

WYDZIAŁ POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

~~15146~~

L. inw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000298732

x
410

DIE STATIK

DER

HOCHBAU-CONSTRUCTIONS.

VON

THEODOR LANDSBERG,

GEH. BAURATH, PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN DARMSTADT.

„Handbuch der Architektur.“ Erster Theil, 1. Band, Heft 2.

DRITTE AUFLAGE.

MIT 409 ABBILDUNGEN IM TEXT UND 1 TAFEL.

N. Nr. 22 310

189/1



STUTT GART 1899.

ARNOLD BERGSTRÄSSER VERLAGSBUCHHANDLUNG

A. KRÖNER.

84 14
83.

H. 4/88



III - 306 341

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen bleibt vorbehalten.



Druck der UNION DEUTSCHE VERLAGSGESELLSCHAFT in Stuttgart.

BRK 10-277/2017

INHALTS-VERZEICHNISS.

1. Abchnitt:

Grundlagen.

	Seite
Vorbemerkungen	3
Literatur: Bücher über »Statik der Bau-Constructions«	3
1. Kap. Allgemeines	5
a) Grundgesetze der Statik fester Körper	7
b) Grundlagen für die graphische Behandlung baustatischer Aufgaben	11
2. Kap. Aeußere Kräfte, Schwerpunkte, statische und Trägheitsmomente	17
a) Belastungen	17
1) Eigengewicht der Construction	18
Tabelle über Eigengewichte der Baustoffe	18
Tabelle über Eigengewichte und Belastung von Bautheilen	18
Tabelle über Eigengewichte der Decken mit eisernen Trägern	18
Tabellen über Eigengewichte der Dächer	19
2) Nutzlast	20
Tabellen über Nutzlasten in verschiedenen Gebäudearten	21
3) Schneelast	21
Tabelle über größte Belastungen durch Schneedruck	22
4) Winddruck	22
Tabellen über Winddruck auf Dachflächen	23
b) Schwerpunkte und statische Momente	25
1) Schwerpunkte von ebenen Figuren	25
2) Schwerpunkte von einfachen Figuren	27
3) Schwerpunkte von Querschnittsflächen, die aus einfachen Figuren zusammen- gesetzt sind	30
4) Graphische Ermittlung der statischen Momente und der Schwerpunkte von Flächen	31
c) Trägheitsmomente und Centrifugalmomente	33
d) Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente mit Hilfe von Kreifen	43

2. Abchnitt:

Elemente der Elasticitäts- und Festigkeitslehre.

1. Kap. Grundbegriffe	54
Literatur: Bücher über »Lehre von der Elasticität und Festigkeit«	57
2. Kap. Zug und Druck, bezw. Zug- und Druckfestigkeit	58
Tabellen über Elasticitäts- und Festigkeits-Coefficienten, so wie über zulässige Beanspruchungen	59

	Seite
3. Kap. Schub und Schubfestigkeit	67
Tabellen über Elastizitäts-Coefficienten und zulässige Beanspruchungen	68
4. Kap. Biegung und Biegefestigkeit	70
a) Axiale Biegespannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerschnitte in Hauptaxen schneidet	73
1) Die Axialkraft hat die Größe Null	75
2) Die Axialkraft ist nicht gleich Null	80
b) Axiale Biegespannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerschnitte nicht in Hauptaxen schneidet	80
c) Allgemeine Untersuchung der Biegespannungen mit Zuhilfenahme der Trägheitskreise	86
d) Biegespannungen in einem Körper, der aus zwei verschiedenen Baustoffen zusammengesetzt ist	95
e) Schubspannungen	100
f) Elastische Linie	106

3. Abschnitt:

Stützen und Träger.

1. Kap. Stützen	110
a) Stützen mit außerhalb der Längsaxe wirkenden Kräften, ohne Rücksicht auf Zerknicken	111
1) Druckvertheilung in Querschnitten, welche Druck und Zug aufnehmen können, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet	111
2) Druckvertheilung in Querschnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet	115
3) Druckvertheilung, falls die Kraftebene die Querschnitte nicht in Hauptaxen schneidet	119
b) Gedrückte Stäbe unter Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr	122
1) Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken	122
2) Querschnittsermittlung bei centrischer Druckbelastung	130
3) Querschnittsermittlung bei excentrischer Druckbelastung	134
4) Empirische Formeln	136
2. Kap. Träger	139
a) Außere Kräfte der Balkenträger	142
1) Balkenträger auf zwei Stützen	143
2) Console-, Krag- oder Freiträger	151
3) Continuirliche Gelenkträger, Auslegerträger oder <i>Gerber</i> -Träger	154
4) Continuirliche oder durchgehende Träger	165
b) Innere Kräfte der Gitterträger	167
1) Verfahren für die Bestimmung der Stabspannungen	169
2) Parallelträger mit Netzwerk oder zwei Scharen von Diagonalen	175
3) Parallelträger mit Diagonalen und Pfosten	183
4) Parallelträger mit nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Diagonalen	187
5) Parabelträger	190
6) Dreieckträger	198
7) Trapezträger	201
Literatur: Bücher über »Statik der Stützen und Träger«	203

4. Abschnitt:

Dachstühle.

1. Kap. Belastungen und Auflagerdrücke	206
a) Belastungen	206
b) Auflagerdrücke bei Balkendächern	208
c) Auflagerdrücke bei Sprengwerkdächern	211

	Seite
2. Kap. Balkendächer	215
a) Englische Dachstühle	218
b) Deutsche Dachstühle	229
c) Dreieckdächer	230
d) Französische, <i>Polonceau</i> - oder <i>Wiegmann</i> -Dachstühle	230
e) Sieldächer	235
f) Pultdächer	240
3. Kap. Sprengwerksdächer	240
4. Kap. Ausleger- oder Kragdächer	243
5. Kap. Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer	246
a) Kuppeldächer	246
1) Berechnungsweise von <i>Schwedler</i>	247
α) Belastungen und Auflagerdrücke	247
β) Stabspannungen	248
2) Verfahren von <i>Müller-Breslau</i>	255
3) Erzeugende Kuppelcurve	261
4) Winddruck auf die Kuppel	262
b) Flache Zeldächer	265
c) Steile Zeldächer oder Thurmdächer	269
1) Vierseitiges Pyramidendach	269
2) Achtseitiges Pyramidendach	272
3) Standfestigkeit der Thurmdächer	280
Literatur: Bücher über »Statik der Dachstühle«	280

5. Abschnitt:

Gewölbe.

1. Kap. Stützlinie und Mittelkraftslinie	281
a) Allgemeines	281
b) Mittelkraftslinie und Seilcurve	284
2. Kap. Tonnen- und Kappengewölbe	290
3. Kap. Kreuz- und Kuppelgewölbe	298
a) Kreuzgewölbe	298
b) Kuppelgewölbe	308
Literatur: Bücher über »Statik der Gewölbe«	312

Tafel bei S. 80:

Graphische Tafel für die Querschnittsermittlung von I- und L-förmigen Walzbalken.
(Deutsche Normal-Profile.)

Handbuch der Architektur.

I. Theil:

ALLGEMEINE HOCHBAUKUNDE.

ZWEITE ABTHEILUNG.

DIE STATIK
DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

VON THEODOR LANDSBERG.

i. Abschnitt.

Grundlagen.

Die Statik der Hochbau-Constructionen ist die Lehre vom Gleichgewichte der Hochbauten; sie untersucht, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Bauwerke und ihre Theile im Gleichgewichte sind und bleiben; sie bestimmt danach die denselben zu gebenden Constructionenformen.

x.
Vor-
bemerkungen.

Die Statik der Bau-Constructionen, wohl auch Baumechanik genannt, hat hauptsächlich zwei Aufgaben zu erfüllen: sie lehrt erstens, die Abmessungen aller Theile der Bauwerke so zu bestimmen, daß dieselben mit Sicherheit den auf sie einwirkenden Kräften widerstehen können; sie hat zweitens für die einzelnen Constructionen zweckmäßige Formen zu ermitteln.

Die Lösung der ersten Aufgabe erheischt, daß jeder Constructionstheil genügend stark, auch für die ungünstigsten Falles wirkenden Kräfte, angeordnet wird. Die dazu nöthigen Abmessungen sind wesentlich von der für die ganze Construction gewählten Form abhängig. Durch günstige Wahl dieser Form ist es möglich, an Baustoff zu sparen, ohne die Sicherheit zu verringern. Die Ermittlung derjenigen Form, bei welcher die verlangte Sicherheit mit geringstem Stoffaufwande oder, was annähernd dasselbe befragt, mit geringstem Kostenaufwande erreicht wird, ist die zweite Aufgabe der Statik der Bau-Constructionen.

Literatur.

Bücher über »Statik der Bau-Constructionen«.

- EYTELWEIN, J. A. Handbuch der Statik fester Körper. Mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Architektur. Berlin 1826.
- NAVIER, L. M. H. *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines.* Paris 1826. — Deutsche Bearbeitung (3. Aufl.) von G. WESTPHAL & A. FOEPL. Hannover 1881.
- MOSELEY, H. *The mechanical principles of engineering and architecture.* London 1843. — Deutsch von H. SCHEFFLER. Braunschweig 1845.
- WEISBACH, J. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. II. Theil, 1. Abth.: Statik der Bauwerke. Braunschweig 1847. — 5. Aufl. von G. HERMANN. 1882.
- RIEDLIN, C. Anweisung und Berechnung des Mauerwerkes und der am häufigsten vorkommenden Dachstühle. München 1856.
- REBHANN, G. Höhere Ingenieurwissenschaften. Wien. I. Bd.: Theorie der Holz- und Eisenconstructions mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. 1856. — II. Bd.: Theorie des Erddrucks und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. 1876.

- BRESSE, J. A. CH. *Cours de mécanique appliquée. 1re partie: Résistance des matériaux et stabilité des constructions.* Paris 1859. — 3. Aufl. 1880.
- RANKINE, W. J. M. *Manual of civil engineering.* London 1862. — 12. Aufl. 1877. — Deutsch von F. KREUTER. Wien 1879.
- RITTER, A. *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructions.* Berlin 1863. — 5. Aufl. Hannover 1894.
- BEHSE, W. H. *Die Berechnung der Festigkeit von Holz- und Eisenconstructions ohne höhere mathematische Vorkenntnisse.* Leipzig 1864.
- CULMANN, K. *Die graphische Statik.* Zürich 1866. — Von der 2. Aufl. nur Bd. I (Zürich 1875) erschienen.
- HEINZERLING, F. *Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken- und Hochbau-Constructions. Zum Gebrauch beim Berechnen von Brücken- und Hochbauten.* Berlin 1867. — 2. Aufl. 1876.
- HUMBER, W. *Handy book for the calculation of strains on girders and similar structures.* London 1868. — 3. Aufl. 1879.
- HEINZERLING, F. *Grundzüge der constructiven Anordnung und statischen Berechnung der Brücken- und Hochbau-Constructions.* Leipzig 1870.
- WENCK, J. *Die Baumechanik etc.* Leipzig 1870. — 2. Aufl. 1882. — Neue Titelausg. 1884.
- COLLIGNON, E. *Cours élémentaire de mécanique (statique).* Paris 1870.
- OTT, K. v. *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik.* Prag 1870. — 4. Aufl. 1885.
- BAUSCHINGER, J. *Elemente der graphischen Statik.* München 1871.
- OTT, K. v. *Vorträge über Baumechanik.* Prag. I. Theil: *Die Statik des Erdbaues, der Futtermauern und der Gewölbe.* 1871. (3. Aufl. 1888.) — II. Theil: *Die Zug-, Druck- und Schubfestigkeit, resp. Elasticität sammt deren Anwendung.* 1876. (3. Aufl. 1891—93.)
- KOPKA, C. *Die Baumechanik.* Leipzig 1872.
- HOLZHEY, E. *Vorträge über Baumechanik.* Wien 1872—76.
- LEVY, M. *La statique graphique et ses applications aux constructions.* Paris 1874. — 2. Aufl. 1887.
- CREMONA, L. *Elementi di calcolo grafico.* Turin 1874. — Deutsch von M. CURTZE. Leipzig 1875.
- RITTER, A. *Lehrbuch der höheren Mechanik. II. Theil: Ingenieur-Mechanik.* Hannover 1875. (2. Aufl. 1885.) Deutsche bautechnische Taschenbibliothek. Heft 9: *Die Baumechanik.* Von W. JEEP. Leipzig 1876.
- DU BOIS, A. J. *Elements of graphical statics etc.* New-York 1876.
- ROLLA, L. *Elementi di statica grafica etc.* Mailand 1876.
- CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics, comprising: I. Stability of structures. II. Strength of materials.* London 1877.
- EDDY, H. T. *New constructions in graphical statics.* New-York 1877. — Deutsche vom Verf. verm. u. verb. Ausgabe. Leipzig 1880.
- KLASEN, L. *Graphische Ermittlung der Spannungen in den Hochbau- und Brücken-Constructions.* Leipzig 1878.
- ZUCCHETTI, F. *Statica grafica, sua teoria ed applicazioni.* Torino 1878.
- WENCK, J. *Die graphische Statik etc.* Berlin 1879.
- CAIN, W. *Theory of solid and braced elastic arches, applied to arch bridges and roofs in iron, wood, concrete, or other material. Graphical analysis.* New-York 1879.
- WITTMANN, W. *Statik der Hochbau-Constructions.* Berlin. Theil I: *Steinconstructions.* 1879. — Theil II: *Holzconstructions.* 1882. — Theil III: *Eisenconstructions.* 1884.
- FOEPL, A. *Theorie des Fachwerks.* Leipzig 1880.
- CLARKE, G. S. *The principles of graphic statics.* London 1880. — 2. Aufl. 1888.
- ORLANDER, E. *A new method of graphic statics applied to the construction of wrought-iron girders.*
- MÜLLER-Breslau, H. F. B. *Elemente der graphischen Statik der Bauconstructions für Architekten und Ingenieure.* Berlin 1881.
- ALBERT, F. *Die technische Mechanik im Hochbau.* Plauen 1881.
- CHALMERS, J. B. *Graphical determination of forces in engineering structures.* London 1881.
- CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics.* London 1881.
- BELLOT. *Die wichtigsten Lehren der Baumechanik.* Leipzig 1881.
- HINTZ, L. *Die Baustatik etc.* Weimar 1882.
- STELZEL, K. *Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger.* Graz 1882.

- PETERSEN, J. Lehrbuch der Statik fester Körper. Deutsche Ausg. von R. v. FISCHER-Benzon. Kopenhagen 1882.
- MAURER, M. *Statique graphique appliquée aux constructions, toitures, planchers, poutres etc.* Paris 1882. — 2. Aufl. 1885.
- GRAHAM, R. H. *Graphic and analytic statics in theory and comparison etc.* London 1883. (New-York 1887.)
- WILDA, E. Statik fester Körper. Brünn 1884.
- GRUNER, O. Formeln und Tabellen zu einfachen statischen Berechnungen der bei Hochbauten vorkommenden Eisenconstruktionen. Leipzig 1885.
- SCHLOSSER, H. Anleitung zur statischen Berechnung von Eisenconstruktionen. Berlin 1885.
- CREMONA, L. *Les figures réciproques en statique graphique.* Paris 1885. — Mit Anhang von SAVIATTI.
- JENTZEN, E. Baumechanik mit besonderer Rücksicht auf die Berechnung der Träger und Stützen aus Holz und Eisen etc. Hamburg 1886.
- FLAMANT, A. *Stabilité des constructions, résistance des matériaux.* Paris 1886. — 2. Aufl. 1896.
- Praktische Unterrichtsbücher für Bautechniker. III. Die Festigkeitslehre und die Statik im Hochbau. Von H. DIESENER. Halle 1886.
- HENNEBERG, L. Statik der starren Systeme. Darmstadt 1886.
- HAUSSER, A. E. & L. CUNQ. *Statique graphique appliquée etc.* Paris. Erscheint seit 1886.
- SCHLOTKE, J. Lehrbuch der graphischen Statik. Hamburg 1887.
- MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die graphische Statik der Bauconstruktionen. Leipzig 1887—96.
- RITTER, W. Anwendung der graphischen Statik. Theil I: Die im Innern eines Balken wirkenden Kräfte. Zürich 1888. — Theil II: Das Fachwerk. Zürich 1890.
- BALL, R. S. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Herausg. von H. GRAVELIUS. Berlin 1889.
- KOECHLIN, M. *Applications de la statique graphique.* Paris 1889.
- LAUENSTEIN, R. Die graphische Statik. Stuttgart 1889. — 4. Aufl. 1898.
- SCHMID, C. Statik und Festigkeitslehre. Stuttgart 1891. — 2. Aufl. 1897.
- MÜLLER-Breslau, F. B. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Berlin 1892.
- BAKER, W. L. *The beam etc.* London 1892.
- KECK, W. Vorträge über Elasticitätslehre. Hannover 1892—93.
- MÜLLER-Breslau, F. B. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstruktionen. Leipzig 1893.
- CLAUSSEN, E. Statik und Festigkeitslehre in ihrer Anwendung auf Bauconstruktionen. Berlin 1893.
- KECK, W. Vorträge über graphische Statik. Hannover 1894.
- BAYER, A. Handbuch zur Berechnung der im Hochbau vorkommenden Construktionen in Eisen, Stein und Holz. Wien 1896.
- PULLEN, W. W. F. *The application of graphic methods to the design of structures.* Manchester 1896.
- DOMITROWICH, A. v. Statische Berechnung von Balkendecken, Säulen und Stützen im Hochbaufache. Wien 1897.
- KECK, W. Vorträge über Mechanik etc. Hannover 1897.
- FROELICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung statischer Berechnungen für die im Hochbau üblichen Construktionen mit eisernen Trägern und Stützen etc. Berlin 1892. — 2. Aufl. 1897.
- ROUTH, E. J. Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Deutsch von A. SCHEPP. Leipzig 1898.

I. Kapitel.

Allgemeines.

Für die Lösung der beiden in Art. 1 bezeichneten Aufgaben ist die Kenntniss derjenigen Kräfte nöthig, welche bei den verschiedenartigen möglichen Belastungszuständen im Inneren der Construktionen entstehen, d. h. der sog. inneren Kräfte oder Spannungen, welche auch wohl widerstehende Kräfte genannt werden. Die inneren Kräfte stehen aber wiederum in einem ganz bestimmten Verhältniss zu

2.
Äußere
und innere
Kräfte.

den von außen auf die Constructionen wirkenden Kräften, zu den sog. äußeren Kräften, welche auch als die angreifenden Kräfte bezeichnet werden.

Eine jede statische Untersuchung zerfällt deshalb zunächst in zwei Theile: in die Ermittlung der äußeren Kräfte, bzw. der für den zu untersuchenden Constructionstheil ungünstigsten äußeren Kräfte, und in die Ermittlung der inneren Kräfte oder Spannungen, welche durch die äußeren Kräfte hervorgerufen werden.

Die äußeren Kräfte lassen sich in zwei Hauptgruppen theilen:

1) Die Belastungen. Dieselben sind beim Beginne der Untersuchung nur zum Theile bekannt; die Eigengewichte z. B. sind zunächst noch unbekannt, da erst die vorzunehmende Berechnung die genauen Abmessungen und damit die Gewichte feststellen soll. Meistens kann das Eigengewicht nach ausgeführten ähnlichen Constructionen genügend genau angenommen werden.

2) Die Auflager- oder Stützendrücke derjenigen festen Punkte, welche die zu betrachtenden Constructionen stützen. Dieselben sind meistens von vornherein nicht gegeben; sie sind nach den Gesetzen der Statik, bzw. der Elasticitätslehre zu ermitteln.

3.
Ermittlung
der äußeren
Kräfte.

Da die Statik der Bau-Constructionen sich nur mit solchen Körpern beschäftigt, welche unter der Einwirkung der äußeren Kräfte im Gleichgewichte sind, so kann man für die sämtlichen äußeren Kräfte, welche auf eine Construction wirken, die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen und mittels der so gefundenen Gleichungen die unbekanntes äußeren Kräfte, die Stützendrücke, ermitteln. Man führt die letzteren deshalb als vorläufig unbekanntes Kräfte ein und stellt die Gleichgewichtsbedingungen auf. Wenn alle Kräfte in einer Ebene wirken, wie es in den hier zu betrachtenden Fällen meistens angenommen werden kann, giebt es drei Gleichgewichtsbedingungen, also auch drei Gleichungen für die Ermittlung der Unbekanntes. Aus drei Gleichungen kann man aber nur drei Unbekanntes finden; sind also mehr als drei Unbekanntes vorhanden, so genügt die angegebene Methode nicht mehr. Die Gleichungen für die Stützendrücke dürfen in diesem Falle nicht mehr als drei Unbekanntes enthalten, wenn die Aufgabe auf dem angegebenen Wege lösbar sein soll; anderenfalls ist zur Ermittlung derselben die Elasticitätslehre zu Hilfe zu nehmen.

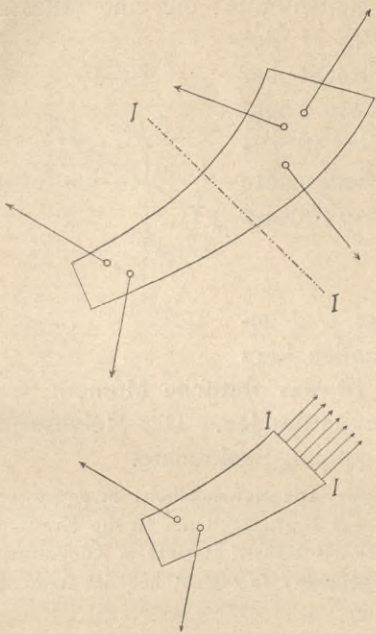
Wirken die Kräfte in verschiedenen Ebenen, wie bei den Thürmen, Kuppeln u. s. w., so stehen sechs Gleichgewichtsbedingungen, also sechs Gleichungen zur Verfügung; die Gleichungen für die zu ermittelnden Stützendrücke dürfen alsdann sechs Unbekanntes enthalten.

4.
Ermittlung
der inneren
Kräfte.

Nachdem die sämtlichen äußeren Kräfte gefunden sind, müssen die inneren Kräfte oder Spannungen aufgesucht werden. Das hierbei einzuschlagende Verfahren ist folgendes.

Man denkt sich durch den Körper an derjenigen Stelle, an welcher man die inneren Kräfte kennen lernen will, eine Ebene *II* (Fig. 1) hindurchgelegt und untersucht den an der einen Seite dieser Ebene liegenden Theil; hier möge der Theil links von *II* betrachtet werden. Auf diesen Theil werden von dem an der anderen Seite der Ebene *II* liegenden Körpertheile gewisse innere Kräfte übertragen, welche denselben im Vereine mit den auf ihn wirkenden äußeren Kräften im Gleichgewichte halten; denn nicht nur der ganze Körper, sondern auch jeder Theil desselben muß unter der Einwirkung aller auf ihn wirkenden Kräfte, der äußeren und der inneren,

Fig. 1.



im Gleichgewichte fein. Bringt man demnach die inneren Kräfte am linken Körpertheile an, so kann man auf die sämtlichen jetzt auf diesen Theil wirkenden Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und aus diesen die nach Gröfse und Richtung unbekanntenen inneren Kräfte ermitteln. Wie oben, stehen auch hier, falls alle Kräfte in einer Ebene liegen, drei Bedingungsgleichungen, falls die Kräfte in verschiedenen Ebenen liegen, sechs Bedingungsgleichungen zu Gebote; deshalb ist auch hier die Ermittlung der unbekanntenen inneren Kräfte auf diesem Wege nur möglich, wenn dieselben nicht mehr als drei, bezw. sechs Unbekannte enthalten. Selbstverständlich ist das Ergebnis das gleiche, ob man den Körpertheil an der einen oder anderen Seite der Ebene II untersucht.

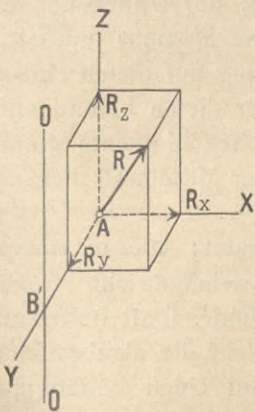
Die aus Vorstehendem sich ergebende Regel wird folgendermaßen ausgedrückt: Man lege durch den Körper einen Schnitt, denke den Theil an der einen Seite des Schnittes fortgenommen und bringe an dem übrig bleibenden Bruchstück alle Kräfte an, welche vor dem Durchschneiden auf dasselbe wirkten, d. h. die äußeren Kräfte und die an der Schnittstelle Seitens des anderen Bruchstückes übertragenen inneren Kräfte. Alsdann befindet sich dasselbe in demselben Zustande wie vor dem Durchschneiden, d. h. im Gleichgewichte; man stelle nun für diese Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

a) Grundgesetze der Statik fester Körper.

Obgleich die Statik fester Körper im Allgemeinen hier als bekannt vorausgesetzt werden kann, sollen im Folgenden doch einige der wichtigsten anzuwendenden Sätze kurz angeführt werden, damit über die gemachten Annahmen keine Unklarheit herrsche.

5.
Statische
Momente.

Fig. 2.



1) Satz des statischen Momentes. Es sei eine Kraft R und eine Axe OO gegeben (Fig. 2); man denke eine senkrecht zur Axe stehende Ebene hindurchgelegt, welche die Krafrichtung im Punkte A schneidet; in diesem Punkte zerlege man die Kraft R in drei senkrecht zu einander stehende Seitenkräfte R_x , R_y , R_z . Die eine Seitenkraft (R_z) sei parallel zur Axe OO ; die zweite (R_y) falle in die Verbindungslinie des Punktes A mit dem Punkte B' , in welchem die Axe OO von der obigen Ebene geschnitten wird; die dritte Seitenkraft (R_x) stehe senkrecht zur zweiten und liegt, wie diese, in der senkrecht zur Axe OO hindurchgelegten Ebene. Alsdann nennt man das Product $R_x \cdot AB'$ das statische Moment

der Kraft R für die Axe OO .

Wenn alle Kräfte in derselben Ebene wirken und die Axe OO senkrecht zu dieser Krafebene steht, so sind für jede Kraft nur zwei Seitenkräfte (R_x und R_y) in Betracht zu ziehen; R_z ist dann gleich Null. Der Schnittpunkt der Axe mit der

Kraftebene sei O (Fig. 3); alsdann zerlege man R in einem beliebigen auf der Richtungslinie der Kraft gelegenen Punkte A in zwei Seitenkräfte: die eine falle in die Richtung der Verbindungslinie des Angriffspunktes A der Kraft mit dem Axenpunkt O ; die andere stehe senkrecht zur ersteren. Die beiden Seitenkräfte haben die Gröfse $R \sin \alpha$ und $R \cos \alpha$. Das statische Moment von R für die Axe OO ist alsdann: $M = R \cos \alpha \cdot \overline{AO}$. Fällt man von O die Senkrechte $\overline{OB} = r$ auf die Richtung der Kraft R , so ist $\overline{OB} = \overline{AO} \cos \alpha = r$, also

$$M = R \cdot r.$$

r wird der Hebelsarm der Kraft R für die Axe OO genannt. Bei Kräften in einer Ebene spricht man gewöhnlich kurz vom statischen Moment für den Punkt O ; darunter ist das statische Moment für die im Punkte O senkrecht zur Ebene errichtete Axe verstanden. Der Hebelsarm ist die vom Punkte O auf die Richtung der Kraft R gefällte Senkrechte.

Die statischen Momente sind Producte von Kräften und Längen. Die Maßeinheiten, in denen sie ausgedrückt werden, sind demnach gleichfalls Producte aus Längen- und Kräfteinheiten. Ist die Kraft in Kilogrammen und die Länge in Centimetern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Kilogramm-Centimetern; ist die Kraft in Tonnen und die Länge in Metern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Tonnen-Metern¹⁾ etc.

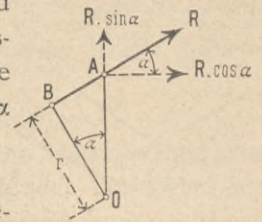
Die Kraft R hat das Bestreben, die Ebene um den als fest gedachten Punkt O , bzw. um eine im Punkte O senkrecht zur Kraftebene errichtete Axe zu drehen, hier also nach rechts. Wenn die statischen Momente mehrerer in derselben Ebene liegender Kräfte aufzustellen sind, so ist zu beachten, daß die verschiedenen Kräfte allgemein verschiedene Drehrichtungen haben. Welche von diesen als positiv eingeführt wird, ist gleichgiltig; ist aber die eine Drehrichtung als positiv angenommen, so ist die entgegengesetzte als negativ einzuführen.

Der in Folgendem häufig anzuwendende Satz des statischen Momentes lautet: Das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene, in welcher die Kräfte liegen, ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Dieser Satz giebt oft ein bequemes Mittel zur Ermittlung der Unbekannten. Wählt man den Punkt, in Bezug auf welchen man das statische Moment aufstellt, auf der Richtungslinie der Mittelkraft, so hat die letztere in Bezug auf diesen Punkt den Hebelsarm Null, also auch das statische Moment Null. Für diesen besonderen Fall heifst der obige Satz: Die algebraische Summe der statischen Momente einer Reihe von Kräften in Bezug auf einen auf der Richtungslinie der Mittelkraft liegenden Punkt ist gleich Null.

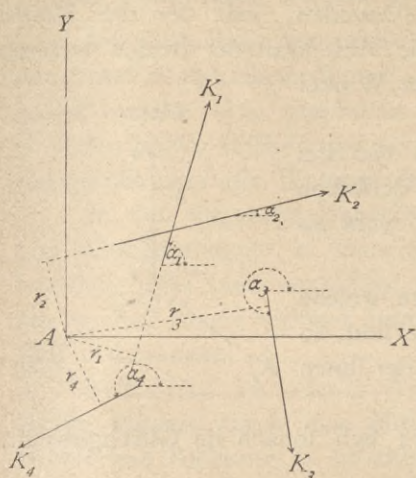
2) Satz vom Gleichgewicht der Kräfte. Derselbe lautet: Die an einem Körper angreifenden, in einer Ebene liegenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der in zwei senkrecht zu einander stehende, sonst beliebige Richtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null ist und außerdem die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ist.

Fig. 3.



¹⁾ Ein Tonnen-Meter ist gleich 100 Tonnen-Centimetern und gleich 100 000 Kilogramm-Centimetern. Danach kann ein Moment, welches in der einen Einheit, etwa in Tonnen-Metern, berechnet ist, leicht in eine andere Einheit, etwa Kilogramm-Centimeter, umgerechnet werden.

Fig. 4.



Man zerlege demnach sämtliche Kräfte ($K_1, K_2, K_3 \dots$ in Fig. 4) nach zwei zu einander senkrechten Richtungen, von denen die eine ganz willkürlich angenommen werden kann. Alsdann erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für die sämtlichen Kräfte die Gleichungen:

$$\Sigma (K \cos \alpha) = 0, \quad \Sigma (K \sin \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma (K r) = 0.$$

Hier ist A als Momentenpunkt angenommen; indefs hätte auch jeder beliebige andere Punkt der Kraftebene gewählt werden können.

In sehr vielen Fällen ist die Mehrzahl aller äußeren Kräfte lothrecht gerichtet; alsdann empfiehlt es sich, die Kräfte $K_1, K_2, K_3 \dots$ nach der wagrechten und lothrechten Richtung zu zerlegen. In diesem Falle heißen die Bedingungsgleichungen,

wenn wiederum alle Kräfte in einer Ebene liegen: Die an einem Körper angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

- α) die algebraische Summe der wagrechten Seitenkräfte gleich Null ist,
- β) die algebraische Summe der lothrechten Seitenkräfte gleich Null ist,
- γ) die algebraische Summe der statischen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null ist.

Für Kräfte, welche nicht in derselben Ebene wirken, lautet der Satz vom Gleichgewicht der Kräfte: Die an einem Körper angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn für drei rechtwinklig zu einander stehende Axen die algebraischen Summen der in die Axenrichtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null sind und außerdem die algebraischen Summen der statischen Momente aller Kräfte, bezogen auf diese Axen, je gleich Null sind.

- 3) Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten denselben nur dann im Gleichgewicht, wenn beide der Größe nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengesetzt sind und mit ihren Richtungslinien zusammenfallen (Fig. 5); denn nur dann sind alle drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.

Fig. 5.

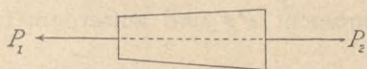
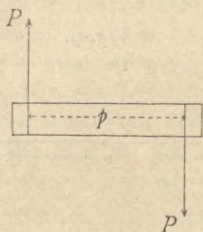


Fig. 6.



Haben zwei Kräfte P (Fig. 6) parallele Richtung, gleiche Größe und entgegengesetzten Sinn, fallen sie aber mit ihren Richtungslinien nicht zusammen, so ist allerdings jede der beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen α und β erfüllt, nicht aber die dritte. Man nennt zwei solche Kräfte ein Kräftepaar und versteht unter dem Momente des Kräftepaares das Product aus der Größe der Kraft P in den senkrechten Abstand der beiden Richtungslinien der Kräfte; d. h. es ist das Moment $M = Pp$.

Die Summe der statischen Momente beider zu dem Kräftepaar vereinten Kräfte hat für jeden beliebigen Punkt der Ebene die gleiche Größe $M = Pp$. In den Berechnungen kommt vielfach das (unter Umständen vorläufig noch unbekannt) Moment M eines Kräftepaares vor; wird alsdann für einen beliebigen Punkt der Ebene die algebraische Summe der statischen Momente aufgestellt, so ist, wo auch der Punkt liege, der Beitrag des Kräftepaares mit dem Werthe M einzuführen.

7.
Zwei Kräfte
auf
einen Körper
wirksam;
Kräftepaar.

8.
Drei Kräfte
auf einen Körper
wirksam.

4) Drei auf einen Körper wirkende Kräfte sind nur dann im Gleichgewicht, wenn sich ihre Richtungslinien in einem Punkte schneiden, jede der drei Kräfte abfolut genommen genau eben so groß ist, wie die Mittelkraft der beiden anderen Kräfte, und mit der betreffenden Mittelkraft einen Winkel von 180 Grad einschließt.

Diese Bedingungen sind nur erfüllbar, wenn die drei Kräfte in derselben Ebene liegen; drei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte können daher mit einander nicht im Gleichgewicht sein.

5) Wenn drei in derselben Ebene liegende Kräfte, welche sich in einem Punkte schneiden, im Gleichgewichte sind, so verhalten sich die Kräfte zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Die drei Kräfte K_1 , K_2 , K_3 (Fig. 7) befinden sich sonach im Gleichgewicht, wenn

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

6) Eine in irgend einem Punkte A (Fig. 8) angreifende Kraft P kann stets ersetzt werden durch eine nach einem beliebigen anderen Punkte B parallel verschobene Kraft P von gleicher Größe, gleicher Richtung und gleichem Sinne mit der gegebenen, und ein Kräftepaar, dessen Moment dem Momente der gegebenen Kraft in Bezug auf den Punkt B nach Größe und Drehrichtung gleich ist.

Denn es wird nichts geändert, wenn im Punkte B zwei Kräfte, P_1 und P_2 , angebracht werden, welche der gegebenen Kraft in Größe und Richtung gleich, dem Sinne nach einander entgegen gesetzt sind. Zwei dieser drei Kräfte, P und P_1 , ergeben ein Kräftepaar, welches für jeden Punkt der Ebene, also auch für B , das Moment $M = Pp$ und gleiche Drehrichtung hat, wie die ursprünglich gegebene Kraft; die dritte Kraft P_2 ist eben die parallel verschobene Kraft P . Jede Kraft P wirkt also auf einen nicht auf ihrer Richtung liegenden Punkt, dessen senkrechter Abstand von der Kraft gleich p ist, mit einem Drehmoment Pp und außerdem so, als ob sie in ihm selbst angriffe.

9.
Gesetz
der Wechsel-
wirkung.

7) Gesetz der Wechselwirkung. Dasselbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, so erleidet er durch diesen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der Größe nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengesetzt ist.

Dieses Gesetz wird in der Folge sehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger AB (Fig. 9) übt durch sein Eigengewicht und die wirkenden Belastungen auf die Auflagerpunkte A und B die Drücke K und K_1 aus; dieselben sind nach unten gerichtet. Genau eben so groß sind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger ausüben. Diese sind nach oben gerichtet, da sie den ersteren Drücken K und K_1 genau entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

Betrachtet man nur den Träger, so hat man die nach oben wirkenden Kräfte K und K_1 — als Stützendrücke — einzuführen; betrachtet man die Auflager, so sind die nach unten gerichteten Drücke K und K_1 der Untersuchung zu Grunde zu legen.

Fig. 7.

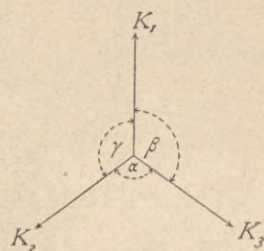


Fig. 8.

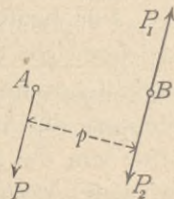
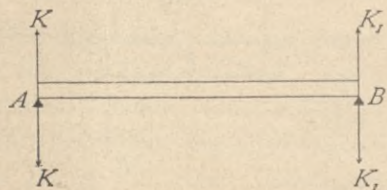


Fig. 9.



b) Grundlagen für die graphische Behandlung baustatistischer Aufgaben.

Die Aufgaben der Statik der Bau-Constructionen können sowohl durch Rechnung (auf analytischem Wege), als auch durch Zeichnung (auf graphischem Wege) gelöst werden. Die graphische Behandlung hat manche Vortheile. Dieselbe führt in vielen Fällen rascher und leichter zum Ziele und gewährt fast immer eine klarere Uebersicht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung.

In den folgenden Untersuchungen werden beide Wege eingeschlagen werden. Um Wiederholungen zu vermeiden, sollen die Grundlagen für die graphische Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Da bei den meisten Aufgaben die Kräfte als in einer Ebene wirkend angenommen werden können, werden wir uns auf diesen Fall beschränken.

1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Mittelkraft ersetzt werden. Um diese Mittelkraft nach Größe und Richtung zu erhalten, zeichnet man das fog. Kraftpolygon.

Das Kraftpolygon für eine Anzahl von Kräften ist derjenige Linienzug, welchen man erhält, wenn man sämtliche Kräfte nach irgend einem Maßstabe so an einander reiht, daß die Größe, die Richtung und der Sinn einer jeden Kraft in diesem Linienzuge mit der Größe, der Richtung und dem Sinne der gegebenen Kraft übereinstimmt und daß der Anfangspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der vorhergehenden Kraft zusammenfällt.

Der Maßstab für das Auftragen der Kräfte kann beliebig angenommen werden; doch sind sämtliche Kräfte nach demselben Maßstabe aufzutragen.

Um das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 zu erhalten, welche im Punkte A (Fig. 10) angreifen, trage man zunächst von einem beliebig anzunehmenden Punkte α aus nach irgend einem Maßstabe so viele Kräfteinheiten ab, wie K_1 enthält, und zwar nach einer Richtung $\alpha\beta$, welche mit derjenigen von K_1 übereinstimmt. Ist etwa $K_1 = 20^t$ und der Maßstab so gewählt, daß $1\text{ cm} = 20^t$ bedeutet, so würde man von α aus 1 cm abzutragen haben. Man ziehe also durch α eine Linie parallel zur Richtung von K_1 und trage auf dieser Linie $\alpha\beta = K_1$ ab. Daran trage man K_2 ab; zu diesem Zwecke ziehe man durch β eine Linie parallel zur Richtung von K_2 und trage auf dieser Linie $\beta\gamma = K_2$ ab. In derselben Weise verfähre man weiter und erhält so $\gamma\delta = K_3, \delta\varepsilon = K_4$. Alsdann ist $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 .

Es ist oben angegeben, daß der Sinn der Kraft im Kraftpolygon mit dem der gegebenen Kraft übereinstimmen muß. In der gegebenen Kraft ist der Sinn durch einen Pfeil ausgedrückt, so daß Unklarheit über denselben nicht bestehen kann; im Kraftpolygon ergibt sich der Sinn ebenfalls unzweideutig, wenn man die Kräfte stets so aufträgt, daß die Richtung vom früheren Buchstaben des Alphabetes bis zum höheren Buchstaben desselben mit der Pfeilrichtung der gegebenen Kraft übereinstimmt. Die Kraft $\alpha\beta$ wirkt also im Sinne von α nach β , nicht im Sinne von β nach α .

Größe, Richtung und Sinn der Mittelkraft aller an einem Punkte A (Fig. 10) angreifenden Kräfte werden erhalten, indem man den Anfangspunkt des für diese Kräfte construirten Kraftpolygons mit seinem Endpunkte verbindet.

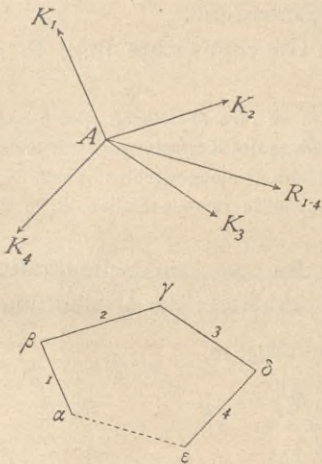
In Fig. 10 giebt also $\alpha\varepsilon$ die Größe, die Richtung und den Sinn der Mittelkraft der vier Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 an.

Die Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 wird nach dem bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch die Diagonale des aus diesen beiden Kräften construirten Parallelogramms dargestellt, d. h. in Fig. 11 stellt ac die Mittelkraft von K_1 und K_2 nach Größe und Richtung dar, wenn

10.
Graphische
Methode.

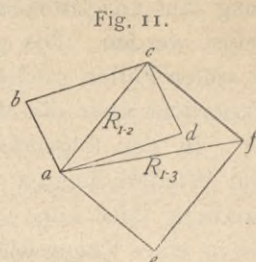
11.
Kraft-
polygon.

Fig. 10.



12.
Satz I.

$ab = K_1, ad = K_2$ ist. Die Diagonale ac theilt das Parallelogramm $abcd$ in zwei congruente Dreiecke; es wird also genügen, das Dreieck abc zu construiren, in welchem $ab = K_1$ und $bc = K_2$ ist. Alsdann ist die dritte Seite ac des Dreieckes gleich der Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2 . Der Linienzug abc ist aber nach der oben gegebenen Erklärung das Kraftpolygon für die beiden Kräfte K_1 und K_2 , und ac verbindet den Anfangspunkt a desselben mit dem Endpunkte c . Für zwei Kräfte ist damit obiger Satz bewiesen.



Kommt eine dritte Kraft K_3 hinzu, so ist die Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2 mit K_3 zu vereinen, um die Resultirende R_{1-3} von K_1, K_2 und K_3 zu erhalten. Ist $K_3 = ae$, so construire man das Parallelogramm $acfe$, und ziehe die Diagonale af desselben; die letztere ist die gefuchte Mittelkraft. Auch hier genügt es, um af zu erhalten, nur das Dreieck acf zu zeichnen. Man erhält also die Mittelkraft R_{1-3} , indem man an den Endpunkt von $R_{1-2} = ac$ die Kraft K_3 nach Gröfse und Richtung gleich cf anträgt und a mit f verbindet. Der Linienzug $abcfe$ ist aber nach obiger Erklärung das Kraftpolygon für die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 und af die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit dessen Endpunkte. Damit ist der Beweis unseres Satzes auch für drei Kräfte geliefert. In derselben Weise kann er ohne Schwierigkeit für eine beliebige Anzahl von Kräften geführt werden.

Das Kraftpolygon ist nur eine Hilfsfigur, welche wohl Gröfse, Richtung und Sinn der Mittelkraft, nicht aber ihre Lage in der Ebene angiebt. Die Lage derselben ist aber nicht zweifelhaft, sobald man aufer der Richtung der Kraft einen Punkt kennt, durch welchen die Kraft hindurchgeht. Die Richtung wird hier durch das Kraftpolygon gegeben. Der Durchgangspunkt für die Kraft ist ebenfalls bekannt; denn die Mittelkraft aller Kräfte muß durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt derselben, d. h. durch A (Fig. 10), gehen. Zieht man also durch A eine Linie parallel zu ae , so ergibt diese die Mittelkraft nach Lage und Richtung; die Gröfse derselben ist ae .

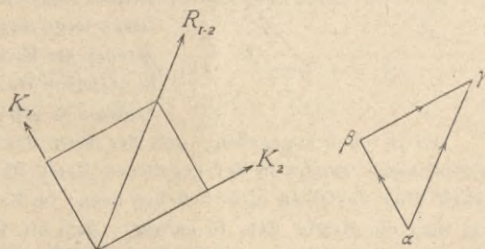
Zu jedem Kraftpolygon gehört als nothwendige Ergänzung ein Kräftemaßstab.

Wenn die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist das Kraftpolygon eine geschlossene Figur.

Sind die auf einen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, so ist ihre Mittelkraft gleich Null; dieselbe wird aber nach Satz I durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit seinem Endpunkte dargestellt. Diese Verbindungslinie muß also für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null sein; demnach muß der Anfangspunkt des Kraftpolygons mit seinem Endpunkte zusammenfallen, d. h. das Kraftpolygon muß eine geschlossene Figur sein.

Der Sinn der Mittelkraft ist vom Anfangspunkte des aus den Seitenkräften construirten Kraftpolygons nach dem Endpunkte desselben gerichtet; der Umfahrungsinn des ganzen Polygons mit Einschluss der Mittelkraft erleidet also am Endpunkte der Einzelkräfte eine Unterbrechung.

Fig. 12.



Um diesen Satz zu beweisen, genügt es, die Mittelkraft zweier Kräfte aufzufuchen. Ist in Fig. 12 $\alpha\beta = K_1$ und $\beta\gamma = K_2$, so haben beide den durch die Pfeile angedeuteten Umfahrungsinn, welcher, wenn noch eine beliebige Anzahl von Kräften hinzukommt, immer derselbe bleibt, d. h. er ist stets vom Anfangspunkte des Kraftpolygons nach dem Endpunkte desselben gerichtet. Der Sinn der Resultirenden $K_{1-2} = \alpha\gamma$ ist aber, wie sich aus der Parallelogramm-Construction in Fig. 12 ergibt, von α nach γ gerichtet; er ist also dem Umfahrungsinn der Einzelkräfte direct entgegengesetzt. Damit ist der Satz für zwei Kräfte bewiesen. Jede dritte Kraft K_3 läßt sich aber mit R_{1-2} in derselben Weise, wie bei K_1 und K_2 gezeigt ist, zusammensetzen; es handelt sich dabei auch stets nur um zwei Kräfte, und deshalb gilt das Gefagte auch für K_{1-2} und K_3 , d. h. für K_1, K_2, K_3 . Die Mittelkraft der durch das Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ dargestellten Kräfte (Fig. 10) ist $\alpha\epsilon$, der Sinn ist von α nach ϵ gerichtet; der Umfahrungsinn erleidet sonach bei ϵ eine Unterbrechung.

Sind die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte, so ist für das ganze Kraftpolygon der Umfahrungsinn derselbe.

13.
Satz II.

14.
Satz III.

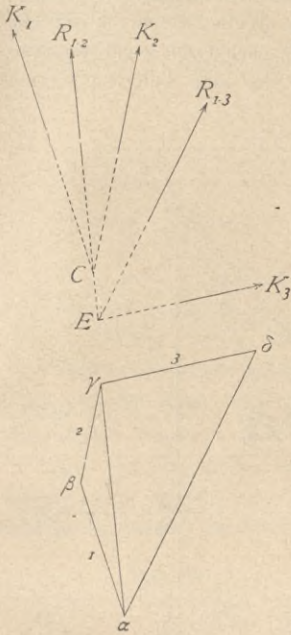
15.
Satz IV.

Denn alsdann ist die Mittelkraft gleich Null, und diese ist nach Satz III die einzige Kraft, welche einen anderen Umfahrungsinn hat, als die übrigen Kräfte. Diese einzige Kraft fällt hier fort; mithin haben in diesem Falle alle Kräfte denselben Umfahrungsinn.

2) Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten. Wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte an verschiedenen Punkten desselben angreifen, so ist zunächst die Ermittlung der Gröfse und Richtung der Mittelkraft genau, wie unter 1 angegeben, vorzunehmen.

16.
Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten.

Fig. 13.



Denn man kann (Fig. 13) zunächst die beiden Kräfte K_1 und K_2 auf ihren Richtungslinien beliebig verschoben, also auch bis zu dem Schnittpunkte C derselben. Für die beiden im Punkte C angreifenden Kräfte liegt nun die Aufgabe genau so, wie oben entwickelt ist. Ist $K_1 = \alpha\beta$ und $K_2 = \beta\gamma$, so ist $\alpha\gamma$ die Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2 .

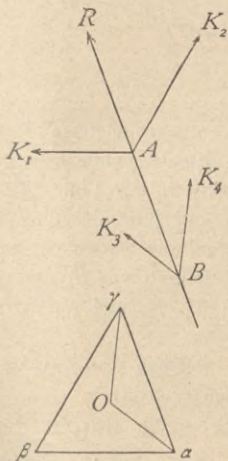
Diese Mittelkraft R_{1-2} greift in C , dem Schnittpunkte der beiden Kräfte K_1 und K_2 , an und hat die durch $\alpha\gamma$ bestimmte Richtung, d. h. sie ist parallel zu $\alpha\gamma$. Um jetzt die Mittelkraft von R_{1-2} und K_3 , d. h. diejenige von K_1, K_2, K_3 zu finden, verfährt man genau so, wie bei der Zusammensetzung von K_1 und K_2 . Man verschiebt R_{1-2} und K_3 bis zum Schnittpunkte E ihrer Richtungslinien; in diesem muß die gesuchte Mittelkraft R_{1-3} angreifen. Die Zusammenfassung von R_{1-2} ($= \alpha\gamma$ im Kraftpolygon) und K_3 ($= \gamma\delta$ im Kraftpolygon) kann nun wiederum genau in der oben gezeigten Weise erfolgen, indem man $\gamma\delta = K_3$ an γ anträgt und $\alpha\delta$ zieht. $\alpha\delta$ giebt die Gröfse und Richtung der Mittelkraft R_{1-3} von K_1, K_2, K_3 an; dieselbe geht durch den Punkt E . In der gleichen Weise kann man auch bei mehreren Kräften weiter verfahren.

Wenn Gröfse und Richtung der Mittelkraft gefunden sind, ist auch die Lage derselben bekannt, sobald ein Punkt bekannt ist, durch welchen sie gehen muß; denn durch diesen Punkt läßt sich nur eine Parallele zu der im Kraftpolygon gefundenen Richtung der Mittelkraft legen. Ein solcher Punkt ist in Fig. 13 bei R_{1-2} der Punkt C , bei R_{1-3} der Punkt E etc.

Bei einer gröfseren Anzahl von Kräften würde die gezeigte Ermittlung der Lage der Mittelkraft sehr umständlich sein; deshalb hat man zur Erleichterung eine Hilfsconstruction eingeführt, das sog. Seilpolygon. Dasselbe ergibt sich durch die folgende Betrachtung.

17.
Seilpolygon.

Fig. 14.



Wie man die Gröfse und Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 in der dritten Seite $\alpha\gamma$ (Fig. 14) des für die beiden Kräfte construirten Kraftpolygons $\alpha\beta\gamma$, hier der Schlusseite des Kraftdreieckes, findet, so kann man auch irgend eine gegebene Kraft R als Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 auffassen. Diese beiden Kräfte müssen nur zwei Bedingungen genügen, und zwar:

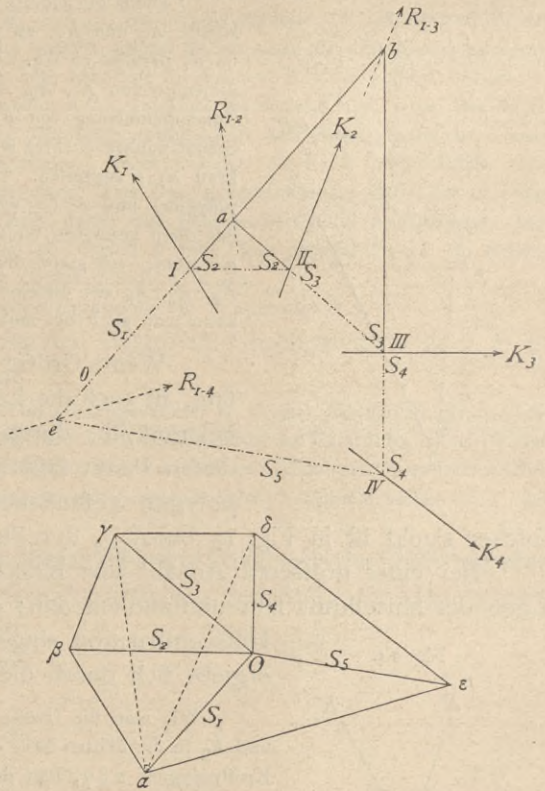
- a) Das aus ihnen construirte Kraftpolygon muß als dritte Seite die gegebene Kraft nach Gröfse und Richtung enthalten, und
- β) die beiden Kräfte müssen sich auf einem Punkte der gegebenen Krafrichtung schneiden.

Man kann also R als Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 auffassen, die im Kraftpolygon durch bezw. $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ dargestellt sind und deren Richtungslinien sich auf dem Punkte A der Krafrichtung R schneiden. In gleicher Weise kann R auch als Mittelkraft der beiden Kräfte K_3 und K_4 angesehen werden, denen das Kraftdreieck $\alpha O\gamma$ entspricht, die also im Kraftpolygon durch bezw. αO und $O\gamma$ dargestellt werden und deren Richtungslinien sich im Punkte B der gegebenen Krafrichtung schneiden. Man kann demnach die gegebene Kraft R sowohl durch die Kräfte K_1 und K_2 , wie durch K_3 und K_4 ersetzen. Daraus folgt, daß man für die Zerlegung

einer gegebenen Kraft den Punkt O ganz beliebig, den Punkt B auf der Richtungslinie der gegebenen Kraft beliebig wählen kann.

Ist eine größere Anzahl von Kräften $K_1, K_2, K_3, K_4 \dots$ gegeben (Fig. 15), so kann man zunächst K_1 in der angegebenen Weise zerlegen. K_1 werde im Kraftpolygon durch $a\beta$ dargestellt und möge in $\alpha O = S_1$ und $O\beta = S_2$ zerlegt werden. Nach Früherem ist, da K_1 den Sinn von α nach β hat, S_1 von α nach O , S_2 von O nach β gerichtet. Als Schnittpunkt dieser beiden Seitenkräfte von K_1 kann der Punkt I auf der Richtungslinie von K_1 beliebig angenommen werden. Ferner kann K_2 , welches im Kraftpolygon durch $\beta\gamma$ dargestellt wird, ebenfalls in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit $\beta\gamma$ zusammen ein Dreieck bilden müssen. Die Spitze des Dreieckes kann wiederum beliebig gewählt werden; man kann also den Punkt O als diese Spitze annehmen. Sodann erhält man als die beiden Seitenkräfte von K_2 ($= \beta\gamma$) die Kraftlinien βO und $O\gamma$. Die erste dieser Seitenkräfte ist nach GröÙe und Richtung der zweiten Seitenkraft von K_1 genau gleich, da diese $O\beta$ war. $S_2 = \beta O$ hat den Sinn von β nach O , $S_3 = O\gamma$ den Sinn von O nach γ . Wählt man jetzt als Zerlegungspunkt der Kraft K_2 den Punkt II , in welchem die Richtungslinie der Kraft K_2 von der zweiten Seitenkraft S_2 der Kraft K_1 geschnitten wird, so greifen in diesem Punkte die beiden Kräfte S_2 und S_3 an. In der Richtungslinie $I II$ wirken also die beiden Kräfte S_2 , deren eine in I , deren andere in II angreift. Beide sind, wie eben entwickelt ist, der GröÙe nach einander gleich; sie haben dieselbe Richtung, aber entgegengesetzten Sinn, heben sich also gegenseitig auf. Die beiden gegebenen Kräfte K_1 und K_2 sind also durch vier neue Kräfte ersetzt, nämlich durch S_1, S_2, S_2, S_3 ; zwei von diesen Kräften heben einander auf, nämlich die beiden S_2 ; es bleiben also zwei Kräfte S_1 und S_3 , welche die gegebenen Kräfte K_1 und K_2 vollständig ersetzen. Die Mittelkraft von K_1 und K_2 ist demnach derjenigen von S_1 und S_3 gleich in der GröÙe, in der Richtung, im Sinn und in der Lage. Die Mittelkraft von S_1 und S_3 geht aber durch den Schnittpunkt a der Richtungslinien derselben; durch diesen Punkt a muß also auch die Mittelkraft von K_1 und K_2 gehen.

Fig. 15.



Verfährt man nun mit der dritten Kraft K_3 eben so, wie mit K_2 , d. h. zerlegt man K_3 in zwei Seitenkräfte so, daß der Punkt O als Spitze des Kraftdreieckes für die Zerlegung von $K_3 = \gamma\delta$ gewählt wird, so werden die beiden Seitenkräfte $S_3 = \gamma O$ und $S_4 = O\delta$ sein. Die erste dieser beiden Seitenkräfte ist wiederum gleich der zweiten Seitenkraft von K_2 , hat aber entgegengesetzten Sinn. Wählt man ferner als Zerlegungspunkt von K_3 den Punkt III , in welchem die Richtungslinie von K_3 durch die Richtungslinie der Seitenkraft S_3 der Kraft K_2 geschnitten wird, so wirken in der Linie $II III$ zwei Kräfte S_3 , welche einander wiederum aufheben. Die Kräfte K_1, K_2, K_3 sind jetzt durch sechs Kräfte ersetzt, nämlich durch $S_1, S_2, S_2, S_3, S_3, S_4$, von denen sich die vier mittleren, die beiden S_2 und die beiden S_3 , gegenseitig aufheben, so daß nur S_1 und S_4 übrig bleiben. Die Mittelkraft von S_1 und S_4 ist also auch diejenige von K_1, K_2 und K_3 . Daraus folgt, daß die Mittelkraft von K_1, K_2 und K_3 durch den Schnittpunkt der Krafrichtungen S_1 und S_4 , also durch den Punkt δ geht.

Verfährt man so weiter, so erhält man einen Linienzug $O I II III IV \dots$, welchen man das Seilpolygon nennt. Aus der vorstehenden Erklärung der Entstehung ergibt sich folgender Satz:

Die Mittelkraft einer Anzahl auf einander folgender Kräfte geht durch den Schnittpunkt der Richtung derjenigen Seilpolygonseite, welche der ersten dieser Kräfte vorhergeht, mit der Richtung derjenigen Seilpolygonseite, welche auf die letzte dieser Kräfte folgt.

Denn die in den mittleren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte heben sich sämmtlich gegenseitig auf, und es bleiben nur die in den äusseren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte übrig, deren Mittelkraft mit derjenigen der gegebenen Kräfte in jeder Beziehung übereinflimmt²⁾.

Den Punkt O (Fig. 15) nennt man den Pol des Seilpolygons.

Durch das Kraft- und Seilpolygon ist die Mittelkraft ganz beliebig in einer Ebene wirkender Kräfte bestimmt. Die Grösse, die Richtung und den Sinn derselben giebt das Kraftpolygon, die Lage in der Ebene giebt das Seilpolygon an, da dasselbe einen Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft ergibt. Zieht man durch diesen die Parallele zu der mit Hilfe des Kraftpolygons gefundenen Richtung der Mittelkraft, so erhält man die wirkliche Lage derselben, über welche ein Zweifel nicht mehr herrschen kann, da durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Richtung möglich ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass Kraft- und Seilpolygon nicht nur die Mittelkraft der sämmtlichen wirkenden Kräfte, sondern auch diejenige einer beliebigen Gruppe dieser Kräfte ergeben. So ist die Mittelkraft von K_1 und K_2 (Fig. 15) nach Grösse und Richtung gleich $\alpha\gamma$ und geht durch α . Zieht man also durch α eine Linie parallel zu $\alpha\gamma$, so erhält man diese Mittelkraft R_{1-2} . So ist ferner die Mittelkraft von K_1 , K_2 und K_3 nach Grösse und Richtung gleich $\alpha\delta$ und geht durch δ ; eine durch δ parallel zu $\alpha\delta$ gezogene Linie ergibt R_{1-3} . Die Mittelkraft von K_1 , K_2 , K_3 und K_4 ist nach Grösse und Richtung gleich $\alpha\varepsilon$ und geht durch ε etc.

Wenn die an verschiedenen Punkten eines Körpers angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so ist sowohl das Kraftpolygon, wie auch das Seilpolygon eine geschlossene Figur.

19.
Satz VI.

Dass das Kraftpolygon in dem angegebenen Falle eine geschlossene Figur sein muss, geht aus dem Früheren hervor; denn es ist nachgewiesen, dass das Kraftpolygon für an verschiedenen Punkten angreifende Kräfte genau eben so construiert wird und genau dieselbe Bedeutung hat, wie für an einem Punkte angreifende Kräfte.

Nach Satz II muss also das Kraftpolygon eine geschlossene Figur sein, auch wenn die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen.

Dass sich auch das Seilpolygon schliessen muss, ergibt sich folgendermassen.

Construiert man das Seilpolygon für eine beliebige Anzahl von Kräften, so heben sich, wie oben auseinandergesetzt, die sämmtlichen in den mittleren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte auf, und es bleiben als einzig wirkende Kräfte diejenigen übrig, welche in den beiden äussersten Seilpolygonseiten wirken, d. h. diejenige, welche der ersten Kraft K_1 vorangeht, und diejenige, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, also S_1 und S_{n+1} (Fig. 16). Diese beiden Kräfte ersetzen alle gegebenen Kräfte $K_1, K_2, K_3 \dots K_n$.

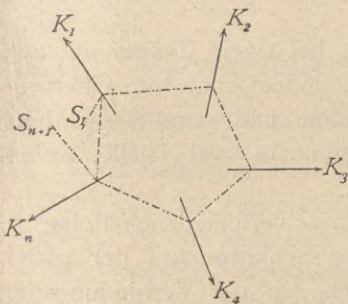
Die letzteren sind nach der Voraussetzung im Gleichgewicht; folglich müssen auch S_1 und S_{n+1} im Gleichgewicht sein. Gleichgewicht zwischen zwei Kräften ist aber nur möglich, wenn ihre Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen. Sonach muss diejenige Seilpolygonseite, welche der ersten Kraft K_1 vorhergeht, mit derjenigen Seilpolygonseite, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, zusammenfallen, d. h. das Seilpolygon muss eine geschlossene Figur sein.

Die schliessende Seilpolygonseite nennt man die Schluslinie des Seilpolygons.

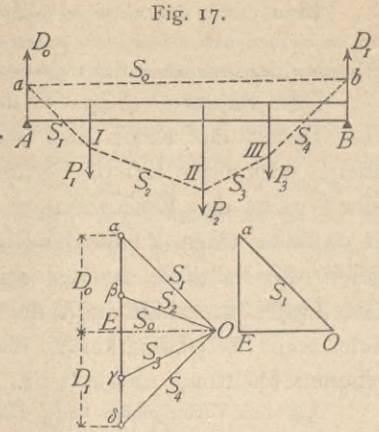
In der Statik der Bau-Constructions kommt sehr häufig der Fall vor, dass alle wirkenden Kräfte parallel sind. In diesem Falle wird das Kraftpolygon eine Gerade. Sind diese Kräfte im Gleichgewicht, so schliesst sich nach Satz VI das Kraftpolygon; somit fallen alsdann Anfangs- und Endpunkt des Kraftpolygons auch hier zusammen.

²⁾ Kehrt man die Richtungen der in einem Eckpunkte des Seilpolygons wirkenden zwei Seitenkräfte S um, so halten sich dieselben offenbar mit der auf den Eckpunkt wirkenden Kraft K im Gleichgewicht. In jedem Eckpunkte eines Seilpolygons befindet sich demnach die äussere Kraft K mit den im entgegengesetzten Sinne genommenen Spannungen S im Gleichgewicht.

Fig. 16.



Für neben stehenden Balken AB (Fig. 17) sei im Kraftpolygon $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; das Kraftpolygon muß sich schliessen, wenn die außerdem noch wirkenden Kräfte D_1 und D_0 , die Stützendrücke, an δ angetragen werden, d. h. es müssen D_0 und D_1 , welche, eben so wie P_1, P_2, P_3 , lothrecht sind, mit $\delta\alpha$ zusammenfallen, und der Endpunkt von D_0 muß auf a fallen. Unbekannt ist zunächst noch der Punkt E im Kraftpolygon, welcher die Grenze zwischen D_1 und D_0 bildet. Da aber Gleichgewicht stattfindet, so muß sich auch das Seilpolygon schliessen, welches für einen beliebigen Pol und die fünf Kräfte P_1, P_2, P_3, D_1, D_0 construiert wird. Es sei der Pol O , das Seilpolygon $I II III$ und a der Schnittpunkt der ersten Seilpolygonseite mit der Richtungslinie von D_0 , b der Schnittpunkt der letzten Seilpolygonseite mit der Richtungslinie von D_1 ; alsdann müssen nach dem Satze VI die vor D_0 liegende und die auf D_1 folgende Seilpolygonseite, d. h. S_0 und S_{n+1} zusammenfallen; es muß also ab die schließende Seilpolygonseite, d. h. die Schlußlinie des Seilpolygons sein.



Nach der Erklärung des Seilpolygons in Art. 17 (S. 13) stellen die von den Ecken des Kraftpolygons nach dem Pol O laufenden Strahlen die in den Seilpolygonseiten auftretenden Kräfte oder, wie man sagt, die Spannungen im Seilpolygon vor, natürlich in demselben Maßstabe, in welchem die Kräfte P aufgetragen sind. Im Punkte a des Seilpolygons halten sich nun folgende Kräfte das Gleichgewicht: der Stützendruck D_0 , die Spannung in der Seilpolygonseite aI und diejenige in der Schlußlinie ab (beide in dem gleichen Sinne, wie in Fußnote 2 [S. 15] genommen). Von diesen drei Kräften sind die Richtungen bekannt, von einer — der Seilpolygonspannung in aI — auch die Größe; dieselbe ist gleich αO . Man kann also für diese drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, construiern, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft αO , durch a , die Parallele zur Richtung von D_0 , durch den anderen Endpunkt, durch O , die Parallele zur Schlußlinie ab zieht. Dann ist $O E a$ das gefuchte Kraftdreieck, $E a = D_0$ und $O E$ gleich der Seilspannung in der Schlußlinie. Gewöhnlich benutzt man zu dieser Confection unmittelbar das Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta$. Selbstverständlich ist dann auch sofort $\delta E = D_1$, da $D_0 + D_1 = P_1 + P_2 + P_3$ ist.

Hieraus ergibt sich die Regel: Die Stützendrücke bei einem Träger auf zwei Stützen mit nur lothrechten Kräften werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon construiert, die Schlußlinie und parallel zu dieser eine Linie durch den Pol zieht; letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Größe und Richtung die Stützendrücke darstellen.

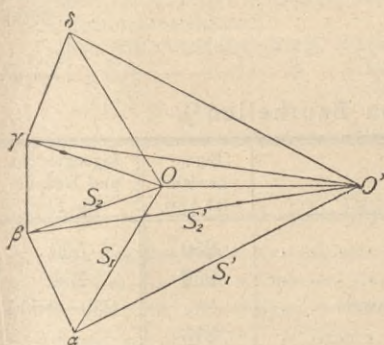
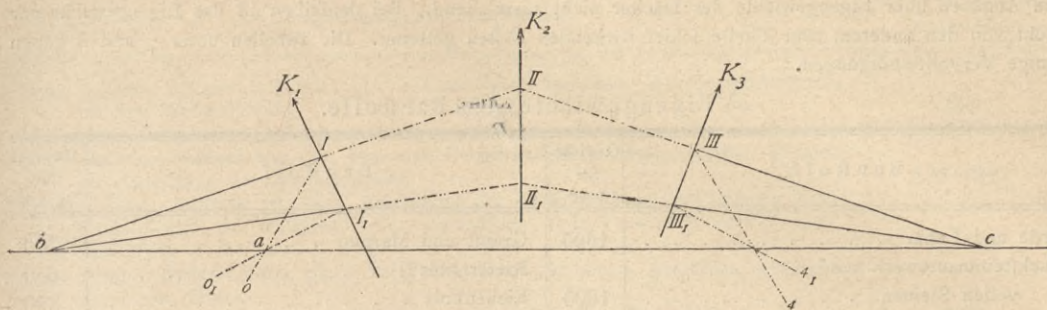
20.
Satz VII.

Construiert man für eine Anzahl von Kräften aus zwei verschiedenen Polen die entsprechenden Seilpolygone, so liegen die sämtlichen Schnittpunkte der gleichvielen Seilpolygonseiten auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie beider Pole parallel ist.

Das aus einem beliebigen Pole O (Fig. 18) construierte Seilpolygon sei $o I II III a$, das aus einem anderen Pole O' construierte sei $o_1 I_1 II_1 III_1 a_1$. Alsdann schneiden sich die beiden ersten Seiten $o I$ und $o_1 I_1$ in a , die beiden zweiten Seiten $I II$ und $I_1 II_1$ in b , die dritten Seiten $II III$ und $II_1 III_1$ in c etc. Die sämtlichen Punkte $a, b, c, d \dots$ liegen auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie der Pole, d. h. zu $O O'$ parallel ist.

Nach der Erklärung des Seilpolygons ist $K_1 = \alpha\beta$ im ersten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1 und S_2 zerlegt, deren Größe und Richtung sich im Kraftpolygon zu bzw. αO und $O\beta$ ergibt; dieselbe Kraft ist im zweiten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1' und S_2' zerlegt, deren Größe und Richtung bzw. $\alpha O'$ und $O'\beta$ ist. Denkt man nun den Sinn der beiden Seitenkräfte S_1' und S_2' umgekehrt, so sind diese beiden Kräfte die Seitenkräfte einer Kraft K_1 , welche mit der gegebenen Kraft K_1 nach Größe und Richtung genau übereinstimmt, deren Sinn aber demjenigen der gegebenen gerade entgegengesetzt ist. Diese neue Kraft K_1 muß sich also mit der gegebenen Kraft K_1 im Gleichgewicht halten; folglich müssen auch die vier Seitenkräfte dieser beiden Kräfte K_1 im Gleichgewicht sein. Verbindet man S_1 und S_1' zu einer, S_2 und S_2' zur anderen Mittelkraft, so geht die erstere durch den Schnittpunkt a dieser beiden Kräfte, die zweite durch den Schnittpunkt b der beiden Kräfte S_2 und S_2' . Beide Mittelkräfte halten

Fig. 18.



sich im Gleichgewicht; sie müssen also in die gerade Linie fallen, welche durch die beiden Punkte a und b bestimmt ist.

Nun ist die Mittelkraft von S_1 und S_1' nach Größe und Richtung die Schlußlinie des Kraftpolygons $O'aO$, d. h. $O'O$. Die Richtungslinie der Mittelkraft ist also parallel zu $O'O$, d. h. die Linie ab ist parallel zu $O'O$, zur Verbindungslinie der beiden Pole.

Genau in derselben Weise ist zu beweisen, daß der Schnittpunkt b von S_2 und S_2' mit dem Schnittpunkte c von S_3 und S_3' auf einer zu $O'O$ parallelen Geraden liegt, d. h. auf der Linie ab , da durch b zu $O'O$ nur eine Parallele möglich ist.

2. Kapitel.

Aeußere Kräfte, Schwerpunkte, statische und Trägheitsmomente.

a) Belastungen.

Als Belastungen der Constructionen treten auf:

- 1) das Eigengewicht,
- 2) die Nutzlast,
- 3) die Schneelast und
- 4) der Winddruck.

1) Eigengewicht der Construction.

Das Eigengewicht der Construction ist beim Beginne jeder Berechnung nur angenähert bekannt. Für die gewöhnlichen Anordnungen genügt es, die aus den vorhandenen Bauwerken ermittelten Erfahrungswerte bei der Berechnung einzuführen. Meistens kann man das Eigengewicht mit hinreichender Genauigkeit als gleichmäßig über die ganze Ausdehnung (des Trägers, der Balkendecke, des Daches etc.) vertheilt annehmen.

Nachstehend (unter α) sind die Eigengewichte einiger wichtiger Baustoffe und (unter β) diejenigen von verschiedenen Bautheilen angegeben, und zwar hauptsächlich in der Größe, wie sie vom Berliner Polizei-Präsidium nach einer Bekanntmachung vom 21. Februar 1887 den Berechnungen zu Grunde gelegt werden. Die Zusammenstellung (unter β) »Eigengewichte und Belastung von Bautheilen« enthält in der letzten Spalte auch die Nutzlast, welche erst im folgenden Artikel besprochen werden soll; es scheint aber dennoch zweckmäßig, die betreffenden Angaben hier sogleich mit zu machen.

Die Angaben der Tabellen unter α und β genügen in sehr vielen Fällen nicht; insbesondere sind die Angaben über Eigengewichte der Dächer nicht ausreichend. Bei denselben ist das Eigengewicht gar nicht von den anderen, zum Theile schief wirkenden Lasten getrennt. Die Tabellen unter γ und δ geben einige Vervollständigungen.

22.
Baustoffe.

α) Eigengewichte der Baustoffe.

Baustoff	Gewicht für 1 cbm	Baustoff	Gewicht für 1 cbm
Erde und Lehm	1600	Granit und Marmor	2700
Backsteinmauerwerk aus vollen Steinen	1600	Kiefernholz ³⁾	650
porösen Steinen	1300	Eichenholz	800
Lochsteinen	1100	Eisen	7500
Sandsteinmauerwerk	2400	Beton	2000
	Kilogr.		Kilogr.

23.
Bautheile.

β) Eigengewichte und Belastung von Bautheilen⁴⁾.

Bezeichnung der Construction	Eigengewicht für 1 qm	Eigengewicht und Nutzlast für 1 qm
Balkendecke in Wohnhäusern, gestaakt und gefchalt	250	500
» » Fabrik- und Lagergebäuden, so wie für Tanzsäle	250	750
» » Getreidespeichern, einschl. der Belastung, zum Nachweis	—	850—1000
Dachbalkenlage (unter dem Dachbodenraum)	375	—
Dachflächen, in der wagrechten Projection gemessen, einschl. Schnee- und Winddruck, bei Metall- oder Glasdeckung gemäß der Neigung	—	125—150
desgl. bei Schieferdeckung	—	200—240
desgl. bei Pappdeckung	—	120—130
desgl. bei Ziegeldeckung	—	250—300
desgl. bei Holzcementdeckung	—	350
Steile Mansarden-Dächer	—	400
Kappengewölbe aus porösen Steinen in Wohngebäuden	350	600
desgl. in Fabrik- und Lagerräumen	—	850
desgl. aus vollen Steinen, in Wohngebäuden	500	750
desgl. für Treppen und Treppen-Ruheplätze	500	1000
desgl. in Fabrik- und Lagerräumen	—	1000
desgl. unter Durchfahrten und befahrbaren Höfen	—	1250
Schmiedeeiserne Treppen, einschl. Nutzlast	—	600—650
Betonirtes Wellblech, für Wohnräume	350	600
desgl. für Treppen und Treppen-Ruheplätze	—	850
	Kilogr.	Kilogr.

24.
Decken mit eisernen Trägern.

γ) Eigengewichte der Decken mit eisernen Trägern⁵⁾.
(Mittelwerthe.)

Bezeichnung der Construction	Gewicht für 1 qm Deckenfläche
Eiserne Balken, 0,9 bis 1,2 m von einander entfernt, einschl. Dielung, Deckenputz, Sandausfüllung auf etwa halbe Höhe der Träger	260
Eiserne Balken, 1,0 bis 1,5 m von einander entfernt, mit zwischengespannten Kappengewölben aus porigen Steinen	250
	Kilogr.

³⁾ Nach genauen Ermittlungen wiegt 1 cbm Fichtenholz, lufttrocken, im Winter gefchlagen: 550 kg, 1 cbm Lärchenholz, desgl. 730 kg.

(Siehe: Wochschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1887, S. 277.)

⁴⁾ Nach: FROELICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung statischer Berechnungen etc. 2. Aufl. Berlin 1897.

⁵⁾ Nach: Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 134 u. ff.

Bezeichnung der Construction	Gewicht für 1 qm Deckenfläche
Eiserne Balken, Abstand wie vor, mit Eifenwellblech-Ausfüllung der Zwischenräume, in den Wellen Beton	150
dasselbe, jedoch 8 cm hohe Sandausfüllung über dem Beton	300
Eiserne Balken, Abstand wie vor, über den Zwischenräumen <i>Monier</i> -Platten, je nach der Ausfüllung der Zwischenfache	170—300
Eiserne Balken, Abstand wie vor, Ausfüllung der Zwischenräume mit <i>Klette's</i> Holz-Aphtaldecke auf Wellblech oder <i>Zorès</i> -Eifen, mit Fußboden und Deckenschalung ⁶⁾	170—180
Eiserne Balken, System <i>Klette</i> , glatte Putzdecke, Dielenfußboden, Ausfüllung auf Fehlboden von Holz	310
dasselbe mit Gewölben aus Lochsteinen, Dielenfußboden, Hinterfüllung	320
dasselbe, Ausfüllung: Schlacken-Beton auf <i>Monier</i> -Platten, Cement-Estrich, glatte Cementbeton-Decke ⁷⁾	330
dasselbe mit Ausfüllung durch <i>Kleine's</i> che Decke (D.R.P. 71 102)	} 220—350
» » » » <i>Schürmann's</i> che Decke (D.R.P. 80 653)	
» » » » <i>Koenen's</i> che Decke (Voutenplatte) (Abstand der Balken bis 6,0 m)	
» » » » <i>Foerster's</i> che Maffivdecke	
	Kilogr.

δ) Eigengewichte der Dächer.

Die Eigengewichte der Dächer setzen sich aus dem Gewichte der Dachdeckung nebst Zubehör, dem Gewichte der Pfetten, Sparren, des Windverbandes etc. und aus dem Gewichte der Binder zusammen. Der erste Theil ist beim Beginn der Berechnung für die Flächeneinheit schräger Dachfläche ziemlich genau bekannt und von der Weite des Daches unabhängig; auch der zweite Theil ist, wenn die Binderentfernung einigermassen fest steht, leicht zu ermitteln.

25.
Dächer.

Der dritte dagegen ist vorläufig unbekannt, kann aber nach ausgeführten, ähnlichen Constructionen geschätzt und demnach vorläufig angenommen werden; derselbe ist übrigens den beiden ersten Werthen gegenüber meistens gering.

Für die erste Berechnung kann man die nachfolgenden vorläufigen Annahmen über das Eigengewicht der Dächer ⁸⁾ machen; die nachherige Gewichtsrechnung muß ergeben, ob diese Annahmen entsprechend waren oder ob eine zweite Rechnung durchzuführen ist.

Eigengewichte der Dächer (für 1 qm schräger Dachfläche).

Holzdächer				Metalldächer	
Art des Daches	Mittl. Gewicht	Art des Daches	Mittl. Gewicht	Art des Daches	Mittl. Gewicht
Einfaches Ziegeldach	102	Asphaltdach mit Fliesenunterlage	102	Schiefer auf Winkeleifen	51
Doppel- u. Kronenziegeldach	127	Theerpappendach	30	Ebenes Eifenblech auf Winkeleifen	25
Falzziegeldach	72	Rohr- und Strohdach ohne Lehm	61	Eifenwellblech auf Winkeleifen	22
Gewöhnliches Schieferdach	76	Rohr- und Strohdach mit Lehm	76	Zinkwellblech auf Winkeleifen	24
Holzcementdach	135	Zink- und Eifenblechdach auf Holzschalung	41	Gufszinkplatten auf hölzernen Latten u. Sparren	70
Asphaltdach mit Lehmunterlage	61 bis 76			Glas auf Winkel-, bezw. Sproffeneifen	35—50
	Kilogr.		Kilogr.		Kilogr.

⁶⁾ Nach: Deutsche Bauz. 1883, S. 397.

⁷⁾ Nach: Deutsche Bauz. 1886, S. 297.

⁸⁾ Nach: Deutsches Bauhandbuch. Berlin 1879. Bd. I. S. 229. — Bd. II. S. 127.

HEINZERLING, F. Der Eifen-Hochbau der Gegenwart. Aachen 1876—78. Heft I, S. 9.

TETMAJER, L. Die äußeren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhlconstructions Zürich 1875. S. 8.

MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die graphische Statik der Bauconstructions. Leipzig 1887—92. S. 430.

LANDSBERG, TH. Die Glas- und Wellblechdeckung der eifernen Dächer. Darmstadt 1887.

Die Zahlen der vorstehenden Tabelle enthalten die Eigengewichte der Dachbinder noch nicht, sondern nur die Gewichte der Deckmaterialien einschl. Hilfsmaterial, der Lattung, bezw. Schalung, der Sparren und der Pfetten.

Für die Dachbinder können folgende Gewichtsannahmen gemacht werden:

a) Holzdächer (für 1 qm schräger Dachfläche):

Dachbinder, stehende oder liegende, mit allem Zubehör an Holztheilen, bei	
Spannweiten von 7,5 bis 15 m	7 bis 13 kg
einfache Hängeböcke, desgl., bei Spannweiten von 10 bis 18 m	12 » 18 kg
combinirte Spreng- und Hängeböcke, desgl., bei Spannweiten von etwa 20 m	20 » 24 kg
frei tragende Dachbinder verschiedener Constructionsformen, desgl., bei 10 bis	
18 m Spannweite	20 » 30 kg

b) Eifendächer (für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche):

bei leicht construirten Dachstühlen	14 » 20 kg
bei schwer construirten Dachstühlen	20 » 30 kg

Da es oft bequemer ist, die Belastungen aus der überdeckten Grundfläche statt aus der schrägen Dachfläche zu ermitteln, so sind in der folgenden Tabelle die Eigengewichte der Dächer, ausfchl. des Gewichtes der Dachbinder, für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche, und zwar für die verschiedenen vorkommenden Dachneigungen (h bezeichnet die Höhe, L die Stützweite des Daches) angegeben.

Eigengewichte der Dächer, ausfchl. des Gewichtes der Dachbinder
(für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche).

Art des Daches:	$\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
a) Holzdächer:										
Einfaches Ziegeldach		144	122	114	—	—	—	—	—	—
Doppel- und Kronenziegeldach		180	152	142	—	—	—	—	—	—
Falzziegeldach		102	87	81	77	76	75	74	—	—
Gewöhnliches Schieferdach		108	91	85	82	—	—	—	—	—
Afphaltdach mit Lehmunterlage		106	91	84	81	79	78	77	77	77
» » Fliesenunterlage		144	122	114	110	107	106	105	104	104
Theerpappdach		42	36	34	32	32	31	31	31	30
Zink- und Eifenblechdach auf Holzschalung		58	49	46	44	43	42	42	42	42
b) Metaldächer:										
Schiefer auf Winkeleifen		72	61	56	54	—	—	—	—	—
Ebenes Eifenblech auf Winkeleifen		35	30	28	27	26	26	26	26	26
Eifenwellblech auf Winkeleifen		28	24	23	22	21	21	21	21	20
Zinkwellblech auf Winkeleifen		34	29	27	26	26	25	25	24	24
Glas auf Winkel-, bezw. Sproffeneifen		71	60	56	54	—	—	—	—	—

Kilogramm.

Beim Holzcementdach hat das Dach eine so geringe Neigung (etwa 1 : 20), das man als Belastung für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche unbedenklich den Werth der Tabelle auf S. 19 (unter δ), d. i. 135 kg annehmen kann.

2) Nutzlast.

Die Nutzlasten sind hauptsächlich bei den Decken-Constructions von Wichtigkeit; sie bestehen in der Belastung durch Menschen, ungünstigenfalls durch Menschengedränge in öffentlichen Sälen, Theatern, Concert- und Ausstellungssälen, Gerichtsräumen, Schulzimmern etc., in der Belastung durch Waaren in Speichern, durch Bücher in Bibliotheken u. dergl. mehr. Dabei ist für die Berechnung auf die Lage der Nutzlast Rücksicht zu nehmen und zu beachten, das nicht für alle Theile der tragenden Construction die Belastung des ganzen Raumes die gefährlichste ist, das

Für die verschiedenen Verhältnisse der Firshöhe h zur Stützweite L ergeben sich demnach folgende

Größte Belastungen p_s durch Schneedruck
für 1qm schräger Dachfläche:

Für $\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	
$\alpha =$	45°	33°41'	26°40'	21°50'	18°25'	16°	14°	12°30'	11°20'	
$p_s =$	(53)	62	67	70	71	72	73	73	73	Kilogr.

Für 1qm wagrechter Projection der Dachfläche beträgt die ungünstigste Schneebelastung 75 kg.

Wenn die Dachneigung so steil ist, daß $\frac{h}{L} \geq \frac{1}{2,3}$ ist, so bleibt der Schnee nicht mehr liegen, gleitet vielmehr ab; für derartige Dachneigungen braucht man also auf Schneelast gar keine Rücksicht zu nehmen. Deshalb ist in der Tabelle der Werth von p_s , welcher sich für $\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$ ergeben hat, eingeklammert.

4) Winddruck.

29.
Winddruck.

Der Winddruck ist von hervorragender Bedeutung sowohl für die Dächer, wie für hohe Mauern, Schornsteine etc. In der Technik ist vor Allem wichtig, zu wissen, welchen Druck der Wind auf eine Ebene EE (Fig. 20) ausübt, die feinen Strom unter einem spitzen Winkel φ schneidet.

Dieser Druck kann nur senkrecht zu der Ebene gerichtet sein; denn der Druck zwischen zwei sich berührenden Körpern kann höchstens um einen Winkel von der Senkrechten zur Berührungsfläche abweichen, welcher gleich ist dem Reibungswinkel. Zwischen der Dachfläche und der sie umspielenden Luft findet keine Reibung statt, der Reibungswinkel ist hier also gleich Null; mithin ist der Druck zwischen der Dachfläche und der Luft stets senkrecht zur Dachfläche gerichtet.

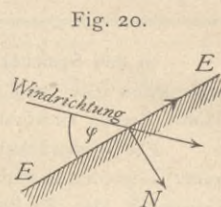


Fig. 20.

Bis vor Kurzem wurde allgemein angenommen, der senkrechte Druck N auf die Ebene EE sei der zweiten Potenz von $\sin \varphi$ proportional; neuere theoretische Untersuchungen und praktische Versuche haben jedoch nachgewiesen, daß man der Wirklichkeit wesentlich näher kommt, wenn man einführt

$$N = P \sin \varphi, \dots \dots \dots 1.$$

in welcher Gleichung P die Größe des Druckes ist, welche der Wind auf eine senkrecht getroffene Fläche ausübt. Man kann setzen

$$P = \frac{v^2 F \gamma}{g}, \dots \dots \dots 2.$$

mithin

$$N = \frac{v^2 F \gamma}{g} \sin \varphi \dots \dots \dots 3.$$

In diesen Gleichungen bedeutet: F den Flächeninhalt der vom Winde getroffenen Fläche, v die Geschwindigkeit des Windes (in Met. für die Secunde), γ das Gewicht von 1cbm Luft (in Kilogr.) und g die Beschleunigung des freien Falles = 9,81 m.

Für 15 Grad C. und 760mm Barometerstand ist $\frac{\gamma}{g} = 0,12458$, also rund

$$P = 0,125 F v^2,$$

demnach der Winddruck für 1qm senkrecht getroffener Fläche

$$p = 0,125 v^2.$$

Nimmt man als grösste Windgeschwindigkeit $v = 30^m$ an, so wird rund

$$\left. \begin{aligned} p &= 120 \text{ Kilogr.} \\ n &= p \sin \varphi = 120 \sin \varphi \text{ Kilogr.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6.$$

Es ist im Hochbau üblich, als grössten Winddruck $p = 120^k$ für 1^m einzuführen; im Brückenbau rechnet man mit einem Größtwerth von p , welcher 250 bis 280^k für 1^m erreicht. Wenn auch bei den gewöhnlichen Dach-Constructionen, besonders an geschützten Orten, der Werth 120^k nicht zu klein ist, so ist doch bei Berechnung von hohen Schornsteinen und Thurmdächern, Gasbehältern u. dergl. zu überlegen, ob nicht die Vorsicht gebietet, einen gröfseren Werth als 120^k für 1^m der Rechnung zu Grunde zu legen. Alljährlich fällt eine nicht geringe Zahl von Thürmen und Schornsteinen den Stürmen zum Opfer. An freien Stellen und bei den genannten hohen Bauten sollte man bis $p = 200^k$ für 1^m gehen. Für die nachfolgenden Unterfuchungen ist

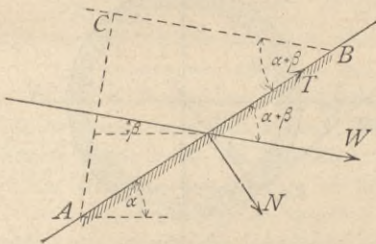
$$p = 120^k \text{ für } 1^m$$

angenommen.

a) Winddruck auf Dachflächen. Die Windrichtung schliesst nach den gemachten Beobachtungen einen Winkel von nahezu 10 Grad mit der wagrechten Ebene ein¹²⁾. Dieser Winkel möge β , der Winkel der Dachfläche gegen die Wagrechte α genannt werden; dann ist nach Fig. 21 der Winkel der Windrichtung mit der Dachfläche $\varphi = (\alpha + \beta)$ und demnach der auf 1^m schräger Dachfläche entfallende senkrechte Winddruck

30.
Dachflächen.

Fig. 21.



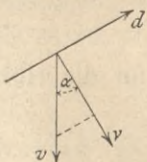
$$v = p \sin (\alpha + \beta) = 120 \sin (\alpha + 10^\circ) \quad 7.$$

Aus Gleichung 7 ergeben sich für die verschiedenen Dachneigungen die in folgender Tabelle angeführten Werthe für v .

Senkrechte Belastungen v durch Winddruck für 1^m schräger Dachfläche.

Für $\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\alpha =$	45°	$33^\circ 41'$	$26^\circ 40'$	$21^\circ 50'$	$18^\circ 25'$	16°	14°	$12^\circ 30'$	$11^\circ 20'$
abgerundet $v =$	98	83	72	63	57	53	49	46	44 Kilogr.

Fig. 22.



Zerlegt man den Normaldruck v in eine lothrechte und eine in die Richtung der Dachfläche fallende Seitenkraft (Fig. 22), so wird die erstere für 1^m der Dachfläche $v = \frac{v}{\cos \alpha}$ und für 1^m wagrechte Projection der Dachfläche

$$v = \frac{v}{\cos^2 \alpha} = \frac{120 \sin (\alpha + 10^\circ)}{\cos^2 \alpha} \quad 8.$$

Die Werthe für v sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Für $\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\alpha =$	45°	$33^\circ 41'$	$26^\circ 40'$	$21^\circ 50'$	$18^\circ 25'$	16°	14°	$12^\circ 30'$	$11^\circ 20'$
$v =$	196	120	90	73	64	57	52	48	46 Kilogr.

¹²⁾ Nach neueren Versuchen von *Lillenthal* hat der Wind eine unter etwa 3 Grad von unten ansteigende Richtung; die Annahme wagrechter Richtung des Windes scheint demnach als die einfachste und mit den beiden Richtungen am besten vereinbare empfehlenswerth zu sein.

31.
Mauerflächen.

β) Winddruck gegen Mauerflächen. Bei Auffuchung des auf lothrechte oder schwach geneigte Mauern wirkenden Winddruckes wird zweckmäfsig der Winddruck als wagrechte Kraft eingeführt.

Der senkrechte Druck des Windes gegen eine Mauerfläche EE (Fig. 23), welche den Winkel φ mit der Windrichtung bildet, ist für die Flächeneinheit

$$n = p \sin \varphi;$$

die Seitenkraft von n , welche in die Richtung des Windes fällt, ist alsdann

$$h = n \sin \varphi = p \sin^2 \varphi,$$

während die Seitenkraft, welche senkrecht zur Windrichtung wirkt, die Gröfse hat

$$t = p \sin \varphi \cos \varphi.$$

Die erstere Seitenkraft ist besonders dann wichtig, wenn es sich um Bautheile handelt, welche im Grundrifs nach einem Vielecke, einem Kreise, einer Ellipse etc. geformt sind, so bei Schornsteinen, Thürmen etc. Bei ebenen Mauern ist der Berechnung stets als ungünstigste Windbelastung diejenige zu Grunde zu legen, bei welcher der Wind die Mauer senkrecht trifft.

a) Winddruck gegen eine ebene Mauer. Wenn die getroffene Fläche F Quadr.-Met. enthält, so ist

$$N = p F = 120 F \text{ Kilogr.}$$

Als Angriffspunkt der Mittelkraft kann der Schwerpunkt der getroffenen Fläche eingeführt werden.

b) Winddruck gegen einen Kreiscylinder. Es soll der Winddruck ermittelt werden, welcher auf die Längeneinheit der Höhe, also auf das steigende Meter wirkt. Gegen das Bogentheilchen ds , dessen Tangente mit der X -Axe den Winkel φ (Fig. 24) bildet, wirkt der Normaldruck

$$dn = p \cdot ds \cdot \sin \varphi = p r d\varphi \cdot \sin \varphi.$$

Die senkrecht zur Windrichtung wirkende Seitenkraft von dn wird durch eine gleich grofse, entgegengesetzt wirkende aufgehoben, welche auf den symmetrisch zur XX -Axe liegenden Bogentheil wirkt; die andere Seitenkraft ist

$$dh = dn \sin \varphi = p r \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Die gefammte Kraft, welche ein Umsturz-Moment erzeugt, ist für die Höheneinheit offenbar

$$H = \int_0^\pi p r \sin^2 \varphi d\varphi = 2 p r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi,$$

sonach

$$H = p r \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots 9.$$

Wird $p = 120 \text{ kg}$ eingeführt, so ist die Kraft H für das steigende Meter

$$H = 188,4 r = \infty 190 r \text{ Kilogr.},$$

worin r in Metern einzusetzen ist.

Fig. 23.

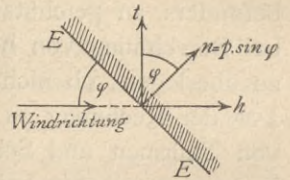
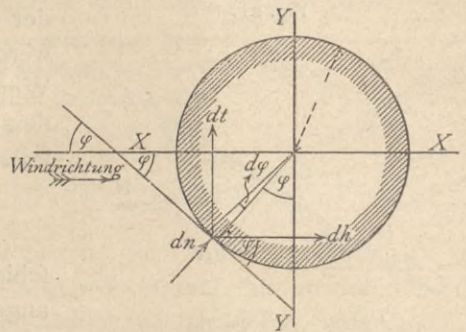


Fig. 24.



Die Kraft H liegt in der lothrechten Ebene der Axe XX und greift in halber Höhe des Cylinders an.

c) Winddruck gegen ein regelmässiges achteitiges Prisma (Fig. 25). Die Breite des umschriebenen Quadrates sei B , die Seitenlänge der achteckigen Grundfläche sei b ; dann ist $b = 0,414 B$. Der Winddruck gegen die fenkrecht getroffene Fläche ist für die Längeneinheit der Höhe

$$H_1 = p b,$$

derjenige gegen die unter 45 Grad getroffenen Seitenflächen je

$$N = p b \sin 45^\circ,$$

und die in die Windrichtung fallende Seitenkraft von N ist

$$H_2 = p b \sin^2 45^\circ = \frac{p b}{2}.$$

Eben so groß ist H_3 ; mithin wird die gefammte Kraft, welche ein Umsturz-Moment erzeugt, für das steigende Meter sein

$$H = H_1 + H_2 + H_3 = 2 p b.$$

Die Mittelkraft aller H greift, wie oben, in halber Höhe des Prismas an und liegt in der durch die Axe des Prismas und H_1 bestimmten lothrechten Ebene.

Die bisher ganz allgemein und auch in vorstehenden Entwicklungen gemachte Annahme einer gleichmässigen Vertheilung des Winddruckes über eine getroffene ebene Fläche scheint nach den neueren Versuchen und theoretischen Ermittlungen nicht ganz richtig zu sein; demnach ist auch nicht ohne Weiteres richtig, dass die Mittelkraft durch den Schwerpunkt der getroffenen Fläche geht. Es scheint, dass der Druck an den Rändern am kleinsten ist und nach der Mitte der Ebene hin zunimmt. Bis über die Gefetzmässigkeit genauere Angaben vorliegen, wird man jedoch für die Zwecke des Hochbaues unbedingt die vorgeführten Annahmen den Berechnungen zu Grunde legen können.

b) Schwerpunkte und statische Momente.

1) Schwerpunkte von ebenen Figuren.

Um den Schwerpunkt einer beliebigen ebenen Figur zu finden, genügt es, zwei Linien zu bestimmen, auf deren jeder der Schwerpunkt liegen muss; alsdann ist der Schnittpunkt beider Linien der gefuchte Schwerpunkt. Werden in der Ebene, in welcher die betreffende Figur liegt, zwei Coordinaten-Axen OX und OY beliebig angenommen, so erhält man die Abstände x_0 und y_0 des Schwerpunktes von den beiden Axen OY und OX aus den Gleichungen

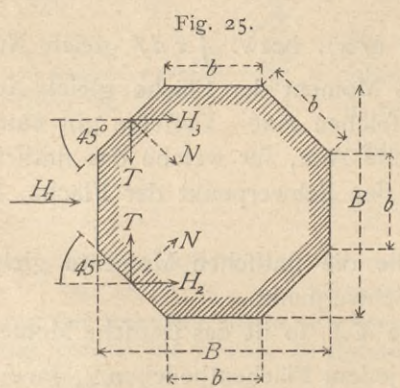
$$x_0 = \frac{\int x df}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\int y df}{F}, \quad \dots \dots \dots \text{ IO.}$$

in denen F die ganze Querschnittsfläche, df den Flächeninhalt eines beliebigen Theilchens mit den Coordinaten x und y bedeutet und die Summirung über die ganze Fläche auszudehnen ist. Die vorstehenden beiden Gleichungen können hier als aus der Mechanik bekannt vorausgesetzt werden. Man kann statt der unendlich kleinen Theilchen df Flächentheile f von endlicher Grösse einführen, also die obigen Gleichungen schreiben:

$$x_0 = \frac{\Sigma (f x)}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\Sigma (f y)}{F}, \quad \dots \dots \dots \text{ II.}$$

wenn x und y die Schwerpunkts-Coordinten der Flächentheile f bedeuten.

32.
Grund-
gleichungen.



Die Zähler der Gleichungen nennt man die statischen Momente der Fläche, bezogen auf die Y - und X -Axe; denn denkt man in jedem Theile der Fläche den Inhalt desselben als Kraft senkrecht zur Ebene der Figur wirkend, so sind die statischen Momente dieser Kräfte für die beiden Axen eben die Zählergrößen obiger Gleichungen.

33.
Folgerungen.

Aus den Schwerpunktsgleichungen folgt:

α) x_0 wird gleich Null, wenn der Zähler $\Sigma (fx)$, bezw. $\int x df$ gleich Null wird, d. h. für eine Axe, für welche das statische Moment der Fläche gleich Null wird. Der Schwerpunkt liegt demnach auf einer solchen Axe. Dasselbe gilt natürlich für y_0 , so dass man allgemein sagen kann: Jede Axe, für welche das statische Moment einer Fläche gleich Null ist, geht durch den Schwerpunkt der Fläche, ist also, wie man sagt, eine Schwerpunktsaxe.

Man suche daher zwei Axen auf, für welche die statischen Momente gleich Null sind; alsdann ist ihr Schnittpunkt auch der Schwerpunkt.

β) Liegt eine Figur symmetrisch zu einer Axe XX , so ist das statische Moment $\int y df$ der Figur für diese Axe gleich Null; denn jedem Flächentheilchen f_1 im Abstände y_1 von der Axe entspricht ein eben so großes Theilchen f_1 im Abstand $-y_1$ von der Axe; der Beitrag beider Theile zum statischen Momente ist also $f_1 y_1 - f_1 y_1 = 0$. Das Gleiche gilt von je zwei anderen Theilen, so dass also das gefamnte statische Moment gleich Null wird. Daraus folgt: Jede Symmetrie-Axe einer Fläche ist eine Schwerpunktsaxe.

Hat sonach ein Querschnitt eine Symmetrie-Axe, so ist nur noch die Lage des Schwerpunktes auf derselben zu bestimmen; hat ein Querschnitt zwei Symmetrie-Axen, so ist der Schnittpunkt beider auch der Schwerpunkt.

γ) Nach Gleichung 10 ist $Fx_0 = \int x df$. Ist es möglich, die ganze Fläche in eine Anzahl Gruppen $F_1, F_2, F_3 \dots$ zu zerlegen, von deren jeder der Schwerpunktsabstand ($x_1, x_2, x_3 \dots$) bekannt ist, so muss für diese sein

$$F_1 x_1 = \left(\int x df_1 \right), \quad F_2 x_2 = \left(\int x df_2 \right), \quad F_3 x_3 = \left(\int x df_3 \right), \quad \dots \quad 12.$$

in welchen Ausdrücken sich die Einzelintegrale auf die einzelnen Gruppen beziehen. Dann ist sonach

$$Fx_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n,$$

und es wird

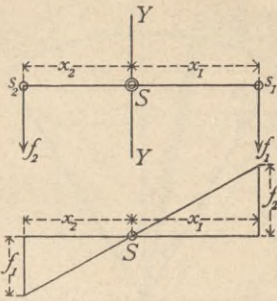
$$x_0 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n}{F} \quad \dots \quad 13.$$

Es ist sehr oft möglich, die gegebene Figur in Rechtecke, bezw. solche kleinere Figuren zu zerlegen, deren Schwerpunkte bekannt sind und alsdann mit Hilfe obiger Formel die Lage des Gesamtschwerpunktes zu finden.

δ) Der Schwerpunkt S zweier Flächen F_1 und F_2 (Fig. 26) mit den Schwerpunkten s_1 und s_2 liegt auf der Verbindungslinie $s_1 s_2$ beider Schwerpunkte. Nennt man nämlich den Abstand des Gesamtschwerpunktes von dieser Verbindungslinie y_0 , so ist $Fy_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$. Die Abstände y_1 und y_2 der beiden Schwerpunkte s_1 und s_2 von derselben Axe sind aber gleich Null, weil die Axe durch diese Schwerpunkte gelegt ist. Demnach ist für diese Axe $Fy_0 = 0$, also auch $y_0 = 0$.

Hieraus folgt weiter, dass, wenn die Schwerpunkte noch weiterer Flächen auf

Fig. 26.



dieser Linie liegen, der Gesamtschwerpunkt gleichfalls auf derselben liegt; kann man also eine Fläche in eine Anzahl Streifen zerlegen, deren Schwerpunkte auf einer geraden Linie liegen, so befindet sich auch der Schwerpunkt der gesammten Fläche auf dieser Linie.

Die Lage des Schwerpunktes auf der Linie $s_1 s_2$ (Fig. 26) ist leicht zu finden. Werden die Abstände desselben von s_1 und s_2 mit bezw. $+x_1$ und $-x_2$ bezeichnet, so muß für eine senkrecht zu $s_1 s_2$ durch den Schwerpunkt S gelegte Axe YY sein

$$0 = f_1 x_1 - f_2 x_2 \text{ oder } \frac{x_1}{x_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Daraus ergibt sich die nachfolgende Construction.

Man errichte in s_1 eine Senkrechte, welche f_2 Flächeneinheiten in beliebigem Maßstabe enthält, in s_2 eine Senkrechte, jedoch nach entgegengesetzter Seite, welche f_1 Flächeneinheiten in demselben Maßstabe enthält, und verbinde die Endpunkte; alsdann schneidet diese Verbindungslinie die Axe $s_1 s_2$ im Schwerpunkte S .

2) Schwerpunkte von einfachen Figuren.

α) Schwerpunkt eines Quadrates, Rechteckes, Parallelogrammes, Kreifes und einer Ellipse. Jede dieser Figuren hat wenigstens zwei Symmetrie-Axen, bezw. Halbierungslinien, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt sich befindet.

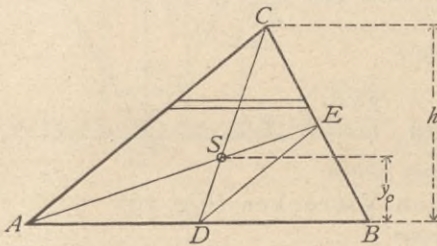
34
Regelmäßige
Figuren.

Demnach liegt er beim Rechteck und Quadrat in der Mitte der Höhe und Breite, beim Parallelogramm im Schnittpunkte der Halbierungslinien der Seiten und beim Kreife und bei der Ellipse im Mittelpunkte.

β) Schwerpunkt eines Dreieckes (Fig. 27).

35
Dreieck.

Fig. 27.



Zerlegt man die Dreiecksfläche durch Linien, welche einer Seite (AB in Fig. 27) parallel sind, in eine Anzahl sehr schmaler Streifen, so liegt der Schwerpunkt eines jeden Streifens in der Mitte seiner Breite, und nach der Folgerung unter δ in Art. 33 liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Streifen. Der Schwerpunkt liegt also auf der Linie CD , welche die Mitte D einer Dreiecksseite mit der gegenüber liegenden Ecke (C) verbindet. Aus demselben Grunde liegt er auch auf der Linie AE , wenn $CE = EB$ ist. Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt beider. Da aber DE und AC parallel sind, so ist

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2} \text{ und } \overline{DS} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{\overline{CD}}{3}.$$

Daraus folgt, daß der senkrechte Abstand des Schwerpunktes S von der Grundlinie AB des Dreieckes ein Drittel der Höhe ist, d. h. es ist

$$y_0 = \frac{h}{3}.$$

Da jede Seite des Dreieckes als Grundlinie angesehen werden kann, so liegt S auch auf einer Parallelen zu BC , deren senkrechter Abstand ein Drittel desjenigen beträgt, in welchem A von BC liegt. Das Gleiche gilt von AC , bezw. B . Mittels dieses Gesetzes können daher leicht zwei Linien gezeichnet werden, auf denen der Schwerpunkt liegt.

γ) Schwerpunkt eines Parallel-Trapezes (Fig. 28).

36.
Parallel-
Trapez.

Der Schwerpunkt des Trapezes in Fig. 28 liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte E und F , welche die beiden parallelen Seiten halbiren. Ferner ist

$$Fy_0 = \int y df.$$

nennt man die Breite eines Streifens z und seine Höhe dy , so ist

$$df = z dy, \quad z = b - \frac{b-a}{h} y \quad \text{und} \quad F = (a+b) \frac{h}{2};$$

folglich

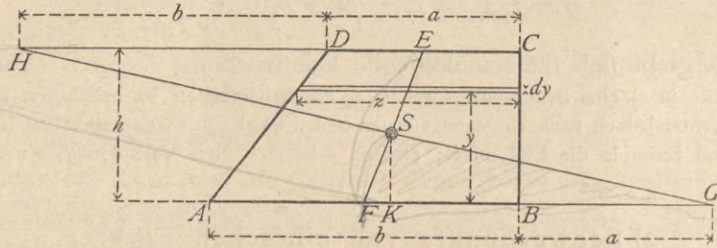
$$F y_0 = \int_0^h \left(b y - \frac{b-a}{h} y^2 \right) dy = \frac{b h^2}{2} - \frac{(b-a)}{h} \frac{h^3}{3},$$

und

$$y_0 = \frac{h}{3} \frac{(2a+b)}{(a+b)}.$$

Daraus ergibt sich die folgende Construction.

Fig. 28.



Man halbire die beiden parallelen Seiten in E und F , trage $BG = a$ und $DH = b$ nach rechts, bezw. links in den Verlängerungen der beiden parallelen Seiten auf und ziehe HG ; alsdann ist der Schnittpunkt von HG mit EF der Schwerpunkt S . Denn es ist

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{EF}} = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + \frac{b}{2} + b + \frac{a}{2}} = \frac{2a + b}{3(a + b)}, \quad \text{aber auch} \quad \frac{SF}{EF} = \frac{\overline{SK}}{h}$$

mithin ist

$$\frac{\overline{SK}}{h} = \frac{2a + b}{3(a + b)} \quad \text{und} \quad \overline{SK} = \frac{h}{3} \frac{(2a + b)}{(a + b)} = y_0.$$

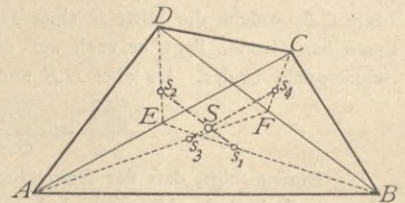
Der Punkt S ist also in der That der Schwerpunkt.

δ) Schwerpunkt eines unregelmäßigen Viereckes (Fig. 29).

37.
Unregelmäßiges
Viereck.

Um den Schwerpunkt des unregelmäßigen Viereckes $ABCD$ zu bestimmen, ziehe man die Gerade AC und ermittle die Schwerpunkte s_1 und s_2 der beiden Dreiecke ACB und ACD , wie unter β gezeigt; alsdann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$. Nun ziehe man BD und ermittle die Schwerpunkte s_3 und s_4 der beiden Dreiecke ABD und BCD ; alsdann liegt der Gesamtschwerpunkt auch auf der Linie $s_3 s_4$. Demnach ist der Schnittpunkt der beiden Linien $s_1 s_2$ und $s_3 s_4$ der gesuchte Schwerpunkt.

Fig. 29.



In ganz ähnlicher Weise kann man weiter verfahren, wenn es sich um den Schwerpunkt eines Vieleckes handelt, welches in Dreiecke zerlegt werden kann. Doch wird in einem solchen Falle vielfach das unten vorzuführende graphische Verfahren bequemer sein.

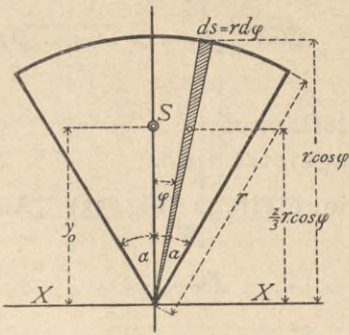
ε) Schwerpunkt eines Kreisabschnittes (Fig. 30).

38.
Kreisabschnitt.

Der ganze zum Kreisabschnitt gehörige Winkel sei 2α ; die Halbierungslinie des Winkels ist eine Symmetrie-Axe, enthält also den Schwerpunkt; somit ist nur noch der Abstand desselben vom Kreismittelpunkte oder, was dasselbe befragt, von einer durch diesen senkrecht zur Winkelhalbierenden gelegten Axe XX' zu suchen.

Für den zu einem Bogenstück $ds = r d\varphi$ gehörigen Theil des Abschnittes (Fig. 30), welcher als

Fig. 30.



Dreieck aufgefasst werden kann, ist der Schwerpunktsabstand von der Axe XX : $y = \frac{2}{3} r \cos \varphi$, der Flächeninhalt

$$df = ds \frac{r}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2};$$

mithin ist

$$y_0 = \frac{\int_{-a}^{+a} y df}{F} = \frac{2 \int_0^a y df}{F} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \int_0^a \cos \varphi d\varphi}{r^2 \alpha}$$

$$y_0 = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \dots \dots \dots 14.$$

Für den Halbkreis wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\sin \alpha = 1$, fonach

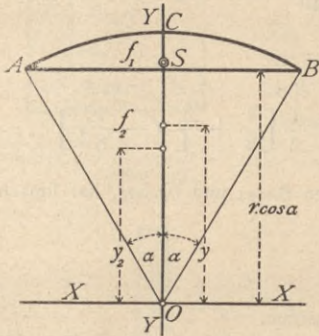
$$y_0 = \frac{4r}{3\pi} = 0,425 r.$$

Für den Viertelkreis ist $\alpha = \frac{\pi}{4}$, daher $y_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r = 0,6 r$.

Für den Sechstelkreis ist $\alpha = \frac{\pi}{6}$, mithin $y_0 = \frac{2}{\pi} r = 0,637 r$.

ζ) Schwerpunkt eines Kreisabschnittes (Fig. 31).

Fig. 31.



Der Schwerpunkt des Kreisabschnittes liegt zunächst wieder auf der Winkelhalbierenden; ferner ist aber nach der Folgerung δ in Art. 33 (S. 26), wenn F der Flächeninhalt des Kreisabschnittes $ACBO$, y der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von XX ist, wenn ferner f_1 und f_2 die Flächeninhalte des Kreisabschnittes ACB , bezw. des Dreiecks ABO und y_1 , bezw. y_2 die Schwerpunktsabstände dieser Flächen von XX sind,

$$Fy = f_1 y_1 + f_2 y_2 \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{Fy - f_2 y_2}{f_1}.$$

Nun ist $F = r^2 \alpha$, $y = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ und $f_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$;

ferner

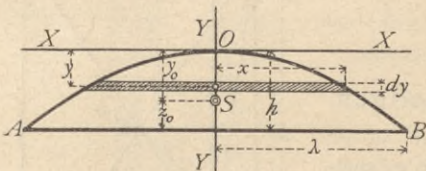
$$y_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \quad \text{und} \quad f_1 = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$$

mithin wird

$$y_1 = \frac{\frac{2}{3} r \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}} \dots \dots \dots 15.$$

η) Schwerpunkt einer Parabelfläche (Fig. 32).

Fig. 32.



Die Gleichung der Parabel AOB , bezogen auf O als Anfangspunkt der Coordinaten-Axen, ist

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{y}{h}.$$

Der Schwerpunkt der Fläche AOB liegt zunächst auf der Symmetrie-Axe YY ; der Abstand desselben von XX ist

$$y_0 = \frac{\int y df}{F} = \frac{\int y df}{\int df}.$$

Es ist $df = 2x dy$, $y = \frac{h x^2}{\lambda^2}$ und $dy = \frac{2x h}{\lambda^2} dx$, also $df = \frac{4x^2 h}{\lambda^2} dx$, fomit

$$y_0 = \frac{\frac{4h^2}{\lambda^4} \int_0^\lambda x^4 dx}{\frac{4h}{\lambda^2} \int_0^\lambda x^2 dx} = \frac{h}{\lambda^2} \frac{3}{5} \lambda^2 = \frac{3}{5} h.$$

39. Kreisabschnitt.

40. Parabelfläche

Der Schwerpunkt liegt also vom Scheitel O um

$$y_0 = \frac{3}{5} h \dots \dots \dots 16.$$

entfernt.

von der Linie AB um

$$z_0 = \frac{2}{5} h \dots \dots \dots 17.$$

3) Schwerpunkte von Querschnittsflächen, die aus einfachen Figuren zusammengesetzt sind.

41. Gleichschenkeliges Winkeleifen.

a) Schwerpunkt des gleichschenkeligen Winkeleifens (Fig. 33). Auf die Ausrundung im Winkel und die Abrundung der Ecken soll keine Rücksicht genommen werden; dieselbe kann sowohl bei dieser, wie bei den folgenden Querschnittsformen meistens unbeachtet gelassen werden.

Der Abstand des Schwerpunktes S von AA , bzw. BB ist

$$y_0 = x_0 = \frac{\Sigma (fy)}{F} = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Hierin ist f_1 der Flächeninhalt des lothrecht, f_2 derjenige des wagrecht gezeichneten Schenkels, bei letzterem nach Abzug des Flächentheiles, der mit dem lothrechten Schenkel zusammenfällt; y_1 und y_2 sind die Abstände der Schwerpunkte von AA .

Eine angenäherte, fast stets genügend genaue Formel wird folgendermaßen gefunden¹³⁾. Es ist

$$y_0 = \frac{\frac{d \cdot h \cdot h}{2} + (h-d) \frac{d}{2}}{2 d h - d^2} = \frac{h^2 + (h-d) d}{2 (2 h - d)} = \frac{h^2 + h d - d^2}{2 (2 h - d)} = \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} + \frac{3}{4} d - \frac{d^2}{8 h} \right].$$

Innerhalb der für $\frac{d}{h}$ vorkommenden Grenzen liegt $\frac{d^2}{2 \cdot 8 h}$ zwischen 0,0125 und 0,00625, hat sonach etwa den Mittelwerth 0,009. Wird dieser eingeführt, so erhält man

$$y_0 = x_0 = \frac{h}{4} + 0,366 d.$$

Sehr leicht kann der Schwerpunkt durch Construction gefunden werden.

Man zerlege den Querschnitt in zwei Rechtecke, ermittle ihre Schwerpunkte s_1 und s_2 , die nach Art. 33 (unter δ) die Schnittpunkte der Diagonalen sind; dann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$; da er auch auf der Symmetrie-Axe CC liegt, so ist der Schnittpunkt S der genannten beiden Linien der gefuchte Schwerpunkt.

Beispiel. Es sei die Schenkellänge $h = 10$ cm und die Dicke $d = 1$ cm; alsdann ist $f_1 = 10$ qcm, $f_2 = 9$ qcm, $y_1 = 5$ cm und $y_2 = 0,5$ cm; sonach

$$y_0 = \frac{10 \cdot 5 + 9 \cdot 0,5}{10 + 9} = 2,37 \text{ cm} = x_0.$$

Die angenäherte Formel giebt

$$y_0 = 2,5 + 0,366 = 2,866 \text{ cm} = x_0.$$

42. Ungleichschenkeliges Winkeleifen.

β) Schwerpunkt des ungleichschenkeligen Winkeleifens (Fig. 34).

Hier ist keine Symmetrie-Axe vorhanden; man muß also x_0 und y_0 getrennt berechnen. Es ist

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{f_1 + f_2} \text{ und } y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Die Construction des Schwerpunktes ist in ähnlicher Weise möglich, wie unter α ¹³⁾. Man ermittelt zunächst s_1 und s_2 , wie oben; alsdann liegt der Gesamtschwerpunkt auf $s_1 s_2$. Der Querschnitt kann

Fig. 33.

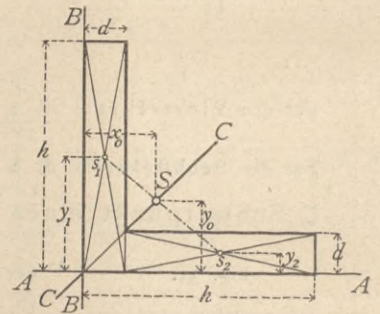
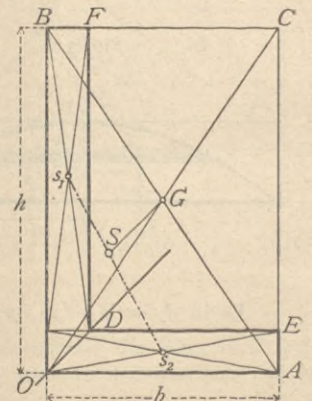


Fig. 34.



¹³⁾ Siehe: ZIMMERMANN. Ueber Winkeleifen-Querschnitte. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 33.

Fig. 35.



Fig. 36.

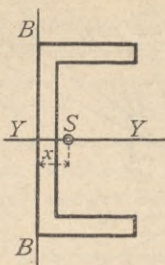
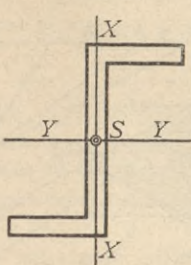


Fig. 37.



ferner als Differenz der beiden Rechtecke $OACB$ und $DECF$ betrachtet werden; der Schwerpunkt liegt also auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser beiden Rechtecke; da diese Schwerpunkte jedoch sehr nahe zusammenfallen, so ergibt sich die Richtung der Verbindungslinie nicht genügend genau. Nun muß aber die Verbindungslinie zur Linie OD parallel sein; man ziehe also durch den Schwerpunkt G des umschriebenen Rechteckes $OACB$ die

Parallele zu OD ; alsdann ist der Schnittpunkt dieser mit s_1s_2 der gefuchte Schwerpunkt.

γ) Schwerpunkt des I-Eisens (Fig. 35).

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt beider Symmetrie-Axen.

δ) Schwerpunkt des C-Eisens (Fig. 36 u. 38).

Der Schwerpunkt liegt auf der wagrechten Symmetrie-Axe im Abstände x_0 von BB ; x_0 ist nach obiger Gleichung aufzufinden, durch Construction wie folgt. Die wagrechte Symmetrie-Axe theilt das C-Eisen in zwei Theile, deren jeder einen Winkeleisen-Querschnitt darstellt. Man ermittelt ihre Schwerpunkte s_3 und s_4 ; wie eben gezeigt wurde, ist der Gesamtschwerpunkt der Schnittpunkt der Linie s_3s_4 mit der Symmetrie-Axe.

ε) Schwerpunkt des Z-Eisens (Fig. 37).

Der Schwerpunkt fällt mit demjenigen des lothrechten Rechteckes, des sog. Steges, zusammen; denn sowohl für die Axe XX , wie für die Axe YY ist das statische Moment der beiden wagrechten Rechtecke zusammen gleich Null; dieselben sind also ohne Einfluss auf die Schwerpunktlage. Dabei ist vorausgesetzt, daß dieselben gleichen Flächeninhalt haben.

ζ) Schwerpunkt des T-Eisens (Fig. 39 u. 40).

Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrie-Axe im Abstände y_0 von der Axe AA , und es ist

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Durch Construction ist derselbe folgendermaßen zu finden. Man zerlege den Querschnitt in drei Rechtecke, ein lothrecht und zwei wagrechte. Die Schwerpunkte seien s_1, s_2, s_3 . Das lothrechte und das eine wagrechte Rechteck bilden zusammen einen Winkeleisenquerschnitt, dessen Schwerpunkt s_4 , wie unter β angegeben, zu finden ist. Dann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie s_3s_4 , ferner auch auf der lothrechten Symmetrie-Axe, also auf dem Schnittpunkt S dieser beiden Linien.

Fig. 38.

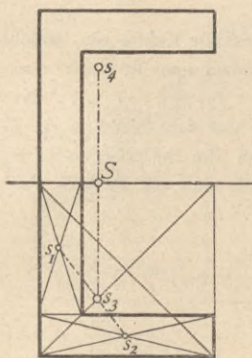


Fig. 39.

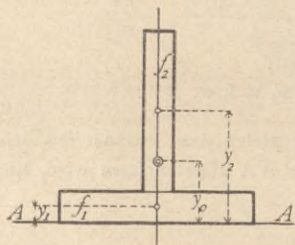
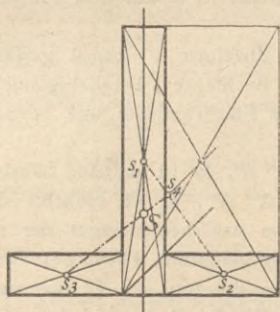


Fig. 40.



4) Graphische Ermittlung der statischen Momente und der Schwerpunkte von Flächen.

Wenn die Figur, deren statisches Moment, bezw. deren Schwerpunkt ermittelt werden soll, eine unregelmäßige Form hat, so ist die graphische Behandlung der Aufgabe zu empfehlen.

Man zerlege die ganze Figur in Streifen, welche derjenigen Axe parallel laufen, für welche das statische Moment gefucht wird (Fig. 41).

Es seien die Flächeninhalte der einzelnen Streifen $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$, die Abstände der Schwerpunkte derselben von der Axe XX bezw. $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$; alsdann ist das statische Moment der ganzen Fläche nach Obigem

$$M = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \dots + f_n y_n.$$

43.
I-Eisen.

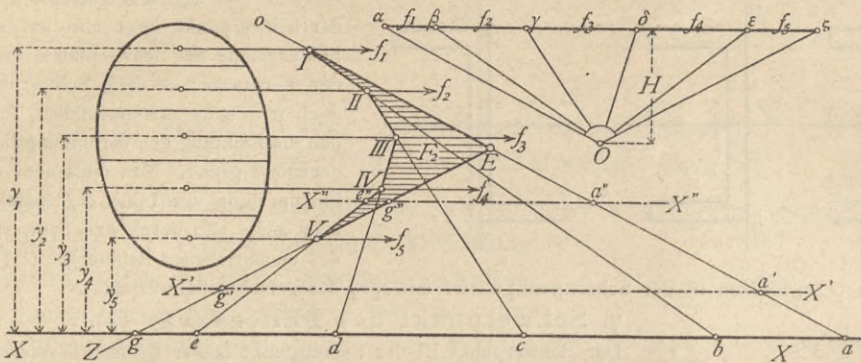
44.
C-Eisen.

45.
Z-Eisen.

46.
T-Eisen.

47.
Statisches
Moment.

Fig. 41.



Man führe nun die einzelnen Flächengrößen als parallel zur Axe XX wirkende Kräfte ein, welche in den Einzelschwerpunkten angreifen, füge sie zu einer Kraftlinie zusammen, indem man sie nach einem beliebigen, jedoch für alle gleichen Maßstabe aufträgt. Es sei $\alpha\beta = f_1$, $\beta\gamma = f_2$, $\gamma\delta = f_3 \dots$. Nun nehme man im Abstände H von dieser Kraftlinie einen Pol O an und construire das den Werthen $f_1, f_2, f_3 \dots$ und diesem Pol entsprechende Seilpolygon $o I II III \dots$. Verlängert man die Seilpolygon-Seiten, welche die erste Kraft f_1 begrenzen, bis zum Schnitte mit der Axe XX , so erhält man ein Dreieck Iab , und es ist

$$\triangle Iab \sim \triangle O\alpha\beta,$$

da die Seiten dieser Dreiecke einander bzw. parallel sind; in Folge dessen ist

$$\frac{\overline{ab}}{y_1} = \frac{\alpha\beta}{H} = \frac{f_1}{H}, \text{ d. h. } H \cdot \overline{ab} = f_1 y_1.$$

Der Abschnitt \overline{ab} der die Kraft f_1 begrenzenden Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX multiplicirt mit dem Polabstand H giebt sonach das statische Moment von f_1 für diese Axe.

Eben so ist

$$\triangle IIbc \sim \triangle Ob\gamma;$$

also

$$\frac{\overline{bc}}{y_2} = \frac{\beta\gamma}{H} = \frac{f_2}{H}, \text{ } H \cdot \overline{bc} = f_2 y_2 \text{ und } H \cdot \overline{cd} = f_3 y_3 \text{ u. f. w.}$$

Das statische Moment der ganzen Fläche für die Axe XX ist daher gleich dem Product aus dem Stück ag , welches von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX abgechnitten wird, und dem Polabstand H , oder es ist

$$H \cdot \overline{ag} = \Sigma (f y).$$

Für die Anwendung ist zu beachten: Die Abschnitte $ab, bc, cd \dots$ auf der Axe XX liegen in den Dreiecken $Iab, IIbc$, bedeuten demnach Längen; die Werthe von H dagegen sind auf dieselbe Einheit zu beziehen, wie die Größen $f_1, f_2, f_3 \dots$, bedeuten also Flächen. Daher ist H auf dem Flächenmaßstabe, $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd} \dots$ hingegen sind auf dem Längenmaßstabe zu messen.

Beim Zerlegen der betreffenden Figur in parallele Streifen müssen dieselben so schmal gewählt werden, daß man mit genügender Genauigkeit die einzelnen Streifen als Rechtecke, Parallelogramme, Paralleltrapeze, überhaupt als solche einfache Figuren ansehen kann, deren Flächeninhalte und Schwerpunktslagen leicht bestimmt werden können.

Handelt es sich um das statische Moment der Fläche für die Axe $X'X'$, so ist dasselbe offenbar gleich $H \cdot \overline{a'g'}$. Rückt aber die Axe zwischen die Kräfte f , etwa nach $X''X''$, so ist zunächst das statische Moment der oberhalb liegenden Flächentheile gleich $H \cdot \overline{a''e''}$; im statischen Moment der gesammten Fläche ist aber auch der Beitrag der an der anderen Seite der Axe gelegenen Theile enthalten, welche einen negativen Beitrag liefern, weil die y -Werthe für dieselben von der Axe $X''X''$ aus nach unten gerechnet werden müssen; die von der Axe nach oben gerechneten Werthe der y sind ja positiv eingeführt. Demnach liefert hier f_5 ein statisches Moment gleich $-H \cdot \overline{g''e''}$, und daher ist das statische Moment der ganzen Fläche, bezogen auf die Axe $X''X''$, gleich $H \cdot \overline{a''g''}$.

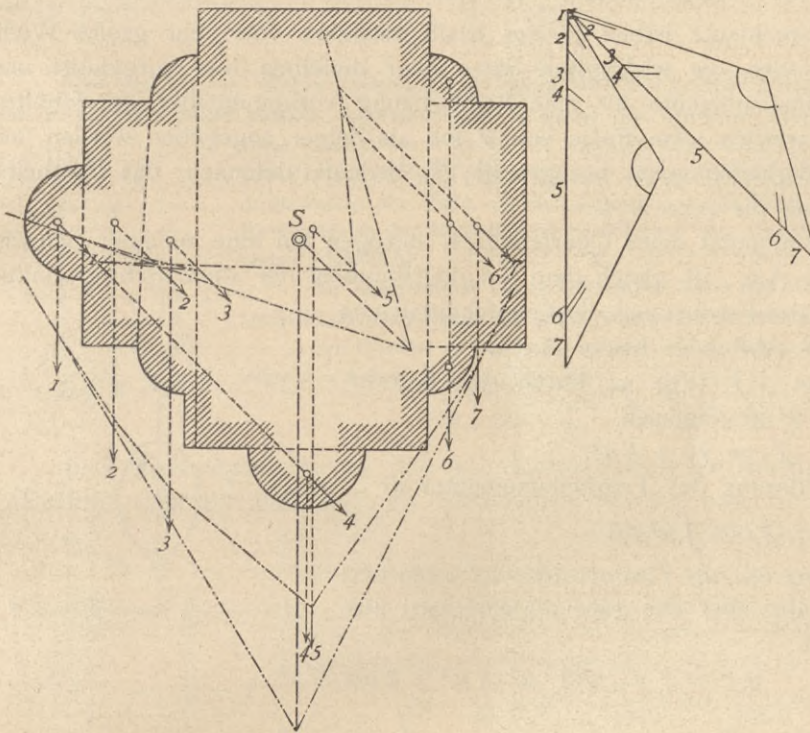
Demnach ist allgemein nachgewiesen: Das statische Moment einer Fläche F , bezogen auf eine Axe XX , wird erhalten, wenn man das von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf dieser Axe ab-

gefchnittene Stück (ag , bezw. $a'g'$, $a''g''$) mit dem Polabstand H multiplicirt. Dabei muß das Stück ag auf dem Längenmaßstabe, der Polabstand H auf dem Flächenmaßstabe gemessen werden, nach welchem die Werthe von f aufgezeichnet sind.

Rückt die Axe XX weiter nach oben, so wird das von den äußersten Seilpolygon-Seiten auf derselben abgefchnittene Stück immer kleiner; geht die Axe durch den Schnittpunkt E der äußersten Seilpolygon-Seiten, so ist das abgefchnittene Stück gleich Null; also wird auch das statische Moment in Bezug auf diese Axe gleich Null; dieselbe ist also eine Schwerpunktsaxe. Hieraus folgt: Die durch den Schnittpunkt E der äußersten Seilpolygon-Seiten parallel zu XX gelegte Axe enthält den Schwerpunkt der Fläche.

Das soeben gefundene Ergebnis folgt auch mit Nothwendigkeit aus nachstehender Ueberlegung. Da die Flächen als Kräfte eingeführt sind, so kann man annehmen, diese Kräfte seien die Gewichte der einzelnen Theile einer an allen Stellen gleich starken Platte, welche dieselbe Form hat, wie die gegebene

Fig. 42.



Fläche, und in eben solche Theile getheilt ist, wie diese. Um die wirklichen Gewichte zu erhalten, braucht man nur alle Werthe f mit demselben Factor γ , dem Gewichte der Flächeneinheit, zu multipliciren. Da man aber die Platte aus beliebigem Material hergestellt und beliebig stark annehmen kann, so ist γ ganz beliebig, kann also auch gleich 1 gesetzt werden; die Werthe f können demnach auch als die Gewichte selbst angesehen werden. Die Mittelkraft aller dieser parallel gerichteten Kräfte geht demnach durch den Schwerpunkt der Fläche; sie geht aber auch durch den Schnittpunkt der äußersten Seilpolygon-Seiten und

ist der Richtung der anderen Kräfte parallel. Die durch diesen Schnittpunkt parallel zur Axe XX gezogene Linie ist also die Mittelkraft nach Richtung und Lage und geht durch den Schwerpunkt. Das Gleiche gilt von jeder anderen beliebigen Lage, welche für die Richtung der Axe, also auch der Kräfte angenommen wird. Man kann demnach leicht noch eine zweite Axe finden, auf welcher der Schwerpunkt liegt; der Schnittpunkt beider Axen ist dann der gesuchte Schwerpunkt.

Die gezeigte graphische Ermittlung des Schwerpunktes ist besonders bei unregelmäßigen Querschnitten empfehlenswerth; Fig. 42 zeigt diese Bestimmung für den Querschnitt eines Vierungspeilers.

c) Trägheitsmomente und Centrifugalmomente.

Wird jedes Theilchen df einer Querschnittsfläche F mit dem Product uv seiner senkrecht genommenen Abstände von zwei Axen AA und BB multiplicirt (Fig. 43) und die Summe aller dieser Producte gezogen, so erhält man einen Ausdruck

$$\mathcal{F}_{AB} = \int uv df,$$

49-
Erläuterung.

welchen man das Centrifugalmoment des Querschnittes F für die Axen AA und BB nennt. Fallen beide Axen zusammen, so geht der Ausdruck in

$$\mathcal{F}_A = \int v^2 df$$

über, wenn BB mit der ursprünglichen Lage von AA zusammenfällt, bezw. in

$$\mathcal{F}_B = \int u^2 df,$$

wenn AA mit der ursprünglichen Lage von BB zusammenfällt. Man nennt $\mathcal{F}_A = \int v^2 df$ das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche F für die Axe AA ; eben so bezeichnet man

$\mathcal{F}_B = \int u^2 df$ als das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Axe BB .

Die Trägheitsmomente haben in der Elasticitätslehre eine sehr große Wichtigkeit; deshalb sollen die wichtigsten Sätze über dieselben hier vorgeführt und zugleich die Trägheitsmomente für eine Reihe häufig vorkommender Querschnittsformen entwickelt werden. Am Fusse von \mathcal{F} soll als Zeiger angegeben werden, auf welche Axe das Trägheitsmoment bezogen ist; \mathcal{F}_A bedeutet demnach: das Trägheitsmoment bezogen auf die Axe AA .

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes, bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsaxe parallele Axe, ist gleich dem Trägheitsmoment für diese Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus der Querschnittsfläche in das Quadrat des Abstandes beider Axen.

Geht die Axe YY (Fig. 44) durch den Schwerpunkt der Fläche, so ist demnach

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_Y + F a^2.$$

Nach der Erklärung des Trägheitsmomentes ist

$$\mathcal{F}_A = \int u^2 df.$$

Die Summirung soll alle Flächentheile df umfassen; die Integration ist also über den ganzen Querschnitt auszudehnen. Nun ist

$$u = a + z \quad \text{und} \quad u^2 = a^2 + 2az + z^2,$$

also

$$\mathcal{F}_A = \int u^2 df = a^2 \int df + 2a \int z df + \int z^2 df.$$

Es ist jedoch $\int df = F$ und $\int z^2 df = \mathcal{F}_Y$, ferner nach der Lehre vom Schwerpunkt $\int z df = 0$, weil YY eine Schwerpunktsaxe ist; mithin in der That

$$\mathcal{F}_A = F a^2 + \mathcal{F}_Y \dots \dots \dots 18.$$

Im Folgenden sollen für einige häufig vorkommende Querschnittsformen die Trägheitsmomente rechnerisch ermittelt werden.

α) Trägheitsmoment für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 45).

Für diesen ist, bezogen auf die Schwerpunktsaxe YY ,

$$\mathcal{F}_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 df.$$

Fig. 43.

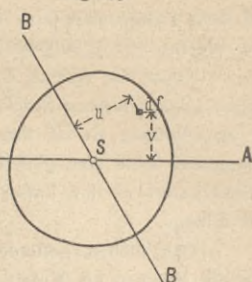
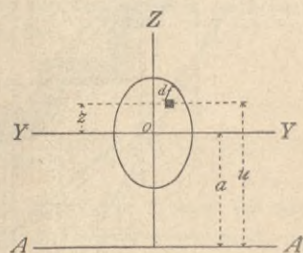


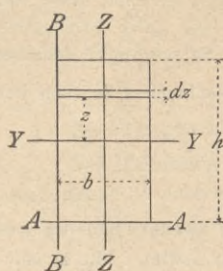
Fig. 44.



50.
Trägheitsmomente für zur Schwerpunktsaxe parallele Axen.

51.
Trägheitsmomente für rechteckige Querschnitte.

Fig. 45.



Da für alle Theile eines zu YY parallelen Streifens z dieselbe GröÙe hat, so kann man $df = b dz$ setzen, und es wird

$$\mathcal{I}_Y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \left[\frac{b z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] = \frac{b h^3}{12} \quad \dots 19.$$

Das Trägheitsmoment für eine Axe AA , welche mit einer Seite des Rechteckes zusammenfällt, ist nach Gleichung 18

$$\mathcal{I}_A = \frac{b h^3}{12} + b h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{b h^3}{12} + \frac{b h^3}{4} = \frac{b h^3}{3}.$$

Für eine zu YY normal stehende Schwerpunktsaxe ZZ ist nach Obigem

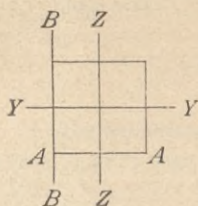
$$\mathcal{I}_Z = \frac{h b^3}{12},$$

und für die Axe BB ist

$$\mathcal{I}_B = \frac{h b^3}{3}.$$

Man kann dies in Worten folgendermaßen ausdrücken: Das Trägheitsmoment eines Rechteckes für eine zu einer der Seiten parallele Schwerpunktsaxe ist gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch zwölf; für eine mit einer Seite des Rechteckes zusammenfallende Axe ist das Trägheitsmoment dagegen gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch drei. Als Breite gilt die Abmessung des Rechteckes in der Richtung der betreffenden Axe, als Höhe die zu ersterer senkrechte Abmessung.

Fig. 46.



Mit Zuhilfenahme dieses Ergebnisses kann man für eine große Zahl von Querschnitten der Praxis die Trägheitsmomente leicht finden.

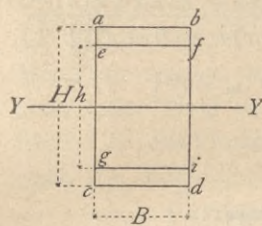
Das Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten; ist seine Seitenlänge $b = h = d$, so wird (Fig. 46)

$$\mathcal{I}_Z = \mathcal{I}_Y = \frac{d^4}{12} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_A = \mathcal{I}_B = \frac{d^4}{3}.$$

β) Trägheitsmomente für aus Rechtecken zusammengesetzte Querschnitte. Die für das Rechteck gefundenen Werthe von \mathcal{I} werden vielfach angewendet, um für zusammengesetzte Querschnitte die Trägheitsmomente zu finden.

52.
Symmetrische
I- u. L-förmige
Querschnitte.

Fig. 47.



Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Fig. 47 ist gleich der Differenz des Trägheitsmomentes des ganzen Rechteckes $abcd$ weniger dem Trägheitsmoment des Rechteckes $efgh$, d. h. es ist

$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{12} B H^3 - \frac{1}{12} B h^3 = \frac{B}{12} (H^3 - h^3).$$

Für den symmetrischen I-förmigen (Fig. 48) und für den L-förmigen Querschnitt (Fig. 49) ergibt sich hiernach

$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{12} \left\{ b [h^3 - (h - 2t)^3] + d (h - 2t)^3 \right\}.$$

Dieser für die Berechnung unbequeme Ausdruck kann wesentlich vereinfacht werden. Wird der Abstand der Schwerpunkte des oberen, bezw. unteren Rechteckes mit η bezeichnet, also $h - 2t = \eta$ gesetzt und im letzten Gliede obigen Ausdruckes statt $h - 2t$ (nicht ganz genau, jedoch mit kleinem Fehler) η eingeführt, so ist

Fig. 48.

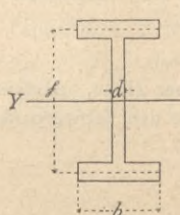
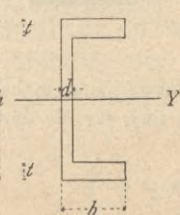


Fig. 49.



$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{2} b t (h^2 - 2 h t + t^2) + \frac{1}{6} b t^3 + \frac{d \eta^3}{12}.$$

Wir setzen $bt = f$; alsdann wird

$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{2} f (h - t)^2 + \frac{f t^2}{6} + \frac{d \eta^3}{12}.$$

$\frac{f t^2}{6}$ ist gegen das erste Glied sehr klein und kann ohne

Bedenken vernachlässigt werden; alsdann ist der Ausdruck für das Trägheitsmoment:

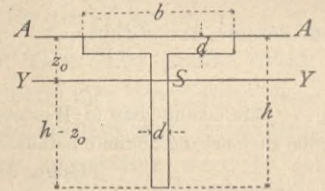
$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{2} f h^2 + \frac{d h^3}{12} = \frac{h^2}{2} \left(f + \frac{d h}{6} \right) \dots \dots \dots 20.$$

Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche f des oberen Rechteckes im Schwerpunkt desselben vereinigt, also im Abstände $\frac{h}{2}$ von der Axe $Y Y$, und eben so die des unteren Rechteckes in dem bez. Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Querschnittes

$$i = 2f \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{f h^2}{2}.$$

Dies ist aber der erste Theil unseres obigen Ausdruckes 20 für \mathcal{I}_Y ; der zweite Theil des Ausdruckes stellt demnach den Beitrag dar, welchen der Steg zum Trägheitsmoment leistet. Mit ziemlich genauer Annäherung erhält man demnach das Trägheitsmoment des symmetrischen I-förmigen Querschnittes, indem man die Querschnittsfläche des oberen und unteren Gurtes vermehrt um je $\frac{1}{6}$ der Querschnittsfläche des Steges (bis zu den Gurtfchwerpunkten gerechnet), im Schwerpunkt des oberen und unteren Gurtes vereinigt denkt und dafür das Trägheitsmoment aufsucht.

Fig. 50.



53.
T-förmige
Querschnitte.

Wird beim T-förmigen Querschnitt (Fig. 50) der Abstand des Schwerpunktes von der durch die eine Kante gelegten Axe AA mit z_0 bezeichnet, so ist nach der Schwerpunktslehre

$$F z_0 = d (b - d) \frac{d}{2} + d h \frac{h}{2}, \text{ ferner } F = (b - d) d + d h.$$

Sonach ist

$$z_0 = \frac{(b - d) d^2 + d h^2}{2 [(b - d) d + d h]} = \frac{(b - d) d + h^2}{2 (b - d) + 2 h},$$

und das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe $Y Y$

$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{3} [d (h - z_0)^3 + b z_0^3 - (b - d) (z_0 - d)^3].$$

Das Trägheitsmoment für die Axe AA ist

$$\mathcal{I}_A = \frac{1}{3} [d h^3 + (b - d) d^3].$$

54.
Unsymmetrische
I-förmige
Querschnitte.

Für den unsymmetrischen I-förmigen Querschnitt (Fig. 51) ist, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält

$$z_0 = \frac{\frac{d h \cdot h}{2} + (b - d) t \left(h - \frac{t}{2} \right) + \frac{(B - d) t^2}{2}}{d h + (b - d) t + (B - d) t} = \frac{d h^2 + (b - d) t (2 h - t) + (B - d) t^2}{2 [d h + (b - d) t + (B - d) t]}$$

und

$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{3} [b (h - z_0)^3 + B z_0^3 - (b - d) c^3 - (B - d) (z_0 - t)^3].$$

Fig. 51.

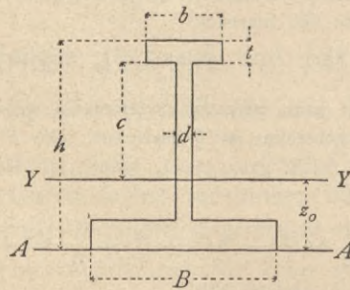
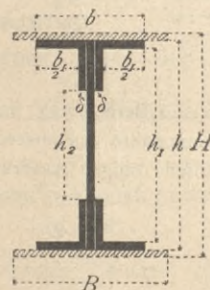


Fig. 52.



55.
Blechträger-
Querschnitte.

Bei den Querschnitten der Blechträger (Fig. 52) liegt der Schwerpunkt in halber Höhe. Alsdann ist, falls nur das lothrechte Blech und die 4 Winkelleifen vorhanden sind, für die durch den Schwerpunkt gelegte wagrechte Axe

$$\mathcal{I} = \frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3 - 2 \delta h_2^3).$$

Falls noch Blechplatten vorhanden sind, ermittelt man ihre Trägheitsmomente am besten besonders und zählt sie zum Trägheitsmoment des Querschnittes ohne Deckplatten. Das Trägheitsmoment dieser Deckplatten (Fig. 52) ist alsdann

$$\Delta \mathcal{J} = \frac{1}{12} B (H^3 - h^3).$$

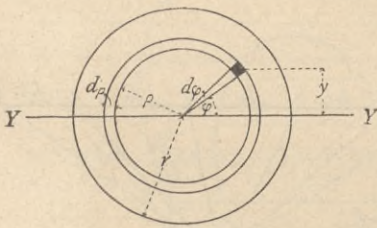
γ) Trägheitsmoment für kreisförmige Querschnitte (Fig. 53).

