

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw. ....

3133

94

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297582



x

2.711





# Lehrbuch

der

# Graphischen Statik

Zum Gebrauch für mittlere technische Lehranstalten,  
Bau-, Maschinen- und Gewerbeschulen

Bearbeitet

von

**J. SCHLOTKE**

Direktor a. D. der Gewerbeschule zu Hamburg

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage

Mit 156 Figuren



Dresden

Verlag von Gerhard Kühtmann

1902

x  
2.711

L. Lehrbuch

Graphischen Statik

Buch Gebrauch für militäre Technische Lehranstalten  
B. v. Maschinen- und Gewerbeschulen

**BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW**

II 3133

Akc. Nr. 2854 | 49



## VORWORT.

*Die vorliegende Bearbeitung der graphischen Statik ist zunächst für solche, welche sich einem technischen Fache widmen wollen, als Einführung in diesen Teil der Mechanik bestimmt. — Sie enthält eine möglichst einfache Entwicklung der nötigen Gesetze und eine Reihe von Aufgaben aus der Praxis, deren grössere Zahl dem Baufache entnommen ist, in welchem ja die graphische Statik die häufigste und nützlichste Anwendung findet.*

*Für den Anfänger wird es von grossem Nutzen sein, wenn derselbe die ihm gestellten Aufgaben einmal mit Hilfe der graphischen Methoden löst und nachträglich die gefundenen Resultate möglichst durch die Rechnung kontrolliert. — Hierdurch wird ihm vortreffliche Gelegenheit geboten, die statischen Gesetze zu wiederholen und einzuprägen und grosse Übung in der Lösung von Aufgaben zu erlangen. — Zugleich stellt sich dabei heraus, welchen Grad der Genauigkeit die stets mit den unvermeidlichen kleinen Zeichenfehlern behafteten Konstruktionen gewähren.*

**Der Verfasser.**

### Vorwort zur zweiten Auflage.

*Während die Anordnung des Stoffes im Ganzen beibehalten wurde, sind den Übungsaufgaben weitere hinzugefügt worden. Es dürfte sich empfehlen für die Beispiele von S. 91 an bis zum Schlusse des Abschnittes VII als Längenssstab  $1\text{ m} = 1\text{ cm}$  und als Kräftenssstab  $1000\text{ kg} = 1\text{ cm}$  anzunehmen.*

**Der Verfasser.**



# INHALT.

---

	Seite
Einleitung . . . . .	1
I. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, welche in einer Ebene liegen . . . . .	3
II. Das Seilpolygon von Kräften, welche in einer Ebene liegen . . . . .	13
III. Graphische Darstellung statischer Momente . . . . .	22
IV. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen eines Kräftesystems . . . . .	34
V. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, welche nicht in einer Ebene liegen . . . . .	46
VI. Vom Schwerpunkt . . . . .	52
VII. Die Fachwerkträger . . . . .	75
VIII. Der belastete Balken . . . . .	106
IX. Stabilität der Stützmauern. a) Wasserdruck, b) Erddruck . . . . .	135
X. Stützlinien und Druckpolygone in Gewölben . . . . .	153
Stützlinie in einem Schornstein . . . . .	161

---

## Einleitung.

---

Die graphische Statik sucht die Lösung statischer Aufgaben auf geometrischem Wege zu erreichen. Sie setzt demnach neben der Bekanntschaft mit den Grundgesetzen der Statik auch eingehende Kenntnisse der ebenen und körperlichen Geometrie sowie der Trigonometrie voraus.

Die einfachsten Gesetze, auf welche die graphische Statik, wie die Statik überhaupt begründet wird, mögen im Folgenden kurz zusammengestellt werden.

1. Zwei in derselben Geraden liegende gleich grosse aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte heben sich auf.

2. Der Angriffspunkt einer Kraft kann auf der Richtungslinie derselben beliebig verlegt werden.

3. Befindet sich ein System von Kräften im Gleichgewicht, so hebt jede einzelne Kraft die Wirkung aller übrigen auf.

4. Einem Kraftsystem, welches im Gleichgewicht ist, kann man andere Kräfte, welche sich aufheben, beliebig hinzufügen, ohne dass der Gleichgewichtszustand zerstört wird.

Wenn die Wirkung mehrerer Kräfte durch eine einzige Kraft hervor gebracht werden kann, so heisst die letztere die Resultante der ersten Kräfte. — Fügt man demnach einem Kraftsystem noch eine, der Resultante desselben gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft hinzu, so wird Gleichgewicht eintreten. — Hiernach können wir das Gesetz 3) auch so aussprechen:

Befindet sich ein System von Kräften im Gleichgewicht, so ist jede einzelne Kraft gleich aber entgegengesetzt gerichtet der Resultante sämtlicher übrigen Kräfte.

5. Die Resultante von beliebig vielen Kräften, deren Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen, ist gleich der algebraischen Summe der Kräfte.

Die Möglichkeit, dass Aufgaben der Statik in geometrische Aufgaben verwandelt werden können, beruht bekanntlich darauf, dass man Kräfte durch Strecken darstellen kann. — Auf der Richtungslinie einer Kraft



werden so viele Längeneinheiten nach einem gegebenen Massstabe aufgetragen, als die Kraft Gewichtseinheiten zählt.

Sind mehrere Kräfte auf diese Weise durch Strecken, welchen ein und derselbe Massstab zu Grunde liegt, dargestellt, so verhalten sich die Strecken zu einander, wie die ihnen entsprechenden Kräfte.

6. Das Kräfteparallelogramm. Das für die ganze Statik fundamentale Gesetz vom Kräfteparallelogramm lautet bekanntlich:

Wenn auf jeder der Richtungslinien zweier Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  von ihrem Schnittpunkte  $a$  aus so viele Längeneinheiten nach einem gegebenen Massstabe (Kräftemassstab) aufgetragen werden, als die zugehörige Kraft Gewichtseinheiten enthält, und durch die Endpunkte  $b$  und  $c$  der so gefundenen Strecken Parallelen zu den Richtungslinien  $ac$  und  $ab$  gelegt werden, so entsteht hierdurch das Parallelogramm  $abdc$ . — Die Diagonale dieses Parallelogramms ist die Richtungslinie der Resultante  $R$  der beiden Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ ; die Anzahl ihrer Längeneinheiten nach dem gegebenen Massstabe gemessen, giebt die Zahl der die Grösse von  $R$  bestimmenden Gewichtseinheiten an.

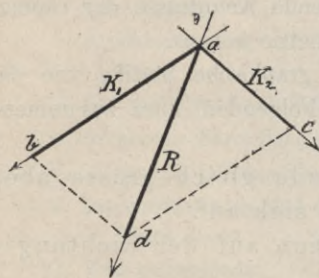
— Die Richtung der Resultante ergibt sich, wenn man die Diagonale  $ad$  von dem Schnittpunkte der gegebenen Kräfte nach dem gegenüberliegenden Eckpunkte des Parallelogramms, also von  $a$  nach  $d$  verfolgt.

Mit Hilfe dieses Gesetzes kann man diejenige Einzelkraft ermitteln, welche die Wirkung zweier oder mehrerer Kräfte hervorbringt.

Umgekehrt kann man auch eine Einzelkraft  $R$  durch zwei andere Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  ersetzen. — Die letzteren heissen alsdann Seitenkräfte (Komponenten) von  $R$ .

Die Resultante von mehreren Kräften ist zu ermitteln, wenn die Gesamtwirkung jener Kräfte nach Richtung und Grösse beurteilt werden soll.

Die Seitenkräfte einer gegebenen Kraft  $R$  müssen aufgesucht werden, wenn die Wirkung von  $R$  nach gegebenen Richtungen (welche nicht mit der Richtungslinie von  $R$  zusammenfallen) zu bestimmen ist. —





# I. Abschnitt.

## Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, welche in einer Ebene liegen.

1. Wirken zwei Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  (Fig. 1), welche nicht in derselben Geraden liegen, auf einen Punkt A, so findet man die Resultante R durch Konstruktion des Kräfteparallelogramms ABCD. — Wir werden jedoch R künftig stets auf folgende Weise darstellen:

Von einem beliebigen Punkte a der Zeichenfläche ziehen wir die Gerade ab parallel zu  $K_1$  und tragen auf derselben die Strecke  $ab = AB = K_1$  ab. — Die Richtung dieser Linie deuten wir durch die Pfeilspitze im Endpunkte b an. — Von b aus ziehen wir eine zweite Gerade bc parallel und gleich gerichtet zu  $K_2$  und tragen auf derselben die

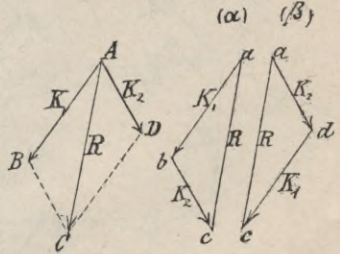


Fig. 1.

Strecke  $bc = AD = K_2$  ab. — Die Gerade ac, welche den Anfangspunkt a des Kräftezuges abc mit dem Endpunkt c verbindet, stellt die Resultante der gegebenen Kräfte ihrer Grösse und Richtung nach dar. — Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Congruenz der Dreiecke abc und ABC.

Um die Resultante zweier in einer Ebene liegenden Kräfte darzustellen, legt man also die Kräfte parallel zu ihren gegebenen Richtungen so aneinander, dass die Richtungspfeile in dem Kräftezuge denselben Sinn haben. — Hierbei ist es gleichgiltig, mit welcher der beiden Kräfte man beginnt (s. Fig. 1  $\alpha$  und  $\beta$ ). — Die Verbindungslinie ac des Anfangspunktes mit dem Endpunkte des Kräftezuges stellt die Resultante ihrer Grösse und Richtung nach dar. — Durch den Schnittpunkt der gegebenen Kräfte ist dann die Gerade AC parallel zu ac zu ziehen und auf der letzteren die Strecke  $AC = ac$  abzutragen.

2. Soll eine gegebene Kraft R (Fig. 2, Seite 4) in zwei Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ , welche nach gegebenen Richtungen wirken, zerlegt werden, so findet man die Grössen der Seitenkräfte, wenn man durch die Endpunkte einer Geraden ac, welche gleich und parallel R ist, die zu den gegebenen

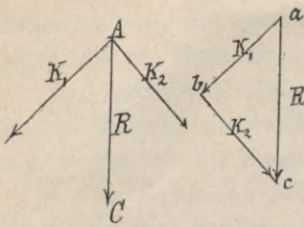


Fig. 2.

Kraftrichtungen Parallelen  $ab$  und  $bc$  zieht. — Die Strecken  $ab$  und  $bc$  stellen alsdann die Grössen der Seitenkräfte vor; die Richtungen derselben ergeben sich, wenn man den Linienzug  $abc$  vom Anfangspunkt  $a$  derjenigen Geraden, welche  $R$  darstellt, nach dem Endpunkte  $c$  verfolgt, wie die in Fig. 2 angegebenen Pfeilspitzen zeigen.

### 3. Resultante beliebig vieler Kräfte, $K_1, K_2, K_3 \dots$ , welche in demselben Punkte $A$ angreifen und in einer Ebene liegen.

Man konstruiert einen Linienzug  $OBCDEF$  (Fig. 3), dessen Seiten den

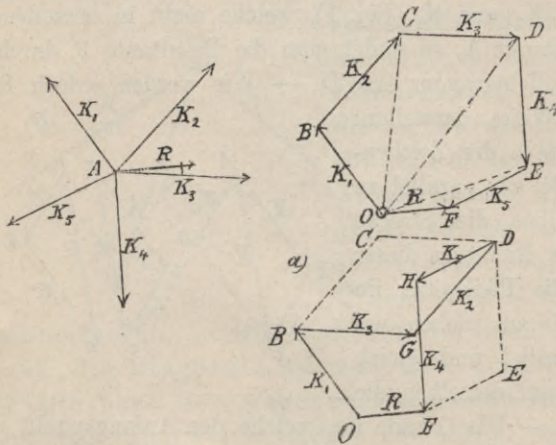


Fig. 3

gegebenen Kräften  $K_1, K_2, K_3 \dots$  gleich und parallel sind. — Ist z. B.  $BO$  die Gerade, welche die Grösse der Kraft  $K_1$  darstellt, und wird ihre Richtung durch die in  $B$  angebrachte Pfeilspitze angedeutet, so ist von  $B$  aus die zweite Kraftlinie  $BC$  gleich und parallel  $K_2$  zu ziehen, u. s. f. — Die Gerade, welche den Anfangspunkt  $O$  des Kräftepolygons  $OBC \dots F$  mit

dem Endpunkt  $F$  verbindet, stellt die Grösse und Richtung der Resultante sämtlicher Kräfte dar.

Die Richtigkeit dieser Konstruktion ergibt sich sofort, wenn man die von  $O$  ausgehenden Diagonalen des Kräftepolygons zeichnet. Dann ist  $OC$  nach 1) die Resultante von  $K_1$  und  $K_2$ ;  $OD$  die Resultante von  $OC$  und  $K_3$  oder von  $K_1, K_2$  und  $K_3$  u. s. f.

Die Reihenfolge, in welcher die gegebenen Kräfte aneinander gefügt werden, ist hierbei ganz willkürlich. — In Fig. 3,  $\alpha$  ist noch ein zweites Kräftepolygon  $OBGDHF$  angegeben, welches die Kräfte in der Reihenfolge  $K_1, K_3, K_2, K_5, K_4$  enthält. — Zieht man wiederum von  $O$  aus die Diagonalen des Kräftepolygons, so ist  $OG$  die Resultante von  $K_1$  und  $K_3$ ;  $OD$  die Resultante von  $OG$  und  $K_2$  oder von  $K_1, K_2$  und  $K_3$  u. s. f., mithin stellt auch die Schlusslinie  $OF$  die Resultante aller Kräfte dar.

Anmerkung. Zieht man in Figur 3,  $\alpha$ ,  $BC \parallel DG$  und  $CD \parallel BG$ , so stellen  $BC$  und  $CD$  die beiden Kräfte  $K_2$  und  $K_3$  ihrer Grösse und Richtung nach dar. — Man kann



deshalb sowohl durch den Linienzug OBGD, in welchem die Kräfte in der Reihenfolge  $K_1, K_3, K_2$  aneinander gefügt sind, als auch durch den Linienzug OBCD, welcher dieselben Kräfte in der Reihenfolge  $K_1, K_2, K_3$  enthält, von O aus zu demselben Punkte D gelangen. Ebenso erreicht man durch die beiden Geraden DE ( $\parallel$  HF) und EF ( $\parallel$  DH) wieder den Punkt F.

Fällt der Endpunkt des Kräftezuges mit dem Anfangspunkt desselben zusammen, so ist die Resultante gleich Null. In diesem Falle ist das gegebene Kräftesystem im Gleichgewicht.

Bei geschlossenem Kräftepolygon kann jede einzelne Seite desselben als eine Schlusslinie betrachtet werden, d. h.: Ist ein Kräftesystem, dessen Kräfte denselben Angriffspunkt haben, im Gleichgewicht, so hält jede einzelne Kraft der Wirkung aller übrigen das Gleichgewicht. s. Einl. (3).

#### 4. Projektion eines ebenen Kräftezuges auf eine in derselben Ebene liegende Gerade.

Projiziert man sämtliche Seiten eines Kräftepolygons OBCDE (Fig. 4) auf eine beliebige in der Ebene desselben liegende Gerade  $XB'$ , und giebt man den Projektionen der einzelnen Seiten denselben Sinn, welcher den entsprechenden Krafrichtungen zukommt, so ist die Projektion des Kräftezuges gleich der Projektion der Resultante. — Die Projektion des geschlossenen Kräftepolygons eines im Gleichgewicht befindlichen Systems ist gleich Null.

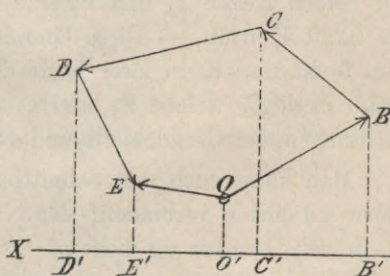


Fig. 4.

Ist nämlich O der Anfangspunkt des Kräftepolygons und OB in dem Sinne genommen, wie die in B befindliche Pfeilspitze andeutet, so ist die Projektion von OB gerichtet von  $O'$  nach  $B'$ . — Diese Richtung sei positiv. — Die Projektion  $B'C'$  der folgenden Seite hat alsdann negative Richtung; ebenso die Projektion von CD, während die Projektion von DE wieder positive Richtung zeigt. — Oder nehmen wir an, ein Punkt bewege sich von O aus in der Richtung der Pfeilspitzen auf den Seiten des Kräftezuges bis zum Endpunkte E des letzteren, so durchläuft seine Projektion den Weg  $O'B'$  in positiver,  $B'C'$  und  $C'D'$  dagegen in negativer, und  $D'E'$  wieder in positiver Richtung. — Der Unterschied (algebraische Summe) der positiven und negativen Strecken ist demnach  $O'E'$ , welche zugleich die Projektion der Resultante OE ist. — Man sieht ferner, dass die algebraische Summe sämtlicher Projektionen Null wird, wenn das Kräftepolygon geschlossen ist.



### 5. Zerlegung einer Kraft in drei Seitenkräfte.

Die Lösung der Aufgabe, eine Kraft  $K$  in drei nach gegebenen Richtungen wirkende Kräfte zu zerlegen, gelingt nur, wenn die letzteren nicht in einem Punkte zusammen treffen und auch keiner ihrer Schnittpunkte in  $K$  liegt. Es seien  $cd$ ,  $de$ ,  $ef$  (Fig. 5) die Richtungslinien der Geraden, in welchen die Seitenkräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  der gegebenen Kraft  $K$  liegen sollen.

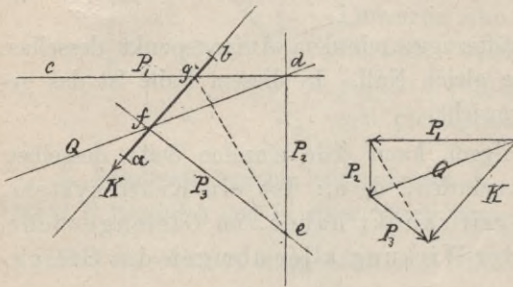


Fig. 5.

— Ist dann  $Q$  die Resultante der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ , so ist  $K$  auch die Resultante von  $Q$  und  $P_3$ ; folglich müssen  $K$ ,  $Q$  und  $P_3$  durch einen Punkt gehen. — Wir ziehen demnach durch den Schnittpunkt  $d$  der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  eine Gerade nach dem Punkt, in welchem die Kraft  $K$  trifft. — Diese Gerade  $df$  ist die Richtungslinie von  $Q$ . — In Fig. 5 ist nun  $K$  in zwei nach den Richtungen von  $ef$  und  $df$  wirkende Kräfte zerlegt, welche  $P_3$  und  $Q$  sind. Die Seitenkräfte von  $Q$  nach den Richtungen der Geraden  $cd$  und  $de$  sind dann die beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ .

Man kann auch den Schnittpunkt  $g$  der gegebenen Kraft und der Geraden  $cd$  mit  $e$  verbinden; dann muss die Resultante der Kräfte  $P_2$  und  $P_3$  in der Geraden  $eg$  liegen. —  $K$  wird in diesem Falle zerlegt in zwei nach den Richtungen von  $cd$  und  $ge$  wirkende Kräfte; die letztere abermals in zwei, in  $de$  und  $ef$  liegende Seitenkräfte, wodurch nun  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  ebenfalls bestimmt sind.

### 6. Aufgaben.

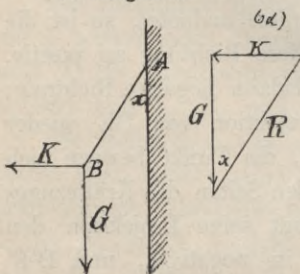


Fig. 6.

a) An dem Endpunkt  $B$  der um  $A$  drehbaren Stange  $AB$  (Fig. 6) wirken eine Horizontalkraft  $K$  und eine Vertikalkraft  $G$ . — Welche Richtung muss die Stange haben, wenn durch die vereinigte Wirkung von  $G$  und  $K$  keine Drehung eintreten soll?

Man lege  $K$  und  $G$  zu einem Kräftezug aneinander (Fig. 6a). — Die Stange  $AB$  muss die Richtung der Resultante  $R$  aus  $K$  und  $G$  haben.

Ist  $x$  der Winkel, welchen  $AB$  mit der Vertikalen bildet, so ergibt sich leicht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{K}{G}.$$

b) Die Gleichgewichtslage der um A drehbaren Stange AB (Fig. 7) zu finden, wenn in B nach vertikaler Richtung das Gewicht G und ausserdem die Kräfte P und Q nach gegebenen Richtungen wirken.

Man zeichnet den Kräftezug P, Q, G (Fig. 7), dann ist AB parallel der Schlusslinie R.

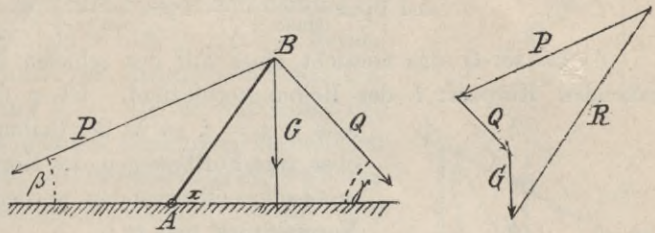


Fig. 7.

Sind  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $x$  die Winkel, welche P und Q, bez. R mit der Horizontalen bilden, so folgt aus dem Satz der Projektion eines Kräftepolygons:

$$R \cos x = P \cos \beta - Q \cos \gamma.$$

Wird das Kräftepolygon auf eine Vertikale projiziert, so folgt:

$$R \sin x = P \sin \beta + Q \sin \gamma + G.$$

Aus der Division beider Gleichungen ergibt sich leicht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{P \sin \beta + Q \sin \gamma + G}{P \cos \beta - Q \cos \gamma}.$$

c) Zwei durch ein Gelenk verbundene Stäbe ab und bc (Fig. 8) liegen in vertikaler Ebene und stützen sich in a und c auf eine horizontale Ebene. — In b wirkt eine Last P nach vertikaler Richtung. — Es soll für jeden der beiden Stützpunkte a und c der Horizontalschub und der Vertikaldruck ermittelt werden.

P wird zunächst zerlegt in 2 Kräfte  $K_1, K_2$  (Fig. 8 $\alpha$ ), welche nach den Richtungen der Stangen ab und bc wirken.

—  $K_1$  können wir in a und  $K_2$  in c angreifen lassen. — Jede dieser beiden Kräfte ist nun nochmals in eine horizontale und eine vertikale Seitenkraft zu zerlegen. — Hierdurch erhalten wir für den Horizontalschub in a die Kraft  $H_1$  und für den Vertikaldruck  $D_1$ ; ebenso  $H_2$  und  $D_2$  für den Punkt c.

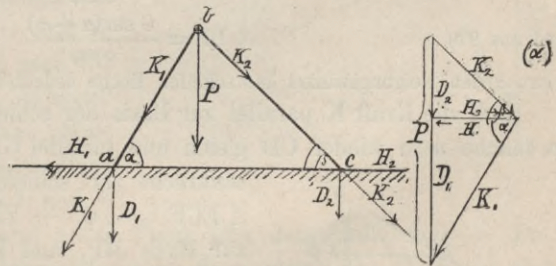


Fig. 8.

Aus Fig. 8 $\alpha$  folgt, dass  $H_1 = H_2$  und  $D_1 + D_2 = P$  ist.

Sind  $\alpha$  und  $\beta$  die Neigungswinkel der Stangen ab und bc gegen die Horizontalebene, so folgt aus Fig. 8 $\alpha$  leicht:  $H_1 \operatorname{tg} \alpha = D_1$

$$H_2 \operatorname{tg} \beta = D_2$$

oder da  $H_2 = H_1$  ist:  $H_1 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = D_1 + D_2 = P.$



$$\text{Folglich } H_1 = H_2 = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{P \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\text{und } D_1 = \frac{P \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad D_2 = \frac{P \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

d) Es sei  $G$  das Gewicht eines auf der schiefen Ebene  $MN$  (Fig. 9) liegenden Körpers;  $f$  der Reibungscoefficient. Ist  $\varphi$  der Reibungswinkel, also  $\operatorname{tg} \varphi = f$ , so ist der Reibungswiderstand, welcher zum Fortbewegen des Körpers auf der Ebene mindestens überwunden werden muss, gleich dem Normaldruck mal  $\operatorname{tg} \varphi$ .

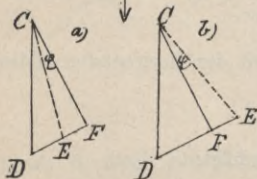
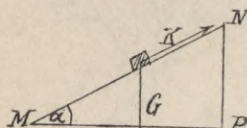


Fig. 9.

Es soll die Kraft  $K$  gefunden werden, welche parallel zur schiefen Ebene wirkend, den Körper auf derselben in Gleichgewicht erhält.

Man mache (Fig. 9 a. b)  $CD$  gleich und parallel  $G$ ; ziehe  $CF$  senkrecht und  $DF$  parallel zu  $MN$ ; ferner sei  $\angle ECF$  gleich  $\varphi$ , dann stellt  $DE$  die gesuchte Kraft dar. — Es ist nämlich  $DE$  die Schlusslinie des aus dem Gewicht  $CD$ , dem Normalwiderstand  $CF$  der schiefen Ebene

und dem Reibungswiderstand  $EF$  ( $= CF \operatorname{tg} \varphi$ ) gebildeten Kräftepolygons.

In Fig. 9 a ist  $DE$  diejenige Kraft, welche im Verein mit dem Reibungswiderstand  $EF$  das Hinabgleiten des Körpers auf der schiefen Ebene verhindert, in 9 b dagegen diejenige Kraft, welche zum Hinaufziehen mindestens erforderlich ist. — Leicht findet man aus 9 a)

$$DE = \frac{G \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

und aus 9 b)

$$DE = \frac{G \sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$

wenn  $\alpha$  den Neigungswinkel der schiefen Ebene bedeutet.

Soll die Kraft  $K$  parallel zur Basis der schiefen Ebene wirken (Fig. 10), so mache man wieder  $CD$  gleich und parallel  $G$ , ziehe  $CF$  (Fig. 10 a u. b) senkrecht zur schiefen Ebene  $MN$  und mache  $\angle ECF = \angle \varphi$ . — Zieht man jetzt  $DE$  parallel zur Basis  $MP$ , und  $EF$  senkrecht zu  $CF$ , dann stellt  $DE$  die Grösse der gesuchten Kraft dar. — Die auf den Körper wirkenden Kräfte, welche im Gleichgewicht sein müssen, sind nämlich: das Gewicht des Körpers ( $CD$ ), der Normalwiderstand der schiefen Ebene ( $CF$ ), der Reibungswiderstand  $EF$  ( $= CF \cdot \operatorname{tg} \varphi$ ) und die Kraft  $DE = K$ .

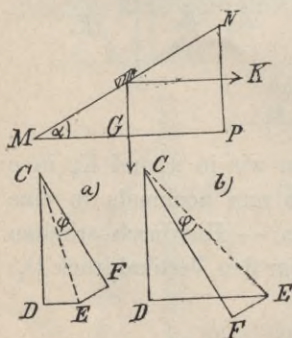


Fig. 10.

In Fig. 10 a ist  $DE$  die Kraft, welche das Hinabgleiten des Körpers verhindert und in 10 b bedeutet  $DE$  die Kraft, welche mindestens zum Hinaufziehen des Körpers erforderlich ist.

Ist  $\alpha$  der Neigungswinkel der schiefen Ebene, so folgt aus 10 a):

$$DE = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \text{ und aus 10 b): } DE = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Bildet die gesuchte Kraft  $K$  mit der schiefen Ebene  $MN$  den Winkel  $\beta$  (Fig. 11), so macht man wieder  $CD$  (Fig. 11a und 11b) gleich und parallel  $G$ ;  $CF$  senkrecht zu  $MN$  und  $\angle ECF = \angle \varphi$ . — Ferner ziehe man  $DE$  parallel zur Richtung der Kraft  $K$  und  $EF$  senkrecht zu  $CF$ . —  $DE$  ist die Grösse der Kraft  $K$ . — Es muss nämlich Gleichgewicht bestehen zwischen dem Gewicht  $CD$ , Normalwiderstand  $CF$  der schiefen Ebene, Reibungswiderstand  $EF = CF \cdot \operatorname{tg} \varphi$  und  $K$ , welche letztere demnach durch die Schlusslinie des Kräftepolygons aus den genannten Kräften dargestellt wird.

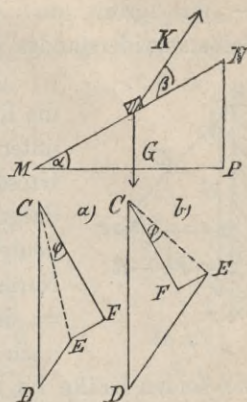


Fig. 11.

Für die Grösse der Kraft  $K$  findet man aus 11a:

$$DE = \frac{G \sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\varphi + \beta)} \text{ und aus 11b) } DE = \frac{G \sin(\varphi + \alpha)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

e) Auf horizontaler Ebene  $HH_1$  (Fig. 12) liegt ein Körper vom Gewicht  $G$ . — Eine Kraft  $K$ , welche mit  $HH_1$  den Winkel  $\alpha$  bildet, soll den Körper fortziehen, d. h. den Reibungswiderstand überwinden. — Welches ist der kleinste Wert, den  $K$  haben kann, und wie gross ist  $\alpha$  für diesen Fall?

Es sei  $f = \operatorname{tg} \varphi$  der Reibungscoefficient,  $ca$  und  $ab$  der aus  $G$  und  $K$  gebildete Kräftezug. — Zieht man  $bc$  unter dem Winkel  $\varphi$  zu  $ab$ , so stellt  $ac$  die Grösse der Kraft  $K$  vor. Man kann nämlich  $K$  in eine horizontale und eine vertikale Seitenkraft  $P$  und  $V$

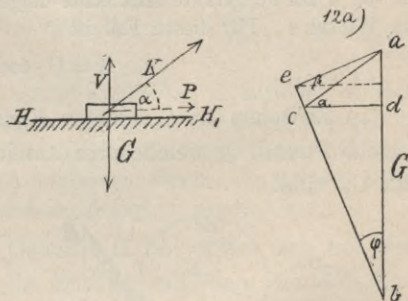


Fig. 12.

zerlegen, welche durch  $cd$  und  $ad$  in Figur 12a dargestellt sind. — Der Normaldruck gegen die Horizontalebene ist dann gleich  $G - V = bd$  und der Reibungswiderstand  $= bd \cdot \operatorname{tg} \varphi = cd =$  der horizontalen Seitenkraft  $P$ . — Man erkennt hieraus sofort, dass die von  $a$  auf  $bc$  gefällte Senkrechte  $ae$  den kleinsten Wert von  $K$  darstellt und dass der Neigungswinkel  $\alpha$  in diesem Falle gleich  $\varphi$  ist.

Für einen beliebigen Neigungswinkel finden wir aus Fig. 12a durch Anwendung der Sinus-Regel auf Dreieck  $abc$ :

$$K = \frac{G \sin \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} \text{ oder } \frac{G f}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

Der kleinste Wert von  $K$  ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck  $abe$ :

$$K = G \sin \varphi = \frac{G f}{\sqrt{1 + f^2}}$$

f) Ein Körper vom Gewicht  $G$  wird durch eine Kraft  $K$ , welche mit der Horizontalen den Winkel  $\alpha$  bildet, gegen eine vertikale Wand gedrückt.



— Wie gross muss  $K$  sein, damit dieselbe mit Hilfe des verursachten Reibungswiderstandes den Körper im Gleichgewicht erhält? — (Fig. 13.)

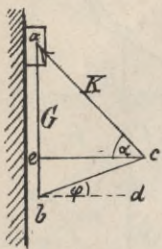


Fig. 13.

Stellt  $ab$  das Gewicht  $G$  des Körpers dar, und ist  $ac$  die Richtungslinie der gesuchten Kraft  $K$ , so ziehe man  $bc$  unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Horizontale  $bd$ . — Die Grösse der Kraft  $K$  wird alsdann durch die Strecke  $ac$  dargestellt. — Zieht man nämlich  $ce$  parallel  $bd$ , so bedeutet  $ce$  den von  $K$  auf die vertikale Wand ausgeübten Normaldruck und weil  $\angle bce = \varphi$ , so ist auch  $be = ce \cdot \operatorname{tg} \varphi =$  dem Reibungswiderstand. — Endlich bedeutet  $ea$  die nach vertikaler Richtung wirkende Seitenkraft von  $K$ . — Die beiden Kräfte  $be$  und  $ea$  wirken  $G$  entgegen und da  $be + ea = ab = G$  ist, so ist Gleichgewicht. —

Durch Anwendung der Sinus-Regel auf  $\triangle abc$  ergibt sich

$$K = \frac{G \cdot \cos \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{G}{\sin \alpha + f \cos \alpha}$$

Anmerkung. Der kleinste Wert, welchen  $K$  haben kann, wird offenbar durch die von  $a$  auf  $bc$  gefällte Senkrechte dargestellt. — Diese bildet mit der vertikalen Wand den Winkel  $\varphi$ . Für diesen Fall ist

$$K = G \cdot \cos \varphi = \frac{G}{\sqrt{1 + f^2}}$$

g) Zwischen zwei schiefen Ebenen  $AB$  und  $AC$  (Fig. 14) liegen zwei Kugeln  $P$  und  $Q$ , welche sich aufeinander stützen und deren Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  sind.

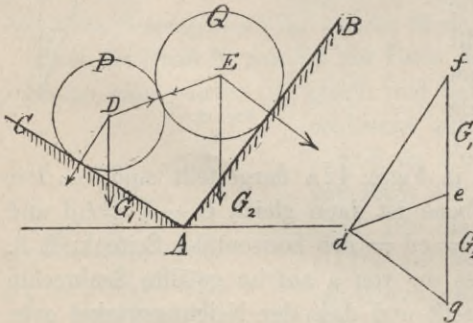


Fig. 14.

Welche Richtung hat die Verbindungslinie der Mittelpunkte  $D$  und  $E$  beider Kugeln, wenn dieselben im Gleichgewicht sind?

Zerlegt man das Gewicht jeder Kugel in eine Kraft, welche in die Verbindungslinie  $DE$  der Mittelpunkte beider Kugeln fällt, und eine zweite, welche senkrecht zu derjenigen Ebene steht, auf welche sich die betr. Kugel

stützt, so ergibt sich leicht, dass zwischen den Kugeln Gleichgewicht stattfindet, wenn die in  $DE$  liegenden Seitenkräfte gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind. — Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion der Richtung von  $DE$ : Man zeichne aus  $G_1$  und  $G_2$  den Kräftezug  $feg$ , (welcher in diesem Falle eine Gerade bildet); ziehe  $fd$  senkrecht zu  $AC$  und  $dg$  senkrecht zu  $AB$ . — Die Gerade, welche den Schnittpunkt  $d$  mit  $e$  verbindet, stellt die gesuchte Richtung dar. — Es bedeuten nämlich in Fig. 14,  $df$

und  $d_e$  die genannten Seitenkräfte von  $G_1$ , und  $d_e$  und  $d_g$  die Seitenkräfte von  $G_2$ . — Die beiden durch  $d_e$  dargestellten Seitenkräfte sind aber gleich gross und entgegengesetzt gerichtet. — Ist demnach  $DE$  parallel  $d_e$ , so findet Gleichgewicht statt. —

h) Die Kugel  $B$  (Fig. 15) hängt an dem Faden  $AB$ , welcher in  $A$  an einer vertikalen Wand  $AD$  befestigt ist. — Dieselbe soll eine zweite Kugel  $C$  tragen, welche ausserdem an  $AD$  lehnt. — Wie gross ist die Spannung des Fadens  $AB$ , wenn die Gewichte der Kugeln  $G_1$  und  $G_2$  sind?

Man zerlege  $G_2$  in zwei Kräfte,  $om$  senkrecht zu  $AD$ , und  $on$  parallel zu  $BC$ . — In  $B$  wirken dann die Kräfte  $on$  und  $G_1$ , welche wieder in die Kräfte  $oq \parallel AB$  und  $qp$  senkrecht zu  $AD$  zerlegt werden können. — Die Spannung des Fadens  $AB$  wird durch  $oq$  dargestellt und  $qp$  bedeutet den Druck, welchen die Kugel  $B$  auf die vertikale Wand ausübt.

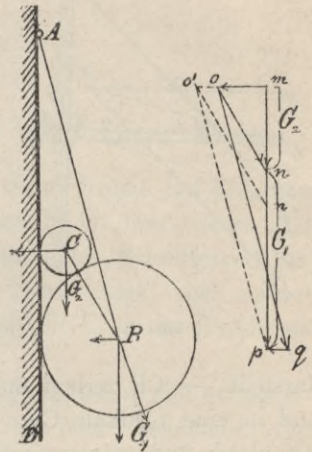


Fig. 15.

Anmerkung. Ziehen wir  $o'p$  parallel  $oq$ ;  $o'n'$  parallel  $on$  ( $o'$  auf  $om$ ), so stellt  $m'n'$  die Grösse des Gewichtes  $G_2$  dar, bei welchem der Druck der Kugel  $B$  gegen die vertikale Wand Null wird, wenn zugleich  $n'p$  das Gewicht der Kugel  $B$  bedeutet. Wie kann man hiernach die Grösse des Gewichtes  $G_2$  bestimmen, welches die Kugel  $B$  gerade noch tragen kann, ohne von der vertikalen Wand abgedrängt zu werden?

i) Ein Stab  $ab$  (Fig. 16), dessen Gewicht  $G$  ist, stützt sich mit dem einen Endpunkte  $a$  auf eine horizontale Ebene, mit dem andern Endpunkte  $b$  auf eine Mauerkante. — Es soll der Horizontalschub  $H$  und der Vertikaldruck  $D$  im Punkte  $a$ , und der senkrecht zu  $ab$  gerichtete Druck  $P$  gegen die Mauerkante ermittelt werden. —

Man verlängere die gegebenen Richtungslinien von  $P$  und  $G$  bis zum Schnittpunkte  $c$ , ziehe  $ac$ , und zerlege nun  $G$  ( $= de$ ) in zwei Kräfte  $df$  und  $ef$ , von denen die erstere parallel zu  $P$ , die zweite parallel zu  $ac$  ist. — Die letzte Kraft zerlegt man nochmals durch die Horizontale  $eg$  und Vertikale  $fg$  in zwei Seitenkräfte, welche alsdann den Horizontalschub  $H$  und den Vertikaldruck  $D$  im Punkte  $a$  darstellen. —  $P$  ist gleich  $df$ .

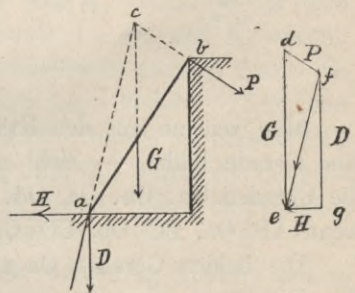


Fig. 16.

k) Der horizontale Balken  $CD$  (Fig. 17) ist mit dem Ende  $DK$  in eine vertikale Mauer eingelassen. — Eine durch Gelenke in  $A$  und  $B$  befestigte



Stange soll den Balken in horizontaler Lage erhalten. — Es sollen (ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes des Balkens) die Reaktion  $Q$  in  $A$  und die nach vertikaler Richtung in der Mitte von  $DK$  wirkende Reaktion  $V$ , und die horizontal gerichtete Reaktion  $H$  in  $D$  ermittelt werden, wenn in  $C$  eine gegebene Last  $P$  wirkt.

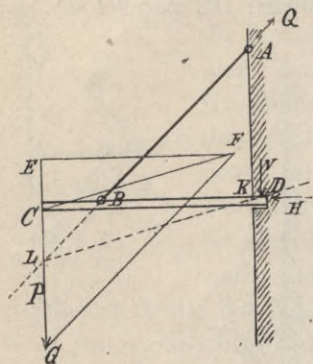


Fig. 17.

Nach 5 ist  $P$  in drei Kräfte, welche in gegebenen Richtungen wirken, zu zerlegen. — Bedeutet  $CG$  die Grösse und Richtung von  $P$  und verlängert man  $AB$  bis zum Durchschnitt  $L$  mit  $CG$ , so muss die Resultante von  $H$  und  $V$  nach der Geraden  $DL$  gerichtet sein. — Man zerlegt demnach  $P$  durch die beiden Geraden  $CF \parallel DL$  und  $FG \parallel AB$  in Seitenkräfte, von welchen  $FG$  die auf Stange  $AB$  ausgeübte Wirkung darstellt. —  $CF$  zerlegt man nochmals in eine horizontale Seitenkraft  $EF$ , und in eine vertikale  $CE$ . — Die Reaktionen  $V$  und  $H$  sind nun  $CE$  bez.  $EF$  gleich und entgegengesetzt; ebenso ist die Reaktion  $Q$  in  $A$  gleich und entgegengesetzt  $FG$ .

1) Vier Stangen sollen durch Gelenke zu einem Viereck verbunden werden, welches mit dem

einen Endpunkte  $A$  (Fig. 18) aufgehängt ist. — Die drei andern Eckpunkte  $B$ ,  $C$  und  $D$  tragen die Gewichte  $P$ ,  $Q$  und  $R$ . Welche Lagen müssen die einzelnen Stangen des Vierecks im Gleichgewichtszustande haben?

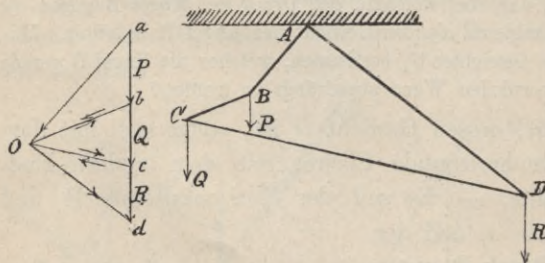


Fig. 18.

Man zeichne aus den Kräften  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  den Kräftezug  $abcd$ , welcher eine Gerade bildet. — Zieht man alsdann von einem beliebigen Punkte  $O$  die Geraden  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ ,  $Od$ , so ist das Gelenkviereck im Gleichgewicht, wenn  $AB \parallel Oa$ ,  $BC \parallel Ob$ ,  $CD \parallel Oc$ ,  $AD \parallel Od$  ist —

Die beiden Geraden  $Oa$  und  $Ob$  sind nämlich Seitenkräfte von  $P$  nach den Richtungen der Stangen  $AB$  und  $BC$ . — Ebenso sind  $Ob$  und  $Oc$  Seitenkräfte von  $Q$  nach den Richtungen  $BC$ , und  $CD$  und  $Oc$  und  $Od$  Seitenkräfte von  $R$  nach den Richtungen  $CD$  und  $AD$ . — Es ist nun ersichtlich, dass die beiden in der Stange  $BC$  wirkenden Seitenkräfte, welche von  $P$  und  $Q$  herrühren, gleich gross und entgegengesetzt sind. Dasselbe ist mit den in  $CD$  wirkenden Seitenkräften der Fall. — Folglich sind  $BC$

und CD im Gleichgewicht. Endlich werden noch die in AB und AD wirkenden Kräfte, deren Grössen durch  $Oa$  und  $Od$  dargestellt sind, durch den festen Punkt A gehoben.

## II. Abschnitt.

### Das Seilpolygon von Kräften, welche in einer Ebene liegen.

1) Es seien  $K_1$  und  $K_2$  zwei Kräfte, welche durch Grösse und Richtung gegeben sind. Die Resultante kann alsdann nach I, 1) ihrer Grösse und Richtung nach gefunden werden, und sie geht durch den Schnittpunkt der Richtungslinien von  $K_1$  und  $K_2$ . — Liegt dieser Schnittpunkt aber ausserhalb der Grenzen der Zeichenfläche, so ergibt sich die Lage der Resultante auf folgende Weise. —

Man füge den Kräften  $K_1$  und  $K_2$  (Fig. 19) zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte  $+P$  und  $-P$  hinzu, welche in einer beliebigen, die Richtungslinie von  $K_1$  und  $K_2$  durchschneidenden Geraden  $ab$  liegen.  $+P$  greife in  $a$  und  $-P$  in  $b$  an. — Nun zeichne man aus  $K_1$  und  $+P$  den Kräftezug  $ABC$ , dann ist  $Q_1 = AC$  die Resultante von  $K_1$  und  $+P$ . — Ebenso wird mit Benutzung der Geraden  $BC$  aus  $-P$  und  $K_2$  der Kräftezug  $CBD$  gezeichnet, wodurch man  $Q_2 = CD$  als Resultante von  $-P$  und  $K_2$  erhält. — Es wird nun offenbar durch die Gerade  $AD$  die Resultante von  $K_1$  und  $K_2$  sowohl, als auch die von  $Q_1$  und  $Q_2$ ; dargestellt. Dieselbe kann nämlich durch die hinzugefügten Kräfte weder ihre Grösse noch ihre Lage ändern. Zieht man durch  $a$  die Gerade  $mc$  parallel  $AC$  und durch  $b$  die Gerade  $nc$  parallel  $CD$ , so sind  $mc$  und  $nc$  die Richtungslinien von  $Q_1$  und  $Q_2$ ; durch den Schnittpunkt  $c$  geht demnach die gesuchte Resultante  $R$ , welche gleich und parallel  $AD$  zu machen ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei der Linienzug  $mabn$ , dessen einzelne Seiten parallel mit den Linien  $AC$ ,  $BC$  und  $CD$  sind. — Stellt man sich diesen Linienzug als ein Seil mit den Knotenpunkten  $a$  und  $b$  vor, und nimmt an, dasselbe sei in zwei Punkten  $m$  und  $n$  befestigt, so wird die Form desselben durch die Wirkung der beiden Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  nicht geändert. Denn  $K_1$  lässt sich durch  $Q_1$  und  $-P$ , ferner  $K_2$  durch  $Q_2$  und  $+P$  ersetzen.  $P$  und  $-P$  heben sich auf;  $Q_1$  und  $Q_2$  werden durch die

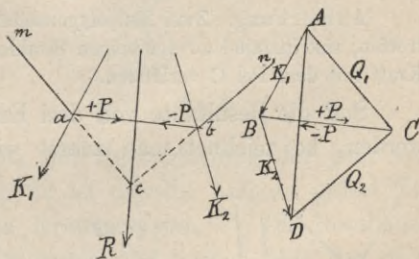


Fig. 19.



Widerstände in den festen Punkten  $m$  und  $n$  gehoben, folglich bleibt das Seil in Ruhe.

Man nennt den Linienzug  $mabn$  ein Seilpolygon der Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ . — Da die Lagen und Grössen der Hilfskräfte beliebig sind, so folgt, dass man unzählig viel Seilpolygone konstruieren kann, welche durch die Wirkung der beiden Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  im Gleichgewicht bleiben, wenn man die erste und letzte der Seilpolygonseiten, wie oben angegeben, befestigt. —

Die soeben gezeigte Konstruktion lässt sich auch auf folgende Weise ausführen:

Man zeichnet zuerst den Kräftezug  $ABD$ , dessen Seiten parallel und gleich  $K_1$  und  $K_2$  sind; ziehe aus einem beliebig gewählten Punkte  $C$  (Pol) die Strahlen  $CA$ ,  $CB$ ,  $CD$  und zeichne den Linienzug  $mabn$  so, dass  $ma \parallel CA$ ,  $ab \parallel BC$ ,  $bn \parallel CD$  ist. — Dann ist  $mabn$  ein Seilpolygon der gegebenen Kräfte. Die Resultante von  $K_1$  und  $K_2$  geht durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Seite des Seilpolygons; sie ist gleich und parallel der Schlusslinie des Kräftezuges  $ABD$ .

Anmerkung. Zwei Seilpolygonseiten, welche sich auf einer der gegebenen Kräfte treffen, sind parallel zu denjenigen Strahlen, welche in Fig. 19a die Endpunkte der betr. Kraft mit dem Pol  $C$  verbinden.

Soll die Resultante von drei Kräften  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  (Fig. 20) bestimmt werden, so zeichnet man zuerst wieder das Kräftepolygon  $abde$ , dessen

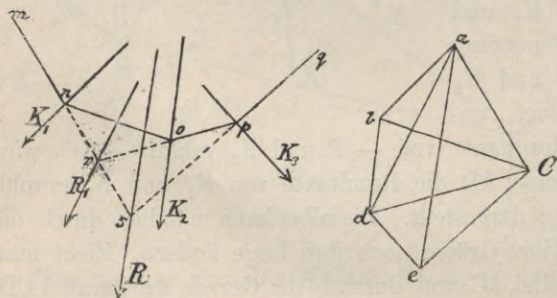


Fig. 20.

Seiten den gegebenen Kräften gleich und parallel sind. — Zieht man jetzt von einem beliebigen Pol  $C$  die Strahlen  $Ca$ ,  $Cb$  und  $Cd$  und ist  $mno$  das Seilpolygon der Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ , dessen Seiten jenen Strahlen bez. parallel sind, dann ist die Resultante  $R_1$  der beiden ersten Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  gleich  $ad$  und geht durch den Schnittpunkt  $r$  der Verlängerungen von  $mn$  und  $op$ . — Auf gleiche Weise bestimmen wir nun noch die Resultante von  $R_1$  und  $K_3$ . — Diese beiden Kräfte sind in Fig. 20 zu dem Kräftezug  $ade$  vereinigt und es können  $mr$  und  $rp$  als die beiden ersten Seiten des Seilpolygons dieser Kräfte angesehen werden. — Die dritte Seite  $pq$  geht durch  $p$  und ist parallel zu dem Strahl  $Ce$ . — Die Resultante  $R$  ( $=ae$ ) von  $R_1$  und  $K_3$  geht durch den Schnittpunkt  $s$  der ersten und letzten Seite dieses Seilpolygons. — Sie ist zugleich Resultante der gegebenen Kräfte  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$ .

Der Linienzug  $mnpq$ , dessen Seiten den Strahlen  $Ca$ ,  $Cb$ ,  $Cd$  und  $Ce$  parallel sind, ist ein Seitenpolygon der drei Kräfte  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$ , welches ebenfalls die schon oben angegebene Eigenschaft des Gleichgewichtszustandes hat. — Es ist nun leicht ersichtlich, dass man durch Fortsetzung der obigen Schlussweise die Resultante beliebig vieler Kräfte in einer Ebene, ebenso ermitteln kann. — In Fig. 21 ist das Seilpolygon von fünf Kräften

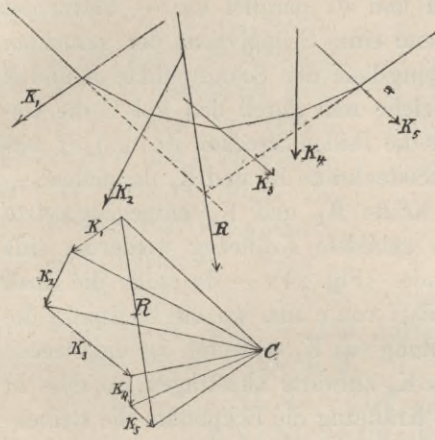


Fig. 21.

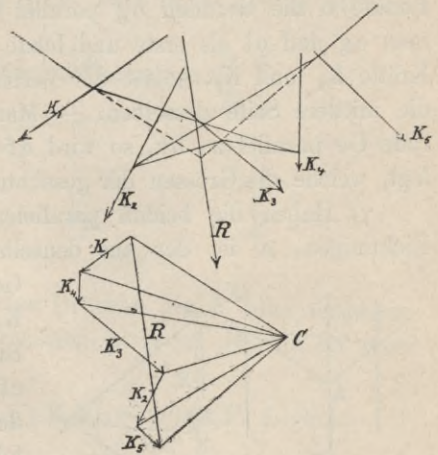


Fig. 22.

$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  konstruiert worden mit Hinweglassung der jetzt unnötigen Zwischenresultanten. — In Fig. 22 ist dieselbe Aufgabe gelöst für eine andere Reihenfolge der Kräfte im Kräftepolygon. — Die Resultante geht immer durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Seite des Seilpolygons. —

## 2. Die Resultante paralleler Kräfte.

α) Die Resultante paralleler Kräfte lässt sich ebenfalls mit Hilfe eines Seilpolygons ermitteln. — Sind zunächst zwei parallele Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  (Fig. 23) gegeben, so zeichnet man den  $K_1$  und  $K_2$  darstellenden Linienzug  $def$ , welcher in diesem Falle eine Gerade  $df$  bildet. —  $C$  sei nun ein beliebiger Pol. Man ziehe die drei Geraden  $Cd$ ,  $Ce$  und  $Cf$  und parallel zu denselben  $gh$ ,  $hk$  und  $kl$ . — Die drei letzten Geraden bilden alsdann ein Seilpolygon der gegebenen Kräfte, deren Resultante durch den Schnittpunkt  $o$  der ersten und letzten Seite des Seilpolygons geht und  $\bar{z}$  parallel zu  $df$  ist.

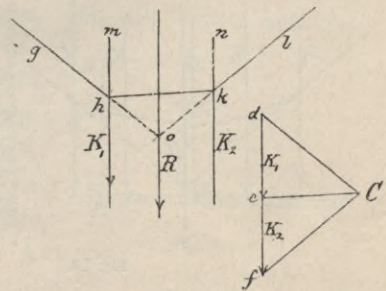


Fig. 23.



Die Grösse der Resultante wird durch die Strecke  $df$  dargestellt. — Sie ist also gleich der Summe der Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ .

β) Soll umgekehrt eine gegebene Kraft  $R$  (Fig. 23) in zwei zu ihr parallele Kräfte zerlegt werden, welche in den zu  $R$  parallelen Geraden  $mh$  und  $nk$  liegen, so mache man  $df$  gleich und parallel  $R$ ; ziehe von einem beliebigen Pol  $C$  die Strahlen  $Cd$  und  $Cf$  und von einem auf  $R$  liegenden Punkte  $o$  die Geraden  $og$  parallel  $Cd$  und  $ol$  parallel  $Cf$ . — Betrachtet man  $og$  und  $ol$  als erste und letzte Seite eines Seilpolygons der gesuchten Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ , so ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte  $h$  und  $k$  die mittlere Seite desselben. — Man ziehe nun durch den Pol  $C$  die Gerade  $Ce$  parallel zu  $hk$ , so wird  $df$  in die beiden Strecken  $de$  und  $ef$  zerlegt, welche die Grössen der gesuchten Seitenkräfte  $K_1$  und  $K_2$  darstellen. —

γ) Haben die beiden parallelen Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  entgegengesetzte Richtungen, so ist der aus denselben gebildete Kräftezug wiederum eine

Gerade. (Fig. 24). —  $de$  stelle die Kraft  $K_1$  dar; von  $e$  aus, wo die Pfeilspitze die Richtung von  $K_1$  andeutet, ist die Strecke  $ef = K_2$  aufwärts abzutragen, so dass in dem Kräftezug die Eckpunkte die Reihenfolge  $d, e, f$  haben. — Nun sind wieder von einem beliebigen Pol  $C$  aus die Strahlen  $Cd, Ce$  und  $Cf$  zu ziehen, und die Seiten des Seilpolygons  $oh$  ( $\parallel Cd$ ),

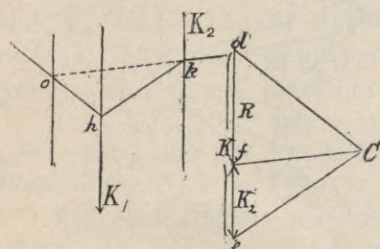


Fig. 24.

$hk$  ( $\parallel Ce$ ) und  $ok$  ( $\parallel Cf$ ) zu zeichnen; alsdann geht die Resultante durch den Schnittpunkt  $o$  der ersten und letzten Seite des Seilpolygons und ist parallel zu  $df$ .

Die Grösse der Resultante wird durch die Strecke  $df$  dargestellt, welche Anfangs- und Endpunkt des Kräftezuges verbindet. — Es ist also in diesem

Falle die Resultante gleich der Differenz der gegebenen Kräfte.

δ) Die Resultante beliebig vieler parallelen Kräfte lässt sich in gleicher Weise ermitteln. — In Fig. 25 ist dieselbe für fünf parallele Kräfte bestimmt. — Die Darstellung

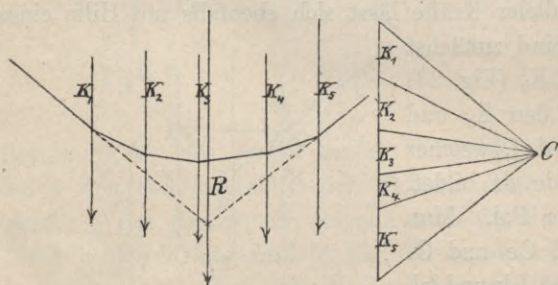


Fig. 25.

ist einfach und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

### 3. Aufgaben.

a) Ein Balken von gegebener Länge AB (Fig. 26) ist in horizontaler Lage, und in seinen Endpunkten unterstützt. In einem gegebenen Punkte M trägt der Balken die Last P. — Wie gross ist der Druck in jedem Stützpunkt?

Man zerlegt nach 2,  $\beta$ ) die Kraft P in zwei in A und B wirkende Seitenkräfte  $K_1$  und  $K_2$ , welche in Fig. 26 durch die Strecken DF und FE dargestellt sind.

Da P durch die beiden Stützen in A und B im Gleichgewicht gehalten wird, so müssen dieselben Gegendrücke (Auflagerreaktionen) leisten, welche den von P in A und B verursachten Drücken gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. — Die Auflagerreaktion in A ist deshalb so gross wie  $K_1$  und die in B gleich  $K_2$ .

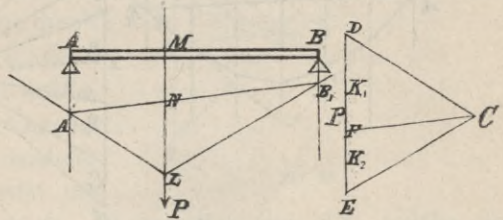


Fig. 26.

Zusatz.  $\triangle A_1NL \sim \triangle CDF$  und  $\triangle B_1NL \sim \triangle CEF$ , folglich:

$$A_1N : NL = CF : K_1$$

$$B_1N : NL = CF : K_2$$

oder:  $K_1 \cdot A_1N = CF \cdot NL$

$$K_2 \cdot B_1N = CF \cdot NL$$

folglich:  $K_1 \cdot A_1N = K_2 \cdot B_1N$ .

Die letztere Gleichung kann man auch so schreiben:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{B_1N}{A_1N} = \frac{BM}{AM}$$

d. h. die Auflagerdrücke (oder Auflagerreaktionen) in den Stützpunkten A u. B verhalten sich umgekehrt, wie die Abstände dieser Punkte von M. —

Mit Berücksichtigung dieses Satzes lassen sich die beiden Auflagerreaktionen sehr einfach auf folgende Weise bestimmen: Man ziehe durch A und M (Fig. 27) Vertikalen, und trage auf denselben die Strecken  $AD = ME = P$  ab. — Die Gerade, welche D mit B verbindet, teilt EM in die beiden Strecken FM und EF, welche die Grössen der Auflagerdrücke (also auch der Auflagerreaktionen) in A und B darstellen.

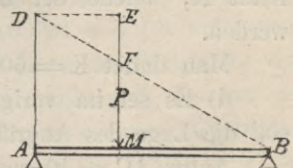


Fig. 27.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BFM und DEF folgt nämlich:

$$EF : FM = ED : BM = AM : BM.$$

Es ist also P in zwei Teile EF und FM zerlegt worden, welche sich



verhalten wie die Abschnitte AM und BM. — Folglich stellt  $FM = K_1$ , die Grösse der Auflagerreaktion in A, und  $EF = K_2$  diejenige in B dar.

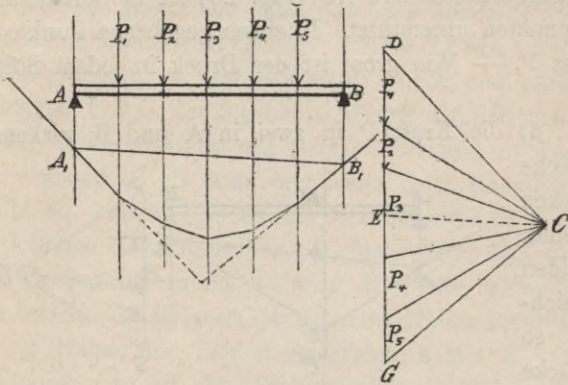


Fig. 28.

b) Ein Balken von 3 m Länge (Fig. 28), welcher in den Endpunkten A und B unterstützt ist, trägt 5 Lasten,  $P_1 = 500$  kg,  $P_2 = 300$  kg,  $P_3 = 600$  kg,  $P_4 = 400$  kg,  $P_5 = 300$  kg, deren Angriffspunkte die Länge des Balkens in 6 gleiche Teile teilen. — Wie gross sind die von diesen Lasten verursachten Auflagerdrücke?

langerdrucke?

Man zeichnet ein Seilpolygon der gegebenen Lasten. — Durch den Schnittpunkt F der ersten und letzten Seite geht die Resultante R sämtlicher Lasten. — R ist noch in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, welche in den durch A und B gehenden Vertikalen liegen. — Diese letzteren werden aber in  $A_1$  und  $B_1$  von der ersten resp. letzten Seite des gezeichneten Seilpolygons getroffen. — Ziehen wir deshalb vom Pol C die Gerade CE parallel zu  $A_1B_1$ , so werden auf DG (R) die beiden Strecken DE und EG abgeschnitten, welche nach 2,  $\beta$ ) die in A und B wirkenden Auflagerdrücke darstellen.

Für obiges Zahlenbeispiel ergibt sich:

$$\text{Auflagerdruck in A} = 1100 \text{ kg,}$$

$$\text{„ „ B} = 1000 \text{ „}$$

c) Ein einarmiger Hebel, dessen Drehpunkt A ist, hat die Länge  $AB = 60$  cm. — Im Punkte C, welcher 45 cm von A entfernt liegt, trägt derselbe die Last  $P = 80$  kg. — Es soll die Grösse der in B anzubringenden Kraft K, welche der Last P das Gleichgewicht hält, graphisch ermittelt werden.

Man findet  $K = 60$  kg.

d) Es sei im vorigen Beispiel  $K = 32$  kg und  $P = 48$  kg. — Man soll die Lage des Angriffspunktes C der Last P graphisch bestimmen.

Antw.  $AC = 40$  cm.

e) Zwei Lasten  $P_1$  und  $P_2$  (Fig. 29 s. S. 19) wirken in den Punkten a und b an einem zweiarmigen Hebel, welcher in m seinen Stützpunkt hat. — Wie gross muss die in dem gegebenen Punkte c wirkende Kraft K gemacht werden, wenn sie mit  $P_1$  und  $P_2$  im Gleichgewicht sein soll?

Aufl. Gleichgewicht findet statt, wenn die Resultante der Kräfte  $P_1$ ,

$P_2$ ,  $K$  durch den Stützpunkt  $m$  geht. — Man zeichnet demnach ein Seilpolygon dieser Kräfte. — Es sei  $no \parallel P_1$ ,  $op \parallel P_2$ ,  $C$  ein beliebiger Pol. Man ziehe  $de \parallel Cn$ ,  $ef \parallel Co$ ,  $fg \parallel Cp$  und verlängere  $de$  bis zum Schnittpunkt  $h$  mit der Vertikalen durch  $m$ . — Die noch fehlende letzte Seite des Seilpolygons, nämlich  $gl$ , muss alsdann mit  $de$  in  $h$  zusammentreffen. — Nun ziehe man durch  $C$  die Gerade  $Cq$  parallel zu  $gh$ , dann schneidet  $Cq$  auf der verlängerten Kräfte-  
linie  $np$  die Strecke  $pq$  ab, welche die Grösse der gesuchten Kraft  $K$  darstellt.

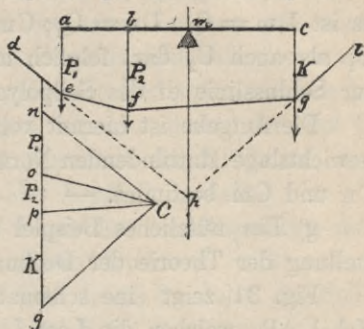


Fig. 29.

f) Ein Stab  $ab$  (Fig. 30) ruht mit seinen Endpunkten auf zwei schiefen Ebenen  $MO$  und  $MN$ , welche die Neigungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  gegen die Horizontalebene  $HH_1$  haben. — Das Gewicht des Stabes sei  $G$ . —

In dem gegebenen Punkte  $c$  wirkt eine Kraft  $P$  senkrecht zur Horizontalebene auf den Stab. — Bei welcher Lage wird der Stab durch die Wirkung von  $P$  und  $G$  im Gleichgewicht bleiben und wie gross sind alsdann die Normaldrücke gegen die beiden Ebenen?

