Statische Berechnung

der

Balkenbrücken einer Oeffnung

mit durchbrochenen Wandungen

von

A. Böhlk,
Betriebsinspector.

Zweite durch Beispiele der Berechnung continuirlicher Träger vermehrte Auflage.

Mit 20 lithographirten Tafeln und 130 Holzschnitten.

Leipzig, 1884.
Baumgärtners Buchhandlung.

Vorwort.

Der Verfasser glaubt den Fachkreisen nachstehend eine kleine Arbeit übergeben zu sollen, welche, die bis dahin veröffentlichten Theorien der Balkenbrücken zum Theil reproducirend, zum Theil erweiternd, die verschiedenen Trägergruppen als eine Reihenfolge von auseinander hervorgehenden Formeln und Berechnungsresultaten behandelt, und von welcher er hofft, dass sie dem angehenden Constructeur und Statiker ein Hülfsmittel zur Berechnung seiner Brückenträger werden möge.

Der Verfasser hat zunächst die Balkenbrücken einer Oeffnung mit durchbrochenen Wandungen einer Durcharbeitung unterzogen, um darnach die continuirlichen Träger (Drehbrücken) im Zusammenhang mit den Blechträgern, sowie die Bogen und Hängebrücken folgen zu lassen, glaubt jedoch mit der Veröffentlichung der letzteren zurückhalten zu sollen, das Urtheil seiner geehrten Fachgenossen über die vorliegende kleine Arbeit abwartend. Bei Abfassung der vorliegenden Arbeit ist der Verfasser von dem Gedanken geleitet worden, dass die analytischen Methoden dann einen wesentlichen Vortheil gewähren, wenn man die in das Gewand der Rechnung eingekleideten Probleme in ihrem Schlussresultat geometrisch deutet, und wo möglich mittelst Zirkel und Lineal selbst auf die Gefahr hin löst, dabei eine unwesentliche, das Resultat indessen vereinfachende Ungenauigkeit zu begehen. — Derjenige, der es vorzieht, die Resultate auszurechnen, möge sich deren Construction als Controle seiner Rechnungen dienen lassen.

Um eine möglichste Uebersichtlichkeit zu erreichen, sind im ersten Theil die Berechnungsformeln eines ganz allgemeinen Trägers und die zu deren Berechnung erforderlichen Functionen der äusseren Kräfte ermittelt, und sind daraus in den folgenden Abschnitten, unter Beobachtung der speciellen Eigenschaften der einzelnen Trägergruppen, die Berechnungsresultate dieser Gruppen, sowie endlich aus diesen, den einzelnen Gruppen eigenen Formeln diejenigen der einzelnen Träger abgeleitet worden.

Von den im allgemeinen Theil unterschiedenen drei grossen Trägergruppen ist in der Folge nur diejenige behandelt, welche zur Erzeugung der Maximal- und Minimalinanspruchnahmen der Diagonalen und Verticalen die einseitlichen Belastungen erfordert, welcher also die Träger mit concav gegen einander gekrümmten Gurten angehören. Dagegen ist von den Trägern mit convex gegen einander gekrümmten Gurten als in der Praxis nicht vorhanden, und von den Trägern mit geradlinig verlaufenden im Auflager sich schneidenden Gurten als besser zu den Dachstühlen gerechnet, ganz abstrahirt worden. Damit reducirte sich die Untersuchung auf die hier gegebenen Trägerformen. Indem der Verfasser sich der Hoffnung hingiebt, dass die kleine Arbeit eine wohlwollende Aufnahme finden möge, kann derselbe nicht unterlassen, der Verlagsbuchhandlung für die Ausstattung des Werkchens an dieser Stelle seinen besten Dank auszudrücken.

Oldenburg, im Juli 1876.

Der Verfasser.

Vorwort zur II. Auflage.

Indem der Verfasser im Nachstehenden den Fachgenossen die zweite Auflage seiner Studien über die Statische Berechnung der Balkenbrücken einer Oeffnung übergiebt, hat derselbe zunächst zu bekennen, dass er der mehrfach an ihn ergangenen Aufforderung, die Anwendung der analytischen Methoden auf die Berechnung der übrigen Brückenformen in systematischer Reihenfolge fortzusetzen, wie solches früher seine Absicht auch gewesen, infolge seiner alsbald erfolgten anderweitigen dienstlichen Beschäftigung, nicht hat nachkommen können. Brückenberechnungen hören mit dem Uebertritt aus dem Bau in den Betrieb auf, zur Fortsetzung solcher Studien geht dem Betriebstechniker die Zeit aus. Wenn trotzdem die gegenwärtige, im Uebrigen unverändert gebliebene Auflage noch mit einem Anhange über einige Beispiele der Berechnung continuirlicher Träger versehen worden ist, so ist solches geschehen im Wesentlichen, um zu zeigen, wie die analytisch graphischen Methoden auch für complicirtere Fälle ausreichend erscheinen, um mit leichter Mühe unter gewissen Bedingungen ein unmittelbar zutreffendes Bild des Verlaufs der Funktionen der äusseren Kräfte zu erhalten, andererseits aber, um die nachträglichen Arbeiten des Verfassers, soweit solche sich auf die Balkenbrücken beziehen, bei gegenwärtigem Anlass dem Buch einzufügen. Der Anhang stellt einen

Auszug aus einer grösseren Arbeit dar, welche auf systematischer Grundlage die continuirlichen Träger überhaupt zum Gegenstande der Abhandlung hat; aus welcher indessen die sonst mehrfach zu erhaltenden allgemeinen Theorien, als für die Form eines Anhanges ungeeignet, zurückgelegt worden sind.

Das vorliegende Buch dürfte unter Berücksichtigung des Vorstehenden und in Anbetracht, dass continuirliche Brücken-Träger über mehr als 3 Oeffnungen zu den Seltenheiten gehören, für den angehenden Construkteur, und nur für diesen ist es in früheren Jahren von dem Verfasser begonnen worden, alles enthalten, um im einzelnen Falle über Balkenbrücken daraus sich Rath holen zu können. Es dürften in dieser Beziehung auch die Beispiele des Anhangs ausreichend erscheinen, um zu zeigen, wie man gegebenen Falles sich zu helfen hat.

Oldenburg, den 30. Juli 1884.

Der Verfasser.

Inhalt.

Anhang.

A. Allgemeine Theorie.

I. Vorbemerkungen.

§ 1. Die Spannungszahlen einer Construction ergeben sich mit Zuhülfenahme der folgenden beiden Sätze der Mechanik:

I. An jedem Knotenpunkte einer Construction halten die inneren und äusseren Kräfte einander im Gleichgewichte. Die für denselben aufgestellte Gleichgewichtsbedingung führt somit zur Ermittelung der unbekannten Inanspruchnahme eines Constructionsgliedes, sofern die Inanspruchnahmen der übrigen daselbst eintretenden Constructionsglieder bekannt sind.

II. Ist irgend ein System der Einwirkung von Kräften unterworfen, so kann man dieselben entweder zu einer Resultante vereinigen oder nach zwei oder mehreren Richtungen (in der Regel in horizontaler und verticaler Richtung) in zwei oder mehrere Componenten gleich den Componenten der Resultante zerlegen und in beiden Fällen den Angriffspunkt derselben, ohne das Gleichgewicht zu stören, beliebig verlegen, sobald man **im ersten Falle** der Resultante ein Kräftepaar (Moment) hinzufügt, dessen Seitenkraft gleich der Resultante und dessen Arm gleich dem Perpendikel vom neuen Angriffspunkte auf die erste Lage derselben ist, — oder **im zweiten Falle** den die Resultante ersetzenden Componenten ein Moment hinzufügt, gleich der Summe der Momente der Componenten, **in beiden Fällen** ein Moment, gleich der Summe der Momente der auf das System einwirkenden Kräfte in Bezug auf den neuen Angriffspunkt der Resultante. Man kann also die sämmtlichen ein System afficirenden Kräfte durch folgende drei Kräftefunctionen ersetzen:

1) durch eine Kraft $\Sigma \mathfrak{H}$ in horizontaler Richtung, gleich der Summe der Horizontalcomponenten sämmtlicher Kräfte;
2) durch eine Kraft $\Sigma \mathfrak{V}$ in verticaler Richtung, gleich der Summe der Verticalcomponenten sämmtlicher Kräfte, und
3) durch ein Moment $\Sigma \mathfrak{M}$ gleich der Summe der Momente sämmtlicher Kräfte.

Es wird somit die Gruppe der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\,\mathfrak{H} &= 0\\ \Sigma\,\mathfrak{B} &= 0\\ \Sigma\,\mathfrak{M} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Bedingung des Gleichgewichts der Kräfte ausdrücken.

Da bei sämmtlichen Balkenbrücken, d. h. Constructionen, welche auf zwei oder mehreren Stützen frei aufliegen, in Folge von Belastung und Eigengewicht nur **verticale äussere Kräfte** vorhanden sind, so werden in obigen Gleichungen die aus der Belastung und dem Eigengewicht bekannten Grössen repräsentirt durch:

V gleich der algebraischen Summe aller Verticalbelastungen (Reaction, mobile Last und Eigengewicht);

M gleich der Summe der Momente aller Verticalbelastungen.

Es resultiren also die unbekannten inneren Spannungen oder Pressungen der einzelnen Constructionsglieder lediglich durch Auflösung obiger drei Gleichungen (1) als Functionen von M und V. Dass die Möglichkeit der Auflösung obiger drei Gleichungen nicht mehr als drei unbekannte Inanspruchnahmen zulässt, ist bekannt.

II. Ermittelung der äusseren Kräfte V und M bei beliebiger Belastung, sowie derjenigen Belastungsfälle, für welche die äusseren Kräfte zu einem Maximum und Minimum werden.

§ 2. Wir bezeichnen in der Folge mit:

A und B die beiden Auflagerreactionen, entsprechend der Annahme von in den Knotenpunkten der Construction concentrirten Lasten;

l die Stützweite des Trägers;

n die Anzahl der durch zwei auf einander folgende Knotenpunkte begrenzten Felder;

c_m die Länge des m-Feldes, so dass:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_m + \ldots + c_n = l;$$

$0, 1, 2 \ldots m \ldots\ldots n$ die auf einander folgenden Knotenpunkte der Construction;

l_m die Entfernung des m-Knotenpunktes vom Auflager A;

x die Entfernung irgend eines Trägerquerschnittes vom Auflager A;

P_r eine am Knotenpunkte r oder an der r-Verticale concentrirte Einzellast;

A_r speciell die dadurch hervorgerufene Reaction;

V_m die zwischen den Knotenpunkten $m - 1$ und m bei irgend welchen in den Knotenpunkten concentrirt gedachten Belastungen resultirende Verticalkraft, positiv gerechnet, wenn dieselbe die Richtung der Auflagerreaction A besitzt;

$[V_m]_{max}$ und $[V_m]_{min}$ deren Maximal- resp. Minimalwerth;

M_m das bei irgend welchen in den Knotenpunkten concentrirt gedachten Belastungen am m-Knotenpunkte resultirende Moment, positiv im Sinne des Moments der Auflagerreaction A gerechnet;

$[M_m]_{max}$ und $[M_m]_{min}$ dessen Maximal- resp. Minimalwerth;

M_x das einer Abscisse x zwischen zwei Knoten- oder Lastpunkten entsprechende Moment.

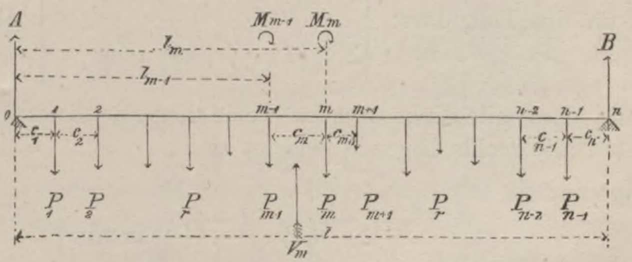
Alsdann ergiebt sich für

1. die Verticalkraft V_m:

§ 3. Die Seitens einer Einzelkraft P_r hervorgerufene Reaction A_r aus der Momentengleichung in Bezug auf das Auflager B als Drehpunkt, also aus Fig. **1**: $A_r \,.\, l = P_r (l - l_r)$

$$A_r = P_r \frac{l - l_r}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Fig. 1.



Angenommen, es habe die Verticalkraft V_m aus irgend welchen anderen Belastungen einen Werth $\mathfrak{V}_m$, welcher jedoch unabhängig von eventuell in den Auflagern angreifenden Belastungen P_0 und P_n ist, da diese Belastungen eine ihnen gleiche, aber entgegengesetzte Reaction erzeugen und sich damit in der Verticalkraft gegenseitig tilgen, so erhält man mit Berücksichtigung obiger Einzelkraft P_r und der dieser entsprechenden Reaction der Gleichung (2) die zwischen den Knotenpunkten $m-1$ und m auftretende Verticalkraft V_m:

a. **für den Fall, dass P_r zwischen dem m-Knotenpunkte und dem Auflager B angreift, also für $r \overline{>} m$:**

$$V_m = \mathfrak{B}_m + P_r \cdot \frac{l - l_r}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

b. **für den Fall, dass P_r zwischen dem Auflager A und dem $m-1$-Knotenpunkte angreift, also für $r \overline{<} m - 1$:**

$$V_m = \mathfrak{B}_m - P_r \cdot \frac{l_r}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

In beiden Gleichungen (3) und (4) sind $\frac{l - l_r}{l}$ und $\frac{l_r}{l}$ stets positive Factoren.

Es wird also die Verticalkraft V_m durch alle rechts vom m-Felde angreifende Lasten vergrössert, dagegen durch alle links vom m-Felde angreifende Lasten verringert, und zwar in beiden Fällen um so mehr, je näher die möglichst grossen Lasten dem m-Felde liegen. — Beide Gleichungen (3) und (4) ergeben für beliebige Belastungen:

$$V_m = \Sigma_m^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) - \Sigma_1^{m-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) \quad \ldots \quad (5)$$

Somit erhält man:

$$[V_m]_{\max} \text{ für den Fall, dass: } \left|\begin{array}{l} \Sigma_m^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) \text{ ein max.} \\ \Sigma_1^{m-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) \text{ ein min.} \end{array}\right| \text{ also für}$$

den Fall, dass alle links vom m-Felde liegende Knotenpunkte unbelastet, alle rechts liegende belastet sind . . . . (6)

Dagegen:

$$[V_m]_{\min} \text{ für den Fall, dass: } \left|\begin{array}{l} \Sigma_m^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) \text{ ein min.} \\ \Sigma_1^{m-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) \text{ ein max.} \end{array}\right| \text{ also für}$$

den Fall, dass alle links vom m-Felde liegende Knotenpunkte belastet, alle rechts liegende unbelastet sind . . . . (7)

Das constante Eigengewicht einer Construction bleibt selbstverständlich in jedem Knotenpunkte bestehen und kann das eine oder andere Mal als nicht vorhanden nicht gedacht werden.

2. Das Moment M_m.

§ 4. Angenommen, es habe das Moment M_m aus irgend welchen Belastungen excl. der Einzelkraft P_r einen Werth $\mathfrak{M}_m$, welcher jedoch unabhängig von eventuell in den Auflagern angreifenden Belastungen P_0 und P_n ist, da diese Lasten eine ihnen gleiche, aber entgegengesetzte Reaction erzeugen und sich damit in jedem Moment gegenseitig aufheben, so erhält man mit Berücksichtigung obiger Einzelkraft P_r und der dieser angehörenden Reaction Gleichung (2) das am Knotenpunkte m resultirende Moment M_m:

a. **für den Fall, dass P_r zwischen dem m-Knotenpunkte und dem Auflager B angreift, also für $r \overline{\gtrless} m$:**

$$M_m = \mathfrak{M}_m + P_r \left(\frac{l - l_r}{l}\right) . l_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

b. **für den Fall, dass P_r zwischen dem Auflager A und dem m-Knotenpunkte angreift, also für $r \overline{\lessgtr} m$:**

$$M_m = \mathfrak{M}_m + P_r \frac{l_r}{l} (l - l_m) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

In beiden Gleichungen (8) und (9) sind $l - l_r$ und $l - l_m$ stets positive Factoren.

Es wird daher jede an irgend einem Knotenpunkte angebrachte Last das Moment an jedem Knotenpunkte vergrössern. — Beide Gleichungen (8) und (9) ergeben für beliebige Belastungen:

$$M_m = l_m \Sigma_m^{n-1} \left(P_r . \frac{l - l_r}{l}\right) + (l - l_m) \Sigma_1^{m-1} \left(P_r . \frac{l_r}{l}\right) \quad (10)$$

oder: $$M_m = l_m \Sigma_{m+1}^{n-1} \left(P_r . \frac{l - l_r}{l}\right) + (l - l_m) \Sigma_1^{m} \left(P_r . \frac{l_r}{l}\right) \quad (10^a)$$

und zwar Gleichungen (10) resp. (10^a), je nachdem die im m-Knotenpunkte angreifende Last zur rechten oder linken Trägerhälfte von m aus gerechnet resp. nach Gleichung (8) oder (9) eingeführt wird.

Man erhält sonach:

$[M_m]_{max}$ für den Fall, dass: $\left\{\begin{array}{l} \Sigma_m^{n-1} \left(P_r . \frac{l - l_r}{l}\right) \\ \Sigma_1^{m-1} \left(P_r . \frac{l_r}{l}\right) \end{array}\right\}$ **ein max.,** also bei

totaler Belastung der Brücke . . . . (11)

Dagegen:

$$[M_m]_{\min} \text{ für den Fall, dass: } \left\{\begin{array}{l} \left|\Sigma_m^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l-l_r}{l}\right)\right| \\ \left|\Sigma_1^{m-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right)\right| \end{array}\right\} \textbf{ ein min.}, \text{ also bei}$$

total unbelasteter Brücke . . . . (12)

Die Gleichung (10) resp. (10^a) schliesst den Beweis in sich, dass die Momente einer Balkenbrücke einer Oeffnung niemals negativ werden können, so wie dass sie an den Auflagern für jede beliebige Belastung ihren kleinsten Werth gleich Null erhalten.

3. Allgemeine Beziehungen zwischen V_m und M_m.

§ 5. Die Gleichungen (5), (10) und (10^a) führen zu folgenden Beziehungen. Aus Gleichung (5) ergiebt sich:

$$V_m = \Sigma_m^{n-1}(P_r) - \Sigma_1^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

und:

$$V_{m+1} = \Sigma_{m+1}^{n-1}(P_r) - \Sigma_1^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

dagegen aus Gleichung (10):

$$M_m = l_m \cdot \Sigma_m^{n-1}(P_r) - l_m \cdot \Sigma_1^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) + \Sigma_1^{m-1}(P_r \cdot l_r) \quad (15)$$

oder mit Gleichung (13):

$$M_m = l_m \cdot V_m + \Sigma_1^{m-1}(P_r \cdot l_r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

ferner ergiebt sich aus Gleichung (10^a):

$$M_{m-1} = l_{m-1} \cdot \Sigma_m^{n-1}(P_r) - l_{m-1} \cdot \Sigma_1^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) + \Sigma_1^{m-1}(P_r \cdot l_r) \quad (17)$$

oder mit Gleichung (13):

$$M_{m-1} = l_{m-1} \cdot V_m + \Sigma_1^{m-1}(P_r \cdot l_r) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

desgleichen folgt aus Gleichung (10):

$$M_{m+1} = l_{m+1} \cdot \Sigma_{m+1}^{n-1}(P_r) - l_{m+1} \cdot \Sigma_1^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) + \Sigma_1^{m}(P_r \cdot l_r) \quad (19)$$

oder mit Gleichung (14):

$$M_{m+1} = l_{m+1} \cdot V_{m+1} + \Sigma_1^{m}(P_r \cdot l_r) \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

und aus Gleichung (10^a):

$$M_m = l_m \cdot \Sigma_{m+1}^{n-1}(P_r) - l_m \cdot \Sigma_1^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) + \Sigma_1^{m}(P_r \cdot l_r) \ldots \quad (21)$$

oder mit Gleichung (14):

$$M_m = l_m \,.\, V_{m+1} + \Sigma_1^m (P_r \,.\, l_r) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (22)$$

Durch Combination der Gleichungen (16) und (18), so wie (20) und (22) ergeben sich die beiden folgenden:

$$V_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m - l_{m-1}} = \frac{M_m - M_{m-1}}{c_m} \;.\;.\;.\;.\;. \quad (23)$$

und:

$$V_{m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{c_{m+1}} \;.\;.\;.\;.\;. \quad (24)$$

Endlich erhält man für einen Querschnitt x zwischen dem $m-1$ und m-Knotenpunkte nach Fig. 1:

$$V_m = A - \Sigma_1^{m-1}(P_r)$$

und:

$$M_x = A \,.\, x - \Sigma_1^{m-1} P_r(x - l_r) = Ax - x\Sigma_1^{m-1}(P_r) + \Sigma_1^{m-1}(P_r \,.\, l_r)$$

$$= x \,.\, V_m + \Sigma_1^{m-1}(P_r \,.\, l_r),$$

somit:

$$V_m = \partial \,.\, \frac{M_x}{\partial x} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (25)$$

Die Verticalkraft V_m ist zwischen je zwei Knotenpunkten $m-1$ und m constant. Es verläuft also nach Gleichung (25) die Momentenfunction, wenn man für jedes x das zugehörige Moment als Ordinate zur Trägerabscisse aufträgt, von einem Knotenpunkte zum andern als gerade Linie.

III. Ermittelung der Spannungszahlen der Constructionsglieder.

1. Träger ohne Verticalen.

a. Spannungszahlen bei beliebiger Belastung.

§ 6. In § 1 ist der für die Berechnung der Constructionsglieder nach Gleichung (1) nothwendigen Bedingung Erwähnung gethan, dass diese drei Gleichungen nicht mehr als drei unbekannte Spannungen enthalten dürfen. Daraus ergiebt sich die nothwendige Eigenschaft der Trägerconstruction, dass ein verticaler Schnitt durch den Träger nirgends mehr als drei Constructionsglieder mit unbekannten Spannungen treffen darf.

Man hat daher die mehrfachen Systeme einer Brücke getrennt zu betrachten und so zu zergliedern, dass von Feld zu Feld nur eine Diagonale reicht. Wir gehen bei den folgenden Berechnungen daher von einem Träger mit s. g. einfachen Systeme aus, also von einem Träger, welcher in jedem verticalen Schnitte nur eine Diagonale aufweist (Fig. **2** oder **3**).

§ 7. Wir bezeichnen in der Folge mit:

$h_0 \,.\, h_1 \,.\, h_2 \ldots h_m \ldots h_n$: die Verticalabstände der beiden Gurten an den auf einander folgenden Knotenpunkten (speciell die Längen der auf einander folgenden Verticalen bei s. g. Fachwerkträgern), von welchen:

h_0 und h_n: für Träger, welche in den Auflagern mit einer Spitze endigen, Null sind;

R_m, S_m und U_m: die resp. Inanspruchnahmen der Diagonale, der oberen und der unteren Gurt;

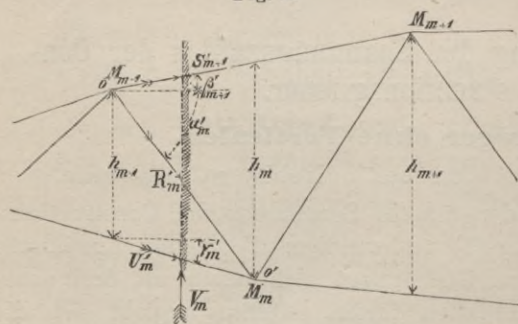
α_m, β_m und γ_m: die spitzen Winkel, welche obige Constructionsglieder der ersten Trägerhälfte mit dem Horizonte einschliessen;

$[R_m]_{\max}$, $[S_m]_{\max}$ und $[U_m]_{\max}$: die Maximalinanspruchnahmen obiger Constructionsglieder;

$[R_m]_{\min}$ etc. deren Minimalinanspruchnahmen, und präcisiren die Indices m der Spannungszahlen R, S und U, so wie der Winkel α, β, γ der Art, dass das Zeichen des Knotenpunktes am rechten Ende des Constructionsgliedes für dieselben massgebend wird.

Wir bezeichnen ferner mit I die Richtung der m-Diagonale der Fig. **2**, mit II die Richtung der in Fig. **3** entgegengesetzt gerichteten m-Diagonale, und setzen oben an die Bezeichnungen: R_m, S_m, U_m, α_m, β_m, γ_m die Indices ' resp. '', je nachdem dieselben einem Trägerfelde mit einer Diagonale der Richtung I oder II angehören.

Fig. 2.



Darnach ergiebt sich **für ein Feld, dessen Diagonale R_m die Richtung I hat** (Fig. **2**):

$$\Sigma \mathfrak{H} = 0; \quad R'_m \,.\, \cos\alpha'_m + S'_{m+1} \,.\, \cos\beta'_{m+1} + U'_m \,.\, \cos\gamma'_m = 0 \quad (26)$$

$$\Sigma \mathfrak{V} = 0; \quad -R'_m \,.\, \sin\alpha'_m + S'_{m+1} \,.\, \sin\beta'_{m+1} - U'_m \,.\, \sin\gamma'_m + V_m = 0 \quad (27)$$

$$\Sigma \mathfrak{M} = 0; \left\{\begin{array}{l} M_{m-1} - U'_m \cdot h_{m-1} \cdot \cos\gamma'_m = 0 \text{ für 0 als Drehpunkt} \\ M_m + S'_{m+1} \cdot h_m \cdot \cos\beta'_{m+1} = 0 \quad \text{„ } 0' \text{ „} \quad \text{„} \end{array}\right\} \quad (28)$$

Die Gleichungen (26) bis (28) enthalten scheinbar vier Bestimmungsgleichungen der drei Unbekannten $R . S . U$; allein dieses wie gesagt nur scheinbar, denn benutzt man zur Bestimmung der drei Unbekannten irgend welche drei der obigen Gleichungen und setzt die daraus ermittelten Werthe in die vierte Gleichung ein, so wird diese identisch erfüllt.

Es ergeben sich also aus Gleichung (28):

$$S'_{m+1} = -\frac{M_m}{h_m \cdot \cos\beta'_{m+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

$$U'_m = +\frac{M_{m-1}}{h_{m-1} \cdot \cos\gamma'_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

dagegen aus Gleichung (26) mit Berücksichtigung von (29) und (30):

$$R'_m \cos\alpha'_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}},$$

also:

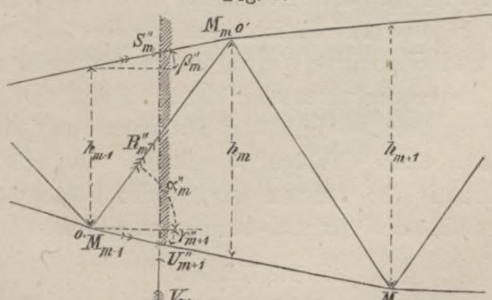
$$R'_m = +\left\{\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right\}\frac{1}{\cos\alpha'_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

während nach Gleichung (27) unter Berücksichtigung von Gleichung (29) und (30):

$$R'_m = \frac{V_m - \frac{M_m}{h_m} \cdot \operatorname{tg}\beta'_{m+1} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \operatorname{tg}\gamma'_m}{\sin\alpha'_m} \quad \ldots \quad (32)$$

Analog dem Vorigen erhält man **für ein Feld, dessen Diagonale R_m die Richtung II hat** (Fig. **3**):

Fig. 3.



$$\Sigma \mathfrak{H} = 0; \; R''_m \cos\alpha''_m + S''_m \cos\beta''_m + U''_{m+1} \cos\gamma''_{m+1} = 0 \ldots \quad (33)$$

$$\Sigma\mathfrak{V} = 0;\; R''_m . \sin\alpha''_m + S''_m . \sin\beta''_m - U''_{m+1} . \sin\gamma''_{m+1} + V_m = 0 \quad (34)$$

$$\Sigma\mathfrak{M} = 0 . \left\{\begin{array}{l} M_{m-1} + S''_m . h_{m-1} . \cos\beta''_m = 0 \text{ für 0 als Drehpunkt} \\ M_m - U_{m+1} . h_m . \cos\gamma''_{m+1} = 0 \quad \text{„ } 0' \text{ „ \quad „} \end{array}\right\} \quad (35)$$

daher aus Gleichung 35:

$$S''_m = -\frac{M_{m-1}}{h_{m-1} . \cos\beta''_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

$$U''_{m+1} = +\frac{M_m}{h_m . \cos\gamma''_{m+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

dagegen aus Gleichung (33) mit Berücksichtigung von Gleichung (36) und (37):

$$R''_m = -\left\{\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right\} . \frac{1}{\cos\alpha''_m} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

während aus Gleichung (34) mit Berücksichtigung von Gleichung (36) und (37):

$$R''_m = -\frac{V_m - \frac{M_m}{h_m} . \operatorname{tg}\gamma''_{m+1} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \operatorname{tg}\beta''_m}{\sin\alpha''_m} \quad \ldots \quad (39)$$

b. Art der Inanspruchnahmen und der Belastungsfälle, für welche dieselben zu einem max. und min. werden.

§ 8. Da in den Figuren **2** und **3** die inneren Kräfte oder die Inanspruchnahmen der Constructionsglieder durch lauter Zugkräfte ersetzt wurden, so müssen deren Werthe nach den Formeln (29) bis (32) und (36) bis (39) auch so lange Zugspannungen repräsentiren, als diese Formeln nicht durch ein negatives Resultat bekunden, dass die Inanspruchnahme in entgegengesetzter Richtung wirkt, als in Fig. **2** und **3** angenommen, also eine Druckspannung bedeutet. Sofern also aus Gleichungen (29) bis (32) und (36) bis (39) für $R . S$ und U positive Werthe folgen, hat man es mit einer Zugspannung, im entgegengesetzten Falle mit einer Druckspannung oder Pressung zu thun. — Sind das Maximum und Minimum der Spannungszahlen eines Constructionsgliedes von gleichem Vorzeichen und negativ, so nennen wir in der Folge das Minimum der Spannungszahl die Maximal-Inanspruchnahme.

α. Die Gurten.

§ 9. Da die Inanspruchnahmen der Gurten nach Gleichungen (29) und (30), (36) und (37) eine reine Function des Moments der äusseren Kräfte sind, so werden dieselben auch mit diesem zu einem Maximum und Minimum werden, und zwar ergiebt sich aus diesen Gleichungen mit § 4 und § 8, dass die obere Gurt in jedem Falle eine Druckspannung, die untere bei jeder Belastung eine Zugspannung erleidet. Hiernach interessiren für die Berechnung der Gurten nur die Werthe: $[S_m]_{\min}$ und $[U_m]_{\max}$. Beide erfolgen für den Fall, dass das denselben zukommende Moment zu einem Maximum wird; daher erhält man mit Gleichung (11):

$$[S_m]_{\min} \text{ und } [U_m]_{\max} \text{ für den Belastungsfall } [M_m]_{\max} \ldots \quad (40)$$

also für totale Belastung des Trägers.

β. Die Diagonalen.

§ 10. Ueber die Art der Inanspruchnahme entscheiden am einfachsten die Formeln (31) und (38). Es ergiebt sich daraus **für die Strebenrichtung** I:

die Diagonale R'_m erleidet eine Zugspannung, wenn $\frac{M_m}{h_m} > \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$,

„ „ „ „ „ Druckspannung, „ $\frac{M_m}{h_m} < \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$,

„ „ „ „ weder Zug noch Druck, „ $\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$;

dagegen für die Strebenrichtung II:

die Diagonale R''_m erleidet eine Zugspannung, wenn $\frac{M_m}{h_m} < \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$,

„ „ „ „ „ Druckspannung, „ $\frac{M_m}{h_m} > \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$,

„ „ „ „ weder Zug noch Druck, „ $\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$.

Denkt man sich bei irgend welcher Belastung die Werthe $\frac{M_m}{h_m}$ für jeden Knotenpunkt ausgerechnet und als Ordinaten zur Trägerabscisse aufgetragen, so lassen sich die oben aufgestellten Bedingungen über die Art der Inanspruchnahme einer Diagonale zusammenfassen in:

> Jede Diagonale wird gezogen, wenn der Werth $\frac{M_m}{h_m}$ an deren Fussende grösser als am Kopfende ist; dieselbe wird im umgekehrten Falle gedrückt, und erleidet weder Zug noch Druck, ist also spannungslos, wenn der Quotient $\frac{M_m}{h_m}$ an deren Kopf- und Fussende den gleichen Werth besitzt.

§ 11. Die weiteren Untersuchungen über die Diagonalen haben sich an dieser Stelle nur auf die Ermittelung derjenigen Belastungsfälle zu beziehen, für welche dieselben ihre Maximal- und Minimal-Inanspruchnahme erreichen.

Nach den Gleichungen (31) und (38) ist:

$$R'_m \,.\, \cos \alpha'_m = - R''_m \,.\, \cos \alpha''_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}},$$

oder wenn:

$$h_m \,.\, h_{m-1} \,.\, \cos \alpha'_m = z' \quad \text{und} \quad h_m \,.\, h_{m-1} \,.\, \cos \alpha''_m = z'' \qquad (41)$$

$$z' R'_m = - z'' R''_m = h_{m-1} \,.\, M_m - h_m \,.\, M_{m-1},$$

z' und z'' sind jederzeit positive Werthe.

Setzt man hierin aus Gleichung (23):

$$M_m = c_m \,.\, V_m + M_{m-1} \quad \text{oder:} \quad h_{m-1} \,.\, M_m = c_m \,.\, h_{m-1} \,.\, V_m + h_{m-1} \,.\, M_{m-1},$$

so ergiebt sich:

$$z' R'_m = - z'' R''_m = c_m \,.\, h_{m-1} \,.\, V_m - (h_m - h_{m-1}) \,.\, M_{m-1},$$

oder mit Hülfe der Gleichung (18):

$$z' R'_m = - z'' R''_m = c_m . h_{m-1} . V_m - (h_m - h_{m-1}) . [l_{m-1} . V_m + \Sigma_1^{m-1} (P_r . l_r)]$$

$$= [c_m . h_{m-1} - l_{m-1} . (h_m - h_{m-1})] \, V_m - (h_m - h_{m-1}) \, \Sigma_1^{m-1} (P_r . l_r),$$

oder mit Gleichung (13):

$$z' R''_m = - z'' R''_m = [c_m . h_{m-1} - l_{m-1} (h_m - h_{m-1})] \, [\Sigma_m^{n-1} (P_r) - \frac{1}{l} \Sigma_1^{n-1} (P_r . l_r)]$$

$$- (h_m - h_{m-1}) \, \Sigma_1^{m-1} . (P_r . l_r),$$

oder indem: $\Sigma_1^{n-1} (P_r . l_r) = \Sigma_1^{m-1} (P_r . l_r) + \Sigma_m^{n-1} (P_r . l_r)$,

$$z' R'_m = - z'' R''_m = [c_m . h_{m-1} - l_{m-1} . (h_m - h_{m-1})] \, [\Sigma_m^{n-1} (P_r) - \frac{1}{l} \Sigma_m^{n-1} (P_r . l_r)]$$

$$- [c_m . h_{m-1} - l_{m-1} (h_m - h_{m-1}) + l \, (h_m - h_{m-1})] \, \Sigma_1^{m-1} \left(P_r \,.\, \frac{l_r}{l}\right),$$

oder:

$$z' R'_m = - z'' R''_m = \left\{ \begin{array}{l} [\overbrace{c_m . h_{m-1} - l_{m-1} . (h_m - h_{m-1})}^{1}] \, \Sigma_m^{n-1} \left(P_r \,.\, \dfrac{l - l_r}{l}\right) \\ - [\overbrace{c_m . h_{m-1} + (l - l_{m-1}) (h_m - h_{m-1})}^{2}] \, \Sigma_1^{m-1} \left(P_r \,.\, \dfrac{l_r}{l}\right) \end{array} \right\}$$

$$= \Omega \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (42)$$

Die Inanspruchnahme der Diagonale R'_m wird also mit dem directen, die der Diagonale R''_m jedoch mit dem umgekehrten Werthe des

Ausdruckes Ω, Gleichung (42), zu einem Maximum und Minimum werden.

Die in dem Ausdrucke Ω enthaltenen beiden Summationen sind jedenfalls positive Grössen. Macht man bezüglich des Verhältnisses der beiden Verticalen h_m und h_{m-1} zu einander die in jedem Falle entweder schon zutreffende oder durch entsprechende Drehung des Trägers richtig werdende Annahme:

$$h_m > h_{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

so wird der in Ω mit 2 bezeichnete Factor jedenfalls positiv werden, dagegen der Factor 1 positiv, Null oder negativ ausfallen, je nachdem:

$$c_m h_{m-1} \gtreqless l_{m-1}(h_m - h_{m-1}) \ldots\ldots \quad (44)$$

Für $c_m h_{m-1} > l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$ wird der erste Summand von Ω, Gleichung (42), positiv werden, während der zweite durch sein Vorzeichen an und für sich negativ ist. Man erhält also:

$$\Omega_{\max} \text{ für den Fall, dass } \begin{cases} \Sigma_m^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) \text{ ein max.,} \\ \Sigma_1^{m-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) \text{ ein min.,} \end{cases}$$

$$\text{dagegen: } \Omega_{\min} \text{ „ „ „ „ } \begin{cases} \Sigma_m^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) \text{ ein min.,} \\ \Sigma_1^{m-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) \text{ ein max.,} \end{cases}$$

daher mit Hülfe der Gleichungen (5), (6) und (7):

$$\Omega_{\max} \text{ für den Belastungsfall } [V_m]_{\max} \ldots\ldots \quad (45)$$

$$\Omega_{\min} \text{ „ „ „ } [V_m]_{\min} \ldots\ldots \quad (46)$$

Für $c_m \cdot h_{m-1} < l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$ wird der Gesammtausdruck Ω negativ ausfallen, und man erhält:

$$\Omega_{\max} \text{ für den Fall, dass } \begin{cases} \Sigma_m^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) \text{ ein min.,} \\ \Sigma_1^{m-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) \text{ ein min.,} \end{cases}$$

$$\text{dagegen: } \Omega_{\min} \text{ „ „ „ „ } \begin{cases} \Sigma_m^{n-1}\left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) \text{ ein max.,} \\ \Sigma_1^{m-1}\left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) \text{ ein max.,} \end{cases}$$

daher mit Hülfe der Gleichungen (10), (11) und (12):

$$\Omega_{\max} \text{ für den Belastungsfall } [M_m]_{\min} \ldots\ldots \quad (47)$$

$$\Omega_{\min} \text{ „ „ „ } [M_m]_{\max} \ldots\ldots \quad (48)$$

Der Fall: $c_m h_{m-1} = l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$ liegt endlich zwischen den beiden vorigen mitten inne, und werden daher:

die beiden Belastungsfälle (45) und (47) für $\Omega_{\max}$ . . (49)

„ „ „ (46) „ (48) „ $\Omega_{\min}$ . . (50)

ein und dasselbe Resultat liefern, welches in der That der Fall ist, da es in Ω, Gleichung (42), durch den zu Null werdenden ersten Summand gleichgültig wird, ob rechts vom m-Felde Lasten angebracht gedacht sind oder nicht.

Wir wenden diese Resultate auf die Inanspruchnahme der Diagonalen R'_m und R''_m an.

Theilt man wieder nach den für Ω geführten Unterabtheilungen, so erhält man mit:

$$R'_m = \frac{\Omega}{z'} \quad \text{und} \quad R''_m = -\frac{\Omega}{z''}.$$

§ 12. 1) **Für** $c_m h_{m-1} > l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$:

$[R'_m]_{\max}$ und $[R''_m]_{\min}$ nach Beziehg. (45) für d. Belastungsf. $[V_m]_{\max}$ (51)

$[R'_m]_{\min}$ „ $[R''_m]_{\max}$ „ „ (46) „ „ „ $[V_m]_{\min}$ (52)

Ob die beiden Belastungsfälle (51) und (52) für die Diagonalen zwei verschiedenartige oder gleichartige Inanspruchnahmen liefern, hängt von der specielleren Trägerform ab.

§ 13. 2) **Für** $c_m h_{m-1} < l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$:

$[R'_m]_{\max}$ und $[R''_m]_{\min}$ nach Beziehg. (47) für d. Belastungsf. $[M_m]_{\min}$ (53)

$[R'_m]_{\min}$ „ $[R''_m]_{\max}$ „ „ (48) „ „ „ $[M_m]_{\max}$ (54)

Aus den Belastungsfällen (53) und (54) folgt, dass für die durch die Ungleichung $c_m . h_{m-1} < l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$ bedingte Trägerform das Maximum und Minimum der Inanspruchnahme der Diagonale jedenfalls von einerlei Vorzeichen sind, da sie aus zwei verschieden grossen totalen Belastungen des Trägers hervorgehen. In solchem Falle interessirt nur die Inanspruchnahme aus der grösseren Last, hier also aus dem Belastungsfalle $[M_m]_{\max}$, und da dieser nach Beziehung (54) $[R'_m]_{\min}$ und $[R''_m]_{\max}$ liefert, so folgt, dass für alle diese Träger die Diagonale R'_m gedrückt, die Diagonale R''_m gezogen wird. — Die totale Belastung kann der total unbelasteten Brücke gegenüber ad R'_m eben nur dann das Minimum liefern, wenn $[R'_m]_{\min}$ dem Absolutwerthe nach grösser als $[R'_m]_{\max}$, aber negativ ist, etc.

§ 14. 3) Für $c_m h_{m-1} = l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$:

$[R'_m]_{\max}$ und $[R''_m]_{\min}$ nach Beziehung (49) entweder für den Belastungsfall $[V_m]_{\max}$ oder $[M_m]_{\min}$ . . . . (55)

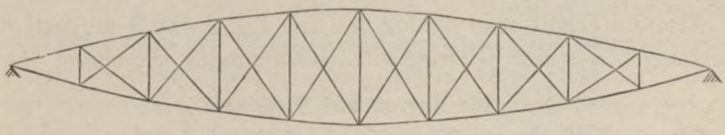
$[R'_m]_{\min}$ und $[R''_m]_{\max}$ nach Beziehung (50) entweder für den Belastungsfall $[V_m]_{\min}$ oder $[M_m]_{\max}$ . . . . (56)

Man überzeugt sich einfach, dass hierfür dieselben Ausführungen wie sub Beziehungen (53) und (54) und § 13 gelten.

§ 15. Die Beziehung (44) theilt somit sämmtliche Träger in drei Gruppen, deren Diagonalen sich je nachdem nach den Belastungsfällen (51) bis (56) berechnen. Umschreibt man die dadurch bedingten Trägerformen durch Worte, so würde die Diagonale des m-Feldes aus den Belastungsfällen (51) und (52) resp. (53) und (54) resp. (55) und (56) zu berechnen sein, je nachdem die beiden Gurtsehnen im m-Felde sich vor, hinter oder in der Auflagerverticale schneiden.

Für stetig verlaufende Gurten und symmetrisch gegen die Trägermitte angeordnete Wandungen, welche in den Auflagern mit einer Spitze endigen, würden sonach die Figuren **4** bis **6** die obige drei Gruppen charakterisirenden Trägerformen repräsentiren.

Fig. 4.



$c_m . h_{m-1} > l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$ ad Fig. **4** ein Träger mit concav gegen einander gekrümmten Gurten.

Fig. 5.

$c_m . h_{m-1} < l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$ ad Fig. **5** ein Träger mit convex gegen einander gekrümmten Gurten.

Fig 6.

$c_m \cdot h_{m-1} = l_{m-1}(h_m - h_{m-1})$ ad Fig. **6** ein Träger mit beiderseits geradlinigen Gurten.

2. Träger mit Verticalen.
(Fachwerkträger.)

a. Spannungszahlen bei beliebiger Belastung. Art der Inanspruchnahmen, und die Belastungsfälle, für welche dieselben zu einem max. und min. werden.

§ 16. Unter Innehaltung der sub § 2 und 7 gewählten Bezeichnungen bedeuten ferner:

T^o_m und T^u_m die Inanspruchnahmen der m-Verticale, je nachdem diese über oder unter dem Angriffspunkte der mobilen Last liegt,

$[T^o_m]_{\max}$ und $[T^u_m]_{\max}$ deren Maximalwerthe,

$[T^o_m]_{\min}$ und $[T^u_m]_{\min}$ deren Minimalwerthe.

Wir behalten die Bezeichnung durch die Indices $'$ und $''$ nach § 7 ebenfalls für die Grössen h und T bei, sofern die Verticale sich zwischen zwei gleichgerichteten, obigen Indices entsprechenden Diagonalen befindet.

Alsdann erhält man analog den sub Fig. **2** und **3** aufgestellten Beziehungen aus den Gleichgewichtsbedingungen Gleichung (1).

α. Die Gurten und Diagonale.

Für ein Feld, dessen Diagonale die Richtung I hat:

Fig. 7.

$$S'_m = -\frac{M_m}{h_m \cdot \cos\beta'_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

$$U'_m = +\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}\cos\gamma'_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

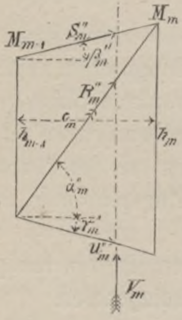
$$R'_m = \left\{\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right\} \cdot \frac{1}{\cos\alpha'_m} \quad \ldots\ldots \quad (59)$$

Endigt der Träger in den Auflagern mit einer Spitze, so ergiebt sich aus Gleichung (58)

die Inanspruchnahme U_1' im ersten Felde zu $U_1' = \frac{M_1}{h_1 \cdot \cos\gamma_1'}$ (58^a)
weil: $\frac{M_0}{h_0} = \frac{0}{0}$ nach Ausführung sub Gleichung (25) den Werth $\frac{M_1}{h_1}$ annimmt.

Für ein Feld, dessen Diagonale die Richtung II hat:

Fig. 8.



$$S_m'' = -\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}\cos\beta_m''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

$$U_m'' = +\frac{M_m}{h_m \cdot \cos\gamma_m''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

$$R_m'' = -\left\{\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right\} \cdot \frac{1}{\cos\alpha_m''} \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

Analog dem Vorigen wird sich für Träger, welche in den Auflagern mit einer Spitze endigen, S_1'' aus Gleichung (60) ergeben mit:

$$S_1'' = -\frac{M_1}{h_1\cos\beta_1''} \quad \ldots\ldots \quad (60^a)$$

§ 17. Bezüglich der Maximal- und Minimalwerthe der Inanspruchnahmen der Gurten und Diagonalen, so wie der Art der Inanspruchnahmen derselben ist nichts Neues zu erwähnen; es gelten für diese Träger ebenfalls die Ausführungen § 8 bis 15.

Sofern aber die Belastungsfälle (51) und (52) für die Diagonale eines Feldes der durch § 12 ausgeschiedenen und mit Verticalen angeordneten Trägerformen zwei verschiedenartige Inanspruchnahmen liefern, hat man es in der Hand, durch Hinzufügen einer zweiten Diagonale von entgegengesetzter Richtung und entsprechender Querschnittsanordnung, sowie fester resp. loser Verbindung beider Diagonalen mit den Gurten entweder nur gezogene oder gedrückte Diagonalen zu erhalten.

Würden daher für die die Maximal- und Minimal-Inanspruchnahmen der Diagonalen solcher Träger (§ 12) erzeugenden Belastungsfälle zwei verschiedenartige Inanspruchnahmen resultiren, d. h. Inanspruchnahmen von verschiedenem Vorzeichen, und beabsichtigt man nicht, den Querschnitt oder die Art der Befestigung der Diagonalen beiden Inanspruchnahmen anzupassen, so ist man genöthigt, zwei gekreuzte Diagonalen im betreffenden Felde einzuziehen, welche dann abwechselnd zur Wirkung kommen.

Sollen die Diagonalen nur Zugspannungen übertragen, so wird man dieselben aus Bandeisen construiren und diese mit den Gurten verbinden; ist dann die eine der in einem Felde eventuell nothwendig erachteten beiden Diagonalen im Begriff, eine Druckspannung aufzunehmen, so wird dieselbe sich sofort durchbiegen, da deren Querschnitts-Anordnung keine Druckspannung zulässt. Dieselbe wird dadurch ausser Function gesetzt und ist für den betrachteten Belastungsfall nicht mehr vorhanden, wodurch der entgegengesetzt gerichteten Diagonalen in demselben Felde eine Zugspannung überwiesen wird.

Sollen andererseits die Diagonalen eines Fachwerkträgers nur Druckspannungen übertragen, so wird man diese Diagonalen zweckmässig aus Holz construiren und an den Knotenpunkten ohne Verbindung stumpf gegen die Gurten und einander stossen (Howe'scher Träger). Durch das Nichtverbinden der Diagonalen mit den Gurten wird eben erzielt, dass dieselben niemals eine Zugspannung aufnehmen können.

Man nennt solche Diagonalen, die dazu dienen, in den Hauptdiagonalen einerlei Spannung zu erhalten: **Gegendiagonalen.**

β. Die Verticalen.

§ 18. Die Inanspruchnahmen der Verticalen werden bedingt durch die Richtung der anliegenden Diagonalen und durch die Lage des Angriffspunktes der mobilen Last. Bezüglich der letzteren machen wir die Annahme, dass diese und das Eigengewicht in ein und denselben Punkten concentrirt sind. Das Eigengewicht einer Brücke liegt allerdings theils in den oberen, theils in den unteren Knotenpunkten der Construction; jedoch scheint die obige Annahme um so mehr gerechtfertigt, als doch der grössere Theil des Eigengewichtes jeweils in den Knotenpunkten der äusseren Last angreift, indem dahin ausser dem Antheile am Trägergewichte die Gesammtfahrbahn zu rechnen sein wird.

Die nachträgliche Modificirung der Spannungszahlen der Verticalen mit Rücksicht auf die Vertheilung des Eigengewichtes auf obere und untere Knotenpunkte dürfte übrigens nach der von Herrn Professor Ritter in seinem Buche „Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen“ angegebenen Weise einfach auszuführen sein.

Wir abstrahiren hier davon, nehmen also an, dass Eigengewicht und Belastung entweder zusammen in den oberen oder unteren Knotenpunkten der Construction angreifen, wobei wir darauf aufmerksam machen, dass, falls die mobile Last an den

Verticalen zwischen beiden Gurten angebracht ist, die obere und untere Hälfte der Verticalen sich berechnen, wie wenn die Belastung in den unteren resp. oberen Knotenpunkten einträte.

Die Verticale liege zwischen zwei Diagonalen der Richtung II.

§ 19. Da die Verticale hier weiter nichts als eine Diagonale in der äussersten Grenzlage ist, d. h. eine Diagonale, deren Winkel $\alpha = 90^\circ$ ist, so müssen die Formeln der Inanspruchnahmen der Diagonalen, Gleichungen (59) und (62), ebenfalls die Spannungszahlen der Verticale liefern. Es bedarf behufs deren richtigen Anwendung nur der Wiederherstellung derjenigen Diagonale, deren Grenzlage die Verticale T''_m ist. Da die Ermittelung der Spannungszahlen der Diagonale und der beiden Gurten eines Trägerfeldes aus den drei Bedingungen des Gleichgewichtes, Gleichungen (57) bis (62), die nothwendige Eigenschaft des Trägers voraussetzt, dass ein verticaler Schnitt in keinem Felde mehr als drei Constructionsglieder trifft, so kann die Verticale T''_m, bevor sie ihre Grenzlage als Verticale eingenommen, nur als eine Diagonale der

Fig. 9.

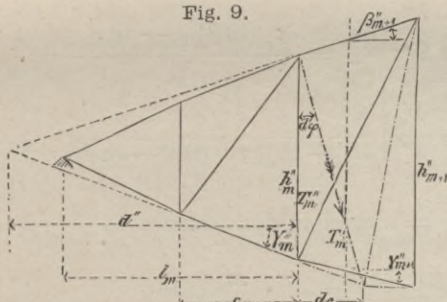
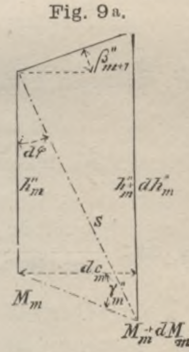


Fig. 9a.



Richtung I angesehen werden, welche man erhält, wenn man Fig. 9 die Verticale T''_m um einen unendlich kleinen Winkel $\partial\varphi$ um den obern Knotenpunkt nach rechts dreht.

Das zwischen den Knotenpunkten m und $m+1$ nach § 5 als gerade Linie verlaufende Moment wird alsdann für den Fusspunkt der Diagonale T'_m betragen: $M_m + \partial M_m$, der Abstand der beiden Gurten daselbst: $h''_m + \partial h''_m$, also die Inanspruchnahme der Diagonale T'_m nach Gleichung (59):

$$T'_m = \left\{ \frac{M_m + \partial M_m}{h''_m + \partial h''_m} - \frac{M_m}{h''_m} \right\} \cdot \frac{1}{\cos(90^\circ - \partial\varphi)} \quad \ldots \quad (63)$$

Hierin sind die Functionen der äusseren Kräfte durch solche zu ersetzen, welche auf der ganzen Horizontalausdehnung der Diagonale T'_m constant sind und sich bei der Drehung der letzteren in die Lage T''_m nicht ändern, so dass sich der Grenzübergang von T'_m zu T''_m in Gleichung (63) nur in den Trägerabmessungen vollzieht.

Die Belastung liege in den oberen Knotenpunkten.

Dem Vorigen gemäss wird man nach Gleichung (23) oder (24) zu substituiren haben aus:

$$V_{m+1} = \frac{M_m + \partial M_m - M_m}{\partial c_m}: \quad M_m + \partial M_m = \partial c_m V_{m+1} + M_m \quad . \; . \; . \quad (64)$$

damit erhält man:

$$T'_m = \left\{ \frac{\partial c_m . V_{m+1}}{h''_m + \partial h''_m} + M_m \left(\frac{1}{h''_m + \partial h''_m} - \frac{1}{h''_m} \right) \right\} \cdot \frac{1}{\cos(90^\circ - \partial\varphi)}$$

$$= \left\{ \partial c_m \cdot V_{m+1} - M_m \frac{\partial h''_m}{h''_m} \right\} \frac{1}{h''_m + \partial h''_m} \cdot \frac{1}{\cos(90^\circ - \partial\varphi)},$$

oder, da nach Fig. **9** und **9**[a]: $\frac{\partial h''_m}{h''_m} = \frac{\partial c_m (\operatorname{tg} \beta''_{m+1} + \operatorname{tg} \gamma''_m)}{h''_m} = \frac{\partial c_m}{d''}$,

$$T'_m = \left\{ V_{m+1} - \frac{M_m}{d''} \right\} \frac{\partial c_m}{(h''_m + \partial h''_m) \cos(90^\circ - \partial\varphi)},$$

oder da: $\frac{\partial c_m}{\cos(90^\circ - \partial\varphi)} = s$ und in der Grenze: $\frac{s}{h''_m + \partial h''_m} = 1$,

$$T''_{u\,m} = + \left\{ V_{m+1} - \frac{M_m}{d''} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65)$$

Die Belastung liege in den unteren Knotenpunkten.

Analog dem Vorigen wird man nach Gleichung (23) in Gleichung (63) zu substituiren haben:

$$V_m = \frac{M_m + \partial M_m - M_m}{\partial c_m}: \quad M_m + \partial M_m = \partial c_m \cdot V_m + M_m \quad . \; . \; . \quad (66)$$

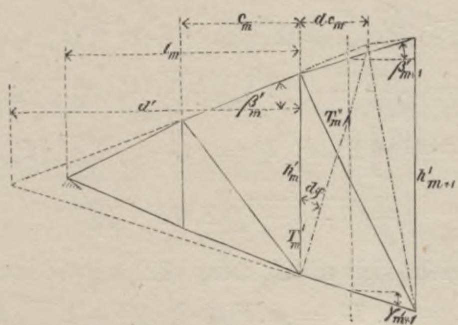
und erhalten:

$$T''_{o\,m} = + \left\{ V_m - \frac{M_m}{d''} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (67)$$

Die Verticale liege zwischen zwei Diagonalen der Richtung I.

§ 20. Durch Drehung der Verticale T'_m um den unendlich kleinen Winkel $\partial\varphi$ um den Fusspunkt nach rechts in die Lage der Diagonale T''_m ergiebt sich nach Gleichung (62):

Fig. 10.



$$T''_m = -\left\{\frac{M_m + \partial M_m}{h'_m + \partial h'_m} - \frac{M_m}{h'_m}\right\} \cdot \frac{1}{\cos(90^\circ - \partial\varphi)} \;.\;. \quad (68)$$

Die Belastung liege in den oberen Knotenpunkten, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung (66) aus Gleichung (68):

$$\underset{m}{T'_u} = -\left\{V_m - \frac{M_m}{d'}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (69)$$

Die Belastung liege in den unteren Knotenpunkten, mit Hülfe der Gleichung (64):

$$\underset{m}{T'_o} = -\left\{V_{m+1} - \frac{M_m}{d'}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (70)$$

§ 21. Die vorigen Inanspruchnahmen der Verticalen sind aus den Formeln (59) und (62) der Diagonalen hervorgegangen. Es werden also die das Maximum und Minimum der Inanspruchnahme der Verticalen bedingenden Belastungsfälle analog den sub Gleichung (42) ermittelten Belastungsfällen ausfallen.

Fasst man für die Ermittelung der Maximal- und Minimalwerthe der Inanspruchnahme der Verticalen die Grössen d' und d'' mit dem Zeichen d zusammen, so lassen sich die vier Gleichungen (65), (67), (69) und (70) durch die beiden folgenden zusammenfassen:

$$d \,.\, \underset{m}{T''_u} = -d \,.\, \underset{m}{T'_o} = d \,.\, V_{m+1} - M_m \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (71)$$

$$d \,.\, \underset{m}{T''_o} = -d \,.\, \underset{m}{T'_u} = d \,.\, V_m - M_m \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (72)$$

und erhält man **ad Gleichung (71)** mit Gleichung (22):

$$d\,.\,\underset{m}{T''_u} = -d\,.\,\underset{m}{T'_o} = d\,.\,V_{m+1} - l_m\,.\,V_{m+1} - \Sigma_1^m (P_r\,.\,l_r),$$

oder mit Gleichung (14):

$$d\,.\,\underset{m}{T''_u} = -d\,.\,\underset{m}{T'_o} = (d-l_m)\left[\Sigma_{m+1}^{n-1}(P_r) - \frac{1}{l}\Sigma_1^{n-1}(P_r\,.\,l_r)\right] - \Sigma_1^m (P_r\,.\,l_r),$$

oder indem:

$$\Sigma_1^{n-1}(P_r\,.\,l_r) = \Sigma_1^m (P_r\,.\,l_r) + \Sigma_{m+1}^{n-1}(P_r\,.\,l_r),$$

$$\begin{aligned} d\,.\,\underset{m}{T''_u} = -d\,.\,\underset{m}{T'_o} &= (d-l_m)\left[\Sigma_{m+1}^{n-1}(P_r) - \frac{1}{l}\Sigma_{m+1}^{n-1}(P_r\,.\,l_r)\right] \\ &- \left[\frac{d-l_m}{l}+1\right]\Sigma_1^m (P_r\,.\,l_r) = \overbrace{(d-l_m)}^{1}\,\Sigma_{m+1}^{n-1}\left(P_r\,.\,\frac{l-l_r}{l}\right) \\ &- \overbrace{(d+l-l_m)}^{2}\,\Sigma_1^m\left(P_r\,.\,\frac{l_r}{l}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73) \end{aligned}$$

desgleichen ergiebt sich **ad Gleichung (72)** mit Gleichung (16):

$$d\,.\,\underset{m}{T''_o} = -d\,.\,\underset{m}{T'_u} = d\,.\,V_m - l_m\,.\,V_m - \Sigma_1^{m-1}(P_r\,.\,l_r),$$

oder mit Gleichung (13):

$$d\,.\,\underset{m}{T''_o} = -d\,.\,\underset{m}{T'_u} = (d-l_m)\left[\Sigma_m^{n-1}(P_r) - \frac{1}{l}\Sigma_1^{n-1}(P_r\,.\,l_r)\right] - \Sigma_1^{m-1}(P_r\,.\,l_r),$$

oder indem:

$$\Sigma_1^{n-1}(P_r\,.\,l_r) = \Sigma_1^{m-1}(P_r\,.\,l_r) + \Sigma_m^{n-1}(P_r\,.\,l_r),$$

$$\begin{aligned} d\,.\,\underset{m}{T''_o} = -d\,.\,\underset{m}{T'_u} &= (d-l_m)\left[\Sigma_m^{n-1}(P_r) - \frac{1}{l}\Sigma_m^{n-1}(P_r\,.\,l_r)\right] \\ &- \left[\frac{d-l_m}{l}+1\right]\Sigma_1^{m-1}(P_r\,.\,l_r) = \overbrace{(d-l_m)}^{1}\,\Sigma_m^{n-1}\left(P_r\,.\,\frac{l-l_r}{l}\right) \\ &- \overbrace{(d+l-l_m)}^{2}\,\Sigma_1^{m-1}\left((P_r\,.\,\frac{l_r}{l}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74) \end{aligned}$$

In den beiden Gleichungen (73) und (74) sind die Summationen analog denen des Ausdruckes Ω, Gleichung (42), stets positiv. Macht man bezüglich der Lage der Verticale die entweder bereits zutreffende oder durch Drehung des Trägers richtig werdende Annahme, dass die die Grösse d hervorbringenden Gurtsehnen sich stets links von der Verticale m schneiden, dass also stets:

$$d > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

so wird der in Gleichung (73) und (74) mit 2 bezeichnete Factor stets positiv, dagegen der mit 1 bezeichnete Factor positiv Null oder negativ werden, je nachdem:

$$d \gtreqless l_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Die weiteren Untersuchungen bezüglich der Maximal- und Minimalwerthe der Inanspruchnahmen der Verticale werden ebenfalls den in § 11 bis 15 geführten Erörterungen ganz analog sein Wir beschränken uns daher darauf, die desbezüglichen Resultate einfach anzuschreiben und geben dieselben der Uebersicht halber in nachstehender Zusammenstellung.

	1) $d>l_m$	2) $d<l_m$	3) $d=l_m$
$[T''_{u_m}]_{max}$ und $[T'_{o_m}]_{min}$ für den Belastungsfall:	$[V_{m+1}]_{max}$	$[M_m]_{min}$	$[V_{m+1}]_{max}$ oder $[M_m]_{min}$ . . (77)
$[T''_{u_m}]_{min}$ und $[T'_{o_m}]_{max}$ für den Belastungsfall:	$[V_{m+1}]_{min}$	$[M_m]_{max}$	$[V_{m+1}]_{min}$ oder $[M_m]_{max}$ . . (78)
$[T''_{o_m}]_{max}$ und $[T'_{u_m}]_{min}$ für den Belastungsfall:	$[V_m]_{max}$	$[M_m]_{min}$	$[V_m]_{max}$ oder $[M_m]_{min}$ . . (79)
$[T''_{o_m}]_{min}$ und $[T'_{u_m}]_{max}$ für den Belastungsfall:	$[V_m]_{min}$	$[M_m]_{max}$	$[V_m]_{min}$ oder $[M_m]_{max}$ . . (80)

Für stetig verlaufende Gurten eines Trägers, welcher in den Auflagern mit einer Spitze endigt, wird wiederum der Fall

1) $d > l_m$ charakterisirt durch Fig. **4**,
2) $d < l_m$ „ „ „ **5**,
3) $d = l_m$ „ „ „ **6**.

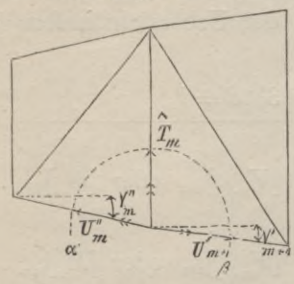
Die Verticale liege zwischen zwei an deren Kopfende angreifenden Diagonalen verschiedener Richtung.

§ 22. Wir abstrahiren hier von den Trägern der Fig. **5** als in der Praxis nicht vorkommend, behandeln also nur diejenigen, für welche unter Voraussetzung stetig verlaufender Gurten:

$$c_m \cdot h_{m-1} \geqq l_{m-1}\,(h_m - h_{m-1}) \quad \text{und} \quad d \geqq l_m \; . \; . \; . \; . \; . \; (81)$$

Bezüglich der Unterscheidung der Verticale der folgenden Träger Fig. **11** und **12** von den Vorigen führen wir die dafür in Fig. **11** und **12** gewählten Bezeichnungen ein. Die Anwendung der Formeln (59) und (62) auf die Inanspruchnahmen der Verticale Fig. **11** ist hier unmöglich. Man wird die letzteren nur mit Zuhülfenahme des Satzes § 1, dass die inneren und äusseren Kräfte an jedem Knotenpunkte einer tragfähigen Construction im Gleichgewicht stehen, aus der für einen um den untern Knotenpunkt geführten Schnitt $\alpha\beta$ aufgestellten Gleichgewichtsbedingung erhalten, welche ausdrückt, dass die Summe der Verticalcomponenten aller daselbst wirkenden Kräfte Null ist.

Fig. 11.



Die dazu erforderlichen Inanspruchnahmen der unteren Gurten ergeben sich nach Gleichungen (58) und (61):

$$\left.\begin{aligned} U''_m &= \frac{M_m}{h_m \cdot \cos\gamma''_m} \\ U'_{m+1} &= \frac{M_m}{h_m \cdot \cos\gamma'_{m+1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (82)$$

Die Belastung liege in den oberen Knotenpunkten. Der Schnitt $\alpha\beta$, Fig. 11, führt zu der Gleichung:

$$\hat{T}^u_m + U''_m \cdot \sin\gamma''_m - U'_{m+1} \sin\gamma'_{m+1} = 0,$$

woraus mit Hülfe der Gleichungen (82):

$$\hat{T}^u_m = -M_m \frac{\operatorname{tg}\gamma''_m - \operatorname{tg}\gamma'_{m+1}}{h_m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (83)$$

Die Belastung liege in den unteren Knotenpunkten. Bezeichnet P_m die Belastung der m-Verticale, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für den Schnitt $\alpha\beta$:

$$\hat{T}^o_m - P_m + U''_m \sin\gamma''_m - U'_{m+1} \sin\gamma'_{m+1} = 0,$$

daher:

$$\hat{T}^o_m = P_m - M_m \frac{\operatorname{tg}\gamma''_m - \operatorname{tg}\gamma'_{m+1}}{h_m}.$$

In dieser Gleichung besteht das Moment M_m aus der Summe der Momente aller Einzellasten. Bezeichnet man also mit $\mathfrak{M}_m$ das Moment, herrührend von sämmtlichen Lasten ausser der Last P_m, so wird mit Gleichung (8) oder (9):

$$M_m = \mathfrak{M}_m + P_m \frac{l - l_m}{l} \cdot l_m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

und daher:

$$\hat{T}^o_m = -\mathfrak{M}_m \frac{\operatorname{tg}\gamma''_m - \operatorname{tg}\gamma'_{m+1}}{h_m} + P_m \left\{1 - \frac{l - l_m}{l} \cdot l_m \frac{\operatorname{tg}\gamma''_m - \operatorname{tg}\gamma'_{m+1}}{h_m}\right\} \quad (85)$$

Die Gleichungen (83) und (85) gelten allgemein für jede Verticale jeder Trägerform der Anordnung Fig. 11.

Ist $\gamma''_m = \gamma'_{m+1}$ oder speciell $\gamma''_m = \gamma'_{m+1} = 0$, so gehen dieselben über in:

$$\hat{T}^u_m = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83^a)$$

$$\hat{T}^o_m = P_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (85^a)$$

Liegt endlich die Verticale auf dem Trägermittel, so ist $\operatorname{tg}\gamma''_m = -\operatorname{tg}\gamma'_{m+1} = \operatorname{tg}\gamma_{\frac{n}{2}}$, und man erhält:

$$\hat{T}^u_{\frac{n}{2}} = -2 M_{\frac{n}{2}} \frac{\operatorname{tg}\gamma_{\frac{n}{2}}}{h_{\frac{n}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

$$\hat{T}^o_{\frac{n}{2}} = -2 \mathfrak{M}_{\frac{n}{2}} \frac{\operatorname{tg}\gamma_{\frac{n}{2}}}{h_{\frac{n}{2}}} + P_{\frac{n}{2}} \left\{1 - \frac{l}{2} \frac{\operatorname{tg}\gamma_{\frac{n}{2}}}{h_{\frac{n}{2}}}\right\} \quad \ldots \quad (87)$$

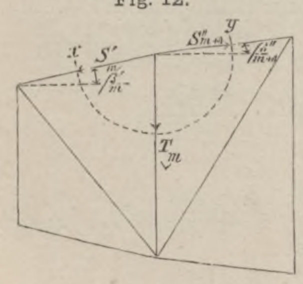
Die Verticale liege zwischen zwei an deren Fusspunkt angreifenden Diagonalen verschiedener Richtung.

§ 23. Mit den in Fig. **12** gewählten Bezeichnungen ergiebt sich nach Gleichungen (57) und (60):

$$S'_m = -\frac{M_m}{h_m \cdot \cos\beta'_m}; \quad S''_{m+1} = -\frac{M_m}{h_m \cdot \cos\beta''_{m+1}} \quad \ldots \quad (88)$$

Die Belastung liege in den oberen Knotenpunkten.

Fig. 12.



Der Schnitt x, y, Fig. **12**, führt zu der Gleichung:

$$\underset{\vee}{T}^u_m + P_m + S'_m \sin\beta'_m - S''_{m+1} \sin\beta''_{m+1} = 0,$$

daher mit Gleichung (88):

$$\underset{\vee}{T}^u_m = -P_m + M_m \frac{\operatorname{tg}\beta'_m - \operatorname{tg}\beta''_{m+1}}{h_m},$$

und mit Gleichung (84):

$$\underset{\vee}{T}^u_m = \mathfrak{M}_m \frac{\operatorname{tg}\beta'_m - \operatorname{tg}\beta''_{m+1}}{h_m} - P_m \left\{1 - \frac{l - l_m}{l} \cdot l_m \frac{\operatorname{tg}\beta'_m - \operatorname{tg}\beta''_{m+1}}{h_m}\right\} \quad (89)$$

Die Belastung liege in den unteren Knotenpunkten. Man erhält:

$$\underset{\vee}{T}^o_m = M_m \frac{\operatorname{tg}\beta'_m - \operatorname{tg}\beta''_{m+1}}{h_m} \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

Die beiden Gleichungen (89) und (90) gelten allgemein für jede Verticale jeder Trägerform der Anordnung Fig. 12. Ist $\beta'_m = \beta''_{m+1}$ oder speciell $\beta'_m = \beta''_{m+1} = 0$, so gehen dieselben über in:

$$T^u_{\underset{\vee}{m}} = -P_m \dots\dots\dots\dots (89^a)$$

$$T^o_{\underset{\vee}{m}} = 0 \dots\dots\dots\dots (90^a)$$

Für eine eventuelle Verticale auf dem Trägermittel ist $\operatorname{tg}\beta'_m = -\operatorname{tg}\beta''_{m+1} = \operatorname{tg}\beta_{\frac{n}{2}}$, und man erhält:

$$T^u_{\vee\frac{n}{2}} = 2\,\mathfrak{M}_{\frac{n}{2}} \frac{\operatorname{tg}\beta_{\frac{n}{2}}}{h_{\frac{n}{2}}} - P_{\frac{n}{2}}\left\{1 - \frac{l}{2}\,\frac{\operatorname{tg}\beta_{\frac{n}{2}}}{h_{\frac{n}{2}}}\right\} \dots\dots (91)$$

und:

$$T^o_{\vee\frac{n}{2}} = 2\,M_{\frac{n}{2}} \frac{\operatorname{tg}\beta_{\frac{n}{2}}}{h_{\frac{n}{2}}} \dots\dots\dots\dots (92)$$

Da bei der Ermittelung obiger Inanspruchnahmen die inneren Kräfte durch Zugspannungen ersetzt wurden, so wird ein positives Resultat der Gleichungen (83), (85) bis (87), (89) bis (92) für die Verticalen eine Zugspannung, dagegen ein negatives Resultat eine Pressung bedingen.

§ 24. Es bleibt übrig, die Belastungsfälle zu ermitteln, für welche die Inanspruchnahmen (83), (85), (89) und (90) ihre Maximal- und Minimalwerthe erreichen. Mit der Bedingung (81) werden in obigen Gleichungen die Coefficienten an M_m und $\mathfrak{M}_m$, nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma''_m - \operatorname{tg}\gamma'_{m+1}}{h_m} \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{tg}\beta'_m - \operatorname{tg}\beta''_{m+1}}{h_m}$$

stets positiv ausfallen.

