daraus wird, so kann man die Kräfte p weglassen, indem sie alsdann durch die Spannungen der auf solche Weise gebildeten Vertikalstangen genau ersetzt werden. Man erhält damit einen sichelförmig parabolischen Träger ohne

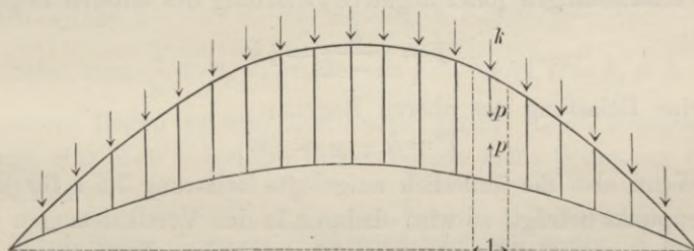
Diagonalen, dessen gleichförmig über die Spannweite verteilte Belastung pro Längeneinheit k beträgt und in dem oberen Bogen ihre Angriffspunkte hat.

Fig. 135.



Die Spannungen in den beiden Bogen sowie in den Vertikalstangen lassen sich nun auf folgende Weise aus den gegebenen Größen l, f, F, k berechnen. Es kann dabei der Einfachheit wegen angenommen werden, daß auf jede Längeneinheit der Spannweite nur eine Vertikalstange kommt (s. Fig. 136); denn es ist im

Fig. 136.



zweiten Abschnitt § 8 bereits nachgewiesen, daß die parabolische Form auch dann noch die Gleichgewichtsform bildet, wenn die Belastungen auf einzelne Punkte sich konzentrieren, vorausgesetzt, daß auf jeden Belastungspunkt die halben Belastungen der angrenzenden Abteilungen kommen.

Zur Berechnung der beiden Größen P und p dienen die beiden Gleichungen:

$$\frac{f}{F} = \frac{p}{P} \text{ und } P - p = k.$$

Man erhält daraus, wenn man das Verhältnis $\frac{f}{F}$ mit $\frac{1}{n}$ bezeichnet:

$$p = \frac{k}{n-1}, \quad P = k + \frac{k}{n-1}.$$

Das Auflegen der Belastungen k auf den oberen Bogen erzeugt also in jeder Vertikalstange eine Zugspannung $= \frac{k}{n-1}$, um welche die Belastung des oberen Bogens noch vermehrt wird und welche zugleich die negative Belastung der unteren Kette bildet. Es zerlegt sich also gleichsam die Belastung k in die beiden Teile:

$$\begin{aligned} & -p \quad \text{und} \quad k+p, \quad \text{oder} \\ & -\frac{k}{n-1} \quad \text{und} \quad k + \frac{k}{n-1}, \end{aligned}$$

deren ersterer von dem unteren, letzterer von dem oberen Bogen aufgenommen wird.

Bei dem vorigen Zahlenbeispiel war

$$\frac{1}{n} = \frac{f}{F} = \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5}, \quad \text{also} \quad n = \frac{5}{2}.$$

Daraus ergibt sich bei einer Belastung k eine Spannung in den Vertikalstangen (oder negative Belastung des unteren Bogens):

$$p = \frac{k}{\frac{5}{2}-1} = \frac{2}{3}k$$

und eine Belastung des oberen Bogens:

$$P = k + p = \frac{5}{3}k.$$

Wenn also die äußerlich aufgelegte Belastung 7,5 t für jeden Knotenpunkt beträgt, so wird dadurch in den Vertikalstangen eine Spannung von $\frac{2}{3} \cdot 7,5 = 5$ t erzeugt, und der obere Bogen befindet sich in demselben Zustande, als wenn eine Belastung von $\frac{5}{3} \cdot 7,5 = 12,5$ t auf jeden seiner Belastungspunkte wirkte (wobei der Träger selbst gewichtlos gedacht wird).

Wenn man die 1,5 t Eigengewicht des vorigen Beispiels als eine auf die oberen Knotenpunkte verteilte Last ansieht, so ergeben sich als Wirkung dieses Gewichts $\frac{2}{3} \cdot 1,5 = 1$ t Zugspannung in den Vertikalen (oder negative Belastung der unteren Kette) und $\frac{5}{3} \cdot 1,5 = 2,5$ t Belastung der oberen Kette.

Endlich wenn man $7,5 + 1,5 = 9$ t Totalbelastung in gleicher Weise wirkend annimmt, so erhält man

$$\begin{aligned} & 6 \text{ t für die untere und} \\ & 15 \text{ t für die obere Kette.} \end{aligned}$$

Wenn dagegen ein Teil der Belastung unmittelbar an dem unteren Ende der Vertikalstange angreift, so kann man sich mittelst einer Nebenstange auch diesen Teil auf den oberen Endpunkt übertragen denken und die Spannung dieser Nebenstange zu derjenigen der Hauptstange hinzuaddieren, um die ganze Spannung der Vertikalstange zu finden. So z. B. wurden bei der vorigen Konstruktion 0,5 t des Eigengewichts auf die unteren Punkte gerechnet und diese wären also zu den 6 t hinzuzurechnen, um unter dieser Voraussetzung die Spannungen der Vertikalständer zu bekommen — ganz wie oben mittelst der Momentenmethode gefunden wurde. Derjenige Teil der Vertikalstange, welcher die untere Kette spannt, also die Hauptstange, behält jene 6 t Spannung, und bleibt daher die Spannung in den beiden Ketten genau dieselbe, mag die äußere Belastung oben oder unten aufgehängt sein. Die horizontale Spannung der Ketten z. B. beträgt:

$$H = \frac{pl^2}{2f} = \frac{6 \cdot 6,5^2}{2 \cdot 1} = 126,7 \text{ t}$$

Zugspannung in der unteren und Druckspannung in der oberen Kette, wie früher mittelst der Momentenmethode ebenfalls gefunden wurde.

Setzt man $\frac{1}{n} = 0$, so erhält man $p = 0$ und $P = k$, d. h. wenn der untere Bogen in eine horizontale gerade Linie übergeht, so erzeugt eine oben aufgelegte Belastung gar keine Spannung in den Vertikalen.

Wird ferner $\frac{1}{n}$ negativ, so wird auch p negativ, d. h. wenn der untere Bogen nach unten hin hängt, so erhalten die Vertikalständer negative (oder Druck-) Spannung durch eine oben aufgelegte Last, so z. B. wenn $\frac{1}{n} = -1$ gesetzt wird, ergeben sich:

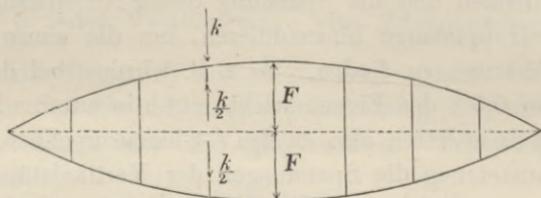
$$p = -\frac{k}{2} \text{ und } P = +\frac{k}{2},$$

d. h. in diesem Falle wird die Hälfte der oben aufgelegten Last auf den unteren Bogen übertragen (s. Fig. 137). Überhaupt gelten die eben gefundenen Sätze sowohl für negative als für positive Werte der Pfeilhöhe f des unteren Bogens.

In allen diesen Fällen reichen also bei voller — oder überhaupt gleichförmig über die Spannweite verteilter Belastung —

die Vertikalständer aus, um das Gleichgewicht der beiden Ketten zu erhalten. Nur bei ungleichförmiger Belastung tritt eine Tendenz

Fig. 137.

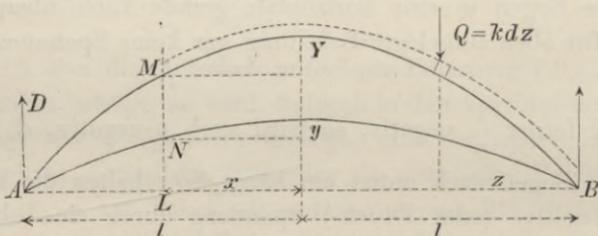


zur Verschiebung ein, und dieser wird durch das einzuschaltende Diagonalensystem begegnet. *)

*) Auch für das Diagonalensystem eines solchen sichelförmigen Trägers läßt sich ein allgemeines Spannungsgesetz aufstellen, dessen Ableitung für diejenigen Leser, welche mit dem Gebrauche der Differentialrechnung vertraut sind, als Zusatz hier in der Kürze mitgeteilt werden soll.

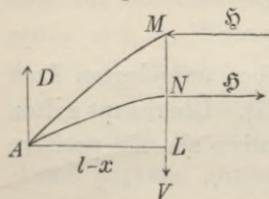
Die Diagonalstangen bilden mit den Vertikalstangen zusammen genommen ein Abstufungssystem, welches die beiden Ketten zu einem unverschiebbaren Ganzen verbindet. Gegen äußere Kräfte verhält sich dieses Ganze stets wie ein einfacher Balken, der an beiden Endpunkten unterstützt ist. Wenn also an irgend einer Stelle, z. B. in der Horizontalentfernung z von dem rechten Auflager B ein Gewicht Q auf diesen

Fig. 138.



Balken gelegt wird (s. Fig. 138), so ruft dasselbe an dem jenseitigen Auflager A einen Gegendruck hervor:

Fig. 139.



$$D = Q \cdot \frac{z}{2l}.$$

Zerlegt man an irgend einer Stelle auf der linken Seite durch einen Vertikalabschnitt MN den ganzen Träger in zwei Teile, so müssen bei jedem derselben, z. B. dem Teil Fig. 139, um das Gleichgewicht wiederherzustellen, Kräfte an der Schnittstelle angebracht werden. Damit die algebraische Summe der Vertikalkräfte in Fig. 139 gleich Null werde, muß eine Vertikal-

kraft V angebracht werden, welche so groß als D ist und nach unten wirkt, also:

$$V = Q \cdot \frac{z}{2l}.$$

Die Kraft V allein würde das Stück um den Punkt A drehen, wenn nicht noch horizontale Kräfte hinzugefügt würden. Diese Horizontalkräfte müssen jedenfalls paarweise gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung haben, weil sonst die algebraische Summe der Horizontalkräfte nicht Null wäre. Wenn der Schnitt MN unmittelbar neben einem Vertikalständer vorbeigeht, so sind M und N die einzigen beiden Stellen, an denen Stangen von dem Schnitt getroffen werden. An diesen beiden Punkten sind also die Horizontalkräfte anzubringen. Die Größe \mathfrak{H} jeder dieser beiden Kräfte bestimmt man aus der Gleichung der statischen Momente in Beziehung auf den Drehpunkt A , nämlich:

$$0 = V(l-x) - \mathfrak{H} \cdot \overline{ML} + \mathfrak{H} \cdot \overline{NL}.$$

Wenn die Pfeilhöhen der beiden Parabeln wie früher mit F und f bezeichnet werden, so sind die Gleichungen derselben:

$$\frac{Y}{F} = \frac{x^2}{l^2} = \frac{y}{f}.$$

Man erhält daraus für \overline{ML} und \overline{NL} die Werte:

$$\overline{ML} = F - Y = F \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$\overline{NL} = f - y = f \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Wenn man diese Werte so wie auch den für V gefundenen in die obige Momentengleichung substituiert, so erhält man die Gleichung:

$$0 = Q \cdot \frac{z}{2l} \cdot (l-x) - \mathfrak{H} F \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) + \mathfrak{H} f \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

welche für \mathfrak{H} aufgelöst den Wert gibt:

$$\mathfrak{H} = \frac{Qlz}{2(F-f)(l+x)}.$$

Es ist nun die Kraft \mathfrak{H} die durch das Gewicht Q an der Stelle M hervorgebrachte Horizontalspannung der Kette und der nach x genommene Differentialquotient:

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dx} = - \frac{Qlz}{2(F-f)(l+x)^2}$$

gibt die Größe an, um welche diese Spannung pro Längeneinheit der Horizontalen zunimmt, wenn die Größe x wächst, d. h. wenn der Punkt M weiter links angenommen wird.

Der absolute Wert dieser Größe wird um so größer, je mehr Gewichte Q rechts von dem Punkte M aufgelegt werden, am größten, wenn die ganze Strecke von B bis M belastet wird. Für letzteren Belastungszustand erhält man den zugehörigen Wert von $\frac{d\mathfrak{H}}{dx}$, welcher mit $\frac{dH}{dx}$ be-

zeichnet werden soll (indem \mathfrak{S} dann in H übergeht), wenn man kdz statt Q setzt und zwischen den Grenzen $z=0$ und $z=l+x$ integriert:

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{kl}{2(F-f)(l+x)^2} \cdot \int_{z=0}^{z=l+x} z dz = -\frac{kl}{2(F-f)(l+x)^2} \cdot \frac{(l+x)^2}{2}$$

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{kl}{4(F-f)}.$$

Daß nämlich bei noch weiterem Fortsetzen der Belastung über den Punkt M hinaus der vorher negative Wert von $\frac{d\mathfrak{S}}{dx}$ wiederum der Größe Null sich nähern würde, davon überzeugt man sich leicht, wenn man auf ähnliche Weise wie oben untersucht, welchen Einfluß ein einzelnes links von dem Punkte in der Entfernung z vom Auflager A aufgelegtes Gewicht Q haben würde.

Man findet dann, daß jede Belastung links den Wert von $\frac{d\mathfrak{S}}{dx}$ positiv macht und daß dieser positive Wert am größten wird, wenn alle Punkte links von M belastet werden. Diese Untersuchung würde zu den analogen Gleichungen führen:

$$0 = -Q \frac{z}{2l} \cdot (l+x) + \mathfrak{S} F \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) - \mathfrak{S} f \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$\mathfrak{S} = \frac{Qlz}{2(F-f)(l-x)}; \quad \frac{d\mathfrak{S}}{dx} = \frac{Qlz}{2(F-f)(l-x)^2};$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{kl}{2(F-f)(l-x)^2} \cdot \int_{z=0}^{z=l-x} z dz = \frac{kl}{2(F-f)(l-x)^2} \cdot \frac{(l-x)^2}{2}$$

$$\frac{dH}{dx} = +\frac{kl}{4(F-f)}.$$

Man kann daher der allgemeinen Gleichung für $\frac{dH}{dx}$ auch die Form geben:

$$\frac{dH}{dx} \begin{cases} \text{maximum} = +\frac{kl}{4(F-f)} \\ \text{minimum} = -\frac{kl}{4(F-f)} \end{cases}$$

Dieses Resultat läßt sich nun auf folgende Weise zur Bestimmung der Diagonalspannungen benutzen.

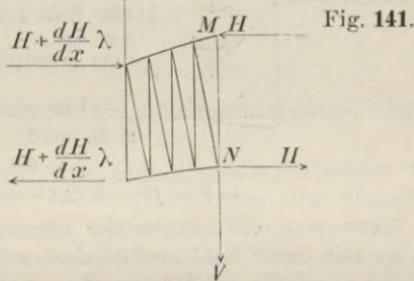
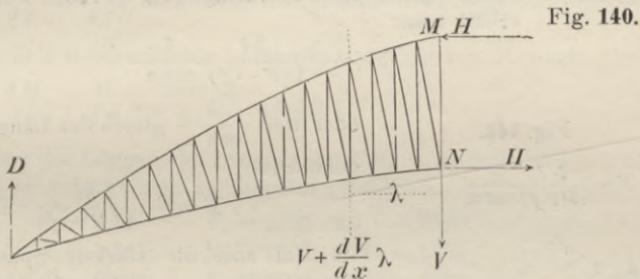
Es war die Annahme gemacht worden, daß der Vertikalschnitt unmitttelbar neben einem Vertikalständer vorbeigehen sollte. Die Schnittstelle der Diagonale fällt dann mit der Schnittstelle eines der beiden Bögen, beispielsweise des unteren, zusammen (s. Fig. 140). Die drei Kräfte H , V , H verteilen sich nun wie nachstehend auf die drei Schnittstellen: Auf die Schnittstelle M kommt die Horizontalkraft H und so viel von der Vertikalkraft V als nötig ist, um eine Mittelkraft zu ergeben, welche mit der Richtung der Kette bei M zusammenfällt. Auf die Schnittstelle N der Diagonalstange kommt ein Teil der unten angreifenden Kraft H und so viel von der Vertikalkraft V als nötig ist, um eine Mittelkraft zu geben, welche mit der Diagonalenrichtung zusammenfällt. Auf

die Schnittstelle N der unteren Kette kommt der andere Teil von H und so viel von der Kraft V als nötig ist, um eine Mittelkraft zu geben, welche mit der Richtung der Kette bei N zusammenfällt.

Hätte man den Schnitt um die Strecke dx weiter links gelegt, so würden die Kräfte:

$$H + \frac{dH}{dx} dx \text{ und } V + \frac{dV}{dx} dx$$

statt der Kräfte H und V anzubringen gewesen sein. Wenn man gleichzeitig beide Schnitte führt und die Wirkung der Kräfte untersucht, welche



auf das herausgeschnittene Stück wirken, so findet man, daß der Überschuß der von links nach rechts wirkenden Horizontalkraft, also $\frac{dH}{dx} \cdot dx$ die Kraft bildet, welche das obere Bogenstück nach rechts und das untere nach links zu verschieben trachtet.

Nimmt man als Breite des Stücks die kleine Größe λ (statt der unendlich kleinen Größe dx), so wird annähernd auch jetzt noch:

$$\frac{dH}{dx} \cdot \lambda$$

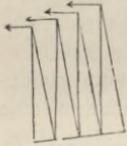
oder wenn man für $\frac{dH}{dx}$ den oben gefundenen Wert substituiert:

$$\pm \frac{kl}{4(F-f)} \cdot \lambda$$

die Größe dieser Verschiebungskraft darstellen, welche je nach der Belastungsweise nach rechts oder nach links wirkt (s. Fig. 141). Diese Kraft verteilt sich auf die Spitzen der einzelnen aus Vertikalständer und Dia-

gonalstange gebildeten Dreiecke und bringt Spannungen in denselben hervor, welche leicht bestimmt werden können, wenn man die Richtungen der Diagonalen kennt (s. Fig. 142).

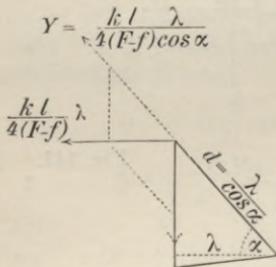
Fig. 142.



Wenn man mit λ die horizontale Länge eines Feldes bezeichnet, so ist es nur ein solches Dreieck, welches die Kraft $\pm \frac{kl}{4(F-f)} \cdot \lambda$ aufnimmt, und diese kann dann in zwei Seitenkräfte zerlegt gedacht werden, von denen die eine in der Diagonalstange, die andere in der Vertikalstange Spannung hervorbringt (s. Fig. 143). Für die erstere erhält man:

$$Y = \pm \frac{kl}{4(F-f)} \frac{\lambda}{\cos \alpha}$$

Fig. 143.



oder weil $\frac{\lambda}{\cos \alpha}$ gleich der Länge d der Diagonale ist:

$$Y = \pm \frac{kl}{4(F-f)} \cdot d.$$

Um also die stärkste Spannung einer Diagonalstange zu ermitteln, braucht man nur ihre Länge zu messen und diese mit dem Ausdruck $\frac{kl}{4(F-f)}$ zu multiplizieren.

Für den in § 15 berechneten Träger z. B. wird:

$$\frac{kl}{4(F-f)} = \frac{7,5 \cdot 6,5}{4(2,5-1)} = 8,125.$$

Wenn man die Längen der einzelnen Diagonalen d_2, d_3, \dots, d_{12} mißt und sie mit dieser Zahl multipliziert, so erhält man folgende Zahlen:

$d_2 = 1,018;$	$Y_2 = 8,125 \cdot 1,018 = 8,3$
$d_3 = 1,163;$	$Y_3 = 8,125 \cdot 1,163 = 9,5$
$d_4 = 1,361;$	$Y_4 = 8,125 \cdot 1,361 = 11,1$
$d_5 = 1,55;$	$Y_5 = 8,125 \cdot 1,55 = 12,6$
$d_6 = 1,7;$	$Y_6 = 8,125 \cdot 1,7 = 13,8$
$d_7 = 1,8;$	$Y_7 = 8,125 \cdot 1,8 = 14,6$
$d_8 = 1,835;$	$Y_8 = 8,125 \cdot 1,835 = 14,9$
$d_9 = 1,815;$	$Y_9 = 8,125 \cdot 1,815 = 14,7$
$d_{10} = 1,735;$	$Y_{10} = 8,125 \cdot 1,735 = 14,1$
$d_{11} = 1,605;$	$Y_{11} = 8,125 \cdot 1,605 = 13,0$
$d_{12} = 1,426;$	$Y_{12} = 8,125 \cdot 1,426 = 11,6$

welche bis auf unerhebliche Abweichungen mit den in Fig. 120 eingeschriebenen Zahlen übereinstimmen.

Das oben gefundene allgemeine Gesetz der Diagonalspannungen gilt nicht bloß für sichelförmige Träger, sondern auch für solche parabolische Träger, deren unterer Bogen nach unten hin seine konvexe Seite kehrt. Für diesen Fall ist $-f$ statt $=f$ zu setzen und wird:

$$\frac{dH}{dx} = \pm \frac{kl}{4(F+f)}$$

Ebenso gilt das Gesetz noch für die beiden speziellen Fälle, wenn entweder der untere oder der obere Bogen in eine horizontale Linie übergeht. Für den ersteren Fall ist in der letzten Gleichung $f=0$, für den zweiten $F=0$ zu setzen und man erhält:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{kl}{4F}, \text{ wenn die Horizontale unten,}$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{kl}{4f}, \text{ wenn die Horizontale oben liegt.}$$

Für den in § 6 berechneten parabolischen Träger z. B. wird:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{kl}{4f} = \frac{2500 \cdot 8}{4 \cdot 2} = 2500$$

und wenn man die Längen der Diagonalen $d_2, d_3 \dots d_7$ mißt und mit 2500 multipliziert, so gelangt man zu folgenden Zahlen:

$d_2 = 2,5;$	$Y_2 = 2500 \cdot 2,5 = 6250$
$d_3 = 2,741;$	$Y_3 = 2500 \cdot 2,741 = 6850$
$d_4 = 2,828;$	$Y_4 = 2500 \cdot 2,828 = 7070$
$d_5 = 2,741;$	$Y_5 = 2500 \cdot 2,741 = 6850$
$d_6 = 2,5;$	$Y_6 = 2500 \cdot 2,5 = 6250$
$d_7 = 2,183;$	$Y_7 = 2500 \cdot 2,183 = 5460$

welche wiederum fast genau mit den in Fig. 27 eingeschriebenen Zahlen übereinstimmen.

Für die Vertikalständer könnte man zwar ebenfalls ein solches allgemeines Spannungsgesetz aufstellen, doch würde wegen ihrer doppelten Funktionen — erstens als Glieder des Absteifungssystems, zweitens als Stützen oder Hängestangen, welche die Last von einem Bogen zum andern übertragen — dieses Gesetz eine kompliziertere Form erhalten und deshalb von geringem praktischen Werte sein. Auch dürfte man keine so genaue Übereinstimmung erwarten zwischen den nach diesem Gesetze zu berechnenden und den mittelst der Momentenmethode gefundenen Werten. Denn solche allgemeine Gesetze gründen sich auf die der Wirklichkeit nicht genau entsprechende Voraussetzung einer stetigen Lastverteilung und eines stetigen Fortschreitens der Belastung, während bei der Momentenmethode ein sprunghaft fort schreitendes Belasten angenommen wurde.

Aus diesem Grunde ist hinsichtlich der Vertikalständer unter allen Umständen die Methode der statischen Momente vorzuziehen.

FÜNFTER ABSCHNITT.

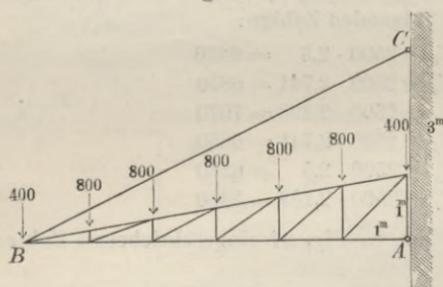
§ 19.

Hängendes Perrondach von 6 m Vorsprungsweite.

Als Totalbelastung inkl. Wind- und Schneedruck sind 200 kg pro Quadratmeter der Grundrißfläche angenommen. Die Entfernung der einzelnen Binder voneinander beträgt 4 m. Die Belastung für jeden einzelnen Binder ist demnach:

$$6 \cdot 4 \cdot 200 = 4800 \text{ kg,}$$

Fig. 144.



wovon auf jedes der sechs Felder 800 kg kommen. Von den sieben Belastungspunkten erhalten daher der erste und letzte je 400 kg, die übrigen je 800 kg als Belastung (Fig. 144). Wegen verhältnismäßig geringer Größe des Beitrages, den die

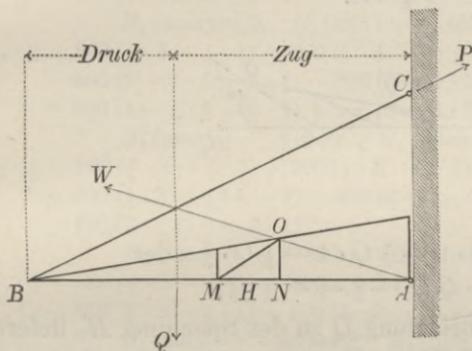
eigenen Gewichte der Stangen zu diesen Totalbelastungen liefern, dürfen dieselben ganz als „mobile“ Belastungen in Rechnung gebracht werden.

Berechnung der Spannungen H in den horizontalen Stangen.

Die Art und Weise, wie irgend eine einzelne Belastung Q durch die Widerstände W und P der beiden festen Unterstützungspunkte A und C aufgehoben wird, zeigt Fig. 145. Um die Spannung H in der Stange MN zu berechnen, würde man für den in Fig. 146 dargestellten Teil die Gleichung der statischen Momente in bezug auf den Punkt O als Drehpunkt aufzustellen haben. Wenn also, wie hier geschehen, der Belastungspunkt so gewählt wird, daß die Mittelkraft von Q und P durch den Drehpunkt O hindurchgeht, so wird die Spannung $H = 0$. Alle weiter links von dieser Stelle angebrachten Belastungen bringen negative, alle weiter rechts angebrachten Belastungen bringen positive Spannungen in der Stange MN hervor. Um also H (min) zu finden,

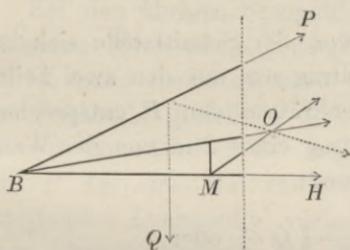
hat man die Belastungspunkte der in Fig. 145 mit „Druck“ überschriebenen Abteilung allein belastet anzunehmen; um H (max) zu finden, dagegen diejenigen der mit „Zug“ überschriebenen Abteilung.

Fig. 145.



der Einfluß jeder einzelnen Belastung durch ein einzelnes Glied

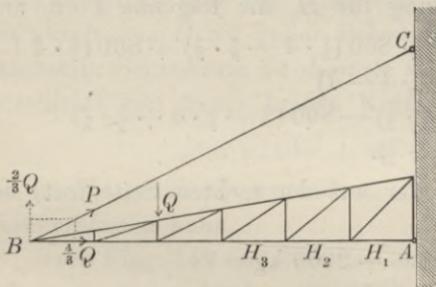
Fig. 146.



dargestellt ist. Wenn man in dieser Gleichung das eine Mal die positiven, das andere Mal die negativen Glieder fortläßt, so erhält man ebenfalls die beiden gesuchten Spannungen.

Wenn das 4 m von der Wand entfernte Gewicht Q die einzige Belastung bildete, so würde in der Stange BC eine Spannung P entstehen, deren vertikale Seitenkraft gleich $\frac{2}{3} Q$ ist (Fig. 147); denn wenn man die Gleichung der statischen Momente in bezug auf den Drehpunkt A aufstellt, so findet man, daß die vertikale Seitenkraft von P stets genau so wirkt wie der Gegen-

Fig. 147.

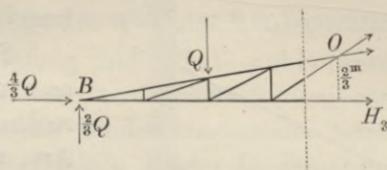


druck des Stützpunktes B wirken würde, wenn AB ein auf zwei Stützen frei aufliegender Balken wäre. Da die Längen AB und AC wie 6 zu 3 sich verhalten, so ist die horizon-

tal-

tale Seitenkraft von P stets doppelt so groß als die vertikale, in diesem Falle also $= \frac{4}{3} Q$. Hiernach erhält man aus Fig. 148 für die Spannung H_3 die Gleichung:

Fig. 148.



$$0 = -H_3 \cdot \frac{2}{3} - Q \cdot 2 + \frac{2}{3} Q \cdot 4 - \frac{4}{3} Q \cdot \frac{2}{3} \text{ oder}$$

$$H_3 \cdot \frac{2}{3} = -Q \left(2 - \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \right).$$

Der Beitrag, welchen die Belastung Q zu der Spannung H_3 liefert, setzt sich also aus drei Teilen zusammen, von denen der erste die direkte Wirkung, die beiden anderen aber die mittelst der beiden Seitenkräfte von P ausgeübte indirekte Wirkung repräsentieren.

Wenn das Gewicht Q rechts von der Schnittstelle sich befände, so würde dagegen dieser Beitrag nur aus den zwei Teilen bestehen, welche den beiden Seitenkräften von P entsprechen, und man erhielte z. B. für den Beitrag eines 2 m von der Wand entfernten Gewichtes Q die Gleichung:

$$0 = -H_3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{Q}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} Q \cdot \frac{2}{3} \text{ oder}$$

$$H_3 \cdot \frac{2}{3} = Q \left(\frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right).$$

Hiernach nimmt die der vollen Belastung sämtlicher Belastungspunkte entsprechende Gleichung für H_3 die folgende Form an:

$$H_3 \cdot \frac{2}{3} = 800 \left(\frac{1}{6} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + 800 \left(\frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + 800 \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 \cdot \frac{2}{3} - 1 \right)$$

$$- 800 \left(2 - \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) - 800 \left(3 - \frac{5}{6} \cdot 4 + \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \right)$$

$$- 400 \left(4 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{2}{3} \right).$$

Läßt man die negativen Glieder auf der rechten Seite fort, so erhält man:

$$H_3 (\text{max}) = + 2000 \text{ kg}$$

und läßt man das andere Mal die positiven Glieder weg, so erhält man:

$$H_3 (\text{min}) = - 2000 \text{ kg}.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die übrigen horizontalen Stangen die Gleichungen:

$$H_1 \cdot 1 = -800 \left(1 - \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1\right) - 800 \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 1\right) \\ - 800 \left(3 - \frac{1}{2} \cdot 6 + 1 \cdot 1\right) - 800 \left(4 - \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1\right) - 800 \left(5 - \frac{5}{6} \cdot 6 + \frac{5}{3} \cdot 1\right) \\ - 400 \left(6 - 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1\right)$$

$$H_1 (\max) = 0, \quad H_1 (\min) = -4800 \text{ kg.}$$

$$H_2 \cdot \frac{5}{6} = 800 \left(\frac{1}{6} \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}\right) + 800 \left(\frac{1}{3} \cdot 5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} - 1\right) \\ - 800 \left(2 - \frac{1}{2} \cdot 5 + 1 \cdot \frac{5}{6}\right) - 800 \left(3 - \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}\right) \\ - 800 \left(4 - \frac{5}{6} \cdot 5 + \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{6}\right) - 400 \left(5 - 1 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{5}{6}\right)$$

$$H_2 (\max) = +640 \text{ kg}, \quad H_2 (\min) = -3040 \text{ kg.}$$

$$H_4 \cdot \frac{1}{2} = 800 \left(\frac{1}{6} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + 800 \left(\frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + 800 \left(\frac{1}{2} \cdot 3 - 1 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ + 800 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1\right) - 800 \left(2 - \frac{5}{6} \cdot 3 + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \\ - 400 \left(3 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$H_4 (\max) = +3733 \text{ kg}, \quad H_4 (\min) = -1333 \text{ kg.}$$

$$H_5 \cdot \frac{1}{3} = 800 \left(\frac{1}{6} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + 800 \left(\frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + 800 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 - 1 \cdot \frac{1}{3}\right) \\ + 800 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + 800 \left(\frac{5}{6} \cdot 2 - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3} - 1\right) - 400 \left(2 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{3}\right)$$

$$H_5 (\max) = +5600 \text{ kg}, \quad H_5 (\min) = -800 \text{ kg.}$$

$$H_6 \cdot \frac{1}{6} = 800 \left(\frac{1}{6} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) + 800 \left(\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) + 800 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{6}\right) \\ + 800 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) + 800 \left(\frac{5}{6} \cdot 1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) - 400 \left(1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{6}\right)$$

$$H_6 (\max) = +8000 \text{ kg}, \quad H_6 (\min) = -800 \text{ kg.}$$

Bei den übrigen Stangen fallen die Drehpunkte für die betreffenden Momentengleichungen immer in die Horizontale AB , und ist daher die Möglichkeit ausgeschlossen, daß die stets nach dem Punkte A gerichtete Mittelkraft von dem Gewichte Q und der von demselben in der Zugstange BC hervorgebrachten Zugkraft P das eine Mal rechts, das andere Mal links an dem betreffenden Drehpunkte vorbeigehe. Folglich werden bei sämtlichen übrigen Stangen die (Zug- oder Druck-) Spannungen bei voller Belastung am größten.

Die ganze Belastung beträgt 4800 kg und da der Schwerpunkt derselben über die Mitte von AB liegt, so ist die vertikale Seitenkraft von P bei voller Belastung $\frac{1}{2} \cdot 4800 = 2400$ kg. Die horizontale Seitenkraft ist doppelt so groß, also = 4800 kg. Die Mittelkraft von diesen beiden Kräften hat die Größe:

$$P = \sqrt{2400^2 + 4800^2} = 5367 \text{ kg}$$

und ist die größte Zugspannung, welche in der Stange BC überhaupt eintreten kann.

Nach Figg. 149 und 150 hat der Hebelarm der Spannung X_3 in bezug auf den Drehpunkt M die Größe:

$$\overline{LM} \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{6^2 + 1^2}} = 0,4932 \text{ m.}$$

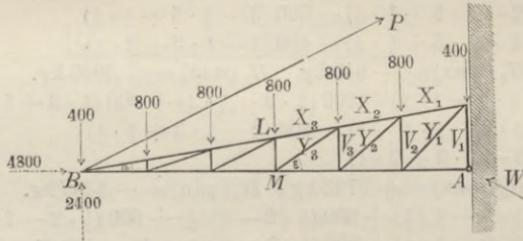
Man erhält also nach Fig. 150 zur Bestimmung von X_3 die Gleichung:

$$0 = X_3 \cdot 0,4932 + 2400 \cdot 3 - 800(0 + 1 + 2 + \frac{3}{2})$$

oder

$$X_3 = -7299 \text{ kg.}$$

Fig. 149.



Auf gleiche Weise ergeben sich für die übrigen Spannungen X die Gleichungen:

$$0 = X_1 \cdot 0,822 + 2400 \cdot 5 - 800 \left(1 + 2 + 3 + 4 + \frac{5}{2}\right)$$

$$X_1 = -2433 \text{ kg.}$$

$$0 = X_2 \cdot 0,6576 + 2400 \cdot 4 - 800 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right)$$

$$X_2 = -4866 \text{ kg.}$$

$$0 = X_4 \cdot 0,3288 + 2400 \cdot 2 - 800 \left(1 + \frac{2}{2}\right)$$

$$X_4 = -9732 \text{ kg.}$$

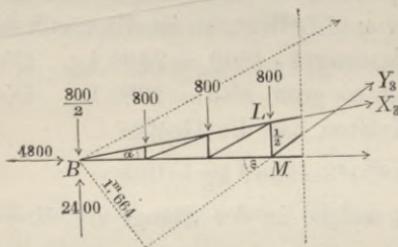
$$0 = X_5 \cdot 0,1644 + 2400 \cdot 1 - 400 \cdot 1$$

$$X_5 = -12166 \text{ kg.}$$

$$0 = X_6 \cdot 0,1644 + 2400 \cdot 1 - 400 \cdot 1$$

$$X_6 = -12166 \text{ kg.}$$

Fig. 150.



Bei den Momentengleichungen für die Spannungen der Diagonalen ist der Punkt B als Drehpunkt zu wählen. Der Hebelarm der Kraft Y_3 in bezug auf den Punkt B ist nach Fig. 150:

$$\overline{BM} \cdot \sin \varepsilon = 3 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = 1,664 \text{ m.}$$

Man erhält also für die Spannung Y_3 die Gleichung:

$$0 = -Y_3 \cdot 1,664 + 800(1 + 2 + 3), \quad Y_3 = +2884 \text{ kg.}$$

Für die übrigen Diagonalen ergeben sich auf dieselbe Weise die folgenden Gleichungen:

$$0 = -Y_1 \cdot 3,536 + 800(1 + 2 + 3 + 4 + 5),$$

$$Y_1 = + 3394 \text{ kg.}$$

$$0 = -Y_2 \cdot 2,561 + 800(1 + 2 + 3 + 4),$$

$$Y_2 = + 3124 \text{ kg.}$$

$$0 = -Y_4 \cdot 0,89 + 800(1 + 2),$$

$$Y_4 = + 2700 \text{ kg.}$$

$$0 = -Y_5 \cdot 0,316 + 800 \cdot 1,$$

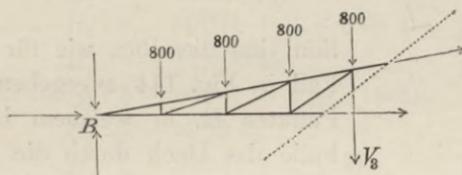
$$Y_5 = + 2530 \text{ kg.}$$

Bei den Momentengleichungen für die Spannungen der Vertikalstangen ist ebenfalls der Punkt B als Drehpunkt zu wählen. Nach Fig. 151 erhält man für V_3 die Gleichung:

$$0 = V_3 \cdot 4 + 800(4 + 3 + 2 + 1),$$

$$V_3 = - 2000 \text{ kg.}$$

Fig. 151.



Auf gleiche Weise erhält man für die anderen Vertikalstangen die Gleichungen:

$$0 = V_1 \cdot 6 + 800\left(\frac{6}{2} + 5 + 4 + 3 + 2 + 1\right),$$

$$V_1 = - 2400 \text{ kg.}$$

$$0 = V_2 \cdot 5 + 800(5 + 4 + 3 + 2 + 1),$$

$$V_2 = - 2400 \text{ kg.}$$

$$0 = V_4 \cdot 3 + 800(3 + 2 + 1),$$

$$V_4 = - 1600 \text{ kg.}$$

$$0 = V_5 \cdot 2 + 800(2 + 1),$$

$$V_5 = - 1200 \text{ kg.}$$

$$0 = V_6 \cdot 1 + 800 \cdot 1,$$

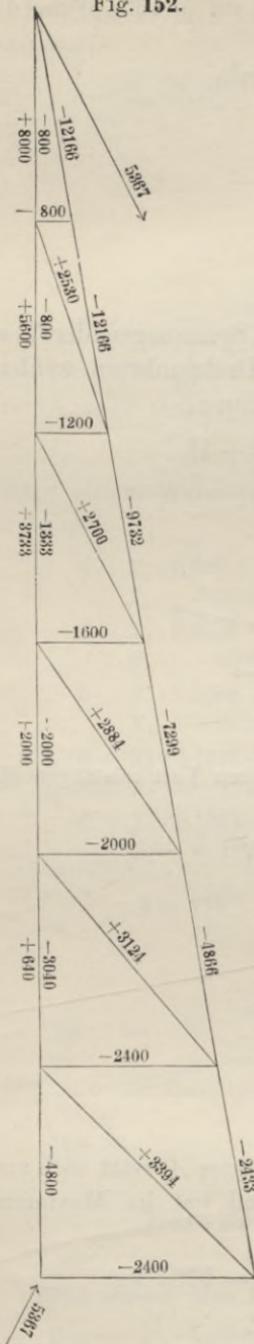
$$V_6 = - 800 \text{ kg.}$$

Der Gegendruck W des festen Stützpunktes A setzt sich aus den Seitenkräften H_1 und V_1 zusammen und hat im Maximum die Größe:

$$W = \sqrt{H_1^2 + V_1^2} = \sqrt{4800^2 + 2400^2} = 5367 \text{ kg,}$$

also dieselbe Größe wie die Zugspannung P .

Fig. 152.



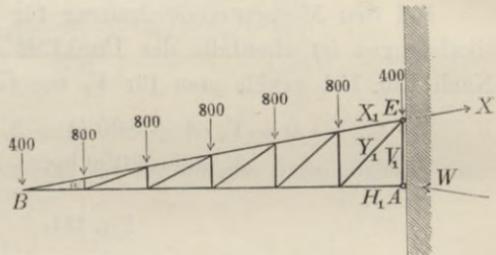
Die gefundenen Spannungszahlen sind in Fig. 152 zusammengestellt.

§ 20.

Perrondach ohne Hängestange.

Die Dimensionen und Belastungen der in Fig. 153 dargestellten Konstruk-

Fig. 153.



tion sind dieselben wie für den vorigen Fall in Fig. 144 angegeben. Statt des Punktes B, in welchem beim vorigen Falle das Dach durch die Hängestange BC unterstützt war, ist hier der Punkt E als zweiter Aufhängepunkt zu betrachten und die an diesem Punkte befestigte Zugstange bildet die Verlängerung der Stange BE, so daß dieselbe, ganz in der Wand liegend, von außen nicht sichtbar ist.

Der Hebelarm der in dieser Zugstange hervorgebrachten Spannung X in bezug auf den Drehpunkt A ist:

$$\overline{AE} \cdot \cos \alpha = 1 \cdot \frac{6}{\sqrt{6^2 + 1^2}} = 0,9864.$$

Man erhält also für die Spannung X als Gleichung der statischen Momente:

$$0 = X \cdot 0,9864 - 800 \left(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \frac{3}{2} \right)$$

oder $X = + 14599 \text{ kg.}$

Zur Bestimmung der Spannungen $X_1 \dots X_6$ können die betreffenden Gleichungen des vorigen Paragraphen benutzt werden, sobald darin die Kraft P und ihre Seitenkräfte überall gleich Null gesetzt werden. Man erhält dann die Gleichungen:

$$0 = X_1 \cdot 0,822 - 800(1 + 2 + 3 + 4 + \frac{5}{2}), \quad X_1 = + 12166 \text{ kg}$$

$$0 = X_2 \cdot 0,6576 - 800(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}), \quad X_2 = + 9732 \text{ kg}$$

$$0 = X_3 \cdot 0,4932 - 800(1 + 2 + \frac{3}{2}), \quad X_3 = + 7299 \text{ kg}$$

$$0 = X_4 \cdot 0,3288 - 800(1 + \frac{2}{2}), \quad X_4 = + 4866 \text{ kg}$$

$$0 = X_5 \cdot 0,1644 - 400 \cdot 1, \quad X_5 = + 2433 \text{ kg}$$

$$0 = X_6 \cdot 0,1644 - 400 \cdot 1, \quad X_6 = + 2433 \text{ kg.}$$

In betreff der Spannungen $H_1 \dots H_6$ gilt dasselbe. Setzt man in den betreffenden Gleichungen des vorigen Paragraphen die Seitenkräfte der Kraft P gleich Null, so erhält man die Gleichungen:

$$0 = -H_1 \cdot 1 - 800(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \frac{6}{2}),$$

$$H_1 = -14400 \text{ kg}$$

$$0 = -H_2 \cdot \frac{5}{6} - 800(1 + 2 + 3 + 4 + \frac{5}{2}),$$

$$H_2 = -12000 \text{ kg}$$

$$0 = -H_3 \cdot \frac{2}{3} - 800(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}),$$

$$H_3 = -9600 \text{ kg}$$

$$0 = -H_4 \cdot \frac{1}{2} - 800(1 + 2 + \frac{3}{2}),$$

$$H_4 = -7200 \text{ kg}$$

$$0 = -H_5 \cdot \frac{1}{3} - 800(1 + \frac{2}{2}),$$

$$H_5 = -4800 \text{ kg}$$

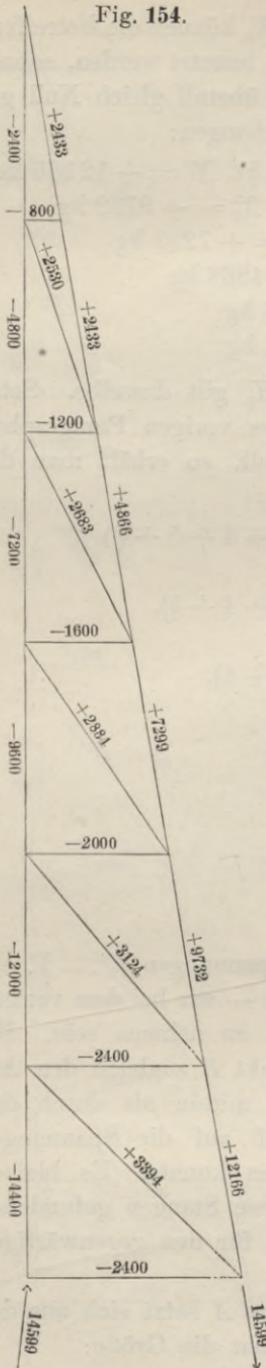
$$0 = -H_6 \cdot \frac{1}{6} - 400 \cdot 1,$$

$$H_6 = -2400 \text{ kg.}$$

Für die Momentengleichungen der Spannungen $V_1 \dots V_6$ sowohl als der Spannungen $Y_1 \dots Y_5$ würde — wie bei dem vorigen Beispiele — der Punkt B als Drehpunkt zu nehmen sein. Bei der vorigen Konstruktion bildete der Punkt B zugleich den Angriffspunkt der Zugspannung P , welche mithin als durch den Drehpunkt hindurchgehend keinen Einfluß auf die Spannungen der Diagonal- und Vertikalstangen haben konnte. Es bleiben daher die im vorigen Paragraphen für diese Stangen gefundenen Gleichungen in unveränderter Form auch für den gegenwärtigen Fall gültig.

Der Gegendruck W des festen Punktes A setzt sich aus den Seitenkräften V_1 und H_1 zusammen und hat die Größe:

Fig. 154.



$$W = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} = \sqrt{2400^2 + 14400^2} \\ = 14599 \text{ kg,}$$

ist also eben so groß als die Zugkraft X .

Die Spannungszahlen der Stangen sind in Fig. 154 zusammengestellt.

SECHSTER ABSCHNITT.

§ 21.

Sprengwerkbrücke von 24 m Spannweite.

Als mobile Last sind 4000 kg pro laufendes Meter für ein Gleis gerechnet, wovon auf jede der beiden Tragwände die Hälfte kommt. Da die Länge eines Feldes 3 m beträgt, so kommen auf jeden Knotenpunkt 6000 kg oder 6 t (die Tonne zu 1000 kg gerechnet). Die permanente Belastung ist zu 1400 kg pro laufendes Meter veranschlagt oder zu 700 kg für jede der beiden Tragwände; das bringt 2100 kg oder in runder Summe 2 t für jeden Knotenpunkt.

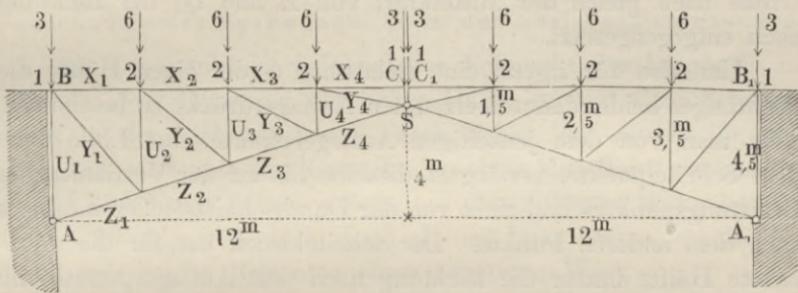
Um die stärksten Spannungen der einzelnen Stangen zu ermitteln, muß zunächst untersucht werden, welche Wirkung ein einzeln aufgelegtes Gewicht auf die gewichtlos gedachte Brücke ausübt.

Die beiden Brückenhälften berühren einander ausschließlich an der Stelle S (s. Fig. 155) und sind daselbst durch einen Gelenkbolzen miteinander verbunden.*) Wenn an irgend einer Stelle

*) Eine rationellere Konstruktionsform würde diejenige sein, bei welcher die horizontale Fahrbahnlinie durch den Scheitelpunkt S

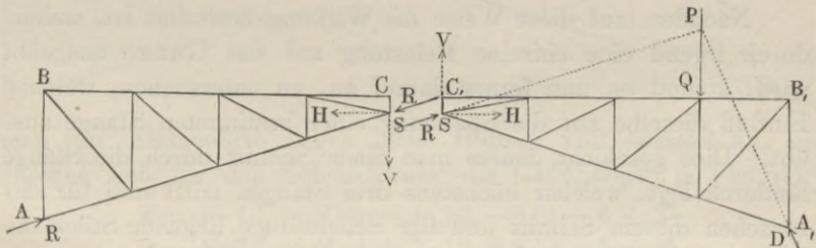
auf der rechts liegenden Hälfte ein Gewicht Q aufgelegt wird, so erzeugt dasselbe in dem Scheitelpunkte S einen Druck R

Fig. 155.



zwischen den beiden Hälften. Dieser Druck muß für die linke Hälfte die Richtung SA haben, d. h. durch den Punkt A hindurchgehen, denn sonst würde derselbe eine Drehung um diesen Punkt hervorbringen. In dem Punkte A entsteht ein Gegenruck R , welcher in der Richtung von A nach S wirken muß, weil derselbe sonst das Stück AS um den Punkt S drehen würde. Auf die andere Hälfte wirkt im Scheitelpunkte der Druck R in der Richtung von A nach S ; denn Druck und Gegenruck haben stets gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung. Denkt man sich den Durchschnittspunkt P der beiden Kräfte R und Q als Drehpunkt für diese rechte Hälfte (s. Fig. 156), so erkennt man

Fig. 156.



leicht, daß der in dem Auflagerpunkte A_1 erzeugte Gegenruck D notwendig die Richtung nach dem Punkte P hin haben muß, hindurchgeht. Nur der größeren Allgemeinheit wegen, weil in manchen Fällen — z. B. bei Holzkonstruktionen — die Darstellung dieser Form mit Schwierigkeiten verbunden sein würde, ist hier die obige Form gewählt worden, aus welcher man die eben erwähnte leicht als speziellen Fall ableiten kann, indem man die Dimension $SC=0$ (statt $=0,5$) setzt.

weil derselbe sonst eine Drehung um diesen Punkt herum hervorbringen würde. Dieser Druck D ist — weil die Kräfte R und Q mit ihm zusammen das Stück im Gleichgewicht halten — der Größe nach gleich der Mittelkraft von R und Q , der Richtung nach entgegengesetzt.

Um also für irgend eine Belastung Q der einen Hälfte die Richtungen beider dadurch erzeugten Auflagerdrücke zu bestimmen, zieht man von dem jenseitigen Auflagerpunkte eine Linie nach dem Scheitelpunkte, verlängert dieselbe bis zu der Vertikalen des Belastungspunktes und zieht von der Durchschnittsstelle eine Linie nach dem anderen Punkte. Der Scheiteldruck hat für die unbelastete Hälfte immer die Richtung nach dem Auflagerpunkte hin.

Die Größe des Scheiteldruckes R wird bestimmt, indem man sich denselben in vertikale und horizontale Seitenkraft zerlegt denkt und die Gleichung der statischen Momente aufstellt für jede der beiden Hälften in Beziehung auf ihren Auflagerpunkt. So z. B. erhält man für die Seitenkräfte V und H des von dem Gewichte Q hervorgebrachten Scheiteldruckes die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= V \cdot 12 + H \cdot 4 - Q \cdot 3 \\ 0 &= V \cdot 12 - H \cdot 4, \end{aligned}$$

welche, wenn man sie einmal addiert und einmal subtrahiert, für V und H die Werte ergeben:

$$V = \frac{Q}{8}, \quad H = \frac{3}{8} Q.$$

Nachdem auf diese Weise die Wirkung bestimmt ist, welche durch irgend eine einzelne Belastung auf das Ganze ausgeübt wird, kommt es nun ferner darauf an, zu untersuchen, welchen Einfluß dieselbe auf die Spannung einer bestimmten Stange ausübt. Dies geschieht, indem man einen Schnitt durch die Stange hindurch legt, welcher höchstens drei Stangen trifft und für das zwischen diesem Schnitt und der Scheitelfuge liegende Stück die Gleichung der statischen Momente aufstellt. Als Drehpunkt wählt man wie früher den Durchschnittspunkt der beiden mitdurchschnittenen Stangen. An der Drehungsrichtung der Kraft, welche durch irgend eine Belastung auf dieses Stück ausgeübt wird, erkennt man dann, ob dieselbe Zug- oder Druckspannung in der Stange hervorbringt, und kann somit diejenigen Belastungsstellen, denen Zugspannung entspricht, unterscheiden von denen, welchen

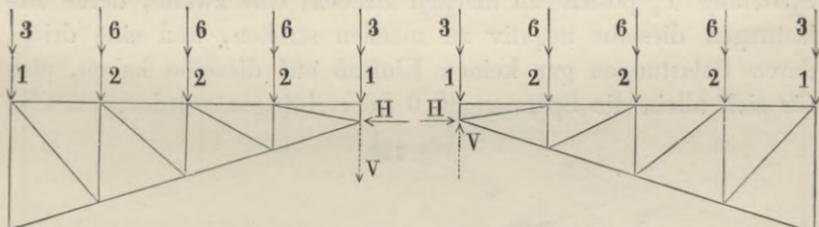
Druckspannung entspricht. Das Maximum der Spannung erhält man, wenn man alle die ersteren, das Minimum, wenn man alle die letzteren belastet annimmt.

Berechnung der Spannungen X in den horizontalen Stangen.

Als Drehpunkt ist jedesmal der Fußpunkt der Diagonale zu wählen. Jede Belastung der linken Hälfte erzeugt einen Scheiteldruck in der Richtung von A_1 nach S hin, der sowohl für sich allein, als auch mit dem Gewichte zu einer Mittelkraft zusammengesetzt eine Kraft liefert, welche um diesen Punkt links herumdreht. Die Kraft X dreht auch allemal links herum, erhält also durch jede solche Belastung einen negativen Wert.

Jede Belastung der rechten Hälfte erzeugt für die linke Seite einen Scheiteldruck, der durch den Drehpunkt selbst hindurchgeht, hat also gar keinen Einfluß. Es kann daher in betreff der Spannungen X nur von Druckspannungen die Rede sein. Um die stärkste Druckspannung oder das Minimum zu bekommen, hat man diejenige Hälfte, welcher das Stück angehört, voll belastet anzunehmen; die andere Hälfte kann man belastet oder unbelastet annehmen — beides führt zu demselben Resultate —. Nimmt

Fig. 157.



man der Einfachheit wegen beide Hälften voll belastet an, so ergeben sich für den Scheiteldruck die Gleichungen (s. Fig. 57):

$$0 = V \cdot 12 + H \cdot 4 - 4 \cdot 12 - 8(9 + 6 + 3)$$

$$0 = V \cdot 12 - H \cdot 4 + 4 \cdot 12 + 8(9 + 6 + 3)$$

$$V = 0 \qquad H = 48.$$

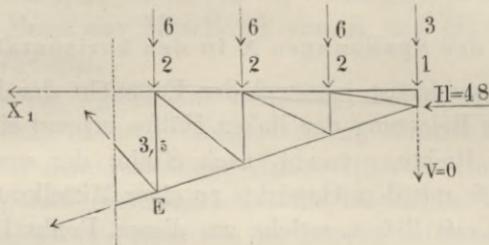
Hiernach erhält man zur Bestimmung von X_1 als Momentengleichung für das Stück Fig. 158 in Beziehung auf den Punkt E als Drehpunkt:

$$0 = -X_1 \cdot 3,5 - 48 \cdot 3 + 8(3 + 6) + 4 \cdot 9$$

$$X_1 (\text{min}) = -10,29 \text{ t.}$$

Auf gleiche Weise erhält man für die übrigen horizontalen Stangen die Gleichungen:

Fig. 158.



$$0 = -X_2 \cdot 2,5 - 48 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 6$$

$$X_2 (\text{min}) = -19,2 \text{ t.}$$

$$0 = -X_3 \cdot 1,5 - 48 \cdot 1 + 4 \cdot 3$$

$$X_3 (\text{min}) = -24 \text{ t.}$$

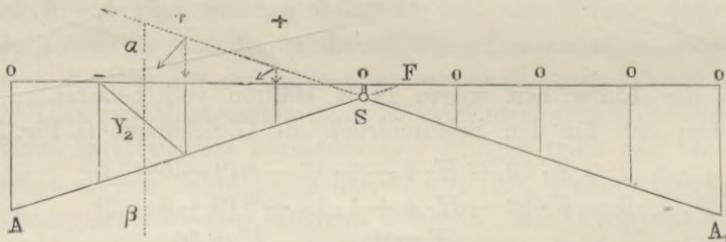
$$0 = -X_4 \cdot 0,5$$

$$X_4 = 0.$$

Bestimmung der Spannungen Y in den Diagonalen.

Die Diagonale Y_2 soll als Beispiel gewählt werden, um die Berechnungsweise daran zu erklären. Man kann die Belastungspunkte in drei Gruppen zerlegen: eine, deren Belastungen die Spannung Y_2 positiv zu machen streben, eine zweite, deren Belastungen dieselbe negativ zu machen streben, und eine dritte, deren Belastungen gar keinen Einfluß auf dieselbe haben, also für sich allein die Spannungen 0 hervorbringen würden.

Fig. 159.



In Fig. 159 ist dieses Verhalten der verschiedenen Belastungsstellen zu der Spannung Y_2 durch die überschriebenen Zeichen +, -, 0 kenntlich gemacht.

Zu der ersten Gruppe gehören der dritte und vierte Punkt, denn ihre Belastungen geben mit den durch sie hervorgebrachten

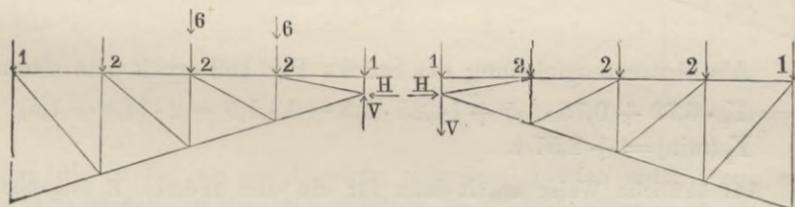
Scheiteldrücken Mittelkräfte, welche das zwischen der Scheitelfuge und dem Vertikalschnitt $\alpha\beta$ liegende Stück in bezug auf den Drehpunkt F links herumzudrehen streben. Die Kraft Y_2 hat entgegengesetzte Drehungsrichtung (vergl. Fig. 161), würde also durch diese Belastungen für sich allein positiv gemacht werden.

Zu der zweiten Gruppe gehört allein der zweite Punkt, dessen Belastung einen Scheiteldruck hervorbringt, welcher in der Richtung von A_1 nach S auf das betreffende Stück wirkt. Dieser Druck wirkt in Beziehung auf den Drehpunkt F rechts drehend, macht also für sich allein die Spannung Y_2 negativ.

Die dritte Gruppe umfaßt alle übrigen Punkte, denn ihre Belastungen erzeugen entweder gar keinen Scheiteldruck (erster und neunter Punkt) und haben deshalb keine Wirkung auf das Stück, oder ihre Wirkung auf das Stück besteht in einem Scheiteldruck, welcher in der Richtung von S nach A wirkt, also durch den Drehpunkt F hindurchgeht.

Um Y_2 (max) zu bestimmen, hat man also den dritten und vierten Punkt belastet anzunehmen, den zweiten aber unbelastet. (In betreff der übrigen ist es gleichgültig, ob sie belastet oder unbelastet angenommen werden, sie sollen hier unbelastet an-

Fig. 160.



genommen werden.) Für diesen Belastungszustand ergeben sich die Seitenkräfte des Scheiteldrucks aus den Gleichungen (s. Fig. 160):

$$\begin{aligned} 0 &= -V \cdot 12 + H \cdot 4 - 1 \cdot 12 - 2(9 + 6 + 3) \\ 0 &= -V \cdot 12 - H \cdot 4 + 1 \cdot 12 + 2(9 + 6 + 3) + 6(9 + 6) \\ V &= 3,75 & H &= 23,25! \end{aligned}$$

Hiernach findet man aus der Momentengleichung für das Stück Fig. 161 in Beziehung auf den Punkt F :

$$\begin{aligned} 0 &= Y_2 \cdot 6,72 + 23,25 \cdot 0,5 + 3,75 \cdot 1,5 - 1 \cdot 1,5 - 8(4,5 + 7,5) \\ Y_2 \text{ (max)} &= + 11,94 \text{ t.} \end{aligned}$$

Um Y_2 (min) zu bestimmen, müssen der dritte und vierte Punkt unbelastet, der zweite belastet angenommen werden (die übrigen indifferenten Punkte sollen ebenfalls unbelastet angenommen

Fig. 161.

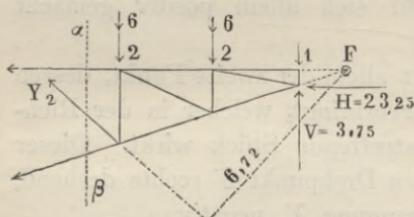
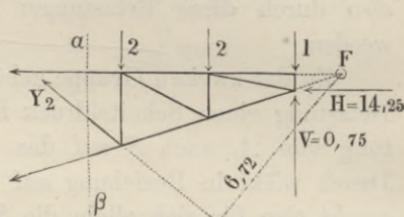


Fig. 163.



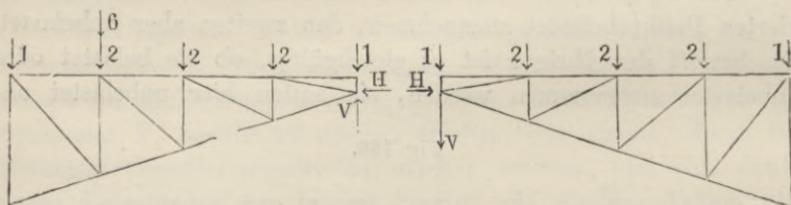
werden). Die Seitenkräfte des Scheiteldrucks für diesen Zustand ergeben sich aus den Gleichungen (s. Fig. 162):

$$0 = -V \cdot 12 + H \cdot 4 - 1 \cdot 12 - 2(9 + 6 + 3)$$

$$0 = -V \cdot 12 - H \cdot 4 + 1 \cdot 12 + 2(9 + 6 + 3) + 6 \cdot 3$$

$$V = 0,75 \quad H = 14,25.$$

Fig. 162.



Als Momentengleichung des Stücks Fig. 163 erhält man dann

$$0 = Y_2 \cdot 6,72 + 0,75 \cdot 1,5 + 14,25 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1,5 - 2 \cdot (4,5 + 7,5)$$

$$Y_2 \text{ (min)} = + 2,57 \text{ t.}$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die drei anderen Y folgende Gleichungen:

$$Y_1 \text{ (max).}$$

Bei voller Belastung wird $V = 0$ und $H = 48$, also:

$$0 = Y_1 \cdot 10,25 + 48 \cdot 0,5 - 4 \cdot 1,5 - 8(4,5 + 7,5 + 10,5)$$

$$Y_1 \text{ (max)} = + 15,8 \text{ t.}$$

Y_1 (min) bleibt unberücksichtigt, weil durch keine Belastungsweise Druckspannung in dieser Diagonale hervorgebracht werden kann.

$$Y_3 \text{ (max).}$$

Der vierte Punkt allein ist belastet anzunehmen, dann wird.

$$V = 2,25 \quad H = 18,75$$

$$0 = Y_3 \cdot 3,35 + 2,25 \cdot 1,5 + 18,75 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1,5 - 8 \cdot 4,5$$

$$Y_3 \text{ (max)} = + 7,39 \text{ t.}$$

$$Y_3 \text{ (min).}$$

Wenn die Punkte 2 und 3 allein belastet sind, wird:

$$V = 2,25 \qquad H = 18,75$$

$$0 = Y_3 \cdot 3,35 + 2,25 \cdot 1,5 + 18,75 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1,5 - 2 \cdot 4,5$$

$$Y_3 \text{ (min)} = -0,67 \text{ t.}$$

$$Y_4 \text{ (min).}$$

Das Maximum bleibt unberücksichtigt, weil durch keine Belastungsweise Zuspansung in dieser Diagonale hervorgebracht werden kann. Um das Minimum zu erhalten, sind die Punkte 2, 3, 4 allein belastet anzunehmen, dann wird:

$$V = 4,5 \qquad H = 25,5$$

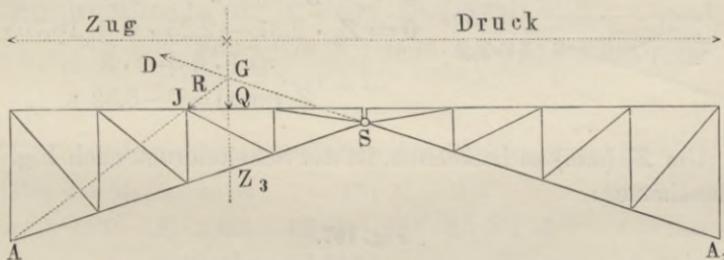
$$0 = Y_4 \cdot 0,738 + 4,5 \cdot 1,5 + 25,5 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1,5$$

$$Y_4 \text{ (min)} = -24,4 \text{ t.}$$

Berechnung der Spannungen Z in den unteren Stangen.

Das Stück Z_3 soll als Beispiel dienen, um die Berechnungsweise daran zu erklären. Für die Momentengleichung von Z_3 wird der Punkt J den Drehpunkt bilden. Verlängert man die Richtungen AJ und A_1S bis zu ihrem Durchschnittspunkt G (s. Fig. 164) und legt durch diesen Punkt eine Vertikale, so erhält

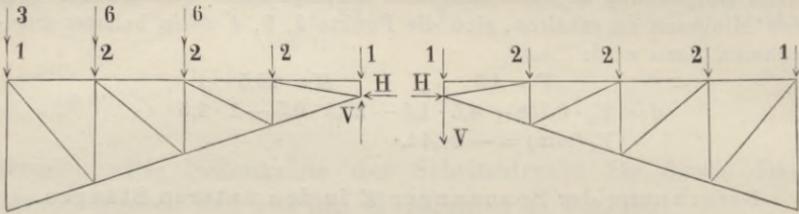
Fig. 164.



man die Stelle, wo ein Gewicht aufgelegt werden muß, wenn es in dem Stücke Z_3 gar keine Wirkung hervorbringen soll. Denn ein Gewicht Q an dieser Stelle gibt in Verbindung mit dem dadurch hervorgebrachten Scheiteldruck D eine Mittelkraft R , welche gerade durch den Drehpunkt J hindurchgeht. Jede Belastung rechts von dieser Vertikalen erzeugt Druckspannung, weil sie für das Stück, dessen Momentengleichung zur Bestimmung von Z_3 dienen wird, eine Kraft liefert, welche um den Punkt J rechts herumdreht (vergl. Fig. 166); Z_3 dreht auch rechts herum, wird dadurch also negativ gemacht. Jede Belastung links von der Vertikalen erzeugt dagegen für das betreffende Stück eine links um den Punkt J herumdrehende Kraft, macht Z_3 also positiv.

Jene Vertikale bildet folglich die Belastungsgrenze, welche alle diejenigen Punkte, deren Belastungen Druckspannung erzeugen, scheidet von denjenigen, deren Belastungen Zugspannung erzeugen. Um also Z_3 (max) zu bekommen, hat man den Scheiteldruck aus Fig. 165 zu bestimmen:

Fig. 165.

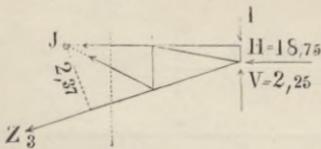


$$0 = -V \cdot 12 + H \cdot 4 - 1 \cdot 12 - 2(9 + 6 + 3)$$

$$0 = -V \cdot 12 - H \cdot 4 + 1 \cdot 12 + 2(9 + 6 + 3) + 6(6 + 3)$$

$$V = 2,25 \quad H = 18,75,$$

Fig. 166.



worauf dann Fig. 166 die Momentengleichung für Z_3 (max) liefert:

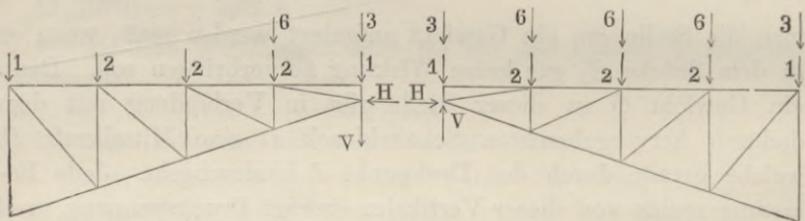
$$0 = Z_3 \cdot 2,37 - 2,25 \cdot 6 + 18,75 \cdot 0,5$$

$$+ 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3$$

$$Z_3 \text{ (max)} = -3,32 \text{ t.}$$

Um Z_3 (min) zu berechnen, ist der Scheiteldruck nach Fig. 167 zu bestimmen:

Fig. 167.



$$0 = V \cdot 12 + H \cdot 4 - 1 \cdot 12 - 2(9 + 6 + 3) - 3 \cdot 12$$

$$- 6(9 + 6 + 3)$$

$$0 = V \cdot 12 - H \cdot 4 + 1 \cdot 12 + 2(9 + 6 + 3) + 3 \cdot 12 + 6 \cdot 9$$

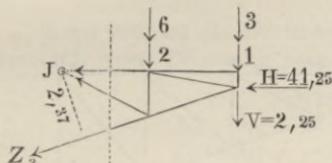
$$V = 2,25 \quad H = 41,25$$

und die Momentengleichung nach Fig. 168 zu bilden:

$$0 = Z_3 \cdot 2,37 + 2,25 \cdot 6 + 41,25 \cdot 0,5 + 4 \cdot 6 + 8 \cdot 3$$

$$Z_3 (\text{min}) = -34,6 \text{ t.}$$

Fig. 168.



Auf ähnliche Weise erhält man für die übrigen Größen Z die folgenden Gleichungen:

Z_1 .

Die Belastungsgrenze fällt mit dem ersten Punkt zusammen. Also kann nur von dem Minimum die Rede sein, welches bei voller Belastung eintritt. Für diese ergibt sich:

$$V = 0 \quad H = 48$$

$$0 = Z_1 \cdot 4,27 + 48 \cdot 0,5 + 4 \cdot 12 + 8(9 + 6 + 3)$$

$$Z_1 (\text{min}) = -50,6 \text{ t.}$$

Z_2 .

(Belastungsgrenze zwischen den Punkten 2 und 3.)

Für das Maximum ist: $V = 0,75$; $H = 14,25$

$$0 = Z_2 \cdot 3,32 - 0,75 \cdot 9 + 14,25 \cdot 0,5 + 1 \cdot 9 + 2(6 + 3)$$

$$Z_2 (\text{max}) = -8,25 \text{ t.}$$

Für das Minimum ist: $V = 0,75$; $H = 45,75$

$$0 = Z_2 \cdot 3,32 + 0,75 \cdot 9 + 45,75 \cdot 0,5 + 4 \cdot 9 + 8(6 + 3)$$

$$Z_2 (\text{min}) = -41,45 \text{ t.}$$

Z_1 .

(Belastungsgrenze zwischen den Punkten 4 und 5.)

Für das Maximum ist: $V = 4,5$; $H = 25,5$

$$0 = Z_1 \cdot 1,423 - 4,5 \cdot 3 + 25,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 3$$

$$Z_1 (\text{max}) = -1,58 \text{ t.}$$

Für das Minimum ist: $V = 4,5$; $H = 34,5$

$$0 = Z_1 \cdot 1,423 + 4,5 \cdot 3 + 34,5 \cdot 0,5 + 4 \cdot 3$$

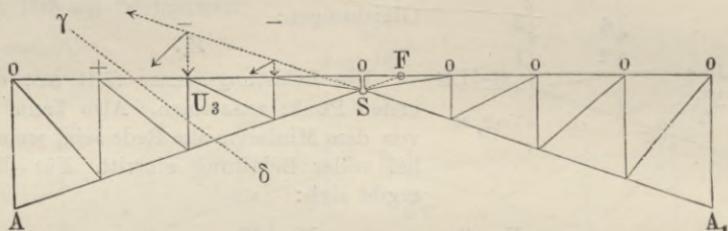
$$Z_1 (\text{min}) = -30,0 \text{ t.}$$

Berechnung der Spannungen U in den vertikalen Stangen.

Die Stange U_3 soll als Beispiel gewählt werden, um die Berechnungsweise daran zu erläutern. Der Schnitt ist in der Richtung $\gamma\delta$ zu führen und der Punkt F (derselbe, welcher zur Bestimmung der Größen Y als Drehpunkt diente) bildet den Drehpunkt für die Momentengleichung. Auch hier zerfallen die Belastungspunkte hinsichtlich ihrer Bedeutung für die Stange U_3

in drei Gruppen, welche in Fig. 169 durch die übergeschriebenen Zeichen +, —, 0 kenntlich gemacht sind. Um das Maximum

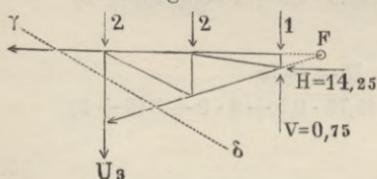
Fig. 169.



von U_3 zu finden, ist allein der zweite Punkt belastet anzunehmen und der Scheiteldruck nach Fig. 162 zu bestimmen. Man erhält (wie für diesen Belastungszustand dort schon gefunden wurde):

$$V = 0,75 \quad H = 14,25.$$

Fig. 170.



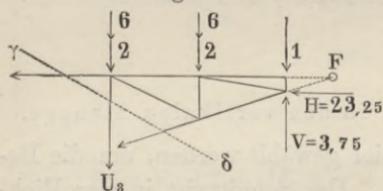
Die Momentengleichung für U_3 (max) ergibt sich aus Fig. 170:

$$\begin{aligned} 0 &= -U_3 \cdot 7,5 + 0,75 \cdot 1,5 \\ &+ 14,25 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1,5 \\ &- 2(4,5 + 7,5) \\ U_3(\text{max}) &= -2,3 \text{ t.} \end{aligned}$$

Um U_3 (min) zu bestimmen, sind der dritte und vierte Punkt belastet anzunehmen und für den Scheiteldruck die für diesen Belastungszustand aus Fig. 160 schon berechneten Werte

$$V = 3,75 \quad H = 23,25$$

Fig. 171.



in Rechnung zu bringen. Man erhält dann aus Fig. 171 für U_3 (min) die Momentengleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= -U_3 \cdot 7,5 + 3,75 \cdot 1,5 \\ &+ 23,25 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1,5 \\ &- 8(4,5 + 7,5) \\ U_3(\text{min}) &= -10,7 \text{ t.} \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise sind die übrigen Größen U berechnet wie folgt:

$$U_1.$$

U_1 (max) bleibt unberücksichtigt, weil durch keine Belastungsweise Zugspannung in diesem Stück hervorgebracht werden kann.

U_1 (min) kann für volle Belastung berechnet werden, also $V=0$, $H=48$ und:

$$0 = -U_1 \cdot 13,5 + 48 \cdot 0,5 - 4 \cdot 1,5 - 8(4,5 + 7,5 + 10,5) - 4 \cdot 13,5$$

$$U_1(\text{min}) = -16,0 \text{ t.}$$

U_2 .

Auch hier ist das Maximum unberücksichtigt zu lassen. Das Minimum kann für volle Belastung berechnet werden, also:

$$V=0 \quad H=48$$

$$0 = -U_2 \cdot 10,5 + 48 \cdot 0,5 - 4 \cdot 1,5 - 8(4,5 + 7,5 + 10,5)$$

$$U_2(\text{min}) = -15,4 \text{ t.}$$

U_4 .

Das Maximum findet statt, wenn die Punkte 2 und 3 belastet sind und der Punkt 4 unbelastet. Dann ist:

$$V=2,25 \quad H=18,75$$

$$0 = -U_4 \cdot 4,5 + 2,25 \cdot 1,5 + 18,75 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1,5 - 2 \cdot 4,5$$

$$U_4(\text{max}) = +0,5 \text{ t.}$$

Das Minimum tritt ein, wenn der Punkt 4 belastet, 2 und 3 unbelastet sind, wobei:

$$V=2,25 \quad H=18,75$$

$$0 = -U_4 \cdot 4,5 + 2,25 \cdot 1,5 + 18,75 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1,5 - 8 \cdot 4,5$$

$$U_4(\text{min}) = -5,5 \text{ t.}$$

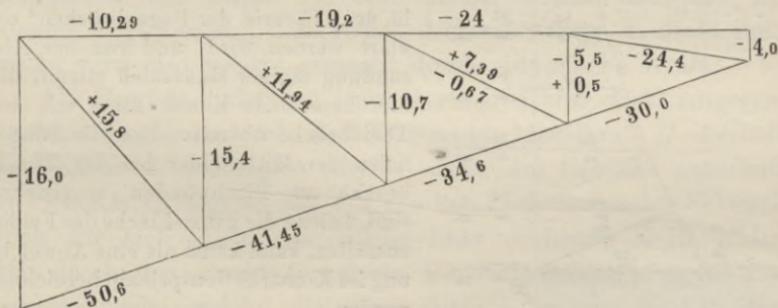
U_5 .

Der fünfte Vertikalständer ist durch die Scheitelfuge halbiert, und jede der beiden Hälften kann höchstens 4 t Druckspannung annehmen. Denn der Kopf des Vertikalständers ist nur mit horizontalen Stangen in Berührung, und die einzigen Vertikalkräfte, welche daselbst angreifen, sind also die direkten Belastungen dieser Stelle, welche für jede Hälfte nicht mehr als 4 t betragen können. Also:

$$U_5(\text{min}) = -4 \text{ t.}$$

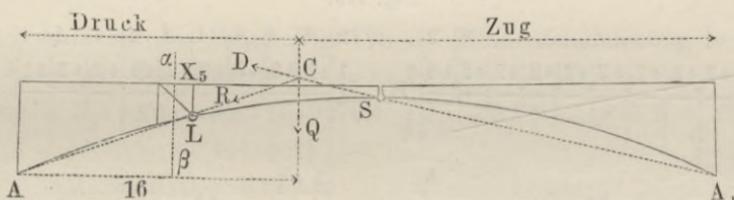
Die Resultate sind in Fig. 172 zusammengestellt.

Fig. 172.



der Berechnung daran zu erläutern. Man hat zunächst zu untersuchen, welche Belastungen Zugspannung und welche Belastungen Druckspannung in diesem Stücke hervorbringen. Zu diesem Zwecke ist diejenige Stelle aufzusuchen, an welcher ein Gewicht liegen muß, und gar keine Wirkung auf das Stück auszuüben, denn sie bildet die Grenze. Man findet diese Stelle, indem man die Richtungen AL und A_1S bis zu ihrem Durchschnittspunkt C verlängert (s. Fig. 174), denn ein an dieser Stelle aufgelegtes Gewicht

Fig 174.



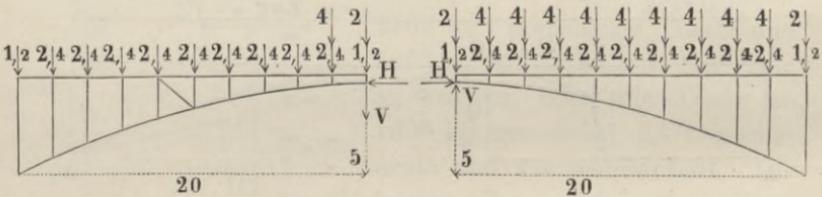
Q erzeugt einen Scheiteldruck D , welcher in der Richtung A_1S wirkt (da er als Gegendruck für die andere Hälfte durch den Punkt A_1 gehen muß, um dieselbe nicht zu drehen) und gibt mit diesem zusammen eine Mittelkraft R , die nach dem Auflagerpunkte A gerichtet sein muß (weil sonst diese Hälfte um den Punkt A gedreht werden würde), also der Konstruktion nach auch durch den Punkt L hindurchgeht. Da nun der Punkt L für die nachher zur Bestimmung von X_5 aufzustellende Momentengleichung des zwischen der Scheitelfuge und dem Schnitt $\alpha\beta$ liegenden Stücks (vergl. Fig. 176) als Drehpunkt dienen wird, so hat das Gewicht an dieser Stelle gar keinen Einfluß auf die Spannung X_5 . Jede Belastung rechts von der durch den Punkt C gelegten Vertikalen erzeugt für das Stück SL eine Kraft, welche unterhalb des Punktes L vorbeigeht, d. h. rechts drehend wirkt; X_5 dreht links herum, wird also positiv gemacht durch eine solche Kraft.

Ein Gewicht links von jener Vertikalen aber wirkt entgegengesetzt, entweder dadurch, daß die erzeugte Mittelkraft R oberhalb des Punktes L vorbeigeht oder — wenn das Gewicht außerhalb des Schnitts $\alpha\beta$ liegt — daß der von ihm hervorgebrachte Scheiteldruck für sich allein eine solche links drehende Kraft bildet. Jene durch den Punkt C gelegte Vertikale bildet also die Belastungsscheide, welche die ganze Brücke in zwei Abteilungen

scheidet, von denen die rechtsliegende belastet sein muß, wenn X_5 ein Maximum, die linke, wenn X_5 ein Minimum werden soll.

Für das Stück X_5 fällt diese Belastungsscheide in die Entfernung 16 m vom linken Auflager, also gerade mit dem Vertikalständer U_9 zusammen.*) Um also X_5 (max) zu bestimmen, sind die Punkte 10, 11, 12 ... 21 belastet, die übrigen unbelastet anzunehmen, und für diesen Belastungszustand die beiden Seitenkräfte des Scheiteldrucks zu bestimmen. Aus Fig. 175 erhält man die beiden Momentengleichungen:

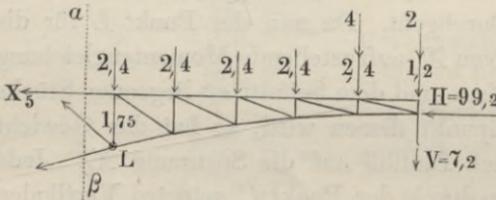
Fig. 175.



$$0 = V \cdot 20 + H \cdot 5 - 2,4 \left(\frac{20}{2} + 18 + 16 + \dots + 4 + 2 \right) - 4 \left(\frac{20}{2} + 18 + 16 + \dots + 4 + 2 \right)$$

$$0 = V \cdot 20 - H \cdot 5 + 2,4 \left(\frac{20}{2} + 18 + 16 + \dots + 4 + 2 \right) + 4 \left(\frac{20}{2} + 18 \right),$$

Fig. 176.



welche, wenn man sie einmal addiert und einmal voneinander subtrahiert, die Werte ergeben:

$$V = 7,2, \quad H = 99,2.$$

Man erhält dann aus Fig. 176 als Mo-

mentengleichung in Beziehung auf den Drehpunkt L :

$$0 = -X_5 \cdot 1,75 - 99,2 \cdot 1,25 + 7,2 \cdot 10 + 2,4 \left(\frac{10}{2} + 8 + 6 + 4 + 2 \right) + 4 \left(\frac{10}{2} + 8 \right)$$

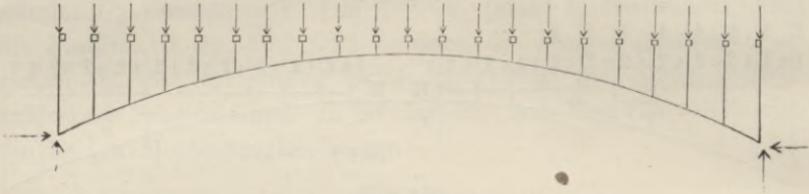
$$X_5 \text{ (max)} = + 34,29 \text{ t.}$$

Um X_5 (min) zu bestimmen, hat man die Seitenkräfte des Scheiteldrucks für den in Fig. 177 dargestellten Belastungszustand zu berechnen:

*) Die Bestimmung der Drehpunkte und Belastungsscheiden auf dem Wege der Rechnung findet man im 11. Abschnitte dieses Buches.

Kette übertragen, sind ausreichend, um die Kette im Gleichgewicht zu erhalten (s. Fig. 179).

Fig. 179.



Auch die permanente Last bildet der Annahme nach eine solche gleichförmig über die Spannweite verteilte Last, hat also auf die Spannung der horizontalen Stangen durchaus keinen Einfluß.

Es folgt aus dem eben Bemerkten zweierlei: erstens, bei der Berechnung der horizontalen Stangen kann die permanente Last ganz unberücksichtigt gelassen werden; zweitens, von den durch die mobile Last hervorgebrachten stärksten Zug- und Druckspannungen der Horizontalen braucht allemal nur eine berechnet zu werden, denn die andere muß mit ihr zusammen Null betragen, ergibt sich also aus ihr durch bloße Umkehrung des Vorzeichens.

Man hätte also der Berechnung von X_5 auch folgende einfachere Form geben können:

$$\begin{aligned}
 & X_5. \\
 0 &= -V \cdot 20 + H \cdot 5 \\
 0 &= -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(14 + 12 + \dots + 2) \\
 & \quad V = 5,6 \qquad H = 22,4 \\
 0 &= -X_5 \cdot 1,75 - 5,6 \cdot 10 - 22,4 \cdot 1,25 + 4(4 + 2) \\
 & \quad X_5 = \pm 34,29 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Diese einfachere Form ist für die nachfolgende Berechnung der übrigen Größen X als Norm gewählt.

$$X_1.$$

(Belastungsscheide im siebenten Felde.)

$$\begin{aligned}
 0 &= -V \cdot 20 + H \cdot 5 \\
 0 &= -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(12 + 10 + \dots + 2) \\
 & \quad V = 4,2 \qquad H = 16,8 \\
 0 &= -X_1 \cdot 4,55 - 4,2 \cdot 18 - 16,8 \cdot 4,05 + 4(10 + 8 + 6 + 4 + 2) \\
 & \quad X_1 = \pm 5,20 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

X_2 .

(Belastungsscheide im achten Felde.)

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$

$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(14 + 12 + \dots 2)$$

$$V = 5,6 \quad H = 22,4$$

$$0 = -X_2 \cdot 3,7 - 5,6 \cdot 16 - 22,4 \cdot 3,2 + 4(10 + 8 + 6 + 4 + 2)$$

$$X_2 = \pm 11,16 \text{ t.}$$

 X_3 .