Der Halbmesser des kreisförmigen Querschnittes sei r , der Durchmesser d . Zuerst soll das Trägheitsmoment der oberen Halbkreisfläche für die Axe YY bestimmt werden. Man zerlege die Kreisfläche in schmale Ringe, deren Mittelpunkte mit demjenigen der gegebenen Fläche zusammenfallen, und bestimme zunächst das Trägheitsmoment einer solchen Ringfläche. Der Halbmesser eines solchen Ringes sei ρ , seine sehr geringe Breite sei $d\rho$. Der Flächeninhalt eines Theilchens df dieser Ringfläche, welches zum Mittelpunktswinkel $d\varphi$ gehört, ist $df = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$, und sein Trägheitsmoment bezogen auf die Axe YY

$$d(i) = y^2 \cdot df = \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \rho^3 d\rho \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Das Trägheitsmoment des halben Ringes wird erhalten, indem man für alle Theile df desselben $d(i)$ aufsucht, d. h. indem man zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integrirt, wobei natürlich ρ und $d\rho$ als Festwerthe (Constante) zu betrachten sind, da sie für alle Theilchen des Ringes gleiche Gröfse haben.

Fig. 53.



Man erhält

$$i = \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \rho^3 d\rho \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_0^\pi = \frac{\rho^3 d\rho \cdot \pi}{2}.$$

Um aus diesem Trägheitsmomente einer halben Ringfläche dasjenige der halben Kreisfläche zu erhalten, beachte man, dass die letztere sich aus lauter halben Ringflächen zusammensetzt; demnach ist

$$\frac{\mathcal{J}}{2} = \Sigma (i) = \int_0^r \rho^3 d\rho \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} r^4,$$

und das Trägheitsmoment der ganzen Kreisfläche für die Axe YY

$$\mathcal{J} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \dots \dots \dots 21.$$

Bei allen Angaben von Trägheitsmomenten ist zu beachten: Die Mafseinheit der Trägheitsmomente ist die Längeneinheit in der vierten Potenz (also entweder: Meter zur vierten, oder Centimeter zur vierten, oder Millimeter zur vierten Potenz etc.); denn jeder Theil des Trägheitsmomentes, also auch das Ganze, ist das Product einer Fläche in das Quadrat einer Länge. Deshalb ist stets mit der ziffermäfsigen Gröfse auch die Mafseinheit des Trägheitsmomentes anzugeben.

56.
Kreisförmige
Querschnitte.

Um ein Trägheitsmoment, welches in cm^4 angegeben ist, in ein solches zu verwandeln, dessen Mafseinheit mm^4 sind, muss man mit $10^4 = 10000$ multipliciren; umgekehrt ist mit $10^4 = 10000$ zu dividiren, wenn ein in mm^4 gegebenes Trägheitsmoment in eines mit der Mafseinheit cm^4 verwandelt werden soll.

Für die Statik und die Aufgaben derselben empfiehlt es sich, die Trägheitsmomente in cm^4 anzugeben.

Wenn die Querschnitte eine unregelmäfsige Form haben, so ist es oft vorthellhaft, die Trägheitsmomente graphisch zu ermitteln. Nennt man, wie oben, die einzelnen Flächentheile, in welche die ganze Querschnittsfläche zerlegt wird, $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$, die Abstände der Schwerpunkte derselben von derjenigen Axe XX , für welche das Trägheitsmoment gefucht wird, bezw. $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$, so ist

$$\mathcal{J} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = \Sigma (f y^2) = f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \dots,$$

$$\mathcal{J} = f_1 y_1 \cdot y_1 + f_2 y_2 \cdot y_2 + f_3 y_3 \cdot y_3 + \dots$$

57.
Mafseinheit für
die Trägheits-
momente.

58.
Graphische
Ermittelung der
Trägheits-
momente.

Nun sind $f_1 y_1, f_2 y_2, f_3 y_3 \dots$ die statischen Momente der einzelnen Flächen-
theile für die Axe XX ; setzt man $f_1 y_1 = m_1, f_2 y_2 = m_2, f_3 y_3 = m_3 \dots$, so wird

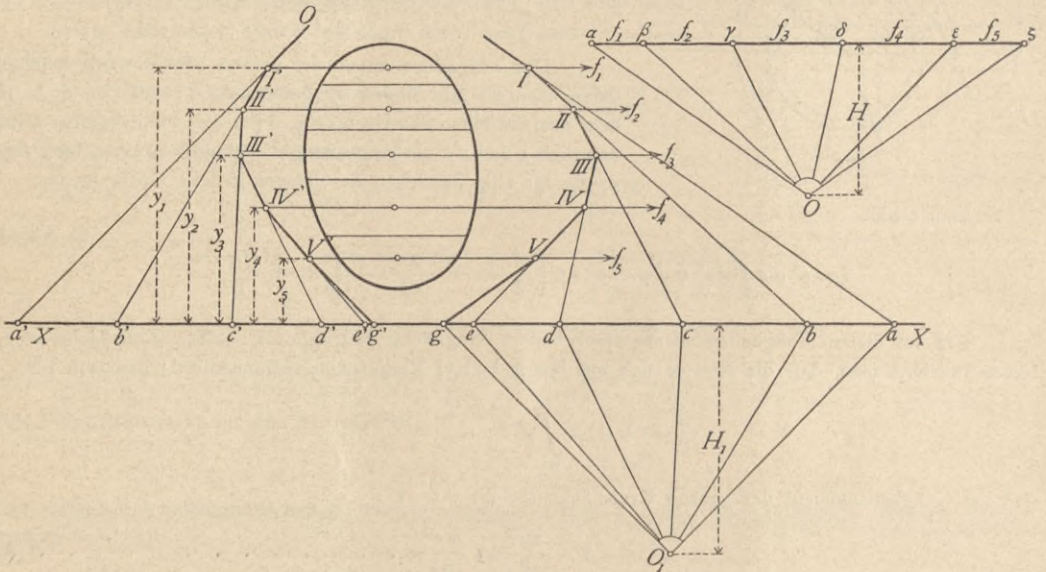
$$\mathcal{F} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots$$

59.
Culman'sches
Verfahren.

Man braucht also nur mit den Werthen $m_1, m_2, m_3 \dots$ genau so zu ver-
fahren, wie oben (in Art. 47, S. 31) mit den Werthen $f_1, f_2, f_3 \dots$, um die stati-
schen Momente von $m_1, m_2, m_3 \dots$, d. h. die Trägheitsmomente zu erhalten. Darauf
beruht das nachfolgende von *Culman* angegebene Verfahren (Fig. 54).

Man zerlege den Querschnitt in Streifen, die zu derjenigen Axe parallel sind, für welche das Träg-
heitsmoment gesucht wird, und ermittle zunächst, wie oben (in Art. 47, S. 31) gezeigt ist, die statischen
Momente für die Axe XX . Die Stücke $ab, bc, cd \dots$ sind den statischen Momenten proportional. Man

Fig. 54.



nehme nun einen neuen Pol O_1 an, ziehe die Strahlen $O_1 a, O_1 b, O_1 c \dots$ und construire für die Kräfte
 $m_1, m_2, m_3 \dots$, die in denselben Linien wirkend angenommen werden, wie die $f_1, f_2, f_3 \dots$, das zugehörige
Seilpolygon $O' I' II' III' \dots g' \dots$. Werden die Seilpolygoneiten über die Eckpunkte hinaus bis zu
den Schnittpunkten mit der Axe XX verlängert, so ist

$$\triangle I' a' b' \sim \triangle O_1 a b, \text{ also } \frac{\overline{a' b'}}{y_1} = \frac{\overline{a b}}{H_1}.$$

Es ist aber (siehe Art. 47, S. 31)

$$\overline{a b} = \frac{f_1 y_1}{H}, \text{ mithin } \overline{a' b'} = \frac{f_1 y_1^2}{H H_1} = \frac{i_1}{H H_1} \text{ und } i_1 = H H_1 \cdot \overline{a' b'}.$$

Eben so ergibt sich

$$\triangle II' b' c' \sim \triangle O_1 b c, \text{ mithin } \frac{\overline{b' c'}}{y_2} = \frac{\overline{b c}}{H_1} = \frac{f_2 y_2}{H H_1} \text{ und } \overline{b' c'} = \frac{f_2 y_2^2}{H H_1} = \frac{i_2}{H H_1};$$

fonach

$$i_2 = H \cdot H_1 \cdot \overline{b' c'}; \text{ eben so } i_3 = H \cdot H_1 \cdot \overline{c' d'} \dots$$

Man erhält demnach

$$\mathcal{F} = \Sigma (i) = H H_1 (\overline{a' b'} + \overline{b' c'} + \overline{c' d'} + \dots) = H H_1 \cdot \overline{a' g'}.$$

Das Trägheitsmoment der Fläche F für eine Axe XX ist also gleich dem von den äußersten Seiten
des Seilpolygons $O' I' II' III' \dots$ auf der Axe abgechnittenen Stücke $a' g'$, multiplicirt mit dem Producte
der beiden Polabstände H und H_1 .

Genau eben so, wie oben bei den statischen Momenten (siehe Art. 47, S. 31) nachgewiesen ist, ergibt
sich auch hier, daß die Strecke $\overline{a' g'}$ und H_1 auf dem Längenmaßstabe, H auf demjenigen Flächenmaß-

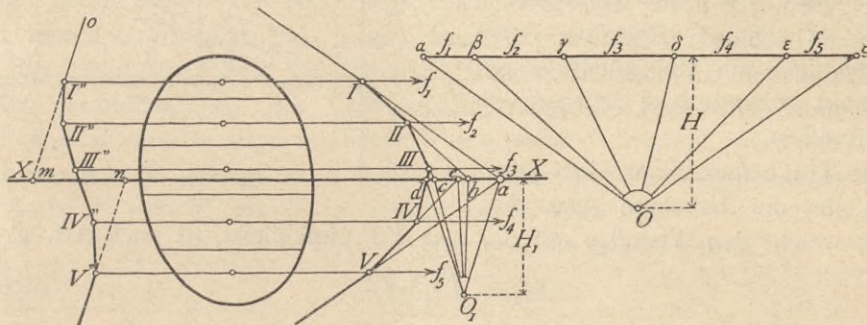
stabe zu messen ist, nach welchem $f_1, f_2, f_3 \dots$ aufgetragen sind; das Ergebnis ist jedoch das gleiche, wenn $\overline{a'g'}$ auf dem Flächenmaßstabe, H und H_1 auf dem Längenmaßstabe gemessen werden.

Ein Querschnitt sei in natürlicher Größe aufgezeichnet, $H = 5 \text{ cm}$ und $H_1 = 5 \text{ cm}$; ferner seien $f_1, f_2, f_3 \dots$ in einem Maßstabe aufgetragen, in welchem $1 \text{ cm} = 10 \text{ qcm}$ ist; alsdann wird, wenn $\overline{a'g'} = 4,6 \text{ cm}$ ist,

$$\mathcal{J} = 4,6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^4.$$

Wenn die Axe XX eine Schwerpunktsaxe ist (Fig. 55), so sind zunächst die statischen Momente genau wie oben gezeigt zu ermitteln; die statischen Momente der oberhalb von XX liegenden Flächenteile haben entgegengesetzten Sinn, wie diejenigen der unterhalb von XX liegenden Flächen, weil die

Fig. 55.



Hebelsarme verschiedene Vorzeichen haben. Der Sinn der einzelnen Momente ist ab, bc, cd, de, ea ; Anfangspunkt a und Endpunkt a fallen zusammen. Wird jetzt der Pol O_1 angenommen, so sind die Strahlen $O_1a, O_1b, O_1c, O_1d, O_1e, O_1a$; der letzte Strahl fällt mit dem ersten zusammen. Als Seilpolygon erhält man $O I'' II'' \dots V''$, und es ist

$$\mathcal{J}_S = H \cdot H_1 \cdot \overline{m n}.$$

Ein anderes Verfahren hat Mohr angegeben.

Wenn die statischen Momente nach dem in Art. 47 (S. 31) vorgeführten Verfahren konstruiert sind (Fig. 54), so ist der Flächeninhalt des Dreiecks Iab

$$\varphi_1 = \frac{\overline{ab} \cdot y_1}{2} = \frac{f_1 y_1}{H} \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{f_1 y_1^2}{2H} = \frac{i_1}{2H}$$

und der Flächeninhalt des Dreiecks $IIbc$

$$\varphi_2 = \frac{\overline{bc} \cdot y_2}{2} = \frac{f_2 y_2}{H} \cdot \frac{y_2}{2} = \frac{f_2 y_2^2}{2H} = \frac{i_2}{2H}.$$

Eben so kann man für jeden Flächenteil f nachweisen, daß sein Trägheitsmoment für eine Axe XX gleich ist dem Flächeninhalte des Dreiecks, welches von der Axe und den das betreffende Flächenteilchen begrenzenden Seilpolygonseiten eingeschlossen ist, multiplicirt mit dem doppelten Polabstand. Es ist also

$$i_1 = 2H\varphi_1, \quad i_2 = 2H\varphi_2, \quad i_3 = 2H\varphi_3 \dots$$

und

$$\mathcal{J} = \Sigma(i) = 2H\Sigma(\varphi) = 2HF_1,$$

wenn $F_1 = \Sigma(\varphi)$ ist.

Handelt es sich um das Trägheitsmoment für die Schwerpunktsaxe (Fig. 55), so bleibt Alles giltig, und es wird

$$\mathcal{J}_S = 2HF_2,$$

wenn F_2 den Flächeninhalt der Figur $II III IV V a I$ bedeutet.

Handelt es sich um das Trägheitsmoment eines Querschnittes für eine beliebige, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe, so kann man dasselbe aus demjenigen für die parallele Schwerpunktsaxe nach Art. 50 (S. 34) ermitteln; dieses letztere ist aber im Vorstehenden nur für sehr einfache Querschnittsformen und selbst bei diesen nur für einige wenige Lagen der Axen rechnerisch bestimmt. Für beliebig

60.
Mohr'sches
Verfahren.

61.
Trägheits-
momente für
verschiedene
Schwerpunkts-
axen.

liegende Axen, also beispielsweise beim Rechteckquerschnitt für eine Axe, welche keiner Seite parallel ist, wird die Berechnung meist recht umständlich. Dagegen ist die Ermittlung sehr bequem, wenn man das gefuchte Trägheitsmoment für eine beliebige Schwerpunktsaxe durch diejenigen für zwei andere Schwerpunktsaxen ausdrückt, welche einen beliebigen, zweckmäßig einen rechten Winkel mit einander bilden.

Die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten zweier in einem beliebigen Punkte A der Querschnittsebene senkrecht zu einander stehender Axen und demjenigen für eine andere durch diesen Punkt gehende Axe ergeben sich folgendermaßen.

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes für die beliebige Axe AY_1 (Fig. 56), welche den Winkel α mit der Axe YY einschließt, ist nach Art. 49 (S. 33)

$$\mathcal{I}_{Y_1} = \int z_1^2 df.$$

Nach Fig. 56 ist

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

folglich

$$\mathcal{I}_{Y_1} = \int z^2 \cos^2 \alpha \cdot df + \int y^2 \sin^2 \alpha \cdot df - \int 2yz \sin \alpha \cos \alpha \cdot df.$$

Die Integration ist über den ganzen Querschnitt auszudehnen; bei derselben ist α constant; da nun

$$\int z^2 df = \mathcal{I}_Y, \quad \int y^2 df = \mathcal{I}_Z \quad \text{und} \quad \int yz \cdot df = \mathcal{I}_{YZ}$$

ist, so folgt

$$\mathcal{I}_{Y_1} = \mathcal{I}_Y \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_Z \sin^2 \alpha - \mathcal{I}_{YZ} \sin 2\alpha \dots \dots \dots 22.$$

Das Trägheitsmoment für die Axe AZ_1 wird erhalten, indem man an Stelle von α den Winkel einführt, welchen AZ_1 mit YY bildet, d. h. $90 + \alpha$. Dann ergibt sich

$$\mathcal{I}_{Z_1} = \mathcal{I}_Z \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_Y \sin^2 \alpha + \mathcal{I}_{YZ} \sin 2\alpha \dots \dots \dots 23.$$

Die beiden Gleichungen 22 u. 23 geben die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Lage der Schweraxen an. Besonders wichtig ist die Lage der Axen, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird. \mathcal{I}_{Y_1} wird ein Maximum für den Werth von α , für welchen

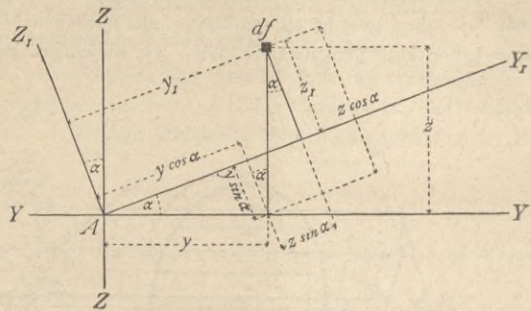
$$\frac{d\mathcal{I}_{Y_1}}{d\alpha} = -2\mathcal{I}_Y \cos \alpha \sin \alpha + 2\mathcal{I}_Z \sin \alpha \cos \alpha - 2\mathcal{I}_{YZ} \cos 2\alpha = 0,$$

d. h. für welchen $(\mathcal{I}_Z - \mathcal{I}_Y) \sin 2\alpha = 2\mathcal{I}_{YZ} \cos 2\alpha$ wird. Es ist also

$$\text{tg } 2\alpha_{max} = \frac{2\mathcal{I}_{YZ}}{\mathcal{I}_Z - \mathcal{I}_Y} \dots \dots \dots 24.$$

Dieser Gleichung genügen zwei Winkelgrößen 2α , welche um 180 Grad verschieden sind, da $\text{tg}(180 + 2\alpha) = \text{tg } 2\alpha$ ist. Es giebt also zwei Axen, für welche ein Maximum, bezw. Minimum des Trägheitsmomentes stattfindet, und diese beiden Axen bilden mit der angenommenen Axe YY die Winkel α_{max} , bezw. $90 + \alpha_{max}$; diese beiden Axen stehen fönach senkrecht zu einander. Ob Maximum oder Mini-

Fig. 56.



imum für die eine oder andere Axe stattfindet, ergibt die zweite Differentiation. Man findet leicht, daß die zweiten Abgeleiteten nach α für zwei Winkel, welche um 90 Grad verschieden sind, entgegengesetztes Vorzeichen haben; entspricht demnach dem Winkel α das Maximum, so tritt für den Winkel $(90 + \alpha)$ das Minimum des Trägheitsmomentes ein.

Es folgt daraus der Satz: Für jeden Punkt in der Ebene des Querschnittes ist eine Axe vorhanden, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum, eine andere, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird. Beide Axen stehen zu einander senkrecht.

62.
Hauptaxen.

Man nennt diese Axen die Hauptaxen. Diejenige, für welche das Trägheitsmoment seinen Größtwerth hat, nennt man die erste Hauptaxe, diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird, heißt die zweite Hauptaxe.

Die Veränderlichkeit des Centrifugalmomentes \mathcal{F}_{YZ} mit der Aenderung der Axen Y und Z kann in ganz ähnlicher Weise ermittelt werden, wie oben für das Trägheitsmoment \mathcal{F} gezeigt ist. Bezeichnet man das Centrifugalmoment für die beiden Axen Y_1 und Z_1 mit $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1}$ und beachtet, daß

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha \quad \text{und} \quad y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

ist, so wird

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 df = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(z \cos \alpha - y \sin \alpha) df,$$

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int y z df + \frac{\sin 2 \alpha}{2} \left(\int z^2 df - \int y^2 df \right),$$

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \mathcal{F}_{YZ} \cos 2 \alpha + \frac{\sin 2 \alpha}{2} (\mathcal{F}_Y - \mathcal{F}_Z) \dots \dots \dots 25.$$

$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1}$ wird gleich Null für $(\mathcal{F}_Y - \mathcal{F}_Z) \sin 2 \alpha = -2 \mathcal{F}_{YZ} \cos 2 \alpha$, sonach für

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = - \frac{2 \mathcal{F}_{YZ}}{\mathcal{F}_Y - \mathcal{F}_Z} = \frac{2 \mathcal{F}_{YZ}}{\mathcal{F}_Z - \mathcal{F}_Y}.$$

Dies ist derselbe Werth, für welchen nach Gleichung 24 Maximum, bezw. Minimum des Trägheitsmomentes stattfindet. Für die Hauptaxen ist sonach

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 df = 0.$$

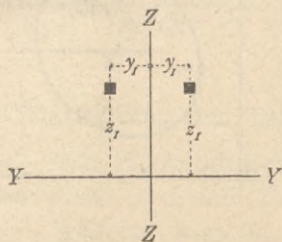
Für viele Querschnitte ist hierdurch ein bequemes Kennzeichen zur Bestimmung der Hauptaxen gefunden. Man suche diejenigen Axen, für welche $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = 0$ ist; alsdann sind die gefundenen Axen die Hauptaxen. Es genügt, eine Hauptaxe zu suchen, da nach Früherem die andere mit derselben stets einen Winkel von 90 Grad einschließt.

Bei sämtlichen zu einer oder mehreren Axen symmetrisch liegenden Querschnitten sind die Symmetriexen auch zugleich die Hauptaxen. Denn sei etwa die Z -Axe eine Symmetrieaxe, so entspricht jedem df mit den Coordinaten y_1, z_1 ein df mit den Coordinaten $-y_1, z_1$ (Fig. 57). Die Beiträge der beiden df zu $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1}$ sind also

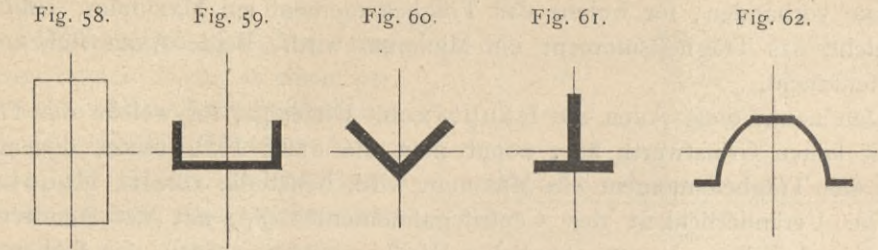
$$df \cdot y_1 z_1 - df \cdot y_1 z_1 = 0.$$

Genau eben so ist es mit sämtlichen übrigen Querschnittstheilen; die Summe der Beiträge je zweier symmetrisch liegender Flächentheile ist gleich Null, so daß also auch die Gesamtsomme $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 df = 0$ ist.

Fig. 57.



Bei den in Fig. 58 bis 62 dargestellten Querschnitten sind die Haupttaxen angegeben. In den im vorhergehenden Halbbande dieses »Handbuches« mitgetheilten Tabellen über die »Deutschen Normal-Profile für Walzeisen« sind die Trägheitsmomente für solche Axen mit aufgenommen worden, welche beim Berechnen von Hochbau-Constructionen eine Rolle spielen.



63.
Wahl der Haupttaxen als Axen der Y und Z.

Wählt man die Haupttaxen als Axen der Y und Z (Fig. 57), so ist für diese nach Obigem $\int y z df = \mathcal{F}_{YZ} = 0$; mithin ist, wenn man das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine Hauptaxe mit A, dasjenige in Bezug auf die andere mit B bezeichnet, in den Gleichungen 22, 23 u. 25 für \mathcal{F}_Y und \mathcal{F}_Z bzw. A und B, so wie für $\mathcal{F}_{YZ} = 0$ einzusetzen. Man erhält für diese Lage der Haupttaxen:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{Y_1} &= A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha \\ \mathcal{F}_{Z_1} &= A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha \\ \mathcal{F}_{Y_1 Z_1} &= (A - B) \frac{\sin 2 \alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 26.$$

Sind A und B, d. h. die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = A,$$

d. h. \mathcal{F}_{Y_1} ist alsdann von α unabhängig, also für jedes α gleich A.

Hieraus folgt: Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich groß, so sind alle Trägheitsmomente gleich groß.

64.
Centrifugal-momente.

Bei vielen statischen Untersuchungen ist es wichtig, die Lage der Haupttaxen und die Größe der Werthe von A und B zu kennen. Für die Ermittlung dieser Werthe aber bedarf man nach vorstehenden Entwicklungen der Kenntniß des Centrifugalmomentes $\mathcal{F}_{YZ} = \int y z df$.

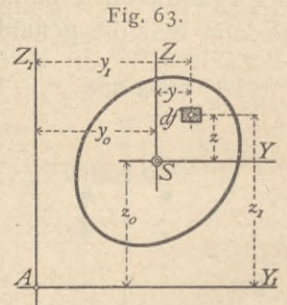
Legt man durch einen beliebigen Punkt A in der Ebene eines Querschnittes (Fig. 63) und durch den Schwerpunkt S desselben je zwei parallele Axen $A Y_1$ und $A Z_1$, bzw. SY und SZ, bezeichnet man die Coordinaten des Schwerpunktes für die ersten beiden Axen mit z_0 und y_0 , die Centrifugalmomente für die Axenpaare bzw. mit $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1}$ und \mathcal{F}_{YZ} , so ist

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \mathcal{F}_{YZ} + F y_0 z_0.$$

Denn es ist

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 df, \quad y_1 = y + y_0 \quad \text{und} \quad z_1 = z + z_0; \quad \text{also}$$

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \int (y + y_0) (z + z_0) df = \int y z df + y_0 \int z df + z_0 \int y df + y_0 z_0 \int df.$$



Nun ist $\int yz \, df = \mathcal{F}_{YZ}$, $\int df = F$, $\int z \, df = 0$ und $\int y \, df = 0$; die letzteren beiden Werthe ergeben sich, weil SY und SZ Schwerpunktsachsen sind (vergl. Art. 33, S. 26, unter α). Es wird somit

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \mathcal{F}_{YZ} + F y_0 z_0 \dots \dots \dots 27.$$

Wenn die Schwerpunktsachsen Hauptachsen sind, so ist $\mathcal{F}_{YZ} = 0$, demnach

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0 \dots \dots \dots 28.$$

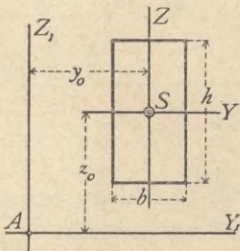
Diese Formel ist sehr bequem. Soll beispielsweise das Centrifugalmoment für die Axen AY_1 und AZ_1 (Fig. 64) und den Rechtecksquerschnitt ermittelt werden, dessen Seiten parallel zu den Axen sind, so lege man durch den Schwerpunkt zwei den ersteren bzw. parallele Axen SY und SZ ; alsdann wird

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0.$$

Fällt etwa A mit einer Ecke zusammen, so wird

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Fig. 64.



Beispiel. Es soll das Centrifugalmoment eines ungleichschenkeligen Winkeleisens (Fig. 65) für zwei durch seinen Schwerpunkt gelegte Axen ermittelt werden, welche den Winkeleisenschenkeln parallel sind.

Zerlegt man den Querschnitt in zwei Rechtecke, deren eines den ganzen lothrechten Schenkel enthält, deren anderes den wagrechten Schenkel nach Abzug des schon beim ersten mitberechneten Rechteckes in der Ecke bildet, und nennt man die Flächeninhalte F_1 und F_2 , so wie die Abstände der Einzelschwerpunkte von den Axen bzw. y_0', z_0', y_0'', z_0'' , so ist

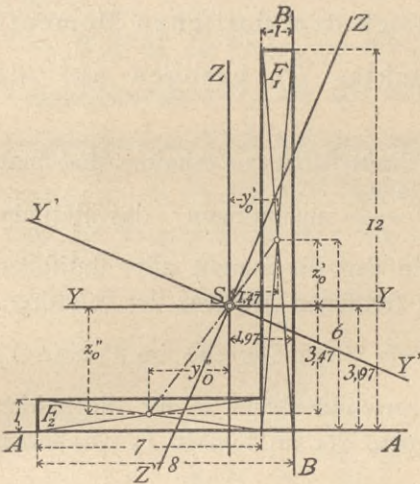
$$\mathcal{F}_{YZ} = F_1 y_0' z_0' + F_2 y_0'' z_0''.$$

Die Länge des großen und kleinen Schenkels sei bzw. 12 und 8 cm, die Stärke beider Schenkel 1,0 cm (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) und der Abstand des Schwerpunktes von der äußeren Kante des langen, bzw. kurzen Schenkels 1,97 cm, bzw. 3,97 cm; alsdann ist

$$\mathcal{F}_{YZ} = 12 \cdot 1 \cdot 1,47 (6 - 3,97) + 7 \cdot 1 \cdot 3,47 (4,5 - 1,97) = 97,26 \text{ cm}^4.$$

Die Einheit, in welcher die Centrifugalmomente erhalten werden, ist dieselbe, wie bei den Trägheitsmomenten, und es wird auf das hierüber in Art. 57 (S. 37) Gefagte verwiesen. Besondere Aufmerksamkeit ist aber hier auf die Vorzeichen der Coordinaten y_0 und z_0 zu verwenden. In obigem Beispiel sind für das erste Rechteck beide positiv, für das zweite Rechteck beide negativ einzuführen; das Product ist hier also für jedes der Theilrechtecke positiv.

Fig. 65.



d) Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente mit Hilfe von Kreisen.

Ein Flächentheilchen df hat für die beiden einander im Punkte P schneidenden Axen AA und BB das Centrifugalmoment $d\mathcal{F}_{AB} = u \cdot v \cdot df$, wenn u und v die senkrecht gemessenen Abstände des Theilchens df von den Axen bedeuten (Fig. 66). Bezeichnet man den Abstand desselben von dem Punkte P mit ρ , so wird $i_P = \rho^2 \, df$ das polare Trägheitsmoment von df für Punkt P genannt. Man lege durch P einen Kreis mit beliebigem Mittelpunkt M und beliebigem Halbmesser r , welcher die beiden Axen AA und BB aufser in P noch in den Punkten A'

und B' schneidet, verlängere die Linie df . P bis zum zweiten Schnittpunkte C' mit dem Kreise, ziehe die Sehne $B'A'$ und falle von C' die Senkrechte $C'D'$ auf die Sehne $B'A'$; alsdann ergibt sich aus den Beziehungen zwischen Peripherie-, Tangenten- und Centriwinkeln

$$\begin{aligned} u &= \rho \sin \varphi_1, & v &= \rho \sin \varphi_2, \\ B'C' &= 2r \sin \varphi_2, & C'D' &= B'C' \sin \varphi_1, \\ \frac{C'D'}{C'D'} &= 2r \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2, \\ \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 &= \frac{C'D'}{2r}. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$d\mathcal{F}_{AB} = uv \cdot df = df \cdot \rho^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \frac{\rho^2 df}{2r} \overline{C'D'},$$

und, wenn der Kreisdurchmesser mit d bezeichnet wird, ergibt sich

$$d\mathcal{F}_{AB} = \frac{\rho^2 df}{d} \overline{C'D'}$$

oder

$$d\mathcal{F}_{AB} = \frac{i_p}{d} \overline{C'D'}.$$

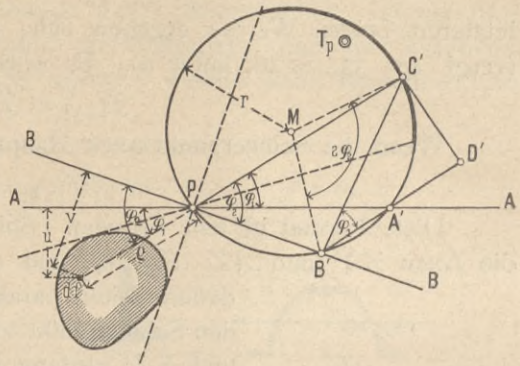
Das Centrifugalmoment von df für die beiden einander im Punkte P schneidenden Axen AA und BB ist also gleich dem statischen Momente des mit der Masse $\frac{i_p}{d}$ belasteten Kreispunktes C' , bezogen auf die Sehne $B'A'$ als Drehaxe.

Um das Centrifugalmoment der ganzen Querschnittsfläche zu erhalten, hat man in jedem Kreispunkte C' die betreffende Masse $\frac{\rho^2 df}{d}$ anzubringen, das statische Moment derselben für die Sehne $B'A'$ zu ermitteln und die Summe aller statischen Momente zu ziehen. Diese Summe ist gleich dem statischen Momente der resultirenden Masse, d. h. der Gesamtmasse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$. Diese Summe greife im Punkte T_p an; alsdann folgt: Das Centrifugalmoment der Querschnittsfläche F für die beiden Axen AA und BB ist gleich dem statischen Momente der im Punkte T_p wirkenden Masse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$ für die Sehne $B'A'$.

$\int \rho^2 df = \mathcal{F}_p$ ist das polare Trägheitsmoment der ganzen Querschnittsfläche für den Schnittpunkt P der Axen AA und BB . Man nennt den Punkt T_p den Trägheits-Hauptpunkt (auch wohl Trägheits-Schwerpunkt); den Punkt P heißt man den Pol.

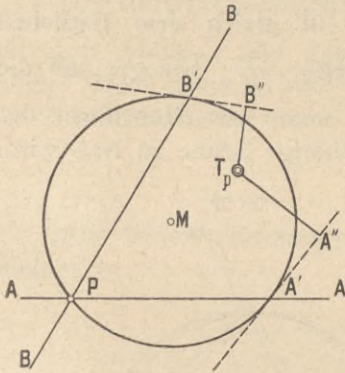
Fallen beide Axen zusammen, so geht das Centrifugalmoment in das Trägheitsmoment für die gemeinsame Axe über; die Sehne $B'A'$ wird alsdann zur Tangente in demjenigen Punkte, in welchem die gemeinsame Axe den Kreis zum zweiten Male schneidet. Demnach ist bewiesen:

Fig. 66.



Das Trägheitsmoment einer Fläche F für eine beliebige durch den Pol P gehende Axe BB ist gleich dem statischen Momente der im Trägheits-Hauptpunkte vereinigten Masse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$, bezogen auf die Tangente im Punkte B' des Kreifes.

Fig. 67.



Demnach ist (Fig. 67)

$$\text{für Axe } AA: \mathcal{F}_A = \frac{\mathcal{F}_p}{d} T_p A'';$$

$$\text{für Axe } BB: \mathcal{F}_B = \frac{\mathcal{F}_p}{d} T_p B''.$$

Nach Annahme des Kreifes und des Punktes P (falls es sich um Trägheitsmomente handelt) sind die Massen $\frac{\rho^2 df}{d}$ ganz bestimmte, an bestimmten Kreispunkten wirkende Werthe; alsdann ist auch der Punkt T_p seiner Lage nach genau bestimmt. Aendern die Axen gleichfalls ihre Lage, so bleibt doch der Punkt T_p unverändert an seiner Stelle. Man kann das Ziehen der Tangenten vermeiden. Für die Axe AA ist (Fig. 68)

$$\mathcal{F}_A = \frac{\mathcal{F}_p}{d} \overline{T_p E}.$$

Man verbinde A' mit dem Mittelpunkte M des Kreifes, falle von T_p die Senkrechte auf MA' ; alsdann erhält man F als Fußpunkt dieser Senkrechten, und es ist

$$\overline{FA'} = \overline{T_p E}.$$

FA' ist die Projection des Strahles $T_p A'$ auf den Radius MA' ; mithin ist das Trägheitsmoment \mathcal{F}_A für die beliebige Axe AA gleich $\frac{\mathcal{F}_p}{d}$, multiplicirt mit der Projection von $T_p A'$ auf den durch A' gezogenen Kreisdurchmesser.

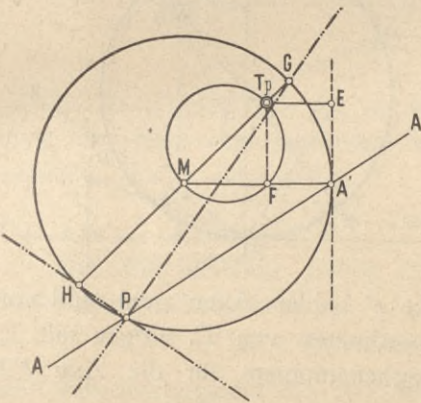
$\frac{\mathcal{F}_p}{d}$ ist für die verschiedenen Lagen der Axen unverändert; mithin verhalten sich die Trägheitsmomente für die verschiedenen durch P gelegten Axen wie die Werthe FA' . Das größte Trägheitsmoment wird sich also für diejenige Axe ergeben, für welche die Projection FA' den größtmöglichen Werth erreicht, das kleinste Trägheitsmoment für diejenige Axe, für welche die Projection FA' ihren kleinstmöglichen Werth hat. Verbindet man den Trägheits-Hauptpunkt T_p mit dem Mittelpunkte M des Kreifes, so schneidet dieser Durchmesser die Peripherie in den beiden Punkten G und H . Man sieht leicht, dass $T_p G$ der kleinste und $T_p H$ der größte mögliche Werth der Projection FA' ist; demnach wird

$$\mathcal{F}_{max} = \frac{\mathcal{F}_p}{d} \overline{T_p H} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{min} = \frac{\mathcal{F}_p}{d} \overline{T_p G}.$$

Die zugehörigen Axen sind PH , bzw. PG ; diese Axen sind in Art. 62 (S. 41) als Hauptaxen, die betreffenden Trägheitsmomente als Hauptträgheitsmomente bezeichnet worden; daher sind PH und PG die Hauptaxen.

66.
Größe des Trägheitsmomentes; Hauptaxen, Hauptträgheitsmomente.

Fig. 68.



Um die Hauptaxen zu erhalten, verlängere man demnach die Linie MT_p bis zu den Schnittpunkten G , bzw. H mit der Kreis-
peripherie und ziehe die Geraden PG und PH .

\overline{HG} ist ein Kreisdurchmesser; daher ist der Winkel HPG ein rechter Winkel, d. h. die Hauptaxen stehen auf einander senkrecht (vergl. Art. 62, S. 41).

67.
Conjugirte
Axen.

Das Centrifugalmoment für die Axen A und B ist gleich dem statischen Moment der im Trägheits-Hauptpunkt T_p vereinigten Masse $\frac{\mathcal{F}_p}{d}$, bezogen auf die Sehne $A'B'$ (Fig. 66); dasselbe wird zu Null werden, wenn der Hebelsarm der in T_p wirkenden Gesamtmasse für die zu den Axen gehörige Sehne zu Null wird. Dies findet für alle Sehnen, welche durch den Trägheits-Hauptpunkt gehen, statt. Daher ergeben sich für alle durch T_p gehenden Sehnen zwei Axen, deren Centrifugalmoment gleich Null ist. Man nennt solche Axen conjugirte Axen.

Conjugirte Axen sind beispielsweise PX und PY in Fig. 69; die zu den beiden Hauptaxen gehörige Sehne GH in Fig. 68 geht gleichfalls durch T_p , so dass folgt: Die beiden Hauptaxen sind conjugirte Axen.

Für die Hauptaxen ist das Centrifugalmoment gleich Null.

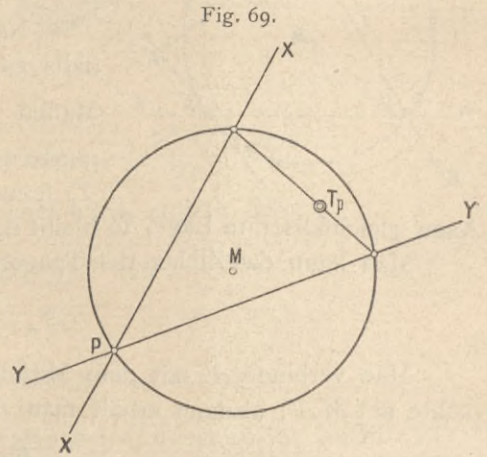


Fig. 69.

68.
Lage des
Trägheits-
hauptpunktes.

Nach Vorstehendem ist vor Allem wichtig, die Lage des Trägheits-Hauptpunktes T_p zu kennen. Man nehme zwei senkrecht zu einander stehende, im Punkte P einander schneidende Coordinatenaxen PY und PZ (Fig. 70) an und ermittle für diese Axen die Trägheitsmomente \mathcal{F}_Y , \mathcal{F}_Z und das Centrifugalmoment \mathcal{F}_{YZ} des Querschnittes. Dadurch ist auch das polare Trägheitsmoment \mathcal{F}_p bekannt; denn für rechtwinkelige Coordinatenaxen ist

$$\mathcal{F}_p = \int \rho^2 df = \int (y^2 + z^2) df = \int y^2 df + \int z^2 df = \mathcal{F}_z + \mathcal{F}_y;$$

also

$$\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_z + \mathcal{F}_y.$$

Nunmehr sollen die Coordinaten des Trägheits-Hauptpunktes T_p für einen Kreis gesucht werden, welcher durch den Schnittpunkt P beider Axen geht und von der Axe PY im Punkte P berührt wird; die Coordinaten von T_p mögen mit y_p , bzw. z_p bezeichnet werden. Dann ist das Trägheitsmoment für die Axe PY gleich dem statischen Moment der in T_p vereinigten Masse $\frac{\mathcal{F}_p}{d}$ für diejenige Tangente, welche im Schnittpunkte der Axe PY mit dem Kreise gezogen ist; dieser Schnittpunkt fällt aber hier mit P zusammen, da PY Tangente an den Kreis

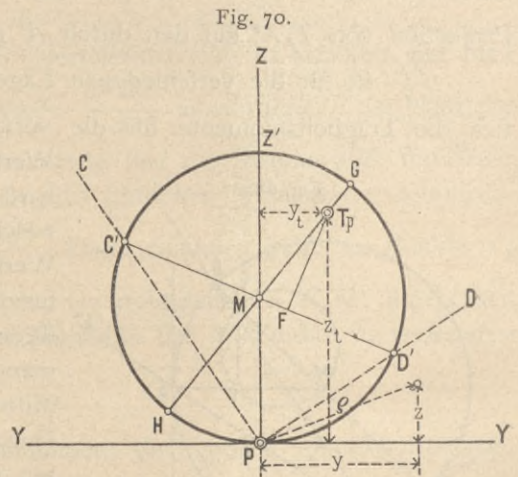


Fig. 70.

fein foll; daher ist das statische Moment für PY selbst gleich dem Trägheitsmoment \mathcal{F}_Y . Mithin wird

$$\mathcal{F}_Y = \frac{\mathcal{F}_p}{d} z_t.$$

Das Centrifugalmoment für die Axen PY und PZ ist gleich $\frac{\mathcal{F}_p}{d}$, multiplicirt mit dem Abstände des Punktes T_p von der zu den genannten Axen gehörigen Sehne. Diese Sehne ist aber die Axe PZ selbst, weil die beiden in Betracht kommenden Schnittpunkte der Axen Y und Z mit dem Kreise bzw. P und Z' sind; daher ist

$$\mathcal{F}_{ZY} = \frac{\mathcal{F}_p}{d} y_t.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Coordinaten des Trägheits-Hauptpunktes zu

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \mathcal{F}_{YZ} \frac{d}{\mathcal{F}_p} \\ z_t &= \mathcal{F}_Y \frac{d}{\mathcal{F}_p} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 29.$$

Da man d beliebig annehmen kann, so steht auf der rechten Seite beider Gleichungen nur Bekanntes. Wählt man d so, dass $\frac{\mathcal{F}_p}{d} = 1 \text{ cm}^3$ wird¹⁴⁾, d. h. macht man $d \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}^3 = \mathcal{F}_p \text{ cm}^4$, so vereinfachen sich obige Gleichungen für y_t und z_t , und man erhält

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \mathcal{F}_{YZ} \\ z_t &= \mathcal{F}_Y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 30.$$

Die Regel für die Auffuchung des Trägheits-Hauptpunktes lautet demnach: Man lege durch den Pol (bzw. wenn man die Trägheitsmomente für die Schwerpunktsaxen haben will, durch den Schwerpunkt) zwei senkrecht zu einander stehende Axen PY und PZ (in Fig. 70 sind sie nach rechts, bzw. oben positiv, nach links, bzw. unten negativ angenommen), schlage mit \mathcal{F}_p als Durchmesser einen Kreis, welcher durch P geht und von PY berührt wird, dessen Mittelpunkt also auf der Axe PZ liegt; man mache weiters $y_t = \mathcal{F}_{YZ}$ und $z_t = \mathcal{F}_Y$. Alsdann erhält man T_p .

Die im Punkte T_p vereinigte Masse ist nunmehr

$$\frac{\mathcal{F}_p}{d} = 1 \text{ cm}^3,$$

und die Hebelsarme für die in Betracht kommenden Tangenten geben nunmehr sofort, auf dem angenommenen Maßstab abgegriffen, die Größen der Trägheitsmomente. Es ist demnach

$$\mathcal{F}_{max} = \overline{T_p H} \cdot 1 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{min} = \overline{T_p G} \cdot 1 \text{ cm}^3.$$

Für zwei beliebige andere Axen \overline{PC} und \overline{PD} , welche rechtwinkelig zu einander stehen, erhält man

$$\mathcal{F}_C = \overline{FC'} \cdot 1 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_D = \overline{FD'} \cdot 1 \text{ cm}^3;$$

das Centrifugalmoment für diese Axen ist

$$\mathcal{F}_{CD} = \overline{T_p F} \cdot 1 \text{ cm}^3.$$

¹⁴⁾ Die Trägheitsmomente gehören der vierten Dimension, die Längen der ersten Dimension an; deshalb ist auf der rechten Seite als Benennung cm^3 hinzuzufügen.

In der Regel sind die Werthe \mathcal{F}_p , \mathcal{F}_Y und \mathcal{F}_{YZ} zu groß, als dass man sie unmittelbar auftragen könnte; man macht deshalb zweckmäÙig $\frac{\mathcal{F}_p}{d}$ nicht gleich 1 cm^3 , sondern giebt diesem Quotienten einen bequemen Werth, etwa 100 cm^3 , 200 cm^3 u. f. w. Wählt man

$$\frac{\mathcal{F}_p}{d} = 100 \text{ cm}^3,$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{\mathcal{F}_p}{100 \text{ cm}^3} \\ y_t &= \frac{\mathcal{F}_{YZ}}{100 \text{ cm}^3} \\ z_t &= \frac{\mathcal{F}_Y}{100 \text{ cm}^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 31.$$

Alsdann sind die Werthe für \overline{FC} , \overline{FD} , $\overline{T_pH}$, $\overline{T_pG}$, $\overline{T_pF}$ ebenfalls mit 100 cm^3 zu multipliciren, um die betreffenden Trägheits- und Centrifugalmomente zu erhalten.

Wenn \mathcal{F}_{YZ} gleich Null ist, z. B. wenn die Axe \mathcal{F}_Y oder \mathcal{F}_Z eine Symmetrieaxe ist, so wird auch y_t gleich Null; also dann liegt T_p auf der Z-Axe; wenn \mathcal{F}_{YZ} negativ ist, so wird auch y_t negativ, ist also dann nach links abzutragen.

Für einige häufig vorkommende Querschnittsformen sollen im Nachstehenden die Maximal- und Minimal-Trägheitsmomente, so wie die Trägheitskreise vorgeführt werden.

69.
Maximal- und
Minimal-
Trägheits-
momente für:
Winkelleifen.

a) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein gleichschenkeliges Winkelleifen (Fig. 71).

Fig. 71.

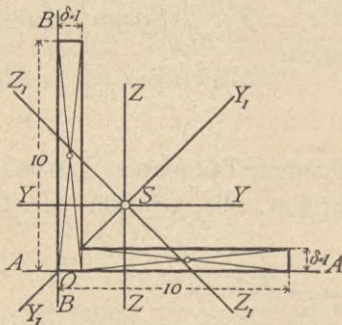
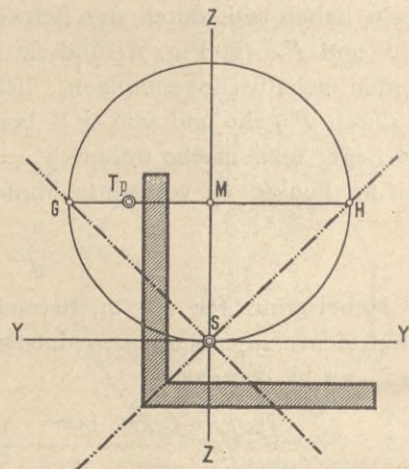


Fig. 72.



Hauptaxen sind die Symmetrieaxe $Y_1 Y_1$, welche den Winkel halbirt, und die zu dieser im Schwerpunkte senkrechte Axe $Z_1 Z_1$. Die erstere bildet mit der Axe $Y Y$ den Winkel $\alpha = 45$ Grad. Somit ist nach Gleichung 22

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \mathcal{F}_Y \cos^2 \alpha + \mathcal{F}_Z \sin^2 \alpha - \mathcal{F}_{YZ} \sin 2 \alpha,$$

und, da $\alpha = 45$ Grad ist,

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \frac{\mathcal{F}_Y + \mathcal{F}_Z}{2} - \mathcal{F}_{YZ}.$$

Die Werthe auf der rechten Seite vorstehender Gleichung sind leicht zu finden.

Für ein Winkeleisen mit 10 cm Schenkellänge, 1 cm Schenkelfärke (Deutsches Normal-Profil Nr. 10) ist $y_0 = z_0 = 2,87$ cm; mithin

$$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_A - F z_0^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_B - F y_0^2;$$

$$\mathcal{F}_Y = \frac{1 \cdot 10^3}{3} + \frac{9 \cdot 1^3}{3} - (10 + 9) 1 \cdot 2,87^2 = 179,83 \text{ cm}^4; \text{ eben so groß ist } \mathcal{F}_Z = 179,83 \text{ cm}^4;$$

$$\mathcal{F}_{YZ} = -10 \cdot 1 \cdot (5 - 2,87) (2,87 - 0,5) - 9 \cdot 1 \cdot (5,5 - 2,87) (2,87 - 0,5) = -106,58 \text{ cm}^4.$$

(Die Werthe der y und z sind nach rechts, bzw. oben als positiv eingeführt.) Es wird sonach

$$\mathcal{F}_{Y_1} = 179,83 + 106,58 = 286,41 \text{ cm}^4$$

$$\text{und } \mathcal{F}_{Z_1} = \mathcal{F}_Y \sin^2 \alpha + \mathcal{F}_Z \cos^2 \alpha + \mathcal{F}_{YZ} \sin 2\alpha = \frac{\mathcal{F}_Y + \mathcal{F}_Z}{2} + \mathcal{F}_{YZ} = 179,83 - 106,58 = 73,25 \text{ cm}^4.$$

Mithin ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A = 286,41 \text{ cm}^4 \text{ (Maximum),}$$

$$\mathcal{F}_{Z_1} = B = 73,25 \text{ cm}^4 \text{ (Minimum).}$$

Um den Trägheitskreis zu schlagen, ermittelt man

$$\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_Z + \mathcal{F}_Y = 2 \cdot 179,83 = 359,66 \text{ cm}^4 = \infty 360 \text{ cm}^4,$$

$$\text{und mit } \frac{\mathcal{F}_p}{d} = 100 \text{ cm}^3 \text{ wird}$$

$$d = 3,6 \text{ cm}, \quad z_t = \frac{\mathcal{F}_Y}{100 \text{ cm}^3} = 1,798 = \infty 1,8 \text{ cm},$$

$$y_t = \frac{\mathcal{F}_{YZ}}{100 \text{ cm}^3} = -1,066 \text{ cm} = \infty -1,07 \text{ cm}.$$

Man erhält T_p in Fig. 72, ferner

$$\mathcal{F}_{max} = \overline{T_p H} \cdot 100 \text{ cm}^3 = 2,86 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3$$

$$\mathcal{F}_{min} = \overline{T_p G} \cdot 100 \text{ cm}^3 = 0,73 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3.$$

β) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein ungleichschenkeliges Winkeleisen (Fig. 65, S. 43).

Zunächst ist die Lage der Hauptaxen aufzufuchen. Da hier keine Symmetrie-Axe vorhanden ist, so ist dieselbe nach Formel 24

$$\text{tg } 2 \alpha_{max} = \frac{2 \mathcal{F}_{YZ}}{\mathcal{F}_Z - \mathcal{F}_Y}$$

zu berechnen.

Für das in Fig. 65 dargestellte Winkeleisen (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) ist

$$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_A - F z_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 12^3 + 7,0 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 3,97^2 = 278,87 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_B - F y_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 8^3 + 11 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 1,97^2 = 100,59 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{F}_{YZ} = 97,26 \text{ cm}^4 \text{ (siehe Art. 64, S. 42).}$$

Hiernach ist

$$\text{tg } 2 \alpha_{max} = \frac{2 \cdot 97,26}{100,59 - 278,87} = -1,09109.$$

Nun ist, wenn man $2 \alpha_{max} = 180 - 2\beta$ setzt, $\text{tg } 2 \alpha_{max} = -\text{tg } 2\beta$; somit $\text{tg } 2\beta = 1,09109$ und $2\beta = 47^\circ 29' 40''$, woraus $\beta = 23^\circ 44' 50''$; mithin

$$\alpha_{max} = 90 - \beta, \text{ bzw. } 180 - \beta.$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha_{max} = 156^\circ 15' 10'' \text{ und } \alpha_{min} = 66^\circ 15' 10''.$$

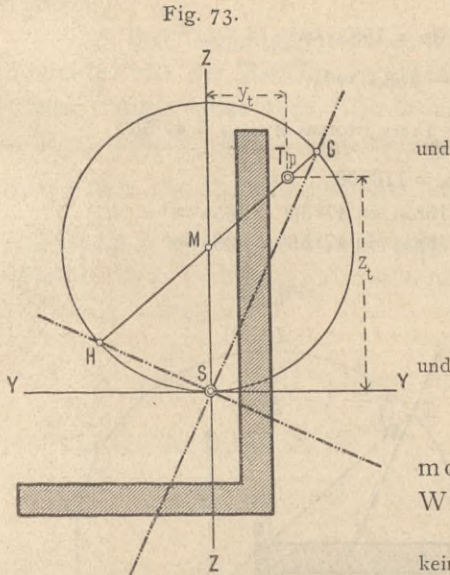
Die Axen $Y'Y'$ und $Z'Z'$ sind demnach die Hauptaxen; man erhält nach Gleichung 22

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \mathcal{F}_Y \cos^2 156^\circ 15' 10'' + \mathcal{F}_Z \sin^2 156^\circ 15' 10'' - \mathcal{F}_{YZ} \sin 312^\circ 30' 20'',$$

$$= \mathcal{F}_Y \cos^2 23^\circ 44' 50'' + \mathcal{F}_Z \sin^2 23^\circ 44' 50'' + \mathcal{F}_{YZ} \sin 47^\circ 29' 40'' = 321,43 \text{ cm}^4 = A;$$

$$\mathcal{F}_{Z_1} = \mathcal{F}_Y \cos^2 66^\circ 45' 10'' + \mathcal{F}_Z \sin^2 66^\circ 15' 10'' - \mathcal{F}_{YZ} \sin 47^\circ 29' 40'' = 57,80 \text{ cm}^4 = B.$$

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Ermittlung mit Hilfe des Trägheitskreises (Fig. 73). Es ist $\mathcal{F}_Y = 278,87 \text{ cm}^4$, $\mathcal{F}_Z = 100,59 \text{ cm}^4$ und $\mathcal{F}_{YZ} = 97,26 \text{ cm}^4$; ferner $\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_Y + \mathcal{F}_Z = 278,87 + 100,59 = 379,46 \text{ cm}^4$, und mit $\frac{\mathcal{F}_p}{d} = 100 \text{ cm}^3$



$$y_t = \frac{\mathcal{F}_{XY}}{100} = 0,97 \text{ cm}, \quad z_t = \frac{\mathcal{F}_Y}{100} = 2,79 \text{ cm} \quad \text{und} \quad d = \frac{\mathcal{F}_p}{100} = 3,79 \text{ cm}.$$

Man trägt auf SZ die Länge $\overline{SM} = \frac{3,79 \text{ cm}}{2}$ auf, schlägt von M aus mit $\frac{3,79}{2}$ als Halbmesser den Kreis, verzeichnet T_p aus den Koordinaten $y_t = 0,97 \text{ cm}$ und $z_t = 2,79 \text{ cm}$, zieht $T_p M$; alsdann geben SH und SG die Maximal-, bzw. Minimal-Trägheitsachsen. Es ist

$$\mathcal{I}_{max} = T_p H \cdot 100 \text{ cm}^3 = 3,2 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_{min} = T_p G \cdot 100 \text{ cm}^3 = 0,58 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3.$$

7) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein Z-Eifen.

Die Ermittlung soll für das Deutsche Normal-Profil Nr. 12 (Fig. 74) vorgenommen werden.

Es ist

$$\mathcal{F}_Y = \frac{0,7 \cdot 12^3}{12} + 2 \frac{5,3 (6^3 - 5,1^3)}{3} = 395,3 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{F}_Z = \frac{10,2 \cdot 0,7^3}{12} + 2 \frac{(5,65^3 + 0,35^3)}{3} \cdot 0,9 = 108,53 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{F}_{YZ} = 0 - 0,9 \cdot 5,3 \cdot 5,55 \cdot 3,0 \cdot 2 = -158,84 \text{ cm}^4,$$

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = - \frac{2 \cdot 158,84}{108,53 - 395,3} = \frac{2 \cdot 158,84}{286,77} = 1,1078, \quad \text{woraus} \quad 2 \alpha_{max} = 47^\circ 56';$$

fomit

$$\alpha_{max} = 23^\circ 58' \quad \text{und} \quad \alpha_{min} = 113^\circ 58'.$$

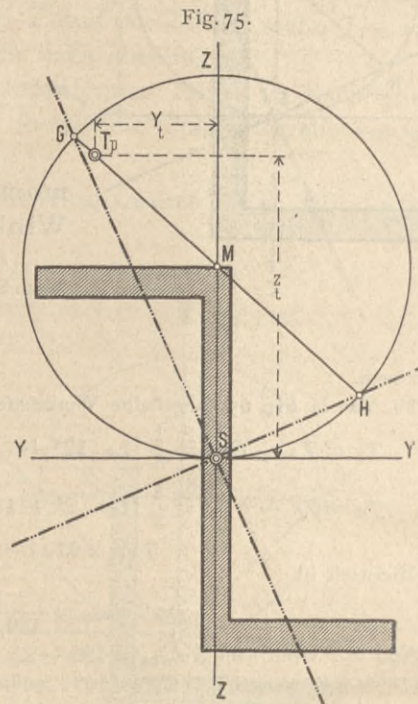
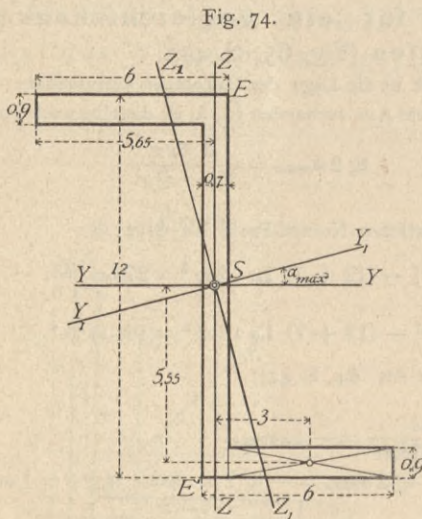
$$\mathcal{F}_{Y_1} = 395,3 \cos^2 23^\circ 58' + 108,53 \sin^2 23^\circ 58' + 158,84 \sin 47^\circ 56' = 465,9 \text{ cm}^4 = A,$$

$$\mathcal{F}_{Z_1} = 395,3 \sin^2 23^\circ 58' + 108,53 \cos^2 23^\circ 58' - 158,84 \sin 47^\circ 56' = 38,1 \text{ cm}^4 = B.$$

Fig. 75 zeigt die Construction des Trägheitskreifes. Es ist

$$\mathcal{F}_p = 395,3 + 108,53 = 503,83 \text{ cm}^4;$$

mithin



$$z_t = \frac{\mathcal{F}_Y}{100} = 3,95 \text{ cm}, \quad y_t = \frac{\mathcal{F}_{YZ}}{100} = - \frac{158,8}{100} = -1,59 \text{ cm}$$

und

$$d = \frac{\mathcal{F}_p}{100} = 5,04 \text{ cm};$$

ferner

$$\mathcal{I}_{max} = \overline{T_p H} \cdot 100 \text{ cm}^3 = 4,6 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3$$

und

$$\mathcal{I}_{min} = \overline{T_p G} \cdot 100 \text{ cm}^3 = 0,38 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3.$$

Bedeutet \mathcal{F} das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe, so kann man $\mathcal{F} = FR^2$ setzen, in welcher Gleichung F die Querschnittsfläche bedeutet. Alsdann ist

71.
Trägheitsradius.

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}}$$

und es wird R der Trägheitsradius für die betreffende Axe genannt. Beispielsweise würden sich die Trägheitsradien für die Hauptaxen aus den Gleichungen:

$$A = FR_1^2 \quad \text{und} \quad B = FR_2^2 \quad \text{zu} \quad R_1 = \sqrt{\frac{A}{F}} \quad \text{und} \quad R_2 = \sqrt{\frac{B}{F}}$$

ergeben.

Die den Gleichungen 22 u. 23 entsprechende Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes mit der Veränderung des Winkels α kann man graphisch auch veranschaulichen, indem man vom Schnittpunkte der Axen aus auf jeder Axe eine Länge abträgt, welche dem Trägheitsmoment für diese Axe entspricht. Wählt man die Hauptaxen als Coordinatenaxen und trägt auf jeder Axe $\frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}}}$ ab, in welcher Gleichung K eine zunächst beliebige Constante, \mathcal{F} das Trägheitsmoment für die betreffende Axe bedeutet, so erhält man als Endpunkt einer Linie etwa den Punkt P (Fig. 76). Alsdann ist

72.
Ellipse der Trägheitsmomente.

$$r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y \sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}{K} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z \sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}{K}$$

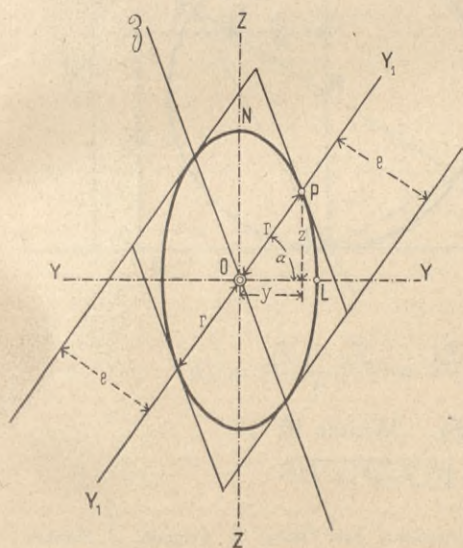
Nach Gleichung 26 ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha = \frac{A y^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{K^2} + \frac{B z^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{K^2}$$

$$K^2 = A y^2 + B z^2 \quad \text{und} \quad 1 = \frac{y^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{B}}\right)^2} \quad \dots \quad 32.$$

Gleichung 32 ist die Gleichung der Curve für die Punkte P ; die Endpunkte der Fahrstrahlen liegen also auf einer Ellipse,

Fig. 76.



deren beide Halbaxen $\frac{K}{\sqrt{A}}$ und $\frac{K}{\sqrt{B}}$ sind; $\frac{K}{\sqrt{A}}$ ist die Länge auf der Hauptaxe OY , $\frac{K}{\sqrt{B}}$ diejenige auf der Hauptaxe OZ .

Man nennt diese Ellipse die Ellipse der Trägheitsmomente. Dieselbe kann für jeden beliebigen Punkt der Ebene als Mittelpunkt construirt werden; gehen sämtliche Axen, wie hier, durch den Schwerpunkt des Querschnittes, so nennt man dieselbe die Central-ellipse.

Der Werth K kann beliebig angenommen werden. Wählt man $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$, so wird die Länge des Fahrstrahles auf der Hauptaxe OY

$$\overline{OL} = \frac{K}{\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{AB}{FA}} = \sqrt{\frac{B}{F}} = \sqrt{\frac{Fb^2}{F}} = b;$$

die Länge des Fahrstrahles auf der Hauptaxe OZ wird

$$\overline{ON} = \frac{K}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{AB}{FB}} = \sqrt{\frac{A}{F}} = \sqrt{\frac{Fa^2}{F}} = a.$$

a und b sind die Trägheitsradien, welche zu den Hauptträgheitsmomenten A und B gehören. Man erhält also die Ellipse der Trägheitsmomente, indem man auf der ersten Hauptaxe den Trägheitsradius b , auf der zweiten Hauptaxe den Trägheitsradius a aufträgt und für diese als Halbaxen der Ellipse die Curve construirt.

Für eine beliebige Axe Y, Y_1 , ziehe man an die Ellipse die vier Tangenten, welche dem Durchmesser Y, Y_1 und dem zugehörigen conjugirten Durchmesser $3O$ entsprechen; die von diesem eingeschlossene Fläche ist $4re$, aber bekanntlich auch gleich $4ab$. Es ist also auch $re = ab$, somit

$$e = \frac{ab}{r}.$$

Nun ist

$$a = \sqrt{\frac{A}{F}}, \quad b = \sqrt{\frac{B}{F}}, \quad r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{I}_{Y_1}}} = \sqrt{\frac{AB}{F\mathcal{I}_{Y_1}}};$$

mithin

$$e = \frac{ab}{r} = \sqrt{\frac{ABF\mathcal{I}_{Y_1}}{F^2 AB}} = \sqrt{\frac{\mathcal{I}_{Y_1}}{F}},$$

d. h.

$$\mathcal{I}_{Y_1} = Fe^2.$$

Demnach ist e der Trägheitsradius für die Axe $Y_1 Y_1$.

Wird also $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$ gewählt, so ist für jede Axe der Trägheitsradius ohne Weiteres durch Ziehen der parallelen Tangente und Abmessen des senkrechten Abstandes der Tangente von der Axe zu ermitteln.

73.
Weitere einfache
Ausdrücke
für die
Hauptträgheits-
momente.

Mit Hilfe des in Art. 65 (S. 43) vorgeführten Trägheitskreises ergeben sich folgende einfache Ausdrücke für die Hauptträgheitsmomente A und B ¹⁵⁾. In Fig. 77 seien OY und OZ zwei senkrecht zu einander gerichtete Axen, für welche die Trägheitsmomente \mathcal{I}_Y und \mathcal{I}_Z , so wie das Centrifugalmoment \mathcal{I}_{YZ} bekannt sind.

Dann ist $\overline{OL} = d = \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z$, und der Halbmesser des Kreises

$$r = \overline{MH} = \overline{MG} = \overline{MO} = \frac{\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z}{2}.$$

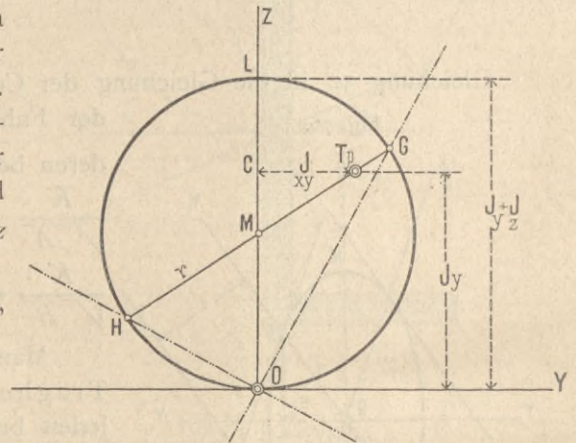
Ferner ist

$$\overline{MC} = \overline{OC} - \overline{OM} = \mathcal{I}_Y - \frac{\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z}{2} = \frac{\mathcal{I}_Y - \mathcal{I}_Z}{2} = D,$$

d. h. D ist der halbe Unterschied von \mathcal{I}_Y und \mathcal{I}_Z . Weiter ist

$$\overline{MT_p} = \sqrt{\overline{CT_p}^2 + \overline{MC}^2} = \sqrt{\mathcal{I}_{YZ}^2 + D^2}.$$

Fig. 77.



¹⁵⁾ Angegeben von LAND (Die Bestimmung der Haupt-Trägheitsmomente einer Fläche) in: Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 22.

Nun ist aber

$$A = \overline{T_p H} = \overline{MH} + \overline{MT_p} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} + \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + D^2},$$

$$B = \overline{T_p G} = \overline{MG} - \overline{MT_p} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} - \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + D^2};$$

daher

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} + \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + \left(\frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2}\right)^2} \\ B &= \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} - \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + \left(\frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2}\right)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 33.$$

Die Benutzung dieser Formeln setzt nur die Kenntniss von \mathcal{J}_Y , \mathcal{J}_Z und \mathcal{J}_{YZ} voraus; es ist nicht erforderlich, wie bei Verwendung der Formeln 22 und 23, mit Winkelfunctionen zu rechnen, um die Hauptträgheitsmomente zu ermitteln¹⁶⁾.

Beispiel. Bei dem Z-Eisen in Art. 70 (S. 50) war

$$\mathcal{J}_Y = 395,3 \text{ cm}^4, \quad \mathcal{J}_Z = 108,33 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_{YZ} = -158,84 \text{ cm}^4;$$

daher ist

$$\frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} = 251,9 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2} = D = 143,4 \text{ cm}^4;$$

fomit

$$A = 251,9 + \sqrt{158,8^2 + 143,4^2} = 251,9 + 214 = 465,9 \text{ cm}^4,$$

$$B = 251,9 - \sqrt{158,8^2 + 143,4^2} = 251,9 - 214 = 37,9 \text{ cm}^4.$$

¹⁶⁾ Ueber die Darstellung der Trägheitsmomente mit Hilfe von Kreifen vergl. :

MOHR. Ueber die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen. Civiling. 1887, S. 43.

LAND, R. Einfache Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente von Flächen etc. Zeitschr. f. Bauw. 1892, S. 549. —

Auch als Sonderabdruck erschienen: Berlin 1892. — Auszug daraus: Centralbl. d. Bauverw. 1893, S. 11.

Beigabe zum Deutschen Baukalender 1894 u. ff. Berlin 1893 u. ff.

Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausg. v. akad. Verein »Hütte«. 16. Aufl. Abth. I. Berlin 1896. S. 177.

2. Abschnitt.

Elemente der Elasticitäts- und Festigkeitslehre.

1. Kapitel.

Grundbegriffe.

74.
Molecüle.

Jeder in der Natur vorkommende Körper besteht aus einzelnen, mit einander verbundenen, außerordentlich kleinen Theilen, den sog. Molecülen. Diese einzelnen Theile sind nicht unabänderlich fest zu einem starren Ganzen mit einander verbunden; vielmehr verändert sich die gegenseitige Lage derselben, also auch die Form des Körpers, wenn Kräfte auf den Körper wirken. Größe und Form der Aenderung sind vom Material des Körpers, von seiner Form, von der Größe und Wirkungskdauer der wirkenden Kräfte, von der Temperatur und von verschiedenen anderen Umständen abhängig.

Wenn die Kräfte, welche die Formveränderung hervorgebracht haben, zu wirken aufhören, so nimmt unter gewissen Bedingungen der Körper seine frühere Form wieder an.

75.
Elasticität.

Jeder Körper hat die Eigenschaft, unter der Einwirkung von Kräften seine Form zu verändern und nach dem Aufhören der Kräftewirkung seine ursprüngliche Form mehr oder weniger vollständig wieder anzunehmen. Man nennt diese Eigenschaft Elasticität.

Vollkommen elastisch würde ein Körper sein, der nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung seine frühere Gestalt genau wieder annähme; vollkommen unelastisch derjenige Körper, welcher die in Folge der Kräfteeinwirkung geänderte Gestalt genau beibehalten würde, auch wenn die Kräfte zu wirken aufhörten.

Es giebt in der Natur weder vollkommen elastische, noch vollkommen unelastische Körper. Daraus folgt, daß kein Körper nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung vollständig seine frühere Form wieder annimmt; je näher er dem vollkommen elastischen Körper steht, desto mehr verschwindet die Formänderung; niemals aber verschwindet sie ganz.

76.
Elastische und
bleibende Form-
änderung.

Man unterscheidet die elastische Formänderung, d. h. diejenige, welche mit dem Aufhören der Kräfteeinwirkung wieder verschwindet, und die bleibende Formänderung, d. h. diejenige, welche nicht wieder verschwindet, auch wenn die Kraft zu wirken aufhört.

Die gefammte Formänderung ist die Summe der bleibenden und der elastischen Formänderung; sie ist eine Folge der durch die äusseren Kräfte im Körper hervorgerufenen inneren Kräfte, welche, auf die Flächeneinheit bezogen, als Spannungen bezeichnet werden. Legt man der Betrachtung einen auf Zug oder Druck beanspruchten, geraden, prismatischen Stab von der ursprünglichen Länge l zu Grunde, so bezeichnet man das Verhältniss der absoluten Verlängerung Δl zur ursprünglichen Länge, d. h. $\frac{\Delta l}{l}$ als Dehnung oder Verlängerungsverhältniss. Für einige wenige, aber gerade die wichtigsten Baustoffe, nämlich für Schweisseisen, Flusseisen und Stahl ist die Grösse der Dehnung direct proportional der im Stabe herrschenden Spannung, so lange diese Spannung eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Man bezeichnet die Grenzspannung, bis zu welcher die Proportionalität zwischen Dehnung (bezw. Längenänderung) des Stabes und der Spannung im Stabe stattfindet, als Proportionalitätsgrenze. Innerhalb dieser Grenze ist für die genannten Baustoffe auch die bleibende Dehnung so gering, dass sie für die Praxis als nicht vorhanden angenommen werden kann; man braucht demnach innerhalb dieser Grenze nur die elastische Formänderung zu berücksichtigen.

Die Grenzspannung, bis zu welcher die bleibende Formänderung so gering ist, dass sie vernachlässigt werden kann, bezeichnet man als Elastizitätsgrenze. Für die oben angeführten Baustoffe fallen demnach Elastizitätsgrenze und Proportionalitätsgrenze zusammen, so dass im Nachfolgenden für diese Baustoffe die Proportionalitätsgrenze als Elastizitätsgrenze bezeichnet werden soll.

Für Gusseisen, Beton, Cementmörtel, Steine findet nach neueren Versuchen¹⁷⁾ keine directe Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung statt; man kann demnach bei diesen Baustoffen auch nicht von einer Proportionalitätsgrenze reden.

Die Elastizitätsgrenze ist für die verschiedenen Baustoffe, aber auch für die verschiedenen Arten der Beanspruchung verschieden. Im Allgemeinen wird sie für Beanspruchung durch Zug bei demselben Baustoff eine andere sein, als für Beanspruchung durch Druck.

Nach den Versuchen *Bauschinger's*¹⁸⁾ ist für Schweisseisen, Flusseisen und Stahl, selbst für dieselbe Art der Beanspruchung, die Elastizitätsgrenze ausserordentlich veränderlich. Man kann dieselbe durch gewisse Arbeiten allmählich immer mehr bis zu einer oberen Grenze heben, die bei manchen Stoffen nahe der Bruchgrenze liegt. Andererseits kann man die Elastizitätsgrenze sehr stark hinabwerfen und wieder heben, dann aber nur bis zu einer weit unter der ursprünglichen Grenze liegenden Höhe. Diese letztere bezeichnet *Bauschinger* als die natürliche Elastizitätsgrenze.

Wird bei den Stoffen mit ausgesprochener Elastizitätsgrenze die wirkende Spannung über die Elastizitätsgrenze gesteigert, so wächst die Formänderung wesentlich rascher, als die Spannung; insbesondere tritt eine sehr merkbare bleibende Formänderung ein; eine weitere Vergrößerung der Spannung bewirkt schliesslich das Zerreißen, Zerdrücken oder Zerschlagen des Körpers.

Diejenige Spannung, welche ein Stab vom Querschnitte gleich der Flächeneinheit höchstens ertragen kann, ehe er zerstört wird, nennt man den Festigkeits-Coefficienten des Materials.

77.
Festigkeits-
Coefficient.

¹⁷⁾ BACH, C. Elasticität und Festigkeit. 3. Aufl. Berlin 1898.

¹⁸⁾ Siehe: Vortrag *Bauschinger's* auf der Wanderversammlung des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine zu Frankfurt a. M. 1866. Verbandsmittheilungen, Bd. 1, S. 230 u. ff.

BAUSCHINGER, J. Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der K. technischen Hochschule in München. Heft XIII. München 1886.

Auch die Festigkeits-Coefficienten sind nach dem verschiedenen Baustoff und nach den verschiedenen Beanspruchungsweisen verschieden.

78. Aufgabe der Construction. Man muß an jede Bauconstruction zunächst die Forderung stellen, daß sie durch die wirkenden Kräfte nicht zerstört wird. Mit dieser Anforderung allein darf man sich aber nicht begnügen. Das Verhalten der Baustoffe, sobald sie über die Elasticitätsgrenze hinaus beansprucht werden, ist wenig zuverlässig, und man stellt deshalb bei denjenigen Baustoffen, für welche die Elasticitätsgrenze genügend sicher bestimmt werden kann, die Bedingung, daß die Construction niemals über die Elasticitätsgrenze hinaus in Anspruch genommen werde.

79. Stabförmige Körper. In den folgenden Untersuchungen werden wir uns hauptsächlich mit den sog. stabförmigen Körpern beschäftigen. Stabförmige Körper sind solche, bei denen die Längenabmessung die Breiten- und Höhenabmessungen wesentlich übertrifft.

Schneidet man den Körper an irgend einer Stelle durch eine senkrecht zur Längenrichtung an dieser Stelle gerichtete Ebene, so erhält man einen Querschnitt des Körpers. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Querschnitte des Körpers heißt die Axe des Körpers.

Ist die Axe eine Gerade, so hat man einen geraden stabförmigen Körper; alsdann sind alle Querschnitte des Körpers parallel. Ist die Axe eine krumme Linie, so ist der Körper ein krummer stabförmiger Körper.

80. Arten der Beanspruchung und Festigkeit. Je nach der Wirkungsweise der Kräfte werden die Körper verschiedenartig beansprucht. Man unterscheidet

- 1) Beanspruchung auf Zug und Druck;
- 2) Beanspruchung auf Schub;
- 3) Beanspruchung auf Biegung;
- 4) Beanspruchung auf Drehung.

Zu 1). Beanspruchung auf Zug und Druck tritt auf, wenn die auf den Körper wirkenden Kräfte die Querschnitte so gegen einander zu verschieben streben, daß sich ihre Entfernung in der Richtung der Axe gegen einander verändert, vergrößert oder verringert.

Unter Zug-, bezw. Druckfestigkeit wird diejenige Kraft verstanden, welche in der Richtung der Axe auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens wirken darf, ohne daß durch bloßen Zug, bezw. Druck eine Zerstörung des Körpers stattfindet; die geringste Vergrößerung dieser Kraft würde demnach den Zusammenhang des Körpers zerstören.

Zu 2). Beanspruchung auf Schub oder Abfcheren findet statt, wenn die äußeren Kräfte das Bestreben haben, zwei benachbarte Querschnitte längs einander zu verschieben, ohne daß ihre Entfernung in der Richtung der Axe sich ändert.

Unter Schub- oder Abfcherungsfestigkeit wird diejenige Kraft verstanden, welche auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens wirken darf, ohne daß eine Zerstörung des Körpers an dieser Stelle durch Verschiebung der Nachbarquerschnitte gegen einander erfolgt.

Zu 3). Die Beanspruchung auf Biegung tritt auf, wenn die äußeren Kräfte das Bestreben zeigen, zwei Nachbarquerschnitte um eine Axe derart zu drehen, daß die Entfernung zweier Querschnitte an den verschiedenen Querschnittspunkten sich ändert.

Biegefestigkeit ist die Beanspruchung, welche die am meisten gespannten Fasern des Körpers für die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens ertragen

können, ehe eine Zerstörung des Körpers durch Biegen, d. h. hier, bevor ein Zerbrechen eintritt.

Zu 4). Die Drehungsbeanspruchung tritt auf, wenn die wirkenden Kräfte zwei Nachbarquerschnitte gegen einander so zu verdrehen streben, daß ihre Entfernung gleich bleibt. Die Drehungsbeanspruchung ist für die Hochbau-Constructionen von untergeordneter Bedeutung.

Literatur.

Bücher über »Lehre von der Elasticität und Festigkeit«.

Indem auf die Werke über »Mechanik«, die stets einen Abriss über »Elasticität und Festigkeit« enthalten, nur ganz allgemein verwiesen werden mag, seien im Nachstehenden bloß die einschlägigen Sonderschriften namhaft gemacht:

- BARLOW, P. *Treatise on the strength of materials*. London 1833. — Neue Ausg. von W. HUMBER. 1867.
 LAMÉ, G. *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris 1852. — 2. Aufl. 1866.
 MOLL, C. L. & F. REULEAUX. Die Festigkeit der Materialien etc. Braunschweig 1853.
 MORIN, A. *Résistance des matériaux*. Paris 1853. — 3. Aufl. 1862.
 ROFFIAEN, E. *Traité sur la résistance des matériaux dans les constructions*. Lüttich 1858.
 BOURDAIS, J. *Traité pratique de la résistance des matériaux appliquée à la construction etc.* Paris 1859.
 JEEP, W. Die Festigkeit der Materialien etc. Weimar 1861.
 SHIELDS, F. W. *The strains on structures of ironwork*. London 1861.
 CLEBSCH, A. Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862.
 GRASHOF, F. Theorie der Elasticität und Festigkeit etc. Berlin 1866. — 2. Aufl. 1878.
 WINKLER, E. Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit etc. Theil 1. Prag 1867.
 ANDERSON, C. E. *The strength of materials and structures*. London 1872.
 MÜLLER-Breslau, H. Elementares Handbuch der Festigkeitslehre etc. Berlin 1875.
 KURZ, A. Taschenbuch der Festigkeitslehre etc. Berlin 1877.
 HATFIELD, R. G. *Theory of transverse strains and its application to the construction of buildings*. New-York 1877.
 SERGENT, E. *Traité pratique de la résistance des matériaux*. Paris 1878. — 5. Aufl. 1884.
 KENT, W. *The strength of materials*. New-York 1879.
 LAMBERT, P. Tabellarische Zusammenstellung der Resultate aus der angewandten Festigkeitslehre, mit besonderer Berücksichtigung von Constructionen in Eisen und Holz. Zürich 1880.
 LINGLIN, TH. *Traité élémentaire de la résistance des matériaux*. Paris 1880.
 MADAMET, A. *Résistance des matériaux*. Paris 1881.
 SIMERKA, V. Elemente der technischen Mechanik etc. Theil 1: Elemente der Festigkeitslehre. Pilsen 1882.
 BOX, TH. *A practical treatise on the strength of materials etc.* London 1883.
 VIGREUX, L. *Traité théorique et pratique de la résistance des matériaux*. Paris 1885.
 STONEY, B. B. *The theory of stresses in girders and similar structures etc.* London 1885.
 UHLICH, P. Die Festigkeitslehre und ihre Anwendung. Mittweida 1885. — 2. Aufl.: Dresden 1887.
 PLANAT, P. *Pratique de la mécanique appliquée à la résistance des matériaux*. Paris 1887.
 MOOS, N. A. *Elementary treatise on the strength of materials and strains in structures*. London 1887.
 AERTS, L. *Eléments pratiques de la résistance des matériaux*. Paris 1888.
 BRUNE, E. *Cours de construction professé à l'école des beaux-arts. 1^{re} partie: Résistance des matériaux publiée avec le concours de A. FLAMANT*. Paris 1888.
 JOHNEN, P. J. Elemente der Festigkeitslehre etc. Weimar 1889.
 LAUENSTEIN, R. Die Festigkeitslehre etc. Stuttgart 1889. — 4. Aufl. 1898.
 BACH, C. Elasticität und Festigkeit. Berlin 1889. — 3. Aufl. Berlin 1898.
 GLINZER. Grundriss der Festigkeitslehre. Dresden 1890.
 MÜLLER-Breslau, F. B. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstructionen. Leipzig 1893—96.
 KECK, W. Vorträge über Elasticitäts-Lehre als Grundlage für die Festigkeits-Berechnung der Bauwerke. Hannover 1893.
 DUQUESNAY, M. *Résistance des matériaux*. Paris 1893. — 2. Aufl. 1897.

TETMAJER. Die Gesetze der Knickfestigkeit. Zürich 1896.
 KECK, W. Vorträge über Mechanik. Theil 2. Hannover 1897.
 FÖEPL, A. Vorlesungen über Technische Mechanik. Band 3: Festigkeitslehre. Leipzig 1897.
 DUPLAIX, M. *Résistance des matériaux etc.* Paris 1897.

2. Kapitel.

Zug und Druck, bezw. Zug- und Druckfestigkeit.

8r.
Elasticitäts-
gesetz.

Die reine Zug- und Druckelastizität kommt nur bei geraden Stäben vor.

Die Gesetze für alle Arten der Beanspruchung ergeben sich aus denjenigen, welche für die Zug- und Druckbeanspruchung gelten; demnach muß die letztere die Grundlage für die ganze Behandlung bilden.

Die gefammte Elasticitätslehre beruht auf folgendem Gesetze:

1) Die Verlängerung, bezw. Verkürzung eines in seiner Axenrichtung, d. h. auf Zug- oder Druckelastizität beanspruchten Stabes ist, so lange die Beanspruchung innerhalb der Elasticitätsgrenze bleibt, der ursprünglichen Länge des Stabes direct proportional. Das Verhältniß der Verlängerung (positiv oder negativ genommen) zu der ursprünglichen Länge wird die Dehnung oder das Verlängerungsverhältniß genannt.

2) Die Verlängerung eines, wie angegeben, beanspruchten Stabes ist, so lange die Spannung desselben innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt, direct proportional der im Stabe herrschenden Spannung. Ist also die Spannung im Stabe σ , so ist die Verlängerung, also auch das Verlängerungsverhältniß σ -mal so groß, als bei der Spannung 1.

Dasjenige Verlängerungsverhältniß, welches bei der Spannung eintritt, die gleich der Krafteinheit ist, bezeichnet man mit $\frac{1}{E}$. Nennt man die ursprüngliche Länge des Stabes l und die bei der Spannung σ eintretende Verlängerung Δl , so findet nach dem unter 2 gegebenen Gesetze statt:

$$\frac{\Delta l}{l} = \sigma \frac{1}{E} = \frac{\sigma}{E} \dots \dots \dots 34.$$

Die Gleichung 34 kann man als die Grundgleichung der Elasticitätslehre auffassen (*Hooke'sches Gesetz*).

Der Werth E ist vom Baustoff abhängig; man nennt E Elasticitäts-Modulus, Elasticitäts-Coefficient oder Elasticitätsziffer, auch wohl Elasticitätsmaß. E ist der umgekehrte (reciproke) Werth des Verlängerungsverhältnisses, welches durch die Kraft 1 an einem Stabe vom Querschnitt gleich der Flächeneinheit hervorgerufen wird. *Bach* bezeichnet $\frac{1}{E}$ mit α , und nennt diesen Werth den Dehnungscoefficienten; dies ist also das Verlängerungsverhältniß, welches bei der Belastung eines Stabes vom Querschnitt gleich der Flächeneinheit (1 qcm) mit der Lasteinheit (1 kg) eintritt.

Das in Gleichung 34 ausgesprochene »*Hooke'sche Gesetz*« hat von den wichtigeren Baustoffen nur für Schweisseisen, Flußeisen und Stahl Giltigkeit. Allgemein scheint der Ausdruck nach den neuesten Untersuchungen von *Bach* und *Schüle* zu läuten:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma^m}{E} \dots \dots \dots 35.$$

Für die vorgenannten Baustoffe ist dann $m = 1$, woraus sich die Gleichung 34 ergibt. Für Gufseifen und Körper aus Cementmörtel und Beton fand *Bach*¹⁹⁾ bei

Baustoff	Beanspruchung auf Zug		Beanspruchung auf Druck	
	<i>E</i>	<i>m</i>	<i>E</i>	<i>m</i>
1) Gufseifen:				
Körper vorher nicht belastet	1338 000	1,083	1320 000 1043 000	1,0685 1,035
Körper vorher stark belastet	1150 000	1,1	1217 000 1124 000	1,052 1,048
2) Körper aus Cementmörtel:				
1 Theil Cement, 1½ Theile Donaufand	—	—	356 000	1,11
1 Theil Cement, 3 Theile Donaufand	—	—	315 000	1,15
1 Theil Cement, 4½ Theile Donaufand	—	—	230 000	1,17
3) Körper aus Beton:				
1 Theil Cement, 2½ Theile Donaufand, 5 Theile Donaukies	—	—	298 000	1,145
1 Theil Cement, 5 Theile Donaufand, 6 Theile Donaukies	—	—	280 000	1,137
1 Theil Cement, 5 Theile Donaufand, 10 Theile Donaukies	—	—	217 000	1,157
1 Theil Cement, 2½ Theile Eggingerfand, 5 Theile Kalksteinfchotter	—	—	457 000	1,157
1 Theil Cement, 3 Theile Donaufand, 6 Theile Kalksteinfchotter	—	—	380 000	1,164
1 Theil Cement, 5 Theile Eggingerfand, 10 Theile Kalksteinfchotter	—	—	367 000	1,207
	Kilogr. für 1 qcm		Kilogr. für 1 qcm	

Wirkt auf einen Stab, dessen Querschnitt F Flächeneinheiten enthält, dessen Querschnitt also gleich F ist, eine Kraft P und kann man annehmen, dass diese Kraft sich gleichmäßig über den ganzen Querschnitt vertheilt, so ist die Spannung für die Flächeneinheit derselben $\sigma = \frac{P}{F}$, und wenn man diesen Werth für σ in die Gleichung für $\frac{\Delta l}{l}$ einsetzt, erhält man

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{FE} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{Pl}{FE} \quad \dots \quad 36.$$

Die hier vorgeführten Ergebnisse gelten sowohl, wenn die Verlängerung eine positive, d. h. eine wirkliche Verlängerung, als auch wenn sie eine negative, d. h. eine Verkürzung ist. Sie gelten also sowohl für Zug- als auch für Druckbeanspruchungen; nur hat für erstere im Allgemeinen E einen anderen Werth, als für letztere.

Es ist üblich, die Zugbeanspruchungen als positive und die Druckbeanspruchungen als negative Gröfsen einzuführen. Im Folgenden soll, wo nichts Gegentheiliges bemerkt ist, diese Bezeichnungswiese durchgeführt werden.

Die Gleichung $\sigma = \frac{P}{F}$ kann benutzt werden, um die Gröfse der Kraft zu bestimmen, mit welcher ein Stab von gegebenem Querschnitt höchstens auf Zug bzw. Druck beansprucht werden darf.

Nach dieser Gleichung ist $P = \sigma F$. Wird für σ der grösste Werth \mathfrak{S} eingesetzt, welchen das Material auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens erleiden kann, ohne zerstört zu werden, d. i. der Festigkeits-Coefficient, so ergibt sich $\mathfrak{P}_{max} = \mathfrak{S} F$. In dieser Gleichung ist \mathfrak{P}_{max} diejenige Belastung, deren geringste

¹⁹⁾ Siehe: BACH, a. a. O., S. 33, 34, 57, 58.

Vergrößerung das Zerreißen, bezw. Zerdrücken des Stabes zur Folge haben würde; \mathfrak{S} ist nach Früherem die Zug-, bezw. Druckfestigkeit.

Die Stäbe werden nicht bis zu dieser Grenze beansprucht; vielmehr werden Sicherheits-Coefficienten eingeführt, welche für verschiedene Baustoffe verschiedene Werthe haben. Man trägt durch dieselben den etwa möglichen Ueberlastungen, den Fehlern im Baustoff, den im Laufe der Zeit möglichen Veränderungen durch Rost, Faulen etc., den Stößen und anderen ungünstigen Einflüssen Rechnung.

Bezeichnet n den Sicherheits-Coefficienten, so ist als wirkliche Größtbelastung P des Stabes nur $\frac{1}{n}$ von \mathfrak{P}_{max} einzuführen, d. h. es darf nur sein:

$$P = \frac{\mathfrak{S} F}{n}.$$

Man nennt nun $\frac{\mathfrak{S}}{n}$ die zulässige Beanspruchung, die im Folgenden mit K bezeichnet werden soll. Es ist demnach

$$K = \frac{\mathfrak{S}}{n} \quad \text{und} \quad P = KF.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt als Bedingungsgleichung für die Querschnittsgröße:

$$F = \frac{P_{max}}{K} \quad \dots \quad 37.$$

In dieser Gleichung bedeutet P_{max} die im ganzen Stabe höchstens auftretende Kraft.

Für die meisten Baustoffe muß man sich damit begnügen, die zulässige Beanspruchung K aus den Festigkeits-Coefficienten \mathfrak{S} unter Annahme eines nach der Erfahrung ausreichenden Sicherheits-Coefficienten n abzuleiten. Die üblichen Werthe für K und die wichtigsten Baustoffe sind in den Tabellen auf S. 64 angegeben.

Für solche Baustoffe, für welche die Elasticitätsgrenze mit genügender Sicherheit angegeben werden kann (Schweißseifen, Flusseifen, Stahl) erhält man Formeln für die Querschnittsbestimmung durch nachstehende Ueberlegung.

Da die Baustoffe, sobald die Beanspruchungen die Elasticitätsgrenze überschreiten, merkbare bleibende Veränderungen erleiden, so muß die Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze bei der Belastung vermieden werden. Die Lage der Elasticitätsgrenze ist aber nach Früherem nicht mit vollständiger Gewissheit bekannt; auch haben kleine Arbeitsfehler sehr großen, schädlichen Einfluß. Deshalb muß man mit der zulässigen Beanspruchung wesentlich unter der Elasticitätsgrenze bleiben, so daß auch eine unbeabsichtigte Vergrößerung der Spannung, in Folge etwaiger Fehler, selbst die tiefer als erwartet liegende Elasticitätsgrenze nicht erreicht. Beim Schweißseifen und Flusseifen, den wichtigsten einer genauen Berechnung zu unterwerfenden Baustoffen, kann man diese zulässige Beanspruchung auf die Hälfte bis zwei Drittel der Spannung an der Elasticitätsgrenze fest stellen. Wenn die Belastung ruhend, ohne Stöße, stattfindet, so ist die höhere Grenze zulässig; wirkt die Last dagegen in Verbindung mit Stößen, so ist die untere Grenze einzuführen.

Für schweiß- und flusseiserne Stäbe, welche nur gezogen, bezw. nur gedrückt werden, kann man einen genaueren Anhalt über die zu wählenden Beanspruchungen folgendermaßen finden. Wenn der Stab abwechselnd eine höhere und niedrigere Beanspruchung zu erleiden hat, etwa dadurch, daß die betreffende Construction zeitweilig außer dem Eigengewicht noch eine Nutzlast trägt, so mögen die obere

83.
Querschnitts-
bestimmung
für
Schweißseifen-
und
Flusseifenstäbe.

84.
Nur gezogene
oder nur
gedrückte
Schweißseifen-
und
Flusseifenstäbe.

und untere Grenze der ganzen Stabkraft P_{max} und P_{min} fein; die entsprechenden Grenzen der auf die Flächeneinheit entfallenden Spannungen fein

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F} \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F}.$$

Bei dieser Art der Beanspruchung kann von der Rücksichtnahme auf das Vorzeichen abgesehen werden; man braucht hier nur die absoluten Werthe der Stabkräfte in das Auge zu fassen.

Die Verkehrslast tritt stets mit gröfseren oder geringeren Stößen verbunden auf, welchem Umfande man dadurch Rechnung trägt, dafs man dieselbe mit einem Werthe $(1 + \mu)$ multiplicirt in die Rechnung einführt; dabei ist μ der sog. Stofscoefficient. Durch das Eigengewicht allein wird P_{min} , bezw. σ_{min} erzeugt; durch Eigengewicht und Verkehrslast werden P_{max} , bezw. σ_{max} hervorgerufen; demnach wird die Verkehrslast allein

$$(P_{max} - P_{min}), \text{ bezw. } (\sigma_{max} - \sigma_{min})$$

erzeugen. Wird nun die Verkehrslast mit $(1 + \mu)$ multiplicirt eingeführt, so wird durch dieselbe die Spannung $(1 + \mu) (\sigma_{max} - \sigma_{min})$ auf die Flächeneinheit des Querschnittes hervorgerufen; die gesammte Beanspruchung auf die Flächeneinheit ist alsdann

$$\sigma_{min} + (1 + \mu) (\sigma_{max} - \sigma_{min}).$$

Wäre man vor unbeabsichtigten Spannungen in der Construction ganz sicher, so könnte man diese soeben entwickelte Spannung gleich derjenigen an der Elasticitätsgrenze setzen; da aber unbeabsichtigte Spannungen sehr wohl auftreten können, da eine Querschnittsverminderung durch Rosten nicht ausgeschlossen ist, auch wohl einmal höhere Verkehrslasten, als angenommen sind, vorkommen können, so wird es sich empfehlen, die oben vorgeführte Spannung nur auf $\frac{2}{3}$ der Spannung an der Elasticitätsgrenze fest zu stellen. Nimmt man die Spannung an der Elasticitätsgrenze

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schweisseisen zu } 1600 \text{ kg für } 1 \text{ qcm,} \\ \text{für Flusseisen zu } 2000 \text{ kg für } 1 \text{ qcm} \end{array} \right\}$$

an und rundet man ab, so ergibt sich als Bedingungsleichung

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schweisseisen: } \sigma_{min} + (1 + \mu) (\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 1050 \\ \text{für Flusseisen: } \sigma_{min} + (1 + \mu) (\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 1350 \end{array} \right\} \quad 38.$$

Die Auflösung nach σ_{max} ergibt für Schweisseisen:

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}} \quad 39.$$

σ_{max} ist die zulässige Beanspruchung, und die erforderliche Querschnittsfläche des Stabes wird

$$F = \frac{P_{max}}{\sigma_{max}} \quad 40.$$

Nun ist offenbar $\sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F}$ und $\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F}$, demnach

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{P_{min}}{P_{max}} \quad \text{und} \quad \sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \frac{P_{min}}{P_{max}}}$$

Man kann $\mu = 0,5$ setzen; P_{min} und P_{max} sind bekannt, mithin auch σ_{max} . Es wird

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1,5 - 0,5 \frac{P_{min}}{P_{max}}} \quad 41.$$

Wird der Werth für σ_{max} aus Gleichung 41 in die Gleichung 40 eingeführt, so ergibt sich

$$F = \frac{P_{max} \left(1,5 - \frac{0,5 P_{min}}{P_{max}} \right)}{1050} = \frac{1,5 P_{max} - 0,5 P_{min}}{1050}.$$

Werden die durch das Eigengewicht, bezw. die Verkehrslast allein im ganzen Stabe erzeugten Stabkräfte mit P_0 , bezw. P_1 bezeichnet, so ist

$$P_{max} = P_0 + P_1 \quad \text{und} \quad P_{min} = P_0,$$

also

$$F = \frac{1,5 P_0 + 1,5 P_1 - 0,5 P_0}{1050} = \frac{P_0 + 1,5 P_1}{1050} = \frac{P_0}{1050} + \frac{P_1}{700}. \quad 42.$$

Gleichung 42 gilt für Schweifseifenstäbe, welche nur auf Zug oder nur auf Druck beansprucht werden.

Für Flusseifen ergibt sich in gleicher Weise aus obiger Gleichung:

$$\sigma_{max} = \frac{1350}{1,5 - 0,5 \frac{P_{min}}{P_{max}}} \quad \dots \quad 43.$$

$$F = \frac{P_0 + 1,5 P_1}{1350} \quad \dots \quad 44.$$

oder

$$F = \frac{P_0}{1350} + \frac{P_1}{900}$$

Die Werthe für P_0 und P_1 sind in absoluten Zahlen, und zwar in Kilogr., einzufetzen, und man erhält F in Quadr.-Centim.

85.
Schweifseifen-
und
Flusseifenstäbe,
die abwechselnd
gezogen
und gedrückt
werden.

Weniger einfach werden die Formeln für F , wenn die Beanspruchungen zwischen Zug und Druck wechseln; die Entwicklung nachstehender Formeln für Schweifseifen ist in des Verfassers unten genannter Abhandlung zu finden²⁰⁾.

Es bedeuten: P_0 die Stabspannung, welche durch das Eigengewicht allein hervorgerufen wird; P_1 die durch ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Stabspannung, welche mit P_0 gleichen Sinn hat (Zug oder Druck, je nachdem P_0 Zug oder Druck bedeutet); P_2 die durch ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Stabspannung, welche entgegengesetzten Sinn hat, wie P_0 (Druck oder Zug, je nachdem P_0 Zug oder Druck bedeutet).

Falls (alle Werthe absolut genommen) $P_2 < \frac{2}{3} P_0$ ist, so sind die obigen Formeln 42, bezw. 44 anzuwenden; alsdann ist die Berechnung genau so, als ob P_2 gar nicht vorhanden wäre.

Wenn dagegen $P_2 > \frac{2}{3} P_0$ ist, so ermittle man F nach folgenden Formeln:

1) Schweifseifen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0 \\ F = \frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{2100} \\ \text{oder } F = \frac{3 P_1 + P_2 + \frac{4}{3} P_0}{2100} \end{array} \right\} \quad 45.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0 \\ F = -\frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{2100} + \frac{P_2}{700} \\ F = \frac{3 P_2 + P_1 - \frac{4}{3} P_0}{2100} \end{array} \right\} \quad 46.$$

²⁰⁾ Ueber die Bestimmung der Querschnitte von Eifenconstructions. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 575.

2) Flusseifen:

$$\begin{array}{l}
 \text{für } P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0 \\
 F = \frac{P_0}{2000} + \frac{P_1}{900} + \frac{P_2}{2700} \\
 \text{oder } F = \frac{3 P_1 + P_2 + \frac{4}{3} P_0}{2700}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \text{für } P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0 \\
 F = -\frac{P_0}{2000} + \frac{P_1}{2100} + \frac{P_2}{900} \\
 F = \frac{3 P_2 + P_1 - \frac{4}{3} P_0}{2700}
 \end{array}
 \right\} \cdot 47. \quad \left. \right\} \cdot 48.$$

Die Werthe für P_0 , P_1 , P_2 sind in vorstehende Formeln in Kilogr. und in absoluten Zahlen einzusetzen; man erhält alsdann F in Quadr.-Centim.

Beispiele. 1) Es sei $P_0 = 36000$ kg, $P_1 = 48000$ kg und $P_2 = -18000$ kg. Alsdann ist, absolut genommen, $P_2 < \frac{2}{3} P_0$; denn es ist $18000 < \frac{2}{3} \cdot 36000$. Sonach kommen die Formeln 42, bzw. 44 zur Anwendung. Man erhält

$$\text{für Schweisseifen: } F = \frac{36000 + 1,5 \cdot 48000}{1050} = 103 \text{ qcm,}$$

$$\text{für Flusseifen: } F = \frac{36000 + 1,5 \cdot 48000}{1350} = 80 \text{ qcm.}$$

Dieselben Ergebnisse wären zu verzeichnen für

$$P_0 = -36000 \text{ kg, } P_1 = -48000 \text{ kg und } P_2 = 18000 \text{ kg;}$$

Alles bleibt genau wie vorstehend.

2) Es sei $P_0 = 7600$ kg, $P_1 = 29000$ kg und $P_2 = -23200$ kg. Alsdann ist, absolut genommen, $P_2 > \frac{2}{3} P_0$; denn es ist $23200 > \frac{2}{3} \cdot 7600$. Daher muß eine der Gleichungen 45, 46, 47 oder 48 angewendet werden. Ferner ist, wieder absolut genommen, $P_2 - P_1 = 23200 - 29000 = -5800$ kg und $\frac{4}{3} P_0 = \frac{4}{3} \cdot 7600 = 10130$ kg; somit ist $P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0$. Daher kommen Formel 45, bzw. 47 zur Verwendung. Man erhält

$$\text{für Schweisseifen: } F = \frac{3 \cdot 29000 + 23200 + \frac{4}{3} \cdot 7600}{2100} = 90 \text{ qcm,}$$

$$\text{für Flusseifen: } F = \frac{3 \cdot 29000 + 23200 + \frac{4}{3} \cdot 7600}{2700} = 70 \text{ qcm.}$$

Dieselben Werthe hätten sich auch ergeben, für

$$P_0 = -7600 \text{ kg, } P_1 = -29000 \text{ kg und } P_2 = 23200 \text{ kg,}$$

da für die Kriterien und die Formeln nur die absoluten Werthe in Frage kommen.

3) Es sei $P_0 = -12000$ kg, $P_1 = -4000$ kg und $P_2 = +24000$ kg. Alsdann ist absolut genommen, $P_2 > \frac{2}{3} P_0$, da $24000 > \frac{2}{3} \cdot 12000$ ist; weiter ist auch $P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0$, da $24000 - 4000 > \frac{4}{3} \cdot 12000$ ist. Mithin sind die Formeln 46 oder 48 zu verwenden. Man erhält

$$\text{für Schweisseifen: } F = \frac{3 \cdot 24000 + 4000 - \frac{4}{3} \cdot 12000}{2100} = \approx 29 \text{ qcm,}$$

$$\text{für Flusseifen: } F = \frac{3 \cdot 24000 + 4000 - \frac{4}{3} \cdot 12000}{2700} = \approx 23 \text{ qcm.}$$

Dieselben Werthe hätten sich auch ergeben für

$$P_0 = 12000 \text{ kg, } P_1 = 4000 \text{ kg und } P_2 = -24000 \text{ kg.}$$

In der Spalte 5 der umstehenden Tabelle sind für die hauptsächlichsten Constructions-Materialien die üblichen Werthe der zulässigen Beanspruchung K zusammengestellt; ferner sind in der Tabelle die Elasticitäts-Coefficienten, die Festigkeits-Coefficienten, so wie diejenigen Beanspruchungen angegeben, bei welchen die Elasticitätsgrenze erreicht wird. Naturgemäß können die in der Tabelle angegebenen Werthe nur Mittelwerthe sein, die sich mit der Güte des Materials, der Art der Beanspruchung und anderen Umständen ändern.

1. Bezeichnung der Materialien	2. Elasticitäts- Coefficient E	3. Festigkeits-Coefficient bei Beanspruchung auf		4. Beanspruchung an der Elasticitätsgrenze auf		5. Zulässige Beanspruchung K für					
		Zug	Druck	Zug	Druck	endgiltige Bauwerke		zeitweilige Bauten,		Belastung mit mäßigen Erschütterungen	
						Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
Schweißseifen	2000	3500 bis 4000	3200 bis 3600	1,6	1,6	700	700	1000	1000	—	—
Flußseifen	2200	4000 bis 4200	4000 bis 4200	2,0 bis 2,4	2,0 bis 2,4	900	900	1200	1200	—	—
Gußseifen	—	1250 bis 1450	7500 bis 8000	—	—	—	—	250	500	—	—
Stahl	2000 bis 2400	7000 bis 8000		3000 bis 4000		1500	1500	2000	2000	—	—
Holz in der Faserrichtung:											
Eichenholz	120	965	487	0,26	0,21	—	—	90	65	180	130
Kiefernholz	120	820	410	0,29	0,22	—	—	80	60	160	110
Holz radial, d. h. in der Richtung der Jahresringe:											
Eichenholz	18,0	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
Kiefernholz	9,6	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
	Tonnen für 1 qcm	Kilogr. für 1 qcm		Tonnen für 1 qcm		Kilogr. für 1 qcm					

Das Berliner Polizei-Präsidium legt bei feinen Berechnungen die nachstehend angegebenen Zahlenwerthe als zulässige Beanspruchung zu Grunde (Bekanntmachung vom 21. Februar 1887):

Material	Zulässige Beanspruchung auf	
	Zug	Druck
Schweißseifen	750	750
Gußseifen	250	500
Bombirtes Eisenblech	500	500
Eisendraht	1200	—
Eichen- und Buchenholz	100	80
Kiefernholz	100	60
Granit	—	45
Sandstein, je nach der Härte	—	15 bis 30
Rüdersdorfer Kalkstein in Quadern	—	25
Kalksteinmauerwerk in Kalkmörtel	—	5
Gewöhnliches Ziegelmauerwerk	—	7
Ziegelmauerwerk in Cementmörtel	—	11
Bestes Klinkermauerwerk in Cementmörtel	—	12 bis 14
Mauerwerk aus porösen Steinen	—	3 bis 6
Guter Baugrund	—	2,5
	Kilogr. für 1 qcm	

Neuerdings gestattet das Berliner Polizei-Präsidium²¹⁾ für Schweißseifen eine Beanspruchung bis 1000 kg auf 1 qcm für Zug und Druck, wenn die Belastung vorwiegend ruhend ist oder wenn die Nutzlast so groß in die Rechnung eingeführt ist, daß unvorhergesehene Vergrößerung ausgeschlossen ist und Erschütterungen nicht zu befürchten sind. Diese Vergünstigung wird nur für Theile zugestanden, welche nur Zug oder nur Druck zu ertragen haben und keine Nietverschwächung aufweisen. Für bestes Klinkermauerwerk in reinem Cementmörtel wird von derselben Behörde ein größter Druck bis zu 20 kg für 1 qcm und ein größter Zug bis 1 kg für 1 qcm zugelassen.

87.
Beispiele.

Beispiele. 1) Eine schweißseiferne Stange werde höchstens mit einer Zugkraft $P = 18750$ kg beansprucht. Es ist die Querschnittsgröße unter der Annahme zu bestimmen, daß die Stange einer endgültigen Construction angehört und die Belastung nur mit mäßigen Erschütterungen auftritt.

Nach vorstehender Tabelle ist für den vorliegenden Fall $K = 1000$ kg, sonach

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18750}{1000} = 18,75 \text{ qcm.}$$

21) Siehe: FRÖLICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung statischer Berechnungen etc. 2. Aufl. Berlin 1897. S. 4.

Wenn die Stange aus Rundeisen construirt werden soll, so muß fein:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 18,75}{3,14}} = 4,9 \text{ cm.}$$

Wird entsprechend den Annahmen des Berliner Polizei-Präsidiums $K = 750 \text{ kg}$ gesetzt, so muß

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18750}{750} = 25 \text{ qcm}$$

fein und

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 5,04 \text{ cm.}$$

2) Bei einer gußeisernen gedrückten Stange sei die größte Druckkraft $P = 5850 \text{ kg}$. Der Querschnitt derselben ist demnach, wenn die Construction wiederum als endgiltig und die Belastung als mit mäßigen Erschütterungen wirkend angenommen wird,

$$F = \frac{P}{K} = \frac{5850}{500} = 11,7 \text{ qcm.}$$

Bei Wahl eines kreisförmigen Querschnittes ergibt sich der Durchmesser d aus der Gleichung:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 11,7}{3,14}} = 3,8 \text{ cm.}$$

3) Auf einen Holzstab mit rechteckigem Querschnitt wirke ein Größtdruck $P = 16000 \text{ kg}$. Der Stab soll einer zeitweiligen Construction, welche mäßigen Erschütterungen ausgesetzt ist, angehören; verwendet wird Kiefernholz. Nach Gleichung 37 ergibt sich

$$F = \frac{16000}{110} = 145,4 \text{ qcm.}$$

Ein quadratischer Querschnitt von $12,1 \text{ cm}$ Seitenlänge würde demnach genügen.

4) Wäre im ersten Beispiele die Stabkraft durch das Eigengewicht $P_0 = 6750 \text{ kg}$, diejenige durch Verkehrslast $P_1 = 12000 \text{ kg}$, so ergäbe sich aus Gleichung 42

$$F = \frac{6750}{1050} + \frac{12000}{700} = 6,43 + 17,14 = 23,57 \text{ qcm,}$$

und es müßte fein:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 23,57}{3,14}} = \approx 5,5 \text{ cm.}$$

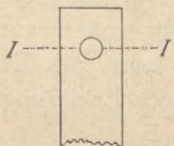
Von der bei den gedrückten Stäben wegen Beanspruchung auf Zerknicken vorzunehmenden Vergrößerung des Querschnittes wird im nächsten Abschnitt (Kap. 2) die Rede sein.

Die Gleichung $\sigma = \frac{P}{F}$ ergab sich unter der Annahme einer gleichförmigen Vertheilung der Kraft P über die ganze Querschnittsfläche F . Diese Annahme ist aber nur richtig, wenn 1) der Querschnitt des Körpers constant ist und 2) die äußere Kraft P sich über die Endflächen gleichmäßig vertheilt. Die Gesetze der Kraftvertheilung für den Fall, daß diese beiden Bedingungen nicht erfüllt sind, können auf rein theoretischem Wege nicht oder nur in einzelnen Fällen genau ermittelt werden. Gewöhnlich wird jedoch bei den Berechnungen auf die Nichtbekanntheit mit diesen Gesetzen keine Rücksicht genommen und die Gleichung $\sigma = \frac{P}{F}$ auch für diese Fälle einfach als richtig angenommen.

Wenn ein Stab an einigen Stellen kleinere Querschnittsflächen, als an anderen hat, so ist der Berechnung des Stabes die kleinste Querschnittsfläche zu Grunde zu legen und diese so zu bemessen, daß die in ihr wirkende Spannung an keiner Stelle die zulässige Beanspruchung übersteigt. Findet in dem betreffenden Querschnitte die Kraft P statt, so berechnet man die Querschnittsfläche F an dieser Stelle nach der Gleichung 37

$$F = \frac{P}{K},$$

Fig. 78.



88.
Beanspruchung
bei
Querschnitts-
veränderungen.

Fig. 79.



Fig. 80.



worin K die zulässige Beanspruchung bedeutet, bzw. nach den Gleichungen 42 bis 48. Der umstehende Stab (Fig. 78) hat seine kleinste Querschnittsfläche im Querschnitte II , welcher der Nietmitte entspricht, und diese Querschnittsfläche muss demnach der obigen Gleichung genügen. Aehnlich ist bei den Stäben in Fig. 79 u. 80 die durch die Verengung bestimmte Stelle als schwächste der Berechnung zu Grunde zu legen. Dabei ist jedoch zu beachten, dass bei Anwendung obiger Gleichung für K ein anderer Werth als derjenige einzu-

führen ist, welcher für Berechnung einer ungeschwächten Stange zu Grunde gelegt wird; man kann nämlich nicht annehmen, dass die Kraft P sich gleichmäßig über den verschwächten Querschnitt vertheilt; die grösste Beanspruchung findet in Fig. 78 neben dem Nietloche statt. Es empfiehlt sich demnach, für K einen kleineren Werth einzuführen, als zur Berechnung des ungeschwächten Stabes.

Die Grösse der Längenänderung gezogener oder gedrückter Stäbe ergibt die Gleichung 36:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{FE} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{Pl}{FE}.$$

Beispiel. Ist bei der in Beispiel 1 auf S. 64 angenommenen Stange $l = 5 \text{ m}$, so wird

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{18750}{18,75 E}.$$

Nach der Tabelle in Art. 86 (S. 64) ist für Schweisseisen $E = 2000000 \text{ kg}$ für 1 qcm ; daher

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{18750}{18,75 \cdot 2000000} = 0,0005 \quad \text{und} \quad \Delta l = 0,0005 \cdot 5 = 0,0025 \text{ m} = 0,25 \text{ mm}.$$

Die Verlängerung beträgt also $2,5 \text{ mm}$.

Betrachtet man die Gleichung 34:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

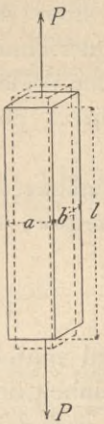
und untersucht, wie gross die Spannung σ für die Flächeneinheit des Querschnittes sein müsste, damit die Verlängerung Δl genau so gross würde, wie die ursprüngliche Stablänge — vorausgesetzt, dass diese Formel für das Verlängerungsverhältniss noch bis zu der in diesem Falle nöthigen Spannungsgrösse gelten würde, so erhält man

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = 1 \quad \text{oder} \quad \sigma = E,$$

d. h. diejenige Spannung für die Flächeneinheit, welche den Stab auf die doppelte Länge verlängern würde, wenn das Verlängerungsgesetz innerhalb dieser Grenzen giltig wäre, ist gleich E . Daher findet man häufig den Elasticitäts-Modulus folgendermassen erklärt: Der Elasticitäts-Modulus ist diejenige Spannung, welche für die Flächeneinheit des Stabquerschnittes wirken müsste, um den Stab auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge zu vergrössern, falls innerhalb der dadurch bedingten Spannungsgrenzen das Elasticitätsgesetz giltig bliebe.

Bei Beanspruchung auf Druck würde die Verkürzung in diesem Falle gleich l sein, d. h. der Stab würde zur Länge Null zusammengedrückt werden. Da die Elasticitätsgesetze nicht bis zu den erwähnten Grenzen gelten, vielmehr von einem annähernd constanten Elasticitäts-Modul E nur so lange die Rede sein kann, als die Spannungen innerhalb der Elasticitätsgrenze bleiben, so ist die vorstehende Erklärung des Elasticitäts-Moduls nicht zweckmässig.

Fig. 81.



Die auf einen Körper wirkenden Kräfte P erzeugen außer der Längenänderung in der Krafrichtung auch solche in allen anderen Richtungen. Wir legen durch einen beliebigen Punkt der Stabaxe (Fig. 81) drei Coordinatenaxen, deren eine mit der Stabaxe zusammenfällt, deren andere beiden senkrecht zur ersteren stehen. Man nennt sodann die Längenänderung in der Richtung der Stabaxe die *longitudinale*, diejenigen in den Richtungen der beiden anderen Axen die *transversalen* Längenänderungen.

Die transversalen Längenänderungen sind der longitudinalen Längenänderung umgekehrt proportional. Bezeichnet μ einen für verschiedene Materialien besonders zu ermittelnden Zahlenwerth, so ist

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta l}{l} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\Delta l}{l}.$$

Nun ist nach Gleichung 34: $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu} \frac{\sigma}{E} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\sigma}{E}.$$

Bei Körpern, welche nach allen Richtungen gleiche Elasticität besitzen, d. h. bei sog. *isotropen* Körpern, ist $\mu = \mu_1$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu} \frac{\sigma}{E}.$$

Für isotrope Körper liegt μ zwischen 3 und 4.

90.
Änderungen
der
Querschnitts-
maße.

3. Kapitel.

Schub und Schubfestigkeit.

Der Fall der reinen Schubbeanspruchung tritt, wie bereits in Art. 80 (S. 56) gefagt wurde, ein, wenn die wirkenden Kräfte das Bestreben haben, zwei Nachbarquerschnitte so gegen einander zu verschieben, daß die Entfernung der Querschnittsebenen dieselbe bleibt. Dies ist nur möglich, wenn die Kräfte unmittelbar neben der Ebene wirken, längs deren das Bestreben einer Verschiebung stattfindet, und wenn dieselben sich zu zwei Kräften vereinen lassen, welche einander nach Größe

und Richtung genau gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt sind. Man nennt diese Kräfte die *abscherenden* Kräfte.

In der Technik kommt dieser Fall ziemlich rein bei den Niet- und Bolzen-

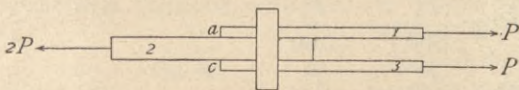
verbindungen vor. Die beiden Kräfte P (Fig. 82) haben das Bestreben, die Bleche 1 und 3 nach rechts zu verschieben; diese Verschiebung wird durch den Niet verhindert, welcher die Bleche 1 und 3 mit 2 verbindet. Längs jeder der beiden Trennungsflächen wirkt je eine Kraft P nach rechts im Bleche 1, bzw. 3, je eine Kraft P nach links im Bleche 2.

In den meisten Fällen tritt zu der durch die abscherenden Kräfte erzeugten Schubspannung noch eine durch gleichzeitig wirkende Momente erzeugte Biegungsspannung; bezüglich dieser zusammengesetzten Beanspruchung wird auf das folgende Kapitel verwiesen. Auch in dem durch Fig. 82 veranschaulichten Falle findet, genau genommen, eine solche zusammengesetzte Beanspruchung statt.

Die genaue Untersuchung der Spannungen, welche in den auf Abscherung beanspruchten Querschnitten auftreten, ergibt, daß die Schubspannungen in den einzelnen Querschnittspunkten verschieden groß sind; das Gesetz der Vertheilung hängt von der Form des Querschnittes ab. Für die meisten Fälle der Praxis, ins-

91.
Schub-
spannungen.

Fig. 82.



besondere für die wichtigen Nietverbindungen, kann man aber mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daß die abscherenden Kräfte sich gleichförmig über die ganzen auf Abscherung beanspruchten Querschnitte vertheilen, mithin im Querschnitt eine gleichförmig vertheilte Schubspannung erzeugen. Daraus folgt, daß der Widerstand gegen Abscheren der Größe des abzuscherenen Querschnittes direct proportional angenommen werden kann.

92.
Querschnitts-
bestimmung.

Ist also der Flächeninhalt des auf Abscheren beanspruchten Querschnittes F , die abscherende Kraft P und die im Querschnitt entstehende Schubspannung τ , so ist $P = F \tau$, woraus

$$\tau = \frac{P}{F} \dots \dots \dots 49.$$

Die Querschnittsgröße der auf Schub beanspruchten Querschnitte wird mittels Gleichung 49 ermittelt. Versteht man unter T die größte für die Flächeneinheit des Querschnittes zulässige Schubbeanspruchung, unter P die auf Abscheren wirkende Kraft, so ergibt sich aus der angegebenen Gleichung die nöthige Querschnittsgröße

$$F = \frac{P}{T} \dots \dots \dots 50.$$

Was nun die für T einzuführenden Werthe anlangt, so haben die angestellten Versuche in Uebereinstimmung mit den theoretischen Untersuchungen ergeben, daß der Widerstand der Baustoffe gegen Beanspruchung auf Schub geringer ist, als gegen Beanspruchung auf Zug oder Druck. Man darf also die Baustoffe auf Schub nicht so stark beanspruchen, wie auf Zug oder Druck.

Nachstehende Tabelle giebt für eine Reihe wichtiger Baustoffe die Festigkeits-Coefficienten für Schub und die zulässigen Schubbeanspruchungen für das Quadr.-Centim. als Flächeneinheit an. Bemerket wird, daß man für Schweißseifen und Flußeisen die in Art. 84 u. 85 (S. 61 u. 62) berechneten Formeln verwenden kann, wenn man die maßgebenden Coefficienten 1050 für Schweißseifen, bezw. 1350 für Flußeisen mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt einführt. Demnach kann man den erforderlichen Querschnitt berechnen aus den Formeln:

für Schweißseifen: $F = \frac{P_0}{800} + \frac{P_1}{560} \dots \dots \dots 51.$

für Flußeisen: $F = \frac{P_0}{1080} + \frac{P_1}{720} \dots \dots \dots 52.$

Bei Berechnung der Nietquerschnitte ist wegen des hier verwendeten vorzüglichen Materials die erlaubte Schubspannung gleich derjenigen Zug-, bezw. Druckbeanspruchung einzuführen, welche im Blech und im Façoneisen als zulässig gilt. Für die Berechnung der Nietquerschnitte können also die Formeln 42 bis 48 verwendet werden.

Bezeichnung der Baustoffe	Festigkeits-Coefficient für Schub	Zulässige Schubbeanspruchung T
Schweißseifen	3200 bis 4000	600 bis 800
Flußeisen	3200 bis 4000	700 bis 1000
Gußseifen	1000 bis 1100	220
Gußstahl	4000	800
Nadelholz: parallel der Faserrichtung	46	9 bis 10
fenkrecht zur Faserrichtung	125	16 bis 19
Eichenholz: parallel der Faserrichtung	86	22 bis 27
fenkrecht zur Faserrichtung	125	22 bis 27

Kilogr. für 1 qcm der Querschnittsfläche.

Beispiele. 1) Eine Stange, in welcher ein Zug $P = 5600 \text{ kg}$ herrscht, soll mit einem Bolzen aus Schweisseisen an einem Knotenbleche befestigt werden. Der Durchmesser d des Bolzens ist zu bestimmen.

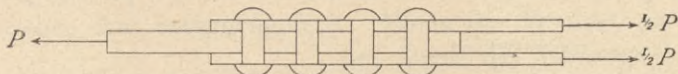
Der Querschnitt F des Bolzens ergibt sich aus der Gleichung 50. Die zulässige Schubbeanspruchung T sei hier 700 kg , folglich

$$F = \frac{5600}{700} = 8 \text{ qcm} \quad \text{und} \quad d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 3,2 \text{ cm}.$$

2) Es ist die Anzahl Nietquerchnitte zu bestimmen, welche nöthig sind, um einen schweisseisernen Constructionstheil, in welchem ein Zug $P = 30\,000 \text{ kg}$ herrscht, mit einem Knotenbleche zu verbinden.

Der Durchmesser der Niete sei 2 cm ; der betreffende Constructionstheil (Fig. 83) soll aus zwei Flacheisen hergestellt sein, welche das Knotenblech zwischen sich nehmen.

Fig. 83.



Jedes Flacheisen hat einen Zug von $\frac{P}{2} = 15\,000 \text{ kg}$ zu ertragen; den gleichen Zug haben die Nietquerchnitte zwischen diesem Flacheisen und dem Knotenbleche aus dem einen in das andere zu überführen, d. h. die auf Abscheren dieser Querschnitte wirkende Kraft beträgt $15\,000 \text{ kg}$. Der Gesamtquerschnitt aller zur Befestigung des einen Flacheisens dienenden Nietquerchnitte ergibt sich demnach zu

$$F = \frac{15\,000}{T}.$$

Die für Niete erlaubte Schubbeanspruchung T kann man unbedenklich gleich der im gewöhnlichen Stabeisen und Blech erlaubten Zugbeanspruchung annehmen. Wir nehmen deshalb $T = 750 \text{ kg}$, und es wird

$$F = \frac{15\,000}{750} = 20 \text{ qcm}.$$

Ist die Anzahl der Nietquerchnitte n , so muß $\frac{n d^2 \pi}{4} = F = 20 \text{ qcm}$ sein, oder, wenn $d = 2 \text{ cm}$,

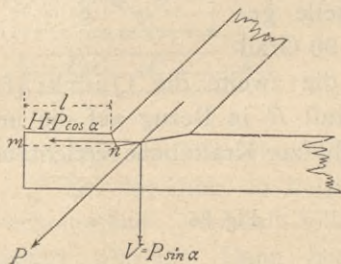
$$n = \frac{20 \cdot 4}{d^2 \pi} = 6,37, \text{ statt dessen } 7.$$

Es müssen also 7 Nietquerchnitte zur Verbindung des einen Flacheisens mit dem Knotenbleche angeordnet werden; genau eben so groß muß die Zahl der Nietquerchnitte sein, welche zur Verbindung des anderen Flacheisens mit dem Knotenbleche dienen.

Ein Abscheren ist bei der Construction in Fig. 83 nur möglich, wenn jeder Niet in zwei Querschnitten abgesichert wird; jeder Niet bietet also zwei Querschnitte, so daß im Ganzen 7 Niete, d. h. 14 Nietquerchnitte anzuordnen sind²²⁾.

3) Eine Strebe (Fig. 84), welche einen Druck $P = 20\,000 \text{ kg}$ zu ertragen hat, sei mit einem Balken durch Verfatzung verbunden; der Winkel beider Axen sei 45° . Die Länge l ist so zu bestimmen, daß ein Abscheren längs der Fläche mn nicht stattfindet. Die Kraft P zerlegt sich in eine lothrechte Seitenkraft $V = P \sin \alpha$ und eine wagrechte Seitenkraft $H = P \cos \alpha$.

Fig. 84.



Es ist $H = 20\,000 \cos 45^\circ = 14\,140 \text{ kg}$ und

$$V = 20\,000 \sin 45^\circ = 14\,140 \text{ kg}.$$

Die abscherende Kraft A ist die Kraft H abzüglich des Reibungswiderstandes fV , wenn f den Reibungs-Coefficienten bedeutet. Ist $f = 0,3$, so ist die abscherende Kraft

$$A = H - fV = 14\,140 (1 - 0,3) = 9898 \text{ kg} \\ \text{oder } A = \infty 10\,000 \text{ kg}.$$

Dabei ist auf die durch den Bolzen möglicher Weise erzeugte Reibung keine Rücksicht genommen, weil ein Lockern des Bolzens denkbar ist.

Die Breite des Balkens und der Strebe sei b ; alsdann wird eine Fläche von der Länge l und der Breite b auf Abscheren in Anspruch genommen (d. h. die Fläche mn). Ist die für 1 qcm der abzuscherenen Fläche zulässige Schubspannung T , so darf in dieser Fläche im Ganzen eine Schubspannung $S = b l T$ stattfinden.

²²⁾ Man unterscheidet einschnittige und zweischnittige Niete. Bei den einschnittigen Nieten wird von jedem Niet nur ein Querschnitt, bei den zweischnittigen Nieten werden von jedem Niet zwei Querschnitte auf Abscheren beansprucht. Näheres hierüber in Theil III, Bd. 1 (Abth. I, Abchn. 3: Constructions-Elemente in Eisen) dieses Handbuchs.

So groß darf also A höchstens sein. Die Bedingungsgleichung für die Ermittlung von l ist folglich:

$$b l T = A \quad \text{oder} \quad l = \frac{A}{b T}.$$

In unserem Falle sei $b = 25 \text{ cm}$; T ist nach der Tabelle auf S. 68 für Nadelholz gleich 10 kg für 1 qcm ; es muss also sein:

$$l = \frac{10000}{25 \cdot 10} = 40 \text{ cm}.$$

Auf weitere Fälle der Schubbeanspruchung werden wir im nächsten Kapitel zurückkommen.

4. Kapitel.

Biegung und Biegezugfestigkeit.

94.
Biegemoment und
Querkraft.

Beanspruchung eines Balkens auf Biegung findet statt, wenn die äußeren Kräfte die beiden an den verschiedenen Seiten eines Querschnittes (etwa aa in Fig. 86) liegenden Balkentheile um eine senkrecht oder geneigt zur Kräfteebene stehende Achse zu drehen streben. Drehung setzt ein Moment voraus; folglich muss ein Moment der äußeren Kräfte für den Querschnitt vorhanden sein. Gewöhnlich wirkt außer diesem Momente noch eine abscherende Kraft, welche weitere Beanspruchungen hervorruft; letztere setzen sich dann mit den reinen Biegebeanspruchungen zusammen.

Es sei hier die Annahme gemacht, dass die Balkenachse in der Kräfteebene liege; wenn somit die Bildebene die Kräfteebene vorstellt, so liegen in derselben sowohl die äußeren Kräfte, wie auch die Balkenachse.

Die äußeren Kräfte, als welche die Stützdruöcke und die Belastungen einzuföhren sind, können beliebige Richtung und GröÖe haben.

Der allgemeine Fall ist durch Fig. 85 veranschaulicht. Die Mittelkraft R aller an der einen Seite irgend eines Querschnittes aa wirkenden äußeren Kräfte schneidet die Achse des Körpers unter dem Winkel φ . Zerlegt man R in zwei Seitenkräfte, deren eine, P , parallel zur Achse des Körpers an der betreffenden Stelle gerichtet ist, deren andere, Q , die Achse des Körpers unter 90° Grad schneidet, so nennt man die erstere die Axialkraft, die zweite die Querkraft oder Transversalkraft. Das statische Moment der Kraft R in Bezug auf die im Schwerpunkt des zu betrachtenden Querschnittes senkrecht zur Kräfteebene errichtete Achse erstrebt die Drehung des linken Balkentheiles um diese Achse und wird das Biegemoment des Querschnittes genannt.

Der ganze Träger AB (Fig. 86) muss unter der Einwirkung aller äußeren Kräfte im Gleichgewichte sein; demnach muss die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene gleich Null sein. Bezeichnet man nun das statische Moment der an dem links von aa liegenden Trägerteile angreifenden äußeren Kräfte für den Drehpunkt O

Fig. 85.

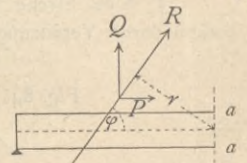
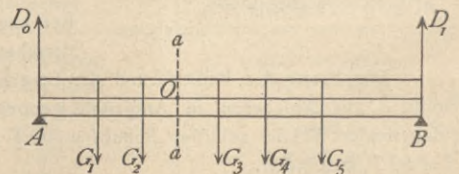


Fig. 86.



mit M_{links} , dasjenige der äusseren Kräfte an dem rechts liegenden Trägertheile ebenfalls für O als Drehpunkt mit M_{rechts} , so muß sein

$$0 = M_{links} + M_{rechts},$$

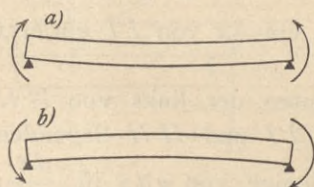
d. h.

$$M_{rechts} = -M_{links}.$$

Die auf die rechte Balkenseite des Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte haben also ein resultirendes Biegemoment, welches dem Zahlenwerthe nach genau so groß ist, wie das auf die linke Balkenseite des Querschnittes wirkende; die Vorzeichen sind entgegengesetzt. Wenn das Moment an der einen Seite nach rechts

(im Sinne des Uhrzeigers) dreht, so ist die Drehrichtung des Momentes an der anderen Seite nach links (entgegengesetzt der Uhrzeigerdrehrichtung). Beide Momente beanspruchen den Balken gleichzeitig entweder so, daß er seine hohle Seite nach oben (Fig. 87a) oder nach unten (Fig. 87b) kehrt. Die erstere Drehrichtung der Momente soll in der Folge, wenn nichts anderes angegeben ist, als positiv, die letztere als negativ eingeführt werden. Die Momente sind daher positiv, wenn sie den Theil links vom Querschnitt nach rechts und den Theil rechts vom Querschnitt nach links drehen.

Fig. 87.

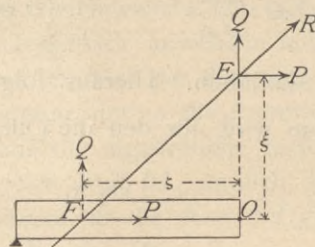


Für die Anwendung ist zu bemerken, daß es nach Vorstehendem ganz gleichgiltig ist, ob man das Moment der an der einen oder der an der anderen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte ermittelt; man wird zweckmässig stets diejenige Seite wählen, welche für die Rechnung und Anschauung die bequemere ist.

Die Zerlegung der Mittelkraft R in Axial- und Querkraft kann an beliebiger Stelle der Kraft R vorgenommen werden. Geschieht dieselbe im Punkte E , dem Schnittpunkte von R mit dem Querschnitt (oder seiner Verlängerung), so hat Q

kein Moment für O als Drehpunkt, und das Biegemoment, d. h. das statische Moment von R ist dann gleich dem statischen Momente der im Punkte E wirkenden Kraft P , also $M = P\xi$ (Fig. 88). Zerlegt man dagegen R in F , dem Schnittpunkte von R mit der Axe, so hat P kein Moment für O als Drehpunkt, und das Biegemoment wird gleich dem statischen Momente von der in F wirkenden Kraft Q , also $M = Q\zeta$ (Fig. 88).

Fig. 88.



Wenn bei einem Balken mit wagrechter Axe nur lothrechte äussere Kräfte wirken, so ist R gleichfalls lothrecht, also die Seitenkraft P gleich Null; dann ist $R = Q$.

Bei den hier zu betrachtenden Balken ist dieser Fall der fast ausschließlich vorkommende; deshalb sollen in Folgendem vorwiegend lothrechte Kräfte zu Grunde gelegt werden. Dann besteht nachstehende einfache Beziehung zwischen dem Biegemomente und der Querkraft: Die Querkraft Q ist gleich dem ersten Differentialquotienten des Biegemomentes nach x , wenn x die Abcisse eines Querschnittes bedeutet.

Der Balken AB (Fig. 89) trage eine beliebige, an den einzelnen Stellen verschiedene Belastung q für die Längeneinheit und eine Reihe von Einzellaften P_1, P_2, P_3 . Die Größe von q werde an jeder Stelle durch die Ordinate der Curve mno dargestellt. Die Abcisse irgend eines Querschnittes II sei x ; links von diesem

Querschnitt wirken D_0 , P_1 und $\int_0^x q dx$. Die Mittelkraft dieser drei Kräfte ist die Querkraft Q für den Querschnitt II , d. h. es ist

$$Q = D_0 - P_1 - \int_0^x q dx.$$

Q möge im Abstände b links von A angreifen. Das Biegemoment für den Querschnitt II ist gleich dem statischen Moment von Q für diesen Querschnitt, d. h. es ist

$$M = Q (b + x).$$

Betrachtet man einen zweiten Querschnitt $IIII$, der um dx von II entfernt ist, so ist für diesen das Moment $M + dM$.

Dieses Moment setzt sich zusammen aus den Momenten der links von $IIII$ wirkenden Kräfte, d. h. der Kraft Q , und der zwischen II und $IIII$ liegenden Kraft $q dx$. Der Hebelsarm von Q ist $b + x + dx$, derjenige von $q dx$ ist $\frac{dx}{2}$; mithin ist

$$M + dM = Q (b + x + dx) - q dx \frac{dx}{2} = Q (b + x) + Q dx - q \frac{dx^2}{2}.$$

Zieht man von dieser Gleichung die oben für M gefundene ab, so bleibt:

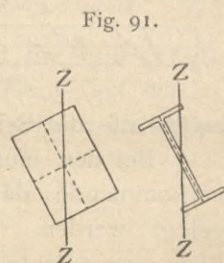
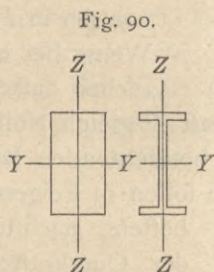
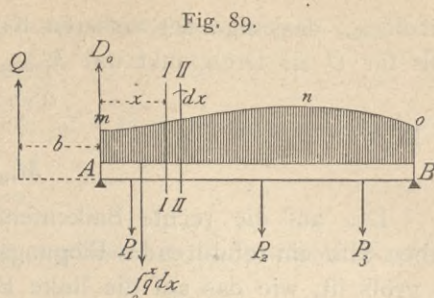
$$dM = Q dx - \frac{q dx^2}{2}.$$

$\frac{q dx^2}{2}$ ist eine unendlich kleine GröÙe zweiter Ordnung und verschwindet gegen die übrigen GröÙen der Gleichung, welche unendlich kleine GröÙen erster Ordnung sind. Es ist demnach

$$dM = Q dx \text{ und, wie oben behauptet, } Q = \frac{dM}{dx} \dots \dots 53.$$

Wird $Q = 0$, so ist auch $\frac{dM}{dx} = 0$, also M ein Maximum. Hieraus folgt, daß das Moment für denjenigen Querschnitt zum Maximum wird, für den die Querkraft gleich Null ist.

Für die Berechnung auf Biegung beanspruchter Balken ist es von grundlegender Bedeutung, wie die einzelnen Balkenquerschnitte von der Kraftebene geschnitten werden. Wenn, wie meistens der Fall, die Kraftebene alle Balkenquerschnitte in Hauptachsen schneidet (siehe Art. 62, S. 41), so ergeben sich für die Spannung sehr einfache Formeln. Nach Früherem ist jede Symmetrie-Axe eine Hauptaxe; wenn also z. B. die Querschnitte die in Fig. 90 dargestellten Formen haben und die Kraftebene durch ZZ , senkrecht zur Bildebene geht, so ist die obige Voraussetzung erfüllt. Wesentlich verwickelter ist die Berechnung, wenn die Kraftebene die Querschnitte nicht in Hauptachsen schneidet; dieser Fall wird durch Fig. 91 veranschaulicht, in welcher die Querschnitte lothrecht belasteter Dachpfetten vorgeführt sind.



als Punkt S darstellt; jede Spannung σdf hat für diese Axe das Moment $\sigma \cdot z df$; die Summe aller dieser Einzelmomente ist, abgesehen vom Vorzeichen, $\int \sigma z df$. Auch hier, wie bei Gleichung I und III, ist über die ganze Querschnittsfläche zu integrieren.

In Gleichung III haben die äußeren Kräfte für die Axe ZZ das Moment Null, weil ihre Mittelkraft jedenfalls die Axe ZZ schneidet; jede Spannung $\sigma \cdot df$ hat das Einzelmoment $\sigma \cdot y df$.

Setzt man in obige drei Gleichungen den oben für σ angegebenen Werth ein und beachtet, daß bei den Integrationen die Werthe α , β , γ unverändert bleiben, so erhält man aus Gleichung I

$$P = \alpha \int df + \beta \int_{-b_2}^{+b_1} y df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} z df.$$

$\int y df$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für die Axe ZZ ; da diese eine Schwerpunktsaxe ist, so ist das statische Moment der Querschnittsfläche für diese Axe nach Art. 33 (S. 26) gleich Null. $\int z df$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für die Axe YY und, da diese Axe ebenfalls eine Schwerpunktsaxe ist, gleichfalls Null. Demnach ist

$$\int_{-b_2}^{+b_1} y df = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-a_2}^{+a_1} z df = 0,$$

ferner, wenn F den Inhalt der ganzen Querschnittsfläche bedeutet,

$$F = \int df; \quad \text{mithin} \quad P = \alpha F,$$

und

$$\alpha = \frac{P}{F}.$$

Gleichung II lautet mit dem Werthe für σ :

$$M = \alpha \int_{-a_2}^{+a_1} z df + \beta \int_{-a_2}^{+a_1} y z df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df.$$

Nun ist $\int z df = 0$.

$\int y z df$ ist das Centrifugalmoment für die beiden Axen YY und ZZ ; da diese nach der Annahme Hauptaxen sind, so folgt

$$\int_{-a_2}^{+a_1} y z df = 0.$$

$\int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df$ ist nach Früherem das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Axe YY , d. h. es ist

$$\int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df = \mathcal{F}_Y;$$

die Gleichung II heißt demnach:

$$M = \gamma \mathcal{F}_Y, \quad \text{also} \quad \gamma = \frac{M}{\mathcal{F}_Y}.$$

Gleichung III lautet mit dem Werthe für σ :

$$0 = \alpha \int_{-b_2}^{+b_1} y df + \beta \int_{-b_2}^{+b_1} y^2 df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} y z df.$$

Da $\int_{-b_2}^{+b_1} y df = 0$ und $\int_{-a_2}^{+a_1} y z df = 0$ ist (siehe oben), so bleibt $0 = \beta \int_{-b}^{+b} y^2 df$,

woraus folgt, da $\int_{-b_2}^{+b_1} y^2 df$ nicht gleich Null ist,

$$\beta = 0.$$

Demnach sind die Werthe für die drei Constanten:

$$\alpha = \frac{P}{F}, \quad \beta = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{M}{\mathcal{F}_Y},$$

und es ist schliesslich

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}_Y} z \dots \dots \dots 54.$$

Wenn, wie meistens, die Axialkraft P gleich Null ist, so ergibt sich für die axiale Biegungsspannung der Ausdruck

$$\sigma = \frac{Mz}{\mathcal{F}_Y}, \dots \dots \dots 55.$$

und wenn man vereinfachend \mathcal{F} statt \mathcal{F}_Y setzt,

$$\sigma = \frac{Mz}{\mathcal{F}} \dots \dots \dots 56.$$

Gleichung 55, bezw. 56 giebt die axialen Biegungsspannungen für einen Balken mit gerader Axe an, auf welchen die äusseren Kräfte nur senkrecht zur Axe wirken und bei dem die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet. Diese Gleichung soll zunächst besprochen werden.

1) Die Axialkraft hat die Grösse Null.

Gleichung 56 enthält ausser der Ordinate z eines Querschnittspunktes auf der rechten Seite nur die Grössen M und \mathcal{F} . Bei einer bestimmten, gegebenen Belastung haben für alle Punkte desselben Querschnittes, also für alle möglichen Werthe von z , fowohl M (das Biegemoment oder das Moment der an der einen Seite des Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte, bezogen auf die wagrechte Schweraxe desselben als Drehaxe), wie auch das Trägheitsmoment \mathcal{F} , welches nur von der Form und Grösse der Querschnittsfläche abhängt, denselben Werth. Demnach ist nach Gleichung 56 die axiale Spannung σ an den verschiedenen Stellen eines Querschnittes nur mit dem Abstände z derselben von der wagrechten Schwerpunktsaxe veränderlich. Alle Punkte eines Querschnittes, welche in gleicher Höhe z über der wagrechten Schwerpunktsaxe liegen, werden also gleich stark beansprucht. Trägt man die in den verschiedenen Höhen z für die Flächeneinheit wirkenden Axialspannungen derart graphisch auf, dass man die z als Abscissen, die zugehörigen σ als Ordinaten zeichnet, und verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, so erhält man die Linie

96.
Balken,
bei denen die
Axialkraft
die Grösse Null
hat.

der Gleichung $\sigma = \frac{M}{\mathcal{F}} z$. Diese Linie wird eine Gerade, weil die Veränderlichen σ und z nur in der ersten Potenz vorkommen.

Für $z = 0$ wird $\sigma = 0$, d. h. in allen in der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punkten ist die Axialspannung gleich Null.

An diesen Stellen ist also auch die Verlängerung oder Verkürzung gleich Null; denn dieselbe ist $\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx$, also für $\sigma = 0$ ebenfalls gleich Null.

Man nennt die Linie, welche alle Querschnittspunkte enthält, in denen die Axialspannung Null ist, die Null-Linie oder neutrale Linie. Diese Linie fällt nach Vorstehendem hier mit der wagrechten Schwerpunktsaxe YY zusammen; deshalb findet statt: Bei einem geraden wagrechten Balken, dessen Querschnitte durch die Kräfteebene in Hauptaxen geschnitten werden und auf den nur lothrechte Kräfte wirken, fällt in jedem Querschnitt die Null-Linie mit der wagrechten Schwerpunktsaxe zusammen.

