

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



2579

L. inw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297398

x
500

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297398

x
500

CALCUL DE RÉSISTANCE
DES
PONTS ET VIADUCS MÉTALLIQUES
à poutres droites

D'APRÈS LA CIRCULAIRE MINISTÉRIELLE DU 29 AOUT 1891

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Expressions analytiques et tables des moments d'inertie et des moments résistants des sections pleines. Calcul de la longueur des semelles additionnelles. Paris, 1879. 3 fr.

Calcul des résistances des poutres droites à plusieurs travées : 1^{re} et 2^e PARTIES. — Équations générales. (Extrait des Annales des ponts et chaussées, février 1882) 4 fr.

3^e PARTIE. — Équations des courbes-enveloppes, des moments fléchissants et des efforts tranchants. (Extrait des Annales des ponts et chaussées, août 1884). 4 fr.

Jy
CALCULS DE RÉSISTANCE

DES

PONTS ET VIADUCS MÉTALLIQUES

A POUTRES DROITES

d'après la circulaire ministérielle du 29 août 1891

PAR

MAURICE HULÉWICZ

Ingénieur

Ancien élève de l'École des Ponts et Chaussées

F. No. 19435



LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE BAUDRY ET C^{ie}, ÉDITEURS

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15

MAISON A LIÈGE, RUE DES DOMINICAINS, 7

—
1894

Tous droits réservés.

VII C. 6.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

II 2579

Akc. Nr. 1617/49

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
AVANT-PROPOS	xi

PREMIÈRE PARTIE

RÉSISTANCE DES POUTRES MÉTALLIQUES A L'EFFORT DE GLISSEMENT LONGITUDINAL

Exposé	2
--------------	---

I. — EXPRESSIONS GÉNÉRALES

Théorie de l'effort de glissement longitudinal.....	4
Application aux poutres droites.....	7
Résistance de l'âme verticale.....	8
Résistance des rivets d'attache.....	9

II. — CALCUL DES MOMENTS D'INERTIE

Méthode des calculs.....	11
<i>a) Moments d'inertie des sections pleines.....</i>	13
Tableau I. Moments d'inertie des deux cornières.....	15
Tableau II. Moments d'inertie des semelles.....	16
Tableau III. Valeurs numériques des moments d'inertie de l'âme pleine.....	18
Tableau IV. Valeurs numériques des moments d'inertie des deux cornières.....	19
Tableau V. Valeurs numériques des moments d'inertie des semelles.....	21
<i>b) Moments d'inertie des vides.....</i>	22
Composition de la section transversale de la poutre.....	26
Tableau VI. Proportions de la section transversale.....	28
Tableau VII. Moments d'inertie des vides horizontaux des cornières et de l'âme.....	29
Tableau VIII. Valeurs numériques des moments d'inertie des vides verticaux des cornières.....	30
Tableau IX. Valeurs numériques des moments d'inertie des vides horizontaux.....	31

III. — CALCUL DES MOMENTS m

<i>a) Moments des sections pleines.....</i>	33
Tableau X. Moments des deux cornières.....	34
Tableau XI. Moments des semelles.....	35
Tableau XII. Valeurs numériques des moments de l'âme pleine.....	36

	Pages.
Tableau XII. Valeurs numériques des moments de deux cornières.	37
Tableau XIV. Valeurs numériques des moments des semelles.	39
<i>b) Moments des vides.</i>	40
Tableau XV. Moments des vides horizontaux.	42
Tableau XVI. Valeurs numériques des moments des vides verticaux.	44
Tableau XVII. Valeurs numériques des moments des vides horizontaux.	45
Exemple.	46
Effort de glissement sur les culées.	49
— — sur les piles.	50
Moyens à employer pour réduire le travail des rivets.	51

DEUXIÈME PARTIE

RÉSISTANCE DES POUTRES DES PONTS ET VIADUCS MÉTALLIQUES SOUS L'ACTION DES SURCHARGES MOBILES

Exposé	54
------------------	----

I. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES

Courbe-enveloppe des moments fléchissants produits par les charges mobiles

Considérations générales.	57
Moments fléchissants maxima.	58
Calcul des portées applicables.	61
Détermination de la charge n° <i>k</i>	63
Courbes-enveloppes des moments fléchissants.	65
Calcul des abscisses des points d'intersection des éléments de cette courbe.	67
Valeurs des moments fléchissants aux points d'intersection.	69

Courbe-enveloppe des efforts tranchants

Limites des plus grandes valeurs de l'effort tranchant.	70
Efforts tranchants aux points d'intersection des éléments de la ligne enveloppe.	74

II. — RÉSISTANCE DES POUTRES SUPPORTANT LES VOIES FERRÉES

Définition des charges

Charges du train-type.	75
Charges du train théorique de la Compagnie de l'Ouest.	76
— du train-type à voie étroite.	77

Moments fléchissants maxima

Formules fondamentales.	78
Tableau I. Moments des charges pris par rapport à l'essieu n° <i>k</i> , placées à sa gauche.	79

TABLE DES MATIÈRES

VII

	Pages
Tableau II. Abscisses x' et moments fléchissants maxima produits par le train-type.....	82
Tableau III. Mêmes quantités correspondant au train théorique.....	84
Tableau IV. — — — au train à voie étroite.....	86
<i>Courbes-enveloppes des moments fléchissants.</i>	87
Tableau V. Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le train-type.....	90
Tableau VI. Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le train théorique.....	99

Efforts tranchants maxima

Formules générales.....	108
-------------------------	-----

Ligne-enveloppe des efforts tranchants

Tableau VII. Efforts tranchants maxima produits par le train-type....	111
Tableau VIII. Efforts tranchants maxima produits par le train théorique.	114
Tableau IX. Efforts tranchants maxima produits par le train type à voie étroite.....	117

III. — RÉSISTANCE DES POUTRES DES PONTS-ROUTES

Définition des charges

Types des convois.....	119
Répartition des charges sur la coupe transversale du pont.....	120

Moments fléchissants maxima

Calcul des abscisses x'	124
Tableau X. Chariots de 6 t. Moments des charges pris par rapport à la charge n° k , placées à sa gauche.....	126
Tableau XI. Mêmes moments de charges du convoi de chariots de 16 t.	127
Tableau XII. Abscisses x' et moments fléchissants maxima dus au passage des tombereaux de 6 t.....	128
Tableau XIII. Abscisses x' et moments fléchissants maxima dus au passage des chariots de 16 t.....	131

Efforts tranchants maxima

Formules générales.....	134
Tableau XIV. Efforts tranchants maxima produits par le convoi de tombereaux de 6 t.....	136
Tableau XV. Efforts tranchants maxima produits par le convoi de chariots de 16 t.....	139

IV. — COURBES-ENVELOPPES APPROXIMATIVES

Courbes-enveloppes des moments fléchissants

Définition de la courbe.....	142
Équation générale.....	143

	Pages.
<i>Calcul de la longueur des semelles additionnelles</i>	
Cas de charges uniformément réparties.	146
Cas de surcharges mobiles, courbe exacte.	147
— — courbe approximative.	148
<i>Ligne-enveloppe des efforts tranchants</i>	
Définition et formule générale.	150
V. — EXEMPLE COMPARATIF	
Données du problème.	151
<i>Courbe-enveloppe des moments fléchissants</i> <i>Calcul par la méthode exacte</i>	
Moment fléchissant maximum.	152
Composition de la courbe-enveloppe exacte.	153
Équations des éléments de cette courbe.	156
Longueur des semelles additionnelles.	158
<i>Calcul par la méthode approximative</i>	
Équation de la courbe-enveloppe.	161
Longueur des semelles additionnelles.	162
<i>Ligne-enveloppe des efforts tranchants</i> <i>Calcul par la méthode exacte</i>	
Équation générale.	163
Équation des éléments de la ligne-enveloppe.	164
<i>Calcul par la méthode approximative</i>	
Équation de la ligne-enveloppe.	165
Tableau comparatif des valeurs des efforts tranchants.	166
Conclusion.	166

TROISIÈME PARTIE

CALCUL DES FLÈCHES DES POUTRES DROITES A SECTION VARIABLE

Exposé.	169
-----------------	-----

I. — POUTRES A PLUSIEURS TRAVÉES

Équation fondamentale.	171
Poutres à section constante.	172

TABLE DES MATIÈRES

ix

	Pages.
Poutres à section variable. — Cas d'une semelle additionnelle.	173
Cas de plusieurs semelles additionnelles'.	176
Cas de demi-travées chargées	178

II. — POUTRES A UNE TRAVÉE

Flèches produites par la charge uniformément répartie.	180
Flèches produites par les surcharges mobiles. — Cas d'une semelle additionnelle.	180
Cas de plusieurs semelles additionnelles.	184
Conditions pour obtenir la plus grande valeur de la flèche.	185

III. — APPLICATIONS

1. — Poutres à trois travées

Données générales.	187
Flèche dans la travée centrale.	188
— les travées de rive.	190

2. — Poutres à une travée

Données générales.	191
Flèche due à la charge permanente.	192
— produite par les surcharges isolées.	193

CHAPITRE ADDITIONNEL

Circulaire ministérielle n° 4.	196
--	-----

INSTRUCTIONS POUR L'APPLICATION DU RÈGLEMENT

Ponts supportant des voies de fer.	197
Ponts supportant des voies de terre	202
Ponts-canaux.	203

RÈGLEMENT

I. Ponts supportant des voies de fer.	204
II. Ponts supportant des voies de terre.	211
III. Ponts-canaux métalliques	214
IV. Dispositions diverses.	215



AVANT-PROPOS

Les modifications introduites dans les calculs de résistance des ponts et viaducs métalliques, par la circulaire ministérielle du 29 août 1891, portent principalement sur les points suivants :

D'après l'article 2 du règlement, le travail du métal doit être calculé pour les sections nettes des pièces considérées, déduction faite des trous de rivets.

Les calculs justificatifs de la rivure seront fournis à l'appui des projets.

Les ouvrages à travées métalliques doivent présenter une résistance suffisante, sous l'action des charges déterminées par les articles 4, 13 et 17 de ce règlement.

Ensuite, d'après l'article 7 du règlement, on doit fournir à l'appui des projets le calcul des flèches sous l'action de la charge permanente et de la surcharge.

Dans les trois parties, dont se compose l'ouvrage actuel, nous traitons ces questions répondant au programme de la circulaire ministérielle, et nous en donnons la solution par la méthode analytique.

Les équations générales établies dans chaque partie, et une série des coefficients numériques permettent de déterminer rapidement les efforts maxima des poutres métalliques.

La première partie renferme l'évaluation de l'effort de glissement longitudinal, nécessaire pour déterminer la résistance de l'âme verticale pleine, et le travail de rivets d'attache des cornières longitudinales.

Cet effort, calculé d'après les formules générales de M. Collignon (1) et de M. Bresse (2), est exprimé par la formule simple

$$d\theta = \frac{\Delta dx}{I} m.$$

Les tables numériques de cette partie donnent les valeurs des moments d'inertie I et des moments m des surfaces des sections transversales des poutres composées, pour les hauteurs variant de 0,30 m à 3 m .

La deuxième partie traite de la résistance des poutres des ponts et viaducs métalliques à une travée, sous l'influence des surcharges mobiles.

Cette partie contient les expressions des moments fléchissants et des efforts tranchants, sous la forme simplifiée suivante :

Pour les moments fléchissants maxima M' au droit de l'essieu portant n° k .

$$M' = -b + cx'^2.$$

L'abscisse x' , désignant la distance de l'essieu n° k de l'appui de gauche, se calcule par la formule ci-après, où la quantité δ est constante pour le même nombre des charges.

$$x' = \frac{l}{2} + \delta.$$

Pour les efforts tranchants maxima A au droit de l'essieu n°1 ayant pour abscisse a .

$$A = \Pi \frac{l-a}{l} - d.$$

Ces expressions appliquées aux surcharges de la circulaire ministérielle forment les tableaux analytiques II à IV et VII à XV de la deuxième partie, dans lesquels les coeffi-

(1) *Cours de mécanique appliquée aux constructions*, 3^e édition, page 225.

(2) *Cours de mécanique appliquée*, 1^{re} partie, page 71.

cients b , c , d et ε se trouvent tout calculés pour chaque système comprenant un nombre déterminé de charges.

Ce nombre, variant de 3 à 38, renferme ainsi toutes les portées l jusqu'à 100 m pour le train-type, le train théorique de la Compagnie de l'Ouest, et pour les convois de chariots de 6 t et de 16 t .

En ce qui concerne le train-type prévu par le règlement pour la voie étroite de 1 m de largeur, le nombre de charges considéré varie de 4 à 20 et 25 ; la plus grande portée applicable est dans ce cas de 66,40 m pour les moments fléchissants, et de 67,50 m pour les efforts tranchants.

Les tableaux V et VI de cette partie renferment les équations des éléments de la courbe-enveloppe des moments fléchissants, les abscisses des points d'intersection des courbes successives, et les valeurs des moments en ces points.

Dans l'établissement de ces formules, nous supposons comme connus les théorèmes suivants.

a) Les moments fléchissants maxima produits par un système de charges isolées correspondent aux points d'application de ces charges (1).

b) Th. de M. Barré relatif à l'emplacement le plus défavorable du train sur les poutres (2).

Le chapitre suivant de la deuxième partie donne l'équation de la courbe-enveloppe approximative que nous proposons de substituer à la courbe exacte ; il renferme, en outre, les formules servant à calculer la longueur des semelles additionnelles.

L'exemple numérique placé à la suite contient les courbes-enveloppes calculées par la méthode exacte et par la méthode approximative. Les résultats des calculs représentés graphiquement sur la planche, qui se trouve à la fin

(1) Voir pour la démonstration, *Cours de mécanique appliquée*, de M. Collignon, pages 155 et 156.

(2) Même ouvrage, page 166.

du volume, montrent, par la superposition de deux courbes, la différence qui existe entre leurs ordonnées.

Dans la troisième partie se trouvent développées les formules donnant les flèches prises sous l'action des charges par les poutres droites :

a) A section constante ;

b) A section rendue variable par l'addition des semelles supplémentaires.

Pour les poutres à plusieurs travées, les flèches sont exprimées en fonction des charges uniformément réparties.

Pour les poutres à une travée, les expressions des flèches sont établies dans l'hypothèse de charges uniformément réparties et dans l'hypothèse des surcharges isolées.

Les constantes, qui entrent dans l'expression de la ligne moyenne déformée, sont calculées par la méthode de M. Collignon. Cette méthode suppose qu'aux points d'application des charges, les tronçons de la ligne moyenne déformée doivent se raccorder tangentielllement.

Nous avons appliqué cette condition également aux points de variation de la section transversale de la poutre.

Les exemples numériques qui terminent cette partie donnent le détail de l'application des formules générales.

Le chapitre additionnel, à la fin du volume, reproduit textuellement la circulaire et le règlement ministériels du 29 août 1891.

Paris, le 1^{er} février 1894.

M. HULÉWICZ.

ERRATA

Page	9,	ligne 29,	<i>au lieu</i> :	il	<i>lire</i> :	ils	
—	14	—	8	—	c_2^3	—	c_3^3
—	23	—	22	—	$\frac{C^3}{c^3}$	—	$\frac{c^3}{3}$
—	32	—	5	—	du mois de février dernier, col. 30	—	page 117
—	33	—	17	—	$+\frac{a'c_1 + a''c_2}{2}$	—	$-\frac{a'c_1 + a''c_2}{2}$
—	59	—	9	—	$Yx =$	—	$Yx -$
—	60	—	5	—	à laquelle	—	à l'emplacement de laquelle
—	61	—	14	—	dès que la	—	dès que le rang de la
—	62	—	32	—	l'influence de	—	les termes relatifs à
—	63	—	11	—	$=$	—	$l_1 =$
—	67	—	26	—	égalisant	—	égalant
—	68	—	1	—	$\frac{1}{k}$	—	\sum_k^1
—	—	—	29	—	M. Sévy	—	M. Lévy, IV ^e partie page 334.
—	69	—	19	—	<i>supprimer les mots</i> :	en	ce point.
—	70	—	10	—	remontée	<i>lire</i> :	rencontré
—	77	—	13	—	tendus	—	tenders
—	89	—	13	—	$\frac{px}{z}$	—	$\frac{px}{2}$
—	114	—	3	—	174,85	—	176,85
—	120	—	12	—	<i>supprimer</i> :	col. 93-94.	
—	124	—	13	—	123 et 124	<i>lire</i> :	126 et 127
—	125	—	4	—	donc à la	—	donc égal à la
—	149	—	1	—	M	—	\mathcal{M}
—	—	—	3	—	x^{15} et $-\mathcal{M}$	—	x^{12} et $+\mathcal{M}$
—	—	—	5	—	$2x_a$	—	x_a
—	—	—	11	—) $2x$.	—) $2x'$.

CALCULS DE RÉSISTANCE

DES

PONTS ET VIADUCS MÉTALLIQUES

D'après la circulaire ministérielle du 29 août 1891.

PREMIÈRE PARTIE

RÉSISTANCE DES POUTRES MÉTALLIQUES A L'EFFORT DE GLISSEMENT LONGITUDINAL

SOMMAIRE

EXPOSÉ

I. — EXPRESSIONS GÉNÉRALES

Théorie de l'effort de glissement longitudinal. — Application aux poutres droites. — Poutres homogènes. — Poutres composées. — Résistance de l'âme verticale. — Résistance des rivets horizontaux. — Résistance des rivets verticaux.

II. — CALCUL DES MOMENTS D'INERTIE.

(a) *Moments d'inertie des sections pleines.* — Expressions générales. — Tableaux des valeurs numériques des moments d'inertie pour les poutres de 0,30 m à 3 m de hauteur.

(b) *Moments d'inertie des vides.* — Emplacement des vides. — Moments d'inertie des vides verticaux. — Moments d'inertie des vides horizontaux.

(c) *Composition de la section transversale d'une poutre.* — Dimensions de l'âme. — Des cornières. — Des semelles. — Tableau des proportions de la section transversale. — Valeurs numériques des moments d'inertie des vides. — Application.

III. — CALCUL DES MOMENTS m

(a) *Moments des sections pleines.* — Expressions générales. — Tableaux des valeurs numériques pour les poutres de 0,30 m à 3 m de hauteur.

(b) *Moments des vides.* — Vides des rivets verticaux. — Vides des rivets horizontaux. — Tableau des expressions générales des moments des vides. — Tableaux des valeurs numériques.

IV. — EXEMPLE

Calcul de résistance à l'effort de glissement longitudinal d'une poutre à trois travées. — Effort tranchant. — Résistance de l'âme verticale. — Résistance des rivets d'assemblage.

EXPOSÉ

Les dimensions de l'âme verticale, ainsi que le nombre et le diamètre des rivets qui réunissent les diverses pièces entrant dans la composition d'une poutre en tôle, doivent être déterminés de manière à résister dans de bonnes conditions à l'effort de glissement longitudinal.

La détermination de la résistance à cet effort étant prescrite par l'art. 2 de la nouvelle circulaire ministérielle, les calculs correspondants doivent faire partie de la note générale des calculs de résistance à l'appui des projets des ponts et viaducs métalliques.

Les calculs à effectuer pour arriver aux résultats indiqués par cette partie de la circulaire ministérielle sont longs et laborieux. En effet, l'expression générale de l'effort de glissement comprend celles du moment d'inertie I et du moment m de la section nette, c'est-à-dire de la section dont on a déduit les vides correspondant aux trous des rivets.

La détermination de ces deux dernières quantités exige un calcul préalable assez long, et ce n'est qu'à la fin de celui-ci qu'on constate que le travail de l'âme verticale, ou des rivets d'attache dépasse la limite prescrite. Dans ce cas, les dimensions de la poutre doivent être modifiées et les calculs refaits.

Ces inconvénients peuvent être évités. En effet, ayant une marche générale à suivre, et un recueil des formules et tables permettant d'obtenir sans difficulté les dimensions transversales de la section, ainsi que les valeurs numériques des facteurs entrant dans l'expression de l'effort de glissement, s'appliquant à un grand nombre de cas, on pourrait simplifier dans une notable mesure la solution du problème.

C'est ce programme que nous croyons utile de développer dans le présent mémoire.

Ce mémoire comprend trois chapitres principaux.

Dans le premier se trouvent développées les expressions générales de l'effort de glissement longitudinal, avec des applications aux cas particuliers.

Le deuxième chapitre comprend les moments d'inertie des poutres composées en fer ayant la forme d'un double T.

La première partie de ce chapitre est relative aux sections pleines, et la deuxième aux vides des rivets à déduire, pour avoir le moment d'inertie d'une section nette. A la fin de chacune de ces parties se trouvent les tableaux des valeurs numériques des moments d'inertie des poutres droites pour les hauteurs comprises entre $0,40 m$ et $3 m$.

Le troisième chapitre renferme dans le même ordre les expressions générales et les valeurs numériques des moments m .

Enfin un exemple numérique termine ce mémoire. Cet exemple donne les détails de l'application des résultats établis dans les chapitres précédents, au calcul de résistance d'une poutre droite à l'effort de glissement longitudinal.

I. — EXPRESSIONS GÉNÉRALES

THÉORIE DE L'EFFORT DE GLISSEMENT LONGITUDINAL

Les tensions longitudinales dans une poutre produits par les moments fléchissants ont pour conséquence de faire naître une tendance des fibres à glisser les unes sur les autres dans le sens de leur longueur.

Cette tendance au glissement est tenue en équilibre dans les pièces homogènes par une force élastique qui est la résistance tangentielle des fibres.

Dans les pièces composées, cette force est équilibrée par la résistance au cisaillement des rivets d'assemblage.

Considérons une portion de la poutre comprise entre les deux plans infiniment voisins définis par leur abscisse x et $x + dx$ normaux au plan de la ligne moyenne GG (fig. 4).

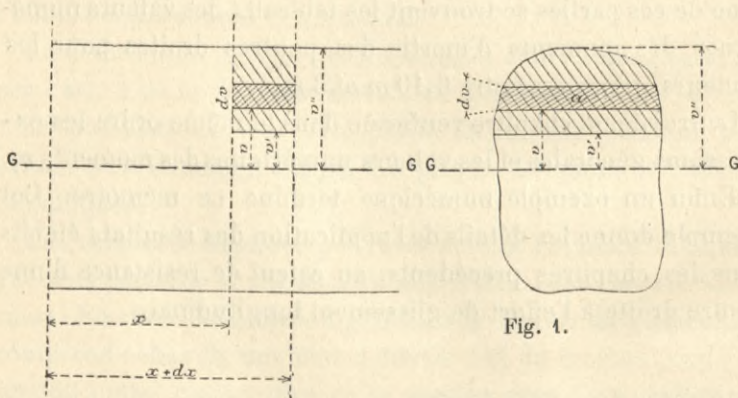


Fig. 4.

Menons parallèlement à ce plan deux plans infiniment voisins ayant pour ordonnées v et $v + dv$ à partir du plan GG et désignons par a la largeur de la section qui correspond à l'ordonnée v . Ces deux plans détermineront, dans la section transversale de la poutre ayant pour abscisse x , un élément infiniment petit dont la surface est adv .

La tension par unité de surface de l'élément ainsi défini, produite par le moment fléchissant M est, d'après la formule connue dans laquelle I représente le moment d'inertie de la section entière :

$$(1) \quad R = \frac{Mv}{I}.$$

La tension sur l'élément entier sera par suite :

$$(2) \quad Radv = \frac{M}{I} avdv.$$

Ceci posé, pour déterminer l'intensité de l'effort de glissement θ suivant un plan parallèle à la ligne moyenne ayant pour ordonnée v' , il faut prendre la somme des glissements partiels compris entre ce plan et le plan tangent parallèle, à la partie supérieure de la section dont l'ordonnée est v'' . Nous aurons par conséquent :

$$(3) \quad \theta = \frac{M}{I} \int_{v'}^{v''} avdv.$$

Dans la section voisine de la poutre ayant pour abscisse $x + dx$, l'effort de glissement prendra une intensité $\theta + d\theta$.

Ainsi la partie considérée de la section est sollicitée par une tension égale à la différence.

$$\theta + d\theta - \theta = d\theta.$$

On a donc, en prenant la dérivée de l'équation (3), l'expression de l'effort de glissement dans le cas le plus général, sous la forme suivante :

$$(4) \quad d\theta = \frac{dMdx}{dxI} \int_{v'}^{v''} avdv + \frac{Mdx}{I} \int_{v'}^{v''} v \frac{da}{dx} dv \\ + \frac{M}{I} (a''v''dv'' - a'v'dv') - \frac{MdI}{I^2} \int_{v'}^{v''} avdv.$$

Dans les applications, on donne généralement les mêmes dimensions transversales aux poutres sur toute leur longueur, en ne faisant varier que les dimensions verticales, soit dans la hauteur de l'âme, soit dans l'épaisseur des semelles.

Dans ce cas on a :

$$\frac{da}{dx} = 0.$$

Par suite la formule générale devient en remarquant que

$$\frac{dM}{dx} = A, \quad A \text{ étant l'effort tranchant.}$$

$$(5) \quad d\theta = \frac{A dx}{I} \int_{v'}^v a v dv + \frac{M}{I} (a'' v'' dv'' - a' v' dv') - \frac{M dx}{I^2} \int_{v'}^{v''} a v dv.$$

Enfin dans le cas des poutres droites à section constante unique, ou à une série de sections constantes, on a I constant dans la portion considérée de la poutre et, par suite :

$$dv'' = 0 \text{ et } dv' = 0.$$

En conséquence l'expression générale, se réduisant à son premier terme, devient :

$$(6) \quad d\theta = \frac{A dx}{I} \int_{v'}^{v''} a v dv.$$

L'intégrale de cette expression représente la somme des moments par rapport à la ligne moyenne des diverses parties de la section comprises entre les ordonnées v'' et v' .

Désignant par m cette somme des moments, nous aurons dans le cas considéré l'expression générale suivante :

$$(7) \quad d\theta = \frac{A dx}{I} m.$$

La valeur de cette expression, pour la même section de la poutre, croît avec le moment m c'est-à-dire en sens inverse de l'ordonnée v' ; elle atteint par suite le maximum pour $v' = 0$, ce qui a lieu pour le plan de la ligne moyenne.

Au contraire l'effort de glissement décroît avec le moment m à mesure que l'ordonnée v' augmente, et il devient nul pour la valeur extrême de cette dernière $v' = v''$.

Application aux poutres droites.

Poutres homogènes. — Lorsque la poutre forme une pièce homogène, comme par exemple les poutrelles en fer laminé, dans ce cas il suffit de vérifier la résistance à l'effort de glissement de l'âme verticale, suivant le plan de la ligne moyenne, où cet effort est maximum.

Cette résistance se détermine sans difficulté, car ces poutrelles sont employées généralement avec la section pleine ; par conséquent, on trouve leurs moments d'inertie tout calculés soit dans les albums des fers, soit dans les tables qui se trouvent dans les recueils de formules.

Quant aux moments m , comme la section correspondante de la poutrelle peut toujours se réduire aux deux rectangles, leur détermination peut se faire très rapidement.

Poutres composées. — Dans le cas des poutres composées de tôles et des cornières, les calculs sont plus compliqués à cause de la grande variété dans les dimensions transversales de la section.

On commencera par vérifier la résistance de l'âme verticale à l'effort de glissement maximum.

Ensuite, la section n'étant pas homogène, il est nécessaire de s'assurer de la résistance suffisante suivant les plans de jonction des diverses parties composant cette section, pour qu'on puisse la considérer comme homogène dans les limites de travail prescrites par la circulaire ministérielle.

Cette dernière condition peut être considérée comme obtenue, lorsque le travail des rivets d'assemblage au cisaillement reste inférieur aux limites indiquées par la même circulaire.

Il résulte de là que, dans le calcul de résistance d'une poutre à l'effort de glissement longitudinal, on doit déterminer l'intensité de celui-ci pour les trois positions ci-après :

a) Suivant le plan de la ligne moyenne pour avoir la résistance de l'âme verticale ;

b) Suivant les deux plans de contact des cornières avec l'âme verticale pour obtenir la résistance des rivets horizontaux ; et, enfin

c) Suivant le plan inférieur des semelles, ce qui permettra de calculer la résistance des rivets verticaux.

Nous allons appliquer la formule générale (7) à ces trois cas.

Résistance de l'âme verticale — L'intensité maximum de l'effort de glissement longitudinal s'exerce, comme nous l'avons vu, suivant le plan de la ligne moyenne. Cet effort tend à faire glisser toute la partie supérieure de la section située au-dessus de la ligne moyenne, sur la partie qui se trouve au-dessous de cette ligne.

Si l'on désigne par m_a , m_c et m les moments par rapport à la ligne moyenne de l'âme, des cornières et des semelles, on aura dans le cas considéré, pour déterminer l'intensité de l'effort de glissement, l'expression suivante :

$$(8) \quad d\theta = \frac{\Lambda dx}{I} (m_a + m + m_s).$$

L'effort ainsi déterminé doit être équilibré par la résistance de l'âme verticale dont la section résistante, suivant le plan de la ligne moyenne, est :

$$\Omega = edx$$

e étant l'épaisseur de l'âme et dx représentant ici l'unité de longueur.

Le travail maximum par millimètre carré R de la section résistante sera donné par la formule suivante :

$$(9) \quad R = \frac{d\theta}{10^6 e}.$$

Ce travail ne doit pas dépasser les limites indiquées par la circulaire ministérielle, page 16.

Ces limites, en ce qui concerne le fer, sont de :

4^k, 40 pour les pièces de pont, et pour les longerons et entretoises sous-rails.

5^k, 20 pour les poutres se trouvant en dehors des rails.

Résistance des rivets horizontaux. — Ces rivets doivent résister à l'effort qui tend à faire glisser l'ensemble de la semelle et des cornières sur l'âme verticale.

L'expression du moment m ne comprenant dans ce cas que les termes m_c et m_s , l'intensité de l'effort de glissement sera donnée par l'expression suivante :

$$(10) \quad d\theta = \frac{A dx}{I} (m_c + m_s)$$

Dans cette expression dx indique l'espacement d'axe en axe des rivets horizontaux des cornières dans le sens longitudinal, les autres lettres conservant la même signification que dans le cas précédent.

L'effort de glissement déterminé par la formule (10) doit être équilibré par la résistance au cisaillement d'un rivet travaillant en double section, puisque le cisaillement de ce rivet s'opère suivant deux surfaces de contact des cornières à l'âme verticale.

Si l'on désigne maintenant par ω la section transversale de ce rivet, le travail maximum par millimètre carré de deux sections sera donné par la formule suivante :

$$(11) \quad R = \frac{d\theta}{2 \omega 10^6}$$

Les limites de ce travail doivent être les mêmes que celles de l'âme verticale indiquées plus haut.

Résistance des rivets verticaux. — Ces rivets attachent les semelles de la poutre aux cornières ; il, doivent résister à l'effort qui tend à faire glisser les semelles suivant leur plan inférieur sur les cornières.

La valeur du moment m se réduit ici au dernier terme de

l'expression (8) entre les parenthèses ; par suite cette expression devient :

$$(12) \quad d\theta = \frac{A dx}{l} m_s.$$

L'effort de glissement ainsi déterminé doit être équilibré par la résistance au cisaillement des rivets verticaux qui se trouvent dans le même plan transversal. Pour les poutres composées de quatre cornières, ces rivets, dans la partie considérée de la section, sont au nombre de deux.

Désignant par ω la section transversale d'un de ces rivets, on obtient pour déterminer leur travail maximum par millimètre carré l'expression analogue à celle du cas précédent, soit :

$$R = \frac{d\theta}{2 \omega 10^6}.$$

La dernière expression de l'effort de glissement est rarement employée. En effet, dans la construction courante, on emploie généralement les cornières à branches égales, et par suite on donne le même diamètre et le même espacement aux rivets d'assemblage de deux branches des cornières.

Or l'effort de glissement calculé par les deux dernières expressions (10) et (12) est plus grand dans le premier cas que dans le dernier à cause de la plus grande valeur du moment correspondant m .

Il suffit, par conséquent, de vérifier la résistance des rivets horizontaux ; et, si ces derniers se trouvent dans de bonnes conditions de résistance, on peut en conclure, sans faire de nouveaux calculs, que les rivets verticaux se trouveront dans des conditions encore meilleures.

La dernière expression de l'effort de glissement ne peut s'appliquer qu'en cas où l'on se trouve obligé de recourir aux cornières à branches inégales.

Dans ce cas, les plus longues branches placées verticalement reçoivent deux rangées de rivets qui les attachent à l'âme de la poutre, tandis que les plus courtes branches ne se

trouvent attachées aux semelles que par une rangée de rivets.

Mais cette disposition se rencontre rarement, et elle ne paraît pas satisfaisante; car, dans ce cas, on est obligé, soit d'espacer hors de proportion les rivets verticaux, soit de les placer presque en face des rivets horizontaux, ce qui donne un assemblage moins résistant que dans le cas des cornières à branches égales.

Application des expressions générales. — Les expressions de l'effort de glissement longitudinal déterminées ci-dessus (8)(10) et (12) contiennent celles de l'effort tranchant A , du moment m et du moment d'inertie I .

La valeur numérique de l'effort tranchant se détermine sans difficulté dans chaque cas particulier. Dans les applications aux poutres droites on prendra le maximum de cet effort qui s'exerce au droit des appuis.

Quant à la détermination des deux derniers facteurs qui forme la partie la plus aride du problème, comme nous l'avons dit au commencement, les simplifications proposées font partie des deux chapitres suivants.

Nous croyons ainsi avoir rendu pratiques les expressions générales de ce chapitre.

II. — CALCUL DES MOMENTS D'INERTIE

La section transversale d'une poutre à double T étant formée d'une série de rectangles, le moment d'inertie de cette section par rapport à la ligne moyenne se calcule habituellement par la formule suivante :

$$(13) \quad I = \frac{1}{12} \left[ab^3 - \sum a'b'^3 \right].$$

Dans laquelle a et a' représentent les dimensions horizontales et b et b' les dimensions verticales de la section.

Les calculs indiqués par cette formule déjà passablement longs, à cause des nombreux facteurs ab^3 , présentent l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à un seul cas particulier. Il s'en suit que, si le résultat obtenu se trouve insuffisant, on est obligé de modifier la section et de refaire les calculs, car ceux précédemment faits restent sans application.

En examinant les expressions générales des moments d'inertie, nous avons reconnu qu'on peut éviter ces inconvénients, car la plus grande partie des opérations peut être effectuée d'avance, et s'appliquer ensuite à toutes les dimensions transversales d'une poutre composée.

Ce résultat est obtenu en rapportant ces dimensions transversales à la ligne moyenne et aux plans passant par les faces extérieures des cornières.

Ensuite pour éviter les répétitions et réduire les calculs au minimum, nous avons décomposé l'expression totale du moment d'inertie en trois parties correspondant aux trois catégories des fers entrant dans la composition de la poutre, c'est-à-dire à l'âme verticale, aux cornières et aux semelles.

Chacune de ces expressions partielles a été développée en faisant varier les dimensions transversales entre les limites adoptées dans la construction et en formant les coefficients numériques correspondants.

Ces résultats permettent d'obtenir le moment d'inertie d'une section en fonction de la hauteur de la poutre, au moyen d'une addition des coefficients correspondants.

Afin que ces résultats puissent également s'appliquer aux sections non symétriques, les calculs ne sont effectués que pour la partie de la section située au-dessus de la ligne moyenne.

Une somme analogue, effectuée pour la partie inférieure de la section, permet d'obtenir dans ce cas le moment d'inertie total.

Pour les sections symétriques, ce moment s'obtient en doublant les résultats obtenus dans le cas précédent.

Les moments d'inertie ainsi obtenus doivent être réduits de ceux des vides des rivets ayant la plus grande valeur dans une section transversale de la poutre. Et comme ces derniers correspondent tantôt aux rivets verticaux, tantôt aux rivets horizontaux, ou à leur combinaison, il n'a pas été possible, sans compliquer la question, de les introduire dans les expressions indiquées ci-dessus.

En conséquence, pour obtenir la solution pratique, les moments d'inertie des vides sont déterminés à part en laissant les épaisseurs indéterminées. Ils forment la deuxième partie de ce chapitre.

Les coefficients de ces moments d'inertie, multipliés par l'épaisseur adoptée permettent d'obtenir leur valeur numérique.

Dans ce cas une soustraction simple, de la valeur correspondante à la section pleine, donnera la valeur du moment d'inertie de la section nette.

Enfin, pour rendre les expressions générales immédiatement applicables aux poutres droites, les deux parties de ce chapitre se terminent par les tableaux des valeurs numériques des moments d'inertie pour 35 cas de la hauteur de la poutre hors cornières.

Ces tableaux, sous leur forme très réduite, pourront donner, comme nous le verrons plus loin, au moins 3 200 séries de valeurs des moments d'inertie.

a) MOMENTS D'INERTIE DES SECTIONS PLEINES.

Considérons la partie de la section d'une poutre qui se trouve au-dessus de la ligne moyenne, passant par le centre de gravité de la section entière, et désignons par h la hauteur hors cornières de la poutre comptée à partir de la ligne moyenne.

e et c_3 l'épaisseur et la hauteur de l'âme évidée.

a' et c_1 la largeur et l'épaisseur des branches horizontales des cornières, et a'' et c_2 les mêmes dimensions de leur branches verticales.

Décomposant l'expression du moment d'inertie total en trois parties, on trouve pour les moments d'inertie partiels les expressions suivantes.

Pour l'âme verticale évidée (fig. 2) :

$$(14) \quad I_a = \frac{e}{3} \left[h^3 - (h - c_3)^3 \right] = e \left(c_3 h^2 - c_3^2 h + \frac{c_3^3}{3} \right).$$

Pour l'âme pleine, on a $c_3 = h$, et la formule précédente devient :

$$(15) \quad I_a = \frac{eh^3}{3}.$$

Pour les deux cornières (fig. 3) :

$$(16) \quad I_c = \frac{a'}{3} \left[h^3 - (h - c_1)^3 \right] + \frac{a''}{3} \left[h^3 - (h - c_2)^3 \right]$$

$$= (a'c_1 + a''c_2) h^2 - (a'c_1^2 + a''c_2^2) h + \frac{a'c_1^3 + a''c_2^3}{3}.$$

Pour les semelles (fig. 4) :

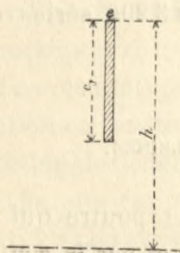


Fig. 2.

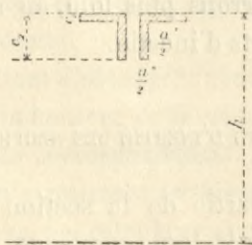


Fig. 3.

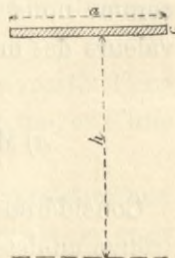


Fig. 4.

$$(17) \quad I_s = \frac{a}{3} \left[(h + c)^3 - h^3 \right] = a \left(ch^2 + c^2 h + \frac{c^3}{3} \right).$$

Les valeurs numériques des coefficients de la hauteur h de ces expressions, correspondant aux dimensions les plus usuelles des fers, se trouvent toutes calculées dans les tableaux II, III et IV de notre brochure sur les moments d'inertie (1). Nous ne donnons ici que les expressions complémentaires des moments d'inertie des cornières dont l'emploi s'est généralisé dans les derniers temps, ainsi que celles de quelques épaisseurs intermédiaires des semelles. Ces dernières valeurs serviront également, comme nous le verrons plus loin, à déterminer les moments d'inertie des vides verticaux des cornières et des semelles.

Tableau I. — Moment d'inertie de deux cornières (formule 16, fig. 3).

DIMENSIONS des CORNIERES	EXPRESSIONS DE $10^6 I_c$
$\frac{70,70}{8}$	$2112 h^2 - 86,336 h + 1,8505$
$\frac{70,70}{10}$	$2600 h^2 - 110,000 h + 2,3267$
$\frac{100,100}{10}$	$3800 h^2 - 218,000 h + 6,7267$
$\frac{110,110}{12}$	$4992 h^2 - 318,624 h + 10,7609$
$\frac{110,110}{15}$	$6150 h^2 - 405,750 h + 13,52375$
$\frac{120,120}{12}$	$5472 h^2 - 376,704 h + 13,9484$
$\frac{120,120}{15}$	$6750 h^2 - 479,250 h + 17,51625$
$\frac{150,150}{15}$	$8550 h^2 - 735,750 h + 34,05375$

(1) Expressions analytiques et tables des moments d'inertie et des moments résistants. Paris, Baudry et C^e, éditeurs.

Tableau II. — Moment d'inertie des semelles (form. 17, fig. 4).

ÉPAISSEURS <i>c</i>	EXPRESSIONS DE $\frac{10^6 I_s}{a}$
8	$8000 h^2 + 64 h + 0,1707$
9	$9000 h^2 + 81 h + 0,2430$
10	$10000 h^2 + 100 h + 0,3333$
11	$11000 h^2 + 121 h + 0,4437$
12	$12000 h^2 + 144 h + 0,5760$
13	$13000 h^2 + 169 h + 0,7323$
14	$14000 h^2 + 196 h + 0,9147$
15	$15000 h^2 + 225 h + 1,1250$
16	$16000 h^2 + 256 h + 1,3653$
18	$18000 h^2 + 324 h + 1,9440$
20	$20000 h^2 + 400 h + 2,6667$

A l'aide de ces tableaux, lorsqu'on a arrêté les dimensions transversales de la poutre, le moment d'inertie en fonction de la hauteur h s'obtient facilement par l'addition des coefficients correspondants des équations indiquées ci-dessus. Il ne reste alors, pour avoir la valeur numérique de ce moment, qu'à effectuer les multiplications par le facteur h .

Ce procédé apporte une grande simplification, sur la méthode ordinaire dans le cas des sections dissymétriques, ou dans le cas de poutres courbes, où les hauteurs varient d'une manière continue, et sont exprimées en millimètres.

Même dans le cas des sections symétriques, les tableaux ci-dessus désignés se prêtent à une simplification, en permettant d'obtenir le moment d'inertie d'une section, dont les dimensions ne se trouvent pas dans les recueils publiés.

Enfin ces tableaux permettent de calculer facilement par la méthode des différences une série de valeurs numériques des moments d'inertie pour les hauteurs déterminées que nous proposons de donner dans l'édition prochaine.

Actuellement nous présentons à nos lecteurs, réunies dans les trois tableaux qui suivent, les valeurs numériques des moments d'inertie obtenus en faisant varier, dans les expressions générales, la hauteur totale hors cornières $2h$ de $0,05\ m$ en $0,05\ m$ entre les limites $2h = 0,30\ m$ et $2h = 1,00\ m$ et de $0,10\ m$ en $0,10\ m$ entre $2h = 1,10\ m$ et $2h = 3,00\ m$.

Ces tableaux, sous leur forme succincte, permettent déjà d'obtenir un nombre relativement très grand de moments d'inertie.

En effet, si l'on admet que chacune des 25×4 valeurs du tableau III puisse se combiner avec 8 valeurs seulement du tableau IV et avec 4 valeurs du tableau V, le nombre des valeurs obtenues étant égal au nombre des permutations de ces facteurs, sera au minimum de :

$$25 \times 4 \times 8 \times 4 = 3\ 200 \text{ séries.}$$

Une série indique ici les moments d'inertie d'une section qui correspondent aux diverses largeurs des semelles a .

Or on peut admettre sans exagération 10 valeurs usuelles pour chaque série. Par suite les moments d'inertie obtenus par ces tableaux pourront atteindre le nombre de 32 000.

Ces résultats embrassent tous les cas des entretoises, des longerons et aussi une grande partie des poutres longitudinales, entrant dans la composition des tabliers métalliques de petite et moyenne ouverture; ce qui correspond aux cas les plus souvent rencontrés dans la construction courante.

Tableau III. — Moments d'inertie de l'âme pleine (formule 15).

HAUTEURS $2 h$	VALEURS DE $10^6 I_a$ CORRESPONDANT A L'ÉPAISSEUR D'ÂME DE			
	8 mm	10 mm	12 mm	15 mm
0,30	9,0000	11,2500	13,5000	16,8750
0,35	14,2917	17,8646	21,4375	26,7969
0,40	21,3333	26,6667	32,0000	40,0000
0,45	30,3750	37,9687	45,5625	56,9531
0,50	41,6667	52,0833	62,5000	78,1250
0,55	55,4583	69,3230	83,1875	103,9844
0,60	72,0000	90,0000	108,0000	135,0000
0,65	91,5417	114,4271	137,3125	171,6406
0,70	114,3333	142,9167	171,5000	214,3750
0,75	140,6250	175,7812	210,9375	263,6719
0,80	170,6667	213,3333	256,0000	320,0000
0,85	204,7083	255,8854	307,0625	383,8281
0,90	243,0000	303,7500	364,5000	455,6250
0,95	285,7917	357,2396	428,6875	535,8594
1,00	333,3333	416,6667	500,0000	625,0000
1,10	443,6667	554,5833	665,5	831,875
1,20	576,0000	720,0000	864,0	1080,000
1,30	732,3333	915,4167	1098,5	1373,125
1,40	914,6667	1143,3333	1372,0	1715,000
1,50	1125,0000	1406,2500	1687,5	2109,375
1,60	1365,3333	1706,6667	2048,0	2560,000
1,70	1637,3333	2047,5833	2456,5	3070,625
1,80	1944,0000	2430,0000	2916,0	3645,000
1,90	2286,3333	2857,9167	3429,5	4286,875
2,00	2666,6667	3333,3333	4000,0	5000,000
2,10	3087,0000	3858,7500	4630,5	5788,125
2,20	3549,3333	4436,6667	5324,0	6655,000
2,30	4055,6667	5069,5833	6083,5	7604,375
2,40	4608,0000	5760,0000	6912,0	8640,000
2,50	5208,3333	6510,4167	7812,5	9765,625
2,60	5858,6667	7323,3333	8788,0	10985,000
2,70	6561,0000	8201,2500	9841,5	12301,875
2,80	7317,3333	9146,6667	10976,0	13720,000
2,90	8129,6667	10162,0833	12194,5	15243,125
3,00	9000,0000	11250,0000	13500,0	16875,000

Tableau IV. — Moments d'inertie des deux cornières, (fig. 3).

HAUTEURS 2 h	EXPRESSIONS DE 10 ⁶ I _c CORRESPONDANT AUX CORNIÈRES DE						
	70,70	70,70	80,80	80,80	90,90	90,90	100,100
	8	10	8	10	10	12	10
0,30	36,4201	44,3267	40,7328	49,660	54,7133	64,1122	59,5267
0,35	51,4217	62,7017	57,7024	70,485	77,8883	91,4506	84,9517
0,40	69,0633	84,3267	77,7120	95,060	105,3133	123,8290	115,1267
0,45	89,3449	109,2017	100,7616	123,385	136,9883	161,2474	150,0517
0,50	112,2665	137,3267	126,8512	155,460	172,9133	203,7058	189,7267
0,55	137,8281	168,7017	155,9808	191,285	213,0883	251,2042	234,1517
0,60	166,0297	203,3267	188,1504	230,860	257,5133	303,7426	283,3267
0,65	196,8713	241,2017	223,3600	274,185	306,1883	361,3210	337,2517
0,70	230,3529	282,3267	261,6096	321,260	359,1133	423,9394	395,9267
0,75	266,4745	326,7017	302,8992	372,085	416,2883	491,5978	459,3517
0,80	305,2361	374,3267	347,2288	426,660	477,7133	564,2962	527,5267
0,85	346,6377	425,2017	394,5984	484,985	543,3883	642,0346	600,4517
0,90	390,6793	479,3267	445,0080	547,060	613,3133	724,8130	678,1267
0,95	437,3609	536,7017	498,4576	612,885	687,4883	812,6314	760,5517
1,00	486,6825	597,3267	554,9472	682,460	765,9133	905,4898	847,7267
1,10	593,2457	728,3267	677,0464	832,86	935,5133	1106,3266	1036,13267
1,20	710,3689	872,3267	811,3056	998,26	1122,1133	1327,3234	1243,9267
1,30	838,0521	1029,3267	957,7248	1178,66	1325,7133	1568,4802	1470,5267
1,40	976,2953	1199,3267	1116,3040	1374,06	1546,3133	1829,7970	1716,1267
1,50	1125,0985	1382,3267	1287,0432	1584,46	1783,9133	2111,2738	1980,7267
1,60	1284,4617	1578,3267	1469,9424	1809,86	2038,5133	2412,9106	2264,3267
1,70	1454,3849	1787,3267	1665,0016	2050,26	2310,1133	2734,7074	2566,9267
1,80	1634,8681	2009,3267	1872,2208	2305,66	2598,7133	3076,6642	2888,5267
1,90	1825,9113	2244,3267	2091,6000	2576,06	2904,3133	3438,7810	3229,1267
2,00	2027,5145	2492,3267	2323,1392	2861,46	3226,9133	3821,0578	3588,7267
2,10	2239,6777	2753,3267	2566,8384	3161,86	3566,5133	4223,4946	3967,3267
2,20	2462,4009	3027,3267	2822,6976	3477,26	3923,1133	4646,0914	4364,9267
2,30	2695,6841	3314,3267	3090,7168	3807,66	4296,7133	5088,8482	4781,5267
2,40	2939,5273	3614,3267	3370,8960	4153,06	4687,3133	5551,7650	5217,1267
2,50	3193,9305	3927,3267	3663,2352	4513,46	5094,9133	6034,8418	5671,7267
2,60	3458,8937	4253,3267	3967,7344	4888,86	5519,5133	6538,0786	6145,3267
2,70	3734,4169	4592,3267	4284,3936	5279,26	5961,1133	7061,4754	6637,9267
2,80	4020,5001	4944,3267	4613,2128	5684,66	6419,7133	7605,0322	7149,5267
2,90	4317,1433	5319,3267	4954,1920	6105,06	6895,3133	8168,7490	7680,1267
3,00	4624,3465	5687,3267	5307,3312	6540,46	7387,9133	8752,6258	8229,7267

Tabl. IV (s.). — Moments d'inertie de deux cornières, (fig. 3).

HAUTEURS $2h$	EXPRESSIONS DE $10^6 I_0$ CORRESPONDANT AUX CORNIÈRES DE					
	$\frac{100,100}{12}$	$\frac{100,100}{15}$	$\frac{110,110}{12}$	$\frac{110,110}{15}$	$\frac{120,120}{12}$	$\frac{120,120}{15}$
	0,30	69,8198	84,3287	75,2873	91,0362	80,5628
0,35	101,5962	120,9662	107,8817	130,8612	115,6052	140,3662
0,40	135,5126	164,5412	146,7161	178,3737	157,4876	191,6662
0,45	176,8190	215,0537	191,7905	233,5737	206,2100	251,4037
0,50	223,7654	272,5037	243,1049	296,4612	261,7724	319,5787
0,55	276,3518	336,8912	300,6593	367,0362	324,1748	396,1912
0,60	334,5782	408,2162	364,4537	445,2987	393,4172	481,2412
0,65	398,4446	486,4787	434,4881	531,2487	469,4996	574,7287
0,70	467,9510	571,6787	510,7625	624,8862	552,4220	676,6537
0,75	543,0974	663,8162	593,2769	726,2112	642,1844	787,0162
0,80	623,8838	762,8912	682,0313	835,2237	738,7868	905,8162
0,85	710,3102	868,9037	777,0257	951,9237	842,2292	1033,0537
0,90	802,3766	981,8537	878,2501	1076,3112	952,5116	1168,7287
0,95	900,0830	1101,7412	985,7345	1208,3862	1069,6340	1312,8412
1,00	1003,4294	1228,5662	1099,4489	1348,1487	1193,5964	1465,3912
1,10	1227,0422	1503,0287	1345,5977	1650,7362	1462,0412	1795,8037
1,20	1473,2150	1805,2412	1616,7065	1984,0737	1757,8460	2159,9662
1,30	1741,9478	2135,2037	1912,7753	2348,1612	2081,0108	2557,8787
1,40	2033,2406	2492,9162	2233,8041	2742,9987	2431,5356	2989,5412
1,50	2347,0934	2878,3787	2579,7929	3168,5862	2809,4204	3454,9537
1,60	2683,5062	3291,5912	2950,7417	3624,9237	3214,6652	3954,1162
1,70	3042,4790	3732,5537	3346,6505	4112,0112	3647,2700	4487,0287
1,80	3424,0118	4201,2662	3767,5193	4629,8487	4107,2348	5053,6912
1,90	3828,1046	4697,7287	4213,3481	5178,4362	4594,5596	5654,1037
2,00	4254,7574	5221,9412	4684,1369	5757,7737	5109,2444	6288,2662
2,10	4703,9702	5773,9037	5179,8857	6367,8612	5651,2892	6956,1787
2,20	5175,7430	6353,6162	5700,5945	7008,6987	6220,6940	7657,8412
2,30	5670,0758	6961,0787	6246,2633	7680,2862	6817,4588	8393,2537
2,40	6186,9686	7596,2912	6816,8921	8382,6237	7441,5836	9162,4162
2,50	6726,4214	8259,2537	7412,4809	9115,7112	8093,0684	9965,3287
2,60	7288,4342	8949,9662	8033,0297	9879,5487	8771,9132	10801,9912
2,70	7873,0070	9668,4287	8678,5385	10674,1362	9478,1180	11672,4037
2,80	8480,1398	10414,6412	9349,0073	11499,4737	10211,6828	12576,5662
2,90	9109,8326	11188,6037	10044,4361	12355,5612	10972,6076	13514,4787
3,00	9762,0854	11990,3162	10764,8249	13242,3987	11760,8924	14486,1412

Tableau V. — Moments d'inertie des semelles, (fig. 4).

HAUTEURS $\frac{2}{h}$	VALEURS DE $\frac{10^6 I_s}{a}$ CORRESPONDANT A L'ÉPAISSEUR c DE						
	10 mm	12 mm	15 mm	20 mm	30 mm	40 mm	50 mm
0,30	240,3333	292,176	372,375	512,6667	819,00	1161,3333	1541,6667
0,35	324,0833	393,276	499,875	685,1667	1085,25	1526,3333	2010,4167
0,40	420,3333	509,376	646,125	882,6667	1389,00	1941,3333	2541,6667
0,45	529,0833	640,476	811,125	1103,1667	1730,25	2406,3333	3135,4167
0,50	650,3333	786,576	994,875	1352,6667	2109,00	2921,3333	3791,6667
0,55	784,0833	947,676	1197,375	1625,1667	2525,25	3486,3333	4510,4167
0,60	930,3333	1123,776	1418,625	1922,6667	2979,00	4101,3333	5291,6667
0,65	1089,0833	1314,876	1658,625	2245,1667	3470,25	4766,3333	6135,4167
0,70	1260,3333	1520,976	1917,375	2592,6667	3999,00	5481,3333	7041,6667
0,75	1444,0833	1742,076	2194,875	2965,1667	4565,25	6246,3333	8010,4167
0,80	1640,3333	1978,176	2491,125	3362,6667	5169,00	7061,3333	9041,6667
0,85	1849,0833	2229,276	2806,125	3785,1667	5810,25	7926,3333	10135,4167
0,90	2070,3333	2495,376	3139,875	4232,6667	6489,00	8841,3333	11291,6667
0,95	2304,0833	2776,476	3492,375	4705,1667	7205,25	9806,3333	12510,4167
1,00	2550,3333	3072,576	3863,625	5202,6667	7959,00	10821,3333	13791,6667
1,10	3080,3333	3709,776	4662,375	6272,6667	9579,00	13001,3333	16541,6667
1,20	3660,3333	4406,976	5536,125	7442,6667	11349,00	15381,3333	19541,6667
1,30	4290,3333	5164,176	6484,875	8712,6667	13269,00	17961,3333	22791,6667
1,40	4970,3333	5981,376	7508,625	10082,6667	15339,00	20741,3333	26291,6667
1,50	5700,3333	6858,576	8607,375	11552,6667	17559,00	23721,3333	30041,6667
1,60	6480,3333	7795,776	9781,125	13122,6667	19929,00	26901,3333	34041,6667
1,70	7310,3333	8792,976	11029,875	14792,6667	22449,00	30281,3333	38291,6667
1,80	8190,3333	9850,176	12353,625	16562,6667	25119,00	33861,3333	42791,6667
1,90	9120,3333	10967,376	13752,375	18432,6667	27939,00	37641,3333	47541,6667
2,00	10100,3333	12144,576	15226,125	20402,6667	30909,00	41621,3333	52541,6667
2,10	11130,3333	13381,776	16764,875	22472,6667	34029,00	45801,3333	57791,6667
2,20	12210,3333	14678,976	18388,625	24642,6667	37299,00	50181,3333	63291,6667
2,30	13340,3333	16036,176	20087,375	26912,6667	40719,00	54761,3333	69041,6667
2,40	14520,3333	17453,376	21861,125	29282,6667	44289,00	59541,3333	75041,6667
2,50	15750,3333	18930,576	23709,875	31752,6667	48009,00	64521,3333	81291,6667
2,60	17030,3333	20467,776	25633,625	34322,6667	51879,00	69701,3333	87791,6667
2,70	18360,3333	22064,976	27632,375	36992,6667	55899,00	75081,3333	94591,6667
2,80	19740,3333	23722,176	29716,125	39762,6667	60069,00	80661,3333	101541,6667
2,90	21170,3333	25439,376	38864,875	42632,6667	64389,00	86441,3333	108791,6667
3,00	22650,3333	17216,576	34088,625	45602,6667	68859,00	92421,3333	116291,6667

b) MOMENTS D'INERTIE DES VIDES

Emplacement des vides. — Pour se conformer à l'art. 2 de la nouvelle circulaire ministérielle, on doit déduire du moment d'inertie d'une section pleine, celui des vides correspondant aux trous des rivets d'assemblage, afin de ne faire entrer dans les calculs de résistance que la section nette de la poutre.