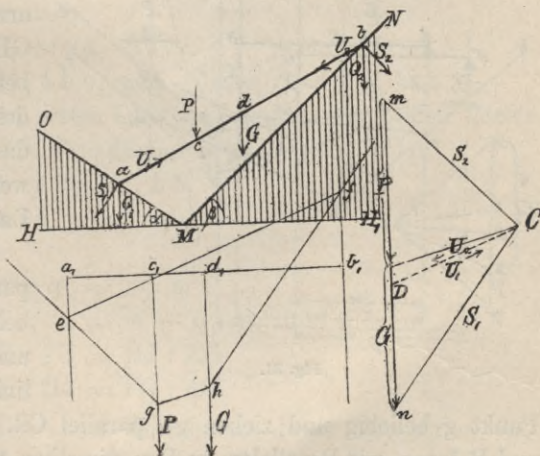


Fig. 30.

Aufl. Man bestimmt zuerst die von den Endpunkten des Stabes parallel zu  $P$  und  $G$  wirkenden Seiten-

kräfte. — Hierbei ist die Lage des Stabes beliebig zu nehmen, weil diese Kräfte nur von den Verhältnissen der Strecken  $ac$ ,  $cd$  und  $bd$  abhängen.

Es sei  $a_1b_1$  eine beliebige (z. B. horizontale) Lage des Stabes;  $c_1$  der Angriffspunkt von  $P$  und die Mitte  $d_1$  der des Gewichtes  $G$ . —  $mn$  sei der aus  $P$  und  $G$  gebildete Kräftezug. — Zur Konstruktion eines Seilpolygons  $eghf$  wählen wir den Pol  $C$  so, dass  $Cm \perp MN$  und  $Cn \perp MO$  wird. — Zieht man nun  $CD$  parallel zur Schlusslinie  $ef$  des Seilpolygons, so sind  $Dm$  und  $Dn$  gleich den in  $a$  und  $b$  wirkenden, zu  $P$  und  $G$  parallelen Seitenkräften  $Q_1$  und  $Q_2$ . —

Wird nun  $Q_1$  abermals in zwei Seitenkräfte  $S_1$  und  $U_1$ , ebenso  $Q_2$  in  $S_2$  und  $U_2$  zerlegt, so dass  $S_1 \perp MO$  und  $S_2 \perp MN$ ;  $U_1$  und  $U_2$  aber in



ab liegen, so befindet sich der Stab im Gleichgewicht, wenn  $U_1 = U_2$  ist. — Diese Zerlegung ist aber in unserer Figur bereits ausgeführt. — Denn es ist  $Dm = Q_1$ ,  $Dn = Q_2$ ;  $Cm \parallel S_2$ ,  $Cn \parallel S_1$ . —  $CD$  stellt demnach sowohl  $U_1$  als auch  $U_2$  dar, folglich muss der Stab parallel zu  $CD$ , oder parallel zur Schlusslinie  $ef$  des Seilpolygons gemacht werden. —

Die Aufgabe ist hiermit vollständig gelöst, denn auch die bei der Gleichgewichtslage stattfindenden Normaldrücke  $S_1$  und  $S_2$  sind durch die Strecken  $Cn$  und  $Cm$  bestimmt. —

g) Ein nützliches Beispiel zur Übung bildet auch die graphische Darstellung der Theorie der Decimalwage. —

Fig. 31 zeigt eine schematische Darstellung der Decimalwage. — Der Hebel  $AB$ , welcher die Last  $L$  trägt, ruht in  $A$  auf einem zweiten Hebel  $FG$ , welcher den festen Stützpunkt  $F$  hat. — Die beiden andern Endpunkte dieser Hebelarme sind durch Vertikalstangen  $GH$  und  $BJ$  an dem Hebel  $HM$  befestigt;  $K$  ist der Drehpunkt des letzteren. — In  $M$  soll nun das Gegengewicht  $P$  angebracht werden, welches der Wirkung der Last  $L$  das Gleichgewicht hält.

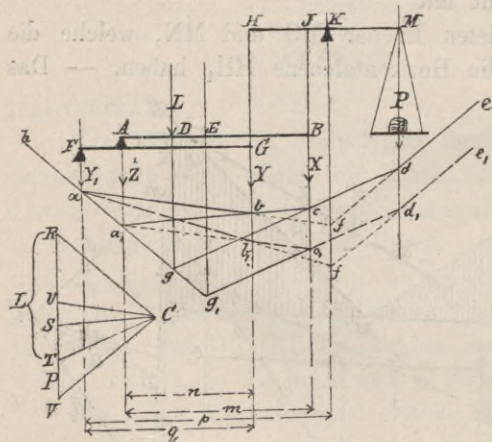


Fig. 31.

Wir machen  $RT$  gleich und parallel  $L$  und ziehen von einem beliebigen Pol die Strahlen  $CR$  und  $CT$ . — Auf der Richtungslinie von  $L$  nehmen wir den Punkt  $g$  beliebig und ziehen  $gh$  parallel  $CR$ ,  $gd$  parallel  $CT$ . — Durch  $A$  und  $B$  legen wir Parallelen zu  $Dg$ ; dieselben treffen  $gh$  und  $gd$  in  $a_1$  und  $c$ . — Ziehen wir jetzt  $CS$  parallel zu  $a_1c$ , so stellen  $RS = Z$  und  $ST = X$  die in  $A$  und  $B$  wirkenden Seitenkräfte der Last  $L$  dar.

Die Seitenkraft  $Z$  wirkt in  $A$  auf den zweiten Hebel  $FG$ . — Wir zerlegen diese Kraft wieder in zwei in  $F$  und  $G$  wirkende Seitenkräfte  $Y_1$  und  $Y$ , von welchen die erstere durch den festen Stützpunkt  $F$  aufgenommen wird und deshalb nicht in Betracht kommt. — Die Grössen von  $Y_1$  und  $Y$  ergeben sich leicht. — Wir verlängern nur die Vertikalen durch  $F$  und  $G$  bis  $a$  und  $b$  und ziehen durch den Pol  $C$  die Gerade  $CU$  parallel zur Verbindungslinie der Punkte  $a$  und  $b$ , wodurch  $RS$  in die beiden Strecken  $RU = Y_1$  und  $US = Y$  zerlegt wird.

Die beiden Kräfte  $X$  und  $Y$  wirken an dem Hebel  $HK$  und sollen mit  $P$  im Gleichgewicht sein. — Dies findet statt, wenn die Resultante von  $X$ ,

...

...

Y und P durch den Stützpunkt K geht. — Die Grösse von P bestimmen wir, wie in Aufgabe e) mit Hilfe eines Seilpolygons der Kräfte X, Y und P. — Hierzu können wir den Linienzug abcd benutzen, welchem wir noch die letzte Seite de hinzuzufügen haben; und diese ergibt sich, wenn wir ab bis zum Schnittpunkt f mit der durch K gehenden Vertikalen verlängern, und alsdann die Gerade fd ziehen. — Legen wir nun durch den Pol C die Gerade CV parallel zu fd, so schneidet diese auf der Kräftelinie die Strecke TV ab, welche die gesuchte Grösse der Kraft P darstellt.

Nun soll aber P unabhängig von der Lage des Angriffspunktes der Last L sein. — Lassen wir L in einem andern Punkte E wirken und zeichnen auf dieselbe Weise wie vorhin für diese Lage der Last das Seilpolygon der Kräfte, welche in H und J auf den Hebel K wirken und der jetzigen Kraft P, so erhalten wir als solches den Linienzug  $ab_1 c_1 d_1 e_1$ , in welchem  $c_1 d_1 \parallel cd \parallel CT$  ist.

Folglich wird P dieselbe Grösse wie vorhin erhalten, wenn  $f_1 e_1 \parallel fe \parallel CV$  ist. — Für diesen Fall ist demnach:

$$ff_1 = dd_1 = cc_1.$$

Nun ist aber  $\triangle aff_1 \sim \triangle abb_1$  und  $\triangle a_1 c_1 c \sim \triangle a_1 b_1 b$ . —

Sind die Höhen der beiden ersten Dreiecke p und q, der beiden letzten m und n ( $b b_1$ ,  $c c_1$  und  $ff_1$  als Grundlinien betrachtet), so folgt:

$$p : q = ff_1 : b b_1$$

$$m : n = cc_1 : b b_1$$

und weil  $cc_1 = ff_1$  sein muss:

$$p : q = m : n$$

$$\text{oder } p - q : q = m - n : n$$

$$\text{d. h. } HK : FG = HJ : AG$$

$$\text{oder } HK : HJ = FG : AG.$$

Ist demnach das Verhältnis der Hebelarme dieser Proportion entsprechend, so ist die Lage des Angriffspunktes der Last P ohne Einfluss auf die Grösse des Gegengewichtes P.

Eine andere, sehr einfache Darstellung dieses Gegenstandes findet man im folgenden Abschnitt.

h) Ein Stab, dessen Gewicht G ist, hat die Länge a. — Derselbe ist in seinen Endpunkten an zwei in einem Punkte befestigten Fäden aufgehängt, welche die Längen  $l_1$  und  $l_2$  haben. Es sollen die Spannungen  $s_1$  und  $s_2$  der beiden Fäden graphisch ermittelt werden. —

Anmerkung. Durch Rechnung findet man:

$$s_1 = \sqrt{2(l_1^2 + l_2^2) - a^2} \frac{G l_1}{2}, \quad s_2 = \sqrt{2(l_1^2 + l_2^2) - a^2} \frac{G l_2}{2}$$

Zur weiteren Übung in der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften mögen noch folgende Aufgaben dienen:



i) Ein Balken von 6 m Länge ist in dem einen Endpunkt A und in dem 4 m entfernten Punkt B unterstützt. Auf den Balken wirken die Lasten  $P_1 = 500$  kg,  $P_2 = 700$  kg,  $P_3 = 600$  kg,  $P_4 = 1000$  kg,  $P_5 = 400$  kg,  $P_6 = 600$  kg,  $P_7 = 400$  kg in je 1 m Entfernung von einander.  $P_1$  greift in A an. Es sollen die Auflagerdrücke graphisch bestimmt werden.

Aufl. Der Auflagerdruck in A ist 1225 kg

„ „ „ B „ 2975 kg.

k) Ein Stab AB stützt sich mit dem Endpunkt A auf eine horizontale Ebene AC, und lehnt mit dem andern Endpunkt B an eine vertikale Wand BC. In der Mitte des Stabes hängt eine Last von 60 kg; sein Eigengewicht beträgt 10 kg. — Unter der Voraussetzung, dass der Stab unter einem Winkel von  $60^\circ$  gegen AC geneigt ist, soll die Grösse einer Kraft K bestimmt werden, deren Richtungslinie senkrecht zu AB steht und durch C geht, welche das Ausgleiten des Stabes verhindert.

Aufl. Man findet  $K = 35$  kg.

Anmerkung. Bezeichnet man die Last mit G, den Neigungswinkel des Stabes gegen die Horizontalebene mit  $\alpha$ , so ist:

$$K = \frac{G \cos \alpha}{2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}.$$

l) An einem einarmigen Hebel AB, dessen Stützpunkt A, und dessen Länge  $AB = 320$  cm ist, wirken drei Lasten  $P_1 = 100$  kg,  $P_2 = 80$  kg,  $P_3 = 60$  kg und aufwärts gerichtet die beiden Kräfte  $Q_1 = 60$  kg und  $Q_2 = 80$  kg. Die Abstände der Lasten  $P_1, P_2, P_3$  von A sind bez. 80 cm, 160 cm, 240 cm; ferner haben  $Q_1$  und  $Q_2$  von A die Abstände bez. 96 cm und 140 cm. Es sollen die im Endpunkt B anzubringende Kraft Y, welche das Gleichgewicht des Hebels herstellt und der Druck X auf den Stützpunkt A graphisch ermittelt werden.

Aufl. Man findet  $X = 43$  kg,  $Y = 57$  kg.

### III. Abschnitt.

#### Graphische Darstellung statischer Momente.

Ein ebenes starres System werde um einen Punkt A, den wir uns unbeweglich denken, gedreht, und zwar durch eine Kraft P, welche in der Ebene des Systems liegt. — Die Wirkung der Kraft P hängt dann nicht nur von der Grösse der Kraft, sondern auch noch von der Entfernung ihrer Richtungslinie von A ab. So ist z. B. ersichtlich, dass keine Drehung erfolgt, wenn P durch A geht.

Um den Einfluss, welchen die Grösse der Kraft und ihre Lage gegen



den Drehungspunkt A hat, kennen zu lernen, stellen wir folgende Gesetze auf:

1. Eine Kraft P, welche um einen festen Punkt A zu drehen sucht, kann man ersetzen durch eine gleich grosse Kraft  $P_1$ , welche in demselben Sinn um A dreht und gleichen Abstand wie P von A hat.

Beweis. Es sei pq (Fig. 32) die Richtungslinie der gegebenen Kraft P und mn diejenige Gerade, in welcher  $P_1$  liegen soll. Der Schnittpunkt beider Geraden sei a. — Da pq und mn gleiche Abstände von A haben sollen, so muss A auf der Halbierungslinie des Winkels pan liegen. — Nun sei a der Angriffspunkt der Kraft P = ab. Die letztere zerlegen wir in zwei Kräfte ac und af, nach den Richtungen der Geraden mn und Aa. — Da alsdann bc parallel Aa ist, so wird das Dreieck abc gleichschenkelig, also  $ac = ab = P$ . — Die Seitenkraft af ist in Bezug auf Drehung um A wirkungslos. — Folglich muss die Grösse einer in mn liegenden Kraft  $P_1$ , welche P ersetzt, gleich ac d. h. gleich P sein. —

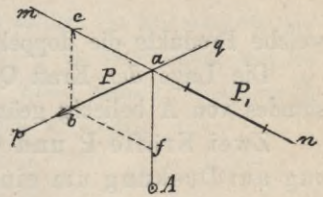


Fig. 32.

Lässt man  $P_1$  in entgegengesetzter Richtung in der Linie mn wirken, so hält sie der Kraft P (in Bezug auf Drehung um A) das Gleichgewicht.

2. Beliebig viele Kräfte  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , welche sämtlich gleiche Abstände von einem festen Drehpunkt A haben, können durch eine einzige Kraft ersetzt werden, welche denselben Abstand von A hat und gleich der algebraischen Summe aller Kräfte ist.

Nach 1) können wir nämlich die Kraft  $P_1$  in die Richtungslinie der Kraft  $P_2$  legen, ohne die Wirkung von  $P_1$  zu verändern. — Hierdurch erhalten wir in dieser Geraden die Kraft  $P_1 + P_2$ , welche wir alsdann in die Richtungslinie der Kraft  $P_3$  legen können u. s. f. — Auf diese Weise werden sämtliche Kräfte schliesslich in derselben Geraden liegen und eine einzige Kraft von der Grösse

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

bilden, welche denselben Abstand, wie die gegebenen Kräfte von A hat. — Diese Summe enthält Glieder von verschiedenen Vorzeichen, wenn nicht alle Kräfte gleiche Drehungsrichtung haben.

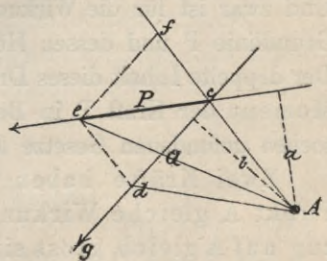


Fig. 33.

3. Eine Kraft P, welche um A dreht, habe von diesem Punkte den Abstand a. —

Wie gross muss eine im Abstand b von A liegende Kraft Q sein, wenn sie in Bezug auf Drehung gleiche Wirkung wie P haben soll? (Fig. 33).



Wir verlängern die Richtungslinie der gesuchten Kraft  $Q$ , bis sie die Richtungslinie der Kraft  $P$  in  $c$  trifft. — Nun kann  $P$  zerlegt werden in zwei Kräfte  $cd$  und  $cf$ , von welchen die erstere in  $cg$  und die letztere in der Verbindungslinie des Punktes  $c$  mit  $A$  liegt. —  $cd$  stellt die Grösse von  $Q$  dar, und  $cf$  ist in Bezug auf Drehung um  $A$  wirkungslos.

Verbinden wir die Punkte  $d$  und  $e$  mit  $A$ , so folgt, weil  $de$  parallel zu  $Af$ :

$$\triangle Ace = \triangle Acd$$

oder, wenn man in diesen Dreiecken  $ce$  und  $cd$  als Grundlinien betrachtet:

$$Pa = Qb,$$

welche Produkte die doppelten Inhalte der Dreiecke bedeuten.

Die Lage der Kraft  $Q$  kann nach 1) unter Beibehaltung ihres Abstandes von  $A$  beliebig geändert werden. — Folglich ergibt sich:

Zwei Kräfte  $P$  und  $Q$  haben gleich grosse Wirkungen in Bezug auf Drehung um einen festen Punkt  $A$ , wenn die beiden Dreiecke, deren Grundlinien  $P$  und  $Q$  sind, und deren gemeinschaftliche Spitze der Punkt  $A$  ist, inhaltsgleich sind. — Beide Kräfte müssen in gleichem Sinn um  $A$  drehen. — (Fig. 34.)

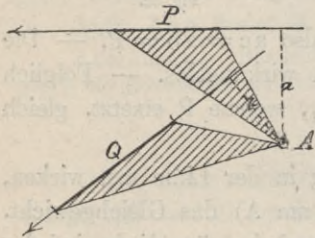


Fig. 34.

Kehren wir die Richtung der einen Kraft  $Q$  um, so folgt:

Zwei Kräfte  $P$  und  $Q$  halten einander in Bezug auf Drehung um einen festen Punkt  $A$  Gleichgewicht (d. h. es erfolgt keine Drehung) wenn die im vorigen erwähnten Dreiecke inhaltsgleich sind, und die Drehungsrichtungen der beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  einander entgegengesetzt sind. —

Hiermit ist nun bewiesen, dass die Wirkung einer Kraft  $P$  in Bezug auf Drehung um einen Punkt  $A$  nicht nur von der Grösse der Kraft, sondern auch von dem Abstand ihrer Richtungslinie von  $A$  abhängig ist. — Und zwar ist für die Wirkung der Kraft  $P$  das Dreieck massgebend, dessen Grundlinie  $P$  und dessen Höhe der Abstand des Punktes  $A$  von  $P$  ist. — Der doppelte Inhalt dieses Dreiecks, oder das Produkt  $Pa$  wird das statische Moment der Kraft  $P$  in Bezug auf den Punkt  $A$  genannt. — Die beiden soeben gefundenen Gesetze können wir deshalb auch so aussprechen:

Zwei Kräfte haben in Bezug auf Drehung um einen festen Punkt  $A$  gleiche Wirkung, wenn ihre statischen Momente in Bezug auf  $A$  gleich gross sind, und der Sinn der Drehung bei beiden Kräften der gleiche ist; —

und

Zwei Kräfte von entgegengesetztem Drehungssinn halten ein-

ander das Gleichgewicht, wenn ihre statischen Momente in Bezug auf den Drehungspunkt gleich gross sind. —

4. P und Q seien zwei um einen Punkt A drehende Kräfte, R ihre Resultante; a, b und r die Abstände dieser Kräfte von A. Wir können dann nach 3) P und Q durch zwei in dem Abstände r von A wirkende Kräfte  $P_1$  und  $Q_1$  ersetzen, wenn wir dieselben so bestimmen, dass:

$$P_1 r = Pa$$

$$Q_1 r = Qb.$$

Da jetzt  $P_1$  und  $Q_1$  gleiche Abstände von A haben, so können wir sie nach 2) durch Addition zu einer einzigen Kraft  $P_1 + Q_1$  vereinigen, welche den Abstand r von A hat. — Hieraus ergibt sich aber, dass  $P_1 + Q_1 = R$  sein muss. — Wird beiderseitig mit r multipliziert, so folgt:

$$P_1 r + Q_1 r = Rr$$

$$\text{oder } Pa + Qb = Rr$$

d. h.

Das statische Moment der Resultante zweier Kräfte ist gleich der Summe der statischen Momente der Seitenkräfte.

Wir wollen diesen wichtigen Satz noch einmal geometrisch beweisen. (Fig. 35.)

P und Q seien die beiden Kräfte,  $ce = R$  ihre Resultante, (also Diagonale des Kräfteparallelogramms cdef). — Wir zerlegen P und Q, jede in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen der Geraden ce und Ac. — Die in Ac liegenden Seitenkräfte haben keinen Einfluss auf Drehung um A, es bleiben also nur noch die beiden andern cg und ch übrig. — Diese letzteren werden aber durch dg und fh, welche parallel zu Ac sind, auf ce abge schnitten; und da sich hieraus leicht die Kongruenz der beiden Dreiecke cdg und efh ergibt, so folgt, dass  $cg = eh$  und folglich die Summe der Seitenkräfte  $cg + ch$ , welche in R liegen, gleich R ist. — Weil nun dg parallel Ac, so folgt:

$$\triangle Acd = \triangle Acg = \triangle Aeh$$

und weil fh parallel Ac:

$$\triangle Acf = \triangle Ach$$

und hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \triangle Acf + \triangle Acd &= \triangle Ach + \triangle Aeh \\ &= \triangle Ace. \end{aligned}$$

d. h. wenn man die senkrechten Abstände der Kräfte P, Q und R von A mit a, b und r bezeichnet:

$$Pa + Qb = Rr.$$

Sind  $P_1, P_2, P_3$  drei Kräfte,  $R'$  die Resultante der beiden ersten, und

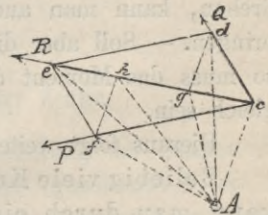


Fig. 35.



sind ferner  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a'$  die Abstände der Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $R'$  von einem festen Drehungspunkte A, so ist nach dem vorigen:

$$R'a' = P_1a_1 + P_2a_2.$$

Bezeichnen wir die Resultante von  $R'$  und  $P_3$  mit  $R$  und die Abstände der Kräfte  $P_3$  und  $R$  vom Drehungspunkte mit  $a_3$  und  $a$ , so ist auch

$$Ra = R'a' + P_3a_3$$

oder wenn wir für  $R'a'$  den vorigen Wert setzen:

$$Ra = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3.$$

Durch Fortsetzung dieser Schlussweise ergibt sich allgemein, dass auch für  $n$  Kräfte  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , welche die Abstände  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vom Punkte A haben, und die Resultante  $R$  im Abstand  $a$  vom Drehungspunkt der Satz gilt:

$$Ra = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + \dots + P_n a_n$$

d. h.

Das statische Moment der Resultante beliebig vieler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte.

5. Die Wirkung beliebig vieler Kräfte, welche um einen festen Punkt drehen, kann man auch durch die Resultante sämtlicher Kräfte hervorbringen. — Soll aber die Resultante durch eine andere Kraft ersetzt werden, so muss das Moment dieser Kraft nach 3) dem Moment der Resultante gleich sein.

Hieraus folgt weiter:

Beliebig viele Kräfte, welche um einen festen Punkt A drehen, kann man durch eine einzige Kraft  $Q$  ersetzen, deren Moment gleich der Summe der Momente der gegebenen Kräfte ist.

Oder, wenn man der Kraft  $Q$  entgegengesetzte Richtung giebt:

Die Wirkung beliebig vieler Kräfte, welche um einen festen Punkt drehen, kann man durch eine einzige Kraft  $Q$  aufheben, deren Moment gleich der Summe der Momente der gegebenen Kräfte ist.

Ferner: Ist ein Kräftesystem im Gleichgewicht, so hält jede einzelne Kraft allen übrigen das Gleichgewicht, d. h. jede der Kräfte ist der Resultante aller übrigen Kräfte gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Hieraus folgt noch:

Ist ein System von Kräften im Gleichgewicht, so ist das Moment einer einzigen dieser Kräfte gleich der Summe der Momente aller übrigen, in Bezug auf einen beliebigen Drehpunkt. —

## 6. Reduktion einer Kraft auf einen gegebenen Abstand vom Drehungspunkt.

Die Lösung dieser Aufgabe ist schon in 3) enthalten. — Wir geben hier noch folgende Konstruktion:

Es sei  $P$ , Fig. 36, die gegebene Kraft,  $Ae = a$  ihr Abstand vom Drehungspunkte  $A$ . — Es soll dieselbe durch eine Kraft  $Q$ , welche im Abstand  $Ah = b$  von  $A$  liegt, ersetzt werden. —

Wir zeichnen mit dem Halbmesser  $b$  um  $A$  als Mittelpunkt einen Kreis, welcher die Richtungslinie der Kraft  $P$  in  $d$  schneidet, und tragen von  $d$  aus die Strecke  $dg = P$  ab. — Nun ziehen wir  $df$  senkrecht zu  $Ad$  und  $fg$  parallel zu  $Ad$ , dann stellt  $df$  die Grösse der Kraft  $Q$  dar. — Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich leicht, wenn man  $P$  in zwei Kräfte nach den Richtungen von  $df$  und  $Ad$  zerlegt. — Die letztere kommt nicht in Betracht, weil ihre Richtungslinie durch  $A$  geht. —

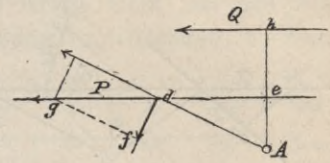


Fig. 36.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $dfg$  und  $Aed$  folgt wieder:

$$P : Q = b : a$$

$$Qb = Pa$$

$$\text{und hieraus } Q = P \frac{a}{b}.$$

## 7. Darstellung der Momentensumme beliebig vieler Kräfte.

Der zunächst sich darbietende Weg zur Ermittlung der Summe der Momente beliebig vieler Kräfte in Bezug auf einen gegebenen Punkt ist der, dass man mittelst eines Seilpolygons die Resultante sämtlicher Kräfte konstruiert, und diese mit ihrem Abstand vom Drehungspunkt multipliziert.

Oder: Wir können nach 1) jede der gegebenen Kräfte unter Beibehaltung ihres Abstandes vom Drehungspunkte  $A$  in eine beliebige Lage bringen. — Es seien z. B.  $P_1, P_2, P_3$ , Fig. 37, drei Kräfte, deren Momentensumme in Bezug auf  $A$  bestimmt werden soll. — Wir drehen sämtliche Kräfte um  $A$  so, dass ihre Richtungslinien unter sich parallel werden. — Sind dann  $P_1', P_2', P_3'$  die neuen Kräfte, so bilden wir aus diesen mit Hilfe eines Seilpolygons die Resultante  $R$ . Das Produkt dieser Kraft mit ihrem Abstand von  $A$  stellt das Moment derselben, oder die Summe der Momente der gegebenen Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  dar.

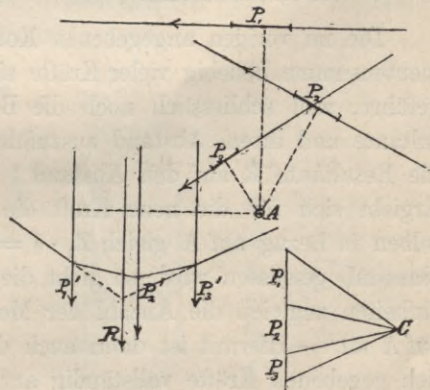


Fig. 37.



Eine zweite Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass man sämtliche Kräfte nach 6) auf denselben Abstand vom Drehungspunkt A reduziert. —

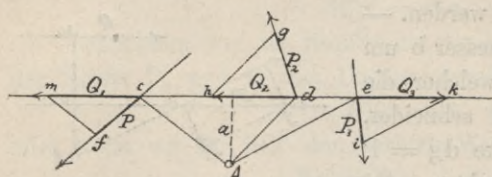


Fig. 38.

Sind z. B.  $P_1, P_2, P_3$  (Fig. 38) die gegebenen Kräfte, so ziehen wir eine beliebige Gerade  $mk$ , welche den Abstand  $a$  von A hat. Nun verlegen wir die Angriffspunkte der gegebenen Kräfte nach den Punkten  $c, d$

und  $e$ , in welchen ihre Richtungslinien die Gerade  $mk$  treffen. Diese Punkte verbinden wir durch die Geraden  $Ac, Ad, Ae$  mit A. — Wird nun jede der Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  in zwei Seitenkräfte zerlegt, von welchen die eine in der Geraden  $mk$  liegt, die andere dagegen nach A gerichtet ist, so werden nur die in  $mk$  liegenden Seitenkräfte  $Q_1, Q_2, Q_3$  in Betracht kommen, weil die nach A gerichteten Kräfte in Bezug auf Drehung um A wirkungslos sind. — Die Grössen der Kräfte  $Q_1, Q_2, Q_3$  ergeben sich nach 6), wenn man  $mf \parallel Ac, gh \parallel Ad$  und  $ik \parallel Ae$  zieht; es ist alsdann  $mc = Q_1, dh = Q_2, ek = Q_3$ .

Die Summe der Momente von  $P_1, P_2, P_3$  in Bezug auf A ist nun  $= (Q_1 + Q_2 + Q_3) a$ .

In Fig. 38 hat  $Q_3$  eine den Kräften  $Q_1$  und  $Q_2$  entgegengesetzte Richtung; es würde deshalb bei der Ausführung der Addition der drei Kräfte der Summand  $Q_3$  entgegengesetztes Vorzeichen wie  $Q_1$  und  $Q_2$  erhalten.

### 8. Momentenmassstab.

Die im vorigen angegebenen Konstruktionen zur Bestimmung der Momentensumme beliebig vieler Kräfte sind nicht vollständig graphisch durchgeführt, weil schliesslich noch die Berechnung des Produkts aus der Resultante und ihrem Abstand auszuführen ist. — Wir können aber nach 6) die Resultante  $R$  auf den Abstand  $1$  vom Drehungspunkt A reduzieren. — Ergibt sich für die neue Kraft die Grösse  $R_1$ , so ist das Moment derselben in Bezug auf A gleich  $R_1 \cdot 1 = R_1$ , d. h. wenn  $R_1$  nach dem Kräfte-massstab gemessen wird, so giebt die Zahl der für  $R_1$  gefundenen Gewichtseinheiten zugleich die Anzahl der Momenteneinheiten dieser Kraft in Bezug auf A an. — Hiermit ist dann auch die Summe der Momente der ursprünglich gegebenen Kräfte vollständig auf graphischem Wege bestimmt.

Ebenso ergibt sich: Wenn man die einzelnen Kräfte sämtlich auf den Abstand  $1$  vom Drehungspunkt reduziert, so werden diese reduzierten Kräfte nach dem Kräfte-massstab gemessen, zugleich die Momente der einzelnen Kräfte darstellen. — Für alle auf den Abstand  $1$  vom Drehungspunkt re-

duzierten Kräfte kann also der Kräftemasstab zugleich als Momentenmasstab benutzt werden.

Erscheint es dagegen zweckmässiger, die Kräfte nicht auf den Abstand 1, sondern auf irgend einen andern Abstand zu reduzieren, so lässt sich leicht ein Masstab herstellen, nach welchem die Momente der Kräfte unmittelbar gemessen werden können.

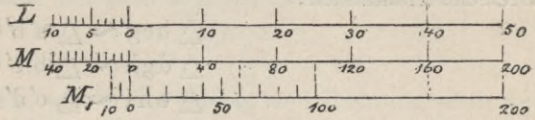


Fig. 39.

Ist z. B.  $L$  (Fig. 39) der Kräftemasstab und  $P$  eine gegebene Kraft, welche auf den Abstand 4 vom Drehungspunkte reduziert, die Grösse  $P_1$  hat, so ist  $P_1$  nach dem Kräftemasstab zu messen und die erhaltene Grösse mit 4 zu multiplizieren. Das Produkt  $4 P_1$  ist das Moment der Kraft  $P_1$ . — Nun sei  $M$  ein zweiter, dem  $L$  gleicher Masstab. — Wir multiplizieren jede der Längenbezeichnungen von  $L$  mit 4, und schreiben die so erhaltenen Zahlen an die entsprechenden Stellen des Masstabes  $M$ . —

Es ist klar, dass alsdann  $P_1$  nach dem Masstab  $M$  gemessen die Grösse  $4 P_1$  ergibt. — Für unsern Fall ist demnach  $M$  der Momentenmasstab.

Die unbequeme Teilung 0,40, 80, . . . 200 kann man schliesslich, wie auf dem Masstab  $M_1$  angegeben ist, in die zweckmässigere: 0,50, 100, 200 umwandeln.

Es ist noch zu erwähnen, dass in gleicher Weise wie der Kräftemasstab auch der Längenmasstab verwandelt werden kann, wenn man sämtliche Kräfte durch Kräfte von gleicher Grösse ersetzt, und die Abstände der letzteren vom Drehungspunkte bestimmt.

### 9. Momentensumme paralleler Kräfte.

Das Seilpolygon bietet ein einfaches Mittel, um die Momente paralleler Kräfte und die Summe ihrer Momente, oder das Moment der Resultante in Bezug auf einen beliebigen Punkt darzustellen.

Es seien  $K_1, K_2, K_3$  (Fig. 40) gegebene parallele Kräfte, welche von dem Punkte  $O$  die Abstände  $a_1, a_2, a_3$  haben.

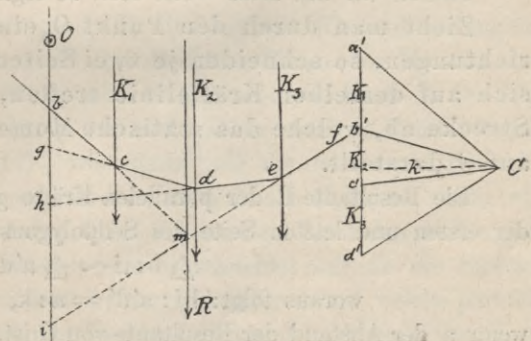


Fig. 40.

—  $bcdef$  sei ein auf bekannte Weise konstruiertes Seilpolygon dieser Kräfte,



und  $k$  der Abstand des Pols  $C$  von der Kräfteelinie  $a'd'$ . — Durch  $O$  ziehen wir eine Parallele zu den Kraftrichtungen und verlängern die Seiten des Seilpolygons, bis jene Parallele in den Punkten  $g, h, i$  getroffen wird. — Dann sind wegen des Parallelismus der Seiten folgende Paare ähnlicher Dreiecke entstanden:

$$\begin{aligned}\triangle b c g &\sim \triangle a' b' C \\ \triangle d g h &\sim \triangle b' c' C \\ \triangle e h i &\sim \triangle c' d' C \\ \triangle b m i &\sim \triangle a' d' C.\end{aligned}$$

Wir erhalten aus dem ersten Paar dieser Dreiecke:

$$\begin{aligned}b g : a' b' &= a_1 : k \\ \text{oder } b g : K_1 &= a_1 : k \\ \text{folglich } K_1 a_1 &= b g : k.\end{aligned}$$

Die nach dem Kräfteastab gemessene Strecke  $bg$ , multipliziert mit  $k$ , giebt demnach das Moment der Kraft  $K_1$  in Bezug auf den Punkt  $O$ . — Ist  $k$  gleich der Längeneinheit, so stellt die Strecke  $bg$  nach dem Kräfteastab gemessen, unmittelbar das Moment der Kraft  $K_1$  dar. — Für einen andern Wert von  $k$  kann man, wie in 8) gezeigt worden ist, einen Momentenastab herstellen, nach welchem man durch die Strecke  $bg$  ebenfalls das Moment der Kraft  $K$  bestimmen kann.

Setzen wir nun voraus, dieser Momentenastab sei festgestellt, so können wir sagen: Das Moment der Kraft  $K_1$  in Bezug auf  $O$  wird durch die Strecke  $bg$  dargestellt. — Ebenso bedeutet alsdann  $gh$  das Moment der Kraft  $K_2$ , denn es ist:

$$\begin{aligned}\triangle d g h &\sim \triangle b' c' C; \\ \text{folglich } g h : b' c' &= a_2 : k \\ g h : K_2 &= a_2 : k \\ K_2 a_2 &= g h \cdot k.\end{aligned}$$

Fahren wir auf diese Weise fort, so ergibt sich leicht folgendes Gesetz:

Zieht man durch den Punkt  $O$  eine Parallele zu den Kraftrichtungen, so schneiden je zwei Seiten des Seilpolygons, welche sich auf derselben Kräfteelinie treffen, auf jener Parallelen eine Strecke  $ab$ , welche das statische Moment der betr. Kraft in Bezug auf  $O$  darstellt.

Die Resultante  $R$  der parallelen Kräfte geht durch den Schnittpunkt in der ersten und letzten Seite des Seilpolygons. — Es ist nun wieder:

$$\triangle b m i \sim \triangle a' d' C$$

$$\text{woraus folgt: } b i : a' d' = a : k,$$

wenn  $a$  der Abstand der Resultante von  $O$  ist. — Da nun  $a' d' = R$ , so folgt:

$$\begin{aligned}b i : R &= a : k \\ R a &= b i \cdot k,\end{aligned}$$

mithin stellt  $bi$  nach dem Momentenmassstab gemessen, das Moment der Resultante dar.

Nun ist noch:  $bi = bg + gh + hi$ ,

woraus sich nochmals der schon bewiesene Satz ergibt, dass das Moment der Resultante gleich der Summe der Momente der Seitenkräfte ist.

### 10. Aufgaben.

a) Zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ , welche der Grösse und Richtung nach gegeben sind, drehen um einen Punkt A. — Es soll die Grösse einer in der gegebenen Geraden  $mn$  liegenden Kraft  $R$  bestimmt werden, welche den gegebenen Kräften in Bezug auf Drehung um A das Gleichgewicht hält.

b) Drei Kräfte, deren Richtungslinien nicht durch einen Punkt gehen, sind gegeben. — Es soll der Punkt A so bestimmt werden, dass die drei Kräfte in Bezug auf Drehung um denselben im Gleichgewicht sind. —

c) In Fig. 41 ist die Decimalwage wie früher schematisch dargestellt.

— Die Last  $L$  ruht in a auf AB. — Wir tragen auf BJ die Strecke  $Bp = L ab$  und ziehen  $Ap$ . — Ist dann  $ab$  ebenfalls gleich  $L$  gemacht worden, so schneidet  $Ap$  auf  $ab$  die Strecken  $ac$  und  $bc$  ab, welche nach II 3a) die Grössen der in A und B wirkenden Seitenkräfte  $Z$  und  $X$  darstellen. —

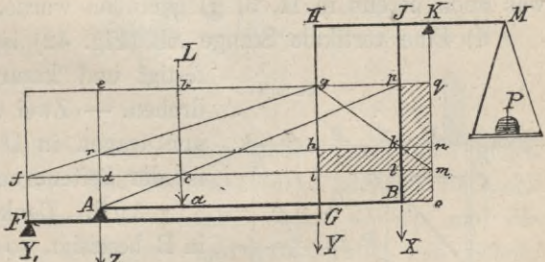


Fig. 41.

Durch die Gerade  $dl$ , welche durch  $c$  geht und parallel  $AB$  ist, werden diese Strecken nach  $Bl$  und  $de$  übertragen. (Hier ist noch  $de$  senkrecht zu  $AB$ , und  $ge$  geht durch  $b$  und ist parallel zu  $AB$ ). —

Ziehen wir durch den Stützpunkt  $K$  die Vertikale  $Ko$  und verlängern wir  $dl$  bis  $m$ ,  $AB$  bis  $o$ , so stellt das Rechteck  $Blmo$  das Moment der Kraft  $X$  in Bezug auf den Stützpunkt  $K$  dar. — Die Kraft  $Z$  ( $= de$ ), welche in  $A$  auf  $FG$  wirkt, zerlegen wir nochmals in zwei, in  $F$  und  $G$  angreifende Seitenkräfte  $Y_1$  und  $Y$ , von denen nur die letztere in Betracht kommt. — Die Grösse von  $Y$  ergibt sich wieder nach II, 3, a), wenn wir  $cd$  bis zum Schnittpunkt  $f$  mit der durch  $f$  gehenden Vertikalen verlängern und alsdann die Gerade  $fg$  ziehen; letztere schneidet auf  $de$  die Strecke  $dr = Y$  ab. — Übertragen wir jetzt  $dr$  durch die Gerade  $rn$ , welche parallel mit  $dm$  ist, nach  $hi$ , so stellt das Rechteck  $ihnm$  das Moment von  $Y$  in Bezug auf den Punkt  $K$  dar. — Es ist also die Summe der Momente von  $X$  und  $Y$  gleich  $Blmo + ihm$ , und diese muss für den Gleichgewichts-



zustand dem Moment des Gegengewichtes P in Bezug auf den Stützpunkt K gleich sein. — Die Lage des Angriffspunktes der Last L soll nun keinen Einfluss auf die Grösse von P haben, und dies ist der Fall, wenn jene Momentensumme bei beliebiger Verschiebung des Punktes a auf AB sich nicht ändert. — Verlegt man deshalb L nach B, so ist L die einzige an dem Hebel HK wirkende Kraft, und ihr Moment wird jetzt durch das Rechteck Bp<sub>qo</sub> dargestellt. — Es müsste demnach auch für diesen Fall

$$Blmo + ihmn = Bp_{qo}$$

sein, woraus sich weiter ergibt:

$$ihmn = plmq. —$$

Das letztere ist der Fall, wenn k auf der Diagonale gm liegt. —

Leicht ergibt sich jetzt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke fgm und grk die Proportion:

$$fg : fr = gm : mk$$

$$\text{folglich auch: } FG : AF = HK : JK,$$

was auch bereits in II, 3, g) gefunden wurde. —

d) Eine vertikale Stange AB (Fig. 42) ist in A und B in Lagern befestigt und kann sich um ihre Längsachse drehen. — Zwei andere an AB sitzende Stangen tragen in D eine Last P. — Wie gross ist der Seitendruck in jedem Lager?

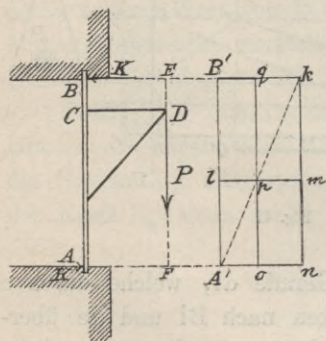


Fig. 42.

Aufl. Denken wir uns das feste Lager in B beseitigt, so würde die Kraft P die Stange AB nach rechts um A zu drehen suchen. — Durch eine Kraft K, welche in B nach horizontaler Richtung wirkt, und in entgegengesetztem Sinne wie P dreht, kann man das Gleichgewicht wiederherstellen, wenn man K so bestimmt, dass das Moment dieser Kraft dem

Moment von P in Bezug auf A gleich wird. —

Es sei nun A'B'kn ein Rechteck, dessen Höhe A'B' gleich und parallel AB, und dessen Grundlinie A'n gleich dem Abstand CD der Kraft von AB ist. — Machen wir mn = P und ziehen lm parallel A'n, so stellt das Rechteck A'lmn das Moment der Kraft P in Bezug auf A vor. — Dieses Rechteck können wir in ein anderes verwandeln, dessen Höhe = A'B' ist, wenn wir die Diagonale A'k ziehen und durch den Schnittpunkt p die Gerade oq parallel zu A'B' legen; es ist dann A'B'qo = A'lmn. — Hiernach stellt nun B'q die Grösse der gesuchten Kraft K dar, deren Abstand von A gleich A'B', und deren Moment in Bezug auf diesen Punkt dem Moment der Kraft P gleich ist. — Nehmen wir B als Drehungspunkt, so finden wir auf dieselbe Weise die Grösse einer in A anzubringenden Kraft, welche

das Gleichgewicht wiederherstellt. — Man erkennt leicht, dass die Kraft derjenigen in B gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist. —

Die beiden gefundenen Kräfte stellen die von den Lagern zu leistenden Widerstände, und wenn man sich ihre Richtungen umgekehrt denkt, die von P verursachten Seitendrucke gegen die Lager dar.

e) Ist die Vertikalstange BF (Fig. 43) in den bei A und B befindlichen Lagern gestützt, während der Teil AF frei liegt, so können die Seitendrucke (oder die Reaktionen) in den

Lagern auf gleiche Weise ermittelt werden. —  $mn$  sei wieder gleich und parallel P;  $on = CD$  (Abstand der Kraft P von der Stange BF), dann stellt das Rechteck  $lmno$  das Moment von P in Bezug auf den Stützpunkt B dar. — Die in A nach horizontaler Richtung wirkende Kraft K hat den Abstand  $AB = A'B'$  von B; das Moment derselben in

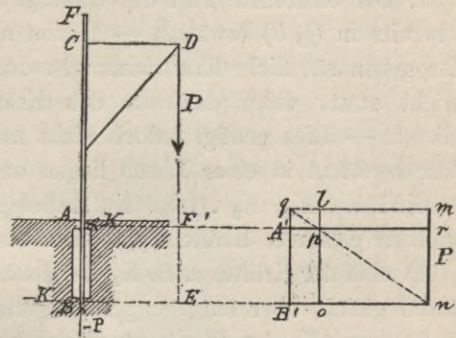


Fig. 43.

Bezug auf B, welches zur Herstellung des Gleichgewichtes dem von P gleich sein muss, kann deshalb durch ein dem Rechteck  $lmno$  gleiches Rechteck dargestellt werden. Dasselbe ergibt sich leicht, wenn wir  $np$  und die Seite  $lm$  bis zum Schnittpunkt  $q$  verlängern und  $qB'$  parallel  $mn$  ziehen. — Es ist dann:

$$A'B'nr = lmno.$$

Da nun  $A'B'$  gleich dem Abstand der gesuchten Kraft K von B ist, so stellt  $A'r$  die Grösse dieser Kraft dar.

Gleiche Grösse hat, wie leicht einzusehen ist, die entsprechende Kraft in dem Lager bei A.

Wie können diese beiden letzten Aufgaben mit Hilfe von I, 5) gelöst werden?



## IV. Abschnitt.

## Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen eines Kräftesystems.

1. Der einfachste Fall des Gleichgewichtes eines Systems von Kräften ist bereits in (I, 5) erwähnt. — Haben alle Kräfte denselben Angriffspunkt (oder gehen sämtliche Krafrichtungen durch einen Punkt), so findet Gleichgewicht statt, wenn das aus den Kräften gebildete Kräftepolygon sich schliesst. — Dies genügt jedoch nicht mehr, wenn die Richtungslinien der Kräfte zerstreut in einer Ebene liegen und nicht durch einen Punkt gehen.

Sind  $K_1, K_2, K_3 \dots K_n$  beliebige Kräfte, so wird sich das aus denselben gebildete Kräftepolygon schliessen, wenn:

$\alpha$ ) eine der Kräfte, z. B.  $K_r$  der Resultante aus den sämtlichen übrigen Kräften gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist;

$\beta$ ) wenn  $K_r$  der Resultante gleich und entgegengesetzt ist, aber nicht in der Richtungslinie derselben, sondern in einer zu dieser letzteren parallelen Geraden liegt. — Es ist nämlich ersichtlich, dass parallele Verschiebungen der Kräfte keinen Einfluss auf die Gestalt des Kräftepolygons haben.

Zur Erläuterung des Vorhergehenden betrachten wir drei Kräfte  $K_1, K_2, K_3$  (Fig. 44) und

nehmen an, in  $\alpha$ ) liege  $K_3$  in der Richtungslinie der Resultante von  $K_1$  und  $K_2$  und sei dieser gleich, aber entgegengesetzt gerichtet; in  $\beta$ ) liege dagegen  $K_3$ , welche ebenfalls der Resultante aus  $K_1$  und  $K_2$  gleich und entgegengesetzt ist, in einer zu dieser Resultante parallelen Geraden. —

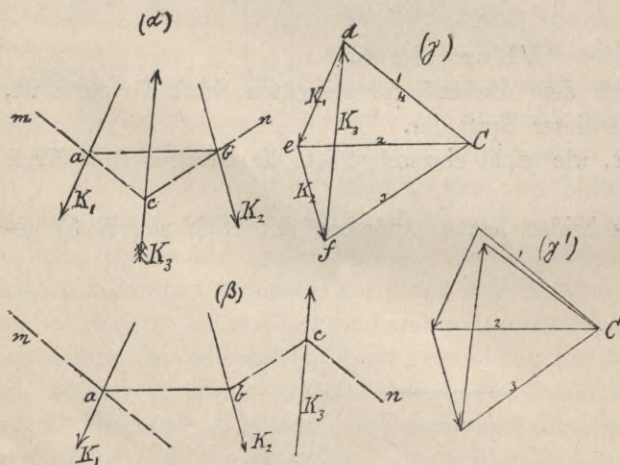


Fig. 44.

In beiden Fällen wird das Kräftepolygon durch eine geschlossene Figur, nämlich Dreieck  $def$  ( $\gamma$ ) dargestellt, d. h. die Resultante der drei Kräfte ist gleich Null.

Konstruiert man nun für  $(\alpha)$  mit Hilfe von  $(\gamma)$  ein Seilpolygon der drei Kräfte, so wird dessen erste Seite  $ma$  parallel zu  $Cd$ ; ferner  $ab \parallel Ce$ ,  $bc \parallel Cf$ , und die letzte durch  $c$  gehende Seite wird wieder parallel zu  $Cd$ . — In  $(\gamma)$  fällt nämlich der vierte von  $C$  ausgehende Strahl mit dem ersten zusammen, wie man leicht erkennt, wenn man den aus  $K_1, K_2, K_3$  gebildeten Kräftezug wie in  $(\gamma')$  so zeichnet, dass Anfangs- und Endpunkt noch nicht völlig zusammenfallen. — Weil aber nach Voraussetzung  $K_3$  in der Richtungslinie der Resultante  $K_1$  und  $K_2$  liegt, so müssen nach II, 1.  $am$  und  $bn$  auf  $K_3$  in einem Punkte  $c$  zusammentreffen. — Die durch  $c$  gehende vierte Seite des Seilpolygons der drei Kräfte fällt deshalb mit  $am$  zusammen, d. h. in diesem Falle schliesst sich das Seilpolygon.

In  $(\beta)$  wird dagegen die letzte Seite des Seilpolygons, nämlich  $cn$  parallel mit der ersten  $am$ , es kann sich also das Seilpolygon nicht schliessen. — Die Resultante, welche durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Seilpolygonseite geht, ist jetzt nicht bestimmt, es können aber die gegebenen Kräfte ersetzt werden durch zwei gleiche entgegengesetzt gerichtete Kräfte, nämlich durch die Resultante von  $K_1$  und  $K_2$  und durch  $K_3$ . — Da sich dasselbe auch auf beliebig viele Kräfte ausdehnen lässt, so folgt:

A) Wenn ein ebenes System von  $n$  Kräften im Gleichgewicht ist, so schliesst sich sowohl das zugehörige Kräftepolygon als auch jedes Seilpolygon desselben;

und umgekehrt:

Ein ebenes System von  $n$  Kräften ist im Gleichgewicht, wenn sich das zugehörige Kräfte- und Seilpolygon schliessen.

B) Ist nur das Kräftepolygon eines ebenen Systems von  $n$  Kräften geschlossen und nicht gleichzeitig das Seilpolygon, so werden die erste und letzte Seite des Seilpolygons parallel. — Die letzte der  $n$  Kräfte ist dann gleich und entgegengesetzt der Resultante der übrigen Kräfte; sie fällt aber nicht in deren Richtungslinie.

Weil die Reihenfolge der Kräfte im Kräftepolygon willkürlich ist, so kann jede der  $n$  Kräfte die letzte im Kräftepolygon werden. — Das in B Gesagte gilt mithin für jede der gegebenen Kräfte.

Es ergibt sich demnach, dass bei geschlossenem Kräftepolygon und nicht geschlossenem Seilpolygon, die Resultante des Kräftesystems Null ist und ihre Richtungslinie durch den unendlich fernen Schnittpunkt der ersten und letzten Seilpolygonseite (welche jetzt parallel sind) geht. — Ein derartiges Kräftesystem hat demnach keine bestimmte Resultante, d. h. es lässt sich dasselbe nicht durch eine einzige Kraft ersetzen. — Es kann dieses aber durch zwei gleiche, entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte bewerkstelligt werden. — Dieser Fall bedarf einer weiteren Untersuchung.



### Das Kräftepaar.

2. Zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte nennt man ein Kräftepaar. — Die Resultante desselben ist Null, folglich ist auch ein frei beweglicher Körper unter der alleinigen Wirkung eines Kräftepaares im Gleichgewicht.

Ein Kräftepaar kann demnach nicht durch eine Einzelkraft ersetzt werden, weil eine solche kein Gleichgewicht bewirkt.

Der Gleichgewichtszustand, welcher unter dem alleinigen Einfluss eines Kräftepaares stattfindet, ist verschieden von demjenigen, welcher durch zwei gleiche, entgegengesetzte, in derselben Geraden liegende Kräfte verursacht wird. — Man erkennt dies leicht, wie wir sehen werden, wenn man die Wirkung eines Kräftepaares in Verbindung mit anderen Kräften untersucht. — Wir beweisen zuvor folgenden Satz:

3. Das Moment eines Kräftepaares ist in Bezug auf jeden Punkt, welcher in der Ebene des Paares liegt, dasselbe. — Es ist gleich dem doppelten Inhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich einer der Kräfte des Paares, und dessen Höhe gleich dem Abstand der Richtungslinien der beiden Kräfte ist.

Der Nachweis dieser merkwürdigen Eigenschaft des Kräftepaares ergibt sich leicht. — Man verbindet einen beliebigen Punkt  $A$  (Fig. 45) mit den Endpunkten der Strecken  $cd$  und  $ef$ , welche die Grössen der Kräfte  $K$  und  $-K$  des Paares darstellen. — Nach III, 3. bedeuten die doppelten Inhalte der Dreiecke  $Acd$  und  $Aef$  die Momente der beiden Kräfte  $K$  und  $-K$  in Bezug auf  $A$ . — Das Gesamtmoment des Paares ist nun gleich dem Unterschied dieser beiden Momente, wenn  $A$  ausserhalb des von den Richtungslinien der Kräfte eingeschlossenen Flächenstreifens liegt, und gleich ihrer Summe, wenn  $A$  innerhalb desselben liegt. — Da nun jene Dreiecke gleiche Grundlinien ( $K$  oder  $-K$ ) haben, so ist ihr Unterschied bez. Summe einem Dreiecke von derselben Grundlinie gleich, dessen Höhe aber so gross wie der Höhenunterschied bez. Höhensumme beider Dreiecke ist. — Diese Höhe ist in beiden Fällen dem Abstand  $a$  der Richtungslinien beider Kräfte, welcher der Arm des Paares genannt wird, gleich. — Hiernach hat das konstante Moment des Paares den Wert  $K \cdot a$  in Bezug auf jeden beliebigen Punkt seiner Ebene.

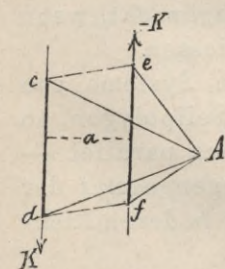


Fig. 45.

Das Moment des Kräftepaares ist auch gleich dem Moment einer seiner beiden Kräfte, bezogen auf irgend einen Punkt, welcher in der Richtungslinie der anderen Kraft liegt.



Sind  $cd$  und  $ef$  die Strecken, welche die Grössen der Kräfte  $K$  und  $-K$  bedeuten, so wird das konstante Moment des Paares auch durch den Inhalt des Parallelogramms  $cdfe$  dargestellt.

Liegen die beiden Kräfte  $K$  und  $-K$  in derselben Geraden, so wird a gleich Null. — Zwei solche Kräfte können wir als ein Kräftepaar vom Moment Null betrachten.

4. Wird ein beliebiger Punkt  $A$  in der Ebene eines Kräftepaares unbeweglich gemacht, so bewirkt das Kräftepaar eine Drehung um diesen Punkt, welche der Grösse des Moments des Paares entspricht; in diesem Falle wird das Gleichgewicht aufgehoben. — Hat das Paar das Moment Null, so bleibt der Gleichgewichtszustand ungestört.

Es ist klar, dass diejenige der beiden Kräfte des Paares, welche einen grösseren Abstand von  $A$ , also auch ein grösseres Drehungsmoment hat, die drehende Wirkung der andern Kraft überwiegt und folglich eine Drehung im Sinne der ersten Kraft um  $A$  eintreten muss. — Beim Kräftepaar vom Moment Null heben sich die Wirkungen der Kräfte in Bezug auf Drehung auf, weshalb in diesem Falle das Gleichgewicht durch das Vorhandensein eines unbeweglichen Punktes nicht gestört wird.

Hierin besteht die oben erwähnte Verschiedenheit der Gleichgewichtszustände, welche durch ein Kräftepaar von nicht verschwindendem Moment oder durch ein solches vom Moment Null verursacht werden.

5. Der Sinn der Drehung eines Kräftepaares, welches um einen unbeweglichen Punkt  $A$  dreht, ist stets derselbe, welche Lage der Punkt  $A$  in der Ebene des Paares auch haben mag.

Ist z. B. in Fig. 46  $A_1$  der feste Punkt, um welchen das Kräftepaar ( $K, -K$ ) dreht, so ist das Moment der Kraft  $-K$  grösser als das der Kraft  $K$ ; in Bezug auf  $A_3$  überwiegt dagegen das Moment von  $K$ . — Liegt  $A_2$  zwischen  $K$  und  $-K$ , so ist der Drehungssinn beider Kräfte übereinstimmend. — In allen drei Fällen ist der Sinn der Drehung derselbe, wie ihn die Pfeilspitzen in Figur 46 andeuten.

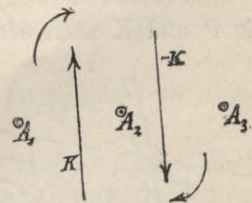


Fig. 46.

Wenn kein fester Drehungspunkt vorhanden ist (d. h. wenn unter alleiniger Wirkung eines Kräftepaares unsicheres Gleichgewicht herrscht), so spricht man dennoch von dem Drehungssinn des Kräftepaares. — Es wird hierunter der Sinn der Drehung verstanden, welcher bei Annahme eines festen Drehpunktes auftritt.

6. Ein Kräftepaar, welches um einen unbeweglichen Punkt dreht, kann ohne Änderung der Wirkung beliebig in seiner Ebene verschoben werden.



Dieser Satz folgt unmittelbar aus 3. und 5. Nach 3. bleibt das Moment und nach 5. der Sinn der Drehung des Paares unverändert.

7. Ein Kräftepaar  $(K, -K)$  und eine Einzelkraft  $P$  lassen sich zu einer Resultante vereinigen, welche der Einzelkraft  $P$  gleich, parallel und gleich gerichtet ist. (Fig. 47.)

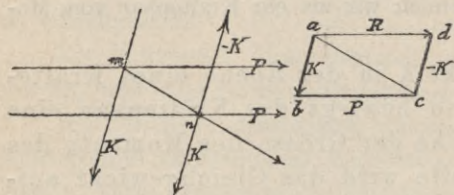


Fig. 47.

Zeichnet man den aus den Kräften  $K, P$  und  $-K$  bestehenden Kräftezug  $abcd$ , so wird die Resultante  $R$  durch die Schlusslinie  $ad$  dargestellt. — Weil nun  $ab \neq cd$ , so ist  $abcd$  ein Parallelogramm,

woraus sich der obige Satz unmittelbar ergibt. Durch die Konstruktion eines Seilpolygons findet man wie in Fig. 47 angegeben, die Lage der Resultante.

Wir schliessen hieraus weiter:

8. Fügt man einem ebenen Kräftesystem, welches eine Einzelresultante besitzt, ein Kräftepaar hinzu, so bewirkt das letztere eine parallele Verschiebung jener Resultante. Grösse und Richtung der Resultante bleiben unverändert.

9. Zwei (oder mehrere) Kräftepaare ergeben unsicheres Gleichgewicht, d. h. sie lassen sich durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Paare ist.

Es seien  $(K, -K)$  und  $(P, -P)$  (Fig. 48) zwei Kräftepaare. — Legen wir  $P$  und  $K$  nach dem Schnittpunkt  $c$  ihrer Richtungslinien; ebenso  $-P$  und  $-K$  nach  $e$  und bilden hieraus die Resultanten  $R$  und  $-R$ , so ist leicht ersichtlich, dass wegen der Kongruenz der entstehenden Kräfteparallelogramme  $R$  und  $-R$  gleich gross und parallel sind, also wiederum ein Kräftepaar bilden. — Die Momente der Kräftepaare sind für alle Punkte ihrer Ebene unveränderlich. Beziehen wir dieselben auf  $e$ , so verschwinden die Momente der Kräfte  $-P, -K$  und  $-R$  und nach III, 4. ist das Moment von  $R$  gleich der Summe der Momente von  $K$  und  $P$ . — Bezeichnen wir den Abstand der Kraft  $R$  von  $e$  mit  $r$ , und die Arme der beiden ersten Paare mit  $a$  und  $b$ , so folgt hieraus:

Fig. 48.

$$Rr = Ka + Pb.$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Momente sind aber den Momenten der Paare  $(K, -K)$ ,  $(P, -P)$ ,  $(R, -R)$  gleich.

10. Zwei Kräftepaare sind in vollkommenem Gleichgewicht, wenn sie gleich grosse Momente, aber verschiedenen Drehungssinn haben, d. h. zwei solche Paare geben ein einziges Paar vom Moment Null. (Fig. 49.)

Sind  $cg = a$  und  $eh = b$  die Arme der Paare  $(P, -P)$ ,  $(K, -K)$ , so folgt aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke  $cdg$  und  $deh$  die Proportion:

$$a : b = cd : de.$$

Aus der Voraussetzung  $Ka = Pb$  folgt:

$$P : K = a : b$$

mithin auch  $P : K = cd : de$ .

Wenn also die Momente der beiden Kräftepaare gleich sind, so kann man die Grössen der einzelnen Kräfte  $K$  und  $P$  durch die Seiten des Parallelogramms darstellen, welches die vier Richtungslinien der Kräfte einschliessen.

Hieraus ergibt sich, dass die Diagonale  $ce$  sowohl die Resultante von  $-P$  und  $K$  als auch die von  $P$  und  $-K$  darstellt, die letztere in entgegengesetztem Sinn genommen wie die erstere, wodurch nun der obige Satz bewiesen ist.

Wenn die Kräfte der beiden Paare  $(P - P)$  und  $(K - K)$  parallel sind, so gilt der vorstehende Satz ebenfalls. — Wir fügen dem einen Paare ein neues Paar  $(Q - Q)$  vom Moment Null hinzu. — Alsdann geben  $(P - P)$  und  $(Q - Q)$  ein Paar  $(R - R)$ , welches gleiches Moment mit  $(P - P)$  hat. — Dieses neue Paar und  $(K, -K)$  bilden aber nach dem vorigen ein Paar vom Moment Null.

Kehren wir den Sinn der Drehung des einen Paares um, so können wir den vorstehenden Satz auch so aussprechen:

Ein Kräftepaar kann durch ein anderes in derselben Ebene liegendes Paar von gleichem Moment und gleichem Drehungssinn ersetzt werden;

und wenn in diesem Falle die Paare gleich sind, so folgt:

Ein Kräftepaar kann in seiner Ebene beliebig verlegt werden, ohne dass die Wirkung desselben verändert wird.

11. Einem Kräftepaar  $(K, -K)$ , welches um einen festen Punkt  $A$  dreht, kann man durch eine Einzelkraft  $P$ , deren Moment in Bezug auf  $A$  dem Moment des Paares gleich und deren Drehungssinn entgegengesetzt ist, das Gleichgewicht halten (III, 5). Heben wir die Unbeweglichkeit des Punktes  $A$  auf, so findet kein Gleichgewicht mehr statt. — Dasselbe kann

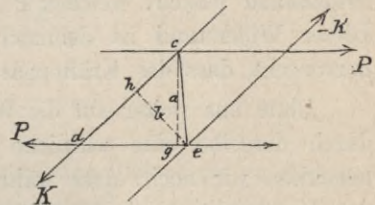


Fig. 49.



aber wieder hergestellt werden durch eine Kraft  $-P$ , welche parallel und entgegengesetzt  $P$  ist, und deren Richtungslinie durch  $A$  geht. — Denn das Moment des Paares  $(P, -P)$  ist dem Moment des Paares  $(K, -K)$  gleich; die Drehungsrichtungen beider Paare sind einander entgegengesetzt, folglich geben beide ein Paar vom Moment Null.