(Belastungsscheide im achten Felde.)

$$V = 5,6 \quad H = 22,4$$

$$0 = -X_3 \cdot 2,95 - 5,6 \cdot 14 - 22,4 \cdot 2,45 + 4(8 + 6 + 4 + 2)$$

$$X_3 = \pm 18,06 \text{ t.}$$

 X_4 .

(Belastungsscheide im achten Felde.)

$$V = 5,6 \quad H = 22,4$$

$$0 = -X_4 \cdot 2,3 - 5,6 \cdot 12 - 22,4 \cdot 1,8 + 4(6 + 4 + 2)$$

$$X_4 = \pm 25,88 \text{ t.}$$

 X_6 .

(Belastungsscheide im neunten Felde.)

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$

$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(16 + 14 + \dots 2)$$

$$V = 7,2 \quad H = 28,8$$

$$0 = -X_6 \cdot 1,3 - 7,2 \cdot 8 - 28,8 \cdot 0,8 + 4(4 + 2)$$

$$X_6 = \pm 43,57 \text{ t.}$$

 X_7 .

(Belastungsscheide im neunten Felde.)

$$V = 7,2 \quad H = 28,8$$

$$0 = -X_7 \cdot 0,95 - 7,2 \cdot 6 - 28,8 \cdot 0,45 + 4 \cdot 2$$

$$X_7 = \pm 50,70 \text{ t.}$$

 X_8 .

(Belastungsscheide im zehnten Felde.)

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$

$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(18 + 16 + \dots 2)$$

$$V = 9 \quad H = 36$$

$$0 = -X_8 \cdot 0,7 - 9 \cdot 4 - 36 \cdot 0,2 + 4 \cdot 2$$

$$X_8 = \pm 50,29 \text{ t.}$$

 X_9 .

(Belastungsscheide im zehnten Felde.)

$$V = 9 \quad H = 36$$

$$0 = -X_9 \cdot 0,55 - 9 \cdot 2 - 36 \cdot 0,05$$

$$X_9 = \pm 36,0 \text{ t.}$$

 X_{10} .

In diesem Stücke kann niemals Spannung entstehen, weil an dem rechts liegenden Endpunkte desselben keine Horizontalkräfte angreifen. Es ist also

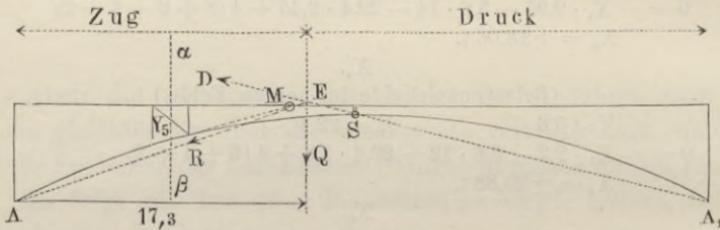
$$X_{10} = 0.$$

Berechnung der Spannungen Y in den Diagonalen.

Die mit Y_5 bezeichnete Diagonale soll als Beispiel gewählt werden, um die Berechnungsweise daran zu erläutern.

Für die nachher zur Bestimmung von Y_5 aufzustellende Momentengleichung wird der Punkt M (s. Fig. 180) den Drehpunkt

Fig. 180.



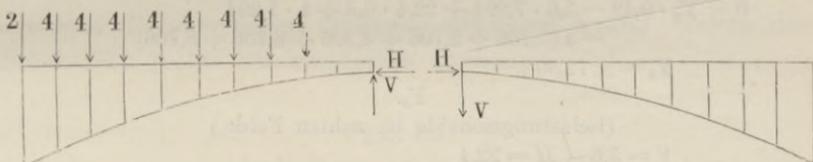
bilden. Verlängert man also die Richtungen AM und A_1S bis zu ihrem Durchschnittspunkte E , so bezeichnet die durch diesen Punkt gelegte Vertikale diejenige Stelle, in welcher ein Gewicht liegen muß, um gar keine Wirkung auf das Stück Y_5 auszuüben. Denn hier bildet ein Gewicht Q mit dem durch dasselbe erzeugten Scheiteldruck D eine Mittelkraft R , welche gerade durch den Drehpunkt M hindurchgeht. Liegt das Gewicht weiter rechts, so wird entweder diese Mittelkraft R , oder, wenn es ganz auf der anderen Hälfte liegt, der Scheiteldruck, unterhalb des Punktes M vorbeigehen, also auf das Stück $S\alpha\beta$ rechts drehend wirken, während Y_5 auch rechts drehend wirkt, folglich negativ dadurch gemacht wird.

Liegt das Gewicht dagegen weiter links, so wird entweder die Mittelkraft R , oder — wenn es ganz jenseits des Schnittes $\alpha\beta$ liegt — der durch dasselbe hervorgerufene Scheiteldruck D oberhalb des Punktes M vorbeigehen, also auf das Stück $S\alpha\beta$ links drehend wirken, folglich Y_5 positiv machen.

Die durch den Punkt E gelegte Vertikale bildet also die Belastungsscheide, welche die ganze Brücke in zwei Abteilungen scheidet, von denen die links liegende ganz belastet angenommen werden muß, um den größten positiven Wert von Y_5 , die rechts liegende dagegen, um den größten negativen Wert von Y_5 zu ergeben.

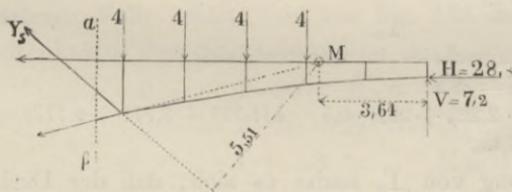
Da schon bei Gelegenheit der Berechnung der horizontalen Stangen die Bemerkung gemacht und begründet wurde, daß bei gleichförmiger Belastung weder die Horizontal- noch die Diagonalstangen Spannung annehmen, so erscheint es überflüssig, hier noch einmal den Beweis zu führen, daß es hinsichtlich der Diagonalstangen keinerlei Unterschied macht, ob man die permanente Last mit berücksichtigt oder nicht. Es soll also der Einfachheit wegen bei der Berechnung der Größen Y die permanente Last ganz aus dem Spiele gelassen werden. Ebenso soll von den beiden Werten, Maximum und Minimum, immer nur einer (und zwar ersterer) berechnet werden; denn wenn bei voller Belastung die Spannung

Fig. 181.



Null ist, so muß notwendig die Belastung des einen Teils gerade soviel positive, als die des anderen negative Spannung erzeugen, und sind also Maximum und Minimum immer nur dem Zeichen nach verschieden.

Fig. 182.



Man erhält demnach zur Bestimmung von Y_5 (max) für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks aus Fig. 181 — indem man das Eigengewicht der Brücke

als nicht vorhanden ansieht — die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= -V \cdot 20 + H \cdot 5 \\ 0 &= -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(16 + 14 + \dots + 2) \\ V &= 7,2 & H &= 28,8 \end{aligned}$$

und für Y_5 (max) selbst aus Fig. 182 die Momentengleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= Y_5 \cdot 5,51 - 7,2 \cdot 3,64 + 28,8 \cdot 0,5 \\ &\quad - 4(0,36 + 2,36 + 4,36 + 6,36) \\ Y_5 \text{ (max)} &= + 11,9 \text{ t.} \end{aligned}$$

Da das Minimum seinem absoluten Werte nach dieselbe Größe hat, so kann man auch setzen:

$$Y_5 = \pm 11,9 \text{ t.}$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die Größen $Y_1 \dots Y_6$ die nachfolgenden Gleichungen:

Y_1 .

(Belastungsscheide im siebenten Felde.)

$$V = 4,2 \quad H = 16,8 \quad (\text{wie bei der Bestimmung von } X_1)$$

$$0 = Y_1 \cdot 10,6 - 4,2 \cdot 8,42 + 16,8 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,42 \\ - 4(1,58 + 3,58 + 5,58 + 7,58 + 9,58)$$

$$Y_1 = \pm 12,92 \text{ t.}$$

Y_2 .

(Belastungsscheide im achten Felde.)

$$V = 5,6 \quad H = 22,4 \quad (\text{wie bei der Bestimmung von } X_2)$$

$$0 = Y_2 \cdot 9,42 - 5,6 \cdot 7,294 + 22,4 \cdot 0,5 + 4 \cdot 1,294 \\ - 4(0,706 + 2,706 + 4,706 + 6,706 + 8,706)$$

$$Y_2 = \pm 12,59 \text{ t.}$$

Y_3 .

(Belastungsscheide im achten Felde.)

$$V = 5,6 \quad H = 22,4$$

$$0 = Y_3 \cdot 8,16 - 5,6 \cdot 6,13 + 22,4 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,13 - 4(1,87 + 3,87 + 5,87 + 7,87)$$

$$Y_3 = \pm 12,3 \text{ t.}$$

Y_4 .

(Belastungsscheide im neunten Felde.)

$$V = 7,2 \quad H = 28,8 \quad (\text{wie bei der Bestimmung von } X_6)$$

$$0 = Y_4 \cdot 6,834 - 7,2 \cdot 4,923 + 28,8 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,923 \\ - 4(1,077 + 3,077 + 5,077 + 7,077)$$

$$Y_4 = \pm 12,07 \text{ t.}$$

Y_6 .

(Belastungsscheide im neunten Felde.)

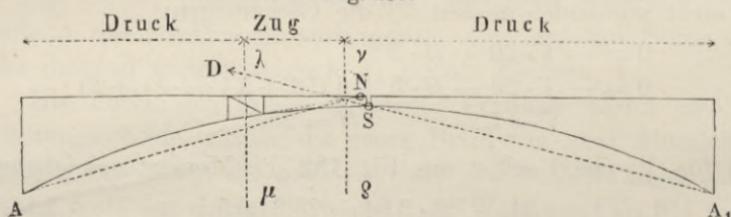
$$V = 7,2 \quad H = 28,8$$

$$0 = Y_6 \cdot 4,24 - 7,2 \cdot 2,223 + 28,8 \cdot 0,5 - 4(1,777 + 3,777 + 5,777)$$

$$Y_6 = \pm 11,07 \text{ t.}$$

Bei der Bestimmung von Y_7 findet es sich, daß der Dreh-

Fig. 183.

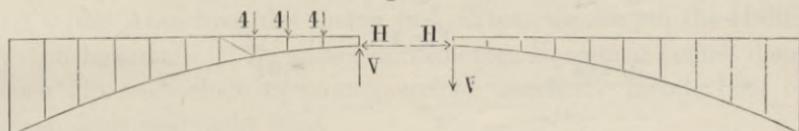


punkt N in das Mittelfeld hineinfällt, und daß hierdurch eine Abweichung von dem bisherigen Verfahren bedingt wird (s. Fig. 183).

Es bilden sich hier nämlich drei Abteilungen, eine für Zugspannung und zwei für Druckspannung. Denn die Linie A_1S geht hier links an dem Druckpunkte N vorbei, folglich auch der Scheiteldruck, den eine Belastung der linken Hälfte erzeugt. Ein Gewicht, welches links von der Schnittlinie $\lambda\mu$ aufgelegt wird, bringt also in bezug auf das Stück $S\lambda\mu$ eine Kraft D hervor, welche dasselbe um den Drehpunkt N rechts herumzudrehen strebt, folglich Y_7 negativ macht.

Die Schnittlinie $\lambda\mu$ bildet hier demnach eine zweite Belastungsscheide, denn rechts von derselben bis zur Linie $\nu\rho$ hin erzeugen die aufgelegten Gewichte wie früher eine (aus Gewicht und Scheiteldruck sich zusammensetzende) Kraft, welche links herumdreht, und noch weiter rechts — jenseits der Linie $\nu\rho$ — erzeugen die aufgelegten Gewichte wiederum Kräfte, welche das Stück $S\lambda\mu$ rechts herumzudrehen streben.

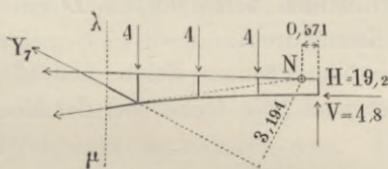
Fig. 184.



Zur Berechnung von Y_7 kann man also entweder die beiden Druckabteilungen oder die Zugabteilung belastet annehmen. Im letzteren Falle erhält man aus Fig. 184 die Gleichungen für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks:

$$\begin{aligned} 0 &= -V \cdot 20 + H \cdot 5 \\ 0 &= -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(18 + 16 + 14) \\ V &= 4,8 & H &= 19,2 \end{aligned}$$

Fig. 185.



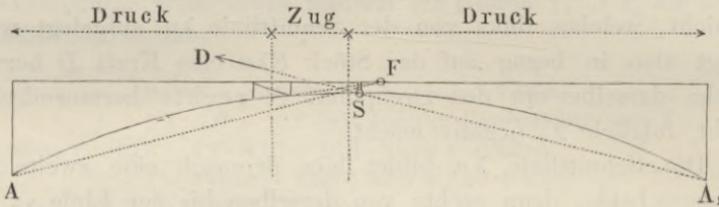
sodann aus Fig. 185 die Momentengleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= Y_7 \cdot 3,194 \\ &\quad - 4,8 \cdot 0,571 + 19,2 \cdot 0,5 \\ &\quad - 4(1,429 + 3,429 + 5,429) \\ Y_7 &= \pm 10,73 \text{ t.} \end{aligned}$$

Auch für Y_8 bilden sich drei Abteilungen, indem der Drehpunkt F in das andere der beiden Mittelfelder hineinfällt (s. Fig. 186), der Scheiteldruck D also auch hier eine rechts

drehende Kraft bildet. Die Berechnung ist also gerade wie bei dem vorigen Falle zu führen, und man erhält die Gleichungen:

Fig. 186.



$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$

$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(18 + 16)$$

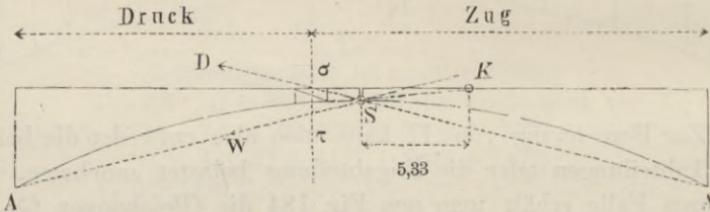
$$V = 3,4 \quad H = 13,6$$

$$0 = Y_8 \cdot 2,51 + 3,4 \cdot 1,6 + 13,6 \cdot 0,5 - 4(5,6 + 3,6)$$

$$Y_8 = \pm 9,8 \text{ t.}$$

Für Y_9 fällt der Drehpunkt K so, daß sich wiederum nur zwei Abteilungen bilden (s. Fig. 187). Hier ist die Schnittlinie

Fig. 187.



$\sigma\tau$ selbst die Belastungsscheide, denn jede Belastung links von derselben wirkt auf das Stück $S\sigma\tau$ nur mittelst des Scheiteldrucks D , welcher rechts herumdreht, also Y_9 negativ macht. Jede Belastung der rechten Hälfte erzeugt einen Scheiteldruck W , der links herumdreht, und eine Belastung der Stücke $S\sigma\tau$ selbst erzeugt mit dem von ihr hervorgebrachten Scheiteldruck D eine Mittelkraft, welche ebenfalls links herumdreht.

Die Belastungsscheide liegt also im neunten Felde, und für Belastung der Druckabteilung findet man (wie früher bei der Bestimmung von X_6):

$$V = 7,2 \quad H = 28,8.$$

Man erhält also für Y_9 die Gleichung:

$$0 = Y_9 \cdot 2,47 + 7,2 \cdot 5,33 + 28,8 \cdot 0,5$$

$$Y_9 = \pm 21,4 \text{ t.}$$

Für Y_{10} bildet ebenfalls die Schnittlinie selbst die Belastungsscheide und ist daher die Rechnung ebenso zu führen, wie für Y_9 . Man erhält die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= -V \cdot 20 + H \cdot 5 \\ 0 &= -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(18 + 16 + \dots + 2) \\ V &= 9 & H &= 36 \\ 0 &= Y_{10} \cdot 5,324 + 9 \cdot 20 + 36 \cdot 0,5 \\ Y_{10} &= \pm 37,29 \text{ t.} \end{aligned}$$

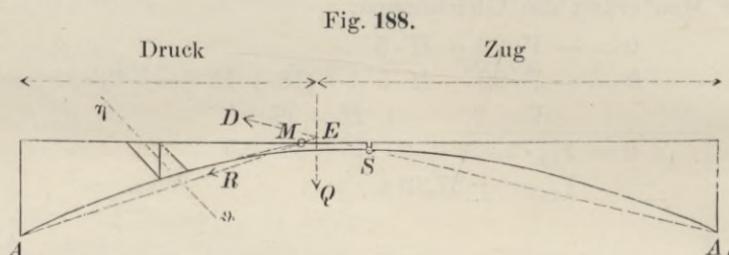
Berechnung der Spannungen U in den vertikalen Stangen.

Aus Fig. 179 ist zu erkennen, welche Wirkung die permanente Belastung auf die Vertikalständer ausübt. Sieht man die Punkte, welche in der horizontalen Fahrbahn liegen, als Angriffspunkte der einen Hälfte und die in dem Bogen liegenden als Angriffspunkte der anderen Hälfte des Eigengewichts an, so bekommt jeder Vertikalständer dadurch eine Druckspannung von 1,2 t (mit Ausnahme des ersten und elften, welche nur die Hälfte davon bekommen). Zu dieser permanenten Spannung kommt dann noch die wechselnde Spannung, welche durch die mobile Last in ihnen hervorgebracht wird.

Es sind also zunächst von dieser letzteren das Maximum und das Minimum zu berechnen und dann jene — 1,2 t hinzuzudaddieren.

Die von der mobilen Last allein in dem Vertikalständer U_5 hervorgebrachte stärkste Spannung, welche mit U_5 bezeichnet werden soll, findet man, indem man die permanente Last ganz unberücksichtigt läßt und zunächst diejenige Stelle aufsucht, an welcher ein Gewicht liegen muß, um gar keine Wirkung auf denselben auszuüben. Dies geschieht durch dieselbe Konstruktion, welche in Fig. 180 bei der Berechnung von Y_5 angewendet wurde, indem man die Linien AM und A_1S bis zu ihrem Durchschnittspunkte E verlängert. Denn derselbe Punkt M , welcher den Drehpunkt der Momentengleichung für Y_5 bildete, wird auch hier als Drehpunkt zu nehmen sein. Ein Gewicht Q , in der durch den Punkt E gelegten Vertikalen wirkend, erzeugt mit dem von ihm hervorgebrachten Scheiteldruck D für das Stück $S\eta\vartheta$ eine Mittelkraft R , welche durch den Drehpunkt hindurchgeht, also auf die Spannung U_5 keinen Einfluß hat. Die Vertikale bildet also die

Belastungsscheide, alle rechts davon liegenden Gewichte erzeugen Zugspannung, alle links davon liegenden Druckspannung (s. Fig. 188).

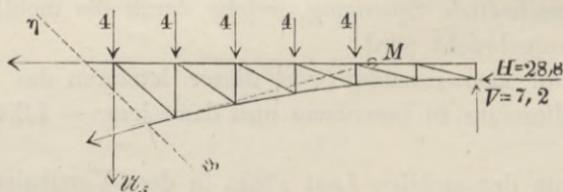


Um u_5 (min) zu finden, ist die Druckabteilung belastet anzunehmen. Man erhält gerade wie bei der Bestimmung von Y_5 (max) als Seitenkräfte des Scheiteldrucks:

$$V = 7,2 \qquad H = 28,8.$$

Als Momentengleichung des Stücks $S\eta\vartheta$ ergibt sich sodann aus Fig. 189:

Fig. 189.



$$0 = -u_5 \cdot 8,36 - 7,2 \cdot 3,64 + 28,8 \cdot 0,5 \\ - 4(0,36 + 2,36 + 4,36 + 6,36 + 8,36) \\ u_5 \text{ (min)} = -11,84 \text{ t.}$$

Das Maximum kann ohne neue Rechnung aus diesem Werte abgeleitet werden, und zwar auf folgende Weise: Wenn außer der Druckabteilung auch noch die Zugabteilung belastet wird, so muß die Spannung $= -4 \text{ t}$ werden, denn soviel beträgt die Spannung jedes Vertikalständers bei gleichförmig verteilter mobiler Last (s. Fig. 179). Daraus folgt, daß die Belastung der Zugabteilung für sich allein genau soviel Spannung hervorbringt, als mit u_5 (min) zusammen -4 beträgt. Es ergibt sich hieraus die Gleichung:

$$u_5 \text{ (max)} + u_5 \text{ (min)} = -4$$

oder, wenn man für ll_5 (min) den gefundenen Wert substituiert und die Gleichung auflöst:

$$ll_5(\max) = -4 - (-11,84) = +7,84.$$

Die Werte von U_5 (min) und U_5 (max) ergeben sich nun, wenn zu den beiden eben gefundenen $-1,2$ hinzuaddiert wird, also:

$$\begin{aligned} U_5(\min) &= -11,84 - 1,2 = -12,04 \text{ t} \\ U_5(\max) &= +7,84 - 1,2 = +6,64 \text{ t.}^*) \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise findet man für die übrigen Vertikalständer folgende Gleichungen:

$$U_1.^{**})$$

$$\begin{aligned} 0 &= -ll_1 \cdot 11,58 - 4,2 \cdot 8,42 + 16,8 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,42 \\ &\quad - 4(1,58 + 3,58 + 5,58 + 7,58 + 9,58 + 11,58) \\ ll_1(\min) &= -15,82 & ll_1(\max) &= +11,82 \\ U_1(\min) &= -17,02 \text{ t} \\ U_1(\max) &= +10,62 \text{ t.} \end{aligned}$$

$$U_2.$$

$$\begin{aligned} 0 &= -ll_2 \cdot 10,706 - 5,6 \cdot 7,294 + 22,4 \cdot 0,5 + 4 \cdot 1,294 \\ &\quad - 4(0,706 + 2,706 + 4,706 + 6,706 + 8,706 + 10,706) \\ ll_2(\min) &= -15,08 & ll_2(\max) &= +11,08 \\ U_2(\min) &= -16,28 \text{ t} \\ U_2(\max) &= +9,88 \text{ t.} \end{aligned}$$

$$U_3.$$

$$\begin{aligned} 0 &= -ll_3 \cdot 9,87 - 5,6 \cdot 6,13 + 22,4 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,13 \\ &\quad - 4(1,87 + 3,87 + 5,87 + 7,87 + 9,87) \\ ll_3(\min) &= -14,2 & ll_3(\max) &= +10,2 \\ U_3(\min) &= -15,4 \text{ t} \\ U_3(\max) &= +9,0 \text{ t.} \end{aligned}$$

*) Man hätte zwar kürzer die Werte von U_5 (min) und U_5 (max) aus dem früher schon gefundenen Werte von Y_5 (max) ableiten können, dadurch, daß man einmal zu der vertikalen Seitenkraft von Y_5 (max) negativ genommen die Größe $-(4+1,2)$, das andere Mal zu jener Seitenkraft positiv genommen die Größe $-1,2$ hinzufügte. Da indessen diese Methode nicht für alle Vertikalständer paßt, so ist hier der obige etwas längere Weg vorgezogen.

**) Der erste Vertikalständer wäre streng genommen als halber zu betrachten, da angenommen wurde, daß die andere Hälfte seiner Belastung unmittelbar vom Auflager getragen wird. Indessen ist derselbe hier voll gerechnet, wie man das in der Praxis wohl immer vorziehen wird.

$U_4.$

$$0 = -u_4 \cdot 9,077 - 7,2 \cdot 4,923 + 28,8 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,923 \\ - 4(1,07 + 3,077 + 5,077 + 7,077 + 9,077)$$

$$u_4(\text{min}) = -13,1 \quad u_4(\text{max}) = +9,1$$

$$U_4(\text{min}) = -14,3 \text{ t}$$

$$U_4(\text{max}) = +7,9 \text{ t.}$$

 $U_6.$

$$0 = -u_6 \cdot 7,777 - 7,2 \cdot 2,223 + 28,8 \cdot 0,5 - 4(1,777 + 3,777 + 5,777 + 7,777)$$

$$u_6(\text{min}) = -10,03 \quad u_6(\text{max}) = +6,03$$

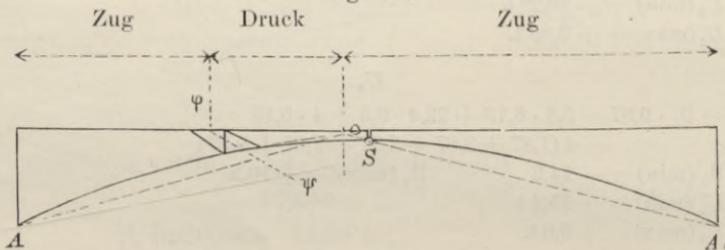
$$U_6(\text{min}) = -11,23 \text{ t}$$

$$U_6(\text{max}) = +4,83 \text{ t.}$$

 $U_7.$

Schon bei der Berechnung der Diagonalen ergab sich, daß für das siebente Feld ein abweichendes Verfahren einzuschlagen war, insofern für Y_7 drei Abteilungen sich bildeten. In ganz analoger Weise sind auch für U_7 drei Abteilungen zu unterscheiden, nur ist zu bemerken, daß, während sonst die Belastungsscheiden für U mit denen für Y zusammenfielen, in diesem Felde die eine der Belastungsscheiden um eine Feldlänge weiter nach links rückt wegen der schrägen Richtung des Schnittes $\varphi\psi$ (s. Fig. 190).

Fig. 190.



Bei Belastung der Druckabteilung ergeben sich für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks die Gleichungen:

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$

$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(18 + 16 + 14 + 12)$$

$$V = 6 \quad H = 24$$

und als Momentengleichung des Stücks $S\varphi\psi$:

$$0 = -u_7 \cdot 7,429 - 6 \cdot 0,571 + 24 \cdot 0,5$$

$$- 4(1,429 + 3,429 + 5,429 + 7,429)$$

$$u_7(\text{min}) = -8,38 \quad u_7(\text{max}) = +4,38.$$

Hieraus erhält man wie in den vorigen Fällen:

$$U_7(\min) = -9,58 \text{ t,}$$

$$U_7(\max) = +3,18 \text{ t.}$$

U_8 .

Auch hier bilden sich drei Abteilungen, und die Berechnung geschieht wie bei dem vorigen Falle:

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$

$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(18 + 16 + 14)$$

$$V = 4,8 \quad H = 19,2.$$

$$0 = -11_8 \cdot 7,6 + 4,8 \cdot 1,6 + 19,2 \cdot 0,5 - 4(3,6 + 5,6 + 7,6)$$

$$11_8(\min) = -6,57 \quad 11_8(\max) = +2,57$$

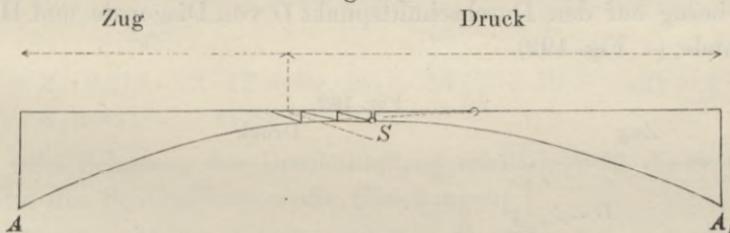
$$U_8(\min) = -7,77 \text{ t,}$$

$$U_8(\max) = -1,37 \text{ t.}$$

U_9 .

Wie für Y_9 bilden sich wieder nur zwei Abteilungen, nur rückt wegen der schrägen Richtung des Schnitts die Belastungsscheide um eine Feldlänge weiter links (s. Fig. 191). Für Belastung der Zugabteilung erhält man die Gleichungen:

Fig. 191.



$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$

$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4(14 + 12 + \dots 2)$$

$$V = 5,6 \quad H = 22,4.$$

$$0 = -11_9 \cdot 9,33 + 5,6 \cdot 5,33 + 22,4 \cdot 0,5$$

$$11_9(\max) = +4,4 \quad 11_9(\min) = -8,4$$

$$U_9(\min) = -9,6 \text{ t,}$$

$$U_9(\max) = +3,2 \text{ t.}$$

U_{10} .

Die Berechnung geschieht wie bei U_9 . Die Belastungsscheide liegt im neunten Felde, der Drehpunkt für die Momentengleichung wie bei Y_{10} ; man erhält also:

$$\begin{aligned}
 V &= 7,2 & H &= 28,8 \\
 0 &= -11_{10} \cdot 22 + 7,2 \cdot 20 + 28,8 \cdot 0,5 \\
 11_{10} \text{ (max)} &= + 7,2 & 11_{10} \text{ (min)} &= - 11,2 \text{ t} \\
 U_{10} \text{ (min)} &= - 12,4 \text{ t} \\
 U_{10} \text{ (max)} &= + 6,0 \text{ t}
 \end{aligned}$$

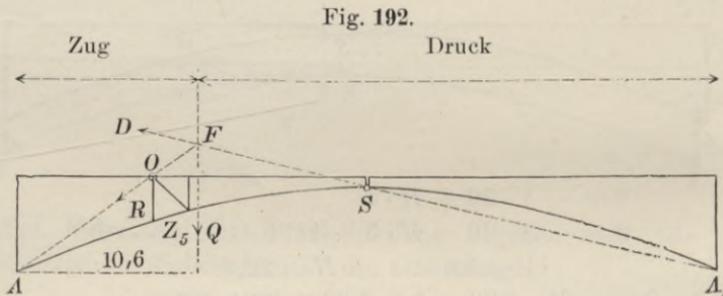
$$U_{11}$$

Der Vertikalständer in der Mitte wird durch die Scheitelfuge halbiert und jeder der beiden Teile steht oben nur mit einer horizontalen Stange in Verbindung, kann also nur durch die direkt aufliegende Belastung eine Spannung erhalten, nämlich Druckspannung. Die Belastung beträgt für jede Hälfte 0,6 t permanenter und 2 t mobiler Last, also ist

$$U_{11} \text{ (min)} = - 2,6 \text{ t}.$$

Berechnung der Spannungen Z in den Bogenstücken.

Das Stück Z_5 soll als Beispiel dienen, um das einzuschlagende Verfahren daran zu erklären. Man legt einen Vertikalschnitt durch das fünfte Feld und stellt für das zwischen diesem Schnitt und der Scheitelfuge liegende Stück die Momentengleichung auf in bezug auf den Durchschnittspunkt O von Diagonale und Horizontale (s. Fig. 192).



Die Belastungsweise für Z_5 (max) und Z_5 (min) findet man, indem man zunächst die Belastungsscheide sucht, d. h. diejenige Stelle, wo ein Gewicht liegen muß, um weder Zug- noch Druckspannung in Z_5 zu erzeugen.

Wenn man die Linien AO und A_1S bis zu ihrem Durchschnittspunkte F verlängert und durch diesen Punkt eine Vertikale legt, so bildet diese Vertikale die Belastungsscheide. Denn

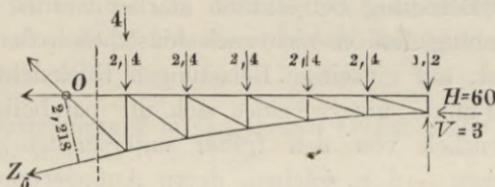
hier erzeugt ein Gewicht Q in Verbindung mit dem von demselben hervorgebrachten Scheiteldruck D eine Mittelkraft R , welche durch den Drehpunkt O hindurchgeht. Diese Belastungsscheide liegt für Z_5 in dem sechsten Felde.

Nimmt man die Zugabteilung belastet an, so sind — da hier natürlich die permanente Last nicht unberücksichtigt bleiben darf — für die unbelasteten Punkte 2,4 t, für die belasteten 2,4 + 4 t in Rechnung zu bringen. Man erhält also für die Seitenkräfte des Scheiteldruckes die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= -V \cdot 20 + H \cdot 5 - 2,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + 16 + \dots 2 \right) \\ 0 &= -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 2,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + 16 + \dots 2 \right) \\ &\quad + 4(10 + 8 + \dots 2) \\ V &= 3 \qquad H = 60. \end{aligned}$$

Aus Fig. 193 ergibt sich sodann die Momentengleichung:

Fig. 193.

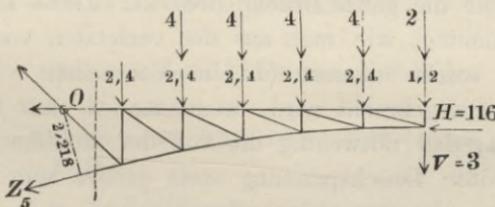


$$\begin{aligned} 0 &= Z_5 \cdot 2,218 - 3 \cdot 12 + 60 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1^2}{2} + 10 + \dots 2 \right) + 4 \cdot 2 \\ Z_5 \text{ (max)} &= -39,86 \text{ t.} \end{aligned}$$

Bei Belastung der Druckabteilung erhält man für die Seitenkräfte des Scheiteldruckes die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= V \cdot 20 + H \cdot 5 - 6,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + \dots 2 \right) \\ 0 &= V \cdot 20 - H \cdot 5 + 2,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + \dots 2 \right) + 4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + \dots 12 \right) \\ V &= 3 \qquad H = 116 \end{aligned}$$

Fig. 194.



und aus Fig. 194 die Momentengleichung:

$$0 = Z_5 \cdot 2,218 + 3 \cdot 12 + 116 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1^2}{2} + 10 + \dots 2 \right) \\ + 4 \left(\frac{1^2}{2} + 10 + \dots 4 \right) \\ Z_5 \text{ (min)} = + 142,70 \text{ t.}$$

Zur Vergleichung soll hier noch derjenige Wert berechnet werden, den Z_5 annimmt, wenn die ganze Brücke mit der mobilen Last bedeckt ist. Es ergeben sich für diesen Fall die Gleichungen:

$$0 = V \cdot 20 + H \cdot 5 - 6,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + \dots 2 \right) \\ 0 = V \cdot 20 - H \cdot 5 + 6,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + \dots 2 \right) \\ V = 0 \quad H = 128. \\ 0 = Z_5 \cdot 2,218 + 128 \cdot 0,5 + 6,4 \left(\frac{1^2}{2} + 10 + \dots 2 \right) \\ Z_5 = - 132,7 \text{ t.}$$

Aus diesen Rechnungen läßt sich nun hinsichtlich der Spannungen Z in den Bogenstücken schon Folgendes entnehmen:

Erstens, daß die Druckspannung in den Bogenstücken bei einseitiger Belastung beträchtlich stärker werden kann als bei voller Belastung, daß es also auch hinsichtlich der Bogenstücke notwendig ist, auf einseitige Belastungen Rücksicht zu nehmen. In diesem Punkte unterscheidet sich die parabolische Bogenbrücke wesentlich von den früher untersuchten parabolischen Balkenbrücken — d. h. solchen, deren Auflagerpunkte nur vertikale Gegendrücke leisten — in welchen stets bei voller Belastung die Spannung der Bogenstücke am stärksten wird.

Zweitens erkennt man aus der obigen Rechnung, daß es eigentlich nicht erforderlich ist, auch die Maxima von Z bei dieser Brücke zu berechnen. Denn: sieht man einstweilen von dem Eigengewichte ab, so ist klar, daß die von der mobilen Last allein hervorgebrachte größte positive Spannung zu der von ihr hervorgebrachten größten negativen Spannung hinzuaddiert diejenige Spannung ergeben muß, welche durch die mobile Last entsteht, wenn sie die ganze Brücke bedeckt. Diese ist aber immer negative Spannung, wie man aus der vorletzten von den obigen Gleichungen sofort erkennt (da im Vorzeichen von Z_5 keine Änderung hervorgebracht wird, wenn man 4 statt 6,4 schreibt). Hieraus folgt, daß notwendig die von der mobilen Last hervorgebrachte größte Druckspannung stets größer sein muß, als die von ihr hervorgebrachte größte Zugspannung, während die permanente Last überdies noch eine permanente Druckspannung in

den Bogenstücken erzeugt, also ebenfalls dahin wirkt, daß Z (min) überwiegt. Da nun Druckspannung ohnehin meistens einen größeren Querschnitt erfordert als eine gleich große Zugspannung, so könnten bei dieser Konstruktion die Maxima von Z ganz unberücksichtigt bleiben, da die Minima allein bei der Querschnittsbestimmung entscheiden.

Nichtsdestoweniger soll auch hier das Maximum berechnet werden, und zwar aus folgendem Grunde. Genau dieselbe Methode würde nämlich auch in dem Falle anzuwenden sein, wenn die konvexe Seite des Bogens nach unten gekehrt wäre, und die horizontale Fahrbahn unter dem Bogen hinge, d. h. wenn die Brücke als Hängebrücke konstruiert wäre. In diesem Falle aber würde Minimum werden, was hier Maximum, ist und umgekehrt. Bei sehr geringer Größe des Eigengewichtes könnten diese Minima möglicherweise negativ werden und trotz ihrer kleineren absoluten Werte bei der Wahl des Querschnittes den Ausschlag geben. Für solche Fälle ist es also von Nutzen, auch die Berechnungsweise derjenigen Werte von Z kennen zu lernen, welche hier als Maxima auftreten.

Für die Spannungen Z in den übrigen Feldern erhält man nach der obigen Methode folgende Gleichungen:

$$Z_1.$$

Die Belastungsscheide fällt mit dem ersten Vertikalständer zusammen. Für die unbelastete Brücke ist:

$$0 = V \cdot 20 + H \cdot 5 - 2,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + \dots 2 \right)$$

$$0 = V \cdot 20 - H \cdot 5 + 2,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + \dots 2 \right)$$

$$V = 0 \quad H = 48$$

$$0 = Z_1 \cdot 4,968 + 48 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + \dots 2 \right)$$

$$Z_1 (\text{max}) = -53,14 \text{ t.}$$

Bei voller Belastung wird:

$$V = 0 \quad H = 128$$

$$0 = Z_1 \cdot 4,968 + 128 \cdot 0,5 + 6,4 \left(\frac{2^0}{2} + 18 + \dots 2 \right)$$

$$Z_1 (\text{min}) = -141,71 \text{ t.}$$

$$Z_2.$$

(Belastungsscheide im zweiten Felde.)

$$V = 0,2 \quad H = 48,8$$

$$0 = Z_2 \cdot 4,186 - 0,2 \cdot 18 + 48,8 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1^8}{2} + 16 + \dots 2 \right)$$

$$Z_2 (\text{max}) = -51,41 \text{ t.}$$

$$V = 0,2 \quad H = 127,2$$

$$0 = Z_2 \cdot 4,186 + 0,2 \cdot 18 + 127,2 \cdot 0,5 + 6,4 \left(\frac{1^8}{2} + 16 + \dots 2 \right)$$

$$Z_2 (\text{min}) = -139,89 \text{ t.}$$

Z_3 .

(Belastungsscheide im vierten Felde.)

$$V = 1,2 \quad H = 52,8$$

$$0 = Z_3 \cdot 3,464 - 1,2 \cdot 16 + 52,8 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1}{2}^6 + 14 + \dots 2 \right) + 4 \cdot 2$$

$$Z_3 (\text{max}) = -48,73 \text{ t.}$$

$$V = 1,2 \quad H = 123,2$$

$$0 = Z_3 \cdot 3,464 + 1,2 \cdot 16 + 123,2 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1}{2}^6 + 14 + \dots 2 \right) + 4 \left(\frac{1}{2}^6 + 14 + \dots 4 \right)$$

$$Z_3 (\text{min}) = -139,3 \text{ t.}$$

 Z_4 .

(Belastungsscheide im fünften Felde.)

$$V = 2 \quad H = 56$$

$$0 = Z_4 \cdot 2,805 - 2 \cdot 14 + 56 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1}{2}^4 + 12 + \dots 2 \right) + 4 \cdot 2$$

$$Z_4 (\text{max}) = -44,77 \text{ t.}$$

$$V = 2 \quad H = 120$$

$$0 = Z_4 \cdot 2,805 + 2 \cdot 14 + 120 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1}{2}^4 + 12 + \dots 2 \right) + 4 \left(\frac{1}{2}^4 + 12 + \dots 4 \right)$$

$$Z_4 (\text{min}) = -140,3 \text{ t.}$$

 Z_6 .

(Belastungsscheide im siebenten Felde.)

$$V = 4,2 \quad H = 64,8$$

$$0 = Z_6 \cdot 1,707 - 4,2 \cdot 10 + 64,8 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1}{2}^0 + 8 + \dots 2 \right) + 4 \cdot 2$$

$$Z_6 (\text{max}) = -34,21 \text{ t.}$$

$$V = 4,2 \quad H = 111,2$$

$$0 = Z_6 \cdot 1,707 + 4,2 \cdot 10 + 111,2 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1}{2}^0 + \dots 2 \right) + 4 \left(\frac{1}{2}^0 + \dots 4 \right)$$

$$Z_6 (\text{min}) = -146,2 \text{ t.}$$

 Z_7 .

(Belastungsscheide im achten Felde.)

$$V = 5,6 \quad H = 70,4$$

$$0 = Z_7 \cdot 1,28 - 5,6 \cdot 8 + 70,4 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{8}{8} + 6 + 4 + 2 \right) + 4 \cdot 2$$

$$Z_7 (\text{max}) = -28,74 \text{ t.}$$

$$V = 5,6 \quad H = 105,6$$

$$0 = Z_7 \cdot 1,28 + 5,6 \cdot 8 + 105,6 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{8}{8} + 6 + 4 + 2 \right) + 4 \left(\frac{8}{8} + 6 + 4 \right)$$

$$Z_7 (\text{min}) = -149,9 \text{ t.}$$

 Z_8 .

(Belastungsscheide im achten Felde.)

$$V = 5,6 \quad H = 70,4$$

$$0 = Z_8 \cdot 0,943 - 5,6 \cdot 6 + 70,4 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{6}{8} + 4 + 2 \right)$$

$$Z_8 (\text{max}) = -24,6 \text{ t.}$$

$$V = 5,6 \quad H = 105,6$$

$$0 = Z_8 \cdot 0,943 + 5,6 \cdot 6 + 105,6 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{6}{8} + 4 + 2 \right) + 4 \left(\frac{6}{8} + 4 + 2 \right)$$

$$Z_8 (\text{min}) = -152,8 \text{ t.}$$

Z_9 .

(Belastungsscheide im neunten Felde.)

$$V = 7,2 \quad H = 76,8$$

$$0 = Z_9 \cdot 0,698 - 7,2 \cdot 4 + 76,8 \cdot 0,5 - 2,4 \left(\frac{1}{2} + 2\right)$$

$$Z_9 (\text{max}) = -27,5 \text{ t.}$$

$$V = 7,2 \quad H = 99,2$$

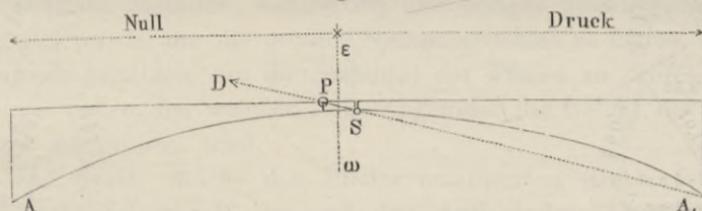
$$0 = Z_9 \cdot 0,698 + 7,2 \cdot 4 + 99,2 \cdot 0,5 + 2,4 \left(\frac{1}{2} + 2\right) + 4 \left(\frac{1}{2} + 2\right)$$

$$Z_9 (\text{min}) = -149,0 \text{ t.}$$

 Z_{10} .

Bei der Bestimmung von Z_{10} findet zwar keine Abweichung von dem vorigen Verfahren statt, es ist nur zu bemerken, daß hier die Druckabteilung allein vorhanden ist, und daß die andere — im Gegensatze zu den vorigen Fällen — nicht mit „Zug“, sondern vielmehr mit „Null“ zu bezeichnen ist (s. Fig. 195). Denn

Fig. 195.



die Richtung der Linie A_1S fällt zufällig mit der Diagonale des zehnten Feldes zusammen, und jede Belastung links von der Schnittlinie $\varepsilon\omega$ wirkt daher auf das Stück $S\varepsilon\omega$ nur mittelst des von ihr hervorgebrachten Scheiteldruckes D , welcher durch den Drehpunkt P für die aufzustellende Momentengleichung hindurchgeht, folglich die Spannung Null in dem Stücke Z_{10} erzeugt.

Wenn man konsequenterweise auch für Z_{10} das Maximum und das Minimum bestimmen will, so kann man das eine Mal den Träger ganz leer (wenn man will, auch bis zum Punkte P hin belastet) und das andere Mal voll belastet (wenn man will, auch nur die rechte Seite bis zum Schnitt $\varepsilon\omega$ hin belastet) annehmen, und erhält dann die Gleichungen:

$$V = 0 \quad H = 48$$

$$0 = Z_{10} \cdot 0,5498 + 48 \cdot 0,5 + 2,4 \cdot \frac{2}{2}$$

$$Z_{10} (\text{max}) = -48,02 \text{ t}$$

$$V = 0 \quad H = 128$$

$$0 = Z_{10} \cdot 0,5498 + 128 \cdot 0,5 + 2,4 \cdot \frac{2}{2} + 4 \cdot \frac{2}{2}$$

$$Z_{10} (\text{min}) = -128,05 \text{ t.}$$

Die Resultate der ganzen Rechnung sind in Fig. 196 übersichtlich zusammengestellt.

Wenn man in Fig. 196 statt eines jeden Pluszeichens ein Minuszeichen, statt eines jeden Minuszeichens ein Pluszeichen setzt, so gelten die Zahlen für dieselbe Brücke, wenn sie als Hängebrücke konstruiert ist, d. h. wenn sie in umgekehrter Lage an den beiden Punkten A und A_1 aufgehängt ist. Die in Fig. 197 eingeschriebenen Zahlen sind also die Spannungszahlen für eine solche Hängebrücke, welche der Form nach mit der vorigen kongruent ist.

§ 23.

Stabilität der Pfeiler.

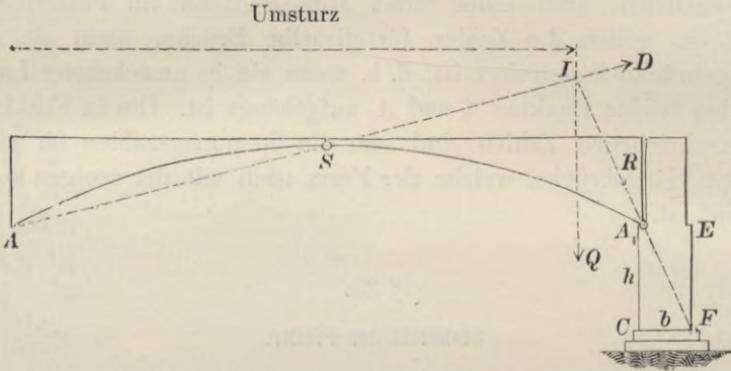
Dieselbe Methode, welche bei den vorigen Rechnungen angewendet wurde, um die größten Spannungszahlen zu finden, kann man auch benutzen, um die Stabilität der Pfeiler zu prüfen und zu untersuchen, bei welcher Belastungsweise die Gefahr des Umsturzes am größten wird.

Die Kraft, welche den Pfeiler umzuwerfen strebt, ist die horizontale Seitenkraft des auf den Auflagerdruck ausgeübten Druckes. Begünstigt wird die Stabilität des Pfeilers durch die vertikale Seitenkraft dieses Druckes. Beide werden bei voller Belastung der Brücke am größten. Es entsteht also die Frage, ob nicht bei partieller Belastung der Überschuß des Momentes der Horizontalkraft einen größeren Wert erlangen kann, als bei voller Belastung, und wie groß dieser größte Wert des Umsturzmomentes werden kann.

Die Antwort auf diese Frage findet man, indem man nach dem früher befolgten Prinzip zunächst diejenige Stelle der Brücke aufsucht, wo ein Gewicht liegen muß, um gar keinen Einfluß auf die Stabilität des Pfeilers zu äußern. Das Umkippen würde in einer Drehung um den Punkt F bestehen (s. Fig. 198). Soll eine Kraft diese Drehung weder befördern noch verhindern, so muß sie durch den Drehpunkt hindurchgehen. Verlängert man die Richtungen FA_1 und AS bis zu ihrem Durchschnittspunkte I , so erhält man die Stelle, wo ein Gewicht Q liegen muß, um mit dem von ihm hervorgebrachten Scheiteldruck D zusammen eine Mittelkraft R zu erzeugen, welche gerade durch den Drehpunkt

F hindurchgeht. Für ein weiter rechts liegendes Gewicht würde diese Kraft innerhalb, für eine weiter links liegende Kraft außer-

Fig. 198.



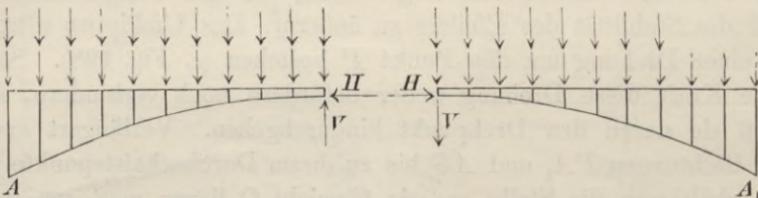
halb an dem Punkte F vorbeigehen. Die durch den Punkt I gelegte Vertikale teilt also als Belastungsscheide die Brücke in zwei Abteilungen, von denen die links liegende allein belastet sein muß, wenn das Umsturmmoment seinen größten Wert annehmen soll. Die Lage dieser Linie hängt ab von dem Verhältnis $\frac{h}{b}$ der Höhe des Pfeilers (bis zum Auflagerpunkte A_1 gerechnet) zur Breite desselben.

Wenn beispielsweise angenommen wird, daß für die vorige Brücke dieses Verhältnis

$$\frac{h}{b} = 2$$

ist, so fällt die Belastungsscheide in das achtzehnte Feld und man

Fig. 199.



erhält bei Belastung der Umsturzabteilung für die Seitenkräfte des Scheiteldruckes aus Fig. 199 die Momentengleichungen:

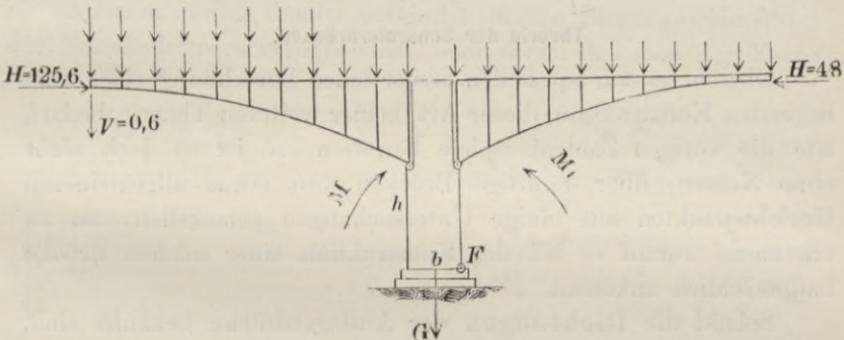
$$\begin{aligned}
 0 &= -V \cdot 20 + H \cdot 5 - 2,4 \left(\frac{20}{2} + 18 + \dots + 2 \right) - 4 \left(\frac{20}{2} + 18 + \dots + 6 \right) \\
 0 &= -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 2,4 \left(\frac{20}{2} + 18 + \dots + 2 \right) + 4 \left(\frac{20}{2} + 18 + \dots + 2 \right) \\
 V &= 0,6 & H &= 125,6.
 \end{aligned}$$

Hiernach erhält man für den größten Wert des Umsturzmomentes die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{2} &= -0,6 (b + 20) + 125,6 (h + 5) \\
 &\quad - 2,4 \left[\left(\frac{20+b}{2} \right) + (18+b) + \dots + (2+b) + \frac{b}{2} \right] \\
 &\quad - 4 \left[\left(\frac{20+b}{2} \right) + (18+b) + \dots + (6+b) \right]
 \end{aligned}$$

worin M das von der ganzen (aus zwei Tragwänden bestehenden) Brücke hervorgebrachte Moment bedeutet (s. Fig. 200).

Fig. 200.



Diesem Umsturzmomente wirken entgegen: erstens das Stabilitätsmoment des Pfeilers, zweitens, wenn derselbe als Mittelpfeiler zwei angrenzenden Brückenabteilungen als Stütze dient, auch das Moment, welches von der anderen Brückenöffnung her auf den Pfeiler übertragen wird. Letzteres Moment, welches natürlich ebenfalls auf den Punkt F zu beziehen ist, wird dann am kleinsten, wenn diese andere Öffnung ganz unbelastet ist, denn jedes dort aufgelegte Gewicht erzeugt für den Pfeiler eine Kraft, welche links an dem Punkte F vorbeigeht. Die Gefahr des Umsturzes wird also am größten, wenn die angrenzende Öffnung ganz unbelastet ist. Für diesen Fall wird, wie früher

gefunden, $H=48$ und dann erhält für das Gegenmoment die Gleichung:

$$\frac{M_1}{2} = 48 \cdot (5 + h) - 2,4 \left(\frac{2,0}{2} + 18 + \dots 2 \right),$$

worin M_1 das ganze — zwei Tragwänden entsprechende — Gegenmoment bezeichnet.

Die Bedingung also, welche erfüllt sein muß, wenn der Pfeiler nicht umkippen soll, läßt sich, wenn das Gewicht desselben mit G bezeichnet wird, durch folgende Ungleichung ausdrücken:

$$G \cdot \frac{b}{2} > M - M_1,$$

aus welcher, wenn darin für M und M_1 ihre Werte substituiert werden, die erforderlichen Dimensionen des Pfeilers bestimmt werden können.

§ 24.

Theorie der Scharnierbrücken.

Obwohl es zur speziellen numerischen Berechnung einer vorliegenden Konstruktion dieser Art keiner weiteren Theorie bedarf, wie die vorigen Zahlenbeispiele beweisen, so ist es doch nicht ohne Nutzen, über derartige Brücken von etwas allgemeineren Gesichtspunkten aus einige Untersuchungen anzustellen, um zu erkennen, worauf es bei der Konstruktion einer solchen Brücke hauptsächlich ankommt.

Sobald die Richtungen der Auflagerdrücke bekannt sind, kann man für jede gegebene Stangenverbindung mittelst der Methode der statischen Momente die Spannungszahlen berechnen. Bei allen Balkenbrücken — wie die in den vier ersten Abschnitten berechneten Konstruktionen im Gegensatz zu dem in diesem sechsten Abschnitt untersuchten genannt werden können — fand hinsichtlich dieser Richtungen keine Unbestimmtheit statt, weil bei jenen Brücken die Auflagerung an den Stützpunkten so beschaffen ist, daß von den letzteren nur vertikale Gegendrücke zu erwarten sind. Bei den Sprengwerk- und Bogenbrücken dagegen gesellen sich zu den vertikalen noch die horizontalen Gegendrücke der Auflagerpunkte, und nur dann, wenn auch diese bestimmbar sind, können die Spannungszahlen genau berechnet werden.

Diese horizontalen Gegendrücke sind aber nur dann bestimmbar, wenn an irgend einer Stelle die Kontinuität des Trägers unterbrochen und daselbst ein Scharnier (oder ein ähnliches bewegliches Verbindungsglied) eingeschaltet ist. Von der Richtigkeit dieser Behauptung kann man sich auf folgende Weise überzeugen.

Wie in der „Theorie der parabolischen Träger“ (s. § 8) früher nachgewiesen, bildet die parabolische Form die Gleichgewichtsform einer an beiden Endpunkten unterstützten Kette, welche mit einer gleichförmig über die Horizontalprojektion verteilten Belastung bedeckt ist. Die Stützpunkte derselben leisten vertikale und horizontale Gegendrücke, deren Größe genau bestimmt werden konnte. Sobald entweder dieses Belastungsgesetz oder diese Form der Kette die geringste Änderung erlitte, würde die Kette sofort zusammenstürzen, wenn nicht durch sonstige Mittel der Gleichgewichtszustand aufrecht erhalten würde. Solcher Mittel können zweierlei Arten unterschieden werden: sie können darin bestehen, daß man die Beweglichkeit der Kettenglieder aufhebt, indem man sie zu einem steifen Bogen verbindet, dessen Biegungswiderstand der Formänderung entgegenwirkt, oder darin, daß man der Kette

Fig. 201.

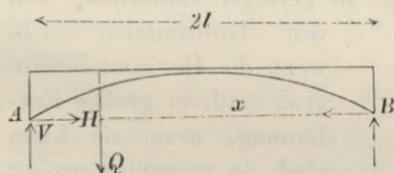


Fig. 202.



die Beweglichkeit ihrer Glieder zwar läßt, aber durch Hinzufügung eines Abstufungssystems, d. h. eines aus horizontalen, diagonalen und vertikalen Stangen gebildeten Systems von Dreiecken die Verschiebbarkeit aufhebt. In beiden Fällen wird das Ganze in einen steifen Balken verwandelt, der aber an seinen Stützpunkten nicht bloß durch vertikale, sondern auch durch horizontale Druckkräfte im Gleichgewicht gehalten wird.

Die vertikalen Gegendrücke haben immer einen ganz bestimmten Wert, wie man sofort erkennt, wenn man z. B. für Fig. 201 oder 202 die Momentengleichung in Beziehung auf den Stützpunkt B bildet:

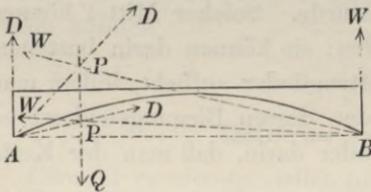
$$0 = V \cdot 2l - Qx$$

oder

$$V = Q \frac{x}{2l}.$$

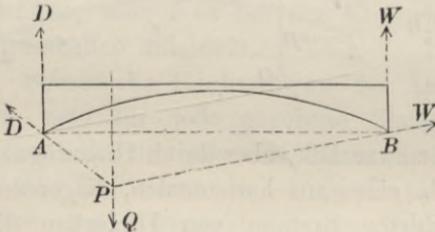
Was dagegen die horizontalen Gegendrücke betrifft, so gibt es für sie unendlich viele verschiedene Werte, welche der Bedingung des Gleichgewichts genügen, denn diese Bedingung besteht nur darin, daß der in dem Punkte *A* wirkende Horizontaldruck gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung mit dem in *B* wirkenden haben muß. Man kann diese Bedingungen auch so ausdrücken: die Mittelkräfte *D* und *W* aus den horizontalen und vertikalen Drücken müssen mit der Richtung von *Q* in einem Punkte *P*

Fig. 203.



wenn die Horizontalkräfte nach innen, unterhalb, wenn sie nach außen wirken (s. Fig. 204); er liegt in geringer Entfernung von

Fig. 204.



wenn die Horizontalkräfte groß sind, in großer Entfernung, wenn sie klein sind, in unendlich großer Entfernung, wenn sie Null sind.

Wie groß nun aber in Wirklichkeit diese Horizontalkräfte sind, das hängt ab von der Art der Aufstellung und Befestigung, von der Widerstandsfähigkeit der Widerlager, von der Temperatur u. s. w., kurz von mancherlei Umständen und Zufälligkeiten, welche zum größeren Teile der Rechnung gänzlich sich entziehen. Nichtsdestoweniger sind diese Umstände von der größten Bedeutung für die Sicherheit der Konstruktion. Sowohl durch sehr große als durch sehr kleine Werte der Horizontalkräfte kann die Sicherheit der Konstruktion gefährdet werden. Das erstere bedarf

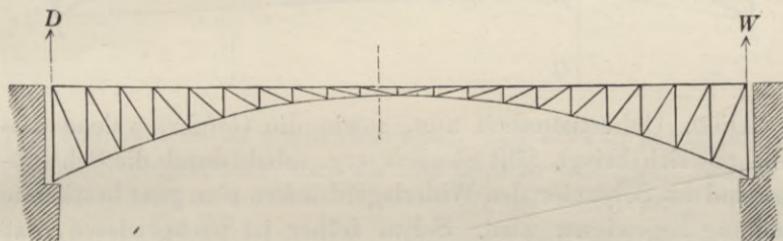
zusammentreffen, damit ihre Mittelkraft durch die Kraft *Q* aufgehoben werde. Wo aber dieses Zusammentreffen erfolgt, das hängt von der Größe der Horizontalkräfte ab. Der Punkt *P* wird oberhalb der Horizontalen *AB* liegen (s. Fig. 203),

Wie groß nun aber in Wirklichkeit diese Horizontalkräfte sind, das hängt ab von der Art der Aufstellung und Befestigung, von der Widerstandsfähigkeit der Widerlager, von der Temperatur u. s. w., kurz von mancherlei Umständen und Zufälligkeiten, welche zum größeren Teile der Rechnung gänzlich sich entziehen. Nichtsdestoweniger sind diese Umstände von der größten Bedeutung für die Sicherheit der Konstruktion. Sowohl durch sehr große als durch sehr kleine Werte der Horizontalkräfte kann die Sicherheit der Konstruktion gefährdet werden. Das erstere bedarf

keines weiteren Beweises; das letztere aber ist leicht an einem Beispiele nachzuweisen.

Wenn die oben berechnete Bogenbrücke ohne Scharnier konstruiert wäre und infolge eines geringen Ausweichens der Widerlager die horizontalen Gegendrücke derselben ganz aufhörten zu wirken, so würde die Brücke als Balkenbrücke (s. Fig. 205) nach

Fig. 205.



den früheren Regeln zu berechnen sein und z. B. für das Stück X_{10} folgende Momentengleichungen sich ergeben:

$$0 = X_{10} \cdot 0,5 + 6,4 \left[\left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{10}{20} \right) 20 + \left(\frac{1}{20} \cdot 20 - 2 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{20} \cdot 20 - 4 + \dots + \left(\frac{10}{20} \cdot 20 - 18 \right) \right] \right. \\ X_{10} (\text{min}) = -1280 \text{ t,}$$

während bei der Scharnierbrücke die stärkste Spannung in den horizontalen Stangen nur $\pm 50,7 \text{ t}$ (im siebenten Felde nämlich) beträgt.

Ebenso würde für Z_{10} die Gleichung sich ergeben:

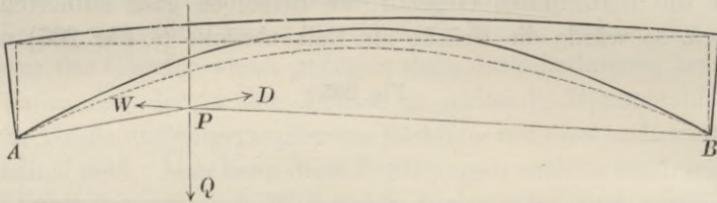
$$0 = -Z_{10} \cdot 0,5498 + 6,4 \left[\left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{11}{20} \right) 18 + \left(\frac{1}{20} \cdot 18 - 2 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{20} \cdot 18 - 4 \right) + \dots + \left(\frac{10}{20} \cdot 18 - 16 \right) \right] \\ Z_{10} (\text{max}) = +1229 \text{ t,}$$

während früher nur $-128,05 \text{ t}$ als stärkste Spannung in diesem Stücke gefunden wurde. Es würde also die Spannung im Bogen stellenweise auf fast das Zehnfache und in den horizontalen Stangen auf mehr noch als das Zehnfache sich steigern können, wenn das Scharnier weggelassen würde.

Daß in dem umgekehrten Falle, wenn die Widerlager unbeweglich bleiben, während der Brückenkörper — fest eingeklemmt zwischen den beiden Punkten A und B — durch Temperaturerhöhung ausgedehnt wird, ebenfalls die Spannung einzelner Teile bis zum Übermaß gesteigert werden kann, ist nicht schwer einzusehen. In diesem Falle liegt die Gefahr in dem Wachsen der

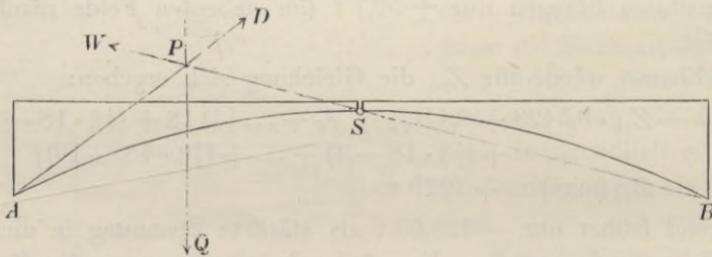
Horizontalkräfte, wobei die Auflagerdrücke mehr der horizontalen Richtung sich nähern (s. Fig. 206).

Fig. 206.



Diese Unbestimmtheit nun, sowie die Gefahr, welche dieselbe mit sich bringt, fällt gänzlich weg, sobald durch die Scheitelfuge und das Scharnier den Widerlagerdrücken eine ganz bestimmte Richtung angewiesen wird. Schon früher ist nachgewiesen, daß in diesem Falle der von einem Gewichte Q an der unbelasteten Hälfte hervorgerufene Widerlagerdruck W stets durch den Scharnierpunkt S hindurchgeht; dadurch wird der Punkt P und mit ihm die Richtung des anderen Widerlagerdrucks sofort festgelegt (s. Fig. 207). Beim Ausweichen der Widerlager wird die Fuge

Fig. 207.



sich ein wenig schließen, bei Temperaturerhöhungen sich ein wenig öffnen, und niemals kann eine Steigerung oder Verminderung der von den Punkten A und B ausgeübten Horizontaldrücke anders als durch Veränderung des Belastungszustandes bewirkt werden.

Schon in § 8 ist darauf hingewiesen und am Schlusse von § 22 noch einmal hervorgehoben, daß hinsichtlich der Berechnungsweise gar kein Unterschied stattfindet zwischen der (bisher sogenannten) Bogenbrücke, d. h. einer solchen, deren Bogen seine konvexe Seite nach oben kehrt, und einer hängenden Bogenbrücke,

wie die in Fig. 208 dargestellte. Kehrt man erst die Figur und nachher alle Kraftrichtungen um, so erhält man aus Fig. 207 die

Fig. 208.

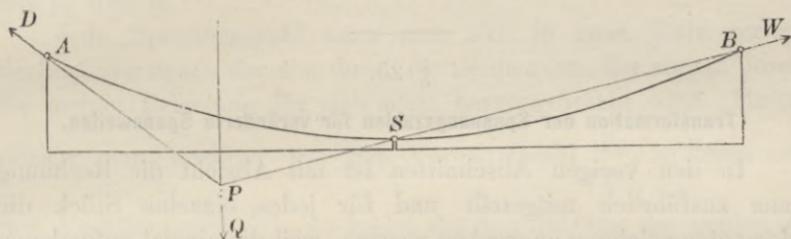
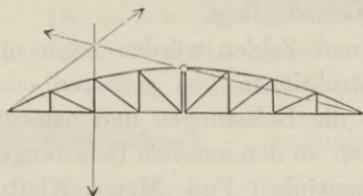


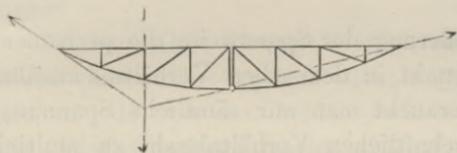
Fig. 208, und es ist leicht einzusehen, daß alles in bezug auf die erstere Nachgewiesene auch für die letztere Gültigkeit behält.

Fig. 209.



von der Form Fig. 39 angesehen werden, bei welchem das horizontale Zugband in der Mitte durchgeschnitten und statt dessen die

Fig. 210.



würde in ganz ähnlicher Weise, wie in §§ 21 und 22 beschrieben, geschehen können.

Es ist kaum nötig, zu bemerken, daß das Prinzip der Scharnierbrücken noch mannigfacher Modifikationen fähig ist, und sollen hier nur noch die in Fig. 209 und 210 dargestellten Formen erwähnt werden. Erstere kann als ein parabolischer Träger

Horizontalwiderstände der Auflagerpunkte als Ersatzkräfte in Anspruch genommen sind, und letztere als analoge Form mit hängender Kette. Die Berechnung solcher Brücken

SIEBENTER ABSCHNITT.

§ 25.

Transformation der Spannungszahlen für veränderte Spannweiten.

In den vorigen Abschnitten ist mit Absicht die Rechnung ganz ausführlich mitgeteilt und für jedes einzelne Stück die Momentengleichung angegeben worden, weil die einmal gefundenen Zahlen und Gleichungen noch auf mannigfache Weise verwertet werden können für Konstruktionen, welche den dort berechneten geometrisch ähnlich sind, d. h. für solche Konstruktionen, die nur darin von jenen abweichen, daß ihnen eine andere Längeneinheit, ein anderer Maßstab zum Grunde liegt.

Die gefundenen Gleichungen und Zahlen würden sogar unmittelbar gültig bleiben für Konstruktionen von größeren oder kleineren Spannweiten, wenn nicht die Belastungen und namentlich die Verhältnisse der permanenten zu den mobilen Belastungen sich änderten. Denn ob die Längeneinheit Fuß, Meter, Klafter oder Rute genannt wird, das macht hinsichtlich der Momentengleichung und folglich auch hinsichtlich des Resultates gar keinen Unterschied, weil in den Gleichungen immer nur die Verhältnisse der Hebelarme, nicht aber deren absolute Längen, von Einfluß sind.

Wenn also bei Vergrößerung der Spannweite die permanente Last für jeden Belastungspunkt in demselben Verhältnis zunähme wie die mobile Last, so braucht man nur sämtliche Spannungszahlen mit dieser gemeinschaftlichen Verhältniszahl zu multiplizieren, um die neuen Spannungszahlen zu erhalten. Dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall, es wächst vielmehr bei zunehmender Spannweite die permanente Last meistens rascher, als die mobile Last, und infolgedessen äußert sich der Einfluß der Vergrößerung des Maßstabes bei verschiedenen Konstruktionsteilen in verschiedener Weise. Die hier zu lösende Aufgabe besteht also darin, diese Unterschiede zu ermitteln und mit Berücksichtigung derselben auf möglichst einfache Weise die neuen Spannungszahlen aus den früher gefundenen abzuleiten.

Für die früher schon berechnete Konstruktion sollen mit p und m resp. die permanente und mobile Belastung eines Belastungspunktes bezeichnet werden, für die neu zu berechnende mit p_1 und m_1 .

Jede Spannungszahl kann man sich in zwei Teile zerlegt denken, von denen der eine durch die permanente, der andere durch die mobile Belastung für sich allein hervorgebracht wird. Multipliziert man ersteren mit der Verhältniszahl $\frac{p_1}{p}$, letzteren mit der Verhältniszahl $\frac{m_1}{m}$, so bildet die Vereinigung der beiden so erhaltenen Zahlen die neue Spannungszahl.

Hinsichtlich ihres Verhaltens gegen den Einfluß der permanenten und mobilen Last zerfallen nun die Konstruktionsteile in verschiedene Gruppen:

Die erste umfaßt alle diejenigen Teile, deren Spannungszahlen ganz allein von der mobilen Last abhängen; für sie erhält man die neuen Spannungszahlen, indem man die früher gefundenen mit der Verhältniszahl $\frac{m_1}{m}$ multipliziert.

Die zweite Gruppe umfaßt alle diejenigen Teile, deren Spannungszahlen ausschließlich durch die Größe der Totalbelastung $(p + m)$ bedingt werden. Für sie erhält man die neuen Spannungszahlen, wenn man die alten mit der Verhältniszahl $\frac{p_1 + m_1}{p + m}$ multipliziert.

In der dritten Gruppe endlich sind alle die Teile enthalten, welche den beiden vorigen nicht angehören, also diejenigen, bei welchen jede von den beiden Belastungen in besonderer Weise ihren Einfluß geltend macht. Für einen solchen Teil erhält man die neue Spannungszahl, indem man die von der permanenten Last hervorgebrachte Spannung mit $\frac{p_1}{p}$, den Rest mit $\frac{m_1}{m}$ multipliziert und die beiden Zahlen dann wieder zu einer vereinigt.

Also nur die letzte Klasse erfordert eine neue Berechnung — und zwar eine meistens sehr leicht auszuführende — für die ersten beiden dagegen lassen sich die beiden Zahlen auf eine sehr einfache Weise aus den früher gefundenen ableiten, wie dies jetzt an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

a. Parabolischer Träger.

Hier gehören die Diagonalen der ersten, die Horizontalen und Bogenstücke der zweiten, die Vertikalständer der dritten Gruppe an.

Um beispielsweise aus der Zahlenfigur 27 die Spannungszahlen für einen ihr geometrisch ähnlichen Träger von 48 m Spannweite abzuleiten, bei welchem die permanente Belastung 8000 kg, die mobile 12000 kg für jeden Knotenpunkt beträgt, hat man die sechs Diagonalzahlen mit der Zahl

$$\frac{12000}{5000} = 2,4$$

zu multiplizieren und erhält als neue Spannungszahlen:

$$\underline{+ 15000}, \underline{+ 16400}, \underline{+ 17000}, \underline{+ 16400}, \underline{+ 15000}, \underline{+ 13130}.$$

Die gemeinschaftliche Spannungszahl der horizontalen Stangen — 48000 ist mit der Zahl

$$\frac{8000 + 12000}{1000 + 5000} = \frac{10}{3}$$

zu multiplizieren und erhält als neue Spannungszahl

$$- 160000.$$

Ebenso sind die vier Spannungszahlen der Bogenstücke mit $\frac{10}{3}$ zu multiplizieren, und man erhält als neue Spannungszahlen:

$$+ 175000, + 167700, + 163000, + 160300.$$

Die Spannungszahlen der Vertikalständer sind zu zerlegen in den von der permanenten Last hervorgebrachten Teil, welcher für jeden

$$- 1000$$

beträgt und den Rest, welchen man erhält, wenn man diese Zahl — 1000 von der ganzen Spannungszahl subtrahiert. Diese Zerlegung ergibt folgende Zahlen:

für die Maxima

$$\left. \begin{array}{l} - 1000 \\ 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - 1000 \\ + 1560 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - 1000 \\ + 2500 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - 1000 \\ + 2800 \end{array} \right\}$$

und für die Minima

$$\left. \begin{array}{l} - 1000 \\ - 5000 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - 1000 \\ - 6560 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - 1000 \\ - 7500 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - 1000 \\ - 7800 \end{array} \right\}$$

Man erhält die neuen Spannungszahlen, indem man jedesmal den ersten Teil mit 8, den zweiten Teil mit 2,4 multipliziert, also:

für die Maxima

$$\left\{ \begin{array}{l} -8000 \\ 0 \end{array} \right\} = -8000; \left\{ \begin{array}{l} -8000 \\ +3740 \end{array} \right\} = -4260;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -8000 \\ +6000 \end{array} \right\} = -2000; \left\{ \begin{array}{l} -8000 \\ +6720 \end{array} \right\} = -1280$$

und für die Minima

$$\left\{ \begin{array}{l} -8000 \\ -12000 \end{array} \right\} = -20000; \left\{ \begin{array}{l} -8000 \\ -15700 \end{array} \right\} = -23700;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -8000 \\ -18000 \end{array} \right\} = -26000; \left\{ \begin{array}{l} -8000 \\ -18700 \end{array} \right\} = -26700.$$

Da bei den drei anderen Vertikalständern dieselben Zahlen wiederkehren, so genügt die Transformation der Zahlen für die vier ersten.

b. Fachwerkbrücken mit parallelen Gurtungen.

Hier ist die erste jener drei Klassen garnicht vertreten, der zweiten Klasse gehören sämtliche horizontale Stangen an, der dritten die Diagonalen und Vertikalständer.

Um also z. B. aus der Zahlenfigur 57 die Spannungszahlen für eine ihr geometrisch ähnliche Fachwerkbrücke von 48 m Spannweite abzuleiten, bei welcher (wie im vorigen Falle angenommen wurde) die permanente Belastung 8000 kg, die mobile 12000 kg beträgt, hat man die vier verschiedenen Spannungszahlen der horizontalen Stangen mit

$$\frac{8000 + 12000}{1000 + 5000} = \frac{10}{3}$$

zu multiplizieren und erhält die Zahlen:

$$70000, 120000, 150000, 160000,$$

welche negativ für die oberen, positiv für die unteren Stangen zu nehmen sind.

In Betreff der Diagonalen und Vertikalständer wird es zwar ungefähr gleich viel Zeit in Anspruch nehmen, mag man die früher gefundenen Gleichungen nach Substitution der neuen Belastungszahlen noch einmal auflösen oder konsequent die vorige Methode

durchführend auch hier durch Zerlegung der Spannungszahlen die neuen berechnen.

Indessen hat der letztere Weg doch noch den Vorzug, daß man bei dieser Gelegenheit auch die Spannungszahlen, welche die permanente Last für sich allein, sowie diejenigen, welche die mobile Last für sich allein hervorbringt, kennen lernt und überhaupt in die Rolle, welche diese Stücke bei dem Zusammenwirken der Konstruktionsteile spielen, einen besseren Einblick erhält. Es soll deshalb hier der letztere Weg eingeschlagen und die Berechnung an der Diagonale und dem Vertikalständer des dritten Feldes gezeigt werden.

Für $Y_3 = -V_3 \cdot \sqrt{2}$ wurde in § 10 die Gleichung gefunden:

$$0 = Y_3 \cdot 0,707 - 1000 \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \dots + \frac{8}{8} \right) - (1 - \frac{1}{8}) - (1 - \frac{1}{8}) \right] \\ - 5000 \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \dots + \frac{8}{8} \right) + 5000 \left[(1 - \frac{1}{8}) + (1 - \frac{1}{8}) \right].$$

Läßt man hierin einmal die beiden mit 5000 multiplizierten Glieder fort und löst die Gleichung auf, so erhält man die der permanenten Belastung entsprechende Spannungszahl:

$$+ 2120$$

und wenn man ein anderes Mal die mit 1000 multiplizierten Glieder fortläßt, so erhält man die von der mobilen Last allein hervorgebrachten extremen Werte:

$$+ 13260 \text{ und } - 2650.$$

Die letzteren beiden sind mit der Verhältniszahl

$$\frac{12000}{5000} = 2,4$$

zu multiplizieren und hierauf mit dem ersteren, nachdem derselbe mit der Verhältniszahl

$$\frac{8000}{1000} = 8$$

multipliziert ist, wieder zu vereinigen, woraus für Maximum und Minimum der neuen Spannungszahl folgende Werte sich ergeben:

$$\left. \begin{matrix} + 16960 \\ + 31824 \end{matrix} \right\} = + 48784; \quad \left. \begin{matrix} + 16960 \\ - 6360 \end{matrix} \right\} = + 10600.$$

Für den rechts angrenzenden Vertikalständer erhält man die Spannungszahlen, indem man die vorigen mit $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ multipliziert, also:

$$\begin{cases} -12000 \\ -22500 \end{cases} = -33500; \quad \begin{cases} -12000 \\ +4500 \end{cases} = -7500.$$

c. Bogenbrücken und Hängebrücken.

Zu der ersten Klasse gehören hier die diagonalen und die horizontalen Stangen, die zweite ist garnicht vertreten, zu der dritten Klasse gehören die Bogenstücke und die Vertikalständer.

Wenn also z. B. eine Hängebrücke von 120 m Spannweite zu berechnen wäre, welche der in § 22 berechneten Bogenbrücke geometrisch ähnlich ist und bei welcher die Belastung eines jeden Feldes 20 t an permanenter und 12 t an mobiler Last beträgt, so würde man die in Fig. 197 für die horizontalen Stangen eingeschriebenen Zahlen nur mit der Verhältniszahl

$$\frac{1^2}{4} = 3$$

zu multiplizieren brauchen, um die neuen Spannungszahlen zu erhalten:

$$\begin{array}{cccccccc} \pm 15,6 & | & \pm 33,48 & | & \pm 54,18 & | & \pm 77,64 & | & \pm 102,87 & | & \pm 130,71 & | & \pm 152,1 \\ & & \pm 150,87 & | & 108,0 & | & 0. & & & & & & \end{array}$$

Sämtliche für die Diagonalen eingeschriebenen Zahlen sind ebenfalls mit 3 zu multiplizieren, man erhält also für die neue Brücke:

$$\begin{array}{cccccccc} \pm 38,76 & | & \pm 37,77 & | & \pm 36,9 & | & \pm 36,21 & | & \pm 35,7 & | & \pm 33,21 & | & \pm 32,19 & | & \pm 29,4 \\ & & \pm 64,2 & | & \pm 111,87. & & & & & & & & & & \end{array}$$

Für die Vertikalstangen können die früher gefundenen (für die Hängebrücke mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmenden) Werte von $11_1, 11_2, \dots$ benutzt werden, welche den Einfluß der mobilen Last repräsentieren. Wenn man dieselben mit der Verhältniszahl $\frac{1^2}{4} = 3$ multipliziert, so erhält man:

für die Maxima

$$\begin{array}{cccccccc} + 47,46 & | & + 45,24 & | & + 42,6 & | & + 39,3 & | & + 35,52 & | & + 30,09 & | & + 25,14 \\ & & + 19,71 & | & + 25,2 & | & + 33,6 & | & + 6, & & & & \end{array}$$

für die Minima

$$\begin{array}{cccccccc} - 35,46 & | & - 33,24 & | & - 30,6 & | & - 27,3 & | & - 23,52 & | & - 18,09 & | & - 13,14 \\ & & - 7,71 & | & - 13,2 & | & - 21,6 & | & 0. & & & & \end{array}$$

Die der permanenten Last entsprechende Spannungszahl betrug für jeden Vertikalständer (mit Ausnahme des elften, welcher

nur die Hälfte davon bekommt) $+1,2$ und ist mit der Verhältniszahl

$$\frac{20}{2,4} = 8,33 \dots$$

zu multiplizieren. Für die neue Brücke ist also die der permanenten Last entsprechende Spannungszahl:

$$1,2 \cdot 8,33 \dots = +10$$

und, wenn man diese mit den oben gefundenen vereinigt, so erhält man folgende neue Spannungszahlen für die Vertikalstangen:

+ 57,46	+ 55,24	+ 52,6	+ 49,3	+ 45,52	+ 40,09	+ 35,14
- 25,46	- 23,24	- 20,6	- 17,3	- 13,52	- 8,09	- 3,14
+ 29,71	+ 35,2	+ 43,6	+ 11			
+ 2,29	- 3,2	- 11,6	+ 5			

Bei der Berechnung der neuen Spannungszahlen für die Bogenstücke bietet die Methode der Zerlegung der Spannungszahlen ebenfalls Vorzüge vor dem anderen Verfahren; denn der eine Teil, welcher der permanenten Last entspricht, läßt sich, da dieselbe gleichförmig über die Horizontalprojektion verteilt ist, einfach nach der Theorie der Kettenlinie (s. § 8) bestimmen. Den andern findet man durch Subtraktion des vorigen von der ganzen Spannungszahl. Die Resultate dieser Zerlegung der in Fig. 197 eingeschriebenen Zahlen sind folgende:

53,2	52,2	51,2	50,5	49,8	49,3	48,7	48,4	48,1	48
88,5	87,7	88,1	89,8	92,9	96,9	101,2	104,4	100,9	80

von denen die oberen der permanenten, die unteren der mobilen Last entsprechen.

Die ersteren sind mit der Verhältniszahl

$$\frac{20}{2,4} = 8,33 \dots$$

die unteren mit der Verhältniszahl

$$\frac{12}{4} = 3$$

zu multiplizieren, woraus sich folgende Zahlen ergeben:

443	434,5	427	421	415	410	406	403	401	400
265	263	264	269	279	291	304	313	303	240

deren Vereinigung die neuen Spannungszahlen für die Bogenstücke liefert:

708	697,5	691	690	694	701	710	716	704	640.
-----	-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

ACHTER ABSCHNITT.

§ 26.

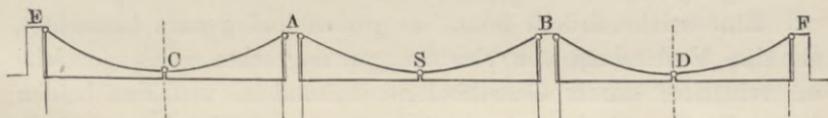
Hängebrücke von 120 m Spannweite der Hauptöffnung und je 60 m Spannweite der Nebenöffnungen.

Die Vergleichung der Bogenbrücken und Hängebrücken hinsichtlich des Materialaufwandes ergibt insofern für die letzteren ein ungünstiges Resultat, als bei ersteren die Befestigungspunkte tief liegen und durch den Horizontalschub gegen die Landseite hin gedrängt werden, während umgekehrt bei den Hängebrücken die Aufhängpunkte hoch liegen und überdies die Horizontalkräfte nach der Wasserseite hin die Pfeiler umzuwerfen streben — also nach derjenigen Seite hin, für welche ihr Stabilitätsmoment gerade am kleinsten sein würde.

Während also die Bogenbrücken — namentlich wo feste felsige Ufer als natürliche Landpfeiler benutzt werden können — einen verhältnismäßig geringen Materialaufwand für letztere erfordern, würde bei einer Hängebrücke dieser Aufwand eine übermäßige Größe erreichen, wenn man die Kette an den freistehenden Landpfeilern aufhängen wollte.

Weniger ungünstig für Hängebrücken fällt der Vergleich aus, wenn mehrere solche Brücken nebeneinander aufgehängt sind (s. Fig. 211). An den Mittelpfeilern *A* und *B* heben alsdann — bei

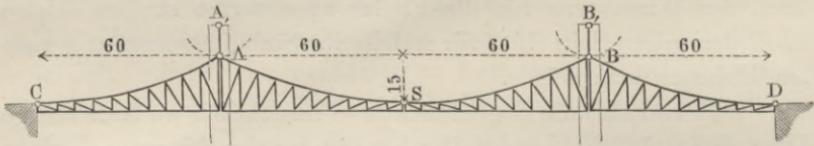
Fig. 211.



voller Belastung wenigstens — die Horizontalkräfte einander auf, nur bei den Landpfeilern *E* und *F* würde der Übelstand derselbe bleiben. In einer solchen Konstruktion würden bei voller Belastung sämtliche Horizontal- und Diagonalstangen in spannungslosem Zustande sich befinden, vorausgesetzt, daß die Ketten parabolische Form haben.

In letzterer Beziehung wird sich nichts ändern, wenn man die Hälften CE und DF ganz wegläßt und statt dessen die Punkte C und D befestigt. Es wird hierdurch der Vorteil erreicht, daß nun die Befestigungspunkte, welche dem Horizontalzuge widerstehen sollen, tiefer, also für die Stabilität der Landpfeiler günstiger zu liegen kommen. Wenn man überdies bei den Punkten A und B die Brücke an vertikalen Hängestangen aufhängt, welche in den Punkten A_1 und B_1 ihre Aufhängepunkte haben, so werden dadurch die Mittelpfeiler — auch bei einseitiger Belastung — von allem Horizontalzuge gänzlich befreit werden, weil alsdann in den Punkten A_1 und B_1 nur vertikal abwärts wirkende Kräfte auf die Pfeiler übertragen werden können (s. Fig. 212). Für die Hauptbrücke AB dienen die angesetzten

Fig. 212.