Les dimensions maxima des vides se trouvent sur les plans perpendiculaires à la ligne moyenne passant par les axes des rivets.

Ces plans rencontrent tantôt les rivets verticaux, tantôt les rivets horizontaux et verticaux. De ces deux combinaisons on prendra dans les applications celle qui donne la plus grande valeur aux moments d'inertie.

Rappelons ici que, d'une manière générale, on donne le même diamètre à tous les rivets d'assemblage d'une poutre, et qu'en outre les rivets verticaux et horizontaux d'une cornière ne se trouvent pas dans le même plan transversal, mais sont placés en quinconce dans le sens de la longueur; de cette manière on ne rencontre qu'un seul vide dans la section transversale de la cornière.

Les rivets reliant les semelles entre elles, placés également en quinconce avec les rivets verticaux des cornières, se trouvent en face, c'est-à-dire dans le même plan transversal que les rivets horizontaux de ces dernières.

La disposition des rivets est du reste basée sur les considérations suivantes.

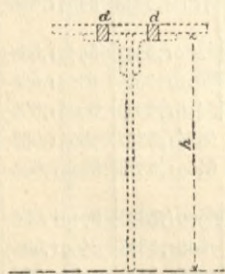


Fig. 5.

Pour les poutres à une semelle, on ne donne que deux rangées des rivets verticaux attachant les cornières à la semelle. Il est facile de voir que, dans ce cas, la plus grande valeur du moment d'inertie des vides correspond à ces rivets verticaux (fig. 5).

Pour les poutres à plusieurs semelles

afin d'empêcher le bûillement des tôles comprimées, on les réunit, comme nous l'avons dit plus haut, par deux rangées de rivets placées en dehors des cornières qui se trouvent dans le même plan transversal que les rivets horizontaux. L'épaisseur totale à river étant, à diamètre égal des rivets, supérieure à celle du cas précédent, c'est à la dernière disposition que correspond la valeur maximum du moment d'inertie (fig. 6).

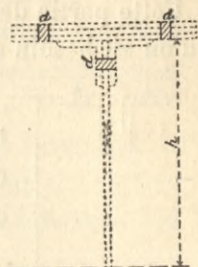


Fig. 6.

Moments d'inertie des vides verticaux. — Les vides verticaux se trouvent dans les semelles et les branches horizontales des cornières. Nous allons considérer chacun de ces cas à part.

Vides des semelles. — Dans les semelles courantes, un plan transversal ne rencontre que deux vides conformément aux considérations qui précèdent (fig. 7).

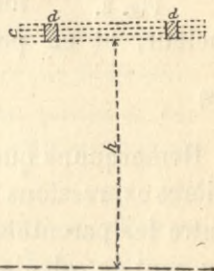


Fig. 7.

Désignons par d le diamètre d'un rivet. L'expression générale du moment d'inertie I'_s des vides des semelles, ayant une épaisseur c s'obtient en posant dans la formule (17) $a = 2d$.

$$(18) \quad I' = 2d \left(ch^2 + c^2h + \frac{C^3}{c^3} \right)$$

Les valeurs numériques des coefficients de cette expression s'obtiennent en conséquence en multipliant par ce facteur $2d$ les équations du tableau II.

Enfin, pour les poutres droites ayant les hauteurs indiquées dans les tableaux précédents, la valeur numérique du moment d'inertie des vides verticaux des semelles s'obtient en multipliant par $2d$ la valeur correspondante du tableau V.

Mais on aura rarement recours à ces calculs qui ne s'appliquent qu'aux poutres existantes dont le moment d'inertie de la section pleine est connu.

Dans la plupart des cas, le moment d'inertie de la section nette des semelles peut s'obtenir directement, en attribuant à celles-ci, au lieu de la largeur totale a , une largeur réduite $a-2d$, et en multipliant par ce facteur les valeurs du tableau V.

Cette partie des calculs peut donc s'effectuer facilement sans qu'on ait besoin de dresser de nouveaux tableaux.

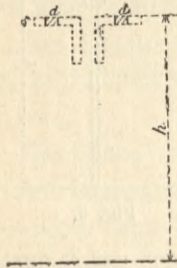


Fig. 8.

Vides verticaux des cornières. — Un plan transversal ne renferme que deux vides verticaux des cornières pour les largeurs de celles-ci ne dépassant pas 0,42 m.

L'expression générale du moment d'inertie de ces vides I'_c , pour l'épaisseur des cornières c_1 (fig. 8) s'obtient en ne conservant dans la formule 16 que les termes comprenant ce facteur, et en posant $a' = 2d$. On trouve ainsi :

$$(19) \quad I'_c = 2d \left(c_1 h^3 - c_1^3 h + \frac{c_1^4}{3} \right).$$

Remarquons que, pour une épaisseur donnée, les deux dernières expressions ne diffèrent que par le signe du second terme entre les parenthèses ; par conséquent, dans les applications, on peut ne calculer qu'un seul tableau des coefficients numériques de l'expression 18 (tableau II), et prendre ce second terme avec le signe positif pour les vides des semelles, et avec le signe négatif pour les vides des cornières.

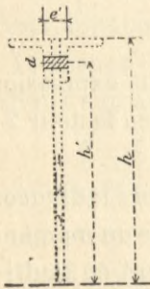


Fig. 9.

Moments d'inertie des vides horizontaux. — Désignons par e' l'épaisseur totale à assembler par les rivets horizontaux, comprenant en bloc les deux épaisseurs des branches verticales des cornières et l'épaisseur de l'âme :

$$e' = 2c_1 + e.$$

Soit en outre h' la distance du centre du vide à la ligne moyenne, et d le diamètre du rivet (fig. 9).

L'expression générale du moment d'inertie de ce vide I' se détermine par la relation suivante :

$$(20) \quad I' = \frac{e'}{3} \left[\left(h' + \frac{d}{2} \right)^3 - \left(h' - \frac{d}{2} \right)^3 \right] = de' \left(h'^2 + \frac{d^2}{12} \right).$$

Cette expression peut également donner le moment d'inertie d'un vide horizontal placé en un point quelconque de l'âme verticale en dehors des cornières. Il suffit pour cela d'attribuer les valeurs correspondantes aux dimensions e' et h' .

Pour les rivets d'assemblage des cornières la hauteur h' se détermine en admettant que les centres des rivets se trouvent disposés au milieu de la largeur extérieure des cornières. On a dans ce cas :

$$(21) \quad h' = h - \frac{c_2}{2}.$$

Cette disposition nous paraît plus rationnelle que celle qui consiste à placer les rivets au milieu de la largeur intérieure de la cornière $0,5(c_2 - e_1)$, car les rivets étant placés au milieu de la surface de contact assurent une répartition plus régulière de l'adhérence des pièces assemblées.

L'hypothèse exprimée par la relation 21 permet de rattacher le moment d'inertie à la hauteur hors cornières h qui se trouve dans les expressions précédentes, et d'effectuer plus facilement les différences des termes correspondants pour les cas des poutres courbes.

Ainsi, en introduisant la relation 21 dans l'expression du moment d'inertie 20, on trouve :

$$(22) \quad I' = de' \left(h^2 - c_2 h + \frac{3c_2^2 + d^2}{12} \right).$$

Pour rendre cette expression plus facilement applicable à l'aide des valeurs numériques de ses coefficients, il est indispensable d'exposer ici quelques règles empiriques au sujet du rapport qui nous paraît le plus convenable à observer entre les dimensions transversales d'une section et le diamètre des rivets.

COMPOSITION DE LA SECTION TRANSVERSALE D'UNE POUTRE

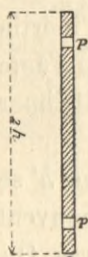


Fig. 10.

Dimensions de l'âme verticale. — Soient $2h$ la hauteur totale et e l'épaisseur d'une âme pleine. Les dimensions indiquées de cette âme, déduction faite des trous de rivets (fig. 10), doivent d'abord être suffisantes pour résister dans de bonnes conditions à l'effort tranchant maximum A ; on doit donc avoir :

$$(23) \quad \frac{A}{2(h-a)e} < R.$$

Ensuite l'épaisseur de l'âme e doit être suffisante pour résister à l'effort de glissement longitudinal maximum indiqué par la formule (8).

$$(24) \quad \frac{d\theta}{e} < R.$$

R est le travail limite prescrit par la circulaire ministérielle. Ce travail, pour les pièces en fer, est par millimètre carré de ;
 4,40 kg pour les entretoises et les pièces placées sous rails :
 5,20 kg pour les poutres se trouvant en dehors des rails.

Dimensions des cornières. — La largeur des branches des cornières doit être en rapport avec l'épaisseur des semelles et le diamètre correspondant des rivets qui sont indiqués plus loin.

Pour l'épaisseur minimum des cornières, on donne habituellement celle de l'âme verticale e . Il est bien de composer la section de manière à ne pas s'éloigner de beaucoup de cette dernière épaisseur, pour ne pas affaiblir d'une part la résistance des cornières, et d'autre part pour éviter l'augmentation inutile du poids des fourrures des montants verticaux de la poutre.

Dimensions des semelles. — Pour les poutres ne comportant

qu'une semelle, la largeur de celle-ci peut être égale au minimum à la largeur des cornières et de l'âme verticale, soit :

$$a = 2c_2 + e.$$

Cette largeur peut être augmentée sans inconvénient de 0, 20 *m*. Une trop grande largeur de la semelle pourra exposer celle-ci au voilement.

Dans le cas des poutres à plusieurs semelles, la largeur de celles-ci doit être avant tout suffisante pour permettre de placer dans de bonnes conditions deux rangées de rivets en dehors des cornières. Or, pour cela, il est nécessaire de pouvoir disposer d'un espace de 0,08 *m* à 0,40 *m* pour chaque rangée. La largeur des semelles dans ce cas devra donc avoir au minimum.

$$a = 2c_2 + e + 0,16 \text{ m}$$

Et au maximum ne pas dépasser de beaucoup la limite de

$$a = 2c_2 + e + 0,20 \text{ m}.$$

Quant à l'épaisseur totale des semelles *c*, elle doit être suffisante pour équilibrer le moment fléchissant; duquel du reste dépendent les autres dimensions de sa section transversale.

Le tableau ci-après renferme les proportions entre les diverses parties de la section et le diamètre des rivets, en partant des largeurs des cornières, d'après M. Jolly, constructeur à Argenteuil, lesquelles présentent de bonnes conditions d'assemblage.

Nous avons ajouté dans ce tableau les colonnes relatives à la largeur et à l'épaisseur correspondantes des semelles d'après les considérations qui précèdent. Les dimensions sont exprimées dans ce tableau en millimètres.

Tableau VI. — Proportions de la section transversale.

LARGÉURS des CORNIÈRES	DIMENSIONS DES SEMELLES		RIVETS D'ASSEMBLAGE		
	LARGÉURS	ÉPAISSEURS	DIAMÈTRES	SECTIONS	DISTANCES
	c_2	a	c	d	Ω
70 × 70	32 à 35	20	18	254	90
80 × 80	34 à 38	30	20	314	100
90 × 90	35 à 40	40	22	380	100 à 120
100 × 100	38 à 42	50	25	491	id.
110 × 110	40 à 45	60	25	491	id.
120 × 120	42 à 50	70 à 80	25	491	id.

Les proportions indiquées dans ce tableau représentent les sections minima pouvant équilibrer les efforts donnés. Mais, par suite des dispositions locales, on peut s'en écarter, et composer, par exemple, la section avec des cornières plus fortes que celles qui correspondent à l'épaisseur des semelles, en vue de pouvoir augmenter le diamètre des rivets horizontaux, dont la résistance à l'effort de glissement longitudinal doit être avant tout assurée.

En faisant varier légèrement les dimensions transversales d'une section, on doit toujours considérer comme fixe le rapport indiqué entre la largeur des cornières et le diamètre des rivets. C'est dans cette hypothèse que nous avons dressé le tableau suivant des expressions générales des moments d'inertie des vides horizontaux.

Tableau VII. — Moments d'inertie des vides horizontaux des rivets d'assemblage, des cornières et de l'âme de la poutre (formule 22, fig. 9).

DIAMÈTRE des RIVETS d	LARGEUR des CORNIÈRES c_s	EXPRESSIONS DE $\frac{10^6 I'}{e'}$
16	60	$16000 h^2 - 960 h + 14,7413$
18	70	$18000 h^2 - 1260 h + 22,5360$
20	80	$20000 h^2 - 1600 h + 32,6667$
22	90	$22000 h^2 - 1980 h + 45,4373$
25	100	$25000 h^2 - 2500 h + 63,8021$
25	110	$25000 h^2 - 2750 h + 76,9271$
25	120	$25000 h^2 - 3000 h + 91,3021$

Valeurs numériques des moments d'inertie des vides. — Les moments d'inertie des vides des semelles peuvent se calculer facilement à l'aide du tableau V comme nous l'avons montré au commencement de cette partie.

Il ne nous reste par conséquent qu'à déterminer les valeurs des moments d'inertie des vides verticaux des cornières, et des vides horizontaux, à l'aide des formules et des tableaux qui précèdent.

Les résultats des calculs sont réunis dans les deux tableaux ci-après VIII et IX.

Tableau VIII. — Moments d'inertie des vides verticaux des cornières (formule 19, fig. 8).

HAUTEURS $\frac{2}{h}$	VALEUR DE $\frac{10^6 I^2 c}{2 d}$ CORRESPONDANT A L'ÉPAISSEUR c_1 DE				
	8 mm	9 mm	10 mm	12 mm	15 mm
0,30	170,571	190,593	210,333	248,976	304,875
0,35	233,971	261,693	289,083	342,876	421,125
0,40	307,371	344,043	380,333	451,776	556,125
0,45	390,771	437,643	484,083	575,676	709,875
0,50	484,171	542,493	600,333	714,576	882,375
0,55	587,571	658,593	729,083	868,476	1073,625
0,60	700,971	785,943	870,333	1037,376	1283,625
0,65	824,371	924,543	1024,083	1226,276	1512,375
0,70	957,771	1074,393	1190,333	1420,176	1759,875
0,75	1101,171	1235,493	1369,083	1634,076	2026,125
0,80	1254,571	1407,843	1560,333	1862,976	2311,125
0,85	1417,971	1591,443	1764,083	2106,876	2614,875
0,90	1591,371	1786,293	1980,333	2365,776	2937,375
0,95	1774,771	1992,393	2209,083	2639,676	3278,625
1,00	1968,171	2209,743	2450,333	2928,576	3638,625
1,10	2384,971	2678,293	2970,333	3551,376	4414,875
1,20	2841,771	3191,743	3540,333	4234,176	5266,125
1,30	3338,571	3750,193	4160,333	4976,976	6192,375
1,40	3875,371	4353,643	4830,333	5779,776	7193,625
1,50	4452,171	5001,093	5550,333	6642,576	8269,875
1,60	5068,971	5695,443	6320,333	7565,376	9421,125
1,70	5725,771	6433,893	7140,333	8548,176	10647,375
1,80	6422,571	7217,343	8010,333	9590,976	11948,625
1,90	7159,371	8045,793	8930,333	10693,776	13324,875
2,00	7936,171	8919,243	9900,333	11856,576	14776,125
2,10	8752,971	9837,693	10920,333	13079,376	16302,375
2,20	9609,771	10801,143	11990,333	14362,176	17903,625
2,30	10506,571	11809,593	13110,333	15704,976	19579,875
2,40	11443,371	12863,043	14280,333	17107,776	21331,125
2,50	12420,171	13961,493	15500,333	18570,576	23157,375
2,60	13436,971	15104,943	16770,333	20093,376	25058,625
2,70	14493,771	16293,393	18090,333	21676,176	27034,875
2,80	15590,571	17526,843	19460,333	23318,976	29086,125
2,90	16727,371	18805,293	20880,333	25021,776	31212,375
3,00	17904,171	20128,743	22350,333	26784,576	33413,625

Tableau IX. — Moment d'inertie des vides horizontaux (fig. 7, tableau 7).

HAUTEURS $\frac{z}{h}$	VALEURS DE $\frac{10^6 I'}{e'}$ CORRESPONDANT AUX DIMENSIONS DE					
	$c_2 = 70$ $d = 18$	$c_2 = 80$ $d = 20$	$c_2 = 90$ $d = 22$	$c_2 = 100$ $d = 25$	$c_2 = 110$ $d = 25$	$c_2 = 120$ $d = 25$
0,30	238,536	242,667	243,437	251,302	226,927	203,802
0,35	353,286	365,167	372,687	391,927	361,302	331,927
0,40	490,536	512,667	529,437	563,802	526,927	491,302
0,45	650,286	685,167	713,687	766,927	723,802	681,927
0,50	832,536	882,667	925,437	1001,302	951,927	903,802
0,55	1037,286	1105,167	1164,687	1266,927	1211,302	1156,927
0,60	1264,536	1352,667	1431,437	1563,802	1501,927	1441,302
0,65	1514,286	1625,167	1725,687	1891,927	1823,802	1756,927
0,70	1786,536	1922,667	2047,437	2251,302	2176,927	2103,802
0,75	2081,286	2245,167	2396,687	2641,927	2561,302	2481,927
0,80	2398,536	2592,667	2773,437	3063,802	2976,927	2891,302
0,85	2738,286	2965,167	3177,687	3516,927	3423,802	3331,927
0,90	3100,536	3362,667	3609,437	4001,302	3901,927	3803,802
0,95	3485,286	3785,167	4068,687	4516,927	4411,302	4306,927
1,00	3892,536	4232,667	4555,437	5063,802	4951,927	4841,302
1,10	4774,536	5202,667	5611,437	6251,302	6126,927	6003,802
1,20	5746,536	6272,667	6777,437	7563,802	7426,927	7291,302
1,30	6808,536	7442,667	8053,437	9001,302	8851,927	8703,802
1,40	7960,536	8712,667	9439,437	10563,802	10401,927	10241,302
1,50	9202,536	10082,667	10935,437	12251,302	12076,927	11903,802
1,60	10534,536	11552,667	12541,437	14063,802	13876,927	13691,302
1,70	11956,536	13122,667	14257,437	16001,302	15801,927	15603,802
1,80	13468,536	14792,667	16083,437	18063,802	17851,927	17641,302
1,90	15070,536	16562,667	18019,437	20251,302	20026,927	19803,802
2,00	16762,536	18432,667	20065,437	22563,802	22326,927	22091,302
2,10	18544,536	20402,667	22221,437	25001,302	24751,927	24503,802
2,20	20416,536	22472,667	24487,437	27563,802	27301,927	27041,302
2,30	22378,536	24642,667	26863,437	30251,302	29976,927	29703,802
2,40	24430,536	26912,667	29349,437	33063,802	32776,927	32491,302
2,50	26572,536	29282,667	31945,347	36001,302	35701,927	35403,802
2,60	28804,536	31752,667	34651,437	39063,802	38751,921	38441,302
2,70	31126,536	34322,667	37467,437	42251,302	41926,927	41603,802
2,80	33538,536	36992,667	40393,437	45563,802	45226,927	44891,302
2,90	36040,536	39762,667	43429,437	49001,302	48651,927	48303,802
3,00	38632,536	42632,667	46575,437	52563,802	52201,927	51841,302

Avec les données qui précèdent, rien de plus facile que de déterminer la valeur du moment d'inertie d'une section nette conformément à la prescription de la circulaire ministérielle.

Ainsi prenons pour exemple la section de la poutre indiquée dans notre article du mois de février dernier, colonne 30.

Pour l'âme verticale, le tableau III donne, pour la hauteur $2h = 0,80$	
et l'épaisseur $e = 0,015$	$10^6 \frac{I_a}{2} = 320,0000$
Pour les cornières de $\frac{100 \times 100}{15}$ la ligne correspondant à la hauteur	
$2h = 0,80$ donne	$10^6 \frac{I_c}{2} = 762,8912$
TOTAL	<u>1082,8912</u>

La section étant à plusieurs semelles, ce sont les vides indiqués par la figure 9 qu'on doit considérer. En conséquence, le tableau IX donne pour les vides horizontaux correspondant à la même hauteur de 0,80 et $c_2 = 0,100$ m, l'épaisseur à river étant $e' = 0,045$	$0,045 \times 3063,802 = 137,8711$
Reste pour la demi-section nette.	<u>945,0201</u>
Et pour la section entière.	$10^6 I_0 = 1890,0402$

Multipliant ensuite par la largeur réduite $2(0,40 - 0,05)$ les valeurs du tableau V correspondantes à la hauteur de 0,80 et aux épaisseurs des semelles de 0,01, 0,02, 0,03... et, ajoutant les résultats obtenus à la dernière valeur, on trouve successivement pour :

$$c = 0,01. 10^6 I_1 = 10^6 I_0 + 0,70 \times 1640,3333 = 3038,273.$$

$$c = 0,02. 10^6 I_2 = 10^6 I_0 + 0,70 \times 3362,6667 = 4243,907$$

$$c = 0,03. 10^6 I_3 = 10^6 I_0 + 0,70 \times 5169,0 = 5508,340$$

Et ainsi de suite jusqu'au nombre des semelles correspondant à la section maximum.

III. — CALCUL DES MOMENTS m

Le moment m qui entre dans l'expression générale de l'effort de glissement (7) représente, comme nous l'avons vu dans le chapitre I^{er}, la somme des moments par rapport à la ligne moyenne des surfaces composant la partie considérée de la section transversale de la poutre qui se trouve au-dessus de cette ligne.

Pour déterminer ces moments, nous allons suivre la même marche que pour les moments d'inertie; c'est-à-dire nous calculerons d'abord leurs valeurs correspondant aux sections pleines, et ensuite celle des vides à déduire, pour obtenir le moment de la section nette.

a) MOMENTS DES SECTIONS PLEINES

En prenant les moments par rapport à la ligne moyenne des éléments des surfaces qui composent la section transversale

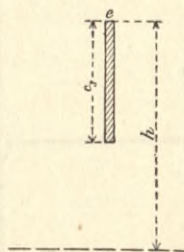


Fig. 2.

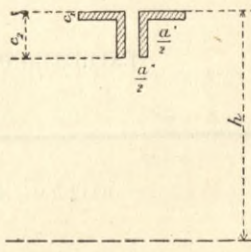


Fig. 3.

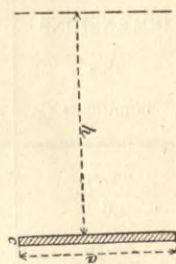


Fig. 4.

de la poutre, on arrive aux expressions générales suivantes en fonction des dimensions de ces éléments.

Pour l'âme verticale évidée (fig. 2) :

$$(25) \quad m_a = ec_3 \left(h - \frac{c_3}{2} \right).$$

Pour l'âme pleine on a $c_3 = h$; par suite, la dernière formule devient :

$$(26) \quad m_a = \frac{eh^2}{2}.$$

Pour les deux cornières (fig. 3) :

$$(27) \quad m_o = a'c_1 \left(h - \frac{c_1}{2} \right) + a''c_2 \left(h - \frac{c_2}{2} \right) = (a'c_1 + a''c_2)h + \frac{a'c_1^2 + a''c_2^2}{2}.$$

Pour les semelles (fig. 4) :

$$(28) \quad m_s = ac \left(h - \frac{c}{2} \right)$$

Les valeurs numériques des coefficients de ces expressions

correspondant aux dimensions usuelles des fers sont réunies dans les tableaux V, VI et VII de notre brochure sur les moments d'inertie. Par conséquent, nous ne donnons ici que les expressions complémentaires relatives aux quelques dimensions des cornières, et les épaisseurs intermédiaires des semelles comme dans le chapitre précédent.

Tableau X. — Moment de 2 cornières, formule (27).

DIMENSIONS des CORNIÈRES	EXPRESSIONS $10^6 m_e$
$\frac{70,70}{8}$	2 112 h — 43,168
$\frac{70,70}{10}$	2 600 h — 55,000
$\frac{100,100}{10}$	3 800 h — 109,000
$\frac{110,110}{12}$	4 992 h — 159,312
$\frac{110,110}{15}$	6 150 h — 202,875
$\frac{120,120}{12}$	5 472 h — 188,352
$\frac{120,120}{15}$	6 750 h — 239,625
$\frac{150,150}{15}$	8 550 h — 367,875
$\frac{150,150}{18}$	10 152 h — 487,768

Tableau XI — Moments des semelles, formule 28.

ÉPAISSEURS c	EXPRESSIONS DE $\frac{10^6 m_s}{a}$
8	8 000 h + 32,0
9	9 000 h + 40,5
10	10 000 h + 50,0
11	11 000 h + 60,5
12	12 000 h + 72,0
13	13 000 h + 84,5
14	14 000 h + 98,0
15	15 000 h + 112,5
16	16 000 h + 128
18	18 000 h + 162
20	20 000 h + 200

A l'aide des expressions générales des tableaux V, VI et VII de notre brochure et des tableaux X et XI qui précèdent, nous avons obtenu les valeurs numériques des moments m pour les hauteurs $2h$ variant entre 0,30 m et 3 m .

Les résultats des calculs sont réunis dans des tableaux XII, XIII et XIV suivants.

Tableau XII. — Moments de l'âme pleine,
formule 20.

HAUTEURS 2 h	VALEURS DE $10^6 ma$ CORRESPONDANT A L'ÉPAISSEUR D'ÂME DE			
	8 mm	10 mm	12 mm	15 mm
0,30	90,00	112,500	135,00	168,7500
0,35	122,50	153,125	183,75	229,6875
0,40	160,00	200,000	240,00	300,0000
0,45	202,50	253,125	303,75	379,6875
0,50	250,00	312,500	375,00	468,7500
0,55	302,50	378,125	453,75	567,1875
0,60	360,00	450,000	540,00	675,0000
0,65	422,50	528,125	633,75	792,1875
0,70	490,00	612,500	735,00	918,7500
0,75	562,50	703,125	843,75	1054,6875
0,80	640,00	800,000	960,00	1200,0000
0,85	722,50	903,125	1083,75	1354,6875
0,90	810,00	1012,500	1215,00	1518,7500
0,95	902,50	1128,125	1353,75	1692,1875
1,00	1000,00	1250,000	1500,00	1875,0000
1,10	1210,00	1512,5	1815,00	2268,75
1,20	1440,00	1800,0	2160,00	2700,00
1,30	1690,00	2112,5	2535,00	3168,75
1,40	1960,00	2450,0	2940,00	3675,00
1,50	2250,00	2812,5	3375,00	4218,75
1,60	2560,00	3200,0	3840,00	4800,00
1,70	2890,00	3612,5	4335,00	5418,75
1,80	3240,00	4050,0	4860,00	6075,00
1,90	3610,00	4512,5	5415,00	6768,75
2,00	4000,00	5000,0	6000,00	7500,00
2,10	4410,00	5512,5	6615,00	8268,75
2,20	4840,00	6050,0	7260,00	9075,00
2,30	5290,00	6612,5	7935,00	9918,75
2,40	5760,00	7200,0	8640,00	10800,00
2,50	6250,00	7812,5	9375,0	11718,75
2,60	6760,00	8450,0	10140,0	12675,00
2,70	7290,00	9112,5	10935,0	13668,75
2,80	7840,00	9800,0	11760,0	14700,00
2,90	8410,00	10512,5	12615,0	15768,75
3,00	9000,00	11250,	13500,0	16875,00

Tableau XIII. — Moments de deux cornières,
formule 27 (fig. 3).

HAUTEURS $2h$	VALEURS DE $10^8 m_0$ CORRESPONDANT AUX CORNIÈRES DE						
	$\frac{70,70}{8}$	$\frac{70,70}{10}$	$\frac{80,80}{8}$	$\frac{80,80}{10}$	$\frac{90,90}{10}$	$\frac{90,90}{12}$	$\frac{100,100}{10}$
0,30	273,632	335,0	308,992	379,0	421,0	496,368	461,0
0,35	326,432	400,0	369,792	454,0	506,0	597,168	556,0
0,40	379,232	465,0	430,592	529,0	591,0	697,968	651,0
0,45	432,032	530,0	491,392	604,0	676,0	798,768	746,0
0,50	484,832	595,0	552,192	679,0	761,0	899,568	841,0
0,55	537,632	660,0	612,992	754,0	846,0	1000,368	936,0
0,60	590,432	725,0	673,792	829,0	931,0	1101,168	1031,0
0,65	643,232	790,0	734,592	904,0	1016,0	1201,968	1126,0
0,70	696,032	855,0	795,392	979,0	1101,0	1302,768	1221,0
0,75	748,832	920,0	856,192	1054,0	1186,0	1403,568	1316,0
0,80	801,632	985,0	916,992	1129,0	1271,0	1504,368	1411,0
0,85	854,432	1050,0	977,792	1204,0	1356,0	1605,168	1506,0
0,90	907,232	1115,0	1038,592	1279,0	1441,0	1705,968	1601,0
0,95	960,032	1180,0	1099,392	1354,0	1526,0	1806,768	1696,0
1,00	1012,832	1245,0	1160,192	1429,0	1611,0	1907,568	1791,0
1,10	1118,432	1375,0	1281,792	1579,0	1781,0	2109,168	1981,0
1,20	1224,032	1505,0	1403,392	1729,0	1951,0	2310,768	2171,0
1,30	1329,632	1635,0	1524,992	1879,0	2121,0	2512,368	2361,0
1,40	1435,232	1765,0	1646,592	2029,0	2291,0	2713,968	2551,0
1,50	1540,832	1895,0	1768,192	2179,0	2461,0	2915,568	2741,0
1,60	1646,432	2025,0	1889,792	2329,0	2631,0	3117,168	2931,0
1,70	1752,032	2155,0	2011,392	2479,0	2801,0	3318,768	3121,0
1,80	1857,632	2285,0	2132,992	2629,0	2971,0	3520,368	3311,0
1,90	1963,232	2415,0	2254,592	2779,0	3141,0	3721,968	3501,0
2,00	2068,832	2545,0	2376,192	2929,0	3311,0	3923,568	3691,0
2,10	2174,432	2675,0	2497,792	3079,0	3481,0	4125,168	3881,0
2,20	2280,032	2805,0	2619,392	3229,0	3651,0	4326,768	4071,0
2,30	2385,632	2935,0	2740,992	3379,0	3821,0	4528,368	4261,0
2,40	2491,232	3065,0	2862,592	3529,0	3991,0	4729,968	4451,0
2,50	2596,832	3195,0	2984,192	3679,0	4161,0	4931,568	4641,0
2,60	2702,432	3325,0	3105,792	3829,0	4331,0	5133,168	4831,0
2,70	2808,032	3455,0	3227,392	3979,0	4501,0	5334,768	5021,0
2,80	2913,632	3585,0	3341,992	4129,0	4671,0	5536,368	5211,0
2,90	3019,232	3715,0	3470,592	4279,0	4841,0	5737,968	5401,0
3,00	3124,832	3840,5	3592,192	4429,0	5011,0	5939,568	5591,0

Tableau XIII (suite). — Moments de deux cornières,
(fig. 3).

HAUTEURS $2h$	VALEURS DE $10^6 m_c$ CORRESPONDANT AUX CORNIÈRES DE					
	100,100	100,100	110,110	110,110	120,120	120,120
	12	15	12	15	12	15
0,30	544,128	663,375	589,488	719,625	632,448	772,875
0,35	656,928	802,125	714,288	873,375	769,248	941,625
0,40	769,728	940,875	839,088	1027,125	906,048	1110,375
0,45	882,528	1079,625	963,888	1180,875	1042,848	1279,125
0,50	995,328	1218,375	1088,688	1334,625	1179,648	1447,875
0,55	1108,128	1357,125	1213,488	1488,375	1316,448	1616,625
0,60	1220,928	1495,875	1338,288	1642,125	1453,248	1785,375
0,65	1333,728	1634,625	1463,088	1795,875	1590,048	1954,125
0,70	1446,528	1773,375	1587,888	1949,625	1726,848	2122,875
0,75	1559,328	1912,125	1712,688	2103,375	1863,648	2291,625
0,80	1672,128	2050,875	1837,488	2257,125	2000,448	2460,375
0,85	1784,928	2189,625	1962,288	2410,875	2137,248	2629,125
0,90	1897,728	2328,375	2087,088	2564,625	2274,048	2797,875
0,95	2010,528	2467,125	2211,888	2718,375	2410,848	2966,625
1,00	2123,328	2605,875	2336,688	2872,125	2547,648	3135,375
1,10	2348,928	2883,375	2586,288	3179,625	2821,248	3472,875
1,20	2574,528	3160,875	2835,888	3487,125	3094,848	3810,375
1,30	2800,128	3438,375	3085,488	3794,625	3368,448	4147,875
1,40	3025,728	3715,875	3335,088	4102,125	3642,048	4485,375
1,50	3251,328	3993,375	3584,688	4409,625	3915,648	4822,875
1,60	3476,928	4270,875	3834,288	4717,125	4189,248	5160,375
1,70	3702,528	4548,375	4083,888	5024,625	4462,848	5497,875
1,80	3928,128	4825,875	4333,488	5332,125	4736,448	5835,375
1,90	4153,728	5103,375	4583,088	5639,625	5010,048	6172,875
2,00	4379,328	5380,875	4832,688	5947,125	5283,648	6510,375
2,10	4604,928	5658,375	5082,288	6254,625	5557,248	6847,875
2,20	4830,528	5935,875	5331,888	6562,125	5830,848	7185,375
2,30	5056,128	6213,375	5581,488	6869,625	6104,448	7522,875
2,40	5281,728	6490,875	5831,088	7177,125	6378,048	7860,375
2,50	5507,328	6768,375	6080,688	7484,625	6651,648	8197,875
2,60	5732,928	7045,875	6330,288	7792,125	6925,248	8535,375
2,70	5958,528	7323,375	6579,888	8099,625	7198,848	8872,875
2,80	6184,128	7600,875	6829,488	8407,125	7472,448	9210,375
2,90	6409,728	7878,375	7079,088	8714,625	7746,048	9547,825
3,00	6635,328	8155,875	7328,688	9022,125	8019,648	9885,375

Tableau XIV. — Moments des semelles.
Formules du tableau XI (fig. 4).

HAUTEURS <i>2h</i>	VALEURS DE $10^6 m_s$ CORRESPONDANT A L'ÉPAISSEUR <i>c</i> DE						
	10 mm	12 mm	15 mm	20 mm	30 mm	40 mm	50 mm
0,30	1550,0	1872,0	2362,5	3200,0	4950,0	6800,0	8750,0
0,35	1800,0	2172,0	2737,5	3700,0	5700,0	7800,0	10000,0
0,40	2050,0	2472,0	3112,5	4200,0	6450,0	8800,0	11250,0
0,45	2300,0	2772,0	3487,5	4700,0	7200,0	9800,0	12500,0
0,50	2550,0	3072,0	3862,5	5200,0	7950,0	10800,0	13750,0
0,55	2800,0	3372,0	4237,5	5700,0	8700,0	11800,0	15000,0
0,60	3050,0	3672,0	4612,5	6200,0	9450,0	12800,0	16250,0
0,65	3300,0	3972,0	4987,5	6700,0	10200,0	13800,0	17500,0
0,70	3550,0	4272,0	5362,5	7200,0	10950,0	14800,0	18750,0
0,75	3800,0	4572,0	5737,5	7700,0	11700,0	15800,0	20000,0
0,80	4050,0	4872,0	6112,5	8200,0	12450,0	16800,0	21250,0
0,85	4300,0	5172,0	6487,5	8700,0	13200,0	17800,0	22500,0
0,90	4550,0	5472,0	6862,5	9200,0	13950,0	18800,0	23750,0
0,95	4800,0	5772,0	7237,5	9700,0	14700,0	19800,0	25000,0
1,00	5050,0	6072,0	7612,5	10200,0	15450,0	20800,0	26250,0
1,10	5550,0	6672,0	8362,5	11200,0	16950,0	22800,0	28750,0
1,20	6050,0	7272,0	9112,5	12200,0	18450,0	24800,0	31250,0
1,30	6550,0	7872,0	9862,5	13200,0	19950,0	26800,0	33750,0
1,40	7050,0	8472,0	10612,5	14200,0	21450,0	28800,0	36250,0
1,50	7550,0	9072,0	11362,5	15200,0	22950,0	30800,0	38750,0
1,60	8050,0	9672,0	12112,5	16200,0	24450,0	32800,0	41250,0
1,70	8550,0	10272,0	12862,5	17200,0	25950,0	34800,0	43750,0
1,80	9050,0	10872,0	13612,5	18200,0	27450,0	36800,0	46250,0
1,90	9550,0	11472,0	14362,5	19200,0	28950,0	38800,0	48750,0
2,00	10050,0	12072,0	15112,5	20200,0	30450,0	40800,0	51250,0
2,10	10550,0	12672,0	15862,5	21200,0	31950,0	42800,0	53750,0
2,20	11050,0	13272,0	16612,5	22200,0	33450,0	44800,0	56250,0
2,30	11550,0	13872,0	17362,5	23200,0	34950,0	46800,0	58750,0
2,40	12051,0	14472,0	18112,5	24200,0	36450,0	48800,0	61250,0
2,50	12550,0	15072,0	18862,5	25200,0	37950,0	50800,0	63750,0
2,60	13050,0	15672,0	19612,5	26200,0	39450,0	52800,0	66250,0
2,70	13550,0	16272,0	20362,5	27200,0	40950,0	54800,0	68750,0
2,80	14050,0	16872,0	21112,5	28200,0	42450,0	56800,0	71250,0
2,90	14550,0	17472,0	21862,5	29200,0	43950,0	58800,0	73750,0
3,00	15050,0	18072,0	22612,5	30200,0	45450,0	60800,0	76250,0

b). MOMENTS DES VIDES m'

Dans le calcul de résistance d'une poutre, on doit considérer les mêmes vides pour les moments m' que celles pour les moments d'inertie correspondants, dont les emplacements sont indiqués dans le chapitre II.

Nous allons déterminer en conséquence les vides des rivets verticaux et des rivets horizontaux.

Vides des rivets verticaux. — Ces vides correspondent aux rivets qui attachent les semelles aux cornières de la poutre, ils sont représentés par les surfaces hachurées de la figure 5.

Vides verticaux des semelles. — En conservant les mêmes notations que dans les chapitres précédents, et en prenant les moments par rapport à la ligne moyenne des surfaces situées au-dessus du plan supérieur des cornières, nous obtenons le moment des vides des semelles m'_s l'expression suivante :

$$(29) \quad m'_s = 2d \left(ch + \frac{c^2}{2} \right)$$

Rappelons ici que pareillement comme pour le moment d'inertie, le moment de la section nette des semelles m_s peut être obtenu directement en attribuant aux semelles, au lieu de la largeur totale a , une largeur réduite $a - 2d$.

Vides verticaux des cornières. — Le moment m'_c correspondant aux vides verticaux des cornières, s'obtient en prenant les moments par rapport à la ligne moyenne des surfaces hachurées de la même figure 5 qui se trouvent en-dessous du plan supérieur des cornières. On obtient ainsi l'expression suivante qui correspond à la figure 8 :

$$(30) \quad m'_c = 2d \left(c_1 h - \frac{c_1^2}{2} \right).$$

En comparant les deux dernières expressions, on remarque qu'elles ne diffèrent pour une même épaisseur que par le signe du dernier terme entre les parenthèses. On pourra en consé-

quence obtenir à l'aide du même tableau XI les coefficients numériques des moments des vides verticaux.

Les expressions de ce tableau, avec le dernier terme pris positivement, donneront les moments des vides des semelles.

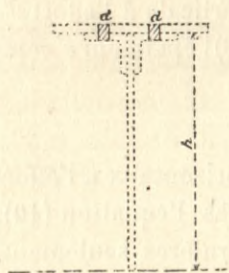


Fig. 5.

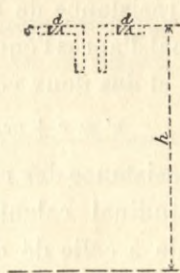


Fig. 8.

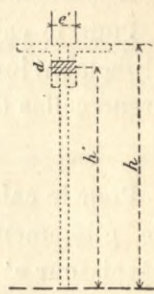


Fig. 9.

Ces mêmes expressions, avec le dernier terme pris négativement, donneront les moments des vides verticaux des cornières.

Vides des rivets horizontaux. — Soient comme dans le chapitre précédent (fig. 9) :

e' l'épaisseur totale à assembler pour les rivets horizontaux ;

d , le diamètre d'un rivet ;

h' , la distance du centre du vide à la ligne moyenne.

En prenant le moment par rapport à cette dernière ligne de la surface représentant le vide, on trouve l'expression générale suivante applicable à une hauteur quelconque h' .

$$(31) \quad m' = e'dh'.$$

Pour les rivets d'assemblage des cornières avec l'âme verticale, nous admettons que la hauteur h' correspond au milieu de la largeur extérieure des cornières ; on a par conséquent d'après la relation (21) :

$$h' = h - \frac{c_2}{2}.$$

Cette relation introduite dans la dernière formule (31) donne

pour le moment des vides horizontaux l'expression générale suivante :

$$(32) \quad m' = e' \left(dh - \frac{dc_2}{2} \right)$$

L'épaisseur e' de cette expression présente deux valeurs.

Pour le calcul de résistance de l'âme verticale à l'effort de glissement longitudinal d'après l'équation (8) l'épaisseur e' comprend celles de l'âme et des deux cornières

$$e' = e + 2c_1.$$

Pour le calcul de résistance des rivets horizontaux à l'effort de glissement longitudinal calculé d'après l'équation (10), l'épaisseur e' est égale à celle de deux cornières seulement.

$$e' = 2c_1.$$

Les valeurs numériques des coefficients du moment m' de l'équation (32) sont réunies dans le tableau suivant. Les dimensions des cornières et des rivets de ce tableau sont les mêmes que dans le tableau VII.

Tableau XV. — Moments des vides horizontaux de 2 cornières.

Formule 32.

DIAMÈTRE des RIVETS d	LARGEUR des CORNIÈRES c_2	EXPRESSIONS DE $10^6 \frac{m'}{e'}$
16	60	16 000 h — 480
18	70	18 000 h — 630
20	80	20 000 h — 800
22	90	22 000 h — 990
25	100	25 000 h — 1250
25	110	25 000 h — 1350
25	120	25 000 h — 1500

Valeurs numériques des moments des vides. — Nous donnons ci-après une série de valeurs numériques des moments des vides, pour les mêmes hauteurs que dans les cas précédents.

Les moments des vides des semelles peuvent se calculer facilement à l'aide du tableau XIV.

En conséquence il ne nous reste que les valeurs des moments des vides verticaux des cornières, et les moments des vides horizontaux.

Ces valeurs calculées d'après les équations des tableaux XI et XV font l'objet de deux tableaux ci-après.

(The content of this table is extremely faint and illegible due to the quality of the scan. It appears to be a large table with multiple columns and rows of numerical data.)

Tableau XVI. — Moments des vides verticaux des cornières (formule 30).

HAUTEUR $\frac{2}{d}$	VALEUR DE $\frac{10^6 m^3 c}{2 d}$ CORRESPONDANT A L'ÉPAISSEUR c , DE				
	8 mm	9 mm	10 mm	12 mm	15 mm
0,30	1168,0	1309,5	1450,0	1728,0	2137,5
0,35	1368,0	1534,5	1700,0	2028,0	2512,5
0,40	1568,0	1759,5	1950,0	2328,0	2887,5
0,40	1768,0	1984,5	2200,0	2628,0	3262,5
0,50	1968,0	2209,5	2450,0	2928,0	3637,5
0,55	2168,0	2434,5	2700,0	3228,0	4012,5
0,60	2368,0	2659,5	2950,0	3528,0	4387,5
0,65	2568,0	2884,5	3200,0	3828,0	4762,5
0,70	2768,0	3109,5	3450,0	4128,0	5137,5
0,75	2968,0	3334,5	3700,0	4428,0	5512,5
0,80	3168,0	3559,5	3950,0	4728,0	5887,5
0,85	3368,0	3784,5	4200,0	5028,0	6262,5
0,90	3568,0	4009,5	4450,0	5328,0	6637,5
0,95	3768,0	4234,5	4700,0	5628,0	7012,5
1,00	3968,0	4459,5	4950,0	5928,0	7387,5
1,10	4368,0	4909,5	5450,0	6528,0	8137,5
1,20	4768,0	5359,5	5950,0	7128,0	8887,5
1,30	5168,0	5809,5	6450,0	7728,0	9637,5
1,40	5568,0	6259,5	6950,0	8328,0	10387,5
1,50	5968,0	6709,5	7450,0	8928,0	11137,5
1,60	6368,0	7159,5	7950,0	9528,0	11887,5
1,70	6768,0	7609,5	8450,0	10128,0	12637,5
1,80	7168,0	8059,5	8950,0	10728,0	13387,5
1,90	7568,0	8509,5	9450,0	11328,0	14137,5
2,00	7968,0	8959,5	9950,0	11928,0	14887,5
2,10	8368,0	9409,5	10450,0	12528,0	15637,5
2,20	8768,0	9859,5	10950,0	13128,0	16387,5
2,30	9168,0	10309,5	11450,0	13728,0	17137,5
2,40	9568,0	10759,5	11950,0	14328,0	17887,5
2,50	9968,0	11209,5	12450,0	14928,0	18637,5
2,60	10368,0	11659,5	12950,0	15528,0	19387,5
2,70	10768,0	12109,5	13450,0	16128,0	20137,5
2,80	11168,0	12559,5	13950,0	16728,0	20887,5
2,90	11568,0	13009,5	14450,0	17328,0	21637,5
3,00	11968,0	13459,5	14950,0	17928,0	22387,5

Tableau XVII. — Moments des vides horizontaux fig. 9, tableau 15).

HAUTEURS <i>h</i>	VALEURS DE $\frac{10^6 m}{e'}$ CORRESPONDANT AUX DIMENSIONS DE					
	$c_2 = 70$ $d = 18$	$c_2 = 80$ $d = 20$	$c_2 = 90$ $d = 22$	$c_2 = 100$ $d = 25$	$c_2 = 110$ $d = 25$	$c_2 = 120$ $d = 25$
0,30	2070,0	2200,0	2310,0	2500,0	2375,0	2250,0
0,35	2520,0	2700,0	2860,0	3125,0	3000,0	2875,0
0,40	2970,0	3200,0	3410,0	3750,0	3625,0	3500,0
0,45	3420,0	3700,0	3960,0	4375,0	4250,0	4125,0
0,50	3870,0	4200,0	4510,0	5000,0	4875,0	4750,0
0,55	4320,0	4700,0	5060,0	5625,0	5500,0	5375,0
0,60	4770,0	5200,0	5610,0	6250,0	6125,0	6000,0
0,65	5220,0	5700,0	6160,0	6875,0	6750,0	6625,0
0,70	5670,0	6200,0	6710,0	7500,0	7375,0	7250,0
0,75	6120,0	6700,0	7260,0	8125,0	8000,0	7875,0
0,80	6570,0	7200,0	7810,0	8750,0	8625,0	8500,0
0,85	7020,0	7700,0	8360,0	9375,0	9250,0	9125,0
0,90	7470,0	8200,0	8910,0	10000,0	9875,0	9750,0
0,95	7920,0	8700,0	9460,0	10625,0	10500,0	10375,0
1,00	8370,0	9200,0	10100,0	11250,0	11125,0	11000,0
1,10	9270,0	10200,0	11110,0	12500,0	12375,0	12250,0
1,20	10170,0	11200,0	12210,0	13750,0	13625,0	13500,0
1,30	11070,0	12200,0	13310,0	15000,0	14875,0	14750,0
1,40	11970,0	13200,0	14410,0	16250,0	16125,0	16000,0
1,50	12870,0	14200,0	15510,0	17500,0	17375,0	17250,0
1,60	13770,0	15200,0	16610,0	18750,0	18625,0	18500,0
1,70	14670,0	16200,0	17710,0	20000,0	19875,0	19750,0
1,80	15570,0	17200,0	18810,0	21250,0	21125,0	21000,0
1,90	16470,0	18200,0	19910,0	22500,0	22375,0	22250,0
2,00	17370,0	19200,0	21010,0	23750,0	23625,0	23500,0
2,10	18270,0	20200,0	22110,0	25000,0	24875,0	24750,0
2,20	19170,0	21200,0	23210,0	26250,0	26125,0	26000,0
2,30	20070,0	22200,0	24310,0	27500,0	27375,0	27250,0
2,40	20970,0	23200,0	25410,0	28750,0	28625,0	28500,0
2,50	21870,0	24200,0	26510,0	30000,0	29875,0	29750,0
2,60	22770,0	25200,0	27610,0	31250,0	31125,0	31000,0
2,70	23670,0	26200,0	28710,0	32500,0	32375,0	32250,0
2,80	24570,0	27200,0	29810,0	33750,0	33625,0	33500,0
2,90	25470,0	28200,0	30910,0	35000,0	34875,0	34750,0
3,00	26370,0	29200,0	32010,0	36250,0	36125,0	36000,0

IV. — EXEMPLE

Comme application des calculs et des résultats numériques établis dans ce mémoire, nous allons calculer la résistance à l'effort de glissement longitudinal de la poutre à trois travées étudiée dans la 3^e partie de notre mémoire, au point de vue des flèches.

CALCUL DE RÉSISTANCE DE L'EFFORT DE GLISSEMENT LONGITUDINAL
D'UNE POUTRE A TROIS TRAVÉES

L'intensité de l'effort de glissement longitudinal se calcule par la formule générale (7).

$$d\theta = \frac{A dx}{I} m.$$

L'intensité maximum de cet effort correspond aux valeurs maxima de l'effort tranchant A, nous établirons en conséquence les valeurs de ce dernier effort tout d'abord.

Efforts tranchants A. — Les valeurs maxima de l'effort tranchant ont lieu au droit des appuis, c'est-à-dire sur les culées et sur les piles dans la deuxième travée. Ces valeurs se calculent sans difficulté à l'aide des formules (114) de notre mémoire sur la résistance des poutres droites continues (3^e partie).

Ainsi la portée des travées de rive de cette poutre étant.	$l = 10,80 m$
Celle de la travée centrale.....	$2l = 13,50 \text{ »}$
La charge permanente par mètre courant de poutre...	$p' = 4800 \text{ kg}$
La surcharge équivalente à celle d'un convoi de charriots de 6 tonnes par essieu donne par mètre courant de poutres.....	$p'' = \frac{1900 \text{ »}}{6700 \text{ kg}}$
La charge totale.....	$p = 6700 \text{ kg}$

Avec ces données, les formules (114) donnent :

Au droit de la culée, dans la première travée pour $x = 0$,

$$A_1 = (0,456522 p - 0,084919 p') l = 28632 \text{ kg.}$$

Au droit de la pile, dans la deuxième travée pour $x = 0$,

$$A_2 = (0,686538 p - 0,061538 p') l = 46488 \text{ kg.}$$

Résistance de l'âme verticale. — L'âme pleine de la poutre

ayant une épaisseur constante sur toute sa longueur, il suffit de vérifier sa résistance au droit de la pile.

L'expression générale de l'effort de glissement longitudinal est dans ce cas d'après l'équation (8)

$$d\theta = \frac{A_s dx}{I} (m_a + m_c + m_s).$$

La section transversale de la poutre présente au droit de cet appui 5 semelles de 0,010m d'épaisseur (fig. 44). La valeur correspondante du moment m s'obtient par conséquent de la manière suivante à l'aide des tableaux qui précèdent.

Pour l'âme de 800/15 nous avons au tableau XII. $m_a = 1200,000$

Pour les cornières $\frac{100,100}{15}$ le tableau XIII (suite)

donne.....	$m_c = 2050,875$
Enfin le tableau XIV donne pour l'épaisseur des semelles de 0,05, (0,40 — 0,05) 21 250 =	$m_s = 7437,500$
TOTAL.....	$\frac{10688,375}{}$

A déduire les vides des rivets horizontaux d'après

le tableau XVII pour $e' = 0,045$ $0,045 \times 8750 =$	$\frac{393,750}{}$
Reste pour la section nette..... $10^6 m =$	$\frac{10294,625}{}$

Le moment d'inertie I_3 de la section entière correspondant aux 5 semelles a la valeur suivante :

Pour l'âme et les cornières d'après le calcul fait à la

fin du chapitre I^{er}..... $10^6 I_0 = 1890,040$

Pour les semelles ayant une épaisseur de 0,05, nous avons d'après le tableau V :

2 (0,400 — 0,050) 9041,6667.....	$10^6 I_s = \frac{6329,167}{}$
TOTAL.....	$10^6 I_3 = \frac{8219,207}{}$

Enfin, en attribuant pour l'intervalle dx l'unité de longueur, on a

$$dx = 1,00$$

Substituant ces valeurs dans l'expression générale de l'effort de glissement (8), on trouve pour l'intensité de celui-ci dans

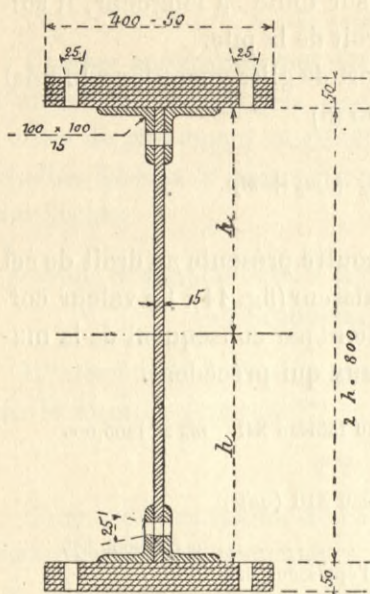


Fig. 11.

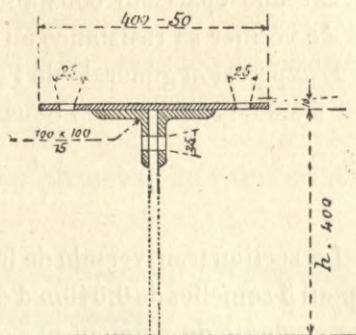


Fig. 12.

le plan de la ligne moyenne, la valeur suivante pour l'unité de longueur.

$$d\theta = \frac{46488 \times 1,00 \times 10294,625}{8219,207} = 58\,225 \text{ kg.}$$

Cet effort doit être équilibré, comme nous l'avons dit au commencement de ce mémoire, par la résistance au cisaillement longitudinal de l'âme verticale ; or la section résistante de celle-ci, suivant le plan de la ligne moyenne, est pour l'unité de longueur

$$\Omega = 1000 \times 15 = 15\,000 \text{ mm}^2$$

Le travail maximum par millimètre carré sera donc

$$R = \frac{d\theta}{\Omega} = \frac{58\,225}{15\,000} = 3,88 \text{ kg}$$

Ce travail est inférieur à la limite de 5,20 kg prescrite par la nouvelle circulaire ministérielle qu'on peut adopter pour les poutres d'un pont-route.

Résistance des rivets d'assemblage des cornières à l'âme verticale. L'effort de glissement longitudinal, qui s'exerce suivant la ligne des centres des rivets d'attache, se calcule par la formule 40)

$$d\theta = \frac{A dx}{I} (m_c + m_s)$$

L'intensité de cet effort au droit des appuis présente les valeurs suivantes :

Effort de glissement sur les culées. — La section de la poutre dans les tronçons voisins des culées ne présente qu'une semelle de 0,010 m d'épaisseur (fig. 12); les rivets verticaux de cette semelle représentent ici son assemblage avec les montants de la poutre, que nous supposons avoir le même diamètre que dans le cas précédent.

Dans cette hypothèse, le moment m a la valeur suivante :

Pour la semelle de (400 — 50) 10 le tableau XIV	
donne $0,35 \times 4050 = \dots\dots\dots$	$10^6 m_s = 1417,500$
Pour les cornières de $\frac{100,100}{15}$ comme ci-dessus..	$10^6 m_c = 2050,875$
TOTAL.....	$3468,375$

A déduire le moment des vides des rivets horizontaux d'après le tableau XVI pour l'épaisseur

$e' = 0,03, 0,03 \times 8750 = \dots\dots\dots$	$10^6 m' = 262,500$
Reste pour la section nette	$10^6 m = 3205,875$

L'élément dx représente ici la distance d'axe en axe des rivets dans le sens longitudinal. Nous donnons à cet élément la longueur réduite du tableau VI

$$dx = 0,10 \text{ m.}$$

Enfin la valeur du moment d'inertie de la section avec une semelle calculé à la fin du chapitre II est

$$10^6 I_1 = 3038,273$$

Ces valeurs substituées dans l'expression générale de l'ef-

fort de glissement (10) donnent pour l'intensité de celui-ci la valeur suivante :

$$d_0 = \frac{2863,2 \times 3205,875}{3038,273} = 3021 \text{ kg}$$

Effort de glissement sur les piles. — La section de la poutre dans les tronçons voisins des piles comprend 5 semelles de 0,010 m d'épaisseur (fig. 11).

L'effort de glissement longitudinal auquel les rivets des cornières doivent résister se calcule par la même expression générale (10) que ci-dessus.

