

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

2747

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297469

Die Berechnung von  
bogenförmigen Staumauern.

von  
Dr. Ing. H. RITTER.

Mit 11 Texttafeln u. Tafeln.



Karlsruhe 1913

Königliche Druckerei von J. Neuberger, Karlsruhe

x  
1.166



# Die Berechnung von bogenförmigen Staumauern.

Von

Dr.-Ing. H. RITTER.

Mit 31 Textfiguren u. Tabellen.

14/10

F. N. 30598



Karlsruhe 1913.

Kommissionsverlag von J. Langs Buchhandlung.

544

77.

112747

Inhaltsverzeichnis.

Nr. 1.	Einleitung und Übersicht . . . . .	7
„ 2.	Berechnung des durch gleichmäßigen Wasserdruck belasteten Bogens . . . . .	12
„ 3.	Berechnung des einfachen Kreisbogens mit konstanter Bogenstärke . . . . .	19
„ 4.	Einfluß der Bogenform (Pfeilverhältnis) und der Bogenstärke auf die Lage der Drucklinie . . . . .	26
„ 5.	Bogen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser, aber konstanter Bogenstärke . . . . .	34
„ 6.	Bogen mit veränderlicher Bogenstärke . . . . .	36
„ 7.	Einfluß der Temperaturschwankungen auf bogenförmige Staumauern . . . . .	41
„ 8.	Berechnung der Temperaturkräfte . . . . .	44
„ 9.	Einfluß von Bogenform und Bogenstärke auf die Temperaturspannungen . . . . .	50
„ 10.	Günstigste Bogenform (Zentriwinkel) . . . . .	52
„ 11.	Berechnung von Gewölben mit konstanter Spannweite . . . . .	55
„ 12.	Berechnung von gewölbten Staumauern, deren Spannweite mit der Höhe sich ändert . . . . .	65
„ 13.	Einfluß des starren Zusammenhanges der einzelnen Bogenringe untereinander und des ganzen Gewölbes mit dem Untergrund . . . . .	70

Akc. Nr. 2101/49

# Bezeichnungen.

Dem Andenken meines Vaters

Prof. Dr. W. RITTER, Zürich

gewidmet.





# Bezeichnungen.

---

- $a$  = Abstand der Antipolaren vom Schwerpunkt des Bogens.  
 $b$  = halbe Länge der Kreisbogenmittellinie.  
 $C_1, C_2$ , usw. = Konstanten (siehe Tabelle S. 23).  
 $e$  = Bogenstärke.  
 $E$  = Elastizitätsmodul.  
 $f$  = Pfeilhöhe der Kreisbogenmittellinie.  
 $F$  = Querschnittsfläche des Bogens.  
 $\Delta g$  = Elastisches Gewicht eines Bogenelementes.  
 $H_p$  = Horizontale Zusatzkraft zur Resultierenden  $R$  infolge der Wasserbelastung.  
 $H_\tau$  u.  $H_{\Delta\tau}$  = horizontale Temperaturkräfte.  
 $i_1$  u.  $i_2$  = kleine und große Halbachse der Elastizitätsellipse.  
 $J$  = Trägheitsmoment.  
 $m$  = Abstand des Antipoles vom Schwerpunkt des Bogens.  
 $M$  = Moment.  
 $p$  = Wasserbelastung pro Flächeneinheit.  
 $r$  = Radius der Bogenmittellinie.  
 $r_a$  = Radius der äußeren Bogenlaibung.  
 $R$  = Resultierende der Wasserbelastung auf den Bogen.  
 $s$  = halbe Sehne der Kreisbogenmittellinie.  
 $\Delta s$  = Länge eines Bogenelementes.  
 $V$  = Volumen eines Bogenringes.  
 $W$  = Widerstandsmoment.
- $\alpha$  = halber Zentriwinkel des Kreisbogens.  
 $\alpha$  = Temperaturausdehnungskoeffizient.  
 $\Delta\delta$  = Drehwinkel der elastischen Formänderung eines Bogenelementes.  
 $\sigma$  = Spannung.  
 $\sigma_{zul.}$  = zulässige Spannung.  
 $\tau$  u.  $\Delta\tau$  = Anzahl der Wärmegrade.  
 $\eta$  = elastische Durchbiegungen des Bogens.
- 
-



## 1. Einleitung und Übersicht.

Die aus Mauerwerk oder Beton bestehenden Talsperren sind bisher in weitaus den meisten Fällen als sogen. Gewichtsstaumauern gebaut worden, d. h. als Mauern, die dem auf sie wirkenden Wasserdruck nur ihr Eigengewicht entgegenstellen. Leider ist es bis heute noch nicht gelungen, für diese Bauwerke eine einwandfreie Berechnungsmethode aufzustellen, da sich einerseits ein Teil der äußeren Kräfte, wie Temperatureinflüsse, Wasserauftrieb und die Folgen ungleichmäßiger Setzungen einer genauen Bestimmung entzieht und andererseits bei dem gegenwärtigen Stand der Festigkeitslehre eine genaue Berechnung von Größe, Art und Verteilung der in einem großen Mauerwerkskörper auftretenden Spannungen nicht möglich ist.

Außerdem ist noch als Nachteil von Gewichtsstaumauern zu bezeichnen, daß die Druckfestigkeit des Mauerwerks nur in beschränktem Maße ausgenützt werden kann, da infolge seiner geringen Zugfestigkeit alle Zugspannungen in der Berechnung vermieden werden müssen. Aus diesem Grunde stellt eine solche Staumauer im Vergleich zu anderen Bauwerken ein sehr unrationelles Gebilde dar.

Diese beiden Hauptnachteile, welche den Gewichtsstaumauern anhaften, haben die Erbauer von Talsperren schon früh, wenn auch nur in vereinzelt Fällen dazu geführt, sich von der üblichen Form zu entfernen und auf andere Art ein Bauwerk zu erstellen, das die gleichen Dienste zu leisten im Stande ist, infolge einer klaren Berechnungsweise aber größere Sicherheit bietet, und bei dem eine Bauzeit- und Baukostensparnis erzielt werden kann.

Schon ums Jahr 1800 wurde in Indien für die Wasserversorgung von Hyderabad der »Meer Allum Dam« gebaut, der aus 21 senkrecht stehenden, gegen Pfeiler sich stützenden,

halbkreisförmigen Gewölben besteht, deren größte Spannweite 45 m beträgt und die das Wasser 12,80 m hoch anstauen. (Vgl. E. Wegmann: The Design and Construction of Dams.)

Ein ähnliches Bauwerk, der »Belubula Dam« in New South Wales besteht aus einer Reihe geneigter Gewölbe von elliptischer Form, bei einer Pfeilerentfernung von 8,50 m. (Vgl. Eng. News, September 8. 1898.)

In engen Tälern oder Schluchten wurden schon öfters bogenförmige Staumauern gebaut, deren Standsicherheit lediglich auf der Wirkung als Bogen beruht. So z. B.:

Die »Zola-Staumauer« für die Wasserversorgung von Aix, erbaut ca. 1845, die eine größte Höhe von 37,70 m und einen Krümmungsradius von ca. 48,00 m besitzt. (Vgl. P. Ziegler: Der Talsperrenbau.)

Ferner der im Jahre 1884 in Californien erstellte »Bear Valley Dam«, dessen größte Höhe 18,20 m, dessen Kronenstärke 0,97 m und dessen Fußstärke 2,56 m beträgt und der nach einem Radius von 102 m gekrümmt ist. (Vgl. E. Wegmann: Wie oben.)

Weiter »La barrage du Rio Grande« (Isthme de Panama), eine provisorische Staumauer zur Wasserkraftausnutzung, mit 11,60 m größter Höhe und 15,06 m Krümmungsradius.

In den letzten 10 Jahren wurden besonders in Australien eine Reihe bogenförmiger Staumauern erstellt: Der »Barossa Dam«, größte Höhe 29,00 m (vgl. E. Wegmann: wie oben), der »Medlow Dam«, größte Höhe 20,00 m, der »Lithgow Dam Nr. 2«, größte Höhe 26,50 m u. a. m. (Vgl. Eng. News, May 19. 1910.)

Die Vorzüge dieser bogenförmigen Talsperren gegenüber den Gewichtsstaumauern sind besonders folgende:

Erstens erhöhte Standsicherheit der Mauer infolge der Möglichkeit einer genaueren, den tatsächlichen Verhältnissen eher entsprechenden Berechnung der inneren Spannungen. Ferner bedeutend vorteilhaftere Verteilung der Druckspannungen und infolgedessen größere Ausnutzung des Materials. Im weiteren eine Anpassungsfähigkeit an jedwede Verhält-

nisse und Fundamente, die bei Gewichtsstau Mauern nicht in demselben Maße vorhanden ist, da bei diesen infolge des großen Gewichtes meistens Bodenpressungen auftreten, die nur guten, gewachsenen Felsboden als Fundament zulassen. Bei der sogen. »Aufgelösten Bauweise«, d. h. bei den aus Pfeilern und Bogen bestehenden Mauern besteht keine Schwierigkeit, das Bauwerk auch auf wenig tragfähigen Boden zu setzen, indem man den Pfeilern, wie denjenigen von Brücken, durch geeignete Fundierung die nötige Standfestigkeit verschafft. Die Abschlußwand muß in solchem Fall, um das Unterspülen der Mauer bei leichtem Boden zu vermeiden, bis in genügende Tiefe geführt werden. Als weitere Vorzüge sind noch hervorzuheben: das gänzliche Wegfallen des schädlichen Auftriebes infolge von Sickerwasser, die kürzere Bauzeit und — nicht zuletzt — in zahlreichen Fällen die niedrigeren Kosten.

Daß trotz der verhältnismäßig dünnen Gewölbe oder Platten auch bei hohem Wasserdruck eine vollständige Dichtigkeit zu erzielen ist, und daß dieser Punkt also nicht als Nachteil angeführt werden kann, beweisen die bereits ausgeführten Bauten zur Genüge.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Berechnung von gewölbten Stau Mauern, d. h. von solchen, deren Standfestigkeit lediglich auf der Bogenwirkung beruht.

Um die Berechnung einer bogenförmigen Stau mauer durchführen zu können, denkt man sich das Gewölbe in eine Anzahl horizontaler, auf einander liegender Ringe zerlegt und betrachtet diese zunächst unabhängig von einander als gelenklose Bogen.

Im Gegensatz zu der bisher üblichen Berechnungsmethode, bei welcher die Zusammendrückung des Bogens infolge der zentrischen Druckkraft vernachlässigt und die Drucklinie als mit der Bogenmittellinie zusammenfallend angenommen wird, sind im nachstehenden die Untersuchungen, gestützt auf die Gesetze der Elastizitätstheorie, durchgeführt worden.

Die Voraussetzung der Elastizitätstheorie, daß die Dehnungen den Spannungen proportional sind, wird bei Mauerwerk nur unvollständig erfüllt. Die Ergebnisse der nachstehenden Rechnungen weichen daher mehr oder weniger von der Wirklichkeit ab. Da der Elastizitätsmodul jedoch mit wachsender Pressung abnimmt, so findet hierdurch eine gewisse Entlastung der am stärksten gepreßten Fasern statt; die Berechnung liefert also etwas zu große Bogenstärken.

Im Nachstehenden soll **der Inhalt der vorliegenden Arbeit** und speziell die für die Berechnung von gewölbten Stau mauern wichtigen Resultate kurz zusammengefaßt wiedergegeben werden:

Im Abschnitt Nr. 2 der vorliegenden Arbeit ist zunächst eine allgemeine Berechnungsmethode für gelenklose Bogen von beliebiger Form, beliebig wechselnder Bogenstärke und beliebig gerichteter Belastung abgeleitet worden, welcher die Theorie der Elastizitätsellipse und die Beziehung zwischen Pol und Polaren zu Grunde liegen. In der darauf folgenden Nummer ist sodann diese allgemeine Lösung auf den speziellen Fall eines durch gleichmäßigen Wasserdruck beanspruchten Kreisbogens mit konstanter Bogenstärke angewandt worden.

Gestützt auf diese Berechnungsmethode wurde zunächst gezeigt (Nr. 4), daß sich die Drucklinie mit abnehmendem Zentriwinkel und zunehmender Bogenstärke von der Bogenmittellinie entfernt. Ferner ergab sich, daß in allen Bogen, deren Zentriwinkel kleiner als  $158^{\circ}$  ist, Zugspannungen auftreten, sobald die Bogenstärke ein gewisses Maß überstiegen hat, und daß nur stärker gekrümmte Bogen von solchen Spannungen gänzlich frei sind.

Die Form der Drucklinie führt dazu, dem Bogen gegen die Kämpfer hin eine stärkere Krümmung zu geben, um eine günstigere Spannungsverteilung zu erzielen (Nr. 5). Es zeigt sich aber, daß eine solche Änderung der Bogenform nur einen geringen, allerdings günstigen Einfluß auf die Lage der Drucklinie gegenüber der Bogenmittellinie hat, indem sie etwas näher an diese herangerückt wird. Eine

Materialersparnis läßt sich aber auf diese Weise kaum erzielen.

Eine solche ist jedoch dadurch möglich, daß man die Bogenstärke gegen den Scheitel hin etwas verringert (Nr. 6). Dies ist zulässig, da die Spannungen bei konstanter Bogenstärke im Scheitel stets geringer sind, als in den Kämpfern (S. 27). Für gewisse Bogen empfiehlt sich eine Verstärkung gegen die Kämpfer hin, da auf diese Weise die Zugspannungen an diesen Stellen vermieden werden können. Wie eine Versuchsrechnung gezeigt hat, verschiebt sich die Drucklinie infolge einer symmetrisch zur Bogenmittellinie erfolgenden Querschnittsänderung nur unbedeutend und zwar durch eine teilweise Verringerung der Bogenstärke gegen die Mittellinie und durch eine teilweise Verstärkung derselben von derselben weg.

In den Nummern 7 bis 9 sind die Einflüsse der Temperaturschwankungen auf gewölbte Staumauern behandelt worden. Auf die Größe und Art der Temperaturspannungen sind von Einfluß: die Größe der Wärmeschwankungen in der Luft und im Wasser, die Art des Eindringens dieser Schwankungen ins Innere des Bauwerks, die Bautemperatur und schließlich auch in ähnlicher Weise das Schwinden und das Quellen des Betons. Der Berechnung der Temperaturkräfte liegen dieselben Gesetze zu Grunde wie der Konstruktion der Drucklinie für Wasserbelastung. Sie ist sowohl für beiderseitig, wie einseitig auf das Gewölbe wirkende Wärmeschwankungen durchgeführt worden. Eine Untersuchung der Temperaturspannungen für verschieden stark gekrümmte Bogen ergab, daß die Spannungen beim halbkreisförmigen am geringsten sind.

Wenn man die Zusammenpressung des Bogens in der Längsachse vernachlässigt, so ergibt sich als günstigste Bogenform (Nr. 10) diejenige, deren Zentriwinkel ca.  $135^{\circ}$  beträgt. In Wirklichkeit aber kann man für den Öffnungswinkel desjenigen Kreisbogens, welcher den geringsten Materialaufwand erfordert, keinen allgemein gültigen Grenzwert aufstellen. Dieser wird jedoch zwischen  $120^{\circ}$  und  $180^{\circ}$  liegen (Abb. 22), in welchen Grenzen die Bogenmasse

nur wenig schwankt. Mit Rücksicht auf die Temperatureinflüsse ist der Halbkreis als günstigster Bogen anzusehen.

Die Nummern 11 und 12 enthalten die Berechnung von bogenförmigen Staumauern und zwar Nr. 11 diejenige von Gewölben mit in allen Höhen gleicher Spannweite, wie sie bei der aufgelösten Bauweise zur Verwendung gelangen, Nr. 12 dagegen diejenige von Gewölben in engen Schluchten, bei denen die Spannweite nach unten abnimmt. Für Kreisbogen mit vom Kämpfer bis zum Scheitel konstanter Bogenstärke, die ja in den weitaus meisten Fällen zur Anwendung gelangen, ist es möglich, zur Bestimmung des Mauerprofils eine Formel abzuleiten.

Der Zusammenhang der einzelnen Gewölberinge, in welche man die Mauer zunächst geteilt hat, untereinander und die starre Verbindung des ganzen Gewölbes mit dem Untergrund (Nr. 13) hat einen nicht unbedeutenden Einfluß auf die in der Staumauer auftretenden Spannungen. Dieser läßt sich am besten dadurch feststellen, daß man das Gewölbe einmal als aus horizontalen Ringen zusammengesetzt auffaßt, und sodann als aus senkrecht stehenden, unten eingespannten Balken, und daß man unter Zuhilfenahme der elastischen Durchbiegungen eine Lastverteilung auf die beiden Systeme bestimmt. Gestützt auf diese Lastverteilung lassen sich dann die Spannungen sowohl in vertikalen wie horizontalen Schnitten berechnen.

## **2. Berechnung des durch gleichmäßigen Wasserdruck belasteten Bogens.**

Bei der Berechnung von Gewichtsstaumauern denkt man sich durch zwei im Abstände  $l$  voneinander entfernte lotrechte Querschnitte eine Scheibe aus der Mauer herausgeschnitten und betrachtet diese unabhängig vom übrigen Teil. Um sich ein klares Bild von den Einflüssen der auf eine gewölbte Staumauer wirkenden äußeren Kräfte zu gestalten, denkt man sich das Gewölbe durch wagrechte



Schnitte in Ringe von der Höhe 1 zerlegt und berechnet diese einzeln, ohne Rücksicht auf die darüber resp. darunter liegenden Gewölberinge zu nehmen.

In Nr. 13 wird auf den Einfluß des Zusammenhanges der einzelnen Ringe und die in horizontalen Schnitten auftretenden Spannungen näher eingegangen werden.

Ein solcher Gewölbering ist als gelenkloser, d. h. an seinen Kämpfern eingespannter Bogen zu betrachten.

Zunächst soll der Einfluß des Wasserdruckes auf eine gewölbte Staumauer untersucht werden. Dieser ist als eine über die wasserseitige Wölbfläche des Bogens gleichmäßig verteilte und auf dieser senkrecht stehende Belastung anzusehen, deren Größe der Höhe des Wasserspiegels über dem betreffenden Gewölberinge proportional ist.

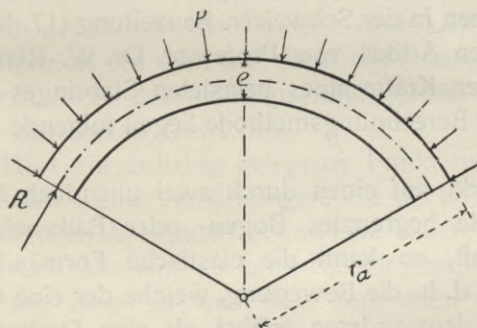


Abb. 1.

Wird von der Zusammendrückung des Bogens durch die zentrische Druckkraft abgesehen, so stellt die Bogenmittellinie für eine solche Belastung bei kreisförmigen Bogen mit konstanter Bogenstärke eine Drucklinie dar, und man findet (Abb. 1) die erforderliche Gewölbestärke  $e$  aus der einfachen Formel

$$e = \frac{r_a \cdot p}{\sigma_{zul}}, \quad (1)$$

in welcher  $r_a$  den Radius der äußeren, resp. wasserseitigen Bogenlaibung,  $p$  die Belastung pro Flächeneinheit und  $\sigma_{zul}$  die zulässige Druckspannung des Mauerwerkes bedeuten.

Diese Berechnungsmethode empfiehlt sich jedoch nur für Bogen mit kleiner Spannweite und geringer Wasserbelastung.

Eine genaue Berechnung des an seinen Kämpfern eingespannten Bogens verlangt bekanntlich die Zuhilfenahme der Formänderungsgesetze. Man geht dabei im allgemeinen von der Forderung aus, daß die Endflächen des unter dem Einflusse der äußeren Kräfte deformierten Bogens nach wie vor dieselbe gegenseitige Stellung einnehmen müssen. Unter der Annahme, daß das Material dem Hooke'schen Gesetze folgt, lassen sich die Formänderungen und darauf gestützt die im Bogen auftretenden Spannungen, wie folgt, ermitteln.

Die nachstehende Berechnungsweise des durch gleichmäßigen Wasserdruck belasteten elastischen Bogens stützt sich auf einen in der Schweizer Bauzeitung (17. Januar 1891) erschienenen Artikel von Professor Dr. W. Ritter betitelt: »Die inneren Kräfte eines belasteten Stabringes«.

Dieser Berechnungsmethode liegen folgende drei Sätze zu Grunde.

1. Wirkt auf einen durch zwei unendlich benachbarte Querschnitte begrenztes Bogen- oder Balkenelement eine äußere Kraft, so kann die elastische Formänderung des Elementes, d. h. die Bewegung, welche der eine Querschnitt gegenüber dem anderen erfährt, als eine Drehung um den Antipol der äußeren Kraft bezüglich der Elastizitätsellipse des Elementes aufgefaßt werden. (Vgl. W. Ritter: Anwendungen der Graph. Statik, Teil I, Nr. 33.)

In dieser Drehung sind die Einflüsse aller drei Komponenten, in welche man eine auf ein Element wirkende Kraft gewöhnlich zerlegt denkt, enthalten: die Drehung infolge des Momentes, sowie die Verschiebungen infolge der normalen und der transversalen, durch den Querschnittsmittelpunkt gehenden Komponenten.

Die Elastizitätsellipse ist diejenige Ellipse, deren kleine halbe Achse gleich ist der vertikalen halben Achse der Zentralellipse des Querschnittes, also  $i_1 = \sqrt{\frac{J}{F}}$  und deren

große halbe Achse den Wert hat  $i_2 = \sqrt{\frac{\Delta s^2}{12} + \frac{\lambda E}{G} i_1^2}$ , worin  $J$  und  $F$  Trägheitsmoment resp. Flächeninhalt des Querschnittes bedeuten,  $\Delta s$  die Länge des Elementes bezeichnet,  $E$  den Elastizitätsmodul,  $G$  den Gleitmodul und  $\lambda$  einen vom Querschnitt abhängigen Faktor, der für rechteckige Querschnitte gleich  $\frac{6}{5}$  zu setzen ist. Nimmt man noch das Verhältnis  $\frac{E}{G} = \frac{13}{5}$  an (vgl. Hütte, Teil 1) und berücksichtigt, daß für ein unendlich dünnes Element  $\Delta s$  gegenüber dem zweiten Faktor unter dem Wurzelzeichen verschwindet, so erhält man  $i_2 = i_1 \sqrt{3,12}$  oder angenähert

$$i_2 = i_1 \sqrt{3}$$

Die Größe des Drehwinkels, um den sich der eine Querschnitt gegenüber dem andern dreht, ist gleich der Kraft multipliziert mit dem auf die Krafrichtung bezogenen statischen Moment des im Ellipsenmittelpunkt konzentriert gedachten elastischen Gewichtes.