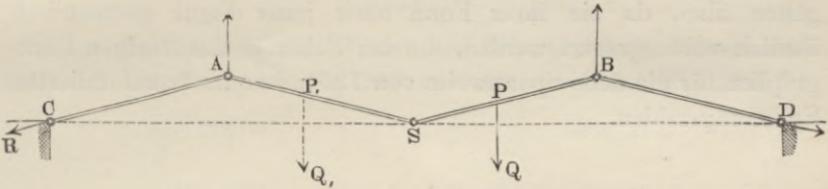
Hälften AC und BD als Spannketten, deren Material gleichzeitig für die Überbrückung der beiden Seitenöffnungen verwendet wird.

Was die Art der Aufhängung in den vier Punkten A, B, C, D betrifft, so ist die in Fig. 212 dargestellte hier nur vorläufig gewählt worden, um die Aufgabe zunächst in ihrer einfachsten, übersichtlichsten Form erscheinen zu lassen. Es wird sich später zeigen, daß die erwähnten Vorteile auch durch andere Art der Aufhängung erreicht werden können.

Eine solche Brücke kann, im großen und ganzen betrachtet, als eine Verbindung von vier Stangen angesehen werden, welche untereinander durch Gelenkbolzen verbunden, von den beiden festen Punkten C, D und außerdem in A und B durch vertikale Hängestangen getragen werden (s. Fig. 213). Betrachtet man diese Stangen zunächst als gewichtlos und untersucht, welche Wirkung durch ein einzelnes irgendwo aufgehängtes Gewicht Q in dem System hervorgebracht wird, so überzeugt man sich leicht davon, daß bei einer unbelasteten Stange die an einem ihrer Endpunkte wirkende Kraft immer mit der Richtung der Stange zu-

sammenfallen muß, weil sie sonst dieselbe um den anderen Endpunkt drehen würde. Ein Gewicht Q an der Stelle P kann daher

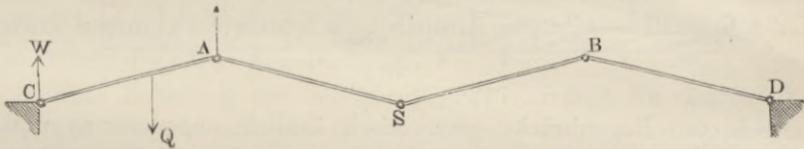
Fig. 213.



an dem Auflagerpunkte C nur einen Widerstand R hervorbringen, welcher mit der Richtung AC zusammenfällt; ein Gewicht Q_1 an der Stelle P_1 erzeugt daselbst ebenfalls einen Widerstand, der in die Richtung AC fällt.

Wenn dagegen irgendwo an der Stange AC ein Gewicht Q aufgehängt wird, so erzeugt dasselbe in dem Punkte C nur einen vertikalen Widerstand W (s. Fig. 214). Denn käme die geringste

Fig. 214.



horizontale Seitenkraft hinzu, so müßte auch in dem Punkte A und folglich auch in dem Punkte S ein Horizontalzug stattfinden. Es kann aber in dem Punkte S bei diesem Belastungszustande überhaupt kein Zug wirken, denn da beide Stangen AS und BS unbelastet sind, so müßte dieser Zug — der oben erwähnten Bedingung entsprechend — mit beiden Stangenrichtungen zugleich zusammenfallen, was unmöglich ist. Eine Belastung der Stange AC hat demnach durchaus keine Wirkung auf die drei anderen Stangen $ASBD$.

Es verhält sich also die Stange AC , wenn sie allein belastet wird, genau wie ein an beiden Enden unterstützter Balken, und die Stangen ASB , wenn sie belastet werden, befinden sich genau in demselben Zustande, wie wenn ihre Aufhängepunkte A und B feste Punkte wären.

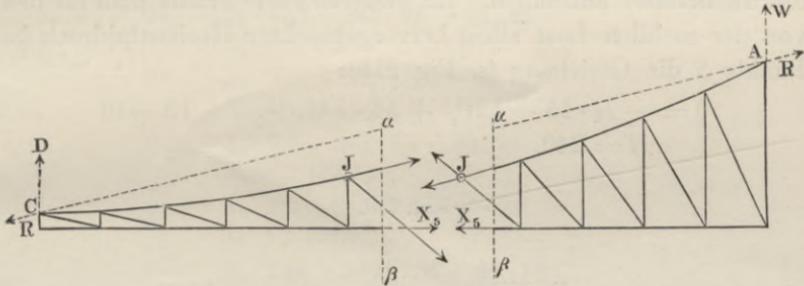
2) Eine Belastung des Stückes AC selbst erzeugt an den beiden Punkten A und C vertikale Gegendrücke.

Berechnung der Spannungszahlen X in den horizontalen Stangen.

Zur Bestimmung von X_5 ist der Schnitt $\alpha\beta$ zu führen und entweder für das Stück Fig. 216 oder für das Stück Fig. 217 die

Fig. 216.

Fig. 217.



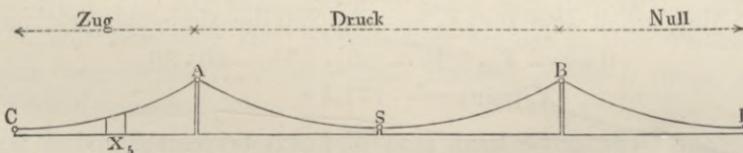
Momentengleichung in bezug auf den Drehpunkt J aufzustellen. Eine Belastung des Stückes Fig. 216 erzeugt für das Stück Fig. 217 einen Gegendruck W , welcher links drehend wirkt. X_5 dreht rechts herum, wird also positiv dadurch gemacht. Mithin gehört das Stück $C\alpha\beta$ zur Zugabteilung.

Eine Belastung des Stückes Fig. 217 erzeugt für das Stück Fig. 216 einen vertikalen Gegendruck D , welcher rechts dreht, X_5 dreht in dieser Figur links herum, wird also positiv dadurch gemacht. Mithin gehört auch das Stück $A\alpha\beta$ zur Zugabteilung.

Eine Belastung der Hauptbrücke erzeugt für das Stück Fig. 216 einen Gegendruck R , welcher links drehend wirkt, macht also X_5 negativ. Die ganze Hauptbrücke gehört also zur Druckabteilung.

Eine Belastung der anderen Nebendücke BD übt gar keine

Fig. 218.

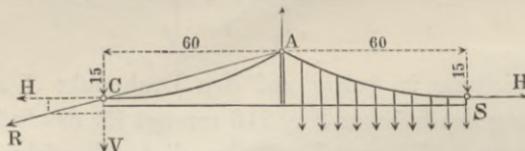


Wirkung auf die Abteilung AC aus; es ist folglich die Abteilung BD mit der Überschrift Null zu bezeichnen (s. Fig. 218).

Da bei gleichförmig über die ganze Brücke verteilter Belastung die Spannungen sämtlicher horizontalen Stangen Null werden, so kann das Eigengewicht ganz unberücksichtigt bleiben und muß die Belastung der Zugabteilung gerade so viel positive als die der Druckabteilung negative Spannung in dem Stück X_5 erzeugen. Es braucht also nur einer von den beiden Werten X_5 (max) und X_5 (min) berechnet zu werden, und man kann nach Belieben entweder die ganze Hauptbrücke oder die ganze Nebenbrücke belastet annehmen. Im ersteren Falle erhält man für den von der mobilen Last allein hervorgebrachten Horizontaldruck im Punkte S die Gleichung (s. Fig. 219):

$$0 = -H \cdot 15 + 12\left(\frac{60}{2} + 54 + 48 + \dots + 12 + 6\right) \\ H = 240.$$

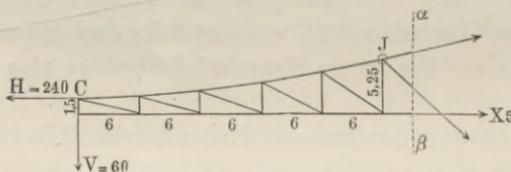
Fig. 219.



Genau so viel beträgt die horizontale Seitenkraft von R . Die vertikale Seitenkraft von R steht zu der horizontalen in dem Verhältnis 15:60 oder 1:4; es ist also:

$$V = 60.$$

Fig. 220.



Man erhält also für X_5 aus Fig. 220 die Momentengleichung:

$$0 = -X_5 \cdot 5,25 + 240 \cdot 3,75 - 60 \cdot 30 \\ X_5 \text{ (min)} = -171,4 \text{ t.}$$

[Zur Gegenprobe kann man X_5 (max) berechnen, indem man das Stück AC allein belastet annimmt und dasselbe als Balkenbrücke behandelt. Man erhält dann die Gleichung:

$$0 = -X_5 \cdot 5,25 + 12 \left[\left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{5}{10} \right) 30 + \left(\frac{6}{10} \cdot 30 - 6 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{7}{10} \cdot 30 - 12 \right) + \left(\frac{8}{10} \cdot 30 - 18 \right) + \left(\frac{9}{10} \cdot 30 - 24 \right) \right] \\ X_5 (\text{max}) = + 171,4 \text{ t,}$$

durch welche die Richtigkeit dieser Rechnungsweise bestätigt wird.]

Für die anderen horizontalen Stangen erhält man in ähnlicher Weise die nachfolgenden Gleichungen:

$$0 = -X_1 \cdot 13,65 + 240 \cdot 12,15 - 60 \cdot 54 \\ X_1 = \pm 23,7 \text{ t.}$$

$$0 = -X_2 \cdot 11,1 + 240 \cdot 9,6 - 60 \cdot 48 \\ X_2 = \pm 51,9 \text{ t.}$$

$$0 = -X_3 \cdot 8,85 + 240 \cdot 7,35 - 60 \cdot 42 \\ X_3 = \pm 85,4 \text{ t.}$$

$$0 = -X_4 \cdot 6,9 + 240 \cdot 5,4 - 60 \cdot 36 \\ X_4 = \pm 125,2 \text{ t.}$$

$$0 = -X_6 \cdot 3,9 + 240 \cdot 2,4 - 60 \cdot 24 \\ X_6 = \pm 221,5 \text{ t.}$$

$$0 = -X_7 \cdot 2,85 + 240 \cdot 1,35 - 60 \cdot 18 \\ X_7 = \pm 265,3 \text{ t.}$$

$$0 = -X_8 \cdot 2,1 + 240 \cdot 0,6 - 60 \cdot 12 \\ X_8 = \pm 274,3 \text{ t.}$$

$$0 = -X_9 \cdot 1,65 + 240 \cdot 0,15 - 60 \cdot 6 \\ X_9 = \pm 196,4 \text{ t.}$$

$$0 = -X_{10} \cdot 1,5 \\ X_{10} = 0.$$

Berechnung der Spannungszahlen Y für die Diagonalen.

Auch hier kann die permanente Last unberücksichtigt bleiben und braucht von den beiden extremen Werten nur einer berechnet zu werden, weil Maximum und Minimum zusammen gleich Null sind.

Zur Bestimmung von Y_5 ist der Schnitt $\alpha\beta$ zu führen und die Momentengleichung entweder für das Stück Fig. 221 oder für das Stück Fig. 222 aufzustellen in bezug auf den Drehpunkt L .

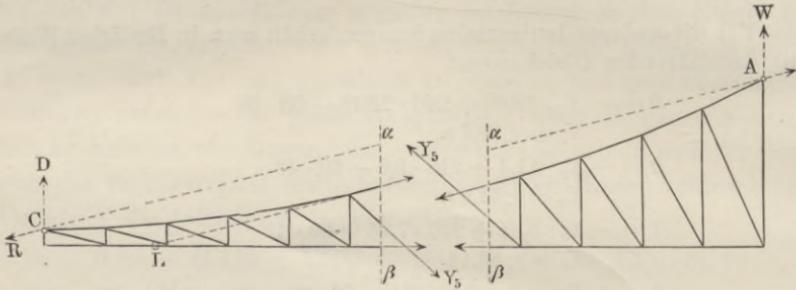
Eine Belastung der Hauptbrücke erzeugt in dem Punkte C einen Gegendruck R , welcher links um den Punkt L dreht, also Y_5 positiv macht.

Eine Belastung des Stückes $A\alpha\beta$ erzeugt in dem Punkte C einen vertikal aufwärtsgerichteten Gegendruck D , welcher in gleichem Sinne mit Y_5 dreht, also Y_5 negativ macht.

Eine Belastung des Stückes $C \alpha \beta$ erzeugt in dem Punkte A (Fig. 222) einen Gegendruck W , welcher mit Y_5 gleiche Drehungs-

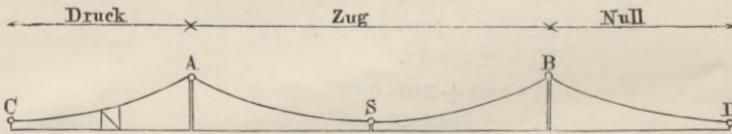
Fig. 221.

Fig. 222.



richtung hat, also Y_5 negativ macht. Mithin bilden sich die in Fig. 223 angegebenen Belastungsabteilungen und man hat, um

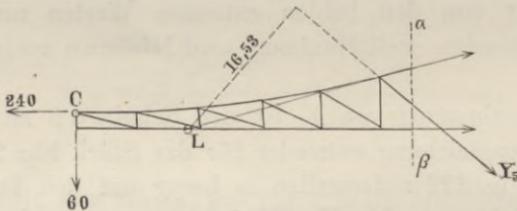
Fig. 223.



Y_5 (max) zu bestimmen, die Hauptbrücke belastet anzunehmen, wobei in dem Punkte C wiederum die Gegendrücke entstehen:

$$H = 240; \quad V = 60.$$

Fig. 224.



Man erhält also aus Fig. 224 die Momentengleichung:

$$0 = Y_5 \cdot 16,53 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 10,92$$

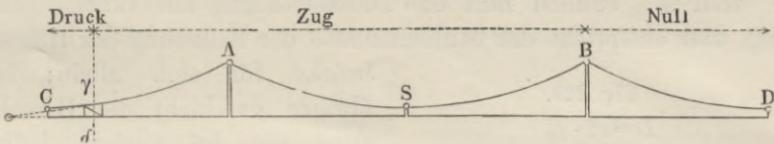
$$Y_5 = \pm 61,4 \text{ t.}$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich für die übrigen Y folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 0 &= Y_1 \cdot 31,8 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 25,26 \\
 Y_1 &= \pm 59,0 \text{ t.} \\
 0 &= Y_2 \cdot 28,26 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 21,88 \\
 Y_2 &= \pm 59,2 \text{ t.} \\
 0 &= Y_3 \cdot 24,48 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 18,39 \\
 Y_3 &= \pm 59,8 \text{ t.} \\
 0 &= Y_4 \cdot 20,5 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 14,77 \\
 Y_4 &= \pm 60,8 \text{ t.} \\
 0 &= Y_6 \cdot 12,72 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 6,66 \dots \\
 Y_6 &= \pm 59,7 \text{ t.} \\
 0 &= Y_7 \cdot 9,58 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 1,713 \\
 Y_7 &= \pm 48,3 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

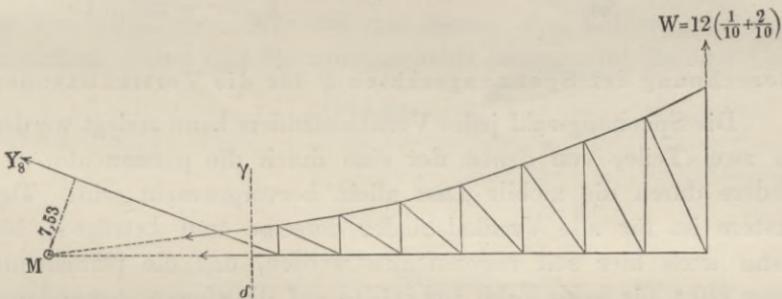
Für Y_8 kommt der Drehpunkt links von dem Punkte C zu liegen; infolgedessen erhält der in dem Punkte C erzeugte vertikale Gegendruck D hier die entgegengesetzte Drehungsrichtung und die Belastungsabteilungen bilden sich daher — abweichend von den vorhergehenden Fällen — in der Weise, daß die Zugabteilung über den Punkt A hinaus bis an die Schnittlinie $\gamma \delta$

Fig. 225.



sich erstreckt, die letztere also zugleich die Belastungsscheide bildet (s. Fig. 225). Auch ist hier das Minimum einfacher zu be-

Fig. 226.



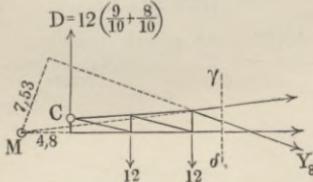
rechnen, für welches aus Fig. 226 (oder Fig. 227) die Momentengleichung sich ergibt:

$$\begin{aligned}
 0 &= - Y_8 \cdot 7,53 - 12 \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} \right) 64,8 \\
 Y_8 &= \pm 31 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Für Y_9 fällt der Drehpunkt noch weiter links, so daß nun auch die durch Belastung der Hauptbrücke entstehende Kraft R

die entgegengesetzte Drehungsrichtung erhält und die Hauptbrücke dadurch zur Druckabteilung wird (s. Fig. 228). Auch hier ist das Minimum am leichtesten zu berechnen, für welches aus Fig. 229 die Momentengleichung sich ergibt:

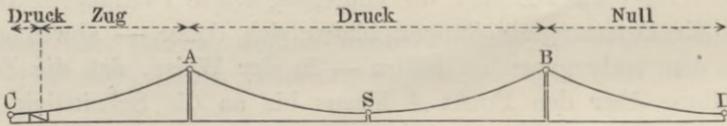
Fig. 227.



$$0 = Y_9 \cdot 7,41 - 240 \cdot 1,5 + 60 \cdot 16 + 12(22 - \frac{9}{10} \cdot 16)$$

$$Y_9 = \pm 93,3 \text{ t.}$$

Fig. 228.

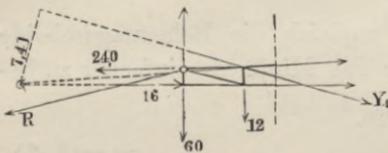


Für Y_{10} endlich fällt die Druckabteilung zur Linken ganz weg, und entspricht das Minimum also der Belastung der Hauptbrücke für sich allein; im

übrigen geschieht die Berechnung wie im vorigen Falle. Man erhält die Gleichung:

Fig. 229.

$$D = 12 \cdot \frac{9}{10}$$



$$0 = Y_{10} \cdot 15,97 - 240 \cdot 1,5$$

$$+ 60 \cdot 60$$

$$Y_{10} = \pm 202,9 \text{ t.}$$

Berechnung der Spannungszahlen U für die Vertikalständler.

Die Spannungszahl jedes Vertikalständlers kann zerlegt werden in zwei Teile, von denen der eine durch die permanente, der andere durch die mobile Last allein hervorgebracht wird. Der erstere ist für alle Vertikalständler derselbe und beträgt $+10$; denn auch hier soll angenommen werden, daß die permanente Last (20 t für jedes Feld) zur Hälfte auf die oberen, zur anderen Hälfte auf die unteren Knotenpunkte sich verteilt.

Für den anderen Teil, der (wie in § 22) mit ll bezeichnet werden soll, findet wie dort die Beziehung statt:

$$ll(\max) + ll(\min) = +12.$$

Denn bei voller Belastung der ganzen Brücke bringt die mobile Last in jedem Vertikalständer eine Zugspannung von 12 t hervor (weil dieselbe an den unteren Knotenpunkten angreift) und diese Wirkung setzt sich zusammen aus den Wirkungen aller derjenigen Belastungen, welche Zugspannung, und aus den Wirkungen aller derjenigen, welche Druckspannung in dem Vertikalständer erzeugen. Man braucht also nur einen der beiden Werte, z. B. $ll(\min)$ zu berechnen und findet den anderen dann aus der Gleichung:

$$ll(\max) = +12 - ll(\min).$$

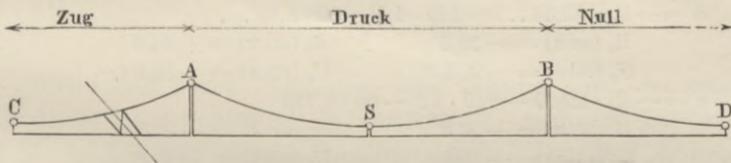
Hierauf erhält man dann die ganze Spannungszahl des Vertikalständers, indem man die permanente Spannungszahl hinzufügt, also:

$$U(\max) = ll(\max) + 10$$

$$U(\min) = ll(\min) + 10.$$

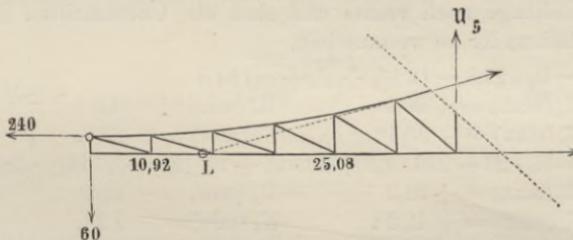
Die Drehpunkte für die Spannungen der Vertikalständer sind dieselben wie für die Diagonalen; es gelten daher im allgemeinen die Belastungsabteilungen für Y , nachdem bei ihnen die Überschriften „Zug“ und „Druck“ miteinander vertauscht sind, auch für

Fig. 230.



die Vertikalständer. Nur bei den letzten drei Feldern, wo die Schnittlinie selbst eine Belastungsscheide bildet, wird dieselbe für

Fig. 231.



die Vertikalständer um eine Feldlänge nach rechts verschoben wegen schräger Lage der Schnittlinie.

So erhält man z. B. für U_5 die in Fig. 230 angegebenen Belastungsabteilungen und aus Fig. 231 die Momentengleichung:

$$0 = -U_5 \cdot 25,08 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 10,92$$

$$U_5 (\text{min}) = -40,5.$$

Hieraus ergibt sich nach den oben angegebenen Beziehungen:

$$U_5 (\text{max}) = +12 - (-40,5) = +52,5 \text{ t.}$$

$$U_5 (\text{max}) = +52,5 + 10 = +62,5 \text{ t.}$$

$$U_5 (\text{min}) = -40,5 + 10 = -30,5 \text{ t.}$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die übrigen Vertikalstände folgende Gleichungen:

$$0 = -U_1 \cdot 34,74 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 25,26$$

$$U_1 (\text{min}) = -54 \quad U_1 (\text{max}) = +66$$

$$U_1 (\text{min}) = -44 \text{ t} \quad U_1 (\text{max}) = +76 \text{ t.}$$

$$0 = -U_2 \cdot 32,12 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 21,88$$

$$U_2 (\text{min}) = -52,1 \quad U_2 (\text{max}) = +64,1$$

$$U_2 (\text{min}) = -42,1 \text{ t} \quad U_2 (\text{max}) = +74,1 \text{ t.}$$

$$0 = -U_3 \cdot 29,61 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 18,39$$

$$U_3 (\text{min}) = -49,5 \quad U_3 (\text{max}) = +61,5$$

$$U_3 (\text{min}) = -39,5 \text{ t} \quad U_3 (\text{max}) = +71,5 \text{ t.}$$

$$0 = -U_4 \cdot 27,23 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 14,77$$

$$U_4 (\text{min}) = -45,8 \quad U_4 (\text{max}) = +57,8$$

$$U_4 (\text{min}) = -35,8 \text{ t} \quad U_4 (\text{max}) = +67,8 \text{ t.}$$

$$0 = -U_6 \cdot 23,33 \dots - 240 \cdot 1,5 - 30 \cdot 6,66 \dots$$

$$U_6 (\text{min}) = -32,6 \quad U_6 (\text{max}) = +44,6$$

$$U_6 (\text{min}) = -22,6 \text{ t} \quad U_6 (\text{max}) = +54,6 \text{ t.}$$

$$0 = -U_7 \cdot 22,29 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 1,713$$

$$U_7 (\text{min}) = -20,8 \quad U_7 (\text{max}) = +32,8$$

$$U_7 (\text{min}) = -10,8 \text{ t} \quad U_7 (\text{max}) = +42,8 \text{ t.}$$

Für die nun folgenden Vertikalstände ist allemal die Gleichung für U (max) aufgestellt, und U (min) daraus abgeleitet. Die Belastungsabteilungen bilden sich wie bei den Diagonalen derselben Felder, nur rückt wegen schräger Lage der Schnittlinie die eine Belastungsscheide um eine Feldlänge nach rechts und sind die Überschriften „Zug“ und „Druck“ miteinander zu vertauschen.

$$0 = -U_8 \cdot 22,8 - 12 \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \right) 64,8$$

$$U_8 (\text{max}) = +20,5 \quad U_8 (\text{min}) = -8,5$$

$$U_8 (\text{max}) = +30,5 \text{ t} \quad U_8 (\text{min}) = +1,5 \text{ t.}$$

$$0 = -U_9 \cdot 28 - 240 \cdot 1,5 + 60 \cdot 16 + 12 \left[\left(22 - \frac{9}{10} \cdot 16 \right) + \left(28 - \frac{8}{10} \cdot 16 \right) \right]$$

$$U_9 (\text{max}) = +31,2 \quad U_9 (\text{min}) = -19,2$$

$$U_9 (\text{max}) = +41,2 \text{ t} \quad U_9 (\text{min}) = -9,2 \text{ t.}$$

$$0 = -U_{10} \cdot 66 - 240 \cdot 1,5 + 60 \cdot 60 + 12 \left(66 - \frac{9}{10} \cdot 60 \right)$$

$$U_{10} (\text{max}) = +51,3 \quad U_{10} (\text{min}) = -39,3$$

$$U_{10} (\text{max}) = +61,3 \text{ t} \quad U_{10} (\text{min}) = -29,3 \text{ t.}$$

In dem elften Vertikalständer endlich kann nur durch die unten angehängte Last eine Spannung hervorgebracht werden. Diese beträgt im Maximum 6 t an mobiler und $\frac{1}{3}$ t an permanenter Last, folglich ist:

$$U_{11} (\text{max}) = + 11 \text{ t.}$$

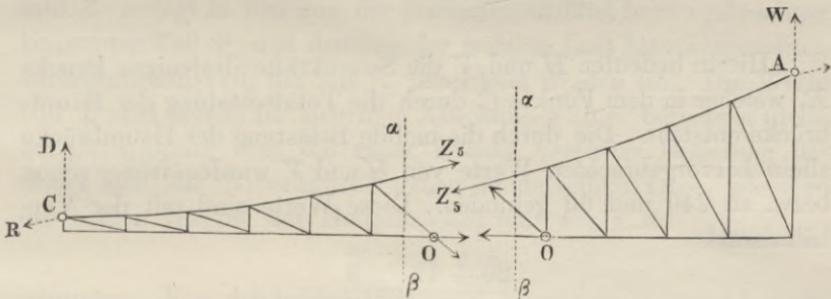
Berechnung der Spannungszahlen Z für die Bogenstücke.

Die drei Kräfte, von deren Drehungsrichtungen das Vorzeichen von Z_5 abhängt, sind R , D und W . Erstere entsteht durch Belastung der Hauptbrücke, letztere beiden werden durch Belastung der Nebenbrücke hervorgebracht.

Aus Fig. 232 erkennt man, daß R und Z_5 entgegengesetzte Drehungsrichtungen in bezug auf den Drehpunkt O haben, daß also eine Belastung der Hauptbrücke Z_5 positiv macht.

Fig. 232.

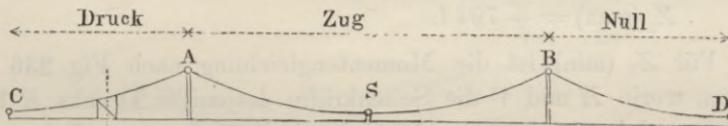
Fig. 233.



Wenn das Stück $A\alpha\beta$ (Fig. 233) belastet wird, so entsteht dadurch in dem Punkte C ein vertikaler Gegendruck D , welcher mit Z_5 in Fig. 232 gleiche Drehungsrichtung hat, also Z_5 negativ macht.

Wenn das Stück $C\alpha\beta$ (Fig. 232) belastet wird, so entsteht dadurch in dem Punkte A ein vertikaler Gegendruck W , welcher mit Z_5 in Fig. 233 gleiche Drehungsrichtung hat, also Z_5 negativ macht.

Fig. 234.



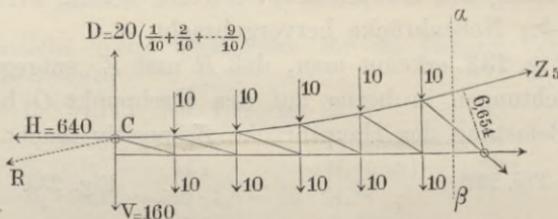
Die größte Zugspannung tritt also ein, wenn die Hauptbrücke, die größte Druckspannung, wenn die Nebenbrücke allein belastet ist (s. Fig. 234).

Um Z_5 (max) und Z_5 (min) zu bestimmen, hat man die Wahl zwischen folgenden zwei Wegen:

Einmal kann man unter Mitberücksichtigung der permanenten Last die direkte Momentengleichung für Z_5 aufstellen und hat dann für Z_5 (max) die Gleichung aus Fig. 235 zu bilden:

$$0 = Z_5 \cdot 6,654 - H \cdot 1,5 - V \cdot 36 + D \cdot 36 - 20(6 + 12 + \dots 30).$$

Fig. 235.



Hierin bedeuten H und V die Seitenkräfte desjenigen Drucks R , welcher in dem Punkte C durch die Totalbelastung der Hauptbrücke entsteht. Die durch die mobile Belastung der Hauptbrücke allein hervorgebrachten Werte von H und V wurden früher schon bezw. zu 240 und 60 gefunden. Diese Werte sind mit der Verhältniszahl

$$\frac{20 + 12}{12} = \frac{8}{3}$$

zu multiplizieren, um die hier zu substituierenden Werte zu ergeben. Ferner bezeichnet D den in dem Punkte C durch die permanente Belastung der Nebenbrücke erzeugten vertikalen Gegendruck.

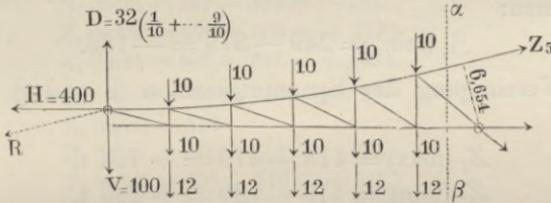
Durch Substitution der in der Figur eingeschriebenen Zahlenwerte erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= Z_5 \cdot 6,654 - 640 \cdot 1,5 - 160 \cdot 36 + 20 \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{9}{10} \right) \cdot 36 \\ &\quad - 20(6 + 12 + \dots 30) \\ Z_5 \text{ (max)} &= + 794 \text{ t.} \end{aligned}$$

Für Z_5 (min) ist die Momentengleichung nach Fig. 236 zu bilden, worin H und V die Seitenkräfte desjenigen Drucks R bedeuten, welcher in dem Punkte C durch die permanente Belastung der Hauptbrücke allein hervorgebracht wird, und D den durch die totale Belastung der Nebenbrücke in dem Punkte C hervorgebrachten vertikalen Gegendruck bezeichnet. Man erhält also:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{3} \cdot 640 = 400 \\
 V &= \frac{2}{3} \cdot 160 = 100 \\
 0 &= Z_5 \cdot 6,654 - 400 \cdot 1,5 - 100 \cdot 36 + 32 \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{9}{10} \right) 36 \\
 &\quad - 32 (6 + 12 + \dots + 30) \\
 Z_5 (\text{min}) &= + 285 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Fig. 236.



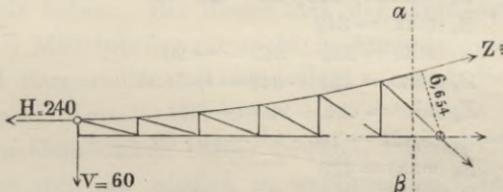
Der zweite Weg besteht darin, daß man zunächst die Spannungszahl Z_5 zerlegt in den von der permanenten Last hervorgebrachten konstanten Teil \mathfrak{P}_5 und den von der mobilen Last hervorgebrachten veränderlichen Teil, der mit \mathfrak{Z}_5 bezeichnet werden soll. Die Werte von \mathfrak{P} sind bereits im siebenten Abschnitt § 25 c. berechnet (denn bei gleichförmig über die ganze Brücke verteilter Belastung befindet sich die Nebenbrücke genau in derselben Lage, wie eine der beiden Hälften der Hauptbrücke) und war z. B.

$$\mathfrak{P}_5 = + 415$$

gefunden. Von den beiden Werten $\mathfrak{Z}_5 (\text{max})$ und $\mathfrak{Z}_5 (\text{min})$ braucht nur einer berechnet zu werden, denn beide zusammen müssen so viel betragen als die Spannungszahl, welche die über die ganze Brücke gleichförmig verteilte mobile Last hervorbringt, und welche man erhält, wenn man \mathfrak{P}_5 mit der Verhältniszahl $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ multipliziert. Demnach ist:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{Z}_5 (\text{max}) + \mathfrak{Z}_5 (\text{min}) &= \frac{1}{3} \cdot 415 = + 249 \\
 \mathfrak{Z}_5 (\text{min}) &= 249 - \mathfrak{Z}_5 (\text{max}).
 \end{aligned}$$

Fig. 237.



Hierin ist $\mathfrak{Z}_5 (\text{max})$ auf die leichtere Weise zu bestimmen, indem man nur aus Fig. 237 die Momentengleichung zu bilden

braucht (mit Substitution der früher bereits gefundenen, durch die mobile Belastung der Hauptbrücke hervorgebrachten Werte von H und V):

$$0 = \mathfrak{Z}_5 \cdot 6,654 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 36$$

$$\mathfrak{Z}_5 (\max) = 379.$$

Wenn man diesen Wert in die obige Gleichung substituiert, so erhält man:

$$\mathfrak{Z}_5 (\min) = 249 - 379 = -130.$$

Die Vereinigung der Spannungszahlen \mathfrak{B} und \mathfrak{Z} ergibt die Werte:

$$Z_5 (\max) = 415 + 379 = + 794 \text{ t.}$$

$$Z_5 (\min) = 415 - 130 = + 285 \text{ t.}$$

Beide Wege führen, wie man sieht, zu denselben Resultaten, der letztere jedoch auf einfachere Weise. Es soll deshalb bei den folgenden Rechnungen dieser letztere Weg eingeschlagen werden.

Man erhält dann für die übrigen Bogenstücke die folgenden Gleichungen:

$$0 = \mathfrak{Z}_1 \cdot 14,904 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 60$$

$$\mathfrak{Z}_1 (\max) = + 265,5$$

$$\mathfrak{Z}_1 (\min) = 265,5 - 265,5 = 0$$

$$Z_1 (\max) = 443 + 265,5 = + 708,5 \text{ t}$$

$$Z_1 (\min) = 443 + 0 = + 443 \text{ t.}$$

$$0 = \mathfrak{Z}_2 \cdot 12,56 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 54$$

$$\mathfrak{Z}_2 (\max) = 286,5$$

$$\mathfrak{Z}_2 (\min) = 261 - 286,5 = - 25,5$$

$$Z_2 (\max) = 434,5 + 286,5 = + 721 \text{ t}$$

$$Z_2 (\min) = 434,5 - 25,5 = + 409 \text{ t.}$$

$$0 = \mathfrak{Z}_3 \cdot 10,39 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 48$$

$$\mathfrak{Z}_3 (\max) = 312$$

$$\mathfrak{Z}_3 (\min) = 256 - 312 = - 56$$

$$Z_3 (\max) = 427 + 312 = + 739 \text{ t}$$

$$Z_3 (\min) = 427 - 56 = + 371 \text{ t.}$$

$$0 = \mathfrak{Z}_4 \cdot 8,415 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 42$$

$$\mathfrak{Z}_4 (\max) = 342$$

$$\mathfrak{Z}_4 (\min) = 252 - 342 = - 90$$

$$Z_4 (\max) = 421 + 342 = + 763 \text{ t}$$

$$Z_4 (\min) = 421 - 90 = + 331 \text{ t.}$$

$$0 = \mathfrak{Z}_6 \cdot 5,121 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 30$$

$$\mathfrak{Z}_6 (\max) = 422$$

$$\mathfrak{Z}_6 (\min) = 246 - 422 = - 176$$

$$Z_6 (\max) = 410 + 422 = + 832 \text{ t}$$

$$Z_6 (\min) = 410 - 176 = + 234 \text{ t.}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathfrak{S}_7 \cdot 3,84 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 24 \\
 \mathfrak{S}_7 (\text{max}) &= 469 \\
 \mathfrak{S}_7 (\text{min}) &= 244 - 469 = - 225 \\
 Z_7 (\text{max}) &= 406 + 469 = + 875 \text{ t} \\
 Z_7 (\text{min}) &= 406 - 225 = + 181 \text{ t} \\
 \\
 0 &= \mathfrak{S}_8 \cdot 2,83 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 18 \\
 \mathfrak{S}_8 (\text{max}) &= 509 \\
 \mathfrak{S}_8 (\text{min}) &= 242 - 509 = - 267 \\
 Z_8 (\text{max}) &= 403 + 509 = + 912 \text{ t} \\
 Z_8 (\text{min}) &= 403 - 267 = + 136 \text{ t} \\
 \\
 0 &= \mathfrak{S}_9 \cdot 2,094 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 12 \\
 \mathfrak{S}_9 (\text{max}) &= 516 \\
 \mathfrak{S}_9 (\text{min}) &= 241 - 516 = - 275 \\
 Z_9 (\text{max}) &= 401 + 516 = + 917 \text{ t} \\
 Z_9 (\text{min}) &= 401 - 275 = + 126 \text{ t} \\
 \\
 0 &= \mathfrak{S}_{10} \cdot 1,649 - 240 \cdot 1,5 - 60 \cdot 6 \\
 \mathfrak{S}_{10} (\text{max}) &= 437 \\
 \mathfrak{S}_{10} (\text{min}) &= 240 - 437 = - 197 \\
 Z_{10} (\text{max}) &= 400 + 437 = + 837 \text{ t} \\
 Z_{10} (\text{min}) &= 400 - 197 = + 203 \text{ t}
 \end{aligned}$$

Die Resultate der ganzen Rechnung sind in Fig. 238 zusammengestellt. Der besseren Übersicht wegen sind auch noch die im siebenten Abschnitt § 21 c. aus Fig. 197 abgeleiteten Spannungszahlen für die Hauptbrücke in Fig. 239 daneben gestellt.

§ 27.]

Stabilität der Mittelpfeiler.

Die eben gefundenen Spannungszahlen wurden unter der Voraussetzung berechnet, daß die vier Brückenabteilungen so aufgehängt seien, wie in Fig. 212 dargestellt ist. Eine der Grundbedingungen ihrer Gültigkeit ist diejenige, daß in den Punkten *A* und *B* nur Vertikalkräfte gegen die Brücke ausgeübt werden, daß also diese Punkte in horizontaler Richtung vollkommen freie Beweglichkeit haben. Bei dieser Art der Aufhängung wird die Stabilität der Mittelpfeiler gar nicht in Anspruch genommen. Die in Fig. 212 dargestellte Art ist indessen nicht die einzige, mit welcher dieser Vorteil verbunden ist; sie wurde vielmehr nur der größeren Deutlichkeit halber gewählt, um die Grundlagen der Rechnung so weit als möglich zu vereinfachen. Derselbe Zweck kann auch durch andere noch vorteilhaftere Aufhängungsarten erreicht werden.

So z. B. können die festen Drehpunkte A_1 und B_1 für die vertikalen Stangen AA_1 und BB_1 , an deren Endpunkten die Brücke hängt, auch nach unten hin verlegt werden, ohne daß die gemachten Voraussetzungen aufhören, erfüllt zu sein (s. Fig 240).

Auch ist es nicht nötig, daß an der Stelle A die beiden Brückenabteilungen AC und AS an einem und demselben Punkte aufgehängt sind, man kann vielmehr, um an Spannweite zu gewinnen, ihre beiden Aufhängepunkte trennen und zwei Punkte $a_1 a_2$, welche um die Pfeilerbreite voneinander entfernt sind, dazu wählen. Die horizontale Beweglichkeit dieser beiden Punkte läßt sich dann auf verschiedene Arten herstellen. Einmal dadurch,

Fig. 240.

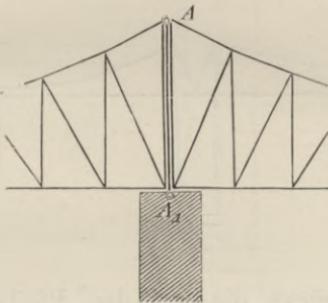
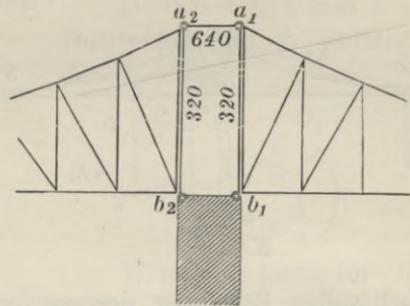


Fig. 241.



daß man aus den drei Stangen $a_1 a_2$, $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ ein verschiebbares Parallelogramm bildet, dessen vierte feste Seite $b_1 b_2$ durch den Kopf des Pfeilers dargestellt wird (s. Fig. 241). Die Spannungszahlen dieser drei Stangen ergeben sich unmittelbar aus den früheren Rechnungen und sind in Fig. 241 eingeschrieben.

Fig. 242.

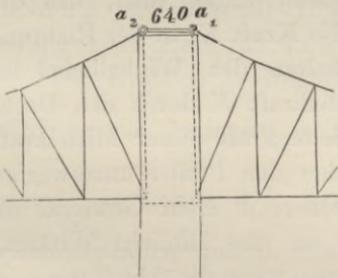
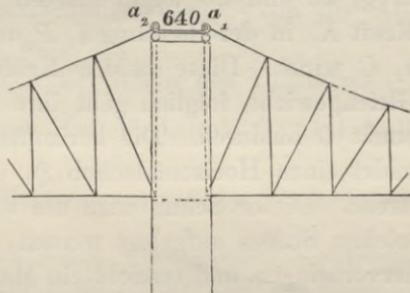


Fig. 243.

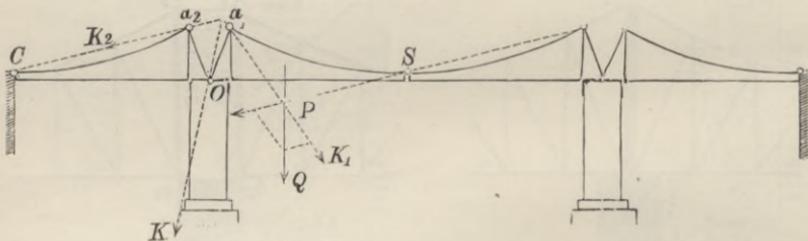


Eine andere solche Aufhängungsart bestände darin, daß man die beiden Brückenabteilungen an den Achsen zweier Friktions-

rollen a_1 und a_2 aufhänge, denen die horizontale Oberfläche des Pfeilers als Unterlage und Rollbahn diene (s. Fig. 242); oder darin, daß man die Punkte a_1 und a_2 an einer Platte befestigte, deren horizontale Beweglichkeit durch untergelegte Walzen gesichert würde (s. Fig. 243). In allen diesen Fällen bleiben die Voraussetzungen erfüllt und behalten die oben berechneten Spannungszahlen ihre Gültigkeit.

Ungültig dagegen würden die gefundenen Zahlen und aufgegeben würde der in betreff der Pfeilerstabilität zu erstrebende Vorteil, wenn man die Endpunkte eines Winkelhebels als Aufhängepunkte wählte (s. Fig. 244). In diesem Falle würde zwar

Fig. 244.



bei voller Belastung der ganzen Brücke die auf den Pfeiler wirkende Kraft eine vertikale Richtung haben, nicht aber bei einseitiger Belastung.

Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man vorläufig untersucht, welche Wirkung durch das Auflegen eines einzelnen Gewichts Q auf die gewichtlos gedachte Brücke an dem festen Drehpunkte O des Winkelhebels hervorgebracht wird. Nach der in §§ 22 und 26 angewendeten Methode findet man, daß die Kraft K_1 in der Richtung $a_1 P$ und die Kraft K_2 in der Richtung $a_2 C$ wirkt. Diese beiden Kräfte halten den Winkelhebel im Gleichgewicht, folglich geht ihre Mittelkraft K durch den Drehpunkt O hindurch. Die horizontale Seitenkraft dieser Mittelkraft bildet einen Horizontalschub S , welcher den Pfeiler umzuwerfen strebt. Dieser Schub wird um so größer, je mehr Gewichte an solchen Stellen aufgelegt werden, wo sie eine ähnliche Wirkung hervorbringen, und erreicht ein Maximum, wenn die Abteilung $a_1 S$ ganz belastet ist. In diesem Falle wäre

$$Q = 120 \text{ t}$$

zu setzen, und man erhalte die Gleichungen (s. Fig. 245):

$$H_1 = 120; V_1 = 90$$

$$0 = H_1 \cdot a + V_1 \frac{b}{2} - H_2 a - V_2 \cdot \frac{b}{2}$$

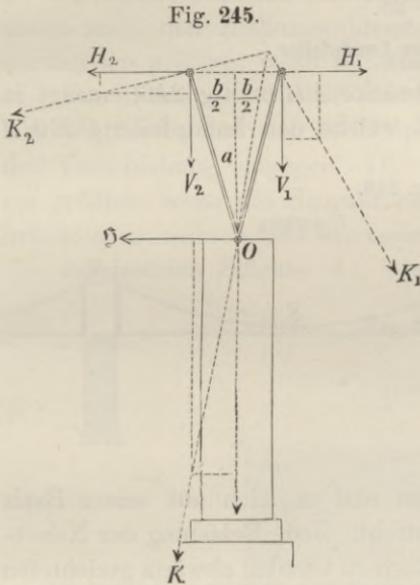


Fig. 245.

oder, wenn man in letzterer Gleichung $V_1 = \frac{3}{4} H_1$ und $V_2 = \frac{1}{4} H_2$ substituiert und die Gleichung für H_2 auflöst:

$$H_2 = H_1 \left(\frac{8 + 3 \frac{b}{a}}{8 + \frac{b}{a}} \right).$$

Hieraus erhält man den Horizontalschub ξ mittelst der Gleichung:

$$\begin{aligned} \xi &= H_2 - H_1 \\ &= 2 H_1 \left(\frac{\frac{b}{a}}{8 + \frac{b}{a}} \right). \end{aligned}$$

Wenn man hierin für H_1 seinen Wert 120 substituiert

und beispielsweise $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ annimmt, so erhält man:

$$2 \cdot \xi = 2 \cdot 14,1 = 28,2 \text{ t}$$

als den von beiden Tragwänden zusammen hervorgebrachten Horizontalschub.

Ungefähr ebenso groß würde der nach der entgegengesetzten Richtung hin wirkende Horizontalschub werden, wenn die Abteilung $a_2 C$ allein die belastete wäre.

Die Kraft ξ — folglich auch die Gefahr des Umsturzes — wird um so geringer, je kleiner das Verhältnis $\frac{b}{a}$, und Null,

wenn $\frac{b}{a} = 0$ wird, d. h. wenn die beiden Arme des Winkelhebels zusammenfallen und in einen einfachen Vertikalhebel übergehen. Aus diesem Grunde ist die letztere Konstruktion oder die dasselbe leistende in Fig. 241 dargestellte vorzuziehen. Der Vertikaldruck auf den Mittelpfeiler ist bei voller Belastung gleich dem Gewichte

der beiden angrenzenden Brückenabteilungen AS und AC , beträgt also in allen obigen Fällen im Maximum:

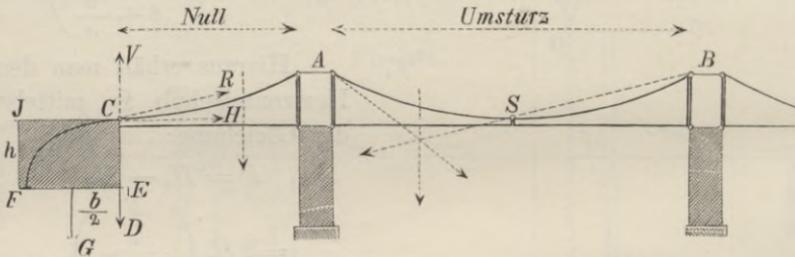
$$2 \cdot (32 \cdot 10 + 32 \cdot 10) = 1280 \text{ t.}$$

§ 28.

Stabilität der Landpfeiler.

Jede Belastung der Hauptbrücke AB (s. Fig. 246) erzeugt in dem Punkte C eine Zugkraft R , welche den Landpfeiler $CE F J$

Fig. 246.



um die Innenkante E zu drehen und zugleich auf seiner Basis EF nach innen zu verschieben strebt. Jede Belastung der Nebenbrücke hingegen erzeugt daselbst einen vertikal abwärts gerichteten Druck D , welcher in bezug auf Umkippen gar keine Wirkung ausübt, in bezug auf das Schieben aber der Stabilität des Pfeilers zu gute kommt.

Das Umsturzmoment wird also am größten, wenn die Hauptbrücke ganz belastet ist, in welchem Falle die horizontale Seitenkraft von R :

$$H(\max) = 640 \text{ t}$$

wird. Die vertikale Seitenkraft von R geht ebenso wie D durch den Drehpunkt E hindurch, hat also gar keine Wirkung in bezug auf Drehung. Das Gewicht G des ganzen Landpfeilers muß groß genug sein, um dem von beiden Tragwänden zusammen hervorgerufenen Horizontalschube $2H$ in bezug auf Drehung um die Karte E das Gleichgewicht zu halten; es muß also:

$$1) \quad G \cdot \frac{b}{2} > 2 \cdot 640 \cdot h$$

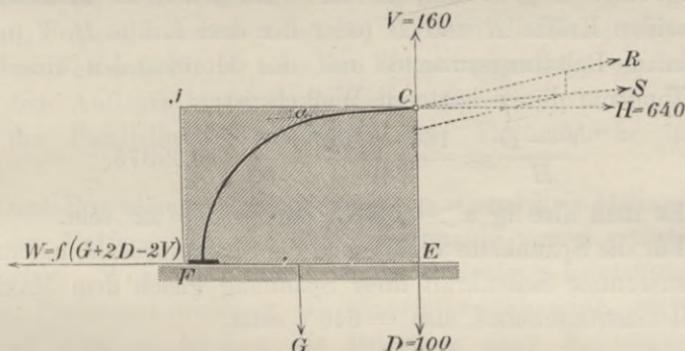
sein, wonach die Größe bestimmt werden kann, welche der Pfeiler wenigstens haben muß, um nicht umzukippen.

Es ist aber zweitens der Gleichgewichtszustand des Pfeilers in bezug auf Verschiebung in Betracht zu ziehen.

Beide Seitenkräfte von R — sowohl die horizontale H als die vertikale V — wirken auf Verschiebung des Pfeilers, erstere direkt, letztere indirekt, indem sie den Druck auf die Basis und damit auch den Reibungswiderstand vermindert. Diese Kräfte werden am größten, wenn die Hauptbrücke ganz belastet ist.

Der Druck D , welcher eine Belastung der Nebenbrücke hervorbringt, vermehrt den Reibungswiderstand und wirkt dadurch der Verschiebung entgegen. Die Gefahr des Schiebens wird also am größten, wenn die Hauptbrücke ganz belastet und die Nebenbrücke ganz unbelastet ist, wobei D gleich dem halben Gewichte des unbelasteten Stückes AC wird (s. Fig. 247).

Fig. 247.



Man erhält für diesen Belastungszustand die Werte:

$$H = 640, \quad V = 160, \quad D = 100;$$

welche doppelt zu nehmen sind, um die von beiden Tragwänden zusammen ausgeübten Wirkungen darzustellen.

Wenn also mit f der Reibungskoeffizient bezeichnet wird, so muß:

$$f(G + 2D - 2V) > 2H; \text{ oder}$$

$$2) f(G + 2 \cdot 100 - 2 \cdot 160) > 2 \cdot 640$$

sein, wenn der Landpfeiler nicht nach innen verschoben werden soll.

Wenn also weder ein Umkippen noch ein Verschieben des Landpfeilers eintreten soll, so muß das Gewicht desselben wenigstens so groß sein als der größere von den beiden Werten G , welche aus den beiden Ungleichungen 1) und 2) sich ergeben.

Es ist hierbei vorausgesetzt, daß der Punkt C , als Aufhängepunkt der Brückenabteilung CA , mit der ganzen Masse des Landpfeilers genügend verbunden ist. Dies kann mittelst einer Spannkette bewerkstelligt werden, welche von C aus in das Innere des Mauerwerks hineingeführt und unten an der Basis bei F gehörig verankert wird. Die Richtung dieser Spannkette darf bei dem Punkte C nicht horizontal sein, weil sonst der Punkt C sich heben würde, wenn die Hauptbrücke belastet und die Nebenbrücke unbelastet ist. Denn in diesem Falle ist die vertikal aufwärts wirkende Kraft V ($= 160$ t) größer als die vertikal abwärts wirkende Kraft D ($= 100$ t). Die Spannkette muß vielmehr von dem Punkte C aus abwärts in das Mauerwerk hineingeführt werden in einer Richtung, deren Abweichung α von der Horizontalen auf folgende Weise bestimmt wird. Dieser Winkel α muß wenigstens so groß sein, als der Winkel, den die Mittelkraft S der beiden Kräfte R und D (oder der drei Kräfte H , V und D) bei jenem Belastungszustande mit der Horizontalen einschließt. Die Tangente dieses letzteren Winkels ist:

$$\frac{V-D}{H} = \frac{160-100}{640} = \frac{3}{32} = 0,09375.$$

Es muß also $\operatorname{tg} \alpha > 0,09375$ oder $\alpha > 5^{\circ} 22'$ sein.

Für die Spannkette erhält man die Spannungszahl, indem man die horizontale Seitenkraft ihrer Spannung gleich dem Maximum des Horizontalschubes, also $= 640$ t setzt.

NEUNTER ABSCHNITT.

§ 29.

Kuppelförmige Dachkonstruktionen.

Bei allen früher berechneten Konstruktionen durfte ohne Bedenken für jeden einzelnen Belastungspunkt die Belastung gleich groß angenommen werden — sowohl mobile als permanente. Wenn auch das Eigengewicht nicht immer eine ganz genau gleichförmig über die Spannweite verteilte Belastung bildete, so brauchte man sich nur so viel an toter Last hinzugelegt zu denken, als

nötig war, um die etwaigen Ungleichförmigkeiten aufzuheben und die berechneten Spannungszahlen in aller Strenge richtig zu machen.

Bei kuppelförmigen Dachkonstruktionen dagegen, in denen die einzelnen Träger nach der Mitte hin gleich den Radien eines Kreises gegeneinander konvergieren, ist diese Auffassungsweise nicht mehr zulässig, vielmehr muß man hier die Belastung als eine vom Auflager nach dem Scheitel hin allmählich abnehmende in Rechnung bringen.

Man kann die Oberfläche einer solchen Kuppel als eine durch Umdrehung irgend einer passend geformten Kurve um eine vertikale Drehachse entstandene Rotationsfläche, und die zwischen je zwei Meridianebenen gelegenen Teile der Kuppel als Belastungen der Rippen ansehen, welche die Kuppel unterstützen. Wenn eine solche Rippe wie ein Fachwerkträger mit dreieckigen (gleich großen) Feldern konstruiert ist, so wachsen die Belastungen der einzelnen Felder (oder der einzelnen Belastungspunkte) vom Scheitel nach dem Auflager hin nach demselben Gesetze, wie die Bogenstücke der Parallelkreise, welche in jene Flächenstücke hineinfallen.

Diese Bogenlängen sind jedesmal proportional ihren Halbmessern oder den Entfernungen der Belastungspunkte von der vertikalen Drehachse. Wenn also die Belastung desjenigen Knotenpunktes, dessen Drehungshalbmesser als Einheit gewählt wird, mit p bezeichnet wird, so ist $\rho \cdot p$ die Belastung eines Knotenpunktes, dessen Entfernung von der Achse gleich ρ ist. Es reicht also hin, die Belastungen irgend eines Punktes zu kennen, um danach die Belastungen aller übrigen Punkte durch Messung ihrer Drehungshalbmesser zu bestimmen.

Sobald man aber die Belastungen der einzelnen Punkte einmal bestimmt hat, so stehen nun der Anwendung der bereits früher erklärten Methode keinerlei Schwierigkeiten mehr entgegen. Es ist als ein weiterer Vorzug der Methode der statischen Momente hervorzuheben, daß ihre Anwendbarkeit vollkommen unabhängig ist von der Art des Belastungsgesetzes.

Teils um diesen Vorzug in das rechte Licht zu setzen, teils einiger sonstiger bei der Berechnung auftretender Eigentümlichkeiten wegen, verdient das nachfolgende Zahlenbeispiel hier noch einen Platz zu finden.

§ 30.

Kuppel von 100 m Spannweite.

Als äußere Oberfläche der Kuppel ist eine Halbkugelfläche von 51 m Halbmesser und 16338 qm Flächeninhalt angenommen. Jede der acht Rippen trägt also einen Teil der Kuppel, dessen Oberfläche 2042 qm enthält.

Als Belastung pro Quadratmeter der Kuppeloberfläche (Gewicht der Bedachung nebst Wind- und Schneedruck) sind 235 kg angenommen, also die Belastung für jede Rippe $2042 \cdot 235 = 480000$ kg oder 480 t (die Tonne zu 1000 kg gerechnet). Diese ganze Belastung ist als eine veränderliche oder mobile Last in Rechnung zu bringen, nicht allein der Veränderlichkeit des Wind- und Schneedrucks wegen, sondern auch aus dem Grunde, weil es vorkommen kann, daß ein Teil der Kuppel zeitweise seiner Bedachung entkleidet wird. Als permanente Last ist nur das eigene Gewicht der Rippe anzusehen, welches zu 60 t veranschlagt ist. Dieses Eigengewicht kann als eine gleichförmig über die äußere Bogenlänge der Rippe verteilte Last angesehen werden. Jede Rippe besteht aus zwei konzentrischen Bogen, deren Abstand voneinander 2 m beträgt, und ist durch ein Diagonalensystem in 15 Felder von gleicher Länge geteilt (s. Figg. 248 und 249). Die permanente Last beträgt also für jeden Belastungspunkt 4 t.

Um das Gesetz zu ermitteln, nach welchem die mobile Last auf die einzelnen Belastungspunkte sich verteilt, müssen die Abstände der Belastungspunkte von der vertikalen Mittellinie zuvor gemessen werden, für welche sich folgende Zahlen ergeben:

0	5,3	10,6	15,8	20,7	25,5	30	34,1	37,9	41,3	44,2	46,6	48,5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						49,9	50,7	51				
						13	14	15				

Diesen Zahlen proportional sind die Teile der mobilen Last, welche auf die einzelnen Belastungspunkte kommen. Dividiert man also die ganze mobile Last 480 durch die Summe der obigen Zahlen (welche 512 beträgt) und multipliziert den Quotienten dann der Reihe nach mit jeder der obigen Zahlen, so erhält man die Belastungen der 14 Zwischenpunkte:

5	9,9	14,8	19,4	23,9	28,1	32	35,5	38,7	41,4	43,7	45,5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						46,8	47,6				
						13	14				

Fig. 248.

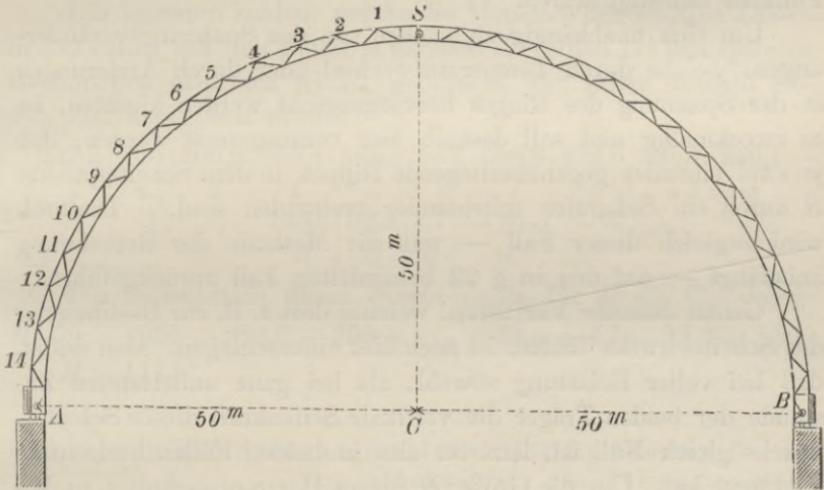
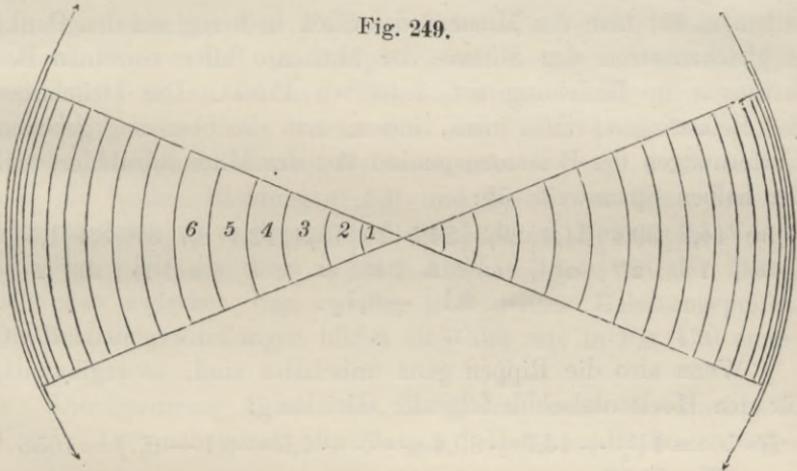


Fig. 249.



Um die Spannungszahlen der einzelnen Konstruktionsteile zu berechnen, muß die Art und Weise der Unterstützung oder Auflagerung an den Punkten A und B genau bekannt sein. Es soll hier angenommen werden, daß die Widerlager dadurch von allem Horizontalschube befreit sind, daß unten am Auflager um die

Kuppel herum ein Spannring gelegt ist, durch dessen Spannung die horizontalen Gegendrücke an den Punkten A und B hervorgebracht werden, so daß die Auflagerpunkte selbst nur vertikale Gegendrücke zu leisten haben. Die Rippen befinden sich dann genau in demselben Zustande, als wenn sie unten an festen Punkten befestigt wären.

Um sich unabhängig zu machen von den Spannungsveränderungen, welche durch Temperaturwechsel oder durch Änderungen in der Spannung des Ringes hervorgebracht werden könnten, ist es zweckmäßig und soll deshalb hier vorausgesetzt werden, daß je zwei einander gegenüberliegende Rippen in dem Scheitelpunkte S durch ein Scharnier miteinander verbunden sind.*) Dadurch wird zugleich dieser Fall — was die Methode der Berechnung anbelangt — auf den in § 22 behandelten Fall zurückgeführt.

Genau dasselbe Verfahren, welches dort z. B. zur Bestimmung des Scheiteldrucks führte, ist auch hier einzuschlagen. Man findet, daß bei voller Belastung sowohl, als bei ganz unbelasteten Zustande der beiden Träger die vertikale Seitenkraft dieses Scheiteldrucks gleich Null ist, letzterer also in beiden Fällen horizontale Richtung hat. Um die Größe H dieses Horizontalschubes zu bestimmen, hat man das Moment desselben in bezug auf den Punkt A gleichzusetzen der Summe der Momente aller einzelnen Belastungen in Beziehung auf denselben Punkt. Die Hebelarme der Belastungen erhält man, indem man die oben angegebenen Entfernungen der Belastungspunkte von der Mitte subtrahiert von der halben Spannweite 50:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 50 & | & 44,7 & | & 39,4 & | & 34,2 & | & 29,3 & | & 24,5 & | & 20 & | & 15,9 & | & 12,1 & | & 8,7 & | & 5,8 & | & 3,4 & | & 1,5 \\
 0 & | & 1 & | & 2 & | & 3 & | & 4 & | & 5 & | & 6 & | & 7 & | & 8 & | & 9 & | & 10 & | & 11 & | & 12 \\
 & & & & & & & & & & 0,1 & | & -0,7 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 13 & | & 14 & & & & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Wenn also die Rippen ganz unbelastet sind, so ergibt sich für den Horizontalschub folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 H \cdot 50 &= 4 \left(\frac{5,0}{2} + 44,7 + 39,4 + \dots + 1,5 + 0,1 - 0,7 \right) = 1056 \\
 H &= 21,12.
 \end{aligned}$$

*) Um an dem Gedanken an die mehrfach in dem Punkte S einander durchkreuzenden Scharnierverbindungen keinen Anstoß zu nehmen, braucht man sich nur statt des Bolzens eine Kugel oder ein beliebig geformtes Gehäuse eingeschaltet zu denken, welches den an dasselbe sich anlehenden Rippen kugelförmig abgerundete Flächen darbietet.

Wenn dagegen beide Rippen voll belastet sind, so erhält man für den Horizontalschub die Gleichung:

$$H \cdot 50 = 4 \left(\frac{5,0}{2} + 44,7 + 39,4 + \dots + 1,5 + 0,1 - 0,7 \right) \\ + 5 \cdot 44,7 + 9,9 \cdot 39,4 + \dots + 45,5 \cdot 1,5 + 46,8 \cdot 0,1 \\ - 47,6 \cdot 0,7.$$

Die letzteren Zahlen, welche die Momente der mobilen Lasten in Beziehung auf den Punkt *A* darstellen, werden bei den späteren Rechnungen mehrfach wieder gebraucht und sollen deshalb einzeln hier angegeben werden:

223,5	390	506,2	568,4	585,6	562	508,8	429,6	336,7	240,1	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
			148,6	68,3	4,7	- 33,3				
			11	12	13	14				

Die Substitution dieser Werte ergibt für *H* die Gleichung:
 $H \cdot 50 = 1056 + 223,5 + 390 + \dots + 68,3 + 4,7 - 33,3 = 5595$
 $H = 111,9.$

Berechnung der Spannungszahlen *X* für die äußeren Bogenstücke.

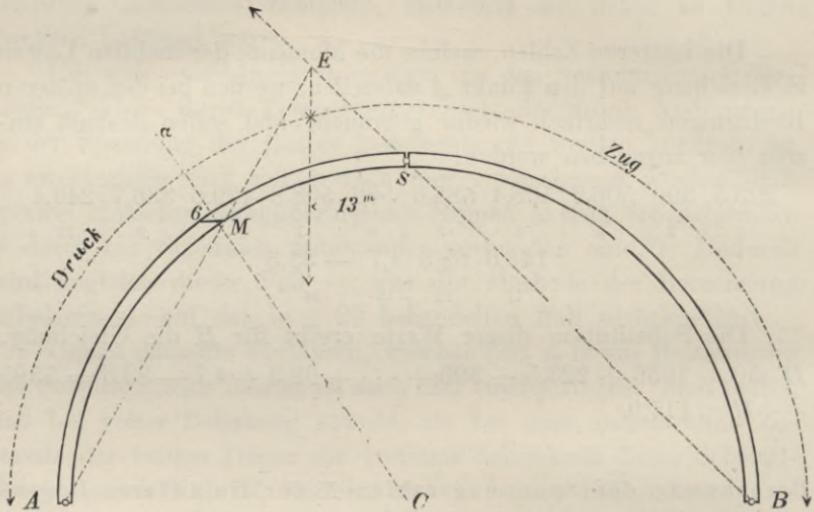
Das zwischen den Punkten 5 und 6 liegende Stück des äußeren Bogens soll als Beispiel gewählt werden, um die Berechnungsweise zu erklären. Für die später aufzustellende Momentengleichung dieses Stücks wird der Punkt *M* als Drehpunkt dienen. Man findet also die Belastungsscheide (vergl. § 22), indem man die beiden Richtungen *AM* und *BS* bis zu ihrem Durchschnittspunkte *E* verlängert und durch diesen Punkt eine Vertikale legt. Dieselbe liegt in dem Abstand 13 m von der Mitte, fällt also zwischen den zweiten und dritten Belastungspunkt. Die Belastungsabteilungen bilden sich also wie in Fig. 150 angegeben.

Die Spannung *X* wird ein Maximum, wenn die Punkte 3, 4, 5, ... 14*) unbelastet, alle übrigen belastet sind. Statt dessen

*) Da die Vertikale des vierzehnten Belastungspunktes links an dem Punkte *A* vorbeigeht (im Abstände von 0,72 m), so bildet streng genommen dieser Belastungspunkt für sich allein wiederum eine „Zugabteilung“, und da gegenüber bei dem Punkte *B* das Gleiche stattfindet, so sind eigentlich vier Abteilungen zu unterscheiden. Es soll jedoch — um durch eine solche pedantische Berücksichtigung zufälliger unwesentlicher Umritter, Dach- und Brückenkonstruktionen. 6. Auflage. 13

kann man auch sagen: wenn die Punkte 3, 4, 5, ... 14 entlastet sind, d. h. wenn an dem vollbelasteten Träger an diesen zwölf

Fig. 250.



Punkten vertikal aufwärts wirkende Kräfte — entsprechend den mobilen Belastungen dieser Punkte — angebracht werden.

Um die Seitenkräfte des Scheiteldrucks für diesen Belastungszustand zu finden, braucht man nur die Momentengleichung für jede der beiden Rippen in Beziehung auf ihren Auflagerpunkt aufzustellen und für die linke Seite die zwölf Entlastungsmomente 3, 4, 5, ... 14 als negative Zahlen zu der bereits gefundenen vollen Momentensumme hinzuzufügen; man erhält dann die Gleichungen:

$$0 = H \cdot 50 + V \cdot 50 - 5595 \quad (\text{für die rechte Seite})$$

$$0 = -H \cdot 50 + V \cdot 50 + 5595 - 506 - 568 - 586 - \dots - 4,7 + 33,3 \quad (\text{für die linke Seite})$$

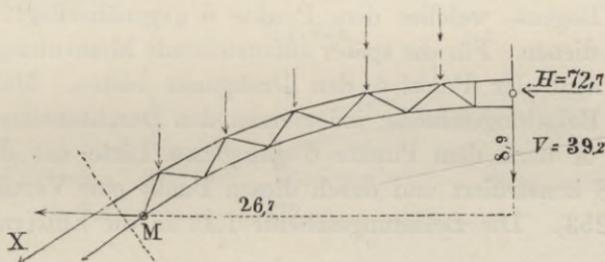
$$H = 72,7 \qquad V = 39,2.$$

stände die Übersichtlichkeit der Figuren und der Rechnungen nicht zu beeinträchtigen — bei dieser wie bei den folgenden Berechnungen der vierzehnte Belastungspunkt stets mit zu der Gruppe seiner Nachbarpunkte gezählt werden — ein Fehler, der auf das Resultat einen verschwindend kleinen Einfluß hat.

Hiernach erhält man dann für X (max) aus Fig. 251 die Momentengleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= -X \cdot 2 - 72,7 \cdot 8,9 + 39,2 \cdot 26,7 \\ &+ 4 \left(\frac{26,7}{2} + 21,4 + 16,1 + 10,9 + 6 + 1,2 \right) \\ &+ 5 \cdot 21,4 + 9,9 \cdot 16,1 \\ X(\text{max}) &= + 470,9 \text{ t.} \end{aligned}$$

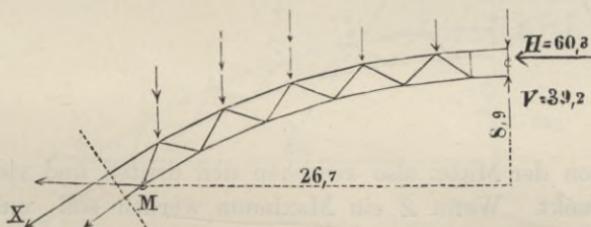
Fig. 251.



Um X (min) zu bestimmen, sind die Punkte 3, 4, 5, ... 14 allein belastet anzunehmen. Man erhält die Seitenkräfte des Scheiteldrucks für diesen Belastungszustand, indem man für jede der beiden Seiten die Momentengleichung aufstellt und für die linke Seite die zwölf Belastungsmomente zu der Momentensumme der permanenten Belastungen hinzufügt:

$$\begin{aligned} 0 &= H \cdot 50 - V \cdot 50 - 1056 \\ 0 &= -H \cdot 50 - V \cdot 50 + 1056 + 506 + 568 + 586 + \dots + 4,7 - 33,3 \\ H &= 60,3 \quad V = 39,2. \end{aligned}$$

Fig. 252.



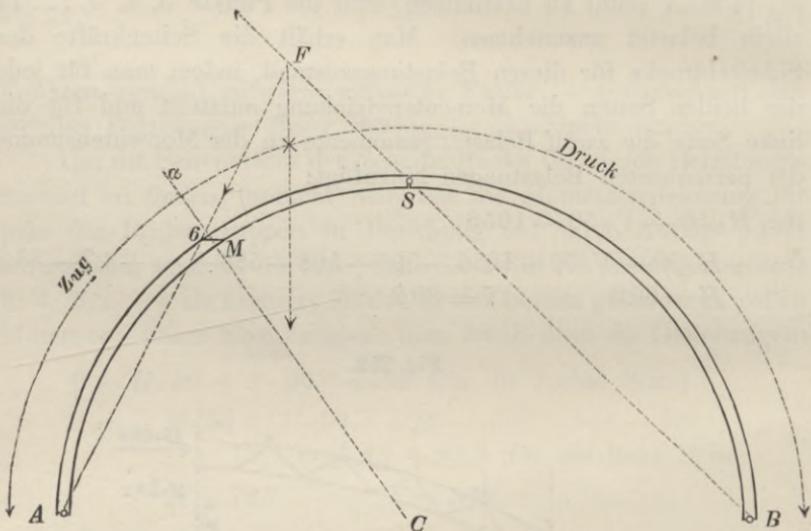
Die Momentengleichung für X (min) ergibt sich sodann aus Fig. 252:

$$\begin{aligned}
 0 &= -X \cdot 2 - 60,3 \cdot 8,9 - 39,2 \cdot 26,7 \\
 &+ 4 \left(\frac{26,7}{2} + 21,4 + 16,1 + 10,9 + 6 + 1,2 \right) \\
 &+ 14,8 \cdot 10,9 + 19,4 \cdot 6 + 23,9 \cdot 1,2 \\
 X(\text{min}) &= -500,6 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Spannungszahlen Z für die Teile des inneren Bogens.

Das von derselben Schnittlinie $C\alpha$ getroffene Stück des inneren Bogens, welches dem Punkte 6 gegenüberliegt, soll als Beispiel dienen. Für die später aufzustellende Momentengleichung von Z wird der Punkt 6 den Drehpunkt bilden. Man findet also die Belastungsscheide, indem man den Durchschnittspunkt F der von A nach dem Punkte 6 gezogenen Linie mit der Richtung BS konstruiert und durch diesen Punkt eine Vertikale legt (s. Fig. 253). Die Belastungsscheide fällt in die Entfernung von

Fig. 253.



17,3 m von der Mitte, also zwischen den dritten und vierten Belastungspunkt. Wenn Z ein Maximum werden soll, müssen die Punkte 4, 5, . . . 14 allein die belasteten sein, und man erhält für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks bei diesem Belastungszustande die Gleichungen:

$$0 = H \cdot 50 - V \cdot 50 - 1056$$

$$0 = -H \cdot 50 - V \cdot 50 + 1056 + 568 + 586 + \dots + 4,7 - 33,3$$

$$H = 55,3 \quad V = 34,2.$$

Aus Fig. 254 erhält man dann für Z (max) die Momentengleichung:

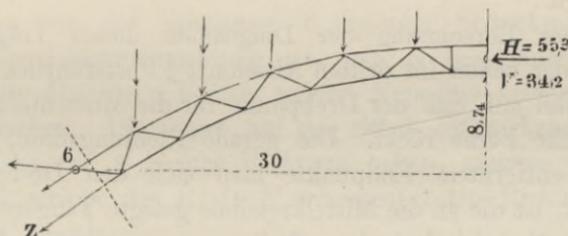
$$0 = Z \cdot 2 - 55,3 \cdot 8,74 - 34,2 \cdot 30$$

$$+ 4 \left(\frac{30}{2} + 24,7 + 19,4 + 14,2 + 9,3 + 4,5 \right)$$

$$+ 19,4 \cdot 9,3 + 23,9 \cdot 4,5$$

$$Z(\text{max}) = + 436,5 \text{ t.}$$

Fig. 254.



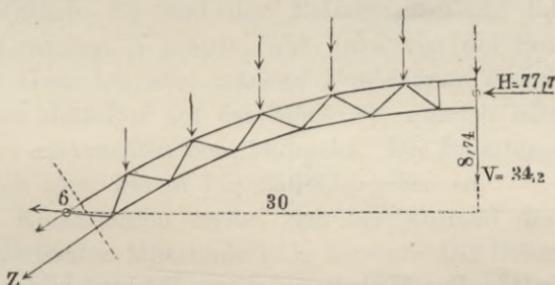
Um Z (min) zu bestimmen, hat man die Punkte 4, 5, ... 14 allein entlastet anzunehmen und erhält für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks bei diesem Belastungszustande, indem man die Momente 4, 5, ... 14 negativ zu der Momentensumme des vollbelasteten linken Trägers hinzufügt, die Gleichungen:

$$0 = H \cdot 50 + V \cdot 50 - 5595$$

$$0 = -H \cdot 50 + V \cdot 50 + 5595 - 568 - 586 - \dots - 4,7 + 33,3$$

$$H = 77,7 \quad V = 34,2.$$

Fig. 255.



Die Momentengleichung für Z (min) ist dann nach Fig. 255 zu bilden:

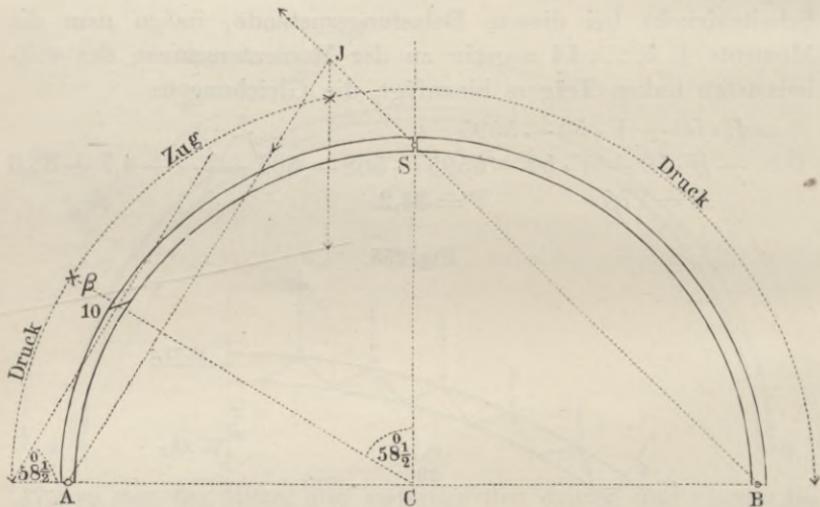
$$\begin{aligned}
 0 &= Z \cdot 2 - 77,7 \cdot 8,74 + 34,2 \cdot 30 \\
 &\quad + 4 \left(\frac{30}{2} + 24,7 + 19,4 + 14,2 + 9,3 + 4,5 \right) \\
 &\quad + 5 \cdot 24,7 + 9,9 \cdot 19,4 + 14,8 \cdot 14,2 \\
 Z(\text{min}) &= -610,5 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Spannungszahlen Y für die Diagonalen.

Von den beiden Diagonalen, welche zwischen den beiden Punkten 9 und 10 sich befinden, soll diejenige, welche mit dem Punkte 10 verbunden ist, als Beispiel dienen, um die Methode zu erläutern.

Bei der Berechnung der Diagonalen dieses Trägers tritt wiederum der schon im dritten Abschnitt § 9 ausführlich erörterte Ausnahmefall auf, daß der Drehpunkt für die Momentengleichung in unendliche Ferne rückt. Die gerade Richtungslinie, in deren unendlich entferntem Endpunkte man sich den Drehpunkt zu denken hat, ist die an die Mittelkreislinie gelegte Tangente, welche dieselbe berührt an derjenigen Stelle, wo sie von der Diagonale

Fig. 256.



geschnitten wird. Der Halbmesser dieses Punktes bildet mit dem vertikalen Scheitelhalbmesser einen Winkel von $58\frac{1}{2}^\circ$, folglich bildet jede Tangente mit der Horizontalen einen Winkel von $58\frac{1}{2}^\circ$.

Alle diejenigen auf das Stück $S\beta$ wirkenden Kräfte also, welche dieser Tangentenrichtung parallel sind, hat man als durch den Drehpunkt hindurchgehend zu betrachten (s. Fig. 256) und ihre Momente gleich Null zu setzen. Es unterscheidet sich dieser Fall nur dadurch von dem in § 9 behandelten Falle, daß die Tangentenrichtung an die Stelle der dort horizontalen Richtungslinie tritt.

Es ist demnach jede auf das Stück $S\beta$ wirkende Kraft zu zerlegen in zwei Seitenkräfte, von denen die eine parallel, die andere normal zu dieser Tangentenrichtung ist: und die algebraische Summe der letzteren Seitenkräfte ist dann gleich Null zu setzen.

Wenn von der Spannung Y diejenige Seitenkraft, welche normal zur Tangentenrichtung ist, mit N bezeichnet wird, so werden alle diejenigen Kräfte, welche N positiv machen, auch Y positiv machen. Diejenigen auf das Stück $S\beta$ wirkenden Kräfte also, welche mit N gleiche Richtung haben, machen Y negativ, diejenigen, welche der Kraft N entgegengesetzte Richtung haben, machen Y positiv.

Man findet daher die Belastungsscheide — oder diejenige Stelle, wo ein Gewicht liegen muß, um keins von beiden zu tun — indem man durch den Punkt A eine Parallele zur Tangentenrichtung legt und den Durchschnittspunkt J der Linie BS mit dieser Parallelen bestimmt. Ein Gewicht, welches in der durch den Punkt J gelegten Vertikalen hängt, erzeugt nämlich mit dem von ihm hervorgebrachten Scheiteldruck zusammen für das Stück $S\beta$ eine Mittelkraft, welche in die Parallele hineinfällt, also gar keine Seitenkraft zu der Gleichung für N liefert. Alle rechts gelegenen Belastungen machen N negativ, alle zwischen der Schnittlinie $C\beta$ und der Belastungsscheide liegenden Belastungen machen N positiv, alle links von der Schnittlinie $C\beta$ liegenden Gewichte aber machen N wiederum negativ, denn sie wirken nur mittelbar auf das Stück $S\beta$, nämlich mittelst des von ihnen hervorgebrachten Scheiteldrucks. Die Belastungsabteilungen bilden sich also, wie in Fig. 256 angegeben ist.

Die Konstruktion ergibt, daß der Abstand des Punktes J von der vertikalen Mittellinie 12 m beträgt. Die Belastungsscheide fällt also zwischen den zweiten und dritten Punkt. Die Kraft N und folglich auch Y wird also ein Maximum, wenn die Punkte 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 allein die belasteten sind. Bei diesem Be-

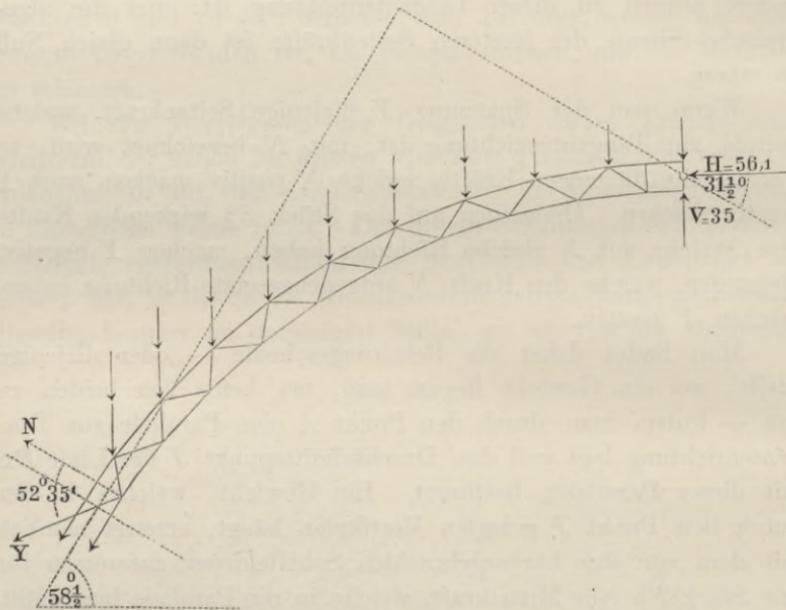
lastungszustande ergeben sich für die Seitenkräfte des Scheitel-
drucks die Gleichungen:

$$0 = H \cdot 50 - V \cdot 50 - 1056$$

$$0 = -H \cdot 50 - V \cdot 50 + 1056 + 506 + 568 + 586 + 562 \\ + 509 + 430 + 337$$

$$H = 56,1 \quad V = 35.$$

Fig. 257.



Nach Fig. 257 ist alsdann die algebraische Summe aller der-
jenigen Seitenkräfte, welche bei der Zerlegung in die Richtung
von N fallen, gleich Null zu setzen:

$$0 = N + 56,1 \cdot \cos 31\frac{1}{2}^\circ + 35 \cdot \sin 31\frac{1}{2}^\circ - 4 \cdot 9,5 \cdot \sin 31\frac{1}{2}^\circ \\ - (14,8 + 19,4 + 23,9 + 28,1 + 32 + 35,5 + 38,7) \sin 31\frac{1}{2}^\circ.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$N(\max) = 54,3.$$

Hieraus erhält man, da Y einen Winkel von $52^\circ 35'$ mit N
einschließt:

$$Y(\max) = \frac{54,3}{\cos 52^\circ 35'} = + 89,3 \text{ t.}$$

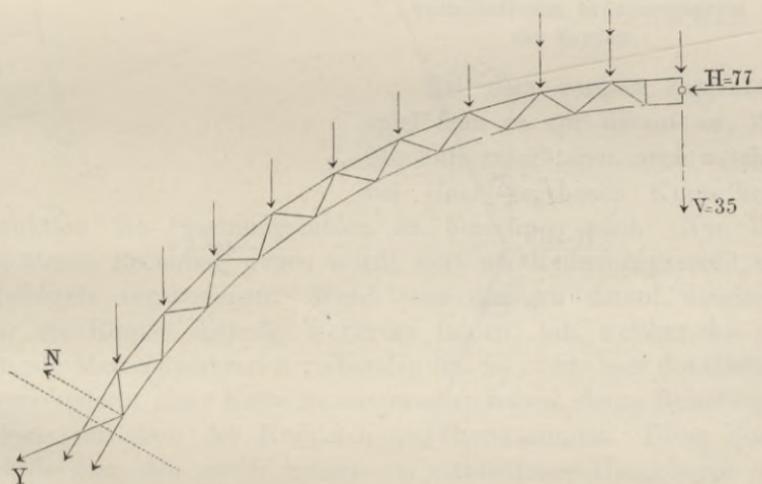
Um $Y(\min)$ zu bestimmen, hat man die Punkte 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 als die allein entlasteten anzunehmen und erhält für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks bei diesem Belastungszustande die Gleichungen:

$$0 = H \cdot 50 + V \cdot 50 - 5595$$

$$0 = -H \cdot 50 + V \cdot 50 + 5595 - 506 - 568 - 586 - 562 \\ - 509 - 430 - 337$$

$$H = 77 \quad V = 35.$$

Fig. 258.