Les valeurs des divers termes entrant dans cette expression sont les suivantes :

L'effort tranchant maximum.....	$A_s = 46\,488$
L'intervalle entre les axes de deux rivets consécutifs dans le sens longitudinal.....	$dx = 0,10 \text{ m}$
Le moment d'inertie I_s de la section avec cinq semelles est comme précédemment.....	$10^6 I_s = 9488,375$

Enfin le moment m se détermine de la manière suivante :

Pour la section pleine comprenant les semelles et les cornières, d'après les calculs qui précèdent	
10688,375 — 1200 =	9488,375
A déduire les vides horizontaux correspondant à une épaisseur $e' = 0,03$	$0,03 \times 8750 = \frac{262,500}{}$
Reste pour la section nette.....	$10^6 m = 9225,875$

La formule générale (10) donne avec ces valeurs pour l'effort de glissement longitudinal l'intensité suivante :

$$d_0 = \frac{4648,8 \times 9225,875}{8219,207} = 5206 \text{ kg.}$$

Travail du métal. — L'effort de glissement déterminé au droit des appuis doit être équilibré dans l'élément dx par la résistance au cisaillement d'un rivet travaillant en double section.

Le diamètre des rivets correspondant aux cornières de 100×100 , étant de 0,025 m, la section résistante sera

$$2 \omega = 2 \times 491 = 982 \text{ mm}^2.$$

Par suite le travail maximum par millimètre carré sera d'après la formule (11)

sur les culées

$$R = \frac{3021}{982} = 3,08$$

sur les piles dans la 2^e travée

$$R = \frac{5206}{982} = 5,30$$

Ces résultats nous montrent que le travail des rivets d'assemblage au droit des culées se trouve dans de bonnes conditions de résistance, tandis que sur les piles ce travail dépasse de 0,10 *kg* la limite prescrite par la circulaire ministérielle.

Le surcroît de travail ci-dessus encore admissible tient à ce qu'avant la circulaire ministérielle on admettait pour le travail des rivets au cisaillement une limite de 5,50 *kg*.

Moyens à employer pour réduire le travail des rivets. — Dans les conditions de la nouvelle circulaire ministérielle, le travail des rivets, supérieur à la limite prescrite, indique en général que la hauteur de la poutre est insuffisante pour supporter dans de bonnes conditions les charges prévues.

Pour ramener le travail des rivets au dessous de cette limite, il n'y a donc qu'une solution pratique à adopter, c'est d'augmenter la hauteur de la poutre.

En effet, ce n'est que par ce moyen qu'on pourra obtenir une réduction du rapport de $\frac{m}{I}$ et même, dans beaucoup de cas, réduire les dimensions transversales de la poutre.

Toutefois, cette réduction devra être faite de manière à laisser au rapport $\frac{I}{V}$ à peu près la même valeur, afin que la nouvelle section puisse résister convenablement au moment fléchissant.

Cette augmentation de la hauteur s'impose surtout pour les longerons, entretoises, et pour les poutres sous-rails des viaducs.

Pour ces pièces, on doit proscrire d'une manière générale toutes les petites hauteurs pour lesquelles le travail des rivets ne se trouve pas assuré dans de bonnes conditions.

Dans certains cas, cependant, des poutres sous-rails, où il est très difficile d'augmenter la hauteur, on a recours aux

cornières à larges ailes permettant de placer deux rangées de rivets. Le minimum de largeur de ces cornières est de $0,150\text{ m}$,

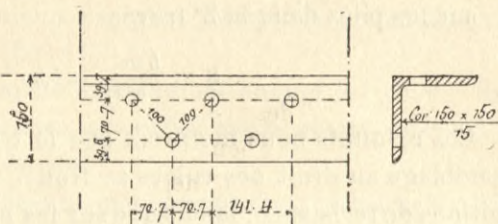


Fig. 13.

l'emplacement des rivets sur deux rangées est indiqué par la figure 13. L'espacement des rivets est de $0,10\text{ m}$ d'axe en axe et la distance dx se réduit dans ce cas à $0,0707\text{ m}$.

Enfin on pourra réduire le travail des rivets par l'augmentation de leur diamètre.

Cette disposition ne présente pas de difficulté pour les diamètres des rivets inférieurs à $0,025\text{ m}$, à condition d'employer les cornières correspondantes.

Pour les cornières de 110×110 et 120×120 on pourrait également augmenter légèrement le diamètre de $0,025\text{ m}$, admis comme maximum ; mais cette solution ne saurait être recommandée, car l'augmentation du diamètre des rivets comporte celle de leur espacement dx , et par suite l'avantage obtenu d'un côté se trouve compensé par un inconvénient de l'autre côté.

Il en résulte qu'il est préférable de composer la section de la poutre de manière à employer des rivets fabriqués couramment, dont on puisse s'approvisionner sans difficulté, et sans majoration de prix.

DEUXIÈME PARTIE

RÉSISTANCE DES POUTRES DES PONTS ET VIADUCS MÉTALLIQUES SOUS L'INFLUENCE DES SURCHARGES MOBILES.

SOMMAIRE

EXPOSÉ

I. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES

Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par les surcharges mobiles. — Considérations générales. — Moment fléchissant maximum. — Calcul des portées applicables. — Détermination de la charge k . — Courbe-enveloppe des moments fléchissants. — Abscisses des points d'intersection des courbes successives. — Expressions des moments aux points d'intersection.

Courbe-enveloppe des efforts tranchants. — Détermination des limites des valeurs de l'effort tranchant. — Équations des efforts tranchants. — Valeurs des efforts tranchants aux points d'intersection des éléments de la ligne enveloppe.

II. — RÉSISTANCE DES POUTRES SUPPORTANT LES VOIES FERRÉES

Définition des charges. — Charges du train-type. — Charges du train théorique.

Moments fléchissants maxima. — Calcul des termes ΣPd et $\Sigma Pd'$ — Calcul des abscisses x' — Tableaux des expressions des abscisses x' et des moments maxima pour les portées de 4,20 m à 401,00 m. — Courbes-enveloppes des moments. — Tableau des équations des éléments de cette courbe.

Efforts tranchants maxima. — Formules générales. — Tableaux des expressions des efforts tranchants maxima pour les parties de 3,60 m à 401,00 m.

III. — RÉSISTANCE DES POUTRES DES PONTS-ROUTES

Définition des charges. — Types de convois. — Répartition des charges sur la coupe transversale du pont.

Moments fléchissants maxima. — Calcul des termes ΣPd et $\Sigma Pd'$ — Tableaux des expressions des abscisses x' et des moments fléchissants, maxima pour les portées de 1,00 à 100 m. — Courbes-enveloppes des moments fléchissants. — Tableaux des équations des éléments de ces courbes.

Efforts tranchants maxima. — Formules générales. — Tableaux des expressions des efforts tranchants maxima pour les portées de 1,00 m à 100,00 m.

IV. — COURBES-ENVELOPPES APROXIMATIVES

Courbe-enveloppe des moments fléchissants. — Formule générale. — Calcul des longueurs des semelles additionnelles.

Ligne-enveloppe des efforts tranchants. — Formule générale.

V. — EXEMPLE COMPARATIF.

Courbes-enveloppes des moments fléchissants. — Calcul par la méthode exacte. — Calcul par la méthode approximative.

Lignes enveloppes de l'effort tranchant. — Calcul par la méthode exacte. — Calcul par la méthode approximative. — Conclusion.

EXPOSÉ

La circulaire ministérielle du 29 août 1891 prescrit des nouvelles surcharges pour le calcul de résistance et les épreuves des ponts et viaducs métalliques.

Ainsi, les poutres des viaducs métalliques doivent être établies de manière à résister dans de bonnes conditions aux surcharges mobiles des trains types définis par les articles 4 et 13 du règlement de cette circulaire (1).

Les poutres des ponts-routes doivent également présenter une résistance suffisante sous le passage des surcharges des convois de charriots définies par l'article 17 de ce règlement.

Dans les deux cas, le mode d'action des surcharges est indiqué de la manière suivante dans l'article 4 :

« L'ensemble du train (ou des convois de charriots) sera supposé occuper successivement différentes positions le long de la portée, et ces positions seront choisies de manière à réaliser en chaque point les plus grands efforts tranchants et fléchissants que le passage du train-type (ou convoi) puisse déterminer. »

Pour répondre à cette partie de la circulaire ministérielle, c'est-à-dire pour déterminer d'une manière précise les efforts maxima qu'une poutre aura à supporter, il est indispensable d'établir les calculs de résistance dans l'hypothèse des charges mobiles placées pour chaque section de la poutre dans la position la plus défavorable.

Les valeurs successives des efforts maxima ainsi obtenues formeront les courbes-enveloppes des moments fléchissants et des efforts tranchants sur lesquelles on se basera pour arrêter les dimensions principales de la poutre.

Les calculs à effectuer dans cette hypothèse étant longs et compliqués au premier abord, on a cherché à les simplifier en adoptant la surcharge uniformément répartie équivalente.

Mais ce mode de procéder, admissible tout au plus pour les poutres à plusieurs travées, n'est pas rigoureux, et présente des différences assez sensibles pour le cas des travées isolées où les efforts peuvent être obtenus exactement sans grande difficulté.

En effet, pour ces dernières poutres, sous l'action d'une surcharge uniformément répartie, le moment fléchissant varie proportionnellement aux ordonnées d'une parabole à axe vertical; il part de zéro aux appuis et atteint un maximum au milieu de la portée.

Au contraire, dans le cas des surcharges mobiles, la courbe-enveloppe des moments fléchissants se compose d'une série d'arcs paraboliques, correspondant aux charges isolées qui forment le convoi; et c'est le sommet de l'axe le plus rapproché du milieu de la portée qui donne le moment maximum.

Ce sommet se trouve généralement à une certaine distance du milieu de la portée, et ce n'est que dans un cas tout particulier correspondant à l'égalité des moments des charges pris par rapport à l'essieu donnant le maximum du moment fléchissant, situées à droite et à gauche de cet essieu, que ce sommet coïncide avec le milieu de la portée.

Les deux valeurs extrêmes de la charge uniformément répartie équivalente peuvent s'établir de la manière suivante :

La plus petite charge est celle qui donne le moment fléchissant maximum des charges roulantes au milieu de la portée.

Cette hypothèse est admissible pour les poutres à section constante.

Mais pour les poutres à section variable avec des semelles additionnelles, cette charge est insuffisante, car les ordonnées de la courbe-enveloppe réelle sont presque partout supérieures aux ordonnées de la parabole correspondante à cette charge, et par suite les semelles additionnelles calculées dans cette hypothèse ont des longueurs insuffisantes.

La plus grande charge, uniformément répartie donnant à la parabole des moments des ordonnées égales ou supérieures à celles de la courbe-enveloppe, présente l'inconvénient de donner une trop grande valeur au moment fléchissant au milieu de la portée, et par suite d'exiger un surcroît du métal inutile à la résistance dans cette partie de la portée, et oblige d'autre part d'allonger hors proportion les semelles additionnelles.

Une solution intermédiaire, qui consiste à déterminer la charge uniformément répartie de manière à obtenir le même moment fléchissant maximum au même point que celui des charges mobiles, n'est pas non plus exempte d'inconvénients, car elle laisse encore une trop grande valeur au moment fléchissant au milieu de la portée, et présente des ordonnées inférieures à celles de la courbe-enveloppe dans les régions latérales de la portée.

Il résulte de ce qui précède que les surcharges uniformément réparties couvrant la travée entière ne donnant pas des résultats avec l'exactitude suffisante, l'emploi d'une nouvelle méthode de calculs s'impose; méthode basée sur l'emploi des charges mobiles réelles.

Les calculs faits dans cette dernière hypothèse, en assignant aux efforts maxima développés dans une poutre des valeurs exactes, permettront seuls de répondre d'une part aux prescriptions de la circulaire ministérielle, et d'éviter d'autre part l'excès ou l'insuffisance du métal dans la composition des poutres.

Toutefois, cette dernière méthode pourra recevoir des simplifications par l'emploi d'une courbe unique remplaçant l'une des moitiés du polygone curviligne de la courbe-enveloppe, comme nous le montrerons au dernier chapitre de ce mémoire.

C'est dans cet ordre d'idées que nous nous proposons de traiter la question dans ce mémoire, en indiquant la méthode que nous employons dans les calculs de résistance des tabliers métalliques du réseau.

Partant de la théorie générale de la flexion, nous établissons dans le chapitre I^{er} les équations générales des moments fléchissants et des efforts tranchants produits par les charges mobiles, la grandeur et les espacements de ces charges étant quelconques.

Le chapitre II renferme l'application des équations générales aux poutres supportant les voies ferrées.

Dans le chapitre III, les équations générales sont appliquées aux poutres des ponts-routes.

Les simplifications introduites dans les équations générales, ainsi qu'un grand nombre de coefficients numériques permettent d'obtenir sans difficulté les efforts maxima produits par les surcharges mobiles en fonction de ces charges P et de la portée des poutres l .

Ces expressions s'appliquent pour les ouvrages dont la portée est comprise entre $4 m$ et $400 m$.

Enfin le chapitre IV présente la simplification de la méthode générale. Les équations suffisamment rapprochées de la courbe-enveloppe des moments fléchissants et des efforts tranchants permettent d'obtenir rapidement leurs valeurs maxima.

A la fin de ce chapitre se trouvent les équations servant au calcul de la longueur des semelles additionnelles.

Les résultats ainsi obtenus, permettant d'éviter les tâtonnements et de réduire les calculs, pourront présenter, croyons-nous, leur utilité dans la construction.

I. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES

COURBES-ENVELOPPES DES MOMENTS FLÉCHISSANTS PRODUITS PAR LES CHARGES MOBILES

Considérations générales. — Pour déterminer les efforts de la flexion développés dans une poutre droite à une travée sous l'action des charges mobiles, deux quantités fondamentales sont nécessaires à établir :

1° La valeur du moment fléchissant maximum, d'après laquelle on détermine tout d'abord la section transversale de la poutre comportant toutes les semelles additionnelles;

2° Les équations de la courbe-enveloppe des moments fléchissants dans l'espace compris entre l'origine et l'abscisse correspondant au moment fléchissant maximum. Le contour ainsi obtenu dans l'une des parties de la poutre, et se reproduisant dans la partie restante symétriquement par rapport au milieu de la portée, permettra de calculer avec exactitude la longueur qu'il convient de donner aux tôles formant les semelles additionnelles.

C'est dans ce sens que nous développons les équations de ce chapitre applicables à tout système de charges, quels que soient leur grandeur et leur espacement.

Ces équations sont établies dans l'hypothèse où les charges mobiles se trouvent dans un plan vertical passant par l'axe longitudinal de la poutre, et qu'elles se déplacent directement sur sa partie supérieure.

Moment fléchissant maximum. — Ce moment se produit d'une manière générale au droit d'une charge placée vers le milieu du système en mouvement, lorsqu'en se déplaçant dans la partie centrale de la portée, cette charge occupe une position déterminée par rapport au milieu de la portée.

La valeur du moment fléchissant maximum se détermine, en conséquence, au moyen de l'équation des moments fléchissants produits au point d'application de la charge considérée pendant son déplacement.

Supposons que nous connaissons cette charge et soit k son numéro d'ordre en comptant de gauche à droite.

Pour déterminer l'équation des moments fléchissants correspondant au déplacement de la charge n° k , considérons un système de n charges $P_1 P_2 \dots P_n$ en mouvement, et désignons par a l'abscisse de la charge P_k comptée à partir de l'appui de gauche O pris pour l'origine.

Soient en outre d'une manière générale d et d' les distances

de la charge k à l'une des charges placées à sa gauche et à sa droite (fig. 1).

Le moment fléchissant M , en un point quelconque x du tronçon α_{k-1} voisin de la charge P_k produit sous l'action de toutes ces charges, s'obtient en prenant les moments par rapport à ce point de toutes les forces qui se trouvent à gauche sur la partie $a - x$ de la portée.

On trouve ainsi :

$$(1) \quad M = Yx = \sum_k^1 P [d - (a - x)] - \frac{px^2}{2}.$$

Dans cette équation, Y représente la réaction de l'appui de gauche variable avec l'abscisse a , et p la charge permanente uniformément répartie.

La valeur de cette réaction se détermine en prenant la somme des moments de toutes les charges par rapport à l'appui de droite B et en divisant le résultat obtenu par la portée de la poutre L .

$$Y = \sum_1^n \frac{P(l - a + d) + P(l - a - d')}{l} + \frac{pl}{2}.$$

Soit en désignant par Π le poids total des n charges mobiles.

$$(2) \quad Y = \Pi \frac{l - a}{l} + \frac{\sum_k^1 Pd - \sum_k^n Pd'}{l} + \frac{pl}{2}.$$

Substituant cette expression dans l'équation (1), on obtient

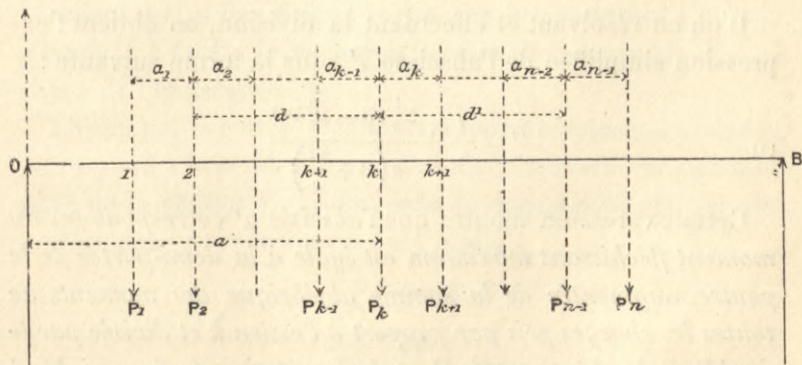


Fig. 1.

l'équation suivante des moments fléchissants dans le tronçon

α_{k-1} pour la position fixe de la charge P_k , c'est-à-dire pour la valeur fixe de la distance a .

$$(3) \quad M = -\sum_k^1 P \left[d - (a - x) \right] + \left[\Pi \frac{l-a}{l} + \frac{\sum_k^1 Pd - \sum_k^n Pd'}{l} + \frac{pl}{2} \right] x - \frac{px^2}{2}.$$

L'indice inférieur du signe Σ indique la charge par rapport à laquelle sont pris les moments des autres charges.

Lorsque les charges se déplacent la distance a devient variable, le moment fléchissant au droit de la charge P_k s'obtient en posant dans la dernière équation $a = x$.

Les valeurs successives de ce moment pendant le déplacement des charges seront représentées par les ordonnées de la courbe-enveloppe dans le tronçon central de la travée, dont l'équation est la suivante :

$$(4) \quad M = -\sum_k^1 Pd + \left[\Pi + \frac{\sum_k^1 Pd - \sum_k^n Pd'}{l} + \frac{pl}{2} \right] x - \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2} \right) x^2.$$

Cette équation représente une parabole à axe vertical. La valeur maximum du moment fléchissant M' correspond au sommet de cette courbe. L'abscisse x' de ce sommet se calcule par la relation suivante, obtenue en égalant à zéro la dérivée par rapport à x de l'équation (4).

$$(5) \quad \frac{dM}{dx} = \left(\Pi + \frac{\sum_k^1 Pd - \sum_k^n Pd'}{l} + \frac{pl}{2} \right) - 2 \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2} \right) x' = 0.$$

D'où en résolvant et effectuant la division, on obtient l'expression simplifiée de l'abscisse x' sous la forme suivante :

$$(6) \quad x' = \frac{l}{2} + \frac{\sum_k^1 Pd - \sum_k^n Pd'}{2 \left(\Pi + \frac{pl}{2} \right)}$$

Cette expression montre que l'abscisse x' correspondant au moment fléchissant maximum est égale à la demi-portée de la poutre, augmentée de la somme algébrique des moments de toutes les charges pris par rapport à l'essieu k et divisée par le double de la charge totale Π et de la réaction de l'appui due à la charge permanente $\frac{pl}{2}$.

Le dernier terme de cette expression peut être positif ou négatif suivant que $\Sigma P d$ est plus grande ou plus petite que $\Sigma P d'$.

Il en résulte que dans le premier cas l'abscisse x' étant plus grande que $\frac{l}{2}$, le moment fléchissant maximum se produira dans la deuxième moitié de la portée. Dans le cas contraire, ce moment aura lieu dans la première moitié.

Substituons maintenant la valeur de l'abscisse x' dans l'équation des moments fléchissants (4) et remplaçons dans cette équation le deuxième terme par sa valeur tirée de la relation (5). Nous obtenons ainsi l'expression du moment fléchissant maximum M' sous la forme suivante :

$$(7) \quad M' = -\Sigma_k^1 P d + \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2.$$

Ainsi, dès que la charge k est connue, on pourra déterminer directement et sans difficulté, à l'aide de deux dernières expressions, la position et la grandeur du moment fléchissant maximum dans le cas général.

Calcul des portées applicables. — L'expression (6) permet de déterminer facilement les portées qui correspondent à un système déterminé de charges, pour lesquelles on cherche à calculer le moment fléchissant maximum.

Soient d et d' les distances des charges extrêmes placées à gauche et à droite de la charge k , et désignons par δ le dernier terme de l'expression (6).

La plus petite portée, comprenant toutes les charges données, correspond à la position du système, où la charge la plus éloignée de la charge P_k atteint sans le dépasser l'appui voisin.

On a donc pour le cas où δ est positif :

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} + \delta &= d' \\ \frac{l}{2} - \delta &= d \end{aligned}$$

D'où,

$$(8) \quad \begin{aligned} l &= 2(d' - \delta) \\ l &= 2(d + \delta). \end{aligned}$$

Lorsque δ est négatif on a inversement :

$$(9) \quad \begin{aligned} l &= 2(d' + \delta) \\ l &= 2(d - \delta). \end{aligned}$$

On prendra comme limite inférieure de la portée la plus grande valeur de la relation (8) dans le premier cas, et de la relation (9) dans le dernier cas.

La plus grande portée est celle pour laquelle une nouvelle charge apparaît sur l'un des appuis. On prendra dans ce cas la plus petite valeur des égalités suivantes :

Pour δ positif,

$$(10) \quad \begin{aligned} l' &= 2(d' - \delta + \alpha_n) \\ l' &= 2(d + \delta + \alpha_0). \end{aligned}$$

Et pour δ négatif,

$$(11) \quad \begin{aligned} l &= 2(d' + \delta + \alpha_n) \\ l &= 2(d - \delta + \alpha_0). \end{aligned}$$

Dans ces formules, α_0 représente la distance de la nouvelle charge à la première P_1 , et α_n la distance de la nouvelle charge à la dernière P_n .

Pour chaque portée comprise entre les limites ainsi déterminées, le moment fléchissant maximum M' se trouve à la même distance δ à partir du milieu de cette portée.

Dans les applications cependant, il convient de réduire légèrement ces limites.

En effet le moment maximum M' , dû à un système de charges, devient plus petit vers les limites des portées qu'un autre moment maximum dû à une charge P en plus ou en moins.

Il existe dans ce cas une certaine valeur de la portée pour laquelle les deux moments maxima deviennent égaux.

Cette portée intermédiaire peut s'obtenir exactement en établissant l'égalité de deux moments fléchissants maxima successifs d'après l'équation (7) où l'on négligera, pour le moment, l'influence de la charge permanente.

$$(12) \quad -\sum_{k-1}^1 Pd + \frac{\Pi}{l} \left(\frac{l}{2} + \delta \right)^2 = -\sum_{k'-1}^1 Pd + \frac{\Pi + P}{l} \left(\frac{l}{2} - \delta' \right)^2$$

On obtient ainsi l'équation suivante du deuxième degré où tous les coefficients sont connus :

$$(13) \quad P \frac{l^2}{4} + [(\Pi + P) \delta' - \Pi \delta + \sum_{k'-1}^1 Pd - \sum_{k-1}^1 Pd + (\Pi + P) \delta'^2 - \Pi \delta^2] = 0.$$

Cette équation, résolue par rapport à l , donnera la valeur de la portée intermédiaire cherchée l_1 .

Les équations analogues ont été résolues par M. Michel, ingénieur en chef, et M. Gascougnolle, chef des études à la Compagnie des chemins de fer de Lyon pour les charges du train-type, et le train des machines les plus lourdes du réseau (1).¹

Ces calculs sont encore assez longs; aussi nous proposons une formule plus simple qui consiste à prendre pour la portée limite l_1 la demi-somme de la portée maximum d'un cas et de la portée minimum des cas comportant une charge de plus.

$$(14) \quad = \frac{l+l'}{2}.$$

Les résultats obtenus par cette formule ne diffèrent que de quelques centimètres de ceux obtenus exactement; l'approximation est donc suffisante.

Détermination de la charge k. — On détermine cette charge en se basant sur les considérations suivantes :

Lorsque le moment fléchissant au droit de la charge k devient maximum en un point de la portée, l'effort tranchant A change de signe pour ce point. Ainsi de la valeur positive avant le point d'application de la charge k , il passe à la valeur négative après ce point.

L'effort tranchant est représenté par la dérivée de l'équation des moments fléchissants.

Ainsi, en prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport à x , nous avons pour un point avant la charge k

$$\frac{dM}{dx} = A = Y - \sum_{k-1}^1 P > 0.$$

Et pour un point situé après cette charge, nous avons

$$A = Y - \sum_k^1 P < 0.$$

Donc pour l'essieu cherché, on doit avoir pour la position indiquée ci-dessus

$$(15) \quad \sum_{k-1}^1 P < Y < \sum_k^1 P.$$

(1) *Revue générale des chemins de fer*, mars 1892.

Or la réaction Y , en rapportant les moments à la première charge, s'exprime par la formule suivante :

$$Y = \Pi \frac{l-a}{l} - \frac{\sum_1^n Pd'}{l}$$

Désignant par g la distance du centre de gravité du système compté à partir de l'essieu n° 1, nous pouvons remplacer le dernier terme de cette équation par sa valeur

$$\frac{\sum_1^n Pd'}{l} = \frac{\Pi g}{l}$$

et nous aurons en définitive

$$(16) \quad \sum_1^{k-1} P < \frac{\Pi [l-(a+g)]}{l} < \sum_1^k P.$$

Cette inégalité est facile à établir pour chaque système de charges; on prendra pour la portée l la valeur intermédiaire entre les limites désignées plus haut, et l'on placera le convoi de manière que le centre de gravité du système occupe la position indiqué par le théorème de M. Barré.

Cette position est telle que la distance entre l'essieu k et le centre de gravité du système soit égale à celle de cet essieu au milieu de la portée.

$$\frac{l}{2} - (a+g) = 2\delta.$$

Pour réduire des tâtonnements inévitables, on placera d'abord le centre de gravité des charges au milieu de la portée. Pour cette position on a :

$$a+g = \frac{l}{2}.$$

Et l'inégalité (16) devient

$$(17) \quad \sum_1^{k-1} P < \frac{\Pi}{2} < \sum_1^k P.$$

quantité immédiatement calculable et qui indique dans la majorité des cas l'essieu donnant le moment maximum cherché.

Dans les cas exceptionnels où le centre de gravité se trouve

notablement rapproché de l'appui, par exemple de gauche, l'essieu cherché est voisin de celui indiqué par la relation (17). Il faut donc vérifier que l'essieu k donne réellement le maximum du moment M' .

Pour cela on établira les formules (6) et (7) pour les charges n° k et $k + 1$, et l'on comparera les résultats de la formule (7) pour l'une des portées communes.

Dans le cas où le moment correspondant à la charge n° $k + 1$ est supérieur à celui de la charge n° k , c'est l'essieu n° $k + 1$ qui donnera le maximum du moment cherché. Pour s'en assurer on répétera la même opération avec la charge n° $k + 2$, pour laquelle on doit trouver un moment maximum inférieur à celui du cas précédent.

Dans le cas contraire, cette opération sera faite avec la charge n° $k - 1$.

On déterminera ainsi sans longs calculs le moment fléchissant maximum dû au système donné des charges, ainsi que les portées correspondantes auxquelles il s'applique; les opérations ne sont pas longues, car le terme $\Sigma P d'$ et par suite la quantité g sont connus.

Courbes-enveloppes des moments fléchissants. — Pour déterminer les éléments de cette courbe, supposons que le système de n charges se déplace de gauche à droite, depuis la position initiale où la charge n° 1 se trouve au droit de l'appui de gauche jusqu'à la position finale où le dernier essieu n° n atteint sans le dépasser l'appui de droite.

Dans ce déplacement, les sommets de la ligne polygonale des moments fléchissants au droit de chaque essieu décrivent des paraboles du second degré à axe vertical analogues à celle que nous venons de déterminer pour le tronçon central.

Ces diverses courbes, par leurs intersections successives, forment, à la partie supérieure correspondant aux ordonnées maxima, un polygone curviligne.

Le polygone, ainsi composé des arcs paraboliques, constitue

la courbe-enveloppe des moments fléchissants dans le cas des charges mobiles.

Les équations de ces divers éléments de la courbe-enveloppe s'obtiennent sans difficulté à l'aide de l'équation (3) établie ci-dessus. Il suffit pour cela d'attribuer au nombre k des valeurs successives entre $k = 1$ et $k - 1$.

Ainsi, l'équation de la courbe n° 1 correspondant au déplacement de la charge n° 1, s'obtient en posant dans l'équation (3) $k = 1$, en rapportant à ce point l'abscisse a et les moments des autres charges, et en supprimant le terme $\Sigma_1^{k-1} Pd$ puisqu'il n'existe pas de charges à gauche de celle n° 1.

On obtient ainsi

$$(18) \quad (M)_o^{x_1} = \left[\frac{\Pi(l-a) - \Sigma_1^{n'} Pd'}{l} + \frac{pl}{2} \right] x - \frac{px^2}{2}.$$

Pour la position fixe du système, et dans le cas de déplacement des charges $a = x$

$$(19) \quad (M)_o^{x_1} = \left(\Pi - \frac{\Sigma_1^{n'} Pd'}{l} \right) x - \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2} \right) x^2.$$

Cette équation donne les moments fléchissants maxima dans le premier tronçon de la travée compris entre l'origine et l'abscisse x_1 du point d'intersection de cette courbe avec la courbe n° 2 correspondant au déplacement de la charge n° 2.

Le nombre n' indique le nombre des charges du système dans sa position initiale. Généralement ce nombre est supérieur au nombre n qui correspond au moment fléchissant maximum.

Dans le tronçon suivant x_1, x_2 compris entre les deux points d'intersection de la courbe n° 2 avec les deux courbes voisines, les moments fléchissants maxima sont donnés par l'équation correspondante n° 2.

Cette équation s'obtient en rapportant l'abscisse a et les autres charges à l'essieu n° 2. On obtient dans ce cas en posant dans l'équation (3) $k = 2$.

$$(20) \quad (M) \frac{x_2}{x_1} = -P_1 \alpha_1 + \left(\Pi + \frac{P_1 \alpha_1 - \sum_2^{n'} P d'}{l} + \frac{p l}{2} \right) x - \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2} \right) x^2.$$

En suivant la même marche, on obtient les équations des éléments successifs de la courbe-enveloppe des moments fléchissants jusqu'à l'avant-dernière courbe dont l'équation est la suivante :

$$(21) \quad (M) \frac{x_{k-1}}{x_{k-2}} = -\sum_{k-2}^1 P d + \left(\Pi + \frac{\sum_{k-1}^1 P d - \sum_{k-1}^{n'} P d'}{l} + \frac{p l}{2} \right) x - \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2} \right) x^2.$$

La dernière courbe, comprenant le moment fléchissant maximum, a été établie précédemment (équation 4). On peut donc obtenir ainsi tous les éléments de la courbe-enveloppe dans la première partie de la portée s'étendant de l'origine à l'abscisse x' , correspondant au moment fléchissant maximum.

Toutefois, lorsque l'abscisse x' tombe dans la deuxième moitié de la portée, il faut calculer une ou deux équations en plus ; généralement, jusqu'à ce que l'ordonnée, après une certaine distance après le milieu de la portée, devient égale ou inférieure à l'ordonnée de la première partie de la portée placée à distance égale de son milieu.

Calcul des abscisses des points d'intersection des courbes successives des moments fléchissants. — Cherchons à déterminer l'abscisse du point d'intersection d'une courbe n° $k - 1$ avec la courbe n° k , établis précédemment.

Pour déterminer cette abscisse, remarquons qu'au point d'intersection pour $x = x_{k-1}$ la valeur du moment fléchissant est la même pour les deux courbes voisines représentées par les équations (21) et (4) pour le même nombre des charges n . On aura donc, en égalisant ces deux équations et réduisant la relation suivante,

$$\left[\left(\sum_k^1 - \sum_{k-1}^1 \right) P d - \left(\sum_k^n - \sum_{k-1}^n \right) P d' \right] x_{k-1} = \left(\sum_k^1 - \sum_{k-1}^1 \right) P d l.$$

De laquelle on tire

$$(22) \quad x_{k-1} = \frac{(\Sigma_k^1 - \Sigma_{k-1}^1) Pd}{\left(\frac{1}{k} - \Sigma_{k-1}^1\right) Pd - (\Sigma_k^n - \Sigma_{k-1}^n) Pd'} l.$$

Cette expression peut se simplifier. Pour cela désignons par $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \dots \alpha_{n-1}$ les espacements entre elles des charges $P_1 P_2 \dots P_n$ (fig. 1), et exprimons en fonction de ces quantités les termes de l'expression (22).

Effectuant les calculs indiqués on trouve

$$(23) \quad \begin{aligned} (\Sigma_k^1 - \Sigma_{k-1}^1) Pd &= (P_1 + P_2 + \dots + P_{k-2} + P_{k-1}) \alpha_{k-1} \\ - (\Sigma_k^n - \Sigma_{k-1}^n) Pd' &= (P_k + P_{k+1} + \dots + P_{n-1} + P_n) \alpha_{k-1}. \end{aligned}$$

Par suite l'expression (22) prend la forme suivante, qui a été également obtenue par M. Eddy (1).

$$(24) \quad x_{k-1} = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{k-2} + P_{k-1}}{P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots + P_{n-1} + P_n} l.$$

Il résulte de là le théorème suivant :

L'abscisse x_{k-1} du point d'intersection de deux courbes consécutives n° $k-1$ et k des moments fléchissants produits par le même nombre des charges est exprimée par un coefficient fractionnaire de la portée l .

Le numérateur de cette fraction est égal à la somme des charges qui précèdent la charge considérée k comprenant cette dernière charge, et le dénominateur à la somme totale des n charges.

En vertu de ce théorème on obtient, pour les abscisses des points d'intersection successifs de la courbe-enveloppe, les expressions suivantes :

$$(25) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{P_1}{\Pi} l, \\ x_2 &= \frac{P_1 + P_2}{\Pi} l, \\ x_3 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3}{\Pi} l, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{k-1} &= \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{k-1}}{\Pi} l. \\ x_k &= \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_k}{\Pi} l. \end{aligned}$$

(1) Statique graphique de M. Sévy.

Dans les cas des charges égales, quel que soit leur espacement, les abscisses des points d'intersection des courbes successives des moments fléchissants partagent la portée l en n parties égales correspondant au nombre des charges.

En effet, en faisant égales entre elles les charges des expressions ci-dessus, on trouve pour les abscisses les expressions ci-après :

$$(26) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{n} l, \\ x_2 &= \frac{2}{n} l, \\ x_3 &= \frac{3}{n} l, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{k-1} &= \frac{k-1}{n} l. \end{aligned}$$

Les deux dernières expressions (25) et (26) s'appliquent au même nombre des charges, le nombre est n' pour les premières abscisses et devient n pour les dernières.

Pour rendre ces expressions également applicables au nombre variable des charges, remarquons que lorsqu'une charge dépasse l'appui, la courbe correspondante à un certain nombre des charges se raccorde tangentiellement en ce point avec la courbe du système ayant une charge de moins ou de plus. Il suffit, dans ce cas, d'attribuer aux numérateurs des valeurs correspondantes, pour obtenir l'abscisse du point d'intersection du dernier élément avec la courbe suivante.

Valeurs des moments fléchissants aux points d'intersection de deux courbes voisines. — Pour déterminer l'expression du moment fléchissant M_{k-1} au point de rencontre des courbes n° $k-1$ et k , substituons dans l'équation du moment fléchissant (21) à la place de x sa valeur tirée de la relation (25). Nous obtenons ainsi :

$$M_{k-1} = -\sum_{k-1}^1 Pd + \left(\frac{\Pi l + \sum_{k-1}^1 Pd - \sum_{k-1}^n Pd'}{l} \right) \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{k-1}}{\Pi} l - \frac{\Pi}{l} x_{k-1}^2$$

Or le deuxième terme de cette équation peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\Sigma_k^n P l + \frac{\Sigma_{k-1}^1 P d - \Sigma_{k-1}^n P d'}{l} x_{k-1} + \frac{\Pi}{l} x_{k-1}^2.$$

Par suite l'expression du moment fléchissant prend la forme suivante :

$$(27) \quad M_{k-1} = -\Sigma_{k-1}^1 P d + \left(\Sigma_k^n P + \frac{\Sigma_{k-1}^1 P d - \Sigma_{k-1}^n P d'}{l} \right) x_{k-1}$$

Nous avons de la même manière :

$$(28) \quad M_k = -\Sigma_k^1 P d + \left(\Sigma_{k+1}^n P + \frac{\Sigma_k^1 P d - \Sigma_k^n P d'}{l} \right) x_k.$$

Ainsi les valeurs successives des moments fléchissants aux points de remontée des courbes voisines s'exprimeront par les équations suivantes :

$$(29) \quad \begin{aligned} M_1 &= \left(\Sigma_2^n P - \frac{\Sigma_1^n P d'}{l} \right) x_1 \\ M_2 &= -P_1 \alpha_1 + \left(\Sigma_3^n P + \frac{P_1 \alpha_1 - \Sigma_2^n P d'}{l} \right) x_2 \\ M_3 &= -\Sigma_3^1 P d + \left(\Sigma_4^n P + \frac{\Sigma_3^1 P d - \Sigma_3^n P d'}{l} \right) x_3. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Les résultats qui précèdent donnent tous les éléments de la courbe-enveloppe des moments fléchissants. Nous allons maintenant établir les équations analogues pour les efforts tranchants.

COURBE-ENVELOPPE DES EFFORTS TRANCHANTS

Détermination des limites des plus grandes valeurs de l'effort tranchant. — Considérons une charge isolée P appliquée à la distance a de l'appui de gauche pris pour l'origine.

L'effort tranchant A développé par cette charge présente des valeurs constantes entre le point a et l'un des appuis.

Ainsi pour tout point situé à gauche du point a , cette valeur est positive et s'exprime pour l'équation suivante :

$$(A)_o^a = \frac{l-a}{l} P.$$

A droite du point a , la valeur de l'effort tranchant devient négative et a pour expression

$$(A)_a^l = -\frac{a}{l} P.$$

Ces équations représentent deux droites parallèles à l'axe des x et situées de deux côtés de cet axe (fig. 2).

Ceci posé, considérons la section dont l'abscisse est x . Toue

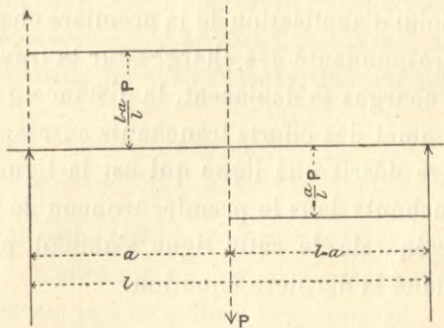


Fig. 2.

charge placée à droite de cette section tend à y produire l'effort tranchant positif, et réciproquement toute charge placée à sa gauche tend à produire l'effort tranchant négatif. On conclut de là que :

La plus grande valeur de l'effort tranchant dans une section quelconque de la travée sera obtenue par la distribution de la surcharge à partir de la section considérée jusqu'à l'un des appuis.

La surcharge du premier tronçon ox donne la limite négative, et la surcharge du tronçon $l-x$ donnera la limite positive.

En conséquence, la limite positive des efforts tranchants, a lieu dans le cas des surcharges mobiles au droit de la première

charge P_1 , les autres charges $P_2 P_3 \dots P_n$ se trouvant distribuées à sa droite, en laissant libre de toute surcharge le tronçon de gauche ox .

L'expression de l'effort tranchant A en un point quelconque x de la portée étant la dérivée de l'équation des moments fléchissants correspondants aux mêmes charges par rapport à cette variable, nous avons, en prenant la dérivée de l'équation (18) par rapport à x l'expression suivante des efforts tranchants dans le premier tronçon de la portée

$$(30) \quad A = \left[\frac{\Pi(l-a) - \sum_1^{n'} Pd'}{l} + \frac{pl}{2} \right] - px.$$

Pour $x = a$, la dernière équation donne l'effort tranchant maximum au point d'application de la première charge P_1 pour la position correspondante des charges sur la travée.

Lorsque les charges se déplacent, la distance a devient variable, et le sommet des efforts tranchants correspondant à la première charge décrit une ligne qui est la ligne-enveloppe des efforts tranchants dans le premier tronçon de la travée.

L'équation générale de cette ligne s'obtient par suite en posant $a = x$ dans la dernière équation.

$$(31) \quad (A)_o^x = \left(\Pi - \frac{\sum_1^{n'} Pd'}{l} + \frac{pl}{2} \right) - \left(\frac{\Pi}{l} + p \right) x.$$

La ligne-enveloppe des efforts tranchants est donc dans le cas des charges mobiles une droite ayant l'inclinaison négative.

La valeur maximum de l'effort tranchant représenté par cette droite pour $x = 0$ est

$$(32) \quad A_o = \Pi - \frac{\sum_1^{n'} Pd'}{l} + \frac{pl}{2}.$$

L'équation (31) est applicable pour le nombre n' des charges qui peuvent être contenues sur la portée dans la position initiale où la charge n° 1 se trouve au droit de l'appui de gauche.

A mesure que les charges se déplacent, l'abscisse x augmente

et la dernière charge $P_{n'}$ se rapproche vers l'appui de droite.

A partir de la position où la charge $P_{n'}$ est sur le point de quitter l'appui, jusqu'à la position où la charge précédente $P_{n'-1}$ arrive à son tour à quitter cet appui, les termes de l'équation (31) doivent être diminués des facteurs relatifs à la charge P_n .

On réduira ainsi successivement les termes de cette équation des facteurs correspondants aux charges qui viendront à franchir l'appui de droite, et l'on arrivera à la position où la première charge se trouvera au milieu de la portée.

Dans cette dernière position pour $x = \frac{l}{2}$ le nombre des charges sera réduit à n'' et par suite la charge totale prendra une certaine valeur Π'' . La valeur maximum de l'effort tranchant en ce dernier point deviendra, d'après l'équation (31)

$$(33) \quad A_{\frac{l}{2}} = \frac{\Pi''}{2} - \frac{\sum_1^{n''} P d'}{l}.$$

On voit que cette valeur n'est pas influencée par la charge permanente; en effet, on sait que l'effort tranchant produit par cette dernière est nul au milieu de la portée.

Remarquons que pendant le déplacement du convoi le dernier terme de l'équation (31) diminue chaque fois qu'une charge vient de franchir l'appui. Il en résulte que l'inclinaison des éléments successifs de la ligne-enveloppe sur l'horizontale devient de plus en plus petite à mesure que la charge n° 1 se rapproche vers le milieu de la portée. La tangente de cette inclinaison, qui était $\left(\frac{\Pi}{l} + p\right)$ au droit de l'appui de gauche, devient $\left(\frac{\Pi''}{l} + p\right)$ au milieu de la portée.

La ligne-enveloppe des efforts tranchants dans la première moitié de la portée est donc formée d'un polygone à côtés rectilignes. Nous admettons que dans la deuxième moitié de la portée cette ligne se reproduit symétriquement par rapport à son milieu.

Valeurs des efforts tranchants aux points d'intersection des éléments de la ligne-enveloppe. — Les abscisses des points d'intersection des éléments successifs de la ligne enveloppe des efforts tranchants sont connus, car elles dépendent de la distance des charges extrêmes et de la portée.

Le premier point d'intersection, en partant de l'appui de gauche, est celui de la ligne n° 1 avec celle n° 2.

Désignons par D la distance entre les charges extrêmes. L'abscisse x_1 du point d'intersection aura pour valeur

$$(34) \quad x_1 = l - D_{n'}.$$

La valeur de l'effort tranchant en ce point s'obtient en substituant la valeur de x_1 dans l'équation (31). On trouvera ainsi

$$A_{x_1} = \left(\Pi - \frac{\sum_1^{n'} P d'}{l} + \frac{p l}{2} \right) - \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2} \right) (l - D_{n'})$$

Soit après la réduction

$$(35) \quad A_{x_1} = - \frac{\sum_1^{n'} P d'}{l} + \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2} \right) D_{n'}.$$

Nous rappelons que n' désigne le nombre des charges qui se trouvent sur la poutre dans la position initiale du convoi.

Par le même procédé, on trouve au point d'intersection de deux lignes suivantes n° 2 et n° 3 ayant pour l'abscisse

$$x_2 = l - D_{n' - 1},$$

$$(36) \quad A_{x_2} = - \frac{\sum_1^{n' - 1} P d'}{l} + \left(\frac{\Pi - P_{n'}}{l} + \frac{p}{2} \right) D_{n' - 1}.$$

On obtient ainsi de proche en proche les efforts tranchants aux points d'intersection des éléments successifs de la ligne-enveloppe jusqu'au milieu de la portée, où l'effort tranchant est connu par la formule (33).

Nous terminons ici le développement des équations générales. Nous allons les appliquer dans les deux chapitres qui

suivent aux charges indiquées par la nouvelle circulaire ministérielle, en commençant par les poutres des viaducs supportant les voies ferrées.

I. — RÉSISTANCE DES POUTRES SUPPORTANT
LES VOIES FERRÉES

DÉFINITION DES CHARGES

Charge du train-type. — Les poutres des viaducs supportant les voies ferrées doivent résister dans de bonnes conditions à l'action des surcharges mobiles du train-type.

Ce train se compose de deux machines à quatre essieux suivies de leurs tenders à deux essieux, et d'un certain nombre de wagons.

Les espacements et les charges de ces divers essieux sont indiqués par les articles 4 et 13 de la circulaire ministérielle.

Pour que les formules développées plus loin puissent s'appliquer à ces trains, ou à tout autre train de même composition, nous exprimons d'une manière générale par :

P_1 P_2 et P_3 les charges des machines, des tenders et des wagons (fig. 3).

α_1 α_2 α_3 les espacements des essieux d'une même catégorie.

β_1 la distance entre les essieux de la machine et du tender.

β_2 la distance entre le dernier essieu du tender et le premier essieu du wagon.

En conséquence pour une file de roues du train-type on a :

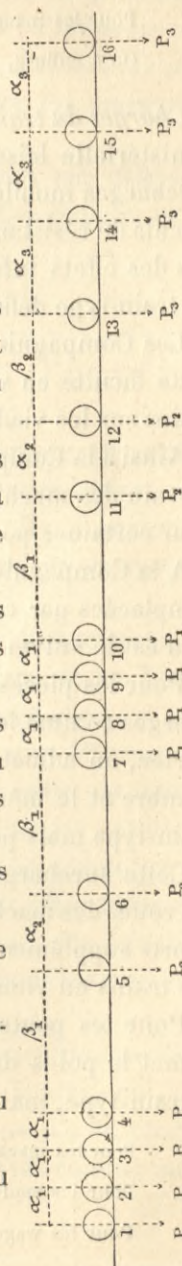


Fig. 3.

Pour les roues des machines.....	$P_1 = 7 \text{ t.}$
» » des tenders.....	$\alpha_1 = 1,20 \text{ m.}$
	$P_2 = 6 \text{ t.}$
	$\alpha_2 = 2,50 \text{ m.}$
Pour les roues des wagons.....	$P_3 = 4 \text{ t.}$
	$\alpha_3 = 3 \text{ m.}$

On a enfin $\beta_1 = 4,60$ et $\beta_2 = 3,50$.

Charges du train théorique. — Le règlement de la circulaire ministérielle laisse une certaine latitude pour l'adoption des surcharges mobiles qui doivent servir du point de départ aux calculs de résistance, pourvu que ces surcharges ne produisent pas des effets inférieurs à ceux qui résulteraient du passage du train-type défini plus haut.

Les Compagnies des chemins de fer ont cru utile d'user de cette faculté en vue d'assurer la sécurité de la circulation des trains sur les viaducs métalliques.

Ainsi à la Compagnie du chemin de fer de Lyon on substitue le train des machines les plus lourdes du réseau au train-type pour certaines portées.

A la Compagnie de l'Ouest les charges du train-type sont remplacées par celles d'un *train théorique*, dont la composition est la suivante :

Pour les pièces de faible masse supportant directement les charges comme longerons, entretoises et les poutres de petite portée, on admet la machine théorique présentant le même nombre et le même espacement d'essieux que la machine du train-type mais pesant 9 t par roue.

Cette surcharge correspond au poids de 7,5 t qu'atteignent les roues des machines majoré de 20 0/0 pour tenir compte des efforts supplémentaires considérables qui résultent du passage des trains en vitesse.

Pour les poutres principales au delà de quatre charges on admet le poids du train théorique de même composition que le train-type, mais dont le poids par roue est

Pour les machines.....	$P_1 = 7,5 \text{ t.}$
Pour les tenders $\frac{7,5}{7} \times 6 = 6 \text{ t. 43, soit ...}$	$P_2 = 6,5 \text{ t.}$
Pour les wagons.....	$P_3 = 4,0 \text{ t.}$

Le dernier poids du reste est celui du train-type qu'on a conservé.

La machine théorique de ce train est celle du cas précédent, déduction faite de la majoration de 20 0/0 ; l'influence des charges en mouvement se faisant sentir avec une bien moindre intensité sur les poutres principales que sur les entretoises et les longerons.

Nous terminons l'énumération des charges par celles du train-type à voie étroite à 4 m de largeur. Les charges et les espacements de ce train sont

Pour les machines	$P_1 = 5 t.$
	$\alpha_1 = 1,20 m.$
Pour les tendus et les wagons	$P_2 = P_3 = 4 t.$
	$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = 3 m.$
	$\beta_1 = 4,10.$

Nous allons établir les coefficients numériques des efforts maxima correspondant à ces trois catégories des trains.

La marche des opérations est la suivante. Nous admettons comme point de départ le nombre des charges qui se trouvent sur la poutre.

Pour ce nombre de charges nous calculons l'abscisse x' qui correspond au moment fléchissant maximum, et les limites des portées qui s'appliquent à ce système des charges ; et enfin l'expression du moment fléchissant maximum M' pour une portée intermédiaire quelconque l comprise entre ces limites.

La partie suivante de ce chapitre complète les calculs ci-dessus en donnant les équations de la courbe enveloppe des moments fléchissants pour le train-type et le train théorique.

Enfin la dernière partie de ce chapitre donne les équations de la ligne enveloppe des efforts tranchants pour les trois catégories des trains.

Toutes ces équations sont établies en partant du cas d'une machine, c'est-à-dire de 4 charges sur la poutre, qui s'applique à une portée minimum de 4,20 m jusqu'à 36 charges correspondant à une portée de 100 m adoptée comme maximum.

MOMENTS FLÉCHISSANTS MAXIMA

Formules fondamentales. — Ces formules sont au nombre de deux : la formule (6) donnant l'abscisse x' de l'essieu n° k , d'un système de n charges dont le poids total est Π .

$$x' = \frac{l}{2} + \frac{\sum_k^1 Pd - \sum_k^n Pd^n}{2 \Pi + pl}$$

Et la formule (7) donnant le moment fléchissant maximum M' correspondant.

$$M' = -\sum_k^1 Pd + \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2.$$

Commençons par calculer les termes qui entrent dans ces deux formules.

Calcul des termes $\sum_k^1 Pd$. — Ces termes représentent la somme des moments des charges qui précèdent l'essieu n° k pris par rapport à cet essieu.

Les résultats des calculs sont réunis dans le tableau I qui renferme les expressions de ces moments pour le nombre k variant de 2 à 11 ce qui correspond aux portées admises de 4,20 m à 100 m.

Les moments Pd sont exprimés en tonnes-mètres. Il sera facile dans les applications de les transformer en kilogrammètres en les multipliant par 1 000.

Calcul des abscisses x' . — Le numérateur du dernier terme de la formule (6) est le plus long à calculer par la méthode ordinaire à cause des nombreuses valeurs des termes $\sum P d'$ à calculer, après lesquels il faudrait déterminer pour chaque cas les différences $\sum P d - \sum P d'$ d'après le tableau I.

En suivant la marche indiquée ci-après, on pourra déterminer la valeur de cette différence directement.

En effet, le numérateur cherché représente la somme algébrique des moments de toutes les n charges pris par rapport à la charge n° k .

Cette somme des moments des charges composantes peut

donc être remplacée par le moment de leur résultante II pris par rapport à la même charge.

Tableau I. — Moments des charges pris par rapport à l'essieu n° k placées à sa gauche.

VALEURS DU NOMBRE k	DÉSIGNATION DES CHARGES QUI PRÉCÈDENT L'ESSIEU N° k	DISTANCE ENTRE CET ESSIEU ET L'ESSIEU EXTRÊME d_1	TERMES $\sum_k^1 Pd$			
			EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES POUR LE		
				train-type	train théo- rique	train à voie étroite
2	P_1	1,20	$P_1 \alpha_1 = 1,2 P_1$	tm 8,4	tm 10,8	tm 6,0
3	$2 P_1$	2,40	$3 \alpha_1 P_1 = 3,6 P_1$	25,2	27,0	18,0
8	$P_2 + P_1$	5,80	$\alpha_1 P_1 + (\alpha_1 + \beta_1) P_2$ $= 1,2 P_1 + 5,8 P_2$	43,2	46,7	27,2
8	$2 P_2 + P_1$	8,30	$\alpha_1 P_1 + (2 \alpha_1 + 2 \beta_1)$ $+ \alpha_2) P_2$ $= 1,2 P_1 + 14,1 P_2$	93,0	100,65	60,4
8	$\bar{P}_1 + 2 P_2 + P_1$	12,90	$(2 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) (P_1$ $+ P_2)$ $= 14,1 (P_1 + P_2)$	183,3	197,40	122,4
8	$2 P_1 + 2 P_2 + P_1$	14,10	$(2 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) (2 P_1$ $+ P_2)$ $= 14,1 (2 P_1 + P_2)$	282,0	303,15	199,4
7	$4 P_1 + 2 P_2$	15,30	$(6 \alpha_1 + 8 \beta_1 + 4 \alpha_2) P_1$ $+ (2 \beta_1 + \alpha_2) P_2$ $= 54 P_1 + 11,7 P_2$	448,2	481,05	304,8
8	$5 P_1 + 2 P_2$	16,50	$(11 \alpha_1 + 8 \beta_1$ $+ 4 \alpha_2) P_1 + (2 \alpha_1$ $+ 2 \beta_1 + \alpha_2) P_2$ $= 60,0 P_1 + 14,1 P_2$	504,6	541,65	314,4
9	$6 P_1 + 2 P_2$	17,70	$(17 \alpha_1 + 8 \beta_1 +$ $4 \alpha_2) P_1 + (4 \alpha_1 + 2 \beta_1$ $+ \alpha_2) P_2$ $= 67,2 P_1 + 16,5 P_2$	569,4	611,25	390,0
10	$7 P_1 + 2 P_2$	18,90	$(6 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) (4 P_1$ $+ P_2)$ $= 18,9 (4 P_1 + P_2)$	642,6	689,85	
11	$8 P_1 + 2 P_2$	23,50	$(6 \alpha_1 + 4 \beta_1 + \alpha_2) (4 P_1$ $+ P_2)$ $= 28,1 (4 P_1 + P_2)$	955,4	1025,65	

Si l'on désigne en conséquence par g , la distance du centre de gravité du système comptée de l'essieu n° 1, et par d_1 la

distance entre les essieux n° 1 et n° k , on a l'expression générale suivante.

$$(37) \quad \Sigma_k^1 Pd - \Sigma_k^n Pd' = \Pi (d_k - g)$$

Laquelle montre que le numérateur cherché est égal au produit du poids total du système Π qui est connu par la distance de son centre de gravité de l'essieu considéré.

Or les produits Πg se trouvent tout calculés dans la colonne 5 des tableaux VII, VIII et IX. Il suffit donc d'en retrancher le produit Πd_k facile à calculer pour obtenir la valeur de l'expression (37) ci-dessus.

Cette expression sert non seulement pour le calcul du moment fléchissant maximum, mais encore ce qui est important à former les divers coefficients des équations de la courbe enveloppe.

Les termes de la formule (7) donnant le moment fléchissant maximum étant ainsi déterminés, nous avons calculé dans le tableau II et III ci-après, les expressions générales en grandeur et en position de ces moments pour le nombre des charges variant de 4 à 28. Ces tableaux se rapportent au train-type et au train-théorique.

Enfin le tableau IV renferme les mêmes expressions pour les charges du train-type à voie étroite, dont le nombre varie de 4 à 20, et s'applique aux portées de 4,20 m à 65,00 m .

Les dernières colonnes de ces tableaux renferment les portées applicables à chaque système de charges, dont les limites sont calculées en ne tenant compte que de la surcharge seule d'après les formules (8), (9), (10) et (11).

Il faut donc dans les applications modifier légèrement ces limites en tenant compte de la valeur totale de l'abscisse x' , et les réduire ensuite conformément aux indications des formules (13) ou (14).

On s'assurera de cette manière que la portée donnée s'applique bien au système des charges désigné par les tableaux et l'on pourra continuer les calculs.

La colonne n° 4 des tableaux cités II, III et IV indique le numéro de l'essieu au droit du quel se produit le moment fléchissant maximum, les essieux étant numérotés de gauche à droite en partant du 1^{er} essieu de la première machine du train (fig. 3.)

Les valeurs doubles de l'essieu n° k de cette colonne indiquent que le moment fléchissant maximum se produit au droit de l'essieu portant le 1^{er} numéro, soit ici n° 8, mais de ce nombre il faut retrancher les essieux indiqués par le 2^o numéro, ces derniers se trouvant en dehors de la portée de la poutre.