Die Coefficienten an P_m enthalten in Gleichung (85) resp. (89) als einzig negativen Summand die Grösse:

$$\frac{l - l_m}{l} \cdot l_m \frac{\operatorname{tg}\gamma''_m}{h_m} \quad \text{resp.} \quad \frac{l - l_m}{l} \cdot l_m \frac{\operatorname{tg}\beta'_m}{h_m}.$$

Untersucht man von beiden den ersteren, so erhält man mit den in Fig. 13 eingetragenen Bezeichnungen:

$$x \cdot \operatorname{tg}\gamma''_m = h_m, \quad \text{also:} \quad \frac{x \cdot \operatorname{tg}\gamma''_m}{h_m} = 1.$$

Da aber der Natur des Trägers nach: $l_m < x$, so wird:

$$\frac{l_m \,.\, \operatorname{tg} \gamma''_m}{h_m} < 1, \quad \text{und da:} \quad \frac{l - l_m}{l} < 1,$$

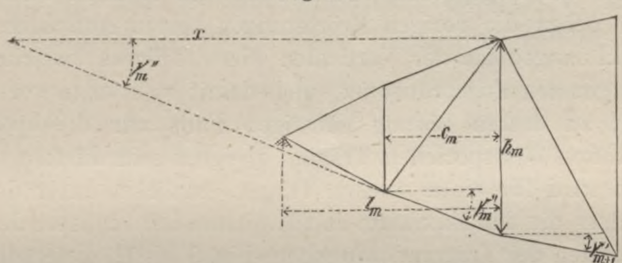
$$\frac{l - l_m}{l} \,.\, l_m \frac{\operatorname{tg} \gamma''_m}{h_m} < 1,$$

desgleichen:

$$\frac{l - l_m}{l} \,.\, l_m \frac{\operatorname{tg} \beta'_m}{h_m} < 1.$$

Es sind daher die Gesammtcoefficienten an P_m in Gleichung (85) und (89) ebenfalls positiv. Während die Werthe Gleichung (83) und

Fig. 13.



(90) keinen Zweifel über deren Vorzeichen zulassen, finden sich also in Gleichung (85) und (89) die positiven und negativen Glieder getrennt, so dass daraus die Belastungsfälle, welche deren Maximum und Minimum erzeugen, direct zu entnehmen sind. Man wird in jedem Falle die Maximalinanspruchnahmen erhalten, wenn der Werth aller positiven Glieder ein Maximum, und der Absolutwerth aller negativen Glieder ein Minimum werden; dagegen die Minimalinanspruchnahmen, wenn der Absolutwerth aller negativen Glieder ein Maximum, der aller positiven Glieder ein Minimum wird.

Darnach ergiebt sich:

$[\widehat{T}^u_m]_{\min}$ und $[\underset{\vee}{T^o_m}]_{\max}$ für den Belastungsfall $[M_m]_{\max}$ . . . . . . (93)

$[\widehat{T}^u_m]_{\max}$ und $[\underset{\vee}{T^o_m}]_{\min}$ „ „ „ $[M_m]_{\min}$ . . . . . . (94)

$[\widehat{T}^o_m]_{\min}$ und $[\underset{\vee}{T^u_m}]_{\max}$ für die Belastung des ganzen Trägers ausser der m-Verticale . . . . (95)

$[\widehat{T}^o_m]_{\max}$ und $[\underset{\vee}{T^u_m}]_{\min}$ für die alleinige Belastung der m-Verticale . . . . (96)

b. Schlussbemerkungen.

§ 25. Die vorigen Untersuchungen liessen hinsichtlich der Inanspruchnahmen der Diagonalen und der Belastungsfälle, für welche jene zu einem Maximum oder Minimum werden, keinen Zweifel. Dasselbe gilt von den Inanspruchnahmen der Verticalen derjenigen Träger, für welche thatsächlich eine der sub Fig. 9 bis 12 angeführten Anordnungen vorhanden ist. Diese Anordnungen sind erschöpfend, denn eine andere Lage der Verticale als die in den Fig. 9 bis 12 vorgesehenen ist nicht denkbar, wenn man von den hier nicht näher behandelten, im besonderen Falle sich indessen leicht ergebenden eventuellen Verticalen am Auflager absieht und bedenkt, dass selbst die erste Verticale der Fig. 9 und 10 als eine Ausnahme der angegebenen Fälle nicht zu rechnen sein wird. Dagegen geben die vorigen Erörterungen keinen Aufschluss über die Berechnungsweise der Verticalen eines Trägers, welcher mit Gegendiagonalen angeordnet ist, und damit steht man vor einem Problem, zu dessen Lösung günstigen Falls nur die speciellen Eigenschaften des speciellen Trägers geeignet sein dürften.

Man wird für einen solchen Träger, zunächst unter der Annahme, dass die das Maximum und Minimum der Inanspruchnahme der Verticalen der Trägeranordnungen, Fig. 9 bis 12, liefernden Belastungsfälle thatsächlich die daselbst vorausgesetzten Diagonalen zur Wirkung kommen lassen, das aus den vier Anordnungen Fig. 9 bis 12 resultirende absolute Maximum und Minimum ermitteln. Treten für die den letzteren entsprechenden Belastungsfälle thatsächlich die dabei vorausgesetzten Diagonalen in Thätigkeit, so gelten obiges Maximum und Minimum als wirkliche Grenzen der Inanspruchnahme der Verticale.

Ist solches dagegen nicht der Fall, d. h. kommen für die das absolute Maximum und Minimum bedingenden Belastungsfälle nicht die zu deren Anwendung berechtigenden Diagonalen zur Wirkung, so ist das Problem ungelöst. Man hat alsdann zwei Grenzen der Inanspruchnahme der Verticale, zwischen welchen das thatsächliche Maximum und Minimum liegen, nicht aber die Letzteren selbst. Die specielleren Eigenschaften des Trägers werden in den meisten Fällen die Lösung liefern, wenn nicht, muss man sich damit begnügen, das aus Fig. 9 bis 12 ermittelte absolute Maximum und Minimum der Berechnung der Verticale als zutreffend zu Grunde zu legen. Immerhin rechnet man darnach wenigstens zu Gunsten der Sicherheit derselben.

Gegen diese Regeln wird oft dadurch gesündigt, dass die für die Träger mit einfachen Diagonalen ermittelten Inanspruchnahmen der Verticalen ohne Weiteres auf die Verticalen desselben Trägers mit Gegendiagonalen übertragen werden. Indessen dürfte die im Vorigen gegebene Berechnungsweise einfach anzuwenden sein, wenn man nicht Berechnungsfehler lediglich aus Rücksicht der Zeitersparniss zu machen sich berechtigt halten wollte (siehe die Parabolischen Träger).

IV. Ermittelung der Functionen V und M für die zur Berechnung der Spannungszahlen nach dem vorigen Capitel erforderlichen Belastungsarten.

§ 26. Die analytischen Methoden begnügen sich bei Aufstellung der Functionen der äusseren Kräfte oft mit der Annahme einer gleichmässig über den ganzen Träger vertheilten Last. — Der Wirklichkeit entspricht jedoch diese Annahme durchaus nicht, weil die äussere Last stets durch Querträger oder Schwellen auf die Hauptträger übertragen wird und sich mit dem Eigengewicht stets in den Knotenpunkten der Construction concentrirt. Dadurch werden die Knotenpunkte der Construction zu s. g. Lastpunkten.

Eine strenge statische Berechnung würde nun in Betreff dieser Lastpunkte nach § 3, welcher für die Erzeugung des max. und min. der Verticalkraft eines Feldes erfordert, dass die schwersten Lasten in der Nähe des betreffenden Feldes gelegen sind, noch annehmen, dass es möglich sei, je nach Bedürfniss einen Knotenpunkt einmal mehr oder weniger als ein anderes Mal zu belasten. Man müsste sich alsdann dem entsprechend für jedes Feld einer Eisenbahnbrücke jeweils einen Zug zusammenkuppeln, um das überall denkbar grösste Maximum oder Minimum der Verticalkraft zu erhalten. Es ist jedoch diese Annahme um so eher zu entbehren, je grösser die Feldereintheilung ist, also je weiter die Knoten- oder Lastpunkte von einander liegen. So ängstlich wird man überall nicht darauf zu rücksichtigen haben, denn einer Menge Eventualitäten, als der Continuität der Schienen, dem Durchbiegen der Quer- und Längsträger etc., lassen sich überall nicht Rechnung tragen.

Wir werden daher auch von einer solch verschiedenartigen Belastungsweise der Knotenpunkte absehen und uns hier auf die sonst auch übliche Annahme beschränken können, dass ein jeder Lastpunkt natürlich stets einen constanten Antheil des Eigengewichts, und falls ihn mobile Last trifft, ebenfalls stets nur einen constanten Antheil der letzteren empfangen kann, und zwar von beiden Gewichten eine Belastung erfährt, welche der Summe der für die beiden halben angrenzenden Felderlängen resultirenden Gewichte aus der pr. Längeneinheit der Trägerstützweite angenommenen Belastung gleichkommt.

Da dem Constructeur in vielen Fällen, namentlich bei Berechnung der Blechträger, mit einem mittleren Werthe der Functionen der äusseren Kräfte gedient ist, und die gleichförmig vertheilten Lasten besser als die in den Knotenpunkten angreifenden Einzellasten geeignet erscheinen, die äusseren Kräfte als eine nach zwei Coordinaten aufzutragende Function zu ermitteln, so gehen wir in der Folge von der Annahme einer gleichmässig über den Träger vertheilten Belastung aus und untersuchen darauf, in wie weit deren Resultate modificirt werden müssen, damit dieselben der Annahme der in den Knotenpunkten concentrirten Belastung entsprechen.

Wir bezeichnen darnach, entsprechend der Annahme einer pr. Längeneinheit der Trägerstützweite gleichförmig vertheilten Belastung, mit:

p das pr. Längeneinheit der Stützweite angenommene Eigengewicht;
k desgl. die mobile Last;
$q = (p + k)$ desgl. die Gesammtlast;
A' und B' die beiden Auflagerreactionen;
$[A']_{\max}$, $[B']_{\max}$, $[A']_{\min}$, $[B']_{\min}$ deren Maximal- resp. Minimalwerthe;
V'_x die im Querschnitte x des Trägers resultirende Verticalkraft;
M'_x das daselbst auftretende Moment;
$[V'_x]_{\max}$ und $[M'_x]_{\max}$ deren Maximalwerthe;
$[V'_x]_{\min}$ und $[M'_x]_{\min}$ deren Minimalwerthe;
$[V'_x]_{M'_x \max}$ die im Querschnitte x des Trägers resultirende Verticalkraft bei totaler Belastung, also der Function $[M'_x]_{\max}$ entsprechend;
$[V'_x]_{M'_x \min}$ desgleichen bei total unbelastetem Träger, also der Function $[M'_x]_{\min}$ entsprechend;
$[V'_x]_{V'_a \min}$ und $[V'_x]_{V'_a \max}$ die im Querschnitte x des Trägers resultirende Verticalkraft für die Belastungsfälle, welche die Verticalkraft V'_a im Querschnitt a zu einem Minimum resp. Maximum machen;

$[M'_x]_{V'_x \max}$ resp. $[M'_x]_{V'_x \min}$ die den Belastungsfällen $[V'_x]_{\max}$ resp. $[V'_x]_{\min}$ entsprechenden gleichzeitigen Momente im Trägerquerschnitte x.

Endlich fügen wir den in § 2 gewählten Bezeichnungen die folgenden, der Annahme von in den Knotenpunkten concentrirten Lasten entsprechend, hinzu.

$p\left(\frac{c_m + c_{m+1}}{2}\right)$, $k.\left(\frac{c_m + c_{m+1}}{2}\right)$, $q.\left(\frac{c_m + c_{m+1}}{2}\right)$ als die im m-Knotenpunkte concentrirt gedachte Last, je nachdem herrührend von dem Eigengewichte, der mobilen Last oder der Gesammtlast;

$[V_m]_{M_m \max}$ und $[V_m]_{M_m \min}$ als die den Belastungsfällen $[M_m]_{\max}$ und $[M_m]_{\min}$ entsprechenden Verticalkräfte;

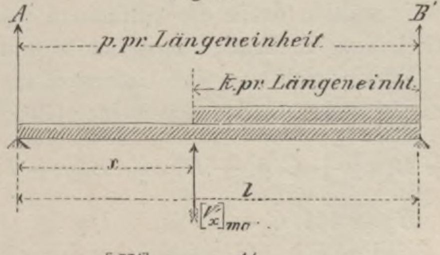
$[M_m]_{V_m \max}$ und $[M_m]_{V_m \min}$ als die den Belastungsfällen $[V_m]_{\max}$ und $[V_m]_{\min}$ entsprechenden Momente.

1. Die Verticalkraft V.

a. $[V'_x]_{\max}$ und $[V'_x]_{\min}$.

§ 27. Es ergiebt sich nach § 3, Beziehung (6), $[V'_x]_{\max}$ aus der Belastungsweise Fig. **14**:

Fig. 14.



$$[V'_x]_{\max} = A' - px.$$

Die darin auftretende Auflagerreaction folgt aus:

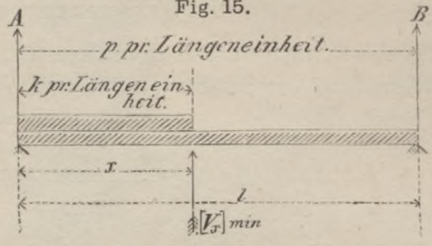
$$A'.l - \frac{pl^2}{2} - k\frac{(l-x)^2}{2} = 0,$$

also:
$$A' = \frac{pl}{2} + k\frac{(l-x)^2}{2l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

somit:
$$[V'_x]_{\max} = p\left(\frac{l}{2} - x\right) + k\frac{(l-x)^2}{2l} \quad \ldots\ldots \quad (98)$$

Dagegen erhält man nach Beziehung (7) aus der Belastungsweise Fig. **15**:

Fig. 15.



$$[V_x']_{\min} = A' - px - kx.$$

Hierin ergiebt sich A' aus $A' . l - p\frac{l^2}{2} - kx . \left(l - \frac{x}{2}\right) = 0$,

also: $$A' = p\frac{l}{2} + kx - \frac{kx^2}{2l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

somit: $$[V_x']_{\min} = p\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{kx^2}{2l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

Diese beiden Werthe von $[V_x']_{\max}$ und $[V_x']_{\min}$ stehen nun der Art mit einander im Zusammenhange, dass wenn in $[V_x']_{\max}$ $l - x$ für x gesetzt wird, man daraus dem Absolutwerthe nach genau den Ausdruck $[V_x']_{\min}$ erhält und umgekehrt. Man kann sich also auf die Untersuchung einer der beiden Gleichungen (98) und (100) beschränken. Wir wählen dafür die einfachere von $[V_x']_{\min}$. Dieselbe ist eine Gleichung 2. Grades zwischen x und V, und zwar die einer Parabel, wie sich aus der Untersuchung des charakteristischen Binoms $B_1^2 - 4A_1 C_1$ der allgemeinen Gleichung 2. Grades:

$$A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0$$

ergiebt, indem $B_1^2 - 4A_1 C_1 = 0$ ist. Da in Gleichung (100) ausserdem das Glied $x[V_x']_{\min}$ (das Glied xy der allgemeinen Gleichung 2. Grades) fehlt, also der Coefficient $B_1 = 0$, so sind die Richtungen der für Function $[V_x']_{\min}$ gewählten Coordinatenachsen, nämlich die der x-Achse als Abscissenachse und die der Ordinate im Auflager A' als Ordinatenachse der $[V_x']_{\min}$, bereits die Richtungen der Hauptachsen der Parabel. Da die Tangente im Scheitel darnach als parallel der x-Achse gegeben ist, so genügt zur Verzeichnung der Parabel die Kenntniss der Coordinaten des Scheitels und der Coordinaten eines zweiten Punktes.

Bei der oben ermittelten Lage der Parabel gegen die Coordinatenachsen erhält man die Scheitelabscisse x' aus:

$$\frac{\partial\,[V'_x]_{\min}}{\partial x} = -p - \frac{kx}{l} = 0, \quad \text{also} \quad x' = -\frac{pl}{k} \;.\;. \quad (101)$$

während dafür mit Gleichung (100) die Scheitelordinate:

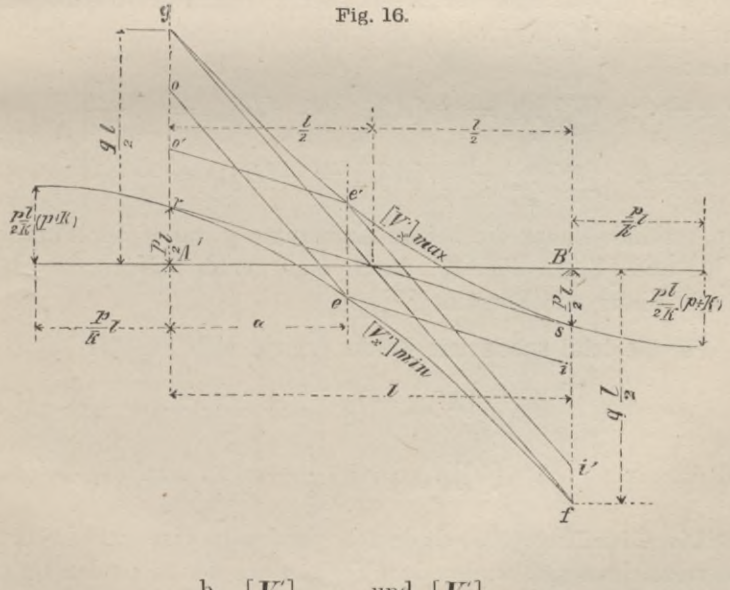
$$[V'_{x'}]_{\min} = p\left(\frac{l}{2} + \frac{pl}{k}\right) - \frac{p^2 l}{2k} = \frac{pl}{2k}(p+k) \;.\;. \quad (102)$$

Als einen für die Construction der Parabel geeigneten weiteren Werth erhält man für die Abscisse $x = l$:

$$[V'_l]_{\min} = -\frac{ql}{2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (103)$$

Nach diesen Daten ist die Parabel $[V'_x]_{\min}$ in Fig. **16** verzeichnet; aus denselben Daten ergiebt sich die Function $[V'_x]_{\max}$ nach dem vorher erwähnten Zusammenhange zwischen $[V'_x]_{\min}$ und $[V'_x]_{\max}$ als die ebenfalls in Fig. **16** verzeichnete Parabel $[V'_x]_{\max}$.

Fig. 16.



b. $[V'_x]_{M'_x \max}$ und $[V'_x]_{M'_x \min}$.

§ 28. Im Allgemeinen und für die Trägerformen § 13 im Besondern interessirt die Kenntniss der Verticalkräfte für die total belastete und unbelastete Brücke.

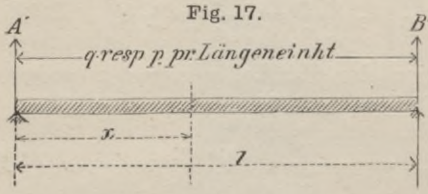
Für die total belastete Brücke, Fig. **17**, ist:

$$[A']_{\max} = \frac{ql}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

und daraus:

$$[V'_x]_{M'_x \max} = q\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

Fig. 17.



Die Gleichung (105) ist als vom ersten Grade die Gleichung einer geraden Linie und verzeichnet sich am einfachsten aus deren beiden Werthen für $x = 0$ und $x = l$.

Selbstverständlich müssen aus $[V'_x]_{\max}$ und $[V'_x]_{M'_x \max}$ für $x = 0$ wie aus $[V'_x]_{\min}$ und $[V'_x]_{M'_x \max}$ für $x = l$ ein und dieselben Werthe folgen, und zwar für $x = 0$ der Werth der Auflagerreaction $[A']_{\max}$, Gleichung (104), und für $x = l$ deren negativer Werth. Die Verticalkraft $[V'_x]_{M'_x \max}$ verzeichnet sich daher aus den folgenden Daten:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{für } x = 0; & [V'_o]_{M'_x \max} = & [A']_{\max} = & [B']_{\max} = & \dfrac{ql}{2} \\ \text{„ } x = l; & [V'_l]_{M'_x \max} = & -[A']_{\max} = & -[B']_{\max} = & -\dfrac{ql}{2} \end{array}\right\} \quad (106)$$

Man verbinde daher die beiden Endpunkte g und f der Parabeln $[V'_x]_{\max}$ und $[V'_x]_{\min}$, Fig. **16**, durch eine gerade Linie, so erhält man in dieser die Function $[V'_x]_{M'_x \max}$.

Für die total unbelastete Brücke ergiebt sich Fig. **17**:

$$[A']_{\min} = \frac{pl}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

und daraus:

$$[V'_x]_{M'_x \min} = p\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

Die Gleichung (108) bedeutet gleichfalls eine gerade Linie und verzeichnet sich analog dem Vorigen aus den folgenden Daten:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{für } x = 0; & [V'_o]_{M'_x \min} = & [A']_{\min} = & [B']_{\min} = & \dfrac{pl}{2} \\ \text{„ } x = l; & [V'_l]_{M'_x \min} = & -[A']_{\min} = & -[B']_{\min} = & -\dfrac{pl}{2} \end{array}\right\} \quad (109)$$

Man verbinde also die beiden Punkte r und s der Parabeln $[V'_x]_{max}$ und $[V'_x]_{min}$, Fig. 16, durch eine gerade Linie, so erhält man in dieser die Function $[V'_x]_{\underset{x}{M'}\,min}$.

Da die beiden geraden Linien, Gleichungen (105) und (108), sich auf der Abscissenachse im Trägermittel schneiden, so folgt, dass die Verticalkraft daselbst für den total belasteten und unbelasteten Träger Null ist.

Als weitere Eigenschaft dieser Functionen der Verticalkräfte möge noch hinzugefügt werden, dass die beiden geraden Linien fg und rs die beiden Parabeläste in den Punkten $x = 0$ und $x = l$ tangiren; denn untersucht man im Punkte $x = 0$ die Richtung der Tangente für die Parabel $[V'_x]_{max}$, Gleichung (98), so ergiebt sich:

$$\frac{\partial\,[V'_x]_{max}}{\partial x} = \left| -p - k + \frac{kx}{l} \right|_{x=0} = -(p+k) = -q.$$

Da dieser Werth gleich dem Coefficienten an x aus Gleichung (105) ist, so tangirt die gerade Linie gf bei g die Parabel $[V'_x]_{max}$, wie andererseits die Parabel $[V'_x]_{min}$ bei f.

Untersucht man ebenfalls den Werth $\frac{\partial\,[V'_x]_{min}}{\partial x}$ für $x = 0$, so erhält man aus Gleichung (100):

$$\frac{\partial\,[V'_x]_{min}}{\partial x} = -p.$$

Da dieser Werth dem Coefficienten an x in Gleichung (108) entspricht, so tangirt die gerade Linie rs die Parabel $[V'_x]_{min}$ bei r, wie andererseits die Parabel $[V'_x]_{max}$ bei s (Fig. 16).

c. $[V'_x]_{\underset{a}{V'}\,min}$ und $[V'_x]_{\underset{a}{V'}\,max}$.

§ 29. Um die Function $[V'_x]$ über die ganze Trägerlänge für den Belastungsfall, welcher $[V'_a]_{min}$ erzeugt, zu erhalten, beachte man Folgendes:

Aus Fig. 15 erhält man:

für $o \overset{=}{<} x \overset{=}{<} a$: $V'_x = A' - qx$ als Gleichung einer geraden Linie, parallel der Linie gf, Gleichung (105), weil die Coefficienten an x in dieser Gleichung und in Gl. (105) einander gleich sind;

für $a \overset{=}{<} x \overset{=}{<} l$: $V'_x = A' - ka - px$ als Gleichung einer geraden Linie, parallel der Linie rs, Gleichung (108), indem die Coefficienten an x in dieser Gleichung und in Gl. (108) einander gleich sind.

Beide gerade Linien V'_x müssen mit der Parabel $[V'_x]_{\min}$ für $x = a$ einen gemeinschaftlichen Punkt e, Fig. **16**, haben, folglich erhält man die dem Belastungsfalle $[V'_a]_{\min}$ entsprechende Function der Verticalkraft der ganzen Trägerlänge, welche wir mit $[V'_x]_{V'_a \min}$ bezeichnen als die in Fig. **16** eingetragene gebrochene Linie $o\,e\,i$.

Ebenso ergiebt sich analog dem Vorigen die Verticalkraft V'_x, entsprechend $[V'_a]_{\max}$, welche wir mit $[V'_x]_{V'_a \max}$ bezeichnen, als die in Fig. **16** eingetragene gebrochene Linie $o'\,e'\,i'$.

Obige Resultate bezüglich der Verticalkraft genügen für unsere Zwecke, und können wir daher unterlassen, weitere Relationen zwischen obigen Functionen aufzustellen. Wie schon bemerkt, gelten die Entwickelungen § 27 bis 29 jedoch nur für die Annahme einer gleichförmig über den ganzen Träger vertheilten Belastung. Man hat also darnach zu untersuchen, in wie weit obige Formeln durch die Annahme von Lastpunkten modificirt werden.

d. $[\boldsymbol{V}_m]_{\min}$, $[\boldsymbol{V}_m]_{\max}$, $[\boldsymbol{V}_m]_{M_m \max}$, $[\boldsymbol{V}_m]_{M_m \min}$.

§ 30. Untersuchen wir den Belastungsfall $[V_m]_{\min}$, so ergiebt Fig. **18**, dass eine Verschiedenheit der Werthe $[V'_x]_{\min}$ und $[V_m]_{\min}$ nur in einer Verschiedenheit der Auflagerreactionen A' und A ihren Grund haben kann, sobald man ad $[V_m]_{\min}$ denjenigen Werth aus der Parabel $[V'_x]_{\min}$ einführt, welcher der Mitte des m-Feldes, also der Abscisse: $x = l_m - \frac{c_m}{2}$ entspricht.

Denn es ist: $\quad [V'_{x = l_m - \frac{c_m}{2}}]_{\min} = A' - qx,$

und: $\quad [V_m]_{\min} = A - qx.$

Die Gleichung (99) repräsentirt den Werth der Reaction A'. Die Reaction A ergiebt sich dagegen mit Fig. **18** aus der Momentengleichung in Bezug auf das Auflager B nach Gleichung (2) wie folgt:

$$A = \Sigma_0^n \left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) = \Sigma_0^n (P_r) - \Sigma_0^n \left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right)$$

$$= \Sigma_0^n (P_r) - \Sigma_0^{m-1} \left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) - \Sigma_m^n \left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right),$$

oder wenn von hierab P_r lediglich eine Function von k bedeutet.

$$A = \frac{pl}{2} + kx - \frac{1}{l} \cdot \Sigma_0^{m-1}(P_r \cdot l_r)$$

$$= \frac{pl}{2} + kx - \frac{k}{l}\left\{\frac{(c_1 + c_2)}{2} \cdot c_1 + \frac{(c_2 + c_3)}{2} \cdot (c_1 + c_2) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{(c_{m-1} + c_m)}{2} \cdot (c_1 + c_2 + \dots + c_{m-1})\right\}$$

$$= \frac{pl}{2} + kx - \frac{k}{2l}\Big[(c_1 + c_2)\, c_1 + (c_2 + c_3)(c_1 + c_2) + \dots$$

$$\dots + (c_{m-1} + c_m)(c_1 + c_2 + \dots + c_{m-1})\Big],$$

oder:

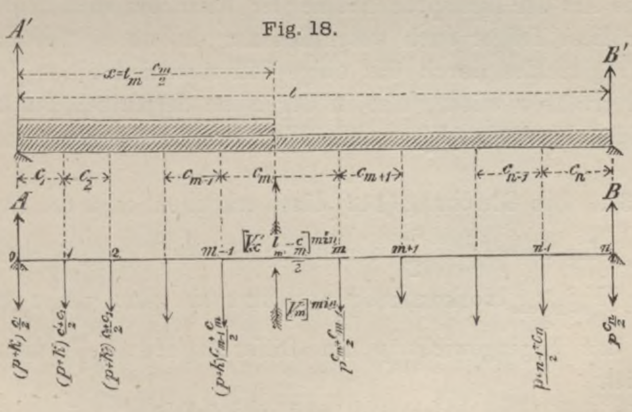
$$A = \frac{pl}{2} + kx - \frac{k}{2l}\Big[(c_1 + c_2 + \dots + c_{m-1})^2 + c_m(c_1 + c_2 + \dots + c_{m-1})\Big]$$

$$= \frac{pl}{2} + kx - \frac{k}{2l}\Big[(c_1 + c_2 + \dots + c_{m-1})(c_1 + c_2 + \dots + c_m)\Big]$$

$$= \frac{pl}{2} + kx - \frac{k}{2l}\left(x - \frac{c_m}{2}\right)\left(x + \frac{c_m}{2}\right)$$

$$= \frac{pl}{2} + kx - \frac{k}{2l}\left(x^2 - \frac{c_m^2}{4}\right) = \frac{pl}{2} + kx - \frac{kx^2}{2l} + \frac{kc_m^2}{8l} \qquad (110)$$

Fig. 18.



Man hat also mit Gleichung (99):

$$A = A' + \frac{kc_m^2}{8l} \; \dots\dots\dots\dots \qquad (111)$$

und daher:

$$[V_m]_{\min} = [V'_{x = l_m - \frac{c_m}{2}}]_{\min} + \frac{kc_m^2}{8l} \; \dots\dots \qquad (112)$$

Die analoge Untersuchung, betreffend $[V_m]_{\max}$, führt zu der Gleichung:

$$[V_m]_{\max} = [V'_{x = l_m - \frac{c_m}{2}}]_{\max} - \frac{k c_m^2}{8 l} \quad \ldots\ldots \quad (113)$$

Untersucht man dieses Differenzglied $\frac{k c_m^2}{8 l}$ beispielsweise für einen Träger, dessen Stützweite $l = 48^{\mathrm{m}}$, dessen Felderlänge $c = 6^{\mathrm{m}}$ ist, und für welchen $k = 40$ Ctr. angenommen wird, so ergiebt sich:

$$\frac{k c_m^2}{8 l} = \text{ca. } 4 \text{ Ctr.},$$

eine Grösse, welche man vollständig vernachlässigen kann. Ueberhaupt wird diese Grösse jeweils so klein ausfallen, dass man darüber nicht zu sorgen braucht. Es werden daher die beiden Parabeln $[V'_x]_{\min}$ und $[V'_x]_{\max}$ für $[V_m]_{\min}$ und $[V_m]_{\max}$ ein genügend scharfes, der Annahme von concentrirten Lasten entsprechendes Resultat dann liefern, wenn man nach Fig. **18** diejenigen Werthe der Parabeln $[V'_x]_{\min}$ und $[V'_x]_{\max}$ einführt, welche der Feldermitte zwischen den Knotenpunkten $m - 1$ und m entsprechen. Im Uebrigen wird man den Unterschied wohl nur für diejenigen Träger zu berücksichtigen haben, für welche das Vorzeichen der Verticalkraft die Art der Inanspruchnahme der Wandconstruction bedingt, und für diese Träger auch wesentlich nur da, wo die Verticalkraft eines Trägerfeldes durch das obige Differenzglied einen Zeichenwechsel erfahren würde, also in der Nähe derjenigen Punkte, wo die beiden Parabeln $[V'_x]_{\min}$ und $[V'_x]_{\max}$ durch die Abscissenachse gehen.

§ 31. Die Gleichung (112) lässt erkennen, dass die Function $[V'_x]_{M'_x \min}$ für $x = l_m - \frac{c_m}{2}$ den bezüglich des Eigengewichts p im Werthe $[V_m]_{M_m \min}$ vorkommenden Summand ganz genau ergiebt, indem das Eigengewicht p im Differenzglied $\frac{k c_m^2}{8 l}$ nicht vertreten ist.

Für den total belasteten und unbelasteten Träger müssen daher für jedes Feld die Werthe $[V_m]_{M_m \max}$ und $[V_m]_{M_m \min}$ ganz genau mit den aus der Function $[V'_x]_{M'_x \max}$ resp. $[V'_x]_{M'_x \min}$ auf Feldermitte resultirenden Werthen zusammenfallen.

Die beiden Linien gf und rs, Fig. **16**, geben also in Bezug auf den total belasteten und total unbelasteten Träger in ihren auf Feldermitte resultirenden Ordinaten die ganz genauen Werthe von $[V_m]_{M_m \max}$ und $[V_m]_{M_m \min}$.

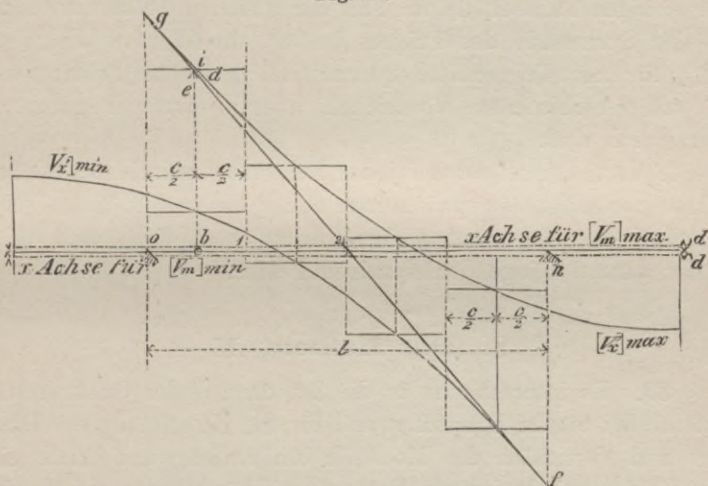
§ 32. Von besonderem Interesse ist der Fall, in welchem die Felder eines Trägers überall gleich gross sind, für welchen:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots. = c_n = c,$$

und daher:
$$l = n c.$$

Es kommt dieser Fall am häufigsten vor, und mag derselbe hier auch in aller Schärfe mit Berücksichtigung des für jedes Feld constanten Differenzgliedes $\frac{k c_m^2}{8 l} = \frac{k c}{8 n}$ behandelt werden.

Fig. 19.



Da es, wie im § 3 bemerkt, für die Werthe von $[V_m]_{\max}$ und $[V_m]_{\min}$ gleichgültig ist, ob über den Auflagern A und B noch Lasten angreifen oder nicht, so wird insbesondere für $x = \frac{c}{2}$ in Bezug auf $[V_1]_{\max}$ ein und derselbe Werth aus der Parabel $[V_x']_{\max}$ wie aus der Geraden gf abzuleiten sein. Da nun die Gerade gf nach § 31 die ganz scharfen Resultate von $[V_m]_{M_m \max}$ liefert, so muss die Ordinate be derselben für $x = \frac{c}{2}$ den ganz exacten Werth von $[V_1]_{\max}$ ergeben, Fig. **19**. Es wird also $ei = d$ oder die Differenz der Ordinaten be und bi den durch den ganzen Träger constanten Werth des Differenzgliedes $\frac{k c}{8 n}$ repräsentiren, somit eine Linie, welche im Abstande von $d = \frac{kc}{8n}$ oberhalb der x-Achse parallel zu dieser als neue Abscissenachse in Bezug auf die Parabel $[V'_x]_{\max}$ gezogen wird, auf den Feldermitten die ganz genauen Resultate von $[V_m]_{\max}$ ergeben. Wie analog zu beweisen, wird dagegen eine Linie, welche um denselben Abstand $d = \frac{kc}{8n}$ unterhalb der x-Achse parallel zu dieser als neue Abscissenachse in Bezug auf die Parabel $[V'_x]_{\min}$ gezogen wird, auf den Feldermitten die ganz genauen Resultate von $[V_m]_{\min}$ liefern. — Bei gleicher Entfernung der Lastpunkte zeichnet also die Figur den Fehler selbst, ohne dass man ihn zu rechnen braucht, und bedarf es bezüglich der Kenntniss der Verticalkräfte $[V_m]_{\min}$ und $[V_m]_{\max}$ dann nur der Construction einer einzigen Parabel, da im Fall der gleichen Feldereintheilung, also der Symmetrie des Trägers halber, die Werthe $[V_m]_{\max}$ und $[V_m]_{\min}$ für zur Trägermitte symmetrisch gelegene Felder, wenn auch von verschiedenem Vorzeichen, aber absolut genommen einander gleich sind.

Die Verticalkraft ist bei jeder Belastung zwischen zwei Lastpunkten constant; es repräsentiren daher die in Fig. 19 an beiden Parabeln gezogenen Staffeln den Verlauf von $[V_m]_{\max}$ und $[V_m]_{\min}$ auf der ganzen Länge der einzelnen Felder.

2. Das Moment M.

§ 33. Es interessiren für die Berechnung der Gurtungen die Momente bei totaler Belastung, und für die Berechnung der Diagonalen und Verticalen die Momente am Anfang und Ende eines jeden Feldes bei denjenigen Belastungen, für welche die Verticalkraft im betreffenden Felde zu einem Maximum und Minimum wird.

a. $[M'_x]_{\max}$; $[M'_x]_{\min}$; $[M_m]_{\max}$; $[M_m]_{\min}$; $[M_x]_{\max}$ und $[M_x]_{\min}$ (siehe § 2).

Das Moment im Trägerquerschnitt x, entsprechend der Annahme einer gleichförmig über den Träger vertheilten totalen Belastung, erhält man nach Fig. 17:

$$[M'_x]_{\max} = x\,[A']_{\max} - \frac{qx^2}{2},$$

oder mit Gleichung (104):

$$[M'_x]_{\max} = \frac{q}{2}\,(lx - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (114)$$

Diese Gleichung ist wiederum die einer Parabel, deren Hauptachsen aus den im § 27 angegebenen Gründen die Richtungen der angenommenen Coordinaten-Achsen besitzen. Es folgt aus Gleichung (114) zunächst, wie am Schluss des § 4 schon allgemein erwähnt, dass für $x = 0$ und $x = l$:

$$[M'_0]_{\max} = [M'_l]_{\max} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

Ausser dieser Beziehung genügen zur Festlegung der Parabel, Gleichung (114), die Kenntniss deren Scheitelcoordinaten. Es ergiebt sich die Scheitelabscisse aus der Gleichung:

$$\frac{\partial\, [M'_x]_{\max}}{\partial x} = \frac{q}{2}\,(l - 2x) = 0, \quad \text{also mit} \quad x = \frac{l}{2},$$

wofür:

$$[M'_{\frac{l}{2}}]_{\max} = \frac{q l^2}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

dass darnach $[M'_x]_{\min}$ eine Parabel von der Gleichung:

$$[M'_x]_{\min} = \frac{p}{2}\,(l x - x^2) \ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

deren Scheitelabscisse $x = \dfrac{l}{2}$ und deren Scheitelordinate:

$$[M'_{\frac{l}{2}}]_{\min} = \frac{p l^2}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (118)$$

Fig. 20.

ist Obigem analog zu beweisen. Beide Parabeln, Gleichungen (114) und (117), sind in Fig. **20** verzeichnet.

Es bleibt zu untersuchen, wie sich aus diesen Parabeln die Momente entsprechend der Annahme von Lastpunkten ergeben. Angenommen, es entspräche die Abscisse x in $[M'_x]_{\max}$ genau der Abscisse des m-Knotenpunktes, so dass also:

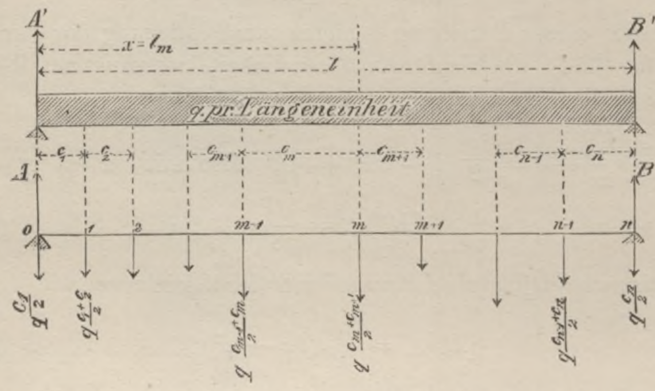
$$x = c_1 + c_2 + \ldots . + c_{m-1} + c_m = l_m,$$

siehe Fig. **21**, so erhält man aus Gleichung (10):

$$[M_m]_{\max} = l_m \cdot \Sigma_m^{n-1}(P_r) - \frac{l_m}{l} \cdot \Sigma_m^{n-1}(P_r \cdot l_r) + \Sigma_1^{m-1}(P_r \cdot l_r) - \frac{l_m}{l} \cdot \Sigma_1^{m-1}(P_r \cdot l_r)$$

$$= l_m \cdot \Sigma_m^{n-1}(P_r) - \frac{l_m}{l} \cdot \Sigma_1^{n-1}(P_r \cdot l_r) + \Sigma_1^{m-1}(P_r \cdot l_r).$$

Fig. 21.



Nach den Entwickelungen aus Fig. **18** ist allgemein:

$$\Sigma_1^m (P_r \cdot l_r) = \frac{q}{2}(c_1 + c_2 + \ldots + c_m)(c_1 + c_2 + \ldots + c_{m+1}),$$

daher: $[M_m]_{\max} =$

$$q\,x\left(l - x + \frac{c_m}{2} - \frac{c_n}{2}\right) - \frac{q\,x}{2\,l}(c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1})(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$$

$$+ \frac{q}{2}(c_1 + c_2 + \ldots + c_{m-1})(c_1 + c_2 + \ldots + c_m)$$

$$= q\,x\left(l - x + \frac{c_m}{2} - \frac{c_n}{2}\right) - \frac{q\,x}{2\,l}(l - c_n)\,l + \frac{q\,x}{2}(x - c_m)$$

$$= \frac{q}{2}\left[2\,l\,x - 2\,x^2 + c_m\,x - c_n\,x - l\,x + c_n\,x + x^2 - c_m\,x\right],$$

folglich: $$[M_m]_{\max} = \frac{q}{2}(l\,x - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (119)$$

also mit Gleichung (114): $$[M_m]_{\max} = [M'_{l_m}]_{\max} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

Es geben also die an den Knoten- oder Lastpunkten aus der Parabel $[M'_x]_{\max}$ resultirenden Ordinaten selbst bei ganz unregelmässiger Feldereintheilung genau die Maximalmomente $[M_m]_{\max}$, wie sie der Annahme von Lastpunkten entsprechen.

Die der Annahme von Lastpunkten entsprechende Function $[M_x]_{max}$ für die ganze Trägerlänge ergiebt sich also mit § 5 als das in die Parabel $[M'_x]_{max}$ eingezeichnete Sehnenpolygon.

Dass ebenfalls das in die Parabel $[M'_x]_{min}$ eingezeichnete Sehnenpolygon Fig. **20** genau die Werthe $[M_x]_{min}$ repräsentirt, folgt aus Obigem von selbst.

Wie man die Parabeln aus den Coordinaten des Scheitels und denjenigen eines andern Punktes bei bekannter Richtung der Hauptachsen construirt, ist in Fig. **22** rechts angegeben.

In dem besondern Falle, dass:

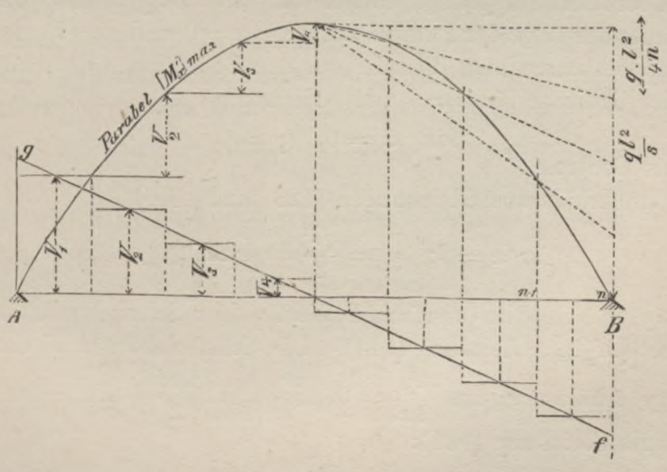
$$c_1 = c_2 = \ldots = c_m = \ldots = c_n = c,$$

wird man sich die Construction der Parabel $[M'_x]_{max}$ ersparen können, wenn man die Felderweite c zur Einheit wählt. Alsdann gehen nämlich Gleichungen (23) und (24) über in:

$$V_m = M_m - M_{m-1} \quad \text{und} \quad V_{m+1} = M_{m+1} - M_m.$$

Da nach § 31 die gerade Linie gf der Fig. **16** die der Annahme von Lastpunkten genau entsprechenden Werthe der Verticalkraft bei totaler Belastung liefert und nach Gleichung (115) das Moment

Fig. 22.



am Auflager A Null ist, so erhält man das Sehnenpolygon $[M_x]_{max}$ resp. die Parabel $[M'_x]_{max}$, wenn man vom Auflager A ausgehend die in Fig. **22** links vorgenommenen Additionen ausführt.

b. $[M'_x]_{V'_x\,\min}$ und $[M'_x]_{V'_x\,\max}$.

§ 34. Mit Fig. 15 und Gleichung (99) ergiebt sich:

$$[M'_x]_{V'_x\,\min} = \left[\frac{pl}{2} + kx - \frac{kx^2}{2l}\right]x - (p+k)\frac{x^2}{2} \quad . \; . \quad (121)$$

$$= \frac{p}{2}(lx - x^2) + \frac{k}{2}x^2\left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

$$= (pl + kx)\frac{x}{2}\left(\frac{l-x}{l}\right) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (122)$$

Setzt man hierin:

$$(pl + kx)\frac{x}{2} = y \quad \dots\dots\dots\dots \quad (123)$$

so folgt:

$$[M'_x]_{V'_x\,\min} = y\,\frac{l-x}{l} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (124)$$

Um diese Function $[M'_x]_{V'_x\,\min}$ zu construiren, trage man zunächst die Function y auf und multiplicire deren Werthe mit $\frac{l-x}{l}$. Die Function y bedeutet eine Parabel, deren Hauptachsen aus den in § 27 angegebenen Gründen parallel den Richtungen der gewählten Coordinatenachsen laufen. Diese Parabel geht durch den Coordinatenursprung, indem für $x = 0 : y = 0$. Da die Kenntniss der Lage der Parabel zwischen $x = 0$ und $x = l$ erforderlich, so bestimme man dieselbe aus den Coordinaten des Scheitels und der Ordinate für $x = l$ und bediene sich also der Eigenschaft:

$$\text{für} \quad x = 0, \quad y = 0$$

nur als Controle.

Man erhält aus Gleichungen (123) und (116):

$$\text{für } x = l; \quad y_l = \frac{ql^2}{2} = 4\,[M'_{\frac{l}{2}}]_{\max} \quad \dots\dots \quad (125)$$

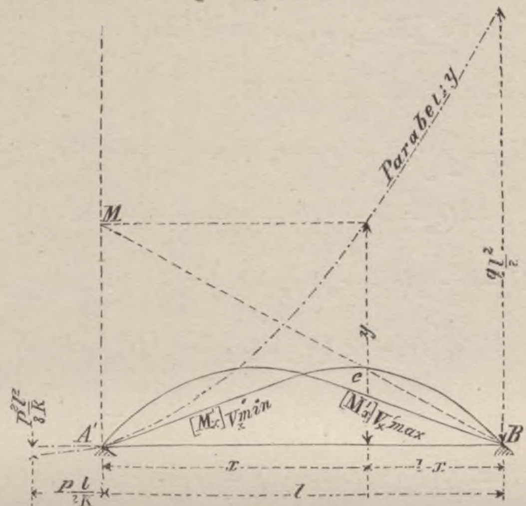
somit y_l gleich dem vierfachen Werthe der Scheitelordinate der Parabel $[M'_x]_{\max}$, Gleichung (114). Die Scheitelabscisse x'' der Parabel y erhält man aus $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, also aus: $\frac{pl}{2} + kx = 0$, und zwar mit Gleichung (101):

$$x'' = -\frac{pl}{2k} = \frac{x'}{2},$$

wofür die Scheitelordinate: $y_{x''} = -\dfrac{p^2 l^2}{8k} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (126)$

In der folgenden Fig. **23** ist die Parabel y nach diesen Daten verzeichnet. Um daraus die Curve $[M_x']_{V'_x\,min}$, Gleichung (124), zu erhalten, müssen nach Vorigem die Ordinaten y mit $\frac{l-x}{l}$ multiplicirt werden.

Fig. 23.



Dieses geschieht in der in Fig. **23** angegebenen Weise, indem man die Ordinaten y auf der Ordinatenachse im Auflager A' aufträgt, also z. B.: $y = A'M$ macht, die Linie MB' zieht und diese mit der Ordinate y in C schneidet. Alsdann ist C ein Punkt der Curve $[M_x']_{V'_x\,min}$. Der Beweis folgt einfach aus der Figur.

Da die ganze Construction keiner weitern Berechnung, als die der Scheitelordinate $y_{x''}$ bedarf, alle übrigen Werthe durch Halbiren oder Multipliciren der bereits für die Parabeln $[V_x']_{min}$ und $[M_x']_{max}$ gerechneten Daten mit dem Zirkel erhalten werden, da ausserdem die Construction der Parabel y durch die aus der Construction der Parabeln $[V_x']_{min}$ und $[M_x']_{max}$ schon vorhandenen Ordinaten, und endlich die Multiplicationen mit $\frac{l-x}{l}$ selbst einfach auszuführen sind, so wird man die oben angegebene graphische Ermittelung der Werthe $[M_x']_{V'_x\,min}$ derjenigen auf dem Wege der Rechnung nach Gleichung (121) vorziehen dürfen.

Dass die in Fig. **23** ebenfalls verzeichnete Function $[M_x']_{V'_x\,max}$ eine mit $[M_x']_{V'_x\,min}$ gegen das Trägermittel symmetrisch gelegene und dieser analog zu ermittelnde Curve bedeutet, braucht nicht näher erörtert zu werden.

c. $[\boldsymbol{M}_{m-1}]_{V_m \min}$ und $[\boldsymbol{M}_m]_{V_m \min}$,

sowie $[\boldsymbol{M}_{m-1}]_{V_m \max}$ und $[\boldsymbol{M}_m]_{V_m \max}$.

§ 35. Man erhält aus Fig. **18**:

$$[M_m]_{V_m \min} = A l_m - \frac{q}{2}\Big[c_1 l_m + (c_1+c_2)(l_m - c_1) + (c_2+c_3)(l_m - c_1 - c_2) + \ldots$$

$$\ldots + (c_m + c_{m+1})(l_m - c_1 - c_2 - \ldots - c_m)\Big],$$

$$= A l_m - \frac{q}{2} l_m (c_1 + c_1 + c_2 + c_2 + c_3 + c_3 + \ldots + c_m + c_m + c_{m+1})$$

$$+ \frac{q}{2}\Big[(c_1 + c_2) c_1 + (c_2 + c_3)(c_1 + c_2) + \ldots$$

$$+ (c_m + c_{m+1})(c_1 + c_2 + \ldots + c_m)\Big],$$

$$= A l_m - \frac{q}{2}\Big[l_m (2 l_m + c_{m+1}) - (c_1 + c_2 + \ldots + c_m)^2$$

$$- c_{m+1}(c_1 + c_2 + \ldots + c_m)\Big],$$

$$= A l_m - \frac{q}{2}\Big[2 l_m^2 + c_{m+1} \cdot l_m - l_m^2 - c_{m+1} \cdot l_m\Big],$$

also:

$$[M_m]_{V_m \min} = A l_m - \frac{q}{2} l_m^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (127)$$

Desgleichen wird man erhalten:

$$[M_{m-1}]_{V_m \min} = A l_{m-1} - \frac{q}{2} l_{m-1}^2 \quad \ldots\ldots \quad (128)$$

In beiden Gleichungen (127) und (128) ist A aus Gleichung (110) zu entnehmen und:

$$x = l_{m-1} + \frac{c_m}{2} = l_m - \frac{c_m}{2} \ldots\ldots\ldots \quad (129)$$

Es ergiebt sich also mit A aus Gleichung (110):

$$[M_m]_{V_m \min} = \frac{p l}{2} l_m + k x l_m - \frac{k x^2}{2 l} l_m + \frac{k c_m^2}{8 l} l_m - \frac{p}{2} l_m^2 - \frac{k}{2} l_m^2,$$

oder mit x aus Gleichung (129):

$$[M_m]_{V_m \min} = \frac{pl}{2}\left(x+\frac{c_m}{2}\right) + kx\left(x+\frac{c_m}{2}\right) - \frac{kx^2}{2l}\left(x+\frac{c_m}{2}\right)$$
$$+\frac{kc_m^2}{8l}\left(x+\frac{c_m}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(x+\frac{c_m}{2}\right)^2 - \frac{k}{2}\left(x+\frac{c_m}{2}\right)^2,$$
$$=\left[p\left(\frac{l}{2}-x\right)-\frac{kx^2}{2l}\right]\frac{c_m}{2}+\left[\frac{pl}{2}+kx-\frac{kx^2}{2l}\right]x-(p+k)\frac{x^2}{2}$$
$$+\frac{kxc_m}{2}+\frac{kxc_m^2}{8l}+\frac{kc_m^3}{16l}-\frac{pc_m^2}{8}-\frac{kxc_m}{2}-\frac{kc_m^2}{8},$$

oder nach Gleichungen (100) und (121):

$$[M_m]_{V_m \min} = \left\{+\frac{c_m}{2}[V_x]_{\min} + [M_x]_{V'_x \min}\right\} - \frac{c_m^2}{8}\left(q - k\frac{l_m}{l}\right) \quad . \ . \quad (130)$$

desgleichen erhält man:

$$[M_{m-1}]_{V_m \min} = \frac{pl}{2}\left(x-\frac{c_m}{2}\right) + kx\left(x-\frac{c_m}{2}\right) - \frac{kx^2}{2l}\left(x-\frac{c_m}{2}\right)$$
$$+\frac{kc_m^2}{8l}\left(x-\frac{c_m}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(x-\frac{c_m}{2}\right)^2 - \frac{k}{2}\left(x-\frac{c_m}{2}\right)^2,$$
$$=-\left[p\left(\frac{l}{2}-x\right)-\frac{kx^2}{2l}\right]\frac{c_m}{2}+\left[\frac{pl}{2}+kx-\frac{kx^2}{2l}\right]x-(p+k)\frac{x^2}{2}$$
$$-\frac{kxc_m}{2}+\frac{kxc_m^2}{8l}-\frac{kc_m^3}{16l}-\frac{pc_m^2}{8}+\frac{kxc_m}{2}-\frac{kc_m^2}{8},$$

oder nach Gleichungen (100) und (121):

$$[M_{m-1}]_{V_m \min} = \left\{-\frac{c_m}{2}[V_x]_{\min} + [M_x]_{V'_x \min}\right\} - \frac{c_m^2}{8}\left(q - k\frac{l_{m-1}}{l}\right) \quad (131)$$

dagegen wird sich ergeben:

$$[M_m]_{V_m \max} = \left\{+\frac{c_m}{2}[V_x]_{\max} + [M_x]_{V'_x \max}\right\} - \frac{c_m^2}{8}\left(p + k\frac{l_m}{l}\right) \quad (132)$$

$$[M_{m-1}]_{V_m \max} = \left\{-\frac{c_m}{2}[V_x]_{\max} + [M_x]_{V'_x \max}\right\} - \frac{c_m^2}{8}\left(p + k\frac{l_{m-1}}{l}\right) \quad (133)$$

Die gewünschten Momente sind aus den vorstehenden Gleichungen (130) bis (133) in jedem Falle einfach und zwar durch Rechnung zu ermitteln. Man beachte dabei den Werth von x aus Gleichung (129).

In dem besondern Falle der constanten Feldereintheilung, wo also:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_m = \ldots = c_n = c,$$

führt dagegen die Construction einfacher als die Rechnung zum Ziele, wie folgt:

Man wähle die Felderweite c zur Längeneinheit, so gehen die vorstehenden Gleichungen (130) bis (133) über in:

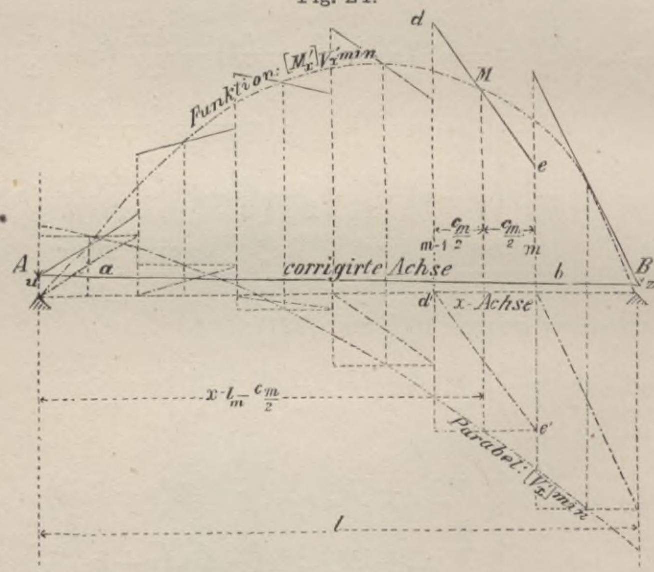
$$[M_m]_{V_m \min} = \left\{+\frac{[V'_x]_{\min}}{2} + [M'_x]_{V'_x \min}\right\} - \frac{q\,l - k\,l_m}{8\,l} \quad . . \quad (134)$$

$$[M_{m-1}]_{V_m \min} = \left\{-\frac{[V'_x]_{\min}}{2} + [M'_x]_{V'_x \min}\right\} - \frac{q\,l - k\,l_{m-1}}{8\,l} \quad . . \quad (135)$$

$$[M_m]_{V_m \max} = \left\{+\frac{[V'_x]_{\max}}{2} + [M'_x]_{V'_x \max}\right\} - \frac{p\,l + k\,l_m}{8\,l} \quad . . \quad (136)$$

$$[M_{m-1}]_{V_m \max} = \left\{-\frac{[V'_x]_{\max}}{2} + [M'_x]_{V'_x \max}\right\} - \frac{p\,l + k\,l_{m-1}}{8\,l} \quad . . \quad (137)$$

Fig. 24.



Untersucht man von diesen Gleichungen die beiden ersteren Gleichungen (134) und (135), so werden sich die darin vorhandenen Ausdrücke:

$$\left\{+\frac{[V'_x]_{\min}}{2} + [M'_x]_{V'_x \min}\right. \quad \text{und:}$$

$$\left\{-\frac{[V'_x]_{\min}}{2} + [M'_x]_{V'_x \min}\right\}$$

an den Knotenpunkten $m-1$ und m construiren, wenn man Fig. **24** durch den Endpunkt M der der Mitte des m-Feldes entsprechenden

Ordinate: $[M'_x]_{V'_x \min}$ eine Parallele de zur Diagonale $d'e'$ des Rechtecks zieht, welches durch $[V'_x]_{\min}$ für dieses Feld gebildet wird.

Nach Gleichungen (134) und (135) ist von den dadurch entstehenden Werthen die Grösse $\frac{ql - kl_m}{8l}$ resp. $\frac{ql - kl_{m-1}}{8l}$ zu subtrahiren. Würde man diese Grösse nach Coordinaten auftragen, so würde man dafür eine gerade Linie erhalten. Für deren Verzeichnung genügen zwei Punkte. Dieselben construiren sich an den beiden Auflagern durch das oben angegebene Verfahren mittelst der Parallelen de, Fig. **24**, von selbst. Nach § 4 ist:

$$[M_0]_{V_0 \min} = [M_n]_{V_n \min} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (138)$$

Führt man die oben angegebene Construction der Parallelen de für das 1- und n-Feld aus, so werden die entsprechenden Parallelen die Verticalen in den beiden Auflagern in zwei Punkten schneiden, welche um die Länge u und z über der x-Achse liegen. Die Gleichung (138) erfordert, dass die gerade Linie $\frac{ql - kl_m}{8l}$ durch diese beiden Punkte gehe. Es muss also die so ermittelte Gerade ab, Fig. **24** und Fig. **2** und **3** der Tafel **1**, die corrigirte Achse sein, in Bezug auf welche die durch die auf Feldermitte genommenen Punkte M der Function $[M'_x]_{V'_x \min}$ zu legenden Linien de die genauen der Annahme von Lastpunkten entsprechenden Momente: $[M_{m-1}]_{V_m \min}$ und $[M_m]_{V_m \min}$ an den Knotenpunkten geben.

Desgleichen ergeben sich die beiden Werthe (136) und (137) aus einer der obigen ähnlichen Construction mit $[V'_x]_{\max}$ und $[M'_x]_{V'_x \max}$, welche jedoch hier nicht näher in Worte gefasst und erörtert zu werden braucht.

§ 36. Soweit es der Raum gestattete, sind die Functionen V und M auf Taf. **1** für einen Träger:

$$l = 10, \quad n = 10, \quad c = 1, \quad p = 1, \quad k = 3$$

aufgetragen. Dieselbe Tafel zeigt sonach, wie man mit der Construction dreier Parabeln die sämmtlichen Functionen der äusseren Kräfte erhält, welche bei Ermittelung der Spannungszahlen der Constructionsglieder in Betracht kommen, und dürfte diese Ermittelung der äusseren Kräfte auf dem Wege der Construction einfach genug erscheinen, um nicht nur näherungsweise, sondern jeweils in aller Schärfe ohne grosse Mühe ausgeführt zu werden.

Für diejenigen Untersuchungen, welche einen exacten algebraischen Ausdruck der Momente, entsprechend den Belastungen $[V_m]_{\min}$ und $[V_m]_{\max}$, erfordern, fügen wir die folgenden Ausführungen hinzu:

Bezeichnet man unter der Annahme einer durch den ganzen Träger constanten Felderweite von c die Belastung eines jeden Knotenpunktes vom 1^{sten} bis $m-1^{\text{sten}}$ mit πc und die vom m^{ten} bis $n-1^{\text{sten}}$ mit φc, so ergiebt sich die dieser Belastung entsprechende Reaction A aus der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
ncA &= \pi c^2\Big[(n-1)+(n-2)+\ldots+(n-m+1)\Big] \\
&\quad + \varphi c^2\Big[(n-m)+(n-m-1)+\ldots+(n-n+1)\Big] \\
&= \pi c^2 \frac{(m-1)(2n-m)}{2} + \varphi c^2 \frac{(n-m)(n-m+1)}{2},
\end{aligned}
$$

also: $$A = \frac{c}{2n}\Big[\pi(m-1)(2n-m)+\varphi(n-m)(n-m+1)\Big] \quad (139)$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
M_{m-2} &= A(m-2)c - \pi c^2\Big[(m-2-1)+(m-2-2)+\ldots \\
&\qquad \ldots+(m-2-m+3)\Big] \\
&= A(m-2)c - \pi c^2 \frac{(m-3)(m-2)}{2} \\
&= (m-2)c\left[A - \frac{\pi c}{2}(m-3)\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (140)
\end{aligned}
$$

und desgleichen:

$$M_{m-1} = (m-1)c\left[A - \frac{\pi c}{2}(m-2)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (141)$$

$$M_m = mc\left[A - \frac{\pi c}{2}(m-1)\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (142)$$

$$M_{m+1} = (m+1)c\left[A - \frac{\pi c}{2}m\right] + \pi c^2 - \varphi c^2 \quad \ldots\ldots \quad (143)$$

Für den Belastungsfall $[V_m]_{\min}$ hat man in diese Gleichungen (139) bis (143) einzuführen:

$$\pi = (p+k) \quad \text{und} \quad \varphi = p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (144)$$

womit: $$[A]_{V_m \min} = \frac{c}{2n}\Big[(n-1)pn + k(m-1)(2n-m)\Big] \quad (145)$$

und:

$$[M_{m-2}]_{V_m \min} = \frac{(m-2)c^2}{2n}\Big[p(n-m+2)n + k(mn+n-m^2+m)\Big] \quad (146)$$

$$[M_{m-1}]_{V_m \min} = \frac{(m-1)c^2}{2n}\Big[p(n-m+1)n + k(mn-m^2+m)\Big] \quad (147)$$

$$[M_m]_{V_m \min} = \frac{mc^2}{2n}\Big[p(n-m)n + k(mn-n-m^2+m)\Big] \ldots \quad (148)$$

$$[M_{m+1}]_{V_m \min} = \frac{c^2}{2n}\Big[pn(n-m-1)(m+1) + km(mn-m^2+1-n)\Big] \quad (149)$$

Aus den Gleichungen (147) und (148) ergiebt sich mit Gleichung (23) direct:

$$[V_m]_{\min} = \frac{c\,[p(n-2m+1)n - k(m^2-m)]}{2n} \quad (149^a)$$

Für den Belastungsfall $[V_m]_{\max}$ hat man dagegen zu setzen:

$$\pi = p \quad \text{und} \quad \varphi = (p+k) \ldots \ldots \quad (150)$$

und erhält man damit aus Gleichungen (139), (141) und (142):

$$[A]_{V_m \max} = \frac{c}{2n}\Big[(n-1)pn + k(n-m)(n-m+1)\Big] \quad (151)$$

$$[M_{m-1}]_{V_m \max} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2n}\,c^2\Big[pn + k(n-m)\Big] \ldots \quad (152)$$

$$[M_m]_{V_m \max} = \frac{m(n-m)}{2n}\,c^2\Big[pn + k(n-m+1)\Big] \ldots \quad (153)$$

und aus vorstehenden Gleichungen und Gleichung (23):

$$[V_m]_{\max} = \frac{c\,[p(n-2m+1)n + k(n-m+1)(n-m)]}{2n} \ldots \quad (153^a)$$

§ 37. Die in diesem Capitel gegebenen Resultate gelten nur für den Fall, dass jeder mit Eigengewicht belastet gedachte Knotenpunkt auch von mobiler Last getroffen wird, dass also die mobile Last nicht etwa nur in der halben Anzahl Knotenpunkte angreift. Tritt dieser letzte Fall ein, so lassen sich die diesbezüglichen Resultate aus den hier ermittelten einfach ablesen, wie am speciellen Beispiel später gezeigt werden wird (siehe § 39).

B. Die Parallelträger.

I. Allgemeine Theorie.

§ 38. Wir gehen nunmehr zu den speciellen Trägergruppen über und behandeln zunächst die am häufigst angewandten Träger mit horizontalen geradlinig parallelen Gurten.

Die Wandconstruction wird mit oder ohne Verticalen ausgeführt und lässt in ihrer Anordnung eine Menge Variationen zu. Die Verticalen über den beiden Auflagern sind stets erforderlich für Träger, deren mobile Last zwischen den beiden Gurten angreift; ferner für diejenigen Träger, deren Diagonalen nur Zugspannungen übertragen, während die mobile Last auf der unteren Gurt liegt; endlich für diejenigen Träger, deren Diagonalen nur Druckspannungen übertragen und deren mobile Last auf der oberen Gurt liegt.

Dagegen werden diese beiden Verticalen stets entbehrlich für Träger mit gedrückten Diagonalen, deren mobile Last auf der unteren Gurt liegt, sowie für Träger mit gezogenen Diagonalen, deren mobile Last auf der oberen Gurt liegt.

Sieht man von diesen beiden die Art des Parallelträgers nicht bedingenden Verticalen ab, so unterscheidet man:

Parallelträger ohne Verticalen und
Parallelträger mit Verticalen.

Die Verticalen dieser letzten Gruppe haben entweder nur die Function, die beliebig auf oder zwischen den Gurten angebrachte mobile Last auf die Knotenpunkte zu übertragen, sie erleiden alsdann nur eine Inanspruchnahme seitens der sie direct treffenden mobilen Last und des von ihnen aufzunehmenden Eigengewichtes, und liegen dann stets zwischen zwei Diagonalen verschiedener Richtung; oder sie sind ein wesentliches Glied der Wandconstruction und erfahren als solches mit jeder andern Belastung des Trägers eine andere Inanspruchnahme. Sie liegen im letzteren Falle zwischen zwei Diagonalen gleicher Richtung und bilden mit diesen speciell den s. g. Fachwerkträger.

Untersucht man zunächst die das Maximum und Minimum der Inanspruchnahme der Diagonalen bedingende Beziehung (44) und die das Maximum und Minimum der Inanspruchnahme der Verticalen eventuell bedingende Beziehung (76), so ergiebt sich der constanten Trägerhöhe h und der für jedes Feld geltenden Beziehung $\beta_m = 0$ und $\gamma_m = 0$ wegen: $h_m = h_{m-1} = h$, also:

$$c_m h_{m-1} > l_{m-1} (h_m - h_{m-1})$$

und $d = \infty$, also: $$d > l_m.$$

Ihre Maximal- und Minimal-Inanspruchnahmen erreichen daher die Diagonalen für die Belastungsfälle (51) und (52) und die zwischen zwei gleichgerichteten Diagonalen gelegenen Verticalen für die Belastungsfälle (77) bis (80), Fall 1.

1. Parallelträger ohne Verticalen.

§ 39. Führt man die Bezeichnung h und die Bedingungen $\beta_m = 0$ und $\gamma_m = 0$ in die allgemeinen Ausdrücke der Spannungszahlen der Gurten und Diagonalen, Gleichungen (29), (30), (32), (36), (37) und (39) ein, so ergeben sich mit Beziehungen (40), (51) und (52) die Grenzen der Inanspruchnahmen:

Fig. 25.

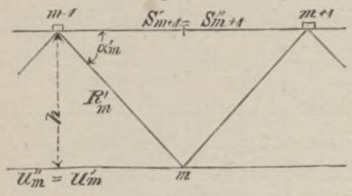
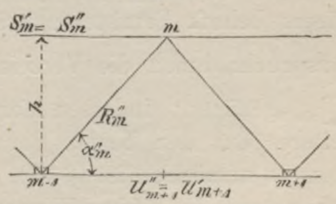


Fig. 26.



Für ein Feld, dessen Diagonale R_m die Richtung I hat (Fig. 25):

$$[S'_{m+1}]_{\min} = -\frac{[M_m]_{\max}}{h} \qquad (154)$$

$$[U'_m]_{\max} = \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h} \qquad (155)$$

$$[R'_m]_{\max} = \frac{[V_m]_{\max}}{\sin \alpha'_m} \qquad (156)$$

$$[R'_m]_{\min} = \frac{[V_m]_{\min}}{\sin \alpha'_m} \qquad (157)$$

Für ein Feld, dessen Diagonale R_m die Richtung II hat (Fig. **26**):

$$[S''_m]_{\min} = -\frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (158)$$

$$[U''_{m+1}]_{\max} = \frac{[M_m]_{\max}}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (159)$$

$$[R''_m]_{\max} = -\frac{[V_m]_{\min}}{\sin\alpha''_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (160)$$

$$[R''_m]_{\min} = -\frac{[V_m]_{\max}}{\sin\alpha''_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (161)$$

In Betreff der Art der Inanspruchnahmen der Diagonalen ergiebt sich aus vorstehenden Gleichungen, dass, so lange die Verticalkraft **positiv** ist, also die Richtung der Auflagerreaction A besitzt, die Diagonalen der **Richtung** I eine **Zugspannung**, dagegen diejenigen der **Richtung** II eine **Pressung** oder Druckspannung erleiden, während im umgekehrten Falle, wo die Verticalkraft **negativ** ist, also die Richtung der Schwere hat: die Diagonalen der **Richtung** I eine **Pressung**, dagegen die der **Richtung** II eine **Zugspannung** erfahren.

Nach obigen Formeln (154) bis (161) und dem im § 27 erwähnten Zusammenhange der Functionen $[V'_x]_{\min}$ und $[V'_x]_{\max}$ wird unter Voraussetzung eines symmetrisch gegen seine Mitte getheilten Trägers behufs Ermittelung sämmtlicher Maximal- und Minimal-Inanspruchnahmen die Verzeichnung der Functionen $\frac{[M_m]_{\max}}{h}$ und $[V_m]_{\min}$ genügen; indessen folgen diese Functionen nicht ohne Weiteres aus den beiden Parabeln Gleichungen (114) und (100), indem es unmöglich ist (§ 37), alle Knotenpunkte mit mobiler Last zu belasten. In beiden Figuren **25** und **26** greift die mobile Last zusammen mit dem Gewicht der Fahrbahn nur in $\frac{n+2}{2}$; das übrige Eigengewicht des Trägers dagegen in $n+1$-Knotenpunkten an. Es setzten sich daher die Functionen $\frac{[M_m]_{\max}}{h}$ und $[V_m]_{\min}$ je aus zwei Theilen zusammen, und zwar beträgt:

$$\frac{[M_m]_{\max}}{h} = \frac{M'_m}{h} + \frac{[M''_m]_{\max}}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (162)$$

$$\text{und:}\quad [V_m]_{\min} = V'_m + [V''_m]_{\min} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

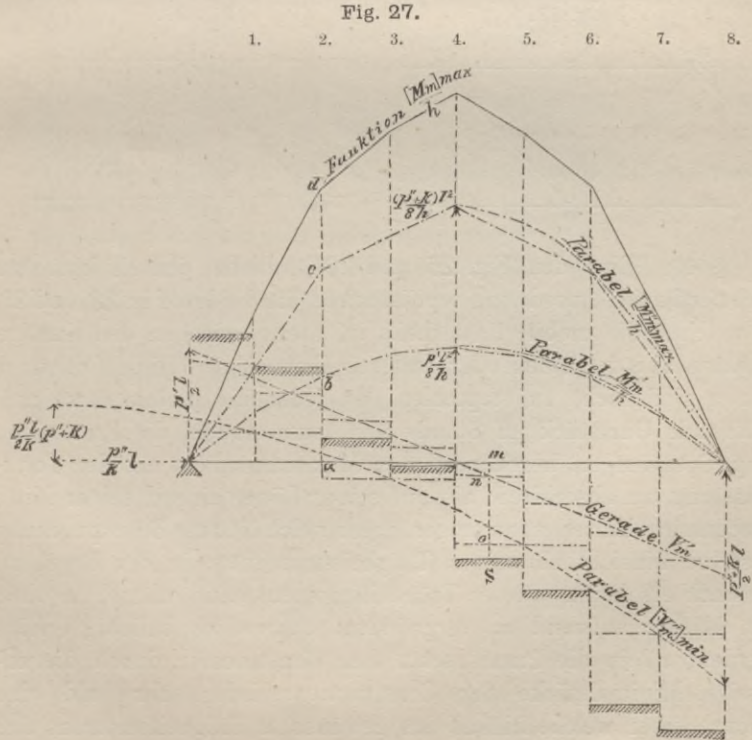
worin $\frac{M'_m}{h}$ und V'_m das Moment und die Verticalkraft, herrührend von dem Eigengewicht excl. der Fahrbahn des Trägers,

$[M''_m]_{max}$ und $[V''_m]_{min}$ das Maximalmoment und die Minimalverticalkraft, herrührend von der mobilen Last und der Fahrbahn des Trägers, enthalten.