Aus Fig. 258 ergibt sich dann für $N(\min)$ die Gleichung:

$$0 = N + 77 \cdot \cos 31\frac{1}{2}^\circ - 35 \sin 31\frac{1}{2}^\circ - 4 \cdot 9,5 \cdot \sin 31\frac{1}{2}^\circ \\ - (5 + 9,9) \sin 31\frac{1}{2}^\circ \\ N(\min) = -19,7.$$

Der entsprechende Wert von Y ist also:

$$Y(\min) = \frac{-19,7}{\cos 52^\circ 35'} = -32,5 \text{ t.}$$

Diese drei Beispiele zeigen zur Genüge, wie man für jeden einzelnen Konstruktionsteil die Spannungszahlen berechnen kann, und ist es daher nicht erforderlich, daß auch für die übrigen Teile die Rechnungen (welche zu viel Raum in Anspruch nehmen würden) hier mitgeteilt werden.

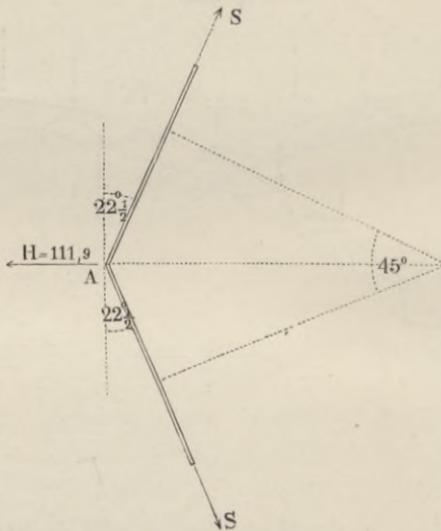
Berechnung der Spannung S des Ringes.

Wenn die Zahl der Rippen wie in diesem Falle klein ist und der Ring infolgedessen eine polygonale Form erhält, so ergeben sich aus Fig. 259 für die Spannung S die Gleichungen:

$$2 S \sin 22\frac{1}{2}^{\circ} = H$$

$$S = \frac{111,9}{2 \cdot 0,3827} = 146,1 \text{ t.}$$

Fig. 259.



Wäre dagegen die Anzahl der Rippen so groß, daß man die von innen her auf den Ring wirkenden Horizontalschübe als stetig auf den Umfang desselben verteilt ansehen dürfte, so würde man den auf die Längeneinheit desselben wirkenden Druck p zu berechnen haben und aus Fig. 260 (worin φ einen unendlich kleinen Winkel bedeutet, dessen Sinuszahl mit der Winkelzahl übereinstimmt), alsdann die Gleichung erhalten:

$$p \cdot 2 r \varphi = 2 S \varphi \text{ oder } S = p r.$$

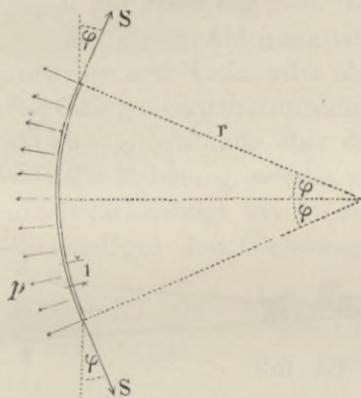
In dem vorliegenden Falle würde z. B.

$$p = \frac{H}{r \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{111,9}{51 \cdot 0,7854} = 2,794$$

zu setzen sein und man erhielte für die Spannung des Ringes

$$S = 2,794 \cdot 51 = 142,5 \text{ t.}$$

Fig. 260.



Der Unterschied ist, wie man sieht, so gering, daß es ziemlich gleichgültig ist, ob man auf die eine oder die andere Art die Spannung des Ringes berechnet.

§ 31.

Vorteilhaftestes Krümmungsprofil der Kuppeln.

Bei dem vorigen Zahlenbeispiel kam es nur darauf an, die Methode zu erklären, nach welcher bei einer gegebenen Kuppelkonstruktion die Spannungszahlen zu berechnen sind. Nur der leichteren Rechnung wegen wurde dort als Krümmungsprofil ein Halbkreis angenommen. Wenn man dagegen darauf ausginge, für die Rippen diejenige Form zu finden, mit welcher der geringste Materialverbrauch verbunden ist, so würde man die Gleichgewichtsform einer Kette zu untersuchen haben, deren Belastungsgesetz mit dem der Kuppelrippen übereinstimmt. Diese Form würde man den durch Scharniere verbundenen Hauptbogen der Rippen zu geben haben. Um den Wirkungen einseitiger Belastungen zu begegnen, würde man dem Hauptbogen einen durch Diagonalensystem mit ihm verbundenen Nebebogen als Absteifung zur Seite geben. Bei voller Belastung würden alsdann Diagonalen und Nebebogen ohne Spannung sein, bei einseitigen Belastungen würden ihre Spannungen nach der positiven und negativen Richtung hin um gleiche Größen von der normalen Spannung Null sich entfernen (gerade so, wie dies bei der im § 22 berechneten Bogenbrücke in bezug auf die Horizontalen und Diagonalen sich gezeigt hat).

Sehr einfach gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe bei Kuppeln, die so flach gekrümmt sind und deren Rippenzahl so groß ist, daß man ohne zu große Ungenauigkeit die zwischen den Rippen liegenden Flächenteile als ebene Dreiecke ansehen darf,

deren Flächen mit gleichförmig über dieselben verteilter Belastung bedeckt sind. In diesem Falle darf man den Schwerpunkt des Dreiecks SP als Angriffspunkt der Belastung ansehen, welche diesen Teil der Fläche bedeckt (s. Figg. 261, 262 und 263).

Fig. 261.



Fig. 262.

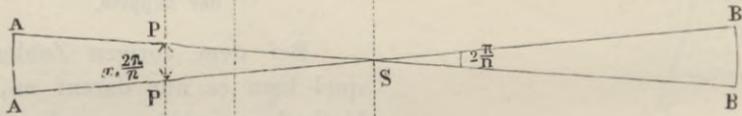
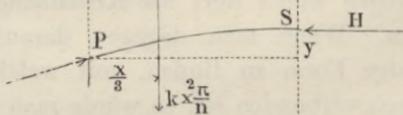


Fig. 263.



Wenn also k die Belastung pro Flächeneinheit der Grundrißfläche und n die Anzahl der Rippen ist (folglich $\frac{2\pi}{n}$ der sehr kleine Winkel, den zwei benachbarte Rippen in der Grundrißfläche miteinander einschließen), so ist $x \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{x}{2}$ die Fläche des Dreiecks und man erhält als Momentengleichung des Stücks SP in bezug auf den Punkt P als Drehpunkt (s. Fig. 263):

$$1) H \cdot y = k \cdot x^2 \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{x}{3}.$$

Diese Gleichung gilt auch für das Stück SA , für welches $x=l$ und $y=f$ zu setzen ist, also:

$$2) Hf = kl^2 \frac{\pi}{n} \frac{l}{3}.$$

Die Division der ersten Gleichung durch die zweite führt zu der dritten Gleichung:

$$3) \frac{y}{f} = \frac{x^3}{l^3}.$$

Wenn also der Hauptbogen die Form einer kubischen Parabel hätte, so würden bei voller Belastung sowohl Diagonalen als Nebenbogen die Spannung Null haben.

Bei dieser Ableitung ist das eigene Gewicht der Rippe, als entweder sehr klein, oder als nach dem gleichen Gesetze über die Bogenlänge verteilt, unberücksichtigt geblieben. Wenn dasselbe als eine gleichförmig über die Horizontalprojektion der Bogenlinie verteilte Belastung, welche pro Längeneinheit derselben p beträgt, mit berücksichtigt werden soll, so ergeben sich statt der vorigen die analogen drei Gleichungen:

$$1a) Hy = k \frac{\pi}{n} \frac{x^3}{3} + p \frac{x^2}{2}$$

$$2a) Hf = k \frac{\pi}{n} \frac{l^3}{3} + p \frac{l^2}{2}$$

$$3a) \frac{y}{f} = \frac{x^3 + \frac{3}{2} \frac{p}{k} \frac{n}{\pi} x^2}{l^3 + \frac{3}{2} \frac{p}{k} \frac{n}{\pi} l^2}.$$

Um eine allgemeinere Lösung der vorliegenden Aufgabe zu erhalten, welche auch Kuppeln von größerer Pfeilhöhe und kleinerer Rippenzahl einschloesse, würde man nach den Prinzipien zu verfahren haben, welche der „allgemeinen Theorie der Stützlinie“ zum Grunde liegen.

§ 32.

Kuppel mit gegliederten Rippen und Ringen.*)

Das in Figg. 264 und 265 dargestellte Stangengerippe der Kuppel bildet im Aufrißprofil die Hälfte eines regelmäßigen Achtezehnecks, im Grundriß ein regelmäßiges Achteck. Es wird angenommen, daß die Stangen in den Knotenpunkten durch Kugelenke verbunden sind und daß diese Knotenpunkte ausschließlich die Belastungspunkte bilden. Diese Punkte liegen auf einer Halbkugelfläche vom Halbmesser $r = 10$ m und vom Flächeninhalt

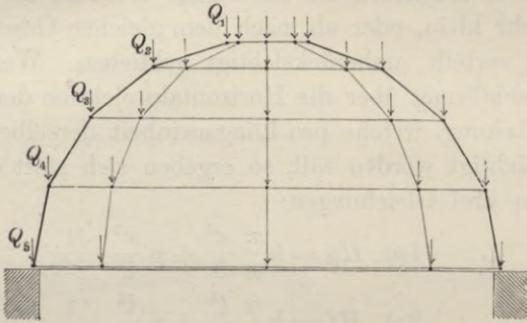
$$2 r^2 \pi = 2 \cdot 10^2 \cdot 3,1416 = 628,32 \text{ qm.}$$

*) Vergl. Berliner Ztschr. für Bauwesen, Jahrgang 1866: „Die Konstruktion der Kuppeldächer“ von W. Schwedler.

Wenn also pro Quadratmeter dieser Fläche die totale Belastung $p = 200$ kg angenommen wird, so hat die Summe der Belastungen sämtlicher Belastungspunkte die Grösse:

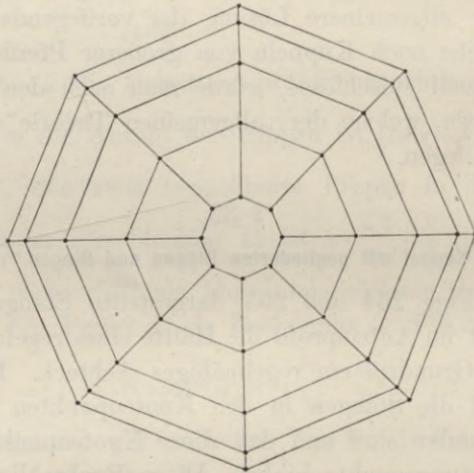
$$G = p \cdot 2r^2\pi = 200 \cdot 628,32 = 125\,664 \text{ kg.}$$

Fig. 264.



Diese Totalbelastung verteilt sich auf die den einzelnen achteckigen Horizontalringen angehörigen Gruppen von Belastungs-

Fig. 265.



punkten auf solche Art, daß die Belastungssummen der einzelnen Ringe als den Halbmessern der umgeschriebenen Kreise ungefähr proportional angesehen werden dürfen — mit Ausnahme des untersten Ringes, für welchen nur die Hälfte der betreffenden

Zonenfläche, folglich auch nur die Hälfte der auf solche Weise zu bestimmenden Belastung in Rechnung zu bringen sein wird —. Die Halbmesser dieser fünf Kreise sind:

$$\begin{aligned} r_1 &= r \cdot \sin 10^\circ = 10 \cdot 0,17365 = 1,7365 \text{ m} \\ r_2 &= r \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5,0 \text{ m} \\ r_3 &= r \cdot \sin 50^\circ = 10 \cdot 0,76604 = 7,6604 \text{ m} \\ r_4 &= r \cdot \sin 70^\circ = 10 \cdot 0,93969 = 9,3969 \text{ m} \\ r_5 &= r \cdot \sin 90^\circ = 10 \cdot 1 = 10 \text{ m.} \end{aligned}$$

Wenn mit x der Proportionalteil bezeichnet wird, welcher dem Halbmesser Eins entsprechen würde, so ergibt sich für x die Gleichung:

$$1,7365 \cdot x + 5 \cdot x + 7,6604 \cdot x + 9,3969 \cdot x + \frac{10 \cdot x}{2} = 125664,$$

oder $x = 4364,3 \text{ kg.}$

Die Belastungen der einzelnen Ringe sind also:

$$\begin{aligned} x \cdot r_1 &= 4364,3 \cdot 1,7365 = 7578,6 \text{ kg}^*) \\ x \cdot r_2 &= 4364,3 \cdot 5 = 21821,5 \text{ kg} \\ x \cdot r_3 &= 4364,3 \cdot 7,6604 = 33432,3 \text{ kg} \\ x \cdot r_4 &= 4364,3 \cdot 9,3969 = 41010,9 \text{ kg} \\ \frac{x \cdot r_5}{2} &= \frac{4364,3 \cdot 10}{2} = 21821,5 \text{ kg} \end{aligned}$$

und da jeder Ring acht Belastungspunkte enthält, so hat man diese Zahlen noch durch acht zu dividieren, um die Belastungen der fünf Belastungspunkte einer einzelnen Rippe zu erhalten.**)

Es ist demnach:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{7578,6}{8} = 947 \text{ kg}, & Q_3 &= \frac{33432,3}{8} = 4179 \text{ kg}, \\ Q_2 &= \frac{21821,5}{8} = 2728 \text{ kg}, & Q_4 &= \frac{41010,9}{8} = 5126 \text{ kg}, \\ Q_5 &= \frac{21821,5}{8} = 2728 \text{ kg}. \end{aligned}$$

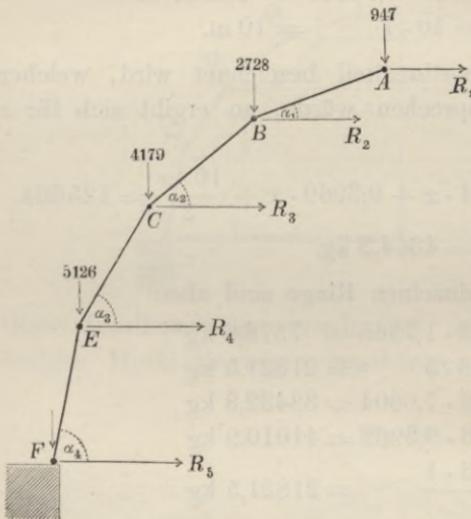
*) Die für den obersten Ring in Rechnung zu bringende Belastungszahl würde selbstverständlich entsprechend zu vergrößern sein, wenn derselbe noch das Gewicht einer aufgesetzten Laterne oder sonstige hier nicht schon berücksichtigte Belastungen zu tragen hätte.

**) Wenn die Anzahl der Rippen 16 stat 8 betrüge, so würden die obigen Zahlen durch 16 zu dividieren sein; im übrigen würde durch An-

Berechnung der bei voller Belastung eintretenden Spannungen.

Denkt man sich durch Meridianebenen zu beiden Seiten der Rippe ACF die Kuppel durchgeschnitten und an den Schnittstellen

Fig. 266.

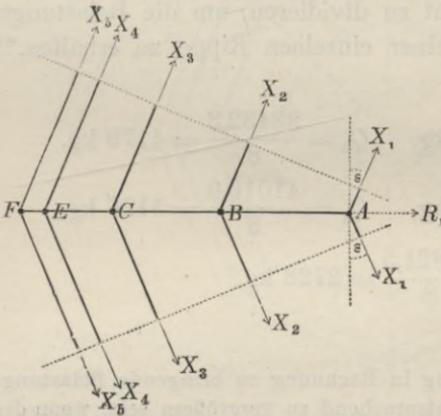


der Ringe die zur Herstellung des Gleichgewichts erforderlichen Kräfte hinzugefügt (s. Figg. 266 und 267), so findet man, daß von dem obersten Ringe auf die Rippe in dem Punkte A eine Horizontalkraft R_1 übertragen wird, welche als die Mittelkraft der beiden Ringspannungen X_1 sich darstellt und mit denselben durch die Gleichung:

$$2 X_1 \sin \varepsilon = R_1$$

$$\text{oder } X_1 = \frac{R_1}{2 \sin \varepsilon}$$

Fig. 267.



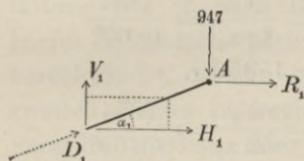
verbunden ist, in welcher der Winkel $\varepsilon = 22,5^\circ$ zu setzen ist. Dieselbe Beziehung findet statt bei jedem der anderen Ringe zwischen den beiden Spannungen desselben und ihrer horizontalen Mittelkraft.

Denkt man sich ferner die Stange AB durchgeschnitten und die zur Herstellung des Gleichgewichts an der Schnittstelle anzu-

nahme einer größeren Rippenzahl die Rechnung durchaus nicht erschwert worden sein. Nur der besseren Übersichtlichkeit der Figuren wegen ist hier eine kleinere Rippenzahl gewählt.

bringende Druckkraft D_1 durch ihre horizontale und vertikale Seitenkraft ersetzt (Fig. 268), so findet man, indem man einmal die algebraische Summe der Vertikalkräfte, einmal die Summe der Horizontalkräfte gleich Null setzt, die Gleichungen:

Fig. 268.



$$V_1 = 947 \text{ kg und } R_1 = -H_1.$$

Aus dem in der Figur angedeuteten Kräfteparallelogramm ergeben

sich ferner die Gleichungen:

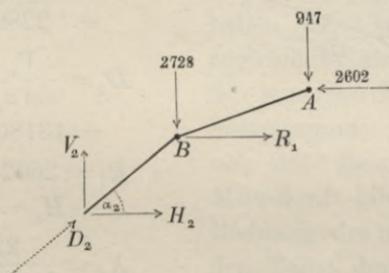
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{V_1}{H_1} \text{ und } \sin \alpha_1 = \frac{V_1}{D_1},$$

und da der Winkel $\alpha_1 = 20^\circ$ ist, so erhält man hieraus die Werte:

$$H_1 = \frac{947}{\operatorname{tg} 20^\circ} = 2602 \text{ kg, } D_1 = \frac{947}{\sin 20^\circ} = 2770 \text{ kg,}$$

$$R_1 = -2602 \text{ kg, } X_1 = -\frac{2602}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} = -3400 \text{ kg.}$$

Fig. 269.



Die Anwendung desselben Verfahrens auf den in Fig. 269 dargestellten Teil der Konstruktion führt zu den Gleichungen:

$$V_2 = 947 + 2728 = 3675 \text{ kg,}$$

$$H_2 = \frac{V_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{3675}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 4380 \text{ kg,}$$

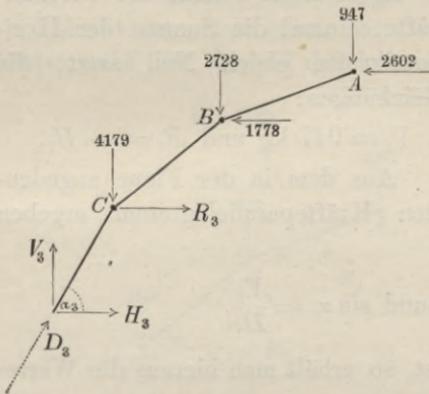
$$D_2 = \frac{V_2}{\sin \alpha_2} = \frac{3675}{\sin 40^\circ} = 5717 \text{ kg,}$$

$$R_2 = 2602 - H_2 = -1778 \text{ kg,}$$

$$X_2 = -\frac{1778}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} = -2323 \text{ kg.}$$

Auf gleiche Weise erhält man aus Fig. 270 die Gleichungen:

Fig. 270.



$$V_3 = 947 + 2728 + 4179 \\ = 7854 \text{ kg,}$$

$$H_3 = \frac{V_3}{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{7854}{\operatorname{tg} 60^\circ} \\ = 4535 \text{ kg,}$$

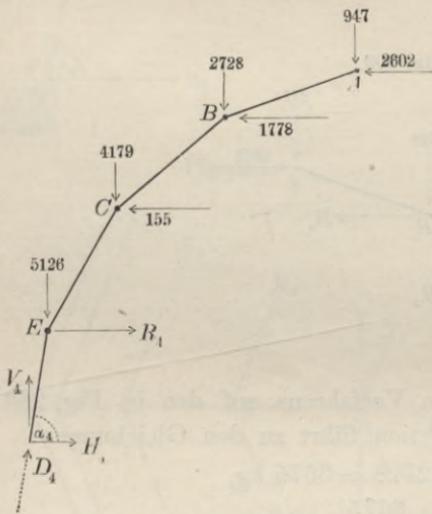
$$D_3 = \frac{V_3}{\sin \alpha_3} = \frac{7854}{\sin 60^\circ} \\ = 9069 \text{ kg,}$$

$$R_3 = 2602 + 1778 - H_3 \\ = -155 \text{ kg,}$$

$$X_3 = \frac{-155}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} \\ = -203 \text{ kg.}$$

Endlich aus Fig. 271 ergeben sich die Gleichungen:

Fig. 271.



$$V_4 = 947 + 2728 + 4179 \\ + 5126 = 12980 \text{ kg,}$$

$$H_4 = \frac{V_4}{\operatorname{tg} \alpha_4} = \frac{12980}{\operatorname{tg} 80^\circ} \\ = 2289 \text{ kg,}$$

$$D_4 = \frac{V_4}{\sin \alpha_4} = \frac{12980}{\sin 80^\circ} \\ = 13180 \text{ kg,}$$

$$R_4 = 2602 + 1778 + 155 \\ - H_4 = +2246 \text{ kg,}$$

$$X_4 = \frac{2246}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} \\ = +2935 \text{ kg.}$$

Die Vertikalspannung V_4 wird durch den Gegendruck der festen horizontalen Unterstüztungsebene in der Stange EF hervorgebracht, während gleichzeitig durch den untersten Ring die Horizontalkraft H_4 auf dieselbe übertragen wird. Es ist also:

$$R_5 = H_4 = +2289 \text{ kg,}$$

$$X_5 = \frac{2289}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} = +2991 \text{ kg.}$$

Minima der Ringspannungen.

Behandelt man die ganzen oben angenommenen Belastungen als zufällige (mobile) Belastungen und denkt man sich die Belastung des obersten Ringes hinweggenommen so erkennt man leicht, daß damit zugleich die Spannung des obersten Ringes selbst verschwindet. Wenn man dann auch noch die Belastungen des zweiten Ringes hinwegnähme, so würde auch dieser Ring spannungslos werden. Man überzeugt sich auf diese Weise leicht, daß überhaupt die Belastungen eines bestimmten Ringes in den sämtlichen oberhalb desselben liegenden Stangen — sowohl der Rippen als der Ringe — keine Spannungen hervorbringen können. In dem Ringe selbst aber wird durch die eigenen Belastungen desselben eine Druckspannung hervorgebracht und zwar die stärkste, welche überhaupt eintreten kann, denn die Belastungen der höher

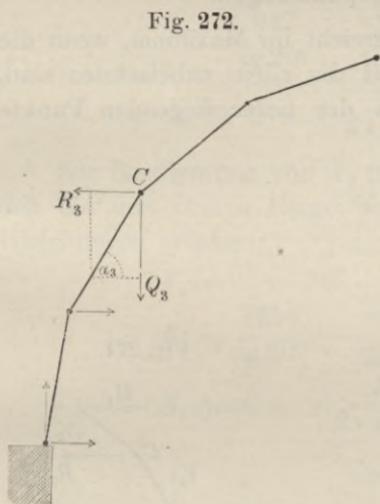
liegenden Ringe würden für sich allein Zugspannung in demselben hervorbringen, während die Belastungen der tiefer liegenden Ringe überhaupt keinen Einfluß auf die Spannung des Ringes haben. Diese Druckspannung muß zugleich so beschaffen sein, daß die von dem Ringe auf den Belastungspunkt übertragene Kraft mit der Belastung selbst eine Mittelkraft bildet, welche in die Richtung des nächst tiefer liegenden Teiles der Rippe hineinfällt. Aus Fig. 272 ergibt sich also z. B. für den dritten Ring die Gleichung:

$$R_3 (\text{min}) = - \frac{Q_3}{\text{tg } \alpha_3} = - \frac{4179}{\text{tg } 60^\circ} = - 2413 \text{ kg.}$$

Auf gleiche Weise erhält man für den zweiten und vierten Ring die Werte:

$$R_2 (\text{min}) = - \frac{Q_2}{\text{tg } \alpha_2} = - \frac{2728}{\text{tg } 40^\circ} = - 3251 \text{ kg,}$$

$$R_4 (\text{min}) = - \frac{Q_4}{\text{tg } \alpha_4} = - \frac{5126}{\text{tg } 80^\circ} = - 904 \text{ kg,}$$



Die Minima der Ringspannungen selbst sind also:

$$X_2 (\text{min}) = -\frac{2251}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} = -4248 \text{ kg,}$$

$$X_3 (\text{min}) = -\frac{2413}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} = -3153 \text{ kg,}$$

$$X_4 (\text{min}) = -\frac{904}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} = -1181 \text{ kg,}$$

Der erste und fünfte Ring kommen hier nicht in Betracht. Der letztere nicht, weil in demselben überhaupt nie Druckspannung eintreten kann; der oberste Ring aber aus dem Grunde nicht, weil in demselben stets Druckspannung stattfindet und der für volle Belastung bereits gefundene Wert $X_1 = -3400$ kg zugleich die größtmögliche Druckspannung dieses Ringes repräsentiert.

Maxima der Ringspannungen.

Die Spannung eines Ringes erreicht ihr Maximum, wenn die Belastungspunkte des Ringes selbst die allein unbelasteten sind, oder auch — da die Belastungen der tiefer liegenden Punkte

Fig. 273.

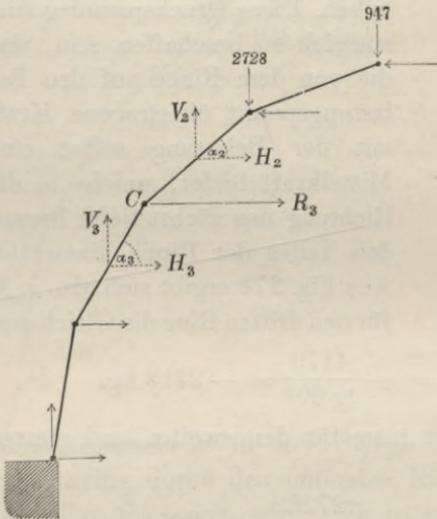
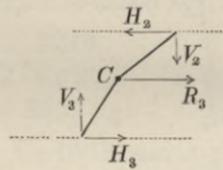


Fig. 274.



überhaupt keinen Einfluß auf die Spannung des Ringes haben —, wenn ausschließlich die höher liegenden Ringe belastet sind. Es würde also z. B. die Kraft R_3 bei dem in Fig. 273 dargestellten

Belastungszustände ihr Maximum erreichen und zwar ist dasselbe nach Fig. 274 zu bestimmen aus der Gleichung:

$$R_3 = H_2 - H_3 = \frac{V_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{V_3}{\operatorname{tg} \alpha_3}.$$

Setzt man hierin die aus Fig. 273 sich ergebenden Werte:

$$V_2 = V_3 = 947 + 2728 = 3675, \text{ so wird:}$$

$$R_3 = \frac{3675}{\operatorname{tg} 40^\circ} - \frac{3675}{\operatorname{tg} 60^\circ} = + 2258 \text{ kg; es ist also:}$$

$$X_3 (\text{max}) = + \frac{2258}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} = + 2950 \text{ kg.}$$

Um für den zweiten Ring die Maximalspannung zu finden, würde man ausschließlich die Belastungspunkte des obersten Ringes belastet anzunehmen haben. Dann wird:

$$V_2 = V_1 = 947, \text{ also}$$

$$R_2 = \frac{947}{\operatorname{tg} 20^\circ} - \frac{947}{\operatorname{tg} 40^\circ} = + 1473, \text{ und}$$

$$X_2 (\text{max}) = + \frac{1473}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} = + 1925 \text{ kg.}$$

Zur Bestimmung von X_4 (max) endlich würde man ausschließlich die drei oberen Ringe belastet anzunehmen haben und die Gleichungen erhalten:

$$V_4 = V_3 = 947 + 2728 + 4179 = 7854,$$

$$R_4 = \frac{7854}{\operatorname{tg} 60^\circ} - \frac{7854}{\operatorname{tg} 80^\circ} = + 3150,$$

$$X_4 (\text{max}) = + \frac{3150}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} = + 4116 \text{ kg.}$$

Bei der vorstehenden Berechnung wurden die Belastungen sämtlicher Belastungspunkte eines und desselben Ringes stets gleich groß angenommen, d. h. es wurde die vorhandene Belastung in bezug auf die vertikale Achse der Kuppel stets nach allen Seiten hin symmetrisch angeordnet vorausgesetzt. Da die Stangen in den Knotenpunkten durch Kugelgelenke verbunden sein sollten, so würde die geringste Abweichung von der symmetrischen Lastverteilung das Zusammenstürzen der Konstruktion zur Folge haben. Soll die Kuppel auch solchen unsymmetrisch verteilten Belastungen

gegenüber hinreichende Widerstandsfähigkeit besitzen, so muß entweder das die eigentliche Kuppelfläche bildende Deckmaterial genügende Steifigkeit besitzen, um das mit demselben verbundene Stangengerippe an jeder Lagenveränderung zu verhindern, oder es müßten die Gelenkverbindungen wegfallen und statt dessen die Stangen jedes einzelnen Ringes, sowie jeder einzelnen Rippe zu einem kontinuierlichen bogenförmigen Balken vereinigt werden, der auch gegen Biegung hinreichenden Widerstand leistet. Die Bestimmung der Biegungsspannungen, welche in solchem Falle bei unsymmetrischer Belastung eintreten würden, ist indessen eine Aufgabe, welche der elementaren Behandlungsweise sich entzieht.

ZEHNTER ABSCHNITT.

§ 33.

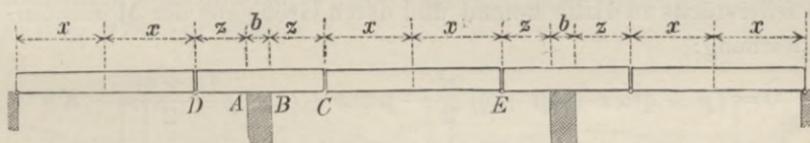
Balkenbrücken mit mehreren Öffnungen.

Wie bei den Bogenbrücken durch Einschaltung von Gelenkverbindungen die Spannungen der Konstruktionsteile innerhalb bestimmter, leicht kontrollierbarer Grenzen gehalten und den von Temperaturwechseln und Verschiebungen der Widerlager drohenden Gefahren gänzlich entzogen werden können, so läßt sich auch bei den Balkenbrücken — d. h. solchen Brücken, welche nur vertikale Drücke auf die Pfeiler ausüben — zur Abwendung ähnlicher Gefahren das Prinzip der Scharnierbrücken mit Vorteil anwenden, besonders bei großen Spannweiten und mehrfach nebeneinander liegenden Brückenöffnungen.

Es zeigt sich nämlich, daß man in solchen Fällen beträchtlich an Material ersparen kann, wenn man, anstatt jede Spannweite einzeln zu überbrücken, einen von Land- und Mittelpfeilern gemeinschaftlich unterstützten kontinuierlichen Träger anwendet und dabei durch entsprechendes Heben und Senken der Stützpunkte zu erreichen strebt, daß die Maximalspannungen auf ein Minimum reduziert werden. Indessen würden bei solchen Konstruktionen ähnliche Übelstände wie bei den ohne Scharnier konstruierten Bogenbrücken zu befürchten sein, daß nämlich sehr geringe Lagenänderungen der Stützpunkte schon beträchtliche Änderungen in den Spannungen herbeiführen können — nur mit

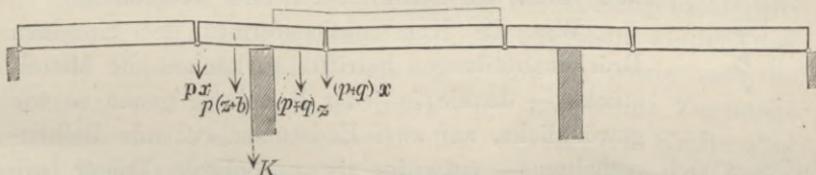
dem Unterschiede, daß, während bei den Bogenbrücken in den horizontalen, hier in den vertikalen Lagenänderungen der Auflagerpunkte die Gefahr liegen würde —. Ähnliche Gründe also, wie sie in betreff der Bogenbrücken bereits ausführlich (in § 24) erörtert wurden, sprechen auch hier für eine Unterbrechung der Kontinuität durch Einschaltung von Scharnieren, durch welche die Spannungen in den Konstruktionsteilen vollkommen unabhängig gemacht werden von etwaigen Höhenänderungen der Auflagerpunkte. Nur müssen hier die Gelenkpunkte eine andere Lage erhalten: während bei den Bogenbrücken die Gelenke am zweckmäßigsten in den Scheitel und die beiden Auflagerpunkte verlegt wurden, sind dieselben hier zu beiden Seiten jedes der Mittelpfeiler anzubringen in der Weise, daß die Endpunkte der über den Mittelpfeilern liegenden Brückenabteilungen den Mittel- und Endstücken als Auflagerpunkte dienen (s. Fig. 275).

Fig. 275.



Jedes der über den Pfeilern liegenden Stücke ist als ein an zwei Punkten unterstützter Balken anzusehen und, damit dasselbe durch einseitige Belastungen nicht zum Kippen gebracht werde, muß die Entfernung dieser beiden Punkte, oder die Pfeilerbreite, eine bestimmte Größe haben, die sich leicht auf folgende Weise ermitteln läßt. Die in bezug auf die Stabilität des Pfeilerstücks CD ungünstigste Belastungsweise ist offenbar diejenige, bei welcher die Strecken BC und CE allein belastet, die übrigen aber unbelastet sind. Für diesen Belastungszustand erhält man aus

Fig. 276.



Figg. 275 und 276 als Momentengleichung in bezug auf den Punkt B als Drehpunkt die Gleichung:

$$0 = (p + q)xz + (p + q)z \cdot \frac{z}{2} - px(z + b) - p(z + b) \frac{(z + b)}{2},$$

worin p die permanente, q die mobile Belastung pro Längeneinheit bezeichnet. Die Auflösung dieser Gleichung ergibt, wenn man das Verhältnis $\frac{q}{p}$ der mobilen zur permanenten Last mit n bezeichnet, als Bedingung des Gleichgewichts:

$$b \geq -(x + z) + \sqrt{(x + z)^2 + 2nz(x + \frac{z}{2})}.$$

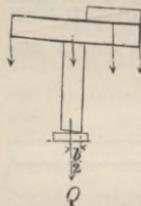
Da die Zahl n im allgemeinen um so größer wird, je kleiner die ganze Brücke ist, so würden hiernach kleine Brücken sehr große Pfeilerstärken erfordern. Um dies zu vermeiden, kann man dem Kippen zum Teil auch dadurch entgegenwirken, daß man die über dem Pfeiler liegende Brückenabteilung durch Zugstangen mit dem Mauerwerk des Pfeilers gehörig verankert. Bei einseitiger Belastung entsteht dann in einer solchen Zugstange eine Spannung K , deren Moment Kb dem Stabilitätsmomente des Pfeilerstücks zu Hilfe kommt und deren Größe aus der Momentengleichung:

$$0 = (p + q)xz + (p + q) \frac{z^2}{2} - px(z + b) - p \frac{(z + b)^2}{2} - Kb$$

berechnet werden kann. Dabei muß das Gewicht Q des Pfeilers selbst groß genug sein, um zu verhindern, daß das Ganze umkippt, nämlich die Bedingung erfüllt sein (s. Fig. 277):

$$Q \frac{b}{2} + px(z + b) + p \frac{(z + b)^2}{2} \geq (p + q)z \left(x + \frac{z}{2}\right).$$

Fig. 277.



Wenn hiernach für das erforderliche Gewicht des Mauerwerks eine unerwünschte Größe sich ergäbe, so könnte man, um Material zu ersparen, auch durch Anwendung von Doppelpfeilern die Entfernung b der beiden Stützpunkte des Stücks AB und damit den Stabilitätshebelarm vergrößern.

Was die Konstruktionsformen der einzelnen Brückenabteilungen betrifft, so können die Mittelstücke — da sie in jeder Beziehung genau so wie gewöhnliche, auf zwei Endstützen ruhende Balkenbrücken sich verhalten — entweder als parabolische Träger (wie die im zweiten Abschnitt beschriebenen) oder als Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen (wie die im dritten Abschnitt behan-

delten) konstruiert werden. Den Pfeilerstücken kann man ebenfalls die letztere Form geben, doch wird im allgemeinen — was Materialersparnis betrifft — einer anderen Form der Vorzug zu geben sein, welche aus der parabolischen Form in folgender Weise abgeleitet werden kann.

Wenn zwei oder mehrere symmetrisch gleiche (hängende oder gestützte) Ketten, welche mit gleichförmig über die Horizontalprojektion verteilten Gewichten belastet sind, nebeneinander in fortlaufender Reihe so aufgestellt sind, daß der zweite Stützpunkt der ersten Kette den ersten der zweiten bildet u. s. w., so heben an diesen gemeinschaftlichen Stützpunkten die Horizontalschübe einander auf, und nur ein vertikaler Widerstand, wie z. B. der einer vertikal herabhängenden Zugstange, ist an jeder dieser Stellen erforderlich. Statt des Endpunktes eines solchen einfachen Vertikalhebers können, wie schon in § 27 erwähnt wurde, auch die durch eine horizontale Stange miteinander verbundenen Endpunkte AB eines Doppelhebels als Stützpunkte gewählt werden (s. Figg. 278 und 279).

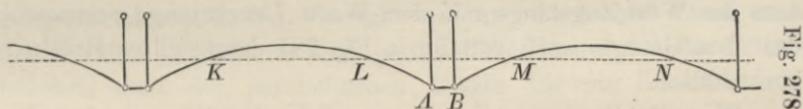


Fig. 278.

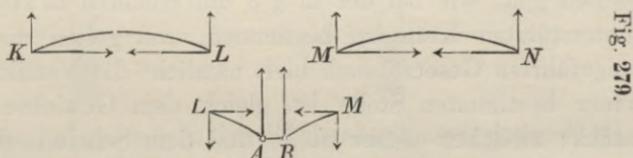


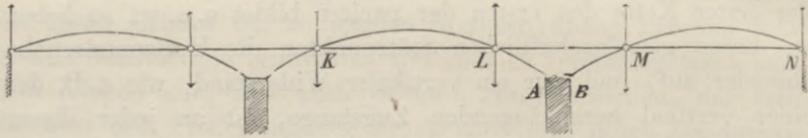
Fig. 279.

Trennt man durch einen Horizontalschnitt das Stück $LABM$ von den beiden Scheitelstücken KL und MN , so können die an den Schnittstellen zur Wiederherstellung des Gleichgewichts anzubringenden Horizontalkräfte dadurch dargestellt werden, daß man die Punkte K und L , ebenso M und N , sowie auch die Punkte L und M paarweise durch eine horizontale Zugstange miteinander in Verbindung setzt. Die vertikalen Kräfte aber haben für das Stück $LABM$ einerseits und die Stücke KL und MN andererseits gleiche Größen und entgegengesetzte Richtungen, können also in den Punkten L und M durch unmittelbares Auf-

legen der beiden Scheitelstücke KL und MN auf das Stück $LABM$ dargestellt werden.

Da in dem Zustande jedes der Kettenstücke keinerlei Änderung hierdurch hervorgebracht wurde, insofern nunmehr der Gleichgewichtszustand, wie er vor dem Durchschneiden stattfand, wiederhergestellt ist, so wird eine, aus solchen parabolischen Stücken zusammengesetzte Brückenkonstruktion, wie die in Fig. 280 dar-

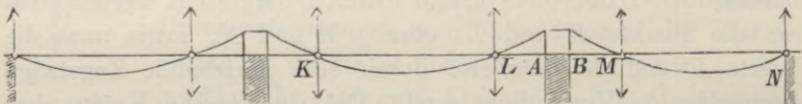
Fig. 280.



gestellte, in welcher eine durchlaufende horizontale Zugstange überall die Horizontalschübe aufnimmt, bei voller gleichförmiger Belastung keines Diagonalsystems zur Absteifung bedürfen. Da ferner die Gleichgewichtsbedingungen der hängenden und der gestützten Kette auf denselben Prinzipien beruhen, so gilt, wenn man das Wort Zugstange mit dem Worte Druckstange vertauscht, das oben Gesagte auch von der in Fig. 281 dargestellten Brückenkonstruktion.

Was die Spannung der Kettenstücke betrifft, so sind dieselben ganz wie bei der in § 8 untersuchten an zwei Endpunkten unterstützten Kette zu bestimmen, und gelten die auf Seite 30 angeführten Gesetze auch hier, nämlich: die Vertikalspannung an einer bestimmten Stelle ist gleich dem Gewichte des Brückenstücks zwischen dieser Stelle und dem Scheitel, die Horizontalspannung aber ist an allen Stellen gleich. Eine Änderung der Pfeilhöhe bewirkt also nur eine Änderung in der Horizontalspannung, nicht aber eine Änderung in der Vertikalspannung.

Fig. 281.

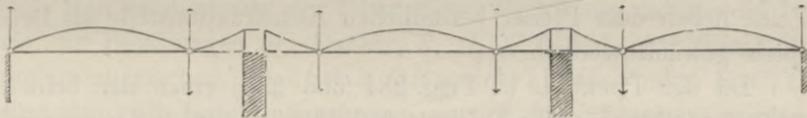


Da die Mittelstücke in Figg. 280 und 281 ganz wie frei aufliegende parabolische Träger (von den Formen Figg. 27 und 36) zu betrachten sind, so können deren Pfeilhöhen für sich be-

liebig geändert werden, ohne daß dadurch etwas anderes als ihre Horizontalspannungen (und damit zugleich die Spannungen ihrer Horizontalstangen) geändert würden. Die Spannungen in den Pfeilerstücken werden dadurch in keiner Weise geändert, denn die auf dieselben von den Mittelstücken ausgeübten Vertikalkräfte bleiben dieselben. Die Horizontalspannungen in den Pfeilerabteilungen hängen nur ab von den Pfeilhöhen derjenigen Parabeln, zu denen sie als Teile gehören.

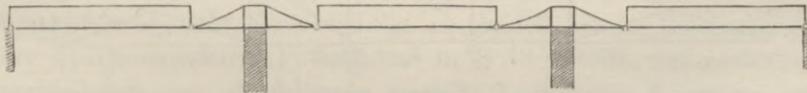
Auch können die Lagen der Scheitelstücke in Figg. 280 und 281 miteinander vertauscht werden, ohne daß dadurch in den übrigen Stücken eine Änderung hervorgebracht würde. Man erhält dann z. B. eine Konstruktion wie die in Fig. 282 darge-

Fig. 282.



stellte, welche in solchen Fällen, wo die Fahrbahn möglichst tief gelegt werden soll, den Vorzug verdient. Es bedarf kaum noch der Erwähnung, daß man auch gewöhnliche Fachwerk- oder Gitterbrücken statt der parabolischen Träger für die Scheitelstücke

Fig. 283.



einschalten kann, ohne daß in den Pfeilerabteilungen dadurch eine Änderung hervorgebracht wird (s. Fig. 283).

§ 34.

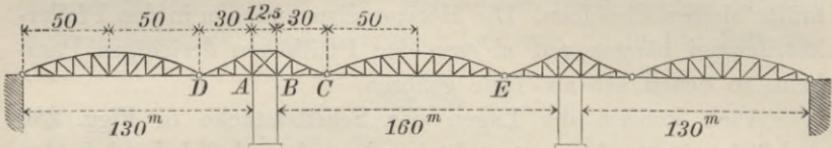
Balkenbrücke von 160 m Spannweite der Mittelöffnung und je 130 m Spannweite der Seitenöffnungen.

Das Eigengewicht der Brücke ist überall zu 8000 kg für das laufende Meter veranschlagt, wovon auf jede der beiden Tragwände die Hälfte kommt. Da die Länge eines jeden Feldes (innerhalb der Spannweiten) 10 m beträgt, so kommen 40000 kg oder — die Tonne zu 1000 kg gerechnet — 40 t permanenter Last auf jeden Belastungspunkt. Die mobile Last ist zu 4000 kg

für das laufende Meter angenommen, beträgt also für jeden Belastungspunkt 20 t.

Die drei parabolischen Träger, welche zwischen den Pfeilern liegen (s. Fig. 284), haben jeder 100 m Spannweite bei 12,5 m

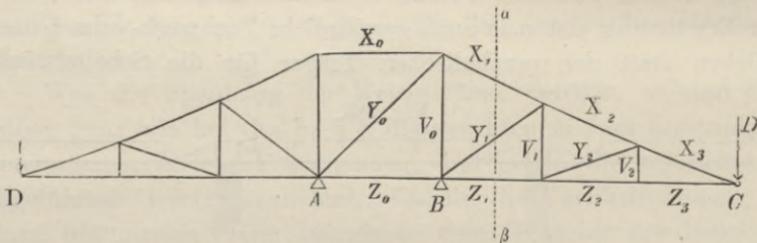
Fig. 284.



Pfeilhöhe und sind nach derselben Methode wie Fig. 39 im zweiten Abschnitt zu berechnen. Es ist also hier nur erforderlich, zu zeigen, wie die über den beiden Pfeilern liegenden Brückenabteilungen zu berechnen sind, und sollen dazu die in dem ersten Felde neben dem Pfeiler befindlichen Konstruktionsteile als Beispiele gewählt werden.

Da der Punkt *C* (s. Figg. 284 und 285) einen der beiden Auflagerpunkte für den Träger *CE* bildet, so wird der von seiten

Fig. 285.



dieses Trägers auf ihn übertragene Druck *D* am größten, wenn das Stück *CE* ganz belastet, am kleinsten, wenn das Stück *CE* ganz unbelastet ist. Im ersten Falle ist

$$D = \frac{(40 + 20) 10}{2} = 300 \text{ t,}$$

im zweiten Falle

$$D = \frac{40 \cdot 10}{2} = 200 \text{ t}$$

zu setzen. Es wird demnach für *D* der eine oder der andere dieser beiden Werte zu substituieren sein, je nachdem diese Kraft auf Vermehrung oder Verminderung der Spannung eines Konstruktionsteiles hinwirkt, und je nachdem Maximum oder Minimum

Wenn Y_1 groß werden soll, so muß D groß sein und die beiden negativen von der mobilen Last herrührenden Glieder müssen wegfallen; man erhält dann:

$$0 = -Y_1 \cdot 15,852 + 300 \cdot 4 + 40 \left(\frac{1}{2} - 6 - 16\right) + 10 \cdot 4$$

$$Y_1 (\text{max}) = + 27,76 \text{ t.}$$

Soll dagegen Y_1 klein werden, so muß D klein sein, und das von der mobilen Last herrührende positive Glied muß wegfallen, also:

$$0 = -Y_1 \cdot 15,852 + 200 \cdot 4 + 40 \left(\frac{1}{2} - 6 - 16\right) - 20(6 + 16)$$

$$Y_1 (\text{min}) = - 27,76 \text{ t.}$$

Zur Bestimmung von Z_1 dient die Momentengleichung in Beziehung auf den Drehpunkt F :

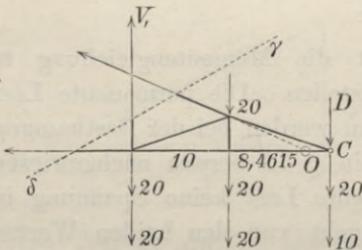
$$0 = Z_1 \cdot 7,692 + D \cdot 20 + 40 \left(\frac{20}{2} + 10\right) + 20 \left(\frac{20}{2} + 10\right),$$

aus welcher leicht zu erkennen, daß alle Belastungen auf Druckspannung hinwirken. Um die stärkste Druckspannung zu erhalten, ist also $D = 300$ zu substituieren, und es ergibt sich:

$$0 = Z_1 \cdot 7,692 + 300 \cdot 20 + 40 \left(\frac{20}{2} + 10\right) + 20 \left(\frac{20}{2} + 10\right)$$

$$Z_1 (\text{min}) = - 936 \text{ t.}$$

Fig. 287.



Zur Bestimmung von V_1 ist der Schnitt $\gamma\delta$ zu führen und die Momentengleichung in bezug auf den Drehpunkt O aufzustellen (s. Fig. 287). Die permanente Last soll also zur Hälfte in den oberen und zur anderen Hälfte in den unteren Knotenpunkten konzentriert angesehen werden.

Als allgemeine Momentengleichung erhält man dann:

$$0 = V_1 \cdot 18,4615 + D \cdot 1,5385 + 40 \left(\frac{1,5385}{2} - 8,4615 - \frac{18,4615}{2}\right) + 20 \cdot \frac{1,5385}{2} - 20(8,4615 + 18,4615).$$

Am größten wird V_1 , wenn D seinen kleinsten Wert annimmt und der Punkt C unbelastet ist, also:

$$0 = V_1 \cdot 18,4615 + 200 \cdot 1,5385 + 40 \left(\frac{1,5385}{2} - 8,4615 - \frac{18,4615}{2}\right) - 20(8,4615 + 18,4615)$$

$$V_1 (\text{max}) = + 49,2 \text{ t.}$$

Am kleinsten, wenn D seinen größten Wert annimmt und der Punkt C allein belastet ist:

$$0 = V_1 \cdot 18,4615 + 300 \cdot 1,5385 + 40 \left(\frac{1,5385}{2} - 8,4615 - \frac{18,4615}{2} \right) + 20 \cdot \frac{1,5385}{2}$$

$$V_1 (\text{min}) = + 10,8 \text{ t.}$$

[Auch hier kann man sich davon überzeugen, daß die von der mobilen Last allein hervorgebrachten Spannungszahlen, nämlich:

$$+ 29,2 \text{ und } - 9,2$$

mit der permanenten Spannungszahl

$$+ 20$$

vereinigt, dieselben Werte ergeben.]

Für die gleichliegenden Konstruktionsteile in den beiden anderen Feldern erhält man auf ähnliche Weise die Gleichungen:

$$0 = - X_2 \cdot 7,1 + 300 \cdot 20 + (40 + 20) \left(\frac{7,1}{2} + 10 \right)$$

$$X_2 (\text{max}) = + 1014 \text{ t.}$$

$$0 = - Y_2 \cdot 6,138 + (200 + 100) 1,5385 + 40 \left(\frac{1,5385}{2} - 8,4615 \right) + 20 \cdot \frac{1,5385}{2} - 20 \cdot 8,4615$$

$$Y_2 (\text{max}) = \pm 27,57 \text{ t.}$$

$$0 = Z_2 \cdot 3,526 + 300 \cdot 10 + 30 \cdot 10$$

$$Z_2 (\text{min}) = - 936 \text{ t.}$$

$$0 = V_2 \cdot 10 - 20 \cdot 10 - 20 \cdot 10$$

$$V_2 (\text{max}) = + 40 \text{ t.} \quad V_2 (\text{min}) = + 20 \text{ t.}$$

$$0 = - X_3 \cdot 3,325 + 300 \cdot 10 + 30 \cdot 10$$

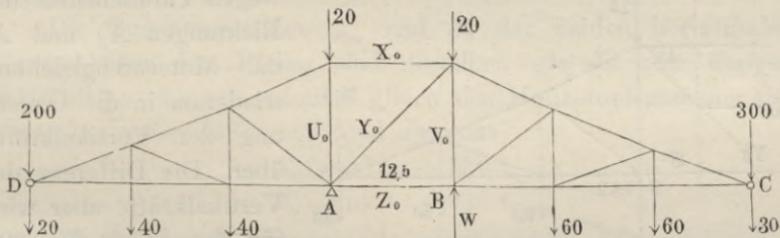
$$X_3 (\text{max}) = + 992,5 \text{ t.}$$

$$0 = Z_3 \cdot 3,526 + 300 \cdot 10 + 30 \cdot 10$$

$$Z_3 (\text{min}) = - 936 \text{ t.}$$

In etwas abweichender Weise sind die Diagonale und die beiden Vertikalständer über dem Pfeiler zu berechnen, weil hier der Gegendruck W des Pfeilers mit in Rechnung kommt. Unter diesem Druck W ist hier der Gegendruck des festen Punktes B

Fig. 288.



gegen die Konstruktion zu verstehen, und dabei die Belastung, welche den Punkt B als Belastungspunkt trifft, als direkt vom

Pfeiler aufgenommen (also ohne Einfluß auf die Größe des Drucks W) anzusehen.

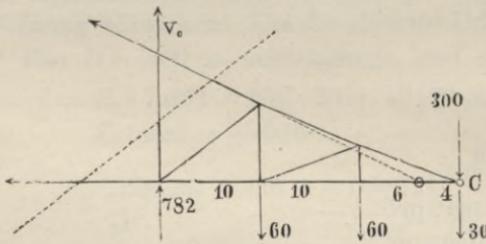
Um die Größe dieses Drucks zu bestimmen, hat man das ganze Stück CD als einen Hebel anzusehen, welcher in dem anderen Auflagerpunkte A seinen festen Drehpunkt hat (s. Fig. 288). Man erkennt sogleich, daß, wenn W groß werden soll, alle Punkte rechts von A voll belastet sein müssen, und erhält für den größten Wert von W aus Fig. 288 die Momentengleichung:

$$0 = -W \cdot 12,5 + 20 \cdot 12,5 + 60(22,5 + 32,5 + \frac{42,5}{2}) + 300 \cdot 42,5 - 40(10 + 20 + \frac{20}{2}) - 200 \cdot 30$$

$$W(\max) = 782 \text{ t.}$$

Daß dieser Belastungszustand zugleich derjenige ist, bei welchem V_0 ein Minimum wird, davon überzeugt man sich leicht durch einen Blick auf Fig. 289, indem man erwägt, daß alle Belastungen dieses Teils zu dem Drucke W Beiträge liefern, die erstlich größer als die Belastungen selbst sind, und zweitens an längeren Hebelarmen wirken in Beziehung auf den Drehpunkt.

Fig. 289.



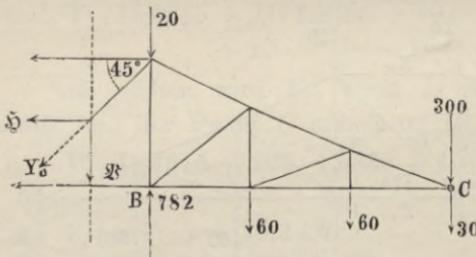
Man erhält demnach für $V_0(\min)$ aus Fig. 289 die Momentengleichung:

$$0 = V_0 \cdot 26 + 782 \cdot 26 + 300 \cdot 4 + 30 \cdot 4 - 60(6 + 16)$$

$$V_0(\min) = -782 \text{ t.}$$

Bei demselben Belastungszustande wird ferner Y_0 ein Maximum.

Fig. 290.



um so größer, je mehr dasselbe belastet wird, weil alle Belastungen dieses Stücks an Größe übertroffen werden von den Beiträgen,

die sie zu dem Gegendruck W liefern. Man erhält also für die vertikale Seitenkraft von Y_0 (max) die Gleichung:

$$0 = \mathfrak{B} - 782 + 20 + 60 + 60 + 30 + 300$$

$$\mathfrak{B} = 312$$

und da die Diagonale einen Winkel von 45° mit der Vertikalen einschließt:

$$Y_0 (\text{max}) = \frac{\mathfrak{B}}{\cos 45^\circ} = 312 \cdot \sqrt{2} = + 441,2 \text{ t.}$$

Schon früher wurde bewiesen, daß bei voller Belastung $Y_0 = 0$ wird, daß also das Minimum seinem absoluten Werte nach mit dem Maximum übereinstimmen muß; es ist folglich:

$$Y_0 \begin{pmatrix} \text{max} \\ \text{min} \end{pmatrix} = \pm 441,2 \text{ t.}$$

Was den über dem Punkte A stehenden Vertikalständer U_0 betrifft, so ist die einzige Vertikalkraft, welche außer der permanenten Belastung von 20 t an dem Kopfe desselben angreift, die vertikale Seitenkraft der Bogenspannung, und diese ist immer gleich der Summe aller Belastungen von der betreffenden Stelle an bis zum Scheitel gerechnet, d. h. bis zur Mitte des Scheitelstücks. Sie wird, wie bei der Berechnung von X_1 gefunden wurde und auch sonst schon bekannt ist, bei voller Belastung am stärksten; es ist also:

$$- U_0 = 20 + [60 + 60 + 300]$$

$$U_0 (\text{min}) = - 470 \text{ t.}$$

(Die Maxima der Spannungszahlen für die beiden Vertikalständer sind ebenfalls negativ und kommen deshalb nicht in Betracht. Es wird nämlich, wie man leicht durch Umkehrung der Belastungszustände findet: $V_0 (\text{max}) = - 8 \text{ t}$ und $U_0 (\text{max}) = - 320 \text{ t.}$)

Die* Spannungszahlen X_0 und Z_0 der beiden horizontalen Stangen über dem Pfeiler sind dieselben wie die aller übrigen horizontalen Stangen, nämlich gleich der Horizontalspannung der Kette bei voller Belastung, und zwar ist:

$$X_0 (\text{max}) = + 936 \text{ t,}$$

$$Z_0 (\text{min}) = - 936 \text{ t.}$$

Die Größe dieser Horizontalspannung hängt, wie früher schon bemerkt wurde, nur ab von der Pfeilhöhe derjenigen gedachten Parabel, zu welcher die Bogen des Stücks CD als Teile gehören,

nicht aber von der Form der wirklich vorhandenen Scheitelstücke. Der Scheitel der hier in Betracht kommenden Parabel liegt in der Entfernung 8,0128 m unter der Fahrbahnlinie, es ist also die Pfeilhöhe derselben:

$$f = 12,5 + 8,0128 = 20,5128.$$

Die zugehörige Spannweite ist:

$$2l = 160 \text{ m.}$$

Man kann also die Horizontalspannung H auch nach der Gleichung berechnen:

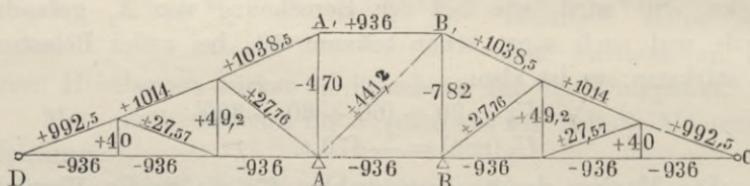
$$H = \frac{(p + q) l^2}{2 \cdot f} = \frac{(4 + 2) \cdot 80^2}{2 \cdot 20,5128} = 936 \text{ t}$$

(während die Horizontalspannung für die zwischen den Pfeilern liegenden parabolischen Träger nur

$$\frac{(4 + 2) 50^2}{2 \cdot 12,5} = 600 \text{ t beträgt}).$$

Die Spannungszahlen sind in Fig. 291 zusammengestellt. Wenn man in dieser Figur die Vorzeichen sämtlicher Spannungszahlen

Fig. 291.



zahlen in die entgegengesetzten verwandelt, so würden — vorausgesetzt, daß die Punkte A und B immer noch die Befestigungspunkte blieben — die so erhaltenen Spannungszahlen für die umgekehrte Lage derselben Konstruktion gelten. Man wird indessen bei dieser Lage statt der Punkte A und B die Punkte A_1 und B_1 als Auflagerpunkte wählen und dadurch werden natürlich die Spannungszahlen der beiden Vertikalständer über dem Pfeiler eine Änderung erleiden, die man leicht entweder direkt oder nach der früher mehrfach benutzten Methode der „fingierten Nebensteränder“ berechnen kann (vergl. § 12). Die für diese Konstruktion geltenden Spannungszahlen, welche hinsichtlich der übrigen Teile nur durch die Vorzeichen von den vorigen sich unterscheiden, sind in Fig. 292 eingetragen.

früher gefundenen Zahlen (wie man sich leicht überzeugt, wenn man sich zwei Träger mit halbierten Spannungszahlen, einen mit links, einen mit rechts ansteigender Diagonale hintereinander gestellt denkt).

Sind dagegen die beiden Diagonalen so konstruiert, daß sie entweder nur Zugspannung oder nur Druckspannung allein anzunehmen fähig sind, so gelten die Zahlen resp. von Figg. 294 und 295, in welcher letzteren durch Doppellinien die Unfähigkeit der Diagonalen, Zugspannung anzunehmen, angedeutet ist.

In gleicher Weise sind aus dem Schema Fig. 292 die in Figg. 296, 297 und 298 dargestellten analogen drei Formen abzuleiten.

In allen diesen Fällen ist der Einfachheit wegen für die beiden Belastungspunkte über den Pfeilern ebensoviel Belastung gerechnet als für alle übrigen Belastungspunkte, obwohl streng genommen wegen der größeren Weite des Feldes über dem Pfeiler eine etwas größere Belastung für sie hätte in Rechnung gebracht werden müssen.

Diese größere Länge des Pfeilerfeldes ist notwendig, weil sonst ein Kippen der Brückenabteilung über dem Pfeiler zu befürchten wäre. Wenn man nach der in § 33 angegebenen Formel:

$$b \geq -(x+z) + \sqrt{(x+z)^2 + 2nz(x+\frac{z}{2})}$$

die erforderliche Pfeilerbreite berechnet, indem man die Werte

$$x = 50, \quad z = 30, \quad n = \frac{3}{4}$$

substituiert, so ergibt sich die Bedingung:

$$b \geq 11,38 \text{ m.}$$

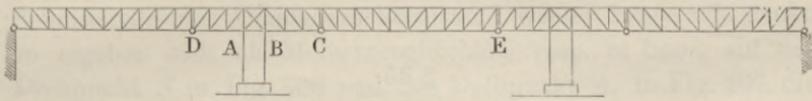
Die hier angenommene Pfeilerbreite von 12,5 m ist also ein wenig größer, als der Stabilität wegen nötig wäre (um so mehr, als die permanente Last für die zwischen den Pfeilern liegenden parabolischen Träger in Wirklichkeit etwas geringer sein wird, als für die Pfeilerabteilungen, während sie hier ebenso groß angenommen wurde).

Parallelträger.

Für den Fall, daß entweder die ganze Brücke (s. Fig. 299), oder auch nur die Abteilung über dem Pfeiler, als Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen konstruiert ist, ergeben sich für letztere die in den Figg. 300, 301, 302, 303 und 304 einge-

schriebenen Spannungszahlen, welche nach derselben Methode berechnet sind, wie die vorige Konstruktion. Um beide Konstruktions-

Fig. 299.



formen hinsichtlich des Materialaufwandes besser miteinander vergleichen zu können, sind die Grundmaße (nämlich Höhen und Spannweiten der Tragwände) beibehalten, doch beziehen sich die letzteren Figuren ausschließlich auf den Fall, daß sowohl Fahr-

Fig. 300.

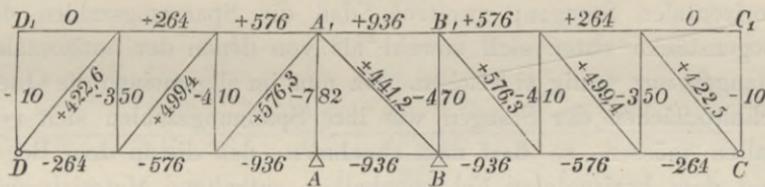


Fig. 301.

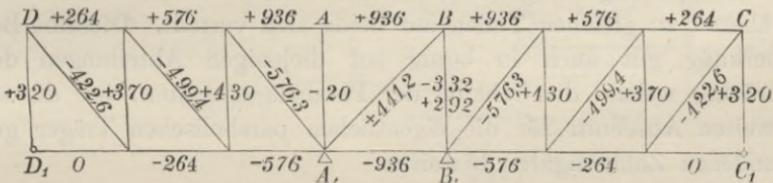


Fig. 302.

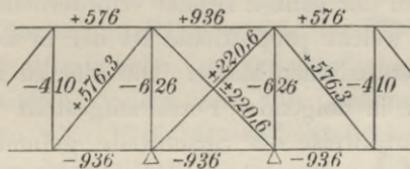


Fig. 303.

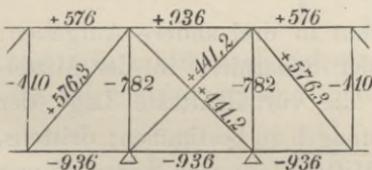
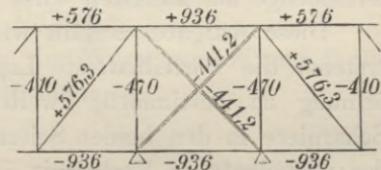


Fig. 304.



bahn als Scharniere unten liegen. Im übrigen ist zum Verständnis dieser Figuren nur das noch hinzuzufügen, daß Fig. 302 beide

Diagonalen des Mittelfeldes als zug- und druckfähig, in Fig. 303 beide Diagonalen als nur zugfähig, in Fig. 304 beide Diagonalen als nur druckfähig anzusehen sind.

§ 35.

Vorteilhafteste Einteilung der Spannweite.

Eine Vergleichung der in Fig. 291 zusammengestellten Zahlen läßt folgendes erkennen: erstens, daß die Spannungszahlen der Diagonalen und Vertikalständer eine sehr geringe Größe haben, verglichen mit den Spannungszahlen der Bogenstücke und der horizontalen Stangen; zweitens, daß die Spannungszahlen der Bogenstücke unter sich sowohl als von denen der horizontalen Stangen nur wenig abweichen. Da nun im allgemeinen die Querschnittsflächen der Stangen wie ihre Spannungszahlen sich verhalten müssen, so darf man annehmen, daß die in dem Bogen und dem horizontalen Fahrbahnbalken enthaltene Materialmenge einen überwiegend großen Teil des Ganzen ausmacht und annähernd zu gleichen Teilen auf beide sich verteilt. Dieselbe Bemerkung gilt auch in bezug auf diejenigen Abteilungen der Brücke, welche die Scheitel der Parabeln enthalten, wie die im zweiten Abschnitt für die eigentlichen parabolischen Träger gefundenen Zahlenfiguren beweisen.

Man kommt also der Wahrheit ziemlich nahe, wenn man annimmt, daß die zu der ganzen Brücke erforderliche Materialmenge eine Größe hat, welche proportional ist der in dem horizontalen Fahrbahnbalken enthaltenen Masse. Die hier zu lösende Aufgabe kann daher auch in folgender Form aufgestellt werden: es soll diejenige Einteilungsweise der Spannweite gefunden werden, bei welcher die zu dem horizontalen Fahrbahnbalken verwendete Materialmenge am kleinsten wird.

Diese Aufgabe zerfällt wiederum in drei andere Aufgaben: erstens, die vorteilhafteste Lage der Scharniere in der Mittelöffnung zu bestimmen; zweitens, die vorteilhafteste Lage der Scharniere in den beiden Seitenöffnungen zu bestimmen; drittens, das vorteilhafteste Verhältnis von Mittelöffnung zu Seitenöffnung (oder die vorteilhafteste Stellung der beiden Mittelpfeiler) zu bestimmen.

a. Teilung der Mittelöffnung.

Wenn man sich aus Fig. 305 die Stücke CE und CA herausgeschnitten und durch Hinzufügung von Kräften an der Schnittstelle den Gleichgewichtszustand wieder hergestellt denkt, so ergeben sich als Momentengleichung resp. in bezug auf den Drehpunkt S in Fig. 306 und den Drehpunkt A_1 in Fig. 307 die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad H \cdot h = px \cdot x - px \cdot \frac{x}{2} \\ 2) \quad \mathfrak{S} \cdot h = px(l-x) + p(l-x) \left(\frac{l-x}{2} \right). \end{array} \right.$$

Fig. 305.

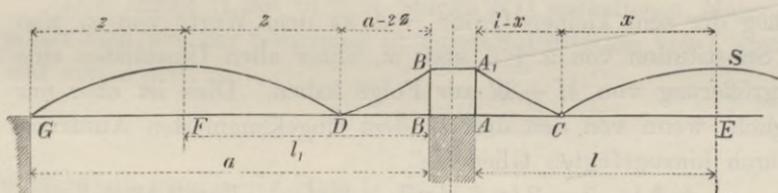


Fig. 307.

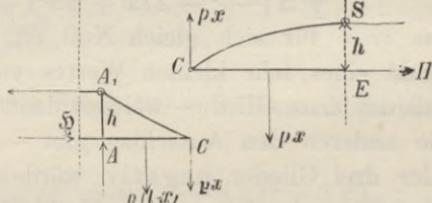


Fig. 306.

Wenn ferner S die zulässige Spannungszahl bedeutet für eine Stange, deren Querschnittsfläche gleich der Flächeneinheit ist, so findet man die erforderliche Querschnittsfläche jeder der beiden horizontalen Stangen, indem man ihre Spannungszahl durch S dividiert. Wenn also F die Querschnittsfläche der Stange CE und \mathfrak{F} die Querschnittsfläche der Stange CA bezeichnet, so ist:

$$F = \frac{H}{S}, \quad \mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{S}}{S}$$

und man erhält nach Substitution der Werte von H und \mathfrak{S} aus den Gleichungen 1) und 2) die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3) \quad F = \frac{px^2}{2hS} \\ 4) \quad \mathfrak{F} = \frac{p(l^2 - x^2)}{2hS}. \end{array} \right.$$

Wenn man jede dieser Querschnittsflächen multipliziert mit der zugehörigen Länge der Stange, so erhält man die erforderlichen Materialmengen:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5) \quad M = F \cdot x = \frac{p x^3}{2 h S} \\ 6) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cdot (l - x) = p \frac{(l^2 - x^2)(l - x)}{2 h S} \end{array} \right.$$

Die ganze in der Stange AE enthaltene Materialmenge ist also:

$$7) \quad (M + \mathfrak{M}) = \frac{p}{2 h S} (l^3 - l^2 x - l x^2 + 2 x^3).$$

Wenn hierin unter x diejenige Größe verstanden wird, welche $M + \mathfrak{M}$ wirklich zu einem Minimum macht, so muß die Hinzufügung der sehr kleinen Größe $\pm \Delta$ zu dem Werte von x , also die Substitution von $x \pm \Delta$ statt x , unter allen Umständen eine Vergrößerung von $M + \mathfrak{M}$ zur Folge haben. Dies ist aber nur möglich, wenn von den drei zu dem eingeklammerten Ausdruck dadurch hinzugefügten Gliedern:

$$\pm \Delta (-l^2 - 2 l x + 6 x^2) + \Delta^2 (6 x - l) \pm 2 \Delta^3$$

das erste für sich gleich Null ist, weil sonst durch geeignete Wahl eines sehr kleinen Wertes von Δ bewirkt werden könnte, daß das erste Glied — welches dann als überwiegend groß gegen die anderen den Ausschlag gibt — folglich auch der Inbegriff aller drei Glieder negativ würde und damit dem Werte von $M + \mathfrak{M}$ noch eine weitere Verkleinerung erteilt werden könnte. Es muß also die Bedingung

$$8) \quad -l^2 - 2 l x + 6 x^2 = 0$$

erfüllt sein,*) aus welcher sich für $\frac{x}{l}$ und $\frac{l-x}{l}$ die Werte ergeben:

$$9) \quad \frac{x}{l} = \frac{1 + \sqrt{7}}{6} = 0,6076$$

$$10) \quad \frac{l-x}{l} = 0,3924.$$

Annähernd also müssen die beiden Längen AC und CE wie 0,4 : 0,6 oder wie 2 : 3 sich verhalten.

*) Oder mit anderen Worten: Der erste Differentialquotient der in Gleichung 7) enthaltenen Funktion von x muß gleich Null gesetzt werden.

Wenn man den für x gefundenen vorteilhaftesten Wert in die Gleichung 7) einführt, so erhält man für die zu dem Teile AE erforderliche Materialmenge die Größe:

$$11) \quad M + \mathfrak{M} = 0,47184 \frac{pl^3}{2Sh}.$$

b. Teilung der Seitenöffnungen.

Den Inhalt J des zu dem Teile DF (s. Fig. 305) erforderlichen Materials findet man aus der Gleichung 5), indem man z für x substituiert:

$$12) \quad J = \frac{pz^3}{2hS}.$$

Den Inhalt \mathfrak{S} des in dem Stücke BD enthaltenen Materials erhält man aus der Gleichung 6) durch Substitution von l_1 statt l und von z statt x :

$$\mathfrak{S} = \frac{p(l_1^2 - z^2)(l_1 - z)}{2hS}$$

oder, wenn man $a - z$ statt l_1 setzt:

$$13) \quad \mathfrak{S} = \frac{pa(a - 2z)^2}{2hS}.$$

Der Inhalt des in dem ganzen Stück BG enthaltenen Materials ist also:

$$14) \quad 2J + \mathfrak{S} = \frac{p}{2Sh} (a^3 - 4a^2z + 4az^2 + 2z^3).$$

Wenn unter z derjenige Wert verstanden wird, welcher die Größe $2J + \mathfrak{S}$ zu einem Minimum macht, so muß von den durch Substitution von $z \pm \Delta$ statt z dem eingeklammerten Ausdruck hinzugefügten drei Gliedern:

$$\pm \Delta (-4a^2 + 8az + 6z^2) + \Delta^2 (4a + 6z) \pm 2\Delta^3$$

das erste Glied für sich allein gleich Null sein; es ist also die Bedingungsgleichung:

$$15) \quad -4a^2 + 8az + 6z^2 = 0$$

für z aufzulösen, woraus sich für z und $a - 2z$ die Werte ergeben:

$$16) \quad z = \frac{2}{3}a(-1 + \sqrt{2,5}) = 0,3874a$$

$$17) \quad a - 2z = 0,2252 \cdot a,$$

also für das Verhältnis $\frac{z}{a-z}$ oder $\frac{z}{l_1}$ der Wert:

$$18) \quad \frac{z}{l_1} = 0,6324.$$

Wenn man in die Gleichung 14) den gefundenen vorteilhaftesten Wert für z substituiert, so erhält man als gesamte in dem Stücke BG bei diesem Teilungsverhältnis enthaltene Materialmenge:

$$19) \quad 2J + \mathfrak{S} = 0,16706 \cdot \frac{pa^3}{2Sh}.$$

c. Verhältnis der Seitenöffnung zur Mittelöffnung.

Die vorstehend gefundenen Zahlenwerte von $\frac{x}{l}$ und $\frac{z}{l_1}$ geben für jede Öffnung einzeln an, wie dieselbe einzuteilen ist, wenn das für sie erforderliche Material ein Minimum werden soll. Diese Zahlen sind vollkommen unabhängig von der Weite jeder einzelnen Öffnung, also auch von dem Verhältnis:

$$\frac{a}{2l} = n,$$

nach welchem die ganze Spannweite in die drei einzelnen Teile

$$a \qquad 2l \qquad a$$

zerlegt ist. Nicht aber darf dieser Satz umgekehrt werden; vielmehr muß bei der Bestimmung des vorteilhaftesten Wertes von n zuvor darüber entschieden sein, nach welchem Verhältnis jede einzelne Öffnung eingeteilt werden soll, denn von diesem Teilungsverhältnis hängt der Materialverbrauch für jede Öffnung ab.

Die Aufgabe soll hier ausschließlich unter der Voraussetzung gelöst werden, daß die drei Öffnungen eben nach jenem vorteilhaftesten in den Gleichungen 9) und 18) angegebenen Verhältnissen eingeteilt sind.

In diesem Falle erhält man als erforderliche Materialmenge für die eine Hälfte L der ganzen Spannweitemsumme durch Addition der beiden Gleichungen 11) und 19) den Wert:

$$M + \mathfrak{M} + 2J + \mathfrak{S} = \frac{p}{2Sh} (0,47184 l^3 + 0,16706 \cdot a^3)$$

oder, wenn man hierin $l = L - a$ setzt:

$$20) \quad M + \mathfrak{M} + 2J + \mathfrak{S} + \frac{p}{2Sh} (0,47184 [L - a]^3 + 0,16706 \cdot a^3).$$

Damit dieser Wert ein Minimum werde, muß die Bedingung erfüllt sein:

$$21) \quad -3 \cdot 0,47184 (L - a)^2 + 3 \cdot 0,16706 a^2 = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

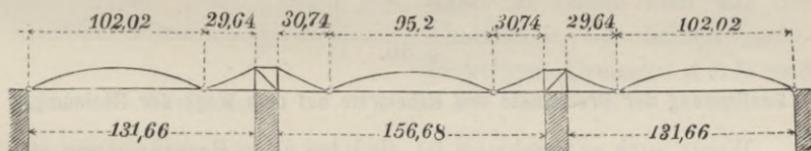
$$\frac{a}{(L - a)} = \sqrt{\frac{0,47184}{0,16706}} = 1,6806$$

oder, wenn man wieder l statt $L - a$ und n statt $\frac{a}{2l}$ setzt:

$$22) \quad n = 0,8403.$$

Wenn man nach diesen in den Gleichungen 9), 18) und 22) enthaltenen Regeln die bei dem vorigen Zahlenbeispiel angenommene ganze Spannweitensumme von 420 m hätte einteilen wollen, so würden sich die in Fig. 308 eingetragenen Längen für die einzelnen Abteilungen ergeben haben.

Fig. 308.



Indessen würden bei dieser Anordnung die drei parabolischen Scheitelstücke nicht kongruent werden, was die Kosten der Herstellung ein wenig vermehrt; zweitens würde infolge der unsymmetrischen Anordnung und ungleichen Belastung der Scharnierpunkte schon bei gleichförmig verteilter Belastung in den Feldern über den Mittelpfeilern eine Spannung der Diagonalen eintreten, wodurch ein geringer Mehraufwand von Material bedingt wird. Da außerdem die ganze Rechnung nur auf Annäherung beruht, so konnte bei dem obigen Zahlenbeispiele ohne Bedenken eine den einfacheren Verhältnissen:

$$n = \frac{130}{160}, \quad \frac{x}{l} = \frac{50}{80}, \quad \frac{z}{l_1} = \frac{50}{80}$$

entsprechende, in bezug auf die Mittelpfeiler symmetrische Einteilung vorgezogen werden.

Die Gleichungen 1) und 2) geben auch für Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen die Spannungen in den horizontalen Stangen an. Zwar nimmt bei solchen Trägern die Stärke der Gurtungen nach den Scharnierpunkten hin ab, doch wird diese Abnahme durch den Mehraufwand an Material zu den Diagonalen und Vertikalständern annähernd ausgeglichen.

Man darf deshalb annehmen, daß der Gesamtverbrauch an Material bei solchen Trägern nahezu derselbe ist, wie bei parabolischen Trägern — eine Annahme, die man bei Vergleichung der Fig. 27 mit Fig. 57, sowie der Fig. 291 mit Fig. 300 bestätigt findet —. Die Grundlagen und Ausgangspunkte der Rechnung würden also für diesen Fall dieselben bleiben; es können folglich die in den Gleichungen 9), 18) und 22) enthaltenen Regeln annähernd auch für Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen als gültig betrachtet werden.

ELFTER ABSCHNITT.

§ 36.

Bestimmung der Drehpunkte und Hebelarme auf dem Wege der Rechnung.

Wenn auch anzunehmen ist, daß bei allen Berechnungen von demnächst wirklich auszuführenden Konstruktionen dem Rechner stets eine nach richtigen Maßverhältnissen ausgeführte Zeichnung zu Gebote steht, auf welcher derselbe die Lage der Drehpunkte und die Längen der Hebelarme am bequemsten und mit hinreichender Genauigkeit durch direkte Messung bestimmen kann, so kommen doch auch Fälle vor, in denen es sich als notwendig erweist, jene Bestimmung ohne Hilfe der Zeichnung auf dem Wege der Rechnung auszuführen. Daß auch dieser Weg keine Schwierigkeiten bietet, daß vielmehr bei allen Konstruktionen, die aus lauter geradlinigen Stangen zusammengesetzt sind, diese Bestimmung stets auf dem einfachen Wege der Vergleichung zweier ähnlichen Dreiecke ausgeführt werden kann, soll im folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden. Diese Beispiele sollen den früher berechneten Konstruktionen in der Weise entnommen werden, daß die nachfolgenden Rechnungen — als Anhänge und Ergänzungen an die betreffenden früheren Paragraphen sich anschließend — für diejenigen Leser, welche die Bestimmung der Spannungszahlen vollständig auf dem Wege der Rechnung durchzuführen beabsichtigen, die Lösung der Aufgabe zum Abschluß bringen.

Nach den in Fig. 21 angegebenen Dimensionen ist hierin $\lambda = 2$ m, $u = 1,5$ m, $v = 1,875$ m zu setzen; es ist also:

$$x = \left(\frac{3u - 2v}{v - u} \right) \lambda = 4 \text{ m.}$$

Aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke SDH und GDF ergibt sich ferner die Gleichung:

$$\frac{y}{\overline{SD}} = \frac{v}{\overline{GD}},$$

aus welcher man nach Substitution der Werte $\overline{SD} = x + 2\lambda = 8$ m und $\overline{GD} = \sqrt{v^2 + \lambda^2} = \sqrt{1,875^2 + 2^2}$ für y den Wert erhält:

$$y = \frac{8 \cdot 1,875}{\sqrt{1,875^2 + 2^2}} = 5,47 \text{ m.}$$

Endlich für den Hebelarm $\overline{DJ} = z$ (der Spannung Z_3 in bezug auf den Drehpunkt D) erhält man aus Fig. 310 die Gleichung:

$$z = u \cdot \cos \alpha = u \cdot \frac{\overline{SD}}{\overline{SE}} = 1,5 \cdot \frac{8}{\sqrt{8^2 + 1,5^2}} = 1,474 \text{ m.}$$

Sichelförmiger Träger (§ 15).

Der oben für x gefundenen Gleichung kann man auch die Form geben:

$$x + 2\lambda = \frac{\lambda}{\frac{v}{u} - 1}.$$

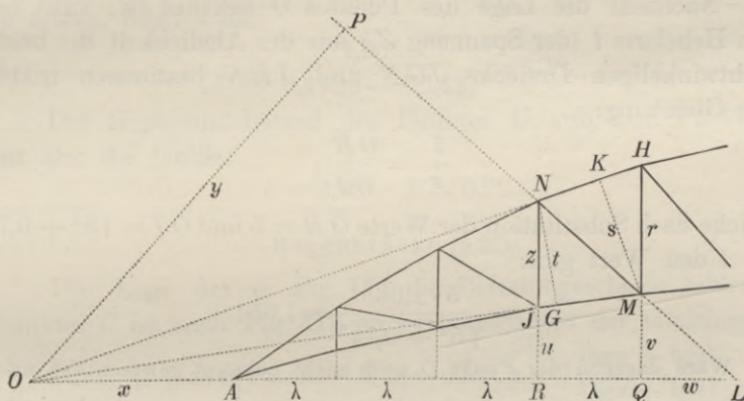
Bei einer Parabel von n mal so großer Pfeilhöhe würden sämtliche Ordinaten — sowie auch die sämtlichen Vertikalstangen des nach dieser Parabel konstruierten parabolischen Trägers — die n -fache Länge erhalten; es würde also $n \cdot v$ statt v und $n \cdot u$ statt u zu setzen sein. Da das auf der rechten Seite im

Nenner stehende Verhältnis $\frac{v}{u} = \frac{n \cdot v}{n \cdot u}$ dadurch nicht geändert

wird, so ist die Lage des Durchschnittspunktes der Parabelsehne EG mit der Horizontalen der Auflagerpunkte unabhängig von der Pfeilhöhe der Parabel. Wenn also über einer und derselben Spannweite mehrere parabolische Träger konstruiert würden mit gleicher Felderteilung und ungleichen Pfeilhöhen, so würde für ein und dasselbe Feld der Durchschnittspunkt der Parabelsehnen mit der Horizontalen der Auflagerpunkte bei allen jenen Trägern dieselbe Lage erhalten.

Hieraus folgt, daß bei dem sichelförmigen Träger (Fig. 311) die beiden Parabelsehnern HN und MJ in einem Punkte O sich schneiden, welcher in der Horizontalen des Auflagerpunktes A

Fig. 311.



liegt. Die Lage des Punktes O kann daher auf gleiche Weise wie bei dem vorigen Falle bestimmt werden mittelst der Gleichung

$$\frac{u}{x + 3\lambda} = \frac{v}{x + 4\lambda}$$

Setzt man hierin nach Fig. 114 die Werte $\lambda = 1$, $u = 0,710$, $v = 0,852$, so erhält man:

$$x = \frac{0,710}{0,852 - 0,710} - 3 = 2.$$

Auf dieselbe Weise kann auch die Lage des Punktes L bestimmt werden, nämlich aus der Gleichung:

$$\frac{w}{v} = \frac{w + \lambda}{u + z}, \text{ oder } \frac{w}{v} = \frac{\lambda}{u + z - v},$$

in welcher $z = 1,065$ zu setzen ist (nach Fig. 114). Diese Gleichung ergibt für w den Wert:

$$w = \frac{0,852}{1,775 - 0,852} = 0,9231.$$

Zur Bestimmung des Hebelarms y (der Spannung Y_4 in Fig. 116) ergibt sich nunmehr aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke OPL und MQL die Gleichung:

$$\frac{y}{OL} = \frac{v}{ML}.$$

Hierin ist $\overline{OL} = 2 + 4 + 0,9231 = 6,9231$ zu setzen, und $\overline{ML} = \sqrt{0,852^2 + 0,9231^2} = 1,256$. Man erhält dann für y den Wert:

$$y = \frac{6,9231 \cdot 0,852}{1,256} = 4,7.$$

Nachdem die Lage des Punktes O bekannt ist, kann man den Hebelarm t (der Spannung Z_1) aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke JGN und JRN bestimmen mittelst der Gleichung:

$$\frac{t}{z} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OJ}},$$

welche nach Substitution der Werte $\overline{OR} = 5$ und $\overline{OJ} = \sqrt{5^2 + 0,71^2}$ für t den Wert gibt:

$$t = \frac{5 \cdot 1,065}{\sqrt{5^2 + 0,71^2}} = 1,054.$$

Wäre dagegen der Punkt O noch nicht bekannt gewesen, so würde der Hebelarm t einfacher zu bestimmen sein aus der Gleichung $\frac{t}{z} = \frac{\lambda}{JM}$.