2. Erfährt ein beliebig gelegener Punkt nach einander zwei unendlich kleine Verrückungen, die als Drehungen um zwei in endlichen Abständen befindliche andere Punkte aufgefaßt werden können, so kann die Gesamtbewegung als Drehung um einen dritten Punkt angesehen werden, der sich als Schwerpunkt der mit den Drehwinkeln belasteten beiden Drehpunkten ergibt.

Die Größe des Gesamtdrehwinkels ist gleich der Summe der einzelnen Drehwinkel. (Vgl. W. Ritter: Anwendungen der Graph. Statik, Teil III, S. 259.)

3. Wenn für ein Kräftesystem mit zwei verschiedenen Polen zwei Seilecke konstruiert werden, so schneiden sich die zwischen gleichen Kräften liegenden Seiten der beiden Seilecke in einer Geraden, der sogenannten Polaraxe, die parallel der Verbindungslinie der beiden Pole ist. Das eine Seileck ergibt sich aus dem andern, wenn dem Kräftesystem eine weitere Kraft beigefügt wird, die in der Polaraxe liegt und deren Größe durch die Distanz der beiden Pole dargestellt wird.

Denkt man sich nun einen nach beliebigem Gesetz gekrümmten Bogen von der Höhe 1 mit beliebig veränderlicher Bogenstärke (Abb. 2) durch Querschnitte in eine Anzahl Elemente von endlicher Länge zerlegt, ferner die gleichmäßig

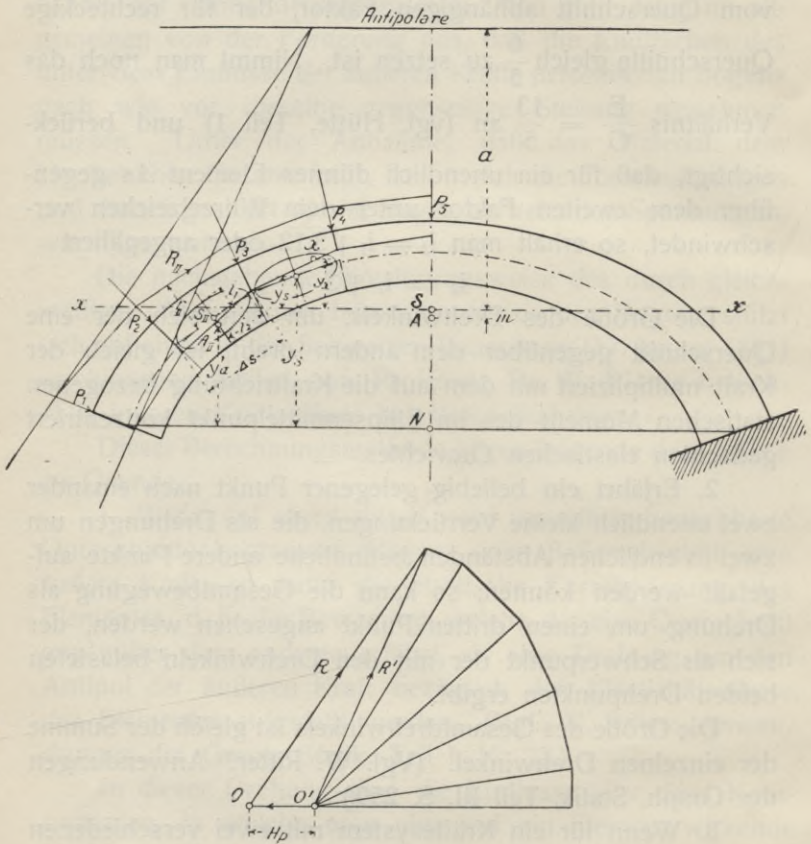


Abb. 2.

verteilte Wasserbelastung in den Schnittpunkten konzentriert, so lassen sich bekanntlich unendlich viele Drucklinien in den Bogen einzeichnen, welche die Gesetze des Gleichgewichts befriedigen. Von allen diesen wird aber nur eine einzige den wirklich vorhandenen inneren Spannungen ent-

sprechen. Um diese zu finden, muß von den Gesetzen der elastischen Formänderungen Gebrauch gemacht werden.

Wir denken uns zunächst mittelst beliebig gewähltem Pole 0 eine Drucklinie gezeichnet, dann stellt jede Seite des Seilecks die Resultierende aller auf das entsprechende Element wirkenden äußeren Kräfte dar. Halten wir nun den Bogen an seinem rechten Auflager fest und denken uns das linke frei beweglich, so wird sich dieses infolge der Elastizität des Materials unter dem Einfluß der auf den Bogen wirkenden Kräfte verschieben. Betrachten wir vorerst nur ein einziges Element z. B. das zweite, als elastisch, so dreht die Resultierende  $R_{II}$  nach Satz 1 den einen Querschnitt des Elementes II gegenüber dem andern und folglich auch das frei schwebende Bogenende um  $A_{II}$ , den Antipol der Kraft bezüglich der Elastizitätsellipse, und der Drehwinkel ist

$$\Delta \delta_{II} = R_{II} \cdot r_{II} \cdot \Delta g_{II} = \frac{R_{II} \cdot r_{II} \cdot \Delta s}{E \cdot J_{II}}$$

Betrachtet man nun ein Element nach dem andern als elastisch, so dreht sich das linke Bogenende nacheinander um alle Antipole der einzelnen Elemente.

Infolge der Unverrückbarkeit der Widerlager kann jedoch diese Bewegung in Wirklichkeit nicht eintreten. Im Bogen muß daher eine Zusatzkraft existieren. Die Gesamtverdrehung ist nach Satz 2 gleich der Summe der Einzelverdrehungen und den Drehpunkt für diese Gesamtbewegung findet man als Schwerpunkt der in ihren Drehpunkten als Kräfte wirkenden Drehwinkel. Die Kraft, welche diese Drehung wieder rückgängig zu machen hat, muß, da sie den ganzen Bogen beeinflußt, in der Antipolaren zu diesem Punkte hinsichtlich der Elastizitätsellipse des ganzen Bogens<sup>1)</sup> liegen. Ihre Größe ergibt sich aus der Beziehung

$$H_p \cdot a \cdot \Sigma (\Delta g) = \Sigma (\Delta \delta)$$

zu

$$H_p = \frac{\Sigma (\Delta \delta)}{a \cdot \Sigma (\Delta g)} \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Über die Konstruktion der Elastizitätsellipse eines Bogens vgl. W. Ritter: Anwendungen der Graph. Statik Teil IV, S. 197.

Bei symmetrischen Bogen, um die es sich bei allen nachstehenden Betrachtungen stets handelt, liegt sowohl der Schwerpunkt der elastischen Gewichte, d. h. der Mittelpunkt der Elastizitätsellipse des Bogens wie auch der Drehpunkt A auf der vertikalen Symmetrieaxe des Bogens und die Antipolare steht infolgedessen auf dieser senkrecht. Die gesuchte Zusatzkraft ist also stets eine horizontale Kraft. Trägt man sie im Kräftepolygon von dem beliebig gewählten Pole 0 den Kräften R entgegengesetzt auf, so findet man nach Satz 3 den Pol 0' für die richtige Drucklinie. Die Seiten des beliebig angenommenen und diejenigen des richtigen Seilpolygons schneiden sich auf der Antipolaren und ist dadurch auch die Lage der richtigen Drucklinie bestimmt. Die im Bogen auftretenden Spannungen lassen sich nun ohne große Schwierigkeiten nach bekannten Formeln berechnen.

Zur Bestimmung der Distanz a, der Antipolaren vom Schwerpunkt S ist der Halbmesser i der Elastizitätsellipse des Bogens erforderlich, da

$$(3) \quad a = \frac{i^2}{m}$$

wom den Abstand des Antipoles A vom Schwerpunkt S bedeutet.

Das Trägheitsmoment einer ebenen Figur hinsichtlich einer beliebigen Axe ist bekanntlich gleich deren Flächeninhalt multipliziert mit dem Abstand des Schwerpunktes von der Achse und mit dem Abstand des Antipoles dieser Axe hinsichtlich der Trägheitsellipse. Es ist also

$$(4) \quad i^2 = \frac{\sum (\Delta g y_s y_x)}{\sum (\Delta g)}$$

wobei X jeweilen der Antipol der x-Axe bezüglich der Elastizitätsellipse des Elements ist (vgl. Abb. 2).

Für Bogen mit geringen Bogenstärken kann mit genügender Genauigkeit  $y_x = y_s$  gesetzt werden, wodurch die Arbeit etwas vereinfacht wird. In den nachstehenden Berechnungen soll dies aber mit Rücksicht auf die teilweise großen Bogenstärken nicht geschehen.

Gestützt auf diese allgemeine Berechnungsweise können nun Formeln zur Berechnung der bei gewölbten Stau Mauern zur Verwendung gelangenden Bogenformen abgeleitet werden.

### 3. Berechnung des einfachen Kreisbogens mit konstanter Bogenstärke.

Ist das Gewölbe nach einem einzigen Kreisbogen gekrümmt und wird konstante Bogenstärke vorausgesetzt, so kann der Pol des Kräftepolygons derart gewählt werden, daß das Seilpolygon ein beliebiger, aber zur Bogenmittellinie konzentrischer Kreis wird. Dabei sind die Elemente als Scheiben von unendlich kleiner Stärke anzusehen. Die auf die verschiedenen Elemente wirkenden Resultierenden  $R$  haben dann alle gleiche Größe und zwar ist (vgl. Abb. 1)

$$R = p \cdot r_a \quad (5)$$

Wir denken uns nun das Seilpolygon mit der wasserseitigen Wölbfläche zusammenfallend (Abb. 3). Dann sind die Hebelarme der statischen Momente  $R \cdot r$  alle von gleicher Größe, gleich der halben Bogenstärke. Das Trägheitsmoment ist bekanntlich

$$J = \frac{e^3}{12}$$

Bezeichnet man die Länge der Elemente zunächst wieder mit  $\Delta s$ , so findet man den Drehwinkel für die Elemente zu

$$\Delta \delta = \frac{6 R \Delta s}{E e^2}$$

Der Drehpunkt hat in jedem Element als Antipol von  $R$  bezüglich der Elastizitätsellipse vom Elementenmittelpunkt den Abstand

$$\frac{2 i_1^2}{e} = \frac{e}{6}$$

liegt also, wie zu erwarten stand, im inneren Drittel des Querschnittes. Man findet demnach den Drehpunkt  $A$  für die Gesamtdrehung als Schwerpunkt eines zur Mittellinie konzentrischen Kreisbogens vom Radius  $\left(r - \frac{e}{6}\right)$ . Der Schwerpunkt  $S$  der elastischen Gewichte ist für den vorliegenden Fall identisch mit dem Schwerpunkt der Bogenmittellinie und die Größe  $SA$  ist also

$$m = \frac{rs}{b} - \left(r - \frac{e}{6}\right) \frac{s}{b} = \frac{es}{6b} \quad (6)$$

Zur Berechnung von  $i^2$  sind die Trägheitsmomente der Gewichte bezüglich der durch den Schwerpunkt gehenden horizontalen Axe, der x-Axe, erforderlich. Man findet die Größe dieses Wertes für ein beliebiges, im Winkelabstand  $\varphi$  von der senkrechten Symmetrieaxe des Bogens befindliches Element entweder gestützt auf die Konstruktion des

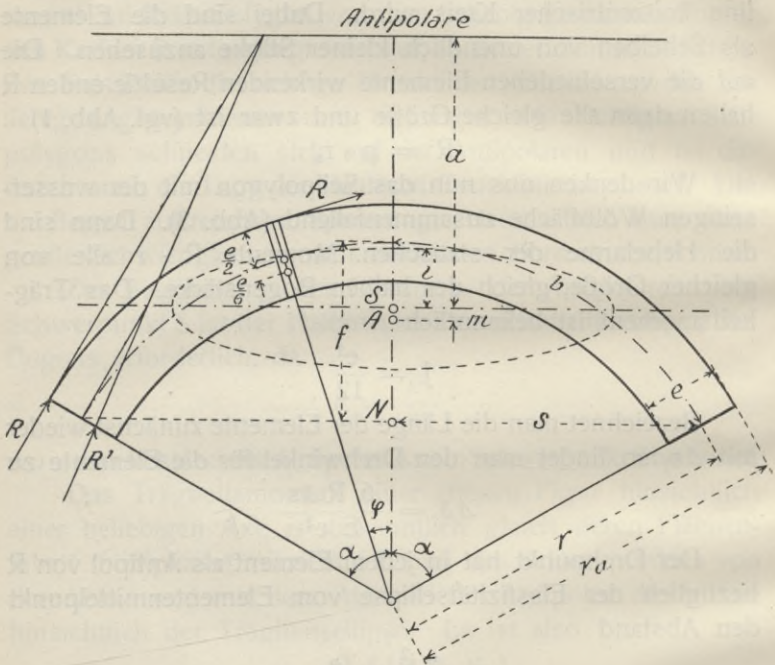


Abb. 3.

Antipoles (siehe S. 41) oder einfacher aus der Beziehung (Abb. 4)

$$J = J' + \Delta g \cdot y_s^2 = J_1 \cdot \cos^2 \varphi + J_2 \cdot \sin^2 \varphi + \Delta g \cdot y_s^2 \\ = \Delta g (i_1^2 \cdot \cos^2 \varphi + i_2^2 \cdot \sin^2 \varphi) + \Delta g \cdot y_s^2$$

Setzt man nach früherem (S. 15)  $i_2^2 = 3i_1^2$ , so wird

$$J = \Delta g \cdot i_1^2 (1 + 2 \sin^2 \varphi) + \Delta g \cdot y_s^2$$

und man erhält durch Summation über den ganzen Bogen



$$i^2 = \frac{\sum_{\varphi=-a}^{+a} \left[ \frac{\Delta s \cdot e^2}{12} (1 + 2 \sin^2 \varphi) + \Delta s \cdot y_s^2 \right]}{\sum_{\varphi=-a}^{+a} (\Delta s)}$$

Ersetzt man den unendlich kleinen Elementen entsprechend die Summenausdrücke durch Integrale und die Länge der Elemente  $\Delta s$  durch den Ausdruck  $ds = r \cdot d\varphi$ , so erhält man

$$i^2 = \frac{\frac{r e^2}{12} \int_{-a}^{+a} (1 + 2 \sin^2 \varphi) d\varphi + r \int_{-a}^{+a} y_s^2 d\varphi}{r \int_{-a}^{+a} d\varphi}$$

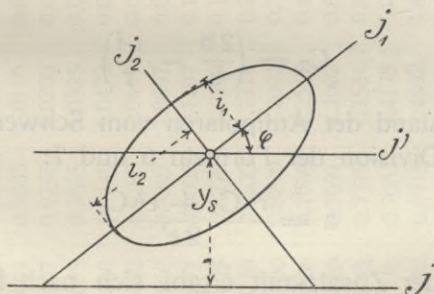


Abb. 4.

Durch Ausrechnen der Integrale findet man

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} (1 + 2 \sin^2 \varphi) d\varphi &= 4a - 2 \sin a \cos a \\ \int_{-a}^{+a} y_s^2 d\varphi &= r^2 \int_{-a}^{+a} \left( \cos \varphi - \frac{s}{b} \right)^2 d\varphi \\ &= r^2 \left( \sin a \cos a + a - \frac{4s}{b} \sin a + 2a \frac{s^2}{b^2} \right) \\ &\quad + \int_{-a}^{+a} d\varphi = 2a \end{aligned}$$

Ersetzt man die Winkelfunktionen durch Längen (vgl. Abb. 3) und führt die so erhaltenen Ausdrücke in den Wert für  $i^2$  ein, so wird

$$i^2 = \frac{e^2 \left( 2b - s \frac{r-f}{r} \right) + r^2 \left( s \frac{r-f}{r} + b - 2 \frac{s^2}{b} \right)}{2b}$$

$$= \frac{s}{12b} \left[ e^2 \left( \frac{2b}{s} - \frac{r-f}{r} \right) + 6r^2 \left( \frac{r-f}{r} + \frac{b}{s} - \frac{2s}{b} \right) \right]$$

und abgekürzt schließlich

$$(7) \quad i^2 = \frac{s}{12b} \left( r^2 C_1 + e^2 C_2 \right)$$

worin  $C_1$  und  $C_2$  reine Zahlenwerte bedeuten und zwar

$$C_1 = 6 \left( \frac{r-f}{r} + \frac{b}{s} - \frac{2s}{b} \right)$$

und

$$C_2 = \left( \frac{2b}{s} - \frac{r-f}{r} \right)$$

Für den Abstand der Antipolaren vom Schwerpunkt erhält man durch Division der Formeln 6 und 7:

$$(8) \quad a = \frac{r^2 C_1 + e^2 C_2}{2e}$$

Die Größe der Zusatzkraft ergibt sich nach Formel 2 zu

$$H_p = \frac{\frac{6R}{Ee^2} \int_{-a}^{+a} ds}{a \cdot \frac{12}{Ee^3} \int_{-a}^{+a} ds} = \frac{Re}{2a}$$

oder unter Berücksichtigung des Wertes für  $a$  schließlich

$$(9) \quad H_p = \frac{Re^2}{r^2 C_1 + e^2 C_2}$$

$R$  berechnet sich aus der Formel 5, die Zahlenwerte  $C_1$  und  $C_2$  sind in der nebenstehenden Tafel für verschiedene Öffnungswinkel von  $10^0$  zu  $10^0$  ausgerechnet.

$2\alpha$	$r$	$r-f$	$2s$	$2b$	$\frac{r-f}{r}$	$\frac{s}{b}$	$\frac{b}{s}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$\sin \alpha$
10°	1.00	0.9962	0.1743	0.1745	0.9962	0.9988	1.0011	0.0000	1.0060	0.0049	0.0176	0.0026	0.0872
20°	1.00	0.9848	0.3473	0.3491	0.9848	0.9948	1.0052	0.0008	1.0256	0.0204	0.0708	0.0100	0.1737
30°	1.00	0.9659	0.5176	0.5236	0.9659	0.9885	1.0116	0.0020	1.0573	0.0457	0.1592	0.0226	0.2588
40°	1.00	0.9397	0.6840	0.6981	0.9397	0.9798	1.0206	0.0042	1.1015	0.0809	0.2821	0.0401	0.3420
50°	1.00	0.9063	0.8452	0.8727	0.9063	0.9685	1.0325	0.0108	1.1587	0.1262	0.4390	0.0622	0.4226
60°	1.00	0.8660	1.0000	1.0472	0.8660	0.9549	1.0472	0.0201	1.2284	0.1812	0.6291	0.0889	0.5000
70°	1.00	0.8192	1.1472	1.2217	0.8192	0.9390	1.0649	0.0366	1.3106	0.2457	0.8508	0.1198	0.5736
80°	1.00	0.7660	1.2856	1.3963	0.7660	0.9207	1.0861	0.0642	1.4062	0.3201	1.1043	0.1547	0.6428
90°	1.00	0.7071	1.4142	1.5708	0.7071	0.9003	1.1107	0.1034	1.5144	0.4036	1.3869	0.1932	0.7071
100°	1.00	0.6428	1.5321	1.7453	0.6428	0.8778	1.1392	0.1584	1.6356	0.4964	1.6978	0.2350	0.7660
110°	1.00	0.5736	1.6383	1.9199	0.5736	0.8533	1.1719	0.2334	1.7702	0.5983	2.0357	0.2797	0.8191
120°	1.00	0.5000	1.7321	2.0944	0.5000	0.8270	1.2092	0.3308	1.9183	0.7092	2.3993	0.3270	0.8660
130°	1.00	0.4226	1.8126	2.2689	0.4226	0.7989	1.2517	0.4590	2.0808	0.8291	2.7871	0.3763	0.9063
140°	1.00	0.3420	1.8794	2.4435	0.3420	0.7691	1.3002	0.6240	2.2584	0.9582	3.1977	0.4271	0.9397
150°	1.00	0.2588	1.9319	2.6180	0.2588	0.7379	1.3551	0.8285	2.4515	1.0963	3.6300	0.4791	0.9659
160°	1.00	0.1736	1.9696	2.7925	0.1736	0.7053	1.4178	1.0848	2.6620	1.2442	4.0836	0.5317	0.9848
170°	1.00	0.0872	1.9924	2.9671	0.0872	0.6715	1.4892	1.4004	2.8912	1.4020	4.5569	0.5843	0.9962
180°	1.00	0.0000	2.0000	3.1416	0.0000	0.6366	1.5708	1.7854	3.1416	1.5708	5.0514	0.6366	1.0000

$$C_1 = 6 \left( \frac{b}{s} + \frac{r-f}{r} - \frac{2s}{b} \right), C_2 = \left( \frac{2b}{s} - \frac{r-f}{r} \right), C_3 = \left( \frac{b}{s} - \frac{r-f}{r} \right), C_4 = \left( \frac{2b}{s} + \frac{3s}{b} - 5 \frac{r-f}{r} \right), C_5 = \left( \frac{s}{b} - \frac{r-f}{r} \right)$$

Zu dem gleichen Resultat kann man auch auf anderem Wege gelangen. (Vgl. Prof. E. Mörsch: »Berechnung kreisförmiger Gewölbe gegen Wasserdruck« Schweiz. Bauzeitung 2. Mai 1908.) Die Formel, welche in diesem Artikel für die Zusatzkraft abgeleitet wurde, stimmt nicht genau mit obiger überein. Der Unterschied liegt darin, daß bei Bestimmung der Formänderung des Gewölbes der Einfluß der Schubkräfte auf die Bogenelemente vernachlässigt wurde. Bei dünnen Bogen sind diese Kräfte allerdings nur von geringer Bedeutung, während sie bei starken aber einen ziemlich großen Einfluß haben. Soll dieser berücksichtigt werden, so muß diejenige Gleichung in dem genannten Artikel, welche die Bedingung enthält, daß keine horizontale Verschiebung des frei schwebenden Bogenendes möglich ist und aus welcher die Zusatzkraft  $H_e$  ermittelt wird, folgendermaßen geschrieben werden:

$$0 = \int \frac{M_x}{E J} ds \cdot y - \int \frac{N_x}{E F} ds \cdot \cos \varphi - \int \frac{Q_x}{G F} ds \cdot \sin \varphi$$

Die Größe der Querkraft  $Q_x$  ist

$$Q_x = H_e \sin \varphi + V_e \cos \alpha$$

Für  $G$  kann angenähert gesetzt werden  $\frac{E}{3}$  (vgl. S. 15).