Bezeichnet daher pr. Längeneinheit: p' das Eigengewicht des Trägers ausser der Fahrbahn, p'' das Gewicht der Fahrbahn und k die mobile Last,

so ergeben sich analog den im Capitel IV geführten Untersuchungen, unter Vernachlässigung des durch die Concentrirung der Belastungen in den Knotenpunkten gegen die Annahme der gleichförmig vertheilten Last entstehenden Differenzgliedes von $\frac{k c_m^2}{8 l}$, Gleichung (112), die in folgender Figur zusammengestellten Daten zur Construction der fraglichen Functionen (siehe Fig. **16** und **20**).

Fig. 27.



Darnach erhält man beispielsweise:

$$\frac{[M_2]_{max}}{h} = \frac{M'_2}{h} + \frac{[M''_2]_{max}}{h} = ab + ac = ad,$$

$$[V_5]_{min} = V'_5 + [V''_5]_{min} = mn + mo = ms,$$

welche Summationen einfach mit dem Zirkel ausgeführt werden.

Die Fig. **27** ergiebt die Inanspruchnahmen der Gurten, und in dem besonderen Falle, dass die Felderlänge constant $= c$ ist, auch die Inanspruchnahmen der Diagonalen direct, da man statt der Functionen V'_m und $[V''_m]_{min}$ sofort die Geraden $\frac{V'_m}{\sin\alpha}$ und die Parabel $\frac{[V''_m]_{min}}{\sin\alpha}$, und damit $\frac{[V_m]_{min}}{\sin\alpha}$ als directe Inanspruchnahmen der Diagonalen construiren kann. Es ist alsdann c die Felderweite für $\frac{M'_m}{h}$ und $\frac{V'_m}{\sin\alpha}$; dagegen $2c$ für $\frac{[M''_m]_{max}}{h}$ und $\frac{[V''_m]_{min}}{\sin\alpha}$.

Fig. 28.

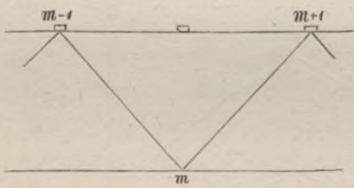
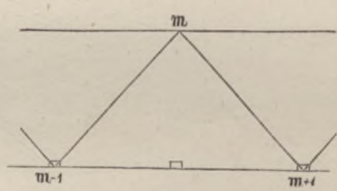


Fig. 29.



§ 40. Eine den Fig. **25** und **26** ähnliche, jedoch kaum zu rechtfertigende Anordnung repräsentiren die beiden Fig. **28** und **29**, in welchen die mobile Last theils in, theils zwischen den Knotenpunkten auf der einen oder anderen Gurt liegt. Diese Constructionen sind nicht zu empfehlen, da jedes die mobile Last aufnehmende Gurtstück im Stande sein muss, sowohl die Pressungen resp. Spannungen, herrührend vom Maximalmoment aus der Totalbelastung, zu absorbiren, als auf seiner Länge eine in seiner Mitte concentrirte Einzellast zu tragen, gegen welch letztere Beanspruchung dasselbe hinsichtlich seines Trägheitsmomentes in der Regel zu schwach erscheint. Dieses Trägheitsmoment kann allerdings, ohne den Materialaufwand zu vergrössern, theoretisch beliebig erhöht werden; allein die Praxis setzt dem Constructeur durch die zulässige Minimalstärke der Constructionsglieder sehr bald eine Grenze, über welche hinaus das gewünschte Trägheitsmoment nur mit einem Mehraufwand an Material zu erreichen ist. Die folgende allgemeine Untersuchung dürfte, auf den speciellen Fall angewendet, erweisen, wie ungünstig der Mehrbedarf an Material durch die Belastung der Gurten nach Fig. **28** und **29** sich stellen wird.

Die Formeln (155) bis (157), sowie (158), (160) und (161) werden für die Träger Fig. **28** und **29** bestehen bleiben; es ermitteln sich indessen die darin vorkommenden Functionen der äusseren Kräfte direct wie im Cap. IV der Allgemeinen Theorie behandelt.

Jene die mobile Last aufnehmenden Gurten berechnen sich dagegen folgendermassen:

Bezeichnet ad Fig. **28**.

S die Inanspruchnahme der oberen Gurt, herrührend aus dem Maximalmoment sämmtlicher Belastungen;

Ω' den Querschnitt der Gurt;

i' das Trägheitsmoment desselben;

$\mathfrak{B}'$ die Anstrengung der Quadrateinheit des Querschnittes der Gurt, herrührend von der Inanspruchnahme S, so dass:

$$S = \Omega' \mathfrak{B}';$$

$\mathfrak{M}'$ das grösst positive, also das Maximalmoment;

$\mathfrak{M}''$ das grösst negative, also das Minimalmoment, beide Momente herrührend von der Biegung der Gurt durch die zwischen den Knotenpunkten wirkenden Einzellasten;

$\mathfrak{b}'$ die Entfernung der oberen Faser des Gurtquerschnittes von dessen neutralen Achse;

$\mathfrak{b}''$ desgleichen der unteren Querschnittsfaser;

$\mathfrak{b}\mathfrak{M}$ den absolut grössten der beiden Werthe $\mathfrak{b}'\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{b}''\mathfrak{M}''$;

$\mathfrak{B}''$ die diesem Werthe entsprechende Inanspruchnahme der äusseren Gurtquerschnittsfaser;

$\mathfrak{B}$ die zulässige Inanspruchnahme der Quadrateinheit des Gurtquerschnittes Ω' überhaupt, so ist:

$$\mathfrak{B}' = \frac{S}{\Omega'} \text{ und } \mathfrak{B}'' = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{M}}{i'}.$$

Beide Inanspruchnahmen addiren sich für die entsprechende äussere Faser, und ist daher die auf die Quadrateinheit daselbst kommende Inanspruchnahme: $\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}''$.

Die zulässige Inanspruchnahme pr. Quadrateinheit soll $\mathfrak{B}$ nirgend überschreiten, daher ist:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}''$$

also:

$$\mathfrak{B} = \frac{S}{\Omega'} + \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{M}}{i'} \qquad \text{(164)}$$

aus welcher Gleichung die correspondirenden Werthe von Ω' und i' berechnet werden können, da S und $\mathfrak{M}$ bekannt sind.

Bezeichnet ad Fig. **29**.

U die Inanspruchnahme der unteren Gurt, herrührend aus dem Maximalmoment sämmtlicher Belastungen;

Ω'' den Querschnitt der Gurt;

i'' das Trägheitsmoment derselben;

$\mathfrak{A}'$ die Anstrengung der Quadrateinheit des Querschnittes der Gurt, herrührend von der Inanspruchnahme U, so dass:

$$U = \Omega'' \mathfrak{A}',$$

während die Bezeichnungen $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ aus dem Vorigen bestehen bleiben;

$\mathfrak{a}'$ die Entfernung der unteren Faser des Gurtquerschnittes von dessen neutralen Achse;

$\mathfrak{a}''$ desgleichen der oberen Querschnittsfaser;

$\mathfrak{a}\mathfrak{M}$ den absolut grössten der beiden Werthe: $\mathfrak{a}'\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{a}''\mathfrak{M}''$;

$\mathfrak{A}''$ die diesem Werthe entsprechende Inanspruchnahme der äusseren Gurtquerschnittsfaser;

$\mathfrak{A}$ die überhaupt zulässige Inanspruchnahme der Quadrateinheit des Querschnittes Ω'', so ist:

$$\mathfrak{A}' = \frac{U}{\Omega''} \text{ und } \mathfrak{A}'' = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{M}}{i''}$$

und da:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''$$

$$\mathfrak{A} = \frac{U}{\Omega''} + \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{M}}{i''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (165)$$

Man kann nicht gerade behaupten, dass die Anordnungen Fig. **28** und **29** fehlerhaft seien; jedoch müssen jeweils vergleichende Berechnungen zwischen dem Materialaufwand dieser und anderer Anordnungen deren Berechtigung nachweisen, oder dieselben aus constructiven Rücksichten nicht zu vermeiden sein.

2. Parallelträger mit Verticalen.

§ 41. Eine bei weitem bessere Construction als die der Fig. **28** und **29** wird gewonnen, wenn man die zwischen zwei Knotenpunkten der oberen oder unteren Gurt liegenden Lasten durch Verticalen auf die unteren resp. oberen Knotenpunkte überträgt (Fig. **30** und **31**). Diese Verticalen werden jeweils unentbehrlich, wenn die mobile Last zwischen beiden Gurten gelegen ist. (Fig. **32**). Die letzte Anordnung erfordert eine Verticale an jedem Lastpunkt; die ersten beiden dagegen nur in der halben Anzahl derselben.

Fig. 30.

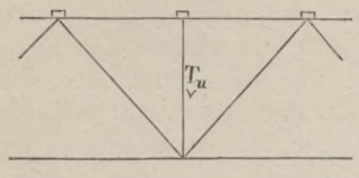


Fig. 31.

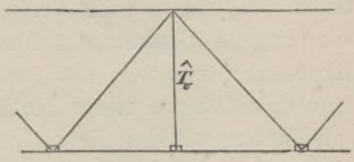
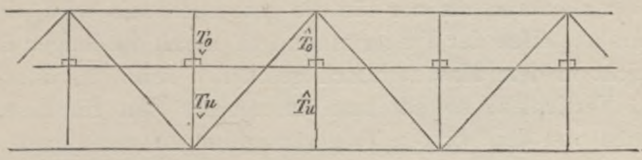


Fig. 32.



Die Inanspruchnahmen der Diagonalen und Gurten ergeben sich für Fig. **30** bis **32** nach Gleichung (154) bis (157) und (158) bis (161). Die Verticalen werden dagegen nur den sie treffenden Antheil der mobilen Last k und des Gewichtes p'' der Fahrbahn zu tragen haben, so dass die der Berechnung derselben zu Grunde zu legenden Inanspruchnahmen für Fig. **30** und **31** nach Gleichungen (89^a) und (85^a) lauten:

$$[\underset{\vee}{T}{}^u_m]_{\min} = -(p'' + k)\frac{c_m + c_{m+1}}{2} \quad \ldots\ldots \quad (166)$$

$$[\hat{T}{}^o_m]_{\max} = +(p'' + k)\frac{c_m + c_{m+1}}{2} \quad \ldots\ldots \quad (167)$$

zu welchen für die Fig. **32** nach Gleichung (83^a) und (90^a) noch hinzutreten:

$$[\hat{T}{}^u_m]_{\max\ \text{resp.}\ \min} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (168)$$

$$[\underset{\vee}{T}{}^o_m]_{\max\ \text{resp.}\ \min} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (169)$$

Die für die Inanspruchnahmen der Diagonalen und Gurten erforderlichen Functionen der äusseren Kräfte rechnen sich wie im Cap. IV. der Allgemeinen Theorie behandelt.

§ 42. Alle diejenigen Diagonalen der Träger Fig. **25**, **26**, **28** bis **32**, welche sich in demjenigen Theil des Trägers befinden, für welchen $[V_m]_{\min}$ und $[V_m]_{\max}$ einerlei Vorzeichen besitzen, werden nach § 39 stets einerlei Inanspruchnahme erfahren; die Diagonalen derjenigen Felder, für welche $[V_m]_{\min}$ und $[V_m]_{\max}$ verschiedene Vorzeichen haben, werden dagegen abwechselnd Zug und Druck erleiden. Dadurch tritt für die Querschnitte der letzteren die Nothwendigkeit ein, dass sie, wie die Querschnitte aller stets gedrückten Diagonalen oder Verticalen, steif genug gegen die vom Druck erzeugte Tendenz des Ausbiegens sein müssen. Für Eisenconstructionen müssten also solche Diagonalen Profileisen sein. Da nun das Material dieser Profil- oder Façoneisen nicht so durchaus gleichartig wie das für die gezogenen Constructionsglieder verwendbare Material der Band- und Flacheisen ist, so dass also der zulässige Anstrengungscoefficient für die gedrückten Constructionsglieder ein kleinerer, als der für die gezogenen sein wird, und da ferner das Absteifen der Trägerwandungen durch die langen Diagonalen nicht in dem Masse einfach geschehen kann, als durch die kürzeren Verticalen, so hat man in neuerer Zeit für Eisenconstructionen von den vorigen Trägeranordnungen mehr und mehr Abstand genommen, und statt derselben solche Parallelträger eingeführt, deren Diagonalen stets nur Zugspannungen und deren Verticalen vorwiegend Druckspannungen erleiden.

Dagegen hat man bei Holzconstructionen eine sehr glückliche Anordnung dadurch gewonnen, dass man die Pressungen in die hölzernen Diagonalen und die Zugspannungen in die aus Rundeisen construirten Verticalen legte. Diese Anordnung (Howe'scher Träger) ist eine sehr rationelle Lösung einer Construction aus Holz und Eisen. Die gezogenen eisernen Verticalen werden als Bolzen durch die Gurte gezogen, während die hölzernen Diagonalen stumpf gegen einander und die Gurten gestossen sind, und vermöge ihrer grossen Querschnittsdimensionen geeignet genug erscheinen, die Absteifung der Wandung zu besorgen.

Mit diesen Trägern, welche nach § 17 s. g. Gegendiagonalen erfordern, langen wir bei den s. g. Fachwerkträgern an, die sich nach Richtung der Diagonalen und Lage der Fahrbahn in die folgenden sechs Fälle Fig. **33** bis **38** scheiden.

Fig. 33.

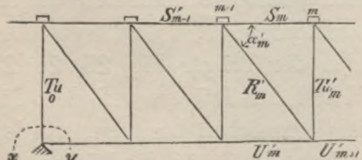
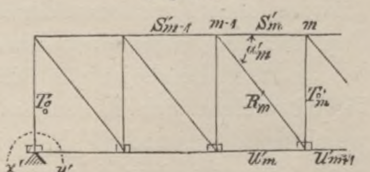


Fig. 34.



§ 43. Die Maximalinanspruchnahmen **der Gurten** und **Diagonalen** ergeben sich aus den Belastungsfällen (40), (51) und (52). Daraus **für einen Träger, dessen Diagonalen die Richtung** I **haben** (Fig. **33** bis **35**), nach Gleichungen (57) bis (59):

Fig. 35.

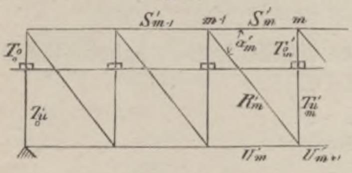


Fig. 36.

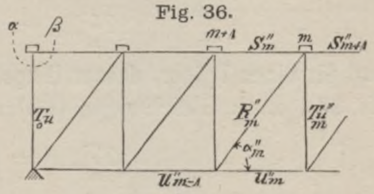


Fig. 37.

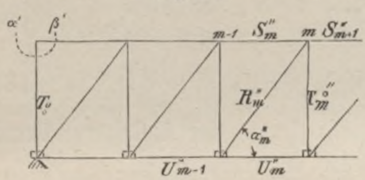
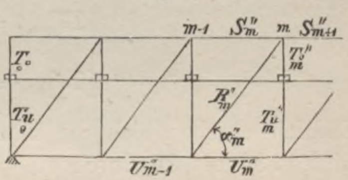


Fig. 38.



$$[S'_m]_{\min} = -[U'_{m+1}]_{\max} = -\frac{[M_m]_{\max}}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (170)$$

$$[U'_m]_{\max} = -[S'_{m-1}]_{\min} = \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (171)$$

$[R'_m]_{\max}$ und $[R'_m]_{\min}$ nach Gleichung (156) und (157),

und **für einen Träger, dessen Diagonalen die Richtung** II **haben** (Fig. **36** bis **38**), nach Gleichungen (60) bis (62):

$$[S''_m]_{\min} = -[U''_{m-1}]_{\max} = -\frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h} \quad \ldots\ldots \quad (172)$$

$$[U''_m]_{\max} = -[S''_{m+1}]_{\min} = \frac{[M_m]_{\max}}{h} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (173)$$

$[R''_m]_{\max}$ und $[R''_m]_{\min}$ nach Gleichung (160) und (161).

Ferner erhält man die Maximalinanspruchnahmen **der Verticalen** ausser denen der Auflagerverticalen aus den Belastungsfällen (77) bis (80), Fall 1, und zwar:

für einen Träger, dessen Diagonalen die Richtung I **haben** (Fig. **33** bis **35**), nach Gleichungen (69) und (70):

$$[T'_{\underset{m}{u}}]_{\max} = -[V_m]_{\min} \quad \ldots \quad (174)$$

$$[T'_{\underset{m}{u}}]_{\min} = -[V_m]_{\max} \quad \ldots \quad (175)$$

$$[T'_{\underset{m}{o}}]_{\max} = -[V_{m+1}]_{\min} \quad \ldots \quad (176)$$

$$[T'_{\underset{m}{o}}]_{\min} = -[V_{m+1}]_{\max} \quad \ldots \quad (177)$$

und **für einen Träger, dessen Diagonalen die Richtung II haben** (Fig. **36** bis **38**), nach Gleichungen (65) und (67):

$$[T''_{\underset{m}{u}}]_{\max} = [V_{m+1}]_{\max} \quad \ldots \quad (178)$$

$$[T''_{\underset{m}{u}}]_{\min} = [V_{m+1}]_{\min} \quad \ldots \quad (179)$$

$$[T''_{\underset{m}{o}}]_{\max} = [V_m]_{\max} \quad \ldots \quad (180)$$

$$[T''_{\underset{m}{o}}]_{\min} = [V_m]_{\min} \quad \ldots \quad (181)$$

Endlich ergeben sich die Inanspruchnahmen **der Auflagerverticalen** ad Fig. **33** bis **35** durch einen Schnitt xy resp. $x_1 y_1$:

$$[T_0^u]_{\min} = -[A']_{\max} \quad \ldots \quad (182)$$

$$[T_0^o]_{\min} = -[A']_{\max} + \frac{q}{2} c_1 = -[V_1]_{\max} \quad \ldots \quad (183)$$

und ad Fig. **36** bis **38** durch einen Schnitt $\alpha\beta$ resp. $\alpha_1 \beta_1$:

$$[T_0^u]_{\min} = -\frac{q}{2} c_1 \quad \ldots \quad (184)$$

$$[T_0^o]_{\max \text{ resp. } \min} = 0 \text{ (siehe ausserdem § 18)} \quad \ldots \quad (185)$$

In obigen Formeln (170) bis (185) ergeben sich die Functionen der äusseren Kräfte, wie im Capitel IV der allgemeinen Theorie behandelt, und gelten die Formeln (182) bis (185) ebenfalls für die Inanspruchnahmen der eventuellen Auflagerverticalen der Träger: Fig. **25** und **26**, **28** bis **32**, je nachdem deren Anordnungen im ersten Trägerfeld mit denen der Träger Fig. **33** bis **38** correspondiren. Die Formeln (170) bis (173) erweisen, dass die Absolutwerthe der Maximalinanspruchnahmen der oberen und unteren Gurt sich gegenseitig vertauschen, so wie man die Richtung der Diagonalen ändert, und dass zwei Gurtstücke, welche durch einen Schnitt zwischen zwei Diagonalen parallel der Richtung der letzteren getroffen werden, dem Absolutwerthe nach gleiche Spannungszahlen entwickeln.

§ 44. Soweit $[V_m]_{\max}$ und $[V_m]_{\min}$ einerlei Vorzeichen besitzen, entwickeln die Diagonalen der Anordnungen Fig. **33** bis **35** in der ersten Trägerhälfte Zugspannungen, die entsprechenden Diagonalen der Anordnungen Fig. **36** bis **38** dagegen Druckspannungen. Alle Felder, für welche obige Bedingung nicht erfüllt ist, erfordern nach § 17 Gegendiagonalen, welche mit den Hauptdiagonalen abwechselnd zur Wirkung kommen. Es berechnen sich alsdann sämmtliche Hauptdiagonalen der ersten Trägerhälfte aus der Function $[V_m]_{\max}$, deren Gegendiagonalen dagegen aus $[V_m]_{\min}$.

Durch diese Gegendiagonalen wird die Berechnung der Gurten nicht alterirt, indem diese aus dem Belastungsfalle $[M_m]_{\max}$ folgen, für welchen sämmtliche Gegendiagonalen als nicht vorhanden zu betrachten sind, da die bei diesem Belastungsfalle für die Diagonalen massgebliche Verticalkraft $[V_m]_{M_m \max}$ nach § 31 erst im Trägermittel ihr Zeichen ändert, und somit für jede Hälfte eines gegen seine Mitte symmetrisch angeordneten Trägers lauter Diagonalen einerlei Richtung, nämlich in jeder Hälfte die Hauptdiagonalen zur Wirkung kommen, wie solches in Fig. **1** und **3** der Tafeln **5** und **6** angezeigt ist.

In wie weit für die Berechnung der Verticalen eines Trägers mit Gegendiagonalen die Formeln (83^a), (85^a), (89^a) und (90^a) Anwendung finden, muss der specielle Fall entscheiden. Hat man sich überzeugt, dass die Berechnung der Verticalen aus der Function $[V_m]_{\max}$ resp. $[V_{m+1}]_{\max}$ berechtigt ist, dass also für den dadurch ausgedrückten Belastungsfall an der m-Verticale zwei gleichgerichtete Diagonalen zur Wirkung kommen, so dürfen die aus diesem Belastungsfalle folgenden Spannungszahlen derjenigen Verticalen, an welchen Gegendiagonalen angreifen,

nach Gleichung (89^a) ad $[T^u_m]_{\min}$ nicht grösser als $-q\,\dfrac{c_m + c_{m+1}}{2}$,

" " (85^a) " $[T^o_m]_{\max}$ " kleiner " $+q\,\dfrac{c_m + c_{m+1}}{2}$

ausfallen, widrigenfalls man diese Werthe dafür an die Stelle setzen wird, um sicher zu construiren. Die für T^o_m und T^u_m aus Gleichung (90^a) und (83^a) folgenden Inanspruchnahmen Null kommen hier nicht in Betracht.

Die Besprechung der Träger mit mehrfachem Systeme glauben wir durch die Behandlung specieller Träger erledigen zu können, und schliessen wir daher den allgemeinen Theil der Untersuchung über die Parallelträger.

II. Numerische Beispiele. (Taf. 2 bis 10.)

§ 45. Der speciellen Berechnung der Träger Fig. **25** resp. **26** und **30** bis **32** legen wir solche von ausgeführten Brücken zu Grunde, während wir die Systeme Fig. **33** bis **38** des besseren Vergleichs derselben unter einander alle für einen Träger mit gleicher Annahme über Länge, Feldereintheilung, Höhe, mobile Last und Eigengewicht durchrechnen. In sämmtlichen folgenden Beispielen bedeutet das Vorzeichen + überall eine Zugspannung, das Vorzeichen — dagegen eine Druckspannung oder Pressung.

1. Träger mit einfachem System.

a. Der Crumlin-Viaduct. (Taf. **2**.)

§ 46. Die Spannweite der Träger dieses Viaducts beträgt 45^m, deren Höhe $4{,}2^m$ und die Felderlänge $2{,}5^m$. Die Wandconstruction besteht aus lauter gleichschenkeligen Dreiecken. Mobile Last und Fahrbahn liegen auf der oberen Gurt. Man findet in verschiedenen Quellen:

das Gewicht eines Trägers zu 25200 Kilogr.,
das Gewicht der Fahrbahn pr. Träger zu 10500 Kilogr.,
die mobile Last pr. Träger zu 75000 Kilogr.

angegeben.

Es liegen daher auf der oberen Gurt die gesammte Fahrbahn, das halbe Trägergewicht und die mobile Last, während die untere Gurt nur die andere Hälfte des Trägergewichtes zu tragen hat.

Die Spannungszahlen ergeben sich nach § 39 aus den beiden Functionen $\frac{[M_m]_{max}}{h}$ und $\frac{[V_m]_{min}}{\sin \alpha_m}$. Für die in § 39 näher bezeichneten Werthe: $\frac{M'_m}{h}$ und $\frac{V'_m}{\sin \alpha}$ dieser Functionen beträgt: $l = 45$; $c = 2{,}5$; $h = 4{,}2$; $p' = \frac{25200}{45}$ K.; $\sin \alpha = \frac{6}{7}$; also ist nach Fig. **27**:

$$\frac{p'l}{2 \sin \alpha} = \frac{25200 \,.\, 45 \,.\, 7}{2 \,.\, 45 \,.\, 6} = \ldots 14700 \text{ K.},$$

$$\frac{p'l^2}{8\,h} = \frac{25200 \,.\, 45^2}{45 \,.\, 8 \,.\, 4{,}2} = \ldots 33750 \text{ K.}$$

Es beträgt dagegen für die Werthe:

$$\frac{[V''_m]_{\min}}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{[M''_m]_{\max}}{h} \quad (\S\ 39)$$

$$l = 45; \quad c = 5; \quad h = 4{,}2; \quad p'' = \frac{10500}{45}\ \text{K.};$$

und:

$$k = \frac{75000}{45}\ \text{K.};$$

daher nach Fig. **27**:

$$\frac{p''}{k}\,l = \frac{10500\,.\,45}{75000} = \ldots\ldots \quad 6{,}3^{\mathrm{m}},$$

$$\frac{p''l}{2k}\,\frac{(p''+k)}{\sin\alpha} = \frac{10500\,.\,85500\,.\,7}{2\,.\,75000\,.\,6} = \ldots \quad 6982\ \text{K.},$$

$$\frac{p''l}{2\sin\alpha} = \frac{10500\,.\,7}{2\,.\,6} = \ldots\ldots \quad 6125\ \text{K.},$$

$$\frac{(p''+k)\,l}{2\sin\alpha} = \frac{85500\,.\,7}{2\,.\,6} = \ldots\ldots \quad 49875\ \text{K.},$$

$$\frac{(p''+k)\,l^2}{8\,h} = \frac{85500\,.\,45}{8\,.\,4{,}2} = \ldots\ldots \quad 114510\ \text{K.}$$

Diese Daten sind in Fig. **1** der Tafel **2** nach Analogie der Fig. **27** des Textes aufgetragen. Ebendaselbst sind die dadurch bedingten Parabeln und die gerade Linie, so wie endlich die aus letzteren sich zusammensetzenden Functionen $\frac{[M_m]_{\max}}{h}$ und $\frac{[V_m]_{\min}}{\sin\alpha}$ construirt. Um diese Construction nicht zu verwirren, ist für die Function der Verticalkräfte ein grösserer Massstab als für die der Momente eingeführt. Die dem Belastungsfalle $[V_m]_{\min}$ entsprechenden Grenzen der Spannungszahlen der Diagonalen ergeben sich darnach direct als die der Mitte der betreffenden Diagonalen entsprechenden Werthe von $\frac{[V_m]_{\min}}{\sin\alpha}$, sofern von der Berücksichtigung des Differenzgliedes $\frac{k\,c_m^2}{8\,l\sin\alpha} = \frac{75000\,.\,5^2\,.\,7}{8\,.\,45\,.\,45\,.\,6}$ = rund 140 Kilogramm abgesehen wird. Dieselben sind in Fig. **2** der Tafel **2** oberhalb der betreffenden Diagonalen mit einem Strich versehen eingetragen. Die dem Belastungsfalle $[V_m]_{\max}$ entsprechenden Grenzen der Inanspruchnahmen der Diagonalen, welche sich einfach durch Abschreiben der vorigen in umgekehrter Ordnung ergeben, ohne dass die Function $\frac{[V_m]_{max}}{\sin\alpha}$ erst verzeichnet zu werden braucht, sind dagegen darunter gesetzt.

Das Eintragen der Maximalinanspruchnahmen der Gurten geschieht nach den Formeln (154), (155), (158) und (159), wonach für jedes Gurtstück der einen Gurt das Moment an dem zwischen dessen beiden Endpunkten liegenden Knotenpunkte der anderen Gurt massgeblich wird.

b. Die Trent-Brücke bei Newark. (Tafel 3.)

§ 47. Die Träger dieser Brücke enthalten 27 Felder von der Form gleichseitiger Dreiecke (Fig. 2, Tafel 3), die Fahrbahn und die mobile Last liegen auf der unteren Gurt und werden einestheils durch diese aufgenommen, anderntheils durch verticale Hängestangen auf die obere Gurt übertragen. Sämmtliche Knotenpunkte erhalten daher ihren Antheil an der mobilen Last, mit Ausnahme der beiden Auflagerknotenpunkte der oberen Gurt. Dieser letztere Umstand ist jedoch nach §§ 3 und 4 für die Berechnung gleichgültig. Zu beachten ist nur, dass der erste und letzte Knotenpunkt der unteren Gurt nur die Hälfte der mobilen Last tragen als alle übrigen Knotenpunkte, indem zwischen ihnen und dem benachbarten Auflager keine mobile Last angreift. Wir lassen jedoch diesen Umstand unberücksichtigt und nehmen an, es seien die über den ganzen Träger gleichmässig vertheilte mobile Last und das Eigengewicht in den Knotenpunkten nach Massgabe der halben angrenzenden Felderlängen concentrirt.

Die Stützweite des Trägers beträgt 259 Fuss, woraus für die Seitenlänge der ihn bildenden gleichseitigen Dreiecke: $\frac{259}{14} = 18{,}5$ Fuss folgt. Hieraus ergiebt sich die Trägerwandhöhe zu:

$$\frac{18{,}5}{2} \,.\, \operatorname{tg} 60^\circ = 9{,}25 \,.\, 1{,}73,$$

oder, wenn man die Länge von 9,25 als Einheit einführt:

die Stützweite zu 28 und die Trägerhöhe zu 1,73.

Das auf vier Träger zu vertheilende Gewicht der zweigeleisigen Brücke findet sich zu 589 Tonnen à 1000 Kilogramm angegeben, worin das Gewicht der Fahrbahn mit 99 Tonnen participirt. Es kommen also auf jeden Träger $\frac{589}{4} = 147{,}25$ Tonnen Gesammteigengewicht.

Rechnet man mit Professor Ritter, dessen Lehrbuch auch die obigen Daten entnommen sind, pr. Gleis und laufenden Fuss als mobile Last 1 Tonne, so wird sich dieselbe pr. Trägerwand zu $\frac{2 \cdot 259}{4} = 129{,}5$ Tonnen ergeben.

Diese Lasten vertheilen sich auf 28 Längeneinheiten. Man erhält daher pr. Längeneinheit:

$$p = \frac{147{,}25}{28} = \text{rund } 5 \text{ Tonnen} = 5000 \text{ Kilogr.},$$

$$k = \frac{129{,}5}{28} = \text{rund } 5 \quad " \quad = 5000 \quad "$$

also: $\quad q = p + k = \ldots\ldots\ldots\ldots \; 10000 \quad "$

während $l = 28$; $h = 1{,}73$; $c = 1$ und $\sin\alpha = \frac{1{,}73}{2}$.

Die Annahmen hinsichtlich der Werthe p und k sind allerdings nicht ganz scharf, und würde nichts hindern, dieselben, ohne die Berechnung zu erschweren, exacter einzuführen; wir acceptiren indessen die obigen Annahmen nach Professor Ritter, indem dadurch die Identität beider Berechnungsweisen an dieser Stelle aus den Resultaten nachgewiesen werden mag.

Die Verticalen rechnen sich nach Gleichung (167), worin:

$$p'' = \frac{99000}{4 \cdot 28} = 880 \text{ Kilogr.}$$

zu: $$\hat{T}^{o}_{m} = 880 + 5000 = 5880 \text{ Kilogr.}$$

Die Gurten und Diagonalen bestimmen sich nach Gleichungen (154) bis (161) und unter Vernachlässigung des Differenzgliedes $\frac{k c_m^2}{8 l \sin\alpha}$ aus den Parabeln $\frac{[M'_x]_{\max}}{h}$ und $\frac{[V'_x]_{\min}}{\sin\alpha}$ und $\frac{[V'_x]_{\max}}{\sin\alpha}$. Da indessen der Träger symmetrisch gegen seine Mitte angeordnet und insbesondere die Felderweite constant ist, so genügt zur Ermittelung der Inanspruchnahmen der Diagonalen eine der beiden Functionen der Verticalkräfte. Wir wählen dafür die Function: $\frac{[V'_x]_{\min}}{\sin\alpha}$. Die zur Construction der Parabeln:

$$\frac{[V'_x]_{\min}}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{[M'_x]_{\max}}{h}$$

nothwendigen Daten rechnen sich nach Tafel **1** wie folgt:

$$\frac{q\,l^2}{8\,h} = \frac{10000 \,.\, 28^2}{8 \,.\, 1{,}73} = \ldots\ldots\ 566474 \text{ Kilogr.,}$$

$$\frac{p\,l}{k} = \frac{5000 \,.\, 28}{5000} = \ldots\ldots\ 28$$

$$\frac{p\,l\,(p+k)}{2k \sin\alpha} = \frac{5000 \,.\, 28 \,.\, 10000 \,.\, 2}{2 \,.\, 5000 \,.\, 1{,}73} = 161850 \text{ Kilogr.,}$$

$$\frac{p\,l}{2 \sin\alpha} = \frac{5000 \,.\, 28 \,.\, 2}{2 \,.\, 1{,}73} = \ldots\ldots\ 80925 \quad "$$

$$\frac{q\,l}{2 \sin\alpha} = \frac{10000 \,.\, 28 \,.\, 2}{2 \,.\, 1{,}73} = \ldots\ 161850 \quad "$$

Die vorstehenden Daten ergeben die in Fig. **1**, Tafel **3**, verzeichneten beiden Parabeln, von welchen wiederum die der Verticalkraft nach einem grösseren Massstab als die der Momente aufgetragen ist.

Nach Gleichungen (154) bis (161) gelten darnach die Ordinaten der Parabel $\frac{[M'_x]_{max}}{h}$ an den Knotenpunkten als die Inanspruchnahmen der beiden Gurten, und die Ordinaten der Parabel $\frac{[V'_x]_{min}}{\sin\alpha}$ auf Feldermitte als die dem Belastungsfall $[V_m]_{min}$ entsprechende eine Grenze der Inanspruchnahmen der Diagonalen, da von dem Differenzglied $\frac{k\,c_m^2}{8\,l \sin\alpha} = \frac{5000 \,.\, 2}{8 \,.\, 28 \,.\, 1{,}73}$ = rund 25 Kilogr. als nicht beachtenswerth abgesehen wurde. Die dem Belastungsfall $[V_m]_{max}$ entsprechende andere Grenze der Inanspruchnahmen der Diagonalen wird analog dem vorigen Beispiel ohne Weiteres durch umgekehrtes Anschreiben der aus dem Belastungsfall $[V_m]_{min}$ resultirenden Spannungszahlen erhalten.

Fig. **3** der Tafel **3** enthält die Spannungszahlen desselben Trägers bei veränderter Lage der Fahrbahn. Vergleicht man nun die hier ermittelten Resultate mit den von Prof. Ritter gegebenen, so überzeugt man sich von deren Uebereinstimmung. Es ist jedoch zu bemerken, dass, bei vorausgesetzter exacter Ausführung der Construction der Spannungszahlen, die auf diesem Wege bezüglich der Diagonalen ermittelten Werthe um die Grösse: $\frac{k\,c_m^2}{8\,l \sin\alpha}$ = 25 Kilogr. von den von Prof. Ritter gegebenen verschieden sein müssen, eine Grösse, welche indessen die Zeichnung, bei aller Schärfe der Construction, nicht mehr zu liefern vermag.

c. Fachwerkträger. (Tafel **4**.)

§ 48. Der Berechnung der Parallelträger Fig. **33** bis **38** legen wir einen Träger von 30^m Spannweite zu Grunde. Wir nehmen an, derselbe sei in 10 gleich grosse Felder von $\frac{30}{10} = 3^m$ Weite eingetheilt und habe eine Höhe $= 3^m$. An Eigengewicht rechnen wir pro Träger und lfd. M. 1000 Kilogr., an äusserer Last 2000 Kilogr.; dieses für alle folgenden Parallelträger in jedem Fall unter der Annahme, dass das Gesammt-Eigengewicht in den Angriffspunkten der äusseren Last concentrirt sei. (§ 18.) Wählt man die Trägerhöhe gleich der Felderweite zur Längeneinheit, so ergeben sich folgende der Rechnung zu Grunde zu legenden Daten: $l = 10$; $n = 10$; $c = 1$; $h = 1$; $p = 3000$; $k = 6000$; $q = 9000$.

Da die Felderweite eine constante ist, so genügt die Verzeichnung der Parabel $[V_x']_{min}$ zur Bestimmung der Spannungszahlen der Verticalen und Diagonalen, und zwar wird man genöthigt sein, diese Parabel selbst, und nicht etwa die Parabel $\frac{[V_x']_{min}}{\sin\alpha}$ zu construiren, weil erstere zur Ermittelung der Inanspruchnahmen der Verticalen nothwendig wird, Gleichungen (174) bis (181). Die Spannungszahlen der Gurten lassen sich dagegen wieder direct aus der Parabel $\frac{[M_x']_{max}}{h}$ ermitteln. Die zur Construction beider Parabeln:

$$\frac{[M_x']_{max}}{h} \quad \text{und} \quad [V_x']_{min}$$

nothwendigen Daten ergeben sich nach Tafel **1**:

$$\frac{q\,l^2}{8\,h} = \frac{9000\,.\,10^2}{8\,.\,1} = \;.\;.\;.\; 112500 \text{ Kilogr.,}$$

$$\frac{p\,l}{k} = \frac{3000\,.\,10}{6000} = \;.\;.\;.\; 5$$

$$\frac{p\,l}{2\,k}\,(p+k) = \frac{3000\,.\,10}{2\,.\,6000}\,.\,9000 = 22500 \text{ Kilogr.,}$$

$$\frac{p\,l}{2} = \frac{3000\,.\,10}{2} = \;.\;.\;.\; 15000 \quad \text{„}$$

$$\frac{q\,l}{2} = \frac{9000\,.\,10}{2} = \;.\;.\;.\; 45000 \quad \text{„}$$

Von dem Differenzglied: $\frac{k c_m^2}{8 l} = \frac{6000 \, . \, 1}{8 \, . \, 10} = 75$ Kilogr. sehen wir für die vorliegenden Träger als nicht berücksichtigenswerth ab.

Obige Daten sind auf Tafel **4** aufgetragen, und für die ebendaselbst vorgenommene Construction der beiden fraglichen Parabeln ausreichend. Die Inanspruchnahmen der Gurten nach Gl. (170) und (171), (172) und (173) ergeben sich daraus als die an den Knotenpunkten resultirenden Ordinaten der Parabel $\frac{[M'_x]_{\max}}{h}$; diejenigen der Verticalen eventuell nach Gleichungen (174) bis (181) als die auf den Feldermitten resultirenden Ordinaten der Parabel $[V'_x]_{\min}$. Endlich erhält man die Inanspruchnahmen der Diagonalen nach Gleichungen (156), (157), (160) und (161) als die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete die den Gleichungen (156), (157), (160) und (161) entsprechende auf Feldermitte sich ergebende Ordinate der Parabel $[V'_x]_{\min}$ ist und dessen dieser Kathete gegenüberliegende Winkel α beträgt. (Siehe Tafel **4**.)

α. Träger nach dem System Fig. 33 bis 35.
(Tafel **5**.)

Fahrbahn auf der oberen Gurt. Fig. **1** und **2**.

Fig. **1**. Träger ohne Gegendiagonalen.

§ 49. Man erhält die Inanspruchnahmen der Gurten und Diagonalen nach den vorigen Erläuterungen, wie in Tafel **5**, Fig. **1**, angeführt. Die aus dem Belastungsfall $[V'_x]_{\min}$ folgenden Inanspruchnahmen der Diagonalen sind unter, die aus $[V'_x]_{\max}$ folgenden Inanspruchnahmen der Diagonalen über die Diagonalen geschrieben. Darnach werden alle Diagonalen ausser den beiden mittleren stets gezogen, die beiden letzteren erleiden dagegen abwechselnd Zug und Druck.

Abgesehen von den beiden Auflagerverticalen und der Verticale auf dem Trägermittel berechnen sich die Verticalen der ersteren Trägerhälfte nach Gleichungen (174) und (175), die der zweiten Trägerhälfte nach Gleichungen (178) und (179). Die aus dem Belastungsfall $[V_m]_{\min}$ folgende Grenze der Inanspruchnahme derselben ist vor, die aus $[V_m]_{\max}$ folgende andere Grenze derselben hinter die Verticalen geschrieben.

Die Inanspruchnahmen der beiden Auflagerverticalen ergeben sich nach Gleichung (182):

$$[T_o^u]_{\min} = [T_n^u]_{\min} = - 45000 \text{ Kilogr.},$$

die der Verticale auf dem Trägermittel nach Gleichung (89^a) oder (91) zu: $T^{u}_{\frac{n}{\sqrt{2}}} = -9000$ Kilogr.

Da das Maximum und das Minimum der Spannungszahlen der Verticalen in den Auflagern und im Trägermittel von gleichem Vorzeichen und negativ sind, so interessirt von beiden nur das letztere.

Fig. **2.** Träger mit Gegendiagonalen.

§ 50. Da die Grenzen der Inanspruchnahmen der beiden Diagonalen der mittleren Felder Fig. **1**, Tafel **5**, von verschiedenem Vorzeichen sind, so erfordern diese beiden Felder für den Fall, dass man beabsichtigt, in jeder Diagonale des ganzen Trägers nur Zugspannungen zu erhalten, zwei gekreuzte Diagonalen, welche indessen vermöge ihrer Construction und Befestigung unfähig sein sollen, einen Druck zu übertragen. Die dadurch nöthig werdenden beiden Gegendiagonalen R''_5 und R'_6 treten mit einer Zugspannung von 6500 Kilogr. in Thätigkeit, so wie die ursprünglichen Hauptdiagonalen R'_5 und R''_6 im Begriff stehen, diese Inanspruchnahmen als Druck aufzunehmen, aus obigen Gründen aber ausser Function gerathen. Aus den beiden Diagonalen R'_5 und R''_6 verschwinden also die Inanspruchnahmen — 6500 Kilogr. Erforderniss ist indessen, dass sämmtliche Diagonalen der beiden mittleren Felder hinsichtlich der Dimensionirung ihres Querschnittes der Art construirt sind, dass sie einen Druck nicht auszuhalten vermögen. Es ist daher die Wahl jedes Profileisens als Querschnitt für die vier mittleren Diagonalen fehlerhaft.

Die Verticale 5 auf dem Trägermittel (Fig. **2**) wird bei dem Eintreten der einen oder anderen Gegendiagonale die Pressung von 10600 Kilogr. erfahren, während die beiden Verticalen 4 und 6 sich dabei abwechselnd in dem Fall befinden, wie die mittlere Verticale 5 in Fig. **1**, d. h. eine Pressung von 9000 Kilogr. erfahren, und zwar die Verticale 4 im Falle alle Knotenpunkte vom 0. bis incl. 4. belastet, also die Gegendiagonale R''_5 mit 6500 Kilogr. gezogen wird; die Verticale 6 dagegen für den Fall, dass alle Knotenpunkte vom 6. bis incl. 10. belastet sind, also die Gegendiagonale R'_6 mit 6500 Kilogr. gezogen wird. Oberhalb und unterhalb der betreffenden Verticalen 4 bis 6 der Fig. **1**, Tafel **5**, sind die durch das Anbringen von Gegendiagonalen in den drei mittleren Verticalen erzeugten Spannungszahlen angeschrieben. Dieselben sind jedoch nach § 44 für die Verticalen 4 und 6 nicht von weiterem Interesse, da die aus dem Belastungsfall $[V_7]_{\min}$ und $[V_4]_{\max}$ folgenden Inanspruchnahmen von — 17200 Kilogr. gegen jene überwiegen; für die Verticale 5 gilt indessen die durch die Gegendiagonalen erzeugte Inanspruchnahme als Maximalinanspruchnahme. Es mag dabei darauf aufmerksam gemacht werden, dass die beiden Verticalen 4 und 6 (Fig. **1**) die Pressung von 750 Kilogr. durch das Anbringen von Gegendiagonalen in Fig. **2** ganz verlieren. Wie auf Tafel **4** ersichtlich, kommt für den Belastungsfall $[V_4]_{min}$, welcher in der Verticale 4 der Fig. **1** die Pressung von 750 Kilogr. erzeugt, in Fig. **2** die Gegendiagonale R_5'' zur Wirkung, weil für die letztere die Verticalkraft negativ ist. Die Inanspruchnahme — 750 Kilogr. der Verticale 4 setzte die Diagonale R_5' als thätig voraus. Die gerade Linie abc (Tafel **4**) ergiebt die betreffende Verticalkraft $[V_x]_{V_{4\,min}}$ (siehe § 29).

Alle übrigen Inanspruchnahmen werden nach § 44 durch das Anbringen von Gegendiagonalen nicht alterirt, so dass die beiden Gurten der Fig. **2** wiederum genau die in Fig. **1** eingetragenen Spannungszahlen erhalten.

Nach den eingetragenen Inanspruchnahmen repräsentirt daher Fig. **2** einen Träger mit lauter gezogenen Diagonalen und gedrückten Verticalen.

Fahrbahn auf der unteren Gurt. Fig. **3** und **4**.

§ 51. Die beiden Figuren **3** und **4** zeigen dieselben Systeme Fig. **1** und **2** mit derselben Wandeintheilung unter veränderter Lage der Fahrbahn. Die letztere hat auf die Inanspruchnahmen der Diagonalen und Gurten keinen Einfluss, sondern macht sich nach § 18 nur für die Verticalen geltend. Es wird sich daher hier nur um die Aufstellung der Spannungszahlen der Verticalen handeln, die Inanspruchnahmen der übrigen Constructionsglieder sind in Fig. **1** und **3**, sowie Fig. **2** und **4** einander gleich.

Fig. **3**. Träger ohne Gegendiagonalen.

Abgesehen von den Verticalen der beiden Auflager und derjenigen im Trägermittel ergeben sich ad Fig. **3** die Inanspruchnahmen der Verticalen der ersten Trägerhälfte aus den Formeln (176) und (177), und diejenigen der zweiten Trägerhälfte aus den Formeln (180) und (181); dagegen ergeben sich die Inanspruchnahmen der beiden Auflagerverticalen aus Gleichung (183) und die der Verticale auf dem Trägermittel nach Gleichung (90ª) oder (92). Dass die Tafel **4** für die Gleichung (183) hier trotz der Vernachlässigung von $\frac{kc}{8n}$ ein der Annahme von Lastpunkten entsprechendes genaues Resultat liefert, hat darin seinen Grund, dass man, die Relation der Gleichung (183) benutzend, auf Tafel **4** den Werth $-[V_{10}]_{min}$ ganz genau einschrieb.

Fig. **4**. Träger mit Gegendiagonalen.

Führt man dagegen die beiden Gegendiagonalen R_5'' und R_6' in Fig. **4** ein und setzt man für diese und die beiden Hauptdiagonalen R_5' und R_6'' voraus, dass sie einen Druck zu übertragen nicht im Stande seien, so wird durch die Beanspruchung der Gegendiagonale R_5'' die Verticale 4 und durch die Beanspruchung der Gegendiagonale R_6' die Verticale 6 weder Spannung noch Pressung erfahren, also wie die Verticale 5 in Fig. **3** spannungslos in der Verbindung sitzen. Dieser Zustand tritt für die Verticale 4 ein, bei der Belastung aller Knotenpunkte vom 0. bis incl. 4.; für die Verticale 6 bei Belastung aller Knotenpunkte vom 6. bis incl. 10. Die Verticale 5 auf dem Trägermittel erhält dagegen beim Eintreten der einen oder anderen Gegendiagonale nach Gl. (177) oder (181) beide Mal eine Inanspruchnahme von —4600 Kilogr., während in den beiden Verticalen 4 und 6 der Fig. **4** die Zugspannungen von 4600 Kilogr. aus Fig. **3** verschwinden.

Diese durch das Anbringen der Gegendiagonalen geänderten Inanspruchnahmen der drei mittleren Verticalen berücksichtigend, sind in Fig. **4** aus Fig. **3** die Spannungszahlen eines Trägers mit Gegendiagonalen eingetragen, und zwar eines solchen mit lauter gezogenen Diagonalen und gedrückten Verticalen.

Fahrbahn zwischen beiden Gurten. Fig. **5**.

Fig. **5**. Träger mit Gegendiagonalen.

Hinsichtlich der Inanspruchnahmen der Diagonalen und Gurten ist nichts Neues zu erinnern, diejenigen der Verticalen ermitteln sich aus den Inanspruchnahmen der Verticalen Fig. **2** und Fig. **4** (siehe § 18).

β. Träger nach dem System Fig. 36 bis 38.
(Tafel **6**.)

§ 52. Nach den vorigen Erörterungen erscheint es unnöthig, die Resultate der Tafel **6** ausführlich zu erklären. Dieselben berechnen sich nach Tafel **4** und den Formeln § 43 und § 48. Aus den Spannungszahlen, welche nach denselben Massnahmen wie für Tafel **5** auf Tafel **6** eingetragen sind, geht hervor, dass die beiden Auflagerverticalen und die obere Gurt im ersten und letzten Feld in Fig. **3** und **4** vollständig fehlen dürfen, und werden dieselben bei vorliegendem System auch häufig weggelassen.

Die Träger Fig. 2, 4 und 5 sind solche mit Gegendiagonalen, und zwar mit lauter gedrückten Diagonalen und gezogenen Verticalen, abgesehen von den beiden Auflagerverticalen. Um diese Bedingung zu erfüllen, müssen die sämmtlichen Diagonalen der beiden mittleren Felder unfähig sein, Zugspannungen zu übertragen. Dieselben dürfen also nicht mit den Gurten befestigt, sondern müssen stumpf gegen diese gestossen werden. Construirt man sämmtliche Diagonalen aus Holz, so erhält man den s. g. Howe'schen Träger, wenn man dieselben stumpf gegen die Gurten stösst, und um die Diagonalen an den Knotenpunkten am Ausweichen zu verhindern, in jedem Feld eine Gegendiagonale einzieht.

2. Träger mit doppeltem System.

§ 53. Nach § 6 hat man die Träger mit mehrfachen Systemen zunächst in ihre Einzelsysteme zu zerlegen, jedes System einzeln zu berechnen, und darnach alle zu dem Gesammtträger wieder zu vereinigen. Man macht alsdann bezüglich der Einzelsysteme die Annahme, dass jedes von ihnen gleichviel von der Gesammtlast zu tragen habe, eine Annahme, deren Zutreffen zwar wesentlich durch die Ausführung der Nietung etc. bedingt wird, an deren Stelle man jedoch keine geeignetere zu setzen vermag.

a. Träger ohne Verticalen.

(Tafel 7.)

Fahrbahn auf der oberen Gurt. Fig. 2 bis 4.

Fig. 4 stellt einen Träger mit doppeltem System dar, welcher behufs seiner Berechnung in die beiden Einzelsysteme Fig. 2 und 3 zu zerlegen und aus der Vereinigung dieser beiden Träger nach dem System Fig. 25 des Textes als entstanden zu betrachten ist.

Macht man für den Gesammtträger die gleichen Annahmen über Stützweite, Felderzahl, Höhe, Belastung und Eigengewicht, wie in § 48 für die darunter folgenden Fachwerkträger, unter der Voraussetzung, dass an dem Eigengewicht $p = 3000$ Kilogr. das Gewicht der Fahrbahn mit 600 Kilogr. participirt, so betragen mit den in § 39 gewählten Bezeichnungen die der Berechnung jedes Theilsystems (Fig. 2 und 3) zu Grunde zu legenden Daten:

$$l = 10,\ h = 1,\ p'' = 300,\ p' = 1200,\ k = 3000.$$

Durch die Berechnung aus den in Fig. 27 des Textes eingetragenen Functionen wird allerdings der thatsächlichen Vertheilung der Last auf die einzelnen Knotenpunkte nicht genau Rechnung getragen. Während unter der Annahme, dass sich das Trägergewicht auf die obere und untere Gurt zu gleichen Theilen vertheilt, der obere Knotenpunkt 1 nach Fig. **4** eine Belastung von:

$$1200 + 600 + 6000 = 7800 \text{ Kilogr.}$$

erhält, trifft denselben aus Fig. **2** nur eine solche von:

$$(600 + 300 + 3000) \,.\, \frac{3}{2} = 5850 \text{ Kilogr.}$$

Wir sehen indessen von diesem Umstande ab, und berechnen die Functionen der äusseren Kräfte nach den in Fig. **27** eingetragenen Daten, wobei die Verticalkräfte V betreffend, sogleich die Werthe $\frac{V}{\sin\alpha}$ construirt werden können, da die Neigung der Diagonalen überall eine constante, nämlich $\frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{2} = 1{,}414$ ist, und die Verticalkräfte als solche nicht direct gebraucht werden. Man erhält ad $\frac{M'_m}{h}$ und $\frac{V'_m}{\sin\alpha}$:

$$\frac{p'\,l}{2\sin\alpha} = \frac{1200 \,.\, 10}{2} \cdot 1{,}414 = \;.\;.\;.\; 8484 \text{ Kilogr.,}$$

$$\frac{p'\,l^2}{8\,h} = \frac{1200 \,.\, 10^2}{8 \,.\, 1} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 15000 \quad „$$

dagegen ad $\frac{[V''_m]_{\min}}{\sin\alpha}$ und $\frac{[M''_m]_{\max}}{h}$:

$$\frac{p''\,l}{k} = \frac{300 \,.\, 10}{3000} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1$$

$$\frac{p''\,l}{2\,k}\,\frac{(p''+k)}{\sin\alpha} = \frac{300 \,.\, 10 \,.\, 3300}{2 \,.\, 3000} \,.\, 1{,}414 = 2333 \text{ Kilogr.,}$$

$$\frac{p''\,l}{2\sin\alpha} = \frac{300 \,.\, 10}{2} \,.\, 1{,}414 = \;.\;.\;.\;.\; 2121 \quad „$$

$$\frac{(p''+k)\,l}{2\sin\alpha} = \frac{(300+3000) \,.\, 10}{2} \,.\, 1{,}414 = 23331 \quad „$$

$$\frac{(p''+k)\,l^2}{8\,h} = \frac{(300+3000) \,.\, 10^2}{8 \,.\, 1} = \;.\;.\; 41250 \quad „$$

Mit diesen numerischen Werthen ergeben sich die auf Tafel **7** Fig. **1** aufgetragenen Functionen:

$$\frac{V'_m}{\sin\alpha};\; \frac{M'_m}{h};\; \frac{[V''_m]_{\min}}{\sin\alpha} \text{ und } \frac{[M''_m]_{\max}}{h},$$

alle jeweils nur für ein System geltend.

Der in Betreff der Verticalkraft $\frac{[V''_m]_{\min}}{\sin\alpha}$ durch die Annahme einer gleichförmig vertheilten Last gegenüber der Annahme von concentrirten Lasten begangene Fehler beträgt nach Gleichung (112): $\frac{k c_m^2}{8 l \sin \alpha}$. Abgesehen von dem ersten und letzten Feld des Systems Fig. **2** beträgt die Entfernung der Knotenpunkte der mobilen Last für beide Systeme $c = 2$. Daher beträgt die Correctur in Betreff der Inanspruchnahmen der Diagonalen: $\frac{k c_m^2}{8 l \sin \alpha} = \frac{3000 . 4 . 1{,}414}{8 . 10}$, also 212 Kilogr. Dieselbe ist nach Gleichung (112) auf Tafel **7** Fig. **1** durch die Linie $a b$ ausgeführt.

Die Addition der einzelnen zusammengehörigen Functionen wird einfach wie beim Crumlin-Viaduct Tafel **2** nach Fig. **27** des Textes vorgenommen und bedarf keiner weiteren Erklärung. In Bezug auf die Inanspruchnahme der Diagonalen aus $\frac{[V_m]_{\min}}{\sin \alpha}$ beziehen sich alle ausgezogenen und mit einer Schraffur versehenen Staffeln auf das Theilsystem Fig. **2**; dagegen die unterbrochen gezeichneten und den vorigen entgegengesetzt schraffirten Staffeln auf das Theilsystem Fig. **3**. Hinsichtlich der Gurtspannungen $\frac{[M_m]_{\max}}{h}$ gilt das Sehnenpolygon auf der rechten Trägerhälfte für das System Fig. **2**; das Polygon links für das System Fig. **3**.

Ausserdem gilt die erste Lage der Abscissenachse für die Inanspruchnahme der Gurten; die corrigirte Lage $a b$ derselben dagegen für die Inanspruchnahmen der Diagonalen. Das Eintragen der Spannungszahlen der Gurten und Diagonalen in die Systeme Fig. **2** und **3** geschieht nach den allgemeinen Formeln (154) bis (161) und bedarf das Zusammensetzen beider Systeme zu Fig. **4** keiner weiteren Erklärung, als dass sich die Spannungszahlen der Gurten beider Theilsysteme Fig. **2** und **3** für ein gemeinschaftliches Glied des Gesammtträgers Fig. **4** addiren.

Unter Berücksichtigung, dass das Trägergewicht zur Hälfte auf der oberen und zur Hälfte auf der unteren Gurt ruht, rechnen sich die beiden Auflagerverticalen ad Fig. **2** nach Gleichung (184) zu: $1500 + 300 + 150 = 1950$ Kilogr. Pressung, ad Fig. **3** nach Gleichung (182) zu: $\frac{1200 + 300 + 3000}{2} . 10 - 300 = 22200$ Kilogr. Pressung. Darnach ergiebt sich für die beiden Auflagerverticalen der Fig. **4** eine Pressung von:

$$22200 + 1950 = 24150 \text{ Kilogr.}$$

Fahrbahn auf der unteren Gurt. Fig. **5**.

Fig. **5** stellt den vorigen Träger mit veränderter Lage der Fahrbahn dar. Wird das Trägergewicht als zur Hälfte auf der oberen und zur Hälfte auf der unteren Gurt liegend angenommen, so erleidet die Auflagerverticale des Theilsystems Fig. **2**, Gleichung (185), eine Pressung von 300 Kilogr., die Auflagerverticale des Systems Fig. **3** dagegen nach Gleichung (183) eine Pressung von $\frac{1200 + 300 + 3000}{2} \,.\, 10 - (300 + 150 + 1500) = 20550$ Kilogr., und endlich die des Gesammtträgers Fig. **5** eine Pressung von $300 + 20550 = 20850$ Kilogr. Aus einem Vergleich der aus Fig. **1** in Fig. **4** und **5** eingetragenen Spannungszahlen der Diagonalen und Gurten ist ersichtlich, dass sich dieselben in beiden Systemen vertauschen, übrigens eine Thatsache, welche dem Satze, dass die Inanspruchnahmen der Gurten und Diagonalen von der Lage der Fahrbahn unabhängig sind, nicht widerspricht, da die Träger Fig. **4** und **5** aus der Addition verschiedener Systeme hervorgegangen sind.

b. Träger mit gekreuzten Diagonalen und Verticalen.
(Tafel **8**.)

Fahrbahn auf der oberen Gurt. Fig. **1** bis **6**.

Fig. **3** und **6** zeigen ein und denselben Träger, welchen man entweder in die beiden Systeme Fig. **1** und **2** oder Fig. **4** und **5** zerlegen kann. Beide Träger Fig. **3** und **6** sind in ihrer Anordnung gleich, allein die Spannungszahlen, welche aus der Zusammensetzung der entsprechenden Theilsysteme Fig. **1** und **2** zu Fig. **3** und Fig. **4** und **5** zu Fig. **6** erfolgen, geben hinsichtlich der Verticalen (Fig. **3** und **6**) verschiedene Resultate.

Unter der Annahme, dass das Gesammteigengewicht des Trägers in den Knotenpunkten der mobilen Last angreife, und dass bezüglich der Grösse der Belastungen und Längenausdehnungen des Trägers Fig. **3** resp. **6** die Werthe:

$$p = 3000, \quad k = 6000, \quad h = 1, \quad n = 10, \quad l = 10$$

gelten, erhält man die Spannungszahlen der Diagonalen und Gurten der Theilsysteme Fig. **1** und **2** nach Gleichungen (154) bis (161), und die der Fig. **4** und **5** nach Gleichungen (156), (157), (160), (161), (170) bis (173), wenn man sämmtliche in Tafel **4** eingetragenen Werthe durch 2 dividirt und diese Resultate nach nunmehr unnöthig zu wiederholenden Normen einträgt. Die Inanspruchnahmen der Auflagerverticalen rechnen sich nach Gleichungen (182) und (184), die anderen Verticalen der Systeme Fig. **1** und **2** nach Gleichung (166), die der Systeme Fig. **4** und **5** nach Gleichungen (174), (175), (178) und (179). Bei der Zusammensetzung der einzelnen Systeme zu dem Gesammtträger wird hinsichtlich der Diagonalen und Gurtungen nichts Neues, dagegen hinsichtlich der Verticalen der Systeme Fig. **4** und **5** zu erwähnen sein, dass die durch die Vereinigung beider Systeme zu Fig. **6** zusammenfallenden Verticalen eine Inanspruchnahme gleich der algebraischen Summe derjenigen der Systeme Fig. **4** und **5** erleiden (wobei sich also Spannungszahlen von verschiedenem Vorzeichen subtrahiren). Nur müssen hierbei die gleichzeitigen Grenzen der Inanspruchnahmen addirt werden; also für Fig. **4** und **5** einmal diejenigen, welche sich aus $[V_m]_{min}$, das andere Mal diejenigen, welche sich aus $[V_m]_{max}$ ergeben. In Fig. **4** und **5** sind die ersteren vor, die letzteren hinter die Verticalen gestellt, und in Fig. **6** nur die endgültigen grössten Inanspruchnahmen der Verticalen eingetragen, wie sie sich aus der einen oder anderen Summe ergeben. Da man nun über die thatsächlich sich vollziehende Zerlegung in Theilsysteme nicht Herr ist, so wird man der Berechnung der Verticalen die grössten Werthe deren Inanspruchnahmen aus Fig. **3** und **6** zu Grunde legen, also im vorliegenden Fall die Pressungen von 4500 Kilogr. als Maximal-Inanspruchnahmen für die Verticalen gelten lassen müssen.

Fahrbahn auf der unteren Gurt, oder zwischen den Gurten.
Fig. **7** und **8.**

Diese beiden Figuren zeigen denselben Träger (Fig. **3**) mit veränderter Lage der Fahrbahn; es behalten alle Constructionsglieder ausser den Verticalen dieselben Spannungszahlen. Hinsichtlich der Spannungszahlen der Verticalen gelten die eingetragenen Werthe.

Ist nun schon die Verschiedenheit der Spannungszahlen der Fig. **3** und **6** für ein und denselben Träger wenig Vertrauen erregend, so wird man um so weniger zu der vorliegenden Construction greifen, als die Annahme, dass ad Fig. **3** die Diagonalen die eine, und die Verticalen die andere Hälfte der mobilen Last zu tragen haben, von der Ausführung total abhängig wird.

c. Fachwerkträger mit doppeltem System.

(Tafel **9** und **10.**)

Wir beschränken uns bei den vorliegenden Trägern, denen unter den doppelten Systemen der Vorzug gebührt, auf die Angabe der zur Verzeichnung der Parabeln $[V_x']_{\min}$ und $\frac{[M_x']_{\max}}{h}$ Tafel **9** nothwendigen numerischen Daten. Setzt man für jedes Einzelsystem:

$$p = 1500,\quad k = 3000,\quad h = 1,\quad l = 10,\quad n = 10,$$

so erhält man:

$$\frac{q l^2}{8 h} = \frac{4500 \,.\, 10^2}{8 \,.\, 1} = \ldots\ldots 56250 \text{ Kilogr.},$$

$$\frac{p l}{k} = \frac{1500 \,.\, 10}{3000} = \ldots\ldots 5$$

$$\frac{p l}{2 k}(p + k) = \frac{1500 \,.\, 10 \,.\, 4500}{2 \,.\, 3000} = 11250 \text{ Kilogr.},$$

$$\frac{p\, l}{2} = \frac{1500 \,.\, 10}{2} = \ldots\ldots 7500 \quad ,,$$

$$\frac{q\, l}{2} = \frac{4500 \,.\, 10}{2} = \ldots\ldots 22500 \quad ,,$$

und daraus die auf Tafel **9** aufgetragenen Parabeln. Daselbst sind alle Inanspruchnahmen, welche sich auf das Theilsystem Fig. **1** der Tafel **10** beziehen, ausgezogen, die für das System Fig. **2** derselben Tafel unterbrochen gezeichnet. Die Spannungszahlen sind nach den bekannten Formeln und Normen in die Figuren **1** bis **8** der Tafel **10** eingetragen.

C. Die Parabolischen Träger.

I. Allgemeine Theorie.

§ 54. Es dürfte zweifelhaft sein, ob die Parabolischen Träger ihre Entstehung gewissen Anforderungen an die Vertheilung der Spannungen in ihren Constructionsgliedern verdanken, oder ob man die Träger, deren Gurtungen nach einer Parabel verlaufen, von welchen man ohne weitere Rechnung einen innigen Zusammenhang mit den als Parabel verlaufenden Functionen der Momente und Verticalkräfte erwarten konnte, direct untersucht und deren Eigenschaften alsdann festgestellt hat.

Sei dem, wie wolle, die besonderen Eigenschaften der Parabelträger sind so mannigfaltig, dass wir hier vorziehen müssen, aus der Zugrundelegung der Parabolischen Gurtungsformen die Eigenschaften des Trägers abzuleiten. Wollte man auch **eine** specielle Anforderung über die Vertheilung der Spannungen der Ermittelung der Form des Trägers zu Grunde legen, so müsste man doch alle übrigen Eigenschaften aus der Trägerform selbst ableiten.

Parabolische Träger werden diejenigen Fachwerkträger genannt, deren Verticalen den Ordinaten einer Parabel der Gleichung:

$$y = \frac{4\,H}{l^2}\,(l - x)\,x \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (186)$$

entsprechen, in welcher Gleichung der Coordinatenursprung im Auflager A vorausgesetzt und H die Länge der Scheitelordinate der Gurtparabel im Trägermittel ist, sofern die eine Gurt horizontal, oder $H = H_o + H_u$ gleich der Summe der Scheitelordinaten der beiden Gurtparabeln, wenn beide Gurten nach einer Parabel gekrümmt sind. Die Knotenpunkte liegen also in jedem Falle auf einer Parabel, die Gurten verlaufen daher von Knotenpunkt zu Knotenpunkt als das sich daraus ergebende Sehnenpolygon, und bedingen einen Träger, dessen Diagonalen und Verticalen (die letzteren, im Falle sie zwischen zwei gleichgerichteten Diagonalen liegen) sich nach den Belastungsfällen (51), (52), (77) bis (80), Fall 1, berechnen.

Unter Voraussetzung einer durch den ganzen Träger constanten Felderlänge c, so dass:

$$l = n c \quad \text{und} \quad l_m = m c,$$

ergeben sich aus Gleichung (186) die Längen von vier aufeinander folgenden Verticalen:

$$h_{m-2} = \frac{4H}{n^2}(n - m + 2)(m - 2) \quad \ldots\ldots \quad (187)$$

$$h_{m-1} = \frac{4H}{n^2}(n - m + 1)(m - 1) \quad \ldots\ldots \quad (188)$$

$$h_m = \frac{4H}{n^2}(n - m)\, m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (189)$$

$$h_{m+1} = \frac{4H}{n^2}(n - m - 1)(m + 1) \quad \ldots\ldots \quad (190)$$

Man unterscheidet gewöhnlich drei Arten parabolischer Träger, je nachdem die untere oder die obere Gurt nach einer Parabel gekrümmt und die andere Gurt der darauf liegenden Fahrbahn wegen horizontal ist, oder endlich beide Gurten nach einer Parabel gekrümmt sind, während die Fahrbahn auf der einen oder andern oder zwischen beiden Gurten liegt. Wir theilen jedoch unsere Untersuchungen hier nicht nach diesen Trägerformen, sondern besser nach den verschiedenen Constructionsgliedern: Gurten, Diagonalen und Verticalen.

1. Die Gurten.

§ 55. Da die Parabolischen Träger jeweils mit Verticalen angeordnet werden, so folgen die Inanspruchnahmen der Gurten, gleichviel, ob die eine oder andere oder keine derselben horizontal ist, für den Belastungsfall (40) aus den Gleichungen (57), (58), (60) und (61), und zwar mit Berücksichtigung der Gleichungen (188) und (189) und der aus Gleichungen (114) und (120) folgenden Momente:

$$[M_m]_{\max} = \frac{q\, c^2}{2}(n - m)\, m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (191)$$

und:

$$[M_{m-1}]_{\max} = \frac{q\, c^2}{2}(n - m + 1)(m - 1) \quad \ldots \quad (192)$$

zu:

$$[S'_m]_{\min} = -\frac{q\, l^2}{8\, H}\,\frac{1}{\cos\beta'_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (193)$$

$$[U'_m]_{max} = + \frac{q\,l^2}{8\,H} \frac{1}{\cos\gamma'_m} \quad \dots\dots\dots \quad (194)$$

$$[S''_m]_{min} = - \frac{q\,l^2}{8\,H} \frac{1}{\cos\beta''_m} \quad \dots\dots\dots \quad (195)$$

$$[U''_m]_{max} = + \frac{q\,l^2}{8\,H} \frac{1}{\cos\gamma''_m} \quad \dots\dots\dots \quad (196)$$

Bezeichnet man den Winkel der oberen Gurt gegen den Horizont kurz mit β und den entsprechenden Winkel der unteren Gurt mit γ, so folgt:

$$[S'_m]_{min} = [S''_m]_{min} = - \frac{q\,l^2}{8\,H} \frac{1}{\cos\beta_m} \quad \dots\dots \quad (197)$$

$$[U'_m]_{max} = [U''_m]_{max} = + \frac{q\,l^2}{8\,H} \frac{1}{\cos\gamma_m} \quad \dots\dots \quad (198)$$

In dem besonderen Falle, da die obere Gurt horizontal, also $\beta_m = 0$, ergiebt sich:

$$[S'_m]_{min} = [S''_m]_{min} = - \frac{q\,l^2}{8\,H} \quad \dots\dots\dots \quad (199)$$

und im Falle die untere Gurt horizontal, also $\gamma_m = 0$:

$$[U'_m]_{max} = [U''_m]_{max} = + \frac{q\,l^2}{8\,H} \quad \dots\dots\dots \quad (200)$$

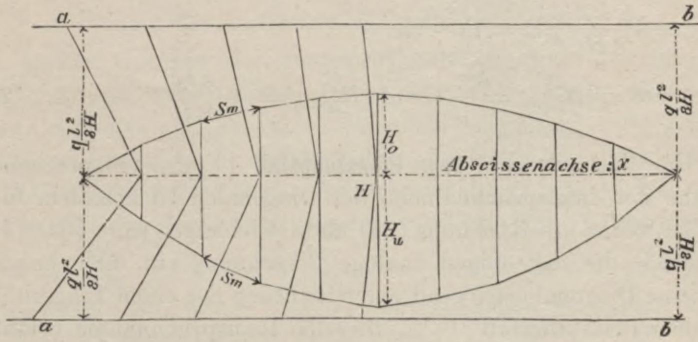
Die Formeln (197) bis (200) erweisen, dass die Maximalinanspruchnahmen der Gurten von der Richtung der Diagonalen unabhängig und für eine eventuell horizontale Gurt eines Parabolischen Trägers constant sind. Dasselbe gilt von den Minimalinanspruchnahmen, welche aus obigen Formeln einfach durch Substitution von p an Stelle von q folgen.