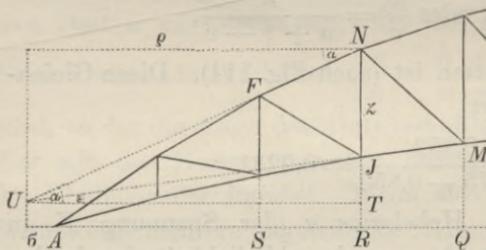
Den Hebelarm s (der Spannung X_1) kann man berechnen aus der Gleichung:

$$\frac{s}{r} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OH}},$$

in welcher $r = 1,278$, $\overline{OQ} = 6$ und $\overline{OH} = \sqrt{6^2 + 2,13^2}$ zu setzen ist, worauf sich für s der Wert ergibt:

$$s = \frac{6 \cdot 1,278}{\sqrt{6^2 + 2,13^2}} = 1,205.$$

Fig. 312.



beiden Parabelsehn NF und MJ bestimmen. Nach Fig. 312 ist:

$$NT = \rho \operatorname{tg} \alpha = z + \rho \operatorname{tg} \varepsilon, \text{ oder } \rho = \frac{z}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon}.$$

Wäre dagegen der Punkt O noch nicht bekannt gewesen, so würde der Hebelarm s einfacher zu bestimmen sein aus der Gleichung

$$\frac{s}{r} = \frac{\lambda}{NH}.$$

Um die Spannung V_3 zu berechnen, mußte man zuvor den Durchschnittspunkt U der

Hierin ist $z = 1,065$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\overline{MQ} - \overline{JR}}{\overline{QR}}$ oder (nach Fig. 114)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{0,852 - 0,710}{1} = 0,142, \text{ ferner } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{NR} - \overline{FS}}{1} = 0,4725$$

zu setzen, folglich ist:

$$\rho = \frac{1,065}{0,4725 - 0,142} = 3,22.$$

Der Horizontalabstand des Punktes U von dem Punkte A hat also die Größe:

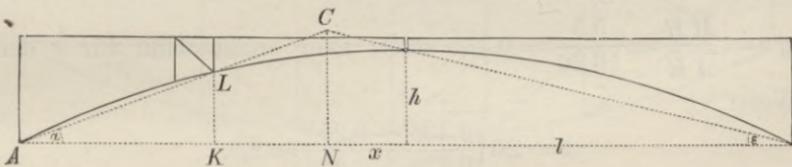
$$\sigma = 3,22 - 3 = 0,22.$$

Bogenbrücke (§ 22).

Die Lage des in Fig. 174 die Belastungsscheide bildenden Punktes C ist nach Fig. 313 zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\overline{CN} = (l + x) \operatorname{tg} \varepsilon = (l - x) \operatorname{tg} \alpha \text{ oder } x = l \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varepsilon} \right).$$

Fig. 313.



Setzt man hierin (nach Fig. 173)

$$l = 20, \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{h}{l} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ und } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{LK}}{\overline{AK}} = \frac{3,75}{10} = 0,375,$$

so erhält man für x den Wert:

$$x = 20 \left(\frac{0,375 - 0,25}{0,375 + 0,25} \right) = 4.$$

Der in Fig. 192 die Belastungsscheide bildende Punkt F kann ebenfalls mittelst der oben für x gefundenen Gleichung bestimmt werden, nur ist es nötig, für α den Winkel, den die Linie AO mit der Horizontalen bildet, zu substituieren, also (nach Fig. 173):

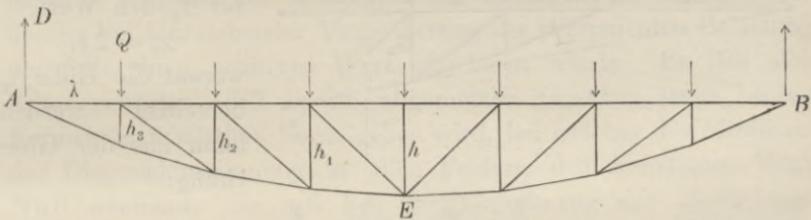
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5,5}{8} = 0,6875$ zu setzen, man erhält dann für x den Wert:

$$x = 20 \left(\frac{0,6875 - 0,25}{0,6875 + 0,25} \right) = 9,33 \dots$$

Die Durchschnittspunkte der Parabelsehnen mit der oberen Horizontalen findet man auf dieselbe Weise wie bei den para-

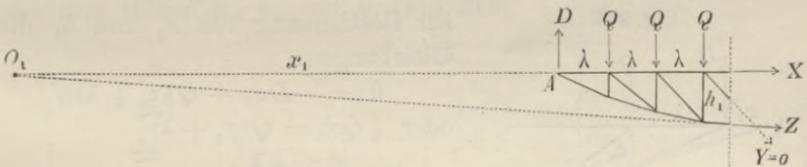
die Spannung Null annehmen — eine Eigenschaft, welche später in der „Theorie der parabolischen Träger“ als eine allgemeine Eigenschaft aller parabolischen Träger ihre Erklärung fand. Man hätte nun den Gang der Untersuchung auch umkehren können, nämlich von der erwähnten Eigenschaft als einer vorgeschriebenen Bedingung ausgehend sich die Aufgabe stellen, diejenige Form aufzusuchen, welche der Träger haben müßte, um die verlangte Eigenschaft zu besitzen. Nimmt man die Spannweite, die Feldereinteilung, sowie die Pfeilhöhe des Trägers als gegeben an, womit zugleich die Lage der Punkte A , E , B , sowie der sämtlich in der Horizontalen AB liegenden Belastungspunkte festgelegt ist, so sind bei symmetrischer Form des Trägers die Höhen h_1, h_2, h_3 die einzigen unbekanntenen Größen, durch deren Bestimmung die Form des Trägers vollständig festgestellt wird (Fig. 315). Um

Fig. 315.



die Größe h_1 zu bestimmen, stellt man für den in Fig. 316 dargestellten Teil des Trägers die Gleichung der statischen Momente auf und wählt dabei den Durchschnittspunkt O_1 der beiden

Fig. 316.



Kräfte X und Z als Drehpunkt. Dieser Punkt soll eine solche Lage haben, daß die Diagonalspannung $Y=0$ wird. Man erhält also die Gleichung:

$$0 = -Dx_1 + Q\{(x_1 + \lambda) + (x_1 + 2\lambda) + (x_1 + 3\lambda)\},$$

welche ausdrückt, daß die Mittelkraft von der Kraft D und den drei Gewichten Q durch den Punkt O_1 hindurchgehen muß, um

dieselbst von den beiden Kräften X und Z aufgehoben zu werden. Setzt man in obiger Gleichung $D = \frac{7Q}{2}$, so erhält man für x_1 den Wert:

$$x_1 = 12\lambda.$$

Die Höhe h_1 kann nunmehr berechnet werden aus der Gleichung:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{x_1 + 3\lambda}{x_1 + 4\lambda} = \frac{15}{16}.$$

Auf gleiche Weise erhält man nach Fig. 317 zur Bestimmung von x_2 die Gleichung:

$$0 = -Dx_2 + Q\{(x_2 + \lambda) + (x_2 + 2\lambda)\},$$

in welcher wiederum

$$D = \frac{7Q}{2}$$

ist; man erhält dann für x_2 den Wert:

$$x_2 = 2\lambda,$$

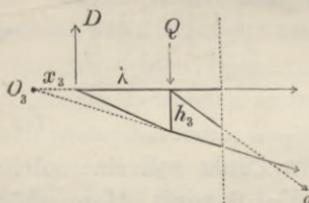
worauf die Höhe h_2 berechnet werden kann aus der Gleichung:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{x_2 + 2\lambda}{x_2 + 3\lambda} = \frac{4}{5},$$

oder auch — mit Benutzung des für h_1 bereits berechneten Wertes — aus der Gleichung:

$$h_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16} h = \frac{3}{4} h.$$

Fig. 318.



Endlich nach Fig. 318 erhält man zur Bestimmung von x_3 und h_3 die Gleichungen:

$$0 = -Dx_3 + Q(x_3 + \lambda)$$

$$\text{oder } \frac{7}{2} Qx_3 = Q(x_3 + \lambda)$$

$$x_3 = \frac{2}{3} \lambda$$

$$\frac{h_3}{h_2} = \frac{x_3 + \lambda}{x_3 - 2\lambda} = \frac{7}{12}$$

$$h_3 = \frac{7}{12} h_2 = \frac{7}{16} h.$$

Setzt man $h = 2\text{ m}$, so erhält man $h_1 = 1,875\text{ m}$, $h_2 = 1,5\text{ m}$ und $h_3 = 0,875\text{ m}$, also dieselben Größen, welche in Fig. 21 als Längen der Vertikalstangen angenommen wurden. Wenn man außerdem noch $\lambda = 2\text{ m}$ setzt, so erhält man: $x_1 = 24\text{ m}$, $x_2 = 4\text{ m}$ und $x_3 = 0,8\text{ m}$; also für die Durchschnittspunkte

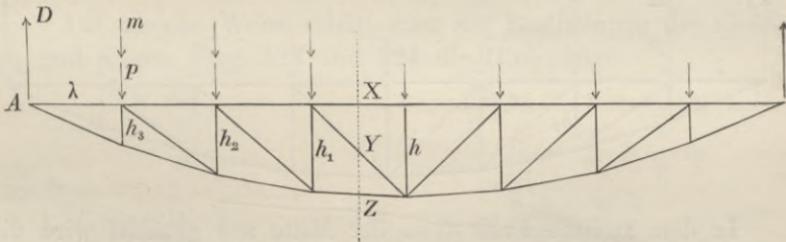
O_1, O_2, O_3 ebenfalls dieselbe Lage, wie sie im § 6 bei der Berechnung der Spannungszahlen angenommen und im vorigen Paragraphen bei der Bestimmung der Drehpunkte berechnet wurde.

§ 38.

Schwedlerscher Träger.

Vergleicht man den symmetrischen parabolischen Träger (Fig. 35) mit dem symmetrischen Parallelträger (Fig. 69), so erkennt man, daß hinsichtlich der Diagonalspannungen folgender Unterschied zwischen beiden stattfindet: Bei dem parabolischen Träger sind Maximum und Minimum der Spannungszahl einer Diagonale stets gleich und entgegengesetzt, folglich die Minima sämtlich negativ. Bei dem Parallelträger dagegen ist, wenn die Diagonalen von der Mitte nach den beiden Enden hin ansteigen, stets das Maximum überwiegend und das Minimum wird positiv in allen Feldern, mit Ausnahme der mittleren, in denen es indessen bei hinreichender Vergrößerung der permanenten Belastung ebenfalls einen positiven Wert annehmen würde. Es läßt sich daher erwarten, daß es im allgemeinen zwischen jenen beiden Formen eine mittlere Form geben wird, bei welcher das Minimum der Diagonalspannung in allen Feldern den konstanten Wert Null annimmt. Es soll bei der Berechnung (der dieser vorgeschriebenen Bedingung entsprechenden Form (wie im vorigen Paragraphen) die Felderzahl = 8, die Pfeilhöhe = h und die Spannweite = 8λ als gegeben, und der Träger als symmetrisch vorausgesetzt werden, wodurch die Zahl der noch zu bestimmenden unbekanntenen Größen wiederum auf drei reduziert wird, nämlich die drei Höhen h_1, h_2 und h_3 (Fig. 319).

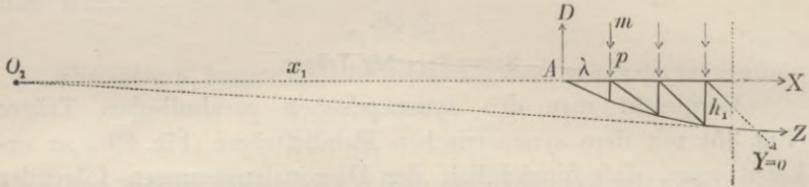
Fig. 319.



Um die Höhe h_1 zu finden, hat man sich zunächst den Träger in demjenigen Belastungszustande zu denken, für welchen die

Diagonalenspannung Y ein Minimum wird; hierauf für den in Fig. 320 dargestellten Teil die Gleichung der statischen Momente

Fig. 320.



in bezug auf den Drehpunkt O_1 , als Durchschnittspunkt der beiden Spannungen X und Z , aufzustellen und den Abstand x_1 dieses Punktes so zu wählen, daß die Diagonalenspannung $Y=0$ wird; man erhält also die Gleichung:

$$0 = -D \cdot x_1 + (p + m) \{ (x_1 + \lambda) + (x_1 + 2\lambda) + (x_1 + 3\lambda) \}.$$

Setzt man in dieser Gleichung dem angenommenen Belastungszustande entsprechend:

$$D = \frac{7}{2} p + m \left(\frac{7}{8} + \frac{6}{8} + \frac{5}{8} \right),$$

so nimmt dieselbe für x_1 aufgelöst die Form an:

$$\text{I. } x_1 = \frac{24(p + m)\lambda}{2p - 3m}.$$

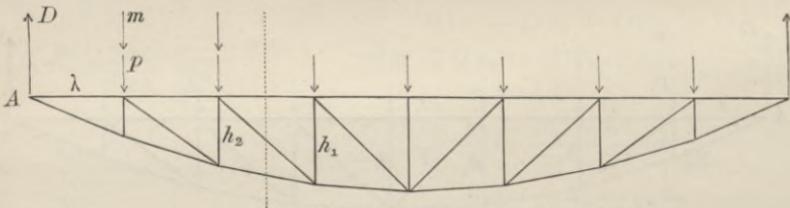
Hiernach kann die Höhe h_1 berechnet werden aus der Gleichung:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{x_1 + 3\lambda}{x_1 + 4\lambda},$$

welche nach Substitution des für x_1 gefundenen Wertes die Form annimmt:

$$\text{Ia. } \frac{h_1}{h} = \frac{30p + 15m}{32p + 12m}.$$

Fig. 321.



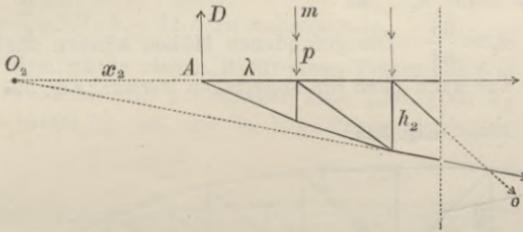
In dem zweiten Felde (von der Mitte aus gezählt) wird die Diagonalenspannung ein Minimum bei dem in Fig. 321 dargestellten Belastungszustande, für welchen

$$D = \frac{7p}{2} + m\left(\frac{7}{8} + \frac{6}{8}\right)$$

wird, und die Höhendifferenz in diesem Felde soll so beschaffen sein, daß dieses Minimum gleich Null wird. Man erhält also zur Bestimmung von x_2 nach Fig. 322 die Gleichung:

$$0 = -Dx_2 + (p + m)\{(x_2 + \lambda) + (x_2 + 2\lambda)\},$$

Fig. 322.



welche für x_2 aufgelöst nach Substitution des obigen Wertes von D die Form annimmt:

$$\text{II. } x_2 = \frac{8(p+m)\lambda}{4p-m}$$

Die Höhe h_2 ist

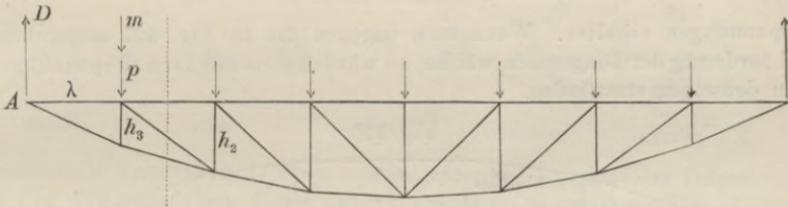
nunmehr zu berechnen aus der Gleichung:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{x_2 + 2\lambda}{x_2 + 3\lambda}$$

oder nach Substitution des für x_2 gefundenen Wertes aus der Gleichung:

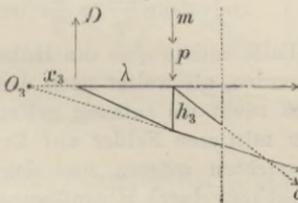
$$\text{IIa. } \frac{h_2}{h_1} = \frac{16p + 6m}{20p + 5m}$$

Fig. 323.



Auf gleiche Weise erhält man zur Bestimmung der Größen x_3 und h_3 aus Figg. 323 und 324 die Gleichungen:

Fig. 324.



$$0 = -D \cdot x_3 + (p + m)(x_3 + \lambda)$$

$$D = \frac{7p}{2} + \frac{7}{8}m$$

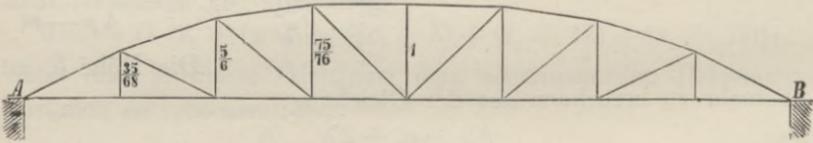
$$\text{III. } x_3 = \frac{8(p+m)\lambda}{20p-m}$$

$$\text{IIIa. } \frac{h_3}{h_2} = \frac{x_3 + \lambda}{x_3 + 2\lambda} = \frac{28p + 7m}{48p + 6m}$$

Setzt man in den obigen Gleichungen überall $m = 0$, so führen dieselben wieder zu der Form des parabolischen Trägers, denn man erhält dann die Werte: $x_1 = 12\lambda$, $x_2 = 2\lambda$, $x_3 = 0,4\lambda$ und $\frac{h_1}{h} = \frac{15}{16}$, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$, $\frac{h_3}{h_2} = \frac{7}{12}$, also dieselben Werte, welche im vorigen Paragraphen für den parabolischen Träger gefunden wurden.

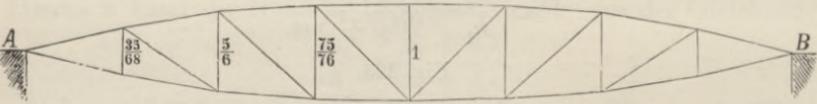
Wenn das Verhältnis $\frac{m}{p} = \frac{1}{2}$ ist, so wird $\frac{x_1}{\lambda} = 72$, $\frac{x_2}{\lambda} = \frac{24}{7}$, $\frac{x_3}{\lambda} = \frac{24}{39}$ und $\frac{h_1}{h} = \frac{75}{76}$, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{38}{45}$, $\frac{h_3}{h_2} = \frac{21}{34}$, also wenn z. B. $h = 1$ ist, so wird $h_1 = \frac{75}{76}$, $h_2 = \frac{5}{6}$, $h_3 = \frac{35}{68}$. Die gefundenen Höhen können auch von der Horizontalen AB aus nach oben hin abgetragen werden (Fig. 325)

Fig. 325.



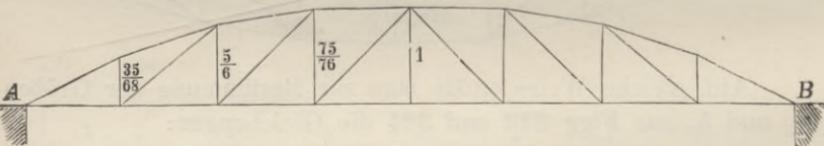
oder zur Hälfte nach oben, zur anderen Hälfte nach unten hin (Fig. 326); immer bleibt die Bedingung erfüllt, daß die Diagonale stets nur Zug-

Fig. 326.



spannungen erhalten. Wenn man dagegen die in Fig. 327 angegebene Anordnung der Diagonalen wählte, so würden stets nur Druckspannungen in denselben stattfinden.

Fig. 327.



Wenn $\frac{m}{p} = \frac{2}{3}$ ist, so wird $x_1 = \infty$, $\frac{h_1}{h} = 1$, und wenn $\frac{m}{p} > \frac{2}{3}$ ist, so wird x_1 negativ und $h_1 > h$. In diesem Falle müßte also die Höhe des Trägers in der Mitte kleiner genommen werden, als weiter nach den Enden hin. Wenn dies aus anderen Gründen nicht als zulässig gelten sollte, so würde man hinsichtlich der beiden mittleren Felder auf Erfüllung der vorgeschriebenen Bedingung verzichten müssen und dem Träger in diesem Teile überall dieselbe Höhe geben; durch Hinzufügung

Fahrbahnlinie ihre Angriffspunkte haben. Soll statt dessen die der Wirklichkeit besser entsprechende Annahme gemacht werden, daß die permanenten Belastungen zur Hälfte auf die oberen, zur Hälfte auf die unteren Endpunkte der Vertikalstangen sich verteilen, so hat man (nach § 12) zu den Spannungszahlen der Vertikalstangen in Fig. 329 überall die Zahl — 6000 hinzuzuaddieren und erhält statt der in der Figur angegebenen Zahlen für die Spannungen der Vertikalstangen — in der Reihenfolge von der Mitte nach dem Ende hin — die Werte:

$$- 12000, \begin{cases} - 17000, \\ + 9000 \end{cases}, \begin{cases} - 10000, \\ + 18000 \end{cases}, + 22000.$$

In Fig. 330 dagegen würde man zu den Spannungszahlen der Vertikalstangen überall die Zahl + 6000 hinzuzuaddieren haben und die Werte erhalten

$$- 22000, - 42000, - 48670, - 43000.$$

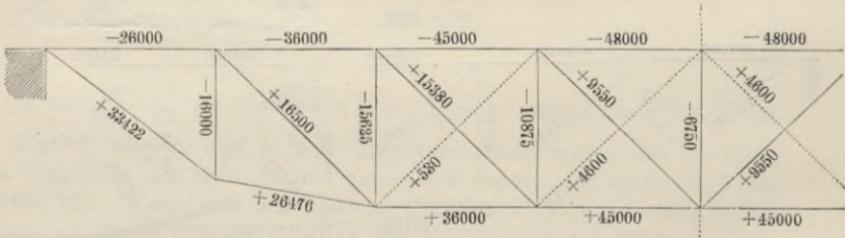
Wenn $\frac{m}{p} = 4$ ist, so wird (nach Gleichung II.) $x_2 = \infty$ und wenn $\frac{m}{p} > 4$ ist, so würde nach obiger Gleichung x_2 negativ und $h_2 > h_1$ werden. In diesem Falle müßte man außer h_1 auch die Höhe h_2 gleich der Höhe h nehmen, also den vier mittleren Feldern rechteckige Formen und Gegenstreben geben. Setzt man (wie für den in § 6 berechneten Träger) $p = 1000$ kg und $m = 5000$ kg und $\lambda = h = 2$ m, so erhält man (aus Gleichung III.) $x_3 = 6,4$ m und (aus Gleichung III.a.) $h_3 = 1,615$ m. Der Träger würde alsdann die in Fig. 331 angegebenen Dimensionen und die

Fig. 331.



Fig. 332 zusammengestellten Spannungszahlen erhalten, welche in den vier mittleren Feldern mit den in Fig. 61 gefundenen übereinstimmen.

Fig. 332.



Wäre endlich $m > 20p$, so würde nach obigen Gleichungen x_3 negativ und $h_3 > h_2$ werden. In diesem Falle würde also — wenn es nicht als

zulässig betrachtet wird, die Höhe des Trägers nach der Mitte hin kleiner werden zu lassen — die vorgeschriebene Bedingung für den Träger von acht Feldern überhaupt nicht mehr erfüllbar sein bei der vorausgesetzten Anordnung des Diagonalensystems (vergleiche § 39).

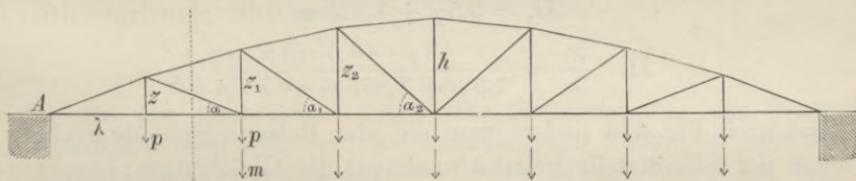
§ 39.

Träger mit gleichen Maximalspannungen der Diagonalen.

Die im vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe, welche vorschrieb, daß das Minimum der Diagonalspannung in jedem Felde den Wert Null annehmen sollte, bildet einen speziellen Fall der allgemeineren Aufgabe: den Träger so zu konstruieren, daß die Maximalspannungen der Diagonalen sämtlich einem und demselben — übrigens aber beliebig großen — vorgeschriebenen Werte gleich werden sollen.

Da bei Umkehrung des Trägers die positiven Spannungszahlen negativ und die negativen positiv werden, also Maximum und Minimum ihre Bedeutungen miteinander austauschen, so ist es hinsichtlich der Erklärung des bei der Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe anzuwendenden Verfahrens gleichgültig, ob die Minimalspannungen oder die Maximalspannungen ausgewählt werden als diejenigen, welche untereinander gleich werden sollen. Da die Minima in der Regel negative Zahlen sind, so erscheint es zweckmäßiger, von den Maximalspannungen auszugehen. Es soll in diesem Paragraphen also diejenige Form des Trägers bestimmt werden, bei welcher die Maximalspannungen der Diagonalen einem vorgeschriebenen Werte gleich werden, und wiederum das anzuwendende Verfahren durchgehend an einem symmetrischen Träger mit acht Feldern erklärt werden.

Fig. 333.



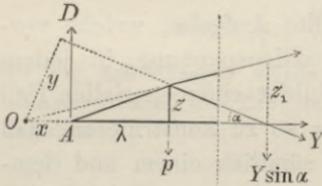
Die Spannung der Diagonale des zweiten Feldes wird bei dem in Fig. 333 dargestellten Belastungszustande ein Maximum und man erhält zur Bestimmung desselben aus Fig. 334 die Gleichung:

$$0 = Y \cdot y - D \cdot x + p(x + \lambda).$$

Diese Gleichung nimmt nach Substitution des Wertes $y = (x + 2\lambda) \sin \alpha$ die Form an:

$$0 = Y \cdot \sin \alpha (x + 2\lambda) - Dx + p(x + \lambda)$$

Fig. 334.



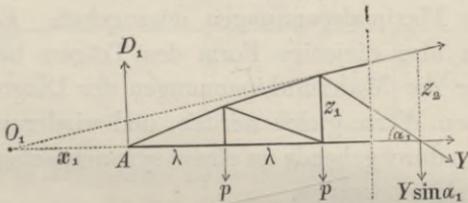
(zu welcher man auch gelangt sein würde, wenn man die Spannung Y in ihre horizontale und vertikale Seitenkraft zerlegt und das statische Moment der letzteren statt des statischen Momentes von Y selbst genommen hätte). Die Größe x muß so gewählt werden, daß Y den vorgeschriebenen Wert annimmt. Man hat also nach Substitution des dem angegebenen Belastungszustande entsprechenden Wertes:

$$D = \frac{7}{3} p + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{6}{3}) m = 3,5 p + 2,625 m$$

die obige Momentengleichung für x aufzulösen und erhält die Gleichung:

$$I. \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{p + 2 Y \sin \alpha}{2,5 p + 2,625 m - Y \sin \alpha}.$$

Fig. 335.



Auf gleiche Weise erhält man nach Fig. 335 (indem man die fünf Belastungspunkte rechts von der Schnittstelle belastet annimmt) die Gleichungen:

$$0 = Y \sin \alpha_1 (x_1 + 3\lambda) - D_1 x_1 + p \{ (x_1 + \lambda) + (x_1 + 2\lambda) \}$$

$$D_1 = 3,5 p + 1,875 m$$

$$II. \quad \frac{x_1}{\lambda} = \frac{3 p + 3 Y \sin \alpha_1}{1,5 p + 1,875 m - Y \sin \alpha_1},$$

und nach Fig. 336 (indem man die vier Belastungspunkte rechts von der Schnittstelle belastet annimmt) die Gleichungen:

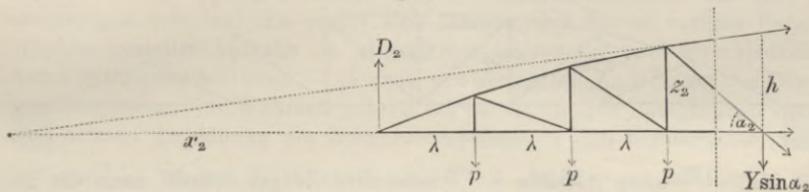
$$0 = Y \sin \alpha_2 (x_2 + 4\lambda) - D_2 x_2 + p \{ (x_2 + \lambda) + (x_2 + 2\lambda) + (x_2 + 3\lambda) \}$$

$$D_2 = 3,5 p + 1,25 m.$$

$$III. \quad \frac{x_2}{\lambda} = \frac{6 p + 4 Y \sin \alpha_2}{0,5 p + 1,25 m - Y \sin \alpha_2}.$$

Die obigen drei Gleichungen können auf folgende Weise zur Konstruktion des Trägers benutzt werden. Man nimmt, indem

Fig. 336.



man die Konstruktion von dem Endpunkte A aus beginnt, zunächst für die Höhe z eine willkürliche Größe an und berechnet nach Substitution des dieser Größe entsprechenden Wertes

$$\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \lambda^2}}$$

in Gleichung I. den Wert von x . Die Höhe z_1 kann alsdann bestimmt werden mittelst der aus Fig. 334 sich ergebenden Gleichung:

$$\text{IV. } \frac{z_1}{z} = \frac{x + 2\lambda}{x + \lambda},$$

worauf die Größe x_1 nach Substitution des Wertes $\sin \alpha_1 = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + \lambda^2}}$

in Gleichung II. ebenfalls berechnet werden kann. Hierauf kann man die Größe z_2 nach der aus Fig. 335 sich ergebenden Gleichung:

$$\text{V. } \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1 + 3\lambda}{x_1 + 2\lambda}$$

berechnen, sowie auch die Größe x_2 aus Gleichung III. nach

Substitution des nunmehr bekannten Wertes $\sin \alpha_2 = \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + \lambda^2}}$.

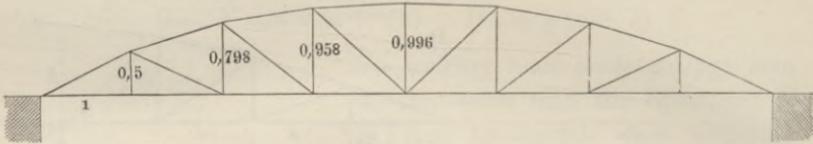
Zur Bestimmung der Höhe h endlich benutzt man die aus Fig. 336 sich ergebende Gleichung:

$$\text{VI. } \frac{h}{z_2} = \frac{x_2 + 4\lambda}{x_2 + 3\lambda}.$$

Bei dem parabolischen Träger sind die größten Zug- und Druckspannungen einer Diagonale immer gleich groß. Wollte man — in der Absicht die Druckspannungen der Diagonalen auf Kosten der Zugspannungen etwas zu verkleinern — den in § 6 berechneten Träger so konstruieren, daß jede Diagonale eine größte Zugspannung von 8000 kg erhalte, so würde man zunächst in den obigen Gleichungen die Werte: $m = 5000$, $p = 1000$ und $Y = +8000$ zu substituieren haben. Setzt man alsdann willkürlich $z = \frac{1}{3}$, indem man die Feldlänge λ als Längeneinheit

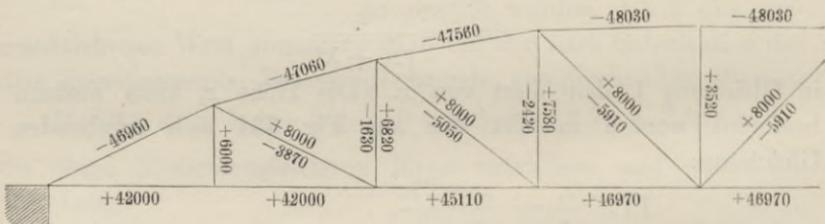
wählt, so erhält man nach der eben erklärten Methode sukzessive die Werte: $\sin \alpha = 0,447$, $x = 0,677$, $z_1 = 0,798$, $\sin \alpha_1 = 0,625$, $x_1 = 3,06$, $z_2 = 0,958$,

Fig. 337.



$\sin \alpha_2 = 0,693$, $x_2 = 23,28$, $h = 0,996$. Der Träger würde dann die in Fig. 337 angegebenen Dimensionen und die in Fig. 338 zusammengestellten Spannungszahlen erhalten.

Fig. 338.



Setzt man $Y = 0$, so führen die obigen Gleichungen zu einem Träger, dessen Diagonalen stets nur Druckspannungen erhalten. Wenn man zugleich $\frac{m}{p} = \frac{1}{2}$ setzt, so wird:

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{16}{61}, \quad \frac{x_1}{\lambda} = \frac{16}{13}, \quad \frac{x_2}{\lambda} = \frac{16}{3} \quad \text{und}$$

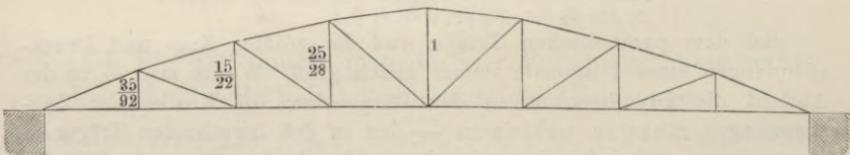
$$\frac{z_1}{z} = \frac{138}{77}, \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{55}{42}, \quad \frac{h}{z_2} = \frac{28}{25},$$

und wenn man die letzteren drei Gleichungen miteinander multipliziert, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{h}{z} = \frac{28}{25} \cdot \frac{55}{42} \cdot \frac{138}{77} = \frac{92}{35},$$

nach welcher die Größe z so gewählt werden kann, daß der Träger in

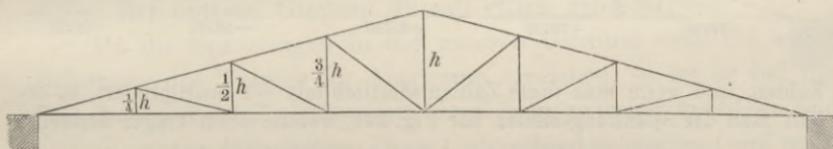
Fig. 339.



der Mitte die vorgeschriebene Höhe h erhält. Soll z. B. $h = 1$ werden, so muß $z = \frac{35}{92}$, $z_1 = \frac{138}{77} \cdot \frac{35}{92} = \frac{15}{22}$, $z_2 = \frac{25}{28}$ genommen werden (Fig. 339).

Die in Figg. 327 und 339 dargestellten Träger entsprechen beide in verschiedener Weise der Bedingung, daß die Diagonalen stets nur Druckspannungen erleiden. In der umgekehrten Lage würden also beide Träger die Bedingung erfüllen, daß die Diagonalen stets nur Zugspannungen erleiden. Es ergibt sich hieraus, daß die im vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe im allgemeinen immer auf zwei verschiedene Arten gelöst werden kann — je nach der gewählten Anordnung des Diagonalensystems —. Während jedoch bei der im vorigen Paragraphen vorausgesetzten Anordnung des Diagonalensystems es sich herausstellte, daß bei gewissen Werten des Verhältnisses $\frac{m}{p}$ — nämlich wenn $\frac{m}{p}$ zwischen den Grenzen $\frac{2}{3}$ und 20 lag — die gestellte Bedingung nur in beschränktem Maße erfüllt werden konnte und daß, wenn $\frac{m}{p} > 20$ war, dieselbe überhaupt nicht mehr erfüllbar war, zeigt es sich, daß bei der hier gewählten Anordnung des Diagonalensystems die Bedingung stets erfüllbar ist. Denn selbst für den extremen Fall, wenn $\frac{m}{p} = \infty$ oder $p = 0$ gesetzt wird, ergeben die obigen Gleichungen noch ein bestimmtes Resultat. Die Größen x , x_1 , x_2 werden dann alle drei gleich Null, und der Träger nimmt die in Fig. 340 dargestellte dreieckige Form an (welche ebenfalls

Fig. 340.



in der umgekehrten Lage der Bedingung entsprechen würde, daß die Diagonalen stets gezogen werden). Wenn dagegen $\frac{p}{m} = \infty$ oder $m = 0$ gesetzt wird, so erhält man als anderes Extrem wiederum den parabolischen Träger. Im übrigen findet auch hier wieder die im vorigen Paragraphen in bezug auf die Figg. 325 und 326 aufgestellte Behauptung ihre Anwendung, nämlich, daß es hinsichtlich der erstrebten Eigenschaft gleich ist, ob man die gefundenen Höhen von der Horizontalen aus entweder ganz nach oben hin oder ganz nach unten hin abträgt, oder ob man dieselben überall zu gleichen Bruchteilen nach oben und unten hin verteilt. Immer werden die Diagonalen bei der ursprünglich angenommenen Lage des Trägers stets gedrückt, bei der umgekehrten Lage aber stets gezogen.

Um endlich zu zeigen, welchen Einfluß eine solche Form des Trägers auf die Spannungszahlen desselben hat, soll derselbe Träger, welcher in Fig. 338 für gleiche Zugspannungen der Diagonalen, in Fig. 332 als Schwedlerscher Träger und in Fig. 39 als parabolischer Träger berechnet

Wenn in Fig. 333 die oberen Endpunkte der Vertikalstangen statt der unteren die Belastungspunkte bildeten, so würden die in den Gleichungen I. und II. vorkommenden Größen $Y \sin \alpha$ und $Y \sin \alpha_1$ negativ genommen die Spannungen der rechts angrenzenden Vertikalstangen bilden. Die obigen Gleichungen zeigen daher zugleich den Weg, welchen man einzuschlagen haben würde, wenn man einen Träger mit gleichen Druckspannungen der Vertikalstangen konstruieren wollte, in welchem Falle man statt der Diagonalspannungen Y die vertikalen Seitenkräfte derselben einer vorgeschriebenen konstanten Größe gleich zu setzen haben würde.

§ 40.

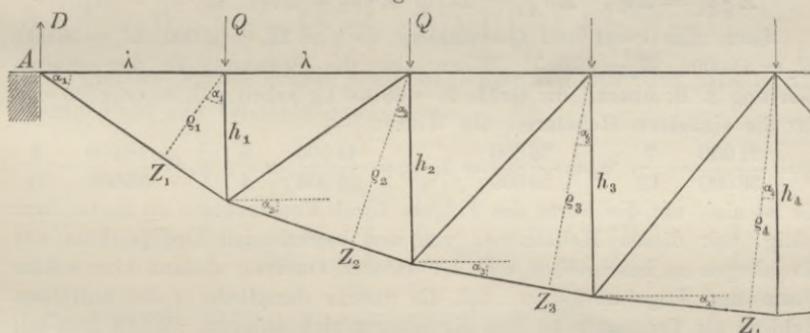
Träger mit gleichen Spannungen im Bogen.

Pauli'scher Träger.

Bei dem symmetrischen parabolischen Träger Fig. 34 nehmen die Spannungen in der unteren Gurtung von der Mitte aus nach den beiden Enden hin allmählich zu, bei dem symmetrischen Parallelträger Fig. 70 dagegen nehmen dieselben von der Mitte nach den Enden hin ab. Es muß daher zwischen beiden irgend eine Zwischenform geben, bei welcher weder ein Zunehmen noch ein Abnehmen stattfindet, bei welcher vielmehr die Spannungszahlen der unteren Gurtung überall gleich groß werden.

Da die Spannungen in der unteren Gurtung stets bei voller Belastung des Trägers ihr Maximum erreichen, so ist es bei der Berechnung dieser Zwischenform überflüssig, zwischen mobilen und permanenten Belastungen einen Unterschied zu machen; und wenn

Fig. 345.



mit Q die Totalbelastung jedes der Belastungspunkte bezeichnet wird, so ist bei dem Träger mit acht Feldern für den Gegendruck

jedes der beiden Auflagerpunkte stets der Wert $D = \frac{7Q}{2} = 3,5 \cdot Q$ in Rechnung zu bringen (Fig. 345).

Um die Spannung in einer der links von der Mitte liegenden Stangen der unteren Gurtung zu berechnen, würde man nach der früher erklärten Methode einen Vertikalschnitt durch das betreffende Feld zu legen und für den links von dem Schnitte liegenden Teil die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in bezug auf den Durchschnittspunkt der Diagonale mit der oberen Horizontalen gleich Null zu setzen haben; oder man würde das statische Moment der gesuchten Spannung gleich der Momentensumme der äußeren Kräfte, welche auf den links vom Schnitte liegenden Teil wirken, zu setzen haben. Nach Fig. 345 würde man also für die vier links von der Mitte liegenden Felder die Gleichungen erhalten:

$$Z_1 \cdot \rho_1 = D \cdot \lambda$$

$$Z_2 \cdot \rho_2 = D \cdot 2\lambda - Q \cdot \lambda$$

$$Z_3 \cdot \rho_3 = D \cdot 3\lambda - Q(2\lambda + \lambda)$$

$$Z_4 \cdot \rho_4 = D \cdot 4\lambda - Q(3\lambda + 2\lambda + \lambda).$$

Für die auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Momentensummen $\mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_4$ erhält man nach Substitution des oben für D gefundenen Wertes die Gleichungen:

$$\mathfrak{M}_1 = 3,5 Q\lambda, \quad \mathfrak{M}_2 = 6 Q\lambda, \quad \mathfrak{M}_3 = 7,5 Q\lambda, \quad \mathfrak{M}_4 = 8 Q\lambda.$$

Da die Spannungen $Z_1 \dots Z_4$ sämtlich einer und derselben vorgeschriebenen Größe Z gleich sein sollen, so müssen die Hebelarme $\rho_1 \dots \rho_4$ den Bedingungsgleichungen entsprechen:

$$Z \cdot \rho_1 = \mathfrak{M}_1, \quad Z \cdot \rho_2 = \mathfrak{M}_2, \quad Z \cdot \rho_3 = \mathfrak{M}_3, \quad Z \cdot \rho_4 = \mathfrak{M}_4.$$

Setzt man $\lambda = 1$ und $Q = 6000$ kg, so wird $\mathfrak{M}_1 = 21000$, $\mathfrak{M}_2 = 36000$, $\mathfrak{M}_3 = 45000$, $\mathfrak{M}_4 = 48000$. Wenn also die Spannung in der unteren Gurtung z. B. überall die Größe $Z = 36000$ kg haben soll, so ergeben sich für die einzelnen Hebelarme die Werte:

$$\rho_1 = \frac{21000}{36000} = \frac{7}{12}, \quad \rho_2 = \frac{36000}{36000} = 1, \quad \rho_3 = \frac{45000}{36000} = \frac{5}{4}, \quad \rho_4 = \frac{48000}{36000} = \frac{4}{3}.$$

Es ist also, um die Form des Trägers durch Konstruktion zu finden, nur nötig, mit diesen Hebelarmen von den betreffenden Drehpunkten aus Kreisbogen zu beschreiben und der unteren Gurtung alsdann eine solche Form und Lage zu geben, daß die Stücke derselben in den einzelnen Feldern als Tangenten an jene Kreisbogen sich anlegen. Wenn man mit dieser Tangentenkonstruktion von dem Punkte A aus beginnt, so gelangt man zu der in Fig. 346 dargestellten Form und kann nachher die Dimensionen des Trägers aus der Zeichnung durch Messung bestimmen, wobei

man z. B. für die Höhen $h_1 \dots h_4$ die in der Figur angegebenen Größen erhalten würde.

Um die Form des Trägers — anstatt durch Konstruktion — auf dem Wege der Rechnung zu bestimmen, hat man die aus

Fig. 346.

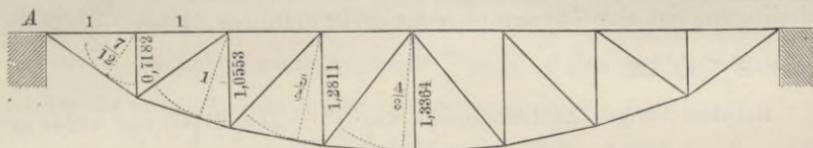


Fig. 345 für die Größen $\cos \alpha_1 \dots \cos \alpha_4$ zu entnehmenden je zwei Werte einander gleich zu setzen und erhält zunächst für das erste Feld die Gleichung:

$$1) \frac{\rho_1}{h_1} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + h_1^2}} (= \cos \alpha_1), \text{ oder}$$

$$I. \frac{h_1}{\lambda} = \frac{\rho_1}{\sqrt{\lambda^2 - \rho_1^2}},$$

aus welcher die Größe h_1 berechnet werden kann, da die Größe $\rho_1 = \frac{M_1}{Z}$ als gegeben zu betrachten ist. Für das zweite Feld

erhält man auf dieselbe Weise die Gleichung:

$$2) \frac{\rho_2}{h_2} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_2 - h_1)^2}} (= \cos \alpha_2).$$

Durch Auflösung dieser in bezug auf h_2 quadratischen Gleichung erhält man den Wert:

$$II. \frac{h_2}{\lambda} = \frac{\rho_2^2}{\lambda^2 - \rho_2^2} \left\{ -\frac{h_1}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{\rho_2}\right)^2 - 1} \right\}.$$

Auf gleiche Weise erhält man beziehentlich für das dritte und vierte Feld die Gleichungen:

$$3) \frac{\rho_3}{h_3} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_3 - h_2)^2}} (= \cos \alpha_3),$$

$$III. \frac{h_3}{\lambda} = \frac{\rho_3^2}{\lambda^2 - \rho_3^2} \left\{ -\frac{h_2}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\rho_3}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{\rho_3}\right)^2 - 1} \right\}.$$

$$4) \frac{\rho_4}{h_4} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_4 - h_3)^2}} (= \cos \alpha_4),$$

$$IV. \frac{h_4}{\lambda} = \frac{\rho_4^2}{\lambda^2 - \rho_4^2} \left\{ -\frac{h_3}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\rho_4}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{\rho_4}\right)^2 - 1} \right\}.$$

Wenn der für Z vorgeschriebene Wert so beschaffen wäre, daß der Hebelarm $\rho_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{Z} = \frac{D\lambda}{Z}$ die Größe λ erreichte, so würde nach Gleichung I. $\frac{h_1}{\lambda} = \infty$ werden. Die vorgeschriebene Bedingung ist also überhaupt nicht mehr erfüllbar, wenn $\frac{\mathfrak{M}_1}{Z} \geq \lambda$ oder $Z \leq D$ ist.

Bei dem vorigen Zahlenbeispiele war $\frac{\mathfrak{M}_1}{\lambda} = D = 21000$ und würde es daher bei der dort angenommenen Belastungsgröße $Q = 6000$ kg unmöglich sein, den Träger so zu konstruieren, daß die überall gleiche Spannung in der unteren Gurtung nur 21000 kg oder noch weniger beträgt.

Wenn der für Z vorgeschriebene Wert so beschaffen ist, daß der Hebelarm $\rho_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{Z}$ die Größe λ erreicht, so nimmt die Gleichung II. die unbestimmte Form an: $\frac{h_2}{\lambda} = \infty \cdot 0$. In diesem Falle hat man die Größe h_2 (anstatt aus Gleichung II.) aus der Gleichung 2) zu berechnen, welche nach Substitution des Wertes $\rho_2 = \lambda$ die Form annimmt:

$$\frac{1}{h_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + (h_2 - h_1)^2}}$$

und für h_2 aufgelöst als Resultat ergibt:

$$\text{IIa. } h_2 = \frac{\lambda^2 + h_1^2}{2h_1} \text{ oder } \frac{h_2}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h_1} + \frac{h_1}{\lambda} \right).$$

Dieser Fall trat bei dem vorigen Zahlenbeispiele (Fig. 346) ein, insofern $Z = 36000$ kg angenommen war und $\frac{\mathfrak{M}_2}{\lambda}$ ebenfalls gleich 36000, also $\rho_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{Z} = \lambda = 1$ wurde. Wenn man zunächst die Größe h_1 aus Gleichung I. berechnet und den gefundenen Wert $h_1 = 0,7182$ in Gleichung IIa. substituiert, so erhält man:

$$h_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0,7182} + 0,7182 \right) = 1,0553,$$

worauf dann aus Gleichung III. der Wert $h_3 = 1,2811$ und endlich aus Gleichung IV. der Wert $h_4 = 1,3364$ sich ergibt.

Auf gleiche Weise würde man in bezug auf irgend eines der übrigen Felder zu verfahren haben, wenn daselbst der dem vorgeschriebenen Werte Z entsprechende Hebelarm die Größe der Feldlänge λ annähme.

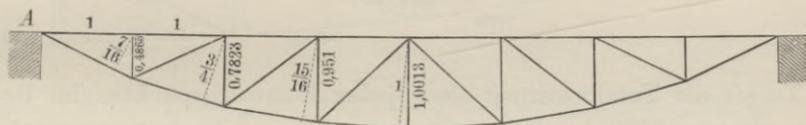
Setzt man z. B. $Z = 48000$ kg, indem man übrigens die im vorigen Zahlenbeispiele angenommenen Werte $\lambda = 1$ und $Q = 6000$ kg (also auch die denselben entsprechenden Momentenzahlen $\mathfrak{M}_1 = 21000$, $\mathfrak{M}_2 = 36000$, $\mathfrak{M}_3 = 45000$, $\mathfrak{M}_4 = 48000$) beibehält, so ergeben sich für die Hebelarme die Werte: $\rho_1 = \frac{21}{48} = \frac{7}{16}$, $\rho_2 = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$, $\rho_3 = \frac{45}{48} = \frac{15}{16}$, $\rho_4 = \frac{48}{48} = 1$.

Man erhält sodann zunächst aus den Gleichungen I., II., III. sukzessive die Werte $h_1 = 0,4865$, $h_2 = 0,7823$, $h_3 = 0,951$. Aus Gleichung IV. aber würde wiederum der unbestimmte Ausdruck $\frac{h_4}{\lambda} = \infty \cdot 0$ sich ergeben. Man hat daher die Größe h_4 statt dessen zu berechnen aus der Gleichung:

$$\frac{h_4}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h_3} + \frac{h_3}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0,951} + 0,951 \right) = 1,0013.$$

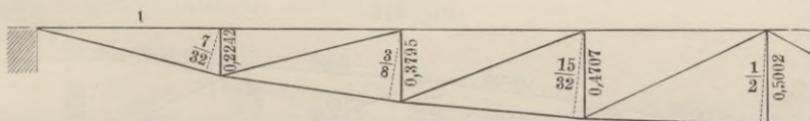
(S. Fig. 347.)

Fig. 347.



Wenn die Hebelarme $\rho_1 \dots \rho_4$ auf die Hälfte reduziert werden, so nimmt die Spannung Z die doppelte Größe an; wenn aber gleichzeitig auch die Belastungen Q auf die Hälfte reduziert werden, so erhält die Spannung Z wiederum die frühere Größe. Es würden daher z. B. die in Fig. 348 angegebenen Dimensionen gelten, so-

Fig. 348.



wohl für den Fall, wenn $Q = 6000$ kg und $Z = 96000$ kg, als auch für den Fall, wenn $Q = 3000$ kg und $Z = 48000$ kg gegeben wäre — überhaupt für alle Fälle, in denen $Z = 16 Q$ ist.

Wenn man die Lage eines Trägers umkehrt, so hat man, um die der neuen Lage entsprechenden Spannungszahlen zu finden, die der ursprünglichen Lage entsprechenden Spannungszahlen sämtlich mit der Zahl -1 zu multiplizieren. Durch Umkehrung des Trägers Fig. 348 würde man also einen Träger Fig. 349 erhalten, bei welchem die Druckspannungen in der oberen Gurtung überall gleich groß sind, und zwar $= 48000$ kg, wenn die Belastung $Q = 3000$ kg ist.

Die in Figg. 349 und 350 eingetragenen Spannungszahlen entsprechen der Voraussetzung, daß bei jedem dieser beiden

Fig. 349.

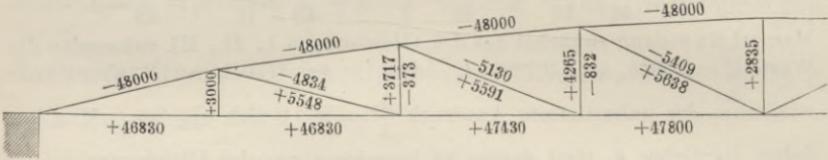
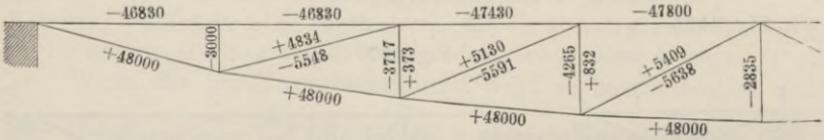
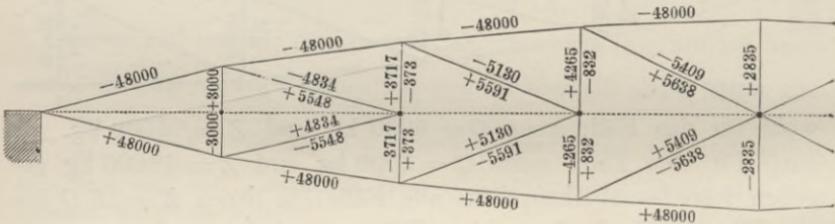


Fig. 350.



Träger die Totalbelastung eines jeden Belastungspunktes im Betrage von 3000 kg sich zusammensetzt aus einer permanenten Belastung $\frac{p}{2} = \frac{1000}{2}$ kg und einer mobilen $\frac{m}{2} = \frac{5000}{2}$ kg. Denkt man sich die beiden Träger zu einem vereinigt, so erhält man einen Träger, bei welchem sowohl die Druckspannung in dem oberen als auch die Zugspannung in dem unteren Bogen gleich groß, nämlich = 48000 kg ist (Fig. 351). Das Höhenverhältnis

Fig. 351.

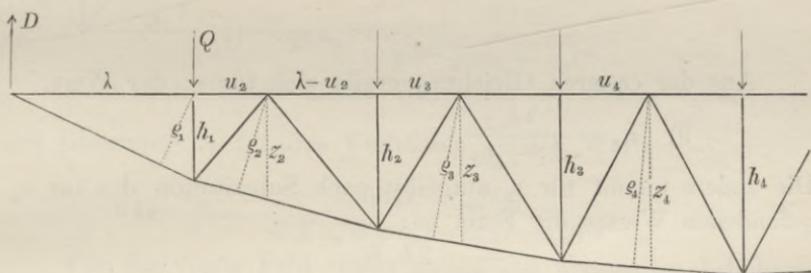


(1:8) und die Belastungen (permanente Last $p = 1000$ kg, mobile Last $m = 5000$ kg) sind dieselben wie bei dem in § 6 berechneten parabolischen Träger. Die Spannungszahlen von je zwei miteinander zusammenfallenden horizontalen Stangen heben einander auf, und sind deshalb in Fig. 351 die horizontalen Stangen als überflüssig weggelassen. Die Spannungszahlen der Vertikalstangen entsprechen der Annahme, daß die Angriffspunkte der permanenten

sowohl als der mobilen Belastungen in der horizontalen Mittellinie liegen.

Wenn der Träger statt der zwei halben Diagonalen, die am Ende des Feldes zusammentreffen, in jedem Felde zwei ganze Diagonalen haben soll, die einander in der Mitte kreuzen, so wird man zwar die Höhen $h_1 \dots h_4$ etwas verändern müssen; es läßt sich jedoch im voraus erwarten, daß diese Änderungen verhältnismäßig klein ausfallen werden und daß die obige Form bereits als eine Annäherungsform für einen solchen Träger angesehen werden darf. Um die genau richtige Form desselben zu finden, hat man zunächst für den Träger Fig. 352, welcher als die untere Hälfte

Fig. 352.



eines solchen betrachtet werden kann, die Momentengleichungen der Bogenspannungen aufzustellen:

$$5) Z_{\rho_1} = D\lambda$$

$$6) Z_{\rho_2} = D(\lambda + u_2) - Qu_2$$

$$7) Z_{\rho_3} = D(2\lambda + u_3) - Q\{(\lambda + u_3) + u_3\}$$

$$8) Z_{\rho_4} = D(3\lambda + u_4) - Q\{(2\lambda + u_4) + (\lambda + u_4) + u_4\}.$$

Da hinsichtlich des ersten Feldes kein Unterschied stattfindet zwischen Figg. 352 und 345, so kann die Größe h_1 wiederum nach Gleichung I. bestimmt werden, welche nach Substitution des für ρ_1 aus Gleichung 5) zu entnehmenden Wertes die Form annimmt:

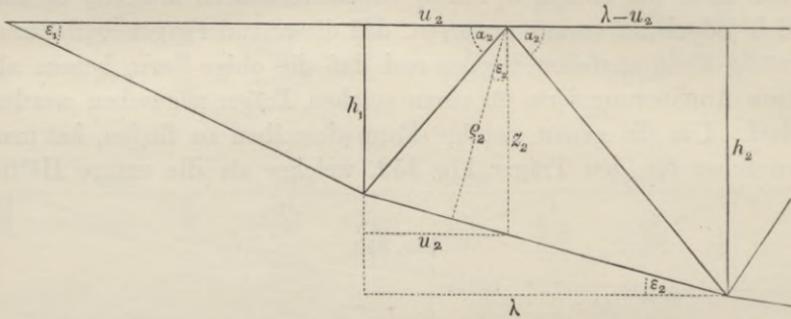
$$V. \quad \frac{h_1}{\lambda} = \frac{D}{\sqrt{Z^2 - D^2}}.$$

Zur Bestimmung von u_2 und ρ_2 erhält man nach Fig. 353 die Gleichungen:

$$\frac{h_1}{u_2} = \frac{h_2}{\lambda - u_2} = \operatorname{tg} \alpha_2$$

$$\frac{z_2 - h_1}{u_2} = \frac{h_2 - h_1}{\lambda} = \operatorname{tg} \varepsilon_2.$$

Fig. 353.



Aus der ersteren Gleichung ergibt sich für u_2 der Wert:

$$9) \quad u_2 = \frac{\lambda h_1}{h_1 + h_2}.$$

Die andere nimmt für z_2 aufgelöst nach Substitution des für u_2 gefundenen Wertes die Form an:

$$z_2 = \frac{2 h_1 h_2}{h_1 + h_2},$$

und man erhält für den Hebelarm ρ_2 nunmehr die Gleichung:

$$10) \quad \rho_2 = z_2 \cdot \cos \varepsilon_2 = \frac{2 h_1 h_2 \cos \varepsilon_2}{h_1 + h_2}.$$

Wenn man in Gleichung 6) die hier für u_2 und ρ_2 gefundenen Werte substituiert und dieselbe alsdann für $\frac{h_2}{\lambda}$ auflöst, so erhält man die Gleichung:

$$\text{VI.} \quad \frac{h_2}{\lambda} = \frac{(2D - Q) h_1}{2 Z h_1 \cos \varepsilon_2 - D \lambda}.$$

Aus dieser Gleichung würde man — nachdem zuvor h_1 aus Gleichung V. gefunden wurde — die Größe h_2 berechnen können, wenn der Winkel ε_2 bekannt wäre. Es ist jedoch:

$$11) \quad \cos \varepsilon_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_2 - h_1)^2}}$$

eine von h_2 abhängige noch unbekannte Größe. Da indessen jedenfalls $\cos \varepsilon_2 > \cos \varepsilon_1$ ist, so kann man die Berechnung von h_2

in der Weise ausführen, daß man zunächst für $\cos \varepsilon_2$ irgend einen zwischen diesen beiden Grenzwerten liegenden Wert oder auch einen der Grenzwerte selbst, z. B. den Grenzwert 1 substituiert und mittelst des auf solche Weise gefundenen Annäherungswertes von h_2 einen genaueren Wert für $\cos \varepsilon_2$ aus Gleichung 11) berechnet, worauf aus Gleichung VI. wiederum ein genauerer Wert für h_2 gefunden und das Verfahren dann wiederholt werden kann, so lange bis der für h_2 sich ergebende Wert den verlangten Grad von Genauigkeit erreicht hat.

Wenn man in den Gleichungen 9), 10), 11) den Index um Eins erhöht, so gelten dieselben für das dritte Feld. Also ist:

$$12) \quad u_3 = \frac{\lambda h_2}{h_2 + h_3}, \quad 13) \quad \rho_3 = \frac{2 h_2 h_3 \cos \varepsilon_3}{h_2^2 + h_3^2},$$

$$14) \quad \cos \varepsilon_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_3 - h_2)^2}}.$$

Nach Substitution dieser Werte für u_3 und ρ_3 erhält man aus Gleichung 7) für das Verhältnis $\frac{h_3}{\lambda}$ den Wert:

$$\text{VII.} \quad \frac{h_3}{\lambda} = \frac{3(D - Q)h_2}{2Z h_2 \cos \varepsilon_3 - (2D - Q)\lambda}.$$

Für das vierte Feld erhält man durch abermalige Erhöhung des Index die Gleichungen:

$$15) \quad u_4 = \frac{\lambda h_3}{h_3 + h_4}, \quad 16) \quad \rho_4 = \frac{2 h_3 h_4 \cos \varepsilon_4}{h_3^2 + h_4^2},$$

$$17) \quad \cos \varepsilon_4 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_4 + h_3)^2}}$$

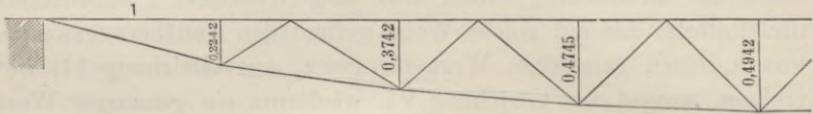
und die Gleichung 8) gibt, wenn dieselbe nach Substitution der obigen Werte aufgelöst wird, für $\frac{h_4}{\lambda}$ den Wert:

$$\text{VIII.} \quad \frac{h_4}{\lambda} = \frac{(4D - 6Q)h_3}{2Z h_3 \cos \varepsilon_4 - 3(D - Q)\lambda}.$$

Setzt man wiederum $\lambda = 1$ und $Z = 16Q$ wie bei dem vorigen Zahlenbeispiele (Fig. 348), so erhält man zunächst aus Gleichung V. wie dort den Wert $h_4 = 0,2242$. Wenn man diesen Wert in Gleichung VI. substituiert und zugleich provisorisch $\cos \varepsilon_3 = 1$ annimmt, so erhält man für h_2 zunächst als ersten Annäherungswert 0,3661. Hiernach ergibt sich aus Gleichung 11) für $\cos \varepsilon_2$ der genauere Wert 0,99, durch Substitution dieses Wertes in Gleichung VI. erhält man für h_2 den zweiten Annäherungswert 0,3734. Eine nochmalige Wiederholung der Rechnung gibt die noch genaueren Werte $\cos \varepsilon_2 = 0,9889$ und $h_2 = 0,3742$. Auf gleiche Weise erhält

man aus den Gleichungen VII. und 14) den Wert $h_3 = 0,4745$, endlich aus den Gleichungen VIII. und 17) den Wert $h_4 = 0,4942$ (s. Fig. 354).

Fig. 354.



Die in Figg. 355 und 356 für diesen Träger angegebenen Spannungszahlen entsprechen wiederum der (in bezug auf Fig. 349

Fig. 355.

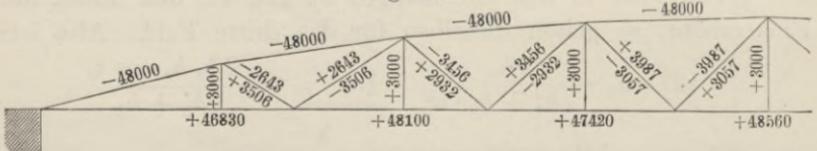
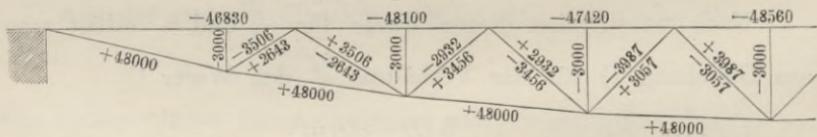
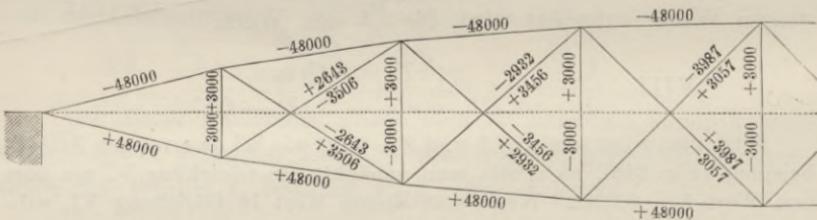


Fig. 356.



und 350 gemachten) Voraussetzung, daß die Totalbelastung jedes Belastungspunktes (von der Größe $\frac{Q}{2} = \frac{6000}{2}$ kg) aus einer permanenten Belastung $\frac{p}{2} = \frac{1000}{2}$ kg und einer mobilen Belastung $\frac{m}{2} = \frac{5000}{2}$ kg besteht. Die Zusammensetzung dieser beiden Figuren führt zu dem Träger Fig. 357, für welchem die Belastungen

Fig. 357.



(permanente Last $p = 1000$ kg, mobile Last $m = 5000$ kg), sowie annähernd auch das Höhenverhältnis (0,9884 : 8) wiederum dieselbe Größe haben wie in Fig. 351 und wie bei dem in § 6 berechneten parabolischen Träger.

Zweite Abteilung.

Bestimmung der erforderlichen
Querschnittsdimensionen

nebst

**Untersuchungen über die Elastizitätswiderstände
belasteter Träger.**

ZWÖLFTER ABSCHNITT.

§ 41.

Bestimmung der Querschnitte für die Teile der Hauptkonstruktionen.

Jeder Konstruktionsteil kann betrachtet werden als ein Bündel von fest miteinander verbundenen Stangen, deren jede die Flächeneinheit zur Querschnittsfläche hat. Man erhält also die Anzahl der Flächeneinheiten, welche in der Querschnittsfläche eines Konstruktionsteiles enthalten sein müssen, indem man seine Spannungszahl dividiert durch diejenige Zahl, welche für eine Stange von einer Flächeneinheit Querschnittsfläche als zulässige Spannungszahl gilt.

Zulässig sind solche Spannungen, bei welchen die Längenänderungen noch innerhalb der Elastizitätsgrenzen bleiben. So kann z. B. für eine schmiedeeiserne Stange von 1 qmm Querschnittsfläche eine Spannung von 15 kg (im Mittel) noch als zulässig betrachtet werden, weil erst bei größeren Spannungen bleibende Längenänderungen eintreten würden. Wenn man also bis an die äußerste Grenze des Zulässigen gehen wollte, so würde man die in Kilogrammen ausgedrückten Spannungszahlen durch 15 zu dividieren haben, um die Querschnittsflächen in Quadratmillimetern zu erhalten. In der Praxis pflegt man indessen der Sicherheit wegen nur etwa 6 bis 8 kg pro Quadratmillimeter als zulässige Spannung für Schmiedeeisen anzunehmen und nur in Ausnahmefällen, wo es zweckmäßig erscheint, mehr zu wagen, jener Grenze noch näher zu rücken.

Hiernach würde man also die in der ersten Abteilung berechneten Spannungszahlen — auf Kilogramme reduziert, wo dies noch nicht geschehen — sämtlich etwa durch 6 zu dividieren haben, um die erforderlichen Querschnittsflächen der Konstruktionsteile in Quadratmillimetern zu erhalten, wenn die Konstruktion in Schmiedeeisen ausgeführt werden soll.

Nach dieser Regel würde man beispielsweise für die im dritten Abschnitte berechnete Fachwerkbrücke (Fig. 61) die folgenden Querschnittszahlen in Quadratmillimetern erhalten:

- 1) für die oberen Horizontalstangen:
3500, 6000, 7500, 8000, 8000, 7500, 6000, 3500;
- 2) für die unteren Horizontalstangen:
0, 3500, 6000, 7500, 7500, 6000, 3500, 0;
- 3) für die Vertikalständer:
4000, 3500, 2604, 1813, 1125, 1813, 2604, 3500, 4000;
- 4) für die Hauptstreben:
4950, 3683, 2567, 1592, 1592, 2567, 3683, 4950;
- 5) für die vier Gegenstreben:
88, 767, 767, 88.

Es ist jedoch nötig, folgende zwei Punkte bei dieser Berechnung stets im Auge zu behalten: erstens, daß nicht in allen Fällen die Widerstände des Materials gegen Zug- und Druckspannung als gleich groß angenommen werden dürfen, daß vielmehr in manchen Fällen der Widerstand gegen Druckspannung beträchtlich geringer werden kann — namentlich bei langen, dünnen Stangen, wo es sich um den Widerstand gegen Zerknicken handelt. Dieser Punkt wird später einer spezielleren Untersuchung unterzogen werden (vergl. weiter unten: „Widerstand langer Stangen gegen Zerknicken“).

Zweitens ist zu berücksichtigen, daß die so gefundenen Zahlen nur für die Hauptkonstruktionsteile als solche gelten, nicht aber schon als endgültige Querschnittszahlen der Konstruktion zu betrachten sind, weil zu der Hauptkonstruktion noch Nebenkonstruktionen hinzukommen, deren nachherige Verschmelzung mit der Hauptkonstruktion zu den Gesamtquerschnittsflächen fernere Beiträge liefert.

Es wurden nämlich die in der ersten Abteilung gefundenen Spannungszahlen berechnet unter den Voraussetzungen: erstens, daß außer den Gegendrücken der Auflagerpunkte die von den Belastungen herrührenden vertikalen Kräfte die einzigen äußeren Kräfte seien, welche auf die Konstruktion wirken; zweitens, daß ausschließlich die als Belastungspunkte angenommenen Knotenpunkte der Konstruktion die Angriffspunkte dieser Vertikalkräfte bilden.

Um diese Voraussetzungen mit der Wirklichkeit in Einklang zu bringen, kann man sich die Gesamtkonstruktion in drei Gruppen von Konstruktionsteilen zerlegt denken: die erste Gruppe umfaßt eben jene als Hauptkonstruktionsteile bezeichneten Stücke, für welche die in der ersten Abteilung berechneten Zahlen die wirklich richtigen Spannungszahlen sind; der zweiten Gruppe gehören alle diejenigen Teile an, welche zusammen eine Absteifungskonstruktion gegen Seitendruck des Windes und sonstige seitlich wirkende Horizontalkräfte bilden; die dritte Gruppe besteht aus einem Systeme von Zwischenträgern, deren jeder als kleinere Brücke die Länge eines Feldes zur Spannweite hat und seine Belastung auf die beiden angrenzenden Knotenpunkte überträgt.

Wenn man sich die letzteren beiden Nebenkonstruktionen in die Hauptkonstruktion eingeschaltet und je zwei einander deckende Teile nach Befinden entweder zu einem Stück verschmolzen oder getrennt bleibend nebeneinander gelagert denkt, so erhält man damit erst die endgültigen Gesamtquerschnittszahlen.

§ 42.

Absteifung gegen Seitendruck des Windes und horizontale Stöße.

Wenn ein Bahnzug über eine Eisenbahnbrücke fährt, so können teils durch die Horizontalschwankungen der Lokomotive und der Wagen, teils durch den Druck des etwa gleichzeitig wehenden Windes gegen die durch den Bahnzug vergrößerte Seitenfläche der Brücke, horizontale Kräfte hervorgebracht werden, denen das aus den sogenannten Windstreben nebst einem Teile der Gurtungen bestehende Absteifungssystem einen hinlänglichen Widerstand entgegensetzen muß.

Diese Windstreben bilden mit jenen Teilen der Gurtungen zusammen eine den vertikalen Tragwänden ganz analog konstruierte horizontale Tragwand, für welche jene horizontalen Kräfte gleichsam als Horizontalbelastungen anzusehen sind. Die Berechnung einer solchen horizontalen Tragwand, welche natürlich unter allen Umständen (wegen des Parallelismus der vertikalen Tragwände) die Form eines Fachwerkträgers mit parallelen Gurtungen erhält, kann auf dieselbe Weise wie bei den im dritten Abschnitt berechneten Fachwerkbrücken ausgeführt werden. Auch hinsichtlich der Unterscheidung zwischen permanenter (gleich-

förmig verteilter) und mobiler (zu Zeiten ungleichförmig verteilter) Last findet eine vollkommene Analogie zwischen beiden Fällen statt, insofern bei allmählichem Fortschreiten des Bahnzuges und damit wachsender Druckfläche des Windes hinsichtlich der Horizontalwirkungen nach und nach dieselben Belastungszustände aufeinander folgen, wie sie hinsichtlich der vertikalen Belastung für die Berechnung der Diagonalen und Vertikalständer maßgebend waren.

Man kommt der Wahrheit ziemlich nahe, wenn man annimmt, daß die horizontale Totalbelastung nach demselben Verhältnis in mobile und permanente Last sich zerlegt, wie die Belastung der vertikalen Tragwand. Wenn also z. B. die Breite der horizontalen Tragwand ebenso groß ist als die Höhe der vertikalen Tragwand, so können ohne weiteres die im siebenten Abschnitt für die Transformation der Spannungszahlen gegebenen Regeln zur Anwendung gebracht werden.

Nur in einem Punkte weichen die Berechnungen der horizontalen und vertikalen Tragwände voneinander ab: Die Horizontalbelastungen können sowohl von links nach rechts als von rechts nach links wirken, die Vertikalbelastungen dagegen immer nur von oben nach unten. Während also bei der vertikalen Tragwand hinsichtlich der Größe und Art der Spannung ein Unterschied zwischen „Oben“ und „Unten“ stattfindet, fällt bei der horizontalen Tragwand dieser Unterschied ganz weg und wird dieselbe in bezug auf die horizontale Mittellinie symmetrisch zu konstruieren sein. Es sind daher sämtliche Spannungszahlen der Gurtungen — an der einen sowohl als an der anderen Seite — mit dem Vorzeichen \pm zu bezeichnen, weil die Tragwand bald nach der einen, bald nach der anderen Seite hin durchgebogen wird und infolgedessen jedes von den beiden in einem Felde einander gegenüberliegenden Stücken der Gurtungen abwechselnd Zug- und Druckspannungen von gleicher Größe annehmen wird.

Wo ferner — wie z. B. bei Fig. 61 — die Diagonalen als Zugbänder konstruiert werden sollen, da werden für die horizontale Tragwand in allen Feldern Gegenstreben anzubringen sein, während in Fig. 61 nur für die vier Mittelfelder solche erforderlich waren. Auch wird hinsichtlich der Spannungszahlen kein Unterschied zwischen Haupt- und Gegenstrebe stattfinden, weil eine Diagonale, die bei einer Richtung des Windes als Gegen-

strebe fungiert, bei entgegengesetzter Richtung desselben zur Hauptstrebe wird.

Als vertikale Totalbelastung der Brücke, für deren vertikale Tragwand in § 41 bereits die Querschnittszahlen berechnet sind, wurden:

$$p + m = 6000 \text{ kg}$$

für das laufende Meter angenommen.

Rechnet man als totale Horizontalbelastung der horizontalen Tragwand

$$p_1 + m_1 = 857 \text{ kg}$$

für das laufende Meter, so erhält man — unter Voraussetzung gleicher Höhe und Breite der Brücke — die Querschnittszahlen der horizontalen Tragwand, indem man die in § 41 berechneten Zahlen mit

$$\frac{p_1 + m_1}{p + m} = \frac{857}{6000} = \frac{1}{7}$$

multipliziert, und von den beiden symmetrisch liegenden Stücken eines Feldes jedesmal nur die größere Querschnittszahl als für beide gültig auswählt. Es ergeben sich demnach folgende Zahlen:

1) für die Gurtungen (der einen und der anderen Seite)

500 857 1071 1143;

2) für die Querstreben

571 500 372 259 161;

3) für die Diagonalen (Haupt- und Gegenstreben)

707 526 367 227.

Was endlich die in der quadratischen Seitenansicht der Brücke als Diagonalen erscheinenden Transversalstangen betrifft, welche den Zweck haben, eine Verschiebung dieses Quadrats zu verhindern, so kann man ihre Spannungs- und Querschnittszahlen auf folgende Weise bestimmen. Da die Fahrbahn oben liegt, und infolgedessen die Horizontalwirkungen vorwiegend die obere der beiden horizontalen Tragwände direkt treffen, so würde dieselbe allein die seitliche Durchbiegung erleiden, wenn nicht durch jene Transversalstangen die untere Tragwand gezwungen würde, dieser Bewegung zu folgen. Man kann allenfalls annehmen, daß die eine Hälfte der horizontalen Totalbelastung von der oberen Tragwand direkt aufgenommen, die andere aber mittelst der Transversalstangen auf die untere übertragen wird. Durch eine einfache

Zerlegung dieser Kraft ergibt sich demnach für jede der beiden Transversalstangen (die als nur zugfähig vorausgesetzt werden) eine Spannung von

$$857 \cdot \sqrt{2} = 1210 \text{ kg (s. Fig. 358),}$$

folglich als Querschnittszahl:

$$\frac{1210}{6} = 202.$$

Jeder Vertikalständer der vertikalen Tragwand erhalte dadurch noch einen Zuwachs von 857 kg an Druckspannung, den man — obwohl diese Korrektur für die Praxis von keinem Belang ist — wenn man will, mit in Rechnung bringen kann. Dem Querschnitt jedes Vertikalständers würden alsdann noch:

$$\frac{857}{6} = 143 \text{ qmm}$$

hinzuzufügen sein (s. Fig. 359):

Fig. 358.

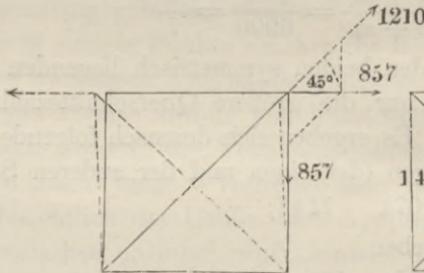
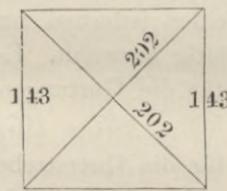
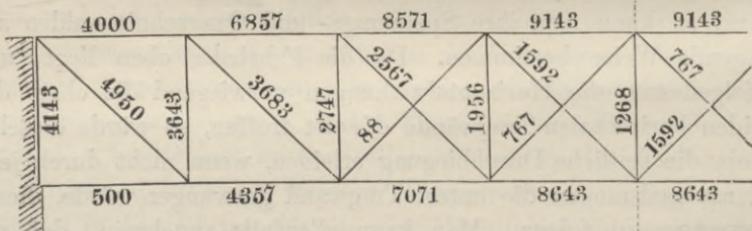


Fig. 359.



Wenn man sich die soeben berechneten horizontalen Tragwände alsdann mit den vertikalen Tragwänden zusammengesetzt und die Querschnittsflächen von je zwei nebeneinander liegenden Teilen jedesmal zu einer Fläche vereinigt denkt, so erhält man

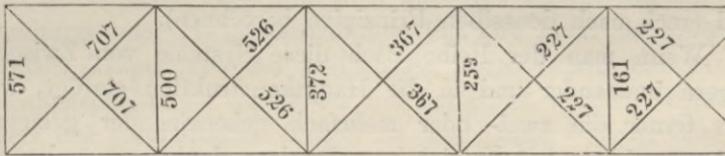
Fig. 360. (Aufriß.)



durch Addition der betreffenden Querschnittszahlen die in den Figg. 360 und 361 zusammengestellten Zahlen, welche als endgültige Querschnittszahlen für diese Brücke betrachtet werden

können unter der Voraussetzung, daß die Zwischenträger als von der Hauptkonstruktion gesonderte Teile konstruiert sind.

Fig. 361. (Grundrißs.)



§ 43.

Berechnung der Zwischenträger.

Alle in der ersten Abteilung ausgeführten Konstruktionsberechnungen gründeten sich auf die Voraussetzung, daß ausschließlich die Knotenpunkte der Konstruktion die Belastungspunkte bildeten. Wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, wo die Form der zu tragenden Belastung eine größere Zahl von Stützpunkten erfordert, als ihr in den Knotenpunkten der Hauptkonstruktion geboten werden, da muß durch Einschaltung eines Systems von Zwischenträgern, deren jeder seine Belastung auf die Endpunkte der von ihm überbrückten Spannweite überträgt, für eine genügende Zahl von Zwischenpunkten gesorgt werden.

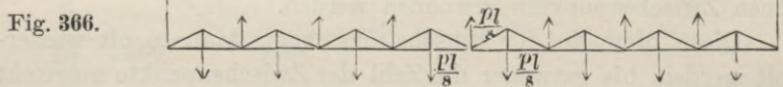
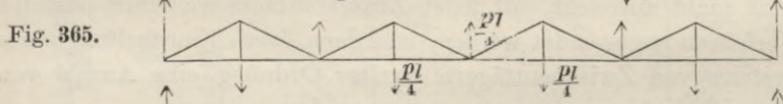
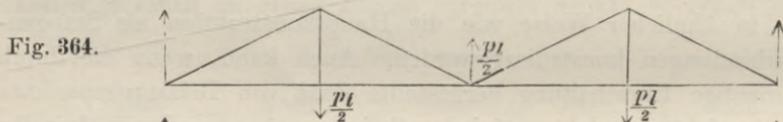
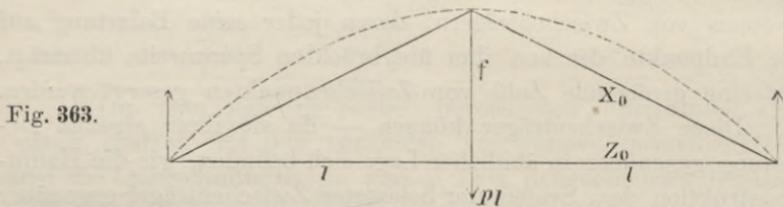
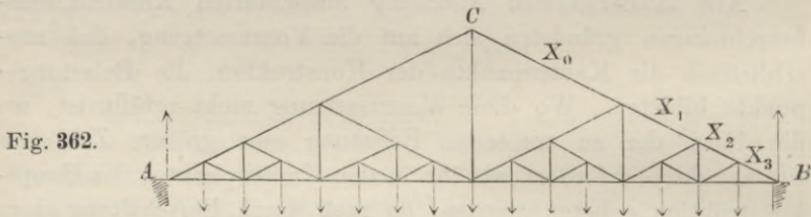
Diese Zwischenträger können — da sie ihrer eigenen Belastung gegenüber in ähnlicher Lage sich befinden, wie die Hauptkonstruktion dem System der belasteten Zwischenträger gegenüber — in ähnlicher Weise wie die Hauptkonstruktion als Stangenverbindungen konstruiert werden. Auch kann, wenn die durch einmalige Einschaltung hergestellte Zahl von Belastungspunkten noch nicht ausreicht, auf jeden Zwischenträger wiederum dasselbe Verfahren angewendet werden, und dann durch Einschaltung eines Systems von Zwischenträgern zweiter Ordnung eine Anzahl von neuen Zwischenpunkten gewonnen werden.

Diese Methode der Einschaltung kann dann so oft wiederholt werden, bis entweder die Zahl der Zwischenpunkte ausreicht oder bis die Kleinheit der Zwischenträger letzter Ordnung eine fernere Einschaltung nicht mehr tunlich erscheinen läßt. Werden bei letzteren die dreieckigen Felder so klein, daß das durch die

leeren Räume zwischen den Stangen ersparte Material die Kosten von der Herstellung der letzteren nicht mehr decken würde, so wird man sie massiv konstruieren, und kann man einen solchen massiven Träger als einen Fachwerkträger betrachten, in welchem die leeren Zwischenräume mit überschüssigem Material ausgefüllt sind (auch nach denselben Prinzipien berechnen).

Wenn man der Reihe nach diese Systeme von Zwischenträgern ineinander und in die Hauptkonstruktion einfügt, wenn man ferner die zwei- oder mehrfach nebeneinander gelagerten Teile zu einem Stücke sich verschmolzen denkt, so ergeben sich die Spannungszahlen dieser Stücke durch einfache Summation der Spannungszahlen ihrer Teile.

In manchen Fällen ist es tunlich und ratsam, die Zwischenträger der Hauptkonstruktion geometrisch ähnlich zu kon-



struieren. Die auf solche Weise zusammengesetzten Konstruktionen können dann ungeachtet ihrer komplizierten Form durch Zerlegung derselben in die konstituierenden Systeme auf eine sehr

einfache Weise berechnet werden — in manchen Fällen auf einfachere Weise als durch direkte Anwendung der Momentenmethode — wie dies an den folgenden Beispielen gezeigt werden soll.

Die in Fig. 362 dargestellte Konstruktion kann in die vier einfachen Systeme Figg. 363, 364, 365, 366 zerlegt werden. Die Grundform oder Hauptkonstruktion Fig. 363 kann als ein parabolischer Träger von der einfachsten Form — mit nur einem Belastungspunkte — angesehen und berechnet werden; denn das Gesetz der parabolischen Träger ist unabhängig von der Zahl der Belastungspunkte (wie früher bewiesen). Es können also die in § 8 gefundenen Gleichungen:

$$H = \frac{pl^2}{2f}, \quad V = px$$

für die Bestimmung der Horizontal- und Vertikalspannung der (hier nur aus zwei Stangen bestehenden) Kette benutzt werden, woraus sich, wenn $x = \frac{l}{2}$ gesetzt wird, für Z_0 und X_0 die Werte ergeben:

$$Z_0 = \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{l}{f}\right) \cdot l$$

$$- X_0 = \sqrt{H^2 + V^2} = \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{l}{f}\right) \cdot l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2}.$$

Da sämtliche Zwischenträger der Hauptkonstruktion geometrisch ähnlich konstruiert sind, das Verhältnis $\frac{f}{l}$ also bei ihnen denselben Wert hat, so erhält man die analogen Spannungszahlen für die Zwischenträger der ersten, zweiten, dritten Ordnung, indem man die Werte von Z_0 und X_0 resp. durch 2, 4, 8 dividiert. Wenn man sich alsdann die drei Systeme von Zwischenträgern sukzessive ineinander und in Fig. 363 eingefügt denkt, so daß Fig. 362 daraus entsteht, so ergeben sich beispielsweise für die Teile der Stangen AC und BC folgende Totalspannungen:

$$X_0 = -\frac{pl^2}{2f} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2}$$

$$X_1 = X_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$X_2 = X_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$X_3 = X_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$

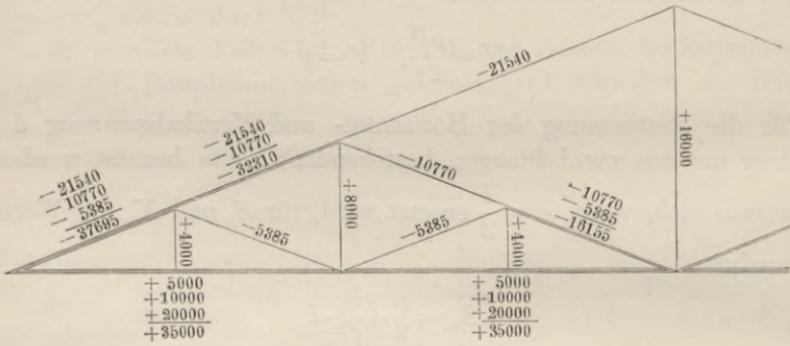
und für sämtliche Teile der horizontalen Stange *AB* die Spannung:

$$Z = Z_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{pl^2}{2f} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right).$$

Um die Spannungen der übrigen Stücke zu bestimmen, braucht man nur das gleiche Verfahren auf Fig. 365 anzuwenden, nachdem Fig. 366 in sie eingeschaltet wurde, sowie auf Fig. 364, nachdem in sie die beiden vorigen Figuren eingeschaltet wurden.