Tableau II. — Abscisses x' et moments fléchissants

SYSTÈMES DES CHARGES			VALEURS DU N° k	LONGUEUR DU TRAIN D
NOMBRE n	COMPOSITION	POIDS TOTAL II tonnes		
4	4 P_1	28	2	3,60
5	4 $P_1 + P_2$	34	3	8,20
6	$P_2 + 4 P_1 + P_3$	40	8 - 5	12,80
7	2 $P_2 + 4 P_1 + P_3$	46	8 - 4	15,30
8	2 $P_2 + 4 P_1 + 2 P_3$	52	8 - 4	17,80
9	5 $P_1 + 4 P_2$	59	8 - 3	22,40
10	6 $P_1 + 4 P_2$	66	8 - 2	23,60
12	8 $P_1 + 4 P_2$	80	7	26,00
13	8 $P_1 + 4 P_2 + P_3$	84	7	29,50
14	8 $P_1 + 4 P_2 + 2 P_3$	88	7	32,50
15	8 $P_1 + 4 P_2 + 3 P_3$	92	8	35,50
16	» » + 4 P_3	96	8	38,50
17	» » + 5 P_3	100	8	41,50
18	» » + 6 P_3	104	8	44,50
19	» » + 7 P_3	108	8	47,50
20	8 $P_1 + 4 P_2 + 8 P_3$	112	8	50,50
21	» » + 9 P_3	116	9	53,50
22	» » + 10 P_3	120	9	56,50
23	» » + 11 P_3	124	9	59,50
24	» » + 12 P_3	128	10	62,50
25	8 $P_1 + 4 P_2 + 13 P_3$	132	10	65,50
26	» » + 14 P_3	136	10	68,50
28	» » + 16 P_3	144	11	74,50

maxima produits par le train type.

NOMBRE DE CHARGES n	EXPRESSIONS GÉNÉRALES		PORTÉES APPLICABLES l
	DE L'ABSCISSE $x' = \frac{l}{2} + \delta$	DU MOMENT FLÉCHISSANT MAXIMUM $M' = -\sum_k P_k d + \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{P}{2}\right) x'^2$	
4	$\frac{l}{2} - \frac{16,8}{56 + pl}$	$- 8,4 + \left(\frac{28}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	4,20 m à 12,20 m
5	$\frac{l}{2} - \frac{18}{68 + pl}$	$- 25,2 + \left(\frac{34}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	11,07 à 14,52
6	$\frac{l}{2} - \frac{24}{80 + pl}$	$- 43,2 + \left(\frac{40}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	13,40 à 17,20
7	$\frac{l}{2} + \frac{25,8}{92 + pl}$	$- 93,0 + \left(\frac{46}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	16,04 à 19,56
8	$\frac{l}{2} - \frac{31,2}{104 + pl}$	$- 93,0 + \left(\frac{52}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	18,40 à 26,40
9	$\frac{l}{2} + \frac{59,1}{118 + pl}$	$- 183,0 + \left(\frac{59}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	24,80 à 27,00
10	$\frac{l}{2} + \frac{157,8}{132 + pl}$	$- 282,0 + \left(\frac{66}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	25,80 à 28,20
12	$\frac{l}{2} + \frac{284,4}{160 + pl}$	$- 448,2 + \left(\frac{80}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	27,04 à 31,96
13	$\frac{l}{2} + \frac{227,6}{168 + pl}$	$- 448,2 + \left(\frac{84}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	31,10 à 37,10
14	$\frac{l}{2} + \frac{158,8}{176 + pl}$	$- 448,2 + \left(\frac{88}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	36,20 à 42,20
15	$\frac{l}{2} + \frac{188,4}{184 + pl}$	$- 504,6 + \left(\frac{92}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	40,04 à 46,04
16	$\frac{l}{2} + \frac{100,4}{192 + pl}$	$- 504,6 + \left(\frac{96}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	45,04 à 51,04
17	$\frac{l}{2} + \frac{0,4}{200 + pl}$	$- 504,6 + \left(\frac{100}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	50,00 à 56,00
18	$\frac{l}{2} - \frac{111,6}{208 + pl}$	$- 504,6 + \left(\frac{104}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	54,93 à 60,93
19	$\frac{l}{2} - \frac{235,6}{216 + pl}$	$- 504,6 + \left(\frac{108}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	59,82 à 65,82
20	$\frac{l}{2} - \frac{371,6}{224 + pl}$	$- 504,6 + \left(\frac{112}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	64,68 à 70,68
21	$\frac{l}{2} - \frac{380,4}{232 + pl}$	$- 569,4 + \left(\frac{116}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	68,32 à 74,32
22	$\frac{l}{2} - \frac{535,6}{240 + pl}$	$- 569,4 + \left(\frac{120}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	73,14 à 79,14
23	$\frac{l}{2} - \frac{773,6}{248 + pl}$	$- 569,4 + \left(\frac{124}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	77,94 à 83,94
24	$\frac{l}{2} - \frac{728,4}{256 + pl}$	$- 642,6 + \left(\frac{128}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	81,50 à 87,50
25	$\frac{l}{2} - \frac{914,8}{264 + pl}$	$- 642,6 + \left(\frac{132}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	86,28 à 92,28
26	$\frac{l}{2} - \frac{1113,2}{272 + pl}$	$- 642,6 + \left(\frac{136}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	91,02 à 97,02
28	$\frac{l}{2} - \frac{883,6}{288 + pl}$	$- 955,4 + \left(\frac{144}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	95,86 à 101,86

Tableau III. — Abscisses x' et moments fléchissants

SYSTÈMES DES CHARGES			VALEURS DU N° k	LONGUEUR DU TRAIN D
NOMBRE n	COMPOSITION	POIDS TOTAL II tonnes		
4	4 P ₁	36,0	2	3,60
5	4 P ₁ + P ₂	36,5	3	8,20
6	P ₂ + 4 P ₁ + P ₃	43,0	8 - 5	12,80
7	2 P ₂ + 4 P ₁ + P ₃	49,5	8 - 4	15,30
8	2 P ₂ + 4 P ₁ + 2 P ₃	56,0	8 - 4	17,80
9	5 P ₁ + 4 P ₂	63,5	8 - 3	22,40
10	6 P ₁ + 4 P ₂	71,0	8 - 2	23,60
12	8 P ₁ + 4 P ₂	86,0	7	26,00
13	8 P ₁ + 4 P ₂ + P ₃	90,0	7	29,50
14	" " + 2 P ₃	94,0	7	32,50
15	8 P ₁ + 4 P ₂ + 3 P ₃	98,0	8	35,50
16	" " + 4 P ₃	102,0	8	38,50
17	" " + 5 P ₃	106,0	8	41,50
18	" " + 6 P ₃	110,0	8	44,50
19	" " + 7 P ₃	114,0	8	47,50
20	8 P ₁ + 4 P ₂ + 8 P ₃	118,0	8	50,50
21	" " + 9 P ₃	122,0	9	53,50
22	" " + 10 P ₃	126,0	9	56,50
23	" " + 11 P ₃	130,0	9	59,50
24	" " + 12 P ₃	134,0	10	62,50
25	8 P ₁ + 4 P ₂ + 13 P ₃	138,0	10	65,50
26	" " + 14 P ₃	142,0	10	68,50
28	" " + 16 P ₃	150,0	11	74,50

maxima produits par le train théorique.

NOMBRE DE CHARGES n	EXPRESSIONS GÉNÉRALES		PORTÉES APPLICABLES l
	DE L'ABSCISSE $x' = \frac{l}{2} + \delta$	DU MOMENT FLÉCHISSANT MAXIMUM $M' = -\sum_k Pd + \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	
4	$\frac{l}{2} - \frac{21,6}{72+pl}$	$-10,8 + \left(\frac{36}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	4,20 m à 12,20 m
5	$\frac{l}{2} - \frac{19,7}{73+pl}$	$-27,0 + \left(\frac{36,5}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	11,07 à 14,53
6	$\frac{l}{2} - \frac{25,8}{86+pl}$	$-46,7 + \left(\frac{43}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	13,40 à 17,20
7	$\frac{l}{2} + \frac{28,15}{99+pl}$	$-100,65 + \left(\frac{49,5}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	16,04 à 19,56
8	$\frac{l}{2} - \frac{33,6}{112+pl}$	$-100,65 + \left(\frac{56}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	18,40 à 26,40
9	$\frac{l}{2} + \frac{63,15}{127+pl}$	$-197,40 + \left(\frac{63,5}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	24,80 à 27,20
10	$\frac{l}{2} + \frac{168,90}{142+pl}$	$-0,15 + \left(\frac{71}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	25,82 à 28,22
12	$\frac{l}{2} + \frac{304,20}{172+pl}$	$-481,05 + \left(\frac{86}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	27,06 à 31,94
13	$\frac{l}{2} + \frac{247,4}{180+pl}$	$-481,05 + \left(\frac{90}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	31,14 à 37,14
14	$\frac{l}{2} + \frac{178,6}{188+pl}$	$-481,05 + \left(\frac{94}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	36,30 à 42,30
15	$\frac{l}{2} + \frac{215,4}{196+pl}$	$-541,65 + \left(\frac{98}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	40,20 à 46,20
16	$\frac{l}{2} + \frac{127,4}{204+pl}$	$-541,65 + \left(\frac{102}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	45,24 à 51,24
17	$\frac{l}{2} + \frac{27,4}{212+pl}$	$-541,65 + \left(\frac{106}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	50,26 à 56,26
18	$\frac{l}{2} - \frac{84,6}{220+pl}$	$-541,65 + \left(\frac{110}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	55,26 à 61,26
19	$\frac{l}{2} - \frac{208,6}{228+pl}$	$-541,65 + \left(\frac{114}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	60,16 à 66,16
20	$\frac{l}{2} - \frac{344,6}{236+pl}$	$-541,65 + \left(\frac{118}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	65,08 à 71,08
21	$\frac{l}{2} - \frac{340,7}{244+pl}$	$-611,25 + \left(\frac{122}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	68,80 à 74,80
22	$\frac{l}{2} - \frac{494,9}{252+pl}$	$-611,25 + \left(\frac{126}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	73,68 à 79,68
23	$\frac{l}{2} - \frac{662,1}{260+pl}$	$-611,25 + \left(\frac{130}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	78,50 à 84,50
24	$\frac{l}{2} - \frac{687,0}{268+pl}$	$-689,85 + \left(\frac{134}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	82,08 à 88,08
25	$\frac{l}{2} - \frac{873,4}{276+pl}$	$-689,85 + \left(\frac{138}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	86,88 à 92,88
26	$\frac{l}{2} - \frac{1063,8}{284+pl}$	$-689,85 + \left(\frac{142}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	91,84 à 97,84
28	$\frac{l}{2} - \frac{914,6}{300+pl}$	$-1025,65 + \left(\frac{150}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	95,90 à 101,90

Tableau IV. — Abscisses x' et moments fléchissants maxima produits par le train-type à voie étroite de 1 m.

SYSTEMES DES CHARGES			VALEURS DU NO ^o k	LONGUEUR DU TRAIN D	EXPRESSIONS GÉNÉRALES		PORTÉES APPLICABLES
NOMBRE n	COMPOSITION	POIDS TOTAL II			DE L'ABSCISSE $x' = \frac{l}{2} + \delta$	DU MOMENT FLÉCHISSANT MAXIMUM $M' = -\sum_{i=1}^n P_i d + \left(\frac{II}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	
4	4 P ₁	20 tonnes	2	m	$\frac{l}{2} - \frac{12}{40 + pl}$	$- 6,0 + \left(\frac{20}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	4,20 m à 11,20 m
5	4 P ₁ + 4 P ₂	24	3	3,60	$\frac{l}{2} - \frac{9,2}{48 + pl}$	$- 18,0 + \left(\frac{24}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	10,22 à 13,60
6	P ₂ + 4 P ₁ + P ₂	28	8 - 5	7,70	$\frac{l}{2} + \frac{15,8}{56 + pl}$	$- 27,2 + \left(\frac{28}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	12,40 à 17,20
7	2 P ₂ + 4 P ₁ + P ₂	32	8 - 4	11,80	$\frac{l}{2} + \frac{16,4}{64 + pl}$	$- 60,4 + \left(\frac{32}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	16,28 à 19,00
8	2 P ₂ + 4 P ₁ + 2 P ₂	36	8 - 4	14,80	$\frac{l}{2} - \frac{21,6}{72 + pl}$	$- 60,4 + \left(\frac{36}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	18,40 à 25,40
9	5 P ₁ + 4 P ₂	41	8 - 3	17,80	$\frac{l}{2} + \frac{40,4}{82 + pl}$	$- 122,4 + \left(\frac{41}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	23,82 à 26,22
12	8 P ₁ + 4 P ₂	56	7	21,90	$\frac{l}{2} + \frac{19,2}{112 + pl}$	$- 304,8 + \left(\frac{56}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	26,12 à 30,88
13	8 P ₁ + 5 P ₂	60	7	25,50	$\frac{l}{2} + \frac{140,4}{120 + pl}$	$- 304,8 + \left(\frac{60}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	29,74 à 35,74
14	8 P ₁ + 6 P ₂	64	7	28,50	$\frac{l}{2} + \frac{73,6}{128 + pl}$	$- 304,8 + \left(\frac{64}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	32,24 à 38,24
15	8 P ₁ + 7 P ₂	68	8	31,50	$\frac{l}{2} + \frac{76,4}{136 + pl}$	$- 344,4 + \left(\frac{68}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	38,12 à 44,12
16	8 P ₁ + 8 P ₂	72	8	34,50	$\frac{l}{2} - \frac{9,6}{144 + pl}$	$- 344,4 + \left(\frac{72}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	42,86 à 48,86
17	8 P ₁ + 9 P ₂	76	8	37,50	$\frac{l}{2} - \frac{10,6}{152 + pl}$	$- 344,4 + \left(\frac{76}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	47,58 à 53,58
18	8 P ₁ + 10 P ₂	80	9	40,50	$\frac{l}{2} - \frac{131,6}{160 + pl}$	$- 390,0 + \left(\frac{80}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	51,08 à 57,08
19	8 P ₁ + 11 P ₂	84	9	43,50	$\frac{l}{2} - \frac{238,8}{158 + pl}$	$- 390,0 + \left(\frac{84}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	55,76 à 61,76
20	8 P ₁ + 12 P ₂	88	9	46,50	$\frac{l}{2} - \frac{308,0}{176 + pl}$	$- 390,0 + \left(\frac{88}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	60,42 à 66,42

Courbes-enveloppes des moments fléchissants.

Les équations des courbes-enveloppes sont calculées d'après la méthode générale indiquée dans le chapitre premier.

Les premiers éléments de cette courbe en partant de l'origine s'obtiennent en accumulant les plus fortes charges en ce point.

Pour les poutres supportant les voies ferrées ces charges se trouvent toutes indiquées ; ce sont celles de la machine amenée à une distance infiniment petite de l'appui de gauche qui produisent l'effet maximum dans la première partie de la travée.

Ainsi les premiers éléments de la courbe-enveloppe correspondent au déplacement des charges nos 1, 2, 3... lorsque toute la travée est chargée dans la position initiale.

Pour les portées comportant 4 et 12 charges et au-dessus, la courbe enveloppe comprend successivement les éléments nos 1, 2, 3... k correspondant au déplacement des essieux portant les mêmes numéros, ou bien les numéros 1, 2, 3... k , $k + 1$, $k + 2$... suivant que la quantité d est négative ou positive.

Pour les portées intermédiaires comprenant 5 à 11 charges les premiers éléments sont également formés des courbes successives nos 1, 2, 3 et 4, jusqu'à l'intersection avec les courbes nos... $k - 1$, k ou bien k , $k + 1$... occupant la partie centrale de la portée; dans cette dernière position, les premières charges se trouvant en dehors du pont.

Les longueurs des éléments sont limitées par les points d'intersection.

Lorsque cette longueur correspond aux mêmes charges, l'élément de la courbe-enveloppe présente une courbe unique.

Au contraire lorsque dans l'intervalle considéré la charge P_n atteint l'appui de droite, l'élément considéré est formé de deux courbes se raccordant tangentiellement au point correspondant à l'abscisse $x = l - d'_n$.

La formule établie ci-après permet d'obtenir sans difficulté

la valeur du moment fléchissant correspondant à ce dernier point dans tous les cas qui peuvent se présenter.

Pour cela, considérons un élément de la courbe-enveloppe. L'équation de cet élément d'après la relation (37) peut se mettre sous la forme suivante.

$$M = - \sum_k^l Pd + \frac{\Pi x}{l} (l + d_1 - g - x')$$

Cette équation devient pour $x = l - d_n'$

$$M = - \sum_k^l Pd + \frac{\Pi}{l} (l - d_n') (d_1 - g + d_n')$$

Après la transformation, en remarquant que la somme des distances $d_1 + d_n'$ est égale à la longueur totale D du train, on trouve l'expression suivante du moment fléchissant cherché.

$$(38) \quad M = - \sum_k^l Pd + \frac{l - d_n'}{l} (\Pi D - \Pi g)$$

Dans cette formule tous les termes sont connus excepté le terme ΠD dont la formation est très facile, la distance D étant égale à celle de d_n' des tableaux ci-après pour les cas de $d_1 = 0$.

Les équations des divers éléments de la courbe-enveloppe en fonction de la portée l sont réunies dans les tableaux V et VI. Les deux dernières colonnes renferment les expressions des abscisses et des moments fléchissants aux points d'intersection de deux courbes successives, calculés d'après les formules (25 et 29). Les colonnes 2 et 3 donnent en outre les distances d_1 et d_n' des charges extrêmes de l'essieu considéré.

Le tableau V est relatif au train-type, et le tableau VI au train théorique, la première ligne de ce dernier tableau est calculée pour la machine théorique pesant 18 t par essieu.

Ces tableaux renferment ainsi tous les éléments servant à déterminer les abscisses et les ordonnées de la courbe-enveloppe pour chaque système déterminé de charges isolées dont le nombre varie de 4 à 19 s'appliquant aux diverses portées allant jusqu'à celle de 50 m.

Au-delà de cette portée et même avant, la courbe-enveloppe polygonale tend à coïncider de plus en plus avec la courbe enveloppe approximation donnée plus loin au chapitre IV qui permet de déterminer la longueur des semelles additionnelles avec une approximative suffisante dans la pratique; en conséquence nous avons arrêté à cette dernière portée le calcul des courbes exactes.

Pour faciliter la lecture, et réduire la largeur des tableaux, les charges y sont exprimées en tonnes et les moments en tonnes-mètres.

Dans les applications, aux moments ainsi obtenus on ajoutera ceux produits par la charge permanente,

$$M = \frac{px}{z} (l - x).$$

exprimés également en tonnes-mètres. Le résultat final multiplié par mille donnera la valeur de ces moments en kilogrammètres.

Tableau V — Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le train type.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSIEUX EXTRÊMES DE L'ESSIEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE	VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT	
	d_1	d'_n		DE L'ABSCISSE $\frac{x}{l}$	
			4 Charges. II = 4 P₁ + 28 t.		
1	m	m	$(28,0 - \frac{50,4}{l})x - \frac{28}{l}x^2$	0,25	5,25 t — 12,6
2	1,20	3,40	$-8,4 + (28,0 - \frac{16,8}{l})x - \frac{28}{l}x^2$	0,50	7,00 t — 16,8
			5 Charges. II = 4 P₁ + P₂ + 34 t.		
1	0	8,20	$(34,0 - \frac{90,6}{l})x - \frac{34}{l}x^2$	0,2053	5,559 t — 20,5076
2	1,20	7,00	$-8,4 + (34,0 - \frac{58,8}{l})x - \frac{34}{l}x^2$	0,1118	8,236 t — 2,5
3	2,40	5,80	$-25,2 + (34,0 - \frac{18,0}{l})x - \frac{34}{l}x^2$	0,6177	8,030 t — 36,3186
			6 Charges. II = 4 P₁ + 2 P₂ + 40 t.		
1	0	10,70	$(40,0 - \frac{163,8}{l})x - \frac{40}{l}x^2$	0,175	5,775 t — 28,665
2	1,20	9,50	$-8,4 + (40,0 - \frac{115,8}{l})x - \frac{40}{l}x^2$	0,350	9,300 t — 48,030
3	2,40	8,30	$-25,2 + (40,0 - \frac{67,8}{l})x - \frac{40}{l}x^2$	0,525	9,975 t — 60,795

			6 Charges. II = P₂ + 4 P₁ + P₂ + 40 t.		
7	4,60	8,20	$-27,6 + (40,0 - \frac{72,0}{l})x - \frac{40}{l}x^2$	0,325	8,775 t — 51,0
8	5,80	7,00	$-43,2 + (40,0 - \frac{21,0}{l})x - \frac{40}{l}x^2$	0,500	10,000 t — 55,2
			7 Charges. II = 4 P₁ + 2 P₂ + P₂ + 47 t.		
1	0	15,30	$(47,0 - \frac{270,9}{l})x - \frac{47}{l}x^2$	0,1489	5,956 t — 40,3370
2	1,20	14,10	$-8,4 + (47,0 - \frac{214,5}{l})x - \frac{47}{l}x^2$	0,2979	9,831 t — 72,2996
3	2,40	12,90	$-25,2 + (47,0 - \frac{158,1}{l})x - \frac{47}{l}x^2$	0,4468	11,617 t — 95,8391
			7 Charges. II = 2 P₂ + 4 P₁ + P₂ + 46 t.		
7	7,10	8,20	$-70,2 + (46,0 - \frac{29,4}{l})x - \frac{46}{l}x^2$	0,4130	11,151 t — 82,3422
8	8,30	7,00	$-93,0 + (46,0 + \frac{25,8}{l})x - \frac{46}{l}x^2$	0,5532	11,064 t — 77,7274
			8 Charges. II = 4 P₁ + 2 P₂ + 2 P₂ + 54 t.		
1	0	16,50	$(54,0 - \frac{385,4}{l})x - \frac{54}{l}x^2$	0,1296	6,091 t — 50,0774
2	1,20	15,30	$-8,4 + (54,0 - \frac{321,6}{l})x - \frac{54}{l}x^2$	0,2593	10,372 t — 91,7999
3	2,40	14,10	$-25,2 + (54,0 - \frac{256,8}{l})x - \frac{54}{l}x^2$	0,3889	12,834 t — 125,0695
4	3,60	12,90	$-50,4 + (54,0 - \frac{192,0}{l})x - \frac{54}{l}x^2$	0,5185	13,481 t — 149,9520

Tableau V (suite). Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le train-type.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSEUX EXTRÊMES DE L'ESSEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE	VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION	
	d_4	d'_n		DE L'ABSCISSE $\frac{x}{l}$	DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT
			8 Charges. II = 2 P₂ + 4 P₁ + 2 P₃ = 52 t.		
7	7,10	10,70	$- 70,2 + \left(52,0 - \frac{93,6}{l}\right)x - \frac{52}{l}x^2$	0,3654	12,058 t — 104,4114
8	8,30	9,50	$- 93,0 + \left(52,0 - \frac{31,2}{l}\right)x - \frac{52}{l}x^2$	0,50	13,000 t — 108,60
			9 Charges. II = 4 P₁ + 2 P₂ + 3 P₃ = 61 t.		
1	0	17,70	$\left(61,0 - \frac{510,3}{l}\right)x - \frac{61}{l}x^2$	0,1148	6,109 t — 58,5480
2	1,20	16,50	$- 8,4 + \left(61,0 - \frac{437,1}{l}\right)x - \frac{61}{l}x^2$	0,205	10,786 t — 108,7145
3	2,40	15,30	$- 27,2 + \left(61,0 - \frac{362,9}{l}\right)x - \frac{61}{l}x^2$	0,3443	13,772 t — 150,1465
4	3,60	14,10	$- 50,4 + \left(61,0 - \frac{290,7}{l}\right)x - \frac{61}{l}x^2$	0,4590	15,147 t — 183,8313
			9 Charges. II = P₁ + 2 P₂ + 4 P₁ + 2 P₃ = 59 t.		
7	11,70	10,70	$- 152,1 + \left(59,0 - \frac{11,7}{l}\right)x - \frac{59}{l}x^2$	0,4407	14,543 t — 157,2562
8	12,90	9,50	$- 183,3 + \left(59,0 + \frac{59,1}{l}\right)x - \frac{59}{l}x^2$	0,5593	14,542 t — 150,2754

			10 Charges. II = 4 P₁ + 2 P₂ + 4 P₁ + 4 P₃ = 68 t.		
1	0	18,90	$\left(68,0 - \frac{642,6}{l}\right)x - \frac{68}{l}x^2$	0,1029	6,277 t — 66,1235
2	1,20	17,70	$- 8,4 + \left(68,0 - \frac{561,0}{l}\right)x - \frac{68}{l}x^2$	0,2059	11,119 t — 123,9099
3	2,40	16,50	$- 25,2 + \left(68,0 - \frac{479,4}{l}\right)x - \frac{68}{l}x^2$	0,3088	14,514 t — 173,2387
4	3,60	15,30	$- 50,4 + \left(68,0 - \frac{397,8}{l}\right)x - \frac{68}{l}x^2$	0,4118	16,472 t — 214,2140
			10 Charges. II = 2 P₁ + 2 P₂ + 4 P₁ + 2 P₃ = 66 t.		
7	12,90	10,70	$- 242,4 + \left(66,0 + \frac{78,6}{l}\right)x - \frac{66}{l}x^2$	0,50	16,500 t — 203,1000
8	14,10	9,50	$- 282,0 + \left(66,0 + \frac{157,8}{l}\right)x - \frac{66}{l}x^2$	0,6061	15,759 t — 186,3574
			11 Charges. II = 4 P₁ + 2 P₂ + 4 P₁ + P₃ = 74 t.		
1	0	23,50	$\left(74,0 - \frac{783,6}{l}\right)x - \frac{74}{l}x^2$	0,0946	5,338 t — 74,1286
2	1,20	22,30	$- 8,4 + \left(74,0 - \frac{604,8}{l}\right)x - \frac{74}{l}x^2$	0,1892	11,352 t — 139,8562
3	2,40	21,10	$- 25,2 + \left(74,0 - \frac{605,0}{l}\right)x - \frac{74}{l}x^2$	0,2838	15,041 t — 197,1828
4	3,60	19,90	$- 50,4 + \left(74,0 - \frac{517,2}{l}\right)x - \frac{74}{l}x^2$	0,3784	17,406 t — 246,1085
5	8,20	15,30	$- 179,2 + \left(74,0 - \frac{176,8}{l}\right)x - \frac{74}{l}x^2$	0,4595	18,470 t — 260,4396
6	10,70	12,80	$- 264,2 + \left(74,0 + \frac{8,2}{l}\right)x - \frac{74}{l}x^2$	0,5405	19,377 t — 259,7679
7	15,30	8,20	$- 448,2 + \left(74,0 + \frac{348,6}{l}\right)x - \frac{74}{l}x^2$	0,6351	17,148 t — 2208,041

Tableau V (suite). Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le train-type.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSIEUX EXTRÊMES DE L'ESSIEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE		VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION DE L'ABSCISSE		DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT
	d_1	d_2			$\frac{x}{l}$		
12 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ = 80 t.							
1	0	26,00	$(80,0 - \frac{939,6}{l})x - \frac{80}{l}x^2$		0,0875	6,187 t	82,2150
2	1,20	24,80	$(80,0 - \frac{843,6}{l})x - \frac{80}{l}x^2$		0,1750	11,550 t	156,0300
3	2,40	23,60	$(80,0 - \frac{747,6}{l})x - \frac{80}{l}x^2$		0,2625	15,487 t	221,4440
4	3,60	22,40	$(80,0 - \frac{651,6}{l})x - \frac{80}{l}x^2$		0,350	18,200 t	278,4500
5	4,80	17,80	$(80,0 - \frac{283,6}{l})x - \frac{80}{l}x^2$		0,425	19,550 t	299,7300
6	10,70	15,30	$(80,0 - \frac{83,6}{l})x - \frac{80}{l}x^2$		0,500	20,000 t	306,0000
7	15,30	10,70	$(80,0 + \frac{284,4}{l})x - \frac{80}{l}x^2$		0,5875	19,387 t	281,1150
13 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + P₃ = 84 t.							
1	0	29,50	$(84,0 - \frac{1037,6}{l})x - \frac{84}{l}x^2$		0,0833	6,414 t	88,0981
2	1,20	28,30	$(84,0 - \frac{936,8}{l})x - \frac{84}{l}x^2$		0,1667	11,669 t	167,8986

3	2,40	27,10	$(84,0 - \frac{856,0}{l})x - \frac{84}{l}x^2$		0,2500	15,750 t	239,2000
4	3,60	25,90	$(84,0 - \frac{755,2}{l})x - \frac{84}{l}x^2$		0,3333	18,665 t	302,0415
5	4,80	21,30	$(84,0 - \frac{368,8}{l})x - \frac{84}{l}x^2$		0,4048	20,240 t	328,4902
6	10,70	18,80	$(84,0 - \frac{158,8}{l})x - \frac{84}{l}x^2$		0,4762	20,953 t	339,8206
7	15,30	14,20	$(84,0 + \frac{227,6}{l})x - \frac{84}{l}x^2$		0,5595	20,702 t	320,8578
14 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 2 P₃ = 88 t.							
1	0	32,50	$(88,0 - \frac{1187,6}{l})x - \frac{88}{l}x^2$		0,0795	6,440 t	94,4142
2	1,20	31,30	$(88,0 - \frac{1082,0}{l})x - \frac{88}{l}x^2$		0,1591	11,773 t	180,5362
3	2,40	30,10	$(88,0 - \frac{976,4}{l})x - \frac{88}{l}x^2$		0,2386	15,986 t	258,1690
4	3,60	28,90	$(88,0 - \frac{870,8}{l})x - \frac{88}{l}x^2$		0,3182	19,092 t	327,4886
5	4,80	24,30	$(88,0 - \frac{466,0}{l})x - \frac{88}{l}x^2$		0,3864	20,866 t	359,2624
6	10,70	21,80	$(88,0 - \frac{246,0}{l})x - \frac{88}{l}x^2$		0,4545	21,816 t	376,0070
7	15,30	17,20	$(88,0 + \frac{158,8}{l})x - \frac{88}{l}x^2$		0,5341	21,898 t	363,3849

Tableau V (suite) — Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le train-type.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSIEUX EXTRÊMES DE L'ESSIEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE		VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION DE L'ABSCISSE $\frac{x}{l}$		DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT
	d_1	d'_n					
15 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 3 P₃ = 92 t.							
1	0	35,50	$(92,0 - \frac{1320,6}{l})x - \frac{92}{l}x^2$	$x - \frac{92}{l}x^2$	0,0761	6,469 t	101,1826
2	1,20	34,30	$- 8,4 + (92,0 - \frac{1219,2}{l})x - \frac{92}{l}x^2$	$x - \frac{92}{l}x^2$	0,1522	11,872 t	193,9622
3	2,40	33,10	$- 25,2 + (92,0 - \frac{1108,8}{l})x - \frac{92}{l}x^2$	$x - \frac{92}{l}x^2$	0,2283	16,209 t	278,3390
4	3,60	31,90	$- 50,4 + (92,0 - \frac{998,4}{l})x - \frac{92}{l}x^2$	$x - \frac{92}{l}x^2$	0,3043	19,475 t	354,2131
5	8,20	27,30	$- 179,2 + (92,0 - \frac{575,2}{l})x - \frac{92}{l}x^2$	$x - \frac{92}{l}x^2$	0,3696	20,437 t	391,7939
6	10,70	24,80	$- 264,2 + (92,0 - \frac{315,2}{l})x - \frac{92}{l}x^2$	$x - \frac{92}{l}x^2$	0,4348	22,610 t	414,2930
7	15,30	20,20	$- 448,2 + (92,0 - \frac{78,0}{l})x - \frac{92}{l}x^2$	$x - \frac{92}{l}x^2$	0,5109	22,991 t	408,3498
8	16,50	19,00	$- 504,6 + (92,0 - \frac{188,4}{l})x - \frac{92}{l}x^2$	$x - \frac{92}{l}x^2$	0,5870	22,306 t	394,0092

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSIEUX EXTRÊMES DE L'ESSIEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE		VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION DE L'ABSCISSE $\frac{x}{l}$		DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT
	d_1	d'_n					
16 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ = 96 t.							
1	0	38,50	$(96,0 - \frac{1483,6}{l})x - \frac{96}{l}x^2$	$x - \frac{96}{l}x^2$	0,0729	6,488 t	108,1544
2	1,20	37,30	$- 8,4 + (96,0 - \frac{1368,4}{l})x - \frac{96}{l}x^2$	$x - \frac{96}{l}x^2$	0,1458	11,956 t	207,9127
3	2,40	36,10	$- 25,2 + (96,0 - \frac{1253,2}{l})x - \frac{96}{l}x^2$	$x - \frac{96}{l}x^2$	0,2188	16,410 t	308,2002
4	3,60	34,90	$- 50,4 + (96,0 - \frac{1138,0}{l})x - \frac{96}{l}x^2$	$x - \frac{96}{l}x^2$	0,2917	19,836 t	382,2546
5	8,20	30,30	$- 179,2 + (96,0 - \frac{696,4}{l})x - \frac{96}{l}x^2$	$x - \frac{96}{l}x^2$	0,3542	21,960 t	425,8649
6	10,70	27,80	$- 264,2 + (96,0 - \frac{456,4}{l})x - \frac{96}{l}x^2$	$x - \frac{96}{l}x^2$	0,4167	23,335 t	454,3819
7	15,30	23,20	$- 448,2 + (96,0 - \frac{14,8}{l})x - \frac{96}{l}x^2$	$x - \frac{96}{l}x^2$	0,4896	23,990 t	455,4461
8	16,50	22,00	$- 504,6 + (96,0 - \frac{100,4}{l})x - \frac{96}{l}x^2$	$x - \frac{96}{l}x^2$	0,5625	23,625 t	448,1250
17 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 5 P₃ = 100 t.							
1	0	41,50	$(100,0 - \frac{1640,6}{l})x - \frac{100}{l}x^2$	$x - \frac{100}{l}x^2$	0,07	6,51 t	115,472
2	1,20	40,30	$- 8,4 + (100,0 - \frac{1529,6}{l})x - \frac{100}{l}x^2$	$x - \frac{100}{l}x^2$	0,14	12,04 t	222,544
3	2,40	39,10	$- 25,2 + (100,0 - \frac{1409,6}{l})x - \frac{100}{l}x^2$	$x - \frac{100}{l}x^2$	0,21	16,59 t	321,216
4	3,60	37,90	$- 50,4 + (100,0 - \frac{1289,6}{l})x - \frac{100}{l}x^2$	$x - \frac{100}{l}x^2$	0,28	20,16 t	411,488

Tableau V (suite). — Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le **train-type**.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSIEUX EXTRÊMES DE L'ESSEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE	VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT	
	d_1	d'_n		DE L'ARCSISSE $\frac{x}{l}$	
48 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 6 P₃ = 104 t.					
1	0	44,50	$\left(104,0 - \frac{1827,6}{l}\right) x - \frac{104}{l} x^2$	0,0673	6,528 t — 122,9975
2	1,20	43,30	$- 8,4 + \left(104,0 - \frac{1702,8}{l}\right) x - \frac{104}{l} x^2$	0,1346	12,114 t — 237,5969
3	2,40	42,10	$- 25,2 + \left(104,0 - \frac{1578,0}{l}\right) x - \frac{104}{l} x^2$	0,2019	16,758 t — 343,7982
49 Charges. II = 8 P₁ + 2 P₂ + 7 P₃ = 108 t.					
1	0	47,50	$\left(108,0 - \frac{2017,6}{l}\right) x - \frac{108}{l} x^2$	0,0648	6,545 t — 130,7205
2	1,20	46,30	$- 8,4 + \left(108,0 - \frac{1888,0}{l}\right) x - \frac{108}{l} x^2$	0,1296	12,182 t — 252,1885
3	2,40	45,10	$- 25,2 + \left(108,0 - \frac{1758,4}{l}\right) x - \frac{108}{l} x^2$	0,1949	16,913 t — 367,0330

Tableau VI. — Courbes-enveloppes des moments fléchisseurs produits par le train-théorique.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSIEUX EXTRÊMES DE L'ESSIEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE	VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT						
	d_1	d'_n		DE L'ABSCISSE $\frac{x}{l}$						
1	0	m 3,50	4 Charges. II = $4 P_1 + P_2 = 36 t$. ($P_1 = 9 t$) $\left(36,0 - \frac{61,8}{l}\right) x - \frac{36}{l} x^2$	0,25	6,75 l — 16,40					
						2	2,40	$- 10,8 + \left(36,0 + \frac{21,6}{l}\right) x - \frac{36}{l} x^2$	0,50	9,00 l — 21,60
1	0	8,20	5 Charges. II = $4 P_1 + P_2 = 36,5 t$ ($P_1 = 7,5 t$ et $P_2 = 6,5 t$) $\left(36,5 - \frac{107,3}{l}\right) x - \frac{36,5}{l} x^2$	0,2055	5,96 l — 26,8752					
						2	1,20	$- 9,0 + \left(36,5 - \frac{63,5}{l}\right) x - \frac{36,5}{l} x^2$	0,4110	8,836 l — 35,0985
						3	2,40	$- 27,0 + \left(36,5 - \frac{19,7}{l}\right) x - \frac{36,5}{l} x^2$	0,6164	8,630 l — 39,1331
1	0	10,70	6 Charges. II = $4 P_1 + 2 P_2 = 43 t$. $\left(43,0 - \frac{174,85}{l}\right) x - \frac{43}{l} x^2$	0,1744	6,191 l — 30,4938					
						2	1,20	$- 9,0 + \left(43,0 - \frac{143,25}{l}\right) x - \frac{43}{l} x^2$	0,3188	9,766 l — 58,9656
						3	2,40	$- 27,0 + \left(43,0 - \frac{111,65}{l}\right) x - \frac{43}{l} x^2$	0,5233	10,728 l — 85,4254

Tableau VI (suite). — Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le train-théorique.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSEUX EXTRÊMES DE L'ESSIEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE	VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION	
	d_4	d'_n		DE L'ABSCISSE $\frac{x}{l}$	DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT
			6 Charges. $\Pi = P_2 + 4 P_1 + P_2 = 43 l.$		
7	4,60	8,20	$- 29,9 + \left(43,0 - \frac{77,4}{l}\right) x - \frac{43}{l} x^2$	0,3556	9,442 l — 55,1014
8	5,80	7,00	$- 46,7 + \left(43,0 - \frac{25,8}{l}\right) x - \frac{43}{l} x^2$	0,500	10,750 l — 59,60
			7 Charges. $\Pi = 4 P_1 + 2 P_2 + P_1 = 50,5 l.$		
1	0	15,30	$\left(50,5 - \frac{287,6}{l}\right) x - \frac{50,5}{l} x^2$	0,1485	6,356 l — 42,6686
2	1,20	14,10	$- 9,0 + \left(50,5 + \frac{227,0}{l}\right) x - \frac{50,5}{l} x^2$	0,2970	10,544 l — 76,4190
3	2,40	12,90	$- 27,0 + \left(50,5 + \frac{166,4}{l}\right) x - \frac{50,5}{l} x^2$	0,4455	12,474 l — 101,1339
			7 Charges. $\Pi = 2 P_2 + 4 P_1 + P_2 = 49,5 l.$		
7	7,10	8,20	$- 76,05 + \left(49,5 - \frac{31,25}{l}\right) x - \frac{49,5}{l} x^2$	0,4180	12,122 l — 89,1125
8	8,30	7,00	$- 100,65 + \left(49,5 + \frac{28,15}{l}\right) x - \frac{49,5}{l} x^2$	0,5657	12,163 l — 84,7255

			8 Charges. $\Pi = 4 P_1 + 2 P_2 + 2 P_1 + P_1 = 58 l.$		
1	0	16,50	$\left(58,0 - \frac{415,35}{l}\right) x - \frac{58}{l} x^2$	0,1293	6,530 l — 53,7048
2	1,20	15,30	$- 9,0 + \left(58,0 - \frac{345,75}{l}\right) x - \frac{58}{l} x^2$	0,2586	11,120 l — 98,4110
3	2,40	14,10	$- 27,0 + \left(58,0 - \frac{276,55}{l}\right) x - \frac{58}{l} x^2$	0,3879	13,760 l — 134,1186
4	3,60	12,90	$- 54,0 + \left(58,0 - \frac{206,55}{l}\right) x - \frac{58}{l} x^2$	0,5172	14,482 l — 160,8277
			8 Charges. $\Pi = 2 P_2 + 4 P_1 + 2 P_2 = 56 l.$		
7	7,10	10,70	$- 76,05 + \left(56,0 - \frac{100,8}{l}\right) x - \frac{56}{l} x^2$	0,3651	12,997 l — 112,9529
8	8,30	9,50	$- 100,65 + \left(56,0 - \frac{33,6}{l}\right) x - \frac{56}{l} x^2$	0,50	14,000 l — 117,4500
			9 Charges. $\Pi = 4 P_1 + 2 P_2 + 3 P_1 = 65,5 l.$		
1	0	10,70	$\left(65,5 - \frac{548,1}{l}\right) x - \frac{65,5}{l} x^2$	0,1115	6,641 l — 62,7575
2	1,20	16,50	$- 9,0 + \left(65,5 - \frac{469,5}{l}\right) x - \frac{65,5}{l} x^2$	0,2230	11,565 l — 116,5155
3	2,40	15,30	$- 27,0 + \left(65,5 - \frac{390,9}{l}\right) x - \frac{65,5}{l} x^2$	0,3435	14,771 l — 161,2742
4	3,60	14,10	$- 54,0 + \left(65,5 - \frac{312,8}{l}\right) x - \frac{65,5}{l} x^2$	0,4680	16,259 l — 197,2624

Tableau VI (suite). — Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le train-théorique.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSEUX EXTRÊMES DE L'ESSEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE	VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION DE L'ABSCISSE $\frac{x}{l}$		DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT
	d_1	d'_n				
			9 Charges. II = $4 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 + 2 P_4 + 2 P_5 = 63,5 t.$			
7	11,70	10,70	$-163,7 + \left(63,5 - \frac{13,15}{l}\right) x - \frac{63,5}{l} x^2$	0,4410	15,656 t — 169,4992	
8	12,90	9,50	$-197,4 + \left(63,5 + \frac{63,15}{l}\right) x - \frac{63,5}{l} x^2$	0,5591	15,655 t — 161,8972	
			10 Charges. II = $4 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 + 4 P_4 = 73 t.$			
1	0	18,90	$\left(73,0 - \frac{689,85}{l}\right) x - \frac{73}{l} x^2$	0,1027	6,727 t — 70,8476	
2	1,20	17,70	$-9,0 + \left(73,0 - \frac{602,25}{l}\right) x - \frac{73}{l} x^2$	0,2055	11,919 t — 152,7624	
3	2,40	16,50	$-27,0 + \left(73,0 - \frac{514,65}{l}\right) x - \frac{73}{l} x^2$	0,3082	15,564 t — 185,6157	
4	3,50	15,30	$-54,0 + \left(73,0 - \frac{427,05}{l}\right) x - \frac{73}{l} x^2$	0,4110	17,573 t — 229,4676	
			10 Charges. II = $2 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 + P_4 + P_5 = 71 t.$			
7	12,90	10,70	$-260,55 + \left(71,0 - \frac{83,7}{l}\right) x - \frac{71}{l} x^2$	0,50	17,750 t — 218,7000	
8	14,10	9,50	$-303,15 + \left(71,0 + \frac{168,9}{l}\right) x - \frac{71}{l} x^2$	0,6056	16,957 t — 231,1442	

			11 Charges. II = $4 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 + 4 P_4 + P_5 = 79,5 t.$			
1	0	23,50	$\left(79,5 - \frac{842,6}{l}\right) x - \frac{79,5}{l} x^2$	0,0943	6,790 t — 79,4572	
2	1,20	22,30	$-9,0 + \left(79,5 - \frac{747,2}{l}\right) x - \frac{79,5}{l} x^2$	0,1887	12,171 t — 150,3666	
3	2,40	21,10	$-27,0 + \left(79,5 - \frac{651,8}{l}\right) x - \frac{79,5}{l} x^2$	0,2830	16,131 t — 211,4594	
4	3,50	19,90	$-54,0 + \left(79,5 - \frac{556,4}{l}\right) x - \frac{79,5}{l} x^2$	0,3774	18,681 t — 263,9854	
5	8,20	15,30	$-192,0 + \left(79,5 - \frac{190,7}{l}\right) x - \frac{79,5}{l} x^2$	0,4591	19,655 t — 279,1690	
6	10,70	12,80	$-283,25 + \left(79,5 + \frac{7,05}{l}\right) x - \frac{79,5}{l} x^2$	0,5409	19,743 t — 279,4367	
7	15,30	8,20	$-481,05 + \left(79,5 + \frac{373,75}{l}\right) x - \frac{79,5}{l} x^2$	0,6352	18,421 t — 243,6440	
			12 Charges. II = $8 P_1 + 4 P_2 = 86 t.$			
1	0	26,00	$\left(86,0 - \frac{1011,6}{l}\right) x - \frac{86}{l} x^2$	0,0872	6,845 t — 88,2115	
2	1,20	24,80	$-9,0 + \left(86,0 - \frac{908,4}{l}\right) x - \frac{86}{l} x^2$	0,1744	12,382 t — 167,4350	
3	2,40	23,60	$-27,0 + \left(86,0 - \frac{805,2}{l}\right) x - \frac{86}{l} x^2$	0,2613	16,593 t — 237,3988	
4	3,50	22,40	$-54,0 + \left(86,0 - \frac{702,0}{l}\right) x - \frac{86}{l} x^2$	0,3488	19,533 t — 298,8576	
5	8,20	17,80	$-192,0 + \left(86,0 - \frac{306,4}{l}\right) x - \frac{86}{l} x^2$	0,4242	20,998 t — 321,9749	
6	10,70	15,30	$-283,25 + \left(86,0 - \frac{91,4}{l}\right) x - \frac{86}{l} x^2$	0,510	21,500 t — 323,9500	
7	15,30	10,70	$-481,05 + \left(86,0 + \frac{304,2}{l}\right) x - \frac{86}{l} x^2$	0,5872	20,846 t — 302,4238	

Tableau VI (suite). — Courbes-enveloppes des moments fléchisseurs produits par le train-théorique.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSEUX EXTRÊMES DE L'ESSEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE	VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION	
	d_1	d'_n		DE L'ABSCISSE $\frac{x}{l}$	DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT
13 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + P₃ = 90 t.					
1	0	29,50	$(90,0 - \frac{1120,6}{l})x - \frac{90}{l}x^2$	0,0833	6,871 l — 93,8157
2	1,20	28,30	$- 9,0 + (90,0 - \frac{1021,6}{l})x - \frac{90}{l}x^2$	0,1607	12,503 l — 179,3007
3	2,40	27,10	$- 27,0 + (90,0 - \frac{913,6}{l})x - \frac{90}{l}x^2$	0,2500	16,875 l — 255,4000
4	3,60	25,90	$- 54,0 + (90,0 - \frac{805,6}{l})x - \frac{90}{l}x^2$	0,3333	20,000 l — 268,5333
5	8,20	21,30	$- 192,0 + (90,0 - \frac{391,6}{l})x - \frac{90}{l}x^2$	0,4056	21,700 l — 370,8330
6	10,70	18,80	$- 283,25 + (90,0 - \frac{366,6}{l})x - \frac{90}{l}x^2$	0,4778	22,457 l — 458,4115
7	15,30	14,20	$- 481,05 + (90,0 + \frac{247,4}{l})x - \frac{90}{l}x^2$	0,5611	22,163 l — 342,2339
14 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 2 P₃ = 94 t.					
1	0	32,50	$(94,0 - \frac{1259,6}{l})x - \frac{94}{l}x^2$	0,0798	6,903 l — 102,5161
2	1,20	31,30	$- 9,0 + (94,0 - \frac{1128,3}{l})x - \frac{94}{l}x^2$	0,1596	12,608 l — 189,0565

3	2,40	30,10	$- 27,0 + (94,0 - \frac{998,0}{l})x - \frac{94}{l}x^2$	0,2394	17,117 l — 253,9512
4	3,60	28,90	$- 54,0 + (94,0 - \frac{867,2}{l})x - \frac{94}{l}x^2$	0,3192	20,429 l — 330,8102
5	8,20	24,30	$- 192,0 + (94,0 - \frac{470,8}{l})x - \frac{94}{l}x^2$	0,3883	22,328 l — 374,8116
6	10,70	21,80	$- 283,25 + (94,0 - \frac{253,8}{l})x - \frac{94}{l}x^2$	0,4575	23,333 l — 399,3635
7	15,30	17,20	$- 481,05 + (94,0 + \frac{178,6}{l})x - \frac{94}{l}x^2$	0,5372	23,368 l — 385,1061
15 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 3 P₃ = 98 t.					
1	0	35,50	$(98,0 - \frac{1401,6}{l})x - \frac{98}{l}x^2$	0,0765	6,922 l — 107,2224
2	1,20	34,30	$- 9,0 + (98,0 - \frac{1284,0}{l})x - \frac{98}{l}x^2$	0,1531	12,707 l — 205,5804
3	2,40	33,10	$- 27,0 + (98,0 - \frac{1166,4}{l})x - \frac{98}{l}x^2$	0,2296	17,335 l — 294,8654
4	3,60	31,90	$- 54,0 + (98,0 - \frac{1048,8}{l})x - \frac{98}{l}x^2$	0,3061	20,815 l — 375,0377
5	8,20	27,30	$- 192,0 + (98,0 - \frac{598,0}{l})x - \frac{98}{l}x^2$	0,3724	22,903 l — 414,6952
6	10,70	24,80	$- 283,25 + (98,0 - \frac{353,0}{l})x - \frac{98}{l}x^2$	0,4388	24,134 l — 438,1464
7	15,30	20,20	$- 481,05 + (98,0 + \frac{97,8}{l})x - \frac{98}{l}x^2$	0,5153	24,477 l — 430,6537
8	15,50	13,00	$- 541,65 + (98,0 + \frac{215,4}{l})x - \frac{98}{l}x^2$	0,5918	23,672 l — 414,1763

Tableau VI (suite). Courbes-enveloppes des moments fléchissants produits par le train-théorique.

NUMÉROS DES COURBES	DISTANCES DES ESSEUX EXTRÊMES DE L'ESSEU CONSIDÉRÉ		ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE LA COURBE-ENVELOPPE	VALEURS AUX POINTS D'INTERSECTION	
	d_1	d'_n		DE L'ABSCISSE $\frac{x}{l}$	DU MOMENT FLÉCHISSANT CORRESPONDANT
16 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 4 = 102 t.					
1	0	33,50	$(102,0 - \frac{1555,6}{l})x - \frac{102}{l}x^2$	0,0735	6,046 t — 114,3366
2	1,20	37,30	$-9,0 + (102,0 - \frac{1433,2}{l})x - \frac{102}{l}x^2$	0,1471	12,798 t — 219,8237
3	2,40	36,10	$-27,0 + (102,0 - \frac{1310,8}{l})x - \frac{102}{l}x^2$	0,2206	17,538 t — 316,1625
4	3,60	34,90	$-54,0 + (102,0 - \frac{1188,4}{l})x - \frac{102}{l}x^2$	0,2941	21,975 t — 403,5084
5	8,20	30,30	$-192,0 + (102,0 - \frac{719,2}{l})x - \frac{102}{l}x^2$	0,3578	23,436 t — 449,3208
6	10,70	27,80	$-283,25 + (102,0 - \frac{464,2}{l})x - \frac{102}{l}x^2$	0,4216	24,874 t — 478,9567
7	15,30	23,20	$-481,05 + (102,0 + \frac{5,0}{l})x - \frac{102}{l}x^2$	0,4951	25,498 t — 478,5745
8	16,50	22,00	$-541,65 + (102,0 + \frac{127,4}{l})x - \frac{102}{l}x^2$	0,5686	25,918 t — 469,2104

17 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 5 P₃ = 106 t.					
1	0	41,50	$(106,0 - \frac{1721,6}{l})x - \frac{106}{l}x^2$	0,0708	6,974 t — 121,8893
2	1,20	40,30	$-9,0 + (106,0 - \frac{1594,4}{l})x - \frac{106}{l}x^2$	0,1415	12,887 t — 234,6076
3	2,40	39,10	$-27,0 + (106,0 - \frac{1467,2}{l})x - \frac{106}{l}x^2$	0,2123	17,727 t — 338,4866
4	3,60	37,90	$-54,0 + (106,0 - \frac{1340,0}{l})x - \frac{106}{l}x^2$	0,2830	21,508 t — 443,2200
18 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 6 P₃ = 110 t.					
1	0	44,50	$(110,0 - \frac{1899,6}{l})x - \frac{110}{l}x^2$	0,0682	6,991 t — 129,5517
2	1,20	43,30	$-9,0 + (110,0 - \frac{1767,6}{l})x - \frac{110}{l}x^2$	0,1364	12,958 t — 250,1006
3	2,40	42,10	$-27,0 + (110,0 - \frac{1635,6}{l})x - \frac{110}{l}x^2$	0,2045	17,894 t — 361,4802
19 Charges. II = 8 P₁ + 4 P₂ + 7 P₃ = 114 t.					
1	0	47,50	$(114,0 + \frac{2089,6}{l})x - \frac{114}{l}x^2$	0,0658	7,008 t — 127,4957
2	1,20	46,30	$-9,0 + (114,0 + \frac{1952,8}{l})x - \frac{114}{l}x^2$	0,1316	13,028 t — 265,9985
3	2,40	45,10	$-27,0 + (114,0 + \frac{1816,0}{l})x - \frac{114}{l}x^2$	0,1974	18,062 t — 385,4784

EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA

Formules générales. — A la fin du chapitre précédent on a vu, que la plus grande valeur de l'effort tranchant en un point quelconque de la première moitié de la portée s'obtient en distribuant la surcharge dans le tronçon compris entre ce point et l'appui de droite.

Ainsi pour un point dont l'abscisse est a , cette valeur a lieu lorsque la première charge du système se trouve amenée en ce point.

Pour déterminer le groupement des charges qui produisent l'effort tranchant maximum mettons son expression générale (30) sous la forme suivante :

$$A = \Pi \frac{l - a - g}{l}.$$

On constate alors que cette valeur de l'effort tranchant, pour une section a , correspond à la plus petite valeur de l'abscisse g ; ce qui a lieu lorsque les plus fortes charges se trouvent accumulées vers la section a .

Pour les trains-types cette condition se trouve remplie lorsqu'on place la première roue de la première machine au droit de la section considérée. La longueur du train étant suffisante pour couvrir tout le tronçon $l - a$, en laissant libre de toute surcharge le tronçon restant.

Dans cette position du train la valeur de l'effort tranchant se calcule sans difficulté, au point d'application de la charge n° 1 à l'abscisse a par la formule générale (30).

$$A = \Pi \frac{l - a}{l} - \frac{\sum_1^n Pd'}{l} + p \left(\frac{l}{2} - a \right)$$

Les résultats du calcul font partie des tableaux ci-après. Le tableau VII correspond au *train-type*. Le tableau VIII au *train-théorique*, et enfin le tableau IX au *train-type à voie étroite*.

Le tableau VII renferme la composition détaillée des

charges et des coefficients numériques des termes $\Sigma_1^n P d'$. La composition des trains étant la même, les tableaux VIII et IX ne contiennent que les coefficients numériques de ces termes.

L'avant-dernière colonne contient les expressions des efforts tranchants maxima pour $a = 0$ au droit de l'appui de gauche.

Ces expressions sont également celles des réactions maxima de cet appui.

De plus elles servent à déterminer l'effort tranchant en un point quelconque de la portée, ayant pour abscisse a .

Il suffit pour cela d'ajouter à l'expression correspondante de la colonne le terme $-\Pi \frac{a}{l}$ qui complète l'équation (30). Et comme les valeurs successives de l'effort tranchant ainsi obtenues forment leur ligne enveloppe, on pourra calculer et tracer cette dernière sans avoir recours aux tableaux spéciaux.

Les charges et les efforts tranchants sont exprimés en tonnes, et ne sont calculés que pour la surcharge mobile.

Dans les applications on ajoutera aux efforts tranchants ainsi déterminés ceux qui proviennent de la charge permanente.

Ces derniers représentés par le dernier terme de l'équation (30) ci-dessus, peuvent se calculer sans difficulté pour chaque section.

Enfin les tableaux sont terminés par la colonne donnant les portées applicables à chaque système de charges.

La première ligne du tableau VIII, relatif au train-théorique, comprend, comme dans les tableaux précédents, les charges $P_1 = 9 t$.

Les lignes suivantes de ce tableau sont calculées pour les charges $P_1 = 7,5 t$, $P_2 = 6,5 t$ et $P_3 = 4,0 t$, conformément aux définitions données au commencement de ce chapitre.

Ligne enveloppe des efforts tranchants. — Cette ligne peut

se construire sans difficulté à l'aide des tableaux qui précèdent.

Pour cela on établit les valeurs de l'effort tranchant aux points d'intersection des éléments successifs de cette ligne, et l'on joint par des lignes droites les sommets ainsi obtenus. Or ces sommets se calculent facilement par la formule générale 35 et 36.

$$A = \Pi \frac{D - \sum_1^n P d'}{l} + \frac{pD}{2}$$

Dans laquelle tous les éléments sont connus, car les quantités Π et $\sum_1^n P$ forment les colonnes 3 et 5 et la distance D est égale à la plus petite portée de la dernière colonne pour tous les systèmes de charge.