Um bei schon aufgetragenem Trägerschema die Ausrechnung obiger Formeln sich zu ersparen, verfährt man am geeignetsten, wie in Fig. **39** angegeben: Man ziehe im Abstand $\frac{q\,l^2}{8\,H}$ von der Abscissenachse eine Linie *ab* parallel zu dieser, so werden die Inanspruchnahmen der parabolischen Gurtsehnen bestimmt durch die Längen der Perpendikel auf den entsprechenden Gurtsehnen, gemessen zwischen der Abscissenachse und der Linie *a b*.

Die Ausrechnung obiger Inanspruchnahmen geschieht dagegen am einfachsten folgendermassen: Man erhält $\frac{1}{\cos\beta_m}$ resp. $\frac{1}{\cos\gamma_m}$ $= \frac{s_m}{c}$ gleich der Länge der m. parabolischen oberen oder unteren

Gurtsehne, dividirt durch die constante Felderweite c. Daraus ergeben sich die Maximalinanspruchnahmen der Gurten, wenn man den Werth von $\frac{q l^2}{8 H c}$ mit der Länge der entsprechenden Gurtsehne multiplicirt.

Fig. 39.



Dass die Maximalinanspruchnahmen der parabolischen Gurten vom Auflager gegen die Trägermitte hin wachsen, folgt unmittelbar aus Gleichungen (197) und (198).

2. Die Diagonalen.

§ 56. Mit Hülfe der Gleichungen (59) und (62), (188) und (189), (191) und (192) ergiebt sich die für die Diagonalen bemerkenswerthe Eigenschaft, dass dieselben bei total belasteter und unbelasteter Brücke spannungslos sind, da mit obigen Gleichungen für den Belastungsfall $[M_m]_{\max}$:

$$\cos \alpha'_m R'_m = -\cos \alpha''_m R''_m = \frac{[M_m]_{\max}}{h_m} - \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h_{m-1}} = 0 \quad . \; . \quad (201)$$

und analog diesem für den Belastungsfall $[M_m]_{\min}$:

$$\cos \alpha'_m R'_m = -\cos \alpha''_m R''_m = \frac{[M_m]_{\min}}{h_m} - \frac{[M_{m-1}]_{\min}}{h_{m-1}} = 0 \quad . \; . \quad (202)$$

Das constante Eigengewicht p wird also bei keiner Belastung des Trägers in den Spannungszahlen der Diagonalen vertreten sein, also aus den Endresultaten jeweils verschwinden.

Es ergiebt sich daher **für den Belastungsfall** $[V_m]_{\min}$ nach Beziehung (52) und Gleichungen (59) und (62):

$$\cos \alpha'_m [R'_m]_{\min} = -\cos \alpha''_m [R''_m]_{\max} = \frac{1}{h_m} [M_m]_{V_m \min} - \frac{1}{h_{m-1}} [M_{m-1}]_{V_m \min},$$

und daraus mit den Gleichungen (147) und (148), (188) und (189):

$$\cos \alpha'_m \, [R'_m]_{\min} = - \cos \alpha''_m \, [R''_m]_{\max}$$

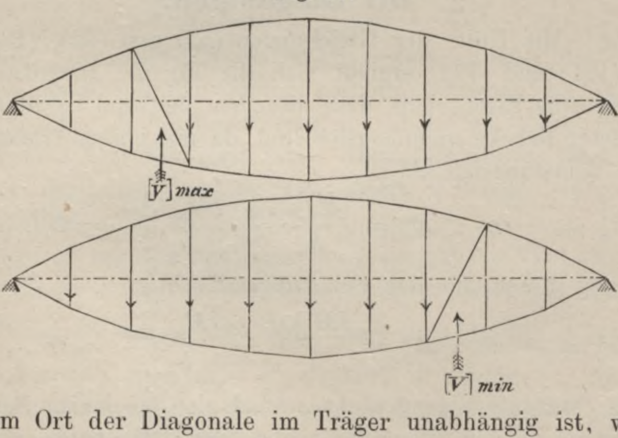
$$= \frac{c^2 k n}{8 H} \left[\frac{(n-m)(m-1)m}{(n-m)m} - \frac{(n-m+1)(m-1)m}{(n-m+1)(m-1)} \right]$$

$$= \frac{c^2 k n}{8 H} \, [(m-1)-m],$$

also: $$\cos \alpha'_m \, [R'_m]_{\min} = - \cos \alpha''_m \, [R''_m]_{\max} = - \frac{k l c}{8 H} \quad \ldots\ldots \quad (203)$$

Um darnach die **dem Belastungsfall** $[V_m]_{\max}$ entsprechenden Werthe der Inanspruchnahmen der Diagonalen zu erhalten, führe man entweder mit Beziehung (51) und Gleichungen (59), (62), (152) und (153) die der obigen analoge Berechnung ein oder beachte, dass eine Diagonale m irgend einer Richtung der einen Trägerhälfte aus dem Belastungsfall $[V_m]_{\max}$ dieselbe Inanspruchnahme erfahren wird, als die symmetrisch gelegene Diagonale der entgegengesetzten Richtung der andern Trägerhälfte aus dem Belastungsfall $[V_m]_{\min}$ und umgekehrt (siehe Fig. **40**). Da die letztere nach Gleichung (203)

Fig. 40.



von dem Ort der Diagonale im Träger unabhängig ist, weil die Horizontalcomponenten der Diagonalspannungen durch den ganzen Träger für jedes m constant sind, so ergiebt sich mit Beziehung (51) und Gleichung (203) **aus dem Belastungsfall** $[V_m]_{\max}$:

$$\cos \alpha'_m \, [R'_m]_{\max} = - \cos \alpha''_m \, [R''_m]_{\min} = + \frac{k l c}{8 H} \quad \ldots \quad (204)$$

Demnach wird **für den Belastungsfall** $[V_m]_{\min}$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{die Diagonale } R'_m \text{ gedrückt}\\ \text{die Diagonale } R''_m \text{ gezogen}\end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (205)$$

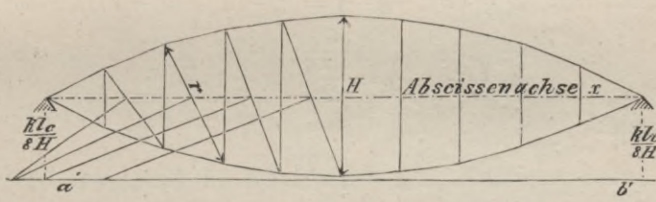
dagegen **für den Belastungsfall** $[V_m]_{\max}$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{die Diagonale } R'_m \text{ gezogen}\\ \text{die Diagonale } R''_m \text{ gedrückt}\end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (206)$$

Die beiden Grenzen der Inanspruchnahmen sind also für jede Diagonale von verschiedenem Vorzeichen, aber absolut genommen einander gleich. Sie erfordern daher bei Anordnung eines Trägers mit Gegendiagonalen in jedem Felde zwei gekreuzte Diagonalen.

Die Construction obiger Inanspruchnahmen ergiebt sich nach dem in § 55 für die Gurten angegebenen Verfahren, indem man im Abstand $\frac{k\,l\,c}{8\,H}$ von der Abscissenachse eine Linie $a'b'$ parallel zu dieser zieht. Man erhält alsdann die Inanspruchnahmen $\frac{k\,l\,c}{8\,H\,\cos\alpha}$ der Diagonalen als die Perpendikel auf den Diagonalen, gemessen zwischen der Abscissenachse und der Linie $a'b'$ (siehe Fig. **41**).

Fig. 41.



Die Ausrechnung obiger Inanspruchnahmen geschieht dagegen einfach durch Multiplication der Grösse: $\frac{k\,l}{8\,H}$ mit der Länge r der Diagonalen, indem $\frac{c}{\cos\alpha} = r$.

Dass die Grenzen der Inanspruchnahmen der Diagonalen dem Absolutwerthe nach gegen die Trägermitte hin wachsen, folgt unmittelbar aus dem Vorigen.

3. Die Verticalen.

a. Parabelträger mit einfachen Diagonalen.

§ 57. Bezeichnet man hier die in den Gleichungen (65), (67), (69), (70) vorkommenden Werthe d' und d'' allgemein mit d, so ergiebt sich nach Gleichungen (65) und (70):

$$T''_{u_m} = -T'_{o_m} = V_{m+1} - \frac{M_m}{d}$$

und mit Gleichung (22):

$$T''_{u_m} = - T'_{o_m} = V_{m+1} - \frac{1}{d}\left[m c V_{m+1} + \Sigma_1^m (P_r \cdot l_r)\right]$$

$$= \left(1 - \frac{mc}{d}\right) V_{m+1} - \frac{1}{d} \Sigma_1^m (P_r \cdot l_r),$$

oder mit Gleichung (14):

$$T''_{u_m} = - T'_{o_m} = \left(1 - \frac{mc}{d}\right) \Sigma_{m+1}^{n-1} (P_r) - \left(1 - \frac{mc}{d}\right) \frac{1}{l} \Sigma_1^{n-1} (P_r \cdot l_r) - \frac{1}{d} \Sigma_1^m (P_r \cdot l_r),$$

oder indem: $\Sigma_1^{n-1} (P_r \cdot l_r) = \Sigma_1^m (P_r \cdot l_r) + \Sigma_{m+1}^{n-1} (P_r \cdot l_r)$

$$T''_{u_m} = - T'_{o_m} = \left(1 - \frac{mc}{d}\right) \Sigma_{m+1}^{n-1} \left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) - \left(1 + \frac{n - m}{d} c\right) \Sigma_1^m \left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right).$$

Bezeichnet man ferner die Belastungen aller Knotenpunkte

vom 1. bis m. mit πc,

vom $m + 1$. bis $n - 1$. mit φc,

so ergiebt sich: $\Sigma_{m+1}^{n-1} \left(P_r \cdot \frac{l - l_r}{l}\right) = \frac{\varphi c}{2n} (n - m - 1)(n - m)$

und: $\Sigma_1^m \left(P_r \cdot \frac{l_r}{l}\right) = \frac{\pi c}{2n} (m + 1) m.$

und damit:

$$T''_{u_m} = - T'_{o_m} =$$

$$= \frac{\varphi c}{2n} (n - m - 1)(n - m)\left(1 - \frac{mc}{d}\right) - \frac{\pi c}{2n} (m + 1) m \left(1 + \frac{n - m}{d} c\right) \tag{207}$$

Hieraus ergiebt sich mit Beziehung (6) und (77), wenn man setzt:

$$\pi = p \quad \text{und} \quad \varphi = (p + k)$$

ad $[V_{m+1}]_{\max}$

$$[T''_{u_m}]_{\max} = - [T'_{o_m}]_{\min} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\frac{kc}{2n} (n - m - 1)(n - m)\left(1 - \frac{mc}{d}\right) \\ &+ \frac{pc}{2n}\left[(n - m - 1)(n - m)\left(1 - \frac{mc}{d}\right) - (m + 1) m \left(1 + \frac{n - m}{d} c\right)\right] \end{aligned} \right\} \tag{208}$$

desgleichen mit Beziehung (7) und (78), wenn man setzt:

$$\pi = p + k \quad \text{und} \quad \varphi = p$$

ad $[V_{m+1}]_{\min}$

$$[T''_{\underset{m}{u}}]_{\min} = -[T'_{\underset{m}{o}}]_{\max} =$$

$$=\left\{\begin{aligned}&-\frac{kc}{2n}(m+1)\,m\left(1+\frac{n-m}{d}c\right)\\&+\frac{pc}{2n}\left[(n-m-1)(n-m)\left(1-\frac{mc}{d}\right)-(m+1)\,m\left(1+\frac{n-m}{d}c\right)\right]\end{aligned}\right\}\quad(209)$$

Analog dem Vorigen erhält man nach Gleichungen (67) und (69):

$$T''_{\underset{m}{o}} = -T'_{\underset{m}{u}} = V_m - \frac{M_m}{d}$$

und mit Gleichung (16):

$$T''_{\underset{m}{o}} = -T'_{\underset{m}{u}} = V_m - \frac{1}{d}\left[mc\,V_m + \Sigma_1^{m-1}(P_r \,.\, l_r)\right]$$

$$=\left(1-\frac{mc}{d}\right)V_m - \frac{1}{d}\Sigma_1^{m-1}(P_r \,.\, l_r),$$

oder mit Gleichung (13):

$$T''_{\underset{m}{o}} = -T'_{\underset{m}{u}} = \left(1-\frac{mc}{d}\right)\Sigma_m^{n-1}(P_r) - \left(1-\frac{mc}{d}\right)\frac{1}{l}\Sigma_1^{n-}(P_r \,.\, l_r) - \frac{1}{d}\Sigma_1^{m-1}(P_r \,.\, l_r),$$

oder indem: $\Sigma_1^{n-1}(P_r \,.\, l_r) = \Sigma_1^{m-1}(P_r \,.\, l_r) + \Sigma_m^{n-1}(P_r \,.\, l_r)$.

$$T''_{\underset{m}{o}} = -T'_{\underset{m}{u}} = \left(1-\frac{mc}{d}\right)\Sigma_m^{n-1}\left(P_r \,.\, \frac{l-l_r}{l}\right) - \left(1+\frac{n-m}{d}c\right)\Sigma_1^{m-1}\left(P_r \,.\, \frac{l_r}{l}\right),$$

bezeichnet man jetzt die Belastungen aller Knotenpunkte:

vom 1. bis $m-1$. mit πc,
vom m. bis $n-1$. mit φc,

so ergiebt sich:

$$\Sigma_m^{n-1}\left(P_r \,.\, \frac{l-l_r}{l}\right) = \frac{\varphi c}{2n}(n-m)(n-m+1),$$

und: $$\Sigma_1^{m-1}\left(P_r \,.\, \frac{l_r}{l}\right) = \frac{\pi c}{2n}m(m-1),$$

und daher: $$T''_{\underset{m}{o}} = -T'_{\underset{m}{u}} =$$

$$=\frac{\varphi c}{2n}(n-m)(n-m+1)\left(1-\frac{mc}{d}\right) - \frac{\pi c}{2n}m(m-1)\left(1+\frac{n-m}{d}c\right)\quad(210)$$

Hieraus folgt mit Beziehung (6) und (79), wenn man setzt:

$$\pi = p \quad \text{und} \quad \varphi = (p+k)$$

ad $[V_m]_{max}$

$$[T''_{\underset{m}{o}}]_{max} = -[T'_{\underset{m}{u}}]_{min} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{kc}{2n}(n-m)(n-m+1)\left(1-\frac{mc}{d}\right) \\ +\frac{pc}{2n}\left[(n-m)(n-m+1)\left(1-\frac{mc}{d}\right)-m(m-1)\left(1+\frac{n-m}{d}c\right)\right] \end{array} \right\} \quad (211)$$

Dagegen mit Beziehung (7) und (80), wenn man in Gleichung (210) setzt: $\pi = p + k$ und $\varphi = p$

ad $[V_m]_{min}$

$$[T''_{\underset{m}{o}}]_{min} = -[T'_{\underset{m}{u}}]_{max} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{kc}{2n}m(m-1)\left(1+\frac{n-m}{d}c\right) \\ +\frac{pc}{2n}\left[(n-m)(n-m+1)\left(1-\frac{mc}{d}\right)-m(m-1)\left(1+\frac{n-m}{d}c\right)\right] \end{array} \right\} \quad (212)$$

§ 58. Wendet man diese Formeln (208), (209), (211) und (212) nunmehr auf die verschiedenen Trägerformen an, so erhält man:

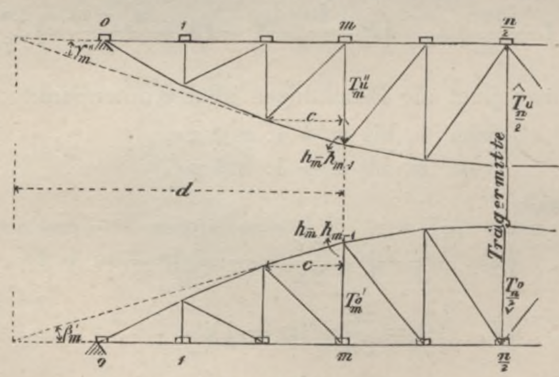
α. Für die Parabolischen Träger mit einer horizontalen Gurt.

Trägeranordnung der Fig. 42 und 43.

Die Inanspruchnahmen der Verticalen der ersten Trägerhälfte excl. der auf dem Trägermittel ergeben sich nach Gleichungen (208)

Fig. 42.

Fig. 43.



und (209), wenn man daselbst den aus der Proportion:

$$h_m : d = (h_m - h_{m-1}) : c$$

und aus den Gleichungen (188) und (189) folgenden Werth von d:

$$d = \frac{c\,(n-m)\,m}{n-2m+1} \text{ einführt:}$$

$$[T''_{\underset{m}{u}}]_{max} = -[T'_{\underset{m}{o}}]_{min} = \frac{kc}{2n}(mn - m^2 - n + 1) - pc \quad . \ . \quad (213)$$

$$[T''_{u\,m}]_{\min} = -[T'_{o\,m}]_{\max} = -\frac{kc}{2n}(mn - m^2 + n + 1) - pc. \quad (214)$$

Die in den beiden Gleichungen (213) und (214) vorkommende Function des Eigengewichtes giebt Aufschluss über die Inanspruchnahme der Verticalen bei total unbelastetem und total belastetem Träger. Für den ersteren Belastungsfall hat man in Gleichungen (213) und (214) $k = 0$ zu setzen, und erhält:

für den Belastungsfall $[M_m]_{\min}$: $T''_{u\,m} = -T'_{o\,m} = -pc$ . . (215)

und dem entsprechend:

für den Belastungsfall $[M_m]_{\max}$: $T''_{u\,m} = -T'_{o\,m} = -qc$ . . (216)

Diese Werthe repräsentiren nach Beziehung (93) und (94), Gleichungen (86) und (92) ebenfalls die der Berechnung der Verticale $T_{\frac{n}{2}}$ zu Grunde zu legenden Inanspruchnahmen:

$$[\hat{T}^u_{\frac{n}{2}}]_{\min} = -[\hat{T}^o_{\frac{n}{2}}]_{\max} = -qc \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (217)$$

$$[\hat{T}^u_{\frac{n}{2}}]_{\max} = -[\hat{T}^o_{\frac{n}{2}}]_{\min} = -pc \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (218)$$

Dieselben hätten ebenfalls aus den Gleichungen (87) und (91) mit $\beta_{\frac{n}{2}} = 0$ und $\gamma_{\frac{n}{2}} = 0$ gefolgert werden können, da nach Gleichungen (201) und (202) sämmtliche Diagonalen für die Belastungsfälle (93) und (94) spannungslos sind.

Trägeranordnung der Fig. 44 und 45.

Die Grenze der Inanspruchnahmen der Verticalen der ersten Trägerhälfte excl. der Verticale auf der Trägermitte ergeben sich

Fig. 44.

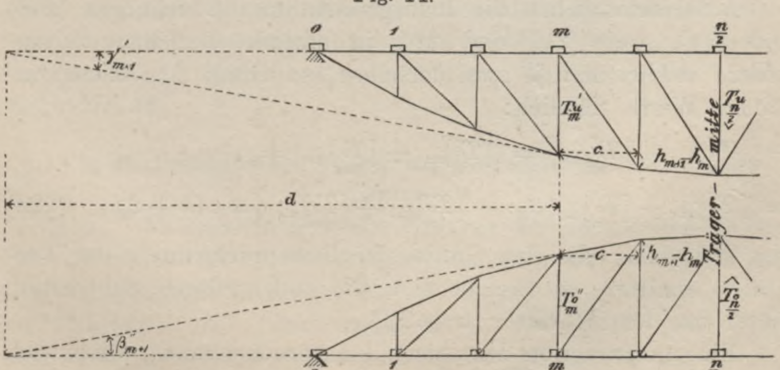


Fig. 45.

nach Gleichungen (211) und (212), wenn man daselbst den aus der Proportion:

$$h_m : d = (h_{m+1} - h_m) : c$$

und aus den Gleichungen (189) und (190) folgenden Werth von d:

$$d = \frac{c\,(n-m)\,m}{n-2\,m-1} \text{ einführt.}$$

$$[T''_{o\,m}]_{\max} = -\,[T'_{u\,m}]_{\min} = \frac{kc}{2\,n}(mn - m^2 + n + 1) + pc \;.\;. \quad (219)$$

$$[T''_{o\,m}]_{\min} = -\,[T'_{u\,m}]_{\max} = -\frac{kc}{2\,n}(mn - m^2 - n + 1) + pc. \quad (220)$$

Daraus erhält man:

für den Belastungsfall $[M_m]_{\min}$: $T''_{o\,m} = -\,T'_{u\,m} = +\,pc$ . . (221)

" " " $[M_m]_{\max}$: $T''_{o\,m} = -\,T'_{u\,m} = +\,qc$ . . (222)

und nach Beziehung (95) und (96) und Gleichungen (87) und (91), worin $\beta_{\frac{n}{2}} = 0$ und $\gamma_{\frac{n}{2}} = 0$.

$$[\hat{T}^{o}_{\frac{n}{2}}]_{\min} = -\,[T^{u}_{\check{\frac{n}{2}}}]_{\max} = +\,pc \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (223)$$

$$[\hat{T}^{o}_{\frac{n}{2}}]_{\max} = -\,[T^{u}_{\check{\frac{n}{2}}}]_{\min} = +\,qc \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (224)$$

Man erkennt aus den Gleichungen (213) und (220), sowie (214) und (219), dass die Grenzen der Inanspruchnahmen der Verticalen der Träger Fig. **42** bis **45** unabhängig von der Richtung der Diagonalen sind. Es folgen für die verschiedenen Richtungen der Diagonalen die gleichen Grenzen der Inanspruchnahmen der Verticalen nur aus verschiedenen Belastungen.

Ausserdem stehen die Inanspruchnahmen Gleichungen (213) und (214), sowie (219) und (220) in folgender Beziehung zu einander. Addirt man je zwei derselben, so erhält man einen constanten Werth, nämlich:

$$-\left\{[T''_{u\,m}]_{\max} + [T''_{u\,m}]_{\min}\right\} = \left\{[T'_{o\,m}]_{\max} + [T'_{o\,m}]_{\min}\right\} =$$

$$= \left\{[T''_{o\,m}]_{\max} + [T''_{o\,m}]_{\min}\right\} = -\left\{[T'_{u\,m}]_{\max} + [T'_{u\,m}]_{\min}\right\} = c\,(k + 2p) \quad (225)$$

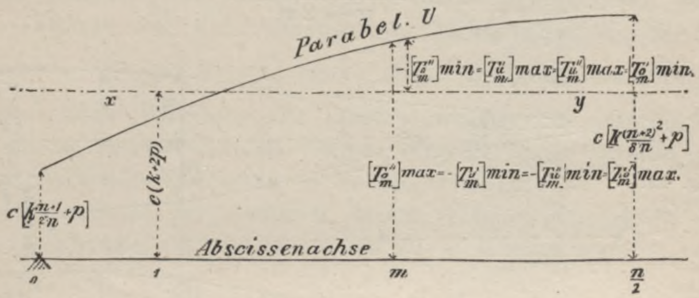
Hat man daher die eine Grenze der Inanspruchnahmen der Verticalen ermittelt, so ergiebt sich die andere durch Subtraction dieser von dem Werthe $c\,(k + 2p)$.

Eine Construction der obigen Inanspruchnahmen ergiebt sich einfach aus der Fig. **46**. Wie man sich überzeugt, bedeutet der

Ausdruck Gleichung (219) eine Parabel U, bestimmbar aus den Daten:

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } x = \frac{l}{2} = \frac{nc}{2}, \text{ Scheitelordinate } U_{\frac{l}{2}} = c\left[k\,\frac{(n+2)^2}{8n} + p\right] \\ &\text{„ } x = 0 \text{ und } x = l = nc, \text{ Ordinate } U_0 = U_l = c\left[k\,\frac{n+1}{2n} + p\right] \end{aligned}\right\} \quad (226)$$

Fig. 46.



Daraus ergeben sich alsdann mit Gleichungen (225), (213), (214), (219) und (220) die Werthe von:

$$[T_{o\,m}'']_{\max} = -\,[T_{u\,m}']_{\min} = -\,[T_{u\,m}'']_{\min} = [T_{o\,m}']_{\max}$$

als Ordinaten der Parabel U, bezogen auf deren ursprüngliche Abscissenachse, dagegen die Werthe von:

$$-\,[T_{o\,m}'']_{\min} = [T_{u\,m}']_{\max} = [T_{u\,m}'']_{\max} = -\,[T_{o\,m}']_{\min}$$

als Ordinaten der Parabel U, bezogen auf eine um den Abstand $c\,(k+2p)$ oberhalb der ursprünglichen Abscissenachse gezogene zweite Achse xy, sämmtliche Ordinaten positiv gerechnet, wenn sich die Parabel U oberhalb der zugehörigen Abscissenachse erhebt (siehe Fig. **46**).

β. Für die Parabolischen Träger mit zwei gleichen Parabolischen Gurten.

§ 59. Es ergeben sich die Grenzen der Inanspruchnahmen der Verticalen der ersten Trägerhälfte excl. der Verticale auf dem Trägermittel für die in Fig. **47** und **48** angenommene Lage der Fahrbahn nach Gleichungen (208), (209), (211) und (212), wenn man daselbst den aus den Figuren **47** und **48** zu entnehmenden Werth von:

$$d = \frac{h_m}{\operatorname{tg}\beta''_{m+1} + \operatorname{tg}\gamma''_m} = \frac{h_m}{\operatorname{tg}\beta'_m + \operatorname{tg}\gamma'_{m+1}}$$

einführt. Hierin ist mit Gleichungen (188) bis (190):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta'_m &= \operatorname{tg}\gamma''_m = \frac{2H}{n^2 c}(n - 2m + 1) \\ \text{und} \qquad \operatorname{tg}\beta''_{m+1} &= \operatorname{tg}\gamma'_{m+1} = \frac{2H}{n^2 c}(n - 2m - 1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (227)$$

also:

$$d = \frac{c(n-m)m}{n-2m}.$$

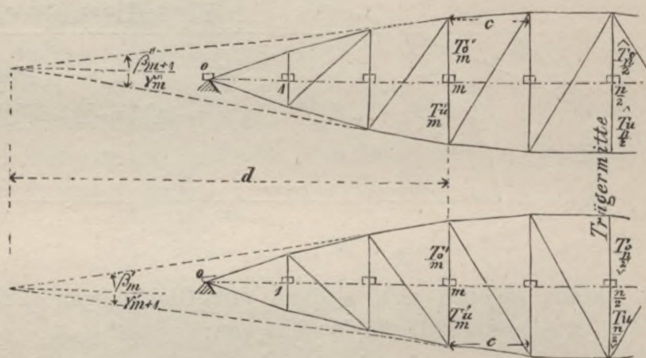


Fig. 47.

Fig. 48.

Daher:

$$[T''_{u\,m}]_{\max} = -[T'_{o\,m}]_{\min} = \frac{kc}{2n}(mn - m^2 - m) - \frac{pc}{2} \quad \ldots \ldots \quad (228)$$

$$[T''_{u\,m}]_{\min} = -[T'_{o\,m}]_{\max} = -\frac{kc}{2n}(mn - m^2 + n - m) - \frac{pc}{2} \quad . \quad (229)$$

$$[T''_{o\,m}]_{\max} = -[T'_{u\,m}]_{\min} = \frac{kc}{2n}(mn - m^2 + m) + \frac{pc}{2} \quad \ldots \ldots \quad (230)$$

$$[T''_{o\,m}]_{\min} = -[T'_{u\,m}]_{\max} = -\frac{kc}{2n}(mn - m^2 - n + m) + \frac{pc}{2} \quad . \quad (231)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man wiederum:

$$\text{für den Belastungsfall } [M_m]_{\min}\text{:} \quad \left.\begin{aligned} T''_{u\,m} &= -T'_{o\,m} = -\frac{pc}{2} \\ T''_{o\,m} &= -T'_{u\,m} = +\frac{pc}{2} \end{aligned}\right\} (232)$$

$$\text{für den Belastungsfall } [M_m]_{\max}\text{:} \quad \left.\begin{aligned} T''_{u\,m} &= -T'_{o\,m} = -\frac{qc}{2} \\ T''_{o\,m} &= -T'_{u\,m} = +\frac{qc}{2} \end{aligned}\right\} (233)$$

Endlich ergiebt sich für die Verticale im Trägermittel:

nach Beziehung (94) u. Gl. (86) u. (92) $[\widehat{T}^u_{\frac{n}{2}}]_{\max} = -[\underset{\vee}{T}^o_{\frac{n}{2}}]_{\min} = -\frac{pc}{2}$ (234)

" " (93) " " " " " $[\widehat{T}^u_{\frac{n}{2}}]_{\min} = -[\underset{\vee}{T}^o_{\frac{n}{2}}]_{\max} = -\frac{qc}{2}$ (235)

ferner:

nach Beziehung (95) u. Gl. (87) u. (91) $[\widehat{T}^o_{\frac{n}{2}}]_{\min} = -[\underset{\vee}{T}^u_{\frac{n}{2}}]_{\max}$, und zwar

für die Belastung des ganzen Trägers ausser der mittleren Verticale. Führen wir diese Ermittelung gleich allgemein für die Verticalen: $\widehat{T}^o_m$ und $\underset{\vee}{T}^u_m$ und fassen obigen Belastungsfall (95) auf als eine totale Belastung des Trägers, welcher man eine an der m-Verticale angreifende und der Richtung der Schwere entgegengesetzt wirkende Einzelkraft $-kc$ entgegensetzt.

Das Seitens der letzteren hervorgerufene Moment beträgt nach Gleichungen (8) und (9), worin $\mathfrak{M}_m = 0$ zu setzen:

$$M_m = -\frac{kc^2}{n}(n-m)\,m.$$

Ferner betragen die Inanspruchnahmen U''_m und U'_{m+1} nach Gleichungen (58) und (61):

$$U''_m = \frac{M_m}{h_m \cos\gamma''_m} \quad \text{und} \quad U'_{m+1} = \frac{M_m}{h_m \cos\gamma'_{m+1}},$$

und die der Einzelkraft $-kc$ entsprechende Inanspruchnahme der Verticale:

$$\widehat{T}^o_m = -U''_m \sin\gamma''_m + U'_{m+1}\sin\gamma'_{m+1} - kc,$$

oder:

$$\widehat{T}^o_m = -M_m\left(\frac{\operatorname{tg}\gamma''_m - \operatorname{tg}\gamma'_{m+1}}{h_m}\right) - kc = kc\left[\frac{n-m}{n}\,m\,c\,\frac{\operatorname{tg}\gamma''_m - \operatorname{tg}\gamma'_{m+1}}{h_m} - 1\right],$$

und mit den Gleichungen (227):

$$\widehat{T}^o_m = kc\left[\frac{n-m}{n}\,m\,c\,\frac{4Hn^2}{n^2 c\,4H}\,\frac{1}{(n-m)\,m} - 1\right]$$

$$= kc\left(\frac{1}{n} - 1\right) = -\frac{kc}{n}(n-1),$$

daher mit Gleichung (233):

$$[\widehat{T}^o_m]_{\min} = -[\underset{\vee}{T}^u_m]_{\max} = \frac{qc}{2} - \frac{kc}{n}(n-1) = \frac{pc}{2} + \frac{kc}{2} - \frac{kc}{n}(n-1)$$

$$= -\frac{kc}{2n}(n-2) + \frac{pc}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (236)$$

Diese Gleichung erledigt die Inanspruchnahmen $[\hat{T}^o_{\frac{n}{2}}]_{\min} = -[T^u_{\frac{n}{2}}]_{\max}$ von selbst, indem der Werth von Gleichung (236) für jedes m constant ist, also auch für $m = \frac{n}{2}$ gilt.

Man erhält endlich:

nach Beziehung (96) u. Gleichungen (87) u. (91) $[\hat{T}^o_{\frac{n}{2}}]_{\max} = -[T^u_{\frac{n}{2}}]_{\min}$ für die alleinige Belastung der mittleren Verticale. Führt man auch diese Untersuchung allgemein, so ergiebt sich nach dem Vorigen die Seitens der Einzelkraft kc in der Verticale $\hat{T}^o_m$ hervorgerufene Inanspruchnahme:

$$\hat{T}^o_m = kc\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{kc}{n}(n-1),$$

folglich mit Gleichung (232):

$$[\hat{T}^o_m]_{\max} = -[T^u_m]_{\min} = \frac{pc}{2} + \frac{kc}{n}(n-1) = \frac{kc}{n}(n-1) + \frac{pc}{2}. \quad (237)$$

Durch Gl. (237) werden die Inanspruchnahmen $[\hat{T}^o_{\frac{n}{2}}]_{\max} = -[T^u_{\frac{n}{2}}]_{\min}$ ebenfalls erledigt, indem diese Gleichung (237) für jedes m constant, also auch für $m = \frac{n}{2}$ gültig ist.

Die Inanspruchnahmen Gleichungen (228) bis (231) stehen nun in folgender Beziehung zu einander. Addirt man je zwei derselben, so ergiebt sich ein constanter Werth, nämlich:

$$-\left\{[T''^u_m]_{\max} + [T''^u_m]_{\min}\right\} = \left\{[T'^o_m]_{\max} + [T'^o_m]_{\min}\right\}$$
$$= \left\{[T''^o_m]_{\max} + [T''^o_m]_{\min}\right\} = -\left\{[T'^u_m]_{\max} + [T'^u_m]_{\min}\right\} = \frac{c}{2}(k + 2p) \quad (238)$$

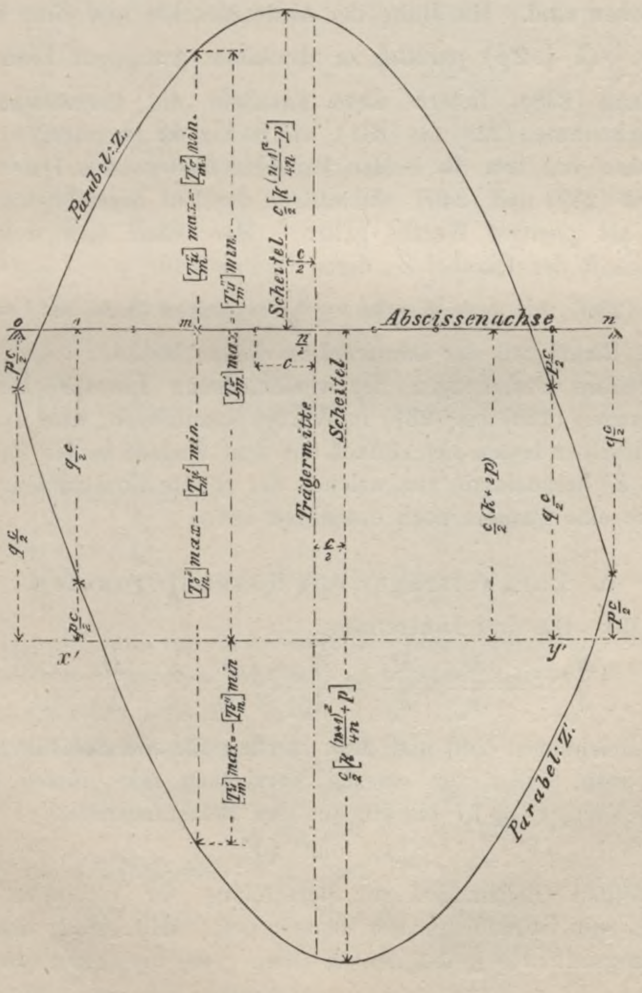
Hat man daher die eine Grenze der Inanspruchnahmen der Verticalen ermittelt, so folgt die zweite durch Subtraction der ersteren von dem Werthe $\frac{c}{2}(k + 2p)$.

Eine Construction der sämmtlichen Inanspruchnahmen ergiebt sich einfach aus Fig. **49**, in welcher die beiden als Parabel verlaufenden Functionen: $[T''^u_m]_{\max}$ und $[T'^u_m]_{\min}$ Gleichungen (228) und (230) nach folgenden Daten aufgetragen sind, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt:

ad $[T''_{\frac{u}{m}}]_{\max}$ Gleichung (228), obere Parabel Z in Fig. **49**:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x = \dfrac{l-c}{2} = \dfrac{n-1}{2}\,c, & \text{Scheitelordinate} & Z_{\frac{l-c}{2}} = \dfrac{c}{2}\left[k\;\dfrac{(n-1)^2}{4n} - p\right] \\ \;\;\text{„}\;\; x = 0, & \text{Ordinate} & Z_0 = -\dfrac{pc}{2} \\ \;\;\text{„}\;\; x = l = nc, & \;\;\;\;\text{„} & Z_l = -\dfrac{qc}{2} \end{array}\right\} \quad (239)$$

Fig. 49.



ad $[T'_{\frac{u}{m}}]_{\min}$ Gleichung (230), untere Parabel Z' in Fig. **49**:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x=\dfrac{l+c}{2}=\dfrac{n+1}{2}c, & \text{Scheitelordinate} & Z_{\frac{l+c}{2}}=-\dfrac{c}{2}\left[k\dfrac{(n+1)^2}{4n}+p\right] \\ \text{„ } x=0, & \text{Ordinate} & Z_0=-\dfrac{pc}{2} \\ \text{„ } x=l, & \text{„} & Z_l=-\dfrac{qc}{2} \end{array}\right\} \quad (240)$$

Die Fig. **49** veranschaulicht den Verlauf beider Parabeln, und erweist, dass dieselben congruent, jedoch gegen die x-Achse verschoben sind. Mit Hülfe der Abscissenachse und einer im Abstande $\frac{c}{2}(k+2p)$ parallel zu derselben gezogenen Linie $x'y'$, Gleichung (238), liefern diese Parabeln die sämmtlichen Inanspruchnahmen (228) bis (231), wie in Fig. **49** eingetragen, wenn, abgesehen von den die beiden Parabeln festlegenden Daten Gleichungen (239) und (240), sämmtliche daselbst bezeichneten Ordinaten als positive Werthe gelten. Man kann sich dabei die Eigenschaft der Parabel Z', deren Ordinate für $m=1$ nach Gleichung (230) mit dem Werthe $-\frac{qc}{2}$ resultiren muss, als Controlle für die Richtigkeit der Construction dienen lassen.

Weitere Beziehungen der verschiedenen Inanspruchnahmen Gleichungen (228) bis (231) in Worten anzuführen, wird unnöthig sein, dieselben lassen sich einfach aus dem Verlauf beider Parabeln Z und Z' herauslesen, von welchen der geübte Constructeur überdies die eine Parabel noch entbehren kann.

b. Parabelträger mit Gegendiagonalen.

§ 60. Die drei Differenzen:

$$\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}-\frac{M_m}{h_m};\ \frac{M_m}{h_m}-\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}};\ \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}-\frac{M_{m-2}}{h_{m-2}},$$

siehe Gleichungen (59) und (62), werden für die Belastungsfälle: $[V_m]_{\min}$ resp. $[V_m]_{\max}$ von einerlei Vorzeichen sein müssen, damit die im Vorigen, §§ 57 bis 59, aus den Belastungsfällen:

$$[V_{m \text{ resp. } m+1}]_{\min} \quad \text{und} \quad [V_{m \text{ resp. } m+1}]_{\max}$$

aufgestellten Gleichungen zur Berechnung der Verticalen eines Trägers mit Gegendiagonalen berechtigen. Man erhält aus dem Belastungsfall $[V_m]_{\min}$ mit den Werthen (146) bis (149), (187) bis

(190), wenn $F(p)$ eine in den vorigen Differenzen nach Gleichung (202) zu Null werdende Function des Eigengewichtes bedeutet:

$$\frac{M_{m-2}}{h_{m-2}} = F(p) + \frac{klc}{8H} \cdot \frac{(m-2)(mn+n-m^2+m)}{(m-2)(n-m+2)},$$

$$\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = F(p) + \frac{klc}{8H} \cdot \frac{(m-1)(mn-m^2+m)}{(m-1)(n-m+1)},$$

$$\frac{M_m}{h_m} = F(p) + \frac{klc}{8H} \cdot \frac{m(mn-n-m^2+m)}{m(n-m)},$$

$$\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} = F(p) + \frac{klc}{8H} \cdot \frac{m(mn-n-m^2+1)}{(n-m-1)(m+1)},$$

oder:

$$\frac{M_{m-2}}{h_{m-2}} = F(p) + \frac{klc}{8H}\left(m + \frac{n-m}{n-m+2}\right),$$

$$\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = F(p) + \frac{klc}{8H} m,$$

$$\frac{M_m}{h_m} = F(p) + \frac{klc}{8H}(m-1),$$

$$\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} = F(p) + \frac{klc}{8H}\left[(m-1)\frac{m}{m+1}\right],$$

also ad $[V_m]_{\min}$:

$$\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m} = -\frac{klc(m-1)}{8H(m+1)},$$

$$\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = -\frac{klc}{8H},$$

$$\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{M_{m-2}}{h_{m-2}} = -\frac{klc(n-m)}{8H(n-m+2)}.$$

ad $[V_m]_{\max}$ wird man für vorstehende Differenzen die gleichen Werthe mit positiven Vorzeichen erhalten, und werden darnach mit Gleichungen (59) und (62) und § 10

für die Belastungsfälle $[V_m]_{\min}$ **und** $[V_{m+1}]_{\min}$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{die Diagonalen } R'_m \text{ und } R'_{m+1} \text{ gedrückt,} \\ \quad\text{„} \quad\quad \text{„} \quad\; R''_m \text{ und } R''_{m+1} \text{ gezogen;}\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (241)$$

für die Belastungsfälle $[V_m]_{\max}$ **und** $[V_{m+1}]_{\max}$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{die Diagonalen } R'_m \text{ und } R'_{m+1} \text{ gezogen,} \\ \quad\text{„} \quad\quad \text{„} \quad\; R''_m \text{ und } R''_{m+1} \text{ gedrückt.}\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (242)$$

Daraus geht hervor, dass von den für die Belastungsfälle $[V_{m+1}]_{\max\ \text{resp.}\ \min}$ und $[V_m]_{\max\ \text{resp.}\ \min}$ aus den Gleichungen (208), (209), (211) und (212) aufgestellten Inanspruchnahmen der Verticalen nur die folgenden zur Berechnung derselben eines Trägers mit Gegendiagonalen berechtigen:

$$\left.\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\textbf{für einen Träger mit gezogenen Diagonalen:}} \\
[T^{o\prime}_{m}]_{\min} & \text{nach den Gleichungen} & (213) & \text{und } (228) \\
[T^{u\prime\prime}_{m}]_{\min} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & (214) & \text{,, } (229) \\
[T^{u\prime}_{m}]_{\min} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & (219) & \text{,, } (230) \\
[T^{o\prime\prime}_{m}]_{\min} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & (220) & \text{,, } (231) \\
\multicolumn{4}{l}{\textbf{für einen Träger mit gedrückten Diagonalen:}} \\
[T^{u\prime\prime}_{m}]_{\max} & \text{nach den Gleichungen} & (213) & \text{und } (228) \\
[T^{o\prime\prime}_{m}]_{\max} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & (219) & \text{,, } (230) \\
[T^{o\prime}_{m}]_{\max} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & (214) & \text{,, } (229) \\
[T^{u\prime}_{m}]_{\max} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & (220) & \text{,, } (231)
\end{array}\right\} \quad . \quad (243)$$

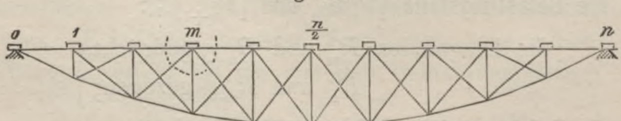
Obige Erörterungen sind als allen Parabolischen Trägern mit Gegendiagonalen gemeinsam zu betrachten. Wir trennen hiernach die Untersuchung nach den verschiedenen Anordnungen:

α. Parabolischer Träger, dessen obere Gurt horizontal ist.

§ 61. Die durch die Gleichungen (93) bis (96) bedingten Belastungsfälle ergeben die folgenden Inanspruchnahmen der Verticalen:

$$\left.\begin{array}{l}
[T^u_m]_{\min} = -\,q\,c \\
[T^u_m]_{\max} = -\,p\,c
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (244)$$

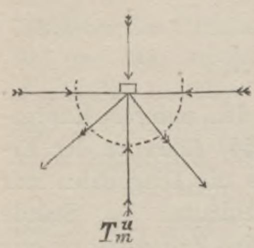
Fig. 50.



und bestehen solche für die Beziehungen (93) und (94) zu Recht, weil für deren Belastungsfälle die Diagonalen spannungslos sind, Gleichungen (201) und (202). Dadurch wird das Eintreten der zur Anwendung der Belastungsfälle (95) und (96) auf die Inanspruchnahmen der Verticalen berechtigenden Diagonalen gleichgültig, da aus diesen dieselben Resultate Gleichung (244) folgen würden.

Träger mit gezogenen Diagonalen.

Fig. 51.



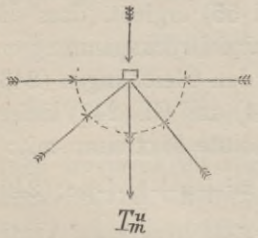
Ein Schnitt um den oberen Knotenpunkt (Fig. **50** und **51**) ergiebt, dass, sofern die Diagonalen nur Zugspannungen übertragen können, in den Verticalen nur Pressungen möglich sind. Es interessirt also nur das absolute Minimum der Formeln (243) und (244) resp. (214) und (219) und (244), und wird man sich um die nach den Formeln (243) für einen Träger mit gezogenen Diagonalen nicht vertretenen Maximalspannungszahlen: $[T'^u_m]_{\max}$ und $[T''^u_m]_{\max}$ nicht zu kümmern haben.

Aus den obigen Gleichungen liefern Gleichungen (214) und (219) gegenüber der Gleichung (244) das absolute Minimum, und berechnen sich demnach die stets **gedrückten** Verticalen nach Gleichungen (214) oder (219) mit:

$$[T^u_m]_{\min} = -\frac{kc}{2n}(mn - m^2 + n + 1) - pc \quad . \; . \; . \quad (245)$$

Träger mit gedrückten Diagonalen.

Fig. 52.

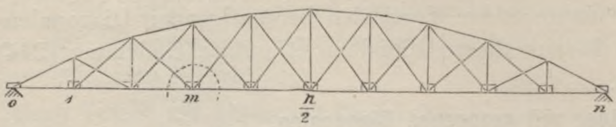


Ein Schnitt um den oberen Knotenpunkt (Fig. **50** und **52**) ergiebt, dass, sofern die Diagonalen nur Druckspannungen zu übertragen vermögen, die Verticalen nur eine Pressung seitens der oben angreifenden sie direct treffenden Belastung erfahren können, sonst aber jeweils gezogen werden. Man erhält daher nach den Gleichungen (243) resp. (213) und (220) und Gleichung (244) das absolute Maximum und Minimum der Inanspruchnahmen:

$$\left.\begin{aligned} [T^u_m]_{\max} &= \frac{kc}{2n}(mn - m^2 - n + 1) - pc, \\ [T^u_m]_{\min} &= -\,qc. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (246)$$

β. Parabolischer Träger, dessen untere Gurt horizontal ist.

Fig. 53.

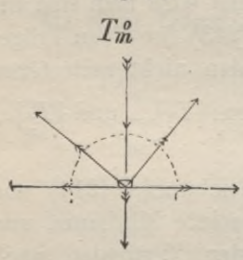


§ 62. Analog dem Vorigen ergeben die Belastungsfälle (93) bis (96) die Inanspruchnahmen:

$$\left.\begin{aligned}[T_m^o]_{\min} &= p\,c\\ [T_m^o]_{\max} &= q\,c\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{247}$$

Träger mit gezogenen Diagonalen.

Fig. 54.

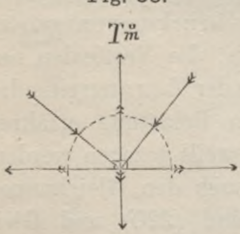


Ein Schnitt um den unteren Knotenpunkt (Fig. **53** und **54**) führt zu der Erkenntniss, dass, falls die Diagonalen nur Zugspannungen auszuhalten im Stande sind, die Verticale eine Zugspannung nur aus der am unteren Ende angreifenden Belastung erfahren kann, sonst aber jeweils gedrückt wird. Es ergeben sich daher nach Gleichungen (243) resp. (213) und (220) und Gleichung (247) die der Berechnung der Verticalen zu Grunde zu legenden Inanspruchnahmen:

$$\left.\begin{aligned}[T_m^o]_{\min} &= -\frac{k\,c}{2\,n}(m\,n - m^2 - n + 1) + p\,c,\\ [T_m^o]_{\max} &= q\,c.\end{aligned}\right\}\quad\ldots \tag{248}$$

Träger mit gedrückten Diagonalen.

Fig. 55.



Ein Schnitt um den unteren Knotenpunkt (Fig. **53** und **55**) ergiebt, dass die Verticale niemals eine Druckspannung erfahren kann. Von den Gleichungen (243) resp. (219) und (214) und Gl. (247) liefert die erstere das absolute Maximum mit:

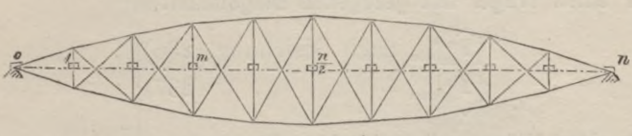
$$[T_m^o]_{\max} = \frac{k\,c}{2\,n}(m\,n - m^2 + n + 1) + p\,c; \tag{249}$$

das Minimum der stets gezogenen Verticalen ist diesem gegenüber nicht von Interesse.

γ. Parabolischer Träger mit zwei parabolischen Gurten.

§ 63. Es sind an dieser Stelle zunächst die Inanspruchnahmen der Diagonalen zu ermitteln, welche in den Belastungsfällen (93) bis (96) und für die sich darnach ergebenden Spannungszahlen der Verticalen, Gleichungen (232), (233), (236) und (237), als thätig vorausgesetzt werden.

Fig. 56.



Dass die Gleichungen (232) und (233) nach den Belastungen (93) und (94) sowohl für Träger mit gezogenen als gedrückten Diagonalen bestehen bleiben, folgt einfach aus Gleichungen (201) und (202), indem für die darin vorausgesetzten Belastungsfälle keine Diagonalen thätig werden.

Die die Inanspruchnahme Gleichung (236) bedingende Belastung des ganzen Trägers ausser der m-Verticale, siehe Beziehung (95), erzeugt nach der für Gleichung (236) geführten Untersuchung und Gleichungen (8) und (9) folgende die Inanspruchnahmen der angrenzenden Diagonalen bedingenden Momente:

$$M_{m-1} = [M_{m-1}]_{\max} - k c^2 \frac{n-m}{n}(m-1),$$

$$M_m = [M_m]_{\max} - k c^2 \frac{n-m}{n} m,$$

$$M_{m+1} = [M_{m+1}]_{\max} - k c^2 \frac{n-m-1}{n} m.$$

Daher ergeben sich nach Gleichungen (59) und (62), (188) bis (190) und (201) die für den Belastungsfall (95) folgenden Inanspruchnahmen der Diagonalen:

$$R'_m \cos\alpha'_m = - R''_m \cos\alpha''_m = \frac{klc}{4H}\left(-1 + \frac{n-m}{n-m+1}\right) = - \frac{klc}{4H(n-m+1)},$$

$$R'_{m+1} \cos\alpha'_{m+1} = - R''_{m+1} \cos\alpha''_{m+1} = \frac{klc}{4H}\left(-\frac{m}{m+1} + 1\right) = + \frac{klc}{4H(m+1)}.$$

Dem entsprechend ergeben sich die Inanspruchnahmen der Diagonalen für die alleinige Belastung der m-Verticale, Beziehung (96), bei welcher die letzte die Inanspruchnahme Gleichung (237) erhält:

$$R'_m \cos\alpha'_m = - R''_m \cos\alpha''_m = + \frac{klc}{4H(n-m+1)},$$

$$R'_{m+1} \cos\alpha'_{m+1} = - R''_{m+1} \cos\alpha''_{m+1} = - \frac{klc}{4H(m+1)}.$$

Aus dem Vorzeichen der vorstehenden Inanspruchnahmen der Diagonalen ist ersichtlich, dass für die Belastungsfälle (95) und (96) allein die folgenden Gleichungen zur Berechnung der Verticalen obiger Träger mit Gegendiagonalen (Fig. **56**) berechtigen.

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{für einen Träger mit gezogenen Diagonalen:}\\
\qquad [\hat{T}{}^o_m]_{\min} \text{ nach Gleichung } (236)\\
\qquad [\underset{\vee}{T}{}^u_m]_{\min} \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \quad (237)\\
\textbf{für einen Träger mit gedrückten Diagonalen:}\\
\qquad [\underset{\vee}{T}{}^u_m]_{\max} \text{ nach Gleichung } (236)\\
\qquad [\hat{T}{}^o_m]_{\max} \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \quad (237)
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (250)$$

Da sonach die absoluten Maxima und Minima der Inanspruchnahmen der Verticalen sich hier nicht ohne Weiteres, wie sub Fig. **50** und **53** ergeben, so wird es angezeigt sein, die nach den vorigen Erörterungen zur Berechnung der Verticalen bei deren verschiedenen Lagen berechtigenden und ausfallenden Inanspruchnahmen in folgenden Schematen (251) und (252) zusammenzustellen.

Die in Frage kommenden Gleichungen sind: Gleichung (228) bis (231), (232) und (233), (236) und (237) unter Berücksichtigung der dieselben einschränkenden Beziehungen (243) und (250).

Träger mit gezogenen Diagonalen:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{nach Gleichung } (\mathbf{228})\ [T'^o_m]_{\min} = -\dfrac{kc}{2n}(mn - m^2 - m) + \dfrac{pc}{2},\\
\quad\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (229)\ [T'^o_m]_{\max} \text{ fällt aus},\\
\quad\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (230)\ [T'^u_m]_{\min} = -\dfrac{kc}{2n}(mn - m^2 + m) - \dfrac{pc}{2},\\
\quad\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (231)\ [T'^u_m]_{\max} \text{ fällt aus};\\
\\
\text{nach Gleichung } (231)\ [T''^o_m]_{\min} = -\dfrac{kc}{2n}(mn - m^2 - n + m) + \dfrac{pc}{2},\\
\quad\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (230)\ [T''^o_m]_{\max} \text{ fällt aus},\\
\quad\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (\mathbf{229})\ [T''^u_m]_{\min} = -\dfrac{kc}{2n}(mn - m^2 + n - m) - \dfrac{pc}{2},\\
\quad\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (228)\ [T''^u_m]_{\max} \text{ fällt aus};
\end{array}\right\} \quad (251^a)$$

nach Gleichung (236) $[\widehat{T}{}^{o}_{m}]_{\min} = -\frac{kc}{2n}(n-2) + \frac{pc}{2}$,

„ „ (237) $[\widehat{T}{}^{o}_{m}]_{\max}$ fällt aus,

„ „ (233) $[\widehat{T}{}^{u}_{m}]_{\min} = -\frac{qc}{2}$,

„ „ (232) $[\widehat{T}{}^{u}_{m}]_{\max} = -\frac{pc}{2}$;

nach Gleichung (232) $[\underset{\vee}{T}{}^{o}_{m}]_{\min} = +\frac{pc}{2}$,

„ „ (233) $[\underset{\vee}{T}{}^{o}_{m}]_{\max} = +\frac{qc}{2}$,

„ „ (237) $[\underset{\vee}{T}{}^{u}_{m}]_{\min} = -\frac{kc}{n}(n-1) - \frac{pc}{2}$,

„ „ (236) $[\underset{\vee}{T}{}^{u}_{m}]_{\max}$ fällt aus. (251^b)

Träger mit gedrückten Diagonalen:

nach Gleichung (231) $[T''^{o}_{m}]_{\min}$ fällt aus,

„ „ (230) $[T''^{o}_{m}]_{\max} = \frac{kc}{2n}(mn - m^2 + m) + \frac{pc}{2}$,

„ „ (229) $[T''^{u}_{m}]_{\min}$ fällt aus,

„ „ (228) $[T''^{u}_{m}]_{\max} = \frac{kc}{2n}(mn - m^2 - m) - \frac{pc}{2}$;

nach Gleichung (228) $[T'^{o}_{m}]_{\min}$ fällt aus,

„ „ (229) $[T'^{o}_{m}]_{\max} = \frac{kc}{2n}(mn - m^2 + n - m) + \frac{pc}{2}$,

„ „ (230) $[T'^{u}_{m}]_{\min}$ fällt aus,

„ „ (231) $[T'^{u}_{m}]_{\max} = \frac{kc}{2n}(mn - m^2 - n + m) - \frac{pc}{2}$;

nach Gleichung (236) $[\widehat{T}{}^{o}_{m}]_{\min}$ fällt aus,

„ „ (237) $[\widehat{T}{}^{o}_{m}]_{\max} = \frac{kc}{n}(n-1) + \frac{pc}{2}$,

„ „ (233) $[\widehat{T}{}^{u}_{m}]_{\min} = -\frac{qc}{2}$,

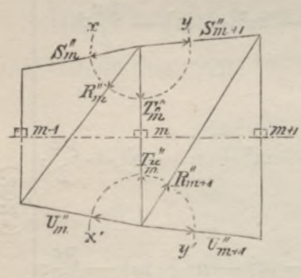
„ „ (232) $[\widehat{T}{}^{u}_{m}]_{\max} = -\frac{pc}{2}$; (252^a)

$$\left.\begin{aligned}
&\text{nach Gleichung (232)}\ [T^o_{\underset{\vee}{m}}]_{\min} = \frac{pc}{2},\\
&\quad"\qquad"\qquad (233)\ [T^o_{\underset{\vee}{m}}]_{\max} = \frac{qc}{2},\\
&\quad"\qquad"\qquad (237)\ [T^u_{\underset{\vee}{m}}]_{\min}\ \text{fällt aus},\\
&\quad"\qquad"\qquad (236)\ [T^u_{\underset{\vee}{m}}]_{\max} = \frac{kc}{2n}(n-2) - \frac{pc}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad (252^b)$$

Die beiden vorigen Zusammenstellungen (251) und (252) lassen in Bezug auf die absolute Minimalinanspruchnahme der Verticalen eines Trägers mit gezogenen Diagonalen und in Bezug auf die absolute Maximalinanspruchnahme der Verticalen eines Trägers mit gedrückten Diagonalen keinen Zweifel, da die sämmtlichen relativen Minimalinanspruchnahmen der Verticalen der ersten Träger (Schema 251) und die sämmtlichen relativen Maximalinanspruchnahmen der Verticalen der letzten Träger (Schema 252) für alle vier denkbaren Lagen der Verticalen zwischen deren angrenzenden Diagonalen thatsächlich zur Geltung kommen. Als solche Absolutwerthe erkennt man leicht die in obigen Schematen fett gedruckten Gleichungen (228) und (229).

Dagegen bleiben für die in Fig. **57** bis **60** angezeigten Lagen der Verticalen an Stelle der nach obigen Schematen ausfallenden relativen Maximalinanspruchnahmen der Verticalen eines Trägers mit gezogenen Diagonalen, und an Stelle der relativen Minimalinanspruchnahmen der Verticalen eines Trägers mit gedrückten Diagonalen, unter der Bedingung, dass die in den folgenden Fig. **57** bis **60** eingetragenen Diagonalen zur Wirkung kommen, noch zu ermitteln: die für diese Fig. **57** bis **60** resultirenden relativen Maximalinanspruchnahmen der Verticalen bei als gezogen vorausgesetzten Diagonalen, sowie die relativen Minimalinanspruchnahmen der Verticalen bei als gedrückt vorausgesetzten Diagonalen.

Fig. 57.



Führt man diese Untersuchungen in Bezug auf die Grösse der Inanspruchnahme der Verticalen zunächst allgemein, so ergiebt ein Schnitt xy um den oberen m-Knotenpunkt die Bedingung des Gleichgewichtes (Fig. **57**):

$$S''_m \sin\beta''_m + R''_m \sin\alpha''_m + T^{''}_{\underset{m}{o}} - S''_{m+1} \sin\beta''_{m+1} = 0,$$

daraus mit Hülfe der Gleichungen (60) und (62):

$$T''_{o\,m} = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \operatorname{tg} \beta''_m + \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) \operatorname{tg} \alpha''_m - \frac{M_m}{h_m} \operatorname{tg} \beta''_{m+1},$$

oder wenn:

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} + X \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (253)$$

$$T''_{o\,m} = \frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta''_m - \operatorname{tg} \beta''_{m+1}) + X (\operatorname{tg} \alpha''_m - \operatorname{tg} \beta''_m) \; . \; . \qquad (254)$$

Desgleichen führt ein Schnitt $x' y'$ um den unteren m-Knotenpunkt (Fig. **57**) zu der Gleichung:

$$U''_m \sin \gamma''_m + T''_{u\,m} + R''_{m+1} \sin \alpha''_{m+1} - U''_{m+1} \sin \gamma''_{m+1} = 0,$$

daraus mit Hülfe der Gleichungen (61) und (62):

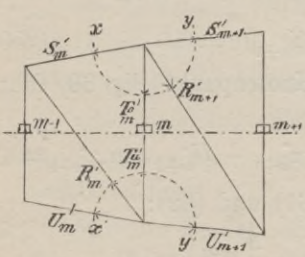
$$T''_{u\,m} = - \frac{M_m}{h_m} \operatorname{tg} \gamma''_m + \left(\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m}\right) \operatorname{tg} \alpha''_{m+1} + \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \operatorname{tg} \gamma''_{m+1},$$

oder wenn:

$$\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} = \frac{M_m}{h_m} + Y \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (255)$$

$$T''_{u\,m} = - \frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg} \gamma''_m - \operatorname{tg} \gamma''_{m+1}) + Y (\operatorname{tg} \alpha''_{m+1} + \operatorname{tg} \gamma''_{m+1}). \quad (256)$$

Fig. 58.



Ein Schnitt xy um den oberen m-Knotenpunkt (Fig. **58**) führt zu der Gleichung:

$$S'_m \sin \beta'_m + T'_{o\,m} + R'_{m+1} \sin \alpha'_{m+1} - S'_{m+1} \sin \beta'_{m+1} = 0,$$

daraus mit Gleichungen (57) und (59):

$$T'_{o\,m} = \frac{M_m}{h_m} \operatorname{tg} \beta'_m - \left(\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m}\right) \operatorname{tg} \alpha'_{m+1} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \operatorname{tg} \beta'_{m+1},$$

oder mit Gleichung (255):

$$T'_{o\,m} = \frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta'_m - \operatorname{tg} \beta'_{m+1}) - Y (\operatorname{tg} \alpha'_{m+1} + \operatorname{tg} \beta'_{m+1}) \; . \quad (257)$$

Desgleichen führt ein Schnitt um den unteren m-Knotenpunkt (Fig. **58**) zu der Gleichung:

$$U'_m \sin \gamma'_m + R'_m \sin \alpha'_m + T'_{u\,m} - U'_{m+1} \sin \gamma'_{m+1} = 0,$$

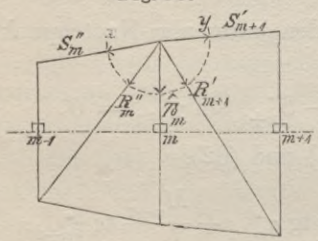
daraus mit Gleichungen (58) und (59):

$$T'^{u}_{m} = -\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \operatorname{tg} \gamma'_m - \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) \operatorname{tg} \alpha'_m + \frac{M_m}{h_m} \operatorname{tg} \gamma'_{m+1},$$

oder mit Gleichung (253):

$$T'^{u}_{m} = -\frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg} \gamma'_m - \operatorname{tg} \gamma'_{m+1}) - X (\operatorname{tg} \alpha'_m - \operatorname{tg} \gamma'_m) \; . \; . \quad (258)$$

Fig. 59.



Ein Schnitt xy um den oberen m-Knotenpunkt (Fig. **59**) führt zu der Gleichung:

$$S''_m \sin \beta''_m + R''_m \sin \alpha''_m + \widehat{T}^o_m + R'_{m+1} \sin \alpha'_{m+1} - S'_{m+1} \sin \beta'_{m+1} = 0,$$

oder mit den Gleichungen (57), (59), (60) und (62):

$$\widehat{T}^o_m = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \operatorname{tg} \beta''_m + \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) \operatorname{tg} \alpha''_m$$

$$- \left(\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m}\right) \operatorname{tg} \alpha'_{m+1} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \operatorname{tg} \beta'_{m+1},$$

oder mit den Gleichungen (253) und (255):

$$\widehat{T}^o_m = \frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta''_m - \operatorname{tg} \beta'_{m+1}) + X (\operatorname{tg} \alpha''_m - \operatorname{tg} \beta''_m)$$

$$- Y (\operatorname{tg} \alpha'_{m+1} + \operatorname{tg} \beta'_{m+1}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (259)$$

Ein Schnitt $x'y'$ um den unteren m-Knotenpunkt (Fig. **60**) führt zu der Gleichung:

$$U'_m \sin \gamma'_m + R'_m \sin \alpha'_m + \underset{\vee}{T}^u_m + R''_{m+1} \sin \alpha''_{m+1} - U''_{m+1} \sin \gamma''_{m+1} = 0,$$

oder mit den Gleichungen (58), (59), (61) und (62):

$$\underset{\vee}{T}^u_m = -\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \operatorname{tg} \gamma'_m - \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) \operatorname{tg} \alpha'_m$$

$$+ \left(\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m}\right) \operatorname{tg} \alpha''_{m+1} + \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \operatorname{tg} \gamma''_{m+1},$$

oder mit den Gleichungen (253) und (255):

$$\underset{\vee}{T}^u_m = -\frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg} \gamma'_m - \operatorname{tg} \gamma''_{m+1}) - X (\operatorname{tg} \alpha'_m - \operatorname{tg} \gamma'_m)$$

$$+ Y (\operatorname{tg} \alpha''_{m+1} + \operatorname{tg} \gamma''_{m+1}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (260)$$

Bezeichnen diese Gleichungen (254) und (256) bis (260) die Inanspruchnahmen allgemein, so ergeben sich daraus die gesuchten relativen Maxima und Minima, unter Berücksichtigung, dass die sämmtlichen in obigen Gleichungen vorkommenden Klammerausdrücke der verschiedenen Winkelfunctionen incl. derjenigen für die Verticale im Trägermittel stets positiv sind, wie folgt:

Fig. 60.

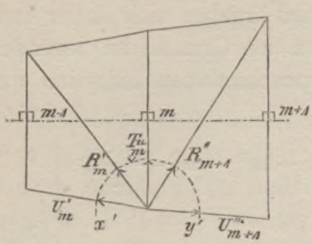


Fig. **56. Träger mit gezogenen Diagonalen.**

ad Fig. **57** unter Berücksichtigung, dass X und Y nach Gleichung (62) hier nicht positiv werden können:

$[T^{\prime\prime o}_{m}]_{\max}$ aus Gleichung (254) für den Fall, dass M_m ein Maximum und X ein Minimum wird, also für die totale Belastung des Trägers nach Gleichung (233),

$[T^{\prime\prime u}_{m}]_{\max}$ aus Gleichung (256) für den Fall, dass M_m und Y ein Minimum werden, also für den total unbelasteten Träger nach Gleichung (232);

ad Fig. **58** unter Berücksichtigung, dass nach Gleichung (59) X und Y hier nicht negativ werden können:

$[T^{\prime o}_{m}]_{\max}$ aus Gleichung (257) für den Fall, dass M_m ein Maximum und Y ein Minimum wird, also für die totale Belastung des Trägers nach Gleichung (233),

$[T^{\prime u}_{m}]_{\max}$ aus Gleichung (258) für den Fall, dass M_m und X ein Minimum werden, sonach für den total unbelasteten Träger nach Gleichung (232);

ad Fig. **59** unter Berücksichtigung, dass nach Gleichungen (59) und (62) X hier nicht positiv und Y nicht negativ werden kann:

$[\hat{T}^{o}_{m}]_{\max}$ aus Gleichung (259) für den Fall, dass M_m und X ein Maximum und Y ein Minimum wird, also für den total belasteten Träger nach Gleichung (233);

ad Fig. **60** unter Berücksichtigung, dass nach Gleichungen (59) und (62) X hier nicht negativ und Y nicht positiv werden kann:

$[\check{T}^{u}_{m}]_{\max}$ aus Gleichung (260) für den total unbelasteten Träger nach Gleichung (232).

Die vorstehenden relativen Maximalinanspruchnahmen der Verticalen der Fig. **57** bis **60** liefern also Nichts, was nicht schon in dem Schema (251) enthalten wäre, und ergeben sich daher endlich die der Berechnung der Verticalen zu Grunde zu legenden absoluten Maximal- und Minimalinanspruchnahmen lediglich aus dem Schema (251) wie folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{aus Gleichung (228)} & [T^o_m]_{\min} = -\frac{kc}{2n}(mn - m^2 - m) + \frac{pc}{2}, \\ \text{„ \quad „ \quad (233)} & [T^o_m]_{\max} = +\frac{qc}{2}, \\ \text{„ \quad „ \quad (229)} & [T^u_m]_{\min} = -\frac{kc}{2n}(mn - m^2 + n - m) - \frac{pc}{2}, \end{array}\right\} \quad (261)$$

„ „ (232) $[T^u_m]_{\max}$ kann nicht von Interesse sein, weil es mit $[T^u_m]_{\min}$ von gleichem Vorzeichen, und absolut genommen kleiner als dieses ist.

Fig. **56. Träger mit gedrückten Diagonalen.**

Eine der vorigen analoge Beweisführung ergiebt aus denselben Gleichungen (254), (256) bis (260), dass die denselben entsprechenden relativen Minima der Inanspruchnahmen der Verticalen nur die nach Gleichungen (232) und (233) gefolgerten Inanspruchnahmen, also dem Schema (252) gegenüber nichts Neues liefern. Die der Berechnung der Verticalen zu Grunde zu legenden Formeln lauten demnach nach dem Schema (252).

$$\left.\begin{array}{ll} \text{aus Gleichung (229)} & [T^o_m]_{\max} = \frac{kc}{2n}(mn - m^2 + n - m) + \frac{pc}{2}, \\ \text{„ \quad „ \quad (233)} & [T^u_m]_{\min} = -\frac{qc}{2}, \\ \text{„ \quad „ \quad (228)} & [T^u_m]_{\max} = \frac{kc}{2n}(mn - m^2 - m) - \frac{pc}{2}, \end{array}\right\} \quad (262)$$

„ „ (232) $[T^o_m]_{\min}$ kommt nicht in Betracht, weil es mit $[T^o_m]_{\max}$ von gleichem Vorzeichen, also absolut genommen kleiner als dieses ist.

c. Parabelträger mit einfachen Diagonalen ausser in dem durch eine ungerade Felderzahl bedingten mittleren Felde.

§ 64. Die unter a. § 57 vorausgesetzten Träger mit einfachen Diagonalen bedingten eine gerade Felderzahl n, resp. eine Verticale im Trägermittel. Ob die Felderzahl n eine gerade oder ungerade ist, bleibt für die Träger mit Gegendiagonalen gleichgültig. Eine ungerade Felderzahl n wird indessen für Träger mit sonst einfachen Diagonalen in dem mittleren Felde zwei gekreuzte Diagonalen erfordern, somit einen Träger theils mit einfachen, theils mit Gegendiagonalen bedingen. Wenngleich derartige Träger wohl selten ausgeführt werden dürften, so werden wir dieselben doch hier mit Rücksicht darauf behandeln, dass deren beiden mittleren Verticalen zu mancherlei im Vorigen nicht vorgesehenen Erörterungen Anlass geben und darzuthun geeignet erscheinen, wie der specielle Fall die Grenzen der Inanspruchnahme der Verticalen oft aus einem Belastungsfall bedingt, welchen an einem allgemeinen Träger zu erörtern wohl nicht möglich sein würde (siehe § 25).

Wir setzen dabei voraus, dass die mittleren Diagonalen nur Zugspannungen zu übertragen im Stande sind, da eine andere Construction, wenn überhaupt in dieser Weise, wohl nicht ausgeführt werden wird.

α. **Parabolischer Träger, dessen obere Gurt horizontal ist.**

Es ergiebt sich aus einem um den oberen resp. unteren Knotenpunkt $\frac{n-1}{2}$ geführten Schnitt (Fig. **61** und **62**), dass die Verticale

Fig. 61.