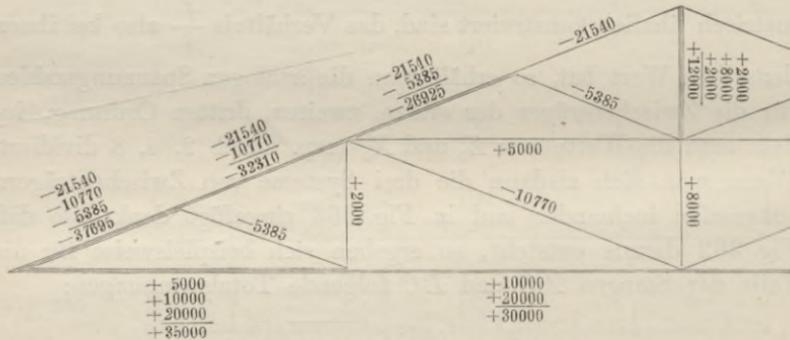
Setzt man $2l = 32$ m, $f = 6,4$ m, $2pl = 32000$ kg und läßt man das letzte Zwischenträgersystem Fig. 366 fort, so erhält man

Fig. 367.



die in Fig. 367 zusammengestellten Spannungszahlen, welche — was die Vertikalstangen betrifft — der Voraussetzung ent-

Fig. 368.



sprechen, daß sämtliche Belastungspunkte in der Horizontalen *AB* liegen.

Denkt man sich die Zwischenträger und die Belastungspunkte so weit nach oben verschoben, bis die letzteren in die Haupt-

sparren AC und BC hineinfallen, so gelangt man zu der in Fig. 368 dargestellten Dachkonstruktion.

In den beiden vorigen Fällen stimmten die eingeschalteten Systeme sowohl der Form als der Lage nach mit der Hauptkonstruktion überein. Die Figg. 369, 370, 371, 372 dagegen

Fig. 369.

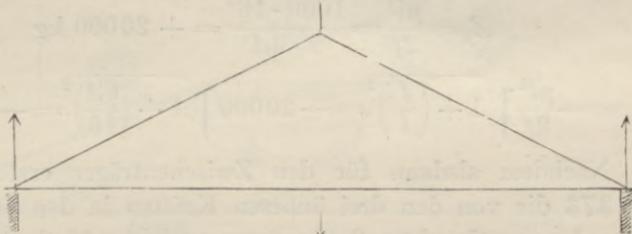


Fig. 370.

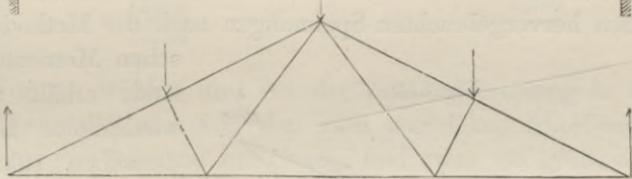


Fig. 371.

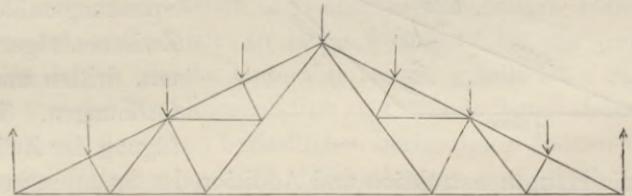
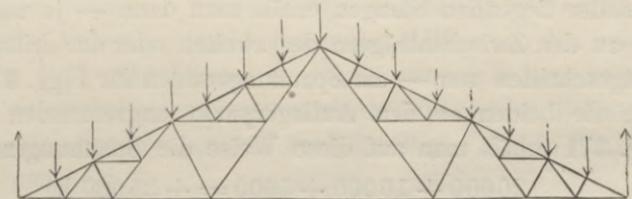


Fig. 372.



stellen einen Fall dar, bei welchem die eingeschalteten Systeme zwar der Form nach mit der Hauptkonstruktion übereinstimmen, aber der Lage nach von derselben abweichen, insofern es hier — statt der Seiten — die Grundlinien der gleichschenkeligen Dreiecke sind, welche mit den Sparren der Hauptkonstruktion zusammenfallen. Abgesehen von dem durch diese abweichende Lage bedingten Unterschiede, kann die Berechnung der Spannungszahlen auf dieselbe Weise wie bei dem vorigen Falle ausgeführt werden.

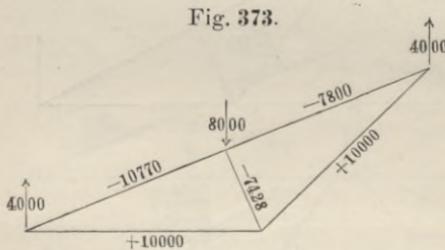
Man hätte also z. B. die in § 4 als Beispiel gewählte Dachkonstruktion auch auf folgende Weise berechnen können. Setzt

man wiederum wie dort die Spannweite $2l = 32$ m, die Dachhöhe $f = 6,4$ m, die Totalbelastung $2pl = 32000$ kg, so erhält man zunächst für die Hauptkonstruktion Fig. 369 nach den oben für Fig. 363 gefundenen Gleichungen mit Beibehaltung der dort gewählten Bezeichnungen die Spannungszahlen:

$$Z_0 = \frac{pl^2}{2f} = \frac{1000 \cdot 16^2}{2 \cdot 6,4} = +20000 \text{ kg}$$

$$X_1 = -\frac{pl^2}{2f} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2} = -20000 \sqrt{1 + \left(\frac{6,4}{16}\right)^2} = -21540 \text{ kg.}$$

Nachdem alsdann für den Zwischenträger erster Ordnung Fig. 373 die von den drei äußeren Kräften in den Stangen derselben hervorgebrachten Spannungen nach der Methode der statischen Momente berechnet



sind, erhält man durch wiederholte Halbierungen derselben sukzessive die Spannungszahlen für die Zwischenträger der zweiten, dritten und folgenden Ordnungen. Durch Einfügung der Zwischenträger

in die Hauptkonstruktion und Addition der Spannungen der nebeneinander liegenden Stangen erhält man dann — je nachdem man bis zu den Zwischenträgern der zweiten oder der dritten Ordnung fortgeschritten war — die Spannungszahlen für Figg. 371 und 372. Für die beiden an den Auflagerpunkt angrenzenden Stangen in Fig. 371 erhält man auf diese Weise die Spannungszahlen:

$$\begin{aligned} 20000 + 10000 + 5000 &= +35000 \text{ kg} \\ -(21540 + 10770 + 5385) &= -37695 \text{ kg.} \end{aligned}$$

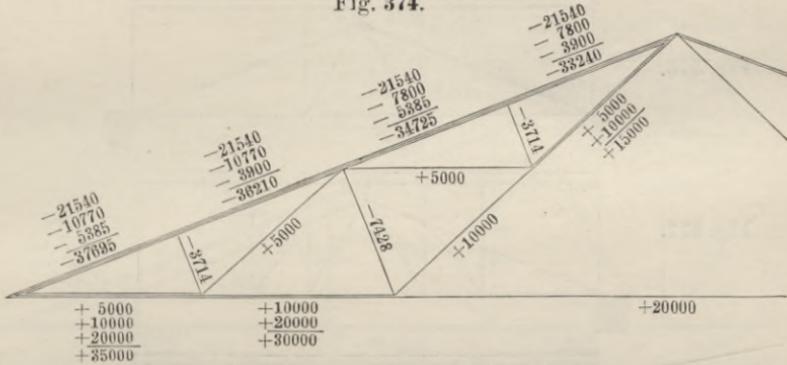
In Fig. 372 dagegen würden die betreffenden beiden Spannungszahlen aus je vier Teilen sich zusammensetzen wie folgt:

$$\begin{aligned} 20000 + 10000 + 5000 + 2500 &= +37500 \text{ kg} \\ -(21540 + 10770 + 5385 + 2692,5) &= -40387,5 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Man kann sich daher die früher in Fig. 19 gefundenen Spannungszahlen auch auf die in Fig. 374 angedeutete Weise durch Zusammensetzung aus ihren einzelnen Teilen entstanden denken.

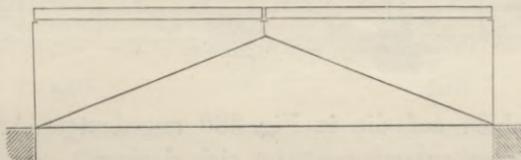
Anstatt den Zwischenträgern die symmetrische Form des gleichschenkeligen Dreiecks zu geben, kann man auch unsym-

Fig. 374.



metrische Formen wählen und bei der Zusammensetzung in der Weise verfahren, daß man von den zwei ungleichen Abteilungen des Zwischenträgers jedesmal nur eine — und zwar die größere — zur Einschaltung eines neuen Zwischenträgers nächst höherer Ordnung benutzt und damit so lange fortfährt, bis die ganze Spannweite in lauter gleiche Unterabteilungen geteilt ist. Stellt man sich die von der Dachkonstruktion zu tragende Totalbelastung als einen oberhalb derselben befindlichen horizontalen Balken vor, der über jedem Belastungspunkte durchschnitten und durch eine von demselben getragene Vertikalstange unterstützt ist, so findet man, daß jeder Belastungspunkt immer die Hälfte von den beiden angrenzenden Balkenabteilungen zu tragen hat, und kann die in jedem der eingeschalteten Zwischenträger von seiner Belastung hervorgebrachten Spannungen auf ähnliche Weise wie in Fig. 373 angedeutet berechnen.

Fig. 375.



Man würde auf solche Weise z. B. aus der Grundform Fig. 375 mittelst der Übergangsformen Fig. 376, Fig. 377 zu der in Fig. 378 dargestellten Dachkonstruktion gelangen, und wenn man wiederum wie bei den vorigen Zahlenbeispielen $2l = 32$ m, $f = 6,4$ m,

$2pl = 32000$ kg annimmt, so findet man die in Fig. 379 angegebenen Spannungszahlen.

Fig. 376.

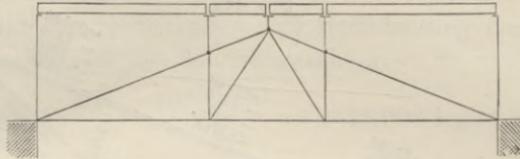


Fig. 377.

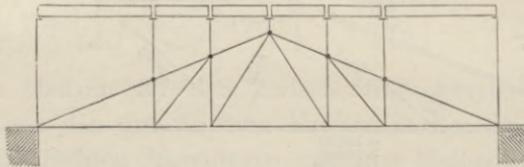
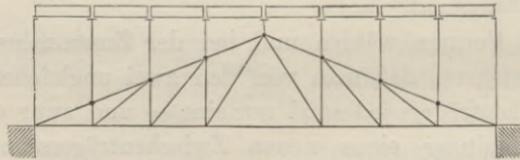
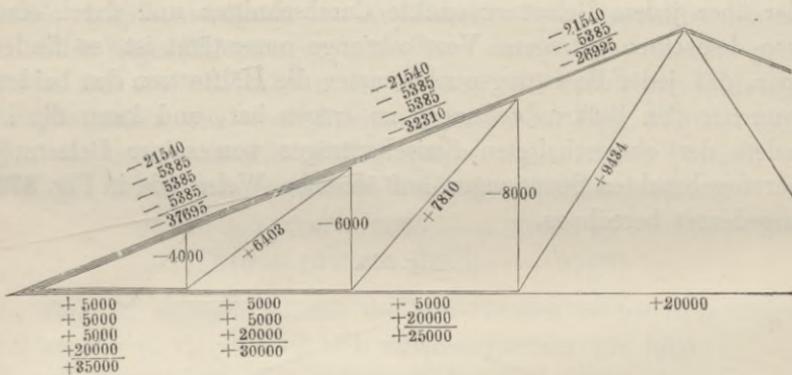


Fig. 378.



Auch die § 3 als Beispiel gewählte Dachkonstruktion könnte man auf diese Weise berechnen und die in Fig. 14 gefundenen

Fig. 379.

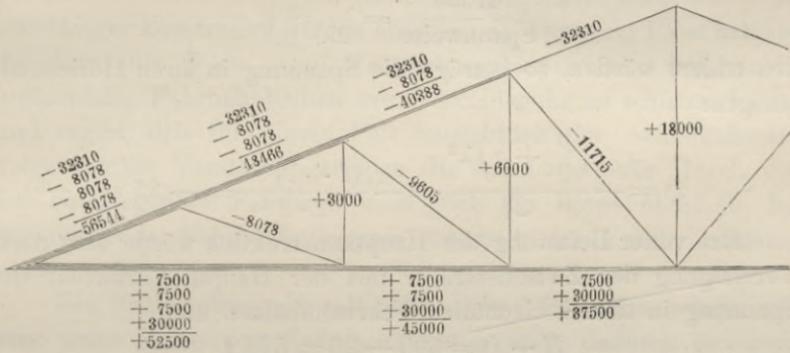


Spannungszahlen auf die in Fig. 380 angedeutete Art aus ihren einzelnen Teilen zusammengesetzt sich denken.

In allen diesen Fällen werden die Teile der Hauptkonstruktion durch das Einfügen der Zwischenträgersysteme einen Zuwachs an Querschnittfläche erhalten, weil die Spannungen der miteinander zu verschmelzenden Teile gleicher Art sind, weshalb es auch

nicht erforderlich war, zwischen permanenter und mobiler Belastung zu unterscheiden. Vorteilhafter ist es — wo der Zweck

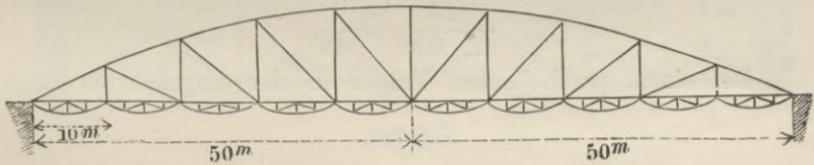
Fig. 380.



der Konstruktion dies gestattet — die Einfügung der Zwischenträger in der Weise auszuführen, daß die zusammenfallenden Teile von Hauptkonstruktion und Zwischenträgern Spannungen entgegengesetzter Art haben, weil alsdann bei dem Verschmelzen beider Teile die Spannungen teilweise einander neutralisieren, und das zu den betreffenden Teilen der Zwischenträger sonst erforderliche Material alsdann ganz gespart werden kann.

So z. B. würden bei der im zehnten Abschnitt berechneten Balkenbrücke mit drei Öffnungen den Zwischenträgern des (zwischen den Pfeilerabteilungen liegenden) parabolischen Trägers von 100 m Spannweite am zweckmäßigsten die in Fig. 381 dar-

Fig. 381.



gestellte Lage zu geben sein, bei welcher die horizontalen Druckstangen der Zwischenträger mit den horizontalen Zugstangen der Hauptkonstruktion zusammenfallen. Die Spannung der letzteren beträgt bei voller Belastung:

$$H = \frac{(p + q) l^2}{2f} = \frac{(4 + 2) 50^2}{2 \cdot 12,5} = + 600 \text{ t.}$$

Die Zwischenträger bilden kleinere Brücken von 10 m Spannweite und tragen außer der ganzen mobilen Last noch etwa die Hälfte der permanenten Last. Wenn dieselben also beispielsweise als parabolische Träger nach dem Verhältnis:

$$\frac{\text{Höhe}}{\text{Spannweite}} = \frac{f}{2\lambda} = \frac{1}{5}$$

konstruiert würden, so betrüge die Spannung in ihren Horizontalstangen:

$$\xi = - \frac{\left(\frac{p}{2} + q\right) \lambda^2}{2f} = - \frac{(2 + 2) 5^2}{2 \cdot 2} = - 25 \text{ t.}$$

Bei voller Belastung der Hauptkonstruktion würde also nach Vereinigung der Zwischenträger mit der Hauptkonstruktion die Spannung in dem horizontalen Fahrbahnbalke nur

$$H + \xi = 600 - 25 = 575 \text{ t}$$

statt 600 t betragen.

Obwohl man nun deshalb den Fahrbahnbalke nicht um so viel schwächer machen dürfte, weil bei Entlastung eines einzelnen Feldes dieser günstige Fall des Zusammentreffens von Zug- und Druckspannung nicht mehr in der eben gefundenen Weise stattfinden würde, so kann doch wenigstens das sonst zu den horizontalen Balken der Zwischenträger erforderliche Material ganz erspart werden, und da die Bogen derselben nur wenig mehr Material erfordern als die Horizontalbalken, so würde der Materialverbrauch für das Zwischenträgersystem zu dem Gesamtmaterialverbrauch ungefähr in demselben Verhältnis stehen, wie die einfache Horizontalspannung im Zwischenträger zur doppelten Horizontalspannung der Hauptkonstruktion sich verhält, nämlich

$$\frac{25}{2 \cdot 600} = \frac{1}{48}$$

Bei einem parabolischen Träger in der umgekehrten Lage

Fig. 382.

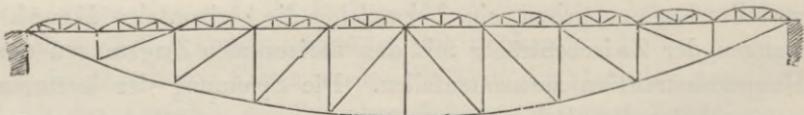


Fig. 382 wird auch die Lage der Zwischenträger die umgekehrte sein müssen, wenn derselbe Vorteil erreicht werden soll. Es ist kaum

nötig, zu bemerken, daß hier nur beispielsweise die parabolische Form für die Zwischenträger angenommen worden ist, und daß dieselben ebensowohl als Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen, oder — wenn wegen Kleinheit derselben die dreieckigen leeren Felder mit überschüssigem Material ausgefüllt werden — als Blechträger konstruiert werden können. In letzterem Falle nehmen dieselben die Form von Verstärkungsrippen an, welche die horizontalen Fahrbahnbalken vor Durchbiegung zu schützen haben, und ergibt sich für diesen Fall hinsichtlich der vorteilhaftesten Lage solcher Verstärkungsrippen die beachtenswerte Regel, daß bei obenliegender Fahrbahn womöglich die Rippe oberhalb, bei untenliegender Fahrbahn dagegen unterhalb des Fahrbahnbalkens anzubringen ist.

Bei Fachwerkträgern mit gekreuzten Diagonalen würde man eine erste Reihe von Zwischenpunkten auch dadurch gewinnen können, daß man die Kreuzungspunkte der Diagonalen mit als Belastungspunkte benutzt, indem man auf jeden dieser Kreuzungspunkte eine Vertikalstange setzt, welche dem oberhalb derselben liegenden Teile der Belastung als Stütze dient. (Für den Fall, daß die Angriffspunkte der Belastungen unten liegen sollen, würde man der ganzen Konstruktion nur die umgekehrte Lage zu geben brauchen.)

Durch Einschaltung eines Systems dreieckiger Zwischenträger kann man dann abermals die Zahl der Belastungspunkte verdoppeln oder verdreifachen und — falls eine noch größere Zahl von Belastungspunkten gefordert werden sollte — dieses Verfahren

Fig. 383.

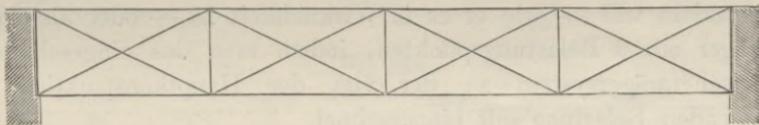
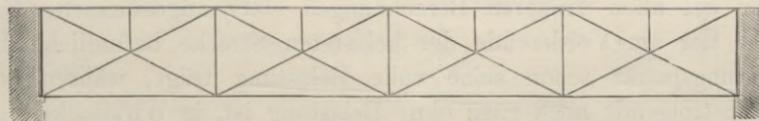


Fig. 384.



beliebig wiederholen, gerade so wie oben in bezug auf die dreieckigen Dachkonstruktionen erklärt wurde. Auf solche Weise ge-

langt man von der Grundform Fig. 383 mittelst der Übergangsform Fig. 384 zu den in Figg. 385 und 386 dargestellten Brückenkonstruktionen.

Fig. 385.

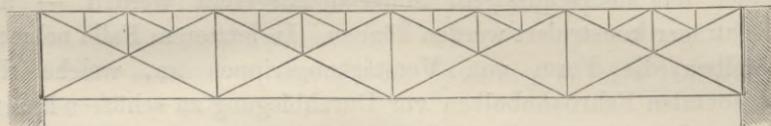
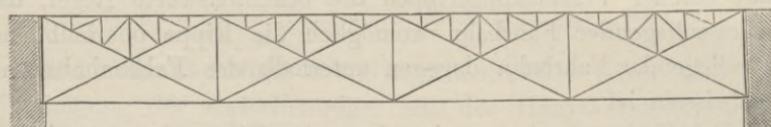


Fig. 386.



Was die Berechnung der Spannungszahlen derartiger Brückenkonstruktionen betrifft, so würde man die Berechnung der Übergangsform Fig. 384 direkt nach der Methode der statischen Momente ausführen können, indem man bei der Berechnung der Spannungen in den horizontalen Stangen die Kreuzungspunkte der Diagonalen als Drehpunkte für die Momentengleichungen wählt und bei der Berechnung der Diagonalen berücksichtigt, daß die in irgend einem Vertikalschnitte tätige Vertikalkraft halb genommen die vertikale Seitenkraft einer jeden von den beiden Diagonalenspannungen bildet.

Bei der Berechnung von Fig. 385 würde man sich zu erinnern haben, daß es rücksichtlich der am Schlusse des § 12 besprochenen resp. verteidigten Voraussetzungen einen Unterschied macht, ob man diese Konstruktion als einen Träger mit 17 Belastungspunkten behandeln will — wie er es in Wirklichkeit ist — oder als einen Träger mit 9 Belastungspunkten, indem man das eingeschaltete Zwischenträgersystem zu der von der Hauptkonstruktion zu tragenden Belastung mit hinzurechnet.

Da nämlich bei allmählichem Fortrücken der mobilen Last der bei allen früheren Berechnungen stets angenommene Fall, daß der am Vorderende der belasteten Strecke befindliche Belastungspunkt schon seine volle Belastung trägt, während der nächstfolgende noch ganz ohne Belastung ist, in Wirklichkeit gar nicht eintreten kann — wie in § 12 bereits erklärt wurde — so muß, wenn man nichtsdestoweniger diese ungenaue Voraussetzung

machen will, die daraus hervorgehende Ungenauigkeit des Resultates eine um so größere werden, je kleiner die Anzahl der Belastungspunkte ist. Man wird daher verschiedene Spannungszahlen für Fig. 385 erhalten, je nachdem man 17 oder 9 Belastungspunkte annimmt, und zwar die genaueren bei der Annahme von 17 Belastungspunkten. In diesem letzteren Falle hat man zu berücksichtigen, daß, wenn das Vorderende der belasteten Strecke mit der Mitte eines Zwischenträgers zusammenfällt, der nächstfolgende Belastungspunkt der Hauptkonstruktion bereits einen Teil seiner Belastung zu tragen hat, insofern derselbe jenem Zwischenträger als Stützpunkt dient; daß dagegen, wenn das Vorderende der belasteten Strecke mit dem Endpunkte eines Zwischenträgers zusammenfällt, dieser Punkt als Belastungspunkt der Hauptkonstruktion noch nicht seine volle Belastung trägt, insofern derselbe zugleich für den nächstfolgenden noch unbelasteten Zwischenträger einen Stützpunkt bildet.

Wenn man zur Vergleichung mit dem in § 10 berechneten Fachwerkträger die Dimensionen und Belastungen eben so groß wie dort annimmt, nämlich: Höhe = 2 m, Länge = 16 m, Totalbelastung des ganzen Trägers = 48 000 kg, permanente Last = 8 000 kg, mobile Last = 40 000 kg, so erhält man für Figg. 384 und 385

Fig. 387.

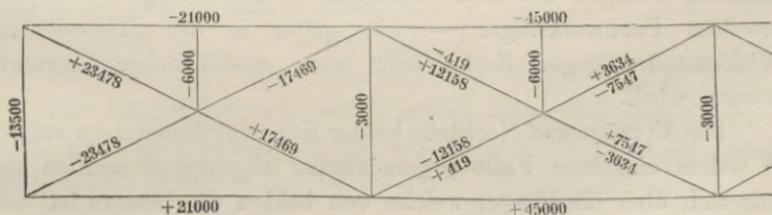
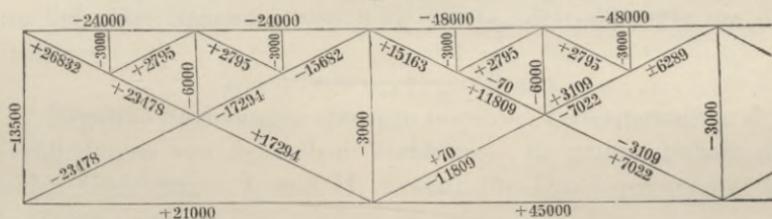


Fig. 388.



resp. die in Figg. 387 und 388 zusammengestellten Spannungszahlen.

Eine Vergleichung der letzteren Figuren mit denen des § 14 zeigt, daß man bei einem solchen einfachen aus nur wenigen Stangen zusammengesetzten Fachwerkträger wie Fig. 383 auf zwei verschiedene Arten die Zahl der Belastungspunkte vergrößern kann. Die eine Methode besteht, wie in § 14 erklärt wurde, darin, daß man das einfache aus Diagonalen und Vertikalstangen bestehende Absteifungssystem durch ein mehrfaches Gittersystem ersetzt; die andere Methode ist die hier erklärte mittelst Einschaltung von Zwischenträgern. Offenbar würde die erstere Methode die vorteilhaftere sein, wenn gleich große Zug- und Druckspannungen stets gleich große Querschnitte erforderten. Denn in diesem Falle würde man durch Anwendung des Prinzips der mehrfachen Gittersysteme ohne neuen Materialaufwand die Zahl der Belastungspunkte bis ins Unbestimmte vergrößern können, während bei der anderen Methode die Einschaltung jedes neuen Zwischensystems stets neuen Materialaufwand bedingt.

Indessen wird dieser scheinbare Vorzug der Gitterträger durch den Nachteil wieder aufgewogen, daß in der Gitterwand die gedrückten Stäbe bei ihrer mehrfachen Zersplitterung und verhältnismäßig großen Länge bei weitem ungünstiger situiert sind hinsichtlich ihres Widerstandes gegen Zerknicken und deshalb verhältnismäßig viel größere Querschnitte erfordern, als die gedrückten Stangen bei dem einfachen, in nur wenige Felder eingeteilten Fachwerkträger — wie später in der „Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken“ noch ausführlicher begründet werden wird.

Die Vorzüge und Nachteile beider Konstruktionsweisen müssen in jedem einzelnen Falle gegeneinander abgewogen werden und läßt sich über die Frage, welche von beiden die bessere ist, kein allgemein entscheidendes Urteil abgeben.

DREIZEHNTER ABSCHNITT.

§ 44.

Durchbiegung belasteter Träger.

Die Längenänderung einer Stange ist ihrer Spannung proportional.

Wenn man mit $\frac{1}{E}$ das Verhältnis bezeichnet, in welchem eine Stange von 1 qmm Querschnitt bei einer Spannung von 1 kg sich verlängert, so erhält man das Verlängerungsverhältnis, welches dieselbe Stange bei einer Spannung von S kg annimmt, aus der Gleichung:

$$I. \delta = \frac{S}{E}.$$

Die Zahl E wird Elastizitätsmodulus genannt und ist beispielsweise für Schmiedeeisen gleich 20000 zu setzen. Eine schmiedeeiserne Stange von beliebiger Länge und von beliebigem Querschnitt verlängert sich also um $\frac{1}{20000}$ ihrer ursprünglichen Länge, wenn ihr eine Zugspannung von 1 kg pro Quadratmillimeter der Querschnittsfläche erteilt wird. Wenn dieselbe Stange statt dessen eine Spannung von 6 kg pro Quadratmillimeter erhält, so verlängert sie sich in dem Verhältnis:

$$\delta = \frac{6}{20000},$$

also um etwa $\frac{1}{3333}$ ihrer ursprünglichen Länge.

Die Längenänderung selbst erhält man, indem man dieses Verlängerungsverhältnis mit der ursprünglichen Länge l der Stange multipliziert, also aus der Gleichung:

$$II. \lambda = l \cdot \delta.$$

Eine schmiedeeiserne Stange von 10 m Länge verlängert sich also bei einer Spannung von 6 kg pro Quadratmillimeter um die Größe:

$$\lambda = 10000 \cdot \frac{6}{20000} = 3 \text{ mm.}$$

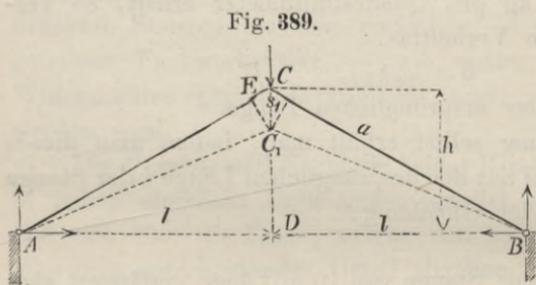
Negative Spannungen erzeugen negative Verlängerungen, d. h. Verkürzungen von demselben Verhältnis. Es gelten deshalb die beiden Gleichungen I. und II. sowohl für Druckspannungen als für Zugspannungen.

Wenn man bei einem belasteten Träger die Spannung jedes Konstruktionsteiles kennt, so ist hiernach die Bestimmung seiner

Formänderung — also auch seiner Durchbiegung — eine rein geometrische Aufgabe, die auch auf empirischem Wege, durch Konstruktion, gelöst werden kann, indem man sich die ganze Stangenverbindung auseinander genommen denkt und von irgend einem Knotenpunkte ausgehend die einzelnen Stangenlinien mit ihren neuen Längen wieder aneinander setzt in derselben Reihenfolge, wie sie früher verbunden waren.

In einzelnen Fällen, namentlich bei Kombinationen mehrerer Konstruktionssysteme, ist es von Interesse, die Durchbiegung eines Trägers bei gegebener Belastung zu kennen, um danach die Verteilung der Belastungen und der Spannungen auf die einzelnen Systeme beurteilen zu können. Es soll deshalb hier an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden, wie man die durch obige Sätze in eine rein geometrische verwandelte Aufgabe lösen kann. In bezug auf alle nachfolgenden Beispiele soll vorausgesetzt werden, daß die Stärke jedes Konstruktionsteiles seiner Spannung proportional gewählt ist, daß also die Verlängerungs- und Verkürzungsverhältnisse sämtlicher Konstruktionsteile dieselbe absolute Größe (δ) haben.

Wenn in Fig. 389 durch Belastung des Punktes C jede der beiden Stangen um die Größe $a\delta$ verkürzt wird, so rückt der



Punkt C nach einer Stelle C_1 , welche den

Durchschnittspunkt der beiden von A und B aus mit der Länge $a - a\delta$ beschriebenen Kreisbogen bildet. Letztere können (wegen

sehr geringer Größe der Verkürzungen) als gerade Linien angesehen werden, die rechtwinkelig zu den Linien AC und BC gerichtet sind.

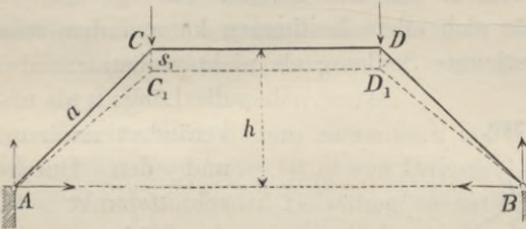
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CEC_1 und CDA ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{CC_1}{CE} = \frac{s_1}{a\delta} = \frac{a}{h}, \text{ oder:}$$

$$1) \quad s_1 = \delta \frac{a^2}{h}.$$

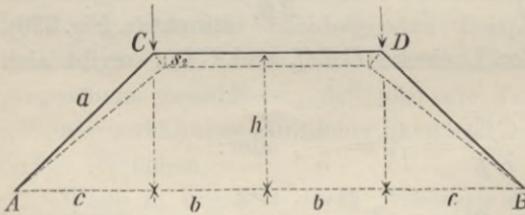
Dieselben hier gefundenen Gleichungen gelten auch für umgekehrte Lage der Konstruktion.

Fig. 392.



für sich allein bestimmt (s. Fig. 393) und beide Senkungen dann zusammenaddiert:

Fig. 393.

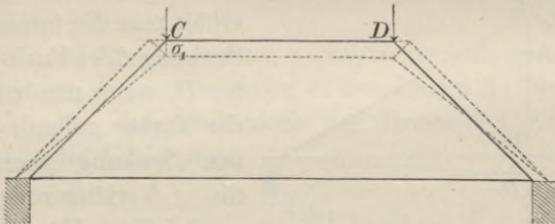


für sich allein bestimmt (s. Fig. 393) und beide Senkungen dann zusammenaddiert:

$$5) \quad s = s_1 + s_2 = \delta \left(\frac{a^2 + bc}{h} \right).$$

Wenn die Punkte A und B durch eine Zugstange verbunden sind (s. Fig. 394), so kommt zu der vorigen noch die aus der

Fig. 394.



Verlängerung dieser letzteren hervorgehende Senkung:

$$\sigma_1 = \delta \frac{(b+c)c}{h}$$

hinzu, und man erhält als totale Senkung der Punkte C und D:

$$6) \quad s = s_1 + s_2 + \sigma_1 = \delta \left(\frac{a^2 + bc + (b+c)c}{h} \right).$$

Auf ähnliche Weise können bei der in Fig. 392 dargestellten Konstruktion die Senkungen der Punkte C und D bestimmt werden, indem man einmal die aus den Längenänderungen der Stangen AC und BD hervorgehende Senkung:

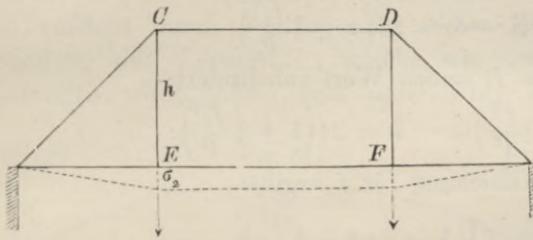
$$s_1 = \delta \frac{a^2}{h},$$

ein anderes Mal die aus der Verkürzung der Stange CD hervorgehende Senkung:

$$s_2 = \delta \cdot \frac{bc}{h}$$

Wenn endlich die Lasten unten hängen und mittelst Hängestangen auf die Punkte C und D übertragen werden (s. Fig. 395),

Fig. 395.



so kommt für die Punkte E und F noch die aus der Verlängerung:

$$\sigma_2 = h\delta$$

entstehende Senkung zu der vorigen hinzu, und beträgt also deren Totalsenkung:

$$\begin{aligned} 7) \quad s &= s_1 + s_2 + \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\delta}{h} [a^2 + bc + (b+c)c + h^2] \\ &= 2 \frac{\delta}{h} (a^2 + bc). \end{aligned}$$

§ 45.

Senkung des Scheitels bei parabolischen Trägern.

Auf ähnliche Weise wie im vorigen Paragraphen in bezug auf eine aus zwei und aus drei Stangen zusammengesetzte Kette gezeigt wurde, kann man auch bei einer aus mehr als drei Stangen zusammengesetzten Kette die Senkung der Belastungspunkte bestimmen.

Wenn bei immer wachsender Zahl der Belastungspunkte die polygonale Stangenverbindung in eine stetig gekrümmte parabolische Kette übergeht, so wird bei Verkürzung derselben die Pfeilhöhe f in die Pfeilhöhe f_1 übergehen und als Senkung des

Scheitels ergibt sich dann (s. Fig. 396):

$$8) \quad s_1 = f - f_1.$$

Wenn das Verhältnis $\frac{f}{2l}$ der

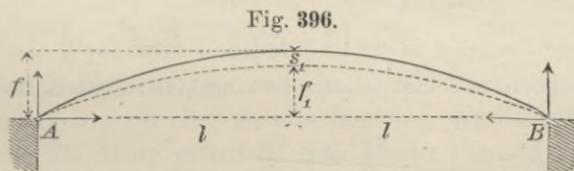


Fig. 396.

Pfeilhöhe zur Spannweite klein ist, so gilt für die Bogenlänge der unverkürzten Parabel annähernd die Gleichung:

$$B = 2l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l^2} \right)^*,$$

folglich für die Bogenlänge der im Verhältnis δ verkürzten Parabel:

$$B(1 - \delta) = 2l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f_1^2}{l^2} \right)$$

oder, wenn man hierin B seinen Wert substituiert:

$$2l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l^2} \right) (1 - \delta) = 2l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f_1^2}{l^2} \right);$$

die Auflösung dieser Gleichung für f_1 ergibt:

$$f_1 = f \sqrt{1 - \delta \left(1 + \frac{2}{3} \frac{l^2}{f^2} \right)}$$

wofür man, da δ eine sehr kleine Größe ist und trotz des angenommenen großen Wertes von $\frac{l}{f}$ das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen als verhältnismäßig klein angesehen werden darf, annähernd auch setzen kann:

$$f_1 = f \left[1 - \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{l^2}{f^2} \right) \right].$$

Die Substitution dieses Wertes in Gleichung 8) ergibt für s_1 den Wert:

$$9) \quad s_1 = \frac{f\delta}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{l^2}{f^2} \right) = \frac{3}{4} \frac{\delta l^2}{f} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l^2} \right).$$

Setzt man hierin $l = 20000$ mm, $f = 5000$ mm, $\delta = \frac{0.0006}{20000}$, so erhält man $s_1 = 18 \left(1 + \frac{2}{3} \right) = 18,75$ mm als Senkung des Scheitelpunktes der in § 22 berechneten Bogenbrücke unter Voraussetzung einer Belastung, welche in dem (schmiedeeisernen) Bogen eine Spannung von 6 kg pro qmm des Querschnitts hervorbringt.

*) Aus der Gleichung der Parabel $\frac{y}{f} = \frac{x^2}{l^2}$ ergibt sich $\frac{dy}{dx} = 2f \frac{x}{l^2}$.
Das Differenzial des Bogens ist:

$$\begin{aligned} dB &= dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = dx \sqrt{1 + \frac{4f^2 x^2}{l^4}} \\ &= dx \left(1 + \frac{2f^2 x^2}{l^4} - \frac{2f^4 x^4}{l^8} \dots \right) \end{aligned}$$

oder, wenn man nur die ersten beiden Glieder der eingeklammerten Reihe beibehält, annähernd:

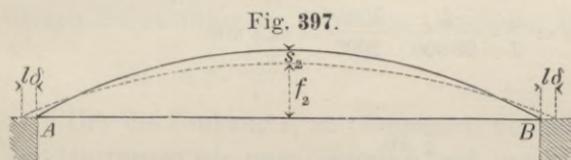
$$dB = dx \left(1 + \frac{2f^2}{l^4} x^2 \right).$$

Hieraus erhält man durch Integration:

$$B = \int_{-l}^{+l} dx \left(1 + \frac{2f^2}{l^4} x^2 \right) = 2l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l^2} \right).$$

(Dieselbe Gleichung gilt auch für die Senkung des Scheitelpunktes einer hängenden parabolischen Kette, wenn unter δ das Verlängerungsverhältnis derselben verstanden wird)

Wenn die Punkte A und B durch eine Zugstange verbunden sind, die Auflagerpunkte also nur vertikale Gegendrücke leisten, so entsteht durch Verlängerung dieser Zugstange eine fernere Senkung des Scheitels s_2 , welche wie bei den vorigen Fällen gefunden wird, indem man untersucht, welche Änderung die



Pfeilhöhe erleiden würde, wenn bei unveränderter Bogenlänge die Spannweite der Parabel

um die Größe $2l\delta$ sich verlängerte (s. Fig. 397).

Um die neue Pfeilhöhe f_2 zu erhalten, setzt man die Bogenlänge der ursprünglichen Parabel gleich der Bogenlänge derjenigen Parabel, welche f_2 als Pfeilhöhe und $2l(1+\delta)$ als Spannweite hat:

$$2l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l^2} \right) = 2l(1+\delta) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f_2^2}{l^2(1+\delta)^2} \right).$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt für f_2 annähernd den Wert:

$$f_2 = f \left[1 + \frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{l^2}{f^2} \right) \right].$$

Die Änderung der Pfeilhöhe oder die Senkung des Scheitels ist demnach:

$$10) \quad s_2 = f - f_2 = \frac{f\delta}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{l^2}{f^2} - 1 \right) = \frac{3}{4} \frac{\delta l^2}{f} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{f^2}{l^2} \right).$$

Die totale Senkung des Scheitels ist gleich der Summe der beiden einzeln gefundenen Senkungen, also:

$$11) \quad s = s_1 + s_2 = \frac{3}{2} \delta \frac{l^2}{f}.$$

Wenn die Fahrbahn mittelst Hängestangen an dem Bogen aufgehängt ist, so entsteht durch Verlängerung dieser Hängestangen noch eine weitere Senkung der Belastungspunkte, welche für die Mitte gleich δf sein würde.

Da indessen die obigen Resultate aus der Annahme eines geringen Pfeilhöhenverhältnisses hervorgingen, so kann diese letztere Größe als vergleichsweise klein vernachlässigt werden, zumal da

bei wirklichen Brücken die Vertikalstangen nur bei einseitiger, nicht aber bei voller Belastung ihre vollen Spannungen und Verlängerungen erhalten.

Die oben gefundene Gleichung 11) gilt auch für einen parabolischen Träger in der umgekehrten Lage.

Man erhält z. B. für den im zweiten Abschnitt berechneten parabolischen Träger von 16 m Spannweite und 2 m Pfeilhöhe, wenn man $\delta = \frac{6}{20000}$ setzt, als Senkung des Scheitels:

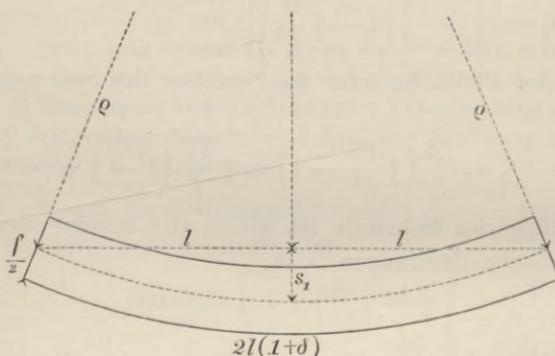
$$s = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{20000} \cdot \frac{8000^2}{2000} = 14,4 \text{ mm.}$$

§ 46.

Durchbiegung der Fachwerk- und Gitterbrücken.

Bei Fachwerkträgern mit parallelen Gurtungen setzt sich die ganze Durchbiegung s in der Mitte ebenfalls aus zwei Teilen zusammen, von denen der erstere s_1 allein durch die Längenänderungen der Gurtungen, der andere s_2 allein durch die Längenänderungen der Diagonalen und Vertikalständer hervor gebracht wird.

Fig. 398.



Um den ersten Teil s_1 zu bestimmen, nimmt man die Mittellinie des Trägers als nach einem Kreisbogen vom Halbmesser ρ gekrümmt an und setzt nach der Gleichung des Kreises, indem

man die Differenz zwischen Bogen- und Sehnenlänge vernachlässigt (s. Fig. 398):

$$l^2 = 2\rho s_1 - s_1^2$$

oder, da s_1^2 als sehr klein gegen $2\rho s_1$ vernachlässigt werden darf:

$$12) \quad s_1 = \frac{l^2}{2\rho}$$

Es ergibt sich ferner, da die Längen des äußeren und mittleren Bogens sich verhalten wie ihre Halbmesser, die Proportion:

$$\frac{\rho + \frac{f}{2}}{\rho} = \frac{2l(1 + \delta)}{2l}$$

und hieraus für ρ der Wert:

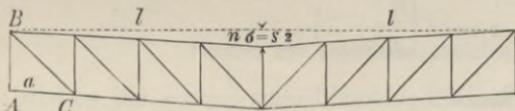
$$13) \quad \rho = \frac{f}{2\delta},$$

dessen Substitution zu folgender Gleichung für s_1 führt:

$$14) \quad s_1 = \frac{l^2 \delta}{f}.$$

Um die Senkung s_1 zu bestimmen, betrachtet man die Längen der Gurtungen als unveränderlich und untersucht, welche Form-

Fig. 399.

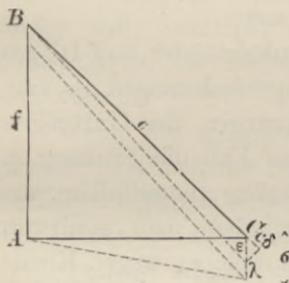


änderung jedem der aus Vertikalständer, Diagonale und Horizontalstange gebildeten rechtwinkligen Dreiecke durch Ver-

längerung der Diagonale und Verkürzung des Vertikalständers erteilt wird (s. Fig. 399). Diese Formänderung besteht z. B. für

das Dreieck ABC darin, daß der Punkt C sich senkt um eine Größe σ , welche aus folgenden zwei Teilen sich zusammensetzt: der erste Teil ε entsteht durch Verlängerung der Diagonale um die Größe $c\delta$ und läßt sich aus der Proportion bestimmen (s. Fig. 400):

Fig. 400.



$$\frac{\varepsilon}{c \cdot \delta} = \frac{c}{f};$$

der zweite Teil λ entsteht durch Verkürzung des Vertikalständers um die Größe $f \cdot \delta$ und ist dieser gleich. Die Vereinigung beider Werte ergibt für σ die Gleichung:

$$\sigma = \varepsilon + \lambda = \delta f \left(\frac{c^2}{f^2} + 1 \right),$$

wofür man, da $c^2 = f^2 + a^2$ ist, auch setzen kann:

$$\sigma = \delta \cdot a \cdot \frac{f}{a} \left(\frac{a^2}{f^2} + 2 \right).$$

Wenn n die Zahl der Felder zwischen Auflager und Mitte ist, so beträgt die Senkung s_2 das n -fache von σ ; man erhält also für s_2 die Gleichung:

$$s_2 = n \cdot \sigma = na \cdot \delta \cdot \frac{f}{a} \left(\frac{a^2}{f^2} + 2 \right)$$

oder, da $na = l$ ist:

$$15) \quad s_2 = l \delta \cdot \frac{f}{a} \left(\frac{a^2}{f^2} + 2 \right).$$

Die Vereinigung der beiden in 14) und 15) gefundenen Werte ergibt als totale Durchbiegung eines Trägers von der in Fig. 399 dargestellten Form:

$$16) \quad s = l \delta \left[\frac{l}{f} + \frac{f}{a} \left(\frac{a^2}{f^2} + 2 \right) \right].$$

Wenn die Felder quadratische Form haben, wird $\frac{f}{a} = 1$ und:

$$s = l \delta \left(\frac{l}{f} + 3 \right).$$

Wenn zugleich die halbe Felderzahl oder $\frac{l}{f} = 4$ ist, so wird:

$$s = 7 l \delta.$$

Nach dieser letzteren Formel erhält man z. B. für den im dritten Abschnitt berechneten Träger von 16 m Spannweite unter der Voraussetzung, daß für alle Teile $\delta = \frac{1}{200000}$ zu setzen ist, als Durchbiegung bei voller Belastung:

$$s = 7 \cdot 8000 \cdot \frac{1}{200000} = 16,8 \text{ mm.}$$

Nimmt man den Fall an, daß die Vertikalständer und Diagonalen sehr stark konstruiert, also ihre Längenänderungen als vergleichsweise klein gegen die Längenänderungen der Gurtungen zu betrachten seien, so darf man für diesen Fall die Senkung s_2 vernachlässigen und die totale Durchbiegung unmittelbar aus Gleichung 12) bestimmen nach Fig. 398, indem man annimmt, daß die Biegungskurve ein Kreisbogen ist, welcher wegen Kleinheit der Pfeilhöhe auch als Parabel angesehen werden darf. Annähernd tritt dieser Fall ein, wenn statt des Gittersystems eine massive Wand von überflüssiger Stärke die beiden Gurtungen verbindet, und darf man daher für einen solchen massiven Träger die aus Gleichung 14) sich ergebende Größe als Näherungswert für die Größe der totalen Durchbiegung betrachten.

Setzt man in jene Gleichung für δ den der Elastizitätsgrenze entsprechenden Wert (aus Gleichung I.), so erhält sie zugleich

das allgemeine Gesetz der Biegsamkeit massiver Träger von konstanter Höhe und symmetrischer Querschnittsform; denn größer kann die Durchbiegung in der Mitte niemals werden, als wenn die Krümmung an allen Stellen ein Maximum, die Krümmungslinie also ein Kreisbogen wird. Eine solche Krümmung tritt wirklich ein, sobald die biegenden Kräfte an allen Stellen den Querschnittsstärken, oder umgekehrt die Querschnitte überall den biegenden Kräften in der Weise angepaßt sind, daß die Spannung in allen Querschnitten das gleiche Maximum erreicht.

VIERZEHNTER ABSCHNITT.

§ 47.

Theorie der zusammengesetzten Systeme.

Die im vorigen Abschnitte gefundenen Gleichungen für die Durchbiegungen kann man nunmehr zur Beantwortung der folgenden zwei Fragen benutzen: erstens, wie bei Kombination zweier verschiedener Trägersysteme zu einer zusammengesetzten Konstruktion die beiden einfachen Systeme einander angepaßt werden müssen, wenn ein harmonisches Zusammenwirken derselben stattfinden soll; zweitens, wie bei einer solchen zusammengesetzten Konstruktion die Belastung auf die beiden einzelnen Systeme sich verteilt.

Wenn die gemeinschaftlichen Belastungspunkte zweier miteinander verbundener einfachen Systeme infolge zunehmender Belastung allmählich sich senken, so wachsen gleichzeitig in jedem der beiden Systeme die Spannungen und Längenveränderungen der einzelnen Konstruktionsteile. Sobald bei diesem Wachsen in einem der beiden Systeme die Elastizitätsgrenze erreicht ist, hört die fernere Tragfähigkeit des Ganzen sofort auf — ganz einerlei, wie weit in dem anderen Systeme die Spannungen noch von der Elastizitätsgrenze entfernt sein mögen. Ohne die Tragfähigkeit des Ganzen irgend zu beeinträchtigen, könnte man also entweder dieses andere System aus schwächerem, weniger elastischen Material konstruieren, welches die Elastizitätsgrenze bei geringerer Spannung schon erreicht, oder könnte man noch besser dadurch, daß

man einen Teil des in diesem Systeme enthaltenen Materials ganz wegließe und den Rest mit besserer Ausnutzung seiner Widerstandsfähigkeit verwendete, bewirken, daß nunmehr beide Systeme gleichzeitig die Elastizitätsgrenze erreichen. Alles in dieser Weise zu ersparende Material war vorher unnützer — und wegen seiner toten Last sogar schädlicher — Ballast für die Konstruktion.

Für alle solchergestalt kombinierte Systeme gilt demnach als oberste Konstruktionsregel: die einzelnen Trägersysteme müssen gleiche Durchbiegungsfähigkeit besitzen.

Man kann aber auch zweitens — mag diese Bedingung erfüllt sein oder nicht — mit Hilfe der im vorigen Abschnitt an mehreren Beispielen erläuterten Methode das Verhältnis bestimmen, nach welchem die ganze Belastung auf die beiden Systeme sich verteilt. Dazu ist nur erforderlich, die Senkungen der Belastungspunkte für das eine und für das andere System einander gleich zu setzen. Man erhält damit eine Gleichung für das Verhältnis $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ der Längenänderungen in beiden Konstruktionen, nach welcher sich das Verhältnis $\frac{Q_1}{Q_2}$ der entsprechenden Belastungen leicht bestimmen läßt.

Die Gleichung für die Senkung eines Belastungspunktes erscheint, wie die vorigen Untersuchungen zeigen, in der allgemeinen Form:

$$s = A\delta,$$

worin A eine von der Konstruktionsform und den Dimensionen des Trägers abhängige Konstante bezeichnet, welche für die in dem vorigen Abschnitt behandelten speziellen Fälle aus den Gleichungen 1) . . . 16) zu entnehmen ist.

Die Gleichsetzung der Senkungen

$$A_1\delta_1 = A_2\delta_2$$

ergibt also eine Gleichung von der Form

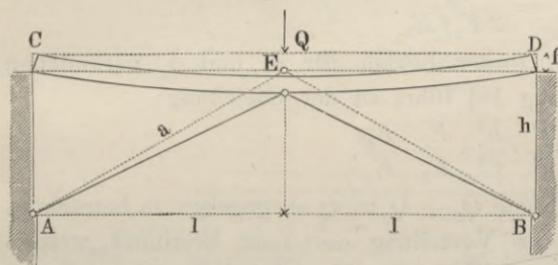
$$\text{III. } \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Wenn man dann nach der in der ersten Abteilung erklärten Momentenmethode untersucht, welche Belastungen erforderlich sind, um solche Spannungen in den beiden Systemen zu erzeugen, bei welchen die Längenänderungen in dem einem System δ_1 , in dem anderen δ_2 betragen, so kann man, da die totale Belastung

als gegeben zu betrachten ist, hiernach die Verteilung derselben auf die beiden Systeme bestimmen.

Wenn z. B. zwei aus gleichem Material konstruierte einfache Systeme — eines wie Fig. 389, eines wie Fig. 398 konstruiert — zu einer zusammengesetzten Konstruktion von der Form Fig. 401 verbunden sind, so ergibt sich durch Gleichsetzung der Werte

Fig. 401.



von A_1 und A_2 resp. aus den Gleichungen 1) und 12) als Bedingung des harmonischen Zusammenwirkens die Gleichung:

$$\frac{a^2}{h} = \frac{l^2}{f}$$

oder für das vorteilhafteste Höhenverhältnis der beiden Konstruktionen der Wert:

$$17) \quad \frac{f}{h} = \frac{l^2}{a^2}.$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, und wenn außerdem etwa die beiden Systeme aus verschiedenem Material konstruiert sind, so kann man aus der Gleichung III., welche für diesen Fall die Form annimmt:

$$18) \quad \frac{\delta_1 a^2}{h} = \frac{\delta_2 l^2}{f} \quad \text{oder} \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\frac{l^2}{f}}{\frac{a^2}{h}},$$

das Verhältnis $\frac{Q_1}{Q^2}$, nach welchem die Belastung Q auf die beiden Systeme sich verteilt, auf folgende Weise bestimmen.

Ein Gewicht Q_1 erzeugt in den beiden Stangen AE und BE , deren Querschnitte mit F_1 bezeichnet werden sollen, eine Spannung S_1 pro Flächeninhalt des Querschnitts:

$$S_1 = \frac{Q_1 a}{2 F_1 h},$$

folglich ist die Längenänderung dieser beiden Stangen:

$$19) \quad \delta_1 = \frac{S_1}{E_1} = \frac{Q_1 a}{2 F_1 h E_1}.$$

Wenn ferner F_2 der Querschnitt jeder der beiden Gurtungen des Trägers CD an der Stelle E ist, so beträgt die durch ein Gewicht Q_2 hervorgebrachte Spannung S_2 in diesem Träger:

$$S_2 = \frac{Q_2 l}{2 F_2 f'}$$

folglich die Längenänderung δ_2 in diesem Systeme:

$$20) \quad \delta_2 = \frac{S_2}{E_2} = \frac{Q_2 l}{2 F_2 f E_2}.$$

Die Substitution dieser beiden für δ_1 und δ_2 gefundenen Werte in die Gleichung 18) führt zu der Gleichung:

$$21) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{l^3}{a^3} \cdot \frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{E_1}{E_2},$$

aus welcher, da die Summe $Q_1 + Q_2 = Q$ als gegeben zu betrachten ist, ganz allgemein die Verteilung der Last bestimmt werden kann. So z. B. ergibt sich für eine Konstruktion, welche überall aus gleichem Material und der in Gleichung 17) ausgedrückten Bedingung gemäß konstruiert ist, für die Lastverteilung die Gleichung:

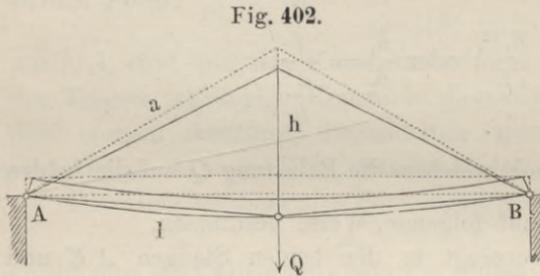
$$22) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a}{l} \cdot \frac{F_1}{F_2}.$$

Für eine Konstruktion von der Form Fig. 402, welche aus den Figg. 391 und 398 zusammengesetzt ist, ergibt sich in ähnlicher Weise durch

Benutzung der Gleichung 4) und 14) als

Konstruktionsregel für den Fall, daß beide aus gleichem Material bestehen:

$$23) \quad \frac{f}{h} = \frac{l^2}{2a^2}$$



und als allgemeine Gleichung für die Lastverteilung:

$$24) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^3}{a^3} \cdot \frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{E_1}{E_2},$$

welche für den der Gleichung 23) entsprechenden speziellen Fall die einfachere Form annimmt:

$$25) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = 2 \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{F_1}{F_2} = \frac{h}{f} \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{F_1}{F_2}.$$

Die letzten drei Gleichungen gelten auch für die umgekehrte Lage der Konstruktion (s. Fig. 403).

Fig. 403.

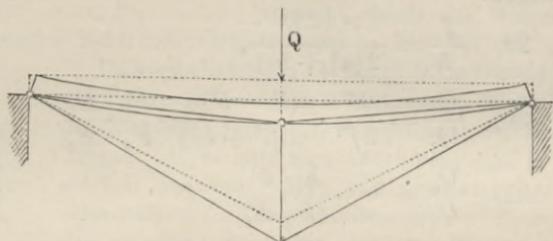
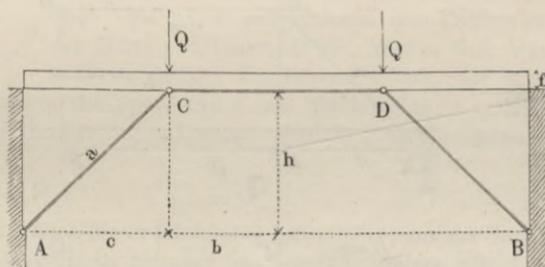


Fig. 404.



Um die analogen drei Gleichungen für Fig. 404 abzuleiten, können die Gleichungen 5) und 14) in ähnlicher Weise benutzt werden; jedoch ist in letzterer Gleichung der für die Senkung in der Mitte gefundene Wert zuvor mit $1 - \frac{b^2}{l^2}$ zu multiplizieren, da es sich hier um die Senkung der Punkte C, D handelt, und von der Mitte nach den Auflagern die Senkung dem Quadrate der Entfernung proportional abnimmt.

Hiernach erhält man für das zweckmäßigste Höhenverhältnis (vorausgesetzt, daß alles aus gleichem Material besteht) die Gleichung:

$$26) \quad \frac{f}{h} = \frac{l^2 - b^2}{a^2 + bc}$$

und als allgemeine Gleichung für die Lastverteilung:

$$27) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{(l^2 - b^2)c}{a(a^2 + bc)} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{E_1}{E_2'}$$

welche letztere für den der Gleichung 26) entsprechenden speziellen Fall die einfachere Form annimmt:

$$28) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{h}{f} \cdot \frac{F_1}{F_2}$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man für Figg. 405 oder 406 mit Benützung der Gleichungen 7) und 14) die analogen drei Gleichungen:

$$29) \quad \frac{f}{h} = \frac{l^2 - b^2}{2(a^2 + bc)},$$

$$30) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{h^2}{2f^2} \cdot \frac{(l^2 - b^2)c}{a(a^2 + bc)} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{E_1}{E_2}.$$

$$31) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{h}{f} \cdot \frac{F_1}{F_2}.$$

Fig. 405.

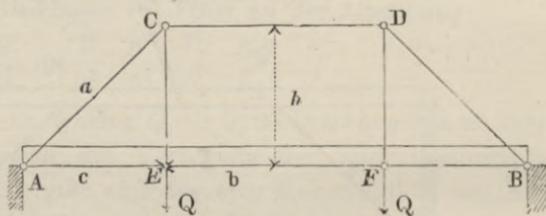
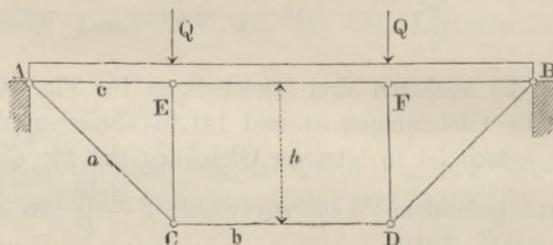


Fig. 406.



Bei allen diesen Fällen ist die Voraussetzung gemacht, daß in einer und derselben Konstruktion überall das gleiche Längenänderungsverhältnis stattfindet, oder mit anderen Worten, daß in einem und demselben System die Stärke jedes einzelnen Konstruktionsteiles seiner Spannung proportional gewählt wurde.

Wenn mehrere einfache Träger von verschiedener Biegsamkeit zu einer zusammengesetzten Konstruktion verbunden sind, so wird bei wachsender Belastung des Ganzen immer eine ungleichförmige Spannungsverteilung in demselben stattfinden, und von den einfachen Systemen sind dann diejenigen, welche wegen größerer Biegsamkeit später als die übrigen die Elastizitätsgrenze erreichen, jedesmal zu stark konstruiert, insofern, als sie aus schwächerem Material konstruiert sein könnten, ohne daß die Tragfähigkeit des Ganzen dadurch vermindert würde.

Derselbe Tadel also, welcher gegen ein solches nicht harmonisches Zusammenwirken der einzelnen Systeme bereits im Anfange dieses Paragraphen ausgesprochen wurde, trifft auch den massiven Träger, da man einen solchen betrachten kann als eine Kombination unendlich vieler

Gitter- oder Blechträger von ungleicher Höhe (also auch ungleicher Biegsamkeit), in denen paarweise je zwei einander symmetrisch gegenüberliegende Schichten die Stelle der parallelen Gurtungen vertreten und die zugehörigen Gitter- oder Blechwände jedesmal durch das Material der weiter innen liegenden Schichten vertreten sind (s. Fig. 407).

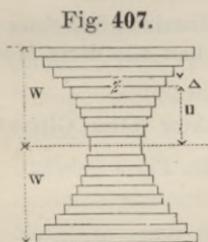


Fig. 407.

Da nach Gleichung 14) bei gleicher Durchbiegung die Längenänderung der Gurtungen, folglich auch die Spannung derselben, proportional der Höhe des Trägers ist, so darf man annehmen, daß in einem solchen massiven Balken von symmetrischer Querschnittsform die Längenänderungen und Spannungen der einzelnen Schichten von der Mitte aus nach oben und unten proportional der Entfernung von der Mitte zunehmen, in der Weise, daß, wenn die äußerste in der Entfernung w von der Mitte befindliche Schicht schon die Spannung S pro Flächeneinheit erreicht hat, eine andere in der Entfernung u liegende Schicht erst die Spannung:

$$s = \frac{u}{w} S$$

erlangt haben wird. Nach dieser Gleichung kann man, wenn die Spannung S in irgend einem Querschnitt bekannt ist, für jede andere Schicht die in derselben Querschnittsfläche stattfindende Spannung berechnen und ist dabei für die gegenüberliegenden Schichten jedesmal das entgegengesetzte Vorzeichen zu nehmen. Die Gesamtspannung einer solchen Schicht beträgt dann, wenn mit Δ ihre Höhe und mit z ihre Breite bezeichnet wird:

$$\frac{u}{w} S \cdot z \cdot \Delta.$$

Wenn ein solcher massiver Balken durch Kräfte K_1, K_2, \dots , welche rechtwinklig zu seiner Achse gerichtet sind, in gebogenen Zustand versetzt ist, so kann man

Fig. 408.

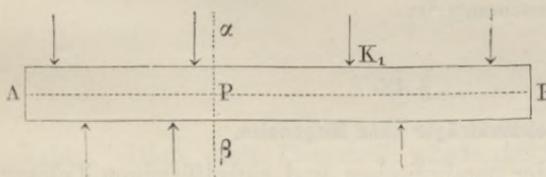
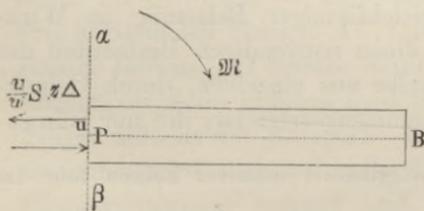


Fig. 409.



die von ihnen an irgend einer Querschnittsstelle P erzeugte Maximalspannung S mittelst der Methode der statischen Momente bestimmen, indem man sich an

dieser Stelle einen Schnitt $\alpha\beta$ durch den Balken hindurchgelegt, die Wirkung der abgeschnittenen Schichten durch ihre Spannkraften ersetzt denkt, und für das Stück $B\alpha\beta$ die Gleichung der statischen Momente aufstellt (s. Figg. 408 und 409). Damit keine Drehung um den Punkt P herum

stattfinde, muß die algebraische Summe \mathfrak{M} der statischen Momente aller äußeren auf das Stück $B \alpha \beta$ wirkenden Kräfte gleich sein der Momentensumme aller Spannungen, bezogen auf den Drehpunkt P .

Man erhält also die Gleichung:

$$\mathfrak{M} = \Sigma \left(\frac{u}{w} S z \Delta u \right),$$

worin das Summationszeichen Σ andeutet, daß für alle einzelnen Schichten-
spannungen die Momente in gleicher Weise gebildet und alle diese Mo-
mente dann addiert werden sollen.

Da der Quotient $\frac{S}{w}$ ein gemeinschaftlicher Faktor aller Glieder
dieser Summe ist, so kann man der Gleichung auch die Form geben:

$$\mathfrak{M} = \frac{S}{w} \Sigma (z \Delta u^2),$$

worin der mit dem Summationszeichen versehene Ausdruck die Bedeutung
einer nur von Größe und Form der Querschnittsfläche abhängigen, rein
geometrischen Größe hat. Bezeichnet man diese Größe, welche das Träg-
heitsmoment des Querschnitts genannt wird, mit dem einfachen Buch-
staben \mathfrak{I} , so nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$\mathfrak{M} = \frac{S}{w} \mathfrak{I}$$

oder wenn man dieselbe für S auflöst:

$$S = \frac{w}{\mathfrak{I}} \mathfrak{M}.$$

Die Größe \mathfrak{I} des Trägheitsmoments ist für jede Querschnittsfläche be-
sonders zu berechnen, indem man dieselbe in sehr viele kleine Teile zer-
legt, jeden Flächenteil mit dem Quadrate seines Abstandes von der hori-
zontalen Mittellinie des Querschnitts multipliziert und die Produkte
zusammen addiert.

Wenn die Querschnittsdimensionen und die äußeren Kräfte gegeben
sind, so kann man mittelst der obigen Gleichung die Maximalspannung
in jedem Querschnitt bestimmen.*)

§ 48.

Fachwerkträger ohne Diagonalen.

In der „Theorie der parabolischen und sichelförmigen Träger“
wurde bereits nachgewiesen, daß das Diagonalensystem eines
solchen Trägers nur bei ungleichförmiger Belastung in Wirk-
samkeit tritt, dann aber auch einen notwendigen Bestandteil der
Konstruktion bildet, wenn dieselbe aus einzelnen, durch Gelenk-
bolzen verbundene Stangen zusammengesetzt ist, die nur Längs-

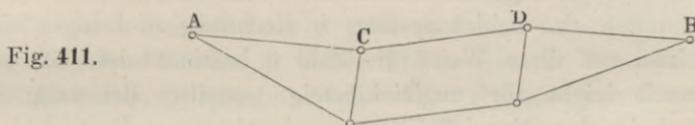
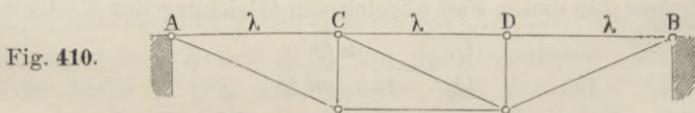
*) Die Fortsetzung der Biegungstheorie massiver Balken folgt im
fünfzehnten Abschnitte.

spannungen anzunehmen fähig sind. Wenn das Diagonalsystem fehlt, so muß, um das Zusammenfallen (oder die Verschiebung) der Stangenverbindung zu verhindern, wenigstens eine der beiden Ketten mit einer durchlaufenden steifen Stange vertauscht werden.

Eine solche Änderung aber hat Änderungen in der Spannungsverteilung zur Folge und darf alsdann der Träger — selbst für gleichförmig verteilte Belastung, bei welcher die Steifigkeit jener Stange entbehrlich sein würde — nicht mehr als einfacher parabolischer Träger betrachtet werden; es ist vielmehr in diesem Falle der Träger als eine Kombination zweier einfacher Trägersysteme anzusehen und die Verteilung der Lasten auf diese beiden Systeme nach den im vorigen Abschnitte entwickelten Prinzipien zu ermitteln.

Obwohl nun das Weglassen des Diagonalsystems als eine durchaus nicht zu empfehlende Abweichung von den Konstruktionsregeln bezeichnet werden muß, so soll — weil dergleichen theoretisch unvollkommene Konstruktionen trotzdem häufig vorkommen — der Einfluß dieser Abweichung an einigen einfachen Beispielen hier erläutert werden.

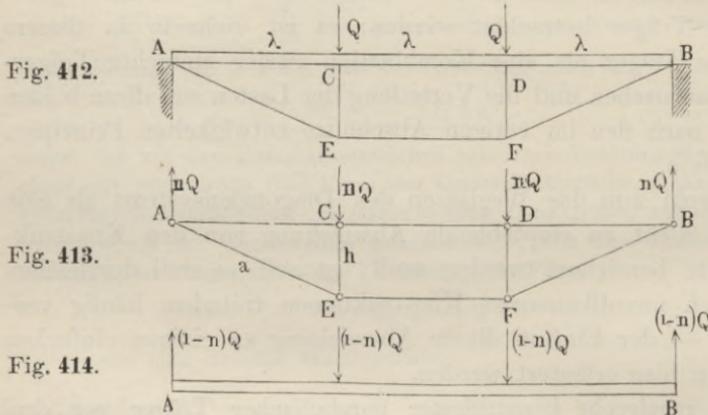
Ein regelrecht konstruierter parabolischer Träger von drei Feldern (s. Fig. 410) muß im Mittelfelde (wenigstens) eine Diagonale



haben. Ohne diese Diagonale würde die in Fig. 411 angedeutete Verschiebung möglich sein. Diese Verschiebung kann — anstatt durch die Diagonale — auch dadurch verhindert werden, daß die drei horizontalen Stangen AC , CD , DB durch einen durchlaufenden steifen Balken AB ersetzt werden, oder dadurch, daß ihnen ein solcher zur Seite gegeben wird (s. Fig. 412). Damit hört aber der Träger auf, in die Kategorie der einfachen Systeme zu gehören, denn nun wird auch bei voller Belastung in jenem steifen Balken Biegungsspannung erzeugt und ein Teil der Last von ihm ge-

tragen werden, der andere Teil also, welcher mittelst der Vertikalständer auf die (aus den drei Stangen AE , EF , FB gebildete) Kette übertragen wird, um so kleiner ausfallen, je steifer der Balken AB konstruiert ist.

Wenn man unter solchen Umständen die in den einzelnen Stangen stattfindenden Spannungen berechnen will, so muß man sich die Konstruktion aus den beiden einfachen Systemen Figg. **413**



und **414** zusammengesetzt denken und nach der im vorigen Paragraphen für diesen Fall abgeleiteten Gleichung das Verhältnis:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{nQ}{(1-n)Q}$$

der beiden Belastungsteile bestimmen, welche für das eine und für das andere der beiden Systeme in Rechnung zu bringen sind.

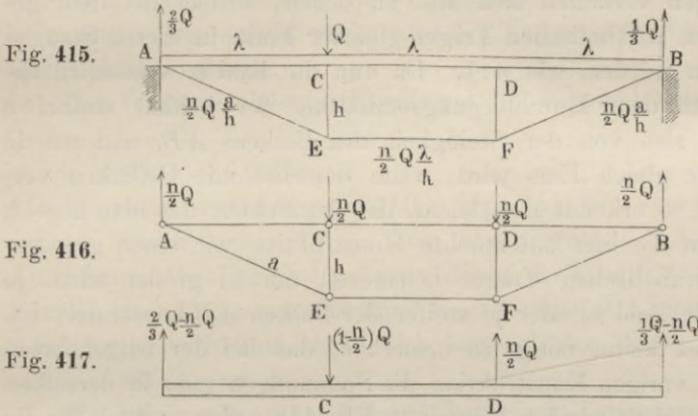
Sobald auf diese Weise die Zahl n bestimmt ist, läßt sich dann auch leicht für ungleichförmig verteilte Belastung die Spannung in den einzelnen Stangen bestimmen, denn dieselbe Zahl n ist auch bei diesem Belastungszustande maßgebend für die Lastverteilung. Wenn z. B. allein der Punkt C mit dem Gewichte Q belastet ist (s. Fig. **415**), so zerlegt sich diese Belastung auf folgende Weise in zwei Teile: der eine Teil, bestehend aus den beiden Gewichten

$$\frac{n}{2}Q \text{ und } \frac{n}{2}Q,$$

bildet die Belastung für das System Fig. **416**, der andere Teil, bestehend aus den beiden Gewichten

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right) Q \text{ und } -\frac{n}{2} Q,$$

bildet die Belastung des Systems Fig. 417.



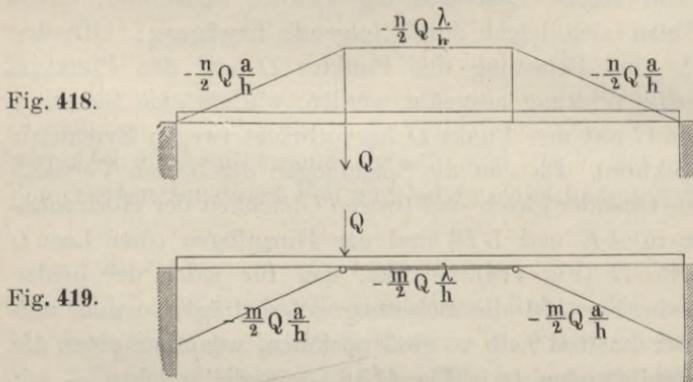
Daß eine solche Lastverteilung wirklich stattfindet, davon überzeugt man sich leicht durch folgende Erwägung: Offenbar muß durch eine Belastung des Punktes D auf den Punkt C genau dieselbe Wirkung ausgeübt werden, wie sie eine Belastung des Punktes C auf den Punkt D hervorbringt (wegen Symmetrie der Konstruktion). Da nun die Spannungen der beiden Vertikalstangen stets einander gleich sind (wegen Gleichheit der Horizontalspannungen in AE und BF) und das Hinzufügen einer Last Q an der Stelle D (Fig. 415) bewirkt, daß für jeden der beiden Lastpunkte in Fig. 416 die Belastung nQ beträgt, so muß notwendig dieser Lastteil halb so groß ausfallen, wenn nur einer der beiden Punkte C oder D in Fig. 415 — einerlei welcher — mit dem Gewichte Q belastet wird. Die Belastungen der beiden Punkte C, D in dem System Fig. 417 ergeben sich dann einfach durch Subtraktion der vorigen Lastteile von den totalen Belastungen dieser Punkte.

Sobald man aber die äußeren Kräfte kennt, welche auf die Konstruktion wirken, so läßt sich — worauf in § 24 schon hingewiesen wurde — mittelst der Momentenmethode die Spannung jedes Konstruktionsteiles leicht bestimmen. Beispielsweise sind für die drei Stangen AE, EF, FB die bei einseitiger Belastung des Punktes C eintretenden Spannungen in Fig. 415 eingetragen. Diese Spannungen bleiben dieselben, wenn der Punkt D statt des

Punktes C belastet wird; sie werden doppelt so groß, wenn beide zugleich belastet sind.

Die bei voller Belastung in diesen Stangen eintretenden Spannungen verhalten sich also zu denen, welche bei dem gewöhnlichen parabolischen Träger gleicher Form in diesen Stangen stattfinden würden, wie $n:1$. Da nun die Zahl n wesentlich abhängt von dem Durchbiegungsverhältnis der beiden einfachen Systeme, also von der Steifigkeit des Balkens AB , und nur in dem Falle gleich Eins wird, wenn derselbe mit Gelenken versehen ist, so erkennt man leicht, daß der Fehler, den man begeht, wenn man die hier untersuchte Konstruktion wie einen gewöhnlichen parabolischen Träger behandelt, um so größer wird, je kleiner die Zahl n , oder je steifer der Balken AB konstruiert ist.

Es ist kaum nötig, zu bemerken, daß bei der umgekehrten Lage der vorigen Konstruktion die Spannungen ganz in derselben Weise bestimmt werden können (s. Fig. 418); ebenso auch für die



in Fig. 419 dargestellte Konstruktion, wenn man bei letzterer aus der Gleichung, die für diesen Fall im vorigen Paragraphen abgeleitet wurde, die Zahl m auf gleiche Weise berechnet, wie die Zahl n beim vorhergehenden Falle.

§ 49.

Einfluß der Temperaturänderungen.

Die in den vorigen Paragraphen in bezug auf die kombinierten Systeme gefundenen Resultate sind unmittelbar noch nicht für praktische Anwendungen brauchbar, insofern als bei Ableitung

derselben der Einfluß der Temperaturänderungen unberücksichtigt geblieben ist. Sowohl bei der Berechnung der Verteilung der Belastung auf die beiden einzelnen Systeme, als auch bei der Bestimmung des vorteilhaftesten Verhältnisses ihrer beiden Höhen, ist es notwendig, auf die vorkommenden Temperaturschwankungen Rücksicht zu nehmen.

Der Wärmeausdehnungskoeffizient für Schmiedeeisen hat die Größe:

$$32) \alpha = 0,000\ 012\ 2,$$

d. h. bei einer Erwärmung um 1° (C.) verlängert sich eine schmiedeeiserne Stange um $\frac{122}{10\ 000\ 000}$ ihrer ursprünglichen Länge. Das Ausdehnungsverhältnis wächst proportional der Temperaturzunahme. Für das einer Temperaturzunahme von t -Graden (C.) entsprechende Ausdehnungsverhältnis ergibt sich hiernach der Wert:

$$33) \Delta = \alpha \cdot t.$$

Es würde also zum Beispiel bei einer Temperaturzunahme $t = 41^{\circ}$ (C.) eine schmiedeeiserne Stange sich verlängern um $41 \cdot \frac{122}{10\ 000\ 000} = \frac{1}{2000}$ ihrer ursprünglichen Länge. In gleichem Verhältnis würde überhaupt jede Dimension eines schmiedeeisernen Körpers sich vergrößern in der Weise, daß ein aus drei beliebigen Punkten des Körpers gebildetes Dreieck während der Ausdehnung stets seiner ursprünglichen Form ähnlich bleibt. Bei einer halb so großen Temperaturzunahme $t = 20,5^{\circ}$ (C.) würde jede Dimension um $\frac{1}{4000}$ sich vergrößern; bei einer Temperaturabnahme von derselben Größe um den gleichen Bruchteil sich verkürzen.

Diese durch Temperaturänderungen hervorgebrachten Formänderungen der Körper geschehen unabhängig von den elastischen Formänderungen. Es würde also bei gleichzeitigem Eintreten von Temperaturerhöhung und Zugspannung die Verlängerung der Stange gleich der Summe der beiden einzelnen Verlängerungen zu setzen sein. Da Temperaturabnahmen als negative Temperaturzunahmen, und Druckspannungen als negative Zugspannungen aufgefaßt werden können, so gilt der obige Satz nicht nur für positive, sondern auch für negative Verlängerungen. Es würde also die wirkliche Verlängerung der Stange gleich der Differenz der beiden absoluten Längenänderungen sein, wenn Temperaturerhöhung mit Druckspannung, oder Temperaturerniedrigung mit Zugspannung zusammentrifft.

Bei der in Fig. 389 dargestellten Stangenverbindung würde (nach den Gleichungen 1 und 33) eine Temperaturzunahme von t -Graden (C.) für sich allein die Wirkung haben, daß der Verbindungspunkt C um die Größe:

$$34) \quad \sigma = \Delta \frac{a^2}{h}$$

sich hebt, und bei der Temperaturabnahme von derselben Größe würde der Punkt C um ebensoviel sich senken.

Die in § 22 berechnete Bogenbrücke (Fig. 173) kann — was den Einfluß der Temperaturänderung auf die Höhenlage des Scharnierpunktes S anbelangt — ebenfalls wie eine solche Verbindung zweier einfacher Stangen behandelt werden. Setzt man den dort angegebenen Dimensionen entsprechend $h=5000$, $a^2=20000^2+5000^2$, so erhält man z. B. für $\Delta = \frac{1}{1000}$ den Wert:

$$\sigma = \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{20000^2 + 5000^2}{5000} \right) = 21,25 \text{ mm}$$

Es würde also der Scharnierpunkt S um 21,25 mm sich heben, wenn die Temperatur um $20,5^\circ$ C. zunimmt, und um 21,25 mm sich senken, wenn die Temperatur um $20,5^\circ$ C. abnimmt. Bei Temperaturschwankungen von der doppelten Größe $t=41^\circ$ C. würde die Hebung resp. Senkung des Scharnierpunktes 42,5 mm betragen. Wenn eine solche Temperaturerniedrigung von 41° zusammenträfe mit dem Belastungszustande, für welchen in § 45 nach Gleichung 9) die Senkung $s_1=18,75$ mm berechnet wurde, so würde die totale Senkung des Scharnierpunktes $18,75 + 42,5 = 61,25$ mm betragen.

Wenn mit δ_1 das durch die Belastung des Punktes C hervorbrachte elastische Verkürzungsverhältnis der beiden Stangen AC und BC in Fig. 401 bezeichnet wird, und mit Δ das einer gleichzeitig stattfindenden Temperaturerniedrigung entsprechende Verkürzungsverhältnis derselben, so hat die Senkung des Punktes C (nach Gleichung 1) im ganzen die Größe:

$$35) \quad s = (\delta_1 + \Delta) \frac{a^2}{h}$$

Indem man die Größe in Gleichung 18) dem für die Senkung des horizontalen Balkens gefundenen Werte $\frac{\delta_2 l^2}{f}$ gleich setzt, erhält man die Gleichung:

$$36) \quad \frac{(\delta_1 + \Delta) a^2}{h} = \frac{\delta_2 l^2}{f}$$

welche für das Höhenverhältnis $\frac{f}{h}$ aufgelöst nach Substitution des Wertes $a^2 = l^2 + h^2$ die Form annimmt:

$$37) \frac{f}{h} = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1 + \Delta} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{h^2}{l^2}} \right).$$

Setzt man hierin $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{20000}$ (indem man annimmt, daß beide Systeme aus Schmiedeeisen konstruiert sind, für welches $\frac{1}{20000}$ als das der Elastizitätsgrenze entsprechende Längenänderungsverhältnis gesetzt werden kann), ferner $\frac{h}{l} = \frac{1}{2}$ und $\Delta = \frac{1}{4000}$ (entsprechend der Annahme einer größten vorkommenden Temperaturenniedrigung von 20,5°), so erhält man $\frac{f}{h} = \frac{3}{5}$ (oder $\frac{f}{2l} = \frac{3}{20}$). Setzt man ein anderes Mal unter Beibehaltung der übrigen Zahlenwerte $\Delta = -\frac{1}{4000}$, so erhält man $\frac{f}{h} = \frac{6}{5}$ (oder $\frac{f}{2l} = \frac{3}{10}$).

Das vorteilhafteste Höhenverhältnis $\frac{f}{h}$ variiert also unter den angenommenen Umständen — je nach dem Stärkeverhältnis der beiden Systeme — zwischen den beiden Grenzwerten $\frac{3}{5}$ und $\frac{6}{5}$. Dem ersteren rückt dasselbe um so näher, je stärker die beiden Streben im Verhältnis zu dem horizontalen Balken konstruiert sind und je kleiner infolgedessen der von letzterem übernommene Bruchteil der Totalbelastung ausfällt. Dem anderen Grenzwerte dagegen nähert sich das vorteilhafteste Höhenverhältnis um so mehr, je schwächer die beiden Streben im Verhältnis zu dem horizontalen Balken konstruiert sind und je mehr infolgedessen der von letzterem übernommene Lastteil überwiegt. Für $\Delta = 0$, d. h. bei unverändert bleibender Temperatur, würde dagegen $\frac{f}{h} = \frac{4}{5}$ (oder $\frac{f}{2l} = \frac{1}{5}$) der vorteilhafteste Wert sein.