Dann findet man die Ersatzkraft

$$H_e = - \frac{R_s \int \frac{\cos \varphi ds}{F}}{\int \frac{y^2 ds}{J} + \int \frac{\cos^2 \varphi ds}{F} + 3 \int \frac{\sin^2 \varphi ds}{F}}$$

Durch Ausrechnen der Integrale und Ersetzen der Winkelfunktionen durch die Längen findet man wieder obige Formel 9.

Gestützt auf die so gefundene Größe der Zusatzkraft und ihren Abstand  $a$  vom Bogenmittelpunkt ließe sich nun nach früherem (S. 18) die richtige Drucklinie leicht in den Bogen einzeichnen. Da aber die Lage der beliebigen ersten Drucklinie auf die Größe von  $H_p$  keinen Einfluß hat und nur den Abstand  $a$  bedingt, kann durch folgende Überlegung eine wesentliche Vereinfachung der Konstruktion

der Drucklinie sowie der Berechnung der Bogenspannungen erzielt werden.

Läßt man nämlich das erste Seileck anstatt durch die wasserseitige Laibung durch die Bogenmittellinie laufen, so fallen die Antipole der einzelnen Elemente ins Unendliche, somit auch der Drehpunkt der Zusatzkraft  $H_p$ . Dieser kommt mit Rücksicht auf die Symmetrie des Bogens in den unendlich fernen Punkt der  $y$ -Achse zu liegen und die Kraft  $H_p$  infolgedessen in die  $x$ -Achse. Eine Bestimmung der Größe von  $H_p$  ist auf diesem Wege nicht möglich, wohl aber läßt sich die Lage der Drucklinie finden und zwar einfacher als auf die zuerst beschriebene Weise.

Zunächst ermittelt man (Abb. 2) den richtigen Pol  $0'$  im Abstände  $H_p$  von  $0$ , sodann zieht man im Kämpferquerschnitt die Tangente an die Bogenmittellinie (Abb. 3), bringt sie mit der  $x$ -Achse zum Schnitt und zieht durch diesen Punkt eine Parallele zur Endresultierenden  $R'$  des neuen Kraffteckes. Anschließend an diese Auflagerreaktion läßt sich, gestützt auf eine Einteilung des Bogens in endliche Elemente die richtige Drucklinie einzeichnen. Diese ist jedoch zur Bestimmung der im Bogen auftretenden Spannungen nicht notwendig. Im allgemeinen genügt es, die größten resp. kleinsten Spannungen zu kennen, die hier, wie leicht ersichtlich, in den Kämpfer- und Scheitelquerschnitten auftreten. Genauer und einfacher als mittelst der Drucklinie können diese aus den Kernformeln berechnet werden.

$$\sigma = \frac{R}{e} \pm \frac{H_p \cdot y_k}{W} \quad (10)$$

worin  $y_k$  die Abstände der Kernpunkte des Querschnittes von der Kraft  $H_p$ , also von der  $x$ -Achse bezeichnet. Es ist (vgl. Abb. 5)

$$\begin{aligned} y_{ka}^k &= r \left( \frac{s}{b} - \frac{r-f}{r} \right) - \frac{r-f}{r} \cdot \frac{e}{6} \\ y_{ki}^k &= r \left( \frac{s}{b} - \frac{r-f}{r} \right) + \frac{r-f}{r} \cdot \frac{e}{6} \\ y_{ka}^s &= r \left( 1 - \frac{s}{b} \right) + \frac{e}{6} \\ y_{ki}^s &= r \left( 1 - \frac{s}{b} \right) - \frac{e}{6} \end{aligned} \quad (11)$$

Zur Bestimmung der an der äußeren Wölbfläche auftretenden Spannungen ist der der inneren Laibung näher liegende Kernpunkt zu wählen und umgekehrt.  $W$  ist das Widerstandsmoment des Querschnittes, das für den vorliegenden Fall die Größe hat

$$W = \frac{e^2}{6}$$

Der erste Ausdruck der Formeln 10 liefert gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilte Druckspannungen, während  $H_p$  in den Kämpferquerschnitten an der äußeren Wölbfläche Zugspannungen, an der inneren Druckspannungen hervorruft, im Scheitel umgekehrt. Die Drucklinie wird also infolge der Wirkung von  $H_p$  an den Kämpfern unter die Bogenmittellinie, im Scheitel über diese verschoben und schneidet sie auf jeder Bogenhälfte einmal.

#### 4. Einfluß der Bogenform (Pfeilverhältnis) und der Bogenstärke auf die Lage der Drucklinie.

Die Größe der Zusatzkraft  $H_p$  ist, wie aus Formel 9 ersichtlich, der Kraft  $R$  direkt proportional. Das Verhältnis

$$\frac{H_p}{R} = \frac{e^2}{r^2 C_1 + e^2 C_2}$$

das einen reinen Zahlenwert darstellt und das die Lage der Drucklinie bedingt, ist ganz unabhängig von der Größe der Belastung und wird lediglich von der Form, d. h. dem Krümmungs-Radius und dem Zentriwinkel und von der Stärke des Bogens beeinflusst. In welcher Weise dies der Fall ist, soll in Nachstehendem untersucht werden.

Zunächst ist leicht ersichtlich, daß der Ausdruck  $\frac{H_p}{R}$  umso größer wird, daß die Drucklinie sich also umso mehr von der Mittellinie entfernt, je größer die Bogenstärke und je kleiner der Zentriwinkel ist (vgl. die Tabelle auf Seite 23).

Diese Entfernung erreicht ihren Größtwert jederzeit in den Kämpferquerschnitten, wo infolgedessen auch stets die

größten Druckspannungen auftreten. Daß dies für jeden Bogen der Fall ist, daß die Spannung  $\sigma_i^k$  also stets auch größer ist als die Spannung  $\sigma_a^s$  ergibt ein Vergleich der beiden Ausdrücke

$$\sigma_i^k = \frac{R}{e} + \frac{H_p \cdot y_{ka}^k}{W}$$

$$\sigma_a^s = \frac{R}{e} + \frac{H_p \cdot y_{ki}^s}{W}$$

Soll obige Behauptung für alle Kreisbögen zutreffen, so muß stets  $y_{ki}^s < y_{ka}^k$  sein. Da nun der Schwerpunkt eines Bogens stets näher dem Scheitel liegt, als der Sehne, so

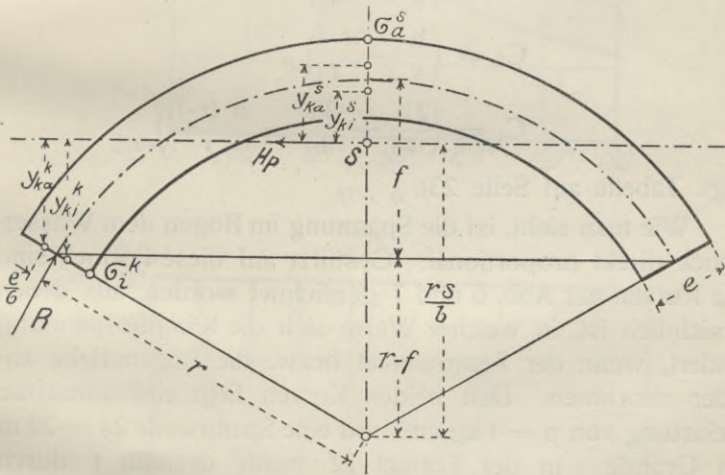


Abb. 5.

ist diese Bedingung in allen Fällen erfüllt, wie aus Abb. 5 leicht ersichtlich ist.

Da die größte Druckspannung also stets im Kämpferquerschnitt auftritt, soll in Nachstehendem zunächst nur diese Spannung betrachtet werden. Man findet die Größe von  $\sigma_i^k$  folgendermaßen:

$$\sigma_i^k = \frac{\left(r + \frac{e}{2}\right) p}{e} + \frac{\left(r + \frac{e}{2}\right) p \cdot e^2}{r^2 C_1 + e^2 C_2} \cdot \frac{6}{e^2} \left[ r \left( \frac{s}{b} - \frac{r-f}{r} \right) - \frac{r-f}{r} \cdot \frac{e}{6} \right]$$

$$= p \cdot \frac{\left(r + \frac{e}{2}\right) \left( r^2 C_1 + e^2 C_2 \right) + 6e \left( r + \frac{e}{2} \right) \left[ r \left( \frac{s}{b} - \frac{r-f}{r} \right) - \frac{r-f}{r} \cdot \frac{e}{6} \right]}{e \left( r^2 C_1 + e^2 C_2 \right)}$$

$$(12) \quad \sigma_i^k = p \cdot \frac{e^3 C_3 + e^2 r C_4 + e r^2 \cdot 3 C_3 + r^3 C_1}{e^3 C_2 + e r^2 C_1}$$

worin:

$$C_1 = 6 \left( \frac{r-f}{r} + \frac{b}{s} - \frac{2s}{b} \right)$$

$$C_2 = \left( \frac{2b}{s} - \frac{r-f}{r} \right)$$

$$C_3 = \left( \frac{b}{s} - \frac{r-f}{r} \right)$$

$$C_4 = \left( \frac{2b}{s} + \frac{3s}{b} - \frac{5(r-f)}{r} \right)$$

(vgl. Tabelle auf Seite 23).

Wie man sieht, ist die Spannung im Bogen dem Wasserdruck direkt proportional. Gestützt auf diese Formel, sind die Kurven der Abb. 6 und 7 gezeichnet worden, aus denen ersichtlich ist, in welcher Weise sich die Kämpferspannung ändert, wenn der Zentriwinkel bzw. die Bogenstärke zu- oder abnehmen. Den beiden Kurven liegt eine konstante Belastung von  $p = 1 \text{ kg/cm}^2$  und eine Spannweite  $2s = 20 \text{ m}$  zu Grunde. In der Formel 12 mußte deshalb  $r$  durch  $\frac{s}{\sin a}$  ersetzt werden. Für alle andern im Bogen auftretenden Spannungen ließen sich ähnliche Kurven zeichnen.

Mit abnehmender Bogenstärke wächst die Spannung asymptotisch an die Gerade  $e = 0$ . Eine Abnahme des Zentriwinkels hat ebenfalls ein Wachsen, wenngleich in ganz anderer Art, zur Folge. Der Größtwert der Spannung tritt hier für  $2a = 0^\circ$  ein. Er berechnet sich aus der bekannten Biegungsformel für den eingespannten Balken, in den der gelenklose Bogen übergeht. Ganz diesem letz-



teren entsprechend tritt auch hier die größte Druckbeanspruchung in der unteren Kante des Einspannungsquerschnittes auf.

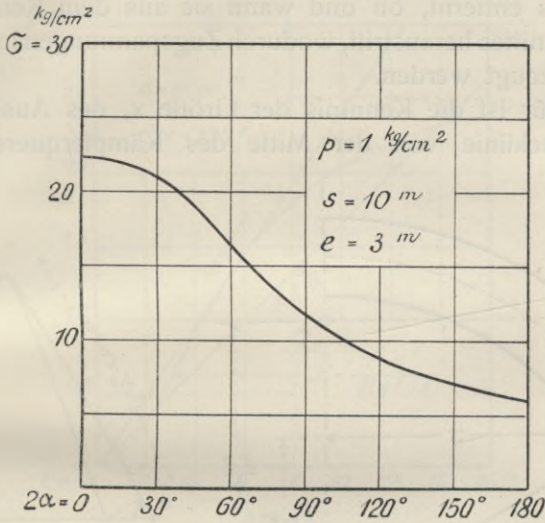


Abb. 6.

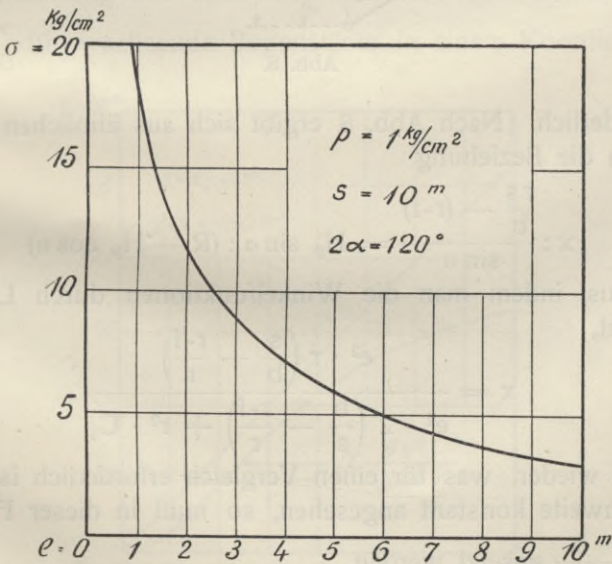


Abb. 7.

Es ist nun von besonderem Interesse, festzustellen, wie weit die Drucklinie sich für wechselnden Zentriwinkel und wechselnde Bogenstärke von der Mitte des Kämpferquerschnittes entfernt, ob und wann sie aus dem Kern dieses Querschnittes heraustritt, wodurch Zugspannungen im Mauerwerk erzeugt werden.

Dafür ist die Kenntnis der Größe  $x$ , des Ausschlages der Drucklinie von der Mitte des Kämpferquerschnittes

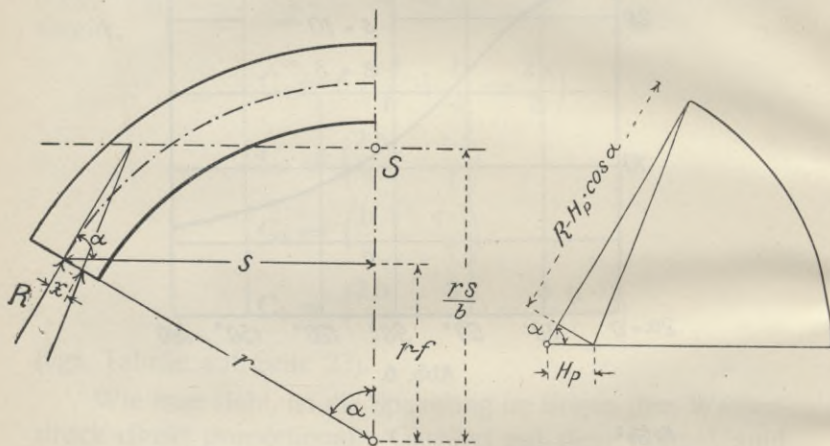


Abb. 8.

erforderlich. Nach Abb. 8 ergibt sich aus ähnlichen Dreiecken die Beziehung

$$x : \frac{\frac{rs}{b} - (r-f)}{\sin \alpha} = H_p \sin \alpha : (R - H_p \cos \alpha)$$

woraus, indem man die Winkelfunktionen durch Längen ersetzt,

$$(13) \quad x = \frac{e^2 \cdot r \left( \frac{s}{b} - \frac{r-f}{r} \right)}{e^2 \cdot 2 \left( \frac{b}{s} - \frac{r-f}{r} \right) + r^2 \cdot C_1}$$

Wird wieder, was für einen Vergleich erforderlich ist, die Spannweite konstant angesehen, so muß in dieser Formel

$r = \frac{s}{\sin \alpha}$  gesetzt werden.

Das Abweichen der Drucklinie läßt sich nun am besten in der Weise betrachten, daß man für verschiedene Zentriwinkel die Größe  $x$  des Ausschlags der Drucklinie, sowie

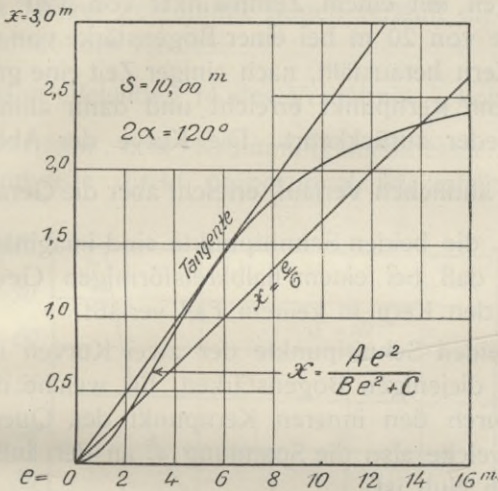


Abb. 9.

die Entfernung des inneren Kernpunktes vom Mittelpunkt, also  $\frac{e}{6}$  für wachsende Bogenstärke in einem Koordinaten-

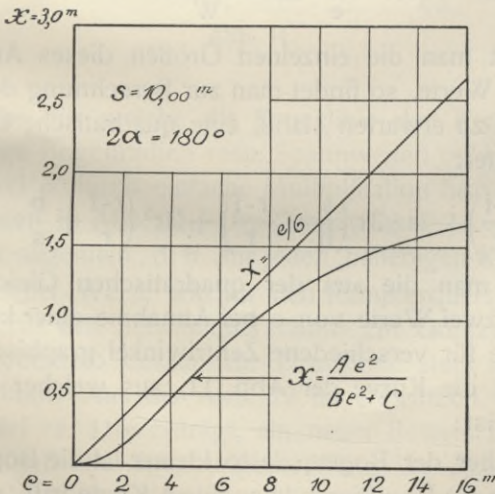


Abb. 10.

system aufträgt. In den Abb. 9 und 10 ist dies für die Zentriwinkel  $120^\circ$  resp.  $180^\circ$  geschehen.

Aus Abb. 9 ist ersichtlich, daß die Resultierende bei einem Bogen mit einem Zentriwinkel von  $120^\circ$  und einer Spannweite von 20 m bei einer Bogenstärke von ca. 2,25 m aus dem Kern herausfällt, nach einiger Zeit eine größte Entfernung vom Kernpunkt erreicht und dann allmählich zu diesem wieder zurückkehrt. Die Kurve der Abb. 10 hat einen ganz ähnlichen Verlauf, erreicht aber die Gerade  $x = \frac{e}{6}$  nicht, d. h. die beiden Schnittpunkte sind imaginär, woraus ersichtlich, daß bei einem halbkreisförmigen Gewölbe die Drucklinie den Kern in keinem Fall verläßt.

Die beiden Schnittpunkte der zwei Kurven in Abb. 9 bestimmen diejenigen Bogenstärken, für welche die Resultierende durch den inneren Kernpunkt des Querschnittes geht, für welche also die Spannung  $\sigma_a^k$  an der äußeren Lattung gleich Null ist.

Diese Bogenstärken lassen sich auch rechnerisch bestimmen. Damit  $\sigma_a^k = 0$ , muß die Beziehung bestehen (vgl. Formel 10 und Abb. 5)

$$\frac{R}{e} = \frac{H_p \cdot y_{ki}^k}{W}$$

Ersetzt man die einzelnen Größen dieses Ausdruckes durch ihre Werte, so findet man zur Berechnung der Bogenstärke, wie zu erwarten stand, eine quadratische Gleichung, welche lautet:

$$(14) \quad e^2 \left( \frac{b}{s} - \frac{r-f}{r} \right) - e \cdot 3r \left( \frac{s}{b} - \frac{r-f}{r} \right) + 3r^2 \left( \frac{r-f}{r} + \frac{b}{s} - \frac{2s}{b} \right) = 0$$

Trägt man die aus der quadratischen Gleichung berechneten zwei Werte von  $e$  bei Annahme einer konstanten Spannweite für verschiedene Zentriwinkel graphisch auf, so ergibt sich die Kurve der Abb. 11, aus welcher folgendes ersichtlich ist:

Je flacher der Bogen, desto kleiner ist die Bogenstärke, bei welcher die Resultierende aus dem Kerne tritt, und desto

länger verweilt sie außerhalb desselben. Mit wachsendem Zentriwinkel nimmt die Differenz der beiden Bogenstärken rasch ab und wird bei einem Bogen mit ca.  $158^\circ$  gleich Null. Für stärker gekrümmte Bogen verläuft die Drucklinie stets innerhalb des Kernes.

Da nach Gleichung 14 des Verhältnis  $\frac{e}{r}$  konstant, d. h. die Bogenstärke dem Krümmungshalbmesser resp. der Bogen Spannweite direkt proportional ist, erhält man die

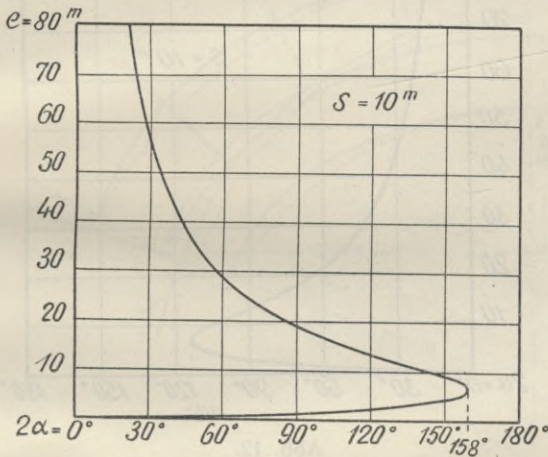


Abb. 11.

Bogenstärke, für welche die Drucklinie den Kern berührt, für beliebige Bogenradien resp. Spannweiten bei konstantem Zentriwinkel  $\alpha$  durch einfache Multiplikation bzw. Division der Ordinaten in Abb. 11. Der Grenzwinkel  $2\alpha = 158^\circ$  besteht daher allgemein, d. h. für jeden beliebigen Kreisbogen.

In gleicher Weise wie für den Kämpferquerschnitt läßt sich auch für den Scheitelquerschnitt ein Grenzwinkel bestimmen, oberhalb dessen die Drucklinie stets im inneren Drittel verläuft. Aus der Abb. 12 ist ersichtlich, daß dieser Grenzwinkel ca.  $115^\circ$  beträgt, ein neuer Beweis für die Behauptung, daß die Spannungsverteilung im Scheitel günstiger ist als in den Kämpfern.

Wie aus den Abbn. 9 und 10 ersichtlich, treten bei flachen Bogen Zugspannungen auf, sobald die Bogenstärke ein gewisses Maß überschritten hat, während bei stark gekrümmten Bogen die Drucklinie stets im inneren Drittel des Querschnittes verläuft. Bei Gewölben zwischen Pfeilern, deren Form beliebig gewählt werden kann, wird man daher den Zentriwinkel nicht unter  $158^{\circ}$  annehmen, um dadurch Zugspannungen zu vermeiden. (Vgl. auch Nr. 10.)