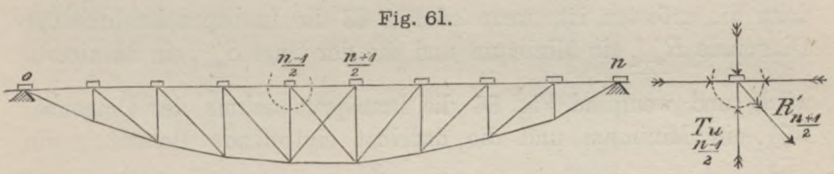
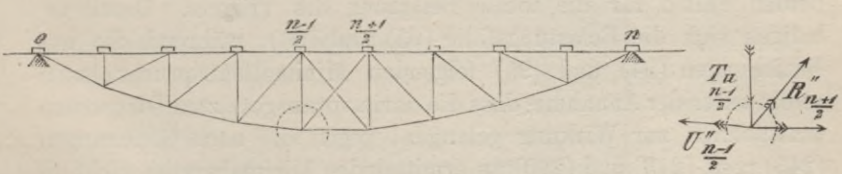


Fig. 62.



niemals eine Zugspannung erfahren kann. Man erhält daher aus Gleichungen (243) resp. (214) und (219), sowie (95) und (96), (93) und (94), unter Berücksichtigung, dass deren Maxima nicht interessiren, da sie mit den Minima von gleichem Vorzeichen, also absolut genommen kleiner als diese sind, die der Berechnung der Verticale $\frac{n-1}{2}$ zu Grunde zu legende Inanspruchnahme:

$$[T^u_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -\frac{kc}{8n}(n^2 + 4n + 3) - pc \quad \dots . \quad (263)$$

β. Parabolischer Träger, dessen untere Gurt horizontal ist.

Man erhält aus den in Fig. **63** und **64** angeführten Schnitten, dass die in der Verticale $T^o_{\frac{n-1}{2}}$ erfolgende Maximalzugspannung

Fig. 63.

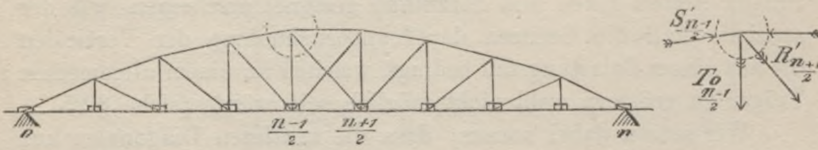
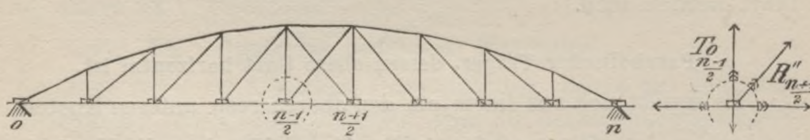


Fig. 64.



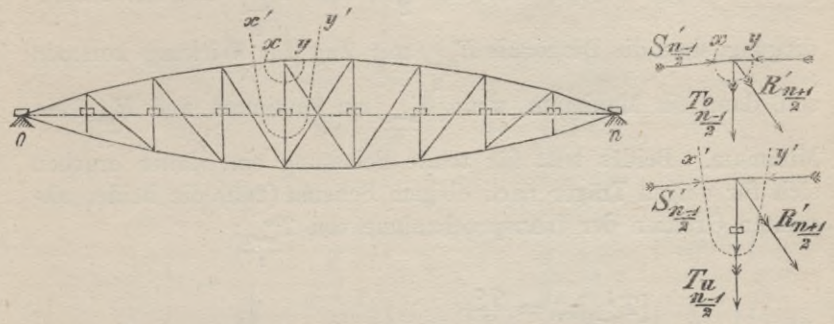
dann am grössten ist, wenn ad Fig. **63** die Inanspruchnahme der Diagonale $R'_{\frac{n+1}{2}}$ ein Minimum und die der Gurt $S'_{\frac{n-1}{2}}$ ein Maximum wird, und wenn ad Fig. **64** die Inanspruchnahme der Diagonale $R''_{\frac{n+1}{2}}$ ein Minimum und die daselbst eintretende Belastung ein Maximum wird. Es ergiebt sich also das absolute Maximum in beiden Fällen für die totale Belastung des Trägers. Damit erledigen sich die Belastungsfälle (93) und (96), während die aus Beziehungen (94) und (95) folgenden Minimalinanspruchnahmen selbst unter der Annahme, dass die darin vorausgesetzten Diagonalen thatsächlich zur Wirkung gelangen, gegen die nach Gleichungen (243) resp. (213) und (220) zu ermittelnden Minimalwerthe nicht in Betracht kommen. Man erhält somit für $m = \frac{n-1}{2}$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{nach Gl. (213) resp. (220):} & [T^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -\frac{kc}{8n}(n^2-4n+3)+pc,\\ \text{„ „ (247):} & [T^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} = +\frac{qc}{2}.\end{array}\right\} \quad (264)$$

γ. Parabolischer Träger mit zwei gleichen parabolischen Gurten.

Träger nach der Anordnung Fig. **65**.

Fig. 65.



Stellt man für die Verticale $T_{\frac{n-1}{2}}$ ad Fig. **65** analog dem sub Fig. **56** eingehaltenen Verfahren ebenfalls das Schema der Berechnung auf, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{nach Gl. } (\mathbf{228})\colon [T'^{o}_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -\frac{kc}{8n}(n-1)^2 + \frac{pc}{2},\\
&\text{„ „ } (229)\colon [T'^{o}_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} \text{ fällt aus},\\
&\text{„ „ } (\mathbf{230})\colon [T'^{u}_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -\frac{kc}{8n}(n^2+2n-3) - \frac{pc}{2},\\
&\text{„ „ } (231)\colon [T'^{u}_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} \text{ fällt aus},\\
&\text{„ „ } (232)\colon [T^{o}_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = \frac{pc}{2},\\
&\text{„ „ } (\mathbf{233})\colon [T^{o}_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} = \frac{qc}{2},\\
&\text{„ „ } (237)\colon [T^{u}_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -\frac{kc}{n}(n-1) - \frac{pc}{2},\\
&\text{„ „ } (236)\colon [T^{u}_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} \text{ fällt aus.}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (265)$$

ad $T^o_{\frac{n-1}{2}}$. Man überzeugt sich aus einem um den oberen Knotenpunkt geführten Schnitt xy, dass an Stelle des in vorigem Schema nach Gleichung (229) ausfallenden Maximalwerthes von $T'^o_{\frac{n-1}{2}}$ kein grösserer Werth treten kann als $\frac{qc}{2}$, denn $T'^o_{\frac{n-1}{2}}$ wird mit der Bedingung, dass die Diagonale $R'_{\frac{n+1}{2}}$ mit Zug zur Wirkung kommen soll, dann ein Maximum, wenn $S'_{\frac{n-1}{2}}$ ein Maximum und $R'_{\frac{n+1}{2}}$ ein Minimum. Beides tritt für totale Belastung ein, daher ergeben sich für obigen Träger nach obigem Schema (265) die beiden absoluten Grenzen der Inanspruchnahme von $T^o_{\frac{n-1}{2}}$:

$$\left.\begin{aligned} [T^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} &= \frac{qc}{2}, \\ [T^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} &= -\frac{kc}{8n}(n-1)^2 + \frac{pc}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (266)$$

ad $T^u_{\frac{n-1}{2}}$. Das obige Schema lässt ebenso in Bezug auf $[T^u_{\frac{n-1}{2}}]_{\min}$ keinen Zweifel, da jedenfalls $n \geq 5$ und alsdann Gleichung (230) stets das absolute Minimum enthält. Bezüglich der Ermittelung des absoluten Maximalwerthes von $T^u_{\frac{n-1}{2}}$ sind dagegen zunächst an Stelle der nach Gleichungen (231) und (236) ausfallenden Maxima von $T^u_{\frac{n-1}{2}}$ unter der Bedingung, dass die beiden Diagonalen im mittleren Feld nur Zugspannungen zu übertragen im Stande sind, die relativen Maxima für die in obigen Gleichungen (231) und (236) vorausgesetzten Diagonalen zu ermitteln. Bezeichnet P die an der Verticale eintretende Belastung, so ergiebt ein Schnitt $x'y'$ (Fig. **65**):

$$S'_{\frac{n-1}{2}} \sin \beta'_{\frac{n-1}{2}} + T'^u_{\frac{n-1}{2}} + P + R'_{\frac{n+1}{2}} \sin \alpha'_{\frac{n+1}{2}} = 0,$$

also mit Gleichungen (57) und (59):

$$T'^u_{\frac{n-1}{2}} = \frac{M_{\frac{n-1}{2}}}{h_{\frac{n-1}{2}}} \operatorname{tg} \beta'_{\frac{n-1}{2}} - P - \frac{M_{\frac{n+1}{2}} - M_{\frac{n-1}{2}}}{h_{\frac{n-1}{2}}} \operatorname{tg} \alpha'_{\frac{n+1}{2}},$$

oder da:
$$\operatorname{tg}\alpha'_{\frac{n+1}{2}}=\frac{h_{\frac{n-1}{2}}}{c},$$

$$T'_{u\,\frac{n-1}{2}}=\frac{M_{\frac{n-1}{2}}}{h_{\frac{n-1}{2}}}\operatorname{tg}\beta'_{\frac{n-1}{2}}-P-\frac{M_{\frac{n+1}{2}}-M_{\frac{n-1}{2}}}{c},$$

oder da:
$$\frac{\operatorname{tg}\beta'_{\frac{n-1}{2}}}{h_{\frac{n-1}{2}}}=\frac{h_{\frac{n-1}{2}}-h_{\frac{n-3}{2}}}{2\,c\,h_{\frac{n-1}{2}}}=\frac{1}{2c}-\frac{h_{\frac{n-3}{2}}}{2\,c\,h_{\frac{n-1}{2}}},$$

oder mit Gleichung (186):
$$\frac{\operatorname{tg}\beta'_{\frac{n-1}{2}}}{h_{\frac{n-1}{2}}}=\frac{1}{2c}\left\{1-\frac{\left(n-\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\left(n-\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right\}=\frac{1}{2c}\left\{1-\frac{\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2c}\left(1-\frac{n^2-9}{n^2-1}\right)=\frac{1}{2c}\left(\frac{8}{n^2-1}\right)=\frac{4}{c\,(n^2-1)},$$

so ist:
$$T'_{u\,\frac{n-1}{2}}=\frac{4\,M_{\frac{n-1}{2}}}{c\,(n^2-1)}-P-\frac{M_{\frac{n+1}{2}}}{c}+\frac{M_{\frac{n-1}{2}}}{c}$$
$$=\frac{1}{c\,(n^2-1)}\left[M_{\frac{n-1}{2}}(n^2+3)-M_{\frac{n+1}{2}}(n^2-1)-Pc(n^2-1)\right]$$
$$=\frac{1}{c\,(n^2-1)}\left[(M_{\frac{n-1}{2}}-M_{\frac{n+1}{2}})(n^2-1)+4M_{\frac{n-1}{2}}-Pc\,(n^2-1)\right]\quad(267)$$

Sieht man in dieser Gleichung $M_{\frac{n-1}{2}}$ und $M_{\frac{n+1}{2}}$, sowie P nur als eine Function von k an, so ergiebt sich mit Gleichung (232):
$$T'_{u\,\frac{n-1}{2}}=-\frac{pc}{2}+\frac{1}{c\,(n^2-1)}\left[-(M_{\frac{n+1}{2}}-M_{\frac{n-1}{2}})(n^2-1)+4M_{\frac{n-1}{2}}-Pc(n^2-1)\right]\quad(268)$$

worin die Beziehung: $M_{\frac{n+1}{2}}-M_{\frac{n-1}{2}}\geqq 0$ . . . . (269)

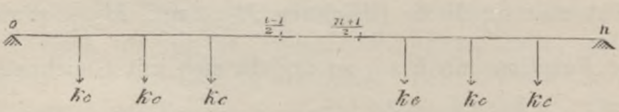
bestehen muss, damit die Diagonale $R'_{\frac{n+1}{2}}$ mit Zug zur Wirkung kommt. Aus Gleichung (268) erhält man nun einfach den Belastungsfall, welcher $[T'_{u\,\frac{n-1}{2}}]_{\max}$ erzeugt, wenn man sich zunächst alle

Knotenpunkte als belastet denkt, und darnach unter der Bedingung (269) alle diejenigen Lasten fortlässt, welche die obere Inanspruchnahme Gleichung (268) verringern. In dem letzten Falle befinden sich jedenfalls die beiden Lasten an den beiden mittleren Verticalen, da sie nach Beziehungen (79) und (6) das Minimum von $T^u_{\frac{n-1}{2}}$ erzeugen helfen. Ein Fortlassen derselben geschieht also zu Gunsten dessen Maximalwerthes und ist erlaubt, weil durch die noch bleibende symmetrische Belastung des Trägers die Bedingung (269) erfüllt bleibt. Bedeuten sonach $M_{\frac{n+1}{2}}$ und $M_{\frac{n-1}{2}}$ noch die Momente aller Einzellasten kc, excl. der an den beiden mittleren Verticalen bereits gestrichenen, so wird man $[{T'_u}_{\frac{n-1}{2}}]_{max}$ aus der Gleichung:

$$ {T'_u}_{\frac{n-1}{2}} = -\frac{pc}{2} + \frac{1}{c(n^2-1)}\left[-\left(M_{\frac{n+1}{2}} - M_{\frac{n-1}{2}}\right)(n^2-1) + 4M_{\frac{n-1}{2}}\right] \quad . \; . \quad (270) $$

und zwar für den Fall erhalten, dass $M_{\frac{n+1}{2}} - M_{\frac{n-1}{2}}$ ein Minimum, also nach Bedingung (269) zu Null, und $M_{\frac{n-1}{2}}$ ein Maximum wird, dass also von den noch vorhandenen Lasten keine mehr gestrichen werden, siehe Fig. **66**. Aus derselben Belastungsart Fig. **66** resultirt dasselbe relative Maximum für $T^u_{\frac{n-1}{2}}$, also daher auch endlich das absolut grösste Maximum von $T^u_{\frac{n-1}{2}}$.

Fig. 66.



Das Moment $M_{\frac{n-1}{2}}$ ergiebt sich für den obigen Belastungsfall nach Gleichungen (191), (8) und (9):

$$ M_{\frac{n-1}{2}} = \frac{kc^2}{2}\left(n - \frac{n-1}{2}\right)\frac{n-1}{2} - kc^2\,\frac{n-1}{2} $$

$$ = \frac{kc^2}{2}\,\frac{(n^2-1)}{4} - \frac{kc^2}{2}(n-1) = \frac{kc^2}{8}(n-1)(n-3), $$

also aus Gleichung (270):

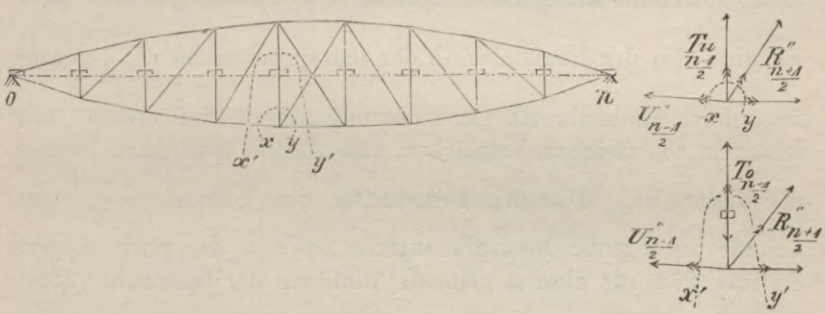
$$[T^u_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} = -\frac{pc}{2} + \frac{4}{c\,(n^2-1)}\,\frac{kc^2}{8}\,(n-1)\,(n-3).$$

Es betragen also endlich aus vorstehender Gleichung und nach Schema (265) die Grenzen der Inanspruchnahmen von $T^u_{\frac{n-1}{2}}$:

$$\left.\begin{aligned} & [T_{u\,\frac{n-1}{2}}]_{\max} = \frac{kc\,(n-3)}{2\,(n+1)} - \frac{pc}{2}, \\ \text{und:}\quad & [T_{u\,\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -\frac{kc}{8n}(n^2+2n-3) - \frac{pc}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (271)$$

Träger nach der Anordnung Fig. **67**.

Fig. 67.



Man erhält für obige Trägerordnung das folgende Schema der relativen Maximal- und Minimalinanspruchnahmen der Verticalen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{nach Gl. } (\mathbf{231})\text{: } [T''_{o\,\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -\frac{kc}{8n}(n^2-2n-3) + \frac{pc}{2}, \\ &\text{„ „ } (230)\text{: } [T''_{o\,\frac{n-1}{2}}]_{\max} \text{ fällt aus,} \\ &\text{„ „ } (\mathbf{229})\text{: } [T''_{u\,\frac{n-1}{2}}]_{\min} = \frac{kc}{8n}(n+1)^2 - \frac{pc}{2}, \\ &\text{„ „ } (228)\text{: } [T''_{u\,\frac{n-1}{2}}]_{\max} \text{ fällt aus;} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (272^{a})$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{nach Gl. (236):} & [\hat{T}^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -\frac{kc}{2n}(n-2)+\frac{pc}{2}, \\ \text{„ „ (237):} & [\hat{T}^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} \text{ fällt aus,} \\ \text{„ „ (233):} & [\hat{T}^u_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -\frac{qc}{2}, \\ \text{„ „ (232):} & [\hat{T}^u_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} = -\frac{pc}{2}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (272^b)$$

ad $T^u_{\frac{n-1}{2}}$. Man überzeugt sich mittelst eines Schnittes xy (Fig. **67**), dass die Verticale $T^u_{\frac{n-1}{2}}$ niemals eine Zugspannung erhalten kann, sofern die anliegende Diagonale $R''_{\frac{n+1}{2}}$ niemals gedrückt wird. Es wird also der Maximalwerth der Inanspruchnahme $T^u_{\frac{n-1}{2}}$ gegenüber deren Minimalwerth gar nicht interessiren, weil ersterer mit letzterem von gleichem Vorzeichen, also absolut genommen kleiner als dieser ist. Die der Berechnung der Verticale $\frac{n-1}{2}$ zu Grunde zu legende Inanspruchnahme ist also das nach obigem Schema (272) als absolut geltende Minimum der Gleichung (229):

$$[T^u_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = \frac{kc}{8n}(n+1)^2 - \frac{pc}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (273)$$

ad $T^o_{\frac{n-1}{2}}$ ergiebt obiges Schema nach Gleichung (231) das absolute Minimum; dagegen sind an Stelle der beiden daselbst ausfallenden relativen Maxima behufs Ermittelung des absoluten Maximalwerthes die sub Fig. **65** geführten Untersuchungen analog zu reproduciren. Ein Schnitt $x'y'$ (Fig. **67**) führt zu dem entgegengesetzten Werth der Gleichung (268). Man erhält:

$$T''_{o\,\frac{n-1}{2}} = \frac{pc}{2} + \frac{1}{c(n^2-1)}\left[(M_{\frac{n+1}{2}} - M_{\frac{n-1}{2}})(n^2-1) - 4M_{\frac{n-1}{2}} + Pc(n^2-1)\right] \quad (274)$$

In voriger Gleichung sind $M_{\frac{n+1}{2}}$ und $M_{\frac{n-1}{2}}$, sowie P nur noch eine Function von k; ausserdem ist darin:

$$M_{\frac{n+1}{2}} - M_{\frac{n-1}{2}} \leqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (275)$$

Es ergiebt sich daher $[T''^{o}_{\frac{n-1}{2}}]_{max}$, analog den sub Fig. **65** geführten Erörterungen, bei alleiniger Belastung der beiden mittleren Verticalen. Da derselbe Belastungsfall ebenfalls $[\hat{T}^{o}_{\frac{n-1}{2}}]_{max}$ liefert, so entspricht demselben endlich ebenfalls das absolute Maximum von $T^{o}_{\frac{n-1}{2}}$, und hat man daher mit Gleichung (274):

$$\begin{aligned}[T^{o}_{\frac{n-1}{2}}]_{max} &= \frac{pc}{2} + \frac{1}{c\,(n^2-1)}\left[-4\,\frac{kc^2}{2}\,(n-1) + kc^2\,(n^2-1)\right] \\ &= \frac{pc}{2} + kc\,\frac{n-1}{n+1}.\end{aligned}$$

Es betragen also die der Berechnung von $[T^{o}_{\frac{n-1}{2}}]$ zu Grunde zu legenden Grenzen der Inanspruchnahmen:

$$\left.\begin{aligned}[T^{o}_{\frac{n-1}{2}}]_{min} &= -\frac{kc}{8n}\,(n^2-2n-3) + \frac{pc}{2} \\ [T^{o}_{\frac{n-1}{2}}]_{max} &= kc\,\frac{n-1}{n+1} + \frac{pc}{2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (276)$$

§ 65. Für die Träger mit zwei gleichen Parabolischen Gurten, deren mobile Last auf der oberen oder unteren Gurt liegt, berechnen sich die Constructionsglieder nach den vorigen Formeln unter Berücksichtigung von § 18. Der Kürze halber sind im Vorigen diese beiden Fälle durch die als zwischen den Gurten angebracht gedachte Fahrbahn vereinigt.

Wir stellen zum Schluss die durch die vorigen Untersuchungen (§§ 55 bis 63) ermittelten Eigenschaften der Parabolischen Träger in Folgendem zusammen:

1) die Horizontalcomponenten der Maximalinanspruchnahmen der Gurten sämmtlicher Parabolischen Träger und die damit identischen Maximalinanspruchnahmen der horizontalen Gurten selbst sind durch den ganzen Träger constant, Gleichungen (197) bis (200);

2) die Diagonalen sind für den total belasteten und unbelasteten Träger spannungslos, Gleichungen (201) und (202). Die Horizontalcomponenten der Maximal- und Minimalinanspruchnahmen der Diagonalen sind einander gleich und für den ganzen Träger constant, Gleichungen (203) und (204);
3) die Spannungen resp. Pressungen der Verticalen eines total belasteten und unbelasteten Trägers sind gleich der **ganzen** auf eine Verticale kommenden Last für Parabolische Träger mit einer horizontalen Gurt, dagegen gleich der **Hälfte** derselben für Träger mit zwei parabolischen Gurten, Gleichungen (215), (216), (221), (222), (232) und (233).

II. Numerische Beispiele.

§ 66. Wir legen der speciellen Betrachtung der Parabolischen Träger einen solchen zu Grunde, dessen Stützweite 30^m beträgt, und dessen Felderzahl als gerade Zahl mit $n = 10$ und ungerade mit $n = 9$ angenommen wird, und construiren der Uebersichtlichkeit wegen die Spannungszahlen, anstatt dieselben zu berechnen. Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Construction für die Gurten und Diagonalen schneller, als die Berechnung mittelst der erst zu ermittelnden Winkelfunctionen $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und $\cos\alpha$ zum Ziele führt. Da, wo die Kenntniss einer grösseren Anzahl solcher Winkelfunctionen erforderlich ist, bleibt der Construction immer der Vortheil der Zeitersparniss. Wir nehmen an: es betrage pr. lfd. M. das Eigengewicht 750 und die mobile Last 2250 Kilogr.; die Scheitelordinate H der Gurtparabeln in Gleichung (186) sei gleich $\frac{1}{8}$ der Stützweite. Alsdann erhält man für $c = 1$:

mit $n = 10$: $l = 10$; $H = 1{,}25$; $p = 2250$; $k = 6750$; $q = 9000$;
mit $n = 9$: $l = 9$; $H = 1{,}125$; $p = 2500$; $k = 7500$; $q = 10000$.

Die Längenabmessungen des Trägers für $n = 10$ sind auf Tafel **17** aufgetragen.

1. Spannungszahlen für den Parabolischen Träger mit einer horizontalen Gurt.

(Tafel **11** bis **13**.)

Nach den Figuren **39**, **41** und **46** und den Gleichungen (215) bis (218), (221) bis (224) ergeben sich die folgenden zur Construction und Berechnung der Spannungszahlen erforderlichen Werthe:

a. Für $n = 10$. Tafel **11**. Fig. **1**.

Für die Gurten (Fig. **39**): $\frac{q l^2}{8 H} = \frac{9000 \,.\, 10^2}{8 \,.\, 1{,}25} = \ldots\ldots$ 90000 K.,

für die Diagonalen (Fig. **41**): $\frac{k l c}{8 H} = \frac{6750 \,.\, 10}{8 \,.\, 1{,}25} = \ldots\ldots$ 6750 K.,

für die Verticalen (Fig. **46**):

$$\left\{\begin{aligned} c\left[k\,\frac{(n+2)^2}{8n} + p\right] &= 6750 \,.\, \frac{144}{80} + 2250 = 14400 \text{ K.,} \\ c\left[k\,\frac{n+1}{2n} + p\right] &= 6750 \,.\, \frac{11}{20} + 2250 = 5962{,}5 \text{ K.,} \\ c\,(k + 2p) &= 6750 + 2 \,.\, 2250 = 11250 \text{ K.,} \end{aligned}\right.$$

während in Gleichungen (215) bis (218), (221) bis (224):

$p c = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 2250 K.,

$q c = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 9000 K.

b. Für $n = 9$. Tafel **11**. Fig. **2**.

Für die Gurten (Fig. **39**): $\frac{q l^2}{8 H} = \frac{10000 \,.\, 9^2}{8 \,.\, 1{,}125} = \ldots\ldots$ 90000 K.,

für die Diagonalen (Fig. **41**): $\frac{k l c}{8 H} = \frac{7500 \,.\, 9}{8 \,.\, 1{,}125} = \ldots\ldots$ 7500 K.,

für die Verticalen (Fig. **46**):

$$\left\{\begin{aligned} c\left[k\,\frac{(n+2)^2}{8n} + p\right] &= 7500 \,.\, \frac{121}{72} + 2500 = 15104\tfrac{1}{6} \text{ K.,} \\ c\left[k\,\frac{n+1}{2n} + p\right] &= 7500 \,.\, \frac{10}{18} + 2500 = 6666\tfrac{2}{3} \text{ K.,} \\ c\,(k + 2p) &= 7500 + 2 \,.\, 2500 = 12500 \text{ K.,} \end{aligned}\right.$$

während in Gleichungen (215) und (218), (221) und (224):

$p c = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 2500 K.,

$q c = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 10000 K.

2. Spannungszahlen für den Parabolischen Träger mit zwei gleichen Parabolischen Gurten.

(Tafel **14** bis **16**.)

Mit den Figuren **39**, **41** und **49** und den Gleichungen (232) bis (237), (271) und (276) erhält man:

a. Für $n = 10$. Tafel **14**. Fig. **1** und **2**.

Für die Gurten (Fig. **39**): $\frac{q l^2}{8 H} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 90000 K.,

für die Diagonalen (Fig. **41**): $\frac{k l c}{8 H} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 6750 K.,

für die Verticalen (Fig. **49**):

$$\frac{n-1}{2}\,c = \frac{10-1}{2} = \ldots\ldots\ldots \quad 4{,}5,$$

$$\frac{c}{2}\left[k\,\frac{(n-1)^2}{4n} - p\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{6750.81}{40} - 2250\right] = \quad 5710\text{ K.},$$

$$\frac{pc}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1125\text{ K.},$$

$$\frac{qc}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4500\text{ K.},$$

$$\frac{c}{2}(k+2p) = \frac{6750+2.2250}{2} = \ldots \quad 5600\text{ K.},$$

$$\frac{n+1}{2}\,c = \frac{10+1}{2} = \ldots\ldots\ldots \quad 5{,}5,$$

$$\frac{c}{2}\left[k\,\frac{(n+1)^2}{4n} + p\right] = \frac{1}{2}\left(6750.\frac{121}{40} + 2250\right) = 11310\text{ K.},$$

während nach Gleichung (236):

$$-\frac{kc}{2n}(n-2) + \frac{pc}{2} = -\frac{6750.8}{20} + \frac{2250}{2} = -1575\text{ K.},$$

und nach Gleichung (237):

$$\frac{kc}{n}(n-1) + \frac{pc}{2} = \frac{6750.9}{10} + \frac{2250}{2} = \ldots \quad 7200\text{ K.}$$

b. Für $n = 9$. Tafel **15**. Fig. **1** und **2**.

Für die Gurten (Fig. **39**): $\frac{ql^2}{8H} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 90000\text{ K.},$

für die Diagonalen (Fig. **41**): $\frac{klc}{8H} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7500\text{ K.},$

für die Verticalen (Fig. **49**):

$$\frac{n-1}{2}\,c = \frac{9-1}{2} = \ldots\ldots\ldots \quad 4{,}0,$$

$$\frac{c}{2}\left[k\,\frac{(n-1)^2}{4n} - p\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{7500.64}{36} - 2500\right] = \quad 5416\text{ K.},$$

$$\frac{pc}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1250\text{ K.},$$

$$\frac{qc}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5000\text{ K.},$$

$$\frac{c}{2}(k+2p) = \frac{7500+2.2500}{2} = \ldots \quad 6250\text{ K.},$$

$$\frac{n+1}{2}\,c = \frac{9+1}{2} = \ldots\ldots\ldots \quad 5{,}0$$

$$\frac{c}{2}\left[k\,\frac{(n+1)^2}{4n} + p\right] = \frac{1}{2}\left(7500.\frac{100}{36} + 2500\right) = 11666\text{ K.},$$

während nach Gleichung (271):

$$\frac{kc\,(n-3)}{2\,(n+1)} - \frac{pc}{2} = \frac{7500\,.\,6}{2\,.\,10} - \frac{2500}{2} = + \;.\,.\; 1000\,\text{K.},$$

und nach Gleichung (276):

$$kc\,\frac{n-1}{n+1} + \frac{pc}{2} = \frac{7500\,.\,8}{10} + \frac{2500}{2} = .\;.\;.\;.\; 7250\,\text{K.}$$

Nach vorstehenden Daten sind die Spannungszahlen der Fig. **1** und **2**, Tafel **11** und **1** und **2**, Tafel **14** und **15** construirt und auf Tafel **12**, **13** und **16** nach den in den allgemeinen Untersuchungen ausführlich behandelten Formeln eingetragen.

Hinsichtlich der Construction mag für sämmtliche Träger hinzugefügt werden, dass die Diagonalen der Tafeln **12, 13** und **16** bestehen müssen:

ad Fig. **3** aus an den Gurten befestigten Band- oder Rundeisen;

ad Fig. **4** aus stumpf gegen die Gurten gesetzten, nicht befestigten Constructionsgliedern mit gespreiztem Querschnitt aus Holz oder Eisen;

ad Fig. **1**, **2**, **5** und **6** aus an den Gurten befestigten Constructionsgliedern mit gespreiztem Querschnitt aus irgend welchem Material (excl. der beiden Diagonalen im mittleren Feld der Fig. **5** und **6**, welche wie ad Fig. **3** construirt sein müssen),

widrigenfalls die eingetragenen Spannungszahlen ihre Gültigkeit verlieren. Desgleichen lassen sich die Art der Befestigung und Anordnung des Querschnittes der Verticalen aus deren Spannungszahlen herauslesen.

Von der speciellen Betrachtung der Träger mit mehrfachen Systemen können wir an dieser Stelle nach den Erörterungen unter den Parallelträgern abstrahiren.

D. Die Pauli'schen Träger.

I. Allgemeine Theorie.

§ 67. Im Gegensatz zu den Parabolischen Trägern mit einer horizontalen Gurt beabsichtigt das System Pauli eine constante Maximalinanspruchnahme C in den gekrümmten Gurten des Trägers zu erzielen.

Es wird im Allgemeinen eine festliegende Gurt gegeben sein müssen, für welche die zweite s. g. Pauli'sche Gurt, an welche die Forderung der constanten Maximalinanspruchnahme gestellt wird, gefunden werden soll, und es giebt anscheinend für jede beliebige Gurt eine zugehörige Pauli'sche Gurt. Allein es kann hier nicht in der Absicht liegen, die Pauli'sche Gurt für alle möglichen Fälle zu ermitteln, vielmehr müssen wir uns darauf beschränken, die bis dahin gebräuchlichsten Systeme zu erörtern.

Mit der Forderung, dass der Träger in den Auflagern mit einer Spitze endigt und dass seine Wandconstruction mit Verticalen angeordnet wird, unterscheiden wir darnach:

1. Pauli'sche Träger, deren obere Gurt horizontal ist,
2. desgl., deren untere Gurt horizontal ist,
3. desgl., mit congruent verlaufenden Gurten und gleicher Maximalinanspruchnahme in beiden Gurten.

1. Pauli'sche Träger, deren obere Gurt horizontal ist.

Die Trägerform wird bedingt durch die Forderung:

$$[U_1]_{\max} = [U_2]_{\max} = [U_3]_{\max} = \ldots = [U_m]_{\max} = \ldots = [U_n]_{\max} = C \quad (277)$$

a. Träger mit einfachen Diagonalen.

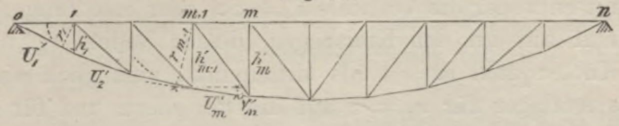
§ 68. Man erhält für **die erste Trägerhälfte:**

α. **Für die Richtung I der Diagonalen nach Gleichungen (58), (58[a]) und (277) und Beziehung (40)** (siehe Fig. **68**).

$$\left.\begin{aligned} [U_1']_{\max} = [U_2']_{\max} = [U_3']_{\max} = \ldots = [U_m']_{\max} = C \\ \frac{[M_1]_{\max}}{h_1' \cos \gamma_1'} = \frac{[M_1]_{\max}}{h_1' \cos \gamma_2'} = \frac{[M_2]_{\max}}{h_2' \cos \gamma_3'} = \ldots = \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h_{m-1}' \cos \gamma_m'} = C \end{aligned}\right\} \quad (278)$$

Daraus und aus Gleichung (119) geht hervor, dass die Divisoren der Gurtspannungen U', Gl. (278), oder die aus den Knotenpunkten

Fig. 68.



der oberen Gurt auf die Sehnenrichtungen der unteren Gurt gefällten Perpendikel den Ordinaten einer Parabel der Gleichung:

$$r_m = \frac{q}{2C}(lx - x^2) = \frac{q c^2}{2C}(mn - m^2) \quad \ldots\ldots \quad (279)$$

entsprechen müssen, der Art, dass:

$$h_1' \cos\gamma_1' = h_1' \cos\gamma_2' = r_1 ;\, h_2' \cos\gamma_3' = r_2 \ldots h'_{m-1} \cos\gamma'_m = r_{m-1} \text{ etc.} \quad (280)$$

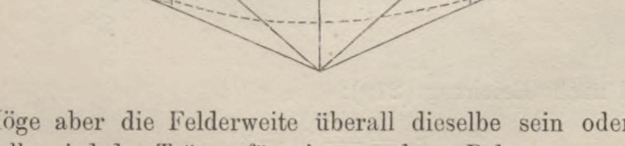
Construirt man daher die Parabel Gleichung (279), und beschreibt mit deren an den Verticalen resultirenden Ordinaten:

$$r_1,\ r_2 \ldots r_{m-1} \text{ etc.},$$

als Radien, um die betreffenden Knotenpunkte der oberen Gurt als Mittelpunkte, Kreisbögen, so werden die Polygonseiten der unteren Gurt diese Kreisbögen tangiren müssen, der Art, dass ausser U_1' jede Gurtsehne Tangente an den Kreis um den linksseitigen Knotenpunkt wird.

Dass für die hier betrachtete Richtung I der Diagonalen die beiden Gurtsehnen U_1' und U_2' ein und denselben Kreisbogen r_1 um den Knotenpunkt $m = 1$ als Mittelpunkt tangiren müssen, geht aus Gleichungen (278) und (280) hervor. Würde demnach der ganze Träger nur über vier Felder reichen, so würde man in Fig. **69** einen Pauli'schen Träger der kleinsten Form mit der Richtung I der Diagonalen und geradlinigen Gurten erhalten.

Fig. 69.



Möge aber die Felderweite überall dieselbe sein oder nicht, jedenfalls wird der Träger für eine gegebene Belastung q, für eine geforderte Felderweite c und für die Maximalspannung C der unteren Gurt unmöglich, wenn:

$$r_1 \overline{\overline{>}} c,$$

weil damit entweder die Verticale $h_1' = \infty$, oder eine Tangente vom Auflager A aus an den Kreisbogen, dessen Radius r_1, um den oberen Knotenqunkt $m = 1$ als Mittelpunkt, unmöglich wird, indem das Auflager für $r_1 = c$ auf die Peripherie und für $r_1 > c$ innerhalb derselben fällt.

Was nun einen Träger der Diagonalenrichtung I, dessen Felderzahl $n > 4$ anbetrifft, so zeigt die folgende Beweisführung, dass ein solcher als Pauli'scher Träger praktisch unmöglich ist:

Es ist bereits dargethan, dass die Gurtsehne U_2' die Verlängerung der Gurtsehne U_1' ist, und beide den Kreisbogen, dessen Radius r_1 um den Knotenpunkt $m = 1$ tangiren müssen (Fig. **70**). Dadurch ist der Endpunkt b der Verticale h_2' bestimmt, von welchem die Gurtsehne U_3' ausgehend nach Gleichungen (278) und (280) den Kreisbogen, dessen Radius r_2, um den Knotenpunkt $m = 2$ tangiren muss.

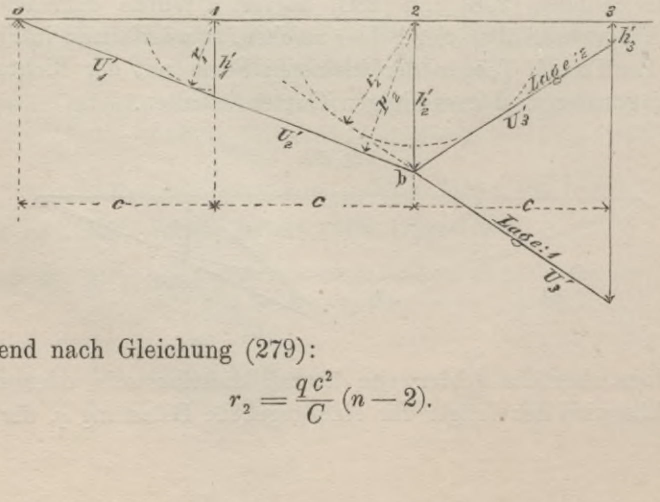
Ein vom oberen Knotenpunkt $m = 2$ auf die Richtung von U_2' gefälltes Perpendikel p_2 wird nach Fig. **70** sich berechnen:

$$p_2 = 2\,r_1,$$

oder mit Gleichung (279):

$$p_2 = \frac{q\,c^2}{C}\,(n - 1),$$

Fig. 70.



während nach Gleichung (279):

$$r_2 = \frac{q\,c^2}{C}\,(n - 2).$$

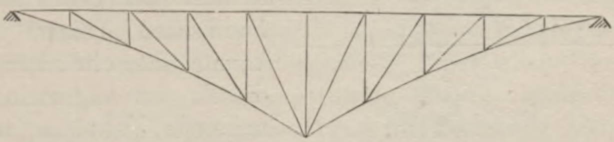
Es ist also:

$$p_2 > r_2,$$

welche Ungleichheit ebenfalls für jede beliebige, nicht constante Feldweite c gefolgt haben würde. Daraus ergiebt sich (Fig. **70**): dass entweder die Gurtsehne U_3' mit U_2' einen überstumpfen Winkel einschliessen (Lage 1), oder die resultirende Länge h_3' kleiner als h_2' werden wird (Lage 2).

Aus der ersten Lage der Gurtsehne U_3' resultirt also ein Träger mit convex gegen einander gekrümmten Gurten (Fig. **71**),

Fig. 71.



aus der zweiten Lage derselben ein solcher, dessen Gurten nicht allein nicht stetig verlaufen, sondern welcher von der Verticale h_3' ab selbst in das Bereich der Fabel gehört, weil dafür:

$$h_3' < r_3.$$

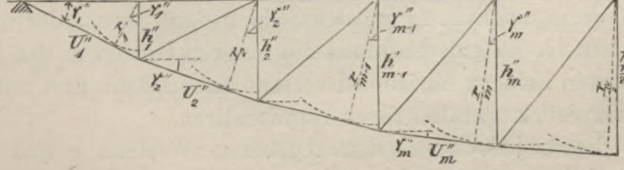
Ist sonach von diesen beiden Trägern ganz abzusehen, **so ist ein Pauli'scher Träger, dessen obere Gurt horizontal ist, für die Diagonalenrichtung I überhaupt nur mit der Felderzahl** $n = 4$ **möglich,** welchen Träger man jedoch kaum schon einen Pauli'schen nennen möchte.

β. **Für die Richtung II der Diagonalen nach Gleichungen (61) und (277) und Beziehung (40)** (siehe Fig. **72**).

Es ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} [U_1'']_{\max} &= [U_2'']_{\max} = [U_3'']_{\max} = \ldots = [U_m'']_{\max} = C \\ \frac{[M_1]_{\max}}{h_1'' \cos\gamma_1''} &= \frac{[M_2]_{\max}}{h_2'' \cos\gamma_2''} = \frac{[M_3]_{\max}}{h_3'' \cos\gamma_3''} = \ldots = \frac{[M_m]_{\max}}{h_m'' \cos\gamma_m''} = C \end{aligned}\right\} \quad (281)$$

Fig. 72.



also mit Gleichung (279):

$$h_1'' \cos\gamma_1'' = r_1;\; h_2'' \cos\gamma_2'' = r_2;\; h_3'' \cos\gamma_3'' = r_3; \ldots h_m'' \cos\gamma_m'' = r_m \quad (282)$$

Beschreibt man daher um die oberen Knotenpunkte mit den der Parabelgleichung (279) entsprechenden Ordinaten:

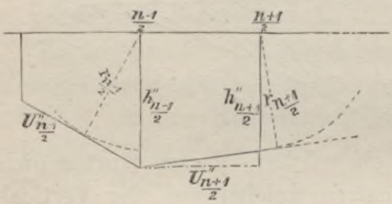
$$r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots r_m \text{ etc.}$$

als Radien Kreisbögen, so werden die Polygonseiten der unteren Gurt:

$$U''_1,\ U''_2,\ U''_3 \ldots U''_m,$$

diese Kreisbögen der Art tangiren müssen, dass jede Gurtsehne Tangente an den Kreis um den rechtsseitigen Knotenpunkt wird.

Fig. 73.



Hieraus folgt übrigens hinsichtlich der Felderzahl n des Pauli'schen Trägers die bekannte Einschränkung, dass dieselbe im Allgemeinen keine ungerade, sondern nur eine gerade sein kann. Im Falle n eine ungerade Zahl wäre, müsste der Symmetrie des Trägers halber die Richtung der unteren Gurt im mittleren Felde horizontal sein (siehe Fig. **73**). Die Forderung aber, dass die untere Gurt die constante Maximalspannung C erleidet, wird nur erfüllt, wenn die Gurtsehne $U''_{\frac{n+1}{2}}$ den Kreisbogen, dessen Radius $r_{\frac{n+1}{2}}$, um den oberen Knotenpunkt $\frac{n+1}{2}$ tangirt. Dass dieses mit einer horizontalen Gurtsehne, für den im Allgemeinen eintretenden Fall:

$$h''_{\frac{n-1}{2}} > r_{\frac{n-1}{2}},$$

unmöglich ist, leuchtet ein, weil bei der hier angenommenen constanten Feldereintheilung die beiden Radien $r_{\frac{n-1}{2}}$ und $r_{\frac{n+1}{2}}$ einander gleich sind. Nur wenn: $h''_{\frac{n-1}{2}} = r_{\frac{n-1}{2}}$ ist die ungerade Feldereintheilung möglich, es werden jedoch dann ausser der unteren Gurt im mittleren Felde ebenfalls die unteren Gurten in den beiden benachbarten Feldern horizontal verlaufen, somit die drei mittleren Felder ein Stück Parallelträger repräsentiren.

Da dieses jedoch bei den gegebenen Werthen c und C der blosse Zufall wäre, so sehen wir von den Trägern mit ungerader Feldereintheilung ab, und setzen in der Folge voraus, dass n **eine gerade Zahl sei.**

Ermittelt man nun aus Fig. 72 die Länge der Verticale h''_m, so ergiebt sich nach Professor Ritter:

$$h''_m = \frac{c\,r_m}{c^2 - r_m^2}\left[-\frac{r_m\,h''_{m-1}}{c} + \sqrt{c^2 + h''^2_{m-1} - r_m^2}\right] \ldots (283)$$

Die Formel setzt die Länge der Verticale h''_{m-1} als bekannt voraus, und ist deren Resultat insofern unbefriedigend, als man nicht im Stande ist, die Verticalen allgemein als eine Function der Abscisse $x = mc$ und der Maximalinanspruchnahme C anzugeben; allein es ist eine derartige Formel dem Verfasser nicht bekannt und aufzustellen nicht gelungen. Doch ist aus Gleichung (283) ersichtlich, dass man nicht im Stande ist, mit jeder beliebigen Felderweite c und Maximalinanspruchnahme C unter allen Umständen einen Pauli'schen Träger zu construiren. Damit obiger Ausdruck einen reellen Werth repräsentirt, muss die Beziehung bestehen:

$$c^2 + h''^2_{m-1} > r_m^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (284)$$

Wird diese Beziehung nicht erfüllt, so hat man eben mit den gewählten Grössen c und C zwei einander widerstreitende Bedingungen für den Pauli'schen Träger gestellt.

Bezeichnet aber diese Beziehung die Möglichkeit eines Paulischen Trägers überhaupt, so wird eine zweite Bedingung hinzugefügt werden müssen, durch welche alle constructiv oder ästhetisch unmöglichen Trägerformen, deren Gurten convex gegen einander und nicht stetig verlaufen, von vornherein ausgeschlossen werden. Diese wird also für die erste Trägerhälfte lauten:

$$r_m < h''_m < r_{m+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (285)$$

Die Grenze: $r_m = h_m = r_{m+1}$ darf im Allgemeinen nicht erreicht werden; nur in Betreff der Verticale im Trägermittel dürfte die Gleichung: $h_{\frac{n}{2}} = r_{\frac{n}{2}}$ statthaft sein, in welchem Falle dann die unteren Gurten der beiden mittleren Felder horizontal sein würden. **Darnach ist also ein Pauli'scher Träger, dessen obere Gurt horizontal ist, mit Diagonalen der Richtung II nur mit den Bedingungen Gleichungen (284) und (285) und für den Fall möglich, dass die Felderzahl n eine gerade ist.**

b. Träger mit Gegendiagonalen.

§ 69. Wie bekannt, versteht man darunter einen solchen Träger, dessen Diagonalen vermöge deren Befestigung oder Anordnung ihres Querschnittes nur einerlei Spannung zu übertragen im Stande sind. Der Träger wird nach dem Vorigen als Pauli'scher Träger nur möglich, wenn für die totale Belastung desselben die Diagonalen der Richtung II thätig werden.

Mit der Bedingung (285) und Fig. **72** erhält man für die erste Trägerhälfte:

$$\cos \gamma''_m > \cos \gamma''_{m-1},$$

also:

$$\frac{r_m}{h''_m} > \frac{r_{m-1}}{h''_{m-1}},$$

daher:

$$\frac{h''_m}{r_m} < \frac{h''_{m-1}}{r_{m-1}}.$$

Bedeutet also δ einen **positiven** Werth, so kann man setzen:

$$\frac{h''_m}{r_m} = \frac{h''_{m-1}}{r_{m-1}} - \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (286)$$

Multiplicirt man mit dieser Gleichung den Werth der Inanspruchnahme der Diagonale, Gleichung (62), für den Fall der totalen Belastung des Trägers, so ergiebt sich:

$$R''_m \frac{h''_m}{r_m} = -\left\{\frac{[M_m]_{\max}}{h''_m}\,\frac{h''_m}{r_m} - \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h''_{m-1}}\,\frac{h''_{m-1}}{r_{m-1}} + \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h''_{m-1}}\,\delta\right\}\frac{1}{\cos\alpha''_m},$$

oder:

$$R''_m = -\frac{r_m}{h''_m}\left\{\frac{[M_m]_{\max}}{r_m} - \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{r_{m-1}} + \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h''_{m-1}}\,\delta\right\}\frac{1}{\cos\alpha''_m}.$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der nach Gleichung (201) eintretenden Beziehung:

$$\frac{[M_m]_{\max}}{r_m} - \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{r_{m-1}} = 0: \quad \ldots\ldots\ldots \quad (287)$$

$$R''_m = -\frac{r_m}{h''_m}\,\delta\,\frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h''_{m-1}}\,\frac{1}{\cos\alpha''_m} \quad \ldots\ldots \quad (288)$$

Es würden daher nach § 8 und dieser Gleichung (288) die Diagonalen der Richtung II bei totaler Belastung eine **Druckspannung** erfahren. Da die Diagonalen dieser Richtung aber nach § 68 zur Wirkung kommen müssen, um der unteren Gurt die constante Maximalinanspruchnahme C zu überweisen, **so ist ein Pauli'scher Träger mit Gegendiagonalen und horizontaler oberer Gurt nur möglich, wenn dessen Diagonalen nur Druckspannungen übertragen können. Mit gezogenen Diagonalen gehört derselbe zu den Unmöglichkeiten.**

2. Pauli'sche Träger, deren untere Gurt horizontal ist.

§ 70. Die die Trägerform bedingende Forderung lautet:

$$[S_1]_{\min} = [S_2]_{\min} = [S_3]_{\min} = \ldots = [S_m]_{\min} = \ldots = [S_n]_{\min} = -C \quad (289)$$

Es werden sich daher die Resultate § 68 bis 69 geradezu umkehren, und die zu deren Beweisführung angewandten Figuren **68** bis **73** sich hier nur in der um die horizontale Gurt umgedrehten Lage wiederholen. Man erhält also:

a. Träger mit einfachen Diagonalen.

α. **Für die Richtung I der Diagonalen.**

Der Träger ist als Pauli'scher Träger nur mit den Bedingungen (284) und (285), worin h' für h'' zu setzen, und auch sonst nur dann möglich, wenn n eine gerade Zahl ist. — Mit derselben Vertauschung der Buchstaben h' und h'' ergeben sich die Längen der Verticalen aus Gleichung (283).

β. **Für die Richtung II der Diagonalen**

ist ein Pauli'scher Träger nur mit $n = 4$ möglich.

b. Träger mit Gegendiagonalen.

Derselbe kann nur mit gezogenen, niemals mit gedrückten Diagonalen als Pauli'scher Träger construirt werden.

3. Pauli'sche Träger mit congruent verlaufenden Gurten und gleicher Maximalinanspruchnahme in beiden Gurten.

§ 71. Die die Trägerform bedingenden Forderungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} [U_1]_{\max} = [U_2]_{\max} = [U_3]_{\max} = \ldots = [U_m]_{\max} = \ldots = [U_n]_{\max} &= C, \\ [S_1]_{\min} = [S_2]_{\min} = [S_3]_{\min} = \ldots = [S_m]_{\min} = \ldots = [S_n]_{\min} &= -C. \end{aligned}\right\} \quad (290)$$

Ermitteln wir also die diesen Forderungen entsprechende Trägerform:

a. Träger mit einfachen Diagonalen.

α. **Für die Richtung I der Diagonalen.**

Nach Gleichungen (57) und (290) und Beziehung (40) ist:

$$[S'_m]_{\min} = -\frac{[M_m]_{\max}}{h'_m \cos\beta'_m} = [S'_{m+1}]_{\min} = -\frac{[M_{m+1}]_{\max}}{h'_{m+1}\cos\beta'_{m+1}} = -C;$$

und nach Gleichungen (58) und (290):

$$[U'_m]_{\max} = \frac{[M_{m-1}]_{\max}}{h'_{m-1}\cos\gamma'_m} = [U'_{m+1}]_{\max} = \frac{[M_m]_{\max}}{h'_m \cos\gamma'_{m+1}} = +C,$$

also indem: $$-[S''_m]_{\min} = [U'_{m+1}]_{\max},$$

$$\frac{[M_m]_{\max}}{h'_m \cos\beta'_m} = \frac{[M_m]_{\max}}{h'_m \cos\gamma'_{m+1}},$$

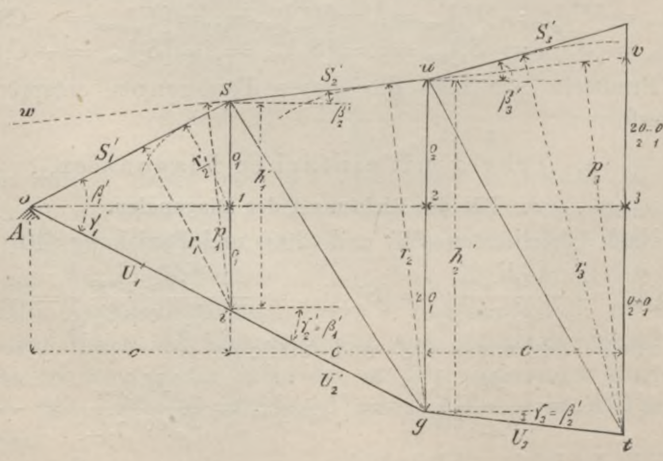
oder: $$\cos\beta'_m = \cos\gamma'_{m+1} \qquad (291)$$

Daraus geht hinsichtlich der Trägerform hervor, dass die beiden Gurten nicht congruent sein können, da die Winkel β und γ nicht in ein und demselben Feld, sondern in den beiden benachbarten Feldern einander gleich sein müssen. Desgleichen erhält man daraus bezüglich der Trägeranordnung, dass auf der Trägermitte eine Verticale vorhanden, also die Felderzahl eine gerade sein muss.

Die Herren Laissle und Schübler sagen im II. Theil ihres „Baues der Brückenträger", Seite 87: man suche der Bestimmung Gleichung (291) dadurch zu genügen, dass man für $[S'_m]_{\min}$ und $[U'_m]_{\max}$ einen mittleren Werth einführe. Prof. Ritter berechnet in seiner „Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen" auf Seite 266 in Fig. **357** einen Pauli'schen Träger, dessen Gurten anscheinend die geforderten Bedingungen erfüllen; allein dieses ist nur dem eigenthümlichen Zusammensetzen zweier Trägerhälften zuzuschreiben, wodurch auch die übrigen Constructionsglieder eine Berechnung erfahren, welche in ähnlichem Masse wenig Vertrauen erregend ist, wie jede Berechnung eines Trägers mit mehrfachen Systemen, § 53.

Es mag also von Interesse sein, die Form desjenigen Trägers kennen zu lernen, welche wie gefordert in beiden Gurten thatsächlich gleiche Maximalinanspruchnahmen bedingt.

Fig. 74.



Da die beiden Inanspruchnahmen der Gurten im ersten Felde einander gleich sein sollen, und nach Gleichungen (57) und (58[a]) und Beziehung (40):

$$[S_1']_{min} - = \frac{[M_1]_{max}}{h_1' \cos \beta_1'} \quad \text{und} \quad [U_1']_{max} = \frac{[M_1]_{max}}{h_1' \cos \gamma_1'},$$

so ist:

$$\beta_1' = \gamma_1'.$$

Man wird also um den Punkt 1 als Mittelpunkt (Fig. **74**) einen Kreisbogen mit dem Radius $\frac{r_1}{2}$ Gleichung (279) beschreiben, und die Richtungen der beiden Gurten im ersten Felde in den beiden Tangenten vom Auflager A an jenen Kreis erhalten, weil dadurch:

$$h_1' \cos \beta_1' = h_1' \cos \gamma_1' = r_1.$$

Es werden sonach die durch die Horizontale durch das Auflager A entstehenden beiden Theile für h_1', oder die beiden Abschnitte oberhalb und unterhalb der Trägerachse einander gleich sein. Bezeichnet man dieselben mit o_1, so ist:

$$h_1' = 2 o_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (292)$$

Aus Gleichung (291) folgt, dass: $\beta_1' = \gamma_2'$, dass man also die Richtung der unteren Gurt U_2' im zweiten Felde in der Verlängerung der unteren Gurt U_1' erhält, wodurch der Abschnitt von h_2' unter der Abscissenachse bei constanter Feldertheilung $2 o_1$ wird.

Beschreibt man nun aus dem Endpunkte g der Verticale h_2' mit dem Radius r_2, Gleichung (279), einen Kreisbogen, und zieht daran von dem obersten Endpunkte s der Verticale h_1' eine Tangente, so erhält man in dieser die Richtung der oberen Gurt S_2' im zweiten Felde, welche auf der Verticale h_2' oberhalb der Abscissenachse das Stück o_2 abschneidet. Es ist daher:

$$h_2' = 2 o_1 + o_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (293)$$

Diese Construction ist für das erste Feld so lange möglich, als:

$$\frac{r_1}{2} < c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (294)$$

und für das zweite Feld, so lange als:

$$(h_1' + c \operatorname{tg} \beta_1')^2 + c^2 > r_2^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (295)$$

Angenommen, beides wäre der Fall, und ausserdem erfüllte die Richtung der Gurt S_2' im zweiten Felde die aus ästhetischen und constructiven Gründen nothwendige Forderung, dass sie mit der Richtung der Gurt S_1' des ersten Feldes concav gegen die Trägerachse geneigt sei, wie in Fig. **74**, so wird man die Richtung der unteren Gurt U_3' des dritten Feldes dadurch erhalten, dass man $\gamma_3' = \beta_2'$ macht. Man hat also den unteren Endpunkt t der Verticale h_3' so zu bestimmen, dass der Abschnitt unter der Abscissenachse $= 2 o_1 + o_2 - o_1 = o_2 + o_1$ wird.

Die Richtung der oberen Gurt S_3' ergiebt sich alsdann als Tangente vom oberen Endpunkt u der Verticale h_2' an den Kreisbogen, mit dem Radius r_3, Gleichung (279), um den Punkt t als Mittelpunkt. Verlängert man die obere Gurt S_2' über u hinaus nach v und fällt auf diese Verlängerung von t aus ein Perpendikel p_3, so muss, damit die beiden Gurten S_2' und S_3' keinen überstumpfen Winkel gegen die Trägerachse bilden (also **nicht** wie in Fig. **74**), folgende Ungleichung bestehen:

$$p_3 > r_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (296)$$

Ausserdem wird das durch die Verlängerung von S_2' auf der Verticale h_3' oberhalb der Trägerachse abgeschnittene Stück $2 o_2 - o_1$ betragen, sowie p_3 parallel r_2 sein müssen (Fig. **74**), während r_1, r_2 und r_3 aus Gleichung (279) folgen:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{q}{2C}(lc - c^2) \\ r_2 &= \frac{q}{2C}(2lc - 4c^2) \\ r_3 &= \frac{q}{2C}(3lc - 9c^2) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (297)$$

Verlängert man dagegen die Richtung der oberen Gurt S_2' über s hinaus nach w, und fällt auf diese Verlängerung von i aus ein Perpendikel p_1, so muss aus der vorausgesetzten Concavität der beiden Gurtsehnen S_1' und S_2' gegen die Trägerachse folgen:

$$p_1 > r_1,$$

also:

$$\frac{p_1}{r_2} > \frac{r_1}{r_2},$$

und da nach Fig. **74**:

$$\frac{p_1}{r_2} = \frac{h_1'}{h_2'}:$$

$$\frac{h_1'}{h_2'} > \frac{r_1}{r_2}.$$

Nach Gleichung (297) ist aber:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{lc - c^2}{2lc - 4c^2} = \frac{l - c}{2l - 4c},$$

also hat man: $$\frac{h_1'}{h_2'} > \frac{l-c}{2l-4c},$$

oder mit Gleichungen (292) und (293):

$$\frac{2o_1}{2o_1+o_2} > \frac{l-c}{2l-4c},$$

also: $$1 - \frac{o_2}{2o_1+o_2} > 1 - \frac{l-3c}{2l-4c},$$

oder: $$-\frac{o_2}{2o_1+o_2} > -\frac{l-3c}{2l-4c},$$

oder: $$\frac{o_2}{2o_1+o_2} < \frac{l-3c}{2l-4c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (298)$$

Nach Fig. **74** ist nun:

$$\frac{3o_2}{2o_1+o_2} = \frac{p_3}{r_2}, \text{ also: } \frac{o_2}{2o_1+o_2} = \frac{p_3}{3r_2},$$

und nach Gleichung (297):

$$\frac{3(lc-3c^2)}{2lc-4c^2} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{3(l-3c)}{2l-4c},$$

also: $$\frac{l-3c}{2l-4c} = \frac{r_3}{3r_2},$$

daher mit Gleichung (298):

$$\frac{p_3}{3r_2} < \frac{r_3}{3r_2} \quad \text{oder} \quad p_3 < r_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (299)$$

Die nothwendige Concavität der beiden oberen Gurten in den beiden ersten Feldern bedingt also unter allen Umständen die Ungleichheit (299), woraus mit Hülfe der die Concavität der beiden oberen Gurtsehnen S_2' und S_3' bedingenden Ungleichheit (296) folgt, dass die Concavität an der Verticale $m = 2$ jedenfalls aufhört.

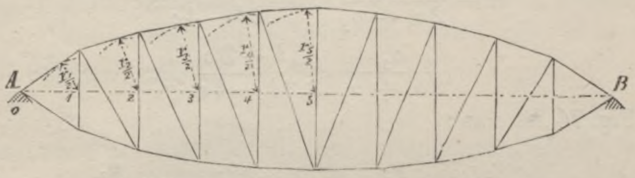
Muss man also in der Folge von den Trägern mit congruent verlaufenden Gurten und constanter Maximalinanspruchnahme beider Gurten als unmöglich absehen, und kann es nicht von Interesse sein, einen Träger zu berechnen, welcher die obigen Bedingungen ungefähr, keine derselben jedoch ganz erfüllt, so möge doch erwähnt werden, dass es wenigstens möglich ist, bei beiderseits congruenten Gurten und der hier vorausgesetzten Richtung der Diagonalen, der oberen Gurt eine constante Maximalinanspruchnahme zu überweisen.

Angenommen, dieselbe solle $-C$ sein, so wird man den fraglichen Träger erhalten, wenn man mit den aus der Parabelgleichung (279) folgenden Radien:

$$\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}, \ldots \frac{r_m}{2} \text{ etc.},$$

aus den Theilpunkten der Trägerachse Kreisbögen beschreibt, und daran die obere Gurt als Tangenten construirt. Dreht man alsdann diese Gurt um die Trägerachse nach unten, so ergiebt sich die untere Gurt des Trägers (Fig. **75**).

Fig. 75.



β. **Für die Richtung II der Diagonalen**

ergiebt sich analog dem Vorigen, dass die Concavität der beiden Gurtsehnen U_2'' und U_3'' an der Verticale $m = 2$ ebenfalls aufhören wird, dass es jedoch möglich ist, bei beiderseits congruenten Gurten der unteren Gurt die constante Maximalinanspruchnahmen $+C$ zu überweisen. Die Construction dieses Trägers ist durch Fig. **75** bereits gegeben.

b. Träger mit Gegendiagonalen.

§ 72. Es wird genügen anzuführen, und lässt sich aus dem Vorhergehenden einfach erweisen, dass auch diese Träger mit der an sie gestellten Anforderung einer überall gleichen Maximalinanspruchnahme beider Gurten unmöglich sind. Es lässt sich wiederum nur der einen oder anderen der beiden nach Fig. **75** zu construirenden Gurten eine constante Maximalinanspruchnahme überweisen.

Soll dieselbe der **oberen** Gurt anheimfallen, so müssen nach Vorigem die Diagonalen der Richtung I bei totaler Belastung in Wirksamkeit treten, und da dieselben nach Gleichungen (59), (62) und (288) und § 8 eine Zugspannung erfahren, so lässt sich der fragliche Träger nur mit **gezogenen** Diagonalen construiren.

Ebenso ist zu beweisen, dass, sofern die **untere** Gurt die constante Maximalinanspruchnahme erfahren soll, der Träger, dessen

Gurten sich nach Fig. **75** ergeben, nur mit **gedrückten** Diagonalen möglich wird.

Die Längen der Verticalen und die Bedingungen der Möglichkeit des Trägers überhaupt sind nach Gleichungen (283) bis (285) und Fig. **75** einfach aufzustellen, und zwar ergeben sich die Länge der Verticale h_m:

$$h_m = \frac{c\, r_m}{c^2 - \frac{r_m^2}{4}} \left[- \frac{r_m h_{m-1}}{4c} + \sqrt{c^2 + \frac{h_{m-1}^2}{4} - \frac{r_m^2}{4}} \right] \quad . . \quad (300)$$

und die Bedingungen der Möglichkeit der sämmtlichen Träger, § 71 bis 72, überhaupt:

$$\left. \begin{array}{l} c^2 + \frac{h_{m-1}^2}{4} \geqq \frac{r_m^2}{4} \\ r_m < h_m < r_{m+1} \end{array} \right\} \quad . . . . \quad (301)$$

II. Numerische Beispiele.

§ 73. Die vorigen Untersuchungen über die Pauli'schen Träger sind insofern unbefriedigend, als die Inanspruchnahmen der einzelnen Constructionsglieder nicht anders als nach den im Abschnitte **A** gegebenen allgemeinen Formeln zu ermitteln sein werden. Formeln aufzustellen, welche die allgemeinen Resultate vereinfachen und die Inanspruchnahmen als eine einfache Function der äusseren Kräfte, der Trägerform und der Abscisse ergeben, ist dem Verfasser nicht gelungen, wie demselben auch dergleichen scharfe Formeln unbekannt sind. Einen Näherungswerth wird man für dieselben kaum gelten lassen dürfen. Wird ein solcher beabsichtigt, so kann man die Wandconstruction einfach nach den Formeln des vom Pauli'schen Träger in seiner Form äusserst gering abweichenden Parabolischen Trägers berechnen.

Wir berechnen somit die Pauli'schen Träger für den in § 36, Taf. **1**, angenommenen allgemeinen Träger und nehmen bezüglich der Uebereinstimmung und des Vergleichs mit dem im Vorigen für $n = 10$ berechneten Parabolischen Träger an:

$$p = 2250, \quad k = 6750 \text{ Kilogr.},$$

so dass das im § 36 vorausgesetzte Verhältniss von $\frac{p}{k} = \frac{1}{3}$ gewahrt bleibt. Alsdann ergiebt sich:

ad $[V'_x]_{\min}$: $\left\{\begin{array}{ll} \frac{p\,l}{k} = \frac{2250\,.\,10}{6750} = \ldots\ldots\ldots\ldots & 3\frac{1}{3} \\ \frac{p\,l}{2k}(p+k) = \frac{2250\,.\,10}{2\,.\,6750}\,.\,9000 = \ldots & 15000 \text{ Kilogr.,} \\ \frac{p\,l}{2} = \frac{2250\,.\,10}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots & 11250 \;\;" \\ \frac{q\,l}{2} = \frac{9000\,.\,10}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots & 45000 \;\;" \\ \frac{k\,c}{8\,n} = \frac{6750}{8\,.\,10} = \ldots\ldots\ldots\ldots & 84{,}375 \;\;" \end{array}\right.$

ad $[M'_x]_{\max}$: $\frac{q\,l^2}{8} = \frac{9000\,.\,100}{8} = \ldots\ldots\ldots\ldots 112500$

ad Y: $\left\{\begin{array}{ll} \frac{q\,l^2}{2} = \frac{9000\,.\,100}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots & 450000 \\ \frac{p\,l}{2k} = \frac{2250\,.\,10}{2\,.\,6750} = \ldots\ldots\ldots\ldots & 1\frac{2}{3} \\ \frac{p^2\,l^2}{8\,k} = \frac{2250^2\,.\,100}{8\,.\,6750} = \ldots\ldots\ldots\ldots & 9375 \end{array}\right.$

Diese Werthe finden sich auf Taf. **17** (Fig. **5**) zusammengestellt, und sind darnach die einzelnen Functionen der äusseren Kräfte entsprechend der Annahme von Lastpunkten eingetragen. Die Genauigkeit der Resultate auf 25 Kilogr. hat ihren Grund in der nachträglich hier vorgenommenen numerischen Ermittelung der einzelnen Functionen.

Die der Construction des Pauli'schen Trägers mit einer horizontalen Gurt zu Grunde zu legende Parabel ergiebt sich nach Gleichung (279). Machen wir für die in der Folge zu berechnenden Träger die Bedingung, dass die Maximalinanspruchnahme ihrer gekrümmten Gurten $C = 90000$ Kilogr. betrage, so erhält man die Scheitelordinate dieser Parabel mit:

$$r_{\frac{n}{2}} = \frac{9000}{2\,.\,90000}(5\,.\,10 - 25) = 1{,}25.$$

Es ist also $r_{\frac{n}{2}}$ gleich der Höhe H der im Vorigen berechneten Parabolischen Träger. Die Scheitelordinate der Parabel für einen Träger mit zwei gekrümmten Gurten ergiebt sich daraus:

$$\frac{r_{\frac{n}{2}}}{2} = \frac{1{,}25}{2} = 0{,}625.$$

Die darnach construirten resp. berechneten Längenabmessungen des Pauli'schen Trägers finden sich mit den demselben Beispiel entsprechenden Abmessungen eines Parabolischen Trägers ebenfalls auf Taf. **17** (Fig. **1** bis **4**) zusammengestellt.

Was nun darnach die Ermittelung der Spannungszahlen (Taf. **18**) anbelangt, so haben wir die einzelnen numerischen Rechnungen abzudrucken unterlassen, da dieselben sich ohne weitere Erläuterung einfach nach den allgemeinen Formeln des Abschnitts **A** ergeben. Wie ein Vergleich mit den numerischen Beispielen der Parabolischen Träger ergiebt, weichen die Inanspruchnahmen der Paulischen Träger (Taf. **18**) äusserst gering von den Inanspruchnahmen der Träger (Taf. **12**, **13** und **16**) ab, was seinen Grund in der sehr geringen Verschiedenheit beider Trägerformen hat, welche sich nach Taf. **17** für einzelne Constructionsglieder erst in der 3. und 4. Decimalstelle ihrer Längenabmessung äussert. Diese Eigenschaften uns zu Nutze machend, haben wir die Inanspruchnahmen der Verticalen zwar scharf nach den für die Pauli'schen Träger geltenden Längenabmessungen, aber unter der Annahme ermittelt, dass die für die Parabolischen Träger geltenden Belastungsfälle zur Erreichung der absoluten Maximal- und Minimalinanspruchnahme der Verticalen ohne Weiteres auch hier gelten. Einestheils wird der dadurch eventuell begangene Fehler äusserst gering, anderntheils aber dessen Vernachlässigung mit Rücksicht darauf erlaubt sein, dass die hier gegebenen numerischen Beispiele nur die Inanspruchnahme der Gurten und Diagonalen zu erläutern haben und die Inanspruchnahmen der Verticalen bei der beabsichtigten Ueberweisung einer constanten Maximalinanspruchnahme an die eine oder andere gekrümmte Gurt nennenswerthe Eigenschaften und Beziehungen unter einander nicht enthalten.

Die auf Taf. **18** gegebenen Pauli'schen Träger sind nach den in der allgemeinen Theorie für dieselben aufgestellten Bedingungen die einzig möglichen. Wir machen endlich darauf aufmerksam, dass die Diagonalen der Fig. **2** und **8** (Taf. **18**) nur stumpf gegen einander und die Gurten gestossene unbefestigte Constructionsglieder mit gespreiztem Querschnitt, diejenigen der Fig. **4** und **6** dagegen nur mit den Gurten befestigte Band-, Flach- oder Rundeisen sein können, wenn die den Gurten überwiesenen Inanspruchnahmen gelten sollen.

E. Die Schwedler'schen Träger.

I. Allgemeine Theorie.

§ 74. Die Eigenschaften der Parabolischen Träger § 56 und der Parallelträger § 42, nach welchen bei Anordnung mit Gegendiagonalen die ersteren Träger diese Gegendiagonalen in sämmtlichen, die letzteren solche dagegen nur in denjenigen mittleren Feldern erfordern, für welche $[V_m]_{max}$ und $[V_m]_{min}$ von verschiedenem Vorzeichen sind, wurden durch den Umstand bedingt, dass die Minimal- und Maximalinanspruchnahmen der Diagonalen der Parabolischen Träger in allen Feldern, der Diagonalen der Parallelträger dagegen nur in den oben bezeichneten mittleren Feldern von verschiedenem Vorzeichen und für die den Auflagern benachbarten Felder von gleichem Vorzeichen sind.

Es lässt sich also vermuthen, dass es zwischen beiden Trägerformen einen mit Verticalen angeordneten Träger giebt, dessen Diagonalen je nach ihrer Richtung in der einen Grenze der Inanspruchnahme irgend einen positiven oder negativen Werth aufweisen, in der andern Grenze aber spannungslos erscheinen.

Schwedler'sche Träger werden dementsprechend nach deren Erfinder diejenigen Träger der Gruppe § 12 resp. Fig. **4** genannt, deren Diagonalen in der ersten Trägerhälfte für den Belastungsfall $[V_m]_{min}$ spannungslos sind. Die Schwedler'schen Träger entsprechen daher ebenfalls der Forderung, in den Diagonalen stets nur einerlei Inanspruchnahme zu entwickeln und entbehren dadurch der Gegendiagonalen. Ein dieser Forderung entsprechender Träger wird zwar schon durch die nach §§ 14 und 15 in Fig. **6** bestimmte Form erhalten; indessen tritt hier die wesentliche Einschränkung für die Form der folgenden Träger hinzu, dass die eine Grenze der Inanspruchnahme ihrer Diagonalen gerade Null werde und der Träger selbst zu der durch § 12 bestimmten Gruppe gehöre.