Um den Einfluß der Temperaturänderungen auf die Lastverteilung zu bestimmen, hat man zunächst zu untersuchen, welche Spannungen in den beiden Systemen die Temperaturänderung für sich allein — ohne das Vorhandensein irgendwelcher Belastung — hervorbringen würde. Denkt man sich die Temperatur um t -Grade abnehmend und bezeichnet man wiederum mit Δ das dieser Temperaturenniedrigung entsprechende Verkürzungsverhältnis der beiden Streben, so würde der Gelenkpunkt C (Fig. 401) um die Größe $\frac{\Delta a^2}{h}$ sich senken, wenn derselbe nicht mit dem horizontalen Balken fest verbunden wäre. Vermöge seiner Steifigkeit setzt der Balken dieser Senkung einen gewissen Widerstand P entgegen, welcher

auf die beiden Stangen als eine in dem Punkte C angreifende Vertikalkraft nach oben hin wirkt, folglich Verlängerungen in denselben erzeugt, welche von den durch die Temperaturerniedrigung hervorgebrachten Verkürzungen in Abrechnung zu bringen sind. Es wird also, wenn δ_1 das elastische Verlängerungsverhältnis ist, welches die Kraft P für sich allein in den Stangen hervorbringen würde, die wirkliche Senkung des Punktes C die Größe haben:

$$38) s = (\Delta - \delta_1) \frac{a^2}{h}.$$

Nach Gleichung 19) ist hierin $\delta_1 = \frac{Pa}{2E_1 F_1 h}$ zu setzen, folglich ist:

$$39) s = \left(\Delta - \frac{Pa}{2E_1 F_1 h} \right) \frac{a^2}{h}.$$

Für die Durchbiegung des horizontalen Balkens wurde in Gleichung 14) der Wert $s = \frac{\delta_2 l^2}{f}$ oder nach Substitution des aus Gleichung 20) zu entnehmenden Wertes $\delta_2 = \frac{Pl}{2E_2 F_2 f}$ die Größe:

$$40) s = \frac{Pl^3}{2E_2 F_2 f^2}$$

gefunden. Die Gleichsetzung dieser beiden Werte für s führt zu der Gleichung:

$$41) \left(\Delta - \frac{Pa}{2E_1 F_1 h} \right) \frac{a^2}{h} = \frac{Pl^3}{2E_2 F_2 f^2},$$

welche für die Kraft P aufgelöst die Form annimmt:

$$42) P = \frac{2\Delta E_1 F_1 \frac{h}{a}}{1 + \frac{l^3}{a^3} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{h^2}{f^2}}.$$

Wenn zu dieser Temperaturwirkung noch die Wirkung einer in dem Punkte C angebrachten Belastung hinzukommt, welche nach dem in Gleichung 21) gefundenen Gesetze auf die beiden Systeme sich verteilt, so summieren sich diese beiden Wirkungen; d. h. eine Temperaturabnahme bewirkt, daß der Lastanteil der beiden Streben um die Größe P vermindert, der des horizontalen Balkens dagegen um die Größe P vermehrt wird. Eine ebenso große Temperaturzunahme dagegen bewirkt, daß die beiden

Streben dem horizontalen Balken den Teil P von seiner Belastung abnehmen.

Setzt man in obiger Gleichung $\frac{h}{a} = 0,6$, $\frac{l}{a} = 0,8$, $\frac{h}{f} = 3$, $E_1 = E_2 = 20000$ (entsprechend der Annahme, daß beide Systeme aus Schmiedeeisen konstruiert sind), ferner $F_1 = F_2 = 10000$ qmm und $\Delta = \frac{1}{1000}$ (entsprechend einer Temperaturänderung von $20,5^\circ$ C.), so erhält man $P = 10700$ kg. Nach Gleichung 21) wird für diesen Fall $\frac{Q_1}{Q_2} = 4,608$; also wenn z. B. die Totalbelastung $Q = 80000$ kg ist, so wird $Q_1 = \frac{4,608}{5,608} \cdot 80000 = 65740$ kg und $Q_2 = \frac{80000}{5,608} = 14260$ kg. Es würde also bei einer Temperaturabnahme von $20,5^\circ$ die Lastverteilung in der Weise sich ändern, daß die beiden Streben nur $65740 - 10700 = 55040$ kg zu tragen bekommen, und der Balken $14260 + 10700 = 24960$ kg erhält. Eine Temperaturzunahme von $20,5^\circ$ würde dagegen zur Folge haben, daß die beiden Streben den Lastanteil $65740 + 10700 = 76440$ kg übernehmen, und der Balken nur $14260 - 10700 = 3560$ kg zu tragen bekommt.

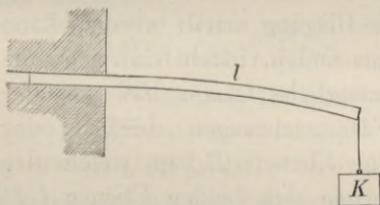
(Weitere Anwendungen der Prinzipien, welche der Theorie der zusammengesetzten Systeme zu grunde liegen, folgen im fünfzehnten und sechzehnten Abschnitte.)

FÜNFZEHNTER ABSCHNITT.

§ 50.

Widerstand des prismatischen Balkens gegen Biegung.

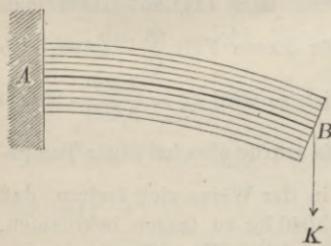
Wenn man das eine Ende eines prismatischen Balkens in horizontaler Lage einspannt, und das andere freie Ende desselben mit einem Gewichte belastet, so wird durch diese Belastung eine Biegung des Balkens hervorgerufen; der vorher geradlinige Balken nimmt eine krummlinige Form an, deren konvexe Seite nach oben gerichtet ist (Fig. 420).



Betrachtet man den Balken als ein Bündel von parallel nebeneinander liegenden, in unverschiebbarer Lage aneinander befestigten Fasern, so findet man, daß beim Eintreten dieser Biegung die oben liegenden Fasern sich verlängern, die unten liegenden sich verkürzen müssen.

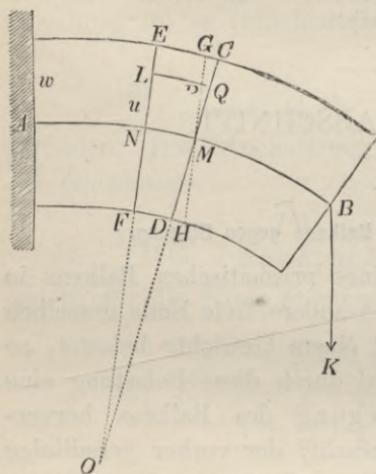
Zwischen der obersten und untersten Fasernschicht muß irgendwo eine mittlere Fasernschicht sich befinden, welche weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung erleidet; diese mittlere Fasernschicht AB (Fig. 421) wird die neutrale Faser genannt.

Fig. 421.



Die Verlängerungen der oberen und die Verkürzungen der unteren Fasern sind um so größer, je weiter die Fasern von der neutralen Faser entfernt liegen. Man darf annehmen, daß die einzelnen Querschnittsebenen des Balkens, welche vor dem Eintreten der Biegung rechtwinkelig zur geradlinigen Achse des Balkens standen, annäherungsweise auch nach eingetretener Biegung noch ihre ebene Form und ihre rechtwinkelige Lage zu der nunmehr gekrümmten Achsenlinie des Balkens überall beibehalten.

Fig. 422.



Die beiden sehr nahe beieinander liegenden Querschnittsebenen M und N , welche vorher einander parallel waren, nehmen beim Eintreten der Biegung die gegeneinander konvergierenden Lagen CD und EF an (Fig. 422). Die zwischen diesen beiden Querschnittsebenen liegenden Fasernabschnitte hatten vor dem Eintreten der Biegung sämtlich die gleiche Länge MN . Die Längenänderungen, welche diesen Fasernabschnitten durch die Biegung erteilt werden, kann man finden, indem man jene ursprüngliche Länge MN von der einen Ebene EF aus auf den Fasernrichtungen abträgt, oder indem man durch den Punkt M eine Ebene GH legt, welche der Ebene EF parallel ist. Die zwischen den beiden Ebenen CD und GH liegenden Teile stellen die Längenänderungen der einzelnen Fasernabschnitte dar. Nach Fig. 422 ist:

$$\frac{PQ}{GC} = \frac{u}{w}$$

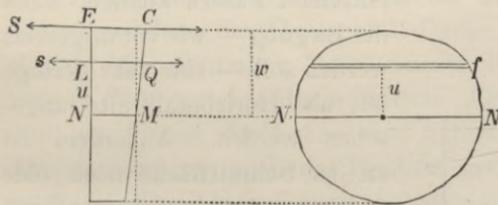
Aus der obigen Annahme folgt also, daß die Längenänderungen der einzelnen Fasernabschnitte sich verhalten wie ihre Abstände von der neutralen Faser, und da nach dem Elastizitätsgesetze die Spannung der Längenänderung proportional ist, so verhalten sich auch die Spannungen der einzelnen Fasernabschnitte wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Wenn also mit s die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnittes) für die im Abstände u von der neutralen befindliche Faser LQ bezeichnet wird (Fig. 423),

und mit S die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnittes) für die im Abstände w befindliche Faser EC , so ist:

Fig. 423.

Fig. 424.



$$43) \frac{s}{S} = \frac{u}{w} \text{ oder } s = S \frac{u}{w}.$$

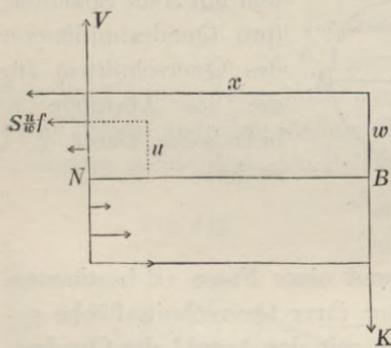
Um die totale Spannung irgend einer Faser zu bestimmen, hat man die pro Quadratmillimeter ihrer Querschnittsfläche gefundene Spannung zu multiplizieren mit der Anzahl der Quadratmillimeter, welche ihre Querschnittsfläche enthält. Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche des Balkens zerlegt in unendlich schmale, parallel zur neutralen Faserschicht liegende Streifen, und sieht man den Flächeninhalt f des in der Entfernung u von der Neutralen befindlichen Streifens als Querschnittsfläche jener im Abstände u von der Neutralen NN liegenden Faserschicht an (Fig. 424), so erhält man für die totale Spannung derselben die Größe:

$$44) s \cdot f = S \frac{u}{w} \cdot f.$$

Diese Spannung ist als eine Zugspannung (positive Spannung) anzusehen, wenn die betreffende Faser oberhalb der Neutralen liegt, d. h. wenn u positiv ist; als eine Druckspannung (negative Spannung) dagegen, wenn dieselbe unterhalb der Neutralen liegt, d. h. wenn u negativ ist. Der obige Ausdruck kann daher (für positive sowohl als für negative Werte von u) als allgemein gültiger Ausdruck für die Spannung irgend einer im Abstände u von der Neutralen befindlichen Faser betrachtet werden.

Wenn man sich durch eine an der Stelle N hindurchgelegte Querschnittsebene den Balken in zwei Teile zerschnitten denkt und untersucht, welche Kräfte zur Wiederherstellung des Gleichgewichtszustandes für das Stück BN an der Schnittfläche desselben angebracht werden müßten, so findet man, daß zunächst an der Schnittstelle jeder einzelnen Faser eine in die Längsrichtung derselben fallende Kraft anzubringen ist von gleicher Größe mit der Spannung, welche vorher in der Faser an dieser Stelle vorhanden war (Fig. 425). Diese Spannungswiderstände der einzelnen Fasern können, wenn die Biegung — wie vorausgesetzt werden soll — eine sehr geringe ist, als Horizontalkräfte angesehen werden. Außerdem ist an der Schnittfläche noch eine vertikal aufwärts wirkende Kraft V anzubringen, da jene Horizontalkräfte für sich allein nicht ausreichen würden, um der vertikal abwärts wirkenden Kraft K das Gleichgewicht zu halten.

Fig. 425.



Diese Kraft V darf — bei der vorausgesetzten geringen Abweichung der Schnittfläche von der Vertikalebene — als eine längs der Trennungsfäche aufwärts wirkende Widerstandskraft angesehen werden, welche einer Verschiebung des Stückes BN längs jener Fläche entgegenwirkt, und wird der Widerstand gegen Abscherung genannt. Da die Kräfte V und K die einzigen Vertikalkräfte sind, welche auf das Stück BN wirken, so ist nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen:

$$45) \quad V = K.$$

In der Querschnittsfläche ist also außer den Spannungswiderständen der horizontalen Fasern noch ein Widerstand gegen Abscherung tätig von gleicher Größe mit derjenigen Kraft (K), welche ohne das Vorhandensein dieses Widerstandes eine Verschiebung längs der Querschnittsfläche hervorbringen würde.

Die einzigen Horizontalkräfte, welche auf das Stück BN wirken, sind die Spannungswiderstände der einzelnen Fasern. Oberhalb der Neutralen wirken diese Kräfte von rechts nach links, unterhalb derselben von links nach rechts. Die algebraische

Summe dieser Horizontalkräfte muß gleich Null sein. Nach Gleichung 44) ist also:

$$46) \quad \Sigma \left(\frac{S}{w} uf \right) = 0.$$

Wenn man die Größe $\frac{S}{w}$ als gemeinschaftlichen Faktor aller unter den Summationszeichen vereinigten Glieder fortläßt, so erhält man die Gleichung:

$$47) \quad \Sigma (fu) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Momentensumme sämtlicher Flächenteilchen der Querschnittsfläche (Fig. 424) in bezug auf den in der neutralen Fasernschicht liegenden Horizontaldurchmesser NN , welcher die neutrale Achse genannt wird, gleich Null ist. Nach der Lehre vom Schwerpunkte kann statt dieser Momentensumme auch das Produkt aus der ganzen Durchschnittsfläche in den Abstand ihres Schwerpunktes von jener Achse gesetzt werden, und da dieses Produkt gleich Null ist, so folgt hieraus, daß der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in der neutralen Achse NN selbst liegt. Durch Gleichung 46) wird also die Lage der neutralen Achse bestimmt; diese Gleichung drückt aus, daß die neutrale Fasernschicht diejenige ist, welche durch die Schwerpunkte sämtlicher Querschnittsflächen hindurchgeht.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen erfordern außerdem noch, daß die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher auf das Stück BN wirkenden Kräfte in bezug auf eine beliebige Achse, z. B. in bezug auf die in Fig. 425 rechtwinkelig zur Bildfläche stehende neutrale Achse N , gleich Null ist. Es muß also das statische Moment der Kraft K , welche für sich allein eine von links nach rechts gerichtete Drehung hervorbringen würde, gleich der Summe der statischen Momente aller Spannungswiderstände sein, deren jeder für sich allein eine von rechts nach links gerichtete Drehung um die Achse hervorbringen würde. Das statische Moment des Spannungswiderstandes der im Abstände u von der Neutralen befindlichen Faser ist gleich $\frac{Suf}{w} \cdot u$; folglich ist:

$$48) \quad \Sigma \left(\frac{Suf}{w} \cdot u \right) = K \cdot x,$$

oder in Worten ausgedrückt: das Widerstandsmoment der Fasernspannungen ist gleich dem Momente der biegenden Kraft.

Die Größe $\frac{S}{w}$ als gemeinschaftlicher Faktor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder kann auch vor das Summationszeichen gesetzt werden, also ist:

$$49) \quad \frac{S}{w} \Sigma (fu^2) = Kx.$$

In dieser Gleichung bedeutet $\Sigma (fu^2)$ die Summe aller Produkte aus den einzelnen Flächenteilchen der Querschnittsfläche in die Quadrate ihrer Abstände vor der neutralen Achse, oder das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in bezug auf den horizontalen Schwerpunktdurchmesser derselben. Wenn man dieses Trägheitsmoment mit \mathfrak{T} bezeichnet, so nimmt die obige Gleichung die einfache Form an:

$$50) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = Kx.$$

Für den Fall, daß außer der Kraft K noch andere Vertikalkräfte auf das Stück BN wirken, würde man statt Kx die Summe der statischen Momente aller dieser biegenden Kräfte zu setzen haben. Wenn man also allgemein mit \mathfrak{M} die Momentensumme dieser biegenden Kräfte in bezug auf die neutrale Achse des Querschnitts bezeichnet, so kann man der obigen Gleichung die noch einfachere und allgemeinere Form geben:

$$51) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = \mathfrak{M}.$$

In dieser Gleichung bedeutet S die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnitts) für die im Abstände w von der Neutralen befindliche Faser, also — wenn man, wie hier vorausgesetzt werden soll, unter w die Entfernung der am weitesten von der Neutralen entfernt liegenden Faser versteht — zugleich die stärkste Spannung (pro Quadratmillimeter), welche in der ganzen Querschnittsfläche vorkommt. Die obige Gleichung kann daher in der Form:

$$52) \quad S = \frac{w}{\mathfrak{T}} \mathfrak{M}$$

benutzt werden, um die Spannung der am stärksten gespannten Faser zu berechnen, sobald die Größe

$$53) \quad \mathfrak{I} = \Sigma (fu^2)$$

für die betreffende Querschnittsform bestimmt wurde.

Für den rechteckigen Querschnitt ist nach Fig. 426 das im Abstände u von der Neutralen befindliche Flächenteilchen $f = b\Delta$ zu setzen, also ist $\mathfrak{I} = b\Sigma(\Delta u^2)$, oder nach der Bezeichnungsweise der Integralrechnung:

$$54) \quad \mathfrak{I} = b \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} u^2 du = \frac{bh^3}{12}$$

Fig. 426.

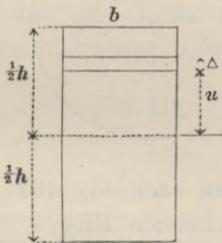


Fig. 427.

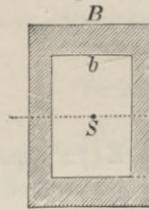
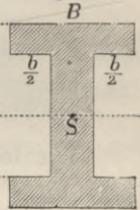


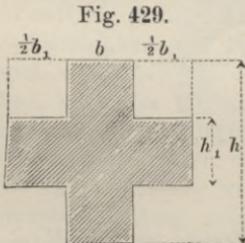
Fig. 428.



Die in Fig. 427 dargestellte Querschnittsfläche kann als Differenz der beiden Rechteckflächen BH und bh angesehen werden; das Trägheitsmoment einer solchen Querschnittsfläche in bezug auf den horizontalen Schwerpunktsdurchmesser ist also:

$$55) \quad \mathfrak{I} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für die in Fig. 428 dargestellte Querschnittsform. Auf ähnliche Weise können die Trägheitsmomente anderer Querschnittsflächen, welche auf die Grundform des Rechtecks sich zurückführen lassen, bestimmt werden, sobald dieselben symmetrisch in bezug auf den horizontalen Schwerpunktsdurchmesser geformt sind. So z. B. erhält man für den in Fig. 429 dargestellten Querschnitt, welcher als Summe zweier Rechteckflächen betrachtet werden kann, den Wert:



$$56) \quad \mathfrak{I} = \frac{bh^3}{12} + \frac{b_1 h_1^3}{12}$$

und für das Trägheitsmoment der in Fig. 430 dargestellten Querschnittsfläche die Gleichung:

$$57) \quad \mathfrak{I} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12}.$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist (nach Fig. 431) $\Sigma(fu^2) = \Sigma(fv^2)$ zu setzen, und da $u^2 + v^2 = x^2$, also $\Sigma(fu^2) + \Sigma(fv^2) = \Sigma(fx^2)$, so ist:

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2} \Sigma(fx^2).$$

Fig. 430.

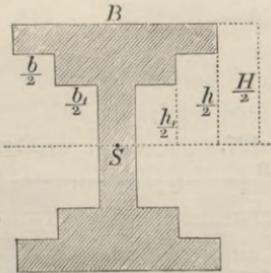
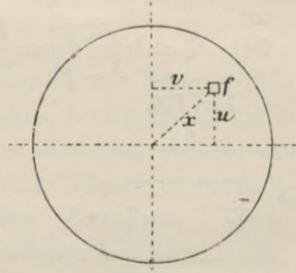


Fig. 431.



Die letztere Größe $\Sigma(fx^2)$ findet man nach Fig. 432, indem man für f die Fläche des unendlich schmalen Ringes von der Breite Δ , nämlich $f = 2x\pi\Delta$ setzt; man erhält dann die Gleichung $\Sigma(fx^2) = 2\pi \Sigma(x^3 \Delta)$, oder nach der Bezeichnungsweise der Integralrechnung:

$$\Sigma(fx^2) = 2\pi \int_0^R x^3 dx = \frac{\pi}{2} R^4.$$

Es ist also, wenn mit D der Durchmesser des Kreises bezeichnet wird:

$$58) \quad \mathfrak{I} = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{64} D^4.$$

Fig. 432.

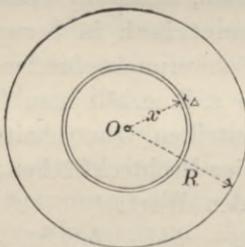
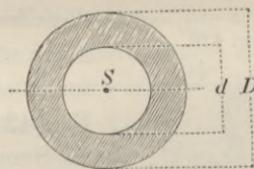


Fig. 433.



Die Ringfläche (Fig. 433) kann als Differenz zweier Kreisflächen von den Durchmessern D und d angesehen werden. Das Trägheitsmoment derselben ist also:

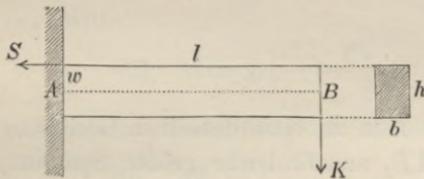
$$59) \quad \mathfrak{T} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4).$$

Aus Gleichung 50) ergibt sich, daß die größte in einem Querschnitte vorkommende Spannung an den verschiedenen Stellen des Balkens verschiedene Größen hat; denn die Größe S hängt ab von dem Momente der biegenden Kraft und wird am größten da, wo der Hebelarm x seinen größten Wert annimmt, d. h. in demjenigen Querschnitte, welcher mit der Befestigungsstelle zusammenfällt. Setzt man $x = l$, so erhält man die Gleichung:

$$60) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = Kl,$$

in welcher die Größe S nunmehr die größte in dem ganzen Balken überhaupt vorkommende Spannung bezeichnet.

Fig. 434.



Für einen Balken von rechteckigem Querschnitt (Fig. 434) ist $w = \frac{h}{2}$, und nach Gleichung 54) $\mathfrak{T} = \frac{bh^3}{12}$ zu setzen, nimmt also die

obige Gleichung die Form an:

$$61) \quad \frac{Sbh^2}{6} = Kl.$$

Wenn man z. B. $K = 125$ kg, $l = 800$ mm, $b = 20$ mm, $h = 100$ mm setzt, so erhält man für die größte in dem Balken vorkommende Spannung den Wert:

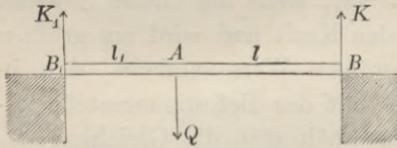
$$S = \frac{6 Kl}{bh^2} = \frac{6 \cdot 125 \cdot 800}{20 \cdot 100^2} = 3 \text{ kg}.$$

Dieser Wert ist unabhängig von der Beschaffenheit des Materials. Bei einer Vergleichung desselben mit der für das betreffende Material als zulässig zu betrachtenden Spannung findet man alsdann, ob die Widerstandsfähigkeit des Balkens der biegenden Kraft gegenüber eine hinreichende Größe hat, oder umgekehrt, wie groß die letztere höchstens sein darf, wenn jene Grenze nicht überschritten werden soll. So z. B. würde man für einen schmiedeeisernen Balken von den oben angenommenen Dimensionen finden, daß die Kraft K bis auf das Doppelte (also bis auf 250 kg) vergrößert werden kann, ohne daß die (für Schmiedeeisen) als praktisch zulässig anzunehmende Spannung von 6 kg pro Quadratmillimeter überschritten wird.

Die größte Spannung in einem an beiden Endpunkten unterstützten Balken BB_1 , der an irgend einem Zwischenpunkte A mit

einem Gewicht Q belastet ist (Fig. 435), kann ebenfalls nach Gleichung 60) berechnet werden, wenn mit K der Gegendruck des einen Stützpunktes und mit l die Entfernung desselben von dem Belastungspunkte bezeichnet

Fig. 435.



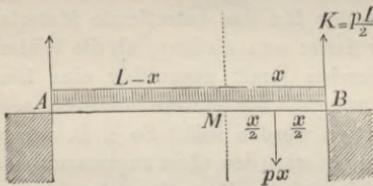
wird. Denkt man sich den Teil AB_1 in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, daß der Teil AB in demselben Biegungszustande sich befindet, wie der in Fig. 434 dargestellte Balken — nur mit dem Unterschiede, daß die biegende Kraft hier nach oben wirkt und infolgedessen die größte Zugspannung in der unteren Faser stattfindet. Wenn man für den Gegendruck K alsdann den aus der Gleichung des Hebels: $K(l + l_1) = Ql_1$ sich ergebenden Wert substituiert, so erhält man die Gleichung:

$$62) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{S} = \frac{Ql_1}{l + l_1}.$$

(Da $K_1 l_1 = Kl$ ist, so gelangt man zu eben derselben Gleichung, wenn man die in dem Teile AB_1 stattfindende größte Spannung aufsucht.)

Wenn die Belastung eines an beiden Endpunkten unterstützten Balkens gleichförmig über seine Länge L verteilt ist, und mit p die auf jeder Längeneinheit enthaltene Belastung bezeichnet wird, so ist $K = \frac{pL}{2}$ der Gegendruck jedes der beiden Stützpunkte, und px die Belastung des Teiles $BM = x$ (Fig. 436). Denkt

Fig. 436.



man sich den Teil AM in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, daß der aus der Wand hervorragende Teil BM angesehen werden kann als ein Balken, der unter Einwirkung zweier liegenden Kräfte sich befindet, nämlich der aufwärts liegenden Kraft K und der abwärts liegenden Kraft px . Die in dem Querschnitte M hervorgebrachten Biegungsspannungen entsprechen also der Differenz der statischen Momente dieser beiden Kräfte, und in der allgemeinen Gleichung 51) ist für die Größe \mathfrak{M} in diesem Falle der Wert zu substituieren:

$$\mathfrak{M} = Kx - px \frac{x}{2} = \frac{pL}{2} \cdot x - \frac{px^2}{2}.$$

Für die in der Entfernung x von dem einen Endpunkte stattfindende größte Spannung ergibt sich also die Gleichung:

$$63) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = \frac{p}{2} x(L-x).$$

Das Produkt der beiden Abschnitte x und $L-x$ wird am größten, wenn $x = L-x = \frac{L}{2}$ gesetzt wird. Die größte in dem Balken überhaupt vorkommende Spannung findet also in der Mitte des Balkens statt und ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$64) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = \frac{pL^2}{8}.$$

Setzt man $L = 2l$ und $x = l - z$, so erhält man als allgemeine Gleichung für das Biegemoment im Abstände z von der Mitte

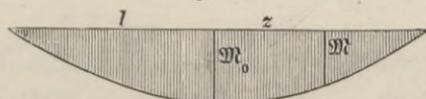
$$65) \quad \mathfrak{M} = p \left(\frac{l^2 - z^2}{2} \right),$$

welche für $z = 0$ die Form annimmt:

$$66) \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{pl^2}{2}.$$

Die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem \mathfrak{M} mit z sich ändert, führt zu der Parabel Fig. 437.

Fig. 437.



§ 51.

Elastische Linie.

Die krumme Linie AB (Fig. 422), nach welcher die neutrale Faser eines gebogenen Balkens gekrümmt ist, wird die „elastische Linie“ genannt. Das unendlich kleine Bogenstück MN dieser elastischen Linie kann als ein Kreisbogen angesehen werden, dessen Mittelpunkt O mit dem Konvergenzpunkte der beiden Normalen CD und EF zusammenfällt, und dessen Halbmesser $ON = \rho$ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie für diese Stelle bildet.

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke CGM und MNO ergibt sich die Proportion:

$$\frac{CG}{MN} = \frac{MG}{ON}.$$

Der Quotient auf der linken Seite ist das Verlängerungsverhältnis derjenigen Faser, deren Spannung (pro Quadratmillimeter) mit S bezeichnet wurde, also (nach Gleichung I.) gleich $\frac{S}{E}$. Wenn man ferner $MG = w$ und $ON = \rho$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$67) \quad \frac{S}{E} = \frac{w}{\rho} \text{ oder } \frac{S}{w} = \frac{E}{\rho}.$$

Nach Substitution dieses Wertes für den Quotienten $\frac{S}{w}$ nimmt die allgemeine Gleichung 51) die Form an:

$$68) \quad \frac{E\mathfrak{L}}{\rho} = \mathfrak{M}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für den Krümmungshalbmesser des unendlich kleinen Bogenstückes \widehat{MN} der elastischen Linie AB (Fig. 438) der Wert:

$$69) \quad \rho = \frac{E\mathfrak{L}}{\mathfrak{M}} = \frac{E\mathfrak{L}}{K(l-x)}.$$

Bei der vorausgesetzten geringen Größe der Durchbiegung kann in der Gleichung:

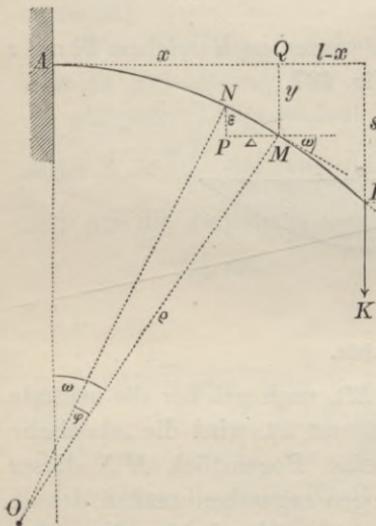
$$\widehat{MN} = \rho \varphi \text{ oder } \varphi = \frac{\widehat{MN}}{\rho}$$

statt des Bogens \widehat{MN} auch die Horizontalprojektion desselben $MP = \Delta$ gesetzt werden, und wenn man außerdem darin den für ρ gefundenen Wert substituiert, so erhält man die Gleichung:

$$70) \quad \varphi = \frac{K(l-x)\Delta}{E\mathfrak{L}}.$$

Denkt man sich die Horizontalprojektion $AQ = x$ des ganzen Bogens AM in ihre unendlich kleinen Teile Δ zerlegt und in der

Fig. 438.



obigen Gleichung statt x der Reihe nach die einzelnen Vielfachen von Δ substituiert, so erhält man durch Summation aller der auf solche Weise für die zugehörigen unendlich kleinen Winkelgrößen gebildeten Ausdrücke die Gleichung:

$$71) \quad \Sigma(\varphi) = \Sigma\left(\frac{K(l-x)\Delta}{E\mathfrak{I}}\right).$$

Die auf der linken Seite stehende Winkelsumme ist gleich dem Winkel ω , welchen der Krümmungshalbmesser OM mit der Vertikalen (oder die elastische Linie an der Stelle M mit der Horizontalen) einschließt. In dem Ausdrucke auf der rechten Seite ist die Größe $\frac{K}{E\mathfrak{I}}$ (bei der vorausgesetzten prismatischen Form des Balkens) ein gemeinschaftlicher Faktor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder. Man erhält also die Gleichung:

$$72) \quad \omega = \frac{K}{E\mathfrak{I}} \Sigma[(l-x)\Delta] = \frac{K}{E\mathfrak{I}} [l\Sigma(\Delta) - \Sigma(x\Delta)].$$

Hierin ist $\Sigma(\Delta) = x$ und $\Sigma(x\Delta) = \frac{x^2}{2}$ zu setzen, also ist:

$$73) \quad \omega = \frac{K}{E\mathfrak{I}} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x=l$, so erhält man für den Winkel α , welchen die elastische Linie an dem Endpunkte B mit der Horizontalen einschließt, die Gleichung:

$$74) \quad \alpha = \frac{Kl^2}{2E\mathfrak{I}}.$$

In dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck MNP ist die vertikale Kathete $\varepsilon = \Delta \operatorname{tg} \omega$, oder — da wegen vorausgesetzter geringer Größe der Durchbiegung statt $\operatorname{tg} \omega$ auch die Winkelzahl ω selbst gesetzt werden kann —:

$$75) \quad \varepsilon = \omega \cdot \Delta.$$

Wenn man hierin für ω den in Gleichung 73) gefundenen Wert substituiert, so erhält man die Gleichung:

$$76) \quad \varepsilon = \frac{K}{E\mathfrak{I}} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \Delta.$$

Denkt man sich wiederum die Horizontalprojektion AQ des Boges AM in ihre unendlich kleinen Teile zerlegt, so kann man die zu jedem dieser Teile gehörige Vertikalprojektion des be-

treffenden Bogenteiles mittelst der obigen allgemeinen Gleichung bestimmen, indem man jedesmal den zugehörigen Wert von x substituiert, und man erhält durch Summation aller auf solche Weise gefundenen Gleichungen:

$$77) \quad \Sigma(\varepsilon) = \frac{K}{E\mathfrak{L}} [l\Sigma(x\Delta) - \frac{1}{2}\Sigma(x^2\Delta)].$$

Die auf der linken Seite stehende Größe ist als Summe der Vertikalprojektionen aller Teile des Bogens AM gleich y zu setzen; ferner ist $\Sigma(x\Delta) = \frac{x^2}{2}$ und $\Sigma(x^2\Delta) = \frac{x^3}{3}$; man erhält also die Gleichung:

$$78) \quad y = \frac{K}{E\mathfrak{L}} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Setzt man — der Bezeichnungweise der Differentialrechnung entsprechend — $\Delta = dx$, $\varepsilon = dy$, $\omega = \frac{dy}{dx}$, ferner $\varphi = d\omega = d \left(\frac{dy}{dx} \right)$, so nehmen die Gleichungen die Formen an:

$$E\mathfrak{L} \frac{d^2y}{dx^2} = K(l-x),$$

$$E\mathfrak{L} \left(\frac{dy}{dx} \right) = K \left(lx - \frac{x^2}{2} \right),$$

$$E\mathfrak{L} y = K \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Für $x=l$ wird $y=s$, die Senkung des Endpunktes B ist also:

$$79) \quad s = \frac{Kl^3}{3E\mathfrak{L}}.$$

Wenn man diese letztere Gleichung durch Gleichung 60) dividiert, so erhält man:

$$\frac{sw}{S} = \frac{l^2}{3E},$$

und wenn man hierin $\frac{S}{E} = \delta$, ferner $2w = h$ setzt, so nimmt die Gleichung für s aufgelöst die Form an:

$$s = \frac{2}{3} \delta \frac{l^2}{h}.$$

Denkt man sich in Fig. 435 das Gewicht Q in der Mitte hängend, so findet man, daß die obige Gleichung dann auch für diesen Fall gelten würde. Man kann dieselbe daher auch dazu benutzen, um die Formen zu finden, welche die für das zusammengesetzte System Fig. 401 gefundenen Gleichungen annehmen würde, wenn der horizontale Balken überall gleichen Querschnitt hätte. Man erhält nämlich statt Gleichung 18), indem man

darin die Größe δ_2 mit der Größe $\frac{2}{3} \delta_2$ vertauscht, für diesen Fall die Gleichung:

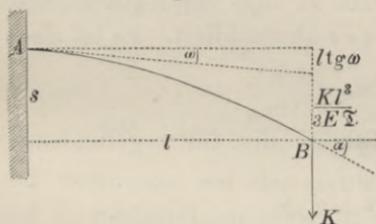
$$\frac{\delta_1 a^2}{h} = \frac{2}{3} \delta_2 \frac{l^2}{f}$$

und auf gleiche Weise findet man, daß Gleichung 21) alsdann die Form annimmt:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l^3}{a^3} \cdot \frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{F_1}{F_2}$$

Wenn der Balken an der Befestigungsstelle — anstatt in horizontaler Lage — in einer um den sehr kleinen Winkel ω nach unten hin von der Horizontalen abweichenden Lage eingespannt ist (Fig. 439), so kann der Neigungswinkel α am Endpunkte B

Fig. 439.



angesehen werden als zusammengesetzt aus zwei Teilen: der eine Teil ist derjenige Neigungswinkel, um welchen ohne das Vorhandensein einer Durchbiegung die Achse des Balkens bei B von der Horizontalen abweichen würde, also gleich ω ; der andere von der Durchbiegung herrührende Teil ist nach

Gleichung 74) zu bestimmen. Man erhält also für diesen Fall die Gleichung:

$$80) \quad \alpha = \omega + \frac{Kl^2}{2 E \mathcal{I}}$$

Ebenso kann die Größe s in diesem Falle angesehen werden als zusammengesetzt aus dem Teile $l \operatorname{tg} \omega$ (wofür wegen voraussetzender Kleinheit des Winkels ω auch $l \omega$ gesetzt werden kann), welcher ohne das Vorhandensein der Durchbiegung die Höhendifferenz der beiden Endpunkte bilden würde, und dem von der Durchbiegung herrührenden Teile, welcher aus Gleichung 79) zu bestimmen ist. Für diesen Fall gilt also die Gleichung:

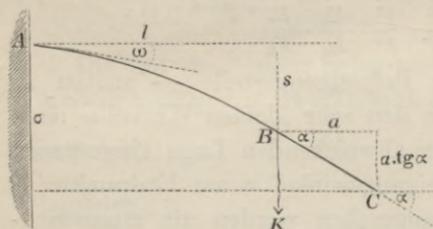
$$81) \quad s = l \omega + \frac{Kl^3}{3 E \mathcal{I}}$$

Zu gleichem Resultate würde man gelangen, wenn man in Fig. 438 den Teil AM in eine feste Wand eingeschlossen ansähe und für den Teil MB als einen schräg eingespannten Balken die Länge $l-x$ mit l , die Höhendifferenz $s-y$ mit s bezeichnete und die letztere aus den beiden Gleichungen 78) und 79) berechnete.

Die obigen Gleichungen behalten in bezug auf die Lage des Punktes B , sowie in betreff der Richtung der elastischen Linie

an dieser Stelle ihre Gültigkeit auch dann noch, wenn der Balken über den Punkt B um die Strecke $BC = a$ noch hinausreicht (Fig. 440). Wenn auf diesen letzteren Teil des Balkens keine

Fig. 440.



biegenden Kräfte wirken — wie vorausgesetzt wird — so behält derselbe seine geradlinige Form bei. Es ist also der Winkel, welchen bei dem Endpunkte C die elastische Linie mit der Horizontalen einschließt, ebenfalls gleich α . Die Ordinate oder Senkung

des Punktes C erhält man, indem man zu dem für s gefundenen Werte noch die Größe $a \cdot \operatorname{tg} \alpha$ oder $a \cdot \alpha$ hinzuaddiert. Es ist also:

$$82) \quad \sigma = l\omega + \frac{Kl^3}{3E\mathfrak{L}} + a \cdot \alpha.$$

Diese Gleichung nimmt nach Substitution des für α gefundenen Wertes die Form an:

$$83) \quad \sigma = (l+a)\omega + \frac{K(2l^3 + 3al^2)}{6E\mathfrak{L}}.$$

Wenn man statt dessen die in Fig. 441 gewählte Bezeichnung einführt, also x statt l und $l-x$ statt a und s statt σ setzt, so erhält man die Gleichungen:

$$84) \quad \alpha = \omega + \frac{Kx^2}{2E\mathfrak{L}},$$

$$85) \quad s = l\omega + \frac{K(3lx^2 - x^3)}{6E\mathfrak{L}}.$$

Fig. 441.

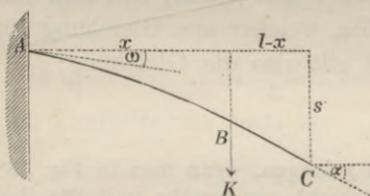
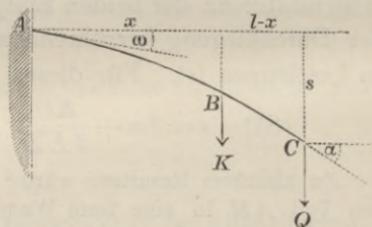


Fig. 442.



Für den Fall, daß außer der in dem Punkte B angreifenden Kraft K noch in dem Punkte C eine Vertikalkraft Q auf den Balken wirkt, hat man zu den vorigen Werten der Größen α und s noch die nach den Gleichungen 74) und 79) zu bestimmenden

Beiträge hinzuaddieren, welche die Kraft Q zu diesen Größen liefert. Man erhält also für den in Fig. 442 dargestellten Fall die Gleichungen:

$$86) \quad \alpha = \omega + \frac{Kx^2}{2E\mathfrak{L}} + \frac{Ql^2}{2E\mathfrak{L}},$$

$$87) \quad s = l\omega + \frac{K(3lx^2 - x^3)}{6E\mathfrak{L}} + \frac{Ql^3}{3E\mathfrak{L}}.$$

Diese Gleichungen gelten nicht nur für positive, sondern auch für negative Werte der Größen K und Q , d. h. für die Fälle, in denen diese Kräfte vertikal aufwärts wirken.

Setzt man in den obigen Gleichungen $\omega = 0$, $Q = 0$ und pdx statt K , ferner dz statt z und ds statt s , so nehmen dieselben die Formen an:

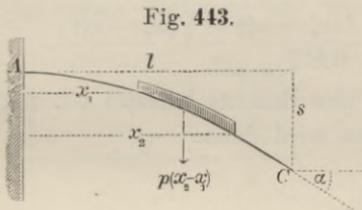
$$88) \quad dz = \frac{px^2 dx}{2E\mathfrak{L}},$$

$$89) \quad ds = \frac{p(3lx^2 - x^3) dx}{6E\mathfrak{L}},$$

und wenn man auf der rechten Seite zwischen den Grenzen x_1 und x_2 integriert, so erhält man für den in Fig. 443 dargestellten Fall die Werte:

$$90) \quad \alpha = \frac{p(x_2^3 - x_1^3)}{6E\mathfrak{L}},$$

$$91) \quad s = \frac{p[l(x_2^3 - x_1^3) - \frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4)]}{6E\mathfrak{L}}.$$



Für den Fall, daß die ganze Länge l mit der Belastung p pro Längeneinheit bedeckt ist, hat man $x_1 = 0$, $x_2 = l$ zu setzen, und es wird dann:

$$92) \quad \alpha = \frac{pl^3}{6E\mathfrak{L}},$$

$$93) \quad s = \frac{pl^4}{8E\mathfrak{L}}.$$

Ist außerdem noch die Neigung ω an der Befestigungsstelle A und das Gewicht Q am Endpunkte C vorhanden, so wird:

$$94) \quad \alpha = \omega + \frac{pl^3}{6E\mathfrak{L}} + \frac{Ql^2}{2E\mathfrak{L}},$$

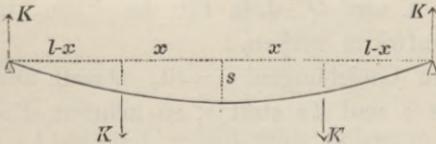
$$95) \quad s = l\omega + \frac{pl^4}{8E\mathfrak{L}} + \frac{Ql^3}{3E\mathfrak{L}}.$$

Die Gleichung 87) nimmt, wenn darin $\omega = 0$, ferner $-K$ statt Q und $-s$ statt s gesetzt wird, die Form an:

$$96) \quad s = \frac{K(2l^3 - 3lx^2 + x^3)}{6E\mathfrak{T}}.$$

Denkt man sich in Fig. 444 die linksseitige Hälfte in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, daß alsdann die rechts-

Fig. 444.



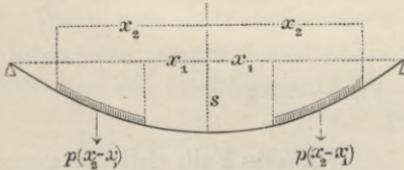
seitige Hälfte in demselben Biegungszustande sich befindet, wie der in Fig. 442 dargestellte Balken, sobald bei letzterem $\omega = 0$ und $Q = -K$ angenommen wird. Es ist daher für

Fig. 444 die Durchbiegung s nach Gleichung 96) zu bestimmen.

Setzt man in dieser Gleichung wiederum ds statt s und $p dx$ statt K , so nimmt dieselbe die Form an:

$$97) \quad ds = \frac{p(2l^3 - 3lx^2 + x^3) dx}{6E\mathfrak{T}}$$

Fig. 445.



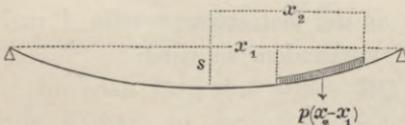
und man erhält, indem man auf der rechten Seite zwischen den Grenzen x_1 und x_2 integriert, für den in Fig. 445 dargestellten Fall die Gleichung:

$$98) \quad s = \frac{p[2l^3(x_2 - x_1) - l(x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4)]}{6E\mathfrak{T}}.$$

Für den Fall, daß die ganze Länge des Balkens belastet ist, hat man $x_1 = 0$, $x_2 = l$ zu setzen, und es wird dann:

$$99) \quad s = \frac{5}{24} \frac{pl^4}{E\mathfrak{T}}.$$

Fig. 446.



Da zu der Durchbiegung in der Mitte die Belastung der linksseitigen Balkenhälfte denselben Beitrag liefert, wie die der rechtsseitigen, so ist, wenn eine von beiden fehlt,

die Durchbiegung halb so groß. Für den in Fig. 446 dargestellten Fall ist also die Durchbiegung zu bestimmen aus der Gleichung:

$$100) \quad s = \frac{p[2l^3(x_2 - x_1) - l(x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4)]}{12 E \mathfrak{T}}.$$

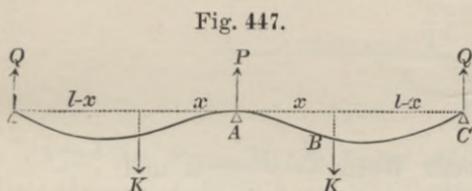
Wenn man in Gleichung 87) die Werte $\omega = 0$ und $s = 0$, ferner $-Q$ statt $+Q$ substituiert, so nimmt dieselbe die Form an:

$$0 = \frac{K(3lx^2 - x^3)}{6 E \mathfrak{T}} - \frac{Ql^3}{3 E \mathfrak{T}},$$

und man erhält durch Auflösung derselben für Q den Wert:

$$101) \quad Q = \frac{K}{2} \left(3 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Nach dieser Gleichung kann man den Gegendruck jeder von den beiden Endstützen in Fig. 447 berechnen; denn wenn man

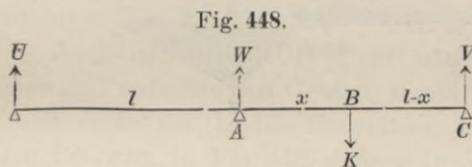


sich die linke Balkenhälfte in eine feste Wand eingeschlossen denkt, so ergibt sich, daß die rechte Hälfte genau in demselben Zustande sich befindet wie der in

Fig. 442 dargestellte Balken (wenn bei letzterem $\omega = 0$, $s = 0$ und Q negativ angenommen wird). Da die Gegendrücke der drei Stützen zusammen gleich $2K$ sind, so ist der Gegendruck der Mittelstütze:

$$102) \quad P = 2K - 2Q.$$

Zu diesem Gegendrucke liefert die Belastung der linken Seite denselben Beitrag, wie die der rechten Seite. Es ist also bei



dem in Fig. 448 dargestellten Falle der Gegendruck der Mittelstütze:

$$103) \quad W = \frac{1}{2}P = K - Q.$$

Nach Substitution des für Q gefundenen Wertes

nimmt diese Gleichung die Form an:

$$104) \quad W = K \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^3} \right\}.$$

Die Gegendrücke der Endstützen können nunmehr wie bei dem Balken auf zwei Stützen nach dem Gesetze des Hebels bestimmt werden aus den Gleichungen:

$$V = K \left(\frac{l+x}{2l} \right) - \frac{W}{2} \quad \text{und} \quad U = K \left(\frac{l-x}{2l} \right) - \frac{W}{2},$$

welche nach Substitution des für W gefundenen Wertes die Formen annehmen:

$$105) \quad V = \frac{K}{4} \left\{ 2 \frac{x}{l} + 3 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right\}.$$

$$106) \quad U = -\frac{K}{4} \left\{ 2 \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right\}.$$

Das Biegemoment an der im Abstände z vom Punkte A zwischen A und B gelegenen Stelle N hat die Größe:

$$107) \quad \mathfrak{M} = K(x-z) - V(l-z).$$

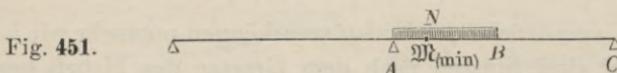
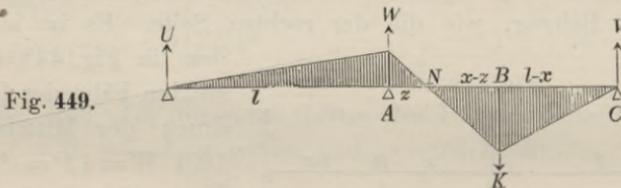
Wenn man hierin $\mathfrak{M} = 0$ setzt und für V den in Gleichung 105) gefundenen Wert substituiert, so erhält man für z die Gleichung:

$$108) \quad \frac{z}{l} = \frac{2 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}}{4 + 2 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}},$$

welche nach Substitution der Werte $\frac{l-x}{l} = u$ und $\frac{l-z}{l} = v$ die einfachere Form annimmt:

$$109) \quad v = \frac{4}{5-u^2}.$$

Nach dieser Gleichung kann die Stelle N , wo das Biegemoment die Größe Null hat, bestimmt und das Gesetz, nach welchem das Biegemoment längs der ganzen Länge des Balkens



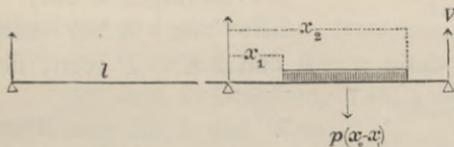
sich ändert, auf die in Fig. 449 angegebene Art graphisch dargestellt werden. Auch kann man — wie in Figg. 450 und 451 angedeutet — die obige Gleichung in der für u aufgelösten Form:

$$110) \quad u = \sqrt{5 - \frac{4}{v}}$$

dazu benutzen, um diejenigen Belastungszustände zu finden, bei welchen zu einer gegebenen Stelle N das Biegemoment resp. seinen größten und kleinsten Wert annimmt.

Nachdem in den Gleichungen 104), 105), 106) die Gegen-
drücke gefunden sind, welche ein einzelnes Gewicht K an den
Stützpunkten hervorbringt, findet man die Wirkung, welche eine

Fig. 452.



über die Strecke $x_2 - x_1$
gleichförmig verteilte Be-
lastung hervorbringt, in-
dem man wiederum $p dx$
statt K setzt und zwischen
den Grenzen x_1 und x_2 in-
tegriert. So ergibt sich

z. B. für den Stützdruck V bei dem in Fig. 452 dargestellten
Belastungszustande nach Gleichung 105) den Wert:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} p dx \left\{ 2 \frac{x}{l} + 3 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right\}, \text{ oder}$$

$$111) \quad V = \frac{p}{4l^3} \{ l^2 (x_2^2 - x_1^2) + l (x_2^3 - x_1^3) - \frac{1}{4} (x_2^4 - x_1^4) \}.$$

Sind gleichzeitig mehrere solcher Strecken belastet, so ist der
betreffende Stützdruck gleich der Summe der Beiträge zu
setzen, welche die einzelnen Belastungen zu demselben liefern.

Nach Gleichung 101) erhält man, indem man $p dx$ statt K
setzt und zwischen den Grenzen 0 und l integriert, für den Gegen-
druck einer der beiden Endstützen den Wert $Q = \frac{3}{8} pl$. Wenn
also bei dem in Fig. 452 dargestellten Balken mit p die gleich-
förmig über die ganze Balkenlänge verteilte Belastung pro Längen-
einheit und mit m eine über die Strecke $x_2 - x_1$ gleichförmig
verteilte mobile Belastung pro Längeneinheit bezeichnet wird, so
ergibt sich für den Stützdruck V der Wert:

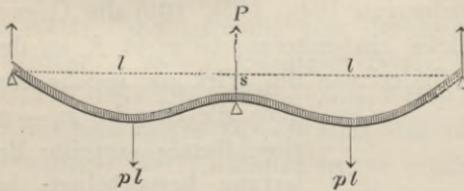
$$112) \quad V = \frac{3}{8} pl + \frac{m}{4l^3} \{ l^2 (x_2^2 - x_1^2) + l (x_2^3 - x_1^3) - \frac{1}{4} (x_2^4 - x_1^4) \}.$$

Wäre in Fig. 453 die Mittelstütze nicht vorhanden, so würde
die Durchbiegung in der Mitte wie bei dem Balken auf zwei

Stützen nach Gleichung 96) zu bestimmen sein, und man erhalte für dieselbe den Wert:

$$113) \quad s_1 = \frac{5}{24} \frac{pl^4}{E\mathfrak{I}}.$$

Fig. 453.



Für die nach oben gerichtete Durchbiegung, welche bei dem unbelasteten Balken die in der Mitte angreifende Kraft P für sich allein hervorbringen würde, erhält man ferner nach

Gleichung 96), indem man darin $x=0$ und $2K=P$ setzt, den Wert:

$$114) \quad s_2 = \frac{Pl^3}{6E\mathfrak{I}}.$$

Die wirkliche Durchbiegung muß gleich der Differenz dieser beiden Größen sein, ist also:

$$115) \quad s = s_1 - s_2 = \frac{5}{24} \frac{pl^4}{E\mathfrak{I}} - \frac{Pl^3}{6E\mathfrak{I}}.$$

Diese Gleichung kann man benutzen, um bei dem zusammengesetzten Systeme (Fig. 401) die Lastverteilung zu berechnen für den Fall, daß die Belastung über die Länge des horizontalen Balkens gleichförmig verteilt ist, und der letztere überall gleichen Querschnitt hat. Der Druck P bildet nämlich, in entgegengesetzter Richtung genommen, zugleich die Kraft, welchen dem Verbindungspunkte der beiden Streben die Senkung:

$$116) \quad s = \frac{Pa^3}{2E_1F_1h_1^2}$$

erteilt, und man erhält, indem man wiederum die beiden Werte von s einander gleichsetzt, eine Gleichung von der Form:

$$117) \quad \frac{Pa^3}{2E_1F_1h_1^2} = \frac{5}{24} \frac{pl^4}{E_2\mathfrak{I}_2} - \frac{Pl^3}{6E_2\mathfrak{I}_2}.$$

Wenn der Querschnitt des horizontalen Balkens ein Rechteck ist, und mit F_2 die Fläche, mit h_2 die Höhe desselben bezeichnet wird, so ist nach Gleichung 54) $\mathfrak{I}_2 = \frac{F_2h_2^2}{12}$ zu setzen und man erhält aus obiger Gleichung für P den Wert:

$$118) \quad P = \frac{5 pl}{4 + \frac{a^3}{l^3} \cdot \frac{h_2^2}{h_1^2} \cdot \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{F_2}{F_1}}$$

Nach dieser Gleichung ist der von den beiden Streben übernommene Teil der Belastung zu berechnen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Temperatur unverändert blieb, und daß vor Beginn der Lastwirkung die drei Punkte C , E , D in einer Horizontalen lagen.

Wenn z. B. $\frac{a}{l} = \frac{1}{4}$, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{3}$, $\frac{E_2}{E_1} = 1$ und $\frac{F_2}{F_1} = 2$ ist, so wird $P = 1,128 pl$. Für $\frac{F_2}{F_1} = 0$ wird $P = \frac{1}{4} pl$, also eben so groß wie bei dem Balken auf drei gleich hohen Stützpunkten der Gegendruck der Mittelstütze.

Setzt man in Gleichung 115) $p = 0$ und $-P$ statt $+P$, so erhält man für s den Wert:

$$119) \quad s = \frac{Pl^3}{6 E \mathfrak{Z}}$$

Diese Gleichung kann man benutzen, um den Einfluß einer Temperaturveränderung auf die Lastverteilung in Fig. 401 zu bestimmen. Indem man [auf dieselbe Weise wie in Gleichung 41) geschehen] die beiden durch Temperaturabnahme hervorgebrachten Werte von s einander gleichsetzt, erhält man die Gleichung:

$$\left(\Delta - \frac{Pa}{2 E_1 F_1 h_1} \right) \frac{a^2}{h_1} = \frac{Pl^3}{6 E_2 \mathfrak{Z}_2},$$

welche für P aufgelöst, nach Substitution des Wertes $\mathfrak{Z} = \frac{F_2 h_2^2}{12}$ die Form annimmt:

$$120) \quad P = \frac{2 \Delta E_1 F_1 \frac{h_1}{a}}{1 + 4 \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{l^3}{a^3} \cdot \frac{h_1^2}{h_2^2}}$$

Setzt man hierin $E_1 = E_2 = 20000$, $F_1 = 10000$, $F_2 = 20000$, $\frac{l}{a} = 0,8$, $\frac{h_1}{a} = 0,6$, $\frac{h_1}{h_2} = 3$ und $\Delta = \frac{1}{4000}$ (entsprechend einer Temperaturabnahme von $20,5^\circ \text{C}$), so wird $P = 5873 \text{ kg}$. Wenn außerdem die Belastung $2pl$ wirkt, so wird $P = 1,128 pl - 5873 \text{ kg}$ bei einer Temperaturabnahme von $20,5^\circ$, und $P = 1,128 pl + 5873 \text{ kg}$ bei einer Temperaturzunahme von $20,5^\circ$.

Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie (Fig. 438) hat nach Gleichung 68) die Form:

$$121) \quad \rho = \frac{E\mathfrak{I}}{\mathfrak{M}},$$

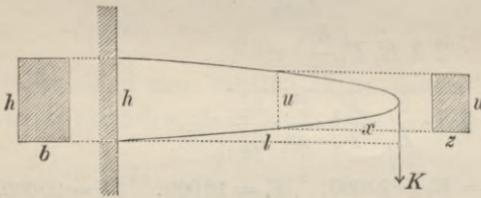
und zwar bedeutet darin ρ den Krümmungshalbmesser an derjenigen Stelle des Balkens, an welcher das Moment der biegenden Kraft die Größe \mathfrak{M} , und das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche die Größe \mathfrak{I} hat. Wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{M}}$ für alle Stellen des Balkens gleiche Werte annimmt, so ist auch der Krümmungshalbmesser an allen Stellen gleich groß, und die elastische Linie wird in diesem Falle ein Kreisbogen.

Bei einem Balken von konstantem Querschnitte ist das Trägheitsmoment \mathfrak{I} an allen Stellen von gleicher Größe. Ein prismatischer Balken wird daher nur dann nach einer Kreislinie sich krümmen, wenn auch das Moment \mathfrak{M} an allen Stellen des Balkens gleich groß ist, wie z. B. in dem Falle, wenn an dem freien Ende des Balkens (Fig. 422) statt der einzelnen Kraft ein Kräftepaar wirkte.

Wenn dagegen die Größen \mathfrak{M} und \mathfrak{I} mit der Entfernung vom Endpunkte des Balkens sich ändern, und wenn mit \mathfrak{I}_1 , \mathfrak{M}_1 resp. die Werte bezeichnet werden, welche die Größen \mathfrak{I} , \mathfrak{M} an einer bestimmten willkürlich zu wählenden Stelle — z. B. an dem einen Endpunkte — des Balkens annehmen, so drückt die Gleichung:

$$122) \quad \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{I}_1}{\mathfrak{M}_1} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}_1} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1}$$

Fig. 454.



die allgemeine Bedingung aus, unter welcher die elastische Linie ein Kreisbogen wird.

Für den in Fig. 454 dargestellten Fall nimmt die allgemeine Bedingungsgleichung 122) die Form an:

$$123) \quad \frac{zu^3}{bh^3} = \frac{x}{l}.$$

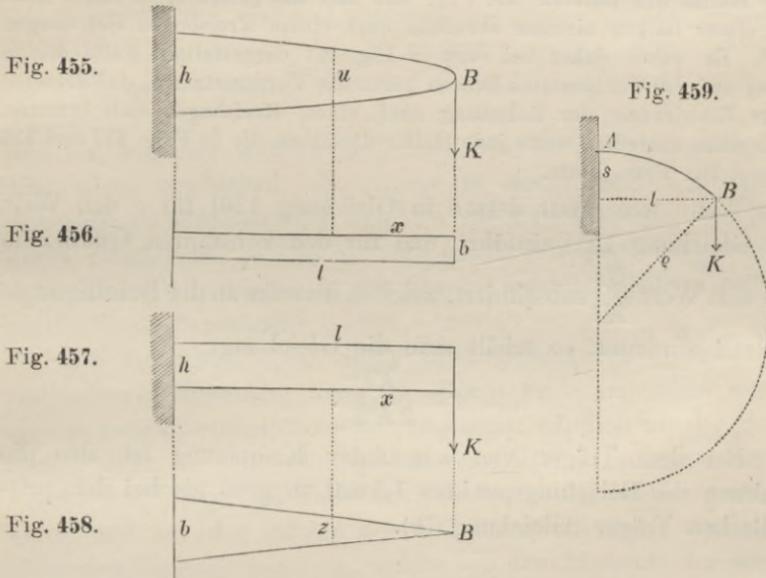
Setzt man $z = b$, so erhält man für den in Fig. 455 und 456 dargestellten Träger von konstanter Breite die Gleichung:

$$124) \frac{u^3}{h^3} = \frac{x}{l},$$

und wenn man ein anderes Mal $u = h$ setzt, so wird:

$$125) \frac{z}{b} = \frac{x}{l},$$

und man erhält einen im Grundriss dreieckigen Balken von konstanter Höhe (Figg. 457 und 458).



Die Senkung des Belastungspunktes kann für den Balken von konstanter Krümmung (Fig. 459) nach der Gleichung der Kreislinie:

$$l^2 = 2\rho s - s^2$$

berechnet werden. Wegen vorauszusetzender Kleinheit der Durchbiegung darf in dieser Gleichung das Glied s^2 weggelassen und die Größe l als Länge des Balkens angesehen werden. Hiernach ergibt sich für die Senkung des Belastungspunktes B der Wert:

$$126) s = \frac{l^2}{2\rho}.$$

Wenn man hierin für ρ den aus Gleichung 67) zu entnehmenden Wert substituiert, so erhält man die Gleichung:

$$127) s = \frac{l^2 S}{2wE}.$$

Für einen symmetrisch in bezug auf die neutrale Achse geformten Querschnitt von konstanter Höhe h ist $2w = h$ zu setzen, und wenn man außerdem $\frac{S}{E} = \delta$ setzt, so wird:

$$128) \quad s = \delta \frac{l^2}{h}.$$

Denkt man sich in Fig. 435 das Gewicht Q in der Mitte hängend und jede Hälfte des Balkens wie Figg. 457 und 458 geformt, so findet man, daß dieser Balken alsdann ebenfalls nach einem Kreisbogen sich biegen wird. Es würde daher bei dem in Fig. 401 dargestellten Falle die in bezug auf den horizontalen Balken gemachte Voraussetzung, daß derselbe unter Einwirkung der Belastung nach einem Kreisbogen sich krümmt, auch dann zutreffen, wenn jede Hälfte desselben die in Figg. 457 und 458 dargestellte Form hätte.

Wenn man statt dessen in Gleichung 126) für ρ den Wert aus Gleichung 121) einführt, und für den konstanten Quotienten $\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{M}}$ den Wert $\frac{\mathfrak{I}_1}{Kl}$ substituiert, welchen derselbe an der Befestigungsstelle A annimmt, so erhält man die Gleichung:

$$s = \frac{Kl^3}{2E\mathfrak{I}_1}.$$

Bei dem Träger von konstanter Krümmung ist also die Senkung des Belastungspunktes 1,5mal so groß als bei dem prismatischen Träger (Gleichung 79).

§ 52.

Widerstand gegen Zerknicken.

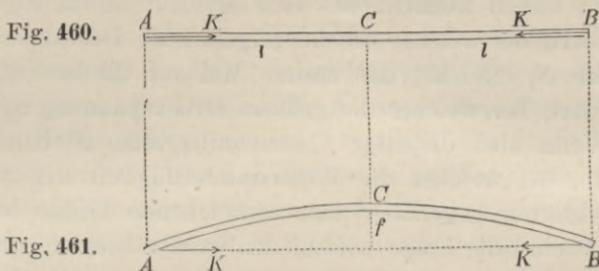
Wenn an den beiden Enden einer geradlinigen prismatischen Stange vom Querschnitt F zwei gleichförmig über die Endflächen verteilte gleich große Druckkräfte K wirken, so entsteht in der Stange pro Flächeneinheit ihres Querschnittes eine Druckspannung:

$$129) \quad S_1 = \frac{K}{F},$$

welche längs der ganzen Stange in jedem Querschnitte und in allen Teilen dieses Querschnittes eine und dieselbe Größe hat (Fig. 460).

Angenommen: die Stange würde auf irgend eine Weise in eine gekrümmte Form gebracht und die Krümmung so lange vergrößert, bis die Pfeilhöhe der Biegungskurve die Größe f erreicht

(Fig. 461); angenommen ferner: die Stange würde in diesem gebogenen Zustande der Wirkung der beiden Kräfte K ausgesetzt,



und die letzteren würden so lange vergrößert, bis dieselben für sich allein ausreichen, die Stange in einem solchen gebogenen Zustande zu erhalten, bei welchem die Pfeilhöhe der Biegungskurve gleich f ist, so läßt sich die größte Druckspannung, welche unter diesen Umständen in der Stange entsteht, alsdann auf folgende Weise berechnen:

Die an irgend einer Stelle eines bestimmten Querschnittes stattfindende Spannung kann in diesem Falle angesehen werden als aus zwei Spannungen zusammengesetzt: nämlich aus der gleichförmig über die Querschnittsfläche verteilten Druckspannung S_1 , welche wie im vorigen Falle aus Gleichung 129) bestimmt werden kann, und aus der infolge der Krümmung an dieser Stelle entstehenden Biegungsspannung, welche von dem Momente der biegenden Kraft abhängt und an der konkaven Seite der Krümmung ebenfalls eine Druckspannung bildet. Das Moment der biegenden Kraft erreicht an der Stelle C seinen größten Wert:

$$130) \mathfrak{M} = Kf;$$

es wird daher die infolge der Biegung hinzukommende Druckspannung ebenfalls an dieser Stelle (und zwar an der konkaven Seite) ihren größten Wert annehmen. Setzt man in der allgemeinen Gleichung 52) für \mathfrak{M} den obigen Wert, so erhält man für diese allein von der Biegung herrührende größte Druckspannung S_2 die Gleichung:

$$131) S_2 = \frac{w}{\mathfrak{A}} \cdot Kf.$$

Die größte in der Stange überhaupt vorkommende Druckspannung S ist nunmehr zu berechnen aus der Gleichung:

$$132) S = S_1 + S_2.$$

Es ergibt sich hieraus, daß die Elastizitätswiderstände der Stange auf zwei verschiedene Arten jenen Druckkräften K das Gleichgewicht halten können: das eine Mal auf die in Fig. 460 angedeutete Art, bei welcher die hervorgebrachte Druckspannung nur die Größe S_1 erreicht; das andere Mal auf die in Fig. 461 angedeutete Art, bei welcher die größere Druckspannung $S_1 + S_2$ entsteht. Wenn also diejenige Querschnittsgröße F berechnet werden sollte, bei welcher die Widerstandsfähigkeit der Stange jenen Druckkräften gegenüber eine hinreichende Größe besitzt, so würde zunächst die Frage entschieden werden müssen, ob jene Druckkräfte auf die erste oder auf die zweite Art die Widerstandsfähigkeit der Stange in Anspruch nehmen werden. Im ersten Falle würde in Gleichung 129) für S_1 die Größe der zulässigen Druckspannung zu setzen und die Größe F unmittelbar aus dieser Gleichung zu berechnen sein. Im zweiten Falle dagegen würde man dem Querschnitt eine solche Größe zu geben haben, bei welcher erst die Summe der beiden Spannungen S_1 und S_2 die Größe der zulässigen Druckspannung erreicht.

Bei langen dünnen Stangen reicht die geringste zufällige Krümmung schon hin, um zu bewirken, daß durch die Druckkräfte eine seitliche Ausbiegung hervorgebracht, und der Widerstand gegen Zerknicken in Anspruch genommen wird. Wenn also nicht durch besonders günstige Umstände — wie etwa durch feste Wände, welche die Stange von allen Seiten umgeben und die Form derselben geradlinig erhalten — jede Möglichkeit einer seitlichen Ausbiegung ausgeschlossen ist, so wird man bei der Querschnittsberechnung jedesmal die zweite Methode vorziehen und der Sicherheit wegen von der Voraussetzung ausgehen, daß jede Druckkraft außer der direkt hervorgebrachten Druckspannung S_1 noch eine Biegungsspannung S_2 erzeugt, entsprechend — nach Gleichung 131) — dem größten Werte, welchen der Hebelarm f im ungünstigsten Falle erreichen kann.

Für diese Größe f läßt sich auf folgende Weise ein oberer Grenzwert ermitteln, in bezug auf welchen mit Bestimmtheit behauptet werden kann, daß bei genügender Stärke der Stange in Wirklichkeit niemals eine Biegung entstehen kann, bei welcher der Hebelarm der Kraft K jenen Grenzwert erreichte. Denkt man sich nämlich die Stange an allen Stellen gleich stark gekrümmt — in welchem Falle also die Biegungskurve ein Kreis-

bogen wird — und denkt man sich zugleich diese Krümmung so stark, daß die solcher Krümmung entsprechende Biegungsspannung für sich allein schon die Elastizitätsgrenze erreicht, so würde offenbar bei dem Hinzutreten der gleichförmig verteilten Druckspannung S_1 die Elastizitätsgrenze überschritten werden. Könnte durch die Druckkräfte K ein solcher Zustand der Stange jemals herbeigeführt werden, so würde die Stärke der Stange jedenfalls ungenügend zu nennen sein. Wenn man also die einer solchen Krümmung entsprechende Pfeilhöhe f in Gleichung 131) als Hebelarm der Kraft K in Rechnung bringt, so wird der aus jener Gleichung hervorgehende Wert von S_2 jedenfalls größer sein als die Biegungsspannung, welche bei genügender Stärke der Stange in Wirklichkeit durch die Kräfte K hervorgebracht werden kann, und die aus dieser Annahme sich ergebende Querschnittsgröße F wird etwas größer ausfallen, als in Wirklichkeit erforderlich ist.

Wenn man in Gleichung I (§ 44) dem Buchstaben S die Bedeutung der „Druckspannung an der Elastizitätsgrenze“ gibt, so bedeutet δ das Verkürzungsverhältnis, welches der Elastizitätsgrenze entspricht. Man kann also den gesuchten Wert von f aus Gleichung 127) berechnen, indem man darin δ statt $\frac{S}{E}$ und f statt s substituiert, woraus sich die Gleichung ergibt:

$$133) f = \frac{l^2 \delta}{2w}.$$

Wenn man diesen Wert für f und außerdem den aus Gleichung 129) für K sich ergebenden Wert in Gleichung 131) substituiert, so nimmt letztere die Form an:

$$134) S_2 = \frac{\delta l^2 F}{2\mathfrak{I}} \cdot S_1,$$

und für die größte Druckspannung in der Stange ergibt sich nach Gleichung 132) der Wert:

$$135) S = S_1 \left(1 + \frac{\delta F l^2}{2\mathfrak{I}} \right).$$

Wenn man die ganze Länge der Stange $2l = L$ setzt und das Verhältnis $\frac{S}{S_1}$ mit n bezeichnet, so erhält man für letztere Zahl die allgemeine Gleichung:

$$136) \quad n = \frac{S}{S_1} = 1 + \frac{\delta}{8} \frac{FL^2}{\mathfrak{I}}.$$

In dieser Gleichung bedeutet S_1 diejenige Druckspannung, welche ohne das Hinzutreten der Biegung in der Stange entstanden sein würde, und die Verhältniszahl n gibt an, wievielmals die Druckspannung vergrößert werden kann durch das Hinzutreten der Biegung.

Die Zahl n gibt daher zugleich an, den wievielten Teil von der sonst zulässigen Druckspannung man als Belastung für jede Flächeneinheit des Querschnittes als zulässig in Rechnung bringen darf, wenn die Stange eine genügende Widerstandsfähigkeit gegen das Zerknicken besitzen soll.

Wenn man in obiger Gleichung für den Koeffizienten δ die der Elastizitätsgrenze entsprechenden Werte substituiert, so erhält man die Gleichungen resp. für:

$$\text{Gußeisen:} \quad \delta = \frac{15}{10000}, \quad 137) \quad n = 1 + \frac{1}{5333} \frac{FL^2}{\mathfrak{I}},$$

$$\text{Schmiedeeisen:} \quad \delta = \frac{15}{20000}, \quad 138) \quad n = 1 + \frac{1}{10666} \frac{FL^2}{\mathfrak{I}},$$

$$\text{Holz:} \quad \delta = \frac{1,8}{1000}, \quad 139) \quad n = 1 + \frac{1}{4444} \frac{FL^2}{\mathfrak{I}}.$$

In diesen Gleichungen bedeutet \mathfrak{I} das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in bezug auf diejenige Schwerpunktsachse, welche rechtwinkelig zur Biegungsebene steht, d. h. rechtwinkelig zu derjenigen Ebene, in welcher eine Biegung der Stange am leichtesten hervorgebracht werden kann.

Wenn z. B. der Querschnitt ein Rechteck, und H die größere, B die kleinere Seite desselben ist, so würde $\mathfrak{I} = \frac{HB^3}{12}$ zu setzen sein; wenn dagegen H die kleinere, B die größere Seite wäre, so würde $\mathfrak{I} = \frac{BH^3}{12}$ zu setzen sein. Für letzteren Fall würde man also $\frac{F}{\mathfrak{I}} = \frac{BH}{\frac{1}{12}BH^3} = \frac{12}{H^2}$ zu substituieren haben und die Gleichungen erhalten resp. für:

$$\text{Gußeisen:} \quad 140) \quad n = 1 + 0,00225 \left(\frac{L}{H}\right)^2,$$

$$\text{Schmiedeeisen:} \quad 141) \quad n = 1 + 0,001125 \left(\frac{L}{H}\right)^2,$$

$$\text{Holz:} \quad 142) \quad n = 1 + 0,0027 \left(\frac{L}{H}\right)^2,$$

aus denen sich z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werte ergeben:

	$\frac{L}{H} =$	10	20	30	40	50
Gußeisen:	$n =$	1,225	1,9	3,025	4,6	6,625,
Schmiedeeisen:	$n =$	1,1125	1,45	2,0125	2,8	3,8125,
Holz:	$n =$	1,27	2,08	3,43	5,32	7,75.

Setzt man als zulässige Druckspannung für Schmiedeeisen $S = 6$ kg, so würde z. B. eine parallelepipedische schmiedeeiserne Stange, deren kleinere Querschnittsdimension H den zwanzigsten Teil der Länge L beträgt, nur mit dem Gewichte:

$$S_1 = \frac{S}{n} = \frac{6}{1,45} = 4,14 \text{ kg}$$

für jedes Quadratmillimeter des Querschnitts belastet werden dürfen; und wenn z. B. $H = 10$ mm, $B = 40$ mm ist, so würde die Druckkraft K (Fig. 461) die Größe

$$K = F \cdot S_1 = 400 \cdot 4,14 = 1656 \text{ kg}$$

nicht überschreiten dürfen, wenn noch hinreichende Sicherheit gegen das Zerknicken vorhanden sein soll.

Wenn die Querschnittsfläche in der Differenz zweier Rechteckflächen besteht (Fig. 427), so ist $\frac{F}{\mathfrak{Z}} = \frac{BH - bh}{\frac{1}{12}BH^3 - \frac{1}{12}bh^3}$ zu setzen, und die für Schmiedeeisen gefundene Gleichung (138) nimmt für diesen Fall die Form an:

$$143) \quad n = 1 + 0,001125 \frac{(BH - bh)L^2}{BH^3 - bh^3}.$$

Hiernach ergibt sich z. B. für eine quadratische schmiedeeiserne Röhre, deren Wandstärke $\frac{1}{20}$ der äußeren Dicke beträgt, die Gleichung:

$$144) \quad n = 1 + 0,00062 \left(\frac{L}{H}\right)^2$$

und wenn zugleich die äußere Dicke H gleich dem zwanzigsten Teile der Länge ist, so wird:

$$n = 1,248.$$

Eine solche Röhre würde also unter den obigen Voraussetzungen nur mit dem Gewichte:

$$S_1 = \frac{6}{1,248} = 4,8 \text{ kg}$$

pro Quadratmillimeter ihres Querschnitts belastet werden dürfen.

Für eine runde schmiedeeiserne Röhre vom äußeren Durchmesser D

und vom inneren Durchmesser d würde $\frac{F}{\mathfrak{Z}} = \frac{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)}{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)} = \frac{16}{D^2 + d^2}$ zu

setzen sein, und ergibt sich nach Gleichung (138) der Wert:

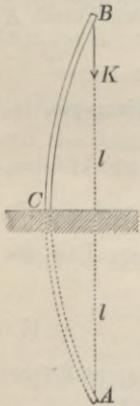
$$145) \quad n = 1 + 0,0015 \left(\frac{L^2}{D^2 + d^2}\right).$$

Setzt man hierin $\frac{d}{D} = 0,9$ und $\frac{L}{D} = 20$, so wird $n = 1,3315$ und $S_1 = 4,5$ kg.

Für $d = 0$ und $\frac{L}{D} = 20$ dagegen wird $n = 1,6$ und $S_1 = 3,75$ kg.

Denkt man sich in Fig. 461 die eine Hälfte der Stange in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, daß dadurch in dem Spannungszustande der anderen Hälfte — folglich auch in der bei C stattfindenden größten Druckspannung — keine Änderung hervorgebracht werden würde. Die allgemeine Gleichung 136) gilt daher auch für den in Fig. 462 dargestellten Fall, und wenn man wiederum $L = 2l$ setzt, so erhält man für diesen Fall die Gleichung:

$$146) \quad n = 1 + \frac{\delta}{2} \frac{Fl^2}{\mathfrak{L}}.$$



Für eine massive runde schmiedeeiserne Stange, deren Länge $BC = l$ das zwanzigfache des Durchmessers beträgt, würde also in diesem Fall $n = 3,4$ und $S_1 = \frac{6}{3,4} = 1,76$ kg zu setzen sein; und wenn der Querschnitt der Stange z. B. 100 qmm enthielte, so würde bei der in Fig. 462 dargestellten Befestigungsweise nur eine Belastung $K = 176$ kg als zulässig zu betrachten sein (während dieselbe Stange bei der in Fig. 461 dargestellten Belastungsweise ein Gewicht $K = 375$ kg mit hinreichender Sicherheit tragen würde).

Hiernach sind die im zwölften Abschnitte für die Querschnittsbestimmung gegebenen Regeln zu modifizieren, und sind die dort für die gedrückten Stangen gefundenen Querschnittszahlen nur gültig unter Voraussetzung solcher Querschnittsformen, für welche die Zahl n einen nur wenig von 1 verschiedenen Wert erhält.

Aus den oben gefundenen Gleichungen ergeben sich überhaupt folgende allgemeine Regeln und Gesetze: erstens, gedrückte Stangen erfordern bei gleicher Spannung im allgemeinen größere Querschnitte als gezogene Stangen; zweitens, die Querschnittsfläche einer gedrückten Stange ist um so mehr zu vergrößern, je größer das Verhältnis ihrer Länge zur kleinsten Querschnittsdimension ist und je ungünstiger in dieser Beziehung die Form des Querschnittes gewählt wird; drittens, bei gleicher Länge und Quer-

schnittsform wird die erforderliche Vergrößerung des Querschnittes um so beträchtlicher werden, je geringer die Spannung der Stange und je kleiner infolgedessen die kleinste Querschnittsdimension im Verhältnis zu ihrer Länge wird.

Aus der letzten Folgerung ergibt sich die Konstruktionsregel: bei gedrückten Stangen sind Zersplitterungen in mehrere isolierte Teile womöglich zu vermeiden. In dieser Beziehung sind die einfachsten Konstruktionsformen die vorteilhaftesten, sind also z. B. einfache Gittersysteme den mehrfachen, kleinere Felderzahlen den größeren vorzuziehen, weil die Zahl n mit der Zahl der gedrückten Teile rasch zunimmt. Größere Felderzahlen und mehrfache Gittersysteme haben dagegen — wie schon in § 43 bemerkt wurde — den Vorteil, daß wegen größerer Zahl der Belastungspunkte an Material für die Zwischenträger gespart werden kann. Ebenso ergibt sich hieraus, daß bei der Bestimmung des vorteilhaftesten Höhenverhältnisses der Träger auf den mit wachsender Höhe rasch abnehmenden Widerstand der gedrückten Teile gegen Zerknicken gehörig Rücksicht genommen werden muß.

Welche Felderzahlen und Höhenverhältnisse hinsichtlich des Materialaufwandes die vorteilhaftesten sind, diese Frage läßt sich überhaupt nicht allgemein beantworten, sondern muß in jedem einzelnen Falle durch vorläufige versuchsweise angestellte Rechnungen entschieden werden.

SECHZEHNTER ABSCHNITT.

Berechnung einer kombinierten Gitter- und Hängebrücke von 60 m Spannweite.*)

§ 53.

Voruntersuchung zur Ermittlung des vorteilhaftesten Höhenverhältnisses.

Die Brücke sollte womöglich so konstruiert werden, daß ein jeder Konstruktionsteil unter den für ihn ungünstigen Umständen

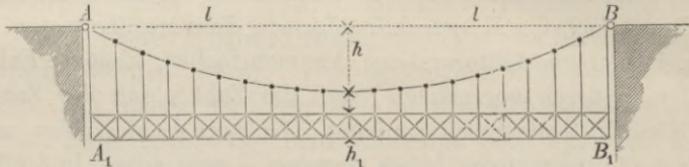
*) Diese Brücke wurde in einer deutschen Maschinenfabrik für Brasilien gebaut und hat der Verfasser auf Wunsch des Fabrikanten die obige Berechnung dazu geliefert.

das Maximum der für zulässig erachteten Spannung erreicht. Es ist deshalb das Verhältnis:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\text{Höhe des Gitterbalkens}}{\text{Pfeilhöhe der Kette}}$$

so zu wählen, daß bei allmählich wachsender Belastung die Spannungen in Kette und Gitterbalken gleichzeitig die zulässige

Fig. 463.



Grenze erreichen (Fig. 463). Hinsichtlich der Kette ist dabei zugleich Rücksicht zu nehmen auf den Einfluß einer etwa gleichzeitig stattfindenden Temperaturänderung.

Wenn mit δ das größte Verlängerungsverhältnis bezeichnet wird, welches in der parabolischen Kette durch die Belastung allein hervorgebracht werden würde, so ist nach § 45 die demselben entsprechende Senkung des Scheitelpunktes der Kette:

$$147) \quad \sigma = \frac{3}{4} \delta \frac{l^2}{h} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{h^2}{l^2} \right),$$

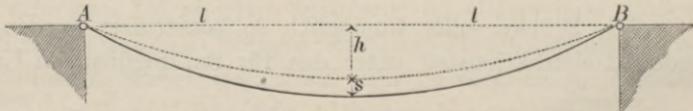
wofür man wegen hier vorauszusetzender Kleinheit des Verhältnisses $\frac{h}{l}$ annäherungsweise auch setzen kann:

$$148) \quad \sigma = \frac{3}{4} \delta \frac{l^2}{h}.$$

Wenn ferner mit Δ das der größten vorkommenden Temperaturerhöhung entsprechende Ausdehnungsverhältnis der Kette bezeichnet wird, so hat die größte, überhaupt vorkommende Senkung des Scheitelpunktes der Kette (s. Fig. 464) die Größe:

$$149) \quad s = \frac{3}{4} (\delta + \Delta) \frac{l^2}{h}.$$

Fig. 464.

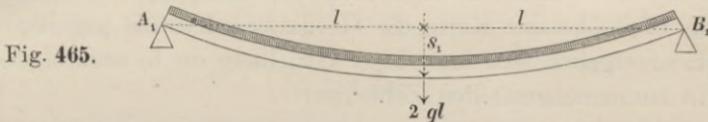


Bei einem prismatischen Balken auf zwei Stützen ist die von einer gleichförmig über die Länge verteilten Belastung hervor-

gebrachte Durchbiegung in der Mitte (nach § 51) zu bestimmen nach der Gleichung:

$$150) \quad s_1 = \frac{5}{24} \frac{q l^4}{E_1 \mathfrak{I}_1},$$

in welcher q die Belastung pro Längeneinheit, \mathfrak{I}_1 das Trägheitsmoment der (in bezug auf die neutrale Achse symmetrisch vorausgesetzten) Querschnittsfläche, und E_1 den Elastizitätsmodulus des Materials bezeichnet (s. Fig. 465).



Die größte Biegungsspannung im Balken (S_1) ist (nach § 50) zu berechnen aus der Gleichung:

$$151) \quad \frac{S_1}{\frac{1}{2} h_1} \mathfrak{I}_1 = \frac{q l^2}{2}.$$

Wenn man den aus dieser Gleichung für \mathfrak{I}_1 zu entnehmenden Wert in der vorigen substituiert, so erhält man die Gleichung:

$$152) \quad s_1 = \frac{5}{6} \frac{S_1}{E_1} \frac{l^2}{h_1},$$

welche, wenn die Größe $\frac{S_1}{E_1}$ als das größte im Balken vorkommende Längenänderungsverhältnis mit δ_1 bezeichnet wird, die Form annimmt:

$$153) \quad s_1 = \frac{5}{6} \delta_1 \frac{l^2}{h_1}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für s und s_1 gefundenen Werte erhält man die Gleichung:*)

$$154) \quad \frac{3}{4} (\delta + \Delta) \frac{l^2}{h} = \frac{5}{6} \delta_1 \frac{l^2}{h_1},$$

aus welcher für das vorteilhafteste Höhenverhältnis der Wert sich ergibt:

$$155) \quad \frac{h_1}{h} = \frac{\frac{5}{6} \delta_1}{\frac{3}{4} (\delta + \Delta)}.$$

Wenn man annimmt, daß die Brücke bei mittlerer Temperatur aufgestellt wird, so ist die Größe Δ zu berechnen nach

*) Vergl. § 49.

dem Überschusse der höchsten möglicherweise vorkommenden Temperatur über jene mittlere Temperatur. Bei einer Temperaturerhöhung von der Größe $t = 41^{\circ}$ (C.) hat das Ausdehnungsverhältnis für Schmiedeeisen die Größe: $\Delta = \frac{1}{20000}$; für $t = 20,5^{\circ}$ (C.) würde $\Delta = \frac{1}{40000}$ zu setzen sein. Es ist ferner der Elastizitätsmodulus für Schmiedeeisen $E = 20000$ kg (pro Quadratmillimeter) und die zulässige Spannung variiert zwischen 5 und 10 kg (pro Quadratmillimeter). Die für δ und δ_1 zu substituierenden Werte liegen also zwischen den Grenzen $\frac{5}{20000}$ und $\frac{10}{20000}$. Wenn man für die Pfeilhöhe der Kette die Größe $h = 4$ m als gegeben annimmt, so ergeben sich aus obiger Gleichung die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerte:

δ (Kette)	δ_1 (Gitterbalken)	Δ (Temp.-Ausdehnung)	$\frac{h_1}{h}$	h_1
$\frac{6}{20000}$	$\frac{6}{20000}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{40000} (20,5^{\circ} \text{ C.}) \\ \frac{1}{20000} (41^{\circ} \text{ C.}) \end{array} \right.$	$\frac{30}{33}$	2,424 m
			$\frac{5}{12}$	1,66... m
$\frac{8}{20000}$	$\frac{6}{20000}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{40000} (20,5^{\circ} \text{ C.}) \\ \frac{1}{20000} (41^{\circ} \text{ C.}) \end{array} \right.$	$\frac{30}{39}$	2,051 m
			$\frac{10}{27}$	1,48 m
$\frac{8}{20000}$	$\frac{5}{20000}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{40000} (20,5^{\circ} \text{ C.}) \\ \frac{1}{20000} (41^{\circ} \text{ C.}) \end{array} \right.$	$\frac{50}{117}$	1,71 m
			$\frac{25}{81}$	1,234 m
$\frac{10}{20000}$	$\frac{5}{20000}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{40000} (20,5^{\circ} \text{ C.}) \\ \frac{1}{20000} (41^{\circ} \text{ C.}) \end{array} \right.$	$\frac{10}{27}$	1,48 m
			$\frac{5}{18}$	1,111 m

Bei der Benutzung dieser Tabelle hat man zu berücksichtigen, daß, obwohl Kette und Gitterbalken aus demselben Materiale bestehen, doch aus verschiedenen Gründen für die Größe δ_1 ein kleinerer Wert in Rechnung zu bringen ist als für die Größe δ . Erstens: weil für die Biegungsspannungen im Gitterbalken die Größe δ_1 nach der größten zulässigen Druckspannung zu bemessen ist, während in der Kette stets nur Zugspannungen vorkommen; zweitens: weil die bei voller Belastung und höchster Temperatur in dem Gitterbalken eintretende Spannung noch nicht das überhaupt erreichbare Maximum bildet, insofern durch den Horizontaldruck des Windes und Ungleichförmigkeiten in der Verteilung der mobilen Belastung jene Spannung noch eine weitere Vergrößerung erleiden kann; drittens: weil die vorläufig als un-

beweglich betrachteten Aufhängepunkte der Kette in Wirklichkeit einander etwas näher rücken können infolge des Ausreckens der Spannketten (was denselben Einfluß hat, wie wenn die Dehnbarkeit der Kette entsprechend vergrößert wäre).