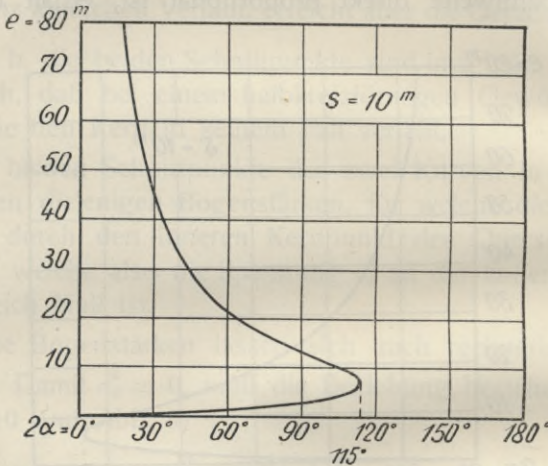


Abb. 12.

## 5. Bogen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser, aber konstanter Bogenstärke.

Unter allen möglichen Bogenformen eignet sich bei Vernachlässigung der Zusammenpressung des Baustoffes die einfache Kreisform am besten für gewölbte Stau Mauern, da die Drucklinie mit der Bogenmittellinie zusammenfällt, woraus sich gleichmäßige Bogen Spannungen ergeben. Berücksichtigt man aber diese Zusammendrückung des Bogens, so ergibt sich nicht mehr diese günstige Spannungsverteilung. Die Drucklinie entfernt sich mit zunehmender Bogenstärke infolge des wachsenden Wertes von  $H_p$  immer mehr von

der Bogenmitte, die Druckspannungen werden dadurch erhöht und bei größeren Bogenstärken treten Zugspannungen im Gewölbe auf, wenn der Zentriwinkel des Kreisbogens unter  $158^\circ$  sinkt. Der Gedanke ist daher naheliegend, durch geeignete Abänderung der Bogenform den Versuch zu machen, diesen Übelstand zu beseitigen.

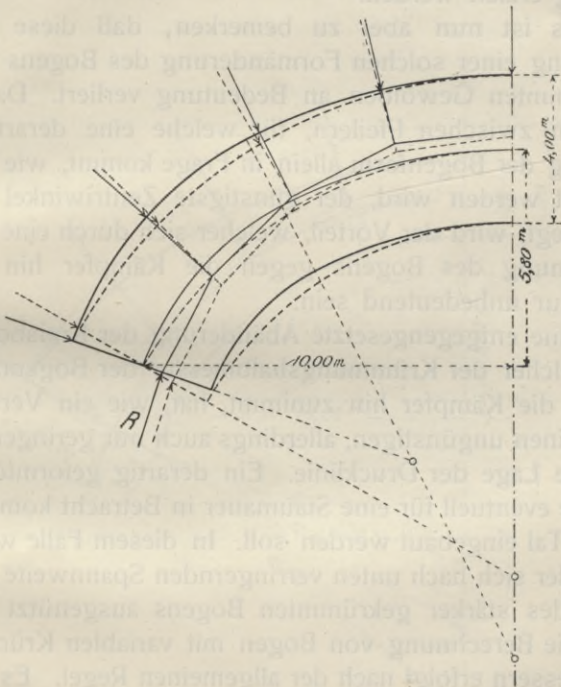


Abb. 13.

Die Betrachtung der Drucklinie eines Kreisbogens führt zunächst dazu, dem Gewölbe gegen die Kämpfer hin eine stärkere Krümmung zu geben, um seine Form dieser Drucklinie anzupassen. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß bei gewölbten Staumauern im Gegensatz zu den im Hochbau verwendeten Bogen die Belastung ebenfalls mit der Bogenform ihre Richtung ändert.

Ein Versuch zeigt, daß die Drucklinie eines in dieser Weise ausgebildeten Korbogens bei großer Bogenstärke

etwas näher der Mittellinie verläuft, als diejenige eines Kreisbogens, mit gleicher Spannweite und gleicher Pfeilhöhe, vgl. Abb. 13, in welcher ersterer Bogen ausgezogen und letzterer punktiert ist. Da die Größe der Bogenkraft angenähert dieselbe bleibt, kann also durch eine solche Abänderung der Gewölbeform eine günstigere Spannungsverteilung erzielt werden.

Es ist nun aber zu bemerken, daß diese günstige Wirkung einer solchen Formänderung des Bogens bei stark gekrümmten Gewölben an Bedeutung verliert. Da bei Gewölben zwischen Pfeilern, für welche eine derartige Ausbildung der Bogenform allein in Frage kommt, wie in Nr. 10 gezeigt werden wird, der günstigste Zentriwinkel nahe an  $180^\circ$  liegt, wird der Vorteil, welcher sich durch eine stärkere Krümmung des Bogens gegen die Kämpfer hin erzielen läßt, nur unbedeutend sein.

Eine entgegengesetzte Abänderung der Kreisbogenform bei welcher der Krümmungshalbmesser der Bogenmittellinie gegen die Kämpfer hin zunimmt, hat, wie ein Versuch gezeigt, einen ungünstigen, allerdings auch nur geringen Einfluß auf die Lage der Drucklinie. Ein derartig geformter Bogen könnte eventuell für eine Staumauer in Betracht kommen, die in ein Tal eingebaut werden soll. In diesem Falle würde infolge der sich nach unten verringernden Spannweite die Vorzüge des stärker gekrümmten Bogens ausgenützt werden.

Die Berechnung von Bogen mit variablen Krümmungshalbmessern erfolgt nach der allgemeinen Regel. Es können dabei die in der nächsten Nummer abgeleiteten Formeln verwendet werden unter Weglassung der Größe  $e_m$ .

## 6. Bogen mit veränderlicher Bogenstärke.

Wie in der Nr. 4 gezeigt wurde, treten bei konstanter Bogenstärke die größten Druckspannungen im Bogen stets in dem Kämpfer- und dem Scheitelquerschnitt auf, und zwar sind letztere immer kleiner als erstere. Es läßt sich daher auf einfache Weise eine Materialersparnis erzielen,



indem man den Querschnitt des Bogens gegen den Scheitel hin so weit reduziert, daß die Druckspannungen im Scheitel und in den Kämpfern gleich groß werden. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß die im Vorstehenden entwickelte Berechnung dieser Spannungen für Bogen mit veränderlicher Stärke nicht mehr genau stimmt, und daß dieselbe nach der untenstehenden Weise durchgeführt werden sollte.

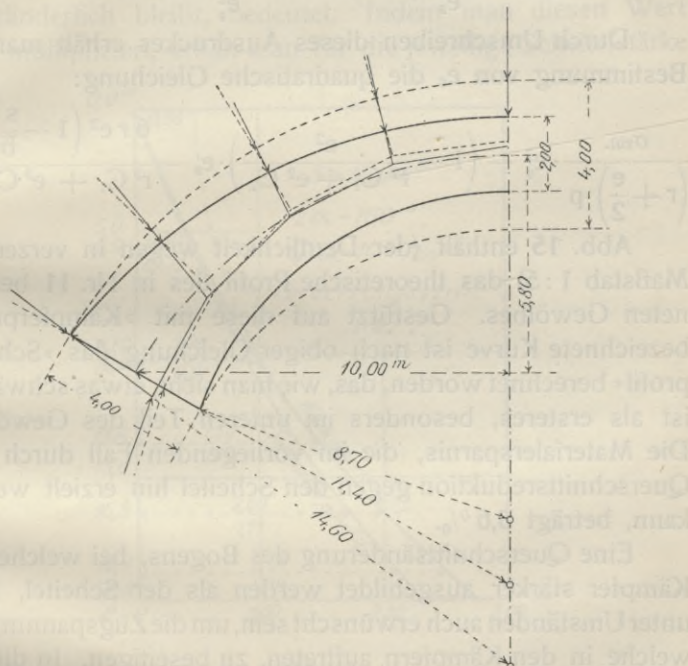


Abb. 14.

Es zeigt sich aber, daß die Drucklinie durch eine Querschnittsverringerung gegen den Scheitel hin, die symmetrisch zur Mittellinie erfolgt, in günstigem Sinne, also gegen diese verschoben wird (vgl. Abb. 14). Die Verschiebung ist allerdings unbedeutend, aber es ist doch möglich, durch eine derartige Querschnittsänderung des Bogens neben der Materialersparnis auch eine geringe Spannungsreduktion zu erzielen.

Die Größe der Scheitelstärke  $e_s$ , für welche die Spannung im Scheitel gleich derjenigen in den Kämpfern, also gleich  $\sigma_{zul.}$  ist, berechnet sich, wenn die Drucklinie für den gleichstarken Bogen (Stärke  $e$ ) beibehalten wird, aus folgender Beziehung:

(Vgl. Formel 10, S. 25)

$$\sigma_{zul.} = \frac{R}{e_s} + \frac{H_p \cdot 6 \left[ r \left( 1 - \frac{s}{b} \right) - \frac{e_s}{6} \right]}{e_s^2}$$

Durch Umschreiben dieses Ausdruckes erhält man zur Bestimmung von  $e_s$  die quadratische Gleichung:

$$(15) \frac{\sigma_{zul.}}{\left( r + \frac{e}{2} \right) p} \cdot e_s^2 - \left( 1 - \frac{e^2}{r^2 C_1 + e^2 C_2} \right) \cdot e_s - \frac{6 r e^2 \left( 1 - \frac{s}{b} \right)}{r^2 C_1 + e^2 C_2} = 0$$

Abb. 15 enthält (der Deutlichkeit wegen in verzerrem Maßstab 1 : 5) das theoretische Profil des in Nr. 11 berechneten Gewölbes. Gestützt auf diese mit »Kämpferprofil« bezeichnete Kurve ist nach obiger Gleichung das »Scheitelprofil« berechnet worden, das, wie man sieht, etwas schwächer ist als ersteres, besonders im unteren Teil des Gewölbes. Die Materialersparnis, die im vorliegenden Fall durch eine Querschnittsreduktion gegen den Scheitel hin erzielt werden kann, beträgt 5,6 %.

Eine Querschnittsänderung des Bogens, bei welcher die Kämpfer stärker ausgebildet werden als der Scheitel, kann unter Umständen auch erwünscht sein, um die Zugspannungen, welche in den Kämpfern auftreten, zu beseitigen. In diesem Falle handelt es sich aber um eine Zunahme der Bogenstärke unter Beibehaltung der Scheitelstärke.

Damit die Drucklinie stets innerhalb des Drittels des Kämpferquerschnittes liegt, damit also stets  $x \leq \frac{e}{6}$  ist,

muß die Gerade  $x = \frac{e}{6}$  der Abb. 9 derart um den Koordinatenanfangspunkt gedreht werden, daß sie die Kurve

$x = \frac{A e^2}{B e^2 + C}$  (Formel 13) berührt. Dem Berührungs-

punkt entspricht dann diejenige Bogenstärke, für welche die Drucklinie durch den inneren Kernpunkt verläuft, für alle andern Bogenstärken liegt sie innerhalb derselben. Die Gleichung der Tangente lautet

$$x = \frac{e}{\left(\frac{B}{A} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2C}{A}}} \quad (16)$$

worin  $e$  die ursprüngliche Stärke des Bogens, die im Scheitel unveränderlich bleibt, bedeutet. Indem man diesen Wert mit 6 multipliziert, erhält man für die jeweilige Scheitelstärke

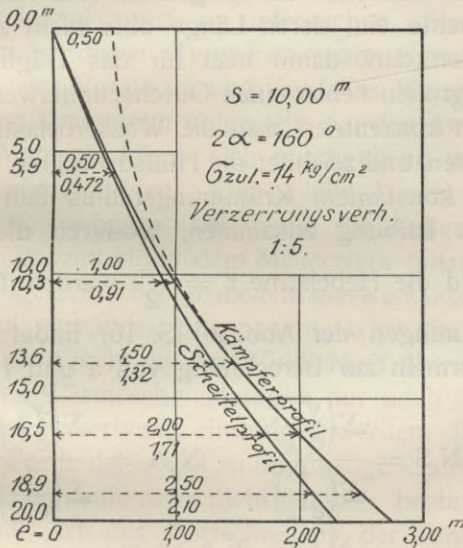


Abb. 15.

die gesuchte Kämpferstärke. Die Spannungen werden in Wirklichkeit etwas höher sein, als die berechneten, da die Drucklinie durch eine solche Verstärkung etwas von der Mittellinie weggerückt wird.

Durch eine derartige Verstärkung lassen sich alle Zugspannungen im Bogen vermeiden, solange der Zentriwinkel größer als  $115^\circ$  ist (vgl. Abb. 12). Sobald er unter diesen Wert sinkt, ist dies nur noch bei dünnen Bogen möglich,

da die Drucklinie dann im dem Scheitel aus dem inneren Drittel fällt, wenn das Gewölbe eine gewisse Stärke erreicht hat. Bei Zentriwinkeln, die größer als  $158^{\circ}$  sind, hat eine Verstärkung keinen Sinn mehr, da bei solch stark gekrümmten Bogen die Drucklinie sowieso stets im Kern verläuft.

Im Nachstehenden sei die Berechnung von Bogen mit veränderlicher Stärke kurz beschrieben, die nach der allgemeinen Methode durchgeführt werden muß, da sich keine einfache Formel für  $H_p$  ableiten läßt.

Man teilt zunächst den Bogen in eine Anzahl gleichlanger Elemente ein, deren Länge aber nicht zu groß gewählt werden darf, damit man für das Trägheitsmoment noch ohne großen Fehler einen Durchschnittswert einführen kann. Dann konzentriert man die Wasserbelastung in den Schnittpunkten und zeichnet die Hilfsdrucklinie. Bei einem Bogen mit konstantem Krümmungsradius fällt diese mit der äußeren Laibung zusammen, wodurch die Größe  $R$  konstant und die Hebelarme  $r = \frac{e_m}{2}$  werden. Gestützt auf die Bezeichnungen der Abb. 2 (S. 16) findet man dann folgende Formeln zur Berechnung von  $a$  und  $H_p$ :

$$N S = \frac{\sum \left( \frac{y'_s}{e^3_m} \right)}{\sum \left( \frac{1}{e^3_m} \right)}, \quad N A = \frac{\sum \left( \frac{y'_a}{e^2_m} \right)}{\sum \left( \frac{1}{e^2_m} \right)}$$

$$N S - N A = m$$

$$i^2 = \frac{\sum \left( \frac{y_s y_x}{e^3_m} \right)}{\sum \left( \frac{1}{e^3_m} \right)}$$

$$a = \frac{i^2}{m}$$

$$(17) \quad H_p = \frac{R \cdot \sum \left( \frac{1}{e^2_m} \right)}{2 a \sum \left( \frac{1}{e^3_m} \right)}$$

In welcher Weise die Antipole der Seilpolygonseiten sowie der x-Axe bezüglich der Elastizitätsellipsen der Elemente konstruiert werden, vgl. W. Ritter: Anwendungen der Graph. Statik Bd. IV, S. 89.

## 7. Einfluß der Temperaturschwankungen auf bogenförmige Staumauern.

Eingespannte Bogen sind bekanntlich auf die Einflüsse der Wärmeschwankungen zu untersuchen. Man geht bei der Berechnung dieser Temperaturspannungen im allgemeinen von der Voraussetzung aus, das Bauwerk sei bei einer mittleren Temperatur aufgestellt worden und die Temperatur des Materials könne sich durchgehend um 25—30° erhöhen oder erniedrigen. Eine solche Annahme mag bei dünnen Eisenbetonbogen, bei denen die Außentemperatur sich in ihrer ganzen Höhe dem Mauerwerk mitzuteilen vermag, berechtigt sein; bei großen Mauerwerkskörpern aber, wie z. B. bei gewölbten Staumauern, wird sie, wie leicht einzusehen, nicht mehr mit der Wirklichkeit übereinstimmen, da die äußeren Wärmeschwankungen nur noch teilweise in das Innere des Mauerwerks eindringen werden. Eine solche Berechnung würde daher viel zu ungünstige Resultate liefern.

Leider ist es heute noch nicht möglich, bestimmtes über Intensität und Art des Fortschreitens der Temperatur in großen Mauerwerkskörpern zu sagen, da die wenigen Versuche, die bis jetzt in dieser Hinsicht ausgeführt worden sind, nur ungenügend Aufschluß geben. Über das Eindringen der Wärme in das Mauerwerk sind an großen Bauwerken bis jetzt erst ein einziges Mal Versuche angestellt worden und zwar am »Bonton dam« in Nordamerika.<sup>1)</sup>

Die Temperaturmessungen im Innern dieser Staumauer geschah mittels sogen. Thermophone. Da diese Versuche sich aber nur auf eine kurze Zeitdauer erstrecken und auch

---

<sup>1)</sup> »The Effect of Temperatur Changes on Masonry«: Transactions A. S. C. E. Dec. 1908.

nur in geringer Anzahl ausgeführt wurden, kann den Resultaten nicht allzu große Bedeutung beigelegt werden. Immerhin scheinen dieselben etwas richtiges zu enthalten und bieten, so lange nichts besseres existiert, einen Anhalt zur Beurteilung der Größe und der Verteilung von Temperaturkräften in bogenförmigen Staumauern.

Gestützt auf diese Versuche, wurde die Formel abgeleitet

$$(18) \quad t = \frac{T}{3\sqrt[3]{a}}$$

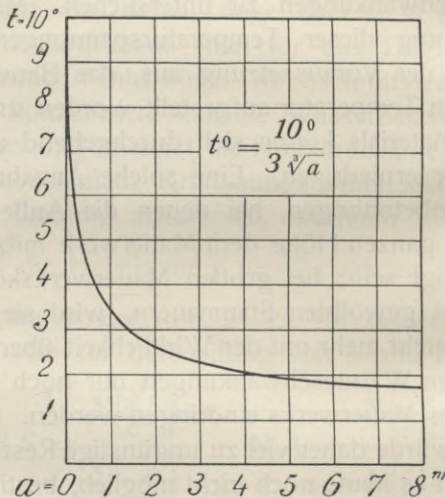


Abb. 16.

worin  $t$  die Temperaturschwankung im Mauerwerk in der Entfernung  $a$  von der Außenfläche bedeutet, wenn mit  $T$  die Temperaturschwankung der Luft bezeichnet wird. Diese Formel soll bis zu  $a = \text{ca. } 6.00 \text{ m}$  gelten. Die Kurve der Abb. 16 stellt für beispielsweise  $T = 10^\circ$  die aus obiger Formel berechneten Temperaturschwankungen in verschiedenen Tiefen dar.

Was die Größe von  $T$  an betrifft, so kann die höchste resp. niedrigste mittlere Tagestemperatur des Jahres, die an dem betreffenden Orte herrscht, als Außentemperatur

angenommen werden. Die absolute maximale resp. minimale Lufttemperatur darf ihrer kurzen Dauer wegen jedenfalls unberücksichtigt bleiben. Ferner sind die extremen Temperaturen des Wassers zu berücksichtigen, also im allgemeinen  $+ 20^{\circ}$  C und  $\pm 0^{\circ}$  C. Es ist anzunehmen, daß die Temperatur des Wassers sich in höherem Maße dem Mauerwerk mitteilen wird als diejenige der Luft, da sie von größerer Dauer ist. Außerdem wird das Wasser auch bis zu einem gewissen Grade in das Mauerwerk eindringen.

Zur Bestimmung der Größe der Temperaturschwankung ist die Kenntnis der Bautemperatur von Bedeutung, d. h. derjenigen Temperatur, bei welcher der Zement abbindet und für die der Bogen also als spannungslos anzusehen ist. Auch dieser Punkt ist durch Versuche nur wenig geklärt. Bekanntlich wird die Temperatur des Betons oder Mörtels durch das Abbinden erhöht. Es wird vielfach angenommen, daß der Zement seine endgültige Form und Gestaltung annehme, wenn seine Abbinde-temperatur ein Maximum erreicht hat. Die Höhe dieses Grenzwertes und der Zeitpunkt, an welchem er erreicht wird, sind in erster Linie abhängig von der während des Baues herrschenden Temperatur, außerdem aber auch von der Art des Zements, der Art der Mischung und des Einbringens des Betons, sowie von der Größe der Masse. Jedenfalls wird die Abbinde-Temperatur stets etwas höher sein als die während des Baues herrschende Lufttemperatur.

Eine ähnliche Wirkung wie die Temperaturschwankungen hat das Schwinden des Betons auf das Gewölbe. Auch hierüber lassen sich allgemein gültige Angaben nicht machen, da diese Erscheinung wesentlich von der Art des Betons und der Behandlung während des Erhärtens abhängt. Man kann ihr dadurch Rechnung tragen, daß man die Abbinde-temperatur um ca.  $5-10^{\circ}$  erhöht.

Von entgegengesetzter und nicht zu unterschätzender Wirkung ist das infolge des Eindringens von Wasser in das Mauerwerk auftretende Quellen des Betons, das ebenfalls von der Art der Betonmischung und besonders von

der Güte der Abdichtung auf der wasserseitigen Wölbfläche abhängt.

Bei Ermittlung der Spannungen infolge des Wasserdruckes ergaben sich die Resultate unabhängig von dem Elastizitätskoeffizienten  $E$ ; er konnte einfach gleich 1 gesetzt werden. Bei der Bestimmung der Temperaturspannungen ist er aber zu berücksichtigen, wobei für Beton  $E = 200000 \text{ kg/cm}^2$  als Mittelwert angenommen werden kann.

Der Temperatur-Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  schwankt wie die Größe  $E$  mit dem Material. Für Beton kann im Mittel gesetzt werden  $\alpha = 0,000012$ .

Wie aus den vorstehenden Betrachtungen ersichtlich, gestaltet sich die Untersuchung der Temperatureinflüsse bei gewölbten Staumauern komplizierter als z. B. bei Brückenbogen, da nicht nur die extremen Temperaturen der Luft, sondern auch diejenigen des Wassers zu berücksichtigen sind. Bei letzteren ist zudem noch auf die verschiedenen Tiefen Bedacht zu nehmen. Schließlich ist zu berücksichtigen, daß auch die Bautemperatur, von welcher die Größe der Wärmeschwankung jeweils bestimmt werden muß, in gewissen Grenzen schwankt.