1. Ermittelung der Trägerform.

a. Auf dem Wege der Rechnung.

§ 75. Die beiden die Inanspruchnahme der Diagonalen bestimmenden Gleichungen (59) und (62) führen die vorliegende Aufgabe auf die Ermittelung der Gurtabstände an den Knotenpunkten und erweisen, dass es gleichgültig ist, ob die eine als gegeben zu betrachtende Gurt, zu welcher die zweite mit der gegebenen Anforderung an die Inanspruchnahmen der Diagonalen ermittelt werden soll, horizontal oder irgendwie gekrümmt verläuft. Dieselben erweisen ferner, dass der Verlauf beider Gurten für einen Träger mit gezogenen oder gedrückten Diagonalen ganz gleich ist. Wir werden die Gurtabstände an den Knotenpunkten, gleichviel für welchen Träger, ermitteln:

für die Bedingung, dass die m-Diagonale für den Belastungsfall $[V_m]_{\min}$ spannungslos ist und
für die Bedingung, dass die m-Diagonale für den Belastungsfall $[V_m]_{\max}$ spannungslos ist.

Ein Vergleich der in Gleichungen (59) und (62) einzuführenden beiden Functionen $[M_m]_{V_m \min}$ und $[M_{m-1}]_{V_m \min}$ nach Gleichungen (134) und (135) einerseits, und $[M_m]_{V_m \max}$ und $[M_{m-1}]_{V_m \max}$ nach Gleichungen (136) und (137) andererseits ergiebt indessen mit den in diesen Gleichungen auftretenden Functionen der Momente und Verticalkräfte (Fig. **19** und **23**), dass man die Abstände der Gurten der ersten Trägerhälfte mit der Bedingung, dass die m-Diagonale für den Belastungsfall $[V_m]_{\max}$ spannungslos ist, in dem Verlauf der Gurten der zweiten Trägerhälfte für die Bedingung erhält, dass deren Diagonalen für den Belastungsfall $[V_m]_{\min}$ spannungslos sein sollen. Wir dehnen daher die Ermittelung der dieser letzteren Bedingung entsprechenden Gurtabstände über den ganzen Träger aus.

Die dieser Bedingung genügende Beziehung lautet nach Gleichungen (59) und (62) für beide Richtungen der Diagonalen:

$$\frac{[M_m]_{V_m \min}}{h_m} - \frac{[M_{m-1}]_{V_m \min}}{h_{m-1}} = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (302)$$

oder mit Gleichungen (147) und (148) unter Annahme einer constanten Felderweite c:

$$\frac{m(n-m)[np+(m-1)k]}{h_m} = \frac{(m-1)(n-m+1)(np+mk)}{h_{m-1}},$$

also: $$\frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{m(n-m)} \cdot \frac{np+mk}{np+(m-1)k},$$

oder: $$h_{m-1} = \frac{n-m+1}{n-m} \cdot \frac{\frac{n}{m}p+k}{\frac{n}{m-1}p+k} h_m \ldots\ldots\ldots \quad (303)$$

Daher wird sich die Höhe h_{r-1} aus h_r berechnen:

$$h_{r-1} = \frac{n-r+1}{n-r} \cdot \frac{\frac{n}{r}p+k}{\frac{n}{r-1}p+k} h_r.$$

Ebenso h_{r-2} aus h_{r-1}:

$$h_{r-2} = \frac{n-r+2}{n-r+1} \cdot \frac{\frac{n}{r-1}p+k}{\frac{n}{r-2}p+k} h_{r-1}$$

$$= \frac{n-r+2}{n-r+1} \cdot \frac{n-r+1}{n-r} \cdot \frac{\left(\frac{n}{r-1}p+k\right)\left(\frac{n}{r}p+k\right)}{\left(\frac{n}{r-2}p+k\right)\left(\frac{n}{r-1}p+k\right)} h_r,$$

also: $$h_{r-2} = \frac{n-r+2}{n-r} \cdot \frac{\frac{n}{r}p+k}{\frac{n}{r-2}p+k} h_r.$$

Desgleichen h_{r-3} aus h_{r-2}:

$$h_{r-3} = \frac{n-r+3}{n-r+2} \cdot \frac{\frac{n}{r-2}p+k}{\frac{n}{r-3}p+k} h_{r-2}$$

$$= \frac{n-r+3}{n-r+2} \cdot \frac{n-r+2}{n-r} \cdot \frac{\left(\frac{n}{r-2}p+k\right)\left(\frac{n}{r}p+k\right)}{\left(\frac{n}{r-3}p+k\right)\left(\frac{n}{r-2}p+k\right)} h_r,$$

also: $$h_{r-3} = \frac{n-r+3}{n-r} \cdot \frac{\frac{n}{r}p+k}{\frac{n}{r-3}p+k} h_r.$$

Daher allgemein:

$$h_{r-x} = \frac{n-r+x}{n-r} \cdot \frac{\frac{n}{r}p+k}{\frac{n}{r-x}p+k} h_r,$$

oder wenn man $r - x = m$ setzt:

$$h_m = \frac{n-m}{n-r} \cdot \frac{\frac{n}{r}p+k}{\frac{n}{m}p+k} h_r = \frac{(n-m)\,m\,(np+rk)}{(n-r)\,r\,(np+mk)} h_r,$$

also: $$h_m = \frac{m\,(n-m)}{r\,(n-r)} \cdot \frac{np+rk}{np+mk} h_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (304)$$

Bezeichnet man nun **für den Fall einer geraden Felderzahl** mit h_r die Verticale im Trägermittel, setzt also $r = \frac{n}{2}$, so ergiebt sich aus Gleichung (304):

$$h_m = \frac{4\,m\,(n-m)}{n^2} \cdot \frac{np+\frac{nk}{2}}{np+mk} h_{\frac{n}{2}}$$

oder: $$h_m = \frac{4m\,(n-m)}{n^2} \cdot \frac{p+\frac{k}{2}}{p+\frac{mk}{n}} h_{\frac{n}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (305)$$

Desgleichen erhält man, wenn **für den Fall einer ungeraden Felderzahl** $r = \frac{n-1}{2}$, aus Gleichung (304):

$$h_m = \frac{m\,(n-m)}{\frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{(n+1)}{2}} \cdot \frac{np+\frac{n-1}{2}k}{np+mk} h_{\frac{n-1}{2}},$$

oder: $$h_m = \frac{4m\,(n-m)}{n^2-1} \cdot \frac{p+\frac{k}{2}-\frac{k}{2n}}{p+\frac{mk}{n}} h_{\frac{n-1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (306)$$

§ 76. Mit Hülfe der vorstehenden Gleichungen (305) und (306) lassen sich nun die Längen der Verticalen der ersten Trägerhälfte ermitteln, wenn ad Gleichung (305) die Länge der Verticale $h_{\frac{n}{2}}$ auf dem Trägermittel, und wenn ad Gleichung (306) die Länge der Verticale $h_{\frac{n-1}{2}}$ gegeben ist. Aus constructiven und ästhetischen

Rücksichten für die Trägerform müssen indessen die Verticalen der ersten Trägerhälfte die folgende Bedingung erfüllen:

$$h_{m-1} \leqq h_m \qquad (307)$$

oder mit Gleichung (303):

$$(n - m + 1)\left(\frac{n}{m} p + k\right) \leqq (n - m)\left(\frac{n}{m-1} p + k\right),$$

d. h. $$(n - m + 1)\frac{n}{m} p + k \leqq (n - m)\frac{n}{m-1} p,$$

oder: $$\frac{(n - m + 1) n}{m} + \frac{k}{p} \leqq \frac{(n - m) n}{m - 1},$$

oder: $$\frac{n (n - m)}{m - 1} - \frac{(n - m + 1) n}{m} \geqq \frac{k}{p},$$

also: $$\frac{n (n - 2m + 1)}{m (m - 1)} \geqq \frac{k}{p} \qquad (308)$$

Wie später aus der graphischen Ermittelung der Trägerform unmittelbar hervorgeht, ist **für eine gerade Felderzahl** n die Gefahr, dass die von den Auflagern nach Gleichungen (304) und (305) aus einer Spitze aufsteigenden und anfangs concav gegen einander geneigten Gurten convex gegen einander geneigt werden, im Trägermittel am grössten. Wenn also die Ungleichheit (308) mit den gegebenen Werthen p und k für $m = \frac{n}{2}$ erfüllt bleibt, so verlaufen die Gurten über die ganze erste Trägerhälfte concav gegen einander, wie im § 74 und durch Gleichung (307) gefordert. Die Bedingung (308) geht für $m = \frac{n}{2}$ über in:

$$\frac{n}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \geqq \frac{k}{p}, \quad \text{oder:} \quad \frac{4}{n - 2} \geqq \frac{k}{p}, \quad \text{oder:} \quad \frac{n - 2}{4} \leqq \frac{p}{k},$$

oder: $$n \leqq \frac{4p}{k} + 2. \qquad (309)$$

Beabsichtigt man daher einen Träger ganz ohne Gegendiagonalen zu construiren, so ist die Felderzahl jedenfalls nach der Beziehung (309) aus den gegebenen Grössen p und k zu wählen. Die Bedingung: $n = \frac{4p}{k} + 2$ würde also die bei gerader Felderzahl gerade noch statthafte Beziehung zwischen n, p und k bezeichnen, für welche die beiden Verticalen $h_{\frac{n}{2}}$ und $h_{\frac{n}{2}-1}$ einander gleich werden. Die dieser letzten Beziehung, also der Gleichung (309) mit $n = 10$, $p = 2$ und $k = 1$ entsprechende Trägerform ist in Fig. **1**, Taf. **19**, aus den sich mit $h_{\frac{n}{2}} = 1{,}25$ nach Gleichung (305) ergebenden Längen der Verticalen unter Annahme einer horizontalen Gurt aufgetragen.

Ein Träger mit denselben Werthen p und k und derselben Stützweite wie oben, für $n = 8$, welcher also der Ungleichheit (309) entspricht, findet sich in Fig. **2** derselben Tafel.

Für einen Träger mit ungerader Felderzahl wird dagegen die Gefahr, dass die beiden Gurten convex gegen einander geneigt werden, an der Verticale $\frac{n-1}{2}$ am grössten. Die Bedingung (308) geht für $m = \frac{n-1}{2}$ über in:

$$\frac{n(n-n+1+1)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)} \geqq \frac{k}{p}, \quad \text{oder:} \quad \frac{8n}{n^2-4n+3} \geqq \frac{k}{p},$$

oder:
$$\frac{n^2-4n+3}{8n} \leqq \frac{p}{k} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (310)$$

Analog dem Vorigen ist danach Fig. **3**, Taf. **19**, ein Schwedler'scher Träger, welcher für $n = 9$, $p = 2$ und $k = 3$ die Gleichung (310) erfüllt, und sonach die noch gerade zulässige Felderzahl n enthält, welche verhütet, dass die Gurten an der $\frac{n-1}{2}^{\text{ten}}$, also hier an der 4ten Verticale convex gegen einander geneigt sind. Die nach Gleichung (306) mit $h_{\frac{n-1}{2}} = 1{,}25$ ermittelten vier mittleren Verticalen sind unter einander gleich.

Fig. **4** derselben Tafel enthält dagegen einen Träger, welcher für $n = 7$ mit denselben Werthen für p und k und derselben Stützweite wie ad Fig. **3** die Ungleichheit (310) erfüllt und über dem mittleren Feld horizontal ist.

Die durch die Beziehung (309) bedingten Träger (Fig. **1** und **2**, Taf. **19**) entbehren somit sämmtlicher Gegendiagonalen, die durch die Bedingung (310) bedingten Träger (Fig. **3** und **4**, Taf. **19**) erhalten dieselben nur im mittleren Feld.

Der Schwedler'sche Träger ist also kein solcher, welcher der Gegendiagonalen unter allen Umständen entbehren kann.

Die Beziehung (309) wird für Brückenconstructionen oft geradezu unmöglich zu erfüllen sein, und dieses namentlich dann, wenn für mässig grosse Brücken $k > p$ und dadurch die Felderzahl n zu klein werden würde.

Der gewöhnliche Schwedler'sche Träger begnügt sich damit, mit einer gegebenen Feldertheilung und mit den gegebenen Grössen p und k den Träger so weit als solchen zu construiren, dessen Diagonalen in der einen Grenze ihrer Beanspruchung spannungslos sind, als die Gleichung (304) mit der Bedingung (307) zulässt, und schaltet von derjenigen Verticale an, an welcher die Beziehung (307) aufhören würde, ein Stück Parallelträger oder irgend ein anderes, sich dem ersteren anpassendes Trägerstück ein. Die Gleichung (308) ergiebt denjenigen Werth von m, für welchen, wenn eine der Abscisse mc entsprechende Verticale vorhanden wäre, die Beziehung (307) noch gerade erfüllt bliebe. Man wird also die für m aus der Gleichung (308) resultirende ganze Zahl mit r bezeichnen, und mit diesem Werth von r und der gegebenen Maximalhöhe des Trägers h_r nach Gleichung (304) alle Verticalen von h_r bis zum Auflager bestimmen können.

Für den in § 36 angenommenen Träger (Taf. **1** und Fig. **5**, Taf. **17**) erhält man beispielsweise aus Gleichung (308):

$$\frac{10\,(10-2m+1)}{m\,(m-1)} = 3, \quad \text{oder:} \quad 3m^2+17m = 110,$$

also: $$m = 3{,}85,$$

folglich wird man $r = 3$ setzen müssen, und wenn man $h_r = 1{,}25$ annimmt, den dieser Maximalhöhe und der Annahme § 36 entsprechenden Schwedler'schen Träger mit den sich aus Gleichung (304) ergebenden Längen der Verticalen in Fig. **5**, Taf. **19**, erhalten.

Die so ermittelten Gurtabstände an den Knotenpunkten werden einen Schwedler'schen Träger nicht allein für den Fall liefern, dass die eine Gurt horizontal ist, sondern gleichfalls einen solchen repräsentiren, wenn man die obigen Gurtabstände zu gleichen oder irgend welchen anderen Theilen von der durch die Auflager gezogenen Horizontale nach oben und unten trägt, wie dieses in Fig. **6**, Taf. **19**, mit den Gurtabständen des Trägers Fig. **5** derselben Tafel vorgenommen worden.

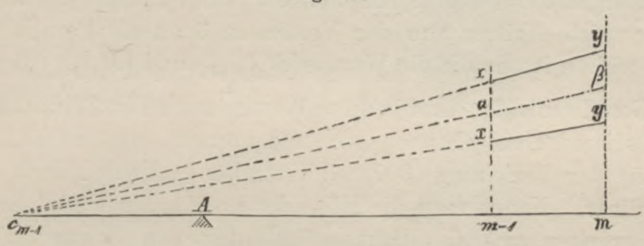
b. Durch Construction.

§ 77. Eine Construction der Gurtabstände bei bereits graphisch ermittelten Functionen der äusseren Kräfte ergiebt sich einfach aus der geometrischen Deutung der die Schwedler'schen Träger bedingenden Gleichung (302). Dieselbe ergiebt:

$$\frac{h_m}{h_{m-1}} = \frac{[M_m]_{V_m \min}}{[M_{m-1}]_{V_m \min}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (311)$$

d. h. die Gurtabstände an zwei auf einander folgenden Knotenpunkten m und $m-1$ verhalten sich wie die denselben Knotenpunkten entsprechenden Momente für den Belastungsfall $[V_m]_{\min}$. Hat man also die Momente an den Knotenpunkten als Ordinaten für irgend eine Abscissenachse aufgetragen, und zieht durch die Endpunkte α und β dieser Ordinaten eine Gerade $\alpha\,\beta$, so wird jede durch den Schnittpunkt c_{m-1} der Linie $\alpha\ \beta$ mit der Abscissenachse ge-

Fig. 76.



zogene Richtung $x\ y$ auf den Verticalen $m-1$ und m zwei Stücke abschneiden (Fig. **76**), welche, als Abstände der Gurten an diesen Knotenpunkten betrachtet, ein Trägerfeld eines Schwedler'schen Trägers ergeben. Dabei ist nicht einmal das Senkrechtstehen der Werthe $[M_{m-1}]_{V_m \min}$ und $[M_m]_{V_m \min}$ gegen die Abscissenachse erforderlich; man wird vielmehr zwei solcher Gurtabstände durch dasselbe Verfahren selbst dann erhalten, wenn die obigen Momente zu einer Abscissenachse unter irgend welchem Winkel aufgetragen sind, wie in Fig. **77**. In der letzten Weise finden sich die Momente für jedes Trägerfeld in Fig. **24** des Textes und auf Tafel **1** verzeichnet. Die daselbst mit dem Namen corrigirte Achse bezeichnete Gerade ab vertritt die in Fig. **77** angenommene Abscissenachse.

Der Verlauf der daselbst verzeichneten Momente $[M_{m-1}]_{V_m \min}$ und $[M_m]_{V_m \min}$ giebt nun Auskunft über die sämmtlichen Gurtabstände des Schwedler'schen Trägers. Man ist nach der Bedingung (307) genöthigt, den Träger von demjenigen Felde an als Parallelträger zu construiren, für welches der Schnittpunkt c der geraden Linie $\alpha\beta$ der Fig. **76** und **77** mit der Abscissenachse im Unend-

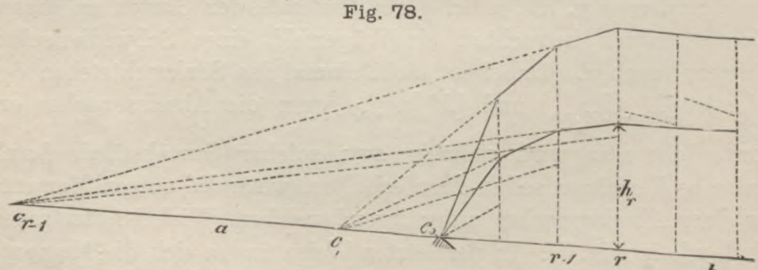
Fig. 77.

lichen und hinter dem m-Felde erfolgt, oder für welches:

$$[M_{m-1}]_{V_m \min} \geqq [M_m]_{V_m \min} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (312)$$

So ergiebt das blosse Ansehen der Tafel **1**, dass der in § 36 vorausgesetzte Träger von der Verticalen 3 an als Parallelträger zu construiren ist, da die die Werthe $[M_3]_{V_4 \min}$ und $[M_4]_{V_4 \min}$ begrenzende Gerade mit der als für diese Werthe nach Fig. **77** anzusehenden Abscissenachse ab nach rechts convergirt, wodurch $h_3 > h_4$, also eine der Beziehung (307) widerstreitende Ungleichheit resultiren würde. Nennt man die Höhe des eventuellen Parallelträgers h_r, so ergeben sich die Gurtabstände für den Schwedler'schen Träger einfach nach der in Fig. **78** angegebenen Construction,

Fig. 78.



welche, von der Verticale h_r gegen das Auflager A vorschreitend, nicht weiter in Worte gefasst zu werden braucht, und aus welcher ersichtlich, wie man einfach, wenn man einmal einen Schwedlerschen Träger für eine Höhe h_r construirt oder berechnet hat, für jede andere Höhe h'_r mit denselben Werthen für Felder- und Stützweite, Eigengewicht und mobile Last beliebig viele andere Schwedlersche Träger aus dem ersteren erhalten wird.

Auf Tafel **20** (Fig. **1**) findet sich dieses Verfahren mit dem Träger § 36, Tafel **1** oder Tafel **17** (Fig. **5**) für dessen erste Hälfte in der Weise ausgeführt, dass die Momente $[M_m]_{V_m \min}$ und $[M_{m-1}]_{V_m \min}$, für jedes Trägerfeld nach Tafel **17** gleich als Ordinaten gegen eine horizontale Achse als Abscissenachse aufgetragen, nicht wie in Fig. **78** ein verschobenes, sondern ein directes Bild des Schwedler-schen Trägers mit einer horizontalen Gurt liefern.

Das vorige Verfahren, unabhängig von der Bedingung (307), mit einem gegebenen Gurtabstand $h_{\frac{n}{2}}$ im Trägermittel beginnend, für die rechte Trägerhälfte ausgedehnt (Fig. **1** der Tafel **20**) ergiebt in Fig. **2** derselben Tafel das Bild eines Trägers, dessen Diagonalen für den Belastungsfall $[V_m]_{\max}$ spannungslos sind (§ 75). Da dieser Träger indessen ohne praktische Bedeutung ist, so möge desselben hier nur kurz gedacht sein, und nicht weiter darauf eingegangen werden.

Der für die mittleren Felder der ersten Trägerhälfte eingeschaltete Parallelträger, für welche Felder $[M_{m-1}]_{V_m \min} > [M_m]_{V_m \min}$, erhält nach § 42 und Fig. **24** Gegendiagonalen für den Fall, dass mit lauter gleichartig beanspruchten Diagonalen construirt wird; diese Gegendiagonalen unterbleiben jedoch in einem durch die Relation $[M_{m-1}]_{V_m \min} = [M_m]_{V_m \min}$ eventuell bedingten und ebenfalls als Parallelträger zu construirenden m-Felde, weil dieses Feld die Bedingung (307) in ihrer Gleichung noch innehält. Die sämmtlichen ausserhalb der Bedingung:

$$[M_{m-1}]_{V_m \min} > [M_m]_{V_m \min} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (313)$$

liegenden Felder der ersten Trägerhälfte erhalten also lauter einfache Diagonalen, von denen nach § 12, Beziehung (52), die der Richtung I gezogen, und die der Richtung II gedrückt werden, weil für erstere der Minimal-, für letztere der Maximalwerth ihrer Inanspruchnahme Null wird, gleichviel, ob die obere, untere oder keine der beiden Gurten horizontal ist. Es wird daher in der ersten Trägerhälfte für den Belastungsfall $[V_m]_{\max}$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{die Inanspruchnahme } [R'_m]_{\max} \text{ eine Zugspannung} \\ \text{„} \qquad \text{„} \qquad [R''_m]_{\min} \text{ eine Druckspannung}\end{array}\right\} \text{repräsentiren} \quad (314)$$

Genau das Umgekehrte gilt nach Beziehung (51) bezüglich der Art der Inanspruchnahme der Diagonalen derjenigen Träger, deren Diagonalen in der ersten Hälfte für $[V_m]_{max}$ spannungslos sind, wie ein solcher in Fig. **2**, Taf. **20**, dargestellt worden ist.

Die in den vorigen Paragraphen für die erste Trägerhälfte entwickelten Resultate werden ohne nähere Angabe auf die symmetrisch angeordnete zweite Trägerhälfte einfach zu übertragen sein, und liefern die Gesichtspunkte für die Ermittelung der Trägerform bei nicht constanter Felderweite. Wir begnügen uns indessen hier mit der Behandlung der Träger von constanter Felderweite.

2. Ermittelung der Spannungszahlen.

§ 78. Wir beschränken uns im Nachstehenden auf die Untersuchung der beiden Träger Fig. **3** und **4** der Tafel **20**, sehen also sowohl von den Trägern mit beiderseits gekrümmten Gurten, als von denjenigen mit gedrückten Diagonalen ab, indem beide wohl kaum ausgeführt werden dürften, und es hier nicht in der Absicht liegen kann, alle möglichen Trägerformen durchzurechnen. Die Ausführungen für die Parabolischen Träger dürften den genügenden Anhalt zur Ausdehnung der vorliegenden Berechnungen auf die hier nicht berührten Trägerformen geben. Die Inanspruchnahmen des auf Trägermitte eingeschalteten Parallelträgers werden nach den bereits dafür aufgestellten Formeln ermittelt. Es bleiben also nur noch die Spannungszahlen desjenigen Theiles der ersten Trägerhälfte zu ermitteln, dessen Diagonalen für $[V_m]_{min}$ spannungslos sind, welcher also zwischen dem Auflager A und der in § 76 ermittelten Verticale h_r gelegen ist.

a. Die Gurten.

Mit der Beziehung (40) erhält man unter Berücksichtigung, dass ad Fig. **79**: $\beta = 0$ und ad Fig. **80**: $\gamma = 0$ aus den Gleichungen (57), (58), (191), (192) und (304)

ad Fig. **79**:

$$[S'_m]_{min} = -\frac{[M_m]_{max}}{h'_m} = -q\,\frac{c^2\,(n-r)\,r}{2\,(np+rk)\,h_r}\,(np+km),$$

oder wenn:

$$\frac{c^2\,(n-r)\,r}{2\,(np+rk)\,h_r} = C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (315)$$

$$[S'_m]_{min} = -q\,C\,(np+mk), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (316)$$

ebenso ergiebt sich:

$$[U'_m]_{max} = +q\,C\,[np+(m-1)\,k]\,\frac{1}{\cos\gamma_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (317)$$

Desgleichen erhält man ad Fig. **80**:

$$[S'_m]_{\min} = -q\,C\,(np + mk)\,\frac{1}{\cos\beta_m}, \qquad (318)$$

und:

$$[U'_m]_{\max} = +q\,C\,[np + (m-1)\,k] \qquad (319)$$

Fig. 79.

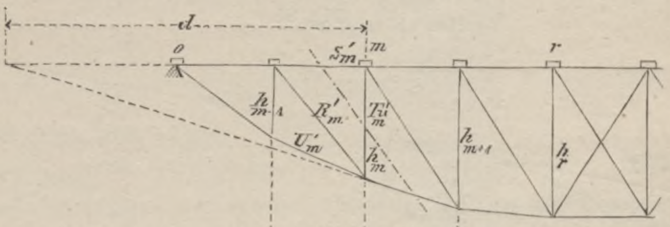
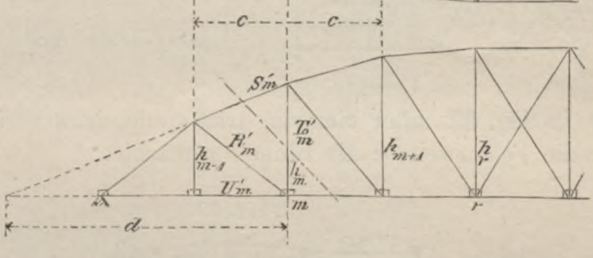


Fig. 80.



Aus den obigen Formeln geht hervor, dass die Horizontalcomponenten sämmtlicher Gurtspannungen, insbesondere die Inanspruchnahmen der horizontalen Gurt selbst, von Feld zu Feld um die constante Grösse:

$$q\,C\,k$$

zunehmen, dass dieselben also vom Auflager gegen das Trägermittel hin wachsen, und als Ordinaten gegen die Trägerhorizontale als Abscissenachse in den Knotenpunkten aufgetragen (Fig. **81**), als gerade Linie fg verlaufen, deren Ordinaten am Auflager A für $m = 0$ und am Auflager B für $m = n$ die Werthe $Cnpq$ und Cnq^2 erhalten.

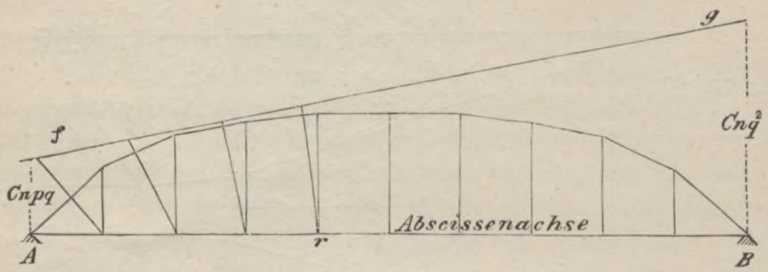
Die Inanspruchnahmen der gekrümmten Gurten ergeben sich daraus wie diejenigen der Parabolischen Gurten (Fig. **39**) als die Längen der von den Knotenpunkten der horizontalen Gurt auf die Richtung der gekrümmten Gurt gefällten Perpendikel, gemessen zwischen der Abscissenachse und der Linie fg.

Diese Eigenschaft der Schwedler'schen Träger benutzend erhält man auch ohne die Kenntniss der Momente $[M_m]_{V_m \min}$ eine einfache Construction der Trägerform mit dem nach § 76 zu ermittelnden Werthe r und der angenommenen Maximalhöhe h_r aus der Proportion:

$$[M_m]_{\max} : -[S_m]_{\min} = h_m : 1,$$

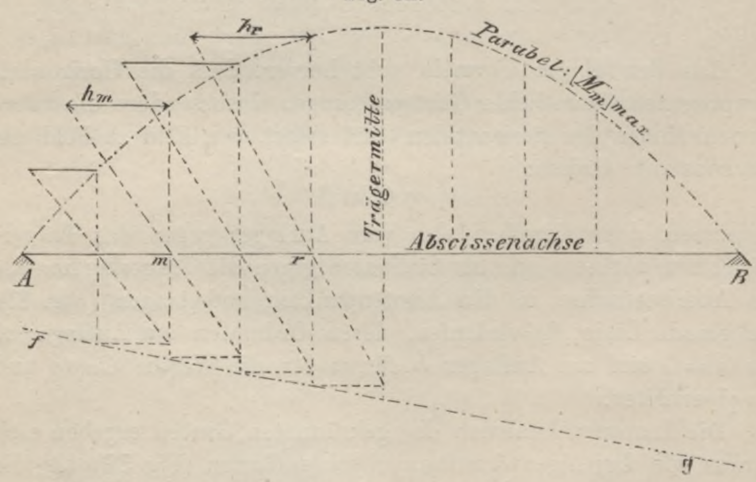
indem man die Parabel $[M_m]_{\max}$ der Maximalmomente und die Gerade fg (Fig. **81**) der Inanspruchnahmen der horizontalen Gurt

Fig. 81.



wie in Fig. **82** unter einander trägt, und dann vorige Proportion für die Felderweite c als Einheit construirt.

Fig. 82.



Aus voriger Proportion umgekehrt die Gurtspannungen oder die Gerade fg mit den gegebenen Gurtabständen h_m und den Maximalmomenten zu construiren, dürfte unvortheilhafter erscheinen, da die Function C Gleichung (315), wie sich unten ergiebt, weiter für die Diagonalen gebraucht wird.

b. Die Diagonalen.

§ 79. Mit Hülfe der Gleichungen (51) resp. (314), (59), (152), (153) und (304) ergiebt sich für beide Trägeranordnungen (Fig. **79** und **80**):

$$\cos \alpha'_m \, [R'_m]_{max} = \frac{c^2 \, [np + (n - m + 1) \, k] \, (n - r) \, r \, (np + mk)}{2n \, (np + rk) \, h_r},$$

$$= \frac{c^2 \, [np + (n - m) \, k] \, (n - r) \, r \, [np + (m - 1) \, k]}{2n \, (np + rk) \, h_r},$$

$$= \frac{c^2 \, (n - r) \, r \, (2np + nk) \, k}{2n \, (np + rk) \, h_r},$$

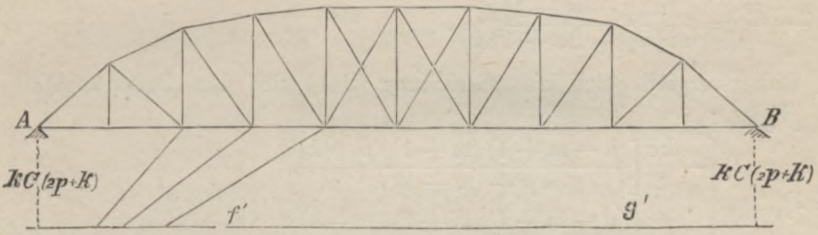
oder mit Gleichung (315):

$$\cos \alpha'_m \, [R'_m]_{max} = k \, C \, (2p + k) \quad \ldots \quad (320)$$

Die vorige Gleichung erweist, dass die Horizontalcomponenten der Maximalinanspruchnahmen der Diagonalen für alle Felder der Schwedler'schen Träger constant sind.

Man wird daher die Inanspruchnahmen der Diagonalen, (Gl. 320), als die Längen der Perpendikel auf den Richtungen der

Fig. 83.



Diagonalen erhalten, gemessen zwischen der horizontalen Gurt und einer um den Abstand $k \, C \, (2p + k)$, Gleichung (320), parallel zu dieser gezogenen Linie $f'g'$ (Fig. **83**).

c. Die Verticalen.

§ 80. Die unter den Parabolischen Trägern von der speciellen Trägerform unabhängig entwickelten Gleichungen (208), (209), (211) und (212) ergeben auch hier die Grenzen der Inanspruchnahmen der Verticalen, wenn man darin die den Figuren **79** und **80** entsprechenden Werthe von d einführt.

ad Fig. **79**, also ad T^u_m ergiebt sich d aus der Proportion:

$$h_m : d = (h_{m+1} - h_m) : c,$$

also mit Gleichung (304):

$$\frac{m(n-m)}{np+mk}:d=\frac{(m+1)(n-m-1)}{np+(m+1)k}-\frac{m(n-m)}{np+mk}:c$$

$$=\frac{np(n-2m-1)-mk(m+1)}{[np+(m+1)k](np+mk)}:c$$

also:
$$d=\frac{m(n-m)c[np+(m+1)k]}{np(n-2m-1)-mk(m+1)}.$$

Die in den Gleichungen (211) und (212) vorkommenden Grössen: $1-\frac{mc}{d}$ und $1+\frac{n-m}{d}c$ ermitteln sich darnach wie folgt:

$$1-\frac{mc}{d}=\frac{d-mc}{d}=\frac{mc}{d}\left\{\frac{(n-m)[np+(m+1)k]}{np(n-2m-1)-mk(m+1)}-1\right\},$$

oder:
$$1-\frac{mc}{d}=\frac{n(m+1)(p+k)}{(n-m)[np+(m+1)k]},$$

und:

$$1+\frac{n-m}{d}c=\frac{d+(n-m)c}{d}=\frac{(n-m)c}{d}\left\{\frac{m[np+(m+1)k]}{np(n-2m-1)-mk(m+1)}+1\right\},$$

oder:

$$1+\frac{n-m}{d}c=\frac{n(n-m-1)p}{m[np+(m+1)k]}.$$

Daher ergiebt sich aus Gleichung (211) für den Belastungsfall $[V_m]_{\max}$:

$$[T'_{\underset{m}{u}}]_{\min}=\left\{\begin{array}{l}-\frac{kc}{2}\left[\frac{(n-m+1)(m+1)(p+k)}{np+(m+1)k}\right]\\-\frac{pc}{2}\left[\frac{(n-m+1)(m+1)(p+k)}{np+(m+1)k}-\frac{(m-1)(n-m-1)p}{np+(m+1)k}\right]\end{array}\right\}$$

$$=-\frac{c[(m+1)(n-m+1)q^2-(m-1)(n-m-1)p^2]}{2[np+(m+1)k]} \qquad (321)$$

dagegen aus Gleichung (212) für den Belastungsfall $[V_m]_{\min}$:

$$[T'_{\underset{m}{u}}]_{\max}=\left\{\begin{array}{l}\frac{kc}{2}\left[\frac{(m-1)(n-m-1)p}{np+(m+1)k}\right]\\-\frac{pc}{2}\left[\frac{(n-m+1)(m+1)(p+k)}{np+(m+1)k}-\frac{(m-1)(n-m-1)p}{np+(m+1)k}\right]\end{array}\right\}$$

$$=-\frac{c}{2[np+(m+1)k]}\Big[(m+1)(n-m+1)pq-(m-1)(n-m-1)pq\Big]$$

$$=-\frac{cpqn}{np+(m+1)k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (322)$$

Von den beiden Gleichungen (321) und (322) ist indessen die letztere nicht von Interesse, da dieselbe als Maximalinanspruchnahme negativ, also absolut genommen kleiner als die jedenfalls negative Minimalinanspruchnahme Gleichung (321) ausfällt. Es bestimmen sich daher die Verticalen des Trägers Fig. **79** nach Gleichung (321).

ad Fig. **80**, also ad $T'_{\underset{m}{o}}$ erhält man d aus der Proportion:

$$h_m : d = (h_m - h_{m-1}) : c,$$

also mit Gleichung (304):

$$\frac{m(n-m)}{np+mk} : d = \frac{m(n-m)}{np+mk} - \frac{(m-1)(n-m+1)}{np+(m-1)k} : c$$

$$= \frac{np(n-2m+1) - mk(m-1)}{(np+mk)[np+(m-1)k]} : c$$

also: $$d = \frac{m(n-m)c[np+(m-1)k]}{np(n-2m+1)-mk(m-1)},$$

Die in Gleichungen (208) und (209) vorkommenden Grössen:

$1 - \frac{mc}{d}$ und $1 + \frac{n-m}{d}c$ ermitteln sich wie folgt:

$$1 - \frac{mc}{d} = \frac{d-mc}{d} = \frac{mc}{d}\left\{\frac{(n-m)[np+(m-1)k]}{np(n-2m+1)-mk(m-1)} - 1\right\},$$

oder: $$1 - \frac{mc}{d} = \frac{n(m-1)(p+k)}{(n-m)[np+(m-1)k]},$$

und $$1 + \frac{n-m}{d}c = \frac{d+(n-m)c}{d} = \frac{(n-m)c}{d}\left\{\frac{m[np+(m-1)k]}{np(n-2m+1)-mk(m-1)} + 1\right\}$$

oder:

$$1 + \frac{n-m}{d}c = \frac{n(n-m+1)p}{m[np+(m-1)k]}.$$

Daher ergiebt sich aus Gleichung (208) für den Belastungsfall $[V_{m+1}]_{\max}$:

$$[T'_{\underset{m}{o}}]_{\min} = \left|\begin{array}{l} -\frac{kc}{2}\left[\frac{(n-m-1)(m-1)(p+k)}{np+(m-1)k}\right] \\ -\frac{pc}{2}\left[\frac{(n-m-1)(m-1)(p+k)}{np+(m-1)k} - \frac{(m+1)(n-m+1)p}{np+(m-1)k}\right] \end{array}\right|$$

$$= -\frac{c[(m-1)(n-m-1)q^2-(m+1)(n-m+1)p^2]}{2[np+(m-1)k]} \quad (323)$$

Dagegen aus Gleichung (209) für den Belastungsfall $[V_{m+1}]_{\min}$:

$$[T^o_m]_{\max} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{kc}{2}\left[\frac{(m+1)(n-m+1)p}{np+(m-1)k}\right] \\ -\frac{pc}{2}\left[\frac{(n-m-1)(m-1)(p+k)}{np+(m-1)k} - \frac{(m+1)(n-m+1)p}{np+(m-1)k}\right] \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{c}{2[np+(m-1)k]}\left[(m+1)(n-m+1)pq-(m-1)(n-m-1)pq\right]$$

$$= +\frac{cpqn}{np+(m-1)k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (324)$$

Nach Ermittelung dieser allgemeinen Formeln erfordern die folgenden Verticalen der im § 76 besprochenen und auf Taf. **19** verzeichneten Träger für die Anordnungen Fig. **79** und **80** eine besondere Aufführung:

die Verticale $T_{\frac{n}{2}}$ der Träger, für welche $n \overline{\overline{<}} \frac{4p}{k} + 2$,

" " $T_{\frac{n-1}{2}}$ " " " " $\frac{n^2-4n+3}{8n} \overline{\overline{<}} \frac{p}{k}$,

" " T_r " " " " p, k und n beliebig und r den äusserst zulässigen Werth von m aus der Bedingung (308) bezeichnet, so dass T_r die den reinen Schwedler'schen von dem eingeschalteten Parallelträger scheidende Verticale bedeutet.

Die der Berechnung dieser Verticalen zu Grunde zu legenden Inanspruchnahmen ergeben sich:

für die Träger: $n = \frac{4p}{k} + 2$,

ad Fig. **79**, nach Gleichungen (91) und (96):

$$[T^u_{\frac{n}{2}}]_{\min} = -qc,$$

ad Fig. **80**, nach Gleichung (92):

$$[T^o_{\frac{n}{2}}]_{\min\ \text{resp.}\ \max} = 0;$$

für die Träger: $n < \frac{4p}{k} + 2$,

ad Fig. **79**, nach Gleichungen (91) und (96):

$$[T^u_{\frac{n}{2}}]_{\min} = -qc,$$

ad Fig. **80**, nach Gleichungen (92) und (93):

$$[T^o_{\frac{n}{2}}]_{\max} = 2\,[M_{\frac{n}{2}}]_{\max} \frac{\operatorname{tg} \beta_{\frac{n}{2}}}{h_{\frac{n}{2}}} = \frac{q n^2 c^2 \operatorname{tg} \beta_{\frac{n}{2}}}{4 h_{\frac{n}{2}}};$$

für die Träger: $\frac{n^2 - 4n + 3}{8n} = \frac{p}{k}$, **unter Berücksichtigung von § 44,**

ad Fig. **79**:

$[T^u_{\frac{n-1}{2}}]_{\min}$ nach der unter den Parallelträgern entwickelten Gleichung (175),

$[T^u_{\frac{n-1}{2}}]_{\max}$ interessirt nicht, da ein Schnitt um den unteren Knotenpunkt dieser Verticale für deren Inanspruchnahme nur Druck ergiebt,

ad Fig. **80**:

$[T^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\min}$ nach Gleichung (177),

$[T^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\max}$ interessirt ebenfalls nicht, da ein Schnitt um den obern Knotenpunkt dieser Verticale für deren Inanspruchnahme nur Druck ergiebt,

für die Träger: $\frac{n^2 - 4n + 3}{8n} < \frac{p}{k}$ **und diejenigen, für welche** p, k u. n

beliebig sind,

ad Fig. **79**, unter Berücksichtigung von § 44:

$[T^u_{\frac{n-1}{2}}]_{\min}$ und $[T^u_r]_{\min}$ nach Gleichung (175),

ad Fig. **80**:

$[T^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\min \text{ und } \max}$, sowie $[T^o_r]_{\min \text{ und } \max}$, nach den allgemeinen Formeln § 18 bis 25.

Es kann nicht von Interesse sein, für diese einzelne Verticale eine specielle nach den beiden möglichen Vorzeichen der Function $[V_m]_{\min}$ des rechts benachbarten Feldes getrennte Untersuchung zu führen. Die Inanspruchnahmen ergeben sich nach den in den §§ 18 bis 25 aufgestellten Formeln. Zwei die thatsächlichen Grenzen der Inanspruchnahme jedenfalls einschliessende Werthe erhält man durch einen Schnitt um den oberen Knotenpunkt $\frac{n-1}{2}$ resp. r in den folgenden Ausdrücken:

$$[T^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} = -[S'_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} \sin \beta'_{\frac{n-1}{2}} = \frac{[M_{\frac{n-1}{2}}]_{\max}}{h_{\frac{n-1}{2}}} \operatorname{tg} \beta'_{\frac{n-1}{2}}$$

$$[T^o_{\frac{n-1}{2}}]_{\min} = -[S'_{\frac{n-1}{2}}]_{\max} \sin\beta'_{\frac{n-1}{2}} - [R'_{\frac{n+1}{2}}]_{\max} \sin\alpha'_{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{[M_{\frac{n-1}{2}}]_{\min}}{h_{\frac{n-1}{2}}} \operatorname{tg}\beta'_{\frac{n-1}{2}} - [V_{\frac{n+1}{2}}]_{\max}$$

und ebenso:

$$[T^o_r]_{\max} = \frac{[M_r]_{\max}}{h_r} \operatorname{tg}\beta'_r$$

$$[T^o_r]_{\min} = \frac{[M_r]_{\min}}{h_r} \operatorname{tg}\beta'_r - [V_{r+1}]_{\max}.$$

II. Numerische Beispiele.

§ 81. Wir legen der speciellen Berechnung der Schwedler'schen Träger einen Träger zu Grunde, für welchen über Stütz- und Felderweite, Maximalhöhe, Eigengewicht und mobile Last dieselben Annahmen gemacht werden, wie für die numerischen Beispiele der Parabolischen und Pauli'schen Träger; wir setzen daher $n = 10$, $l = 10$, $c = 1$, $H = h_r = 1{,}25$, $p = 2250$, $k = 6750$, $q = 9000$. Die diesen Annahmen entsprechende Form des Schwedler'schen Trägers ist in § 76 als Fig. **5** der Taf. **19** bereits ermittelt worden, wobei dargethan, dass der Schwedler'sche Träger an der 3. Verticale als solcher aufhört und in einen Parallelträger übergeht. Es ist daher obigen Annahmen der Werth $r = 3$ hinzuzufügen. Die Längenabmessungen der Constructionsglieder finden sich aus den nach Gleichung (304) mit der angenommenen Höhe $h_r = 1{,}25$ sich ergebenden Längen der Verticalen in Fig. **5** der Taf. **19** ebenfalls eingetragen.

Nach diesen Annahmen gelten die auf Taf. **17** in Fig. **5** verzeichneten Functionen der äusseren Kräfte ebenfalls für diesen Träger, und dienen solche namentlich zur Berechnung des eingeschalteten Parallelträgers. Die Construction der in den §§ 78 und 79 ermittelten Functionen unterlassen wir hier jedoch, da die Ermittelung der Inanspruchnahmen des reinen Schwedler'schen Trägers für das hier gewählte Beispiel sich nur auf drei Felder bezieht. Man erhält darnach für die Träger Fig. **3** und **4** der Taf. **20** die daselbst eingetragenen Spannungszahlen aus den im Vorigen entwickelten Formeln der Schwedler'schen Träger und den für die Parallelträger früher aufgestellten Gleichungen durch Rechnung. Die nähere Erörterung der Resultate dürfte unnöthig erscheinen.

Anhang.

Beispiele der statischen Berechnung continuirlicher Träger.

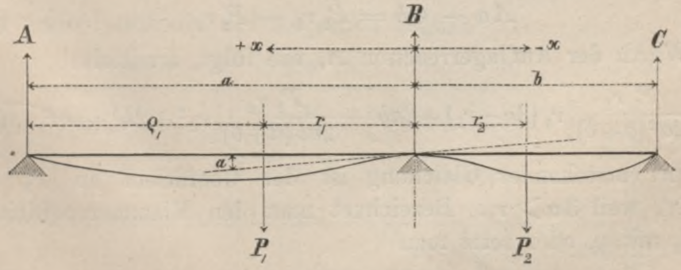
Bemerkung: Der Berechnung werden die Bezeichnungen § 26 Seite 30 u. 31 zu Grunde gelegt. Wir beschränken uns auf die Ermittelung der Maximal- und Minimal-Werthe der Funktionen der äusseren Kräfte unter der Annahme einer gleichmässig pr. Längeneinheit der Träger vertheilten Last:

I. Continuirliche Träger über 2 Oeffnungen.

1. Die Auflagerreactionen.

§ 82. Man ermittelt zunächst den Einfluss zweier, in den beiden Oeffnungen angreifenden Einzellasten P_1 und P_2, welche in den Entfernungen r_1 und r_2 von der Mittelstütze B gelegen sind, auf die elastische Linie und die Auflagerreactionen. Die Gleichung der elastischen Linie: Moment $= EI\frac{d^2y}{dx^2}$, worin E den Modulus der Elastizität und I das als constant gedachte Trägheitsmoment des Trägers bedeutet, wird als bekannt vorausgesetzt. Alsdann ergiebt sich für die in Fig. **84** gewählten Bezeichnungen:

Fig. 84.



Für die erste Oeffnung und $r_1 \geq x \geq o$:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = A\,(a-x) - P_1\,(r_1-x)$$

und daraus durch zweimalige Integration

$$EIy = A\left(\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - P_1\left(\frac{r_1 x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + EIx\, tg\,\alpha \quad (325)$$

$$\text{für } r_1 \leqq x \leqq a$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = A\,(a-x)$$

und daraus wie oben:

$$EIy = A\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - P_1\left(\frac{r_1{}^2 x}{2} - \frac{r_1{}^3}{6}\right) + EIx \operatorname{tg}\alpha, \quad (326)$$

oder weil für $x = a$, $y = o$:

$$o = A\frac{a^3}{3} - P_1\left(\frac{r_1{}^2 a}{2} - \frac{r_1{}^3}{6}\right) + EIa\, tg\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (327)$$

Für die zweite Oeffnung

erhält man unter Berücksichtigung, dass tg $(360^0 - \alpha) = -$ tg α, durch einfache Vertauschung der Buchstaben A und C, a und b, P_1 und P_2, sowie r_1 und r_2:

$$o = \frac{Cb^3}{3} - P_2\left(\frac{r_2{}^2 b}{2} - \frac{r_2{}^3}{6}\right) - EIb \operatorname{tg}\alpha \quad \ldots\ldots \quad (328)$$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben durch geeignete Combination folgende Relation zwischen den Auflagerreactionen A und C:

$$A\frac{a^3 b}{3} + C\frac{a b^3}{3} = P_1\left(\frac{r_1{}^2 a}{2} - \frac{r_1{}^3}{6}\right) b + P_2\left(\frac{r_2{}^2 b}{2} - \frac{r_2{}^3}{6}\right) a, \quad (329)$$

aus welcher sich unter Eliminirung von C aus der, nach dem Hebelgesetz resultirenden Beziehung:

$$Aa - Cb = P_1 r_1 - P_2 r_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (330)$$

der Werth der Auflagerreaction A, wie folgt, ermittelt:

$$A = \frac{P_1 r_1}{2a^2(a+b)}\left[r_1(3a - r_1) + 2ab\right] - \frac{P_2 r_2}{2ab(a+b)}\left[r_2{}^2 + 2b^2 - 3br_2\right] \quad (331)$$

In vorstehender Gleichung ist der Coefficient an P_1 stets positiv, weil $3a > r_1$. Bezeichnet man den Klammercoefficienten an P_2 mit η, oder setzt man

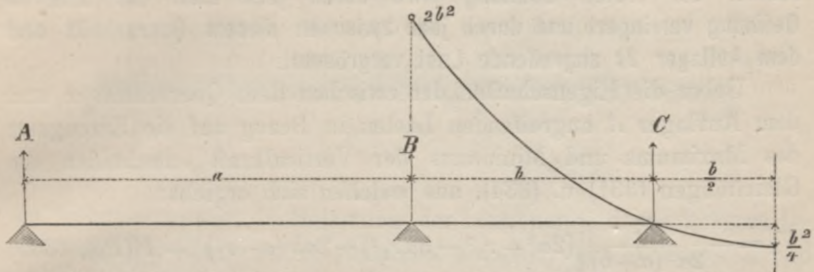
$$r_2{}^2 + 2b^2 - 3br_2 = \eta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (332)$$

so bedeutet Gleichung (332) eine Parabel zwischen r_2 und η, deren Lage sich aus Fig. **85** ergiebt, indem für $r_2 = b$: $\eta = o$,

„ $r_2 = o$: $\eta = 2\,b^2$

und „ $r_2 = \frac{3}{2}$ b: die Scheidelordinate $\eta = -\frac{b^2}{4}$.

Fig. 85.



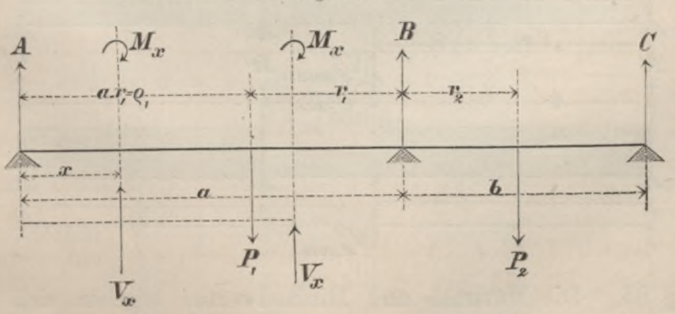
Unter Berücksichtigung, dass $o \leqq r_2 \leqq b$, ist der Klammerausdruck η stets positiv und daher der Gesammtcoefficient an P_2, Gl. (331), stets negativ. Es folgt also hieraus und aus dem Vorstehenden: der Werth der **Reaction A wird durch jede Last der benachbarten Oeffnung vergrössert, dagegen durch jede Last der anderen Oeffnung verringert.**

§ 83. Da die Kenntniss der Funktionen der äusseren Kräfte der einen Oeffnung ausreichend erscheint, indem die der anderen Oeffnung sich durch Vertauschung der eingeführten Bezeichnungen ergeben, so können wir uns auf die Ermittelung der Reaction A beschränken und zur Bestimmung der Funktionen der Verticalkräfte und Momente übergehen.

2. Die Vertikalkraft $[V_x]$ und die Maximal- und Minimal-Werthe: $[V'_x]_{\max}$ und $[V'_x]_{\min}$

Es ergiebt sich aus der folgenden Figur:

Fig. 86.



für: $o \leqq x \leqq a-r_1$; $V_x = A$, ... (333)

" $a-r_1 \leqq x \leqq a$; $V_x = A - P_1$, ... (334)

also unter Berücksichtigung der Resultate § 82 über die Reaction A:

§ 84. **Der Werth der Verticalkraft V_x in irgend einen Querschnitt der ersten Oeffnung wird durch jede Last der anderen Oeffnung verringert und durch jede zwischen diesem Querschnitt und dem Auflager B angreifende Last vergrössert.**

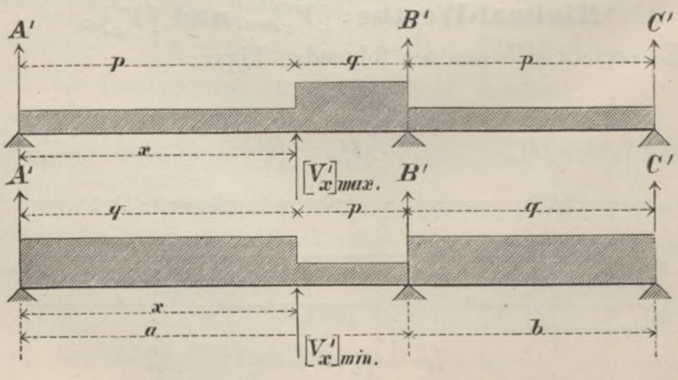
Ueber die Eigenschaften der zwischen dem Querschnitt x und dem Auflager A angreifenden Lasten in Bezug auf die Erzeugung des Maximums und Minimums der Verticalkraft entscheiden die Gleichungen (331) u. (334), aus welchen sich ergiebt:

$$V_x = -\frac{P_1}{2a^2(a+b)}\Big[(2a^3 + r_1{}^3 - 3ar_1{}^2) + 2ab\,(a-r_1)\Big] + F(P_2), \quad (335)$$

worin $F(P_2)$ eine aus Gl. (331) zu entnehmende, indessen hier nicht weiter interessirende Funktion von P_2 bedeutet. Ueber das Vorzeichen des Klammercoefficienten an P_1 entscheidet dagegen der Werth des Ausdruckes $(2a^3 + r_1{}^3 - 3ar_1{}^2) = \xi$. Man überzeugt sich leicht, dass der Werth von ξ innerhalb der Grenzen $o \leqq r_1 \leqq a$ stets positiv und der Gesammtcoefficient an P_1 unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens desselben stets negativ ist.

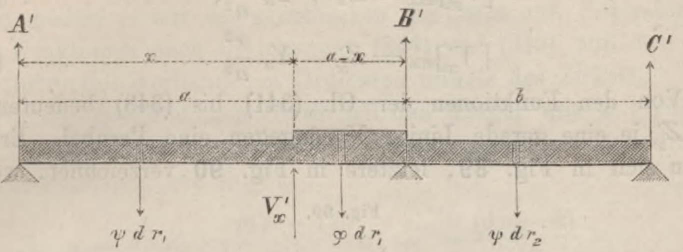
Der Werth der Verticalkraft V_x in irgend einem Querschnitt der ersten Oeffnung wird daher durch jede zwischen diesem Querschnitt und dem Auflager A angreifende Last verringert. Demnach repräsentiren die beiden folgenden Figuren die das Maximum und Minimum der Verticalkräfte erzeugenden Belastungsarten:

Fig. 87.



§ 85. Die Maximal- und Minimalwerthe ergeben sich dem-gemäss aus der Untersuchung des folgenden allgemeinen Belastungsfalles,

Fig. 88.



in welchem mit ψ die Belastung der Längeneinheit des Trägers der 2. Oeffnung, sowie der Ausdehnung zwischen dem Auflager A und dem Querschnitt x, mit φ die Belastung der Längeneinheit des Trägers im Uebrigen bezeichnet wird.

Aus Gleichungen (331) und (334) erhält man:

$$V'_x = \int_0^{a-x} \frac{\varphi\, d r_1}{2 a^2 (a+b)} (3 a r_1{}^2 - r_1{}^3 + 2 a b r_1) - \int_{a-x}^{a} \psi\, d r_1$$

$$+ \int_{a-x}^{a} \frac{\psi\, d r_1}{2 a^2 (a+b)} (3 a r_1{}^2 - r_1{}^3 + 2 a b r_1)$$

$$- \int_0^{b} \frac{\psi\, d r_2}{2 a b (a+b)} (r_2{}^3 + 2 b^2 r_2 - 3 b r_2{}^2) =$$

$$= \frac{1}{2a^2 (a+b)} \left\{ \varphi \left[\frac{3}{4} a^4 - 2a^3 x + \frac{3}{2} a^2 x^2 - \frac{x^4}{4} + ab (a^2 - 2ax + x^2)\right]\right.$$

$$\left. + \psi \left[2a^3 x - \frac{3}{2} a^2 x^2 + \frac{x^4}{4} - ab (x^2 - 2ax)\right]\right\} - \psi x - \frac{\psi b^3}{8a(a+b)} \quad (336)$$

oder: für $\psi = p$ und $\varphi = p + k = q$ . . . . . . (337)

$$[V'_x] \max =$$

$$\left[\frac{(3 a^3 + 4 a^2 b) q - b^3 p}{8 a (a+b)} - q x\right] + \left[k \frac{(6 a^2 + 4 a b - x^2)}{8 (a+b)}\right] \frac{x^2}{a^2} \quad (338)$$

und für $\varphi = p$ und $\psi = p + k = q$ . . . . (339)

$$[V'_x] \min =$$

$$\left[\frac{(3 a^3 + 4 a^2 b) p - b^3 q}{8 a (a+b)} - p x\right] - \left[k \frac{(6 a^2 + 4 a b - x^2}{8 (a+b)} \right[\frac{x^2}{a^2}, \quad (340)$$

oder wenn: $\frac{(3a^3 + 4a^2 b) q - b^3 p}{8 a (a+b)} - q x = Z_x$ . . . . . . (341)

$$\frac{(3 a^3 + 4 a^2 b) p - b^3 q}{8 a (a+b)} - p x = Z'_x, \quad . . . . . . (342)$$

$$k \frac{6a^2 + 4ab - x^2}{8(a+b)} = Y_x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (343)$$

$$[V'_x]_{\max} = Z_x + Y_x \frac{x^2}{a^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (344)$$

$$[V'_x]_{\min} = Z'_x - Y_x \frac{x^2}{a^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (345)$$

Von den Funktionen der Gl. (341) bis (343) bedeuten Z_x und Z'_x je eine gerade Linie, Y_x dagegen eine Parabel. Erstere finden sich in Fig. **89**, letztere in Fig. **90** verzeichnet, welche

Fig. 89.

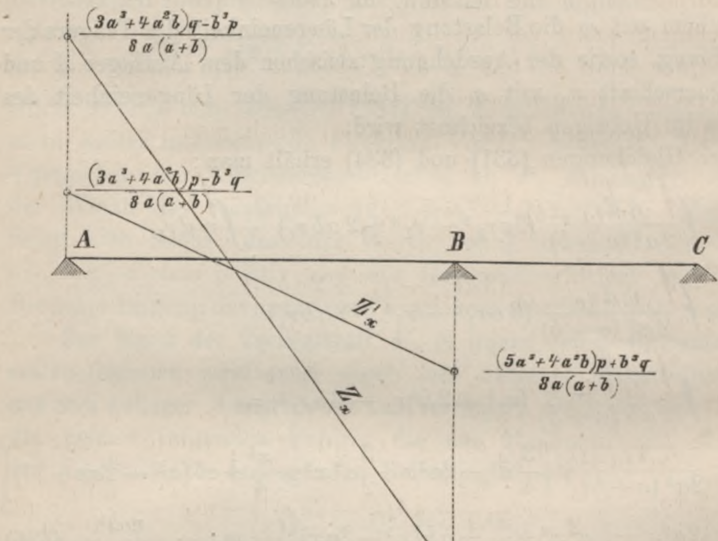
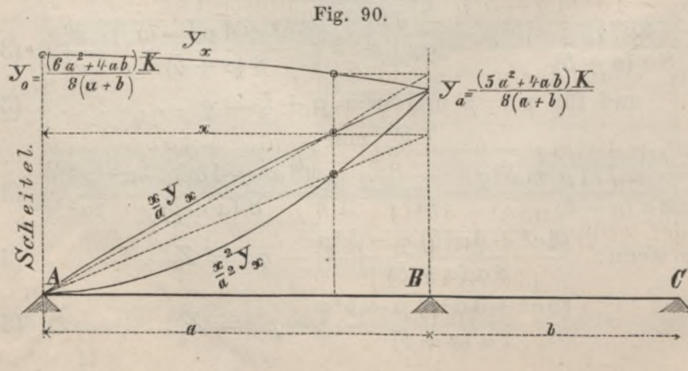


Fig. 90.



daneben die graphische Multiplication der Werthe Y_x mit $\frac{x^2}{a^2}$ enthält. Um daraus die Werthe $[V_x']_{\max}$ und $[V_x']_{\min}$ selbst zu ermitteln, bedarf es nur des graphischen Addirens und Subtrahirens dieser Funktionen nach Gleichungen (344) und (345) auf den aus der Construction vorhandenen Ordinaten mittels des Zirkels.

Für den gewöhnlichen continuirlichen Träger mit 2 gleichen Oeffnungen, für welchen also $a = b$, ergeben sich die erforderlichen Constructionsdaten, wie folgt:

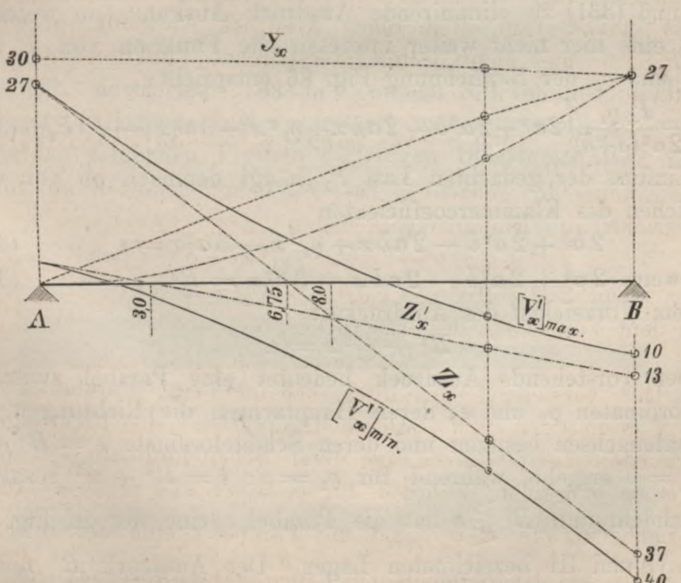
$$\text{für } x = o\colon Z_0 = \frac{(6p + 7k)}{16} a;\; Z_o' = \frac{(6p - k)}{16} a,$$

$$\text{„ } x = a\colon Z_a = -\frac{(10p + 9k)}{16} a;\; Z_a' = -\frac{(10p + k)}{16} a,$$

$$Z_x = o\colon \text{für } x = \frac{(6p + 7k)}{16q} a;\; Z_x' = o \text{ für } x = \frac{(6p - k)}{16p} a,$$

$$Z_x = Z_x' \text{ für } x = \frac{a}{2},$$

Fig. 91.



für $x = o$: Scheitelordinate $Y_0 = \frac{5}{8} k a$,

„ $x = a$: $Y_a = \frac{9}{16} k a$

Die gedachten Funktionen finden sich in Figur **91** für einen Träger $a = b = 16$; $p = 1$ und $k = 3$ aufgetragen. Die daraus sich ergebende Construction der Werthe $[V'_x]_{\max}$ und $[V'_x]_{\min}$ dürfte einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen.

3. Das Moment M_x und die Maximal- und Minimal-Werthe $[M'_x]_{\max}$ und $[M'_x]_{\min}$.

§ 86. Man erhält unter Zugrundelegung der Fig. Nr. **86**

für $o \leq x \leq a - r_1$: $M_x = A_x$ . . . . (346)

„ $a - r_1 \leq x \leq a$: $M_x = A_x - P_1 (x - a + r_1)$ (347)

sowie daraus und aus dem Resultate § 82: der Werth des **Moments M_x in irgend einem Querschnitte der 1. Oeffnung wird durch jede Last der anderen Oeffnung verringert und durch jede zwischen dem gedachten Querschnitt und dem Auflager B angreifende Last vergrössert.**

Ueber den Einfluss der zwischen diesem Querschnitt und dem Auflager A angreifenden Last giebt der folgende aus den Gleichungen (347) und (331) zu eliminirende Ausdruck Auskunft, in welchem $F(P_2)$ eine hier nicht weiter interessirende Funktion von P_2 bedeutet und ϱ_1 der Bezeichnung Fig. **86** entspricht:

$$M_x = \frac{P_1 \varrho_1}{2 a^2 (a+b)} \left[2 a^3 + 2 a^2 b - 2 a b x + \varrho_1{}^2 x - 3 a^2 x \right] - F(P_2) \quad (348)$$

Der Einfluss der gedachten Last P_1 hängt demnach ab von dem Vorzeichen des Klammercoefficienten

$$2 a^3 + 2 a^2 b - 2 a b x + \varrho_1{}^2 x - 3 a^2 x = \varepsilon \;.\;.\;.\;. \quad (349)$$

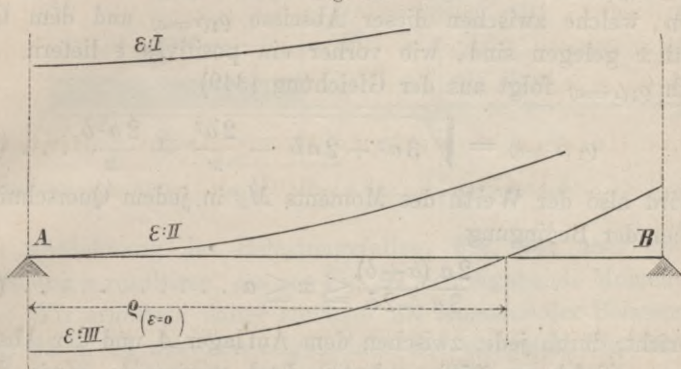
oder, wenn $2 a^3 + 2 a^2 b - 2 a b x - 3 a^2 x = R^3$, ... (350)

von dem Vorzeichen des Ausdruckes:

$$R^3 + \varrho_1{}^2 x = \varepsilon.$$

Der vorstehende Ausdruck bedeutet eine Parabel zwischen den Cordinaten ϱ_1 und ε, deren Hauptachsen die Richtungen der Cordinatenachsen besitzen und deren Scheitelordinate $\varepsilon = R^3$ sich für $\varrho_1 = o$ ergiebt, während für $\varrho_1 = x$: $\varepsilon = R^3 + x^3$ resultirt. Je nachdem nun $R^3 \gtreqless o$ hat die Parabel ε eine der in Fig. **92** mit I, II und III bezeichneten Lagen. Der Ausdruck R^3 nimmt nach Gl. (350) mit wachsendem x ab, indem er dabei vom Positiven durch Null ins Negative geht. Bis zu dem Querschnitt x, für welchen $R^3 = o$ wird, werden demnach die sämmtlichen zwischen dem Querschnitt x und dem Auflager A liegenden Lasten P_1 ein positives ε erzeugen: (Fig. **92** Lage I und II),

Fig. 92.

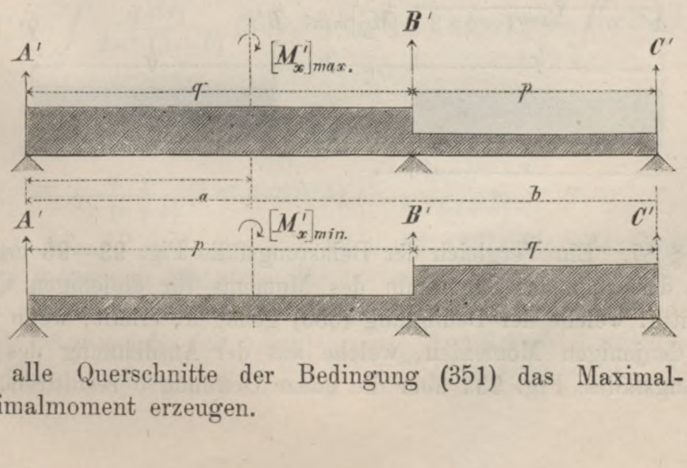


so dass nach Gleichung (348) alle diese Lasten den Werth des Moments M_x vergrössern helfen. Der Werth $R^3 = o$ wird nach Gleichung (350) erreicht für $x = 2\,a \dfrac{a+b}{3\,a + 2\,b}$. Es wird also das Moment M_x in jedem Querschnitt x, welcher der Bedingung:

$$o \leqq x \leqq 2\,a \; \frac{a+b}{3\,a+2\,b} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (351)$$

entspricht, durch jede zwischen diesem Querschnitte und dem Auflager A liegende Last vergrössert und repräsentiren demnach die beiden folgenden Figuren diejenigen Belastungsfälle, welche

Fig. 93 und 94.



für alle Querschnitte der Bedingung (351) das Maximal- und Minimalmoment erzeugen.

Wächst dagegen x über die Bedingung (351) hinaus, d. h. wird R^3 negativ, so dass die Parabel ε die Lage III in Fig. **92** einnimmt, so werden alle diejenigen Lasten, welche zwischen dem Auflager A und derjenigen Abscisse ϱ_1 liegen, welche dem Werthe $\varepsilon = o$ entspricht, ein negatives ε erzeugen, dagegen alle diejenigen Lasten, welche zwischen dieser Abscisse $\varrho_{1(\varepsilon=o)}$ und dem Querschnitt x gelegen sind, wie vorher ein positives ε liefern. Der Werth $\varrho_{1(\varepsilon=o)}$ folgt aus der Gleichung (349)

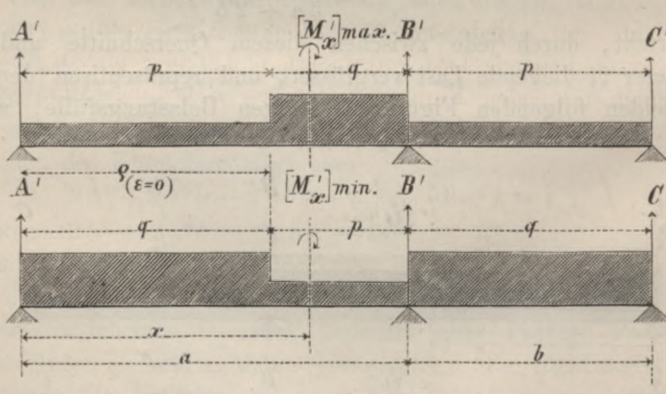
$$\varrho_{1\,(\varepsilon=o)} = \sqrt{3a^2 + 2ab - \frac{2a^3}{x} - \frac{2a^2 b}{x}} \quad . \; . \; . \; (352)$$

Es wird also der Werth des Moments M_x in jedem Querschnitt x, welcher der Bedingung

$$\frac{2a\,(a+b)}{3a+2b} \leqq x \leqq a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (353)$$

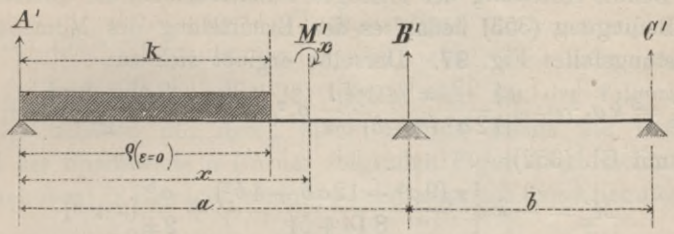
entspricht, durch jede, zwischen dem Auflager A und der Abscisse $\varrho_{1\,(\varepsilon=o)}$, Gleichung (352), gelegene Last verringert, sowie durch jede, zwischen dieser Abscisse und $\varrho_1 = x$ gelegene Last vergrössert. Die beiden folgenden Figuren repräsentiren also die das Maximum und Minimum des Moments erzeugenden Belastungsfälle für alle diejenigen Querschnitte, welche der Bedingung (353) entsprechen.

Fig. 95 und 96.