Es erscheint hiernach, wenn die Kettenpfeilhöhe $h = 4$ m als gegeben angenommen wird, die Größe $h_1 = 1,5$ m als ein passender zugehöriger Wert für die Höhe des Gitterbalkens, insofern dieser Wert das arithmetische Mittel von den in der letzten Kolumne stehenden Zahlen bilden würde, wenn die ersten beiden fortgelassen worden wären.

§ 54.

Berechnung der durch Temperaturänderungen hervorgebrachten Spannungen.

Bei abnehmender Temperatur verkürzt sich die Kette und der Scheitelpunkt derselben hebt sich; es entstehen dadurch in Kette und Gitterbalken Spannungen, welche mit den von den Belastungen hervorgebrachten sich summieren, aber zu berechnen sind, wie wenn gar keine Belastung vorhanden und das Ganze gewichtlos wäre.

Die Endpunkte A_1 und B_1 des Gitterbalkens dürfen als feste Punkte betrachtet werden, welche sowohl vertikal abwärts als aufwärts gerichtete Gegendrücke zu leisten fähig sind.*) Die durch Abkühlung hervorgebrachte Verkürzung der Kette würde mit einer Durchbiegung des Gitterbalkens nach oben hin verbunden sein (s. Fig. 466). Vermöge seiner Steifigkeit setzt der Gitterbalken

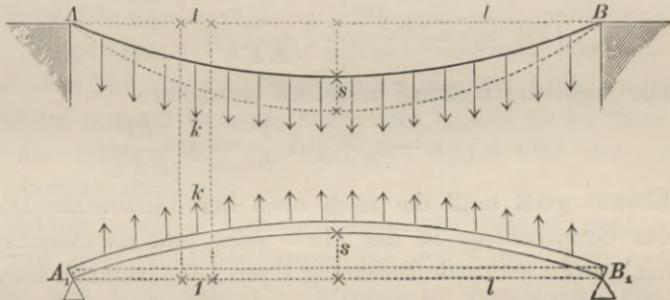


Fig. 466.

dieser Durchbiegung einen gewissen Widerstand entgegen, welcher auf die parabolische Kette wie eine gleichförmig über die Horizontalprojektion derselben verteilte Belastung k pro Längeneinheit

*) Die Zulässigkeit dieser Annahme wird in § 66 bewiesen.

wirkt und den Scheitelpunkt der Kette verhindert, bis zu derjenigen Höhe zu steigen, welche derselbe ohne den Widerstand des steifen Balkens erreichen würde. Es ist daher die wirkliche Hebung s gleich dem Überschusse der Hebung s_1 , welche durch die Abkühlung allein hervorgebracht worden wäre, über die Senkung s_2 , welche die Belastung k für sich allein hervorgebracht hätte, zu setzen.

Wenn mit Δ das der Temperaturabnahme entsprechende Verkürzungsverhältnis ($\Delta = \frac{1}{20000}$ für $t = 41^\circ$ C. bezeichnet wird, so ist:

$$156) \quad s_1 = \frac{3}{4} \Delta \frac{l^2}{h}.$$

Die der Belastung k entsprechende Horizontalspannung der Kette ist (nach § 8):

$$157) \quad H = \frac{kl^2}{2h}.$$

Wenn also mit E der Elastizitätsmodulus des Kettenmaterials und mit F der Querschnitt der Kette im Scheitelpunkte (oder die Summe der Kettenquerschnitte, wenn es mehrere nebeneinander hängende Ketten sind) bezeichnet wird, so hat das von der Belastung k hervorgebrachte Verlängerungsverhältnis die Größe:

$$158) \quad \delta = \frac{H}{F} \frac{1}{E} = \frac{kl^2}{2EFh},$$

und dieser Verlängerung würde die Senkung des Kettenscheitelpunktes entsprechen:

$$159) \quad s_2 = \frac{3}{4} \delta \frac{l^2}{h} = \frac{3}{8} \frac{kl^4}{EFh^2}.$$

Die wirkliche Hebung desselben ist daher:

$$160) \quad s = s_1 - s_2 = \frac{3}{4} \Delta \frac{l^2}{h} - \frac{3}{8} \frac{kl^4}{EFh^2}.$$

Ebenso groß muß die nach oben hervorgebrachte Durchbiegung des Gitterbalkens in der Mitte sein, und da dieselbe durch die nach oben wirkende Belastung k pro Längeneinheit hervorgebracht wird, so ist:

$$161) \quad s = \frac{5}{24} \frac{kl^4}{E_1 \mathcal{A}_1}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für s gefundenen Werte erhält man die Gleichung:

$$162) \quad \frac{3}{4} \Delta \frac{l^2}{h} - \frac{3}{8} \frac{kl^4}{EFh^2} = \frac{5}{2^4} \frac{kl^4}{E_1 \mathfrak{T}_1}, \text{ oder}$$

$$163) \quad k = \frac{\frac{3}{4} \frac{\Delta}{h}}{\frac{3}{8} \frac{l^2}{EFh^2} + \frac{5}{2^4} \frac{l^2}{E_1 \mathfrak{T}_1}}.$$

Wenn mit F_1 die Summe der Querschnitte der vier Gurtungen des Gitterbalkens bezeichnet wird (s. Fig. 467), so ist:

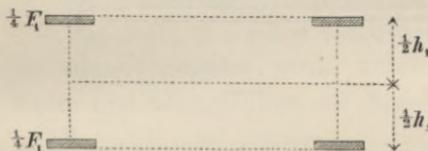
$$164) \quad \mathfrak{T}_1 = 4 \left(\frac{1}{4} F_1 \right) \left(\frac{1}{2} h_1 \right)^2 = \frac{F_1 h_1^2}{4},$$

und man erhält nach Substitution dieses Wertes die Gleichung:

$$165) \quad k = \frac{2 \Delta EFh}{l^2 \left(1 + \frac{2 \cdot 9}{9} \cdot \frac{E}{E_1} \cdot \frac{F}{F_1} \cdot \frac{h^2}{h_1^2} \right)}.$$

Setzt man hierin beispielsweise $\Delta = \frac{1}{2000}$, $E = E_1 = 20000$, $h = 4000$ mm, $F = 7500$ qmm, $F_1 = 15000$ qmm, $l = 30000$ mm, so wird $k = 0,074896$ kg pro Millimeter oder zirka 75 kg pro laufendes Meter.

Fig. 467.



Wenn die Größe Δ negativ ist, so wird auch k negativ; die Wirkung einer Temperaturerhöhung besteht also

darin, daß die Kette entlastet und der Gitterbalken belastet wird, und zwar wiederum mit der Belastung k pro Längeneinheit. Wenn also die Brücke bei mittlerer Temperatur aufgestellt wird, und nachher die Temperatur um 41° C. von der mittleren sich entfernt — das eine Mal nach unten, das andere Mal nach oben hin — so wird im ersteren Falle die Kette dem Balken, im letzteren der Balken der Kette 75 kg pro laufendes Meter von der zu tragenden Belastung abnehmen.

Die Belastung k , welche man die Temperaturbelastung nennen könnte, — und zwar Kältebelastung für die Kette, Wärmebelastung für den Gitterbalken — erzeugt in demselben Temperaturspannungen, welche zu den von den Belastungen hervorgerufenen nachher hinzugerechnet werden müssen. Für die Kette hat diese Temperaturspannung nach Gleichung (157) die Größe:

$$166) \quad S = \frac{kl^2}{2Fh} = 1,1234 \text{ kg pro Quadratmillimeter,}$$

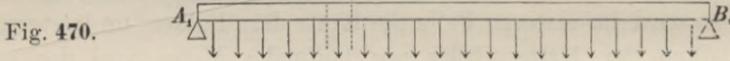
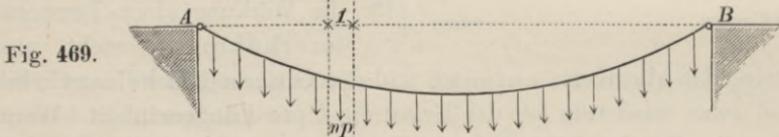
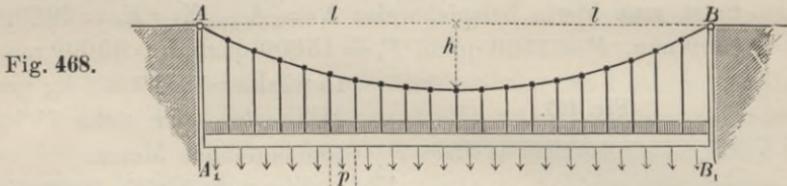
und für den Gitterbalken erhält man nach den Gleichungen 151) und 164) die Temperaturspannung:

$$167) \quad S_1 = \frac{k l^2}{F_1 h_1} = 2,996 \text{ kg pro Quadratmillimeter.}$$

§ 55.

Berechnung der von der permanenten Belastung hervorgebrachten Spannungen.

Wenn die Brücke mit einer gleichförmig über ihre Länge verteilten Belastung von der Größe p pro Längeneinheit belastet ist, und mit np der von der Kette, mit $(1-n)p$ der von dem Gitterbalken getragene Teil derselben bezeichnet wird (s. Figg. 468, 469 und 470), so hat nach Gleichung 159) die von solcher Be-



lastung hervorgebrachte Senkung des Kettenseitelpunktes die Größe:

$$168) \quad s = \frac{3}{8} \frac{np l^4}{E F h^2},$$

und für die Durchbiegung des Gitterbalkens in der Mitte erhält man nach den Gleichungen 161) und 164) den Wert:

$$169) \quad s = \frac{5}{6} \frac{(1-n) p l^4}{E_1 F_1 h_1^2}.$$

Die Gleichsetzung dieser beiden Senkungen ergibt für den Lastverteilungskoeffizienten n die Gleichung:

$$170) \quad \frac{3}{8} \frac{np l^4}{E F h^2} = \frac{5}{6} \frac{(1-n) p l^4}{E_1 F_1 h_1^2}, \text{ oder}$$

$$171) \quad n = \frac{1}{1 + \frac{9}{20} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2}}$$

Setzt man hierin wiederum $\frac{E_1}{E} = 1$, $\frac{F_1}{F} = 2$, $\frac{h_1}{h} = \frac{1,5}{4}$, so erhält man für n den Wert:

$$172) \quad n = \frac{1}{1 + \frac{81}{640}} = 0,887 \ 656.$$

Wenn also die permanente Belastung 375 kg pro laufendes Meter beträgt (oder $p = 0,375$ ist), so verteilt sich diese Belastung in der Weise, daß die Kette davon den Teil übernimmt:

173) $np = 0,33287$ kg pro Millimeter (= 332,87 kg pro Meter), und der Gitterbalken mit dem Reste, nämlich:

174) $(1-n)p = 0,04213$ kg pro Millimeter (= 42,13 kg pro Meter) belastet wird. Diese Belastungen erzeugen resp. in Kette und Gitterbalken die Spannungen:

$$175) \quad S = \frac{np l^2}{2 F h} = 4,993 \text{ kg pro Quadratmillimeter,}$$

$$176) \quad S_1 = \frac{(1-n) p l^2}{F_1 h_1} = 1,685 \text{ kg pro Quadratmillimeter.}$$

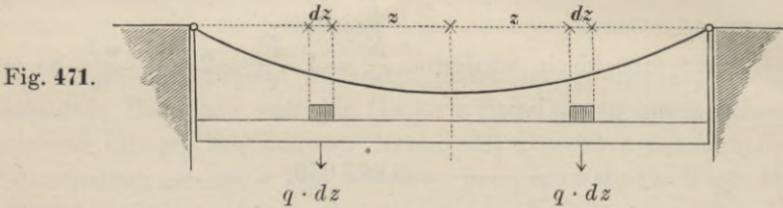
§ 56.

Berechnung der von einer ungleichförmig über die Brückenlänge verteilten Belastung hervorgebrachten Spannungen.

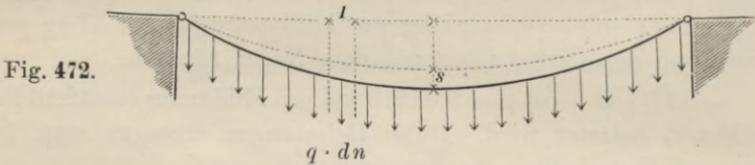
Die parabolische Form der Kette bildet die Gleichgewichtsform ausschließlich für eine gleichförmig über die Horizontalprojektion verteilte Belastung, und da wegen geringer Größe der Durchbiegung des mit ihr verbundenen steifen Gitterbalkens angenommen werden darf, daß die Kette ihre parabolische Form stets beibehält, so ist die fernere Annahme zulässig, daß — wie auch immer eine Belastung über die Brückenlänge verteilt sein möge — die Kette unter allen Umständen an dem Tragen dieser Last in der Weise sich beteiligt, daß sie eine gleichförmig über

die Horizontalprojektion verteilte Belastung übernimmt — selbst in dem Falle, wenn jene Last in einem einzelnen, an irgend einem Punkte der Brückenbahn aufgehängten Gewichte bestände.

Denkt man sich in gleichen Abständen z von der Mitte an jeder Seite die unendlich kleinen Strecken dz mit den Belastungen q pro Längeneinheit belastet (Fig. 471), und bezeichnet man mit



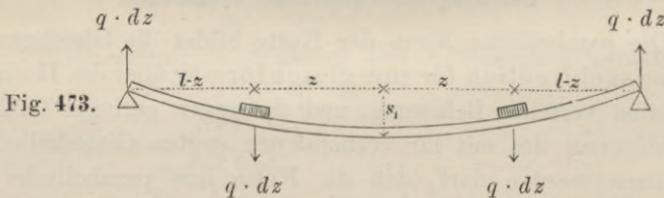
$q \cdot dn$ die dadurch für die Kette hervorgebrachte Belastung pro Längeneinheit der Horizontalprojektion (Fig. 472), so kann man



die Größe dn berechnen, indem man wiederum die Senkung des Kettenscheitelpunktes gleich der Durchbiegung des Gitterbalkens in der Mitte setzt. Nach Gleichung 159) hat erstere die Größe:

$$177) \quad s = \frac{3}{8} \frac{q \, dn \cdot l^4}{E F h^2}.$$

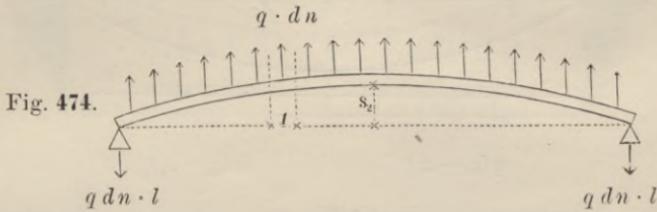
Die Durchbiegung des Gitterbalkens ist gleich dem Überschusse derjenigen Durchbiegung s_1 , welche die beiden Gewichte



$q \cdot dz$ für sich allein hervorbringen würden (Fig. 473), über diejenige nach oben gerichtete Durchbiegung s_2 , welche eine nach oben wirkende Belastung $q \cdot dn$ pro Längeneinheit für sich allein

hervorbringen würde (Fig. 474). Für erstere ergibt sich nach Gleichung 97) der Wert:

$$178) \quad s_1 = \frac{q dz}{6 E_1 \mathfrak{T}_1} (2l^3 - 3lz^2 + z^3),$$



für letztere nach Gleichung 99) der Wert:

$$179) \quad s_2 = \frac{q dn \cdot l^4}{2^{\frac{5}{4}} E_1 \mathfrak{T}_1}.$$

Also ist die wirkliche Durchbiegung des Gitterbalkens:

$$180) \quad s = s_1 - s_2 = \frac{q dz}{6 E_1 \mathfrak{T}_1} (2l^3 - 3lz^2 + z^3) - \frac{q dn \cdot l^4}{2^{\frac{5}{4}} E_1 \mathfrak{T}_1}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für s gefundenen Werte erhält man die Gleichung:

$$181) \quad \frac{q dz}{E F h^2} = \frac{q dz}{6 E_1 \mathfrak{T}_1} (2l^3 - 3lz^2 + z^3) - \frac{q dn \cdot l^4}{F_1 \mathfrak{T}_1},$$

oder

$$182) \quad dn = \frac{(2l^3 - 3lz^2 + z^3) dz}{\frac{5}{4} l^4 \left(1 + \frac{9}{5} \frac{E_1 \mathfrak{T}_1}{E F h^2} \right)}$$

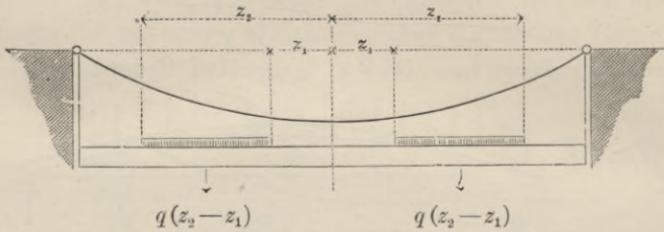
Setzt man wiederum nach Gleichung 164) $\mathfrak{T}_1 = \frac{F_1 h_1^2}{4}$ und integriert man zwischen den Grenzen z_1 und z^2 einerseits und zwischen den Grenzen n_1 und n_2 andererseits, so erhält man die Gleichung:

$$183) \quad \int_{n_1}^{n_2} dn = \int_{z_1}^{z_2} \frac{(2l^3 - 3lz^2 + z^3) dz}{\frac{5}{4} l^4 \left(1 + \frac{9}{5} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2} \right)}, \quad \text{oder}$$

$$184) \quad n_2 - n_1 = \frac{2l^3 (z_2 - z_1) - l (z_2^3 - z_1^3) + \frac{1}{4} (z_2^4 - z_1^4)}{\frac{5}{4} l^4 \left(1 + \frac{9}{5} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2} \right)}.$$

Es würde also bei dem in Fig. 475 dargestellten Belastungszustande die Kette eine gleichförmig über die Horizontalprojektion

Fig. 475.



verteilte Belastung von der Größe $(n_2 - n_1) q$ pro Längeneinheit zu tragen haben.

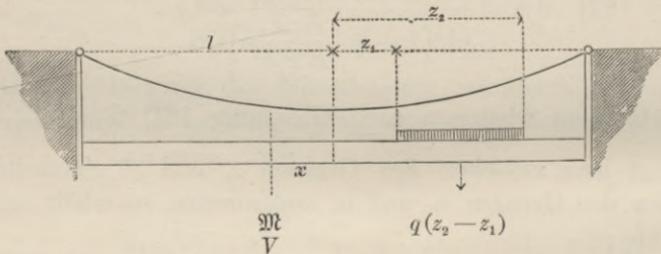
Setzt man $z_1 = 0$, $z_2 = l$ und $n_1 = 0$, $n_2 = n$, so erhält man:

$$185) \quad n = \frac{1}{1 + \frac{9}{2} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2}} = \frac{640}{721} = 0,887656,$$

als wiederum denselben Wert, welcher bereits in Gleichung 172) für eine gleichförmig über die ganze Brückenlänge verteilte Belastung gefunden wurde.

Offenbar liefert zu der von der Kette zu tragenden Belastung $(n_2 - n_1) q$ (pro Längeneinheit der Horizontalprojektion) das auf der linken Brückenhälfte liegende Gewicht denselben Beitrag, wie

Fig. 476.



das auf der rechten Seite liegende, folglich jedes von beiden die Hälfte. Es würde also bei dem in Fig. 476 dargestellten Belastungszustande die Kette mit der Belastung $\left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right) q$ pro Längeneinheit der Horizontalprojektion belastet sein (Fig. 477); der Gitterbalken aber würde eine Biegung erleiden, welche man betrachten

kann als zusammengesetzt aus den beiden einzelnen Biegungen, welche einerseits die Belastung $q(z_2 - z_1)$ nach unten hin (Fig. 478),

Fig. 477.

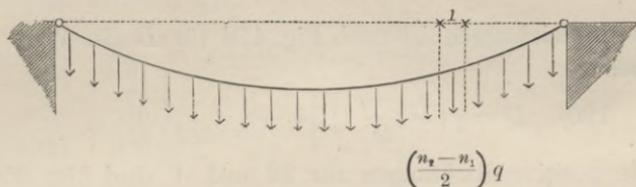
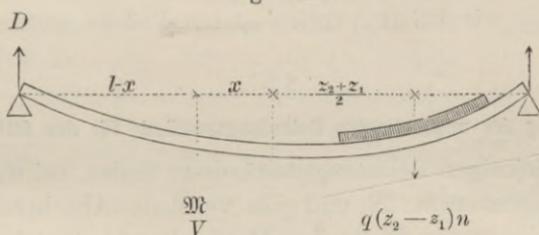
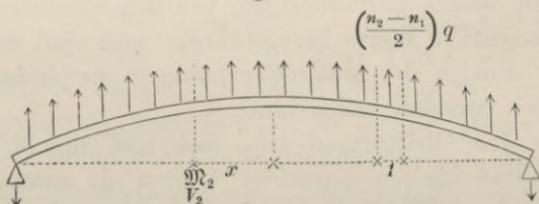


Fig. 478.



andererseits die nach oben wirkende Belastung $(\frac{n_2 - n_1}{2})q$ pro Längeneinheit nach oben hin erzeugen würde (Fig. 479). Es würde

Fig. 479.



also z. B. das Biegemoment \mathfrak{M} im Abstände x links von der Mitte gleich den Überschusse des aus Fig. 478 sich ergebenden Biegemomentes:

$$186) \quad \mathfrak{M}_1 = D(l - x)$$

über das aus Fig. 479 sich ergebende Biegemoment:

$$187) \quad \mathfrak{M}_2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right)q \left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right)$$

zu setzen sein, folglich die Größe haben:

$$188) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = D(l - x) - \left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right)q \left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right);$$

angebrachte Belastung qdz zu den Größen \mathfrak{M} und V liefert (Fig. 480), so ergeben sich — auf dieselbe Weise, wie oben in bezug auf die Belastung einer endlichen Strecke $z_2 - z_1$ gezeigt wurde — die Gleichungen:

$$191) \quad d\mathfrak{M} = \frac{qdz(l-z)(l-x)}{2l} - \frac{qdn(l^2-z^2)}{4},$$

$$192) \quad dV = \frac{qdz(l-z)}{2l} - \frac{qdn}{2} \cdot x.$$

Hierin ist für dn der in Gleichung 182) gefundene Wert zu substituieren, und wenn man zugleich die Größe $(l-z)$ als gemeinschaftlichen Faktor der alsdann auf der rechten Seite stehenden Glieder voranstellt, so nehmen diese Gleichungen die Formen an:

$$193) \quad d\mathfrak{M} = \frac{qdz(l-z)(l-x)}{2l} \left\{ 1 - \frac{2(l+x)2l^2 + 2lz - z^2}{l^3 \left(5 + 9 \frac{E_1 \mathfrak{T}_1}{EFh^2} \right)} \right\},$$

$$194) \quad dV = \frac{qdz(l-z)}{2l} \left\{ 1 - \frac{4x(2l^2 + 2lz - z^2)}{l^3 \left(5 + 9 \frac{E_1 \mathfrak{T}_1}{EFh^2} \right)} \right\}.$$

Setzt man zunächst den für $d\mathfrak{M}$ gefundenen Ausdruck gleich Null, so erhält man durch Auflösung der daraus sich ergebenden quadratischen Gleichung für z denjenigen Wert $z = u$, welcher den Punkt bezeichnet, wo auf der rechtsseitigen Brückenhälfte ein Gewicht liegen muß, wenn dasselbe an der im Abstände x links von der Mitte befindlichen Stelle des Gitterbalkens das Biegemoment Null hervorbringen soll. Jene quadratische Gleichung erscheint zunächst in der Form:

$$195) \quad \frac{l^3 \left(5 + 9 \frac{E_1 \mathfrak{T}_1}{EFh^2} \right)}{2(l+x)} = 2l^2 + 2lu - u^2,$$

und man erhält durch Auflösung derselben, wenn man zugleich wiederum $\mathfrak{T}_1 = \frac{F_1 h_1^2}{4}$ setzt, den Wert:

$$196) \quad \frac{u}{l} = 1 - \sqrt{\frac{6x + l \left(1 - \frac{9}{4} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2} \right)}{2(l+x)}}.$$

Wenn man auf gleiche Weise mit der für dV gefundenen Gleichung verfährt, so erhält man für denjenigen Wert $z=v$, welcher den Punkt bezeichnet, wo auf der rechtsseitigen Brückenhälfte ein Gewicht liegen muß, um die Vertikalkraft Null hervorzubringen an der im Abstände x links von der Mitte befindlichen Stelle, die Gleichung:

$$197) \quad \frac{l^3}{4x} \left(5 + 9 \frac{E_1 \mathfrak{I}_1}{E F h^2} \right) = 2l^2 + 2lv - v^2, \text{ oder}$$

$$198) \quad \frac{v}{l} = 1 - \sqrt{3 - \frac{l}{4x} \left(5 + 9 \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2} \right)}.$$

Setzt man wiederum $\frac{E_1}{E} = 1$, $\frac{F_1}{F} = 2$, $\frac{h_1}{h} = \frac{1,5}{4}$, so nehmen die resp. für u und v gefundenen Gleichungen die einfacheren Formen an:

$$199) \quad \frac{u}{l} = 1 - \sqrt{\frac{768x + 47l}{256(l+x)'}}$$

$$200) \quad \frac{v}{l} = 1 - \sqrt{3 - \frac{721 \cdot l}{512 \cdot x}}.$$

Diese beiden Gleichungen beziehen sich auf den Fall, in welchem die Belastung rechts von der betreffenden Stelle sich befindet. Wenn mit u_1 und v_1 resp. die Abstände links von der Mitte bezeichnet werden, in welchen die Belastungen sich befinden müssen, um bezw. Biegemoment und Vertikalkraft Null hervorzubringen an der weiter rechts im kleineren Abstände x links von der Mitte gelegenen Stelle, so ergeben sich für diese anderen beiden Nullpunkte die Gleichungen:

$$201) \quad \frac{u_1}{l} = 1 - \sqrt{\frac{47 \cdot l - 768 \cdot x}{256 \cdot (l-x)'}}$$

$$202) \quad \frac{v_1}{l} = 1 - \sqrt{3 + \frac{721 \cdot l}{512 \cdot x}},$$

welche man aus den beiden vorhergehenden durch Vertauschung von $+x$ mit $-x$ erhält. Die letzteren vier Gleichungen liefern die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerte:

$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}$	$\frac{u_1}{l}$	$\frac{v}{l}$	$\frac{v_1}{l}$
-1	-0,2616	-0,2616
-0,75	-0,18	-0,0594
-0,7041	0
-0,5	-0,0594	+0,5715
-0,4694	+1
-0,4082	0	
-0,25	+0,1358	
-0,24	+0,1464	
-0,2	+0,1919	
-0,125	+0,29535	
-0,0612	+1	+0,4118	
0	+0,5715	+0,5715	
+0,0612	+0,4118	+1	
+0,125	+0,29535	
+0,2	+0,1919	
+0,24	+0,1464	
+0,25	+0,1358	
+0,4082	0	
+0,4694	+1	
+0,5	-0,0594	+0,5715	
+0,7041	0	
+0,75	-0,18	-0,0594	
+1	-0,2616	-0,2616	

§ 58.

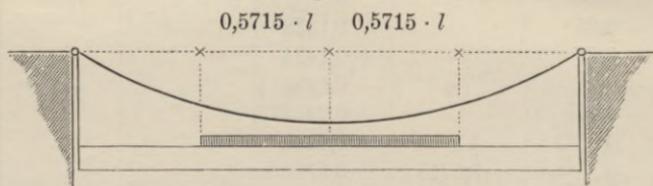
Berechnung der von der mobilen Last in den Gurtungen des Gitterbalkens hervorgebrachten Spannungen.

Die obige Tabelle zeigt hinsichtlich der Biegemomente, daß für alle Werte von x , die zwischen den Grenzen $+0,0612 \cdot l$ und $-0,0612 \cdot l$ liegen, immer zwei Nullpunkte vorhanden sind (wenn man abkürzungsweise den Punkt, wo das Gewicht liegen muß, um an der im Abstände x links von der Mitte befindlichen Stelle das Biegemoment Null hervorzubringen, den Nullpunkt nennt). Für alle übrigen Stellen gibt es jedesmal nur einen Nullpunkt.

Für $x=0$, d. h. für die Mitte des Gitterbalkens, liegen die beiden Nullpunkte in den gleichen Abständen $u = u_1 = 0,5715 \cdot l$ rechts und links von der Mitte. Diese beiden Nullpunkte bilden die Grenzen zwischen den Strecken, deren Belastungen positive

und den Strecken, deren Belastungen negative Biegemomente in der Mitte des Gitterbalkens hervorbringen. Man erhält also das größte positive Biegemoment in der Mitte, wenn man ausschließlich die ersteren, und das größte negative, wenn man ausschließlich die letzteren belastet annimmt. Es würde also z. B. bei dem in Fig. 481 dargestellten Belastungszustande das positive

Fig. 481.



Biegemoment in der Mitte des Gitterbalkens seinen größten Wert annehmen und die demselben entsprechende Biegespannung auf folgende Weise zu berechnen sein.

Man erhält zunächst aus Gleichung 183), indem man auf der linken Seite zwischen den Grenzen $n_1 = 0$ und $n_2 = n$, auf der rechten Seite zwischen den Grenzen $z_1 = 0$ und $z_2 = 0,5715 \cdot l$ integriert, den Wert:

$$203) \quad n = \frac{2l^3 z - lz^3 + \frac{1}{4}z^4}{\frac{5}{4}l^4 \left(4 + \frac{9}{20} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2} \right)} = 0,6983.$$

Nimmt man an, daß die Totalbelastung der vollbelasteten Brücke 0,575 kg pro Millimeter beträgt, und daß dieselbe aus einer permanenten $p = 0,375$ kg und einer mobilen $m = 0,2$ kg pro Millimeter sich zusammensetzt, so würde die von der mobilen Last allein in der Mitte hervorgebrachte Maximalspannung zu berechnen sein aus der Voraussetzung, daß ausschließlich die in Fig. 481 bezeichnete Strecke mit dem Gewichte $m = 0,2$ kg pro Millimeter belastet ist, wobei die Kette eine Belastung von der Größe $n \cdot m = 0,6983 \cdot 0,2 = 0,1396$ kg pro Millimeter ihrer Horizontalprojektion erhält. Das Biegemoment in der Mitte ist also:

$$204) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2,$$

wenn mit \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 resp. die Biegemomente bezeichnet werden, welche den in Figg. 482 und 483 angedeuteten Biegezuständen entsprechen. Diese Biegemomente sind:

$$205) \mathfrak{M}_1 = mz l - \frac{mz^2}{2},$$

$$206) \mathfrak{M}_2 = \frac{nm l^2}{2}.$$

Die hervorgebrachte Biegungsspannung S_m ist nunmehr zu berechnen aus der Gleichung:

$$207) \frac{S_m \cdot \mathfrak{T}_1}{\frac{1}{2} h_1} = \mathfrak{M} = \frac{S_m \cdot F_1 h_1}{2}, \text{ oder: } S_m = \frac{2 \mathfrak{M}}{F_1 h_1},$$

Fig. 482.

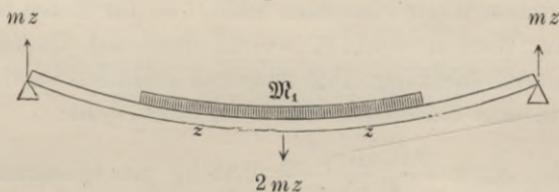
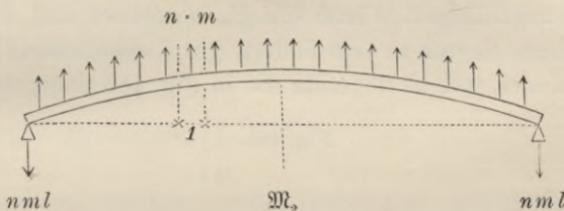


Fig. 483.



und man erhält nach Substitution der oben angenommenen Zahlenwerte:

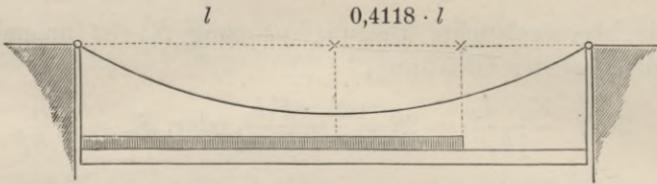
$$208) S_m = \frac{0,0237 \cdot l^2}{F_1 h_1} = 0,948 \text{ kg pro Quadratmillimeter.}$$

Es wirkt also — wie Gleichung 176) zeigt — diese Belastung gerade so, wie wenn der Gitterbalken allein eine gleichförmig über seine ganze Länge verteilte Belastung von 23,7 kg pro Meter zu tragen hätte (während bei Belastung der ganzen Brückenlänge diese äquivalente Belastung nur 22,5 kg betragen würde).

An der Stelle im Abstände $x = +0,0612 \cdot l$ links von der Mitte würde (nach obiger Tabelle) bei dem in Fig. 484 dargestellten Belastungszustande das der mobilen Last entsprechende Biegemoment sein Maximum erreichen. Nach Gleichung 183) erhält man — indem man auf der rechten Seite einmal zwischen den

Grenzen $z=0$ und $z=0,4118 \cdot l$, ein anderes Mal zwischen den Grenzen $z=0$ und $z=l$ integriert und die beiden auf solche

Fig. 484.

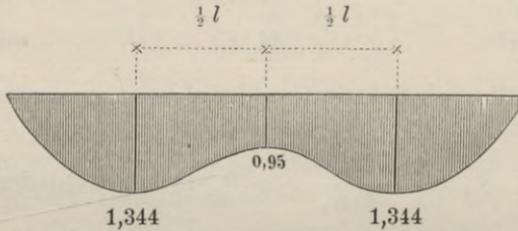


Weise erhaltenen Werte zusammen addiert — für diesen Belastungszustand den Wert $n=0,714$, worauf dann auf ähnliche Weise, wie oben durch die Figg. 482 und 483 erläutert wurde, für die Spannung in den Gurtungen der Wert sich ergibt:

$$209) S_m = \frac{0,0245 \cdot l^2}{F_1 \cdot h_1} = 0,98 \text{ kg pro Quadratmillimeter.}$$

Wenn man auf solche Weise für die verschiedenen Werte von x die zugehörigen Werte von S_m berechnet und das Gesetz, nach welchem S_m mit x sich ändert, graphisch darstellt, so erhält man eine Kurve, welche ungefähr die in Fig. 485 angegebene Form

Fig. 485.



hat und zeigt, daß für $x = \frac{1}{2} l$ das der mobilen Last entsprechende Biegemoment seinen größten Wert annimmt.

§ 59.

Berechnung der Maximalspannungen in den Gurtungen des Gitterbalkens.

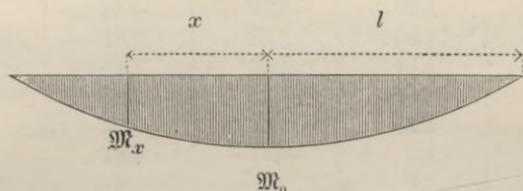
Um die größte in dem Gitterbalken überhaupt vorkommende Biegungsspannung zu finden, hat man zu berücksichtigen, daß die von der permanenten Belastung hervorgebrachte Biegungsspannung nach einem anderen Gesetze sich ändert. Es ist nämlich, wenn mit M_0 das dem Werte $x=0$ entsprechende, von der perma-

nenten Last hervorgebrachte Biegemoment bezeichnet wird, das Biegemoment im Abstände x von der Mitte zu bestimmen nach der Gleichung:

$$210) \quad \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_0 \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right),$$

und die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem \mathfrak{M}_x mit x sich ändert, führt zu der Parabel Fig. 486. Nach demselben

Fig. 486.



Gesetze ändert sich auch die diesem Biegemomente entsprechende Biegungsspannung S_p , und da nach Gleichung 176) dieselbe in der Mitte 1,685 kg beträgt, so ergibt sich für S_p die Gleichung:

$$211) \quad S_p = 1,685 \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Nach ebendemselben Gesetze ändert sich auch die Temperaturspannung S_t mit dem Abstände von der Mitte, und da nach Gleichung 167) dieselbe in der Mitte 2,996 kg beträgt, so ist S_t zu bestimmen aus der Gleichung:

$$212) \quad S_t = 2,996 \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Hiernach ergeben sich für die Maximalspannungen an den verschiedenen Punkten die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerte.

Diese Tabelle zeigt, daß die Spannung in den Gurtungen im Abstände $x = \frac{1}{2}l$ von der Mitte am größten wird, und daß diese Maximalspannung 5,68 kg pro Quadratmillimeter des Querschnitts beträgt. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß diese Spannungen unter Umständen noch eine weitere Vergrößerung erleiden können, einerseits durch den Druck des Windes gegen die Seitenfläche der Brücke, andererseits durch den Einfluß der Dehnung der Spann-

Werte von	Spannungen in den Gurtungen des Gitterbalkens, hervorgebracht durch			
	mobile Last	permanente Last	Temperatur- änd.	alle 3 zu- sammen
$\frac{x}{l}$	S_m	S_p	S_t	$S_m + S_p + S_t$
0	0,95	1,685	2,996	5,63
0,0612	0,98	1,68	2,98	5,64
0,125	1,07	1,66	2,95	5,68
0,2	1,15	1,62	2,88	5,64
0,24	1,20	1,59	2,82	5,61
0,25	1,22	1,58	2,81	5,61
0,408	1,34	1,40	2,48	5,24
0,5	1,344	1,26	2,25	4,85
0,6	1,28	1,08	1,92	4,28
0,75	1,0	0,74	1,31	3,05
1	0	0	0	0

ketten. Die von diesen beiden Ursachen hervorgebrachten Wirkungen werden im §§ 62 und 63 noch näher bestimmt werden.

§ 60.

Berechnung der von der mobilen Last hervorgebrachten Abscherungskraft.

Die Tabelle am Ende des § 57 zeigt hinsichtlich der vertikalen Abscherungskräfte, daß zu jedem Werte von x nur ein Nullpunkt gehört, d. h. es gibt jedesmal nur einen Punkt, dessen Belastung an jener Stelle die Vertikalkraft Null hervorbringt. Dieser Nullpunkt bildet die eine Belastungsscheide; es gibt jedoch noch eine zweite, und diese zweite wird jedesmal durch jene Stelle, für welche die Vertikalkraft bestimmt werden soll, selbst gebildet.

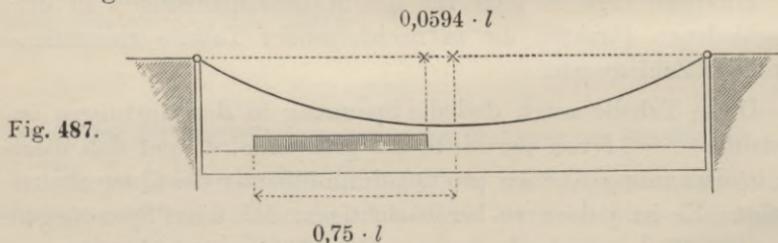
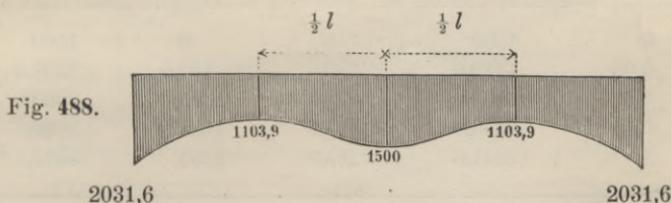


Fig. 487.

So z. B. würde für die Stelle im Abstände $x = 0,75 \cdot l$ links von der Mitte bei dem in Fig. 487 dargestellten Belastungs-

zustande die Vertikalkraft V_m ihr Maximum erreichen. Für diesen Belastungszustand erhält man nach Gleichung 183) den Wert: $n = 0,3688$ und nach Gleichung 184) den Wert: $V_m = D - nmx = 1250,8$ kg. Wenn man auf gleiche Weise für die übrigen Punkte die Werte von V_m berechnet und das Gesetz, nach welchem V_m mit x sich ändert, graphisch darstellt, so erhält man eine Kurve von der in Fig. 488 dargestellten Form. Diese



Kurve zeigt, daß es für die von der mobilen Last hervorgebrachten vertikalen Abscherungskräfte V_m auf jeder Brückenhälfte zwei Maxima und ein Minimum gibt. Das größere Maximum beträgt 2031,6 kg und fällt auf den Endpunkt; das kleinere Maximum beträgt 1500 kg und fällt in die Mitte; das Minimum beträgt 1103,9 kg und fällt in den Abstand $\frac{1}{2} l$ von der Mitte.

§ 61.

Berechnung der Maximalspannungen in den Gitterstäben.

Von der permanenten Belastung übernimmt nach Gleichung 174) der Gitterbalken auf seinen Anteil 42,13 kg pro Meter. Die von der permanenten Last hervorgebrachte Vertikalkraft V_p ist in der Mitte Null und wächst nach den Enden hin, proportional dem Abstände von der Mitte, bis zur Größe $30 \cdot 42,13 = 1263,9$ kg. Es ist also im Abstände x von der Mitte:

$$213) \quad V_p = 1263,9 \cdot \frac{x}{l}.$$

Die Temperaturbelastung für den Gitterbalken beträgt (nach Gleichung 165) 75 kg pro Meter. Die von dieser Belastung hervorgebrachte Vertikalkraft V_t ändert sich nach demselben Gesetze und beträgt an den Endpunkten $30 \cdot 75 = 2250$ kg; also ist:

$$214) \quad V_t = 2250 \cdot \frac{x}{l}.$$

Hiernach ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerte:

Werte von	Vertikale Abscherungskräfte, hervorgebracht durch			
	mobile Last	permanente Last	Temperatur- änd.	alle 3 zu- sammen
$\frac{x}{l}$	V_m	V_p	V_t	$V_m + V_p + V_t$
0	1500	0	0	1500
0,25	1419,5	316,0	562,5	2298,0
0,5	1103,9	631,9	1125,0	2860,8
0,75	1250,8	947,9	1687,5	3886,2
1	2031,6	1263,9	2250	5545,5

Wenn also die Gitterwände durch Vertikalständer in quadratische Felder eingeteilt sind, und in jedem Felde zwei Diagonalstangen sich kreuzen, welche nur Zugspannungen aufzunehmen fähig sind, so erhalten in jeder von beiden Tragwänden die Vertikalständer Druckspannungen, welche an den Enden $\frac{5545,5}{2} = 2772,75$ kg betragen und von da nach der Mitte hin bis auf $\frac{1500}{2} = 750$ kg abnehmen. Die Spannungen der Diagonalen aber betragen an den Enden $\frac{5545,5}{\sqrt{2}} = 3921,3$ kg und nehmen nach der Mitte hin bis auf $\frac{1500}{\sqrt{2}} = 1060,7$ kg ab.

§ 62.

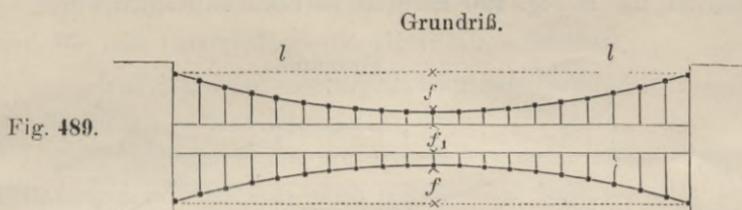
Berechnung der Spannungen in den Windketten und Windstreben.

Die vorteilhafteste Pfeilhöhe der Windketten kann man nach Gleichung 155) berechnen, indem man darin f statt h (s. Fig. 489), und indem man statt h_1 die Breite des Gitterbalkens $f_1 = 2,25$ m setzt, also aus der Gleichung:

$$215) \quad \frac{f}{f_1} = \frac{\frac{3}{4}(\delta + \Delta)}{\frac{5}{8}\delta_1}.$$

Hierin ist für δ das zulässige Verlängerungsverhältnis der Windketten zu setzen, für Δ das Temperaturendehnungsverhältnis

derselben und für δ_1 das zulässige Verlängerungsverhältnis der Gurtungen des Gitterbalkens, und zwar unter Abrechnung des



bereits durch die vertikal wirkenden Belastungen hervorgebrachten Wertes. Setzt man $f_1 = 2,25$ m, so ergeben sich aus obiger Gleichung die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Werte:

δ_1	δ	Δ	f
$\frac{6}{20000}$	$\frac{6}{20000}$	$\frac{1}{4000}$	3,7125 m
$\frac{6}{20000}$	$\frac{6}{20000}$	$\frac{1}{2000}$	5,4 m
$\frac{6}{20000}$	$\frac{8}{20000}$	$\frac{1}{4000}$	4,3875 m
$\frac{6}{20000}$	$\frac{9}{20000}$	$\frac{1}{4000}$	4,725 m
$\frac{6}{20000}$	$\frac{9}{20000}$	$\frac{1}{2000}$	6,4125 m
$\frac{5}{20000}$	$\frac{10}{20000}$	$\frac{1}{4000}$	6,075 m
$\frac{5}{20000}$	$\frac{10}{20000}$	$\frac{1}{2000}$	8,1 m

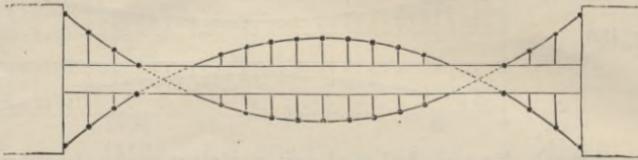
Bei der Auswahl des passendsten Wertes für f wird es darauf ankommen, wie weit man das Zusammentreffen aller ungünstigen Umstände als möglich oder wahrscheinlich betrachten will. Wollte man durch die Annahme dieses allerungünstigsten Falles bei der Wahl sich leiten lassen, so müßte man einen der letzteren größeren Werte für f wählen.

Wenn man indessen bedenkt, daß nicht leicht das Maximum der Temperaturerhöhung mit einem Orkane zusammentreffen wird, und daß selbst der Wert $\Delta = \frac{1}{4000}$ (entsprechend einer Temperaturerhöhung um $20,5^\circ$ Celsius schon reichlich hoch gegriffen ist, so erscheint die Pfeilhöhe $f = 4$ m für die Windketten als zur Not genügend, wenn auch zugegeben werden muß, daß im Interesse der Widerstandsfähigkeit der Brücke eine größere Pfeilhöhe wünschenswert sein würde — falls die Breite der Landpfeiler dies zulassen sollte. Im übrigen ist hinsichtlich des letzt-erwähnten Punktes zu berücksichtigen, daß die beiden Windketten

einander beliebig genähert werden können — im Notfalle sogar bis über die Mitte hinaus, in welchem Falle die Brücke im Grundriß gesehen die in Fig. 490 dargestellte Form annehmen würde —

Grundriß.

Fig. 490.



ohne daß dadurch in der Verteilung des Winddrucks auf Gitterbalken und Windkette etwas geändert wird.

Diese Verteilung des Winddrucks kann man nunmehr nach Gleichung 117) berechnen, indem man darin f statt h und f_1 statt h_1 setzt, ferner φ als Querschnitt der Windkette statt F und $\frac{1}{2} F_1$ statt F_1 — letzteres aus dem Grunde, weil nur die unteren beiden Gurtungen durch die Windstreben zu einer horizontalen Tragwand verbunden sind, welche den Horizontalkräften einen Widerstand entgegengesetzt.

Man erhält demnach für n die Gleichung:

$$216) \quad n = \frac{1}{1 + \frac{9}{40} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{\varphi} \cdot \frac{f_1^2}{f^2}}$$

Setzt man $E = E_1$, $F_1 = 15000$ qmm, $\varphi = 1250$ qmm, $f = 4000$ mm, $f_1 = 2250$ mm, so erhält man für n den Wert:

$$217) \quad n = 0,5393.$$

Wenn also der Winddruck $w = 0,2$ kg pro Millimeter der Brückenlänge gesetzt wird, so ergibt sich nach Gleichung 175) für die Spannung der Windkette in der Mitte der Wert:

$$218) \quad S = \frac{nw l^2}{2 \varphi f} = 9,7 \text{ kg pro Quadratmillimeter,}$$

und die in den unteren Gurtungen des Gitterbalkens durch Winddruck hervorgebrachte Spannung hat nach Gleichung 176) die Größe:

$$219) \quad S_1 = \frac{(1-n)w l^2}{\frac{1}{2} F_1 f_1} = 4,9 \text{ kg pro Quadratmillimeter.}$$

Es würde demnach bei unverändert bleibender Temperatur der Winddruck für die Windkette die Horizontalbelastung:

$$220) \quad n \cdot w = 0,10786 \text{ kg,}$$

und für den Gitterbalken die Horizontalbelastung:

$$221) \quad (1 - n)w = 0,09214 \text{ kg pro Millimeter}$$

der Brückenlage hervorbringen.

Zu diesen durch den Winddruck hervorgebrachten Horizontalbelastungen würden bei etwa gleichzeitig stattfindender Temperaturänderung von 41° Celsius noch die Temperaturbelastungen hinzukommen, welche auf dieselbe Weise wie oben (nach Gleichung 165) zu berechnen sind. Man findet, daß für diesen Fall:

$$222) \quad k = 0,0512 \text{ kg}$$

wird, d. h. bei einer Temperaturerhöhung von 41° Celsius würde der Gitterbalken der Windkette, und bei einer Temperaturerniedrigung von 41° würde die Windkette dem Gitterbalken 51,2 kg pro Meter von seiner Horizontalbelastung abnehmen. Diesen Belastungsveränderungen entsprechen die Spannungsänderungen:

$$223) \quad S' = 4,608 \text{ kg pro Quadratmillimeter}$$

für die Windkette,

$$224) \quad S_1' = 2,73 \text{ kg pro Quadratmillimeter}$$

für den Gitterbalken.

Das Maximum der durch Winddruck bei gleichzeitiger Temperaturerhöhung erzeugten Horizontalbelastung des Gitterbalkens beträgt:

$$225) \quad (1 - n)w + k = 0,14334 \text{ kg pro Millimeter.}$$

Also ist das Maximum der dadurch hervorgebrachten horizontalen Abscherungskraft für dessen horizontale Tragwand:

$$226) \quad [(1 - n)w + k]l = 4300 \text{ kg.}$$

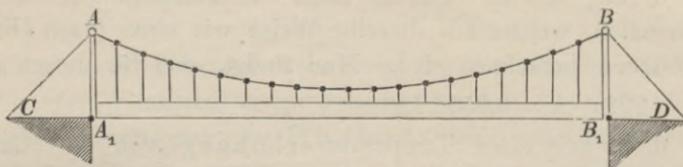
Nach der Tabelle des § 61 beträgt für jede von den beiden vertikalen Tragwänden das Maximum der vertikalen Abscherungskraft $\frac{5545,5}{2} = 2773 \text{ kg}$. Es würden also bei gleicher Anordnung der Gitterstäbe in der durch die Windstreben gebildeten horizontalen Gitterwand die Stäbe in dem Verhältnis 4300:2773 stärker gespannt werden und hiernach die Querschnitte derselben zu wählen sein.

§ 63.

Einfluß der Dehnung der Spannketten.

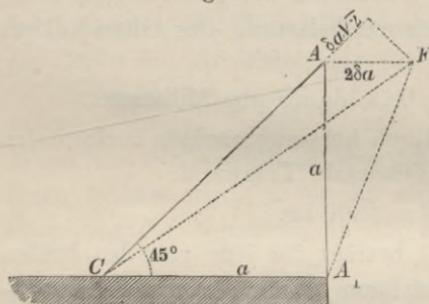
Bei der Berechnung der Spannungen in den Hauptketten und in den Tragwänden des Gitterbalkens wurden die Aufhängepunkte A und B der Kette vorläufig als absolut feste Punkte betrachtet (s. Fig. 491). Wenn die Aufhängepunkte statt dessen durch die

Fig. 491.



oberen Endpunkte der vertikalen Stangen AA_1 und BB_1 gebildet werden, welche, um ihre unteren End- und Stützpunkte drehbar, durch die Spannketten AC und BD in ihrer aufrechten Lage erhalten werden, so wird eine Dehnung dieser Spannketten zur Folge haben, daß die Punkte A und B eine Bewegung nach der Mitte hin ausführen, und der Scheitelpunkt der Kette sich senkt. Diese Senkung bedingt eine fernere Veränderung in der Lastverteilung, welche auf folgende Weise berechnet werden kann.

Fig. 492.



Für die Horizontalverschiebung des Aufhängepunktes A ergibt sich aus Fig. 492 bei dem angenommenen Neigungswinkel von 45° und dem Verlängerungsverhältnis δ die Größe $AF = 2\delta a$. Dieser Verschiebung entspricht (nach § 45) die Senkung des Kettenscheitelpunktes:

$$227) \quad s = \frac{3}{4} (2\delta a) \frac{l}{h}$$

Wenn mit Δ dasjenige Verlängerungsverhältnis der Hauptkette bezeichnet wird, welchem die gleiche Senkung des Kettenscheitelpunktes entsprechen würde, so ist:

$$228) \quad s = \frac{3}{4} \Delta \frac{l^2}{h}$$

Die Gleichsetzung dieser beiden Werte für s führt zu der Gleichung:

$$229) \quad \frac{\Delta}{\delta} = 2 \frac{a}{l}$$

Setzt man hierin $a = 4$ m, $l = 30$ m, so wird:

$$230) \quad \frac{\Delta}{\delta} = \frac{4}{15}$$

Es ist also nur nötig, die früher bereits gefundene, durch Verlängerung der Hauptkette entstehende Mehrbelastung des Gitterbalkens mit der Zahl $1 + \frac{4}{15}$ zu multiplizieren, um hiermit zugleich dem Einflusse einer gleichzeitig stattfindenden ebenso großen Dehnung der Spannketten Rechnung zu tragen. Diese Regel gilt sowohl für positive als für negative Werte des Verlängerungsverhältnisses δ .

Aus Gleichung 165) ergab sich eine Belastung von 75 kg pro Meter als die einer Temperaturerhöhung von 41° C. entsprechende Temperaturbelastung des Gitterbalkens. Durch die gleichzeitig stattfindende Temperatúrausdehnung der Spannketten wird diese Mehrbelastung um $\frac{4}{15} \cdot 75 = 20$ kg, also auf die Größe $(1 + \frac{4}{15}) \cdot 75 = 95$ kg pro Meter erhöht. Die entsprechende Temperaturspannung in den Gurtungen des Gitterbalkens betrug in der Mitte 3 kg. Dieselbe wird um $\frac{4}{15} \cdot 3 = 0,8$ kg vergrößert, nimmt also den Wert an:

$$231) \quad S'_t = (1 + \frac{4}{15}) \cdot 3 = 3,8 \text{ kg.}$$

Die von der Temperaturbelastung an den Enden des Gitterbalkens hervorgebrachte vertikale Abscherungskraft betrug 2250 kg. Dieselbe wird um $\frac{4}{15} \cdot 2250 = 600$ kg vergrößert, nimmt also den Wert an:

$$232) \quad V'_t = (1 + \frac{4}{15}) \cdot 2250 = 2850 \text{ kg.}$$

Die Spannung der Spannketten ist bei dem angenommenen Neigungswinkel von 45° stets $\sqrt{2}$ mal so groß als die Horizontalspannung der Hauptkette. Wäre also der Querschnitt der Spannkette ebenfalls $\sqrt{2}$ mal so groß als der Querschnitt der Hauptkette im Scheitelpunkte, so würde auch die Spannung pro Flächeneinheit — folglich auch das Elastizitätsausdehnungsverhältnis in beiden stets dasselbe sein. Es würde in diesem Falle z. B. bei einer

Spannung $S = 10$ kg pro Quadratmillimeter — entsprechend einem Verlängerungsverhältnis $\frac{S}{E} = \frac{1}{25000}$ von derselben Größe wie das oben angenommene Temperatúrausdehnungsverhältnis — die Ausdehnung der Spannketten eine weitere Vergrößerung der Spannungen in den Gurtungen des Gitterbalkens um 0,8 kg zur Folge haben, d. h. es würde der Einfluß einer solchen Elastizitätsausdehnung der Spannketten einer abermaligen Vergrößerung der Temperaturbelastung um 20 kg pro Meter gleichkommen.

Jedoch findet zwischen den Wirkungen der Temperaturausdehnung der Spannketten und denen der Elastizitätsausdehnung derselben der wesentliche Unterschied statt, daß das Maximum der von ersterer herrührenden Mehrbelastung — sowohl im positiven als im negativen Sinne genommen — mit jedem beliebigen Belastungszustande der Brücke zusammentreffen kann, während die Elastizitätsausdehnung erstlich stets nur im positiven Sinne vorkommt und ferner das Maximum der durch dieselbe erzeugten Mehrbelastung des Gitterbalkens stets nur mit dem Maximum der Kettenspannung zusammentrifft — und dieses tritt gerade bei dem Minimum der Temperatur ein. Es wird daher in Wirklichkeit die wegen Elastizitätsausdehnung der Spannketten in Rechnung zu bringende Mehrbelastung des Gitterbalkens weniger als 20 kg pro Meter betragen und der genauere Wert derselben auf folgende Weise zu berechnen sein.

Da die Elastizitätsausdehnung der Spannketten — wie oben gezeigt wurde — denselben Einfluß hat, wie wenn die Ausdehnung der Hauptkette im Verhältnis 1 zu $1 + \frac{4}{15}$ vergrößert, oder wie wenn deren Elastizitätsmodulus im Verhältnis $1 + \frac{4}{15}$ zu 1 verkleinert würde, so findet man die unter Mitwirkung jener Spannkettenverlängerung stattfindende Lastverteilung, indem man überall in den betreffenden Gleichungen die Zahl E durch die Zahl $\frac{15}{19} E$ ersetzt. Man erhält dann nach Gleichung 171) für den Lastverteilungskoeffizienten der permanenten Last den Wert:

$$233) \quad n_1 = 0,86184 \quad (\text{statt } n = 0,887\ 656).$$

Es wird also der von dem Gitterbalken übernommene Teil der permanenten Last im Verhältnis:

$$234) \quad \frac{1 - n_1}{1 - n} = \frac{0,13816}{0,11234} = 1,23,$$

also um 23 Prozent vergrößert, und in demselben Verhältnis wachsen die dadurch hervorgebrachten Spannungen in den Gurtungen, sowie die vertikalen Abscherungskräfte. Die Spannung S_p in den Gurtungen betrug in der Mitte 1,685 kg; dieselbe nimmt nun den Wert an:

$$235) \quad S'_p = 1,685 \cdot 1,23 = 2,07 \text{ kg.}$$

Die vertikale Abscherungskraft V_p betrug an den Enden 1263,9 kg und erhält nunmehr die Größe:

$$236) \quad V'_p = 1263,9 \cdot 1,23 = 1554,3 \text{ kg.}$$

Die Korrektur der Werte für die von der mobilen Belastung hervorgebrachten Spannungen ist ebenfalls in der Weise auszuführen, daß man in den betreffenden Gleichungen überall die Zahl E durch die Zahl $\frac{1}{3} E$ ersetzt, wobei zu berücksichtigen ist, daß auch die ungünstigsten Belastungszustände nun nicht mehr dieselben bleiben. Statt des in Fig. 481 dargestellten (dem Werte $u = 0,5715 \cdot l$ entsprechenden) Belastungszustandes ergibt sich nun der dem Werte $u = 0,685 \cdot l$ entsprechende Belastungszustand als derjenige, bei welchem die Spannung S_m in der Mitte am größten wird. Man findet für diesen Belastungszustand $n_1 = 0,7609$ und:

$$237) \quad S'_m = 1,12 \text{ kg (statt } S_m = 0,95 \text{ kg).}$$

Ebenso würde man für $x = \frac{1}{2} l$ die zugehörigen Werte $n_1 = 0,4082$ und $S'_m = 1,445 \text{ kg}$ finden. Das Maximum der vertikalen Abscherungskraft V_m betrug (nach der Tabelle des § 61) 2031,6 kg und ergab sich für den dem Werte $v = -0,2616 \cdot l$ entsprechenden Belastungszustand. Statt dessen erhält man nun die Werte $v = -0,245 \cdot l$ und:

$$238) \quad V'_m = 2373 \text{ kg.}$$

§ 64.

Rekapitulation der Rechnungsergebnisse.

Für die Belastungen, Querschnitte und sonstigen Dimensionen wurden die nachfolgend zusammengestellten Zahlenwerte angenommen:

$$\begin{aligned} p &= 375 \text{ kg pro Meter (permanente Last),} \\ m &= 200 \text{ „ „ „ (mobile Last),} \\ w &= 200 \text{ „ „ „ (Winddruck),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= 7500 \text{ qmm (Querschnittssumme der Hauptketten),} \\
 F \cdot \sqrt{2} &= 10600 \text{ ,, (Querschnittssumme der Spannketten),} \\
 \varphi &= 1250 \text{ ,, (Querschnitt jeder der beiden Windketten),} \\
 F_1 &= 15000 \text{ ,, (Querschnittssumme der vier Gurtungen des} \\
 &\quad \text{Gitterbalkens),} \\
 h &= 4 \text{ m (Pfeilhöhe der Hauptketten),} \\
 h_1 &= 1,5 \text{ m (Höhe des Gitterbalkens),} \\
 f &= 4 \text{ m (Pfeilhöhe der Windketten),} \\
 f_1 &= 2,25 \text{ m (Breite des Gitterbalkens),} \\
 2l &= 60 \text{ m (Spannweite der Brücke).}
 \end{aligned}$$

Die Zugspannung der unteren Gurtungen des Gitterbalkens in der Mitte der Brücke wird am größten bei ungünstigstem Belastungszustande, höchster Temperatur, stärkstem Winddruck, und zwar an der dem Winde abgewendeten Seite. Dieses Maximum setzt sich (nach den Gleichungen 235, 237, 231, 219, 224) aus den folgenden einzelnen Teilen zusammen:

$$\begin{aligned}
 S'_p &= 2,07 \text{ kg pro Quadratmillimeter (permanente Last),} \\
 S'_m &= 1,12 \text{ ,, ,, ,, (mobile Last),} \\
 S'_t &= 3,8 \text{ ,, ,, ,, (Temperaturbelastung),} \\
 S'_w &= 4,9 + 2,73 \text{ kg pro ,, (Winddruck bei höchster} \\
 &\quad \text{Temperatur).}
 \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Zahlen erhält man für dieses Spannungsmaximum den Wert:

$$239) S(\max) = 14,62 \text{ kg pro Quadratmillimeter.}$$

Die gleichzeitig in den oberen Gurtungen in der Mitte der Brücke stattfindende Druckspannung setzt sich aus den ersteren drei Zahlenwerten zusammen und beträgt 7 kg pro Quadratmillimeter.

Das Maximum der vertikalen Abscherungskraft an den Enden des Gitterbalkens setzt sich (nach den Gleichungen 236, 238, 232) zusammen aus folgenden Teilen:

$$\begin{aligned}
 V'_p &= 1554 \text{ kg (permanente Last),} \\
 V'_m &= 2373 \text{ ,, (mobile Last),} \\
 V'_t &= 2850 \text{ ,, (Temperaturbelastung).}
 \end{aligned}$$

Durch Addition dieser drei Zahlenwerte erhält man für das Maximum der von den Gitterstäben aufzunehmenden Vertikalkraft den Wert:

$$240) V(\max) = 6777 \text{ kg.}$$

Ebenso groß ist auch das Maximum der Spannungssumme für die Hängestangen (AA_1 und BB_1 in Fig. 463), an welchen die Enden des Gitterbalkens aufgehängt sind.

Bei voller Belastung würde die von der mobilen Last allein an den Enden des Gitterbalkens hervorgebrachte Vertikalkraft $\frac{200}{375} \cdot 1554 = 829$ kg betragen. Durch Subtraktion der Zahl V'_m von diesem Werte erhält man $829 - 2373 = -1544$ kg als Minimum der von der mobilen Last allein hervorgebrachten Vertikalkraft. Man erhält also für das Minimum der totalen Vertikalkraft an den Enden des Gitterbalkens den Wert:

$$241) V(\min) = +1554 - 1544 - 2850 = -2840 \text{ kg.}$$

Es müssen also die betreffenden Hängestangen stark genug sein, um auch einen Druck von 2840 kg gelegentlich aufnehmen zu können.

Die Spannung der Hauptketten erreicht ihren größten Wert bei voller Belastung der Brücke und niedrigster Temperatur. Die Totalbelastung der vollbelasteten Brücke beträgt $375 + 200 = 575$ kg pro Meter, wovon die Kette (nach Gleichung 233) den Teil $0,862 \cdot 575 = 495,56$ kg pro Meter zu tragen hat. Hierzu kommt noch die Temperaturbelastung (Kältebelastung), für welche im vorigen Paragraphen die Größe 95 kg pro Meter gefunden wurde. Die Kette hat also im ungünstigsten Falle die Belastung 590,56 kg pro Meter ihrer Horizontalprojektion zu tragen. Dieser Belastung entspricht (nach Gleichung 166) die Spannung:

$$242) S = \frac{0,59056 \cdot 30000^2}{2 \cdot 4000 \cdot 7500} = 8,86 \text{ kg pro Quadratmillimeter}$$

für den Scheitelpunkt der Kette. Nach den Aufhängepunkten hin nimmt — wenn der Querschnitt überall gleich groß ist — die Spannung zu bis zur Größe:

$$243) 8,86 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{8}{30}\right)^2} = 9,13 \text{ kg pro Quadratmillimeter.}$$

Die Spannketten erhalten ebenfalls eine Spannung von 8,86 kg pro Quadratmillimeter.

Wenn das Eigengewicht der Kette zu 4500 kg angenommen wird, so haben die Hängestangen die Maximalbelastung $590,56 \cdot 60 - 4500 = 30934$ kg zu tragen, erhalten also eine jede die Spannung: $\frac{30934}{N}$, wenn ihre Anzahl = N ist.

Die Windketten würden bei stärkstem Winde und gleichzeitiger Temperaturerniedrigung um 41° C. (nach den Gleichungen 218 und 223) in der Mitte die Spannung erhalten:

$$9,7 + 4,6 = 14,3 \text{ kg pro Quadratmillimeter.}$$

Für die von den Windstreben aufzunehmende größte horizontale Abscherungskraft wurde (in Gleichung 226) die Größe 4300 kg gefunden.

Die horizontalen Stangen, welche den Gitterbalken mit einer der Windketten verbinden, erhalten (nach den Gleichungen 220 und 222) eine jede die Maximalspannung

$$\frac{(107,86 + 51,2) \cdot 60}{N_1} = \frac{9540}{N_1},$$

wenn die Anzahl derselben $= N_1$ ist.

§ 65.

Vorteilhafteste Aufhängungsweise für den Gitterbalken.

Bei der Berechnung des Lastverteilungskoeffizienten n für die permanente Last wurde die Wirkung derselben auf eine Weise behandelt, welche nur bei einer besonderen Art der Aufstellung der Brücke gerechtfertigt sein würde. Es wurde nämlich angenommen, daß die leere Brücke im entlasteten Zustande — d. h. auch von der Wirkung ihres Eigengewichts gänzlich befreit — in vollkommen spannungslosem Zustande sich befunden hatte und daß das Eigengewicht wie eine neu hinzukommende fremde Last erst nachher seine Wirkung auszuüben begann. Da in Wirklichkeit aber die Wirkung des Eigengewichts von Anfang an schon vorhanden war, so wird die gemachte Voraussetzung nur dann zutreffen, wenn die Aufstellung zufällig auf eine solche besondere Weise ausgeführt wurde, daß die Höhendifferenz zwischen dem Mittelpunkte der Brückenbahn und deren beiden Endpunkten genau dieselbe Größe erhielt, wie sie aus jener Voraussetzung sich ergeben würde.

Indessen auch dann, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, behalten die oben gefundenen Resultate ihre Gültigkeit, sobald man nur eine etwaige Abweichung von der genannten Aufstellungsweise als eine zu den bisher schon untersuchten Ursachen von Spannungen neu hinzukommende Spannungsursache mit in Rech-

nung bringt. Es würde also noch zu untersuchen sein, welche Änderungen die bei einem gegebenen Temperatur- und Belastungszustande bereits vorhandenen Spannungen erleiden würden durch das Anziehen der Schrauben an den Hängestangen, welche den Gitterbalken mit der Kette verbinden. Mit dieser Untersuchung läßt sich sodann noch eine zweite verbinden, die nämlich, auf welche Weise bei der Aufstellung jenes Anziehen der Schrauben erfolgen müsse, damit das beim Zusammentreffen aller ungünstigen Umstände eintretende Maximum der Spannungen möglichst klein ausfalle.

Für die von der permanenten Last allein hervorgebrachte Senkung des Mittelpunktes der Brückenbahn erhält man nach Gleichung 169, wenn man darin, um die Dehnung der Spannketten zu berücksichtigen, die Zahl n durch die Zahl n_1 (Gleichung 233) ersetzt, den Wert:

$$244) \quad s = \frac{5}{6} \cdot \frac{0,13816 \cdot 0,375 \cdot 30\,000^4}{20\,000 \cdot 15\,000 \cdot 1500^2} = 51,81 \text{ mm,}$$

und für die einem solchen Biegunszustande entsprechende Spannung in den Gurtungen wurde der Wert $S'_p = 2,07$ kg pro Quadratmillimeter gefunden (Gleichung 235). Also nur dann, wenn der — im spannungslosen Zustande geradlinig vorausgesetzte — Gitterbalken diese Durchbiegung nach der Aufstellung wirklich zeigte, würden die oben gefundenen Spannungen die wirklich eintretenden sein. Angenommen aber z. B., man hätte hinterher durch Anziehen der Schrauben an den Hängestangen bewirkt, daß der Gitterbalken seine ursprüngliche, dem spannungslosen Zustande entsprechende geradlinige Form wieder annahm, so würde damit der von der permanenten Last zu der Totalspannung (Gleichung 239) gelieferte Beitrag von 2,07 kg ganz in Wegfall gebracht und die Maximalspannung von 14,62 auf 12,55 kg reduziert. Zugleich würde dadurch bewirkt, daß der bisher von dem Gitterbalken getragene Teil der permanenten Last im Betrage von 51,81 kg pro Meter nunmehr von der Kette mit übernommen wird.

Wäre man aber mit dem Anziehen der Schrauben noch weiter gegangen, hätte man dasselbe z. B. soweit fortgesetzt, daß eine Durchbiegung nach oben hin eintrat von derselben Größe $s = 51,81$ mm, so würde eine weitere Abnahme jener Maximalspannung um 2,07 kg, also eine Reduktion derselben bis auf 10,46 kg

erfolgen, während die Mehrbelastung der Kette auf die Größe $2 \cdot 51,81 = 103,62$ kg pro Meter der Horizontalprojektion gesteigert würde.

Um zu erfahren, wie weit man mit einer solchen, künstlich hervorzubringenden Veränderung in der Lastverteilung vorgehen darf, hat man zunächst zu untersuchen, wie groß bei der ursprünglichen vorausgesetzten Aufstellungsweise das einer Durchbiegung des Gitterbalkens nach oben hin entsprechende negative Biegemoment im ungünstigsten Falle werden konnte, und zwar in der Mitte des Gitterbalkens. Denn die Tabelle des § 59 zeigt, daß es, obwohl im Abstände $x = \frac{1}{2} l$ von der Mitte die mobile Last ihre Wirkung am stärksten äußert, doch wegen überwiegenden Einflusses der übrigen Biegungsursachen ausreicht, hierbei ausschließlich die Biegungsspannungen in der Mitte zu berücksichtigen.

Für die bei voller Belastung der Brücke von der mobilen Last allein hervorgebrachte Spannung in den unteren Gurtungen erhält man nach Gleichung 235) den Wert:

$$245) \quad \mathcal{S} = \frac{3}{375} \cdot 2,07 = 1,105 \text{ kg.}$$

Wenn man hiervon den in Gleichung 237) gefundenen Wert $S'_m = 1,12$ kg subtrahiert, so erhält man:

$$246) \quad \mathcal{S}(\text{min}) = -0,015 \text{ kg}$$

als kleinste Zugspannung oder größte Druckspannung, welche durch die mobile Last allein an dieser Stelle hervorgebracht werden kann. (Im Abstände $x = \frac{1}{2} l$ würde man $\mathcal{S}(\text{min}) = -0,616$ kg finden.) Zu dieser negativen Spannung kommt noch die dem Temperaturminimum entsprechende gleichfalls negative Temperaturspannung von $-3,8$ kg, sowie die vom Winddruck bei niedrigster Temperatur hervorgebrachte Spannung $-(4,9 - 2,73) = -2,17$ kg. Man erhält also mit Hinzurechnung der positiven Spannung $S'_p = +2,07$ kg für die größte negative Spannung, welche in der unteren Gurtung bei der früher angenommenen Aufstellungsweise eintreten konnte, den Wert:

$$247) \quad S(\text{min}) = +2,07 - 0,015 - 3,8 - 2,17 = -3,915 \text{ kg.}$$

Es erweist sich hiernach in der Tat als zweckmäßig, die erwähnte Veränderung in der Lastverteilung wirklich auszuführen, und zwar gerade in der Weise, wie sie oben als zweites Beispiel gewählt wurde, nämlich die Mitte des Gitterbalkens bis zur Höhe

von 51,81 mm über die natürliche, dem spannungslosen Zustande entsprechende Lage hinaufzuschrauben. Denn während bei der ursprünglich vorausgesetzten Aufstellungsweise die Spannung in der Mitte der unteren Gurtung zwischen den Extremen + 14,62 kg und - 3,915 kg schwanken würde — erreicht man durch die erwähnte Veränderung, daß nunmehr diese Spannung zwischen den Grenzen + 10,48 kg und - 8,055 kg bleibt, während die Spannung in der Kette dabei nur auf + 10,41 kg in der Mitte und auf + 10,73 kg in der Nähe der Aufhängepunkte gesteigert wird, entsprechend der Maximalbelastung $590,56 + 103,62 = 694,18$ kg pro Meter der Horizontalprojektion. Die Maximalbelastung der Hängestangen würde dadurch auf $30934 + 60 \cdot 103,62 = 37151$ kg, die Spannung jeder einzelnen auf $\frac{37151}{N}$ vergrößert.

Die an den Enden des Gitterbalkens wirkende vertikale Abscherungskraft wird um die Größe $30 \cdot 103,62 = 3109$ kg vermindert. Man erhält also nach den Gleichungen 240) und 241) die Werte:

$$248) \quad V(\max) = + 6777 - 3109 = + 3668 \text{ kg.}$$

$$249) \quad V(\min) = - 2840 - 3109 = - 5949 \text{ kg.}$$

Es müßten daher die Vertikalstangen (AA_1 und BB_1 in Fig. 463), an welchen die Enden des Gitterbalkens aufgehängt sind, stark genug sein, um gelegentlich eine Druckspannung von 5949 kg aufnehmen zu können.

Da die Durchbiegung von 51,81 mm einer Belastung von 51,81 kg pro Meter für den Gitterbalken allein, oder einer Belastung der Brücke mit 375 kg pro Meter entspricht, so würde bei der hier empfohlenen Aufstellungsweise die Hinzufügung einer fremden Belastung von 375 kg pro Meter jene Durchbiegung wieder zum Verschwinden bringen. Man kann daher der Vorschrift für die Aufstellung auch die folgende Form geben: der Gitterbalken soll so aufgehängt werden, daß derselbe beim Belasten der Brücke mit einer fremden Belastung von 375 kg pro Meter seine natürliche Form annimmt — d. h. diejenige Form, welche derselbe z. B. annehmen würde, wenn man denselben auf die Seite legte auf horizontaler Ebene — und zwar bei einer Temperatur, welche das arithmetische Mittel bildet von höchster und niedrigster Temperatur.

Diese fremde Belastung kann auch durch eine Temperaturbelastung dargestellt werden. Einer Temperaturerhöhung von 41° C. entsprach eine Belastung von 95 kg pro Meter für den Gitterbalken; daraus ergibt sich für diejenige Temperaturerhöhung, bei welcher der Gitterbalken mit 51,81 kg pro Meter belastet wird, die Größe:

$$250) \quad t = 41 \cdot \frac{51,81}{95} = 21,24^{\circ} \text{ C.}$$

Man kann daher denselben Zweck auch durch eine solche Aufstellungsweise erreichen, bei welcher der unbelastete Gitterbalken seine natürliche Form annimmt, wenn die Temperatur um $21,24^{\circ}$ C. über die mittlere Temperatur sich erhebt.

§ 66.

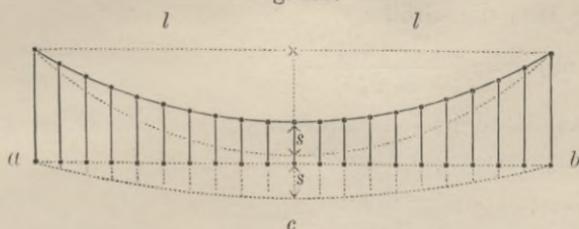
Rechtfertigung der angewendeten Methode.

Gegen die angewendete Methode lassen sich noch einige Einwendungen erheben. Bei der Berechnung des Lastverteilungskoeffizienten n wurden verschiedene Größen vernachlässigt und Annahmen gemacht, welche nicht in aller Strenge zutreffend erscheinen. Infolgedessen sind die gewonnenen Resultate noch mit einigen Fehlern und Ungenauigkeiten behaftet. Es läßt sich indessen nachweisen, einerseits, daß die begangenen Fehler überhaupt klein sind, andererseits, daß dieselben einander zum Teil kompensieren, in der Weise, daß ihr Einfluß auf das Resultat ohne alle praktische Bedeutung ist. Es reicht hin, diesen Beweis zu führen unter Voraussetzung des einfachsten, in Fig. 463 dargestellten Falles, in welchem die Aufhängepunkte der Kette als feste Punkte behandelt wurden; auch ist es zulässig, die Differenz zwischen dem in Gleichung 172) gefundenen ungenauen Werte des Lastverteilungskoeffizienten n und dem von Fehlern und Ungenauigkeiten befreiten genaueren Werte dieses Koeffizienten als Maßstab für die Beurteilung des Einflusses der begangenen Fehler anzunehmen.

Die Berechnung der Lastverteilung geschah in der Weise, daß die Senkungen in der Mitte einander gleich gesetzt wurden, d. h. diejenigen Senkungen, welche jedes der beiden Systeme — Kette und Gitterbalken — für sich allein unter Einwirkung des von demselben übernommenen Lastanteiles in der Mitte erleiden

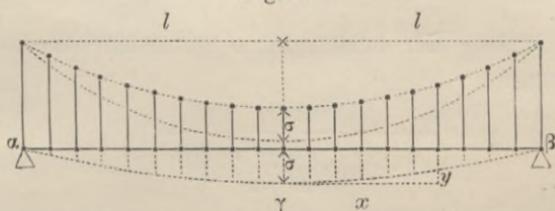
würde. Wenn man indessen bedenkt, daß die Linie, welche die unteren Endpunkte der vertikalen Hängestangen nach eingetretener Verlängerung der Kette bilden würde, falls der Gitterbalken nicht vorhanden wäre, eine Parabel ist (Fig. 493), während die

Fig. 493.



Linie, welche dieselben Punkte bilden würde, wenn ausschließlich der Gitterbalken vorhanden wäre, eine elastische Linie ist (Fig. 494), daß also diese zwei Kurven einander nicht decken

Fig. 494.



können, so erscheint es richtiger — anstatt die Ordinaten s und σ der Scheitelpunkte beider Kurven einander gleich zu setzen — vielmehr die mittlere oder durchschnittliche Größe der längs der ganzen Spannweite zu errichtenden Ordinaten für beide Kurven einander gleich zu setzen und hiernach die Lastverteilung zu berechnen.

Die mittlere oder durchschnittliche Größe der Ordinaten einer solchen Kurve ist zu definieren als die Höhe eines Rechteckes von gleichem Flächeninhalt und gleicher Breite mit der von der betreffenden Kurve begrenzten Fläche. Da in beiden Figuren die Breite des Rechteckes dieselbe ist, nämlich $= 2l$, so kann man statt dieser mittleren Höhen auch die beiden Flächeninhalte selbst einander gleich setzen. Die Parabelfläche abc (Fig. 493) hat den Inhalt:

$$251) \quad J = \frac{2}{3} \cdot s \cdot 2l.$$

Nach Substitution des in Gleichung 168) für s gefundenen Wertes nimmt diese Gleichung die Form an:

$$252) \quad J = \frac{np l^4}{2 E F h^2}.$$

Die Pfeilhöhe der elastischen Linie $\alpha\gamma\beta$ (Fig. 494) hat nach Gleichung 169) die Größe:

$$253) \quad \sigma = \frac{5}{6} \frac{(1-n) p l^4}{E_1 F_1 h_1^2},$$

und die Ordinate im Abstände x von der Mitte ist (nach der Theorie der elastischen Linie):

$$254) \quad y = \frac{(1-n)p}{E_1 F_1 h_1^2} \left(l^2 x^2 - \frac{x^4}{6} \right).$$

Man erhält also für den Flächeninhalt der Fläche $\alpha\beta\gamma$ die Gleichung:

$$255) \quad J = 2 \int_{x=0}^{x=l} (\sigma - y) dx = \frac{1}{5} \frac{(1-n) p l^5}{E_1 F_1 h_1^2}.$$

Die Gleichsetzung der beiden für J gefundene Werte führt zu der Gleichung:

$$256) \quad n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{5}{2} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2}}.$$

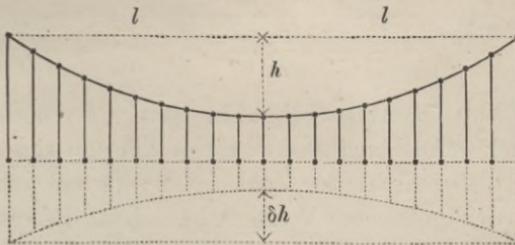
Wenn man nach dieser Gleichung — anstatt nach Gleichung 171) — den Wert von n berechnet, so erhält man $n = 0,88352$ (statt $0,887656$), und $1 - n = 0,11648$ (statt $0,112344$). Es führt also diese Korrektur zu einem etwas kleineren Werte für n ; indessen beträgt der begangene Fehler selbst für die Werte von $1 - n$ nur zirka 3,7 Prozent.

Die Bedenken gegen die früher angewendete Methode verschwinden aber vollends, wenn man berücksichtigt, daß gleichzeitig noch ein anderer Fehler begangen wurde, durch welchen der erstere zum Teil wieder aufgehoben wird, insofern die Korrektur dieses zweiten Fehlers für sich allein zu einem größeren Werte für die Zahl n führen würde.

Dieser zweite Fehler bestand darin, daß die Längenänderungen der vertikalen Hängestangen unberücksichtigt geblieben sind. Wenn diese Hängestangen sämtlich in dem Verhältnis δ sich verlängerten, während die Kette ihre ursprüngliche Länge bei-

behält (Fig. 495), so würden die unteren Endpunkte der Hängestangen eine Parabel bilden von der Pfeilhöhe $\delta \cdot h$. Da diese Parabel ihre konvexe Seite nach oben wendet, so würde man diese Pfeilhöhe $\delta \cdot h$ in Abrechnung zu bringen haben von derjenigen

Fig. 495.



Senkung s , welche durch die Verlängerung der Kette entsteht. Man erhält also unter der Voraussetzung, daß die Kette ebenfalls im Verhältnis δ sich verlängert, für die wirkliche Senkung der Fahrbahnlinie in der Mitte den Wert:

$$257) \quad s - \delta h = \frac{3}{4} \delta \frac{l^2}{h} - \delta h,$$

oder nach Wiederherstellung des früher unterdrückten Gliedes $\frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}$ (in Gleichung 147) den Wert:

$$258) \quad s - \delta h = \frac{3}{4} \delta \frac{l^2}{h} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2} \right) - \delta h.$$

Diese Gleichung nimmt nach Substitution des Wertes $\delta = \frac{H}{FE}$ = $\frac{np l^2}{2EFh}$ die Form an:

$$259) \quad s - \delta h = \frac{3}{4} \frac{np l^4}{EFh^2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2} \right),$$

und wenn man diesen Wert an die Stelle des in Gleichung 168) gefundenen Wertes von s setzt, so erhält man aus Gleichung 170) für den Lastverteilungskoeffizienten n den Wert:

$$260) \quad n = \frac{1}{1 + \frac{9}{20} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2} \right)}.$$

Diese Gleichung liefert für n einen größeren Wert als Gleichung 171), nämlich den Wert $n = 0,88884$ (statt $0,887656$).

Es wurde also durch den zweiten Fehler der erstere wenigstens zum Teil wieder aufgehoben.

Wenn man endlich beide Korrekturen zugleich ausführt, so erhält man für den Lastverteilungskoeffizienten n die genauere Gleichung:

$$261) \quad n = \frac{1}{1 + \frac{15}{32} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right)},$$

welche den Wert liefert $n = 0,88474$ (statt $0,887656$) und zeigt, daß die früher gefundenen Werte für n nur um zirka $\frac{1}{3}$ Prozent — und selbst diejenigen der Zahl $1 - n$ nur um zirka 2,6 Prozent — von den genaueren Werten abweichen. Es erscheint hiernach die oben angewendete einfachere Methode hinreichend gerechtfertigt.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297584