Es ist also eine große Anzahl verschiedener Fälle von Temperaturunterschieden möglich, von denen für die Berechnung jeweils diejenigen herauszusuchen sein werden, die das Gewölbe am ungünstigsten beanspruchen.

## 8. Berechnung der Temperaturkräfte.

Wird ein Fortschreiten der Temperatur im Innern des Gewölbes gemäß der Kurve in Abb. 16 angenommen und trägt man die in verschiedenen Tiefen auftretenden, von der Bautemperatur aus gerechneten Wärmeschwankungen graphisch auf, so ergibt sich bei einer luft- und wasserseitig gleichgroßen und gleichartig wirkenden Temperaturschwankung die Kurve der Abb. 17. Die schraffierte Fläche, die durch diese Kurve begrenzt wird, stellt diejenige Temperaturkraft dar, die auf einen Bogenquerschnitt wirkt. Ver-



wandelt man diese Fläche in ein Rechteck von gleichem Flächeninhalt ( $\tau_m \cdot e$ ), so wird eine Berechnung mittels der durch das Rechteck dargestellten Kraft, abgesehen von Nebenspannungen, dieselben Resultate liefern. Diese Nebenspannungen werden, wie aus Abb. 17 ersichtlich, nicht unbedeutend sein, besonders bei direkter Sonnenbestrahlung oder plötzlicher intensiver Kälte, doch beschränken sie sich auf eine verhältnismäßig dünne Schicht des Mauerwerks.

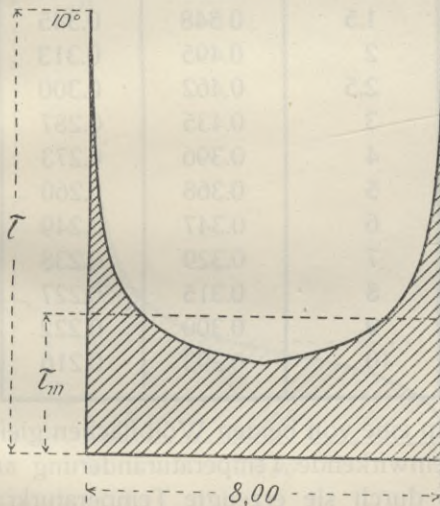


Abb. 17.

Aus untenstehender Tabelle ist das Verhältnis  $\frac{\tau_m}{\tau}$  für verschiedene Mauerstärken zu entnehmen, d. h. das Verhältnis der durch die schraffierte Fläche dargestellten Kraft zu derjenigen, die sich bei einem Fortschreiten der Lufttemperatur über den ganzen Querschnitt in gleicher Höhe ergeben würde.

Wird der Bogen nur von einer Wölbfläche aus durch eine Wärmeschwankung beeinflusst und ist diese an der andern gleich Null, so kann die auf den Bogenquerschnitt wirkende Temperaturkraft durch die schraffierte Fläche der

Abb. 18 wiedergegeben werden. Das Verhältnis  $\frac{\Delta\tau_m}{\tau}$  ist wieder aus nachstehender Tabelle ersichtlich:

Gewölbe Stärke	$\frac{\tau_m}{\tau}$	$\frac{\Delta\tau_m}{\tau}$
0.5	0.710	0.500
1	0.618	0.394
1.5	0.548	0.345
2	0.495	0.313
2.5	0.462	0.300
3	0.435	0.287
4	0.396	0.273
5	0.368	0.260
6	0.347	0.249
7	0.329	0.238
8	0.315	0.227
9	0.300	0.222
10	0.293	0.216

Wird nun eine von beiden Wölbflächen gleichmäßig auf den Bogen einwirkende Temperaturänderung angenommen, so kann die durch sie erzeugte Temperaturkraft für einen Bogen mit konstanter Stärke am einfachsten durch folgende Betrachtung ermittelt werden:

In Nr. 3 ist gezeigt worden, daß die Formänderung, welche ein Bogen infolge einer in seiner Mittellinie wirkenden Kraft  $R$  erleidet, durch eine Zusatzkraft  $H_p$  wieder rückgängig gemacht werden kann, die bei symmetrischen Bogen horizontal gerichtet ist und im Schwerpunkt der elastischen Gewichte angreift. Die Längenänderung, welche jedes Element unter dem Einfluß einer Kraft  $R$  erfährt, ist  $\frac{R \Delta s}{E e}$ .

Eine Temperaturänderung, die den Bogen von beiden Seiten aus gleichmäßig beeinflusst, hat, da sie eine Kraft hervorruft, die auch in der Bogenmittellinie verläuft, die gleiche Wirkung wie  $R$ . Die Längenänderung beträgt bei

einer Temperaturschwankung von  $\tau_m^0$  für jedes Element  $a \tau_m \Delta s$ . Die Kraft, welche diese Formänderung des Bogens wieder rückgängig zu machen hat, muß also dieselbe Lage haben wie  $H_p$ . Ihre Größe erhält man dadurch, daß man in der Formel 9 (S. 22) setzt  $R = a \tau_m E e$ , woraus sich die Temperaturkraft ergibt

$$H_\tau = \frac{\alpha \tau_m E e^3}{r^2 C_1 + e^2 C_2} \quad (19)$$

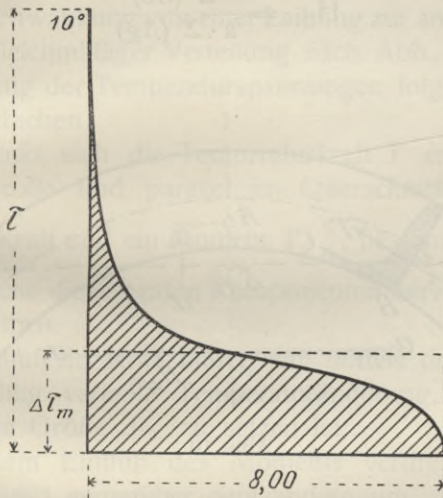


Abb. 18.

Bei einer einseitig auf den Bogen wirkenden Temperaturänderung liegen die Kräfte, welche auf die einzelnen Elemente wirken, nicht mehr in der Bogenmittellinie, sondern gehen durch den Schwerpunkt der Fläche, welche die Temperaturänderung darstellt. (Abb. 19.) Die Temperaturkraft  $H_{\Delta\tau}$  findet man genau wie früher (Nr. 2) die Kraft  $H_p$ . Die Größe der äußeren Kräfte ist hier  $T = a E e \Delta\tau_m$ . Die Antipole D der Kräfte T hinsichtlich der Elastizitätsellipsen der Bogenelemente liegen, wenn man in allen Querschnitten gleiche Temperaturänderung annimmt, auf einer zur Bogenmittellinie ähnlichen Linie. Die Drehwinkel, welche

man in diesen Punkten angreifen läßt, haben die Größe  $\Delta\delta = \frac{T t \Delta s}{E J}$ . Der Halbmesser der Gesamteellipse ergibt sich wie früher, und den Abstand der Temperaturkraft vom Schwerpunkt findet man aus der Formel

$$a = \frac{i^2}{m}$$

Die Größe der Temperaturkraft ist

$$H_{\Delta\tau} = \frac{\Sigma (\Delta\delta)}{a \cdot \Sigma (\Delta g)}$$

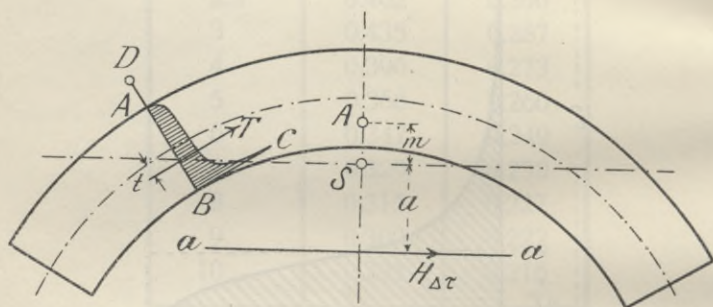


Abb. 19.

Bei einer Temperaturverteilung nach Abb. 18 geht die Resultierende T beinahe durch das innere Drittel der Bogenstärke, wodurch D nach A fällt. Der Drehwinkel ist dann

$$\Delta\delta = \frac{2 T \Delta s}{e^2 E} = \frac{2 a \Delta\tau_m \Delta s}{e}$$

Für konstante Bogenstärke und einfachen Kreisbogen ist in diesem Falle

$$a = \frac{r^2 C_1 + e^2 C_2}{6 e}$$

und

$$(20) \quad H_{\Delta\tau} = \frac{\alpha \Delta\tau_m E e^3}{r^2 C_1 + e^2 C_2}$$

wodurch Lage und Größe der Temperaturkraft bestimmt sind.

Die letzte Formel stimmt bis auf die Größe der Temperaturschwankung genau mit Formel 19 überein. Die Größe der Temperaturkraft ist also unabhängig von der Verteilung der Wärmeänderung über den Querschnitt und direkt proportional der mittleren im Querschnitt herrschenden Temperatur. Ihre Lage jedoch hängt von der Verteilung ab. Sie geht durch den Schwerpunkt S der elastischen Gewichte bei symmetrischer Temperaturverteilung und rückt umso weiter von diesem ab, je mehr sich die Temperaturschwankung von einer Laibung zur andern ändert.

Bei ungleichmäßiger Verteilung nach Abb. 18 läßt sich die Berechnung der Temperaturspannungen folgendermaßen etwas vereinfachen:

Man denkt sich die Temperaturkraft T ersetzt durch eine gleichgroße und parallel im Querschnittsmittelpunkt angreifende Kraft und ein Moment  $T \cdot \frac{e}{6}$ , bestimmt die Spannungen, welche diese beiden Komponenten hervorrufen und addiert dieselben.

Den Einfluß der Kraft findet man mittels der Formel 19 für gleichmäßig verteilte Temperaturänderung, wobei nur anstatt  $\tau_m$  die Größe  $\Delta\tau_m$  zu setzen ist.

Unter dem Einfluß des Moments verdreht sich der eine Querschnitt gegenüber dem andern um

$$\Delta\delta = \frac{M \Delta s}{E J} = \frac{2 a \Delta\tau_m \Delta s}{e}$$

Diese Verdrehungen müssen ebenfalls durch ein Moment rückgängig gemacht werden, dessen Größe sich nach früherem ergibt

$$M = \frac{\sum (\Delta\delta)}{\sum (\Delta g)} = \frac{2 a \Delta\tau_m E J}{e} = a \Delta\tau_m E W$$

woraus die Randspannungen

$$\sigma = \frac{M}{W} = a \Delta\tau_m E \quad (21)$$

gefunden werden.

In jedem Querschnitt treten also infolge des Momentes nur Normalspannungen auf und zwar sind diese von Bogenform und Bogenstärke, sowie von der Lage des Quer-

schnittes ganz unabhängig und nur den Längenänderungen direkt proportional; sie nehmen von der Bogenmitte linear nach außen zu und zwar auf der einen Seite als Druck-, auf der andern als Zugspannungen.

Nimmt man die Temperaturänderung von einer Laibung nach der andern als linear verlaufend an, so geht die Temperaturfläche in ein Dreieck über. Die Kraft greift im Schwerpunkt, also wie vorher im Drittel der Bogenstärke an. Die Lage der Temperaturkraft ist demnach die nämliche wie bei einer Verteilung nach Abb. 18. Die Größe  $\tau_m$  ist gleich  $\frac{1}{2} \tau$  und die Temperaturkraft  $H_{\Delta\tau}$  ist daher halb so groß wie diejenige, welche sich bei gleichmäßiger Temperatur ( $\tau$ ) ergeben würde.

Trägt man die an den verschiedenen Punkten der innern oder äußern Wölbfläche eines Bogens infolge irgend einer Temperaturkraft auftretenden Spannungen graphisch auf, so erhält man bei allen Bogen, da die Spannung an irgend einer Stelle dem Abstand des entsprechenden Kernpunktes von der Kraft direkt proportional ist, eine stetig verlaufende Kurve. Die Größt- resp. Kleinstwerte der Spannungen findet man stets im Bogenscheitel bezw. Kämpfer. Es genügt daher, wie bei der Wasserbelastung, zur Betrachtung der Temperatureinflüsse die in genannten Querschnitten auftretenden Spannungen zu berechnen.

## 9. Einfluß von Bogenform und Bogenstärke auf die Temperaturspannungen.

In Nachfolgendem soll gezeigt werden, in welcher Weise die Temperaturspannungen sich mit Bogenform und Bogenstärke ändern. Den Betrachtungen liegt ein Bogen von 20.00 m Spannweite zu Grunde, der dem Einflusse einer Änderung in der Lufttemperatur von  $10^0$  C ausgesetzt ist, die sowohl beiderseitig wie einseitig wirkend angenommen werden soll.

In den Abbn. 20 und 21 sind die äußeren Kantenpressungen des Scheitelquerschnittes, welche sich aus den verschiedenen

Temperaturkräften ergeben, graphisch dargestellt. Für andere Punkte lassen sich ähnliche Spannungskurven bestimmen.

Aus Abb. 20 ist zu ersehen, daß die Temperaturspannungen von ihrem kleinsten Werte bei dem Halbkreisgewölbe ( $2\alpha = 180^\circ$ ) an mit abnehmender Krümmung allmählich wachsen, einen Größtwert erreichen und dann wieder etwas abnehmen. Für den Grenzwert  $2\alpha = 0^\circ$  geht der Bogen in den eingespannten Balken über, für den bekanntlich  $\sigma_\tau = a\tau E$  ist.

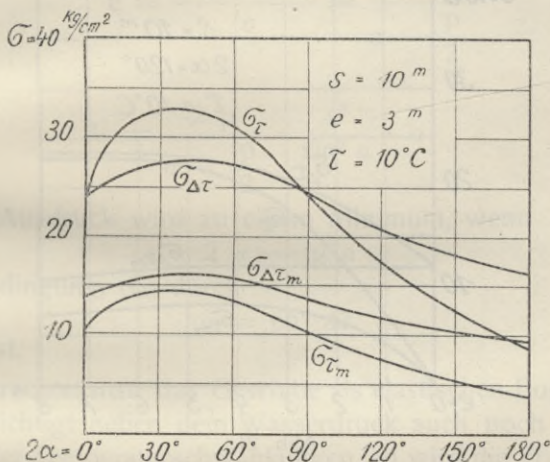


Abb. 20.

Abb. 21 zeigt den Einfluß der Bogenstärke auf die Temperaturspannungen bei gleichbleibender Bogenform.

Die Spannungen wurden in beiden Fällen sowohl für Wärmeschwankungen berechnet und aufgetragen, die über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verlaufen ( $\sigma_\tau$ ), als auch für solche, die sich linear ändern ( $\sigma_{\Delta\tau}$ ), und schließlich für Temperaturänderungen gemäß den Abbn. 17 und 18 ( $\sigma_{\tau_m}$  und  $\sigma_{\Delta\tau_m}$ ). Aus den beiden Abbildungen ist zu ersehen, von welchem großem Einfluß die Annahme der Temperaturverteilung im Innern des Bogens auf die Größe der Spannungen ist und ferner, daß eine einseitige Temperaturände-

rung unter Umständen größere Spannungen hervorruft wie eine beiderseitige.

Eine Abweichung der Bogenmittellinie von der Kreisbogenform hat, wie Untersuchungen gezeigt haben, nur einen geringen Einfluß auf die Temperaturspannungen. Auch bei den für die Ausführung in Betracht kommenden Querschnittszunahmen gegen die Kämpfer hin werden sie nur unbedeutend geändert. Bogen mit variablem Krümmungs-

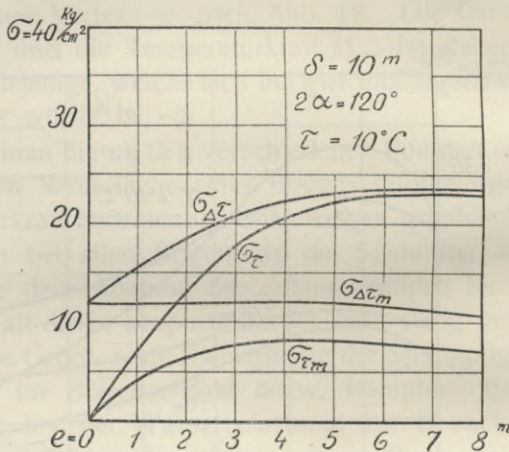


Abb. 21.

halbmesser resp. variabler Stärke können daher nach den in der vorigen Nummer für Kreisbogen mit konstanter Stärke entwickelten Formeln berechnet werden.

## 10. Günstigste Bogenform (Zentriwinkel).

Unter den unendlich vielen Formen, welche man einem Bogen bei bestimmter Spannweite geben kann, ist diejenige als günstigste zu bezeichnen, für welche der geringste Materialaufwand erforderlich ist.

Wird bei Kreisbogen die Mittellinie als Stützlinie angesehen, so läßt sich, da die infolge des Wasserdruckes im



Bogen auftretenden Spannungen konstant sind, derjenige Winkel leicht berechnen, für welchen das Volumen des Gewölberinges ein Minimum wird.

Wenn  $p$  den spezifischen Wasserdruck und  $\sigma$  die zulässige Druckspannung bedeuten, so ist (vgl. Abb. 3) das Volumen

$$V = e \cdot 2 b$$

ferner

$$e = \frac{p \left( r + \frac{e}{2} \right)}{\sigma} = \frac{p r}{\sigma - \frac{p}{2}}$$

also

$$V = \frac{2 p}{\sigma - \frac{p}{2}} \cdot \frac{s^2}{\sin^2 \alpha} \cdot \alpha$$

Dieser Ausdruck wird zu einem Minimum, wenn

$$2 \alpha = \operatorname{tg} \alpha$$

eine Bedingung, die durch

$$\alpha = 66^\circ 47'$$

erfüllt ist.

Betrachtet man das Gewölbe als elastischen Bogen und berücksichtigt neben dem Wasserdruck auch noch die Einflüsse der Temperaturschwankungen, so wird die Frage nach dem günstigsten Bogen eine sehr komplizierte und läßt sich nicht mehr allgemein beantworten. Der vorteilhafteste Zentriwinkel wird nicht nur von Fall zu Fall verschieden sein, je nach der Größe des Krümmungshalbmessers, der Belastung und der zulässigen Spannung, sondern er wird auch für dasselbe Gewölbe mit dessen Stärke wechseln. Es läßt sich deshalb die günstigste Bogenform für eine gewölbte Staumauer nur noch angenähert bestimmen. Dies ist aber praktisch vollständig genügend, da, wie gezeigt werden wird, eine Änderung des Zentriwinkels in gewissen Grenzen nur einen geringen Einfluß auf die Bogenmasse ausübt.

Was zunächst das auf Wasserdruck berechnete Gewölbe betrifft, so läßt sich, wenn für die Größen  $p$ ,  $\sigma$  und  $s$

bestimmte Werte gegeben sind, derjenige Zentriwinkel bestimmen, für welchen das Volumen des Bogens ein Minimum wird.

Man geht zu diesem Zweck von der Formel 12 für die größte Druckspannung im Bogen (S. 28) aus und schreibt sie in folgende Form um:

$$(22) \quad e^3 (\sigma C_2 - p C_3) - e^2 r p C_4 + e r^2 (\sigma C_1 - 3 p C_3) - r^3 p C_1 = 0$$

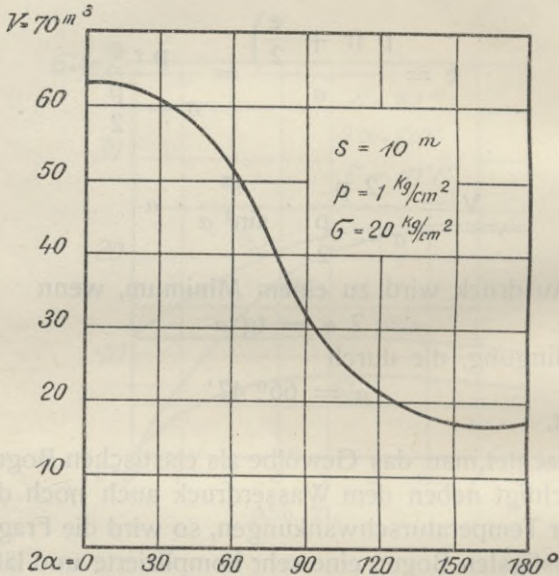


Abb. 22.

Aus dieser kubischen Gleichung läßt sich nun die erforderliche Bogenstärke bestimmen. Multipliziert man diesen Wert mit der Bogenlänge  $b$ , differenziert das Produkt nach  $a$  und setzt den gefundenen Ausdruck gleich Null, so ergibt sich der gesuchte günstigste Zentriwinkel  $2a$ . Einfacher und rascher als durch diese sehr komplizierte Rechnung kommt man zum Ziel, wenn man die Bogenstärken für verschiedene Zentriwinkel berechnet, mit dem jeweiligen  $b$  multipliziert und die Volumen graphisch aufträgt.

Diese Rechnung ist für einen bestimmten Fall durchgeführt und in Abb. 22 die Volumen-Kurve gezeichnet

worden. Aus dem Verlauf dieser Kurve ist ersichtlich, daß für das betreffende Gewölbe bei einem Zentriwinkel von ca.  $160^{\circ}$  das kleinste Volumen erzielt wird. Legt man der Berechnung andere Annahmen zu Grunde, so ergibt sich eine andere Kurve. Im allgemeinen findet man aber das kleinste Volumen für einen Winkel in der Nähe von  $180^{\circ}$ . Zwischen  $120^{\circ}$  und  $180^{\circ}$  ändert sich dasselbe, wie aus Abb. 22 ersichtlich, nur in geringem Maße. Der Zentriwinkel kann sich daher ohne großen Einfluß auf das Volumen des Bogens innerhalb dieser Grenzen bewegen.

Wie Abb. 20 zeigt, treten die niedrigsten Temperaturspannungen beim halbkreisförmigen Gewölbe auf; dieses ist also als günstigste Bogenform mit Rücksicht auf die Temperaturkräfte anzusehen.