Nous terminons ici le deuxième chapitre, relatif aux poutres des viaducs métalliques, et nous allons aborder dans le chapitre suivant la détermination des efforts maxima des poutres supportant les voies de terre, c'est-à-dire les poutres des ponts-routes.

Tableau VII. — Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produits par le train-type.

NOMBRE DES CHARGES	CHARGE TOTALE II		TERMES $\Sigma P_d'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA POUR $a = 0$	PORTÉES APPLICABLES l
	COMPOSITION	VALEURS NUMÉRIQUES	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES		
2						
4	$4 P_1$	tonnes 28	$6 \alpha_1 P_1 = 7,2 P_1$	50,4	$28 - \frac{50,4}{l}$	3,60 m à 8,20 m
5	$4 P_1 + P_2$	34	$6 \alpha_1 P_1 + (3 \alpha_1 + \beta_1) P_2 = 7,2 P_1 + 8,2 P_2$	99,6	$34 - \frac{99,6}{l}$	8,20 à 10,70
6	$4 P_1 + 2 P_2$	40	$6 \alpha_1 P_1 + (6 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) P_2 = 7,2 P_1 + 18,9 P_2$	163,8	$40 - \frac{163,8}{l}$	10,70 à 15,30
7	$5 P_1 + 2 P_2$	47	$(9 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) P_1 + (6 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) P_2 = 22,5 P_1 + 18,9 P_2$	270,9	$47 - \frac{270,9}{l}$	15,30 à 16,50
8	$6 P_1 + 2 P_2$	54	$(13 \alpha_1 + 4 \beta_1 + 2 \alpha_2) P_1 + (6 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) P_2 = 39,0 P_1 + 18,9 P_2$	386,4	$54 - \frac{386,4}{l}$	16,50 à 17,70
9	$7 P_1 + 2 P_2$	61	$(18 \alpha_1 + 6 \beta_1 + 3 \alpha_2) P_1 + (6 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) P_2 = 56,7 P_1 + 18,9 P_2$	510,3	$61 - \frac{510,3}{l}$	17,70 à 18,90
10	$8 P_1 + 2 P_2$	68	$(24 \alpha_1 + 8 \beta_1 + 4 \alpha_2) P_1 + (6 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) P_2 = 75,6 P_1 + 18,9 P_2$	642,6	$68 - \frac{642,6}{l}$	18,90 à 23,50
11	$8 P_1 + 3 P_2$	74	$75,6 P_1 + (12 \alpha_1 + 5 \beta_1 + 2 \alpha_2) P_2 = 75,6 P_1 + 42,4 P_2$	783,6	$74 - \frac{783,6}{l}$	23,50 à 26,00
12	$8 P_1 + 4 P_2$	80	$75,6 P_1 + (18 \alpha_1 + 8 \beta_1 + 4 \alpha_2) P_2 = 75,6 P_1 + 68,4 P_2$	939,6	$80 - \frac{939,6}{l}$	26,00 à 29,50
13	tonnes $80 + P_2$	84	$939,6 + 29,5 P_2$	1057,6	$84 - \frac{1057,6}{l}$	29,50 à 32,50
14	$80 + 2 P_2$	88	$939,6 + 62,0 P_2$	1187,6	$88 - \frac{1187,6}{l}$	32,50 à 35,50

Tableau VII (suite). — Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produits par le train-type.

NOMBRE DES CHARGES	CHARGE TOTALE II		TERMES $\Sigma^4 Pd'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA POUR $a = 0$	PORTÉES APPLICABLES l
	COMPOSITION	VALEURS NUMÉ- RIQUES	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES		
15	tonnes 80 + 3 P ₃	92	939,6 + 97,5 P ₃	1329,6	$92 - \frac{1329,6}{l}$	35,50 m à 38,50 m
16	80 + 4 P ₃	96	939,6 + 136,0 P ₃	1483,6	$96 - \frac{1483,6}{l}$	38,50 à 41,50
17	80 + 5 P ₃	100	939,6 + 177,5 P ₃	1649,6	$100 - \frac{1649,6}{l}$	41,50 à 44,50
18	80 + 6 P ₃	104	939,6 + 222,0 P ₃	1827,6	$104 - \frac{1827,6}{l}$	44,50 à 47,50
19	80 + 7 P ₃	108	939,6 + 269,5 P ₃	2017,6	$108 - \frac{2017,6}{l}$	47,50 à 50,50
20	80 + 8 P ₃	112	939,6 + 320,0 P ₃	2219,6	$112 - \frac{2219,6}{l}$	50,50 à 53,50
21	80 + 9 P ₃	116	939,6 + 373,5 P ₃	2433,6	$116 - \frac{2433,6}{l}$	53,50 à 56,50
22	80 + 10 P ₃	120	939,6 + 430,0 P ₃	2659,6	$120 - \frac{2659,6}{l}$	56,50 à 59,50
23	80 + 11 P ₃	124	939,6 + 489,5 P ₃	2897,6	$124 - \frac{2897,6}{l}$	59,50 à 62,50
24	80 + 12 P ₃	128	939,6 + 552,0 P ₃	3147,6	$128 - \frac{3147,6}{l}$	62,50 à 65,50
25	80 + 13 P ₃	132	939,6 + 617,5 P ₃	3409,6	$132 - \frac{3409,6}{l}$	65,50 à 68,50

26	80 + 14 P ₃	136	939,6 + 686,0 P ₃	3683,6	$136 - \frac{3683,6}{l}$	68,50 à 71,50
27	80 + 15 P ₃	140	939,6 + 757,5 P ₃	3969,6	$140 - \frac{3969,6}{l}$	71,50 à 74,50
28	80 + 16 P ₃	144	939,6 + 832,0 P ₃	4267,6	$144 - \frac{4267,6}{l}$	74,50 à 77,50
29	80 + 17 P ₃	148	939,6 + 909,5 P ₃	4577,6	$148 - \frac{4577,6}{l}$	77,50 à 80,50
30	80 + 18 P ₃	152	939,6 + 990,0 P ₃	4899,6	$152 - \frac{4899,6}{l}$	80,50 à 83,50
31	80 + 19 P ₃	156	939,6 + 1073,5 P ₃	5233,6	$156 - \frac{5233,6}{l}$	83,50 à 86,50
32	80 + 20 P ₃	160	939,6 + 1160,0 P ₃	5579,6	$160 - \frac{5579,6}{l}$	86,50 à 89,50
33	80 + 21 P ₃	164	939,6 + 1249,5 P ₃	5937,6	$164 - \frac{5937,6}{l}$	89,50 à 92,50
34	80 + 22 P ₃	168	939,6 + 1342,0 P ₃	6307,6	$168 - \frac{6307,6}{l}$	92,50 à 95,50
35	80 + 23 P ₃	172	939,6 + 1437,5 P ₃	6689,6	$172 - \frac{6689,6}{l}$	95,50 à 98,50
36	80 + 24 P ₃	176	939,6 + 1536,0 P ₃	7083,6	$176 - \frac{7083,6}{l}$	98,50 à 101,50

Tableau VIII. — Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produits par le train-théorique.

NOMBRE DES CHARGES n	CHARGE TOTALE II		TERMES $\Sigma P_i d_i'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA POUR $a = 0$		PORTÉES APPLICABLES l
	COMPOSITION	VALEURS NUMÉ- RIQUES	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES			
4	4 P ₁	tonnes 36,0	7,2 P ₁	64,80	36 —	$\frac{64,8}{l}$	3,60 m à 8,20 m
5	4 P ₁ + P ₂	36,5	7,2 P ₁ + 8,2 P ₂	107,30	36,5 —	$\frac{107,3}{l}$	8,20 à 10,70
6	4 P ₁ + 2 P ₂	43,0	7,2 P ₁ + 18,9 P ₂	177,85	43,0 —	$\frac{174,85}{l}$	10,70 à 15,30
7	5 P ₁ + 2 P ₂	50,5	22,5 P ₁ + 18,9 P ₂	291,60	50,5 —	$\frac{287,60}{l}$	15,30 à 16,50
8	6 P ₁ + 2 P ₂	58,0	39,0 P ₁ + 18,9 P ₂	415,35	58,0 —	$\frac{415,35}{l}$	16,50 à 17,70
9	7 P ₁ + 2 P ₂	65,5	56,7 P ₁ + 18,9 P ₂	548,10	65,5 —	$\frac{518,10}{l}$	17,70 à 18,90
10	8 P ₁ + 2 P ₂	73,0	75,6 P ₁ + 18,9 P ₂	689,85	73,0 —	$\frac{689,85}{l}$	18,90 à 23,50
11	8 P ₁ + 3 P ₂	79,5	75,6 P ₁ + 42,4 P ₂	842,60	79,5 —	$\frac{842,60}{l}$	23,50 à 26,00
12	8 P ₁ + 4 P ₂	86,0	75,6 P ₁ + 68,4 P ₂	1011,6	86 —	$\frac{1011,6}{l}$	26,00 à 29,50
13	86 + P ₂	90,0	1011,6 + 29,5 P ₂	1129,6	90 —	$\frac{1129,6}{l}$	29,50 à 32,50
14	86 + 2 P ₂	94,0	1011,6 + 62,0 P ₂	1259,6	94 —	$\frac{1259,6}{l}$	32,50 à 35,50

15	86 + 3 P ₂	98,0	1011,6 + 97,5 P ₂	1401,6	98 —	$\frac{1401,6}{l}$	35,50 à 38,50
16	86 + 4 P ₂	102,0	1011,6 + 136,0 P ₂	1555,6	102 —	$\frac{1555,6}{l}$	38,50 à 41,50
17	86 + 5 P ₂	106,0	1011,6 + 177,5 P ₂	1721,6	106 —	$\frac{1721,6}{l}$	41,50 à 44,50
18	86 + 6 P ₂	110,0	1011,6 + 222,0 P ₂	1899,6	110 —	$\frac{1899,6}{l}$	44,50 à 47,50
19	86 + 7 P ₂	114,0	1011,6 + 269,5 P ₂	2089,6	114 —	$\frac{2089,6}{l}$	47,50 à 50,50
20	86 + 8 P ₂	118,0	1011,6 + 320,0 P ₂	2291,6	118 —	$\frac{2291,6}{l}$	50,50 à 53,50
21	86 + 9 P ₂	122,0	1011,6 + 373,5 P ₂	2505,6	122 —	$\frac{2505,6}{l}$	53,50 à 56,50
22	86 + 10 P ₂	126,0	1011,6 + 430,0 P ₂	2731,6	126 —	$\frac{2731,6}{l}$	56,50 à 59,50
23	86 + 11 P ₂	130,0	1011,6 + 489,5 P ₂	2969,6	130 —	$\frac{2969,6}{l}$	59,50 à 62,50
24	86 + 12 P ₂	134,0	1011,6 + 552,0 P ₂	3219,6	134 —	$\frac{3219,6}{l}$	62,50 à 65,50
25	86 + 13 P ₂	138,0	1011,6 + 617,5 P ₂	3481,6	138 —	$\frac{3481,6}{l}$	65,50 à 68,50
26	86 + 14 P ₂	142,0	1011,6 + 686,0 P ₂	3755,6	142 —	$\frac{3755,6}{l}$	68,50 à 71,50
27	86 + 15 P ₂	146,0	1011,6 + 757,5 P ₂	4041,6	146 —	$\frac{4041,6}{l}$	71,50 à 74,50
28	86 + 16 P ₂	150,0	1011,6 + 832,0 P ₂	4339,6	150 —	$\frac{4339,6}{l}$	74,50 à 77,50
29	86 + 17 P ₂	154,0	1011,6 + 909,5 P ₂	4649,6	154 —	$\frac{4649,6}{l}$	77,50 à 80,50

Tableau VIII (suite). — Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produits par le train-théorique.

NOMBRE DES CHARGES n	CHARGE TOTALE II		TERMES $\Sigma^n P_d'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA POUR $\alpha = 0$	PORTÉES APPLICABLES l
	COMPOSITION	VALEURS NUMÉRIQUES	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES		
30	86 + 18 P ₃	tonnes 158,0	1011,6 + 990,0 P ₃	4971,6	158 — $\frac{4971,6}{l}$	80,50 m à 83,50 m
31	86 + 19 P ₃	162,0	1011,6 + 1073,5 P ₃	5305,6	162 — $\frac{5305,6}{l}$	83,50 à 86,50
32	86 + 20 P ₃	166,0	1011,6 + 1160,0 P ₃	5651,6	166 — $\frac{5651,6}{l}$	86,50 à 89,50
33	86 + 21 P ₃	170,0	1011,6 + 1249,5 P ₃	6009,6	170 — $\frac{6009,6}{l}$	89,50 à 92,50
34	86 + 22 P ₃	174,0	1011,6 + 1342,0 P ₃	6379,6	174 — $\frac{6379,6}{l}$	92,50 à 95,50
35	86 + 23 P ₃	178,0	1011,6 + 1437,5 P ₃	6761,6	178 — $\frac{6761,6}{l}$	95,50 à 98,50
36	86 + 24 P ₃	182,0	1011,6 + 1536,0 P ₃	7155,6	182 — $\frac{7155,6}{l}$	98,50 à 101,50

Tableau IX. — Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produits par train-type à voie étroite.

NOMBRE DES CHARGES	CHARGE TOTALE II		TERMES $\Sigma^i P_d'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA POUR $a = 0$	PORTÉES APPLICABLES l
	COMPOSITION	VALEURS NUMÉRIQUES	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES		
4	4 P_1	tonnes 20	$6 \alpha_1 P_1 = 7,2 P_1$	36,0	20 — $\frac{36,0}{l}$	3,60 m à 7,70 m
5	4 $P_1 + P_2$	24	$6 \alpha_1 P_1 + (3 \alpha_1 + \beta_1) P_2 = 7,2 P_1 + 7,7 P_2$	66,8	24 — $\frac{66,8}{l}$	7,70 à 10,70
6	4 $P_1 + 2 P_2$	28	$6 \alpha_1 P_1 + (6 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) P_2 = 7,2 P_1 + 18,4 P_2$	109,6	28 — $\frac{109,6}{l}$	10,70 à 14,80
7	5 $P_1 + 2 P_2$	33	$(9 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) P_1 + (6 \alpha_1 + 2 \beta_1 + \alpha_2) P_2 = 22,0 P_1 + 18,4 P_2$	183,6	33 — $\frac{183,6}{l}$	14,80 à 16,00
8	6 $P_1 + 2 P_2$	38	$(13 \alpha_1 + 4 \beta_1 + 2 \alpha_2) P_1 + 18,4 P_2 = 38,0 P_1 + 18,4 P_2$	263,6	38 — $\frac{263,6}{l}$	16,00 à 17,20
9	7 $P_1 + 2 P_2$	43	$18 \alpha_1 + 6 \beta_1 + 3 \alpha_2) P_1 + 18,4 P_2 = 53,2 P_1 + 18,4 P_2$	349,6	43 — $\frac{349,6}{l}$	17,20 à 18,40
10	8 $P_1 + 2 P_2$	48	$(24 \alpha_1 + 8 \beta_1 + 4 \alpha_2) P_1 + 18,4 P_2 = 73,6 P_1 + 18,4 P_2$	441,6	48 — $\frac{441,6}{l}$	18,40 à 22,50
11	8 $P_1 + 3 P_2$	52	$73,6 P_1 + 40,9 P_2$	531,6	52 — $\frac{531,6}{l}$	22,50 à 25,50
12	8 $P_1 + 4 P_2$	56	$73,6 P_1 + 66,4 P_2$	633,6	56 — $\frac{633,6}{l}$	25,50 à 28,50
13	tonnes 56 + P_3	60	$633,6 + 28,5 P_3$	747,6	60 — $\frac{747,6}{l}$	28,50 à 31,50
14	56 + 2 P_3	64	$633,6 + 60,0 P_3$	873,6	64 — $\frac{873,6}{l}$	31,50 à 34,50

Tableau IX (suite). — Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produits par **train-type** à voie étroite.

NOMBRE DES CHARGES n	CHARGE TOTALE II		TERMES $\Sigma^n P_d'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA POUR $a = 0$	PORTÉES APPLICABLES l
	COMPOSITION	VALEURS NUMÉ- RIQUES	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES		
15	tonnes 56 + 3 P ₃	tonnes 68	633,6 + 94,5 P ₃	1011,6	68 — $\frac{1011,6}{l}$	34,50 à 37,50
16	56 + 4 P ₃	72	633,6 + 132,0 P ₃	1161,6	72 — $\frac{1161,6}{l}$	37,50 à 40,50
17	56 + 5 P ₃	76	633,6 + 172,5 P ₃	1323,6	76 — $\frac{1323,6}{l}$	40,50 à 43,50
18	56 + 6 P ₃	80	633,6 + 216,0 P ₃	1497,6	80 — $\frac{1497,6}{l}$	43,50 à 46,50
19	56 + 7 P ₃	84	633,6 + 262,5 P ₃	1683,6	84 — $\frac{1683,6}{l}$	46,50 à 49,50
20	56 + 8 P ₃	88	633,6 + 312,0 P ₃	1881,6	88 — $\frac{1881,6}{l}$	49,50 à 52,50
21	56 + 9 P ₃	92	633,6 + 364,5 P ₃	2091,6	92 — $\frac{2091,6}{l}$	52,50 à 55,50
22	56 + 10 P ₃	96	633,6 + 420,0 P ₃	2313,6	96 — $\frac{2313,6}{l}$	55,50 à 58,50
23	56 + 11 P ₃	100	633,6 + 478,5 P ₃	2547,6	100 — $\frac{2547,6}{l}$	58,50 à 61,50
24	56 + 12 P ₃	104	633,6 + 540,0 P ₃	2793,6	104 — $\frac{2793,6}{l}$	61,50 à 64,50
25	56 + 13 P ₃	108	633,6 + 604,5 P ₃	3051,6	108 — $\frac{3051,6}{l}$	64,50 à 67,50

III. — RÉSISTANCE DES POUTRES DES PONTS-ROUTES.

Définition des charges.

Types des convois. — Les poutres supportant les voies de terre doivent résister dans de bonnes conditions aux charges provenant des convois de chariots définis par l'article 17 de la circulaire ministérielle.

Ces convois sont au nombre de deux :

Le premier composé de tombereaux à un essieu pesant 6 t, et attelé de deux chevaux sur une file, sert de base pour les calculs de résistance.

En effet, sous le passage de ces charges le travail maximum des poutres situées en dehors de la chaussée peut atteindre la limite de 6,50 kg par millimètre carré de section nette.

Toutefois, pour les poutres de petite portée placées sous la chaussée et pour les pièces de pont, ce travail ne doit pas dépasser la limite de 5,50 kg par millimètre carré.

Le deuxième convoi est formé de chariots de 16 t à deux essieux traînés par huit chevaux sur deux files. Ce convoi sert à vérifier que le travail maximum, lors de son passage, ne dépasse pas *un kilogramme* en plus de celui du cas précédent, soit :

Pour les poutres extérieures.....	7,50 kg
Pour les poutres sous la chaussée et pièces de pont.....	6,50 »

Enfin la troisième combinaison des charges indiquées par la circulaire et qui consiste à intercaler dans le premier convoi un tombereau à un essieu pesant 11 t, et traîné par cinq chevaux sur une seule file, donne des résultats inférieurs à ceux du dernier cas, et ne peut s'appliquer en conséquence que pour le calcul de résistance des pièces de pont, lesquelles occupent une position analogue à celle des entretoises et longérons sous-rails.

Le travail de ces pièces sous l'action de la dernière charge ne doit pas dépasser la limite de 5,50 kg + 1,00 kg = 6,50 kg par millimètre carré.

Il suffit donc d'établir, pour la résistance des poutres, les efforts maxima produits par les deux convois de chariots indiqués ci-dessus.

En suivant une marche analogue à celle du chapitre I^{er}, nous désignons les charges et leurs espacements de la manière suivante :

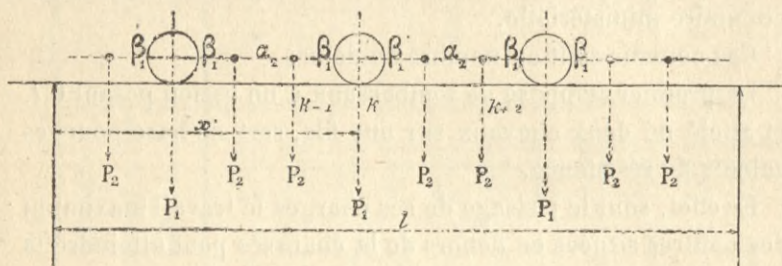


Fig. 4.

Pour les chariots de 6 t (fig. 4).

Charges des essieux.....	$P_1 = 6,0 t$
» attelages.....	$P_2 = 0,7 »$
Distance entre les charges P_1 et P_2	$\beta_1 = 2,75$
» » les charges consécutives P_2	$\alpha_2 = 2,50$

Pour les chariots de 16 t (fig. 5, col. 93-94).

Charge des essieux.....	$P_1 = 8,0 t$
» attelages.....	$P_2 = 1,4 »$
Distances entre les charges P_1	$\alpha_1 = 3,00$
» » les charges P_2	$\alpha_2 = 2,50$
» » les charges P_1 et P_2	$\beta_1 = 2,75$

Avec les charges et leurs espacements ainsi définis conformément à l'article 17 de la circulaire ministérielle, on pourra déterminer les efforts maxima répartis sur une zone égale à la largeur d'une voie charretière.

Ces efforts doivent être composés ensuite de manière à développer sur une poutre donnée les tensions maxima.

Pour déterminer ces derniers, nous allons donner quelques détails au sujet de la répartition des charges sur la coupe transversale d'un pont.

Répartition des charges sur la coupe transversale du pont. — La position des surcharges mobiles par rapport aux poutres,

n'étant pas fixe sur un pont, comme celle des roues d'un train, on doit grouper ces charges dans le sens transversal de manière à obtenir l'effet maximum sur la poutre considérée.

Ainsi pour un pont à poutres extérieures (fig. 6 et 7), pour calculer la résistance de la poutre A, on rapprochera sur cette poutre les rangées de chariots de manière que l'axe de la jante de la première roue se trouve à 0,10 de l'arête de la bordure du trottoir, les autres roues occupant les positions le plus rapprochées de cette roue, conformément à l'indication de l'article 17 de la circulaire, reproduites sur les figures 6 et 7.

La résultante Y de ces charges sur la poutre A sera donc pour un pont à une voie charretière, en désignant par d l'espacement d'axe en axe des poutres, et par d' la largeur entre l'axe de la poutre et l'arête du trottoir.

$$Y = \left[2 - \frac{2d' + 1,90}{d} \right] P.$$

Pour un pont à deux voies charretières :

$$Y = \left[4 - \frac{4d' + 6,60}{d} \right] P.$$

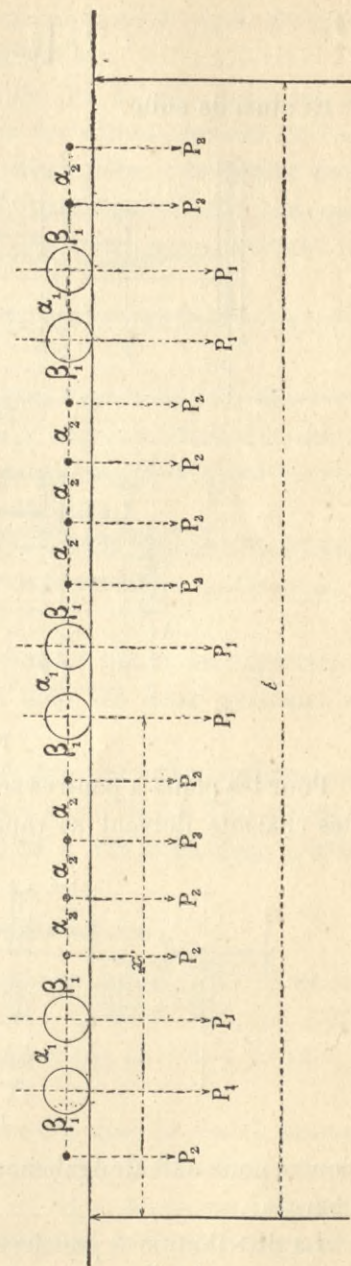


Fig. 5.

Pour un pont à trois voies charretières.

$$Y = \left[6 - \frac{6d' + 16}{d} \right] P.$$

Et ainsi de suite.

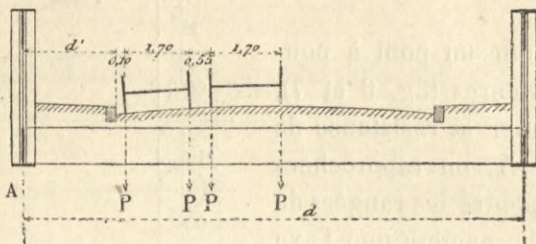


Fig. 6.

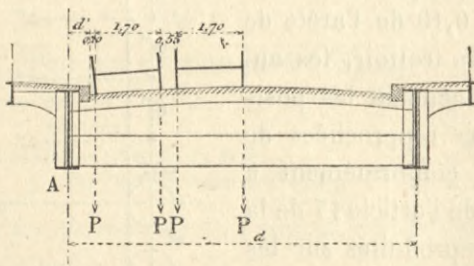


Fig. 7.

Pour les ponts à poutres sous la chaussée (fig. 8) les essieux des chariots doivent se rapprocher de part et d'autre de la

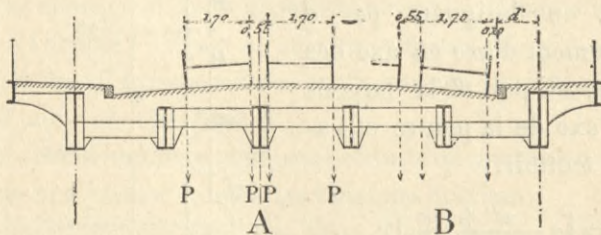


Fig. 8.

poutre pour obtenir également la plus grande composante des charges.

La distribution à gauche donnera le maximum d'effet pour une poutre intermédiaire A, et la distribution à droite don-

nera ce maximum pour la poutre, près de la bordure du trottoir B. Les expressions de la composante Y, dans ces cas, peuvent s'établir sans aucune difficulté.

Il en résulte que, pour simplifier les calculs, on peut se borner à calculer les expressions des efforts maxima correspondant à la largeur d'une voie charretière, c'est-à-dire pour une poutre supportant à elle seule la charge de cette voie charretière. Et c'est sur cette base que nous avons calculé les efforts qui suivent.

La marche des opérations est la même que dans le chapitre précédent.

En partant du nombre des charges contenues dans la travée, nous calculons d'abord l'abscisse x' correspondant au moment fléchissant maximum, laquelle permet de déterminer les portées applicables à ce système de charges.

Ensuite nous donnons l'expression du moment fléchissant maximum M' pour une portée intermédiaire quelconque l comprise entre ces limites.

Enfin la dernière partie de ce chapitre donne les expressions de l'effort tranchant maximum pour les deux systèmes de chariots.

Toutes ces expressions sont établies pour les systèmes successifs de charges dont le nombre varie de 3 à 37 correspondant aux portées de 5,56 et 6,08 à 100 m admises comme maximum.

Moments fléchissants maxima.

Pour les systèmes des charges considérés, les moments fléchissants maxima se produisent au droit de plus fortes charges, lorsque celles-ci occupent sur la poutre la position la plus défavorable.

En conséquence, dans le convoi des chariots de 6 t , ces moments se produisent au droit des essieux de ces chariots.

Dans le convoi des chariots de 16 t , nous considérons le premier essieu du chariot, en comptant de l'appui de gauche, comme correspondant au moment fléchissant maximum.

Ainsi dans les calculs, ce sont les essieux ainsi désignés qui porteront le n° k (fig. 4 et 5).

Les moments fléchissants maxima M' , et les abscisses correspondantes x' , se calculent par les équations 6 et 7 qui nous ont déjà servi pour les calculs analogues du chapitre précédent.

Commençons par la détermination des termes qui entrent dans ces équations.

Calcul des termes ΣPd . — Rappelons que ces termes représentent la somme des moments des charges situées à gauche de la charge P_1 portant n° k , pris par rapport à cette charge.

Les valeurs numériques de ces termes sont réunies dans les deux tableaux X et XI (p. 123 et 124); ces valeurs sont exprimées en tonnes-mètres.

Calcul des abscisses x' . — Par suite de la succession identique des charges à droite et à gauche de l'essieu n° k , on peut introduire des simplifications dans le calcul du numérateur du dernier terme de l'expression de l'abscisse x' .

Dans le convoi de chariots de 6 t , les moments des charges situées des deux côtés de l'essieu n° k se faisant équilibre, ce numérateur sera zéro pour tous les cas de nombre impair des charges.

Lorsque le nombre des charges est pair, le numérateur est égal au moment de la dernière charge placée du côté où leur nombre est le plus grand. Ainsi on a

$$39) \quad \begin{aligned} \Sigma_k^1 Pd - \Sigma_k^n Pd' &= P_1 d_1 \text{ lorsque } k > n - k. \\ \text{''} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{''} &= -P_n d'_n \text{ '' } k < n - k. \end{aligned}$$

On pourra donc obtenir immédiatement la valeur numérique de ces termes par la différence des moments correspondants de la dernière colonne du tableau X.

Dans le cas du convoi de chariots de 16 t l'expression du numérateur cherché peut se mettre sous la forme

$$\Sigma_k^1 Pd - \Sigma_k^n P (\alpha_1 + d).$$

Les termes ΣPd en nombre égal se réduisent et l'on a :

$$(40) \quad \begin{aligned} \Sigma_k^1 Pd - \Sigma_k^n Pd' &= P_1 d_1 - \Sigma_{k+1}^n P\alpha_1 \text{ pour } k > n - k. \\ \text{»} \quad \text{»} &= -P_n d'_n - \Sigma_{k+1}^n P\alpha_1 \quad \text{»} \quad k < n - k. \end{aligned}$$

La valeur numérique de ce numérateur se trouve donc à la différence algébrique des termes correspondants de la dernière colonne du tableau XII, diminuée du moment $\Sigma_{k+1}^1 P\alpha_1$.

Oubien les valeurs successives du terme $\Sigma Pd'$ toutes calculées formant la cinquième colonne du tableau XV, on pourra former les numérateurs cherchés par la différence des termes correspondants de ce tableau et du tableau XI.

Tableau X. — Chariots de 6 tonnes. Moments des charges pris par rapport à la charge n° k , placées à sa gauche.

VALEURS DU N° k	DÉSIGNATION DES CHARGES QUI PRÉCÈDENT L'ESSIEU N° k	DISTANCE ENTRE CET ESSIEU ET L'ESSIEU EXTREME d_1	TERMES $\sum_k^1 Pd$	
			EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES
		mètres		tonnes-mètres
2	P_2	2,75	$2,75 P_2$	1,925
3	$2 P_2$	5,25	$8,00 P_2$	5,60
4	$P_1 + 2 P_2$	8,00	$8,00 (P_1 + P_2)$	53,60
5	$P_2 + P_1 + 2 P_2$	10,75	$8,00 P_1 + 18,75 P_2$	61,125
6	$2 P_2 + P_1 + 2 P_2$	13,25	$8,00 P_1 + 32,0 P_2$	70,40
7	$2 P_1 + 4 P_2$	16,00	$24,00 P_1 + 32,00 P_2$	166,40
8	$2 P_1 + 5 P_2$	18,75	$24,00 P_1 + 50,75 P_2$	179,525
9	$2 P_1 + 6 P_2$	21,25	$24,00 P_1 + 72,00 P_2$	194,40
10	$3 P_1 + 6 P_2$	24,00	$48,00 P_1 + 72,00 P_2$	338,40
11	$3 P_1 + 7 P_2$	26,75	$48,00 P_1 + 98,75 P_2$	357,125
12	$3 P_1 + 8 P_2$	29,25	$48,00 P_1 + 128,00 P_2$	377,60
13	$4 P_1 + 8 P_2$	32,00	$80,00 P_1 + 128,00 P_2$	569,60
14	$4 P_1 + 9 P_2$	34,75	$80,00 P_1 + 162,75 P_2$	593,925
15	$4 P_1 + 10 P_2$	37,25	$80,00 P_1 + 200 P_2$	620,00
16	$5 P_1 + 10 P_2$	40,00	$120,00 P_1 + 200 P_2$	860,00
17	$5 P_1 + 11 P_2$	42,75	$120,00 P_1 + 242,75 P_2$	889,925
18	$5 P_1 + 12 P_2$	45,25	$120,00 P_1 + 288,00 P_2$	921,60
19	$6 P_1 + 12 P_2$	48,00	$168,00 P_1 + 288,00 P_2$	1209,60

Après avoir déterminé les termes entrant dans l'expression du moment fléchissant maximum, nous avons réuni dans les deux tableaux qui suivent, les expressions de ces moments pour les systèmes successifs des charges dont le nombre varie de 3 à 37 et renferme les portées indiquées plus haut.

Tableau XI. — Chariots de 16 tonnes. Moments des charges pris par rapport à la charge n° k , placées à sa gauche.

VALEURS DU N° k	DÉSIGNATION DES CHARGES QUI PRÉCÈDENT L'ESSIEU N° k	DISTANCE ENTRE CET ESSIEU ET L'ESSIEU EXTRÊME d_4 mètres	TERMES ΣkPd	
			EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES tonnes mètres
2	P_2	2,75	$2,75 P_2$	3,85
3	$2 P_2$	5,25	$8,00 P_2$	11,20
4	$3 P_2$	7,75	$15,75 P_2$	22,05
5	$4 P_2$	10,25	$26,00 P_2$	36,40
6	$P_4 + 4 P_2$	13,00	$13,00 P_4 + 26,00 P_2$	140,40
7	$2 P_4 + 4 P_2$	16,00	$29,00 P_4 + 26,00 P_2$	268,40
8	$2 P_4 + 5 P_2$	18,75	$29,00 P_4 + 44,75 P_2$	294,65
9	$2 P_4 + 6 P_2$	21,25	$29,00 P_4 + 66,00 P_2$	324,40
10	$2 P_4 + 7 P_2$	23,75	$29,00 P_4 + 89,75 P_2$	357,65
11	$2 P_4 + 8 P_2$	26,25	$29,00 P_4 + 116,00 P_2$	394,40
12	$3 P_4 + 8 P_2$	29,00	$58,00 P_4 + 116,00 P_2$	626,40
13	$4 P_4 + 8 P_2$	32,00	$90,00 P_4 + 116,00 P_2$	882,40
14	$4 P_4 + 9 P_2$	34,75	$90,00 P_4 + 150,75 P_2$	931,05
15	$4 P_4 + 10 P_2$	37,25	$90,00 P_4 + 188,00 P_2$	983,20
16	$4 P_4 + 11 P_2$	39,75	$90,00 P_4 + 227,75 P_2$	1038,85
17	$4 P_4 + 12 P_2$	42,25	$90,00 P_4 + 270,00 P_2$	1098,00
18	$5 P_4 + 12 P_2$	45,00	$135,00 P_4 + 270,00 P_2$	1458,00
19	$6 P_4 + 12 P_2$	48,00	$183,00 P_4 + 270,00 P_2$	1842,00

Le tableau XII s'applique au convoi de tombereaux de 6 t et le tableau XIII aux chariots de 16 t .

La dernière colonne du tableau XII donne les portées applicables aux systèmes des charges, calculées d'après les équations 13. La colonne analogue du tableau XIII donne ces portées d'après les formules 8 et 11.

Tableau XII. — Abscisses x' et moments fléchissants maxima dûs au passage de tombereaux de 6 tonnes.

SYSTÈMES DES CHARGES			VALEURS		EXPRESSIONS GÉNÉRALES		PORTÉES
NOMBRE n	COMPOSITION	POIDS TOTAL Π	DU N° k	LONGUEUR DU CONVOI D	DE L'ABSCISSE $x' = \frac{l}{2} + \delta$	DU MOMENT FLÉCHISSANT MAXIMUM $M' = -\Sigma Pd + \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	APPLICABLES l
3	$P_1 + 2 P_2$	7,4	2	5,50	$\frac{l}{2}$	$-1,925 + 1,85 l + \frac{pl^2}{8}$	5,50 m à 10,28 m
4	$P_1 + 3 P_2$	8,1	2	8,00	$\frac{l}{2} - \frac{3,675}{16,2 + pl}$	$-1,925 + \left(\frac{8,1}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	10,28 à 10,72
5	$P_1 + 4 P_2$	8,8	3	10,50	$\frac{l}{2}$	$-5,600 + 2,2 l + \frac{pl^2}{8}$	10,72 à 14,17
6	$2 P_1 + 4 P_2$	14,8	3	13,25	$\frac{l}{2} - \frac{48,0}{29,6 + pl}$	$-5,600 + \left(\frac{14,8}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	14,17 à 17,48
7	$3 P_1 + 4 P_2$	20,8	4	16,00	$\frac{l}{2}$	$-53,600 + 5,2 l + \frac{pl^2}{8}$	17,48 à 21,33
8	$3 P_1 + 5 P_2$	21,5	4	18,75	$\frac{l}{2} - \frac{7,525}{43,0 + pl}$	$-53,600 + \left(\frac{21,5}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	21,33 à 21,67
9	$3 P_1 + 6 P_2$	22,2	5	21,50	$\frac{l}{2}$	$-61,125 + 5,55 l + \frac{pl^2}{8}$	21,67 à 26,29
10	$3 P_1 + 7 P_2$	22,9	5	24,00	$\frac{l}{2} - \frac{9,275}{45,8 + pl}$	$-61,125 + \left(\frac{22,9}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	26,29 à 26,70
11	$3 P_1 + 8 P_2$	23,6	6	26,50	$\frac{l}{2}$	$-79,400 + 5,90 l + \frac{pl^2}{8}$	26,70 à 30,29
12	$4 P_1 + 8 P_2$	29,6	6	29,25	$\frac{l}{2} - \frac{96,0}{59,2 + pl}$	$-79,400 + \left(\frac{29,6}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	30,29 à 33,55

13	$5 P_1 + 8 P_2$	35,6	7	32,00	$\frac{l}{2}$	$-166,400 + 8,90 l + \frac{pl^2}{8}$	33,55 à 37,36
14	$5 P_1 + 9 P_2$	36,3	7	34,75	$\frac{l}{2} - \frac{13,125}{72,6 + pl}$	$-166,400 + \left(\frac{36,3}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	37,36 à 37,68
15	$5 P_1 + 10 P_2$	37,0	8	37,50	$\frac{l}{2}$	$-179,525 + 9,25 l + \frac{pl^2}{8}$	37,68 à 42,31
16	$5 P_1 + 11 P_2$	37,7	8	40,00	$\frac{l}{2} - \frac{14,875}{75,4 + pl}$	$-179,525 + \left(\frac{37,7}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	42,31 à 42,66
17	$5 P_1 + 12 P_2$	38,4	9	42,50	$\frac{l}{2}$	$-194,400 + 9,60 l + \frac{pl^2}{8}$	42,66 à 46,32
18	$6 P_1 + 12 P_2$	44,4	9	45,25	$\frac{l}{2} - \frac{144,0}{88,8 + pl}$	$-194,400 + \left(\frac{44,4}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	46,32 à 49,57
19	$7 P_1 + 12 P_2$	50,4	10	48,00	$\frac{l}{2}$	$-338,400 + 12,6 l + \frac{pl^2}{8}$	49,57 à 53,31
20	$7 P_1 + 13 P_2$	51,1	10	50,75	$\frac{l}{2} - \frac{18,725}{102,2 + pl}$	$-338,400 + \left(\frac{51,1}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	53,31 à 53,65
21	$7 P_1 + 14 P_2$	51,8	11	53,50	$\frac{l}{2}$	$-357,125 + 12,95 l + \frac{pl^2}{8}$	53,65 à 58,30
22	$7 P_1 + 15 P_2$	52,5	11	56,00	$\frac{l}{2} - \frac{20,175}{105,0 + pl}$	$-357,125 + \left(\frac{52,5}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	58,30 à 58,69
23	$7 P_1 + 16 P_2$	53,2	12	58,50	$\frac{l}{2}$	$-377,600 + 13,30 l + \frac{pl^2}{8}$	58,69 à 62,33
24	$8 P_1 + 16 P_2$	59,2	12	61,25	$\frac{l}{2} - \frac{192,0}{118,4 + pl}$	$-377,600 + \left(\frac{59,2}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	62,33 à 65,58
25	$9 P_1 + 16 P_2$	65,2	13	64,00	$\frac{l}{2}$	$-569,600 + 16,30 l + \frac{pl^2}{8}$	65,58 à 69,31
26	$9 P_1 + 17 P_2$	65,9	13	66,75	$\frac{l}{2} - \frac{24,325}{131,8 + pl}$	$-569,600 + \left(\frac{65,9}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	69,31 à 69,68
27	$9 P_1 + 18 P_2$	66,6	14	69,50	$\frac{l}{2}$	$-593,925 + 16,65 l + \frac{pl^2}{8}$	69,68 à 74,31

Tableau XII. — Abscisses x' et moments fléchissants maxima dus au passage de tombereaux de 6 tonnes.

SYSTÈMES DES CHARGES		VALEURS		EXPRESSIONS GÉNÉRALES		PORTÉES APPLICABLES
NOMBRE n	COMPOSITION	POIDS TOTAL		DE L'ABSCISSE $x' = \frac{l}{2} + \delta$	DU MOMENT FLÉCHISSANT MAXIMUM $M' = -\Sigma Pd + \left(\frac{11}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	l
		II				
28	9 P_1 + 19 P_2	tonnes 67,3		$\frac{l}{2} - \frac{26,075}{134,6 + pl}$	$- 593,925 + \left(\frac{67,3}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	74,31 m à 74,69 m
29	9 P_1 + 20 P_2	68,0		$\frac{l}{2}$	$- 620,000 + 17,00 l + \frac{pl^2}{8}$	74,69 à 78,34
30	10 P_1 + 20 P_2	74,0		$\frac{l}{2} - \frac{24,0}{148,0 + pl}$	$- 620,000 + \left(\frac{74,0}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	78,34 à 81,59
31	11 P_1 + 20 P_2	80,0		$\frac{l}{2}$	$- 860,000 + 20,00 l + \frac{pl^2}{8}$	81,59 à 85,31
32	11 P_1 + 21 P_2	80,7		$\frac{l}{2} - \frac{29,925}{161,4 + pl}$	$- 860,000 + \left(\frac{80,7}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	85,31 à 85,68
33	11 P_1 + 22 P_2	81,4		$\frac{l}{2}$	$- 889,925 + 20,55 l + \frac{pl^2}{8}$	85,68 à 90,30
34	11 P_1 + 23 P_2	82,1		$\frac{l}{2} - \frac{31,675}{164,2 + pl}$	$- 889,925 + \left(\frac{82,1}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	90,30 à 90,69
35	11 P_1 + 24 P_2	82,8		$\frac{l}{2}$	$- 921,600 + 20,70 l + \frac{pl^2}{8}$	90,69 à 94,35
36	12 P_1 + 24 P_2	88,8		$\frac{l}{2} - \frac{288,0}{177,6 + pl}$	$- 921,600 + \left(\frac{88,8}{l} + \frac{p}{2}\right) x'^2$	94,35 à 97,60
37	13 P_1 + 24 P_2	94,8		$\frac{l}{2}$	$- 1209,600 + 23,70 l + \frac{pl^2}{8}$	97,60 à 101,50

Courbes-enveloppes des moments fléchissants. — Les équations de cette courbe peuvent s'établir par l'équation 38 en se servant des tableaux XI, XIV et XV.

Mais ces calculs, encore fort longs, présentent moins d'intérêt pratique dans le cas des ponts-routes, à cause de la moindre importance des surcharges.

Nous croyons, en conséquence, qu'on peut se dispenser de ces calculs, la courbe-enveloppe polygonale pouvant, sans inconvénient, être remplacée par la courbe unique proposée dans le chapitre suivant. Pour l'établissement de cette dernière, la connaissance des moments fléchissants maxima calculés ci-dessus étant suffisante.

Efforts tranchants maxima.

Formules générales. — On a vu dans le chapitre précédent, que l'effort tranchant maximum positif en un point quelconque de la première moitié de la travée s'obtient en distribuant la surcharge dans le tronçon compris entre ce point et l'appui de droite, en laissant libre de toute surcharge le premier tronçon allant de l'appui de gauche au point considéré.

Désignant par a l'abscisse de ce dernier point, la valeur correspondante de l'effort tranchant s'obtient par la formule 30.

$$\Lambda = \frac{\Pi(l-a)}{l} - \frac{\Sigma_1^n Pd'}{l} + p \left(\frac{l}{2} - a \right)$$

Nous avons vu en outre que, pour une charge Π , le maximum de cette expression correspond à la plus petite valeur du moment $\Sigma_1^n Pd'$.

Or cette condition se trouve remplie lorsqu'on place les plus fortes charges au point considéré et au voisinage de ce point.

Ainsi dans le cas de ponts-routes, on choisira pour la charge n° 1 placée au point a :

L'essieu d'un des tombereaux du premier convoi.

L'essieu d'arrière du chariot du deuxième convoi; le déplacement des charges étant supposés effectuer de gauche à droite.

Les coefficients numériques des expressions des efforts tranchants sont réunis dans les deux tableaux ci-après.

Le tableau XIV renferme les résultats provenant du passage du premier convoi de tombereaux de 6 t ; le tableau XV renferme les résultats relatifs au passage du deuxième convoi de chariots de 16 t .

L'avant-dernière colonne de ces tableaux donne comme précédemment pour $a = 0$ les expressions des efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche, ce sont également les expressions des réactions maxima de cet appui.

Pour obtenir l'effort tranchant maximum en un point quelconque de la travée, ayant pour l'abscisse a , il suffit d'ajouter à l'expression correspondante de cette colonne le terme $-\frac{\Pi a}{l}$

qui complète l'équation 30.

Enfin, dans les applications aux résultats obtenus par ces tableaux, on ajoutera l'effort tranchant provenant de la charge permanente, dont l'expression est indiquée par le dernier terme de la même équation 30.

Tableau XIV. — Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produit par le convoi des tombereaux de 6 tonnes.

SYSTEME DES CHARGES		TERMES $\Sigma_1 P_d'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA		PORTÉES APPLICABLES
NOMBRE	COMPOSITION	POIDS TOTAL	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES	$A = \frac{\Pi(l-a)}{l} - \frac{\Sigma P_d'}{l}$	l
n		II			pour $a = 0$	
3	$P_1 + 2 P_2$	7,4	$8 P_2$	5,60	$7,4 - \frac{5,60}{l}$	5,25 m à 8,00 m
4	$2 P_1 + 2 P_2$	13,4	$8 P_1 + 8 P_2$	53,60	$13,4 - \frac{53,60}{l}$	8,00 à 10,75
5	$2 P_1 + 3 P_2$	14,1	$8 P_1 + 18,75 P_2$	61,125	$14,1 - \frac{61,125}{l}$	10,75 à 13,25
6	$2 P_1 + 4 P_2$	14,8	$8 P_1 + 32,00 P_2$	70,40	$14,8 - \frac{70,40}{l}$	13,25 à 16,00
7	$3 P_1 + 4 P_2$	20,8	$24 P_1 + 32,00 P_2$	166,40	$20,8 - \frac{166,40}{l}$	16,00 à 18,75
8	$3 P_1 + 5 P_2$	21,5	$24 P_1 + 50,75 P_2$	179,525	$21,5 - \frac{179,525}{l}$	18,75 à 21,25
9	$3 P_1 + 6 P_2$	22,2	$24 P_1 + 72,00 P_2$	194,40	$22,2 - \frac{194,40}{l}$	21,25 à 24,00
10	$4 P_1 + 6 P_2$	28,2	$48 P_1 + 72,00 P_2$	338,40	$28,2 - \frac{338,40}{l}$	24,00 à 26,75
11	$4 P_1 + 7 P_2$	28,9	$48 P_1 + 98,75 P_2$	337,125	$28,9 - \frac{337,125}{l}$	26,75 à 29,25
12	$4 P_1 + 8 P_2$	29,6	$48 P_1 + 128,00 P_2$	377,60	$29,6 - \frac{377,60}{l}$	29,25 à 32,00
13	$5 P_1 + 8 P_2$	35,6	$80 P_1 + 128,00 P_2$	569,60	$35,6 - \frac{569,60}{l}$	32,00 à 34,75

14	$5 P_1 + 9 P_2$	36,3	$80 P_1 + 162,75 P_2$	593,925	$36,3 - \frac{593,925}{l}$	34,75 à 37,25
15	$5 P_1 + 10 P_2$	37,0	$80 P_1 + 200,00 P_2$	620,00	$37,0 - \frac{620,00}{l}$	37,25 à 40,00
16	$6 P_1 + 10 P_2$	43,0	$120 P_1 + 200,00 P_2$	860,00	$43,0 + \frac{860,00}{l}$	40,00 à 42,75
17	$6 P_1 + 11 P_2$	43,7	$120 P_1 + 242,75 P_2$	889,925	$43,7 + \frac{889,925}{l}$	42,75 à 45,25
18	$6 P_1 + 12 P_2$	44,4	$120 P_1 + 288,00 P_2$	921,60	$44,4 - \frac{921,60}{l}$	45,25 à 48,00
19	$7 P_1 + 12 P_2$	50,4	$168 P_1 + 288,00 P_2$	1209,60	$50,4 + \frac{1209,60}{l}$	48,00 à 50,75
20	$7 P_1 + 13 P_2$	51,1	$168 P_1 + 338,75 P_2$	1245,125	$51,1 - \frac{1245,125}{l}$	50,75 à 53,25
21	$7 P_1 + 14 P_2$	51,8	$168 P_1 + 392,00 P_2$	1282,40	$51,8 - \frac{1282,40}{l}$	53,25 à 56,00
22	$8 P_1 + 14 P_2$	57,8	$224 P_1 + 392,00 P_2$	1621,40	$57,8 - \frac{1621,40}{l}$	56,00 à 58,75
23	$8 P_1 + 15 P_2$	58,5	$224 P_1 + 450,75 P_2$	1659,525	$58,5 - \frac{1659,525}{l}$	58,75 à 61,25
24	$8 P_1 + 16 P_2$	59,2	$224 P_1 + 512,00 P_2$	1702,40	$59,2 - \frac{1702,40}{l}$	61,25 à 64,00
25	$9 P_1 + 16 P_2$	65,2	$288 P_1 + 512,00 P_2$	2086,40	$65,2 - \frac{2086,40}{l}$	64,00 à 66,75
26	$9 P_1 + 17 P_2$	65,9	$288 P_1 + 578,75 P_2$	2133,125	$65,9 - \frac{2133,125}{l}$	66,75 à 69,25
27	$9 P_1 + 18 P_2$	66,6	$288 P_1 + 646,00 P_2$	2180,20	$66,6 - \frac{2180,20}{l}$	69,25 à 72,00
28	$10 P_1 + 18 P_2$	72,6	$360 P_1 + 646,00 P_2$	2652,20	$72,6 - \frac{2652,20}{l}$	72,00 à 74,75

Tableau XIV. — Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produit par le convoi des tombereaux de 6 tonnes (suite).

NOMBRE <i>n</i>	SYSTÈME DES CHARGES		TERMES $\Sigma^m P_d'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA $A = \frac{\Pi (l - a)}{l} - \frac{\Sigma P d'}{l}$ pour $a = 0$	PORTÉES APPLICABLES <i>l</i>
	COMPOSITION	POIDS TOTAL Π	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES		
29	10 P ₁ + 19 P ₂	73,3	360 P ₁ + 720,75 P ₂	2664,525	$73,3 - \frac{2664,525}{l}$	74,75 à 77,25
30	10 P ₁ + 20 P ₂	74,0	360 P ₁ + 798,00 P ₂	2718,60	$74,0 - \frac{2718,60}{l}$	77,25 à 80,00
31	11 P ₁ + 20 P ₂	80,0	440 P ₁ + 798,00 P ₂	3198,60	$80,0 - \frac{3198,60}{l}$	80,00 à 82,75
32	11 P ₁ + 21 P ₂	80,7	440 P ₁ + 880,75 P ₂	3256,525	$80,7 - \frac{3256,525}{l}$	82,75 à 85,25
33	11 P ₁ + 22 P ₂	81,4	440 P ₁ + 966,00 P ₂	3316,20	$81,4 - \frac{3316,20}{l}$	85,25 à 88,00
34	12 P ₁ + 22 P ₂	87,4	528 P ₁ + 966,00 P ₂	3844,20	$87,4 - \frac{3844,20}{l}$	88,00 à 90,75
35	12 P ₁ + 23 P ₂	88,1	528 P ₁ + 1056,75 P ₂	3907,725	$88,1 - \frac{3907,725}{l}$	90,75 à 93,25
36	12 P ₁ + 24 P ₂	88,8	528 P ₁ + 1150,00 P ₂	3973,00	$88,8 - \frac{3973,00}{l}$	93,25 à 96,00
37	13 P ₁ + 24 P ₂	94,8	624 P ₁ + 1150,00 P ₂	4549,00	$94,8 - \frac{4549,00}{l}$	96,00 à 98,75
38	13 P ₁ + 25 P ₂	95,5	624 P ₁ + 1248,75 P ₂	4618,125	$95,5 - \frac{4618,125}{l}$	98,75 à 101,25

Tableau XV.— Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produits par le convoi de chariots de 16 tonnes.

SYSTÈMES DES CHARGES		TERMES $\Sigma_1^i P_i d_i'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA		PORTÉES APPLICABLES l
NOMBRE n	COMPOSITION	POIDS TOTAL II	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	VALEURS NUMÉRIQUES	$A = \frac{\text{II}(l-a)}{l} - \frac{\Sigma_1^i P_i d_i'}{l}$ pour $a = 0$	
3	2 $P_1 + P_2$	17,4	3 $P_1 + 5,75 P_2$	32,05	$17,4 - \frac{32,05}{l}$	5,75 m à 8,25 m
4	2 $P_1 + 2 P_2$	18,8	3 $P_1 + 14,00 P_2$	43,60	$18,8 - \frac{43,60}{l}$	8,25 à 10,75
5	2 $P_1 + 3 P_2$	20,2	3 $P_1 + 24,75 P_2$	58,65	$20,2 - \frac{58,65}{l}$	10,75 à 13,25
6	2 $P_1 + 4 P_2$	21,6	3 $P_1 + 38,00 P_2$	77,20	$21,6 - \frac{77,20}{l}$	13,25 à 15,00
7	3 $P_1 + 4 P_2$	29,6	19 $P_1 + 38,00 P_2$	205,20	$29,6 - \frac{205,20}{l}$	16,00 à 19,00
8	4 $P_1 + 4 P_2$	37,6	38 $P_1 + 38,00 P_2$	357,20	$37,6 - \frac{357,20}{l}$	19,00 à 21,75
9	4 $P_1 + 5 P_2$	39,0	38 $P_1 + 59,75 P_2$	387,65	$39,0 - \frac{387,65}{l}$	21,75 à 24,25
10	4 $P_1 + 6 P_2$	40,4	38 $P_1 + 84,00 P_2$	421,60	$40,4 - \frac{421,60}{l}$	24,25 à 26,75
11	4 $P_1 + 7 P_2$	41,8	38 $P_1 + 110,75 P_2$	459,05	$41,8 - \frac{459,05}{l}$	26,75 à 29,25
12	4 $P_1 + 8 P_2$	43,2	38 $P_1 + 140,00 P_2$	500,00	$43,2 - \frac{500,00}{l}$	29,25 à 32,00
13	5 $P_1 + 8 P_2$	51,2	70 $P_1 + 140,00 P_2$	756,00	$51,2 - \frac{756,00}{l}$	32,00 à 35,00

Tableau XV. — Efforts tranchants maxima au droit de l'appui de gauche produits par le convoi de chariots de 16 tonnes.