97.
Größte
Beanspruchung.

Aus Gleichung 56 folgt ferner, daß σ desto größer ist, je größer z ist, d. h. je weiter der betreffende Punkt von der wagrechten Schwerpunktsaxe entfernt ist. Die größten Werthe von σ finden also in den am weitesten entfernten Punkten statt. Es seien die Abstände der am weitesten nach oben und unten von der Null-Linie entfernten Punkte (Fig. 92) bezw. $+a_1$ und $-a_2$; alsdann ist

$$\sigma_{max} = + \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = - \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \dots \quad 57.$$

Die Gleichungen 57 werden benutzt, um die Größe und Form des Querschnittes an den verschiedenen Stellen des Balkens zu bestimmen. Bedeutet M das größte für einen Querschnitt mögliche Moment, so ist die größte in diesem Querschnitt vorhandene Zug-, bezw. Druckspannung aus den Gleichungen 57 zu ermitteln. Ist für den betreffenden Stoff und den vorliegenden Fall die zulässige Beanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes K' , bezw. $-K''$ (für Zug, bezw. Druck), so darf höchstens stattfinden:

$$\sigma_{max} = K' \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = -K'',$$

d. h. die Bedingungsgleichungen für den Querschnitt werden:

$$K' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_1, \quad -K'' = - \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \text{oder} \quad K'' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_2.$$

Die beiden Gleichungen für K' und K'' können auch geschrieben werden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{M}{K'} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M}{K''} \quad \dots \quad 58.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 58 sind bekannt; es wird weiterhin gezeigt werden, wie man für die verschiedenen Fälle die Werthe von M ermittelt; diejenigen der zulässigen Beanspruchungen, d. h. die Werthe für K' und K'' sind ebenfalls (aus den Tabellen auf S. 64) bekannt. Sollen also an den meist beanspruchten Stellen der Querschnitte die zulässigen Beanspruchungen K' und K'' nicht überschritten werden, so sind $\frac{\mathcal{F}}{a_1}$ und $\frac{\mathcal{F}}{a_2}$ so zu bestimmen, daß die Gleichungen 58 erfüllt sind. \mathcal{F} , a_1 und a_2 hängen aber nur von der Form und Größe der Querschnittsfläche ab; man kann daher durch passende Anordnung des Querschnittes diese Bedingung erfüllen. Wenn beide Gleichungen 58 erfüllt sind, so treten gleichzeitig in den am meisten gezogenen und gedrückten Punkten des

Querschnittes die zulässigen grössten Beanspruchungen auf Zug und Druck ein; diese Anordnung ist für die Materialausnutzung die günstigste.

Für Baustoffe, bei denen die zulässigen Zug-, bezw. Druckbeanspruchungen (absolut genommen) nahezu gleich gross sind, ist in den Gleichungen 58 die Grösse $K' = K'' = K$ zu setzen. Für diese Stoffe (Schweisseisen, Flusseisen, Stahl, Holz) ergibt sich

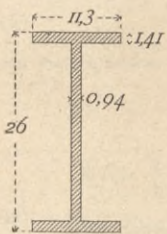
$$\frac{M}{\mathcal{J}} a_1 = \frac{M}{\mathcal{J}} a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = a_2,$$

d. h. die Querschnittsform für derartige auf Biegung beanspruchte Balken ist so zu wählen, dass die am meisten gezogenen, bezw. gedrückten Punkte gleich weit vom Schwerpunkte des Querschnittes entfernt sind, dass also der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in halber Höhe liegt.

Bezeichnet man die halbe Höhe des Querschnittes alsdann mit a , so ist die nunmehr geltende Gleichung:

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} \quad \dots \quad 59.$$

Fig. 93.



Beispiel. Das Maximalmoment in einem schweisseisernen Walzbalken mit I-förmigem Querschnitt betrage $M = 280\,000$ kgcm.

Nach der Tabelle auf S. 64 ist für Schweisseisen $K' = K'' = K = 700$ kg für 1 qcm, also

$$\frac{\mathcal{J}}{a_1} = \frac{\mathcal{J}}{a_2} = \frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{280\,000}{700} = 400.$$

Das neben stehende Profil Nr. 26 der »Deutschen Normal Profile für I-Eisen«

(Fig. 93) hat ein Trägheitsmoment $\mathcal{J} = 5798$; ferner ist $a = \frac{26}{2} = 13$ cm, demnach

nach $\frac{\mathcal{J}}{a} = 446$, so dass dieser Querschnitt im vorliegenden Falle genügt.

Den Quotienten $\frac{\mathcal{J}}{a}$ nennt man wohl auch das Widerstandsmoment und bezeichnet ihn mit W .

Man kann die Querschnitte der Balken mit genau bestimmbarer Elastizitätsgrenze auf ganz ähnliche Weise ermitteln, wie dies in Art. 84 u. 85 (S. 60 u. 62) für Stäbe gezeigt ist, die in ihrer Axenrichtung beansprucht werden.

Derjenige Querschnittspunkt möge der Untersuchung zu Grunde gelegt werden, welcher die grösste Zugbeanspruchung erleidet; was von diesem Punkte gilt, hat auch für denjenigen Punkt Giltigkeit, welcher den grössten Druck erleidet. Entsprechend den Bezeichnungen in Art. 84 (S. 60) bezeichne nunmehr σ_{max} die in dem betrachteten Punkte höchstens auftretende Zugspannung; dieselbe ist

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} a_1}{\mathcal{J}};$$

desgleichen bezeichne σ_{min} die in demselben Punkte mögliche kleinste Zugspannung, d. h. es ist

$$\sigma_{min} = \frac{M_{min} a_1}{\mathcal{J}}.$$

Wie dort, ergibt sich wieder

$$\text{für Schweisseisen: } \sigma_{max} = \frac{1050}{1,5 - 0,5} \frac{M_{min}}{M_{max}},$$

98.
Neuere
Querschnitts-
bestimmung
für Schweiss-
und Flusseisen-
balken.

für Flufseifen: $\sigma_{max} = \frac{1350}{1,5 - 0,5 \frac{M_{min}}{M_{max}}}$,

wobei zu beachten ist, dafs $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{M_{min}}{M_{max}}$ ist.

Bedeutet M_0 das Moment, welches im Querschnitt durch Eigengewicht allein und M_1 das grösste Moment, welches im Querschnitt durch zufällige oder Verkehrs- last allein hervorgerufen wird, so ist

$$M_{max} = M_0 + M_1 \quad \text{und} \quad M_{min} = M_0,$$

und man erhält für Schweifseifen:

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{M_{max}}{1050} \left(1,5 - 0,5 \frac{M_{min}}{M_{max}} \right) = \frac{1,5 M_{max} - 0,5 M_{min}}{1050},$$

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{1,5 M_0 + 1,5 M_1 - 0,5 M_0}{1050} = \frac{M_0 + 1,5 M_1}{1050},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0 + 1,5 M_1}{1050}, \\ \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0}{1050} + \frac{M_1}{700}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 60.$$

Für Flufseifen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0 + 1,5 M_1}{1350}, \\ \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0}{1350} + \frac{M_1}{900}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 61.$$

Beispiel: Die Größtmomente in einem Balken, der als flufseiferner Walzbalken angeordnet werden soll, betragen $M_0 = 180000$ kgcm und $M_1 = 230000$ kgcm. Alsdann mufs

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{180000}{1350} + \frac{230000}{900} = 133 + 255 = 388 \text{ cm}^3$$

fein. Das deutsche Normal-Profil Nr. 24 hat $\frac{\mathcal{F}}{a} = 357 \text{ cm}^3$ und das Profil Nr. 26 $\frac{\mathcal{F}}{a} = 446 \text{ cm}^3$; letzteres ist zu wählen.

Für Gufseifen ist die zulässige Beanspruchung auf Druck doppelt so groß, als diejenige auf Zug (vergl. die Tabelle auf S. 64), also $K'' = 2 K'$, und demnach

$$\frac{M}{\mathcal{F}} a_2 = 2 \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \quad \text{und} \quad a_2 = 2 a_1.$$

Nun ist die ganze Höhe des Querschnittes

$$h = a_1 + a_2 = 3 a_1, \quad \text{woraus} \quad a_1 = \frac{h}{3}.$$

Daraus folgt die Regel: Die Querschnitte der gufseifernen Balken (Fig. 94) sind so anzuordnen, dafs der Schwerpunkt um $\frac{1}{3}$ der Gesamthöhe des Querschnittes von der am meisten gezogenen Faser entfernt liegt. Befinden sich also die gezogenen Fasern, wie meistens, unten, die gedrückten Fasern oben, so soll der Schwerpunkt im Abstände $\frac{h}{3}$ über der Grundlinie des Querschnittes liegen.

99.
Stäbe
aus
Gufseifen.

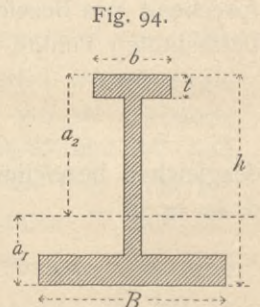


Fig. 94.

Für Gufseifen hat nach neueren Versuchen das Proportionalitätsgesetz keine Gültigkeit; die vorstehenden Entwicklungen sind demnach auch nicht als unbedingt richtig anzusehen. Für Balken verwendet man zweckmäfsig kein Gufseifen.

Die auf Biegung beanspruchten Stäbe aus Holz werden, der Natur des Materials entsprechend, mit rechteckigem Querschnitt hergestellt; der Schwerpunkt des Querschnittes liegt also in halber Höhe h , und es ist $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$. Demnach wird $K' = K''$, und aus der Tabelle auf S. 64 ist der kleinere der beiden Werthe, welche als zulässige Zug-, bezw. Druckbeanspruchung angegeben sind, einzuführen. Wenn dieser Werth K genannt wird, so ist

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M}{K}.$$

Beispiel. Es sei etwa $M = 180\,000$ kgcm; alsdann mufs für kieferne Balken stattfinden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{180\,000}{60} = 3000.$$

Nach Gleichung 19 ist

$$\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{b h^2}{6}.$$

Im vorliegenden Falle mufs also sein

$$\frac{b h^2}{6} = 3000 \quad \text{oder} \quad b h^2 = 18\,000.$$

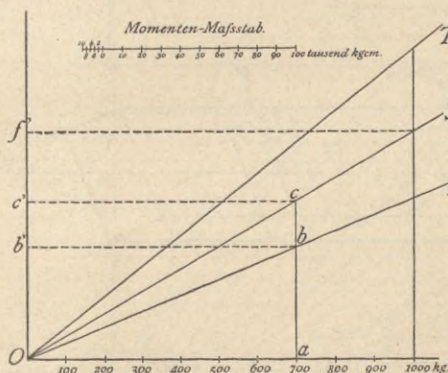
Ist $b = \frac{3}{4} h$, so wird $\frac{3}{4} h^3 = 18\,000$ und $h = \sqrt[3]{24\,000} = \approx 29$ cm, folglich $b = 22$ cm.

Bei den schweis- und flufseisernen Walzbalken I- und C-förmigen Querschnittes, welche im Handel in ganz bestimmten Kalibern erhältlich sind, kann man das für jeden Fall nothwendige Kaliber mittels einer einfachen Figur sehr leicht ermitteln. Die Bedingung für die Querschnittsbildung ist

$$M = K \frac{\mathcal{F}}{a}.$$

Je nachdem man bei einem Balken mit gegebenem Querschnitt, also bekanntem

Fig. 95.



Widerstandsmoment $\frac{\mathcal{F}}{a}$, eine grössere oder geringere Beanspruchung K als zulässig einführt, kann man ihn für ein grösseres oder geringeres Moment M verwenden. Trägt man nun die Werthe von K als Abscissen, die zu gehörigen Werthe $\frac{K \mathcal{F}}{a} = M$ als Ordinaten auf, so ergibt sich für jedes Kaliber eine Gerade, etwa OR (Fig. 95), die durch den Koordinatenanfang O geht und die Grösse der Momente angiebt, welche dieses Kaliber bei den verschiedenen Beanspruchungen K ertragen

kann. In Fig. 95 sind drei solche Linien OR , OS , OT angegeben. Bei einer als zulässig erachteten Beanspruchung $K=700$ kg würde der zu OR gehörige Balken genügen, so lange das grösste Moment nicht grösser als $\overline{ab} = O b'$ ist; der zu OS gehörige Balken genügt hierbei noch für ein Moment $\overline{ac} = O c'$. Wird eine grössere Bean-

100.
Stäbe
aus Holz.

101.
Querschnitts-
bestimmung
mittels
graphischer
Tafel.

spruchung K , etwa $K = 1000 \text{ kg}$, zugelassen, so genügt der Balken OS bis zu einer Momentengröße \overline{Of} . Auf der neben stehenden Tafel sind für die »Deutschen Normal-Profile« mit I- und L-Form die Linien gezogen; auf der Abszissenaxe sind die Spannungen K , auf der Ordinatenaxe die Momente abgetragen.

Wenn z. B. ein Moment von $125\,000 \text{ kgcm}$ aufzunehmen ist, so würde das I-Eisen Nr. 20 dieses mit einer größten Beanspruchung $K = 580 \text{ kg}$ ertragen können, Nr. 18 mit einer Beanspruchung von 765 kg , Nr. 16 mit einer Spannung von 1060 kg . Wäre vorgeschrieben, daß K nicht größer sein solle, als 700 kg , so würde das Kaliber zu wählen sein, welches zunächst über dem Punkte P liegt, in welchem die zu $K = 700 \text{ kg}$ gehörige Ordinate den Werth $M = 125\,000 \text{ kgcm}$ hat. Die Verwendung dieser graphischen Tafel ist sonach sehr bequem.

2) Die Axialkraft ist nicht gleich Null.

Dieser Fall wird aus Zweckmäßigkeitsrücksichten im folgenden Abschnitt, und zwar im Kapitel über »Stützen« behandelt, da er für diese besondere Wichtigkeit hat.

b) Axiale Biegungsstressungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerschnitte nicht in Hauptachsen schneidet.

102.
Axiale
Biegungs-
spannungen.

Auf den Querschnitt II in Fig. 96a wirke das Biegemoment $M = Q\zeta$; Fig. 96b giebt die Vorderansicht des Querschnittes; die Kraftebene fällt mit der Bildebene der Fig. 96a zusammen, geht durch die Balkenaxe und ist die XZ -Ebene.

Bezeichnen UU und VV die beiden Hauptachsen des Querschnittes, so kann nach bekannten Gesetzen der Statik das in der XZ -Ebene wirkende Moment M in zwei Seitenmomente zerlegt werden, welche in der XU - und XV -Ebene wirken; das erstere ist alsdann $M_u = M \sin \alpha$, das letztere $M_v = M \cos \alpha$. Diese Zerlegung, so wie die Drehrichtung der Seitenmomente wird durch die isometrische Ansicht in Fig. 96c verdeutlicht, bei welcher, der einfacheren Zeichnung halber, ein Rechteckquerschnitt angenommen ist. Q zerlegt sich im Punkte A in $Q \cos \alpha$ und $Q \sin \alpha$, welche Kräfte bezw. in den Ebenen XV und XU wirken. Die erstere Kraft hat in Bezug auf die durch O , den Schwerpunkt des betrachteten Querschnittes, gelegte Hauptaxe UU das Moment:

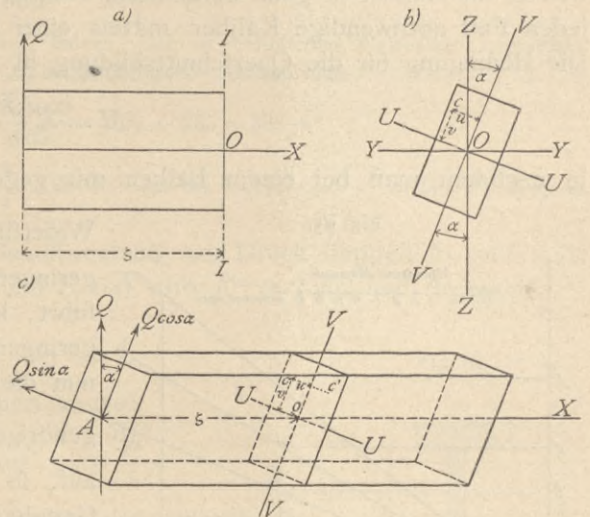
$$Q \cos \alpha \cdot \zeta = Q \zeta \cos \alpha = M \cos \alpha;$$

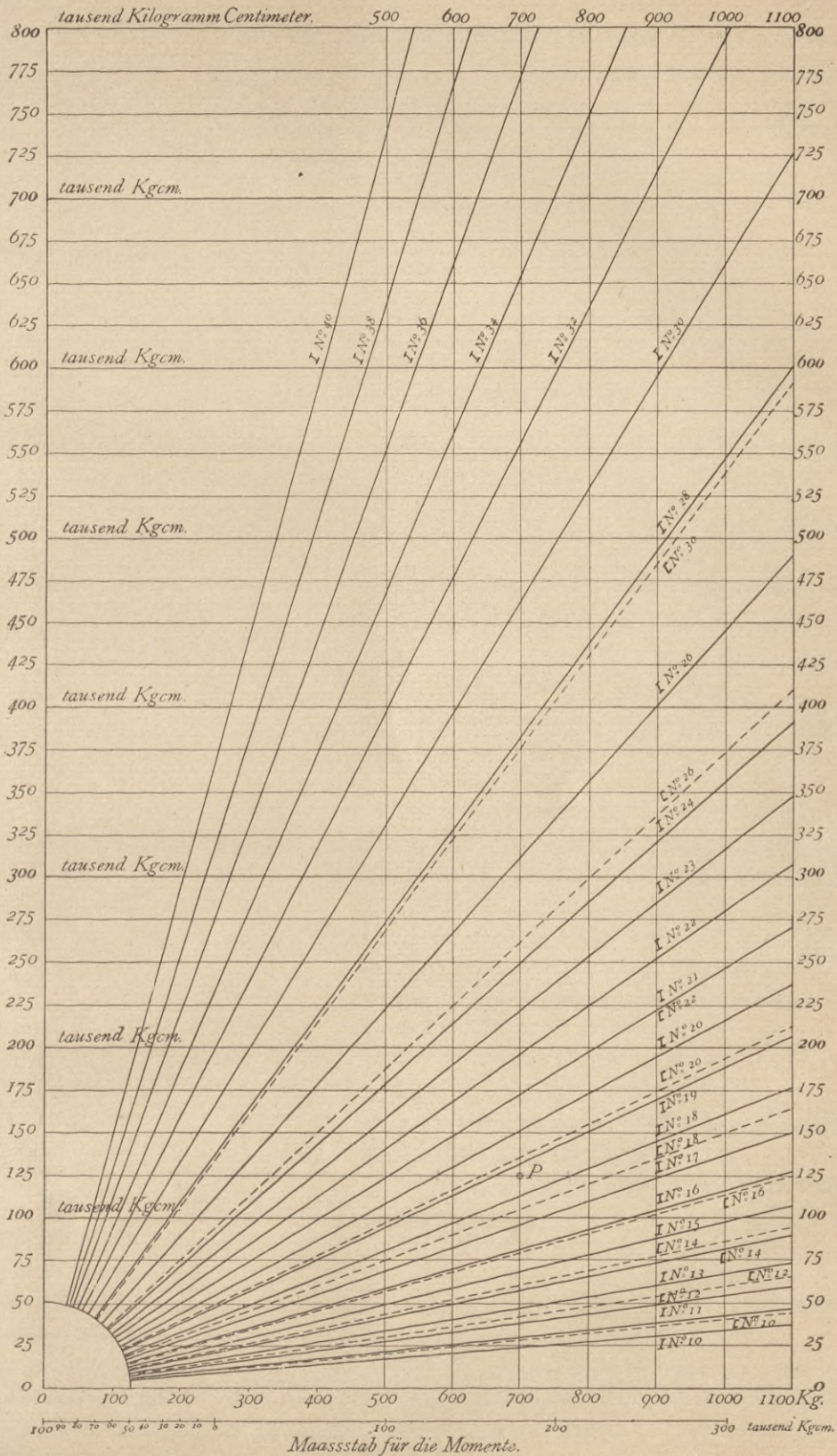
die letztere hat in Bezug auf die gleichfalls durch O gelegte Axe VV das Moment

$$Q \sin \alpha \cdot \zeta = Q \zeta \sin \alpha = M \sin \alpha.$$

Jedes dieser beiden Theilmomente wirkt nun aber in einer Ebene, welche die sämtlichen Querschnitte in Hauptachsen schneidet; die Ebene des ersteren schneidet die Querschnitte in VV , die des letzteren in den Axen UU ; jedes dieser Momente

Fig. 96.





Graphische Tafel

für die Querschnittsermittlung von I- und E-förmigen Walzbalken.
(Deutsche Normal-Profile.)

erzeugt fonach für sich allein Biegungsspannungen, welche nach Gleichung 56 zu berechnen find. Das Trägheitsmoment des Querschnittes bezogen auf die Hauptaxe UU soll mit A , dasjenige bezogen auf die Hauptaxe VV mit B bezeichnet werden; dann erhält man die Spannungen in einem Punkte C mit den Coordinaten u und v mit Rücksicht auf Gleichung 56 wie folgt.

Wirkte nur $M \cos \alpha$, fo wäre die Spannung $\sigma_1 = \frac{M \cos \alpha \cdot v}{A}$;

wirkte nur $M \sin \alpha$, fo wäre die Spannung $\sigma_2 = \frac{M \sin \alpha \cdot u}{B}$.

Die wirkliche Spannung setzt sich aus beiden Einzelwerthen zusammen, d. h. es wird sein

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right).$$

Bei der angenommenen Kraft- und Drehrichtung der Momente, fo wie bei der Lage des Punktes C werden, falls man die Coordinaten v und u nach oben, bzw. links als positiv einführt, sowohl σ_1 wie σ_2 positive, im vorliegenden Falle Druckbeanspruchungen bedeuten; wenn der Punkt an der anderen Seite von VV liegt, etwa in C' , fo würde u negativ, demnach $\sigma_2 = -\frac{M \sin \alpha \cdot u}{B}$ werden. Man sieht leicht, dafs alle

Punkte, die in denjenigen von beiden Hauptaxen gebildeten Vierteln des Querschnittes liegen, welche von Q geschnitten werden, durch beide Momente Druck, bzw. Zug erhalten, dafs dagegen in den beiden anderen Vierteln die Spannungen σ_1 und σ_2 verschiedene Vorzeichen haben.

Nach Vorstehendem ist allgemein

$$\sigma = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right) \quad 62.$$

σ kann nur für diejenigen Querschnittspunkte Null werden, für welche der Klammerfactor Null wird (der Fall $M=0$ ist belanglos); alle Punkte des Querschnittes, in welchen die Spannung den Werth Null hat, genügen also der Gleichung

$$\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} = 0.$$

Dies ist hier demnach die Gleichung der Null-Linie (siehe Art. 96, S. 75).

Löst man diese Gleichung nach v auf, fo erhält man

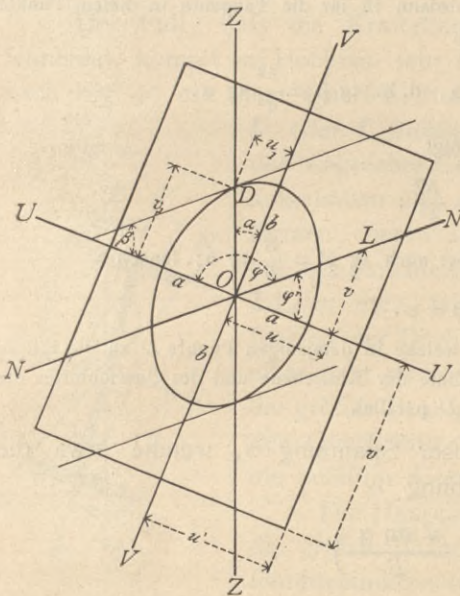
$$v = -\frac{A}{B} u \operatorname{tg} \alpha \quad 63.$$

Die beiden Veränderlichen u und v kommen nur in der ersten Potenz vor; mithin ist die Linie eine Gerade.

Für $u=0$ wird auch $v=0$, woraus folgt, dafs die Null-Linie bei den gemachten Annahmen durch den Punkt O , den Schwerpunkt des Querschnittes, geht.

In Fig. 97 sei NN die Null-Linie. Die Werthe u , bzw. v sind nach links, bzw. oben als positiv, nach rechts, bzw. unten als negativ eingeführt. Der

Fig. 97.



103.
Null-Linie.

Winkel φ , welchen die Linie NN mit der positiven U -Axe einschließt, hat nach Gleichung 63 die Tangente

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha.$$

Nach Fig. 97 ist aber auch $\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \varphi'$; demnach ist

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots 64.$$

Die Lage der Null-Linie ist also nur von der Querschnittsbildung (darauf weist der Quotient $\frac{A}{B}$ hin) und der Lage der Kräfteebene zu den Hauptachsen (d. h. von α) abhängig, nicht aber von der Größe des Momentes.

Gleichung 64 giebt ein bequemes Mittel, die Lage der Null-Linie zu construiren. Zeichnet man (Fig. 97) für den betreffenden Querschnitt die Ellipse der Trägheitsmomente (siehe Art. 72, S. 51), so sind die beiden Halbachsen a und b derselben bezw.

$$a = \frac{K}{\sqrt{A}} \quad \text{und} \quad b = \frac{K}{\sqrt{B}}.$$

Die Gleichung der Ellipse ist bekanntlich $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, und die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die geometrische Tangente an die Ellipse in einem Punkte, dessen Coordinaten u und v sind, mit der U -Axe einschließt, ist

$$\frac{dv}{du} = -\frac{ub^2}{va^2}.$$

Die Coordinaten des Punktes D seien u_1 und v_1 ; alsdann ist für die Tangente in diesem Punkte der Winkel mit der positiven U -Axe gleich $180 - \beta$, somit

$$\frac{dv}{du} = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2 u_1}{a^2 v_1} = -\frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Aus den oben stehenden Gleichungen für a und b folgt

$$A = \frac{K^2}{a^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{K^2}{b^2};$$

Demnach ist $\operatorname{tg} \beta = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha$. Nach Gleichung 64 ist aber auch $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha$; sonach

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi' \quad \text{und} \quad \beta = \varphi'.$$

Die Null-Linie ist sonach parallel zu der Tangente, welche in demjenigen Punkte D an die Ellipse der Trägheitsmomente gelegt wird, in welchem die Schnittlinie der Kräfteebene und des Querschnittes die Ellipse schneidet. Die Null-Linie ist also zur Tangente in D parallel.

Alle Querschnittspunkte mit gleich großer Spannung σ , welche etwa die Größe $\sigma = C$ haben möge, genügen der Gleichung

$$C = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right),$$

aus welcher folgt

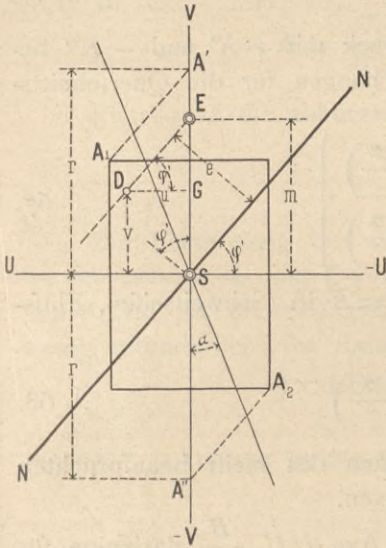
$$v = \frac{A}{M} \frac{C}{\cos \alpha} - u \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots 65.$$

Dies ist ebenfalls die Gleichung einer Geraden, und zwar einer solchen, welche den gleichen Winkel mit der UU -Axe einschließt, wie die Null-Linie, auf deren sämtlichen Punkten ja auch die Spannung gleich groß (d. h. gleich Null) ist. Demnach folgt: Alle Querschnittspunkte, in welchen gleiche axiale Spannung herrscht, liegen

auf einer zur Null-Linie parallelen Geraden; die Spannung σ ist also direct proportional dem senkrechten Abstände der Geraden von der Null-Linie.

Für die Spannung σ in einem beliebigen Punkte D des Querschnittes mit den Coordinaten u und v ergibt sich durch Umformung der Gleichung 62 ein sehr einfacher Ausdruck. Nach Gleichung 62 ist

Fig. 98.



$$\sigma = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right),$$

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A} \left(v + \frac{u A}{B} \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{M}{A} \cos \alpha (v + u \operatorname{tg} \varphi').$$

Legt man parallel zur Null-Linie NN durch D eine Linie, welche die Hauptaxe VV im Punkte E schneidet, so ist $\overline{SE} = \overline{SG} + \overline{GE}$, $\overline{SG} = v$ und $\overline{GE} = u \operatorname{tg} \varphi'$, also $\overline{SE} = v + u \operatorname{tg} \varphi'$. Wird $\overline{SE} = m$ gesetzt, so erhält man

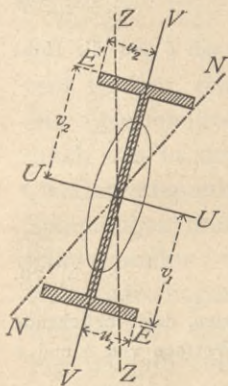
$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A} m \dots \dots \dots 66.$$

Fällt man von S die Senkrechte auf die durch D gezogene Parallele zur Null-Linie, so ist ihre Länge $e = m \cos \varphi'$ und

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A \cos \varphi'} e.$$

Der Fall, dass die Kraftebene die Balkenquerschnitte nicht in Hauptachsen schneidet, kommt im Hochbau sehr häufig vor, so z. B. bei den Dachpfetten, welche nach Fig. 99 mit einer Querschnittsseite in die Dachschräge gelegt sind, ferner bei I- oder C-förmigen Walzbalken, welche Gewölbe tragen, falls der wagrechte Gewölbeschub nicht vollständig (durch Anker etc.) aufgehoben ist; außerdem bei einer Anzahl von Querschnittsformen, deren lothrechte Schwerpunktsaxe keine Hauptaxe ist, wie bei gleichschenkeligen und ungleichschenkeligen Winkeleisen, Z-Eisen etc., falls die Belastung lothrecht ist; auch die Gratsparren der Dächer gehören hierher. In allen diesen Fällen darf man nicht nach der einfachen Formel 56 rechnen, muss vielmehr die größte Beanspruchung aus Gleichung 62 entnehmen und dann den Querschnitt so bestimmen, dass die größte Beanspruchung die zulässige Grenze nicht überschreite.

Fig. 99.



Die Hauptachsen theilen den Querschnitt in vier Quadranten; die größte Beanspruchung wird in der Regel in denjenigen Querschnittspunkten stattfinden, welche in den von der Kraftebene ge-

schnittenen Quadranten des Querschnittes liegen. Allgemein kann man mittels der Verzeichnung der Null-Linie leicht diejenigen Punkte finden, welche die größte Beanspruchung erleiden; denn da die Beanspruchung der senkrechten Entfernung von der Null-Linie proportional ist, so ist sie am größten in denjenigen Querschnittspunkten, welche, senkrecht zur Null-Linie gemessen, am weitesten von derselben entfernt liegen. So werden in Fig. 99 die Punkte E und E' am meisten beansprucht werden, ersterer bei der gewöhnlichen Drehrichtung der Momente auf

104.
Größte axiale
Spannung;
Querschnitts-
ermittlung.

Zug, letzterer auf Druck. Werden die Coordinaten der meist beanspruchten Punkte mit $+u_1, +v_1$ und $-u_2, -v_2$ bezeichnet, wobei dieselben nach denjenigen Seiten als positiv gerechnet sind, an welchen die Einzelmomente $M \cos \alpha$, bezw. $M \sin \alpha$ Zug erzeugen, so ergibt sich mit Rücksicht auf Gleichung 62

$$\sigma_{max} = M \left(\frac{v_1 \cos \alpha}{A} + \frac{u_1 \sin \alpha}{B} \right) \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = -M \left(\frac{v_2 \cos \alpha}{A} + \frac{u_2 \sin \alpha}{B} \right).$$

Falls die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck mit $+K'$ und $-K''$ bezeichnet werden, so erhält man als Bedingungsgleichungen für die Querschnittsbildung:

$$\left. \begin{aligned} K' &= M \left(\frac{v_1 \cos \alpha}{A} + \frac{u_1 \sin \alpha}{B} \right) \\ K'' &= M \left(\frac{v_2 \cos \alpha}{A} + \frac{u_2 \sin \alpha}{B} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 67.$$

Bei denjenigen Baustoffen, für welche nahezu $K' = K'' = K$ ist (Schweißseifen, Flußeisen, Holz), vereinfachen sich die Gleichungen 67 in

$$K = M \left(\frac{v' \cos \alpha}{A} + \frac{u' \sin \alpha}{B} \right) \dots \dots \dots 68.$$

Im letzten Ausdruck bedeuten v' und u' die Coordinaten des meist beanspruchten Punktes, bezogen auf die Haupttaxen als Coordinatenaxen.

$\frac{A}{v'}$ nennt man das Widerstandsmoment für die Axe UU , $\frac{B}{u'}$ dasjenige für die Axe VV ; man setzt abkürzungsweise

$$\frac{A}{v'} = W_u \quad \text{und} \quad \frac{B}{u'} = W_v,$$

so daß Gleichung 68 nunmehr lautet:

$$K = \frac{M \cos \alpha}{W_u} + \frac{M \sin \alpha}{W_v} \dots \dots \dots 69.$$

Für den rechteckigen Querschnitt ergibt sich sehr einfach, wenn die Breite mit b und die Höhe mit h bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} A &= \frac{b h^3}{12}, & v' &= \frac{h}{2}, & \frac{A}{v'} &= W_u = \frac{b h^2}{6}, \\ B &= \frac{h b^3}{12}, & u' &= \frac{b}{2}, & \frac{B}{u'} &= W_v = \frac{h b^2}{6}; \end{aligned}$$

mithin aus Gleichung 69

$$K = \frac{6 M}{b h} \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right) \dots \dots \dots 70.$$

Für einen bestimmten Fall sind K, M, α gegeben; b und h sind so zu bestimmen, daß vorstehende Gleichung erfüllt ist. Meistens wird ein mehrmaliges Versuchen mit verschiedenen Werthen von b und h erforderlich sein. Man kann der Gleichung 70 auch die Form geben:

$$K = \frac{6 M}{b h^2} \left[\cos \alpha + \frac{h}{b} \sin \alpha \right];$$

im Mittel ist $\frac{h}{b} = 1,5$ und dann

$$K = \frac{6 M}{b h^2} \left[\cos \alpha + 1,5 \sin \alpha \right].$$

Die Gleichung für die Querschnittsbestimmung lautet alsdann:

$$b h^2 = \frac{6 M (\cos \alpha + 1,5 \sin \alpha)}{K} \quad \text{oder} \quad h^3 = \frac{6 M (\cos \alpha + 1,5 \sin \alpha)}{K}.$$

In diesem Ausdruck ist auf der rechten Seite nur Bekanntes; man findet daraus leicht h und danach

$$b = \frac{2}{3} h.$$

Bezeichnet man die beiden in die Haupttaxenebenen fallenden Momente kurz mit M_1 und M_2 , also

$$M_1 = M \cos \alpha \quad \text{und} \quad M_2 = M \sin \alpha,$$

so wird

$$K = \frac{M_1}{W_u} + \frac{M_2}{W_v} = \frac{1}{W_u} \left(M_1 + M_2 \frac{W_u}{W_v} \right).$$

Führt man die abkürzende Bezeichnung $c = \frac{W_u}{W_v}$ ein, so wird ²³⁾

$$K = \frac{1}{W_u} (M_1 + c M_2) \dots \dots \dots 71.$$

Zur Ermittlung des erforderlichen Querschnittes kann diese Formel bequem für rechteckige, I- und L-förmige Querschnittsformen verwendet werden. Die Werthe von c sind für die verschiedenen Kaliber der Deutschen Normal-Profile (I und L) wenig veränderlich; für vorläufige Berechnungen kann man

für I-Eisen	für L-Eisen
$c = 7$	$c = 5$

eingeführen. Alsdann ist die Bedingungsgleichung für den Querschnitt

$$W_u = \frac{M_1 + c M_2}{K} \dots \dots \dots 72.$$

Man bestimmt nach Gleichung 72 das erforderliche W_u und wählt danach aus den Tabellen das Profil; hat dieses einen anderen Werth, als derjenige, welcher angenommen war, so nimmt man eine zweite, genauere Rechnung vor ²⁴⁾.

Bezüglich der einfachen Behandlung unsymmetrischer Querschnittsformen (Z-Eisen, T-Eisen u. dergl.) wird auf Art. 114 verwiesen.

Für die Berechnung bequem ist auch Gleichung 66:

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A} m,$$

weil sie nur das Seitenmoment in der Ebene der einen Hauptaxe enthält. Für alle Querschnittspunkte, welche in der Hauptaxe VV liegen, ist die Spannung durch das in der Ebene der UU wirkende Seitenmoment gleich Null; für alle diese Querschnittspunkte kommt also nur das Seitenmoment ($M \cos \alpha$) in Frage. Mit den Spannungen dieser Punkte kennt man aber auch die Spannungen derjenigen Querschnittspunkte, welche in bezw. gleichen, senkrecht gemessenen Abständen von der Null-Linie liegen, wie diese. Größte Beanspruchung findet in den Punkten statt, welche den weitesten Abstand (senkrecht gemessen) von der Null-Linie haben. In Fig. 98 sind dies die Punkte A_1 und A_2 . Um ihre Spannungen zu ermitteln, lege man durch dieselben Parallele zur Null-Linie, welche die VV -Axe bezw. in A' und A'' schneiden. Alsdann ist in A_1 , bezw. A_2 , so wie in A' und A''

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M \cos \alpha}{A} r.$$

²³⁾ Siehe: LAND, R. Profilbestimmung von I- und E-Trägern bei schiefer Belastung. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1895, S. 293.

²⁴⁾ In Theil III, Band 2, Heft 4 (Abth. III, Abchn. 2, E, Kap. 34, unter a) dieses »Handbuches« werden die Tabellen für c vorgeführt und einige Beispiele durchgerechnet werden.

c) Allgemeine Unterfuchung der Biegungsspannungen mit Zuhilfenahme der Trägheitskreife.

105.
Spannungen
an beliebiger
Stelle des
Querschnittes.

Für den allgemeinen Fall, der durch Fig. 100 dargestellt ist, schneide die an der einen Seite des Querschnittes wirkende Mittelkraft R den Querschnitt im Punkte E (bezw. E'); S sei der Schwerpunkt des Querschnittes; die Kraftebene schneide den Querschnitt nicht in einer Hauptaxe. Wie in Art. 95 (S. 73) wird die Annahme gemacht, daß die axialen Spannungen σ der einzelnen Querschnittspunkte in linearer Abhängigkeit von ihrer Lage stehen. Trägt man also in jedem Querschnittspunkte die axiale Spannung senkrecht zum Querschnitt als Ordinate auf, so liegen die Endpunkte aller Ordinaten auf einer Ebene, der Spannungsebene. Die Gleichung dieser Ebene ist auch die Gleichung für σ . Spannungsebene und Querschnittsebene schneiden einander in einer Geraden; in allen Punkten dieser Geraden hat die Spannung, d. h. die Ordinate der Spannungsebene, den Werth Null. Diese Linie ist die sog. Null-Linie (neutrale Linie). Fig. 101 zeigt die Spannungsebene, den Querschnitt (welcher der Einfachheit halber rechtwinkelig eingetragen ist) und die Null-Linie NN . Eine senkrecht zur Querschnittsebene parallel zur Linie NN hindurch gelegte Ebene schneidet den Querschnitt und die Spannungsebene in zwei Parallelen 11 und 22 . Daraus folgt: Alle Punkte des Querschnittes, welche auf einer Geraden liegen, die parallel zur Null-Linie ist, haben gleiche Spannung σ (vergl. auch Art. 103, S. 81). Die Spannung in den einzelnen Punkten der Linie 11 ist also unabhängig von der besonderen Lage des Punktes in der Linie; sie hängt nur von dem Abfande der Linie 11 und der Null-Linie ab. Bezeichnet man diesen Abstand, rechtwinkelig gemessen, mit η , so ist $\sigma = C\eta$. In diesem Ausdruck ist C eine noch zu bestimmende Constante.

Fig. 100.

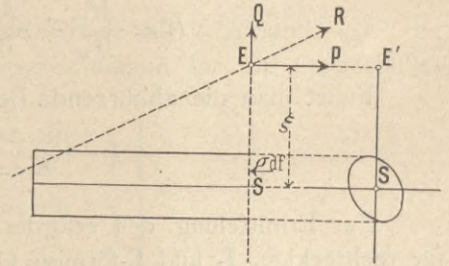
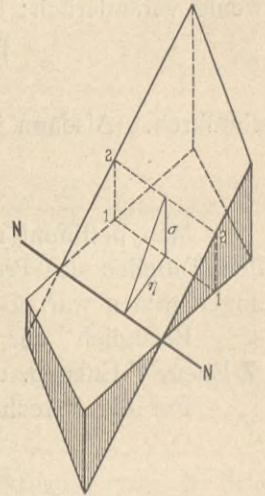
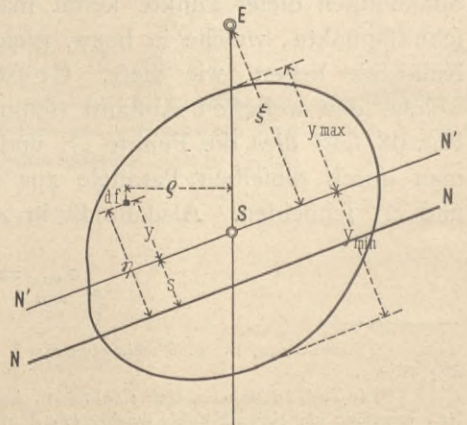


Fig. 101.



Durch den Schwerpunkt S des Querschnittes (Fig. 102) werde eine Axe $N'N'$ parallel zur Null-Linie NN gelegt; der Abstand beider Axen sei s . Alsdann sei $\eta = y + s$, d. h. der senkrechte Abstand eines beliebigen Querschnittspunktes von der Null-Linie sei gleich η und von der Linie $N'N' = y$. Die an der einen Seite des Querschnittes auf den Balken wirkende Mittelkraft R (Fig. 100) schneide den Querschnitt im Punkte E . Die Linie ES , in welcher die Kraftebene den Querschnitt schneidet, wird die Kraftlinie genannt. Die Beziehungen, welche zwischen der Lage der Kraftlinie und Null-Linie bestehen, so wie die Gröfse von σ

Fig. 102.



ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen. Die Mittelkraft R (Fig. 100) wird in die Axialkraft P und in die Querkraft Q zerlegt; sie muß mit den im Querschnitt anzubringenden Spannungen im Gleichgewicht sein, d. h. es muß stattfinden:

$$\text{I) } 0 = P - \int \sigma df \quad (\text{algebraische Summe der Kräfte, welche in der Richtung der Axe wirken, gleich Null}).$$

$$\text{II) } 0 = P\xi - \int \sigma y df \quad (\text{algebraische Summe der Momente für die Axe } N'N' \text{ gleich Null}).$$

$$\text{III) } 0 = \int \sigma \rho df \quad (\text{algebraische Summe der Momente für die Kraftlinie, d. h. für die Axe } ES, \text{ gleich Null}).$$

Unter ρ ist der normal gemessene Abstand eines Querschnittspunktes von der Kraftlinie ES verstanden. Beachtet man, daß $\sigma = C\eta = C(y + s)$ ist, so erhält man aus Gleichung I

$$P = C \int (y + s) df = C \int y df + C \int s df.$$

Da $N'N'$ eine Schwerpunktsaxe ist, so ist

$$\int y df = 0, \quad \text{also} \quad P = Cs \int df = CsF, \quad \text{d. h.}$$

$$\text{IV) } \quad C = \frac{P}{sF}.$$

Aus Gleichung II ergibt sich

$$P\xi = C \int y^2 df + Cs \int y df \quad \text{und mit} \quad \int y df = 0$$

$$P\xi = C \int y^2 df.$$

$\int y^2 df$ ist das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe; dasselbe soll kurz mit \mathcal{F} bezeichnet, eben so $P\xi = M$ gesetzt werden. Dann wird $M = C\mathcal{F}$ und

$$\text{V) } \quad C = \frac{M}{\mathcal{F}}.$$

Die Gleichsetzung von IV und V ergibt

$$s = \frac{P}{F} \frac{\mathcal{F}}{M} = \frac{P\mathcal{F}}{F \cdot P\xi} = \frac{\mathcal{F}}{F\xi},$$

$$\text{VI) } \quad s = \frac{\mathcal{F}}{F\xi}.$$

Nach Art. 71 (S. 51) ist $\mathcal{F} = Fi^2$, worin i den Trägheitsradius bezeichnet, d. h.

$$\text{VIa) } \quad s = \frac{i^2}{\xi}.$$

Gleichung VIa befragt: i ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen s und ξ . Wenn ξ und i bekannt sind, so kann man daraus leicht den Abstand s der Null-Linie vom Schwerpunkt finden.

Aus Gleichung III folgt endlich:

$$\int \sigma \rho df = C \int (y + s) \rho df = 0,$$

$$\int y \rho df + s \int \rho df = 0.$$

$\int \rho \, df$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für die Schwerpunktsaxe ES , d. h. es ist $\int \rho \, df = 0$, mithin auch

$$\text{VII) } \int \eta \rho \, df = 0.$$

Gleichung VII befaßt, daß das Centrifugalmoment für die beiden Axen: Kraftlinie \overline{ES} und die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe, gleich Null ist, d. h. beide Axen sind conjugirt (siehe Art. 67, S. 46). Demnach ist bewiesen: Die Kraftlinie und die durch den Schwerpunkt des Querschnittes parallel zur Null-Linie gezogene Axe $N'N'$ sind conjugirte Axen. Daraus ergibt sich eine sehr einfache, unten folgende Construction.

Aus der Gleichung $s = \frac{P}{M} \frac{\mathcal{F}}{F}$ folgt noch, daß falls die Axialkraft P gleich Null ist, ohne daß auch M gleich Null ist, dann der Abstand s der Null-Linie vom Schwerpunkt ebenfalls Null ist. Also: Wenn die Axialkraft gleich Null ist, so geht die Null-Linie durch den Schwerpunkt des Querschnittes (siehe auch Art. 96, S. 75).

Es war $\sigma = C \eta = C (y + s)$, und mit Rücksicht auf Gleichung V u. VI wird

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M}{\mathcal{F}} y + \frac{M}{\mathcal{F}} \frac{\mathcal{F}}{F\xi} = \frac{M}{\mathcal{F}} y + \frac{P\xi}{\mathcal{F}F\xi} = \frac{M}{\mathcal{F}} y + \frac{P}{F}. \\ \sigma &= \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}} y \dots \dots \dots 73. \end{aligned}$$

Dies ist genau derselbe Ausdruck, welcher in Art. 95 (S. 73) für den Fall gefunden ist, daß die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet; nur beziehen sich in der hier entwickelten Gleichung M und \mathcal{F} auf diejenige Schwerpunktsaxe, welche der Kraftlinie conjugirt (d. h. parallel zur Null-Linie) ist. In der früheren Gleichung bezogen sich M und \mathcal{F} auf die eine Hauptaxe, wenn die Kraftlinie die andere Hauptaxe war. Man sieht, daß die frühere Gleichung ein Sonderfall der soeben entwickelten allgemein giltigen Gleichung ist.

Aus Gleichung 73 folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}} y_{max} \\ \sigma_{min} &= \frac{P}{F} - \frac{M}{\mathcal{F}} y_{min} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 74.$$

Maximum und Minimum der Spannungen ergeben sich in denjenigen Querschnittspunkten, durch welche die weitest gezogenen Parallelen zur Null-Linie möglich sind.

Da die Kraftlinie ES und die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe $N'N'$ conjugirt sind, so ergibt sich die folgende Construction (Fig. 103).

106.
Lage
der Null-Linie;
graphische
Ermittelung
mittels des
Trägheitskreises.

Man construirt den Trägheitskreis des Querschnittes mit dem Durchmesser \mathcal{F}_p (siehe Art. 68, S. 46), fucht T_p , den Trägheitshauptpunkt, ziehe die Kraftlinie \overline{SE} und verbinde den Schnittpunkt G der Kraftlinie und des Trägheitskreises mit T_p . Die Linie $\overline{GT_p}$ schneide den Kreis zum zweiten Male in H ; alsdann ist \overline{SH} die zu \overline{SE} conjugirte Axe, weil das Centrifugalmoment des Querschnittes für beide Axen SE und SH Null ist (siehe Art. 67, S. 46). Die Linie \overline{SH} ist also zur Null-Linie NN' parallel; der senkrechte Abstand beider ist s , und es ist $s = \frac{\mathcal{F}}{F\xi}$. In Fig. 103 wird \mathcal{F} , bezogen auf die Axe $N'N'$, dargestellt durch die Länge $\overline{LT_p}$. Ist der Maßstab für den Trägheitskreis derart, daß $1 \text{ cm} \approx \text{cm}^3$

Multiplicirt man jedes Flächentheilchen df mit dem Quadrat feines Abstandes y' von $N'N'$, gemessen in der Richtung der Kraftlinie ES , so ist

$$\int df \cdot y'^2 = \int df \frac{y^2}{\cos^2 \delta} = \frac{1}{\cos^2 \delta} \int y^2 df = \frac{\mathcal{F}}{\cos^2 \delta}.$$

Es werde $\mathcal{F}' = \frac{\mathcal{F}}{\cos^2 \delta}$ und $F i_1^2 = \mathcal{F}'$ gesetzt; dann ist

$$s' \xi' = \frac{\mathcal{F}'}{F} = i_1^2 \quad \text{und} \quad s' \xi' = i_1^2 \dots \dots \dots 75.$$

Wird der Angriffspunkt der Kraft von E nach B verlegt, so bleibt BSE die Kraftlinie wie zuvor; die Null-Linie läuft parallel zur Schwerpunktsaxe, welche zur Kraftlinie conjugirt ist, d. h. zu derselben Schwerpunktsaxe $N'N'$, wie oben. Sonach haben sowohl \mathcal{F} und \mathcal{F}' , wie auch i_1^2 denselben Werth, mag der Angriffspunkt in E oder B oder in irgend einem anderen Punkt der Linie EB sein; wenn demnach der Angriffspunkt der Kraft von E nach B verlegt wird, so behält das Product $s' \xi'$

Fig. 105.

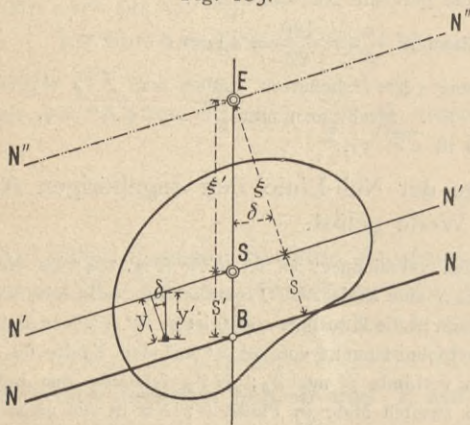
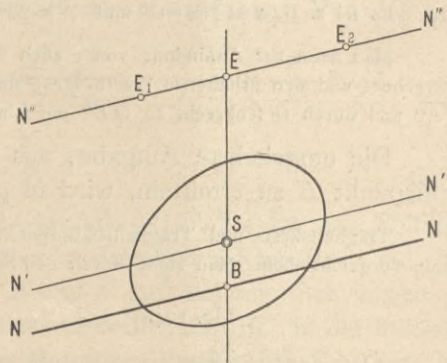


Fig. 106.



denselben Werth i_1^2 . Die dem Angriffspunkt B entsprechende Null-Linie verläuft also durch E und ist parallel zu $N'N'$, d. h. zu NN . Die neue Null-Linie ist $N''N''$.

Satz: Bewegt sich der Angriffspunkt einer Kraft auf einer Geraden ($N''N''$), so dreht sich die zugehörige Null-Linie um einen Punkt, und zwar um denjenigen Punkt B , welcher als Angriffspunkt der Kraft zur Null-Linie $N''N''$ gehören würde.

Beweis: Die zum Angriffspunkt E (Fig. 106) gehörige Null-Linie sei NN . Die in E wirkende Kraft werde durch zwei Kräfte P_1 und P_2 derart ersetzt, daß ihre Mittelkraft P durch E geht; P_1 und P_2 sollen in den Punkten E_1 und E_2 wirken. P_1 erzeugt irgend eine Null-Linie, etwa $n_1 n_1$, P_2 eine zweite, etwa $n_2 n_2$; die resultirende Null-Linie muß NN sein; beide Null-Linien müssen sich also auf NN schneiden. Nun liege P_1 fest, also auch $n_1 n_1$; dagegen gleite P_2 auf $N''N''$ und ändere seine Größe dabei so, daß die Mittelkraft von P_1 und P_2 immer durch E geht. Dann bleibt auch die resultirende Null-Linie beständig NN ; auch der Schnittpunkt von $n_1 n_1$ und $n_2 n_2$ muß immer auf NN bleiben, und da $n_1 n_1$ ruht, so darf auch der Schnittpunkt nicht gleiten. Bewegt sich also der Angriffspunkt einer Kraft, hier derjenige von P_2 , auf einer Geraden $N''N''$, so dreht sich die zugehörige Null-Linie, hier $n_2 n_2$, um einen festen Punkt. Die Lage dieses festen Punktes ergibt sich folgendermaßen. Rückt die Kraft P_2 , also auch der Punkt E_2 , unendlich

weit, so wird die Linie $S \cdot \infty$, welche mit $N'N'$ zusammenfällt, die Kraftlinie, und dieser Linie conjugirt muß die Null-Linie $n_2 n_2$ sein. Nun sind aber $\overline{N'N'}$ und \overline{SE} zwei conjugirte Axen; also fällt für diese Lage des Punktes E_2 die zugehörige Null-Linie $n_2 n_2$ mit \overline{SE} zusammen. Die Null-Linie $n_2 n_2$ schneidet demnach für eine ihrer Lagen die Linie NN im Punkte B , und da der Schnittpunkt von NN und $n_2 n_2$ ein fester Punkt ist, so ist B dieser feste Drehpunkt. Damit ist obiger Satz bewiesen.

Wenn die Null-Linie den Querschnitt schneidet, so findet auf beiden Seiten derselben im Querschnitt verschiedenartige Beanspruchung statt. Da nun jeder Null-Linie eine ganz bestimmte Lage des Angriffspunktes E entspricht, so liegt die Frage nahe: In welchen Grenzen muß E liegen, damit stets im ganzen Querschnitt nur eine Art der Beanspruchung stattfindet, nur Zug oder nur Druck? Die Null-Linie darf offenbar höchstens den Querschnitt berühren, wenn die Bedingung gleichartiger Beanspruchungsweise im Querschnitt erfüllt sein soll. Läßt man die Null-Linie alle möglichen Lagen der Berührenden des Querschnittes einnehmen und ermittelt die zugehörigen Angriffspunkte E der Kraft, so ergibt die Verbindungslinie dieser Punkte eine Figur, welche man den Kern des Querschnittes nennt. So lange der Angriffspunkt E der Kraft innerhalb des Kernes oder der Kernfläche liegt, fällt die Null-Linie außerhalb des Querschnittes, und im Querschnitt herrscht nur Zug oder nur Druck.

Demnach ergibt sich der Kern des Querschnittes durch die folgende Construction. Man lasse die Null-Linie alle Lagen einnehmen, in denen sie den Querschnitt berührt, ermittle für jede derselben den zugehörigen Angriffspunkt E der Kraft und verbinde die Punkte E miteinander.

Für die Construction ist noch das Nachstehende zu beachten. In Art. 107 (S. 89) ist der Satz gefunden: Bewegt sich der Angriffspunkt E auf einer Geraden, so dreht sich die zugehörige Null-Linie um einen festen Punkt B , und zwar denjenigen Punkt, welchem als Kraft-Angriffspunkt die Weggerade des Punktes E als Null-Linie zugeordnet ist. Dieser Satz gilt auch umgekehrt, da zu jeder Null-Linie ein ganz bestimmter Punkt E gehört, d. h. dreht sich die Null-Linie um einen festen Punkt B , so gleitet der Angriffspunkt E auf einer Geraden, welche als Null-Linie dem Punkte B zugeordnet ist.

Die Benutzung dieses Satzes soll an einigen Querschnitten gezeigt werden.

Beim Rechteck (Fig. 107) lege man die Null-Linie nach einander in die vier Seiten $11, 22, 33, 44$ des Rechteckes und ermittle die Lage der zugehörigen Kernpunkte. Die durch den Schwerpunkt S zur Null-Linie 11 gezogene Parallele ist die Hauptaxe XX ; der zugehörige Angriffspunkt I der Kraft liegt auf der conjugirten Axe; zur Hauptaxe XX ist die andere Hauptaxe YY conjugirt; also liegt Punkt I auf dieser. Der Abstand ξ des Kernpunktes I von der Axe XX ist nach Früherem aus der Gleichung

$$s \xi = \frac{\mathcal{F}}{F} = \frac{A}{F} = \frac{b h^3}{12 b h} = \frac{h^2}{12}$$

zu finden. Hier ist $s = \frac{h}{2}$, also das gefuchte

$$\xi = \frac{h^2 \cdot 2}{12 h} = \frac{h}{6}.$$

Zu beachten ist, daß Kernpunkt und Null-Linie nach der Entwicklung obiger Formel auf verschiedenen Seiten der Schwerpunktsaxe XX liegen müssen. Eben so

108.
Kern des
Querschnittes.

109.
Kern des
Rechteckes.

findet man für die Null-Linie 44 den Punkt IV , welcher um $\frac{h}{6}$ über XX liegt. Für die Null-Linien 22 und 33 müssen die Kernpunkte auf der Hauptaxe XX liegen; die Abstände ξ' sind, weil hier $s' = \frac{b}{2}$ ist,

$$\xi' \frac{b}{2} = \frac{B}{F} = \frac{h b^3}{12 b h} = \frac{b^2}{12} \quad \text{oder} \quad \xi' = \frac{b}{6}.$$

Damit sind die Punkte II und III gefunden.

Außer den vier betrachteten Lagen der Null-Linie sind noch andere Grenzlagen möglich, indem sich die Null-Linie aus der Lage 11 in die Lage 22 bewegt und dabei um den Punkt α dreht. Bei dieser Drehung gleitet der Kernpunkt auf einer Geraden, für welche bereits zwei Punkte I und II gefunden sind, nämlich für die Lagen 11 und 22 dieser Linie. Die Verbindungslinie III ist demnach diese Gerade. Eben so gleitet der Kernpunkt auf $IIII$, während die Null-Linie sich aus Lage 11 in 33 um den Punkt β dreht und so weiter. Man erhält in dieser Weise die in Fig. 107 schraffierte Kernfläche.

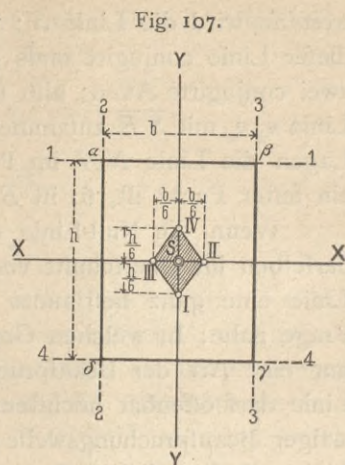


Fig. 107.

110.
Kern des
Kreises.

Beim Kreis sind alle Axen Hauptaxen. Die Null-Linien sind Tangenten an den Kreis; demnach sind in der Gleichung $s \xi = \frac{\mathcal{F}}{F}$ die Größen $s = \frac{d}{2}$, $\mathcal{F} = \frac{d^4 \pi}{64}$, $F = \frac{d^2 \pi}{4}$ und der Abstand des Kernpunktes vom Mittelpunkt des Kreises für alle Tangenten $\xi = \frac{d^2}{16} \frac{2}{d} = \frac{d}{8}$. Die Kernfläche ist also ein Kreis mit dem Halbmesser $\frac{d}{8}$, bzw. dem Durchmesser $\frac{d}{4}$.

111.
Kern des
Kreisesringes.

Beim Kreisring mit dem äußeren Durchmesser D und dem inneren Durchmesser d ist $s = \frac{D}{2}$, $\mathcal{F} = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{64}$, $F = (D^2 - d^2) \frac{\pi}{4}$,

$$\xi = \frac{\mathcal{F}}{F s} = \frac{(D^4 - d^4) 2}{(D^2 - d^2) 16 D} = \frac{(D^2 + d^2)}{8 D} = \frac{D}{8} \left[1 + \frac{d^2}{D^2} \right].$$

Der Halbmesser der kreisförmigen Kernfläche ist also

$$k = \frac{D}{8} \left[1 + \frac{d^2}{D^2} \right].$$

112.
Kern des
I-Eisens.

Beim I-Eisen liegen auf der YY -Axe die Kernpunkte von der XX -Axe um

$$k_1 = \pm \frac{2 A}{F h}$$

entfernt; auf der XX -Axe liegen die Kernpunkte von der YY -Axe, bzw. um

$$k_2 = \pm \frac{2 B}{F b}$$

entfernt. Die Eckpunkte sind wie beim Rechteck durch Gerade zu verbinden.

113.
Graphische
Ermittlung
des Kernes.

Bei unregelmäßigen Querschnitten bestimmt man zweckmäßig die Kernfläche mit Hilfe des Trägheitskreises. Dabei handelt es sich hauptsächlich um die wiederholte Lösung der in Art. 106 (S. 89) behandelten Aufgabe, aus der vorgeschriebenen Lage der Null-Linie den zugehörigen Angriffspunkt E der Kraft zu ermitteln. Man läßt die Null-Linie den Querschnitt umhüllen; bei der Drehung der Null-Linie um

Fig. 108.

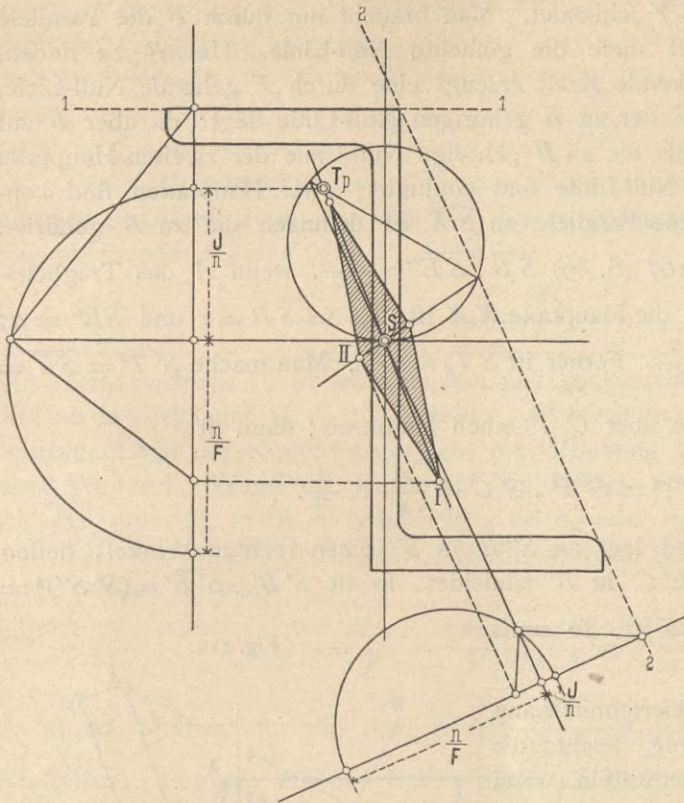
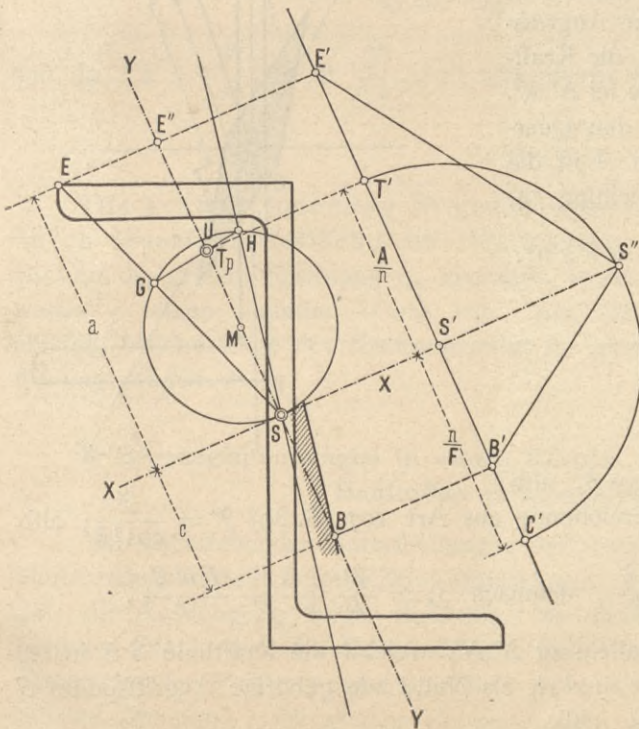


Fig. 109.



einen Punkt aus der einen Lage in eine benachbarte Lage beschreibt der zugehörige Kernpunkt die Verbindungslinie der beiden Kernpunkte, welche zu den entsprechenden Nachbarlagen der Null-Linie gehören. Fig. 108 zeigt die Construction des Kernes für ein Z-Eisen.

Man kann auch die Eckpunkte des Querschnittes nach dem Satz in Art. 108 (S. 91) als Angriffspunkte der Kraft annehmen und für diese die zugehörigen Null-Linien construiren; denn während die Null-Linie sich um den Eckpunkt dreht, beschreibt der Kernpunkt eine Gerade, welche als Null-Linie dem Eckpunkt als Angriffspunkt der Kraft zugeordnet ist. Diese Construction zeigt Fig. 109.

Es empfiehlt sich, zuvor die Haupttaxen des Querschnittes zu ermitteln, was ja nach Verzeichnung eines Trägheitskreises leicht ist. Nunmehr verzeichne man einen neuen Trägheitskreis so, daß T_p auf seinem Durchmesser liegt; dann sind SX und SY die Haupttaxen; ferner ist

$$\overline{ST_p} = \frac{A}{n} \quad \text{und} \quad \overline{T_p U} = \frac{B}{n}.$$

Ist E einer der Angriffspunkte der Kraft, für welchen die zugehörige Null-Linie gesucht wird, so ziehe man \overline{SE} ; der Schnittpunkt dieser Linie mit dem Trägheitskreise sei G ; man ziehe $\overline{GT_p H}$; H ist der zweite Schnittpunkt der Linie $\overline{GT_p}$ mit dem Trägheitskreise. Dann ist \overline{SH} die Richtung der Null-Linie; letztere ist bekannt, sobald man

noch einen Punkt kennt, durch welchen sie gehen muß, z. B. den Punkt B , in welchem sie die Hauptaxe \overline{SY} schneidet. Man braucht nur durch B die Parallele zu \overline{SH} zu ziehen; dann ist diese die gefuchte Null-Linie. Um B zu finden, beachte man: Eine in B wirkende Kraft erzeugt eine durch E gehende Null-Linie, da B nach der Annahme auf der zu E gehörigen Null-Linie liegt; da aber B auf der einen Hauptaxe liegt, muß die zu B gehörige Null-Linie der zweiten Hauptaxe parallel sein (Kraftlinie und Null-Linie sind conjugirt, zwei Hauptaxen sind conjugirt). Die durch E gezogene Parallele zu \overline{SX} ist demnach die zu B gehörige Null-Linie, mithin nach Art. 107 (S. 89) $\overline{SB} \cdot \overline{SE''} = \frac{A}{F}$, wenn A das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Hauptaxe XX ist. Es sei $\overline{SB} = c$ und $\overline{SE''} = a$; dann ist $a c = \frac{A}{F} = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}$. Ferner ist $\overline{ST}_p = \frac{A}{n}$. Man mache $\overline{S'T'} = \overline{ST} = \frac{A}{n}$, $\overline{S'C'} = \frac{n}{F}$ und schlage über $\overline{C'T'}$ einen Halbkreis; dann ist

$$(\overline{S'S''})^2 = \overline{S'T'} \cdot \overline{S'C'} = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}.$$

Verbindet man S'' mit E' und legt an $S''E'$ in S'' einen rechten Winkel, dessen zweiter Schenkel die Linie $E'C'$ in B' schneidet, so ist $\overline{S'B'} \cdot \overline{S'E'} = (\overline{S'S''})^2 = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}$, und da $\overline{S'E'} = a$ ist, so muß $\overline{S'B'} = c$ sein.

114.
Spannung in
einem Umfangs-
punkte des
Querschnittes,
ausgedrückt
mit Hilfe des
Kernes.

Für einen beliebigen Querschnitt kann man bei beliebiger Belastung leicht die größte auftretende Spannung ermitteln, wenn man den Kern kennt. In Fig. 110 sei der Kern des Querschnittes gefunden (schraffirt); S sei der Schwerpunkt und E der Angriffspunkt der Kraft; \overline{SE} ist demnach die Kraftlinie; die zugehörige conjugirte Axe sei $N'N'$. Größte Beanspruchung findet in den Querschnittspunkten A oder B statt. In A ist die Beanspruchung nach Art. 105 (Gleichung 74)

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{M a}{\mathcal{F}}, \text{ und da } M = P \xi \text{ ist,}$$

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P \xi a}{\mathcal{F}};$$

dafür

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P}{F} \frac{F \xi a}{\mathcal{F}}.$$

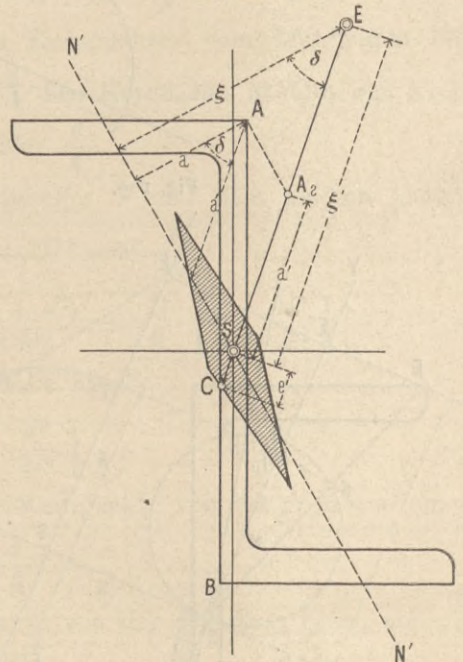
Nun ist $a = a' \cos \delta$ und $\xi = \xi' \cos \delta$, also

$a \xi = a' \xi' \cdot \cos^2 \delta$ und mit der Bezeichnung aus Art. 107 (S. 89) $\mathcal{F}' = \frac{\mathcal{F}}{\cos^2 \delta}$; also

$$\frac{a \xi}{\mathcal{F}} = \frac{a' \xi' \cos^2 \delta}{\mathcal{F}' \cos^2 \delta} = \frac{a' \xi'}{\mathcal{F}'}, \text{ demnach } \sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P}{F} \frac{F a' \xi'}{\mathcal{F}'}$$

Zieht man durch A die Parallele zu $N'N'$, welche die Kraftlinie SE in A_2 schneidet, so ist $\overline{SA_2} = a'$, und der zu AA_2 als Null-Linie gehörige Angriffspunkt C ist der Kernpunkt. Ist $SC = e'$, so muß

Fig. 110.



$$e' a' = \frac{\mathcal{F}'}{F}, \text{ also } e' = \frac{\mathcal{F}'}{F a'}$$

fein. Mit diesem Werth erhält man

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P \xi'}{F e'} = \frac{P}{F e'} (e' + \xi').$$

$P(e' + \xi')$ bezeichnet man als das Kernmoment; dasselbe ist das Product aus der Axialkraft P in den Abstand des Angriffspunktes vom Kernpunkt. Setzt man abkürzend $M_K = P(e' + \xi')$, so ist

$$\sigma_A = \frac{M_K}{F e'} \dots \dots \dots 76.$$

Der Ausdruck 76 ist sehr bequem und ganz nach der einfachen Form des Ausdruckes in Gleichung 55 (S. 75) gebildet. e' nennt man die Kernweite. Für eine beliebige Lage der Kraftebene ergibt die Gleichung 76 die größte Beanspruchung ohne Weiteres. Wenn die Kernweite auf beiden Seiten des Schwerpunktes verschieden groß ist, so ist zu untersuchen, ob σ_A oder σ_B größer ist.

Falls die Axialkraft P gleich Null ist, also nur Kräfte parallel zur Querschnittsebene wirken, so wird

$$\sigma_A = \frac{M a}{\mathcal{F}} = \frac{M a' \cos \delta}{\mathcal{F}' \cdot \cos^2 \delta} = \frac{M}{\cos \delta} \frac{a'}{\mathcal{F}'}$$

M ist das Moment für die Axe $N' N'$; $\frac{M}{\cos \delta}$ ist das resultirende Moment in der Kraftebene, bezogen auf den Schwerpunkt als Drehpunkt; setzt man $\frac{M}{\cos \delta} = M_r$, so wird

$$\sigma_A = \frac{M_r a'}{\mathcal{F}'} = \frac{M_r a' F}{\mathcal{F}' F},$$

und da $e' a' = \frac{\mathcal{F}'}{F}$, so ist $\frac{\mathcal{F}'}{F a'} = e'$, also gleich der Kernweite; mithin

$$\sigma_A = \frac{M_r}{F e'} \dots \dots \dots 77.$$

Die größte Spannung ist gleich dem resultirenden Moment, dividirt durch Querschnittsfläche mal Kernweite. Dasselbe Moment wird demnach alsdann die größte Spannung σ_A erzeugen, wenn es in derjenigen Ebene wirkt, für welche e' seinen kleinsten Werth hat. Man kann demnach sofort aus der Figur ablesen, welche Lage des Kraftmomentes für eine gegebene Lage des Querschnittes die ungünstigste ist.

d) Biegungsspannungen in einem Körper, der aus zwei verschiedenen Baustoffen zusammengefügt ist.

Die nachstehenden Untersuchungen sind durch die neuerdings in ausgedehntem Maße ausgeführten Beton-Eisen-Constructionen veranlaßt. Man kann annehmen, daß die Ausdehnung beider Baustoffe, des Betons und des in den Beton eingebetteten Eisens, bei der Formänderung gleich groß ist; die Längenänderung der entsprechenden Punkte zweier unendlich naher Querschnitte sei λ ; alsdann wird bei unserer Annahme λ die gleiche Größe haben, ob an dieser Stelle der eine oder

115.
Spannungen
in Beton-Eisen-
Constructionen.

der andere Baufftoff liegt. Um aber die (\pm) Ausdehnung λ zu erzeugen, ist bei Eifen eine andere Beanspruchung erforderlich, als bei Beton. Es bezeichne σ die Spannung für die Flächeneinheit im Beton, σ_1 die Spannung für die Flächeneinheit im Eifen, l den Abstand zweier nahe liegender Querschnitte vor der Formänderung, λ die (\pm) Vergrößerung dieses Abstandes bei der Formänderung, E die Elasticitätsziffer für Beton und E_1 die Elasticitätsziffer für Eifen; alsdann ist

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\lambda}{l} \text{ für Beton, } \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\lambda}{l} \text{ für Eifen;}$$

demnach ist

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_1}{E_1} \text{ und } \sigma_1 = \frac{E_1}{E} \sigma.$$

Setzt man $\frac{E_1}{E} = m$, so ist

$$\sigma_1 = m \sigma \dots \dots \dots 78.$$

Ein aus Eifen und Beton zusammengesetzter Balken werde auf Biegung beansprucht; auf den betrachteten Querschnitt wirken das Moment M und die Axialkraft P ; \overline{SE} (Fig. 111) sei die Kraftlinie und NN die Null-Linie. Durch den Schwerpunkt S des Querschnittes werde parallel zur Null-Linie die Axe UU , senkrecht zu dieser durch S die Axe VV gelegt. Alsdann ergeben die Gleichgewichtsbedingungen die erforderlichen Gleichungen in derselben Weise, wie in Art. 105 (S. 86) gezeigt ist. Die mit dem Zeiger 1 versehenen Werthe beziehen sich auf den Eifentheil und die Werthe ohne Zeiger auf den Betontheil des Querschnittes. Nun lassen sich folgende drei Gleichungen aufstellen:

- I) $P = \int \sigma df + \int \sigma_1 df_1$ (algebraische Summe der in die Richtung der Balkenaxe fallenden Kräfte muß gleich Null sein).
- II) $M_u = \int \sigma v df + \int \sigma_1 v_1 df_1$ (algebraische Summe der Momente für die Axe UU muß gleich Null sein).
- III) $0 = \int \sigma \rho df + \int \sigma_1 \rho_1 df_1$ (algebraische Summe der Momente für die Axe \overline{SE} muß gleich Null sein).

Für einen beliebigen Punkt des Querschnittes ist $\sigma = a \eta$, wenn a ein noch zu bestimmender Festwerth, η der Abstand des Punktes, senkrecht gemessen, von der Null-Linie NN ist. Es ist $\eta = v + s$, mithin

$$\sigma = a(v + s), \quad \sigma_1 = m \sigma \quad \text{und} \quad \sigma_1 = a m (v_1 + s).$$

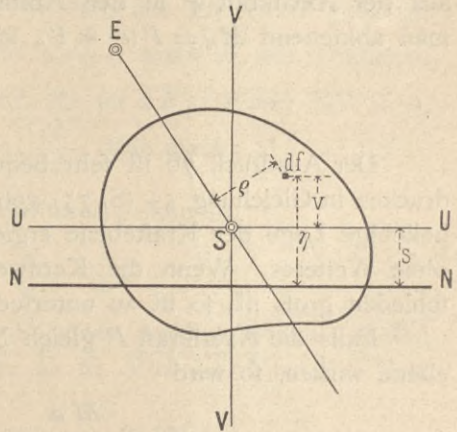
Gleichung I wird mit diesen Werthen:

$$P = a \left(\int v df + \int s df + m \int v_1 df_1 + m \int s df_1 \right),$$

$$P = a \left(\int v df + m \int v_1 df_1 \right) + a s (F + m F_1).$$

Bestimmt man den Schwerpunkt S unter der Annahme, daß die aus Eifen bestehenden Querschnittstheile in m -facher Gröfse eingeführt werden, so ist für jede

Fig. 111.



durch diesen Schwerpunkt gehende Axe das entsprechende statische Moment des Querschnittes gleich Null, d. h. es findet statt:

$$\int v \, df + m \int v_1 \, df_1 = 0, \text{ und es ist alsdann}$$

$$P = a s (F + m F_1) \dots \dots \dots 79.$$

Aus Gleichung II ergibt sich in ähnlicher Weise

$$M_u = a \int (v + s) v \, df + a m \int (v_1 + s) v_1 \, df_1,$$

$$M_u = a \int v^2 \, df + a s \int v \, df + m a \int v_1^2 \, df_1 + a m s \int v_1 \, df_1,$$

$$M_u = a \int v^2 \, df + m a \int v_1^2 \, df_1 + a s \left[\int v \, df + m \int v_1 \, df_1 \right].$$

Da $\int v \, df + m \int v_1 \, df_1 = 0$ ist, so wird

$$M_u = a (\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1) \dots \dots \dots 80.$$

\mathcal{F} ist das Trägheitsmoment des Betontheiles und \mathcal{F}_1 das Trägheitsmoment des Eifentheiles des Querschnittes bezogen auf die Axe UU .

Aus Gleichung III folgt, da $\sigma = a \eta$ ist,

$$0 = \int a \eta \rho \, df + \int a m \eta_1 \rho_1 \, df_1 = a \left(\int \eta \rho \, df + m \int \eta_1 \rho_1 \, df_1 \right),$$

$$0 = Z + m Z_1 \dots \dots \dots 81.$$

Z , bzw. Z_1 bedeuten die Centrifugalmomente der Querschnittstheile für die Axen NN und SE . Construirt man also unter Zugrundelegung m -facher Querschnittsgröße der Eifentheile das Centrifugalmoment für die Kraftlinie und die Null-Linie, so ist dasselbe gleich Null. Kraftlinie und Null-Linie sind conjugirte Axen.

Aus Gleichung 80 folgt

$$a = \frac{M_u}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1};$$

aus Gleichung 79 folgt

$$s = \frac{P}{a (F + m F_1)} = \frac{P (\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1)}{(F + m F_1) M_u},$$

und

$$\sigma = a (v + s) = \frac{P}{F + m F_1} + \frac{M_u}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1} v \dots \dots \dots 82.$$

$$\sigma_1 = m \sigma = \frac{m P}{F + m F_1} + \frac{m M_u v}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1} \dots \dots \dots 83.$$

Falls die Axialkraft P gleich Null ist, wird

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{M_u v}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1} \\ \sigma_1 &= m \frac{M_u v}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 84.$$

Die Ausdrücke 82 bis 84 ergeben folgendes für die Berechnung wichtige Gesetz: Die Beanspruchung kann bei einem Eisen-Betonbalken eben so wie bei einem einheitlich aus Beton hergestellten Balken berechnet werden, wenn man sowohl für die Ermittlung des Schwerpunktes, wie für diejenige der Querschnittsfläche und des Trägheitsmomentes die Eisenquerschnitte in $m \left(= \frac{E_1}{E} \right)$ -facher Größe einführt.

Man müßte bei der Berechnung nun vom Gesamtschnitt denjenigen der Eifentheile abziehen und den Rest als Betonquerschnitt einführen; bei der großen Unbestimmtheit jedoch, welche bezüglich der Größe von m herrscht, kann man unbedenklich den Gesamtschnitt als Betonquerschnitt einführen.

116.
Querschnitts-
ermittelung
für
Beton-Balken.

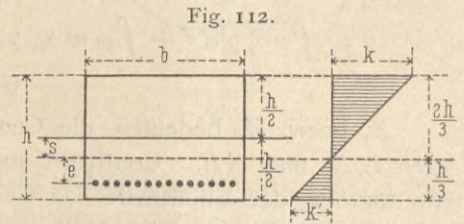
Bei Beton-Eisenbalken ist der Gesamtschnitt ein Rechteck, dessen Breite mit b und dessen Höhe mit h bezeichnet werden mag; die Eiseneinlage bestehe aus einer Anzahl Rundeisen, nahe der unteren Begrenzung des Rechteckes. Nach *Melan*²⁵⁾ kann man als zulässige Beanspruchung des Betons einführen:

- größte Druckbeanspruchung des Betons 25 bis 30 kg für 1 qcm,
- größte Zugbeanspruchung des Betons 10 kg für 1 qcm.

Wir führen ferner

$$m = \frac{E_1}{E} = \frac{E_{Eisen}}{E_{Beton}} = 30$$

ein. Stellt man die Bedingung, daß gleichzeitig die größte Druckbeanspruchung gleich 20 kg und die größte Zugbeanspruchung gleich 10 kg sei, bzw. daß allgemein die Beanspruchung auf Druck, absolut gerechnet, doppelt so groß sei, als diejenige auf Zug, so ergibt sich, daß unter Einführung des m -fachen Eisenquerschnittes in die Rechnung die Null-Linie in $\frac{1}{3}$ der Balkenhöhe liegen muß (Fig. 112). Der Abstand s der Null-Linie von der Trägermitte ist also



$$s = \frac{h}{6}.$$

Weiter muß auch $0 = b h s - m F_1 e$ sein, d. h.

$$s = \frac{m F_1 e}{b h}.$$

Beide Werthe für s einander gleich gesetzt, giebt

$$\frac{m F_1 e}{b h} = \frac{h}{6}, \text{ d. h. } F_1 e = \frac{b h^2}{6 m}.$$

Ferner ist das Trägheitsmoment des Betonquerschnittes für die Null-Linie

$$\mathcal{I} = \frac{b h^3}{12} + \frac{b h \cdot h^2}{36} = \frac{b h^3}{9} \text{ und } m \mathcal{I}_1 = m F_1 e^2,$$

also die größte Druckbeanspruchung im Querschnitt, falls die Axialkraft $P = 0$ ist, nach Gleichung 84

$$\sigma_{max} = \frac{M \frac{2}{3} h}{\frac{b h^3}{9} + m F_1 e^2} = \frac{2 M h}{\frac{b h^3}{3} + 3 m F_1 e^2}.$$

Wird für $F_1 e$ der oben gefundene Werth eingeführt, so erhält man

$$\sigma_{max} = \frac{2 M}{\frac{b h^2}{6} \left(2 + \frac{3 e}{h} \right)} \dots \dots \dots 85.$$

²⁵⁾ In: Oest. Monatschr. f. d. öff. Baudienst 1896, S. 465. — Auch als Sonderabdruck erschienen: Wien 1896.

Diese Gleichung gilt allgemein und giebt die grösste Druckbeanspruchung im Beton doppelt so groß, absolut genommen, als die Zugbeanspruchung. Indem man

$$\sigma_{max} = K$$

setzt, erhält man als Bedingungsgleichung für den Querschnitt:

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{M}{K \left(1 + \frac{3e}{2h}\right)} \dots \dots \dots 86.$$

Beispiel: Es sei $M = 12500$ kgcm und $K = 15$ kg für 1 qcm; alsdann wird

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{12500}{15 \left(1 + \frac{3e}{2h}\right)} \quad \text{und} \quad b h^2 = \frac{5000}{1 + \frac{3e}{2h}}.$$

Damit die Eifen ganz im Beton eingebettet werden können, muß man e entsprechend kleiner als $\frac{h}{3}$ wählen; nimmt man $e = \frac{h}{4}$ an, so ergibt sich

$$b h^2 = \frac{5000}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{8 \cdot 5000}{11}.$$

Das der Untersuchung zu Grunde gelegte Stück des Balkens habe 1 m Breite; dann ist $b = 100$ cm, also

$$h^2 = \frac{8 \cdot 5000}{11 \cdot 100} = 36,36 \quad \text{und} \quad h = 6 \text{ cm (abgerundet);}$$

es wird also $e = \frac{h}{4} = 1,5$ cm und $f_1 e = \frac{b h^2}{6 m}$, und mit $m = 30$

$$f_1 e = \frac{100 \cdot 36}{6 \cdot 30} = 20 \quad \text{oder} \quad f_1 = \frac{20}{1,5} = 13,33 \text{ qcm.}$$

Ordnet man auf 1 m Breite 20 Einlagen aus Rundeifen an, so muß jede derselben 0,67 qcm Querschnitt erhalten, also einen Durchmesser $d = 0,82$ cm.

Hätte man $\sigma_{max} = K = 20$ kg für 1 qcm eingeführt, so hätte man erhalten:

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{12500}{20 \left(1 + \frac{3e}{2h}\right)} = \frac{12500}{20 \left(1 + \frac{3}{8}\right)} = \frac{625 \cdot 8}{11},$$

$$h^2 = \frac{6 \cdot 8 \cdot 625}{11 \cdot 100} = 27, \quad h = 5,2 \text{ cm,} \quad f_1 e = \frac{b h^2}{6 m} = \frac{100 \cdot 27}{6 \cdot 30} = 15 \quad \text{und} \quad f_1 = \frac{15 \cdot 4}{5,2} = 11,5 \text{ qcm.}$$

Bei 20 Einlagen bekommt jede einen Durchmesser

$$d = \sqrt{\frac{11,5 \cdot 4}{20 \cdot 3,14}} = 0,85 \text{ cm.}$$

Die grösste Beanspruchung in Eifen ist alsdann:

$$\sigma_{Emax} = \frac{12500 \cdot 1,725 \cdot 30}{\frac{100 \cdot 5,2^3}{9} + 30 \cdot 11,5 \cdot 1,3^2} = \frac{646875}{2149} = 301 \text{ kg für 1 qcm.}$$

Für die Berechnung der Betongewölbe mit Eifeneinlagen kann man die Formeln 82 und 83 verwenden²⁶⁾.

²⁶⁾ Bezüglich der Berechnung von Beton-Eifen-Constructionen sei auf nachstehende Aufsätze verwiesen:

KOENEN, M. Berechnung der Stärke der *Monier*-schen Cementplatten mit Eifeneinlagen. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 462.
 NEUMANN, P. Ueber die Berechnung der *Monier*-Constructionen. Wochschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1890, S. 209.
 MELAN, J. Gewölbe aus Beton mit Verbindung mit eisernen Bogen. Zeitschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893, S. 166.
 SPITZER, J. A. Berechnung der *Monier*-Gewölbe. Zeitschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896, S. 305.
 THULLIE, M. R. v. Ueber die Berechnung der Biegungsspannungen in den Beton- und *Monier*-Constructionen. Zeitschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896, S. 365.
 MELAN, J. Ueber die Berechnung der Beton-Eifen-Constructionen. Oest. Monatsschr. f. d. öst. Baudienst 1896, S. 465. — Auch als Sonderabdruck erschienen: Wien 1896.
 THULLIE, M. R. v. Ueber die Berechnung der *Monier*-Platten. Zeitschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1897, S. 103.
 GRÜNING, M. & H. REISSNER. Eine neue Fahrplananordnung für eiserne Strafenbrücken. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 190.

Falls man den Zugwiderstand des Betons gar nicht berücksichtigt (was nur für angenäherte Rechnung zulässig ist), so sind in den Ausdrücken für F und \mathcal{F} , welche sich auf den Beton beziehen, nur die Querschnittsteile auf der Druckseite als vorhanden einzuführen. Dann ist für den hauptsächlich hier in Betracht kommenden rechteckigen Querschnitt, welchen die Kraftebene in einer Hauptaxe schneidet, einzuführen:

$$F = b \eta, \quad \mathcal{F} = \frac{b \eta^3}{3} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_1 = F_1 e^2.$$

In diesen Formeln bedeutet η den Abstand der Null-Linie von der oberen Rechteckseite und b die Breite des Rechteckes. Das statische Moment des Querschnittes für die Null-Linie soll gleich Null sein, wenn die Eisenteile in m -facher Größe eingeführt werden, d. h. es soll

$$0 = \frac{b \eta^2}{2} - m F_1 e \quad \text{oder} \quad \eta^2 = \frac{2 m e F_1}{b}$$

sein. Die größte Druckspannung im Beton ist dann

$$\sigma_{max} = \frac{M \eta}{\frac{b \eta^3}{3} + m F_1 e^2}$$

und die größte Zugspannung im Eisen

$$\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{max}} = m \frac{e}{\eta}; \quad \text{sonach.} \quad \sigma_{1max} = \frac{m e M}{\frac{b \eta^3}{3} + m F_1 e^2},$$

$$\sigma_{1max} = \frac{M}{\frac{b \eta^3}{3 e m} + F_1 e} \quad \text{für das Eisen}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{\frac{b \eta^2}{3} + \frac{m F_1 e^2}{\eta}} \quad \text{für den Beton}$$

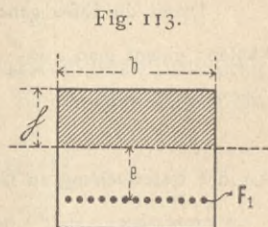


Fig. 113.

87.

e) Schubspannungen.

117.
Wagrechte
Schub-
spannungen.

Außer den oben ermittelten Biegungsspannungen treten bei den verschiedenen Belastungen der Balken auch noch Schubspannungen auf, von denen hier zunächst die wagrechten Schubspannungen betrachtet werden sollen.

Denkt man sich eine Anzahl Lagen dünner Bretter über einander gelegt, an den Enden unterstützt und in der Mitte belastet, so werden sich dieselben gegen einander etwa in der Weise verschoben, welche in Fig. 114 angedeutet ist. Diese Verschiebung ist eine Folge der in den Fugen aa , bb auftretenden Schubkräfte; werden dieselben nicht durch künstliche Mittel (Zähne, Dübel u. dergl.) oder den Abscherungswiderstand des Baustoffes aufgehoben, so verursachen sie eine Verschiebung.

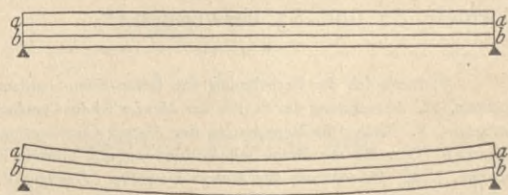
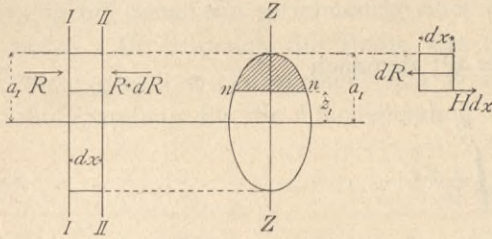


Fig. 114.

Für die rechnungsmäßige Ermittlung dieser Schubspannungen möge, wie oben, angenommen werden, dass nur senkrecht zur Balkenaxe gerichtete Kräfte

wirken; es sollen die wagrechten Schubspannungen aufgefucht werden, welche in der Schicht nn (Fig. 115) zwischen zwei unendlich nahe an einander gelegenen Querschnitten II und III wirken, wenn die Schicht nn um z_1 über der Balkenaxe liegt. Dabei sollen die vereinfachenden Annahmen gemacht werden, dass die Querschnitte II und III einander gleich seien, dass die wagrechte Schubspannung für die Flächeneinheit in der ganzen Breite der Schicht nn gleich groß sei und dass die Kraftebene sämtliche Querschnitte in Symmetrieachsen schneide.

Fig. 115.



Auf den Theil des Balkenstückes zwischen II und III , welcher oberhalb der Faserschicht nn liegt, wirkt senkrecht zur Ebene II die Summe R der axialen Biegespannungen und senkrecht zur Ebene III die Kraft $R + dR$. Nun ist

$$R = \int_{z_1}^{a_1} \sigma \, df,$$

und da nach Gleichung 56 (S. 75): $\sigma = \frac{M}{\mathcal{F}} z$ ist,

$$R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathcal{F}} z \, df \quad \text{und} \quad R + dR = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + dM}{\mathcal{F}} z \, df.$$

Die Mittelkraft von R und $R + dR$ ist, da beide gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Sinn haben und in dieselbe Linie fallen, gleich dR , d. h. auf das betrachtete Balkenstück wirkt als Mittelkraft aller axialen Biegespannungen

$$dR = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + dM}{\mathcal{F}} z \, df - \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathcal{F}} z \, df.$$

Für die Integration zwischen z_1 und a_1 sind M , dM und \mathcal{F} constant; diese Werthe können also vor das Integralzeichen gesetzt werden, d. h. es ist

$$dR = \frac{M + dM}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z \, df - \frac{M}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z \, df = \frac{dM}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z \, df.$$

Damit das Balkenstück im Gleichgewicht sei, muss die algebraische Summe der auf dasselbe wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null sein; also muss noch eine wagrechte Kraft auf das Balkenstück wirken, welche der Größe nach genau gleich der obigen Kraft dR , der Richtung nach derselben entgegengesetzt ist. Diese Kraft kann nur in der wagrechten Schicht wirken, mittels deren dieses Stück mit dem anderen Balkentheile zusammenhängt, d. h. in der um z_1 über der Null-Linie liegenden Schicht. Längs derselben entsteht demnach eine Schubspannung. Wird die Größe derselben für die Längeneinheit des Balkens mit H bezeichnet, so be-

trägt sie für dx Längeneinheiten $H dx$, und für die Ermittlung von H ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$H dx = dR = \frac{dM}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z df \quad \text{und} \quad H = \frac{dM}{dx} \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z df.$$

Nach Gleichung 53 (S. 72) ist $\frac{dM}{dx} = Q$; demnach

$$H = \frac{Q}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z df \dots \dots \dots 88.$$

$\int_{z_1}^{a_1} z df$ ist das statische Moment des Flächentheiles zwischen den Ordinaten z_1 und a_1 bezogen auf die Schweraxe. Setzt man nun

$$\int_{z_1}^{a_1} z df = S_{z_1}^{a_1},$$

so wird

$$H = \frac{Q S_{z_1}^{a_1}}{\mathcal{F}} \dots \dots \dots 89.$$

Die wagrechte Schubspannung für die Längeneinheit des Balkens und irgend eine Schicht (nn) wird demnach erhalten, indem man die Querkraft für den betreffenden Querschnitt mit dem auf die Null-Linie bezogenen statischen Moment des Querschnittstheiles oberhalb der betreffenden Schicht multiplicirt und dieses Product durch das Trägheitsmoment des für die Null-Linie genommenen ganzen Querschnittes dividirt.

Hieraus folgt:

1) Da Q und \mathcal{F} für denselben Querschnitt bei bestimmter Belastung ganz bestimmte Zahlenwerthe sind, so ist die wagrechte Schubspannung für die Längeneinheit des Balkens an den verschiedenen Stellen eines Querschnittes mit S veränderlich. H wird für diejenigen Schichten am größten, für welche S seinen größten Werth hat. S ist aber für die wagrechte Schweraxe am größten; dort ist es gleich $S_o^{a_1}$. S ist für die äußersten Schichten am kleinsten; daselbst ist $S = 0$.

Demnach nimmt H in demselben Querschnitt bei derselben Belastung von der Null-Linie — der wagrechten Schweraxe — nach den beiden am weitesten entfernten Fasern bis auf Null ab.

2) In denselben Schichten verschiedener Querschnitte ist nach obiger Gleichung H mit Q veränderlich, ist demnach in demjenigen Querschnitte am größten, in welchem die Querkraft ihren größten Werth hat. Sind verschiedene Belastungszustände möglich, so ruft derjenige das größte H hervor, welcher die größte Querkraft Q erzeugt.

3) Werden, wie üblich und zweckmäfsig, fowohl S , wie \mathcal{F} auf Centimeter bezogen, also S in cm^3 , \mathcal{F} in cm^4 ausgedrückt, so erhält man H an irgend einer Balkenstelle als die wagrechte Schubspannung für das laufende Centimeter.

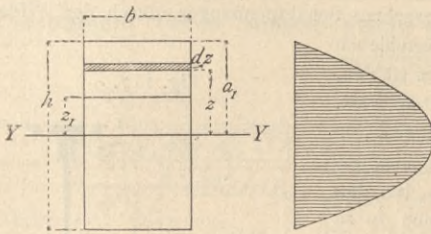
4) Der in Gleichung 89 gefundene Ausdruck giebt die Schubspannung für die Längeneinheit des Balkens an; diese Schubspannung kann für die Fälle der Praxis genügend genau als gleichmäfsig über die Breite der Schicht vertheilt angenommen werden. Ist demnach die Breite des Querschnittes in der Höhe der betrachteten Schicht gleich w , so vertheilt sich H über $w \cdot 1$ Flächeneinheiten, so dafs sich als Schubspannung für die Flächeneinheit ergibt

$$\mathfrak{H} = \frac{Q S_{z_1}^{a_1}}{w \mathcal{F}} \dots \dots \dots 90.$$

Im Nachstehenden sollen für einige im Hochbauwesen häufig vorkommende Querschnittsformen die wagrechten Schubspannungen bestimmt werden.

118.
Rechteckiger
Querschnitt.

Fig. 116.



1) Für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 116) liegt die wagrechte Schwerpunktsaxe in halber Höhe. Die wagrechte Schubspannung in der Höhe z_1 über der Null-Linie ist nach Gleichung 89 zu bestimmen.

Für den vorliegenden Querschnitt ist

$$S_{z_1}^{a_1} = S_{z_1}^2 = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} z df \text{ und, da } df = b dz,$$

$$S_{z_1}^{a_1} = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} b dz \cdot z = \left(\frac{b z^2}{2}\right)_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right).$$

Da ferner $\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12}$, wird nach Gleichung 89

$$H = \frac{Q \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right)}{\frac{b h^3}{12}} = \frac{6 Q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right) = \frac{6 Q}{h} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h}\right)^2\right] \dots \dots \dots 91.$$

In diesem Ausdruck ist auf der rechten Seite nur eine Veränderliche, nämlich z_1 ; alle anderen Gröfsen haben für sämmtliche Schichten gleiche Werthe. Das Gesetz der Veränderlichkeit wird besonders anschaulich, wenn man in den verschiedenen Abständen z_1 über und unter YY die in den betreffenden Schichten herrschenden Werthe von H nach Gleichung 91 wagrecht nach einem beliebigen Mafsstabe aufträgt und die Endpunkte verbindet; man erhält die in Fig. 116 schraffierte Fläche; die begrenzende Verbindungslinie der Endpunkte ist offenbar die Linie der Gleichung 91. Die Form der Gleichung zeigt, dafs diese Linie eine Parabel ist.

Für $z_1 = 0$ ist $H_0 = H_{max} = \frac{6 Q}{4 h} = \frac{3 Q}{2 h}$, und für $z_1 = \frac{h}{2}$ ist $H_{\frac{h}{2}} = \frac{6 Q}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$.

Die wagrechte Spannung für die Flächeneinheit längs der einzelnen Schichten ist $\mathfrak{H} = \frac{H}{b}$, d. h.

$$\mathfrak{H} = \frac{6 Q}{b h} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h}\right)^2\right], \text{ ferner } \mathfrak{H}_0 = \frac{3 Q}{2 b h} \text{ und } \mathfrak{H}_{\frac{h}{2}} = 0.$$

Die in Fig. 116 gezeichnete Linie giebt also auch die graphische Darstellung der für die Flächeneinheit stattfindenden wagrechten Schubspannungen, natürlich in anderem Mafsstabe, als die wagrechten Schubspannungen für die Längeneinheit.

2) Für den symmetrischen I-förmigen Querschnitt liegt die wagrechte Schwerpunktsaxe gleichfalls in halber Höhe. Q und \mathcal{F} sind wieder für alle Schichten desselben Querschnittes gleich grofs,

119.
I-förmiger
Querschnitt.

mithin H mit S veränderlich (natürlich nur in demselben Trägerquerschnitt und bei bestimmter Belastung). Die größte wagrechte Schubspannung findet wieder in der Null-Linie statt, und nach Gleichung 89 ist

$$H = \frac{Q S}{\mathcal{F}},$$

worin S und \mathcal{F} auf die Null-Linie bezogen sind.

Bezeichnet man mit f die Querschnittsfläche des oberen, bzw. unteren Flansches des Trägers, mit h den Abstand der Schwerpunkte der Flansche, mit d die Stegstärke, so ist bei kleinem d nahezu

$$S = \frac{f h}{2} \text{ und nach Gleichung 20 (S. 36): } \mathcal{F} = \left(f + \frac{d h}{6} \right) \frac{h^2}{2};$$

mithin

$$H = \frac{Q f}{\left(f + \frac{d h}{6} \right) h}.$$

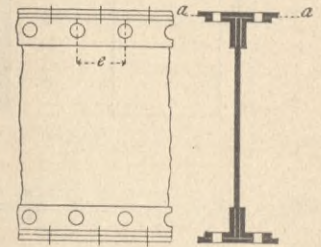
Ist $\frac{d h}{6}$ gegen f klein, so ist nahezu

$$H = \frac{Q}{h} \dots \dots \dots 92.$$

120.
Blechträger-
Querschnitt.

3) Querschnitt der Blechträger. Bei den aus einem einzigen Stücke bestehenden Querschnitten werden die in den einzelnen Fasern wirkenden wagrechten Schubspannungen durch den Widerstand aufgehoben, den der Zusammenhang der Fasern dem Verschieben entgegen stellt; die Querschnittsabmessungen sind demnach so zu wählen, dass die erlaubte Beanspruchung auf Schub nicht überschritten wird. Ist dagegen der Querschnitt aus mehreren Theilen zusammengesetzt, so müssen die in den Fugen zwischen den einzelnen Theilen entstehenden Schubspannungen durch künstliche Mittel aufgehoben werden. Bei den Blechträgern dienen dazu die Niete. Die Niete sind demnach so zu bestimmen, dass ihr Schubwiderstand die auftretenden Schubspannungen aufhebt, ohne dass die zulässige Grenze überschritten wird. Um den Abstand der Niete zu ermitteln, welche zur Verbindung der Lamellen mit den Winkleisen dienen, suche man demnach die für die Längeneinheit in der Fuge aa (Fig. 117) stattfindende Schubspannung auf die oben gezeigte Weise.

Fig. 117.



Wieder ist $H = \frac{Q S}{\mathcal{F}}$, worin S das statische Moment der Lamellenfläche bezogen auf die Null-Linie bezeichnet. Nennt man den Abstand der Nietbolzen e , so ist die Gesamtschubspannung auf die Länge e gleich

$$D = \frac{Q S}{\mathcal{F}} e.$$

Allerdings ist die Querkraft Q auf die Länge e allgemein nicht constant; es genügt aber stets, für Q irgend einen der auf der Strecke e sich ergebenden Werthe einzuführen; zweckmäßig wird man den größten wählen.

Diese Schubspannung erstrebt eine wagrechte Verschiebung der Lamelle in der Richtung der Trägeraxe; dieselbe soll durch die Niete verhindert werden. Werden zwei einschnittige Niete vom Durchmesser d verwendet, so darf ihr Widerstand gegen Abcheren nach Art. 92 (S. 68)

$$W = \frac{2 d^2 \pi}{4} T$$

sein, wenn T die zulässige Schubbeanspruchung für die Flächeneinheit der abzucherenden Fläche ist. Durch Gleichsetzung beider Werthe, derjenigen für D und für W , erhält man folgende Gleichung für e :

$$\frac{Q S e}{\mathcal{F}} = \frac{2 d^2 \pi}{4} T, \text{ woraus } e = \frac{d^2 \pi T \mathcal{F}}{2 Q S}.$$

Je größer Q ist, desto kleiner wird e , desto näher sind also die Niete zu setzen.

Die angegebene Berechnung kann auch für die Ermittlung der in den lothrechten Fugen auftretenden wagrechten Schubkraft, also zur Bestimmung derjenigen Niete dienen, welche die lothrechten Schenkel der Winkleisen mit der Blechwand verbinden. Alsdann ist unter S das statische Moment desjenigen Theiles der Querschnittsfläche zu verstehen, welcher durch diese Niete mit der Blechwand vereinigt wird, d. h. die Querschnittsfläche der Winkleisen und Lamellen.

Außer den betrachteten wagrechten wirken auch lothrechte Schubspannungen. Für die Ermittlung derselben soll die gleiche Annahme, wie oben, gemacht werden, daß nur senkrecht zur Balkenaxe gerichtete äußere Kräfte vorhanden seien, die Balkenaxe aber wagrecht sei (Fig. 118). Die Mittelkraft aller links vom beliebigen Querschnitte *II* wirkenden Kräfte sei gleich *Q*; alsdann verlangt das Gleichgewicht des Balkenstückes, daß an demselben noch eine lothrechte Kraft *Q* wirke, welche der ersten an Gröfse genau gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist. Eine solche Kraft kann aber nur längs des Querschnittes *II* wirken, da nur in diesem das linksseitige Balkenstück mit dem anderen Balken zusammenhängt. Diese Kraft ist der lothrechte Abfederungswiderstand, welcher dem Verschieben des Balkenstückes längs des Querschnittes *II* entgegenwirkt.

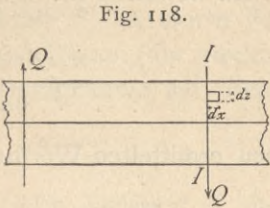


Fig. 118.

Hieraus folgt: In jedem lothrechten Querschnitte wirken lothrechte Schubspannungen, deren Summe genau gleich der Querkraft ist, welche sich für diesen Querschnitt ergibt.

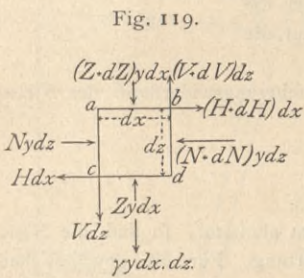


Fig. 119.

Die Vertheilung dieser Schubspannungen über den Querschnitt findet nach folgendem Gesetze statt: Die an irgend einer Stelle für die Längeneinheit wirkende lothrechte Schubspannung ist gleich der an derselben Stelle für die Längeneinheit wirkenden wagrechten Schubspannung.

Um dieses Gesetz nachzuweisen, betrachten wir ein im Abstände *z* (Fig. 119) über der Null-Linie liegendes Balkenstück von der Länge *dx*, der Höhe *dz* und der Dicke *y* (senkrecht zur Bildfläche gemessen). Auf dieses Balkenstück wirken im Allgemeinen folgende Kräfte:

- | | |
|---|--|
| senkrecht zur Fläche <i>ac</i> wirkt $Nydz$; | längs der Fläche <i>ac</i> wirkt Vdz ; |
| » » » <i>bd</i> » $(N + dN) ydz$; | » » » <i>bd</i> » $(V + dV) dz$; |
| » » » <i>cd</i> » $Zydx$; | » » » <i>cd</i> » Hdx ; |
| » » » <i>ab</i> » $(Z + dZ) ydz$; | » » » <i>ab</i> » $(H + dH) dx$. |

Hierin bedeuten *Z* und *Z + dZ* die auf die wagrechten Flächen *ab* und *cd* wirkenden lothrechten Spannungen, *V*, bzw. *V + dV* die lothrechten Schubspannungen für die Längeneinheit in den Flächen *ac*, bzw. *bd*. Endlich wirkt noch das Eigengewicht des Stückes, nämlich $\gamma y \cdot dz \cdot dx$.

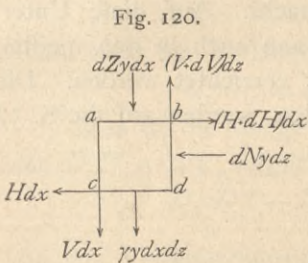


Fig. 120.

Läßt man diejenigen Kräfte, welche einander gegenseitig aufheben, fort, so bleiben die in Fig. 120 angegebenen übrig. Dieselben halten das Balkenstück im Gleichgewicht; demnach müssen die Summen der statischen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Bildebene, gleich Null sein.

Dieser Punkt sei *b*; alsdann ist

$$0 = Vdz dx - Hdx dz + \gamma y \frac{dx \cdot dz \cdot dx}{2} + dZydx \frac{dx}{2} - dNydz \frac{dz}{2}.$$

Die unendlich kleinen Gröfßen dritter Ordnung fallen gegen die unendlich kleinen Gröfßen zweiter Ordnung fort; sonach bleibt

$$0 = V dz dx - H dx dz,$$

woraus

$$V = H \dots \dots \dots 93.$$

Dies gilt für jede Stelle des Balkens, womit der obige Satz bewiesen ist. Es ist mithin nach Gleichung 89

$$V = \frac{Q S_{z_1}^{a_1}}{J} \dots \dots \dots 94.$$

Die in Art. 118 bis 120 für verschiedene Querschnittsformen ermittelten Werthe und graphischen Darstellungen für H gelten also auch für V .

Das Gesetz, nach welchem sich die lothrechten Schubspannungen im Querschnitt vertheilen, wird angewendet, wenn es sich darum handelt, die auf die einzelnen Niete in neben stehender Verbindung (Fig. 121) entfallenden Beanspruchungen zu ermitteln. Der I-förmige Walzträger wird durch Winkel Eisen mit dem Blechträger vereinigt. Die im Querschnitt aa des I-Trägers entstehende Querkraft Q ist durch die Niete auf den Blechträger zu übertragen. Die einzelnen Niete sind nun so zu vertheilen, daß ihre Entfernung der Größe der durch den betreffenden Niet zu übertragenden Schubspannung entspricht. Ist an einer Stelle die Entfernung der Nietmitten e und die lothrechte Schubspannung für die Längeneinheit im Mittel in dieser Höhe gleich V , so kommt auf einen Niet die Schubkraft $V e$.

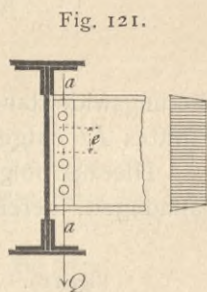


Fig. 121.

Der Niet wird in zwei Querschnitten abgefichert; mithin ist der Abficherungswiderstand des Nietes $\frac{2 d^2 \pi}{4} T$; es ergibt sich also für e die Gleichung:

$$V e = \frac{2 d^2 \pi}{4} T, \text{ woraus } e = \frac{\pi d^2 T}{2 V}.$$

Da V von der Null-Linie nach der oberen und unteren Gurtung zu abnimmt, so sind die Niete in der Nähe der Neutralen näher zu setzen, als in der Nähe der Gurtung. Für die gewöhnlichen I-förmigen Walzbalken kann man die oben stehende Fig. 121 als graphische Darstellung der Veränderlichkeit der lothrechten Schubspannung annehmen, d. h. mit genügender Annäherung V als gleich groß über die ganze Trägerfegehöhe annehmen, worin nach Gleichung 92: $V = \frac{Q}{J}$.

In den bisherigen Betrachtungen sind nur die Normalspannungen, welche in den lothrechten Balkenquerschnitten, und die Schubspannungen, welche in den wagrechten und lothrechten Balkenquerschnitten entstehen, ermittelt worden. Um die Frage der im Inneren der Balken auftretenden Beanspruchungen eingehend zu lösen, wären noch die Normal- und Schubspannungen in einem Querschnitte aufzufuchen, welcher einen beliebigen Winkel mit der Wagrechten macht. Auf diese Untersuchungen einzugehen, mangelt hier der Raum, und es kann auch in den meisten Fällen des Hochbaues auf eine dahin gehende Berechnung verzichtet werden. Die Leser, welche sich über diesen Gegenstand unterrichten wollen, werden auf die S. 57 genannten Werke verwiesen.

f) **Elastische Linie.**

Wenn ein Balken dem Einflusse biegender Kräfte unterworfen ist, so wird eine Formänderung desselben eintreten. Die Axe des ursprünglich geraden Balkens wird eine krumme Linie (Fig. 122), welche man die elastische Linie nennt.

Die Gleichung der elastischen Linie wird für eine große Zahl von Aufgaben gebraucht; bei vielen derselben wirken nicht nur Kräfte senkrecht zur ursprünglichen Balkenaxe, sondern auch solche, welche in die Axe fallen, sog. Axialkräfte. Ders-

122.
Spannungen
für ein
beliebiges
Flächen-
element.

123.
Axiale
Biegungs-
spannung.

halb soll dieser allgemeinere Fall für die Entwicklung der Gleichung zu Grunde gelegt, im Uebrigen aber angenommen werden, daß die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneide.

Auf irgend einen Querschnitt wirke das Biegemoment M und die Axialkraft P ; in einem Punkte des Querschnittes, welcher von der wagrechten Schwerpunktsaxe (der zweiten Hauptaxe des Querschnittes) den Abstand v hat, ist unter Bezugnahme auf Gleichung 54 (S. 75) die axiale Biegungsspannung

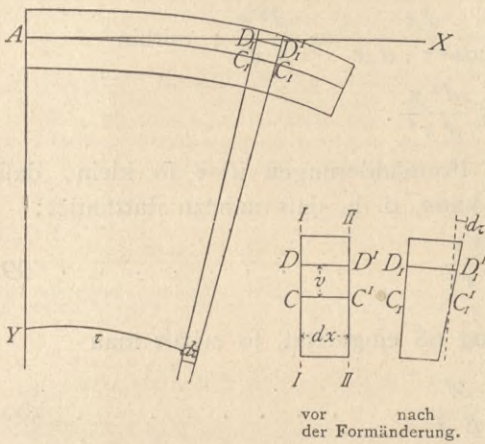
$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{\mathcal{J}}; \quad \dots \dots \dots 95.$$

hierin bedeutet F die Querschnittsfläche und \mathcal{J} das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für die genannte Schwerpunktsaxe.

Man lege durch einen Punkt A der Balkenaxe drei Coordinatenaxen, von denen die X -Axe mit der ursprünglichen Balkenaxe zusammenfalle, die Y -Axe senkrecht zu derselben in der Kraftebene, die Z -Axe senkrecht zur Kraftebene stehe, und betrachte ein Balkenstück zwischen den Ebenen II und III , dessen Länge vor der Formänderung dx war. Die Ebenen II und III waren vor der Formänderung parallel und senkrecht zur Balkenaxe und hatten die Abscissen x und $x + dx$; die Länge einer Faser DD' in der Höhe v über der Axe war dx .

124.
Gleichung
der elastischen
Linie.

Fig. 122.



Wir bestimmen nunmehr die Formänderung dieser Faser DD' . Durch die beiden Punkte der gebogenen Axe C_1 und C_1' legen wir Ebenen senkrecht zur gebogenen Axe; der Winkel beider sei $d\tau$, der Winkel der durch C_1 gelegten Ebene mit der Y -Axe sei τ . Man nimmt an (übereinstimmend mit der Voraussetzung in Art. 95, S. 73), daß der Abstand zweier Punkte in der Höhe v über der Axe alsdann eben so groß sei, wie der Abstand der Normalebene in der Höhe v über der Axe, d. h. daß stattfindet

$$D_1 D_1' = C_1 C_1' + v d\tau.$$

Nennt man die Verlängerung des Stückes CC' bei der Formänderung $d\xi$, so ist

$$C_1 C_1' = dx + d\xi \quad \text{und} \quad D_1 D_1' = dx + d\xi + v d\tau.$$

Dies ist die Länge der gebogenen Faser. Die ursprüngliche Länge derselben war $DD' = dx$; folglich ist die Verlängerung

$$D_1 D_1' - DD' = dx + d\xi + v d\tau - dx = d\xi + v d\tau$$

und das Verlängerungsverhältniß $\frac{d\xi + v d\tau}{dx}$.

Nun ist σ die axiale Faserspannung in dieser Faser, mithin

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{d\xi + v d\tau}{dx} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{v d\tau}{dx},$$

$$\sigma = E \frac{d\xi}{dx} + \frac{E d\tau}{dx} v \quad \dots \dots \dots 96.$$

Nach Gleichung 95 ist aber auch

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}} v.$$

Die Gleichsetzung beider für σ gefundener Werthe ergibt

$$\frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}} v = E \frac{d\xi}{dx} + \frac{E d\tau}{dx} v,$$

woraus die beiden Gleichungen folgen:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{d\xi}{dx} &= \frac{P}{F} \\ E \frac{d\tau}{dx} &= \frac{M}{\mathcal{F}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 97.$$

Demnach wird

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{M}{E\mathcal{F}} \dots \dots \dots 98.$$

Nun ist $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$, folglich $\frac{d \operatorname{tg} \tau}{dx} = \frac{d\tau}{\cos^2 \tau \cdot dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$; mithin

$$\frac{d\tau}{dx} = \cos^2 \tau \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Bei den hier in Betracht kommenden Formänderungen ist τ so klein, daß $\cos^2 \tau$ unbedenklich gleich 1 gesetzt werden kann, d. h. daß nahezu stattfindet:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \dots \dots 99.$$

Wird dieser Werth für $\frac{d\tau}{dx}$ in Gleichung 98 eingesetzt, so erhält man

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E\mathcal{F}} \dots \dots \dots 100.$$

Gleichung 100 ist die Differentialgleichung der elastischen Linie. In derselben bedeutet M das Moment an einer Stelle mit der Abscisse x , im Allgemeinen also etwas Veränderliches; \mathcal{F} ist das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe des Querschnittes an derselben Stelle.

Die Gleichung der elastischen Linie wird durch zweimalige Integration der Gleichung 100 erhalten; bei der Integration ist E constant. Es wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E} \int \frac{M}{\mathcal{F}} dx + C_1$$

und

$$y = \frac{1}{E} \iint \frac{M}{\mathcal{F}} (dx)^2 + C_1 x + C_2.$$

Bekanntlich ist der Krümmungshalbmesser für eine ebene Curve

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

oder, wenn $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$ nur klein ist, angenähert

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Danach wird die Gleichung der elastischen Linie auch geschrieben werden können:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \mathcal{F}} \dots \dots \dots 101.$$

Für $M = 0$ wird $\rho = \infty$, d. h. die elastische Linie eine Gerade. Das Moment M ist Null an demjenigen Punkte des Balkens, bei welchem es aus dem positiven in den negativen Werth übergeht, also das Vorzeichen wechselt; an diesen Punkten hat ferner die elastische Linie sog. Wendepunkte.

I. Theil, 2. Abtheilung:
DIE STATIK DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

3. Abschnitt.

Stützen und Träger.

Man bezeichnet mit dem Namen Stützen solche Bau-Constructions, bei denen die Längsaxe ganz oder nahezu mit der Richtung der Belastungen zusammenfällt. Die Belastungen wirken in den meisten Fällen lothrecht, in der Richtung der Schwere, und daraus ergiebt sich, daß die Stützen meistens lothrechte oder nahezu lothrechte Längsaxen haben. Wir rechnen dahin die Pfeiler und die Säulen, die sich wohl auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Freistützen zusammenfassen lassen.

Träger sind Bau-Constructions, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend senkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Da die Belastungen meist lothrecht gerichtet sind, haben die Träger meist wagrechte oder nur wenig davon abweichende Längsaxen.

1. Kapitel.

Stützen.

125.
Vor-
bemerkungen.

Im vorliegenden Kapitel sollen ganz allgemein solche Constructions, bezw. Constructionstheile behandelt werden, welche auf Druck in Anspruch genommen werden, also nicht allein die Freistützen (Pfeiler und Säulen), sondern auch sonstige gedrückte Stäbe, wie sie bei Trägern für Decken und Dächer vorkommen. Je nach dem für den gedrückten Theil verwendeten Material ist der Widerstand desselben ein wesentlich verschiedener: Stützen aus Eisen und Holz sind im Stande, sowohl Druck- wie Zugwiderstand zu leisten; Stützen aus Mauerwerk dagegen können keinen mit Sicherheit in Rechnung zu ziehenden, bemerkenswerthen Zugwiderstand leisten.

Wenn die auf einen Querschnitt wirkende Mittelkraft außerhalb der Längsaxe des Pfeilers wirkt, ist sie mit einem Momente verbunden, welches in den einzelnen Querschnittstheilen Zugbeanspruchungen erzeugt. Dieselben werden allerdings zum Theile durch Druckbeanspruchungen wieder aufgehoben; sobald jedoch die Excentricität gewisse Grenzen erreicht, so sind Zugbeanspruchungen vorhanden, falls das Material dieselben übertragen kann; anderenfalls treten vollständig veränderte Spannungsverhältnisse auf. Dieser letztere Fall kommt bei den gemauerten Pfeilern sehr häufig vor und ist deshalb besonders zu untersuchen.

Bei den aus Holz und Eisen bestehenden Druckstäben, bzw. Freistützen tritt die erwähnte Schwierigkeit nicht auf; statt derselben ist bei diesen die Gefahr eines seitlichen Ausbiegens und weiter diejenige des Zerknickens in das Auge zu fassen.

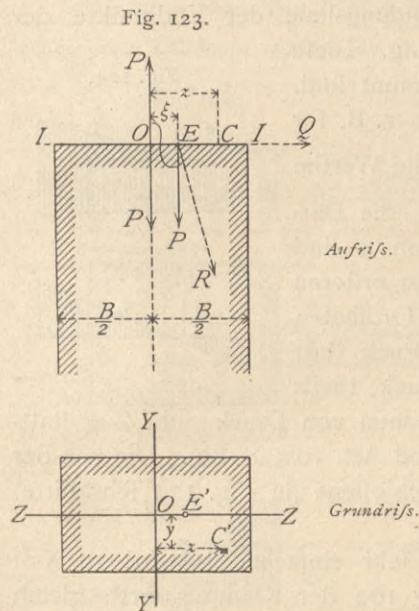
a) Stützen mit außerhalb der Längsaxe wirkenden Kräften, ohne Rücksicht auf Zerknicken.

1) Druckvertheilung in Querschnitten, welche Druck und Zug aufnehmen können, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet.

Die nachfolgende Unterfuchung hat allgemeine Giltigkeit, mag die Axe der betreffenden Construction lothrecht, wagrecht oder geneigt sein; sie findet vorwiegend auf gemauerte Pfeiler und Stützen Anwendung und wird deshalb an dieser Stelle vorgenommen. Alle Ergebnisse bleiben aber auch bestehen, wenn man Fig. 123 um 90 Grad dreht, also einen Balken mit wagrechter Axe untersucht, weshalb in Art. 101 (S. 80) auf die hier vorzunehmenden Besprechungen hingewiesen werden konnte. Mit großer Annäherung gelten sie auch für den gekrümmten Balken, z. B. für das Gewölbe, wenn der Halbmesser desselben nicht zu klein ist; die ganze Unterfuchung ist ein Sonderfall der allgemeinen in Art. 102 bis 114 (S. 80 bis 94) durchgeführten.

126.
Allgemeine
Unterfuchung.

Die Mittelkraft aller oberhalb irgend eines Querschnittes *II* auf die Freistütze wirkenden Kräfte sei *R*; sie schneide den Querschnitt in einem Punkte *E* (Fig. 123),



dessen Abstand von der Pfeileraxe mit ξ bezeichnet werden soll. Die Kraftebene schneide den Querschnitt *II* und alle Querschnitte des Pfeilers in Hauptaxen (dieselben sind gewöhnlich Symmetrie-Axen). *R* wird in eine Seitenkraft *P*, welche senkrecht zum Querschnitt *II* wirkt, und eine Seitenkraft *Q* zerlegt, welche in den Querschnitt fällt; letztere soll unbeachtet gelassen werden, da sie das Endergebnis der Unterfuchung nur wenig beeinflusst. Es wird nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte *O* des Querschnittes zwei Kräfte anbringt, welche je einander gleich und zu *P* parallel sind, aber entgegengesetzten Sinn haben, also einander aufheben. Dadurch ergibt sich als Wirkung der excentrischen Kraft *P*: eine im Schwerpunkte *O* angreifende Kraft *P* und zwei (in Fig. 123 durch einen Bogen verbundene) Kräfte *P*, welche zusammen ein Kräftepaar mit dem Momente $M = P\xi$ bilden;

das Moment dreht im vorliegenden Falle nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers). Durch die Kraft und das Kräftepaar werden im Querschnitte Beanspruchungen hervorgerufen, welche sich nach Art. 95, S. 75, Gleichung 54 zu

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}_Y} z$$

ergeben, und mit Rücksicht darauf, daß $M = P\xi$ ist, zu

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P\xi z}{\mathcal{F}}$$

oder

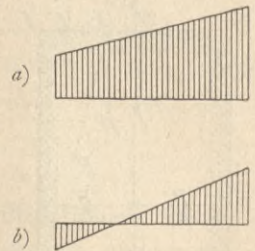
$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\xi z}{\mathcal{F}} \right) \dots \dots \dots 102.$$

Abkürzend ist $\mathcal{F} = \mathcal{F}_Y$ gesetzt; ferner sollen Druckspannungen im Folgenden als positiv, Zugspannungen als negativ eingeführt werden, da es sich bei den zu betrachtenden Constructions hauptsächlich um Beanspruchungen auf Druck handelt.

Für eine gegebene Kraft P mit gegebenem Angriffspunkt E kann die Spannung sämmtlicher Querschnittspunkte durch Gleichung 102 ermittelt werden. Von der Spannungsvertheilung erhält man ein klares Bild, wenn man in jedem Punkte des Querschnittes die Spannung als Ordinate aufträgt und die Endpunkte dieser Ordinaten verbindet. Da bei den gemachten Annahmen die Entfernung y des beliebig gewählten Punktes C von der Kraftebene gar nicht in der Gleichung vorkommt, so folgt, daß die Spannung σ von y unabhängig ist; alle in gleichem Abstände z von der YY -Axe liegenden Punkte erleiden also gleiche Spannung. Demnach genügt es, die Spannungen aller Punkte aufzufuchen, welche auf einer zur Kraftebene parallelen Linie des Querschnittes liegen und diese nach beliebig gewähltem Maßstabe aufzutragen. Die z -Werthe sind die Abscissen, und die Spannungen σ sind die Ordinaten; die Vertheilung findet nach dem durch Gleichung 102 bestimmten Gesetze statt.

In dieser Gleichung sind σ und z die einzigen Veränderlichen; beide kommen nur in der ersten Potenz vor; also ist die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten σ eine Gerade, die Gerade obiger Gleichung. Diese Linie ist bekannt, wenn zwei Punkte derselben bekannt sind. Demnach kann man sie leicht auffinden, indem man z. B. für die beiden Endwerthe $z = -\frac{B}{2}$ und $z = +\frac{B}{2}$ die Werthe von σ ausrechnet und aufträgt. Man erhält etwa die Darstellungen in Fig. 124. Die positiven Werthe von σ sind nach oben, die negativen nach unten abgetragen; die ersteren bedeuten Druck, die letzteren Zug. Wenn alle Ordinaten auf einer Seite der Abscisse liegen, so findet nur Druck statt (Fig. 124 a); sonst hat man im Querschnitt theils Druck, theils Zug (Fig. 124 b). Die Grenze, an welcher der Wechsel von Druck zum Zug stattfindet, ist die Null-Linie (siehe auch Art. 96, S. 75 und Art. 102, S. 80). Die von der Abscisse und der Geraden der Gleichung 102 eingeschlossene (in Fig. 124 schraffierte) Fläche wird als Druckfigur bezeichnet.

Fig. 124.



127.
Null-Linie.

Die Ermittlung der Null-Linie ist hier eine sehr einfache. σ wird zu Null für alle diejenigen Punkte, für welche in Gleichung 102 der Klammerwerth gleich Null wird. Nennt man den besonderen Werth von z , für den dies eintritt, z_0 , so wird $\sigma = 0$, wenn $1 + \frac{F\xi z_0}{\mathcal{F}} = 0$ wird, d. h. für

$$z_0 = -\frac{\mathcal{F}}{F\xi} \dots \dots \dots 103.$$

Gleichung 103 ist also die Gleichung der Null-Linie unter der Voraussetzung, daß die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptaxe schneidet.

Aus der Gleichung 103 für die Null-Linie ergeben sich die Folgerungen:

α) Da \mathcal{F} und F stets positive Größen sind, so hat z_0 stets anderes Vorzeichen als ξ . Die sämtlichen Punkte, in denen die Spannung Null stattfindet, liegen also an derjenigen Stelle der Axe YY , an welcher der Schnittpunkt mit der Mittelkraft R nicht liegt.

β) Für eine bestimmte Lage der Kraft R sind alle Größen auf der rechten Seite der Gleichung constant, ist also auch z_0 constant; demnach liegen alle Punkte, in denen σ gleich Null ist, in gleichem Abstände von der Y -Axe, d. h. alle diese Punkte liegen in einer Geraden, die parallel ist zu derjenigen Schwerpunktsaxe, welche zur Schnittlinie des Querschnittes mit der Kraftebene senkrecht steht.

γ) Der Werth für z_0 ist von der Kraftgröße ganz unabhängig; er ist nur von den Werthen \mathcal{F} und F , also von der Querschnittsform und -Größe, und von ξ , d. h. von der Lage des Schnittpunktes E abhängig.

δ) z_0 wird Null, d. h. die Null-Linie fällt mit der zur Kraftebene senkrechten Schwerpunktsaxe zusammen, wenn $\xi = \infty$ wird, d. h. wenn die Kraft R den Querschnitt erst in unendlich weiter Ferne schneidet, wenn also R zum Querschnitte parallel gerichtet ist, d. h. wenn keine Axialkraft vorhanden ist.

Die Gleichung 103 giebt ein bequemes Verfahren, die Lage der Null-Linie graphisch zu ermitteln. Besonders einfach gestaltet sich die Aufgabe beim rechteckigen Querschnitt.

Hier ist nach Art. 51 (S. 34)

$$\mathcal{F} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{und} \quad F = bh.$$

Aus Gleichung 103 folgt, wenn man zunächst nur die absolute Größe von z_0 bestimmt,

$$z_0 = \frac{bh^3}{12bh\xi} = \frac{h^2}{12\xi} \quad \text{und} \quad z_0\xi = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2}.$$

Daraus ergibt sich die folgende Construction (Fig. 125).

Man trägt von O' aus $\overline{O'E'} = \frac{h}{6}$ nach einer Seite ab, schlägt über $B'A' = \frac{2}{3}h$ als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die in O' zur ZZ -Axe gezogene Lothrechte in D schneidet; dann ist $\overline{O'D}^2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{h^2}{12}$. Verbindet man nun D mit E' und zieht durch D die Linie DK senkrecht zu $E'D$, so ist $\overline{O'D}^2 = \overline{E'O'} \cdot \overline{O'K} = \xi \cdot \overline{O'K}$, d. h.

$$\overline{O'K} = \frac{\overline{O'D}^2}{\xi} = \frac{h^2}{12\xi};$$

mithin

$$\overline{O'K} = z_0.$$

K ist also ein Punkt der Null-Linie, und die durch K parallel zur Y -Axe gelegte Linie NN ist die Null-Linie selbst.

Eine etwas geänderte Construction ist bei weniger einfachen Querschnitten anwendbar. Nach Art. 71 (S. 51) ist der Trägheitsradius

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = FR^2.$$

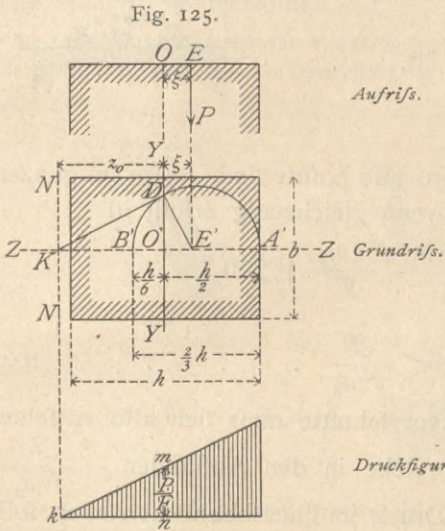
Demnach ist nach Gleichung 103

$$z_0 = -\frac{\mathcal{F}}{F\xi} = -\frac{FR^2}{F\xi} = -\frac{R^2}{\xi},$$

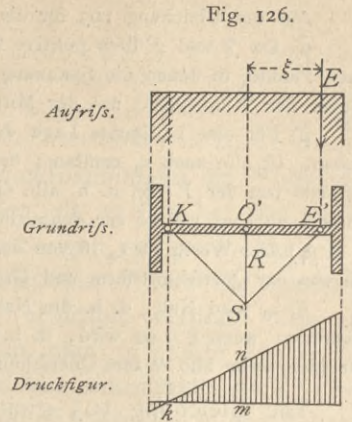
woraus sich die folgende Construction (Fig. 126) ergibt.

In O' errichte man zur ZZ -Axe die Lothrechte $\overline{O'S} = R$, verbinde S mit E' und ziehe durch S die Senkrechte SK zu $E'S$; dann ist $\overline{O'S}^2 = R^2 = \overline{E'O'} \cdot \overline{O'K} = \xi \cdot \overline{O'K}$; mithin

$$\overline{O'K} = \frac{R^2}{\xi} \quad (\text{absolute Größe}) = z_0.$$



Der Punkt K in Fig. 125 u. 126 ist ein Punkt der Geraden, welche die Veränderung von σ darstellt; wenn noch ein Punkt dieser Geraden bekannt ist, so kann sie gezeichnet werden. Für $z=0$ ist nach Gleichung 102: $\sigma_0 = \frac{P}{F}$, d. h. in den Querschnittspunkten, welche in der zur Kraftebene senkrechten Schwerpunktsaxe liegen, ist die Spannung genau so groß, als wenn nur die Kraft P in der Axe wirkte. Man kann $\frac{P}{F}$ leicht ermitteln und nach beliebigem Maßstabe im entsprechenden Punkte m (Fig. 126) auftragen. Ist $\overline{mn} = \frac{P}{F}$, so ergibt die Verbindung von m mit k die Gerade für σ .



128.
Kernpunkte.

Die Beanspruchung der Querschnittsteile ist an den beiden Seiten der Null-Linie verschiedenartig, an der einen Seite Druck, an der anderen Zug. Es ist nunmehr zu untersuchen, wie die Kraft P liegen muss, damit nur Druckspannungen im Querschnitte auftreten²⁷⁾.

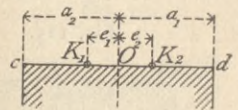
Offenbar sind im ganzen Querschnitte nur Druckspannungen, wenn die den äußersten Querschnittspunkten c und d (Fig. 127) entsprechenden Spannungen Druck bedeuten; denn dann fällt die Null-Linie außerhalb des Querschnittes (siehe Fig. 124a). Nun ist die Spannung im Punkte d , weil für denselben $z = a_1$ ist, nach Gleichung 102

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathcal{J}} \right),$$

diejenige im Punkte c , weil für diesen $z = -a_2$ ist,

$$\sigma_{min} = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathcal{J}} \right).$$

Fig. 127.



Wenn sowohl σ_{max} , wie σ_{min} Druck bedeuten, also positiv sind, findet im ganzen Querschnitte nur Druck statt; dies ist der Fall, wenn gleichzeitig erfüllt ist

$$\left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathcal{J}} \right) > 0 \quad \text{und} \quad \left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathcal{J}} \right) > 0,$$

d. h. wenn

$$\xi > -\frac{\mathcal{J}}{F a_1} \quad \text{und} \quad \xi < \frac{\mathcal{J}}{F a_2} \quad \dots \dots \dots 104.$$

ist. Der Schnittpunkt E der Kraft P mit dem Querschnitte muss sich also zwischen zwei Punkten K_1 und K_2 (Fig. 127) befinden, welche in den Abständen $-\frac{\mathcal{J}}{F a_1}$, bzw. $\frac{\mathcal{J}}{F a_2}$ von der Axe O liegen, wenn nur Druck im Querschnitt herrschen soll.

Wir bezeichnen abkürzungsweise

$$\frac{\mathcal{J}}{F a_1} = e_1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{J}}{F a_2} = e_2 \quad \dots \dots \dots 105.$$

Die Punkte K_1 und K_2 sind die Kernpunkte.

²⁷⁾ Bei obiger Untersuchung hätten die Darlegungen in Art. 108 (S. 91), betreffend den Kern, zu Grunde gelegt werden können; die obige Art der Ableitung ist gewählt, um die Entwicklung der Formeln 104 vom vorherigen Studium der Art. 105 bis 114 (S. 86 bis 94) unabhängig zu erhalten.

Da auf die sämtlichen für e_1 und e_2 maßgebenden Größen \mathcal{F} , F , a_1 und a_2 ausschließlich die Querschnittsgealtung Einfluss hat, so ist die Lage der Kernpunkte nur von der Form und Größe des Querschnittes abhängig.

Für das Rechteck ist $\mathcal{F} = \frac{bh^3}{12}$, $F = bh$ und $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$; mithin $e_1 = e_2 = \frac{h}{6}$. Soll also nur Druck im Querschnitt stattfinden, so darf die Kraft den Querschnitt in keinem größeren Abstände von der Axe schneiden, als $\frac{h}{6}$; mit anderen Worten: sie muss den Querschnitt im inneren Drittel schneiden (vergl. auch Art. 109, S. 91).

Für den Kreisquerschnitt ist $e_1 = e_2 = \frac{d}{8}$, d. h. die Kraft darf das innere Viertel nicht verlassen, wenn nur Druck auftreten soll. (Vergl. Art. 110, S. 92.)

Für den Kreisringquerschnitt bei geringer Ringstärke ist $e_1 = e_2 = \frac{d}{4}$; die Kraft muss also in der inneren Hälfte verbleiben,

2) Druckvertheilung in Querschnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet.

Die für die Druckvertheilung unter 1 entwickelten Gesetze gelten auch für Constructions, welche nur Druck aufnehmen können, so lange die Kraft eine derartige Lage hat, dass im ganzen Querschnitt wirklich nur Druckspannungen auftreten, so lange also die Kraft innerhalb der Kernpunkte liegt.

Wenn daher z. B. beim rechteckigen Querschnitte die Kraft im inneren Drittel liegt, so kann die Lage der Null-Linie, so wie die Druckvertheilung genau so ermittelt werden, wie in Fig. 125 gezeigt ist. Diese Construction findet häufige Anwendung nicht nur bei Freistützen mit rechteckigem Querschnitt, sondern auch bei Stützmauern, in Gewölben etc.

Als Maß senkrecht zur Bildfläche wählt man zweckmässig die Einheit (gewöhnlich 1 m), so dass die gedrückte Fläche — der Querschnitt — ein Rechteck von der Breite (senkrecht zur Bildfläche) gleich

der Einheit ist. Die zweite Abmessung des Rechteckes ist bei den Gewölben (Fig. 128) die Gewölbstärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerstärke d (Fig. 129).

Fig. 128.

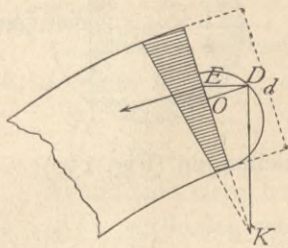
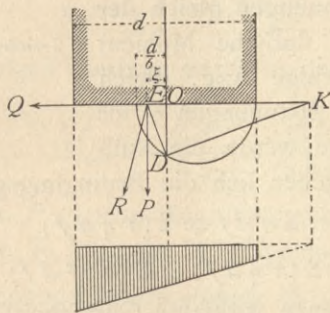


Fig. 129.



In den beiden neben stehenden Figuren schneidet die Mittelkraft die betreffende Fuge innerhalb der Kernpunkte, so dass also nur Druck im Querschnitt entsteht und der ganze Querschnitt wirksam ist. Die angewandte Construction ist ohne weitere Erläuterung verständlich.

Es möge noch bemerkt werden, dass dieselbe bei den Gewölben nur annäherungsweise richtig ist, weil die Voraussetzung der geraden Axe nicht zutrifft. Der Fehler ist aber bei einigermaßen großem Halbmesser des Gewölbes unerheblich.

Wenn aber die Kraft den Querschnitt außerhalb der Kernpunkte schneidet, so fällt die Null-Linie in den Querschnitt, und an der einen Seite derselben würden Zugspannungen entstehen, falls der Baustoff dieselben aufnehmen könnte. Da dies nach obiger Annahme hier nicht möglich ist, so wird auf diesem ganzen Querschnittstheile kein Uebertragen von Spannungen stattfinden können; die ganze Spannungsübertragung findet auf der Druckseite der Null-Linie statt. Man nennt diesen Theil

129.
Druck-
vertheilung.

des Querschnittes den wirkfamen Querschnitt. Gröfse und Form des wirkfamen Querschnittes und die gröfste in demselben stattfindende Spannung sind zu ermitteln.

Der für die Spannung σ gefundene Ausdruck (Gleichung 102) ist hier nicht ohne Weiteres anwendbar, weil bei Aufstellung desselben Spannungsvertheilung über die ganze Querschnittsfläche angenommen war. Hier jedoch ist nur ein Theil des Querschnittes als vorhanden anzusehen, indem der andere Theil an der Kraftübertragung nach der Annahme nicht theilnimmt. Mit kleiner Aenderung kann aber die Gleichung 102 auch hier der Berechnung zu Grunde gelegt werden: man muß nur unter F die Fläche des wirkfamen Querschnittstheiles, unter M das Moment von P , bezogen auf die im Schwerpunkte des wirkfamen Querschnittstheiles senkrecht zur Kraftebene liegende Axe YY , und unter \mathcal{F} das Trägheitsmoment des wirkfamen Querschnittes für diese Axe verstehen. Dann ist, wenn zum Unterschiede die Bezeichnungen F' , M' , \mathcal{F}' eingeführt werden,

$$\sigma = \frac{P}{F'} + \frac{M' z'}{\mathcal{F}'} \dots \dots \dots 106.$$

Die Spannung σ in den verschiedenen Querschnittspunkten ändert sich wiederum nach dem Gesetze einer Geraden, weil die einzigen Veränderlichen der Gleichung 106, σ und z' , nur in der ersten Potenz vorkommen.

Diese Gerade (Fig. 130), deren Ordinaten in den verschiedenen Punkten die Druckgrößen für die Flächeneinheit angeben, schneide die Abscissenaxe in K ; alsdann ist für irgend einen Punkt C im senkrecht gemessenen Abstand η vom Nullpunkte K die Spannung $\sigma = a \eta$, worin a eine noch zu bestimmende Constante ist. Das Gleichgewicht zwischen der äußeren Kraft P und den inneren Spannungen σ verlangt, daß die Summe der im Querschnitt wirkenden Druckspannungen gleich der Kraft P sei, so wie daß das statische Moment von P , bezogen auf eine beliebige Axe, gleich der Summe der Momente der Spannungen σ für dieselbe Axe sei. Als Drehaxe werde die Null-Linie KK gewählt; alsdann ergeben sich die Bedingungsgleichungen (Fig. 130):

$$P = \Sigma \sigma df = \Sigma (a \eta df)$$

und

$$Pr = \Sigma (\sigma \eta df) = \Sigma (a \eta^2 df).$$

Die Summirung ist über die ganze wirkfame Querschnittsfläche auszudehnen. Bei derselben ist a constant; mithin erhält man

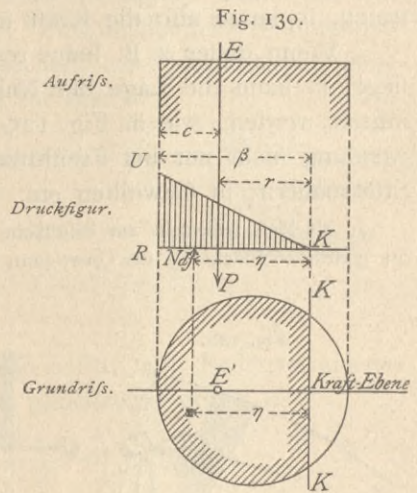
$$P = a \Sigma (\eta df) = a S_K$$

und

$$Pr = a \Sigma (\eta^2 df) = a \mathcal{F}_K \dots \dots \dots 107.$$

S_K und \mathcal{F}_K bedeuten das statische und Trägheitsmoment des wirkfamen Querschnittstheiles, bezogen auf die Null-Linie KK . Dividirt man die zweite dieser Gleichungen durch die erste, so ergibt sich

$$r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K} \dots \dots \dots 108.$$



Der Abstand des Schnittpunktes E von der nächsten Kante, d. h. von c , ist bekannt; die ganze Breite β des wirkfamen Querschnittstheiles ist demnach

$$\beta = c + r = c + \frac{\mathcal{F}_K}{S_K} \dots \dots \dots 109.$$

Die Ermittlung von r nach Gleichung 108 auf dem Wege der Rechnung führt bei einigermaßen unregelmäßigen Querschnittsformen zu sehr umständlichen Arbeiten; bei der am häufigsten vorkommenden Querschnittsform, dem Rechtecke, ergibt sich aber r sehr einfach.

Die zunächst noch unbekannt Abmessung des wirkfamen Rechteckes, welche in die Kraftebene fällt, sei h , d. h. es werde mit h bezeichnet, was oben β genannt war; die Breite des Rechteckes sei b ; alsdann ist (siehe Art. 51, S. 34)

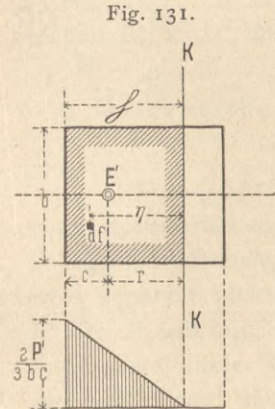
$$\mathcal{F}_K = \frac{b h^3}{3} \quad \text{und} \quad S_K = \frac{b h \cdot h}{2} = \frac{b h^2}{2};$$

demnach

$$r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K} = \frac{2 b h^3}{3 b h^2} = \frac{2}{3} h.$$

Ferner ist $h = \beta = c + r = c + \frac{2}{3} h$; mithin

$$c = \frac{h}{3} \quad \text{und} \quad h = 3 c. \dots \dots \dots 110.$$



Die Druckvertheilung findet also auf eine Fläche statt, welche dreimal so breit ist, als der Abstand des Schnittpunktes E von der nächsten Kante.

Die Druckbeanspruchung an irgend einer Querschnittsstelle ist nun $\sigma = a \eta$, in welchem Ausdrücke a aus der Bedingungsgleichung $P = a S_K$ zu ermitteln ist, d. h. $a = \frac{P}{S_K}$; daher

$$\sigma = \frac{P \eta}{S_K} = \frac{2 P \eta}{b h^2}.$$

σ_{max} findet in denjenigen Punkten statt, in denen η seinen größten Werth h hat, d. h. es ist

$$\sigma_{max} = \frac{2 P}{b h} = \frac{2 P}{3 b c} \dots \dots \dots 111.$$

Wenn sich der Druck P gleichmäßig über die ganze gedrückte Fläche $F_1 = b h = 3 b c$ vertheilen würde, so wäre die Druckspannung für die Flächeneinheit gleich $\frac{P}{3 b c}$; der wirklich stattfindende Maximaldruck ist gleich $\frac{2 P}{3 b c}$, d. h. doppelt so groß, als wenn P sich gleichmäßig vertheilte. Die Druckfigur in diesem Falle wird also erhalten, indem man zunächst c dreimal von der nächst liegenden Kante aus abträgt, wodurch man den Nullpunkt K findet; alsdann trägt man in dieser Kante nach beliebigem Maßstabe $\sigma_{max} = \frac{2 P}{3 b c}$ auf und verbindet den Endpunkt dieser Ordinate mit dem Nullpunkt. Die lothrecht schraffierte Fläche giebt die Druckfigur.

Soll die Druckvertheilung in unregelmäßigen Querschnitten ermittelt werden, so ist das rechnerische Verfahren überaus umständlich. Man kann dasselbe dadurch vermeiden, daß man ein graphisches Verfahren anwendet. In dem durch

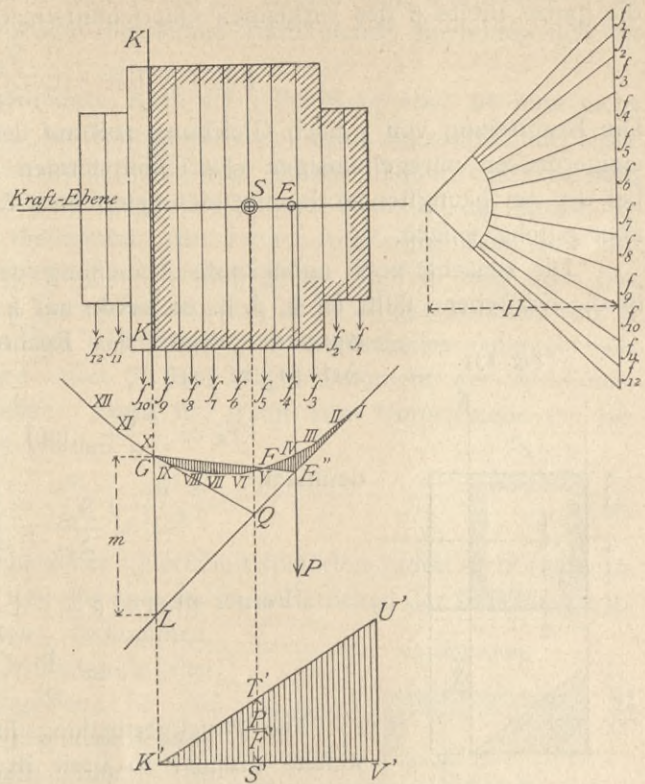
130. Druckvertheilung in unregelmäßigen Querschnitten.

Fig. 132.

Fig. 132 dargestellten Querschnitt sei KK die Null-Linie und der Querschnittstheil rechts von dieser Linie der wirkfame Querschnitt (derselbe ist an den Rändern schraffirt). Man zerlege diesen Querschnitt in eine Anzahl schmaler Streifen, deren Flächeninhalte $f_1, f_2, f_3 \dots$ seien, trage dieselben nach beliebigem Flächenmaßstabe auf, construire für den beliebig angenommenen Polabstand H das Seilpolygon $I, II \dots VI, VII \dots XII$ und verlängere die erste Seite des Seilpolygons bis zum Schnittpunkte L mit der Linie KK ; alsdann ist (nach Art. 47, S. 31) das statische Moment der wirkfamen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK ,

$$S_K = H m.$$

Ferner ist, wenn der Inhalt der Fläche $III \dots XLI$ mit φ bezeichnet wird, das Trägheitsmoment der wirkfamen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK (nach Art. 60, S. 39)



$$\mathcal{F}_K = 2 H \varphi,$$

und da nach Gleichung 108: $r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K}$ ist, so wird $r = \frac{2 \varphi}{m}$; mithin

$$\varphi = \frac{m r}{2} \dots \dots \dots 112.$$

Die Null-Linie KK liegt also derart, daß φ inhaltsgleich ist einem Dreieck, dessen Höhe gleich r , dessen Grundlinie gleich dem Stücke m ist, welches auf der Null-Linie zwischen die verlängerte erste Seilpolygonseite und das Seilpolygon fällt. Verbindet man den Schnittpunkt E'' der Krafrichtung P und der verlängerten ersten Seilpolygonseite mit X , so erhält man ein Dreieck XLE'' , dessen Flächeninhalt gleich $\frac{m r}{2}$ ist, welches also, wenn KK richtig angenommen ist, inhaltsgleich mit φ ist. Dies findet statt, wenn die in Fig. 132 lothrecht schraffirten Flächen $III IIII FE'' I$ und $F VI VII VIII IX G F$ gleichen Inhalt haben. Sind beide an Inhalt nicht gleich, so ist die Linie $E''G$ um E'' zu drehen und damit auch KK nach rechts oder links so lange zu verschieben, bis diese Bedingung erfüllt ist; die dann erhaltene Null-Linie ist die richtige. Demnach ist das Verfahren das folgende.

Man construire für den ganzen Querschnitt das Seilpolygon $II \dots XII$, verlängere die erste Seilpolygonseite, ermittle deren Schnittpunkt E'' mit der Krafrichtung und suche nun diejenige durch E'' gehende Linie, welche die beiden lothrecht schraffirten Flächen einander gleich macht; der Punkt X , in welchem diese Linie das Seilpolygon schneidet, bestimmt die Lage der Null-Linie KK .

Es macht jetzt keine Schwierigkeit, die Druckvertheilung und den größten Druck zu ermitteln. Im Schwerpunkte der wirkfamen Querschnittsfläche ist $s' = 0$, also nach Gleichung 106

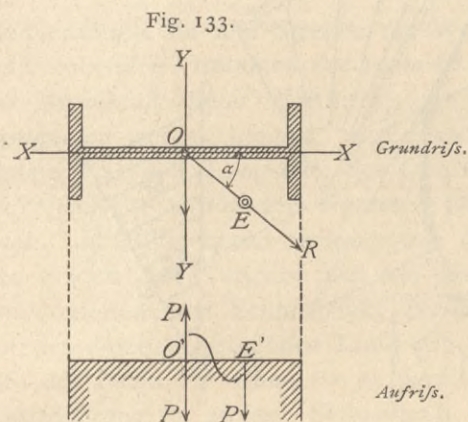
$$\sigma = \frac{P}{F'}$$

F' ist bekannt; es kann unmittelbar aus Fig. 132 entnommen werden, also auch $\frac{P}{F'}$. Die Lage des Schwerpunktes S folgt mit Leichtigkeit aus dem Seilpolygon. Trägt man an der dem Schwerpunkte entsprechenden Stelle des Aufrisses der Fuge den Werth $\frac{P}{F'}$ in beliebigem Mafsstabe als Ordinate auf ($= S' T'$), verbindet T' mit K' , so giebt die Linie $K' T'$ die Druckvertheilung an; der größte Druck für die Flächeneinheit ist $V' U'$ in dem gleichen Mafsstabe, in dem $\frac{P}{F'}$ aufgetragen war.

3) Druckvertheilung, falls die Kraftebene die Querschnitte nicht in Hauptaxen schneidet.

a) Die Querschnitte können Druck und Zug aufnehmen²⁸⁾. Die Wirkung einer excentrisch auf den Querschnitt (Fig. 133) im Punkte E angreifenden Kraft P ist eine dreifache. Falls XX und YY die Hauptaxen des Querschnittes sind, so wird zunächst nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte zwei einander gleiche Kräfte P anbringt, welche der gegebenen Kraft P parallel, also lothrecht gerichtet sind. Zwei dieser Kräfte P bilden in der durch OE gelegten lothrechten Ebene ein Kräftepaar; die dritte Kraft P greift im Punkte O an. Das Moment M des

13r.
Querschnitt
nimmt
Zug und Druck
auf.



Kräftepaars kann man durch zwei wagrechte Kräfte R ersetzen, deren eine im Querschnitt, deren andere in solcher Höhe h über dem Querschnitt wirkt, das $R h = M$ ist. Zerlegt man die Kräfte R in zwei Seitenkräfte $R \cos \alpha$ und $R \sin \alpha$, welche in die lothrecht durch XX , bzw. YY gelegten Ebenen fallen, so erhält man zwei Momente: in der lothrechten durch XX gelegten Ebene $M \cos \alpha = M_y$ und in der lothrechten durch YY gelegten Ebene $M \sin \alpha = M_x$. Demnach ist die lothrechte Spannung, welche in einem Punkte C des Querschnittes mit den Coordinaten x und y erzeugt wird,

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_x y}{\mathcal{F}_X} + \frac{M_y x}{\mathcal{F}_Y} \dots \dots \dots 113.$$

In dieser Gleichung bedeutet F den Flächeninhalt des Querschnittes; \mathcal{F}_X und \mathcal{F}_Y sind die Trägheitsmomente der Querschnittsfläche, bezogen auf die XX - und YY -Axe.

Bei gegebenem Querschnitt und gegebener Kraft enthält die Gleichung 113 nur drei Veränderliche: σ , x und y ; alle drei kommen nur in der ersten Potenz vor. Ermittelt man demnach für alle Werthe von x und y , d. h. für alle Querschnittspunkte, die zugehörigen Werthe von σ und trägt dieselben als Ordinaten

²⁸⁾ Vergl. auch Art. 102 bis 104 (S. 80 bis 83).

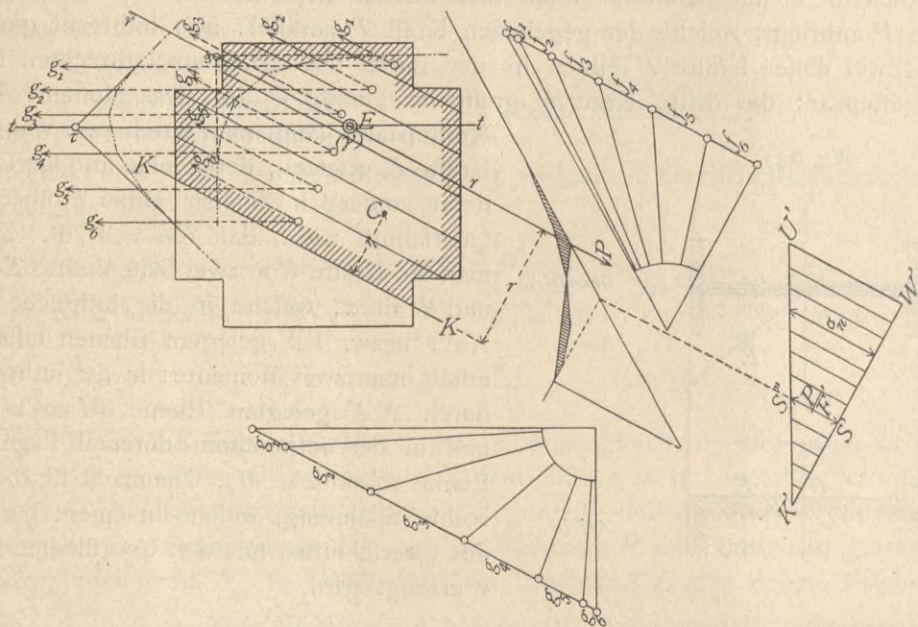
auf, so liegen alle Endpunkte dieser Ordinaten auf einer Ebene, auf der Ebene der Gleichung 113. Man findet leicht die Null-Linie, indem man $\sigma = 0$ setzt und in der erhaltenen Gleichung für zwei Werthe von x die zugehörigen Werthe von y auffucht. (Vergl. auch Art. 105, S. 86.)

132.
Querschnitt
nimmt
nur Druck
auf.

β) Die Querschnitte können nur Druck aufnehmen. Wenn die Querschnitte nur Druck übertragen können, wie dies beim Mauerwerk nahezu der Fall ist, behält, so lange die Null-Linie nicht den Querschnitt schneidet, die Gleichung 113 ihre Giltigkeit, weil alsdann nur Druckspannungen stattfinden. Sobald aber die Null-Linie in den Querschnitt fällt, wird die Aufgabe eine sehr schwierige. Denn es ist nicht nur die Größe der gedrückten Fläche, sondern auch die Richtung der Null-Linie unbekannt. Die Gleichung 113 bleibt auch für diesen Fall gültig, wenn unter F die wirkfame Querschnittsfläche, unter XX , bzw. YY die durch den Schwerpunkt derselben gelegten Haupttaxen dieses Theiles der Querschnittsfläche verstanden werden und die Coordinaten x und y , so wie \mathcal{F}_X und \mathcal{F}_Y auf diese Haupttaxen bezogen werden.

Die Endpunkte der in den einzelnen Querschnittspunkten aufgetragenen Werthe für σ liegen wiederum auf einer Ebene, der Spannungsebene, welche den Querschnitt in der Null-Linie schneidet. Alle lothrechten Ebenen, welche parallel zur

Fig. 134.



Null-Linie durch den wirkfamen Querschnittstheil gelegt werden, schneiden diesen und die Spannungsebene in zwei parallelen Linien, deren Abstand die Spannung der geschnittenen Querschnittspunkte angiebt. Daraus folgt, dass in allen Punkten, welche auf einer Parallelen zur Null-Linie KK liegen (Fig. 134), die Spannungen gleich groß sind. In einem Punkte C , dessen senkrechter Abstand von KK gleich η ist, wird die Spannung $\sigma = a \eta$ sein, in welcher Gleichung a eine noch unbekannte Constante ist. Die graphische Darstellung der Spannung in den einzelnen Punkten des Querschnittes bietet die Linie $U'K'$.

Wird zunächst die Richtung der Null-Linie KK als bekannt und gegeben angenommen, so ist die ganze Ableitung in Art. 130 (S. 117) auch hier gültig. Auch hier ist

$\sigma = a \eta$, $P = \int a \eta df = a S_K$ und $Pr = \int \sigma \eta df = a \int \eta^2 df = a \mathcal{F}_K$;
 fonach

$$r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K}.$$

\mathcal{F}_K und S_K bedeuten das Trägheits- und das statische Moment der wirkfamen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK . Man zerlege die Querschnittsfläche nunmehr in Streifen, welche parallel zu KK sind und ermittle die Lage von KK , wie oben (in Art. 130, S. 117) gezeigt ist (Fig. 134²⁹⁾.

Es ist nun zu untersuchen, ob die angenommene Richtung der Null-Linie richtig ist. Die im Querschnitt wirkenden Druckspannungen müssen mit der Kraft P , welche den Querschnitt im Punkte E schneidet, im Gleichgewicht sein; demnach muß ihre Mittelkraft ebenfalls durch den Punkt E gehen, wenn die Richtung der Null-Linie richtig gewählt ist. Alsdann ist auch die gefundene wirkfame Fläche (in Fig. 134 schraffirt) richtig; anderenfalls ist eine Verbesserung vorzunehmen. Alle Punkte des Querschnittes, welche auf Parallelen zur Null-Linie liegen, haben nach Obigem gleiche Spannung; man kann also die Querschnittsfläche in (genügend schmale) der Null-Linie parallele Streifen zerlegen, in welchen je gleiche Spannung stattfindet. Der gesammte Druck in einem Streifen von der Breite b_n , der Länge h_n und der Spannung σ_n für die Flächeneinheit ist offenbar

$$g_n = b_n h_n \sigma_n.$$

Man ermittle für alle Streifen die Werthe g , wobei die Werthe von σ_n durch die entsprechenden Ordinaten der Linie $U'K'$ dargestellt sind, und suche die Entfernung der Mittelkraft dieser Werthe $g_1, g_2, g_3 \dots$ von zwei Axen, welche beliebig angenommen werden können. Zweckmäßig wird als eine Axe die Null-Linie, als die andere Axe eine Längsseite des Querschnittes gewählt; es können auch die Längs- und Querseite genommen werden. Das Auffuchen der Mittelkraftslage erfolgt bequem mit Hilfe zweier Seilpolygone (Fig. 134). Der Abstand der Mittelkraft von den beiden Axen ergibt sich aus den Schnittpunkten ρ und τ der äußersten Seilpolygoneiten; der Schnittpunkt der Mittelkraft mit dem Querschnitt liegt sowohl auf der durch ρ gezogenen Linie rr , wie auf der durch τ gezogenen Linie tt , ist also der Punkt V . Linie rr ist parallel zur Krafrichtung im ersten, tt parallel zur Krafrichtung im zweiten Seilpolygon.

Wenn V mit E zusammenfällt, wie in Fig. 134, so ist die Null-Linie und die ganze Construction richtig; die wirklichen Druckspannungen können dann, wie in Art. 130 (S. 117) gezeigt, ermittelt werden, indem man im Schwerpunkte der wirkfamen Querschnittsfläche $\frac{P}{F_1}$ ($= S' S''$) aufrägt und den Endpunkt S'' mit K' verbindet. $K' U' W'$ ist die Druckfigur.

Fällt aber V mit E nicht zusammen, so ist die Untersuchung für eine andere Lage der Null-Linie zu wiederholen. Man kann ohne Schwierigkeit schätzen, nach welcher Richtung KK gedreht werden muß, und erreicht meist bereits bei der

²⁹⁾ In Fig. 134 sind die Kräfte $f_1, f_2, f_3 \dots$ nicht ausgezeichnet, um die Abbildung nicht unendlich zu machen.

erften Wiederholung der Construction ein genügend genaues Zusammenfallen der Punkte *E* und *V*.

Vorstehende Unterfuchung ist für die Ermittlung der Standficherheit von Gewölbepfeilern, durchbrochenen Mauern, Schornsteinen etc. von großer Wichtigkeit.

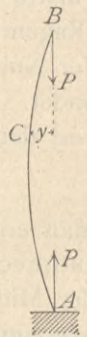
b) Gedrückte Stäbe unter Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr.

1) Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken.

133.
Voraus-
setzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte *P* wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zusammenfallen, so findet in den einzelnen Punkten des Stabes nur eine Zugbeanspruchung statt. Wirken auf einen eben solchen Stab zwei Druckkräfte *P* ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengesetzt, so müßten nach Früherem an den einzelnen Stellen gleichfalls nur Druckbeanspruchungen stattfinden, welche bei überall gleichem Stabquerschnitt in allen Punkten für die Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu seiner Querschnittsfläche groß ist, so wird unter dem Einflusse der drückenden Kräfte ein Ausbiegen stattfinden, und auf jeden Querschnitt *C* (Fig. 135) wirkt alsdann aufser der Axialkraft *P* noch ein Moment *P**y*. In diesem Falle findet Beanspruchung des Stabes auf Zerknicken statt, und derselbe ist mit Rücksicht auf diese Beanspruchungsweise zu berechnen.

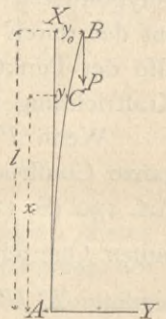
Fig. 135.



Es kann auffallen, daß hier scheinbar ein Widerspruch zwischen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit ist derselbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Stabaxe und in deren Richtung wirken, findet ein Ausbiegen nicht statt; sobald aber in Folge von unvermeidlichen Fehlern die Kräfte außserhalb der Axe angreifen, bezw. von der Richtung der Axe abweichen, entsteht für jeden Querschnitt des Stabes ein Biegemoment, welches unter Umständen ein Ausbiegen zur Folge hat. Man kann daher in diesem Falle von einem labilen Gleichgewichtszustande sprechen.

Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig. 135 gezeichneten Richtung stattfinden, sondern ist nach allen möglichen Richtungen denkbar; es ist demnach zu untersuchen, nach welcher Richtung ein solches Ausbiegen am leichtesten stattfindet, und der Querschnitt des Stabes danach anzuordnen. Für die folgenden Unterfuchungen soll angenommen werden, daß 1) als äußere Kräfte nur die Axialkräfte *P* wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab überall gleichen Querschnitt habe.

Fig. 136.



134.
Elastische
Linie.

Unter Einwirkung der Kraft *P* möge der Stab (Fig. 136), dessen Axe ursprünglich mit *AX* zusammenfiel, in die Lage *AB* gekommen sein; die Bildebene *XAY*, in welcher *AB* liegt, schneide alle Querschnitte in Hauptaxen; der Axenpunkt *B* habe nach der Formänderung die Ordinate *y*₀. Für irgend einen Punkt *C* mit der Abscisse *x* sei die Ordinate *y*; das Moment für diesen Punkt ist *M* = *P* (*y*₀ - *y*) und die elastische Linie demnach aus der Gleichung 100 zu ermitteln. Danach wird

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P (y_0 - y)}{E \mathcal{F}} \dots \dots \dots 114.$$

Hierin ist \mathcal{F} das Trägheitsmoment des Querschnittes bei *C*, bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe desselben, welche senkrecht zur Kraftebene, also zur *XY*-

Ebene, steht. Der Querschnitt ist nach obiger Voraussetzung constant, also auch \mathcal{F} für die Integration constant; da P und E gleichfalls constant sind, so hat bei der Integration $\frac{P}{E \mathcal{F}}$ einen constanten Werth. Abkürzungsweise werde

$$\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2 \dots \dots \dots 115.$$

gesetzt, so dass die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 (y_0 - y) \dots \dots \dots 116.$$

Die zweimalige Integration ergibt als Gleichung der elastischen Linie:

$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x \dots \dots \dots 117.$$

Die beiden Constanten A und B sind für die verschiedenen Arten der Stabunterstützung verschieden.

Bekanntlich ist

$\sin \alpha = \sin (2 \pi + \alpha) = \sin (2 n \pi + \alpha)$ und $\cos \alpha = \cos (2 \pi + \alpha) = \cos (2 n \pi + \alpha)$, worin n eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, also gleich 0, 1, 2, 3 . . . gesetzt werden kann. Es ist also auch

$$\sin a x = \sin (a x + 2 \pi) = \sin \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right]$$

und

$$\cos a x = \cos (a x + 2 \pi) = \cos \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right].$$

Die Gleichung 117 kann daher auch geschrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right] + B \cos \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right] \dots \dots 118.$$

Man erhält sonach gleich große Werthe für y , wenn man x und wenn man $x + \frac{2 \pi}{a}$ einsetzt, d. h. die Ordinaten je zweier Punkte, deren Abscissen um $\frac{2 \pi}{a}$ von einander verschieden sind, haben gleiche Werthe. Die elastische Linie ist demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2 \pi}{a}, \dots \dots \dots 119.$$

und, da nach Gleichung 115: $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{F}}}$ ist,

$$\lambda = 2 \pi \sqrt{\frac{E \mathcal{F}}{P}} \dots \dots \dots 120.$$

Aus dieser Gleichung kann man, falls E , \mathcal{F} und P gegeben sind, die Wellenlänge berechnen. Ist dagegen λ gegeben, so kann man aus Gleichung 120 diejenige Kraft P berechnen, welche die Durchbiegungen y erzeugen kann. Die Größe von P folgt aus Gleichung 120 zu:

$$P = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{F}}{\lambda^2} \dots \dots \dots 121.$$

Noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 116 ist

hinzuweisen. Dieselbe bleibt giltig, wenn man beiderseits mit der beliebigen Zahl m multiplicirt; sie heist alsdann:

$$m \frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es sei $m y_0 = \eta_0$ und $m y = \eta$; alsdann ist auch $m \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$, also

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \dots \dots \dots 122.$$

Die Gleichung 116 gilt daher für beliebig grose Werthe von y . Sind also unter der Einwirkung einer Kraft P die Durchbiegungen y möglich, so sind auch m -mal so grose, d. h. beliebig grose Durchbiegungen möglich, also auch so grose, das der Stab zerknickt wird.

Der Werth von P in Gleichung 121, welcher die Durchbiegungen y erzeugen kann, kann also auch den Stab zerknicken.

Bei der vorstehenden Ableitung ist angenommen worden, das die Ausbiegung in der XY -Ebene erfolge; dieselbe kann aber auch in der senkrecht zu ersterer stehenden XZ -Ebene stattfinden, welche die zweiten Hauptaxen der Querschnitte enthält. Die Entwicklung für diesen Fall bleibt genau dieselbe, wie die obige, und man erhält für P denselben Ausdruck, wie dort; nur ist alsdann unter \mathcal{F} das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die zur XZ -Ebene senkrechte Schwerpunktsaxe, zu verstehen, welche Axe parallel zur Y -Axe ist. Nennen wir dasselbe \mathcal{F}_1 , die entsprechenden Werthe von P und λ aber P_1 und λ_1 , so ist

$$P_1 = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{F}_1}{\lambda_1^2} \dots \dots \dots 123.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun sowohl in der XY -Ebene, wie in der XZ -Ebene stattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belastung darf den Grenzwert nicht erreichen. Die Gleichungen 121 u. 123 geben zwei Grenzwerte, und naturgemäfs ist der kleinere von beiden als maßgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche λ an, so unterscheiden sich beide Grenzwerte nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. In den Ausdruck für P ist demnach von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzusetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ist, so nimmt man an, das dieselbe senkrecht zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entspricht; denn dieses ist nach Art. 62 (S. 41) das kleinste der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente.

Für die weiteren Betrachtungen sind die verschiedenen möglichen Fälle in das Auge zu fassen.

135.
Einfseitig
eingespannter
Stab.

a) Einfseitig eingespannter, an einem Ende in der Richtung der Axe belasteter Stab (Fig. 137). Aus der allgemeinen Gleichung 117 für die elastische Linie:

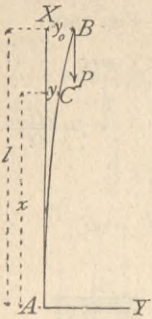
$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x$$

folgt

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 124.$$

Die Constanten A und B werden aus den besonderen Bedingungen für diesen Fall bestimmt.

Fig. 137.



Für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, weil der Stab an dieser Stelle wegen der Einspannung stets die Richtung der X-Axe hat; demnach ist in Gleichung 124

$$A a = 0,$$

oder, da a nicht gleich Null ist, $A = 0$. Eben so ist für $x = 0$ auch $y = 0$, daher in Gleichung 117: $0 = y_0 + B$ oder $B = -y_0$. Sonach lautet die Gleichung der elastischen Linie für diesen Fall:

$$y = y_0 - y_0 \cos a x = y_0 (1 - \cos a x) \dots 125.$$

Für $x = l$ wird $y = y_0$; demnach $y_0 = y_0 (1 - \cos a l)$. Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$\cos a l = 0 \dots 126.$$

ist. Soll also der Stab unter Einwirkung der Kraft P sich so durchbiegen, wie Fig. 137 zeigt, also im Punkte C die Ordinate y , im Endpunkte die Ordinate y_0 haben können, so muß $\cos a l = 0$ sein; es muß also

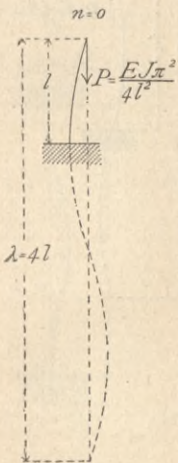
$$a l = 90^\circ, \text{ bzw. } 270^\circ, \text{ bzw. } 450^\circ \text{ u. f. w.,}$$

oder allgemein

$$a l = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \dots 127.$$

sein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... annehmen kann. Daraus folgt auch der Werth von P , welcher den Stab in der angegebenen Weise biegen, also nach den Erklärungen in Art. 134 (S. 122) auch zerknicken kann. Für diesen

Fig. 138.



Fall ist nach Gleichung 127: $a = \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$, und,

$$\text{da } a = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \text{ ist, } \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2l} (2n + 1); \text{ also}$$

$$P = \frac{EJ\pi^2}{4l^2} (2n + 1)^2 \dots 128.$$

Die zugehörige Wellenlänge λ folgt aus Gleichung 119. Es ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} = \frac{l}{2n + 1} \dots 129.$$

Die beiden Gleichungen geben Aufschluss über die Größe der Grenzwerte P , welche bei den verschiedenen Anordnungen des eingespannten Stabes einzuführen sind.

Bei dem in Fig. 137 u. 138 vorgeführten Falle ist die ganze Wellenlänge λ viermal so groß, als die freie Länge l , d. h. es ist $\lambda = 4l$; demnach folgt für diesen Fall aus der Gleichung 129:

$n = 0$, und damit aus Gleichung 128

$$P = \frac{EJ\pi^2}{4l^2} \dots 130.$$

Wird ein Punkt E im Abstände $\frac{l}{3}$ vom Einspannungspunkte fest gelegt, so muß die Formänderung so erfolgen, daß $l = \frac{3}{4} \lambda$ (Fig. 140) wird; dafür folgt aus

Gleichung 129: $\lambda = \frac{3 \lambda}{2 n + 1}$ die Größe $n = 1$, ferner aus Gleichung 128 als zerknickende Kraft

$$P = \frac{9 E \mathcal{F} \pi^2}{4 l^2} \dots 131.$$

Werden endlich zwei Punkte E und F in den Abständen $\frac{l}{5}$ und $\frac{3}{5} l$ vom Einspannungspunkte fest gehalten (Fig. 139), fo wird $\lambda = \frac{4}{5} l$ und aus Gleichung 129: $n = 2$; alsdann ist die zerknickende Kraft

$$P = \frac{25}{4} \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Man sieht, wie wesentlich der Grenzwert durch angemessene Construction erhöht werden kann.

136.
Stab
mit freien
Enden.

β) Stab mit beiderseits frei drehbaren Enden (Fig. 141). Die symmetrische Belastung des Stabes wird zur Folge haben, dass beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, sich genau gleich verhalten; man kann demnach diesen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, dass man den Anfangspunkt des Coordinatensystems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält sich dann genau eben so, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft P , d. h. der Grenzwert von P , ist demnach aus der Gleichung 128 zu entnehmen, jedoch mit der Aenderung, dass statt des dortigen l hier $\frac{l}{2}$ einzusetzen ist, weil die dort mit l bezeichnete Länge hier nur $\frac{l}{2}$ beträgt.

Für den vorliegenden Fall ist also

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2 (2 n + 1)^2}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2} (2 n + 1)^2$$

und

$$\lambda = \frac{4 \frac{l}{2}}{2 n + 1} = \frac{2 l}{2 n + 1} \dots 132.$$

Bei dem in Fig. 142 dargestellten Falle ist $\lambda = 2 l$, d. h. $n = 0$, mithin

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Wird ein Punkt E in der Mitte des Stabes fest gehalten, fo findet die Durch-

Fig. 139.

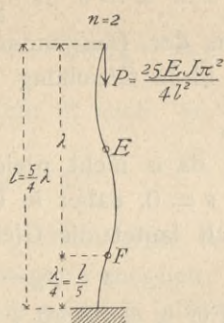


Fig. 140.

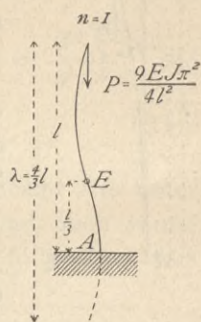


Fig. 141.

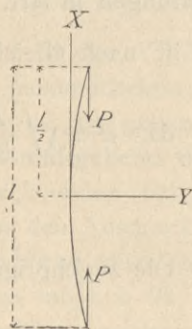


Fig. 142.

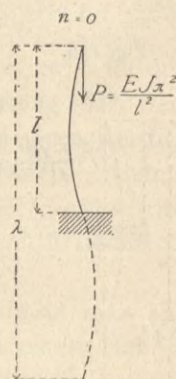


Fig. 143.

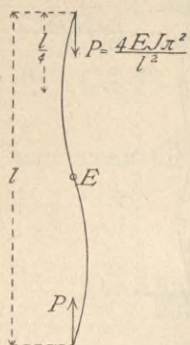
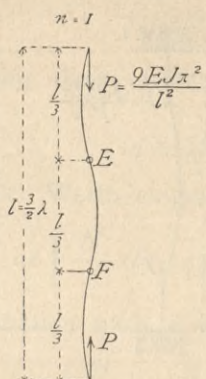


Fig. 144.



Biegung nach Fig. 143 so statt, daß $l = \lambda$, also $n = \frac{1}{2}$ wird; alsdann hat P den Werth:

$$P = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Sind endlich zwei Punkte E und F in den Abständen $\frac{l}{3}$ von den Endpunkten fest gehalten, so daß die Formänderung nach Fig. 144 eintreten muß, so wird $l = \frac{3}{2} \lambda$, also $n = 1$ und

$$P = \frac{9 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

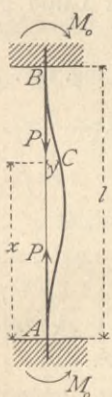
Die Formänderung kann auch unter Beibehaltung der Punkte E, F und der Endpunkte so eintreten, daß die Bogenlinien auf diejenige Seite der ursprünglichen Axe fallen, welche der gezeichneten entgegengesetzt ist.

γ) Stab mit eingespannten Enden (Fig. 145). Beide Endpunkte des Stabes verbleiben in Folge der Einspannung in der Lothrechten der Axe XX ; die Tangente an die Axe in diesen Punkten, d. h. die Axenrichtung, kann sich nicht verändern. An jedem Einspannungspunkte muß demnach ein Kräftepaar wirken, dessen Moment stets genügend groß ist, um den Stab in der ursprünglichen Richtung zu erhalten; dieses Moment möge M_0 genannt werden. Für einen beliebigen Punkt C mit der Abcisse x ist das Biegemoment

137.
Stab mit
eingespannten
Enden.

$$M = M_0 - P y = \left(\frac{M_0}{P} - y \right) P.$$

Fig. 145.



Demnach lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie hier:

$$E \mathcal{F} \frac{d^2 y}{d x^2} = P \left(\frac{M_0}{P} - y \right) \text{ oder } \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E \mathcal{F}} \left(\frac{M_0}{P} - y \right).$$

Abkürzungsweise werde wieder $\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2$ gesetzt; alsdann ist

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 \left(\frac{M_0}{P} - y \right).$$

Als Gleichung der elastischen Linie ergibt sich

$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin a x + B \cos a x; \dots \dots \dots 133.$$

ferner

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 134.$$

Die Constanten A und B ergeben sich in folgender Weise. Für $x = 0$ ist $y = 0$, demnach in Gleichung 133: $0 = \frac{M_0}{P} + B$ und $B = -\frac{M_0}{P}$. Für $x = 0$ wird $\frac{d y}{d x} = 0$, folglich in Gleichung 134: $0 = A a$ und, da a nicht gleich Null ist, $A = 0$. Die Gleichung der elastischen Linie lautet sonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos a x = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a x) \dots \dots \dots 135.$$

Für $x = l$ ist $y = 0$, demnach

$$0 = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a l) \text{ oder } \cos a l = 1.$$

Damit diese Gleichung erfüllt werde, muß

$$a l = 2 n \pi$$

fein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... haben kann.

Aus Gleichung 119 folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2 \pi l}{2 n \pi} = \frac{l}{n} \text{ oder } \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n}.$$

Ferner wird nach Gleichung 119

$$a^2 = \frac{P}{E \mathcal{F}} = \frac{4 \pi^2}{\lambda^2} \text{ und } P = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{\lambda^2}.$$

Diese beiden Gleichungen geben über die Gröfse von P Aufschluß. Es ist

für $n = 1$:	für $n = 2$:
$\frac{\lambda}{l} = 1 \text{ oder } \lambda = l;$	$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{l}{2};$
$P = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2};$	$P = \frac{16 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$

Der erstere Fall ist durch Fig. 146, der zweite durch Fig. 147 dargestellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt E in der Stabmitte fest gehalten wird.

138.
Stab mit einem
eingespannten
und einem
geführten Ende.

δ) Stab mit einem eingespannten und einem in der Lothrechten geführten Ende (Fig. 148). Wenn der Punkt B nicht in der lothrechten Linie geführt wäre, würde er etwa die punktirte Lage eingenommen haben; die Führung muß also durch eine wagrechte Kraft H verursacht werden, welche stets genügend groß ist, um ein Ausweichen von B zu verhüten. Diese Kraft H ist ihrer Gröfse nach nicht bekannt.

Das Biegemoment für irgend einen Punkt C des Stabes mit der Abscisse x ist nun

$$M = H(l - x) - P y = P \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right],$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie (siehe Gleichung 100)

$$E \mathcal{F} \frac{d^2 y}{d x^2} = P \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right]$$

oder

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E \mathcal{F}} \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] \dots \dots \dots 136.$$

Man setzt, um diese Gleichung aufzulösen, $\frac{d^2 y}{d x^2} = z$; wieder sei abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2$; alsdann ist

$$z = a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] \text{ und } \frac{d z}{d x} = a^2 \left(- \frac{H}{P} - \frac{d y}{d x} \right);$$

Fig. 146.

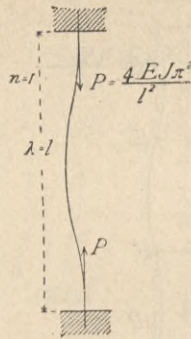


Fig. 147.

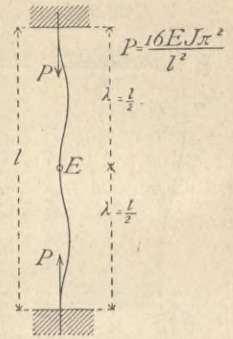
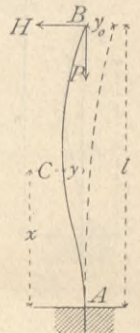


Fig. 148.



ferner

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = -a^2 \frac{d^2 y}{d x^2} = -a^2 z.$$

Die Auflösung dieser Differentialgleichung ergibt wiederum genau, wie in Art. 134 (S. 123)

$$z = A \sin a x + B \cos a x, \dots \dots \dots 137.$$

und wenn für z der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] = A \sin a x + B \cos a x \dots \dots \dots 138.$$

Die Differentiation nach x ergibt

$$-a^2 \left(\frac{H}{P} + \frac{d y}{d x} \right) = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 139.$$

Aus den beiden Gleichungen 138 u. 139 ergeben sich die Werthe der Constanten A und B , wie folgt.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also nach Gleichung 138: $\frac{a^2 H}{P} l = B$; für $x = 0$ ist $\frac{d y}{d x} = 0$, also nach Gleichung 139: $-\frac{a^2 H}{P} = A a$ und $-\frac{a H}{P} = A$. Endlich ist für $x = l$ auch $y = 0$, weil der Endpunkt des Stabes in der Lothrechten geführt wird, also nach Gleichung 138

$$0 = A \sin (a l) + B \cos (a l), \text{ woraus } \operatorname{tg} a l = -\frac{B}{A}$$

folgt, und wenn für B und A die oben gefundenen Werthe eingesetzt werden,

$$\operatorname{tg} a l = a l \dots \dots \dots 140.$$

Diese Beziehung findet statt für $a l = 0$, außerdem aber auch für den Winkel $257^\circ 27' 12''$; für diesen Winkel ist $\operatorname{tg} a l = a l = 4,4934$, also $a = \frac{4,4934}{l}$ und da $a^2 = \frac{P}{E \mathcal{F}}$ ist, so wird

$$P = \frac{E \mathcal{F} (4,4934)^2}{l^2} = 20,19 \frac{E \mathcal{F}}{l^2} \dots \dots \dots 141.$$

Dies ist der Werth von P , für welchen Gleichung 140 erfüllt ist und einen Sinn hat; der Werth $a l = 0$ ist nicht zu verwerthen. Dieses P vermag sonach die in Fig. 148 gezeichnete Formänderung hervorzurufen, also nach Früherem auch den Stab zu zerknicken.

In Art. 135 bis 138 sind diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptsächlich von Bedeutung sind. Nachstehend sind dieselben in Fig. 149 bis 152 übersichtlich zusammengestellt, wobei überall der Stab auf seine ganze Länge frei angenommen ist; der Werth von P im vierten Falle ist des bequemen Vergleiches wegen ebenfalls als Product mit dem Factor $\frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}$ dargestellt.

Die Tragfähigkeit der Stäbe verhält sich demnach

in den Fällen	1	2	4	3
wie	$\frac{1}{4}$: 1	: 2,048	: 4.

139.
Zusammen-
stellung.

Fig. 149.
Fall 1.

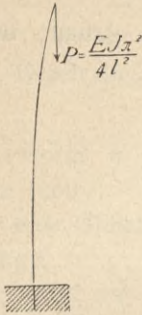


Fig. 150.
Fall 2.

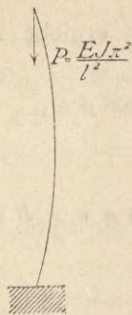


Fig. 151.
Fall 3.

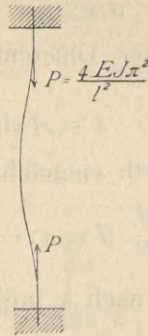
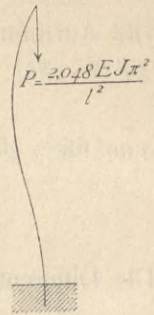


Fig. 152.
Fall 4.



Durch entsprechende Endanordnung würde man also die Tragfähigkeit des Stabes verfehzhnffachen können. Die angegebenen Kräfte sind thatfächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und defshalb find Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

2) Querschnittsermittlung bei centrischer Druckbelastung.

140.
Zulässige
Beanspruchung.

Die unter 1 entwickelten Formeln geben die Gröfse derjenigen Kraft P an, welche im Stande ist, den Stab oder die Stütze zu zerknicken. Die dem Stabe wirklich zuzumuthende Last darf naturgemäfs diesen Werth niemals erreichen; sie darf nur einen Bruchtheil des ermittelten Knickwerthes betragen. Versteht man unter s den fog. Sicherheits-Coefficienten, unter C einen von der Endbefestigung des Stabes abhängigen Coefficienten, so ist die Kraft, welche mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr auf den Stab wirken darf,

$$P = \frac{CE\mathcal{F}}{s l^2} \dots \dots \dots 142.$$

Dieser Werth ist aber nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge l , also auch die im Nenner vorkommende Gröfse l^2 , sehr klein ist, so ergeben sich für P sehr grofse Werthe, gröfsere Werthe, als die einfache Druckbeanspruchung des Stabes gestattet. Wird die zulässige Druckbeanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes mit K , die Querschnittsfläche mit F bezeichnet, so darf höchstens sein

$$P = FK \dots \dots \dots 143.$$

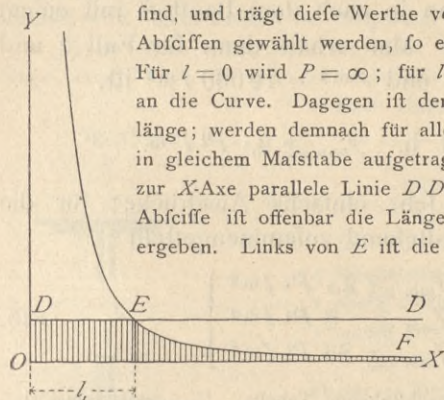
Gröfser, als der Werth in Gleichung 143 ist, darf P mit Rücksicht auf die zulässige Druckbeanspruchung nicht werden; gröfser, als der Werth in Gleichung 142 ist, darf P der Zerknickungsgefahr halber nicht werden; defshalb ist stets der kleinere dieser beiden Werthe für diejenige Belastungsgröfse maßgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei grofser Stablänge l ergibt die Gleichung 142, bei geringer Stablänge l die Gleichung 143 kleinere Werthe für P . Der Grenzwert von l , etwa l_1 , wird derjenige sein, für welchen aus beiden Gleichungen derselbe Werth von P folgt. Dieser Grenzwert ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von P in den Ausdrücken 142 u. 143 zu

$$l_1 = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{Ks}} \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} \dots \dots \dots 144.$$

Zerknickungsgefahr tritt erst auf, wenn $l > l_1$ ist; demnach ist, falls die Stablänge kleiner als l_1 ist, die Gleichung 143, falls sie größer als l_1 ist, die Gleichung 142 anzuwenden.

Klaren Einblick in die hier maßgebenden Verhältnisse verschafft die graphische Darstellung der Veränderlichkeit von P in Fig. 153. Ermittelt man diejenigen Werthe von P , welche ein Stab bei verschiedenen Längen mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr ertragen kann, falls Material, Querschnittsform und Querschnittsgröße, so wie Befestigungsweise der Enden stets dieselben sind, und trägt diese Werthe von P als Ordinaten auf, während die zugehörigen Längen als Abscissen gewählt werden, so erhält man eine Curve, offenbar die Curve der Gleichung 142.

Fig. 153.



Für $l = 0$ wird $P = \infty$; für $l = \infty$ wird $P = 0$; die Y - und X -Axe sind also Asymptoten an die Curve. Dagegen ist der Werth für P aus Gleichung 143 unabhängig von der Stablänge; werden demnach für alle möglichen Längen diese Werthe ermittelt und als Ordinaten in gleichem Maßstabe aufgetragen, wie die Werthe aus Gleichung 142, so ergibt sich eine zur X -Axe parallele Linie DD . Im Punkte E schneiden sich beide Linien; die zugehörige Abscisse ist offenbar die Länge l_1 , für welche beide Gleichungen denselben Werth von P ergeben. Links von E ist die Linie DE , rechts von E die Curve EF maßgebend. Die schraffierte Fläche deutet dies an.

Wenn, wie gewöhnlich, die Last P und die Länge l gegeben sind, so handelt es sich um die Ermittlung von Form und Größe des Stabquerschnittes. Für diese Bestimmung

141.
Querschnitts-
ermittlung.

stehen die beiden Gleichungen 142 u. 143 zur Verfügung. F und \mathcal{F} müssen wenigstens die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe haben, so dass sich die Bedingungen für die Querschnittsbildung ergeben zu

$$F \geq \frac{P}{K} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{min} \geq \frac{P s l^2}{C E} \dots \dots \dots 145.$$

Dabei ist zu bemerken, dass, wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ist, das kleinste für eine Schwerpunktsaxe des Querschnittes sich ergebende Trägheitsmoment zum mindesten die verlangte Größe haben muss; deshalb wurde in Gleichung 145: \mathcal{F}_{min} gesetzt. Ist Ausbiegen nur nach bestimmten Richtungen möglich, so muss das kleinste in Betracht kommende Schweraxen-Trägheitsmoment die berechnete Größe haben.

Die in obigem Ausdruck vorkommenden Constanten C , E , K und s bedeuten bestimmte Zahlenwerthe; für die in Fig. 149 bis 152 dargestellten vier Fälle ist C :

Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C = \frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4 \pi^2$	$= 2 \pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} = 1,57$	$= 3,14$	$= 6,28$	$= 4,44.$

Die Coefficienten E , K und s haben für alle Stäbe aus demselben Material gleiche Werthe; wird als Flächeneinheit das Quadrat-Centimeter, als Kräfteinheit das Kilogramm angenommen, so kann man für K , E und s nachstehende Werthe setzen:

für Schweisseisen und Flusseisen:	für Gulseisen:	für Holz:
$E = 2000000$	1000000	$120000 \text{ kg für } 1 \text{ qcm}$
$K = 700$	500	$65 \quad \gg \quad \gg$
$s = 5$	8	10

Alsdann wird auch P in Kilogr. eingeführt werden müssen; F wird in Quadr.-Centim. und \mathcal{F} in cm^4 erhalten. Die Formel ergibt für Fall 2 und Schweisseisen

$$\mathcal{F}_{min} \geq \frac{P_{kg} \cdot 5 \text{ lcm}^2}{\pi^2 \cdot 2000000}$$

Wesentlich bequemer werden die Ausdrücke für \mathcal{F}_{min} , wenn man P und E in Tonnen, l in Met. einführt und $\pi^2 = 10$ setzt; letzteres ist nicht ganz genau, aber der Fehler kommt gar nicht in Betracht, da man je nach dem Baustoff mit einem Sicherheitscoefficienten 5, 8, bezw. 10 arbeitet. Man erhält dann für Fall 2 und Schweisseisen, da $P_{kg} = 1000 P_t$, $l_{cm} = 100 l_m$ und $l_{cm}^2 = 10000 l_m^2$ ist,

$$\mathcal{F}_{min} \geq \frac{1000 P_t \cdot 5 \cdot 10000 \cdot l_m^2}{10 \cdot 2000000}, \text{ d. h. } \mathcal{F}_{min} \geq 2,5 P_t l_m^2$$

Eben so ergeben sich für Holz und Gufseisen sehr einfache Ausdrücke; für die Hauptstoffe sind diese Ausdrücke für Fall 2 nachstehend zusammengestellt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schweiss- und Flusseisen} \quad \mathcal{F}_{min} \geq 2,5 P_t l_m^2 \\ \text{für Gufseisen} \quad \mathcal{F}_{min} \geq 8 P_t l_m^2 \\ \text{für Holz} \quad \mathcal{F}_{min} \geq 83 P_t l_m^2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 146.$$

Die Zusammenstellung für alle vier Fälle ergibt die nachstehende Tabelle. \mathcal{F}_{min} muss sein \geq :

Constructions-material	Fall 1 (Fig. 149)	Fall 2 (Fig. 150)	Fall 3 (Fig. 151)	Fall 4 (Fig. 152)
Schweisseisen und Flusseisen	10	2,5	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$
Gufseisen	32	8	2	4
Holz	332	83	20	41
	$P \text{ Tonnen} \times l \text{ (Meter)}^2$			

Je mehr sich der Flächeninhalt des Querschnittes, welcher dem nothwendigen Trägheitsmomente entspricht, dem zulässigen Kleinstwerth $\frac{P}{K}$ nähert, desto zweckmäßiger ist die Constraction. Man nimmt gewöhnlich zunächst einen Querschnitt an, für welchen $F = \frac{P}{K}$ stattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment desselben. Genügt letzteres nicht, so ist die Querschnittsfläche entsprechend zu vergrößern, bis das verlangte \mathcal{F} vorhanden ist. Dieses Verfahren soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

Beispiele. α) In einer gusseisernen Stütze sei der größte Druck $P = 50000 \text{ kg} = 50 \text{ Tonnen}$; die Länge der Stütze sei $l = 4,5 \text{ m}$; die Enden sollen als bewegliche vorausgesetzt werden; die Querschnittsform sei die neben stehende (Fig. 154); die Querschnittsmaße sind zu ermitteln.

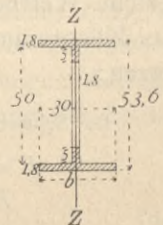
Für einfachen Druck muss $F = \frac{50000}{500} = 100 \text{ qcm}$ und nach Gleichung 146 muss $\mathcal{F}_{min} = 8 \cdot 50 \cdot 4,5^2 = 8100 \text{ fein}$.

Die Höhe des Querschnittes sei durch bauliche Rücksichten zu $53,6 \text{ cm}$ vorgeschrieben, die Stärke des Steges und der Gurte sei $1,8 \text{ cm}$; alsdann findet, wenigstens bei nicht außergewöhnlich großer Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe ZZ statt, und es ist

$$\mathcal{F}_Z = \frac{2 \cdot 1,8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1,8^3}{12} = 0,3 b^3 + 24,3.$$

Hiermit ist das erforderliche Trägheitsmoment als Function von b dargestellt, und da nach Obigem auch

Fig. 154.



$$J_{min} = 8100$$

fein muß, so lautet die Bedingungsleichung für b :

$$0,3 b^3 + 24,3 = 8100,$$

woraus sich für $b = \infty 30$ cm ergibt.

Die Querschnittsfläche wird $F = 2 \cdot 1,8 \cdot 30 + 50 \cdot 1,8 = 198$ qcm, während nur 100 qcm Querschnittsfläche nöthig sind. Daraus folgt, daß unbedenklich ein Theil des Steges auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querschnittsfläche der schraffierte Theil übrig, und zwar in diesem Falle $F = 2 \cdot 30 \cdot 1,8 + 2 \cdot 5 \cdot 1,8 = 126$ qcm, und diese Querschnittsgröße genügt. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Steges nur unwesentlich beeinflusst.

β) In einem schmiedeeisernen Stabe herrscht ein Druck $P = 130000$ kg = 130 Tonnen; die Stablänge betrage 6,0 m, der Stab sei beiderseits eingepannt.

Nach obiger Tabelle muß

$$J = \frac{5}{8} \cdot 130 \cdot 6^2 = 2925 \text{ cm}^4,$$

ferner $F = \frac{130000}{700} = 196$ qcm fein.

Der Querschnitt in Fig. 155 wurde vorläufig, wie folgt, zusammengesetzt:

4	Winkleisen zu $13 \times 13 \times 1,2$ cm = 29,8 qcm	...	= 119,2 qcm
1	obere Deckplatte $36 \times 1,3$ cm	...	= 46,8 "
1	untere Deckplatte $34,8 \times 1,3$ cm	...	= 45,2 "
	Summe des Brutto-Querschnittes		211,2 qcm
ab für 4	Nietlöcher $4 \times 2,5 \times 2,3$ cm	...	= 23,0 "
	bleibt Netto-Querschnitt		188,2 qcm,

der allerdings etwas kleiner als F ist, aber genügen dürfte.

Für diesen Querschnitt findet J_{min} für die ZZ-Axe statt, und es ist

$$J_{ZZ} = \frac{1}{12} [2 \cdot 1,3 \cdot 36^3 + 2 \cdot 1,2 \cdot 27,2^3 + 2 \cdot 11,8 \cdot 3,0^3 - (2 \cdot 13 + 1,3) 1,2^3] - 4 \cdot 2,5 \cdot 2,3 \cdot 7^2 = 13094.$$

Das Trägheitsmoment ist also bei ausreichender Querschnittsfläche wesentlich größer, als es zu fein braucht, der Querschnitt sonach genügend.

Sehr einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn man den Querschnitt aus den »Deutschen Normal-Profilen für Walzeisen« bildet, für welche die Minimal-Trägheitsmomente im vorhergehenden Halbband dieses »Handbuches« (Abth. I: Die Technik der wichtigeren Baustoffe) angegeben sind. Man berechnet das nothwendige Trägheitsmoment und die nöthige Querschnittsfläche aus den Ausdrücken 145 und sucht aus den Tabellen ein Profileisen, bzw. einen aus Profileisen zusammengesetzten Querschnitt, dessen Minimal-Trägheitsmoment und Querschnittsfläche den verlangten zum mindesten gleich sind.

Beispiel. In einem schmiedeeisernen Stabe herrsche ein Druck $P = 18000$ kg = 18 Tonnen; die Stablänge sei $l = 5,0$ m; die Stabenden seien drehbar; mithin ist Fall 2 zu Grunde zu legen.

Nach Gleichung 146 muß $J = 2,5 \cdot 18 \cdot 5^2 = 1125$ cm⁴ und nach Gleichung 143: $F = \frac{18000}{700} = 26$ qcm fein.

Soll der Stab aus einem I-förmigen Walzbalken gebildet werden, so ist das Profil Nr. 38 (siehe die angezogenen Tabellen) zu wählen; bei demselben ist $J_{min} = 1138$, F (nach Abzug für Niete) = $107,5 - 4 \cdot 2 \cdot 2,03 = 91,1$ qcm und das Gewicht für 1 m 83,9 kg.

Wollte man statt dessen einen aus 4 kreuzförmig gestellten Winkleisen gebildeten Querschnitt verwenden, so könnte man 4 Winkleisen Nr. 9 (siehe die angezogenen Tabellen) zu $9 \times 9 \times 1,3$ cm verwenden, deren $J = 1284$ ist, also genügt; dabei ist der Netto-Querschnitt $F = 4 \cdot 21,7 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,3$ (für Niete) = $76,4$ qcm und das Gewicht $4 \cdot 16,9$ kg = $67,6$ kg. Zweckmäßiger ist die Verwendung von 4 Winkleisen Nr. 10 zu $10 \times 10 \times 1$ cm mit $J = 1346$, $F = 4 \cdot 19 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 68$ qcm und einem Gewicht für 1 m von $4 \cdot 14,8$ kg = $59,2$ kg.

Würde endlich der Querschnitt aus 4 Quadranteisen (nach Fig. 156) konstruirt, so wird bei neben stehendem Querschnitt (siehe die angezogenen Tabellen) $J = 2046$, $F = 54,9 - 4 \cdot 2 \cdot 0,8$ (für Niete) = $48,59$ qcm und das Gewicht für das laufende Meter $42,9$ kg.

Fig. 155.

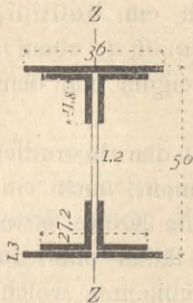
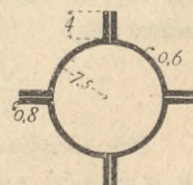


Fig. 156.



Am ungünstigsten ist demnach im vorliegenden Falle das I-Profil mit 83,9 kg Gewicht; günstiger ist das kreuzförmige Profil mit 59,2 kg, und am günstigsten ist das aus Quadranteisen zusammengesetzte, röhrenförmige Profil mit 42,9 kg Gewicht.

3) Querschnittsermittlung bei excentrischer Druckbelastung.

142.
Zulässige
Beanspruchung.

Man ist neuerdings vielfach bestrebt gewesen, Grösse und Form des Querschnittes auf Knicken axial beanspruchter Stäbe aus der Bedingung zu bestimmen, daß die grösste, wirklich auftretende Beanspruchung σ an keiner Stelle die für das Material als zulässig erachtete Beanspruchung überschreite. Die Spannung σ ist, sobald die Kraft für den Querschnitt ein Moment hat, in hohem Mafse von der Grösse der Ausbiegung y abhängig; da aber diejenige axial wirkende Kraft, welche überhaupt eine Ausbiegung y hervorrufen kann, nach Obigem auch ein beliebig großes y und damit auch ein beliebig großes σ erzeugen kann, so ist σ , eben so wie y , bei der oben betrachteten Aufgabe eine unbestimmte Grösse, eignet sich demnach nicht als Grundlage für die Querschnittsbestimmung.

Man darf weiter nicht erwarten, daß die Versuchsergebnisse mit den theoretisch entwickelten Werthen der zerknickenden Kraft genau übereinstimmen; auch eine kleinere Kraft kann bereits Zerknicken herbeiführen, wenn etwa die Kräfte etwas excentrisch wirken oder nicht genau in die Richtung der Stabaxe fallen oder der Baustoff des Stabes nicht ganz gleichmäfsig ist. Allen diesen Möglichkeiten, welche theoretisch nicht gut verfolgt werden können, wird am besten dadurch Rechnung getragen, daß man einen Sicherheits-Coefficienten n einführt, also nur den n -ten Theil derjenigen Kraft auf den Stab wirken läßt, welche denselben nach der Formel zerknicken könnte. Es ist gut, daß man die Stelle ganz genau kennt, an welcher alle Unsicherheiten zusammentreffen und diese ganz klar bezeichnet.

143.
Querschnitts-
ermittlung.

Wenn das Mafse der Excentricität der wirkenden Kräfte bekannt wäre, so würde auch eine genaue Berechnung möglich sein; denn dann hätte der Pfeil einen ganz bestimmten Werth, und damit würden sich auch für σ gewisse, von der Grösse der Kraft P abhängige Werthe ergeben. Da unter Umständen die Grösse der Excentricität bekannt ist, bzw. angenommen werden kann, so soll die Berechnung hier vorgeführt werden.

Für irgend einen Punkt C des Stabes AB (Fig. 157), welcher ursprünglich mit der Axe AX zusammenfiel, ist

$$M = P(p + y_0 - y) = E \mathcal{J} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \mathcal{J}} (p + y_0 - y),$$

und wenn wieder, wie oben, abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{J}} = a^2$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 (p + y_0 - y).$$

Die zweimalige Integration dieser Gleichung ergibt

$$y = (p + y_0) + A \sin ax + B \cos ax \quad \dots \quad 147.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = A a \cos ax - B a \sin ax \quad \dots \quad 148.$$

Die Constanten A und B ergeben sich folgendermassen.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also $0 = p + y_0 + B$ und $B = -(p + y_0)$;

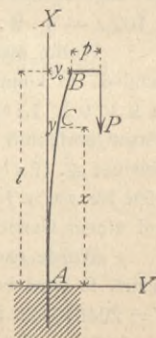


Fig. 157.

für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, also $0 = A a$ und $A = 0$; demnach heisst die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = (p + y_0) (1 - \cos a x) \dots \dots \dots 149.$$

Für $x = l$ ist $y = y_0$, d. h. $y_0 = (p + y_0) (1 - \cos a l)$ oder

$$y_0 = p \frac{1 - \cos a l}{\cos a l} \dots \dots \dots 150.$$

y_0 ist also eine ganz bestimmte Grösse. Das grösste Moment findet am Einspannungspunkte A statt, wo es den Werth

$$P(p + y_0) = P p \left(1 + \frac{1 - \cos a l}{\cos a l} \right) = \frac{P p}{\cos a l}$$

hat. In diesem Querschnitte wird der grösste Druck den Werth haben

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{P p r}{\mathcal{F} \cos a l} \dots \dots \dots 151.$$

In dieser Gleichung ist r der Abstand des meist gespannten Querschnittspunktes von der Axe, \mathcal{F} das in Betracht kommende Trägheitsmoment. Stellt man die Bedingung, dass σ_{max} höchstens gleich K sein solle, so ergibt sich

$$K = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F p r}{\mathcal{F} \cos a l} \right), \dots \dots \dots 152.$$

und die zulässige Belastung der Stütze vom Querschnitt F und dem Trägheitsmomente \mathcal{F}

$$P = \frac{F K}{1 + \frac{F p r}{\mathcal{F} \cos a l}} \dots \dots \dots 153.$$

Da $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{F}}}$ eine Grösse ist, welche sowohl vom Drucke P , wie von der Querschnittsgealtung, also von Werthen abhängt, welche meistens von vornherein nicht gleichzeitig gegeben sind, so kann der Ausdruck für P aus Gleichung 153 nicht in geschlossener Form entwickelt werden; denn a kommt auch auf der rechten Seite vor. Man wird deshalb zunächst eine angenäherte Rechnung vornehmen, auf welche die genauere zu folgen hat. Aehnlich ist es, wenn P und das Mafs der Excentricität gegeben sind und der Querschnitt gesucht wird. Dann ist aus Gleichung 153, wenn mit R der Trägheitsradius bezeichnet wird, also $\mathcal{F} = F R^2$ gesetzt wird,

$$F = \frac{P}{K} \left(1 + \frac{p r}{R^2 \cos a l} \right) \dots \dots \dots 154.$$

Die Anwendung dieses Ausdruckes soll an einem einfachen Beispiele gezeigt werden.

144.
Beispiel.

Die Stütze sei eine Holzstütze von der Länge $l = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$; der Querschnitt sei quadratisch und habe die Seitenlänge d ; die Excentricität soll so weit gehen können, dass die Kraft P ungünstigstenfalls in der Kante des Quadrates angreift. Dann ist

$$p = \frac{d}{2}, \quad F = d^2, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \mathcal{F} = F R^2 = \frac{d^4}{12} = d^2 R^2,$$

$$R^2 = \frac{d^2}{12}, \quad E = 120000 \text{ kg}, \quad K = 65 \text{ kg}, \quad p r = \frac{d^2}{4}.$$

Ferner folle eine Kraft $P = 16\,000$ kg ertragen werden. Es ist also

$$a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{F}}} = \sqrt{\frac{16\,000 \cdot 12}{120\,000 d^4}} = \frac{1,265}{d^2}, \text{ ferner } a l = \frac{632,5}{d^2}; \text{ f\u00f6nach}$$

$$F = \frac{16\,000}{65} \left(1 + \frac{d^2 \cdot 12}{4 d^2 \cos a l} \right) = 246 \left(1 + \frac{3}{\cos \frac{632,5}{d^2}} \right).$$

Zun\u00e4chst werde $d = 25$ cm angenommen; dann wird $F = 246 (1 + 5,66) = 1638$ qcm; demnach m\u00fcsste $d = \text{ca. } 40$ cm sein. W\u00e4hlt man $d = 35$ cm, so wird

$$F = 246 (1 + 3,45) = 1095 \text{ qcm.}$$

Dieser Werth w\u00fcrde einer Seitenl\u00e4nge $d = 33$ cm entsprechen; 35 cm ist also ein angemessener Werth,

4) Empirische Formeln.

145.
Allgemeine
Formel.

Der Umstand, dass man je nach der gr\u00f6sseren oder geringeren L\u00e4nge des Stabes mit verschiedenen Formeln rechnen muss, ist eine Unbequemlichkeit, der man durch Einf\u00fchrung empirischer Formeln abzuhelpen gestrebt hat. Eine solche Formel muss f\u00fcr P bei kleinen Werthen von l nahezu oder genau die f\u00fcr einfachen Druck entwickelte Gleichung 143, dagegen bei grossen Werthen von l die mit R\u00fccksicht auf Zerknicken gefundene Gleichung 142 ergeben. Diesen Anforderungen entspricht folgende Formel³⁰⁾:

$$P = \frac{K F \mathcal{F}}{\mathcal{F} + \frac{K_s F l^2}{C E}}, \dots \dots \dots 155.$$

in welcher alle Buchstaben die fr\u00fcheren Bedeutungen haben.

F\u00fcr $l = 0$ wird entsprechend der f\u00fcr kurze St\u00e4be aufgestellten Gleichung 143 auch hier $P = K F$; f\u00fcr den Werth $l = \infty$ mag obiger Formel die Gestalt

$$P = \frac{K F}{1 + \frac{K_s F l^2}{C \mathcal{F} E}} \dots \dots \dots 156.$$

gegeben werden. Ist l sehr gross, bzw. $= \infty$, so ist das erste Glied im Nenner verschwindend klein gegen das zweite; die Formel lautet alsdann:

$$P = \frac{K F}{\frac{K_s F l^2}{C E \mathcal{F}}} = \frac{C E \mathcal{F}}{s l^2},$$

demnach \u00fcbereinstimmend mit der Formel 142 f\u00fcr lange St\u00e4be. Die Gleichung 155 kann also als empirische Formel angewendet werden und giebt auch ziemlich gut mit den Versuchen \u00fcbereinstimmende Werthe. Aus derselben folgt

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{F}}{\mathcal{F} + \frac{K_s}{C E} F l^2},$$

und wenn der nur vom Material des Stabes und der Endbefestigung abh\u00e4ngige Factor $\frac{K_s}{C E} = \alpha$ gesetzt wird,

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{F}}{\mathcal{F} + \alpha F l^2} \dots \dots \dots 157.$$

³⁰⁾ Siehe: SCH\u00c4FFER, Bestimmungen der zul\u00e4ssigen Spannung und der Querschnitte f\u00fcr Eisenconstructions. Deutsche Bauz. 1877, S. 498.

$\frac{P}{K}$ ist diejenige Querschnittsfläche, welche der Stab haben müßte, wenn er einfachen Druck zu erleiden hätte. Wir bezeichnen dieselbe mit f ; alsdann ist

$$f = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha f l^2} \dots \dots \dots 158.$$

Die Gleichung 158 kann benutzt werden, um die wirklich nöthige Querschnittsfläche zu berechnen. Denn nach derselben ist

$$F = \frac{f \mathcal{J}}{\mathcal{J} - \alpha f l^2} \dots \dots \dots 159.$$

Das zur Ermittlung der nothwendigen Querschnittsform und -Größe einzuschlagende Verfahren ist nun folgendes. Der größte Druck P , welcher auf den Stab wirken kann, ist bekannt, durch Rechnung oder Zeichnung gefunden; alsdann ist $f = \frac{P}{K}$ ebenfalls leicht zu ermitteln. Man construirt nun einen dieser Querschnittsfläche entsprechenden Querschnitt und ermittle das kleinste Trägheitsmoment desselben für eine Schweraxe, also \mathcal{J} . Bekannt sind jetzt die Größen f , \mathcal{J} , α und l , und die Gleichung 159 ergibt nun die dem Querschnitt wirklich zu gebende Flächengröße F . Fällt dieselbe größer aus, als die angenommene Querschnittsfläche, so ist letztere entsprechend zu vergrößern, das neue Trägheitsmoment einzufetzen, F aus Gleichung 159 aufs Neue zu berechnen und dieses Verfahren so lange zu wiederholen, bis eine genügende Uebereinstimmung der wirklichen Querschnittsfläche mit der nöthigen stattfindet. Dabei hat man sich jedoch vor dem Fehler zu hüten, bei den späteren Berechnungen den neuen Werth der Querschnittsfläche für f einzuführen, da ja f nicht die wirkliche Querschnittsfläche, sondern den für einen bestimmten Stab unveränderlichen Werth $\frac{P}{K}$ anzeigt. Bei einiger Uebung ist es leicht, bereits bei der zweiten Rechnung eine entsprechende Querschnittsfläche zu finden.

Tabelle für die Werthe von $\alpha = \frac{Ks}{CE}$.

Constructions- material	Allgemeine Formel	Fall 1: Ein Ende ein- gespannt, das andere frei drehbar	Fall 2: Beide Enden frei drehbar	Fall 3: Beide Enden eingespannt	Fall 4: Ein Ende ein- gespannt, das andere lothrecht geführt
Schweißseifen } Flußseifen }	$\frac{0,00175}{C}$	0,00072	0,00018	0,000045	0,00009
Gußseifen	$\frac{0,004}{C}$	0,0016	0,0004	0,0001	0,0002
Holz	$\frac{0,0054}{C}$	0,0022	0,00054	0,00013	0,00026

Die Anwendung obiger Formel soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

a) Für einen gußeisernen Stab mit drehbaren Enden und kreuzförmigem Querschnitt (Fig. 158) sei $P = 4800$ kg und $l = 200$ cm. Alsdann ist $f = \frac{4800}{500} = 9,6$ qcm und bei vorläufig, wie in Fig. 158 angenommenem Querschnitt:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} (1,5 \cdot 12^3 + 10,5 \cdot 1,5^3) = \infty 219 \text{ cm}^4.$$

Ferner ist $\alpha = 0,0004$ (vergl. die umstehende Tabelle); mithin müßte

$$F = \frac{219 \cdot 9,6}{219 - 0,0004 \cdot 9,6 \cdot 200^2} = 32 \text{ qcm}$$

fein. Der gewählte Querschnitt hat

$$1,5 \cdot 2 \cdot 12 - 1,5 \cdot 1,5 = 33,75 \text{ qcm},$$

ist also etwas größer, als er zu fein braucht; er empfiehlt sich für die Ausführung.

Die genauere Berechnung nach Formel 145 u. 146 ergibt auf wenigstens eben so einfachem Wege: es muß $F \geq 9,69 \text{ cm}^2$, $\mathcal{F} \geq 8 \cdot 4,8 \cdot 2^2$, d. h. $\mathcal{F} \geq 153,6 \text{ cm}^4$ fein. Der gewählte Querschnitt ist also sehr reichlich.

β) Es sei $P = 3300 \text{ kg}$, $l = 100 \text{ cm}$; der Stab werde durch ein einfaches gleichschenkeliges Winkel-eisen gebildet; der Fall 4 kann angenommen werden. Zunächst ist $f = \frac{3300}{700} = \approx 4,7 \text{ qcm}$. Gewählt werde ein Winkeleisen von $5,5 \times 5,5 \times 0,8 \text{ cm}$; das \mathcal{F}_{\min} dieses Winkeleisens ist nach dem Normal-Profilbuch $9,38 \text{ cm}^4$, ferner $\alpha = 0,00009$. Demnach muß

$$F = \frac{4,7 \cdot 9,38}{9,38 - 0,00009 \cdot 4,7 \cdot 100^2} = 8,55 \text{ qcm}$$

fein. Das gewählte Winkeleisen hat eine Querschnittsfläche von $8,16 \text{ qcm}$.

Die genauere Berechnung nach Formel 145 u. 146 erweist, dafs

$$\mathcal{F}_{\min} \geq \frac{5}{4} \cdot 3,3 \cdot 1^2, \text{ also } \mathcal{F}_{\min} \geq 4,125 \text{ cm}^4 \text{ und } F \geq 4,7 \text{ qcm}$$

fein muß. Das Winkeleisen mit $F = 8,16 \text{ qcm}$ und $\mathcal{F}_{\min} = 9,38 \text{ cm}^4$ würde demnach reichlich genügen.

γ) In einem Holzstabe mit quadratischem Querschnitt und nicht beweglichen Enden, bei welchem Fall 4 vorausgesetzt werden kann, herrscht ein Druck $P = 9500 \text{ kg}$; ferner sei $l = 300 \text{ cm}$. Es ist $F = \frac{9500}{65} = 146 \text{ qcm}$. Wird vorläufig die Querschnittsseite mit 18 cm gewählt, so ist

$$\mathcal{F} = \frac{18^4}{12} = 8748 \text{ cm}^4, \quad \alpha = 0,00026 \quad \text{und} \quad F = \frac{146 \cdot 8748}{8748 - 0,00026 \cdot 146 \cdot 300^2} = \approx 240 \text{ qcm}.$$

Der angenommene Querschnitt hat $18 \times 18 = 324 \text{ qcm}$, ist also zu groß.

Wird $h = 17 \text{ cm}$ gewählt, so wird

$$\mathcal{F} = \frac{17^4}{12} = 6960 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad F = \frac{146 \cdot 6960}{6960 - 0,00026 \cdot 146 \cdot 300^2} = 286 \text{ qcm};$$

der gewählte Querschnitt hat $17 \times 17 = 289 \text{ qcm}$, ist also sehr passend.

Die genauere Berechnung ergibt, dafs

$$\mathcal{F}_{\min} \geq 41 \cdot 9,5 \cdot 3^2, \text{ d. h. } \mathcal{F}_{\min} \geq 3505 \text{ cm}^4$$

fein muß; demnach würde schon ein quadratischer Querschnitt genügen, dessen Seitenlänge d aus der Bedingung folgt:

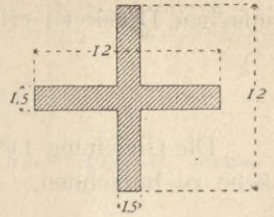
$$\frac{d^4}{12} = 3505 \quad \text{oder} \quad d = 14,32 \text{ cm}.$$

Da dieser Querschnitt außerdem eine Fläche $d^2 = 204,5 \text{ qcm}^2$ aufweist, während f nur gleich 146 qcm zu fein braucht, so ist er ausreichend.

Aus vorstehenden Beispielen erhellt zur Genüge, dafs das Bedürfnis für empirische Formeln nicht groß ist; die Berechnung nach den genauen Ausdrücken 145 u. 146 ist durchaus nicht schwierig:

Die üblen Erfahrungen, welche man neuerdings bei verschiedenen großen Bränden mit eisernen Stützen gemacht hat, führten zur Unterfuchung der Frage, in welcher Weise die Tragfähigkeit solcher Stützen bei erhöhter Temperatur verändert werde, und zur Aufstellung von Formeln für diese Tragfähigkeit. Die nachstehend aufgeführten Formeln sind von Möller³¹⁾ auf Grund von Versuchen unter

Fig. 158.



147.
Tragfähigkeit
der Stützen
bei erhöhter
Temperatur.

31) Siehe: MÖLLER, M. u. R. LÜHMANN. Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Baukonstruktionsteile bei erhöhter Temperatur. Berlin 1888.

folgenden Annahmen aufgestellt. Die dem Feuer zugewendete Seite der Stütze zeigt schwache Rothgluth; die andere Seite hat eine bis zu 600 Grad C. geringere Temperatur, welche durch Anspritzen der Säule mit kaltem Wasser herbeigeführt ist; die Beanspruchung der Stützen erfolgt um 1 cm excentrisch, zwischen Gelenken (Fall 2). Die Stütze soll die Last P noch mit einiger Sicherheit tragen. Die allgemeine Formel, in welcher alle Buchstaben die frühere Bedeutung haben, lautet (vergl. Art. 145, S. 136)

$$P = KF \frac{1}{1 + \alpha \frac{Fl^2}{\mathcal{F}}}$$

Die Zahlenwerthe K und α ergeben sich aus nachstehenden Formeln:

$$\text{für Schmiedeeisen: } P = 1000 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{Fl^2}{\mathcal{F}}} \dots \dots \dots 160.$$

$$\text{für Gufseisen: } P = 1200 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{Fl^2}{\mathcal{F}}} \dots \dots \dots 161.$$

In diesen Ausdrücken ist l die freie Länge zwischen den Gelenken; wenn die Stützung als zwischen parallelen Enden erfolgend angenommen werden kann, so ist statt l nur $\frac{2}{3}$ der wirklich vorhandenen freien Länge einzuführen.

2. Kapitel.

Träger.

Wie bereits im Eingange zum vorliegenden Abschnitte gefagt wurde, versteht man unter Trägern solche Bau-Constructions, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend senkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Die Längsaxe kann sowohl eine gerade, wie eine gebrochene, bezw. krumme Linie sein. Demnach rechnen wir zu den Trägern im weiteren Sinne auch die Dachstühle, die Sprengwerke u. A., bei denen die Längsaxe nicht so deutlich vor die Augen tritt, wie bei den gewöhnlichen Balken; ferner auch die Gewölbe, bei denen die Längsaxe eine krumme Linie ist.

Um die obige Erklärung der Träger auch für diese Constructions unbedingt richtig zu stellen, könnte man in die Erklärung statt der Längsaxe die Verbindungslinie der Auflagerpunkte einführen und demnach die Träger folgendermaßen erklären: Träger sind Bau-Constructions, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend senkrecht zur Verbindungslinie der Auflager, d. h. der Stützpunkte der Construction, wirken. Im vorliegenden Kapitel sollen nur die Träger im engeren Sinne, welche man gewöhnlich als Balken bezeichnet, behandelt werden, während die Dachstühle und die Gewölbe in den beiden nächsten Abschnitten besprochen werden. Von den Sprengwerken wird bei den Dachstühlen eine besondere Form vorgeführt werden.

Die auf die Bau-Constructions wirkenden äußeren Kräfte sind nach Art. 2 (S. 6):
1) die Belastungen, d. h. die Eigengewichte und die Nutzlasten, und 2) die Auf-

148.
Allgemeines.

149.
Äußere
Kräfte.

lager- oder Stützendrücke (auch Reactionen der Auflager genannt), d. h. diejenigen Kräfte, welche in den Auflagern auf die Constructionen übertragen werden.

50.
Eintheilung.

Die Träger sind entweder:

1) Balkenträger, d. h. Träger, auf welche bei lothrechten Belastungen nur lothrechte Stützendrücke wirken.

Fig. 159 zeigt einen Balkenträger; D_0 und D_1 sind die Auflagerdrücke.

2) Sprengwerks- und Hängewerksträger, d. h. Träger, welche bei lothrechten Belastungen schiefe Stützendrücke erleiden; die schiefen Auflagerdrücke setzen sich aus wagrechten und lothrechten Seitenkräften zusammen.

Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Druck, so hat man den Sprengwerksträger (Fig. 160); falls die Trägeraxe eine krumme Linie ist, den Bogenträger. Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Zug, so hat man den Hängewerksträger (Fig. 161).

Ob ein Träger ein Balkenträger, Sprengwerks- oder Hängewerksträger ist, hängt von der Art seiner Auflagerung ab. Die Auflager sind entweder feste, d. h.

solche, welche keine Bewegung des Trägerendes gegen die stützenden Theile (das Mauerwerk) gestatten, oder sie sind bewegliche, d. h. solche, bei denen das Trägerende gegen das Mauerwerk sich auf vorgeschriebener Bahn so weit verschieben kann, wie dies die elastischen, bei der Belastung auftretenden und die durch Temperatur bedingten Längenänderungen verlangen. Bei den festen Auflagern soll also eine Verschiebung des Trägerendes in jeder Richtung, sowohl wagrecht, wie lothrecht, verhindert werden; die an dieser Stelle auf den Träger übertragene Kraft, der Auflagerdruck, muß demnach sowohl eine wagrechte, wie eine lothrechte Seitenkraft haben können; bei den beweglichen Auflagern wird reibungslose Beweglichkeit angenommen; der Druck kann also zwischen den beiden einander hier berührenden Körpern — Träger und Pfeiler — nur senkrecht zur Berührungsfäche, d. h. zur Auflagerbahn gerichtet sein. Wenn diese Bahn wagrecht ist, so muß demnach der Auflagerdruck lothrecht sein.

Allgemein hat also bei einem festen Auflager der zwischen Träger- und Stützmauerwerk wirkende Druck eine schiefe Richtung, genauer gesagt: er kann eine beliebige Richtung in der Ebene der Construction haben; bei reibungslos wagrecht beweglichem Auflager muß der Druck dagegen lothrecht gerichtet sein. Ist bei einem Träger auf zwei Stützpunkten das eine Auflager wagrecht beweglich, also

Fig. 159.

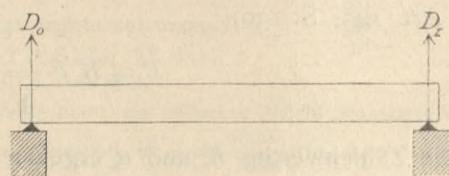


Fig. 160.

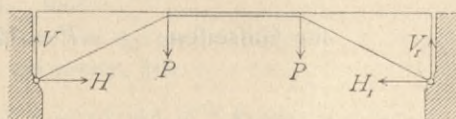
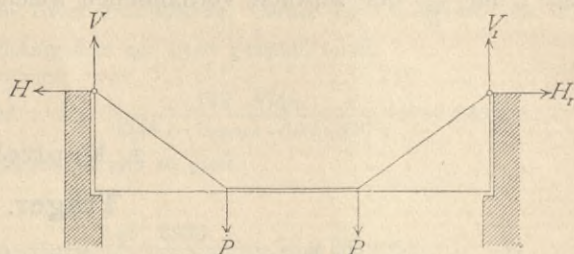


Fig. 161.



der Auflagerdruck an demselben lothrecht, so muß auch der Stützendruck des anderen Auflagers für lothrechte Belastung lothrecht sein; denn die etwaige wagrechte Seitenkraft desselben würde die einzige wagrechte Kraft sein, welche auf den Träger wirkt, und dieselbe muß des Gleichgewichtes wegen gleich Null sein. Wenn also ein Auflager fest ist und das andere wagrechte reibungslose Verschiebung des betreffenden Trägers gestattet, so ist der Träger ein Balkenträger. Auch wenn ein Auflager fest ist, eine Anzahl anderer aber wagrechte und reibungslose Verschiebung gestatten, hat man Balkenträger.

Für den Hochbau kommen die Hängewerksträger (Fig. 161) nur ganz ausnahmsweise zur Verwendung; auch die Sprengwerksträger werden wenig angewendet, weil die wagrechten durch sie auf die Mauern übertragenen Kräfte große Mauerstärken bedingen. Wenn es aber möglich ist, die Auflager der Sprengwerksträger tief zu legen, so daß die wagrechten Kräfte sofort in die Fundamente gelangen können, so empfehlen sich diese Träger sehr. In dieser Weise sind viele große Bahnhofshallen der Neuzeit mit Sprengwerksträgern ausgeführt. Immerhin sind die Balkenträger für den Hochbau die weitaus wichtigsten.

Man unterscheidet ferner statisch bestimmte Träger und statisch unbestimmte Träger.

Unter statisch bestimmten Trägern versteht man solche, bei denen zur Ermittlung der Stützendrücke die Gesetze der Statik starrer Körper hinreichen; bei den statisch unbestimmten Trägern genügen zur Ermittlung der Auflagerdrücke diese Gesetze nicht.

Zur Ermittlung der Stützendrücke bietet die Statik starrer Körper, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirkend angenommen werden können, drei Gleichungen (vergl. Art. 6, S. 8); falls also in den Stützendrücken nur drei Unbekannte enthalten sind, so genügen diese drei Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten, d. h. die Construction ist statisch bestimmt. Enthalten dagegen die Auflagerdrücke mehr als drei Unbekannte, so genügen die drei Gleichungen zu ihrer Ermittlung nicht mehr; der Träger ist alsdann statisch unbestimmt. Die fehlenden Gleichungen liefert die Elasticitätslehre.

Hierbei kommen zwei Hauptfälle vor:

1) Alle drei Gleichgewichtsbedingungen sind anwendbar, d. h. die Stützendrücke enthalten sowohl wagrechte, wie lothrechte Seitenkräfte. Dieser Fall tritt bei den Sprengwerksträgern, Bogenträgern stets, bei den Balkenträgern dann ein, wenn die Belastungen auch wagrechte Seitenkräfte haben (z. B. bei Dachbindern mit Windbelastung);

2) Nur zwei Gleichgewichtsbedingungen geben verwendbare Gleichungen. Dieser Fall tritt bei nur lothrecht belasteten Balkenträgern ein. Alsdann wird die Gleichgewichtsbedingung, welche besagt, daß die wagrechten Kräfte die algebraische Summe Null haben müssen, dazu verwendet, nachzuweisen, daß die Auflagerdrücke lothrecht sind. Für die Berechnung bleiben dann von den in Art. 6 (S. 8) angegebenen Gleichgewichtsbedingungen die folgenden verwendbar:

α) die algebraische Summe der lothrechten Kräfte muß gleich Null sein;

β) die algebraische Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Drehpunkt, muß gleich Null sein. Der einfachste Fall ist der des Balkens auf zwei Stützen. Bei diesem sind

zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten (D_0 und D_1 in Fig. 159) verfügbar; der Fall ist also statisch bestimmt. Sind dagegen drei Stützpunkte vorhanden, so hat man drei Unbekannte (D_0 , D_1 und D_2), aber nur zwei Gleichungen, also einen statisch unbestimmten Fall.

Man nennt die Träger, welche mehr als zwei Stützpunkte haben, continuirliche oder durchgehende Träger; dieselben sind statisch unbestimmte Träger.

a) Äußere Kräfte der Balkenträger.

151.
Momente
und
Querkräfte.

Die Querschnitte der Balken, bzw. der Stäbe, aus denen sich die Balken zusammensetzen, sind so zu bestimmen, daß die zulässigen Beanspruchungen auch unter ungünstigsten Bedingungen in keinem Theile der Querschnittsflächen je überschritten werden. Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, sind aber für die in den einzelnen Querschnittsstellen entstehenden Beanspruchungen oder Spannungen die äußeren Kräfte maßgebend, insbesondere zwei von den äußeren Kräften abhängige Größen: die Biegemomente, auch kurz Momente genannt, und die Quer- oder Transversalkräfte. Für jeden Querschnitt ergeben sich bei einer gegebenen Belastung ein ganz bestimmtes Moment und eine ganz bestimmte Querkraft. Wir haben bei den lothrecht belasteten Balkenträgern nur mit lothrechten Kräften zu thun und werden demnach zunächst und, falls das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird, stets solche voraussetzen.

Es möge hier daran erinnert werden, daß man bei nur lothrechten Kräften als Querkraft eines Querschnittes die Mittelkraft aller an der einen Seite dieses Querschnittes auf den Balken wirkenden Kräfte bezeichnet (siehe Art. 94, S. 70). Die Querkraft hat, absolut genommen, dieselbe Größe, möge man den Trägertheil rechts oder denjenigen links vom betreffenden Querschnitt gelegenen Trägertheil der Betrachtung zu Grunde legen; denn die Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden Kräfte muß derjenigen an der anderen Seite, des Gleichgewichtes wegen, genau gleich sein. Nennt man diese Mittelkräfte bzw. Q_{links} und Q_{rechts} , so muß, da diese beiden Kräfte alle an dem Körper wirkenden äußeren Kräfte in sich schließen, stattfinden:

$$Q_{links} + Q_{rechts} = 0, \text{ also } Q_{rechts} = - Q_{links}.$$

Wirkt also die Querkraft auf den Theil links vom Querschnitt auf den Balken, nach oben, so wirkt sie auf den Theil rechts vom Querschnitt nach unten und umgekehrt. Oder was dasselbe besagt: Führt man die Querkraft auf den Theil links vom Querschnitt als positiv ein, wenn sie nach oben wirkt, so muß man die Querkraft, welche auf den Theil rechts nach unten wirkt, ebenfalls als positiv einführen; beide Richtungen ergänzen einander. Bei den nachfolgenden Untersuchungen werden die Querkräfte als positiv eingeführt, wenn sie auf den Trägertheil links vom betrachteten Querschnitt nach oben, bzw. auf den Trägertheil rechts vom betrachteten Querschnitt nach unten wirken; als negativ, wenn sie auf den Theil links nach unten, bzw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Eben so wird daran erinnert, daß das Biegemoment für einen Querschnitt das resultirende Moment aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte, bezogen auf die im Schwerpunkt des Querschnittes senkrecht zur Kräfteebene stehende Axe als Drehaxe bedeutet. Bei den Trägern mit gegliederter Wand liegt die Drehaxe in der oberen oder unteren Gurtung, je nach der Form des Fachwerkes: bei nur lothrechten äußeren Kräften ändert sich dadurch am Werth des Moments nichts. In

Art. 94 (S. 70) ist bereits nachgewiesen, daß es gleichgiltig ist, an welcher Seite des Querschnittes man die Kräfte betrachtet; nur muß man mit dem Vorzeichen vorsichtig sein. Weiterhin sollen die Momente als positiv eingeführt werden, wenn sie auf den Theil links vom Querschnitt nach rechts drehend (also in der Richtung des Uhrzeigers), bezw. auf den Theil rechts vom Querschnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken so zu drehen streben, daß er seine convexe Seite nach unten kehrt; als negativ, wenn sie den Balken so zu drehen streben, daß er seine convexe Seite nach oben kehrt.

Die Belastungen sind entweder nach einem bestimmten Gesetze fortlaufend über den Träger vertheilt — im Hochbau meistens gleichmäfsig über die wagrechte Projection der Trägeraxe, oder sie greifen in einzelnen Punkten als Einzellaften an. Zu den gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilten Belastungen rechnet man die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau ist.

152.
Belastungen.

Die Gröfse des Eigengewichtes von Decken-Constructionen kann nach den Angaben in Art. 23 u. 24 (S. 18) angenommen werden; bezüglich der Annahmen für die Nutzlast sei auf Art. 26 (S. 20) verwiesen. Da die Belastungen bekannt sind, handelt es sich zunächst um die Ermittlung der durch dieselben erzeugten Stützen drücke, Momente und Querkräfte, ferner um die diesen entsprechenden Querschnitts-abmessungen. Für jeden Querschnitt ist die ungünstigste mögliche Belastung einzuführen.

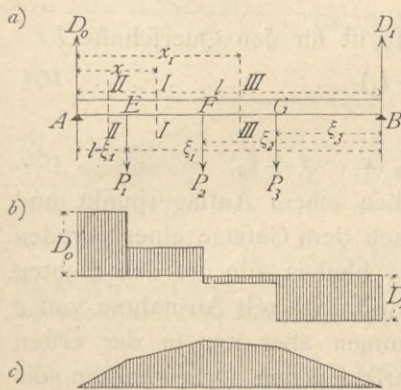
In den folgenden Artikeln soll für die wichtigsten Balkenträger und für verschiedene Belastungsarten die Ermittlung der Auflagerdrücke, der Querkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung, bezw. auf demjenigen der Construction gezeigt werden; die Ergebnisse gelten sowohl für vollwandige, wie für Träger mit gegliederter Wand (Fachwerkträger).

1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Die Stützweite des Trägers, von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet, sei l .
Erster Belastungsfall: Der Träger wird durch beliebige Einzellaften belastet.

153.
Belastung durch Einzellaften.

Fig. 162.



Die Lasten sind P_1, P_2, P_3 , wie aus neben stehender Fig. 162 ersichtlich; für alle Querschnitte des Balkens sollen die Querkräfte und Momente ermittelt werden.

a) Berechnung. Zunächst sind die nicht gegebenen äußeren Kräfte, die Auflagerdrücke D_0 und D_1 , zu bestimmen. Da Gleichgewicht stattfindet, so ist die algebraische Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmäfsig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das statische Moment

Null habe, also nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ist, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der statischen Momente gewählt wird,

$$0 = D_0 l - P_1 \xi_1 - P_2 \xi_2 - P_3 \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} + \frac{P_3 \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) \dots \dots \dots 162.$$

Wählt man in gleicher Weise ein zweites Mal A als Drehpunkt, so ergibt sich

$$D_1 = \frac{P_1 (l - \xi_1)}{l} + \frac{P_2 (l - \xi_2)}{l} + \frac{P_3 (l - \xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P (l - \xi)}{l} \right] \quad 163.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellast zum Gefammtauflagerdruck leistet, ist, wie man aus den Gleichungen 162 u. 163 erieht, ganz unabhängig von der Gröfse und Art der übrigen Belastungen; die Auflagerdrücke sind die Summen der durch die einzelnen Lasten erzeugten Einzeldrücke.

Nunmehr lassen sich die Querkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querschnitt II , im Abstände x vom linken Auflager A , ist die Querkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äußeren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 \dots \dots \dots 164.$$

In diesem Ausdrucke kommt die Abscisse x des Querschnittes gar nicht vor; die Querkraft ist also, so lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von x , d. h. constant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querschnitte zwischen E und F ; denn für einen Querschnitt links von E , etwa für $IIII$, ist

$$Q_{II} = D_0;$$

für einen solchen rechts von F , etwa für $IIIIII$, ist

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Daraus folgt: Falls eine Belastung nur durch Einzellasten stattfindet, ist die Querkraft für alle Querschnitte zwischen je zwei Lastpunkten, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt constant; eine Aenderung der Querkraft findet nur in den Lastpunkten statt.

Das Gesetz der Aenderung der Querkräfte wird sehr anschaulich, wenn man in jedem Querschnitte die dafelbst stattfindende Querkraft als Ordinate nach beliebigem (aber für alle Querschnitte gleichem) Maßstabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Hierdurch ergibt sich die in Fig. 162 *b* gezeichnete Linie, in welcher die positiven Werthe von der Abscisse aus nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen sind.

Was die Bestimmung der Momente anbelangt, so ist für den Querschnitt II

$$M_I = D_0 x - P_1 (x - l + \xi_1) \dots \dots \dots 165.$$

Für den Querschnitt $IIIIII$ ist

$$M_{III} = D_0 x_1 - P_1 (x_1 - l + \xi_1) - P_2 (x_1 - l + \xi_2) \dots \dots \dots 166.$$

Innerhalb je zweier Lastpunkte, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt ändert sich demnach das Moment nach dem Gesetze einer geraden Linie; denn für verschiedene Werthe von x , bezw. x_1 bleiben alle auf den rechten Seiten der Gleichungen 165 u. 166 vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x und x_1 constant; diese einzigen Veränderlichen kommen aber nur in der ersten Potenz vor. Trägt man also auch hier in den verschiedenen Querschnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, so erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Lastpunkt ändert sich der Ausdruck für M , also auch die Gerade. In Fig. 162 *c* ist die Aenderung der Momente graphisch dargestellt.

Da eine Gerade ihre größte Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, diese aber hier mit den Lastpunkten zusammenfallen, so folgt, dafs die

größten Momentenwerthe an den Lastpunkten stattfinden. Dieses Ergebniss ist wichtig. Wenn nur eine Einzellaft P vorhanden ist, so ist demnach das größte Moment stets am Lastpunkte. Liegt alsdann P in den Abständen ξ , bezw. $l - \xi$ von den beiden Auflagern, so ist das Moment am Lastpunkte, also das größte Moment, welches für die Querschnittsbildung maßgebend ist,

$$M_{max} = \frac{P(l - \xi)\xi}{l}.$$

Liegt P in der Mitte des Balkens, so ist $\xi = (l - \xi) = \frac{l}{2}$, also

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}.$$

Sind zwei Einzellaften auf dem Balken, so braucht man nur die beiden Momente an den Lastpunkten zu ermitteln; das größere von beiden ist zugleich das größte. Wenn beide Lasten gleich groß, und zwar je gleich P sind und im gleichen Abstände $\frac{a}{2}$ von der Balkenmitte liegen, so ist das Moment an jedem Lastpunkte

$$M = \frac{P(l - a)}{2}.$$

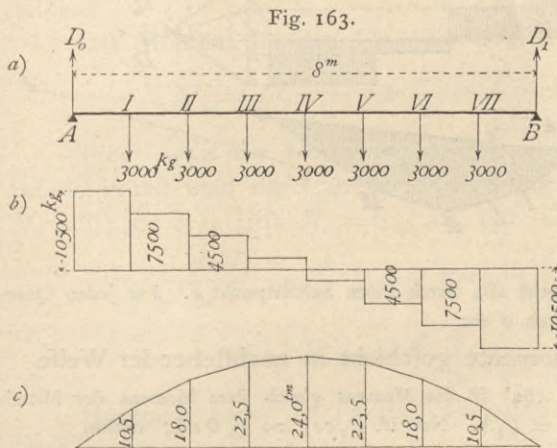
Wenn endlich mehrere Lasten vorhanden sind, braucht man nur die Momente an den Lastpunkten aufzufuchen. Falls der Balken constanten Querschnitt erhält (wie dies z. B. beim Walzbalken der Fall ist), so ist dieser nach dem größten überhaupt stattfindenden Momente zu bestimmen.

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Unterzug (Fig. 163) von 8 m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abstand von Mitte zu Mitte je 1 m beträgt. Jeder Balken belastet den Unterzug mit einem Gewicht von 3000 kg. Die Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente sind zu ermitteln. Nach Gleichung 162 ist

$$D_0 = \frac{3000}{8} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10500 \text{ kg};$$

eben so nach Gleichung 163

$$D_1 = \frac{3000}{8} 28 = 10500 \text{ kg}.$$



In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belastungen symmetrisch zur Mitte des Balkens liegen und die Abstände derselben gleich sind, faßt man bequemer alle Lasten zu einer Mittelkraft, hier ihrer Summe, zusammen, die in der Balkenmitte angreift. Alsdann ist

$$R = 7 \cdot 3000 = 21000 \text{ kg} \quad \text{und} \quad D_0 = \frac{21000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10500 \text{ kg} = D_1.$$

Die Querkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind:

- | | |
|--|--|
| von A bis I = 10500 kg, | von IV bis V = 10500 - 4 · 3000 = - 1500 kg, |
| » I » II = 10500 - 3000 = 7500 kg, | » V » VI = 10500 - 5 · 3000 = - 4500 kg, |
| » II » III = 10500 - 2 · 3000 = 4500 kg, | » VI » VII = 10500 - 6 · 3000 = - 7500 kg, |
| » III » IV = 10500 - 3 · 3000 = 1500 kg, | » VII » B = 10500 - 7 · 3000 = - 10500 kg. |

Im Lastpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Querkraft von den positiven zu den negativen Werthen über.

Die Momente in den Lastpunkten sind:

$$\begin{aligned}
 M_I &= 10500 \cdot 1 = 10500 \text{ kgm} = 1050000 \text{ kgcm}, \\
 M_{II} &= 10500 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = 18000 \text{ kgm} = 1800000 \text{ kgcm}, \\
 M_{III} &= 10500 \cdot 3 - 3000 \cdot 1 - 3000 \cdot 2 = 22500 \text{ kgm} = 2250000 \text{ kgcm}, \\
 M_{IV} &= 10500 \cdot 4 - 3000 (1 + 2 + 3) = 24000 \text{ kgm} = 2400000 \text{ kgcm}, \\
 M_V &= 10500 \cdot 5 - 3000 (1 + 2 + 3 + 4) = 22500 \text{ kgm} = 2250000 \text{ kgcm} = M_{III}, \\
 M_{VI} &= M_{II}, \quad M_{VII} = M_I, \quad M_A = M_B = 0.
 \end{aligned}$$

Hiernach sind die Momente und Querkräfte in Fig. 163 c u. 163 b aufgetragen.

β) Graphische Ermittlung. Um die Auflagerdrücke zu ermitteln, construirt man für die gegebenen Kräfte und den beliebigen Pol O (Fig. 164) das Kraft- und Seilpolygon, ziehe die Schluslinie ab und parallel zu dieser die Linie $O\varepsilon$ durch den Pol O ; dieselbe theilt die Kraftlinie in zwei Theile, von denen $\overline{\delta\varepsilon} = D_1$ und $\overline{\varepsilon\alpha} = D_0$ ist (vergl. Art. 19, S. 16). Nun lassen sich die Querkräfte graphisch leicht ermitteln.

Für alle Querschnitte von A bis E ist die Querkraft gleich D_0 , d. h. gleich $\varepsilon\alpha$ (Fig. 164). Zieht man also durch ε und α je eine Wagrechte, so giebt deren Abstand die GröÙe der Querkraft zwischen A und E an. Zwischen E und F ist die Querkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\alpha - \alpha\beta = \varepsilon\beta$; man ziehe also durch β eine wagrechte Linie; alsdann giebt deren Abstand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwischen E und F die GröÙe der Querkraft. Eben so ist zwischen F und G die Strecke $\varepsilon\gamma$, zwischen G und B die Strecke $\varepsilon\delta$ die Querkraft.

Die Querkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 18 (S. 14) durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygoneiten, welche bezw. der ersten und letzten dieser Kräfte vorangehen und folgen. Für einen Querschnitt zwischen E und F sind D_0 und P_1 die Kräfte, ab und III die betreffenden Seilpolygoneiten; die Querkraft geht also durch ihren Schnittpunkt c . Für jeden Querschnitt zwischen II und III geht die Querkraft durch d etc.

Die graphische Bestimmung der Momente geschieht in nachstehender Weise.

Für einen beliebigen Querschnitt II (Fig. 164) ist das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Querkraft. Demnach ist $M_1 = Q_1 h$. Nun ist $\triangle cef \sim \triangle O\varepsilon\beta$; mithin

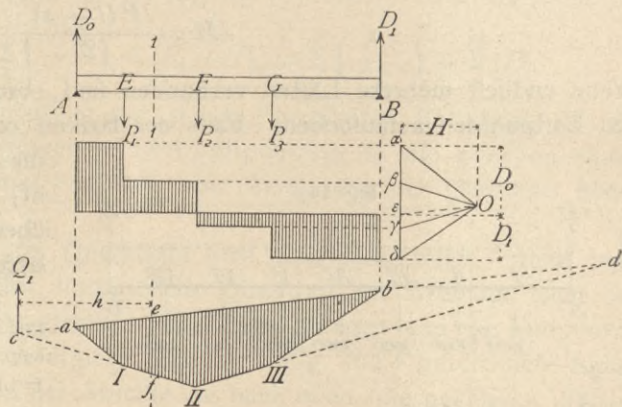
$$\frac{\overline{ef}}{h} = \frac{\overline{\varepsilon\beta}}{H}, \text{ und, da } \overline{\varepsilon\beta} = Q_1 \text{ ist, } \overline{ef} = \frac{Q_1 h}{H} = \frac{M_1}{H}, \text{ also } M_1 = H \cdot \overline{ef}.$$

In vorstehendem Ausdruck für M ist H , der wagrechte Abstand des Poles von der Kraftlinie oder der Polabstand, für alle Querschnitte constant; die GröÙe des Momentes ist also mit \overline{ef} , d. h. der lothrechten Höhe des Seilpolygons veränderlich. Daraus folgt:

Das Moment in jedem Querschnitte ist gleich dem Producte aus dem lothrechten Abstände der Seilpolygoneiten in diesem Querschnitte und dem Polabstand. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heißt die Momentenfläche.

Die Momente sind Producte aus Kräften und Längen; H ist eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit 10^t , 20^t etc. Da das Moment in irgend einem Querschnitt einen ganz bestimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig ist, so wird die Höhe des Seilpolygons desto gröÙser, je kleiner H ist, und umgekehrt.

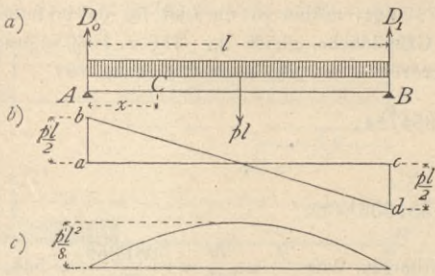
Fig. 164.



Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

154.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

Fig. 165.



Die Belastung für die Längeneinheit des Trägers (Fig. 165) sei p ; alsdann ist die Mittelkraft gleich der Gesamtlast, also gleich $p l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der statischen Momente für B als Drehpunkt heisst demnach:

$$D_0 l - p l \frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p l}{2}; \text{ eben so } D_1 = \frac{p l}{2}. \quad 167.$$

Die Querkraft für einen beliebigen Querschnitt C im Abstände x von A ist

$$Q_x = D_0 - p x = \frac{p l}{2} - p x = \frac{p}{2} (l - 2 x). \quad 168.$$

Die graphische Darstellung der Veränderung der Querkraft ergibt die Linie der Gleichung 168, d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p l}{2}$; für $x = l$ ist $Q_l = -\frac{p l}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2 x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie $b d$ (Fig. 165 *b*) sind also die Querkräfte an den verschiedenen Stellen des Balkens.

Das Moment für den Querschnitt C ist

$$M_x = D_0 x - p x \frac{x}{2} = \frac{p l}{2} x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l x - x^2). \quad 169.$$

Trägt man die Momente in den verschiedenen Querschnitten als Ordinaten auf, so erhält man die Linie der Gleichung 169, d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. M_x hat seinen Größtwerth für

$$\frac{d M_x}{d x} = \frac{p}{2} (l - 2 x) = 0, \text{ d. h. für } x = \frac{l}{2}; \text{ demnach}$$

$$M_{max} = \frac{p}{2} \left[l \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{p l^2}{8}. \quad 170.$$

Hiernach kann die Parabel leicht construirt werden (Fig. 165 *c*). Man trage $\frac{p l^2}{8}$ nach beliebig angenommenem Momenten-Maßstabe auf und verzeichne in bekannter Weise die Parabel; alsdann sind alle Ordinaten auf diesem Maßstabe zu messen.

Nennt man die gefammte auf den Träger entfallende Last $p l = P$, so kann man auch setzen

$$M_{max} = \frac{P l}{8}. \quad 171.$$

Dieser Ausdruck ist oft bequemer, als Gleichung 170. Wenn eine Last P als Einzelkraft in der Mitte wirkt, so erzeugt sie nach Art. 153 (S. 145) ein Maximalmoment

$M_{max} = \frac{P l}{4}$, d. h. ein doppelt so großes Moment, als die gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Last P .

Beispiele. 1) Ein Flurgang von 4^m Lichtweite ist mit einer Decke aus Kappengewölben zwischen eisernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen sei 2,2^m; die Träger sollen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu 4,3^m, d. i. zu 430^{cm} angenommen werden; alsdann ist $l = 430$ cm. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von 2,2^m Breite und 1^m Länge; mithin ist die Last für das laufende Meter Träger, bei einer Größtbelastung von 750^{kg} für 1^{qm} Grundfläche, gleich $2,2 \cdot 750 = 1650$ kg und für das laufende Centimeter Träger $p = 16,5$ kg. Die Auflagerdrücke sind also nach Gleichung 167

$$D_0 = D_1 = \frac{16,5 \cdot 430}{2} = 3547 \text{ kg,}$$

und das Größtmoment nach Gleichung 170

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16,5 \cdot 430^2}{8} = 381356 \text{ kgcm.}$$

Nun ist der Querschnitt nach Art. 97 (S. 76) so zu bestimmen, daß $\frac{F}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381356}{700} = 544,8$ ist. Falls ein I-Querschnitt gewählt wird, ist Nr. 28 der »Deutschen Normal-Profile« zu wählen, da bei demselben $\frac{F}{a} = 547$ ist³²⁾.

2) Es sollen die Abmessungen bestimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6^m zu geben sind, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte 0,9^m und die Gesamtbelastung der betreffenden Decke (Eigengewicht und Nutzlast) 500^{kg} für 1^{qm} beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von 0,9^m Breite zu tragen, d. h. eine Last von $0,9 \cdot 500 = 450$ kg; mithin beträgt die Belastung für das laufende Centimeter des Balkens $p = 4,5$ kg. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu 6,3^m = 630^{cm} an. Das größte Moment, welches hier, da der Balkenquerschnitt constant ist, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden muß, findet in der Balkenmitte statt und ist nach Gleichung 170

$$M_{max} = \frac{4,5 \cdot 630^2}{8} = 223256 \text{ kgcm;}$$

mithin nach Art. 100 (S. 79)

$$\frac{F}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 19 (S. 35): $F = \frac{b h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ist, wird $\frac{b h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25$ cm angenommen wird,

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29,9 \text{ cm} = \infty 30 \text{ cm.}$$

Sonach genügt ein Querschnitt von 25×30 cm.

Dritter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Eine Last P im Abstände x vom linken Auflager A (Fig. 166) erzeugt die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l-x)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P x}{l}.$$

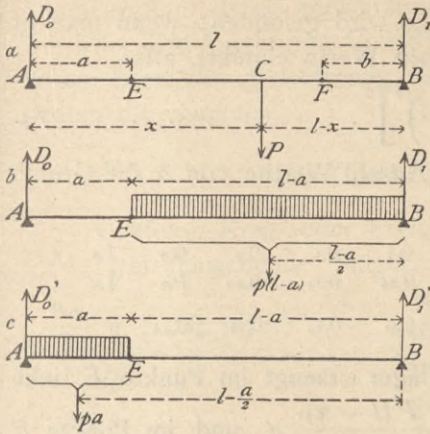
Die Querkraft ist für jeden Querschnitt E links vom Lastpunkte C

$$Q = D_0 = \frac{P(l-x)}{l}, \text{ d. h. positiv;}$$

für jeden Querschnitt F rechts vom Lastpunkt C :

³²⁾ Man muß beim Einsetzen der Zahlenwerthe für p und l vorsichtig sein. Es ist eigentlich selbstverständlich, daß, wenn man l in Metern einführt, p die Belastung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belastung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner K , die zulässige Beanspruchung, in Kilogramm für 1^{qm} und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, so sind in der Gleichung $\frac{F}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für F und a auf Centimeter bezogen einzusetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüssig sein, hier besonders darauf aufmerksam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in dieser Hinsicht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt sich, stets Alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

Fig. 166.



$$Q_1 = D_0 - P = \frac{P(l-x)}{l} - P = -\frac{Px}{l},$$

d. h. negativ. Daraus folgt der Satz: In einem Querschnitt erzeugt jede rechts liegende Last eine positive, jede links liegende Last eine negative Querkraft. Demnach wird in irgend einem Querschnitte, etwa *E*, die grösste Querkraft (Q_{max}) stattfinden, wenn die ganze Tragerabtheilung rechts von *E* belastet, der übrige Trägertheil (*AE*) unbelastet ist (Fig. 166 *b*). Die kleinste Querkraft (Q_{min}) wird in *E* eintreten, wenn die Abtheilung *AE* links von *E* belastet, die Abtheilung *EB* rechts von *E* unbelastet ist (Fig. 166 *c*).

Man erhält die Werthe von Q_{max} , bezw. Q_{min} für den Querschnitt *E*, welcher um *a* vom linken Auflager entfernt liegt und für die Belastung *p* auf das laufende Meter, wie folgt. Für die Belastung nach Fig. 166 *b* ist

$$D_0 = Q_{max} = \frac{p(l-a)^2}{2l}; \dots \dots \dots 172.$$

für die Belastung nach Fig. 166 *c* ist

$$D_0' = \frac{pa}{l} \left(l - \frac{a}{2} \right) = pa - \frac{pa^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = D_0' - pa;$$

folglich

$$Q_{min} = -\frac{pa^2}{2l} \dots \dots \dots 173.$$

Die Belastung nach Fig. 166 kommt im Hochbau sehr häufig vor, z. B. bei Trägern unter Mauern, in welchen sich Fenster- oder Thüröffnungen befinden. Für die Querschnittsbemessung ist das grösste Moment maassgebend, welches demnach aufgefucht werden soll.

Für irgend einen Punkt *C* der Strecke *AE* (Fig. 167) ist das Moment

$$M_x = D_0 x = \frac{p(l-a)^2}{2l} x;$$

die graphische Darstellung ergibt eine Gerade. Für einen Punkt *F* der Strecke *CB* ist das Moment bequem durch Betrachtung des rechts von *F* gelegenen Trägertheiles zu finden. Es ist

$$M_\xi = D_1 (l - \xi) - \frac{p(l-\xi)^2}{2}, \quad \text{woraus} \quad M_\xi = \frac{p}{2l} (l - \xi) (l\xi - a^2).$$

Auf dieser Strecke ergibt also die graphische Darstellung des Momentes eine Parabel. Dieselbe hat ihr Maximum für

$$\xi_{max} = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2l}.$$

Aus der Formel ergibt sich, daß das Maximum des Momentes stets in einem Punkte der belasteten Strecke EB stattfindet. M_{max} wird gefunden, wenn man in den Ausdruck für M_ξ statt ξ den für ξ_{max} gefundenen Werth einführt, also

$$M_{max} = \frac{p l^2}{8} \left[1 - \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]^2 \dots \dots \dots 174.$$

Nachstehende kleine Tabelle ergibt für eine Anzahl Werthe von a die Größe von M_{max} und von ξ_{max} :

Für	$a = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	l
	$\xi_{max} = 0,5$	0,505	0,52	0,545	0,58	0,625	0,68	0,745	0,82	0,9	1,0	l
	$M_{max} = 1$	0,98	0,92	0,83	0,71	0,56	0,41	0,26	0,13	0,04	0	$\frac{p l^2}{8}$

156.
Größte Momente
durch
gleichförmig
vertheilte
Laften.

Eine Last P im Abstände x vom linken Auflager erzeugt im Punkte E links vom Lastpunkte (Fig. 166 a) ein Moment $M_a = \frac{P(l-x)}{l} a$ und im Punkte F rechts vom Lastpunkte das Moment $M_b = \frac{P x}{l} b$. Beide Momentenwerthe sind positiv; also erzeugt eine jede Einzellaft in allen Trägerquer schnitten positive Momente. Die größten Momente in den einzelnen Trägerquer schnitten werden demnach stattfinden, wenn alle Trägerpunkte belastet sind, d. h. bei voller Belastung des Trägers. Ist also volle Belastung eines Trägers mit gleichmäÙig vertheilter Last p möglich, so ruft diese die größten Momente hervor und ist deshalb der Berechnung zu Grunde zu legen. Bei dieser Belastung ist nach Gleichung 169 für einen Querschnitt mit der Abscisse x

$$M_x = \frac{p}{2} (l x - x^2) \dots \dots \dots 175.$$

157.
Gleichförmig
vertheilte Laft
und Einzellaften,
bezw. theilweise
Belastung.

Vierter Belastungsfall: Der Träger wird auf seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last und außerdem durch Einzellaften oder auf einen Theil seiner Länge durch eine weitere gleichförmig vertheilte Last belastet.

Da jeder Träger außer der Nutzlast noch das Eigengewicht tragen muß, dieses aber als gleichförmig über die ganze Länge vertheilt angenommen werden kann, so ist dieser Fall der am häufigsten vorkommende.

In Art. 153 ist nachgewiesen, daß jede Last einen von den sonst noch auf dem Balken befindlichen Laften unabhängigen Stützdruck erzeugt, und daß der Gesamt-Stützdruck gleich der algebraischen Summe der Einzeldrücke ist. Daraus folgt, daß auch die Querkräfte und Momente für alle Querschnitte gleich den algebraischen Summen der bez. Theil-Querkräfte und Momente sind.

Demnach brauchen im vorliegenden Falle nur die Stützdrücke, Querkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belastungen, derjenigen durch Einzellaften und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Last u. f. w., sich ergeben haben, algebraisch addirt zu werden, was sowohl auf dem Wege der Rechnung, wie graphisch geschehen kann.

Fig. 168.

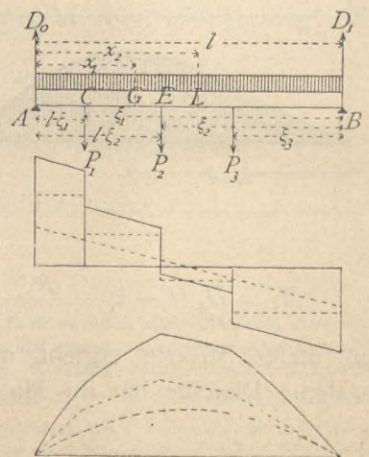


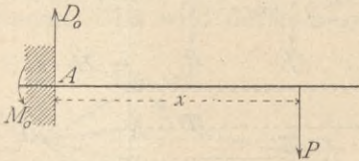
Fig. 168 stellt die Querkräfte und Momente dar, welche in den verschiedenen Querschnitten durch gleichförmig vertheilte Last und Einzellasten hervorgerufen werden. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M nur für Einzellasten, bezw. für gleichförmig vertheilte Last an; die voll ausgezogenen Linien bedeuten die Summen.

2) Console-, Krag- oder Freiträger.

Console-, Krag- oder Freiträger sind am einen Ende unterstützte, am anderen Ende frei schwebende Träger. Als äußere Kräfte wirken auf dieselben die Belastungen und die Auflagerdrücke der Unterstützungsstelle. Letztere lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht sei, muß zunächst die algebraische Summe der lothrechten Kräfte gleich Null sein, d. h. wenn die lothrechte Seitenkraft des Auflagerdruckes bei A (Fig. 169) gleich D_0 ist, wird $0 = D_0 - P$ oder

158.
Erklärung.

Fig. 169.



$$D_0 = P \dots \dots \dots 176.$$

Eine äußere wagrechte Belastung sei nicht vorhanden; daher wird der Auflagerdruck keine wagrechte Seitenkraft haben. Es muß aber auch die algebraische Summe der statischen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, also etwa für A , gleich Null sein; mithin muß, da das Moment der gegebenen Kräfte für A nicht gleich Null ist, D_0 aber für den Drehpunkt A kein statisches Moment hat, an der Unterstützungsstelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren resultirendes Moment mit demjenigen der Belastungen zusammen die Summe Null ergibt. Bei A wirkt also ein Moment M_0 , dessen Größe sich bei dem in Fig. 169 gezeichneten Drehinn aus der Gleichung ergibt:

$$Px - M_0 = 0, \text{ d. h. } M_0 = + Px \dots \dots \dots 177.$$

Dieses Moment, dessen Drehinn demjenigen von P entgegengesetzt ist, kann auf verschiedene Weise erzeugt werden, am einfachsten durch Einmauerung, bezw. Einspannung des Balkens.

Soll für jede Belastungsart Gleichgewicht vorhanden sein, so muß der Balken derart eingemauert werden, daß das von der Mauer geleistete Moment auch die größten Werthe des Momentes der Belastungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheil liegende Mauergewicht geleistet, wonach dieses zu bestimmen ist.

Auch in anderer Weise kann ein Moment in A erzeugt werden, z. B. dadurch, daß der Balken über den Punkt A hinaus, bis zu einer zweiten Stütze B , verlängert wird.

Die Console-Träger sind statisch bestimmt, da die beiden Unbekannten: der Auflagerdruck D_0 und das Moment M_0 , nach den Gesetzen der Statik fester Körper ermittelt werden können. Im Folgenden werden der Auflagerdruck, die Querkräfte und die Momente, wie beim Balkenträger auf zwei Stützen gesucht; daher werden bezüglich der Belastungsart drei Fälle unterschieden:

Erster Fall: Der Console-Träger wird durch beliebige Einzellasten belastet.

159.
Belastung
durch
Einzellasten.

Die freie Balkenlänge AB (Fig. 170) sei gleich l ; alsdann ist der Stützendruck

$$D_0 = P_1 + P_2 + P_3 = \sum_0^l (P) \dots \dots \dots 178.$$

und das Moment

$$M_0 = -(P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3) = -\sum_0^l (P \xi) \dots \dots \dots 179.$$

Für einen beliebigen Querschnitt C zwischen A und E beträgt die Querkraft $Q = D_0 = \Sigma (P)$; diesen Werth hat Q für alle Punkte zwischen A und E . Für irgend einen Querschnitt L zwischen E und F ist $Q_1 = D_0 - P_1$, und es ist allgemein

$$Q = \sum_0^l (P) - \sum_0^x (P) = \sum_x^l (P) \dots \dots \dots 180.$$

Die Querkraft in jedem Querschnitte ist also gleich der Summe der zwischen diesem Querschnitte und dem freien Ende befindlichen Lasten. Dies folgt schon aus der Erklärung der Querkraft. Als graphische Darstellung der Veränderung der Querkräfte ergibt sich die neben stehende Construction (Fig. 170 b).

Für einen beliebigen Punkt L mit der Abscisse x wird das Moment $M = - [P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)]$; allgemein wird sonach

$$M = - \sum_x^l [P (\xi - x)] \dots \dots \dots 181.$$

Die graphische Darstellung der Momente zwischen je zwei Lastpunkten ergibt also eine Gerade, wie in Fig. 170 c gezeichnet ist.

Die Momente sind als negativ einzuführen, weil die Kräfte das Bestreben haben den Balken so zu biegen, daß er seine convexe Seite nach oben kehrt (vergl. Art. 151, S. 142).

Sowohl Querkraft, wie Moment ist bei dieser, demnach auch bei jeder Belastung, am Auflager-, bzw. Einspannungspunkte am größten; diese Stelle ist also bei den Console-Trägern die am meisten gefährdete. Wird, wie im Hochbau meistens, der Balken mit constantem Querschnitt ausgeführt, so ist der am Einspannungspunkte nöthige Querschnitt der Ausführung zu Grunde zu legen.

Zweiter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Für den Auflagerpunkt A (Fig. 171) ergeben sich der Auflagerdruck und das Moment zu

$$D_0 = p l \text{ und } M_0 = - \frac{p l^2}{2}; \dots \dots \dots 182.$$

für einen Punkt C mit der Abscisse x betragen die Querkraft und das Moment

$$Q_x = p (l - x) \text{ und } M_x = - \frac{p (l - x)^2}{2} \dots \dots \dots 183.$$

Die graphische Darstellung der Werthe von Q ergibt eine Gerade; für $x = 0$ ist

Fig. 170.

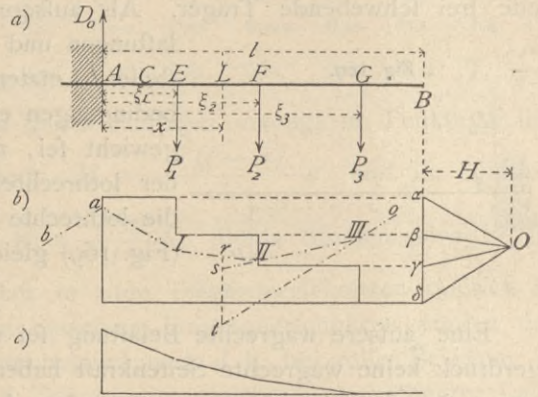
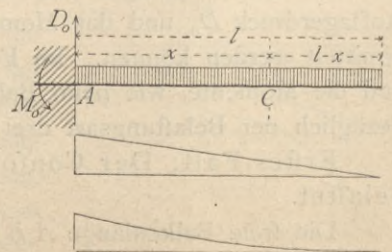


Fig. 171.



160.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

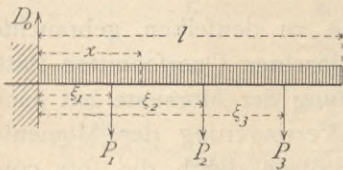
$Q_0 = p l$, für $x = l$ ist $Q_l = 0$. Diejenige der Werthe von M ergibt eine Parabel; für $x = 0$ ist $M_0 = -\frac{p l^2}{2}$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. Da ferner für $x = l$ auch $\frac{d M_x}{d x} = +p(l - x)$ Null wird, so ist die Abscissenaxe im Punkte $x = l$ eine Tangente an die Parabel. Die Momente und Querkräfte sind in Fig. 171 c und 171 b graphisch dargestellt. Der grösste Werth des Momentes und der Querkraft findet an derselben Stelle, an der Einspannungsstelle, statt.

Dritter Fall: Der ConSOLE-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Belastung und durch Einzellaften belastet.

Die Stützendrücke, Querkräfte und Momente ergeben sich als die Summen der bei den einzelnen Belastungen stattfindenden Stützendrücke, Querkräfte und Momente. Es wird deshalb genügen, hier die Werthe anzugeben (Fig. 172):

161.
Gleichförmig
vertheilte
Last und
Einzellaften.

Fig. 172.

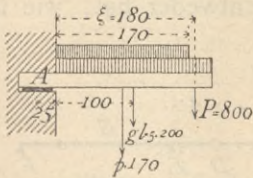


$$\left. \begin{aligned} D_0 &= P_1 + P_2 + P_3 + p l = \sum_0^l P + p l \\ Q_x &= \sum_x^l P + p(l - x) \\ M_x &= -\sum_x^l [P(\xi - x)] - \frac{p(l - x)^2}{2} \end{aligned} \right\} \cdot 184.$$

Eben so wird die Veränderlichkeit der Q und M durch graphische Addition der für die Einzelbelastungen sich ergebenden Werthe von Q und M graphisch dargestellt.

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Balcon-Träger von 2 m freier Länge hat als Eigengewicht eine gleichmäfsig vertheilte Belastung von 500 kg für das laufende Meter und eine Nutzlast von 800 kg für das laufende Meter zu tragen, ausserdem noch das Gewicht der Brüstung mit 800 kg in 1,8 m Abstand von der Wand. Demnach ist, wenn Alles in Centimetern angegeben wird, $g = 5$ kg, $p = 8$ kg, $P = 800$ kg, $\xi = 180$ cm und $l = 200$ cm.

Fig. 173.



Die Nutzlast habe nur eine Länge von 170 cm.

Als Berechnungsweite darf man nicht die freie Länge bis zur Wand einführen, sondern muss diejenige bis zur Auflagermitte nehmen, welche hier etwa 25 cm hinter der Mauerkannte liegen möge. Alsdann ist für den Punkt A (Fig. 173), wenn M_g das Größtmoment für ruhende, M_p dasjenige für bewegliche Last bezeichnet, abfolut genommen

$$M_g = P(\xi + 25) + g l \left(\frac{l}{2} + 25 \right) = 800 \cdot 205 + 1000 \cdot 125 = 289\,000 \text{ kgcm},$$

$$M_p = p \cdot 170 \left(\frac{170}{2} + 25 \right) = 8 \cdot 170 \cdot 110 = 149\,600 \text{ kgcm}.$$

Der Querschnitt an der Stelle A ist so zu bestimmen, dass, wenn als zulässige Beanspruchung $K = 800$ kg gewählt wird, stattfindet:

$$\frac{f}{a} = \frac{M}{K} = \frac{289\,000 + 149\,600}{800} = 548.$$

Profil Nr. 28 der »Deutschen Normal-Profile für I-Eisen« hat ein Widerstandsmoment $\frac{f}{a} = 547$, dürfte also für den vorliegenden Fall genügen.

Es möge hier noch einmal besonders darauf hingewiesen werden, dass die ConSOLE-Träger hauptsächlich dann gefährdet sind, wenn das am Einspannungspunkte von der Mauer geleiftete Moment nicht die genügende Grösse hat. Damit Gleichgewicht bestehe, muss dieses Moment wenigstens so groß sein, wie das grösstmögliche

Moment der äußeren Kräfte für A . Auch hier ist aber ein Sicherheits-Coefficient n nöthig, und wenn beispielsweise dieses Einspannungsmoment durch das Gewicht des auf dem hinteren Balkentheile ruhenden Mauerwerkes geleistet wird (Fig. 174), so muß $G_1 g_1 = n M_0$ sein. Es dürfte sich empfehlen, n nicht kleiner als 4 zu nehmen.

Dabei ist aber auch zu beachten, daß die Art der Construction dafür Gewähr bieten muß, daß das Gewicht G_1 wirklich zur Wirksamkeit kommt — etwa durch angemessene Unterlagsplatten, Verband, Cementmörtel u. dergl. Unter Umständen kann man auch das Gewicht des unterhalb gelegenen Mauerwerkes durch Anker und Ankerplatten am Balkenende aufhängen und dadurch für die Stabilität des Console-Trägers nutzbar machen. Zu beachten ist auch, ob nicht ein Ausreißen nach der punktirten Linie in Fig. 174 möglich ist.

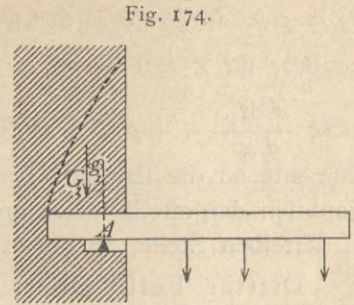


Fig. 174.

3) Continuirliche Gelenkträger, Auslegerträger oder Gerber-Träger.

162.
Princip.

Die Querschnittsgröße der Träger und damit die zu denselben gebrauchte Stoffmenge ist wesentlich von der Größe der in den einzelnen Querschnitten stattfindenden größten Momente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querschnittsverringernng zur Folge. Eine solche Verringerung der Momente wird gegenüber den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen durch die fog. continurlichen Gelenkträger oder Auslegerträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles der Träger durch die übergekragten Enden der Nachbarträger gebildet werden. Man erhält dadurch für die verschiedenen Oeffnungen verschiedene Trägerarten, und zwar wechselt immer ein Träger mit einem, bezw. zwei Auslegern an den Enden und ein solcher ohne Ausleger ab.

Für drei neben einander liegende Oeffnungen I, II, III sind die hauptsächlich vorkommenden Anordnungen in Fig. 175 a u. b dargestellt. Entweder hat, wie in Fig. 175 a gezeichnet ist, jeder Seitenträger I und III einen über das Auflager B , bezw. E vorragenden Ausleger BC , bezw. DE , auf deren Enden der Mittelträger CD frei aufruft, oder der Mittelträger CD hat, wie in Fig. 175 b , jederseits ein Kragstück BC , bezw. DE , und die Seitenträger AB und EF ruhen einerseits auf den Endstützpunkten A , bezw. F , andererseits auf den Enden B und E der erwähnten Kragstücke oder Ausleger.

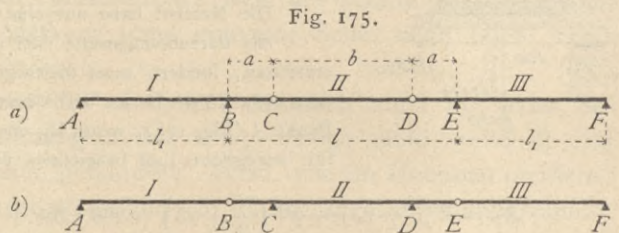


Fig. 175.

Die Pfetten der größeren eisernen Dächer werden neuerdings meistens als solche Träger nach Fig. 176 hergestellt, wo immer ein Träger mit zwei Auslegern an den Enden und ein auf diesen Auslegern frei aufgelagerter Träger abwechseln. Die Beanspruchung in diesem Falle stimmt genau mit derjenigen der in Fig. 175 b angegebenen Anordnung überein; jeder Träger mit zwei Consofen an den Enden wird wie Träger $BCDE$ in Fig. 175 b beansprucht; jeder andere Träger wie AB ,

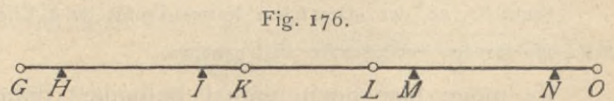


Fig. 176.

bezw. EF dieser Figur. Es genügt deshalb, die beiden Anordnungen in Fig. 175 a u. b in das Auge zu fassen.

Erste Anordnung: Die Kragstücke befinden sich an den Seitenträgern (Fig. 175 a).

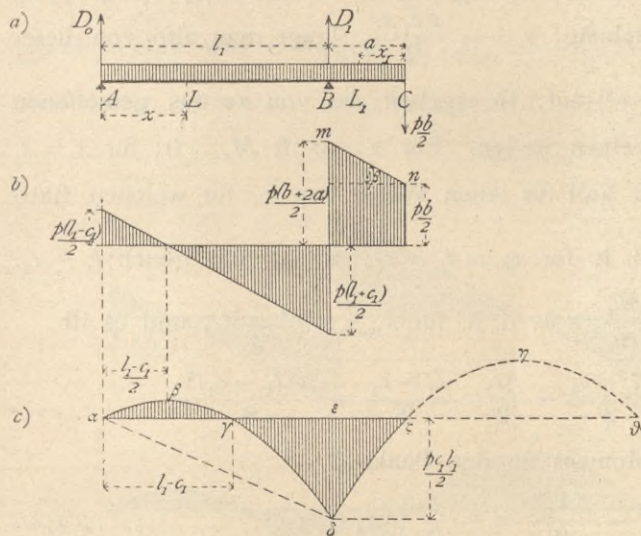
163.
Erste
Anordnung.

α) Erster Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

α) Seitenträger mit einseitigem Kragstück. Es sei $AB = l_1$, $BE = l$, $BC = DE = a$ und $CD = b$, also $l = 2a + b$; ferner sei die Belastung für die Längeneinheit des Trägers p . Alsdann wirkt aufser dieser Belastung auf den

Seitenträger in C eine Kraft nach unten, welche dem im Punkte C auf den Balken CD nach oben wirkenden Auflagerdruck (nach dem Gesetze der Wechselwirkung, vergl. Art. 9, S. 10) genau gleich ist, d. h. eine Kraft $\frac{pb}{2}$. Der Stützendruck im Auflagerpunkte A (Fig. 177 a) ergibt sich durch Aufstellung der Gleichung der statischen Momente für Punkt B zu

Fig. 177.



$$D_0 = \frac{pl_1}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{ab + a^2}{l_1}$$
 Setzt man die nur von den Längen abhängige Constante $\frac{ab + a^2}{l_1} = c_1$, so ist

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) \quad \dots \quad 185.$$

Weiters ist der Stützendruck im Auflagerpunkte B

$$D_1 = \frac{pl_1}{2} + \frac{pb}{2} \cdot \frac{l_1 + a}{l_1} + pa \frac{l_1 + \frac{a}{2}}{l_1} = \frac{p}{2} (l_1 + c_1 + 2a + b) \quad \dots \quad 186.$$

In der Strecke AB beträgt die Querkraft für einen Punkt L mit der Abscisse x , von A aus gerechnet,

$$Q_x = D_0 - px = \frac{p}{2} (l_1 - c_1 - 2x), \quad \dots \quad 187.$$

d. h. die graphische Darstellung ergibt eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1)$; für $x = l_1$ ist $Q'_1 = -\frac{p}{2} (l_1 + c_1)$; die Querkraft wird Null für $x_0 = \frac{l_1 - c_1}{2}$.

In der Strecke BC ist die Querkraft für einen Punkt L_1 mit der Abscisse x_1 , von C aus gerechnet,

$$Q_{x_1} = \frac{p}{2} (b + 2x_1), \quad \dots \quad 188.$$

d. h. die graphische Darstellung derselben ergibt eine Gerade. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{pb}{2}$; für $x_1 = a$ ist $Q_a = \frac{p}{2}(b + 2a)$. Die Querkräfte sind in Fig. 177 b graphisch dargestellt.

In der Strecke AB ist das Moment für den Punkt L

$$M_x = D_0 x - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2}(l_1 - c_1)x - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2}(l_1 x - x^2) - \frac{pc_1 x}{2} \dots 189.$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist das Moment, welches in einem frei aufliegenden Balken AB von der Länge l_1 entstehen würde; in Folge des Auslegers und seiner Belastung erhält man demnach hier an jeder Stelle ein um $\frac{pc_1 x}{2}$ kleineres Moment. Die graphische Darstellung ergibt eine Parabel $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 177 c); die Linie $\alpha\delta$ ist die Linie der Gleichung: $y = -\frac{pc_1 x}{2}$. Trägt man also von dieser aus die Ordinaten $z = \frac{p}{2}(l_1 x - x^2)$ auf, so ergeben die von $\alpha\varepsilon$ aus gemessenen Ordinaten die Momente an den einzelnen Stellen. Für $x = 0$ ist $M_x = 0$; für $x = l_1$ ist $M_{l_1} = -\frac{pc_1 l_1}{2} = \varepsilon\delta$. M_x wird Null für jenen Werth von x , für welchen stattfindet: $0 = \frac{p}{2}(l_1 - x) - \frac{pc_1}{2}$, d. h. für $x_0 = l_1 - c_1$; $\alpha\gamma$ ist also gleich $l_1 - c_1$.

M_x hat seinen Größtwerth für $\frac{dM_x}{dx} = 0$, d. h. für $x_{max} = \frac{l_1 - c_1}{2}$, und es ist

$$M_{max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} \cdot \frac{l_1 + c_1}{2} - \frac{pc_1}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} = \frac{p(l_1 - c_1)^2}{8}.$$

In der Strecke BC ist das Moment für den Punkt L_1

$$M_{x_1} = -\frac{pb}{2}x_1 - \frac{px_1^2}{2} = -\frac{p}{2}(bx_1 + x_1^2), \dots 190.$$

d. h. die graphische Darstellung liefert eine Parabel. M_{x_1} wird Null für $x_1 = 0$ und für $b + x_1 = 0$, d. h. für $x_1 = -b$, also für Punkt C , und wenn die Curve über den Nullpunkt C nach rechts auf die negative Seite der Abscissenaxe fortgesetzt wird, für den Punkt D (Fig. 175 a). Ferner wird M_{x_1} ein Größtwerth für $0 = b + 2x_1$, d. h. es wird $x_{1max} = -\frac{b}{2}$. Für $x_1 = a$, d. h. für den Auflagerpunkt B , wird

$M_{x_1} = -\frac{p}{2}(ab + a^2) = -\frac{p}{2}c_1 l_1$, wie bereits oben gefunden. Hiernach ist die Parabel $\delta\zeta\eta\theta$ in Fig. 177 c construiert.

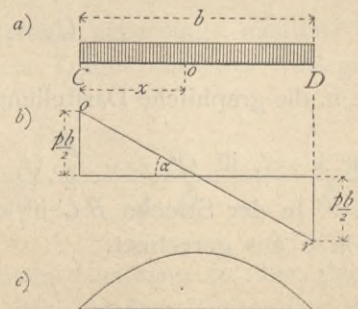
b) Balkenträger auf den beiden Kragstücken. Für diesen Träger CD (Fig. 178) gilt das unter 1 für den Träger auf zwei Stützen Gefundene. Daher ist für einen Punkt mit der Abscisse x

$$Q_x = \frac{p}{2}(b - 2x) \text{ und } M_x = \frac{p}{2}(bx - x^2). \dots 191.$$

Die graphischen Darstellungen der Querkräfte und Momente giebt Fig. 178.

c) Ganzer Träger. Betrachtet man nun den ganzen Träger (Fig. 179), so sieht man zunächst, das

Fig. 178.

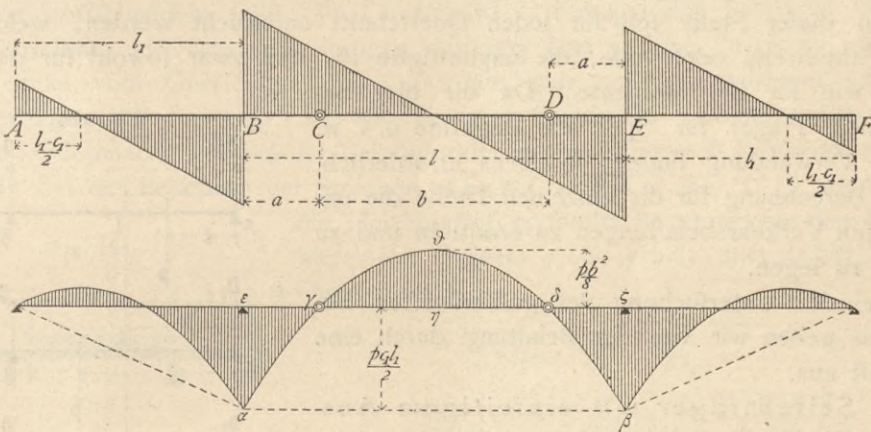


die Querkräfte und Momente in C gleiche GröÙe haben, ob man vom Träger ABC oder vom Träger CD ausgeht. Auch die Neigung der Linie or , welche die Querkraft auf CD darstellt (Fig. 178), stimmt mit derjenigen von mn (Fig. 177), welche die Querkraft der Strecke BC darstellt, überein; denn es ist (Fig. 178)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{p b}{2}}{\frac{p a}{2}} = p \quad \text{und (Fig. 177 b)} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{p a}{a} = p, \quad \text{d. h. } \beta = \alpha;$$

demnach bilden die beiden Linien or und mn eine einzige Linie. Auch die Momenten-Curven beider Theile stimmen überein; denn für die Abtheilung BC ist nach Gleichung 190: $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2)$ und für negative x_1 , d. h. für Punkte, welche rechts von C liegen, ist $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (-b x_1 + x_1^2) = +\frac{p}{2} (b x_1 - x_1^2)$.

Fig. 179.



Dies ist aber nach Gleichung 191 der Werth, welcher sich für das Moment auf der Strecke CD ergibt. Die in Fig. 177c gezeichnete Curve $\delta\xi\eta\vartheta$ ist also die richtige Momenten-Curve.

In Fig. 179 sind die Momente und Querkräfte für den ganzen Träger angegeben.

b) Vergleich mit dem Träger auf zwei Stützen. Für den mittleren Theil $BCDE$ (Fig. 179) sind die Querkräfte genau, wie bei einem frei aufliegenden Träger von der Spannweite $l = 2a + b$; für die Seitenträger sind die Querkräfte an jeder Stelle um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, als beim einfachen, auf den Stützen A und B aufliegenden Balkenträger. Die absoluten Werthe der Querkräfte sind also auf der positiven Seite um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, auf der negativen Seite um $\frac{p c_1}{2}$ größer, als dort.

Was die Momente anbelangt, so ist für die Seitenträger oben bereits nachgewiesen, dass das Moment an jeder Stelle um $\frac{p c_1 x}{2}$ kleiner ist, als beim frei aufliegenden Balkenträger von der Spannweite l_1 . Falls der Mittelträger in B und E frei auflage, würde an einer beliebigen Stelle mit der Abszisse ξ , von B aus gemessen, das Moment $M_\xi = \frac{p}{2} (l\xi - \xi^2) = \frac{p}{2} [(b + 2a)\xi - \xi^2] = p a \xi + \frac{p}{2} b \xi - \frac{p \xi^2}{2}$ sein,

oder, wenn man des bequemeren Vergleiches halber die Abscissen vom Punkt C aus rechnet und mit x bezeichnet (nach rechts positiv), so wird $\xi = a \pm x$ und nach einigen Umformungen

$$M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2) + \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Für den Mittelträger $BCDE$ mit den Gelenken in C und D ist, wie oben gezeigt, das Moment $M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2)$, also um $\frac{p}{2} c_1 l_1$ kleiner, als wenn die Auflagerung in gewöhnlicher Weise in B und E erfolgte. Nun ist aber diese Differenz $\frac{p}{2} c_1 l_1$ gerade das negative Moment an den Stützen B und E ; die von der Wagrechten $\alpha\beta$ in Fig. 179 aus gemessenen Ordinaten ergeben daher die Momente des in B und E frei aufliegenden Trägers. Construirt man demnach die Parabel der Gleichung $\frac{p}{2} (l\xi - \xi^2)$ in gewöhnlicher Weise und zieht durch die Punkte γ und δ , in welchen die Lothrechten der Auslegerenden die Parabel schneiden, eine Wagrechte $\varepsilon\zeta$, so sind die von dieser Linie aus gemessenen Ordinaten die Momente.

Es empfiehlt sich, die Auslegerlänge so zu bestimmen, das das negative Moment über den Stützen abfolot genommen genau so groß ist, wie das positive Moment in der Mitte. Man theile zu diesem Zwecke einfach die Pfeilhöhe der Parabel $\alpha\beta$ in zwei gleiche Theile und ziehe durch den Theilpunkt eine Wagrechte; alsdann geben die Längen $\varepsilon\gamma$, bezw. $\delta\zeta$ die Längen der Ausleger.

β) Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

An dieser Stelle soll für jeden Querschnitt untersucht werden, welche Belastung, theilweise oder volle, die ungünstigste ist, und zwar sowohl für die Querkkräfte, wie für die Momente. Da die hier besprochenen Träger für Speicher, Magazine u. f. w. vielfach Verwendung finden, so ist es erforderlich, bei der Berechnung für die einzelnen Theile die ungünstigsten Verkehrsbelastungen zu ermitteln und zu Grunde zu legen.

Bei der Untersuchung der gefährlichsten Belastungen gehen wir von der Belastung durch eine Einzellast aus.

a) Seitenträger mit einseitigem Ausleger. Es ist die Belastung zu ermitteln, welche in einem Querschnitt L im Abstände x vom linken Auflager A die größte Querkraft und das größte Moment hervorruft. Liegt eine Last P links von L im Abstände ξ von A (Fig. 180 a), so erzeugt sie die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l_1 - \xi)}{l_1} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P\xi}{l_1},$$

ferner

$$Q = -\frac{P\xi}{l_1} \quad \text{und} \quad M = \frac{P\xi}{l_1} (l_1 - x).$$

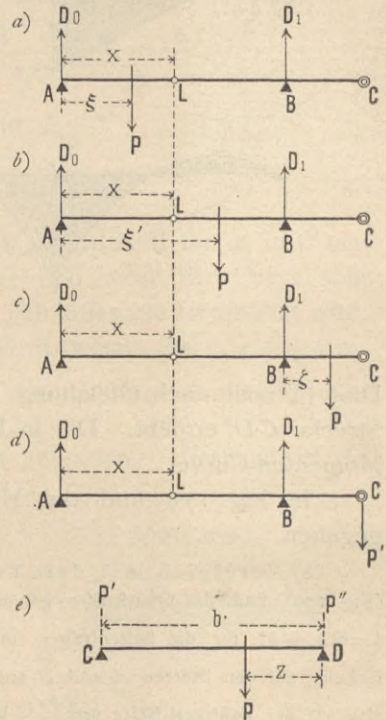
Liegt die Einzellast P rechts vom Querschnitt L und links vom Auflager B (Fig. 180 b), so ist

$$D_0 = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1}, \quad D_1 = \frac{P\xi'}{l_1},$$

und für den Querschnitt L

$$Q = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1}, \quad M = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1} x.$$

Fig. 180.



Liegt die Einzellast auf dem Ausleger um ζ von B entfernt (Fig. 180c), so ist

$$D_0 = -\frac{P\zeta}{l_1}, \quad D_1 = \frac{P(l_1 + \zeta)}{l_1},$$

und für den Querschnitt L

$$Q = -\frac{P\zeta}{l_1}, \quad M = -\frac{P\zeta}{l_1} x.$$

Liegt endlich die Einzellast auf dem Zwischenträger CD im Abstände z vom rechten Auflager D (Fig. 180e), so überträgt sie im Laftpunkte C eine Last auf den Ausleger im Werthe von $P_1 = \frac{Pz}{b}$ und erzeugt die Auflagerdrücke (Fig. 180d):

$$D_0 = -\frac{Pz}{b} \frac{a}{l_1} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{Pz}{b} \frac{(a + l_1)}{l_1};$$

im Querschnitt L treten dadurch

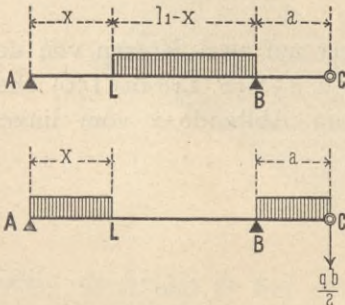
$$Q = -\frac{Pz}{b} \frac{a}{l_1} \quad \text{und} \quad M = -\frac{Pz}{b} \frac{a}{l_1} x$$

auf. Eine Belaftung des Seitenträgers DEF ist ohne Einfluss auf die Momente und Querkräfte im Querschnitt L .

Aus Vorstehendem folgt: Im Querschnitt L erzeugt jede Belaftung zwischen dem Querschnitt und dem rechtsseitigen Auflager eine positive Querkraft, jede Belaftung links vom Querschnitt und außerdem jede auf dem Ausleger und dem Zwischenträger CD liegende Last eine negative Querkraft. Größte positive Querkraft findet demnach statt bei der Belaftung der ganzen Strecke BL , grösste negative Querkraft bei der Belaftung der Strecken AL , BC und CD (Fig. 181). Nennt man

die gleichmäßig vertheilte Belaftung für das laufende Meter des Trägers q , so erhält man leicht für den Querschnitt L :

Fig. 181.



$$Q_{x_{max}} = \frac{q(l_1 - x)^2}{2l_1} \dots \dots \dots 192.$$

$$Q_{x_{min}} = -\frac{qx^2}{2l_1} - \frac{q}{2} \frac{(a^2 + ab)}{l_1},$$

oder, da $\frac{a^2 + ab}{l_1} = c_1$ ist,

$$Q_{x_{min}} = -\frac{qx^2}{2l_1} - \frac{q}{2} c_1 \dots \dots \dots 193.$$

Ferner ergibt sich aus dem Vorstehenden: Jede Belaftung der Strecke AB erzeugt im Querschnitt L ein positives Moment; jede Belaftung des Auslegers BC und des Zwischenträgers erzeugt ein negatives Moment im Querschnitt L . Demnach findet statt: Größtes positives Moment in L bei voller Belaftung des Seitenträgers AB , grösstes negatives Moment bei Belaftung des Auslegers BC und des Zwischenträgers CD . Man erhält für Querschnitt L :

$$M_{max} = \frac{q}{2} (l_1 x - x^2) \dots \dots \dots 194.$$

$$M_{min} = -\frac{q}{2} \frac{(ab + a^2)}{l_1} x = -\frac{qc_1 x}{2} \dots \dots \dots 195.$$

Für einen Querschnitt O auf dem Ausleger (Fig. 182) ergibt sich: Eine Last P zwischen A und B ist ohne Einfluss auf den Querschnitt O , da die Kräfte P , D_0 und D_1

einander im Gleichgewicht halten; das Gleiche gilt von einer Last zwischen B und dem Querschnitt O . Liegt P rechts von O , so ist in O :

$$Q = P \quad \text{und} \quad M = -P(x - \xi).$$

Liegt endlich die Last auf dem Zwischenträger CD im Abstände z vom rechten Auflager D , so wird im Lastpunkte C ein Druck auf den Ausleger übertragen, $P' = \frac{Pz}{b}$, und für Querschnitt O ist

$$Q = \frac{Pz}{b} \quad \text{und} \quad M = -\frac{Pz}{b} x.$$

Es folgt: Jede Belastung links von O ist ohne Einfluss auf Q und M in O ; jede Last rechts von O auf Ausleger und Zwischenträger ruft in O positive Querkraft und negatives Moment hervor. Größtes positives Q und größtes negatives Moment werden demnach in O (und in jedem Querschnitte des Auslegers) stattfinden, wenn der Ausleger rechts vom Querschnitt und der Zwischenträger voll mit q belastet ist. Da aber die übrige Belastung des Trägers ohne Einfluss ist, so kann man auch sagen: Für alle Querschnitte O des Auslegers finden größte positive Querkraft und größtes negatives Moment bei voller Belastung des Balkens statt. Man erhält für Querschnitt O :

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q}{2} (b + 2x) \\ M_{max} &= -\frac{q}{2} (bx + x^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 196.$$

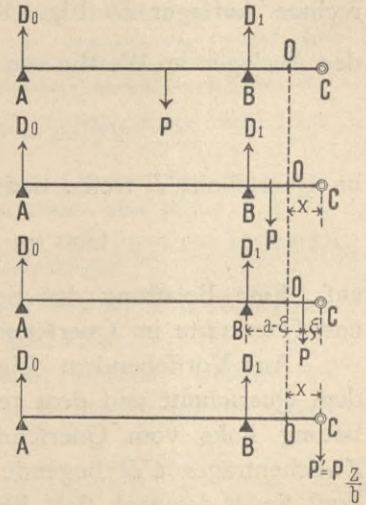
b) Zwischenträger CD . Derselbe ist ein Träger auf zwei Stützen von der Stützweite b ; es gilt von ihm dasselbe, was in Art. 151 u. 152 (S. 148 bis 150) über diesen Träger vorgeführt ist. Für einen Querschnitt im Abstände x vom linken Auflager ist also

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q(b-x)^2}{2b} \\ Q_{min} &= -\frac{qx^2}{2b} \\ M_{max} &= \frac{q}{2} (bx - x^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 197.$$

Für alle Querschnitte des Balkens sind in Fig. 183a u. 183b die Werthe Q_{max} und Q_{min} , M_{max} und M_{min} in Folge der gleichförmig vertheilten Verkehrslast q zusammengestellt; die Curven ergeben sich aus den vorstehend vorgeführten Gleichungen.

Aus den Gleichungen 192 u. 193 ergibt sich, dass auf dem Seitenträger in der Oeffnung AB die positiven Größtwerthe von Q genau so sind, wie bei einem in A und B frei gelagerten Träger (vergl. Art. 151, S. 148), die negativen Größtwerthe von Q dagegen um das für alle Querschnitte gleich große Stück $\frac{qc_1}{2}$, absolut genommen, größer sind, als jene. Auf dem Ausleger BC kann die Querkraft durch Verkehrslast nach Gleichung 196 nur positiv sein; ermittelt man die größte durch

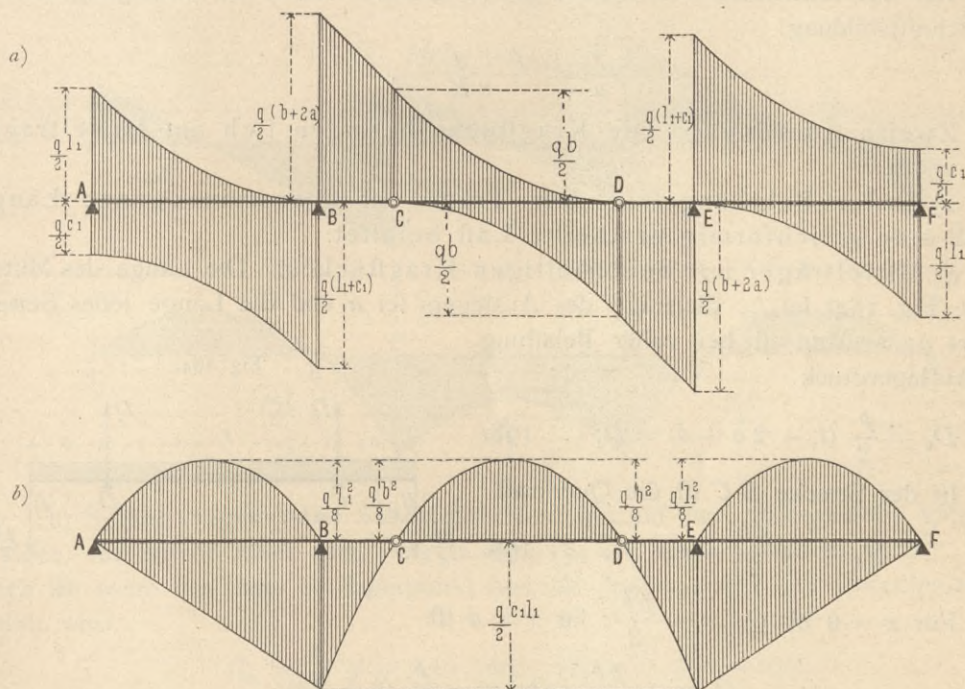
Fig. 182.



Verkehrslast hervorgerufene Querkraft für alle Querschnitte des Auslegers und trägt sie als Ordinaten in den bezw. Querschnitten auf, so ergibt sich eine Gerade. Im Zwischenträger CD ist wieder Alles wie beim Träger auf zwei Stützen. Beim rechtsseitigen Seitenträger ergeben sich dieselben Werthe, wie beim linksseitigen Seitenträger; nur kehren sich mit Rücksicht auf die Erläuterungen in Art. 151 (S. 142) die Vorzeichen um.

Was die positiven und negativen Größtmomente durch die angegebene Belastungsart anlangt, so erzieht man aus Gleichung 194, daß das positive Größtmoment im Seitenträger auf der Strecke AB genau dieselben Größen hat, wie bei

Fig. 183.



einem in A und B frei gelagerten Träger; die negativen Größtmomente in den einzelnen Querschnitten ändern sich geradlinig; der absolute Größtwert findet bei B statt und hat die Größe $\frac{q c_1 l_1}{2}$. Auf dem Ausleger BC kann nach Gleichung 196 nur ein negatives Größtmoment, im Zwischenträger CD nur ein positives Größtmoment stattfinden (siehe Gleichung 197). Vom Größtmoment auf der Strecke $BCDE$ gilt Alles, was in Art. 163 (S. 157) über die Momente durch volle Belastung p vorgeführt ist. Der rechte Seitenträger befindet sich in genau gleicher Lage, wie der linke.

Bei den im Hochbau verwendeten Auslegerträgern ist vielfach der Querschnitt für jeden der drei Einzelbalken constant gebildet; derselbe muß demnach unter Zugrundelegung des im betreffenden Theile möglichen größten Momentes, absolut genommen, bestimmt werden. Führt man das Eigengewicht als gleichförmig über den ganzen Balken vertheilte Last p auf das lauf. Meter ein, die Nutzlast eben so

als Last q , so ist für den Seitenträger gewöhnlich das Moment über der Stütze B maßgebend, d. h.

$$M_{B_{min}} = - \left(\frac{p}{2} c_1 l_1 + \frac{q}{2} c_1 l_1 \right) = - \frac{c_1 l_1}{2} (p + q).$$

Alsdann müßte die Querschnittsgröße und -Form nach der Gleichung bestimmt werden:

$$\frac{f}{a} = \frac{(p + q) c_1 l_1}{2 K}.$$

Ob das größte positive Moment auf der Strecke AB , absolut genommen, größer ist, als $M_{B_{min}}$, wird leicht durch Auftragen von Fig. 179 u. 183 und durch Zusammenrechnen der für p und q erhaltenen Werthe ermittelt.

Für das Mittelstück CD ergibt sich in gleicher Weise als Bedingung für die Querschnittsbildung:

$$\frac{f}{a} = \frac{(p + q) b^2}{8 K}.$$

164.
Zweite
Anordnung.

Zweite Anordnung: Die Kragstücke befinden sich am Mittelträger (Fig. 175 b).

a) Erster Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

a) Mittelträger mit beiderseitigen Kragstücken. Die Länge des Mittelfeldes (Fig. 184) sei l_1 , diejenige des Auslegers sei a und die Länge jedes Seitenträgers b ; alsdann ist bei voller Belastung der Auflagerdruck

Fig. 184.

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 + 2a + b) = D_1 \quad . \quad 198.$$

In der Strecke BC ist die Querkraft

$$Q_x = - \frac{pb}{2} - px \quad . \quad . \quad . \quad 199. \quad \frac{pb}{2}$$

Für $x = 0$ ist $Q_0 = - \frac{pb}{2}$; für $x = a$ ist

$$Q_a = - \frac{pb}{2} - pa = - \frac{p}{2} (b + 2a).$$

In der Strecke CD ist die Querkraft

$$Q_{x_1} = D_0 - \frac{pb}{2} - pa - px_1 = \frac{p}{2} (l_1 - 2x_1), \quad . \quad . \quad . \quad 200.$$

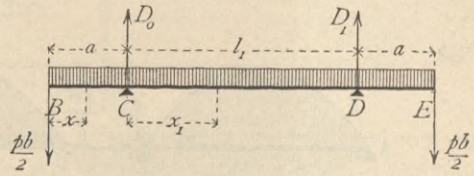
d. h. genau so groß, wie ohne Ausleger. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{pl_1}{2}$; für $x_1 = l_1$

ist $Q_{l_1} = - \frac{pl_1}{2}$.

In der Strecke DE ist die Querkraft eben so groß, wie in BC ; nur ist hier positiv, was dort negativ ist. Die graphische Darstellung der Querkräfte ergibt Fig. 185 a.

In den Strecken BC und DE haben die Momente die gleichen Werthe, wie bei den in Art. 163 (S. 155) behandelten Auslegern. Demnach ist, vom Punkte B aus gerechnet,

$$M_x = - \frac{pb}{2} x - \frac{px^2}{2} = - \frac{p}{2} (bx + x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 201.$$



Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = a$ ist $M_a = -\frac{p}{2} (ab + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1$.

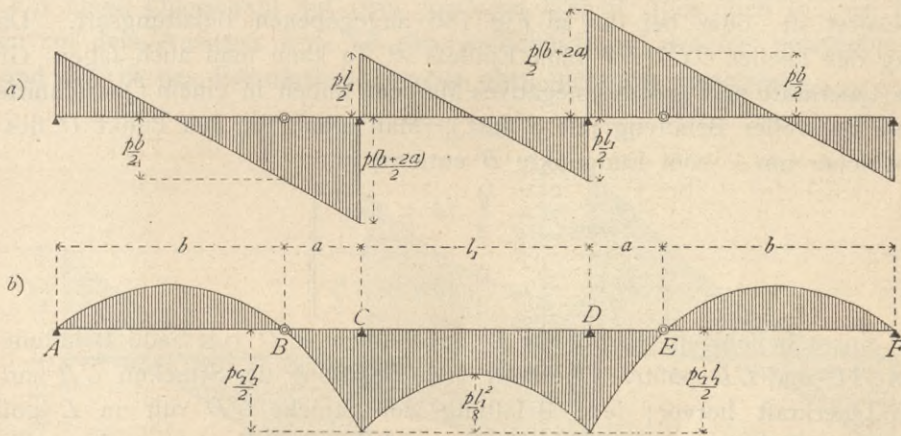
In der Strecke CD ist das Moment

$$M_{x_1} = D_0 x_1 - \frac{p x_1^2}{2} - p a \left(\frac{a}{2} + x_1 \right) - \frac{p b}{2} (a + x_1) = \frac{p}{2} (l_1 x_1 - x_1^2) - \frac{p}{2} c_1 l_1 \quad 202.$$

Der erste Theil des Momentes ist das Moment für einen frei aufliegenden Balken von der Stützweite l_1 ; der zweite Theil ist das Moment über der Stütze C , bezw. D .

Also auch hier gilt dasselbe, was im vorhergehenden Artikel über den dortigen Mittelträger ($BCDE$) gefagt wurde. Die graphische Darstellung der Momente ist in Fig. 185 *b* gegeben.

Fig. 185.



b) Seitenträger. Die Seitenträger sind frei auf zwei Stützpunkten gelagerte Träger, für welche Alles gilt, was in Art. 154 (S. 147) entwickelt wurde. Demnach ist, wenn der linke Auflagerpunkt hier als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt wird,

$$Q_x = \frac{p}{2} (b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2), \quad \dots \quad 203.$$

und es ergibt sich leicht, wie in Art. 163, dafs die Curven für die Momente und die Querkräfte dieselben sind, wie die für die Console BC gefundenen.

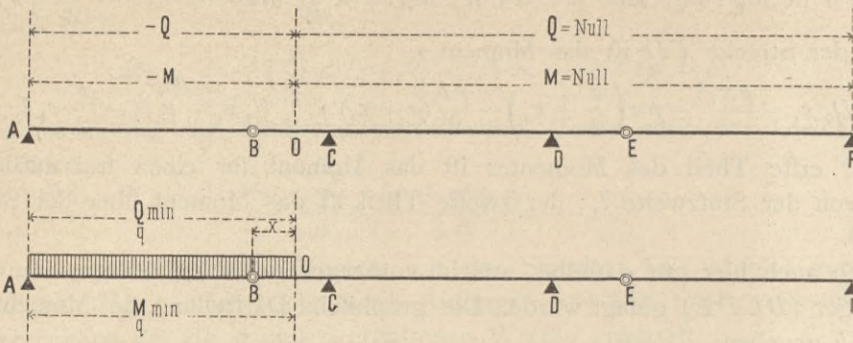
Die Momente und Querkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind in Fig. 185 graphisch aufgetragen.

β) Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Geht man in derselben Weise, welche bei der ersten Anordnung gezeigt ist, vom Einflusse einer an verschiedenen Stellen des Trägers liegenden Einzellast aus, so ergibt sich:

In einem beliebigen Querschnitt O des Auslegers BC (Fig. 186) erzeugt eine auf der Strecke AO befindliche Last negative Querkraft und negatives Moment; jede Belastung der anderen Trägertheile, also der Strecke $O C D E$, hat auf die Querkraft und das Moment in O keinen Einflufs. In Fig. 186 ist dem entsprechend die Strecke AO mit $-Q$, bezw. $-M$ überschrieben, der übrige Theil des Trägers mit $Q = \text{Null}$, bezw. $M = \text{Null}$. Gröfste negative Querkraft und gröfstes negatives

Fig. 186.

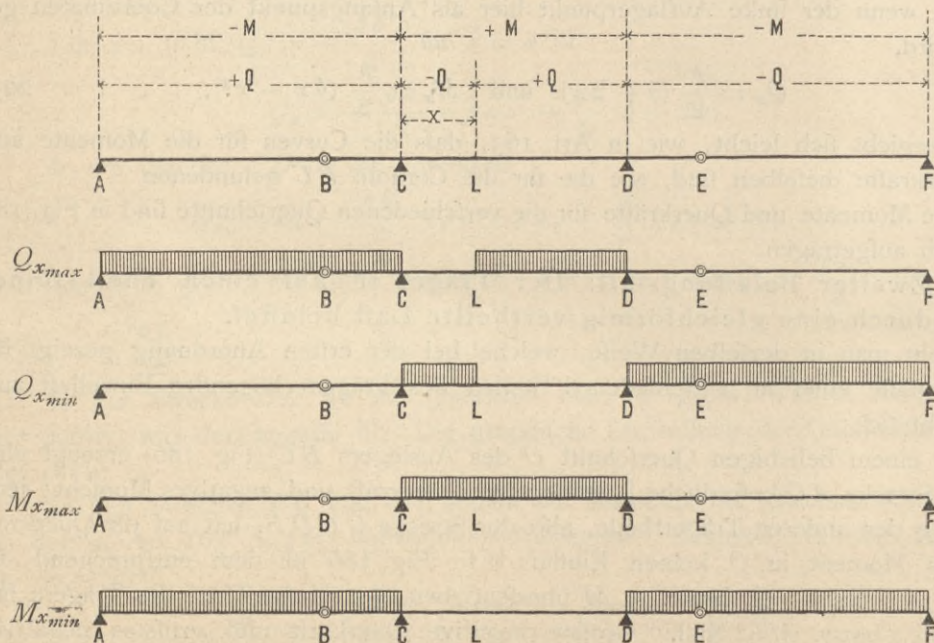


Moment finden demnach in O statt, wenn die Strecke \overline{AO} belaftet, alles Andere nicht belaftet ist, oder bei der in Fig. 186 angegebenen Belaftungsart. (Da die Belaftung des Theiles $OCDEF$ ohne Einfluss ist, so kann man auch sagen: Größte negative Querkraft und größtes negatives Moment finden in einem Querschnitt des Auslegers bei voller Belaftung mit q statt.) Man erhält für den Punkt O des Auslegers, welcher um x vom Endpunkte B entfernt ist,

$$\left. \begin{aligned} Q_{qmin} &= -\frac{q}{2} (b + 2x) \\ M_{qmin} &= -\frac{q}{2} (bx + x^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 204.$$

In einem beliebigen Querschnitt L des Balkens CD ruft jede Belaftung der Strecken AC und LD positive Querkraft, jede Belaftung der Strecken CL und DF negative Querkraft hervor; jede Belaftung der Strecke CD ruft in L positives Moment, jede Belaftung der Seitenöffnungen AC und DF erzeugt dagegen in L negatives Moment. In Fig. 187 find die betreffenden Strecken durch die Ueber-

Fig. 187.



schriften $+Q$ und $-Q$, bzw. $+M$ und $-M$ bezeichnet. Die sich demnach ergebenden ungünstigsten Belastungen, welche bzw. $+Q_{max}$ und $-Q_{max}$, $+M_{max}$ und M_{min} erzeugen, sind in Fig. 187 schematisch dargestellt.

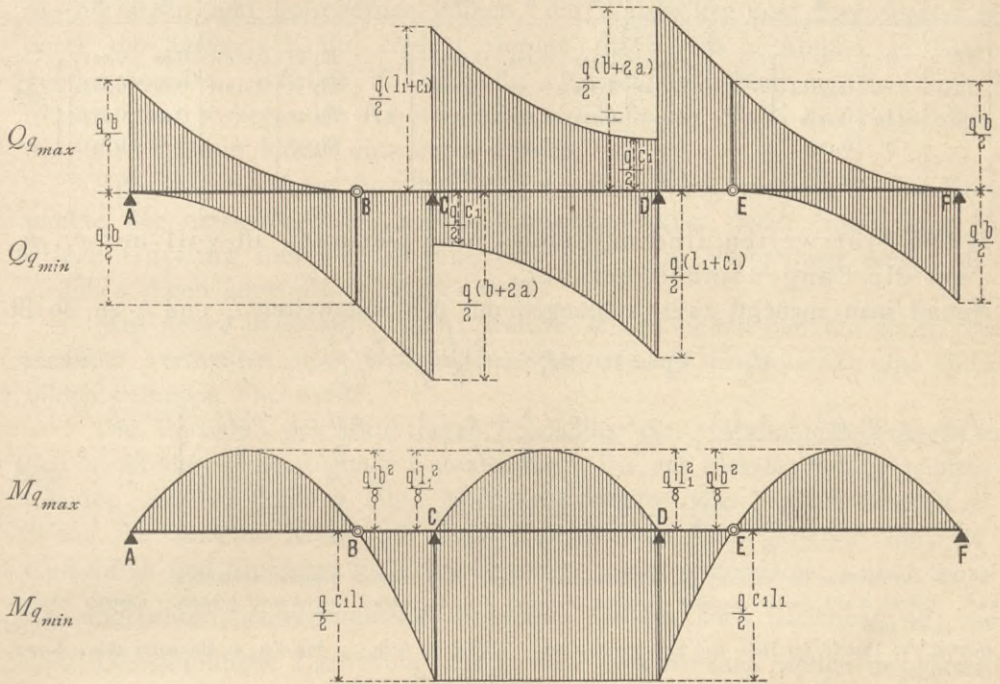
Man erhält für den Punkt L , welcher um x vom Stützpunkt C entfernt liegt,

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q}{2l_1} (l_1 - x)^2 + \frac{q}{2} c_1 \\ Q_{min} &= -\frac{qx^2}{2l_1} - \frac{q}{2} c_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 205.$$

$$\left. \begin{aligned} M_{max} &= \frac{q}{2} (l_1 x - x^2) \\ M_{min} &= -\frac{q}{2} c_1 l_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 206.$$

Für einen Querschnitt auf dem Ausleger DE ist Alles eben so, wie für denjenigen auf dem Ausleger BC ; für die Querschnitte auf den frei gelagerten Balken AB und EF ist das Erforderliche bereits oben mehrfach angegeben.

Fig. 188.



Ermittelt man nunmehr für jeden Querschnitt der ganzen Anordnung die Werthe Q_{qmax} und Q_{qmin} und eben so M_{qmax} und M_{qmin} und trägt die gefundenen Werthe als Ordinaten an den betreffenden Querschnitten auf, so ergeben sich die Zusammenstellungen in Fig. 188.

4) Continuirliche oder durchgehende Träger.

Die continürlichen Träger oder Träger auf mehr als zwei Stützpunkten sind nach Art. 150 (S. 140) statisch unbestimmt. Die Stützendrücke werden mit Hilfe der Elasticitätslehre ermittelt. Bei der verhältnißmäßsig geringen Verwendung dieser

Träger im Hochbau und weil der Raum für die eingehende Besprechung im vorliegenden »Handbuch« nicht ausreicht, soll nur für eine Reihe von gewöhnlichen Belastungsfällen die Gröfse der Stützendrücke, der Momente und Querkräfte angegeben werden. Wegen des eingehenden Studiums wird auf die unten stehenden Werke³²⁾ verwiesen.

Im Folgenden bezeichnen: $D_0, D_1, D_2 \dots$ die Auflagerdrücke in den verschiedenen Stützpunkten $0, 1, 2 \dots$; $M_0, M_1, M_2 \dots$ die Momente an diesen Stützpunkten; $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3 \dots$ die Größtmomente in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$; l die Stützweite jeder Oeffnung, falls alle Stützweiten gleich grofs sind; $l_1, l_2, l_3 \dots$ die Stützweiten der Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$, falls nicht alle Stützweiten gleich grofs sind; $p_1, p_2, p_3 \dots$ die gleichförmig vertheilten Belastungen für die Längeneinheit in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$ des Trägers.

α) Sämmtliche Oeffnungen haben die gleiche Stützweite l und die gleiche volle Belastung p für die Längeneinheit zu tragen. Die maßgebenden Werthe von M, D und \mathfrak{M} sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Anzahl der Oeffnungen:															
				2				3				4			
	2	3	4		2	3	4		2	3	4		2	3	4
$M_0 =$	0	0	0	}	$D_0 =$	0,375	0,400	0,3929	}	$\mathfrak{M}_1 =$	0,07031	0,08	0,0772	}	$p l^2$
$M_1 =$	0,125	0,10	0,10714		$D_1 =$	1,250	0,100	1,1428		$\mathfrak{M}_2 =$	0,07031	0,025	0,0363		
$M_2 =$	0	0,10	0,0714		$D_2 =$	0,375	0,100	0,9186		$\mathfrak{M}_3 =$	—	0,08	0,0363		
$M_3 =$	—	0	0,10714		$D_3 =$	—	0,400	1,1428		$\mathfrak{M}_4 =$	—	—	0,0772		
$M_4 =$	—	—	0		$D_4 =$	—	—	0,3929							

β) Die Stützweiten sind ungleich; jede Oeffnung ist voll mit $p_1, p_2, p_3 \dots$ auf die Längeneinheit belastet.

Nimmt man zunächst zwei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 und l_2 an, so ist

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}, \dots \dots \dots 207.$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 (l_1 + l_2)}, & D_1 &= \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 l_2} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}, \\ D_2 &= \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_2 (l_1 + l_2)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots 208.$$

³²⁾ Für das Studium der »Theorie der continüirlichen Träger« seien folgende Schriften empfohlen:
 CLAPEYRON. *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés.* *Comptes rendus*, Bd. 45, S. 1076.
 MOHR. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eifen-Construction. *Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover* 1860, S. 323; 1858, S. 19.
 CULMANN, K. Die graphische Statik. Zürich 1866. S. 273.
 WINKLER, E. Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit etc. Theil I. Prag 1867. S. 112.
 RITTER, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continüirlichen Balken. 2. Aufl. Zürich 1883.
 OTT, K. v. Grundzüge der graphischen Statik. Prag 1870. — 4. Aufl. 1885.
 LIPPICH, F. Theorie des continüirlichen Trägers constanten Querschnittes. *Allg. Bauz.* 1871, S. 104 u. 175. (Auch als Sonderabdruck erschienen: Wien 1871.)
 WEYRAUCH, J. J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continüirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.
 WINKLER, E. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. Heft I: Aeußere Kräfte gerader Träger. 3. Aufl. Wien 1886.
 LAISSE, F. & A. SCHÜBLER. Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rücksicht auf Eifen-Constructionen. Theil I. 4. Aufl. Stuttgart 1867. S. 161.
 GRASHOF, F. Theorie der Elasticität und Festigkeit etc. 2. Aufl. Berlin 1878. S. 100.
 CANOVETTI. *Théorie des poutres continues etc.* Paris 1882.
 STELZEL, K. Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf die continüirlichen Träger. Graz 1882.
 CASTIGLIANO, A. *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques.* Turin. — Deutsch von E. HAUFF. Wien 1886.

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1, l_2 und l_1 ergeben sich folgende Werthe:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{\rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2^3}{4(3l_2 + 2l_1)}, \quad \dots \quad 209.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{\rho_1 l_1}{2} - \frac{\rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{\rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)} + \frac{\rho_1 l_1}{2} + \frac{\rho_2 l_2}{2}. \quad 210.$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen kann man in besonderen Fällen die betreffenden Werthe leicht finden. Wenn z. B. eine ganze Oeffnung unbelastet ist, so ist einfach in den obigen Ausdrücken das entsprechende ρ gleich Null zu setzen.

b) Innere Kräfte der Gitterträger.

Die Balkenträger sind entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den ersteren bildet der ganze Querschnitt eine zusammenhängende Fläche; bei den letzteren besteht derselbe aus zwei getrennten Theilen, den sog. Gurtungsquerschnitten; beide Gurtungen sind durch Stäbe mit einander verbunden.

166.
Allgemeines.

Die Ermittlung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gußeisernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äußeren Kräfte erzeugt werden, ist bereits in Abschn. 2, Kap. 4 vorgeführt worden; daselbst ist auch die Querschnittsbestimmung für diese Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel sollen deshalb nur die in den Gitterträgern entstehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

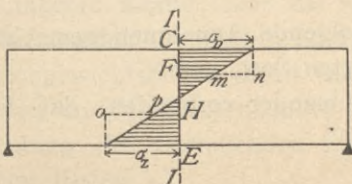
Gitterträger sind aus einzelnen Stäben zusammengesetzte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heißen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwischen ihnen angeordnete Gitterwerk.

Man nennt jedes aus Stäben, welche in den Schnittpunkten ihrer Axen mit einander verbunden sind, bestehende Stabwerk ein Fachwerk; die Gitterträger bilden demnach Fachwerke.

Die Vortheile der Gitterträger gegenüber den vollwandigen Trägern ergeben sich leicht durch die folgende Ueberlegung. Die auf Biegung beanspruchten Träger erleiden in allen Punkten eines jeden Querschnittes verschiedene Beanspruchungen. Wenn die äußeren Kräfte nur senkrecht zur Balkenaxe gerichtet sind, so ist im einfachsten und häufigsten Falle die Spannung eines in der Höhe z über, bzw. unter der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punktes nach Gleichung 56: $\sigma = \frac{M}{\mathcal{F}} z$.

Die graphische Darstellung der an den verschiedenen Stellen des Querschnittes auftretenden Spannungen σ ist die durch Fig. 189 veranschaulichte, da $\frac{M}{\mathcal{F}}$ für irgend einen Querschnitt constant ist. Im Punkte C des Querschnittes II ist die Spannung σ_D (Druck), in E ist sie σ_Z (Zug); in allen anderen Punkten des Querschnittes hat sie geringere Werthe. Da aber die Beanspruchungen σ_D und σ_Z die zulässigen Grenzen K'' für Druck und K' für Zug nicht überschreiten dürfen, so ist $\sigma_D = K''$ und $\sigma_Z = K'$ zu setzen und danach die Querschnittsfläche zu bestimmen. Die zulässige Beanspruchung

Fig. 189.



findet also nur in wenigen Querschnittspunkten statt, nämlich in denjenigen, welche am weitesten nach oben, bzw. unten von der wagrechten Schwerpunktsaxe abliegen. In allen anderen Querschnittspunkten ist die wirklich höchstens vorhandene Spannung viel kleiner, als zulässig wäre, so z. B. im Punkte F um \overline{mn} und im Punkte H um \overline{op} . Demnach wird bei einem vollwandigen, auf Biegung beanspruchten Träger der Baustoff durchaus nicht ausgenutzt. Eine Ausnutzung des Materials bis zur zulässigen Grenze kann nur stattfinden, wenn die Stäbe in der Richtung ihrer Axe, also auf Zug oder Druck beansprucht werden, weil nur dann die Annahme einer gleichmäßigen Vertheilung der Kraft über den ganzen Querschnitt annähernd erfüllt ist. Bei den richtig construirten Gitterträgern werden aber alle Stäbe nur auf Zug oder Druck in der Richtung ihrer Axe beansprucht, so daß man der Baustoff voll ausnutzen und folglich mit geringerem Stoffaufwande als bei vollwandigen Trägern auskommen kann. Hierzu möge noch bemerkt werden, daß diese Vortheile nur bei größeren Weiten voll in die Erscheinung treten; bei kleineren Weiten ergeben sich die Stabquerschnitte für die praktische Ausführung zu klein, so daß für solche Aufgaben vollwandige Träger vorzuziehen sind.

Nach der Form der Gurtung unterscheidet man:

167.
Eintheilung
der
Gitterträger.

1) Parallelträger, d. h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch wagrecht) sind.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die ersteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null ist und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade ist, Bogenfehnenträger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade ist, Fischbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterscheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipfenträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bzw. ein Paralleltapez bilden.

Eintheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem sich jeder Gitterstab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterstäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem jeder Gitterstab sich außer in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterstäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues ist wohl immer das eintheilige Gitterwerk, welches eine genaue und einfache Berechnung zuläßt, ausreichend, so daß hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk besprochen werden sollen.

Die Gitterstäbe sind entweder geneigt oder lothrecht; sie werden in der Folge bzw. als Diagonalen und Verticalen oder Pfosten bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennt man Netzwerk; Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Pfosten bezeichnet man wohl im engeren Sinne mit dem Namen Fachwerk.

Die Dachbinder sind in den allermeisten Fällen Gitterträger, so daß die hier zunächst zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Gesetze auch für die im nächsten Kapitel zu behandelnden Dachbinder gültig sind.

168.
Voraus-
setzungen.

Bei den nachstehenden Untersuchungen werden folgende Annahmen gemacht:

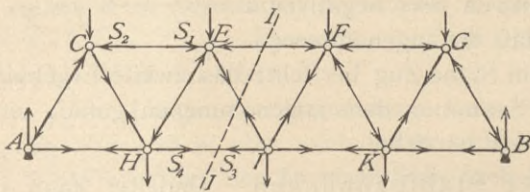
- 1) die Belastungen finden nur in den Knotenpunkten statt, und
- 2) die Stäbe sind in den Knotenpunkten so mit einander verbunden, daß sie sich um dieselben frei drehen können.

1) Verfahren für die Bestimmung der Stabspannungen.

Die Ermittlung der Spannungen in den einzelnen Stäben des Fachwerkes erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 4 (S. 6) angegeben worden ist. Man untersucht den Gleichgewichtszustand irgend eines Theiles des Fachwerkes unter der Einwirkung aller an demselben thätigen Kräfte. In jeder Stabaxe wirken zwei Kräfte, welche einander an Gröfse gleich sind, aber entgegengesetzten Sinn haben: die Stabspannungen. Im

169.
Erläuterungen.

Fig. 190.



Stabe CE (Fig. 190) wird von C eine Kraft S_1 auf E übertragen, und eine gleich große Kraft S_2 von E auf C ; beide sind Druck. In HI wird von H auf I ein Zug S_3 , von I auf H ein gleich großer Zug S_4 ausgeübt. In Fig. 190 sind alle auf die Knotenpunkte wirkenden Stabspannungen angegeben.

Betrachtet man nur einen Theil des Trägers, etwa den links vom Schnitte II gelegenen, so wirken auf denselben aufser den äusseren Kräften die Stabspannungen. Alle Stäbe, deren beide Knotenpunkte dem betreffenden Theile angehören, enthalten zwei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, also für die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht in Betracht kommen. In anderer Lage sind diejenigen Stäbe, welche vom Schnitte II getroffen werden, von denen also nur ein Knotenpunkt links vom Schnitte liegt. Nur diejenigen Spannungen dieser Stäbe, welche auf die dem betreffenden Trägertheile angehörenden Knotenpunkte wirken, sind als auf das Bruchstück wirkende Kräfte einzufetzen; so viele Stäbe also durch den Schnitt getroffen werden, so viele Stabspannungen sind in den Gleichgewichtsgleichungen vorhanden, welche für den Trägertheil aufzustellen sind. Diese Spannungen sind die unbekanntes Kräfte, für deren Ermittlung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zu Gebote stehen. Da für Kräfte in der Ebene drei Gleichgewichtsbedingungen vorhanden sind, so ist die Aufgabe auf dem angegebenen, rein statischen Wege nur dann lösbar, wenn sich bei jedem Schnitte nur drei unbekanntes Stabspannungen ergeben.

Ein solches Fachwerk, bei welchem sämtliche Stabspannungen durch die Gesetze des Gleichgewichtes starrer Körper bestimmbar sind, nennt man statisch bestimmt; reichen diese Gesetze dazu nicht aus, so ist das Fachwerk statisch unbestimmt. In letzterem Falle sind die Stabspannungen auch noch von den elastischen Formänderungen abhängig. Es ist aus verschiedenen Gründen empfehlenswerth, im Hochbau nur statisch bestimmte Fachwerke zu verwenden.

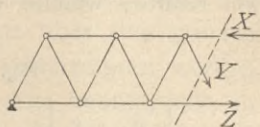
Unter Berücksichtigung des Vorstehenden ist nun folgendermaßen zu verfahren. Das Fachwerk wird an derjenigen Stelle durchschnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabspannungen, kennen lernen will; an den Schnittstellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar sind, so muß jede Stabspannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zusammenfallen. Sonach ergibt sich die folgende Regel.

170.
Verfahren
im
Allgemeinen.

Man denke sich den Träger so durchschnitten, daß die Stäbe, deren Spannung man sucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zusammenfallenden Spannungen dieser Stäbe als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 191) und stelle für das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im ersten Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab (Y und Z in Fig. 191); im zweiten Falle wirkt sie nach dem Knotenpunkt hin (X in Fig. 191). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanspruchung kennt, so werden wir zunächst stets alle Spannungen als Zugspannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergibt entweder einen positiven oder negativen Werth. Das erstere Ergebniss bedeutet, daß die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. daß im Stabe Zug herrscht; das zweite Ergebniss bedeutet, daß der Sinn der wirklichen Spannung dem angenommenen gerade entgegengesetzt ist, d. h. daß im Stabe Druck herrscht.

Fig. 191.



171.
Verfahren
durch
Rechnung.

a) Analytische Bestimmung der Stabspannungen. Dieselbe kann in zweifacher Weise geschehen: entweder durch Aufstellung aller Gleichgewichtsbedingungen oder nach der sog. Momenten-Methode.

172.
Gleichgewichts-
bedingungen.

a) Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Bruchstück (Fig. 192), welches, wie in Art. 170 angegeben, behandelt ist, ergibt drei Gleichungen, welche nach Art. 6 (S. 8) lauten:

$$\left. \begin{aligned} X \cos \sigma + Y \sin \tau + Z = 0; \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin \sigma - Y \cos \tau = 0 \\ D_0 \cdot 2a - P_1 a - Zz = 0 \end{aligned} \right\} \quad 211.$$

Als Drehpunkt für die dritte Gleichung ist der Punkt C gewählt; alsdann haben X , Y und P_2 kein statisches Moment, weil sie für diesen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

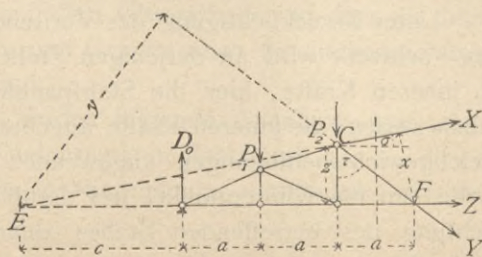
Der angegebene Weg führt stets, wenn nur 3 Unbekannte, also 3 geschnittene Stäbe vorhanden sind, zum Ziele; er hat den Nachtheil, daß meistens 3 Gleichungen gelöst werden müssen, selbst wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

173.
Ritter'sches
Verfahren.

b) Das Charakteristische der von Ritter angegebenen Momenten-Methode ist, daß man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die Gleichgewichtsbedingung, welche befagt, daß die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null sein muß. Wird der Momentenpunkt so gewählt, daß zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, so bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das statische Moment jeder der beiden Kräfte ist aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Krafrichtungen, weil für diesen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Das Verfahren ist demnach das folgende.

Man lege durch den Träger einen Schnitt, so daß nur 3 Stäbe mit unbekanntem Spannungen geschnitten werden, bringe diese Spannungen und alle am

Fig. 192.



Bruchstück wirkenden äusseren Kräfte an, setze die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte gleich Null und wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittlung der Spannung eines Stabes stets den Schnittpunkt der beiden mitdurchschnittenen Stäbe.

Um in Fig. 192 die Spannung X zu finden, wählt man F als Momentenpunkt; die Gleichung der statischen Momente heisst dann

$$Xx + D_0 \cdot 3a - P_1 \cdot 2a - P_2 a = 0,$$

woraus sich die einzige Unbekannte X leicht finden lässt. Für C als Momentenpunkt ergibt sich

$$D_0 \cdot 2a - P_1 a - Zz = 0,$$

woraus Z zu berechnen ist, und für E als Momentenpunkt

$$Yy - D_0 c + P_1 (c + a) + P_2 (c + 2a) = 0,$$

woraus Y zu ermitteln ist.

Die Länge der Hebelsarme kann meistens genügend genau aus der Zeichnung abgegriffen, aber auch leicht rechnerisch ermittelt werden.

Wir werden den für einen Stab nach dieser Methode sich ergebenden Momentenpunkt den diesem Stabe conjugirten Punkt nennen.

β) Graphische Bestimmung der Stabspannungen. Auch das graphische Verfahren kann nach verschiedenen Arten durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Vieleckmethode oder nach einer aus Zeichnung und Rechnung zusammengesetzten Weise (*Zimmermann's* Verfahren).

a) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben.

Werden die sämtlichen am Bruchstück wirkenden äusseren Kräfte zu einer Mittelkraft Q (Fig. 193) zusammengefasst, so wirken auf dasselbe 4 Kräfte, nämlich Q

und die drei unbekanntnen Spannungen der durch den Schnitt getroffenen Stäbe. Für diese 4 Kräfte ergibt sich ein geschlossenes Kraftpolygon. Von einer dieser Kräfte, nämlich von Q , sind Grösse, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl die Richtung und Lage, nicht aber die Grösse. Ersetzt man 2 der unbekanntnen Kräfte, etwa X und Y , durch ihre Mittelkraft R , so bleiben nur noch

die 3 Kräfte Q , Z und R , welche sich nach Art. 8 (S. 10) in einem Punkte schneiden müssen. R muss also durch den Schnittpunkt O von Q und Z gehen. Da R ausserdem durch den Schnittpunkt E von X und Y geht, so sind 2 Punkte der Richtungslinie von R , somit ist auch diese Richtung selbst bekannt. R hat demnach die Richtung OE . Im Punkte O halten sich nun die 3 Kräfte Q , R und Z das Gleichgewicht; das für dieselben construirte Kraftpolygon ist eine geschlossene Figur, hier ein Dreieck. Ist $Q = \alpha\beta$, so ziehe man durch β eine Parallele zur Richtung von Z , durch α eine solche zur Richtung von R ; der Schnittpunkt γ beider Linien ergibt die beiden Kräfte $R = \gamma\alpha$ und $Z = \beta\gamma$.

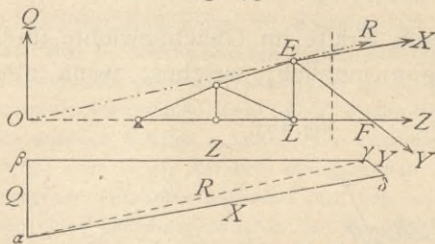
In derselben Weise kann nun R in seine beiden Seitenkräfte X und Y zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von R Parallelen zu den Richtungen von bezw. X und Y zieht. Es ergibt sich $\gamma\delta = Y$ und $\delta\alpha = X$.

Es ist für das Endergebniss gleichgiltig, welche beiden von den unbekanntnen Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch Y und Z (Fig. 194) durch ihre Mittelkraft R' ersetzen, welche dann durch F und den Schnittpunkt O' der Kraft X mit Q geht. Als Kraftpolygon erhält man $\alpha\beta\epsilon\zeta$.

174.
Graphisches
Verfahren.

175.
*Culmann's*ches
Verfahren.

Fig. 193.



Eben so kann man auch X und Z zu einer Mittelkraft vereinen und erhält die ebenfalls in Fig. 194 gezeichnete Construction.

Die angegebene Construction giebt zugleich Aufschluss darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Bruchstück wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so haben sie nach Art. 15 (S. 12) denselben Umfahrungsinn, und demnach ist der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derselben bekannt ist. Hier ist stets der Sinn von Q bekannt; denn dies ist die Querkraft für den bezüglichen Querschnitt.

Q hat den Sinn von α nach β ; also ist in Fig. 193 Z von β nach γ , d. h. vom Knotenpunkt L ab gerichtet, Y von γ nach δ und X von δ nach α gerichtet. X wirkt also nach dem Knotenpunkte E hin, ist demnach Druck, während Z und Y Zug bedeuten. Richtung, Gröfse und Lage der Kraft Q für eine gegebene Belastung sind mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht bestimmbar. (Siehe Art. 153, S. 146.)

b) Die Vieleckmethode ist von *Cremona* angegeben worden.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randstäbe seien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äufsere Knotenpunkte mit einander verbinden, also $I II$, $II III \dots$ in Fig. 195; Zwischenstäbe seien Stäbe, welche zwei nicht auf einander folgende äufsere Knotenpunkte verbinden, also $II V$, $III V$ in Fig. 195.

Da alle auf das Fachwerk wirkenden äufseren Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist für dieselben ein geschlossenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äufseren Kräfte nach Gröfse und Richtung gegeben sind, leicht construirt werden kann. Ausserdem sind an jedem Knotenpunkte die an demselben wirkenden Kräfte für sich im Gleichgewicht; sonach ist für jeden dieser Knotenpunkte ein weiteres, sich schließendes Kraftpolygon zweiter Ordnung möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äufsere Kraft, die im besonderen Falle Null sein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche sich in ihm schneiden, also im Knotenpunkte II die Kräfte 2 , B , C , a .

In den meisten der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äufsere Kraft vor, welche bereits im grofsen Hauptpolygon der äufseren Kräfte enthalten ist; es wird also offenbar möglich sein, jedes kleine Kraftpolygon so an das grofse zu legen, dafs die beiden gemeinsame äufsere Kraft durch dieselbe Gerade dargestellt wird. Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, so kommt jede Stabspannung

Fig. 194.

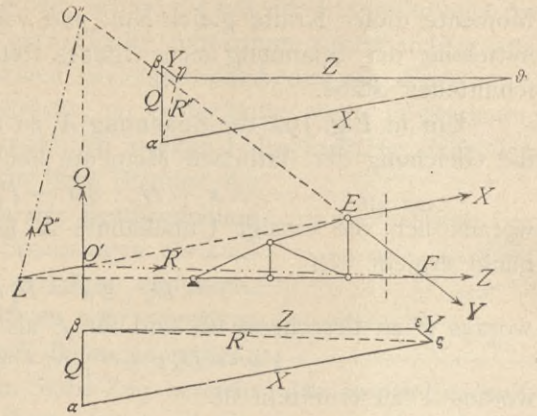
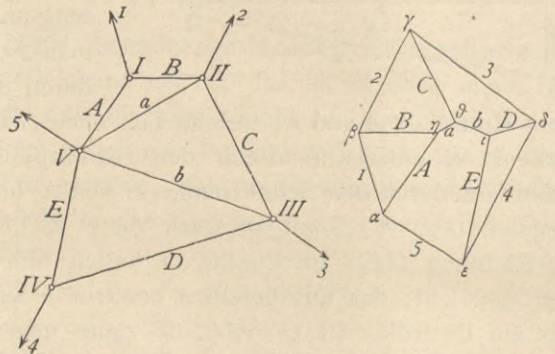


Fig. 195.

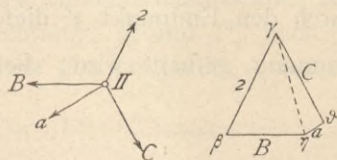


176.
Cremona'sches
Verfahren.

in zwei Kraftpolygone zweiter Ordnung vor. Es wird nun durch zweckmäßige Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone so in das große einzufachtern, daß nicht nur jede äußere Kraft, sondern auch jede Stabspannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt, d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann so zusammen, daß die zwei gemeinsame Stabspannung durch dieselbe Gerade dargestellt wird.

Für die Construction der kleinen Kraftpolygone ist Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier, die Richtung sämtlicher Kräfte bekannt ist und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte sich schließt, so ist die Construction desselben stets möglich, falls am Knotenpunkte nur zwei unbekannte Kräfte vorhanden sind. Denn seien etwa in Fig. 196 B und z bekannt, a und C unbekannt, so erfordert

Fig. 196.



das Gleichgewicht, daß die Mittelkraft von a und C der bekannten Mittelkraft von z und B der Größe nach genau gleich ist. Die bekannte Mittelkraft von z und B ist aber die Verbindungslinie $\gamma\delta$ im Kraftpolygon, und dieselbe ist im entgegengesetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte C und a zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa γ , eine Parallele zu C , durch den anderen Endpunkt, etwa δ , eine Parallele zu a gezogen wird. Der Schnittpunkt ϕ ergibt $\gamma\phi = C$ und $\phi\delta = a$. Alsdann ist $\beta\gamma\phi\delta$ das kleine Kraftpolygon für Punkt II. Man

muß demnach die kleinen Kraftpolygone so construiren, daß sich stets nur 2 Unbekannte ergeben. Zu diesem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, hier (Fig. 195) also etwa mit I. Die äußere Kraft ist bekannt; unbekannt sind demnach nur A und B und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu II. Bekannt sind hier z und B , unbekannt C und a , demnach leicht ermittelt. So schreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, ist bei den in der Praxis üblichen Gitterträgern stets vorhanden.

Damit nun jede äußere Kraft und jede Stabspannung nur einmal in dem entstehenden Kräftezuge — dem Kräfteplan — vorkommen, ist folgende Regel zu befolgen. Man vereine sämtliche äußeren Kräfte zu einem geschlossenen Kraftpolygon, indem man sie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man sagt, in cyclischer Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte dieses Kraftpolygons Parallelen zu den Randstäben derart, daß die Parallele zu einem Randstabe, etwa zu A , durch denjenigen Eckpunkt des großen Kraftpolygons geht, welcher zwischen den beiden äußeren Kräften liegt, zwischen denen der betreffende Randstab im Fachwerk sich befindet. Der Randstab A liegt im Fachwerk zwischen den äußeren Kräften 1 und 5 ; die Parallele zu A wird also durch den Punkt α zwischen 1 und 5 gezogen; eben so die Parallele zum Randstab B durch β zwischen 1 und 2 etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen construirt man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone; alsdann erhält man einen Linienzug zwischen den Randstäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwischenstabspannung darstellt und in welchem jede Zwischenstabspannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randstäben abgezeichneten Längen geben die Spannungen der Randstäbe an.

Der Sinn der Stabspannungen wird hier genau in derselben Weise aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ist.

c) Verfahren von Zimmermann für Fachwerke, welche durch parallele äußere Kräfte beansprucht werden.

177.
Zimmermann's
Verfahren.

Die wagrechte Projection des Abstandes je zweier Knotenpunkte derselben Gurtung sei constant; sie sei gleich a (abgesehen von derjenigen der zunächst an den Auflagern gelegenen Knotenpunkte der unteren Gurtung). In einem Stabe der oberen Gurtung (Fig. 197), etwa im Stabe II III, ist die Spannung bei einer Belastung, welche für den Punkt 3 das Moment M_3 erzeugt,

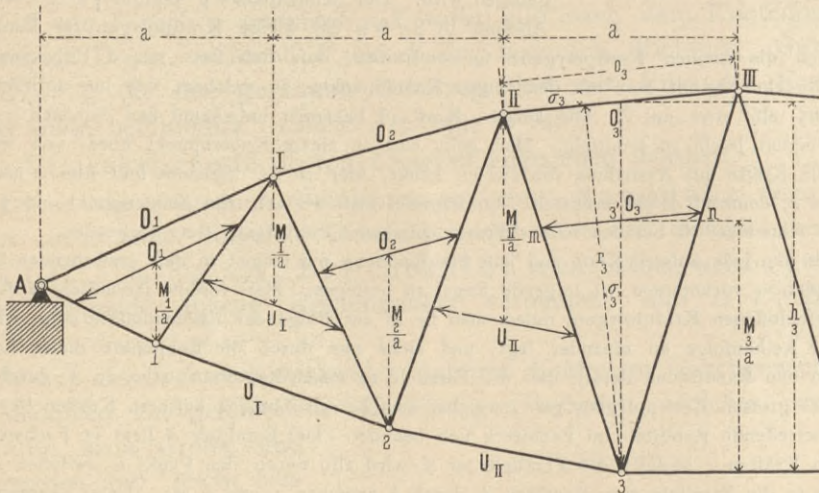
$$O_3 = -\frac{M_3}{r_3}.$$

Das Vorzeichen soll zunächst unberücksichtigt gelassen und nur die absolute Größe von O_3 in das Auge gefaßt werden. Alsdann ist

$$O_3 = \frac{M_3}{r_3} = \frac{M_3}{a} \frac{a}{r_3} = \frac{M_3}{a} \frac{\frac{a}{\cos \sigma_3}}{\frac{r_3}{\cos \sigma_3}}$$

Nun ist aber $\frac{a}{\cos \sigma_3} = o_3$ gleich der Länge des Stabes *II III* der oberen Gurtung, dessen Spannung gesucht wird; ferner ist $\frac{r_3}{\cos \sigma_3} = h_3$ gleich der Länge der lothrechten Linie, welche durch den Momentenpunkt *3* gelegt ist vom Momentenpunkt *3* bis zum Schnittpunkt mit dem Stabe *II III*. Trägt man nun $\frac{M_3}{a}$ (d. h. eine Kraft) nach beliebigem Maßstabe auf der durch den Momentenpunkt *3* gezogenen Lothrechten ab, so sei $33' = \frac{M_3}{a}$; nun ziehe man durch den Endpunkt *3'* dieser Linie eine Parallele zu dem Stabe *II III*, dessen Spannung gesucht wird; diese

Fig. 197.



Parallele schneide die nächsten Diagonalen in *m* und *n*; dann ist \overline{mn} die gefuchte Spannung in O_3 , und zwar in demselben Kräftemaßstab, in welchem $\frac{M_3}{a}$ aufgetragen ist. Denn wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke *3 II III* und *3 mn* verhält sich

$$\frac{\overline{mn}}{o_3} = \frac{33'}{h_3}, \text{ d. h. } \overline{mn} = o_3 \frac{33'}{h_3} = \frac{\frac{a}{\cos \sigma_3}}{\frac{r_3}{\cos \sigma_3}} \cdot \frac{M_3}{a}$$

Dies ist aber genau der Werth, welcher oben für die Spannung O_3 gefunden ist.

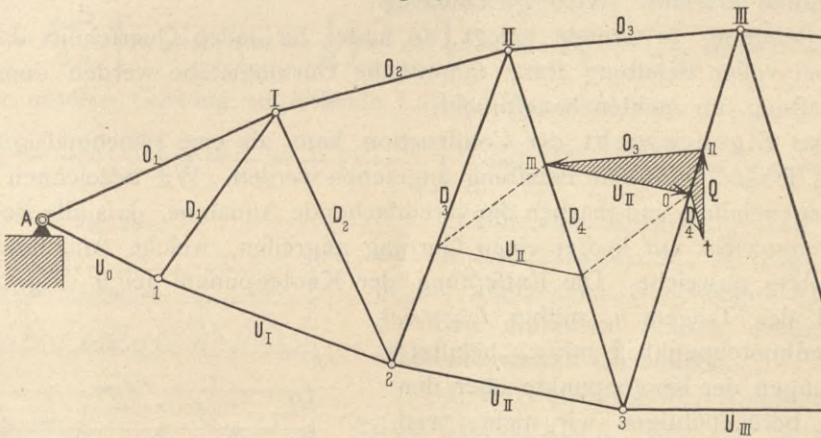
Was vom Stabe *II III* der oberen Gurtung nachgewiesen ist, gilt für alle Stäbe der oberen und unteren Gurtung. Demnach ergibt sich als Regel für die Auffindung der Gurtstab-Spannungen: Man trage von den Momentenpunkten der Gurtungsstäbe die Werthe $\frac{M}{a}$ nach beliebigem Kraftmaßstabe aus lothrecht ab und ziehe durch die erhaltenen Endpunkte Linien parallel zu den betreffenden Gurtungsstäben; alsdann geben die zwischen den Diagonalen erhaltenen Längen dieser

Parallelen die Spannungen der Gurtungsstäbe in demselben Mafsstabe an, nach welchem $\frac{M}{a}$ aufgetragen ist.

In Fig. 197 sind für die Stäbe der oberen und unteren Gurtung die Stabspannungen nach vorstehendem Verfahren ermittelt.

Man kann nach diesem Verfahren auch die Spannungen der Gitterstäbe leicht finden. Denkt man in Fig. 198 einen Schnitt durch die Stäbe O_3 , U_{II} und D_4 gelegt, so wirken auf das links von diesem Schnitt liegende Trägerstück vier Kräfte, welche mit einander im Gleichgewicht sein müssen: die Mittelkraft aller äufseren auf das Trägerstück wirkenden Kräfte, d. h. die Querkraft Q , ferner die Spannungen O_3 , U_{II} , D_4 der drei vom Schnitt getroffenen Stäbe. Für diese vier Kräfte ergibt sich demnach ein sich schließendes Kraftpolygon. Bekannt sind O_3 und U_{II} nach Gröfse und Richtung, Q und D_4 nach ihrer Richtung. Man lege U_{II} in m an O_3 und ziehe durch den Endpunkt o dieser Linie die Parallele zu D_4 , durch n eine Parallele zu Q ,

Fig. 198.



d. h. die Lothrechte; beide Parallelen schneiden sich in t ; alsdann ist $ot = D_4$ und $tn = Q$. In Fig. 198 ist das Kraftpolygon schraffirt³³⁾. Die Art der Beanspruchung ergibt sich, wie stets, aus dem Umlaufsinne im Kraftpolygon.

Wenn einzelne Felder in der wagrechten Projection andere Knotenpunktabstände haben, als a , so ändert dies im Grundgedanken nichts; im Einzelnen wird die Construction etwas anders. Die Werthe $\frac{M}{a}$ kann man durch Rechnung oder durch Construction bestimmen.

2) Parallelträger mit Netzwerk oder zwei Scharen von Diagonalen.

a) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diese Spannungen für eine beliebige Belastung zu ermitteln, bezeichnen wir die Mittelkraft aller auf das Bruchstück links vom Schnitte II (Fig. 199) wirkenden äufseren Kräfte mit Q . Für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung ist F der Momenten- oder conjugirte Punkt, und das Moment der äufseren Kräfte in Bezug auf diesen Punkt ist $M = Q\eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung:

$$0 = M + Xh, \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{M}{h} \dots \dots \dots 212.$$

178.
Berechnung
der Gurtungs-
spannungen.

³³⁾ Dafs in Fig. 198 der Endpunkt o von U_{II} auf die Diagonale III_3 fällt, ist zufällig.

In gleicher Weise ergibt sich für C als Momentenpunkt, wenn M_1 das Moment von Q in Bezug auf C ist,

$$0 = M_1 - Zh, \text{ woraus } Z = \frac{M_1}{h} \dots \dots \dots 213.$$

Da bei einem Träger auf zwei Stützen M stets die angegebene Drehrichtung hat (stets positiv ist, vergl. Art. 156, S. 150), so folgt aus den Gleichungen 212 u. 213: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren Gurtungsstäbe stets gezogen. Ferner: X_{max} und Z_{max} werden bei derselben Belaftung wie M_{max} stattfinden, d. h. in jedem Gurtungsstabe findet größte Beanspruchung bei derjenigen Belaftung statt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt sein Maximum erreicht. Wird gleichmäßig vertheilte Belaftung zu Grunde gelegt, so findet für jeden Querschnitt das größte Moment bei voller Belaftung statt; sämtliche Gurtungsstäbe werden demnach bei voller Belaftung am meisten beansprucht.

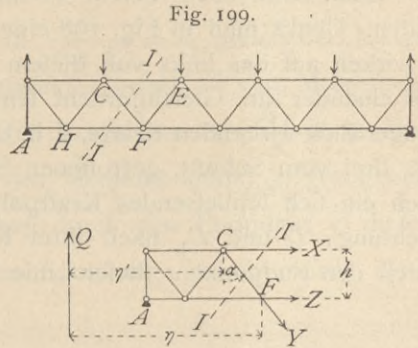
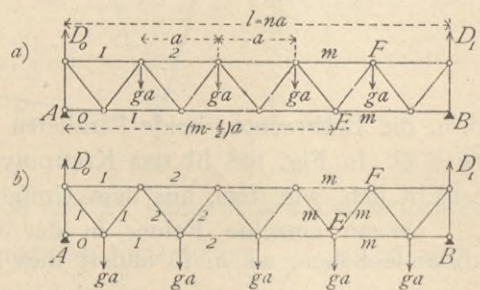


Fig. 199.

a) Das Eigengewicht der Construction kann als eine gleichmäßig über die Länge des Trägers vertheilte Belaftung angesehen werden. Wir bezeichnen es mit g für die Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, daß alle Belaftungen durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für den Hochbau stets ausreicht. Die Entfernung der Knotenpunkte sei a (Fig. 200), die Felderzahl des Trägers n , mithin $l = na$. Jeder Mittenknotenpunkt ist mit ga belaftet; die Belaftungen der Knotenpunkte über den Auflagern berücksichtigen wir nicht, weil diese unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden.

Fig. 200.



Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 200a), so ist bei der angenommenen Diagonalenanordnung der Auflagerdruck

$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{ga}{2}.$$

Für den m -ten Stab der oberen Gurtung ist E der Momentenpunkt und

$$M = D_0 \left(m - \frac{1}{2} \right) a - (m - 1) ga \left(\frac{m - 2}{2} a + \frac{a}{2} \right);$$

$$M = \frac{ga^2}{2} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right];$$

$$X_m^g = - \frac{ga^2}{2h} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \dots \dots \dots 214.$$

Für den m -ten Stab der unteren Gurtung ist F der Momentenpunkt und

$$M_1 = D_0 ma - (m - 1) ga \frac{ma}{2} = \frac{ga^2}{2} m (n - m);$$

$$Z_m^g = \frac{ga^2}{2h} m (n - m) \dots \dots \dots 215.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 200 b), so ist

$$D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}.$$

Genau wie oben erhält man

$$X_m^g = -\frac{g a^2}{2 h} \left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2} \right] \quad \text{und} \quad Z_m^g = \frac{g a^2}{2 h} m (n - m) \quad 216.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, so daß die erste vom Auflagerpunkt nach der Mitte ansteigt, so ergeben sich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weise, wie eben gezeigt, zu ermitteln sind.

b) Die größten Gurtungsspannungen in Folge gleichmäßig vertheilter Nutzlast finden statt, wenn der ganze Träger belastet ist. Nennt man die gleichmäßig vertheilte Nutzlast für die Längeneinheit p , so ergeben sich offenbar für diese Belastung, die für den Knotenpunkt gleich $p a$ ist, genau dieselben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur g durch p zu ersetzen ist. Man erhält also für an der oberen Gurtung angreifende Lasten (Fig. 200 a)

$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2 h} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m (n - m), \quad 217.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Lasten (Fig. 200 b)

$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2 h} \left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2} \right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m (n - m) \quad 218.$$

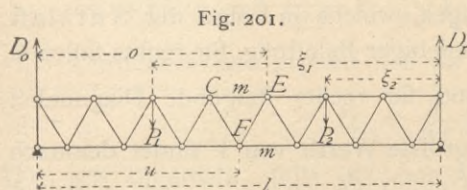


Fig. 201.

c) Für eine Belastung des Trägers durch Einzellasten P_1, P_2 (Fig. 201) sind in die allgemeinen Gleichungen 212 u. 213 die den einzelnen Stäben entsprechenden Momentenwerthe einzusetzen.

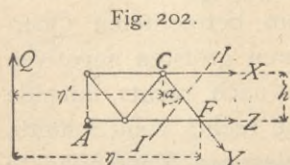


Fig. 202.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für eine beliebige Belastung sei Q die Mittelkraft aller links vom Schnitte II (Fig. 202) wirkenden äußeren Kräfte. Nennt man die Spannung der vom Schnitte getroffenen, nach rechts fallenden Diagonale Y , so muß, weil die algebraische Summe der auf das Bruchstück wirkenden lothrechten Kräfte gleich Null ist, stattfinden:

$$0 = Q - Y \cos \alpha, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad 219.$$

für eine nach rechts steigende Diagonale (Fig. 203) ist

$$0 = Q' + Y' \cos \beta, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta} \quad 220.$$

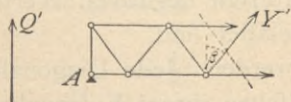


Fig. 203.

a) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angreifen, den Auflagerdruck (Fig. 200 a)

$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{g a}{2}.$$

Für den m -ten nach rechts fallenden Stab ist

$$Q_m = (n - 1) \frac{g a}{2} - (m - 1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2 m + 1),$$

179.
Berechnung
der
Gitterstäbs-
spannungen.

fonach

$$Y_m^g = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 1); \dots \dots \dots 221.$$

für den m -ten nach rechts steigenden Stab ist

$$Q'_m = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1), \text{ daher } Y'_m^g = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2m + 1) \dots 222.$$

Aus den Gleichungen 221 u. 222 für Y_m^g und Y'_m^g folgt leicht: Bei gleichmäÙig über den Träger vertheilter Belastung g (oder p) auf die Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 200 b), so ist für die m -te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 2), \dots \dots \dots 223.$$

für die m -te rechts steigende Diagonale

$$Y' = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2m) \dots \dots \dots 224.$$

Das Gesetz, daß bei dieser Belastungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt werden, ist auch hier giltig.

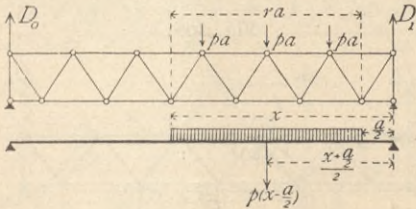
b) Um die ungünstigsten Gitterstabspannungen, welche in Folge der Nutzlast entstehen, zu ermitteln, erwäge man, daß bei beliebiger Belastung für rechts fallende Diagonalen nach Gleichung 219: $Y = \frac{Q}{\cos \alpha}$ und für rechts steigende Diagonalen nach Gleichung 220: $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$ ist. Der größte Werth von Y findet demnach bei derjenigen Belastung statt, bei welcher die Querkraft Q ihren größten Werth hat. Nach Art. 155 (S. 148) hat aber die Querkraft für einen Querschnitt ihren größten positiven Werth, wenn der Trägertheil rechts vom betrachteten Querschnitte belastet, der Trägertheil links davon unbelastet ist, ihren größten negativen Werth bei der umgekehrten Belastung. Daraus folgt: Jede nach rechts fallende Diagonale erleidet den größten Zug durch Nutzlast, wenn die rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte unbelastet sind; dagegen den größten Druck, wenn die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die übrigen unbelastet sind. Da $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$, so findet in den nach rechts steigenden Diagonalen der größte Druck statt, wenn Q' seinen größten positiven Werth hat, wenn also nur die Knotenpunkte rechts vom Schnitte belastet sind, der größte Zug dagegen, wenn Q' seinen größten negativen Werth hat, wenn also nur die Knotenpunkte links vom Schnitte belastet sind.

Allgemeiner kann die Regel wie folgt ausgesprochen werden: Jede Diagonale erleidet den größten Zug, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Fußpunkte und demjenigen Auflager, nach welchem dieser Fußpunkt zeigt, belastet sind; jede Diagonale erleidet den größten Druck, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Kopfpunkte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem dieser Kopfpunkt hinweist. Dieser Satz gilt allgemein, ob die Lastpunkte an der oberen oder unteren Gurtung liegen. Daraus folgt, daß für die Diagonalen nicht die volle, sondern die

theilweise Belastung die ungünstigste ist und das man demnach auch im Hochbau, falls einseitige Belastung möglich ist (in Versammlungsräumen, Schulen etc.), bei der Berechnung der Träger auf dieselbe Rücksicht nehmen muß. Für jede Diagonale ist eine andere ungünstigste Belastung einzuführen.

Nachdem nunmehr die ungünstigsten Belastungsarten für die einzelnen Stäbe ermittelt sind, handelt es sich um die Auffuchung der durch dieselben erzeugten positiven, bezw. negativen Größtwerthe von Y und Y' . Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 204), so ist Q genau eben so groß, als wenn beim vollwandigen Träger die Einzellasten pa je auf die Längen a gleichmäßig vertheilt wären, d. h. als wenn die Last p für die Längeneinheit von der Mitte des äußersten Feldes am rechten, bezw. linken Auflager bis zur Mitte desjenigen Feldes der oberen Gurtung vorgerückt ist, dem die Diagonale angehört. Denn im ersten Falle ist, wenn r belastete Knotenpunkte vorhanden sind,

Fig. 204.



und da $x = ra + \frac{a}{2} = a \left(r + \frac{1}{2} \right)$, also $x + \frac{a}{2} = a(r + 1)$ ist, so wird

$$D_0 = \frac{rap}{l} \left(\frac{ra}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{rpa^2}{2l} (r + 1),$$

und da $x = ra + \frac{a}{2} = a \left(r + \frac{1}{2} \right)$, also $x + \frac{a}{2} = a(r + 1)$ ist, so wird

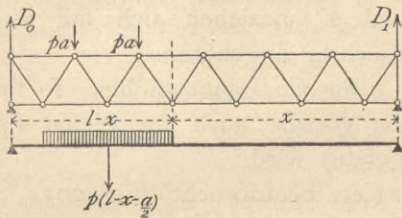
$$D_0 = \left(x + \frac{a}{2} \right) \frac{rpa}{2l} = \frac{p}{2l} \left(x + \frac{a}{2} \right) \left(x - \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right].$$

Derfelbe Werth ergibt sich für den vollwandigen Träger in Fig. 204, nämlich

$$D_0 = \frac{p}{2l} \left(x - \frac{a}{2} \right) \left(x + \frac{a}{2} \right).$$

Dies gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit der Nutzlast belasteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Fig. 205.



Nun ist für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belastung den größten Zug, bezw. größten Druck erzeugt, $Q_{max} = D_0$, also auch

$$Q_{xmax} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

daher nach Gleichung 219

$$Y_{max} = \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \dots \dots \dots 225.$$

In gleicher Weise ergibt sich nach Fig. 205

$$D_0 = \frac{p \left(l - x - \frac{a}{2} \right)}{l} \left(x + \frac{l - x - \frac{a}{2}}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[\left(l - \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right];$$

$$Q_{xmin} = \frac{p}{2l} \left[\left(l - \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right] - p \left(l - \frac{a}{2} - x \right) = - \frac{p}{2l} \left[\left(l - x \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

und

$$Y_{min} = - \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[\left(l - x \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \dots \dots \dots 226.$$

Dem entsprechend wird

$$Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta} = -\frac{p}{2l \cos \beta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right], \dots \dots \dots 227.$$

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta} = \frac{p}{2l \cos \beta} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 228.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 206), so ist (wenn mit ganz geringem Fehler die Belastung der beiden den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit pa eingeführt wird) Q_{max} , bzw. Q_{min} eben so groß, wie bei einem vollwandigen Träger, bei welchem die Last p für die Längeneinheit vom rechten. bzw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vorgerückt ist, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis ist in gleicher Weise, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit Nutzlast belasteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt sind. Demnach ist

$$Q_{max} = \frac{p x^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p (l-x)^2}{2l}.$$

x bedeutet in diesen Gleichungen den Abstand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

Man erhält

$$Y_{max} = \frac{p x^2}{2l \cos \alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p (l-x)^2}{2l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 229.$$

$$Y'_{min} = -\frac{p x^2}{2l \cos \beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p (l-x)^2}{2l \cos \beta} \dots \dots \dots 230.$$

Die zusammengehörigen Werthe von Y und Y' beziehen sich auf zwei Diagonalen, welche demselben Felde der unteren Gurtung angehören.

c) Erfährt der Träger eine volle Belastung p für die Längeneinheit, so sind die unter a für Eigengewichtsbelastung gefundenen Werthe auch für diesen Fall gültig, wenn statt des dortigen g die Gröfse p eingeführt wird.

b) Wird endlich der Träger durch Einzellasten beansprucht (Fig. 207), so erzeugt die Last P im Abstände ξ von B den Stützendruck $D_0 = \frac{P\xi}{l}$. In sämtlichen rechts fallenden Diagonalen links vom Lastpunkt wird dann $Y = \frac{D_0}{\cos \alpha} = \frac{P\xi}{l \cos \alpha}$; in sämtlichen rechts steigenden Diagonalen links vom Lastpunkte ist $Y' = -\frac{P\xi}{l \cos \beta}$.

Eben so ist für alle Querschnitte rechts vom Lastpunkte $Q = D_0 - P = -\frac{P(l-\xi)}{l}$, mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen dieser Strecke $Y_1 = -\frac{P(l-\xi)}{l \cos \alpha}$, für die nach rechts steigenden Diagonalen dieser Strecke $Y'_1 = \frac{P(l-\xi)}{l \cos \beta}$. Daraus folgt die

Fig. 206.

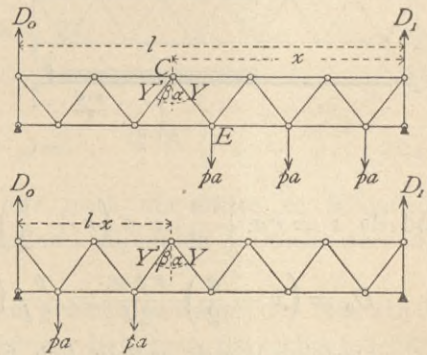
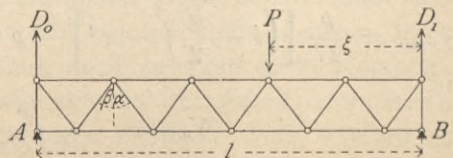


Fig. 207.



rechten Auflager liegen (Fig. 204). Für die Berechnung der ungünstigsten Diagonalspannungen sind sonach diejenigen Werthe von x einzusetzen, welche den Fußpunkten der Diagonalen entsprechen und die zugehörigen Ordinaten aus Fig. 209 a) zu entnehmen. Für die Diagonale CE ergibt sich \overline{mn} als Werth von Q_{max} . Die durch n parallel zur Diagonale CE gezogene Linie \overline{no} ergibt den Werth von

$$Y = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}, \text{ weil } \overline{no} = \frac{\overline{mn}}{\cos \alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}$$

ist. Nach Gleichung 227 ist $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta}$, also \overline{nr} der größte Druck in der rechts steigenden Diagonale EF .

Ferner ist

$$Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \quad 232.$$

Wird die Differenz $l-x = \xi$ gesetzt, so ergibt sich, daß die Curve für $Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]$ derjenigen für Q_{max} congruent ist.

Für $\xi = 0$ ist $Q_{min} = +\frac{pa^2}{8l}$; für $\xi = l$ ist $Q_{min} = -\frac{pl}{2l} \left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] = -\frac{pl}{2} + \frac{pa^2}{8l}$. Man erhält die in Fig. 209 a) gezeichnete Curve, in welcher für die rechts fallende Diagonale CE das Minimum nt , für die rechts steigende Diagonale das Maximum nu eingezeichnet ist.

Ohne bemerkenswerthen Fehler kann man in den meisten Fällen einfacher

$$Q_{max} = \frac{p}{2l} x^2 \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p}{2l} (l-x)^2$$

setzen. Die Curven verlaufen dann genau so, wie in Fig. 210.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an oder allgemein, sind die an der mobil belasteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächst den Auflagern von diesen

Fig. 209.

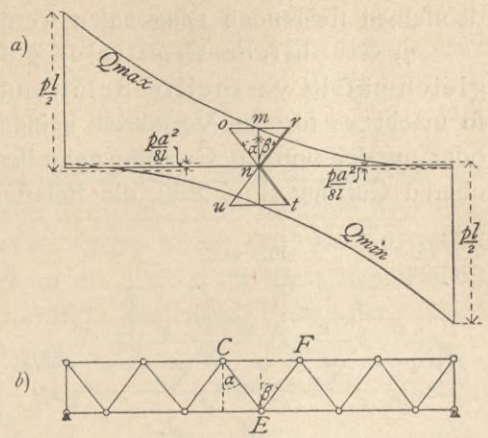


Fig. 210.

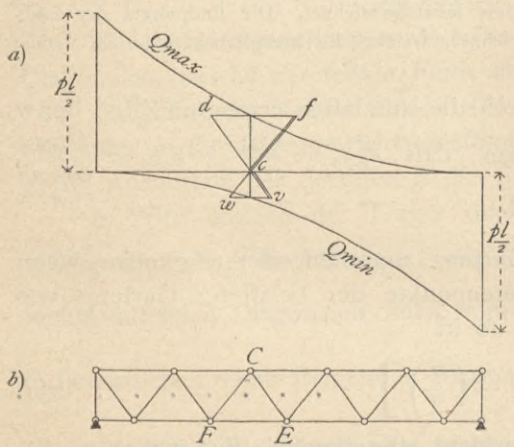
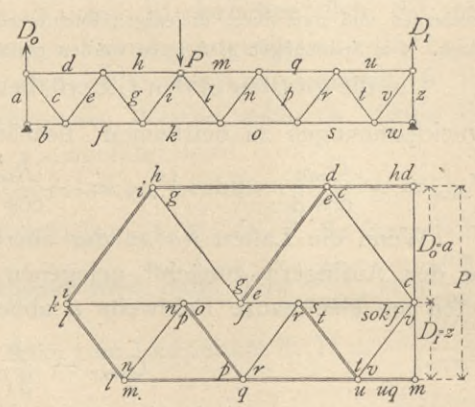


Fig. 211.



um je eine halbe Feldweite entfernt, so ergibt das Verzeichnen der Curven für Q_{max} und Q_{min} entsprechend den Gleichungen in Art. 179 (S. 180) die in Fig. 210 a) dargestellten Parabeln.

Man erhält genau wie oben: der Maximalzug in CE ist cd ; der Maximaldruck in CF ist cf ; der Maximaldruck in CE ist cv ; der Maximalzug in CF ist cw .

Für eine Einzellast wird die Ermittlung der Spannungen bequem mittels des *Cremona'schen* Kräfteplans vorgenommen, wie in Fig. 211 geschehen ist; dieselbe ist ohne Weiteres verständlich.

δ) Art der Beanspruchung der Stäbe bei einem Träger auf zwei Stützen. Nach Art. 178 (S. 175) werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren stets gezogen. Die Diagonalen erhalten verschiedene Beanspruchungen. Durch das Eigengewicht erhalten die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Zug, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen Druck; durch die ungünstigste Nutzlast erhalten im Allgemeinen alle Diagonalen sowohl Zug, wie Druck. Wenn der größte Druck, der in einer Diagonalen durch Nutzlast entsteht, kleiner ist, als der Zug durch Eigengewicht, so erleidet die Diagonale nur Zug, umgekehrt nur Druck. Für die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen nahe dem Auflager ist der Zug in Folge des Eigengewichtes meistens viel größer, als der größte Druck durch Nutzlast, und daher werden diese Diagonalen meistens nur gezogen. Eben so ergibt sich, daß die nahe dem Auflager befindlichen, nach der Mitte zu ansteigenden Diagonalen nur Druck erhalten. Die Diagonalen im mittleren Theile des Trägers werden dagegen sowohl gezogen, wie gedrückt.

181.
Art
der Stab-
beanspruchung.

3) Parallelträger mit Diagonalen und Pfosten.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Für eine beliebige Belastung wird genau so, wie in Art. 178 (S. 175), wenn M das Biegemoment für den zu einem oberen Gurtungsstabe gehörigen Momentenpunkt, M' das Biegemoment für den zu einem unteren Gurtungsstabe gehörigen Momentenpunkt bezeichnet,

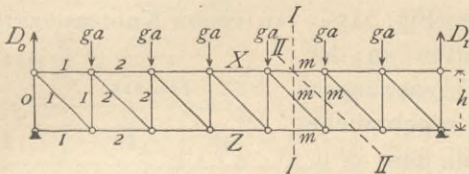
182.
Berechnung
der
Gurtungs-
spannungen.

$$X = -\frac{M}{h} \quad \text{und} \quad Z = \frac{M'}{h} \quad \dots \quad 233.$$

Auch hier findet also die größte Beanspruchung der Gurtungsstäbe bei voller Belastung des Trägers statt.

Für die Belastung durch Eigengewicht, bzw. volle gleichmäßig vertheilte Nutzlast (Fig. 212) ist die Spannung in den Gurtungsstäben davon unabhängig, ob die Lasten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen.

Fig. 212.



Für den m -ten Stab der oberen, bzw. der unteren Gurtung erhält man die durch das Eigengewicht g für die Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_g = -\frac{g a^2 m (n - m)}{2 h} \quad \text{und} \quad Z_g = \frac{g a^2}{2 h} (m - 1) (n - m + 1) \quad \dots \quad 234.$$

und die durch volle Nutzlast p für die Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_p = -\frac{p a^2 m (n - m)}{2 h} \quad \text{und} \quad Z_p = \frac{p a^2}{2 h} (m - 1) (n - m + 1) \quad \dots \quad 235.$$

X_p und Z_p sind zugleich die größten Spannungen, die durch Nutzlast hervorgebracht werden.

183.
Berechnung
der
Gitterstäbs-
spannungen.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für das Bruchstück in Fig. 213 sei bei beliebiger Belastung die Querkraft Q ; alsdann ist für die Spannung in der Diagonalen

$$Y \cos \alpha = Q, \text{ woraus } Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \dots \dots \dots 236.$$

Ist in Fig. 214 für das Bruchstück die Querkraft Q' , so ist die Spannung im Pfoften

$$V = - Q' \dots \dots \dots 237.$$

Für die Diagonalen ist es, da der Schnitt lothrecht gelegt werden kann, gleichgiltig, ob die Last in der oberen oder unteren Gurtung liegt; für die Pfoften dagegen ergibt sich, da der Schnitt bei diesen schräg gelegt wird, ein anderes Q' , wenn die Last oben, als wenn sie unten liegt.

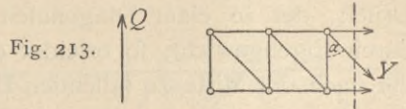


Fig. 213.

a) Das Eigengewicht erzeugt (Fig. 212) in der m -ten Diagonale (Schnitt II) die Querkraft

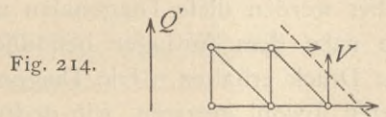


Fig. 214.

$$Q_m = D_0 - (m - 1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1) \text{ und}$$

$$Y_m^g = \frac{Q_m}{\cos \alpha} = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 1) \dots \dots \dots 238.$$

Den selben Ausdruck fanden wir in Art. 179 (S. 178), Gleichung 221, für die beim Netzwerk rechts fallenden Diagonalen. Die in Bezug auf Zug und Druck dort gefundenen Ergebnisse gelten demnach auch hier: Die nach der Mitte fallenden Diagonalen erhalten durch das Eigengewicht Zug; die nach der Mitte steigenden Diagonalen erhalten Druck.

Für die Ermittlung der Spannungen in den Pfoften ist zu unterscheiden, ob sich die Lastpunkte oben oder unten befinden. Im ersteren Falle (Fig. 212) ist

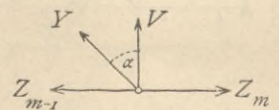
$$V_m = - Q_m = - \frac{g a}{2} (n - 2m + 1), \dots \dots \dots 239.$$

im zweiten Falle

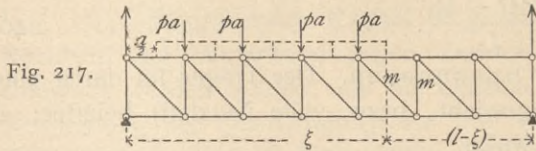
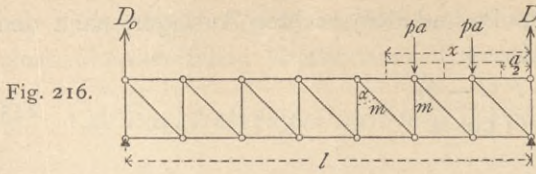
$$V_m = - Q'_m = - \frac{g a}{2} (n - 1 - 2m) \dots \dots \dots 240.$$

Die Art der Beanspruchung ergibt sich durch Betrachtung eines beliebigen Knotenpunktes an der nicht belasteten Gurtung (Fig. 215). An einem Knotenpunkte der unteren Gurtung wirken, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angenommen werden, nur die Spannungen der Stäbe, welche sich an ihm treffen. Die algebraische Summe aller lothrechten Seitenkräfte muß Null sein, d. h. es muß $0 = Y \cos \alpha + V$, also $V = - Y \cos \alpha$ sein. Hieraus folgt der Satz: Pfoften- und Diagonalspannung am Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung haben entgegengesetzte Beanspruchung; die Belastung, welche in einer Diagonalen Zug erzeugt, erzeugt in demjenigen Pfoften, welcher mit ihr an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft, Druck und umgekehrt.

Fig. 215.



b) Für die ungünstigste Beanspruchung der Gitterstäbe, welche durch die Nutzlast hervorgerufen wird, ergibt sich bezüglich der Diagonalen durch dieselbe Beweisführung, wie in Art. 179 (S. 178), die gleiche Regel wie dort. Für die Pfoften



ergibt sich zugleich aus dem Schlusssatze unter α : Jeder Pfosten erhält seinen größten Druck (bezw. Zug) bei derjenigen Belastung, bei welcher die mit ihm an einem unbelasteten Knotenpunkte zusammentreffende Diagonale ihren größten Zug (bezw. Druck) erhält.

Wirken die Lasten an der oberen Gurtung, so ergeben sich die Werthe für die Spannungen, wenn wir wieder-

um zur Ermittlung von Q die Knotenpunktsbelastungen durch gleichförmig vertheilte Lasten ersetzt denken, wie folgt. Für das Maximum von Y_m und das Minimum von V_m ergibt sich nach Fig. 216 der Auflagerdruck

$$D_0 = \frac{p \left(x - \frac{a}{2} \right)}{2l} \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = Q_m.$$

Sonach

$$Y_{m \max} = \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \text{und} \quad V_{m \min} = - \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \quad 241.$$

Für Y_{\min} und V_{\max} findet man nach Fig. 217

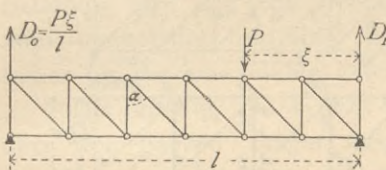
$$Q = - \frac{p}{2l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right];$$

$$Y_{m \min} = - \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \text{und} \quad V_{m \max} = + \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \quad 242.$$

x bedeutet den Abstand der Mitte desjenigen Feldes, zu dem die Diagonale gehört, vom rechten Auflager; bei den Pfosten die Mitte des Feldes, zu welchem diejenige Diagonale gehört, die mit dem Pfosten an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft (hier also der unteren Gurtung).

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an, so stimmen die Formeln für die Diagonalen genau mit den eben entwickelten; auch diejenigen für die Pfosten, wenn man beachtet, daß x den soeben erwähnten Werth hat, daß sich also x hier auf die Mitte des Feldes bezieht, zu dem die Diagonale gehört, welche sich mit dem Pfosten an einem Knotenpunkte der oberen Gurtung schneidet; statt V_m ist also dann V_{m-1} zu setzen.

Fig. 218.



c) Wenn der Träger durch eine Einzellaft belastet wird (Fig. 218), so erhält jede Diagonale

zwischen dem Lastpunkt und dem linken Auflager, nach welchem hier die Diagonalen steigen, einen Zug

$$Y = \frac{P \xi}{l \cos \alpha}, \quad \dots \quad 243.$$

jeder Pfosten auf dieser Seite der Last einen Druck

$$V = - \frac{P \xi}{l}, \quad \dots \quad 244.$$

Jede Diagonale zwischen dem Lastpunkt und dem rechten Auflager, nach dem die Diagonalen hier fallen, erhält einen Druck

$$Y = - \frac{P(l - \xi)}{l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 245.$$

jeder Pfosten auf dieser Seite einen Zug

$$V = \frac{P(l - \xi)}{l} \dots \dots \dots 246.$$

184.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Der Träger sei durch eine gleichmäÙig vertheilte Last (Eigengewicht, bezw. volle Nutzlast) belastet; in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung wirke die Last ga , bezw. pa . Hiernach ist in Fig. 219 der Kräfteplan nach dem Cremona'schen Verfahren gezeichnet, worüber weitere Bemerkungen unnöthig sind.

Wenn die Zeichnung für eine Belastung g auf die Längeneinheit construirt ist, so geben die Längen der einzelnen Linien auch zugleich die Beanspruchungen für die Belastung p auf die Längeneinheit, falls dieselben nur auf einem Maßstabe abgegriffen werden, auf welchem diejenige Länge pa bedeutet, welche vorher ga bedeutet hatte.

Sind die Maximalspannungen in den Gitterstäben, welche durch Verkehrslast erzeugt werden, zu bestimmen, so ergibt die Vergleichung der in Art. 183 (S. 185) für Y_{max} und V_{max} gefundenen Werthe mit den in Art. 179 (S. 177) für den Parallelträger mit Netzwerk gefundenen Werthen für Y und Q die genaue Uebereinstimmung beider, falls x den in Art. 183 (S. 185) angegebenen Werth hat.

Die unten stehende Curve (Fig. 220) ergibt demnach die Werthe für Q_{max} , so wie Q_{min} und damit, wie gezeichnet, leicht die Werthe für Y und V . Der für V_{3min}

Fig. 219.

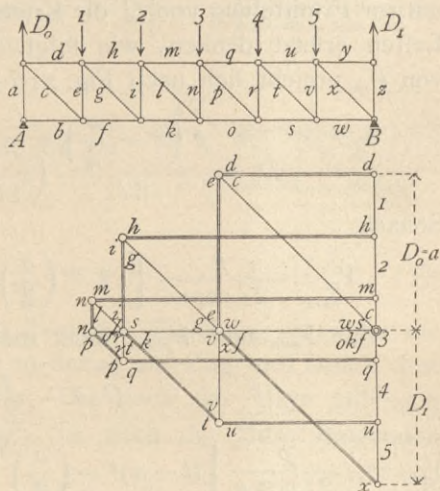


Fig. 220.

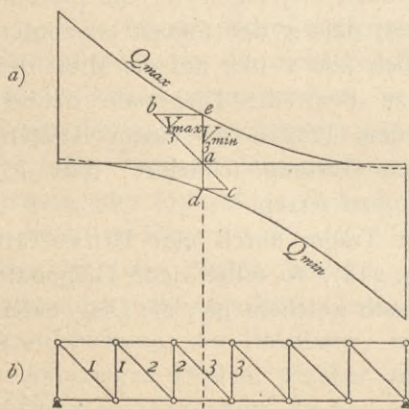
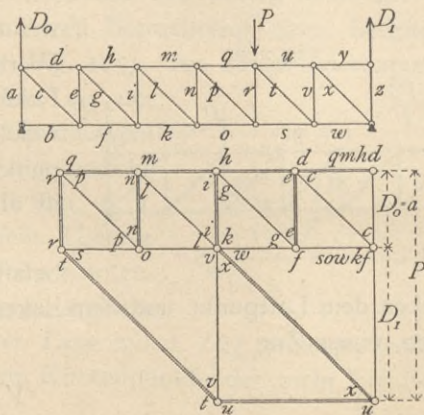


Fig. 221.



angegebene Werth entspricht einer Belastung der oberen Gurtung. Auch hier kann ohne merklichen Fehler an Stelle der Curve in Fig. 220a diejenige in Fig. 210a gesetzt werden.

Sämmtliche durch eine Einzellaft erzeugten Spannungen werden leicht mittels eines *Cremona'schen* Kräfteplanes (Fig. 221) ermittelt.

4) Parallelträger mit nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Diagonalen.

Im vorhergehenden Kapitel ist gezeigt worden, daß die gedrückten Stäbe mit Rücksicht auf Widerstand gegen Zerknicken unter Umständen wesentlich stärker konstruirt werden müssen, als die einfache Druckbeanspruchung erfordert. Bei der Bestimmung der Querschnittsgröße sind vielfach Zuschläge zu machen, welche bei den gezogenen Stäben nicht nöthig sind. Man hat deshalb bei gewissen Baustoffen, besonders bei Schmiedeeisen und Flusseisen, die Verwendung gedrückter Stäbe möglichst beschränkt und statt derselben, wenn möglich, gezogene angeordnet. Wo aber gedrückte Stäbe nicht entbehrt werden können, empfiehlt es sich, die kürzeren Stäbe als gedrückte, die längeren als gezogene auszuführen. Bei manchen Baustoffen hingegen, insbesondere beim Holz, macht die Anordnung der Verbindungen eine möglichst geringe Verwendung von Zugstäben und eine möglichst ausgedehnte Verwendung von Druckstäben wünschenswerth.

Bei den Trägern mit Fachwerk ist die Anordnung von nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Diagonalen möglich.

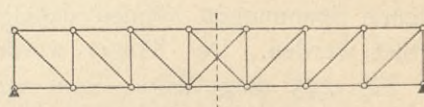
Wir betrachten zunächst die Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

Wie in Art. 183 (S. 184) nachgewiesen ist, erzeugt das Eigengewicht, so wie auch eine gleichmäßige Belastung aller Knotenpunkte in den nach der Mitte fallenden Diagonalen Zug, in den nach der Mitte steigenden Diagonalen Druck. Soll also durch die angegebene Belastung, welche für den Hochbau weitaus die wichtigste ist, in den Diagonalen nur Zug entstehen, so ordnet man nur nach der Mitte fallende Diagonalen an, konstruirt also den Träger genau symmetrisch zur Mitte (Fig. 222).

Fig. 222.



Fig. 223.



Ist die Felderzahl ungerade, so erhalten die Diagonalen im Mittelfelde bei dieser Belastung den Zug und Druck Null (Fig. 223). Bei dieser Trägerform erhalten je zwei symmetrisch zur Mitte liegende Stäbe gleiche Spannungen; dieselben wurden früher für die eine Hälfte gefunden und sind demnach leicht zu übertragen.

Die in Fig. 222 u. 223 gezeichneten Diagonalen erhalten aber durch nicht über den ganzen Träger ausgedehnte Belastungen unter Umständen Druckbeanspruchungen, und zwar findet, wie in Art. 179 (S. 178) u. 183 (S. 184) ermittelt, in einer Diagonalen der größte Druck statt, wenn die Knotenpunkte vom Kopfpunkte der Diagonalen bis zu demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, belastet, die übrigen Knotenpunkte aber unbelastet sind. Durch das stets noch vorhandene Eigengewicht findet andererseits in den Diagonalen eine beständige Zugspannung statt, welche die erwähnte Druckbeanspruchung vermindert. Diejenigen Diagonalen nun, bei denen (beides absolut genommen) die Zugspannung durch das Eigengewicht größer ist, als die größtmögliche Druckspannung in Folge der Verkehrslast, werden stets gezogen, nie gedrückt. Bei denjenigen Diagonalen

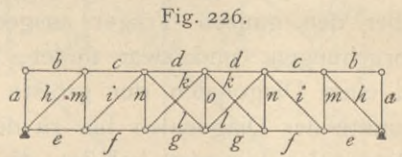
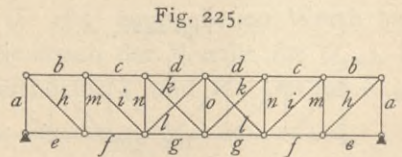
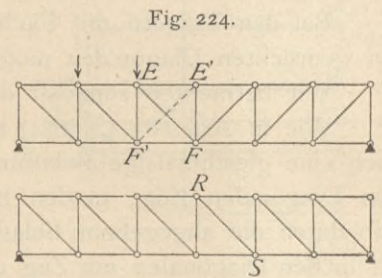
185.
Grundsatz.

186.
Träger
mit nur
gezogenen
Diagonalen.

dagegen, welche durch das Eigengewicht einen geringeren Zug erhalten, als ungünstigstenfalls der Druck durch Nutzlast beträgt (wiederum beides absolut genommen), wird eine Druckbeanspruchung eintreten, die zu vermeiden ist. Man bringt deshalb im betreffenden Felde eine zweite Diagonale mit einer solchen Richtung an, daß die Belastung, welche in der bereits im Felde vorhandenen Diagonalen Druck erzeugen würde, in der zweiten Diagonalen Zug hervorruft. Die Diagonale muß demnach so gerichtet sein, daß die erwähnte Nutzlast die Knotenpunkte vom Fußpunkte dieser Diagonalen an bis zu demjenigen Auflager belastet, nach welchem dieser Fußpunkt hinweist; mit anderen Worten, man bringt eine Diagonale an, welche die bereits vorhandene Diagonale kreuzt, eine sog. Gegendiagonale (in Fig. 224 die punktirte Diagonale $E'F'$).

Damit dieselbe aber auch wirksam sei, erhält die Hauptdiagonale EF einen derartigen Querschnitt, daß sie bei Druckspannungen ausbiegt, daß sie also in diesem Falle als nicht vorhanden angesehen werden kann.

Solche Gegendiagonalen sind in denjenigen Feldern anzuordnen, in welchen die Hauptdiagonalen unter Umständen Druckspannungen erhalten. In den Feldern nahe am Auflager ist die Zugspannung durch das Eigengewicht meistens groß, die Druckspannung durch Nutzlast meistens klein, so daß in diesen Feldern keine Gegendiagonalen nöthig sind; in den mittleren dagegen sind sie anzuordnen. Die Spannungen in den Gegendiagonalen sind dann genau so zu ermitteln, als wären die Hauptdiagonalen nicht vorhanden; jede Gegendiagonale, z. B. $E'F'$, befindet sich genau in derselben Lage, wie die symmetrisch zur Trägermitte liegende Hauptdiagonale im Träger mit nur nach einer Seite fallenden Diagonalen, also hier wie RS (Fig. 224). Die oben gefundenen Spannungen können daher hier sofort verworther werden. Der Träger würde demnach die in Fig. 225 dargestellte Form erhalten, in welcher je zwei Stäbe mit gleichen Bezeichnungen gleiche Spannungen erleiden.



Bei der Construction eines Trägers mit nur gedrückten Diagonalen ist nach gleichem Grundsatze zu verfahren. Zunächst sind beiderseits nur nach der Mitte ansteigende Diagonalen zu verwenden, damit man für Belastung durch Eigengewicht, bezw. Gesamtlast nur Druck erhalte. In denjenigen Feldern alsdann, in welchen die Diagonalen unter Umständen Zugspannung erhalten würden, sind wie oben Gegendiagonalen anzuordnen (Fig. 226). Die Verbindung in den Knotenpunkten ist so anzuordnen, daß die Hauptdiagonalen keinen Zug übertragen können.

Die Beanspruchung der Pfoften ergibt sich nach Art. 183 (S. 184) stets der Beanspruchung derjenigen Diagonalen entgegengesetzt, welche an einem unbelasteten Knotenpunkte mit dem Pfoften zusammentrifft. Werden demnach alle Diagonalen nur gezogen, so werden alle Pfoften nur gedrückt (Fig. 225); werden alle Diagonalen

187.
Träger
mit nur
gedrückten
Diagonalen.

nur gedrückt, so werden alle Pfoften nur gezogen (Fig. 226). Im zweiten Falle werden dieselben meistens aus Schmiedeeisen hergestellt, während die Diagonalen aus Holz bestehen.

Beispiel. Ein als Parallelträger mit Diagonalen und Pfoften (nach Art von Fig. 222) hergestellter Unterzug hat folgende Abmessungen und Belastungen: Stützweite $l = 12$ m; Höhe zwischen den Gurtungs-Schwerpunkten $h = 1,5$ m; Anzahl der Felder $n = 8$; Feldweite $a = 1,5$ m. Die Diagonalen fallen jederseits nach der Trägermitte zu; Gegendiagonalen sind nicht vorhanden. Die Belastung durch das Eigengewicht für das laufende Meter ist $g = 1800$ kg, diejenige durch Nutzlast $p = 2400$ kg; mithin sind die Knotenpunktlasten bezw. $ga = 2700$ kg und $pa = 3600$ kg. Die Lastpunkte liegen in der oberen Gurtung. Die durch diese Belastungen entstehenden Spannungen sind zu berechnen.

188.
Beispiel.

α) Spannungen in den Gurtungen. Nach Gleichung 234 u. 235 sind für den m -ten Stab der oberen Gurtung

$$X_g = - \frac{1800 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} m (8 - m) = - 1350 m (8 - m)$$

und

$$X_p = - \frac{2400 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} m (8 - m) = - 1800 m (8 - m).$$

Für den m -ten Stab der unteren Gurtung sind nach Gleichung 234 u. 235

$$Z_g = \frac{1800 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} (m - 1) (9 - m) = 1350 (m - 1) (9 - m) \quad \text{und} \quad Z_p = 1800 (m - 1) (9 - m).$$

Man erhält aus vorstehenden Ausdrücken, indem man der Reihe nach für m die Werthe 1, 2, 3, 4 einführt, die Gurtungsspannungen der Stäbe links der Mitte. Die Spannungen in den symmetrisch zur Mitte liegenden Stäben sind den gefundenen genau gleich. Die Addition der Werthe X_g und X_p ergibt die Maximalspannungen in der oberen, die Addition der Werthe Z_g und Z_p die Maximalspannungen in der unteren Gurtung. Die Ergebnisse sind in umfendender Tabelle angegeben.

β) Spannungen in den Diagonalen. α) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 238 ist für die m -te Diagonale die Spannung durch das Eigengewicht, da hier $\cos \alpha = \cos 45^\circ = 0,707$ ist,

$$Y_g = \frac{1800 \cdot 1,5}{2 \cdot 0,707} (9 - 2m) = 1910 (9 - 2m).$$

Durch Einsetzung der Zahlenwerthe $m = 1, 2, 3, 4$ erhält man die Spannungen Y_g .

β) Durch die Nutzlast. Die größten Zug- und Druckspannungen, welche in den Diagonalen hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 241 u. 242

$$Y_{pmax} = \frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0,707} (x^2 - 0,75^2) = 141,4 (x^2 - 0,56)$$

und

$$Y_{pmin} = - \frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0,707} [(l - x)^2 - 0,75^2] = - 141,4 [(l - x)^2 - 0,56].$$

Man erhält für

$m =$	1	2	3	4
$x =$	11,25	9,75	8,25	6,75 m
$(l - x) =$	0,75	2,25	3,75	5,25 m

und für Y_{pmax} , bezw. Y_{pmin} die Werthe, welche in der umfendenden Tabelle folgen.

γ) Spannungen in den Pfoften. α) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 239 ist, da die Lastpunkte oben liegen,

$$V_g = - \frac{1800 \cdot 1,5}{2} (9 - 2m) = - 1350 (9 - 2m).$$

β) Durch die Nutzlast. Die größten Druck-, bezw. Zugspannungen ergeben sich aus den Gleichungen 241 u. 242 zu

$$V_{pmin} = - \frac{2400}{2 \cdot 12} (x^2 - 0,75^2) = - 100 (x^2 - 0,56) \quad \text{und} \quad V_{pmax} = 100 [(l - x)^2 - 0,56].$$

Für x sind dieselben Werthe, wie bei den Diagonalen einzuführen. Man erhält die Werthe der umfendenden Tabelle.

Im Endpfoften ist die Druckspannung stets gleich dem Auflagerdruck, also hier, da die Belastung des Endknotenpunktes mit $\frac{ga}{2}$, bezw. $\frac{pa}{2}$ hinzukommt,

$$V_g = - (3,5 + 0,5) g a = - 4 g a = - 4 \cdot 1800 \cdot 1,5 = - 10800 \text{ kg},$$

$$V_{pmin} = - 4 p a = - 4 \cdot 2400 \cdot 1,5 = - 14400 \text{ kg}.$$

Zug kann in diesem Pfoften nicht entstehen.

Auf den Mittelpfoften sind die obigen Gleichungen nicht anwendbar, weil an seinem unteren Endpunkte sich die zwei Diagonalen der anstoßenden Felder treffen, also der schräge Schnitt andere Stäbe trifft, als bei der Entwicklung der Formeln vorgesehen war. Da am oberen Endpunkt des Pfoftens keine Diagonale ansetzt, so kann derselbe nur solche lothrechte Kräfte aufnehmen, welche im oberen Knotenpunkte unmittelbar angreifen. Wir erhalten also die Spannungen in demselben genau so groß, wie die Knotenpunktbelastungen. Diese Werthe sind in die Tabelle eingefetzt worden.

Tabelle der Stabspannungen.

Theil der Construction	m	=	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Obere Gurtung	X_g	=		- 9450	-16200	-20250	-21600	-21600	-20250	-16200	- 9450
	X_p	=		-12600	-21600	-27000	-28800	-28800	-27000	-21600	-12600
Untere Gurtung	Z_g	=		0	9450	16200	20250	20250	16200	9550	0
	Z_p	=		0	12600	21600	27000	27000	21600	12600	0
Diagonalen	Y_g	=		13370	9550	5730	1910	1910	5730	9450	13370
	Y_{pmax}	=		17820	13362	9545	6363	6363	9545	13362	17820
	Y_{pmin}	=		0	- 636	- 1910	- 3818	- 3818	- 1910	- 636	0
Pfoften	V_g	=	-10800	- 9450	- 6750	- 4050	- 2700	- 4050	- 6750	- 9450	-10800
	V_{pmin}	=	-14400	-12600	- 9450	- 6750	- 3600	- 6750	- 9450	-12600	-14400
	V_{pmax}	=	0	0	4500	1350	0	1350	450	0	0

Kilogramm

Zur Bestimmung der Querschnitte nach den Gleichungen 42 bis 48 (siehe Art. 84 u. 85, S. 62 u. 63) dient die Zusammenstellung der nachstehenden Tabelle.

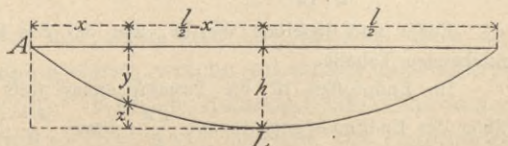
Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen: Ueberwiegender Zug				Pfoften: Ueberwiegender Druck			
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 8	- 9450	-12600	1 u. 8	0	0	1 u. 8	13370	17820	0	0 u. 8	-10800	-14400	0
2 u. 7	-16200	-21600	2 u. 7	9450	12600	2 u. 7	9550	13362	- 636	1 u. 7	- 9450	-12600	0
3 u. 6	-20250	-27000	3 u. 6	16200	21600	3 u. 6	5730	9545	-1910	2 u. 6	- 6750	- 9450	450
4 u. 5	-21600	-28800	4 u. 5	20250	27000	4 u. 5	1910	6363	-3818	3 u. 5	- 4050	- 6750	1350
										4	- 2700	- 3600	0
Kilogramm			Kilogramm			Kilogramm				Kilogramm			

5) Parabelträger.

189.
Berechnung
der
Spannungen:

Parabelträger sind Träger, bei denen die Knotenpunkte einer oder beider Gurtungen auf Parabeln liegen. Hier sollen nur solche Parabelträger behandelt werden, bei welchen die obere Gurtung eine gerade Linie, die untere Gurtung ein der Parabel eingeschriebenes Vieleck ist (Fig. 227). Bezeichnet man die Pfeilhöhe der Parabel mit h , die Trägerstützweite mit l und legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in das linke Auflager (nach A), so ist, wenn L der Scheitel der Parabel ist,

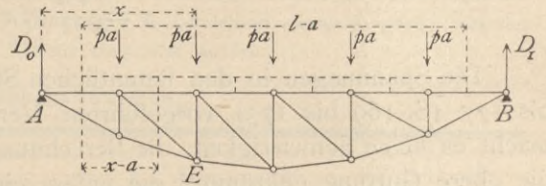
Fig. 227.



$$\left. \begin{aligned} Z \cos \sigma &= \frac{M}{y} = \frac{p}{2} \cdot \frac{(lx - x^2) l^2}{4h(lx - x^2)} = \frac{pl^2}{8h} \\ X &= -\frac{p}{2} \cdot \frac{(lx - x^2) l^2}{4h(lx - x^2)} = -\frac{pl^2}{8h} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 251.$$

$Z \cos \sigma$ ist die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung. Die rechte Seite obiger Ausdrücke enthält nur constante Größen, so dass sich ergibt: Beim Parabelträger ist für gleichmäßige Belastung des ganzen Trägers die Spannung in der geraden Gurtung (X) und die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung constant.

Fig. 229.



Da $\cos \sigma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (y' - y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}}$ ist, erhält man aus

Gleichung 251

$$Z = \frac{pl^2}{8h} \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \dots \dots \dots 252.$$

Die Spannungen Z und X , welche dem Eigengewicht entsprechen, werden aus obigen Gleichungen erhalten, indem man p mit g vertauscht.

191.
in den
Gitterstäben.

β) Spannungen in den Gitterstäben. Für die Diagonale CE (Fig. 228) ist L der conjugirte Punkt, η der Hebelsarm von Y , und wenn mit M_1 das Moment der äußeren Kräfte am Bruchstück links vom Schnitt II , bezogen auf L als Drehpunkt, bezeichnet wird, ist

$$0 = Y\eta - M_1, \text{ woraus } Y = + \frac{M_1}{\eta} \dots \dots \dots 253.$$

Liegt die Diagonale rechts der Mitte, so fällt der conjugirte Punkt rechts vom rechten Auflager. Die Aufstellung der Momentengleichung für diesen Punkt ergibt genau wie in Gleichung 253 die Diagonalspannung als Quotienten aus dem Moment der am Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte, dividirt durch den Hebelsarm der Diagonalspannung.

Fig. 230.

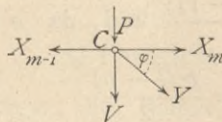
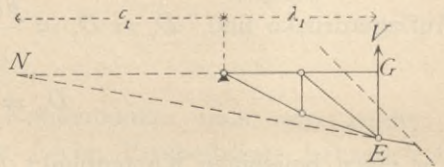


Fig. 231.



Häufig ist ein anderer Ausdruck der Diagonalspannung be-

quemmer, als Gleichung 253. Die am Knotenpunkt C der geraden Gurtung (Fig. 230) angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht; die algebraische Summe aller wagrechten Seitenkräfte ist demnach gleich Null; mithin

$$0 = Y \cos \varphi + X_m - X_{m-1}, \text{ woraus } Y = - \frac{X_m - X_{m-1}}{\cos \varphi} \dots \dots 254.$$

Für die Bestimmung der Spannungen in den Pfosten ist der Schnitt schief zu legen (Fig. 231). Der conjugirte Punkt für den Pfosten EG ist N . Bezeichnet

— M_2 das Moment der am Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte für N als Drehpunkt, so wird

$$0 = -V(\lambda_1 + c_1) - M_2, \text{ woraus } V = -\frac{M_2}{\lambda_1 + c_1} \dots 255.$$

Falls der conjugirte Punkt nach rechts vom rechten Auflager fällt, ergibt sich eine geringe Abänderung der Gleichung 255.

Ein für manche Fälle bequemerer Ausdruck wird wiederum durch Betrachtung des Knotenpunktes an der geraden Gurtung erhalten. Es ergibt sich, da die Kräfte an demselben im Gleichgewicht sind,

$$0 = Y \sin \varphi + V + P, \text{ woraus } V = -(Y \sin \varphi + P) \dots 256.$$

a) Das Eigengewicht, bezw. eine gleichmäßig über den ganzen Parabelträger verteilte Last p für die Längeneinheit erzeugt in allen Diagonalen die Spannung Null. Denn bei dieser Belastung ist nach Art. 190 (S. 191) die Gurtungsspannung X constant, also $X_m = X_{m-1}$, mithin nach Gleichung 254: $Y = 0$.

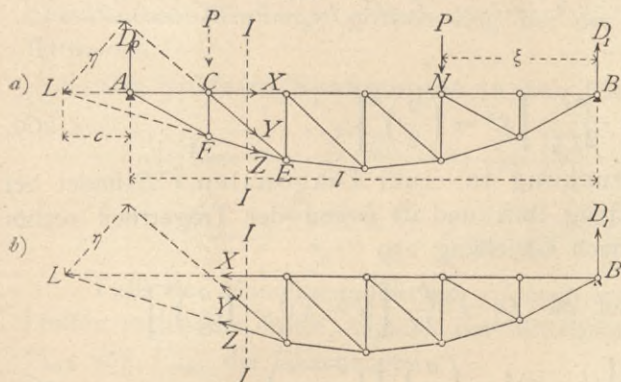
Die Spannung in den Pfosten ergibt sich nach Gleichung 256, da $Y = 0$ und $P = pa$ (bezw. ga) ist, zu

$$V_p = -pa, \text{ bezw. } V_g = -ga \dots 257.$$

Die Spannung in den Pfosten ist sonach beim Parabelträger und der angegebenen Belastung gleich der im Knotenpunkte der geraden Gurtung wirkenden Last, und zwar Druck, wenn, wie hier angenommen ist, die obere gerade Gurtung belastet ist.

b) Ungünstigste Belastungen und größte Stabspannungen der Gitter-

Fig. 232.



stäbe. Die ungünstigste Belastung für eine Diagonale CE (Fig. 232) wird folgendermaßen erhalten. Eine rechts von dem durch die Diagonale verlaufenden Schnitt II gelegene Last P erzeugt in A den Auflagerdruck $D_0 = \frac{P\xi}{l}$ und in CE eine Diagonalspannung Y , die aus der Momentengleichung für Punkt L und das links vom Schnitt liegende Bruchstück folgt:

$$0 = Y\eta - D_0 c,$$

woraus

$$Y = \frac{D_0 c}{\eta} = \frac{P\xi c}{l\eta} \dots 258.$$

So lange sich die Last rechts vom Schnitt II befindet, gilt der hier für Y gefundene Ausdruck. Jede Last rechts vom Schnitt erzeugt also in CE einen Zug.

Befindet sich die Last P links vom Schnitt II , so betrachte man das Bruchstück an der rechten Seite des Schnittes (Fig. 232 *b*). Auf dasselbe wirken der Auflagerdruck D_1 in B und die drei Spannungen X , Y' und Z ; die Gleichung der statischen Momente für L als Drehpunkt heißt dann:

$$0 = Y'\eta + D_1(l + c), \text{ woraus } Y' = -\frac{D_1(l + c)}{\eta} \dots 259.$$

Die Last P links von II erzeugt also in der Diagonale Druck und in gleicher Weise jede links vom Schnitt liegende Last.

Für die rechts von der Mitte gelegenen Diagonalen, bei welchen der Momentenpunkt rechts von *B* liegt, ergibt sich die gleiche Gefetzmäßigkeit.

Es folgt, dafs auch hier das für die Parallelträger (Art. 179, S. 177) gefundene Gefetz gilt: Jede Belastung zwischen dem durch die Diagonalenmitte gelegten lothrechten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fußpunkt der Diagonalen hinweist, erzeugt in derselben Zug; jede Belastung zwischen dem erwähnten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonale hinweist, erzeugt in derselben Druck.

Größter Zug findet demnach in einer Diagonalen dann statt, wenn alle Knotenpunkte zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem der Fuß der Diagonale hinweist; größter Druck, wenn die Knotenpunkte zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist.

Die größte Zugbeanspruchung in einer Diagonalen *CE* findet daher bei der in Fig. 233 gezeichneten Belastung statt; sie ist

$$Y_{max} = \frac{D_0 c}{\eta}$$

Genau, wie in Art. 179 (S. 177), erhält man für den Auflagerdruck:

$$D_0 = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

also

$$Y_{max} = \frac{p c}{2 l \eta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 260.$$

Die größte Druckbeanspruchung in einer Diagonalen *CE* findet bei der in Fig. 234 gezeichneten Belastung statt und ist (wenn der Trägertheil rechts vom Schnitte *II* betrachtet wird) nach Gleichung 259

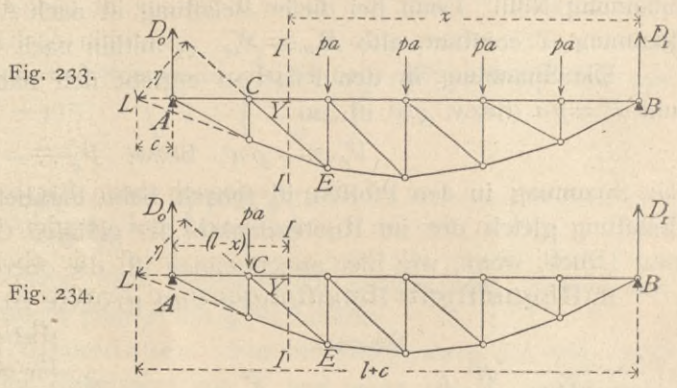
$$Y_{min} = - D_1 \left(\frac{l+c}{\eta} \right) \text{ und, da } D_1 = \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

$$Y_{min} = - \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{l+c}{\eta} \right) \dots \dots \dots 261.$$

Die Gleichungen 260 u. 261 gelten, wenn die Diagonalen, wie hier, nach rechts fallen, nur für diejenigen links der Mitte; für die Diagonalen rechts der Mitte, bei denen der Momentenpunkt rechts von *B* fällt, ergeben sich folgende Werthe, in denen η_1 den Hebelsarm von *Y*, c_2 den Abstand des Momentenpunktes von *B* bedeutet:

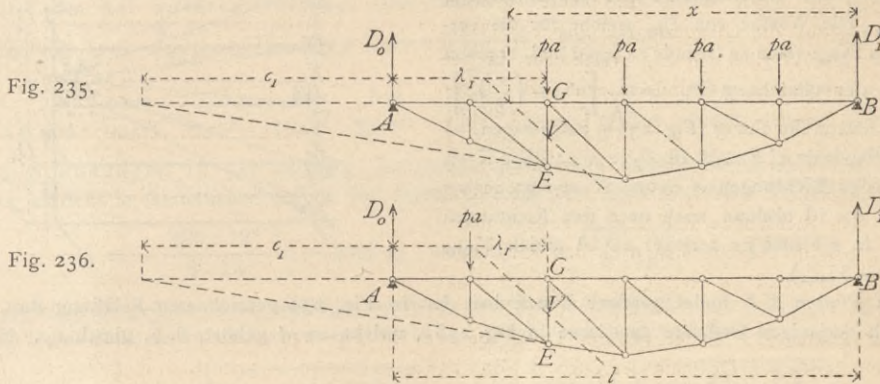
$$Y_{max} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l+c_2}{\eta_1} \text{ und } Y_{min} = - \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{c_2}{\eta_1} \dots 262.$$

Bei der angenommenen Belastungsart genügt es, entweder Y_{max} oder Y_{min} auszurechnen; denn für die Belastung aller Knotenpunkte mit je pa ist die Diagonalspannung (siehe oben) gleich Null. Sind nur die Knotenpunkte der Druckabtheilung belastet, so ist die Spannung in der Diagonalen gleich Y_{min} ; sind nur die Knoten-



punkte der Zugabtheilung belastet, so ist die Spannung gleich Y_{max} . Bei voller Belastung ist die Spannung $Y_{summa} = Y_{max} + Y_{min}$, und zwar ist $Y_{summa} = 0$, d. h. $0 = Y_{max} + Y_{min}$ und $Y_{min} = -Y_{max}$.

Um die ungünstigste Belastung der Pfoften zu ermitteln, verfährt man eben so, wie bei den Diagonalen gezeigt ist. Man findet, das Diagonale und Pfoften, welche an einem Knotenpunkte der unbelasteten Gurtung zusammentreffen, dieselbe ungünstigste Belastungsart haben; nur findet im Pfoften grösster Druck statt bei derjenigen Belastung, welche in der entsprechenden Diagonalen grössten Zug



erzeugt und umgekehrt. Somit wird grösster Druck in GE bei der in Fig. 235 gezeichneten Belastung, grösster Zug bei der in Fig. 236 gezeichneten Belastung stattfinden.

Die grössten Spannungen in den Pfoften ergeben sich mit

$$\left. \begin{aligned} V_{min} &= -\frac{D_0 c_1}{\lambda_1 + c_1} = -\frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{c_1}{\lambda_1 + c_1} \\ V_{max} &= \frac{D_1 (l + c_1)}{\lambda_1 + c_1} = \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{l + c_1}{\lambda_1 + c_1} \end{aligned} \right\} \dots 263.$$

Falls der Momentenpunkt um c_1' nach rechts von B fällt, was hier bei allen Pfoften rechts der Mitte, einschl. der Mittelpfoften, stattfindet, so ergeben sich für V_{min} und V_{max} die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} V'_{min} &= -\frac{D_0 (l + c_1')}{c_1' + l - \lambda_1} = -\frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{l + c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \\ V'_{max} &= \frac{D_1 c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} = \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \end{aligned} \right\} \dots 264.$$

c) Bei entgegengesetzter Richtung der Diagonalen ergeben sich nur geringe Aenderungen, welche leicht aus Vorstehendem folgen.

Die Spannungen durch eine oder mehrere Einzellaften sind gleichfalls nach einem der in Art. 172 u. 173 (S. 170) angegebenen Verfahren leicht zu finden.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Wird eine gleichmäfsig vertheilte Belastung (Eigengewicht, bzw. volle zufällige Belastung) vorausgesetzt, so ergibt der in Fig. 237 gezeichnete *Cremona'sche* Kräfteplan sofort die Spannungen.

Was die durch zufällige Belastung erzeugten Maximalspannungen betrifft, so ergeben sich die grössten Gurtungsspannungen aus dem eben erwähnten Kräfte-

192.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

plan (Fig. 237), falls eine Belaftung des ganzen Trägers mit der Last p für die Längeneinheit zu Grunde gelegt wird.

Zur Bestimmung der grössten Diagonalspannungen, welche bei den oben angegebenen Belaftungen stattfinden, empfiehlt sich die Schnittmethode.

Auf das Trägerstück links vom Schnitte II wirken bei der in Fig. 238a gezeichneten grössten Zugbelastung für die Diagonale CE die Kräfte D_0 , X , Y , Z . Die Werthe von D_0 , welche für die verschiedenen Diagonalen zu Grunde zu legen sind, ergeben sich aus der Gleichung $D_0 = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$; dieselben sind in der Curve (Fig. 238b) aufgetragen. — Für die Diagonale CE z. B. ist $D_0 = mn$; diese Kraft ist nach den Richtungen AE und X zerlegt in no und om ; no ist alsdann noch nach den Richtungen Z und Y in np und po zerlegt; po ist gleich Y_{max} ($Y_{min} = -Y_{max}$).

Im Pfosten CF findet grösster Druck bei der in Fig. 239 gezeichneten Belaftung statt. D_0 ist hier gleich derjenigen Ordinate der Curve in Fig. 238b, welche zu x' gehört, d. h. gleich rs . Nun wird

Fig. 237.

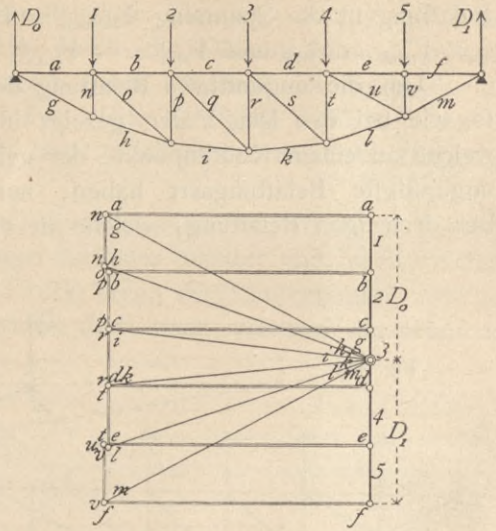


Fig. 238.

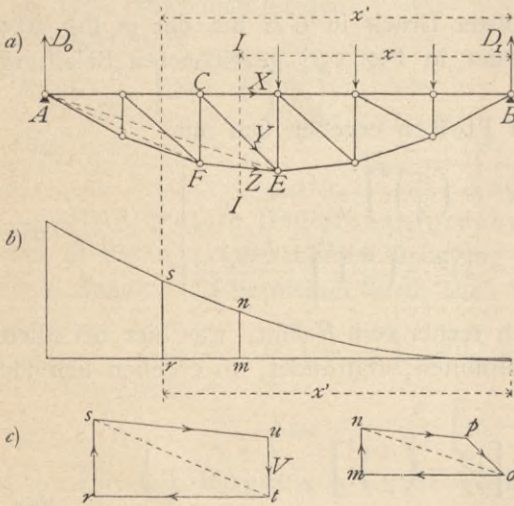


Fig. 239.

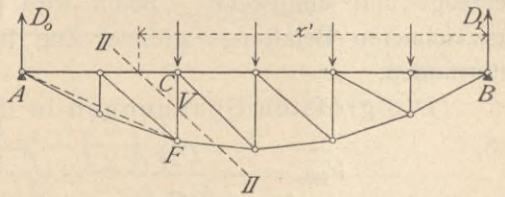
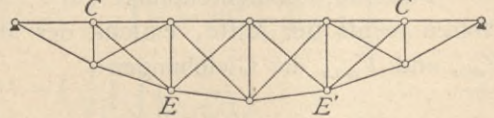


Fig. 240.



genau wie oben zerlegt. Es wird $V_{min} = u \cdot l$. Entsprechend ist der grösste in CF auftretende Zug zu ermitteln.

193.
Gegen-
diagonalen.

δ) Träger mit Gegendiagonalen. Durch die Verkehrslast erhält jede Diagonale sowohl Zug wie Druck, durch das Eigengewicht gar keine Spannung. Die ungünstigsten Zug-, bzw. Druckspannungen sind also genau so groß, wie diejenigen durch die ungünstigsten Verkehrslasten. Sollen nur gezogene Diagonalen vorkommen, so wird nach Art. 186 (S. 187) in jedem Felde eine Gegendiagonale angeordnet werden müssen. Man erhält die in Fig. 240 gezeichnete Trägerform. Die Gegendiagonale $C'E'$ wird genau eben so beansprucht, wie die symmetrisch zur Mitte liegende Hauptdiagonale CE des Trägers mit einseitig fallenden Diagonalen.

Dasselbe gilt von allen Gegendiagonalen; fomit wird die Berechnung eines Trägers mit nach einer Richtung fallenden Diagonalen genügen.

Beispiel. Ein als Unterzug dienender Parabelträger mit gerader oberer und gekrümmter unterer Gurtung hat die nachfolgenden Hauptabmessungen und Belastungen: Stützweite $l = 12,0$ m; Pfeilhöhe $h = 1,20$ m; Feldweite $a = 1,00$ m; Eigengewicht für das laufende Meter des Trägers $g = 320$ kg, also $ga = 320$ kg; Verkehrslast für das laufende Meter des Trägers $p = 1280$ kg, also $pa = 1280$ kg. Der Träger hat ein aus Pfosten und Diagonalen bestehendes Gitterwerk; die Diagonalen fallen beiderseits nach der Mitte zu; der Träger ist also zur Mitte symmetrisch angeordnet. Die in den einzelnen Stäben entstehenden Spannungen sind zu ermitteln. Wegen der Symmetrie des Trägers braucht man nur die Spannungen in den Stäben links der Mitte zu bestimmen; die symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe erhalten gleiche Beanspruchungen.

194.
Beispiel.

a) Form der unteren Gurtung. Die Parabel-Ordinaten ergeben sich nach Gleichung 247 aus der Beziehung $y = \frac{4 \cdot 1,2}{144} x (12 - x) = 0,033 x (12 - x)$. Man erhält:

für $x =$	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m
$y =$	0,36 m	0,66 m	0,89 m	1,06 m	1,16 m	1,2 m	1,16 m	1,06 m	0,89 m	0,66 m	0,36 m.

b) Spannungen in der oberen Gurtung. Durch das Eigengewicht, bzw. volle zufällige Belastung entsteht in sämtlichen Stäben der oberen Gurtung eine Spannung nach Gleichung 251

$$X_g = - \frac{320 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = - 4800 \text{ kg} \quad \text{und} \quad X_p = - \frac{1280 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = - 19200 \text{ kg}.$$

X_p ist zugleich die größte durch zufällige Belastung entstehende Spannung.

c) Spannungen in der unteren Gurtung. Nach Gleichung 252 sind

$$Z_g = 4800 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad Z_p = 19200 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}.$$

Hiernach erhält man die in der linksseitigen Hälfte der nächstfolgenden Tabelle zusammengestellten Ergebnisse. Die Werthe Z_p sind zugleich die größten durch die zufällige Last entstehenden Spannungen.

b) Spannungen in den Diagonalen. Die Spannungen durch das Eigengewicht sind gleich Null (siehe Art. 191, S. 192). Die durch Verkehrslast erzeugten größten Zug- und Druckspannungen sind für die Diagonalen links der Mitte nach Gleichung 260 u. 261

$$Y_{max} = \frac{1280}{2 \cdot 12} (x^2 - 0,25) \frac{c}{\eta} = 53,33 \frac{c}{\eta} (x^2 - 0,25) \quad \text{und} \quad Y_{min} = - 53,33 [(l - x)^2 - 0,25] \frac{l + c}{\eta}.$$

Die Größen c und η können berechnet oder konstruiert werden; die Werthe für c werden besser berechnet, weil die Zeichnung wegen der spitzen Schnittwinkel der Gurtungsfabrichtungen nicht genaue Werthe ergibt. Man erhält mit Hilfe ähnlicher Dreiecke leicht

$$\frac{c_2 + a}{y_1} = \frac{a}{y_2 - y_1}; \quad \frac{c_3 + 2a}{y_2} = \frac{a}{y_3 - y_2}; \quad \frac{c_4 + 3a}{y_3} = \frac{a}{y_4 - y_3} \quad \text{u. f. w.}$$

Die Werthe für η können in ähnlicher Weise leicht berechnet werden; doch kann man, besonders wenn c berechnet und der Schnittpunkt entsprechend den Rechnungsergebnissen aufgetragen wird, die η mit hinreichender Genauigkeit konstruieren. Die Werthe für c , η , x , Y_{max} und Y_{min} sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Stab Nr.	y'	y	Z_g	Z_p	Diagonale Feld-Nr.	c	η	x	Y_{max}	Y_{min}
1	0,36	0,0	5102	20410	2	0,2	0,66	10,5	+ 1777	- 1971
2	0,66	0,36	5011	20045	3	0,87	1,91	9,5	+ 2186	- 2156
3	0,89	0,66	4925	19699	4	2,23	3,8	8,5	+ 2304	- 2396
4	1,06	0,89	4867	19469	5	6,6	8,03	7,5	+ 2449	- 2460
5	1,16	1,06	4824	19296	6	24	22,3	6,5	+ 2410	- 2582
6	1,20	1,16	4804	19216						
	Meter		Kilogramm			Meter			Kilogramm	

Nach Art. 191 (S. 192) müssen die absoluten Werthe von V_{max} und V_{min} einander gleich sein; dies ist hier nicht der Fall, was seinen Grund darin hat, daß nicht die genauen Parabel-Ordinaten der Berechnung zu Grunde gelegt sind, sondern eine Abrundung auf zwei Decimalen stattgefunden hat. Aus demselben Grunde würden sich auch die durch das Eigengewicht erzeugten Spannungen nicht genau gleich Null ergeben, wenn man sie nach Gleichung 253 berechnete. Immerhin ergeben sich diese Unterschiede so gering, daß sie vernachlässigt werden können.

e) Spannungen in den Pfoften. Durch das Eigengewicht entleht in jedem Pfoften nach Art. 191 (S. 193) der Druck $V = -320$ kg. Die durch Verkehrslast in den Pfoften links der Mitte erzeugten Maximalspannungen sind nach Gleichung 263

$$V_{min} = -53,33 (x^2 - 0,25) \frac{c_1}{\lambda + c_1} \quad \text{und} \quad V_{max} = +53,33 [(l-x)^2 - 0,25] \frac{12 + c_1}{\lambda_1 + c_1}$$

Man erhält die in folgender Tabelle zusammengestellten Werthe von c_1 , λ_1 , x , $(l-x)$, V_{min} und V_{max} . Der 6. (der Mittel-) Pfoften, an dessen Fußpunkt sich die beiden Diagonalen der anschließenden Felder schneiden, kann nicht nach den obigen Gleichungen berechnet werden, da die dort für den Schnitt gemachten Voraussetzungen hier nicht zutreffen. Da aber im oberen Knotenpunkte derselben keine Diagonale ansetzt, so kann dieselbe nur die Kräfte aufnehmen, welche unmittelbar in derselben wirken, d. h. der größte Druck ist gleich der Knotenpunktsbelastung dafelbst.

Pfoften Nr.	c_1	λ_1	x	$l-x$	V_{min}	V_{max}
1	0,2	1,0	11,5	0,5	- 1173	0
2	0,87	2,0	10,5	1,5	- 1778	+ 478
3	2,28	3,0	9,5	2,5	- 2047	+ 870
4	6,60	4,0	8,5	3,5	- 2391	+ 1123
5	24	5,0	7,5	4,5	- 2469	+ 1324
6	—	—	—	—	- 1280	0
Meter					Kilogramm	

f) Zur Bestimmung der Querschnitte nach den Gleichungen 42 bis 48 (siehe Art. 84 u. 85, S. 62 u. 63) dient die Zusammenstellung in der folgenden Tabelle:

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen:				Pfoften: Druck überwiegt			
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 12	- 4800	- 19 200	1 u. 12	5102	20 410					1 u. 11	- 320	- 1173	0
2 u. 11	- 4800	- 19 200	2 u. 11	5011	20 045	2 u. 11	0	1777	- 1971	2 u. 10	- 320	- 1778	478
3 u. 10	- 4800	- 19 200	3 u. 10	4925	19 699	3 u. 10	0	2186	- 2156	3 u. 9	- 320	- 2047	870
4 u. 9	- 4800	- 19 200	4 u. 9	4867	19 469	4 u. 9	0	2304	- 2396	4 u. 8	- 320	- 2301	1123
5 u. 8	- 4800	- 19 200	5 u. 8	4824	19 296	5 u. 8	0	2449	- 2460	5 u. 7	- 320	- 2469	1324
6 u. 7	- 4800	- 19 200	6 u. 7	4804	19 216	6 u. 7	0	2410	- 2582	6	- 320	- 1280	0
Kilogr.			Kilogr.			Kilogramm				Kilogramm			

In die Gleichungen 42 bis 48 sind die absoluten Zahlenwerthe für P_0 , P_1 und P_2 einzusetzen.

6) Dreiecksträger.

195.
Trägerformen.

Dreieck- und Trapezträger sind, wie bereits in Art. 167 (S. 168) gesagt wurde, Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bzw. ein Paralleltapez bilden. Die eine Gurtung zeigt eine gerade, die andere eine gebrochene Linie. Ist die untere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des einfachen, bzw. doppelten Hängebockes bekannte Trägerform (Fig. 241 a, bzw. 242 a) — nicht zu verwechseln mit den Hängewerkträgern, welche nach Art. 150 (S. 140) von den hier betrachteten

Fig. 241.

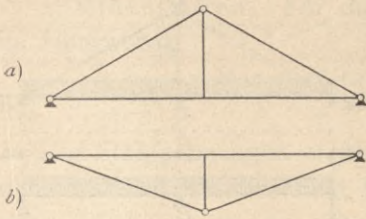
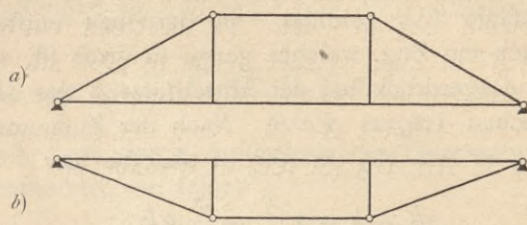


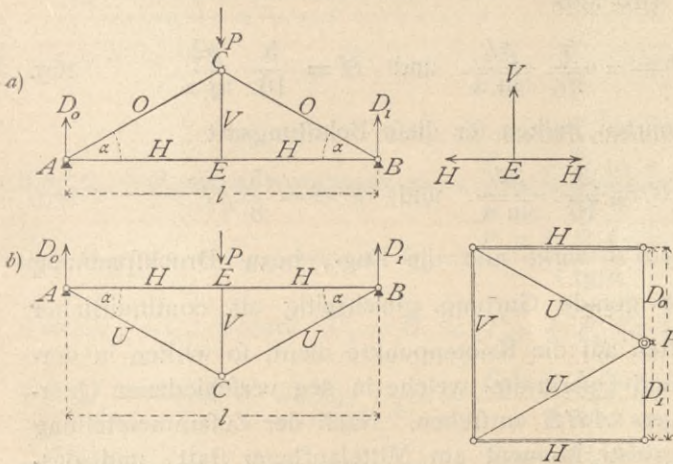
Fig. 242.



wesentlich verschieden sind. Ist die obere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des armirten Balkens bekannte Trägeranordnung (Fig. 241 b u. 242 b).

α) Belastung durch Einzellast (Fig. 243). Wenn im Knotenpunkte

Fig. 243.



196.
Belastung
durch
Einzellast.

C oder E des Hängebockes (Fig. 243 a) die Last P wirkt, so wird der Auflagerdruck

$$D_0 = D_1 = \frac{P}{2}.$$

Die in den Punkten A wirkenden drei Kräfte D_0 , O und H halten einander im Gleichgewicht; demnach sind die algebraischen Summen der in diesem Knotenpunkte wirkenden wagrechten, bzw. lothrechten Seitenkräfte je gleich Null, d. h. es ist

$$0 = D_0 + O \sin \alpha, \text{ woraus } O = -\frac{P}{2 \sin \alpha} \dots \dots \dots 265.$$

$$0 = O \cos \alpha + H, \text{ woraus } H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \dots \dots \dots 266.$$

Die Spannungen der symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe sind gleich.

Falls die Last P im Punkte C angreift, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung für den Punkt E die Beziehung $0 = V$; falls P in E angreift, so heißt die Gleichgewichtsbedingung: $0 = V - P$, woraus

$$V = P \dots \dots \dots 267.$$

Eben so ergibt sich für den armirten Träger (Fig. 243 b)

$$U = \frac{P}{2 \sin \alpha}, \quad H = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad V = -P \dots \dots \dots 268.$$

Die Construction der Spannungen ergibt den Kräfteplan in Fig. 243, welcher ohne weitere Erläuterung verständlich ist.

β) Gleichförmig vertheilte volle Belastung. Wird der Berechnung eine gleichförmig vertheilte Belastung zu Grunde gelegt, so ist die volle Belastung für die Stabspannungen auch die ungünstigste; denn jede Last, wo sie auch liegen möge, erzeugt in A und B (Fig. 244) Auflagerdruck, also in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denen der unteren Gurtung Zug. Bei dieser Belastung ist AEB

197.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

wie ein continuirlicher Balken auf drei Stützen *A*, *E* und *B* aufzufassen; die Mittelfstütze wird durch die Hängefäule *CE* gebildet. In derselben entsteht demnach ein Zug, welcher genau so groß ist, wie der Auflagerdruck bei der Mittelfstütze *E* des continuirlichen Trägers *AEB*. Nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) ist dieselbe hier

$$d_1 = 1,25 p \frac{l}{2} = \frac{5}{8} pl,$$

während $d_0 = d_2 = 0,375 p \frac{l}{2} = \frac{3}{16} pl$ ist; die letzteren Drücke werden vom Auflager aufgenommen und belasten den Träger nicht. Die Stabspannungen werden demnach die unter α gefundenen Werthe haben, wenn statt *P* die Größe $\frac{5}{8} pl$ eingesetzt wird. Beim Hängebock wird also

$$V = P = \frac{5}{8} pl, \quad O = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \dots \quad 269.$$

Eben so ergibt sich im armirten Balken für diese Belastungsart

$$H = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad U = \frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad V = -\frac{5}{8} pl. \quad \dots \quad 270.$$

In der geraden Gurtung *AEB* wirkt also die Zug-, bezw. Druckspannung $H = \pm \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}$; da aber diese gerade Gurtung gleichzeitig als continuirlicher Träger zum Uebertragen der Lasten auf die Knotenpunkte dient, so wirken in derselben auch noch die Momente und Querkräfte, welche in den verschiedenen Querschnitten des continuirlichen Trägers *AEB* entstehen. Nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) findet das größte Moment am Mittelauger statt, und dasselbe ist

$$M_1 = 0,125 p \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{pl^2}{32}.$$

198.
Querschnitts-
bestimmung.

γ) Querschnittsbestimmung. Die Querschnitte der nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Stäbe ergeben sich leicht, wie in Art. 82 bis 86 (S. 59 ff.) und im vorhergehenden Kapitel angegeben ist. Der Querschnitt der geraden Gurtung *AEB* ist für die gemeinsame Beanspruchung durch Zug, bezw. Druck und die Momente zu construiren. Wird der ganze Querschnitt (für Holz) als constant angenommen, so ist das größte im Balken wirkende Moment der Berechnung zu Grunde zu legen. An der Stelle, wo das größte Moment M_{max} wirkt, ist die größte in den äußersten Querschnittspunkten stattfindende Axialspannung für die Flächeneinheit nach Gleichung 54 (S. 75)

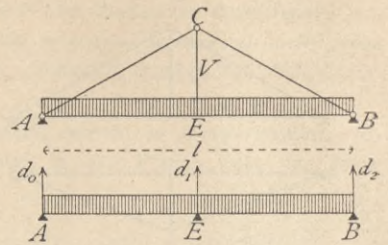
$$\sigma_{max} = \pm \left(\frac{H}{F} + \frac{M_{max} a}{\mathcal{F}} \right).$$

Beim Rechteckquerschnitt ist $F = bh$, und $\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{bh^2}{6}$; wenn noch statt σ_{max} die größte zulässige Spannung *K* eingeführt wird, so ergibt sich als Bedingungsgleichung für den Querschnitt:

$$K = \pm \left(\frac{H}{bh} + \frac{6 M_{max}}{bh^2} \right) \quad \dots \quad 271.$$

In dieser Gleichung sind *b* und *h* unbekannt. Man nimmt zunächst für *b* einen Werth probeweise an und bestimmt *h* aus Gleichung 271; ergibt sich für *h* eine unzuweckmäßige Größe, so nehme man für *b* einen anderen Werth an und bestimme wiederum *h* nach Gleichung 271. Meistens werden sich bei der zweiten Rechnung entsprechende Werthe für *b* und *h* ergeben.

Fig. 244.



7) Trapezträger.

α) Einzellaften. Für die Belastungen in Fig. 245 a find die Auflagerdrücke beim Hängebock

199.
Einzellaften.

$$D_0 = \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l}.$$

Die Stabspannungen ergeben sich dann durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte, wie folgt:

Fig. 245 a.

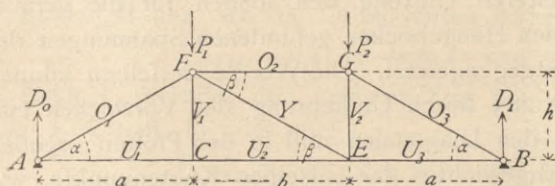
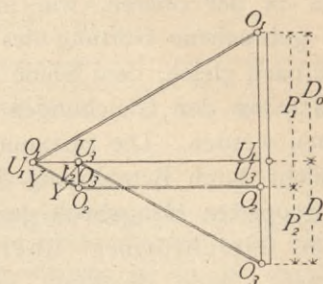


Fig. 245 b.



$$0 = D_0 + O_1 \sin \alpha, \text{ woraus } O_1 = - \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l \sin \alpha} \quad \dots \quad 272.$$

$$0 = O_1 \cos \alpha + U_1, \text{ woraus } U_1 = \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_2 a + P_1 (a + b)] \frac{a}{lh} \quad 273.$$

$$0 = U_1 - U_2, \text{ woraus } U_2 = U_1 = [P_2 a + P_1 (a + b)] \frac{a}{lh} \quad \dots \quad 274.$$

$$0 = D_1 + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } O_3 = - \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \sin \alpha} \quad \dots \quad 275.$$

$$0 = U_3 + O_3 \cos \alpha, \text{ woraus } U_3 = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_1 a + P_2 (a + b)] \frac{a}{lh} \quad 276.$$

$$0 = O_2 - O_3 \cos \alpha, \text{ woraus } O_2 = - \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = - [P_1 a + P_2 (a + b)] \frac{a}{lh} \quad 277.$$

$$0 = V_1 \text{ (falls die Last } P_1 \text{ in } C \text{ wirkt, so ist } V_1' = P_1) \quad \dots \quad 278.$$

$$0 = P_2 + V_2 + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } V_2 = (P_1 - P_2) \frac{a}{l} \quad \dots \quad 279.$$

Falls die Last P_2 in E wirkt, so wird

$$0 = V_2' + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } V_2' = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l} \quad \dots \quad 280.$$

$$0 = U_2 + Y \cos \beta - U_3, \text{ woraus } Y = - \frac{U_2 - U_3}{\cos \beta} = - \frac{ab}{lh \cos \beta} (P_1 - P_2),$$

$$Y = + (P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta} \quad \dots \quad 281.$$

Falls die Lasten in der unteren Gurtung, in C und E , angreifen, so wird

$$Y' \sin \beta + V_2' - P_2 = 0, \text{ woraus } Y' = \frac{P_2 - V_2'}{\sin \beta} = \frac{P_2}{\sin \beta} - \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \sin \beta},$$

$$Y' = (P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta}, \quad \dots \quad 282.$$

d. h. eben so groß, wie in Gleichung 281.

Wenn, wie meistens, $P_1 = P_2 = P$ ist, wird

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= -\frac{P}{\sin \alpha}; \quad U_1 = \frac{Pa}{h} = U_2; \quad O_2 = -\frac{Pa}{h}; \quad O_3 = -\frac{P}{\sin \alpha}; \\ U_3 &= \frac{Pa}{h}; \quad V_1 = 0; \quad V_2 = 0; \quad Y = 0 \end{aligned} \right\} \quad 283.$$

Die Construction ergibt den auf der vorhergehenden Seite stehenden, ohne Erklärung verständlichen Kräfteplan (Fig. 245 b).

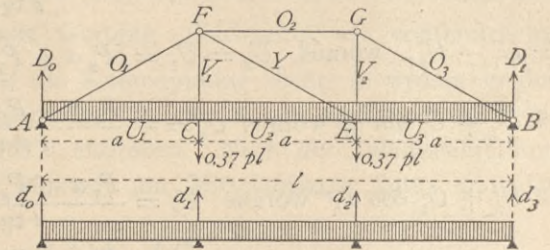
Was den armirten Balken anbelangt, so sind bei diesem die Spannungen sowohl in der oberen, wie in der unteren Gurtung den soeben für die gerade, bezw. gebrochene Gurtung des doppelten Hängebockes gefundenen Spannungen der Gröfse nach gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt. Die Werthe derselben können demnach aus den Gleichungen 272 bis 283 durch Umkehrung der Vorzeichen entnommen werden. Die Spannungen in den Diagonalen und in den Pfoften ergeben sich leicht durch Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte, wie beim doppelten Hängebock gezeigt ist.

200.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

β) Gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Belastung (Fig. 246). Jede Belastung erzeugt in den Stäben der unteren Gurtung Zug, in denjenigen der oberen Gurtung Druck, wie sich aus den Gleichungen 272 bis 277 ergibt. Gröfster Zug, beziehungsweise Druck findet also in den Gurtungen bei Belastung des ganzen Trägers statt.

Die untere Gurtung wirkt, wenn keine Gelenke in den Knotenpunkten derselben angenommen werden, wie ein continuirlicher Balken auf 4 Stützen. Die Endstützen sind A und B; die Mittelfützen werden durch die Pfoften FC und GE gebildet. Wird $a = b$ gesetzt, so ergibt sich bei Belastung des ganzen Trägers mit der Last p für die Längeneinheit als Auflagerdruck der Mittelfützen nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) $d_1 = d_2 = 1,1 \frac{pl}{3} = 0,37 pl$.

Fig. 246.



Eben so groß ist die Last, welche in den Knotenpunkten C und E des Systems nach unten wirkt. Werden diese Werthe für P_1 und P_2 in die obigen Gleichungen eingeführt, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= -\frac{0,37 pl}{\sin \alpha}; \quad U_1 = 0,37 pl \frac{a}{h}; \quad O_2 = -0,37 pl \frac{a}{h}; \quad O_3 = -\frac{0,37 pl}{\sin \alpha}; \\ U_2 &= 0,37 pl \frac{a}{h}; \quad U_3 = 0,37 pl \frac{a}{h}; \quad V_1 = 0,37 pl; \quad V_2 = 0,37 pl; \quad Y = 0 \end{aligned} \right\} \quad 284.$$

Die hier gefundenen Spannungen O und U sind die grössten Stabspannungen, welche durch gleichförmig vertheilte Nutzlast entstehen. Wird statt p das Eigengewicht g für die Längeneinheit eingeführt, so ergeben sich die durch das Eigengewicht entstehenden Stabspannungen.

201.
Ungünstigste
Beanspruchung
der
Gitterstäbe.

γ) Ungünstigste Beanspruchung der Diagonale und der Pfoften. Den allgemeinen Ausdruck für die Diagonalspannung giebt die Gleichung 281. Y wird seinen grössten positiven Werth (Zug) haben, wenn P_2 möglichst groß, P_1 möglichst klein ist; Y wird seinen grössten negativen Werth (Druck) erreichen, wenn P_2 mög-

licht klein, P_1 möglichst groß ist. Wird als Nutzlast eine gleichmäßig vertheilte Last eingeführt, so kann man, wenn $a = b$ ist, mit einer für die Zwecke des Hochbaues hinreichenden Sicherheit annehmen, dass die Diagonale den größten Zug erleidet, wenn der Punkt E am Fußpunkte derselben mit $p a + 0,37 g l$ belastet ist, der Punkt C (in der Lothrechten des Kopfes der Diagonalen) nur das Eigengewicht $0,37 g l$ trägt. Bei der umgekehrten Belastung dagegen erleidet die Diagonale ihren größten Druck. Demnach wird

$$Y_{\max} = \pm \frac{p a^2}{l \sin \beta} \dots \dots \dots 285.$$

Ferner ist hier, wo die Lasten unten wirken, $V_1 = P_1$, d. h.

$$V_{1\max} = 0,37 (g + p) l \quad \text{und} \quad V_{1\min} = 0,37 g l \dots \dots \dots 286.$$

Auch V_2 erleidet den größten Zug bei voller Belastung; da bei dieser Belastung $Y = 0$ ist, so wird auch

$$V_{2\max} = 0,37 (g + p) l \quad \text{und} \quad V_{2\min} = 0,37 g l \dots \dots \dots 287.$$

δ) Die Querschnittsbestimmung ist in genau gleicher Weise vorzunehmen, wie dies in Art. 198 (S. 200) beim Dreiecksträger gezeigt ist. Die Maximalmomente in der geraden Gurtung finden bei C und E statt und sind genau genug für $a = b$ nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) $M = p \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{10} = \frac{p l^2}{90}$. Die Abmessungen b und h des rechteckigen Querschnittes (für Holz) sind demnach aus der Gleichung zu bestimmen:

$$\tau_{\max} = K = \pm \left(\frac{U}{b h} + \frac{6 M_{\max}}{b h^2} \right).$$

Die Dreieck- und Trapezträger mit einer größeren Anzahl von Lastpunkten werden durch Einfügen von Dreiecken in die oben (Fig. 241 u. 242) dargestellten Trägerformen hergestellt. Die Berechnung entspricht der vorstehenden, kann aber auch bequem nach der Momentenmethode vorgenommen werden.

202.
Querschnitts-
bestimmung.

Literatur.

Bücher über »Statik der Stützen und Träger«.

- KLOSE, H. A. Theorie der eisernen Träger mit Doppelflanschen. Hannover 1862.
 RITTER, A. Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen. Berlin 1863. —
 5. Aufl.: Hannover 1894.
 ASSMANN, G. Hilfstafeln zur Berechnung eiserner Träger und Stützen. Berlin 1865.
 FRANCIS, J. B. *On the strength of cast-iron pillars.* New-York 1866.
 KLERITJ, Lj. J. Abhandlung über genauere Berechnung und Construction einiger Träger von gleichem Widerstande. Freiberg 1869.
 LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. Elementare Darstellung der von CLAPEYRON und MOHR begründeten analytischen und graphischen Methoden und ihres Zusammenhanges. Wien 1871.
 RITTER, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken etc. Zürich 1871. —
 2. Aufl. 1883.
 KECK, W. Ueber die Ermittlung der Spannungen in Fachwerksträgern, mit Hilfe der graphischen Statik. Hannover 1872.
 WEYRAUCH, J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.
 TETMAJER, L. Die äußeren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen. Zürich 1875.
 PINZGER, L. Neue Methode zur Berechnung von Trägern mit unsymmetrischen Querschnittsformen. München 1879.

- CLERC, A. *Mémoire sur une nouvelle théorie de la résistance des poutres*. Paris 1880.
- ZIMMERMANN, H. Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Gewichte genieteter Blechträger. Berlin 1881. 3. Aufl. 1893.
- CANOVETTI. *Théories des poutres continues etc.* Paris 1882.
- HULEWICZ. *Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées*. Paris 1882.
- MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die wichtigsten Resultate für die Berechnung eiserner Träger und Stützen etc. Berlin 1883.
- STONE, B. B. *The theory of stresses in girders and similar structures*. London 1886.
- WEYRAUCH, J. J. Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1887.
- WEYRAUCH, J. J. Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.
- ALLIEVI, L. Inneres Gleichgewicht der Pfeiler aus Metallconstruction nach den Gesetzen der elastischen Deformation. Aus dem Ital. von R. TOTZ. Wien 1888.
- KOENEN, M. Tabellen der Spannweiten für Träger und Balken etc. Leipzig 1888.
- MÖLLER, M. & R. LÜHMANN. Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Bauconstructiontheile bei erhöhter Temperatur etc. Berlin 1888.
- KOECHLIN, M. *Applications de la statique graphique*. Paris 1889.
- MÜLLER-Breslau, F. B. Beiträge zur Theorie der ebenen elastischen Träger. Berlin 1890.
- RITTER, W. Anwendungen der graphischen Statik. Theil II: Das Fachwerk. Zürich 1890.
- FROELICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung statischer Berechnungen für die im Hochbau üblichen Constructionen mit eisernen Trägern und Stützen etc. Berlin 1892.
- KRÜGER, R. Graphische Pläne zur Ermittlung der Höhen schmiedeeiserner Träger und Holzbalken, der Durchmesser gußeiserner Voll- und Hohl Säulen und der Stärke hölzerner Stützen. Bremen 1896.
- DOMITROWICH, A. Statische Berechnung von Balkendecken, Säulen und Stützen im Holzbaufache. Wien 1897.
-

4. Abschnitt.

Dachstuhl.

Der vorliegende Abschnitt wird sich nur mit der Berechnung der Dachbinder beschäftigen. Die Dachbinder bilden den wesentlichsten Theil der Dachstühle; sie sind die Hauptträger der Dach-Constructionen und haben die übrigen Theile derselben, wie Pfetten, Sparren etc., zu tragen. Sie werden in bestimmten Abständen von einander angeordnet.

203.
Dachbinder.

Was die Querschnittsermittlung der Pfetten, der Sparren, des Windverbandes etc. betrifft, so ist einerseits in den beiden vorhergehenden Abschnitten bereits das Erforderliche vorgeführt worden; andererseits wird im III. Theile dieses »Handbuches« (Band 2, Heft 4, Abschn. 2, E: Dachstuhl-Constructionen) nochmals auf diesen Gegenstand zurückgekommen werden.

Bei den meisten Dach-Constructionen ist jeder Binder unter dem Einflusse der äusseren Kräfte für sich stabil, so lange die letzteren nur in der Ebene des Binders wirken; eine Ausnahme machen die Flechtwerkdächer, welche als räumliches Fachwerk erst durch die Pfetten und die in der Dachfläche angeordneten Diagonalen stabil werden. Hierher gehören sowohl die *Schwedler'schen* Kuppeldächer und die ähnlich construirten Zeltdächer, als auch die von *Foeppl* vorgeschlagenen Tonnen-Flechtwerke. Die letzteren werden in Theil III, Band 2, Heft 4 (Abth. III, Abschn. 2, E, Kap. 29, a, 7: *Foeppl'sche* Flechtwerkdächer) dieses »Handbuches« vom Verfasser eingehend besprochen werden, und daselbst ist auch die Berechnung derselben vorgeführt; deshalb wird an dieser Stelle nicht auf solche Constructionen näher eingegangen werden.

Für die Grösse der Belastungen, welche der Berechnung zu Grunde zu legen sind, ist die Stellung der Binder zu einander von grosser Wichtigkeit. Die Binder sind entweder einander im Grundriss parallel oder schliessen von Null verschiedene Winkel mit einander ein.

Nach der Art und Weise, wie die Dachbinder unterstützt sind, lassen sich die Dächer unterscheiden als:

- 1) Balkendächer oder Dächer, deren Binder bei lothrechten Belastungen nur lothrechte Stützendrücke erleiden (Fig. 247);
- 2) Sprengwerkdächer oder Dächer, deren Binder selbst bei nur lothrechten Belastungen schiefe Stützendrücke erhalten (Fig. 248), und

Fig. 247.

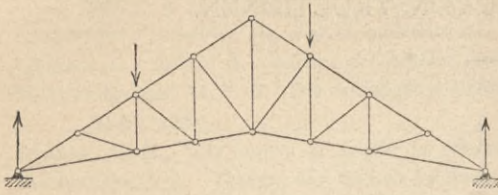
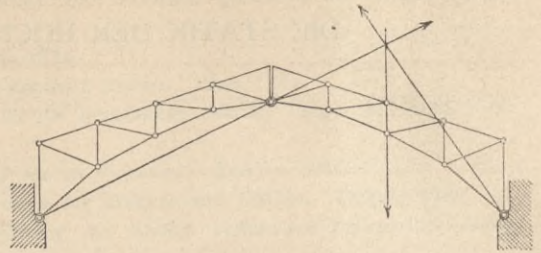


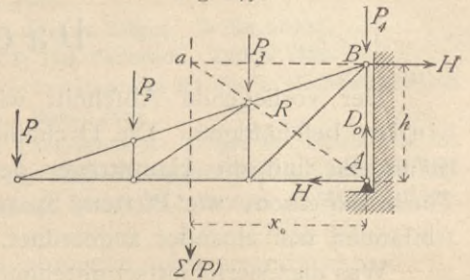
Fig. 248.



3) Ausleger- oder Kragdächer oder Dächer, auf deren Binder an den Unterstützungsstellen ein Stützdruck und ein Moment wirkt (Fig. 249).

Im Vorliegenden sollen nur diejenigen Dachbinder behandelt werden, deren Construction eine genaue Berechnung ohne Berücksichtigung der elastischen Formänderungen gestattet, also einmal nur solche mit nicht mehr als zwei Auflagern, sodann von diesen nur jene, welche ohne Rücksicht auf den Biegungswiderstand der Verbindungsstellen auch für einseitige und schiefe Belastungen stabil sind. Nicht stabil sind ohne Rücksicht auf den erwähnten Biegungswiderstand die Dächer mit liegendem Dachstuhl und die sog. Hängewerksdächer mit zwei Hängefäulen, falls, wie gewöhnlich, Diagonalen im Mittelfelde fehlen. Verzichtet man bei letzteren auf die Annahme verschieden belasteter Dachflächen, so kann die Berechnung genau so durchgeführt werden, wie in Art. 200 (S. 202) für den Trapezträger gezeigt ist.

Fig. 249.



Solche Dachbinder kommen übrigens fast nur in Holz und in solchen Spannweiten vor, für welche eine vielhundertjährige Erfahrung die Querschnittsabmessungen fest gestellt hat. Außergewöhnliche Spannweiten mit solchen Dachbindern zu überspannen, ist nicht empfehlenswerth. Eine Berechnung ist wohl unter gewissen Annahmen möglich; die Zuverlässigkeit derselben hängt aber in hohem Mafse davon ab, wie weit die Annahmen zutreffen. Da aber für grofse Dachweiten das Eisen als vorzügliches und durchaus zuverlässiges Material zur Verfügung steht, sollte man dasselbe für solche Dachweiten stets wählen und genau berechenbare Constructions anordnen. Demnach ist kein Bedürfnis vorhanden, die Berechnung der oben als nicht stabil bezeichneten Dachbinder hier vorzuführen. Der Verfasser wird übrigens in dem eben erwähnten Heft dieses »Handbuches« Vorschläge machen, durch deren Befolgung auch die Holzbinder als stabile Constructions hergestellt werden können.

1. Kapitel.

Belastungen und Auflagerdrücke.

a) Belastungen.

Die Belastungen, welche auf die Dächer wirken und aus dem Eigengewichte, der Belastung durch Schneedruck und durch Winddruck bestehen, sind in Art. 25, 28, 29 u. 30 (S. 19 bis 23) angegeben und ausführlich besprochen. Indem auf das dort Vorgeführte verwiesen wird, möge bemerkt werden, dafs die zufällige Belastung durch Arbeiter bei Berechnung der Binder und Pfetten aufser Acht gelassen werden

kann; dagegen ist diese Belastung bei den schwachen Nebentheilen des Daches (z. B. den Sprossen der Glasdächer etc.) unter Umständen ausschlaggebend.

In Abchn. 1, Kap. 2 sind die Belastungen, bezogen auf das Quadr.-Meter schräger Dachfläche, bzw. die wagrechte Projection der Dachfläche angegeben; aus diesen erhält man nun leicht die auf das laufende Meter der Dachbinder wirkenden Lasten. Wird die Entfernung der parallel zu einander angeordneten Dachbinder gleich b gesetzt, so ergeben sich das Eigengewicht und die Schneelast für das laufende Meter Stützweite der Binder, wenn noch q' das Eigengewicht für 1^{qm} Grundfläche einchl. Bindergewicht bezeichnet, zu

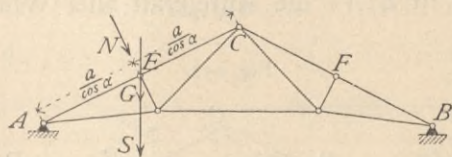
$$g = b q' \quad \text{und} \quad s = 75 b, \quad \dots \dots \dots 288.$$

ferner der Winddruck für das laufende Meter schräger Dachlinie zu

$$n = b v \quad \dots \dots \dots 289.$$

Sind die Dachbinder einander nicht parallel, so ist die Belastung für das laufende Meter Binder veränderlich, entsprechend der Größe der Dachfläche, die auf die einzelnen Bindertheile kommt.

Fig. 250.



Die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Lasten werden erhalten, indem man die Belastung für das laufende Meter Stützweite, bzw. schräger Dachlinie mit

derjenigen Länge multiplicirt, welche auf einen Knotenpunkt entfällt. Für den Knotenpunkt E (Fig. 250) wird demnach

$$G = a b q', \quad S = 75 a b \quad \text{und} \quad N = \frac{a}{\cos \alpha} b v \quad \dots \dots \dots 290.$$

Man könnte die Werthe für G , S und N auch nach der Theorie der continuirlichen Träger bestimmen, indem man AEC als continuirlichen Träger auf drei Stützen auffasst; doch empfiehlt sich das angegebene einfachere Verfahren mehr, da die Annahmen, welche der Berechnung der continuirlichen Träger zu Grunde gelegt werden, hier doch nicht genau erfüllt sind und die verwickeltere Rechnung keine entsprechend genaueren Werthe giebt.

Sämmtliche Lasten werden in den Knotenpunkten der Binder wirkend angenommen. Die Eigengewichte wirken zum allergrößten Theile in den Knotenpunkten derjenigen Gurtung, die in den Dachflächen liegt; nur ein ganz geringer Bruchtheil wirkt in den Knotenpunkten der anderen Gurtung. Meistens kann man annehmen, daß die Eigenlasten ganz in den ersteren Knotenpunkten angreifen.

Die Windbelastung kann nur einseitig wirken; denn da die Windrichtung nach der üblichen Annahme einen Winkel $\beta = 10$ Grad mit der wagrechten Ebene einschließt, so kann der Wind beide Dachflächen nur dann treffen, wenn diese einen kleineren Winkel mit der Wagrechten bilden, als 10 Grad. Für derartig flache Dächer ist aber der Winddruck so gering, daß er ungetährlich ist. Der Winddruck ist also stets einseitig zu rechnen.

Der Schnee endlich kann das ganze Dach oder einen Theil desselben belasten. Wenn nun auch für manche Stäbe unter Umständen eine Schneebelastung über einen bestimmten Bruchtheil des Daches die ungünstigste Beanspruchung ergeben sollte, so werden wir doch diese der Berechnung nicht zu Grunde legen, weil dieselbe nur in den allerfeltesten Fällen einmal vorkommen kann; vielmehr werden wir nur volle Belastung des Daches und Belastung der einen Dachhälfte durch Schnee in das Auge

205.
Belastungs-
annahmen.

faffen. Wir werden später zeigen, daß die zweite Belastungsart zu Ergebnissen führt, aus denen die Spannungen für volle Schneebelastung ohne Schwierigkeit abgelesen werden können.

b) Auflagerdrücke bei Balkendächern.

206.
Lothrechte
Belastungen.

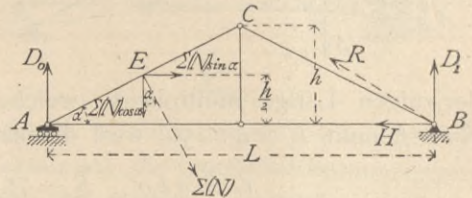
Die durch lothrechte Belastungen (Eigengewicht und Schneedruck) erzeugten Stützendrücke sind, da die Dachbinder genau wie Träger auf zwei Stützen wirken, eben so zu ermitteln, wie bei den »Trägern« (Kap. 2 des vorhergehenden Abschnittes) gezeigt worden ist.

207.
Schiefe
Belastungen.

Sind die Auflagerdrücke zu ermitteln, welche durch die schiefen Winddruckbelastungen erzeugt werden, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder sind alle Winddrücke einander parallel, welcher Fall eintritt, wenn die vom Winde getroffene Dachfläche eine Ebene ist, oder die Winddrücke sind nicht parallel, welcher Fall eintritt, wenn die vom Winde getroffene Dachfläche sich aus mehreren Ebenen zusammensetzt.

Für beide Fälle ist zunächst klar, daß der Dachbinder nicht einfach frei auf die Stützpunkte gelagert werden darf. Denn ist $\Sigma(N)$ die Mittelkraft aller Winddrücke (Fig. 251), so hat $\Sigma(N)$ eine wagrechte Seitenkraft $\Sigma(N) \sin \alpha$. Gleichgewicht ist also nur möglich, wenn Seitens des einen der beiden Auflager eine wagrechte Kraft $H = \Sigma(N) \sin \alpha$ auf den Binder wirkt; demnach muß das Dach in A oder B unverschieblich mit dem Auflager verbunden werden, um eine wagrechte Kraft übertragen zu können.

Fig. 251.



Wollte man ein eisernes Dach in beiden Punkten A und B fest mit dem Auflager verbinden, so würde dasselbe bei Aenderung der Temperatur nicht im Stande sein, sich auszudehnen, bzw. zusammenzuziehen; demnach würden durch die Temperaturveränderungen wesentliche Spannungen im Dache entstehen, bzw. die stützenden Wände würden gelockert werden. Man construirt deshalb bei eisernen Dachstühlen das eine Auflager so, daß dasselbe eine freie Ausdehnung und Zusammenziehung gestattet; das andere stellt eine feste Verbindung zwischen Träger und stützender Wand her. Wir wollen in der Folge stets ein festes und ein bewegliches Auflager, und zwar das Auflager bei A als das bewegliche, dasjenige bei B als das feste annehmen. Nehmen wir ferner an, daß das Auflager bei A eine Bewegung ohne Reibung gestattet, so kann der Stützendruck bei A nur lothrecht wirken. Diese Annahme ist nicht genau richtig, aber für die Praxis ausreichend. Der Auflagerdruck bei B dagegen kann beliebige Richtung annehmen. Es ist übrigens leicht, den Einfluß des größtmöglichen Reibungswiderstandes auf die Stabspannungen zu ermitteln, indem man denselben als äußere auf den Binder wirkende Kraft einführt. In dem mehrfach erwähnten Heft dieses »Handbuches« wird die betreffende Untersuchung durchgeführt werden.

Es ergeben sich verschiedene Auflagerdrücke, je nachdem die Windbelastung auf derjenigen Dachseite stattfindet, an welcher das bewegliche Auflager A ist, oder auf derjenigen, an welcher das feste Auflager B liegt.

208.
Parallele
Winddrücke.

1) Die Winddrücke sind parallel. a) Diejenige Dachhälfte ist belastet, an welcher das bewegliche Auflager liegt (Fig. 251). Die Mittel-

kraft $\Sigma(N)$ fämmtlicher Winddrücke greife in der Mitte von AC , etwa in E , an und sei gleich der Summe aller Einzeldrücke. $\Sigma(N)$ zerlegt sich im Punkte E in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft $\Sigma(N) \sin \alpha$ und $\Sigma(N) \cos \alpha$; in A wirkt der lothrechte Stützendruck D_0 , in B der schiefe Auflagerdruck R , welcher gleichfalls in eine wagrechte Seitenkraft H und in eine lothrechte Seitenkraft D_1 zerlegt wird. Die drei Unbekannten D_0 , D_1 und H erhält man durch die drei Gleichgewichtsbedingungen. Es ist

$$0 = \Sigma(N) \sin \alpha - H, \text{ woraus } H = \Sigma(N) \sin \alpha; \dots 291.$$

$$D_0 L + \Sigma(N) \sin \alpha \frac{h}{2} - \Sigma(N) \cos \alpha \frac{3}{4} L = 0, \text{ woraus, da } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{L},$$

$$D_0 = \frac{\Sigma(N) \cos \alpha}{4} (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha); \dots 292.$$

$$D_1 L - \Sigma(N) \sin \alpha \frac{h}{2} - \Sigma(N) \cos \alpha \frac{L}{4} = 0, \text{ woraus } D_1 = \frac{\Sigma(N)}{4 \cos \alpha}. 293.$$

Auf graphischem Wege geschieht die Ermittlung der Auflagerdrücke in der durch Fig. 252 veranschaulichten Weise.

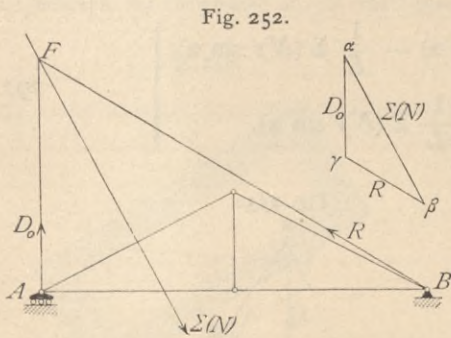


Fig. 252.

Die drei auf das Dach wirkenden Kräfte D_0 , R und $\Sigma(N)$ halten dasselbe im Gleichgewicht, schneiden sich also in einem Punkte; die Kraft R geht sonach durch den Schnittpunkt F der Kräfte D_0 und $\Sigma(N)$. R geht auch durch B ; also ist BF die Richtung der Kraft R . Aus dem Kräfte-dreieck für diese Kräfte ergibt sich, wenn $\alpha\beta = \Sigma(N)$ ist, $R = \beta\gamma$ und $D_0 = \gamma\alpha$.

β) Diejenige Dachhälfte ist belastet, an welcher das feste Auflager liegt (Fig. 253). Die Mittelkraft $\Sigma(N)$ greift in der Mitte der rechtsseitigen Dachfläche, in E' , an und zerlegt sich in eine lothrechte und eine wagrechte Seitenkraft. Wir erhalten durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen:

$$0 = H' - \Sigma(N) \sin \alpha, \text{ woraus } H' = \Sigma(N) \sin \alpha; \dots 294.$$

$$0 = D'_0 L - \Sigma(N) \sin \alpha \frac{h}{2} - \Sigma(N) \cos \alpha \frac{L}{4}, \text{ woraus } D'_0 = \frac{\Sigma(N)}{4 \cos \alpha}; 295.$$

$$0 = D'_1 L + \Sigma(N) \sin \alpha \frac{h}{2} - \Sigma(N) \cos \alpha \frac{3}{4} L,$$

woraus

$$D'_1 = \frac{\Sigma(N) \cos \alpha}{4} (3 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \dots 296.$$

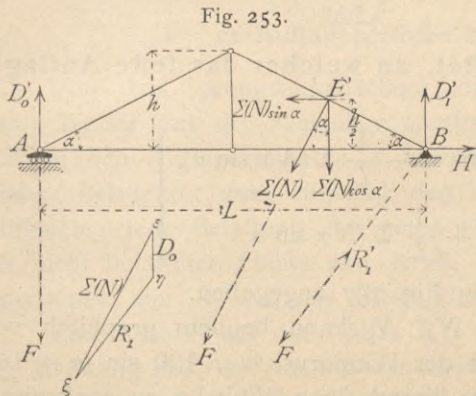


Fig. 253.

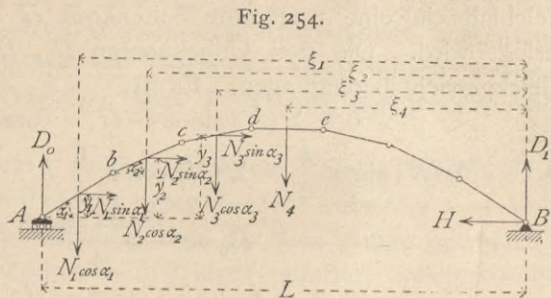
Man sieht, es ist $D_0 = D'_1$, $D_1 = D'_0$ und $H = H'$; nur ist bei H' der Sinn demjenigen von H entgegengesetzt.

Durch Construction lassen sich die Auflagerdrücke im vorliegenden Falle, wie in Fig. 253 gezeigt, ermitteln.

Die drei Kräfte D'_0 , $\Sigma(N)$ und die Mittelkraft R'_1 von H' und D'_1 sind im Gleichgewichte, schneiden sich daher in einem Punkte, und zwar in demjenigen Punkte, in welchem die Richtungen von D'_0 und $\Sigma(N)$ sich schneiden, also in F . Die Verbindungslinie der beiden Punkte B und F ergibt demnach die Richtung der Kraft R'_1 . Ist $\Sigma(N) = \epsilon\delta$, so wird $\xi\eta = R'_1$ und $\eta\epsilon = D'_0$.

209.
Nicht
parallele
Winddrücke.

2) Die Winddrücke haben nicht parallele Richtungen. a) Diejenige Dachhälfte ist belastet, an welcher das bewegliche Auflager liegt. Bei gebrochener Dachfläche werden die Winddrücke, welche auf die einzelnen Flächen wirken, nach den Angaben in Art. 30 (S. 23) ermittelt. Bei einer cylindrischen Dachfläche genügt es, einzelne Dachtheile zusammenzufassen und für jeden dieser Theile den Winddruck unter Zugrundelegung eines mittleren Neigungswinkels α zu bestimmen. Man erhält etwa N_1 für die Strecke Ab (Fig. 254), N_2 für bc etc. Die Zerlegung jeden Winddruckes in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft und die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen ergeben die Unbekannten D_0 , D_1 und H . Es wird

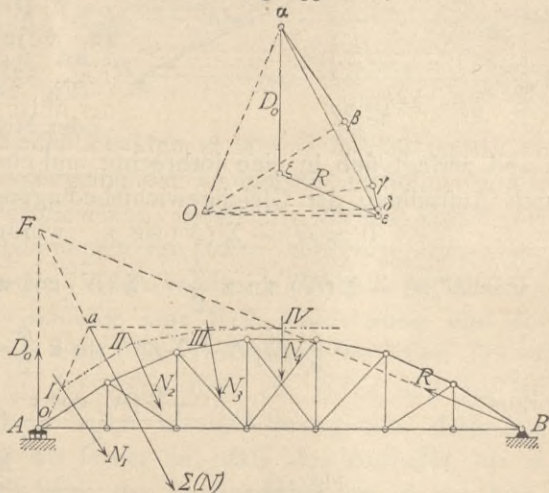


$$\left. \begin{aligned} H &= \Sigma (N \sin \alpha), \quad D_0 = \frac{1}{L} \Sigma (N \xi \cos \alpha) - \frac{1}{L} \Sigma (N y \sin \alpha), \\ D_1 &= \frac{1}{L} \Sigma [N (L - \xi) \cos \alpha] + \frac{1}{L} \Sigma (N y \sin \alpha). \end{aligned} \right\} \dots 297.$$

Die graphische Ermittlung der Auflagerdrücke zeigt Fig. 255.

Die einzelnen Winddrücke ($N_1, N_2, N_3 \dots$) werden mittels eines Kraftpolygons $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ zu einer Mittelkraft vereinigt; hierauf wird für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon $OIIIIV$ construirt. Alsdann geht die Mittelkraft durch den Schnittpunkt a der äußersten Seilpolygonseiten und ist parallel zu as . Jetzt ersetzt $\Sigma(N)$ alle Winddrücke, und es wirken nur noch die drei Kräfte D_0 , $\Sigma(N)$ und R , so daß die graphische Ermittlung von D_0 und R in der foeben gezeigten Weise erfolgen kann. Es ergibt sich $\xi\xi' = R$ und $\xi\alpha = D_0$.

Fig. 255.



Wenn die Dachfläche aus einzelnen ebenen Dach- und Laternenflächen sich zusammensetzt, so ist das Verfahren genau so, wie eben angegeben.

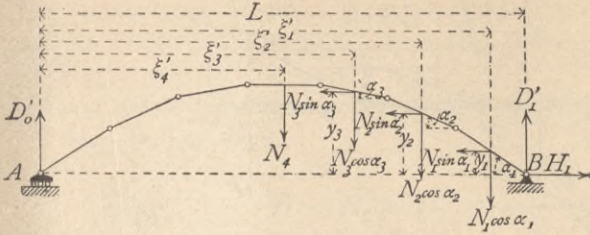
β) Diejenige Dachhälfte ist belastet, an welcher das feste Auflager liegt (Fig. 256). Die Berechnung ergibt

$$\left. \begin{aligned} H' &= \Sigma (N \sin \alpha), \quad D'_1 = \frac{1}{L} \Sigma (N \xi' \cos \alpha) - \frac{1}{L} \Sigma (N y \sin \alpha), \\ D'_0 &= \frac{1}{L} \Sigma [N (L - \xi') \cos \alpha] + \frac{1}{L} \Sigma (N y \sin \alpha). \end{aligned} \right\} \dots 298.$$

Die Construction von D'_0 und R'_1 ist in Fig. 257 angegeben.

Die Ermittlung der Werthe für N_1, N_2, N_3 kann bequem graphisch vorgenommen werden. Nach Art. 30 (S. 23) ist der Winddruck $v = 120 \sin(\alpha + 10^\circ)$ für 1 qm . Diefes v ist nach Fig. 258 leicht für irgend einen Winkel α zu construiren.

Fig. 256.



Man mache in der Dachfläche nach beliebigem Maßstabe $\overline{ab} = 120 \text{ kg}$, lege durch b eine Linie parallel zur Windrichtung und falle auf dieselbe von a aus die Senkrechte ac ; alsdann ist

$$\overline{ac} = \overline{ab} \sin(\alpha + 10^\circ).$$

Da $\overline{ab} = 120 \text{ kg}$ ist, so ist $\overline{ac} = 120 \sin(\alpha + 10^\circ) = v$, d. h. der gefuchte Winddruck. Trägt man ac senkrecht zur Dachfläche ab, so erhält man die in Fig. 258 schraffierte Belastungsfläche für Winddruck.

Fig. 258.

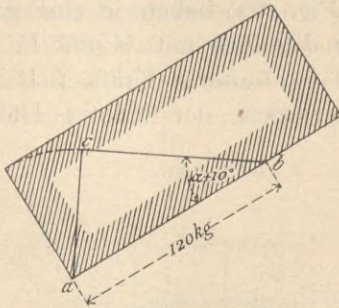


Fig. 257.

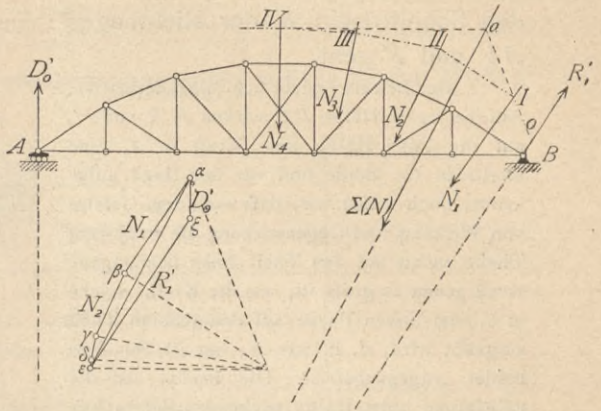


Fig. 259.

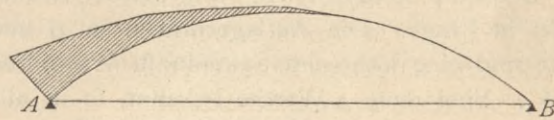
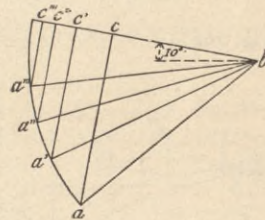


Fig. 260.



Bildet die Dachfläche eine Cylindersfläche, so wähle man eine genügend große Anzahl von Punkten aus, für welche man die gezeigte Construction vornimmt. Man erhält die in Fig. 259 gezeichnete Belastungsfläche und kann daraus leicht die Größe des Winddruckes ermitteln, welcher auf die einzelnen Knotenpunkte der Construction entfällt.

Bequemer macht man die Construction der Winddrücke in einer besonderen Zeichnung (Fig. 260) und erhält ac , bezw. $a'c'$, $a''c''$...

c) Auflagerdrücke bei Sprengwerksdächern.

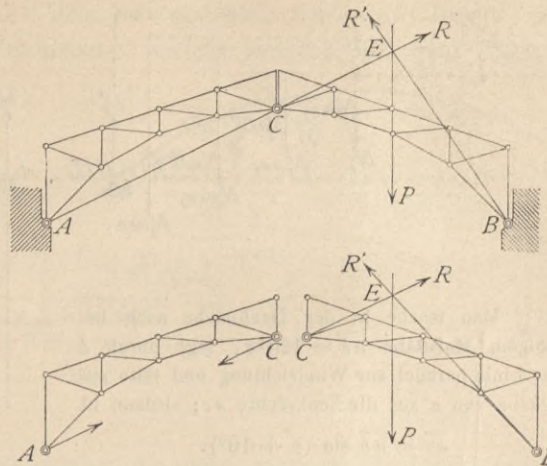
Von den Sprengwerksdächern sollen hier nur diejenigen behandelt werden, deren Binder mit drei Gelenken construiert sind (Fig. 261). Zwei Gelenke befinden sich an den Auflagerpunkten A und B , ein drittes C gewöhnlich in der Bindermitte. Betrachtet man zunächst den Träger selbst als gewichtslos, so ergibt sich allgemein: Jede Belastung der einen Hälfte, etwa CB , erzeugt im Auflagerpunkt der nicht belasteten Hälfte eine Kraft, deren Richtung durch den betreffenden Auflagerpunkt, hier A , und das Mittelgelenk C bestimmt ist.

Eine Last P auf der Hälfte BC erzeugt also in A einen Stützendruck R mit der Richtung AC , und da auf das System nur drei Kräfte, nämlich die Last P und die Drücke der Auflager A und B , wirken, so müssen sich dieselben in einem

Punkte schneiden. Daraus folgt, dass der Stützendruck R' von B aus durch den Schnittpunkt E der Richtungen AC und P geht.

Der Beweis ergibt sich folgendermassen. Auf die rechte Hälfte BC wirken P , R und R' , auf die linke Hälfte eine Kraft in A , eine zweite in C . Beide sind vor der Hand unbekannt; doch wissen wir, dass nach dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung die in C vom Theile rechts auf den Theil links übertragene Kraft genau so gross ist, wie die Kraft, welche in C vom linken Theile auf den rechten Theil ausgeübt wird, d. h. wie R ; nur ist der Sinn beider entgegengesetzt. Die beiden auf die unbelastete linke Hälfte wirkenden Kräfte halten diesen Theil im Gleichgewicht; dies ist aber nur möglich, wenn beide in dieselbe Richtung fallen, d. h. in diejenige, welche durch die beiden Angriffspunkte A und C gegeben ist, entgegengesetzten Sinn und gleiche Grösse haben; der Stützendruck von A geht also durch C .

Fig. 261.



211.
Lothrechte
Belastungen.

Zunächst kommen die lothrechten Belastungen (Eigengewicht und Schneeeindruck) in Frage. Die Auflagerdrücke in A und B (Fig. 262) haben je eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft. Wir bezeichnen dieselben mit H und V , H_1 und V_1 . Sind diese 4 Werthe bekannt, so ist alles auf die äusseren Kräfte sich Beziehende bekannt. Wir betrachten zuerst das Gleichgewicht der rechten Hälfte

Fig. 262.

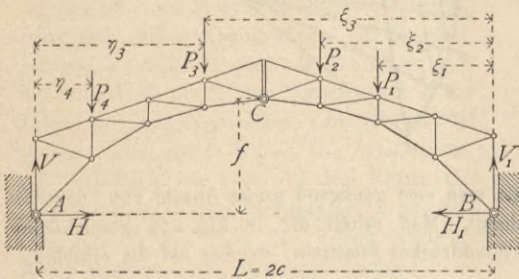
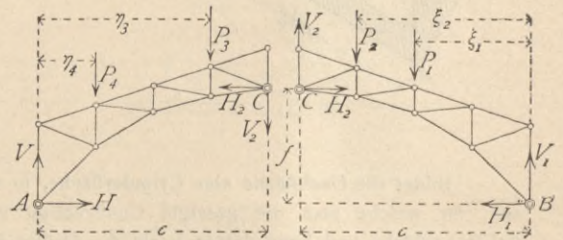


Fig. 263.



(Fig. 263). In C wirkt auf dieselbe eine Kraft, deren Seitenkräfte H_2 und V_2 sein mögen. Alsdann ist die Summe der statischen Momente für B als Drehpunkt gleich Null, mithin

$$H_2 f + V_2 c - \sum (P \xi) = 0.$$

Betrachtet man nun die linke Hälfte (Fig. 263), so wirkt auf diese in C eine genau so grosse Kraft, wie in C auf die rechte Hälfte wirkt; nur ist der Sinn entgegengesetzt. Demnach werden die Seitenkräfte derselben wiederum H_2 und V_2 , aber mit entgegengesetztem Sinne sein. Die Summe der statischen Momente für A als Drehpunkt ist gleich Null; mithin, wenn stets die Summen, welche sich auf die linke Hälfte beziehen, mit dem Zeiger 1 bezeichnet werden,

$$H_2 f - V_2 c - \sum_1 (P \eta) = 0.$$

Damit sind für H_2 und V_2 die beiden Gleichungen gefunden:

$$H_2 f + V_2 c = \sum (P \xi) \quad \text{und} \quad H_2 f - V_2 c = \sum_1 (P \eta).$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$H_2 = \frac{\Sigma(P\xi) + \Sigma(P\eta)}{2f} \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{\Sigma(P\xi) - \Sigma(P\eta)}{L} \quad \dots \quad 299.$$

Die Anwendung der übrigen Gleichgewichtsbedingungen auf die beiden Hälften ergibt nun leicht

$$\left. \begin{aligned} H = H_2 = H_1 &= \frac{\Sigma(P\xi) + \Sigma(P\eta)}{2f}, \\ V = V_2 + \Sigma_1(P) &= \frac{\Sigma(P\xi) + \Sigma(P\xi)}{L}, \\ V_1 = \Sigma(P) - V_2 &= \frac{\Sigma[P(L - \xi)] + \Sigma[P(L - \xi)]}{L}. \end{aligned} \right\} \dots \quad 300.$$

Die lothrechten Seitenkräfte der Lagerdrücke sind demnach genau so groß, wie bei gleicher Belastung an einem Balkenträger von der Spannweite L . Jetzt sind auch die Kräfte R und R_1 , so wie ihre Winkel α und α_1 mit der Wagrechten gefunden. Es werden

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} \quad \text{und} \quad \text{tg } \alpha = \frac{V}{H}; \quad R_1 = \sqrt{H_1^2 + V_1^2} \quad \text{und} \quad \text{tg } \alpha_1 = \frac{V_1}{H_1} \quad 301.$$

Beispiel. 1) Die beiden Dachhälften seien gleich belastet, je mit g auf die Längeneinheit der wagrechten Projection (Fig. 264). Dann ist

$$\Sigma(P) = \Sigma_1(P) = gc; \quad \Sigma(P\xi) = \Sigma_1(P\eta) = \frac{gc^2}{2};$$

$$H = \frac{gc^2}{2f}; \quad V_2 = 0; \quad V = V_2 + \Sigma_1(P) = gc; \quad V_1 = \Sigma(P) - V_2 = gc \quad \dots \quad 302.$$

Fig. 264.

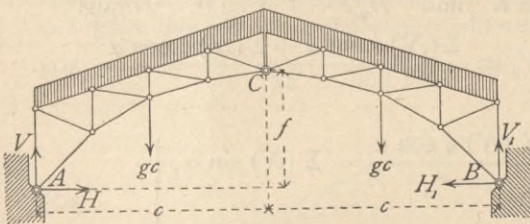
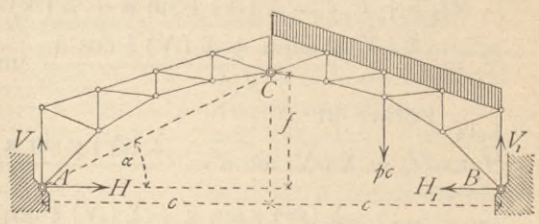


Fig. 265.



2) Die eine (rechte) Hälfte sei mit p für die Längeneinheit der wagrechten Projection belastet, die andere (linke) Hälfte sei unbelastet (Fig. 265). Alsdann ist

$$\Sigma(P) = pc; \quad \Sigma_1(P) = 0; \quad \Sigma(P\xi) = \frac{pc^2}{2}; \quad \Sigma_1(P\eta) = 0;$$

$$H_2 = H = H_1 = \frac{pc^2}{4f}; \quad V_2 = \frac{pc^2}{2 \cdot 2c} = \frac{pc}{4}; \quad V = \frac{pc}{4}; \quad V_1 = \frac{3pc}{4} \quad \dots \quad 303.$$

Hier ist nach Gleichung 301: $\text{tg } \alpha = \frac{pc \cdot 4f}{4pc^2} = \frac{f}{c}$, d. h. die Richtung von R geht durch A und C (siehe oben).

Die graphische Ermittlung der in Rede stehenden Auflagerdrücke ist in Fig. 266 dargestellt.

Es empfiehlt sich, für beliebige Belastung zuerst nur die eine Hälfte belastet anzunehmen und für diese Belastung die Auflagerdrücke zu ermitteln, darauf die Auflagerkräfte für die Belastung nur der anderen Hälfte aufzufuchen. Die Zusammenfassung der für die einzelnen Belastungen gefundenen Kräfte ergibt alsdann die wirklichen Auflagerdrücke.

Zunächst sei nur die rechte Hälfte belastet und die Mittelkraft dieser Lasten gleich P_1 ; alsdann haben R_1 und R_2 die in Fig. 266 a gezeichneten Richtungen, und die Größe beider ergibt sich durch das Kraftpolygon zu $\beta\gamma = R_1$ und $\gamma\alpha = R_2$. In gleicher Weise erhält man für Belastung der linken Hälfte mit P_2 :

$$\varepsilon\xi = R_3 \text{ und } \xi\delta = R_4.$$

Wenn nun beide Hälften mit P_1 , bzw. P_2 belastet sind, so wirken in A: R_1 und R_3 , in B: R_2 und R_4 . Die Größe und Richtung der gesammten Auflagerdrücke R und R' erhält man durch Construction der Kraftpolygone aus den bezüglichen Kräften. Ist $\gamma\eta = R_3$, so wird $\beta\eta = R$; ist $\delta\gamma \parallel \xi\delta = R_4$, so wird $\delta\alpha = R'$.

Als Controle diene, dass die wagrechten Projectionen von R und R' gleich sein müssen, da ja H im ganzen Sprengwerksträger constant ist.

212.
Schiefe
Belastungen.

Uebergangen wir nunmehr zu den vom Winddruck (durch schiefe Belastung) erzeugten Stützendrücken, so sei $\Sigma(N)$ die Mittelkraft aller Winddrücke (Fig. 267). Wir zerlegen diese Kraft in $\Sigma(N) \cos \alpha$ und $\Sigma(N) \sin \alpha$ und erhalten, wie im vorhergehenden Artikel, die Gleichgewichtsbedingungen:

$$H_2 f + V_2 c = \Sigma(N) y \sin \alpha + \Sigma(N) \xi \cos \alpha \text{ und } H_2 f - V_2 c = 0, \text{ woraus}$$

$$H_2 = \frac{\Sigma(N) y \sin \alpha + \Sigma(N) \xi \cos \alpha}{2f} \text{ und } V_2 = \frac{\Sigma(N) y \sin \alpha + \Sigma(N) \xi \cos \alpha}{2c} \quad 304.$$

Ferner ist

$$H_1 = H_2 - \Sigma(N) \sin \alpha = \frac{\Sigma(N) y \sin \alpha + \Sigma(N) \xi \cos \alpha}{2f} - \Sigma(N) \sin \alpha, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad 305.$$

$$H_1 = H_2 = \frac{\Sigma(N) y \sin \alpha + \Sigma(N) \xi \cos \alpha}{2f},$$

$$V_1 = \Sigma(N) \cos \alpha - V_2 = \Sigma(N) \cos \alpha - \frac{\Sigma(N) y \sin \alpha + \Sigma(N) \xi \cos \alpha}{2c}, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad 306.$$

$$V_1 = V_2 = \frac{\Sigma(N) y \sin \alpha + \Sigma(N) \xi \cos \alpha}{2c}.$$

Wenn die schiefen Belastungen einander nicht parallel sind, so bleibt das Verfahren das gleiche; nur sind statt $\Sigma(N) y \sin \alpha$ und $\Sigma(N) \xi \cos \alpha$ bzw. $\Sigma(N y \sin \alpha)$ und $\Sigma(N \xi \cos \alpha)$ in die Rechnung einzuführen.

Für die graphische Er-

Fig. 266.

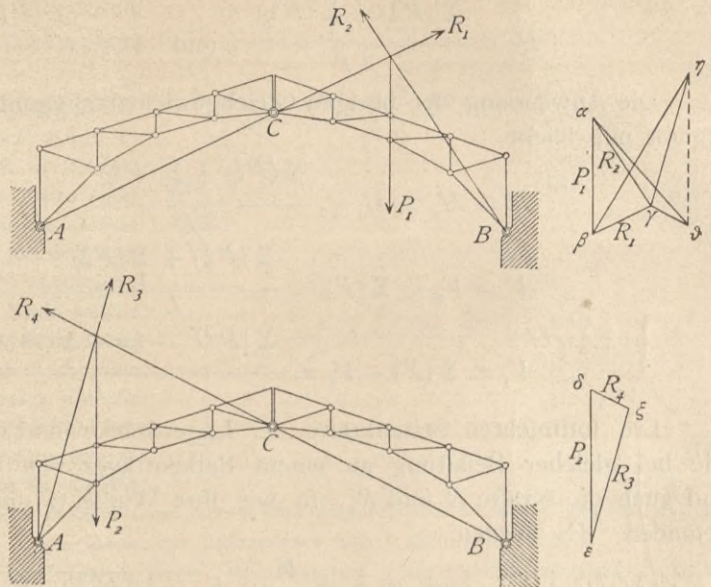
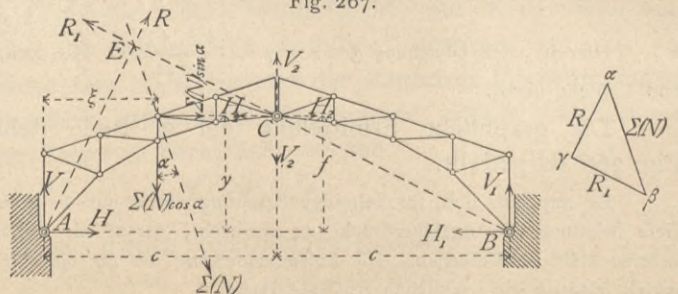
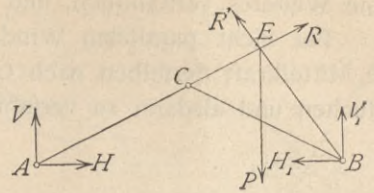


Fig. 267.



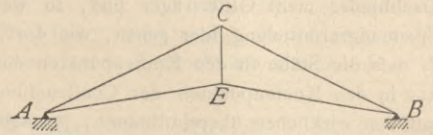
durch eine Last P , erzeugt nach Art. 210 in A eine Kraft R , deren Richtung mit AC zusammenfällt, in B eine Kraft R' in der Richtung BE . Die Auflagerkräfte R und R' haben die wagrechten Seitenkräfte H und H_1 , und da außerdem hier keine wagrechten Kräfte auf das System wirken, so ist $H = H_1$. Diese Kräfte H werden von den Seitenmauern des Gebäudes oder von den sonstigen stützenden Constructionen geleistet; umgekehrt wirken Seitens des Daches die Kräfte H auf die Seitenmauern des Gebäudes oder auf die sonstigen Stützen nach außen.

Fig. 269.



Die Standficherheit der das Dach tragenden Wände, Stützen etc. macht es in den meisten Fällen wünschenswerth, daß diese wagrechten Kräfte nicht auf dieselben übertragen werden; man verbindet deshalb die beiden Punkte A und B durch einen Stab oder eine Anzahl von Stangen, welche die Kräfte H und H_1 nach einem Punkte übertragen, in welchem sie alsdann einander aufheben. Dadurch erhält man, wenigstens für lothrechte Belastungen des Daches, nur lothrechte Auflagerdrücke und lothrechten Druck auf die Wände, Stützen etc. Im einfachsten Falle besteht die Stangenverbindung aus einem einfachen Holzbalken oder einer einfachen eisernen Zugstange AB ; statt dessen werden auch zwei Stangen AE und EB (Fig. 270) angeordnet, die sowohl nach oben, wie nach unten von der wagrechten Linie abweichen können. Alsdann ist im Eckpunkte E eine weitere lothrechte Stange anzuordnen. Auch eine mehrfach gebrochene Stangenverbindung kann zur Verbindung der Punkte A und B gewählt werden. Beim Balkendach werden demnach stets die wagrechten Seitenkräfte der Auflagerdrücke, welche durch die lothrechten Belastungen entstehen, mittels der Stangenverbindung aufgehoben.

Fig. 270.



215.
Eintheilung.

Je nach der Anordnung der eben erwähnten Stangenverbindung, bzw. je nach der Form der oberen und der unteren Gurtung, so wie der Anordnung der zwischen beiden gelegenen Stäbe kann man folgende Hauptgattungen von Dachstuhl unterscheiden³⁴⁾:

a) Einfaches Dreieckdach (Fig. 270). Dasselbe besteht aus zwei sich im First stützenden Sparren und einer die wagrechten Kräfte aufhebenden Verbindung von zwei Stangen, welche sich in der Lothrechten des Firstes schneiden. Diese beiden Stangen sind wagrecht oder nach oben, bzw. nach unten geneigt. Zur Verbindung des Firstpunktes mit dem Schnittpunkte der Stangen, welche den wagrechten Schub aufnehmen, ist eine lothrechte Stange CE angeordnet.

b) Deutscher Dachstuhl (Fig. 271). Die obere Gurtung hat jederseits einen Knotenpunkt, welcher durch einen Stab mit E verbunden ist.

Fig. 271.

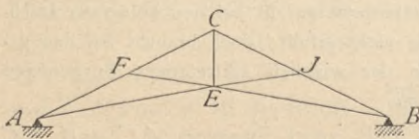
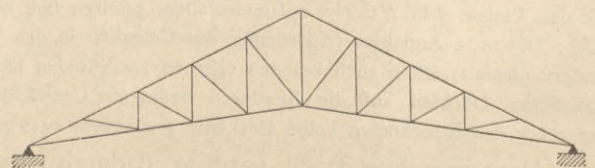


Fig. 272.



³⁴⁾ Vergl. auch Theil III, Band 2, Heft 4 (Art. 144 bis 149, S. 199 bis 207) dieses »Handbuches«.

c) Englischer Dachstuhl (Fig. 272). Die obere Gurtung hat jederseits eine Anzahl von Knotenpunkten; die obere Gurtung und die den wagrechten Schub aufhebende Stangenverbindung (die untere Gurtung) sind durch Gitterwerk mit einander verbunden. Das Gitterwerk besteht aus einer Schar Pfoften und einer Schar Diagonalen oder aus zwei Scharen von Diagonalen, von denen die eine vorthellhaft senkrecht zur Dachneigung steht.

d) Französischer oder belgischer Dachstuhl, *Polonceau*-Dachstuhl oder *Wiegmann*-Dachstuhl (Fig. 273 bis 276). Er entsteht aus dem einfachen Dreieckdach, wenn in Fig. 269 die einfachen Sparren durch Dreiecksträger ersetzt werden.

Fig. 273.

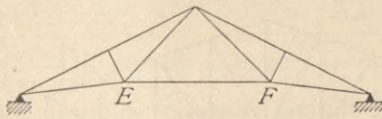


Fig. 274.

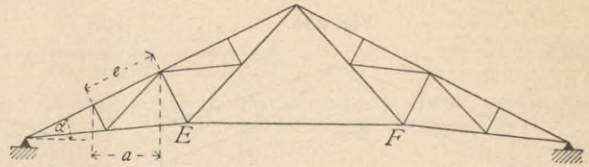


Fig. 275.

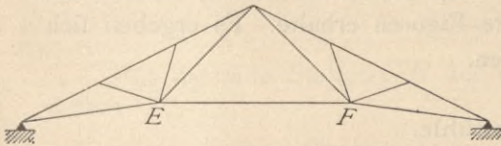
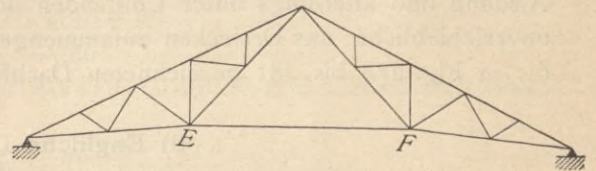


Fig. 276.



Die Form der letzteren richtet sich nach der Anzahl von Stützpunkten (Knotenpunkten), welche jederseits nöthig werden. Der wagrechte Schub wird durch eine Stange EF aufgehoben, welche die unteren Eckpunkte der beiden Dreiecksträger verbindet. In Fig. 273 bis 276 sind *Polonceau*-Dachstühle für 1, 2, 3 und 4 Lastpunkte an jeder Seite des Firtes dargestellt.

Man unterscheidet:

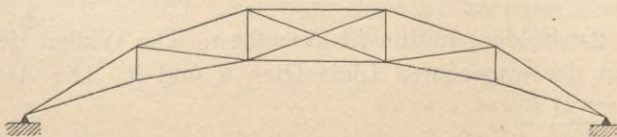
1) den einfachen *Polonceau*-Dachstuhl; bei demselben hat der Dreiecksträger jederseits nur einen Knotenpunkt in der unteren Gurtung (Fig. 273 u. 275);

2) den zusammengesetzten *Polonceau*-Dachstuhl; bei diesem sind in den Hauptträger noch weitere Stäbe eingeschaltet, so daß der Dreiecksträger in der unteren Gurtung jederseits mehrere Knotenpunkte hat (Fig. 274 u. 276).

Die Anzahl der Lastpunkte bestimmt sich nach der Tragweite, welche man den Sparren geben kann. Letztere heiße e ; somit ist die wagrechte Projection derselben $e \cos \alpha = a$, die Gesamtsstützweite des Daches L . Alsdann ergibt sich die Anzahl

der Lastpunkte zu $n = \frac{L}{e \cos \alpha} - 1 = \frac{L}{a} - 1$; e ist nach der Stärke der Sparren verschieden; n muß eine ganze gerade Zahl sein.

Fig. 277.



e) Sieldach (Fig. 277).

Die obere und die untere Gurtung sind nach einer krummen Linie oder nach einem der krummen Linie

eingeschriebenen Vieleck gebildet; das Gitterwerk ist verschieden. Man kann hierher auch die Träger mit gekrümmter oberer und geradliniger unterer Gurtung rechnen.

Bei den vorstehend angeführten Dächern ist stets angenommen, daß die beiden Gurtungen sich über dem Auflager schneiden; die Formen sind aber auch möglich, ohne daß die Schnittpunkte der Gurtungen in den Auflager-Lothrechten liegen.

Fig. 278.

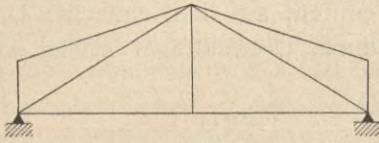


Fig. 279.

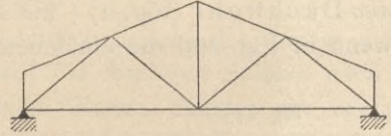
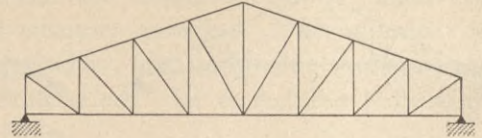


Fig. 280.



Fig. 281.



Als dann sind allerdings unter Umständen noch Diagonalen anzuordnen, damit man unverfchiebliche, aus Dreiecken zusammengesetzte Figuren erhalte. Es ergeben sich die in Fig. 278 bis 281 gezeichneten Dachformen.

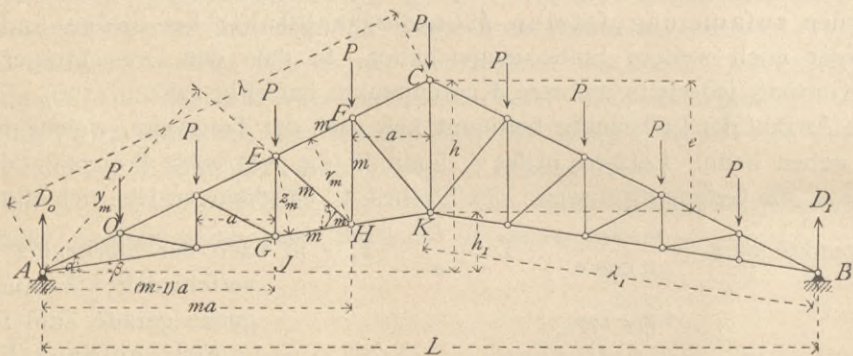
a) Englische Dachstuhl.

216.
Berechnung
der Spannungen
durch lothrechte
Belastung.

Die Belastungsgefetze und Spannungsermittlungen sollen für einen Dachstuhl mit Pfosten und nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezeigt werden; für andere Anordnungen des Gitterwerkes ergeben sich aus dem Nachstehenden die Aenderungen ohne Schwierigkeit.

1) Berechnung der Spannungen. α) Belastung durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneebelastung (Fig. 282). Die Belastung für den Knotenpunkt sei P , die Stützweite L , die Entfernung der Knotenpunkte, wagrecht

Fig. 282.



gemessen, a . Der Dachstuhl habe $2n$ Felder; mithin ist $L = 2na$. Die Winkel der oberen, bezw. unteren Gurtung mit der wagrechten Linie seien α und β . Die Auflagerdrücke sind $D_0 = D_1 = \frac{(2n - 1) P}{2}$.

Für die m -te Stange EF der oberen Gurtung ist H der Momentenpunkt, also

$$0 = X_m r_m + D_0 m a - (m - 1) P \frac{m a}{2},$$

woraus

$$X_m = \frac{-\frac{(2n-1)}{2} P m a + (m-1) P \frac{m a}{2}}{r_m}.$$

Nun ist $r_m = \overline{AH} \sin(\alpha - \beta)$ und $\overline{AH} = \frac{m a}{\cos \beta}$; fönach

$$r_m = m a \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = m a \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

und

$$X_m = -\frac{P(2n-m)}{2 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} \dots \dots \dots 307.$$

Oft ist es unbequem, mit den Winkelwerthen zu rechnen; dann giebt man der Formel folgende Gestalt. Es ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{L}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2h_1}{L}$, $h - h_1 = e$ und $\cos \alpha = \frac{L}{2\lambda}$; durch Einföztung dieser Werthe wird

$$X_m = -\frac{P\lambda(2n-m)}{2e} \dots \dots \dots 308.$$

Für die m -te Stange GH der unteren Gurtung ist E der Momentenpunkt, mithin

$$0 = D_0(m-1)a - P(m-2) \frac{(m-1)a}{2} - Z_m z_m,$$

woraus

$$Z_m = \frac{\frac{(2n-1)}{2} P(m-1)a - P(m-2)(m-1) \frac{a}{2}}{z_m}.$$

Nun ist $z_m = \overline{AE} \sin(\alpha - \beta)$ und $\overline{AE} = \frac{(m-1)a}{\cos \alpha}$, demnach

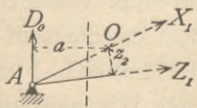
$$Z_m = \frac{P(2n-m+1)}{2 \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} \dots \dots \dots 309.$$

Da $\cos \beta = \frac{L}{2\lambda_1}$ ist und $\operatorname{tg} \alpha$, so wie $\operatorname{tg} \beta$ die oben angegebenen Werthe haben, fo wird auch

$$Z_m = \frac{P\lambda_1(2n-m+1)}{2e} \dots \dots \dots 310.$$

Die Gleichungen 309 u. 310 gelten nicht für die erste Stange der unteren Gurtung am Auflager; denn die Formel ist unter der Annahme entwickelt, dafs als Drehpunkt für die Gleichung der statischen Momente derjenige Punkt der oberen Gurtung gewählt wird, welcher in die $(m-1)$ -te Verticale fällt; dies würde für $m=1$ der Punkt A sein, und für diesen Fall wäre die Gleichung der statischen Momente für A als Drehpunkt nicht verwendbar, weil alle Kräfte am Bruchstück dann durch A gehen, also das statische Moment Null haben. Man erhält Z_1 durch Auföftellung der Gleichung der statischen Momente für irgend einen beliebigen Punkt, etwa O (Fig. 283). Es wird, wenn der Hebelsarm von Z_1 in Bezug auf den Drehpunkt O gleich z_2 ist,

Fig. 283.



$$Z_1 = \frac{D_0 a}{z_2} = \frac{(2n-1) P a}{2 a \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = \frac{(2n-1) P \lambda_1}{2e} \dots \dots \dots 311.$$

Derselbe Werth ergiebt sich für $m=2$, d. h. für den zweiten Stab der unteren Gurtung.

218.
Spannungen
in den
Diagonalen.

Für die m -te Diagonale EH , wie für alle Diagonalen der linken Dachhälfte ist A der Momentenpunkt, mithin

$$0 = Y_m y_m + (m - 1) \frac{P m a}{2}, \text{ woraus } Y_m = - \frac{P m a (m - 1)}{2 y_m}.$$

Da nun $y_m = \frac{m a \sin \gamma_m}{\cos \beta}$ ist, wird $Y_m = - \frac{P}{2} (m - 1) \frac{\cos \beta}{\sin \gamma_m}$.

Durch einfache Umformungen erhält man

$$Y_m = - \frac{P \sqrt{1 + [(m - 1) \operatorname{tg} \alpha - m \operatorname{tg} \beta]^2}}{2 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} \dots \dots \dots 312.$$

und durch Fortschaffung der Winkelwerthe

$$Y_m = - \frac{P}{4e} \sqrt{L^2 + 4 (m e - h)^2} \dots \dots \dots 313.$$

219.
Spannungen
in den
Pfoften.

Für den m -ten Pfoften FH ist der Schnitt schräg zu legen; als Momentenpunkt ergibt sich A ; mithin heisst die Gleichung der statischen Momente für A als Drehpunkt

$$0 = V_m m a - (m - 1) \frac{P m a}{2}, \text{ woraus } V_m = \frac{P (m - 1)}{2} \dots \dots 314.$$

Für $m = 1$ ergibt diese Gleichung $V_m = 0$; der erste Pfoften ist also überflüssig und kann fortbleiben.

Die Gleichung gilt nicht für den mittelften Pfoften; denn wenn bei diesem der Schnitt eben so gelegt wird, wie bei den anderen Pfoften, so werden vier Stäbe getroffen; A ist also hier nicht der conjugirte Punkt. Man bestimmt die Spannung in diesem Mittelpfoften durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für den Firsknotenpunkt (Fig. 284). Für diesen ist, wenn die Summe der lothrechten Kräfte gleich Null gesetzt wird,

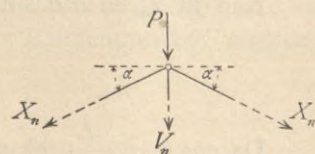
$$0 = V_n + P + 2 X_n \sin \alpha, \text{ woraus } V_n = - P - 2 X_n \sin \alpha,$$

und da nach Gleichung 307: $X_n = - \frac{P n}{2 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}$ ist, so wird

$$V_n = P \left(\frac{n \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} - 1 \right) \dots \dots \dots 315.$$

Die Gleichungen 307 bis 314 gelten für die Stäbe links von der Mitte; die zur Mitte symmetrisch liegenden Stäbe der anderen Dachhälfte werden in genau gleicher Weise beansprucht; die Gleichungen können sofort auch für die rechte Dachhälfte angewendet werden, wenn die m von B aus gerechnet werden.

Fig. 284.



Die Betrachtung der Gleichungen 307 bis 314 ergibt Folgendes:

a) Durch das Eigengewicht, bzw. durch gleichmäßige Belastung des ganzen Dachbinders erhalten alle Stäbe der oberen Gurtung Druck, alle Stäbe der unteren Gurtung Zug. Wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, erhalten dieselben bei der erwähnten Belastung Druck, die Pfoften Zug. Man sieht leicht, dafs, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu steigen, dieselben bei der gleichen Belastung gezogen, die Pfoften gedrückt werden.

b) Je gröfser β wird, desto kleiner wird $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$ und das Product $\cos \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$; desto gröfser werden daher sowohl X_m , wie Z_m , da die Ausdrücke, sowohl für X , wie für Z die erwähnten Werthe im Nenner haben. Für negative Werthe von β , d. h. wenn die Zuggurtung nach unten von der Wagrechten abweicht, wird

$$X'_m = - \frac{P (2n - m)}{2 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)} \text{ und } Z'_m = \frac{P (2n - m + 1)}{2 \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)} \dots \dots 316.$$

Je größer (absolut genommen) die negativen Werthe von β werden, desto größer werden die Nenner in den beiden Gleichungen 316, desto kleiner also X'_m und Z'_m . Für den Materialaufwand zu den Gurtungen ist es also günstig, das positive β möglichst klein, das negative β möglichst groß zu nehmen.

c) Für $\beta = 0$, d. h. wenn die untere Gurtung eine gerade Linie bildet, ist

$$X_m = -\frac{P(2n - m)}{2 \sin \alpha} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{P(2n - m + 1)}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \dots \quad 317.$$

$$Y_m = -\frac{P\sqrt{1 + (m - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad V_m = \frac{P(m - 1)}{2} \quad \text{und} \quad V_n = P(n - 1) \quad 318.$$

β) Ungünstigste lothrechte Belastung. — a) Gurtungsstäbe. Jede lothrechte Belastung des Trägers erzeugt (nach Art. 156, S. 150) ein positives Moment in allen Querschnitten. Sind nun (Fig. 282) die in den Stäben EF , bezw. GH durch eine beliebige lothrechte Belastung erzeugten Spannungen X_m , bezw. Z_m und die Momente für die bezüglichen Momentenpunkte H und E gleich M_m und M_{m-1} , so wird

$$X_m = -\frac{M_m}{r_m} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{M_{m-1}}{z_m}.$$

X_m und Z_m erreichen ihre Größtwerte gleichzeitig mit M_m , bezw. M_{m-1} , d. h. bei voller Belastung des Trägers. Die Belastung des ganzen Daches durch Schneedruck wird also für die Gurtungsstäbe die ungünstigste sein. Die dann sich ergebenden Spannungen folgen aus den Gleichungen 307 bis 311, indem dort statt P die Knotenpunktsbelastung durch Schnee- und Eigengewicht eingesetzt wird.

Man erhält, wenn b der Binderabstand ist und q' die Bedeutung, wie in Art. 204 (S. 206) hat,

$$P = G + S = ab(q' + 75) \text{ Kilogr.}$$

und daraus leicht X_m und Z_m .

b) Diagonalen. Wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, so erzeugt eine Last P rechts von dem durch die Diagonale gelegten lothrechten Schritte II

Fig. 285.

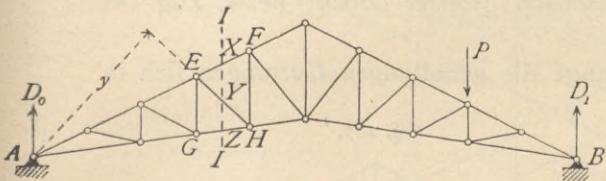
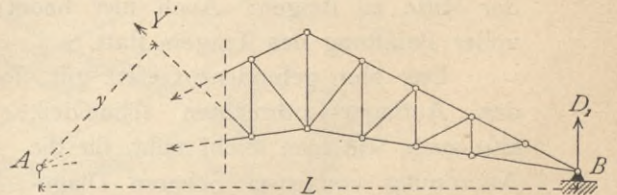


Fig. 286.



(Fig. 285) in A den Auflagerdruck D_0 . Auf das Bruchstück links vom Schnitt wirken jetzt D_0 und die drei Stabspannungen X , Y und Z . Für Y ist A der Momentenpunkt, und die Gleichung der statischen Momente für A als Drehpunkt lautet $0 = Yy$, d. h. $Y = 0$.

Liegt eine Last P links vom Schritte II und betrachtet man das Bruchstück rechts vom Schritte (Fig. 286), so heißt die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Punkt A als Drehpunkt

$$0 = Y'y + D_1L, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{D_1L}{y}.$$

220.
Ungünstigste
Belastung.

Steigen die Diagonalen nach der Mitte zu, so ergibt sich, wenn die Last rechts vom Schnitte liegt, genau wie vorhin, dass in den Diagonalen die Spannung Null entsteht. Liegt dagegen die Last links vom Schnitt, so folgt

$$Y'_1 = + \frac{D_1 L}{y'}$$

Die für die Diagonalen gefundenen Ergebnisse gelten, so lange A der Momentenpunkt der Diagonalen ist, d. h. für alle Diagonalen links der Mitte. Für die Diagonalen rechts der Mitte ist B der Momentenpunkt, und es ergibt sich in gleicher Weise, wie eben gezeigt, dass in diesen jede Belastung rechts vom Schnitte durch die betreffende Diagonale eine Druck-, bzw. Zugspannung erzeugt, je nachdem sie nach der Mitte zu fallen oder steigen; jede Belastung links vom Schnitte ruft dagegen in denselben die Spannung Null hervor.

Allgemein folgt hieraus: Jede Belastung zwischen dem durch die Diagonale gelegten lothrechten Schnitte und demjenigen Auflager, welches für die Diagonale nicht den Momentenpunkt bildet, hat auf die Spannung in der Diagonalen gar keinen Einfluss. Jede Belastung zwischen dem lothrechten Schnitt und dem Auflager, welches für die Diagonale den Momentenpunkt bildet, erzeugt in den nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Druck, in den nach der Mitte zu steigenden Diagonalen Zug. Die ungünstigsten Belastungsarten würden also diejenigen sein, bei denen die ganze Zug-, bzw. Druckabtheilung belastet wäre. Da aber die Belastung des übrigen Trägertheiles ohne Einfluss auf die Diagonalspannung ist, so kann man auch sagen: Die ungünstigste Beanspruchung aller Diagonalen durch lothrechte Lasten findet bei voller Belastung statt, und zwar werden die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gedrückt.

c) Pfosten. Für die ungünstigste Belastung der Pfosten ergibt sich durch die gleiche Beweisführung, wie bei den Diagonalen, wenn die Schnitte schräg gelegt werden: Jede Belastung zwischen dem durch einen Pfosten gelegten schrägen Schnitt und dem Auflager, welches für den Pfosten nicht den Momentenpunkt bildet, erzeugt im Pfosten die Spannung Null; jede Belastung zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager, welches den conjugirten Punkt bildet, erzeugt in den Pfosten Zug, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, Druck, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu steigen. Auch hier findet demnach größter Druck, bzw. Zug bei voller Belastung des Trägers statt.

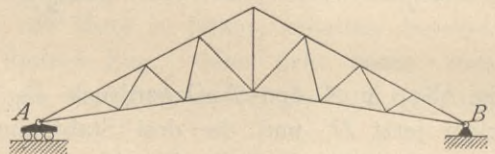
Das hier gefundene Gesetz gilt, so lange die geradlinigen Gurtungen sich in den Auflager-Lothrechten schneiden, also auch, wie man leicht sieht, für die Anordnung von zwei Scharen Diagonalen nach Fig. 287.

Demnach kann für alle Stäbe des englischen Dachstuhles die volle Belastung durch Schnee und Eigengewicht als ungünstigste lothrechte Belastung der Berechnung zu Grunde gelegt werden.

Die bezüglichen Größtwerthe sind in Art. 217 bis 219 entwickelt.

γ) Belastung durch Winddruck. Die sämtlichen Stabspannungen sind sowohl für den Fall zu ermitteln, dass der Winddruck jene Seite belastet, an welcher das bewegliche Auflager liegt, als dass er diejenige Seite belastet, an welcher sich das feste Auflager befindet.

Fig. 287.



Man ermittelt bei diesen beiden Belastungsarten für jeden Stab den Momentenpunkt, das Biegemoment der äußeren Kräfte für diesen Punkt und daraus in bekannter Weise die Stabspannungen. Es empfiehlt sich dabei, für die Auffuchung des Biegemomentes jede Knotenpunktsbelastung in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft zu zerlegen; die Ermittlung der Hebelsarme wird dadurch wesentlich vereinfacht. In Fig. 294 u. 296 sind die wagrechten und lothrechten Seitenkräfte der Winddrücke sowohl für den Fall, daß der Wind von der Seite des beweglichen Auflagers, als auch für den Fall, daß er von der Seite des festen Auflagers kommt, angegeben.

2) Graphische Ermittlung der Spannungen. Hier empfiehlt sich die *Cremona'sche Methode* am meisten, weil für die Spannungen aller Stäbe die gleichen Belastungsarten zu Grunde gelegt werden.

α) Belastung durch das Eigengewicht und Schneedruck. Man nimmt entweder die sämtlichen Eigenlasten in den oberen Knotenpunkten vereinigt an oder berechnet die Eigengewichte, welche in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen, besonders. In beiden Fällen ist das Verfahren genau wie im Kapitel »Träger« (Art. 176, S. 172) gezeigt ist.

222.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

Fig. 288.

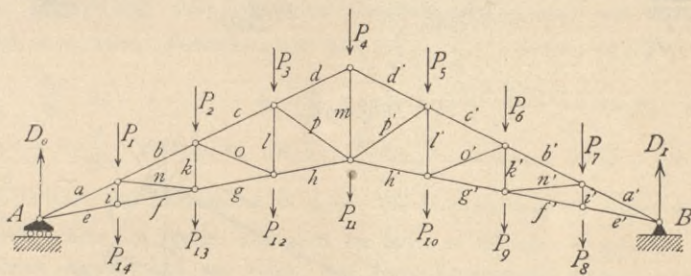
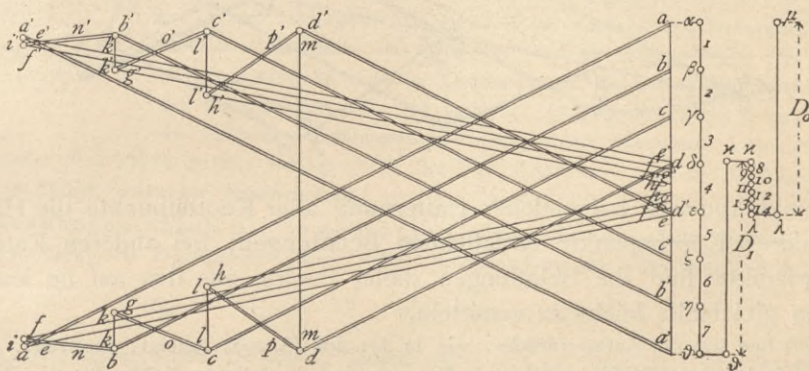


Fig. 289.



Bei der graphischen Ermittlung in Fig. 288 u. 289 ist die zweite Annahme gemacht worden; die Eigengewichte, welche auf die Auflagerpunkte *A* und *B* kommen, sind fortgelassen, weil sie unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden, demnach das System nicht belasten. Alsdann sind die am System wirkenden äußeren Kräfte in der Reihenfolge der Knotenpunkte aufgetragen: zuerst die Lasten der oberen Gurtung 1, 2, 3... 7; an den Endpunkt von 7 ist D_1 getragen; letzteres fällt mit der Kraftlinie 1, 2, 3... 7 zusammen, wie überhaupt alle äußeren Kräfte hier in dieselbe Kraftlinie fallen. Der größeren Deutlichkeit halber sind aber die Lasten 1 bis 7, D_1 , ferner die Lasten der unteren Gurtung

und D_0 je etwas seitwärts verschoben aufgetragen. Wir erhalten $D_1 = \frac{1}{2} \mu$; δ bis $14 = \mu \lambda$; $D_0 = \lambda \mu$. μ fällt demnach eigentlich auf a , wonach sich also das Kraftpolygon schließt.

Für die Construction des Kräfteplanes sind selbstverständlich als Grenzpunkte der einzelnen äußeren Kräfte die Punkte auf der Linie $a a'$ einzuführen, welche mit den gezeichneten auf gleicher Höhe liegen. Der Kräfteplan ist nun genau, wie früher angegeben, in Fig. 289 construiert, worüber keine weiteren Bemerkungen nöthig sind.

Die Construction der Spannungen durch volle Schneebelastung ist in gleicher Weise vorzunehmen; dabei sind natürlich die Belastungen der unteren Knotenpunkte gleich Null.

β) Belastung durch Winddruck. In Fig. 291 u. 292 sind die Kräftepläne sowohl für den von der Seite des beweglichen, wie für den von der Seite des festen Auflagers kommenden Winddruck construiert. Auf den Auflagerpunkt und

Fig. 290.

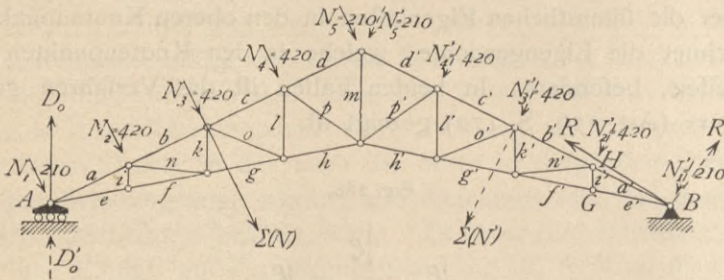
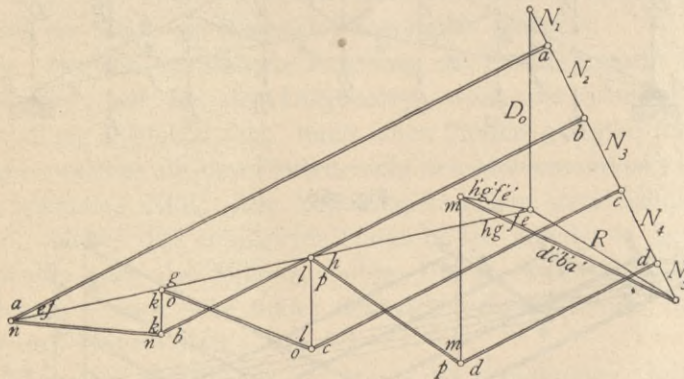


Fig. 291.



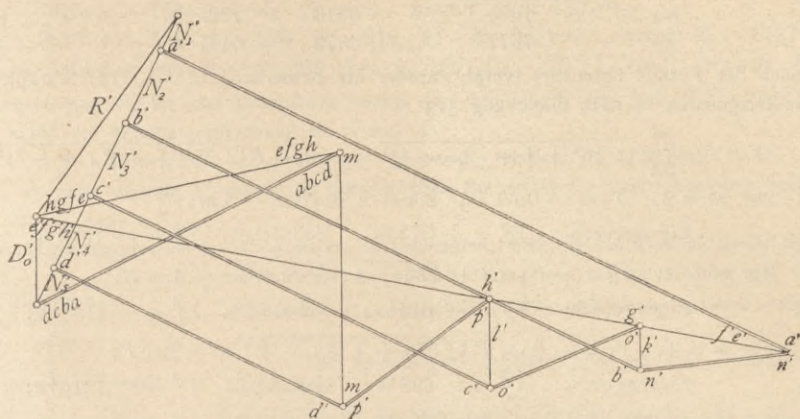
den Firstpunkt kommen bei gleicher Entfernung aller Knotenpunkte die Hälften der auf die anderen Knotenpunkte entfallenden Belastungen; bei anderen Entfernungen der Knotenpunkte sind die Belastungen dieser Punkte aus den auf sie kommenden Dachflächen gleichfalls leicht zu ermitteln.

Zunächst sind nun die Auflagerdrücke, wie in Art. 208 (S. 208) gezeigt, construiert, worauf sich der Kräfteplan in bekannter Weise ergibt. In Fig. 290 sind die äußeren Kräfte für die Belastung der linken Dachhälfte ausgezogen, für die Belastung der rechten Dachhälfte punktiert.

Es möge hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß auf der nicht belasteten Seite sämtliche Diagonalen die Spannung Null, die oberen, so wie die unteren Gurtungsstäbe sämtlich je gleiche Spannungen erhalten. Die Richtigkeit ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Wenn sich in einem unbelasteten Knotenpunkte (Fig. 293) drei Stäbe schneiden, von denen zwei in eine gerade Linie fallen, so ist, wenn Gleichgewicht stattfindet, $X - X_1 + Y \cos \varphi = 0$ und $Y \sin \varphi = 0$, d. h. $Y = 0$, also auch $X - X_1 = 0$, d. h. $X = X_1$. Die Spannungen in den beiden in eine gerade Linie fallenden Stäben sind also einander gleich; die Spannung im dritten Stabe ist gleich Null.

Fig. 292.



Falls der Wind, wie in Fig. 290 durch die ausgezogenen Pfeile angedeutet ist, die linke Seite belastet, so wirkt auf den Knotenpunkt G keine äußere Kraft; mithin wird $e' = f'$ und $i' = 0$. Auch auf H wirkt keine äußere Kraft; da nun $i' = 0$ ist, also als nicht vorhanden zu betrachten ist, so folgt auch $n' = 0$ und $a' = b'$. Eben so ergibt sich weiter $a' = b' = c' = d'$; $e' = f' = g' = h'$; $i' = n' = k' = o' = l' = p' = 0$.

Beispiel. Berechnung eines englischen Dachstuhles (Fig. 294) von nachfolgenden Hauptmaßen: Stützweite $L = 16$ m; Firsthöhe $h = 4$ m; $\frac{h}{L} = \frac{1}{4}$; $a = 2$ m; $2n = 8$; $\text{tg } \alpha = \frac{4}{8} = 0,5$; $h_1 = 1,6$ m; $\text{tg } \beta = \frac{1,6}{8} = 0,2$; $e = h - h_1 = 2,4$ m; $\lambda = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8,94$ m; $\lambda_1 = \sqrt{1,6^2 + 8^2} = 8,16$ m; $\sin \alpha = \frac{h}{\lambda} = \frac{4}{8,94} = 0,447$ m; $\cos \alpha = \frac{8}{\lambda} = \frac{8}{8,94} = 0,895$; $\sin \beta = \frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{1,6}{8,16} = 0,196$; $\cos \beta = \frac{8}{\lambda_1} = \frac{8}{8,16} = 0,98$; die Binderweite ist $4,3$ m; die Dachdeckung ist Eisenwellblech auf Winkel-eisen; das Gitterwerk besteht aus Pfosten und nach der Mitte zu fallenden Diagonalen.

223.
Beispiel.

Die Belastungen ergeben sich wie folgt. Auf einen Knotenpunkt kommt eine Grundfläche von

Fig. 293.

$2 \cdot 4,3 = 8,6$ qm, eine schräge Dachfläche von $4,3 \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{4,3 \cdot 8,94}{4} = 9,61$ qm.



Mithin ist nach der Tabelle auf S. 20 das Eigengewicht für 1 qm Grundfläche, auschl. des Bindergewichtes, gleich 23 kg. Rechnet man das Gewicht des Binders für 1 qm Grundfläche mit 17 kg, so wird das Eigengewicht für 1 qm Grundfläche $= 23 + 17 = 40$ kg. Demnach ist die Knotenpunktsbelastung durch das Eigengewicht $= 8,6 \cdot 40 = 344$ kg, durch Schneedruck $= 8,6 \cdot 75 = 645$ kg, die senkrechte Knotenpunktsbelastung durch Winddruck $= 9,61 \cdot 72 = 692$ kg,

wofür abgerundet $N = 700$ kg gesetzt werden soll. Der Firstknotenpunkt und der Auflagerknotenpunkt erhalten nur je 350 kg senkrechte Windbelastung.

α) Spannungen durch die lothrechten Lasten. Für die obere Gurtung ergeben sich die Spannungen durch das Eigengewicht, bzw. volle Schneebelastung aus Gleichung 308 zu

$$X_m = -\frac{P \cdot 8,94}{2 \cdot 2,4} (8 - m) = -1,8625 P (8 - m).$$

Wir erhalten: für Eigengewicht $P = 344$ kg, sonach $X_m^g = -1,8625 \cdot 344 (8 - m) = -640 (8 - m)$;

für Schneebelastung $P = 645$ kg, mithin $X_m^b = -1,8625 \cdot 645 (8 - m) = -1200 (8 - m)$.

Für $m =$	1	2	3	4
wird $X_g =$	-4480	-3840	-3200	-2560 kg;
$X_b =$	-8400	-7200	-6000	-4800 kg.

Für die untere Gurtung ist nach Gleichung 310: $Z_m = \frac{P \cdot 8,16}{2 \cdot 2,4} (9 - m) = 1,7 P (9 - m)$.

Für Eigengewicht ist $Z_m^g = 1,7 \cdot 344 (9 - m) = 585 (9 - m)$;

für Schneelast ist $Z_m^b = 1,7 \cdot 645 (9 - m) = 1096,5 (9 - m)$.

Sonach wird für	$m =$	1	2	3	4
	$Z_g =$		4095	3510	2925 kg;
	$Z_p =$		7677	6579	5481 kg.

Z_1 ist nicht nach der Formel berechnet (vergl. darüber die Bemerkung in Art. 217, S. 219).

Für die Diagonalen ist nach Gleichung 313

$$Y = -\frac{P}{9,6} \sqrt{16^2 + 4(m \cdot 2,4 - 4)^2} = -0,104 P \sqrt{256 + 4(2,4m - 4)^2}.$$

Wir erhalten für $m = 2$: $Y_2 = -0,104 P \sqrt{256 + 4(0,8)^2} = -1,072 P$;

Eigengewicht: $Y_2^g = -575$ kg; Schneelast: $Y_2^p = -1079$ kg;

für $m = 3$: $Y_3 = -0,104 P \sqrt{256 + 4(7,2 - 4)^2} = -1,79 P$;

Eigengewicht: $Y_3^g = -616$ kg; Schneelast: $Y_3^p = -1155$ kg;

für $m = 4$: $Y_4 = -0,104 P \sqrt{256 + 4(9,6 - 4)^2} = -2,01 P$;

Eigengewicht: $Y_4^g = -698$ kg; Schneelast: $Y_4^p = -1310$ kg;

Die Spannungen in den Pfosten ergeben sich aus Gleichung 314

	Eigengewicht:	Schneelast:
für $m = 2$:	$V_2^g = 172$ kg;	$V_2^p = 323$ kg;
" $m = 3$:	$V_3^g = 344$ kg;	$V_3^p = 645$ kg.

Die Spannungen im Mittelpfosten (für $m = 4$) sind nach Gleichung 315

$$V_4^g = 1950 \text{ kg}, V_4^p = 3657 \text{ kg}.$$

β) Spannungen durch Windbelastung an der Seite des beweglichen Auflagers (Fig. 294). Die lothrechte Seitenkraft der Knotenpunktsbelastung ist bei den mittleren Knotenpunkten gleich

$700 \cos \alpha = 700 \cdot 0,895 = 626$ kg, beim First- und Auflagerknotenpunkt je gleich 313 kg; die wagrechten Seitenkräfte sind bezw. $700 \sin \alpha = 700 \cdot 0,447 = 312$ kg und 156 kg. Die lothrechten Höhen der oberen Gurtungsknotenpunkte über AB sind bezw. 1 m, 2 m, 3 m und 4 m; die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen bezw. um 0,4 m, 0,8 m, 1,2 m und 1,6 m über der wagrechten Linie AB . Es ist

$$D_0 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313) 12 - (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156) 2}{16} = 1722 \text{ kg},$$

$$D_1 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313) 4 + (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156) 2}{16} = 782 \text{ kg},$$

$$H = 3 \cdot 312 + 2 \cdot 156 = 1248 \text{ kg}.$$

Für die Stäbe der oberen Gurtung ergeben sich die Gleichungen der statischen Momente: wenn E der Momentenpunkt ist,

$$0 = X_1 \cdot 0,6 \cos \alpha + (D_0 - 313) \cdot 2 - 156 \cdot 0,4, \text{ woraus } X_1 = -5132 \text{ kg};$$

für den Momentenpunkt F

$$0 = X_2 \cdot 1,2 \cos \alpha + (D_0 - 313) \cdot 4 - 156 \cdot 0,8 + 312 \cdot 0,2 - 626 \cdot 2, \text{ woraus } X_2 = -4023 \text{ kg};$$

weilers eben so für die Momentenpunkte G und \mathcal{J}

$$0 = X_3 \cdot 1,8 \cos \alpha + (D_0 - 313) \cdot 6 - 156 \cdot 1,2 + 2 \cdot 312 \cdot 0,3 - 2 \cdot 626 \cdot 3, \text{ woraus } X_3 = -2916 \text{ kg};$$

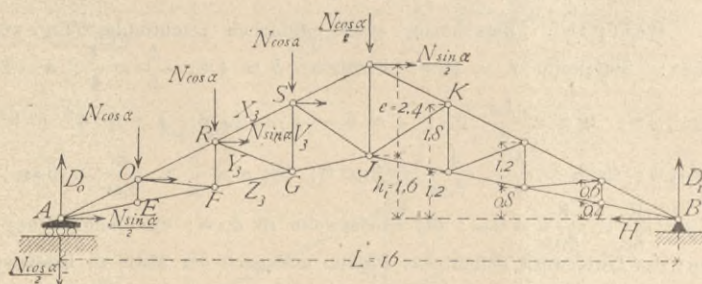
$$0 = X_4 \cdot 2,4 \cos \alpha + (D_0 - 313) \cdot 8 - 156 \cdot 1,6 + 3 \cdot 312 \cdot 0,4 - 3 \cdot 626 \cdot 4, \text{ woraus } X_4 = -1806 \text{ kg}.$$

Die Momentengleichung für den Punkt \mathcal{J} heißt, wenn das Bruchstück rechts von dem durch den Stab $\mathcal{J}K$ gelegten lothrechten Schnitte betrachtet wird,

$$0 = H \cdot 1,6 - D_1 \cdot 8 - X_5 \cdot 2,4 \cos \alpha, \text{ woraus } X_5 = -1982 \text{ kg}.$$

Dieselbe Spannung findet in sämtlichen Stäben der oberen Gurtung rechts der Mitte statt (vergl. Art. 222, S. 224).

Fig. 294.



In ähnlicher Weise erhält man für die untere Gurtung:

$$0 = (D_0 - 313) 2 - 156 \cdot 1 - Z_1 \cdot 0,6 \cos \beta, \text{ woraus } Z_1 = 4527 \text{ kg} = Z_2;$$

$$0 = (D_0 - 313) 4 - 156 \cdot 2 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1 - Z_3 \cdot 1,2 \cos \beta, \text{ woraus } Z_3 = 3197 \text{ kg};$$

$$0 = (D_0 - 313) 6 - 156 \cdot 3 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1,5 - Z_4 \cdot 1,8 \cos \beta, \text{ woraus } Z_4 = 1857 \text{ kg}.$$

Betrachtet man wieder das Bruchstück rechts von dem durch den Stab \mathcal{JK} gelegten lothrechten Schnitte, so heisst die Momentengleichung für Punkt K

$$0 = H \cdot 3 - D_1 \cdot 6 + Z_5 \cdot 1,8 \cos \beta, \text{ woraus } Z_5 = 537 \text{ kg}.$$

Eben so groß ist die Spannung in sämmtlichen Stäben der unteren Gurtung rechts der Mitte (vergl. Art. 222, S. 225).

Um die Spannungen in den Diagonalen zu bestimmen, sind die Hebelsarme dieser Spannungen für den Punkt A , welcher für alle Diagonalen links der Mitte Momentenpunkt ist, construiert. Man erhält $y_2 = 1,17 \text{ m}$, $y_3 = 3,3 \text{ m}$ und $y_4 = 5,8 \text{ m}$.

Die Spannungen ergeben sich aus den Momentengleichungen, wie folgt:

$$0 = Y_2 \cdot 1,17 + 626 \cdot 2 + 312 \cdot 1, \text{ woraus } Y_2 = -1337 \text{ kg};$$

$$0 = Y_3 \cdot 3,3 + 2 \cdot 626 \cdot 3 + 2 \cdot 312 \cdot 1,5, \text{ woraus } Y_3 = -1422 \text{ kg};$$

$$0 = Y_4 \cdot 5,8 + 626 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 312 \cdot 2, \text{ woraus } Y_4 = -1618 \text{ kg}.$$

Die Spannungen in den Diagonalen rechts der Mitte sind gleich Null* (vergl. Art. 222, S. 225).

Für die Spannungen aller Pfosten links der Mitte ist A der Momentenpunkt; man erhält:

$$0 = 626 \cdot 2 + 312 \cdot 1 - V_2 \cdot 4, \text{ woraus } V_2 = +391 \text{ kg};$$

$$0 = 2 \cdot 626 \cdot 3 + 2 \cdot 312 \cdot 1,5 - V_3 \cdot 6, \text{ woraus } V_3 = +782 \text{ kg}.$$

Für die Ermittlung der Spannung im Mittelpfosten (Fig. 295) ist die Summe der lothrechten Kräfte im Firstknotenpunkt gleich Null zu setzen; sonach

$$0 = V_4 + 313 + (X_4 + X_5) \sin \alpha = V_4 + 313 - (1806 + 1982) 0,447, \text{ woraus } V_4 = 1380 \text{ kg}.$$

Die Spannungen in den Pfosten rechts der Mitte sind gleich Null (vergl. Art. 222, S. 225).

Fig. 295.

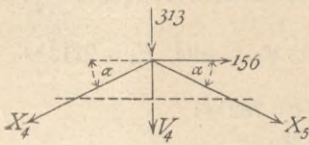
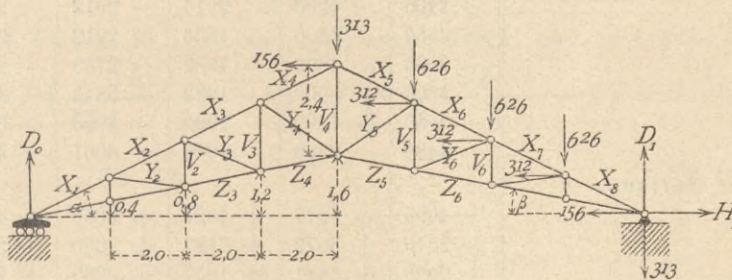


Fig. 296.



7) Spannungen durch Windbelastung von der Seite des festen Auflagers (Fig. 296). Die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte der rechten Hälfte sind eben so groß, wie diejenigen der linken Knotenpunkte unter β waren. Wir erhalten

$$D_0 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313) 4 + (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156) 2}{16} = 782 \text{ kg},$$

$$D_1 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313) 12 - (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156) 2}{16} = 1722 \text{ kg},$$

$$H_1 = 3 \cdot 312 + 2 \cdot 156 = 1248 \text{ kg}.$$

In der oberen Gurtung findet man

$$0 = X_1 \cdot 0,6 \cos \alpha + D_0 \cdot 2, \text{ woraus } X_1 = -\frac{782 \cdot 2}{0,537} = -2912 \text{ kg}.$$

Derfelbe Werth ergibt sich nach Art. 222 (S. 225) für X_2 , X_3 und X_4 . Weiters ist

$$0 = X_5 \cdot 2,4 \cos \alpha + D_0 \cdot 8 - 156 \cdot 2,4, \text{ woraus } X_5 = -2738 \text{ kg};$$

$$0 = X_6 \cdot 1,8 \cos \alpha + (D_1 - 313) 6 + (H_1 - 156) 1,2 + 2 \cdot 312 \cdot 0,3 - 2 \cdot 626 \cdot 3, \text{ woraus } X_6 = -3845 \text{ kg};$$

$$0 = X_7 \cdot 1,2 \cos \alpha + (D_1 - 313) 4 + (H_1 - 156) 0,8 + 312 \cdot 0,2 - 626 \cdot 2, \text{ woraus } X_7 = -4953 \text{ kg};$$

$$0 = X_8 \cdot 0,6 \cos \alpha + (D_1 - 313) 2 + (H_1 - 156) 0,4, \text{ woraus } X_8 = -6061 \text{ kg}.$$

In der unteren Gurtung ergibt sich

$$0 = Z_1 \cdot 0,6 \cos \beta - D_0 \cdot 2, \text{ woraus } Z_1 = 2660 \text{ kg}.$$

Dieselbe Größe haben Z_2 , Z_3 und Z_4 . Weiters findet man

$$0 = (D_1 - 313) 6 + (H_1 - 156) 3 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1,5 - Z_5 \cdot 1,8 \cos \beta, \text{ woraus } Z_5 = + 3990 \text{ kg};$$

$$0 = (D_1 - 313) 4 + (H_1 - 156) 2 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1 - Z_6 \cdot 1,2 \cos \beta, \text{ woraus } Z_6 = + 5320 \text{ kg};$$

$$0 = (D_1 - 313) 2 + (H_1 - 156) 1 - Z_7 \cdot 0,6 \cos \beta, \text{ woraus } Z_7 = + 6650 \text{ kg}.$$

Die Hebelsarme für die Ermittlung der Spannungen in den Diagonalen sind oben angegeben; hiernach findet statt

$$0 = Y_7 \cdot y_2 + 312 \cdot 1 + 626 \cdot 2, \text{ woraus } Y_7 = - 1337 \text{ kg};$$

$$0 = Y_6 \cdot y_3 + 2 \cdot 312 \cdot 1,5 + 2 \cdot 626 \cdot 3, \text{ woraus } Y_6 = - 1422 \text{ kg};$$

$$0 = Y_5 \cdot y_4 + 3 \cdot 312 \cdot 2 + 3 \cdot 626 \cdot 4, \text{ woraus } Y_5 = - 1618 \text{ kg}.$$

Die Spannungen in den übrigen Diagonalen sind gleich Null.

In den Pfosten sind die Spannungen V_1 , V_2 und V_3 gleich Null; V_4 wird durch die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung erhalten, welche besagt, daß die algebraische Summe der lotrechten, am Firstknotenpunkte wirkenden Kräfte gleich Null sein muß, d. h. aus

$$0 = V_4 + 313 + X_4 \sin \alpha + X_5 \sin \alpha = V_4 + 313 - (2912 + 2738) \cdot 0,447 \text{ wird } V_4 = 2212 \text{ kg}.$$

Ferner ist

$$0 = V_5 \cdot 6 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1,5, \text{ woraus } V_5 = 782 \text{ kg};$$

$$0 = V_6 \cdot 4 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1, \text{ woraus } V_6 = 391 \text{ kg}.$$

δ) Zusammenstellung der Stabspannungen. Für die Querschnittsbestimmungen sind die gefundenen Spannungen in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Bezeichnung des Stabes	Spannung durch				P_0	P_1
	Eigen- gewicht	Schneelast (voll be- lastet)	Wind links	Wind rechts		
Obere Gurtung:						
Stab Nr. 1	- 4480	- 8400	- 5132	- 2912	- 4480	- 13522
» » 2	- 3840	- 7200	- 4023	- 2912	- 3840	- 11223
» » 3	- 3200	- 6000	- 2916	- 2912	- 3200	- 8916
» » 4	- 2560	- 4800	- 1806	- 2912	- 2560	- 7712
» » 5	- 2560	- 4800	- 1982	- 2738	- 2560	- 7538
» » 6	- 3200	- 6000	- 1982	- 3845	- 3200	- 9845
» » 7	- 3840	- 7200	- 1982	- 4953	- 3840	- 12153
» » 8	- 4480	- 8400	- 1982	- 6061	- 4480	- 14461
Untere Gurtung:						
Stab Nr. 1 u. 2	+ 4095	+ 7677	+ 4527	+ 2660	+ 4095	+ 12204
» » 3	+ 3510	+ 6579	+ 3197	+ 2660	+ 3510	+ 9776
» » 4	+ 2925	+ 5481	+ 1857	+ 2660	+ 2925	+ 8141
» » 5	+ 2925	+ 5481	+ 537	+ 3990	+ 2925	+ 9471
» » 6	+ 3510	+ 6579	+ 537	+ 5320	+ 3510	+ 11899
» » 7 u. 8	+ 4095	+ 7677	+ 537	+ 6650	+ 4095	+ 14327
Diagonalen:						
im Felde 2	- 575	- 1079	- 1337	0	- 575	- 2416
» » 3	- 616	- 1155	- 1422	0	- 616	- 2577
» » 4	- 698	- 1310	- 1618	0	- 698	- 2928
» » 5	- 698	- 1310	0	- 1618	- 698	- 2928
» » 6	- 616	- 1155	0	- 1422	- 616	- 2577
» » 7	- 575	- 1079	0	- 1337	- 575	- 2416
Pfosten:						
zwischen Feld 2 u. 3	+ 172	+ 323	+ 391	0	+ 172	+ 714
» » 3 u. 4	+ 344	+ 645	+ 782	0	+ 344	+ 1427
Mittelpfosten	+ 1950	+ 3657	+ 1380	+ 2212	+ 1950	+ 5869
zwischen Feld 5 u. 6	+ 344	+ 645	0	+ 782	+ 344	+ 1427
» » 6 u. 7	+ 172	+ 323	0	+ 391	+ 172	+ 714

Kilogramm

b) Deutsche Dachstühle.

Der deutsche Dachstuhl kann als ein englischer Dachstuhl mit nur einem Knotenpunkt in jeder Dachhälfte aufgefasst werden (Fig. 297); man wird demnach

224.
Ermittlung
der
Spannungen.

die in demselben durch Eigenlast und volle Schneelast entstehenden Spannungen aus den Formeln für den englischen Dachstuhl ableiten können.

Für die obere Gurtung ist in die Gleichungen 307 u. 308 statt $2n$ die Zahl 4 einzusetzen und für m der Reihe nach 1 und 2; alsdann erhält man

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{3P}{2 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = -\frac{3P\lambda}{2e} \\ X_2 &= -\frac{P}{\cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = -\frac{P\lambda}{e} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 319.$$

Die allgemeine Gleichung 309, bzw. 310 für die untere Gurtung gilt nicht für $m = 1$ (siehe Art. 217, S. 219). Für $m = 2$ und $2n = 4$ übergeht Gleichung 309, bzw. 310 in

$$Z = \frac{3P}{2 \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} \quad \text{und} \quad Z = \frac{3P\lambda_1}{2e} \dots \dots \dots 320.$$

Für die Diagonalen giebt die Gleichung 313 für $m = 2$

$$Y = -\frac{P}{4e} \sqrt{L^2 + 4(2e - h)^2} \dots \dots \dots 321.$$

Für den Pfosten ist Gleichung 315 anzuwenden, und es ergibt sich für $n = 2$

$$V = P \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} - 1 \right) = P \left(2 \frac{2h}{2h - 2h_1} - 1 \right) = P \frac{h + h_1}{e} \dots \dots \dots 322.$$

Fig. 298.

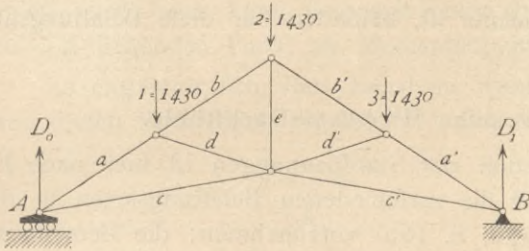


Fig. 300.

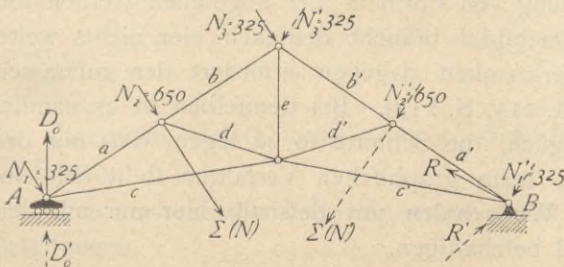


Fig. 299.

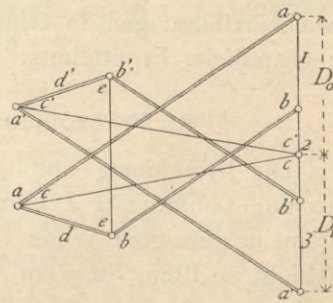
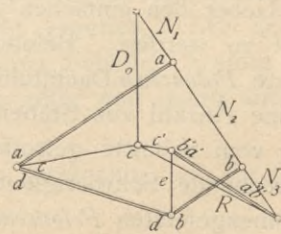


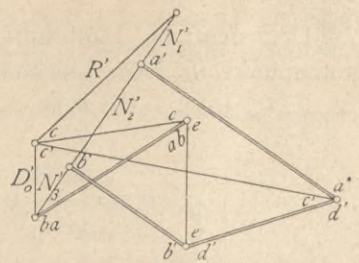
Fig. 301.



Für schiefe Belastungen durch Winddruck sind die Spannungen, wie beim englischen Dachstuhl gezeigt, zu ermitteln.

Die graphische Ermittlung der Spannungen im deutschen Dachstuhl für die Belastungen durch Eigengewicht und Winddruck von der einen, bezw. der anderen Seite zeigen Fig. 298 bis 302.

Fig. 302.



c) Dreieckdächer.

Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte ergibt (Fig. 303), da $D_0 = D_1 = \frac{P}{2}$ ist, die Werthe der Stabspannungen.

Es ist $0 = X \cos \alpha + Z \cos \beta$ und $0 = D_0 + X \sin \alpha + Z \sin \beta$, woraus

$$\left. \begin{aligned} X &= - \frac{P}{2 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = - \frac{P \lambda}{2 e} \\ Z &= + \frac{P}{2 \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = \frac{P \lambda_1}{2 e} \end{aligned} \right\} \cdot 323.$$

Sowohl X , wie Z nehmen mit wachsendem e ab; für den Materialverbrauch ist also ein möglichst großes e günstig.

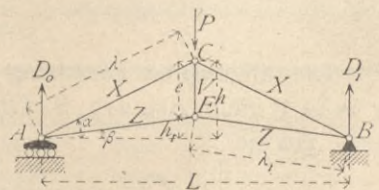
Ferner ist $P + V + 2 X \sin \alpha = 0$, woraus

$$V = P \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{P h_1}{h - h_1} = \frac{P h_1}{e} \dots \dots \dots 324.$$

So lange h_1 positiv ist, d. h. E über der Wagrechten AB liegt, ist auch V positiv, d. h. Zug; für $h_1 = 0$ ist auch $V = 0$, d. h. wenn AEB eine gerade Linie ist, hat die Stange CE keine Spannung; wird h_1 negativ, d. h. liegt E unter der Linie AB , so ist V negativ, d. h. Druck.

Die Spannungen durch Windbelastung sind, wie beim englischen Dachstuhl gezeigt, mittels der Ritter'schen Methode, bezw. durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln. Bequemer ist, besonders für diese Belastungsart, die graphische Ermittlung.

Fig. 303.



d) Französische, Polonceau- oder Wiegmann-Dachstühle.

Die Berechnung und die Construction der Stabspannungen ist hier nach Ermittlung sämtlicher äußerer Kräfte für die verschiedenen Belastungsarten in der allgemein gezeigten Weise (siehe Art. 170, S. 169) vorzunehmen; die Berechnung geschieht meistens bequem mittels der Momentenmethode, die graphische Ermittlung nach Cremona. Die Formeln für die einzelnen Stabspannungen werden nicht einfach, so daß von der Aufstellung von Formeln hier abgesehen werden soll.

Ueber den einfachen Polonceau-Dachstuhl braucht demnach hier nichts weiter gefagt zu werden. Besondere Aufmerksamkeit dagegen erfordert der zusammengesetzte Polonceau-Dachstuhl (siehe Art. 215, S. 217). Bei demselben ist es nämlich für eine Anzahl von Stäben nicht möglich, die Schnitte so zu legen, daß nur drei Stäbe vom Schnitte getroffen werden; beim graphischen Verfahren stellt sich eine entsprechende Schwierigkeit heraus. Wir werden uns deshalb hier nur mit dem zusammengesetzten Polonceau-Dachstuhl beschäftigen.

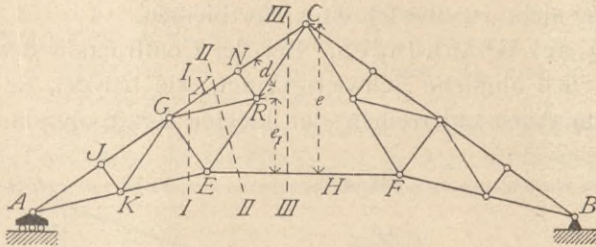
225.
Ermittlung
der
Spannungen.

226.
Einfacher
Polonceau-
Dachstuhl.

227.
Zusammen-
gesetzter
Polonceau-
Dachstuhl.

1) Berechnung der Spannungen. Bei der Momentenmethode ist der Momentenpunkt fo zu wählen, daß für denselben alle unbekannt Kräfte mit Ausnahme einer einzigen das Moment Null haben, mithin nur eine Unbekannte in der Gleichung verbleibt. Ist es möglich, den Schnitt fo zu legen, daß mit Ausnahme einer einzigen sämtliche Stabrichtungen sich in einem Punkte schneiden, so ist dieser Punkt als Momentenpunkt für die Ermittlung der Spannungen in demjenigen Stabe zu wählen, der nicht durch diesen Punkt geht. Trifft aber

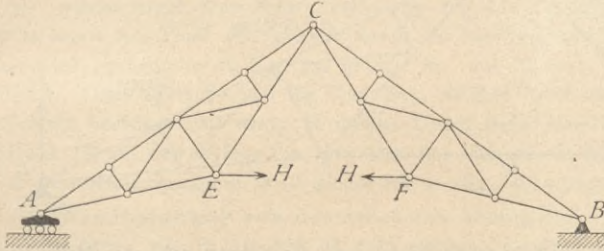
Fig. 304.



der Schnitt vier oder mehr Stäbe, von welchen sich nicht alle mit Ausnahme eines einzigen in einem Punkte schneiden, so muß man eine Reihe von Stabspannungen vorher bestimmen, um diese nicht mehr als Unbekannte in der Momentengleichung zu haben. Man ermittle also zunächst die Spannungen jener Stäbe, bei denen Schnitte möglich sind, die nur drei Stäbe treffen; diese Spannungen werden dann als Bekannte eingeführt, und in den Momentengleichungen bleiben nur noch die gesuchten Unbekannten. Um z. B. die Spannungen in GN , GR , RE und EF , welche Stäbe durch den Schnitt $II II$ getroffen werden, zu finden, ermittle man zunächst diejenige in EF . Man schneide nach $III III$; alsdann ist für EF der Firstpunkt C der Momentenpunkt und demnach die Spannung H in EF leicht zu finden. Es ist $H = \frac{M}{e}$, wenn M das Biegemoment der äußeren Kräfte für C ist. Nun sind für den Schnitt $II II$ nur noch drei Unbekannte vorhanden. Um die Spannung X in GN zu bestimmen, dient die Momentengleichung für Punkt R , in welcher nur X als Unbekannte verbleibt; für die Spannung in GR ist C , für diejenige in RE ist G der conjugirte Punkt. Nachdem diese Spannungen ermittelt sind, ist für Schnitt $II II$ nur noch die Spannung in GE unbekannt, da auch diejenige in KE leicht gefunden wird; man kann demnach einen beliebigen, nicht auf der Richtungslinie von GE liegenden Punkt als Momentenpunkt annehmen.

Es empfiehlt sich, stets zuerst die Spannung H im Stabe EF zu ermitteln und dann diesen Stab durch die beiden äußeren Kräfte H in E und F (nach Fig. 305)

Fig. 305.



zu ersetzen. Natürlich sind für jede geänderte Belastung andere Werthe für H auszurechnen und einzuführen; alsdann werden nur noch drei Stäbe mit unbekannt Spannungen getroffen, so daß sich die Momentenpunkte leicht ergeben. Die Schnitte können beliebig krumm sein; das allgemeine Gesetz (vergl. Art. 4, S. 6) bleibt dabei giltig und damit auch das Verfahren.

Die vorstehenden Entwicklungen gelten sowohl für lothrechte, wie für schiefe Belastungen.

Bei lothrechten Belastungen ergeben sich ferner die vollen Belastungen des ganzen Binders wiederum als die ungünstigsten; für die Diagonalen allerdings in demselben Sinne, wie oben beim englischen Dache nachgewiesen, nämlich daß bei voller Belastung auch diejenigen Punkte belastet sind, deren Belastung in den Diagonalen die Spannung Null erzeugt. Der Nachweis ist leicht zu führen, soll aber hier, um den verfügbaren Raum nicht zu überschreiten, fortbleiben.

2) Graphische Ermittlung der Spannungen. Bei der Construction des *Cremona'schen* Kräfteplanes ergeben sich ähnliche Schwierigkeiten, wie bei der Berechnung. Wenn man nämlich beim Aneinanderreihen der kleinen Kraftpolygone bis zum Knotenpunkt *E* (Fig. 306) gekommen ist,

so sind an diesem drei Stäbe mit nicht bekannten Spannungen; das Verfahren ist also nicht ohne Weiteres anwendbar. Die Schwierigkeit wird, ganz wie oben, dadurch beseitigt, daß man zuerst die Spannung *H* des Stabes

EF bestimmt und dieselbe als in *E*, bezw. *F* wirkende äußere Kraft einführt. Dadurch erreicht man auch, daß die Stäbe zwischen *E* und *C*, so wie zwischen *C* und *F* zu Randstäben werden. Bevor demnach für den zusammengesetzten *Polonceau-Dachstuhl* der Kräfteplan gezeichnet werden kann, ist *H* zu ermitteln. Diese Ermittlung erfolgt entweder auf dem Wege der Rechnung, wie oben gezeigt, oder auch, wenn doch alles Uebrige construirt wird, mittels Zeichnung. Wir werden das einzuschlagende Verfahren für die verschiedenen Belastungsarten zeigen.

a) Belastung durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneelast. Man kann *H* mittels der Schnittmethode bestimmen, indem man das Seilpolygon der äußeren Kräfte für einen beliebigen Pol construirt, einen Schnitt so durch den Träger legt, daß außer *EF* nur noch zwei Stäbe getroffen werden, den Angriffspunkt der Querkraft für diesen Schnitt sucht und nun, wie oben in Art. 175 (S. 171)

Fig. 306.

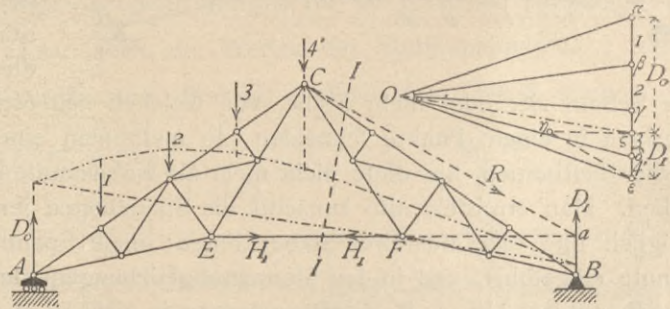
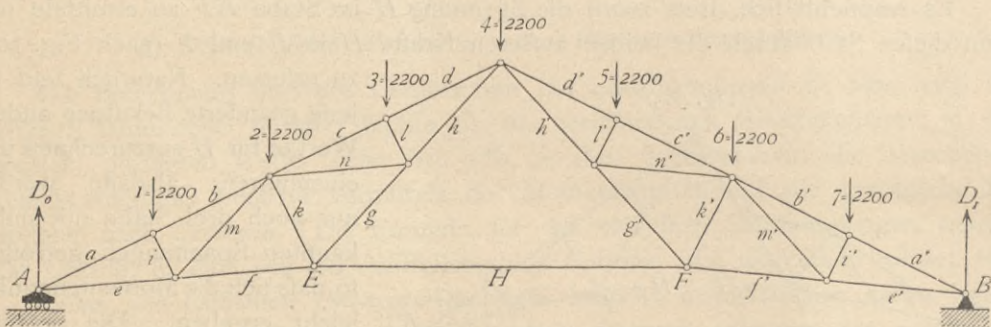


Fig. 307.



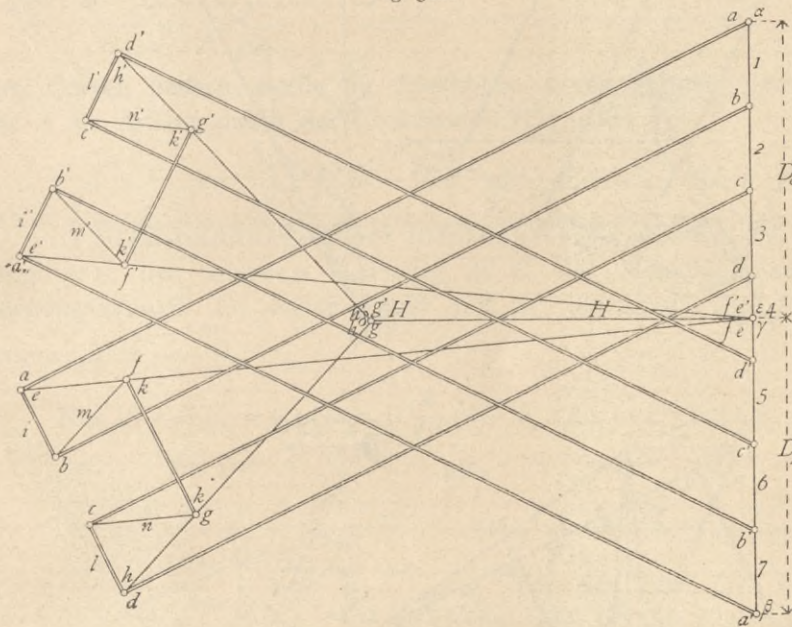
gezeigt, zerlegt. Die Kraft *Q* wird dann sehr weit seitwärts fallen, weil der Schnitt nahe der Mitte liegt, und wenn man sich auch durch Hilfsconstruktionen helfen kann, so dürfte doch die folgende Construction empfehlenswerther sein.

Die Spannung *H* im Stabe *EF* (Fig. 306) ist bei voller Belastung (und der hier vorausgesetzten zur Mitte symmetrischen Dachform) offenbar genau doppelt so groß, als die Spannung *H*₁, welche in *EF* bei Belastung nur der einen Dachhälfte stattfindet. Die Größe dieser Spannung *H*₁ wird nun folgender-

maßen ermittelt. Man legt einen Schnitt II durch das Dach derart, daß an der einen (hier der rechten) Seite desselben gar keine Lasten liegen; alsdann wirken auf den Theil rechts vom Schnitte nur die Spannungen der drei durchschnittenen Stäbe und der Auflagerdruck D_1 . Zwei von diesen Stäben schneiden sich im Firstpunkte; die in ihnen wirkenden Spannungen können also durch eine Mittelkraft R ersetzt werden, welche durch den Firstpunkt C geht; demnach halten die drei auf das Bruchstück wirkenden Kräfte D_1 , H_1 und die Mittelkraft R der beiden Stabspannungen dasselbe im Gleichgewicht, schneiden sich also in einem Punkte. Durch den Schnittpunkt a von H_1 und D_1 geht also auch R ; R geht aber auch durch C ; die Kraft R hat demnach die Richtung Ca . Nun können wir D_1 nach den beiden bekannten Richtungen von H_1 und R zerlegen; D_1 wird mit Hilfe des Seilpolygons construirt und ist (Fig. 306) gleich $\varepsilon \zeta$. Man erhält $H_1 = \zeta \eta$ und $R = \eta \varepsilon$.

Die Kraft H , welche der Belastung des ganzen Daches entspricht, ist dann gleich $2 \times \zeta \eta$. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß in obiger Construction als Belastung des Firstknotenpunktes nur die Hälfte der anderen Knotenpunktsbelastungen einzuführen ist. Die Last im Firstknotenpunkte ist deshalb hier mit $4'$ bezeichnet.

Fig. 308.



halb hier mit $4'$ bezeichnet.

Der Kräfteplan ist nun zu construiren, indem statt des Stabes EF die äußeren Kräfte H in den Punkten E und F wirkend eingeführt werden. Man trage die Lasten $1, 2 \dots 6, 7$ an einander (Fig. 308); auf 7 folgt $D_1 = \beta \gamma$, dann die Kraft H im Punkte F gleich $\gamma \delta$ und H im Punkte E gleich $\delta \varepsilon$; ε fällt mit γ zusammen. Endlich ist an ε der Auflagerdruck $D_0 = \gamma \alpha$ anzutragen, womit sich das Kraftpolygon schließt. Nun ist der Kräfteplan nach dem

in Art. 176 (S. 172) angegebenen Verfahren in Fig. 308 construirt, wobei vom Knotenpunkt A ausgegangen ist.

Für die Belastung nur der einen Dachhälfte mit Schnee ist H_1 , wie oben gezeigt, zu ermitteln und alsdann der Kräfteplan ohne Schwierigkeit zu verzeichnen.

Wenn der Dachbinder unsymmetrisch ist, so kann das gezeigte Verfahren mit geringen Abänderungen gleichfalls Verwendung finden. Die Kraft H im Stabe EF ist die Summe der Spannungen H_I und H_{II} , welche durch links bzw. rechts vom Schnitte II liegende Lasten hervorgerufen werden. Man ermittle zuerst den Theil H_I , welcher durch die Belastung nur der Knotenpunkte links vom Schnitt II erzeugt wird, genau wie in Fig. 306 gezeigt ist; nur ist auch im Firstknotenpunkte die volle Belastung einzusetzen. Dann bestimme man den Theil H_{II} , welcher durch die Belastung nur der Knotenpunkte rechts vom Schnitt hervorgerufen wird; zu diesem Zweck suche man den durch diese Belastung erzeugten Auflagerdruck D_0 auf und zerlege ihn, wie oben D_1 , hier also in H_{II} und eine durch C gehende Kraft. Die in EF auftretende Spannung H ist gleich $H_I + H_{II}$; der Kräfteplan kann nun leicht gezeichnet werden.

β) Windbelastung von der Seite des beweglichen Auflagers. Die Ermittlung der Auflagerdrücke wird, wie in Art. 208 (S. 208) gezeigt, vorgenommen; die Größe der Kraft H (im Stabe EF , Fig. 309) ergibt sich wieder durch Betrachtung des Trägertheiles an derjenigen Seite des Schnittes II , an welcher die Winddrücke nicht wirken. Nachdem sodann die H als äußere Kräfte eingeführt sind, ist der Kräfteplan in gewöhnlicher Weise zu zeichnen. Die Construction ist in Fig. 309 vorgenommen.

γ) Winddruck von der Seite des festen Auflagers. Fig. 310 zeigt die Construction des Kräfteplanes für diesen Fall; nach dem Vorstehenden ist er ohne besondere Erklärung verständlich.

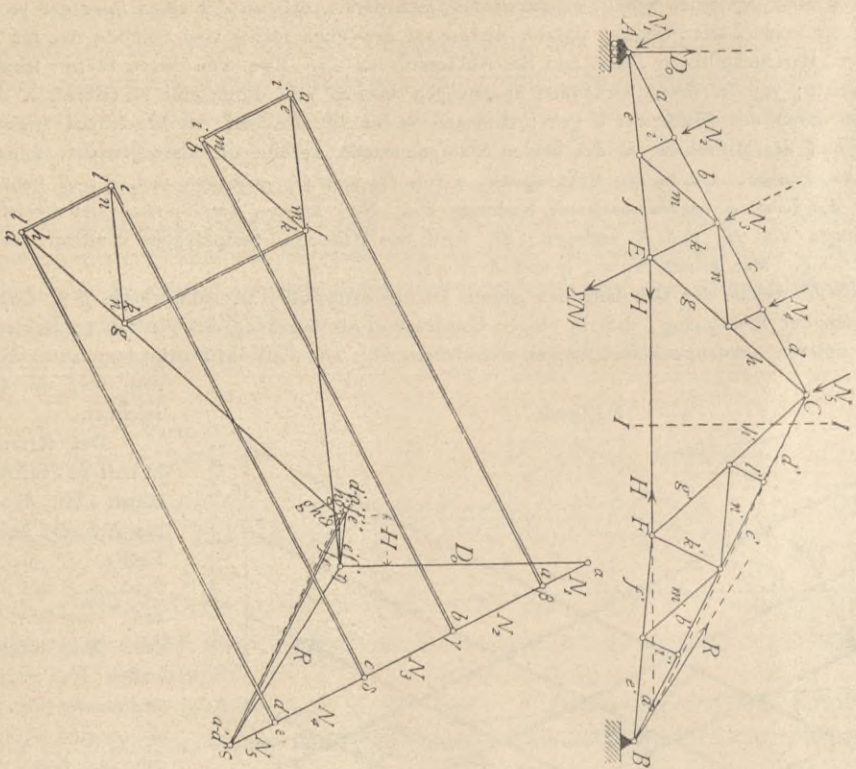


Fig. 309.

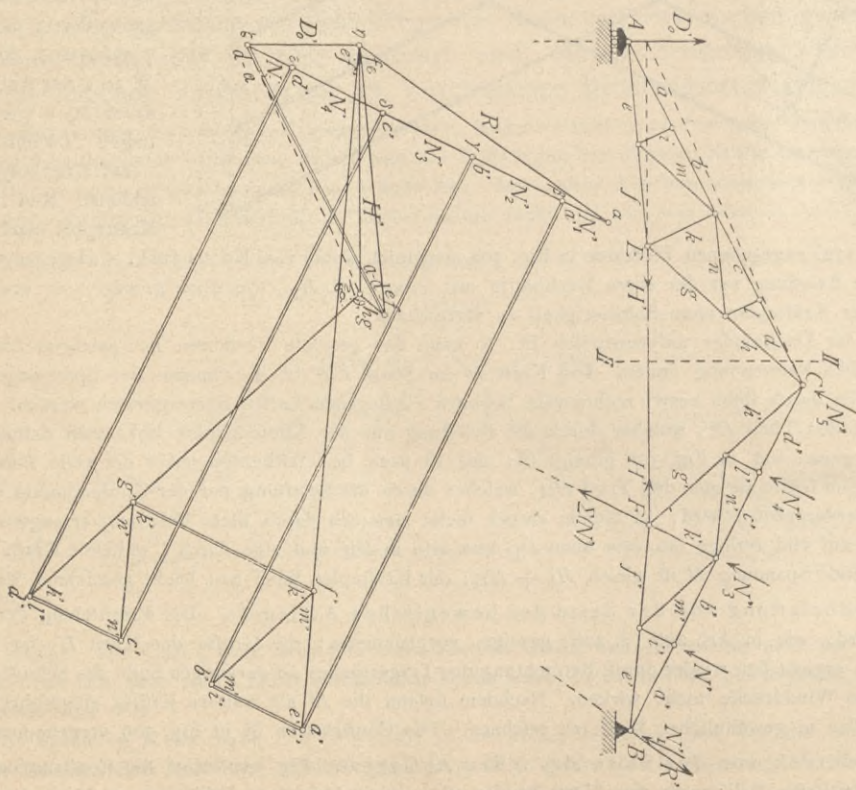


Fig. 310.

e) Sicheldächer.

Die Gurtungen können bei den Sicheldächern nach beliebigen krummen Linien geformt sein; gewöhnlich sind beide Gurtungen Vielecke, welche Parabeln oder Kreifen eingeschrieben sind. Die Bestimmung der Auflagerdrücke ist im Vorhergehenden gezeigt worden; die Stabspannungen ergeben sich durch Rechnung oder Construction ohne Schwierigkeit. Hier soll nur die Gesetzmäßigkeit der Spannungsänderungen für

228.
Form
der
Dachbinder.

das parabolische Sicheldach und für lothrechte Belastungen gezeigt werden.

Die Gleichungen der beiden

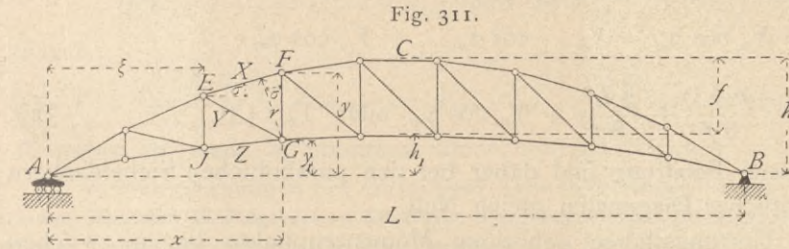


Fig. 311.

Curven heißen, wenn die Pfeilhöhen h und h_1 sind, nach Art. 189 (S. 191) für A als Anfangspunkt der Coordinaten (Fig. 311)

$$y = \frac{4h}{L^2} (Lx - x^2) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{4h_1}{L^2} (Lx - x^2) \quad \dots \quad 325.$$

1) Stabspannungen bei lothrechter Belastung. α) Für den Stab EF (Fig. 311) der oberen Gurtung ist G der Momentenpunkt, und wenn das Biegemoment für diesen Punkt mit M_x bezeichnet wird, ist $Xr + M_x = 0$, woraus $X = -\frac{M_x}{r}$.

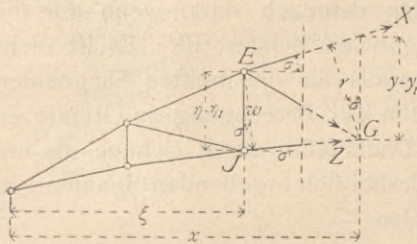
229.
Ermittelung
der
Spannungen
durch lothrechte
Belastung.

Nun ist $r = (y - y_1) \cos \sigma = \frac{4}{L^2} (h - h_1) (Lx - x^2) \cos \sigma = \frac{4}{L^2} f (Lx - x^2) \cos \sigma$;

Fig. 312.

also

$$X \cos \sigma = -\frac{M_x L^2}{4f (Lx - x^2)} \quad \dots \quad 326.$$



Für den Stab FJ der unteren Gurtung (Fig. 312) ist E der Momentenpunkt, und wenn das Biegemoment für diesen Punkt mit M_ξ bezeichnet wird, so ist $Z = \frac{M_\xi}{w}$.

Nun ist

$$w = (\eta - \eta_1) \cos \sigma' = \frac{4}{L^2} f (L\xi - \xi^2) \cos \sigma',$$

d. h.

$$Z \cos \sigma' = \frac{M_\xi L^2}{4f (L\xi - \xi^2)} \quad \dots \quad 327.$$

Aus den Gleichungen 326 u. 327 folgt:

a) Für volle, gleichmäßig über die wagrechte Projection vertheilte Belastung p auf die Längeneinheit ist $M_x = \frac{p}{2} (Lx - x^2)$ und $M_\xi = \frac{p}{2} (L\xi - \xi^2)$, also

$$X \cos \sigma = -\frac{p L^2}{8f} \quad \text{und} \quad Z \cos \sigma' = \frac{p L^2}{8f}, \quad \dots \quad 328.$$

d. h. die wagrechten Seitenkräfte der Gurtungsspannungen sind bei der angegebenen Belastungsart in beiden Gurtungen constant, und zwar gleich dem Größtmomente,

dividirt durch die Mittenhöhe der Sichel. Bei der Parabel sind innerhalb der Grenzen, welche bei den Dächern vorkommen, $\cos \sigma$ und $\cos \sigma'$ nahezu constant. Das soeben gefundene Ergebniss stimmt mit dem in Art. 190 (S. 191) für die Parabelträger ermittelten überein. Durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung für einen Knotenpunkt der oberen Gurtung, etwa F , ergibt sich ferner (Fig. 313)

$$0 = X_m \cos \sigma_m - X_{m-1} \cos \sigma_{m-1} + Y_m \cos \varphi_m,$$

d. h.

$$0 = -\frac{p L^2}{8f} + \frac{p L^2}{8f} + Y_m \cos \varphi_m \text{ oder } Y_m = 0 \dots \dots \dots 329.$$

Für die angegebene Belastung sind daher bei den parabolischen Sieldächern die Spannungen sämtlicher Diagonalen gleich Null.

b) Alle zu den Gurtungsstäben gehörigen Momentenpunkte liegen zwischen den lothrechten Linien der Auflager A und B (Fig. 311); für alle diese Punkte sind die Biegemomente bei lothrechter Belastung positiv (siehe Art. 156, S. 150); mithin erzeugt jede lothrechte Belastung in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denjenigen der unteren Gurtung Zug. Größter Druck, bzw. Zug für lothrechte Belastung wird demnach in allen Stäben bei voller Belastung des ganzen Dachbinders stattfinden.

β) Für die Spannungen in den Diagonalen ergibt sich nach demselben Verfahren, welches in Art. 191 (S. 192) angewendet ist, um die Beanspruchungsart der Diagonalen des Parabelträgers zu ermitteln: Jede Belastung zwischen dem durch eine Diagonale gelegten lothrechten Schnitte und jenem Auflager, nach welchem die Diagonale zu fällt, erzeugt Zug in derselben; jede Belastung zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem die Diagonale steigt, erzeugt in derselben Druck. Größter Druck, bzw. Zug finden demnach statt, wenn nur die Druck-, bzw. Zugabtheilung der betreffenden Diagonalen belastet ist. Es ist nicht nöthig, bei einem Dache diese verschiedenen, jedenfalls für die meisten Diagonalen überhaupt wohl nicht vorkommenden Belastungsarten der Berechnung zu Grunde zu legen; es genügt eine Belastung nur der einen Dachhälfte durch Schnee als ungünstigste lothrechte Belastung einzuführen. Die hierbei sich ergebenden Spannungen sind mittels der Ritter'schen Methode leicht zu finden.

γ) Bezüglich der Spannungen in den Pfoften ergibt sich, wie oben, folgendes Gesetz: Größter Druck, bzw. Zug findet in einem Pfoften bei der Belastung statt, welche in derjenigen Diagonalen den größten Zug, bzw. Druck erzeugt, die mit dem Pfoften in einem Knotenpunkt der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft. Auch hier genügt es, als zufällige lothrechte Belastungen nur die Belastung des ganzen Daches und diejenige der einen Dachhälfte anzunehmen.

Bei Belastung des ganzen Dachbinders mit der gleichmäÙig über die wagrechte Projection vertheilten Belastung p ergibt sich die Spannung aller Pfoften durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung für einen Knotenpunkt der unteren Gurtung. Es ist (Fig. 314), da die Spannung in der Diagonalen alsdann gleich Null ist,

$$0 = V_m + Z_m \sin \sigma'_m - Z_{m-1} \sin \sigma'_{m-1} \quad \text{und} \quad 0 = V + \frac{p L^2}{8f} (\operatorname{tg} \sigma'_m - \operatorname{tg} \sigma'_{m-1}).$$

Fig. 313.

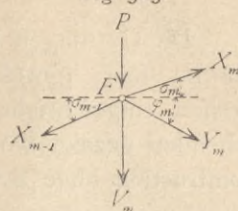


Fig. 314.

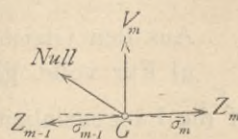
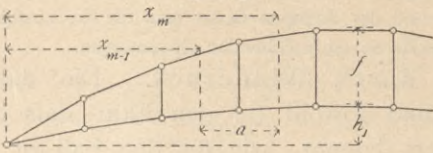


Fig. 315.



Wird (mit geringem Fehler) die Curve als stetig gekrümmt angesehen und werden die Richtungen der Stäbe als parallel zu den in den Mitten der unteren Gurtungsstäbe an die Parabel gelegten Tangenten eingeführt, so ist

$$\operatorname{tg} \sigma'_m = \frac{4 h_1}{L^2} (L - 2 x_m) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \sigma'_{(m-1)} = \frac{4 h_1}{L^2} (L - 2 x_{m-1}),$$

sonach

$$0 = V + \frac{\rho L^2}{8f} \frac{4 h_1}{L^2} 2 (x_{m-1} - x_m) = V - \frac{\rho h_1}{f} a, \quad \text{woraus} \quad V = \frac{\rho h_1 a}{f}. \quad 330.$$

V nimmt ab, wenn h_1 abnimmt; für $h_1 = 0$ ist $V = 0$.

2) Stabspannungen bei einseitiger Schneebelastung. Bezüglich der Belastung durch einseitige Schneelast ist Folgendes zu beachten. Man braucht nicht für beide Belastungsarten, diejenige des ganzen Daches und diejenige der einen Dachhälfte, die Spannungen zu berechnen; vielmehr genügt für symmetrisch zur mittleren Lothrechten angeordnete Construction die Kenntniss der Spannungen bei einseitiger Belastung, um diejenigen zu erhalten, welche bei voller Belastung stattfinden, und gleichzeitig zu ermitteln, welche Belastungsart die gefährlichere ist. Die Belastung der linken Dachhälfte erzeugt etwa (Fig. 316) im Stabe EF die Spannung g' ; die Belastung der rechten Dachhälfte erzeugt in demselben Stabe die Spannung g'' . Die volle Belastung hat offenbar im Stabe EF die Spannung $g' + g''$ zur Folge. Liegt nun NO genau symmetrisch mit EF , so wird die Spannung n' in NO bei der ersteren Belastungsart genau so groß sein, wie g'' . Es ist aber

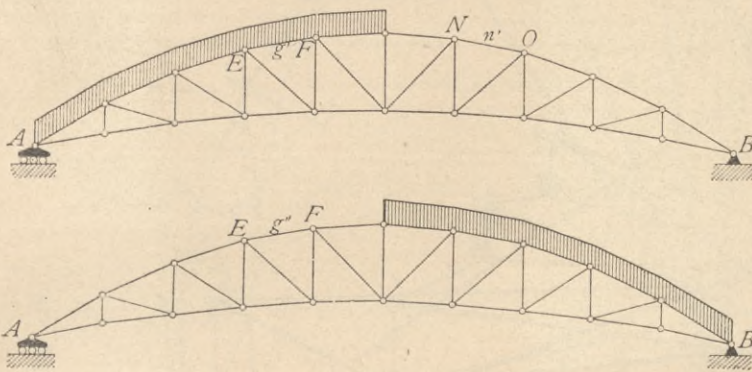
$$g_{total} = g' + g'' = g' + n'.$$

Die durch die Belastung des ganzen Daches in einem Stabe entstehende Spannung ist also gleich der Summe derjenigen Spannungen, die durch Belastung der einen Dachhälfte in dem betrachteten Stabe und in dem symmetrisch zur Mitte liegenden Stabe entstehen. Wenn die symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe bei der Belastung einer Dachhälfte in gleichem Sinne beansprucht werden, also beide Zug oder beide Druck erhalten,

230.
Ermittlung
der
Spannungen
durch einseitige
Schneelast.

so ist die Summe dieser Spannungen größer, als jede einzelne, d. h. die volle Belastung des Daches ist ungünstiger, als die einseitige. Werden beide Stäbe in entgegengesetztem Sinne beansprucht, so ist die Summe beider kleiner, als die größere von beiden, demnach die einseitige Belastung als ungünstigere einzuführen. Dabei ist

Fig. 316.



zu beachten, dass in letzterem Falle beide Stabspannungen als ungünstige einzuführen sind, da nicht nur die Maximal-, sondern auch die Minimalspannungen von Wichtigkeit sind. Wenn ein Mittelfeld mit zwei sich kreuzenden Zugdiagonalen vorhanden ist, so gilt die vorstehende Entwicklung ebenfalls; jedoch ist stets nur diejenige Diagonale des Mittelfeldes als vorhanden zu betrachten, welche bei der betreffenden Belastung Zug erleidet.

Was oben vom Sieldach angegeben wurde, gilt selbstverständlich von jedem aus zwei symmetrischen Hälften zusammengesetzten Dachstuhl.

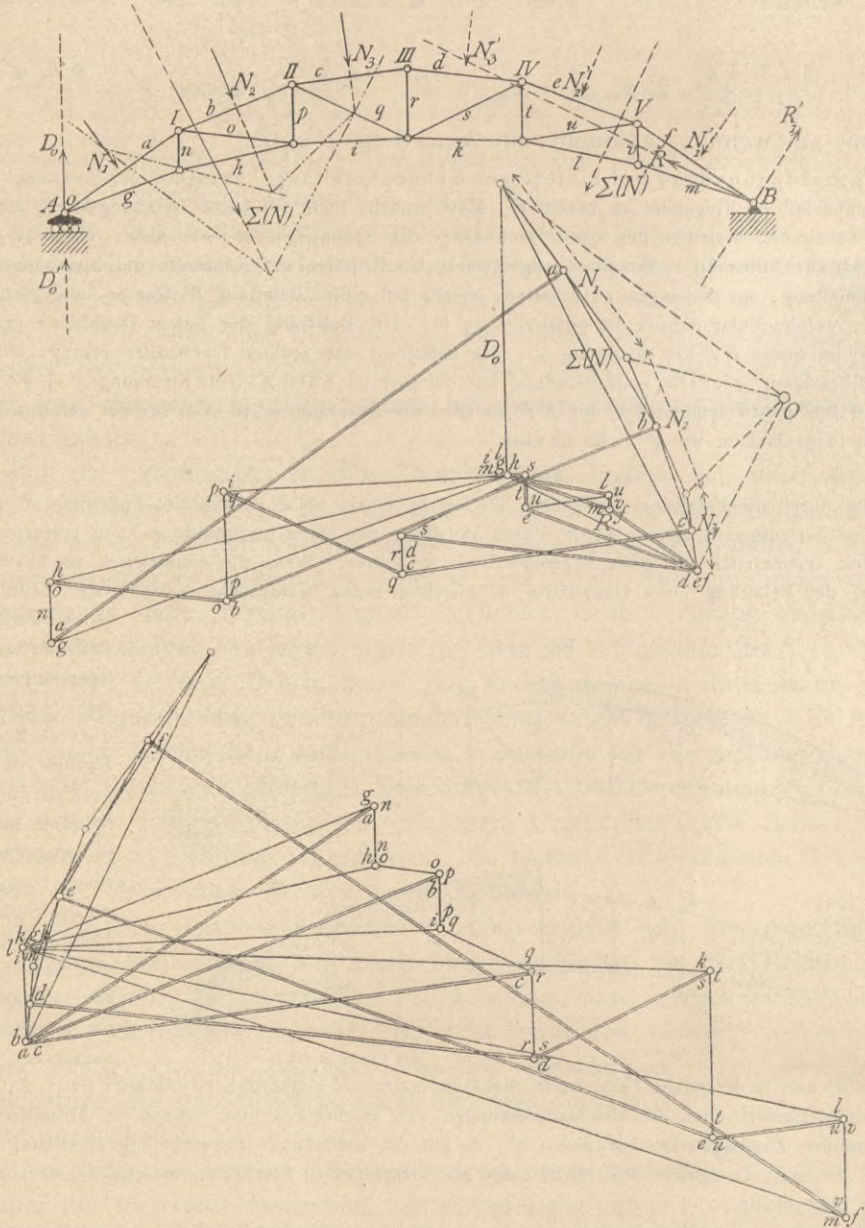
Falls der Binder nicht symmetrisch zur Lothrechten, durch den First gelegten Linie angeordnet ist, so ermittle man nach einander die Spannungen, welche in sämtlichen Stäben durch einseitige Schneebelastung der links vom First gelegenen Dachseite hervorgerufen werden, sodann diejenigen, welche durch einseitige Schneebelastung der rechts vom First gelegenen Dachseite erzeugt werden. Die durch volle

Schneebelastung des ganzen Daches hervorgerufenen Spannungen sind gleich den Summen der bezüglichen Einzelspannungen. Durch Vergleich der Einzelspannungen und der Summen findet man für die einzelnen Stäbe leicht die ungünstigsten Schneebelastungen und die letzteren entsprechenden Spannungen.

231.
Ermittlung
der
Spannungen
durch
Winddruck.

3) Stabspannungen bei Belastung durch Winddruck. Die durch Windbelastung entstehenden Stabspannungen sind sowohl für den Fall, daß der Wind von der Seite des beweglichen Auflagers kommt, wie für den Fall zu er-

Fig. 317.



mitteln, daß der Wind von der Seite kommt, an welcher das feste Auflager liegt. Die Berechnung ist nach Früherem leicht durchzuführen.

232.
Gegen-
diagonalen.

4) Gegendiagonalen. Aus dem Belastungsgesetz für die Diagonalen geht hervor, daß jede Diagonale sowohl Zug, wie Druck erhalten kann; will man dies

Fig. 319.

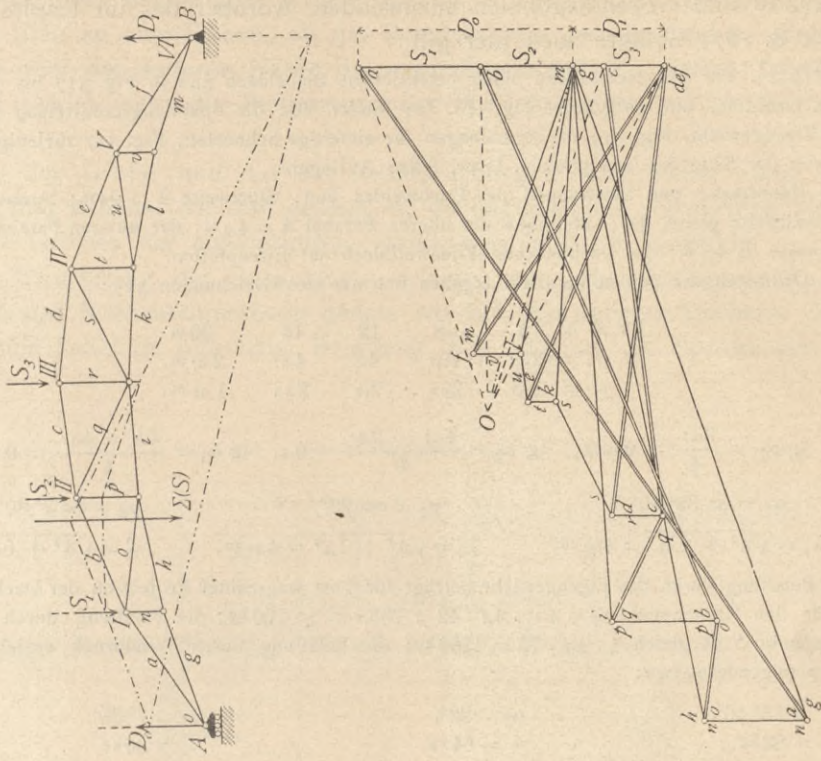
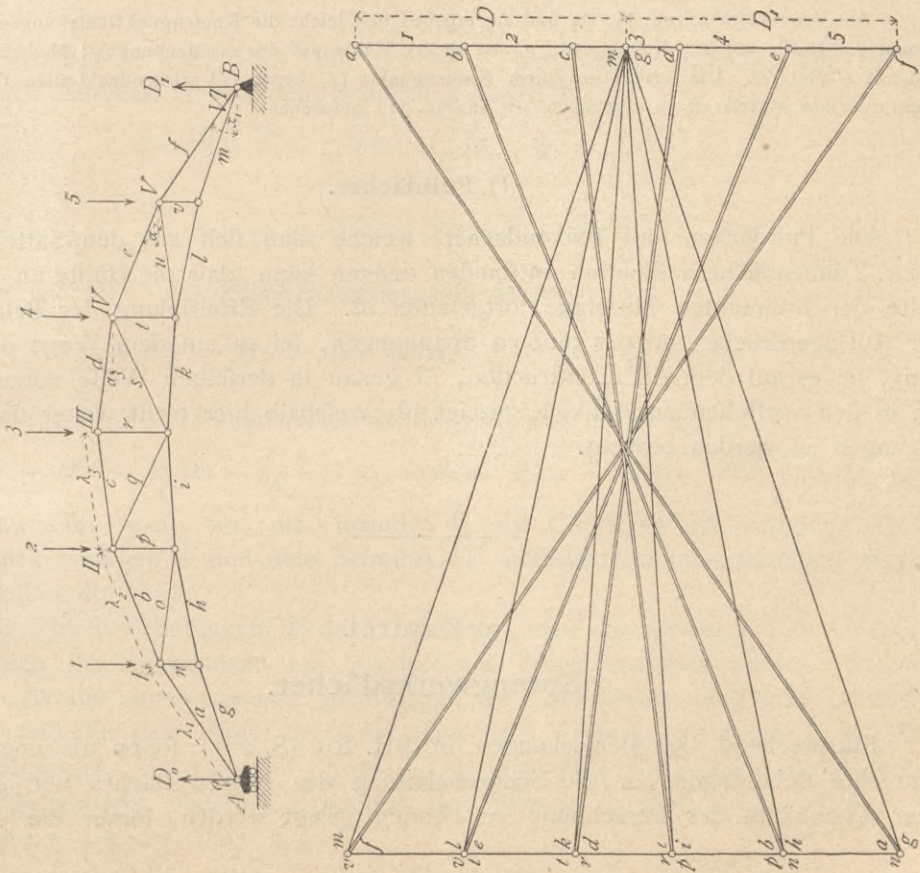


Fig. 318.



vermeiden, so sind Gegendiagonalen anzuwenden, worüber das im Kapitel »Träger« (Art. 186, S. 187) Gefagte auch hier gilt.

233.
Beispiel.

Beispiel. Für das nachstehend näher beschriebene Sieldach sind in Fig. 317 bis 319 die Stabspannungen ermittelt, und zwar zeigt Fig. 318 den Binder und die Spannungsermittlung für Belastung durch das Eigengewicht, Fig. 319 die Spannungen für einseitige Schneelast, Fig. 317 diejenigen für Windbelastung von der Seite des beweglichen, bezw. festen Auflagers.

Die Hauptmaße und Belastungen des Dachstuhles sind: Stützweite $L = 24\text{ m}$; Anzahl der Felder gleich 6; Feldweite gleich 4 m ; Pfeilhöhe der oberen Parabel $h = 4,8\text{ m}$, der unteren Parabel $h_1 = 2,4\text{ m}$; die Binderweite ist $4,2\text{ m}$; die Dachdeckung Eifenwellblech auf Eifenpfetten.

Die Ordinaten der beiden Parabeln ergeben sich aus den Gleichungen 325:

$$\begin{array}{rcccccc} \text{für } x = & 4 & 8 & 12 & 16 & 20\text{ m} \\ \text{ist } y = & 2,07 & 4,27 & 4,8 & 4,27 & 2,07\text{ m}, \\ y_1 = & 1,33 & 2,13 & 2,4 & 2,13 & 1,33\text{ m}. \end{array}$$

$$\text{Ferner ist } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2,07}{4} = 0,5175, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{4,27 - 2,07}{4} = 0,4, \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{4,8 - 4,27}{4} = 0,1325;$$

$$\alpha_1 = \infty 33^{\circ} 40', \quad \alpha_2 = \infty 22^{\circ}, \quad \alpha_3 = \infty 7^{\circ} 30';$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + 2,07^2} = 4,81\text{ m}, \quad \lambda_2 = \sqrt{4^2 + 1,6^2} = 4,31\text{ m}, \quad \lambda_3 = \sqrt{4^2 + 0,53^2} = 4,04\text{ m}.$$

Die Belastung durch das Eigengewicht beträgt für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche 42 kg , demnach für den Knotenpunkt $G = 4,0 \cdot 4,2 \cdot 42 = 705,6 = \infty 700\text{ kg}$; die Belastung durch Schnee für den Knotenpunkt S ist gleich $4 \cdot 4,2 \cdot 75 = 1260\text{ kg}$; die Belastung durch Winddruck ergibt sich nach Gleichung 7 folgendermaßen:

$$\begin{array}{l} \text{für } \alpha_1 = 33^{\circ} 40', \quad \alpha_2 = 22^{\circ}, \quad \alpha_3 = 7^{\circ} 30' \\ v = 83\text{ kg}, \quad v = 64\text{ kg}, \quad v = 36\text{ kg}, \\ N = 4,2 \lambda_1 \cdot 83 = \infty 1680\text{ kg}, \quad N_2 = 4,2 \lambda_2 \cdot 64 = \infty 1160\text{ kg}, \quad N_3 = 4,2 \lambda_3 \cdot 36 = \infty 610\text{ kg}. \end{array}$$

Aus den Werthen von N_1 , N_2 und N_3 ergeben sich leicht die Knotenpunktsbelastungen. Von N_1 kommt die Hälfte auf den Knotenpunkt o , die andere Hälfte auf den Knotenpunkt I ; ähnlich verhält es sich mit II und III . Die beiden in einem Knotenpunkte (I , bezw. II) wirkenden Lasten sind alsdann leicht zu einer Mittelkraft zu vereinigen, wie in Fig. 317 geschehen.

f) Pultdächer.

234.
Spannungen.

Die Pultdächer sind Balkendächer, welche man sich aus den Satteldächern, bezw. Tonnendächern dadurch entstanden denken kann, daß die Hälfte an der einen Seite der lothrechten Mittelaxe fortgelassen ist. Die Ermittlung der Belastungen, der Auflagerdrücke und der inneren Spannungen, sei es auf dem Wege der Rechnung, sei es auf dem der Construction, ist genau in derselben Weise vorzunehmen, die in den vorstehenden Artikeln gezeigt ist, weshalb hier nicht weiter darauf eingegangen zu werden braucht.

3. Kapitel.

Sprengwerksdächer.

235.
Ungünstigste
Belastung.

Entsprechend den Bemerkungen in Art. 205 (S. 207) sollen als ungünstigste lothrechte Belastungen nur die Schneebelastung des ganzen Daches und diejenige einer Dachhälfte der Berechnung zu Grunde gelegt werden, ferner die einseitige

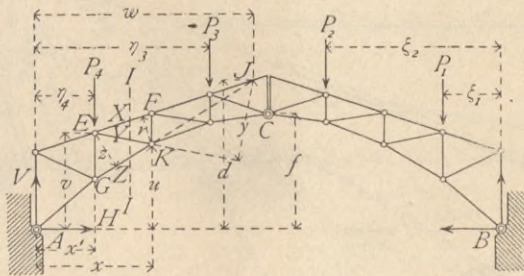
Windbelastung als ungünstigste schiefe Belastung. Bei der Schneebelastung ist sodann für jeden Stab zu untersuchen, ob die Belastung des ganzen Daches oder diejenige der einen oder der anderen Hälfte die ungünstigere ist. Zu diesem Zwecke genügt nach Art. 230 (S. 237) die Bestimmung der Stabspannungen bei einseitiger Schneebelastung.

Aus der Gröfse und Art der Beanspruchungen sämtlicher Stäbe bei dieser Belastung sind alsdann, wie dort gezeigt ist, die ungünstigsten lothrechten Belastungen, so wie die Gröfsen der ungünstigsten Spannungen leicht zu ermitteln.

Die Berechnung der Spannungen erfolgt, wenn die Auflagerkräfte ermittelt sind, nach der Momentenmethode genau, wie bei den anderen Dächern. Es handle sich für eine beliebige lothrechte Belastung (Fig. 320) um die Spannungen X, Y, Z

236.
Berechnung
der
Spannungen.

Fig. 320.



in den Stäben EF, EK, GK . Für EF ist K der Momentenpunkt, und für das Trägerstück zwischen A und dem Schnitte II wird

$$0 = Vx - Hu - P_4(x - \eta_4) + Xr,$$

woraus

$$X = -\frac{1}{r} [Vx - Hu - P_4(x - \eta_4)].$$

Für GK ist E der Momentenpunkt, und es wird

$$0 = Vx' - Hv - Zz, \text{ woraus } Z = \frac{1}{z} (Vx' - Hv).$$

Endlich ist \mathcal{F} der Momentenpunkt für EK , und es wird

$$0 = Vw - Hd - P_4(w - \eta_4) - Yy, \text{ woraus } Y = \frac{1}{y} [Vw - Hd - P_4(w - \eta_4)].$$

Man kann auch, was oft einfacher ist, die Gleichgewichtsbedingung für das Trägerstück zwischen C und dem Schnitte II aufstellen; selbstverständlich ergeben sich dieselben Resultate.

Für schiefe Belastungen ist das Verfahren genau das gleiche.

Sollen die Spannungen auf graphischem Wege ermittelt werden, so wird, nachdem für die angenommenen Belastungen die Lagerkräfte der Punkte A und B ermittelt sind, für jede Hälfte der Kräfteplan nach *Cremona* in mehrfach erörterter Weise construiert. In Fig. 321, 322 u. 323 sind diese Kräftepläne für Belastung durch Eigengewicht, einseitige Schneelast und Winddruck construiert.

237.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

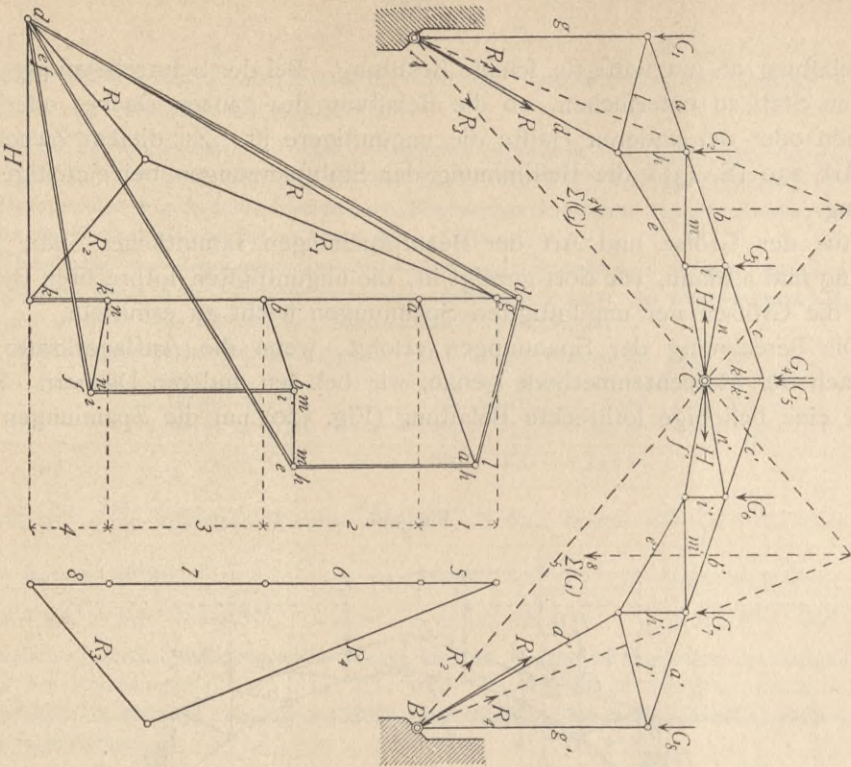
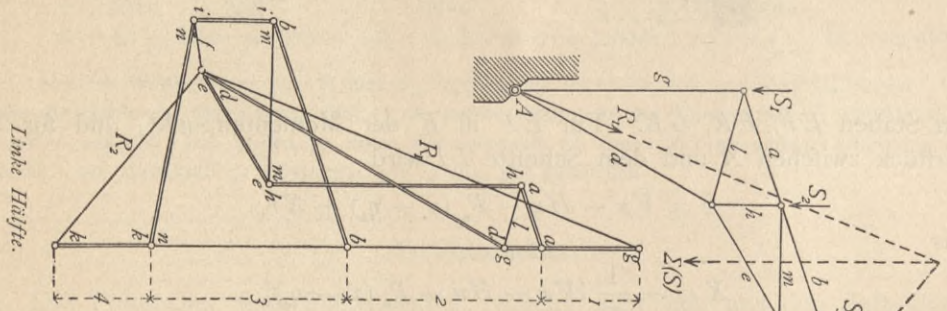
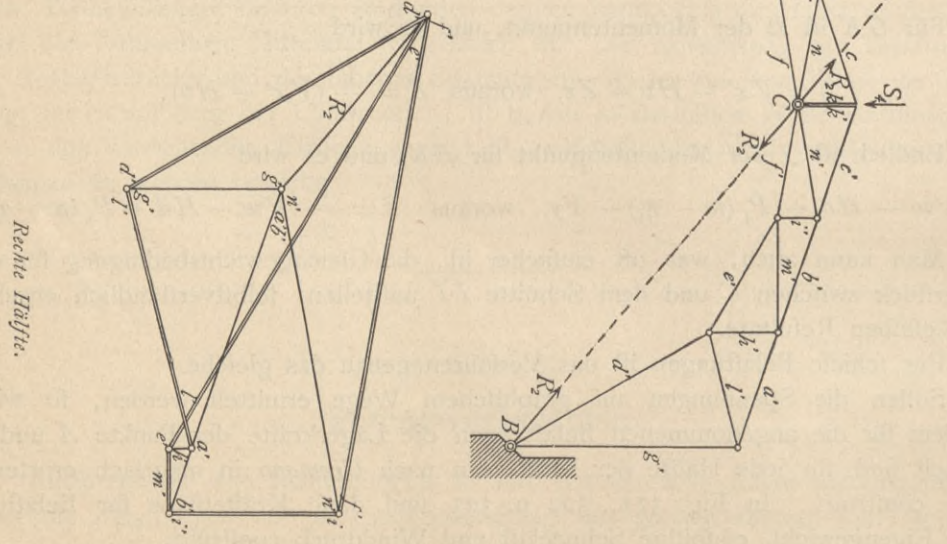


Fig. 321.



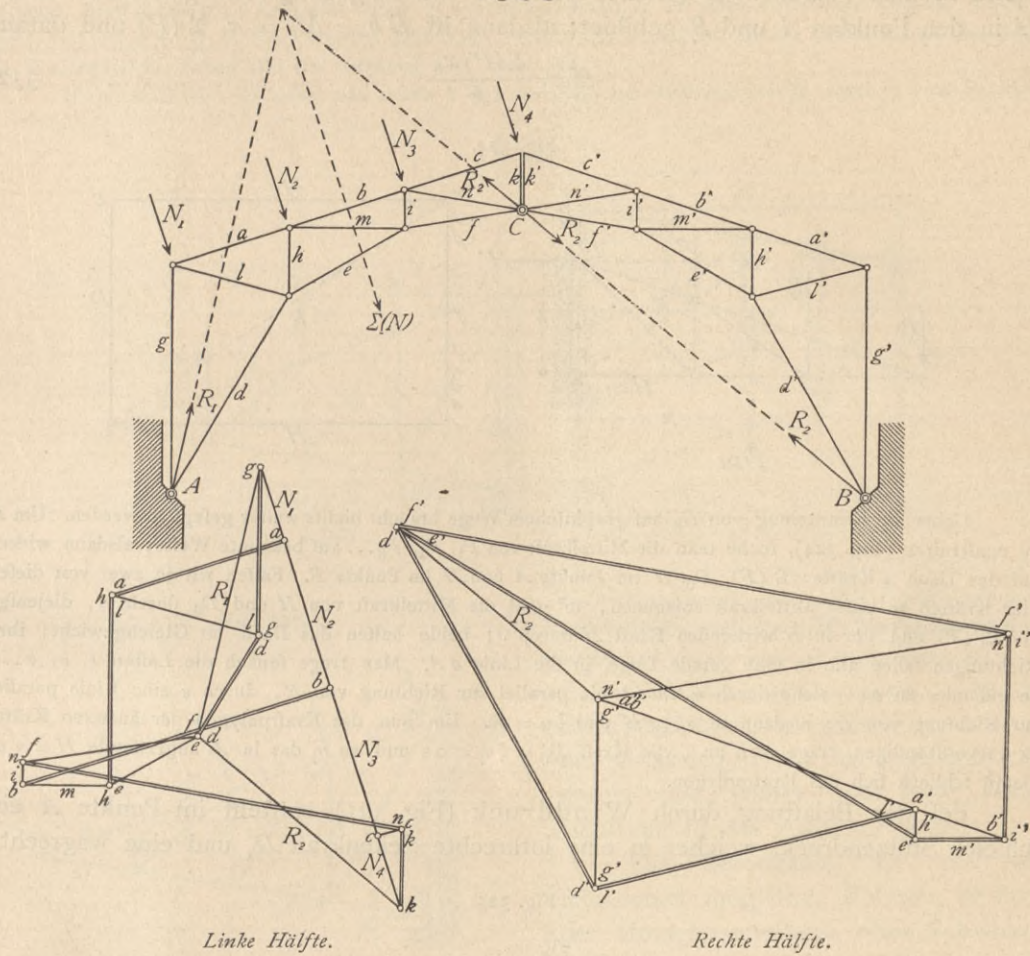
Linke Hälfte.



Rechte Hälfte.

Fig. 322.

Fig. 323.



4. Kapitel.

Ausleger- oder Kragdächer.

Die Ausleger- oder Kragdächer sind Dächer, welche, wie die Ausleger- oder Kragträger (siehe Art. 158 bis 161, S. 151 bis 154), an ihrem einen Ende unterstüzt sind, am anderen Ende frei schweben. Demnach muß auch hier, falls Gleichgewicht stattfinden soll, Seitens der Wand, an welcher das Auslegerdach befestigt ist, ein Auflagerdruck und ein Moment geleistet werden.

1) Auflagerdrücke. Für lothrechte Belastungen ist der Auflagerdruck im Punkte *A* (Fig. 324)

$$D_0 = \Sigma (P) \dots \dots \dots 331.$$

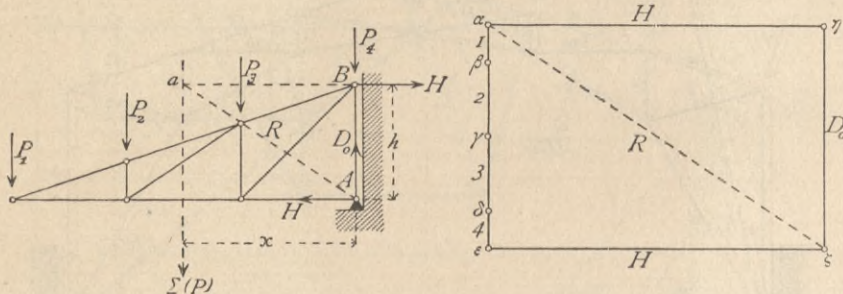
Das Seitens der Wand zu leistende Moment muß dem resultirenden Momente der äußeren Kräfte, d. h. demjenigen von $\Sigma (P)$ und *A* genau gleich sein und entgegengesetzte Drehrichtung haben. Da $D_0 = \Sigma (P)$ ist und beide Kräfte einander parallel sind, so bilden sie ein Kräftepaar mit dem Momente $M_0 = x \Sigma (P)$. Dieselbe Größe hat also das von der Mauer zu leistende Moment. Wir denken uns

238.
Auflager-
drücke.

dieses Moment durch zwei gleiche, parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte H in den Punkten A und B gebildet; alsdann ist $Hh = M_0 = x_0 \Sigma(P)$ und daraus

$$H = \frac{\Sigma(P)x_0}{h} \dots \dots \dots 332.$$

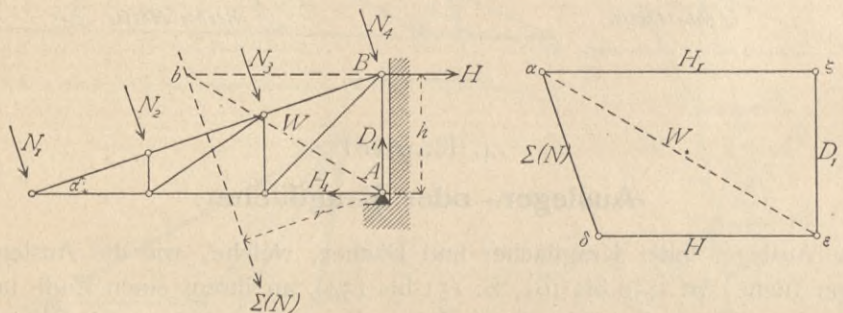
Fig. 324.



Ueber die Ermittlung von D_0 auf graphischem Wege braucht nichts weiter gefagt zu werden. Um H zu construiren (Fig. 324), suche man die Mittelkraft von $P_1, P_2, P_3 \dots$ auf bekannte Weise; alsdann wirken auf das Dach 4 Kräfte: $\Sigma(P), D_0, H$ im Punkte A und H im Punkte B . Fassen wir je zwei von diesen vier Kräften zu einer Mittelkraft zusammen, so geht die Mittelkraft von H und D_0 durch A , diejenige von $\Sigma(P)$ und der in B wirkenden Kraft H durch a ; beide halten das Dach im Gleichgewicht; ihre Richtungen fallen also in eine gerade Linie, in die Linie aA . Man trage fonach die Lasten $1, 2, 3 \dots$ an einander zu $\alpha\epsilon$, ziehe durch α eine Linie parallel zur Richtung von R , durch ϵ eine Linie parallel zur Richtung von H ; alsdann ist $\epsilon\zeta = H$ und $\zeta\alpha = R$. Um nun das Kraftpolygon der äußeren Kräfte zu vervollständigen, trage man an ζ die Kraft $D_0 = \zeta\eta = \alpha\epsilon$ und an η das in A angreifende $H = \eta\alpha$. Damit schließt sich das Kraftpolygon.

Bei der Belaftung durch Winddruck (Fig. 325) entsteht im Punkte A ein schiefer Stützendruck, welcher in eine lothrechte Seitenkraft D_1 und eine wagrechte

Fig. 325.



Seitenkraft H_1 zerlegt werden kann. Außerdem muß von der Wand ein Moment geleistet werden, welches in Bezug auf A als Momentenpunkt demjenigen der Windlasten gleich, der Drehrichtung nach entgegengesetzt ist. Um dieses Moment zu erzeugen, bringen wir in B eine Kraft H an, welche sich aus der Bedingung bestimmt

$$0 = Hh - \Sigma(N)r, \text{ woraus } H = \frac{r}{h} \Sigma(N).$$

Ferner wird

$$D_1 = \Sigma(N) \cos \alpha \text{ und } H_1 = H + \Sigma(N) \sin \alpha = \Sigma(N) \left(\frac{r}{h} + \sin \alpha \right) \dots \dots \dots 333.$$

Die Construction der Kräfte H_1 , D_1 und H erfolgt in ähnlicher Weise, wie bei lothrechter Belastung. Man vereinigt $\Sigma(N)$ und die in B angreifende Kraft H zu einer Mittelkraft, welche durch ε geht, und H_1 mit D_1 zu einer zweiten Mittelkraft, welche durch A geht. Beide Kräfte halten das Dach im Gleichgewicht, haben also die Richtung bA , bezw. ab .

Ist $\alpha\delta = \Sigma(N)$, so ziehe man durch δ eine Parallele zur Richtung von H , durch α eine Parallele

Fig. 326.

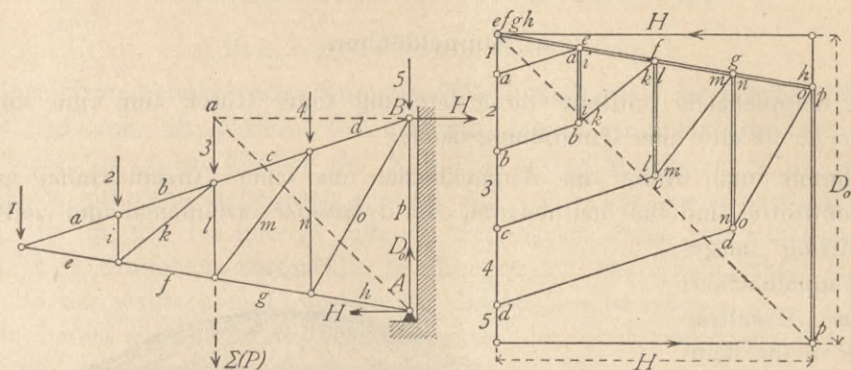
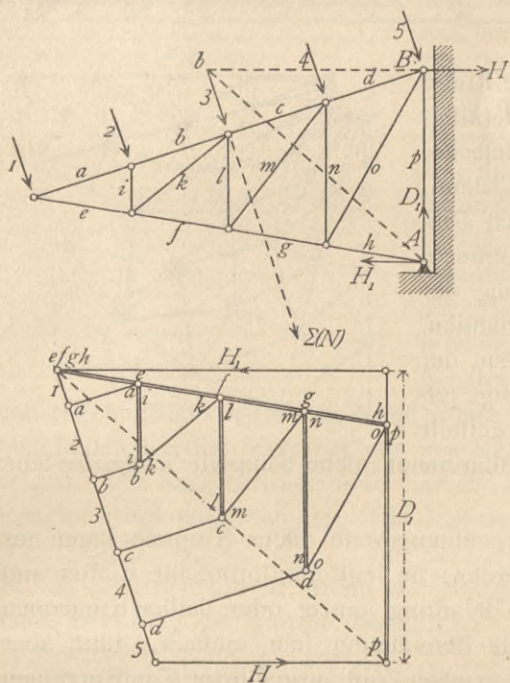


Fig. 327.



zur Richtung von H ; man erhält als Schnittpunkt ε , und es ist $\delta\varepsilon = H$, $\varepsilon\alpha = W$. Nun zerlege man $\varepsilon\alpha$ in D_1 und H_1 , so wird $\varepsilon\zeta = D_1$, $\zeta\alpha = H_1$.

2) Stabspannungen. Um die Stabspannungen zu ermitteln, sind hier nur Belastung durch das Eigengewicht, durch volle Schnee- und volle Windbelastung in das Auge zu fassen.

Die Berechnung für die verschiedenen möglichen Formen ist nach der Momentenmethode ohne Schwierigkeit durchzuführen, und zwar sowohl wenn die Lasten lothrecht, als wenn sie fenkrecht zur Dachfläche gerichtet sind; es braucht darauf hier nicht weiter eingegangen zu werden.

Das graphische Verfahren ist in Fig. 326 u. 327 für einen Ausleger-Dachstuhl, und zwar für Belastung durch Eigengewicht und durch Winddruck, durchgeführt. Zuerst sind die äußeren Kräfte, wie oben gezeigt, ermittelt, in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander getragen, und dann ist der Kräfteplan verzeichnet, der ohne Weiteres verständlich ist.

239.
Stab-
spannungen.

5. Kapitel.

Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer.

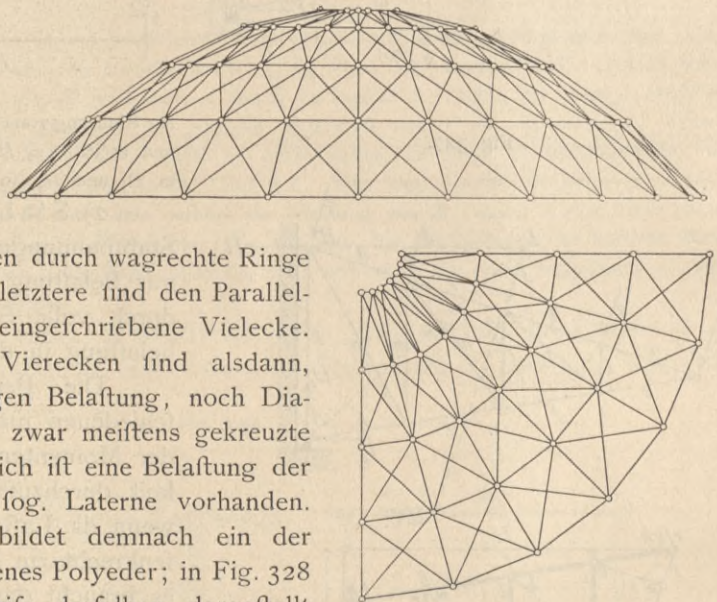
a) Kuppeldächer.

240.
Allgemeines.

Die Kuppelfläche entsteht durch Drehung einer Curve um eine lothrechte Mittelaxe; sie ist also eine Umdrehungsfläche.

Während man früher die Kuppeldächer aus einer Anzahl radial gestellter Binder construirte, sind bei den neueren, von *Schwedler* erfundenen und vielfach mit bestem Erfolg ausgeführten Kuppeldächern sämmtliche Constructionstheile in die Kuppelfläche verlegt. Eine Anzahl von Sparren wird in der Richtung der Meridiane der Kuppelfläche angeordnet

Fig. 328.



und in verschiedenen Höhen durch wagrechte Ringe mit einander verbunden; letztere sind den Parallelkreisen der Kuppelfläche eingeschriebene Vielecke. In den so entstehenden Vierecken sind alsdann, wegen der ungleichmäßigen Belastung, noch Diagonalen angeordnet, und zwar meistens gekreuzte Zugdiagonalen. Gewöhnlich ist eine Belastung der Kuppelmitte durch eine sog. Laterne vorhanden. Die ganze Construction bildet demnach ein der Kuppelfläche eingeschriebenes Polyeder; in Fig. 328 sind Ansicht und Grundriss derselben dargestellt (letzterer nur für ein Viertel der Kuppel). Man nennt solche Kuppeln *Schwedler'sche* oder Flechtwerkkuppeln.

Die von *Schwedler*³⁵⁾ angegebene Berechnungsweise dieser Kuppeln kann nur als eine Annäherungsrechnung betrachtet werden: sie legt nur lothrechte Lasten und der Hauptfäche nach gleichförmig vertheilte Belastung ganzer oder halber Ringzonen zu Grunde. Bei diesen Annahmen wird die Berechnung sehr einfach, führt aber trotzdem zu Ergebnissen, welche sich in einer großen Zahl ausgeführter Constructionen seit einer längeren Reihe von Jahren vollauf bewährt und allen Kräfteangriffen gewachsen gezeigt haben. Deshalb soll diese Berechnungsweise, welche in den allermeisten Fällen für die Praxis genügt, nachstehend vorgeführt werden (Art. 241 bis 245).

Eine neuere, auf der Theorie des Raumbachwerkes beruhende Berechnungs-

³⁵⁾ In: Die Construction der Kuppeldächer. Zeitschr. f. Bauw. 1866, S. 7.

weise der Flechtwerkkuppeln, und zwar für ganz beliebige Belastungen, ist von Müller-Breslau³⁶⁾ aufgestellt worden.

Nach Vorführung der Schwedler'schen Berechnungsweise sollen in Art. 246 bis 249 die Grundlagen derjenigen von Müller-Breslau angegeben werden.

1) Berechnungsweise von Schwedler.

a) Belastungen und Auflagerdrücke.

Die hier zu betrachtenden Kuppeln sind so flach, daß der Winddruck nur von geringer Bedeutung ist; derselbe soll deshalb, unter Zugrundelegung einer mittleren Dachneigung, in allen Theilen der Kuppel constant angenommen werden. Hier wird nur die lothrechte Seitenkraft ν (vergl. Art. 30, S. 23) des Winddruckes berücksichtigt; die in die Dachfläche fallende Seitenkraft kann vernachlässigt werden. Endlich ist es empfehlenswerth, alle Belastungen auf das Quadr.-Meter der Grundfläche, also der wagrechten Projection des Daches, zu beziehen.

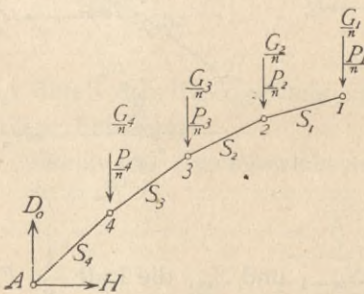
Die Lasten greifen in den Knotenpunkten der Construction an; demnach sind die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Flächen zu berechnen und mit diesen die Belastungen für die Einheit der Grundfläche zu multipliciren.

Wären keine Ringe angeordnet, so würden die einzelnen Sparren schiefe Drücke auf die Auflager ausüben und von diesen erleiden; durch einen Ring, gegen welchen sich sämtliche Sparrenfüsse setzen, den sog. Mauerring oder Fußring, werden die wagrechten Seitenkräfte der in den untersten Sparrenstäben (S_4 in Fig. 329) vorhandenen Spannungen aufgehoben, so daß bei den angenommenen Belastungen als Auflagerdrücke nur lothrechte Kräfte wirken. Entsprechend den im folgenden Artikel vorzuführenden Annahmen braucht die Berechnung der Auflagerdrücke nur für Belastungen vorgenommen zu werden, bei welchen ganze Ringzonen belastet sind. Wenn der Grundriß der Kuppel

241.
Belastungen.

242.
Auflagerdrücke.

Fig. 329.



ein regelmäßiges n -Eck ist, und demnach n Sparren vorhanden sind, so kann angenommen werden, daß bei den erwähnten Belastungen alle Sparren gleiche Lasten tragen. Die Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der ersten Ringzone mit enthalten sei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen seien bezw. (Fig. 329) $G_1, G_2, G_3, G_4 \dots$ und die zufälligen Lasten der ganzen Ringzonen $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$; alsdann ist, wenn der Stützdruck auf jeden Sparren D_0 beträgt, für volle Belastung der ganzen Dachfläche

$$nD_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \dots + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots = \Sigma(G) + \Sigma(P).$$

Wenn etwa nur die drei obersten Zonen voll belastet sind, so wird

$$nD_0' = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \dots + P_1 + P_2 + P_3$$

sein. Auf diese Art sind die Auflagerdrücke leicht zu ermitteln.

36) In: Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 201. (Auch als Sonderabdruck erschienen.) — Vergl. auch:

KOFAHL. Beitrag zur Theorie der Kuppeldächer. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1896, S. 1133; 1898, S. 713.

HÜBNER. Bemerkungen über das räumliche Fachwerk. Ebendaf. 1897, S. 477, 632, 634.

MÜLLER-BRESLAU, H. Beitrag zur Theorie der Kuppel- und Thurmdächer etc. Ebendaf. 1898, S. 1205, 1233.

β) Stabspannungen.

243.
Berechnung
der Stab-
spannungen.

Α) Ungünstigste Beanspruchung der einzelnen Stäbe. Es sollen, nach *Schwedler*, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

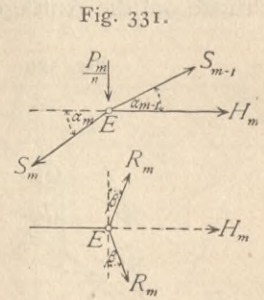
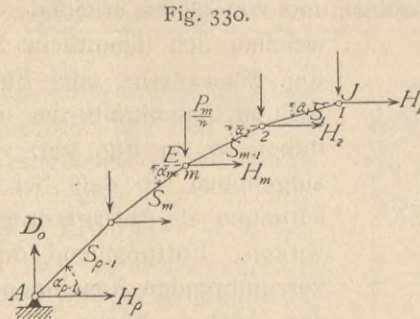
a) die Sparren erhalten den größten Druck, wenn die ganze Kuppel voll belastet ist;

b) ein Ring erhält seinen größten Zug, wenn der innerhalb desselben befindliche Kuppeltheil voll belastet, der Ring selbst mit seiner Zone aber unbelastet ist; bei der entgegengesetzten Belastungsart treten die entgegengesetzten Grenzen ein;

c) die Diagonalen zwischen zwei Sparren erhalten ihren größten Zug, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmessers voll, die andere halbe Kuppel nur durch das Eigengewicht belastet ist.

Β) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belastungsarten, nämlich die Belastung der ganzen Kuppel durch zufällige Last und die Belastung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belastungsart ergibt die Minimalspannungen. Die Maximalspannungen der Sparren sind die Summen der bei den beiden angeführten Belastungsarten sich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belastungsarten unterscheiden sich nur durch die Größe der Lasten.

Was zunächst die zufällige Belastung betrifft, so sind im m -ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in E (Fig. 330 u. 331) folgende



Kräfte im Gleichgewicht: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m , die Last $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringspannungen R_m . Letztere sind einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der wagrechten Ebene des m -ten Ringes die Mittelkraft H_m . Die algebraische Summe der lothrechten Kräfte für den Punkt E ist gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den ersten Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für \mathcal{F} , ist $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3};$$

oder allgemein

$$S_m = - \frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \dots \dots \dots 334.$$

Eben so ergibt sich die Spannung in den Sparren für eine Belaftung durch das Eigengewicht zu

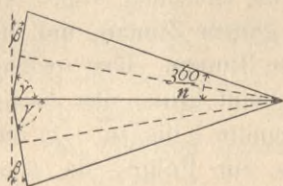
$$S_1' = - \frac{G_1}{n \sin \alpha_1}; S_2' = - \frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2}; \dots S_m' = - \frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \dots 335.$$

©) Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraische Summe der wagrechten Kräfte im Punkte *E* gleich Null ist, lautet (Fig. 331):

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}.$$

Da H_m die Mittelkraft der beiden Ringspannungen R_m ist, so ergibt sich $H_m = 2 R_m \sin \beta$, woraus $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}$. Nun ist (Fig. 332) $\beta = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{\pi}{n}$,

Fig. 332.



sonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in diese Gleichung der

für H_m gefundene Werth eingesetzt, so folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots 336.$$

Wir bestimmen nach Gleichung 336 die Ringspannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimal-Ringspannung durch zutällige Belaftung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{- \frac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \frac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = - \frac{\sum_1^m (G) \cotg \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \cotg \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 337.$$

Man erhält

$$\left. \begin{aligned} \text{für den Laternenring } (m = 1): R_1^g &= - \frac{G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \\ \text{für den Ring 2 } (m = 2): R_2^g &= - \frac{(G_1 + G_2) \cotg \alpha_2 - G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \\ \text{für den Ring 3 } (m = 3): R_3^g &= - \frac{(G_1 + G_2 + G_3) \cotg \alpha_3 - (G_1 + G_2) \cotg \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}, \end{aligned} \right\} 338.$$

etc.

Für den Mauerring ist S_m , also das erste Glied im Zähler gleich Null; mithin, wenn für den Auflagerpunkt $m = \rho$ ist,

$$R_\rho^g = \frac{\sum_1^{\rho-1} (G) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \dots + G_{\rho-1}) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \dots 339.$$

Um die durch zufällige Belastung erzeugten Ringspannungen zu ermitteln, setzen wir in die Gleichung 336 die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Es soll $\mathfrak{S}_1^m (P)$ die zwischen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen zufälligen Lasten bezeichnen, wobei \mathfrak{S} ausdrückt, dass nicht alle Knotenpunkte 1 — m belastet zu sein brauchen; im Gegensatz dazu soll $\sum_1^m (P)$ andeuten, dass alle Knotenpunkte von 1 bis m belastet sind. Man erhält demnach allgemein für zufällige Belastung aus Gleichung 336

$$R_m = - \frac{\mathfrak{S}_1^m (P) \cotg \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1} (P) \cotg \alpha_{m-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \dots 340.$$

Diese Gleichung ermöglicht die Feststellung der für die einzelnen Ringe ungünstigsten Belastungen (unter Voraussetzung der Belastung ganzer Zonen) und die Ermittlung der größten Druck- und Zugspannungen in den Ringen. Der größte Druck wird stattfinden, wenn im Zähler das erste Glied möglichst groß, das zweite Glied möglichst klein ist. Jede Belastung eines der Knotenpunkte 1 bis $(m-1)$ hat sowohl ein Wachsen des ersten, wie des zweiten Gliedes zur Folge; da aber $\cotg \alpha_{m-1}$ stets größer ist, als $\cotg \alpha_m$, so wächst das zweite Glied mehr, als das erste, d. h. jede Belastung des Knotenpunktes 1 bis $(m-1)$ verringert den Druck, vergrößert also den Zug. Die Belastung des Knotenpunktes m vergrößert nur das erste Glied, also den Druck. Die Belastung der außerhalb des m -ten Ringes liegenden Ringe ist nach der Gleichung ohne Einfluss auf die Spannung im m -ten Ringe. Daraus folgt, dass in den Stäben eines Ringes (des m -ten) der größte Druck stattfindet, wenn die Knotenpunkte 1 bis $(m-1)$ unbelastet, die zum Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belastet sind. Da die Belastung der äußeren Ringe ohne Einfluss ist, so kann man sagen: Größter Druck findet statt, wenn der innere Kuppeltheil unbelastet, der äußere Kuppeltheil, einschliesslich des betrachteten Ringes, belastet ist. Daraus folgt dann weiter, dass größter Zug in den Stäben des m -ten Ringes auftritt, wenn nur der innere Kuppeltheil, ausschliesslich der Zone, zu welcher der m -te Ring gehört, belastet ist. Die hier gefundenen Ergebnisse stimmen demnach mit den in Art. 243 (S. 248) gemachten Annahmen über die ungünstigsten Belastungen überein.

Man erhält

$$R_m^{p \min} = - \frac{P_m \cotg \alpha_m}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{p \max} = \frac{\sum_1^{m-1} (P) (\cotg \alpha_{m-1} - \cotg \alpha_m)}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \dots 341.$$

Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{für den Laternenring } (m = 1): R_1^{\ell_{min}} = -\frac{P_1 \cotg \alpha_1}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ und } R_1^{\ell_{max}} = 0; \\
 &\text{für } m = 2: R_2^{\ell_{min}} = -\frac{P_2 \cotg \alpha_2}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ und } R_2^{\ell_{max}} = \frac{P_1 (\cotg \alpha_1 - \cotg \alpha_2)}{2n \sin \frac{\pi}{n}}; \\
 &\text{für } m = 3: R_3^{\ell_{min}} = -\frac{P_3 \cotg \alpha_3}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ und } R_3^{\ell_{max}} = \frac{(P_1 + P_2) (\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_3)}{2n \sin \frac{\pi}{n}}, \\
 &\text{etc.} \\
 &\text{für den Mauerring: } R_\rho^{\ell_{min}} = 0 \text{ und } R_\rho^{\ell_{max}} = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{\rho-1}) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}}.
 \end{aligned} \right\} 342.$$

ⓓ) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmesser, welcher für die ungünstigste Diagonalenbelastung die belastete und unbelastete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belasteter und ein unbelasteter Sparren. Nehmen wir nun an, daß die Spannung im ersteren so groß ist, als wenn die ganze Kuppel voll belastet wäre, im zweiten so groß, als wenn die ganze Kuppel nur durch das Eigengewicht belastet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anschließende Diagonale stark genug, um den ganzen Spannungsunterschied zu übertragen, so wird dieselbe jedenfalls zu stark, ist also als ausreichend zu betrachten.

Im obersten Sparrenstück sind die größten und kleinsten Druckspannungen bezw.

$$S_{1max} = -\frac{P_1 + G_1}{n \sin \alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1min} = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}.$$

Die Differenz beider Spannungen ist $\Delta_1 = -\frac{P_1}{n \sin \alpha_1}$. Dieselbe soll durch die Diagonale übertragen werden. Bezeichnet man die wirkliche Länge der Diagonale und des Sparrens bezw. mit d und s , so ist allgemein

$$Y = -\Delta \frac{d}{s};$$

mithin

$$\left. \begin{aligned}
 Y_1 &= \frac{P_1}{n \sin \alpha_1} \cdot \frac{d_1}{s_1}, & Y_2 &= \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \cdot \frac{d_2}{s_2}, \\
 Y_3 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3} \cdot \frac{d_3}{s_3}, & Y_4 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4} \cdot \frac{d_4}{s_4},
 \end{aligned} \right\} 344.$$

Auf graphischem Wege lassen sich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weise ermitteln.

a) Sparrenspannungen durch das Eigengewicht. Die Lasten in den einzelnen Knotenpunkten seien 1, 2, 3, 4, 5 (Fig. 333); man trage dieselben zu einem Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta$ an einander. Im Knotenpunkte \mathcal{F} wirken 1, die Sparrenspannung S_1 und die Mittelkraft H_1 der Ringspannungen R_1 . Die Zerlegung der Kraft 1 nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergibt $\beta \omega = S_1$, $\omega \alpha = H_1$. Am Knotenpunkt F wirken nun 2, S_1 , S_2 und H_2 ; bekannt sind jetzt 2 und S_1 ; man erhält $\gamma \eta = S_2$, $\eta \omega = H_2$. Eben so ergeben sich die übrigen Sparrenspannungen.

b) Spannungen in den Sparren durch zufällige Belastung. Die Construction ist in gleicher Weise, wie unter a) vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden zufälligen Lasten genau wie oben aufgetragen und behandelt sind.

Fig. 334.

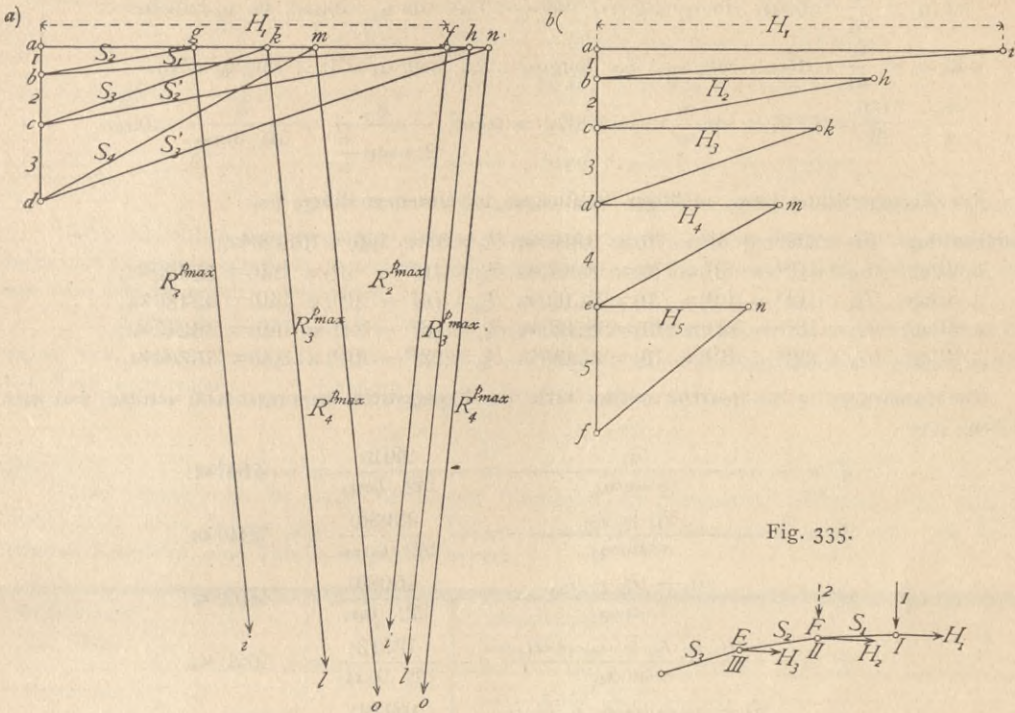
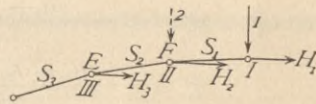


Fig. 335.

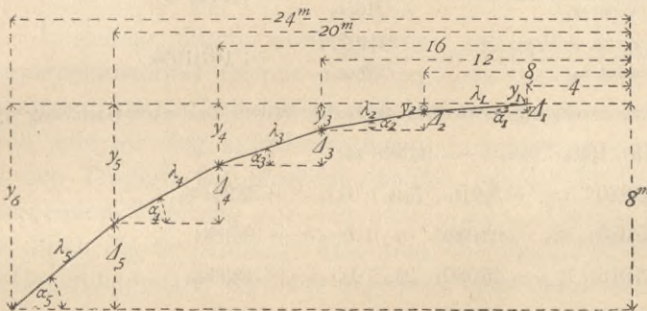


Beispiel. Ein Kuppeldach von nachfolgenden Hauptmassen und Belastungen ist zu construiren: Durchmesser des zu überdachenden kreisförmigen Raumes gleich 47 m, demnach der Durchmesser des dem Mauerring umschriebenen Parallelkreises $2L = 48\text{ m}$; Scheitelhöhe der Kuppel $h = 8\text{ m}$; es sind 6 Ringe mit den Halbmessern 4, 8, 12, 16, 20 und 24 m und $n = 32$ Sparren anzuordnen. Das Eigengewicht ist zu 70 kg für 1 qm Grundfläche anzunehmen; als mittlere Dachneigung ist $\frac{h}{2L} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ einzuführen, und es ergibt sich hieraus nach Art. 28 (S. 21 ff.) als Belastung durch Schnee für 1 qm Grundfläche

245.
Beispiel.

75 kg, als Belastung durch Winddruck (siehe Art. 30, S. 23) für 1 qm Grundfläche $v = 64\text{ kg}$, so dass die gesammte zufällige Belastung für 1 qm Grundfläche abgerundet 140 kg beträgt; die Laterne wiegt 2000 kg.

Fig. 336.



Die Kuppelfläche sei durch Umdrehung einer cubischen Parabel der Gleichung

$$y = \frac{h x^3}{24^3} = \frac{8}{24^3} x^3 = 0,00058 x^3$$

entstanden. Man erhält für die verschiedenen, durch die Ringe vorgeschriebenen Eckpunkte des Vieleckes (Fig. 336):

$x =$	4	8	12	16	20	24 m
$y =$	0,04	0,30	1,00	2,38	4,64	8,0
$h - y = z =$	7,96	7,70	7,00	5,62	3,36	0

Ferner ist

$$\Delta_1 = y_2 - y_1 = 0,26\text{ m}; \Delta_2 = y_3 - y_2 = 0,7\text{ m}; \Delta_3 = y_4 - y_3 = 1,38\text{ m}; \Delta_4 = y_5 - y_4 = 2,26\text{ m}; \Delta_5 = y_6 - y_5 = 3,36\text{ m}.$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + \Delta_1^2} = 4,01 \text{ m}; \lambda_2 = 4,06 \text{ m}; \lambda_3 = 4,23 \text{ m}; \lambda_4 = 4,59 \text{ m}; \lambda_5 = 5,22 \text{ m}.$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = 0,0648; \sin \alpha_2 = 0,1724; \sin \alpha_3 = 0,32; \sin \alpha_4 = 0,492; \sin \alpha_5 = 0,644.$$

$$\cotg \alpha_1 = \frac{4}{\Delta_1} = 15,38; \cotg \alpha_2 = 5,7; \cotg \alpha_3 = 2,9; \cotg \alpha_4 = 1,77; \cotg \alpha_5 = 1,19.$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{180}{32} = 5^{\circ} 37,5'; \sin \frac{\pi}{n} = \sin 5^{\circ} 37,5' = 0,098; \frac{1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{64 \cdot 0,098} = 0,16.$$

Die Eigengewichte, bzw. zufälligen Belastungen der einzelnen Ringe find:

Laternenring: $G_1 = 2000 + 6^2 \pi \cdot 70 = 9913 \text{ kg}, P_1 = 6^2 \pi \cdot 140 = 15826 \text{ kg};$
 2. Ring: $G_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 70 = 14067 \text{ kg}, P_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 140 = 28122 \text{ kg};$
 3. Ring: $G_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 70 = 21100 \text{ kg}, P_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 140 = 42186 \text{ kg};$
 4. Ring: $G_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 70 = 28133 \text{ kg}, P_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 140 = 56243 \text{ kg};$
 5. Ring: $G_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 70 = 35168 \text{ kg}, P_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 140 = 70304 \text{ kg}.$

Die Spannungen in den Sparren, welche durch das Eigengewicht hervorgebracht werden, find nach Gleichung 335:

$$S_1^g = - \frac{G_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{9913}{32 \cdot 0,065} = - 4766 \text{ kg};$$

$$S_2^g = - \frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{23980}{32 \cdot 0,1724} = - 4346 \text{ kg};$$

$$S_3^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{45080}{32 \cdot 0,32} = - 4402 \text{ kg};$$

$$S_4^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{73213}{32 \cdot 0,492} = - 4651 \text{ kg};$$

$$S_5^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{108381}{32 \cdot 0,644} = - 5258 \text{ kg}.$$

Die durch zufällige Belastung erzeugten Sparrenspannungen betragen:

$$S_1^p = - \frac{P_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{15826}{2,08} = - 7608 \text{ kg};$$

$$S_2^p = - \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{43948}{5,517} = - 7966 \text{ kg};$$

$$S_3^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{86130}{10,24} = - 8400 \text{ kg};$$

$$S_4^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{142373}{15,74} = - 9045 \text{ kg};$$

$$S_5^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{212677}{20,61} = - 10319 \text{ kg}.$$

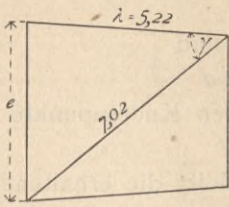
Die Ringspannungen, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, find nach Gleichung 338:

Laternenring: $R_1^g = - 9913 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = - 24896 \text{ kg};$
 2. Ring: $R_2^g = - (23980 \cdot 5,7 - 9913 \cdot 15,38) \cdot 0,16 = + 2524 \text{ kg};$
 3. Ring: $R_3^g = - (45080 \cdot 2,9 - 23980 \cdot 5,7) \cdot 0,16 = + 953 \text{ kg};$
 4. Ring: $R_4^g = - (73213 \cdot 1,77 - 45080 \cdot 2,9) \cdot 0,16 = + 183 \text{ kg};$
 5. Ring: $R_5^g = - (108381 \cdot 1,19 - 73213 \cdot 1,77) \cdot 0,16 = + 98 \text{ kg};$
 Mauerring: $R_6^g = 108381 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = 20636 \text{ kg}.$

Die Maximal- und Minimalspannungen in den Ringen, durch zufällige Belastung erzeugt, betragen nach Gleichung 342:

Laternenring: $R_1^p \text{ min} = - 15826 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = - 38932 \text{ kg}$ und $R_1^p \text{ max} = 0;$
 2. Ring: $R_2^p \text{ min} = - 28122 \cdot 5,7 \cdot 0,16 = - 25647 \text{ kg},$
 $R_2^p \text{ max} = 15826 (15,38 - 5,7) \cdot 0,16 = + 24514 \text{ kg};$

Fig. 337.



3. Ring: $R_2^{\phi min} = - 42182 \cdot 2,9 \cdot 0,16 = - 19572 \text{ kg},$

$R_3^{\phi max} = 43948 \cdot 2,8 \cdot 0,16 = + 19689 \text{ kg};$

4. Ring: $R_4^{\phi min} = - 56243 \cdot 1,77 \cdot 0,16 = - 15926 \text{ kg},$

$R_4^{\phi max} = 86130 \cdot 1,13 \cdot 0,16 = + 15589 \text{ kg};$

5. Ring: $R_5^{\phi min} = - 70304 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = - 13386 \text{ kg},$

$R_5^{\phi max} = 142373 \cdot 0,58 \cdot 0,16 = + 13212 \text{ kg};$

Mauerring: $R_6^{\phi min} = 0$ und $R_6^{\phi max} = 212677 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = + 40494 \text{ kg}.$

Was schließlich die Spannungen in den Diagonalen betrifft, so braucht nur die am stärksten beanspruchte Diagonale berechnet zu werden, weil selbst diese noch sehr schwach wird. Gewöhnlich macht man dann alle Diagonalen gleich stark.

Die größte durch zufällige Belastung erzeugte Sparrenspannung ist durch die Diagonale zu übertragen (siehe Art. 243, S. 251); dieselbe ist $S_5^{\phi} = - 10319 \text{ kg}$, und eine Diagonale hat demnach höchstens diese Kraft aufzunehmen. Die Spannung in den Diagonalen wird daher

$$Y_5 = \frac{10319 \cdot 7,02}{5,22} = 13877 \text{ kg}$$

fein.

Man könnte noch für einige der oberen Diagonalen die Spannungen auffuchen, was nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeit macht. Für die Querschnittsbestimmungen kann nun, wie bei den früheren Beispielen, eine Tabelle aufgestellt werden.

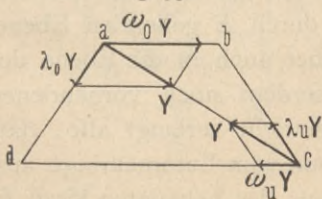
Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	P_2
Sparren:			Ringe:			
S_1	- 4766	- 7608	R_1	- 24396	- 38932	0
S_2	- 4346	- 7966	R_2	+ 2524	+ 24514	- 25647
S_3	- 4402	- 8400	R_3	+ 953	+ 19689	- 19572
S_4	- 4651	- 9045	R_4	+ 183	+ 15589	- 15926
S_5	- 5258	- 10319	R_5	+ 98	+ 13212	- 13386
Diagonalen:			R_6	+ 20636	+ 40494	0
Y	0	13877				
	Kilogramm			Kilogramm		

2) Verfahren von Müller-Breslau.

In jedem durch zwei Sparren- und zwei Ringstäbe gebildeten Trapez des Kuppelflechtwerkes sei nur eine Diagonale vorhanden, welche sowohl Zug wie Druck aufnehmen kann. Handelt es sich um eine Construction mit gekreuzten Diagonalen, deren jede nur Zug aufnehmen kann, so nimmt man genau, wie in Art. 186 (S. 187) bei den Trägern mit Gegendiagonalen gezeigt ist, zunächst nur eine, die bei der betreffenden Belastung auf Zug beanspruchte, Diagonale als vorhanden an. Ergibt sich durch die Berechnung, daß diese Diagonale Druck erhält, so tritt an ihre Stelle die Gegendiagonale, und das Ergebnis kann durch eine Verbefferungsrechnung leicht richtig gestellt werden.

246.
Vor-
bemerkungen.

Fig. 338.



Die in der Diagonale ac auftretende Spannung Y (Fig. 338) wird in der Ebene des betreffenden Feldes in jedem der beiden Knotenpunkte in zwei Seitenkräfte zerlegt, welche bzw. in die Richtung des anschließenden Ringstabes und diejenige des anschließenden Sparrenstabes fallen. Diese Seitenkräfte stehen in ganz bestimmtem,

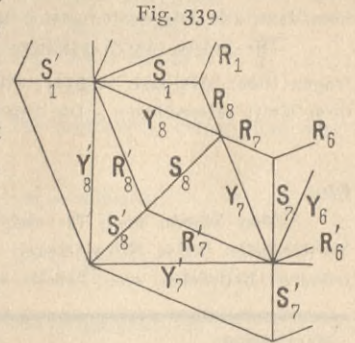
durch die Form des Trapezes vorgegeschriebenem Verhältniß zu Y . Im oberen Knotenpunkte a zerlegt sich Y in die Seitenkräfte:

- $\omega_0 Y$, welche in die Richtung des Ringstabes ab , und
- $\lambda_0 Y$, welche in die Richtung des Sparrenstabes ad

fällt. Eben so bezeichnen wir die Seitenkräfte von Y am unteren Knotenpunkte c mit $\omega_u Y$, bzw. $\lambda_u Y$.

Verfährt man in dieser Weise mit jeder Diagonale und addirt die erhaltenen Seitenkräfte zu den in den Ring-, bzw. Sparrenstäben wirkenden Spannungen $R_1, R_2 \dots, S_1, S_2 \dots$, so hat man bei den Untersuchungen, zunächst wenigstens, nur mit Kräften in den Ring- und Sparrenstäben zu thun; die Diagonalen sind vorläufig ausgeschaltet. Die Summenspannungen in den Sparrenstäben sollen mit \mathfrak{S} , diejenigen in den Ringstäben mit \mathfrak{R} bezeichnet werden, wobei die Zeiger die gleichen sind, wie bei den mit lateinischen Buchstaben bezeichneten Spannungen. Demnach ist (Fig. 339)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_8 &= S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 \\ \mathfrak{S}'_8 &= S'_8 + \lambda'_u Y'_8 + \lambda'_u Y'_7 \\ \mathfrak{R}_8 &= R_8 + \omega_0 Y_8 \\ \mathfrak{R}'_8 &= R'_8 + \omega_u Y_8 + \omega'_u Y'_8 \end{aligned} \right\} \dots 345.$$



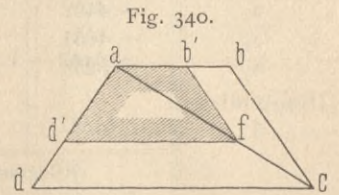
Die Werthe von ω und λ kann man leicht durch Rechnung oder Zeichnung finden; graphisch, indem man das Trapezfeld in wahrer Gröfse aufzeichnet, auf der Diagonale eine beliebige Länge für Y abträgt (etwa \overline{af} in Fig. 340) und das dem Felde ähnliche Trapez $ad'fb'$ mit \overline{af} als Diagonale conftruirt; alsdann sind seine Seiten:

$$ab' = \omega_u Y, \quad fd' = \omega_0 Y, \quad d'a = \lambda_0 Y$$

und

$$b'f = \lambda_u Y,$$

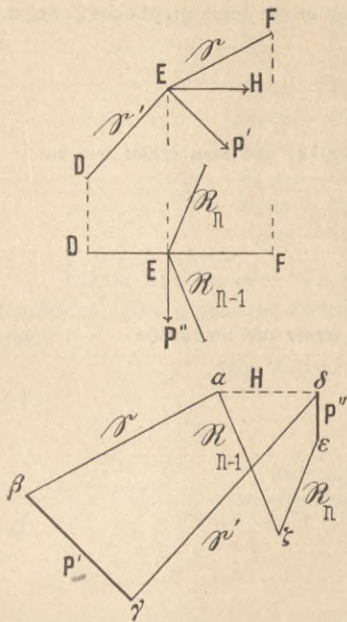
ω und λ haben in den Feldern der verschiedenen Zonen und allgemein auch in den Feldern derselben Zone verschiedene Werthe; diesem Umstande ist in Gleichung 345 durch die Zeiger Rechnung getragen.



247.
Ermittelung
der Stab-
spannungen.

Im Knotenpunkte E (Fig. 341) wirke eine äußere Kraft P in beliebiger Richtung. Man zerlegt P in eine Seitenkraft, welche in die lothrechte Ebene des betrachteten Sparrenzuges $DEF \dots$ fällt, die Kraft P' und in eine zu dieser Ebene senkrechte Seitenkraft P'' (in Fig. 341 im Grundriß angegeben). Fig. 341 zeigt den Sparrenzug DEF im Grundriß und Aufriß. Die Aufrissebene ist durch DEF gelegt. Auch weiterhin, insbesondere bei der Berechnung des Beispiels in Art. 248, soll jeder Sparrenzug vor der graphischen Zerlegung der Kräfte in die Zeichenebene gedreht werden, wodurch sich die Arbeit wesentlich vereinfacht. Im Punkte E halten einander nunmehr die Kräfte \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' , P' und H im Gleichgewicht; H ist die Mittelkraft der im Punkte E wirkenden Ringstabspannungen \mathfrak{R}_n und \mathfrak{R}_{n-1} und der Seitenkraft P'' ; diese drei Kräfte wirken in einer wagrechten, durch E gehenden Ebene, also auch ihre Mittelkraft H . Diese Mittelkraft H muß aber auch in die Ebene des Sparrenzuges DEF fallen; denn die sämtlichen außerdem noch vorhandenen Kräfte \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' und P' fallen in diese Ebene; das Gleichgewicht verlangt also, daß auch die letzte Kraft H in diese Ebene falle. Geht man nun vom Laternenringe aus, so ist für den obersten Punkt \mathfrak{S} gleich Null; mithin sind aus der bekannten Kraft P'

Fig. 341.



leicht durch Zerlegung H und \mathcal{E}' zu finden. Im Grundriss kennt man jetzt H und P'' ; daher können auch hier die beiden fehlenden Kräfte (R_n und R_{n-1}) durch Construction eines Kraftpolygons gefunden werden. Bei den weiter unten folgenden Knotenpunkten ist aber \mathcal{S} nach Vorstehendem bereits ermittelt, und man hat wiederum für jedes Kraftpolygon nur zwei Unbekannte.

In Fig. 341 ist $\overline{\alpha\beta} = \mathcal{S}$ und $\overline{\beta\gamma} = F'$ durch vorherige Construction gefunden, bzw. gegeben; die zu \mathcal{E}' und H gezogenen Parallelen vervollständigen das Kraftpolygon. Es ist $\gamma\delta = \mathcal{E}'$ und $\delta\alpha = H$. An H ist nunmehr in δ die Kraft $P'' = \overline{\delta\epsilon}$ gelegt und da die Mittelkraft von H und P'' gleich derjenigen von R_{n-1} und R_n ist, so geben die durch α und ϵ gezogenen Parallelen zu R_{n-1} und R_n die Kräfte $R_n = \overline{\epsilon\zeta}$ und $R_{n-1} = \overline{\zeta\alpha}$. Das Kraftpolygon $\alpha\zeta\epsilon\delta\alpha$ gehört zum Grundriss; man kann aber beide Kraftpolygone, wie in Fig. 341 geschehen ist, vereinen, wobei man das

eine um die Linie $\alpha\delta$ in die Ebene des anderen gedreht denkt.

Aus den Werthen \mathcal{S} , R , λ und ω können nun die Werthe S , R und Y ermittelt werden, indem man zunächst für die Knotenpunkte ohne Diagonalen die Werthe

für S und R aufsucht und so eine Reihe von bekannten Größen erhält, durch deren Einführung in die Gleichungen 345 alle Unbekannten bestimmbar werden.

Das vorgeführte Verfahren soll an einem Beispiele gezeigt werden.

Beispiel. Die in Fig. 342 im Grundriss und Aufriss dargestellte Kuppel über achteckiger Grundfläche, bei welcher der Durchmesser des umschriebenen Kreises 20m beträgt, sei links der lothrechten Schnittebene AA nur mit dem Eigengewicht, rechts von der Ebene AA voll belastet. Die Knotenpunktlasten betragen

248.
Beispiel.

durch Eigengewicht allein insgesamt
im Laternenring: $G_1 = 500 \text{ kg}$, $G_1 + P_1 = 1500 \text{ kg}$;
im mittleren Ring: $G_2 = 800 \text{ kg}$, $G_2 + P_2 = 2500 \text{ kg}$.

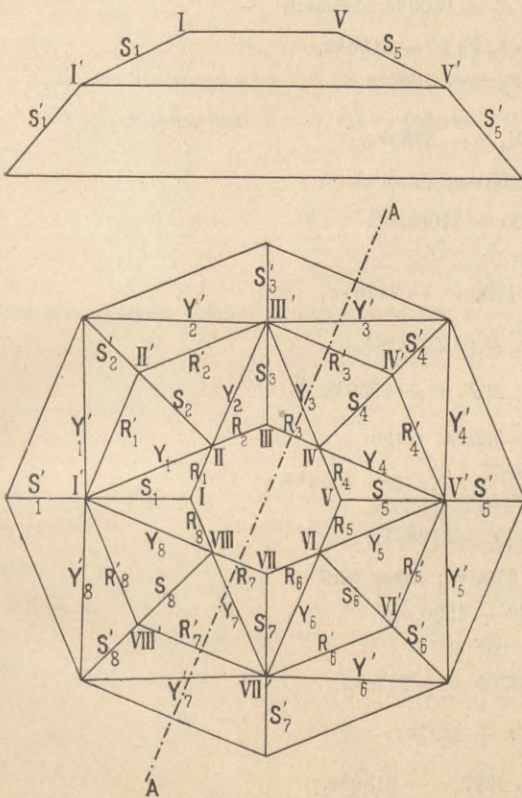
Die Lasten werden als lothrecht angenommen; die dieser Belastung entsprechenden Stabspannungen sind zu ermitteln.

Zunächst sind nach Fig. 340 die Zahlenwerthe für $\omega_0, \lambda_n, \omega_n, \lambda_n$ der oberen Felder und $\omega_0', \lambda_0', \omega_n', \lambda_n'$ der unteren Felder ermittelt. Man erhält

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 0,94, & \lambda_0 &= 0,8, \\ \omega_n &= 0,39, & \lambda_n &= 0,8, \\ \omega_0' &= 0,96, & \lambda_0' &= 6,6, \\ \omega_n' &= 0,67, & \lambda_n' &= 0,6. \end{aligned}$$

Stäbe der oberen Felder. In den Knotenpunkten I, III, V, VII des Laternenringes

Fig. 342.



treffen nur je drei Stäbe zusammen; die Zerlegung wird ganz, wie in Art. 247 gezeigt ist, vorgenommen. In jedem der Knotenpunkte *I* und *III* wirkt die Last $G = 500 \text{ kg}$, und man erhält durch graphische Zerlegung

$$S_1 = S_3 = - 1050 \text{ kg}$$

und

$$R_1 = R_8 = R_2 = R_3 = - 1230 \text{ kg.}$$

In den Knotenpunkten *V* und *VII* wirkt die Belastung $G_1 + P_1 = 1500 \text{ kg}$, und man erhält wie vor

$$S_5 = S_7 = - 3150 \text{ kg}$$

und

$$R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = - 3700 \text{ kg.}$$

Nunmehr sind die Knotenpunkte mit Diagonalen zu betrachten.

Knotenpunkt II. Es wirken: Knotenpunktlast $G_1 = 500 \text{ kg}$; ferner die Stabkräfte

$$\mathfrak{S}_2 = S_2 + \lambda_0 Y_1 + \lambda_0 Y_2,$$

$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + \omega_0 Y_1,$$

$$\mathfrak{R}_2 = R_2 + \omega_0 Y_2.$$

Die graphische Zerlegung von G_1 in \mathfrak{S}_2 , \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 ergibt wie oben

$$\mathfrak{S}_2 = - 1050 \text{ kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = - 1230 \text{ kg.}$$

Hieraus folgt

$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1 = 0, \quad Y_1 = 0,$$

$$\omega_0 Y_2 = \mathfrak{R}_2 - R_2 = 0, \quad Y_2 = 0.$$

$$S_2 = \mathfrak{S}_2 = - 1050 \text{ kg.}$$

Eben so ergibt sich durch Betrachtung des Knotenpunktes VI:

$$Y_6 = Y_5 = 0 \quad \text{und} \quad S_6 = - 3150 \text{ kg.}$$

Knotenpunkt IV. Knotenpunktlast $G_1 + P_1 = 1500 \text{ kg}$; demnach

$$\mathfrak{S}_4 = S_4 + \lambda_0 Y_4 + \lambda_0 Y_3 = - 3150 \text{ kg,}$$

$$\mathfrak{R}_3 = R_3 + \omega_0 Y_3 = - 3700 \text{ kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_4 = R_4 + \omega_0 Y_4 = - 3700 \text{ kg.}$$

Oben war gefunden: $R_3 = - 1230 \text{ kg}$ und $R_4 = - 3700 \text{ kg}$; demnach ist

$$\omega_0 Y_4 = - 3700 + 3700 = 0,$$

$$Y_4 = 0;$$

$$\omega_0 Y_3 = - 3700 + 1230 = - 2470 \text{ kg,}$$

$$Y_3 = - \frac{2470}{0,94} = - 2627 \text{ kg;}$$

$$S_4 = - 3150 + 0,8 \cdot 2627 = - 1050 \text{ kg.}$$

Knotenpunkt VIII. Knotenpunktlast $G_1 = 500 \text{ kg}$; mithin

$$\mathfrak{S}_8 = S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 = - 1050 \text{ kg,}$$

$$\mathfrak{R}_8 = R_8 + \omega_0 Y_8 = - 1230 \text{ kg,}$$

$$\mathfrak{R}_7 = R_7 + \omega_0 Y_7 = - 1230 \text{ kg.}$$

Oben ist gefunden: $R_8 = - 1230 \text{ kg}$ und $R_7 = - 3700 \text{ kg}$; daher wird

$$\omega_0 Y_8 = - 1230 + 1230 = 0,$$

$$Y_8 = 0;$$

$$\omega_0 Y_7 = - 1230 + 3700 = + 2470 \text{ kg,}$$

$$Y_7 = \frac{2470}{0,94} = + 2627 \text{ kg;}$$

$$S_8 = - 1050 - 0,8 \cdot 2627 = - 3150 \text{ kg.}$$

Demnach ist in den oberen Feldern

$$\begin{array}{lll}
 R_1 = -1230 \text{ kg}, & S_1 = -1050 \text{ kg}, & Y_1 = 0; \\
 R_2 = -1230 \text{ kg}, & S_2 = -1050 \text{ kg}, & Y_2 = 0; \\
 R_3 = -1230 \text{ kg}, & S_3 = -1050 \text{ kg}, & Y_3 = -2627 \text{ kg}; \\
 R_4 = -3700 \text{ kg}, & S_4 = -1050 \text{ kg}, & Y_4 = 0; \\
 R_5 = -3700 \text{ kg}, & S_5 = -3150 \text{ kg}, & Y_5 = 0; \\
 R_6 = -3700 \text{ kg}, & S_6 = -3150 \text{ kg}, & Y_6 = 0; \\
 R_7 = -3700 \text{ kg}, & S_7 = -3150 \text{ kg}, & Y_7 = +2627 \text{ kg}; \\
 R_8 = -1230 \text{ kg}, & S_8 = -3150 \text{ kg}, & Y_8 = 0.
 \end{array}$$

Stäbe der unteren Felder. In den Knotenpunkten II' , IV' , VI' , $VIII'$ setzen keine Diagonalen an. Die graphische Zerlegung erfolgt hier, genau wie in Art. 247 (S. 256) gezeigt ist. Man erhält

$$\text{Knotenpunkt } II': S_2 = -1050 \text{ kg}, \quad G_2 = 800 \text{ kg}$$

und

$$S_2' = -1700 \text{ kg};$$

$$R_1' = -150 \text{ kg} \quad \text{und} \quad R_2' = -150 \text{ kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt } VIII': S_8 = -3150 \text{ kg}, \quad G_2 = 800 \text{ kg}$$

und

$$S_8' = -2800 \text{ kg};$$

$$R_7' = +1350 \text{ kg} \quad \text{und} \quad R_8' = +1350 \text{ kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt } IV': S_4 = -1050 \text{ kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500 \text{ kg}$$

und

$$S_4' = -3880 \text{ kg};$$

$$R_3' = -1950 \text{ kg} \quad \text{und} \quad R_4' = -1950 \text{ kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt } VI': S_6 = -3150 \text{ kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500 \text{ kg}$$

und

$$S_6' = -5050 \text{ kg};$$

$$R_5' = -550 \text{ kg} \quad \text{und} \quad R_6' = -550 \text{ kg}.$$

In den Knotenpunkten mit Diagonalen ergibt sich das Folgende.

$$\text{Knotenpunkt } I': S_1 = -1050 \text{ kg}, \quad Y_1 = 0, \quad Y_8 = 0$$

und

$$G_2 = 800 \text{ kg};$$

$$\mathfrak{S}_1' = S_1' + \lambda_0' Y_1' + \lambda_0' Y_8' = -1700 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_1' = R_1' + \omega_0' Y_1' = -150 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_8' = R_8' + \omega_0' R_2' = -150 \text{ kg}.$$

Oben war gefunden: $R_1' = -150 \text{ kg}$ und $R_8' = +1350 \text{ kg}$; demnach ist

$$\omega_0' Y_1' = -150 + 150 = 0$$

und

$$Y_1' = 0;$$

$$\omega_0' Y_8' = -150 - 1350 = -1500 \text{ kg},$$

$$Y_8' = -\frac{1500}{0,96} = -1560 \text{ kg};$$

$$S_1' = -1700 + 0,6 \cdot 1560 = -760 \text{ kg};$$

daher

$$Y_1' = 0 \quad \text{und} \quad Y_8' = -1560 \text{ kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt } V': S_5 = -3150 \text{ kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500 \text{ kg}$$

und

$$Y_5 = Y_4 = 0;$$

$$\mathfrak{S}_5' = S_5' + \lambda_0' Y_4' + \lambda_0' Y_5' = -5050 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_4' = R_4' + \omega_0' Y_4' = -550 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_5' = R_5' + \omega_0' Y_5' = -550 \text{ kg}.$$

Oben war gefunden: $R_5' = -550$ kg; demnach $Y_5' = 0$;
 $R_4' = -1950$ kg;

also

$$\omega_0' Y_4' = -550 + 1950 = +1400 \text{ kg},$$

$$Y_4' = \frac{1400}{0,96} = +1460 \text{ kg};$$

$$S_5' = -5050 - 0,6 \cdot 1460 = -5930 \text{ kg}.$$

Knotenpunkt III': $\mathfrak{S}_3 = -1050$ kg + $\lambda_u Y_3 = -1050 - 0,8 \cdot 2627 = -3150$ kg,
 $G_2 = 800$ kg,

fomit

$$Y_2 = 0 \text{ und } Y_3 = -2627 \text{ kg};$$

$$\mathfrak{S}_3' = S_3' + \lambda_0' Y_2' + \lambda_0' Y_3' = -2800 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{H}_2' = R_2' + \omega_u Y_2 + \omega_0' Y_2' = +1350 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{H}_3' = R_3' + \omega_u Y_3 + \omega_0' Y_3' = +1350 \text{ kg}.$$

Es ist

$$\omega_u Y_2 = 0$$

und

$$\omega_u Y_3 = -0,39 \cdot 2627 = -1025 \text{ kg}.$$

Oben war gefunden: $R_2' = -150$ kg und $R_3' = -1950$ kg; daher ist

$$\omega_0' Y_2' = 1350 + 150 = +1500 \text{ kg}$$

und

$$Y_2' = \frac{1500}{0,96} = +1560 \text{ kg};$$

$$\omega_0' Y_3' = +1350 + 1950 + 1025 = +4325 \text{ kg},$$

$$Y_3' = \frac{4325}{0,96} = +4510 \text{ kg};$$

$$S_3' + 0,6 \cdot 1560 + 0,6 \cdot 4510 = -2800 \text{ kg},$$

$$S_3' = -6410 \text{ kg}.$$

Knotenpunkt VII': $Y_6 = 0$, $Y_7 = 2627$ kg

und

$$G_2 + F_2 = 2500 \text{ kg};$$

demnach

$$\mathfrak{S}_7 = S_7 + \lambda_u Y_6 + \lambda_u Y_7 = -3150 + 0,8 \cdot 2627 = -1050 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{S}_7' = S_7' + \lambda_0' Y_7' + \lambda_0' Y_6' = -3880 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{H}_6' = R_6' + \omega_u Y_6 + \omega_0' Y_6' = -1950 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{H}_7' = R_7' + \omega_u Y_7 + \omega_0' Y_7' = -1950 \text{ kg}.$$

Oben ist gefunden: $R_6' = -550$ kg, $R_7' = +1350$ kg und $Y_7 = 2627$ kg; also

$$Y_7 = 0,39 \cdot 2627 = 1025 \text{ kg};$$

fomit wird

$$\omega_0' Y_6' = -1950 + 550 = -1400 \text{ kg}$$

und

$$Y_6' = -\frac{1400}{0,96} = -1460 \text{ kg};$$

$$1350 + 1025 + \omega_0' Y_7' = -1950 \text{ kg},$$

$$\omega_0 Y_7' = -1950 - 2375 = -4325 \text{ kg},$$

$$Y_7' = -\frac{4325}{0,96} = -4510 \text{ kg};$$

$$S_7' = -3880 + 0,6 (4510 + 1460) = -300 \text{ kg}.$$

Die Spannungen in den unteren Feldern sind daher:

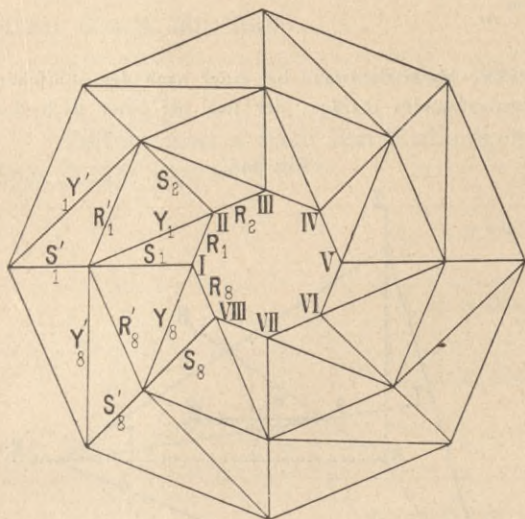
$R_1' = -150$ kg,	$S_1' = -760$ kg,	$Y_1' = 0$,
$R_2' = -150$ kg,	$S_2' = -1700$ kg,	$Y_2' = +1560$ kg,
$R_3' = -1950$ kg,	$S_3' = -6410$ kg,	$Y_3' = +4510$ kg,
$R_4' = -1950$ kg,	$S_4' = -3880$ kg,	$Y_4' = +1460$ kg,
$R_5' = -550$ kg,	$S_5' = -5930$ kg,	$Y_5' = 0$,
$R_6' = -550$ kg,	$S_6' = -5050$ kg,	$Y_6' = -1460$ kg,
$R_7' = +1350$ kg,	$S_7' = -300$ kg,	$Y_7' = -4510$ kg,
$R_8' = +1350$ kg,	$S_8' = -2800$ kg,	$Y_8' = -1560$ kg.

Die Spannungen im Fufsring können auf den gefundenen Werthen leicht ermittelt werden. Es wird empfohlen, von den 8 Auflagern eines um das andere als festes Auflager zu construiren.

Wenn kein Knotenpunkt ohne Diagonalen vorhanden ist, wenn z. B. die Anordnung nach Fig. 343 vorliegt, so ist die Ermittlung der Diagonalen-Spannungen auf gleichem Wege leicht durchführbar.

249.
Andere
Anordnung
der
Diagonalen.

Fig. 343.



Man zerlege die Knotenlast im Knotenpunkte *I* in die Stabkräfte

$$\mathfrak{R}_8 = R_8 + \omega_0 Y_8,$$

$$\mathfrak{S}_1 = S_1 + \lambda_0 Y_8 \text{ und } R_1;$$

ferner die im Knotenpunkte *II* wirkende Belastung in die Stabkräfte

$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + \omega_0 Y_1,$$

$$\mathfrak{S}_2 = S_2 + \lambda_0 Y_1 \text{ und } R_2.$$

Man kennt also \mathfrak{R}_1 aus der Zerlegung am Knotenpunkt *II*, R_1 aus der Zerlegung am Knotenpunkte *I*; mithin kann man Y_1 aus der Gleichung

$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1$$

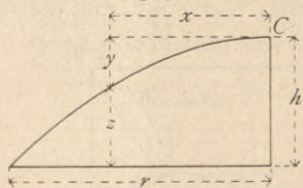
finden. In gleicher Weise ergeben sich alle Diagonalspannungen.

3) Erzeugende Kuppelcurve.

Die erzeugende Curve ist in den meisten Fällen eine Parabel (Fig. 344) der Gleichung $y = \frac{hx^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel *C* liegt, die halbe Spannweite gleich r , die Pfeilhöhe gleich h gesetzt ist, oder eine cubische Parabel der

250.
Parabel-
Kuppel.

Fig. 344.



Gleichung $y = \frac{hx^3}{r^3}$. Letztere Curvenform hat den Vortheil, dafs in den Zwischenringen bei gleichmäfsig vertheilter Belastung die Spannung Null herrscht und dafs die Spannungen in den Sparren nahezu constant sind, was sich folgendermassen ergibt.

Die Spannung im Sparrenstab *EF* (Fig. 345) ist durch Betrachtung des Theiles zwischen dem Scheitel *C* und dem durch die Sparrenmitte gelegten Schnitte *II* zu ermitteln. Die algebraische Summe der auf dieses Stück wirkenden lothrechten Kräfte ist gleich Null, daher, wenn die belastende Grundfläche mit F_1 und die Belastung für 1 qm der Grundfläche mit g bezeichnet wird, $S \sin \alpha = g F_1$. Nun ist

$$F_1 = \frac{x^2 \pi}{n}, \text{ mithin } S \sin \alpha = \frac{g x^2 \pi}{n} = S \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Wird flatt des Vieleckes die stetig gekrümmte Curve der Berechnung zu Grunde gelegt, so ist

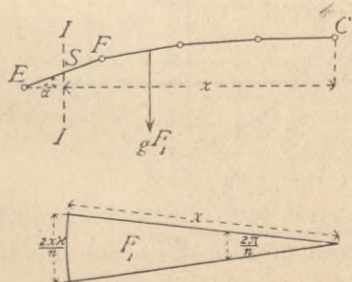
$$y = \frac{hx^3}{r^3} \text{ und } \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{3hx^2}{r^3};$$

mithin

$$S \cos \alpha \frac{3hx^2}{r^3} = \frac{g x^2 \pi}{n}, \text{ woraus } S \cos \alpha = \frac{g \pi r^3}{3nh}, \quad 346.$$

d. h. $S \cos \alpha$ ist constant. Da aber wegen der flachen Neigung der Kuppel der Winkel α sehr klein ist, so ändert sich auch $\cos \alpha$ sehr wenig; die Spannung ist daher im ganzen Sparren nahezu constant.

Fig. 345.



Betrachtet man nun einen Knotenpunkt E (Fig. 331) und setzt die algebraische Summe der in ihm wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null, so wird

$0 = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - H_m$, woraus $H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0$, da nach Gleichung 346 $S \cos \alpha$ constant ist. Die Ringspannung ist dann

$$R = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0 \dots \dots \dots 347.$$

Die obigen Angaben sind damit bewiesen.

Noch möge bemerkt werden, daß der theoretische Materialaufwand bei einer nach der cubischen Parabel gekrümmten Kuppel nur $\frac{2}{3}$ desjenigen Materialaufwandes beträgt, der sich bei einer nach der gemeinen Parabel gekrümmten Kuppel ergibt.

Fig. 346.

4) Winddruck auf die Kuppel.

251.
Winddruck
auf die
Kuppel.

Bei steilen Kuppeln ist es nicht an­gängig, nur die lothrechte Componente η des Winddruckes (vergl. Art. 30, S. 23) zu berücksichtigen; man muß in solchen Fällen die wirklich auf die Kuppel übertragenen Windkräfte kennen.

Der Winddruck gegen eine beliebige Ebene (Tangentenebene an die Kuppel) ergibt sich folgendermaßen (Fig. 346). Durch einen Punkt A im Raume werden drei Coordinatenachsen gelegt, welche senkrecht zu einander stehen; die X -Axe sei wagrecht und parallel zu der gleichfalls wagrecht angenommenen Windrichtung gelegt. Im Punkte P der Ebene wird die Normale \overline{PN} errichtet, außerdem die Linie \overline{PW} parallel zur Windrichtung gezogen. Die durch \overline{PN} und \overline{PW} gelegte Ebene schneide die gegebene Ebene in der Linie $\overline{TT'}$; der Winkel WPT werde φ genannt. Alsdann ist nach Art. 29 (S. 22) der Winddruck auf die Flächeneinheit der Ebene

$$n = p \sin \varphi = p \cos \psi;$$

n ist normal zur Ebene gerichtet.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Kuppelfläche seien x, y, z (Fig. 347); die X -Axe liege parallel zur Windrichtung. Der Normalschnitt mit der Fläche, welcher im Punkte P durch die Normale PN und PW geht, habe den Krümmungshalbmesser ρ und den Krümmungsmittelpunkt O mit den Coordinaten a, b, c . Die Coordinaten des

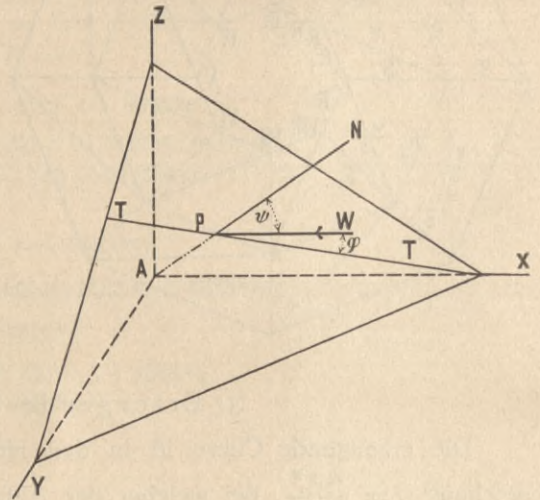
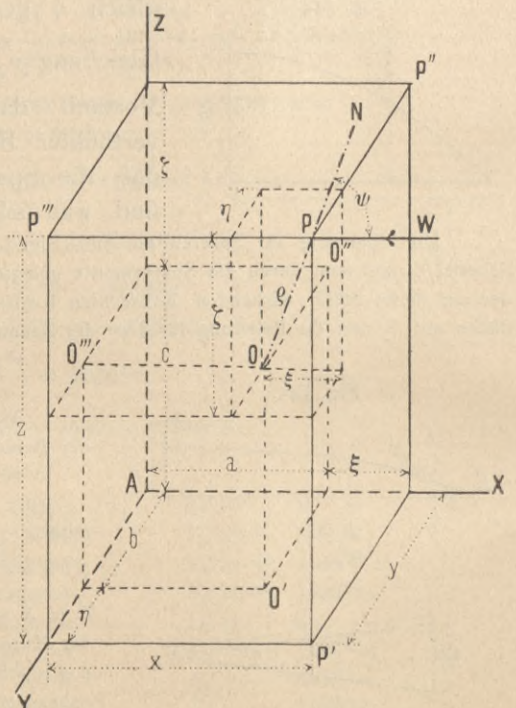


Fig. 347.



Punktes P , bezogen auf den Punkt O , seien ξ, η, ζ ; endlich bilde die Normale und der Krümmungshalbmesser \overline{OP} mit den Coordinaten-Axen die Winkel bezw. α, β, γ . Alsdann ist nach Fig. 347

$$\cos \alpha = \frac{\xi}{\rho}, \quad \cos \beta = \frac{\eta}{\rho}, \quad \cos \gamma = \frac{\zeta}{\rho};$$

ferner $\psi = \alpha$, also hier

$$n = p \cdot \cos \alpha = p \frac{\xi}{\rho}.$$

Zerlegt man n nach den Richtungen der Coordinaten-Axen, so erhält man als Seitenkräfte von n

$$\left. \begin{aligned} n_x &= n \cos \alpha = p \frac{\xi^2}{\rho^2} \\ n_y &= n \cos \beta = p \frac{\xi \eta}{\rho^2} \\ n_z &= n \cos \gamma = p \frac{\xi \zeta}{\rho^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 348.$$

und, da $\xi = x - a, \quad \eta = y - b \quad \text{und} \quad \zeta = z - c$ ist,

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \frac{p}{\rho^2} (x - a)^2 \\ n_y &= \frac{p}{\rho^2} (x - a)(y - b) \\ n_z &= \frac{p}{\rho^2} (x - a)(z - c) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 349.$$

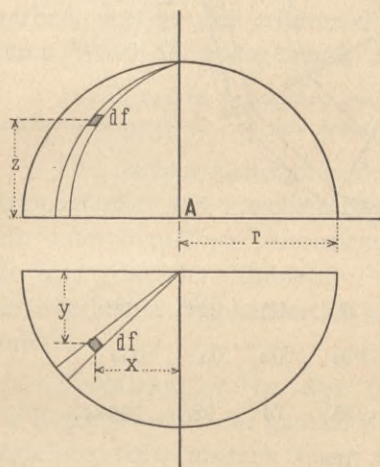
Die Gleichungen 348 u. 349 geben die Seitenkräfte des Winddruckes an einem beliebigen Punkte P der Kuppelfläche, bezogen auf die Flächeneinheit, ausgedrückt in den Coordinaten des Punktes P und des Krümmungsmittelpunktes des in Betracht kommenden Normalschnittes, so wie dem betreffenden Krümmungshalbmesser ρ . Durch Integration können die auftretenden Winddrücke ermittelt werden.

Um den auf einen Knotenpunkt des Kuppelfachwerkes entfallenden Winddruck zu ermitteln, genügt es, die Gröfse n desselben für die Flächeneinheit im Knotenpunkte selbst zu ermitteln und dieses n mit dem Inhalt der Kuppelfläche zu multipliciren, welche diesem Knotenpunkte zugewiesen ist. Ist die Abscisse des betreffenden Knotenpunktes x , so ist

$$n = p \frac{(x - a)}{\rho}$$

Für die Kugelkuppel (Fig. 348) sind alle Normalschnitte grösste Kreise der Kugel; alle ρ sind gleich dem Kugelhalbmesser r . Wählt man den Mittelpunkt der Kuppel als Anfangspunkt der Coordinatenaxen, so werden $a = b = c = 0$, und es werden

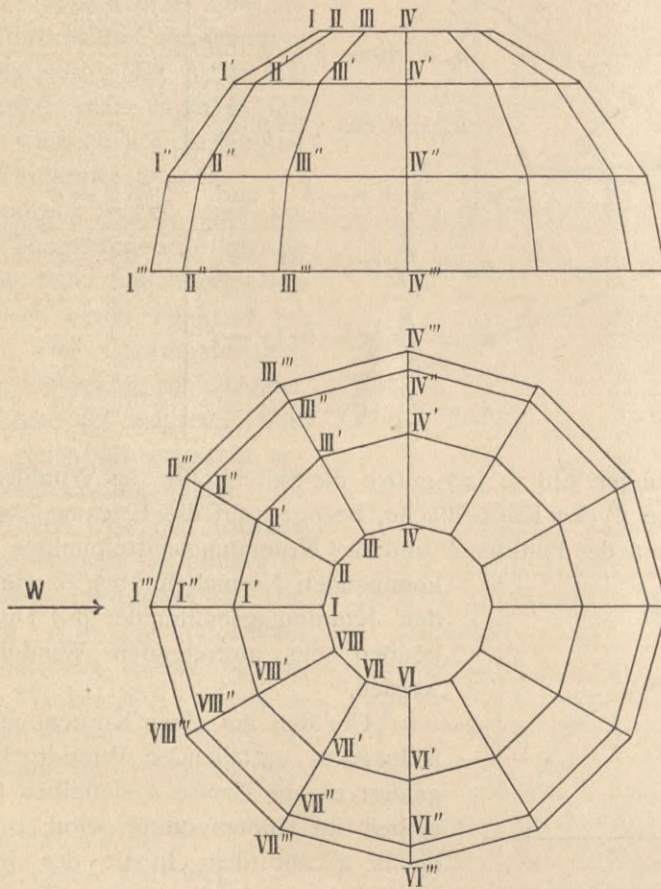
Fig. 348.



$$\left. \begin{aligned} n &= p \frac{x}{r} \\ n_x &= \frac{p}{r^2} x^2 \\ n_y &= \frac{p}{r^2} (xy) \\ n_z &= \frac{p}{r^2} (xz) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 350.$$

Beispiel. Für das in Fig. 349 dargestellte, einer Halbkugelkuppel eingeschriebene Polyeder über einem Zwölfeck sei $r = 10$ m, der Wind komme von links. Dann sind die Werthe von n für die bezeichneten Punkte wie in nachstehender Tabelle angegeben (für $p = 120$ kg für 1 qcm):

Fig. 349.



Punkt I	I'	I''	I'''	Punkt II	II'	II''	II'''
$\frac{x}{r} = 0,32$	0,71	0,94	1	$\frac{x}{r} = 0,29$	0,62	0,82	0,88
$n = \frac{p x}{r} = 38$	85	113	120 kg	$n = \frac{p x}{r} = 35$	74	98	106 kg.
	Punkt III	III'	III''	III'''			
	$\frac{x}{r} = 0,17$	0,36	0,47	0,5			
	$n = \frac{p x}{r} = 20$	43	56	60 kg.			

Fig. 351.

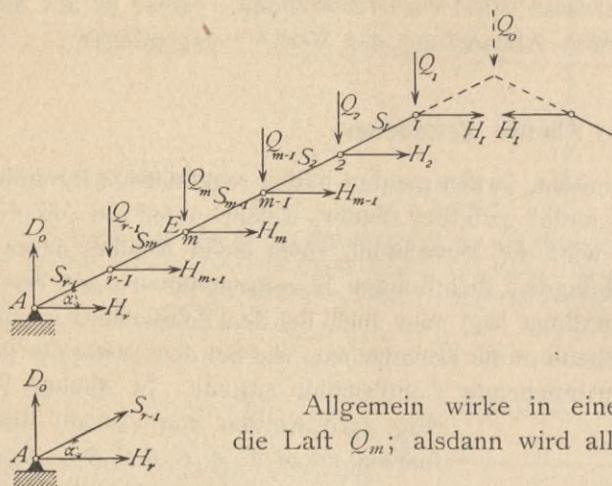
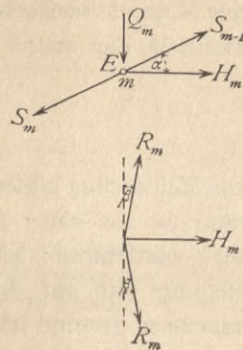


Fig. 352.



Allgemein wirke in einem Knotenpunkte m (Fig. 351) die Last Q_m ; alsdann wird allgemein

$$S_m = - \frac{\sum^m (Q)}{\sin \alpha} \dots \dots \dots 351.$$

Die Sparrenspannungen durch das Eigengewicht werden erhalten, indem der Reihe nach für $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ bezw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n}, \frac{G_3}{n} \dots$ eingesetzt wird. Man erhält

$$S_m^g = - \frac{\sum^m (G)}{n \sin \alpha} \dots \dots \dots 352.$$

Für $m = 1, 2, 3 \dots$ wird

$$S_1^g = - \frac{G_1}{n \sin \alpha}; S_2^g = - \frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha}; S_3^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha} \text{ etc. } 353.$$

Aus der Gleichung 340 ergibt sich, dass die Sparrenspannungen durch zufällige Last am größten bei voller Belastung sind, und zwar wird

$$S_m^{p \max} = - \frac{\sum^m (P)}{n \sin \alpha} \dots \dots \dots 354.$$

und für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$S_1^{p \max} = - \frac{P_1}{n \sin \alpha}; S_2^{p \max} = - \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha}; S_3^{p \max} = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha} \text{ etc. } 355.$$

Falls keine Laterne vorhanden ist, gelten die Gleichungen 351 bis 354 ebenfalls; nur ist überall in die Summen auch Q_0 aufzunehmen, d. h. der Theil der Firftbelastung, welcher auf den Sparren entfällt. (Allerdings gilt dies nur für angenäherte Berechnung.)

Spannungen in den Ringen. Die algebraische Summe der in E (Fig. 352) wirkenden wagrechten Kräfte ist gleich Null; bezeichnet H_m die Mittelkraft der beiden Ringspannungen R_m , so ist daher

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha - S_m \cos \alpha,$$

woraus folgt:

$$H_m = (S_m - S_{m-1}) \cos \alpha = - \frac{\sum^m (Q) - \sum^{m-1} (Q)}{\sin \alpha} \cos \alpha = - Q_m \cotg \alpha.$$

Nun ist $H_m = 2 R_m \sin \beta$ und, da nach Art. 243 (S. 249) $\beta = \frac{\pi}{n}$ ist,

$$R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = - \frac{Q_m \cotg \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 356.$$

Die Belaftung durch das Eigengewicht erzeugt demnach eine Spannung

$$R_m^g = - \frac{G_m \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 357.$$

Falls ein Laternenring vorhanden ist, so gilt die Gleichung 357 auch für diesen. Für denselben ist $m = 1$ und $\sum_1^{m-1} (Q) = 0$, so wie $\sum_1^m (Q) = Q_1$. Wir erhalten demnach für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$R_1^g = - \frac{G_1 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_1^g = - \frac{G_2 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc.} \dots \dots \dots 358.$$

Die Gleichungen 357 u. 358 ergeben, dass in sämtlichen Ringen durch das Eigengewicht Druck erzeugt wird; die Gleichung 356 gilt aber nicht für den Mauerring. Am Knotenpunkt *A* (Fig. 351) wirken die Kräfte $D_0 = \Sigma (Q)$, H_r und S_{r-1} ; mithin ist $S_{r-1} \cos \alpha + H_r = 0$, woraus $H_r = -S_{r-1} \cos \alpha$. Ferner ist

$$D_0 + S_{r-1} \sin \alpha = 0, \text{ woraus } S_{r-1} = - \frac{\sum_1^{r-1} (Q)}{\sin \alpha}. \text{ Daher wird } H_r = \sum_1^{r-1} (Q) \cotg \alpha$$

und da $R_r = \frac{H_r}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$ ist, wird

$$R_r = \frac{\sum_1^{r-1} (Q) \cotg \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 359.$$

Der Mauerring erhält also Zug.

Das Eigengewicht erzeugt in demselben die Spannung

$$R_r^g = \frac{(G_1 + G_2 + \dots + G_{r-1}) \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 360.$$

Die größte durch zufällige Belaftung erzeugte Spannung findet in einem Ringe nach Gleichung 356 statt, wenn Q_m seinen größten Werth hat. Da Q , aufser beim Mauerring, nie negativ wird, so ist die Ringspannung durch zufällige Belaftung, abgesehen vom Mauerring, stets Druck. Demnach wird

$$R_1^{p \min} = - \frac{P_1 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_2^{p \min} = - \frac{P_2 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc.};$$

allgemein

$$R_m^{p \min} = - \frac{P_m \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 361.$$

Weiters ist $R_1^{\text{max}} = R_2^{\text{max}} = R_m^{\text{max}} = 0$. Die größte Druckspannung in einem Ringe findet also schon statt, wenn nur die betreffende Zone belastet ist; die Belastung der übrigen Zonen ist auf die Ringspannung ohne Einfluss. Man kann demnach auch sagen, dass die größte Ringspannung in allen Ringen bei zufälliger Belastung des ganzen Daches stattfindet.

Im Mauerring findet der größte Zug durch zufällige Belastung bei voller Belastung statt; derselbe ist

$$R_r^{\text{max}} = \frac{(P_1 + P_2 \dots + P_{r-1}) \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 362.$$

Druck findet in demselben nicht statt.

Spannungen in den Diagonalen. Für dieselbe Belastungsart, welche bei den Kuppeln zu Grunde gelegt ist, ergibt sich der Spannungsunterschied in zwei benachbarten Sparren, zwischen denen die Belastungsgrenze liegt, zu

$$\Delta = - \frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha}$$

und die Spannung in der Diagonalen, welche dieselbe übertragen soll, zu

$$Y = \frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha} \cdot \frac{d}{s},$$

in welchem Ausdruck d , bzw. s die Längen der Diagonale und des Sparrens bezeichnen. Demnach wird

$$Y_1 = \frac{P_1}{n \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{d_1}{s_1}, \quad Y_2 = \frac{P_1 + P_2}{n \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{d_2}{s_2} \text{ etc.} \dots \dots \dots 363.$$

Fig. 353.

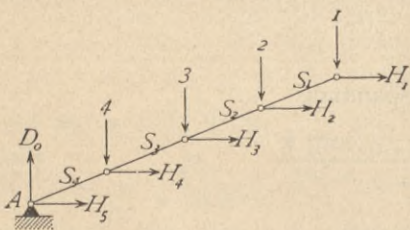
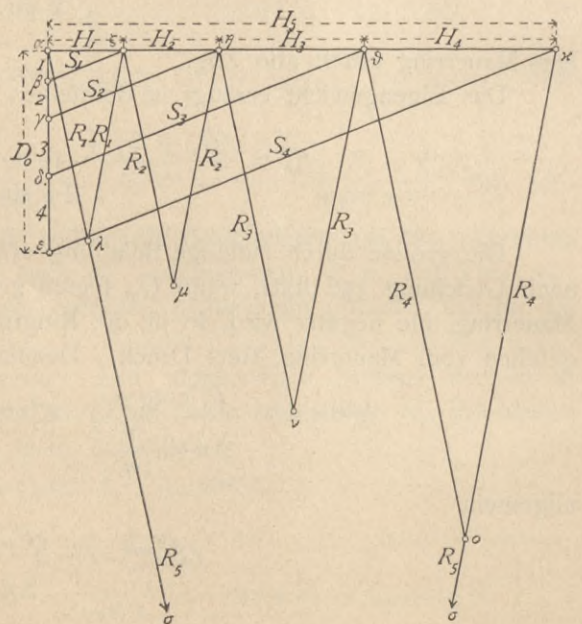


Fig. 354.



Die Berechnung kann auch nach dem Verfahren von Müller-Breslau vorgenommen werden, welches in Art. 246 bis 249 (S. 255) für die Kuppelflechtwerke vorgeführt ist.

Um die Stabspannungen mittels Zeichnung (Fig. 353 u. 354) zu ermitteln, seien die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte $1, 2, 3, 4$; alsdann ergibt sich leicht, wenn $\alpha\beta = 1, \beta\gamma = 2, \gamma\delta = 3, \delta\varepsilon = 4$ gemacht wird, $\beta\xi = S_1, \xi\alpha = H_1$,

254. Graphische Ermittlung der Stabspannungen.

$\gamma \eta = S_2, \eta \zeta = H_2, \delta \vartheta = S_3, \vartheta \eta = H_3, \varepsilon \alpha = S_4, \alpha \vartheta = H_4$; ferner $\varepsilon \alpha = D_0, \alpha \alpha = H_5, \zeta \lambda = \lambda \alpha = R_1, \eta \mu = \mu \zeta = R_2, \vartheta \nu = \nu \eta = R_3, \alpha \sigma = \sigma \vartheta = R_4$ und $\alpha \sigma = \sigma \alpha = R_5$ (= Mauerringspannung).

Je nachdem nun die Kräfte $1, 2, 3, 4$ die Eigengewichte oder die zufälligen Lasten bedeuten, erhält man die durch die eine oder andere Belaftung erzeugten Spannungen. Die Spannungen in den Diagonalen sind leicht zu construiren.

c) Steile Zeltdächer oder Thurmdächer.

Als lothrechte Belaftung ist hier nur das Eigengewicht einzuführen. Eine Belaftung durch Schnee findet nicht statt, weil wegen der großen Steilheit des Daches der Schnee nicht liegen bleibt. Diese lothrechte Belaftung erzeugt, da die Construction eben so, wie bei den flachen Zeltdächern, aus Sparren und Ringen zusammengefasst wird, Spannungen, welche genau, wie dort gezeigt wurde, zu berechnen sind. Auf diese Berechnung soll deshalb hier nicht weiter eingegangen werden. Dagegen spielt der Winddruck hier eine große Rolle, und die durch diesen erzeugten Spannungen sollen berechnet werden. Zunächst soll die Berechnung für ein vierseitiges Pyramidendach, alsdann für ein achtseitiges Pyramidendach gezeigt werden.

1) Vierseitiges Pyramidendach.

Der Winddruck auf eine Pyramidenseite ist am größten, wenn die Windrichtung im Grundriss senkrecht zur betreffenden Rechteckseite steht. Als dann ist der Winddruck für 1 qm schräger Dachfläche (Fig. 355 u. 356) nach Gleichung 7:

$\nu = 120 \sin(\alpha + 10^\circ)$; die vom Winde getroffene schiefe Dachfläche ist

$$F = \frac{a \lambda}{2} = \frac{a h}{2 \sin \alpha},$$

mithin der Gesamtdruck gegen eine Pyramidenseite

$$N = \frac{a h \nu}{2 \sin \alpha} \quad 364.$$

Wir denken uns nun in der Symmetrie-Ebene II einen ideellen Binder ABC (Fig. 355) und bestimmen die darin durch den Winddruck entstehenden Spannungen; wir nehmen vorläufig die Wagrechten und Diagonalen, wie in Fig. 356 gezeichnet,

an. Auf ein oben befindliches Kreuz wirke ein Winddruck W in der Höhe e_0 über dem Firstpunkt C ; außerdem wirken in den Knotenpunkten $C, E, F, G \dots$ die Kräfte $N_0, N_1, N_2, N_3 \dots$ senkrecht zur Dachfläche; die Größe dieser Kräfte ist leicht aus den auf die bezüglichen Knotenpunkte entfallenden Dachflächen zu ermitteln.

255.
Belaftung.

Fig. 355.

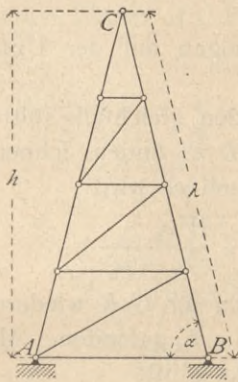


Fig. 357.

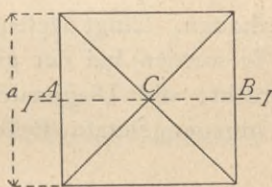
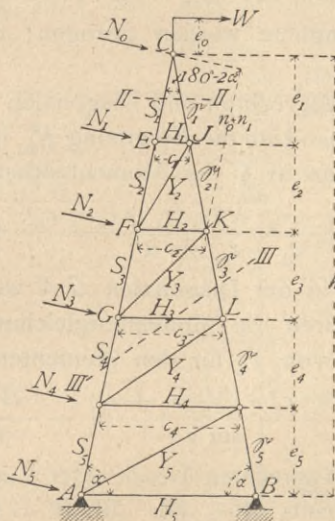


Fig. 356.



α) Berechnung der Spannungen im ideellen Binder. Um die Sparrenspannung S_1 (Fig. 356) an der Windseite zu erhalten, lege man einen beliebigen Schnitt durch CE , etwa nach $II II$, und betrachte das Bruchstück oberhalb des Schnittes. Wählt man \mathcal{F} als Momentenpunkt, so heisst die Gleichung der statischen Momente (Fig. 358):

$$0 = S_1 c_1 \sin \alpha - W(e_0 + e_1) - N_0 n_0.$$

Nun ist

$$\overline{C\mathcal{F}} = \frac{e_1}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad \cos(180 - 2\alpha) = \frac{n_0}{\overline{C\mathcal{F}}} = -\cos 2\alpha, \quad \text{daher}$$

$$n_0 = -\overline{C\mathcal{F}} \cos 2\alpha = -\frac{e_1}{\sin \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Man erhält hiernach

$$S_1 = \frac{W(e_0 + e_1)}{c_1 \sin \alpha} + \frac{N_0 e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{c_1 \sin^2 \alpha}.$$

Für irgend einen Sparren FG ist K der Momentenpunkt, und für S_3 ergibt sich der Werth

$$S_3 = \frac{1}{c_2 \sin \alpha} \left[W(e_0 + e_1 + e_2) + N_0(n_0 + n_1) + N_1 n_1 \right] - N_2 \cotg \alpha.$$

Für irgend einen Sparren KL auf der Unterwindseite ist G der Momentenpunkt und

$$\mathfrak{S}_3 = -\frac{1}{c_3 \sin \alpha} \left[W(e_0 + e_1 + e_2 + e_3) + \frac{N_0(e_1 + e_2 + e_3) + N_1(e_2 + e_3) + N_2 e_3}{\sin \alpha} \right].$$

Eben so ergeben sich leicht alle Sparrenspannungen, sowohl auf der Windseite, wie auf der Unterwindseite.

Die Sparren auf der Windseite werden gezogen; diejenigen auf der Unterwindseite werden gedrückt.

Die Spannungen in den Wagrechten und Diagonalen werden gleichfalls mittels der Momentenmethode ermittelt. Um die Spannung H_3 in GL zu finden, schneide man schräg nach $III III$; alsdann ist C der Momentenpunkt, und es wird

$$H_3 = -\frac{N_1 e_1 + N_2(e_1 + e_2) + N_3(e_1 + e_2 + e_3)}{(e_1 + e_2 + e_3) \sin \alpha} + \frac{W e_0}{e_1 + e_2 + e_3}.$$

Die Spannung Y_3 endlich in der Diagonalen GK wird, da für GK wiederum C der conjugirte Punkt ist, durch die Momentengleichung für C gefunden. Man erhält, wenn y_3 der Hebelsarm von Y_3 für den Momentenpunkt C ist,

$$Y_3 = \frac{1}{y_3} \frac{N_1 e_1 + N_2(e_1 + e_2)}{\sin \alpha} - \frac{W e_0}{y_3}.$$

Ob die Diagonalen und Wagrechten Druck oder Zug erhalten, hängt wesentlich von der Grösse des Moments $W e_0$ ab. Ist $W = 0$, so werden bei der gezeichneten Richtung der Diagonalen die Wagrechten gedrückt, die Diagonalen gezogen. Bei der entgegengesetzten Windrichtung findet entgegengesetzte Beanspruchung statt.

β) Graphische Ermittlung der Spannungen im ideellen Binder. Wird zunächst von der Kraft W abgesehen, so ergibt sich ohne Schwierigkeit der in Fig. 359 gezeichnete Kräfteplan, worin alle Stabspannungen, welche durch Winddruck erzeugt werden, enthalten sind.

Fig. 358.

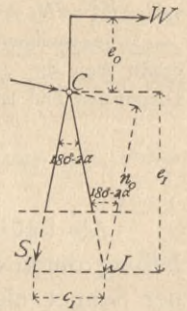


Fig. 359.

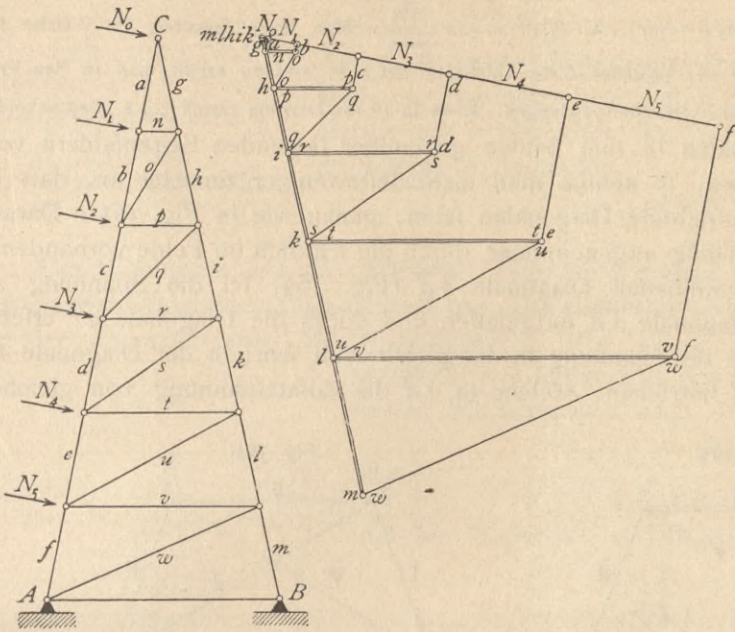
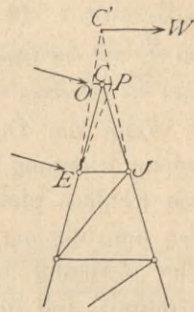


Fig. 360.



Falls noch ein Winddruck W vorhanden ist, so empfiehlt es sich, für die graphische Bestimmung der Spannungen statt der wirklich vorhandenen Stäbe EC und $ƳC$ zwei Stäbe EC' und $ƳC'$ einzuführen, wobei C' der Schnittpunkt der Kraft W mit der Mittel-

Lothrechten (Fig. 360) ist; die Ermittlung kann dann für den Thurm mit der Spitze $EOC'PƳ$ nach der Cremona'schen Methode erfolgen. Die Spannungen in EC und $ƳC$ können mit geringem Fehler denjenigen, welche sich für EO und $PƳ$ ergeben haben, gleich gesetzt werden.

γ) Zurückführung der Spannungen im ideellen Binder auf die wirklichen Stabspannungen. Die bisher berechneten Spannungen finden im ideellen Binder ACB (Fig. 361) statt. Jede Spannung in einem Stabe des ideellen

258.
Wirkliche
Stab-
spannungen.

Fig. 361.

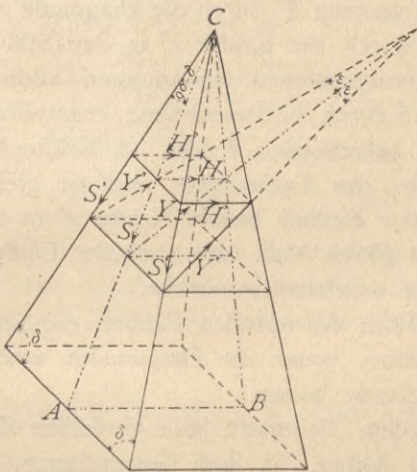
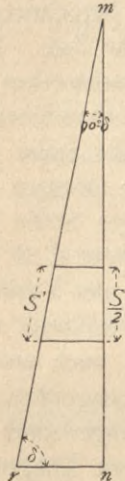


Fig. 362.



Binders wird nun durch zwei Stabspannungen der beiden wirklichen Binder geleistet, deren Ebenen mit derjenigen des ideellen Binders den Winkel $(90 - \alpha)$ einschließen.

Die Spannung S in irgend einem Sparren des ideellen Binders wird durch zwei Spannungen S' ersetzt; demnach ist

$$S = 2 S' \cos (90 - \delta) = 2 S' \sin \delta,$$

woraus

$$S' = \frac{S}{2 \sin \delta}; \quad \dots \quad 365.$$

eben so

$$S' = \frac{S}{2 \sin \delta} \quad \dots \quad 366.$$

Ferner wird $H = 2 H'$, woraus

$$H' = \frac{H}{2}; \quad \dots \quad 367.$$

$$Y = 2 Y' \cos \varepsilon,$$

woraus

$$Y' = \frac{Y}{2 \cos \varepsilon} \quad \dots \quad 368.$$

Auch auf graphischem Wege ist die Zurückführung leicht. Man construire (Fig. 362) den Winkel $(90 - \delta)$, bzw. ε . Ist $\sphericalangle r m n = 90 - \delta$, so ist $\frac{m r}{\sin \delta} = \frac{m n}{\sin \varepsilon}$. Man trage demnach die Werthe für $\frac{S}{2}$ und $\frac{\varepsilon}{2}$ auf der Linie $m n$ ab, projicire diese Abschnitte auf $m r$; alsdann erhält man in den Projectionen die gefuchten wirklichen Sparrenspannungen. Eben so ist die Division durch $\cos \varepsilon$ vorzunehmen.

Wenn die Diagonalen in den beiden gegenüber liegenden Seitenfeldern verschiedene Richtung haben, so nehme man nichtsdestoweniger zunächst an, das in beiden Feldern gleich gerichtete Diagonalen seien, genau wie in Fig. 361. Darauf ersetze man die nur vorläufig angenommene durch die wirklich im Felde vorhandene. In der vorläufig angenommenen Diagonale $\overline{b d}$ (Fig. 363) sei die Spannung zu Y' ermittelt; soll die Diagonale $\overline{b d}$ fortgelassen und durch die Diagonale $\overline{a c}$ ersetzt werden können, so muss die Spannung in $\overline{b d}$ gleich Null sein; in der Diagonale $\overline{a c}$ muss also eine Kraft Z herrschen, welche in $\overline{b d}$ die Zusatzspannung von gleicher

Fig. 363.

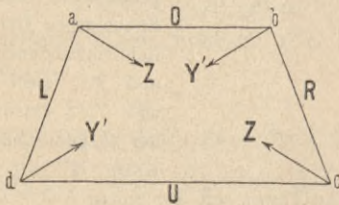
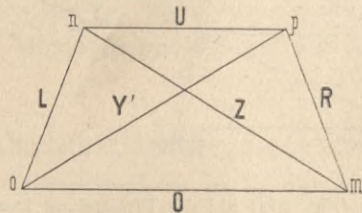


Fig. 364.



Größe Y' , aber entgegengesetztem Sinne mit der bereits in $\overline{b d}$ herrschenden Spannung erzeugt. Bringt man in a und c je die Kraft $Z = \overline{m n}$ an (Fig. 364), so erhält man die Größe der in den Stäben des Trapezes wirkenden Spannungen aus dem Kräfteplan. Es ist $L = \overline{o n}$, $O = \overline{m o}$, $U = \overline{n p}$ und $R = \overline{p m}$, und wegen der Gleichheit der Diagonalen des Trapezes ist $Z = Y'$ (absolut genommen). Ersetzt man also die Diagonale $\overline{b d}$ mit der berechneten Spannung Y' durch die Diagonale $a c$, so herrscht in letzterer der gleiche Zug. Die durch die Kräfte Z in den Stäben des Trapezes und des übrigen Fachwerkes hervorgerufenen Spannungen addiren sich zu den bereits in denselben vorhandenen und durch die Berechnung ermittelten. Diese Zusatzspannungen sind für die Stäbe des betreffenden Feldes im Kräfteplan der Fig. 364 verzeichnet, für alle übrigen Stäbe des Fachwerkes sind sie gleich Null. Denn für jeden dieser übrigen Stäbe ist der Einfluss beider Kräfte Z zu berücksichtigen. Die Resultirende beider Z ist aber gleich Null, also auch ihr Einfluss auf die Stabspannungen außerhalb des Feldes, in welchem sie wirken.

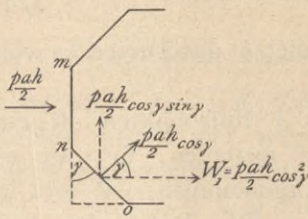
Das vorstehend angegebene Verfahren, mit Hilfe des ideellen Binders die Stabspannungen zu ermitteln, ist also auch anwendbar, wenn die Diagonalen zweier gegenüber liegender Felder entgegengesetzte Richtung haben.

Wenn einfache Diagonalen angeordnet werden, so erhält jede derselben Zug und Druck; will man nur gezogene Diagonalen haben, so sind Gegendiagonalen anzuordnen, worüber das Erforderliche bereits mehrfach gesagt ist.

2) Achtseitiges Pyramidendach.

Wir nehmen hier die Windrichtung, der einfachen Rechnung halber, wagrecht an und berechnen aus demselben Grunde den Winddruck so, als wenn die Seitenflächen lothrecht ständen. Der dabei gemachte Fehler ist gering. Wenn die Wind-

Fig. 365.



richtung im Grundriss senkrecht zur Seite $m n$ (Fig. 365) angenommen wird, die Seitenlänge des regelmäßigen Achteckes an der Unterkante der Pyramide mit a , die Höhe der Pyramide mit h und der Druck für die Flächeneinheit mit p bezeichnet wird, so ist der Druck gegen die Fläche F demnach

$$W = \frac{p a h}{2} \dots \dots \dots 369.$$

Der Winddruck auf die Fläche F_1 (Fig. 366) ergibt sich unter obigen vereinfachenden Annahmen folgendermaßen. Die (lothrecht gedachte) Fläche schließt mit der angenommenen Windrichtung (Fig. 365) einen Winkel $(90 - \gamma)$ ein; mithin ist der senkrechte Winddruck auf die Fläche für die Flächeneinheit nach Art. 31 (S. 24)

$$n = p \sin (90 - \gamma)$$

oder

$$n = p \cos \gamma,$$

und der Winddruck auf die ganze Fläche

$$\frac{p a h}{2} \cos \gamma.$$

Diese Kraft zerlegt sich nun in eine Seitenkraft, welche dieselbe Richtung hat, wie W , und in eine senkrecht hierzu stehende. Die erstere ist (Fig. 365)

$$W_1 = \frac{p a h \cos^2 \gamma}{2} \dots \dots \dots 370.$$

Ein genau gleicher Winddruck wirkt (Fig. 366) auf die andere Fläche F_1 ; mithin ist der gesammte auf Umkanten der Pyramide wirkende Winddruck

$$\begin{aligned} W + 2 W_1 &= \frac{p a h}{2} (1 + 2 \cos^2 45^\circ) \\ &= \frac{p a h}{2} \left(1 + \frac{2}{2}\right) = p a h. \dots \dots 371. \end{aligned}$$

Der Angriffspunkt dieser Kraft liegt in der Höhe $\frac{h}{3}$ über der Grundfläche der Pyramide.

Für irgend einen Pyramidentheil (Fig. 367) von der Höhe z erhält man, wenn die Seite des Achteckes, welches für diesen Theil die Grundfläche bildet, mit x und die ganze Breite der Grundfläche mit y bezeichnet wird,

$$W_z = p x z \dots \dots \dots 372.$$

W_z greift in der Höhe $\frac{z}{3}$ über dieser Grundfläche an.

Nun ist $\frac{x}{z} = \frac{a}{h}$, also $x = \frac{a}{h} z$ und

$$W_z = p \frac{a}{h} z^2 \dots \dots \dots 373.$$

Der Zuwachs der Kraft W_z , welcher auf einen Streifen von der Höhe $d z$ entfällt, ist demnach $d W_z = 2 p \frac{a}{h} z d z$, und die Windbelastung für die Höheneinheit wird

$$\frac{d W_z}{d z} = 2 p \frac{a}{h} z \dots \dots \dots 374.$$

Daraus folgt, daß die Lastvertheilung nach dem Gesetze des Dreieckes von der Spitze bis zur Basis des Thurmes stattfindet.

260.
Thurm-
Fachwerk.

Das achtseitige Pyramidendach mit 8 Sparren auf 8 Fußpunkten ist ein statisch unbestimmtes Fachwerk. Könnte man die Spitze fortlassen, so wäre es statisch bestimmt; die Berechnung würde dann genau so vorgenommen, wie dies in Art. 246 bis 248 (S. 255 bis 257) für die Kuppel gezeigt ist. Durch das Aufbringen der Spitze mit 8 Sparren wird das Fachwerk fünffach statisch unbestimmt (es erhält 5 überzählige Unbekannte). Diese vielfache statische Unbestimmtheit kann man dadurch vermindern, daß man die Spitze nur aus 4 Sparren construirt, indem man also im obersten Theile des Thurmes nur immer einen um den anderen Sparren bis zur Spitze reichen läßt. Der oberste Theil des Thurmfachwerkes bildet dann eine vierseitige Pyramide. Die für die äußere Erscheinung erforderliche achtseitige Pyramide auch in dem obersten Theile des Thurmes wird dann durch Anbringen entsprechend geformter Holzfüter auf die Ringe der vierseitigen Pyramide erreicht. Eine solche Construction ist bei den Thürmen des Domes zu Halberstadt (construirt von *Cramer*) ausgeführt und in Theil III, Band 2, Heft 4: Dachstuhl-Constructionen (Art. 234, S. 315) dieses »Handbuches« zu finden. Die in der vierseitigen Pyramide wirkenden Spannungen können dann mit genügender Genauigkeit berechnet werden, wie in Art. 255 bis 258 (S. 269 bis 271) für das vierseitige Pyramidendach gezeigt ist; diese Spannungen werden darauf als äußere, das achtseitige Pyramidendach belastende Kräfte eingeführt.

Die in nachstehenden Artikeln vorgeführte Berechnungsweise der achtseitigen Thurmpyramide nimmt auf die statische Unbestimmtheit keine Rücksicht. Die Sparrenberechnung ist möglich, wenn man annimmt, daß in einem wagrecht genommenen Querschnitt durch den Thurm (Fig. 367) in den einzelnen Querschnittspunkten die Spannungen auf die Flächeneinheit sich verhalten, wie die Abstände der betreffenden Querschnittspunkte von der Null-Linie des Querschnittes. Da die Querschnittsflächen aller 8 Sparren naturgemäß gleich groß gemacht werden, so kann man auch sagen: Es wird die Annahme gemacht, daß die Sparrenspannungen sich verhalten, wie die Abstände der Schwerpunkte der Sparrenquerschnitte von der Null-Linie des ganzen Thurmschnittes.

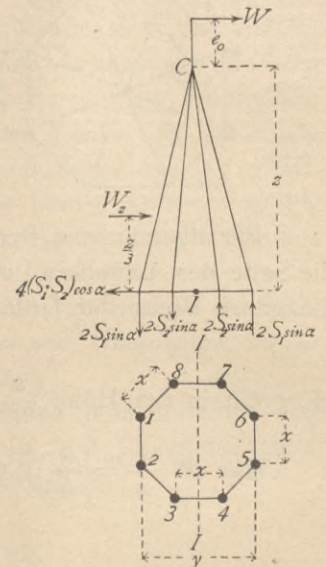
261.
Spannungen
in den
Sparren.

Stabspannungen. Außer W_z wirke auf das Thurmkreuz (Fig. 367) noch ein Winddruck W in der Höhe e_0 über der Spitze; alsdann ist das Moment des Windes, bezogen auf die wagrechte, in der Grundfläche des betreffenden Thurmtückes gelegene Schwerpunktsaxe II des Querschnittes (in der Höhe z unter der Spitze)

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W (e_0 + z) \dots \dots \dots 375.$$

Dieses Moment muß durch die Spannung der Sparren an der betrachteten Stelle aufgehoben werden.

Fig. 367.



Sind die Spannungen in den vier Sparren 1, 2, 5, 6, welche um $\frac{y}{2}$ von der Axe II abstehen, S_1 , diejenigen in den vier um $\frac{x}{2}$ von der Axe II abstehenden Sparren 3, 4, 7, 8 gleich S_2 , so ist, wenn mit geringem Fehler der Sparrenwinkel gegen die wagrechte Ebene gleich α gesetzt wird, das Moment der Sparrenspannungen für die Axe II (die Null-Linie des Gefammtquerchnittes) $2 S_1 y \sin \alpha + 2 S_2 x \sin \alpha$. Demnach muß

$$M_z = 2 S_1 y \sin \alpha + 2 S_2 x \sin \alpha$$

sein. Nach Art. 260 wird angenommen, daß stattfindet:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{x}{y}, \quad \text{d. h.} \quad S_2 = S_1 \frac{x}{y};$$

daher wird

$$M_z = 2 S_1 \sin \alpha \left[y + \frac{x^2}{y} \right] = \frac{2 S_1 \sin \alpha}{y} (x^2 + y^2)$$

sein, woraus folgt:

$$S_1 = \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 376.$$

$$S_2 = \frac{M_z x}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 377.$$

Für M_z sind der Reihe nach die Werthe einzuführen, welche sich bei den verschiedenen Höhen z ergeben. Diese Spannung kann in jedem Sparren sowohl als Zug, wie als Druck stattfinden, da der Wind von allen Seiten kommen kann. S_1 ist stets größer als S_2 . Die größte Spannung, welche durch Winddruck in allen Sparren erzeugt wird, hat also den Werth

$$S_{p \max} = \pm \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 378.$$

Wenn die Pyramide über einem regelmässigen Achteck errichtet ist, so ist $y = x + 2 x \cos 45^\circ = x \cdot 2,414$, und es wird dann

$$\text{bzw.} \quad \left. \begin{aligned} S_{p \max} &= \pm \frac{M_z \cdot 0,177}{x \sin \alpha} \\ S_{p \max} &= \pm \frac{M_z \cdot 0,427}{y \sin \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 379.$$

Auf einen beliebigen Theil der vom Winde voll getroffenen Pyramidenseite $OB'C'$ (Fig. 368a) entfalle der Winddruck N ; auf die entsprechenden Theile der angrenzenden Seitenfläche $OA'B'$ und $OC'D'$ entfalle je der Winddruck N' . Nach Früherem ist $N' = N \cos 45^\circ = \frac{N}{\sqrt{2}}$. In B wirkt dann $\frac{N}{2}$, bzw. $\frac{N'}{2}$, wie in Fig. 368b gezeichnet ist; desgleichen in C .

Die Lasten $\frac{N}{2}$ und $\frac{N'}{2}$ zerlegen sich in B , bzw. in C in Seitenkräfte, welche in die Ebenen $OB'A'$, $OB'C'$ und $OC'D'$ fallen. Aus Fig. 368c ergibt sich im Punkte B , wenn $\alpha\beta = \frac{N}{2}$ und $\beta\delta = \frac{N'}{2}$ ist, die Größe der Seitenkräfte T , bzw. T' und T'' :

262.
Spannungen
in den
Ringern und
Diagonalen.

$$T_0' = \overline{\varepsilon\beta} + \overline{\beta\gamma} = \frac{N'}{2} + \frac{N}{2 \cos 45^\circ} = \frac{N'}{2\sqrt{2}} + \frac{N\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}} [1+2] = 1,06 N$$

$$T = \overline{\gamma\alpha} + \overline{\delta\varepsilon} = \frac{N}{2} + \frac{N'}{2 \cos 45^\circ} = \frac{N}{2} + \frac{N\sqrt{2}}{2} = N.$$

Für Punkt *A* erhält man:

$$T_u' = \overline{\zeta\beta} = \frac{N'}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}} = 0,354 N,$$

$$T'' = \overline{\delta\zeta} = \frac{N'}{2 \cos 45^\circ} = \frac{N'\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2}.$$

380.

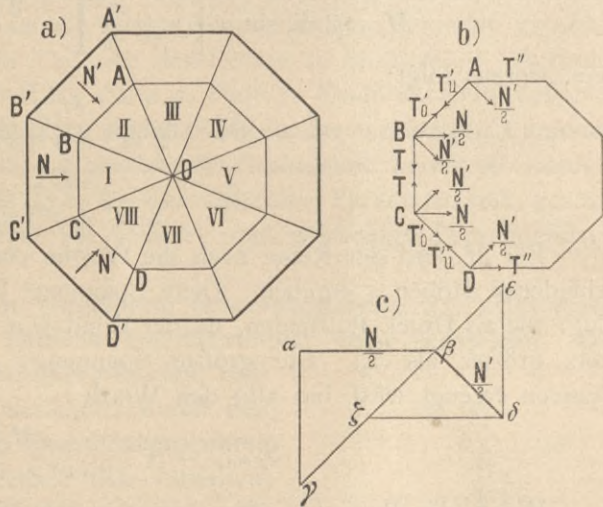
In der Seitenfläche *OB'C'*, welche vom Winde voll getroffen wird, sind die Spannungen der Ringstäbe von *B* und *C* aus je gleich *T*. Die GröÙe von *T* hängt von der GröÙe der Kraft *N*, d. h. von der GröÙe der auf den betreffenden Stab entfallenden, vom Winde getroffenen Fläche ab.

Fig. 368.

Die Diagonalen in dieser Seitenfläche werden bei dieser Belastung nicht beansprucht.

In der Seitenfläche *OA'B'* wirkt von der Seite des Grates *OB'* (des Windgrates) aus die Belastung *T₀'*, von der Seite des Grates *OA'* (des Unterwindgrates) aus die negative Belastung *T_u'* auf das Fachwerk. Diese Belastungen müssen durch das in der Seitenfläche *OB'A'* liegende Fachwerk auf die festen Auflagerpunkte *A'B'* gebracht werden.

Wind-
richtung



Das Fachwerk dieser Seitenfläche wirkt dabei wie ein Freitragler (siehe Art. 158, S. 151³⁸⁾). Die Belastungen, fowohl von der Seite des Grates *OB'* (des Windgrates), wie des Grates *OA'* (des Unterwindgrates), nehmen von der Spitze nach dem Auflager entsprechend dem Gefetze des Dreieckes (linear) zu (siehe Art. 259, S. 273). Der Winddruck gegen die Fläche *I* von der Spitze bis zu einer Höhe *z* unter derselben ist mit den Bezeichnungen in Fig. 367: $N_z = p \frac{xz}{2}$ und, da $x = \frac{a}{h} z$ ist,

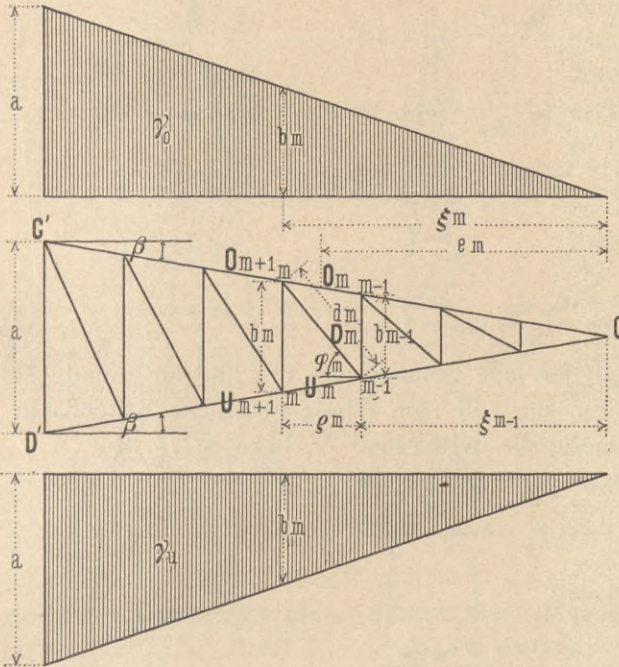
$$N_z = \frac{p a}{2h} z^2.$$

Sonach ist die positive Belastung des Fachwerkes in der Seitenfläche *II*, bzw. *VIII* auf die Höhe *z* unter der Spitze mit Rücksicht auf Gleichung 380

$$T_{0z}' = 1,06 \frac{p a}{2h} z^2, \dots \dots \dots 381.$$

³⁸⁾ Siehe bezüglich nachstehender Ableitung: MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centrabl. d. Bauverw. 1892, S. 257. — Auch als Sonderabdruck erschienen: Berlin 1892.

Fig. 369.



die negative Belastung desselben Fachwerkes

$$T_{uz}' = 0,354 \frac{p a}{2 h} z^2 \quad 382.$$

In Fig. 369 ist das Fachwerk der Seitenfläche VIII ($O C' D'$) des leichteren Verständnisses halber mit wagrechter Axe als Freitträger gezeichnet. Die Belastungen sind nach Größe und Vertheilung darüber, bezw. darunter angegeben; dabei ist die auf die Einheit der schraffirten Flächen entfallende Belastung (γ_0 , bezw. γ_u) so gewählt, dass die Abmessungen b und ξ der Belastungsdreiecke dieselben sind, wie diejenigen des Freitragers. Die gefamnte Belastung von der Seite des Windgrates folgt aus

Gleichung 381 für $z = h$; sie ist $T_{0h}' = 1,06 \frac{p a h}{2}$. Die Einheitsbelastung γ_0 folgt dann aus der Bedingungsgleichung:

$$\gamma_0 \frac{a h}{2 \sin \alpha} = 1,06 \frac{p a h}{2},$$

$$\gamma_0 = 1,06 p \sin \alpha; \quad \dots \quad 383.$$

eben so ergibt sich die Einheitsbelastung der unteren Fläche zu

$$\gamma_u = 0,354 p \sin \alpha \quad \dots \quad 384.$$

Das Gleichgewicht am m -ten Knotenpunkte der oberen Gurtung bedingt:

$$D_m \cos \varphi_m = O_{m+1} \cos \beta - O_m \cos \beta.$$

Bedeutet M_m , bezw. M_{m-1} die Momente der äußeren Kräfte für die Knotenpunkte m , bezw. $m-1$, so ist nach Fig. 369

$$O_{m+1} \cos \beta = \frac{M_m}{b_m} \quad \text{und} \quad O_m \cos \beta = \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}};$$

mithin

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}}.$$

Bezeichnet d_m die Länge der Diagonale, ρ_m die Höhe des betreffenden Feldes in der Dachschräge gemessen, so ist $\cos \varphi_m = \frac{\rho_m}{d_m}$, also

$$D_m = \frac{d_m}{\rho_m} \left(\frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \right).$$

Ferner ist

$$M_m = \frac{b_m \xi_m}{2} \cdot \frac{\xi_m}{3} (\gamma_0 - \gamma_u), \quad \text{also} \quad \frac{M_m}{b_m} = \frac{\xi_m^2}{6} (\gamma_0 - \gamma_u),$$

und eben fo

$$\frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} = \frac{\xi_{m-1}^2}{6} (\gamma_0 - \gamma_u);$$

mithin $D_m = \frac{(\xi_m^2 - \xi_{m-1}^2)}{6} (\gamma_0 - \gamma_u) \frac{d_m}{\rho_m}$ und, da $\rho_m = \xi_m - \xi_{m-1}$ ist,

$$D_m = \frac{(\xi_m + \xi_{m-1})}{2} \cdot \frac{(\gamma_0 - \gamma_u)}{3} d_m.$$

Mit $e_m = \frac{\xi_m + \xi_{m-1}}{2}$ wird

$$D_m = \frac{e_m d_m}{3} (\gamma_0 - \gamma_u) \dots \dots \dots 385.$$

Vorstehende Entwicklung gilt für jede Seitenfläche; nur sind für γ_0 und γ_u die bezüglichen Werthe einzusetzen. Für die voll vom Winde getroffene Seitenfläche *I* ist $\gamma_0 - \gamma_u = \text{Null}$, also alle $D = 0$; für die Seitenwand *II*, bezw. *VIII* ist

$$(\gamma_0 - \gamma_u) = 0,706 p \cdot \sin \alpha;$$

also

$$D_m = 0,706 p \cdot \sin \alpha \frac{e_m d_m}{3}.$$

Setzt man $e_m = \frac{z_m}{\sin \alpha}$, so wird

$$D_m = \frac{0,706 p z_m d_m}{3} \dots \dots \dots 386.$$

Ringspannungen. Um die Ringspannungen (d. h. die Spannungen der Pfosten im Freiträger der Fig. 369) zu bestimmen, ermittelt man zweckmäsig getrennt die Beiträge, welche durch die Belastungen γ_0 und diejenigen, welche durch die Lasten γ_u erzeugt werden. Für $\gamma_u = 0$ sei im m -ten Ringstabe die Spannung R_m' ; das Gleichgewicht am m -ten Knotenpunkte der unteren Gurtung führt zum Kraftpolygon in Fig. 370*b*. Es ergibt sich $-\frac{R_m'}{D_{m+1}} = \frac{b_{m+1}}{d_{m+1}}$. Nach

Gleichung 385 ist für $\gamma_u = 0$: $D_{m+1} = \frac{e_{m+1} d_{m+1}}{3} \gamma_0$;

also

$$R_m' = -\frac{e_{m+1} b_{m+1} \gamma_0}{3}.$$

Für $\gamma_0 = 0$ ergibt die Betrachtung des m -ten Knotenpunktes der oberen Gurtung aus dem Kraftpolygon in Fig. 370*b*

$$\frac{R_m''}{-D_m} = \frac{b_{m-1}}{d_m}.$$

Nach Gleichung 385 ist für $\gamma_0 = 0$: $D_m = -\frac{e_m^* d_m \gamma_u}{3}$; fomit

$$R_m'' = \frac{e_m b_{m-1} \gamma_u}{3}.$$

Somit wird die Ringspannung durch die gemeinsame Belastung γ_0 und γ_u

$$R_m = -\frac{1}{3} \left[b_{m+1} e_{m+1} \gamma_0 - e_m b_{m-1} \gamma_u \right] \dots \dots \dots 387.$$

Da der Wind von allen Seiten kommen kann, so ist zu untersuchen, in welcher Seitenfläche die Diagonal- und Ringspannungen am größten werden können; die erhaltenen Werthe sind der Construction der Diagonalen und Ringstäbe in allen Seitenflächen zu Grunde zu legen.

Fig. 370.

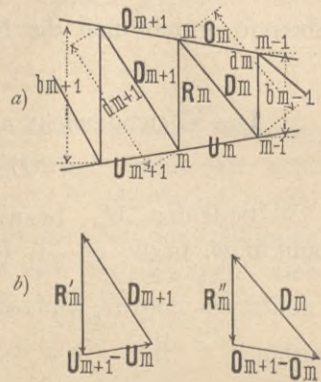
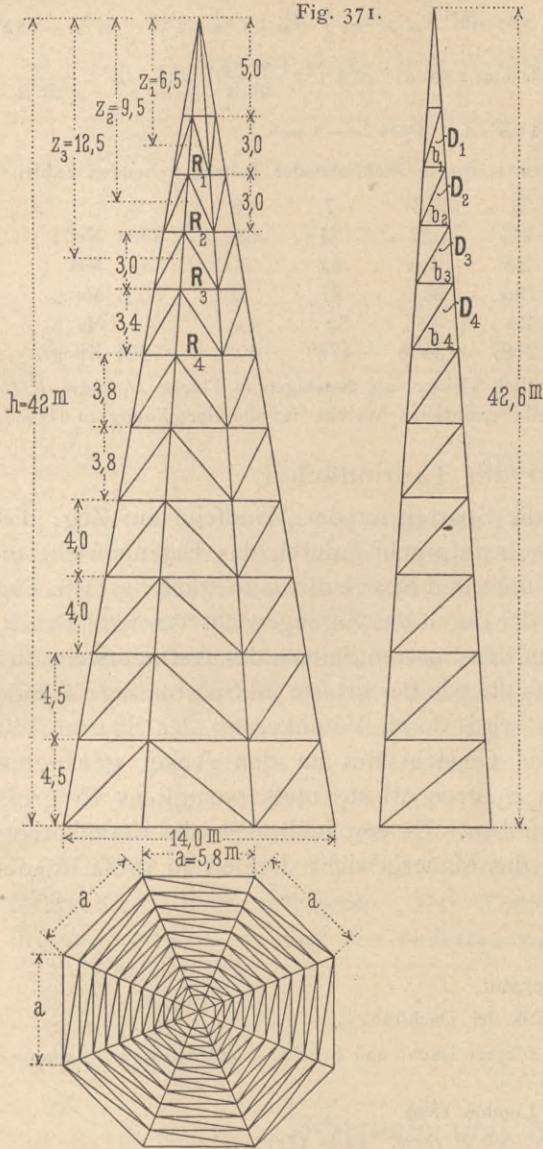


Fig. 371.



Zu den vorstehend ermittelten, durch den Wind hervorgerufenen Stabspannungen kommen noch diejenigen durch das Eigengewicht; diese sind nach Art. 253 u. 254 (S. 265) leicht zu finden.

Beispiel. Der in Fig. 371 im Grundriss und Aufriss dargestellte Thurm über einem regelmäßigen Achteck hat eine Höhe $h = 42$ m; die Seite der achteckigen Grundfläche ist $a = 5,8$ m. Die Spannungen der Sparren, der Ring- und Diagonalfäbe sind bei einem Winddruck $p = 120$ kg auf das Quadr.-Meter normal getroffener Fläche zu ermitteln.

263.
Beispiel.

a) Sparrenspannungen. Die Felder werden von der Spitze nach der Grundfläche hin mit 1, 2, 3 ... 9, 10 bezeichnet, die zu den einzelnen Feldern gehörigen Werthe z bis zur Mitte der Höhe des betreffenden Feldes gerechnet. Man erhält nach Gleichung 375 die Größe des Windmoments, welches die Sparrenspannungen erzeugt, zu

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W(e_0 + z).$$

Nach Gleichung 373 ist aber:

$$W_z = \frac{p a z^2}{h};$$

der Winddruck auf das Thurmkreuz wird zu $W = 250$ kg und die Höhe desselben über der Spitze zu $e_0 = 4,0$ m angenommen. Alsdann ist

$$M_z = \frac{p a}{h} \frac{z^3}{3} + 1000 + 250 z$$

und mit $\frac{p a}{3 h} = \frac{120}{3} \cdot \frac{5,8}{42} = 5,52$

$$M_z = (5,52 z^3 + 250 z + 1000) \text{ kgm.}$$

Die Berechnung ergibt folgende Tabelle:

$z = 6,5$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$M_z = 4140$	8100	14900	26300	45500	74800	116400	173200	251700	357620	Kilogr.-Met.;
$x = 0,90$	1,31	1,73	2,17	2,7	3,19	3,73	4,28	4,86	5,5	Met.;
$S = 828$	1113	1548	2178	3032	4212	5616	7284	9320	11700	Kilogr.

Diese Werthe können sämtlich sowohl Zug wie Druck bedeuten.

β) Diagonalen. Größte Beanspruchung der Diagonalen findet in den Seitenflächen II und VIII (Fig. 368) statt. Nach Gleichung 386 ist

$$D_m = \frac{0,706 p}{3} z_m d_m = \frac{0,706 \cdot 120}{3} z_m d_m,$$

fomit

$$D_m = \infty 28 z_m d_m.$$

Das Verzeichnen der Seitenfläche ergab folgende Werthe für d_m , woraus dann die ebenfalls in der Tabelle verzeichneten Werthe von D sich ergeben:

$z_m = 6,5$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$d_m = 3,2$	3,4	3,5	4,1	4,8	5,0	5,5	5,95	6,2	7,1	Met.;
$D = 588$	912	1230	1815	2610	3240	4190	5200	6170	7960	Kilogr.

Auch diese Werthe können, falls nicht Gegendiagonalen angeordnet sind, Zug und Druck bedeuten.

γ) Ringspannungen. Nach Gleichung 387 ist $R_m = -\frac{1}{3} (b_{m+1} e_{m+1} \gamma_0 - e_m b_{m-1} \gamma_n)$.

In der Seitenfläche VIII ist $\gamma_0 = 1,06 p \sin \alpha$, $\gamma_n = 0,354 p \sin \alpha$, $e_{m+1} = \frac{z_{m+1}}{\sin \alpha}$ und $e_m = \frac{z_m}{\sin \alpha}$; also

$$R_m = -\frac{p}{3} (1,06 b_{m+1} z_{m+1} - 0,354 b_{m-1} z_m).$$

Man erhält für die verschiedenen Werthe von m die in nachstehender Tabelle stehenden Zahlen:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_{m+1}	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75 Met.;
b_{m+1}	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6	5,2	5,8 Met.;
z_m	6,5	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25 Met.;
b_{m-1}	0,72	1,1	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6 Met.;
R_m	-558	-888	-1327	-2026	-2780	-3666	-4723	-6036	-7484 Kilogr.

Die Ringspannungen in Fläche I sind wesentlich kleiner, als diejenigen in Fläche II, bezw. VIII; mithin sind diese, d. h. die in vorstehender Tabelle ermittelten Werthe für die Berechnung zu Grunde zu legen.

3) Standfestigkeit der Thurmdächer.

264.
Verankerung.

Durch die Windbelastung werden die Sparren an der Windseite auf Zug, diejenigen an der Unterwindseite auf Druck beansprucht; durch das Eigengewicht erhalten alle Sparren Druck. Wenn der im untersten Sparrenstück mögliche grösste Zug in Folge des Winddruckes gröfser ist, als der durch das Eigengewicht erzeugte Druck, so ist Gleichgewicht nur möglich, wenn auf den Sparren Seitens des Auflagers ein Zug ausgeübt wird, welcher wenigstens so grofs ist, wie der grösste im Sparren herrschende Zug. Dieser Zug Seitens des Auflagers wird durch Verankerung der Sparren mit dem Thurmmauerwerk erzeugt, und das Gewicht des an den Anker gehängten Mauerwerkes, welches als Zug auf den Sparren wirkt, mufs wenigstens so grofs sein, wie der grösstmögliche Zug in demselben. Es empfiehlt sich, die Verankerung weiter hinabzuführen, etwa so weit, dafs das Mauergewicht doppelt so grofs ist, als der grösste Zug im Sparren.

Literatur.

Bücher über »Statik der Dachstühle«.

- RITTER, A. *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen.* Hannover 1863. — 5. Aufl. 1894.
- UNWIN, W. *Wrought-iron bridges and roofs etc.* London 1870.
- CORDIER, E. *Equilibre stable des charpentes en fer, bois et fonte.* Paris 1872.
- FABRÉ, V. *Théorie des charpentes, d'après des règles pratiques pour la construction des fermes et autres appareils en bois et en fonte.* Paris 1873.
- CARGILL, TH. *The strains upon bridge girders and roof trusses etc.* London 1873.
- SCHREVE, S. *A treatise on the strength of bridges and roofs etc.* New-York 1873.
- TETMAJER, L. *Die äusseren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen.* Zürich 1875.
- NICOUR, CH. *Calcul d'un comble en fer du système Polonceau.* Paris 1875.
- SCHWEDLER, W. *Die Construction der Kuppeldächer.* 2. Aufl. Berlin 1878.
- TRÉLAT, E. *La rigidité dans les combles.* Paris 1878.
- Deutsche bautechnische Tafchenbibliothek. Heft 10: *Berechnung der Dachwerke.* Von W. JEEP. Leipzig 1876.
- WEYRAUCH, J. J. *Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer.* Leipzig 1888.
- MÜLLER-Breslau, H. *Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks.* Berlin 1892.
- FOEPL, A. *Das Fachwerk im Raume.* Leipzig 1892.

5. Abschnitt. Gewölbe.

Die Gewölbe sind aus einzelnen Theilen mit Hilfe von Verbindungsmaterialien zusammengesetzte Bau-Constructions, welche bei lothrechten Belastungen schiefe Drücke auf die stützenden Constructionstheile ausüben. Indem wir die verschiedenen Gewölbearten³⁹⁾ hier als bekannt voraussetzen, bemerken wir, daß wir uns im vorliegenden Abschnitt hauptsächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben beschäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können.

265.
Allgemeines.

Der allgemeinen Untersuchung soll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei wird stets, falls nichts Anderes bemerkt wird, ein Gewölbestück betrachtet werden, dessen Abmessung senkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit, also gleich 1^m ist. Alsdann fällt die Kraftebene mit der mittleren lothrechten Ebene zusammen. Das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe wirkt wie ein krummer Balken, welcher den Gesetzen der Elasticitätslehre unterworfen ist.

1. Kapitel. Stützlinie und Mittelkraftslinie.

a) Allgemeines.

Für die Ermittlung der im Gewölbe auftretenden inneren Kräfte ist zunächst — genau wie bei den früher behandelten Bau-Constructions — die Kenntniß der äußeren auf das Gewölbe wirkenden Kräfte nöthig, also der Belastungen und der Auflagerkräfte. Die Belastungen sind in den meisten Fällen gegeben, bezw. aus den Tabellen in Art. 21 bis 27 leicht zu bestimmen. Schwieriger ist die Ermittlung der Auflagerkräfte oder, wie sie hier heißen, der Kämpferdrücke. Bei den bisherigen Constructions genügte zu ihrer Bestimmung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen; hier ist dies nicht der Fall. Wird ein beliebiges Gewölbe (Fig. 372) betrachtet, so wird bei jedem Auflager — hier Kämpfer genannt — auf das Gewölbe eine Anzahl von Kräften übertragen, deren Mittelkraft eben der gesuchte Kämpferdruck ist; von jedem dieser Kämpferdrücke ist aber weder Größe, noch

266.
Kämpfer-
drücke.

³⁹⁾ Siehe hierüber Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abchn. 2, B, Kap. 8) dieses »Handbuches«.

Richtung, noch Angriffspunkt (*A*, bzw. *B*) bekannt. Wir haben demnach in den Kämpferdrücken 6 Unbekannte: *D*, *D*₁, *α*, *α*₁, *c*, *c*₁ (wenn *c* und *c*₁ die Abstände der Punkte *A* und *B* von den inneren Laibungspunkten der Widerlager bezeichnen). Da die Statik vermittels der Gleichgewichtsbedingungen fester Körper nur 3 Gleichungen zur Verfügung stellt, so ist die Ermittlung der Kämpferdrücke auf rein statischem Wege nicht möglich. Die Aufgabe wird gelöst, indem man das Gewölbe als elastischen Bogen auffasst und annimmt, daß bei den durch die Belastungen erfolgenden Formänderungen die Widerlager und die anschließenden Bogenenden genau unveränderte Lage behalten. Diese mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmende Annahme giebt weitere 3 Gleichungen, so daß jetzt für die 6 Unbekannten 6 Gleichungen vorhanden sind.

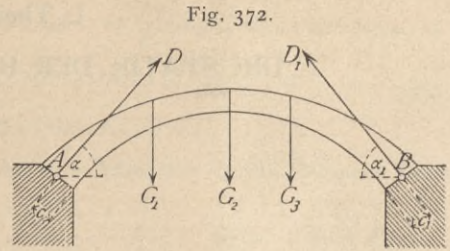


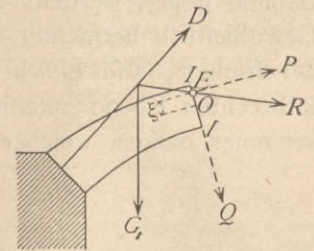
Fig. 372.

Für die einfachen Fälle des Hochbaues, bei denen fast stets eine ruhende Belastung in Frage kommt, brauchen die Elasticitätsgleichungen nicht aufgestellt zu werden. Vorläufig werde angenommen, daß die Kämpferdrücke nach GröÙe, Richtung und Lage auf irgend welche Art gefunden und bekannt seien.

267.
Stützlinie.

Ist letzteres der Fall, so sind alle äußeren, auf das Gewölbe wirkenden Kräfte bekannt; demnach können die sämtlichen äußeren Kräfte, welche an der einen Seite eines beliebigen, senkrecht zur Bildebene genommenen Querschnittes *II* des Gewölbes (Fig. 373) wirken, zu einer Mittelkraft vereinigt werden.

Fig. 373.



Betrachtet man etwa denjenigen Gewölbetheil, welcher links vom Querschnitt *II*, also zwischen dem linken Widerlager und dem Querschnitt *II* liegt, so sei *R* diese Mittelkraft. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muß im Querschnitt *II* eine Anzahl innerer Kräfte wirken, deren Mittelkraft gleiche GröÙe, gleiche Richtung, gleichen Angriffspunkt und entgegengesetzten Sinn hat, wie die Kraft *R*. Mit der Kraft *R* kennt man also auch die Resultirende der hier thätigen inneren Kräfte. Zerlegt man *R* in eine Seitenkraft *P*, welche parallel ist zu der an die Bogenaxe im betrachteten Querschnitte gezogenen Tangente, und in eine zu ersterer senkrechte Seitenkraft *Q*, so heißt die erstere die Axialkraft, die zweite die Transversalkraft oder Querkraft. Die Querkraft ist für die hier zu betrachtenden Fälle von geringer Wichtigkeit; von wesentlicher Bedeutung dagegen ist GröÙe und Lage von *P*. Die durch die Axialkraft in den einzelnen Punkten des Querschnittes *II* erzeugten Druck-, bzw. Zugspannungen können ohne merkbaren Fehler nach den in Art. 126 (S. 111) für Stützen berechneten Gleichungen bestimmt werden. Man erhält demnach die Spannung σ in einem um *z* von der Mittellinie entfernten Punkte nach Gleichung 102

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{I}} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\xi z}{\mathcal{I}} \right) \dots \dots \dots 388.$$

M ist das Moment der äußeren Kräfte für den Punkt *O*, d. h. für denjenigen Punkt, in welchem die Mittellinie des Gewölbes den Querschnitt *II* schneidet; hier also ist $M = P\xi$, da *Q* in Bezug auf *O* kein Moment hat. Die positiven Werthe für σ sind hier Druckbeanspruchungen; die negativen Werthe bedeuten Zug.

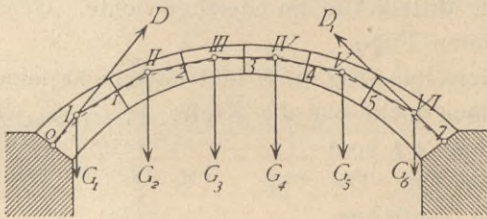
Von hervorragender Bedeutung für den Werth von σ ist die Größe von ξ oder, was dasselbe ist, die Lage des Punktes E , des Schnittpunktes der Mittelkraft R mit dem von ihr beanspruchten Querschnitte. Man hat deshalb für die Punkte E eine besondere Bezeichnung eingeführt: die Stützlinie. Die Stützlinie ist die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, in denen die Gewölbequerschnitte von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden.

Den verschiedenen Belastungsarten entsprechen verschiedene Mittelkräfte für die einzelnen Querschnitte; daraus folgt, daß bei demselben Gewölbe jeder Belastungsart auch eine besondere Stützlinie entspricht.

Zerlegt man das Gewölbe in eine Anzahl von Theilen (Fig. 374), ermittelt die Kämpferdrücke (D und D_1), so wie die Belastungen der einzelnen Theile ($G_1, G_2, G_3 \dots G_6$) und setzt zunächst D mit der ersten Last G_1 zu einer Mittelkraft zusammen, diese letztere mit G_2 und fährt so bis zum rechten Kämpfer fort, so erhält

268.
Mittelkraftsline
oder
Resultanten-
Polygon.

Fig. 374.



man ein Vieleck $o III III IV V VI 7$, welches man die Mittelkraftsline oder das Resultanten-Polygon nennt. Aus der Mittelkraftsline ergeben sich sofort einzelne Punkte der Stützlinie, nämlich die Schnittpunkte der einzelnen Mittelkräfte mit den bezüglichen Querschnitten, hier die Punkte $o, 1, 2, 3, 4, 5$ und 7 . Je kleiner die einzelnen Theile des Gewölbes angenommen werden,

desto mehr nähert sich die Mittelkraftsline einer stetig verlaufenden Curve, der sog. Seilcurve.

Die Ermittlung der Form und Lage der Stützlinie auf statischem Wege setzt nach Obigem die Kenntnifs der Kämpferdrücke oder wenigstens dreier von den sechs Unbekannten voraus, welche die Kämpferdrücke nach Größe, Richtung und Lage bestimmen; denn alsdann sind nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elasticitätstheorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweises auf unten stehende Quellen⁴⁰⁾ verweisend.

269.
Ergebnisse
der
Elasticitäts-
theorie.

Bei constantem Querschnitt ist unter allen statisch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche sich der Bogenaxe durchschnittlich am meisten nähert, wenn man das Wort »durchschnittlich« im Sinne der Methode der kleinsten Quadratsummen deutet. Somit ist diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum ist. Läßt sich demnach eine Stützlinie construiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfällt, so wird diese die richtige sein.

Construirt man also die Mittellinie des Bogens derart, daß sie für die gegebene Belastung mit der unter gewissen Annahmen construirt (demnach möglichen) Stützlinie übereinstimmt, so ist diese Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belastung. Da es sich aber im Hochbau meistens um constante Belastungen handelt, so ist diese Ermittlung in der Regel genügend.

⁴⁰⁾ WINKLER, F. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199. Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

Wir werden weiter unten sehen, daß es in vielen Fällen, in denen die Aufsuchung der genauen Stützlinie schwierig ist, genügt, gewisse Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Resultanten-Polygon construirt werden kann, so wird für alle diese Fälle zunächst das Resultanten-Polygon oder die Mittelkraftslinie aufgefucht.

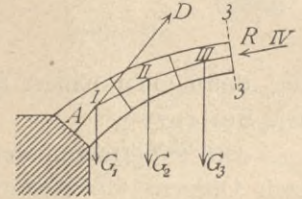
b) Mittelkraftslinie und Seilcurve.

270.
Horizontalschub
im Gewölbe.

Jede Verbindungslinie zweier Eckpunkte der Mittelkraftslinie (*I II*, *II III*, *III IV* . . . in Fig. 374) giebt nach der Erklärung in Art. 268 (S. 283) Lage und Richtung der Mittelkraft aller an der einen Seite der betreffenden Fuge wirkenden äußeren Kräfte. Es giebt also z. B. *III IV* die Richtung und Lage der Mittelkraft aller rechts von der Fuge *3* wirkenden Kräfte, d. h. der Kräfte D_1 , G_4 , G_5 , G_6 ; da sämtliche äußere Kräfte einander im Gleichgewichte halten, so fällt die Mittelkraft aller links von der Fuge *3* wirkenden Kräfte gleichfalls in die Linie *III IV*; in derselben halten sich demnach die beiden Mittelkräfte im Gleichgewichte. Genau eben so verhält es sich auch mit jeder anderen Fuge.

Betrachtet man nun einen Theil des Gewölbes (Fig. 375) und untersucht seinen Gleichgewichtszustand, so wirken auf denselben nicht nur die Kräfte D , G_1 , G_2 , G_3 , sondern auch die Kräfte, welche in der Fuge *3 3* vom anderen Theile des Gewölbes übertragen werden. Die Mittelkraft der letzteren ist aber nach dem Vorstehenden gleich der Mittelkraft aller auf den anderen Theil wirkenden äußeren Kräfte, d. h. hier von D_1 , G_4 , G_5 , G_6 . Diese fällt in die Linie *III IV* (Fig. 374). Wenn also die Mittelkraftslinie bekannt ist, so sind stets auch Lage, Richtung und (wie weiter unten nachgewiesen wird, auch) Größe derjenigen Kraft bekannt, bezw. leicht zu finden, welche in der betreffenden Fuge auf das Gewölbe-Bruchstück übertragen wird. Alles Vorstehende gilt selbstverständlich auch, wenn die einzelnen Gewölbetheile unendlich schmal werden und die Mittelkraftslinie zur Seilcurve wird; dann fällt die Mittelkraft an jeder Stelle in die Richtung der Tangente an die Curve.

Fig. 375.



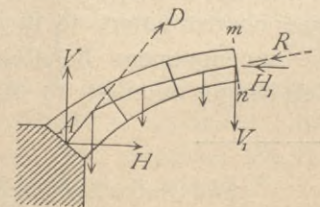
Die Kämpferdrücke D und D_1 haben lothrechte und wagrechte Seitenkräfte; in dieser Beziehung kann man die Gewölbe als Sprengwerksträger ansehen. Diese wagrechten Seitenkräfte, welche auf das Gewölbe nach innen, auf die stützenden Seitenmauern nach außen, also schiebend wirken, gefährden das Bauwerk. Wenn die Belastungen nur lothrecht wirken, so haben diese wagrechten Seitenkräfte im ganzen Bogen bei derselben Belastung gleiche Größe. Denn das Gleichgewicht eines beliebigen Bruchstückes (Fig. 376) verlangt, daß die algebraische Summe aller wagrechten Kräfte gleich Null sei. Die beiden einzigen wagrechten Kräfte am Bruchstück sind aber die Seitenkräfte H und H_1 von D und R . Daher muß stattfinden:

$$0 = H - H_1, \text{ woraus } H = H_1.$$

Da Schnitt mn beliebig gewählt war, so gilt das Vorstehende ganz allgemein.

Man nennt diese wagrechte Seitenkraft den Horizontalschub des Bogens, bezw. des Gewölbes. Die

Fig. 376.

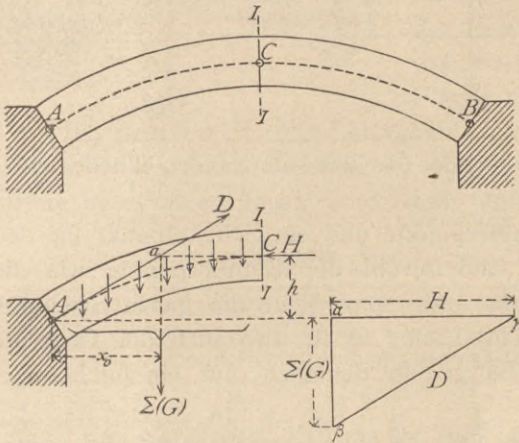


Ermittlung der Gröfse und Lage dieses Horizontalsthubes ist bei der Berechnung der Gewölbe die wichtigste Aufgabe.

Die Gröfse des Horizontalsthubes ist sowohl von der Belastung, wie auch von der Form und Lage der Mittelkraftslinie, bezw. Seilcurve abhängig. Diese Abhängigkeit stellt sich für das symmetrisch zur Scheitelfuge gestaltete und eben so belastete Gewölbe folgendermassen dar.

ACB sei (Fig. 377) die Seilcurve. Legt man durch denjenigen Punkt derselben, in welchem die Tangente wagrecht ist, d. h. durch den Scheitel, einen

Fig. 377.



Schnitt II und untersucht das Gleichgewicht des Gewölbestückes an der einen Seite dieses Schnittes, etwa des Stückes AC , so muss, wie eben entwickelt, die Kraft, welche in II auf das Bogenstück übertragen wird, in die Richtung der Tangente fallen, demnach wagrecht sein. Diese Kraft ist also das gesuchte H . Da auch A ein Punkt der Seilcurve ist, so muss durch A die Mittelkraft aller derjenigen Kräfte gehen, welche rechts von der Kämpferfuge wirken, d. h. die Mittelkraft von $\Sigma(G)$ und H ; diese Mittelkraft muss demnach für A als Drehpunkt das statische Moment Null haben. Da

nun das statische Moment der Mittelkraft stets gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte ist, so muss auch stattfinden:

$$x_0 \Sigma(G) - Hh = 0,$$

woraus folgt

$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h} \dots \dots \dots 389.$$

Auch graphisch ergibt sich die Gröfse von H leicht.

Man ermittle die Mittelkraft $\Sigma(G)$ aller an der einen Seite des durch den Scheitel gelegten Schnittes II wirkenden Lasten (Fig. 377); alsdann wirken auf das Gewölbestück drei Kräfte: $\Sigma(G)$, H und D . Da dieselben das Gewölbestück im Gleichgewicht halten, so schneiden sich ihre Richtungslinien in einem Punkte, d. h. D muss durch den Punkt a gehen, in welchem sich die beiden anderen Kräfte, H und $\Sigma(G)$ schneiden. Da D auch durch A geht, so ist die Richtung von D durch Linie Aa bestimmt. Nun halten sich in a drei Kräfte im Gleichgewicht, deren Richtungen bekannt sind, von deren einer [$\Sigma(G)$] auch die Gröfse bekannt ist. Man trage $\Sigma(G)$ nach beliebigem Mafstabe auf ($= \alpha\beta$) und ziehe durch α und β Parallelen zu bezw. den Richtungen von H und D ; alsdann erhält man

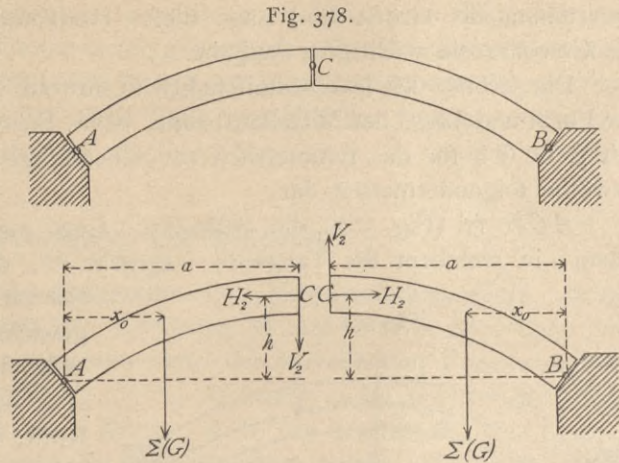
$$H = \gamma\alpha \text{ und } D = \beta\gamma.$$

Die Ermittlung von H für das unsymmetrische, bezw. das unsymmetrisch belastete Gewölbe wird in Art. 273 u. 275 vorgeführt werden.

Wie in Art. 266 (S. 281) gezeigt, giebt die Statik fester Körper für die Ermittlung der unbekanntten äufseren Kräfte und damit auch der Seilcurve nur drei Gleichungen, während sechs Unbekannte vorhanden sind. Man kann aber die Seilcurve dadurch fest legen, dass man durch die Construction drei Bedingungen schafft, welche durch drei Gleichungen ausgedrückt werden und so die fehlenden Gleichungen bieten. Am einfachsten geschieht dies, indem man drei Punkte vorschreibt, durch welche die Seilcurve gehen muss, etwa durch Einlegen von Keilen u. f. w. in drei

271.
Seilcurve durch drei gegebene Punkte.

Fugen (Fig. 378). Wenn also drei Punkte vorgeschrieben sind, durch welche die Seilcurve verlaufen muss, so ist der ganze Lauf der Seilcurve und damit auch die Grösse des Horizontalstresses gegeben. Auch wenn zwei Punkte der Seilcurve und ausserdem in einem dieser Punkte die Richtung bestimmt ist, welche die Tangente an die Curve haben soll, ist Alles bekannt. Wird die Seilcurve in dieser Weise fest gelegt, so wirken die beiden



Theile des Gewölbes auf einander genau eben so, wie die beiden Theile eines Sprengwerkdaches (siehe Art. 210, S. 211⁴¹).

Wenn bei einem Gewölbe zwei Kämpferpunkte und ein Scheitelpunkt für den Verlauf der Seilcurve vorgeschrieben sind und sowohl die Kämpferpunkte wie die Lasten symmetrisch zur Scheitel-Lothrechten sind, so verläuft die ganze Seilcurve, bzw. Mittelkraftslinie symmetrisch zu dieser Linie, so ist also auch die Tangente an die Seilcurve im Scheitel wagrecht. Es genügt demnach, für ein solches Gewölbe eine Hälfte zu untersuchen.

Betrachtet man nämlich zunächst (Fig. 378) die linke Gewölbehälfte und nimmt dabei allgemein an, dass die von der rechten Hälfte im Scheitel übertragene Kraft die Seitenkräfte H_2 und V_2 habe, so muss, weil die Mittelkraft von $\Sigma(G)$, H_2 und V_2 durch A verläuft,

$$0 = V_2 a - H_2 h + x_0 \Sigma(G)$$

sein. Wird die rechte Gewölbehälfte betrachtet, so wirken auf dieselbe im Scheitel H_2 und V_2 in gleicher Grösse, aber in entgegengesetztem Sinne, wie auf die linke Hälfte; der Symmetrie wegen ist die Belastung dieser Hälfte ebenfalls $\Sigma(G)$ im Abstände x_0 vom Kämpfer B; mithin findet statt:

$$0 = V_2 a + H_2 h - x_0 \Sigma(G).$$

Die Addition beider Gleichungen giebt: $0 = V_2 \cdot 2a$, woraus

$$V_2 = 0$$

folgt. Demnach ist die Kraft, welche die beiden Gewölbehälften im Scheitel auf einander übertragen, in der That wagrecht, also ist auch die Tangente an die Mittelkraftslinie im Scheitel wagrecht.

Man findet die Grösse von $H_2 = H$ leicht, wie Gleichung 389:

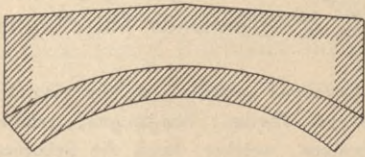
$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h}.$$

Wenn für die Seilcurve drei Punkte oder zwei Punkte und eine Richtung vorgeschrieben sind, so ist nach Vorstehendem der Verlauf der Seilcurve bestimmt; alsdann muss also auch eine graphische Construction dieser Linie möglich sein. Es ist

⁴¹) Neuerdings ist die Anordnung dreier Gelenke, zweier Gelenke an den Kämpfern und eines Gelenkes im Scheitel, bei den grossen Brückengewölben vielfach ausgeführt worden, insbesondere von Köpcke und Leibbrand. — Man vergl. hierüber: Fortschritte der Ingenieurwissenschaften. 2. Gruppe, Heft 7: Gewölbte Brücken. Von K. v. LEIBBRAND. Leipzig 1897.

oft wünschenswerth, den ganzen Verlauf derselben zu kennen, und deshalb soll nachstehend gezeigt werden, wie die Seilcurve, bezw. Gleichgewichtslinie construirt wird. Bei allen solchen Untersuchungen ist es zweckmäsig, die Lasten durch Flächen darzustellen. Man denkt sich zu diesem Zwecke die gegebenen Nutzlasten durch Mauerkörper von demselben Einheitsgewichte ersetzt, wie dasjenige des Gewölbes ist. Wenn die Abmessung senkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit (= 1 m) ist, so bedeutet demnach 1 qm in der Ansicht 1 cbm Mauerwerk, also ein entsprechendes Gewicht. Diese in Mauerwerk verwandelte Nutzlast kommt zum Eigengewichte des Gewölbes hinzu, so das man als Darstellung der Belastung etwa die in Fig. 379 schraffierte Fläche erhält.

Fig. 379.

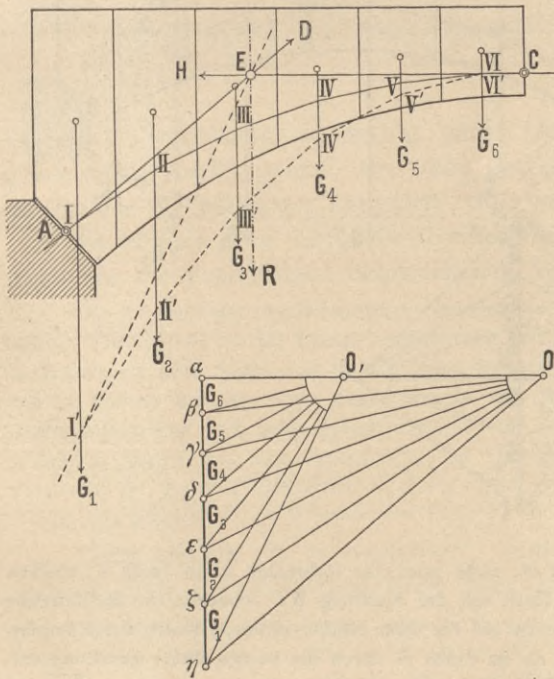


Bei dem zur Scheitel-Lothrechten symmetrisch gestalteten und symmetrisch belasteten Bogen, bezw. Gewölbe ist nach Art. 271 die Seilcurve symmetrisch gestaltet; mithin ist es ausreichend, eine Hälfte derselben zu construiren. Diese Construction

272.
Seilcurve für symmetrisch zur Scheitel-Lothrechten angeordneten und belasteten Bogen.

ist in Fig. 380 vorgeführt. Die Belastungsfläche sei dargestellt, und es sei vorgeschrieben, das die Mittelkraftslinie durch C und A gehe, außerdem in C wagrecht sei.

Fig. 380.



Man zerlege die Belastungsfläche in eine Anzahl lothrechter Lamellen, deren Gewichte $G_6, G_5, G_4 \dots G_1$ durch Multiplication der Flächengrößen der einzelnen Lamellen mit der (senkrecht zur Bildfläche gedachten) Einheit und dem Einheitsgewichte der Belastung ermittelt werden. Diese Gewichte haben ihre Angriffspunkte in den Schwerpunkten der einzelnen Lamellen. Die Gewichte $G_6, G_5, G_4 \dots G_1$ werden nun zu einem Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma \dots \eta$ an einander getragen, und ihre Mittelkraft wird nach Größe und Lage gesucht. Die Größe derselben ist $\overline{\alpha \eta}$. Um die Lage derselben zu erhalten, construire man mit einem beliebigen Pol O_1 ein Seilpolygon; die Mittelkraft geht dann durch den Schnittpunkt der äußersten Seilpolygonseiten, d. h. derjenigen, welche vor G_6 vorhergeht und derjenigen, welche auf G_1 folgt. Es empfiehlt sich, den Pol auf der durch α gehenden Wagrechten

zu wählen (hier ist O_1 als Pol genommen) und die erste Seilpolygonseite durch C zu legen. Das Seilpolygon in Fig. 380 für Pol O_1 ist C, VI', V', IV', III', II', I'; die Mittelkraft $\sum_1^6 (G)$ muß durch den Punkt E gehen und lothrecht sein. Nachdem nunmehr die auf die Hälfte des Gewölbes wirkenden Einzellaften durch ihre Mittelkraft R ersetzt sind, wirken auf diesen Gewölbtheil nur noch drei Kräfte: R, die Kraft im Scheitel C und der Kämpferdruck D im Punkte A. Des Gleichgewichtes wegen müssen sie sich in einem Punkte schneiden; die Scheitelkraft geht durch C und ist bei der vorgesehnen Belastung und Construction wagrecht, schneidet sich also mit R im Punkte E; durch diesen Punkt muß also auch die Kämpferkraft gehen; da diese aber auch durch A geht, so ist ihre Richtung durch die Punkte A und E bestimmt. R zerlegt sich also im Punkte E in die beiden Kräfte H und D. Die Größen von H und D werden erhalten, indem man durch α die Parallele zu H, durch η die Parallele zu AE zieht; dann wird $\overline{\eta O} = D$ und $\overline{O \alpha} = H$.

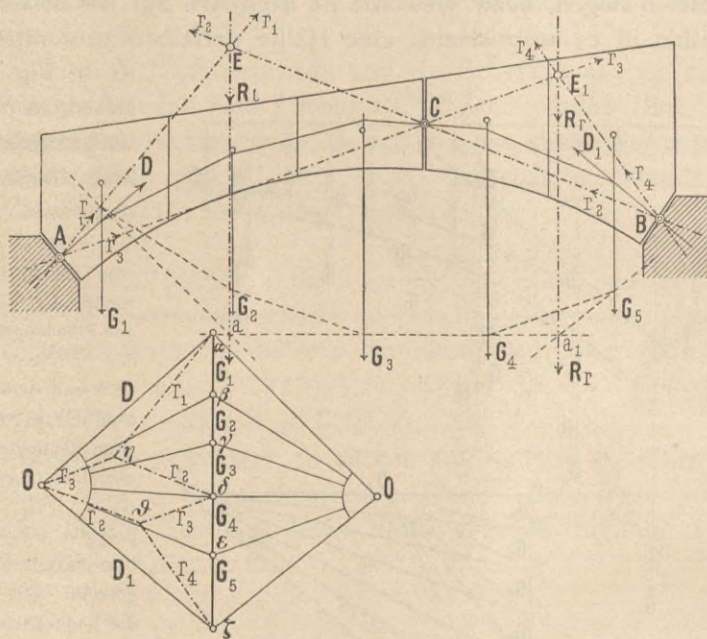
Man erhält nun die Mittelkraftslinie, indem man die in C angreifende Kraft H zunächst im Schnittpunkte VI mit G_6 zu einer Resultirenden zusammensetzt; Gröfse und Richtung derselben sind durch $O\beta$ im Kraftpolygon gegeben; die durch VI parallel zu $O\beta$ gezogene Linie giebt ihre Lage. Wo die Mittelkraft sich mit G_5 schneidet, d. h. in Punkt V , setzt man sie mit dieser Kraft zusammen. Gröfse und Richtung dieser neuen Mittelkraft giebt $\overline{O\gamma}$ im Kraftpolygon; die Lage wird erhalten, indem man durch V die Parallele zu $\overline{O\gamma}$ zieht. Indem man so weiter construirt, erhält man im Kraftpolygon Gröfse und Richtung aller Mittelkräfte, im Seilpolygon $C, VI, V, IV, III, II, I, A$ die Mittelkraftslinie. Als Controle dient, dafs die Mittelkraftslinie durch A geht.

273.
Mittelkrafts-
linie für
unsymmetrische
Bogen.

Bei einem beliebig gestalteten Bogen mit beliebiger Belastung (Fig. 381) er giebt sich die durch drei vorgeschriebene Punkte A, C, B verlaufende Mittelkraftslinie, wie folgt.

Man kann die Construction als aus zwei ungleichen Hälften bestehend auffassen, welche einander im Scheitelpunkte C stützen. Der Kämpferdruck in A besteht aus zwei Theilen: demjenigen, welcher durch die Belastung nur der linken Hälfte erzeugt wird, und demjenigen, welcher durch die Belastung nur der rechten Hälfte hervorgerufen wird. Eben so verhält es sich mit dem Kämpferdruck in B . Nimmt man zunächst nur die linke Hälfte belastet, also die rechte Hälfte gewichtslos an, so hat wie beim Dreigelenkdach (siehe Art. 210, S. 211) der Kämpferdruck von B die Richtung BC . Eine gleich grofse und gleich gerichtete Kraft wird von der rechts liegenden Hälfte in C auf die linke Hälfte übertragen; auf diese Hälfte wirken außerdem noch die Resultirende der Lasten G_1, G_2, G_3 und der Kämpferdruck von A . Die Gröfse und Lage der Resultirenden von G_1, G_2 und G_3 findet man leicht durch Auftragen der Lasten zu einem Kraftpolygon und Verzeichnen eines Seilpolygons für einen beliebigen Pol. Der Schnittpunkt a der vor G_1 vorhergehenden und der auf G_3 folgenden Seilpolygonseite giebt einen Punkt der Resultirenden R_l . Da letztere lothrecht ist, ziehe man eine lothrechte Linie durch a ; alsdann ist diese die Resultirende R_l . Die in C wirkende Kraft mit der Richtung BC schneidet die Resultirende in Punkt E ; durch diesen Punkt mufs auch die dritte auf die linke Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck von A gehen. Man ziehe \overline{AE} ; alsdann wird R_l im Punkt E durch die beiden dieser Belastung entsprechenden Kämpferdrücke r_1 und r_2 aufgehoben. Die Zerlegung im Kraftpolygon ergibt $r_1 = \overline{\delta\eta}$ und $r_2 = \overline{\delta\eta}$.

Fig. 381.



In gleicher Weise bestimmt man weiter die Kämpferdrücke r_3 und r_4 , welche in A , bzw. B durch die Belastung nur der rechten Hälfte erzeugt werden. Da für diese Belastungsweise die linke Hälfte gewichtslos ist, so fällt r_3 in die Linie \overline{AC} ; R_r geht durch a_1 ; r_3 schneidet sich mit R_r in E_1 , und durch E_1 mufs auch die dritte auf die rechte Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck r_4 von B gehen. Es ist $\overline{\delta\zeta} = R_r$, und die Zerlegung von R_r ergibt $\zeta\delta = r_4$ und $\delta\delta = r_3$. In Wirklichkeit sind beide Hälften belastet; demnach wirken im linken Kämpferpunkt A sowohl r_1 wie r_3 , im rechten Kämpferpunkt B sowohl r_2 wie r_4 . Die Zusammensetzung von r_3 und r_1 giebt als Kämpferdruck bei A die Kraft $A_1 = \overline{Oa}$, diejenige von r_2 und r_4 als Kämpferdruck bei B die Kraft $B_1 = \zeta\overline{O}$. Um eine einfache Figur zu erhalten, ist an η : $\overline{O\eta} = r_3$ und an δ : $\delta\overline{O} = r_2$ gelegt und so das Parallelogramm $O\eta\delta\delta$ gezeichnet. Die Mittelkraftslinie er giebt sich nun leicht, indem man der Reihe nach A_1 mit $G_1, G_2 \dots$ eben so zu

fammenfetzt, wie für das fymmetrifche Gewölbe in Art. 272 (S. 287) gezeigt worden ift. Die Mittelkraftslinie ift das Seilpolygon für den Pol O . Als Controle diene, dafs die Mittelkraftslinie durch C und B verlaufen mufs.

Beim Verzeichnen der Mittelkraftslinie handelt es fich meistens darum, aus dieser Linie die Stützlinie zu conftruiren, d. h. die Punkte zu finden, in denen die einzelnen Gewölbequerschnitte von den auf fie wirkenden Mittelkräften gefchnitten werden (siehe Art. 268, S. 283). Da aber die Gewölbequerschnitte nicht, wie in Fig. 380 u. 381 angenommen war, lothrecht find, fondern radial verlaufen, fo ift eine Verbefferung nöthig. Man kann zunächft auf die wirkliche Querschnittslage dadurch leicht Rückficht nehmen, dafs man die Lamellengrenzen entsprechend der

274.
Verbefferungen.

Fig. 382.

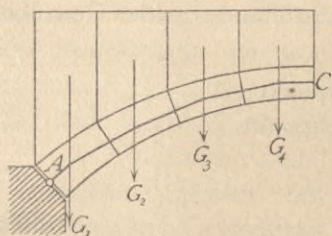


Fig. 383.

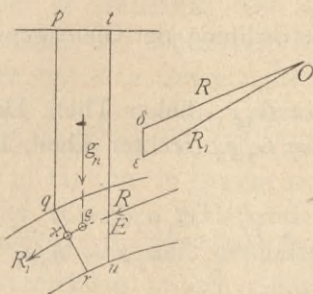
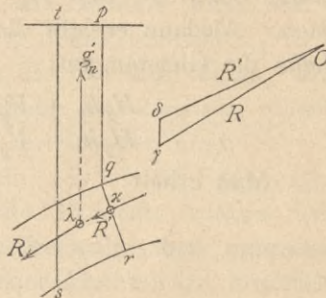


Fig. 384.



Lage der Querschnitte wählt (Fig. 382). Das Verfahren zur Ermittlung der Gleichgewichtslinie bleibt genau, wie oben gezeigt; nur ift die Ermittlung der Schwerpunkte für die einzelnen Lamellen etwas umständlicher als dort.

Es können aber auch die Constructions in Fig. 380 u. 381 benutzt werden, wenn nur die nachstehend beschriebenen Verbefferungen vorgenommen werden.

Die der richtigen Querschnittslage entsprechende Lamellengrenze fei pqr (Fig. 383); bei der lothrechten Theilung fei tu als Grenze angenommen und dabei fei die Kraft R , welche tu in E fchneidet, als Mittelkraft aller rechts von tu wirkenden äußeren Kräfte gefunden. Um nun den Punkt der Stützlinie zu finden, welcher in qr liegt, braucht man nur die Mittelkraft aller rechts von qr wirkenden Kräfte aufzufuchen und ihren Schnittpunkt mit qr zu ermitteln. Diese gefuchte Kraft ift offenbar die Mittelkraft von R und dem Gewichte g_n des Gewölbeheiles $pqrut$. Es fei $R = O\delta$ und $g_n = \delta\varepsilon$; alsdann ift die gefuchte Mittelkraft $R_1 = O\varepsilon$, geht durch ρ und ift parallel zu $O\varepsilon$. Diese Kraft R_1 ift in Fig. 383 gezeichnet; fie fchneidet die Fuge qr in x ; fonach ift x ein Punkt der richtigen Stützlinie.

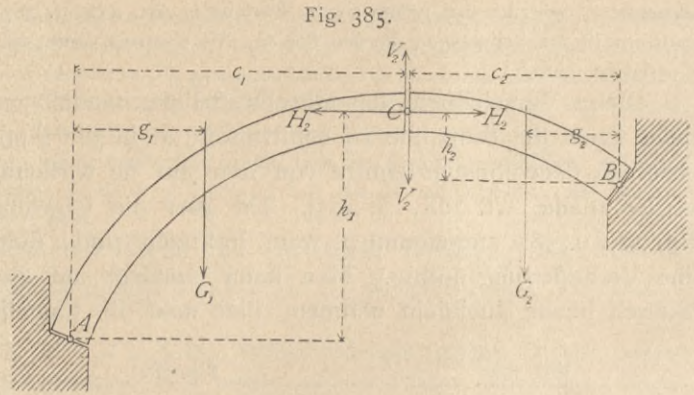
Ganz ähnlich ift zu verfahren, wenn die lothrechte Lamellengrenze an der anderen Seite der wirklichen Fuge liegt (Fig. 384).

Die Mittelkraft aller an der einen Seite von ts wirkenden Kräfte, R , enthält das Gewicht des Stückes $tsrqp$ bereits; um also die Mittelkraft R' , welche auf die Fuge qr wirkt, zu erhalten, mufs man R mit dem negativ genommenen, also nach oben gerichteten Gewichte g_n' zufammenfetzen. Es fei $R = O\gamma$ und $g_n' = \gamma\delta$; alsdann wird $R' = O\delta$, geht durch den Punkt λ , in welchem fich R und g_n' fchneiden, und ift parallel zu $O\delta$. Der richtige Punkt der Stützlinie ift x .

In Art. 270 (S. 285) ift gezeigt worden, wie der Horizontalschub in einem fymmetrifch zur Scheitelfuge geformten und belasteten Gewölbe durch Rechnung gefunden werden kann. Auch beim unfymmetrifchen Gewölbe macht, wenn drei Punkte für den Verlauf der Mittelkraftslinie vorgeschrieben find, die Berechnung des Horizontalschubes keine Schwierigkeit. Das Verfahren entfpricht genau demjenigen, welches für die Ermittlung der Auflagerdrücke beim Sprengwerksdach mit drei Gelenken in Art. 210 (S. 211) vorgeführt worden ift.

275.
Horizontalschub
im unfymmetrifchen
Gewölbe.

Die Mittelkräfte der Laften auf dem linken, bzw. rechten Gewölbetheile seien G_1 , bzw. G_2 ; die Entfernungen dieser Laften von den Kämpferpunkten seien bzw. g_1 und g_2 (Fig. 385). Die beiden Theile übertragen im Punkte C auf einander eine Kraft, deren Seitenkräfte bzw. V_2 und H_2 seien. Alsdann ergibt die Betrachtung der Gleichgewichtszustände beider Gewölbetheile die Gleichungen:



$$H_2 h_1 + V_2 c_1 = G_1 g_1 \text{ (linker Theil, Drehpunkt } A);$$

$$H_2 h_2 - V_2 c_2 = G_2 g_2 \text{ (rechter Theil, Drehpunkt } B).$$

Man erhält

$$H_2 = H = \frac{G_1 g_1 c_2 + G_2 g_2 c_1}{h_1 c_2 + h_2 c_1} \quad \dots \quad 390.$$

2. Kapitel.

Tonnen- und Kappengewölbe.

Die Zerstörung des Gewölbes kann erfolgen:

- 1) durch Umkanten eines Gewölbetheiles um eine innere oder äußere Kante,
- 2) durch Gleiten einzelner Gewölbetheile längs der Fugen und
- 3) durch Zerdrücken der Wölbsteine.

Wenn die Lage der Stützlinie bekannt ist, so können alle auf die Standicherheit des Gewölbes bezügliche Fragen leicht beantwortet werden. Dabei ist zu beachten, dass, falls für den Verlauf der Mittelkraftslinie drei Punkte vorgeschrieben sind, welche in Fugen liegen, dieselben entsprechend der für die Stützlinie gegebenen Erklärung auch Punkte der Stützlinie sind.

Im Hochbau handelt es sich fast stets nur um die Ermittlung des im Gewölbe wirkenden Horizontalstoches, weil diese Kraft hauptsächlich die Mauern, welche das Gewölbe, bzw. den Bogen stützen, gefährdet. Wäre die Stützlinie bekannt, so wäre auch der Horizontalstoch bekannt. Die Ermittlung der genauen Lage derselben ist aber nach Art. 266 (S. 281) nur mittels der Elasticitäts-Theorie der Gewölbe möglich, und diese Ermittlung ist sehr umständlich. Es ist aber auch ausreichend, gewisse Grenzlagen für die Stützlinie und damit gewisse Grenzwerte für den Horizontalstoch fest zu legen.

Soll das Gewölbe stabil sein, so muss die Stützlinie ganz im Gewölbe liegen.

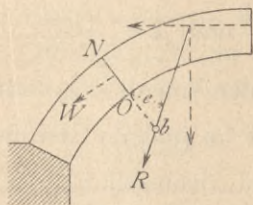
Wenn die Resultirende R aller an der einen Seite des Querschnittes NO wirkenden Kräfte (Fig. 386) die Verlängerung des Querschnittes etwa im Punkte b schneidet, so hat diese Kraft in Bezug auf O ein Moment $M = R e$, welches eine

276. Stabilität.

277. Stabilität gegen Kanten.

Drehung des oberhalb NO liegenden Gewölbetheiles um O erstrebt. Diese Drehung kann nur durch eine andere, entgegengesetzt drehende Kraft W (in Fig. 386 punktiert) aufgehoben werden, d. h. durch einen Zugwiderstand der Gewölbefasern.

Fig. 386.



Die Wölbsteine können aber einen solchen, wenn von der Zugfestigkeit des Mörtels abgesehen wird, nicht leisten, so dass also keine Kraft vorhanden ist, welche das Gleichgewicht herstellen könnte. Der oberhalb der Fuge befindliche Gewölbetheil würde demnach um O kanten und einstürzen. Eine Aufhebung der Kraft R ist erst möglich, wenn dieselbe den Querschnitt NO schneidet; alsdann erzeugt sie in einzelnen Theilen des Querschnittes Druckspannungen, welche R aufheben. Soll also das Gewölbe nicht um O

kanten, so muss der Schnittpunkt der Mittelkraft R mit dem Querschnitte, d. h. der Schnittpunkt der Stützlinie mit dem Querschnitte, in das Gewölbe fallen. Was aber vom Querschnitt NO gilt, gilt von allen Querschnitten. Das Gewölbe ist also nur dann gegen Kanten stabil, wenn die Stützlinie ganz im Gewölbe liegt.

In Art. 126 bis 132 (S. 111 bis 120) ist gezeigt worden, wie sich die Spannungen für Stützen ergeben, falls auf dieselben Axialkräfte und Momente wirken. Mit hinreichender Genauigkeit können die dort gefundenen Formeln auch gebraucht werden, um die Spannungsvertheilung in den Gewölbequerschnitten zu ermitteln. Die Spannung in einem Punkte, welcher um z von der senkrecht zur Bildebene errichteten Schwerpunktsaxe des Querschnittes absteht, ist demnach nach Gleichung 102

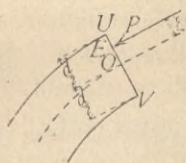
$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F \xi z}{\mathcal{I}} \right).$$

Hier handelt es sich nur um rechteckige Querschnitte von der Höhe d und der Breite 1 (senkrecht zur Bildebene); mithin ist $F = d \cdot 1$ und $\mathcal{I} = \frac{d^3}{12}$; daher

$$\sigma = \frac{P}{d} \left(1 + \frac{12 \xi z}{d^2} \right) \dots \dots \dots 391.$$

Da P hier stets Druck ist und wir P als positiv einführen, so bedeuten die positiven Werthe von σ Druck, die negativen Werthe Zug.

Fig. 387.



Der größte Druck σ_{max} findet für die in Fig. 387 gezeichnete Lage der Kraft P in den Punkten U statt, für welche z seinen größten Werth $\frac{d}{2}$ hat; der kleinste Druck σ_{min} in den

Punkten V , für welche z seinen kleinsten Werth $-\frac{d}{2}$ hat; demnach wird

$$\sigma_{max} = \frac{P}{d} \left(1 + \frac{12 \xi d}{2 d^2} \right) = \frac{P}{d} \left(1 + \frac{6 \xi}{d} \right) \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{P}{d} \left(1 - \frac{6 \xi}{d} \right) \dots \dots 392.$$

σ_{min} wird zu Null, wenn $1 - \frac{6 \xi}{d} = 0$, d. h. wenn $\xi = \frac{d}{6}$ ist.

In den am wenigsten gedrückten Punkten V findet also die Spannung Null statt, wenn die Mittelkraft den Querschnitt in der Höhe $\frac{d}{6}$ über der Mittellinie des Gewölbes schneidet. Schneidet die Kraft P , also die Stützlinie, den Querschnitt unterhalb O , so ergibt sich leicht aus Gleichung 391 (indem man $-\xi$ statt $+\xi$ einführt), dass der größte Druck in den Punkten V , der größte Zug in den Punkten U

278.
Stabilität
gegen
Zerdrücken.

stättfindet. In U findet demnach die Spannung Null statt, wenn die Stützlinie den Querschnitt in dem Abstände $\frac{d}{6}$ unterhalb der Schwerpunktsaxe schneidet.

σ_{max} und σ_{min} haben gleiches Vorzeichen für diejenigen Werthe von ξ , für welche gleichzeitig stättfindet

$$1 + \frac{6\xi}{d} > 0 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{6\xi}{d} > 0, \quad \text{d. h. für } \xi > -\frac{d}{6} \quad \text{und} \quad \xi < +\frac{d}{6}.$$

So lange also der Schnittpunkt der Mittelkraft nicht weiter von der Gewölbemittellinie entfernt ist, als $\frac{d}{6}$, d. h. so lange der Schnittpunkt im inneren Gewölbedrittel liegt, haben σ_{max} und σ_{min} gleiches Vorzeichen, sind demnach σ_{max} und σ_{min} Druck; dann findet aber im ganzen Querschnitte nur Druck statt. (Vergl. Art. 128, S. 114.)

Ist dagegen ξ größer als $\frac{d}{6}$, so findet in der am meisten gezogenen Faser Zugbeanspruchung statt; dann gilt die Gleichung 391 für die Druckvertheilung nicht mehr, weil diese unter der Annahme einer Beanspruchung aller Querschnittspunkte entwickelt worden ist; falls aber hier einzelne Punkte des Querschnittes auf Zug beansprucht werden, so kann man auf Beanspruchung aller Querschnittspunkte nicht mit Sicherheit rechnen. Die dann geltenden Gleichungen sind in Art. 129 (S. 116) entwickelt. Falls ξ größer als $\frac{d}{6}$ ist, mit anderen Worten, falls die Stützlinie einen Querschnitt außerhalb des inneren Drittels schneidet, etwa im Abstände c von den zunächst gelegenen äußeren Punkten, so vertheilt sich nach Gleichung 110 (S. 117) der Druck P auf eine Breite $3c$, wobei der Maximaldruck doppelt so groß ist, als wenn sich der Druck über die gedrückte Fläche gleichmäßig vertheilt. Wir erhalten also (Alles auf Centimeter bezogen)

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3 \cdot 100 \cdot c} \quad \dots \quad 393.$$

Wird die größte, im Wölbmaterial zulässige Druckbeanspruchung für die Flächeneinheit mit K bezeichnet, so kann Gleichung 393 benutzt werden, um zu ermitteln, wie weit sich die Stützlinie der inneren oder äußeren Gewölbelaibung nähern darf. Man erhält als Bedingungsgleichung:

$$K = \frac{2P}{300c}, \quad \text{woraus} \quad c = \frac{2P}{300K} \quad \dots \quad 394.$$

Damit ist als Bedingung für die Stabilität des Gewölbes gegen Druck gefunden: Soll das Gewölbe genügende Sicherheit gegen Druck bieten, so darf der Abstand der Stützlinie von den Gewölbelaibungen an keiner Stelle kleiner werden, als $\frac{2P}{300K}$.

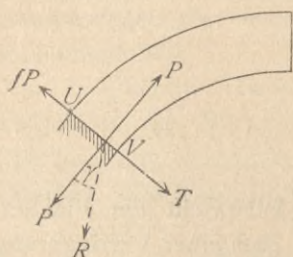
Da P für die verschiedenen Gewölbestellen verschiedene Werthe hat, so ergeben sich für dieselben auch verschiedene Größen von c . Meistens wird es jedoch genügen, den Größtwerth von P , der sich an den Kämpfern ergibt, einzusetzen und dann den für c erhaltenen Werth im ganzen Gewölbe gleich groß anzunehmen. Man kann in dieser Weise leicht die beiden Linien construiren, zwischen denen die Stützlinie verlaufen soll.

Die Forderung, dass in allen Punkten sämtlicher Querschnitte nur Druck-

beanspruchung stattfinden soll, ist erfüllt, wenn sämtliche Querschnitte von ihren zugehörigen Mittelkräften im inneren Gewölbedrittel geschnitten werden, d. h. wenn die ganze Stützlinie im inneren Drittel verläuft.

Der Einsturz des Gewölbes kann endlich auch dadurch verursacht werden, daß ein Theil desselben längs des anderen gleitet. Die Mittelkraft aller auf den Gewölbetheil oberhalb der Fuge UV (Fig. 388) wirkenden Kräfte sei gleich R ; alsdann ist Gleichgewicht nur möglich, wenn Seitens der Fuge eine genau gleich große und gleich gerichtete Kraft mit entgegengesetztem Sinne auf den betreffenden Gewölbetheil

Fig. 388.



wirkt. Wir zerlegen R in eine Axialkraft $P = R \cos \gamma$ und eine Querkraft $T = R \sin \gamma$. Die Axialkraft P wird, wenn ihr Schnittpunkt mit der Fuge nicht zu nahe an die Laibungen fällt, durch die senkrecht zum Querschnitt gerichteten axialen Spannungen, die Querkraft T wird durch den Reibungswiderstand an der Berührungsfläche UV aufgehoben. Nennt man den Reibungs-Coefficienten f , so ist der Reibungswiderstand $W = fP = fR \cos \gamma$. Größer kann W nicht werden; Gleichgewicht gegen Verschieben ist also nur möglich,

wenn stattfindet: $T \leq fR \cos \gamma$, d. h. $R \sin \gamma \leq fR \cos \gamma$ und $\text{tg } \gamma \leq f$.

Wird der Reibungswinkel mit φ bezeichnet, so ist $f = \text{tg } \varphi$, und alsdann heißt die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht:

$$\text{tg } \gamma \leq \text{tg } \varphi \text{ oder } \gamma \leq \varphi \dots \dots \dots 395.$$

Sobald γ größer wird, als der Reibungswinkel, kann T nicht aufgehoben werden, und dann findet ein Abgleiten des betrachteten Gewölbetheiles statt.

Dieselbe Schlussfolgerung gilt auch, falls R nach oben um den Winkel γ von der Senkrechten zur Fuge abweicht; nur ist dann das Bestreben vorhanden, den oberen Gewölbetheil nach außen zu verschieben. Was für die Fuge UV gilt, gilt für alle Fugen, so daß folgendes Gesetz ermittelt ist: Soll das Gewölbe gegen Gleiten stabil sein, so darf an keiner Stelle der Winkel, welchen die Mittelkraftslinie mit der betreffenden Fugen senkrechten bildet, größer sein, als der Reibungswinkel für die betreffenden Materialien.

In den meisten Fällen kann man ohne großen Fehler statt der Mittelkraftslinie die Stützlinie einführen und als Bedingung für die Stabilität des Gewölbes angeben, daß die Tangente an die Stützlinie nirgends einen Winkel mit der Fugen senkrechten einschließt, welcher größer ist, als der Reibungswinkel.

Man kann den Reibungs-Coefficienten f zwischen 0,6 und 0,75 liegend annehmen, welchen Werthen die Winkel $\varphi = 31$ bis 37 Grad entsprechen. Bei frischem Mörtel kann der Winkel φ bis auf 27 Grad hinabgehen (f bis auf 0,51). Die Tangenten an die Stützlinie bilden aber nur selten so große Winkel mit den Fugen senkrechten, so daß, wenigstens im eigentlichen Gewölbe, die Stabilität gegen Gleiten selten in Frage kommt.

Betrachtet man die eine Hälfte eines symmetrisch gestalteten und symmetrisch belasteten Gewölbes (Fig. 389), auf welche außer der Belastung G noch der Horizontal Schub H im Scheitel wirkt, nimmt zunächst als Angriffspunkt von H den Punkt C beliebig und außerdem an, daß die Stützlinie die Kämpferfuge in A schneide, so geht die Mittelkraft von G und H durch A , und nach Art. 270 (S. 285) ist

279.
Stabilität
gegen
Gleiten.

280.
Grenzlagen der
Stützlinie und
Grenzwerte
des Horizontal-
schubes.

$$H = \frac{G g}{h}.$$

Diesen Annahmen, bezw. diesem Werthe des Horizontalschubes entspricht eine ganz bestimmte Stützlinie, etwa CEA , die in Fig. 389 voll ausgezogen ist.

Construirt man ein zweites Mal unter Beibehaltung des Punktes C die Stützlinie für einen anderen Kämpferpunkt, etwa A' , so ergibt sich etwa die punktirte Stützlinie $CE'A'$, und der zugehörige Horizontalschub wird

$$H' = G \frac{g'}{h'}.$$

Da $\frac{g'}{h'} > \frac{g}{h}$, so ist auch $H' > H$.

Man sieht, einer Vergrößerung des Horizontalschubes entspricht ein Flacherwerden der Stützlinie, und es ergibt sich in gleicher Weise, daß einer Verringerung von H ein Steilerwerden der Stützlinie entspricht. Offenbar sind nun sehr viele Stützlinien möglich, welche sämmtlich durch C gehen und ganz im Gewölbe verlaufen, demnach mit der Stabilität desselben vereinbar sind. Dem kleinsten Werthe

Fig. 389.

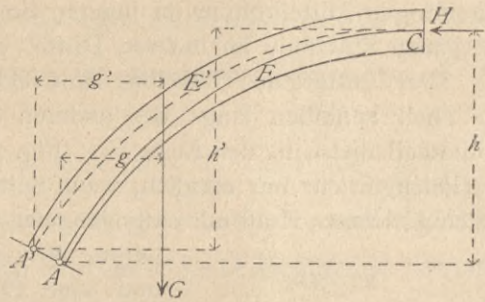


Fig. 390.

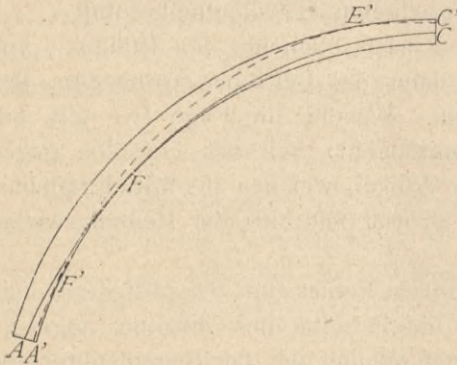
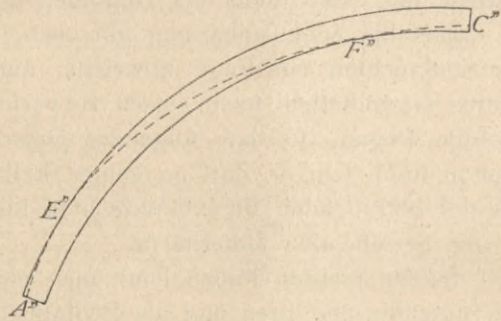


Fig. 391.



von H mit dem Angriffspunkt C entspricht diejenige dieser Stützlinien, welche an irgend einer Stelle die innere Gewölbelaubung berührt (CFA in Fig. 390); denn eine weitere Verringerung von H würde zur Folge haben, daß die Stützlinie bei F aus dem Gewölbe nach innen herausfiel. Nun kann aber jeder Punkt der Scheitelfuge Angriffspunkt der Kraft H sein; es steht also nichts im Wege, einen anderen, höheren Punkt der Scheitelfuge als Angriffspunkt von H anzunehmen, mithin die ganze Stützlinie um das entsprechende Stück parallel sich selbst nach oben zu verschieben. Jetzt kann der Horizontalschub weiter verringert werden, und man kann damit so weit fortfahren, bis die Stützlinie gleichzeitig die äußere und die innere Laibung berührt. Diese Stützlinie sei (Fig. 390) etwa $C'E'F'A'$. Eine weitere Verringerung von H hat die Folge, daß die Stützlinie bei F' das Gewölbe verläßt; ein weiteres Hinaufschieben der Stützlinie ist auch nicht möglich, weil bei einem

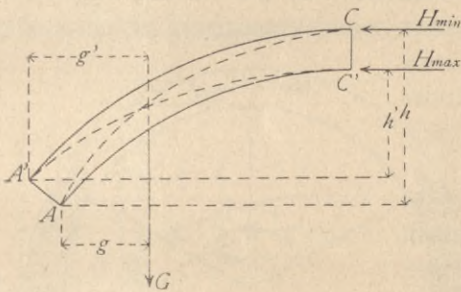
folchen — follte es fo weit fortgefetzt werden, dafs bei F' die Stützlinie wieder in das Gewölbe fällt — bereits vorher die Stützlinie bei E' auferhalb des Gewölbes gefallen wäre.

Die gezeichnete Stützlinie $C'E'F'A'$ entspricht also dem Minimum von H und heifst defshalb die Minimalstützlinie. Es ergibt sich demnach: Die Minimalstützlinie hat jederfeits mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemeinfam, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der äußeren Laibung über denjenigen mit der inneren Laibung.

Bei flachen Bogen fällt gewöhnlich der Berührungspunkt mit der äußeren Laibung in die Scheitelfuge, derjenige mit der inneren Laibung jederfeits in die Kämpferfuge; die beiden Berührungspunkte E' mit der äußeren Laibung können zusammenfallen.

In gleicher Weife erhält man die Stützlinie, welche dem Maximum von H entspricht, die Maximalstützlinie ($C''F''E''A''$ in Fig. 391). Die Maximalstützlinie hat jederfeits des Scheitels mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemeinfam, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der inneren Laibung über denjenigen mit der äußeren Laibung; die beiden erfteren können zusammenfallen.

Fig. 392.



Bei flachen Bogen fallen die beiden Berührungspunkte mit der inneren Laibung in die Scheitelfuge, die Berührungspunkte mit der äußeren Laibung in die Kämpferfugen.

In Fig. 392 ist CA die Minimal- und $C'A'$ die Maximalstützlinie. Die entsprechenden Werthe von H find

$$H_{min} = \frac{G g}{h} \quad \text{und} \quad H_{max} = \frac{G g'}{h'} \quad . \quad 396.$$

Wenn wir demnach auch die wirkliche Lage der Stützlinie und die wirkliche Größe von H durch die Gleichgewichtsbedingungen allein nicht ermitteln können, fo haben wir doch jetzt Grenzen fowohl für die Lage der Stützlinie, als auch für die Größe des Horizontalschubes gefunden. Der Horizontalschub kann nicht größer fein, als H_{max} , und nicht kleiner, als H_{min} .

Fallen Maximal- und Minimalstützlinie nicht zusammen, fo ift eine Anzahl von Stützlinien möglich, welche folchen Werthen des Horizontalschubes entsprechen, die zwischen H_{max} und H_{min} liegen. Je größer der Unterschied dieser beiden Werthe ift, defto mehr Stützlinien find möglich, defto größere Aenderung darf H erleiden, ehe das Gewölbe einftürzt, defto stabiler ift also das Gewölbe. Man kann demnach fchließen: Ein Gewölbe ift stabil, wenn eine Maximal- und eine Minimalstützlinie möglich ift und beide nicht zusammenfallen. Die Stabilität ift um fo größer, je größer die Unterschiede dieser beiden Stützlinien find, bezw. je größer der Unterschied $H_{max} - H_{min}$ ift.

Im vorhergehenden Artikel war abfolut festes Material angenommen, und es konnte defshalb eine Berührung der Stützlinie und der Gewölbelaibung als möglich vorausgefetzt werden. In Wirklichkeit darf nach Art. 278 (S. 291) die Stützlinie nicht näher an die Laibungen treten, als dafs der Abstand noch $c = \frac{2P}{300K}$ ift. Bei einer Berührung der Laibung durch die Stützlinie würde an dieser Stelle $c = 0$, und da nach Gleichung 393: $\sigma_{max} = \frac{2P}{300c}$ ift, hier $\sigma_{max} = \frac{2P}{0} = \infty$ fein.

Man ftellt defshalb die Bedingung, dafs eine Maximal- und eine Minimalstütz-

linie möglich sei, welche wenigstens um $\frac{2P}{300K}$ von den Gewölbelaibungen abstehen, und das beide nicht zusammenfallen.

Wenn im inneren Drittel des Gewölbes, in der fog. Kernfläche, eine Maximal- und eine Minimalstützlinie möglich ist und beide nicht zusammenfallen, so ist dies noch günstiger.

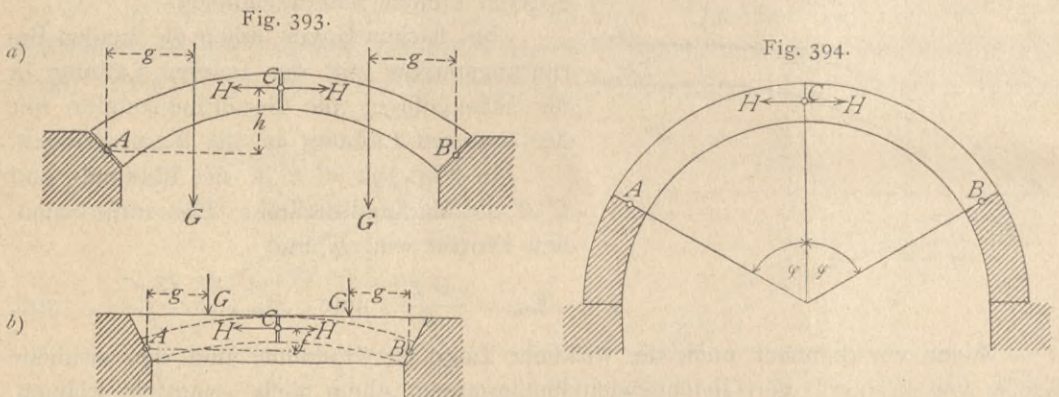
Die Stabilität gegen Gleiten erfordert, dass die Tangente an die Stützlinie an keiner Stelle einer größeren, als den Reibungswinkel mit der Fugen-Senkrechten mache. Dieser Bedingung müssen also auch die Maximal- und Minimalstützlinie genügen.

282.
Horizontal Schub
für verschiedene
Bogenformen.

Für einige häufig vorkommende Bogenformen ergeben sich die Horizontalstöße unter Annahme symmetrischer Form und Belaftung, so wie unter der weiteren Annahme einer mittleren Stützlinie folgendermaßen.

1) Flachbogen (Fig. 393a). Nach Früherem ist $H = \frac{Gg}{h}$.

2) Scheitrechter Bogen. Man kann die Tragfähigkeit des scheinrechten Bogens als eben so groß annehmen, wie diejenige eines Flachbogens, dessen Mittel-



punkt auf der Lothrechten der Scheitelfuge liegt und dessen innere Laibung durch die unteren Punkte der Kämpferfugen, dessen äußere Laibung durch den obersten Punkt der Scheitelfuge geht. Dann wird nach Fig. 393b

$$H = \frac{Gg}{f}$$

3) Halbkreisbogen. Eine halbkreisförmige Mittelkraftlinie für lothrechte (hier nur in Betracht kommende) Belaftung gibt es nicht; denn bei derselben müsste die Tangente an jedem Kämpfer, also auch die Mittelkraft an dieser Stelle, lothrecht sein. Da aber die Mittelkraft stets eine wagrechte Seitenkraft (den Horizontalstöß) hat, so kann sie nie lothrecht sein. Deshalb kann die Mittelkraftlinie nicht einen vollen Halbkreis vorstellen. Man muss daher die unteren Theile des Bogens als zum Widerlager gehörig betrachten und berechnet den Horizontalstöß H für den zwischengespannten Flachbogen (Fig. 394). Der Winkel φ wird zweckmäßig etwa gleich 60 Grad gewählt; H ergibt sich dann, wie unter 1.

283.
Stabilität
der
Widerlager
und Pfeiler.

Bei den Widerlagern, bzw. Mittelpfeilern der Gewölbe kann man, genau wie bei den Gewölben selbst, von einer Stützlinie sprechen, wenn man dieselbe als Gesamtheit der Punkte erklärt, in welchen die einzelnen Querchnitte der Widerlager,

bezw. Pfeiler von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden. Alsdann gelten die in Art. 276 bis 279 (S. 290 bis 293) aufgestellten Sätze auch hier und können folgendermassen ausgesprochen werden: Soll das Widerlager, bezw. der Pfeiler gegen Kanten, Zerdrücken und Gleiten stabil sein, so muß die Stützlinie ganz im Widerlager, bezw. Pfeiler liegen, darf die Mittelkraft an keiner Querschnittsstelle eine grössere Druckbeanspruchung erzeugen, als der Baustoff gestattet, und darf endlich der Winkel der Mittelkraft mit der Senkrechten zur Fuge an keiner Stelle grösser sein, als der Reibungswinkel.

1) Widerlager. Die vom Gewölbe auf ein Widerlager ausgeübte Kraft R ist nach Grösse und Richtung gleich dem Kämpferdruck, welcher auf das Gewölbe wirkt, dem Sinne nach demselben entgegengesetzt. Wenn R bekannt oder angenommen ist, so kann die entsprechende Widerlager-Stützlinie leicht durch Zusammenfassung dieser Kraft R mit den Widerlagerlasten construirt werden. Für R und H sind aber nach Obigem nur gewisse Grenzen bekannt. Wenn nun das Widerlager für die Grenzwerte von H stabil ist, so offenbar auch für die Mittelwerthe. Ist es also möglich, für den Maximal- und Minimalwerth von H je eine Widerlager-Stützlinie zu construiren, welche obigen Bedingungen genügt, so ist das Widerlager stabil. Da die Maximalwerthe von H nur in Folge künstlicher Vergrößerung des Horizontalschubes auftreten, so ist es meistens ausreichend, den Nachweis unter Zugrundelegung eines mittleren Werthes von H zu führen, d. h. eines solchen Werthes, welcher einer mittleren Gewölbe-Stützlinie entspricht.

Auf dem Wege der Rechnung kann man die Stabilität des Widerlagers folgendermassen untersuchen. Man sucht die Punkte, in welchen die Stützlinie die einzelnen Fugen schneidet, und ermittelt die in denselben hervorgerufenen Druckspannungen. Die Untersuchung soll für die Fuge II (Fig. 395) gezeigt werden. Die Mittelkraft aller oberhalb von II wirkenden Kräfte schneide die Fuge im Punkte E ; dann ist E ein Punkt der Stützlinie. Die Lage von E ist bekannt, wenn x , der Abstand von der äusseren Mauerkante, bekannt ist. Auf das Widerlager wirken in A : der Kämpferdruck R , dessen wagrechte, bezw. lothrechte Seitenkraft H ,

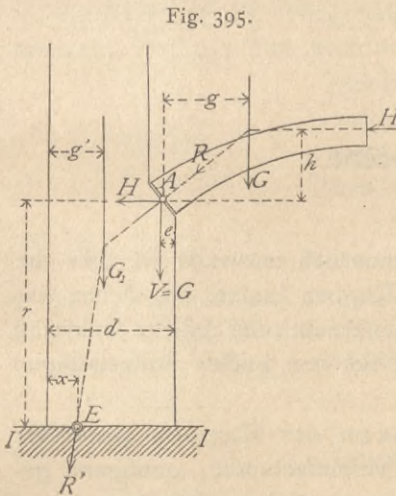


Fig. 395.

bezw. V ist. Es ist $H = \frac{Gg'}{h}$ und $V = G$. Ausser diesen Kräften wirkt als belastend auf die Fuge II noch das Gewicht der Mauer, so weit sie oberhalb II liegt, d. h. G_1 . Die Mittelkraft von H , $V (= G)$ und G_1 ist R' , und diese Kraft geht durch E , hat also für den Drehpunkt E das statische Moment Null. Demnach ist auch die algebraische Summe der statischen Momente der Einzelkräfte für E als Drehpunkt gleich Null, also

$$0 = G_1(g' - x) + G(d - e - x) - Hr,$$

woraus

$$x = \frac{G_1 g' + G(d - e) - Hr}{G + G_1}$$

folgt. Wenn sich für x ein negativer Werth ergibt, so bedeutet dies, daß die

Kraft R' den Querschnitt links von der Aufsenkante der Mauer schneidet, das also Kanten eintreten muß.

Die lothrechte Seitenkraft der Mittelkraft R' ist offenbar $P = G_1 + G$. Nachdem in E der Schnittpunkt der Mittelkraft mit der Fuge gefunden ist, kann man die größte in der Fuge durch diese Belastung erzeugte Druckspannung ermitteln, wie in Art. 127 bis 130 (S. 112 bis 117) für verschiedene Querschnittsformen gezeigt ist. Wenn der Querschnitt ein Rechteck von der Länge b (senkrecht zur Bildfläche gemessen) ist und die Kraftebene denselben in der Hauptaxe schneidet, so ist für

$$x < \frac{d}{3}$$

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3xb}$$

x und b sind in Centimetern, P in Kilogramm einzusetzen; alsdann erhält man σ_{max} in Kilogramm für das Quadr.-Centimeter. In ganz derselben Weise kann man die Untersuchung für eine Anzahl von Fugen führen.

2) Pfeiler. Die Stabilitätsuntersuchung eines zwischen zwei Gewölben befindlichen Mittelpfeilers wird entsprechend vorgenommen.

Die Punkte E können auch leicht graphisch ermittelt werden, indem man R mit G_1 zu R' zusammensetzt und in gleicher Weise weiter für die verschiedenen Fugen verfährt.

3. Kapitel.

Kreuz- und Kuppelgewölbe.

a) Kreuzgewölbe.

284.
Lagerfugen.

Die Einwölbung erfolgt beim Kreuzgewölbe bekanntlich entweder so, daß die Lagerfugen parallel zu den Längsaxen der einzelnen Kappen laufen, aus denen das Kreuzgewölbe besteht, oder so, daß sie im Grundriß senkrecht oder nahezu senkrecht zu den Graten verlaufen. Das statische Verhalten ist bei den beiden Anordnungen verschieden.

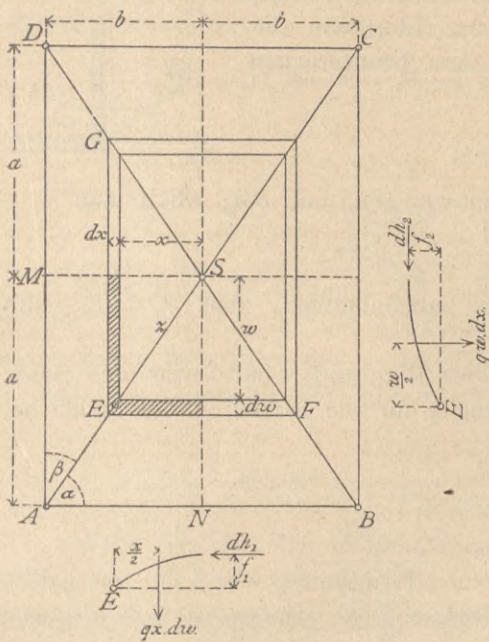
285.
Lagerfugen
parallel
zur Axe der
Kappen.

1) Die Lagerfugen laufen zu den Längsaxen der Kappen parallel. Bei den hier vorzunehmenden Berechnungen soll die vereinfachende, genügend genaue Annahme einer über die Grundfläche gleichmäßig vertheilten Belastung q auf die Flächeneinheit gemacht werden. Für die Ermittlung der Seilcurve und damit auch des Horizontalschubes werden stets drei Punkte angenommen werden.

Der nachfolgenden Untersuchung soll ein Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt werden; die Anwendung für ein solches mit quadratischem Grundriß ist dann leicht.

Zerlegt man jede Kappe durch senkrecht zur Längsaxe gelegte, lothrechte Ebenen in einzelne Streifen, welche im Grundriß Paralleltrapeze bilden (Fig. 396), und betrachtet man zwei solche Streifen GE und EF , die sich im Punkte E des Grates treffen, so ergeben sich die auf diese Streifen in ihren Scheiteln übertragenen Horizontalschübe folgendermaßen. Bezeichnet man die Pfeilhöhen der Seilcurven in den Streifen bezw. mit f_1 und f_2 , die Horizontalschübe mit bezw. dh_1 und dh_2 , so erhält man nach Fig. 396

Fig. 396.



$$dh_1 = \frac{q x^2 dw}{2f_1} \text{ und } dh_2 = \frac{q w^2 dx}{2f_2} \quad 397.$$

Der Punkt E ist der gemeinsame Kämpferpunkt für die beiden Bogen GE und EF ; die in diesem Punkte auf den Gratbogen von den beiden Bogen übertragenen Kräfte haben je eine wagrechte Seitenkraft, welche dh_1 , bzw. dh_2 ist, und eine lothrechte Seitenkraft, deren Gröfsen

$dv_1 = qx dw$ und $dv_2 = qw dx$ find. Die lothrechten Seitenkräfte addiren sich einfach in E zu einer abwärts wirkenden Kraft:

$$v = q(x dw + w dx).$$

v ist also gleich dem halben Gewichte der anschließenden Streifen (gleich dem Gewichte der in Fig. 396 schraffirten Fläche). Die beiden wagrechten Kräfte zerlegen sich (Fig. 397) in je eine Seitenkraft, welche

in die Richtung der Diagonalen AC fällt, und in eine Seitenkraft senkrecht zur ersteren. Soll die Mittelkraft von dh_1 und dh_2 in die lothrechte, durch die Diagonale gelegte Ebene fallen, so müssen sich die zuletzt genannten Seitenkräfte $dh_1 \sin \alpha$ und $dh_2 \cos \alpha$ aufheben; fomit mufs

$$dh_1 \sin \alpha = dh_2 \cos \alpha$$

fein, daraus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dh_2}{dh_1} = \frac{w^2 dx \cdot f_1}{x^2 dw \cdot f_2}.$$

Nun ist

$$w = x \operatorname{tg} \alpha \text{ und } dw = \operatorname{tg} \alpha dx,$$

daher

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot dx \cdot f_1}{x^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot dx \cdot f_2} = \operatorname{tg} \alpha \frac{f_1}{f_2}.$$

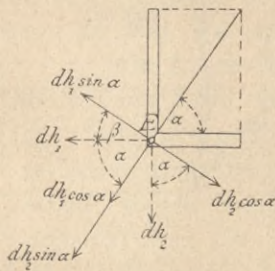
Damit obige Bedingung erfüllt sei, mufs daher

$$\frac{f_1}{f_2} = 1, \text{ d. h. } f_1 = f_2$$

fein. Soll also die Mittelkraft beider Horizontalkräfte im Grundrifs in die Richtung der Diagonalen fallen, so sind für die Seilcurven der beiden zusammengehörigen Streifen gleiche Pfeilhöhen einzuführen.

Damit diese günstige Kräftewirkung möglich sei, müssen die zusammengehörigen Streifen annähernd gleiche Scheitelhöhen haben. Wenn die Scheitellinien \overline{MS} und \overline{SN} der Kappen (Fig. 396) wagrecht sind, so kann $f_1 = f_2$ fein; aber auch wenn \overline{MS} nach einer geraden oder gekrümmten Linie ansteigt, ist es möglich und zweckmäfsig, der Linie \overline{SN} die entsprechende Form zu geben, bei welcher die Werthe f_1 der einzelnen Streifen den Werthen f_2 nahezu gleich sind. Wenn die Bedingung $f_1 = f_2$ nicht erfüllt ist, wenn beispielsweise $dh_1 \sin \alpha > dh_2 \cos \alpha$ ist, so wirkt der Ueberschufs $\Delta h = dh_1 \sin \alpha - dh_2 \cos \alpha$ wie in Fig. 398 gezeichnet ist. Δh zer-

Fig. 397.



legt sich in eine Seitenkraft Δg in der lothrechten Gratebene und eine Seitenkraft Δw , welche parallel der Längsaxe der Kappe ASD (Fig. 396) wirkt. Die Kräfte Δw beanspruchen den Schildbogen AMD . Man erhält

$$\Delta w = \frac{\Delta h}{\sin \alpha} = dh_1 - \frac{dh_2}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Mit den in Gleichung 397 gefundenen Werthen von dh_1 und dh_2 erhält man

$$\Delta w = \frac{q x^2}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right) dx.$$

Für die weiteren Untersuchungen wird angenommen, dafs $f_1 = f_2$, also $\Delta w = 0$ sei.

Betrachtet man ein Viertel des Gewölbes (Fig. 399), und zwar das Stück $MSNA$, so wirken auf dasselbe die Belastung q für die Einheit der Grundfläche, also im Ganzen $G = qab$ im Schwerpunkt O des Rechteckes $MSNA$; außerdem wirken in den Scheiteln der einzelnen Gewölbestreifen die Kräfte dh_1 , bzw. dh_2 , endlich der Kämpferdruck auf den Gratbogen in A . Diese Kräfte müssen den Gewölbetheil im Gleichgewicht halten. Die den einzelnen Streifen entsprechenden Seilcurven sind, weil die Belastungen gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilt sind, Parabeln, und man kann annehmen, dafs sich in allen Streifen desselben Gewölbetheiles (ASB , bzw. ASD in Fig. 396) dieselbe Seilcurve bildet. Dann ist, wenn C_1 und C_2 noch zu bestimmende Festwerthe sind, bzw.

$$x^2 = C_1 f_1 \quad \text{und} \quad w^2 = C_2 f_2.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung 397 eingeführt, so ergibt sich

$$dh_1 = \frac{q C_1 dx}{2} \quad \text{und} \quad dh_2 = \frac{q C_2 dx}{2} \quad \dots \quad 398.$$

Die in den Scheiteln der Gewölbestreifen wirkenden Horizontalkräfte haben also auf die ganze Länge des Gewölbes für die Längeneinheit die gleiche Gröfse (sind constant). Man erhält demnach die auf die gefamnten Scheitelfrecken SN , bzw. SM ausgeübten Horizontalkräfte zu

$$H_1 = \frac{q C_1 a}{2} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q C_2 b}{2} \quad \dots \quad 399.$$

Diese Mittelkräfte liegen in den Mitten der bezüglichlichen Scheitelfrecken, weil alle Einzelkräfte gleich grofs sind. Beide Kräfte H_1 und H_2 schneiden sich in der Mitte der Diagonale AS , d. h. in der Lothrechten des Punktes O . Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im äußersten Gewölbestreifen (AB , bzw. AD) mit c bezeichnet, so ist $b^2 = C_1 c$ und $a^2 = C_2 c$; hiernach wird

$$H_1 = \frac{q}{2} a \frac{b^2}{c} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q}{2} b \frac{a^2}{c}.$$

Fig. 398.

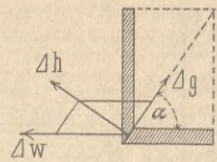
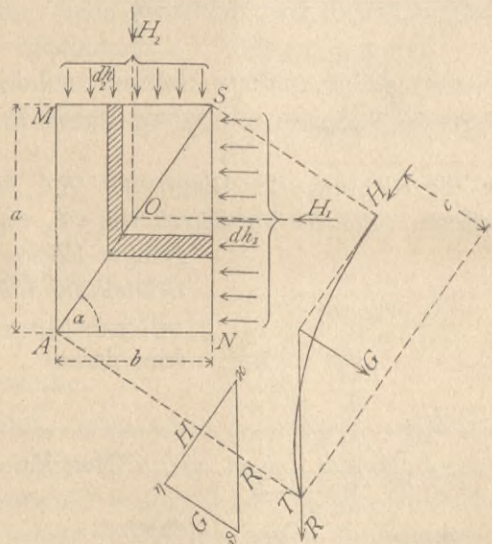


Fig. 399.



H_1 und H_2 setzen sich in ihrem Schnittpunkte zu einer Mittelkraft H zusammen, welche im Grundrifs in die Richtung der Diagonalen AS fällt; dieselbe ist

$$H = H_1 \cos \alpha + H_2 \sin \alpha = \frac{q}{2c} ab (b \cos \alpha + a \sin \alpha).$$

Nun ist $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; mithin wird

$$H = \frac{qab(b^2 + a^2)}{2c\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{qab}{2c} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Diese Kraft H vereinigt sich in der Lothrechten des Punktes O mit dem Gewichte $G = qab$ zu der auf den Kämpfer wirkenden Mittelkraft. Damit ist die auf einen jeden Eckpfeiler des rechteckigen Kreuzgewölbes wirkende Kraft gefunden; sie hat eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft, deren Gröfsen sind:

$$H = \frac{qab}{2c} \sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots\dots 400.$$

$$V = qab \dots\dots\dots 401.$$

Wenn das Gewölbe quadratischen Grundrifs hat, so bleibt alles Vorstehende giltig; nur ist $b = a$ einzuführen, so dafs man erhält: Beim Kreuzgewölbe über quadratischem Raume mit einer Seitenlänge $2a$ ist der Horizontalschub am Grat

$$H = \frac{qa^3}{c\sqrt{2}}, \dots\dots\dots 402.$$

und die lothrechte auf jeden Pfeiler übertragene Kraft

$$V = qa^2 \dots\dots\dots 403.$$

Die graphische Ermittlung von H läuft auf die Zerlegung von $G = qab$ (bezw. qa^2) in die beiden Kräfte H und R hinaus. Ist in Fig. 399: $G = \eta \vartheta$, so ist $\alpha \eta = H$ und $\vartheta \alpha = R$.

2) Die Lagerfugen sind im Grundrifs senkrecht zu den Graten. Der Untersuchung wird wieder ein Gewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt. Dasselbe werde durch lothrechte Ebenen, welche im Grundrifs senkrecht zu den Graten gerichtet sind, in Streifen zerlegt; dann besteht jeder Streifen aus zwei Theilen, welche sich im Grat treffen. Für jeden Theil stellt der Grat den einen Stützpunkt dar; die anderen Stützpunkte werden bei den innerhalb des Viereckes $LMNO$ (Fig. 400) liegenden Streifen durch die entsprechenden Streifen der benachbarten Gewölbeviertel gebildet, bei den aufserhalb dieses Viereckes liegenden Streifen einerseits durch die Streifen des benachbarten Gewölbeviertels, andererseits oder beiderseits durch die Gurtbogen AB, BC, CD, DA .

286.
Lagerfugen
senkrecht
zu den
Graten.

α) Es werde zuerst ein Streifen $FE G$ aus dem Viereck $LMNO$ betrachtet. Die Belastung für die Einheit der Grundfläche sei wiederum q ; alsdann ist (Fig. 400)

$$dh_1 = \frac{qz_1^2 dw}{2f_1} \quad \text{und} \quad dh_2 = \frac{qz_2^2 dw}{2f_2}, \dots\dots\dots 404.$$

wenn f_1 und f_2 die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven sind. Im Punkte E wird auf den Grat nur eine lothrechte Kraft übertragen, falls $dh_1 = dh_2$, d. h. wenn $\frac{f_2}{f_1} = \frac{z_2^2}{z_1^2}$ ist. Nun ist $z_2 = w \operatorname{tg} \alpha$ und $z_1 = \frac{w}{\operatorname{tg} \alpha}$; mithin ist die Bedingung für $dh_1 = dh_2$:

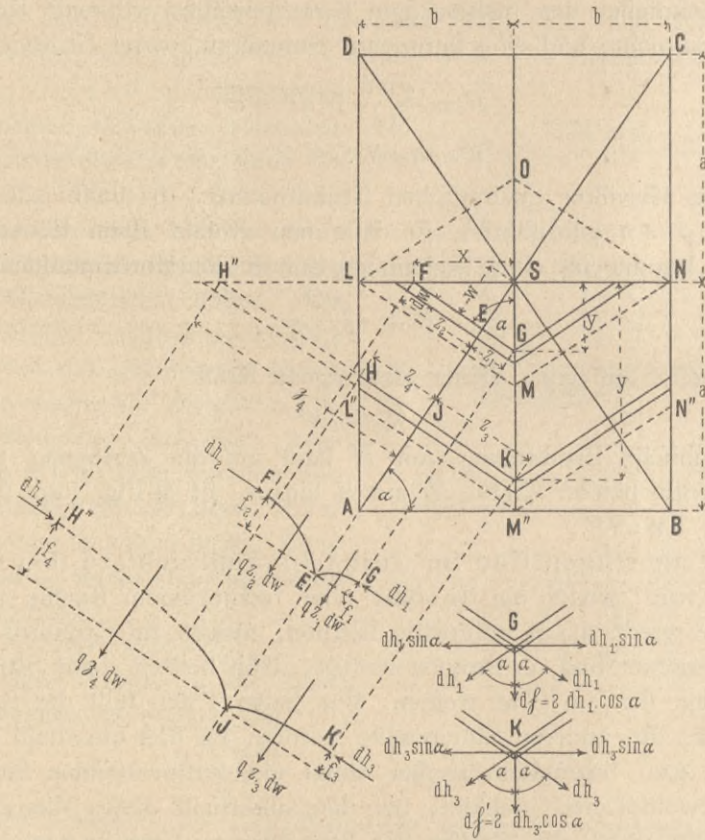
$$\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4}; \dots\dots\dots 405.$$

alsdann ist die im Punkte E auf den Gratsbogen übertragene lothrechte Kraft $dv_1 = q dw (z_1 + z_2)$; dieselbe ist gleich dem Gewichte des Streifens FEG . Da aber $z_1 + z_2 = \frac{y}{\cos \alpha}$ ist, so wird

$$dv_1 = \frac{q y dw}{\cos \alpha} = q y \operatorname{tg} \alpha dy \dots \dots \dots 406.$$

Im Punkte G wirken die beiden wagrechten Kräfte dh_1 in den Richtungen der anschließenden Streifen; sie zerlegen sich in je zwei Seitenkräfte, welche in der Längsrichtung der Kappe, bzw. fenkrecht zu dieser Richtung wirken. Die beiden

Fig. 400.



letzteren haben je die GröÙe $dh_1 \sin \alpha$ und heben einander auf; die beiden ersteren setzen sich zu einer Kraft $dh = 2 dh_1 \cos \alpha$ zusammen. Wird für dh_1 der obige Werth eingeführt und beachtet, daß $w = z_1 \operatorname{tg} \alpha$, also $dw = dz_1 \operatorname{tg} \alpha$ ist, so ergibt sich

$$dh = \frac{q z_1^2 \sin \alpha dz_1}{f_1}.$$

Unter gleichen Annahmen, wie in Art. 285 (S. 298), wird $z_1^2 = C f_1$ und $dh = q C \sin \alpha dz_1$; ferner, weil $z_1 = y \cos \alpha$ und $dz_1 = \cos \alpha dy$ ist,

$$dh = q C \sin \alpha \cos \alpha dy.$$

Jeder Doppelfstreifen EGE' innerhalb der Grenzen $x = 0$ bis $x = b$ übt eine wagrechte Kraft dh auf den Scheitel des Gurtbogens aus.

β) Nunmehr werde ein Streifen $H\mathcal{F}K$ untersucht, welcher auferhalb des Viereckes $LMNO$ liegt, aber an der einen Seite sich gegen den entsprechenden Streifen des benachbarten Gewölbeviereckes lehnt (Fig. 400). Es kann angenommen werden, daß die Seilcurve im Punkte K eine wagrechte Tangente hat; im Punkte H ist dies nicht der Fall. Wir ergänzen das Stück $\mathcal{F}H$ des Streifens durch ein Stück, welches bis zur Verlängerung der Linie LN reicht, und nehmen an, daß im Punkte H'' dieses Streifens die Seilcurve eine wagrechte Tangente habe. Der Horizontal Schub im Streifen $H\mathcal{F}$ ist eben so groß, wie im Streifen $H''\mathcal{F}$. Werden die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven mit f_3 und f_4 bezeichnet, so ist

$$dh_3 = \frac{q dw z_3^2}{2 f_3} \quad \text{und} \quad dh_4 = \frac{q dw \delta_4^2}{2 f_4}.$$

Soll, wie oben, $dh_3 = dh_4$ sein, so muß

$$\frac{f_4}{f_3} = \frac{\delta_4^2}{z_3^2} = \text{tg}^2 \alpha = \frac{a^2}{b^2}$$

sein, d. h. die Pfeilhöhen müssen im gleichen Verhältniß zu einander stehen, wie oben unter α (Gleichung 405).

Im Punkte \mathcal{F} wird auf den Grat eine lothrechte Belastung übertragen, welche dem Gewichte des ganzen Streifens $H''\mathcal{F}K$ gleich ist; denn der im Punkte H vom Gurtbogen auf den Streifen wirkende Gegendruck hat eine nach unten gerichtete lothrechte Seitenkraft, die dem Gewichte des Streifens HH'' gleich ist.

Demnach wirkt in \mathcal{F} als Belastung auf den Grat

$$dv_2 = q dw (z_3 + \delta_1) = q w dw \left(\frac{1}{\text{tg} \alpha} + \text{tg} \alpha \right)$$

und, da $w = y \sin \alpha$, also $dw = \sin \alpha dy$ ist,

$$dv_2 = q y \text{tg} \alpha dy \quad \dots \quad 407.$$

Im Punkte K wirken zwei Kräfte dh_3 , deren Mittelkraft sich zu

$$dh' = 2dh_3 \cos \alpha = \frac{q dw z_3^2}{f_3} \cos \alpha$$

ergiebt. Mit $w = z_3 \text{tg} \alpha$, also $dw = \text{tg} \alpha dz_3$ erhält man

$$dh' = \frac{q z_3^2}{f_3} \sin \alpha dz_3.$$

Setzt man wiederum $z_3^2 = C f_3$, so wird

$$dh' = q C \sin \alpha dz_3$$

und, weil $z_3 = y \cos \alpha$ oder $dz_3 = dy \cos \alpha$ ist,

$$dh' = q C \sin \alpha \cos \alpha dy.$$

Die Summe aller Kräfte dh und dh' , welche von den Streifen bis $L''M''N''$ ausgeübt werden, ist demnach

$$\mathfrak{D}_1 = q C a \sin \alpha \cos \alpha$$

und, weil $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ist,

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{q a^2 b C}{a^2 + b^2} \quad \dots \quad 408.$$

γ) Betrachtet man endlich einen Streifen $F''E''G''$, welcher sich beiderseits gegen die Gurtbogen stützt, so hat man hier beiderseits ergänzende Gewölbestücke hinzuzufügen, welche bis zu den verlängerten Halbirungslinien des Gewölbes reichen.

Die beiden in E'' auf den Grat übertragenen wagrechten Kräfte sind, wenn die obigen Bezeichnungen (mit Abänderung der Zeiger) beibehalten werden,

$$dh_5 = \frac{q dw \delta_5^2}{2f_5},$$

$$dh_6 = \frac{q dw \delta_6^2}{2f_6}.$$

Sollen sich wiederum die beiden wagrechten Kräfte in E'' aufheben, so muß

$$\frac{f_6}{f_5} = \frac{\delta_6^2}{\delta_5^2} = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^4}{b^4}$$

sein. Die in E'' auf den Grat übertragene lothrechte Last ist alsdann (vergl. die Angaben unter β)

$$dv_3 = q dw (\delta_5 + \delta_6).$$

Nun ist

$$(\delta_5 + \delta_6) = \frac{y_5}{\cos \alpha}$$

und $dw = \sin \alpha dy$, also

$$dv_3 = \frac{q y_5}{\cos \alpha} \sin \alpha dy$$

$$= q y_5 dy \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad \dots \quad 409.$$

genau wie in den Formeln 406 u. 407.

Die im Punkte G'' auf den Gurtbogen ausgeübte Kraft dh_5 zerlegt sich in eine senkrecht zum Gurtbogen gerichtete Seitenkraft $dh_5 \cos \alpha$ und eine solche, welche im Grundriß in die Richtung des Gurtbogens fällt: $dh_5 \sin \alpha$. Letztere wird durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Seitenkraft im symmetrisch zur Mitte liegenden Punkte aufgehoben; die erstere ist

$$dh_5 \cos \alpha = \frac{q dw \delta_5^2}{2f_5} \cos \alpha.$$

Setzt man wieder $\delta_5^2 = C f_5$, so wird

$$dh_5 \cos \alpha = \frac{q dw C}{2} \cos \alpha.$$

Nach Fig. 401 ist $\cos \alpha = \frac{\rho - w}{u}$, $w = \rho - u \cos \alpha$ und $dw = -\cos \alpha du$,

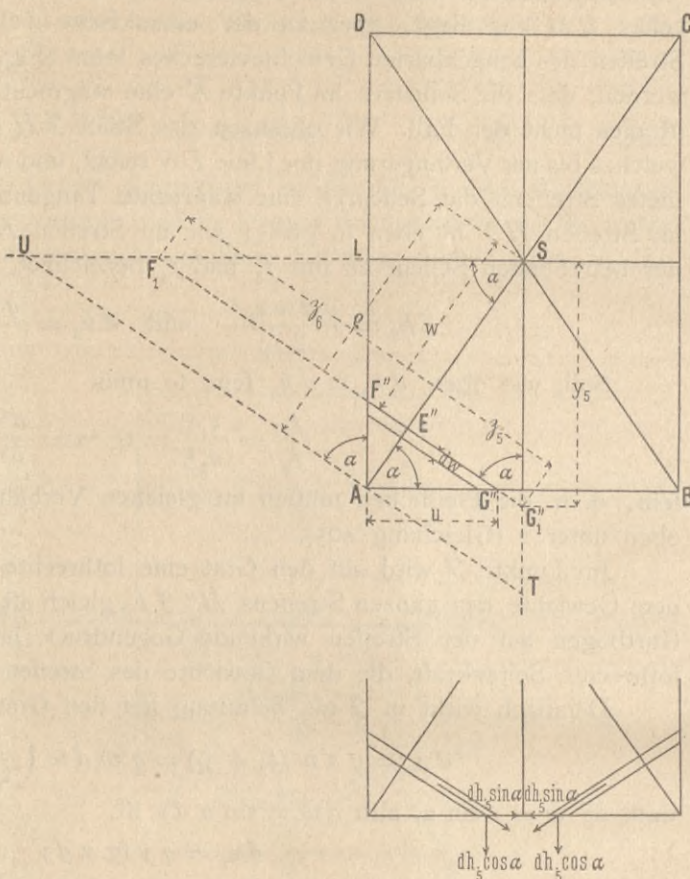
also

$$dh_5 \cos \alpha = -\frac{q C}{2} \cos^2 \alpha du.$$

Die auf den Gurtbogen wirkende wagrechte Kraft ist also auf die ganze Grundrißlänge constant, und zwar entfällt auf jede Hälfte b der Breite

$$-\int_b^0 \frac{q C}{2} \cos^2 \alpha du = \frac{q C}{2} \cos^2 \alpha b.$$

Fig. 401.



Die gefammte auf den Gurtbogen übertragene, wagrechte Kraft ist demnach in der Axe des Gewölbes ASB (vergl. Gleichung 408)

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{q a^2 b C}{a^2 + b^2};$$

gleichmäfsig über die Grundrifsänge $2b$ vertheilt wirkt:

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{q C b^3}{a^2 + b^2}.$$

Diese Kräfte greifen in verschiedenen Höhen an; die Lage von \mathfrak{H}_2 folgt aus den Höhen der Stellen, an welchen die einzelnen Gewölbestreifen sich an den Gurtbogen setzen. An diesen Stellen wirken aufer den wagrechten auch lothrechte Seitenkräfte nach aufwärts; dieselben sind gleich den Gewichten der zu ergänzenden Gewölbestreifen.

Die gefammte, normal gegen den Gurtbogen AB wirkende Horizontalkraft ist

$$\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \frac{q C b}{a^2 + b^2} (a^2 + b^2) = q C b,$$

$$(\mathfrak{H}_I) = q C b; \dots \dots \dots 410.$$

eben so erhält man als gefammte Horizontalkraft, welche normal gegen den Gurtbogen AD wirkt,

$$(\mathfrak{H}_{II}) = q C a \dots \dots \dots 411.$$

Wird die Pfeilhöhe f_3 der Seilcurve, welche durch M'' gelegt ist, mit e bezeichnet, für welchen Streifen z_3 den Werth $a \cos \alpha$ annimmt, so giebt sich

$$a^2 \cos^2 \alpha = C e, \text{ d. h. } C = \frac{a^2 b^2}{e(a^2 + b^2)}; \text{ fomit}$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{H}_I) &= \frac{q a^2 b^3}{e(a^2 + b^2)} \\ (\mathfrak{H}_{II}) &= \frac{q a^3 b^2}{e(a^2 + b^2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 412.$$

Die Kräfte \mathfrak{H} werden entweder durch gleiche, entgegengesetzt gerichtete, vom Nachbargewölbe ausgehende Kräfte aufgehoben, oder sie werden von der Mauer aufgenommen, gegen welche sich das Gewölbe setzt.

δ) Die Belaftung des Gratbogens ist nach Vorstehendem lothrecht; nach Gleichung 406, 407 u. 409 nimmt sie von der Mitte des Gewölbes von S bis zum

Kämpfer des Gratbogens bei A entsprechend den Ordinaten einer Geraden zu. In allen drei oben betrachteten Abtheilungen ist sie auf die Grundrifsänge dw

$$dv = q dw \frac{y}{\cos \alpha};$$

demnach ist auf die Längeneinheit des Gratbogens im Grundrifs die Belaftung

$$\frac{dv}{dw} = \frac{q y}{\cos \alpha}.$$

y hat seinen grössten Werth für den Kämpferpunkt;

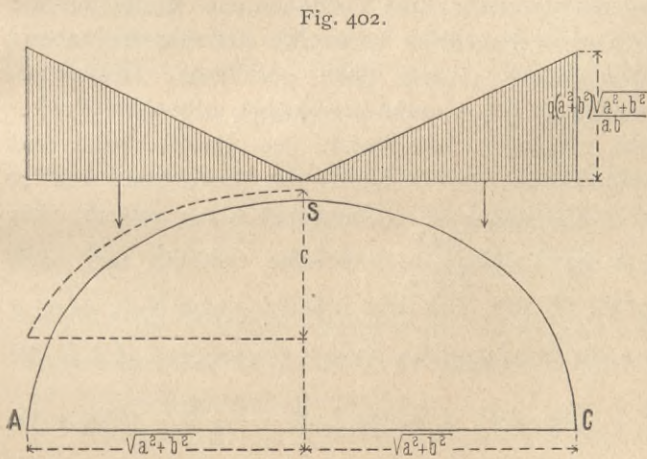


Fig. 402.

für diesen Punkt ist $y = \overline{ST} = a + \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = a + \frac{bb}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a}$. An dieser Stelle ist die Einheitsbelastung $\frac{q(a^2 + b^2)}{a \cos \alpha} = \frac{q(a^2 + b^2)}{ab} \sqrt{a^2 + b^2}$.

Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im Gratbogen gleich c angenommen, so ist der Horizontalschub im Grat

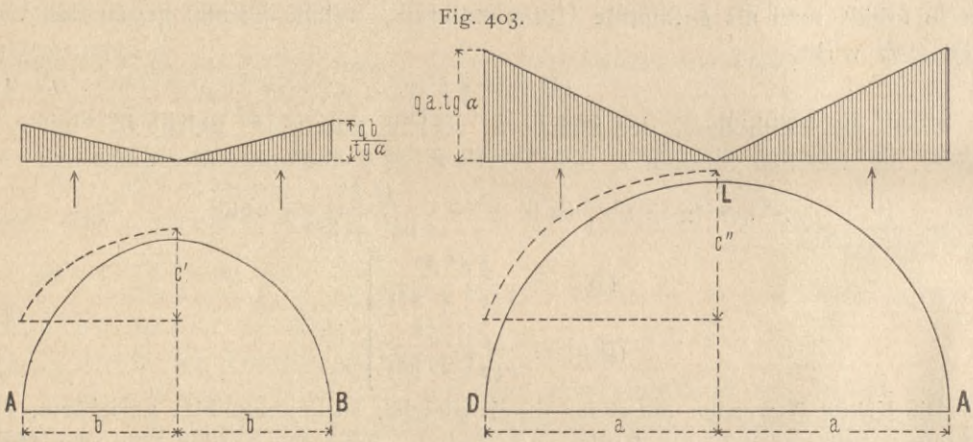
$$R_h = \frac{q(a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2}}{abc} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3},$$

$$R_h = \frac{q(a^2 + b^2)^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{6abc} \quad \dots \quad 413.$$

Die lothrechte Seitenkraft der vom Gratbogen auf den Eckpfeiler ausgeübten Kraft ist

$$R_v = \frac{q(a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}}{2ab} = \frac{q(a^2 + b^2)^2}{2ab} \quad \dots \quad 414.$$

ε) Standficherheit der Eckpfeiler. Für die Untersuchung der Standficherheit der Eckpfeiler sind weiter noch die Kräfte in das Auge zu fassen, welche



von den Gurtbogen auf die Eckpfeiler übertragen werden; dieselben sollen nur so weit besprochen werden, als sie vom Kreuzgewölbe hervorgerufen werden; vom Eigengewicht der Gurtbogen kann hier abgesehen werden.

Von den einzelnen Gewölbestreifen werden nach Vorstehendem Kräfte auf die Gurtbogen übertragen, welche nach oben gerichtete lothrechte Seitenkräfte haben; diese letzteren rufen im Gurtbogen negative (nach innen gerichtete) Horizontalkräfte hervor, außerdem im Pfeiler negative (nach unten gerichtete) lothrechte Kräfte. Die lothrechten, auf die Gurtbogen wirkenden Seitenkräfte der Gewölbschübe sind gleich den Gewichten der Ergänzungstreifen; auf die Hälfte des Gurtbogens $AM''B$ (Fig. 400 u. 401) wirkt demnach als negative Gesammlast das Gewicht des Ergänzungsdreieckes $AM''T$, d. h. die Last $\frac{qb^2}{2 \operatorname{tg} \alpha}$; dieselbe vertheilt sich nach dem Gesetze des Dreieckes (Fig. 403), ist also über dem Scheitel gleich Null, über A gleich $\frac{qb}{\operatorname{tg} \alpha}$. Eben so erhält man als Belastung des halben Gurtbogens ALD die Last des Ergänzungsdreieckes ALU (Fig. 401), d. h. die Last $\frac{qa^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}$ (Fig. 403);

über A und D ist die Belaftung für die Längeneinheit gleich $q a \operatorname{tg} \alpha$; über L ist die Einheitsbelaftung gleich Null. Fig. 403 zeigt die Belaftung. Demnach entfällt auf den Eckpfeiler A die negative Zusatzlast $\Delta R_v = -\left(\frac{q b^2}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{q a^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}\right)$ und mit $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$

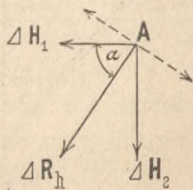
$$\Delta R_v = -\frac{q}{2ab} (a^4 + b^4) \dots \dots \dots 415.$$

Die in Fig. 403 angegebenen Belaftungen erzeugen in den Gurtbogen die Horizontalschübe

$$\Delta H_1 = -\frac{q b^2 b}{2 \operatorname{tg} \alpha \cdot 3 c'} \quad \text{und} \quad \Delta H_2 = -\frac{q a^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot a}{2 \cdot 3 c''},$$

welche sich zu einer in der Richtung des Grates wirkenden Mittelkraft ΔR_h vereinigen. Es ist

Fig. 404.



$$\Delta R_h = -(\Delta H_1 \cos \alpha + \Delta H_2 \sin \alpha),$$

$$\Delta R_h = -\frac{q}{6} \left(\frac{b^3 \cos^2 \alpha}{c' \sin \alpha} + \frac{a^3 \sin^2 \alpha}{c'' \cos \alpha} \right) \dots \dots \dots 416.$$

Für $c' = c'' = c$ wird

$$\Delta R_h = -\frac{q(a^6 + b^6)}{6abc\sqrt{a^2 + b^2}} \dots \dots \dots 417.$$

Vereinigt man die für ΔR_v und ΔR_h gefundenen Werthe mit den Werthen derjenigen Kräfte, welche vom Grat auf den Eckpfeiler übertragen werden, d. h. mit den Ausdrücken der Gleichungen 413 u. 414, so erhält man, wenn man

$$R_h + \Delta R_h = H \quad \text{und} \quad R_v + \Delta R_v = V$$

setzt,

$$H = \frac{q(a^2 + b^2)^2}{6abc} \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{q}{6abc\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{b^6}{c'} + \frac{a^6}{c''} \right) \dots \dots \dots 418.$$

Für $c' = c'' = c$ ergibt sich

$$H = \frac{qab}{2c} \sqrt{a^2 + b^2}; \dots \dots \dots 419.$$

ferner

$$V = \frac{q}{2ab} (a^2 + b^2)^2 - \frac{q}{2ab} (a^4 + b^4);$$

mit einfachen Umformungen erhält man

$$V = qab \dots \dots \dots 420.$$

Die auf den Eckpfeiler Seitens des Kreuzgewölbes ausgeübte Kraft hat also, falls man $c' = c'' = c$ setzen kann, als Seitenkräfte

für das Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume:

$$H = \frac{qab}{2c} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad V = qab;$$

für das Kreuzgewölbe über quadratischem Raume:

$$H = \frac{qa^3}{c\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad V = qa^2.$$

Die auf die Eckpfeiler ausgeübten Kräfte sind also genau gleich groß, mögen die Lagerfugen den Längsaxen der Kappen parallel laufen oder im Grundriss senkrecht zu den Graten angeordnet sein.

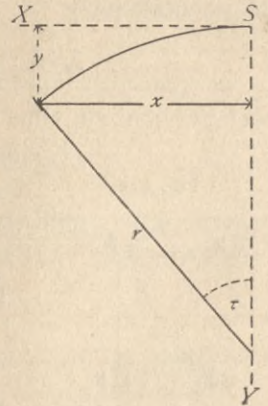
Man nehme H im inneren Drittel der Scheitelfuge des Gratabogens wirkend an.

b) Kuppelgewölbe.

287.
Voraus-
setzungen.

Die Kuppelfläche entsteht durch Drehung einer krummen Linie um eine lothrechte Axe. In den folgenden Untersuchungen sollen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme ermittelt werden, dass die Belastung eine ruhende und über die einzelnen zwischen den Parallelkreifen liegenden Ringe so vertheilt sei, dass ein jeder Ring entweder voll belastet oder ganz unbelastet ist. Weiter wird die Kuppelfläche als die Gleichgewichtsfläche angenommen; demnach werden die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen wirkenden inneren Kräfte in die betreffenden Berührungsebenen der Kuppelfläche fallen. Daraus ergeben sich dann die inneren Kräfte oder Spannungen, welche, in der Kuppel wirkend, im Stande sind, das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.

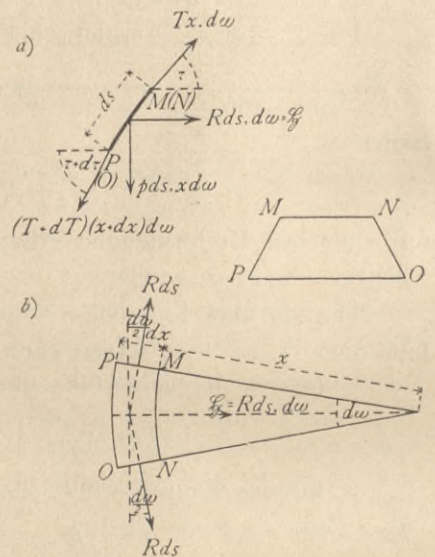
Fig. 405.



288.
Allgemeine
Gleichgewichts-
bedingungen.

Der Anfangspunkt der Coordinaten soll in den Scheitel der Kuppel (Fig. 405) gelegt und die lothrechte Axe als Y-Axe, eine im Scheitel S senkrecht zu ersterer errichtete Axe als X-Axe gewählt werden. Irgend ein Kuppeltheilchen $MNOP$ (Fig. 406), welches oben und unten durch Parallelkreife, rechts und links durch Meridiane der Kuppel begrenzt ist, wird auf seinen Gleichgewichtszustand untersucht. Das Theilchen $MNOP$ ist in Fig. 406a in der Ansicht, in Fig. 406b im Grundriss, daneben im abgewickelten Zustande dargestellt. Auf MN wirkt für die Längeneinheit die Tangentialspannung T , und da MN (vergl. den Grundriss in Fig. 406b) $x d\omega$ Längeneinheiten enthält, so wirkt auf MN die Kraft $T x d\omega$. Auf OP wirkt $(T + dT) (x + dx) d\omega$; auf MP und NO wirken die Ringspannungen, welche für die Längeneinheit gleich R sein, also auf ds Längeneinheiten die Gröfse $R ds$ haben. Ausserdem wirkt noch die veränderliche Belastung p für die Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf $MNOP$ die Last $p ds \cdot x d\omega$. Um sämmtliche auf das Theilchen wirkende Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermittelt man die Mittelkraft der beiden Ringspannungen $R ds$; sie ist $\xi = 2 R ds \sin \frac{d\omega}{2}$, und, da wegen der Kleinheit von $\frac{d\omega}{2}$ die Gröfse $\sin \frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$, wird

Fig. 406.



Um sämmtliche auf das Theilchen wirkende Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermittelt man die Mittelkraft der beiden Ringspannungen $R ds$; sie ist $\xi = 2 R ds \sin \frac{d\omega}{2}$, und, da wegen der Kleinheit von $\frac{d\omega}{2}$ die Gröfse $\sin \frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$, wird

$$\xi = R ds d\omega \quad . \quad . \quad 421.$$

Die Aufstellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für $MNOP$ ergibt nun

$$0 = T x d\omega \cos \tau - (T + dT) (x + dx) d\omega \cos (\tau + d\tau) + R ds d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und lässt die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, so bleibt

$$0 = T x \sin \tau d\tau - d T x \cos \tau - T d x \cos \tau + R d s = - d (T x \cos \tau) + R d s;$$

daher

$$R d s = d (T x \cos \tau) \dots \dots \dots 422.$$

Ferner ist

$$0 = p d s x d \omega - T x d \omega \sin \tau + (T + d T) (x + d x) d \omega \sin (\tau + d \tau);$$

$$\sin (\tau + d \tau) = \sin \tau + \cos \tau d \tau.$$

Durch Ausmultiplizieren und Fortlassen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man $0 = p x d s + d (T x \sin \tau)$; daher

$$- p x d s = d (T x \sin \tau) \dots \dots \dots 423.$$

Die beiden Gleichungen 422 u. 423 geben Aufschluss über die Größe der gleichzeitigen Werthe von T und R , welche irgend welchen Belastungen und Gleichgewichtsflächen entsprechen.

Die erzeugende Linie ist bei der Kugelhuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von T und R werden also erhalten, wenn in die Gleichungen 422 u. 423 für x und $d s$ die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreise entsprechen. Nach Fig. 405 ist $x = r \sin \tau$ und $d s = r d \tau$; mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, dass p für die ganze Kuppel constant ist,

289.
Kugelförmige
Kuppel.

$$- p r \sin \tau \cdot r d \tau = d (T r \sin \tau \sin \tau) \quad \text{und} \quad \int_{\tau_0}^{\tau} d (T r \sin^2 \tau) = - p r^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \sin \tau d \tau.$$

Als untere Grenze ist der Werth τ_0 von τ einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entspricht; hier ist dieser Endpunkt S , und es wird $\tau_0 = 0$; demnach ist

$$T r \sin^2 \tau = + p r^2 \left(\cos \tau \right)_0^{\tau} = - p r^2 (1 - \cos \tau),$$

$$T = - \frac{p r (1 - \cos \tau)}{\sin^2 \tau} = - \frac{p r (1 - \cos \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = - \frac{p r}{1 + \cos \tau} \dots \dots 424.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung 422 für R eingesetzt, so erhält man

$$R d s = R r d \tau = d \left(- \frac{p r}{1 + \cos \tau} r \sin \tau \cos \tau \right) = - p r^2 d \frac{\sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau},$$

$$R = - p r \frac{\cos 2 \tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \dots \dots \dots 425.$$

Die Werthe der Gleichungen 424 u. 425 gelten für oben geschlossene Kugelhuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden für $\tau = 0$ erhalten. Für letzteren Werth ist

$$T_0 = - \frac{p r}{2} \quad \text{und} \quad R_0 = - \frac{p r}{2}, \dots \dots \dots 426.$$

d. h. die Meridianspannungen und Ringspannungen sind für die Längeneinheit im Scheitel gleich groß; dafelbst findet somit nach allen Richtungen ein gleicher Druck $\frac{p r}{2}$ für die Längeneinheit statt.

Für die Halbkugelhuppel ist am Aequator $\tau = \frac{\pi}{2}$, daher

$$T_{\frac{\pi}{2}} = - p r \quad \text{und} \quad R_{\frac{\pi}{2}} = + p r \dots \dots \dots 427.$$

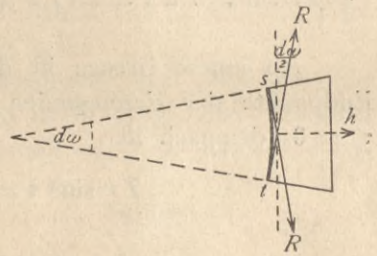
290.
Halbkugel-
kuppel.

Die Meridianspannung nimmt also vom Scheitel nach dem Aequator von $\frac{p r}{2}$ bis auf $p r$ zu, bleibt aber stets Druck, da $1 + \cos \tau$ nie negativ werden kann. Am Aequator ist T lothrecht gerichtet, da T gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller $T_{\frac{\pi}{2}}$ ist gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die $T_{\frac{\pi}{2}}$ die Auflagerdrücke darstellen. Es ist $\Sigma (T_{\frac{\pi}{2}}) = p r \cdot 2 r \pi = 2 p r^2 \pi$, und das ganze Kuppelgewicht ist gleich $\frac{4 r^2 \pi}{2} p = 2 r^2 p \pi$. Die Ringspannung R geht vom Druck $\frac{p r}{2}$ im Scheitel zum Zug $p r$ am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu bestimmenden Winkel durch Null. Ist dieser Winkel τ_1 , so ist $0 = p r \frac{\cos 2 \tau_1 + \cos^3 \tau_1}{(1 + \cos \tau_1)^2}$, woraus sich ergibt

$$\cos \tau_1 = 0,618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^\circ 50' \dots \dots \dots 428.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel τ kleiner als τ_1 sind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel größer sind als τ_1 , findet Zug statt. Nimmt man auf die Zugfestigkeit des Mörtels keine Rücksicht, so können die einzelnen Theile eines Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne solchen kann aber bei den letzteren Ringen Gleichgewicht nicht stattfinden; ohne Hilfsconstruction ist daher das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconstructionen sind entweder umgelegte eiserne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leistet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte R ; auf dieselbe wirken ferner nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte R in entgegengesetztem Sinne; dieselben sind bei Berechnung der Hintermauerung zu berücksichtigen. Betrachtet man ein Bogenstück st (Fig. 407), welches zum Winkel $d\omega$ gehört, so ist die Mittelkraft der beiden R die nach außen gerichtete Kraft h gleich $2 R \sin \frac{d\omega}{2} = R d\omega$.

Fig. 407.



Wir führen die abkürzende Bezeichnung

$$\mu = - \frac{\cos 2 \tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \dots \dots \dots 429.$$

ein; alsdann wird

$$R = \mu p r \quad \text{und} \quad h = \mu p r d\omega \dots \dots \dots 430.$$

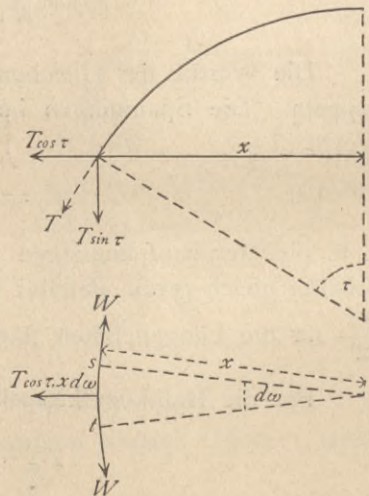
Für die Längeneinheit des $x d\omega$ langen Bogens ist also die nach außen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringspannungen

$$h = \frac{\mu p r d\omega}{x d\omega} = \frac{\mu p r}{x} \dots \dots \dots 431.$$

Aus Vorstehendem folgt noch, daß bei der Halbkugelpuppel die Hintermauerung wenigstens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muß, welche dem Winkel $\tau_1 = 51^\circ 50'$ entspricht.

Außer den Kräften h (nach Gleichung 431) wirken auf die Widerlager noch die Meridianspannungen T , welche dem größten zur Kuppel gehörigen Winkel τ entsprechen. T hat eine wagrechte Seitenkraft $T \cos \tau$ und eine lothrechte Seitenkraft $T \sin \tau$. Die erstere wird durch die Widerlager oder durch einen eisernen Ring aufgehoben. Die Spannung in diesem Ringe ergibt sich dann wie folgt. Auf den Bogen st (Fig. 408)

Fig. 408.



von der Länge $x d \omega$ wirkt nach aufsen $T \cos \tau x d \omega$, und diese Kraft soll durch die beiden Ringspannungen W aufgehoben werden; es ist demnach

$$T \cos \tau x d \omega = 2 W \sin \frac{d \omega}{2} = W d \omega;$$

$$W = T x \cos \tau = \frac{\rho r r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{\rho r^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \quad . \quad . \quad 432.$$

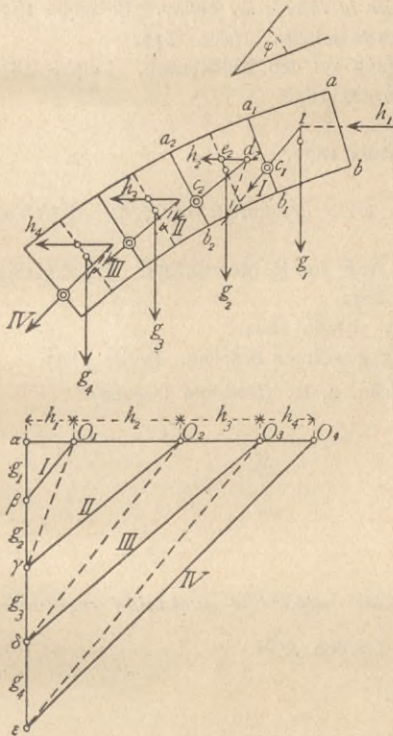
Die vorstehend entwickelten Werthe für T und R entsprechen einer Gleichgewichtsfläche. Man kann diese Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin sind aber grössere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Gleichgewichtsflächen entsprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zusammenfallen.

Die graphische Ermittlung der Werthe von T und R an den verschiedenen Stellen der Kuppel kann nun in ähnlicher Weise durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbearten gezeigt ist, indem man bestimmte Bedingungen für die Stützzlinie vorschreibt. Man untersucht zu diesem Zwecke den einem Centriwinkel α entsprechenden Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus.

291.
Graphische
Ermittlung.

Stellt man die Bedingung, dass die Stützzlinie im inneren Drittel verbleiben soll und kein Gleiten stattfindet, so erhält man eine solche, indem man vom obersten Kuppelringe ausgeht, folgendermassen (Fig. 409). Die Belastung des obersten, zum angenommenen Centriwinkel gehörigen Kuppeltheiles sei

Fig. 409.



$g_1 (= \alpha \beta)$; aufser g_1 wirken auf diesen Theil noch die beiden Spannungen $R ds$, welche von den Nachbartheilen im Ringe ausgeübt werden. Diese beiden $R ds$ werden genau, wie in Fig. 406, zu einer Mittelkraft vereinigt, welche in derselben Ebene wie g_1 liegt, d. h. in der Ebene, welche den zum Centriwinkel α gehörigen Kuppeltheil halbirt. Diese Mittelkraft ist in Fig. 409 mit h_1 bezeichnet; h_1 ist vor der Hand nur der Richtung nach bekannt; Grösse und Lage von h_1 sind unbekannt. Die Mittelkraft von h_1 und g_1 soll die Fuge $a_1 b_1$ im inneren Drittel schneiden und mit der Senkrechten zu dieser Fuge keinen grösseren Winkel, als den Reibungswinkel φ einschliessen. Man ziehe nun durch c_1 , den untersten Punkt des inneren Drittels der Fuge $a_1 b_1$, eine Linie, die den Winkel φ mit der Senkrechten zur Fuge einschliesst; diese Linie schneide die Richtungslinie von g_1 in I ; alsdann hat die durch I gelegte Kraft h_1 den kleinsten Werth, welcher obigen Bedingungen entspricht. Rükte nämlich h_1 nach abwärts unter Beibehaltung von c_1 , so würde h_1 (da ja g_1 denselben Werth behält) grösser werden; rükte gleichzeitig c_1 hinauf, so würde h_1 erst recht grösser. Rükten h_1 und c_1 gleich viel hinauf, so bliebe h_1 unverändert, behielte also den kleinsten Werth. Alles dies ergibt sich ohne Schwierigkeit durch Verzeichnung eines Kraftdreieckes für g_1 , h_1 und Kraft I ; h_1 kann aber endlich nicht weiter nach oben rücken, wenn nicht auch c_1 nach oben rückt, weil sonst der Winkel von I mit der Senkrechten zur Fuge grösser als φ wird. — Wenn der Schnittpunkt von h_1 mit der Mittellinie des ersten Steines oberhalb des inneren Drittels fiel, so wären an dieser Stelle auch die Ringspannungen

nicht mehr im inneren Drittel; da auch diese im Drittel liegen sollen, so würde man h_1 bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken und den sich dann ergebenden Schnittpunkt von h_1 und g_1 mit c_1 zu verbinden haben, wobei der Winkel der Mittelkraft I gegen die Fugen-Senkrechte kleiner als φ würde.

Auf den zweiten Stein wirken nun I und g_2 ; außerdem die Mittelkraft h_2 der Spannungen R im zweiten Ringe. Die Mittelkraft von I und g_2 ist aus dem Kraftpolygon zu entnehmen ($= O_1 \gamma$); sie geht durch den Schnittpunkt der Schnittlinien dieser beiden Kräfte. Die Resultirende dieser Kraft und der Kraft h_2 soll wiederum im inneren Drittel verbleiben; eben so soll auch der Schnittpunkt von h_2 mit der punktirten Halbirungslinie dieses Steines nicht aus dem Drittel herausfallen. Der kleinste Werth von h_2 , welcher diesen Bedingungen entspricht, ist derjenige, bei welchem h_2 durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinschwerlinie, d. h. durch e_2 , geht, die Gesamtmittelkraft von I , g_2 und h_2 aber die Fuge $a_2 b_2$ im unteren Grenzpunkte e_2 des inneren Drittels schneidet. Die Verbindungslinie von e_2 mit d_2 , dem Schnittpunkte der Mittelkraft von I und g_2 mit h_2 ergibt die Richtung der Gesamtmittelkraft II ; die Größe erhält man durch Ziehen einer Linie γO_2 durch γ parallel zur Richtungslinie von II . Der Winkel, welchen II mit der Fugen-Senkrechten zu $a_2 b_2$ einschließt, ist kleiner als φ , also die Construction brauchbar. Wäre der Winkel größer als φ , so wäre h_2 so weit hinabzurücken und zu vergrößern, bis der Winkel höchstens gleich φ ist. In dieser Weise erhält man durch Weiterconstruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmen dürfte.

Literatur.

Bücher über »Statik der Gewölbe«.

- DIETLEIN, J. F. W. Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle 1823.
 TELLKAMPF, H. Beitrag zur Gewölbetheorie. Frei nach CARVALLO. Hannover 1855.
 SCHEFFLER, H. Theorie der Gewölbe, Futtermauern etc. Braunschweig 1857.
 FABRE, V. *Théorie des voûtes élastiques et dilatables d'une application spéciale aux arcs métalliques.* Paris 1860.
 HAGEN, G. Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1863.
 HÄNEL, v. Zur Theorie der Tonnengewölbe. Stuttgart 1868.
 FONTAINE, H. *Stabilité des constructions. Extrait de la notice sur la théorie des voûtes.* Befançon 1870.
 ORTMANN, O. Die Statik der Gewölbe mit Rücksicht auf ihre Anwendung. Halle 1876.
 FABIAN, W. Ueber Gewölbstheorien mit besonderer Berücksichtigung auf den Brückenbau. Leipzig 1876.
 BONNIN, R. *Étude sur la stabilité des voûtes en maçonnerie.* Evreux 1876.
 PERRODIL. *Résistance des voûtes et arcs métalliques.* Paris 1879.
 GOBERT, J. B. *Nouvelles recherches sur la théorie des voûtes.* Paris 1879.
 FÖEPL, A. Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.
 DURAND-CLAYE, A. *Vérification de la stabilité des voûtes et des arcs; application aux voûtes sphériques.* Paris 1880.
 UNGEWITTER, G. G. Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. 3. Aufl. von K. MOHRMANN. Leipzig 1892.
 GNUSCHKE, H. Die Theorie der gewölbten Bogen etc. Berlin 1892.
 AUTHENRIETH, E. Die statische Berechnung der Kuppelgewölbe. Berlin 1894.
 TOLKMITT, G. Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. Berlin 1895.

Siehe auch Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abschn. 2, B: Gewölbte Decken)
 dieses »Handbuches«.

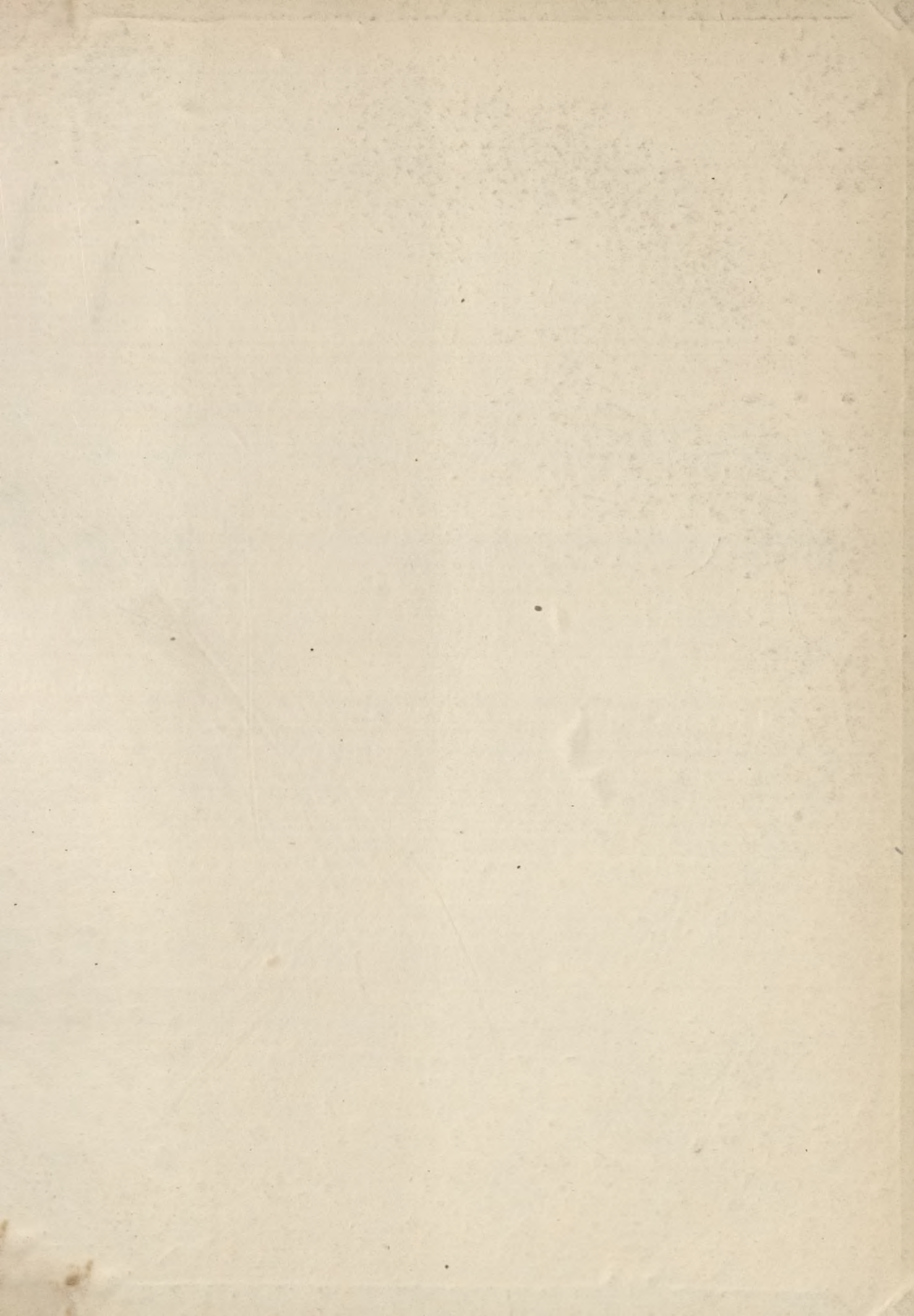
Nachtrag.

Auf S. 5 sind nachstehende Werke nachzutragen:

- SMITH, H. *Graphics: or the art of calculation by drawing lines, applied to mechanical engineering.* London 1889–91.
 BOVEY, H. T. *Theory of structures and strength of materials.* London 1893.
 PILLET, J. *Traité de stabilité des constructions etc.* Paris 1895.
 VONDERLINN, J. Statik für Bauhandwerker etc. Stuttgart 1896.

Desgl. auf S. 204:

- HEHNE, W. Eiserne Träger und Säulen. Hilfsbuch zur statischen Berechnung. Halle 1890.
 COUSINS, R. H. *A theoretical and practice treatise on the strength of beams and columns.* London 1890.



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-306341

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298732