§ 87. Ein Vergleich der Belastungsfälle Fig. **93**—**96** ergiebt nun, dass man das Maximum des Moments für diejenigen Querschnitte, welche der Bedingung (353) genügen, erhält, wenn man von denjenigen Momenten, welche aus der Ausdehnung des Belastungsfalles, Fig. **93**, über die ganze Oeffnung a resultiren, das aus dem Belastungsfall, Fig. **97**, sich ergebende Moment subtrahirt, und dass man andererseits das Minimum des Moments in demselben Querschnitt erhält, wenn man zu denjenigen Momenten, welche aus

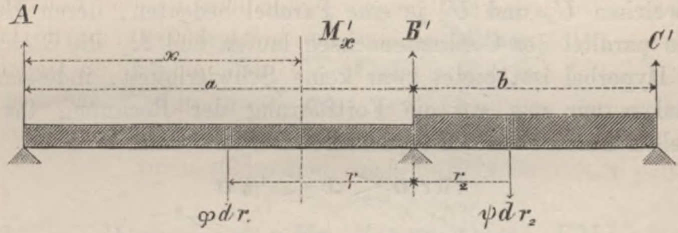
Fig. 97.



der Ausdehnung des Belastungsfalles, Fig. **94**, über die ganze Oeffnung a resultiren, das aus Fig. **97** sich ergebende Moment addirt.

Wir ermitteln daher zunächst die Momente der Belastungsfälle Fig. **93** u. **94** aus dem allgemeinen Belastungsfall Fig. **98**.

Fig. 98.



Man erhält daraus und aus Gl. (331) u. (347):

$$M'_x = \int_0^a \frac{\varphi\, d r_1}{2a^2\,(a+b)}\,(3 a r_1^{\,2} - r_1^{\,3} + 2 a b r_1)\, x - \int_0^x \varphi\, d r_1\, x$$

$$-\int_0^b \frac{\psi\, d r_2}{2 a b\,(a+b)}\,(r_2^{\,3} + 2 b r_2^{\,2} - 3 b r_2^{\,2})\, x \quad \text{oder:}$$

$$M'_x = \frac{\varphi x}{8a\,(a+b)}\,(3a^3 + 4a^2 b) - \frac{\psi x b^3}{8a\,(a+b)} - \varphi\,\frac{x^2}{2} \quad \ldots \quad (354)$$

und daraus, sowie aus Fig. **93** u. Gl. (337) für alle Querschnitte der Bedingung (351)

$$[M'_x]_{\max} =$$

$$p\left[x\,\frac{3a^2 + ab - b^2}{8a} - \frac{x^2}{2}\right] + k\left[x\,\frac{3a^2 + 4ab}{8\,(a+b)} - \frac{x^2}{2}\right] = U_x, (355)$$

dagegen aus Fig. **94** und Gl (339):

$$[M'_x]_{\min} = p\left[x\frac{3a^2+ab-b^2}{8a}-\frac{x^2}{2}\right] - kx\,\frac{b^3}{8a\,(a+b)} = U'_x \;\ldots\; (356)$$

Behufs Ableitung der analogen Funktionen für die Querschnitte der Bedingung (353) bedarf es der Ermittelung des Moments des Belastungsfalles Fig. **97**. Derselbe ergiebt sich zu:

$$M'_x = k\varrho_1{}^2{}_{(\varepsilon=o)}\left\{\frac{x}{2a^2\,(a+b)}\left[\frac{1}{4}\varrho_1{}^2{}_{(\varepsilon=o)} - \frac{3a^2+2ab}{2}\right]+\frac{1}{2}\right\}$$

und mit Gl. (352)

$$M'_x = -k\left[\frac{x\,(9a^2+12ab+4b^2)}{8\,(a+b)} + \frac{a^2}{2x}(a+b) - \frac{a}{2}(3a+2b)\right] = -\Omega_x \;\ldots\ldots\; (357)$$

Man erhält demnach:

$$[M'_x]_{\max} = U_x + \Omega_x \;\ldots\ldots\; (358)$$

$$[M'_x]_{\min} = U'_x - \Omega_x \;\ldots\ldots\; (359)$$

§ 88. Die weitere allgemeine Untersuchung dieser Funktionen, von welchen U_x und U'_x je eine Parabel bedeuten, deren Hauptachsen parallel den Cordinatenachsen laufen und Ω_x die Gleichung einer Hyperbel ist, bietet zwar keine Schwierigkeit, indessen beschränken wir uns auf die Fortführung der Rechnung für den speciellen Fall $a = b$. Für denselben erhält man:

für $o \leqq x \leqq {}^4/_5\, a$

$$[M'_x]_{\max} = ({}^3/_8\, ap + {}^7/_{16}\, ak)\,x - q\,\frac{x^2}{2} = U_x \;\ldots\; (355^a)$$

$$[M'_x]_{\min} = ({}^3/_8\, ap - {}^1/_{16}\, ak)\,x - p\,\frac{x^2}{2} = U'_x \;\ldots\; (356^a)$$

für ${}^4/_5\, a \leqq x \leqq a$

$$\Omega_x = k\left(\frac{25}{16}\,ax + \frac{a^3}{x} - \frac{5}{2}\,a^2\right) \;\ldots\; (357^a)$$

$$[M'_x]_{\max} = U_x + \Omega_x \;\ldots\ldots\; (358^a)$$

$$[M'_x]_{\min} = U'_x - \Omega_x \;\ldots\ldots\; (359^a)$$

Für die Construction dieser Funktionen genügen folgende sich einfach ergebende Daten:

für $x = o$: $U_o = o$; $U'_o = o$,

„ $x = \dfrac{(6p+7k)}{16q}\,a$: Scheitelordinate $U_x = \dfrac{(6p+7k)^2}{512q}\,a^2$,

d. h. für $Z_x = o$, Gl. (341);

ferner für $x = a$: $U_a = -\frac{(2p+k)}{16} a^2$,

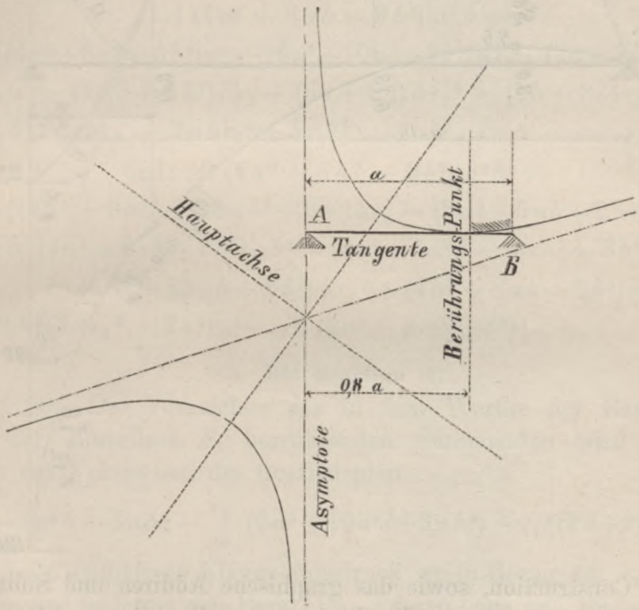
für $x = \frac{(16p - k)}{16p} a$: Scheitelordinate $U'_x = \frac{(6p-k)^2}{512p} a^2$,

d. h. für $Z'_x = o$; Gl. (342),

ferner für $x = a$: $U'_a = -\frac{(2p+k)\,a^2}{16}$.

Die Lage der Hyperbel Ω_x ergiebt sich aus der folgenden Fig. Da indessen nur deren einer Ast auf Länge des letzten Fünftel der Spannweite a (in der folgenden Figur durch Schraffur hervorgehoben) in Betracht kommt, so wird man sich damit begnügen,

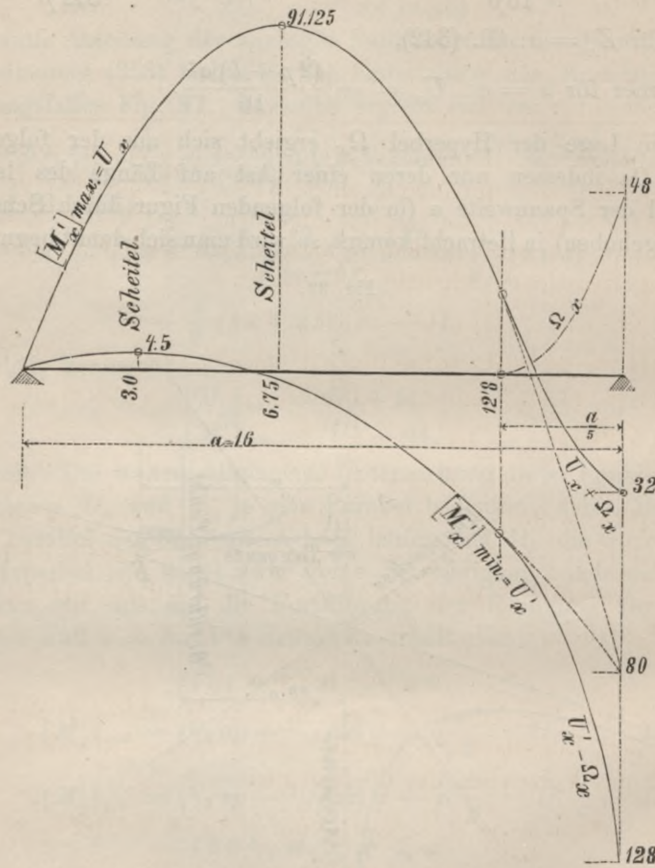
Fig. 99.



dieses kurze Stück der Curve aus einigen numerisch ausgerechneten Werthen aufzutragen. Es mag dabei darauf aufmerksam gemacht werden, dass Ω_x für $x = \frac{4}{5}\,a$ den Werth Null annimmt, dass die Abscissenachse die Hyperbel in diesem Punkte tangirt, und dass die beiden Funktionen U_x und $U_x + \Omega_x$ sowie U'_x und $U'_x - \Omega_x$ in demselben Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben. Die Funktionen der Maximal- und Minimalmomente erleiden daher im Punkte $x = \frac{4}{5}\,a$ keine Stetigkeitsunterbrechung. Die

Die gedachten Funktionen finden sich in der folgenden Figur für einen Träger $a = b = 16$; $p = 1$ und $k = 3$ verzeichnet und bedarf

Fig. 100.



deren Construction, sowie das graphische Addiren und Subtrahiren deren Ordinaten für die Ermittelung der Funktionen $[M'_x]_{\max}$ und $[M'_x]_{\min}$ keiner weiteren Erklärung.

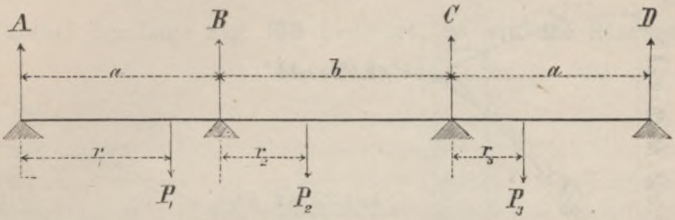
II. Continuirliche Träger über 3 Oeffnungen.

1. Die Auflagerreactionen.

§ 89. Wir führen die Rechnung unter der Annahme, dass die beiden Endöffnungen des Trägers gleiche Spannweiten besitzen.

Alsdann erhält man unter den in Fig. **101** gewählten Bezeichnungen aus der in bekannter Weise zu ermittelnden Gleichung der elastischen

Fig. 101.



Linie und den gewöhnlichen statischen Bedingungen für die beiden Auflagerreactionen folgende Relationen:

$$A\,(4a^2+8ab+3b^2)\,a^2b =$$

$$\left.\begin{aligned}&P_1 b\left[(4a^2+8ab+3b^2)\,a^2-(6a^2+10ab+3b^2)\,ar_1+(2a+2b)\,r_1{}^3\right]\\&+P_2\,a\left[-(4ab+3b^2)\,br_2+(6a+6b)\,br_2{}^2-(2a+3b)\,r_2{}^3\right]\\&+P_3\,b\left[2a^2br_3-3abr_3{}^2+br_3{}^3\right]\end{aligned}\right\}\quad(360)$$

und: $B\,(4a^2+8ab+3b^2)\,a^2b^2=$

$$\left.\begin{aligned}&P_1\,b\left[(2a^3+9a^2b+10ab^2+3b^3)\,ar_1-(2a^2+5ab+2b^2)\,r_1{}^3\right]\\&+P_2\,a\left[(4a^2+8ab+3b^2)\,ab^2-(4a^3+6a^2b-4ab^2-3b^3)\,br_2\right.\\&\qquad\left.-(6a^2+15ab+6b^2)\,br_2{}^2+(4a^2+8ab+3b^2)\,r_2{}^3\right]\\&+P_3\,b\left[(3ar_3{}^2-2a^2r_3-r_3{}^3)\,(2a^2+3ab+b^2)\right].\end{aligned}\right\}\quad(361)$$

a. Die Reaction A:

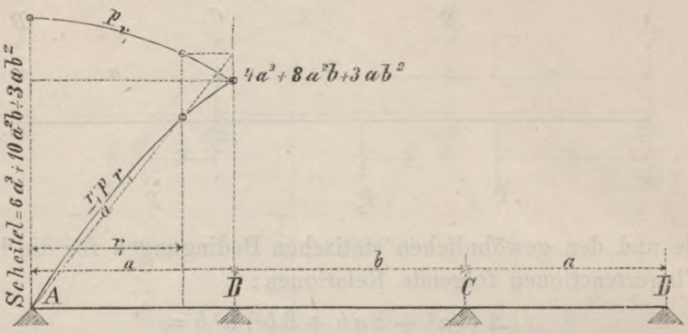
§ 90. Das Vorzeichen des in dem Werthe der Reaction A von der Einzellast P_1 herrührenden Summanden wird bedingt durch das Vorzeichen des Coefficienten

$$4a^3+8a^2b+3ab^2-\frac{r_1}{a}\left[(6a^3+10a^2b+3ab^2)-r_1{}^2(2a+2b)\right].\quad(362)$$

Der darin enthaltene Klammerausdruck ist in Bezug auf r_2 zweiten Grades und bedeutet eine Parabel p_{r_1}, deren Lage und Multiplication mit $\frac{r_1}{a}$ sich aus Fig. **102** ergeben.

Die dadurch erhaltene Funktion $\frac{r_1}{a}\,p_{r_1}$ ist eine gegen die Ordinatenachse im Auflager A stets convex geneigte Kurve, indem $\dfrac{d^2\left(\dfrac{r_1}{a}\,p_{r_1}\right)}{dr_1{}^2}\leqq o.$ Es wird daher die Subtraction dieser Werthe von der Constanten $4a^3+8a^2b+3ab^2$ für jedes r_1 einen positiven Werth liefern und somit der Werth der **Reaction A durch jede zwischen dem Auflager A und B angreifende Last P_1 vergrössert werden.**

Fig. 102.

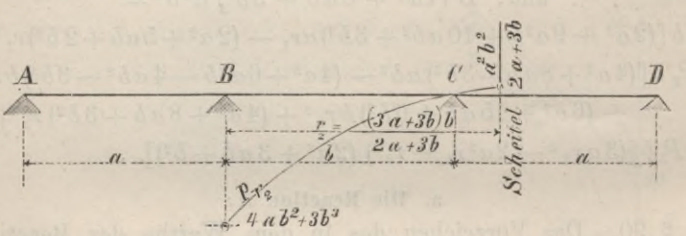


Bezüglich der Einzellast P_2 entscheidet der Werth des Coefficienten:

$$-(4ab^2 + 3b^3) + (6a + 6b)br_2 - (2a + 3b)r_2^2 \quad . \; . \; (363)$$

Derselbe bedeutet eine Parabel p_{r_2}, der Lage Fig. **103**, woraus unter

Fig. 103.



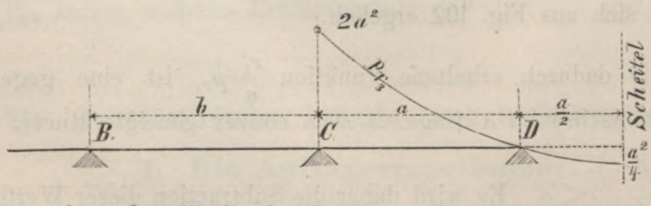
Berücksichung, dass $r_2 \leqq b$ sich ergiebt, dass die Reaction A **durch jede Last P_2 der zweiten Oeffnung verringert werden wird.**

Die Untersuchung der Funktion

$$2a^2 - 3ar_3 + r_3^2 = p_{r_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (364)$$

als die einer Parabel, der Lage Fig. **104**, führt dagegen zu dem

Fig. 104.



Resultat, dass der **Werth der Reaction A mit jeder Last P_3 der dritten Oeffnung wiederum sich vergrössern wird.**

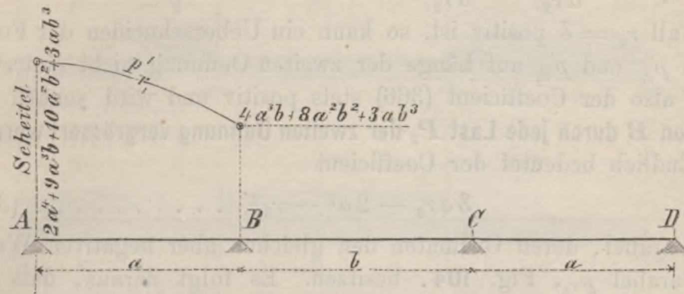
b. **Die Reaction** B:

§ 91. Da die Funktion: $p'_{r_1} =$

$$(2a^3 + 9a^2b + 10ab^2 + 3b^3)a - (2a^2 + 5ab + 2b^2)r_1^2 \quad . \; . \; (365)$$

eine Parabel der Lage Fig. **105** bedeutet, so wird **die Reaction** $\boldsymbol{B}$

Fig. 105.

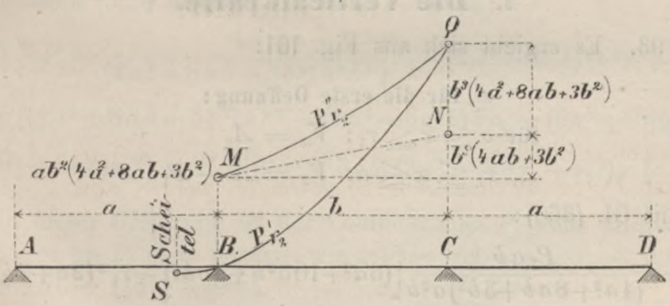


durch jede Last $\boldsymbol{P_1}$ **der ersten Oeffnung vergrössert werden.**

In Bezug auf den Einfluss der Last P_2 bedarf es der Untersuchung des Coefficienten:

$$[(4a^2+8ab+3b^2)ab^2+(4ab+3b^2)b^2r_2]+[(4a^2+8ab+3b^2)r_2^3]$$
$$-[(4a^2+6ab)abr_2+(6a^2+15ab+6b^2)br_2^2] \quad . \; . \; . \; . \quad (366)$$

Fig. 106.



In dem Ausdruck (366) bedeutet die Funktion der ersten eckigen Klammer eine gerade Linie MN, Fig. **106**, die zweite Klammer desgleichen eine cubische Parabel, p''_{r_2}, welche unter Addition der Ordinaten der gedachten Graden als Curve MQ verläuft, deren Ordinaten p''_{r_2} also den positiven Summanden der Funktion (366) repräsentiren. Die dritte eckige Klammer, oder der einzige negative Summand der Funktion (366) ist eine Parabel SBQ der Lage p'_{r_2}, welche mit der Curve MQ den Punkt Q gemein hat. Der Werth der Function (366) wird daher durch die Differenz der Ordinaten beider Curven repräsentirt, welche gegen die Abscissenachse auf Länge der 2. Oeffnung stets convex verlaufen. Da sie ausserdem stetig verlaufen, so tritt die Möglichkeit, dass die Ordinaten der Curve MQ kleiner als die der Parabel BQ ausfallen, nur für den Fall ein, dass $\frac{d p''_{r_2}}{d r_2} - \frac{d p'_{r_2}}{d r_2} < o$. Da indessen diese Differenz für den Fall $r_2 = b$ positiv ist, so kann ein Ueberschneiden der Funktionen p''_{r_2} und p'_{r_2} auf Länge der zweiten Oeffnung nicht eintreten, es ist also der Coefficient (366) stets positiv und wird sonach die **Reaction B durch jede Last P_2 der zweiten Oeffnung vergrössert werden.**

Endlich bedeutet der Coefficient

$$3 a r_3 - 2 a^2 - r_3{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (367)$$

eine Parabel, deren Ordinaten den gleichen aber negativen Werth der Parabel p_{r_3}, Fig. **104**, besitzen. Es folgt daraus, dass die **Reaction B durch jede Last P_3 verringert wird.** Aus vorstehenden Resultaten erhält man daher im Allgemeinen:

§ 92. Der Werth einer Auflagerreaction wird durch jede Last der zweitnächsten Oeffnung verringert, und durch jede Last der dieser benachbarten beiden Oeffnungen vergrössert.

2. Die Verticalkräfte.

§ 93. Es ergiebt sich aus Fig. **101**:

a., für die erste Oeffnung:

$$\text{für } o \leqq x \leqq r_1:\ V_x = A,$$
$$\text{,, } r_1 \leqq x \leqq a:\ V_x = A - P_1$$

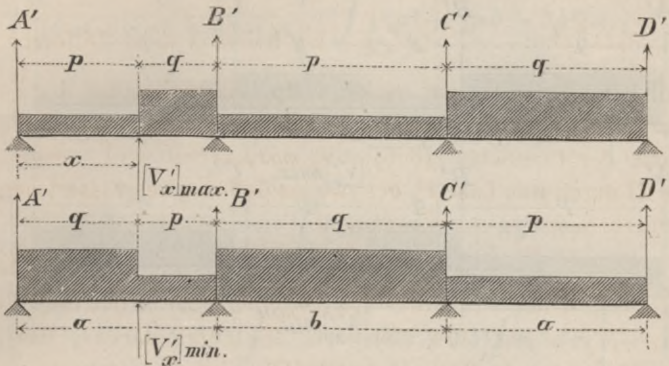
oder mit Gl. (360):

$$V_x = -\frac{P_1 a b}{(4a^2 + 8ab + 3b^2) a^2 b}\left[(6a^3 + 10a^2 b + 3ab^2) - r_1{}^2 (2a + 2b)\right]\frac{r_1}{a}$$
$$+ f(P_2) + f'(P_3)$$

worin die letzteren beiden Funktionen die entsprechenden Werthe Gl. (360) besitzen. Unter Berücksichtigung der Resultate über die Reaction A, Funktionen (362) — (364), wird demnach die Verticalkraft V_x der ersten Oeffnung durch jede Last P_3 der dritten Oeffnung, sowie durch jede zwischen dem Querschnitt x und dem Auflager B gelegene Last P_1 vergrössert, dagegen durch jede Last P_2 der zweiten Oeffnung, sowie durch jede zwischen dem Auflager A und dem Querschnitt x angreifende Last P_1 verringert. Die

Fig. **107** repräsentirt daher die beiden Belastungsfälle, welche das Maximum und Minimum der Verticalkraft der ersten Oeffnung erzeugen.

Fig. 107.



b., **für die zweite Oeffnung:**

für $a \leqq x \leqq a + r_2$: $V_x = A + B - P_1$,

„ $a + r_2 \leqq x \leqq a + b$: $V_x = A + B - P_1 - P_2$.

In beiden Werthen nimmt der Summand: $A + B - P_1$ aus Gleichungen (360) u. (361) folgende Form an:

$$A + B - P_1 = \frac{1}{(4a^2 + 8ab + 3b^2)a^2b^2} \Big\{ P_1 b [(2a^2 + 3ab)(a^2 r_1 - r_1^3)]$$
$$+ P_2 a [(4a^2 + 8ab + 3b^2) ab^2 - (4a^3 + 6a^2 b) b r_2 - (6a^2 + 9ab) b r_2^2$$
$$+ (4a^2 + 6ab) r_2^3] - P_3 b [(2a^2 + 3ab)(2a^2 - 3a r_3 + r_3^2) r_3] \Big\} \quad (368)$$

In dieser Gleichung ist der Coefficient an P_1 stets positiv, der Coefficient an P_3 stets negativ, wie solches sich aus $a^2 r_1 - r_1^3 > o$ und Funktion (367) ergiebt.

Was dagegen den Coefficienten an P_2 anbelangt, so ist derselbe

ad: $a \leqq x \leqq a + r_2$

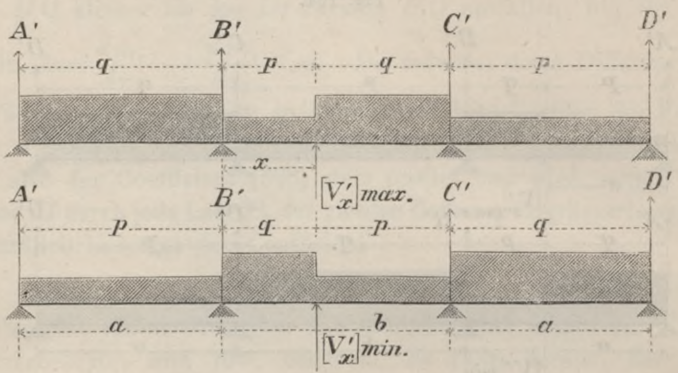
analog den unter Funktion (366) entwickelten Gründen für Gl. (368) stets positiv.

ad: $a + r_2 \leqq x \leqq a + b$ ergiebt sich derselbe zu:

$$\frac{r_2 a}{4a^2 + 8ab + 3b^2) a^2 b^2} \Big\{ - (4a^3 + 6a^2 b) b - \Big[(6a^2 + 9ab) b r_2$$
$$- (4a^2 + 6ab) r_2^2 \Big] \Big\}$$

und zwar stets negativ. Es repräsentiren daher die Figuren **108** die beiden Belastungsfälle, für welche die Verticalkräfte der zweiten

Fig. 108.



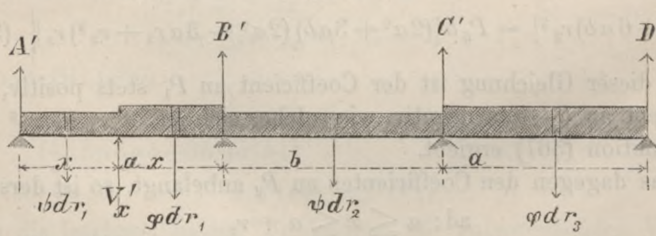
Oeffnung zu einem Maximum und Minimum werden.

3. Die Maximal- und Minimal-Werthe $[V_x']_{\max}$ und $[V_x']_{\min}$.

a., für die erste Oeffnung:

§ 94. Dieselben ergeben sich aus dem allgemeinen Belastungsfall Fig. **109**.

Fig. 109.



Man erhält daraus und unter Berücksichtigung der Figur **107**:

$$[V_x']_{\max} \text{ für } \psi = p,\ \varphi = p + k = q, \quad \ldots\ldots \quad (369)$$

$$[V_x']_{\min} \text{ „ } \psi = p + k = q,\ \varphi = p. \quad \ldots\ldots \quad (370)$$

Aus Fig. **109** ergiebt sich; $V_x' = A' - \int\limits_0^x \psi\, dr_1$, oder mit

Gl. (360), indem man die Funktionen der Einzelkräfte P_1, P_2 und P_3 durch die entsprechenden Summanden $\Sigma \psi\, d r$ und $\Sigma \varphi\, d^r$ ersetzt:

$$V'_x = \frac{\psi}{(4a^2+8ab+3b^2)a^2}\left\{a^2\int_0^x (4a^2+8ab+3b^2)\,dr_1\right.$$

$$\left. - a(6a^2+10ab+3b^2)\int_0^x r_1\,dr_1 + (2a+2b)\int_0^x r_1{}^3\,dr_1\right\}$$

$$+\frac{\varphi}{(4a^2+8ab+3b^2)a^2}\left\{a^2\int_x^a (4a^2+8ab+3b^2)\,dr_1\right.$$

$$\left.- a(6a^2+10ab+3b^2)\int_x^a r_1\,dr_1 + (2a+2b)\int_x^a r_1{}^3\,dr_1\right\} - \int_0^x \varphi\,dr_1$$

$$+\frac{\psi}{(4a^2+8ab+3b^2)ab}\left\{-(4ab+3b^2)b\int_0^b r_2\,dr_2 + (6a+6b)b\int_0^b r_2{}^2\,dr_2\right.$$

$$\left.-(2a+3b)\int_0^b r_2{}^3\,dr_2\right\}$$

$$+\frac{\varphi}{(4a^2+8ab+3b^2)a^2}\left\{2a^2b\int_0^a r_3\,dr_3 - 3ab\int_0^a r_3{}^2\,dr_3 + b\int_0^a r_3{}^3\,dr_3\right\}$$

Führt man obige Rechnung aus, und setzt alsdann die Funktionen (369) und (370) ein, so erhält man, wenn:

$$\left[\frac{6a^3+15a^2b+6ab^2}{4(4a^2+8ab+3b^2)} - x\right] q - \frac{(2a+b)b^3}{4a(4a^2+8ab+3b^2)}\,p = Z_x \quad (371)$$

$$\left[\frac{6a^3+15a^2b+6ab^2}{4(4a^2+8ab+3b^2)} - x\right] p - \frac{(2a+b)b^3}{4a(4a^2+8ab+3b^2)}\,q = Z'_x \quad (372)$$

$$\text{und}\quad \frac{[a(6a^2+10ab+3b^2)-(a+b)x^2]k}{2(4a^2+8ab+3b^2)} = Y_x \;\ldots\; (373)$$

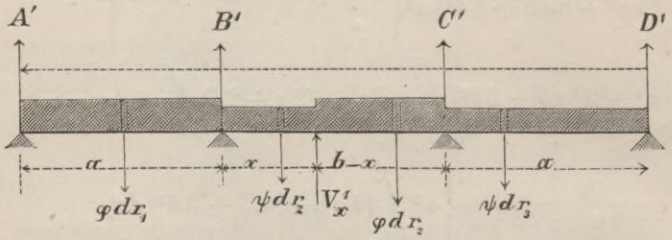
$$[V'_x]_{\max} = Z_x + \frac{x^2}{a^2}\,Y_x \;\ldots\ldots\ldots\; (374)$$

$$[V'_x]_{\min} = Z'_x - \frac{x^2}{a^2}\,Y_x \;\ldots\ldots\ldots\; (375)$$

b., für die zweite Oeffnung:

§ 95. Die analogen Werthe für die zweite Oeffnung ergeben sich aus dem Belastungsfall Fig. 110, wenn der Coordinatenursprung

Fig. 110.



im Auflager B angenommen wird und

$$\left(\frac{b}{2} - x\right) q + \frac{(2a + 3b)\, a^3 k}{4b(4a^2 + 8ab + 3b^2)} = G_x \quad \ldots \quad (376)$$

$$\left(\frac{b}{2} - x\right) p - \frac{(2a + 3b)\, a^3 k}{4b(4a^2 + 8ab + 3b^2)} = G'_x \quad \ldots \quad (377)$$

$$\frac{(2a + 3b)(4ab + 4bx - 2x^2)\, k}{4(4a^2 + 8ab + 3b^2)} = Y'_x \quad \ldots \quad (378)$$

$$[V'_x]_{max} = G_x + \frac{x^2}{b^2}\, Y'_x \quad \ldots \ldots \quad (379)$$

$$[V'_x]_{min} = G'_x - \frac{x^2}{b^2}\, Y'_x \quad \ldots \ldots \quad (380)$$

4. Die Construction der Funktionen $[V'_x]_{max}$ und $[V'_x]_{min}$.

§ 96. Man überzeugt sich, dass die Funktionen Z_x und Z'_x, sowie G_x und G'_x als Gleichungen ersten Grades eine gerade Linie und die Funktionen Y_x und Y'_x je eine Parabel bedeuten. Die Maximal- und Minimalwerthe der Verticalkräfte werden demnach durch graphisches Addiren der Ordinaten jener Graden zu den mit $\frac{x^2}{a^2}$ resp. $\frac{x^2}{b^2}$ reducirten Ordinaten der beiden Parabeln erhalten. Setzt man $a = b$ und beschränkt man sich hier der Einfachheit wegen auf die Untersuchung dieses Specialfalles, so nehmen die gedachten Funktionen die folgende Form an, und genügen für deren Construction die darunter angeführten Daten:

a., **für die erste Oeffnung:**

$$\left.\begin{aligned} &\text{Gerade } Z_x = \left(\frac{9}{20}\,a - x\right) q - \frac{a}{20}\,p, \\ &\qquad \text{für } x = o:\ Z_o = \frac{(9\,q - p)}{20}\,a, \\ &\qquad ,,\ x = a:\ Z_a = -\frac{(11\,q + p)}{20}\,a. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (381)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Gerade } Z'_x = \left(\frac{9}{20}\,a - x\right) p - \frac{a}{20}\,q, \\ &\qquad \text{für } x = o:\ Z'_o = \frac{(9\,p - q)}{20}\,a, \\ &\qquad ,,\ x = a:\ Z_a = -\frac{(11\,p + q)}{20}\,a. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (382)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Parabel } Y_x = \frac{(19\,a^2 - 2\,x^2)}{30\,a}\,k, \\ &\text{für } x = o: \text{Scheitelordinate } Y_o = \frac{19\,k\,a}{30}, \\ &,,\ x = a: \qquad\qquad Y_a = \frac{17\,k\,a}{30}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (383)$$

b., **für die zweite Oeffnung:**

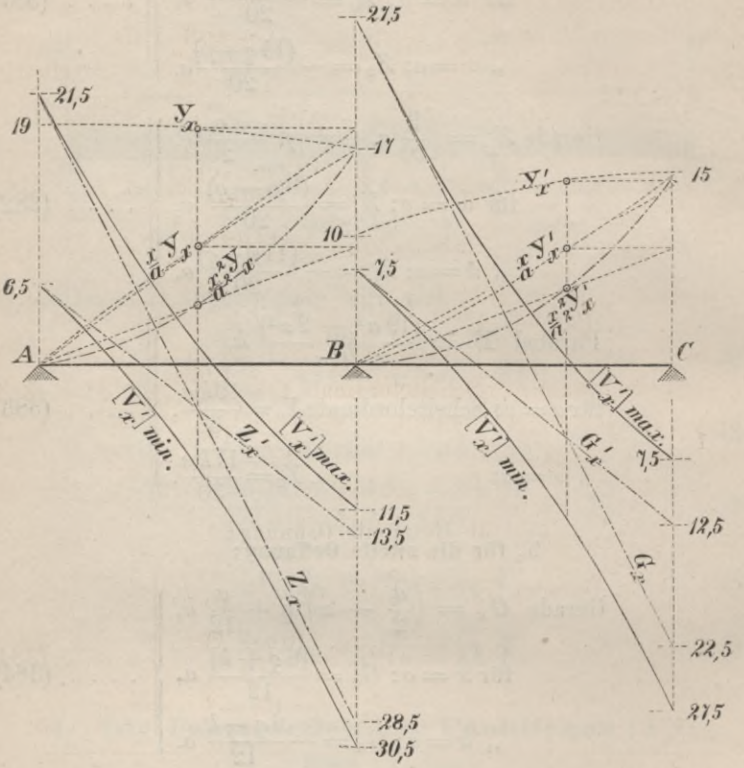
$$\left.\begin{aligned} &\text{Gerade } G_x = \left(\frac{a}{2} - x\right) q + \frac{a}{12}\,k, \\ &\qquad \text{für } x = o:\ G_o = \frac{(6\,q + k)}{12}\,a, \\ &\qquad ,,\ x = a:\ G_a = -\frac{6\,q - k}{12}\,a. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (384)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Gerade } G'_x = \left(\frac{a}{2} - x\right) p - \frac{a}{12}\,k, \\ &\qquad \text{für } x = o:\ G'_o = \frac{(6\,p - k)}{12}\,a, \\ &\qquad ,,\ x = a:\ G'_a = -\frac{6\,p + k}{12}\,a. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (385)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Parabel } Y'_x = \frac{(2\,a^2 + 2\,a\,x - x^2)}{6\,a}\,k, \\ &\text{für } x = o:\ Y'_o = \frac{k\,a}{3}, \\ &,,\ x = a: \text{Scheitelordinate } Y'_a = \frac{k\,a}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (386)$$

Die vorentwickelten Funktionen finden sich in der folgenden Figur für einen Träger verzeichnet, für welchen $a = 10$, $p = 2$, $k = 3$, $q = 5$.

Fig. 111.



5. Die Momente der ersten Oeffnung und deren Maximal- und Minimal-Werthe.

§ 97. Unter den bekannten Voraussetzungen und Bezeichnungen erhält man mit Gl. (360)

für die erste Oeffnung:

für $o \leqq x \leqq r_1$: $M_x = A_x$,

„ $r_1 \leqq x \leqq a$: $M_x = \dfrac{P_1\, b}{(4\,a^2 + 8\,a\,b + 3\,b^2)\,a^2 b}\Big[(2\,a + 2\,b)\;r_1{}^3 x$

$$-(6a^2 + 10ab + 3b^2)\,a r_1 x + (4a^2 + 8ab + 3b^2)\,a^2 r_1\Big] + f(P_2) + f(P_3)$$

Hierin bedeuten $f(P_2)$ und $f(P_3)$ zwei von P_2 und P_3 abhängige Funktionen, welche das Moment M'_x unter denselben Umständen vergrössern und verringern helfen, als die Reaction A. Desgleichen ergiebt sich für die zwischen dem Querschnitt x und dem Auflager B angreifenden Kräfte P_1 der ersten Oeffnung, dass dieselben auf das Moment M_x denselben Einfluss ausüben, als auf die Reaction A. Ueber die bezüglichen Eigenschaften der vor dem Querschnitt x gelegenen Lasten P_1 entscheidet nach vorstehender Gleichung

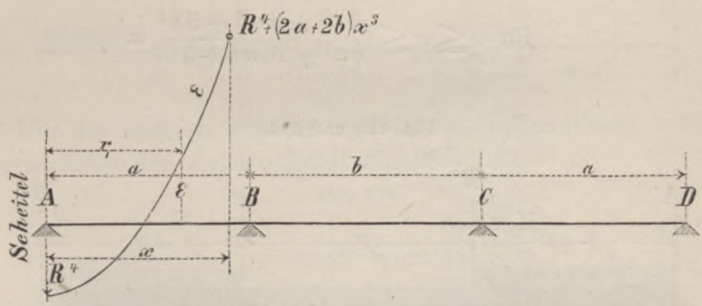
$$\text{die Relation: } (2a+2b)\,r_1{}^2 x + (4a^2+8ab+3b^2)\,a^2 - (6a^2+10ab+3b^2)\,ax \gtrless o,$$

$$\text{oder, wenn: } (4a^2+8ab+3b^2)\,a^2 - (6a^2+10ab+3b^2)\,ax = R^4, \quad (387)$$

$$\text{die Relation: } (2a+2b)\,r_1{}^2 x + R^4 \gtrless o. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (388)$$

In dem einen und anderen Falle wird der Werth des Moments M_x entweder wachsen oder abnehmen. Die Funktion (388) ist bei constant gedachtem x eine Parabel ε, deren Verlauf durch Fig. **112** dargestellt wird.

Fig. 112.



Für $R^4 \geqq o$ ist ε stets positiv; für $R^4 < o$ ist ε negativ oder positiv, und zwar vor dem Punkte $\varepsilon = o$ negativ, hinter diesem Punkte positiv. Der Werth R^4, Gl. (387), nimmt mit wachsendem x ab. Vom Auflager A an gerechnet bis zu demjenigen Querschnitt x, für welchen $R^4 = o$, oder für welchen nach Gl. (387)

$$x_1 = \frac{(4a^2+8ab+3b^2)}{(6a^2+10ab+3b^2)}\,a, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (389)$$

werden daher sämmtliche vor dem Querschnitt x gelegenen Lasten P_1 des Moments M_x vergrössern. Für den Fall indessen, dass

$x > x_1$ Gl. (389), wird das Moment M_x durch die vor dem Querschnitt x gelegenen Lasten P_1 theils vergrössert, theils verringert, und zwar durch alle Lasten P_1 vergrössert, welche zwischen dem Auflager B und demjenigen Querschnitt liegen, für welchen:

$$\varepsilon = (2a + 3b) r_1{}^2 x + R^4 = o, \quad \ldots \ldots \quad (390)$$

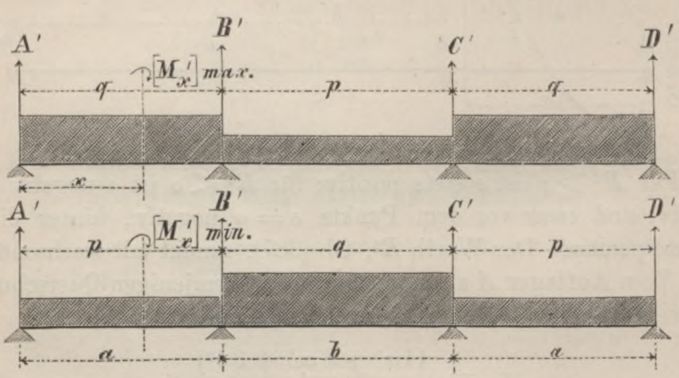
dagegen durch alle Lasten P_1 verringert, welche zwischen diesem Querschnitt und dem Auflager A liegen. Die Bedingung (390) ergiebt:

$$r_{1(\varepsilon = o)} = \sqrt{\frac{(6a^2 + 10ab + 3b^2)a}{(2a + 2b)} - \frac{(4a^2 + 8ab + 3b^2)a}{(2a + 2b)} \frac{a}{x}} \,. \quad (391)$$

Der Werth von r_1 Gl. (391) nimmt mit wachsendem x zu und erreicht für den kleinstmöglichen Werth $x = x_1$ nach Gl. (389) den Werth Null. Demnach sind die Bedingungen bezüglich der Erzeugung des Maximums und Minimums der Momente für verschiedene Querschnitte verschieden, und zwar erhält man unter Beibehaltung der vorher gewählten Bezeichnungen die jene Werthe erzeugenden Belastungsfälle in den Figuren **113** bis **116**.

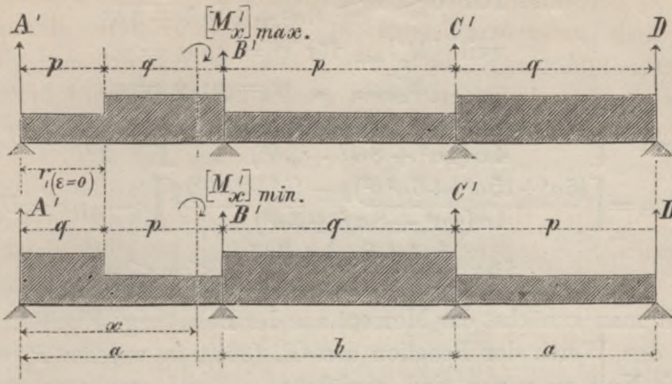
$$\text{für } o \leqq x \leqq \frac{4a^2 + 8ab + 3b^2}{6a^2 + 10ab + 3b^2} a.$$

Fig. 113 und 114.



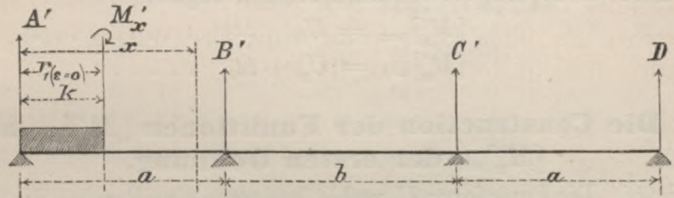
$$\text{für } \frac{4a^2 + 8ab + 3b^2}{6a^2 + 10ab + 3b^2} a \leqq x \leqq a.$$

Fig. 115 und 116.



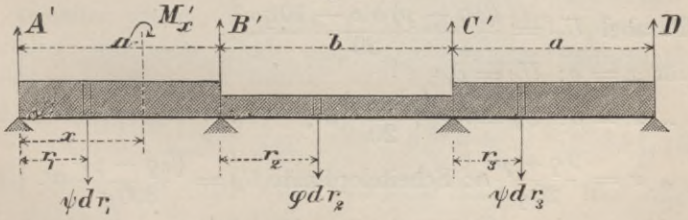
§ 98. Die Momente der Belastungsfälle Fig. **115** und **116** werden erhalten, wenn dem durch die Belastungsfälle Fig. **113** und **114** erzeugten Moment das durch die Belastung Fig. **117** erzeugte Moment entweder subtrahirt oder addirt wird.

Fig. 117.



Um die ersteren Fig. **113** und **114** zu untersuchen, ermittele man zunächst den Belastungsfall Fig **118**.

Fig. 118.



Derselbe ergiebt nach entsprechender Reduction, unter Berücksichtigung von Gl. (360):

$$M_x' =$$

$$\frac{\psi x}{4a(4a^2+8ab+3b^2)}\left\{(6a^2+15a^3b+6a^2b^2)-2a(4a^2+8ab+3b^2)x\right\}$$

$$-\frac{\varphi x}{4a(4a^2+8ab+3b^2)}\left[b^4+2ab^3\right],$$

$$\text{also für } o \leqq x \leqq \frac{4a^2+8ab+3b^2}{6a^2+10ab+3b^2}\,a,$$

$$\text{weil } [M'_x]_{\max} \text{ für } \psi = q;\ \varphi = p,$$
$$[M'_x]_{\min} \text{ „ } \psi = p;\ \varphi = q.$$

$$[M'_x]_{\max} = \left[\frac{(6a^4+15a^3b+6a^2b^2)\,q-(b^4+2ab^3)\,p}{4a(4a^2+8ab+3b^2)}\right]x - \frac{1}{2}qx^2 = U_x, \quad (392)$$

$$[M'_x]_{\min} = \left[\frac{(6a^4+15a^3b+6a^2b^2)p-(b^4+2ab^3)\,q}{4a(4a^2+8ab+3b^2)}\right]x - \frac{1}{2}px^2 = U'_x \quad (393)$$

$$\text{für } \frac{4a^2+8ab+3b^2}{6a^2+10ab+3b^2}\,a \leqq x \leqq a,$$

erhält man zunächst das Moment aus der Belastung, Fig. 117, indem man den Werth der Reaction aus Gl. (360), in welcher P_2 und P_3 gleich Null zu setzen sind, einführt:

$$M'_x = \frac{k}{4\,(a+b)}\left[(6a^2+10ab+3b^2)\,a - \frac{(6a^2+10ab+3b^2)^2}{2\,(4a^2+8ab+3b^2)}\,x - \frac{(4a^2+8ab+3b^2)\,a^2}{2x}\right] = \Omega_x \quad \ldots\ldots \quad (394)$$

und daher nach den vorstehenden Ausführungen:

$$[M'_x]_{\max} = U_x - \Omega_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (395)$$
$$[M'_x]_{\min} = U'_x + \Omega_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (396)$$

6. Die Construction der Funktionen $[M'_x]_{\max}$ und $[M'_x]_{\min}$ der ersten Oeffnung.

§ 99. Die Funktionen U_x und U'_x bedeuten eine Parabel, die Funktion Ω_x dagegen eine Hyperbel. Bezügl. deren Construction beschränken wir uns auf den speciellen Fall $a = b$. Man erhält dafür folgende Werthe und Daten:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Parabel } U_x = \dfrac{(9q-p)\,ax - 10qx^2}{20}, \\
\text{für } x = o:\ U_0 = o, \\
\text{„ } x = a:\ U_a = -\dfrac{(p+q)}{20}\,a^2, \\
\text{„ } x = \dfrac{9q-p}{20q}\,a:\ \text{Scheitelordinate } U_x = \dfrac{(9q-p)^2}{800q}\,a^2.
\end{array}\right\} \quad (397)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Parabel } U'_x = \dfrac{(9p-q)\,ax - 10px^2}{20}, \\
\text{für } x = o:\ U'_0 = o, \\
\text{„ } x = a:\ U'_a = -\dfrac{(p+q)}{20}\,a^2, \\
\text{„ } x = \dfrac{9p-q}{20p}\,a:\ \text{Scheitelordinate } U'_x = \dfrac{(9p-q)^2}{800p}\,a^2.
\end{array}\right\} \quad (398)$$

§ 100. Allgemein darf in Bezug auf die Funktionen U_x U'_x und Ω_x angeführt werden, dass die beiden Parabeln auf dem Auflager B, d. h. für $x = a$, einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, und dass die Funktion Ω_x für x_1 nach Gl. (389) zu Null wird. Daneben überzeugt man sich, dass die Hyperbel Ω_x in diesem letzteren Punkte von der x-Achse tangirt wird, sowie dass eine Senkrechte im Auflager A eine der Asymptoten der Hyperbel ist. Aus ersterem Grunde haben die Funktionen U_x und $U_x + \Omega_x$ einerseits, sowie $U'_x + \Omega_x$ andererseits im Punkte $x = x_1$, Gl. (389), eine gemeinschaftliche Tangente. Wir können von der Construction der Hyperbel aus deren Hauptachsen absehen und uns mit der Ermittelung einiger numerischer Werthe für die weitere Verwendung derselben begnügen. Die Fig. 130 enthält die betreffenden Funktionen für den in § 96 angenommenen Träger und wird in Bezug auf deren Construction einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen.

7. Die Momente der zweiten Oeffnung und deren Maximal- und Minimal-Werthe.

§ 101. Der Belastungsfall Fig. 101 ergiebt:

für $o \leqq x \leqq r_2$:

$$M_x = A(a+x) - P_1(a+x-r_1) + Bx = (A - P_1)(a+x) + P_1 r_1 + Bx = f(P_1) + f(P_2) + f(P_3), \quad \ldots\ldots \quad (399)$$

für $r_2 \leqq x \leqq b$:

$$M_x = A(a+x) - P_1(a+x-r_1) + Bx - P_2(x-r_2) = f(P_1) + f^1(P_2) + f(P_3). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (400)$$

In beiden Gleichungen sind die Funktionen von P_1 und P_3 bezw. einander gleich, dagegen $f(P_2)$ und $f^1(P_2)$ von einander verschieden, und zwar erhält man nach erfolgter Reduction aus Gl. (360) und (361):

$$f(P_1) = \frac{P_1 r_1 (a^2 - r_1{}^2)}{ab(4a^2 + 8ab + 3b^2)} \Big[(2a + 3b)x - (a+b)2b\Big]. \quad (401)$$

Das Moment M_x wird daher mit jeder Last P_1, für welche: $x \leqq \frac{2(a+b)}{2a+3b} b$, abnehmen, dagegen mit jeder Last P_1, für welche $x \geqq \frac{2(a+b)}{2a+3b} b$, wachsen.

In derselben Weise erhält man den Werth $f(P_3)$:

$$f(P_3) = \frac{P_3 r_3 (3ar_3 - 2a^2 - r_3{}^2)}{ab(4a^2 + 8ab + 3b^2)} \Big[(2a+3b)x - b^2\Big] \quad . \; . \quad (402)$$

und nach Gl. (367) und Fig **104:** $f(P_3)$ positiv, Null oder negativ, je nachdem $x \lesseqgtr \frac{b^2}{2a+3b}$. Sonach wird das Moment M_x mit jeder Last P_3, für welche:

$x \leqq \frac{b^2}{2a+3b}$, wachsen, dagegen für den Fall, dass

$x \geqq \frac{b^2}{2a+3b}$, abnehmen.

§ 102. Was die Funktionen von P_2 anbetrifft, so ergiebt sich $f(P_2)$ der Gl. (399):

$$f(P_2) =$$

$$\frac{P_2}{b(4a^2+8ab+3b^2)}\left\{(4a^2+8ab+3b^2)bx+r_2^2\left[b(6a+6b)-x(6a+9b)\right]\right\}$$

$$-\frac{P_2}{b(4a^2+8ab+3b^2)}\frac{r_2}{b}\left\{b^3(4a+3b)+abx(4a+6b)+\left[b(2a+3b)\right.\right.$$

$$\left.\left.-x(4a+6b)\right]r_2{}^2\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (403)$$

Setzt man hierin:

$$(4a^2+8ab+3b^2)\,bx+r_2{}^2\,[b(6a+6b)-x(6a+9b)]=S$$

und

$$b^3(4a+3b)+abx(4a+6b)+[b(2a+3b)-x(4a+6b)]\,r_2{}^2=T,$$

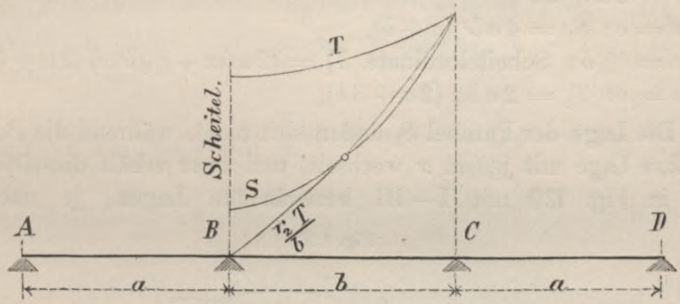
so wird der Gesammtcoefficient an P_2, Gl. (403), positiv, Null oder negativ, je nachdem:

$$\frac{r_2}{b}\,T \lesseqgtr S.$$

Die beiden Funktionen $\frac{r_2}{b}T$ und S, in welchen T und S je eine Parabel bedeuten, finden sich in Fig. **119** verzeichnet. Die gedachten beiden Funktionen werden sich im Allgemeinen im Punkte e schneiden, so dass dem Vorigen zufolge diejenigen Lasten P_2, welche zwischen diesem Punkte e und dem Auflager C liegen, das Moment M_x verringern, diejenigen Lasten, welche zwischen diesem Querschnitt e und dem Querschnitt x liegen, das Moment vergrössern. Für den Fall, dass der Punkt e in das Auflager C rückt, also dort mit dem zweiten gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven $\frac{r_2}{b}T$ und S zusammenfällt, werden dagegen sämmtliche hinter dem Querschnitt x gelegenen Lasten das Moment M_x vergrössern. Letzteres tritt ein, wenn $\left[\frac{dS}{dr_2}-\frac{d}{dr_2}\frac{r_2}{b}T\right]_{r_2=b}=2a\left[b^2-x(2a+3b)\right] \gtreqless o.$

Das Moment M_x wird daher für $x \gtreqless \frac{b^2}{2a+3b}$ mit jeder zwischen dem Auflager C und dem Querschnitt x angreifenden Last P_1 wachsen, dagegen für $x \leqq \frac{b^2}{2a+3b}$ durch jede Last P_2 verringert, welche zwischen dem Auflager C und dem Querschnitt $r_2 \left(S - \frac{r_2}{b} T = o\right)$ gelegen ist, sowie durch jede Last P_2 vergrössert, welche zwischen diesem Querschnitt und dem Querschnitt x gelegen ist. Der Werth $r_2 \left(S - \frac{r_2}{b} T = o\right)$ ergiebt sich aus der Auflösung der Gleichung $S - \frac{r_2}{b} T = o$ nach r_2. Dieselbe ist zwar 3. Grades, lässt sich indessen durch $r_2 - b$ dividiren, weil nach Fig. 119:

Fig. 119.



$r_2 = b$ eine Wurzel derselben ist, und zwar ergiebt sich:

$$r_2 = \frac{1}{2(b-2x)(2a+3b)} \Big\{ b^2(4a+3b) - bx(2a+3b)$$

$$- \sqrt{b^4(4a+3b^2) - 2b^2x(2a+3b)(8a^2+20ab+9b^2) + bx^2(2a+3b)^2(16a+9b)} \Big\}$$

$$= \xi \quad \ldots\ldots \quad (404)$$

§ 103. Führt man die analoge Rechnung in Bezug auf $f^1(P_2)$, Gl. (400), so erhält man folgende Daten:

$$f^1(P_2) =$$

$$\frac{P_2}{b^2(4a^2+8ab+3b^2)} \Big\{ b\, r_2 \Big[(a+b)\, 4ab - ax(4a+6b)\Big]$$

$$+ \Big[b(6a+6b) - x(6a+9b)\Big] b\, r_2{}^2 - \Big[b(2a+3b) - x(4a+6b)\Big] r_2{}^3 . \Big\}$$

Der Coefficient an P_2 ist abhängig von dem Ausdruck: $2ab\,[2b\,(a+b) - (2a+3b)\,x] + [2b\,(a+b) - x\,(2a+3b)]\,3b\,r_2 - [(b-2x)\,(2a+3b)]\,r_2^2$, oder:

$$\left\{ [4ab^2\,(a+b) + 6b^2 r_2\,(a+b) - b\,(2a+3b)\,r_2^2] \atop - [2abx\,(2a+3b) + 3bxr_2\,(2a+3b) - 2x\,(2a+3b)\,r_2^2] \right\} \quad (405)$$

Setzt man hierin:

$$4ab^2\,(a+b) + 6b^2 r_2\,(a+b) - b\,(2a+3b)\,r_2^2 = S_1$$

und

$$2abx\,(2a+3b) + 3bxr_2\,(2a+3b) - 2x\,(2a+3b)\,r_2^2 = T_1,$$

so bedeuten beide Funktionen S_1 und T_1 je eine Parabel, deren Ordinaten stets positiv sind, indem: $(6a+6b)\,b > (2a+3b)\,r_2$ und $3b > 2r_2$.

Als Constructionsdaten genügen die folgenden:

für $x = \frac{3b\,(a+b)}{2a+3b}$: Scheitelordinate $S_1 = 4ab^2(a+b) + \frac{9b^3(a+b^2)}{2a+3b}$,

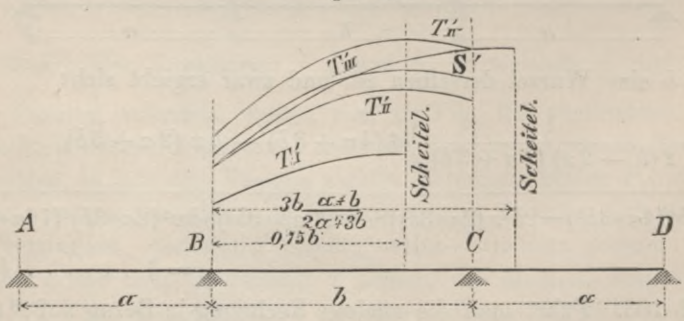
„ $x = o$: $S_1 = 4ab^2\,(a+b)$,

„ $x = {}^3/_4\,b$: Scheitelordinate $T_1 = (2abx + {}^9/_8\,b^2x)\,(2a+3b)$,

„ $x = o$: $T_1 = 2abx\,(2a+3b)$.

Die Lage der Parabel S_1 ändert sich nicht, während die Parabel T_1 ihre Lage mit jedem x wechselt, und zwar erhält dieselbe eine der in Fig. **120** mit I—III bezeichneten Lagen, je nachdem

Fig. 120.



$x \lesseqgtr \frac{2\,(a+b)}{2a+3b}\,b$, während die Lage IV dem Werthe $r_2 = b$ entspricht. Die Tangenten der Neigungswinkel der beiden Parabeln haben für $r_2 = o$ die folgenden Werthe:

$$\frac{dS_1}{dr_2} = 6b^2\,(a+b),\ \frac{dT_1}{dr_2} = 3bx\,(2a+3b).$$

Da beide erst für $x = \frac{2(a+b)}{2a+3b}\, b$ einander gleich werden, während sonst bei kleinerem x immer $\frac{dS_1}{dr_2} > \frac{dT_1}{dr_2}$, so werden sämmtliche vor dem Querschnitt x, welcher der Bedingnng $x \overline{\gtrless} \frac{2\,(a+b)}{2a+3b}\, b$ entspricht, gelegenen Lasten P_2 das Moment M_x vergrössern helfen. Wächst dagegen x, bis $x \geqq \frac{2\,(a+b)}{2a+3b}\, b$, so wird nach vorstehender Figur das Moment M_x durch alle Lasten P_2 verringert, welche zwischen dem Auflager B und demjenigen Querschnitt liegen, welcher dem Schnittpunkte F der beiden Parabeln S_1 und T_1 III entspricht, dagegen durch alle Lasten P_2 vergrössert, welche zwischen diesem Querschnitt und dem Querschnitt x angreifen. Der Querschnitt F entspricht dem Werthe $r_2\,[S_1 - T_1] = o$. Der Werth r_2 folgt also aus der Gleichung $S_1 - T_1 = o$ und zwar erhält man:

$$r_2 = \frac{1}{2\,(b-2x)\,(2a+3b)} \left\{ \Big[2b\,(a+b) - x\,(2a+3b) \Big] 3b \right.$$

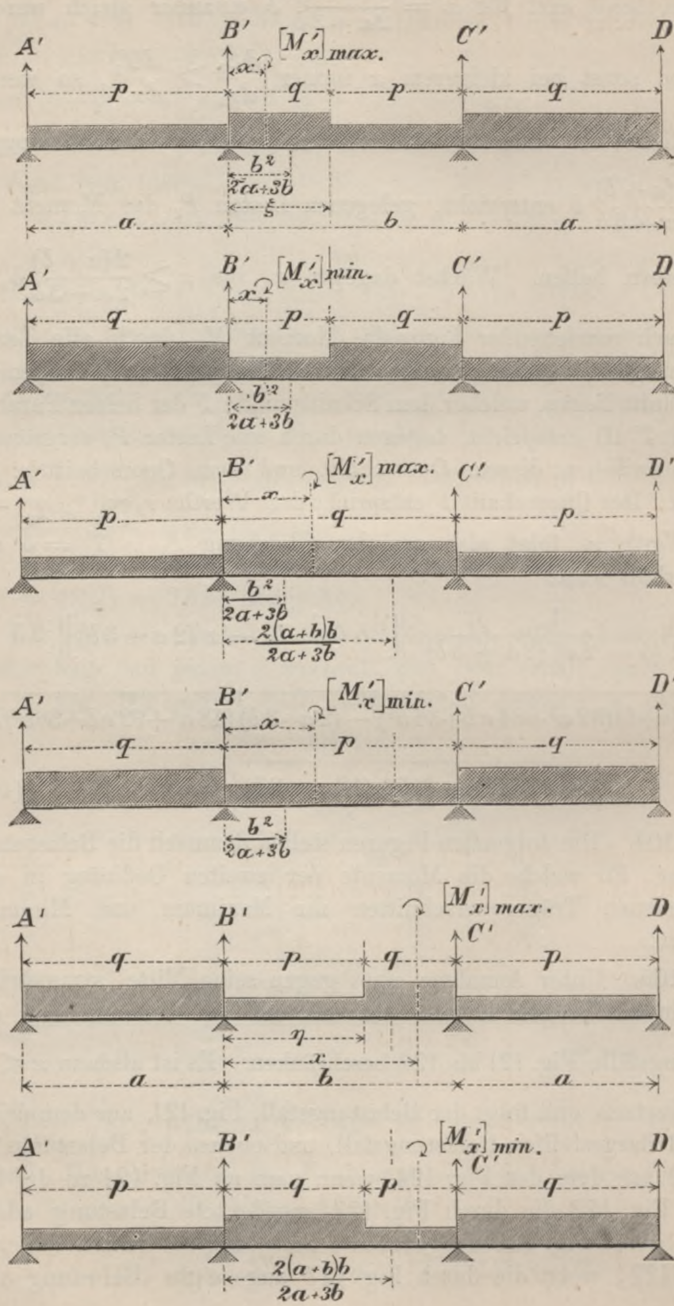
$$+ \sqrt{b^3(a+b)(32a^2+84ab+36b^2) - (2a+3b)(48a^2+92ab+36b^2)\,b^2 x}$$

$$\overline{\left. + b x^2 (2a+3b)^2 (16a+9b) \right\}} = \eta \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (406)$$

§ 104. Die folgenden Figuren stellen demnach die Belastungsfälle dar, für welche die Momente der zweiten Oeffnung in den verschiedenen Trägerquerschnitten ihr Maximum und Minimum erreichen.

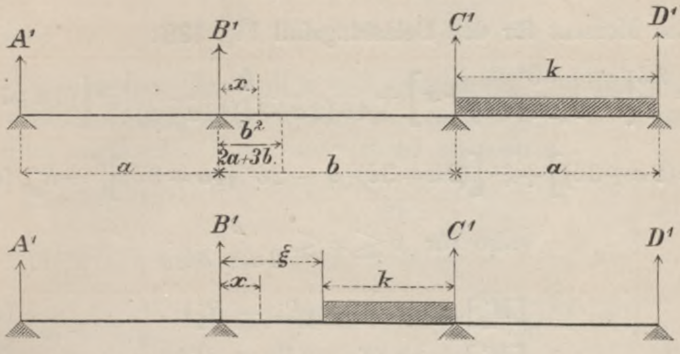
§ 105. Unter Annahme eines gegen seine Mitte symmetrisch angeordneten Trägers können wir uns auf die Untersuchung der Belastungsfälle Fig. 121 bis 124 beschränken. Es ist alsdann $x < \frac{b}{2}$ vorauszusetzen, und folgt der Belastungsfall, Fig. 121, aus dem durch Fig. 123 dargestellten Belastungsfall, und ebenso der Belastungsfall Fig. 122 aus dem der Fig. 124, wenn man ad Fig. 121 zu der Belastung Fig. 123 die durch Fig. 127 angedeutete Belastung addirt und die durch Fig. 128 ausgedrückte Belastung subtrahirt, dagegen ad Fig. 122, wenn die durch Fig. 127 angezeigte Belastung von

Fig. 121, 122, 123, 124, 125 und 126.



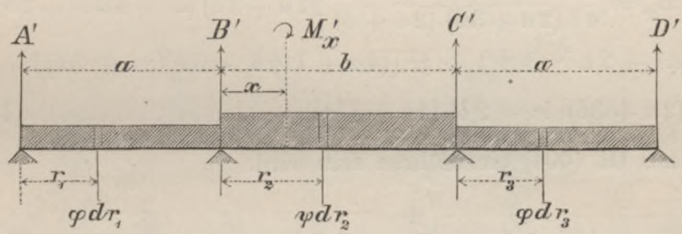
der durch Fig. **124** angegebenen Belastung subtrahirt und zu dieser die Belastung Fig. **128** addirt wird.

Fig. 127 und 128.



Um die Momente der Belastungsweise Fig. **123** und **124** zu erhalten, ermittele man das Moment für den allgemeinen Belastungsfall Fig. **129**.

Fig. 129.



Es ergiebt sich dafür unter Zugrundelegung der Gleichungen (360) und (361), sowie (401) und (402):

$$M'_x = -\frac{a^3\varphi}{4(2a+3b)} + \left[(b-x)\frac{x}{2} - \frac{b^3}{4(2a+3b)}\right]\psi \quad (407)$$

$$\text{oder für: } \frac{b^2}{2a+3b} \leq x \leq \frac{2(a+b)b}{2a+3b},$$

$$\text{wenn: } \psi = q \text{ und } \varphi = p.$$

$$[M'_x]_{\max} = \left[-\frac{b^3}{4(2a+3b)} + (b-x)\frac{x}{2}\right]q - \frac{a^3 p}{4(2a+3b)} = O_x, \quad (408)$$

$$\text{und wenn: } \psi = p \text{ und } \varphi = q,$$

$$[M'_x]_{\min} = \left[-\frac{b^3}{4(2a+3b)} + (b-x)\frac{x}{2}\right]p - \frac{a^3 q}{4(2a+3b)} = O'_x. \quad (409)$$

Dem Vorstehenden analog erhält man M'_x für Fig. **127**:

$$M'_x = -\frac{[(2a+3b)\,x - b^2]\,a^3 k}{4b\,(4a^2+8ab+3b^2)} = R_x \quad \ldots \quad (410)$$

und das Moment für den Belastungsfall Fig. **128**:

$$M'_x = \frac{kb}{2}\left[-\frac{b^2}{2(2a+3b)}+x\right]+\frac{k}{4b\,(2a+3b)\,(2a+b)}\Big\{\xi^3\Big[(4a+7b)\,b$$

$$-5x\,(2a+3b)\Big]+\xi^2\Big[(2a+3b)^2\,x-2b^2\,(4a+3b)\Big]\Big\} = R'_x, \; (411)$$

also für $o \leqq x \leqq \dfrac{b^2}{2a+3b}$:

$$[M'_x]_{\max} = O_x + (R_x - R'_x), \quad \ldots \ldots . \; (412)$$

$$[M'_x]_{\min} = O'_x - (R_x - R'_x), \quad \ldots \ldots . \; (413)$$

in welchen Gleichungen der Werth $(R_x - R'_x)$ nach Gl. (410) und (411) folgende Grösse annimmt:

$$R_x - R'_x = \frac{-k}{4b\,(2a+3b)\,(2a+b)}\Big\{(2a+3b)\,(a^3+4ab^2+2b^3)\,x$$

$$-b^2\,(a^3+2ab^2+b^3)+\xi^3\,[(4a+7b)\,b-5x\,(2a+3b)]+$$

$$+\xi^2\,[(2a+3b)^2\,x-2b^2\,(4a+3b)]\Big\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; (414)$$

und ξ aus Gl. (404) einzuführen sein wird.

8. Die Construction der Funktionen $[M'_x]_{\max}$ und $[M'_x]_{\min}$ der zweiten Oeffnung.

§ 106. Die Funktionen O_x und O'_x bedeuten eine Parabel, deren Ordinaten innerhalb der den Gleichungen (408) und (409) vorgeschriebenen Grenzen der Trägerabscissen die directen Werthe von $[M'_x]_{\max}$ und $[M'_x]_{\min}$ ergeben. Die Funktionen $R_x - R'_x$ anlangend, so kann es bei der Complicirtheit der einzelnen algebraischen Ausdrücke nicht von Werth sein, dieselben näher zu untersuchen, und eine Reduction derselben erscheint um so mehr entbehrlich, als deren Werthe für $x = o$ und $x = \dfrac{b^2}{2a+3b}$ sich von selbst ergeben, und es nur noch der Ausrechnung des einen oder anderen Zwischenpunktes bedarf, um die Funktion auftragen zu können.

Man erhält nämlich für $x = o$ aus Gl. (412) und (395):

$$O_o + R_o - R'_o = U_a - \Omega_a$$

und aus Gl. (413) und (396):

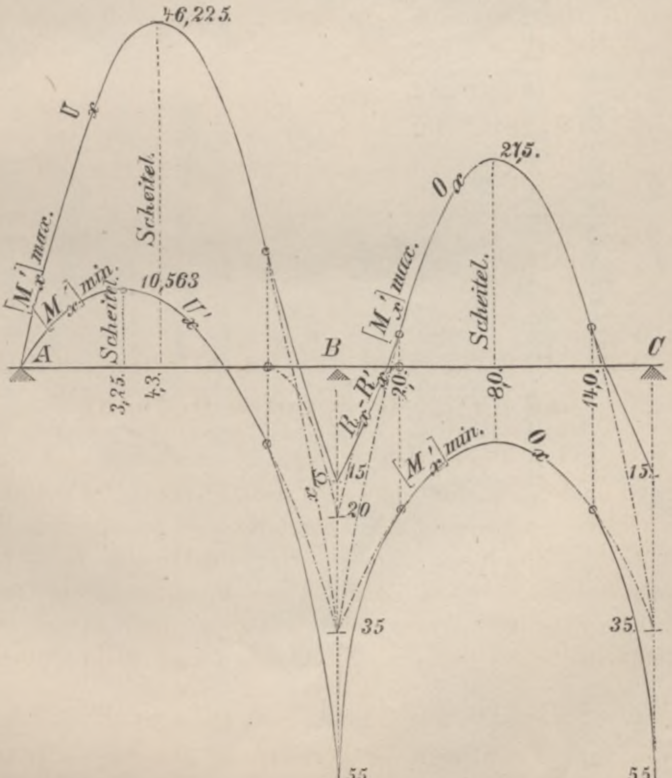
$$O'_o - R_o + R'_o = U'_a + \Omega_a,$$

während für $x = \frac{b^2}{2a + 3b}$ der Werth $R_x - R'_x = o$.