SYSTÈMES DES CHARGES		TERMES $\sum_1^n Pd'$		EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA		PORTÉES APPLICABLES l
NUMBRE n	COMPOSITION	POIDS TOTAL II	EXPRESSIONS GÉNÉRALES	$A = \frac{II(l-a)}{l}$ pour $a=0$	$\frac{\sum_1^n Pd'}{l}$	
14	6 P_1 + 8 P_2	59,2	105 P_1 + 140,00 P_2	1036,00	$59,2 - \frac{1036,00}{l}$	35,00 à 37,75
15	6 P_1 + 9 P_2	60,6	105 P_1 + 177,75 P_2	1088,85	$60,6 - \frac{1088,85}{l}$	37,75 à 40,25
16	6 P_1 + 10 P_2	62,0	105 P_1 + 218,00 P_2	1145,20	$62,0 - \frac{1145,20}{l}$	40,25 à 42,75
17	6 P_1 + 11 P_2	63,4	105 P_1 + 260,75 P_2	1205,05	$63,4 - \frac{1205,05}{l}$	42,75 à 45,25
18	6 P_1 + 12 P_2	64,8	105 P_1 + 306,00 P_2	1268,40	$64,8 - \frac{1268,40}{l}$	45,25 à 48,00
19	7 P_1 + 12 P_2	72,8	153 P_1 + 306,00 P_2	1652,40	$72,8 - \frac{1652,40}{l}$	48,00 à 51,00
20	8 P_1 + 12 P_2	80,8	204 P_1 + 306,00 P_2	2060,40	$80,8 - \frac{2060,40}{l}$	51,00 à 53,75
21	8 P_1 + 13 P_2	82,2	204 P_1 + 359,75 P_2	2135,65	$82,2 - \frac{2135,65}{l}$	53,75 à 56,25
22	8 P_1 + 14 P_2	83,6	204 P_1 + 416,00 P_2	2214,40	$83,6 - \frac{2214,40}{l}$	56,25 à 58,75
23	8 P_1 + 15 P_2	85,0	204 P_1 + 474,00 P_2	2295,60	$85,0 - \frac{2295,60}{l}$	58,75 à 61,25

24	8 P_1 + 16 P_2	86,4	204 P_1 + 536,00 P_2	2382,40	$86,4 - \frac{2382,40}{l}$	61,25 à 64,00
25	9 P_1 + 16 P_2	94,4	268 P_1 + 536,00 P_2	2894,40	$94,4 - \frac{2894,40}{l}$	64,00 à 67,00
26	10 P_1 + 16 P_2	102,4	335 P_1 + 536,00 P_2	3430,00	$102,4 - \frac{3430,00}{l}$	67,00 à 69,75
27	10 P_1 + 17 P_2	103,8	335 P_1 + 605,75 P_2	3528,05	$103,8 - \frac{3528,05}{l}$	69,75 à 72,25
28	10 P_1 + 18 P_2	105,2	335 P_1 + 678,00 P_2	3629,20	$105,2 - \frac{3629,20}{l}$	72,25 à 74,75
29	10 P_1 + 18 P_2	106,6	335 P_1 + 752,75 P_2	3735,85	$106,6 - \frac{3735,85}{l}$	74,75 à 77,25
30	10 P_1 + 19 P_2	108,0	335 P_1 + 830,00 P_2	3842,00	$108,0 - \frac{3842,00}{l}$	77,25 à 80,00
31	11 P_1 + 20 P_2	116,0	415 P_1 + 830,00 P_2	4482,00	$116,0 - \frac{4482,00}{l}$	80,00 à 83,00
32	12 P_1 + 20 P_2	124,0	498 P_1 + 830,00 P_2	5146,00	$124,0 - \frac{5146,00}{l}$	83,00 à 85,75
33	12 P_1 + 21 P_2	125,4	498 P_1 + 915,75 P_2	5266,05	$125,4 - \frac{5266,05}{l}$	85,75 à 88,25
34	12 P_1 + 22 P_2	126,8	498 P_1 + 1004,00 P_2	5389,60	$126,8 - \frac{5389,60}{l}$	88,25 à 90,75
35	12 P_1 + 23 P_2	128,2	498 P_1 + 1094,75 P_2	5516,65	$128,2 - \frac{5516,65}{l}$	90,75 à 93,25
36	12 P_1 + 24 P_2	129,6	498 P_1 + 1188,00 P_2	5647,20	$129,6 - \frac{5647,20}{l}$	93,25 à 96,00
37	13 P_1 + 24 P_2	137,6	594 P_1 + 1188,00 P_2	6415,20	$137,6 - \frac{6415,20}{l}$	96,00 à 99,00
38	14 P_1 + 24 P_2	145,6	693 P_1 + 1188,00 P_2	7207,20	$145,6 - \frac{7207,20}{l}$	99,00 à 101,75

IV. — COURBES-ENVELOPPES APPROXIMATIVES

COURBES-ENVELOPPES DES MOMENTS FLÉCHISSANTS

La détermination de la courbe-enveloppe des moments fléchissants est indispensable pour déterminer la longueur des feuilles de tôle formant les semelles additionnelles de la poutre.

Les équations des éléments de cette courbe, contenues dans les tableaux V et VI permettent d'obtenir ces longueurs d'une manière exacte, par la résolution d'une série d'équations du 2^e degré.

Mais comme la formation de ces équations et leur application est encore longue, à cause de la multiplicité des éléments de la courbe pour les grandes et même moyennes portées, nous proposons de substituer au polygone curviligne une courbe-enveloppe approximative formée de la manière suivante.

Pour les poutres à une travée, cette courbe est une parabole à axe vertical, passant par l'origine, et par l'extrémité de l'ordonnée représentant le moment fléchissant maximum.

Ce moment maximum est placé à la distance x' de l'origine pour tous les cas où δ est négatif.

Au contraire, pour tous les cas où δ est positif, c'est-à-dire lorsque le moment fléchissant maximum se trouve dans la deuxième moitié de la portée, on prendra pour cette distance la quantité $l - x'$.

Les avantages de la nouvelle courbe peuvent se résumer de la manière suivante.

Les calculs et la construction de la courbe sont notablement simplifiés.

Le moment fléchissant maximum conserve sa valeur déterminée d'après les surcharges réelles.

Enfin, la longueur des semelles additionnelles est sensiblement la même que dans le cas du polygone curviligne.

En comparant les deux courbes on remarque, qu'au sommet commun la courbure de la nouvelle parabole est plus pe-

tite que celle de la courbe n° k ; les ordonnées de cette parabole sont donc supérieures aux ordonnées de la ligne polygonale dans la partie centrale de la portée.

Vers les appuis les deux courbes se rencontrent ; dans les tronçons compris entre les points d'intersection et les appuis, les ordonnées du polygone curviligne sont légèrement supérieures à celles de la courbe approximative. Ainsi la nouvelle parabole n'enveloppe les moments fléchissants que dans la partie centrale de la portée comprise entre les points d'intersection.

Dans les tronçons extrêmes où les premiers éléments de la courbe polygonale se trouvent en dehors de la nouvelle parabole, le moment résistant de la section minima de la poutre ne comportant qu'une seule semelle en haut et en bas, dépasse les ordonnées des points d'intersection, cet excès n'a pas d'influence sur la résistance de la poutre.

Au-dessus de cette section minima, les ordonnées de deux courbes tendent à se confondre, à mesure qu'on se rapproche de l'abscisse x' et que le nombre de charges augmente.

Dans les cas où l'ordonnée du moment résistant avec une semelle \mathcal{M}_1 se trouve inférieure à celle des points d'intersection, les différences entre les abscisses de deux courbes correspondant à la même ordonnée sont compensées par le surcroît de la longueur qu'on donne toujours aux semelles additionnelles sous le nom de *recouvrement*. De cette manière, la semelle additionnelle forme corps avec la poutre au point de passage de la courbe-enveloppe des moments fléchissants, et par suite l'augmentation du travail à la flexion en ce point n'est plus à craindre.

Equation générale. — L'équation de la courbe proposée s'établit de la manière suivante.

Considérons l'équation d'une parabole à axe vertical sous la forme générale.

$$y = Ax + Bx^2 + C;$$

et cherchons à déterminer les coefficients A, B et C de la manière à satisfaire à l'énoncé ci-dessus.

La courbe passant par l'origine, on a pour $x = 0$, $y = 0$; donc le terme indépendant $C = 0$, et l'équation ci-dessus devient

$$y = Ax + Bx^2.$$

Ensuite pour $x = x'$ l'ordonnée y représentant le moment fléchissant M' , nous avons

$$y = M'.$$

Enfin le sommet de la parabole correspondant à l'abscisse x' , la dérivée de son équation par rapport à la variable x est nulle.

$$\frac{dM}{dx} = 0.$$

De ces conditions résultent les deux relations suivantes :

$$\begin{array}{l} M' = Ax' + Bx'^2 \\ 0 = A + 2Bx' \end{array}$$

lesquelles, résolues, donnent pour les coefficients A et B des valeurs suivantes.

$$A = \frac{2M'}{x'}$$

$$B = -\frac{M'}{x'^2}.$$

On obtient par la substitution, l'équation suivante de la courbe-enveloppe approximative

$$(41) \quad y = M = \frac{2M'}{x'} x - \frac{M'}{x'^2} x^2.$$

On voit que cette courbe est exprimée uniquement en fonction de l'abscisse x' et du moment maximum M' ; par conséquent, elle peut se calculer dans chaque cas particulier à l'aide des tableaux II, III et IV d'une part, et par les tableaux XII et XIII d'autre part.

Mais on peut même être dispensé de faire ces calculs.

En effet, ce qui est nécessaire dans le calcul de résistance d'une poutre, ce n'est pas le tracé de la courbe-enveloppe,

mais la détermination de la longueur des semelles additionnelles.

Or, la formule (46) que nous donnons ci-après, permettant d'obtenir directement les abscisses des points d'intersection de la courbe avec les lignes des moments résistants, on utilisera ces points, lesquels, avec les points à l'origine et au sommet, donneront le tracé exact de la courbe.

Calcul de la longueur des semelles additionnelles. — Les équations générales des moments fléchissants, ou celles de leur courbe-enveloppe approximative, combinées avec les moments résistants de diverses sections de la poutre, permettent d'obtenir par le calcul, avec l'approximation voulue, les longueurs correspondantes des tôles formant les semelles additionnelles.

Cette longueur se calcule de manière que le contour représentatif des moments résistants, calculé pour un travail donné, présente, en chaque point de la portée, les ordonnées supérieures à celles de la courbe des moments fléchissants.

Pour arriver à ce résultat, on détermine d'abord les longueurs des cordes paraboliques λ comprises, chacune, entre les deux points d'intersection de la courbe des moments fléchissants avec la ligne horizontale représentant le moment résistant correspondant.

Cette longueur λ , augmentée ensuite d'une certaine quantité, pour assurer le recouvrement, constitue la longueur totale de la semelle.

La longueur des recouvrements doit être telle, que la section des rivets soit équivalente à celle de la semelle, pour les poutres à âme pleine; elle est donc de 0,20 m à 0,30 m de chaque côté de la semelle.

Pour les poutres à treillis, le recouvrement doit être prolongé jusqu'à l'axe du montant ou du croisement de deux barres de treillis.

Les expressions simples des longueurs λ , auxquelles nous

sommes arrivés, permettent de résoudre la question dans tous les cas qui peuvent se présenter.

Nous donnons, ci-après, les expressions qui s'appliquent au cas de la charge uniformément répartie, et au cas des surcharges isolées.

1^{er} cas. — *Surcharge uniformément répartie sur toute la longueur de la travée.* — Désignons par M' le moment fléchissant maximum, et par \mathcal{M} le moment résistant pour lequel on cherche les points d'intersection avec la courbe des moments.

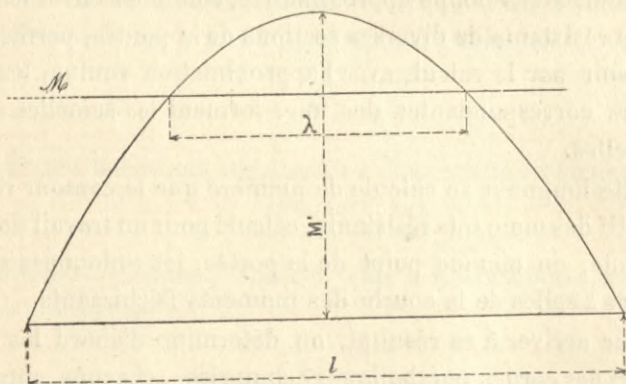


Fig. 9.

Pour les poutres à une travée, la longueur de la corde parabolique λ , correspondant aux surcharges considérées, s'exprime par la formule suivante (fig. 9) :

$$(42) \quad \lambda = l \sqrt{1 - \frac{\mathcal{M}_b}{M'}}$$

La démonstration de cette formule se trouve à la page 54 de notre brochure sur les moments d'inertie (1).

Dans le cas des poutres à plusieurs travées, la longueur λ se détermine en résolvant l'équation du 2^e degré de la page 55 de la brochure citée :

$$px^2 - 2A_k x - 2(M_k \pm \mathcal{M}_b) = 0.$$

(1) *Expressions analytiques et tables des moments d'inertie et des moments résistants.* Chez M. Baudry et Cie, éditeurs.

Toutefois, dans le tronçon central de chaque travée, on pourra employer la formule (42) en y remplaçant l par $2x_s$.

$$(43) \quad \lambda = 2x_s \sqrt{1 - \frac{M_b}{M_{x_s}}}$$

Nous désignons par x_s l'abscisse correspondant au moment fléchissant maximum M_{x_s} qui se trouve dans le tronçon central de la travée.

2^e cas. — *Surcharges mobiles. Le contour des moments fléchissants est limité par la courbe polygonale.* — Dans le cas des surcharges mobiles, la longueur de la corde parabolique s'exprime par la différence

$$(44) \quad \lambda = l - 2x_a$$

x_a représentant l'abscisse du point d'intersection de l'élément de la courbe-enveloppe des moments fléchissants avec la ligne horizontale représentant le moment M_b (fig. 10).

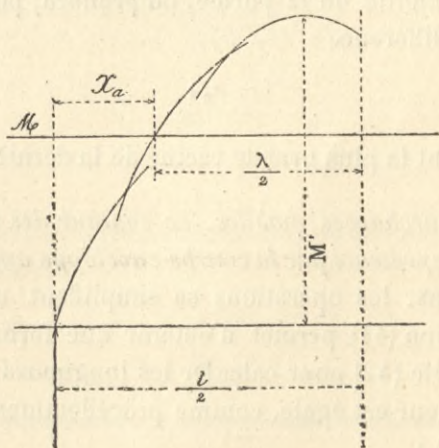


Fig. 10.

L'équation de l'élément de la courbe-enveloppe est, en général, en supprimant les indices :

$$M = -\Sigma Pd + \left(\Pi + \frac{\Sigma Pd - \Sigma Pd'}{l} + \frac{pl}{2} \right) x - \left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2} \right) x^2.$$

Au point d'intersection, le moment fléchissant M est égal

au moment résistant \mathcal{M} . On a donc, pour déterminer l'abscisse cherchée, l'équation suivante à résoudre :

$$-\left(\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2 + \left(\Pi + \frac{\Sigma Pd - \Sigma Pd'}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - (\Sigma Pd + \mathcal{M}) = 0.$$

Tous les termes de cette équation sont connus par le calcul préalable. Sa formation ne présente donc pas de difficulté.

Pour simplifier les calculs, on divise tous les termes de cette équation par le coefficient de x^2 . L'équation à résoudre devient dans ce cas :

$$(45) \quad -x^2 + \left[l + \frac{\Sigma Pd - \Sigma Pd'}{\Pi + \frac{pl}{2}} \right] x - \frac{\Sigma Pd + \mathcal{M}}{\frac{\Pi}{l} + \frac{p}{2}} = 0.$$

La plus petite racine de cette équation donnera l'abscisse x_a , pour tous les cas où l'élément considéré de la courbe se trouve dans la première moitié de la portée.

Au contraire, lorsque l'élément de la courbe se trouve dans la deuxième moitié de la portée, on prendra, pour l'abscisse cherchée, la différence

$$l - x_b;$$

x_b représentant la plus grande racine de la dernière équation.

3^e cas. — *Surcharges mobiles. Le contour des moments fléchissants est représenté par la courbe-enveloppe approximative.*

— Dans ce cas, les opérations se simplifient notablement. Ainsi, l'équation (41) permet d'obtenir une formule simple, analogue à celle (42) pour calculer les longueurs λ .

Cette longueur est égale, comme précédemment, à la différence (fig. 11) :

$$\lambda = l - 2x_a.$$

x_a représentant l'abscisse du point d'intersection de la courbe-enveloppe avec la ligne horizontale représentant le moment résistant correspondant \mathcal{M} .

Pour obtenir cette abscisse, remarquons qu'au point d'intersection, l'ordonnée de la courbe-enveloppe est égale à celle

de la ligne horizontale, représentant le moment résistant M ;
on aura donc l'équation suivante à résoudre :

$$\frac{M'}{x'^2} x^2 - \frac{2M'}{x'} x - Mb = 0.$$

D'où, en résolvant

$$2x_a = \frac{\frac{2M'}{x'} \pm \sqrt{\frac{4M'^2}{x'^2} - \frac{4M' \cdot Mb}{x'^2}}}{2 \frac{M'}{x'}}.$$

Divisant le numérateur et le dénominateur de cette expression par le facteur commun $\frac{2M'}{x'}$, et en remarquant que le pre-

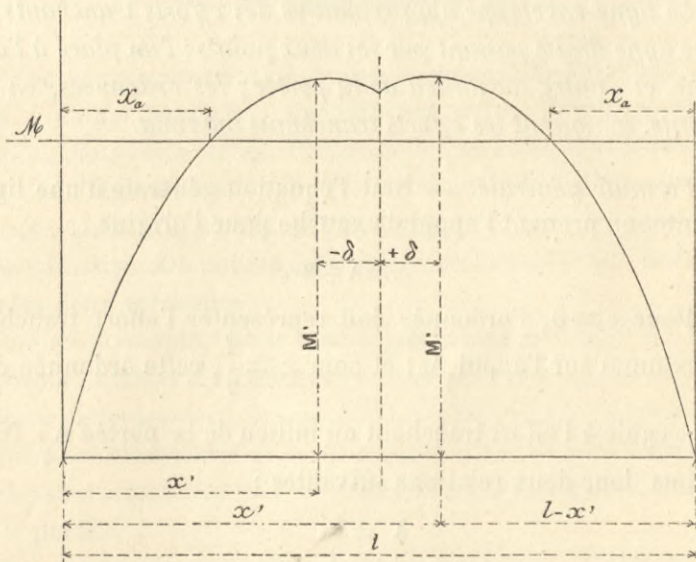


Fig. 11.

mier point d'intersection correspondant à la plus petite racine,
qui résout la question, nous avons :

$$2x_a = \left(1 - \sqrt{\frac{M' - Mb}{M'}}\right) 2x$$

Et, par suite :

$$(46) \quad \lambda = l - \left(1 - \sqrt{\frac{M' - Mb}{M'}}\right) 2x'.$$

Nous rappellerons que lorsque le moment fléchissant maxi-

imum se trouve dans la deuxième moitié de la portée, on doit remplacer l'abscisse x' par la distance complémentaire $l - x$ (fig. 11, deuxième moitié).

b) *Ligne-enveloppe des efforts tranchants.*

Après avoir indiqué, dans le chapitre I^{er}, la formation de la ligne-enveloppe exacte des efforts tranchants, nous allons terminer ce chapitre par l'indication de la ligne-enveloppe approximative, pouvant être calculée plus rapidement, et s'appliquer dans beaucoup de cas dans la pratique.

La ligne-enveloppe approximative des efforts tranchants est une ligne droite passant par les deux points : l'un placé à l'origine, et l'autre au milieu de la portée ; les ordonnées, en ces points, indiquant les efforts tranchants maxima.

Formule générale. — Soit l'équation générale d'une ligne droite, en prenant l'appui de gauche pour l'origine :

$$y = A + Bx.$$

Pour $x = 0$, l'ordonnée doit représenter l'effort tranchant maximum sur l'appui A_0 ; et pour $x = \frac{l}{2}$, cette ordonnée doit être égale à l'effort tranchant au milieu de la portée $A_{\frac{l}{2}}$. Nous avons donc deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} A &= A_0 \\ A_{\frac{l}{2}} &= A_0 + Bx \end{aligned}$$

La dernière relation nous donne

$$B = - \frac{2(A_0 - A_{\frac{l}{2}})}{l}.$$

Et l'équation de la ligne enveloppe approximative des efforts tranchants A se présentera sous la forme suivante :

$$(47) \quad y = A' = A_0 - \frac{2(A_0 - A_{\frac{l}{2}})}{l} x.$$

Le calcul de cette formule, dans chaque cas particulier, se

fait sans difficulté à l'aide des tableaux VII, VIII et IX pour les poutres supportant les voies ferrées, et par les tableaux XIV et XV pour les poutres supportant les voies de terre.

Les résultats obtenus par la formule approximative sont légèrement supérieurs en tous points de la portée aux résultats exacts, sauf pour les deux points extrêmes, pour lesquels les ordonnées, calculées par les deux méthodes, sont identiques.

On pourra, du reste, apprécier les différences pour l'exemple numérique que nous donnons à la fin du chapitre suivant.

V. — EXEMPLE COMPARATIF

Ce chapitre a pour but de donner les détails de l'application, à un exemple numérique des tableaux et des formules développées dans cette partie. Il comprend par suite la détermination des courbes-enveloppes des moments fléchissants et des efforts tranchants par la méthode exacte et par la méthode approximative. On pourra donc comparer les résultats obtenus par les deux méthodes.

Comme exemple, nous avons pris la poutre d'un viaduc à une voie de 28 m d'ouverture et de 29 m de portée.

Pour cette dernière, les calculs des moments par la méthode exacte sont plus compliqués, à cause de la position du moment fléchissant maximum qui se trouve dans la deuxième moitié de la portée.

Les surcharges sont celles du train théorique adopté par la Compagnie des Chemins de fer de l'Ouest.

Les données principales de l'exemple numérique sont donc les suivantes :

Portée. — La portée comptée entre les centres des appuis est $l = 29 \text{ m}$

Charges. — La charge permanente par mètre courant de poutre est $p = 1\ 600 \text{ kg}$

La surcharge correspondant à la demi-voie est :

Pour les roues des machines $P_1 = 7\ 500\ kg$

— tenders $P_2 = 6\ 500\ kg$

Nombre des charges. — Le nombre des charges du train, qui se trouvent sur le viaduc dans la position initiale, comportant la charge n° 1 (fig. 3, page 73) au droit de l'appui de gauche, se détermine tout d'abord par le tableau VIII.

En effet, la dernière colonne de ce tableau montre que la portée donnée de $29\ m$ se trouve comprise entre $26\ m$ et $29,50\ m$. Or, pour cette série de portées, la première colonne de ce tableau indique douze charges.

Nous avons en conséquence pour la position initiale un système de douze charges à considérer. Ce système, conformément à l'indication de la deuxième colonne de ce tableau, se compose de huit roues de machines et de quatre roues de tenders.

$$8 P_1 + 4 P_2.$$

Avec ces données, nous allons calculer les courbes-enveloppes des efforts maxima.

a) *Courbes-enveloppes des moments fléchissants. Calcul par la méthode exacte.*

Moment fléchissant maximum. — La dernière colonne du tableau III indique que la portée de $29\ m$ se trouvant comprise entre $27,06\ m$ et $31,94\ m$, le moment fléchissant maximum est produit par un système de douze charges de même composition que dans la position initiale.

La troisième colonne du tableau III indique que ce moment maximum se produit au droit de l'essieu n° 7, lorsque celui-ci se trouve au point ayant pour l'abscisse x' la valeur suivante donnée par la formule de la cinquième colonne de ce tableau.

$$x' = \frac{l}{2} + \frac{304,2}{172 + pl} = 45,89\ m.$$

Le moment fléchissant maximum se trouve donc dans la

deuxième moitié de la portée. Cette constatation nous sera utile pour composer les éléments de la courbe-enveloppe.

La valeur numérique de ce moment, calculée par la formule de la sixième colonne du tableau III, est la suivante :

$$M' = -481,050 + \left(\frac{86,000}{l} + \frac{p}{2} \right) x'^2 \\ = 469,835.$$

Premier déplacement du train. — La longueur du train composé de douze charges, comptée entre les essieux extrêmes, est :

$$D = 26,00 \text{ m.}$$

Lorsque le train se déplace de gauche à droite, entre la position initiale indiquée ci-dessus, et la position finale, où l'essieu n° 12, atteint sans le dépasser l'appui de droite, la longueur des courbes des moments fléchissants, correspondant au déplacement de chaque essieu, sera :

$$l - D = 29,00 \text{ m} - 26,00 = 3,00.$$

Examinons les diverses courbes de ce déplacement.

Composition de la courbe-enveloppe. — Tous les arcs correspondant au premier déplacement du train, n'entrent pas dans la composition de la courbe-enveloppe. On doit d'abord en exclure tous ceux qui se trouvent en dehors des abscisses limites des éléments de la courbe données par la formule (25) ou par l'avant-dernière colonne du tableau VI.

Ensuite, le moment fléchissant maximum ayant lieu dans la deuxième moitié de la portée, les éléments de la courbe-enveloppe dans la partie centrale de la portée seront formés par les plus fortes charges situées dans cette région, soit par les charges n^{os} 7, 8, 9 ... Il est donc inutile de calculer les éléments correspondants de la première moitié, relatifs aux charges n^{os} 5 et 6.

Dans le premier tronçon de la travée, en partant de l'origine, les éléments de la courbe-enveloppe correspondent toujours au déplacement des charges n^{os} 1, 2, 3. ...

En réunissant sur la même moitié de la portée les deux

parties de la courbe-enveloppe, et en établissant l'ordonnée commune de leur point d'intervention, on obtiendra le contour complet de cette courbe dans la partie considérée. Ce contour se reproduira symétriquement par rapport au milieu de la portée dans la partie restante de la poutre.

Prenons maintenant dans le tableau VI les formules correspondant aux douze charges, et calculons d'abord les abscisses des points d'intersection des éléments successifs.

En comparant ces abscisses avec l'emplacement des courbes pendant le premier déplacement du train, nous arrivons aux résultats suivants :

NUMÉROS DES COURBES	LONGUEUR ET EMPLACEMENT DES COURBES	ABSCISSES LIMITES DES ÉLÉMENTS	LONGUEUR UTILE DES COURBES
1	0 à 3,00 m	$x_1 = 2,53 m$	2,53 m
2	1,20 à 4,20	$x_2 = 5,06$	1,67
3	2,40 à 5,40	$x_3 = 5,06$	0,34
4	3,60 à 6,60	$x_4 = 7,59$	0
5	Recouverte par la courbe n° 8		
6	— par la courbe n° 7		
7	15,30 à 18,30 m	$x_7 = 17,03 m$	1,73 m
8	16,50 à 19,50	$x_8 = 17,03$	2,47
9	17,70 à 20,70	$x_9 = 19,56$	1,14

Il résulte, de ce tableau, que la courbe-enveloppe sera formée des éléments nos 1, 2 et 3, dans la première moitié de la portée, et des éléments nos 7, 8 et 9 dans la deuxième moitié.

Dans le premier déplacement du train, les éléments n° 1 et n° 7 de la courbe-enveloppe sont entièrement formés; pour l'élément n° 8, il ne manque qu'une longueur de 0,06 m pour atteindre l'abscisse x_8 ; et, enfin, les éléments restants, nos 2, 3 et 9 ne sont formés que sur une partie de leur longueur.

Pour compléter ces derniers éléments, un deuxième dépla-

gement du train est nécessaire ; le train, dans ce déplacement, n'aura que 11 charges, et son parcours aura lieu sur une longueur de 2,50 m, comprise entre les apparitions successives sur l'appui de droite des charges n^{os} 12 et 11.

La composition de la courbe-enveloppe étant ainsi déterminée, nous allons calculer les équations de ses éléments d'après les formules du tableau VI, qui correspondent aux 12 et 11 charges.

Les équations des courbes n^{os} 8 et 9, qui ne se trouvent pas dans ce tableau, se calculent, sans difficulté, à l'aide du tableau I et de la formule (37).

Ainsi, les premiers termes de ces équations, d'après le tableau I, sont les suivants :

Pour la courbe n^o 8 :

$$\Sigma_8^1 Pd = 541,650$$

Pour la courbe n^o 9 :

$$\Sigma_9^1 Pd = 611,250.$$

Le deuxième terme du coefficient d' x , calculé par la formule (37), présente les valeurs suivantes :

Pour la courbe n^o 8 :

$$\Sigma_8^1 Pd - \Sigma_8^{12} Pd = \Pi d_8 - \Pi g = 1419,0 - 1011,6 = 407,4$$

Pour la courbe n^o 9 :

$$\Sigma_9^1 Pd - \Sigma_9^{12} Pd = \Pi d_9 - \Pi g = 1522,2 - 1011,6 = 510,6.$$

Par suite, les deux équations se présenteront sous la forme suivante :

Équation (8)

$$(M) x_7^8 = -541,650 + \left(86,000 + \frac{407,400}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(86,000 + \frac{p}{2}\right) x^2$$

Équation (9)

$$(M) x_8^9 = -611,250 + \left(83,000 + \frac{510,600}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(86,000 + \frac{p}{2}\right) x^2.$$

Les équations des courbes n^{os} 2 et 3, relatives au deuxième

déplacement du train, se calculent par les formules du tableau VI, correspondant à 11 charges.

L'équation de la courbe n° 9 (en négligeant celle de la courbe n° 8), se calcule de la même manière que dans le cas précédent.

Le premier terme de cette équation restant le même que pour la courbe n° 9 ci-dessus, le terme restant, calculé par la formule (37), est, pour $d_9 = 17,70$ et $\Pi_9 = 79,50 t$:

$$\Sigma_9^1 Pd - \Sigma_9^{11} Pd = \Pi d_9 - \Pi g = 1407,15 - 842,60 = 564,55$$

L'équation (9) correspondant à 11 charges prendra, en conséquence, la forme suivante :

$$(M)_{20,70}^{x_9} = -611,250 + \left(79,500 + \frac{564,550}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(79,500 + \frac{p}{2}\right) x^2.$$

Réunissant les équations obtenues, et effectuant les calculs, nous obtenons les équations suivantes des éléments successifs de la courbe-enveloppe :

Courbe n° 1.

$$(M)_{0}^{x_1} = \left(86,000 - \frac{1011,600}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(\frac{86,000}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2 = 74,317 x - 3,766 x^2$$

$x_1 = 0,0872 l = 2,53 m.$
 $Mx_1 = 163,916.$

Courbe n° 2.

$$(M)_{x_1}^{4,20} = -9,000 + \left(86,000 - \frac{908,400}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(\frac{86,000}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2$$

$= -9,000 + 77,877 x - 3,766 x^2$
Pour $x_1 = 2,53 m$
 $Mx_1 = 163,920$
Pour $x = 4,20 m$
 $M_{4,20} = 251,648.$

Courbe n° 2bis.

$$(M)_{4,20}^{x_2} = -9,000 + \left(79,500 - \frac{747,200}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(\frac{79,500}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2$$

$= -9,000 + 76,935 x - 3,5414 x^2.$
Pour $x = 4,20 m$
 $M_{4,20} = 251,657$
Pour $x_2 = 0,1744 l = 5,06 m$
 $Mx_2 = 271,618.$

Courbe n° 3.

$$\begin{aligned}
 (M)_{x_2}^{5,40} &= -27,000 + \left(86,000 - \frac{805,200}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(\frac{86,000}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2 \\
 &= -27,000 + 81,434 x - 3,766 x^2. \\
 \text{Pour } x_2 &= 5,06 \text{ m} \\
 M_{x_2} &= 288,633 \\
 \text{Pour } x &= 5,40 \text{ m} \\
 M_{5,40} &= 302,927.
 \end{aligned}$$

Courbe n° 3^{bis}.

$$\begin{aligned}
 (M)_{5,40}^{7,0} &= -27,000 + \left(79,500 - \frac{651,800}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(\frac{79,500}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2 \\
 &= -27,000 + 80,224 x - 3,5414 x^2. \\
 \text{Pour } x &= 5,40 \text{ m} \\
 M_{5,40} &= 302,942 \\
 \text{Pour } x &= 6,55 \text{ m} \\
 M_{6,55} &= 346,532.
 \end{aligned}$$

Courbe n° 7.

$$\begin{aligned}
 (M)_{x'}^7 &= -481,050 + \left(86,000 + \frac{304,200}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(\frac{86,000}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2 \\
 &= -481,050 + 119,690 x - 3,766 x^2 \\
 \text{Pour } x' &= 15,89 \text{ m} \\
 M_{x'} &= 469,839 \\
 \text{Pour } x_7 &= 0,5872 \text{ l} = 17,03 \text{ m} \\
 M_{x_7} &= 465,052.
 \end{aligned}$$

Courbe n° 8.

$$\begin{aligned}
 (M)_{x_7}^{19,50} &= -541,650 + \left(86,000 + \frac{407,400}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(\frac{86,000}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2 \\
 &= -541,650 + 123,250 x - 3,766 x^2 \\
 x_7 &= 17,02 \text{ m} \\
 M_{x_7} &= 465,079 \\
 x &= 19,50. \quad M_{19,50} = 429,702.
 \end{aligned}$$

Courbe n° 9.

$$\begin{aligned}
 (M)_{x_8}^{20,70} &= -611,250 + \left(86,000 + \frac{510,600}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(\frac{86,000}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2 \\
 &= -611,250 + 126,807 x - 3,766 x^2 \\
 x_8 &= 0,6744 \text{ l} = 19,56 \text{ m} \\
 M_{x_8} &= 428,247 \\
 x &= 20,70. \quad M_{20,70} = 399,961.
 \end{aligned}$$

Courbe n° 9^{bis}.

$$\begin{aligned}
 (M)_{20,70}^{23,20} &= -611,250 + \left(79,500 + \frac{564,550}{l} + \frac{pl}{2}\right) x - \left(\frac{79,500}{l} + \frac{p}{2}\right) x^2 \\
 &= -611,250 + 122,167 x - 3,5414 x^2 \\
 x &= 20,70 \quad M_{20,70} = 400,152 \\
 x &= 22,45 \quad M_{22,45} = 346,534.
 \end{aligned}$$

La dernière abscisse $x = 22,45$ m désigne le point d'intersection de la courbe n° 9 bis avec celle n° 3 bis rabattue sur la 2^e moitié de l'épure. Elle est obtenue en égalant les équations de ces courbes, après avoir remplacé dans la courbe n° 3 bis x par $l - x$. On obtient ainsi l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & -611,250 + 122,167x - 3,5414x^2 + 27,000 \\ & -80,224(l-x) + 3,5414(l-x)^2 = 0 \end{aligned}$$

Soit en effectuant les calculs

$$67,571 - 3,010x = 0$$

D'où

$$x = \frac{67,571}{3,010} = 22, \frac{5}{4} \text{ m.}$$

L'abscisse correspondant de la courbe n° 3 bis indiquée plus haut est

$$l - x = 29,00 - 22,45 = 6^{\text{m}},55.$$

Les moments fléchissants aux points d'intersection des courbes doivent être les mêmes pour les deux équations. Les différences constatées dans les tableaux ci-dessus proviennent de la suppression des décimales; elles peuvent être considérées comme négligeables.

Les courbes, et leurs abscisses limites que nous venons de calculer sont représentées graphiquement par des lignes pleines, sur la planche, figure 1. Nous avons rabattu sur la 2^e moitié de la portée les trois premiers éléments de la courbe-enveloppe.

Le contour des moments fléchissants ainsi établi sur l'une des moitiés de la poutre, et se reproduisant symétriquement sur l'autre moitié, nous servira pour déterminer la longueur ur des semelles additionnelles.

Calcul de la longueur des semelles additionnelles. — La section transversale de la poutre est représentée par la figure 3 de la planche. Les semelles sont formées successivement de 1, 2, 3 et 4 feuilles de tôles de 420/10. Les moments d'inertie de ces sections sont les suivants :

Section avec	1 semelle.	$I_1 = 0,062\ 472\ 804.$
—	2 semelles	$I_2 = 0,079\ 455\ 864.$
—	3 —	$I_3 = 0,096\ 665\ 550.$
—	4 —	$I_4 = 0,114\ 101\ 677.$

Et, par suite, les moments résistants $\mathcal{M} = \frac{RI}{v}$ calculés pour le travail $R = 6\ 500\ 000$.

Pour la section avec	1 semelle	$\mathcal{M}_1 = 268,812$
—	2 semelles.	$\mathcal{M}_2 = 339,795$
—	3 —	$\mathcal{M}_3 = 410,671$
—	4 —	$\mathcal{M}_4 = 481,598$.

Ces moments sont représentés par des lignes horizontales sur l'épure (fig. 1 et 2, pl.). Le dernier moment résistant \mathcal{M}_4 est calculé de manière à dépasser le moment fléchissant maximum.

$$M' = 469,839.$$

Ces calculs préliminaires étant faits, la longueur des semelles additionnelles se calcule de la manière suivante :

Longueur de la 2^e semelle. — En comparant les moments résistants avec les moments fléchissants représentés sur la figure 1 de la planche, on voit que la ligne du moment résistant \mathcal{M}_1 de la section avec une semelle, rencontre l'élément n° 2 *bis* de la courbe-enveloppe correspondant au deuxième déplacement du train.

En conséquence, pour obtenir l'abscisse du point d'intersection x_a , nous avons l'équation suivante à résoudre :

$$- 9,000 + 76,935 x - 3,5414 x^2 = 268,812.$$

Pour simplifier les opérations, divisons tous les termes de cette équation par le facteur 3,5414 qui forme le coefficient de x^2 . Nous aurons donc, après la réduction.

$$- x^2 + 21,72 x - 75,9056 = 0.$$

La plus petite racine de cette équation donnera l'abscisse x_a cherchée.

3^e semelle. — En procédant de la même manière, nous remarquons que la ligne horizontale représentant le moment résistant \mathcal{M}_2 rencontre l'élément n° 9 *bis* de la courbe-enve-

loppe relatif au 2^e déplacement du train. L'équation à résoudre sera donc :

$$-611,250 + 122,167 x - 3,5414 x^2 = 339,795.$$

Soit après la réduction :

$$-x^2 + 34,50 x - 26,8551 = 0.$$

La plus grande racine de cette équation donnera la différence

$$l - x_a$$

De laquelle on déduira sans difficulté l'abscisse x_a correspondante à la 2^e semelle.

4^e semelle. — Enfin, en comparant la ligne du moment résistant M_3 avec les ordonnées des moments fléchissants, on voit qu'elle rencontre l'élément n° 9 de la courbe-enveloppe relatif au premier déplacement du train. Nous avons en conséquence l'équation suivante à résoudre :

$$-611,250 + 126,807 x - 3,766 x^2 = 410,671$$

Ou bien après la réduction :

$$-x^2 + 33,67 x - 271,3545 = 0.$$

La plus grande racine de cette équation donnera, comme dans le cas précédent, la différence $l - x_a$, de laquelle on déduira l'abscisse x_a servant à calculer la longueur λ de la 4^e semelle.

Résolvant les équations formées ci-dessus, et complétant les calculs par l'addition des recouvrements, on trouve successivement les longueurs suivantes des semelles additionnelles.

	ÉQUATIONS A RÉSOUDRE	ABSCISSES x_a	LONGUEURS $\lambda = l - 2x_a$	RECOURVEMENTS	LONGUEUR TOTALE
2 ^e semelle ..	$-x^2 + 21,72 x - 75,9056$	m 8,75	m 20,25	m 2,95	m 23,20
3 ^e —	$-x^2 + 34,50 x - 268,5506$	12,73	16,27	1,13	17,40
4 ^e —	$-x^2 + 33,67 x - 271,3545$	17,38	11,62	0,58	12,20

La figure 1 de la planche représente les longueurs de $1/2 \lambda$ dans la 2^e moitié de la portée. Les recouvrements un peu grands de la 2^e et 3^e semelles ont été nécessités par l'obligation de prolonger la semelle additionnelle jusqu'à l'axe du montant suivant, afin d'assurer la résistance suffisante au moment fléchissant ; l'intensité de ce dernier étant constante entre les deux croisements successifs des barres de croisillons.

Tels sont en résumé les calculs à effectuer par la méthode exacte, pour déterminer la résistance de la poutre à la flexion, sous l'action des surcharges roulantes.

Nous allons effectuer des calculs analogues par la méthode approximative.

Calcul par la méthode approximative.

Equation de la courbe-enveloppe. — La méthode approximative de calculer la courbe-enveloppe des moments fléchissants consiste, comme nous l'avons posé dans le chapitre précédent, à substituer à la courbe polygonale, une parabole à axe vertical. Cette parabole étant déterminée de manière à passer par l'origine, et avoir son sommet au même point que le sommet de la courbe n^o 7, représentant le moment fléchissant maximum.

La parabole ainsi déterminée se calcule en conséquence par l'équation 41), dans laquelle on remplacera x' par $l - x'$; le moment fléchissant dans l'exemple considéré se trouvant dans la 2^e moitié de la portée. On aura donc pour $M' = 469,839$ et $l - x' = 29,00 \text{ m} - 15,89 = 13,11 \text{ m}$.

$$M = \frac{2M'}{l - x'} x - \frac{M'}{(l - x')^2} x^2 = \frac{939,678}{13,11} x - \frac{469,839}{(13,11)^2} x^2 = 71,6764 x - 2,7336 x^2.$$

Elle est représentée sur l'épure par des traits interrompus dans la 1^{re} moitié de la portée (fig. 2 de la planche). Cette ligne rabattue symétriquement sur la 2^e moitié montre la différence entre ses ordonnées, et celles de la courbe exacte.

Dans la pratique, la construction de cette courbe est très

facile, car on connaît son sommet, le point à l'origine et les points d'intersection avec les lignes horizontales représentant les moments résistants ; ces derniers étant calculés par la formule 45).

Calcul des semelles additionnelles. — La longueur λ de la corde parabolique dans le cas de la courbe-enveloppe approximative, se calcule par la formule directe 45).

$$\lambda = l - 2 \left(1 - \sqrt{\frac{M' - Mb}{M'}} \right) (l - x') = 29,00 m - \left(1 - \sqrt{\frac{469,839 - Mb}{469,839}} \right) 26,22 m.$$

Attribuant au moment résistant Mb les valeurs de Mb_1 , Mb_2 et Mb_3 calculés précédemment, et effectuant les calculs, on arrive successivement aux résultats suivants :

	LONGUEURS λ	RECOUVREMENTS	LONGUEUR TOTALE
	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>
2 ^e semelle.	19,93	3,27	23,20
3 ^e —	16,57	0,83	17,40
4 ^e —	12,09	0,51	12,60

Les longueurs calculées de λ et des recouvrements sont représentées sur l'épure dans la 1^{re} moitié de la portée (fig., 2 de la planche.

En comparant les résultats obtenus par les deux méthodes, on voit que les longueurs λ , calculées par la dernière méthode, sont légèrement supérieures à celles de la méthode précédente, sauf la longueur de λ_2 qui en est légèrement inférieure. Ainsi la différence en plus est :

$$\begin{aligned} \text{Pour la 4^e semelle : } & 12,09 - 11,02 = 0,47, \text{ soit } 0,016 l; \\ \text{— 3^e — } & : 16,57 - 16,27 = 0,30, \text{ soit } 0,010 l. \end{aligned}$$

La différence en moins pour la 2^e semelle est :

$$20,25 m - 19,93 m = 0,32 m, \text{ soit } 0,011 l.$$

Ces différences ne sont pas excessives.

Dans la partie centrale de la portée, tout en n'entraînant pas une grande augmentation du métal, elles assurent une

plus grande résistance à la poutre. Quant à l'insuffisance de la longueur de λ_2 , elle se trouve compensée et au delà par les recouvrements relativement grands, pour prolonger la semelle jusqu'aux montants suivants.

LIGNE-ENVELOPPE DES EFFORTS TRANCHANTS

Calcul par la méthode exacte.

L'effort tranchant maximum ayant lieu, pendant le déplacement du train, au droit de l'essieu n° 1 (fig. 3), sa valeur en un point quelconque de la portée, ayant pour l'abscisse $x = a$, se calcule par la formule 34).

$$A = \left(\Pi - \frac{\sum_1^n Pd'}{l} + \frac{pl}{2} \right) - \left(\frac{\Pi}{l} + p \right) a.$$

Les limites des éléments correspondant aux apparitions successives des charges n° 12, 11, 10, ... sur l'appui de droite, leur longueur aura pour mesure, d'une manière générale :

$$l - D;$$

D étant la longueur du train comptée entre les essieux extrêmes, dans les positions successives, entre la position initiale où l'essieu n° 1 se trouve au droit de l'appui de gauche, et la position finale où cet essieu arrive au milieu de la portée.

Les valeurs numériques des termes de la dernière équation, relatifs à la surcharge, sont donnés directement par le tableau VIII.

On commence par calculer la longueur a et $l - a$ correspondant aux sommets de la ligne-enveloppe.

Ensuite, en comparant les longueurs successives de $l - a$ avec les portées de la dernière colonne du tableau VIII, on trouve sans difficulté les lignes correspondantes de ce tableau qui comprennent ces longueurs.

Chacune de ces lignes indique immédiatement le nombre de charges n , leur poids Π , et la valeur numérique du terme $\sum_1^n Pd'$. On pourra donc facilement établir l'équation 34) pour chacun des éléments considérés de la ligne-enveloppe.

En suivant la marche indiquée, nous arrivons aux équations suivantes de cette ligne :

Premier élément de 0 m à 3,00 m. 12 charges.

$$(A)_{0}^{3,00} = 86,000 - \frac{1011,600}{l} + \frac{pl}{2} - \left(\frac{86,000}{l} + p \right) a = 74,317 - 4,566 a$$

$$\text{Pour } a = 0, A = 74,317 \\ - a = 3,00 \text{ m, } A = 60,619.$$

2^e élément de 3,00 m à 5,50 m. 11 charges.

$$(A)_{3,00}^{5,50} = 79,500 - \frac{842,600}{l} + \frac{pl}{2} - \left(\frac{79,500}{l} + p \right) a = 73,645 - 4,341 a$$

$$\text{Pour } a = 3,00 \text{ m, } A = 60,621 \\ - a = 5,50 \text{ m, } A = 49,769.$$

3^e élément de 5,50 m à 10,10 m. 10 charges.

$$(A)_{5,50}^{10,10} = 73,000 - \frac{689,850}{l} + \frac{pl}{2} - \left(\frac{73,000}{l} + p \right) a = 72,412 - 4,117 a$$

$$\text{Pour } a = 5,50 \text{ m, } A = 49,769 \\ - a = 10,10 \text{ m, } A = 30,830.$$

4^e élément de 10,10 m à 11,30 m. 9 charges.

$$(A)_{10,10}^{11,30} = 65,500 - \frac{548,100}{l} + \frac{pl}{2} - \left(\frac{65,500}{l} + p \right) a = 69,800 - 3,859 a$$

$$\text{Pour } a = 10,10 \text{ m, } A = 30,824 \\ - a = 11,30 \text{ m, } A = 26,193.$$

5^e élément de 11,30 m à 12,50 m. 8 charges.

$$(A)_{11,30}^{12,50} = 58,000 - \frac{415,360}{l} + \frac{pl}{2} - \left(\frac{58,000}{l} + p \right) a = 66,877 - 3,600 a$$

$$\text{Pour } a = 11,30 \text{ m, } A = 26,197 \\ - a = 12,50 \text{ m, } A = 21,877.$$

6^e élément de 12,50 m à 13,70 m. 7 charges.

$$(A)_{12,50}^{13,70} = 50,500 - \frac{291,6}{l} + \frac{pl}{2} - \left(\frac{50,500}{l} + p \right) a = 63,643 - 3,3414 a$$

$$\text{Pour } a = 12,50 \text{ m, } A = 21,877 \\ - a = 13,70 \text{ m, } A = 17,868.$$

7^e élément de 13,50 m à $\frac{l}{2}$. 6 charges.

$$(A)_{13,70}^{14,50} = 43,000 - \frac{176,85}{l} + \frac{pl}{2} - \left(\frac{43,000}{l} + p \right) a = 60,102 - 3,0827 a$$

$$\text{Pour } a = 13,70 \text{ m, } A = 17,869 \\ - a = \frac{l}{2} = 14,50 \text{ m, } A = 15,403.$$

Les résultats des calculs sont représentés par des lignes pleines sur la figure 4 de la planche. C'est le contour théorique

des efforts tranchants représentant les sommets exacts de la ligne-enveloppe.

Pour les poutres à croisillons, comme c'est le cas de notre exemple, l'effort tranchant produit par la surcharge est constant dans l'étendue de chaque panneau, limité par deux montants voisins. Il est donc important dans ce cas de calculer les efforts tranchants au droit de chaque montant, afin d'en déduire les efforts qui s'exercent suivant les barres des croisillons. Ce calcul se fait très facilement à l'aide des équations ci-dessus. Les résultats ainsi trouvés, et complétés par les données générales du problème, sont réunis dans le tableau ci-après.

N° DES MONTANTS	ABSCISSES		CHARGES CORRESPONDANTES		TERMES $\Sigma_1^n Pd'$	VALEURS DES EFFORTS TRANCHANTS A
	a	$l - a$	NOMBRE n	POIDS TOTAL		
	m	m		Π		
				t		t
1	0	29,00	12	86,000	1011,600	74,317
2	2,90	26,10	12	86,000	1011,600	61,077
3	5,80	23,20	10	73,000	689,850	48,533
4	8,70	20,30	10	73,000	689,850	36,593
5	11,60	17,40	8	58,000	415,350	25,118
6	14,50	14,50	6	43,000	174,850	15,471

Ces valeurs de l'effort tranchant sont représentées graphiquement sur la figure 5 de la planche, par des lignes pleines.

Calcul par la méthode approximative.

La ligne-enveloppe approximative des efforts tranchants est, d'après la définition donnée au chapitre précédent, une ligne droite passant par les deux points extérieurs de la ligne exacte calculée ci-dessus; l'un de ces points ayant son ordonnée à l'origine, et l'autre au milieu de la portée.

Substituant dans l'équation 47) qui représente cette ligne, les valeurs numériques des efforts tranchants $A_0 = 74,317$ et $A_{\frac{l}{2}} = 15,403$, obtenues directement par le tableau VIII, on trouve :

$$A = A_0 - \frac{2(A_0 - A_{\frac{l}{2}})}{l} x = 74,317 - \frac{2(74,317 - 15,403)}{l} x = 74,317 - 4,0630 x.$$

Les valeurs numériques des efforts tranchants obtenues de cette équation, au droit des montants successifs de la poutre, forme la 2^e colonne du tableau ci-après. La dernière colonne renferme les efforts tranchants calculés par la méthode précédente. On pourra ainsi comparer les résultats de deux méthodes de calcul.

N ^o DES MONTANTS	ABSCISSES x	VALEURS DES EFFORTS TRANCHANTS	
		APPROXIMATIVES	EXACTES
1	0	74,317	74,317
2	2,90 m	62,354	61,076
3	5,80	50,752	48,533
4	8,70	38,969	36,594
5	11,60	27,185	25,117
6	14,50	15,403	15,403

Les efforts tranchants calculés par la formule approximative sont représentés par des traits interrompus sur l'épure de la planche.

La figure 4 en donne les valeurs extrêmes, et la figure 5 les valeurs intermédiaires au droit des montants.

CONCLUSION

Les formules et les équations que nous venons d'établir, répondent au programme posé au commencement de cette partie.

En effet, en se servant de ces expressions, que nous avons cherché à rendre simples, on peut obtenir pour les poutres à une travée, les efforts maxima, développés sous l'action de la charge permanente, et des surcharges mobiles, définies par la circulaire ministérielle.

L'exemple numérique, donnant les détails de calculs, montre qu'on peut obtenir sans difficulté les courbes-enveloppes des moments fléchissants et des efforts tranchants, soit exactement, soit par la méthode approximative.

Cette dernière se recommande tout particulièrement, à cause de sa grande simplicité.

Pour les moments fléchissants, la courbe approximative, donnant le moment maximum exact, n'exige pas l'augmentation de la section transversale de la poutre inutile à la résistance. De plus, dans la partie centrale de la travée, comprise entre les points d'intersection de deux courbes, les ordonnées de la courbe approximative étant supérieures à celles de la courbe exacte, on est sûr que les efforts développés dans les positions le plus défavorables du train, resteront toujours inférieurs à la limite prescrite. Le supplément de la longueur des semelles additionnelles qui en résulte, ne peut qu'assurer une plus grande résistance à la poutre dans la région où les efforts à la flexion sont les plus grands.

Ce surcroît de la longueur du reste n'est pas considérable. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, il atteint au maximum pour la 4^e semelle 0,016 l pour la longueur λ .

Dans les tronçons compris entre les points d'intersection et les appuis de la poutre, les ordonnées de la courbe approximative étant inférieures à celles de la courbe exacte, l'insuffisance de la longueur de la 2^e semelle, lorsqu'elle se présente, est toujours compensée par le recouvrement, qu'on doit donner à cette semelle.

Pour les efforts tranchants, des avantages analogues sont obtenus par l'emploi de la ligne-enveloppe approximative. L'équation de cette ligne se forme encore plus facilement que

celle des moments fléchissants, et permet de calculer plus rapidement les valeurs numériques des efforts tranchants.

Les résultats obtenus étant supérieurs aux efforts produits par le train dans les positions les plus défavorables, on est assuré, comme précédemment, que le travail maximum ne dépasse nulle part les limites de la circulaire ministérielle.

En conséquence, les courbes-enveloppes approximatives, permettant la simplification des calculs, et donnant les résultats rassurants, peuvent avantageusement remplacer dans la pratique les courbes-enveloppes exactes; ces dernières étant réservées aux cas spéciaux, pour lesquels l'exactitude rigoureuse est préférée.

TROISIÈME PARTIE

CALCUL DES FLÈCHES DES POUTRES DROITES EN TOLE A SECTION VARIABLE

SOMMAIRE

EXPOSÉ

I. — POUTRES A PLUSIEURS TRAVÉES

Équation fondamentale. — Poutres à section constante. — Poutres à section variable. — Cas d'une semelle additionnelle. — Cas de plusieurs semelles additionnelles. — Cas de demi-travées chargées.

II. — POUTRES A UNE TRAVÉE

Flèche produite par la charge uniformément répartie. — Flèche produite par les surcharges isolées. — Cas d'une semelle additionnelle. — Cas de plusieurs semelles additionnelles. — Conditions pour obtenir la plus grande valeur de la flèche.

III. — APPLICATIONS

1. *Poutres à trois travées.* — Données générales. — Composition de la poutre. — Flèche dans la travée centrale. — Longueurs a et b . — Moments fléchissants M et les efforts tranchants A . — Moments d'inertie et le coefficient d'élasticité E . — Valeurs numériques de la flèche. — Flèche dans la travée centrale.

Flèche dans les travées de rive. — Valeurs numériques.

2. *Poutres à une travée.* — Données générales. — Flèche produite par la charge permanente uniformément répartie. — Flèche produite par les surcharges isolées.

EXPOSÉ

Les poutres droites en tôle, qui entrent dans la composition des ponts et viaducs métalliques, sont formées en général d'une âme verticale pleine ou évidée, des cornières et d'un certain nombre de semelles à la partie supérieure et à la partie infé-

rieure de la section. La première de ces semelles, s'étendant sur toute la longueur de la poutre, constitue, avec les parties précédentes, la section constante de cette poutre. Les semelles additionnelles en forment la partie variable.

Lorsqu'on se propose de déterminer la flèche que peut prendre une poutre ainsi formée sous l'action des charges, on se trouve en présence de longs calculs, d'autant plus compliqués, que la question n'a pas été traitée dans les ouvrages de la mécanique appliquée ; on ne trouve, en effet, dans ces derniers, que les formules se rapportant aux poutres à section constante et aux poutres d'égale résistance.

Cependant, la détermination de la flèche étant demandée par la nouvelle circulaire ministérielle, il devient urgent d'établir les formules indiquant la marche à suivre pour répondre au programme indiqué par l'art. 7 de cette circulaire :

« *Calcul des flèches.* — On fournira, à l'appui des projets, le calcul des flèches sous l'action de la charge permanente et de la surcharge. »

Bien avant la promulgation de la circulaire, nous avons traité cette question en vue de réduire les calculs et coordonner les formules, de manière à les rendre applicables sans grande difficulté dans la pratique ; et nous sommes arrivés à établir une méthode de calcul dont nous nous servons pour déterminer la flexion des ponts et viaducs métalliques.

Cette méthode comprend le cas des surcharges uniformément réparties pour les poutres à plusieurs travées ; et pour les poutres à une travée, elle comprend en plus le cas des surcharges isolées, définies par la circulaire ministérielle.

Le présent mémoire comprend trois chapitres. Dans le premier, nous établissons les formules générales de la flèche dans le cas des poutres à plusieurs travées ; le deuxième chapitre donne ces formules pour les poutres à une travée. Ces formules s'appliquent à toutes les dimensions transversales de la poutre, quel que soit le nombre des semelles additionnelles.

Enfin, le troisième chapitre comprend des exemples numériques indiquant en détail la marche à suivre pour arriver au résultat cherché, ainsi que l'influence de l'interruption des semelles additionnelles sur la grandeur de la flèche.

I. — POUTRES A PLUSIEURS TRAVÉES.

Equation fondamentale. — Considérons une travée intermédiaire quelconque d'une poutre à plusieurs travées, dont la portée est l .

Supposons ensuite que les appuis de la poutre se trouvent arrasés au même niveau.

Dans les poutres ainsi disposées, le maximum de la flèche, dans la travée considérée, correspond à la combinaison des surcharges donnant le maximum des moments fléchissants dans le tronçon central de la travée.

Or ces derniers sont produits par la surcharge couvrant entièrement la travée considérée et les autres travées de deux en deux en laissant les travées restantes sous l'influence de la charge permanente seule.

Ceci posé, la relation générale entre les dimensions transversales de la poutre, les forces extérieures et les coordonnées de la ligne moyenne est la suivante :

$$(1) \quad EI \frac{d^2y}{dx^2} = M + Ax - \frac{px^2}{2}.$$

Dans laquelle M et A représentent le moment fléchissant et l'effort tranchant sur l'appui de gauche, p la charge totale par mètre courant de poutre, et I le moment d'inertie de la section correspondante à l'abscisse x .

Pour obtenir l'équation de la ligne moyenne déformée de la poutre, il faut établir la relation entre les abscisses x et les ordonnées y de cette courbe, et, pour cela, il faut intégrer deux fois l'équation (1).

Cette marche appliquée aux divers cas de charges et des

sections de la poutre, permet d'obtenir la flèche en un point quelconque du tronçon central de la travée.

Poutres à section constante

Intégrant deux fois l'équation générale (1), on trouve :

$$(2) \quad EI \left(\frac{dy}{dx} + C_1 \right) = \left(M + \frac{Ax}{2} - \frac{px^2}{6} \right) x.$$

$$(3) \quad EI \left(y + C_1 x + C_1' \right) = \left(\frac{M}{2} + \frac{Ax}{6} - \frac{px^2}{24} \right) x^2.$$

Les constantes C_1 et C_1' se déterminent en remarquant que pour $x = 0$ et $x = l$ on a $y = 0$. On tire de là deux relations suivantes :

$$C_1 = 0 \\ EIC_1 = \left(\frac{M}{2} + \frac{Al}{6} - \frac{pl^2}{24} \right) l.$$

Substituant ces valeurs dans les équations 2) et 3) et réduisant, on obtient deux équations suivantes.

Pour l'inclinaison de la tangente à la ligne moyenne en un point x .

$$(4) \quad EI \frac{dy}{dx} = - \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) M + \left(\frac{l^2}{6} - \frac{x^2}{2} \right) A - \left(\frac{l^3}{24} - \frac{x^3}{6} \right) p \right]$$

Et pour la grandeur de la flèche également en un point quelconque désigné par son abscisse x .

$$(5) \quad Ey = - \left[(lx - x^2) \frac{M}{2} + (l^2x - x^3) \frac{A}{6} - (l^3x - x^4) \frac{p}{24} \right]$$

L'inclinaison de la tangente à la ligne moyenne au milieu de la portée s'obtient en posant dans l'équation 4) $x = \frac{l}{2}$

$$EI \frac{dy}{dx} = - \left[0 + \frac{l^2}{24} A - \frac{l^3}{48} p \right].$$

d'où

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = - \left(A - \frac{pl}{2} \right) \frac{l^2}{24 EI}.$$

On voit que cette inclinaison est indépendante du moment fléchissant M sur l'appui de gauche, elle est proportionnelle à la différence entre l'effort tranchant réel et celui de la poutre

à une travée, au droit de même appui. Elle est positive ou négative suivant que l'effort tranchant A est plus petit ou plus grand que $\frac{pl}{2}$.

La valeur de la flèche au milieu de la portée s'obtient en posant également $x = \frac{l}{2}$ dans l'équation 5).

$$(7) \quad y = - \left[\frac{M}{8} + \frac{Al}{16} - \frac{7l^3}{384} p \right] \frac{l^2}{EI}$$

Poutres à section variable

Cas d'une semelle additionnelle. — Considérons d'abord, pour simplifier les équations à résoudre, le cas d'une semelle additionnelle sur la longueur a et a' à partir des appuis, et sur la longueur $l - (b + b')$ dans le tronçon central, conformément au croquis ci-après (fig. 1).

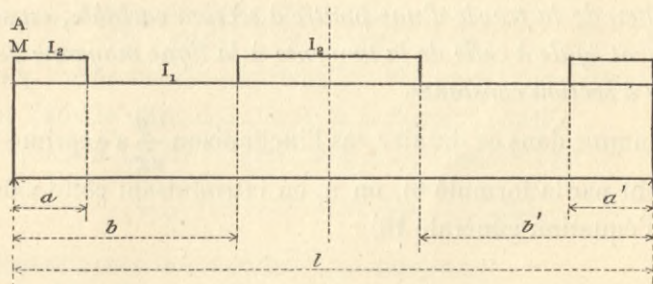


Fig. 1.

Désignons par I_2 et I_1 les moments d'inertie de la section transversale de la poutre avec deux et une semelle.

Appliquant l'équation générale (1) aux trois tronçons de la première moitié de la travée, et l'intégrant une première fois, nous trouvons :

$$(8) \quad E \left(\frac{dy}{dx} + C \right)_0^a = \frac{1}{I_2} \left(Mx + \frac{Ax^2}{2} - \frac{px^3}{6} \right)$$

$$(9) \quad E \left(\frac{dy}{dx} + C' \right)_a^b = \frac{1}{I_1} \left(Mx + \frac{Ax^2}{2} - \frac{px^3}{6} \right)$$

$$(10) \quad E \left(\frac{dy}{dx} + C'' \right)_b^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{I_2} \left(Mx + \frac{Ax^2}{2} - \frac{px^3}{6} \right)$$

Après une deuxième intégration, nous avons :

$$(11) \quad E(y + Cx + C''') = \frac{1}{I_2} \left(\frac{Mx^2}{2} + \frac{Ax^3}{6} - \frac{px^4}{24} \right)$$

$$(12) \quad E(y + C'x + C^{iv}) = \frac{1}{I_1} \left(\frac{Mx^2}{2} + \frac{Ax^3}{6} - \frac{px^4}{24} \right)$$

$$(13) \quad E(y + C''x + C^v) = \frac{1}{I_2} \left(\frac{Mx^2}{2} + \frac{Ax^3}{6} - \frac{px^4}{24} \right)$$

Nous avons ainsi 6 équations et 6 constantes C à déterminer.

Remarquons d'abord que pour $x=0$ on a $y=0$; il en résulte que dans l'équation (5)

$$(14) \quad C''' = 0.$$

Ensuite la constante C'' s'établit de la manière suivante :

Pour éviter les intégrations sur toute la longueur de la travée, ce qui complique notablement les calculs, nous proposons l'hypothèse suivante :

L'inclinaison de la tangente à la ligne moyenne déformée, au milieu de la travée d'une poutre à section variable, est sensiblement égale à celle de la tangente à la ligne moyenne de la poutre à section constante.

Et comme dans ce dernier cas l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ s'exprime facilement par la formule 6), on a, en introduisant cette valeur dans l'équation générale 10)

$$(15) \quad EC'' = \frac{1}{I_2} \left[\left(\frac{M}{2} + \frac{Al}{8} - \frac{pl^3}{48} \right) l + \left(A - \frac{pl}{2} \right) \frac{l^2}{24} \right] = \frac{1}{I_2} \left(\frac{M}{2} + \frac{Al}{6} - \frac{pl^2}{24} \right) l.$$

Enfin pour $x = a$ et $x = b$ les deux tronçons de la ligne moyenne déformée doivent se raccorder tangentiuellement: on doit donc avoir en ces points les mêmes y et $\frac{dy}{dx}$.

Introduisons ces conditions dans les équations ci-dessus. Posons d'abord dans les équations (8) et (9), (11) et (12), $x = a$. Après la substitution et la réduction, nous trouvons :

$$(8-9) \quad E(C - C') = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \left(M + \frac{Aa}{2} - \frac{pa^2}{6} \right)$$

$$(11-12) \quad E[(C - C')a + C''' - C^{iv}] = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \left(\frac{M}{2} + \frac{Aa}{3} - \frac{pa^2}{8} \right) a^2.$$

Retranchant la dernière équation de l'avant-dernière multipliée par a , nous avons, en tenant compte de la relation (14) :

$$(16) \quad EC^{IV} = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) \left(\frac{M}{2} + \frac{Aa}{3} - \frac{pa^2}{8}\right) a^2.$$

De même les équations (9) et (10), (12) et (13) donnent pour $x = b$:

$$(9-10) \quad E(C' - C'') = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) \left(M + \frac{Ab}{2} - \frac{pb^2}{3}\right) b.$$

$$(12-13) \quad E[(C' - C'') b + C^{IV} - C^V] = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) \left(\frac{M}{2} + \frac{Ab}{6} - \frac{pb^2}{24}\right) b^2.$$

Retranchant également la dernière équation de l'avant-dernière multipliée par b , nous avons ;

$$(17) \quad E(C^V - C^{IV}) = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) \left(\frac{M}{2} + \frac{Ab}{3} - \frac{pb^2}{8}\right) b^2.$$

Éliminant enfin entre les équations (16) et (17) la constante C^{IV} , nous obtenons l'expression suivante de la constante C^V :

$$(18) \quad EC^V = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) \left[\left(\frac{M}{2} + \frac{Aa}{3} - \frac{pa^2}{8}\right) a^2 - \left(\frac{M}{2} + \frac{Ab}{3} - \frac{pb^2}{8}\right) b^2\right]$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer la flèche dans le tronçon central de la travée ; ainsi :

L'équation 13) de la ligne moyenne déformée qui est

$$(13) \quad y = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{M}{2} + \frac{Ax}{6} - \frac{px^2}{24}\right) x^2 - \frac{C'x + C^V}{E}$$

Devient après la substitution et réduction :

$$(19) \quad y = -\frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{I_2} \left[(l-x) \frac{M}{2} + (l^2 - x^2) \frac{A}{6} - (l^3 - x^3) \frac{p}{24} \right] x \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) \left[\left(\frac{M}{2} + \frac{Aa}{3} - \frac{pa^2}{8}\right) a^2 - \left(\frac{M}{2} + \frac{Ab}{3} - \frac{pb^2}{8}\right) b^2 \right] \right\}$$

Cette équation donne la ligne moyenne déformée dans tout le tronçon central où la section est constante. On pourra donc la construire par points dans ce tronçon.

Cette équation donne au milieu de la portée pour $x = \frac{l}{2}$

La valeur suivante de la flèche.

$$(20) \quad y = \frac{1}{E} \left[-\frac{1}{I_2} \left(\frac{M}{8} + \frac{Al}{16} - \frac{7pl^2}{384}\right) l^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) \left[\left(\frac{M}{2} + \frac{Aa}{3} - \frac{pa^2}{8}\right) a^2 - \left(\frac{M}{2} + \frac{Ab}{3} - \frac{pb^2}{8}\right) b^2 \right] \right]$$

En examinant cette expression, on reconnaît que le premier terme représente la flèche qu'aurait prise la poutre dans le cas de la section constante ayant pour moment d'inertie I_2 . Les autres termes indiquent l'influence de la longueur incomplète des semelles.

Ainsi l'addition de la semelle sur une longueur a à partir de l'appui, a pour effet de diminuer la flèche, car le terme correspondant à cette longueur est de signe contraire du premier terme; au contraire, la valeur absolue du dernier terme étant de même signe que celle du premier, indique l'augmentation de la flèche par suite de la suppression de la semelle au droit de l'abscisse b .

Cas de plusieurs semelles additionnelles. — Considérons maintenant une poutre ayant plusieurs semelles additionnelles, portant les numéros 2, 3... n au droit de l'appui de gauche sur les longueurs $a_2 a_3 a_4 \dots a_n$, à partir de cet appui, et les numéros 2, 3 ... k vers le milieu de la travée à partir des points dont les abscisses sont $b_2 b_3 \dots b_k$.

Les moments fléchissants des poutres symétriques étant supérieurs sur les appuis à ceux du milieu des travées centrales, nous aurons d'une manière générale :

$$n > k.$$

Les moments d'inertie des sections avec le nombre correspondant des semelles peuvent donc se ranger dans l'ordre suivant :

$$I_1 I_2 I_3 \dots I_k \dots I_n.$$

La section de la poutre ainsi formée ayant k semelles dans le tronçon central de la travée, le premier terme qui représente la flèche prise dans le cas de la section constante devient

$$\frac{1}{EI_k} \left[(l-x) \frac{M}{2} + (l^2-x^2) \frac{A}{6} - (l^3-x^3) \frac{p}{24} \right] x.$$

Quant aux termes restants, en vertu du théorème de la superposition des effets des forces, chaque semelle ajoutée

dans le tronçon voisin de la pile tendra à diminuer la flèche proportionnellement aux facteurs en a . Au contraire, chaque interruption des semelles dans le tronçon central tendra à augmenter cette flèche proportionnellement aux facteurs en b .

Or, comme d'après notre hypothèse, le nombre n est plus grand que le nombre k , ces termes seront groupés suivant deux séries. La première série, relative aux semelles portant les numéros de n à k , n'aura que les termes contenant les longueurs a : tandis que la deuxième série, correspondant aux semelles portant les numéros de k à 2 aura les facteurs comprenant les longueurs a et b , conformément à l'équation (19).

Introduisant ces hypothèses dans l'équation (19), on obtient l'équation générale suivante de la ligne moyenne déformée dans le tronçon central.

$$(21) \quad y = -\frac{1}{E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{I_k} \left[(l-x) \frac{M}{2} + (l^2-x^2) \frac{A}{6} - (l^3-x^3) \frac{p}{24} \right] x + \left(\frac{1}{I_n} - \frac{1}{I_{n-1}} \right) \left(\frac{M}{2} + \frac{Aa_n}{3} - \frac{pa_n^2}{8} \right) a_n^2 \\ & + \dots + \left(\frac{1}{I_{k+1}} - \frac{1}{I_k} \right) \left(\frac{M}{2} + \frac{Aa_{k+1}}{3} - \frac{pa_{k+1}^2}{8} \right) a_{k+1}^2 \\ & + \left(\frac{1}{I_k} - \frac{1}{I_{k-1}} \right) \left[\left(\frac{M}{2} + \frac{Aa_k}{3} - \frac{pa_k^2}{8} \right) a_k^2 - \left(\frac{M}{2} + \frac{Ab_k}{3} - \frac{pb_k^2}{8} \right) b_k^2 \right] \\ & + \dots + \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \left[\left(\frac{M}{2} + \frac{Aa_2}{3} - \frac{pa_2^2}{8} \right) a_2^2 - \left(\frac{M}{2} + \frac{Ab_2}{3} - \frac{pb_2^2}{8} \right) b_2^2 \right] \end{aligned} \right\}$$

Cette équation peut donner la flèche en un point quelconque du tronçon considéré comportant k semelles, on pourra donc tracer comme précédemment la ligne moyenne déformée, en établissant les ordonnées au droit des montants de ce tronçon.

Mais comme le contrôle des chemins de fer ne demande que la constatation des flèches au milieu des travées, lors des épreuves des tabliers métalliques, on peut limiter les calculs à la détermination de la flèche dans ce dernier cas particulier.

Ainsi en posant dans la dernière équation $x = \frac{l}{2}$, et désignant pour abrégé par I_t le moment d'inertie d'une section intermédiaire quelconque, nous arrivons à l'expression suivante de la flèche au milieu d'une travée.

$$(22) \quad y = -\frac{1}{E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1_k} \left(\frac{M}{8} + \frac{Al}{16} - \frac{7pl^2}{384} \right) l^2 + \sum_n^{k+1} \left(\frac{1}{1_t} - \frac{1}{1_{t-1}} \right) \left(\frac{M}{2} + \frac{Aa}{3} - \frac{pa^2}{8} \right) a^2 \\ & + \sum_k^1 \left(\frac{1}{1_t} - \frac{1}{1_{t-1}} \right) \left[\left(\frac{M}{2} + \frac{Aa}{3} - \frac{pa^2}{8} \right) a^2 - \left(\frac{M}{2} + \frac{Ab}{3} - \frac{pb^2}{8} \right) b^2 \right] \end{aligned} \right\}$$

Les résultats obtenus par cette formule concordent parfaitement avec ceux obtenus par le train d'épreuves. La charge uniformément répartie équivalente est obtenue en divisant la somme des charges de ce train contenues dans la travée, par sa longueur comptée entre les tampons extrêmes.

Remarquons, pour faciliter l'emploi de cette formule, que l'effort tranchant A sur l'appui de gauche de la travée centrale, quel que soit le nombre (impair) des travées, conserve l'expression suivante, dans le cas des travées symétriques :

$$A = \frac{pl}{2}$$

Nous avons par suite :

$$(23) \quad Al = \frac{7pl^2}{384} - \frac{5}{384} pl^2.$$

Cette condition permettra de simplifier, dans une certaine mesure, les opérations à effectuer,

Enfin, dans la première travée, le moment fléchissant sur le premier appui étant nul, les expressions entre les parenthèses ne contiendront que les termes renfermant les quantités A et p.

Cas de demi-travées chargées. — Les formules établies ci-dessus donnent la flèche dans le cas de travées entièrement surchargées.

Les formules que nous donnons ci-après permettent de calculer les moments fléchissants M et par suite les efforts tranchants A dans le cas de travées chargées sur la moitié de leur longueur. On pourra donc obtenir la flèche dans ce cas particulier pour se conformer à l'art. 9, § 2 de la circulaire ministérielle.

Les moments fléchissants sur les appuis de la travée considérés n° k, produits par la charge d'une travée n° t, la charge

des autres travées étant supposée nulle, s'expriment par les formules suivantes :

Lorsque la travée chargée n° t se trouve à gauche de la travée k .

$$M_k = \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-1} l_1} (\gamma_{t-2} N_t + \gamma_{t-1} N'_t) l_t. \quad (24)$$

$$M_{k+1} = \frac{\alpha_{n-k-1}}{\alpha_{n-1} l_1} (\gamma_{t-2} N_t + \gamma_{t-1} N'_t) l_t.$$

Lorsque la travée chargée se trouve à droite de la travée n° k , on a :

$$M_k = \frac{\gamma_{k-2}}{\alpha_{n-1} l_1} (\alpha_{n-t} N_t + \alpha_{n-t-1} N'_t) l_t. \quad (25)$$

$$M_{k+1} = \frac{\gamma_{k-1}}{\alpha_{n-1} l_1} (\alpha_{n-t} N_t + \alpha_{n-t-1} N'_t) l_t.$$

Enfin, quand la charge se trouve dans la travée n° k elle-même, on a :

$$M_k = \frac{\gamma_{k-2}}{\alpha_{n-1} l_1} (\alpha_{n-k} N_k + \alpha_{n-k-1} N'_k) l_k. \quad (26)$$

$$M_{k+1} = \frac{\alpha_{n-k-1}}{\alpha_{n-1} l_1} (\gamma_{k-2} N_k + \gamma_{k-1} N'_k) l_k.$$

Les termes N , étant les fonctions des charges, se calculent par les formules suivantes dans le cas de demi-travées chargées :

Pour la surcharge uniformément répartie sur la première moitié de la travée.

$$N_t = \frac{9}{64} pl_t^2; \text{ et } N'_t = \frac{7}{64} pl_t^2. \quad (27)$$

Et pour la surcharge uniformément répartie sur la deuxième moitié de la travée :

$$N_t = \frac{7}{64} pl_t^2; \text{ et } N'_t = \frac{9}{64} pl_t^2. \quad (28)$$

Ces valeurs substituées dans les équations ci-dessus, où tous les termes sont connus dans chaque cas particulier, donneront les valeurs de M et A , qui entrent dans l'expression de la flèche.

On démontre les dernières formules en posant $q = \frac{1}{2}$

dans les équations (12) (13) (14) et (15) de notre mémoire sur les poutres droites à plusieurs travées (1).

II. — POUTRES A UNE TRAVÉE

Flèches produites par les charges uniformément réparties.

Soit une poutre à une travée, librement posée sur ses deux appuis de niveau. Désignons par l la portée de cette poutre et par p la charge uniformément répartie par unité de longueur.

Dans ce cas, les moments fléchissants M au droit des appuis sont nuls ; en conséquence, on supprime les semelles additionnelles sur les longueurs a . Il en résulte que l'expression générale de la flèche (22) ne contiendra que les termes en b , et prendra finalement, en vertu de la relation (23), la forme suivante :

$$(29) \quad y = -\frac{E}{P} \left[\frac{5}{384} \frac{1}{I_k} l^4 - \left(\frac{1}{I_k} - \frac{1}{I_{k-1}} \right) \left(\frac{l}{6} - \frac{b_k}{8} \right) b_k^3 - \left(\frac{1}{I_{k-1}} - \frac{1}{I_{k-2}} \right) \left(\frac{l}{6} - \frac{b_{k-1}}{8} \right) b_{k-1}^3 - \dots - \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{l}{6} - \frac{b_3}{8} \right) b_3^3 - \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \left(\frac{l}{6} - \frac{b_2}{8} \right) b_2^3 \right]$$

Le premier terme du second membre représente également ici la flèche de la poutre dans le cas de la section constante avec k semelles. Et les termes restants, l'augmentation de cette flèche par suite de l'interruption des semelles additionnelles aux points b .

Flèches produites par les surcharges isolées.

Cas d'une semelle additionnelle. — Considérons maintenant une poutre à une semelle additionnelle, librement posée sur les deux appuis, ayant une portée l et soumise à l'action d'un système des charges isolées P_1, P_2, P_3, \dots (fig. 2).

Le moment fléchissant en un point quelconque de la portée

(1) Voir les *Annales des Ponts et Chaussées*, février 1882.

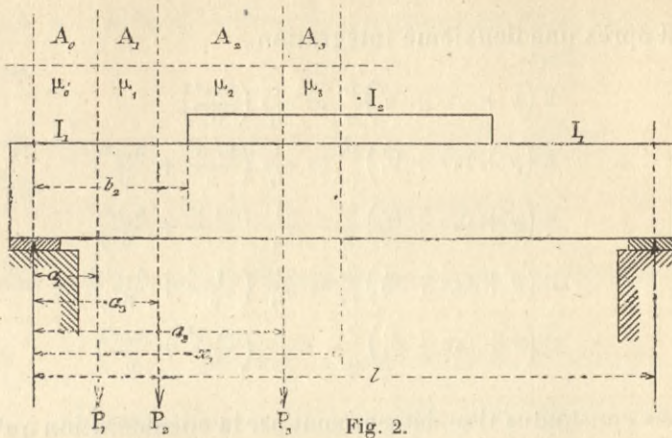


Fig. 2.

désigné par son abscisse x , dû à un système des charges isolées, s'exprime par la formule suivante :

$$(30) \quad M = \frac{\mu}{k} + A_k x$$

$\frac{\mu}{k}$ étant le terme indépendant et A l'effort tranchant dans le tronçon considéré des moments fléchissants portant n° k .

Appliquant cette équation aux tronçons de la première moitié de la portée de la figure 2, nous avons, en vertu de l'équation 1) :

$$(34) \quad \left. \begin{aligned} (M)_{a_1}^{a_0} &= A_0 x \\ (M)_{a_2}^{a_1} &= \mu_1 + A_1 x \\ (M)_{a_3}^{a_2} &= \mu_2 + A_2 x \\ (M)_{a_5}^{x_1} &= \mu_3 + A_3 x \end{aligned} \right\} = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Intégrant deux fois cette équation, on obtient :

Après une première intégration

$$(32) \quad E \left(\frac{dy}{dx} + C \right)_{a_0}^{a_1} = \frac{1}{l_1} \left(\frac{A_0 x^2}{2} \right)$$

$$(33) \quad E \left(\frac{dy}{dx} + C_1 \right)_{a_1}^{a_2} = \frac{1}{l_1} \left(\mu_1 x + \frac{A_1 x^2}{2} \right)$$

$$(34) \quad E \left(\frac{dy}{dx} + C_2 \right)_{a_2}^{a_3} = \frac{1}{l_1} \left(\mu_2 x + \frac{A_2 x^2}{2} \right)$$

$$(35) \quad E \left(\frac{dy}{dx} + C_3 \right)_{a_3}^{x_1} = \frac{1}{l_2} \left(\mu_3 x + \frac{A_3 x^2}{2} \right)$$

$$(36) \quad E \left(\frac{dy}{dx} + C_4 \right)_{a_5}^{x_1} = \frac{1}{l_2} \left(\mu_3 x + \frac{A_3 x^2}{2} \right)$$

Et après une deuxième intégration

$$(37) \quad E \left(y + Cx + o \right) \frac{a_1}{o} = \frac{1}{1_1} \left(\frac{A_0 x^3}{6} \right)$$

$$(38) \quad E \left(y + C_1 x + C'_1 \right) \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1_1} \left(\frac{\mu_1 x^2}{2} + \frac{A_1 x^3}{6} \right)$$

$$(39) \quad E \left(y + C_2 x + C'_2 \right) \frac{b_2}{a_2} = \frac{1}{1_1} \left(\frac{\mu_2 x^2}{2} + \frac{A_2 x^3}{6} \right)$$

$$(40) \quad E \left(y + C_3 x + C'_3 \right) \frac{a_3}{b_2} = \frac{1}{1_2} \left(\frac{\mu_2 x^2}{2} + \frac{A_2 x^3}{6} \right)$$

$$(41) \quad E \left(y + C_4 x + C'_4 \right) \frac{x_4}{a_3} = \frac{1}{1_2} \left(\frac{\mu_3 x^2}{2} + \frac{A_3 x^3}{6} \right)$$

Les constantes C se déterminent par la considération qu'aux points de rencontre des divers tronçons, la ligne moyenne déformée doit se raccorder tangentielllement, on a donc en ces points les mêmes y et $\frac{dy}{dx}$.

Ainsi, en reprenant la même marche qu'au commencement de ce chapitre, on trouve successivement

Pour $x = a_1$, la différence des équations 32-33 et 37-38 donne

$$(32-33) \quad E (C - C_1) = \frac{1}{1_1} \left(-\mu_1 + \frac{A_0 - A_1}{2} a_1 \right) a_1$$

$$(37-38) \quad E \left[(C - C_1) a_1 - C'_1 \right] = \frac{1}{1_1} \left(-\frac{\mu_1}{2} + \frac{A_0 - A_1}{6} a_1 \right) a_1^2$$

D'où en retranchant

$$(42) \quad EC'_1 = \frac{1}{1_1} \left(\frac{\mu_1}{2} + \frac{A_0 - A_1}{3} a_1 \right) a_1^2.$$

Pour $x = a_2$ la différence des équations 33-34 et 38-39 donne

$$(33-34) \quad E(C_1 - C_2) = \frac{1}{1_1} \left(\mu_1 - \mu_2 + \frac{A_1 - A_2}{2} a_2 \right) a_2$$

$$(38-39) \quad E \left[(C_1 - C_2) a_2 + (C'_1 - C'_2) \right] = \frac{1}{1_1} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{6} a_2 \right) a_2^2.$$

D'où

$$(43) \quad E(C'_2 - C'_1) = \frac{1}{1_1} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{3} a_2 \right) a_2^2$$

Pour $x = b_2$ la différence des équations 34-35 et 39-40

$$(34-35) \quad E (C_2 - C_3) = \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right) \left(\frac{\mu_2}{2} + \frac{A_2 b_2}{2}\right) b_2$$

$$(39-40) \quad E \left[(C_2 - C_3) b_2 + (C_3' - C_3) \right] = \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right) \left(\frac{\mu_2}{2} + \frac{A_2 b_2}{6}\right) b_2^2$$

D'où

$$(44) \quad E (C_3 - C_2) = \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right) \left(\frac{\mu_2}{2} + \frac{A_2 b_2}{3}\right) b_2^2$$

Enfin pour $x = a_3$ la différence des équations 35-36 et 40-41

$$(35-36) \quad E (C_3 - C_4) = \frac{1}{l_2} \left(\mu_3 - \mu_3 + \frac{A_2 - A_3}{2} a_3 \right) a_3$$

$$(40-41) \quad E \left[(C_3 - C_4) a_3 + (C_3' - C_4) \right] = \frac{1}{l_2} \left(\frac{\mu_3 - \mu_3}{2} + \frac{A_2 - A_3}{6} a_3 \right) a_3^2$$

D'où

$$(45) \quad E (C_4 - C_3) = \frac{1}{l_2} \left(\frac{\mu_3 - \mu_3}{2} + \frac{A_2 - A_3}{3} a_3 \right) a_3^2$$

Additionnant les équations 42) à 45), on trouve pour la constante C_4 l'expression suivante :

$$(46) \quad EC_4 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{l_1} \left(-\frac{\mu_1}{2} + \frac{A_0 - A_1}{3} a_1 \right) a_1^2 + \frac{1}{l_1} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{3} a_2 \right) a_2^2 \\ & + \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right) \left(\frac{\mu_2}{2} + \frac{A_2 b_2}{3} \right) b_2^2 + \frac{1}{l_2} \left(\frac{\mu_3 - \mu_3}{2} + \frac{A_2 - A_3}{3} a_3 \right) a_3^2 \end{aligned} \right\}$$

D'autre part, nous avons dans l'équation 36) pour une certaine valeur de l'abscisse $x = x_1$, correspondant à la flèche

maximum, $\frac{dy}{dx} = 0$, et par suite

$$(47) \quad EC_4 = \frac{1}{l_2} \left(\mu_3 + \frac{A_3}{2} x_1 \right) x_1$$

L'équation de la ligne moyenne déformée dans le tronçon central de la travée est donc, d'après l'équation 41) :

$$(48) \quad y = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{l_2} \left(\frac{\mu_3}{2} + \frac{A_3 x}{6} \right) x^2 - C_4 x - C_4' \right]$$

Soit après le remplacement des constantes C par leur valeur.

$$(49) \quad y = \frac{1}{E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{l_2} \left[\left(\frac{\mu_3}{2} + \frac{A_3 x}{6} \right) x^2 - \left(\mu_3 + \frac{A_3 x_1}{2} \right) x_1 x \right] - \frac{1}{l_1} \left[\left(-\frac{\mu_2}{2} + \frac{A_0 - A_1}{3} a_1 \right) a_1^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{3} a_2 \right) a_2^2 \right] + \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right) \left(\frac{\mu_2}{2} + \frac{A_2 b_2}{3} \right) b_2^2 \\ & \left. - \frac{1}{l_2} \left(\frac{\mu_3 - \mu_3}{2} + \frac{A_2 - A_3}{3} a_3 \right) a_3^2 \right\}$$

Le maximum de la flèche y correspond à $x = x_1$. Dans ce cas, le premier terme entre les parenthèses se réduit à

$$(50) \quad -\frac{1}{I_2} \left(\frac{\mu_3}{2} + \frac{A_3 x_1}{3} \right) x_1^2$$

Cas de plusieurs semelles additionnelles. — La dernière formule 49) permet de déterminer les divers termes de l'expression de la flèche dans le cas de plusieurs semelles additionnelles.

Ainsi considérons une poutre ayant k semelles dans sa partie centrale, et soumise à l'action des charges isolées au nombre de k , dans la première moitié de la portée.

Pour appliquer la formule 49) à ce cas général, remarquons que pour tout point d'application d'une charge P_i ayant pour l'abscisse a_i correspond un terme

$$\frac{1}{I_t} \left(\frac{\mu_{i-1} - \mu_i}{2} + \frac{A_{i-1} - A_i}{3} a_i \right) a_i^2$$

I_t étant le moment d'inertie correspondant au tronçon considéré.

D'autre part, pour chaque variation du moment d'inertie correspond un terme

$$(51) \quad \left(\frac{1}{I_t} - \frac{1}{I_{t-1}} \right) \left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{A_i a_i}{3} \right) \mu_i^2$$

L'avant-dernière expression peut se simplifier. En effet, nous avons d'une manière générale :

$$(a) \quad \begin{aligned} \mu_{i-1} &= P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_{i-1} a_{i-1} \\ \mu_i &= P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_{i-1} a_{i-1} + P_i a_i \end{aligned}$$

D'où

$$\mu_{i-1} - \mu_i = -P_i a_i$$

On a de même.

$$(b) \quad \begin{aligned} A_{i-1} &= Y - (P_1 + P_2 + \dots + P_{i-1}) \\ A_i &= Y - (P_1 + P_2 + \dots + P_{i-1} + P_i) \end{aligned}$$

D'où

$$A_{i-1} - A_i = P_i$$

Par suite, à chaque point d'application de la charge P_i correspond un terme

$$(52) \quad -\frac{1}{l_t} \times \frac{P_i a_i^3}{6}$$

Introduisant les expressions 50), 51) et 52) dans l'équation de la flèche 49) appliquée au cas de plusieurs semelles, nous obtenons l'expression suivante de la flèche au point x_1 :

$$(53) \quad y = -\frac{1}{E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{l_k} \left(\frac{\nu_{k'}}{2} + \frac{A_{k'}}{3} x_1 \right) x_1^3 + \Sigma \left(\frac{1}{l_t} \right)_1^k \left(\frac{P_i}{6} a_i^3 \right)_1^{k'} \\ & - \Sigma_k^1 \left(\frac{1}{l_t} - \frac{1}{l_{t-1}} \right) \left(\frac{\nu_i}{2} + \frac{A_i}{3} b_t \right) b_t^3 \end{aligned} \right\}$$

Dans le cas de la section constante, cette formule se réduit à ses deux premiers termes

$$(54) \quad y = -\frac{1}{E I} \left[\left(\frac{\nu_{k'}}{2} + \frac{A_{k'} x_1}{3} \right) x_1^3 - \Sigma_1^k \frac{P_i a_i^3}{6} \right]$$

Conditions pour obtenir la plus grande valeur de la flèche.

— Dans des poutres à une travée, la flèche pouvant atteindre sa plus grande valeur au milieu de la portée, nous ne considérerons que ce dernier cas pour lequel

$$x_1 = \frac{l}{2},$$

et nous chercherons à déterminer la position correspondante du convoi sur la poutre.

Introduisant cette valeur dans la dernière formule, et exprimant $\nu_{k'}$ et $A_{k'}$ par leurs valeurs conformément aux formules a) et b) ci-dessus, on trouve

$$(55) \quad y = -\frac{1}{E I} \left[\Sigma_1^{k'} \left(\frac{l^2}{8} - \frac{a_i^2}{6} \right) P_i a_i + \left(Y - \Sigma_1^{k'} P_i \right) \frac{l^3}{24} \right]$$

Le premier terme entre les parenthèses est toujours positif, car l'abscisse a est généralement plus petite que $\frac{l}{2}$. En conséquence, ce terme croît avec les moments $\Sigma P_i A_i$.

La plus grande valeur de ce terme s'obtient donc en distri-

buant les charges de manière que les plus fortes d'entre elles correspondent aux bras du levier a les plus grands.

Cette condition revient à éloigner le plus possible les charges de l'appui de gauche. Et comme la même condition est nécessaire relativement à l'appui de droite, il en résulte que ces charges doivent être accumulées vers le milieu de la portée.

Les valeurs de l'effort tranchant représentées par le deuxième terme entre les parenthèses, sont très petites dans le tronçon central de la poutre. Pour obtenir la plus grande valeur de la flèche, on doit éviter les valeurs négatives de ce terme. Les valeurs positives étant incompatibles avec la première condition, on arrivera au résultat cherché en disposant les charges de manière à rendre nul l'effort tranchant A_K , au milieu de la portée.

En résumant ces conditions, nous proposons la règle suivante qui nous sert pour calculer la flèche dans cette dernière section.

Parmi les diverses combinaisons des charges des convois de la circulaire ministérielle, on prendra celles qui produisent le moment fléchissant maximum M' .

Ces systèmes des charges seront placées sur la poutre de manière que leur centre de gravité coïncide avec le milieu de la portée.

Les résultats ainsi obtenus sont exacts pour tous les cas où les charges se trouvent symétriquement disposées par rapport au centre de gravité du système.

Pour les autres cas de charges non symétriques, le résultat obtenu diffère très peu de celui donné par le calcul exact.

On pourra donc, sans inconvénient, adopter dans la pratique la position indiquée du train pour le calcul des flèches, dans ce dernier cas, aussi bien pour les poutres à section constante, que pour les poutres à section variable.

On simplifiera ainsi les calculs déjà fort longs.

III. — APPLICATIONS

1. — POUTRES A TROIS TRAVÉES

Prenons pour exemple la poutre centrale d'un pont-route a trois travées établi sur la ligne de Versailles, près d'Asnières.

Portées. — La portée comptée d'axe en axe des appuis est :

Pour les travées de rives $l = 10,80$

Pour la travée centrale $2l = 13,80$

Le rapport des ouvertures est donc

$$\delta = \frac{13,50}{10,80} = 1,25$$

Charges. — La charge permanente par mètre courant de poutre est, d'après la note des calculs du pont. $p^i = 4\ 800^k$

La surcharge uniformément répartie équivalente à celle prescrite par la circulaire ministérielle. $p^n = 1\ 900^k$

La charge totale. $p = 6\ 700^k$

Composition de la poutre. —

Pour résister dans de bonnes conditions aux moments fléchissants et aux efforts tranchants, on a donné à la section transversale de la poutre les dimensions suivantes :

Pour l'âme verticale :

hauteur $2h = 0,800$;

épaisseur $e = 0,015$;

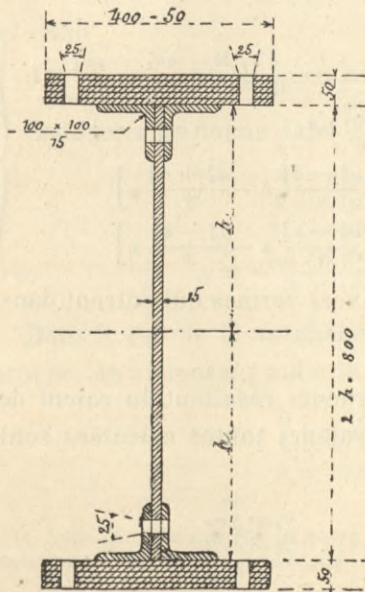
Pour les cornières : 100×100

15

Pour les semelles :

largeur $a = 0,400$.

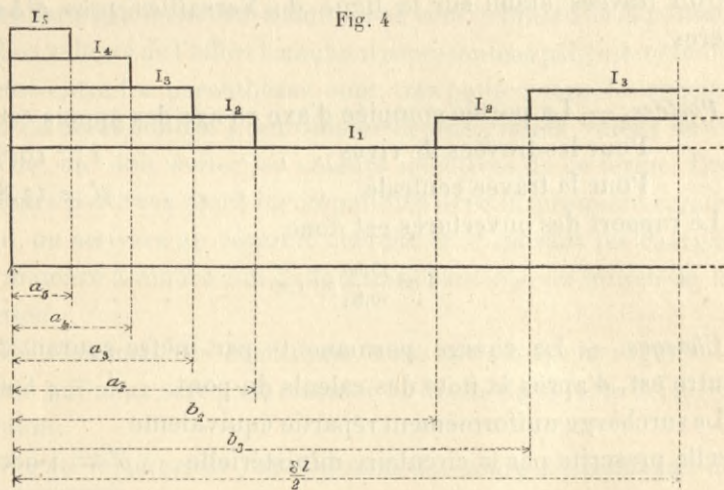
épaisseur d'une semelle $c = 0,010$.



Avec ces données, nous avons

Dans la travée centrale

Le nombre de semelles est cinq au droit des appuis de cette travée, et trois vers le milieu de la portée, conformément au croquis ci-après (fig. 4).



Dans ces conditions, l'expression générale de la flèche (22) prendra la forme suivante :

$$(36) \quad y = - \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{I_3} \left(\frac{M}{2} + \frac{A\delta l}{4} - \frac{7p\delta^2 l^2}{96} \right) \left(\frac{\delta l}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_4} \right) \left(\frac{M}{2} + \frac{Aa_5}{3} - \frac{pa_5^2}{8} \right) a_5^2 \right) \\ & + \left(\frac{1}{I_4} - \frac{1}{I_3} \right) \left(\frac{M}{2} + \frac{Aa_4}{3} - \frac{pa_4^2}{8} \right) a_4^2 \\ & + \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \left[\frac{a_3^3 - b_3^3}{2} M + \frac{a_3^3 - b_3^3}{3} A - \frac{a_3^4 - b_3^4}{8} p \right] \\ & + \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \left[\frac{a_2^3 - b_2^3}{2} M + \frac{a_2^3 - b_2^3}{3} A - \frac{a_2^4 - b_2^4}{8} p \right] \end{aligned} \right\}$$

Nous allons déterminer les divers termes qui entrent dans cette expression.

Longueurs a et b. — Ces longueurs résultent du calcul de résistance de la poutre ; leurs valeurs toutes calculées sont donc les suivantes :

$a_5 = 0,80$	m	$b_2 = 4,00$	m
$a_4 = 1,20$		$b_3 = 5,30$	
$a_3 = 1,70$		$\frac{\delta l}{2} = 6,75$	
$a_2 = 2,20$			

Moments d'inertie. — Les moments d'inertie I correspondant aux diverses sections de la poutre ont été calculés déjà pages 32 et 47. Nous avons donc pour :

$$\begin{aligned} c = 0,01, & 10^6 I_1 = 3038, 273 \\ c = 0,02, & 10^6 I_2 = 4243, 907 \\ c = 0,03, & 10^6 I_3 = 5508, 340 \\ c = 0,04, & 10^6 I_4 = 6832, 974 \\ c = 0,05, & 10^6 I_5 = 8219, 207 \end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_1} &= 329,134. & \frac{1}{I_4} &= 146,349. \\ \frac{1}{I_2} &= 235,632. & \frac{1}{I_5} &= 121,666. \\ \frac{1}{I_3} &= 181,543. \end{aligned}$$

Coefficient d'élasticité E. — Enfin, pour le coefficient d'élasticité E correspondant au fer, nous prenons la valeur moyenne d'après M. Collignon.

$$E = 180 \times 10^8.$$

Substituant maintenant les valeurs ci-dessus déterminées dans la formule (56), nous arrivons au résultat suivant :

$$y = -\frac{1}{E} \left\{ \begin{array}{l} (4321,6311 - 33,2383 + 1201,3925) M \\ + (29819,2547 - 24,4852 + 4258,4625) A \\ - (120022,5001 - 10,3851 + 7996,6471) p \end{array} \right\}$$

et enfin

$$y = -\frac{1}{E} (5489,7853 M + 34053,2320 A - 128008,7621 p)$$

Cette formule donne dans le cas de la charge permanente où

$$M = -0,128397 pl^2 = -71886 \text{ (1)}$$

$$A = 0,625 pl = 32400,$$

$$p = 4800$$

$$(c) \quad y = -\frac{94 \ 243 \ 953}{18 \times 10^9} = -0,005 \ 235$$

Dans le cas de la surcharge seule, couvrant la deuxième travée, en supposant nulle la charge permanente, on a

$$M = -0,084919 pl^2 = -18819$$

$$A = 0,625 pl = 12825$$

$$p = 1900$$

(1) Voir les formules (73) de notre brochure sur *la résistance des poutres droites à plusieurs travées*, 3^e partie, chez MM Baudry et C^{ie}, éditeurs.

et par suite

$$(d) \quad y = -\frac{90 \ 203 \ 860}{18 \times 10^9} = -0^m,005 \ 011.$$

La flèche totale est donc

$$(e) \quad y = - (0,005 \ 235 + 0,005 \ 011) = -0,010 \ 246.$$

Dans les travées de rive.

La poutre étant librement posée sur ses appuis, les moments fléchissants sont nuls sur les appuis extrêmes. On a par conséquent en posant dans la formule précédente (36) $M = 0$ $a = 0$, et en remarquant que dans la première travée la section de la poutre comporte trois semelles ayant pour abscisses

$$b_1 = 2,85 \text{ et } b_2 = 1,48$$

$$(37) \quad y = -\frac{1}{E} \left[\frac{1}{I_2} \left(\frac{Al}{4} - \frac{7pl^2}{96} \right) \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{Ab_1}{3} - \frac{pb_1^2}{8} \right) b_1^2 - \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_4} \right) \left(\frac{Ab_2}{3} - \frac{pb_2^2}{8} \right) b_2^2 \right] \\ = -\frac{1}{E} \left[- (14293,2435 + 518,4090) A \right. \\ \left. - (45023,7179 + 502,1512) p \right]$$

Et enfin

$$y = -\frac{1}{E} \left[14811,6525 A - 45525,8691 p \right]$$

Dans le cas de la charge permanente, où

$$A = 0,371610 pl = 19264 \\ p = 4800,$$

nous avons

$$y = -\frac{66 \ 807 \ 502}{18 \times 10^9} = -0^m,003712$$

Sous l'action de la surcharge seule, couvrant la première travée, on a

$$A = 0,439800 pl = 9025 \\ p = 1900$$

substituant on trouve

$$y = -\frac{47 \ 176 \ 012}{18 \times 10^9} = -0,002 \ 621$$

Sa flèche totale est donc

$$y = - (0,007 \ 312 + 0,002 \ 621) = -0^m,006 \ 333$$

Pour apprécier l'influence de la section variable de la poutre

sur la grandeur de la flèche, considérons les valeurs de celle-ci dans la deuxième travée sous l'action de la charge permanente.

Cette flèche (calculée par la formule *c*) en faisant ressortir l'influence des semelles additionnelles, s'exprime par la formule suivante.

$$y = - \frac{(0,004\ 409 + 0,000\ 091 + 0,000\ 735)}{0,005\ 235}$$

Les résultats de la dernière formule, nous montrent que la flèche due à la section constante de la partie centrale de la poutre se trouve finalement accrue de 0,000826 *m*, soit de 0,19 environ de sa valeur.

La diminution de la flèche produite par l'addition des semelles sur les longueurs *a*. et *a*₆ est très petite.

Au contraire, l'augmentation de la flèche, résultant de la suppression de la semelle sur les longueurs *b*₃ — *a*₃ et *b*₂ — *a*₂, est la plus considérable.

Ces quantités sont petites en valeur absolue, et ce n'est que leur somme qui peut donner des quantités appréciables. Cela tient à la petite ouverture de la travée et aux bonnes proportions de la section transversale de la poutre. Nous les avons données pour indiquer la marche à suivre dans l'application de la formule générale. Mais, pour les travées de grande ouverture ainsi que pour le nombre plus grand des semelles additionnelles, les résultats obtenus deviennent plus considérables, et dans certains cas, peuvent nécessiter la modification des dimensions transversales de la poutre.

2. — POUTRES A UNE TRAVÉE

Données générales. — Nous allons appliquer la formule générale 40) à la poutre du dernier exemple comparatif.

Les données générales de cet exemple sont :

La portée comptée d'axe en axe des appuis es *l* = 29 *m*. la section constante de cette poutre se trouve renforcée vers le milieu de la portée par trois semelles additionnelles, conformément au croquis ci-après (fig. 5).

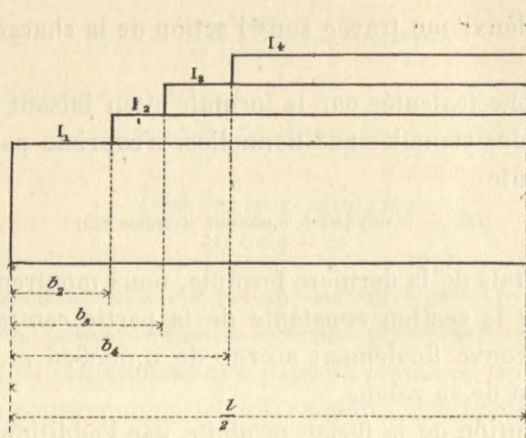


Fig. 5.

Les abscisses des points de variation des moments d'inertie.

$$\begin{aligned} b_2 &= 14,50 - 11,60 = 2,90 \text{ m} \\ b_3 &= 14,50 - 8,70 = 5,80 \text{ „} \\ b_4 &= 14,50 - 6,30 = 8,20 \text{ „} \end{aligned}$$

Ensuite, les dimensions transversales de la poutre donnent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_4} &= \frac{R}{M_4 v_4} = 8,764 \\ \frac{1}{I_3} &= \frac{R}{M_3 v_3} = 10,361 \\ \frac{1}{I_2} &= \frac{R}{M_2 v_2} = 12,488 \\ \frac{1}{I_1} &= \frac{R}{M_1 v_1} = 16,013 \end{aligned}$$

Flèche produite par la charge permanente uniformément répartie. — Dans les conditions ci-dessus énoncées, la formule générale de la flèche (29) donne, pour la charge uniformément répartie.

$$p = 1600 \text{ k.}$$

$$(38) \quad y = -\frac{p}{E} \left[\frac{1}{I_4} \times \frac{5l^4}{384} - \left(\frac{1}{I_4} - \frac{1}{I_3} \right) \left(\frac{l}{6} - \frac{b_4}{8} \right) b_4^3 - \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{l}{6} - \frac{b_3}{8} \right) b_3^3 - \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \left(\frac{l}{6} - \frac{b_2}{8} \right) b_2^3 \right]$$

Remplaçant les divers facteurs de la dernière formule par leurs valeurs numériques, nous avons :

$$y = -\frac{1600}{E} \left[+ \frac{80711,077}{1704,970} + \frac{3353,320}{391,454} \right]$$

Soit, après avoir effectué les calculs :

$$(58 \text{ bis}) \quad y = - [0,007177 + 0,000298 + 0,000143 + 0,000035] \\ = - 0,007653$$

Ce résultat nous montre que la flèche, calculée dans le cas de la section constante, se trouve augmentée d'environ 0,07 par suite de la suppression des semelles additionnelles sur les longueurs b .

La plus grande augmentation provient de l'interruption de la quatrième semelle ; l'influence de l'interruption des autres semelles va en diminuant et devient la plus petite pour la deuxième semelle.

Il résulte de là que la disposition admise pour certains ouvrages, qui consiste à prolonger la deuxième semelle sur toute la longueur de la poutre en vue d'atténuer la flexion, ne présente aucun avantage. Cette disposition en effet ne produit qu'une augmentation inutile des semelles sur une longueur $4 b_2$ soit dans l'exemple considéré sur $4 \times 2,90 \text{ m} = 11,60 \text{ m}$ par poutre, en ne produisant qu'une réduction minime de la flèche indiquée par le dernier terme de l'expression (58) bis.

Flèches produites par les surcharges isolées

Les charges donnant le moment fléchissant maximum étant au nombre de 12, le centre de gravité de ce système de charges se trouve à la distance suivante comptée de l'essieu n° 1. calculée par le tableau VIII.

$$g = \frac{1011,6}{86,0} = 11,76 \text{ m.}$$

En plaçant ce point au milieu de la portée, on trouve pour les bras du levier a les valeurs suivantes (fig. 6) :

$$\begin{array}{ll} a_1 = 2,74 \text{ m} & a_4 = 6,24 \text{ m} \\ a_2 = 3,94 \text{ " } & a_5 = 10,84 \text{ " } \\ a_3 = 5,14 \text{ " } & a_6 = 13,34 \text{ " } \end{array}$$

Nous avons ensuite :

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = P_1 a_1 & A_0 = 4 P_1 + 2 P_2 \\ \mu_2 = P_1 (a_1 + a_2) & A_1 = 3 P_1 + 2 P_2 \\ \mu_3 = P_1 (a_1 + a_2 + a_3) & A_2 = 2 P_1 + 2 P_2 \\ \mu_4 = P_1 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) & A_3 = P_1 + 2 P_2 \\ \mu_5 = \mu_4 + P_2 a_5 & A_4 = 2 P_2 \\ \mu_6 = \mu_4 + P_2 (a_5 + a_6) & A_5 = P_2 \\ & A_6 = 0 \end{array}$$

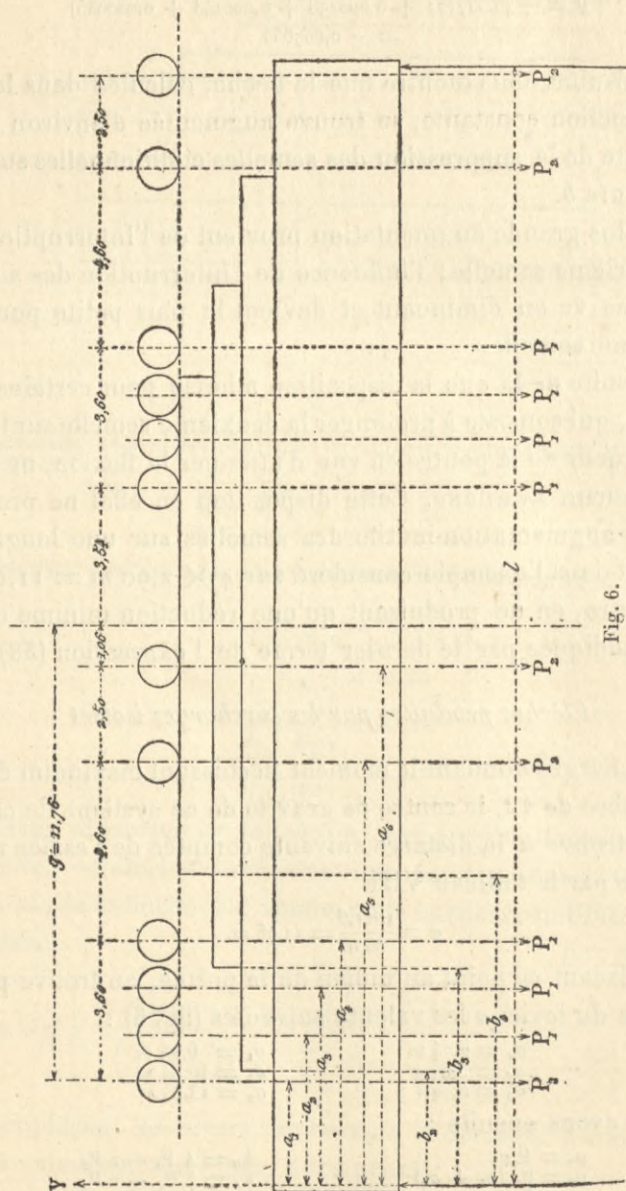


Fig. 6.

Introduisant ces valeurs dans la formule 53), on obtient :

$$y = -\frac{1}{E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{l_4} \left[(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) P_1 + (a_5 + a_6) P_2 \right] \frac{l^2}{8} \\ & - \left[\left(\frac{1}{l_1} a_1^3 + \frac{1}{l_2} (a_2^3 + a_3^3) + \frac{1}{l_3} a_4^3 \right) \frac{P_1}{6} + \frac{1}{l_4} (a_5^3 + a_6^3) \frac{P_2}{6} \right] \\ & - \left(\frac{1}{l_4} - \frac{1}{l_3} \right) \left[\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} P_1 + \frac{2 P_2 b_4}{3} \right] b_4^2 \\ & - \left(\frac{1}{l_3} - \frac{1}{l_2} \right) \left[\frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} P_1 + \frac{P_1 + 2 P_2}{3} b_3 \right] b_3^2 \\ & - \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right) \left[\frac{a_1}{2} P_1 + \frac{3 P_1 + 2 P_2}{3} b_2 \right] b_2^2 \end{aligned} \right\}$$

Soit après la substitution :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{E} \left[269\,287\,727 - 34\,632\,369 + 18\,417\,406 \right] \\ &= -\frac{253\,072\,764}{18 \times 10^9} = -0,014\,057. \end{aligned}$$

Telles sont la formule générale, et la manière de son application pour calculer la flèche des poutres à une travée à section variable ou constante, les charges isolées étant quelconques.

Appliquée aux charges de la circulaire ministérielle, elle donne la limite supérieure de la flèche théorique.

En adaptant les facteurs de cette formule aux trains d'épreuve des tabliers métalliques, on obtient les valeurs de la flèche, lesquelles, quoique inférieures à la limite précédente, permettent néanmoins, en les comparant avec les résultats trouvés par l'expérience, d'apprécier le degré de solidité des assemblages des poutres métalliques.

CHAPITRE ADDITIONNEL

Nouveau règlement relatif aux épreuves des ponts métalliques

Une circulaire ministérielle du 29 août 1891 a modifié celle du 9 juillet 1877 qui déterminait les épreuves à faire subir aux ponts métalliques supportant les voies de chemin de fer, ainsi qu'à ceux établis pour le passage des voies de terre.

Ce nouveau règlement, élaboré par une commission spéciale composée d'inspecteurs généraux et d'ingénieurs des Ponts et Chaussées, a été adopté par le conseil général des Ponts et Chaussées. En raison de l'importance de ce document, nous croyons devoir le donner *in-extenso* en le faisant précéder des instructions ministérielles destinées à indiquer le but de ce règlement et à en faciliter l'application.

MINISTÈRE
DES
TRAVAUX PUBLICS

.....
—
RÉVISION
DE LA
CIRCULAIRE MINISTÉRIELLE
DU 9 JUILLET 1877

NOUVEAU RÈGLEMENT
RELATIF AUX ÉPREUVES
DES PONTS MÉTALLIQUES

INSTRUCTION
POUR L'APPLICATION
DU RÈGLEMENT

CIRCULAIRE N° 4
—

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Paris, le 29 août 1891.

MONSIEUR LE PRÉFET,

Une circulaire ministérielle du 9 juillet 1877, a déterminé les épreuves à faire subir aux ponts métalliques supportant les voies de chemins de fer ainsi qu'à ceux établis pour le passage des voies de terre.

L'art des constructions métalliques ayant subi depuis lors, des changements importants, l'un de mes prédécesseurs a chargé une commission spéciale composée d'inspecteurs généraux et d'ingénieurs des Ponts et Chaussées de rechercher les modifications qu'il pourrait y avoir lieu d'apporter aux prescriptions de la circulaire précitée.

Sur le rapport de cette commission, et après une discussion approfondie, le Conseil général des Ponts et Chaussées a adopté un projet de règle-

ments déterminant les conditions auxquelles devront désormais satisfaire les ponts métalliques.

Conformément aux propositions du Conseil, j'ai approuvé le règlement dont il s'agit qui est annexé à la présente circulaire.

Les instructions suivantes sont destinées à en indiquer le but et à en faciliter l'application.

CHAPITRE PREMIER

Pont supportant des voies de fer

I. VOIES DE LARGEUR NORMALE

Article premier. — L'adoption d'un train-type a pour objet d'uniformiser les conditions d'établissement des ponts métalliques et de mettre leur résistance en rapport avec les plus fortes charges qui soient actuellement appelées à circuler sur les chemins de fer français. C'est ce train qui devra servir de base aux calculs. Toutefois, il y aura lieu de subsister aux machines et wagons-types les machines et wagons en service sur le réseau auquel appartiendra l'ouvrage à construire, dans les cas exceptionnels où il résultera de cette substitution une augmentation des efforts supportés par les différentes pièces de l'ouvrage.

Article 2. — Les coefficients du travail de la fonte sont fixés surtout en vue de la vérification des efforts supportés par les ouvrages existants ; pour les constructions neuves, l'emploi de ce métal, lorsqu'il sera exposé à travailler à l'extension, ne devra être admis que dans des cas tout à fait exceptionnels.

Les règles fixées pour le fer et l'acier ont été établies de façon à réduire d'une manière générale les limites du travail du métal en raison des variations du sens et de la grandeur des efforts qu'il est appelé à supporter ; mais elle ne tiennent pas compte des différences qui peuvent se produire, à ce point de vue, entre les divers points des plates-bandes d'une même poutre, et qui, eu égard aux règles habituellement suivies pour les constructions métalliques, ne peuvent entraîner des inégalités de résistance inquiétantes.