Wenn also irgend eine Einzelkraft  $P$  beim Vorhandensein eines festen Drehpunktes  $A$  die Wirkung des Paares aufheben soll, so muss  $A$  einen Widerstand leisten, welcher  $P$  gleich und entgegengesetzt gerichtet ist. — Dieser Widerstand ist demnach unabhängig von dem Kräftepaar, woraus hervorgeht, dass das Kräftepaar keinen Druck auf  $A$  ausübt.

Ohne uns weiter auf die Wirkung eines Kräftepaares einzulassen, wenn durch dasselbe eine wirkliche Drehung um irgend einen Punkt eintritt, bemerken wir noch, dass während der Drehung ebenfalls kein Druck auf den Drehpunkt durch das Kräftepaar ausgeübt wird. — Vermittelst des in 11. bewiesenen Satzes kann man sich dies in gewisser Hinsicht anschaulich machen. — Nimmt man zunächst wieder einen festen Drehpunkt  $A$  an, und eine sehr kleine Kraft  $Q$ , welche dem Kräftepaar  $(K, -K)$  das Gleichgewicht halten soll, so braucht man nur den Abstand der Kraft  $Q$  von  $A$  so gross zu machen, dass das Moment der Kraft  $Q$  in Bezug auf  $A$  dem konstanten Moment des Paares gleich ist. — Der von  $A$  zu leistende Widerstand ist alsdann gleich  $Q$ , also ebenfalls sehr klein. — Das vollkommene Gleichgewicht wird sofort gestört, d. h. die Bewegung um  $A$  beginnt, sobald die Kraft  $Q$  aufhört zu wirken, wenn dabei der Punkt  $A$  die Fähigkeit behält, einen, wenn auch noch so kleinen Widerstand zu leisten. — Es würde also bei einem vollkommen frei beweglichen System, welches der alleinigen Wirkung eines Kräftepaares unterliegt, durch eine noch so kleine Kraftäusserung in irgend einem Punkte  $A$  die drehende Bewegung des Paares um diesen Punkt zur Ausführung gebracht, mithin der Gleichgewichtszustand gestört werden können.

Wir begnügen uns, durch das Vorstehende, welches kein in voller Strenge durchgeführter Beweis sein soll, auf die Wirkung eines Kräftepaares bei wirklich eintretender Bewegung hingewiesen zu haben. — Im Übrigen gehört dieses in die Lehre von der Bewegung, auf welche wir uns an dieser Stelle nicht weiter einlassen können.

## 12. Anwendungen.

a) Das Hebelgesetz. Sind  $a$  und  $b$  die Entfernungen der Kräfte  $P$  und  $Q$  vom Stützpunkte  $C$  des Hebels  $AB$ , so muss beim Gleichgewichtszustand die Resultante von  $P$  und  $Q$  durch  $C$  gehen. — Der Widerstand im Punkte  $C$  ist demnach in Fig. 50 gleich  $P + Q$ , in Fig. 51 gleich  $P - Q$ .

Bringen wir diese Kräfte in C an, so können wir die Unbeweglichkeit des Punktes C beseitigen und wir haben in beiden Fällen zwei Kräftepaare

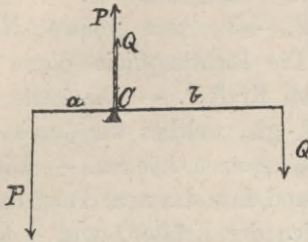


Fig. 50.

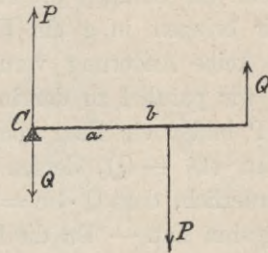


Fig. 51.

( $P, -P$ ) und ( $Q, -Q$ ), welche in entgegengesetzten Richtungen zu drehen suchen. — Zwischen diesen Paaren findet Gleichgewicht statt, wenn:

$$Pa = Qb$$

ist.

b) Die in III, 11. d und e angeführten Beispiele lassen sich ebenfalls auf die Theorie der Kräftepaare zurückführen. — In A, Fig. 42, findet eine nach vertikaler Richtung wirkende Reaktion von der Grösse  $-P$  statt, welche mit der Last  $P$  ein Kräftepaar bildet. Diesem wird durch die in A und B wirkenden Widerstände  $K$  und  $-K$ , welche ebenfalls ein Kräftepaar bilden, Gleichgewicht gehalten. — Folglich müssen die Momente dieser Paare einander gleich sein. — Hieraus ergibt sich noch folgende einfache Bestimmung der Kräfte  $K$  und  $-K$ : Man wähle den Kräftemasstab so, dass  $EF = AB$  die Grösse der Last  $P$  darstellt, dann ist das Moment des Paares ( $P, -P$ ) dem Inhalt des Rechtecks  $ABEF$  gleich. — Da nun die Seite  $AB$  der Arm des anderen Paares ( $K, -K$ ) ist, so wird die Grösse von  $K$  durch  $BE$  dargestellt.

In gleicher Weise halten in Fig. 43 zwei Kräftepaare ( $P, -P$ ) und ( $K, -K$ ) einander das Gleichgewicht. — Es können also in diesem Falle die Kräfte  $P$  und  $K$  durch die Seiten des Rechtecks  $ABEF'$  dargestellt werden.

c) Robervals Wage. (Fig. 52.) Vier Stangen sind durch Gelenke zu einem Parallelogramm  $abcd$  verbunden. — Die beiden Stangen  $ab$  und  $cd$  sind in ihren Mitten  $e$  und  $f$

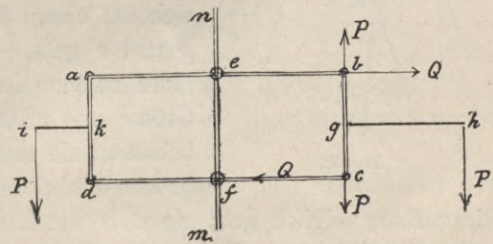


Fig. 52.

an einer vertikalen Stange  $mn$  befestigt, und können sich um diese Punkte in der Ebene des Parallelogramms drehen. — Zwei andere Stangen  $gh$



und  $ik$  sind bez. mit  $bc$  und  $ad$  fest verbunden. — In  $h$  und  $i$  wirken zwei gleiche Gewichte; es soll bewiesen werden, dass Gleichgewicht herrscht, auch wenn die Stangen  $gh$  und  $ik$  ungleiche Längen haben.

Wir bringen in  $g$  ein Kräftepaar  $(P, -P)$  vom Moment Null an, welches keine Änderung verursacht. — Die Richtungslinie dieses Paares nehmen wir parallel zu der in  $h$  wirkenden Kraft  $P$ . — Die letztere Kraft und  $-P$  bilden ein Paar vom Moment  $P \cdot gh$ , welches wir durch ein anderes Paar  $(Q, -Q)$ , dessen Arm  $bc$  ist, ersetzen können. — Hierzu ist nur erforderlich, dass  $Q \cdot bc = P \cdot gh$  ist, und dass das neue Paar denselben Drehungssinn hat. — Da die Richtungslinien der Kräfte  $Q$  und  $-Q$  durch die beiden Stützpunkte  $e$  und  $f$  gehen, so werden diese Kräfte durch die Widerstände in  $e$  und  $f$  gehoben; (es bilden also diese Widerstände ein dem Paar  $Q, -Q$  gleiches Kräftepaar von entgegengesetztem Drehungssinn). Folglich kommt nur noch die Kraft  $P$  in Betracht, welche in  $g$  angreift.

Hieraus ergibt sich, dass die in  $h$  befindliche Last  $P$  ohne Änderung ihrer Wirkung nach  $g$  verlegt werden kann. In gleicher Weise können wir die in  $i$  wirkende Last  $P$  nach  $k$  verlegen, woraus sofort ersichtlich ist, dass Gleichgewicht stattfindet. — Dasselbe ist aber nicht der Fall, wenn die Lasten an beiden Seiten verschieden sind.

### Mittelpunkt eines Kräftesystems.

13. Es seien  $K_1$  und  $K_2$  Kräfte, welche in den Punkten  $a$  und  $b$  angreifen. (Fig. 53.) — Die Resultante  $R$  geht alsdann durch den Schnittpunkt  $c$  der Richtungslinien und es ist der Angriffspunkt von  $R$  an keinen bestimmten Punkt

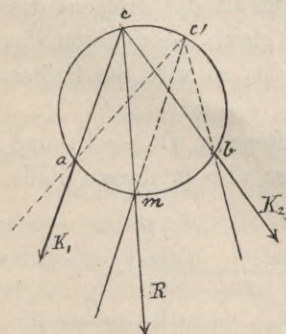


Fig. 53.

ihrer Richtungslinie gebunden. — Nehmen wir nun an,  $K_1$  und  $K_2$  werden bez. um die Punkte  $a$  und  $b$  derart gedreht, dass der Winkel zwischen beiden konstant bleibt, so wird der Schnittpunkt  $c$  sich auf einem Kreis bewegen, welcher durch  $a$ ,  $b$  und  $c$  geht. — Die Resultante beider Kräfte muss zufolge der gemachten Voraussetzung ihre Grösse und relative Lage gegen  $K_1$  und  $K_2$  beibehalten; sie muss also nach der Drehung ebenso grosse Winkel mit den Kräften  $K_1$  und  $K_2$  bilden,

wie vorher; folglich geht sie stets durch denselben Punkt  $m$  des um  $a$ ,  $b$  und  $c$  beschriebenen Kreises. — Denn, sind  $ac'$  und  $bc'$  die Richtungslinien der Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  nach der Drehung, so ist die Richtungslinie der Resultante  $c'm$ , weil  $\angle ac'm = \angle acm$  und  $\angle bc'm = \angle bcm$  (Peripheriewinkel).

Werden also die gegebenen Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  um ihre Angriffspunkte so gedreht, dass sie stets denselben Winkel miteinander bilden, so geht ihre Resultante durch einen festen Punkt, welcher der Mittelpunkt der Kräfte genannt wird.

Sind drei Kräfte  $K_1, K_2, K_3$  (Fig. 54) gegeben, welche die Angriffspunkte  $a, b, c$  haben, so können wir nach dem vorigen zunächst den Mittelpunkt  $d$  der Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  bestimmen, welcher auf der Resultante  $R_1$  von  $K_1$  und  $K_2$  liegt. — Der Schnittpunkt von  $R_1$  und  $K_3$  sei  $f$ . — Durch  $c, d$  und  $f$  legen wir einen Kreis, welcher von der Resultante  $R$  der Kräfte  $R_1$  und  $K_3$  in  $m$  getroffen wird; dann ist  $m$  der Mittelpunkt der drei Kräfte  $K_1, K_2$  und  $K_3$ .

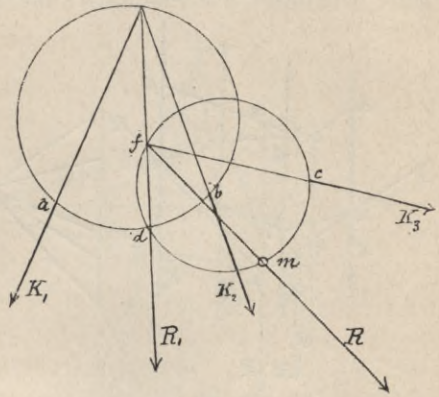


Fig. 54.

Dass man durch Fortsetzung dieses Verfahrens den Mittelpunkt beliebig vieler Kräfte bestimmen kann, ist einleuchtend.

### Mittelpunkt paralleler Kräfte.

14. Die Resultante von zwei parallelen Kräften  $K_1$  und  $K_2$  teilt jede von den Krafrichtungen begrenzte Strecke in zwei Teile, welche sich umgekehrt verhalten wie die anliegenden Kräfte. — Sind  $a$  und  $b$  (Fig. 55) die Angriffspunkte der Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ ,  $m$  der Schnittpunkt der Resultante mit  $ab$ , so haben wir demnach:

$$am : bm = K_2 : K_1.$$

Erteilen wir nun den Kräften gleiche Drehungen um die Angriffspunkte, so wird die Resultante in ihrer neuen Lage die Strecke  $ab$  nach demselben Verhältnis teilen; sie geht folglich wieder durch  $m$ , also ist  $m$  der Mittelpunkt der Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ . — Derselbe liegt hiernach auf der Verbindungslinie der Angriffspunkte  $a$  und  $b$ .

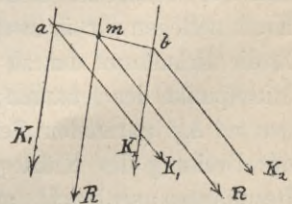


Fig. 55.

Mit Hilfe eines Seilpolygons findet man leicht den Mittelpunkt von beliebig vielen parallelen Kräften. — Es seien z. B.  $a, b, c, d$  die Angriffspunkte der vier parallelen Kräfte  $K_1, K_2, K_3$  und  $K_4$  (Fig. 56 s. S. 44); ferner sei  $ga_1, b_1, c_1, d_1, i$  ein auf bekannte Weise konstruiertes Seilpolygon dieser Kräfte. Die Resultante  $R_1$  der beiden ersten Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  geht durch den Punkt  $e_1$ , in welchem sich die beiden Seilpolygoneiten  $ga_1$



und  $b_1 c_1$  schneiden, und sie trifft  $ab$  im Punkte  $e$ , welcher demnach der Mittelpunkt von  $K_1$  und  $K_2$  ist. — Nun bestimmen wir die Resultante  $R_2$  der Kräfte  $R_1$  und  $K_3$ . — Ihre Richtungslinie geht durch den Punkt  $f_1$ ,

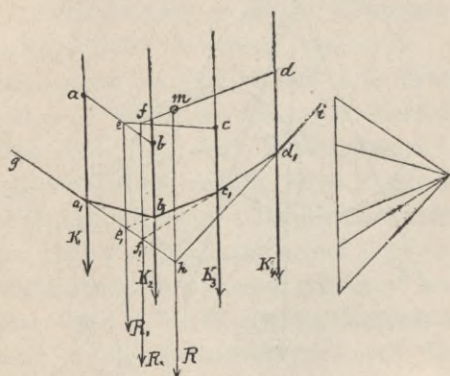


Fig. 56.

in welchem  $ga_1$  und  $c_1 d_1$  sich treffen; sie schneidet ferner  $ce$  im Punkte  $f$ , welcher der Mittelpunkt der Kräfte  $R_1$  und  $K_3$  oder von  $K_1, K_2$  und  $K_3$  ist. — Endlich ziehen wir durch  $h$  die Richtungslinie der Resultante sämtlicher 4 Kräfte  $K_1, K_2, K_3, K_4$ . Diese schneidet die Gerade  $fd$  im Punkte  $m$ , welches nun der Mittelpunkt der gegebenen Kräfte ist.

Der Mittelpunkt paralleler Kräfte lässt sich auch finden, wenn man für zwei Lagen des Kräftesystems die Lagen der Resultanten bestimmt, welche beide durch den gesuchten Mittelpunkt gehen müssen. — Hierzu sind zwei Seilpolygone erforderlich.

Die oben angegebene Konstruktion findet im folgenden Abschnitt vielfache Verwendung.

Wir können jetzt den Mittelpunkt eines beliebigen ebenen Kräftesystems auch auf folgende Weise bestimmen. Es seien  $K_1, K_2, K_3 \dots$  die gegebenen Kräfte,  $a_1, a_2, a_3 \dots$  ihre Angriffspunkte.  $Ax$  und  $Ay$  seien zwei auf einander senkrecht stehende Geraden in der Ebene der Kräfte. — Jede Kraft zerlegen wir in zwei zu  $Ax$  und  $Ay$  parallele Seitenkräfte. — Ist nun  $X$  die Resultante der zu  $Ax$  parallelen Kräfte  $X_1, X_2, X_3 \dots$ , und  $m_1$  der Mittelpunkt der letzteren; ebenso  $m_2$  der Mittelpunkt und  $Y$  die Resultante der zu  $Ay$  parallelen Seitenkräfte  $Y_1, Y_2, Y_3 \dots$ , so gehen  $X$  und  $Y$  bei der Drehung des Kräftesystems durch  $m_1$  resp.  $m_2$ . — Weil ferner beide Resultanten senkrecht aufeinander stehen, so ist der Ort ihres Schnittpunktes  $c$  der Kreis um  $m_1 m_2$  als Durchmesser. — Zeichnen wir nun noch die Resultante  $R$  der Kräfte  $X$  und  $Y$ , so schneidet diese den Kreis in dem Mittelpunkt  $m$  des gegebenen Kräftesystems.

Folgende besondere Fälle, welche keines weiteren Beweises bedürfen, sind noch zu erwähnen:

Wenn alle Kräfte des Systems denselben Angriffspunkt haben, so ist dieser zugleich der Mittelpunkt des Systems.

Verschwundet die Resultante (d. h. ergibt das Kräftesystem ein Kräftepaar von beliebigem Moment, oder ein solches vom Moment Null) so hat das System keinen Mittelpunkt.

**Beziehung zwischen zwei verschiedenen Seilpolygonen desselben Kräftesystems.**

15. Zum Schluss der Theorie über Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in einer Ebene wollen wir noch den Zusammenhang betrachten, welcher zwischen zwei verschiedenen Seilpolygonen eines Kräftesystems stattfindet. (Fig. 57.)

Sind  $P_1$  und  $P_2$  zwei Kräfte, deren Richtungslinien sich in  $m$  schneiden;  $ab_1c_1d$  und  $ab_2c_2d$  zwei Seilpolygone, welche den beiden Polen  $C_1$  und  $C_2$  entsprechen, dann geht die Resultante der Kräfte sowohl durch den Schnittpunkt  $e$ , in welchem  $ab_2$  und  $dc_2$  sich treffen, als auch durch den Schnittpunkt  $f$  der beiden Seilpolygonseiten  $ab_1$  und  $c_1d$ . — Da nun der Punkt  $m$ , in welchem die Richtungslinien von  $P_1$  und  $P_2$  sich schneiden, ebenfalls der Resultante angehört, so folgt, dass  $m$ ,  $e$  und  $f$  in einer Geraden liegen.

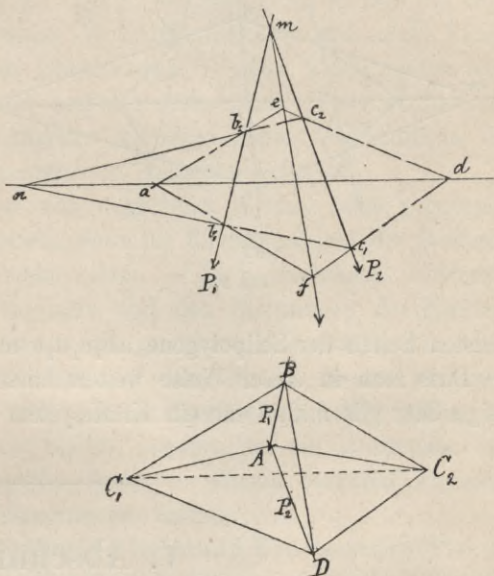


Fig. 57.

Nehmen wir nun an, es seien  $b_1c_1$  und  $b_2c_2$  die Richtungslinien zweier anderen Kräfte, deren Grössen durch die zu ihnen parallelen Strecken  $AC_2$  und  $C_1A$  dargestellt werden, so können wir  $B$  und  $D$  als Pole und  $fb_1b_2e$ ,  $fc_1c_2e$  als zwei diesen Polen entsprechende Seilpolygone betrachten. — Dann geht aber die Resultante der Kräfte durch den Schnittpunkt  $n$  der letztern und durch die beiden Punkte  $a$  und  $d$ , in welchen je die erste und letzte Seite beider Seilpolygone sich treffen. — Folglich liegen  $a$ ,  $n$  und  $d$  in gerader Linie, welche die Richtungslinie der Resultante von  $C_1A$  und  $AC_2$  ist.

Die drei Punkte  $a$ ,  $d$  und  $n$  sind nun die Schnittpunkte gleichvielster Seiten der beiden Seilpolygone  $ab_1c_1d$  und  $ab_2c_2d$  und wir haben somit den Satz:

Die gleichvielsten Seiten zweier Seilpolygone der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  schneiden sich in Punkten einer Geraden (Polarachse), welche parallel zu der Verbindungslinie der jenen Seilpolygonen entsprechenden Pole ist.\*)

\*) Wer mit den Elementen der Collineation vertraut ist, wird die Richtigkeit des obigen Satzes ohne weiteres aus Fig. 57 erkennen. Die beiden Dreiecke  $b_1c_1f$  und  $b_2c_2e$  liegen perspektivisch, folglich schneiden sich die Paare entsprechender Seiten auf der Collineationsachse.



Wenn ferner  $ab_1c_1d_1e$  und  $ab_2c_2d_2e$  (Fig. 58) zwei Seilpolygone der drei Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  sind, so müssen nach

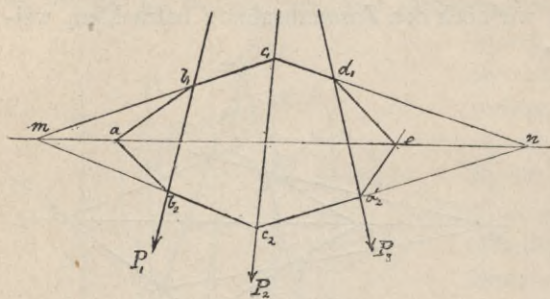


Fig. 58.

dem vorigen die Punkte  $m$ ,  $a$  und  $n$  auf einer Geraden liegen; und wenn wir den Satz auf die Seilpolygone der beiden Kräfte  $P_2$  und  $P_3$  anwenden, so liegen auch  $m$ ,  $e$  und  $n$  auf einer Geraden, welche mit der vorigen die beiden Punkte  $m$  und  $n$  gemeinschaftlich hat. — Folglich liegen alle vier

Schnittpunkte der gleichvielsten Seiten der Seilpolygone  $ab_1c_1d_1e$  und  $ab_2c_2d_2e$  auf einer Geraden. — Dass man in dieser Weise weiterschliessen kann, ist einleuchtend; der obige Satz gilt mithin für ein Kräftesystem von beliebig vielen Kräften.

## V. Abschnitt.

### Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, welche nicht in einer Ebene liegen.

1. Die Resultante von drei in demselben Punkte  $A$  angreifenden Kräften  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$ , welche nicht in derselben Ebene liegen, zu finden. (Fig. 59.)

Wir tragen von  $A$  aus die drei Strecken  $AB$ ,  $AC$  und  $AD$ , welche die Grössen der gegebenen Kräfte darstellen, auf den Richtungslinien derselben ab, und konstruieren ein Parallelepipedum, in welchem  $AB$ ,  $AC$  und  $AD$  drei in einem Punkte zusammenstossende Kanten sind. — Die von  $A$  ausgehende Diagonale  $AF$  dieses Parallelepipedums stellt die gesuchte Resultante der Grösse und Richtung nach vor. — Es ist nämlich die Diagonale  $AG$  gleich der Resultante von  $K_1$  und  $K_2$ ; ferner ist  $ADFG$  das Kräfteparallelogramm aus  $AG$  und  $K_3$ , woraus sich ergibt,

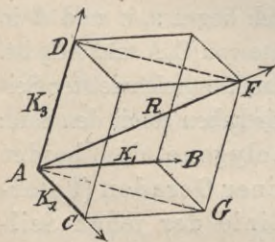


Fig. 59.

dass  $AF$  die Resultante von  $AG$  und  $K_3$  oder von  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  ist.

Es ist leicht ersichtlich, dass je drei derjenigen Kanten des Parallelepipedums, welche den Punkt  $A$  mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt  $F$

durch einen zusammenhängenden Linienzug verbinden, (z. B. AB, BG, GF) den drei Strecken gleich sind, welche die gegebenen Kräfte darstellen, und auch mit den Richtungen der Kräfte übereinstimmen, wenn man den Linienzug in der Richtung von A nach F verfolgt. — Man kann deshalb das in I, 1. gezeigte Verfahren zur Ermittlung der Resultante auch auf solche Kräfte anwenden, welche nicht in einer Ebene liegen. — Der Kräftezug ist aber in diesem Falle keine ebene Figur, und wir müssen aus diesem Grunde zur wirklichen Ausführung der Konstruktion auf einer ebenen Zeichenfläche die Hilfsmittel der darstellenden Geometrie in Anspruch nehmen.

Eine gegebene Kraft  $R$  lässt sich umgekehrt in drei nach gegebenen Richtungen wirkende Kräfte zerlegen, wenn die Richtungslinien der letzteren durch einen auf  $R$  liegenden Punkt gehen. — Man konstruiert wiederum ein Parallelepipedum aus der Diagonale und den Richtungen der Kanten, dann stellen die Längen der letzteren die gesuchten Seitenkräfte dar.

Wir werden nun im folgenden zeigen, dass ein im Raume liegendes System von beliebigen Kräften, welche nicht durch einen Punkt gehen, im allgemeinen keine Einzelresultante besitzt, sondern auf ein Kräftepaar und eine Einzelkraft zurückgeführt werden kann. — Hierzu bedürfen wir noch der folgenden Gesetze über Kräftepaare im Raume.

2. Zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kräftepaare ( $P, -P$ ) und ( $Q, -Q$ ) können zu einem Kräftepaar vereinigt werden (Fig. 60).

Jedes Kräftepaar kann nach IV, 10. in seiner Ebene beliebig verlegt werden. — Legen wir die beiden Paare so, dass  $P$  und  $Q$  durch einen Punkt  $A$  der Durchschnittslinie beider Paarebenen, und  $-P, -Q$  durch einen anderen Punkt  $B$  derselben gehen, so können wir  $P$  und  $Q$  und auch  $-P$  und  $-Q$  je zu einer Resultante  $R$ , bez.  $-R$  vereinigen. — Diese beiden Resultanten sind offenbar wegen der Kongruenz der Kräfteparallelogramme gleich, parallel aber entgegengesetzt gerichtet und bilden deshalb das resultierende Kräftepaar.

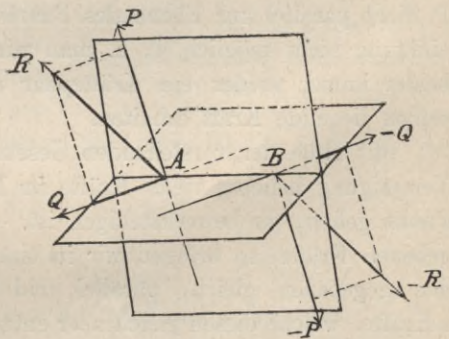


Fig. 60.

Leicht ergibt sich hieraus, dass auch beliebig viele Kräftepaare im Raum zu einem einzigen Paar vereinigt werden können.

3. Zwei Kräftepaare von gleichem Moment, welche entgegengesetzten Drehungssinn haben und in parallelen Ebenen liegen, heben sich auf. (Fig. 61 s. S. 48.)

Zum Beweise bringen wir beide Paare auf gleichen Arm, dann sind



wegen der Gleichheit der Momente auch die Kräfte der Paare gleich. — Schneiden wir nun die Richtungslinien durch eine Ebene, so sind die Schnittpunkte die Ecken eines Parallelogramms  $abcd$ . — Je zwei der gleich gerichteten Kräfte lassen sich zu einer Resultante vereinigen, welche durch den Schnittpunkt  $m$  der beiden Diagonalen des Parallelogramms geht, und da beide Resultanten ( $+2P$  und  $-2P$ ) gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, so findet Gleichgewicht statt.

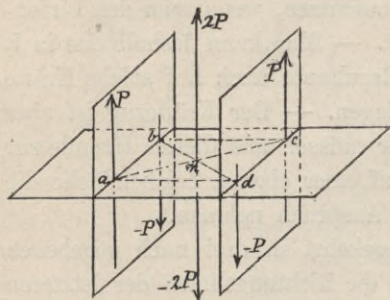


Fig. 61.

Kehren wir im letzten Falle den Sinn der Drehung des einen Paares um,

so folgt:

Ein Kräftepaar kann parallel zu seiner Ebene beliebig verlegt werden. (Erweiterung von IV, 10.)

4. Ein Kräftepaar ( $K, -K$ ) und eine Einzelkraft  $P$  können nach IV, 7. zu einer Resultante vereinigt werden, welche der Kraft  $P$  gleich, parallel und gleich gerichtet ist, wenn  $P$  und das Paar ( $K, -K$ ) in derselben Ebene liegen. — Nach 3 d. Abschn. ist diese Vereinigung auch noch möglich, wenn  $P$  der Ebene des Paares parallel ist, weil das Kräftepaar so gelegt werden kann, dass die Ebene desselben durch  $P$  geht. — Wenn aber  $P$  nicht parallel zur Ebene des Paares liegt, so ist auch eine weitere Vereinigung nicht möglich, d. h. man wird durch alle möglichen Verbindungen beider immer wieder ein Kräftepaar und eine ausserhalb der Ebene desselben liegende Kraft erhalten.

Mit Hilfe der vorstehenden Gesetze lässt sich nun übersehen, wie eine Vereinigung beliebig vieler Kräfte im Raume, welche nicht durch denselben Punkt gehen, zu bewerkstelligen ist. — Sind  $K_1, K_2, K_3 \dots K_n$  die gegebenen Kräfte, so bringen wir in einem beliebigen Punkte  $A$   $n$  Kräfte an, den gegebenen gleich, parallel und gleich gerichtet, und noch weitere  $n$  Kräfte, welche diesen gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind, so dass das hinzugefügte Kräftesystem keine Änderung verursacht. — Die gegebenen Kräfte  $K_1, K_2, \dots K_n$  und die in  $A$  in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte  $-K_1, -K_2, \dots -K_n$  bilden aber  $n$  Kräftepaare, welche nach (2) zu einem Paare vereinigt werden können; die noch übrigen sämtlich durch  $A$  gehenden Kräfte haben eine Einzelresultante. — Liegt die letztere in der Ebene des resultierenden Paares oder ist sie parallel zu derselben, so können beide zu einer Kraft vereinigt werden. Im andern Falle ist eine weitere Vereinigung nicht möglich.

Ein beliebiges Kräftesystem im Raume ist demnach im allgemeinen

einem Kräftepaar (P, -P) und einer Einzelkraft R gleichwertig. — Wird R gleich Null, so ist das System im unsicheren Gleichgewicht (d. h. es ist durch ein Kräftepaar allein zu ersetzen). — Hat das resultierende Paar das Moment Null, so ist das System einer Einzelkraft R geich. — Ist das Moment des Paares gleich Null und verschwindet R zugleich, so ist das System im sicheren Gleichgewicht.

Die wirkliche Ermittlung der Resultante und des resultierenden Paares eines beliebigen Kräftesystems mit Hilfe zweier Projektionen desselben, lässt sich auf dem Wege der darstellenden Geometrie bewerkstelligen. — Die Konstruktionen sind allerdings recht umständlich und wir wollen dieselben auch nur für den einen einfachen Fall, der zugleich praktische Verwendung findet, ausführen, wenn nämlich die Kräfte des gegebenen Systems sämtlich parallel sind.

**Resultante und Mittelpunkt paralleler Kräfte.**

5. Es seien  $K_1$  und  $K_2$  (Fig. 62) zwei parallele Kräfte,  $a_1$  und  $a_2$  ihre Angriffspunkte;  $a_1c = x_1$  und  $a_2e = x_2$  seien die senkrechten Abstände der Punkte  $a_1$  und  $a_2$  von einer beliebigen Ebene E. — Dann ist  $ce$  die Projektion von  $a_1a_2$  und letztere trifft verlängert die Ebene E in dem auf der Verlängerung von  $ce$  liegenden Punkte b. — Ist ferner R die Resultante von  $K_1$  und  $K_2$ , a ihr Angriffspunkt (nach IV, 14) Mittelpunkt der Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ , und  $ad = x$  der Abstand des letzteren von E, so haben wir nach III, 4. (oder 9) die Gleichung:

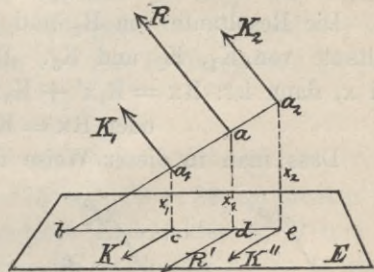


Fig. 62.

$$R \cdot ab = K_1 \cdot a_1 b + K_2 \cdot a_2 b$$

$$\text{oder auch } R = K_1 \frac{a_1 b}{ab} + K_2 \frac{a_2 b}{ab} \dots (1)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $a_1bc$ ,  $abd$  und  $a_2be$  folgt:

$$\frac{a_1 b}{ab} = \frac{x_1}{x}, \quad \frac{a_2 b}{ab} = \frac{x_2}{x}$$

Führt man diese Werte in (1) ein, so erhält man:

$$R = K_1 \frac{x_1}{x} + K_2 \frac{x_2}{x}$$

$$\text{oder: } Rx = K_1 x_1 + K_2 x_2 \dots (2)$$

Bezeichnen wir das Produkt einer Kraft mit dem Abstand ihres Angriffspunktes von einer Ebene E als Moment der Kraft in Bezug auf diese Ebene (wobei die Richtung der Kraft nicht in Betracht kommt), so haben wir den Satz:



Das Moment der Resultante zweier parallelen Kräfte in Bezug auf eine Ebene E ist gleich der Summe der Momente dieser Kräfte.

Sind  $K'$ ,  $K''$  und  $R'$  die Projektionen von  $K_1$ ,  $K_2$  und  $R$  auf E, so haben wir:

$$K' : K'' : R' = K_1 : K_2 : R,$$

woraus sich ergibt, dass  $R'$  als Resultante von  $K'$  und  $K''$  anzusehen ist. Hieraus folgt:

Die Projektionen der Resultante und des Mittelpunktes zweier parallelen Kräfte ergeben Resultante und Mittelpunkt der Projektionen jener Kräfte.

Die beiden vorstehenden Sätze lassen sich leicht auf ein System von beliebig vielen parallelen Kräften ausdehnen. Sind nämlich  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  drei parallele Kräfte;  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  die Abstände ihrer Angriffspunkte von einer Ebene E; ferner  $R_1$  die Resultante von  $K_1$  und  $K_2$ ,  $x'$  der Abstand ihres Angriffspunktes von E, so haben wir nach dem vorigen:

$$R_1 x' = K_1 x_1 + K_2 x_2.$$

Die Resultante von  $R_1$  und  $K_3$  sei  $R$ , dann ist letztere auch die Resultante von  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$ . Der Abstand ihres Angriffspunktes von E sei  $x$ , dann ist:  $Rx = R_1 x' + K_3 x_3$

$$\text{oder } Rx = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3.$$

Dass man in dieser Weise fortfahren kann, ist einleuchtend; ebenso, dass auch der obige Satz über die Projektion des Mittelpunktes durch gleiche Schlüsse auf beliebig viele parallele Kräfte ausgedehnt werden kann.

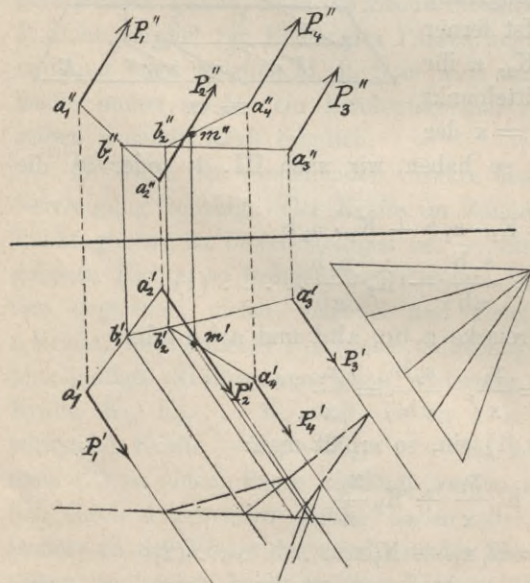


Fig. 63.

$P_3''$ ,  $P_4''$  seien die Vertikalprojektionen derselben. — Ferner mögen  $a_1'$ ,

Liegen die Angriffspunkte sämtlicher Kräfte in einer Ebene, so liegt auch der Mittelpunkt der Kräfte in dieser Ebene.

6. Wir wollen nun die in (5) entwickelten Gesetze auf ein Beispiel anwenden. — Es seien  $P_1'$ ,  $P_2'$ ,  $P_3'$ ,  $P_4'$  (Fig. 63) die Horizontalprojektionen von vier nicht in einer Ebene liegenden parallelen Kräften;  $P_1''$ ,  $P_2''$ ,

$a_2', a_3', a_4'$  und  $a_1'', a_2'', a_3'', a_4''$  die Horizontal- und Vertikalprojektionen ihrer Angriffspunkte sein. — Wir betrachten nun  $P_1', P_2', P_3', P_4'$  als ein ebenes System von parallelen Kräften und bestimmen nach IV, 14 den Mittelpunkt  $m'$  derselben. Es ist dann nach den in (5) bewiesenen Gesetzen  $m'$  die Horizontalprojektion des Mittelpunktes der gegebenen Kräfte im Raume.

Die Vertikalprojektion des Mittelpunktes lässt sich jetzt leicht aus der gefundenen Horizontalprojektion desselben ermitteln. Es ist nämlich zur Bestimmung von  $m'$  der Mittelpunkt  $b_1'$  von  $P_1'$  und  $P_2'$ , und auch der Mittelpunkt  $b_2'$  der drei Kräfte  $P_1', P_2', P_3'$  benutzt worden. — Ziehen wir nun die Gerade  $a_1'' a_2''$ , so liegt auf dieser die Vertikalprojektion  $b_1''$  des Mittelpunktes der beiden ersten Kräfte und zwar senkrecht über  $b_1'$ . — Ebenso liegt die Vertikalprojektion  $b_2''$  des Mittelpunktes der drei ersten Kräfte auf  $b_1'' a_2''$  senkrecht über  $b_2'$ , und schliesslich die Projektion  $m''$  des Mittelpunktes sämtlicher Kräfte auf  $b_2'' a_4''$  senkrecht über  $m'$ . — Durch die beiden Projektionen  $m'$  und  $m''$  ist aber die Lage des Mittelpunktes im Raume bestimmt. — Die Resultante geht durch denselben; sie ist gleich der Summe der gegebenen Kräfte und ihre Richtungslinie ist parallel zu den letzteren.

### Aufgaben.

a) Drei Stangen,  $AS = 75$  cm,  $BS = 75$  cm,  $CS = 83$  cm stossen in S zusammen und stützen sich mit den anderen Endpunkten A, B und C auf eine horizontale Ebene. ( $AB = 80$  cm,  $BC = 65$  cm,  $AB = 84$  cm). In S hängt die Last  $Q = 200$  kg. Man soll auf graphischem Wege den Druck ermitteln, welchen jede der drei Stangen auszuhalten hat. Wie gross ist ferner in jedem der Punkte A, B und C der Druck auf die Horizontalebene.

b) Ein Dreieck ABC, welches sich in horizontaler Lage befindet, ist in den drei Punkten A, B und C unterstützt. Es sei  $AB = 120$  cm,  $BC = 120$  cm,  $AC = 160$  cm. In der Mitte der zu BC gehörigen Höhe des Dreiecks ruht die Last  $P_1 = 120$  kg; in der Mitte der zu AC gehörigen Höhe die Last  $P_2 = 160$  kg und in dem auf AC liegenden Punkte D ( $CD = 20$  cm) die Last  $P_3 = 200$  kg. Es sollen die in A, B und C auftretenden Stützendrucke graphisch ermittelt werden.

Aufl. Man findet als Stützendruck in A: 125 kg, in B:  $133\frac{1}{3}$  kg, in C:  $221\frac{2}{3}$  kg.

Man bestimme auch den Mittelpunkt des Druckes der drei Kräfte  $P_1, P_2$  und  $P_3$ .



## VI. Abschnitt.

### Vom Schwerpunkt.

1. Zerlegt man einen Körper in unzählige viele kleine Teile, so bilden die Gewichte derselben ein System von parallelen Kräften. — Die gegenseitige Lage der Angriffspunkte und die Grössen dieser Kräfte ändern sich nicht, wenn man dem ganzen Körper eine andere Lage giebt, nur die Kraftrichtungen werden relativ andere. — Dieses System von Kräften hat demnach einen Mittelpunkt, welcher der Schwerpunkt des Körpers heisst. — Ist der Körper in diesem Punkte unterstützt, so wird derselbe, wenn er nur der Wirkung der Schwerkraft unterliegt, bei jeder Lage im Gleichgewicht sein.

Für viele Probleme der Mechanik und deren Anwendung auf die Praxis ist die Kenntnis der Lage des Schwerpunktes von Wichtigkeit. — Die dazu erforderlichen Konstruktionen sind meistens sehr einfach und führen alle auf die Ermittlung der Resultante paralleler Kräfte zurück.

Kann man einen Körper in mehrere Teile zerlegen, deren Schwerpunkte schon bekannt sind, so findet man den Schwerpunkt des Körpers, wenn man die Resultante der in den Schwerpunkten der einzelnen Teile angreifenden Gewichte bestimmt. — Der Angriffspunkt dieser Resultante ist der gesuchte Schwerpunkt.

Im folgenden werden wir zunächst die Bestimmung der Schwerpunkte homogener Körper erläutern. — Bezeichnen wir die Inhalte der unendlich kleinen Teile, in welche wir uns den Körper zerlegt denken, mit  $v_1, v_2, v_3 \dots$ ; die Dichtigkeit (Gewicht der Einheit des Volumens) mit  $\gamma$ ; die Abstände der Teilchen von irgend einer Ebene E mit  $x_1, x_2, x_3 \dots$ ; so sind die Gewichte der Teile:  $v_1\gamma, v_2\gamma, v_3\gamma \dots$  und ihre statischen Momente in Bezug auf die Ebene E:

$$v_1\gamma x_1, v_2\gamma x_2, v_3\gamma x_3 \dots$$

V sei das Volumen des ganzen Körpers, x der Abstand seines Schwerpunktes von der Ebene E. Das Gewicht des Körpers ist dann  $V\gamma$  und das Moment desselben in Bezug auf die Ebene E ist  $V\gamma x$ . — Nach V, 5. haben wir deshalb die Gleichung:

$$V\gamma x = v_1\gamma x_1 + v_2\gamma x_2 + v_3\gamma x_3 + \dots$$

oder, da auf beiden Seiten durch  $\gamma$  dividiert werden kann:

$$Vx = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + \dots \quad (1)$$

$$x = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + \dots}{V} \quad (2)$$

Diese Formel zeigt, dass die Lage des Schwerpunktes nur von den Inhalten der einzelnen Teile und den Abständen derselben von der Ebene E, d. h. von der Form des Körpers abhängig, aber ganz unabhängig von seinem Eigengewicht ist.

Ferner ergibt sich aus Gleichung (1), dass bei einem homogenen Körper das Produkt aus dem Inhalt desselben mit dem Abstand seines Schwerpunktes von einer Ebene E gleich ist der Summe der Produkte, welche man erhält, wenn man die Inhalte der einzelnen (unendlich kleinen) Teile mit ihren Abständen von der Ebene E multipliziert. — Die Gleichung (1) hat demnach denselben Charakter, wie die Gleichung zwischen Moment der Resultante und denjenigen ihrer Seitenkräfte. — Wir werden daher im folgenden, soweit die Ermittlung der Schwerpunkte auf homogene Körper beschränkt bleibt, das Produkt aus dem Inhalt eines Körpers und dem Abstand seines Schwerpunktes von einer Ebene E ebenfalls als Moment des Körpers in Bezug auf E bezeichnen.

Das soeben Gesagte benutzen wir, um auch von dem Schwerpunkt einer Fläche oder einer Linie eine Erklärung zu geben. — Zerlegen wir die Fläche oder Linie in unendlich kleine Flächen- resp. Längenelemente  $m_1, m_2, m_3 \dots$ , und bezeichnen wir die Abstände derselben von irgend einer Ebene mit  $x_1, x_2, x_3 \dots$ ; ist ferner  $m$  der Inhalt der ganzen Fläche resp. Länge der ganzen Linie und  $x$  der Abstand des Schwerpunktes derselben von E, so muss die Gleichung bestehen:

$$m x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots$$

Für den Abstand  $x$  des Schwerpunktes von E folgt hieraus:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m} \quad (3)$$

Ist die Fläche oder Linie, deren Schwerpunkt bestimmt werden soll, eben, so kann man  $x, x_1, x_2, x_3 \dots$  als Abstände von einer Geraden ansehen, für welche die Gleichung (3) ihre Gültigkeit behält.

Man pflegt mit dem Schwerpunkt einer Fläche oder einer Linie auch die Vorstellung vom Gewichte dieser Gebilde zu verbinden, was physisch unmöglich ist, weil wägbare Materie immer einen körperlichen Raum einnimmt. Ohne jedoch der Fläche oder Linie die Eigenschaft der Schwere beizulegen, können wir uns auf andere Weise eine Vorstellung vom Schwerpunkte derselben machen, welche wieder mit der Ermittlung der Resultante eines Systems paralleler Kräfte zusammenhängt.

Wenn z. B. eine ebene Fläche einem auf jedes Flächenteilchen gleichförmig wirkenden äusseren Drucke ausgesetzt ist, und  $\gamma$  den auf die Flächeneinheit entfallenden Druck bezeichnet, so erhalten wir für die Resultante aller dieser Druckkräfte die Gleichung:

$$m \gamma \cdot y = m_1 \gamma x_1 + m_2 \gamma x_2 + m_3 \gamma x_3 + \dots$$



in welcher  $m, m_1, m_2, m_3 \dots, x, x_1, x_2, x_3 \dots$  dieselbe Bedeutung wie oben haben. — Nach Entfernung des gemeinschaftlichen Faktors  $\gamma$  und Division durch  $m$  erhalten wir wieder die Gleichung (3). — Der Angriffspunkt der Resultante des über der Fläche gleichmässig verteilten Druckes ist deshalb der Schwerpunkt dieser Fläche.

Denken wir uns z. B. aus der horizontalen Bodenfläche eines mit Wasser gefüllten Gefässes ein Stück von bestimmter Form, etwa ein Dreieck, durch einen Schnitt von der übrigen Bodenfläche vollständig abgetrennt und durch eine von unten nach oben wirkende Kraft  $K$  im Gleichgewicht gehalten, so muss  $K$  im Schwerpunkte des Dreiecks angreifen. Der Wasserdruck wirkt nämlich so, dass Flächenteilchen von gleicher Grösse auch gleichem Druck ausgesetzt sind. — Es ist deshalb zum Zwecke der Ermittlung des Schwerpunktes ganz gleichgiltig, ob man von der Annahme ausgeht, dass der Wasserdruck auf dem Dreieck ruht, oder dass jedes Flächenelement des Dreiecks ein Eigengewicht hat, welches dem Gewicht der darüber befindlichen Wassersäule gleich ist.

## 2. Schwerpunkte gerader Linien und geradlinig begrenzter Figuren.

a) Schwerpunkt einer Geraden. Denken wir uns die Gerade  $ab$  (Fig. 64) einem gleichförmig über dieselbe verteilten, einseitigen Druck ausgesetzt, so verhält sich die Gerade so, als hätte sie Eigengewicht. Wir können alsdann in Bezug auf die Aufsuchung des Schwerpunktes so verfahren, als wenn  $ab$  eine materielle Gerade wäre, bei welcher jeder Längeneinheit das gleiche Gewicht  $\gamma$  zukommt.

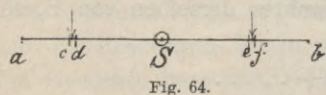


Fig. 64.

Sind  $cd$  und  $ef$  zwei sehr kleine aber gleich lange Stückchen der gegebenen Geraden, welche gleich weit von den Endpunkten  $a$  und  $b$  entfernt liegen, so greift die Resultante der gleich grossen Gewichte dieser Teilchen in der Mitte  $S$  der Geraden an. — Ebenso gehen die Resultanten der Gewichte von je zwei andern gleich langen und gleich weit von den Endpunkten der Geraden entfernten Teilchen durch  $S$ , folglich ist  $S$  der Schwerpunkt der Geraden  $ab$ .

b) Schwerpunkt eines aus mehreren Geraden zusammengesetzten Linienzuges. (Fig. 65 s. S. 55.)

$abcdef$  sei ein aus mehreren Geraden bestehender Linienzug. Haben alle Geraden gleiches Gewicht pro Längeneinheit, so kann man das Gewicht jeder Geraden als eine in ihrem Mittelpunkte oder Schwerpunkte angreifende Kraft betrachten. — Die Grössen der Gewichte sind den Längen  $ab, bc, cd, de, ef$  der einzelnen Geraden proportioniert; wir benutzen deshalb diese letzteren oder gleichvielste Teile derselben (in Fig. 65 die Hälften)





welcher auf der in der Mitte von  $ab$  zu dieser gezogenen Senkrechten liegt, ist gleich dem Produkt aus der Projektion von  $ab$  auf einer zur Richtung des Gewichtes parallelen Geraden und dem Abstand des Punktes  $C$  von  $ab$ .

d) Schwerpunkt eines Linienzuges, welcher einen Teil eines regelmässigen Vielecks bildet. (Fig. 67.)

Ist  $abc\dots g$  ein Teil eines regelmässigen Vielecks, und  $C$  der Mittelpunkt desselben, so liegt der Schwerpunkt auf derjenigen Geraden, welche

durch  $C$  geht und den gegebenen Linienzug halbiert. — Besteht der letztere aus einer geraden Anzahl von Seiten, so geht die Halbierungslinie  $Cd$  durch eine Ecke, bei ungerader Seitenzahl aber durch die Mitte einer Seite.

— Bringen wir den Linienzug in eine solche Lage, dass die Richtungen der Gewichte mit der Verbindungslinie  $ag$  der beiden Endpunkte parallel werden, so ist der Durchschnitt der Resultante aller Gewichte mit  $Cd$  der gesuchte Schwerpunkt.

— Die Gewichte der Geraden stellen wir durch ihre Längen dar, dann können wir dieselben in Bezug auf Drehung um  $C$  durch Kräfte ersetzen, welche in den betreffenden Vielecksseiten liegen und deren

Grössen nach c) den Projektionen der letzteren auf  $ag$

gleich sind. — Diese Kräfte haben sämtlich gleichen Abstand von  $C$ ; dieselben lassen sich also nach III, 2. zu einer in dem gleichen Abstand von

$C$  liegenden Kraft vereinigen, deren Grösse durch die Summe jener Projektionen, d. h. durch  $ag$  dargestellt wird.

— Bezeichnen wir den Abstand einer Vielecksseite von  $C$  mit  $r$  und setzen:  $ag = s$ , die Summe der Viel-

ecksseiten gleich  $l$  (Resultante sämtlicher Gewichte) und den Abstand des

gesuchten Schwerpunktes  $S$  von  $C$  gleich  $x$ , so ist das Moment der Resultante

aller Gewichte in Bezug auf  $C$  gleich  $lx$ . — Dasselbe muss gleich

sein der Summe der Momente aller in den Vielecksseiten liegenden Seiten-

kräfte.

Folglich haben wir die Gleichung:

$$lx = rs,$$

woraus sich für den Abstand des Schwerpunktes von  $C$  ergibt:

$$x = r \cdot \frac{s}{l}.$$

Hiernach ist  $x$  leicht zu konstruieren. — Wir machen  $Ct$  gleich  $r$ ,

ziehen  $tm$  senkrecht zu  $Cd$ . — Auf  $tm$  tragen wir die Länge  $tm = \frac{1}{2}l$  ab

und ziehen  $Cm$ . — Ferner legen wir durch  $a$  die Gerade an parallel zu

$Cd$  und ziehen nun  $nS$  parallel  $mt$ , dann ist  $CS = x$ . — Denn aus der

Ähnlichkeit der Dreiecke  $Ctm$  und  $CnS$  folgt:

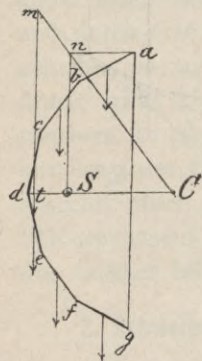


Fig. 67.

$$CS : nS = Ct : tm$$

$$\text{oder } CS : \frac{1}{2}s = r : \frac{1}{2}l$$

$$\text{folglich } CS = r \frac{s}{l} = x.$$

e) Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks. (Fig. 68.)

Die Gewichte der einzelnen Seiten  $ab$ ,  $bc$  und  $ac$  sind den Längen derselben proportioniert, und wir können sie in den Mitten  $d$ ,  $e$  und  $f$  wirken lassen. — Die Resultante der Gewichte von  $ab$  und  $bc$  greift in einem Punkte  $g$  der Geraden  $de$  an, welcher so liegt, dass

$$dg : ge = bc : ab$$

$$= bc : bd.$$

Da aber  $df = be$  und  $ef = bd$  ist, so haben wir auch:

$$dg : ge = df : ef,$$

folglich ist  $fg$  die Halbierungslinie des Winkels  $dfe$ . — Auf  $fg$  liegt nun der gesuchte Schwerpunkt. — In gleicher Weise findet man, dass der Schwerpunkt auch auf den Halbierungslinien der Winkel  $def$  und  $fde$  liegt. — Der Mittelpunkt des dem Dreieck  $def$  einbeschriebenen Kreises ist demnach der Schwerpunkt.

Die Schwerpunkte der Umfänge geschlossener Figuren von beliebig vielen Seiten findet man am einfachsten mit Hilfe des Seilpolygons nach dem schon in b) angegebenen Verfahren.

### 3. Schwerpunkte der Flächen ebener Figuren.

a) Dreiecksfläche. Ist  $abc$  (Fig. 69) ein Dreieck, so ist jede der drei Mittellinien eine Schwerlinie desselben. — Denn zerlegen wir das Dreieck durch Parallelen zu  $ac$  in unzählige viele unendlich schmale Streifen, die wir gleichsam als materielle Linien betrachten können, so liegen die Schwerpunkte aller dieser Linien in  $bd$ . — Durch eine feste Ebene  $E$ , welche das Dreieck längs der Mittellinie  $bd$  stützt, wird dasselbe im Gleichgewicht gehalten. — In gleicher Weise findet man, dass jede der beiden andern Mittellinien eine Schwerlinie ist. — Der Schwerpunkt des Dreiecks ist demnach der Durchschnitt seiner drei Mittellinien.

Nach bekannten geometrischen Sätzen ist der Abstand des Schwerpunktes von einer Dreiecksseite gleich ein Drittel der zu dieser Seite gehörigen Höhe. — Ferner zerlegen die Verbindungslinien des Schwerpunktes mit den Ecken des Dreiecks das letztere in drei gleich grosse Dreiecke.

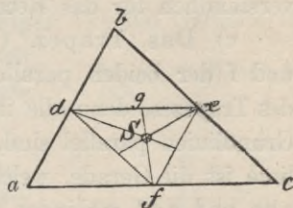


Fig. 68.

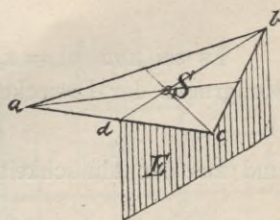


Fig. 69.



## b) Schwerpunkt eines Parallelogramms.

Jede Diagonale eines Parallelogramms ist eine Schwerlinie, wie sich leicht ergibt, wenn man dasselbe in unendlich schmale Streifen zerlegt, welche der einen oder andern Diagonale parallel sind. — Der Schwerpunkt liegt hiernach im Durchschnitt der beiden Diagonalen. — Dasselbe gilt selbstverständlich für das Rechteck und Quadrat.

c) Das Trapez. (Fig. 70  $\alpha$ ). Die Verbindungslinie der Mitten  $e$  und  $f$  der beiden parallelen Grundlinien  $ad$  und  $bc$  ist eine Schwerlinie des Trapezes, denn alle innerhalb desselben liegende Geraden, welche zu den Grundlinien parallel sind, werden von  $ef$  halbiert. — Eine zweite Schwerlinie ist die Gerade, welche die Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$  der beiden Dreiecke  $abc$  und  $acd$  verbindet. — Ihr Schnittpunkt  $S$  mit  $ef$  ist der Schwerpunkt des Trapezes.

Eine andere sehr bequeme Konstruktion ergibt sich, wenn wir das Trapez durch die zu  $ab$  parallele Gerade  $cg$  in ein Dreieck  $cdg$  und ein Parallelogramm  $abcg$  zerlegen (Fig. 70  $\beta$ ), und die Schwerpunkte  $s_2$  und  $s_1$

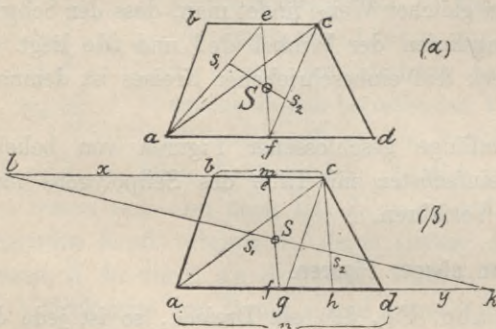


Fig. 70.

dieser beiden Figuren bestimmen. Die durch  $s_1$  und  $s_2$  gehende Schwerlinie treffe die verlängerten Grundlinien des Trapezes in  $l$  und  $k$ . — Ist nun  $ac$  eine Diagonale des Parallelogramms  $abcg$  und  $ch$  die durch  $s_2$  gehende Mittellinie des Dreiecks  $cdg$ , so ergibt sich leicht, dass

$$\triangle cls_1 \cong \triangle aks_1$$

$$\text{und } \triangle hks_2 \sim \triangle cls_2.$$

Es sei nun  $bl = x$ ,  $dk = y$ ,  $bc = m$  und  $ad = n$ , so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke  $cls_1$  und  $aks_1$ , dass

$$x + m = y + n$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $cls_2$  und  $hks_2$ , dass

$$x + m = 2hk$$

$$\text{oder } x + m = 2 \left( \frac{n-m}{2} + y \right) \text{ ist.}$$

Hieraus findet man leicht:  $x = n$  und  $y = m$ .

Man zeichne demnach zuerst die Schwerlinie  $ef$ , welche die Mitten der Grundlinien des Trapezes verbindet, verlängere  $bc$  um  $bl = ad$  und ebenso  $ad$  um  $dk = bc$ ; dann ist  $lk$  eine zweite Schwerlinie. — Der Durchschnitt  $S$  beider Schwerlinien ist der Schwerpunkt des Trapezes.

Ist  $h$  die Höhe des Trapezes, so findet man leicht für den Abstand  $z$  des Schwerpunktes von  $n$  die Formel:

$$z = \frac{h(2m + n)}{3(m + n)}$$

d) Hilfssatz aus der Geometrie. Zieht man durch einen Punkt  $e$  der Diagonale  $bd$  eines Parallelogramms  $abcd$  (Figur 71) die Geraden  $fg$  und  $hk$  parallel zu den Seiten des letzteren, so haben die beiden Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, gleichen Inhalt. — Es ist also

$$ageh = cfek.$$

Addiert man nun zu beiden das Parallelogramm  $egdk$ , so folgt weiter:

$$adkh = cdgf.$$

Wir lösen hiernach die später häufig vorkommende Aufgabe: Ein Rechteck  $abcd$  (Fig. 72) in ein anderes an Inhalt gleiches zu verwandeln, von welchem die Höhe  $h$  gegeben ist. — Es ist also die Grundlinie des neuen Rechtecks zu ermitteln.

Man trage auf der Verlängerung von  $ab$  die Strecke  $ae = h \cdot ab$ . — Die Gerade von  $d$  nach  $e$  schneidet alsdann auf  $bc$  die Strecke  $cf$  ab, welche der gesuchten Grundlinie gleich ist.

Die Richtigkeit dieser Konstruktion ist nach dem Obigen sofort einleuchtend, wenn man  $ek$  parallel  $ad$  zieht,  $cd$  bis  $k$  verlängert, und  $gd$  durch den Punkt  $f$  parallel zu  $ae$  zieht. — Es ist alsdann

$$\begin{aligned} abcd &= gdkl \\ \text{und } dg &= cf. \end{aligned}$$

### Schwerpunkte unregelmässiger Figuren.

e) Es sei  $abefmhkd$  (Fig. 73) eine von drei Rechtecken  $abcd$ ,  $cefg$  und  $gkhm$  gebildete unregelmässige Figur, deren Schwerpunkt bestimmt werden soll. — Die Gewichte der Rechtecke denken wir uns in ihren Schwerpunkten  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  angebracht, alsdann ist genau wie in IV, 14. der Mittelpunkt  $S$  dieser drei Kräfte mit Hilfe eines Seilpolygons zu bestimmen. — Die Konstruktion ist in unserer Figur ausgeführt und bedarf keiner weiteren Erläuterung. —

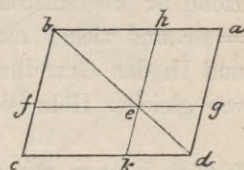


Fig. 71.

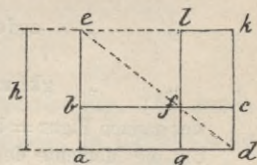


Fig. 72.

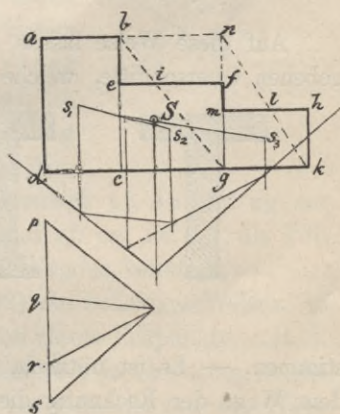


Fig. 73.



Wir haben nur noch die Bestimmung der Grössen der Gewichte durch Strecken anzugeben.

Da wir von der Annahme ausgehen, dass gleich grosse Flächenteile der Rechtecke gleich schwer sind, so verhalten sich die Gewichte der Rechtecke wie ihre Flächen. — Wir verwandeln deshalb zwei der Rechtecke, z. B.  $cefg$  und  $gkhn$  in andere, welche mit dem Rechtecke  $abcd$  in der Höhe  $bc$  übereinstimmen. — Hiernach ziehen wir  $bg$ ; machen ferner  $gn = bc$  und ziehen  $nk$ , dann sind nach der in d) gezeigten Konstruktion  $if$  und  $lh$  den Grundlinien der neuen Rechtecke gleich. — Da nun Rechtecke von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien verhalten, so haben wir:

$$abcd : cefg : gkhn = cd : if : lh;$$

folglich können wir zur Herstellung des Seilpolygons die Grössen der Gewichte durch die Strecken  $pq = cd$ ,  $qr = if$  und  $rs = lh$  darstellen.

Ist  $ad = h_1$ ,  $ce = h_2$ ,  $gm = h_3$ ; ferner  $cd = b_1$ ,  $cg = b_2$ ,  $gk = b_3$ , so ist:

Inhalt des Rechtecks $abcd = b_1 h_1$ ;	Abstand des Schwerpunktes $s_1$ von $dk = \frac{h_1}{2}$
„ „ „ $cgfe = b_2 h_2$ ;	„ „ „ $s_2$ „ „ $= \frac{h_2}{2}$
„ „ „ $gkhn = b_3 h_3$ ;	„ „ „ $s_3$ „ „ $= \frac{h_3}{2}$
„ der ganzen Figur $= b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3$ ;	„ „ „ $S$ „ „ $= x$ .

Um die Momente der einzelnen Teile mit dem Moment der ganzen Figur in Bezug auf  $dk$  zu vergleichen, benutzen wir statt der Gewichte die Flächeninhalte. — Wir erhalten alsdann zur Bestimmung von  $x$  die Gleichung:

$$(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3) x = \frac{b_1 h_1^2}{2} + \frac{b_2 h_2^2}{2} + \frac{b_3 h_3^2}{2}$$

$$\text{woraus folgt: } x = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2^2 + b_3 h_3^2}{2 (b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)}$$

Bezeichnen wir den Abstand des Schwerpunktes  $S$  von  $ad$  mit  $y$ , so finden wir ebenso:

$$y = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2 + b_3^2 h_3 + 2 b_1 b_2 h_2 + 2 b_2 b_3 h_3}{2 (b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)}$$

Auf diese Weise lassen sich die Schwerpunkte der in Fig. 74 angegebenen Querschnitte, welche in der Praxis Verwendung finden, leicht be-

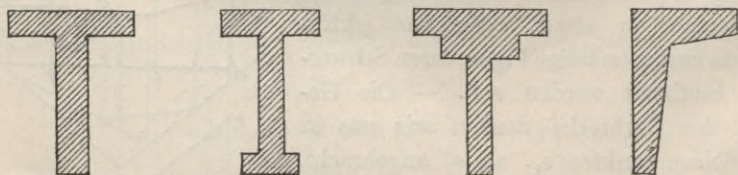


Fig. 74.

stimmen. — Es ist nützlich, neben der graphischen Konstruktion auch auf dem Wege der Rechnung die Aufgabe zu lösen, und beide so gefundenen Resultate zu vergleichen.

**Unregelmässige Vielecke.**

f) Das Viereck. Wir zerlegen das gegebene Viereck  $abcd$  (Fig. 75) durch die Diagonale  $bd$  in zwei Dreiecke. — Sind  $ae$  und  $ce$  die Mittellinien der Dreiecke,  $s_1$  und  $s_2$  die Schwerpunkte der letzteren, so ist  $s_1e = \frac{1}{3}ae$ ;  $s_2e = \frac{1}{3}ce$ . — Auf  $s_1s_2$  liegt der Schwerpunkt  $S$  des ganzen Vierecks, so dass:

$$Ss_1 : Ss_2 = \triangle bcd : \triangle abd.$$

Betrachten wir  $bd$  als gemeinschaftliche Basis der beiden Dreiecke, so ist das Verhältnis ihrer Inhalte dem Verhältnis der zu  $bd$  gehörigen Höhen gleich. — Die letzteren verhalten sich aber auch wie die Abschnitte  $an$  und  $cn$ , in welche die Diagonale  $ac$  durch  $bd$  geteilt wird. — Ferner ist  $\triangle es_1m \sim \triangle aen$  und da  $es_1 = \frac{1}{3}ae$ , so ist auch  $s_1m = \frac{1}{3}an$ ; ebenso findet man:  $s_2m = \frac{1}{3}cn$ . — Folglich verhält sich:

$$s_2m : s_1m = \triangle bcd : \triangle abd,$$

mithin auch:

$$Ss_1 = s_2m \text{ und } Ss_2 = s_1m.$$

g) Das Fünfeck. Wir zerlegen das Fünfeck  $abcde$  (Fig. 76) durch Diagonalen, welche von einem Eckpunkte, z. B.  $c$  ausgehen, in die Dreiecke  $abc$ ,  $ace$ ,  $cde$  und bestimmen auf bekannte Weise die Schwerpunkte der letzteren. — In diesen bringen wir die Gewichte der Dreiecke nach parallelen Richtungen an, alsdann findet man den Schwerpunkt wieder nach V, 14. — Die Ausführung der Konstruktion ist wie bei den früheren Beispielen, so dass es keiner Wiederholung derselben an dieser Stelle bedarf; wir haben nur noch die möglich einfachste Darstellung der Dreiecksgewichte durch Strecken anzugeben. — Verlängern wir  $ae$  und ziehen  $bf \parallel ac$ ,  $dg \parallel ce$ , dann ist  $\triangle acf = \triangle abc$  und  $\triangle cge = \triangle cde$ ; in Bezug auf die drei Grundlinien  $af$ ,  $ae$  und  $eg$  haben aber die Dreiecke  $acf$ ,  $ace$  und  $ceg$  gleiche Höhen, folglich verhalten sich die Inhalte derselben wie ihre Grundlinien. — Wir können demnach  $af$ ,  $ae$  und  $eg$  zur Darstellung der Gewichte,  $fg$  als Kräftelinie, und  $cf$ ,  $ca$ ,  $ce$ ,  $cg$  als Polstrahlen zur Konstruktion des erforderlichen Seilpolygons benutzen.

h) Ist endlich  $abcd \dots a$  (Fig. 77 s. S. 62) ein beliebiges Vieleck, so zerlegen wir dasselbe durch Diagonalen, welche von einem Eckpunkte, z. B.  $d$ , ausgehen, in Dreiecke. — Die letzteren verwandeln wir in Dreiecke; welche gleiche Höhe haben. — In Fig. 77 sind sämtliche Dreiecke auf die Höhe des Dreiecks  $adh$  gebracht und zwar geschieht dies durch folgende Konstruk-

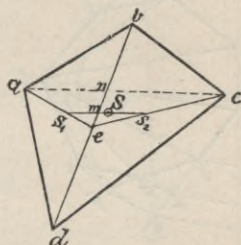


Fig. 75.

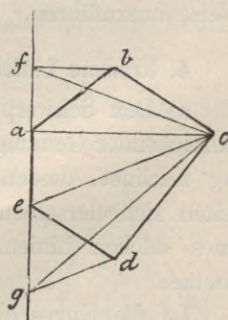


Fig. 76.



tion: Wir ziehen  $ep$  parallel zu  $df$  und verlängern  $gf$  bis  $p$ , dann ist  $\triangle def = \triangle dfp$ . Ferner verhält sich:

$$\triangle dfg : \triangle dfp = gf : fp \\ \text{oder } \triangle dfg : \triangle def = gf : fp.$$

Verlängern wir ebenso  $gh$ , und ziehen  $nf$  parallel  $dg$ , so verhält sich:

$$\triangle dgh : \triangle dfg = gh : gn$$

und wenn  $po$  parallel zu  $nf$  ist:

$$gn : no = gf : fp,$$

folglich auch:

$$\triangle dgh : \triangle dfg : \triangle def = gh : gn : no.$$

Endlich verlängern wir noch  $ah$  und ziehen  $gk$ ,  $ln$ ,  $mo$  parallel zur Diagonale  $dh$ , dann verhält sich:

$$\triangle adh : \triangle dgh : \triangle dfg : \triangle def = ah : hk : kl : lm.$$

In gleicher Weise kann man mit den noch übrigen Dreiecken  $abd$  und  $bcd$  verfahren, wie auch in Fig. 77 angegeben ist. — Wir können demnach die Strecken  $rt$ ,  $ta$ ,  $ah$ ,  $hk$ ,  $kl$ ,  $lm$  zur Darstellung der Gewichte und  $rm$  als Kräftelinie benutzen. — Die Richtungslinien der Gewichte, welche durch die Schwerpunkte der Dreiecke gehen, sind alsdann parallel zu  $rm$  zu legen. — Die weitere Ermittlung des Schwerpunktes ist in bekannter Weise auszuführen.

#### 4. Krumme Linien und krummlinig begrenzte Figuren.

a) Den Schwerpunkt einer beliebigen krummen Linie kann man mit hinreichender Genauigkeit bestimmen, wenn man einen gebrochenen Linienzug zeichnet, dessen Ecken auf der gegebenen Kurve liegen und dessen Seiten sich derselben möglichst genau anschliessen. — Der Schwerpunkt eines solchen Linienzuges fällt sehr nahe mit demjenigen der Kurve zusammen.

Ist die Kurve ein Kreisbogen, so können wir die in (2, d) d. Abschn. gezeigte Konstruktion anwenden. — In der Formel, welche auch giltig ist, wenn die Seitenzahl beliebig gross gemacht wird,

$$x = \frac{r \cdot s}{l}$$

wird alsdann  $r$  gleich dem Radius,  $l$  gleich der Bogenlänge zu setzen sein, während  $s$  die Sehne des Bogens ist.

Der Schwerpunkt  $S$  (Fig. 78 s. S. 63) liegt nun auf dem Radius  $cd$ , welcher den Bogen  $adb$  halbiert. — Wir ziehen  $de$  parallel zur Sehne  $ab$  und tragen vermittelst kleiner Teilchen die Länge des Bogens  $bd = \frac{1}{2}$  mög-

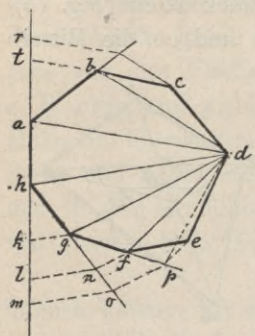


Fig. 77.

licht genau auf de ab. — Jetzt ziehen wir ce, ferner bf parallel cd und fS parallel zu ab, dann ist S der gesuchte Schwerpunkt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke cfS und cde folgt nämlich:

$$cS : cd = fS : de$$

$$\text{oder } cS : r = \frac{s}{2} : \frac{1}{2}$$

$$\text{folglich } cS = \frac{r \cdot s}{1}.$$

Bezeichnen wir den halben Centriwinkel bcd mit  $\alpha$ , so ist

$$s = 2r \sin \alpha, \quad l = 2r\alpha$$

(wenn  $\alpha$  in der zweiten Formel die dem Winkel entsprechende Bogenlänge zum Radius 1 bedeutet). — Setzt man diese Werte in die Formel

$$x = \frac{r \cdot s}{1}, \text{ so erhalten wir } x = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

Für den Bogen eines Halbkreises findet man hieraus  $x = \frac{2r}{\pi}$ .

„ „ „ „ Viertelkreises „ „ „  $x = \frac{2r \sqrt{2}}{\pi}$ .

Folgende Aufgaben mögen zur weiteren Übung dienen:

Den Schwerpunkt des Umfanges eines Kreisabschnittes zu ermitteln. Ebenso den Schwerpunkt des Umfanges eines Kreisabschnittes zu finden.

b) Schwerpunkt eines Kreisabschnittes. (Fig. 79.)

Der Schwerpunkt liegt auf der Halbierungslinie cd des dem Ausschnitte zugehörigen Centriwinkels acb. — Der Ausschnitt kann in unzählige viele gleiche Dreiecke (wie z. B. cef), deren Spitzen im Mittelpunkt c liegen und deren Grundlinien unendlich kleine Sehnen des Kreisbogens ab sind, zerlegt werden.

— Die Höhen dieser Dreiecke nähern sich um so mehr dem Radius des Kreises, je kleiner die Sehnen sind. — Daraus folgt, dass die Schwerpunkte aller dieser Dreiecke einen Kreisbogen gh bilden, dessen Radius  $\frac{2}{3}$  vom

Radius des Ausschnittes beträgt. — Die Gewichte der unendlich kleinen, aber unter sich gleichen Dreiecke kann man in den Schwerpunkten anbringen, wodurch das Gewicht des ganzen Ausschnittes gleichförmig längs des Bogens gh verteilt wird. — Der Schwerpunkt dieses Bogens ist mithin auch der Schwerpunkt des Ausschnittes, und es kann derselbe wie in a) bestimmt werden.

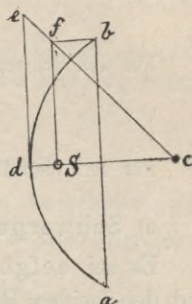


Fig. 78.

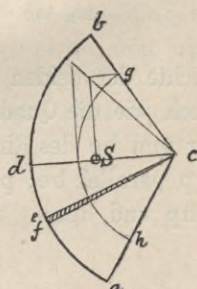


Fig. 79.



Setzt man in der in a) gefundenen Formel  $\frac{2}{3}r$  statt  $r$ , so erhält man für den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt:

$$x = \frac{2rs}{3l} \quad \text{oder} \quad x = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}.$$

Für den Schwerpunkt der Fläche des Halbkreises folgt hieraus:

$$x = \frac{4r}{3\pi}$$

Für den Viertelkreis:

$$x = \frac{4r \sqrt{2}}{3\pi}.$$

c) Schwerpunkt eines konzentrischen Ringstückes. (Fig. 80.)

Es sei  $aefgbd$  eine von zwei konzentrischen Kreisbögen  $ab$  und  $eg$ , und den beiden Radien  $ac$  und  $bc$  begrenzte Fläche. — Der Schwerpunkt derselben liegt auf der Halbierungslinie des Winkels  $acb$ . — Nach b) bestimmen wir die Schwerpunkte  $S$  und  $S_1$  der beiden Ausschnitte  $abc$  und  $ceg$ . — In diesen Punkten können wir uns die Gewichte der Ausschnitte vereinigt denken. Sind die letzteren  $G$  und  $G_1$ ; und ist  $G_2$  das Gewicht des Ringstückes, so ist  $G$  die Resultante von  $G_1$  und  $G_2$ ; unsere Aufgabe lautet jetzt: Es ist die Resultante  $G$  von zwei parallelen Kräften  $G_1$  und  $G_2$ , und die eine Kraft  $G_1$  gegeben, man soll die andere Kraft  $G_2$  ermitteln. — Diese Aufgabe kann, wie in Fig. 80 angegeben ist, leicht mit Hilfe eines Seilpolygons gelöst werden.

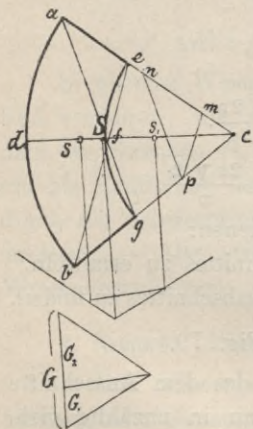


Fig. 80.

Die Ausführung der Konstruktion bedarf keiner weiteren Erläuterung. — Es ist nur noch die Darstellung der Kräfte  $G$ ,  $G_1$  und  $G_2$  durch entsprechende Strecken anzugeben. — Nun verhalten sich die Gewichte der beiden Ausschnitte  $abc$  und  $ceg$  wie ihre Flächeninhalte, also auch wie die Quadrate ihrer Halbmesser. Ziehen wir die beiden Diagonalen  $ag$  und  $be$  des Ringstückes, und nehmen  $cm$  beliebig auf  $ac$  an, und ziehen  $mp$  parallel  $be$ ;  $pn$  parallel  $ga$ , so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $cmp$  und  $bce$ :

$$cm : cp = ce : bc$$

$$cm : cp = ce : ac \dots \dots (1)$$

Ferner folgt aus der Ähnlichkeit  $cnp$  und  $acg$ :

$$cp : cn = cg : ac$$

$$cp : cn = ce : ac \dots \dots (2)$$

Multipliziert man die Proportionen (1) und (2) mit einander, so folgt:

$$cm : cn = ce^2 : ac^2$$

$$= \text{Ausschn. } ceg : \text{Ausschn. } abc.$$

Hiernach können wir das Gewicht  $G$  durch die Strecke  $cn$  und  $G_1$  durch  $cm$  darstellen. — Der Unterschied beider, nämlich die Strecke  $mn$  bedeutet alsdann das Gewicht  $G_2$ .

Bezeichnen wir die Radien  $ac$  und  $ce$  mit  $R$  und  $r$  und den Winkel  $acd$  mit  $\alpha$ , so finden wir für den Abstand  $x$  des Schwerpunktes vom Mittelpunkt leicht die Formel:

$$x = \frac{2 (R^2 + Rr + r^2) \sin \alpha}{3 (R + r) \alpha}.$$

d) Schwerpunkt eines Kreisabschnittes. (Fig. 81.)

Der Abschnitt  $abd$  ist der Unterschied zwischen dem Ausschnitt  $adbc$  und dem Dreieck  $abc$ . — Das Gewicht des Ausschnittes ist also die Resultante aus den Gewichten des Abschnittes und des Dreiecks. — Ist dann  $S$  der Schwerpunkt des Ausschnittes,  $s_1$  der Schwerpunkt des Dreiecks, so kennen wir von den drei Kräften die Resultante und eine Seitenkraft ihrer Grösse und Lage nach. — Die zweite Seitenkraft, welche im Schwerpunkt des Abschnittes angreift, kann demnach auf dieselbe Weise wie in c) gefunden werden.

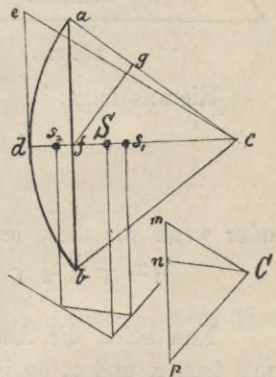


Fig. 81.

Die Längen  $mp$  und  $np$ , welche die Gewichte des Ausschnittes und Dreiecks darstellen, ergeben sich leicht auf folgende Weise. Wir ziehen  $de$  senkrecht zu der Halbierungslinie  $cd$  des Winkels  $acb$ , und machen  $de$  gleich der Bogenlänge  $da$ . — Hierdurch wird  $\triangle cde$  dem halben Ausschnitt an Inhalt gleich. — Ferner ist  $\triangle acf$  die Hälfte des Dreiecks  $abc$ . — Betrachten wir nun in den beiden Dreiecken  $cde$  und  $acf$  die gleich langen Seiten  $cd$  und  $ac$  als Grundlinien, so verhalten sich die Inhalte der Dreiecke wie die zugehörigen Höhen  $de$  und  $fg$ . — Auf der Kräftelinie ist deshalb  $mp = de$  und  $np = fg$  zu machen.

Ist wieder  $\alpha$  der halbe Centriwinkel  $acb$ , so findet man für den Abstand  $x$  des Schwerpunktes vom Mittelpunkt:

$$x = \frac{2r \sin^3 \alpha}{3 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit  $4r^2$ , so folgt hieraus leicht:

$$x = \frac{s^3}{12f}$$

wenn  $s$  die Länge der Sehne  $ab$ , und  $f$  den Inhalt des Abschnittes bedeutet.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines von zwei parallelen Sehnen begrenzten Kreisstückes zu bestimmen.

e) Ist  $f$  die Projektion einer beliebigen ebenen Figur  $F$ , so ist der Schwerpunkt von  $f$  die Projektion des Schwerpunktes von  $F$ .

Es sei  $mn$  (Fig. 82 s. S. 66) die Durchschnittslinie der beiden Ebenen  $P$  und  $Q$ ; in welchen  $F$  und  $f$  liegen. —  $F$  zerlegen wir durch Geraden,



welche parallel zu  $mn$  sind, in unzählige viele unendlich schmale Flächenstreifen  $F_1, F_2, F_3 \dots$  — Die Abstände derselben von  $mn$  seien  $x_1, x_2, x_3 \dots$  — Ferner wird  $f$  in die Projektionen dieser Flächenstreifen zerlegt; wir bezeichnen dieselben mit  $f_1, f_2, f_3 \dots$  und ihre Abstände von  $mn$  mit  $z_1, z_2, z_3 \dots$  — Ist nun  $\alpha$  der Neigungswinkel der beiden Ebenen, so haben wir:

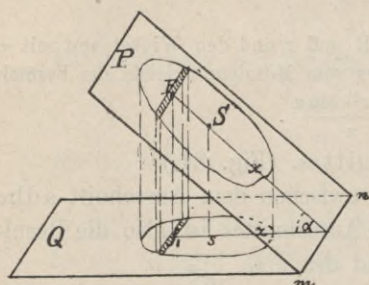


Fig. 82.

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1 \cos \alpha & \text{und} & & z_1 &= x_1 \cos \alpha \\ f_2 &= F_2 \cos \alpha & & & z_2 &= x_2 \cos \alpha \\ & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ & \vdots & & & \vdots & \vdots \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} f_1 z_1 &= F_1 x_1 \cos^2 \alpha \\ f_2 z_2 &= F_2 x_2 \cos^2 \alpha \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \end{aligned}$$

oder wenn wir diese letzten Gleichungen addieren:

$$\begin{aligned} f_1 z_1 + f_2 z_2 + \dots &= (F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots) \cos^2 \alpha \\ &\text{oder } \Sigma f_i z_i = \cos^2 \alpha \Sigma F_i x_i. \end{aligned}$$

Nun seien die Abstände der Schwerpunkte der Flächen  $F$  und  $f$  von  $mn$  bez.  $x$  und  $z$ , so ist:

$$\Sigma F_i x_i = F x \quad \text{und} \quad \Sigma f_i x_i = f z,$$

folglich ist auch

$$f z = \cos^2 \alpha \cdot F \cdot x,$$

und da nach einem bekannten Satze  $f = F \cos \alpha$  ist, so folgt weiter:

$$z = x \cdot \cos \alpha,$$

wodurch der obige Satz erwiesen ist.

Sind  $s_1$  und  $s_2$  die Schwerpunkte der Grundflächen eines an beiden Enden schief abgeschnittenen Prismas oder Cylinders, und ist  $F$  ein normaler Querschnitt des Körpers, so kann man  $F$  als Projektion der einen oder der anderen Grundfläche betrachten. — Die Gerade  $s_1 s_2$  geht deshalb durch den Schwerpunkt von  $F$ , und ist parallel den Kanten des Prismas bez. des Cylinders.

Berücksichtigen wir noch, dass jede der Endflächen als eine schiefe Projektion der anderen angesehen werden kann, so lässt sich der obige Satz allgemeiner so aussprechen:

Ist  $f$  eine beliebige Parallelprojektion der ebenen Figur  $F$ , so ist der Schwerpunkt von  $f$  die Projektion des Schwerpunktes von  $F$ .

Der vorstehende Satz gilt selbstverständlich auch für ringförmige Figuren, welche von zwei getrennten, aus geraden oder krummen Linien bestehenden Linienzügen begrenzt sind.

Lässt sich der Satz auch ausdehnen auf den Umfang einer Figur, indem man dieselbe als Ring von unendlich kleiner Breite betrachtet?

f) Schwerpunkt des Ausschnitts und Abschnitts einer Ellipse.

Die Ellipse ist bekanntlich eine gerade Projektion des um die grosse Achse AB als Durchmesser gezeichneten Kreises. — Wir legen, wie in Fig. 83 angegeben, diesen Kreis in die Ebene der Ellipse nieder; ist nun Cmn der Ausschnitt der Ellipse, dessen Schwerpunkt zu bestimmen ist, so ziehen wir mq und nr senkrecht zu AB, und verbinden q und r mit dem Mittelpunkt C durch Geraden. — Hierdurch erhalten wir den Kreisabschnitt Cqr, von welchem Cmn eine Projektion ist. — Nun sei Cp die Halbierungslinie des Winkels qCr, s der auf Cp liegende Schwerpunkt des Ausschnittes Cqr, und po senkrecht zu AB, dann ist Co die Projektion des Halbmessers Cp. — Der gesuchte Schwerpunkt S liegt demnach auf Co und wird durch die zu AB senkrechte Gerade sS bestimmt.

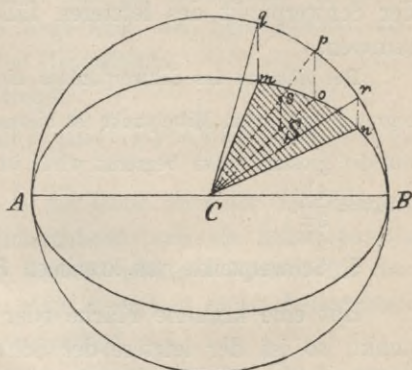


Fig. 83.

Auf dieselbe Weise findet man den Schwerpunkt eines beliebigen Abschnitts der Ellipse.

Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion in dem Falle, wenn die den Ellipsenabschnitt begrenzende Sehne senkrecht zu einer der Hauptachsen ist. — Es sei z. B. BDE (Fig. 84α) ein Abschnitt, dessen Sehne

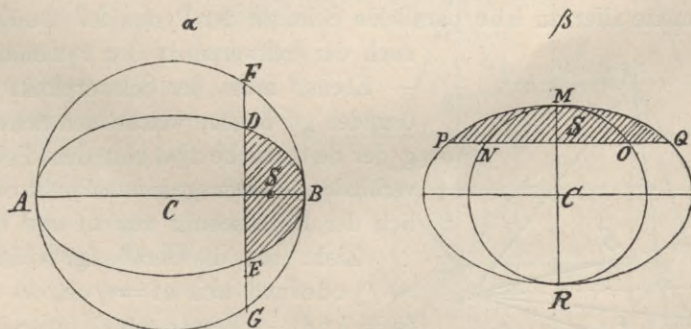


Fig. 84.

DE senkrecht zur grossen Achse AB steht; durch Verlängerung der Sehne bis F und G erhalten wir den Kreisabschnitt BFG, dessen Projektion BDE ist. — Der Schwerpunkt S des Kreisabschnittes fällt, wie leicht ersichtlich ist, jetzt mit dem Schwerpunkt des Ellipsenabschnittes zusammen.



Ist die Sehne des Abschnittes PQM (Fig. 84  $\beta$ ) senkrecht zur kleinen Achse, so kann der Schwerpunkt desselben auf gleiche Weise bestimmt werden. — Bekanntlich ist die Ellipse auch eine schiefe Projektion des um die kleine Achse MR als Durchmesser gezeichneten Kreises. — Dann ist auch der Abschnitt PQM eine Projektion des Kreisabschnittes MON und der Schwerpunkt des letzteren fällt mit dem Schwerpunkte von PQM zusammen.

Der Abstand des Schwerpunktes einer Halbellipse, welche durch die kleine Achse begrenzt wird, vom Mittelpunkt ist hiernach  $= \frac{4a}{3\pi}$ . Für die Hälfte einer Ellipse, welche von der grossen Achse begrenzt wird, ist der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt  $= \frac{4b}{3\pi}$ .

### 5. Schwerpunkte von krummen Flächen und von Körpern.

Hat eine krumme Fläche oder ein Körper einen geometrischen Mittelpunkt, so ist der letztere der Schwerpunkt. — Ebenso liegt der Schwerpunkt in einer etwa vorhandenen Symmetrieebene oder Symmetrieachse. — So liegt z. B. der Schwerpunkt der Kugel, des Cylinders mit kreisförmiger oder elliptischer Grundfläche, des Parallelepipediums, oder Prismas mit regelmässiger Grundfläche in dem geometrischen Mittelpunkte des Körpers. — Das Gleiche gilt von den Oberflächen und Mantelflächen derselben. — Im folgenden soll die Ermittlung der Schwerpunkte einiger Körper oder Flächen gezeigt werden, welche keinen geometrischen Mittelpunkt besitzen.

a) Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide. (Fig. 85.)

Es sei  $f$  der Schwerpunkt der Grundfläche  $abc$ . — Auf der Geraden, welche  $f$  mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte  $d$  verbindet, liegen die Schwerpunkte aller zu  $abc$  parallelen Schnitte der Pyramide. Deshalb liegt auch der Schwerpunkt der Pyramide in  $df$ . — Ebenso muss der Schwerpunkt auf der Geraden  $gc$  liegen, welche den Schwerpunkt  $g$  der Seitenfläche  $abd$  mit dem Eckpunkt  $c$  verbindet. — Der gesuchte Punkt  $S$  ist folglich der Durchschnitt von  $df$  und  $cg$ .

Zieht man die Gerade  $fg$ , so ist  $\triangle efg \sim \triangle cde$  und weil  $ef = \frac{1}{3} ce$ , so ist auch  $fg = \frac{1}{3} cd$ . — Ferner ist  $\triangle fgS \sim \triangle cdS$ , folglich auch  $fS = \frac{1}{3} dS$  oder  $fS = \frac{1}{4} df$ . — Es ergibt sich hieraus leicht, dass der senkrechte Abstand des Schwerpunktes  $S$  von

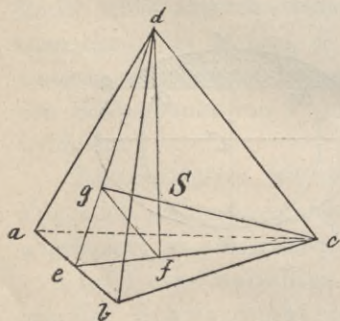


Fig. 85.

der Grundfläche  $abc$  ebenfalls  $\frac{1}{4}$  der zu derselben gehörigen Höhe der Pyramide ist.

Der Schwerpunkt einer beliebigen vielseitigen Pyramide liegt auf der Geraden, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet; denn diese Gerade trifft jeden Schnitt, welcher parallel zur Grundfläche ist, in seinem Schwerpunkt. — Ferner kann man die Pyramide in dreiseitige Pyramiden von gemeinschaftlicher Höhe zerlegen. Die Schwerpunkte derselben liegen in einer Ebene, deren Abstand von der Grundfläche gleich  $\frac{1}{3}$  der Höhe der Pyramide ist. — Folglich liegt auch der Schwerpunkt der ganzen Pyramide in dieser Höhe über der Grundfläche.

Dasselbe Gesetz gilt auch für den Kegel.

b) Schwerpunkt der Mantelfläche einer Pyramide oder eines Kegels.

Der Schwerpunkt liegt bei beiden in  $\frac{1}{3}$  der Höhe über der Grundfläche. — Bei der Pyramide ist dieses sofort einleuchtend, weil die Schwerpunkte aller Seitenflächen in dieser Höhe über der Grundfläche liegen; für den Kegelmantel ergibt sich der Satz, wenn man denselben durch Seitenlinien in unzählige viele unendlich kleine Dreiecke zerlegt.

Aufgabe. Nachzuweisen, dass der Schwerpunkt der Oberfläche einer Pyramide oder eines Kegels um die Strecke  $\frac{V}{O}$  von derjenigen Ebene entfernt liegt, welche parallel zur Grundfläche durch den Schwerpunkt des Mantels geht. — ( $V$  bedeutet den Rauminhalt,  $O$  die Oberfläche).

c) Schwerpunkt eines an beiden Enden schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas. (Fig. 86.)

Das Prisma ist in Fig. 86 durch Grundriss und Aufriss dargestellt. —

Wir zerlegen den Körper mittelst einer Ebene, welche durch  $(h, h_1)^*$  geht und parallel zur Grundfläche  $(abg, b_1g_1)$  ist, in ein dreiseitiges Prisma  $(abgfeh, b_1f_1h_1g_1)$  und in eine vierseitige Pyramide  $(cdfeh, f_1d_1h_1)$ . — Es sei nun  $abcd$  ein Rechteck und die beiden Grundflächen  $abg$  und  $cdh$  mögen symmetrisch gegen eine durch die Mitte von  $bc$  gehende Ebene sein, welche senkrecht zu den Kanten  $ad$  und  $bc$  steht, und in der Vertikalprojektion als die Gerade  $mn$  erscheint. —

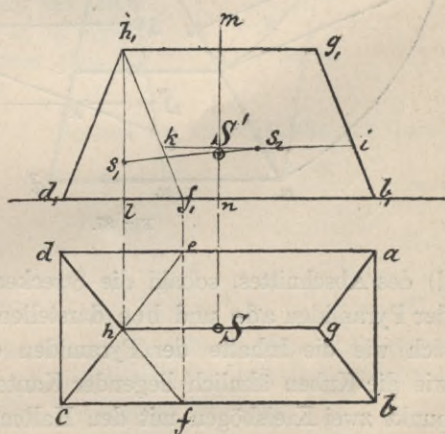


Fig. 86.

\*) Der Punkt  $(h, h_1)$  ist derjenige räumliche Punkt, dessen Projektionen  $h$  und  $h_1$  sind.



Unter dieser Voraussetzung liegt der Schwerpunkt in  $mn$ , und es ist nur noch die Höhe desselben über  $b_1d_1$  zu bestimmen.

Der Schwerpunkt  $s_1$  der vierseitigen Pyramide liegt in der von  $h_1$  auf  $f_1d_1$  gefällten Senkrechten so, dass  $s_1l = \frac{1}{4}h_1l$  ist. — Ferner liegt der Schwerpunkt  $s_2$  des dreiseitigen Prismas (Vertikalprojektion  $b_1f_1h_1g_1$ ) in der Mitte der Verbindungslinien  $ik$  der Schwerpunkte seiner Grundflächen (also  $b_1i = f_1k = \frac{1}{3}b_1g_1$ ). — Zieht man nun  $s_1s_2$ , so schneidet diese  $mn$  in dem gesuchten Schwerpunkte  $S$ .

Bezeichnet man die Länge  $bc$  mit  $a$  und die Breite  $cd$  mit  $b$ , ferner  $gh$  mit  $c$  und den Abstand der Kante  $gh$  von der Ebene  $abcd$  mit  $h$ , so findet man für den Abstand  $x$  des Schwerpunktes von  $abcd$  leicht die Formel:

$$x = \frac{h(a+c)}{2(2a+c)}$$

d) Schwerpunkt eines Pyramiden- oder Kegelstumpfs. (Fig. 87.)

Der Schwerpunkt eines solchen Körpers liegt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte  $m$  und  $n$  seiner beiden Grundflächen ( $mn$  geht in ihrer Verlängerung durch die Spitze  $e$ ). — Es sei nun  $abcd$  eine Vertikalprojektion der abgestumpften Pyramide, bei welcher die Projektionen der beiden Grundflächen die parallelen Geraden  $ad$  und  $bc$  sind. —  $S$  sei der Schwerpunkt der vollständigen und  $s_1$  der Schwerpunkt der Ergänzungspyramide; es ist also  $nS = \frac{1}{4}ne$ ,  $ms_1 = \frac{1}{4}me$ . Da nun das Gewicht des Pyramiden-

stumpfs dem Unterschied der Gewichte der vollständigen und der Ergänzungspyramide gleich ist, so kann der gesuchte Schwerpunkt in derselben Weise bestimmt werden, wie in den Aufgaben 4, c) und

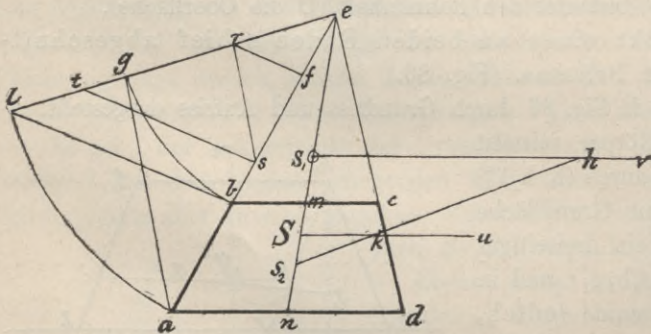


Fig. 87.

d) des Abschnittes, sobald die Strecken ermittelt sind, welche die Gewichte der Pyramiden  $ade$  und  $bce$  darstellen. — Diese beiden Gewichte verhalten sich wie die Inhalte der Pyramiden oder (da die letzteren ähnlich sind) wie die Kuben ähnlicher Kanten. — Wir zeichnen um  $e$  als Mittelpunkt zwei Kreisbögen mit den Halbmessern  $ae$  und  $be$ , und ziehen von  $e$  aus einen andern Halbmesser  $el$ , welcher die beiden Bögen in  $g$  und  $l$  schneidet. — Auf  $ae$  nehmen wir die Strecke  $ef$  beliebig, ziehen  $fr$  parallel zu  $bl$ ,  $rs$  parallel zu  $ag$  und  $st$  wieder parallel zu  $bl$ , dann verhält sich:

$$ef:er = be:el$$

oder weil  $el = ae$  ist:

$$ef : er = be : ae$$

ebenso:

$$er : es = be : ae \quad (eg = be)$$

$$es : et = be : ae.$$

Multipliziert man diese drei Proportionen miteinander, so folgt, wenn man links den gemeinschaftlichen Faktor  $er \cdot es$  weglässt:

$$ef : et = be^3 : ae^3.$$

Hierdurch ergibt sich, dass man  $ef$  und  $et$  zur Darstellung der Gewichte der Pyramiden  $bce$  und  $ade$  benutzen kann. — Die Differenz dieser Strecken stellt alsdann das Gewicht des Pyramidenstumpfs dar.

Der Schwerpunkt lässt sich auch ohne Seilpolygon auf folgende Weise bestimmen. — Man ziehe durch  $S$  und  $s_1$  zwei parallele Geraden  $Su$  und  $s_1v$ , trage auf diesen die Längen  $s_1h = et$  und  $Sk = ef$  ab. — Die Gerade, welche durch  $h$  und  $k$  gezogen wird, schneidet  $mn$  in dem gesuchten Schwerpunkt  $s_2$ . — (s. II 3, a.)

Formel für den Abstand des Schwerpunktes von der unteren Grundfläche.

Der senkrechte Abstand des Schwerpunktes  $s_2$  von der unteren Grundfläche kann berechnet werden, wenn man das Moment des Pyramidenstumpfs dem Moment der vollständigen Pyramide vermindert um das Moment der Ergänzungspyramide gleich setzt. — Durch eine andere Zerlegung kann aber diese etwas umständliche Rechnung sehr vereinfacht werden. — Es sei zunächst ein dreiseitiger Pyramidenstumpf  $abcdef$  (Fig. 88) gegeben. — Wir zerlegen denselben in drei vollständige dreiseitige Pyramiden. — Bezeichnen wir nun die obere und untere Grundfläche mit  $g$  und  $G$ , die Höhe mit  $h$ , so ergibt sich nach bekannten stereometrischen Sätzen alles zur Berechnung nötige aus folgendem Schema:

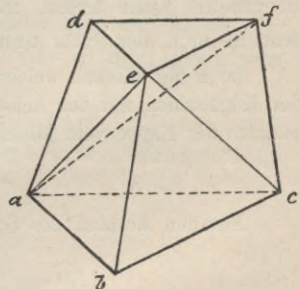


Fig. 88.

Pyramide $abce = \frac{Gh}{3}$ ,	Abstand des Schwerpunktes von $G = \frac{h}{4}$
„ $adef = \frac{gh}{3}$ ,	„ „ „ „ „ „ $= \frac{3}{4} h$
„ $acef = \frac{h}{3} \sqrt{Gg}$ ,	„ „ „ „ „ „ $= \frac{h}{2}$
Pyramidenstumpf $abcdef = \frac{h}{3} [G + \sqrt{Gg} + g]$	„ „ „ „ „ „ $= x$ .

Setzen wir jetzt das Moment des Pyramidenstumpfs gleich der Summe der Momente seiner einzelnen Teile, wobei nach 1. des Abschnittes statt der Gewichte die Inhalte derselben genommen werden können, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{h}{3} [G + \sqrt{Gg} + g] x = \frac{h^2}{12} [G + 3g + 2\sqrt{Gg}]$$

und hieraus:

$$x = \frac{h [G + 3g + 2\sqrt{Gg}]}{4 [G + \sqrt{Gg} + g]}.$$



Diese Formel gilt auch für einen beliebigen vielseitigen Pyramidenstumpf, weil man jeden derartigen Körper in dreiseitige Pyramiden zerlegen kann, deren Schwerpunkte in gleichem Abstand von der unteren Grundfläche liegen. — Ebenso ist sie gültig für einen Kegelstumpf.

Der Inhalt  $M$  der mittleren Durchschnittsfigur eines Pyramidenstumpfs ist bekanntlich  $= \frac{1}{2} \left( \frac{G+g}{2} + \sqrt{Gg} \right)$ , woraus folgt:  $\sqrt{Gg} = 2M - \frac{G+g}{2}$ .

Wird dieser Wert in obige Formel eingeführt, so folgt:

$$x = \frac{h(g + 2M)}{G + g + 4M}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass diese letzte Formel auch für einen beliebigen vielseitigen Obelisk Gültigkeit hat. — Man beweist die Richtigkeit der Formel zuerst für einen vierseitigen Obelisk, welchen man als Differenz zweier dreiseitigen Pyramidenstümpfe ansehen kann. Ferner für einen fünfseitigen Obelisk, welcher der Differenz zwischen einem vierseitigen Obelisk und einem dreiseitigen Pyramidenstumpf gleich ist u. s. f.

### e) Schwerpunkt einer Kugelkappe und Kugelzone.

Der Schwerpunkt der Kugelkappe sowohl wie der Kugelzone liegt in der Mitte ihrer Höhe; denn beide Flächen können durch Ebenen, welche parallel zu den Ebenen der Begrenzungskreise sind, und die Höhe in gleiche Teile teilen, in Kugelzonen von gleichem Inhalt zerlegt werden, woraus sich der Satz unmittelbar ergibt.

Ist  $\alpha$  der Winkel, welchen ein nach dem Begrenzungskreise der Kugelkappe gehender Kugelradius mit der Achse der Kugelkappe bildet, so ist der Abstand des Schwerpunktes der Kappe vom Mittelpunkt der Kugel:

$$x = \frac{1}{2} r (1 + \cos \alpha) = r \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Für den Abstand des Schwerpunktes der Kugelzone vom Mittelpunkt ergibt sich:

$$x = \frac{1}{2} r (\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$\text{oder } x = r \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

wenn  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel bedeuten, welche zwei nach den Begrenzungskreisen der Zone gehende Kugelradien mit der Achse der Zone bilden.

### f) Schwerpunkt des Kugelausschnittes.

Zerlegen wir den Ausschnitt in unzählig viele Pyramiden, deren unendlich kleine Grundflächen in der Kugelkappe, und deren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel liegen, so bilden die Schwerpunkte dieser Pyramiden eine Kugelkappe, deren Halbmesser  $\frac{3}{4}$  vom Halbmesser der Kugel beträgt. — Der Schwerpunkt des Ausschnittes liegt also in der Mitte der Höhe dieser Kappe.

Der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt der Kugel ist hiernach:

$$x = \frac{3}{8} r (1 + \cos \alpha) \text{ oder } x = \frac{3}{4} r \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Für die Halbkugel ( $\alpha = 90^\circ$ ) folgt hieraus  $x = \frac{3}{8} r$ .

g) Schwerpunkt der Kugelschale. (Fig. 89.)

Das Gewicht dieses Körpers ist dem Unterschied der Gewichte zweier Kugelausschnitte gleich. — Die letzteren verhalten sich wie die Inhalte oder wie die Kuben der beiden Radien BC und CG. — Nehmen wir die Strecke CH auf BC willkürlich und zeichnen den Linienzug HJLK so, dass die Seiten desselben abwechselnd den Geraden AG und BE parallel werden, so verhält sich (s. Aufgabe d):

$$\begin{aligned} CH : CK &= CG^3 : BC^3 \\ &= R^3 : r^3. \end{aligned}$$

Ist nun S der Schwerpunkt des Ausschnittes ABC und  $s_1$  der Schwerpunkt von CGE, so ziehen wir durch diese beiden Punkte die parallelen Geraden St und  $s_1 u$ , tragen auf St die Strecke  $S_n = CH$  und auf  $s_1 u$  die Strecke  $s_1 m = CK$  ab. — Die Gerade, welche m und n verbindet, schneidet CD in dem gesuchten Schwerpunkte  $s_2$ .

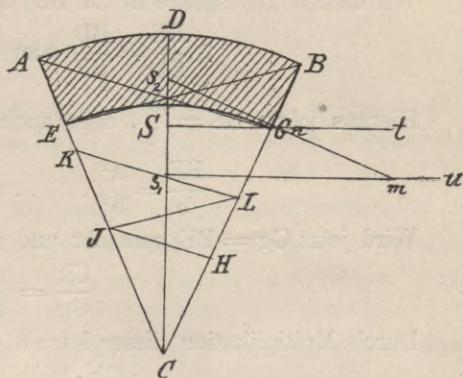


Fig. 89.

Ist  $\alpha$  der halbe Mittelpunktswinkel und sind R und r die Halbmesser der beiden Kugelflächen, so haben wir für den Abstand des Schwerpunktes  $s_2$  vom Mittelpunkt die Formel:

$$x = \frac{3}{4} \frac{R^3 + R^2 r + R r^2 + r^3}{R^2 + R r + r^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \dots$$

h) Schwerpunkt des Kugelabschnittes. (Fig. 90.)

Das Gewicht eines Kugelabschnittes ist dem Gewicht des zugehörigen Ausschnittes ACBD vermindert um das Gewicht des Kegels ABC gleich. — Die Bestimmung des Schwerpunktes kann deshalb wie bei den vorigen Beispielen ausgeführt werden, sobald die Gewichte des Ausschnittes und Kegels durch entsprechende Strecken dargestellt sind. — Nun ist der Inhalt des Ausschnittes dem Inhalt eines Kegels gleich, dessen Grundfläche gleich der Kugelkappe und Höhe gleich dem Radius der Kugel ist. — Die Kugelkappe lässt sich aber in einen Kreis verwandeln, dessen Radius gleich der Sehne  $BD = a$  ist. — Hiernach ist der Inhalt des Ausschnittes  $= \frac{1}{3} a^2 \pi \cdot r$ ; der Inhalt

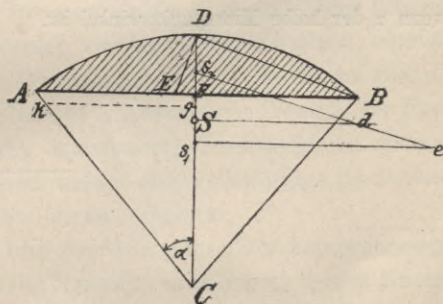


Fig. 90.



des Kegels ist  $= \frac{1}{3} b^2 \pi h$ , ( $b = BF$ ,  $h = CF$ ). Demnach sind 2 Strecken zu bestimmen, welche sich zu einander verhalten wie  $\frac{1}{3} a^2 \pi r : \frac{1}{3} b^2 \pi h$ , oder wie  $a^2 r : b^2 h$ .

Wir ziehen  $DE$  senkrecht zu  $BD$ , dann haben wir:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BD}{BF} \quad \text{oder} \quad \frac{BE}{a} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus folgt:  $BE = \frac{a^2}{b}$ , oder auch

$$\frac{BE}{b} = \frac{a^2}{b^2} \dots \dots (1).$$

Wird jetzt  $Cg = BE$  gemacht und  $gk$  parallel zu  $AF$  gezogen, so folgt:

$$\frac{Ck}{Cg} = \frac{r}{h}.$$

Durch Multiplikation dieser letzten Gleichung mit (1) ergibt sich:

$$\frac{Ck \cdot BE}{Cg \cdot b} = \frac{a^2 r}{b^2 h}$$

oder, weil  $Cg = BE$ :

$$\frac{Ck}{b} = \frac{a^2 r}{b^2 h}.$$

Nehmen wir demnach zur Darstellung des Gewichtes des Ausschnittes die Strecke  $Ck$  an, so bedeutet  $b$  das Gewicht des Kegels. — Diese beiden Strecken sind von den Schwerpunkten  $s_1$  und  $S$  des Ausschnittes nach parallelen Richtungen aufgetragen;  $s_1 e = Ck$ ,  $S d = b$ . — Die Verbindungslinie der Endpunkte  $e$  und  $d$  geht dann verlängert durch den gesuchten Schwerpunkt  $s_2$ .

Für den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte  $C$  findet man leicht die Formel:

$$C s_2 = \frac{3 r (1 + \cos \alpha)^2}{4 (2 + \cos \alpha)}$$

wenn  $\alpha$  der halbe Mittelpunktswinkel ist.

## VII. Abschnitt.

### Die Fachwerkträger.

Eine der leichtesten und zugleich nützlichsten Aufgaben der graphischen Statik besteht darin, die Spannungen der einzelnen Stangen von Fachwerkträgern zu ermitteln.

Im allgemeinen bestehen die Fachwerke einfachster Konstruktion aus einer Verbindung von geraden Stäben zu einem ebenen Netz von Dreiecken, deren Eckpunkte sämtlich auf dem äusseren Umfang des Netzes liegen. (Fig. 91.)

Die einzelnen Stangen sind in den Eck- oder Knotenpunkten durch Gelenkbolzen verbunden.

Auf ein derartiges Stabsystem wirken nun eine Reihe von äusseren Kräften, welche unter sich im Gleichgewicht sind. Die Kräfte greifen nur in den Knotenpunkten an und liegen in der Ebene des Stabsystems. — Die Aufgabe ist dann stets, zu ermitteln, wie stark jede einzelne Stange von den äusseren Kräften in Anspruch genommen wird.

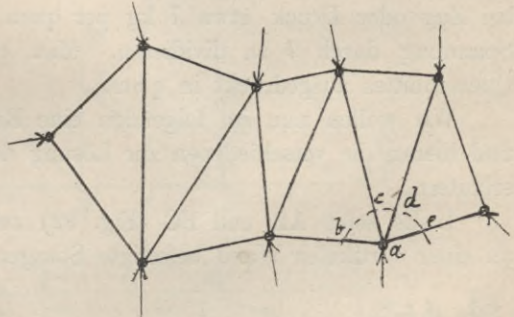


Fig. 91.

Da die Stangen in jedem Knotenpunkte durch eine Gelenkverbindung zusammenhängen, so können sie die äusseren Kräfte auch nur ihrer Längsrichtung nach aufnehmen. — Es werden demnach die einzelnen Stangen lediglich in Bezug auf ihre Zug- oder Druckfestigkeit, aber nicht auf Biegung in Anspruch genommen, und hierin besteht ein besonderer Vorteil der Fachwerke. — Ausserdem gehören richtig konstruierte Fachwerke zu den sogenannten statisch bestimmten Systemen, welche eine vollständige theoretische Beurteilung aller vorkommenden Spannungen zulassen.

Zwischen den äusseren Kräften und den von denselben hervorgerufenen Widerständen in den Stangen findet Gleichgewicht in jedem einzelnen Knotenpunkte statt. Es müssen demnach alle in einem solchen Punkte wirkenden äusseren Kräfte und Spannungen sich zu einem geschlossenen Kräftepolygon vereinigen lassen. — Oder: Denken wir uns diejenigen Stangen, welche in einem Knotenpunkte, z. B. a, zusammentreffen, durch einen Schnitt bcde



abgetrennt, so könnte man in den Schnittpunkten  $b, c, d, e$  Kräfte anbringen, welche in den Richtungen der Stangen liegen und der äusseren Kraft das Gleichgewicht halten. — Diese Kräfte sind mit den in den Stangen herrschenden Spannungen von gleicher Grösse.

Die Ermittlung der Spannungen sämtlicher Stangen kann deshalb ausgeführt werden, wenn man jede äussere Kraft nach den Richtungen derjenigen Stangen zerlegt, welche in dem Angriffspunkt der Kraft zusammenstossen. — Wir haben jedoch früher gesehen, dass eine Kraft  $K$  nur in zwei Kräfte, deren Richtungslinien sich auf  $K$  schneiden, oder in drei Kräfte, welche nicht durch einen Punkt gehen und von denen auch nicht zwei auf  $K$  zusammentreffen, zerlegt werden kann. — Deshalb ist mit der Zerlegung immer bei einem solchen Knotenpunkte zu beginnen, in welchem nur zwei Stangen zusammenstossen.

Aus den gefundenen Spannungen werden die Querschnitte der Stangen bestimmt. — Nimmt man z. B. an, dass die zulässige Inanspruchnahme bei Zug oder Druck etwa 7 kg per qmm beträgt, so ist die gefundene Spannung durch 7 zu dividieren. Man erhält dadurch die Grösse des Querschnittes ausgedrückt in qmm.

Wir wollen nun im folgenden eine Reihe von Beispielen betrachten und hieran die verschiedenen zur Lösung der Aufgabe dienenden Methoden erläutern.

1. Es seien  $AB$  und  $BC$  (Fig. 92) zwei in  $A$  und  $C$  durch Gelenke an einer vertikalen Wand befestigte Stangen. — Es sollen die Spannungen

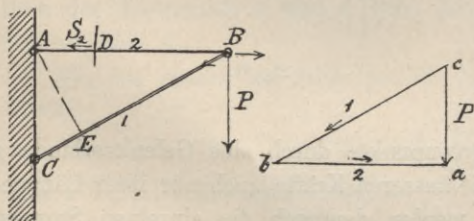


Fig. 92.

ermittelt werden, welche eine in  $B$  hängende Last  $P$  in den beiden Stangen verursacht.

Wir zerlegen nach 1, 2. die Kraft  $P$  in zwei nach den Richtungen der Stangen  $AB$  und  $BC$  wirkende Kräfte. Dieselben werden durch die zu  $AB$  und  $BC$  parallelen Strecken  $ab$  und  $bc$

dargestellt. — Die Richtungen ergeben sich, wenn man den Linienzug in dem Sinne der Pfeilspitzen, also von  $c$  über  $b$  nach  $a$  verfolgt. — Bringen wir diese Kräfte ihren Richtungen entsprechend in  $B$  an, so zeigt sich, dass in  $AB$  Zugspannung und in  $BC$  Druckspannung herrscht.

Anmerkung. Diejenigen Stangen eines Fachwerks, welche Druckspannung haben, pflegt man durch doppelte Linien zu bezeichnen.

### Berechnung der Spannungen.

Nehmen wir an, die Stange  $AB$  werde in  $D$  durchgeschnitten, so würde die Kraft  $P$  die Stangen  $BC$  und  $BD$  um das Gelenk  $C$  drehen. — Durch

eine in D angebrachte Kraft  $S_2$ , welche in der Richtung der Stange BD wirkt, kann das Gleichgewicht wiederhergestellt werden, wenn  $S_2$  gleiches Moment wie P in Bezug auf C, aber entgegengesetzten Drehungssinn hat.

— Folglich ist:

$$S_2 \cdot AC = P \cdot AB$$

$$S_2 = P \cdot \frac{AB}{AC}$$

$S_2$  ist nun offenbar der Spannung, welche P in AB verursacht, gleich.

Bezeichnen wir die Spannung in BC mit  $S_1$ , so findet man auf dieselbe Weise

$$S_1 = P \cdot \frac{AB}{AE}$$

wenn hierin AE der senkrechte Abstand des Punktes A von BC ist.

2. Fachwerk zum Tragen eines Schutzdaches. Der in Fig. 93

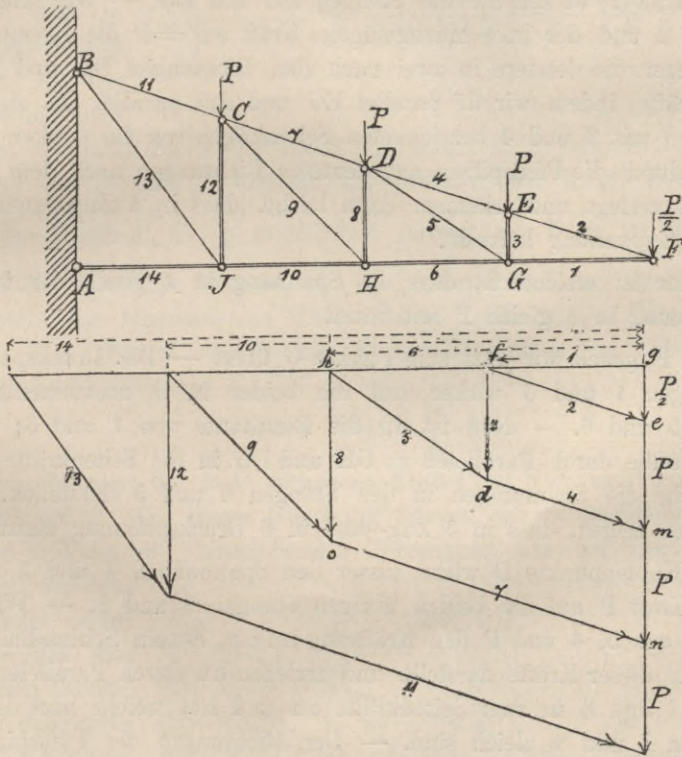


Fig. 93.

dargestellte Träger ist in den beiden Punkten A und B an einer vertikalen Wand befestigt. — Auf jedem der Knotenpunkte C, D, E ruht die Last P und in F die Last  $\frac{P}{2}$ . — Die Vertikalstangen CJ, DH, EG teilen AF in vier gleiche Teile.



Wir beginnen die Zerlegung der Kräfte beim Punkte F, in welchem nur 2 Stangen zusammentreffen. — Es sei demnach  $ge$  parallel und gleich  $\frac{P}{2}$ ; ziehen wir alsdann  $fg$  parallel  $FG$  und  $fe$  parallel  $EF$ , dann stellen  $fg$  und  $ef$  die Grössen der Seitenkräfte von  $\frac{P}{2}$  dar, welche auf die Stangen  $EF$  und  $FG$  wirken. — Die Richtungen dieser Kräfte sind durch Pfeilspitzen angedeutet; es zeigt sich daraus, dass in  $FG$  Druck- und in  $EF$  Zugspannung stattfindet.

(Die Stangen und deren zugehörige Spannungen, welche durch den Kräfteplan ermittelt werden, bezeichnen wir künftig, der Kürze wegen, mit gleichen Ziffern.)

Die Kraft 2, mit welcher  $EF$  gezogen wird und die in  $E$  angreifende äussere Kraft  $P$  wirken auf die Stangen  $DE$  und  $EG$ . — Wir bilden demnach aus 2 und der in  $e$  hinzugefügten Kraft  $em = P$  die Resultante  $fm$ , und zerlegen die letztere in zwei nach den Richtungen  $DE$  und  $EG$  wirkende Kräfte, indem wir  $df$  parallel  $EG$  und  $dm$  parallel  $DE$  ziehen. — Die beiden mit 3 und 4 bezeichneten Seitenkräfte von  $fm$  denken wir uns mit den durch die Pfeilspitzen angedeuteten Richtungen nach dem Angriffspunkte  $E$  verlegt und erkennen dann leicht, dass in 4 Zugspannung und in 3 Druckspannung herrscht.

Ferner ist ersichtlich, dass die Spannung in 4 gleich der in 2 und die Spannung in 3 gleich  $P$  sein muss.

Von  $E$  gehen wir jetzt zum Punkte  $G$  über. — Die Druckspannungen der Stangen 1 und 3 wirken auf die beiden in  $G$  zusammentreffenden Stangen 5 und 6. — Nun ist  $dg$  die Resultante von 1 und 3; wir zerlegen dieselbe durch Parallelen zu  $GH$  und  $DG$  in die Seitenkräfte  $gh$  und  $dh$ , welche die Spannungen in den Stangen 6 und 5 darstellen. — Die Pfeilspitzen zeigen, dass in 5 Zug- und in 6 Druckspannung stattfindet.

Im Knotenpunkte  $D$  wirkt ausser den Spannungen 4 und 5 noch die äussere Kraft  $P$  auf die beiden übrigen Stangen 7 und 8. — Wir bilden demnach aus 5, 4 und  $P$  den Kräftezug  $hdmn$ , dessen Schlusslinie  $hn$  die Resultante dieser Kräfte darstellt, und zerlegen  $hn$  durch Parallelen zu den Stangen 7 und 8 in zwei Seitenkräfte  $on$  und  $ho$ , welche nun den Spannungen in 7 und 8 gleich sind. — Den Richtungen der Pfeilspitzen entsprechend bedeutet 7 Zug- und 8 Druckspannung.

Die übrigen Spannungen bestimmt man auf dieselbe Weise. Zunächst sind am Punkte  $H$  die Spannungen von nur zwei Stangen unbekannt. Dieselben können aus den Spannungen der anderen in diesem Knotenpunkte zusammentreffenden Stangen bestimmt werden. — Alsdann folgt die Ermittlung der in  $C$  und zuletzt der in  $J$  zusammenstossenden Stangen.

**Berechnung der Spannungen. (Ritters Methode.)**

Durchschneiden wir eine der Stangen, z. B. 7, (Fig. 94), so wird der Trägerteil DFH mit dem abgetrennten Teil Dm der Stange 7 durch die in D, E und F angreifenden Kräfte um H gedreht.

Die Drehung würde in dem Sinne der bei H stehenden Pfeilspitze erfolgen, woraus wir ersehen, dass in CD Zugspannung herrscht. — Die Grösse dieser Spannung

ist bestimmt durch eine Kraft  $S_7$ , welche in m angreift, und in der Richtung von D nach C wirkend die Drehung der in D, E und F angreifenden Kräfte  $P, P, \frac{P}{2}$  aufzuheben vermag. — Dazu ist nach III, 5. erforderlich, dass das Moment von  $S_7$  in Bezug auf den Punkt H gleich der Summe der Momente der drei anderen Kräfte ist. — Bezeichnen wir deshalb den Abstand des Punktes H von CD mit a, so haben wir als Gleichgewichtsbedingung:

$$S_7 a = P \cdot GH + \frac{P}{2} \cdot FH.$$

(Das Moment der in D wirkenden Kraft P ist Null, weil ihre Richtung durch H geht.) Aus dieser Gleichung können wir  $S_7$  bestimmen. — Der Abstand a kann mit hinreichender Genauigkeit aus der Zeichnung entnommen werden; andernfalls wäre derselbe aus den gegebenen Dimensionen des Trägers durch Rechnung zu bestimmen.

Auf gleiche Weise können wir die Spannung der Stange 10 (Fig. 95)

bestimmen. — Durchschneiden wir die Stange und denken wir uns den

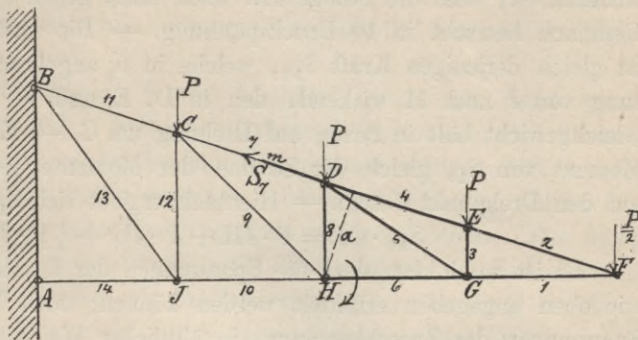


Fig. 94.

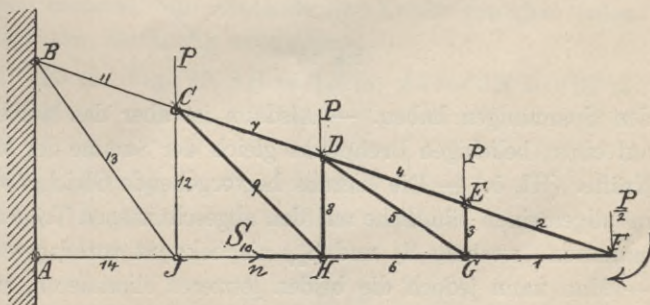


Fig. 95.



links liegenden Teil derselben, nämlich  $Jn$  beseitigt, so wird durch die Wirkung der in  $D$ ,  $E$  und  $F$  angreifenden äusseren Kräfte eine Drehung des Trägerteils  $CFHn$  um das Gelenk  $C$  vor sich gehen. — Diese Drehung würde in dem Sinne der bei  $F$  stehenden Pfeilspitze erfolgen, woraus ersichtlich ist, dass die Stange  $Hn$  nach links gegen  $Jn$  gedrückt wird. — Demnach herrscht in 10 Druckspannung. — Die Grösse dieser Spannung ist gleich derjenigen Kraft  $S_{10}$ , welche in  $n$  angebracht und in der Richtung von  $J$  nach  $H$  wirkend, den in  $D$ ,  $E$  und  $F$  angreifenden Kräften Gleichgewicht hält in Bezug auf Drehung um  $C$ . — Es muss demnach das Moment von  $S_{10}$  gleich der Summe der Momente jener Kräfte in Bezug auf den Drehpunkt  $C$  sein. — Hiernach ergibt sich  $S_{10}$  aus der Gleichung:

$$S_{10} \cdot CJ = P \cdot JH + P \cdot JG + \frac{1}{2} P \cdot JF.$$

Es ist wohl klar, dass die Spannungen der äusseren Stangen sämtlich wie oben angegeben ermittelt werden können; doch lassen sich auch die Spannungen der Zwischenstangen in ähnlicher Weise bestimmen.

Um z. B. die Spannung der Stange 9 zu finden, durchschneiden wir 9 und noch zwei andere Stangen (in unserem Beispiel 7 und 10) (Fig. 96), so dass der eine Teil des Trägers vollständig vom andern getrennt wird. —

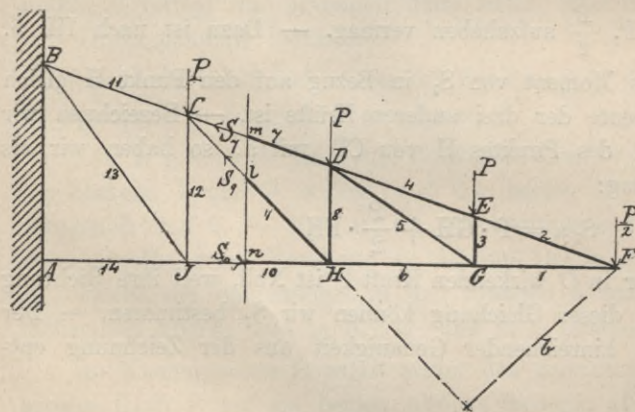


Fig. 96.

Das jetzt gestörte Gleichgewicht des abgeschnittenen Teiles kann man durch drei in den Stangenden  $m$ ,  $l$ ,  $n$  angreifende Kräfte  $S_7$ ,  $S_9$ ,  $S_{10}$  wiederherstellen, wenn die letzteren in den Richtungen der Stangen liegen und gleiche Grösse mit den in 7, 9, 10 herrschenden

Spannungen haben. — Alsdann ist aber das Moment von  $S_9$  in Bezug auf einen beliebigen Drehpunkt gleich der Summe der Momente der übrigen Kräfte. (III, 5.) — Die hieraus hervorgehende Gleichgewichtsbedingung wird im allgemeinen sämtliche auf den abgeschnittenen Trägerteil wirkende Kräfte enthalten, weshalb  $S_7$  und  $S_{10}$  als bekannt vorausgesetzt werden müssten. — Man kann jedoch die beiden letzteren eliminieren, wenn man den Drehpunkt nach dem Punkte verlegt, in welchem die ausser 9 noch mit durchgeschnittenen Stangen 7 und 10 oder deren Verlängerungen sich treffen. — In Bezug auf diesen Punkt verschwinden nämlich die Momente von  $S_7$  und

$S_{10}$  und wir erhalten, wenn wir den Abstand der Stangenrichtung 9 von F mit  $b$  bezeichnen:

$$S_9 b = P \cdot FH + P \cdot FG;$$

aus welcher Gleichung sich  $S_9$  ergibt.

Aus dem Sinn der Drehung, welche durch die in D und E wirkenden äusseren Kräfte verursacht wird, erkennen wir, dass die Stange 9 auf Zugspannung beansprucht wird.

Die Spannung der Stange 8 wird bestimmt, wenn wir durch einen Schnitt, welcher 6, 8 und 7 trifft, den Trägerteil rechts von dem übrigen Teil gänzlich abtrennen. — An den durchschnittenen Stangen bringen wir wieder drei, in den Richtungen derselben wirkende Kräfte an, welche das Gleichgewicht des abgeschnittenen Trägerteils wiederherstellen. Für diese und die in D, E und F wirkenden äusseren Kräfte bilden wir die Gleichung der statischen Momente, indem wir die letzteren auf den Punkt F beziehen, in welchem sich die gleichzeitig mit 8 durchschnittenen Stangen 6 und 7 oder deren Verlängerungen treffen. — Die Spannung  $S_8$  ergibt sich folglich aus der Gleichung:

$$S_8 \cdot FH = P \cdot FH + P \cdot FG.$$

Die vorstehende Entwicklung zeigt, dass bei einem einfachen Träger die Spannung einer beliebigen Stange stets direkt (d. h. ohne vorherige Ermittlung der Spannungen anderer Stangen) gefunden werden kann, wenn durch einen Schnitt, welcher diese Stange und höchstens noch zwei andere Stangen trifft, ein Trägerteil gänzlich von dem andern abgetrennt wird. — Den Schnittpunkt der beiden mit durchschnittenen Stangen (oder deren Verlängerungen) nimmt man als Drehpunkt und stellt in Bezug auf den letzteren die Gleichung der statischen Momente auf. — Diese wird als einzige Unbekannte die gesuchte Spannung enthalten.

Für den Anfänger ist es nützlich, die durch den Kräfteplan gefundenen Spannungen mit Hilfe der Ritterschen Methode nachzurechnen. — Es genügt hierbei, wie schon oben bemerkt, die Abstände der Kräfte von dem jedesmaligen Drehpunkte aus der Zeichnung abzumessen.

Zahlenbeispiel. Es sei Fig. 93  $AB = 1,6$  m,  $AJ = JH = HG = GF = 1$  m.  $P = 200$  kg.

Man findet:

$S_1 = 250$ kg (Druck)	$S_8 = 300$ kg (Druck)
$S_2 = 269$ „ (Zug)	$S_9 = 390$ „ (Zug)
$S_3 = 200$ „ (Druck)	$S_{10} = 750$ „ (Druck)
$S_4 = 269$ „ (Zug)	$S_{11} = 808$ „ (Zug)
$S_5 = 320$ „ (Zug)	$S_{12} = 400$ „ (Druck)
$S_6 = 500$ „ (Druck)	$S_{13} = 472$ „ (Zug)
$S_7 = 539$ „ (Zug)	$S_{14} = 1000$ „ (Druck).



3. Die Spannung in irgend einer Stange kann auch auf dem Wege der Konstruktion gefunden werden, ohne dass die Spannungen anderer Stangen vorher bestimmt werden müssen. — Soll z. B. die Spannung der

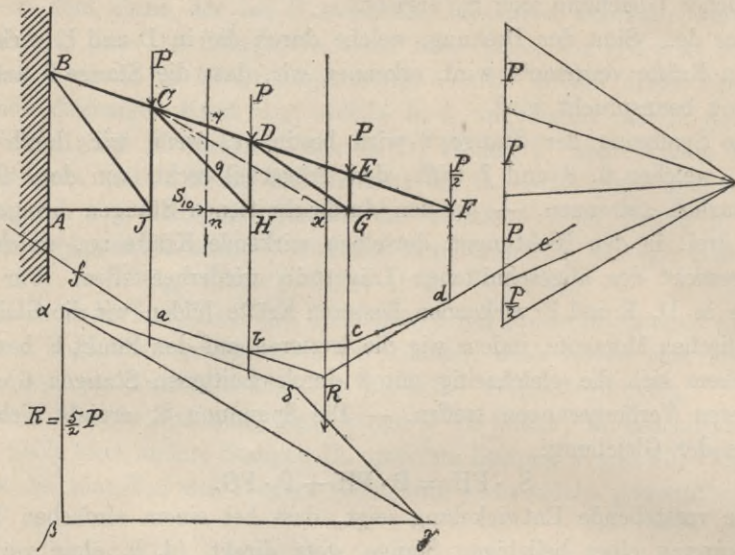


Fig. 97.

Stange 10 (Fig. 97) des vorhin behandelten Trägers direkt gefunden werden, so denken wir uns die Stange wieder durchgeschnitten. — Auf den um C jetzt drehbaren Trägerteil wirken in D, E und F die Kräfte P, P und  $\frac{P}{2}$ ,

deren Resultante  $R = \frac{5}{2}P$  mit Hilfe des Seilpolygons fabcde auf bekannte Weise sich ergibt. — Die Wirkung von R in Bezug auf Drehung um C können wir aber durch eine andere in der Geraden Fn liegende Kraft  $S_{10}$  aufheben, welche alsdann die Grösse der in 10 herrschenden Druckspannung darstellt. — Diese Kraft wird gefunden, wenn man R in zwei Seitenkräfte zerlegt, von welchen die eine in Fn liegt, während die Richtungslinie der anderen die Gerade ist, welche C mit dem Schnittpunkt x von R und Fn verbindet. (III, 3.)

Konstruktion. Wir machen  $\alpha\beta$  gleich und parallel R ( $= \frac{5}{2}P$ ); ziehen  $\alpha\gamma$  parallel Cx und  $\beta\gamma$  parallel zu Fn, dann stellt  $\beta\gamma$  die Grösse der Druckspannung  $S_{10}$  dar.

Man kann auch die Spannungen mehrerer Stangen gleichzeitig finden. Trennen wir durch einen Schnitt, welcher z. B. 7, 9 und 10 trifft, den rechts liegenden Trägerteil vollständig von dem Teil links, so müssen die

drei an 7, 9 und 10 anzubringenden Kräfte  $S_7, S_9, S_{10}$ , welche das gestörte Gleichgewicht wiederherstellen, mit der vorhin gefundenen Resultante  $R$  im Gleichgewicht sein. — Wir können deshalb  $R$  in drei nach den Richtungen der durchschnittenen Stangen wirkende Kräfte zerlegen, wodurch wir die Grössen von  $S_7, S_9$  und  $S_{10}$  erhalten. — Diese Zerlegung ergibt sich aus I, 5. — Hiernach geht die Resultante der Seitenkräfte 7 und 9 durch  $C$  und  $x$ , und die Konstruktion ist die folgende: Wir machen  $\alpha\beta$  gleich und parallel  $R$  und ziehen  $\alpha\gamma$  parallel zu  $Cx$  und  $\beta\gamma$  parallel zu 10;  $\alpha\gamma$  wird nochmals in zwei Kräfte nach den Richtungen der Stangen 7 und 9 zerlegt. — Wir ziehen demnach  $\alpha\delta$  parallel zu 7 und  $\delta\gamma$  parallel zu 9, dann sind  $\alpha\delta, \delta\gamma$  und  $\beta\gamma$  den Spannungen in 7, 9, bezw. 10 gleich.

4. **Freiträger.** (Fig. 98.) Die äusseren Stangen von  $A$  bis  $G$  seien parallel mit den unteren von  $B$  bis  $H$ . — Die einzelnen Felder des Trägers seien sämtlich gleichschenkelige Dreiecke, bis auf das an der vertikalen Wand  $MN$  befindliche Feld  $ABC$ , welches ein rechtwinkliges Dreieck ist.

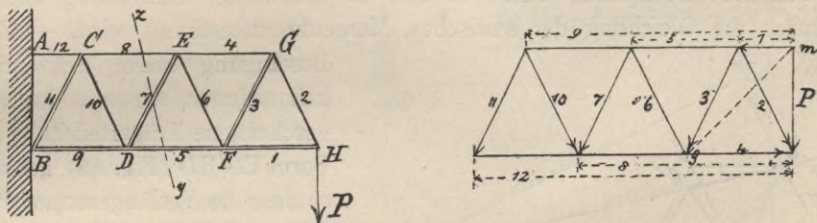


Fig. 98.

Im Endpunkte  $H$  hängt die Last  $P$ . — Die Ermittlung der Spannungen ist sehr einfach. — Wir zerlegen zuerst  $P$  nach den Richtungen der Stangen  $FH$  und  $HG$ , wodurch wir die in dem Kräfteplan mit 1 und 2 bezeichneten Spannungen erhalten. — Aus den durch die Pfeilspitzen angedeuteten Richtungen erkennen wir, dass in  $GH$  Zug- und in  $FH$  Druckspannung herrscht. — Vom Punkte  $H$  gehen wir über zu  $G$  und zerlegen demnach die in  $G$  angreifende Kraft 2 nach den Richtungen der Stangen  $GE$  und  $GF$ . — Hierdurch erhalten wir für  $GF$  die Druckspannung 3 und für  $GE$  die Zugspannung 4. — Aus 1 und 3 bilden wir die Resultante  $mg$  und zerlegen dieselbe in die Seitenkräfte 5 und 6, welche die Spannungen in den Stangen  $DF$  und  $EF$  darstellen (5 ist Druck- und 6 Zugspannung). Von  $F$  gehen wir zu  $E$ , dann zu  $D$  und schliesslich zu  $C$  über; in jedem dieser Punkte vereinigen wir die bereits bekannten Spannungen zu einer Resultante und zerlegen die letztere nach den Richtungen der beiden Stangen, deren Spannungen noch unbekannt sind. Diese Andeutungen genügen, weil die Konstruktion genau in der oben angegebenen Weise fortzusetzen ist; wir wollen im folgenden nur noch die Berechnung der Spannungen erläutern.



Um nach Ritter's Methode die Spannung in einer der äusseren Stangen, z. B. CE, zu ermitteln, zerlegen wir den Träger durch einen Schnitt zy, welcher höchstens drei Stangen trifft, in zwei voneinander getrennte Teile. — Das Gleichgewicht des Trägerteils rechts, an welchem die Last P wirkt, kann durch drei an den durchschnittenen Stangen wirkende Kräfte, welche den Spannungen gleich sind, wiederhergestellt werden. — Nehmen wir also den Punkt D, in welchem die ausser 8 noch mit durchschnittenen Stangen sich treffen, als Drehpunkt an, so heisst die Gleichung der statischen Momente (wenn h der Abstand des Punktes D von CE ist, ferner  $DF = FH = a$  und die Spannung in 8 mit  $S_8$  bezeichnet wird):

$$S_8 \cdot h = 2 a \cdot P, \text{ woraus folgt: } S_8 = \frac{2 a P}{h}.$$

Bei der Berechnung der Spannung in der mittleren Stange DE zeigt sich eine kleine Schwierigkeit. — Die beiden durch den Schnitt zy mit getroffenen Stangen 5 und 8 sind nämlich parallel und der nach dem früheren zu wählende Drehpunkt würde deshalb in unendlicher Entfernung liegen, wodurch die Gleichung der statischen Momente unbestimmt wird. — Zur

Beseitigung dieser Schwierigkeit nehmen wir an, der abgeschnittene Trägerteil habe die Form EG'HD (Fig. 99) gehabt, so dass die Verlängerungen von EG' und DH in einem Punkte O zusammentreffen, dessen Abstand von H gleich x sei. — Nehmen wir nun O als Drehpunkt und bezeichnen den Winkel

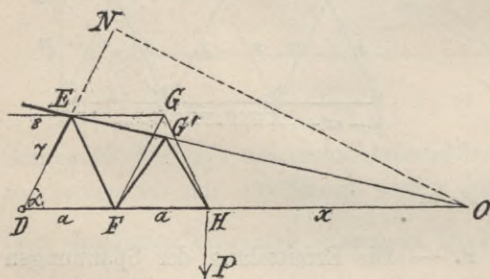


Fig. 99.

EDF mit  $\alpha$ , setzen wie vorhin  $DF = HF = a$ , die gesuchte Spannung  $= S_7$ , so heisst für diesen Fall die Gleichung der statischen Momente:

$$S_7 (2a + x) \sin \alpha = Px,$$

oder wenn man auf beiden Seiten durch x dividiert:

$$S_7 \left( \frac{2a}{x} + 1 \right) \sin \alpha = P.$$

Lassen wir nun die angenommene Form des abgeschnittenen Trägerteils in die frühere übergehen (welche in Fig. 99 ebenfalls angedeutet ist), so wird x unendlich und  $\frac{2a}{x}$  wird demnach zu Null. — Die oben gefundene Gleichung heisst für diesen Fall:

$$S_7 \cdot \sin \alpha = P,$$

woraus folgt:

$$S_7 = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

## 5. Dachstuhl nach Polonceau. (Fig. 100.)

Der Träger ist an beiden Endpunkten A und B unterstützt. — In jedem der Knotenpunkte CD und E wirkt eine Last P, in A und B dagegen je  $\frac{P}{2}$  abwärts. — Ausser diesen Lasten wirken in A und B noch die Auflagerreaktionen jede gleich  $2P$  aufwärts, als äussere Kräfte auf den Träger.

Die Zerlegung der äusseren Kräfte beginnen wir bei einem der Auflager, z. B. A.

Zur Konstruktion des Kräfteplanes stellen wir demnach die in A wirkende Auflagerreaktion  $2P$  durch die Gerade ab dar und tragen vom Endpunkte b aus die Grösse der gleichfalls in A wirkenden äusseren Last  $\frac{P}{2}$  nach bc ab;

ac ist dann die Resultante

der in A angreifenden Kräfte, und wir zerlegen dieselbe durch die beiden Geraden af ( $\parallel AF$ ) und cf ( $\parallel AC$ ) in zwei, in den Richtungen der Stangen 1 und 2 liegende Seitenkräfte. — Denkt man sich die letzteren nach dem Angriffspunkte A verlegt, so ergibt sich mit Berücksichtigung ihrer Richtungen für die Stange 1 Zug- und für 2 Druckspannung. —

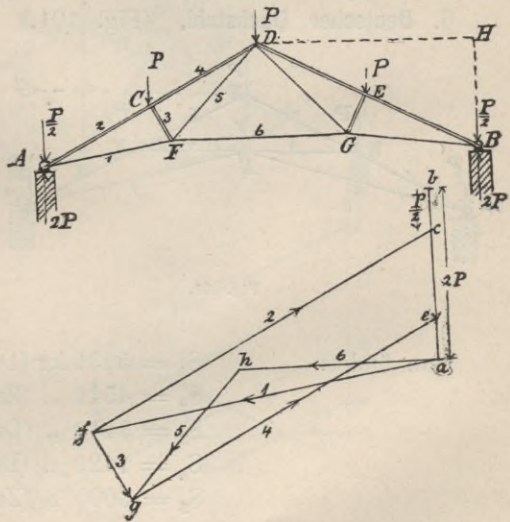


Fig. 100.

Im Knotenpunkte C wirken nun die Druckspannung 2 und die äussere Kraft P, welche im Kräfteplan den Linienzug fce bilden. — Die Resultante dieser beiden Kräfte würde fe sein. Zerlegen wir die letztere in zwei nach den Richtungen der Stangen CD und CF wirkende Seitenkräfte 3 und 4, welche im Kräfteplan durch die beiden Geraden fg ( $\parallel CF$ ) und ge ( $\parallel CD$ ) dargestellt werden, so folgt aus den durch die Pfeilspitzen angegebenen Richtungen, dass sowohl in 3 als auch in 4 Druckspannung herrscht. — Vom Knotenpunkte C gehen wir schliesslich zum Punkte F über. Die beiden in F angreifenden, schon bekannten Kräfte 1 und 3 sind im Kräfteplan durch den Linienzug afg bereits aneinander gefügt; ihre Resultante ag kann deshalb nach den Richtungen der beiden noch übrigen Stangen 5 und 6 zerlegt werden. — Für beide Stangen finden wir Zugspannung.



Da der Träger in Bezug auf eine Vertikale durch den Scheitel D symmetrisch vorausgesetzt wird, und die Lasten auf symmetrisch liegenden Knotenpunkten gleich sind, so ist einleuchtend, dass auch die Spannungen in je zwei symmetrisch liegenden Stangen gleiche Grösse haben müssen. — Durch die oben angegebene Konstruktion sind demnach sämtliche Spannungen gefunden.

Beispiel. Die Spannweite  $AB = 10$  m, Höhe  $BH = 3$  m,  $AC = CD = DE = BE$ ;  $CF \perp AD$ ; ferner sei  $CF = 1$  m.  $P = 1000$  kg.

Man findet die Spannungen:

$$S_1 = 3964 \text{ kg (Zug)} \quad S_4 = 4007 \text{ kg (Druck)}$$

$$S_2 = 4522 \text{ ,, (Druck)} \quad S_5 = 2042 \text{ ,, (Zug)}$$

$$S_3 = 857 \text{ ,, (Druck)} \quad S_6 = 2121 \text{ ,, (Zug)}$$

6. Deutscher Dachstuhl. (Fig. 101.) Die Zerlegung ist in gleicher

Weise, wie im vorigen Beispiel auszuführen. — Wir überlassen daher die Konstruktion und Berechnung dem Anfänger, und geben folgendes Zahlenbeispiel zur Übung.

Spannweite  $AC = 10$  m, Höhe  $CG = 3,5$  m,  $AD = BD = BF = CF$ .  $P = 1000$  kg.

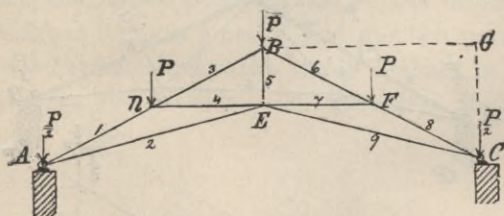


Fig. 101.

Man findet:

$$S_1 = 5231 \text{ kg (Druck)}$$

$$S_2 = 4541 \text{ ,, (Zug)}$$

$$S_3 = 3488 \text{ ,, (Druck)}$$

$$S_4 = 1429 \text{ ,, (Druck)}$$

$$S_5 = 3000 \text{ ,, (Zug)}$$

7. Perrondach. Der in Fig.

102 dargestellte Träger ist in den Punkten A und C unterstützt. — Die Auflagerreaktionen in diesen Punkten bilden mit den in den Knotenpunkten B, H, G, E, D wirkenden Belastungen das System der äusseren Kräfte, deren Wirkung auf die einzelnen Stangen des Trägers zu ermitteln ist. — Die Bestimmung der Auflagerreaktionen geschieht mit Hilfe des Seilpolygons und die Zerlegung der Kräfte beginnt man beim Punkte A oder bei D.

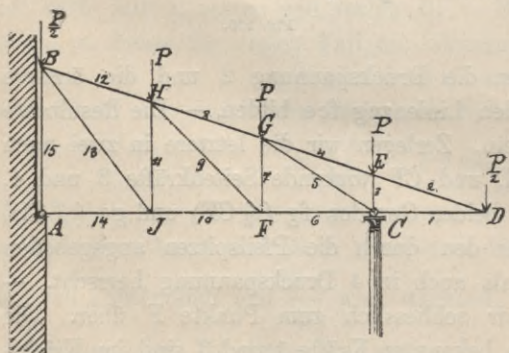


Fig. 102.

Die Bestimmung der Auflagerreaktionen geschieht mit Hilfe des Seilpolygons und die Zerlegung der Kräfte beginnt man beim Punkte A oder bei D.

Beispiel.  $AJ = JF = FC = CD = 1,5$  m;  $AB = 1,5$  m.  $P = 300$  kg.

Es ergeben sich folgende Spannungen:

$S_1 = 600$ kg (Druck)	$S_6 = 400$ kg (Zug)	$S_{11} = 333$ kg (Druck)
$S_2 = 618$ „ (Zug)	$S_7 = 50$ „ (Druck)	$S_{12} = 344$ „ (Druck)
$S_3 = 300$ „ (Druck)	$S_8 = 412$ „ (Druck)	$S_{13} = 471$ „ (Zug)
$S_4 = 618$ „ (Zug)	$S_9 = 83$ „ (Zug)	$S_{14} = 0$ „
$S_5 = 1118$ „ (Druck)	$S_{10} = 333$ „ (Zug)	$S_{15} = 400$ „ (Druck).

8. **Englischer und belgischer Dachstuhl.** Der erstere ist in Fig. 103, der zweite in Fig. 104 (s. S. 88) dargestellt. — Da die Kräftepläne für beide auf ganz gleiche Weise gefunden werden, so stellen wir dieselben untereinander. — Der Text bezieht sich dann gleichzeitig auf beide Figuren.

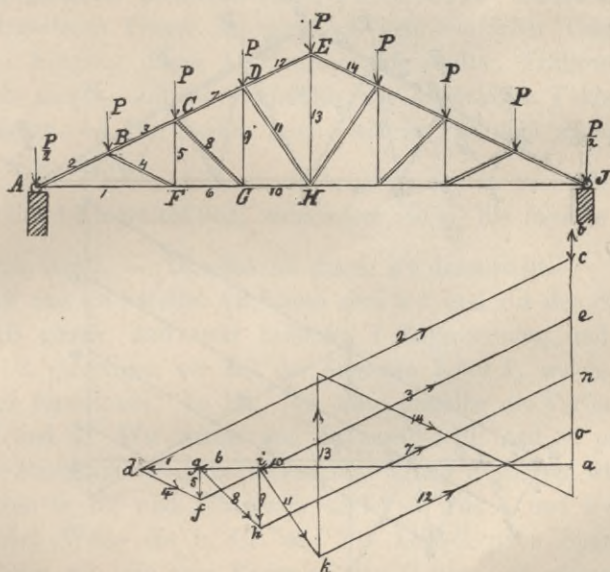


Fig. 103.

Auf jeden Knotenpunkt wirke die Last  $P$ , in den beiden Stützpunkten jedoch  $\frac{P}{2}$ . — Wegen der gleichen Lastverteilung beträgt die Auflagerreaktion in A sowohl als in J die Hälfte der gesamten Belastung, nämlich  $4P$ .

Die Konstruktion des Kräfteplanes beginnen wir mit der Auflagerreaktion, welche durch  $ab$  dargestellt wird. — Von  $b$  aus tragen wir alsdann die Strecke  $bc = \frac{P}{2}$  auf  $ab$  ab, dann stellt  $ac$  die aufwärts gerichtete Resultante der äusseren auf A wirkenden Kräfte dar. — Diese Resultante zerlegen wir durch die beiden Geraden  $ad$  ( $\parallel AF$ ) und  $cd$  ( $\parallel AB$ ) in zwei Seitenkräfte, welche die Spannungen in den Stangen 1 und 2 darstellen. —



Für 1 erhalten wir Zug- und für 2 Druckspannung. — Alsdann gehen wir zum Knotenpunkte B über, für welchen die in 2 herrschende Spannung und die äussere Kraft P bereits bekannt sind. — Die Resultante dieser beiden Kräfte, welche durch eine Gerade von d nach e der Grösse und Richtung nach dargestellt wird, zerlegen wir durch die Geraden df ( $\parallel$  BF) und ef ( $\parallel$  BC) in zwei Seitenkräfte; hierdurch sind nun auch die Spannungen der beiden Stangen BF und BC bestimmt. — Von B gehen wir zu F, dann zu C, D und G über. — Da diese weitere Ermittlung der Spannungen stets in der bereits bekannten Weise vor sich geht, so überlassen wir dieselbe und die Berechnung der Spannungen nach der Ritter'schen Methode der eigenen Übung.

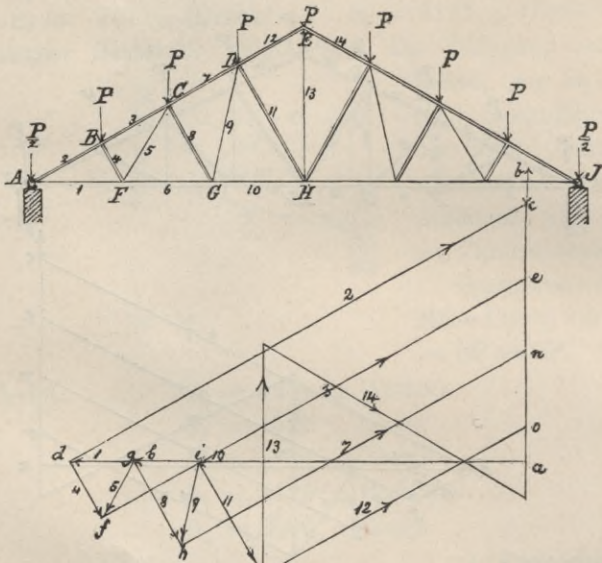


Fig. 104.

Beispiele.

Für Fig. 103.

$AJ = 30$  m,  $HE = 6$  m.  $AB = BC = CD = DE$ .  $P = 4000$  kg.

Man findet:

$S_1 = 35000$ kg (Zug)	$S_8 = 6403$ kg (Druck)
$S_2 = 37691$ „ (Druck)	$S_9 = 4000$ „ (Zug)
$S_3 = 32309$ „ (Druck)	$S_{10} = 25000$ „ (Zug)
$S_4 = 5385$ „ (Druck)	$S_{11} = 7810$ „ (Druck)
$S_5 = 2000$ „ (Zug)	$S_{12} = 21539$ „ (Druck)
$S_6 = 30000$ „ (Zug)	$S_{13} = 11832$ „ (Zug)
$S_7 = 26924$ „ (Druck)	

Für Fig. 104.

$AJ = 30 \text{ m}$ ;  $AB = BC = CD = DE$ ;  $DH \perp AE$ ;  $DH \parallel CG \parallel BF$ ;  $P = 4000 \text{ kg}$ .

$S_1 = 24249 \text{ kg}$ (Zug)	$S_8 = 5196 \text{ kg}$ (Druck)
$S_2 = 28000 \text{ ,,}$ (Druck)	$S_9 = 4582 \text{ ,,}$ (Zug)
$S_3 = 26000 \text{ ,,}$ (Druck)	$S_{10} = 17321 \text{ ,,}$ (Zug)
$S_4 = 3464 \text{ ,,}$ (Druck)	$S_{11} = 6928 \text{ ,,}$ (Druck)
$S_5 = 3464 \text{ ,,}$ (Zug)	$S_{12} = 16000 \text{ ,,}$ (Druck)
$S_6 = 20786 \text{ ,,}$ (Zug)	$S_{13} = 12000 \text{ ,,}$ (Zug)
$S_7 = 21000 \text{ ,,}$ (Druck)	

**9. Träger grösserer Dimension** (nach Polonceau). Dieser in Fig. 105 (s. S. 90) dargestellte Träger ist eigentlich kein einfacher Träger in dem Sinne der am Eingang dieses Abschnittes aufgestellten Erklärung. — Es liegen nämlich nicht sämtliche Eckpunkte der dreieckigen Felder auf dem äusseren Umfange. — Die Lasten seien, wie in Fig. 105 angegeben, auf die Knotenpunkte verteilt.

In A ist die Auflagerreaktion, vermindert um  $\frac{P}{2}$  die äussere in diesem Punkte wirkende Kraft. — Dieselbe ist durch a c dargestellt. — Wir ziehen a d parallel AF und c d parallel AB, dann sind a d und c d den Spannungen in AF und AB gleich, und zwar bedeutet 1 Zugspannung und 2 Druckspannung. — 2 vereinigen wir mit der äusseren Kraft P, welche in B angreift, zu einer Resultante. In Fig. 105 wäre dieselbe die Verbindungslinie der Punkte d und e. Wir ziehen nun d f parallel BF und e f parallel BC, wodurch diese Resultante in zwei Seitenkräfte 3 und 4 zerlegt wird, welche den Spannungen in BF und BC gleich sind. — Aus 1 und 3 finden wir dann in gleicher Weise die in CF und FG herrschenden Spannungen 5 und 6. — Gehen wir nun zum Knotenpunkte C über, so stossen wir auf Schwierigkeiten. — Es sind allerdings die Spannungen in den Stangen BC und CF und die äussere Kraft P, welche auf C wirken, bekannt; es ist jedoch die Resultante dieser Kräfte in diesem Falle in drei Seitenkräfte, welche nach den Richtungen der drei Stangen 7, 8 und 9 wirken, zu zerlegen. — Nach (I, 5) sind aber die drei Seitenkräfte, (weil ihre Richtungslinien sich auf der Resultante schneiden) unbestimmt; wir können deshalb die Zerlegung erst dann weiter fortsetzen, wenn es gelingt, die Spannung einer der Stangen 7, 8 oder 9 anderweitig zu ermitteln.

In dem vorliegenden Falle führt folgender Weg zum Ziele. — Wir zerlegen die in dem Punkte D angreifende äussere Kraft P in zwei nach den Richtungen der Stangen CD, DE und DH wirkende Kräfte. Fig. 105 ( $\gamma$ ). — Da CD und DE einerlei Richtung haben, so werden die Parallelen zu



denselben in ( $\gamma$ ) eine einzige Gerade  $uz$  bilden, welche die Differenz der in  $CD$  und  $DE$  herrschenden Spannungen darstellt. — Die zu  $DH$  parallele Gerade  $xz$  stellt dagegen die Spannung in 11 wirklich dar, welche, wie aus der Richtung derselben ersichtlich, Druckspannung ist. — Nun treffen im Knotenpunkte  $H$  wieder 4 Stangen zusammen, von denen  $GH$  und  $EH$  in einer Geraden liegen. — Wir zerlegen deshalb in Fig. 105 ( $\gamma$ ) die Kraft 11, indem wir  $xy$  parallel  $CH$  und  $yz$  parallel  $GH$  und  $EH$  ziehen, und erhalten wie oben in

$yz$  die Differenz der Spannungen in  $GH$  und  $HE$ , während diese Spannungen einzeln noch unbestimmt bleiben. — Dagegen stellt die Gerade  $xy$  die in  $CH$  herrschende Zugspannung 8 dar.

Jetzt sind von den Spannungen der in  $C$  zusammentreffenden Stangen nur noch zwei, nämlich 7 und 9 unbekannt. — Die schon oben bestimmten Kräfte 5 und 4 und die äussere Kraft  $P$ , welche in  $C$  angreift, bilden den Linienzug  $g f e h$ . — Die Resultante dieser drei Kräfte, welche wir in Fig. 105 ( $\alpha$ ) der

Deutlichkeit wegen

allein dargestellt haben, würde  $gh$  sein. — Zwischen  $g$  und  $h$  ist jetzt ein Linienzug herzustellen, dessen einzelne Seiten den Stangen 7, 8 und 9 parallel sind, und von denen die Parallele zu 8 die Länge der Strecke  $xy$  in Fig. 105 ( $\gamma$ ) hat. — Dieser Linienzug kann aber sowohl die in Fig. 105 ( $\alpha$ ) als auch die in Fig. 105 ( $\beta$ ) dargestellte Form annehmen (wenn die mit den Ziffern 7, 8 und 9 bezeichneten, etwas stärker angedeuteten Linien jene Parallelen sind). — Nach ( $\alpha$ ) würde alsdann 8 Druck-, nach ( $\beta$ ) jedoch Zugspannung bedeuten, und da wir schon oben gefunden haben, dass in 8 Zugspannung herrscht, so ist die Zerlegung in Fig. 104 ( $\beta$ ) die richtige. —

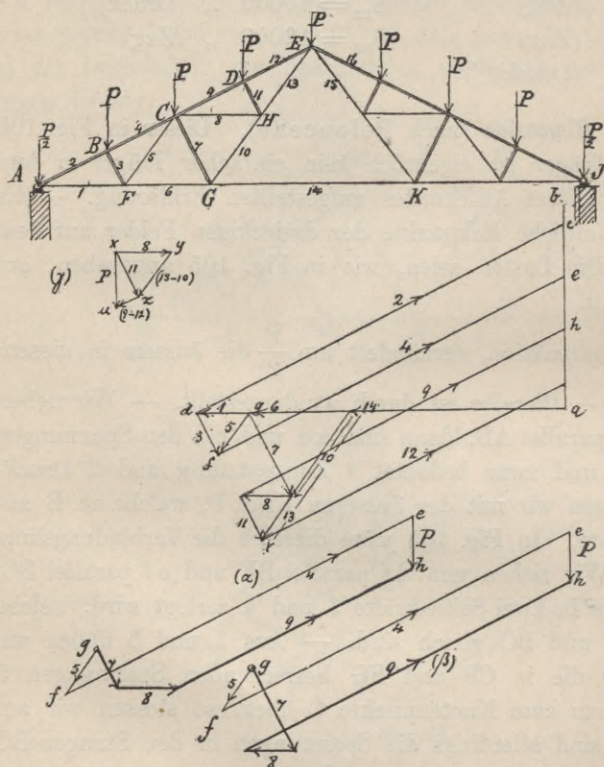


Fig. 105.

In dieser Gestalt ist der Linienzug 7, 8, 9 nun auch in den allgemeinen Kräfteplan eingetragen.

Die Ermittlung der Spannungen der noch übrigen Stangen bietet keine weiteren Schwierigkeiten. — Dieselben sind sämtlich in Fig. 105 dargestellt.

### Berechnung der Spannungen.

Um die Spannung in der Stange 6 zu ermitteln, legen wir durch diese und die beiden Stangen 4 und 5 einen Schnitt, wodurch der ganze Träger in zwei vollständig getrennte Teile zerfällt.

— Die Gleichung zwischen den statischen Momenten der auf den links liegenden Trägerteil (Fig. 106) wirkenden Kräfte beziehen wir auf den Punkt C (in welchem 4 und 5 zusammentreffen) als Drehungspunkt.

— Die Gleichung enthält dann ausser den bekannten Kräften  $D_1$ ,  $\frac{P}{2}$  und  $P$  nur noch

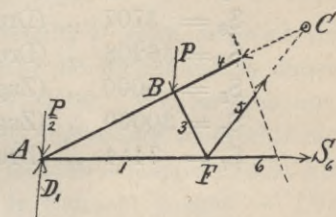


Fig. 106.

die gesuchte Kraft  $S_6$  als Unbekannte, welche demnach hieraus bestimmt werden kann.

Auf dieselbe Weise ergeben sich die Spannungen der Stangen 1, 2, 3, 4 und 5. — Ebenso lassen sich die in 12, 13 und 14 herrschenden Spannungen bestimmen, weil der Träger durch einen Schnitt, welcher diese drei Stangen trifft, in zwei vollständig getrennte Teile zerfällt.

Führen wir durch eine der noch übrigen Stangen 7, 8, 9, 10 oder 11 einen Schnitt, so muss derselbe im Ganzen mindestens vier Stangen treffen, wenn der Träger in zwei gänzlich getrennte Teile zerfallen soll. — Dies ist z. B. der Fall, wenn der Schnitt durch die Stangen 8, 9, 10 und 14 geführt wird. (Fig. 105.) — Da aber die Spannung der Stange 14 nach dem vorigen bestimmt werden kann, so dürfen wir dieselbe als eine bekannte Kraft zu Hilfe nehmen.

Die Gleichung der statischen Momente beziehen wir jetzt auf den Punkt H, in welchem 8 und 10 zusammentreffen, als Drehpunkt. — Hierdurch werden die in diesen Stangen wirkenden, aber noch unbekanntes Spannungen eliminiert. — Die aufzustellende Gleichung enthält also nur noch die in 9 stattfindende Spannung  $S_9$  als einzige Unbekannte.

Nachdem  $S_9$  gefunden ist, verlegen wir den Drehpunkt nach G, und erhalten durch die Gleichung der statischen Momente die Spannung in der Stange 8. — Nehmen wir endlich C als Drehpunkt, so ergibt sich auch noch die Spannung in 10. — In ähnlicher Weise bestimmt man die Spannung der Stange 7.

Durch die Stangen 9, 11, 13, 15, 16 lässt sich ein Schnitt legen, welcher einen Trägerteil völlig vom andern abtrennt. Diese Stangen treffen



aber sämtlich bis auf 11 in E zusammen. Wir finden demnach die Spannung in 11 mit Hilfe der Gleichung der statischen Momente leicht, wenn wir für diesen Fall E als Drehpunkt annehmen (s. Ritters Technische Mechanik).

Beispiel. Es sei  $AJ = 30$  m. Die Höhe des Trägers in der Mitte = 6 m.  $AB = BC = CD = DE$ ;  $BF \parallel CG \parallel DH \perp AE$ ;  $P = 4000$  kg.

Es ergeben sich folgende Spannungen:

$S_1 = 35000$ kg (Zug)	$S_8 = 5000$ kg (Zug)
$S_2 = 37691$ „ (Druck)	$S_9 = 34725$ „ (Druck)
$S_3 = 3707$ „ (Druck)	$S_{10} = 10000$ „ (Zug)
$S_4 = 36208$ „ (Druck)	$S_{11} = 3707$ „ (Druck)
$S_5 = 5000$ „ (Zug)	$S_{12} = 33242$ „ (Druck)
$S_6 = 30000$ „ (Zug)	$S_{13} = 15000$ „ (Zug)
$S_7 = 7414$ „ (Druck)	$S_{14} = 20000$ „ (Zug)

### Winddruck.

Durch Versuche ist ermittelt worden, dass der Druck, welchen eine in Bewegung begriffene Luftsäule auf eine senkrecht zur Richtung dieser Be-

wegung stehende ebene Fläche ausübt, dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. — Annähernd kann man den Druck  $d = 0,1354 v^2$  kg für jedes  $\square$  m der gedrückten Fläche setzen, wenn  $v$  die Geschwindigkeit des Windes in Metern bedeutet. —

Aus folgender Tabelle er-

giebt sich für verschiedene Werte von  $v$  der Winddruck pr.  $\square$  m in abgerundeten Zahlen:

$$v = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 \text{ m}$$

$$d = 3, 14, 30, 54, 85, 122, 166, 217, 274 \text{ kg.}$$

In unseren Gegenden pflegt man 120 kg pr.  $\square$  m als erfahrungsgemäss grössten Winddruck zu berücksichtigen. — Es entspricht derselbe einer Windgeschwindigkeit von nahezu 30 m.

Um nun die Grösse des auf eine gegebene Ebene AB (Fig. 107) wirkenden Winddruckes zu bestimmen, denken wir uns die Luftsäule BZYA, von welcher AB getroffen wird, durch die Ebene AC normal durchschnitten. —

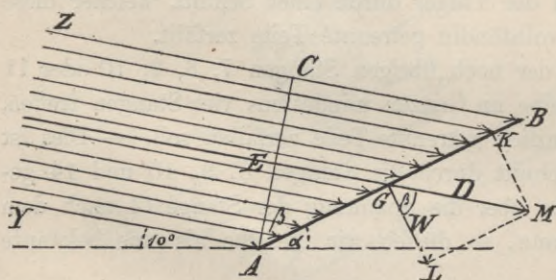


Fig. 107.

Die Windrichtung YA bildet durchschnittlich einen Winkel von  $10^0$  gegen die Horizontale. — Ist nun  $\alpha$  der Neigungswinkel der Ebene AB gegen die Horizontale, und bezeichnen F und f die Inhalte der Ebenen AB und AC, so ist  $\angle CAB = \beta = 90 - (\alpha + 10^0)$ ; ferner

$$f = F \cos \beta = F \sin (\alpha + 10^0).$$

Der Winddruck D gegen die Ebene AC ist nun:

$$D = fd \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{oder auch } D = d \cdot F \sin (\alpha + 10^0) \dots (2).$$

Der Winddruck ist auf AC gleichförmig verteilt, D greift demnach im Schwerpunkte E der Fläche AC an; ebenso geht die Richtungslinie dieser Kraft durch den Schwerpunkt G von AB (s. IV, 4, e). Wir zerlegen nun D in zwei Seitenkräfte GL und GK, von welchen die erstere senkrecht, die letztere parallel zu AB ist. —  $GL = W$  stellt alsdann den senkrecht zu AB gerichteten Winddruck dar, während GK nicht in Betracht kommt. — Der Winkel LGM ist offenbar  $= \beta = 90 - (\alpha + 10^0)$ ; es ist demnach:

$$W = D \sin (\alpha + 10^0)$$

$$\text{oder } W = d \cdot F \sin^2 (\alpha + 10^0) \dots (3).$$

Die Ermittlung derjenigen Spannungen, welche vom Winddruck allein in den einzelnen Stangen eines Fachwerkträgers erzeugt werden, wollen wir an dem folgenden Beispiel erläutern.

10. Es sei  $(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$  (Fig. 108 s. S. 94) ein durch Grundriss und Aufriss dargestellter Dachbinder. — Im Grundriss sind noch zwei benachbarte Binder EF und HJ angegeben, welche in gleichen Abständen von  $A_1C_1$  liegen. — Der auf  $(A_1B_1, A_2B_2)$  lastende Winddruck wird durch denjenigen Teil der Dachfläche übertragen, welcher von der Mitte des Feldes  $A_1B_1OH$  bis zur Mitte des Feldes  $A_1ENB_1$  sich erstreckt. — Diese Fläche ist im Grundriss durch das schraffierte Rechteck  $abce$  dargestellt; sie ist an Flächeninhalt einem zwischen zwei Bindern liegenden Felde, z. B.  $A_1ENB_1$ , gleich.

In Formel (3) ist nun F gleich  $A_2B_2 \cdot ae$  zu setzen; bezeichnen wir die halbe Spannweite  $A_2M$  mit l, die Höhe  $B_2M$  mit h, so ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}.$$

Wird  $\alpha$  aus dieser Gleichung berechnet, so giebt die Formel (3) unmittelbar die Grösse des normal zu  $A_2B_2$  gerichteten Winddruckes.

Einfacher und hinreichend genau erhält man W auf folgende Weise. — Es seien die Geraden  $B_2Z$  und  $A_2Y$  unter einem Winkel von  $10^0$  (welcher leicht zu konstruieren ist) gegen die Horizontale gezogen;  $A_2U$  stehe senkrecht zu  $B_2Z$ , dann hat man für den normalen Querschnitt f der Luftsäule, welche den Druck auf  $A_2B_2$  ausübt:

$$f = ae \cdot A_2U.$$

$$\text{Nach (1) ist nun: } D = f \cdot d.$$



Die Strecken  $A_2U$  und  $ae$  bestimmt man durch Abmessen aus der Zeichnung. — Ist  $D$  hiernach gefunden, so können wir diese Kraft nach

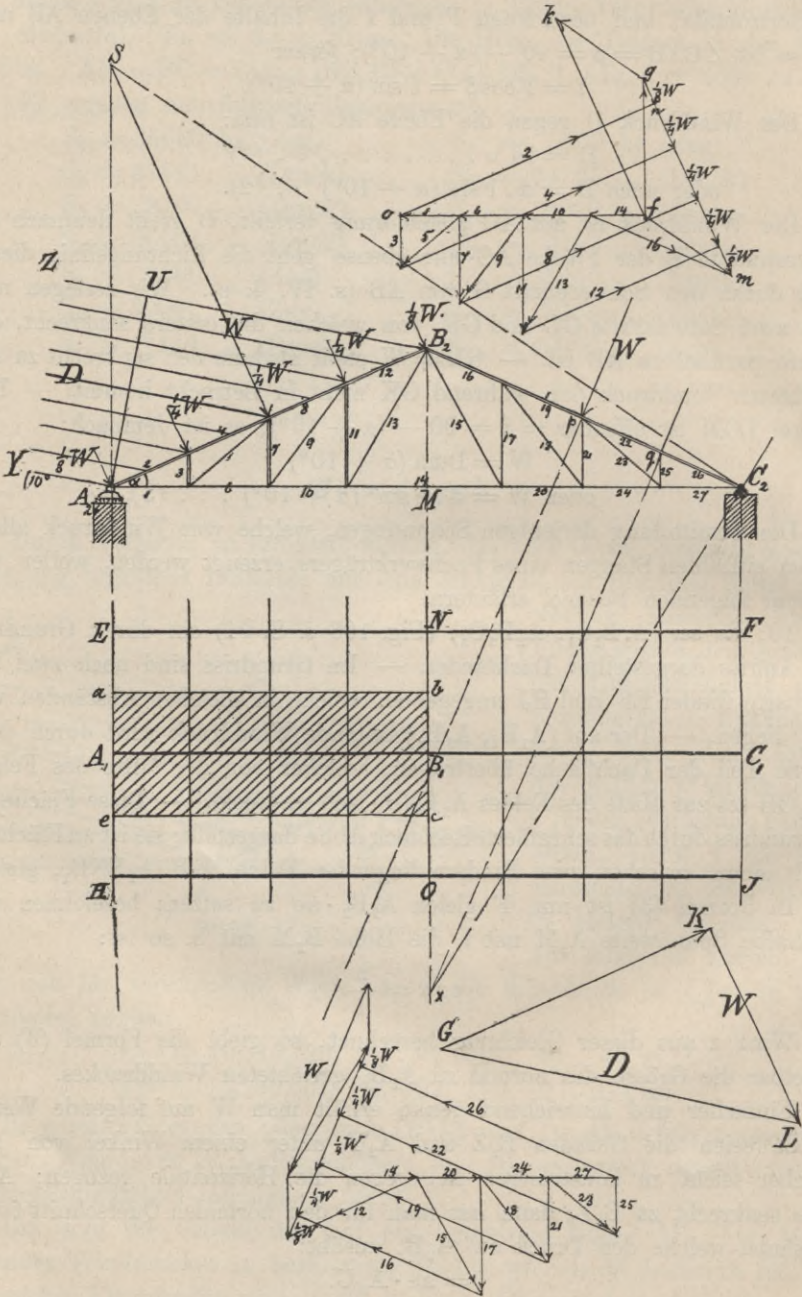


Fig. 108.

dem Kräftemasstab auftragen und sie alsdann in die Seitenkräfte GK ( $\parallel A_2B_2$ ) und KL ( $\perp A_2B_2$ ) zerlegen. — Die letztere stellt die Grösse des normal gegen  $A_2B_2$  gerichteten Winddruckes W dar. — Auf die einzelnen Knotenpunkte des in vier gleiche Teile getheilten Sparrens  $A_2B_2$  wirken die in Fig. 108 angegebenen Kräfte; die drei mittleren Knotenpunkte erhalten je  $\frac{1}{4} W$ , die beiden äusseren jeder  $\frac{1}{8} W$ .

Nun sind noch die durch den Winddruck verursachten Auflagerreaktionen zu bestimmen. — Wären die beiden Stützpunkte absolut fest, so könnten dieselben nach jeder beliebigen Richtung hin Widerstand leisten und es würden in diesem Falle die Richtungen der Auflagerreaktionen nicht bestimmbar sein. — Es ist aber mit Rücksicht auf die Ausdehnungen und Zusammenziehungen der einzelnen Stangen eines Fachwerks, welche durch Temperaturveränderungen verursacht werden, gebräuchlich, bei grösseren eisernen Trägern nur eines der Auflager, zu B.  $C_2$  zu befestigen und das andere bei  $A_2$  als sog. Rollenlager zu konstruieren, welches einer Bewegung des Stützpunktes  $A_2$  nach horizontaler Richtung freien Spielraum lässt.

Ist nun ein solches Rollenlager bei  $A_2$  vorhanden, so kann die Auflagerreaktion in diesem Punkte nur in der Richtung der Vertikalen  $A_2S$  liegen. — Die Richtungslinie der Reaktion in  $C_2$  muss aber mit der in  $A_2$  auf W zusammentreffen, woraus folgt, dass dieselbe in der Geraden  $C_2S$  liegt. — Die Grössen der Auflagerreaktionen ergeben sich jetzt leicht. — Wir machen  $kf$  gleich und parallel W, ziehen  $fg$  parallel zu  $A_2S$  und  $kg$  parallel zu  $C_2S$ , dann stellen  $fg$  und  $kg$  mit den in Fig. 108 angedeuteten Pfeilrichtungen die Auflagerreaktionen vor. — Fügen wir jetzt  $gn$  gleich und parallel dem in  $A_2$  wirkenden Drucke  $\frac{1}{8} W$  hinzu, so ist  $fn$  die Resultante der äusseren Kräfte, welche in  $A_2$  angreifen. Wir zerlegen diese Kraft durch die zu den Stangen 1 und 2 parallelen Geraden  $fo$  und  $on$  in zwei Kräfte, welche die Grössen der Spannungen in diesen Stangen darstellen. — Aus den Pfeilrichtungen ergibt sich für 1 Zug- und für 2 Druckspannung.

Die Ermittlung der übrigen Spannungen ist in derselben Weise wie bei der permanenten Belastung durchzuführen und bedarf keiner weiteren Erläuterung. — Nur über die Spannungen der Stangen in der rechts liegenden Trägerhälfte dürfte noch folgendes zu bemerken sein: Wenn der Winddruck, wie hier angenommen ist, linksseitig erfolgt, so sind die Knotenpunkte auf  $B_2C_2$  unbelastet. — In Folge dessen sind aber die Zwischenstangen der rechts liegenden Trägerhälfte spannungslos. — Bildet man nämlich aus den in 12 und 13 wirkenden Spannungen und der Kraft  $\frac{1}{8} W$ , welche ebenfalls auf den Knotenpunkt  $B_2$  wirkt, die Resultante, so zeigt sich, dass dieselbe ihrer Richtung nach parallel mit der Stange 16 wird. — Hieraus ergibt sich für 15 die Spannung Null. — Weiter folgt durch Zerlegung der in 14 herrschenden Spannung nach den Richtungen der beiden



noch übrigen Stangen 17 und 20, dass die Spannung in 20 der in 14 gleich ist, während 17 spannungslos bleibt, u. s. f. — In den Stangen 16, 19, 22, 26 herrschen gleiche Druckspannungen und in 14, 20, 24 und 27 ebenso gleiche Zugspannungen.

Wirkt der Winddruck rechtsseitig, so sind alle Knotenpunkte von  $B_2$  bis  $C_2$  in derselben Weise belastet, wie im vorigen die Knotenpunkte der links liegenden Trägerhälfte, während die letzteren in diesem Falle unbelastet bleiben. — Die Ermittlung der Spannungen ist in gleicher Weise zu bewerkstelligen, nachdem zuvor die Auflagerreaktionen bestimmt sind. — Die Richtungslinien derselben müssen sich auf der in  $p$  angreifenden Resultante  $W$  des normal auf  $B_2C_2$  wirkenden Winddrucks schneiden, und es kann wiederum die Auflagerreaktion in  $A_2$  nur in der Vertikalen durch  $A_2$  liegen. — Wir verlängern deshalb die letztere und die Richtungslinie von  $W$  bis zum Durchschnitt und verbinden denselben durch eine Gerade mit  $C_2$ , dann giebt diese die Richtung der Auflagerreaktion in  $C_2$  an. — Für den Fall, dass jener Durchschnittspunkt ausserhalb der Zeichenfläche liegen sollte, kann man, wie in Fig. 108 angegeben ist, durch den Knotenpunkt  $q$  eine Parallele zu  $W$  ziehen, und die Vertikale durch  $M$  verlängern, bis sie jene Parallele in  $x$  schneidet. — Die Gerade, welche  $x$  mit  $C_2$  verbindet, fällt dann, wie leicht ersichtlich, mit der Richtungslinie der Auflagerreaktion in  $C_2$  zusammen.

Der Kräfteplan für den rechtsseitigen Winddruck ist in Fig. 108 unterhalb des Grundrisses vollständig angegeben. — Ähnlich wie beim linksseitigen Winddruck bleiben jetzt die Zwischenstangen der linken Trägerhälfte spannungslos; die vier Stangen des oberen Sparrens haben gleiche Druckspannung und die Stangen 1, 6, 10, 14 gleiche Zugspannung.

Um die grösste Spannung zu finden, welche eine Stange mit Berücksichtigung des Winddrucks erleidet, muss man die grössere der beiden Spannungen, welche sich aus den beiden Kräfteplänen für den rechts- oder linksseitigen Winddruck für die betr. Stange ergeben, zu derjenigen Spannung addieren, welche von der permanenten Belastung herrührt.

Beispiel.

Es sei in Fig. 108  $A_2C_2 = 30$  m.  $B_2M = 6$  m. Die permanente Belastung betrage für die beiden Stützpunkte  $A_2$  und  $C_2$  je 2000 kg, für jeden der anderen Knotenpunkte auf  $A_2B_2$  und  $B_2C_2$  4000 kg. — Der Abstand zweier Binder voneinander sei  $A_1E = 5$  m. — Für den Winddruck werde  $d = 120$  kg angenommen. — Bestimmt man hieraus, wie oben angegeben, den normal zu  $A_2B_2$  wirkenden Winddruck  $W$ , so folgt

$$W = 2692 \text{ kg.}$$

Der bequemeren Rechnung und grösseren Sicherheit wegen nehmen wir für  $W$  rund 2800 kg.

Es ergibt sich:

Spannung durch die permanente Belastung verursacht.	Winddruck links	Winddruck rechts	Spannung mit Berücksichtigung des Winddrucks.
$S_1 = 35000$ kg Z	3673 kg Z	1885 kg Z	38673 kg Z
$S_2 = 37696$ „ D	4095 „ D	2034 „ D	41791 „ D
$S_3 = 4000$ „ „	754 „ „	—	4754 „ „
$S_4 = 37696$ „ „	4375 „ „	2034 „ D	42071 „ „
$S_5 = 6403$ „ Z	1205 „ Z	—	7608 „ Z
$S_6 = 30000$ „ „	2731 „ „	1885 „ Z	32731 „ „
$S_7 = 6000$ „ D	1131 „ D	—	7131 „ D
$S_8 = 32311$ „ „	3660 „ „	2034 „ D	35971 „ „
$S_9 = 7810$ „ Z	1471 „ Z	—	9281 „ Z
$S_{10} = 25000$ „ „	1787 „ „	1885 „ Z	26885 „ „
$S_{11} = 8000$ „ D	1508 „ D	—	9508 „ D
$S_{12} = 26925$ „ „	2906 „ „	2034 „ D	29831 „ „
$S_{13} = 9434$ „ Z	1778 „ Z	—	11212 „ Z
$S_{14} = 20000$ „ „	845 „ „	1885 „ Z	21885 „ „
$S_{15} = 9434$ „ „	—	1778 „ „	11212 „ „
$S_{16} = 26925$ „ D	2031 „ D	2905 „ D	29830 „ D
$S_{17} = 8000$ „ „	—	1508 „ „	9508 „ „
$S_{18} = 7810$ „ Z	—	1471 „ Z	9281 „ Z
$S_{19} = 32311$ „ D	2031 „ D	3640 „ D	35951 „ D
$S_{20} = 25000$ „ Z	845 „ Z	2827 „ Z	27827 „ Z
$S_{21} = 6000$ „ D	—	1131 „ D	7131 „ D
$S_{22} = 37696$ „ „	2031 „ D	4375 „ „	42071 „ „
$S_{23} = 6403$ „ Z	—	1205 „ Z	7608 „ Z
$S_{24} = 30000$ „ „	845 „ Z	3370 „ „	33370 „ „
$S_{25} = 4000$ „ D	—	754 „ D	4754 „ D
$S_{26} = 37696$ „ „	2031 „ D	4095 „ „	41791 „ „
$S_{27} = 35000$ „ Z	845 „ Z	4712 „ Z	39712 „ Z

In gleicher Weise bestimmt man den Einfluss des Winddruckes bei den in 5), 6), 8) und 9) d. Abschn. behandelten Trägern.

### 11. Träger mit drei Stützpunkten.

Es sei ABCDEF (Fig. 109 s. S. 98) ein Träger aus zwei vollkommen gleichen, aber getrennten Hälften bestehend, welche nur in dem Knotenpunkte B durch ein Gelenk verbunden sind. — Beide Teile stützen sich in A bzw. C auf Widerlager und sind in diesen durch Charniere befestigt, um welche sie sich drehen können.



Um die Spannungen der einzelnen Stangen zu ermitteln, welche in diesem Fall nur für die eine Hälfte des Trägers zu bestimmen sind, hat man zunächst die Auflagerreaktionen aufzusuchen. — Es sei  $R$  die Resultante

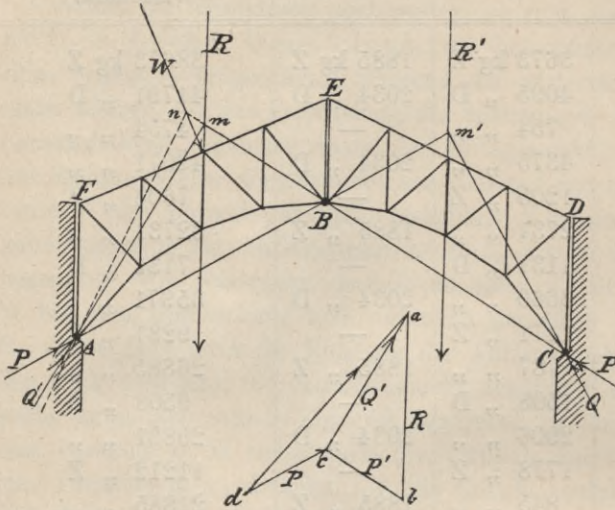


Fig. 109.

der permanenten Belastung, welche auf der links liegenden Trägerhälfte ruht. — Im Gleichgewichtszustande der beiden in B sich gegenseitig stützenden Trägerhälften kann die Richtungslinie der Reaktion in B nur durch den Stützpunkt C gehen. — Verlängern wir deshalb  $CB$ , bis  $R$  in  $m$  getroffen wird und ziehen wir die Gerade  $Am$ , so müssen die beiden Reaktionen,

welche  $R$  das Gleichgewicht halten, in den Geraden  $Cm$  und  $Am$  liegen. — Ebenso wird die Resultante  $R'$  ( $= R$ ) der Belastung der rechts liegenden Trägerhälfte von zwei Reaktionen, welche in den Geraden  $Am'$  und  $Cm'$  liegen, im Gleichgewicht gehalten.

Es sei nun  $ab$  gleich und parallel  $R$ ; wir ziehen  $ac$  parallel zu  $Am$  und  $bc$  parallel zu  $Cm$ , dann stellen  $ac$  und  $bc$  die Größen der beiden nach den Richtungen der Geraden  $Am$  und  $Cm$  wirkenden Reaktionen  $Q'$  und  $P'$  dar. — Die nach  $Am'$  und  $Cm'$  gerichteten Reaktionen  $Q$  und  $P$  müssen den vorigen bez. gleich sein. — Wir ziehen nun noch  $cd$  parallel zu  $Am'$  und tragen auf derselben die Strecke  $cd = bc$  ab. — Es sind alsdann die in A thätigen Reaktionen  $P$  und  $Q'$  zu dem Kräftezug  $dca$  vereinigt, dessen Schlusslinie  $da$  die ganze Auflagerreaktion in A darstellt. — Nachdem die letztere bestimmt ist, kann mit der Ermittlung der Spannungen beim Punkte A begonnen werden.

Den Einfluss des Winddruckes kann man in gleicher Weise untersuchen. — Man bestimmt wie in 10) den zu  $EF$  normalen Winddruck  $W$  und zerlegt denselben in zwei Kräfte nach den Richtungen der Geraden  $Bn$  und  $An$ , wodurch die vom Winddruck verursachten Auflagerreaktionen bestimmt sind. — Die entsprechenden Spannungen ergeben sich dann leicht.

Beispiel. Es sei Fig. 109 die Spannweite  $AC = 20$  m. — Die Knotenpunkte der unteren Gurtung  $ABC$  liegen auf einem Kreisbogen, dessen Mittelpunktswinkel  $= 120^\circ$  ist. —  $AF = 5$  m;  $BE = 4$  m. — Jeder der Knotenpunkte  $E$  und  $F$  ist mit  $1000$  kg, die zwischen  $E$  und  $F$  gleich weit voneinander entfernten Knotenpunkte mit je  $2000$  kg belastet.

Zur weiteren Übung in der Ermittlung der Spannungen in Fachwerkträgern empfehlen wir noch folgende Beispiele.

12. Die Spannungen in dem in Fig. 110 dargestellten Parallelträger  $ABDC$  zu ermitteln. Die Spannweite sei  $AB = 20$  m. Die Felder bestehen aus gleichseitigen Dreiecken. In jedem der oberen Knotenpunkte wirkt eine Last von  $1000$  kg. —

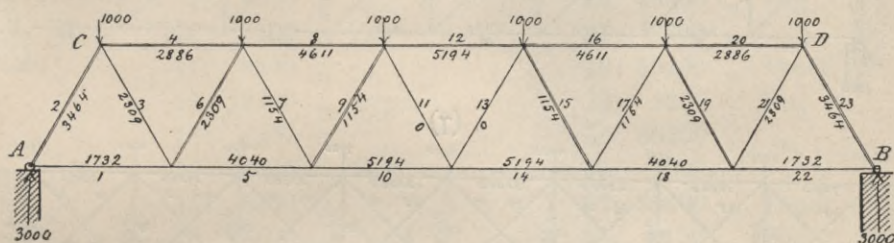


Fig. 110.

Die Spannungen sind graphisch zu ermitteln und nach der Ritter'schen Methode durch Rechnung zu kontrollieren. In der Fig. 110 sind bei den einzelnen Stangen die Spannungen in kg angegeben.

13. In Fig. 111 ( $\gamma$ ) (s. S. 100) ist ebenfalls ein Parallelträger dargestellt, welcher aus quadratischen Feldern mit gekreuzten Diagonalen besteht. Eigentlich gehört ein solcher Träger zu den statisch unbestimmten Systemen, denn es ist vor allen Dingen kein Endpunkt vorhanden, in welchem nur zwei Stangen zusammenstossen. Um in diesem Falle ein brauchbares Resultat zu erhalten, denkt man sich den Träger aus den beiden in ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) dargestellten einfachen Trägern bestehend, und in jedem der Knotenpunkte die halben Lasten angebracht. Die Ermittlung der Spannungen in den letzteren bietet keine Schwierigkeiten; die Resultate sind in den Figuren ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) angegeben. Endlich sind, um die Spannungen in  $\gamma$  zu finden, diejenigen der gleich nummerierten Stangen in ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) zu addieren. Die Spannweite  $AB$  sei  $= 20$  m. Die Belastung in jedem der oberen Knotenpunkte  $4000$  kg, in dem ersten und letzten je  $2000$  kg.

14. Fig. 112 (s. S. 100) stellt einen Bogenträger dar. Die Knotenpunkte des unteren Bogens  $ADB$  liegen auf einem Kreise vom Halbmesser  $AC = 18$  m. Der Winkel  $ACB$  sei  $= 120^\circ$ . Die Knotenpunkte des oberen Bogens liegen auf einem, aus demselben Mittelpunkt  $C$  gezeichneten Kreise,



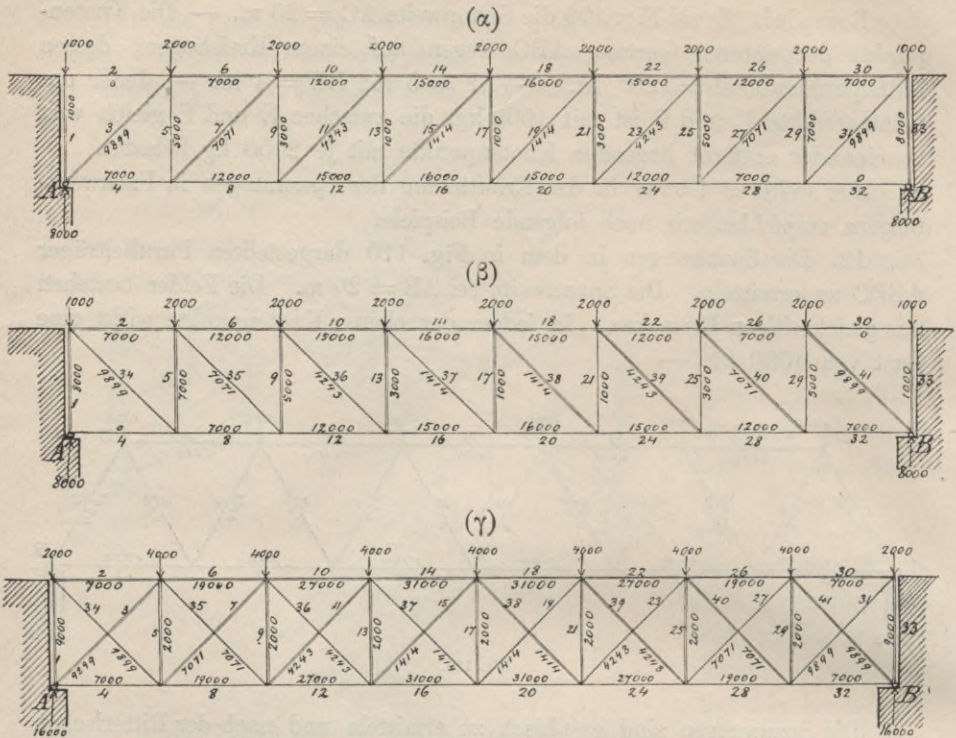


Fig. 111

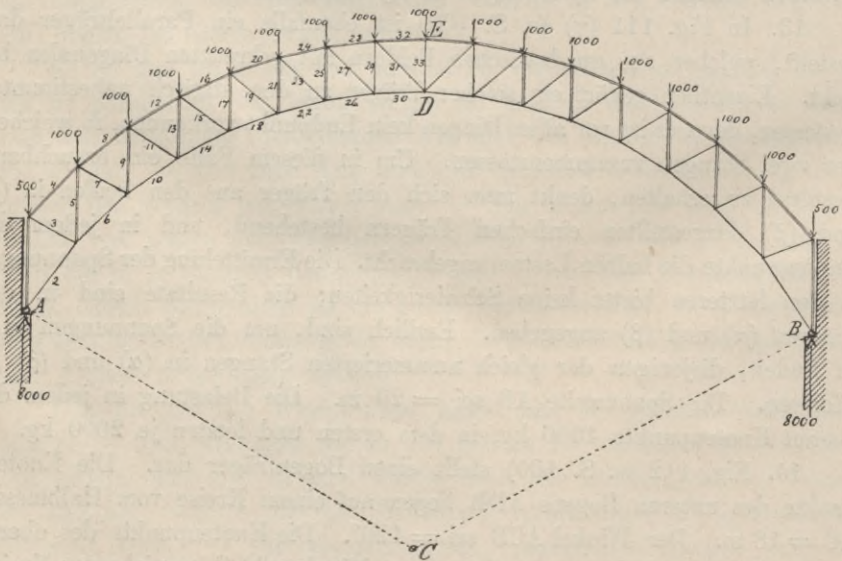


Fig. 112.

dessen Halbmesser 20 m beträgt. Die oberen Knotenpunkte sind mit je 1000 kg, der erste und letzte jeder mit 500 kg belastet. Für die Spannungen erhalten wir in abgerundeten Zahlen die Werte:

in Stange 1: 8000 kg Druck	in Stange 18: 22800 kg Zug
2: 0 „ „	19: 5000 „ „
3: 5600 „ Zug	20: 26600 „ Druck
4: 7700 „ Druck	21: 2300 „ „
5: 7000 „ „	22: 26000 „ Zug
6: 7400 „ Zug	23: 4000 „ „
7: 6250 „ „	24: 29000 „ Druck
8: 13900 „ Druck	25: 200 „ „
9: 5700 „ „	26: 28500 „ Zug
10: 13500 „ Zug	27: 2600 „ „
11: 6300 „ „	28: 30400 „ Druck
12: 19300 „ Druck	29: 1200 „ Zug
13: 4800 „ „	30: 30200 „ „
14: 18800 „ Zug	31: 1000 „ „
15: 5800 „ „	32: 30800 „ Druck
16: 28500 „ Druck	33: 2100 „ Zug
17: 2900 „ „	

15. In Figur 113 ist ein Brückenträger dargestellt, welcher drei Stützpunkte A, B und C hat (vergl. 11). Die Spannweite AB ist 16 m. Der

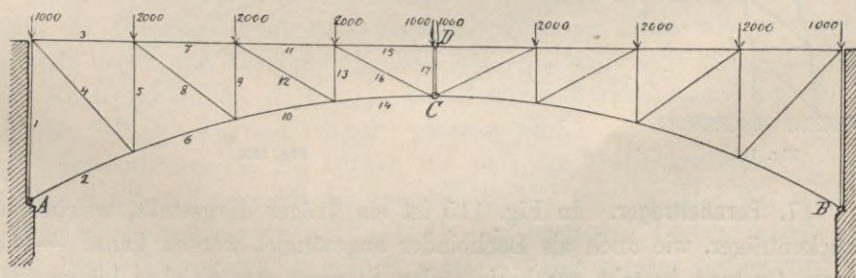


Fig. 113.

Halbmesser des Kreises, auf welchem die Knotenpunkte des unteren Bogens liegen, ist ebenfalls = 16 m. Die Höhe CD = 1 m und die obere Gurtung ist horizontal. Die Spannungen ergeben sich abgerundet:

in Stange 1: 700 kg Druck	in Stange 5: 2000 kg Druck
2: 16800 „ „	6: 16000 „ „
3: 200 „ Zug	7: 100 „ Zug
4: 300 „ Druck	8: 100 „ „



in Stange 9: 2000 kg Druck	in Stange 14: 15100 kg Druck
10: 15300 „ „	15: 0 „
11: 50 „ Zug	16: 60 „ Zug
12: 60 „ „	17: 1000 „ Druck
13: 2000 „ Druck	

16. **Der krahmartige Träger.** (Fig. 114.) Derselbe trägt in A eine Einzellast P. — Wird der Träger so konstruiert, dass die Verlängerungen je zweier gleichvielster äusserer Stangen (von A aus gerechnet) auf der Richtungslinie von P zusammentreffen, so sind die Diagonalstangen spannungslos. — So z. B. hat ad keine Spannung, wenn der Schnittpunkt von ab und cd auf P liegt. — Beweis leicht.

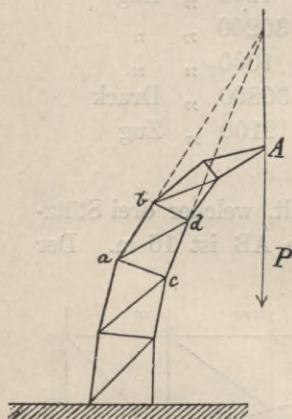


Fig. 114.

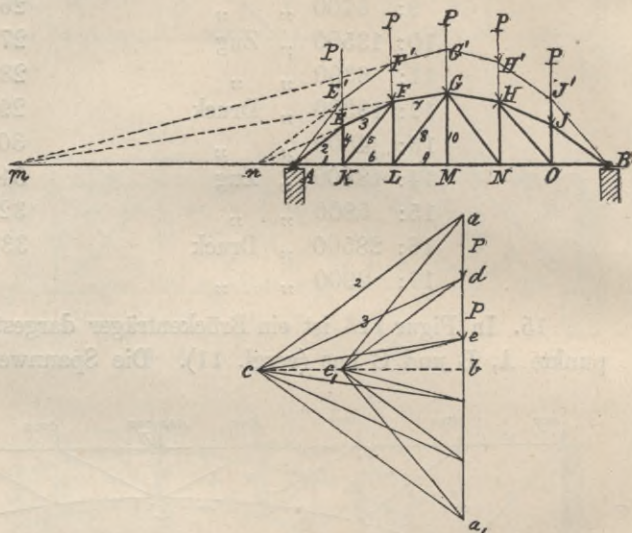


Fig. 115.

17. **Parabelträger.** In Fig. 115 ist ein Träger dargestellt, welcher als Brückenträger, wie auch als Dachbinder angewendet werden kann. — Die untere Gurtung besteht aus horizontalen Stangen von gleicher Länge. Die Stangen der oberen Gurtung bilden einen gebrochenen, aber in Bezug auf die mittlere Vertikale symmetrischen Linienzug.

Der Träger lässt sich so konstruieren, dass nur die Stangen der unteren und oberen Gurtung Spannungen erleiden, während die Zwischenstangen unter der Wirkung der gleichförmigen Belastung der Knotenpunkte spannungslos bleiben.

Es sei die Belastung für jeden der beiden Stützpunkte A und B gleich  $\frac{P}{2}$ , während in jedem der übrigen Knotenpunkte E, F, G, H und J die

Last  $P$  wirkt. — In  $A$  sowohl als in  $B$  wirkt hiernach die Kraft  $\frac{5}{2}P$  aufwärts. — Ist nun  $ab$  gleich und parallel  $\frac{5}{2}P$  und ziehen wir  $bc$  parallel zu  $AK$  und  $ac$  parallel zu  $AE$ , so stellen  $bc$  und  $ca$  die Spannungen der Stangen 1 und 2 dar. — Die Spannung in 2 und die äussere Kraft  $P$  haben in dem Kräfteplan die Resultante  $cd$ , welche nach den Richtungen der beiden Stangen  $EF$  und  $EK$  zu zerlegen ist. — Wenn nun  $EF$  parallel zu  $cd$  ist, so wird die Spannung in  $EK$  offenbar gleich Null. — Gehen wir zum Knotenpunkte  $K$  über, so ist jetzt die in 1 herrschende Spannung nach den Richtungen der Stangen 5 und 6 zu zerlegen. — Es ist aber ersichtlich, dass 6 die Zugspannung von 1 allein aufnimmt, während 5 spannungslos bleibt. — Beim Knotenpunkte  $F$  sind  $P$  und die Spannung in 3 zu einer Resultante  $ce$  zu vereinigen; die letztere ist nach den Richtungen der Stangen  $FL$  und 7 zu zerlegen. — Wäre jetzt 7 parallel zu  $ce$ , so würde die Stange  $FL$  spannungslos sein u. s. f.

Es ergibt sich hieraus, dass die senkrechten und die Diagonalstangen spannungslos bleiben, wenn die Stangen der oberen Gurtung mit den Linien  $ca$ ,  $cd$ ,  $ce$  . . . parallel sind. — Man erkennt leicht, dass unter dieser Voraussetzung  $A E F G H J B$  ein Seilpolygon der äusseren Lasten ist, welches dem Punkte  $c$  als Pol entspricht. — Alle Stangen der unteren Gurtung haben alsdann gleiche Zugspannung, welche durch den Polabstand  $bc$  dargestellt wird.

Hiernach ist es leicht, die Stangen der oberen Gurtung so anzuordnen, dass die Zwischenstangen spannungslos bleiben. — Sind, wie wir vorausgesetzt haben, die Abstände  $AK$ ,  $KL$ ,  $LM$  . . . unter sich gleich, so liegen die Knotenpunkte  $A$ ,  $E$ ,  $F$ , . . .  $B$  auf einem Parabelbogen, weshalb ein solcher Träger „Parabelträger“ genannt wird.

Mit Hilfe von IV, 15) können wir auch den Träger konstruieren, wenn ausser der Spannweite  $AB$  die Scheitelhöhe  $MG$  gegeben ist. Wir zeichnen zunächst ein Seilpolygon  $A E F' G' H' J' B$  der gegebenen Lasten, dessen erste und letzte Seite durch  $A$  bez.  $B$  geht. — Der diesem Seilpolygon entsprechende Pol  $c_1$  liegt in beliebiger Entfernung von der Kräftelinie, so dass  $bc_1 \perp aa_1$  und  $ab = a_1b$  ist. — Verlängern wir nun  $F'G'$ , bis  $AB$  in  $m$  getroffen wird und ziehen dann die Gerade  $FG$  so, dass dieselbe verlängert durch  $m$  geht, bestimmen wir ferner  $EF$  so, dass dieselbe mit  $E'F'$  ebenfalls in einem Punkte  $n$  auf  $AB$  zusammentrifft, u. s. f., dann stellt  $A E F G . . . B$  ein anderes Seilpolygon der gegebenen Lasten dar. — Dies letztere Seilpolygon entspricht einem anderen Pol  $c$ , welcher auf  $bc_1$  liegt; man findet denselben, wenn man  $ce$  parallel zu  $Gm$  zieht. — Die Gerade  $Bm$  ist die Polarachse beider Seilpolygone. (IV, 15.)



Als Beispiel sei der Träger AB, Fig. 116, gegeben. Die Spannweite AB sei = 20 m. Der Träger enthält 8 Felder von gleicher Breite, welche noch durch Diagonalstangen geteilt sind. Die Knotenpunkte A und B seien

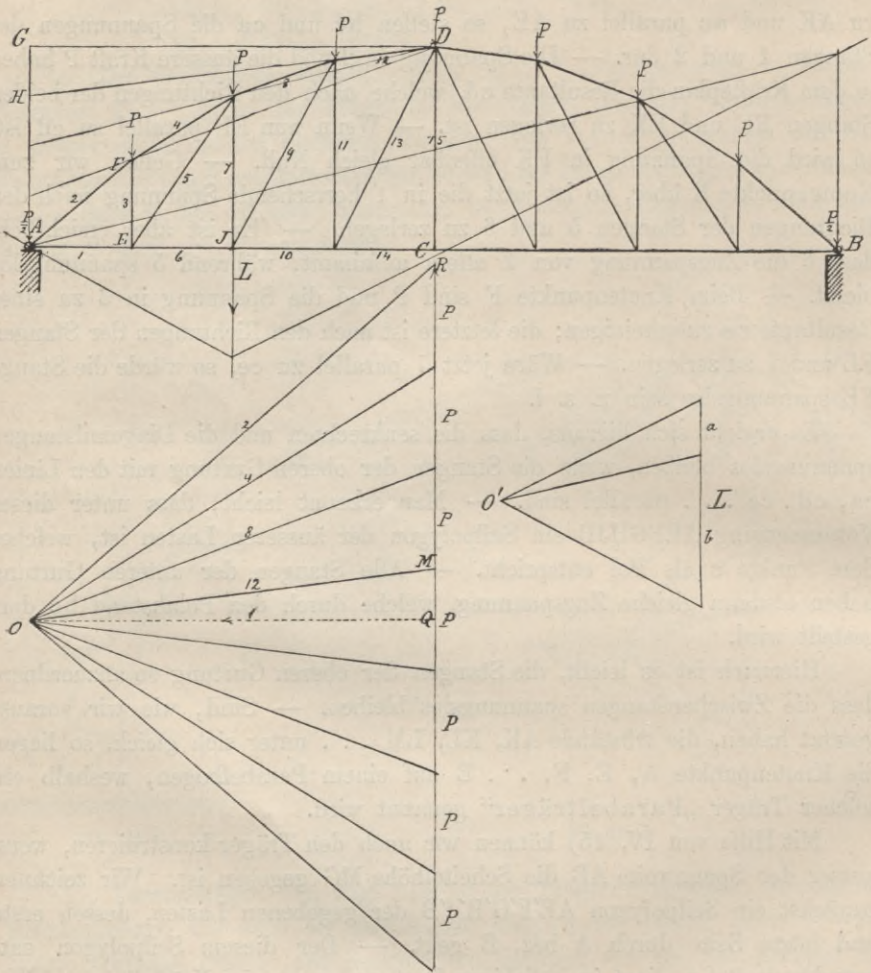


Fig. 116.

mit je 3000 kg und die übrigen Knotenpunkte der oberen Gurtung jeder mit  $P = 6000$  kg belastet. Die Auflagerreaktionen in A und B sind je  $4P$ . Auf A wirkt demnach die Kraft  $QR = 4P - \frac{P}{2} = 3\frac{1}{2}P$ , welche nach den Richtungen der Stangen AE und AF zu zerlegen ist. Hierdurch erhalten wir die Spannungen 1 und 2, u. s. f. Der Pol O kann, wie oben

angegeben, bestimmt werden, doch lässt sich für diesen Fall noch eine andere Bestimmung der Knotenpunkte der oberen Gurtung und der damit zusammenhängenden Lage des Pols O mit Vorteil verwenden. Wir benutzen hierzu eine bekannte Parabelkonstruktion.\*) In A ziehen wir AG gleich und parallel CD; teilen AG in soviel gleiche Teile, als Felder über der halben Spannweite liegen und ziehen nun von D Geraden nach den Teilpunkten auf AG, dann schneiden diese die senkrechten Stangen in den gesuchten Parabelpunkten. Der Pol O wird jetzt gefunden, wenn man von M aus MO parallel zu DH zieht. Da jedoch MO und OQ sich unter sehr kleinem Winkel treffen, so kann O undeutlich werden. Wir suchen deshalb OQ durch Rechnung zu bestimmen und dann nach dem Massstab aufzutragen. Nach Voraussetzung ist  $AG = CD = 5 \text{ m}$ ;  $DG = AC = 2 \cdot CD = 2 \cdot AG$ . Folglich ist  $GH = \frac{1}{4}AG = \frac{1}{8}DG$ . Da nun  $\triangle MOQ \sim \triangle DGH$ , so ist auch  $MQ = \frac{1}{8}OQ$  oder  $OQ = 8MQ$ .

Hiernach ergeben sich nun die Spannungen

in Stange 1: 24000 kg Zug	in Stange 9: 0 kg
2: 31890 „ Druck	10: 24000 „ Zug
3: 0 „	11: 0 „
4: 28362 „ Druck	12: 24148 „ Zug
5: 0 „	13: 0 „
6: 24000 „ Zug	14: 24000 „ Zug
7: 0 „	15: 0 „
8: 25632 „ Druck	

Kommt in irgend einem der Knotenpunkte z. B. J eine neue Last L hinzu, so werden auch die bisher spannungslosen Zwischenstangen in Anspruch genommen. Um die Wirkung der Last L auf eine der Stangen, z. B. 11, kennen zu lernen, bestimmt man zuerst die von L verursachten Auflagerreaktionen in A und B, welche sich leicht mit Hilfe von ( $\beta$ ) durch a und b ergeben. Sind diese gefunden, so kann man, wenn es sich nur um die in einer bestimmten Stange verursachten Spannung handelt, diese am bequemsten nach Ritter's Methode ermitteln. Ist z. B.  $L = 10000 \text{ kg}$ , so entsteht in 11 eine Druckspannung von 3333 kg.

\*) S. des Verfassers Darstellende Geometrie 4. Teil Seite 19 und 101.



## VIII. Abschnitt.

## Der belastete Balken.

1. Ein einfacher Balken oder Träger, welcher in seinen beiden Endpunkten unterstützt ist, soll eine gegebene Belastung tragen. — Die letztere besteht entweder aus einer Reihe von Einzellasten, oder es kann dieselbe über die ganze Länge oder Teile derselben kontinuierlich verteilt sein. — Endlich können auch Einzellasten und kontinuierlich verteilte Lasten gleichzeitig vorhanden sein.

In jedem dieser Fälle ist zu ermitteln:

a) Die Grösse der Auflagerdrücke in den beiden Stützpunkten.

b) Die auf einen beliebigen Trägerteil wirkende Transversalkraft, d. h. diejenige Kraft, welche senkrecht zur Längsrichtung des betreffenden Trägerteils wirkt.

c) Das Biegemoment für irgend einen beliebigen Querschnitt des Trägers.

d) Das grösste Biegemoment und der Querschnitt, in welchem dasselbe auftritt (gefährlicher Querschnitt).

## 2. Träger, auf welchen Einzellasten wirken.

Auf einen in den Endpunkten A und B (Fig. 117) unterstützten

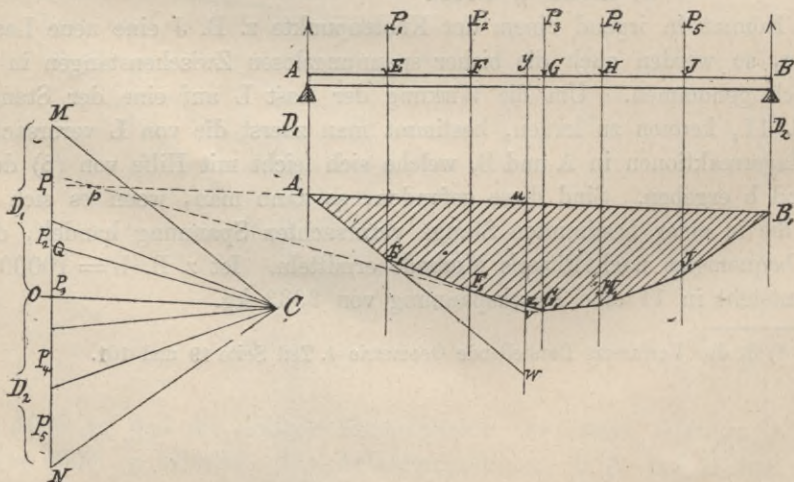


Fig. 117.

Träger wirken mehrere Einzellasten  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  in den Punkten E, F, G, H und J. Nach II, 3, b) bestimmen wir mit Hilfe eines Seil-

polygons  $A_1E_1F_1G_1H_1J_1B_1$  die Auflagerdrücke MO und NO, indem wir von dem Pol C aus die Gerade CO parallel zu der Verbindungslinie der beiden Punkte  $A_1$  und  $B_1$  ziehen, in welchen die erste und letzte Seite des Seilpolygons die Richtungslinien der Auflagerdrücke treffen. — Fügen wir den gegebenen Lasten die den Auflagerdrücken gleichen aber entgegengesetzten Auflagerreaktionen  $D_1 = OM$  und  $D_2 = NO$  hinzu, so erhalten wir ein im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem. —  $A_1B_1E_1F_1G_1H_1J_1B_1A_1$  ist ein Seilpolygon dieses Kräftesystems, welches sich demnach schliessen muss, und wir können nun mit Hilfe des letzteren die Transversalkraft für irgend einen Trägerteil und das Biegemoment für einen beliebigen Querschnitt bestimmen.

a) Die Transversalkraft. Auf den durch den Querschnitt  $y$  abgeschnittenen Trägerteil  $Ay$  wirken: in A die Auflagerreaktion  $D_1$  aufwärts, und in den Punkten E und F die Lasten  $P_1$  und  $P_2$  abwärts. — Die Resultante dieser parallelen Kräfte ist  $D_1 - P_1 - P_2$ ; sie stellt die Grösse der auf  $Ay$  wirkenden Transversalkraft dar. Auf der Kräftelinie MN wird die Grösse dieser Transversalkraft offenbar durch die beiden Polstrahlen CO und CQ abgeschnitten. Die letzteren sind aber den Seiten des geschlossenen Seilpolygons parallel, welche senkrecht unter dem Querschnitt  $y$  liegen. — Für den Trägerteil  $Ay$  wird demnach die Transversalkraft durch die Strecke OQ, und zwar in der Richtung von O nach Q, und für den Trägerteil  $By$  durch dieselbe Strecke mit der entgegengesetzten Richtung von Q nach O dargestellt. — Dass die beiden Kräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet sein müssen, ist selbstverständlich; sie ersetzen ja das ganze auf den Träger wirkende und im Gleichgewicht befindliche Kräftesystem. — Nun ist aber der Linienzug  $z F_1E_1A_1$  u ein Seilpolygon der Kräfte  $D_1, P_1, P_2$ , also geht die Resultante der letzteren durch den Schnittpunkt  $p$  von  $F_1G_1$  und  $A_1B_1$ . — Ferner ist  $z G_1H_1J_1B_1$  u ein Seilpolygon der Kräfte  $D_2, P_3, P_4, P_5$ , welches mit dem vorigen Seilpolygon die erste und letzte Seite gemeinschaftlich hat. — Folglich geht die Resultante der Kräfte  $D_2, P_3, P_4, P_5$  ebenfalls durch  $p$ .

Dass das vorstehende für andere Fälle ebenfalls Gültigkeit hat, ist leicht einzusehen. — Wir haben demnach das folgende Gesetz:

Die Transversalkraft für einen Trägerteil  $Ay$  wird auf der Kräftelinie durch zwei Polstrahlen abgeschnitten, von welchen der eine parallel zur Schlusslinie des Seilpolygons, der andere parallel zu derjenigen Seite des Seilpolygons ist, welche senkrecht unter dem Querschnitt  $y$  liegt. — Durch den Schnittpunkt dieser beiden Seilpolygonseiten geht die Richtungslinie der Transversalkraft.



Ist eine Seite des Seilpolygons parallel zur Schlusslinie desselben, so ist offenbar die Transversalkraft für alle Querschnitte des Trägers, welche über dieser Seite liegen, gleich Null.

b) Das Biegemoment. Legen wir in Fig. 117 die Gerade  $yw$  parallel zu den Lastrichtungen, so wird nach III, 9) durch je zwei aufeinander folgende Seilpolygonseiten auf  $yw$  eine Strecke abgeschnitten, welche das Moment derjenigen Kraft in Bezug auf  $y$  darstellt, deren Richtungslinie durch den Schnittpunkt dieser Seilpolygonseiten geht. — Um die Grösse dieses Moments zu bestimmen, ist ein Momentenmassstab nach III, 8) herzustellen. — Nach diesem Massstab gemessen bedeutet  $vz$  das Moment der Last  $P_2$ ,  $vw$  dasjenige von  $P_1$ , und  $uw$  das Moment des Auflagerdruckes  $D_1$  in Bezug auf  $y$ . — Da nun der Drehungssinn von  $D_1$  entgegengesetzt dem der Lasten  $P_1$  und  $P_2$  ist, so ist das Gesamtmoment dieser Kräfte dem Unterschied der Momente von  $D_1$  und  $P_1$  und  $P_2$  gleich. — Folglich wird dieses Moment, welches das Biegemoment für den Querschnitt  $y$  genannt wird, durch die Strecke  $uz$  dargestellt.

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man das Biegemoment aller rechts von  $y$  wirkenden Kräfte untersucht.

Es ergibt sich hieraus der wichtige Satz:

Das Biegemoment für einen beliebigen Querschnitt  $y$  wird immer dargestellt durch den innerhalb des geschlossenen Seilpolygons liegenden Abschnitt derjenigen Geraden, welche durch  $y$  parallel zu den Lastrichtungen geht.

Der Querschnitt, in welchem das Biegemoment seinen grössten Wert erreicht, heisst der gefährliche Querschnitt. — Offenbar liegt derselbe senkrecht über derjenigen Stelle, an welcher jener Abschnitt seinen grössten Wert erreicht, woraus noch folgt, dass dieser Querschnitt immer mit einer der Lastrichtungen zusammenfällt.

Ist eine Seite des Seilpolygons der Schlusslinie desselben parallel, so hat das Biegemoment für alle Querschnitte, welche über dieser Seite liegen, gleichen Wert. — Das grösste Biegemoment ist in diesem besonderen Falle nicht auf einen einzigen Querschnitt beschränkt.

**3. Gleichförmig verteilte Last.** Wir denken uns in diesem Falle die Last kontinuierlich so auf dem Träger  $AB$  (Fig. 118 s. S. 109) verteilt, dass gleich lange Abschnitte desselben gleiche Belastung zu tragen haben.

Um zunächst die Transversalkraft für einen beliebigen Abschnitt  $Ay$  zu bestimmen, zerlegen wir die Gesamtlast  $P$  in die beiden Teile  $P_1$  und  $P_2$ , welche auf  $Ay$  und  $By$  ruhen. — Die Transversalkraft, welche auf  $Ay$

wirkt, ist alsdann gleich dem Auflagerdruck in A, vermindert um  $P_1$ . — Es sei  $mn$  die Kräftelinie, welche die Grösse der ganzen auf  $AB$  gleichförmig verteilten Last darstellt,  $C$  sei der Pol;  $Ee$  die Richtungslinie der Resultante von  $P$ . Ziehen wir nun von einem Punkte  $e$  der letzteren die Geraden  $ea$  und  $eb$  parallel zu den beiden Polstrahlen  $Cm$  und  $Cn$ , so werden diese von den durch A und B gehenden Vertikalen in  $a$  und  $b$  getroffen. — Der Strahl  $Cr$ , welcher parallel zu  $ab$  gezogen wird, zerlegt  $mn$  in die beiden Strecken  $mr$  und  $rn$ , welche zunächst die gesuchten

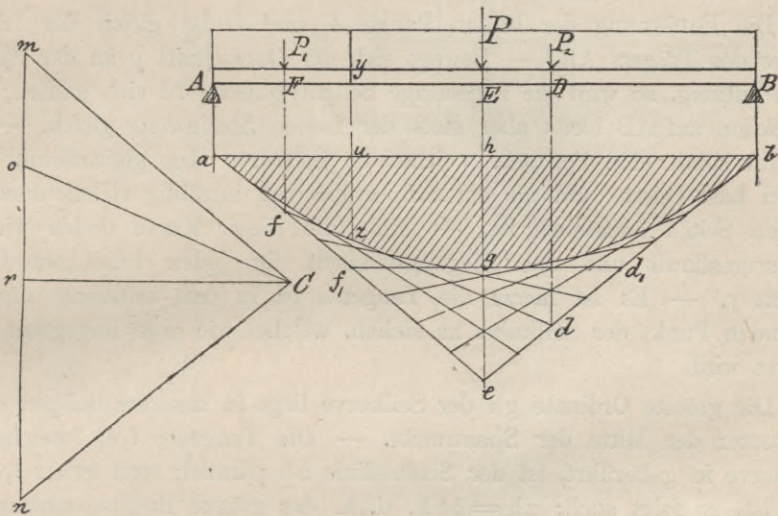


Fig. 118.

Auflagerreaktionen darstellen. — In unserem Falle ist jede der letzteren gleich  $\frac{P}{2}$ . — Ersetzen wir aber  $P$  durch die beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ ,

welche wir uns in den Mitten von  $Ay$  und  $By$  vereinigt denken können, so müssen wir mit Hilfe des Seilpolygons der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  dieselben Auflagerreaktionen erhalten. — Dieses Seilpolygon ergibt sich leicht. — Die Richtungslinien von  $P_1$  und  $P_2$ , welche durch die Mitten  $F$  und  $D$  der beiden Abschnitte  $Ay$  und  $By$  gehen, verlängern wir bis zu den Punkten  $f$  und  $d$ , in welchen sie  $ae$  und  $be$  treffen; ziehen wir alsdann die Gerade  $fd$ , so ist  $afbd$  das Seilpolygon der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Der Polstrahl  $Co$ , welcher parallel zu  $fd$  gezogen wird, zerlegt  $mn$  in die beiden Strecken  $mo$  und  $on$ , welche die Grössen von  $P_1$  und  $P_2$  darstellen. — Da die Schlusslinie dieses Seilpolygons wieder  $ab$  ist, so erhalten wir offenbar dieselben Auflagerreaktionen wieder.



Nun ist  $mr = \frac{P}{2}$  und  $om = P_1$ . Folglich ist die auf Ay wirkende Transversalkraft

$$T = \frac{P}{2} - P_1 = ro.$$

Ferner wird das Bieugungsmoment im Querschnitt y (Moment der Auflagerreaktion in A vermindert um das Moment der Last  $P_1$ ) dargestellt durch den Abschnitt uz, welcher auf der Vertikalen durch y innerhalb des geschlossenen Seilpolygons liegt.

Die Entfernung der beiden Punkte F und D ist gleich der halben Länge des Trägers AB. — Bewegt sich der Querschnitt y an der Spannweite entlang, so wird die zugehörige Seilpolygonseite fd sich ändern; ihre Projektion auf AB bleibt aber stets der halben Spannweite gleich. — fd umhüllt somit eine Parabel, welche die Seilkurve der gleichförmig verteilten Last heisst, und als ein Seilpolygon von unzähligen vielen unendlich kleinen Seiten anzusehen ist. — Mit Hilfe dieser Kurve finden wir die Transversalkraft und das Bieugungsmoment für jeden beliebigen Querschnitt y. — Es ist hierzu die Tangente fd in dem senkrecht unter y liegenden Punkt der Seilkurve zu ziehen, welche, wie oben angegeben, bestimmt wird.

Die grösste Ordinate gh der Seilkurve liegt in unserem Beispiel offenbar unter der Mitte der Spannweite. — Die Tangente  $f_1d_1$ , welche die Seilkurve in g berührt, ist der Schlusslinie ab parallel; weil ferner  $f_1d_1 = \frac{1}{2}ab$  ist, so folgt auch:  $gh = \frac{1}{2}eh$ , d. h. das grösste Bieugungsmoment ist bei einer längs der ganzen Spannweite gleichförmig verteilten Last P halb so gross, als das Bieugungsmoment, welches durch eine in der Mitte des Trägers wirkende Einzellast von der Grösse P entsteht.

4. Nimmt die gleichförmig verteilte Last P nur einen Teil der Länge des Trägers ein, z. B. die Strecke AE (Fig. 119 s. S. 111), so kann man wieder die Resultante der Last P in der Mitte von AE anbringen und mit Hilfe des Seilpolygons die Auflagerreaktionen  $D_1$  und  $D_2$  bestimmen. — Wir zerlegen wie im vorigen Beispiel die gleichförmig verteilte Last in zwei Teile, z. B. AM und ME, deren Resultanten in den Mitten C und D angreifen; denken wir uns die beiden Teile veränderlich, so können wir genau wie in 3) eine Seilkurve konstruieren, welche wieder eine Parabel ist und von a bis e sich erstreckt. — Von e geht dieselbe in die Tangente be über.

Das grösste Bieugungsmoment liegt dann offenbar senkrecht über dem Punkte der Seilkurve, in welchem die Tangente parallel zur Schlusslinie ab ist. — Die Konstruktion dieser Tangente und ihres Berührungspunktes ist





Wir tragen demnach auf  $aA$  die Auflagerreaktion  $\frac{1}{2}D_1 = ac$  ab, und ziehen  $cd$  parallel zu  $ab$  bis zur Richtungslinie der Last  $P_1$ . — Von  $d$  aus tragen wir die Strecke  $de = P_1$  ab und ziehen  $ef$  wieder parallel ab

bis zur Richtungslinie der Last  $P_2$  u. s. f. — Die letzte der zu  $ab$  parallelen Geraden schneidet auf der Vertikalen durch  $b$  die in  $B$  stattfindende Auflagerreaktion  $D_2 = bm$  ab.

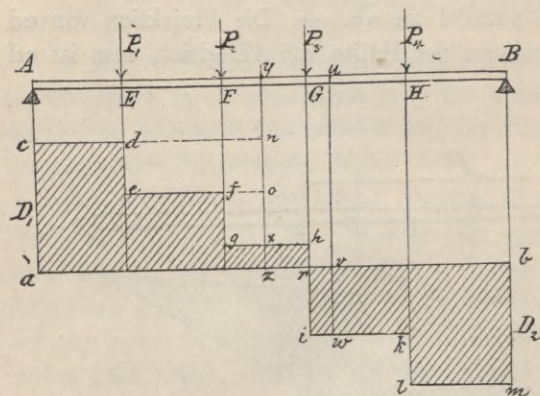


Fig. 120.

getrennt wird, leicht bestimmen. — Wir ziehen durch  $y$  die Vertikale  $yz$ , dann stellt die Strecke  $xz$ , welche zwischen der Belastungslinie und  $ab$  liegt, offenbar die gesuchte Transversalkraft:  $D_1 - P_1 - P_2 = ac - de - fg$  dar.

Das Biegemoment der auf  $Ay$  wirkenden Kräfte wird dargestellt durch den Inhalt der Fläche  $acdefgxyz$ . — Verlängert man nämlich  $cd$  bis  $n$  und  $ef$  bis  $o$ , so ist das Moment von  $D_1$  in Bezug auf  $y$  gleich  $D_1 \cdot Ay = ac \cdot az$ , d. h. gleich dem Inhalt des Rechtecks  $acnz$ . Ebenso sind die Momente von  $P_1$  und  $P_2$  in Bezug auf  $y$  den Rechtecken  $deon$  und  $fgxo$  gleich. — Subtrahiert man die beiden letzten Rechtecke von dem ersten, so ergibt sich die obige Behauptung.

Bewegt sich der Querschnitt  $y$  längs der Spannweite  $AB$ , so ergibt sich, dass die Transversalkraft von einem Belastungspunkte bis zum nächstfolgenden konstant bleibt. — In jedem dieser Punkte erleidet sie eine Änderung, welche der in diesem Punkte wirkenden Last gleich ist. — Überschreitet  $y$  die Stelle, in welcher die Belastungslinie die Spannweite  $ab$  durchschneidet, so kehrt die Transversalkraft ihre Richtung um.

Das Biegemoment oder die dasselbe darstellende Fläche wächst anfänglich, wenn der Querschnitt  $y$  von  $A$  anfangend sich längs der Spannweite bewegt. — Erreicht  $y$  die Stelle  $G$ , welche senkrecht über dem Schnittpunkt  $r$  der Belastungslinie mit  $ab$  liegt, so hat das Biegemoment seinen grössten Wert erlangt. — Für einen Querschnitt  $y$ ,

welcher z. B. zwischen G und H liegt, wird das Biegemoment durch die Differenz der Flächen  $acdefgh$  und irw dargestellt. — Dieses Moment ist demnach kleiner als das Moment in dem Querschnitt G.

Es ergibt sich hieraus:

Das Biegemoment erreicht bei einem Träger, welcher nur Einzellasten zu tragen hat, in demjenigen Querschnitt seinen grössten Wert, in welchem die Transversalkraft ihren Sinn ändert.

**6. Gleichförmig verteilte Last.** Bezeichnen wir die Länge des Trägers AB (Fig. 121) mit  $l$  und die auf demselben gleichförmig verteilte Last mit  $P$ , so beträgt die Belastung pro Längeneinheit  $\frac{P}{l}$ . — Auf dem durch den

Querschnitt  $y$  abgeschnittenen Trägerteil  $Ay$ , dessen Länge gleich  $x$  sei, ruht demnach die Last  $\frac{Px}{l}$ . — Diese lässt

sich leicht graphisch darstellen.

— Wir machen  $ce$  gleich und parallel AB, so dass  $c$  und  $e$

in den durch A und B gehenden Vertikalen liegen, und tragen senkrecht zu  $ce$  die Strecke  $de = P$  an. — Nun ziehen wir die Gerade  $cd$  und legen durch  $y$  die Vertikale  $yz$ , alsdann wird die auf  $Ay$  ruhende Last durch die zwischen  $ce$  und  $cd$  liegende Ordinate  $wz$  dargestellt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $cde$  und  $czw$  folgt nämlich:

$$wz : de = cw : ce$$

$$\text{oder } wz : P = x : l$$

$$\text{folglich } wz = \frac{Px}{l}.$$

Das Moment der auf  $Ay$  ruhenden Last in Bezug auf  $y$  ist, weil diese in der Mitte von  $Ay$  angreift, gleich  $wz \cdot \frac{x}{2}$  und wird demnach durch den Inhalt des Dreiecks  $czw$  dargestellt.

Die Transversalkraft. Die auf den Trägerteil  $Ay$  wirkende Transversalkraft besteht aus der Auflagerreaktion in A, vermindert um die Belastung, welche auf  $Ay$  ruht. — Sind daher in jedem Endpunkte der Spannweite  $ab$  die Auflagerreaktionen durch die zu  $ab$  senkrechten Geraden  $ac$  und  $bd$  dargestellt (in unserem Falle ist  $ac = bd$ ), so ziehen wir

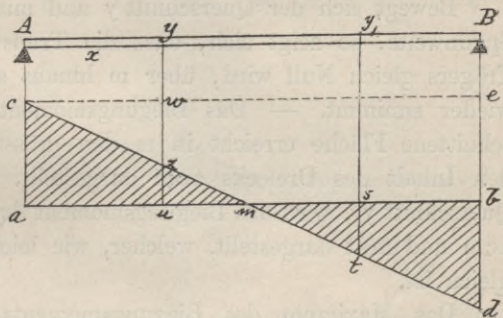


Fig. 121.



noch die Gerade  $cd$ . Die Ordinate  $uz$ , welche senkrecht unter  $y$  liegt, ist die gesuchte Transversalkraft. — Es ist nämlich  $uw = ac$  gleich der Auflagerreaktion in A, und  $wz$  ist nach dem vorigen der auf Ay ruhenden Last gleich.

Das Biegemoment. In Bezug auf den Querschnitt  $y$  ist das Moment der Auflagerreaktion in A gleich  $ca \cdot x$ . — Dasselbe wird demnach durch den Inhalt des Rechtecks  $acwu$  dargestellt. — Das Moment der auf Ay ruhenden Belastung, welche in entgegengesetztem Sinne wirkt, ist nach dem vorigen dem Inhalt des Dreiecks  $cwz$  gleich, folglich wird das Biegemoment in Bezug auf  $y$  durch den Inhalt des Trapezes  $aczu$  dargestellt.

Bewegt sich der Querschnitt  $y$  und mit ihm die Ordinate  $uz$  längs der Spannweite, so zeigt sich, dass die Transversalkraft in der Mitte  $m$  des Trägers gleich Null wird, über  $m$  hinaus aber in entgegengesetztem Sinne wieder zunimmt. — Das Biegemoment, nämlich die durch  $uz$  abgeschnittene Fläche erreicht in  $m$  den grössten Wert, und wird hier durch den Inhalt des Dreiecks  $acm$  dargestellt. — Über  $m$  hinaus, z. B. im Querschnitt  $y_1$ , wird das Biegemoment durch den Unterschied der Flächen  $acm$  und  $mst$  dargestellt, welcher, wie leicht ersichtlich, dem Trapez  $bdts$  gleich ist.

Das Maximum des Biegemoments tritt demnach in demjenigen Querschnitt auf, für welchen die Transversalkraft ihren Sinn ändert. — Verläuft die Transversalkraft stetig, so ist dies der Fall, wenn dieselbe durch den Wert Null geht.

### 7. Beispiele.

a) Auf dem Träger AB ruht eine auf der Strecke CD gleichförmig verteilte Last P. (Fig. 122.)

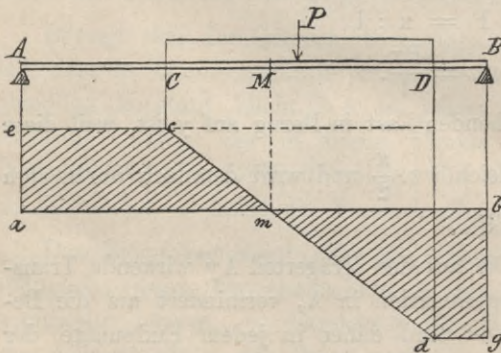


Fig. 122.

Wir zerlegen mit Hilfe eines Seilpolygons (oder auch nach II 3, a) die Last P, welche in der Mitte von CD angreift, in die beiden in A und B wirkenden Auflagerdrücke. — Die den letzteren gleichen Auflagerreaktionen tragen wir nach  $ae$  und  $bg$  senkrecht zu  $ab$  auf. — ( $ab$  ist wieder gleich und parallel der Spannweite.) — Ziehen wir jetzt  $ec$  und  $dg$  parallel

ab bis zu den beiden Vertikalen durch C und D, und verbinden c mit d, so erhalten wir die Belastungslinie ecdg, wodurch nun die Transversalkräfte und Biegemomente für alle Querschnitte dargestellt sind. — Das grösste Biegemoment tritt in dem senkrecht über dem Schnittpunkte m liegenden Querschnitt M auf.

b) Es seien über mehrere voneinander getrennte Abschnitte des Trägers gleichförmig verteilte Lasten vorhanden. (Fig. 123.)

Nachdem wieder mit Hilfe eines Seilpolygons die Auflagerreaktionen bestimmt und durch die zu der Spannweite ab senkrechten Strecken ae und bf dargestellt sind, ziehen wir durch die Punkte C und D die Vertikalen Cc und Dd, machen  $cc_1 = P_1$  und ziehen cd parallel zu ab. — Nun zeichnen wir die Belastungslinie ecdf, wodurch sämtliche Transversalkräfte und

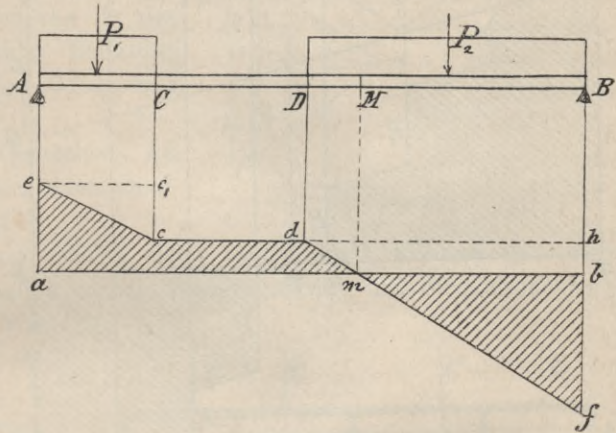


Fig. 123.

Biegemomente bestimmt sind. — Der gefährliche Querschnitt M liegt senkrecht über dem Schnittpunkt m.

In Fig. 124 ist noch ein Fall dargestellt; zwei über CD und EF gleichförmig verteilte Lasten  $P_1$  und  $P_2$  und eine in G wirkende Einzellast Q ruhen auf dem Träger AB. — Die Zeichnung der Belastungslinie bedarf jetzt keiner weiteren Erläuterung.

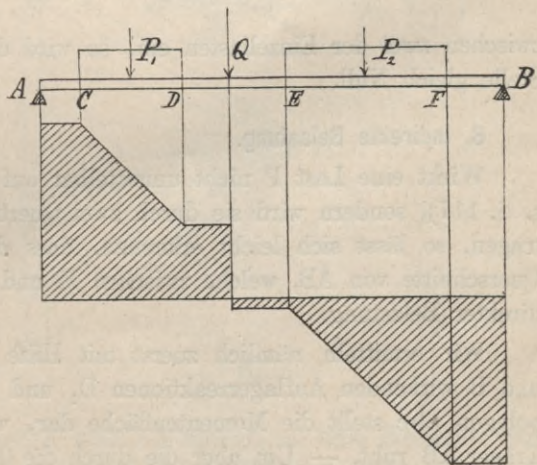


Fig. 124.

c) Ist endlich ausser einer Reihe von Einzellasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  noch eine auf der ganzen Länge des Trägers gleichförmig verteilte Last L vorhanden, so erhält



die Belastungslinie die in Fig. 125 dargestellte Form. — Hier sind die zwischen den vertikalen Seiten liegenden Strecken parallel zu EG, (wenn

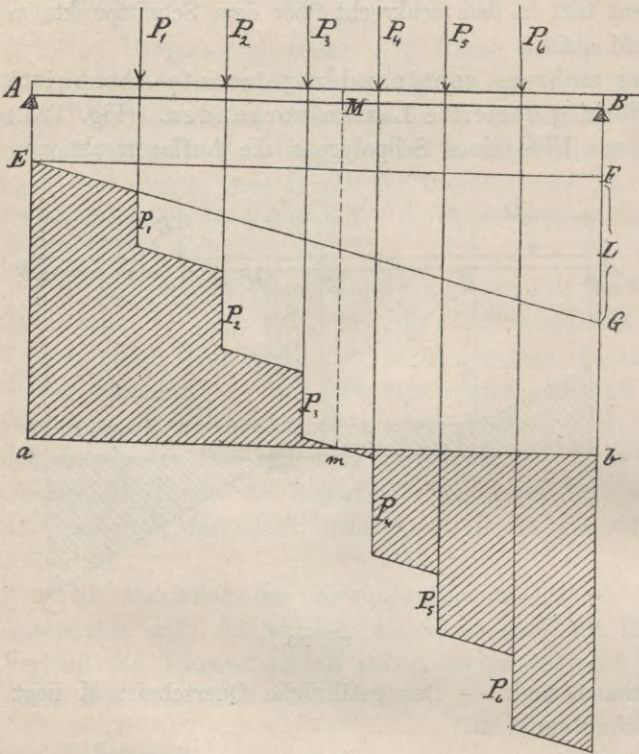


Fig. 125.

EF parallel zu AB und die Vertikale FG gleich L ist).

— Wir erkennen daraus, dass die Transversalkraft zwischen je zwei Einzellasten stetig verläuft; unter jeder der letzteren findet aber eine Unterbrechung der Kontinuität statt.

Der gefährliche Querschnitt M liegt senkrecht über dem Punkte m, in welchem die Belastungslinie die Spannweite trifft. — An dieser Stelle ändert die Transversalkraft ihr Vorzeichen. — Tritt dieser Fall

zwischen zwei der Einzellasten ein, so wird die Transversalkraft an dieser Stelle gleich Null.

### 8. Indirekte Belastung.

Wirkt eine Last P nicht unmittelbar auf einen Träger AB (Fig. 126 s. S. 117), sondern wird sie durch zwei Querträger M und N auf AB übertragen, so lässt sich leicht erkennen, dass das Biegemoment für alle Querschnitte von AB, welche zwischen M und N liegen, kleiner ist als bei direkter Belastung.

Wir ermitteln nämlich zuerst mit Hilfe eines Seilpolygons die in A und B wirkenden Auflagerreaktionen  $D_1$  und  $D_2$ . — Das zugehörige Seilpolygon abc stellt die Momentenfläche dar, wenn P unmittelbar auf dem Träger AB ruht. — Um aber die durch die Querträger vermittelte Wirkung von P zu erkennen, zerlegen wir P in zwei auf M und N wirkende parallele

Seitenkräfte  $Q_1$  und  $Q_2$ . — Die letzteren ergeben sich sofort, wenn man die Punkte  $m$  und  $n$ , in welchen die Richtungslinien von  $Q_1$  und  $Q_2$  die Seilpolygonseiten  $ac$  und  $bc$  treffen, durch eine Gerade verbindet und vom Pol  $C$  aus die Gerade  $Cx$  parallel zu  $mn$  zieht; es ist alsdann  $\alpha x = Q_1$  und  $\beta x = Q_2$ . — Das Viereck  $amnb$  ist jetzt ein Seilpolygon der Kräfte  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $D_1$ ,  $D_2$ ; dasselbe stellt demnach die Momentenfläche für den Träger  $AB$  bei indirekter Belastung dar, wodurch die obige Behauptung bewiesen ist.

Der gefährliche Querschnitt  $AB$  liegt in diesem Falle unter einem Querträger, in Fig. 126 bei  $N$ .

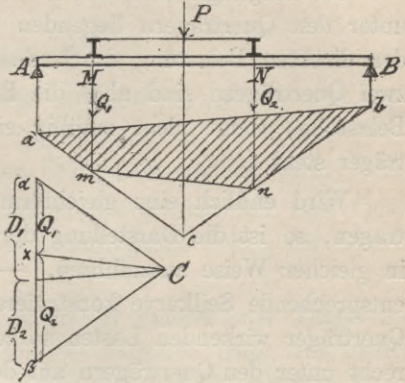


Fig. 126.

Wenn die Wirkung beliebig vieler Lasten durch mehrere Querträger vermittelt wird, so erhalten wir die Transversalkräfte und Biegungsmomente auf gleiche Weise. — Wir

konstruieren zunächst ein Seilpolygon  $aa_1a_2a_3 \dots b$  (Fig. 127) der gegebenen Lasten, und zeichnen in dieses ein zweites Seilpolygon  $a\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots b$ , dessen Ecken auf den Seiten des ersteren und senkrecht unter den Querträgern liegen. — Dieses Seilpolygon stellt die Momentenfläche für den Träger  $AB$  dar.

Es wird nämlich durch  $O1' \parallel a\alpha_1$  die Last  $P_1$  in zwei Seitenkräfte  $11'$  und  $1'2$  zerlegt, welche in  $A$  und  $C$  wirken. — Ebenso wird  $P_2$ , welche in dem Feld  $CD$  steht, durch die Gerade  $O2 \parallel \alpha_1\alpha_2$  in zwei

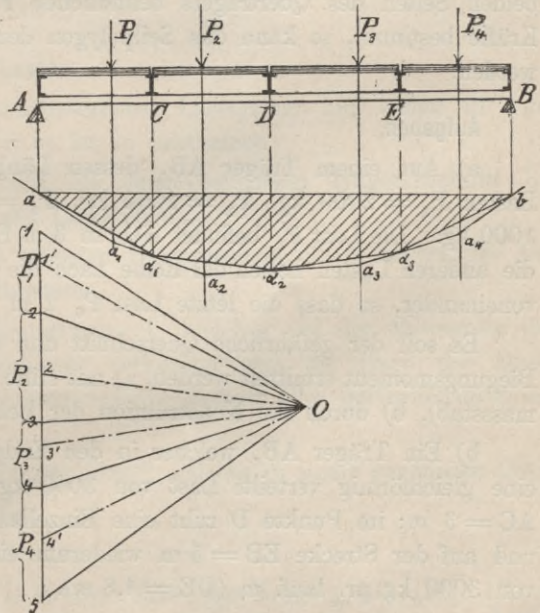


Fig. 127.

auf  $C$  und  $D$  wirkende Kräfte  $22'$  und  $2'3$  zerlegt, so dass die ganze auf  $C$  ruhende Last  $= 1'2 + 22' = 1'2'$  ist, u. s. f. — Hiernach ist  $a\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots b$



das Seilpolygon der auf die Querträger wirkenden Lasten, welche nun unmittelbar auf AB ruhen.

Die Biegemomente des Trägers AB haben, wie ersichtlich, in den unter den Querträgern liegenden Querschnitten dieselben Werte, wie bei der direkten Belastung durch das gegebene Lastsystem. — Zwischen je zwei Querträgern sind aber die Biegemomente kleiner als bei direkter Belastung, wenn nicht zufällig eine der Lasten gerade auf einem Querträger steht.

Wird endlich eine gleichförmig verteilte Last durch Querträger übertragen, so ist die Darstellung der Transversalkräfte und Biegemomente in gleicher Weise auszuführen. — Man kann die der direkten Belastung entsprechende Seilkurve konstruieren und dann das Seilpolygon der auf die Querträger wirkenden Lasten so zeichnen, dass die Ecken desselben senkrecht unter den Querträgern auf der Seilkurve liegen. — Dieses Seilpolygon stellt die gesuchte Momentenfläche dar.

Zweckmässiger ist es jedoch, zuerst die Grössen der auf die Querträger wirkenden Kräfte zu ermitteln. — Hierbei setzen wir voraus, dass auf jeden Querträger die Hälften der beiden Lasten wirken, welche auf den zu beiden Seiten des Querträgers befindlichen Feldern liegen. — Sind diese Kräfte bestimmt, so kann das Seilpolygon derselben unmittelbar gezeichnet werden.

### Aufgaben.

a) Auf einem Träger AB, dessen Länge 14 m beträgt, ruhen die Lasten  $P_1 = 2000$  kg,  $P_2 = 2000$  kg,  $P_3 = 1500$  kg,  $P_4 = P_5 = P_6 = 1000$  kg. Die Last  $P_1$  befindet sich in 3 m Entfernung vom Stützpunkte A, die anderen Lasten haben der Reihe nach die Abstände 2, 2, 2, 1,5, 1,5 m voneinander, so dass die letzte Last  $P_6$  2 m von B entfernt ist.

Es soll der gefährliche Querschnitt und das in demselben herrschende Biegemoment ermittelt werden, a) mit Hilfe eines Seilpolygons (Momentenmassstab), b) durch die Konstruktion der Belastungslinie.

b) Ein Träger AB, welcher in den Endpunkten unterstützt ist, trägt eine gleichförmig verteilte Last von 3000 kg pr. lauf. m auf der Strecke  $AC = 3$  m; im Punkte D ruht eine Einzellast von 4000 kg ( $CD = 1,8$  m) und auf der Strecke  $EB = 5$  m wiederum eine gleichförmig verteilte Last von 3000 kg pr. lauf. m ( $DE = 1,8$  m).

Es soll wie im vorigen das grösste Biegemoment und der gefährliche Querschnitt ermittelt werden.

c) Ein Wasserkasten soll von zwei eisernen Stangen getragen werden. — Das Gewicht des gefüllten Kastens ist 1200 kg. — Derselbe ruht mit

einer Länge von 0,9 m auf jeder Stange; seine Entfernung von dem einen Stützpunkte einer Stange ist 0,2 m, von dem andern 0,8 m.

Es soll das grösste Biegemoment und der gefährliche Querschnitt ermittelt werden, wenn

1. der Kasten die oben angegebene Lage hat;
2. wenn der Kasten von beiden Endpunkten gleich weit entfernt ist;
3. wenn der Kasten bis an einen Stützpunkt gerückt wird.
4. Wenn in den drei vorigen Fällen der Kasten auf zwei Querträgern ruht, welche zwei gegenüberliegende Seiten der Grundfläche unterstützen.

d) Ein in den beiden Endpunkten A und B unterstützter Träger hat ein Eigengewicht von 500 kg pr. lauf. m. — Derselbe trägt eine gleichförmig verteilte Last von 1000 kg pr. lauf. m und 5 Einzellasten  $P_1 = 2000$  kg,  $P_2 = 1000$  kg,  $P_3 = 1500$  kg,  $P_4 = 1000$  kg,  $P_5 = 500$  kg. Die Abstände der Lasten von A sind der Reihe nach 4 m, 5,5 m, 8 m, 9,5 m, 11 m. — Die Länge des ganzen Trägers ist 14 m. — Wo liegt der gefährliche Querschnitt und wie gross ist das Biegemoment in demselben?

### 9. Wirkung beweglicher Lasten.

a) Bewegt sich ein unveränderliches Lastsystem auf einem in zwei Punkten unterstützten Träger, so ist zu bestimmen:

- α) Die Transversalkraft für einen beliebigen Trägerabschnitt bei beliebiger Lage des Lastsystems.
- β) Der Verlauf des grössten Biegemoments während der Bewegung des Lastsystems.
- γ) Das grösste Biegemoment, welches bei der Bewegung des Lastsystems überhaupt vorkommt und die Lage des Querschnittes, in welchem dasselbe auftritt (der gefährlichste Querschnitt).
- δ) Das grösste Biegemoment, welches in einem gegebenen Querschnitt vorkommt.

b) Bewegliche Einzellast.

Nehmen wir die Last  $L$  in der Mitte des Trägers AB (Fig. 128 s. S. 120) an, und zeichnen wir für diese Lage das Seilpolygon  $amb$ , in welchem die erste Seite  $am$  ( $\parallel CD$ ) parallel zur Längsachse des Trägers angenommen wird, ferner  $bm \parallel CE$  ( $DE = L$ ), dann können wir bei der augenblicklichen Stellung der Last das Biegemoment für jeden Quer-



schnitt nach VIII, 1, b) bestimmen. Das grösste Biegemoment findet im Querschnitt M statt und wird durch die Ordinate  $sm$  dargestellt. — Lassen wir die Last  $L$  in einem andern Querschnitte, z. B. N, angreifen und zeichnen wir für diese Lage

abermals das Seilpolygon  $anb_1$  (wo  $an \parallel CD$  und  $nb_1 \parallel CE$  ist), so stellt die durch N gehende Vertikale  $on$  das grösste Biegemoment dar, welches bei der jetzigen Lage der Last  $L$  auftritt. — Denken wir uns die grössten Momente sämtlich auf diese Weise dargestellt, so bilden die Endpunkte  $s, o, \dots$  eine Kurve (Parabel), welche ein anschauliches Bild von dem Verlaufe des grössten Biegemoments giebt.

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass das grösste Biegemoment immer in dem Querschnitte auftritt, über welchem die Last  $L$  steht. — Der gefährlichste Querschnitt liegt in der Mitte des Trägers.

Die Transversalkräfte findet man sehr leicht. — Für einen Trägerabschnitt, welcher z. B. links von N liegt (vorausgesetzt, dass die Last  $L$  augenblicklich in N angreift), ist die Transversalkraft gleich der in A stattfindenden Auflagerreaktion. — Die letztere, nämlich  $dD$ , wird durch die Gerade  $Cd$ , welche der Schlusslinie  $ab_1$  des zugehörigen Seilpolygons parallel ist, auf der Kräftelinie  $DE$  abgeschnitten.

c) Ruhende, gleichförmig verteilte Last und eine bewegliche Einzellast.

Auf dem Träger  $AB$  (Fig. 129 s. S. 121) ruhe die gleichförmig verteilte Last  $L$ , und die Einzellast  $P$  bewege sich auf demselben. — Für irgend eine Lage der Last  $P$ , wenn sie z. B. im Querschnitte  $x_1$  angreift, zeichnen wir die Belastungslinie  $1234$  nach VIII, 7, c). (Es ist alsdann

$ac = bd = \frac{L}{2}$ ;  $ce = df = P$ ;  $12 \parallel 34 \parallel cd$ ). — Bei dieser Stellung der Last  $P$  liegt der gefährliche Querschnitt  $x$  senkrecht über dem Durchschnitt  $y$

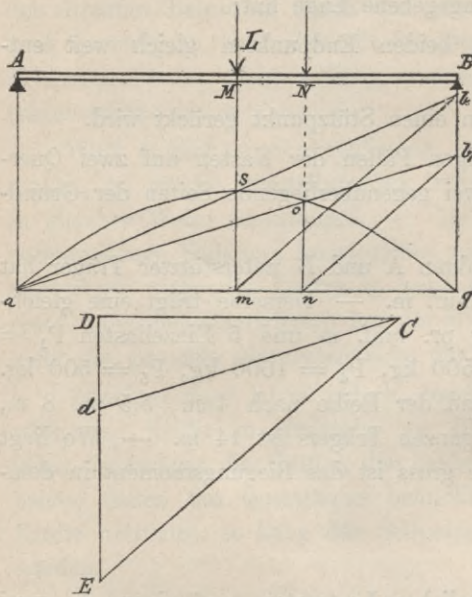


Fig. 128.

der Belastungslinie mit der Spannweite  $ab$  und die augenblicklich wirkenden Transversalkräfte und Biegemomente lassen sich, wie schon früher gezeigt, mit Hilfe der Belastungslinie bestimmen. — Wird nun  $P$  auf dem Träger verschoben, so bewegt sich, wie leicht ersichtlich, die Belastungslinie mit  $P$  derart, dass die Endpunkte der Geraden  $23$ , welche die Grösse von  $P$  darstellt, die Geraden  $ed$  und  $cf$  durchlaufen, während  $12$  und  $34$  ihrer ursprünglichen Lage parallel bleiben.

Geht also die Last  $P$  vom Stützpunkte  $A$  nach  $B$ , so wird der gefährliche Querschnitt fortwährend seine Lage ändern. — Steht  $P$  über  $A$ , so fällt die Gerade  $34$  der Belastungslinie mit  $cd$  zusammen, und der gefährliche Querschnitt liegt alsdann über der Mitte  $m$  der Spannweite. — Bewegt sich  $P$  bis zum Querschnitt  $x_1$ , so rückt der gefährliche Querschnitt nach  $x$ , und wenn  $P$  den senkrecht über  $g$  liegenden Punkt  $x_2$  erreicht hat, so liegt der gefährliche Querschnitt zum ersten Male unter der Last  $P$ .

Von hier an begleitet der gefährliche Querschnitt die Last  $P$  bis zu dem senkrecht über  $h$  liegenden Punkte  $x_3$ , und beim weiteren Fortschreiten der Last nähert sich derselbe wieder der Mitte des Trägers, welche er erreicht, wenn  $P$  in  $B$  angelangt ist. — Der gefährliche Querschnitt liegt hiernach immer im Bereich der Strecke  $x_2x_3$ . — Es sei  $Ax_2 = ag = z$ ;  $ab = l$ , dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $acg$  und  $bfg$ :

$$z : l - z = \frac{L}{2} : \frac{L}{2} + P.$$

Hieraus ergibt sich:

$$z = \frac{Ll}{2(L + P)}.$$

Das Biegemoment erreicht seinen grössten Wert, wenn  $P$  über der Mitte des Trägers steht. — Es ist dies leicht zu erkennen, wenn man die Seilkurve  $a_1s_1b_1$  der gleichförmig verteilten Last  $L$  und die Kurve der Maximalmomente, welche von  $P$  herrühren, nämlich  $a_1s_1b_1$  nach (b) zeichnet. — Für jede Stellung der beweglichen Last  $P$  stellt die unter  $P$

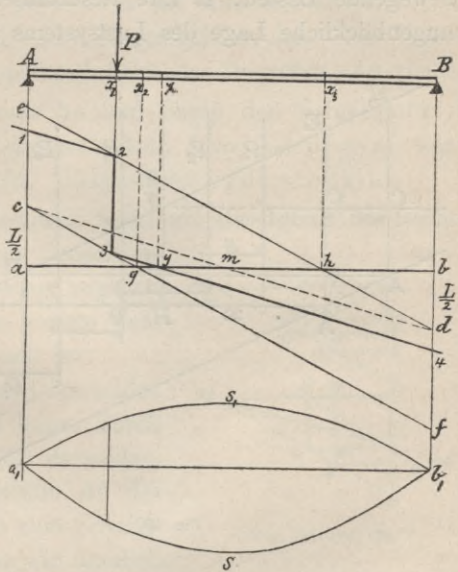


Fig. 129.



liegende Vertikale, welche von beiden Kurven begrenzt wird, das Biegemoment vor, welches also seinen grössten Wert erreicht, wenn P die Mitte des Trägers erreicht hat.

d) Bewegliches System von Einzellasten.\*)

Es seien  $P_1, P_2, P_3 \dots$  (Fig. 130) mehrere auf dem Träger AB sich bewegende Lasten, R ihre Resultante. Um die Auflagerdrücke für die augenblickliche Lage des Lastsystems zu bestimmen, ziehen wir durch den

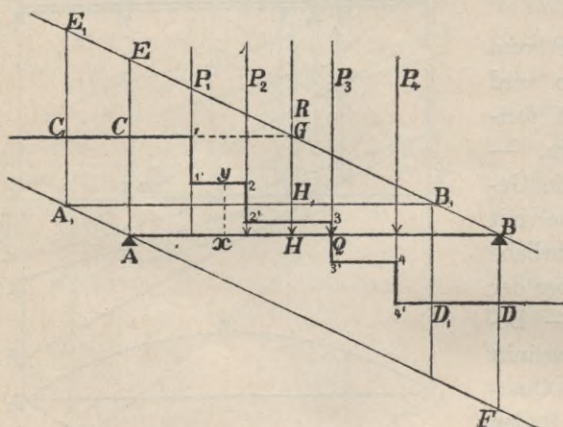


Fig. 130.

Stützpunkt A eine Vertikale und tragen auf derselben die Strecke  $AE = R$  ab. Die Gerade BE bestimmt alsdann auf R die Strecke GH, welche nach II, 3, a) den Auflagerdruck in A darstellt. Durch  $CG \parallel AB$  übertragen wir GH nach AC.

Nun zeichnen wir von C anfangend die Belastungslinie  $C11'22' \dots D$  für die augenblickliche Laststellung, in welcher

$11', 22', 33' \dots$  die Grössen der gegebenen Lasten, AC und BD die Auflagerreaktionen in den Stützpunkten A und B darstellen.

Das Biegemoment für irgend einen Querschnitt x wird durch die über dem Abschnitte Ax stehende Fläche  $AC11'yx$  dargestellt.

Der gefährliche Querschnitt liegt im Schnittpunkte Q der Belastungslinie mit der Spannweite AB.

Um für eine andere Lage des Lastsystems den gefährlichen Querschnitt und das grösste Biegemoment zu ermitteln, verschieben wir die Spannweite unter den Lasten. Es geschieht dies am zweckmässigsten, wenn AB parallel mit sich selbst so fortbewegt wird, dass die Endpunkte A und B die beiden Geraden AF und BE (wo  $AF \parallel BE$ ) durchlaufen. Die Richtungslinien der einzelnen Lasten bezeichnen alsdann auf jeder neuen Lage der Spannweite eine andere Lage des beweglichen Lastsystems.

Verlegen wir AB nach  $A_1B_1$ , so greift die Resultante R in  $H_1$  an. Die Gerade  $B_1E_1$  oder  $BE$  schneidet auf R die Strecke  $H_1G = A_1C_1$  ab, welche offenbar den Auflagerdruck in  $A_1$  darstellt. Für diese neue Lage

\*) S. Abhandlung d. Verfassers im „Civilingenieur“ XXXI. Band, 7. Heft.

der Spannweite bleibt demnach die ganze Belastungslinie dieselbe, nur beginnt sie in  $C_1$  und endet in  $D_1$ .

Hilfssatz.

Es sei  $bdef$  (Fig. 131) ein Rechteck, welches dem bei  $b$  rechtwinkligen Dreiecke  $abc$  derart eingeschrieben ist, dass  $bd = \frac{1}{2}ab$ ,  $bf = \frac{1}{2}bc$  ist. Unter dieser Voraussetzung ist  $bdef$  grösser als ein anderes Rechteck, z. B.  $bghi$ , welches ebenfalls dem Dreiecke  $abc$  eingeschrieben ist. Der Unterschied beider Rechtecke ist dem doppelten Inhalte des Dreieckes ehn gleich.

Ziehen wir nämlich die Diagonale  $be$  und durch den Schnittpunkt  $l$  die Gerade  $km$  parallel  $ab$ , so ist  $bgnf = bdkm$ ; ferner ist  $bf = cf$ , folglich auch  $nl = nh$  und  $fnhi = lmf n$ . Folglich ist  $bghi = bdklnf$ .

Hiernach übertrifft  $bdef$  das Rechteck  $bghi$  um den Inhalt des Rechteckes  $kln e$ . Das letztere ist offenbar doppelt so gross wie Dreieck  $ehn$ . Es folgt hieraus zugleich der bekannte Satz, dass  $bdef$  das grösste dem Dreiecke  $abc$  eingeschriebene Rechteck ist.

Für unsere Zwecke lässt sich der Unterschied der Rechtecke  $bdef$  und  $bghi$  noch besser durch den Inhalt des Dreieckes  $fit$  (Fig. 132) darstellen, welches entsteht, wenn die Mittellinie  $af$  des Dreieckes  $abc$  und die Gerade  $hi$  bis zum Schnittpunkte  $t$  verlängert werden. Ziehen wir nämlich durch  $d$  und  $f$  die Gerade  $do$ , so ist  $io = ot$  (weil  $ad = bd$ ); ferner ist  $\triangle ifo \cong \triangle ehn$  ( $do \parallel ac$ ), folglich  $\triangle fit = 2 \triangle ehn$ .

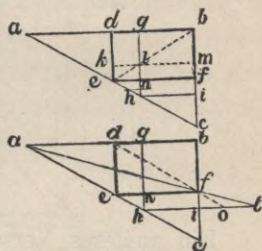


Fig. 131 und 132.

Der gefährliche Querschnitt. — Ist  $C11'22' \dots D$  (Fig. 133 s. S. 124) die Belastungslinie des gegebenen Lastsystemes und haben  $BE$  und  $AF$  dieselbe Bedeutung wie in Fig. 130, so halbieren wir  $AC$  und  $BD$  in  $M$  und  $N$ . Durch den Punkt  $Q_1$ , in welchem die Gerade  $MN$  die Belastungslinie trifft, legen wir die Spannweite  $A_1B_1$ , dann bezeichnet  $Q_1$  auf  $A_1B_1$  die Stelle des gefährlichsten Querschnittes, und die Richtungslinien der einzelnen Lasten geben auf  $A_1B_1$  die ungünstigste Laststellung an.

Zum Beweise verlängern wir  $33'$ , welche von  $MN$  in  $Q_1$  getroffen wird. Hierdurch entsteht das Dreieck  $Oqr$ . Weil  $BF = AE = R = DS$ , so ist  $N$  die Mitte von  $SF$ , und  $MN$  also Mittellinie des Dreieckes  $OFS$ . Folglich halbiert  $MN$  auch  $qr$  in  $Q_1$ .

Nun ist das Biegemoment in  $Q_1$  gleich  $A_1a_1qQ_1 = 11'22'3q$ . Vergleichen wir hiermit das Biegemoment in  $Q$ , welches bei der ersten Lage der Spannweite  $AB$  das grösste war, so ist dasselbe gleich  $ACqQ = 11'22'3q$ . Der Unterschied der beiden Biegemomente ist mithin dem Unterschiede der beiden Rechtecke  $A_1a_1qQ_1$  und  $ACqQ$  gleich. Diese



Rechtecke sind aber dem Dreiecke  $Oqr$  eingeschrieben, und da  $Q_1$  die Mitte von  $qr$  ist, so ist nach obigem Hilfssatz:

$$A_1 a_1 q Q_1 > ACqQ,$$

folglich ist das Biegemoment in  $Q_1$  grösser als in  $Q$ .

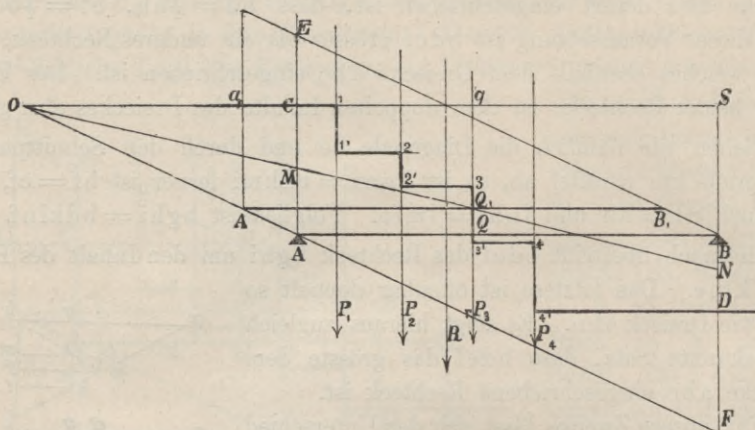


Fig. 133.

Ein weiteres Verschieben der Spannweite in der angegebenen Weise zeigt, dass das Biegemoment in  $Q_1$  das grösste überhaupt vorkommende ist.  $Q_1$  bezeichnet deshalb auf  $A_1B_1$  die Lage des gefährlichsten Querschnittes, wodurch nun auch die ungünstigste Stellung des gegebenen Lastsystemes gefunden ist.

Wird die Belastungslinie mehrere Male von  $MN$  getroffen (Fig. 134 s. S. 125), so treten mehrere Maxima des grössten Biegemomentes auf.  $Q_1$  sei der erste Schnittpunkt; durch ihn legen wir die Spannweite  $A_1B_1$ , dann wird das Biegemoment im gefährlichen Querschnitte dargestellt durch die Fläche  $A_1 a_1 1 Q_1$ . In der Lage  $A_2B_2$  ist das grösste Biegemoment für alle zwischen  $1'2$  liegenden Querschnitte dasselbe, und es wird jetzt durch die Fläche  $A_2 a_2 1 1'$  dargestellt. Nach unserem Hilfssatz ist  $A_2 a_2 1 1'$  um den Inhalt des Dreieckes  $Q_1 1' Q_2$  kleiner als  $A_1 a_1 1 Q_1$ . Es erleidet demnach das grösste Biegemoment beim Übergange von der Lage  $A_1B_1$  zur Lage  $A_2B_2$  eine Abnahme, welche durch den Inhalt des Dreieckes  $Q_1 1' Q_2$  dargestellt wird.

Verlegen wir die Spannweite nach  $A_3B_3$ , so dass sie durch den dritten Schnittpunkt  $Q_3$  geht, dann nimmt das Biegemoment im gefährlichen Querschnitte wieder zu. Denn das durch den Inhalt des Rechteckes  $A_2 a_2 1 1'$  dargestellte Moment können wir auch durch die Differenz  $A_2 a_2 c_2 2 - 1 1' 2 c_2$  ausdrücken; im Querschnitte  $Q_3$  ist das Moment gleich  $A_3 a_3 c_2 Q_3 - 1 1' 2 c_2$ .

Folglich ist der Unterschied der Momente in  $Q_3$  und  $Q_2$  dem Unterschiede der Rechtecke  $A_3 a_3 c_2 Q_3$  und  $A_2 a_2 c_2 2$  gleich. Beide Rechtecke sind dem Dreiecke  $O c_2 d_2$  eingeschrieben, und weil  $Q_3$  die Mitte von  $c_2 d_2$  ist, so ist das erstere das grössere. Der Unterschied der Rechtecke oder

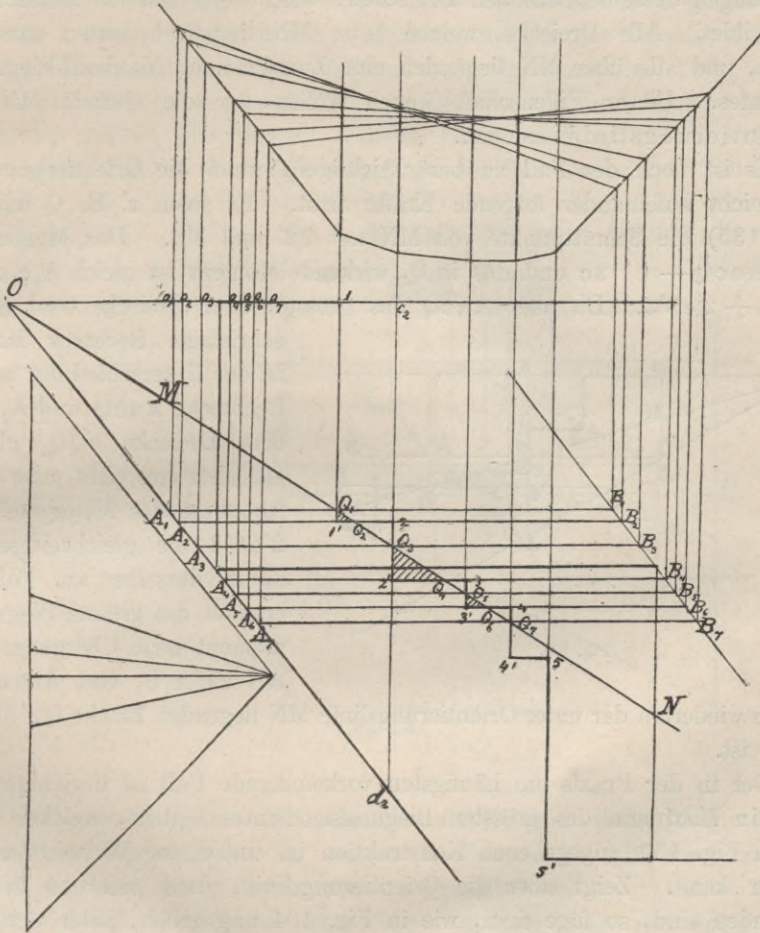


Fig. 134.

die Zunahme des grössten Biegemomentes ist nach unserem Hilfssatze dem Inhalte des Dreieckes  $Q_2 Q_3 2$  gleich.

Alle weiteren Änderungen des grössten Biegemomentes sind jetzt leicht zu erkennen. Wenn die Spannweite durch den folgenden Schnittpunkt  $Q_4$  gelegt wird, so nimmt das grösste Biegemoment um den Inhalt des Dreieckes  $Q_3 2' 4$  wieder ab; beim weiteren Verlegen nach  $Q_5$  um den Inhalt des Dreieckes  $Q_4 Q_5 3$  wieder zu u. s. f.



Das Verschieben der Spannweite in der angegebenen Reihenfolge entspricht einer Bewegung des Lastsystems von rechts nach links. Geht man von derjenigen Lage der Spannweite aus, bei welcher das erste Maximum des grössten Biegemomentes eintritt, so erkennt man die folgenden Änderungen desselben aus den Dreiecken, welche MN mit der Belastungslinie bildet. Alle Dreiecke, welche unter MN liegen, bedeuten eine Abnahme, und alle über MN liegenden eine Zunahme des Maximal-Biegemomentes. Dieser Eigenschaft wegen wollen wir die Gerade MN die „Orientierungslinie“ nennen.

Es ist noch der Fall zu berücksichtigen, wenn die Orientierungslinie zwei nicht aufeinander folgende Kräfte trifft. Es seien z. B.  $Q$  und  $Q_1$  (Fig. 135) die Schnittpunkte von MN mit  $2'2'$  und  $3'4'$ . Das Moment in  $Q$  ist  $AacQ - 1'1'2c$  und das in  $Q_1$  wirkende Moment ist gleich  $A_1a_1ce - 1'1'2c + 2'e3'3$ . Da aber  $AacQ$  das grösste, dem Dreiecke  $Ocd$  eingeschriebene Rechteck ist, so

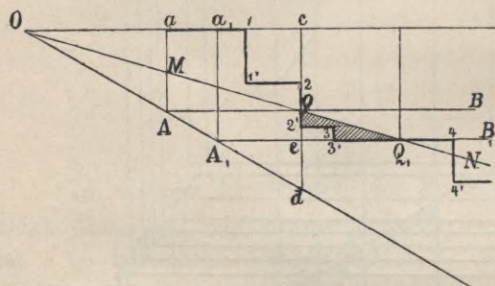


Fig. 135.

ist der Unterschied der beiden Rechtecke  $AacQ$  und  $A_1a_1ce$  dem Dreiecke  $eQQ_1$  gleich. Das letztere giebt also eine Abnahme des Momentes und  $2'e3'3$  die gleichzeitige Zunahme desselben an. Folglich erleidet das grösste Biegemoment beim Übergange von  $AB$  zu  $A_1B_1$  eine Abnahme,

welche wiederum der unter Orientierungslinie MN liegenden Fläche  $Q'2'3'3'Q_1$  gleich ist.

Der in der Praxis am häufigsten vorkommende Fall ist derjenige, wo nur ein Maximum des grössten Biegemomentes auftritt, welches nach der in Fig. 133 angegebenen Konstruktion in einfachster Weise bestimmt werden kann. Zeigt aber die Orientierungslinie, dass mehrere Maxima vorhanden sind, so füge man, wie in Fig. 134 angegeben, jeder der entsprechenden Lagen der Spannweite noch die Schlusslinie des Seilpolygons der gegebenen Lasten hinzu. Aus den senkrechten Strecken, welche innerhalb der zugehörigen Seilpolygone über den betreffenden Querschnitten liegen, kann man nach VIII, 2, b) erkennen, welches der gefundenen Maxima das grösste ist.

Die hier entwickelten Eigenschaften der Orientierungslinie zeigen, dass Maxima des Biegemomentes immer unter einer der Lasten liegen. Hat das Lastsystem eine Lage erreicht, bei welcher ein augenblickliches Minimum des grössten Biegemomentes eintritt, so ist das letztere nicht auf einen

einzigem Querschnitt beschränkt, sondern gilt für alle zwischen zwei bestimmten, aufeinanderfolgenden Lasten liegenden Querschnitte. In diesem Falle ist der gefährliche Querschnitt im Begriffe, von der einen Last zur nächstfolgenden überzugehen.

Besteht das bewegliche Lastsystem aus Einzellasten und gleichförmig verteilten Lasten, so können wir wiederum mit Hilfe der Orientierungslinie sämtliche Maxima des grössten Biegemomentes ermitteln.

In Fig. 136 ist ein solcher Fall dargestellt.  $P_1$  und  $P_3$  sind Einzellasten,  $P_2$  und  $P_4$  gleichförmig verteilte Lasten und  $a_1 11' 22' \dots D$  die Belastungslinie,  $A_1 B_1$  die zugehörige Lage der Spannweite.

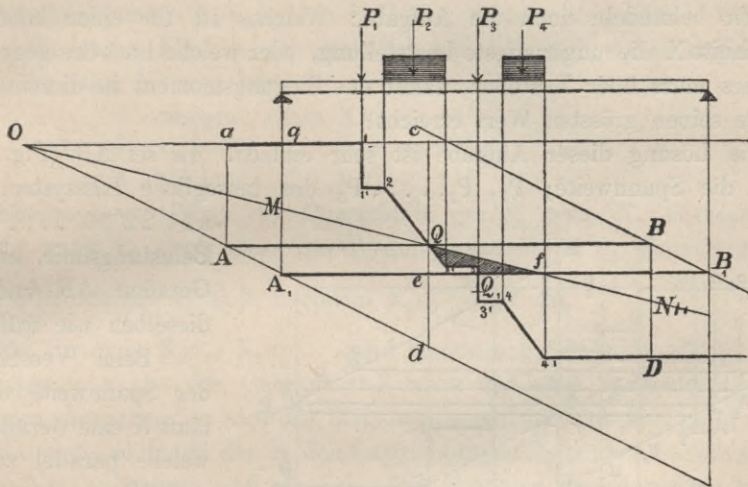


Fig. 136.

Die Orientierungslinie  $MN$  schneidet die Belastungslinie in  $Q$ . Durch diesen Punkt legen wir wie im vorigen die Spannweite  $AB$ , dann giebt  $Q$  auf  $AB$  die Lage des gefährlichsten Querschnittes an.

Wir finden nämlich bei irgend einer anderen Lage der Spannweite, z. B.  $A_1 B_1$ , für das im gefährlichen Querschnitt  $Q_1$  herrschende Biegemoment die Fläche

$$A_1 a_1 c e - 11' 2 Q c + Q 2' 3 Q_1 e.$$

Das Biegemoment in  $Q$  ist gleich

$$A a c Q - 11' 2 Q c.$$

Subtrahieren wir das erstere von dem letzteren, so kommt

$$A a c Q - A_1 a_1 c e - Q 2' 3 Q_1 e.$$

Die beiden ersten Glieder dieses Ausdruckes sind Rechtecke, welche dem Dreiecke  $Ocd$  eingeschrieben sind. Da aber  $A a c Q$  das grösste



Rechteck dieser Art ist ( $cQ = dQ$ ), so finden wir für den Unterschied beider den Inhalt des Dreiecks  $Oef$ . Mithin ist der Unterschied der Biegemomente in  $Q$  und  $Q_1$  gleich  $Qef - Q_2'3Q_1e$ .

Beim Verschieben der Spannweite  $AB$  nach  $A_1B_1$  nimmt hiernach das Biegemoment im gefährlichen Querschnitte um den Inhalt der Fläche  $Q_2'3Q_1f$  ab.

Es mag dies Beispiel genügen, um zu zeigen, dass die Orientierungslinie mit grösstem Vorteile bei allen derartigen Aufgaben benutzt werden kann.

Auch die Vorgänge in anderen Querschnitten sind mit Hilfe der bisher angewandten Verschiebung der Spannweite leicht zu erkennen.

Wir behandeln noch die Aufgabe: Welches ist für einen beliebigen Querschnitt  $X$  die ungünstigste Laststellung, oder welche Last des gegebenen Systemes muss über  $X$  stehen, damit das Biegemoment in diesem Querschnitte seinen grössten Wert erreicht?

Die Lösung dieser Aufgabe ist sehr einfach. Es sei  $AB$  (Fig. 137) wieder die Spannweite;  $P_1, P_2, \dots, P_5$  das bewegliche Lastsystem und

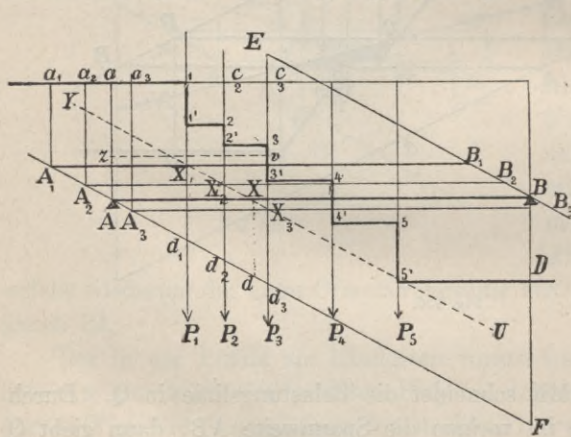


Fig. 137.

a1'2'3'3'...D die Belastungslinie, und die Geraden  $AF$  und  $BE$  dieselben wie früher.

Beim Verschieben der Spannweite durchläuft  $X$  eine Gerade  $YU$ , welche parallel zu  $AF$  und  $BE$  ist. Legen wir die Spannweite zuerst durch den Punkt  $X_1$ , in welchem die Richtungslinie der Last  $P_1$  die Gerade  $YU$  trifft, so steht  $P_1$  über dem

gegebenen Querschnitte und das Moment in  $X_1$  wird dargestellt durch das Rechteck  $A_1a_11X_1$ . Bei der Lage  $A_2B_2$ , wo die folgende Last  $P_2$  über dem Querschnitte  $X_2$  steht, ist das Moment in dem letzteren gleich

$$A_2a_2c_2X_2 - 11'2c_2.$$

Die Rechtecke  $A_1a_11X_1$  und  $A_2a_2c_2X_2$  haben gleiche Grundlinien ( $A_1X_1 = A_2X_2$ ); folglich wird das erstere von dem letzteren übertroffen, um den Inhalt eines Rechteckes oder Parallelogrammes, dessen Grundlinie gleich  $A_1X_1$  und dessen Höhe dem Unterschiede der Höhen beider Rechtecke gleich ist. Ein solches Parallelogramm ist aber  $A_1A_2X_2X_1$ . Der

Inhalt desselben giebt demnach die Zunahme des Biegemomentes in dem Querschnitte X an, wenn derselbe von  $P_1$  zu  $P_2$  übergeht; zugleich wird aber das Moment noch um den Inhalt des Rechteckes  $11'2c_2$  vermindert.

Je nachdem also  $A_1A_2X_2X_1 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 11'2c_2$  ist, hat das Biegemoment beim Übergange von  $X_1$  zu  $X_2$  zugenommen, ist unverändert geblieben, oder hat abgenommen.

Verlängern wir die Richtungslinien der Lasten  $P_1$  und  $P_2$  bis  $d_1$  und  $d_2$ , so ist ersichtlich, dass die Parallelogramme  $X_1X_2d_2d_1$  und  $A_1A_2X_2X_1$  gleich gross sind. Zu- und Abnahme des Biegemomentes können deshalb auch durch die zwischen den beiden Parallelen  $1d_1$  und  $c_2d_2$  liegenden Parallelogramme  $X_1X_2d_2d_1$  und  $11'2c_2$  dargestellt werden. Weil nun die beiden letzten Flächen sich verhalten wie  $11'$  zu  $X_1d_1$ , so ergibt sich sofort, dass das Moment beim Übergange von  $X_1$  zu  $X_2$

zunimmt, wenn  $X_1d_1 > 11'$ ,  
 unverändert bleibt, „  $X_1d_1 = 11'$ ,  
 und abnimmt, „  $X_1d_1 < 11'$ .

Ebenso folgt: Wenn der Querschnitt von  $X_2$  nach  $X_3$  übergeht (wo derselbe unter  $P_3$  liegt), dass das Biegemoment in  $X_3$  alsdann grösser, gleich oder kleiner wird, je nachdem  $X_2d_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} c_22'$  ist.

Die Strecken  $X_1d_1$ ,  $X_2d_2$  . . . sind einander gleich, jede gleich  $Xd$ .

Lässt man also den Querschnitt X nach und nach von einer Last zur folgenden übergehen, so wird das Biegemoment in demselben im Wachsen begriffen sein, so lange die in den Lastrichtungen liegenden Vertikalen  $11'$ ,  $c_22'$ ,  $c_33'$  . . . kleiner sind als  $Xd$ . Die Abnahme des Momentes beginnt bei derjenigen Last, bei welcher die betreffende Vertikale zuerst grösser ist als  $Xd$ .

Um demnach direkt diejenige Last zu ermitteln, welche über X stehen muss, damit das Biegemoment in demselben vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, d. h. seinen grössten Wert erreicht, machen wir  $az = Xd$  und ziehen  $zv$  parallel AB. Diejenige der vertikalen Strecken der Belastungslinie, welche von  $zv$  getroffen wird, stellt die gesuchte Last dar.

Fällt  $zv$  mit einer der horizontalen Strecken der Belastungslinie zusammen, so ist es offenbar gleichgültig, welche der beiden an die letztere anstossenden Lasten über X gestellt wird.

Die soeben angegebene Konstruktion ist auch gültig, wenn das bewegliche Lastsystem ausser Einzellasten noch gleichförmig verteilte Lasten enthält. In Fig. 138 (s. S. 130) sind z. B.  $P_1$  und  $P_3$  Einzellasten,  $P_2$  und  $P_4$  gleichmässig verteilte Lasten. Um die ungünstigste Laststellung für den Querschnitt X zu ermitteln, tragen wir wieder die Vertikale  $Xd$  nach



az und ziehen zv parallel zur Spannweite, bis die Belastungslinie in v getroffen wird. Durch v ziehen wir die Vertikale  $c_1d_1$ , welche die Gerade YU, auf welcher X sich bei der Verschiebung der Spannweite bewegt, in  $X_1$  durchschneidet. Legen wir die Spannweite  $A_1B_1$  durch  $X_1$ , so bezeichnen die Lastrichtungen auf  $A_1B_1$  die ungünstigste Lage in Bezug auf den gegebenen Querschnitt.

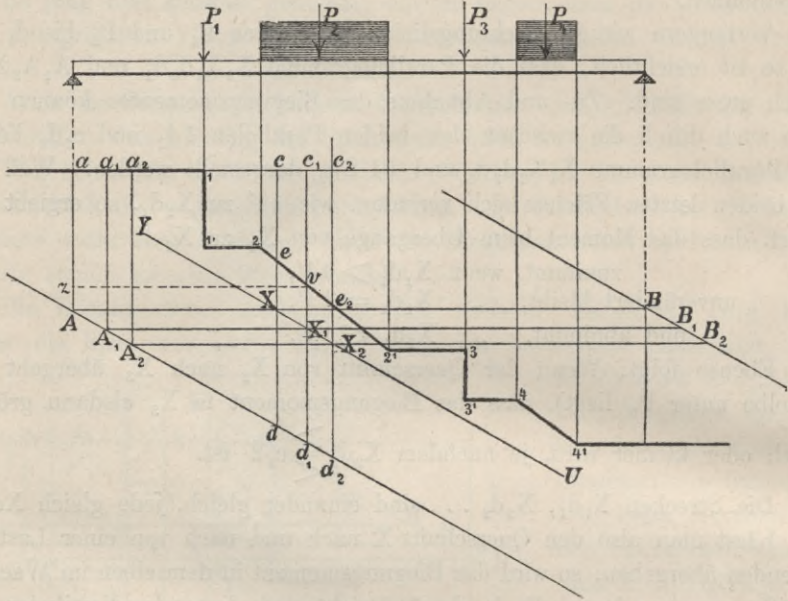


Fig. 138.

Zum Beweise nehmen wir oberhalb und unterhalb  $A_1B_1$  zwei andere Lagen der Spannweite, etwa  $AB$  und  $A_2B_2$  an. Beim Übergange des Querschnittes  $X$  zur Lage  $X_1$  nimmt das Biegemoment um  $Xdd_1X_1$  zu und gleichzeitig um  $cevc_1$  ab. Da  $X_1d_1 = c_1v$  und  $ce < X_1d_1$  ist, so ist die Zunahme grösser als die Abnahme; folglich ist das Moment in  $X_1$  grösser als in  $X$ . — Gehen wir ferner von der Lage  $X_1$  zu  $X_2$  über, so nimmt das Biegemoment um  $X_1d_1d_2X_2$  zu und um  $c_1ve_2c_2$  ab. Jetzt ist (wegen  $X_1d_1 = c_1v$  und  $c_2e_2 > X_2d_2$ ) die Abnahme grösser als die Zunahme, folglich ist das Moment in  $X_1$  auch grösser als in  $X_2$ . Das grösste Biegemoment des Querschnittes  $X$  tritt demnach in  $X_1$  auf.

e) Ruhende gleichförmig verteilte Last und ein bewegliches Lastsystem. Auch für diesen Fall lässt sich leicht eine Orientierungslinie zeichnen. Wir beweisen zuvor folgenden Hilfssatz.

Es seien  $abc$  und  $def$  (Fig. 139 s. S. 131) zwei ähnliche Dreiecke, deren Eckpunkte auf drei durch einen Punkt  $s$  gehenden Geraden liegen.

Die ähnlich liegenden Seiten der Dreiecke seien parallel und unter diesen noch  $ac$  und  $df$  parallel zu  $se$ . Dann ist

$$\text{Trapez } abed = \text{Trapez } befe.$$

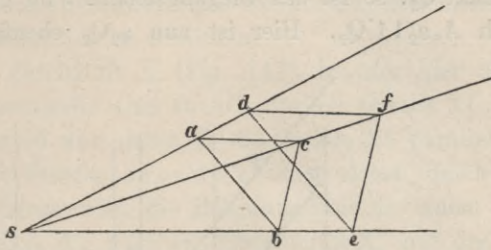


Fig. 139.

Nach den gemachten Voraussetzungen ist nämlich

$$\triangle des = \triangle fes,$$

$$\triangle abs = \triangle bcs.$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt sich die obige Behauptung.

Konstruktion der Orientierungslinie. Es sei  $AB$  (Fig. 140 s. S. 132) die Spannweite;  $a1'22' \dots b$  die Belastungslinie. Die vertikalen Strecken der letzteren stellen wiederum die Einzellasten dar; die übrigen Seiten sind parallel zu  $CD$ , wenn  $AC = BD =$  der Hälfte der gleichförmig verteilten Last ist. Ferner sei  $R$  die Resultante der Einzellasten, ihre Richtungslinie  $a'c'$ . Machen wir nun die Vertikale  $CE$  gleich  $R$ , so schneiden die Geraden  $DE$  und  $CD$  auf  $R$  die Strecke  $a'c'$  ab, welche dem Auflagerdrucke in  $A$  gleich ist. Durch die Gerade  $aa' \parallel CD$  wird diese Strecke nach  $aC$  übertragen.  $AC + aC = Aa$  stellt nun die ganze Auflagerreaktion in  $A$  dar.

Wir ziehen jetzt durch die Stützpunkte  $A$  und  $B$  die Geraden  $AO$  und  $BF$  parallel zu  $DE$ , und verschieben die Spannweite  $AB$  parallel mit sich selbst so, dass  $A$  und  $B$  die Geraden  $AO$  und  $BF$  durchlaufen. Alsdann können wir die einmal gezeichnete Belastungslinie für jede Lage der Spannweite wieder benutzen.

Noch bemerken wir, dass auch für diesen Fall die Fläche, welche über einem Abschnitte des Trägers steht und von der Belastungslinie begrenzt wird, das Biegemoment darstellt, und die Lage des gefährlichen Querschnittes durch den Schnittpunkt der Spannweite mit der Belastungslinie bestimmt ist.

Jetzt ziehen wir  $aM$  parallel  $AO$  und verbinden  $M$  mit  $O$  (Schnittpunkt von  $aa'$  mit  $AO$ ); dann ist die Gerade  $OM$  die Orientierungslinie.

Schneidet  $OM$  die Belastungslinie zuerst in  $Q_1$  und legen wir die



Spannweite  $A_1B_1$  durch  $Q_1$ , so liegt in dem letzteren der gefährliche Querschnitt. Das Biegemoment in demselben ist gleich der Fläche  $A_1a_1lQ_1$ . Ferner ist  $a_1Q_1 \parallel aM \parallel AO$ . Legen wir die Spannweite  $A_2B_2$  durch den zweiten Schnittpunkt  $Q_2$ , so ist das Biegemoment im gefährlichen Querschnitte  $Q_2$  gleich  $A_2a_2l'Q_2$ . Hier ist nun  $a_2Q_2$  ebenfalls parallel  $AO$ .

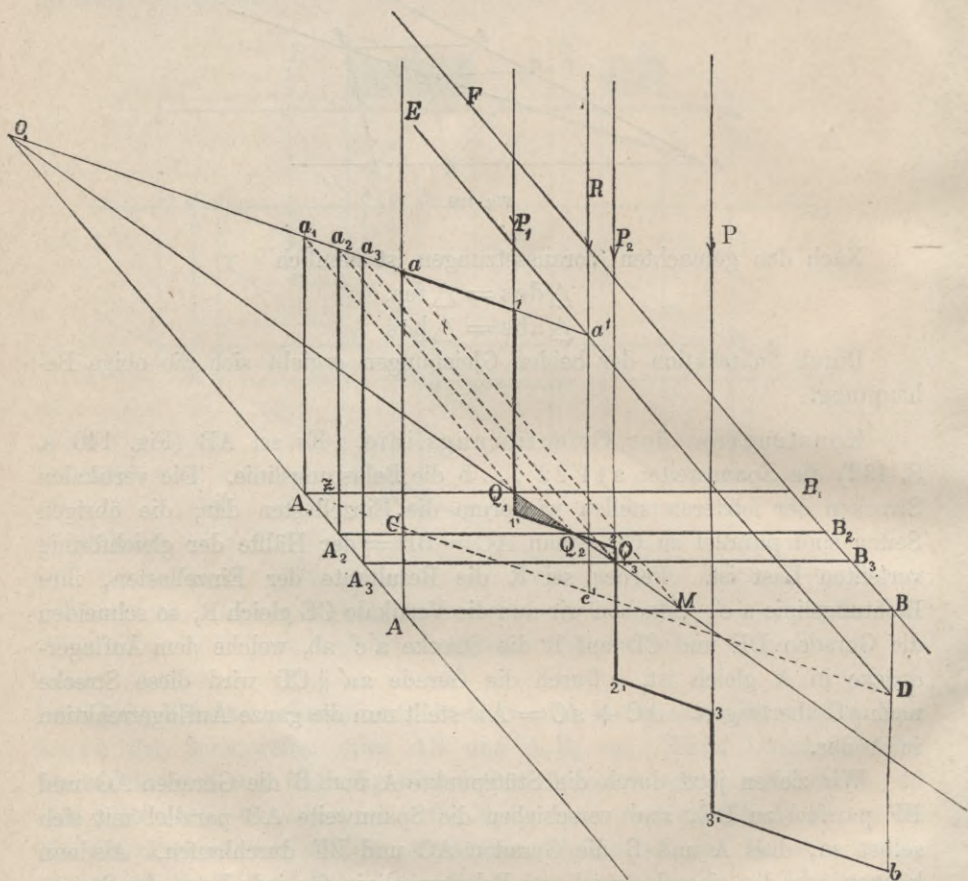


Fig. 140.

Gehen wir also von  $Q_1$  zu  $Q_2$  über, so nimmt das Biegemoment um  $A_1a_1a_2A_2$  ab und gleichzeitig um  $A_2A_1Q_1l'Q_2$  zu. (Hierbei kommt  $\triangle A_1A_2z$  nicht in Betracht, weil dasselbe in der Zu- und Abnahme zugleich auftritt.) Da nun nach dem obigen Hilfssatze  $A_1a_1a_2A_2 = A_1Q_1Q_2A_2$ , so ist die Zunahme des grössten Biegemomentes um das Dreieck  $Q_1l'Q_2$  kleiner als die Abnahme desselben. Das Biegemoment in  $Q_2$  ist demnach um  $Q_1l'Q_2$  kleiner als in  $Q_1$ .

Legen wir jetzt die Spannweite  $A_3B_3$  durch  $Q_3$ , so ist wieder  $A_2a_2a_3A_3 = A_2Q_2Q_3A_3$ , also nimmt das Biegemoment im gefährlichen Querschnitt wieder um  $Q_2Q_3 \cdot 2$  zu, u. s. f.

Leicht ist auch in diesem Falle die ungünstigste Laststellung für einen gegebenen Querschnitt  $X$  zu ermitteln.

Wie früher durchläuft  $X$  (Fig. 141) bei der hier angewandten Verschiebung der Spannweite eine zu  $AO$  parallele Gerade  $YU$ . Durch  $X$  ziehen wir die Vertikale  $cd$  und durch  $A$  die Gerade  $A\delta$  parallel zu  $Oa$ . Auf  $Aa$  schneiden wir die Strecke  $ae = d\delta$  ab und ziehen durch  $e$  eine Parallele zu  $OA$ . Die letztere trifft die Belastungslinie in einem Punkte  $m$ . Wir legen  $A_1B_1$  so, dass der gegebene Querschnitt  $X_1$  auf der Vertikalen durch  $m$  liegt; dann bezeichnen die Lastrichtungen auf  $A_1B_1$  die ungünstigste Laststellung in Bezug auf den in Rede stehenden Querschnitt.

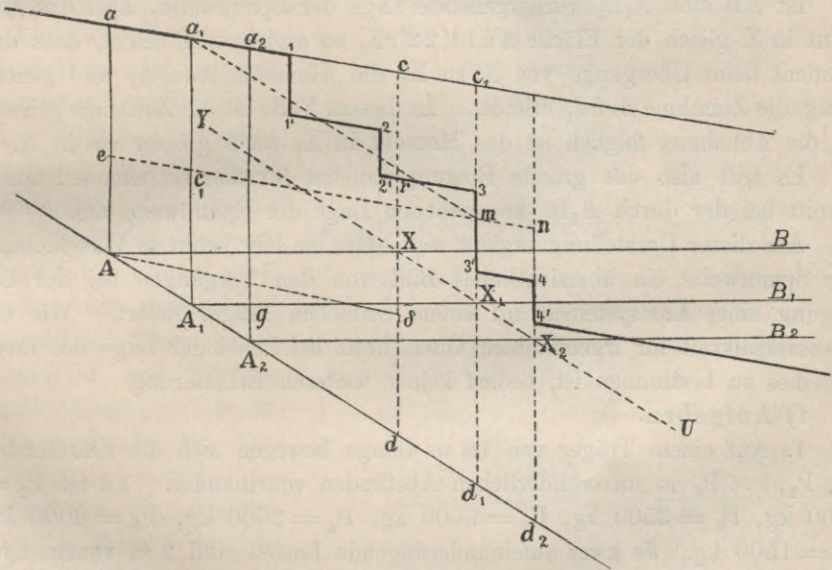


Fig. 141.

Beweis. Das Biegemoment in  $X_1$  ist gleich der Fläche  $A_1a_11'2'3X_1$ . Verlegen wir die Spannweite nach  $A_2B_2$ , wo die folgende Last über dem Querschnitte  $X_2$  steht, so ist das Moment in dem letzteren gleich der Fläche  $A_2a_211'2'2'3'3'4X_2$ . Diese Fläche ergibt sich auch aus der ersteren, wenn man dieselbe um das Trapez  $A_1a_1a_2A_2$  vermindert und zugleich um  $A_1A_2X_2X_1 + X_13'4X_2$  vergrößert (wobei  $\triangle A_1A_2g$ , weil es subtrahiert und addiert wird, nicht in Betracht kommt). Da nun aber  $A_1A_2X_2X_1 = d_1X_1X_2d_2$  ist, so kann die Zunahme auch durch das Trapez  $d_13'4d_2$  ausgedrückt werden. Aus unserer Konstruktion ist aber leicht ersichtlich, dass



die Trapeze  $A_1 a_1 a_2 A_2$  und  $d_1 3' 4 d_2$  gleiche Höhen haben (d. h. die Abstände der parallelen Seiten der Trapeze sind gleich) und in den Winkeln übereinstimmen. Ziehen wir nun noch  $a_1 m$ , so ist  $\triangle a_1 c_1 m \cong \triangle A d d$  und  $a_1 m \parallel AO$ , folglich auch  $m d_1 = A_1 a_1$ ; und wenn wir endlich  $e m$  und  $d_2 4$  bis  $n$  verlängern, so ist:

$$A_1 a_1 a_2 A_2 \cong d_1 m n d_2,$$

folglich

$$A_1 a_1 a_2 A_2 > d_1 3' 4 d_2.$$

Nach dem vorhin Gesagten bedeutet aber  $A_1 a_1 a_2 A_2$  die Abnahme und  $d_1 3' 4 d_2$  die gleichzeitige Zunahme des Momentes im Querschnitte  $X$ , wenn derselbe von der Lage  $X_1$  zu der Lage  $X_2$  übergeht. Da nun die Abnahme grösser ist als die Zunahme, so ist das Biegemoment in  $X_2$  kleiner als in  $X_1$ .

Ist  $AB$  eine  $A_1 B_1$  vorhergehende Lage der Spannweite, also das Moment in  $X$  gleich der Fläche  $A a 1 1' 2 2' r X$ , so ergibt sich leicht, dass das Moment beim Übergange von  $X$  zu  $X_1$  die Abnahme  $A a a_1 A_1$  und gleichzeitig die Zunahme  $d r 3 d_1$  erleidet. In diesem Falle ist die Zunahme grösser als die Abnahme, folglich ist das Moment in  $X_1$  auch grösser als in  $X$ .

Es tritt also das grösste Biegemoment für den betreffenden Querschnitt bei der durch  $A_1 B_1$  angegebenen Lage der Spannweite auf.

Aus dieser Darstellung ergibt sich, dass die hier benutzte Verschiebung der Spannweite ein übersichtliches Bild von den Vorgängen bei der Bewegung eines Lastsystemes auf einem einfachen Träger liefert. Wie die Transversalkraft für irgend einen Querschnitt bei beliebiger Lage des Lastsystemes zu bestimmen ist, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

#### f) Aufgaben.

1. Auf einem Träger von 18 m Länge bewegen sich die Einzellasten  $P_1, P_2, \dots, P_6$  in unveränderlichen Abständen voneinander. Es ist  $P_1 = 4000$  kg,  $P_2 = 3500$  kg,  $P_3 = 3000$  kg,  $P_4 = 2000$  kg,  $P_5 = 2000$  kg,  $P_6 = 1500$  kg. Je zwei aufeinanderfolgende Lasten sind 2 m voneinander entfernt. — Es soll die ungünstigste Laststellung, der gefährlichste Querschnitt und das grösste während der Bewegung vorkommende Biegemoment ermittelt werden.

2. Für den vorigen Fall den gefährlichsten Querschnitt und das grösste Biegemoment zu finden, wenn die Lasten nicht unmittelbar auf dem Träger ruhen, sondern durch Querträger, welche in gleichen Abständen von je 3 m angebracht sind, übertragen werden.

## IX. Abschnitt.

### Stabilität der Stützmauern.

#### a) Wasserdruck.

Der normale Druck, welchen eine eingeschlossene Wassermenge auf ein sehr kleines Flächenelement  $g$  einer vertikalen Seitenwand  $bc$  (Fig. 142) ausübt, ist bekanntlich so gross, wie das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche gleich  $g$  ist, und deren Höhe so gross ist, wie die Entfernung jenes Elementes  $g$  vom Wasserspiegel.

Ist also  $gh$  ein Wasserprisma, dessen sehr kleine Grundfläche  $g$  und dessen Höhe  $gh = bg$  senkrecht zur gedrückten Fläche  $bc$  steht, so ist das Gewicht desselben so gross wie der auf  $g$  nach horizontaler Richtung wirkende Wasserdruck. — Konstruiert man hiernach für alle Elemente der gedrückten Fläche  $bc$ , welche wir als Rechteck annehmen, dessen Länge senkrecht zur Zeichenfläche gemessen 1 m ist, die entsprechenden Wasserprismen, so bilden dieselben ein einziges dreiseitiges Prisma von der Länge 1 m, dessen Grundfläche das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck  $bck$  ist. — Das Gewicht dieses Prismas stellt die Grösse des ganzen Wasserdruckes auf  $bc$  dar.

Hieraus ergibt sich, dass die horizontal gerichtete Resultante  $W$  des Wasserdruckes durch den Schwerpunkt  $s_2$  des Dreiecks  $bck$  geht; sie liegt daher in der Entfernung  $\frac{2}{3}bc$  unter dem Wasserspiegel.

1. Es sei  $abcd$  das Profil einer Stützmauer, welche an der vertikalen Seitenwand  $bc$  dem Wasserdruck ausgesetzt ist. — Wir untersuchen einen

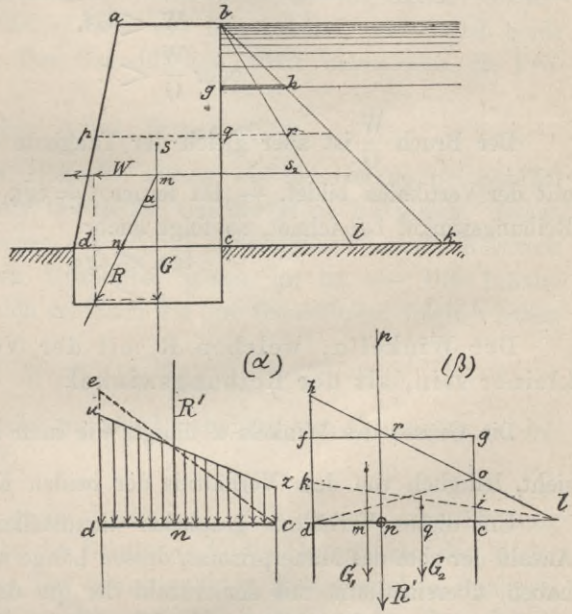


Fig. 142.



Teil der Mauer, dessen Länge 1 m beträgt. — Ist nun  $W$  die Resultante des auf  $bc$  wirkenden und horizontal gerichteten Wasserdruckes,  $G$  das im Schwerpunkt  $s$  des Querschnitts wirkende Gewicht der Mauer, so geht die Resultante  $R$  beider Kräfte durch den Schnittpunkt  $m$  ihrer Richtungslinien und trifft die Grundfläche der Mauer im Punkte  $n$ .

Die Lage des Punktes  $n$ , welchen wir den Druckmittelpunkt der Ebene  $cd$  nennen wollen, und die Richtung der Resultante  $R$  ist nun massgebend für die Stabilität der Mauer.

Soll die Mauer gegen Fortschieben auf der horizontal angenommenen Grundfläche  $de$  gesichert sein, so muss der Reibungswiderstand so gross sein, dass derselbe von der horizontalen Kraft  $W$  nicht überwunden werden kann. — Bezeichnet man den Reibungskoeffizient mit  $f$ , so ist die Grösse des Reibungswiderstandes  $= Gf$ . Es muss also sein:

$$W < Gf,$$

$$\text{oder } \frac{W}{G} < f.$$

Der Bruch  $\frac{W}{G}$  ist aber gleich der Tangente des Winkels  $\alpha$ , welchen  $R$  mit der Vertikalen bildet. — Da ferner  $f = \text{tg}\varphi$  ist, wenn man mit  $\varphi$  den Reibungswinkel bezeichnet, so folgt auch:

$$\text{tg}\alpha < \text{tg}\varphi$$

$$\alpha < \varphi.$$

Der Winkel  $\alpha$ , welchen  $R$  mit der Vertikalen bildet, muss kleiner sein, als der Reibungswinkel.

Die Grösse des Winkels  $\alpha$  hängt, wie man aus der Formel  $\text{tg}\alpha = \frac{W}{G}$  sieht, lediglich von dem Verhältnis der beiden Kräfte  $W$  und  $G$  ab.

Um dieses Verhältnis graphisch darzustellen, beachten wir, dass die Anzahl der cbm des Mauerprismas, dessen Länge wir gleich 1 m angenommen haben, übereinstimmt mit der Anzahl der qm der Fläche des Querschnittes  $abcd$ . — Das Gleiche gilt für das Wasserprisma  $bck$ . — Wir ersetzen das letztere durch ein ihm an Gewicht gleiches Mauerprisma, dessen Grundfläche  $bcl$  und dessen Länge ebenfalls 1 m ist. — Das Dreieck  $bcl$  ergibt sich aus folgender Betrachtung. Ist  $\gamma$  das Gewicht der Cubikeinheit Wasser,  $s$  das spezifische Gewicht des Mauerwerks, so ist das Gewicht des Mauerprismas  $bcl = \triangle bcl \cdot \gamma \cdot s$ ; ferner ist das Gewicht des Wasserprismas  $bck$  gleich  $\triangle bck \cdot \gamma$ , folglich muss sein:

$$\triangle bck \cdot \gamma = \triangle bcl \cdot \gamma \cdot s$$

$$\text{oder } \frac{\triangle bck}{\triangle bcl} = s; \quad \triangle bcl = \frac{1}{s} \triangle bck.$$

Ist z. B.  $s = 1,6$ , so haben wir:

$$\frac{\triangle bck}{\triangle bcl} = 1,6 = \frac{8}{5}$$

d. h.  $\triangle bck : bcl = 8 : 5$ .

Da nun beide Dreiecke dieselbe Höhe  $bc$  haben sollen, so muss sich verhalten:

$$ck : cl = 8 : 5$$

$$\text{oder } cl = \frac{5}{8} ck.$$

Hieraus ist  $cl$  leicht zu konstruieren.

Hat man nun  $W$  auf diese Weise durch das Gewicht des Mauerprismas  $bcl$  dargestellt, so lassen sich auch  $W$  und  $G$  sehr leicht durch proportionale Strecken ausdrücken. — Die Gewichte der beiden Mauerprismen  $abcd$  und  $bcl$  verhalten sich wie ihre Inhalte, oder, weil beide gleiche Längen haben, wie ihre Grundflächen. Wir haben also die Proportion:

$$W : G = \triangle bcl : \text{Trapez } abcd.$$

Durch die Mitte  $q$  der Höhe  $bc$  ziehen wir die Gerade  $pr$  parallel zu  $dk$ , dann ist  $abcd$  einem Rechtecke von der Höhe  $bc$  gleich, dessen Grundlinie  $pq$  ist. — Ebenso ist  $\triangle bcl$  inhaltsgleich einem Rechtecke von derselben Höhe, dessen Grundlinie gleich  $qr$  ist. — Die Inhalte dieser Rechtecke verhalten sich demnach wie ihre Grundlinien, folglich haben wir auch:

$$W : G = qr : pq.$$

Wird demnach die Strecke  $pq$  zur Darstellung von  $G$  benutzt, so bedeutet  $qr$  die Grösse von  $W$ .

Soll ferner die Mauer gegen Umkippen, d. h. gegen eine Drehung um  $d$  gesichert sein, so muss die Resultante  $R$  die Grundfläche der Mauer zwischen  $c$  und  $d$  treffen. — Der Schnittpunkt  $n$  darf aber dem Punkte  $d$  nicht beliebig nahe gebracht werden, wie wir aus folgender Betrachtung ersehen können.

Es sei  $R'$  (Fig. 142  $\alpha$ ) die in  $n$  angreifende vertikale Seitenkraft von  $R$ . — Liegt  $n$  nicht in der Mitte von  $cd$ , so wird der Vertikaldruck auf  $cd$  ungleich verteilt sein, so dass z. B. in  $d$  grössere Druckspannung herrscht als in  $c$ , wenn  $cn > dn$ . — Denkt man sich in jedem Punkte von  $cd$  den entsprechenden Vertikaldruck  $pr$ . Quadrateinheit durch eine zu  $cd$  senkrechte Strecke dargestellt, so kann man die Annahme machen, dass die Endpunkte dieser Strecken auf einer Geraden  $uz$  liegen. — Das hierdurch entstandene Trapez kann man sich auch als Grundfläche eines



prismatischen Körpers von der Länge 1 m (senkrecht zur Zeichenfläche gemessen) vorstellen, dessen Gewicht dieselbe Druckverteilung auf  $bc$  hervorbringt, wie sie in Wirklichkeit stattfindet. — Hiernach muss aber  $R'$  durch den Schwerpunkt jenes Trapezes gehen. — Nähert sich der Punkt  $n$  dem Punkte  $d$ , so wird die Druckspannung des Mauerwerks in der Nähe von  $d$  zu und bei  $c$  abnehmen; das Trapez nähert sich dann mehr und mehr einem Dreieck. — Da aber  $R'$  immer durch den Schwerpunkt des Trapezes geht, so folgt, dass das letztere in das Dreieck  $cde$  übergeht, wenn  $dn = \frac{1}{3}cd$  geworden ist. — Für diesen Fall wird aber die Druckspannung in  $c$  gleich Null. — Bei noch weiterem Vorrücken des Punktes  $n$  in der Richtung nach  $d$  würde die Spannung in  $c$  ihren Sinn umkehren, d. h. das Mauerwerk würde alsdann in der Nähe von  $c$  Zugspannungen ausgesetzt sein, welche für dieses Material unzulässig sind. — Es gilt deshalb als Regel, dass die Resultante  $R'$  die Grundfläche  $cd$  innerhalb ihres mittleren Drittels schneiden muss.

Hat nun der Druckmittelpunkt  $n$  eine der Stabilität der Stützmauer genügende Lage, so ist nur noch die Frage, ob die Grösse von  $R'$  die zulässige Beanspruchung des Mauerwerks nicht überschreitet. — Nehmen wir an, dass der Druckmittelpunkt  $n$  (Fig. 142  $\beta$ ) zwischen  $m$  und  $q$  liegt ( $dm = cq = \frac{1}{3}cd$ ) und zwar näher bei  $m$ , so wird der grösste Druck in  $d$  stattfinden. — Um den letzteren zu ermitteln, ist es erforderlich, das Trapez über  $cd$ , welches die Druckverteilung darstellt, so zu bestimmen, dass die Richtungslinie des Normaldruckes  $R'$  durch den Schwerpunkt des Trapezes geht und zugleich der Flächeninhalt des Trapezes gleich  $R'$  wird.

Nach VI, 2, c) ist aber der Abstand des Schwerpunktes eines Trapezes von der Grundlinie  $a$

$$= \frac{h(2b + a)}{3(a + b)}$$

wenn  $b$  die andere Grundlinie,  $h$  die Höhe des Trapezes bedeutet. — Dividieren wir Zähler und Nenner durch  $a$ , so erhält man für den Abstand folgenden Ausdruck:

$$\frac{h}{3} \cdot \frac{\left(2\frac{b}{a} + 1\right)}{\left(1 + \frac{b}{a}\right)}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der Abstand schon durch die Höhe des Trapezes und das Verhältnis der beiden Grundlinien bestimmt wird. — Ist demnach  $cdho$  ein Trapez, dessen Schwerpunkt auf  $pn$  liegt, so lassen sich sofort beliebig viele derartige Trapeze über  $cd$  errichten, deren

Schwerpunkte ebenfalls auf  $pn$  liegen. — Es ist nur erforderlich, dass bei einem anderen Trapeze, z. B.  $cdki$ , die Seite  $ki$  mit  $ho$  in demselben Punkte  $l$  auf  $cd$  zusammentrifft. — Denn wir haben alsdann:  $\frac{dk}{ci} = \frac{dh}{co}$ , und da ausserdem die Seite  $cd$  die gemeinschaftliche Höhe der beiden Trapeze  $cdho$  und  $cdki$  ist, so liegt der Schwerpunkt des letzteren ebenfalls auf  $pn$ .

Zerlegen wir nun das Gewicht  $R'$  des Trapezes  $cdho$  in die Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  der beiden Dreiecke  $dho$  und  $cdo$ , so verhält sich, weil beide Dreiecke gleiche Höhe in Bezug auf  $dh$  und  $co$  als Grundlinien haben:

$$G_1 : G_2 = dh : co;$$

und weil die Richtungslinien von  $G_1$  und  $G_2$ , welche zugleich als Seitenkräfte von  $R'$  zu betrachten sind, durch  $m$  und  $q$  gehen, so verhält sich auch:

$$G_1 : G_2 = nq : mn,$$

folglich auch:  $dh : co = nq : mn.$

Tragen wir daher auf  $dh$  die Strecke  $dk = nq$  und auf  $cg$  die Strecke  $ci = mn$  ab und ziehen die Gerade  $ki$ , so schneidet diese  $cd$  im Punkte  $l$ . — Jede durch  $l$  gehende Gerade bildet nun offenbar mit  $cd$ , und den in  $c$  und  $d$  errichteten Normalen zu  $cd$  ein Trapez, dessen Schwerpunkt in  $pn$  liegt.

Um noch dasjenige Trapez zu erhalten, dessen Fläche gleich  $R'$  ist, zeichnen wir über  $cd$  ein Rechteck  $cdfg$  vom Inhalt  $R'$ , dessen Höhe also gleich  $\frac{R'}{cd}$  gemacht werden muss. —  $\frac{R'}{cd}$  stellt den Druck für jede Quadrat-einheit der Fuge  $cd$  dar, wenn  $R'$  in der Mitte von  $cd$  angreift, der Druck also gleichförmig über die Lagerfläche verteilt ist. — Ziehen wir jetzt von  $l$  aus eine Gerade durch die Mitte  $r$  der Seite  $fg$ , so wird das dadurch entstehende Trapez  $cdho$  dem Rechteck  $cdfg$  an Inhalt gleich sein. — Für die in Fig. 142  $\beta$  angenommene Lage des Druckmittelpunktes  $n$  giebt also das Trapez  $cdho$  die Druckverteilung an, und der grösste in  $d$  stattfindende Druck  $pr$ . Quadrateinheit der Lagerfläche wird durch die Strecke  $dh$  dargestellt.

Um die absolute Grösse dieses Druckes zu bestimmen, ist ein Massstab herzustellen, nach welchem die Strecke  $df$  die Grösse  $\frac{R'}{cd}$  giebt. — Wird nach diesem Massstab  $dh$  gemessen, so erhält man die gesuchte grösste Druckspannung in  $cd$ .



Folgende Tabelle (dem deutschen Baukalender entnommen), giebt die zulässige Inanspruchnahme einiger Steinarten.

Granit . . . . .	45 kg Druck pr. qcm
Nebraer roter Sandstein . . . .	16 „ „ „ „
„ heller „ . . . . .	32 „ „ „ „
Gewöhl. Ziegelmauerwerk in Kalk	7 „ „ „ „
Gutes „ in Zement	11 „ „ „ „
Bestes „ „ „	14 „ „ „ „

Für guten Baugrund rechnet man 25000 kg Belastung pr. qm als zulässig.

Bei Stützmauern von geringer Höhe genügt es, die Resultante aus dem Wasserdruck und dem Gewicht der Mauer zu bilden. — Zeigt sich, dass die Resultante den obigen Bedingungen nicht genügt, so wird man das Mauerprofil ändern, bis eine günstige Lage der Resultante erzielt ist.

2. Stützzlinie in einer Stützmauer. Zur Beurteilung der Stabilität einer Stützmauer von grösserer Höhe dient die sogen. Stützzlinie.

Es sei  $abcd$  (Fig. 143) das Profil einer Stützmauer,  $bce$  die Grund-

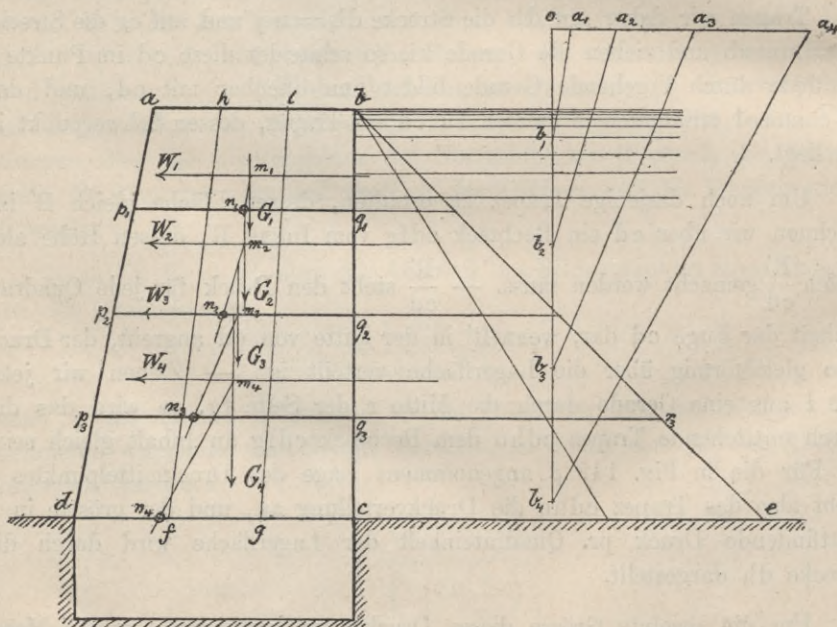


Fig. 143.

fläche des dreiseitigen Wasserprismas, dessen Gewicht die Grösse des Wasserdrucks auf  $bc$  darstellt. — Die Stützzlinie ist nun eine Kurve von

folgender Eigenschaft: Legt man irgend eine horizontale Ebene, z. B.  $p_3 r_3$  durch die Stützmauer und bildet aus dem Gewicht des über  $p_3 q_3$  liegenden Teiles der Mauer und dem auf die Seitenfläche  $bq_3$  wirkenden Wasserdruck die Resultante, so geht dieselbe durch den Punkt  $n_3$ , in welchem die Stützlinie die horizontale Ebene  $p_3 r_3$  trifft.

Die Stützlinie ist also der Ort der Druckmittelpunkte aller horizontalen Durchschnitte des Mauerprofils.

Da für jede horizontale Schnittebene der Druckmittelpunkt wie in Fig. 142 gefunden werden kann, so ist die Konstruktion der Stützlinie sehr einfach. — Zur Erläuterung der in Fig. 143 ausgeführten Zeichnung fügen wir nun folgendes hinzu. — Die Strecken  $a_1 o, a_2 o \dots a_3 o, a_4 o$  bedeuten der Reihe nach die Wasserdrücke  $W_1, W_2, W_3, W_4$ , welche auf  $bq_1, bq_2, bq_3, bc$  wirken; die Strecken  $ob_1, ob_2, ob_3, ob_4$  stellen ebenso der Reihe nach die Gewichte der Mauerkörper  $abq_1 p_1, abq_2 p_2, abq_3 p_3, abcd$  dar. — Durch den Schnittpunkt  $m_1$  der Kräfte  $W_1$  und  $G_1$  geht nun deren Resultante  $R_1$  parallel zu  $a_1 b_1$ ; sie trifft  $p_1 q_1$  in dem Druckmittelpunkte  $n_1$ . — Ebenso geht durch den Punkt  $m_2$ , in welchem sich  $G_2$  und  $W_2$  schneiden, die Resultante  $R_2$  parallel zu  $a_2 b_2$ , und trifft  $p_2 q_2$  in dem Druckmittelpunkte  $n_2$ , u. s. f. — Hierdurch erhält man leicht so viele Punkte, dass die Stützlinie gezeichnet werden kann.

Damit an der dem Wasserdruck ausgesetzten Seite keine Zugspannungen in der Mauer entstehen muss, nach 1) der Druckmittelpunkt eines horizontalen Schnittes in dem mittleren Drittel desselben liegen. — Wir teilen deshalb jede der Linien  $ab$  und  $cd$  in drei gleiche Teile, und verbinden die Teilpunkte  $h$  und  $i$  mit  $f$  und  $g$ . — Der Stabilität wird alsdann genügt, wenn die gefundenen Druckmittelpunkte  $n_1, n_2, n_3, n_4$  innerhalb des Streifens  $fgih$  liegen. — Ausserdem muss jede der Resultanten  $R_1, R_2, \dots$  mit der Vertikalen einen Winkel bilden, welcher kleiner als der Reibungswinkel ist.

### Beispiele.

α) Das Profil einer Stützmauer von 1,2 m Höhe soll ein Rechteck sein. — Wie gross muss die Basis mindestens gemacht werden, wenn die Mauer stabil in Bezug auf Wasserdruck sein soll?

Spezifisches Gewicht des Mauerwerks 1,6. — Zulässige Druckspannung 11 kg pr. qcm.

(Die Aufgabe verlangt, dass der Druckmittelpunkt der Grundfläche, auf welchen es bei der geringen Höhe der Stützmauer lediglich ankommt, mindestens um  $\frac{1}{3}$  der unteren Breite von der äusseren Ecke entfernt liegt.)



β) In Fig. 143 sei  $ab = 0,6$  m.  $bc = 2,4$  m.  $dc = 1$  m. Spez. Gewicht des Mauerwerks 1,6. — Für diesen Fall die Drucklinie zu zeichnen. — Ergiebt sich hieraus, dass das Profil nach obigen Massen in Bezug auf den Wasserdruck nicht genügt, so soll dasselbe entsprechend korrigiert werden. — Zulässige Druckspannung 11 kg.

γ) Eine Stützmauer habe eine Höhe von 1,5 m. — Das Profil sei ein Rechteck von 70 cm Breite. — Die Mauer erleidet von beiden Seiten Wasserdruck. — Der Wasserspiegel liege an der einen Seite 1, 2 m, an der andern Seite 0,6 m über der Grundfläche der Mauer. — Es soll der Druckmittelpunkt der Grundfläche und die grösste Druckspannung in derselben bestimmt werden. — Spez. Gewicht des Mauerwerks 1,7, zulässige Druckspannung 14 kg.

### b) Erddruck.

1. Wird eine Erd- oder Sandmasse locker auf eine horizontale Ebene geschüttet, so bleibt der dadurch gebildete Haufen im Gleichgewicht, wenn seine Abhänge einen gewissen Neigungswinkel  $\alpha$  gegen die Horizontalebene nicht überschreiten. — Dieser Neigungswinkel heisst der natürliche Böschungswinkel. Bei noch weiterem Aufschütten würde der Reibungswiderstand auf dem Abhang nicht mehr hinreichen, um das Hinabgleiten der Erdteilchen zu verhindern. — Wir können deshalb den natürlichen Böschungswinkel auch als den Reibungswinkel bezeichnen, dessen trigonometrische Tangente dem Reibungskoeffizient gleich ist.

Eine Erdmasse, deren Abhang einen grösseren Winkel mit der Horizontalebene bilden soll, als ihr natürlicher Böschungswinkel  $\alpha$  ist, muss deshalb durch eine Stützmauer oder Bohlenwand im Gleichgewicht gehalten werden. — Wenn nun auch erfahrungsgemäss festgestampfte oder durchwachsene Erde, in welcher die einzelnen Teilchen durch die Kohäsion aneinander haften, unter weit grösserem Neigungswinkel als  $\alpha$  im Gleichgewicht zu bleiben vermag, so pflegt man doch hierauf keine Rücksicht zu nehmen. — Atmosphärische Einflüsse, wie Temperaturveränderungen und vor allen Dingen Feuchtigkeit können die Kohäsion so vermindern, dass es bei der Berechnung von Stützmauern notwendig erscheint, dieselbe gänzlich ausser Acht zu lassen.

In folgender Tabelle ist eine Zusammenstellung der natürlichen Böschungswinkel einiger Erdarten und der spez. Gewichte der letzteren angegeben.





Reibungswinkel  $\alpha$  gegen die Horizontalebene geneigt; ausserdem wirkt dem Abgleiten des Erdkeils ABC noch der Widerstand der Mauer entgegen. — Es wird deshalb ein Bruch der ganzen Erdmasse nach der Ebene AC bei geringem Nachgeben der Stützmauer nicht eintreten können; derselbe wird vielmehr an einer andern Stelle erfolgen, und wir machen die Annahme, welche sich auch durch die Erfahrung bestätigt hat, dass der Bruch in einer durch A gehenden Ebene AK stattfindet. Diese Ebene, deren Lage ermittelt werden muss, wird die Bruchebene genannt.

Das Gewicht des Erdkeils ABK sei  $G$ ;  $N$  und  $N_1$  seien die Normalwiderstände der schiefen Ebenen AB und AK;  $R$ , bez.  $R_1$  die Reibungswiderstände an denselben. — Dann muss Gleichgewicht bestehen zwischen  $G$  und den vier Kräften  $N$ ,  $R$ ,  $N_1$ ,  $R_1$ . — Da nun  $\alpha$  der Reibungswinkel der Erde ist, so haben wir:

$$R_1 = N_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Ebenso ist: 
$$R = N \cdot \operatorname{tg} \alpha_1,$$

wenn wir mit  $\operatorname{tg} \alpha_1$  den Reibungskoeffizient an der Ebene AB bezeichnen. — In der Regel kann man  $\alpha_1$  gleich  $\alpha$  annehmen, weil die Hinterwand der Mauer gewöhnlich rauh ist und die Vertiefungen mit Erde ausgefüllt sind. — Machen wir nun ab gleich und parallel  $G$ ; ac parallel  $N$  und be parallel  $N_1$ ; ziehen wir ferner die Geraden bd und ad so, dass  $\angle dbe = \alpha$ ,  $\angle cad = \alpha_1$  ist und machen noch cd senkrecht zu ac, de senkrecht zu be, dann ist:

$$\begin{array}{ll} ac = N, & be = N_1, \\ cd = ac \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = R, & de = N_1 \operatorname{tg} \alpha = R_1. \end{array}$$

Die Resultante von  $N_1$  und  $R_1$  ist bd; sie stellt den von der Ebene AK zu leistenden Widerstand dar. — Ebenso ist ad = D, die Resultante der beiden Kräfte  $N$  und  $R$  als der Widerstand anzusehen, welchen die Stützmauer zu leisten hat, um den Erdkeil im Gleichgewicht zu halten. — Die Strecke ad giebt demnach auch im umgekehrten Sinne genommen die Grösse des Druckes an, welchen das Erdprisma ABK auf die Mauer ausübt.

Wird nun die Lage der Ebene AK verändert, so ändert sich in Fig. 144 die Strecke ab, welche das Gewicht des Erdkeils darstellt, ferner Richtung und Grösse von  $N_1$  und  $R_1$  und deren Resultante bd. — Dagegen werden die Kräfte  $N$  und  $R$ , sowie D nur ihre Grössen ändern, während die Richtungen derselben, welche allein von der Lage der Ebene AB abhängen, unverändert bleiben.

Wir können nun die Annahme machen, dass bei dem geringsten Nachgeben der Stützmauer der Bruch des Erdkörpers nach derjenigen

Ebene erfolgt, bei welcher sich für  $D$  der grösste Wert ergibt. — Unter dieser Voraussetzung lässt sich die Lage der Bruchebene leicht bestimmen. Zuvor bemerken wir noch, weil

$$ab \perp AM \text{ und } be \perp AK,$$

so ist  $\angle abe = \angle KAM$ . — Ferner  $\angle dbe = \alpha = \angle CAM$ , folglich auch  $\angle abd = \angle KAC$ .

In dem Dreieck  $abd$  ist hiernach der veränderliche Winkel  $abd$  immer gleich dem Winkel, welchen die Ebene  $AK$  mit der natürlichen Böschung bildet. — Der Winkel  $bad = \gamma$  behält für alle Lagen der Ebene  $AK$  seine Grösse; man findet für denselben leicht:

$$\gamma = 180 - (\alpha_1 + \beta),$$

wenn  $\beta$  der Neigungswinkel der Ebene  $AB$  gegen die Horizontalebene ist.

Wir bringen nun das Dreieck  $abd$  in die Lage  $FAH$ , so dass  $\angle abd$  auf den gleichen Winkel  $KAC$  fällt und  $\angle AFH = \gamma$  wird. — Für jede andere Lage der Ebene  $AK$  suchen wir alsdann das entsprechende Dreieck auf. — Hierzu ist erforderlich, dass die veränderliche Strecke  $AF = ab$  dem Gewicht des Erdprismas  $ABK$ , oder was dasselbe ist, dem Flächeninhalt des Dreiecks  $ABK$  proportional bleibt.

Wenn aber die Ebene  $AK$  in  $AK_1$  (Fig. 145) übergeht, so verhält sich:

$$\triangle ABK : \triangle ABK_1 = BK : BK_1$$

und ziehen wir noch  $KF \parallel K_1F_1 \parallel AB$ , so verhält sich auch:

$$\triangle ABK : \triangle ABK_1 = AF : AF_1.$$

Wird also das Gewicht des Erdkeils  $ABK$  durch die Strecke  $AF$  dargestellt, so bedeutet  $AF_1$  das Gewicht des Keils  $ABK_1$ . Ziehen wir ferner  $BJ$  so, dass  $\angle BJA = \gamma$  ist und legen wir durch die Punkte  $F$  und  $F_1$  die Geraden  $FH$  und  $F_1H_1$  parallel zu  $BJ$ , so stellt  $FH$  die Grösse von  $D$  vor, wenn ein Bruch nach der Ebene  $AK$  stattfindet, und entsprechend ist  $D = F_1H_1$ , wenn diese Ebene die Lage  $AK_1$  hat.

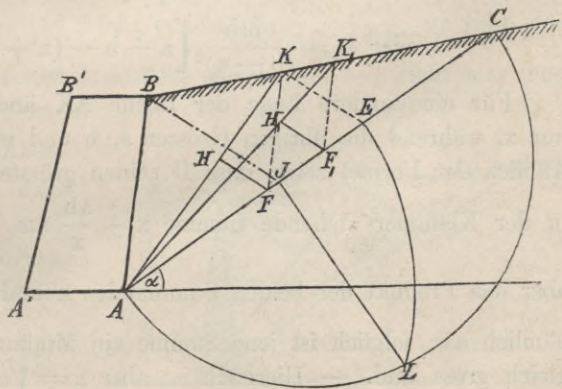


Fig. 145.

Man sieht hieraus leicht, wie zu jeder Lage der Ebene  $AK$  die Grösse von  $D$  gefunden werden kann.



Die Gerade BJ wird wegen des häufigen Gebrauchs derselben die Hauptlinie genannt.

Um die Lage der wirklichen Bruchebene, bei welcher D seinen grössten Wert hat, zu bestimmen, ziehen wir noch KE parallel zu BJ.

Setzen wir nun  $AE = x$ ,  $AJ = a$ ,  $AC = b$ ,  $KE = y$ ,  $BJ = m$ , so haben wir:

$$\begin{aligned} HF : y &= AF : x \\ \text{oder } D : y &= AF : x \\ \text{folglich } D &= \frac{AF \cdot y}{x} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner: } y : m &= CE : CJ \\ &= b - x : b - a \\ \text{folglich } y &= \frac{m(b - x)}{b - a} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und CFK folgt:

$$\begin{aligned} AF : AC &= BK : BC \\ &= JE : JC \\ \text{oder } AF : b &= x - a : b - a \\ AF &= \frac{b(x - a)}{b - a} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Setzt man die Werte von y und AF aus (2) und (3) in die Formel (1), so folgt:

$$\begin{aligned} D &= \frac{mb}{(b - a)^2} \frac{(x - a)(b - x)}{x} \\ \text{oder } D &= \frac{mb}{(b - a)^2} \left[ a + b - \left( x + \frac{ab}{x} \right) \right] \dots (4) \end{aligned}$$

Für eine andere Lage der Ebene AK ändert sich in dieser Formel nur x, während die übrigen Grössen a, b und m konstant bleiben. — Der Anblick der Formel zeigt, dass D seinen grössten Wert erreicht, wenn die in der Klammer stehende Summe  $x + \frac{ab}{x}$  am kleinsten ist. — Nun ist aber das Produkt der beiden Summanden x und  $\frac{ab}{x}$  eine konstante Grösse, nämlich ab; folglich ist jene Summe ein Minimum, wenn die Summanden gleich gross sind. — Hiernach ist aber  $x = \sqrt{ab}$ , oder es ist x die mittlere Proportionale zwischen a und b.

Wir zeichnen demnach über AC als Durchmesser einen Halbkreis und errichten in J die Senkrechte JL zum Durchmesser AC. — Die Gerade, welche A mit L verbindet, ist bekanntlich die mittlere Proportionale zwischen





die Strecke KE bestimmt. — Diese Strecken verhalten sich nach dem Obigen aber wie die Grundfläche ABK des Erdkeils, welcher den Druck wirklich ausübt, zum Dreieck KEQ. — Das letztere stellt mithin die Grundfläche eines Erdprismas von der Länge 1 m vor, dessen Gewicht dem Erddruck D gleich ist. — Wir wollen dieses Dreieck die Druckfläche nennen.

**3. Angriffspunkt des Erddrucks.** Verwandeln wir die Druckfläche KEQ (Fig. 146) in ein gleiches Dreieck ABS, dessen eine Seite AB ist und dessen andere Seite AS parallel zu der Richtungslinie des Erddrucks D ist, dann erhalten wir für ein beliebiges Stück der Seitenwand, z. B. Ba als Druckfläche das Dreieck Ba'S', wenn a'S' parallel zu AS ist. — Wird ebenso a'S'' parallel zu AS gezogen, so stellt das Dreieck Ba'S'' die Druckfläche für die Wandfläche Ba' dar, mithin lastet auf aa' ein Druck, welcher dem Gewicht eines Erdprismas von 1 m Länge mit der Grundfläche aa'S''S' gleich ist, u. s. f. — Hieraus geht aber hervor, dass die Resultante D des auf die ganze Wand AB wirkenden Erddrucks durch den Schwerpunkt z des Dreiecks ABS geht. Weil ferner nach Voraussetzung die Richtungslinie von D parallel zu AS ist, so trifft sie die Hinterwand AB in einem Punkte O, dessen Abstand von A gleich  $\frac{1}{3}AB$  ist.

Ist die Grösse des Erddrucks D und die Lage seiner Richtungslinie bestimmt, so kann man hieraus die Stabilität der Stützmauer beurteilen. — Man vereinigt das Gewicht G der Mauer und die Kraft D zu einer Resultante. — Die letztere trifft die Grundfläche der Mauer in dem Druckmittelpunkte, dessen Lage wie beim Wasserdruck für die Stabilität der Mauer massgebend ist. — Hiernach muss der Druckmittelpunkt in dem mittleren Drittel der Grundfläche liegen und jene Resultante muss mit der Normalen zur Grundfläche einen Winkel bilden, welcher kleiner als der entsprechende Reibungswinkel ist. — Ferner darf die grösste Druckspannung in der Grundfläche die zulässige Grösse nicht überschreiten.

**4.** Wenn die Terrainfläche gebrochen ist, wie z. B. in Fig. 147 (s. S. 149), wo sie durch die beiden Ebenen BC und CD gebildet wird, so finden wir die Bruchebene auf folgende Weise. — Es sei AK irgend eine Ebene, nach welcher wir uns die gestützte Erdmasse gebrochen denken, alsdann muss das Gewicht des Erdprismas ABCK wie in (2) im Gleichgewicht mit den Normalwiderständen der Ebenen AB und AK und den Reibungswiderständen an diesen Ebenen sein. — Wir verwandeln nun das Erdprisma ABCK in ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche AFK ist (CF Verlängerung von CD und BF parallel AC), alsdann lässt sich das Gewicht des Erdprismas wieder wie in (2) durch eine dem Flächeninhalt



des Vierecks  $ABCK$  oder dem des Dreiecks  $AFK$  proportionale Gerade darstellen. — Hieraus ergibt sich aber die Konstruktion der Bruchebene. — Vom Punkte  $F$  zieht man die Hauptlinie  $FJ$  und bestimmt die mittlere Proportionale zwischen  $AJ$  und  $AD$ . Hat man dieselbe nach  $AE$  abgetragen, so zieht man  $EK$  parallel  $FJ$ , dann giebt die Gerade  $AK$  die Lage der Bruchebene an. — Da, wie in (2) gezeigt,  $\triangle AKE = \triangle AFK$  sein muss, so ist auch wieder  $\triangle AKE = ABCK$ .

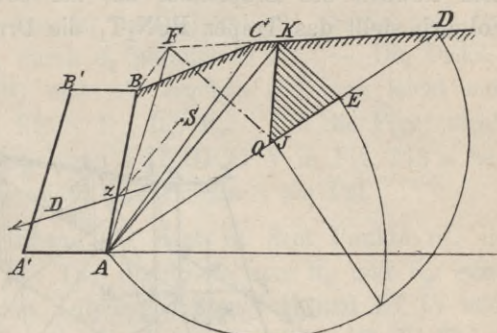


Fig. 147.

Als Druckfläche ergibt sich wie früher das gleichschenklige Dreieck  $KEQ$  ( $QE = KE$ ).

Der Angriffspunkt des Erddrucks an der Hinterwand ist in diesem Falle nicht so einfach zu bestimmen. — Für die Praxis erhält man denselben hinreichend genau, wenn man durch den Schwerpunkt  $S$  des Vierecks  $ABCK$  eine Parallele zur Bruchebene  $AK$  zieht. — Diese Gerade schneidet  $AB$  in dem Punkte  $z$ , durch welchen man nun die Resultante  $D$  des Erddrucks zieht. —  $D$  bildet wie immer mit der Normale zu  $AB$  einen Winkel, welcher dem Reibungswinkel gleich ist.

5. Bei Stützmauern von grösseren Dimensionen begnügt man sich nicht mit der Bestimmung des Druckmittelpunktes der Grundfläche, sondern man zeichnet zur Beurteilung der Stabilität die Stützlinie. — Es ist dies auch nötig, wenn die Hinterwand der Mauer nicht von einer Ebene begrenzt ist.

Es sei  $ABCDEF$ GH (Fig. 148 s. S. 150) das Profil einer Stützmauer, deren hintere Wandfläche aus drei Ebenen  $AB$ ,  $BC$  und  $CD$  besteht. — Der Erddruck  $D_1$ , welcher auf  $CD$  wirkt, wird nach 2) durch die Druckfläche  $abc$  bestimmt. Die letztere erhält man, wenn man  $CL$  unter dem natürlichen Böschungswinkel  $\alpha$  gegen die Horizontale  $CM$  zieht, durch  $D$  die Hauptlinie  $DJ$  legt, alsdann ist nach (2) die Strecke  $Ca$  die mittlere Proportionale zwischen  $CJ$  und  $CL$ . — Um den auf  $BC$  lastenden Erddruck  $D_2$  zu finden, verlängern wir  $BC$  bis zum Durchschnitt  $K$  mit der Terrainlinie  $DX$  und bestimmen wie vorhin die zu der Wandfläche  $BK$  gehörige Druckfläche  $a_1b_1c_1$ . — Die letztere verwandeln wir in das  $a_1b_1c_1$  an Inhalt gleiche Dreieck  $BKT_1$ , dessen untere Seite in der Horizontalen  $BO$



liegt. — Der Erddruck auf BK ist dem Gewicht eines Erdprismas mit der Grundfläche  $BKT_1$  gleich, während auf CK ein Erddruck lastet, welcher dem Gewicht des Erdprismas mit der Grundfläche  $CN_1K$  gleich ist. — Folglich stellt das Trapez  $BCN_1T_1$  die Druckfläche für die Ebene BC dar.

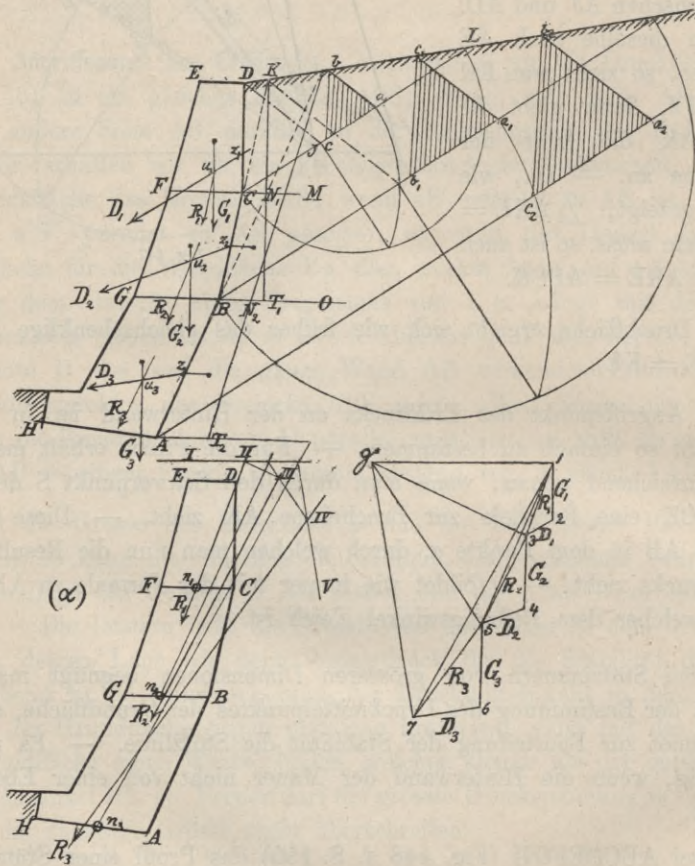


Fig. 148.

Die Richtungslinie von  $D_2$  geht durch den Punkt  $z_2$ , in welchem die Horizontale durch den Schwerpunkt des Trapezes  $BCN_1T_1$  die Seite BC trifft. — In gleicher Weise wird die Lage und Grösse des auf AB lastenden Erddruckes  $D_3$  bestimmt. Die zugehörige Druckfläche ist das in Fig. 148 angegebene Trapez  $ABN_2T_2$ . Nachdem noch die Richtungslinien der Gewichte  $G_1, G_2, G_3$  der einzelnen Mauerprismen ermittelt sind, fügen wir die Kräfte  $G_1, D_1, G_2, D_2, G_3, D_3$  zu dem Kräftezuge

1234567 aneinander. — Die Gerade 13 stellt alsdann die Resultante  $R_1$  von  $G_1$  und  $D_1$  dar, ebenso ist 35 die Resultante  $R_2$  von  $G_2$  und  $D_2$ , und 57 diejenige von  $G_3$  und  $D_3$ . — Durch den Schnittpunkt  $u_1$  von  $G_1$  und  $D_1$  ziehen wir die Richtungslinie von  $R_1$  parallel zu 13, ebenso geht  $R_2$  durch  $u_2$  parallel zu 35 und  $R_3$  durch  $u_3$  parallel zu 57. — Die Druckmittelpunkte der Ebenen CF, BG und AH ergeben sich nun leicht mit Hilfe eines Seilpolygons der drei Kräfte  $R_1, R_2, R_3$ . Um die Figur nicht undeutlich zu machen, ist das Seilpolygon I II III IV V in Fig. 148  $\alpha$  besonders dargestellt. Dasselbe entspricht dem Punkte  $\gamma$  als Pol.

Der Druckmittelpunkt der Ebene CF liegt in dem Punkte  $n_1$ , in welchem  $R_1$  diese Ebene trifft. — Die Resultante von  $R_1$  und  $R_2$  geht durch den Schnittpunkt der beiden Seilpolygoneiten I II und III IV und ist parallel zu der Geraden 15 des Kräftepolygons. — Sie trifft die Ebene BG in dem zweiten Druckmittelpunkte  $n_2$ . — Endlich schneidet noch die Resultante sämtlicher Kräfte, welche parallel zu 17 ist und durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Seilpolygoneite geht, die Grundfläche AH in dem Druckmittelpunkte  $n_3$ .

Aus der Lage dieser Druckmittelpunkte, welche den bekannten Bedingungen genügen müssen, ergibt sich, ob durch das gegebene Profil die Stabilität der Stützmauer gesichert ist. — Es ist noch zu erwähnen, dass die Gefahr des Verschiebens der einzelnen Schichten verringert werden kann, wenn man die Fugen einer zu den entsprechenden Druckrichtungen senkrechten Lage nähert.

Zur Konstruktion des Kräftepolygons gehört noch die Ermittlung der Strecken, welche die Grössen der Gewichte und die der Erddrücke darstellen. — Zu dem Zwecke giebt man am einfachsten den Mauerschichten gleiche Höhen, alsdann verhalten sich die Flächeninhalte der trapezförmigen Grundflächen wie ihre mittleren Breiten. — Die letzteren können deshalb zur Darstellung der Gewichte der Mauerschichten benutzt werden. — Die Dreiecke, welche die Grössen der Erddrücke darstellen, werden nach dem Verhältnis des spez. Gewichts vom Mauerwerk zu dem der Erde so umgewandelt, dass dieselben die Grundflächen von Mauerprismen vorstellen, deren Gewichte denen der entsprechenden Erdprismen gleich sind.

(Siehe 1. dieses Abschnittes, wo eine gleiche Verwandlung beim Wasserdruck angegeben ist.)

Ist die durch eine Mauer gestützte Erdmasse noch anderweitig belastet, so pflegt man diese Last durch eine Erdaufschüttung von entsprechender Höhe zu ersetzen, und mit Hilfe der dadurch entstehenden neuen Terrainlinie den Erddruck in der bisherigen Weise zu ermitteln.



## 6. Aufgaben.

In den folgenden Aufgaben sei das spez. Gewicht des Mauerwerks gleich 1,6, spez. Gewicht der Erde 1,8, der natürliche Böschungswinkel  $\alpha = 30^\circ$ . — Zulässige Druckspannung = 11 kg pr. qcm.

a) Eine Stützmauer von 1,5 m Höhe soll einen rechteckigen Querschnitt haben. — Es ist die Breite der Stützmauer so zu nehmen, dass der Druckmittelpunkt mindestens um  $\frac{1}{3}$  der Grundlinie von der äusseren Ecke entfernt ist.

b) Das Profil einer Stützmauer von 3 m Höhe ist ein Trapez. — Die untere Grundlinie desselben ist 60 cm, die obere 40 cm. — Die Hinterwand der Mauer, welche dem Erddruck ausgesetzt ist, sei vertikal. Die Terrainlinie bilde einen Winkel von  $15^\circ$  mit der Horizontalen. — Es sollen die Druckmittelpunkte für die Grundfläche und zwei andere horizontale Schnitte, welche die Höhe der Mauer in drei gleiche Teile teilen, bestimmt werden. — Falls sich zeigt, dass das Profil der Stabilität der Mauer nicht genügt, so soll dasselbe korrigiert werden. — Im letzteren Falle ist zu beachten, dass die Ausladung (d. h. der Unterschied zwischen der oberen und unteren Breite)  $\frac{1}{6}$  der Höhe nicht überschreiten soll.

c) Eine Ufermauer habe einen rechteckigen Querschnitt von 3 m Höhe und 60 cm Breite. — An der einen Seite ist dieselbe dem Erddruck ausgesetzt. — Die Terrainlinie geht unter einem Winkel von  $20^\circ$  gegen die Horizontale aufwärts. — An der andern Seite der Mauer findet Wasserdruck statt. — Der niedrigste Wasserstand ist 1,2 m, der höchste 2 m über der unteren Grundfläche der Mauer. — Es soll die Stabilität untersucht werden durch Bestimmung des Druckmittelpunktes der Grundfläche.

d) Das Profil einer Stützmauer ist ein Trapez, dessen Höhe 2,4 m beträgt. — Die obere Breite ist 40 cm, die untere 60 cm. — Die Hinterwand ist unter einem Winkel von  $70^\circ$  gegen die Horizontale geneigt. — Die Terrainfläche sei parallel zur natürlichen Böschung der Erde. — Die Stabilität der Mauer zu prüfen.

e) Für das nebenstehende Profil (Fig. 149 s. S. 153) soll eine Stützlinie bestimmt werden. — Gegeben ist  $GK = h = 6$  m,  $KF = 1,6$  m,  $EF = 60$  cm.  $EM = MN = NO = OP$ . —  $DM = 0,1$  m;  $CN = 0,3$  m,  $BO = 0,6$  m;  $AB \parallel FG$ ,  $AB = 2,5$  m,  $GH = 0,3$  m,  $AJ \perp AB$ .

Die Terrainlinie ist von E bis T unter einem Winkel von  $20^\circ$  gegen die Horizontale geneigt; ET = 3 m. — Von T aus verläuft sie horizontal.

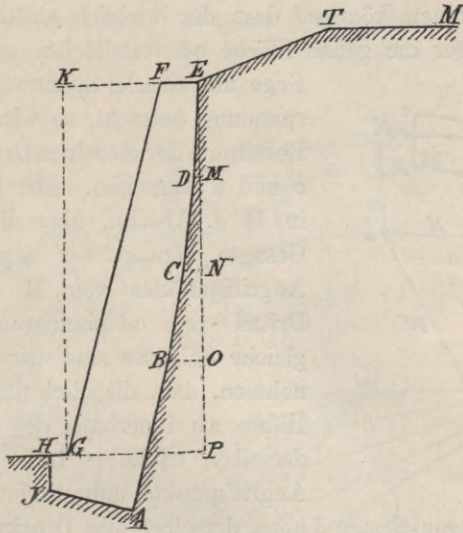


Fig. 149.

Auf TM ruht noch eine gleichförmig verteilte Last von 2000 kg pr. Quadratmeter.

## X. Abschnitt.

### Stützzlinien in Gewölben.

#### 1. Gewölbe ohne äussere Belastung.

Die Gewölbe des Hochbaues sind zum grössten Teile unbelastet und haben deshalb nur ihr Eigengewicht zu tragen. — Um ein Urteil über die Stabilität eines solchen Gewölbes zu erlangen, denken wir uns dasselbe durch einen Vertikalschnitt, welcher durch den Scheitel gelegt wird, in zwei symmetrische Hälften zerlegt. (Fig. 150 s. S. 154). Den Druck, welchen die rechts liegende Hälfte gegen die links liegende abcd ausübt, ersetzen wir durch eine Kraft H, welche nur nach horizontaler Richtung wirken kann. — Das Gewicht G des Gewölbeteils abcd (dessen Länge senkrecht zur Zeichenfläche gemessen 1 m sei), greift im Schwerpunkt S an. — Endlich wirkt noch die Reaktion W am Widerlager als dritte Kraft auf abcd.



— Der links liegende Gewölbeteil ist demnach im Gleichgewicht, wenn die 3 Kräfte  $H$ ,  $G$  und  $W$  sich zu einem geschlossenen Kräftezuge  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  vereinigen lassen.

Da wir annehmen können, dass der wirklich stattfindende Druck in der Scheitelfuge über die ganze Fläche  $cd$  verteilt ist, und dass in dieser Fuge nur einerlei Spannung, nämlich Druckspannung herrscht, so wird die Kraft  $H$  als Resultante der einzelnen Druckkräfte zwischen  $c$  und  $d$  angreifen. Mit Rücksicht auf das in 1) d. Abschn. über die Druckverteilung Gesagte können wir sogar die Lage des Angriffspunktes von  $H$  auf das mittlere Drittel von  $cd$  beschränken. — Durch gleiche Schlüsse sind wir berechtigt, anzunehmen, dass die Richtungslinie von  $W$  die Hälfte  $ab$  innerhalb des mittleren Drittels derselben trifft. — Im Übrigen sind diese Angriffspunkte unbestimmt und man pflegt deshalb für die ungünstigsten Lagen derselben die Druckverhältnisse innerhalb des Gewölbekörpers in Betracht zu ziehen.

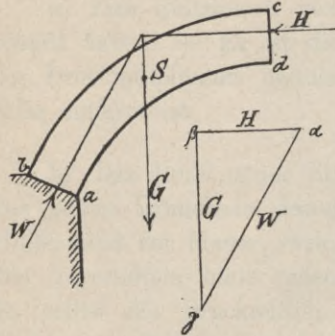


Fig. 150.

1. Annahme. Der Scheiteldruck  $H$  (Fig. 151) greife in  $e$  an, (wo  $ce = \frac{1}{3}cd$  ist) und die Reaktion  $W$  am Widerlager in  $k$ , ( $ka = \frac{1}{3}ab$ ).

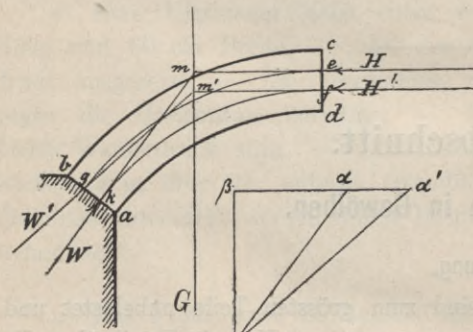


Fig. 151.

— Alsdann können wir die Grössen von  $W$  und  $H$  bestimmen. — Wir verlängern  $H$  bis zum Schnittpunkt  $m$  mit der Richtungslinie von  $G$  und verbinden die Punkte  $k$  und  $m$  durch eine Gerade, welche die Richtung von  $W$  bestimmt. — Zerlegen wir nun  $G$ , wie in Fig. 151 angegeben ist, durch die beiden Geraden  $\alpha\beta$  und  $\alpha\gamma$ , welche parallel zu  $H$  bzw.  $W$  sind, in zwei Seitenkräfte, so stellen  $\alpha\beta$

und  $\alpha\gamma$  die Grössen der beiden Kräfte  $H$  und  $W$  dar.

2. Annahme. Der Scheiteldruck  $H'$  wirke in  $f$ , ( $df = \frac{1}{3}cd$ ) und die Reaktion  $W'$  am Widerlager in  $g$ , wo  $bg = \frac{1}{3}ab$  ist. — In gleicher Weise ergeben sich alsdann die Grössen der Kräfte  $H'$  und  $W'$  aus Fig. 151, wenn  $\alpha'\gamma$  parallel zu  $gm'$  gezogen wird. Es ist dann  $\alpha'\beta = H'$ ,  $\alpha'\gamma = W'$  und man erkennt leicht, dass in diesem Falle  $H' > H$ ,  $W' > W$  ist.

Für jede der vorigen Annahmen zeichnen wir die entsprechende Stützl意思.

Es seien  $il, no, pq$  (Fig. 152) eine Reihe von Fugen und  $G_1, G_2, G_3, G_4$  die in den Schwerpunkten der einzelnen Steine angreifenden Gewichte. — Diese Gewichte fügen wir zu dem eine Gerade bildenden Kräftezuge  $\beta\gamma$

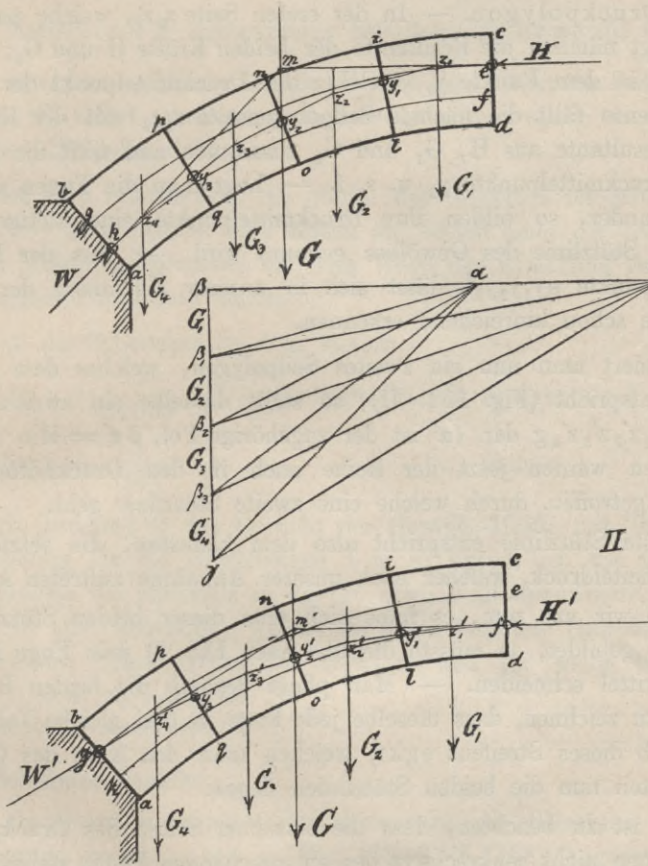


Fig. 152.

aneinander und ziehen  $\alpha\beta \parallel H$  und  $\alpha\gamma \parallel km$ , wobei die Punkte  $k$  und  $m$  dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 151. — Verbinden wir nun die Teilpunkte  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  mit  $\alpha$ , so bedeutet  $\alpha\beta_1$  die Resultante aus dem Scheiteldruck  $H$  und aus  $G_1$ ; ebenso stellt  $\alpha\beta_2$  die Resultante aus  $H, G_1$  und  $G_2$  dar u. s. f.

Die dem Scheiteldruck  $H$  entsprechende Stützl意思 wird nun folgendermassen bestimmt. — Man konstruiert das Seilpolygon der Kräfte  $G_1, G_2,$



$G_3, G_4$  mit Hilfe des Kräftepolygons und des Endpunktes  $\alpha$  von  $H$  als Pol. — Als erste Seilpolygonseite nehmen wir die durch  $e$  gehende Richtungslinie der Kraft  $H$ ; dieselbe trifft  $G_1$  in  $z_1$ . — Von hier geht die zweite Seilpolygonseite  $z_1, z_2$ , welche parallel zu  $\alpha\beta_1$  ist u. s. f. — Die letzte Seite des Seilpolygons ist parallel zu  $\alpha\gamma$ , und sie fällt mit der durch  $k$  gehenden Richtungslinie von  $W$  zusammen. — Das Seilpolygon  $e z_1 z_2 z_3 z_4 k$  heisst ein Druckpolygon. — In der ersten Seite  $z_1 z_2$ , welche parallel zu  $\alpha\beta_1$  ist, liegt nämlich die Resultante der beiden Kräfte  $H$  und  $G_1$ ; sie trifft die Fuge  $il$  in dem Punkte  $y_1$ , welcher der Druckmittelpunkt der Fuge  $il$  ist. — Ebenso fällt die nächste Seilpolygonseite  $z_2 z_3$  mit der Richtungslinie der Resultante aus  $H, G_1$  und  $G_2$  zusammen und trifft die Fuge  $no$  in ihrem Druckmittelpunkte  $y_2$  u. s. f. — Legt man die Fugen unendlich nahe aneinander, so bilden ihre Druckmittelpunkte eine stetige Kurve, welche eine Stützlinie des Gewölbes genannt wird. — Aus der Lage der Druckmittelpunkte  $e y_1 y_2 y_3 k$  lässt sich in unserer Zeichnung der Verlauf dieser Kurve schon hinreichend erkennen.

Konstruiert man nun ein zweites Seilpolygon, welches dem Scheiteldruck  $H'$  entspricht (Fig. 152, II), so stellt dasselbe ein zweites Druckpolygon  $f z'_1 z'_2 z'_3 z'_4 g$  dar, ( $\alpha'$  ist der zugehörige Pol,  $\beta\alpha' = H'$ ). Die einzelnen Fugen werden jetzt der Reihe nach in den Druckmittelpunkten  $f y'_1 y'_2 y'_3 g$  getroffen, durch welche eine zweite Stützlinie geht.

Die erste Stützlinie entspricht also dem kleinsten, die letztere dem grössten Scheiteldruck, welcher nach unserer Annahme auftreten kann.

Denken wir uns nun, es habe sich eine dieser beiden Stützlinien in Wirklichkeit gebildet, so müsste dieselbe nach IX, 1) jede Fuge in ihrem mittleren Drittel schneiden. — Man pflegt deshalb die beiden Bögen  $eg$  und  $fk$  so zu zeichnen, dass dieselbe jede Fuge in drei gleiche Teile teilen. — Innerhalb dieses Streifens  $egkf$ , welchen man den Kern des Gewölbes nennt, müssten nun die beiden Stützlinien liegen.

Ferner ist zu beachten, dass die einzelnen Seiten des Druckpolygons im allgemeinen nicht senkrecht zu den entsprechenden Fugen stehen werden. — Damit nun keine Verschiebung der Gewölbesteine eintritt, muss jede Seite des Druckpolygons mit der Normale derjenigen Fuge, welche sie in ihrem Druckmittelpunkte trifft, einen kleineren Winkel bilden, als der Reibungswinkel ist. — Auf die bindende Kraft des Mörtels wird, der grösseren Sicherheit wegen, keine Rücksicht genommen.

Bei der Unkenntnis der wirklich auftretenden Stützlinie pflegt man die Stabilität des Gewölbes als gesichert zu betrachten, wenn die Druckmittelpunkte in den beiden hier besprochenen Fällen innerhalb des Gewölbekerns liegen. — Es ist nur noch darauf zu achten, dass der Druck



in keiner der Fugen die zulässige Spannung des Gewölbematerials überschreitet. — Nun werden die Druckkräfte, welche auf die einzelnen Fugen wirken, durch die Längen der Polstrahlen dargestellt. — Es ist also der Druck in der Fuge am Widerlager am grössten. — Nehmen wir den in Fig. 152, II dargestellten Fall, wo  $W'$  in der Entfernung  $bg = \frac{1}{3}ab$  von  $b$  wirkt, so ergibt sich aus der früher betrachteten Druckverteilung, dass die in  $b$  herrschende Druckspannung bei dieser Annahme die Grösse  $\frac{2W'}{ab}$  pr. qcm erreicht. — Hierbei haben wir die zu  $ab$  normale Seitenkraft von  $W'$  gleich  $W'$  selbst genommen, weil dieselbe nur wenig von der zu  $ab$  senkrechten Richtung abweicht.

Es ist noch erforderlich, die Stärke des Gewölbes im Scheitel zu bestimmen. — Man bedient sich hierzu am besten einer der nachstehenden Formeln, welche grösstenteils auf dem Wege der Erfahrung gefunden sind und brauchbare Resultate liefern.

Es ist die Scheitelstärke  $d$  in Metern:

$$d = n + \frac{1}{21000} \cdot \frac{Q}{k} \cdot \frac{1}{h} \text{ für Gewölbe mit weniger als } \frac{1}{3} \text{ Pfeil.}$$

$$d = n + \frac{1}{7000} \cdot \frac{Q}{k} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{mehr} \quad \text{,,} \quad \frac{1}{3} \quad \text{,,}$$

Hierin bedeutet  $Q$  das Gewicht der Gewölbe-Hälfte mit Übermauerung und Belastung für die Gewölbetiefe 1 m in kg;  $k$  ist die zulässige Inanspruchnahme des Materials in kg pro qcm;  $l$  die Spannweite,  $h$  die Pfeilhöhe;  $n$  ist eine Konstante, welche für stark belastete Gewölbe = 0,2 m, für mittelstark belastete Gewölbe = 0,1 m und für wenig belastete Gewölbe = 0,05 m zu setzen ist.

(s. Deutscher Baukalender.)

## 2. Belastetes Gewölbe.

Ist ein Gewölbe belastet, so kann man die Belastung durch eine Übermauerung ersetzen, wie in Fig. 153 (s. S. 158) angedeutet ist. —  $vt$  bedeutet die obere Begrenzung des Belastungskörpers. — Die eine Gewölbehälfte  $abcd$  mit dem darauf ruhenden Belastungskörper zerlegen wir durch vertikale Geraden in eine Anzahl von Mauerprismen, welchen man am zweckmässigsten gleiche Breite giebt. — Es verhalten sich alsdann die Gewichte der Mauerprismen wie die mittleren Breiten der trapezförmigen Grundflächen.

Die horizontale Richtungslinie des Scheiteldruckes  $H$  gehe durch  $f$ , wo  $df = \frac{1}{3}cd$  ist; die Reaktion  $W$  am Widerlager greife in  $g$  an ( $bg = \frac{1}{3}ab$ ). — Nachdem nun der Kräftezug  $\beta\gamma$ , welcher aus den Gewichten  $G_1, G_2,$



$G_3 \dots$  der sämtlichen Mauerprismen besteht, gezeichnet ist, bestimmen wir zuerst die Richtungslinie ihrer Resultante  $G$ . Es geschieht dieses in bekannter Weise mit Hilfe eines Seilpolygons, welches jedoch in Fig. 153, um die Zeichnung möglichst deutlich erscheinen zu lassen, nicht mit angegeben ist. — Aus der

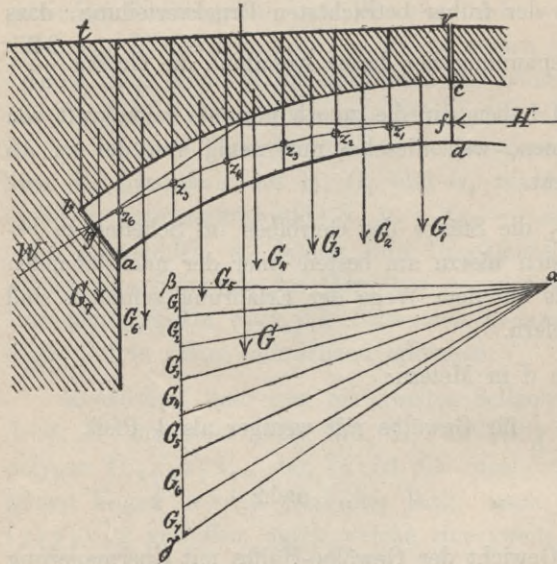


Fig. 153.

hinreichend bestimmt. — Sind die gefundenen  $z_1 z_2 \dots$  auch nicht gerade die Druckmittelpunkte der eigentlichen Fugen des Gewölbes, so weichen sie doch namentlich bei flacheren Gewölben so wenig von denselben ab, dass die Bestimmung der Stützlinien auf die eben beschriebene Weise völlig genügt.

Die Stützlinie in Fig. 153 entspricht dem grössten Scheiteldruck. — Man kann auf gleiche Weise die dem kleinsten Scheiteldruck entsprechende Stützlinie konstruieren. Liegen dann beide Stützlinien innerhalb des Gewölbekerns, so wird das Gewölbe als stabil anzusehen sein, wenn die Beanspruchung des Gewölbematerials in keiner Fuge die zulässige Grösse überschreitet.

Bei der vorstehenden Konstruktion ist noch eine Annahme gemacht, welche der Stabilität des Gewölbes zu Gute kommt. — Wenn wir uns nämlich vorstellen, der Gewölbekörper  $abcd$  habe sich im Scheitel sehr wenig gesenkt, so wird der darüber befindliche Mauerkörper einen Horizontaldruck gegen den entsprechenden Mauerkörper, welcher auf der rechts

gegeben ist. — Aus der Annahme der beiden Druckmittelpunkte  $f$  und  $g$  ergibt sich wie im vorigen die Richtungslinie von  $W$  und nun konstruieren wir das Druckpolygon ebenso wie in Fig. 152.

Die Seiten des Druckpolygons schneiden die vertikalen Geraden, durch welche der Mauerkörper zerlegt worden ist, der Reihe nach in den Punkten  $z_1 z_2 \dots z_6$ . — Durch diese Punkte ist nun die Stützlinie, welche ausserdem auch noch durch  $f$  und  $g$  geht,

liegenden Gewölbehälfte ruht, ausüben. — Nun ist aber der Scheiteldruck  $H$  in unserem Beispiel so bestimmt, als wären die beiden Belastungskörper in der Scheitel durch einen sehr kleinen Zwischenraum derart getrennt, dass die selben keinen Horizontaldruck auf einander ausüben können. — Der letztere ist also in  $H$  mit eingeschlossen, wodurch der Scheiteldruck des Gewölbes jedenfalls etwas zu gross ausfällt.

### 3. Gewölbe von gleicher Widerstandsfähigkeit.

Die wahre Stützzlinie wird von den beiden extremen Fällen, welche wir bisher betrachtet, abweichen; sie wird der Mittellinie des Gewölbes nahe kommen. — Es ist also der Druck in jeder Fuge nahezu gleichförmig über die Fugenfläche verteilt, so dass z. B. in der Fuge  $pq$  (Fig. 154) ein Druck herrscht, welcher gleich  $\frac{\alpha\beta_4}{pq}$  pro Flächeneinheit ist, wenn  $\alpha\beta_4$  derjenige Polstrahl ist, dessen Länge den Druck auf  $pq$  darstellt. — In der Scheitelfuge herrscht die Druckspannung  $\frac{\alpha\beta}{cd}$  pro Flächeneinheit. — Sollen nun in  $pq$  und  $cd$  gleiche Druckspannungen pro Flächeneinheit herrschen, so muss

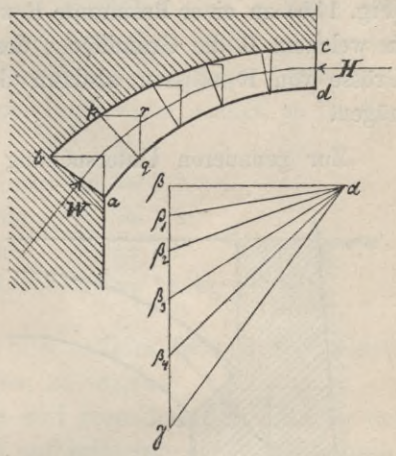


Fig. 154.

$$\frac{\alpha\beta_4}{pq} = \frac{\alpha\beta}{cd}$$

sein, oder es muss sich verhalten:

$$\alpha\beta_4 : \alpha\beta = pq : cd.$$

Es sei nun  $pr$  parallel  $\alpha\beta$ ,  $qr$  parallel  $\beta\gamma$ , dann ist  $\angle pqr = \angle \beta\alpha\beta_4$  und weil  $\angle prq = \angle \alpha\beta\gamma$  ist, so folgt, dass  $\triangle pqr \sim \triangle \alpha\beta\beta_4$  ist. — Es verhält sich demnach:

$$\alpha\beta_4 : \alpha\beta = pq : qr.$$

Vergleichen wir diese Proportion mit der vorhin gefundenen, so folgt:

$$qr = cd,$$

und weil dasselbe für jede andere Fuge gültig ist, so ergibt sich:

Wenn die Druckspannung  $pr$  Flächeneinheit in jeder Fuge gleich dem in der Scheitelfuge herrschenden Druck  $pr$  Flächeneinheit



einheit sein soll, so müssen die Vertikalprojektionen der Fugen gleich der Scheitelfuge gemacht werden.

Ein Gewölbe, in welchem die Fugen nach diesem Prinzip konstruiert sind, heisst ein Gewölbe von gleicher Widerstandsfähigkeit.

Ist die innere Gewölbefläche gegeben und die Stärke der Scheitelfuge bestimmt, so ist es hiernach leicht, den Rücken des Gewölbes so anzuordnen, dass die Widerstandsfähigkeit in den Fugen gleich wird.

**4. Das Widerlager.** Um die Stabilität des Widerlagers zu prüfen, ist der Druck  $W$  des Gewölbes mit dem Gewicht  $P$  des Widerlagers  $abcd$  (Fig. 155) zu einer Resultante  $R$  zu vereinigen. — Die Lage des Punktes  $n$ , in welchem  $R$  die Grundfläche des Widerlagers trifft, ferner Richtung und Grösse von  $R$  müssen alsdann den bekannten Stabilitätsbedingungen genügen.

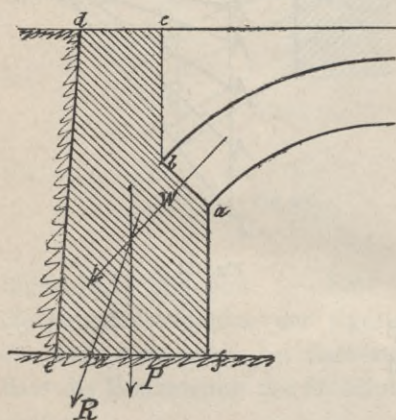


Fig. 155.

### Aufgaben.

1. Ein kreisförmiges Gewölbe soll 5 m Spannweite und 1,75 m Pfeilhöhe haben. — Dasselbe soll aus Sandstein konstruiert werden und unbelastet sein. — Die Gewölbestärke sei überall gleich gross. — Es ist die Dicke des Gewölbes im Scheitel zu bestimmen und dann durch die Stützlinsen die Stabilität zu untersuchen. — Für den Fall, dass die erste Untersuchung eine ungenügende Stabilität ergibt, ist das Gewölbe entsprechend zu verstärken. — Spez. Gewicht des Sandsteins = 2,5; zulässige Druckspannung = 30 kg.

Zur genaueren Untersuchung kann man auch das Widerlager durch horizontale Ebenen in prismatische Mauerschichten zerlegen und dann die Konstruktion der Stützlinsen oder des Druckpolygons des Gewölbes durch das Profil des Widerlagers fortsetzen.

Wirkt endlich auf die Hinterwand  $de$  noch der Erddruck  $E$ , so kann man die Resultante aus  $W$ ,  $P$  und  $E$  bilden und auch für diesen Fall das Druckpolygon zeichnen.

Für praktische Anwendungen wird das bisher Gesagte zur Untersuchung der Stabilität in der Regel ausreichen. — Wir geben zur eigenen Übung einige Beispiele.



2. Ein belastetes Gewölbe aus Backstein hat 10 m Spannweite und 2 m Pfeilhöhe. — Die Belastungslinie ist horizontal und liegt im Scheitel 1 m über dem Rücken des Gewölbes. — Der Gewölbekörper soll überall gleiche Widerstandsfähigkeit haben. — Das Widerlager ist an der Innenseite von der Kämpferfuge bis zum Fundament gerechnet 4 m hoch, an der Basis 3 m dick. — Die Rückfläche des Widerlagers ist eine Ebene, welche mit der Basis einen Winkel von  $80^\circ$  bildet. — An der Innenseite wirkt auf das Widerlager Wasserdruck; der Wasserspiegel liegt mindestens 1 m und höchstens 2,5 m über der Basis. — Auf die Hinterwand des Widerlagers wirkt Erddruck. — Es soll der Gewölbekörper so bestimmt werden, dass durch die Konstruktion der Stützlinien vom grössten und kleinsten Scheiteldruck die Stabilität desselben dargethan wird. — Hiernach ist die mittlere Stützlinie zu zeichnen und durch das Widerlager fortzusetzen. — Ergiebt sich, dass das oben angegebene Profil nicht genügt, so ist dasselbe zu verbessern.

Spez. Gewicht des Mauerwerks = 1,7

„ „ der Erde = 1,8

Natürl. Böschungswinkel =  $30^\circ$

Zulässige Druckspannung für Mauerwerk = 11 kg pr. qcm.

**Stützlinie in einem Schornstein.** Wir fügen dieses Beispiel noch hinzu, um eine weitere Anwendung der Stützlinien zu zeigen.

Schornsteine von beträchtlicher Höhe sind besonders dem Einflusse des Winddruckes ausgesetzt. — Man rechnet auf jedes qm der Vertikalprojektion den grössten erfahrungsmässig auftretenden Winddruck (für unsere Gegenden also ca. 120 kg pr. qm) und zwar nach horizontaler Richtung, weil bei dieser die Wirkungsfähigkeit des Windes auf den Schornstein ihren grössten Wert erreicht. — Die Zeichnung des Druckpolygons oder der Stützlinie ist sehr einfach.

Man teilt durch eine Reihe von Horizontalebene den Schornstein in Schichten von gleicher Höhe ein. — Die Richtungslinien der Gewichte  $G_1, G_2, \dots$  der Schichten liegen sämtlich in der vertikalen Achse des Schornsteins. — Die horizontal gerichteten Winddrücke  $w_1, w_2, \dots$  greifen in den Schwerpunkten der trapezförmigen Vertikalprojektionen der Schichten an. Man kann jedoch diese Angriffspunkte ohne erheblichen Fehler in den Höhenmitten jener Trapeze annehmen, was übrigens auch der Stabilität, wie leicht ersichtlich, zu Gute kommt.

Weil nun die Winddrücke  $w_1, w_2, \dots$  im Vergleich zu den Gewichten  $G_1, G_2, \dots$  immer sehr klein ausfallen, so wird die Stützlinie wenig von der vertikalen Achse abweichen. — Um diese Abweichung deutlicher zur Anschauung zu bringen, pflegt man den Höhendurchschnitt



(Fig. 156, I) im verzerrten Massstabe zu zeichnen. — In Fig. 156, III ist die Hälfte des Höhendurchschnitts auf diese Weise dargestellt. Die horizontalen Strecken sind nach zehnfach grösserem Maassstabe aufgetragen wie die vertikalen, und dem entsprechend ist auch im Kräftepolygon II, welches aus den Gewichten der einzelnen Schichten und den auf die letzteren wirkenden Winddrücken zusammengesetzt ist, der Massstab für  $w_1$ ,

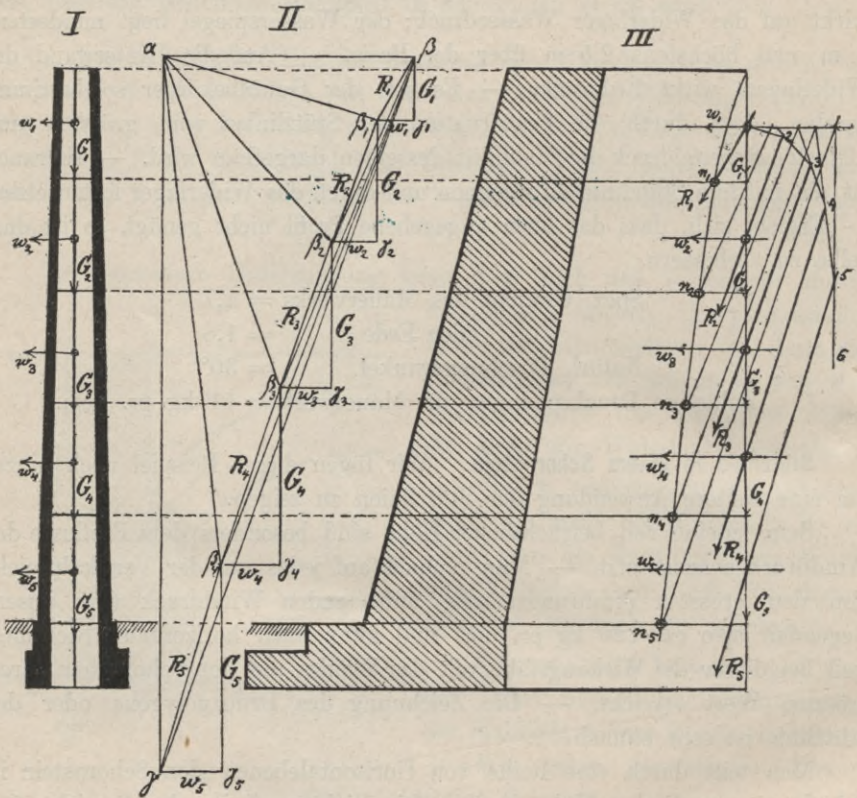


Fig. 156.

$w_2 \dots$  zehnmal so gross wie der für  $G_1, G_2 \dots$  angenommene. — Nun bestimmen wir in III die Resultante  $R_1 \parallel \beta\beta_1$ ; ebenso die Resultante  $R_2$  der Kräfte  $G_2$  und  $w_2$ , parallel zu  $\beta_1, \beta_2$  u. s. f.

Mit Hilfe des Seilpolygons 123456, dessen Seiten den Polstrahlen  $\alpha\beta, \alpha\beta_1 \dots, \alpha\gamma$  parallel sind, finden wir nun in bekannter Weise (s. Fig. 148) die Resultante aus  $R_1$  und  $R_2$ , welche die zweite Horizontalebene in dem Druckmittelpunkte  $n_2$  schneidet; ebenso ergibt sich die Resultante aus  $R_1, R_2$  und  $R_3$ ; sie trifft die dritte Horizontalebene in ihrem Druckmittel-

punkte  $n_2$  u. s. f. — Der erste Druckmittelpunkt  $n_1$  liegt da, wo  $R_1$  die erste Horizontale schneidet. — Die Stützlinie geht nun durch  $n_1, n_2, n_3 \dots$  und erscheint in Fig. 156, III in zehnfacher Verzerrung, um also die wahre Stützlinie in den Höhendurchschnitt I einzuzichnen, müsste man  $\frac{1}{10}$  der Abstände der Druckmittelpunkte  $n_1, n_2, \dots$  von der vertikalen Achse des Schornsteins auf die entsprechenden Horizontalen in I übertragen.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW



Faint, illegible text at the top of the page, possibly bleed-through from the reverse side.

BIBLIOTHEK DER UNIVERSITÄT  
LEIPZIG

---

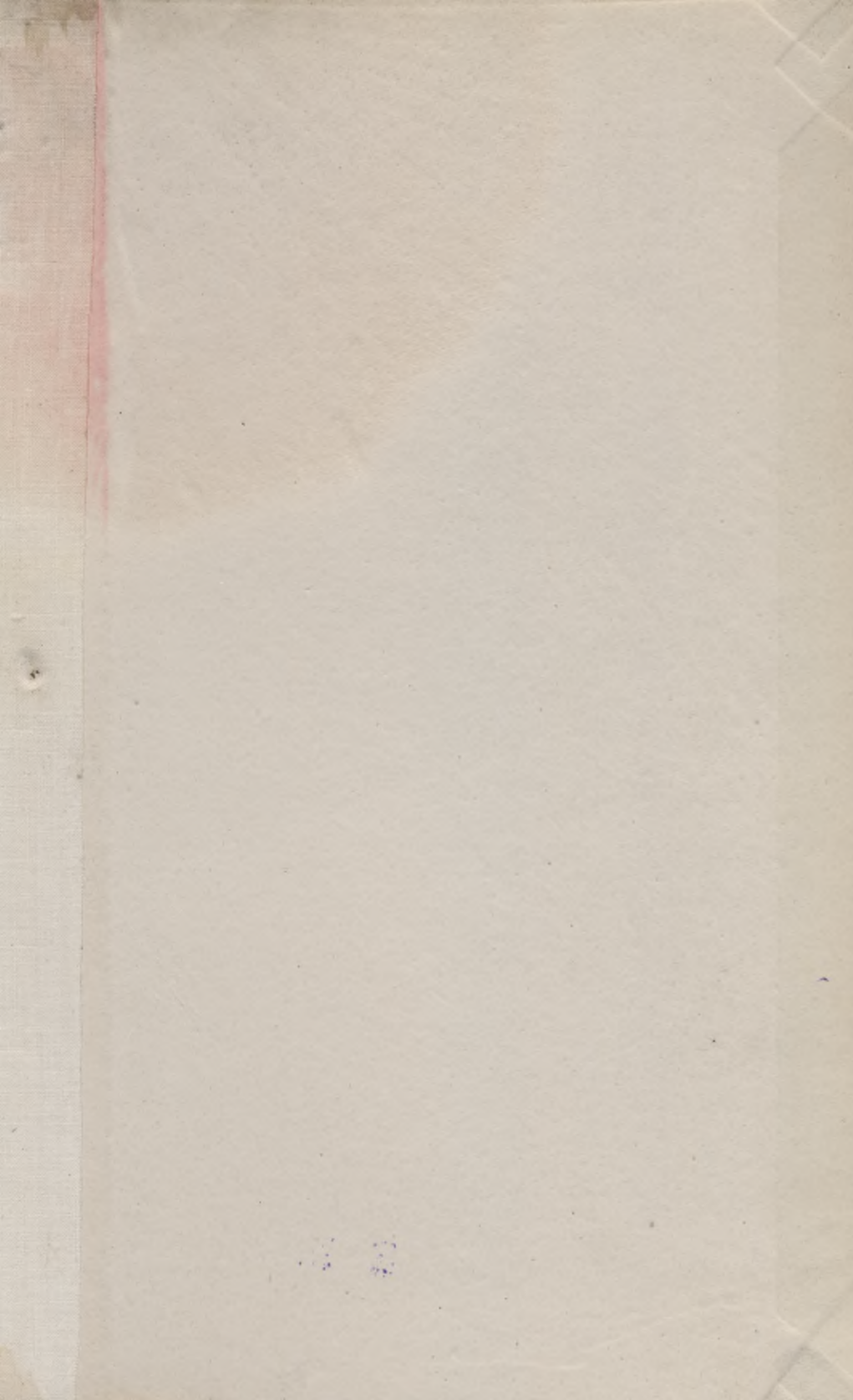
Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

---





S - 96





Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297582