## 11. Berechnung von Gewölben mit konstanter Spannweite.

Bei den nach der aufgelösten Bauweise ausgeführten d. h. bei den aus Gewölben und Pfeilern bestehenden Staumauern haben die Gewölbe auf ihre ganze Höhe konstante Spannweite. Diese richtete sich im allgemeinen nach dem Gelände und den Bodenverhältnissen. Man wird sie nicht zu groß wählen, da die Pfeiler und speziell deren Fundamente sonst zu große Dimensionen erhalten müssen. Sind die Spannweite und die Bogenform, für welche das in der vorigen Nummer Gesagte zu beachten ist, bestimmt, so gestaltet sich die Dimensionierung des Gewölbes wie folgt:

Da die Summe der Druckspannungen, die sich aus den Temperatureinflüssen (einschließlich Schwindens und Quellens des Betons) und der Wasserbelastung ergeben, an keiner Stelle des Gewölbes das zulässige Maß überschreiten darf, und da die Temperaturspannungen ferner für bestimmte Bogenstärken auch ganz bestimmte Werte besitzen, wird man zunächst für verschiedene Bogenstärken die größten

im Scheitel und in den Kämpfern auftretenden Druckspannungen infolge von Wärmeschwankungen berechnen. Durch Subtrahieren dieser Spannungen von der zulässigen findet man dann für die betreffenden Bogenstärken diejenige Spannung, welche infolge der Wasserbelastung noch auftreten darf.

Ist diese Druckspannung  $\sigma_p = \sigma_{zul.} - \sigma_r$  bestimmt, so gestaltet sich die Rechnung bei beliebiger Bogenform am einfachsten in der Weise, daß man für verschiedene Bogenstärken die größte im Bogen auftretende Druckspannung infolge der Wasserbelastung  $p = 1 \text{ kg/cm}^2$  bestimmt und die zulässige Spannung  $\sigma_p$  durch diesen Wert dividiert, wodurch man die Wassertiefe erhält, für welche die betreffende Bogenstärke noch verwendet werden darf. Dann trägt man die Bogenstärken von einer Vertikalen aus in der entsprechenden Tiefe als Abscisse auf und erhält durch Verbinden der Endpunkte dieser Bogenstärken das theoretische Profil der Mauer.

Für Kreisbogen mit konstanter Bogenstärke läßt sich eine Formel zur Ermittlung dieser zulässigen Wassertiefe für eine bestimmte Bogenstärke aufstellen. Die größten Druckspannungen infolge der Wasserbelastung treten (vgl. S. 27) bei diesen Bogen stets an der inneren Kante der Kämpferquerschnitte auf und man erhält durch einfaches Umschreiben der Formel 12 (S. 28) die zulässige Belastung, resp. Wassertiefe

$$(23) \quad p = \sigma \cdot \frac{e^3 C_2 + e r^2 C_1}{e^3 C_3 + e^2 r C_4 + e r^2 \cdot 3 C_3 + r^3 C_1}$$

wobei für  $\sigma$  die zulässige Druckspannung  $\sigma_p$  zu setzen ist.

Soll für eine bestimmte Wassertiefe die erforderliche Bogenstärke berechnet werden, so ist die kubische Gleichung auf S. 54 zu verwenden.

Bei dieser Berechnung ist auf die gegenseitige Einwirkung der einzelnen Bogenringe und auf den Einfluß des Fundamentes keine Rücksicht genommen worden. In Nr. 13 sollen diese Einflüsse näher untersucht werden.

Das theoretische Profil der Staumauer, das sich aus vorstehender Berechnung ergibt, läuft auf der Höhe des

Wasserspiegels in eine Spitze aus. Mit Rücksicht auf Wellenschlag, Stoß schwimmender Körper und Eisschub wird man aber der Mauerkrone stets eine endliche Stärke, je nach der Größe der Mauer 0.50 bis 1.50 m, geben und das theoretische Profil dementsprechend verstärken.

Für die Berechnung der Pfeiler, gegen welche sich die Gewölbe stützen, gelten dieselben Grundsätze, wie für die Berechnung von Gewichtsstaumauern. Es ist hier jedoch zu beachten, daß die Wasserbelastung nicht nur auf die Breite des Pfeilers zu rechnen ist, sondern von Mitte zu Mitte Gewölbe. Da die Bedingung, daß in dem Pfeiler-

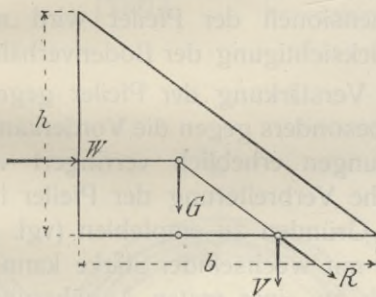


Abb. 23.

mauerwerk sowohl unter der Einwirkung des Eigengewichtes, als auch unter derjenigen des Wasserdruckes keine Zugspannungen auftreten sollen, auch hier erfüllt sein muß, ist als Grundform des Pfeilers ein Dreieck anzusehen, dessen wasserseitige Begrenzung lotrecht ist und dessen Grundfläche aus folgender Berechnung sich ergibt:

Bezeichnet man mit G das Gewicht des Pfeilers von der Stärke d, mit W den Wasserdruck auf die Entfernung L zweier Pfeiler und mit V die senkrechte Komponente der Resultierenden R, so ergibt sich (vgl. Abb. 23).

$$- V \cdot \frac{b}{3} = W \cdot \frac{h}{3} - G \cdot \frac{2b}{3}$$

Da

$$V = G = \frac{b h d}{2} \cdot \gamma$$

und

$$W = \frac{h^2 L}{2}$$

so ist

$$b^2 d = \frac{h^2 L}{\gamma}$$

Hierbei wurde von der Mitwirkung des Gewölbegegichtes abgesehen.

Je größer  $b$  angenommen wird, desto kleiner kann  $d$  sein. Das Volumen des Pfeilers nimmt mit wachsendem  $b$  ab. Die Dimensionen der Pfeiler wird man in erster Linie unter Berücksichtigung der Bodenverhältnisse wählen.

Durch eine Verstärkung der Pfeiler gegen die Fundamentfläche und besonders gegen die Vorderkante hin können die Bodenpressungen erheblich verringert werden. Eine solche allmähliche Verbreiterung der Pfeiler ist meist auch aus praktischen Gründen zu empfehlen (vgl. Abb. 24).

Bei Pfeilern mit wechselnder Stärke kann obige Formel jedoch nur noch zu einer ersten Annäherungsberechnung verwendet werden. Die genaue Länge der Pfeiler muß durch Versuchsrechnung ermittelt werden.

In Nachstehendem soll die Berechnung einer nach der aufgelösten Bauweise ausgebildeten Staumauer beschrieben werden (Abb. 24):

Es wird angenommen, die Staumauer habe eine Höhe von 20.00 m und bestehe aus einer Anzahl gegen Pfeiler sich stützender, senkrecht stehender Betongewölbe mit je 20.00 m Spannweite und  $160^\circ$  Zentriwinkel. Im ungünstigsten Falle stehe der Wasserspiegel im Staubecken auf der Höhe der Mauerkrone.

Zuerst sind nach Vorstehendem die Einflüsse der Wärmeschwankungen zu untersuchen. Als Grundlage für die Berechnung sollen folgende Annahmen gelten:

Schnitt a-a

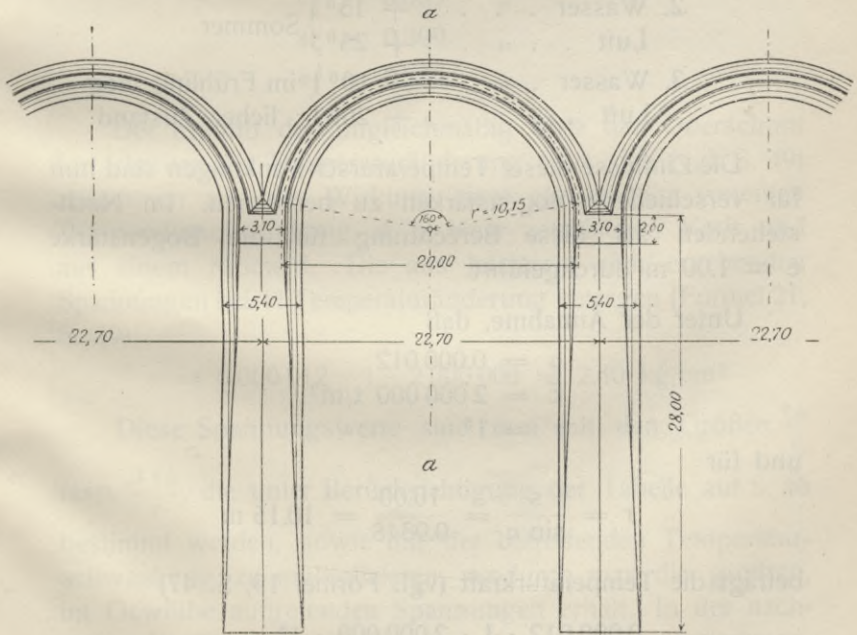
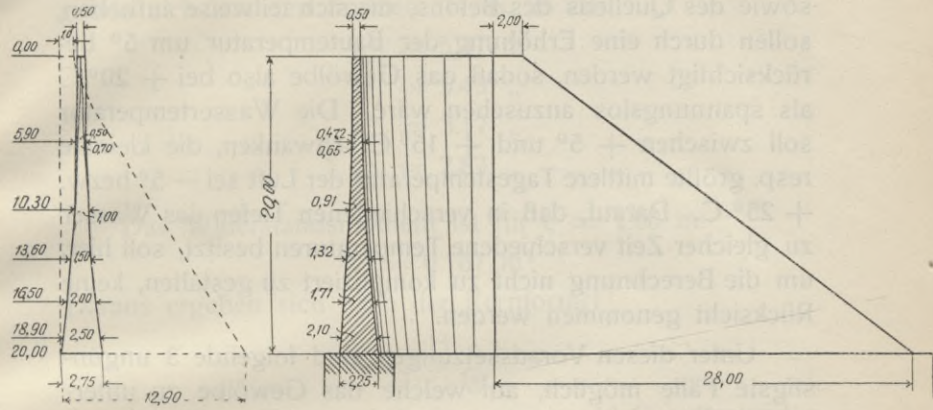


Abb. 24.

Der Beton des Bauwerkes habe bei einer Temperatur von  $+ 15^{\circ}$  C abgebunden. Die Einflüsse des Schwindens sowie des Quellens des Betons, die sich teilweise aufheben, sollen durch eine Erhöhung der Bautemperatur um  $5^{\circ}$  berücksichtigt werden, sodaß das Gewölbe also bei  $+ 20^{\circ}$  C als spannungslos anzusehen wäre. Die Wassertemperatur soll zwischen  $+ 5^{\circ}$  und  $+ 15^{\circ}$  C schwanken, die kleinste resp. größte mittlere Tagestemperatur der Luft sei  $- 5^{\circ}$  bzw.  $+ 25^{\circ}$  C. Darauf, daß in verschiedenen Tiefen das Wasser zu gleicher Zeit verschiedene Temperaturen besitzt, soll hier, um die Berechnung nicht zu kompliziert zu gestalten, keine Rücksicht genommen werden.

Unter diesen Voraussetzungen sind folgende 3 ungünstigste Fälle möglich, auf welche das Gewölbe zu untersuchen ist:

- |                                    |   |                                    |
|------------------------------------|---|------------------------------------|
| 1. Wassertemperatur $+ 5^{\circ}$  | } | Winter                             |
| Lufttemperatur $- 5^{\circ}$       |   |                                    |
| 2. Wasser . . . . . $+ 15^{\circ}$ | } | Sommer                             |
| Luft . . . . . $+ 25^{\circ}$      |   |                                    |
| 3. Wasser . . . . . $+ 10^{\circ}$ | } | im Frühling mög-<br>licher Zustand |
| Luft . . . . . $+ 20^{\circ}$      |   |                                    |

Die Einflüsse dieser Temperaturschwankungen sind nun für verschiedene Bogenstärken zu berechnen. Im Nachstehenden sei diese Berechnung für die Bogenstärke  $e = 1.00$  m durchgeführt.

Unter der Annahme, daß

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.000\ 012 \\ E &= 2\ 000\ 000\ \text{t/m}^2 \\ \tau &= 1^0 \end{aligned}$$

und für

$$r = \frac{s}{\sin \alpha} = \frac{10.00}{0.9848} = 10.15\ \text{m}$$

beträgt die Temperaturkraft (vgl. Formel 19, S. 47)

$$H_{\tau} = \frac{0.000\ 012 \cdot 1 \cdot 2\ 000\ 000 \cdot 1^3}{10.15^2 \cdot 1.085 + 1^2 \cdot 2.662} = 0.210\ \text{t}$$



Die Abstände dieser Kraft von den Kernpunkten der zu untersuchenden Kämpfer- und Scheitelquerschnitte ergeben sich aus den Formeln 11, S. 25 zu:

$$y_{ka}^k = 5.37 \text{ m}$$

$$y_{ki}^k = 5.43 \text{ „}$$

$$y_{ka}^s = 3.17 \text{ „}$$

$$y_{ki}^s = 2.83 \text{ „}$$

Das Widerstandsmoment ist für  $e = 1.00 \text{ m}$

$$W = 0.167 \text{ m}^3$$

Daraus ergeben sich nach der Kernformel

$$\sigma = \frac{H_z \cdot y_k}{W}$$

die bei einer Temperaturänderung von  $1^{\circ} \text{ C}$  auftretenden Spannungen

$$\sigma_a^k = 0.676 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_i^k = 0.683 \text{ „}$$

$$\sigma_a^s = 0.399 \text{ „}$$

$$\sigma_i^s = 0.356 \text{ „}$$

Der Einfluß der ungleichmäßig über den Querschnitt fortschreitenden Temperaturänderung setzt sich (vgl. S. 49) zusammen aus der Wirkung einer gleichmäßig verteilten Temperaturschwankung, d. h. einer zentrischen Kraft und aus einem Moment. Die aus letzterem sich ergebenden Spannungen bei  $1^{\circ}$  Temperaturänderung betragen (Formel 21, S. 49)

$$\sigma = 0.000\,012 \cdot 1 \cdot 2\,000\,000 = 2.40 \text{ kg/cm}^2$$

Diese Spannungswerte sind nun mit den Größen  $\frac{\tau_m}{\tau}$  resp.  $\frac{\Delta \tau_m}{\tau}$ , die unter Berücksichtigung der Tabelle auf S. 46 bestimmt werden, sowie mit der betreffenden Temperaturschwankung zu multiplizieren, wodurch man die größten, im Gewölbe auftretenden Spannungen erhält. In der nachstehenden Tabelle sind dieselben für  $e = 1.00 \text{ m}$  zusammengestellt (+ bedeutet Zug, — Druck).

	W = -15° L = -15°	W = -15° L = -25°	W = -5° L = +5°	W = -10° L = ± 0°	Max. Druck	Max. Zug
$\sigma_a^k$	kg/cm <sup>2</sup> + 6.3	kg/cm <sup>2</sup> - 0.5	kg/cm <sup>2</sup> + 9.5	kg/cm <sup>2</sup> + 12.2	kg/cm <sup>2</sup> - 0.5	kg/cm <sup>2</sup> + 12.2
$\sigma_i^k$	- 6.3	+ 0.5	- 9.5	- 12.2	- 12.2	+ 0.5
$\sigma_a^s$	- 3.7	- 14.8	+ 9.5	+ 7.9	- 14.8	+ 9.5
$\sigma_i^s$	+ 3.3	+ 14.2	- 9.5	- 8.1	- 9.5	+ 14.2

Die Resultate dieser für verschiedene Bogenstärken durchgeführten Rechnung stellt man am besten wie folgt tabellarisch zusammen:

e =	W = -15° L = -15°	W = -15° L = -25°	W = -5° L = +5°	W = -10° L = ± 0°	Max. Druck	Max. Zug	
m	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	
$\sigma_a^k$	0.50	+ 3.6	- 6.7	+ 12.0	+ 13.7	- 6.7	+ 13.7
	1.00	+ 6.3	- 0.5	+ 9.5	+ 12.2	- 0.5	+ 12.2
	1.50	+ 8.1	+ 3.2	+ 8.4	+ 11.9	-	+ 11.9
	2.00	+ 9.3	+ 5.8	+ 7.4	+ 11.3	-	+ 11.3
	2.50	+ 10.3	+ 7.6	+ 7.2	+ 11.7	-	+ 11.7
$\sigma_i^k$	0.50	- 3.6	+ 6.7	- 12.0	- 13.7	- 13.7	+ 6.7
	1.00	- 6.3	+ 0.5	- 9.5	- 12.2	- 12.2	+ 0.4
	1.50	- 8.2	- 3.3	- 8.4	- 11.9	- 11.9	-
	2.00	- 9.5	- 6.1	- 7.4	- 11.4	- 11.4	-
	2.50	- 10.5	- 7.9	- 7.2	- 11.8	- 11.8	-
$\sigma_a^s$	0.50	- 2.0	- 15.0	+ 12.0	+ 11.0	- 15.0	+ 12.0
	1.00	- 3.7	- 14.8	+ 9.5	+ 7.9	- 14.8	+ 9.5
	1.50	- 4.9	- 15.4	+ 8.4	+ 6.3	- 15.4	+ 8.4
	2.00	- 5.8	- 15.6	+ 7.4	+ 5.0	- 15.6	+ 7.4
	2.50	- 6.5	- 16.5	+ 7.2	+ 4.4	- 16.5	+ 7.2
$\sigma_i^s$	0.50	+ 2.0	+ 14.9	- 12.0	- 11.1	- 12.0	+ 14.9
	1.00	+ 3.3	+ 14.2	- 9.5	- 8.1	- 9.5	+ 14.2
	1.50	+ 4.1	+ 14.3	- 8.4	- 6.6	- 8.4	+ 14.3
	2.00	+ 4.6	+ 14.0	- 7.4	- 5.4	- 7.4	+ 14.0
	2.50	+ 5.0	+ 14.4	- 7.2	- 5.0	- 7.2	+ 14.4

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, daß für das vorliegende Beispiel die größte Druckspannung im Gewölbe bei einem Temperaturzustande nach Fall 1 auftritt und zwar in der äußersten Faser des Scheitelquerschnittes. Sie ist für die verschieden starken Gewölberinge annähernd gleich groß und zwar 15—16 kg/cm<sup>2</sup>. Die größte infolge der Wasserbelastung zulässige Spannung, d. h. der Wert  $\sigma_p = \sigma_{zul.} - \sigma_t$  kann daher in vorliegendem Fall für das ganze Gewölbe als konstant angenommen werden und zwar, wenn  $\sigma_{zul.} = 30$  kg/cm<sup>2</sup> gewählt wird, mit rd. 14 kg/cm<sup>2</sup>.

Nach Formel 23 (S. 56) lassen sich nun für die verschiedenen Bogenstärken die zulässigen Wassertiefen ermitteln. Diese betragen

für e = 0.50	1.00	1.50	2.00	2.50 m
und p = 0.59	1.03	1.36	1.65	1.89 kg/cm <sup>2</sup>
t = 5.90	10.30	13.60	16.50	18.90 m

Durch Auftragen dieser Größen erhält man das theoretische Kämpferprofil der Mauer. Das Scheitelprofil ergibt sich nach Formel 15 (S. 38) (vgl. Abb. 15).

Diese theoretischen Profile verstärkt man zweckmäßig in der in Abb. 24 dargestellten Weise gegen die Mauerkrone hin.

Obgleich die in Vorstehendem berechneten Zugspannungen infolge von Wärmeschwankungen durch die Druckspannungen aus der Wasserbelastung zum großen Teil wieder aufgehoben werden, empfiehlt es sich doch, nahe den beiden Wölbflächen Eiseneinlagen anzuordnen, damit bei leerem oder nur teilweise gefülltem Becken keine Risse auftreten. Auch werden im oberen Teile der Mauer infolge der Verstärkung ihres Querschnittes nur noch geringe Druckspannungen aus Wasserlast auftreten und daher die oben berechneten Zugspannungen zum größten Teile vorhanden sein. Die Menge der einzulegenden Eisen läßt sich mit genügender Genauigkeit unter Zugrundelegung der berechneten Zugspannungen ermitteln.

Die Pfeilerdimensionen wurden in vorliegendem Beispiel durch Versuchsrechnung bestimmt.

In den vorstehenden Betrachtungen sind die Gewölbe stets als senkrecht stehend angenommen worden. Es empfiehlt sich jedoch im allgemeinen, die gegen Pfeiler sich stützenden Bogen nach der Luftseite hin geneigt anzuordnen. Dadurch läßt sich erstens eine Materialersparnis und zweitens eine günstigere Spannungsverteilung in den Pfeilern erzielen. Sodann werden durch ein Schiefstellen der Gewölbe die bei leerem Becken auftretenden Temperaturspannungen teilweise dadurch etwas verringert, daß der Bogen durch sein Eigengewicht belastet wird. Schließlich ist es möglich, auf diese Weise den in gewissen Fällen nicht unerheblichen Eisschub unschädlich zu machen, indem die Eisdecke an der schiefen Wand in die Höhe geschoben wird. Auch bei gewölbten Staumauern in engen Schluchten ist aus diesem letzten Grunde ein Schiefstellen des obersten Gewölbringes, soweit der Eisdruck in Frage kommt, zu empfehlen.

In Abb. 24 ist vergleichsweise das Profil einer Gewichtsstaumauer von gleicher Höhe eingezeichnet und darauf gestützt die für die beiden Mauern erforderlichen Mauerwerksmassen bis zur Fundamentfuge berechnet worden. Die aus Bogen und Pfeilern bestehende Mauer enthält im Mittel  $91 \text{ m}^3/\text{lfdm}$  und die Gewichtsstaumauern  $131 \text{ m}^3/\text{lfdm}$ . Die Volumen verhalten sich also etwa wie 2:3.

Bei Ausführung nach der aufgelösten Bauweise läßt sich somit eine nicht unerhebliche Materialersparnis erzielen. Ob dieselbe auch eine Kostenersparnis zur Folge hat, kann nicht ohne weiteres behauptet werden, da bei einer vergleichenden Kostenberechnung nicht allein die Mauerwerksmassen ausschlaggebend sind, sondern auch die Qualität des Mauerwerks zu berücksichtigen sein wird. Ferner werden verschiedene andere Faktoren auf den Preis von Einfluß sein: Vor allem die lokalen Verhältnisse und der Untergrund, sodann die Materialpreise, die Arbeitslöhne, die Anfuhrkosten für Materialien und Geräte u. a. m.

Werden beispielsweise die nachstehenden Preise, in welche alle Materiallieferungen und Nebenarbeiten eingeschlossen sein sollen, in die Rechnung eingeführt, so ergeben sich folgende zwei Summen:

1. Staumauer bestehend aus Gewölben und Pfeilern:

Ein Gewölbe  $661 \text{ m}^3$  zu  $50.— \text{ Mk.} = 33050.— \text{ Mk.}$

Ein Pfeiler  $1412 \text{ m}^3$  zu  $30.— \text{ Mk.} = 42360.— \text{ Mk.}$

75410.— Mk.

2. Gewichtsstaumauer:

22,7 lfdm Mauer

$22,7 \text{ m} \cdot 131 \text{ m}^2 = 2973,7 \text{ m}^3$

$2974 \text{ m}^3$  zu  $27.— \text{ Mk.} = 80298.— \text{ Mk.}$

Die Gewölbestaumauer stellt sich im vorliegenden Falle um rund  $6 \%$  billiger als die Gewichtsstaumauer.

## 12. Berechnung von gewölbten Staumauern, deren Spannweite mit der Höhe sich ändert.

Bei Bestimmung der Form von Staumauern, die in Schluchten oder engen Tälern einzubauen sind, hat man in erster Linie die Gestaltung der Talhänge und des Flußbettes und ferner die Lagerung und Struktur des Felsens zu berücksichtigen. Vor allem ist für eine sichere Übertragung der Bogendrücke auf die seitlichen Talhänge zu sorgen. Stark gekrümmte Bogen können, da für solche selten gute Auflager zu finden sein werden, nur ausnahmsweise zur Verwendung gelangen. Immerhin empfiehlt es sich, den Zentriwinkel aus den in Nr. 10 angeführten Gründen stets möglichst groß zu wählen.

Es soll zunächst gezeigt werden, in welcher Weise sich die Lage der Drucklinie und folglich die erforderliche Bogenstärke ändern, wenn bei gleichbleibender Belastung und konstantem Halbmesser der Zentriwinkel abnimmt.

Bei Vernachlässigung der Zusammendrückung in der Längsaxe verlangt die Berechnung für verschiedene Bogen-

längen stets dieselbe Bogenstärke, da sich die Spannungen im Kreisbogen unabhängig vom Zentriwinkel immer gleich groß ergeben.

Berechnet man aber die Bogenstärken nach der kubischen Gleichung auf S. 54, so findet man, wie aus Abb. 25 ersichtlich, daß sie in hohem Maße von dem Zentriwinkel resp. der Bogenlänge abhängig sind. Die Kurve dieser Abbildung stellt die Änderung der Bogenstärke für einen bestimmten Fall dar, doch wird sich für andere Verhältnisse

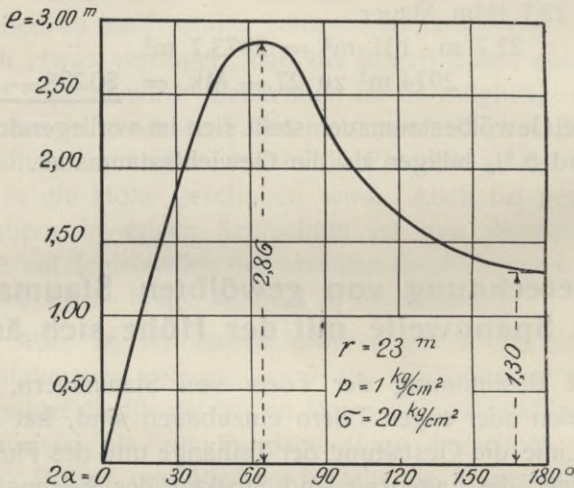


Abb. 25.

mit Rücksicht auf die Proportionalität zwischen  $e$  und  $r$  einerseits und  $\sigma$  und  $p$  andererseits (Formel 22) eine ähnliche Kurve ergeben.

Solange der Zentriwinkel größer als ca.  $65^\circ$  ist, erfordert im vorliegenden Fall ein kurzer Bogen größere Stärke, als ein langer. Für den Grenzfall  $2\alpha = 0^\circ$  wird natürlich auch die Bogenstärke gleich Null, da der Bogen in diesem Falle zu einem unendlich kurzen Element zusammenschrumpft und die Belastung verschwindet.

Die Dimensionierung einer bogenförmigen Talsperre mit variabler Spannweite wird man am besten in folgender Weise vornehmen:

Man teilt die ganze Mauer dem Gelände entsprechend in eine Anzahl Ringe ein (vgl. Abb. 26) und berechnet in jeder Trennungsfuge die erforderliche Stärke, wobei man zunächst die kubische Gleichung benutzt: (vgl. S. 54)

$$e^3 (\sigma C_2 - p C_3) - e^2 \cdot r p C_4 + e \cdot r^2 (\sigma C_1 - 3 p C_3) - r^3 p C_1 = 0$$

Die Spannung  $\sigma$  wählt man mit Rücksicht auf die später noch zu bestimmenden Temperaturspannungen niedriger als zulässig. Die Unbekannte  $e$  findet man am raschesten durch Probieren.

Die gefundenen Stärken trägt man dann von einer Vertikalen aus auf und erhält, indem man ihre Endpunkte verbindet, das theoretische Profil der Mauer, das in Abb. 26 durch die punktierte Linie dargestellt ist. Dieses läuft auf der Höhe des Wasserspiegels und am Fuß in eine Spitze aus und muß aus praktischen Gründen natürlich verstärkt werden.

Für dieses verstärkte Profil werden nun nochmals die in den gedachten Trennungsfugen vorhandenen Bogenspannungen infolge der Wasserbelastung bestimmt und ferner die ungünstigsten Temperaturspannungen berechnet. Überschreitet die Summe dieser beiden Druckspannungen an einer Stelle das zulässige Maß, so muß das Gewölbe daselbst verstärkt werden; bleibt sie jedoch unter der zulässigen Grenze, so kann man, wenn dies aus praktischen Gründen angängig ist, das Profil entsprechend verringern.

Die zur Vermeidung von Rissen erforderlichen Eisenlagen werden am einfachsten wieder unter Zugrundelegung der berechneten Zugspannungen bestimmt.

Im allgemeinen kann die zulässige Druckbeanspruchung des Mauerwerks höher angenommen werden, als diejenige des Felsbodens der Talhänge; es ist in diesem Falle nur dafür zu sorgen, daß der Auflagerdruck des Bogens durch

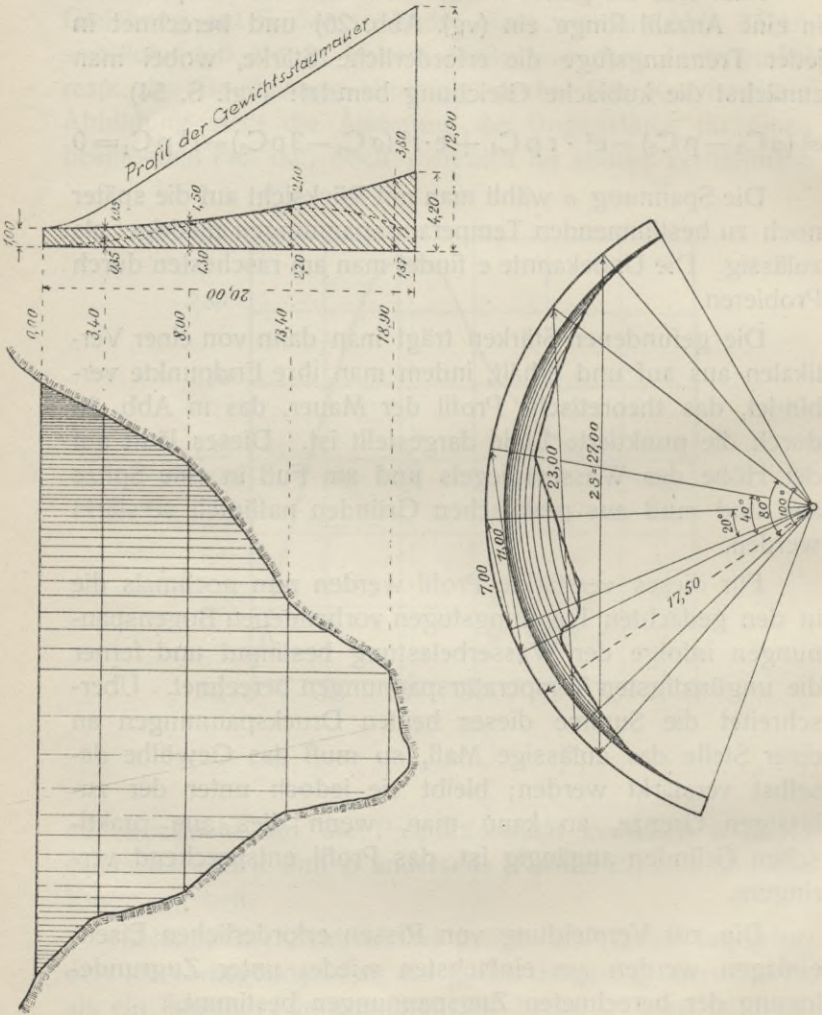


Abb. 26.



Ausbildung von Widerlagern auf eine breitere Fläche übertragen wird.

Bei Berechnung der durch Abb. 26 dargestellten Stau-  
mauer wurde die Spannung  $\sigma = 20 \text{ kg/cm}^2$  angenommen.  
Der Einfachheit halber wurde der Radius der wasserseitigen  
Begrenzungsfläche ( $r_a = 17.50 \text{ m}$ ) der Berechnung zu  
Grunde gelegt. Man erhält dadurch etwas zu große Bogen-  
stärken, da diese den Radien proportional sind.

Von einer Berechnung der Temperaturspannungen  
wurde abgesehen, da sie in gleicher Weise, wie in der  
vorigen Nummer entwickelt, durchgeführt wird.

In die Abb. 26 wurde vergleichsweise auch das Profil  
einer Gewichtsstaumauer eingezeichnet, woraus zu ersehen  
ist, daß die Materialersparnis, welche durch Verwendung  
einer lediglich auf der Bogenwirkung beruhenden Staumauer  
gegenüber einer Gewichtsstaumauer erzielt werden kann, bei  
engen Tälern und dementsprechend kleinem Krümmungs-  
radius der Mauer, eine bedeutende ist. Im vorliegenden  
Fall berechnet sich die Masse für die Gewichtsstaumauer  
zu ca.  $1600 \text{ m}^3$  und diejenige für das Gewölbe zu  $650 \text{ m}^3$ ,  
was eine Ersparnis von ca.  $\frac{3}{5}$  der Masse bedeutet. Dabei  
ist allerdings, wie schon in der vorhergehenden Nummer  
bemerkt, zu berücksichtigen, daß das Material des Bogens  
von besserer Qualität sein muß, als das der Gewichtsstaumauer  
und infolgedessen auch teurer sein wird.

Der vorstehenden Berechnung ist eine Staumauer mit  
verhältnismäßig kleinem Krümmungshalbmesser ( $17.50 \text{ m}$ ) zu  
Grunde gelegt worden. Mit wachsendem Halbmesser wird  
sich das Verhältnis der Volumen von Gewölbe und Ge-  
wichtsstaumauer für ersteres allmählich weniger günstig ge-  
stalten. Es muß schließlich ein Grenzfall existieren, bei  
welchem die beiden Massen gleich groß werden.

Diese Grenze läßt sich angenähert unter Benutzung  
der Formel 1 (S. 13) bestimmen. Sie muß dort liegen, wo  
die Fugenbreiten bei der Berechnung als Bogen, sowie  
als Stützmauer gleich groß werden. Dieser Fall tritt ein,  
wenn

$$e = \frac{p}{\sqrt{\gamma}} = \frac{r_a p}{\sigma}$$

woraus

$$r_a = \frac{\sigma}{\sqrt{\gamma}}$$

Durch Einsetzen von Zahlenwerten kann die obere Grenze von Fall zu Fall ermittelt werden.

### 13. Einfluß des starren Zusammenhanges der einzelnen Bogenringe untereinander und des ganzen Gewölbes mit dem Untergrund.

Bei den bisherigen Betrachtungen ist stets angenommen worden, daß die einzelnen Bogenringe mit der Höhe 1 von einander unabhängig sind, in keinem Zusammenhange mit dem übrigen Teil der Mauer stehen und sich infolgedessen auch frei durchbiegen können. In Wirklichkeit trifft dies bei einer gewölbten Staumauer aber nicht zu. Infolge der starren Verbindung der einzelnen Bogenringe untereinander beeinflußt die Bewegung des einen alle übrigen mehr oder weniger. Außerdem stützt sich die gewölbte Mauer nicht nur gegen die seitlichen Widerlager, sondern auch gegen das Fundament resp. den Untergrund. Infolge dieser Einspannung am Fuße der Mauer kann sich der untere Teil derselben fast gar nicht bewegen, während sich der obere, wie gezeigt werden wird, z. T. etwas stärker durchbiegt, als eine Berechnung für die frei beweglichen Bogenringe ergibt.

Der Einfluß dieser starren Verbindung läßt sich am besten dadurch klar legen, daß das Gewölbe einmal aus horizontalen Ringen zusammengesetzt gedacht wird und darnach aus vertikal stehenden, unten eingespannten Balken. Aus den elastischen Bewegungen dieser beiden Systeme kann eine Lastverteilung auf dieselben ermittelt werden, da die Durchbiegungen der beiden Systeme unter den Teilbelastungen überall einander gleich sein müssen. Gestützt

auf diese Verteilung, lassen sich sodann neben den Spannungen in vertikalen Schnitten der Mauer auch diejenigen in horizontalen Schnitten berechnen.

### a) Elastische Durchbiegung des Bogens:

Zunächst sollen Formeln abgeleitet werden zur Berechnung der elastischen Durchbiegung der Bogenringe unter dem Einfluß der äußeren Kräfte. Wie gezeigt werden wird, genügt es für die folgenden Betrachtungen, die radiale Durchbiegung des Scheitels zu kennen. In ähnlicher Weise wie die Formeln für diese Durchbiegung lassen sich auch solche zu Ermittlungen der radialen Bewegungen anderer Bogenpunkte ableiten, die übrigens auch mit Hilfe der eingezeichneten Drucklinie bestimmt werden können.

1. Radiale Bewegung des Scheitels infolge einer Wasserbelastung:

Auf jedes Bogenelement wirken infolge der Wasserbelastung (vgl. früher) zwei Kräfte  $R$  und  $H_p$ . Erstere bewirkt als auf den einzelnen Bogenelementen normal stehende Kraft nur eine in ihrer Richtung gehende Verschiebung der einen Elementenfläche gegenüber der andern und folglich auch des mit dem Element starr verbundenen Bogenscheitels.  $H_p$  ruft eine Drehung, eine normale und transversale Bewegung der einen Elementenfläche gegenüber der andern hervor, drei Verschiebungen, die als Drehung um den Antipol der Kraft bezüglich der Elastizitätsellipse des Elementes zusammengefaßt werden können.

Unter der Wirkung von  $R$  verkürzt sich jedes Element, und der Scheitel senkt sich um

$$\Delta \eta_R = \frac{R \Delta s \sin \varphi}{E e}$$

Durch Integration von 0 bis  $\alpha$  ergibt sich die Gesamtscheitelbewegung zu

$$\eta_R = \frac{R f}{E e} \tag{24}$$

Die Bewegung des Bogenscheitels unter der Einwirkung von  $H_p$  ist gleich der Kraft mal dem Zentrifugalmoment der

elastischen Gewichte der Bogenelemente bezogen auf Kraft und Verschiebungsrichtung (vgl. Abb. 27). Also:

$$\eta_H = H_p \Sigma (\Delta g y_s x_x)$$

Aus der Konstruktion des Antipoles X findet man (siehe S. 41)

$$x_x = x_s + \frac{i_1^2}{y_s} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{y_s} - \frac{i_2^2}{y_s} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{y_s}$$

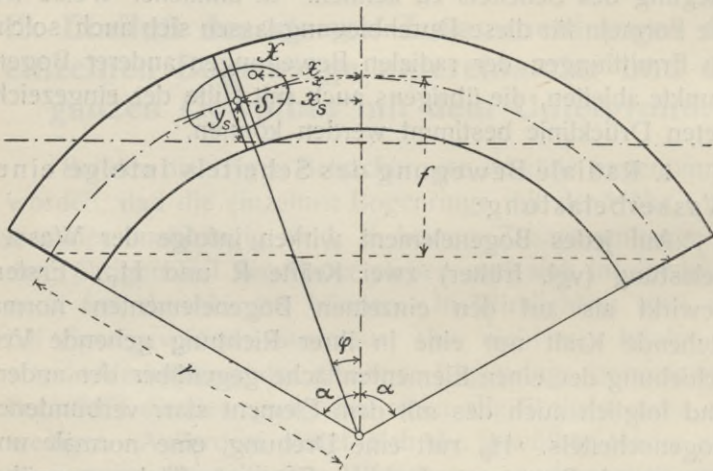


Abb. 27.

Setzt man  $i_2^2 = 3 i_1^2$  (vgl. S. 15), so ist

$$x_x = x_s - 2 i_1^2 \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{y_s}$$

Für Kreisbogen mit konstantem Querschnitt, die hier allein betrachtet werden sollen, ist

$$\Delta g = \frac{12 \Delta s}{E e^3} = \text{const}$$

$$y_s = r \left( \cos \varphi - \frac{s}{b} \right)$$

$$x_s = r \sin \varphi.$$

Setzt man diese Werte in obige Summe ein, so findet man

$$\eta_H = \frac{12 H_p r}{E e^3} \left[ \left( r^2 - \frac{e^2}{6} \right) \int_0^{\alpha} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - \frac{r^2 s}{b} \int_0^{\alpha} \sin \varphi d\varphi \right]$$

$$\eta_H = H_p \cdot \frac{12 r}{e^3 E} \left[ s^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{e^2}{12 r^2} \right) - \frac{r f s}{b} \right]$$

Dieser Ausdruck wird stets negativ sein. Da  $H_p$  der Kraft  $R$  entgegengesetzt wirkt, bedeuten also sowohl  $\eta_R$  wie  $\eta_H$  Senkungen und sind zu addieren.

Der Wert  $\frac{e^2}{12 r^2}$  ist für geringe Bogenstärken gegenüber dem Wert  $\frac{1}{2}$  sehr klein; man schreibt die Formel besser in der Form:

$$\eta_H = H_p \cdot \frac{12 r s \left( \frac{s}{2} - \frac{r f}{b} \right)}{e^3 E} - H_p \cdot \frac{s^2}{e r E} \quad (25)$$

wobei der 2. Wert für dünne Bogen vernachlässigt werden kann. Dieser enthält die Wirkung der Normal- und Transversalkomponenten von  $H_p$  während der erste diejenige des Momentes wiedergibt.

## 2. Radiale Bewegung des Bogenscheitels infolge von Temperaturkräften:

Eine Temperaturschwankung, die den Bogen von beiden Laibungen aus beeinflußt, ruft eine im Schwerpunkt des Bogens wirkende horizontale Kraft hervor (S. 46). Die Scheitelbewegung erhält man demnach, wenn man in Formel (25)  $H_p$  durch den Ausdruck für  $H_t$  ersetzt; sie beträgt:

$$\eta_T = \frac{\alpha \tau}{r^2 C_1 + e^2 C_2} \left[ 12 r s \left( \frac{s}{2} - \frac{r f}{b} \right) - \frac{e^2 s^2}{r} \right] \quad (26)$$

Der 2. Ausdruck in der großen Klammer kann wieder für dünne Bogen vernachlässigt werden.

Die Temperaturkraft, welche aus einer einseitigen Temperaturschwankung entsteht, läßt sich in eine durch den Schwerpunkt gehende horizontale Kraft und ein Moment

zerlegen (S. 49). Das Moment dreht jeden Querschnitt um den Winkel

$$\Delta \delta = \frac{2 a \Delta \tau_m \Delta s}{e}$$

und die Scheitelsenkung ist demnach

$$\Delta \eta_{\Delta T}^M = \frac{2 a \Delta \tau_m \Delta s}{e} r \sin \varphi$$

woraus durch Integration

$$\eta_{\Delta T}^M = \frac{2 a \Delta \tau_m r f}{e}$$

und folglich die Gesamtbewegung

$$(27) \quad \eta_{\Delta T} = \frac{a \Delta \tau_m}{r^2 C_1 + e^2 C_2} \left[ 12 r s \left( \frac{s}{2} - \frac{r f}{b} \right) - \frac{e^2 s^2}{r} \right] \pm \frac{2 a \Delta \tau_m r f}{e}$$

### b) Biegelinie des Balkens:

Diese kann entweder analytisch bestimmt werden gestützt auf die Formel

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{E J}$$

oder graphisch nach Mohr, indem man die Momentenfläche des belasteten Balkens wieder als Belastungsfläche ansieht und zu dieser ein Seilpolygon zeichnet.

Das letztere Verfahren ist der größeren Übersichtlichkeit wegen im vorliegenden Falle vorzuziehen.

### c) Verteilung der Wasserlast auf das Bogen- und das Balkensystem:

Die Frage, welcher Teil des Wasserdruckes, der die gewölbte Staumauer belastet, von dem Bogensystem und welcher von dem Balkensystem aufgenommen wird, läßt sich am besten an Hand eines Beispielles untersuchen.

Der Betrachtung soll das in Nr. 11 berechnete und in Abb. 24 dargestellte Gewölbe zugrunde gelegt werden, wobei jedoch die Querschnittsreduktion gegen den Scheitel hin außer Acht gelassen werden soll.

Zunächst denkt man sich die ganze Wasserbelastung von dem Bogensystem getragen und jeden Ring frei beweglich. Mittelst der Formeln 24 und 25 lassen sich die Scheitelbewegungen berechnen; ihre Verbindungslinie sei durch die Kurve a—a (Abb. 28) dargestellt. Nun denkt man sich, die ganze Belastung wirke auf die Balken, die sich ebenfalls frei bewegen können. Dann werden sie sich alle

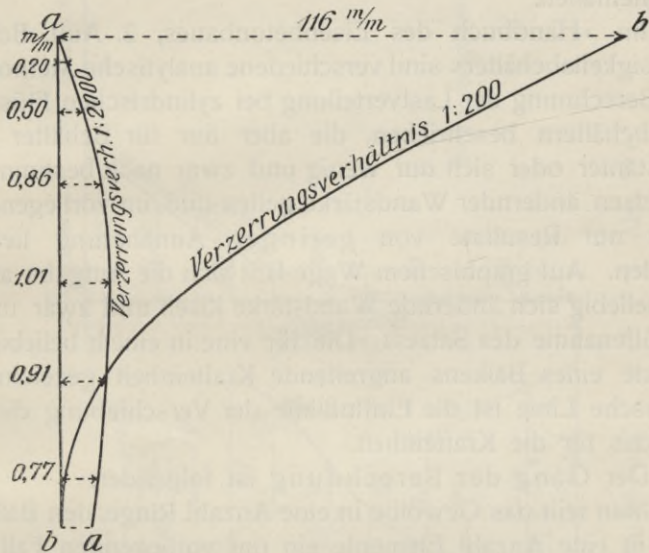


Abb. 28.

nach Kurve b—b durchbiegen. In welcher Weise diese letztere Kurve bestimmt wird, ist unten näher beschrieben.

Da nun jeder Punkt der Mauer sowohl dem einen System wie dem andern angehört, muß nicht nur die Biegungslinie desjenigen Balkens, welcher alle Bogenscheitel enthält, mit der Verbindungslinie aller Scheitelsenkungen zusammenfallen, sondern es kann sich auch jeder andere Balken nur soweit durchbiegen, daß seine elastische Linie und die Verbindungslinie der in ihm enthaltenen Bogenpunkte nach erfolgter Bogensenkung identisch sind.

Es sollen vorerst nur die Scheitelpunkte der Bogenringe und der Scheitelbalken betrachtet werden. Ferner soll angenommen werden, daß die auf die Bogen entfallende Teilbelastung gleichmäßig über ihren Umfang verteilt sei; denn nur dann besitzt obige Formel für die Scheitelsenkung Gültigkeit. Die linear nach unten zunehmende Wasserbelastung muß derart verteilt werden, daß die Kurven a—a und b—b, welche sich bei einer Teilbelastung ergeben, zusammenfallen.

Im »Handbuch des Eisenbetonbaues, 2. Aufl. Bd. 5: Flüssigkeitsbehälter« sind verschiedene analytische Methoden zur Berechnung der Lastverteilung bei zylindrischen Flüssigkeitsbehältern beschrieben, die aber nur für Behälter mit konstanter oder sich nur wenig und zwar nach bestimmten Gesetzen ändernder Wandstärke gelten und im vorliegenden Falle nur Resultate von geringer Annäherung liefern würden. Auf graphischem Wege läßt sich die Aufgabe auch für beliebig sich ändernde Wandstärke lösen und zwar unter Zuhilfenahme des Satzes: »Die für eine in einem beliebigen Punkte eines Balkens angreifende Krafteinheit gezeichnete elastische Linie ist die Einflußlinie der Verschiebung dieses Punktes für die Krafteinheit.«

Der Gang der Berechnung ist folgender:

Man teilt das Gewölbe in eine Anzahl Ringe, den Balken also in eine Anzahl Elemente ein (im vorliegenden Fall 6), deren Höhe resp. Länge man vorteilhaft im oberen Teil der Mauer kleiner als im unteren annimmt. Dann zeichnet man nach dem Mohr'schen Verfahren die elastischen Linien des Balkens für die nach einander auf die verschiedenen Elemente wirkende Krafteinheit. In Abb. 29 ist diese Konstruktion beispielsweise für das oberste Element durchgeführt worden:

Die Ordinaten der dreiecksförmigen Momentenfläche wurden durch die Trägheitsmomente der ihnen entsprechenden Balkenquerschnitten dividiert, wodurch sich die von der Kurve  $\frac{M}{J}$  begrenzte Fläche ergab (Abb. 29 b). Diese Fläche wurde sodann wieder als Belastung angesehen und mittels



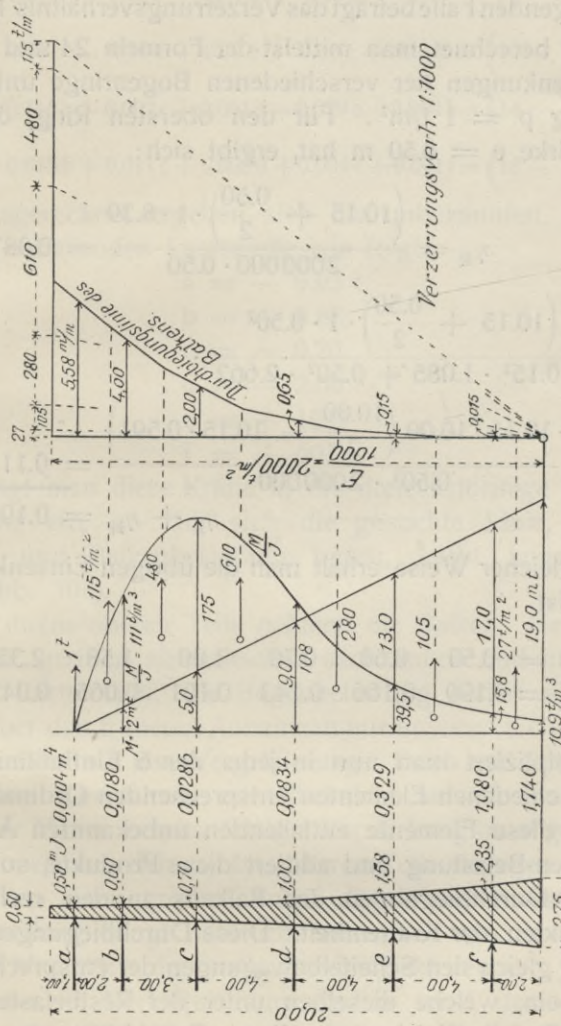


Abb. 29 a.

Abb. 29 b.

Abb. 29 c.

der Polweite E das zu diesen Kräften gehörige Seileck (Abb. 29c) gezeichnet, das die elastische Linie des Balkens für die angenommene Belastung darstellt. Um diese Linie sichtbar zu machen, muß sie verzerrt gezeichnet werden. Im vorliegenden Falle beträgt das Verzerrungsverhältnis 1:1000.

Nun berechnet man mittelst der Formeln 24 und 25 die Scheitelsenkungen der verschiedenen Bogenringe unter der Belastung  $p = 1 \text{ t/m}^2$ . Für den obersten Ring, der die Bogenstärke  $e = 0.50 \text{ m}$  hat, ergibt sich:

$$\eta_R = \frac{\left(10.15 + \frac{0.50}{2}\right) \cdot 1 \cdot 8.39}{2000000 \cdot 0.50} = 0.087 \text{ m/m}$$

$$\eta_H = \frac{\left(10.15 + \frac{0.50}{2}\right) \cdot 1 \cdot 0.50^2}{10.15^2 \cdot 1.085 + 0.50^2 \cdot 2.662} \cdot \frac{12 \cdot 10.15 \cdot 10.00 \left(\frac{10.00}{2} - 10.15 \cdot 0.591\right)}{0.50^3 \cdot 2000000} = 0.112 \text{ m/m}$$

$$\eta_R + \eta_H = 0.199 \text{ m/m}$$

In gleicher Weise erhält man die übrigen Einsenkungen und es ist

für $e =$	0.50	0.60	0.70	1.00	1.58	2.35 m.
$\eta_R + \eta_H =$	0.199	0.166	0.143	0.101	0.065	0.043 m/m.

Multipliziert man nun in jeder der 6 Einflußlinien die den verschiedenen Elementen entsprechenden Ordinaten mit den auf diese Elemente entfallenden unbekanntem Anteilen der Balken-Belastung und addiert diese Produkte, so findet man die Durchbiegungen des Balkens an den sechs Angriffspunkten der Krafteinheit. Diese Durchbiegungen müssen aber gleich den Scheitelbewegungen der entsprechenden Bogen sein, welche dieselben unter der Restbelastung erleiden. Durch Gleichsetzen dieser Durchbiegungen erhält man sodann, wenn das Gewölbe in  $n$  Ringe geteilt wurde,  $n$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten. Diese lauten für das vorliegende Beispiel:

$$5.58a + 4.00b + 2.00c + 0.65d + 0.15e + 0.015f = \left(1 - \frac{a}{2}\right) 0.199$$

$$4.00a + 3.00b + 1.64c + 0.51d + 0.12e + 0.01f = \left(3 - \frac{b}{2}\right) 0.166$$

$$2.00a + 1.64b + 1.08c + 0.40d + 0.09e + 0.01f = \left(6 - \frac{c}{4}\right) 0.143$$

$$0.65a + 0.51b + 0.40c + 0.22d + 0.06e + 0.01f = \left(10 - \frac{d}{4}\right) 0.101$$

$$0.150a + 0.116b + 0.092c + 0.061d + 0.029e + 0.004f = \left(14 - \frac{e}{4}\right) 0.065$$

$$0.015a + 0.013b + 0.011c + 0.008d + 0.004e + 0.001f = \left(18 - \frac{f}{4}\right) 0.043$$

Ausgerechnet ergeben sich die unbekanntes, auf die Balken entfallenden Lastenteile wie folgt:

$$a = - 0.93 t$$

$$b = + 0.88$$

$$c = - 0.20$$

$$d = - 2.00$$

$$e = + 19.0$$

$$f = + 60.0$$

Trägt man diese Kräfte in die dreiecksförmige Wasserbelastung ein, so läßt sich die gesuchte Linie, welche Bogen- und Balkenbelastung nennt, leicht konstruieren (vgl. Abb. 30a).

In ihrem oberen Teile nehmen die Balken, wie ersichtlich, nur geringe abwechselnd nach außen und innen gerichtete Lasten auf, die Bogenbelastung ändert sich also gegenüber den früheren Annahmen nur unwesentlich; stellenweise erfährt sie eine Vergrößerung. Doch wird der früher bestimmte Querschnitt mit Rücksicht auf die im oberen Teile der Mauer bereits erfolgte Verstärkung im allgemeinen vollkommen ausreichen. Im unteren Teile dagegen erhalten die Balken einen großen Anteil des Wasserdruckes. Die Lastverteilung hängt natürlich wesentlich von dem gegenseitigen Verhältnis der maßgebenden Faktoren ab. Je höher die Mauer im Verhältnis zum Radius wird, desto stärker tritt die Gewölbewirkung in Kraft und umgekehrt.

Aus der Lastverteilung lassen sich nun leicht die Momente für die Balkenquerschnitte und darauf gestützt, die in den horizontalen Fugen der Staumauer auftretenden

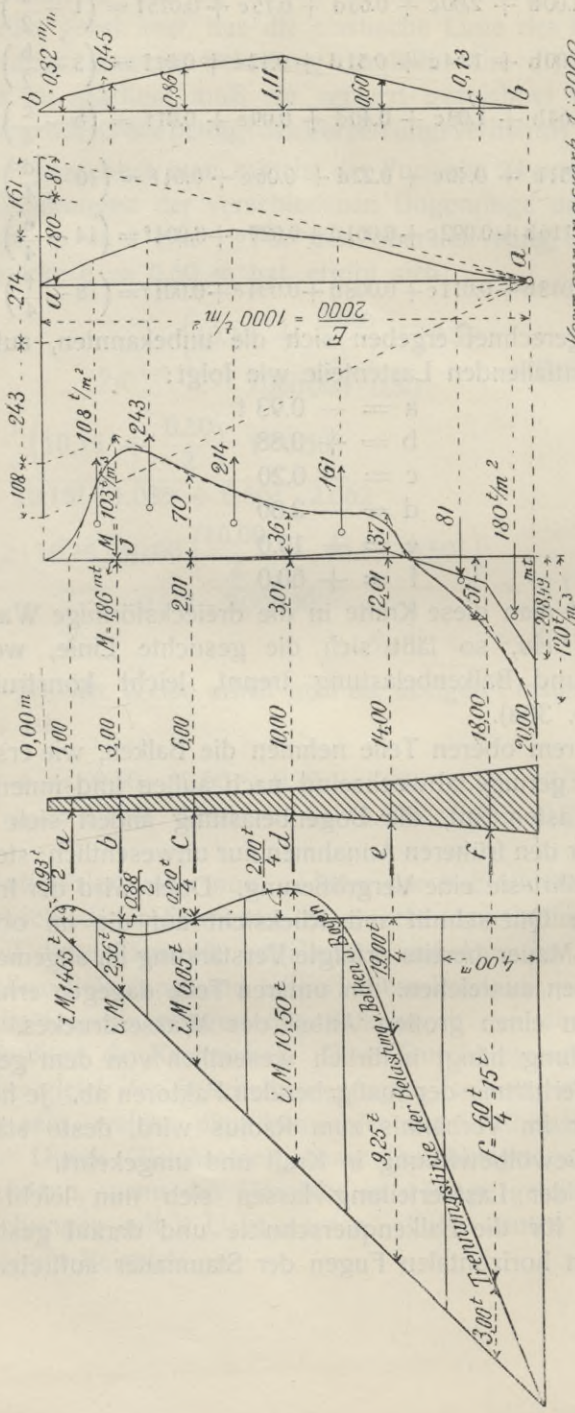


Abb. 30 a.

Abb. 30 b.

Abb. 30 c.

Abb. 30 d.

Abb. 30 e.

Verzerrungsverh 1:2000

Spannungen berechnen. Im vorliegenden Fall beträgt das größte Biegemoment am Mauerfuß

$$M = 208.49 \text{ mt}$$

Das Widerstandsmoment im Fundamentquerschnitt ist

$$W = 1.26 \text{ m}^3$$

Somit beträgt die größte Biegungsspannung

$$\sigma = \pm 16.5 \text{ kg/cm}^2$$

Zu diesen Spannungen ist die Druckspannung infolge des Eigengewichtes der Mauer

$$\sigma = \frac{59}{2.75} = 2.15 \text{ kg/cm}^2$$

zu addieren, welche die Zugspannung vermindert.

Durch graphisches Auftragen dieser Spannungen läßt sich leicht darstellen, bis zu welcher Höhe Zugspannungen in horizontalen Fugen auftreten, und wieweit senkrechte Eiseneinlagen erforderlich sind. Ergeben sich aus dieser Berechnung zu große Druckspannungen, so ist der Mauerquerschnitt zu verstärken und das ganze Verfahren zu wiederholen.

Es ist hierbei jedoch zu beachten, daß die vorstehend berechneten Spannungen nur in dem Scheitelbalken und angenähert in den diesem zunächst stehenden auftreten. Die radialen Einsenkungen des Bogens nehmen allmählich vom Scheitel gegen die Kämpfer hin ab. Die Balken biegen sich also weniger durch und tragen, da sie alle von gleicher Länge sind und ihre Einsenkungen der Belastung direkt proportional sind, gegen die Kämpfer hin weniger Last, weshalb ihre Beanspruchung auch geringer ist. Dagegen werden die mittleren Balken etwas mehr Last übernehmen und dementsprechend etwas stärker beansprucht werden.

Für die berechneten Teilbelastungen sind in Abb. 30 die Biegungslinie des Scheitelbalkens a—a (Abb. 30d) und die Kurve der Scheitelsenkungen b—b (Abb. 30e) konstruiert worden, eine Arbeit, die eine gute Kontrolle für die Richtigkeit der Berechnung bildet. Wie man sieht, stimmen die beiden Kurven ziemlich gut überein. Durch genaueres Zeichnen und Rechnen ließe sich mit einem größeren Aufwand von Arbeit auch ein ganz genaues Zusammenfallen

der beiden Kurven erzielen, was aber für die vorliegenden Berechnungen nicht erforderlich ist.

Bei der Berechnung der Bogenscheitelbewegung wurde angenommen, daß die Teilbelastung gleichmäßig über die ganze äußere Fläche verteilt sei, daß also die Belastungsverteilung der Abb. 28 für alle senkrecht stehenden Balken zutreffe. Dies stimmt aber mit der Wirklichkeit nicht vollkommen überein. Wie bereits erwähnt, nehmen die Balken gegen die Kämpfer hin mit Rücksicht auf ihre geringere Durchbiegung weniger Last auf und die Letzten tragen, da sie sich gar nicht durchbiegen, überhaupt keine Belastung. Daraus ist ersichtlich, daß die Bogenbelastung keine gleichmäßig verteilte sein kann, sondern im allgemeinen gegen die Kämpfer hin zunehmen, wenn die Balkenbelastung entgegengesetzt gerichtet ist, aber abnehmen muß.

Berücksichtigt man diese ungleichmäßig verteilte Bogenbelastung, so ergibt sich, wie leicht einzusehen, für jeden Bogenring eine andere Durchbiegungslinie. Daraus folgt jedoch, daß auch die elastischen Linien der einzelnen Balken alle von der oben (Abb. 30) ermittelten abweichen, da auch sie verschiedene Belastung erhalten. Dies ist aber wiederum von Einfluß auf die Bogenbelastung. Eine genaue Bestimmung der wirklich vorhandenen Belastungsverteilung ist, wie einzusehen, unmöglich.

Wie angenäherte Versuchsrechnungen, bei denen die Änderung der Bogenbelastung linear vom Scheitel nach den Kämpfern verlaufend angenommen wurde, gezeigt haben, sind die Einflüsse dieser Änderungen aber von geringer Bedeutung. Die Belastung, welche die nahe den Bogenkämpfern stehenden Balken vorstehender Rechnung nach zu tragen hätten, in Wirklichkeit aber von diesen nicht aufgenommen werden kann, wird auf die nahe den Scheiteln stehenden Balken und die oberen Ringe übertragen, und zwar übernehmen letztere infolge ihrer größeren Starrheit von dieser Last auch den größeren Anteil. Für die Berechnung der Staumauer hat eine genaue Bestimmung dieser Lastverteilung jedoch keinen Wert.

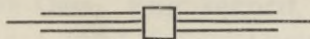
#### d) Verteilung der Temperaturkräfte auf das Bogen- und das Balkensystem:

Auch der Einfluß der Wärmeschwankungen läßt sich auf die beiden Systeme verteilen. Man ersetzt zu dem Zweck am besten die Temperaturkräfte durch eine Wasserbelastung. Eine von beiden Seiten in gleichem Maße auf die Mauer wirkende Abkühlung z. B. bewirkt eine luftseitige Bewegung des Scheitels. Die selbe Scheitelbewegung kann man sich durch eine über die ganze Bogenfläche gleichmäßig wirkende Wasserbelastung hervorgerufen denken, deren Größe rückwärts aus der Einsenkung nach den Formeln 24 und 25 gefunden wird.

Diese Belastung läßt sich wieder graphisch darstellen, und die so gefundene Belastungsfläche kann genau wie oben in zwei Teile getrennt werden, in eine Balken- und eine Bogenbelastung, aus denen rückwärts wieder die Temperaturkräfte ermittelt werden können.

Den in dieser Nummer enthaltenen Betrachtungen liegt ein Gewölbe mit konstanter Spannweite, d. h. ein zwischen Pfeilern stehendes Gewölbe zugrunde. Für bogenförmige Staumauern, welche in enge Täler eingebaut werden sollen, lassen sich dieselben Berechnungen durchführen, wobei jedoch auf die verschieden große Spannweite der einzelnen Bogenringe Rücksicht zu nehmen ist. Die Spannungen sind hier selbstverständlich geringer als bei konstanter Spannweite.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW







## Literaturnachweis.

---

- W. Ritter: Anwendungen der Graph. Statik, Bd. I—IV.  
W. Ritter: Die inneren Kräfte eines belasteten Stabringes.  
Schweiz. Bauzeitung, 17. Januar 1891.  
E. Mörsch: Berechnung kreisförmiger Gewölbe gegen  
Wasserdruck. Schweiz. Bauzeitung, 2. Mai 1908.  
Handbuch des Eisenbetonbaues: Band 4, 2. Aufl. Wasserbau;  
V. Kapitel, Staudämme und Talsperren.  
Band 5, 2. Aufl., Flüssigkeitsbehälter; VI. Kapitel.  
E. Link: Die Bestimmung der Querschnitte von Staumauern  
und Wehren aus dreieckigen Grundformen.  
The Effect of Temperatur Changes on Masonry. Transactions  
A. S. C. E. December 1908.

### Beschreibung ausgeführter Bauwerke.

- P. Ziegler: Der Talsperrenbau.  
E. Wegmann: The Designe and Construction of Dams.  
Eger: Talsperren von Mauerwerk und Eisen. Zentralbl.  
d. Bauverw., 22. u. 26. Okt. 1898.  
Eisenbetontalsperren in Europa, Beton und Eisen, Heft VI,  
1908.  
The Belubula Dam, New South Wales. Eng. News,  
8. Sept. 1898.  
The Upper Ottay Dam, Eng. record, 14. Nov. 1903.  
A. Dumas: Etude théorétique et pratique sur les barrages-  
réservoirs (Barrage du Rio Grande pg. 129).  
Six-Mile Creek Dam. Eng. record, 18. Juli 1903.  
L. A. B. Wade: Curved Masonry Dams in New South Wales.  
Eng. News, 19. Mai 1910.  
Lake Cheesman Dam and Reservoir, Transactions A. S. C. E.  
December 1904.
- 
-

# Literaturverzeichnis

- W. Ritter: Anwendungen der Graph. Stat. Bd. 1-IV.  
W. Ritter: Die letzten Kämpfe eines belagerten Städtchens.  
Schweiz. Bauzeitung, 17. Januar 1871.  
E. Müntz: Beschreibung kreisförmiger Gewölbe gegen  
Wasserdruck. Schweiz. Bauzeitung, 2. Mai 1868.  
Handbuch des Eisenbauwesens: Band 4, 2. Aufl. Wasserbau;  
V. Kugel, Stahnbau und Trassen.  
Band 2, 2. Aufl., Flüssigkeitsbehälter; VI. Kapitel.  
E. Link: Die Bestimmung der Querschnitte von Stämmen  
und Weiden zur dreieckigen Grundformen.  
The Effect of Temperature Changes on Masonry. Transactions  
A.S.C.E. December 1908.

## Beschreibung ausgeführter Bauwerke

- B. Kögler: Der Thiergarten.  
E. Wegmann: The Design and Construction of Dams.  
Eng. Techn. von Betonwerk und Eisen. Zentralbl.  
d. Bauw., 22. u. 29. Okt. 1898.  
Eisenbauwerke in Europa, Beton und Eisen. Heft VI.  
1908.  
The Roberts Dam, New South Wales. Eng. News,  
2. Sept. 1908.  
The Upper Oroy Dam. Eng. record, 14. Nov. 1907.  
A Dam: Ende de veldje et tréville sur les bords de  
la rivière (Barrage de Rio Grande pg. 129)  
St. Mac Grah Dam. Eng. record, 18. Juli 1907.  
J. A. B. Water: Curved Masonry Dams in New South Wales.  
Eng. News, 19. Mai 1910.  
The Oroy Dam and Reservoir. Transactions A.S.C.E.  
December 1908.







Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297469