Il appartiendra d'ailleurs aux ingénieurs, lorsqu'ils le jugeront utile, de déterminer ces différences par une analyse détaillée et de faire varier en conséquence les limites du travail du métal. Pour fixer ces limites, ils pourront faire usage des formules suivantes, dont les résultats sont suffisamment d'accord avec les données de la pratique :

1° Lorsque les efforts correspondant pour la même pièce aux différentes positions des surcharges seront toujours de même sens (extension ou compression) :

Pour le fer.....	$6 kg + 3 kg \frac{A}{B}$
Pour l'acier.....	$8 kg + 4 kg \frac{A}{B}$

(A représentant le plus petit et B le plus grand des efforts auxquels la pièce est exposée.)

2° Lorsque le sens des efforts totaux correspondant pour la même pièce aux différentes positions de la surcharge, variera selon ses positions (extension et compression alternatives) :

Pour le fer.....	$6 kg - 3 kg \frac{C}{B}$
Pour l'acier.....	$8 kg - 4 kg \frac{B}{C}$

(B représentant le plus grand en valeur absolue des efforts supportés par la pièce et C le plus grand des efforts en sens contraire.)

Ces formules sont données à titre de simple indication et ne limitent en rien l'initiative des ingénieurs qui pourront employer telle méthode qu'ils jugeront convenable.

Les coefficients fixés à l'article 2 ne sont applicables aux pièces comprimées directement que lorsque celles-ci seront assez courtes pour qu'il n'y ait pas lieu de les renforcer en vue d'éviter qu'elles puissent fléchir sous l'action de la charge. Dans le cas contraire, on devra tenir compte des prescriptions de l'article 6 et de diminuer, en conséquence, le travail du métal.

Les ingénieurs ne perdront pas de vue les efforts supplémentaires qui pourront résulter de la répartition dissymétrique des charges, notamment dans les ponts biais et dans ceux sur lesquels la voie est en courbe.

L'évaluation des sections nettes et, par suite, le calcul définitif des efforts supportés par les différentes pièces, doivent être faits seulement lorsque la position des joints des tôles aura été arrêtée et après la détermination du nombre, du diamètre et de la position des rivets.

Le soin de déterminer le rapport entre le diamètre des rivets et l'épaisseur des pièces à assembler est laissé aux ingénieurs, qui se guideront d'après les données de la pratique.

Article 3. — Il n'a pas paru nécessaire de déterminer la qualité de la fonte à laquelle correspondent les coefficients fixés à l'article 2; cette détermination est, au contraire, indispensable pour l'acier dont les propriétés peuvent varier dans des limites très étendues, et même pour le fer dont la résistance, et surtout la ductilité, sont parfois insuffisantes pour inspirer une sécurité complète. Les qualités définies par le règlement sont celles des métaux dont l'emploi peut être considéré comme normal dans la construction des ponts; mais, notamment en ce qui concerne l'acier, le choix qui en a été fait pour fixer les coefficients usuels, n'est pas un obstacle à l'emploi d'un métal de qualité différente dans le cas où il sera justifié. Dans l'état actuel de la métallurgie, il est possible d'élever jusqu'à 55 kilogrammes la résistance de l'acier avec un allongement de 19 0/0, sans qu'il cesse de remplir les conditions

nécessaires et pour la construction des ponts, et l'augmentation de la résistance permet d'élever proportionnellement la limite des efforts normaux par millimètre carré. Mais, à mesure que la dureté de l'acier augmente, des précautions plus minutieuses sont nécessaires dans la fabrication pour que son emploi soit exempt de tout danger et la rédaction des projets est d'autant plus délicate qu'on adopte des coefficients de travail plus élevés ; aussi l'Administration se réserve-t-elle de n'autoriser de dérogation à la règle générale que dans les cas où elles seront justifiées par l'importance de l'ouvrage et lorsque les conditions dans lesquelles celui-ci devra être construit, offriront des garanties suffisantes au point de vue de l'exécution.

Les cahiers des charges devront, dans tous les cas, renfermer l'énumération des conditions nécessaires pour assurer l'emploi des matériaux de bonne qualité et l'exécution des travaux selon les règles de l'art. Le but de l'article 3 est de définir les qualités du métal auxquelles correspondent les coefficients indiqués à l'article 2, et d'éviter les dangers que l'emploi de l'acier a quelquefois présentés ; ses prescriptions ne sauraient être considérées comme suffisantes pour empêcher les malfaçons aussi bien dans la fabrication du métal que dans sa mise en œuvre.

Article 4. — Les poids, les dimensions et le groupement des machines, tenders et wagons définis à l'article 4 ont été choisis de manière à donner au train-type une composition qui se rapproche, autant que possible, de celle des trains les plus lourds, formés avec le matériel actuellement en service sur les principaux réseaux.

Les efforts que les ponts auront à supporter normalement ne dépasseront donc pas, en général, ceux qui correspondront au passage du train type, ils pourront leur être supérieurs si les machines et tenders sont groupés différemment, ou s'il existe dans le train des wagons vides ; mais l'augmentation de travail du métal qui en résultera, n'atteindra jamais un kilogramme par millimètre carré et les coefficients fixés par l'article 2 ont été établis de manière à permettre sans danger, dans cette limite, une augmentation exceptionnelle des efforts. On pourra donc se borner à faire les calculs au moyens du train-type sous la réserve énoncée ci-dessus à propos de l'article premier.

L'administration entend laisser aux ingénieurs une entière liberté en ce qui concerne le choix des méthodes employées, pour faire les calculs ; la seule obligation qu'elle leur impose est de déterminer avec une exactitude suffisante la limite des efforts supportés par chacune des pièces qui composent l'ouvrage dans les conditions définies par l'article 4. Ainsi on pourra, si on le juge utile, faire usage pour le calcul des moments fléchissants, *ainsi que pour celui des efforts tranchants de surcharges virtuelles uniformément réparties, sauf à justifier que ces surcharges produisent des efforts supérieurs ou du moins égaux à ceux qui seraient déterminés en chaque point par le passage du train-type.*

Quelle que soit la méthode employée, les résultats des calculs devront être groupés dans des épures, de manière à faire ressortir la loi des varia-

tions des efforts dans les différentes pièces de l'ouvrage et à faciliter les vérifications.

Article 5. — Les pressions maxima dues à l'effort du vent, qui sont fixées par l'article 5, sont celles qui sont généralement admises par les constructeurs; elles sont suffisantes pour donner toute sécurité dans les conditions ordinaires. Il appartiendra aux ingénieurs de proposer l'adoption de pressions plus fortes pour les ouvrages qui seront à construire à une grande hauteur ou dans le voisinage de la mer; ils pourront, au contraire, pour les ponts convenablement abrités, tenir compte de la diminution de l'intensité du vent qui résultera des circonstances locales. Ils auront également à déterminer d'après le mode de construction des supports et le système d'attache des sommiers et des palées aux maçonneries, quelle est la limite à partir de laquelle les efforts de glissement transversal et de renversement des tabliers et des piles métalliques devront être considérés comme dangereux.

Il y aura lieu de calculer, pour les grands ouvrages, non seulement le efforts horizontaux, mais aussi l'augmentation des efforts verticaux qui peut résulter, pour certaines pièces, de l'inégal répartition des charges entre les deux files de rails sous l'action du vent.

Article 6. — Les vérifications relatives au flambage devront être faites pour la fonte comme pour le fer et l'acier.

Lorsqu'on aura recours à des formules de la forme $R' = KR$, dans lesquelles R' représente le coefficient de travail à adopter pour la pièce considérée, et R le coefficient de travail correspondant à une longueur très petite, on prendra uniformément pour R , dans les pièces soumises à des efforts de sens variables, 6 kilogrammes pour le fer et 8 kilogrammes pour l'acier, on substituera la valeur ainsi trouvée pour R' au coefficient calculé au moyen des règles fixées à l'article 2, s'il en résulte une augmentation de la section de la pièce considérée, à moins que l'on ne modifie la forme des pièces ou leur disposition, de manière à accroître la résistance au flambage.

Article 7. — Dans le calcul des flèches on *pourra* faire entrer les poids et les dimensions des machines et wagons du train d'épreuve, au lieu des éléments similaires du train-type, mais seulement dans le cas où la composition du train d'épreuve pourrait être établie à l'avance avec une entière certitude.

Article 8. — La limite des efforts que les tabliers métalliques peuvent subir sans danger pendant le lançage est laissée à l'appréciation des ingénieurs; cette limite peut, en effet, varier selon la constitution des ouvrages et selon les conditions dans lesquelles ils seront mis en place. La présence de montants verticaux, dans les poutres à treillis ou à croix de saint André, les moyens employés pour consolider les parties faibles, la durée du lançage, etc., sont autant d'éléments dont il y a lieu de tenir compte et que les ingénieurs auront à examiner avant d'arrêter leurs propositions.

Article 9. — Les longueurs de trains d'épreuves et leurs positions ne sont fixées que pour les ponts à poutres droites et les ponts en arcs. Pour les

ponts de types exceptionnels, les ingénieurs auront à déterminer, dans chaque cas, la longueur du train la plus convenable pour produire sur les principales pièces des efforts aussi rapprochés que possible de ceux qui auront été donnés par le calcul.

Les positions à donner aux trains d'épreuves seront déterminées d'après la portée et la constitution des poutres; elles seront, dans tous les cas, choisies de manière à produire les plus grands efforts, non seulement sur les plates-bandes (1), mais sur les treillis.

L'épreuve par poids roulant à la vitesse de 40 kilomètres devra être supprimée lorsque les circonstances locales (voisinage des plaques tournantes dans une gare, insuffisance du rayon des courbes, etc.) l'exigeront.

On devra prendre les dispositions nécessaires pour que des flèches puissent être mesurées et vérifiées à toute époque, dans des conditions satisfaisantes de précision; on établira, au besoin, des plates-forme spéciales pour faciliter les opérations de nivellement; on placera des repères fixes, non seulement sur les piles et culées lorsqu'elles seront exposées à des tassements, mais en dehors de l'ouvrage; enfin, lorsqu'il y aura lieu, on devra faire subir aux flèches observées les corrections nécessaires pour tenir compte de l'influence variable de la température sur les arcs, et on s'efforcera d'éliminer, dans les poutres droites, les erreurs résultants de la différence de dilatation entre les bandes supérieure et inférieure. On évitera à cet effet, de prolonger chacune des épreuves au delà du temps nécessaire pour que les déformations normales puissent se produire, et on choisira, de préférence, les premières heures du jour ou un temps couvert pour faire les nivellements destinés à la mesure des flèches permanentes.

Les niveaux des points les plus bas, au milieu et aux extrémités de chaque pont, pourront être relevés directement, pourvu qu'ils soient rattachés, par une mesure facile à effectuer sans erreur, à ceux des points qu'on aura choisis comme intermédiaires.

On mesurera séparément la flèche de chaque poutre, et pour les grandes portées, notamment lorsque les semelles ne seront pas parallèles, on mesurera les abaissements de points intermédiaires entre le milieu de la travée et chaque appui.

Le rapport à l'appui du procès-verbal des épreuves fournira la comparaison des flèches observées avec celles *données par le calcul*.

A cet effet le calcul des flèches sous l'action du train d'épreuve devra toujours être annexé au procès-verbal d'épreuve. Ce procès-verbal sera classé dans un dossier destiné à recevoir aussi les résultats des constatations ultérieures.

Les épreuves réglementaires ne doivent pas dispenser d'une surveillance attentives des ponts pendant les premiers mois qui suivent leur mise en service, notamment en ce qui concerne le jeu des appareils de dilatation et, pour les poutres à travées solidaires, l'invariabilité du niveau des appuis.

(1) Les plates-bandes sont désignées sous les noms de bandes, semelles, tables, membrures, cordes ou brides.

Article 10. — Les prescriptions de l'article 10 s'appliquent à la fois à la disposition des fers et aux installations spéciales destinées à donner un accès facile aux différentes parties de la construction, on devra chercher à rendre les principales pièces accessibles sans échafaudages spéciaux et sans qu'il soit nécessaire de circuler le long des poutres dans des conditions dangereuses.

Article 11. — Le contour fixé par l'article 11 a été déterminé en vue de réserver aux gousset, consoles, etc., un espace aussi grand que possible, sans que les ponts métalliques présentent au passage des trains des obstacles plus rapprochés de la voie que les autres ouvrages d'art ; on devra, en outre, tenir compte, dans l'étude des projets, de la nécessité de ménager aux agents circulant à pied sur la voie les moyens de se garer d'une manière facile et sûre.

Article 12. — La réserve formulée dans l'article 12 n'a pas pour but de limiter les poids des machines ; mais elle empêchera que les ouvrages soient exposés à recevoir des surcharges en vue desquelles ils n'auront pas été calculés, sans qu'on ait déterminé, au préalable, le maximum des efforts qu'elles imposeraient au métal.

II. VOIES ÉTROITES

Article 13. — Sauf en ce qui concerne les poids et les dimensions des machines et des wagons, les épreuves par poids roulant et le contour intérieur limite, les conditions imposées pour la construction des ponts métalliques sont les mêmes pour les lignes à voies étroites que pour les lignes à voie normale, tant que la largeur de la voie ne descend pas au-dessous de un mètre.

Article 14. — Pour les ouvrages destinées à supporter des voies de largeur inférieure à un mètre, les conditions seront déterminées pour chaque cas particulier ; on ne perdra pas de vue, dans les propositions à faire à ce sujet, que la diminution de largeur de la voie ne saurait être un motif pour restreindre les garanties de sécurité et que si les règles posées précédemment à ce sujet peuvent être atténuées, c'est seulement dans le cas où il s'agira de lignes industrielles destinées exclusivement au transport des marchandises.

CHAPITRE II

Ponts supportant des voies de terre.

Article 15. — Les prescriptions de l'article 15 sont applicables à tous les ponts métalliques pour voie de terre destinés à supporter le passage des voitures.

Article 16. — Les conditions fixées pour les efforts à faire supporter aux différentes pièces sont les mêmes que celles qui sont relatives aux ponts supportant des voies de fer.

Article 17. — Les bases fixées pour les calculs par l'article 17 ont été établies seulement en vue de la circulation normale sur les routes. Lorsqu'un pont

pourra être appelé à recevoir des chargements exceptionnels tels que ceux qui sont nécessités par certains transports industriels ou militaires, il y aura lieu d'en tenir compte dans les calculs. De même, dans le cas où une voie de fer comportant l'emploi de locomotives ou de machines d'un poids équivalent devra être établie sur la route, on appliquera les prescriptions des articles 13 et 14.

Lorsque les ingénieurs seront amenés à proposer l'adoption de surcharges inférieures aux surcharges réglementaires, ils devront tenir compte de la possibilité de la rectification des routes dans la région, de l'amélioration progressive des moyens de transport, de l'extension croissante de l'emploi des rouleaux compresseurs à vapeur, etc.

Article 18. — Les observations faites précédemment au sujet des articles 5, 6, 7, 8 et 10 sont applicables aux ponts métalliques pour voies de terre.

Article 19. — *Les épreuves par poids mort sont définies d'une manière précise dans l'article 19 du règlement pour tous les ponts d'un type courant.*

Pour les ponts d'un type exceptionnel, les ingénieurs auront à se rendre compte, lors de la rédaction des projets, de la longueur des surcharges d'épreuve et des emplacements qu'elles doivent successivement occuper en vue de développer les efforts maxima dans les différents organes de la construction. Ils indiqueront dans un article du cahier des charges les dispositions qui leur paraîtront devoir être prescrites, tant pour les épreuves par poids mort que pour les épreuves par poids roulant.

La faculté qui est donnée de remplacer par un poids mort de 400 kilogrammes par mètre carré sur la moitié de la largeur de la chaussée une ou plusieurs files de voitures dans l'épreuve par poids roulant ne fait pas obstacle à ce que ladite épreuve soit faite exclusivement par poids roulant, si on n'éprouve pas de difficulté sérieuse à réunir le nombre de véhicules convenable pour couvrir toute la largeur de la chaussée sur la longueur voulue.

CHAPITRE III

Ponts-canaux.

Article 20. — La hauteur de 0 m 30 d'eau au-dessus du mouillage normal devra être augmentée, pour le calcul des ponts, dans les cas exceptionnels où, pour une raison quelconque, il y aurait lieu de prévoir des variations plus étendues du niveau de l'eau dans le bief.

Article 21. — Dans le cas où certaines pièces seraient, par leur position, exposées particulièrement à être oxydées, leur épaisseur devrait être augmentée en conséquence.

Article 22. — Les observations relatives aux articles 5, 6, 8 et 10 sont applicables aux ponts-canaux métalliques.

Article 23. — On devra tenir compte, en ce qui concerne le calcul des flèches, de la réserve faite plus haut relative aux cas exceptionnels dans lesquels il y aurait lieu de prévoir une surélévation de l'eau supérieure à 0 m, 30.

Article 24. — Les observations relatives à l'article 9 concernant la mesure des flèches permanentes, la pose des repères, etc..., sont applicables aux ponts-canaux.

Revision de la Circulaire ministérielle du 9 juillet 1877

SUR LES PONTS MÉTALLIQUES

RÈGLEMENT

CHAPITRE PREMIER

Ponts supportant des voies de fer.

I. — VOIES DE LARGEUR NORMALE

ARTICLE PREMIER. — *Conditions à remplir.* — Les ponts à travées métalliques qui portent des voies de fer de largeur normale, devront être en état de livrer passage aux trains autorisés à circuler sur le réseau auquel ils appartiennent et, en outre, au train-type défini à l'article 4 ci-dessous.

ART. 2. — *Limites du travail du métal.* — Les dimensions des différentes pièces des ponts seront calculées de telle sorte que, dans la position la plus défavorable des trains désignés à l'article premier et en tenant compte de la charge permanente ainsi que des efforts accessoires tels que ceux qui peuvent être produits par les variations de température, le travail (1) du métal par millimètre carré de section nette, c'est-à-dire déduction faite des trous de rivets ou de boulons, ne dépasse pas les limites indiquées ci-dessous.

I. Pour la fonte supportant un effort d'extension directe. 1,59 kg
Pour la fonte travaillant à l'extension dans des pièces soumises à des efforts tendant à les faire fléchir. 2,50 kg
Pour la fonte supportant un effort de compression. 6,00 kg

II. Pour le fer et l'acier travaillant à l'extension, à la compression ou à la flexion, les limites exprimées en kilogrammes par millimètre carré de section seront fixées aux valeurs suivantes :

Pour le fer. 6,50 kg
Pour l'acier 8,50 kg

Toutefois ces limites seront abaissées respectivement :

A 5 kilogr. 50 pour le fer et à 7 kilogr. 50 pour l'acier dans les pièces de pont, longerons et entretoises sous rail.

A 4 kilogrammes pour le fer et à 6 kilogrammes pour l'acier, pour les barres de treillis et autres pièces exposées à des efforts alternatifs d'extension et de compression; ces dernières limites pourront néanmoins être rappro-

(1) Le mot « travail » est entendu ici non dans son sens scientifique, mais dans le sens d'effort imposé au métal par unité de surface, qui lui est donné dans la pratique des constructions.

Les cahiers des charges fixeront pour l'acier le minimum et le maximum entre lesquels devra être compris le rapport de la limite pratique d'élasticité à la résistance à la rupture. Le minimum ne devra pas être inférieur à un demi et le maximum ne devra pas dépasser deux tiers.

Des coefficients de travail plus élevés pourront être autorisés par l'Administration pour des métaux de qualités différentes, si des justifications suffisantes sont produites.

On ne tolérera dans aucun cas l'emploi d'aciers fragiles et on s'assurera fréquemment, pendant la construction, de la qualité du métal à ce point de vue, au moyen d'essais de trempe et d'expériences faites en pliant des barres percées de trous au poinçon. Les cahiers des charges devront renfermer des prescriptions détaillées à cet égard sans préjudice des autres conditions relatives aux qualités du métal.

Dans tous les cas, lorsqu'on emploiera l'acier, les trous des rivets seront forés ou alésés après le perçage sur une épaisseur d'au moins un millimètre et les bords des pièces coupées à la cisaille seront affranchies sur la même épaisseur.

ART. 4. — *Composition du train-type.* — Les auteurs des projets de traversées métalliques devront justifier par des calculs suffisamment détaillés qu'ils ont satisfaits aux prescriptions des articles 1, 2 et 3 qui précèdent.

En ce qui concerne les fermes longitudinales, ils seront tenus d'examiner l'hypothèse du passage, sur chaque voie, du train-type défini ci-dessous.

Le train-type se composera de deux machines à quatre essieux, de leurs tenders et de wagons chargés. Les poids et dimensions des machines, tenders et wagons chargés sont donnés par le tableau et la figure 1 ci-après :

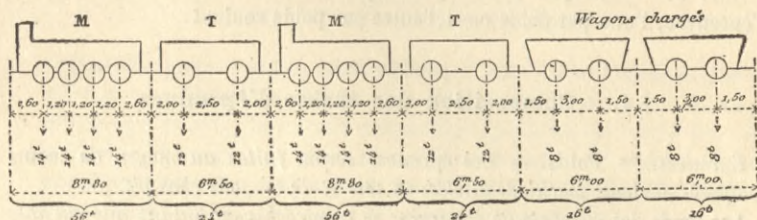
DESIGNATION	MACHINE	TENDER	WAGON CHARGÉ
Nombre d'essieux.....	4	2	2
Charge par essieu.....	14 t	12 t	8 t
Distance du tampon d'avant au 1 ^{er} essieu.....	2,60 m	2,00 m	1,50 m
Ecartement des essieux entre eux.....	1,20	2,50	3,00
Distance du dernier essieu au tampon d'arrière...	2,60	2,00	1,50
Poids total.....	56 t	24 t	24 t
Longueur totale.....	8,80 m	6,50 m	6,60 m

Les machines, avec leurs tenders, seront placées toutes deux en tête du train.

L'ensemble du train sera supposé occuper successivement différentes positions le long de la portée, et ces positions seront choisies de manière à réaliser en chaque point les plus grands efforts tranchants et fléchissants que le passage du train-type puisse déterminer.

Les dimensions des pièces qui ne font pas partie des fermes longitudinales

et notamment celles des pièces de pont seront calculées d'après les plus grands efforts qu'elles pourront avoir à supporter, soit dans l'hypothèse du passage du train-type, soit dans l'hypothèse du passage d'un essieu isolé pesant 20 tonnes, si cette dernière réalise les plus grands efforts.



ART. 5. — *Pression du vent.* — Le travail du métal sous l'influence des plus grands vents ne devra pas dépasser de plus de un kilogramme les limites fixées à l'article 2 ci-dessus.

On admettra que la pression du vent par mètre carré de surface verticale peut s'élever à 270 kilogrammes, mais que le passage des trains est interrompu lorsqu'elle atteint 170 kilogrammes. On supposera, en outre, que cette pression s'exerce sur la surface nette, déduction faite des vides, de chacune des maîtresses-poutres, qu'elle agit intégralement sur l'une d'elles et que, sur la suivante, elle est diminuée d'une fraction de sa valeur égale au rapport de la surface nette de la première à la surface totale limitée par son contour; enfin, que l'effet du vent, en arrière de ces deux poutres, est négligeable. Pour les piles métalliques, on supposera que la pression s'exerce intégralement sur la surface nette de toutes les pièces.

Dans l'hypothèse d'un train placé sur le pont, on comptera, pour sa surface verticale nette, un rectangle de trois mètres de hauteur ayant la même longueur que le pont et dont le côté inférieur sera placé à 50 centimètres au-dessus du rail; on déduira de ce rectangle la surface nette de la partie de la première poutre placée en avant et on supposera que la pression du vent est nulle sur la partie de la seconde poutre masquée par le train.

Enfin, on s'assurera que les efforts de glissement transversal et de renversement des tabliers et des piles métalliques sous l'action du vent n'atteignent pas des limites dangereuses, en tenant compte des conditions spéciales dans lesquelles pourront être placés les ouvrages et en supposant que le train défini ci-dessus est composé de wagons vides.

ART. 6. — *Pièces travaillant à la compression.* — On s'assurera, autant que possible, que les pièces travaillant à compression, soit d'une manière continue, soit intermittente, ne sont pas exposées à flamber.

ART. 7. — *Calcul des flèches.* — On fournira, à l'appui des projets, le calcul de flèches sous l'action de la charge permanente et sous l'action de la surcharge.

ART. 8. — *Calcul des efforts pendant le lancement.* — Lorsque la mise en place du tablier devra être faite au moyen d'un lancement, on devra justifier que le travail du métal pendant cette opération n'atteindra dans aucune pièce une limite dangereuse.

ART. 9. — Chaque travée métallique sera soumise à deux natures d'épreuves, l'une par poids mort, l'autre par poids roulant.

§ 1. — Composition des trains d'épreuves.

Épreuves. — Poids. — Ces épreuves seront faites au moyen de trains composés de deux machines attelées en tête et de wagons chargés.

Les poids des éléments de ces trains se rapprocheront autant que possible de ceux du train-type défini à l'article 4.

En tous cas ils devront être au moins égaux aux plus forts poids des éléments similaires appelés à circuler sur la voie considérée.

Longueurs. — Les longueurs de ces trains seront fixées comme suit :

Pour les ponts à travées indépendantes, la longueur mesurée entre les deux essieux extrêmes sera au moins égale à la plus grande portée.

Pour les ponts à travées solidaires, la longueur, mesurée comme ci-dessus, devra être suffisante pour couvrir les deux plus grandes travées consécutives.

§ 2. — Ponts à une seule voie ou à voies indépendantes.

Épreuve par poids mort. — Pour l'épreuve par poids mort : le train d'essai sera placé successivement dans les positions qui produiront les plus grands efforts sur les pièces principales du pont.

Il suffira toutefois, en général, d'opérer de la manière suivante :

a) Pour les ponts à travées indépendantes, le train d'essai sera amené successivement sur chaque travée de manière à le couvrir complètement, puis à en couvrir une moitié seulement, les machines étant placées en tête du train.

Il séjournera dans chacune de ces positions au moins pendant une demi-heure.

b) Pour les ponts à travées solidaires, chaque travée sera d'abord chargée isolément comme il vient d'être dit. A cet effet, le train d'essai sera coupé à la longueur voulue. Ensuite on chargera simultanément les deux travées contiguës à chaque pile à l'exclusion de toutes les autres, au moyen du train d'essai tout entier.

c) Pour les ponts en arcs, on chargera d'abord toute la longueur de la portée, puis chaque moitié seulement et enfin la partie médiane en y plaçant les deux locomotives nez à nez lorsque faire se pourra et réduisant la composition du train à ces deux locomotives.

Épreuve par poids roulant. — Les épreuves par poids roulant seront au nombre de deux. Elles seront faites au moyen des mêmes trains qu'on fera

circuler sur le pont, d'abord à la vitesse de 20 kilomètres à l'heure, puis à celle de 40 kilomètres à l'heure. Toutefois l'épreuve à la vitesse de 40 kilomètres pourra être ajournée jusqu'à l'époque où la voie aux abords du pont sera suffisamment consolidée.

§ 3. — Ponts à voies solidaires.

Pour les ponts à deux voies solidaires entre elles, l'épreuve par poids mort se fera d'abord sur chaque voie séparément comme il a été dit au paragraphe précédent, l'autre voie restant libre, puis sur les deux voies simultanément. Il en sera de même pour l'épreuve par poids roulant. L'épreuve simultanée des deux voies se fera dans ce cas au moyen de deux trains marchant dans le même sens aux vitesses fixées ci-dessus.

§ 4. — Ponts de types exceptionnels.

Pour les ponts d'un type exceptionnel, les dispositions des épreuves devront être réglées dans un article spécial du cahier des charges.

A défaut, elles seront arrêtées par l'Administration supérieure, sur la proposition des ingénieurs chargés du contrôle de la construction, le concessionnaire ou entrepreneur entendu.

§ 5. — Mesure des flèches.

Visite. — Repères. — On mesurera au moment des épreuves, la flèche maximum au milieu de chaque travée, sous l'influence d'abord de la charge immobile, puis de la surcharge en mouvement.

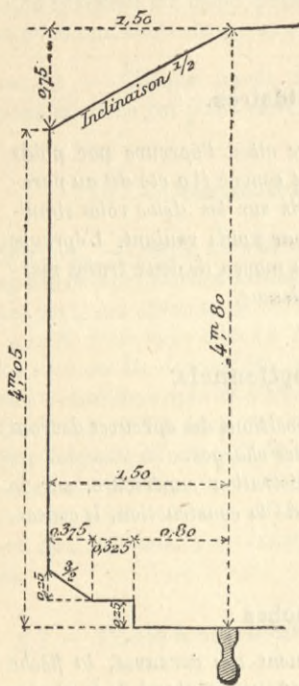
Lorsque, sur une même ligne, il se trouvera plusieurs ponts, de construction identique, dont l'ouverture ne dépassera pas 10 mètres, la mesure des flèches pourra n'être faite que pour l'un d'entre eux.

Immédiatement après les épreuves de chaque pont, la partie métallique sera visitée dans tous ses détails.

En outre, pour les ponts d'une ouverture supérieure à 10 mètres, les niveaux des points les plus bas des sections des poutres ou des arcs, au milieu de chaque travée et à ses extrémités, seront repérés avant les épreuves à deux points fixes choisis de manière à permettre de constater, après l'enlèvement de la surcharge, et ensuite à une époque quelconque, les déformations qui se seraient produites; on repérera par rapport aux mêmes points le dessus de chacun des appuis. Le procès-verbal des preuves contiendra les renseignements nécessaires pour permettre de retrouver ultérieurement ces repères.

ART. 10. — Dispositions à prendre pour faciliter la visite de l'entretien. — On s'attachera à rendre faciles la visite, la peinture et la réparation des parties métalliques, et on fera connaître dans les mémoires à l'appui des projets les mesures prises à cet effet.

ART. 11 — *Distance au rail le plus voisin des pièces les plus rapprochées de la voie.* — Les pièces



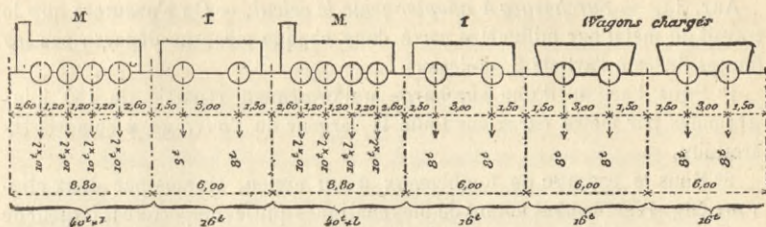
les plus rapprochées de la voie ne pourront, à partir de cinquante centimètres jusqu'à quatre mètres cinq centimètres de hauteur au-dessus du rail le plus voisin, être placées à moins de un mètre cinquante centimètres de l'axe de ce rail. Les pièces placées à une distance moindre ne pourront, à la partie inférieure, jusqu'à quatre-vingts centimètres de l'axe du rail le plus voisin, faire saillie sur le niveau de ce rail, et à partir de quatre-vingts centimètres du même axe, dépasser une ligne brisée composée : 1° d'une verticale de vingt-cinq centimètres de hauteur; 2° d'une horizontale de trois cent vingt-cinq millimètres de longueur; 3° d'une ligne inclinée à trois de base pour deux de hauteur; à la partie supérieure les mêmes pièces devront rester au-dessus d'une ligne s'abaissant avec une inclinaison de deux de base pour un de hauteur à partir d'un point pris à l'aplomb de l'axe du rail le plus voisin et à quatre mètres quatre-vingts centimètres au-dessus de ce rail. Aucune pièce placée au-dessus des voies ou entrevoies ne pourra être à moins de quatre mètres quatre-vingts centimètres de hauteur au-dessus du niveau des rails.

ART. 12 — *Limite du poids des machines qui pourront circuler sur les ponts sans autorisation préalable.* — La mise en circulation, sur les ponts, de machines dont le poids moyen par mètre courant dépasserait de plus de un dixième celui de la machine-type déterminée à l'article 4 ci-dessus, ou dont un des essieux aurait à supporter une charge supérieure à 18 tonnes, ne pourra avoir lieu qu'en vertu d'une autorisation spéciale du Ministre des Travaux publics.

II. — VOIES ÉTROITES.

ART. 13. — *Ponts pour les chemins de fer à voie de un mètre au-dessus.* — Les prescriptions relatives aux ponts pour chemins de fer à voie normale sont applicables aux chemins de fer à voie étroite, dont la largeur ne sera pas inférieure à un mètre, sauf les modifications indiquées ci-dessous.

Le poids par essieu des machines du train-type (art. 4) sera réduit à $10^t \times l$, l étant la largeur de la voie entre les bords intérieurs des rails. Les dimensions des machines et les poids et dimensions des wagons seront les mêmes que pour la voie normale et les tenders seront supposés avoir les mêmes poids et les mêmes dimensions que les wagons chargés.



Pour le calcul du travail du métal sous l'action d'un essieu isolé, on admettra une charge de $14^t \times l$.

La seconde épreuve par poids roulant (art. 9) sera faite à la vitesse de 35 kilomètres à l'heure.

Le contour à l'intérieur duquel aucune pièce des ponts ne devra faire saillie (art. 11) sera déterminé, dans chaque cas, en tenant compte des minima de largeur et de hauteur autorisés, pour les ouvrages d'art, sur la ligne à laquelle appartiendra le pont à construire.

La charge d'essieu maximum, dont le passage ne pourra avoir lieu sur les ponts sans autorisation spéciale (art. 12), sera fixée à $12^t \times l$, l étant la largeur de la voie entre les bords intérieurs des rails.

Les trains à employer aux épreuves seront composés avec le plus lourd matériel propre à la ligne sur laquelle est placé le pont métallique.

ART. 14. — Ponts pour chemins de fer à voie de largeur inférieure à un mètre. — Les conditions auxquelles devront satisfaire les ponts supportant des voies de chemins de fer de moins de un mètre de largeur seront déterminées, dans chaque cas, sur la proposition du concessionnaire, par le Ministère des Travaux publics, en tenant compte des poids et des dimensions des machines appelées à circuler sur l'ouvrage.

CHAPITRE II

Ponts supportant des voies de terre.

ART. 15. — Conditions à remplir. — Les ponts à travées métalliques que portent des voies de terre devront être en état de livrer passage à toute voiture dont la circulation est autorisée par le règlement du 10 août 1852 sur la police du roulage et des messageries, c'est-à-dire aux voitures attelées au maximum de cinq chevaux si elles sont à deux roues et de huit chevaux si elles sont à quatre roues.

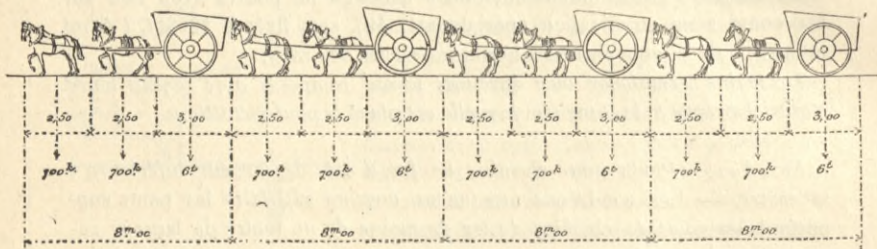
ART. 16. — Limites de travail du métal. — Les dimensions des différentes pièces des ponts seront calculées dans les conditions fixées à l'article 2, sauf la substitution au train-type des surcharges définies par l'article 17 ci-dessous :

ART. 17. — *Surcharges à adopter pour le calcul.* — On s'assurera que le travail du métal par millimètre carré dans chaque pièce ne dépasse pas les limites fixées à l'article 2, ci-dessus.

1° Sous l'action d'une surcharge uniformément répartie de 480 kilogrammes par mètre carré sur toute la largeur de l'ouvrage y compris les trottoirs.

2° Sous le passage de tombereaux à un essieu, traînés par deux chevaux (fig. 4) et formant autant de files continues que le comportera la largeur de la chaussée. On admettra, pour faire ce calcul, que les trottoirs sont surchargés uniformément à raison de 400 kilogrammes par mètre carré, et que les tombereaux et leurs attelages ont les poids et dimensions suivants :

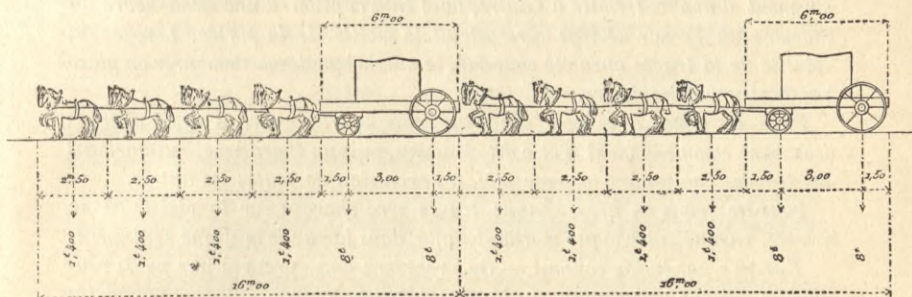
Tombereaux . . .	}	Poids	6 t
		Longueur (non compris les brancards)	3,00 m
		Largeur de voie	1,70 m
		Largeur de chaussée occupée	2,25 m
Chevaux	}	Poids	700 kg
		Longueur (y compris les traits et brancard)	2,50 m



On s'assurera que le travail du métal par millimètre carré, dans chaque pièce ne dépasse pas de plus d'un kilogramme les limites fixées à l'article 2, dans le cas où on substituerait à l'un des tombereaux un véhicule pesant 11 tonnes, ayant les mêmes dimensions et traîné par cinq chevaux sur une seule file, et, dans le cas où ces tombereaux seraient remplacés, sur toute la surface du tablier du pont, par des chariots à deux essieux traînés par huit chevaux (fig. 5) sur deux files ayant les poids et dimensions suivants :

Chariots	}	Poids sur chaque essieu	8 t
		Longueur	6,00 m
		Largeur de la voie	1,70
		Ecartement des essieux	3,00
		Distance du premier essieu à l'arrière du chariot	1,50
Chariots	}	Distance du second essieu à l'arrière du chariot	1,50
		Largeur de chaussée occupée	2,25
Chevaux	}	Poids	700 kg
		Longueur (y compris les traits et brancards)	2,50 m

Lorsqu'il s'agira d'ouvrages à établir sur des routes à fortes pentes, placées dans des conditions telles que la circulation des charges indiquées ci-dessus ne puisse pas être considérée comme possible dans le présent ni dans l'avenir, l'Administration se réserve d'autoriser l'emploi, dans les calculs, de charges moindres qui seront déterminées d'après les circonstances locales. Dans aucun cas, la charge uniformément répartie ne pourra descendre au-dessous de 300 kilogrammes par mètre carré, et les autres charges indiquées ci-dessus ne pourront être réduites de plus de moitié.



ART. 18. — *Pression du vent, pièces travaillant à la compression, calcul des flèches, calcul des efforts pendant le lançage, dispositions à prendre pour faciliter la visite et l'entretien, surveillance.* — Les prescriptions des articles 5, 6, 7, 8 et 10 ci-dessus sont applicables aux ponts par voie de terre. Toutefois, pour le calcul des efforts résultant de l'effet du vent (art. 5), il ne sera pas tenu compte de la présence possible de véhicules sur le pont.

ART. 19. — *Épreuves.* — Chaque travée métallique sera soumise à deux natures d'épreuves : l'une par poids mort, l'autre par poids roulant.

Composition des surcharges d'épreuves. — Pour l'épreuve par poids mort la surcharge d'épreuve sera de 400 kilogrammes par mètre carré de tablier, trottoir compris.

Pour l'épreuve par poids roulant les véhicules seront disposés en files continues et devront se rapprocher, autant que possible, comme poids et écartement des essieux, de ceux désignés pour types dans le troisième alinéa de l'article 17. En tous cas, ces véhicules devront représenter, avec leurs attelages, une charge minima de 400 kilogrammes par mètre carré, en prenant 2 m. 25 pour largeur de la zone occupée.

Longueur des files de voitures. — Les longueurs des files de voitures seront fixées comme suit :

Pour les ponts à travées indépendantes et pour les ponts en arcs, la longueur sera au moins égale à la plus grande portée.

Pour les ponts à travées solidaires, la longueur devra être suffisante pour couvrir les deux plus grandes travées consécutives.

Nombre des files de voitures. — Le nombre des files de voitures devra être égal au quotient de la largeur de la chaussée par le nombre 2 m. 25. Toutefois, ce nombre pourra être réduit quand il y aura difficulté à réunir assez de véhicules pour constituer toutes les files, mais il devra être suffisant pour couvrir au moins la moitié de la largeur du tablier; le surplus de cette largeur sera alors occupé par une surcharge à poids mort de 400 kilogrammes par mètre carré, répartie de chaque côté des files.

Épreuve par poids mort. — Il sera procédé aux épreuves par poids mort de la manière suivante :

Pour les ponts à travées indépendantes, la surcharge sera étendue successivement d'une extrémité à l'autre, avec interruption d'une demi-heure au moment où la surcharge aura atteint la moitié de la portée. Lorsque la totalité de la travée aura été couverte, la surcharge devra demeurer en place pendant une demi-heure.

Pour les ponts à travées solidaires, chaque travée sera d'abord chargée isolément comme il vient d'être dit ci-dessus, puis on chargera simultanément les travées contiguës à chaque pile, à l'exclusion de toutes les autres.

Pour les ponts en arcs, chaque travée sera chargée sur la totalité de sa portée, ensuite sur chaque moitié et, enfin, dans la partie médiane seulement.

Épreuve par poids roulant. — On procédera aux épreuves par poids roulant en faisant circuler au pas les files de voitures d'une extrémité à l'autre du pont.

On fera passer, en outre, sur le pont un véhicule comprenant au moins un essieu chargé de 11 tonnes.

Tempéraments aux surcharges d'épreuve. — Lorsque, dans le cas prévu par le dernier alinéa de l'article 17, les surcharges ayant servi à faire les calculs auront été réduites, les surcharges à employer pour faire les épreuves seront réduites dans la même proportion.

Les règles fixées par l'article 9 pour les épreuves des ponts d'un type exceptionnel ainsi que pour les constatations à faire, pendant et après les épreuves, et enfin pour les mesures à prendre en vue des vérifications ultérieures sont applicables aux ponts supportant des voies de terre.

Chargements exceptionnels. — Le passage, sur le tablier du pont, de chargements notablement supérieurs à ceux qui auront été adoptés dans les calculs relatifs à la stabilité de l'ouvrage ne pourra avoir lieu qu'en vertu d'une autorisation spéciale donnée par le préfet conformément au rapport de l'ingénieur en chef.

CHAPITRE III

Ponts-canaux métalliques.

ART. 20. — *Conditions à remplir.* — Les ponts-canaux devront être en état de recevoir la charge d'eau correspondant au mouillage normal, augmenté de trente centimètres.

ART. 21. — *Limites du travail du métal.* — Les dimensions des différentes pièces des ponts-canaux seront calculées de manière à ce que le travail du métal par millimètre carré de section nette, déduction faite des trous de rivets, ne dépasse nulle part 8^k,50 pour le fer et 11^k,50 pour l'acier.

ART. 22. *Pression du vent, pièces travaillant à la compression, calcul des efforts pendant le lançage, dispositions à prendre pour faciliter la visite et l'entretien, surveillance.* — Les prescriptions des articles 5, 6, 8 et 10 sont applicables aux ponts-canaux. Pour l'application de l'article 5, on tiendra compte de la présence de la bache ainsi que de celle des bateaux sur l'ouvrage; le calcul sera fait en admettant une pression de 270 kilogrammes par mètre carré de surface verticale; la surface des bateaux exposée au vent sera comptée pour un rectangle de 1^m,50 de hauteur au-dessus de la bache ayant la même longueur que le pont.

ART. 23. — *Calculs des flèches.* — On fournira, à l'appui des projets, le calcul des flèches sous l'action du poids propre du pont et sous l'action de la surcharge d'eau prévue à l'article 20.

ART. 24. — *Épreuves.* — L'épreuve des ponts-canaux consistera dans la mesure des flèches avant et après le remplissage au maximum de hauteur fixé par l'article 20.

Immédiatement après les épreuves, l'ouvrage sera visité dans toutes ses parties; en outre, on repérera à deux points fixes, avant l'épreuve, les niveaux des points les plus bas des sections des poutres et des axes au milieu de chaque travée et à ses extrémités, de manière à pouvoir, après la mise en charge et à une époque quelconque, mesurer les déformations qui se seraient produites; on repérera, par rapport aux mêmes points, le dessus de chacun des appuis. Le procès-verbal des épreuves contiendra les renseignements nécessaires pour permettre ultérieurement de retrouver ces repères.

CHAPITRE IV

Dispositions diverses.

ART. 25. — *Contrôle des épreuves.* — Pour les ouvrages construits ou entretenus par les concessionnaires, les épreuves seront faites en présence d'un ingénieur chargé du contrôle; les procès-verbaux détaillés, dont elles devront être l'objet, seront dressés dans la forme qui sera prescrite par l'administration.

ART. 26. — *Dérogation aux prescriptions du règlement.* — L'administration se réserve d'apprécier les cas exceptionnels qui pourraient motiver des dérogations quelconques aux prescriptions du présent règlement.

Paris, le 29 août 1891.

Le Ministre des Travaux publics,

YVES GUYOT.

ANGERS, IMP. BURDIN ET C^{ie}, RUE GARNIER, 4.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

S. 61

00-2

RÉSISTANCE DES POUTRES DES PONTS ET VIADUCS MÉTALLIQUES, SOUS L'ACTION DES SURCHARGES MOBILES

de la circulaire ministérielle du 29 Août 1831.

Fig 1 et 2 (Ech. des longueurs $\frac{1}{100}$ Ech. des moments en tonnes mètres $\frac{1}{50}$) Courbes-enveloppes des moments fléchissants.

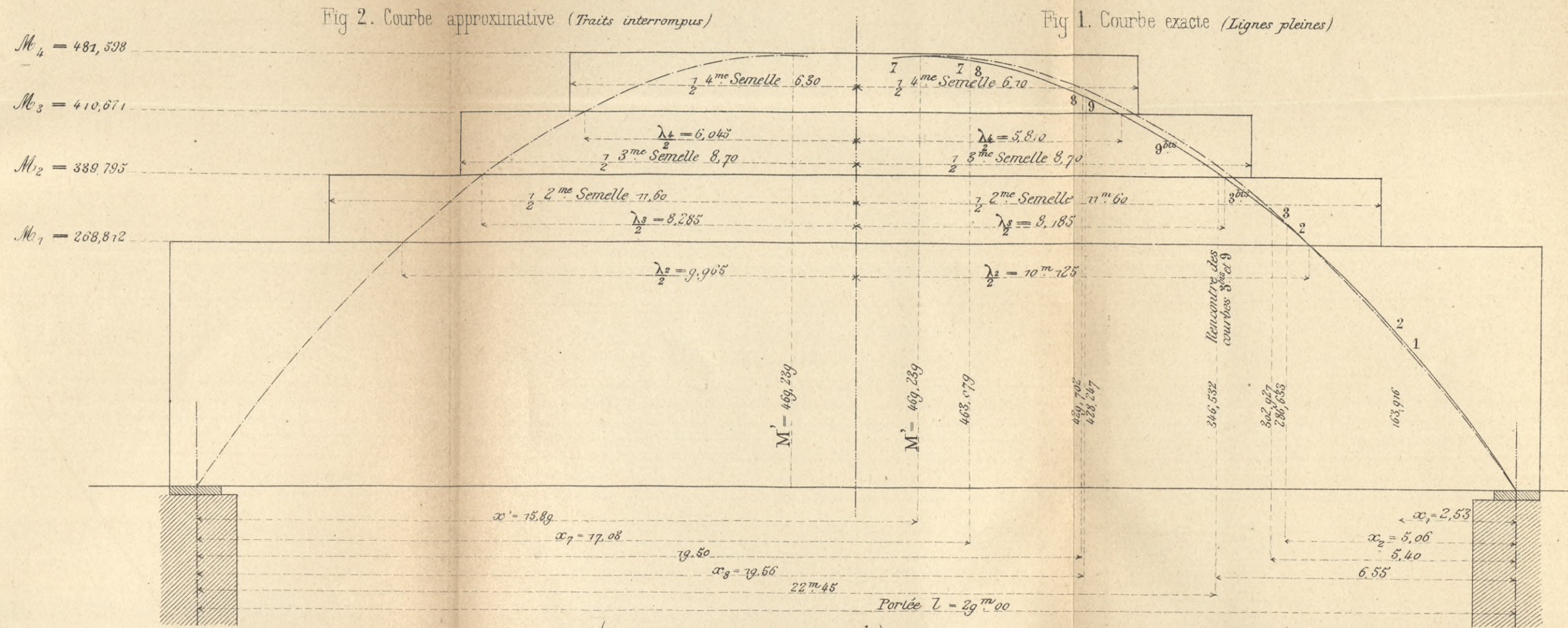


Fig 4 et 5 (Ech. des longueurs $\frac{1}{100}$ Ech. des efforts tranchants en tonnes $\frac{1}{1000}$ ou 1^m/m. par tonne) Lignes enveloppes des efforts tranchants.

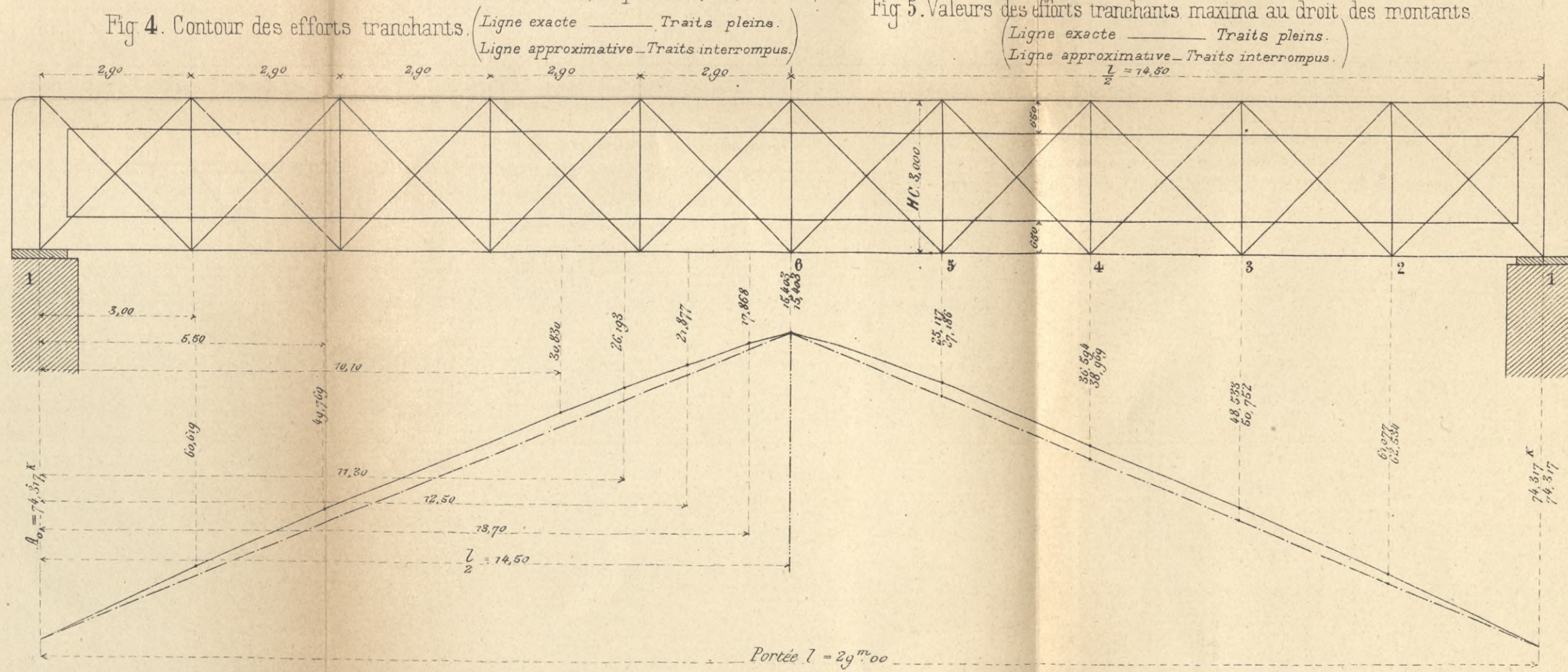
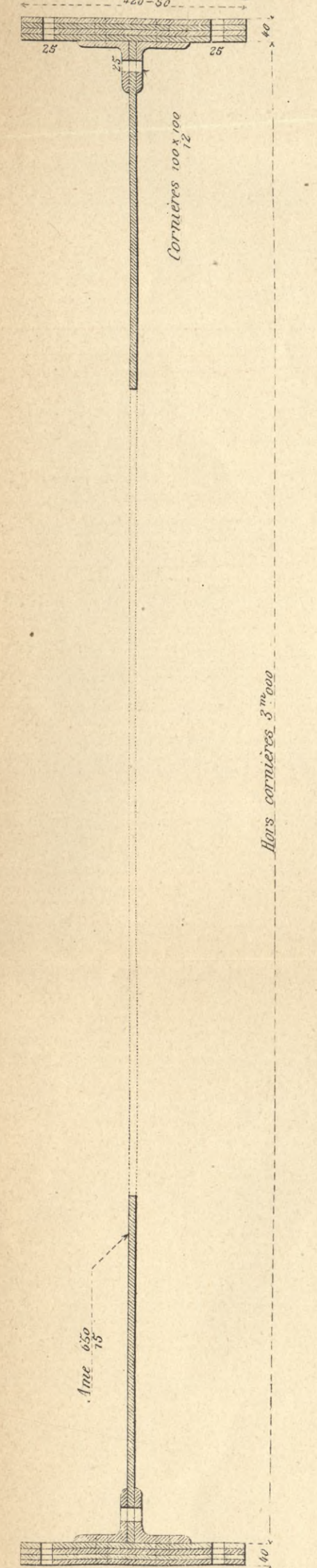
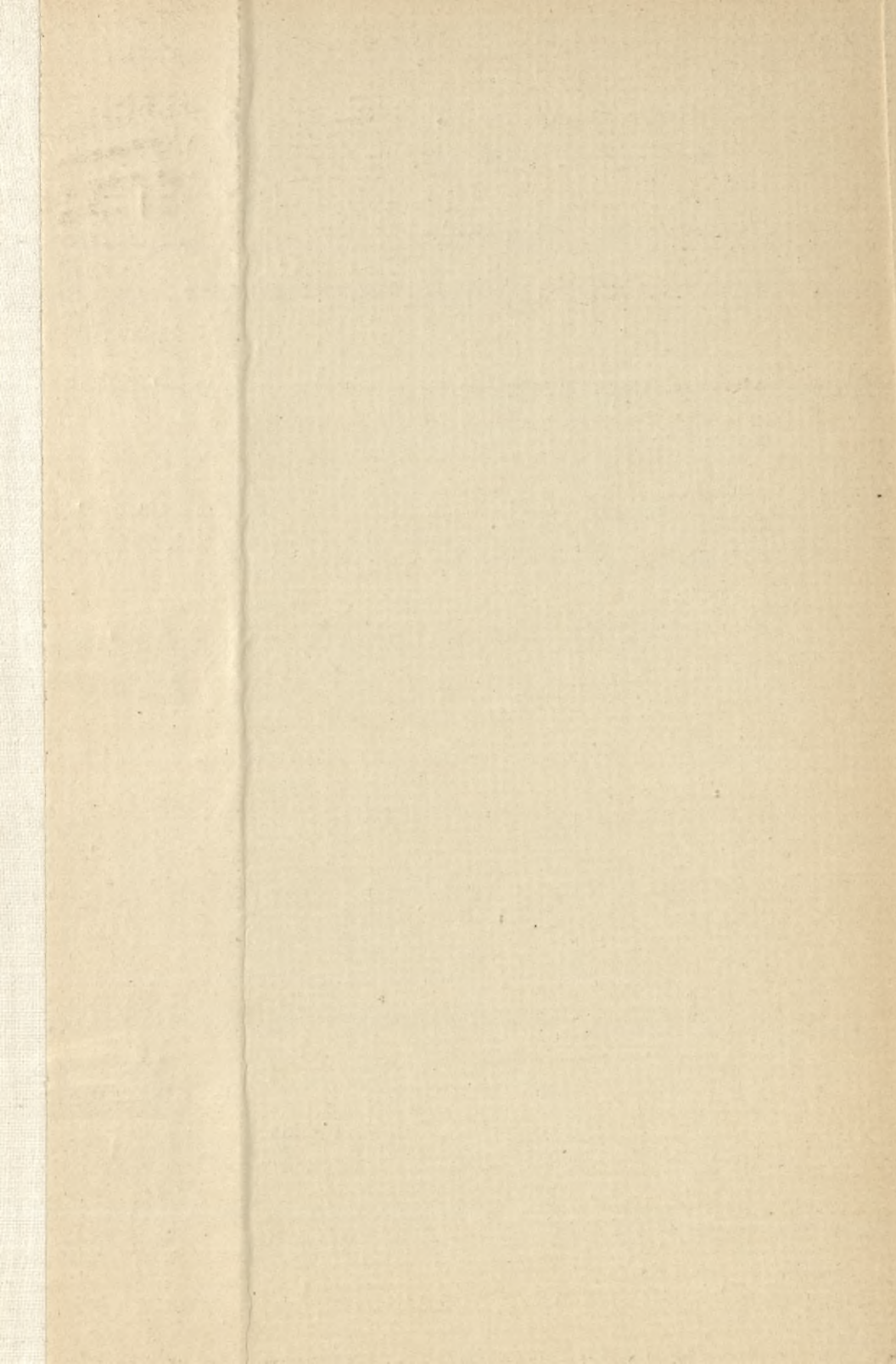


Fig 3. (Ech. 1/10) Section transversale de la poutre



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

S-96



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297398