Für den speciellen Fall $a = b$ nehmen die Funktionen O_x und O'_x endlich die folgenden Werthe an, für deren Verzeichnung die darunter angesetzten Daten ausreichend erscheinen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Parabel } O_x = \frac{(10\,a\,x - 10\,x^2 - a^2)\,q - a^2 q}{20}, \\ \text{für } x = o \text{ und } x = a\text{:}\quad O_o = O_a = -\frac{p + p}{20}\,a^2, \\ \quad ,, \quad x = \frac{a}{2}\text{: Scheitelordinate: } O_{\frac{a}{2}} = \frac{3q - 2p}{40}\,a^2. \end{array}\right\} \quad . \; . \; (415)$$

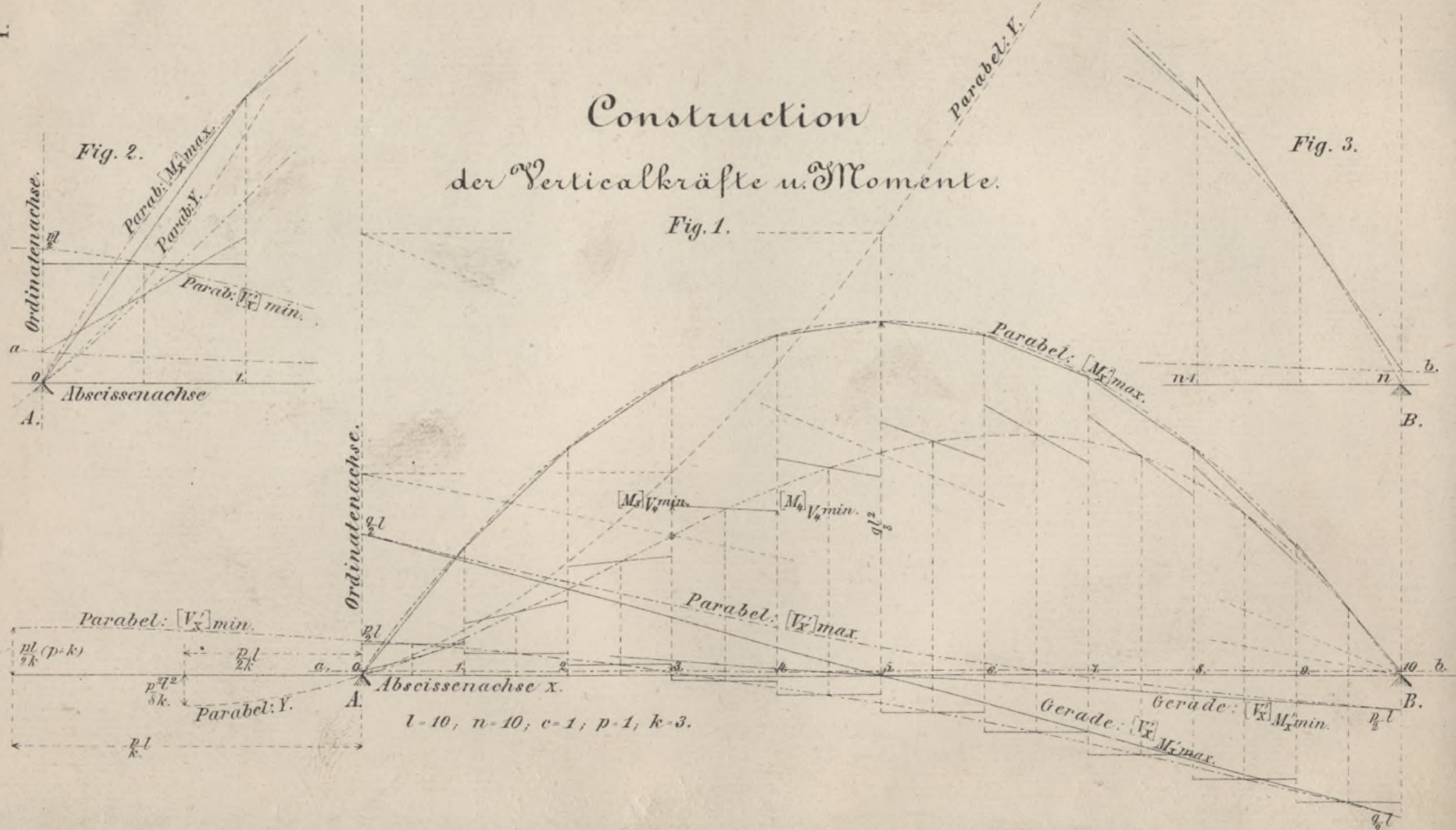
Fig. 130.



$$\left.\begin{array}{l}
\text{Parabel } O'_x = \dfrac{(10ax - 10x^2 - a^2)\,p - a^2 q}{20}, \\
\text{für } x = o \text{ und } x = a\text{: } O'_o = O'_a = -\dfrac{p+q}{20}a^2, \\
\text{,, } x = \dfrac{a}{2}\text{: Scheitelordinate } O'_{\frac{a}{2}} = \dfrac{3p - 2q}{40}\,a^2.
\end{array}\right\} \ldots (416)$$

Die gedachten Constructionen sind ebenfalls in Fig. 130 für den sub § 96 angenommenen Träger ausgeführt worden.

Construction der Verticalkräfte u. Momente.



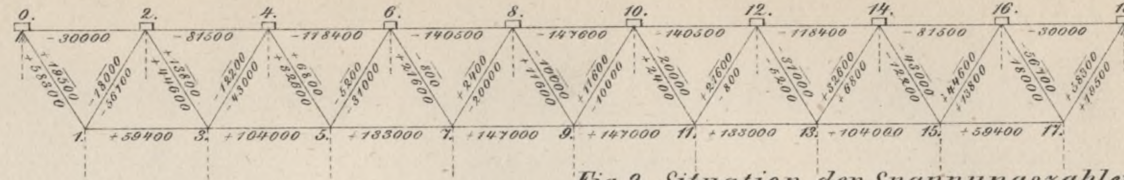


Fig. 2. Situation der Spannungszahlen.

Crumlin-Viaduct.

$l = 45;\ c = 2,5;\ h = 4,2;\ p' = \frac{25200}{45.}$

$l = 45;\ c = 5.0;\ h = 4,2;\ p'' = \frac{10500}{45.};\ k = \frac{75000}{45.}$

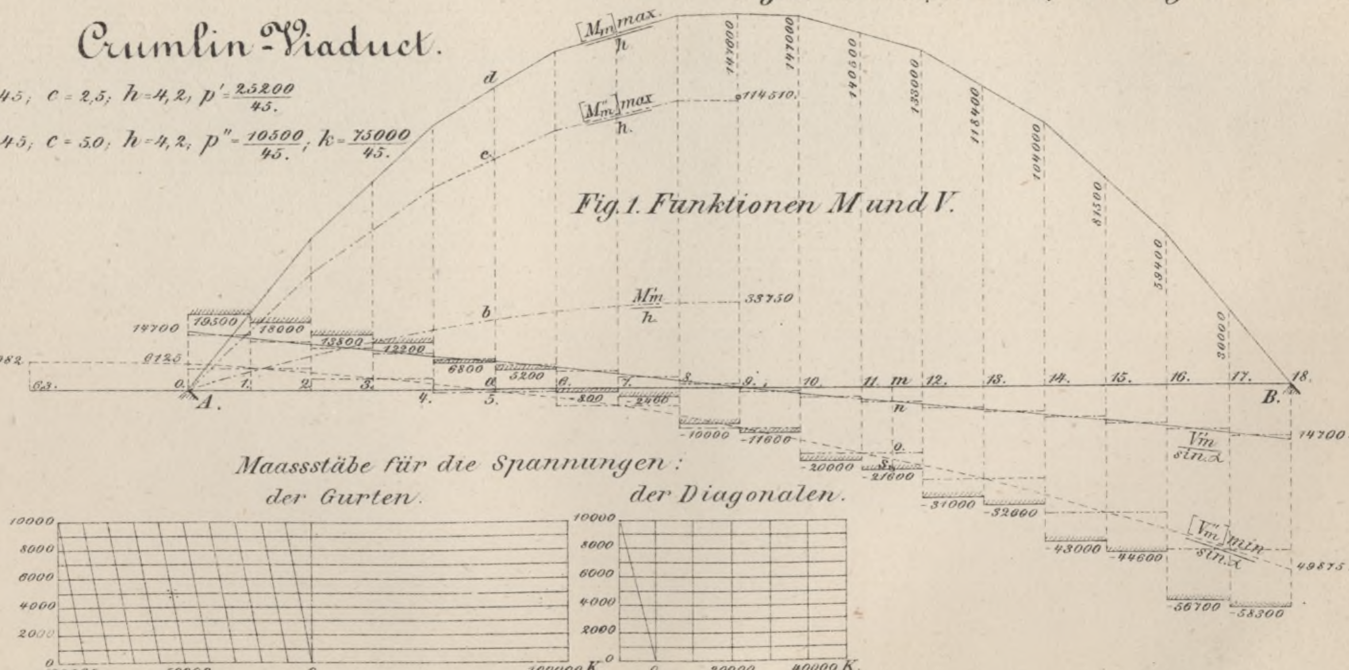


Fig. 1. Funktionen M und V.

Maassstäbe für die Spannungen:

der Gurten. der Diagonalen.

Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig

Trent-Brücke bei Newark.

$l = 28;\ h = 1,73;\ c = 1;\ p = 5000;\ k = 5000.$

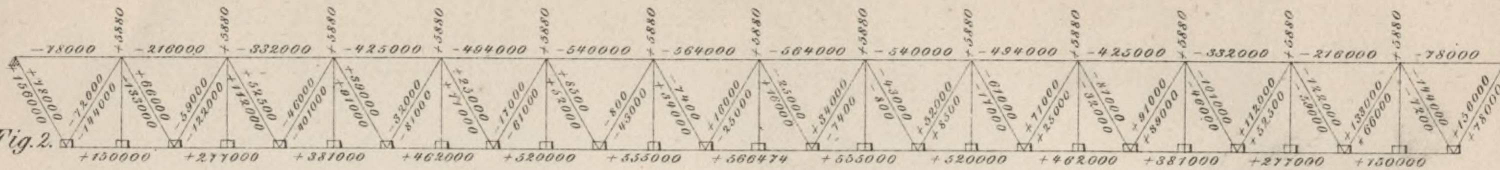


Fig. 2.

Situation der Spannungszahlen.

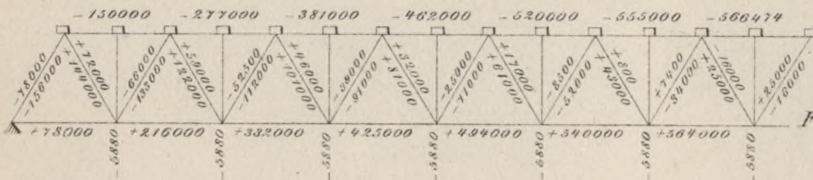
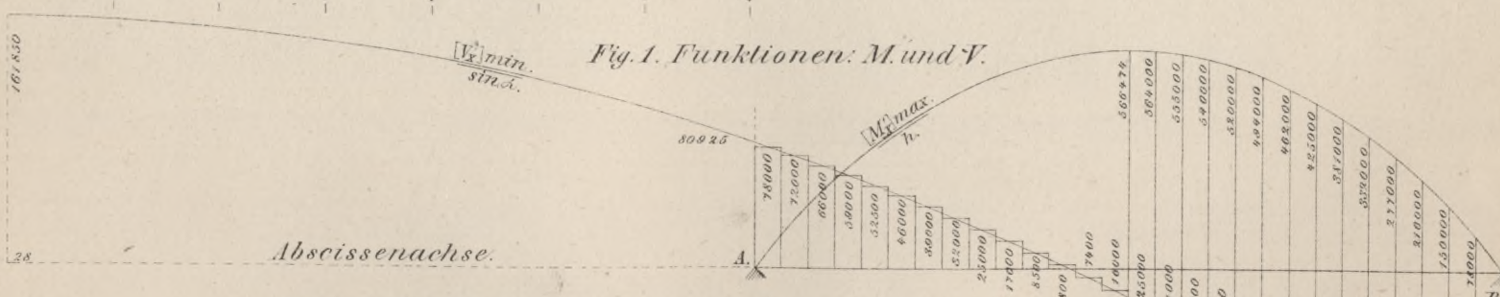


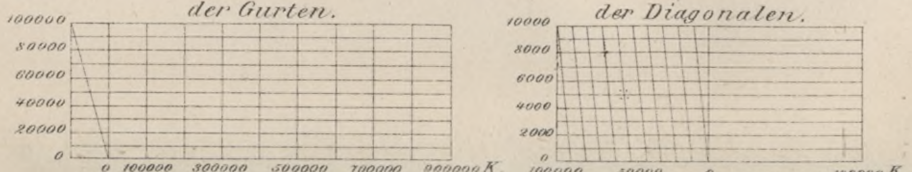
Fig. 3.

Fig. 1. Funktionen: M. und V.



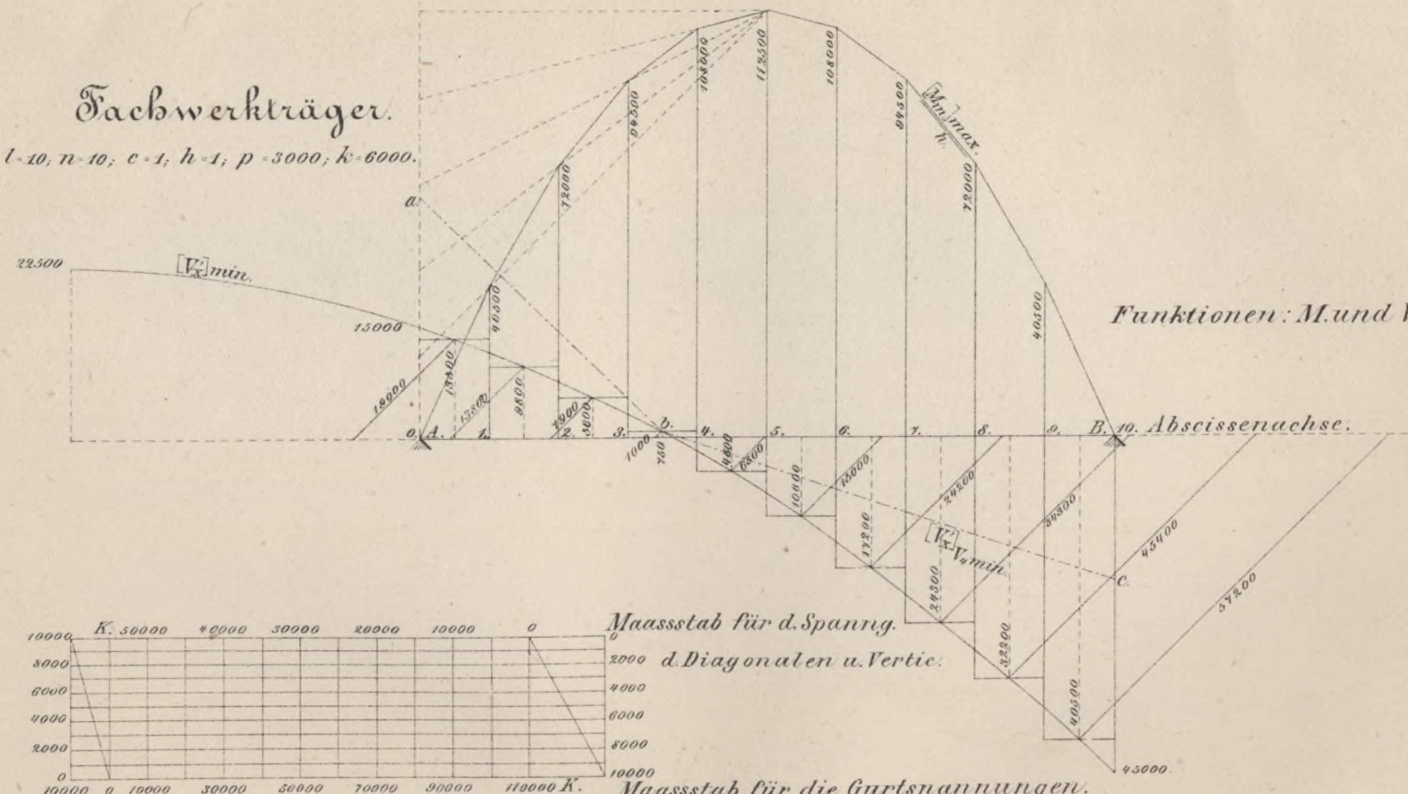
Maassstäbe für die Spannungen:

der Gurten. der Diagonalen.



Fachwerkträger.

$l=10;\ n=10;\ c=1;\ h=1;\ p=3000;\ k=6000.$



Fachwerkträger mit gezogenen Diagonalen.

$l = 10;\ n = 10;\ c = 1,\ h = 1;\ p = 3000;\ k = 6000.$

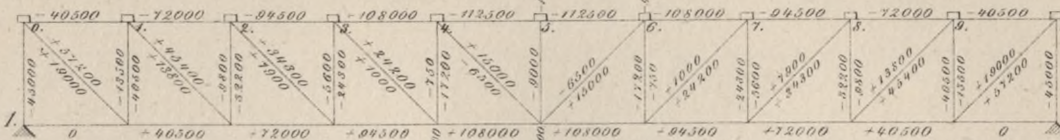


Fig. 1.

Fig. 2.

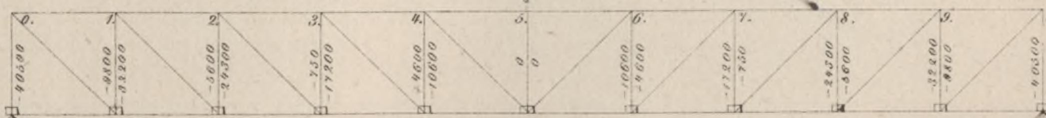


Fig. 3.

Fig. 4.

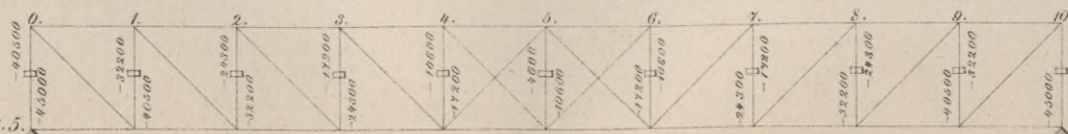


Fig. 5.

Fachwerkträger mit gedrückten Diagonalen.

$l = 10;\ n = 10;\ c = 1;\ h = 1;\ p = 3000;\ k = 6000.$

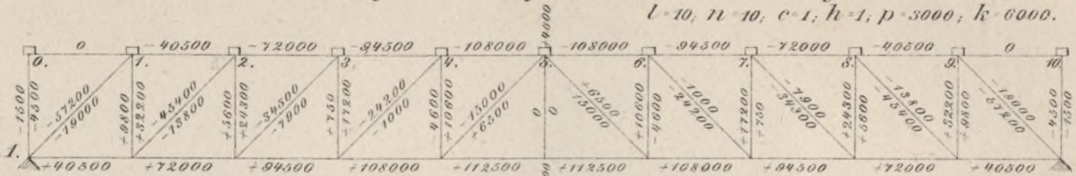


Fig. 1.

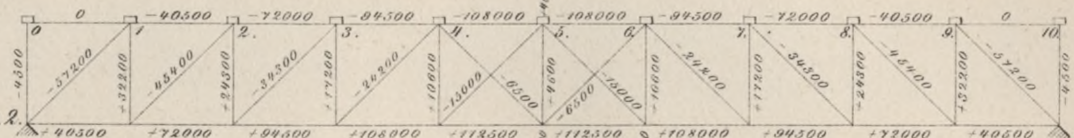


Fig. 2.

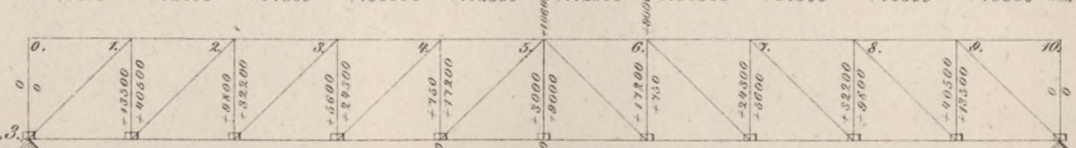


Fig. 3.

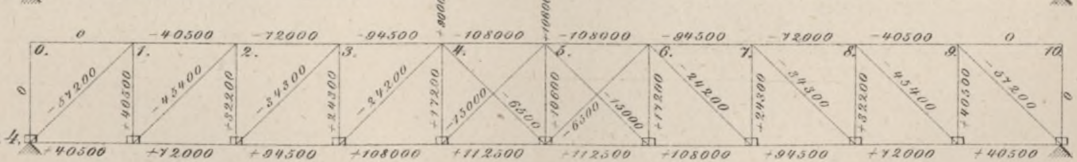


Fig. 4.

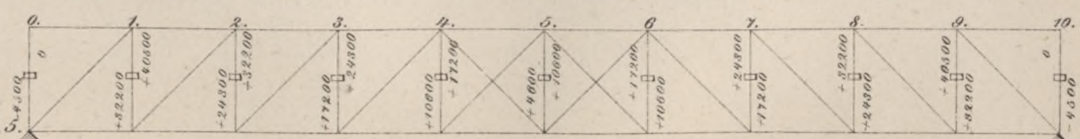
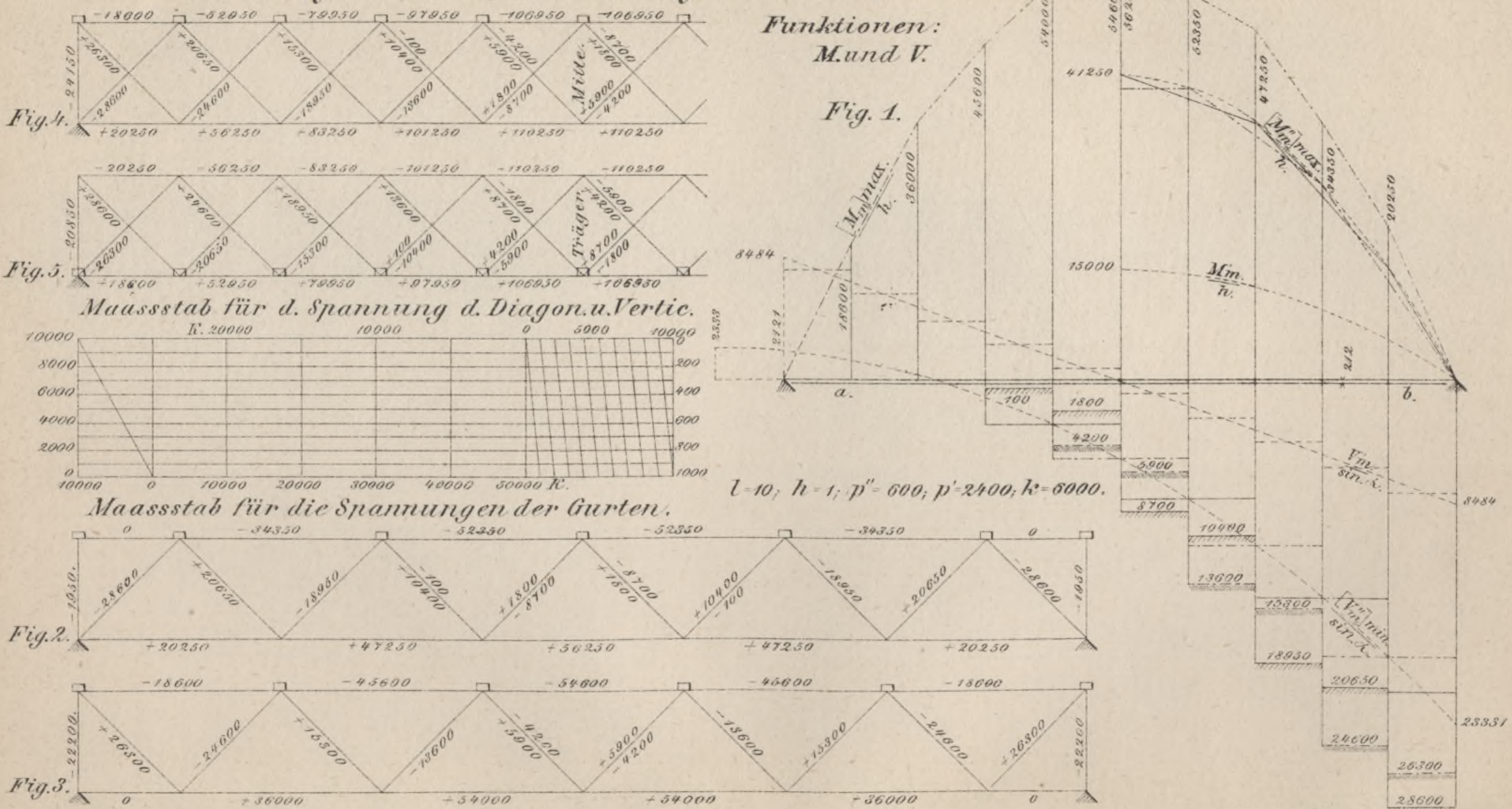


Fig. 5.

Parallelträger mit doppeltem System, ohne Vertic.



Lith. Anst. v. C. Esch Leipzig

Parallelträger mit doppeltem System u. Verticalen.

$l = 10;\ n = 10;\ c = 1;\ h = 1;\ p = 3000;\ k = 6000.$

Fig. 1.

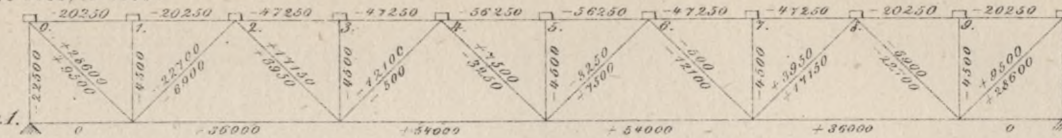


Fig. 2.

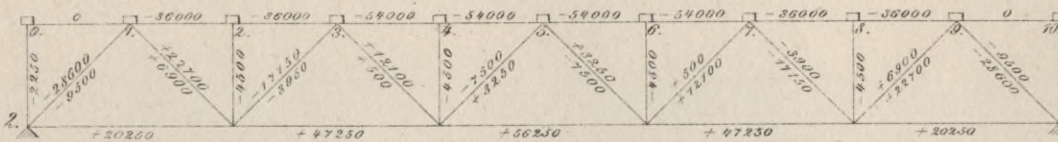


Fig. 3.

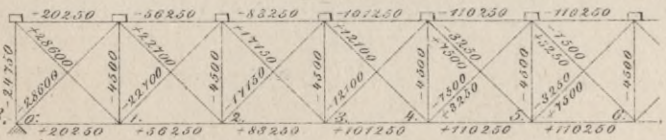


Fig. 6.

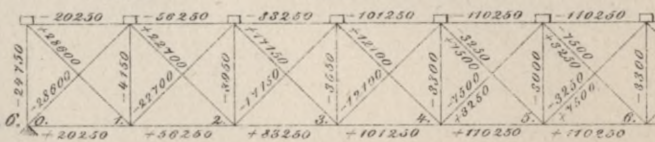


Fig. 4.

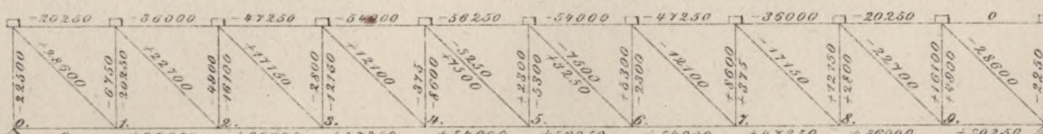


Fig. 5.

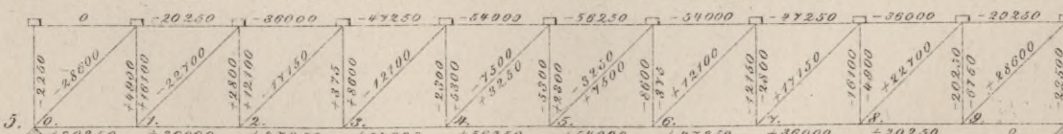


Fig 7.

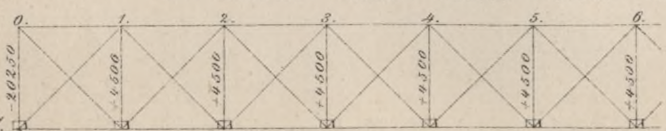
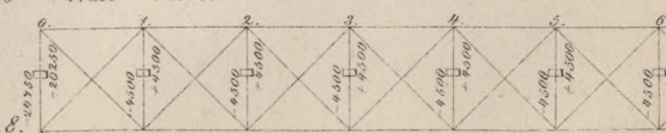
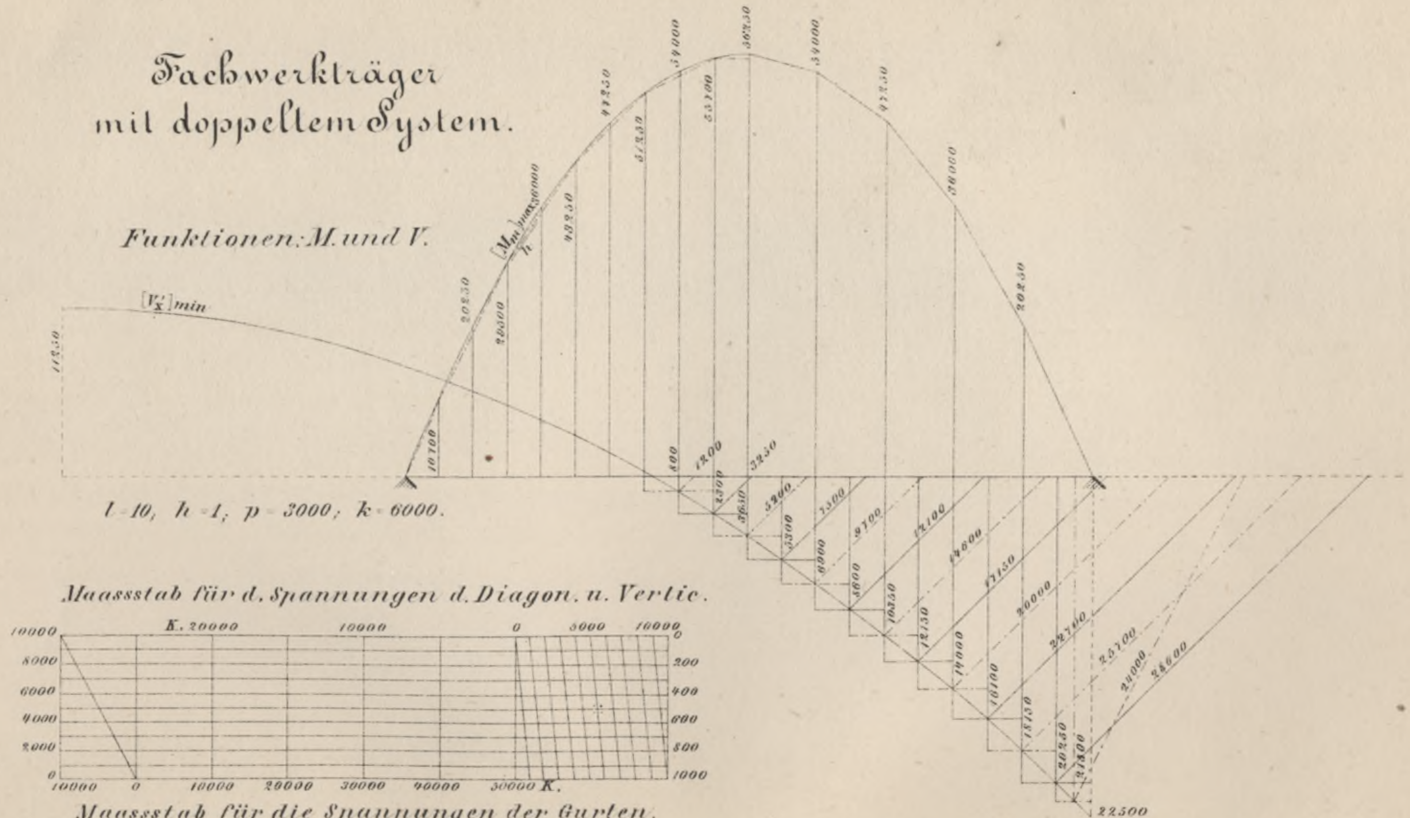


Fig. 8.



Fachwerkträger mit doppeltem System.



Fachwerkträger mit doppeltem System.

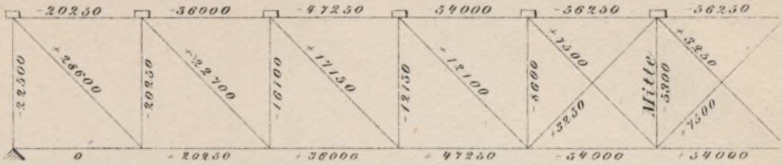


Fig. 1.

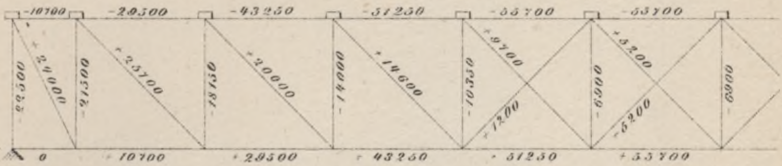


Fig. 2.

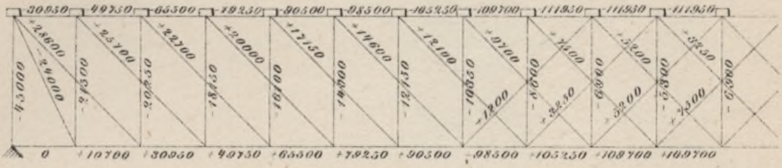


Fig. 3.

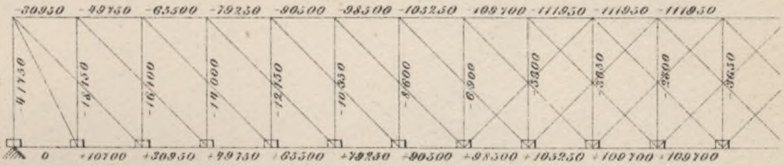


Fig. 4.

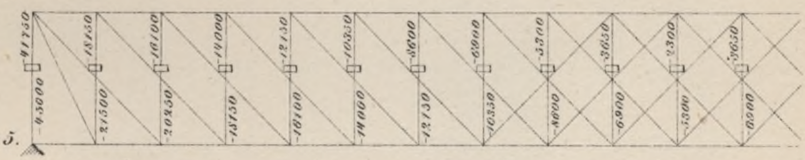


Fig. 5.

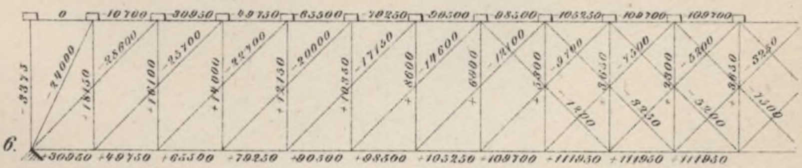


Fig. 6.

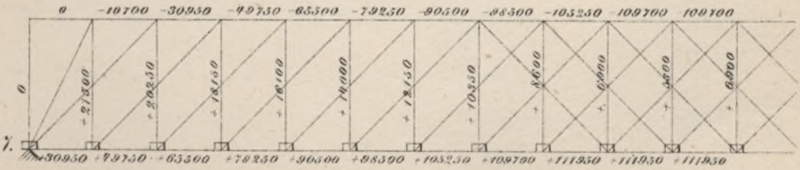


Fig. 7.

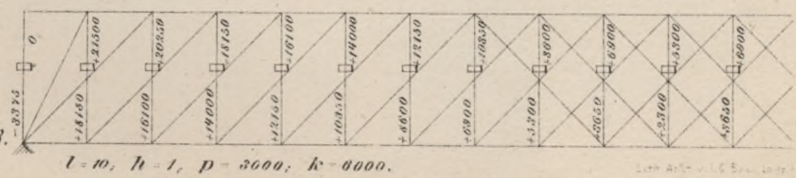


Fig. 8.

$l = 10;\ h = 1;\ p = 3000;\ k = 6000.$

Lith. Anst. v. L. E. Baer, Leipzig

Parabelträger.

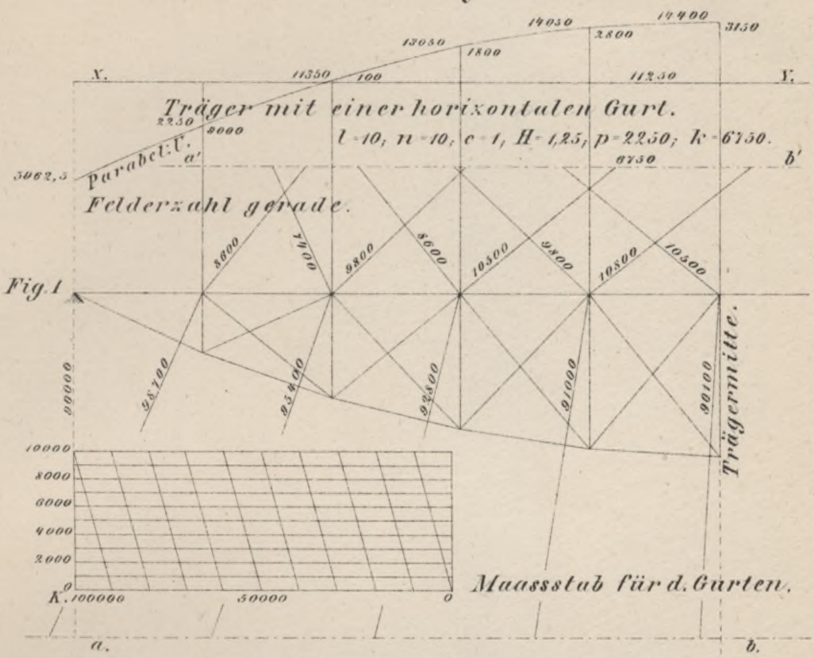


Fig. 1

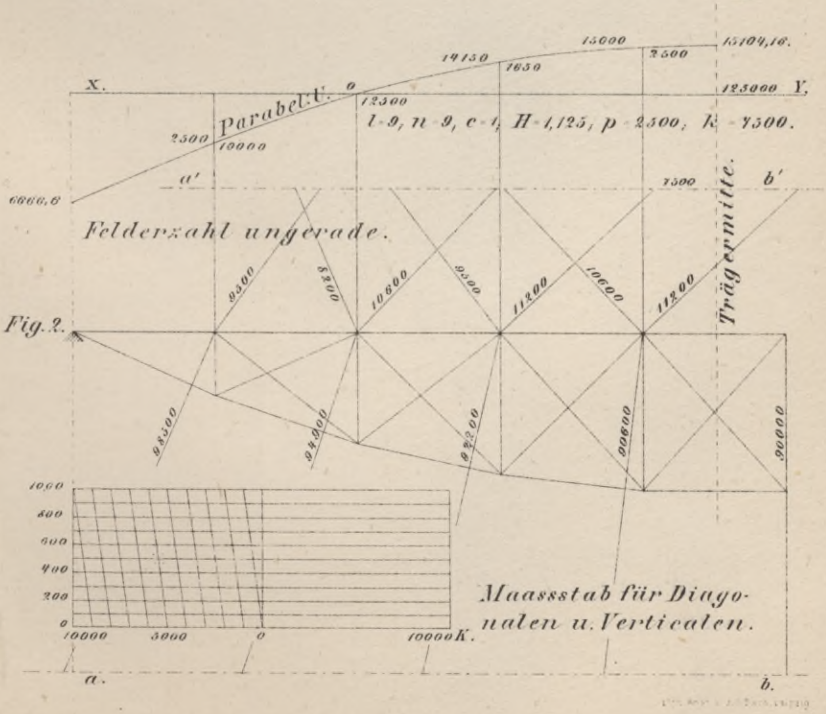
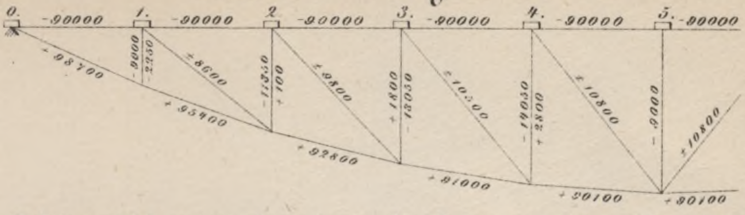
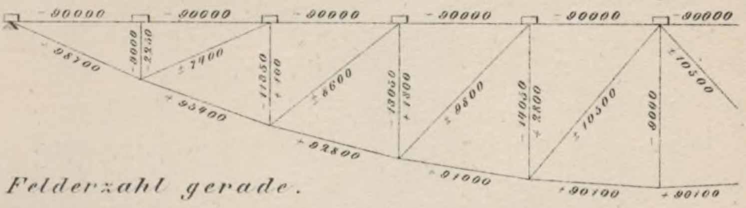


Fig. 2

Parabelträger.

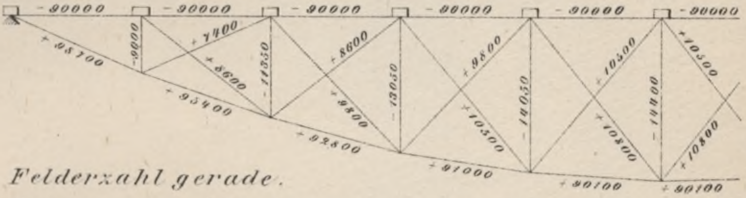
Fig. 1.


Felderzahl gerade; einfache Diagonalen. Fig. 1-2.

Fig. 2.


Felderzahl gerade.

Diagonalen übertragen nur Zug. Fig. 3.

Fig. 3.


Felderzahl gerade.

Diagonalen übertragen nur Druck. Fig. 4.

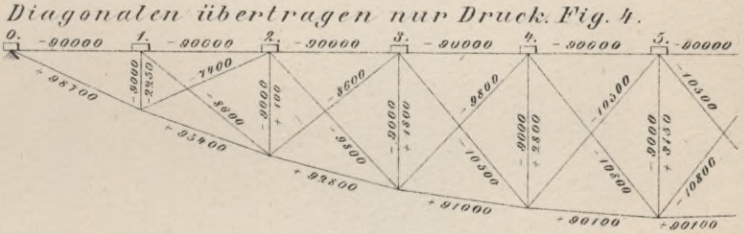
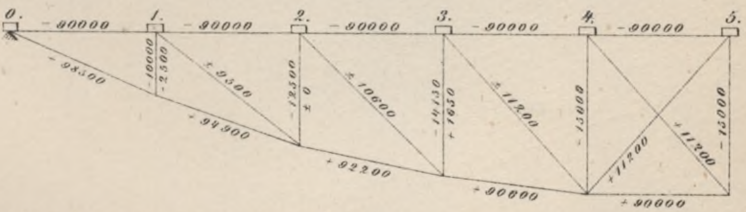
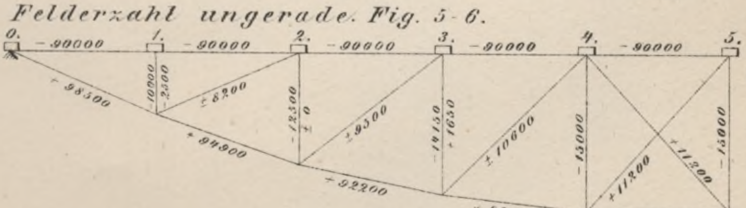
Fig. 4.


Fig. 5.


Felderzahl ungerade. Fig. 5-6.

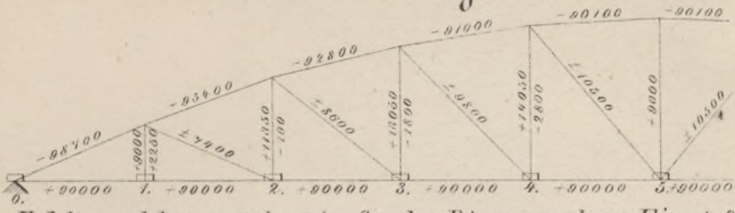
Fig. 6.


l = 10; n = 10; c = 1; H = 1,25; p = 2250; k = 6750 für Fig. 1-4.

l = 9, n = 9, c = 1; H = 1,125; p = 2500; k = 7500.

Parabelträger.

Fig. 1.



Felderzahl gerade; einfache Diagonalen. Fig. 1-2.

Fig. 2.

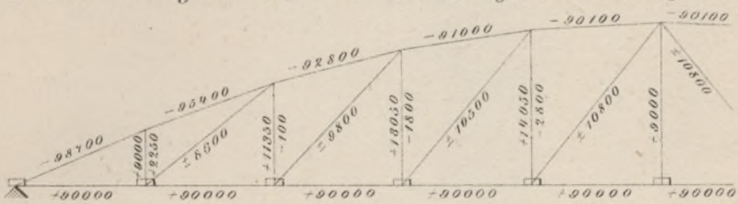
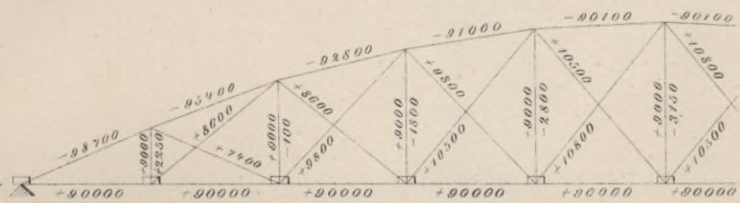
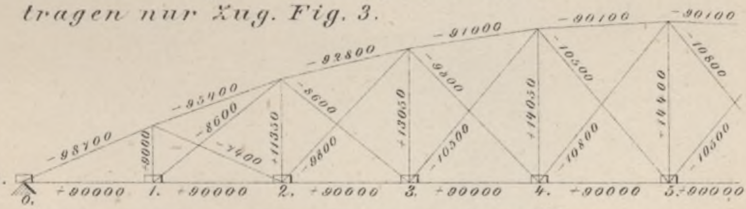


Fig. 3.



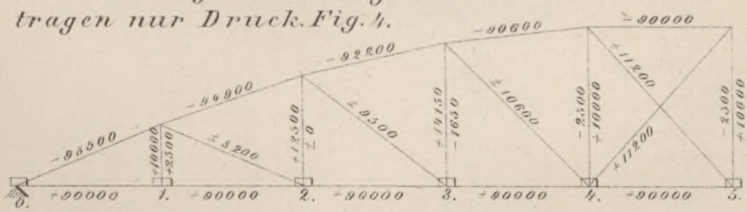
Felderzahl gerade. Diagonalen übertragen nur Zug. Fig. 3.

Fig. 4.



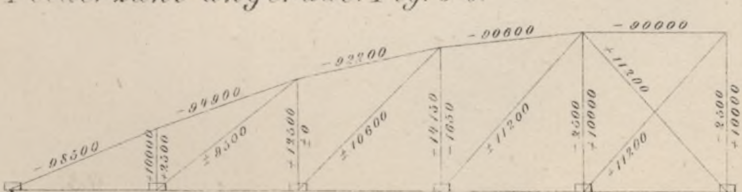
Felderzahl gerade. Diagonalen übertragen nur Druck. Fig. 4.

Fig. 5.



Felderzahl ungerade. Fig. 5-6.

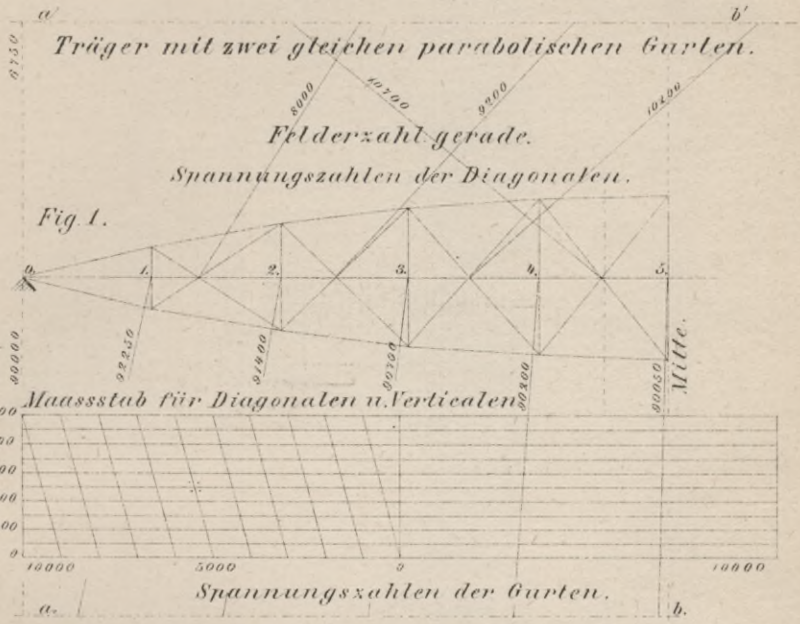
Fig. 6.



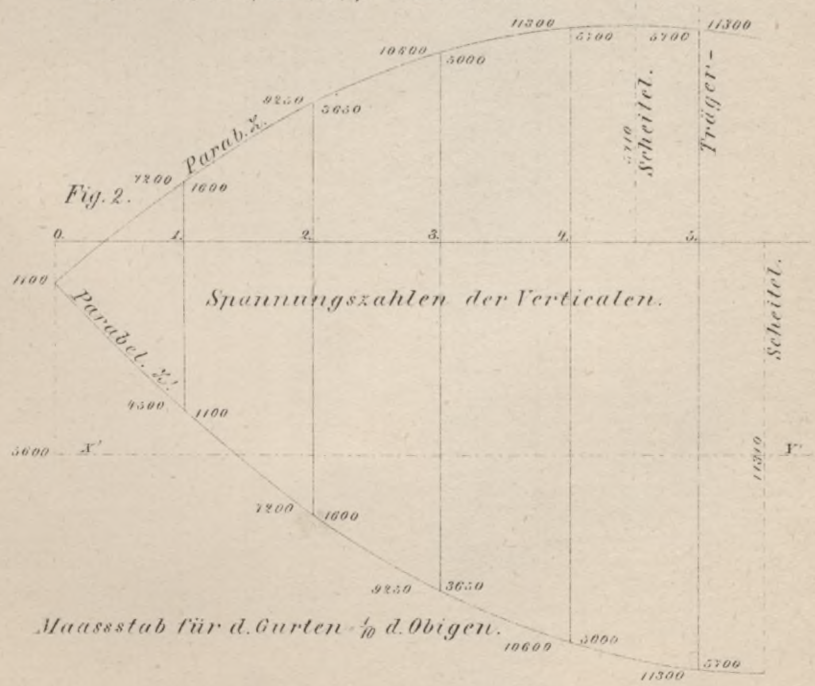
$l = 10;\ n = 10;\ c = 1;\ H = 1{,}25;\ p = 2250;\ k = 6750$ für Fig. 1-4.

$l = 9;\ n = 9;\ c = 1;\ H = 1{,}125;\ p = 2500;\ k = 7500.$

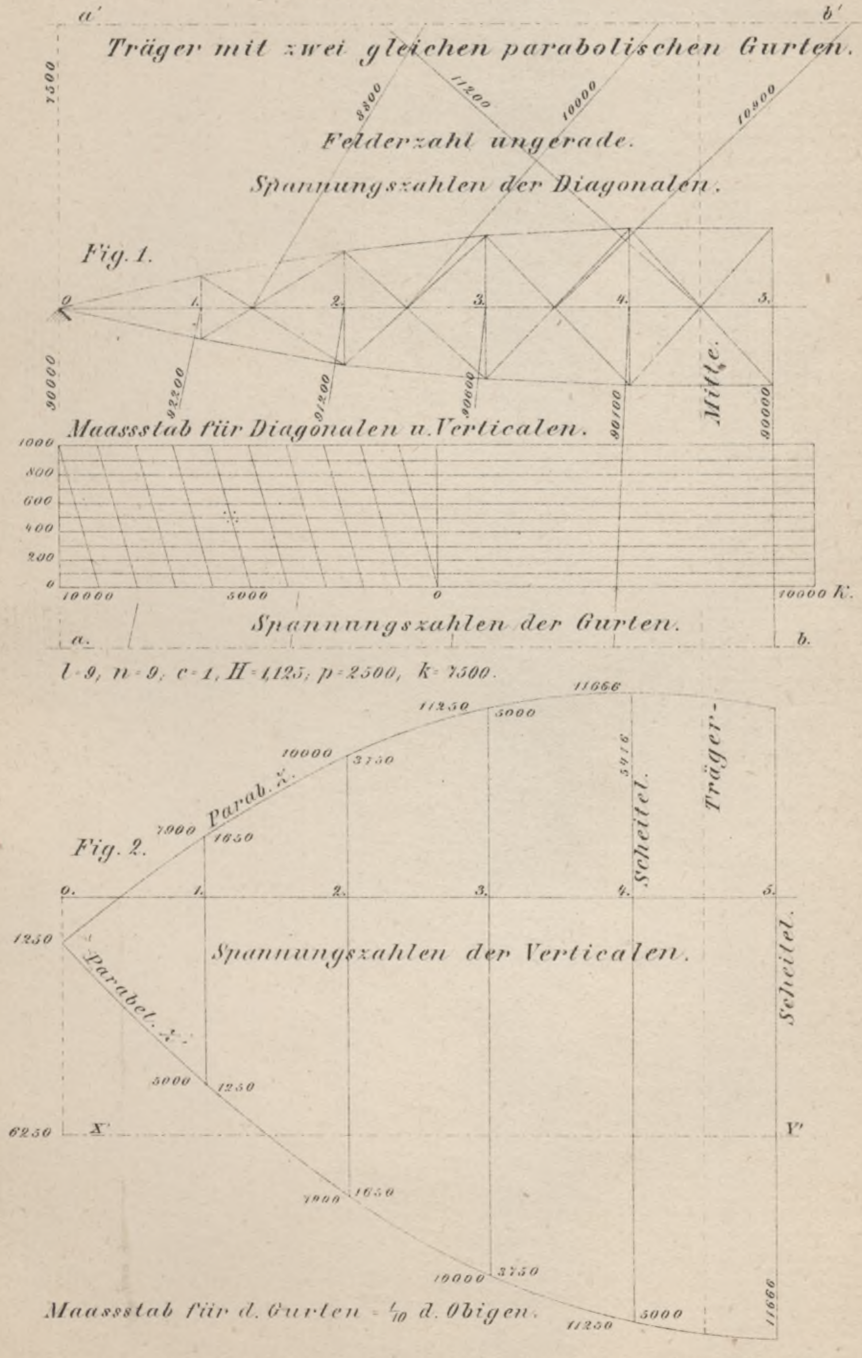
Parabelträger.



$l = 10;\ n = 10;\ c = 1;\ H = 125;\ p = 2250;\ k = 6750.$

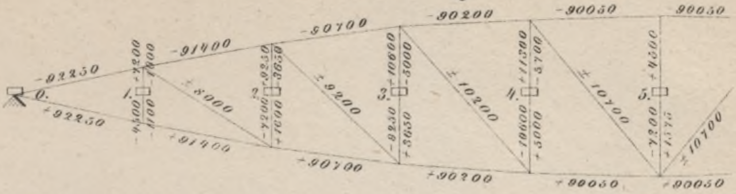


Parabelträger.



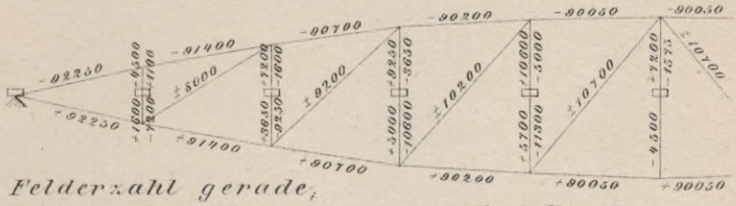
Parabelträger.

Fig. 1.



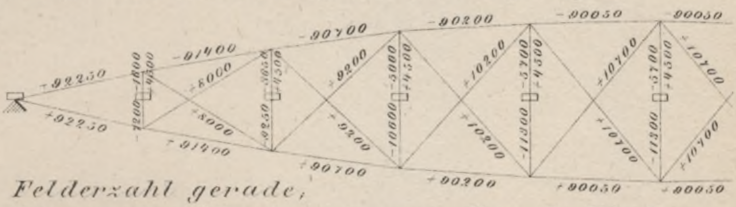
Felderzahl gerade; einfache Diagonalen: Fig. 1–2.

Fig. 2.



Felderzahl gerade;
Diagonalen übertragen nur Zug. Fig. 3.

Fig. 3.



Felderzahl gerade;
Diagonalen übertragen nur Druck. Fig. 4.

Fig. 4.

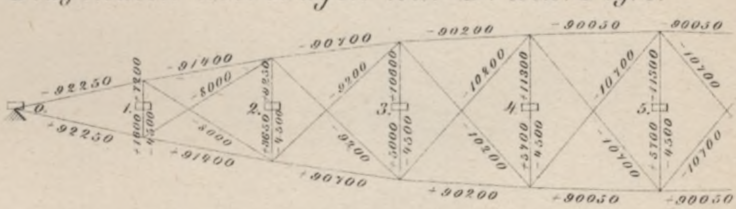
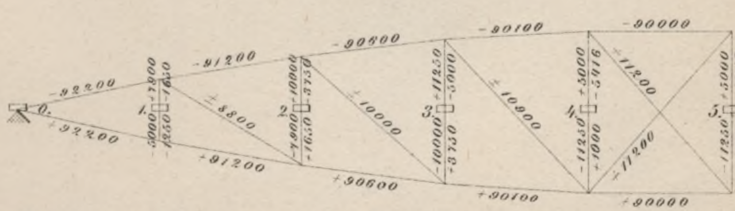
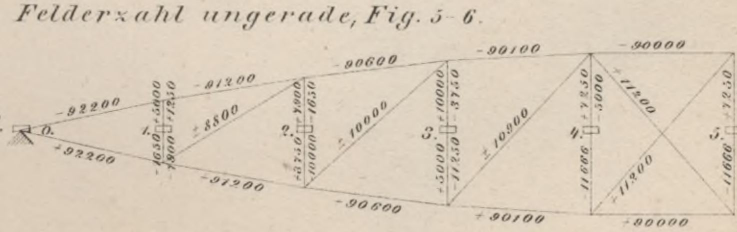


Fig. 5.



Felderzahl ungerade, Fig. 5–6.

Fig. 6.

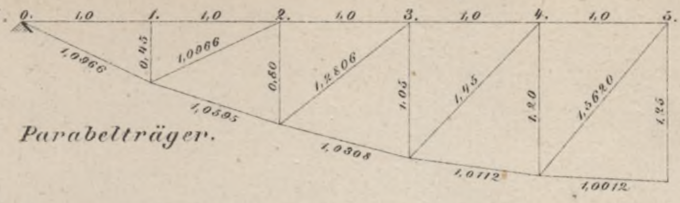


l = 10; n = 10; c = 1; H = 1,25; p = 2250; k = 6750 für Fig. 1–4.

l = 9; n = 9; c = 1; H = 1,125; p = 2500; k = 7500.

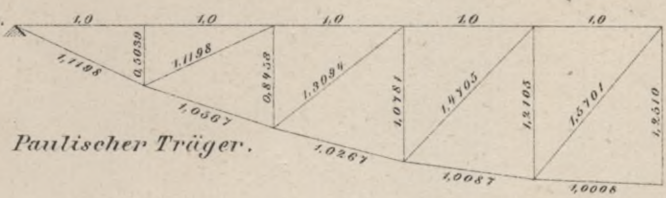
Paulische Träger.

Fig. 1.



Parabelträger.

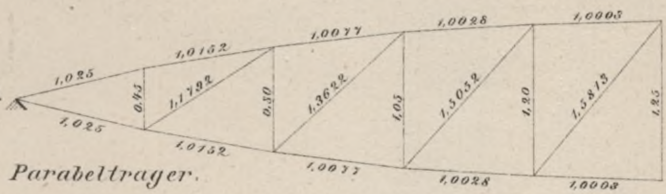
Fig. 2.



Paulischer Träger.

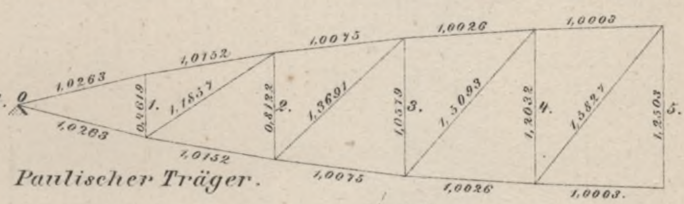
Trägermitte.

Fig. 3.



Parabelträger.

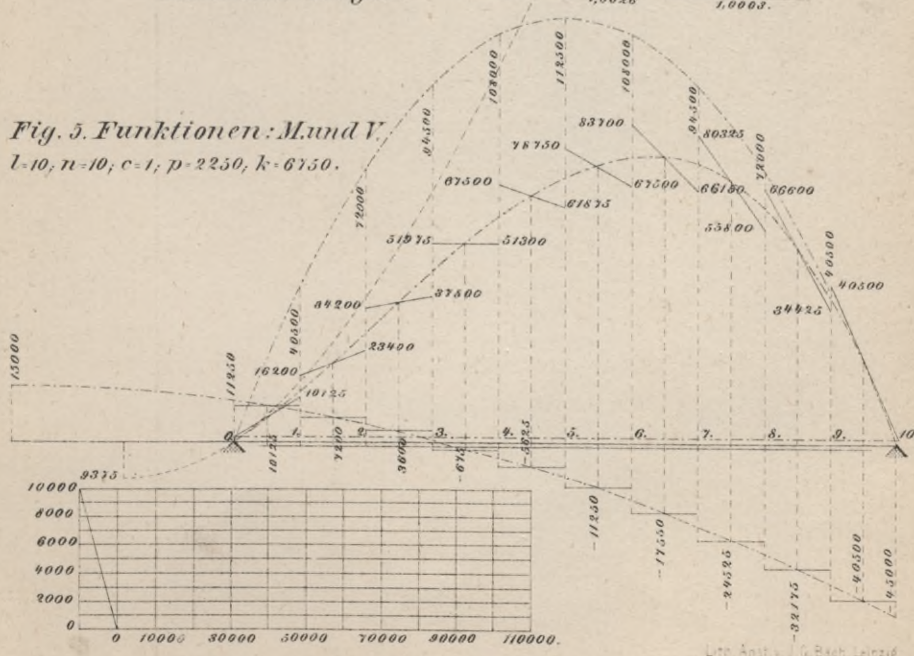
Fig. 4.



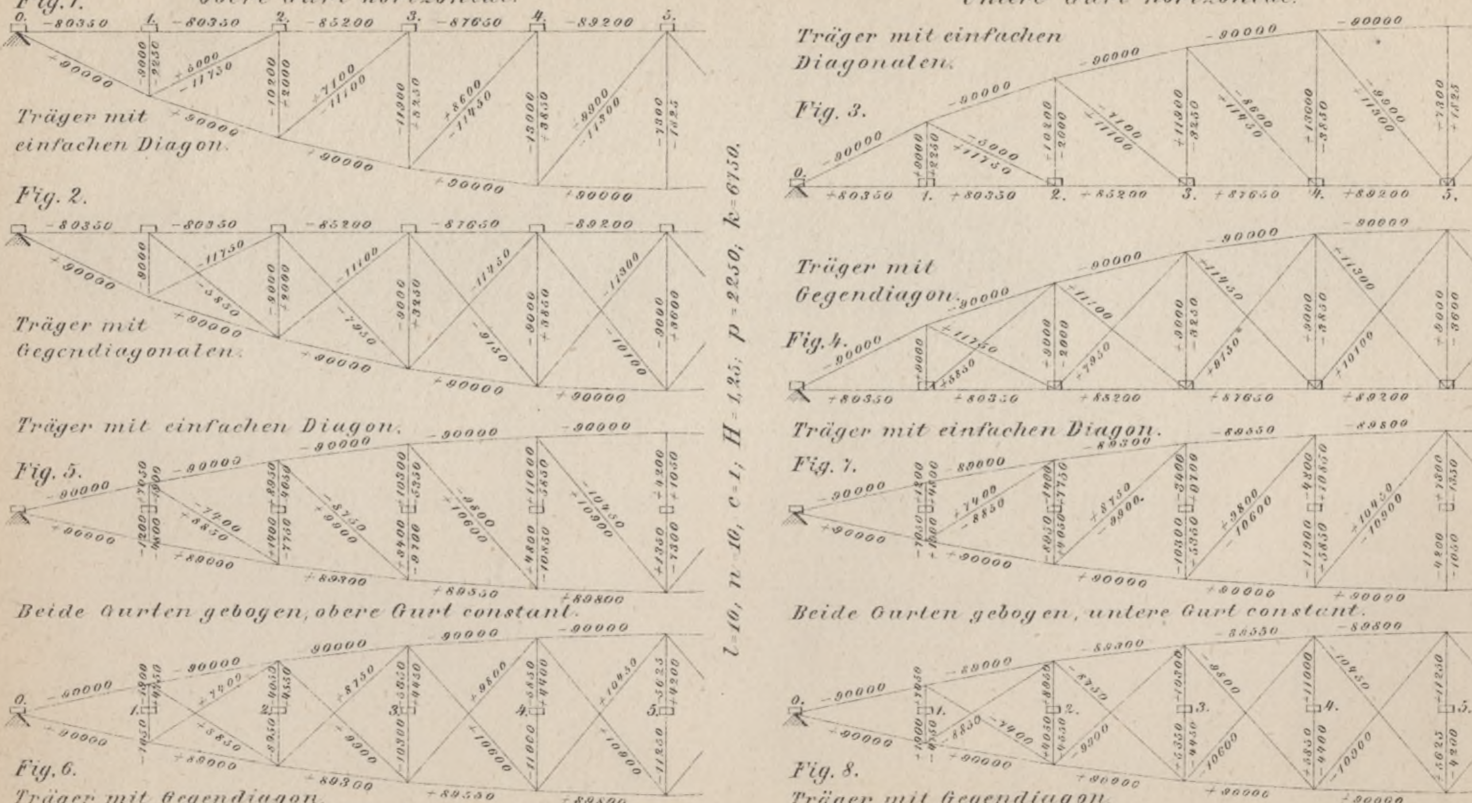
Paulischer Träger.

Fig. 5. Funktionen: M und V.

$l=10;\ n=10;\ c=1;\ p=2250;\ k=6750.$



Paulische Träger.



l = 10, n = 10, c = 1; H = 1,25; p = 2250; k = 6750.

Obere Gurt horizontal.

Fig. 1. Träger mit einfachen Diagon.

Fig. 2. Träger mit Gegendiagonalen.

Fig. 5. Träger mit einfachen Diagon.

Fig. 6. Beide Gurten gebogen, obere Gurt constant. Träger mit Gegendiagon.

Untere Gurt horizontal.

Fig. 3. Träger mit einfachen Diagonalen.

Fig. 4. Träger mit Gegendiagon.

Fig. 7. Träger mit einfachen Diagon.

Fig. 8. Beide Gurten gebogen, untere Gurt constant. Träger mit Gegendiagon.

Schwedler'sche Träger.

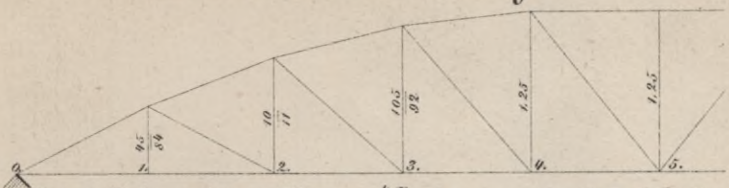


Fig. 1. Trägerform für: $n = \frac{4p}{k} + 2$; $(n = 10;\ p = 2;\ k = 1)$

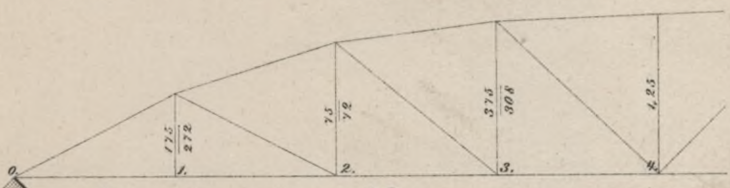


Fig. 2. Trägerform für: $n < \frac{4p}{k} + 2$, $(n = 8;\ p = 2\ \ k = 1)$.

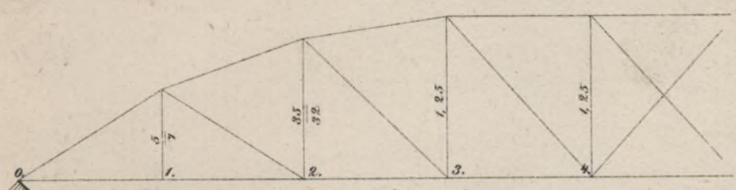


Fig. 3. Trägerform für: $\frac{n^2 - 4n + 3}{8n} = \frac{p}{k}$. $(n = 9;\ p = 2;\ k = 3)$

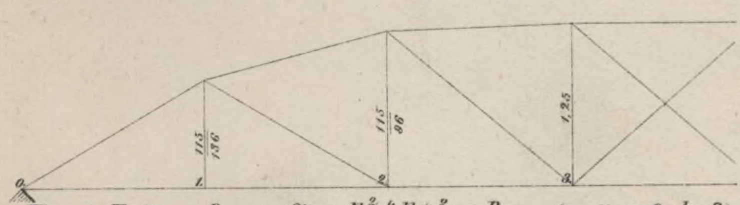


Fig. 4. Trägerform für: $\frac{n^2 - 4n + 3}{8n} < \frac{p}{k}$. $(n = 7;\ p = 2;\ k = 3.)$

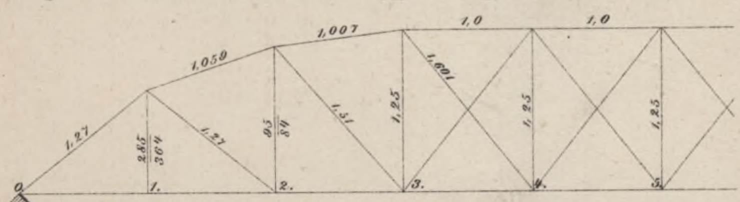


Fig. 5. Trägerform für: $n = 10;\ p = 1;\ k = 3.$

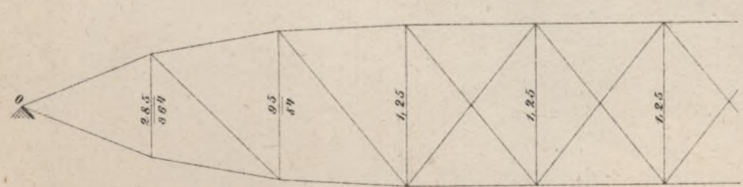


Fig. 6. Träger mit zwei gleichen Gurten für $n = 10;\ p = 1;\ k = 3.$

Schwedler'sche Träger.

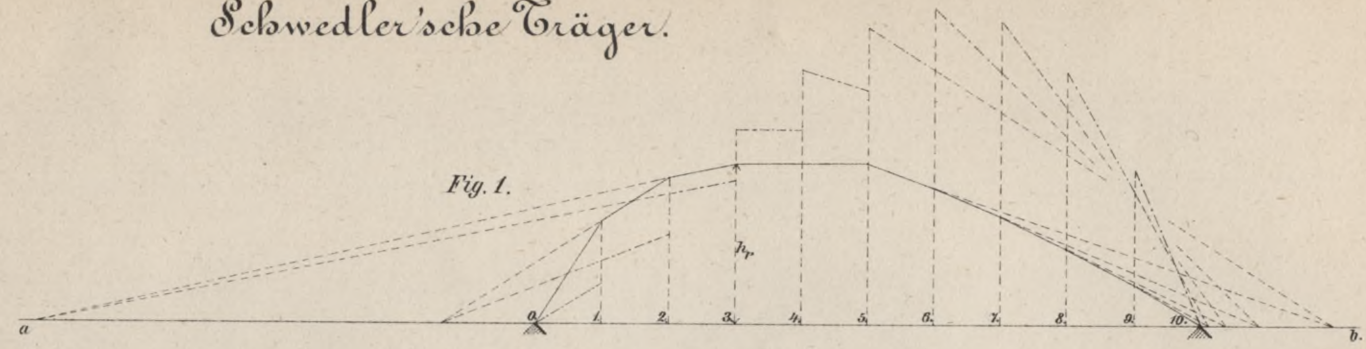
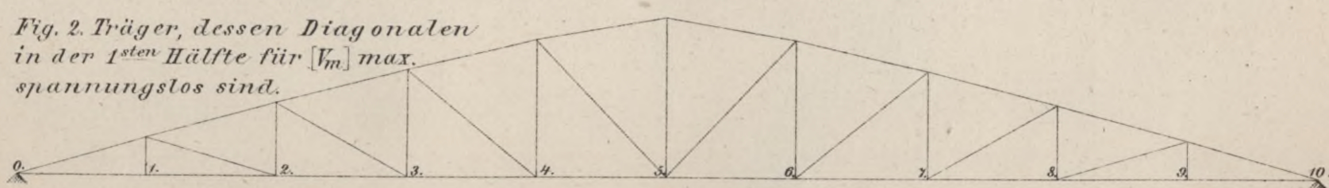


Fig. 1.

Fig. 2. Träger, dessen Diagonalen in der 1[sten] Hälfte für $[V_m]$ max. spannungslos sind.



Schwedler'sche Träger mit gezogenen Diagonalen.

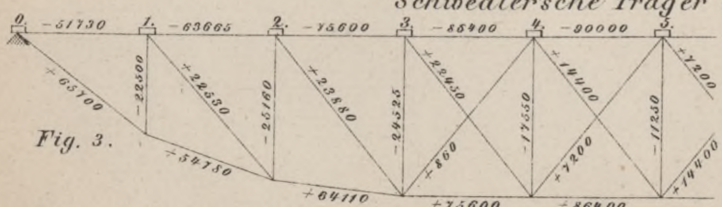


Fig. 3.

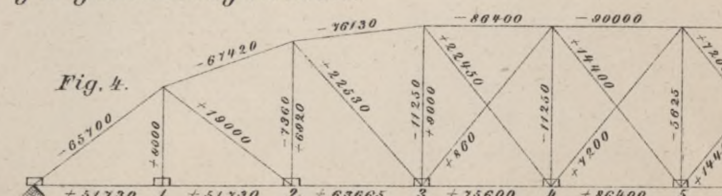


Fig. 4.

$l = 10;\ n = 10;\ c = 1;\ h_r = 1,25;\ p = 2250;\ k = 6750.$

Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig.