Band III 2 **Heft 11.**

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU
BERLIN, GÖTTINGEN, HEIDELBERG, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SECHS BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . .	H. BURKHARDT † (1896–1914), W. WIRTINGER (1905–1912) IN WIEN, R. FRICKE † (1914–1930) UND E. HILB † (1919—1929)
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . .	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND H. MOHRMANN IN DARMSTADT.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN.	F. KLEIN † (1896–1925) UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK, IN 2 TEILBÄNDEN	PH. FURTWÄNGLER IN WIEN UND E. WIECHERT † (1899–1905) IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE, IN 2 TEILBÄNDEN	K. SCHWARZSCHILD † (1904–1916) UND S. OPPENHEIM † (1919–1928).

BAND III 2. HEFT 11.

AUSGEGEBEN AM 27. MAI 1931.

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1931

Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II (vollständig); Bd. III 1 I (vollständig); Bd. III 1 II (vollständig); Bd. III 2 I (vollständig); Bd. III 2 II, Heft 7–11; Bd. III 3 (vollständig); Bd. IV 1 I (vollständig); Bd. IV 1 II, Heft 1–3; Bd. IV 2 I (vollständig); Bd. IV 2 II (vollständig); Bd. V (vollständig); Bd. VI 1 A (vollständig); Bd. VI 1 B (vollständig); Bd. VI 2 A (vollständig) Bd. VI 2 B, Heft 1–4.

Jeder Band ist einzeln käuflich, dagegen werden einzelne Hefte nicht abgegeben. Der Bezug der ersten Lieferung eines Bandes verpflichtet zu seiner vollständigen Abnahme.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 6 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, O. Hölder-Leipzig, M. Planck-Berlin, W. Wirtinger-Wien,

steht der Redaktion, die aus den Herren

Ph. Furtwängler-Wien, W. Fr. Meyer-Königsberg, H. Mohrmann-Darmstadt, C. H. Müller-Hannover, A. Sommerfeld-München

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens (†)
P. Bachmann (†)
J. Bauschinger-Leipzig
G. Bohlmann (†)
L. v. Bortkewitsch-Berlin
H. Burkhardt (†)
E. Czuber (†)
W. v. Dyck-München
D. Hilbert-Göttingen
O. Hölder-Leipzig
G. Landsberg (†)
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Netto (†)
V. Pareto-Lausanne
A. Pringsheim-München
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
H. Schubert (†)
D. Seliwanoff-Prag
E. Study (†)
K. Th. Vahlen-Wien
H. Weber (†)
A. Wiman-Upsala

II. Band:

L. Bieberbach-Berlin
M. Bôcher (†)
H. A. Bohr-Kopenhagen
E. Borel-Paris
G. Brunel (†)
H. Burkhardt (†)
H. Cramér-Stockholm
G. Faber-München
M. Fréchet-Poitiers
R. Fricke (†)
H. Hahn-Wien
J. Harkness-Montreal
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
K. Hensel-Marburg
E. Hilb (†)
H. W. E. Jung-Halle
A. Kneser (†)
A. Krazer (†)
L. Lichtenstein-Leipzig
L. Maurer (†)
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
P. Montel-Paris
N. E. Nörlund-Kopenhagen
W. F. Osgood-Cambridge, [Mass.
P. Painlevé-Paris
S. Pincherle-Bologna
A. Pringsheim-München
M. Riesz-Lund
A. Rosenthal-Heidelberg
C. Runge (†)
A. Sommerfeld-München
O. Szász-Frankfurt a. M.
O. Toeplitz-Bonn
E. Vessiot-Paris
A. Voss-München
A. Wangerin-Halle
E. v. Weber-Würzburg
Fr. A. Willers-Charlottenburg
W. Wirtinger-Wien
E. Zermelo-Freiburg
L. Zoretti-Caen

III. Band:

G. Berkhan (†)
L. Berwald-Prag
L. Berzolari-Pavia
Chr. Betsch-Cannstatt
G. Castelnuovo-Rom
M. Dehn-Frankfurt a. M.
F. Dingeldey-Darmstadt
F. Enriques-Rom
G. Fano-Turin
P. Heegaard-Oslo
G. Kohn (†)
H. Liebmann-Heidelberg
R. v. Lilienthal-Münster i. W.
G. Loria-Genua
A. Lotze-Stuttgart
H. v. Mangoldt (†)
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Müller (†)
E. Papperitz-Freiberg i. S.
K. Rohn (†)
H. Rothe (†) [burg
E. Salkowski-Charlotten-
G. Scheffers-Charlottenburg
A. Schoenflies (†)
C. Segre (†)
J. Sommer-Danzig
P. Stäckel (†)
O. Staude (†)
E. Steinitz (†)
H. Tietze-München
L. Vietoris-Innsbruck
A. Voss-München
R. Weitzenboeck-Amsterdam
M. Zacharias-Berlin
H. G. Zeuthen (†)
K. Zindler-Innsbruck

IV. Band:

M. Abraham (†)
P. Cranz-Berlin
C. u. T. Ehrenfest-Leiden
S. Finsterwalder-München
O. Fischer (†)
L. Föppl-München
Ph. Forchheimer-Wien
Ph. Furtwängler-Wien
M. Grübler-Dresden
M. Grüning-Hannover
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
L. Henneberg-Darmstadt
K. Heun (†)
G. Jung-Mailand
Th. v. Kármán-Aachen
F. Klein (†)
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
A. E. H. Love-Oxford
R. v. Mises-Berlin
C. H. Müller-Hannover
L. Prandtl-Göttingen
G. Prange-Hannover
H. Reißner-Charlottenburg
A. Schoenflies (†)
P. Stäckel (†)
O. Tedone-Genua
H. E. Timerding-Braunschwg.
A. Timpe-Berlin
A. Voss-München
G. T. Walker-Simla (Indien)
K. Wieghardt (†)
G. Zemplén (†)

V. Band:

M. Abraham (†)
L. Boltzmann (†)
M. Born-Göttingen
G. H. Bryan-Bangor (Wales)
P. Debye-Leipzig
H. Dießelhorst-Braunschwg.
P. S. Epstein-Pasadena
R. Gans-Königsberg
K. F. Herzfeld-München
F. W. Hinrichsen (†)
E. W. Hobson-Cambridge
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
W. H. Keesom-Leiden
Kratzer-Münster i. W.
M. v. Laue-Berlin
Th. Liebisch (†)
H. A. Lorentz (†)
L. Mamlock-Berlin
H. Minkowski (†)
O. Mügge-Göttingen
J. Nabl-Wien
W. Pauli-Hamburg
F. Pockels (†)
L. Prandtl-Göttingen
R. Reiff (†)
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
M. Schröter (†)
R. Seeliger-Greifswald
A. Smekal-Halle
A. Sommerfeld-München
E. Study (†)
A. Wangerin-Halle
W. Wien (†)
J. Zenneck-München

VI, 1. Band:

R. Bourgeois-Paris
V. Conrad-Wien
G. H. Darwin (†)
F. Exner-Wien
S. Finsterwalder-München
Ph. Furtwängler-Wien
F. R. Helmert (†)
S. Hough-Kapstadt
H. Meldau-Bremen
W. Moebius-Leipzig
P. Pizzetti-Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt-Potsdam
E. v. Schweidler-Innsbruck
W. Trabert (†)

VI, 2. Band:

E. Anding-Gotha
J. Bauschinger-Leipzig
A. Bemporad-Catania
E. W. Brown-New-Haven
C. Ed. Caspari-Paris
F. Cohn-Berlin
R. Emden-München
F. K. Ginzel-Berlin
P. Guthnick-Neubabelsberg
F. Hayn-Leipzig
J. v. Hepperger-Wien
G. Herglotz-Göttingen
A. Hnatek-Wien
J. Hopmann-Leipzig
K. Hoffmeister-Sonneberg
H. Kienle-Göttingen
H. Kobold-Kiel
F. Kottler-Wien
K. Laves-Chicago
G. v. Niessl-Wien
S. Oppenheim (†)
H. Samter-Berlin
K. Schwarzschild (†)
K. Sundman-Helsingfors
E. T. Whittaker-Edinburgh
A. Wilkens-München
C. W. Wirtz-Kiel
H. v. Zeipel-Upsala

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Prof. Dr. L. Bieberbach, Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16, zu richten, der sich mit den betr. Bandredakteuren wegen der Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

III C 10. SPEZIELLE ALGEBRAISCHE FLÄCHEN.

III C 10b. FLÄCHEN VIERTER UND HÖHERER ORDNUNG.

Von

W. FR. MEYER

IN KÖNIGSBERG IN PR.

Inhaltsübersicht.

VIII. Rationale Flächen vierter und höherer Ordnung.

IX. Flächen vierter und höherer Ordnung mit einer endlichen Anzahl von Geraden.

X. Flächen 4. Ordnung mit weniger als 16 Doppelpunkten.

XI. Die Weddlesche und die Kummersche Fläche.

XII. Regelflächen vierter und höherer Ordnung.

XIII. Metrisch bemerkenswerte Flächen vierter und höherer Ordnung.

Literatur.

A. Die einschlägigen Abschnitte in den Lehrbüchern.

L. Cremona, Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Bologna Mem. (2) 6 (1866), p. 91; (2) 7 (1867), p. 29. Deutsch von *M. Curtze*, Allgemeine Theorie der Oberflächen, Berlin 1870. Das Original gab in erweiterter Form heraus: *B. Guccia,* Geometria superiore, Palermo 1890.

G. Salmon-W. Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Teil, 3. Aufl., Leipzig 1880 („*Salmon-Fiedler*").

G. Salmon, Analytic Geometry of three dimensions. Vol. II. 5. ed. by A. P. Rogers, London 1915 (vergriffen). Französische Ausgabe von *O. Chemin*, Paris 1892.

A. B. Basset, Geometry of surfaces, Cambridge 1910.

Th. Reye, Geometrie der Lage, 2. Abt. 1868, 3. Abt. 4. Aufl. Leipzig 1910 („*Reye*").

H. E. Timerding, Repertorium der höheren Mathematik, Bd. II, 2, Leipzig 1922. Kap. 35 „Besondere F_4" (von *Timerding*) („*Timerding*").

H. T. Baker, Principles of geometry, Cambridge, vol. III (1923), F_4, F_5 usf., vol. IV (1925), Ausdehnungen auf den Raum S_n („*Baker*").

B. Monographien.

G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques (Zykliden), Paris 1873, 2. ed. 1896 („*Darboux*").

Th. Reye, Synthetische Theorie der Kugeln und linearen Kugelnsysteme (Zykliden), Leipzig 1879.

G. Loria, Ricerche intorno alla geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito, Torino Mem. (2) 36 (1884); Torino Atti 20 (1885), p. 505.

K. Rohn, Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung, Preisschrift der Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1886 [Auszug in Math. Ann. 29 (1887), p. 81] („*Rohn*").

H. T. Hudson, Kummers Quartic surface, Cambridge 1905 (ohne Literaturangaben) („*Hudson*").

C. M. Jessop, On Quartics with singular points, Cambridge 1916 („*Jessop*").

Der voraufgehende Artikel wird mit „F_3" zitiert.

Bezeichnungen.

Es gilt das in „F_3“ Angegebene, mit einigen Ergänzungen.

Ein ν-facher Knotenpunkt einer Fläche werde jetzt genauer mit D_ν, entsprechend eine ν-fache Ebene mit Δ_ν bezeichnet, mit t_ν eine an ν Stellen ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4$) berührende Tangente der Fläche, mit T_i eine an i Stellen ($i = 0, 1, 2, 3$) berührende Tangentialebene; also im besondern t_0 eine beliebige Gerade, T_0 eine beliebige Ebene.

Das Zeichen für die Normkurve im S_n ist $N_n = \mathsf{N}_n$. Büschel, Netze, Gebüsche von Gebilden werden durch B, N, G angegeben. Im besonderen bedeute noch K_n einen Kegel n^{ter} Ordnung, $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ einen linearen resp. quadratischen Geradenkomplex, $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine quadratische Geradenkongruenz (2, 2).

Eine Regelfläche n^{ter} Ordnung wird mit R-F_n bezeichnet, ihre Regelstrahlen mit h.

Unter $\overline{C}$, $\overline{\overline{C}}$, ... wurde eine doppelte, dreifache ... Kurve auf einer Fläche verstanden; im besonderen also unter $\overline{g}$, $\overline{\overline{g}}$, ... eine doppelte, dreifache ... Gerade.

Linienkoordinaten im Raume werden genauer mit π resp. p angegeben, je nachdem sie als Achsenkoordinaten resp. Strahlenkoordinaten aufgefaßt werden.

I. Einleitung und Übersicht. Reziproke Erzeugung der $F_4, F_5, \ldots$ durch Flächen niederer Ordnung nach Reye und v. Escherich. Rationale und andere Kurven, nebst ihren Invarianten, auf besonderen F_4. Kanonisierung der F_4 und Reyes Dekaeder. Sonderfälle. Formentheoretisches. Übertragungsprinzipien.

1. Einleitung und Übersicht. Das eigentümliche Gepräge der Theorie der F_3 (s. Art. „F_3“) nebst ihrer Fülle geometrischer Eigenschaften beruhte auf zwei, sich selbst wieder gegenseitig bedingenden Hauptmomenten. Einmal ist es der Umstand, daß für eine F_3 die *Hesse*sche[1a]) und *Steiner*sche Fläche zusammenfallen, woraus die Lehre vom Pentaeder entspringt. Andererseits die Existenz einer endlichen Anzahl von Geraden auf der F_3, sowie von dreimal berührenden Ebenen. Daran lehnten sich die Erzeugungen der F_3, sowie ihre Abbildung auf eine Ebene von selber an.

1a) Die *Hesse*sche Fläche H einer F_n, deren Gleichung durch das Verschwinden der Determinante der zweiten Ableitungen von F_n geliefert wird, schneidet aus F_n die parabolische Kurve aus. Ein besonderes Verhalten weist H in den Knotenpunkten und vielfachen Kurven von F_n auf, wie *K. Rohn,* Math. Ann. 23 (1884), p. 80 näher ausführt. Sei D_k ein k-facher Knotenpunkt der F_n, so werden der Reihe nach folgende Fälle untersucht: 1. ein allgemeiner D_k; 2. der Sonderfall, wo der Tangentenkegel des D_k eine mehrfache Kante besitzt; 3. ein biplanarer und ein uniplanarer D_2; 4. ein einfacher Punkt der F_n, dessen Tangentenebene aus F_n eine c_n mit d_k ausschneidet; 5. die Doppel- und Rückkehrkurven.

Für eine F_4 erfahren die Ergebnisse geeignete Spezialisierungen.

Bei den $F_4 (F_5, \ldots)$ treten diese Momente und überhaupt die Theorie der punktallgemeinen Fläche in den Hintergrund. Die *Hesse*sche und *Steiner*sche Fläche sind jetzt verschieden. Zwar lassen sich deren allgemeine Eigenschaften sowie überhaupt die Polarentheorie der F_n, wie sie zuerst *L. Cremona* (s. Lit.) systematisch entwickelt hat, für die Einzelfälle $n = 4, 5, \ldots$ spezialisieren. Indessen gelangt man so zu wenig Ergebnissen, die von spezifisch geometrischem Interesse wären, was damit zusammenhängt, daß eine auch nur annähernde Übersicht über die Gestalten der in Betracht kommenden Gebilde unmöglich erscheint. So ist denn auch die reziproke Erzeugung einer F_4 durch Flächen niederer Ordnung (s. Nr. 2) nach *Th. Reye* und *G. v. Escherich* zwar von theoretischem Interesse, erweist sich aber zur Ableitung konkreter Eigenschaften der F_3 wenig geeignet. Desgleichen ist auch die von *Th. Reye* (s. Nr. 4) herrührende Ausdehnung des *Sylvester*schen Pentaeders der F_3 zu einem „Dekaeder" der F_4 usf. mehr von formalem Werte.

Was andererseits Gerade auf einer allgemeinen F_n angeht, so existieren solche für $n > 3$ überhaupt nicht mehr, ebensowenig wie allgemeine R und gewisse andere C (s. Nr. 3), vielmehr treten sie erst auf gewissen speziellen F auf, und ihr Auftreten gestaltet sich sehr verschieden, je nachdem die F singuläre Kurven besitzt oder nicht (s. Abschn. IX).

Endlich sei auch hinsichtlich der Theorie der Transformationen, insbesondere der *Cremona*schen, sowie der linearen C-Scharen auf der Fläche nach *Severi* u. a. auf deren allgemeine Darstellung verwiesen (s. Art. III C 6 b, *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus; III C 11, *L. Berzolari*, Algebraische Transformationen). Wir beschränken uns daher im folgenden auf gewisse Typen spezieller F_4 (und anhangsweise auch von $F_5, \ldots$), insbesondere auf solche, die zu ihrem Teile an der Weiterentwickelung der höheren Raumgeometrie beigetragen haben.

Nach einer vorläufigen Übersicht über das Auftreten gewisser C auf F_4 und der damit verknüpften Invarianten (s. Nr. 3) wird auf die grundlegende *Kummer*sche Abhandlung über F_4 mit Scharen von C_2 näher eingegangen.

Die wichtigsten dieser F_4, nämlich die F_4 mit einem Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$, werden im Anschlusse an die Abbildungsmethode von *Clebsch* (s. Abschn. III) näher verfolgt, und weiter deren metrische Repräsentanten, die Zykliden Z (s. Abschn. IV). Die Methode von *Clebsch* ist dann weiterhin von ihm selbst, von *Noether* u. a. auf F_4 mit einer Doppelgeraden $\bar{g}$, $F_5 (F_6, \ldots)$ mit singulären Kurven ausgedehnt worden (s. Nr. 52). Synthetisch und systematisch hat sie, besonders hinsichtlich der endlichen Anzahl auf ihr liegender Geraden, *Sturm* (s. Nr. 52) untersucht.

In dieser Hinsicht steht ihnen gegenüber eine Reihe vereinzelter merkwürdiger $F_4 (F_5, \ldots)$ mit einer endlichen Anzahl von Geraden, im übrigen aber ohne singuläre Punkte und Kurven.

Daran schließt sich, in Verallgemeinerung des Früheren, eine Übersicht über die rationalen, d. i. auf eine Ebene eindeutig abbildbaren F_4 (s. Nr. 53). Ein weiterer Abschnitt ist den wichtigsten F_4 mit < 16 Knotenpunkten D_2 gewidmet.

Den eigentlichen Kernpunkt des Ganzen bildet aber in Verbindung mit der *Weddle*schen F_4 die Theorie der *Kummer*schen Fläche K_m mit der Maximalzahl von $16 D_2$ nebst ihren Unterarten, des Tetraetroides T_e und der Wellenfläche W_l (s. Abschn. XI). Von besonderem Interesse ist hier die Durchdringung mit der Liniengeometrie der quadratischen Komplexe und Kongruenzen (s. Nr. 69 ff.), sowie der Darstellung durch hyperelliptische Funktionen von zwei Variabeln (s. Nr. 71).

Eine besondere Beachtung verdienen auch die F_4 mit einem kubischen Knotenpunkte D_3 (s. Abschn. VI), unter denen wieder die *Steiner*sche Fläche S eine besondere Rolle spielt (s. Abschn. VII), sowie die F_4 mit einer dreifachen Geraden (s. Abschn. VI). Daran schließt sich eine systematische Betrachtung der Regelflächen $R\text{-}F_4$ (s. Abschn. XII) und anhangsweise der $R\text{-}F_5$ und $R\text{-}F_6$. Den Schluß bildet die Aufzählung einer Reihe von metrisch ausgezeichneten F_4, insbesondere solcher, die der Theorie der F_2 entspringen (s. Abschn. XIII).

Um auf die allgemeine F_4 zurückzukommen, so diene als Definition deren Gleichung in homogenen Punktkoordinaten x_i, x_k, x_l, x_m. Denkt man sich diese Gleichung etwa nach x_m entwickelt, so nimmt sie die Gestalt an

$$(1) \qquad F_4 \equiv c_0 x_m^4 + c_1 x_m^3 + c_2 x_m^2 + c_3 x_m + c_4 = 0,$$

wo c_ν ($\nu = 0, 1, \ldots 4$) eine beliebige ternäre Form der Ordnung ν in x_i, x_k, x_l bedeutet. Die F_4 führt also $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$ Koeffizienten mit sich, oder hängt, in anderer Sprechweise, von 34 Konstanten ab.

An diese Darstellung mögen sich gleich einige vorläufige Bemerkungen über das Auftreten einfachster Singularitäten in der Koordinatenecke A_m anschließen. Geht vorab die F_4 einfach durch A_m, so verschwindet c_0, und (1) beginnt mit dem Gliede $c_1 x_m^3$; die Gleichung $c_1 = 0$ ist dann die der Tangentialebene T der F_4 in A_m.

Verschwindet weiter c_1 identisch, so daß (1) mit dem Gliede $c_2 x_m^2$ beginnt, so besitzt die F_4 in A_m einen Knotenpunkt 2. Ordnung D_2.

Dieser ist ein eigentlicher resp. biplanarer resp. uniplanarer, je nachdem die Gleichung $c_2 = 0$ einen irreduzibeln (ein- resp. nullteiligen Kegel 2. Ordnung, oder aber ein Paar getrennter (reeller resp. konjugiert imaginärer) Ebenen, oder endlich eine Doppelebene darstellt, wofür sich die algebraischen Kriterien leicht angeben lassen (s. Nr. **31**). Verschwindet auch c_2 identisch, so daß sich (1) reduziert auf $c_3 x_m + c_4 = 0$, so liegt in A_m ein kubischer Knotenpunkt D_3 vor; die 12 gemeinsamen Kanten der beiden Kegel $c_3 = 0$, $c_4 = 0$ liegen dann auf der F_4 (s. Nr. **37**). Die weiteren sukzessiven Ausartungen des D_3 in A_m werden wiederum durch die entsprechenden Ausartungen der kubischen Form c_3 bedingt. Verschwindet endlich auch noch c_3 identisch, so reduziert sich die F_4 auf den Kegel 4. Ordnung $c_4 = 0$, ein Fall, der im folgenden ausgeschlossen werde.

2. Reziproke Erzeugung der F_4, F_5, ... durch Flächen niederer Ordnung nach Reye und v. Escherich. *Th. Reye*[1]) hat systematisch, mit synthetischen Hilfsmitteln, die Erzeugung von F_n aus Flächen geringerer Ordnung untersucht und sie insbesondere auf $F_4, F_5, \ldots$ angewendet.

Der nächstliegende Weg, die Erzeugung einer F_n durch zwei projektiv zugeordnete Büschel B_p und B_q von F_p und F_q, für $p + q = n$, erwies sich für die allgemeine F_n als ungeeignet.

Bei einer F_4 läge ein doppelter Ansatz vor.

Einmal die Erzeugung durch einen F_1-Büschel B_1 und einen ihm projektiv zugeordneten F_3-Büschel B_3. Diese setzt aber die Existenz einer Geraden g auf der F_4 voraus; eine solche F_4 hängt aber nur von 33 Konstanten ab (s Nr. 4).

Andererseits die Erzeugung der F_4 durch ein F_2-Büschel B_2 und ein ihm projektiv zugeordnetes F_2'-Büschel B_2'. Dies würde wiederum die Existenz mindestens einer C_4 auf der F_4 voraussetzen; aber auch eine solche F_4 hängt nur von 33 Konstanten ab (s. Nr. **3**). Aus diesen Gründen stellt sich *Reye* die verwandte Aufgabe, die klassische *Steiner*sche Erzeugung einer F_2 durch ein Strahlennetz[2]) N_1 und ein ihm reziprok zugeordnetes F_1-Netz N_1' zu einer analogen Erzeugung von $F_3, F_4, \ldots$ auszubauen. Zu dem Behuf bedarf man vorab für die Erzeugung einer F_{n+1} einer synthetischen Definition resp. Konstruktion einer solchen reziproken Zuordnung eines g-Netzes N_1 und eines F_n-Netzes N_1.

1) *Th. Reye*, Math. Ann. 1 (1869), p. 455; ib. 2 (1870), p. 475. In der ersten Abhandlung werden der Reihe nach die F_4, F_5, ... untersucht, die zweite entwickelt die allgemeine Theorie.

2) Im Texte wurde die kürzere Bezeichnung „Netz" der sonst üblicheren „Bündel" vorgezogen.

Dies geschieht schrittweise mittels Polarenbildung.

Im nächsthöheren Falle $n = 2$ adjungiere man der Figur eines g-Netzes N_1 und eines F_2-Netzes N_2 einen beliebig, aber fest gewählten Punkt P_0 und denke sich bezügl. P_0 das Netz N_1' der Polarebenen Π der F_2 des Netzes N_2 konstruiert. Bezieht man dann, wie bei *Steiner*, die beiden Netze N_1 und N_1' reziprok aufeinander, so heißen dann auch die beiden Netze N_1 und N_2 „reziprok zugeordnet" oder kurz „reziprok", und die Eigenschaften dieser Zuordnung erweisen sich als unabhängig von der Auswahl des Punktes P_0. Im nächsten Fall eines g-Netzes N_1 und eines F_3-Netzes N_3 reduziere man wiederum mittels Polarenbildung das Netz N_3 auf ein F_2-Netz N_2', beziehe nach obiger Regel die beiden Netze N_1 und N_2' reziprok aufeinander, so sind damit auch die beiden Netze N_1 und N_3 reziprok einander zugeordnet usf. So gelangt man allgemein zur reziproken Beziehung zweier Netze von F_p und F_q. Über die noch weitergehende Ausdehnung durch *G. v. Escherich* s. u.

Sind nun auf diesem Wege ein g-Netz N_1 und ein F_n-Netz N_n reziprok aufeinander bezogen, so erscheint eine F_{n+1} als Ort der n Schnittpunkte je einer g in N_1 mit der zugeordneten F_n in N_n.

Umgekehrt beweist dann *Reye*, daß eine solche Erzeugung einer beliebig vorgelegten F_{n+1} stets, und auf noch mannigfaltige Art, ausführbar ist; als Zentrum des g-Netzes N_1 ist jeder beliebige Punkt der F_{n+1} wählbar. Insbesondere erscheint so eine F_4 als überdeckt mit unendlich vielen Reihen von 27 Punkten als Grundpunkten von F_3-Netzen.

Es empfiehlt sich, die entsprechende algebraische Entwickelung an die Seite zu stellen.

Der Vollständigkeit halber werde mit dem einfachsten Falle der F_2 begonnen.

Sei die Koordinatenecke A_m das Zentrum des g-Netzes N_1, während das F_1-Netz N_1' aus irgend drei partikulären, linear-unabhängigen F_1: $y_i = 0$, $y_k = 0$, $y_l = 0$ aufgebaut sei. Die Gleichung von N_1' lautet dann in drei homogenen Parametern v

$$(1) \qquad N_1' \equiv v_i y_i + v_k y_k + v_l y_l \equiv (vy) = 0.$$

Irgendein Individuum g des Netzes N_1 werde festgelegt durch die homogenen Koordinaten x_i, x_k, x_l seiner Spur in der Ebene $\mathsf{E}(x_m = 0)$ als seine Parameter; ein laufender Punkt P auf g bestimmt sich durch Angabe des Wertes der nichthomogenen Koordinate x_m nach dem Schema

$$(2) \qquad N(x_i, x_k, x_l; x_m).$$

Man bestimme zunächst den Schnittpunkt $(x_i, x_k, x_l; x_m)$ irgendeiner

F_1 von N_1 mit irgendeiner g in N, so daß die beiden Wertsysteme der (v_i, v_k, v_l) und (x_i, x_k, x_l) als gegeben anzusehen sind. Dann liefert den noch fehlenden Wert von x_m die in x_m lineare Gleichung (1). Nunmehr seien die beiden Netze N und N_1 reziprok aufeinander bezogen, so daß die v_i, v_k, v_l beliebig, aber fest gegebene Linearformen l in den x_i, x_k, x_l seien:

(3) $$\varrho v_r = l_r(x_i, x_k, x_l) \qquad (r = i, k, l).$$

Setzt man diese Werte der v in (1) ein, so ergibt sich unmittelbar als die Gleichung der gesuchten F_2

(4) $$F_2 \equiv (xy) \equiv (ly) = 0.$$

Die Substitutionen (3) lassen sich bei geeignetem Koordinatensystem so normieren, daß man einfach setzen kann

(3′) $$\varrho v_r = x_r \qquad (r = i, k, l),$$

womit (4) übergeht in

(4′) $$F_2 \equiv (xy) = 0.$$

Umgekehrt ist ersichtlich, daß man die Gleichung einer vorgelegten, durch A_m gehenden F_2, und noch in mannigfaltiger Art, nach x_i, x_k, x_l so anordnen kann, daß sie die Gestalt (4′) annimmt.

Die obige Entwickelung läßt sich formal vereinfachen, indem sich die drei Gleichungen (3) in eine einzige zusammenziehen lassen. Man deute zu dem Behuf die v in (1) als Linienkoordinaten in einer Hilfsebene H. Dann drücken die Beziehungen (3) aus, daß zwischen den beiden Ebenen E und H eine Korrelation Γ besteht; jedem Punkte (x_i, x_k, x_l) in E ist linear eine Gerade (v_i, v_k, v_l) in H zugeordnet, und vice versa. Führt man daher auch in E Linienkoordinaten (u_i, u_k, u_l) ein, so läßt sich das System (3) ersetzen durch die eine in den u und v bilineare Korrelationsgleichung

(5) $$\Gamma \equiv \sum a_{rs} u_r v_s \equiv [u, v] \equiv [u, x] = 0.$$

Ordnet man hier nach den u, so lassen sich die x_r linear in den v_s ausdrücken:

(6) $$\sigma x_r = a_{ri} v_i + a_{rk} v_k + a_{rl} v_l.$$

Die Umkehrung nach dem v liefert Beziehungen von der Gestalt

(7) $$\varrho v_r = \alpha_{ir} x_i + \alpha_{kr} x_k + \alpha_{lr} x_l \equiv l_r(x_i x_k x_l),$$

das sind aber wieder die Ausgangsgleichungen (3). Aus der Korrelation Γ (5) geht aber rückwärts wieder die Reziprozität (3) hervor.

Dies Verfahren ist ohne weiteres auf die Erzeugung einer F_{n+1} ausdehnbar. Es genüge, den Fall $n = 3$ als Typus zu betrachten. Während das g-Netz N (2) bleibt, ersetze man das F_1-Netz N_1 (1)

durch ein Netz N_3 von F_3

(8) $$N_3 \equiv v_i z_i + v_k z_k + v_l z_l \equiv (vz) = 0,$$

wo die z vorgegebene quaternäre kubische Formen in x_i, x_k, x_l, x_m bedeuten. Man bestimme vorab die drei Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 irgendeiner $g(x_i, x_k, x_l)$ in N_1 mit irgendeiner $F_3(v_i, v_k, v_l)$ in N_3. Die gesuchten x_m-Werte der drei Punkte P sind die Wurzeln der in x_m kubischen Gleichung (8).

Nunmehr seien wieder die beiden Netze N und N_3 reziprok aufeinander bezogen mittels dreier Beziehungen von der Gestalt (3). Die Einsetzung der v in (8) führt unmittelbar zur Gleichung einer F_4

(9) $$F_4 = (vz) \equiv (lz) = 0$$

als Ort der Schnittpunkte irgendeiner g in N mit der ihr vermöge (3) reziproken F_3 in N_3.

Wie oben kann man sich der kanonischen Darstellung (3) $\varrho v_r = x_r$ bedienen, womit (4) die Normalgestalt annimmt

(9′) $$F_4 \equiv (xz) = 0.$$

Liegt umgekehrt eine durch A_m gehende F_4 vor, so läßt sich ihre Gleichung in noch mannigfaltiger Art nach x_i, x_k, x_l so anordnen, daß sie in der Normalgestalt (9′) erscheint.

Auch die Zusammenziehung der drei Beziehungen (3) in eine einzige Korrelation Γ (5) vollzieht sich ganz wie oben im Falle $n = 1$.

Damit hat man die algebraische Bestätigung des *Reye*schen Satzes: „Eine vorgelegte, durch A_m gehende, im übrigen beliebige F_4 läßt sich, auf noch mannigfaltige Weise, erzeugen als Ort der Schnittpunkte eines g-Netzes N mit einem zu ihm reziproken F_3-Netze N_3." Dann erscheint die Gleichung der F_4 in der Normalgestalt $(xz) = 0$. Dabei läßt sich die Reziprozität durch eine Korrelation Γ ersetzen. Analoges gilt für eine F_{n+1}.

Dem oben entwickelten Grundgedanken hat *G. v. Escherich*[3]) die weiteste Ausdehnung gegeben, die die früheren Untersuchungen über Projektivität und Korrelation, Reziprozität und Apolarität als Sonderfälle umfaßt[4]), unter möglichster Vereinfachung des Rechenapparates.

3) *G. v. Escherich,* Wien Ber. 75 (1877), p. 523; ib. 85 (1882), p. 526, 893; ib. 87 (1884), p. 1036. In den ersten drei Abhandlungen wird die allgemeine Theorie entwickelt mit Anwendungen auf $F_4, F_5, \ldots$; die letzte bringt die Konstruktionen.

4) Man vgl. etwa: *Th. Reye,* Math. Ann. 1 (1869), p. 455; 2 (1870), p. 475; *H. Valentiner,* Tiddskr. f. Mat. (4) 3 (1879), p. 223; *F. Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 1; *W. Fiedler,* Zürich Viertelj. 24 (1882), p. 186; *E. de Jonquières,* Paris C. R. 105 (1887), p. 1203; 106 (1887), p. 526, 907; 107 (1888), p. 209; *P. W. White,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 21 (1920), p. 116 (mit Ausdehnungen auf den S_n).

Seien in irgendeinem Raume S_r zwei lineare „Flächensysteme“ gegeben von den Ordnungen p, q und den Parameterreihen λ_r, μ_s $(r = 0, 1, \ldots, i;\ s = 0, 1, \ldots, k)$ vermöge der Gleichungen

$$(10_\lambda) \qquad \sum \lambda_r F_r^{(p)} = 0, \qquad \sum \mu_s G_s^{(q)} = 0. \qquad (10_\mu)$$

Diese werden als „reziprok“ definiert, wenn die Parameter λ_r, μ_s an eine feste bilineare Relation

$$(11) \qquad \Gamma \equiv [\lambda^{(1)}, \mu^1] = 0$$

gebunden sind.

Ist dann irgendein partikuläres Wertsystem (μ') der μ vorgegeben, so genügen vermöge (10_λ) die λ einer linearen Bedingung. Die lineare ∞^i-Schar (10_λ) reduziert sich damit auf eine ∞^{i-1}-fache, die man aus i linear unabhängigen Individuen F zusammensetzen mag, von denen nur vorausgesetzt wird, daß sie, wenn auch erst evtl. nach Erfülltsein gewisser Bedingungen, ein gewisses Gebilde $C(\mu')$ gemein haben, dessen Dimension jenachdem gleich Null, Eins usf. sein kann. Bei variierenden Reihen (μ') erzeugt $C(\mu')$ so eine Fläche F_n der Ordnung $n = p + q$.

Man erkennt, wie die Beziehung (11) die Verallgemeinerung der früheren Korrelation Γ (8) ist. Ohne hier auf die allgemeinen Untersuchungen des Verfassers über die Möglichkeit einer reziproken Erzeugung einer vorgelegten F_n einzugehen, begnügen wir uns mit dem Falle der F_4 im S_3. Man gelangt dann zu einer zweiten reziproken Erzeugung, wenn man in obigem den Indizes p, q, i, k die speziellen Werte Zwei beilegt. Einem partikulären Wertsysteme (μ') der μ entspricht dann ein F_2-Büschel $B^{(\lambda)}$ mit einer Basiskurve $C_4^{(\lambda)}$. Variiert das System (μ'), so trifft jede G_2 der zweiten Schar die reziproke $C_4^{(\lambda)}$ der ersten Schar in einer Reihe von acht assoziierten Punkten, deren Ort eine F_4 ist, deren Gleichung die „Netzgestalt“ annimmt

$$(12) \qquad F_4 = G_2^{(0)} H_2^{(0)} + G_2^{(1)} H_2^{(1)} + G_2^{(2)} H_2^{(2)} = (GH) = 0.$$

Umgekehrt beweist *v. Escherich*, daß sich eine vorgelegte F_4 auf diese Weise, und zwar in noch mannigfaltiger Art, erzeugen läßt. Es existieren unendlich viele Kurven C_4, die die F_4 in Reihen R_{16} von 16 Punkten derart treffen, daß sich die R_{16} je in zwei assoziierte Teilreihen R_8 und R_8' zerlegen lassen, wo durch jede eine die C_4 nicht enthaltende F_2 hindurchgeht.

Es ist nützlich, die Figur auch von transzendentem Standpunkt aus zu betrachten.

Man denke sich auf der C_4 einen elliptischen Normalparameter u ausgebreitet. Sind dann u_i $(i = 1, \ldots 16)$ die Argumente der 16 Schnittpunkte (C_4, F_4), so gilt nicht nur

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{16} u_i = 0,$$

sondern die u lassen sich auch in zwei Reihen $u_r (r=1,\dots 8), u_s (s=9,\dots 16)$ so zerlegen, daß man zugleich hat

$$(14) \qquad \sum_{r=1}^{8} u_r = 0, \qquad \sum_{s=9}^{16} u_s = 0,$$

die wieder rückwärts (13) nach sich ziehen.

Faßt man zusammen, so erhält man den Satz von *v. Escherich*: „Eine F_4 läßt sich noch auf eine zweite Art und noch auf mannigfaltige Weise erzeugen durch zwei reziproke F_2-Netze; die Gleichung der F_4 erscheint dann in der Netzgestalt (12) und die F_4 als überdeckt mit unendlich vielen Reihen von assoziierten Punktoktupeln."

Auf Grund dieser beiden reziproken Erzeugungen einer F_4 ist es *v. Escherich* weiterhin gelungen, nach Analogie der F_3 (s. „F_3", Nr. **20**) eine F_4, die durch 34 vorgegebene Punkte gehen soll, punktweise mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Wie freilich zu erwarten, gestaltet sich die wirkliche Ausführung äußerst umständlich, so daß der erkenntnistheoretische Wert des Verfahrens mehr auf der *Möglichkeit* der Konstruktion beruht, als auf deren Realisierung im einzelnen.

3. **Rationale und andere Kurven, nebst ihren Invarianten, auf besonderen F_4.** Die F_2 und F_3 zeichnen sich dadurch aus, daß auf ihnen Scharen rationaler Kurven R_n einer jeden Ordnung n liegen. Eine Ausnahme bildet nur der Fall $n=1$ bei den F_3, insofern es nur eine endliche Anzahl ($=27$) von Geraden gab (s. Art. „F_3", Nr. 2). Ähnliches gilt auch für Kurven C vom Geschlechte $1, 2, \dots$.

Auf diesem Umstande beruht es vornehmlich, daß die allgemeinen F_2 und F_3 eine so umfangreiche Reihe einfacher, schöner und durchsichtiger geometrischer Eigenschaften aufweisen.

Diese Erscheinung hört nun bei allgemeinen F_n $(n \geqq 4)$ auf, woraus umgekehrt wieder folgt, daß die Ableitung spezifischer Eigenschaften solcher F_n ungemein erschwert wird.

Allgemein hat die Natur der auf einer F_4 gelegenen Kurven *K. Rohn*[4a]) untersucht.

Man beachte vorab, daß für eine F_n $(n > 3)$ die Anzahl der verschiedenen C-Familien mit steigender Ordnung n rasch wächst. Deren

4a) *K. Rohn*, Leipzig Ber. 49 (1897), p. 631. Vgl. auch die voraufgehende Abhandlung von *Rohn* über die C auf F_3, ib. 46 (1894), p. 84; Art. „F_3", Nr. **15**.

Untersuchung wird aber dadurch erleichtert, daß die zugehörigen Restkurven $C^{(r)}$ niedrigster Ordnung zumeist zerfallen.

Die F_4 zeichnen sich dadurch aus, daß, wenn Ordnung und Geschlecht einer C auf F_4 vorgegeben sind, von solchen nur eine einzige Familie mit irreduziblen $C^{(r)}$ existiert, daneben aber auch noch Familien mit reduziblen $C^{(r)}$ möglich sind.

Die Teile letzterer $C^{(r)}$ sind entweder alle rational, oder es ist ein irrationaler Teil darunter, oder auch es existieren mehrere äquivalente elliptische Teile.

Dabei übersteigt die Anzahl dieser Teile stets die Anzahl der wirklichen D_2 der reduzibeln $C^{(r)}$.

Enthält die $C^{(r)}$ mehrere äquivalente elliptische Teile, oder auch mehrere sich je nicht treffende rationale, und liegt die $C^{(r)}$ mit der Ur-C auf einer Fläche F_λ der Ordnung λ, so schneidet die Gesamtheit der F_λ aus der F_4 nur eine Teilschar aus.

Weiter wird der Zusammenhang zwischen den $C^{(r)}$ verschiedener Ordnung verfolgt. Sodann werden die Konstantenanzahlen der C bestimmt; hierbei werden auch C mit mehrfach zählenden Teilen berücksichtigt.

Danach werden die C-Familien auf F_4 in vier Kategorien eingeteilt, für die Tabellen aufgestellt werden.

Beachtenswert ist eine Tabelle, die alle C bis zur Ordnung 24 umfaßt.

Im folgenden beschränken wir uns auf einige spezielle Arten von C auf besonderen F_4.

Wir betrachten zunächst das Auftreten rationaler Kurven R_n. Eine einfache Abzählung[5]) lehrt, daß bereits auf einer allgemeinen — von 34 Konstanten abhängigen — F_4 keine R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ liegen kann. Man denke sich auf einer R_n einen Parameter λ ausgebreitet, so daß die Koordinaten eines laufenden Punktes der R_n rationale ganze Funktionen von λ werden; einem Werte von λ entspricht nur *ein* Punkt der R_n und umgekehrt. Die $4n$ Punkte, in denen eine R_n eine F_4 trifft, hängen daher von einer Gleichung $f_{4n}(\lambda) = 0$ der Ordnung $4n$ ab, mit voneinander unabhängigen Koeffizienten. Die Forderung, daß die R_n ganz der F_4 angehöre, ist somit gleichwertig mit dem identischen Verschwinden jener Gleichung. Dies involviert $4n + 1$ unabhängige Bedingungen, während doch eine allgemeine R_n nur von $4n$ Konstanten abhängt. Es muß also eine gewisse Invariante J_n der F_4 verschwinden und umgekehrt, so daß der Satz gilt:

5) Vgl. auch die Ansätze bei *O. Tognoli*, Giorn. di mat. 11 (1873), p. 180.

„Damit eine R_n auf einer F_4 liege, ist das Verschwinden einer gewissen Invariante J_n der F_4 notwendig und hinreichend.“

Das Bildungsgesetz dieser J_n ist bisher nicht ermittelt worden; noch weniger weiß man, ob diese J_n etwa ein vollständiges resp. relativ vollständiges oder ein Fundamentalsystem bilden, und wie sich andere Invarianten der F_4 durch jene ausdrücken. Für den Fall $n=2$, wie vorab bemerkt sei, ist ersichtlich, daß die Existenz einer $R_2 = C_2$ auf einer F_4 stets die einer zweiten nach sich zieht, nämlich der Restkurve der Ebene $\mathsf{E}(C_2)$ (s. auch Nr. **6**). Dies tritt auch in der Gleichung einer F_4 mit einer C_2 hervor, die von der Form sein muß

$$(1_2) \qquad F_4 \equiv F_2 G_2 - F_1 F_3 = 0.$$

Allgemein lege man durch eine auf der F_4 gelegen gedachte R_n eine F niedrigster Ordnung q, so zieht die Existenz der R_n zugleich die einer Restkurve C_{4q-n} nach sich, so daß auch für das Auftreten einer solchen das Verschwinden der Invariante J_n charakteristisch ist (s. Art. III C 9, *Rohn-Berzolari*, Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen).

Es ist nützlich, die Natur dieser Restkurven für die niedrigsten Werte von $n = 1, 2, \ldots 6$ direkt zu untersuchen.

In den Fällen $n = 1$ bis 4 geht mindestens eine F_2 durch die R_n und in den beiden weiteren Fällen $n = 5, 6$ mindestens eine F_3. Man wird daher umgekehrt von einer F_2 resp. F_3 ausgehen und durch eine auf ihr gelegen gedachte R_n eine im übrigen beliebige F_4 legen und sodann die Restkurve mittels der Abbildung der F_2 resp. F_3 auf eine Ebene bestimmen (s. Art. „F_3“, Nr. **11**).

Der Fall $n = 1$.

Die Gleichung der F_4 hat die Gestalt

$$(1_1) \qquad F_1 F_3 - F_1' F_3' = 0;$$

die F_4 ist also erzeugbar durch ein Ebenenbüschel und ein ihm projektiv zugeordnetes F_3-Büschel, und umgekehrt.

Man greife auf einer F_2 eine erzeugende Gerade g heraus und lege durch sie eine F_4; die Restkurve ist eine C_7.

Bei der (stereographischen) Abbildung der F_2 auf eine Ebene H mit zwei Fundamentalpunkten A_1, A_2 (s. „F_3“, Nr. **16**, Note 67) ist das Bild des Schnittes C_8 der F_2 mit einer beliebigen F_4 eine c_8 mit d_4 in A_1 und A_2, und das Bild einer g auf F_2 eine Gerade c_1 durch einen der beiden Fundamentalpunkte, etwa A_1. Somit ist das Bild der Restkurve C_7 eine c_7 mit d_3 in A_1 und d_4 in A_2. Eine solche c_7 hat aber das Geschlecht $p = 15 - 3 - 6 = 6$.

Mithin ist auch die fragliche C_7 eine $C_7^{(6)}$ vom Geschlecht 6, und es gilt:

„Das Verschwinden der Invariante J_1 einer F_4 ist zugleich charakteristisch für die Existenz einer (und damit unendlich vieler) $C_7^{(6)}$ auf der F_4.“

Der Fall $n = 1$ ist auch dadurch ausgezeichnet, daß man durch g ein Büschel von Ebenen legen kann, die aus der F_4 noch eine c_3 ausschneiden. Also ist das Verschwinden von J_1 auch charakteristisch für die Existenz einer und damit unendlich vieler c_3 auf der F_4.

Die Invariante J_1 läßt sich in normierter Gestalt leicht bilden. Eine (nicht nullteilige) F_4 läßt sich stets darstellen durch eine Gleichung von der Form $c_1 F_3 + c_1' F_3' + c_3'' F_3'' = 0$, wo die c ternäre Linearformen in x_i, x_k, x_l sind. Denn diese Gleichung besagt lediglich, daß die Fläche F_4 die Koordinatenecke A_m enthält. Dann aber wird J_1 einfach die Determinante der c. Denn deren Verschwinden ist notwendig und hinreichend dafür, daß die drei Formen c linear abhängig werden; damit reduziert sich aber die Gleichung der F_4 auf die Gestalt (1_1).

Der Fall $n = 2$ (s. die obige Gleichung (1_2)).

Das Bild einer C_2 auf einer F_2 ist eine c_2 durch A_1 und A_2. Legt man durch die C_2 eine F_4, so ergibt sich als Restkurve eine C_6. Das Bild derselben ist eine c_6 mit d_3 in A_1 und A_2, also eine $c_6^{(4)}$ vom Geschlecht $p = 10 - 2 \cdot 3 = 4$. Eine solche c_6 ist rational transformierbar in eine c_6 mit $6 d_2$. Hiervon kann man sich auch direkt überzeugen. Durch die C_6 läßt sich auch eine F_3 legen. Geht man wieder umgekehrt von einer allgemeinen F_3 und deren Abbildung aus, so ist in der Tat das Bild des Schnittes der F_3 mit einer beliebigen F_2 eine c_6 mit d_2 in den sechs Fundamentalpunkten A_i $(i = 1, \dots 6)$ (s. Art. „F_3“, Nr. **11**). Projiziert man eine allgemeine $C_6^{(4)}$ von einem beliebigen Raumpunkt aus, so ergibt sich als Projektion eben eine c_6 mit $6 d_2$; durch die $C_6^{(4)}$ geht eine einzige F_2, die Fläche ihrer Trisekanten. Liegt im besonderen das Projektionszentrum auf dieser F_2, so wird die Projektion eine obige c_6 mit zwei d_3. Man hat also:

„Das Verschwinden der Invariante J_2 einer F_4 ist zugleich charakteristisch für die Existenz einer (und damit unendlich vieler) $C_6^{(4)}$ auf der F_4.“

Dies steht in Übereinstimmung mit der Gleichung (1_2).

Anders verhält es sich mit der Frage nach dem etwaigen Auftreten von Kurven $C_6^{(3)}$, vom Geschlecht Drei (s. Art. „F_3“, Nr. **1**, **11**) auf einer allgemeinen F_4. Eine solche $C_6^{(3)}$ erscheint am einfachsten als Schnitt von zwei F_3, die noch eine (irreduzible) C_3 gemein haben.

Wählt man bei der Abbildung einer der beiden F_3 als Bild der C_3 eine r_6, mit d_2 in den sechs Punkten A, so wird das Bild der $C_6^{(3)}$ eine allgemeine Normalkurve c_4 (mit $p = 3$) durch die A. Algebraisch läßt sich eine $C_6^{(3)}$ darstellen durch das simultane Verschwinden der Determinanten einer Matrix von der Gestalt $|A_i, B_i, C_i, D_i|$ $(i = 1, 2, 3)$ mit quaternären Linearformen als Elementen. Somit ist eine F_4 durch eine $C_6^{(3)}$ darstellbar durch eine vierreihige Determinante mit beliebigen quaternären Linearformen als Elementen

$$(1_2') \qquad F_4 = |ABCD| = 0.$$

Geometrisch sagt diese Darstellung aus, daß eine solche F_4 erzeugbar ist durch quadrilineare Zuordnung von vier Ebenengebüschen.

Von diesem Gesichtspunkt aus hat eine solche F_4 mit einer $C_6^{(3)}$ zuerst *F. Schur*[6]) synthetisch untersucht und festgestellt, daß sie, wenn auch nur von 33 Konstanten abhängig, im übrigen mit den allgemeinen F_4 die wesentlichsten Eigenschaften gemein hat. Damit ergibt sich zugleich, daß auch für die Existenz einer $C_6^{(3)}$ auf einer F_4 das Verschwinden einer gewissen Invariante, die mit J_2' bezeichnet sei, charakteristisch ist. Dann aber existieren auch unendlich viele $C_6^{(3)}$ auf der F_4, da, wie die Abbildung der F_3 zeigt, jede weitere F_4 durch die $C_6^{(3)}$ die vorgelegte F_4 noch in einer solchen $C_6^{(3)}$ als Restkurve schneidet.

Der Fall $n = 3$.

Sei jetzt $J_3 = 0$; die F_4 besitze eine (irreduzible, gewundene) C_3. Man lege wiederum durch die C_3 irgendeine F_2, so ergibt sich eine Restkurve C_5. Um deren Natur zu erkennen, gehe man wieder umgekehrt von einer gegebenen F_2 aus und lege durch eine auf ihr befindliche C_3 eine im übrigen beliebige F_4. In der Bildebene H ist das Bild der C_3 entweder eine c_2 durch einen der beiden Punkte A, etwa A_1, oder aber eine r_3 mit d_2, etwa in A_1 und d_1 in A_2.

Diese Bildkurve ist zu einer c_8 mit d_4 in A_1 und A_2 zu vervollständigen.

Die Ergänzungskurve ist also im ersten Falle — nach Absonderung der Geraden (A_1, A_2) — eine c_5 mit d_2 in A_1, d_3 in A_2, also eine $c_5^{(2)}$ vom Geschlecht 2, wie sich im zweiten Falle direkt ergibt.

Die Raumkurve C_5 ist also ebenfalls vom Geschlecht 2, eine $C_5^{(2)}$; eine solche wird von einem beliebigen Punkte aus in eine $c_5^{(2)}$ mit $4d_2$ projiziert, und die durch sie gehende F_2 ist die Fläche der Trisekanten.

Zu einer solchen $c_5^{(2)}$ mit $4d_2$ gelangt man wieder direkt durch den Schnitt der F_2 mit einer allgemeinen F_3, die mit F_2 eine Gerade

6) *F. Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 1.

g gemein hat (s. Art. „F_3“, Nr. **11**). Das Bild von g in H ist eine c_1, etwa durch A_1, und die Restkurve wiederum eine $c_5^{(2)}$ mit d_2 in A_1, d_3 in A_2. Bedient man sich andererseits der *Clebsch*schen Abbildung der F_3 und sei das Bild von g etwa eine Gerade $c_{ik} = (A_i, A_k)$, so wird das Bild der Restkurve $C_5^{(2)}$ in der Tat eine $c_5^{(2)}$ mit $4d_2$, in $A_l, \ldots, A_p$ (und d_1 in A_i, A_k). Es ergibt sich somit:

„Das Verschwinden der Invariante J_3 einer F_4 ist zugleich charakteristisch für die Existenz einer (und damit unendlich vieler) $C_5^{(2)}$ auf der F_4.“

Hier lassen sich weitere Folgerungen anknüpfen.

Algebraisch ist eine C_3 darstellbar durch das simultane Verschwinden der drei Determinanten einer Matrix $|A_i, B_i, C_i|$ $(i = 1, 2)$. Somit ist eine F_4 mit C_3 darstellbar als dreireihige Determinante von der Gestalt

$$(1_3)\qquad \begin{vmatrix} F_2, G_2, H_2 \\ A_1, B_1, C_1 \\ A_1', B_1', C_1' \end{vmatrix} = 0,$$

wo F_2, G_2, H_2 quadratische Formen sind. Zu einer weiteren geometrischen Eigenschaft einer solchen F_4 mit C_3 gelangt man, wenn man von irgendeinem (variierenden) Punkte P der F_4 an die C_3 die einzige Sekante s legt, die die F_4 in einem Restpunkte Q treffe. „Dadurch ist auf der F_4 eine (1, 1)-deutige involutorische Punktverwandtschaft (P, Q) hergestellt.“

Hierauf gestützt, kann man eine F_4 mit C_3 explizite irrational in der Weise darstellen, daß die Koordinaten eines Punktes P der F_4 als ganze Formen in drei Parametern α, β, τ erscheinen, wo τ eine quadratische Irrationalität der α, β ist.

Um eine solche Gestalt in einfachster Darstellung zu gewinnen, wähle man die C_3 als Normkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. Art. „F_3“, Nr. **12**, **19**). Bezeichnet man daher jetzt die Koordinaten eines Punktes mit x_3, x_2, x_1, x_0, so wird die implizite Normaldarstellung einer F_4 mit N_3

$$(1_3')\qquad F_4 = \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & H_2 \\ 3x_0, & x_1, & x_2 \\ x_1, & x_2, & 3x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Auf der N_3 sei ein Parameter λ ausgebreitet: Eine Sekante, die zwei Kurvenpunkte (α), (β) verbindet, sei mit $s(\alpha, \beta)$ bezeichnet; man schneide die F_4 mit einer solchen. Die Koordinaten eines laufenden Punktes von s sind

$$(2)\qquad x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \alpha^3 + \tau\beta^3 : 3(\alpha^2 + \tau\beta^2) : 3(\alpha + \tau\beta) : 1 + \tau.$$

Zunächst ergibt eine leichte Rechnung, daß man, nach Einsetzung von (2) in die Teildeterminanten $3x_0x_2 - x_1^2$, $9x_0x_3 - x_1x_2$, $3x_1x_3 - x_2^2$, abgesehen von dem gemeinsamen Faktor $2(\alpha - \beta)^2$, die Werte 1 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ erhält. Andererseits hat man (2) in die quadratischen Formen F_2, G_2, H_2 einzutragen. Es genügt die Betrachtung einer der Formen, etwa von $F_2 = F$. Schreibt man symbolisch $F = (ax)^2$, so geht der symbolische Faktor (ax) vermöge (2) über in die kubische binäre Form $(ax)^3 + \tau(\alpha\beta)^3$, wo eine Verwechslung der binären Symbole a mit den quaternären nicht zu befürchten ist. Die Quadrierung von (ax) liefert

$$(a\alpha)^6 + 2\tau(a\alpha)^3(a\beta)^3 + \tau^2(a\beta)^6.$$

Die Bedeutung der drei hier auftretenden Formen liegt auf der Hand. Die Fläche $F_2 = F$ trifft die N_3 in sechs Punkten, deren λ-Argumente die Wurzeln der binären Form $f_6 = (a\lambda)^6$ sind. Durch Einsetzung von $\lambda = \alpha$ und $\lambda = \beta$ ergeben sich $(a\alpha)^6$ und $(a\beta)^6$, während $(a\alpha)^3(a\beta)^3$ diejenige Polarform ist, deren Verschwinden aussagt, daß das Punktepaar (α, β) harmonisch liegt zum Paar der Schnittpunkte von s mit F. Bezeichnet man analog G_2 mit $(bx)^2$, H_2 mit $(cx)^2$, so gelangt man zur Bestimmung der beiden Restschnittpunkte P, Q von s mit der F_4 zu der in τ quadratischen Gleichung

$$(3)\quad \begin{aligned}\varphi(\tau) \equiv \{\alpha\beta(a\alpha)^6 + (\alpha + \beta)(b\alpha)^6 + (c\alpha)^6\} \\ + 2\tau\{\alpha\beta(a\alpha)^3(a\beta)^3 + (\alpha + \beta)(b\alpha)^3(b\beta)^3 + (c\alpha)^3(c\beta)^3\} \\ + \tau^2\{\alpha\beta(a\beta)^6 + (\alpha + \beta)(b\beta)^6 + (c\beta)^6\} = 0,\end{aligned}$$

die sich auch leicht in realer Gestalt schreiben ließe.

Damit ist in der Tat durch Kombinierung von (2) mit der Bedingung (3) die gesuchte Darstellung der F_4 $(1_3')$ erreicht. Von dieser algebraischen irrationalen Darstellung der F_4 kann man zu einer korrespondierenden transzendenten durch hyperelliptische Funktionen von zwei Variabeln übergehen (s. Nr. 26, 71).

Der Fall $n = 4$.

Durch eine allgemeine R_4 geht eine einzige F_2. Umgekehrt gehe man wieder von einer F_2 aus und einer auf ihr befindlichen R_4; durch letztere lege man eine im übrigen beliebige F_4.

Das Bild der R_4 in der Ebene H ist eine r_3 mit d_2 in einem der beiden Punkte A, etwa A_1, oder auch eine r_4 mit d_1 in A_1, und d_3 in A_2. Im ersteren Falle ist die Ergänzung der r_3 zu einer c_8 mit d_4 in A_1 und A_2, nach Absonderung der Geraden (A_1, A_2), eine r_4 mit d_1 in A_1 und d_3 in A_2. Im letzteren Falle gelangt man von einer solchen r_4 zur obigen r_3 zurück.

Somit ergibt sich:

„Denkt man sich die Bedingung $J_4 = 0$ erfüllt, so zieht die Existenz einer R_4 auf der F_4 die einer zweiten solchen R_4 nach sich; beide zusammen bilden den vollen Schnitt der F_4 mit einer F_2. Über den Fall einer elliptischen C_4 s. u.

Der Fall $n = 5$.

Durch eine allgemeine R_5 geht als Fläche niedrigster Ordnung eine F_3. Man lege also eine F_3 und irgendeine auf ihr befindliche R_5 zugrunde. Das Bild einer solchen R_5 ist eine r_3 mit d_2 in A_i, d_1 in A_k und A_l, oder auch eine r_4 mit d_2 in A_i, A_k, A_l, und d_1 in A_m, oder endlich eine r_5 mit d_3 in A_i, d_3 in A_k, A_l, A_m, und d_1 in A_n. Andererseits ist das Bild der Schnittkurve C_{12} der F_3 mit einer beliebigen F_4 eine c_{12} mit d_2 in allen sechs A.

In ersterem Falle ist die Ergänzungskurve zur r_3 eine c_9 mit d_2 in A_i, d_3 in A_k, A_l, d_4 in A_m, A_n, A_p. Eine solche c_9 hat das Geschlecht $p = 28 - 1 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 = 3$. Somit ist auch auf der F_4 die Ergänzungskurve der R_5 eine $C_7^{(3)}$ vom Geschlecht 3.

Dies bestätigt sich in den beiden andern Fällen, was nicht weiter ausgeführt werde.

Damit hat man:

„Ist die Bedingung $J_5 = 0$ erfüllt, so zieht die Existenz einer R_5 auf der F_4 die Existenz einer (und damit unendlich vieler) $C_7^{(3)}$ nach sich, und umgekehrt. Zwei solche Kurven R_5 und $C_7^{(3)}$ bilden den vollen Schnitt der F_4 mit einer F_3.

Der Fall $n = 6$.

Durch eine allgemeine R_6 geht eine einzige F_3. Sei also umgekehrt vorgelegt eine F_3 nebst irgendeiner R_6 auf ihr, durch die man eine im übrigen beliebige F_4 lege.

Das Bild der R_6 ist eine r_3 mit d_2 in A_i, d_1 in A_k, oder eine r_4 mit d_2 in A_i, A_k, A_l, oder eine r_5 mit d_3 in A_i, d_2 in A_k, A_l, A_m, usf., bis zu einer r_9 mit d_2 in A_i, d_3 in A_k, d_4 in A_l, A_m, A_n, A_p. In der Tat ist auch letztere Kurve rational, denn sie besitzt das Geschlecht $p = 28 - 1 - 3 - 4 \cdot 6 = 0$.

Wählt man etwa den ersten Typus der r_3, so ist die Ergänzungskurve zu einer c_{12} mit d_4 in allen sechs A eben eine r_9 von der oben angegebenen Art.

Mithin ist die Ergänzungskurve zur R_6 im Schnitte (F_3, F_4) wiederum eine solche R_6, und umgekehrt.

Man hat daher:

„Für $J_6 = 0$ zieht die Existenz einer R_6 auf der F_4 die Existenz einer zweiten solchen R_6 nach sich. Beide Kurven bilden zusammen den vollen Schnitt der F_4 mit einer F_3."

Elliptische C_n auf der F_4.

Auch hier beschränken wir uns auf die einfachsten Fälle.

Der niedrigste, aber wichtigste Fall ist $n = 4$.

Durch eine C_4 geht noch ein Büschel von F_2: Die Existenz einer C_4 auf einer F_4 zieht daher die Existenz von unendlich vielen weiteren solchen nach sich. Dies geht auch unmittelbar aus der Gleichung der F_4 hervor, die von der Gestalt sein muß

$$(1_4') \qquad F_4 \equiv F_2 G_2' - F_2' G_2 = 0.$$

Diese ist übrigens gleichwertig mit der andern

$$(1_4'') \qquad F_4 \equiv \sum_{i=1}^{4} a_i F_2^{(i)2} = 0.$$

Denn spaltet man die linke Seite von $(1_4'')$ in zwei Aggregate von je zwei Quadraten und zerlegt jedes der beiden Aggregate in das Produkt von zwei F_2-Faktoren, so gelangt man zu der Darstellung $(1_4')$ zurück, und entsprechend vice versa.

Die Darstellung $(1_4')$ sagt geometrisch aus, daß die F_4 erzeugbar ist durch projektive Zuordnung von zwei F_2-Büscheln.[7])

Noch *G. Salmon* (s. „*Salmon-Fiedler*", 3. Aufl. [1882] Nr. 340) nahm an, daß eine allgemeine F_4 der Darstellungen $(1_4', 1_4'')$ fähig sei.

Indessen wies *G. Valentiner*[8]), indem er zugleich die Fragestellung zugleich erheblich verallgemeinerte, nach, daß jene Annahme unzutreffend sei.

Schon *Th. Reye* (s. Nr. 2) hatte betont, daß eine F_{p+q} nur dann durch zwei projektiv zugeordnete Büschel von F_p und F_q erzeugbar sein kann, wenn sie unendlich viele Schnittkurven $C_{pq} = (F_p, F_q)$ enthält. Indessen hat *Reye* nicht weiter untersucht, ob und wann die obige Bedingung für eine F_{p+q} erfüllt ist.

Valentiner geht so vor. Sei etwa $p \geq q$. Man setze zur Abkürzung

$$a_n = \binom{n+1}{3} - 1, \quad A_{pq} = a_p - a_{p-q} - 1.$$

Dann ergibt sich zunächst A_{pq} als die Anzahl der Punkte einer F_q, die eine $C_{pq} = (F_q, F_p)$ auf ihr bestimmen.

---

7) Diese Erzeugung ist verschiedentlich weiter verfolgt worden, vgl. u. a. *Th. Reye*, Math. Ann. 1 (1869), p. 455; *H. Durrande*, Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 440; *L. Cremona*, „In Memoriam *D. Chelini*", 1881, p. 413; *E. de Jonquières*, Paris C. R. 107 (1888), p. 209.

8) *G. Valentiner*, Tiddskr. f. Mat. (4) 3 (1879), p. 22; Dissert. Kjöbenhavn 1881.

Weiter setze man

$$\begin{cases} A_{npq} = a_n - a_{n-p} - a_{n-q} - 1 & (\text{für } n < p + q), \\ a_{npq} = a_n - a_{n-p} - a_{n-q} + a_{n-p-q} & (\text{für } n \geqq p + q). \end{cases}$$

Dann werden die Bedingungen aufgestellt, daß eine F_n eine C_{pq} enthält, sowie daß eine F_n durch A_{npq} resp. a_{npq} Punkte einer C_{pq} geht.

Daß diese Bedingungen notwendig und hinreichend sind, läßt sich an der Hand einer speziellen C_{pq} nachweisen, die, zusammen mit einer $C_{q\,n-p}$, den vollen Schnitt mit einer gewissen F_q' bildet. Wählt man dann insbesondere die F_q' als ein q-tupel von Ebenen, so läßt sich der obige Satz durch vollständige Induktion erhärten. Alsdann folgt aber, daß eine $F_n (n \geqq 4)$ mit einer C_{pq} nicht die allgemeine Fläche ihrer Ordnung sein kann. Endlich wird auch die Anzahl der Konstanten ermittelt, von der eine F_n mit einer C_{pq} abhängt, nämlich

$$a_p + a_q + a_{n-p} + a_{n-q} - a_{p-q} - a_{n-p-q} - 1 \quad (n > p + q,\ p \geqq q).$$

Für $n = 4$, $p = q = 2$ ergibt sich die Anzahl $33 = 34 - 1$. Mithin muß eine gewisse (bisher noch nicht aufgestellte) Invariante J_4' der F_4 verschwinden, damit letztere eine (und damit unendlich viele) C_4 besitzt. Es gilt also der Satz:

„Das Verschwinden einer Invariante J_4' einer F_4 ist charakteristisch für die Existenz einer (und damit unendlich vieler) C_4 auf der F_4, und damit für die Darstellbarkeit ($1_4'$) oder auch ($1_4''$), oder, was geometrisch auf dasselbe hinauskommt, für die Erzeugbarkeit der F_4 durch zwei projektiv zugeordnete F_2-Büschel.“

Im übrigen ist bei der Methode von *Valentiner* zu beachten, daß sie sich auf volle Schnittkurven C_{pq} beschränkt. Der allgemeinere Fall, wo eine C (auf einer F_n) als Partialschnitt von drei resp. vier Flächen erscheint, ist erst durch die allgemeine Restkurventheorie von *M. Noether* und *G. Halphen* erledigt worden.

Das Ergebnis *Valentiners* für die Konstantenzahl hat *A. Cayley*[9]) einfacher direkt abgeleitet. Sind F_r, F_s, F_t, F_u, mit $r + s = t + u$ vorgelegte beliebige quaternäre Formen, so läßt sich die Anzahl der Konstanten in der Form $F_r F_s - F_t F_u$ dadurch ermitteln, daß sie in die ihr kongruente Gestalt gebracht wird

$$(F_r + \alpha F_t)(F_s + \beta F_t) - F_t(F_u + \alpha F_s + \beta F_r + \alpha\beta F_t),$$

wo die α, β gewisse willkürliche Hilfsformen sind.

4. Die Kanonisierung der F_4 und Reyes Dekaeder. Sonderfälle. Die F_3 (s. Art. „F_3“, Nr. 3) besaß ein „Pentaeder“, d. h. die Form F_3 ließ sich (auf eine einzige Art) als Aggregat von fünf Kuben dar-

9) *A. Cayley,* Tiddskr. f. Mat. (4) 4 (1880), p. 145.

stellen. In Note 12 daselbst war auf einen Beweis hingewiesen, den *Th. Reye*[10]) mittels „höherer Momente" geführt hatte.

Da das mechanische Prinzip des Beweises auch auf F_4 (und F_n) ausdehnbar ist, sei jetzt näher darauf eingegangen.

Schon *O. Hesse*[11]) hatte gezeigt, daß ein starrer Körper K hinsichtlich seiner Momente M auf ∞^6 Arten durch vier Massenpunkte m_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ersetzbar ist. Der erste Punkt ist willkürlich wählbar, dann ist seine Masse m_1, und die Ebene E_1 der drei andern Punkte bestimmt. In dieser Ebene E_1 ist ein zweiter Punkt beliebig annehmbar, womit seine Masse m_2 und die Gerade g_{34} der beiden Restpunkte bestimmt ist. Wählt man endlich noch auf dieser Geraden irgendeinen beliebigen Punkt als dritten Massenpunkt, so ist alles festgelegt.

Dabei haben die vier Massen m_i dieselbe Gesamtmasse M und denselben Schwerpunkt S wie der Körper K.

Die rein geometrische Figur der vier Punkte zeigt ganz die Eigenschaften eines Poltetraeders einer F_2. In der Tat existiert nach *Hesse* ein nullteiliges Ellipsoid E mit dem Zentrum S, für das die obigen vier Massenpunkte die Ecken eines Poltetraeders sind. Für alle Tangentialebenen von E und nur für diese verschwinden die Momente M von K.

Hieran knüpft *Reye* die Frage, ob auch hinsichtlich seiner n^{ten} Momente M_n ein Massensystem K durch eine endliche Anzahl von Massenpunkten (m_i) ersetzbar sei? Hierbei ist M_n[12]) hinsichtlich einer Ebene E definiert durch das Integral $\int r^n dm$, unter r den Abstand eines Punktes P des Systems von E verstanden. Oder genauer: wenn man sich die Gleichung von E in der *Hesse*schen Normalform gegeben denkt, ist

$$(1) \qquad \mathsf{M}_n = \int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n dm.$$

Die Entwickelung nach Potenzprodukten der x, y, z liefert ein Aggregat von $\nu = \binom{n+1}{3}$ Gliedern.

Hieraus folgt, daß sich M_n für jede Ebene bestimmen läßt, wenn es für r (unabhängige) Ebenen E_r bekannt ist.

Soll M_n einen vorgegebenen Wert M haben, so umhüllen die zugehörigen E eine Fläche P_n resp. P_{2n}, je nachdem n gerade oder ungerade ist; und jede beliebige E gehört zu einer solchen Fläche (M).

10) *Th. Reye,* J. f. Math. 72 (1870), p. 293; ib. 78 (1874), p. 114, 123.

11) *O. Hesse,* Analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1869, 2. Aufl.; Vorles. 25.

12) Der Fall $n = 2$ ist eingehender verfolgt worden durch *F. Ruffini,* Bol. Mem. (4) 4 (1884), p. 123.

Unter dieser Schar von Flächen (M) ist diejenige von besonderer Bedeutung, für deren Tangentialebenen T das Moment M_n verschwindet; sie heißt die „n^{te} Nullfläche P_n“.

Hieran schließt sich die Theorie „äquivalenter“ Systeme, bei denen für jede E die M_n übereinstimmen.

Die n^{te} Nullfläche gestattet eine einfache Berechnung der M_n und $M_q (q < n)$.

Diese Entwickelungen lassen sich noch ausdehnen auf Momente M_n hinsichtlich einer Gruppe von k Ebenen.

Der Hauptsatz lautet, daß ein Massensystem hinsichtlich seiner M_n durch ν Massenpunkte ersetzbar ist, in besonderen Fällen schon durch $\binom{n}{2}$ resp. n.

Als Anwendung dienen die Fälle $n = 3$ und $n = 4$; das System ist dann (noch auf unendlich viele Weisen) durch 6 resp. 10 Massenpunkte ersetzbar.

Hierin ist bereits, wenn man zur dualistischen Figur übergeht und den algebraischen Kern herausschält, die kanonische Potenzsummendarstellung der F_3 durch ein Hexaeder und die der F_4 durch ein Dekaeder enthalten.

Die ∞^2 Hexaeder des ersteren Falles sind keine andern als die später von *L. Cremona* und *E. Beltrami* (s. Art. „F_3“, Nr. **12**, **18**) genauer untersuchten „Polarhexaeder“ der F_3, die als Spezialfall das „Pentaeder“ einschließen.

In der zweiten Abhandlung wird die algebraische Entwickelung einfacher und durchsichtiger gestaltet durch Heranziehung der Apolaritätstheorie (s. „F_3“, Nr. **12**, **19**).

Damit ergibt sich fast unmittelbar der obige Satz über die F_3, nebst verschiedenen Ergänzungen.

Das System ließ sich hinsichtlich seiner M_3 auf ∞^2 Weisen durch sechs Massenpunkte ersetzen. Durch je sechs solche ist eine C_3 bestimmt; diese ∞^2 C_3 haben fünf Grundpunkte gemein, durch die allein bereits das System ersetzbar ist.

Dualistisch gelangt man so zu den ∞^2, dem Pentaeder einbeschriebenen Klassenkurven Γ_3; diese Γ_3 sind zur F_3 apolar.

Nunmehr betrachten wir den Fall $n = 4$ mit zehn Massenpunkten. Man spalte von diesen irgendeinen ab und lege durch die neun übrigen, die durch sie bestimmte F_2.

Die Polare der F_2 muß sich auf den zehnten Punkt reduzieren, wenn die verlangte Ersetzbarkeit des Systems durch die zehn Punkte stattfinden soll.

Die weitere Untersuchung zeigt, daß von den zehn Punkten irgendeiner noch ganz willkürlich und ein zweiter auf der F_2 beliebig wählbar ist, womit die ganze Figur (einschließlich der Massen m_i) festgelegt ist.

Die kanonische Darstellung ist somit noch mit fünf willkürlichen Parametern behaftet.

Dies stimmt mit einer direkten Konstantenabzählung überein. Denn ein quaternäres Aggregat von zehn Biquadraten linearer Formen führt $4 \cdot 10 = 40$ Koeffizienten mit sich. Da andererseits die Anzahl der Koeffizienten einer F_4 35 beträgt, so ergibt die Differenz $40 - 35 = 5$ die Anzahl der Darstellungsparameter.

Es gilt somit der *Reye*sche Satz:

„Eine allgemeine F_4 ist, auf noch ∞^5 Weisen, als Aggregat von zehn, und nicht weniger, Biquadraten darstellbar:

(2) $$F_4 \equiv \sum_{i=1}^{10} c_i(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z - p_i)^4.\text{“}$$

Die Figur der zehn entsprechenden Ebenen heißt das „*Reye*sche Dekaeder“.

Die *Reye*sche Methode hat später *Ew. Bodewig*[13]) in rein algebraischer Form entwickelt und verschiedentlich ergänzt.

In besonderen Fällen kann die kanonische Darstellung der F_4 Modifikationen erfahren.

Dies tritt z. B. ein, wenn eine irreduzible kubische Klassenkurve Γ_3 existiert, die zur F_4 apolar (konjugiert) ist, so daß jede zweite Polare F_2 der F_4 apolar ist zu jeder der Γ_3 einbeschriebenen Fläche φ_2.

Wählt man die Γ_3 als Normkurve $\mathsf{N}_3 = N_3$ (s. „F_3“, Nr. **19** und Note 14)

(3) $$\begin{cases} x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1, \\ u_3 : u_2 : u_1 : u_0 = 1 : -\lambda : \lambda^2 : -\lambda^3, \end{cases}$$

so ist das algebraische Kriterium für die apolare Beziehung zwischen der N_3 und einer F_4 leicht angebbar. Die Form F_4 sei mit Polynomialkoeffizienten geschrieben, und $x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_0^{\alpha_0}$ irgendeines der auftretenden Potenzprodukte.

Dann müssen alle Produkte dieser Art mit gleicher Exponentensumme $s = \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ denselben literalen Koeffizienten a_s besitzen und umgekehrt, so daß sich deren Anzahl auf 13 reduziert.

Eine solche zur N_3 apolare F_4 trifft die Ordnungskurve N_3 in 12 Punkten, deren λ-Argumente von einer Gleichung 12. Ordnung

(4) $$f_{12}(\lambda) \equiv a_0 + 12_1 a_1 \lambda + 12_2 a_2 \lambda^2 + \cdots + a_{12}\lambda^{12} = 0$$

13) *Ew. Bodewig*, Giorn. di mat. 64 (1926), p. 81.

abhängen, wo die 12_i die zu 12 gehörigen Binomialkoeffizienten bezeichnen und die literalen Koeffizienten a_i genau mit den obigen von F_4 übereinstimmen. Umgekehrt ist bei beliebiger Wahl von (4) auch die F_4 eindeutig bestimmt.

Ist die Form f_{12} eine allgemeine ihrer Ordnung, so läßt sie sich kanonisch darstellen als Aggregat von 7 12^{ten} Potenzen auf ∞^2 Arten, als solches von 8 Potenzen auf ∞^3 Arten, als solches von 9 auf ∞^5 Arten und als solches von 10 Potenzen auf ∞^7 Arten usf.

Aus einer jeden solchen kanonischen Darstellung der $f_{12}(\lambda)$ läßt sich aber eine korrespondierende der $F_4(x)$ durch einen einfachen Polarisationsprozeß[14]) herleiten.

Sei irgendeine der kanonischen Darstellungen der $f_{12}(\lambda)$

$$f_{12}(\lambda) = \Sigma c_i(\lambda - \lambda_i)^{12}, \tag{5}$$

so bilde man die Gleichung der N_3-Ebenen Σ_i im Punkte λ_i

$$\Sigma_i = x_3 - x_2\lambda_i + x_1\lambda_i^2 - x_0\lambda_i^3 = 0. \tag{6}$$

Dann lautet die zu (5) parallel laufende kanonische Darstellung der F_4

$$F_4 \equiv \Sigma c_i \Sigma_i^4. \tag{7}$$

Andererseits kann aber auch die f_{12} von besonderer Beschaffenheit sein derart, daß sie bereits durch weniger als 7 12^{te} Potenzen darstellbar ist, wofür die invarianten Bedingungen bekannt sind.

So z. B. wenn die Kanonizante von f_{12} verschwindet, ist eine eindeutige Darstellung der f_{12} durch 6 volle Potenzen möglich, usf. So kann man heruntergehen bis zu solchen f_{12}, die Aggregate von drei 12^{te} Potenzen sind, und dementsprechend die korrespondierende F_4.

Faßt man zusammen, so ergibt sich:

„Ist die F_4 von der besonderen Art, daß eine zu ihr apolare Γ_3 existiert, die man als Normkurve $\mathsf{N}_3 = N_3$ wähle, so ist eine kanonische Darstellung der F_4 als Aggregat von Biquadraten bereits in der Weise möglich, daß 10 Potenzen mit 7 Parametern, 9 mit 5, 8 mit 3, und 7 mit einem Parameter auftreten. Die bezüglichen darstellenden Ebenen sind stets Ebenen der $\Gamma_3 = \mathsf{N}_3$.

Trifft die F_4 die N_3 in 12 Punkten, die von einer Gleichung 12. Ordnung $f_{12}(\lambda) = 0$ abhängen, so entspricht jeder kanonischen Darstellung (5) der f_{12} eine solche (6) der F_4.

Genügt aber die Form f_{12} im besondern solchen Bedingungen, daß für sie bereits eine Darstellung durch 6, 5, 4, 3 volle Potenzen existiert, so findet das Entsprechende für die zugehörige F_4 statt."

Einen allgemeinen Satz über die kanonische Darstellung einer

---

14) *W. Fr. Meyer,* Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883, Abschn. 3.

$F_{2\eta}$ gerader Ordnung im S_n, als Aggregat von $(2\eta)^{\text{ten}}$ Potenzen von Linearformen L, verdankt man *Sylvester.*[14a])

Zu dem Behuf dehnt er den von ihm früher eingeführten Begriff der invarianten Katalektikante K einer binären $f_{2\eta}$ (s. Art. I B 2, *W. Fr. Meyer*, Invariantentheorie) auf den allgemeinen Fall einer $F_{2\eta}$ in $n+1$ homogenen Variabeln aus.

Auch dann erscheint die Katalektikante K als Koeffizienterdeterminante der η^{ten} Ableitungen von $F_{2\eta}$. Die Invariante K verschwindet für ein Aggregat $(2\eta)^{\text{ter}}$ Potenzen von Formen L, solange deren Anzahl $< \binom{\eta+n}{n}$ ist.

Hieraus läßt sich folgern, daß im allgemeinen, d. h. für $K \neq 0$, eine $F_{2\eta}$ stets als Aggregat von $\binom{\eta+n}{n}$ vollen Potenzsummen von L darstellbar ist, dagegen als Aggregat von $\binom{\eta+n}{n}-1$ solcher Potenzen nur dann, wenn K verschwindet.

Im besonderen bestätigt sich so die Darstellung einer allgemeinen c_4 durch 6 Potenzen, für $K=0$ durch 5 Potenzen; in letzterem Fall liegt die *Clebsch-Lüroth*sche c_4 vor (s. Art. „F_3", Nr. 20), wo K mit der von *Clebsch* angegebenen Invariante übereinstimmt. Sodann die obige *Reye*sche Darstellung einer F_4 (im S_3) durch 10 Biquadrate, und für $K=0$ durch 9 solche. Endlich sei noch der Fall einer F_4 im S_4 erwähnt als Summe von 15 Biquadraten und für $K=0$ von 14 solchen.

Bei Heranziehung der Apolaritätstheorie erhält das *Sylvester*sche Verfahren eine einfache geometrische Bedeutung. Danach stellt das Verschwinden von K die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß eine zur $F_{2\eta}$ apolare Φ_η existiert; letztere berührt dann die durch Nullsetzen der L dargestellten $\binom{\eta+n}{n}-1$ Lineargebilde.

Zugleich erkennt man, wie der Prozeß fortsetzbar ist. Soll eine kanonische Darstellung einer $F_{2\eta}$ durch nur $\binom{\eta+n}{n}-2$ Potenzen von L möglich sein, so muß eine ∞^1-lineare Schar von zu $F_{2\eta}$ apolaren Φ_η existieren oder, algebraisch, es müssen alle ersten Minoren von K verschwinden, u. s. f.

Auf Grund einer direkten, auf dem Prinzip der Koeffizientenvergleichung beruhenden Methode bestätigt *Johnson*[14a]) verschiedene Einzelergebnisse, insbesondere über F_4 im S_3 und S_4. Hierbei werden auch Fälle von F ungerader Ordnung berücksichtigt.

14a) *J. J. Sylvester,* Paris C. R. 102 (1886), p. 1552. *A. R. Johnson*, Quart. J. 22 (1887), p. 158.

Es sei darauf hingewiesen, daß sich die kanonische Darstellung von Formen $F_{2\eta+1}$ ungerader Ordnung (abgesehen vom binären Falle) wesentlich komplizierter gestaltet. Dies zeigt sich schon im Falle der quaternären F_3 (s. Art. „F_3“, Nr. 3, 19). Bei einer allgemeinen F_3 existiert eine ∞^5-lineare Schar von zur F_3 apolarer Φ_2, und innerhalb dieser wieder eine ∞^4-lineare Schar solcher, die einem Pentaeder, eben dem *Sylvester*schen, einbeschrieben sind.

Diese ∞^4-Schar von Φ_2 zerlegt sich von selbst in ∞^2 ∞^2-Scharen, deren Individuen je einer der dem Pentaeder einbeschriebenen ∞^2 Γ_3 einbeschrieben sind; damit tritt eine Reduktion der Figur auf die ∞^2-Schar der einem Pentaeder einbeschriebenen und zur F_3 apolaren Γ_3 ein.

5. Formentheoretisches. Übertragungsprinzipien. Die projektive Invariantentheorie lehrt, wie man bei einer vorgelegten quaternären Urform F_4, oder allgemeiner, einer Reihe von Urformen der Ordnung $\leqq 4$, auf symbolischem wie unsymbolischem Wege unbegrenzt viele Komitanten, das sind Invarianten, Kovarianten, Kontravarianten, Zwischenformen usf., bilden kann und diese, wenigstens für gewisse Grade, in den Koeffizienten der Urformen in vollständigen, relativ vollständigen, assoziierten und anderen Systemen anordnen kann.

Indessen hat die Geometrie aus diesen Ansätzen bisher nur wenig Nutzen gezogen.

Wir begnügen uns daher mit der Zusammenstellung einiger Übertragungsprinzipien, die man je nach Bedarf verwenden kann (s. „F_3“, Nr. 12).

Da ist in erster Linie das klassische Übertragungsprinzip für Invarianten von *A. Clebsch*, das hier zwei Formulierungen zuläßt, je nachdem man von dem binären oder ternären Gebiete als Stammgebiet herkommt. Die F_4 sei in symbolischer Schreibart

(1) $$F_4 \equiv (ax)^4 \equiv (a'x)^4 \equiv (a''x)^4 \equiv \cdots,$$

und entsprechend die weiteren Urformen in quaternären Symbolen $b, b', b'', \ldots, c, c', c'', \ldots$ usf.

Andererseits gehe man von einem korrespondierenden Systeme von binären Urformen aus:

(2) $$f_4 \equiv (a\lambda)^4 \equiv (a'\lambda)^4 \equiv (a''\lambda)^4 \equiv \cdots \text{ usf.}$$

mit binären Symbolen $a, b, c, \ldots$ Irgendeine Invariante i dieser Urformen (2) läßt sich symbolisch darstellen als Aggregat von Produkten, deren ϱ Faktoren „Klammerfaktoren“ der Typen (aa'), $(ab), \ldots$ sind, wo die Vielfachheit des Auftretens der einzelnen Symbole einfachen Regeln unterliegt.

Ersetzt man jetzt die einzelnen Klammerfaktoren (aa'), $(ab)\ldots$ durch mit zwei Reihen von Ebenenkoordinaten u, v geränderte vierreihige Determinanten von den Typen $(aa'uv)$, $(abuv),\ldots$, so geht i über in eine quaternäre Komitante J der Urformen (1). Führt man noch die Achsenkoordinaten $\pi_{ik} = (uv)_{ik}$ der Geraden $g = (u, v)$ ein, so gilt der Satz von *Clebsch:*

„Die Gleichung $J = 0$ stellt einen Geradenkomplex K der Ordnung ϱ dar, dessen Individuen die Urflächen $F, G, \ldots$ in solchen Punktreihen treffen, daß für sie die binärinvariante Bedingung $i = 0$ erfüllt ist."

Um die Form J in den Achsenkoordinaten π_{ik} von g oder auch in den komplementären (ihnen proportionalen) Strahlenkoordinaten $p_{lm} = (xy)_{lm}$ auszudrücken, hat man nur jeden der Faktoren vom Typus $(aa'uv)$ zu entwickeln, wie folgt:

$$(3) \qquad (aa'uv) \equiv \sum (aa')_{ik}\pi_{lm} \equiv \sum (aa')_{ik} p_{ik}.$$

Einige einfachste Beispiele mögen zur Illustration dienen. Liegt nur eine einzelne Urform $F_4(1)$ vor, so liefert die Gleichung $G_2 \equiv (aa'uv)^4 = 0$ den Komplex 4. Ordnung der Geraden g, die die F_4 in äquianharmonischen Punkten treffen; $G_3 \equiv (aa'uv)^2 \cdot (a'a''uv)^2 \cdot (aa''uv)^2 = 0$ den Komplex 6. Ordnung, dessen Gerade die F_4 in vier harmonischen Punkten treffen, endlich die Diskriminantengleichung $G_2^3 - 27\,G_3^2 = 0$ den von A_m aus an die F_4 gehenden Tangentenkegel (s. auch Nr. **19**). Sind $F_4 \equiv (ax)^4 = 0$, $G_4 \equiv (bx)^4 = 0$ zwei verschiedene vorgelegte F_4, so erhält man in $(abuv)^4 = 0$ den Komplex 4. Ordnung, dessen Gerade aus den beiden Flächen konjugierte Punktquadrupel ausschneiden usf.

Andererseits sei

$$(4) \qquad c_4 \equiv (cx)^4 \equiv (c'x)^4 \equiv (c''x)^4 \equiv (c'''x)^4 \equiv \cdots$$

eine ternäre Urform 4. Ordnung. Eine Invariante J_c der C_4 ist darstellbar als Aggregat von c-Produkten, deren σ Faktoren Klammerfaktoren der Typen $(cc'c'')$, $(cc'c'''),\ldots$ sind, und analog verhält es sich, wenn eine Reihe von ternären Urformen der Ordnungen $\leqq 4$ vorliegt.

Ersetzt man jene Klammerfaktoren durch mit Variabeln u geränderte vierreihige Determinanten der Typen $(cc'c''u)$, $(cc'c'''u)$ usf., so geht J_c über in eine Kontravariante $J = J(u)$ der Urformen (1). Damit hat man den zweiten Satz von *Clebsch:* „Es liefert $J(u) = 0$ die Gleichung einer Fläche σ^{ter} Klasse $F_\sigma(u)$, deren Tangentialebenen die quaternären Urflächen (1) in solchen Kurven $C_4\ldots$ schneiden, für die die Bedingung $J_c = 0$ erfüllt ist."

Hat man z. B. drei Flächen 4. Ordnung: $F_4 = (ax)^4 = 0$, $G_4 = (bx)^4 = 0$, $H_4 = (cx)^4 = 0$, so ist $(abcu)^4 = 0$ die Gleichung einer F_4, deren Tangentialebenen aus den drei gegebenen F_4 solche C_4-Tripel ausschneiden, daß ihre trilineare Invariante verschwindet.

Dieses Übertragungsprinzip von *Clebsch* läßt sich in seiner doppelten Gestalt auf Kovarianten ausdehnen.

Es liege etwa wieder eine binäre Urform $f_4(\lambda)$ vor, so ist eine Kovariante k darstellbar als Aggregat von Produkten, deren Faktoren teils ϱ Klammerfaktoren vom Typus (aa'), teils r Linearformen vom Typus $(a\lambda)$ sind. Ersetzt man wieder wie oben die (aa') durch $(aa'uv)$ usf., dagegen die $(a\lambda)$ durch korrespondierende quaternäre Linearformen (ax) usf., so geht k über in eine Konnexform

(5) $$K = K[(uv), (x)] = K[(\pi), (x)],$$

die einmal abhängt in der Ordnung ϱ von den Achsenkoordinaten π_{ik} einer Geraden $g = (uv)$, andererseits in der Ordnung r von den Koordinaten x eines Punktes P. Das Verschwinden der Komitante K von (1) läßt sich geometrisch doppelt deuten. Entweder geht man von irgendeiner Raumgeraden $g(\pi)$ aus und denkt sich auf ihr die r Wurzeln von $K = 0$ als Punkte $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$ markiert. Dann stellt die Gleichung $K = 0$ nicht nur die Gesamtheit jener Punkt-r-tupel dar, sondern sie liefert auch ein System von Flächen F_r niedrigster Ordnung r, das jene Punkt-r-tupel aus den Raumgeraden g ausschneidet.

Ist andererseits ein Punkt $P(x)$ vorgegeben, so erhält man vermöge $K = 0$ die $r - 1$ Geraden g, die P mit den $r - 1$ übrigen Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{r-1}$ verbinden, und zugleich bei Variieren von P ein System von Komplexen niedrigster Ordnung ϱ, dessen Gerade eben jene Verbindungslinien sind.

Ähnlich verhält es sich im ternären Falle. Eine Kovariante k_c der ternären Grundformen (4) ist darstellbar als ein Aggregat von Produkten, deren Faktoren teils σ Klammerfaktoren der Typen $(cc'c''), \ldots$ sind, teils r Linearformen der Typen $(cx), \ldots$ Man ersetze die ersteren Faktoren durch solche der Typen $(cc'c''u)$, die letzteren durch quaternäre Linearformen $(ax), \ldots$ Damit geht k_c über in eine Zwischenform $K[(u), (x)]$, von der Ordnung σ in den u und von der Ordnung r in den x. Das Verschwinden von K läßt wiederum eine doppelte Deutung zu.

Eine beliebige Ebene (u) schneide die Urflächen (1) in einer Reihe von Kurven $C, \ldots$; man denke sich innerhalb der Ebene (u) die zu ihnen kovariante Kurve k_c verzeichnet. Variiert die Ebene (u), so wird die Gesamtheit der Kurven k_c durch eine Fläche $K_r = K[(x)] = 0$ niedrigster Ordnung r ausgeschnitten. Andererseits geht durch irgendeinen Punkt $P(x)$ ein Kegel von Ebenen (u), und die Gesamtheit dieser Ebenen gehört einer Fläche σ^{ter} Klasse $K_\sigma = K[(u)] = 0$ an. Diese beiden Übertragungsprinzipien erweisen sich als nützlich zur kürzesten Darstellung gewisser Raumtransformationen. So z. B., wenn man einem Punkte P stets den zu ihm bezüglich aller F eines Netzes konjugierten Punkt Q zuordnet (s. Art. „F_3“ Nr. 3). Ferner, wenn man einem Punkte P die ihm bezüglich aller F_2 eines Büschels zugehörige Polargerade p zuweist (s. Nr. 82).

Im allgemeinen ist aber das Gebilde $K = 0$ zu kompliziert, um einen direkten Nutzen zu gewähren. Man wird ihm daher näherkommen, wenn man gewisse in ihm enthaltene Teilgebilde für sich studiert. Da liegt es am nächsten, wenn man im „binären“ Falle der Geraden $g(\pi) = (uv)$ die Bedingung auferlegt, stets durch einen festen Punkt P_0 zu laufen[15]), und entsprechend im „ternären“ Falle, wenn die Ebene (u) stets eine feste Gerade g_0 enthält.

Die zugehörige Rechnung gestaltet sich im Anschluß an die obige einfach. Im binären Fall hat man nur bei der Darstellung (3) irgendeines Determinantenfaktors vom Typus $(aa'uv)$

$$(3) \qquad (aa'uv) \equiv \sum (aa')_{ik} p_{ik} \equiv \sum (aa')_{ik} (xy)_{ik}$$

den Punkt y als den festen Punkt P_0 anzusehen; man gelangt dann sofort zur Gleichung $R[(x)] = 0$ der Fläche, die erfüllt ist von den auf den durch $P_0(y)$ variierenden Geraden g aufgetragenen Punktreihen $k = 0$.

Im ternären Falle greife man ebenfalls einen Determinantenfaktor vom Typus $(cc'cu)$ heraus und betrachte die Ebene (u) zunächst als Verbindungsebene dreier Punkte $P(x)$, $Q(y)$, $R(z)$, so daß die u_i als dreireihige Determinanten $(xyz)_{klm}$ erscheinen. Damit nimmt $(cc'c''u)$ die Gestalt einer dreireihigen Determinante an:

$$(5) \qquad (cc'c''u) \equiv \begin{vmatrix} c(x), & c'(x), & c''(x) \\ c(y), & c'(y), & c''(y) \\ c(z), & c'(z), & c''(z) \end{vmatrix}.$$

Hier ordne man nach den Elementen der ersten Reihe und entwickle wiederum die drei Minoren nach den $(yz)_{ik} = p_{ik}$.

Nimmt man nunmehr die Gerade (p) als die feste Gerade g_0 und betrachtet den Punkt $P(x)$ als variabel, so liefert die Gleichung

15) *W. Franz Meyer*, Berlin Math. Ges. 28 (1929), p. 100; Giorn. di mat. 67 (1929), p. 1. Man vergleiche den Ansatz bei *H. M. Jeffery*, Brit. Ass. 18 (1878).

$K = 0$ direkt das Aggregat der endlichvielen Ebenen durch g_0, die aus den Urflächen je eine solche Reihe von Kurven C ausschneidet, zu denen die Kurve k_c in kovarianter Beziehung steht.

So einfach diese beiden Prozesse formal verlaufen, so erweisen sie sich doch zur näheren Erkenntnis der geometrischen Eigenschaften der in Rede stehenden Flächen und Ebenenaggregate als weniger geeignet. Man schlage zu dem Behuf lieber einen unsymbolischen Weg ein. Im binären Falle normiere man den festen Punkt P_0 als eine Koordinatenecke, etwa A_m, und ordne dementsprechend die Gleichungen der Urflächen (1) nach x_m wie folgt:

$$(6') \qquad F_4 \equiv a_0 x_m^4 + a_1 x_m^3 + a_2 x_m^2 + a_3 x_m + a_4 = 0 \text{ usf.},$$

wo die a_r ternäre Formen der Ordnung r in den x_i, x_k, x_l bedeuten. Irgendeine Gerade g durch A_m bestimmt sich durch ihre Spur (x_i, x_k, x_l) in der Ebene $x_m = 0$, während ein laufender Punkt P auf g durch Angabe des Wertes der nichthomogenen Variabeln (Parameters) x_m festgelegt wird.

Damit läßt sich den Gleichungen (1′) eine doppelte Deutung beilegen. Einmal stellen sie wie bisher die Urflächen selbst dar und mögen dann genauer durch $F_4(x_i, x_k, x_l, x_m) = 0$ usf. bezeichnet sein. Faßt man andererseits die Gleichungen (1) als solche in der einen Unbekannten x_m auf, was durch die Schreibweise $F_4(x_m) = 0$ usf. hervortrete, so liefern sie bei festgedachten x_i, x_k, x_l vermöge ihrer x_m-Wurzeln die Punktreihen, die auf der Geraden $g(x_i, x_k, x_l)$ durch die Urflächen (1′) ausgeschnitten werden.

Diese doppelte Auffassung übertrage man auf irgendeine binäre Kovariante k der Ordnung ν der Formen $F_4(x_m)$ usf.:

$$(6) \qquad k(x_m) = k_w x_m^\nu + k_{w+1}^\nu + \cdots + k_{w+\nu} = 0,$$

mit w als Leitgewicht. Die Gleichung $k(x_m) = 0$ liefert wiederum auf g die Reihe der ν Punkte (k), die den Wurzeln von $k(x_m) = 0$ entsprechen. Dann gilt sofort der Satz:

„Die quaternäre Gleichung $k(x_i, x_k, x_l, x_m) = 0$ ist die der Fläche K, die bei variierender Geraden g durch die Punktreihen (k) erfüllt wird.“

Die Eigenschaften dieser kovarianten Fläche K lassen sich in jedem Einzelfalle aus ihrer quaternären Gleichung ablesen.

Analog verfahre man im ternären Falle. Die feste Gerade g_0 werde als Koordinatenkante a_{lm} ($x_i = 0$, $x_k = 0$) gewählt. Entsprechend ordne man die Urformen (1′) nach Formen in den beiden nichthomogenen Variabeln x_l, x_m abnehmender Ordnung an usf. Dann gelangt man wiederum direkt zu einer übersichtlichen Darstellung des Ebenenaggregats $K = 0$.

Einige einfache Beispiele mögen zur Illustration dienen.

Es liege zunächst eine einzelne Urfläche F_4 (1) mit den Koeffizienten a vor. Man bilde die *Hesse*sche Form $h(x_m)$ der binären Form $F_4(x_m)$

(7) $$h(x_m) \equiv (a_0 a_2 - a_1^2) x_m^4 + \cdots$$

Der Ort der Wurzelpunkte von $h = 0$ auf der Geraden g durch A_m ist eine Fläche 6. Ordnung H_6, deren Gleichung mit $h = 0$ übereinstimmt. Die Fläche H_6 hat in A_m einen D_2 mit dem Tangentenkegel $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$ usf.

Weiter betrachte man die beiden Invarianten g_2 und g_3 von $F_4(x_m)$

(8) $$\begin{cases} g_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \\ g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Dann liefert $g_2 = 0$ den „äquianharmonischen" Kegel 4. Ordnung K_4 mit der Spitze A_m, dessen Kanten die F_4 in äquianharmonischen Punktquadrupeln treffen. Entsprechend bestimmt $g_3 = 0$ den „harmonischen" Kegel 6. Ordnung K_6 mit der Spitze A_m, dessen Kanten aus der F_4 vier harmonische Punkte ausschneiden.

Jetzt werde der F_4 eine zweite Fläche 4. Ordnung G_4 mit Koeffizienten b adjungiert. Wir fassen einmal die zweite Überschiebung h' von $F_4(x_m)$, $G_4(x_m)$ ins Auge:

(9) $$h' \equiv (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_m^4 + \cdots = 0.$$

Die zugehörige Fläche H_5 ist von der 5. Ordnung, die durch A_m einfach hindurchgeht, mit der Tangentialebene $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$.

Andererseits sei die Invariante c die vierte Überschiebung von $F_4(x_m)$ und $G_4(x_m)$:

(10) $$i = a_0 b_4 - 4 a_1 b_3 + 6 a_2 b_2 - 4 a_3 b_1 + a_4 b_0.$$

Die Gleichung $i = 0$ ist zugleich die des Kegels 4. Ordnung $J = 0$, dessen Kanten beide Urflächen in konjugierten Punktquadrupeln schneiden.

Sodann adjungiere man der F_4 eine F_3 mit Koeffizienten b. Man bilde die lineare Kovariante l von $F_4(x_m)$ und $F_3(x_m)$

(11) $$l \equiv x_m (a_0 b_3 - 3 a_1 b_2 + 3 a_2 b_1 - a_3 b_0) + \cdots.$$

Die zugehörige kovariante Fläche $L = L_4$ der 4. Ordnung besitzt in A_m einen D_2 mit dem Tangentenkegel

$$a_0 b_3 - 3 a_1 b_2 + 3 a_2 b_1 - a_3 b_0 = 0.$$

Weiter trete an die Stelle der F_3 eine F_2 mit Koeffizienten b. Man bilde die quadratische Kovariante q von $F_4(x_m)$ und $F_2(x_m)$

(12) $$q = x_m^2(a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots$$

Die zugehörige Fläche $Q = Q_4$ ist von der 4. Ordnung und besitzt in A_m einen D_2 mit dem Tangentenkegel

$$a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0.$$

Endlich adjungiere man der F_4 eine vorerst nicht durch A_m gehende Ebene F_1 mit der Gleichung

(13) $$F_1 = x_m \varrho_0 + \varrho_1 = 0.$$

Für die beiden Urformen $F_4(x_m), F_1(x_m)$ bilde man die erste Überschiebung k $\left(\text{oder auch die erste Polare von } F_4(x_m) \text{ in bezug auf das Argument } -\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)$

(14) $$k = \begin{vmatrix} a_0 x_m^3 + 3a_1 x_m^2 + 3a_2 x_m + a_3, & a_1 x_m^3 + 3a_2 x_m^2 + 3a_3 x_m + a_4 \\ \varrho_0, & \varrho_1 \end{vmatrix}$$
$$= x_m^3(a_0 \varrho_1 - a_1 \varrho_0) + \cdots$$

Die zugehörige Fläche $K = K_4$ ist eine Fläche der 4. Ordnung, die durch A_m einfach hindurchgeht, mit der Tangentialebene $a_0 \varrho_1 - a_1 \varrho_0 = 0$. Diese bemerkenswerte Fläche ist als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen ersten Polare F_3' der F_4 in bezug auf den festen Punkt A_m anzusehen. Diese Fläche K geht durch die Schnitte der F_4 mit der F_1, sowie mit der ersten Polare von A_m in bezug auf die F_4. Umgekehrt ist K hierdurch und durch die Forderung, A_m zu enthalten, eindeutig bestimmt.

Ersetzt man die Koordinatenecke A_m durch einen beliebigen Punkt $Y(y)$ und schreibt $F_{x^4} = F$ für F_4, $E_x = E$ für F_1, $F_{x^3 y}$ für die Polare von Y in bezug auf F, so lautet die Gleichung der Fläche K

(14a) $$K \equiv F_{x^4} E_y - F_{x^3 y} E_x = 0.$$

Faßt man hier die Ebene E als lineare Polare eines Punktes $Z(z)$ in bezug auf die Fläche F auf, so geht (14a) über in

(14b) $$K \equiv F_{x^4} F_{z^3 y} - F_{x^3 y} F_{z^3 x} = 0.$$

Hieraus liest man ab, daß K auch den Punkt Z enthält. Da aber zu einer vorgegebenen Ebene E $3^3 = 27$ Linearpole Z (in bezug auf F) gehören, so liegen auch diese 27 Punkte auf der Fläche K.

Die Fläche K geht im besonderen in die F_3' über, wenn man der Ebene F_1 (13) die Forderung auferlegt, durch A_m selbst hindurchzugehen, so daß ϱ_0 verschwindet, und die Gleichung der F_1 sich reduziert auf $\varrho_1 = 0$, und damit als Gleichung der Polare F_3' entsteht (indem sich der Faktor ϱ_1 absondert)

(14') $$F_3' \equiv a_0 x_m^3 + 3a_1 x_m^2 + 3a_2 x_m + a_3 x_m = 0.$$

Somit wäre die allgemeinere Fläche $K = K_4$ als „Polare der F_4 in bezug auf den festen Punkt A_m und die feste Ebene F_1“ zu bezeichnen.

Es sei noch bemerkt, daß sich diese Entwicklung ohne weiteres auf den Fall einer F_m im S_n ausdehnen läßt.

Zum Schlusse werde noch auf einige Figuren hingewiesen, die aus einer vorgelegten F_4 durch das Prinzip des Schneidens und Projizierens hervorgehen. Zu den Gleichungen dieser Figuren gelangt man mittels eines elementaren symbolischen Übertragungsprinzips[16]), wobei aber die Symbolik lediglich als ein Mittel zur Abkürzug der Rechnung erscheint.

Man schreibe wieder symbolisch

$$(1) \qquad F_4 \equiv (ax)^4 = 0.$$

Eine Gerade $g = (\varepsilon, \eta)$, als Schnitt zweier Ebenen ε, η gedacht, schneide die F_4 in einem Punktquadrupel (S): S_1, S_2, S_3, S_4. Es soll dies Quadrupel durch eine einzige Gleichung in Ebenenkoordinaten u dargestellt werden. Zu dem Behuf sehe man, wie schon früher, einen variabeln Punkt $P(x)$ als Schnitt dreier Ebenen (u), (v), (w) an, so daß die x_i die dreireihigen Determinanten $(uvw)_{klm}$ werden. Damit geht die symbolische Linearform (ax) über in die vierreihige Determinante $(auvw)$.

Demnach sagt die Gleichung

$$(15) \qquad (auvw)^4 = 0$$

aus, daß sich drei Ebenen (u), (v), (w) auf der F_4 treffen. Wählt man jetzt die beiden Ebenen (v), (w) als die beiden festen Ebenen (ε), (η), so nimmt (15) die besondere Gestalt an

$$(15') \qquad \sum(u) \equiv (a\varepsilon\eta u)^4 = 0.$$

Hier lassen sich wieder die Koordinaten π resp. p der festen Geraden $g = (\varepsilon, \eta)$ einführen vermöge der Umformung

$$(2) \qquad (au\varepsilon\eta) \equiv \sum (au)_{ik}\pi_{lm} \equiv \sum (au)_{ik} p_{ik}.$$

Damit stellt aber (15′) unmittelbar die gesuchte Gleichung des Punktquadrupels S dar, aufgefaßt als ausgeartete Fläche 4. Klasse $\sum \equiv \sum_4$.

Weiter denke man sich das Punktquadrupel S von irgendeinem festen Raumpunkte $Q(y)$ aus durch vier Gerade $(s) = s_1, s_2, s_3, s_4$ projiziert. Man hat dann nur das zu obigem Verfahren dualistische einzuschlagen. Die Gleichung (15′) wird dadurch die des Geradenquadrupels (s), aufgefaßt als ausgearteter Komplex 4. Ordnung.

---

16) *W. Franz Meyer*, Tôhoku Math. J. 32 (1930), p. 97.

So kann man fortfahren, indem man die Figur von neuem dem Prinzip des Projizierens und Schneidens unterwirft; die Gleichungen der so entstehenden Gebilde lassen sich stets mittels verhältnismäßig einfacher Determinantenbildungen konstruieren.

Die Gleichung (15) gestattet noch eine zweite Anwendung. Von den drei Ebenen (u), (v), (w) werde jetzt die eine $(w) = (\varepsilon)$ als eine feste angesehen, während die beiden anderen (u), (v) und damit auch ihre Schnittgerade $g = (uv) = (\varrho) = (q)$ beweglich bleiben. Demgemäß hat man die Umformung vorzunehmen

$$(2') \qquad (a\varepsilon uv) \equiv \sum (a\varepsilon)_{ik}\varrho_{lm} \equiv \sum (a\varepsilon)_{ik} q_{ik}.$$

Die feste Ebene ε schneidet die F_4 in einer Kurve 4. Ordnung c_4. Faßt man diese c_4 im Raume als speziellen Komplex 4. Ordnung auf, d. h. als Inbegriff der Raumgeraden g, die sie treffen, so ist die Gleichung der c_4 unmittelbar gegeben durch

$$(15\text{a}) \qquad c_4 \equiv (a\varepsilon uv)^4 = 0.$$

Betrachtet man wiederum in den $p_{ik} = (xy)_{ik}$ den Punkt y als einen festen Punkt Q, so liefert (15a) auch die Gleichung des von Q an die c_4 gehenden Projektionskegels. Diesen Kegel kann man von neuem schneiden, entweder mit einer festen Geraden oder aber mit einer festen Ebene; die Gleichungen der so entstehenden Gebilde lassen sich sofort hinschreiben usf.

Bezüglich der Anwendung des obigen Übertragungsprinzips auf die F_3 siehe Art. „F_3“ Nr. 12.

Mögen die Ergebnisse dieser Übertragungsprinzipien, denen noch die dualistischen an die Seite zu stellen sind, im Hinblick auf die gesamte projektive Invariantentheorie der F_4 nur bescheiden sein, so ist dem gegenüber zu bedenken, daß einmal die obigen Entwickelungen ohne prinzipielle Schwierigkeit beliebig weiter ausgebaut werden können, andererseits die algebraische Bildung selbst so grundlegender geometrischer Invarianten, wie sie in Nr. 3 als existierend nachgewiesen wurden, bisher noch nicht gelungen ist.

II. Kummers Untersuchung über F_4 mit Scharen von Kegelschnitten.

6. Einleitung. Hilfssätze. Die erste systematische Untersuchung einer ausgedehnten Gattung von F_4, nämlich solcher, auf der Scharen von C_2 liegen, verdankt man *E. E. Kummer*.[17]) Auf diese werde daher näher eingegangen.

---

17) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. Juli 1863 = J. f. Math. 64 (1865), p. 66.

Es sei vorausgeschickt, daß auf einer allgemeinen, von 34 Konstanten abhängigen F_4 keine C_2 liegt (s. Nr. 3). Liegt aber mindestens eine C_2 auf einer F_4 — wofür das Verschwinden einer gewissen Invariante J_2 notwendig und hinreichend war —, so auch noch eine zweite, von der Ebene der ersten ausgeschnittene.

Als Grundlage der Untersuchung dient bei *Kummer* der allgemeine, geometrisch[18]) evidente Hilfssatz: „Besitzt irgendein ebener Schnitt einer F_n an einer Stelle P_0 einen d_2, so ist P_0 entweder ein (eigentlicher) Berührungspunkt einer Tangentialebene T der F_n, oder aber ein D_2 der Fläche selbst.“

Um zunächst die in ein Paar von F_2 zerfallenden F_4 im folgenden auszuschließen, benutzt *Kummer* den — wie er sagt, algebraisch leicht beweisbaren — Satz:[19])

„Schneiden alle durch einen beliebig, aber fest gewählten Raumpunkt Q_0 gehenden Ebenen aus einer F_4 C_2-Paare aus, so zerfällt die F_4 in ein F_2-Paar, mit Ausnahme des Falles, wo die F_4 ein Kegel K_4 mit der Spitze Q_0 ist.“

Daraufhin lassen sich die besonderen Fälle, wo eine Ebene aus einer F_4 eine c_4 mit $\geqq 4d_2$ ausschneidet, leicht übersehen, da die c_4 dann ersichtlich zerfallen muß. Im Falle von $4d_2$ — wenn nicht drei derselben in einer Geraden g liegen — artet die c_4 in ein c_2-Paar aus. Tritt aber jener Spezialfall ein, so zerfällt die c_4 in die g und eine r_3. Im Falle von $5d_2$ zerfällt die c_4 weiter in eine c_2 und ein g-Paar; endlich im Falle $6d_2$ in vier Gerade.

Man bezeichne irgendein Individuum der gedachten, die F_4 in C_2-Paaren schneidenden Schar von Ebenen mit H; ferner mit T_i $(i = 0, 1, \ldots)$ eine die F_4 an i Stellen einfach berührende Tangentialebene (also im allgemeinsten Falle $i = 0$ mit T_0 eine beliebige, die F_4 nirgends berührende Ebene).

Damit bieten sich drei Hauptfälle (I), (II), (III) dar, je nachdem sie vom Typus T_0, T_1, T_2 sind.

18) Besitzt eine $F_n = F$ einen oder mehrere D_2 und schneidet man die F mit einer Ebene (u), deren Punkte explizite dargestellt sind durch $\varrho x_i = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu$, so ergibt sich für den ebenen Schnitt c_n eine in λ, μ, ν ternäre Gleichung $c_n \equiv c = 0$. Dann zerfällt die Diskriminante D_c der Form c in ein Produkt von Faktoren, deren erster die Klassenform $\Phi(u)$ von F ist, während das Verschwinden eines der weiteren Faktoren besagt, daß die Ebene (u) je einen der D_2 enthält. Das ist das algebraische Äquivalent für den Satz des Textes, der auch analog für den S_n (inkl. $n = 2$) gilt. Es wäre wünschenswert zu untersuchen, wie weit der Satz des Textes auch für transzendente und topologische Flächen seine Gültigkeit behält.

19) Wie weit entsprechende Sätze für Flächen höherer Ordnung bestehen, scheint noch nicht in Betracht gezogen zu sein.

Der weitere Fall, wo die H vom Typus T_3 sind, liefert nichts Bemerkenswertes; berühren aber die H die F_4 längs einer (variierenden) Geraden g, so wird die F_4 zu der abwickelbaren R-F_4 (s. Nr. **76**), dem Ort der Ebenen einer Γ_3, wo ersichtlich jede T außer der g, die dann eine Doppelgerade $\bar{g}$ wird, noch eine C_2 ausschneidet.

7. Erster Hauptfall (I): Die Ebenen H sind vom Typus T_0. Die F_4 mit einer Doppelgeraden $\bar{g}$. Die Dupinsche Zyklide. Die F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten. Jede H der Schar enthält dann 4 D_2 der F_4. Man hat wiederum vier Unterfälle zu unterscheiden, je nach der Anzahl der festbleibenden D_2.

Erster Unterfall (I_0): „*Keiner* der 4 D_2 ist für alle H derselbe." Dann schneidet jede Ebene E eine c_4 mit 4 d_2 aus, und es tritt der oben ausgeschlossene Fall $F_4 \equiv F_2 \cdot F_2'$ ein.

Zweiter Unterfall (I_1): „*Einer* der 4 D_2 ist für alle H derselbe." Die drei anderen D_2 erfüllen von selbst eine $\bar{C}_3$. Somit schneiden *alle* Ebenen H durch den festen D_2 die F_4 in C_2-Paaren, und es liegt wiederum der ausgeschlossene Typus $F_4 \equiv F_2 \cdot F_2'$ vor.

Dritter Unterfall (I_2): „*Zwei* der 4 D_2 sind fest." (F_4 mit $\bar{C}_2$ und zwei resp. vier D_2, die *Dupin*sche Zyklide.) Die beiden anderen D_2 erfüllen dann eine $\bar{C}_2$. Umgekehrt, besitzt eine F_4 eine $\bar{C}_2$ und (außerhalb dieser) noch zwei D_2 — deren Verbindungsgerade d sei —, so schneidet das Büschel von H durch d lauter C_2-Paare aus der Fläche F_4 aus.

Ein Ausnahmefall tritt nur ein, wenn d die $\bar{C}_2$ trifft (s. u.). Legt man zunächst eine F_4 mit einer $\bar{C}_2$ (ohne weitere D_2) zugrunde, so sei letztere der Schnitt einer Ebene $p = 0$ mit einer F_2: $\varphi = 0$, und $\psi = 0$ eine weitere beliebige F_2. Dann hat die Gleichung einer F_4 mit einer $\bar{C}_2$ ersichtlich die Gestalt[20])

$$\text{(I)} \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2\psi = 0.$$

Sollen nun noch zwei D_2 existieren, deren Verbindungsgerade d (die die $\bar{C}_2$ nicht treffe) der Schnitt zweier Ebenen $q = 0$, $r = 0$ sei, so nimmt (I) im besonderen die Form an

$$(\mathrm{I}_2) \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2qr = 0,$$

und umgekehrt.

Die beiden D_2 werden von d aus φ ausgeschnitten. Das H-Büschel

20) Hier kann auch, was *Kummer* nicht besonders erwähnt, der Spezialfall eintreten, daß der Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ in zwei (inzidente) Doppelgerade $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ zerfällt. Dies tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn die Ebene p die Fläche φ berührt (s. Nr. **15**). Über die Fälle, wo die — eigentliche oder auch zerfallende — $\bar{C}_2$ zu einem Kuspidalkegelschnitt wird, s. Nr. **18**.

durch d schneidet die C_2-Paare aus; insbesondere die beiden Ebenen q, r zwei sich deckende C_2: diese beiden Ebenen sind also singuläre T der F_4, die sie je längs einer C_2 berühren.

Noch spezieller kann die F_4 ein zweites Paar von D_2 besitzen, so daß dann zwei H-Büschel existieren, die C_2-Paare ausschneiden. Man kann der Gleichung einer solchen F_4 die Gestalt geben

$$(\mathrm{I}_2') \qquad F_4 \equiv (p^2 + qr - st)^2 - 4p^2qr \equiv (p^2 - qr - st)^2 - 4p^2st = 0,$$

oder auch irrational

$$(\mathrm{I}_2'') \qquad p + \sqrt{qr} + \sqrt{st} = 0.$$

Die beiden H-Büschel sind (q, r) und (s, t); die vier Ebenen q, r, s, t sind wiederum singuläre T, die die F_4 je längs einer C_2 berühren.

Die $\bar{C}_2$ ist dargestellt durch $p = 0$, $qr - st = 0$ und die beiden D_2-Paare durch $q = 0$, $r = 0$, $p^2 - st = 0$; $s = 0$, $t = 0$, $p^2 - qr = 0$. Nun gibt es aber sechs Verbindungsgeraden je zweier der D_2; indessen erkennt man leicht[21]), daß vier derselben die $\bar{C}_2$ treffen, also *auf* der F_4 liegen, so daß die beiden obigen H-Büschel die einzigen sind, die C_2-Paare ausschneiden.

Ein ausgezeichneter metrischer Repräsentant dieser Gattung von F_4 ist die *Dupin*sche Zyklide Z_0[22]) (s. Nr. 28). *Dupin* fand sie als diejenige F, deren beide Scharen von Krümmungslinien Kreise sind. Für diese Z_0 fällt die $\bar{C}_2$ in den „Kugelkreis" K; von den beiden D_2-Paaren ist höchstens eines reell. Die Gleichung der Z_0 lautet am einfachsten in irrationaler Gestalt

$$(\mathrm{I}_2''') \quad Z_0 \equiv \sqrt{(ax - ek)^2 + b^2y^2} + \sqrt{(ex - ak)^2 - b^2z^2} - b^2 = 0.$$

Dritter Unterfall (I_3): „≥ 3 der vier D_2 sind fest." (F_4 mit einer Doppelgeraden, F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten.) Dann liegen diese D_2 entweder in einer Doppelgeraden $\bar{g}$, und umgekehrt schnei-

21) Man nehme zunächst den Fall an — den *Kummer* nicht besonders erwähnt —, daß außer den zwei D_2 (die mit D und D' bezeichnet seien), deren Verbindungslinie d die $\bar{C}_2$ nicht trifft, noch ein weiterer $D_2 = D''$ (außerhalb $\bar{C}_2$) existiere. Dann schneidet die Ebene $(DD'D'')$ aus der F_4 eine c_4 mit $5d_2$ aus, die also in eine c_2 und zwei c_1 zerfallen muß. Diese beiden c_1 treffen sich ersichtlich im Punkte D''. Somit treffen die beiden Geraden (D, D'') und (D', D'') die $\bar{C}_2$, liegen also auf der F_4. Wiederholt man diese Betrachtung für einen vierten $D_2 = D'''$ — wo die Gerade (D'', D''') die $\bar{C}_2$ nicht treffe —, so hat man das Ergebnis des Textes.

22) Die Bezeichnung Z_0 ist gewählt, um die *Dupin*sche Zyklide von der allgemeinen Zyklide Z (s. Abschn. IV) zu unterscheiden.

den bei einer F_4 mit $\bar{g}$ alle H durch $\bar{g}$ C_2 aus[23]) (s. Abschn. V). Ist eine solche $\bar{g}$ der Schnitt zweier Ebenen $p = 0$, $q = 0$, so kommt der Gleichung der F_4 die Gestalt zu

$$(\mathrm{I}_3) \qquad F_4 \equiv p^2\varphi + 2pq\varphi_1 + q^2\varphi_2 = 0.$$

Oder aber es rücken einige der vier festen D_2 zusammen. Der bemerkenswerteste Fall ist hier der, wo zweimal zwei D_2 in D, D' zusammenrücken, so daß die H durch deren Verbindungslinie d, die C_2-Paare ausschneiden, sich in zwei festen Punkten (D, D') berühren, also die F_4 zwei Selbstberührungspunkte aufweist.

Die Gleichungsform einer solchen F_4 lautet (s. auch Nr. 58)

$$(\mathrm{I}_3') \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - f_4(p, q) = 0,$$

wo f_4 eine binäre Form 4. Ordnung in p, q ist. Die beiden Punkte D, D' sind die Treffpunkte der Geraden (p, q) mit φ. Den vier Wurzeln von f_4 entsprechen vier H als singuläre T, die einander deckende C_2 ausschneiden.

Man beachte, daß eine solche F_4 im allgemeinen keine $\bar{C}_2$ besitzt, sondern nur dann, wenn zwei der singulären T koinzidieren.

8. Zweiter Hauptfall (II): Die H sind vom Typus T_1. Die Steinersche Fläche S. Irgendeine H der Schar enthält drei D_2 der F_4, falls nicht der Berührungspunkt T der T_1 mit zweien der D_2 in einer Geraden g liegt, die dann der F_4 angehören muß (s. u.).

Man hat wiederum Unterfälle zu unterscheiden je nach der Anzahl der festen, in einer H liegenden D_2.

Erster Unterfall (II_1): „Die H gehen nicht alle durch einen festen D_2."

Dann erfüllen die drei anderen, mit H variierenden D_2 eine kubische Doppelkurve $\bar{C}_3$ (s. Nr. 76). Liegt aber wieder der Berührungspunkt T mit zweien der D_2 in einer g, so liegt eine R-F_4 vor (s. Abschn. XII). Es gilt also:

„Alle F_4 mit einer $\bar{C}_3$ — exkl. die R-F_4 — werden von allen T in C_2-Paaren geschnitten; im Falle der R-F_4 aber schneiden die T je eine g nebst einer r_3 aus."

Man hat folgende Sonderfälle zu unterscheiden:

($\mathrm{II}\alpha$) Die $\bar{C}_3$ ist irreduzibel;

($\mathrm{II}\beta$) die $\bar{C}_3$ zerfällt in einen Kegelschnitt $\bar{C}_2$ und eine ihn treffende

---

23) Es kann auch noch, was *Kummer* nicht erwähnt, eine zweite, zur ersten windschiefe — und ihr eventuell unendlich benachbarte — Doppelgerade existieren (s. Nr. 81). Dann gibt es zwei Büschel von H, die Scharen von C_2 aus der F_4 ausschneiden, die dann zu einer R-F_4 wird.

Gerade $\bar{g}$ nach dem Schema

$$\bar{C}_3 = \bar{C}_2 + \bar{g};$$

(IIγ) die $\bar{C}_3$ zerfällt in drei Doppelgerade $\bar{g}$, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$:

$$\bar{C}_3 = \bar{g} + \bar{g}_1 + \bar{g}_2.$$

Die beiden ersten Fälle führen wiederum zu R-F_4 (s. Abschn. XII). Der dritte Fall spaltet sich abermals in drei Unterfälle:

(IIγ_1) Alle drei $\bar{g}$ koinzidieren und bilden eine dreifache Gerade $\bar{\bar{g}}$;

(IIγ_2) Zwei der $\bar{g}$ sind windschief und werden von der dritten getroffen;

(IIγ_3) Alle drei $\bar{g}$ treffen sich in einem Punkte, der dann ein dreifacher Punkt D_3 der F_4 ist.

Die beiden ersten Fälle ergeben wiederum nur R-F_4 (s. Abschn. XII). Im dritten Falle wird die F_4 von allen ∞^2 T in C_2-Paaren getroffen; es ist das der *einzige* Fall, wo ∞^2 H existieren (s. Abschn. VII). Der Gleichung einer solchen F_4 läßt sich die Gestalt geben

$$(\mathrm{II}\gamma) \qquad F_4 \equiv Aq^2r^2 + Br^2p^2 + Cp^2q^2 + 2Dpqrs = 0.$$

Hierbei sind die drei $\bar{g}$ die Schnittlinien der drei Ebenen p, q, r.

Zweiter Unterfall (II$_2$): „Die Schar der H geht durch einen festen D_2."

Dann erfüllen die beiden veränderlichen D_2 eine $\bar{C}_2$; alle H = T durch den festen D_2 schneiden C_2-Paare aus.

Die zugehörige F_4-Gleichung ergibt sich, wenn man in (I): $\varphi^2 - 4p^2\psi = 0$, die beiden Flächen 2. Ordnung φ und ψ so wählt, daß ψ ein Kegel wird, dessen Spitze auf φ liegt, und so den festen D_2 liefert, die obigen T sind zugleich die des Kegels ψ.

NB. Man könnte auch den Kegel der Flächentangenten im D_2 als einen solchen ansehen, dessen T zugleich solche der F_4 sind. Indessen fallen deren Berührungspunkte alle in den D_2 selbst; jede der ausgeschnittenen c_4 hat daselbst eine Spitze und noch zwei weitere d_2, bleibt aber irreduzibel.

Dritter Unterfall (II$_2'$): „Die Schar H = T geht durch zwei feste D_2."

Durch jeden Raumpunkt P gehen ∞^1 H = T, die einen Kegel 6. Ordnung K_6 umhüllen, der auch die F_4 umhüllt. Rückt der Punkt P auf die F_4 selbst, so reduziert sich der K_6 auf einen K_4, und liegt endlich P speziell auf einer der drei $\bar{g}$, so reduziert sich der K_4 auf einen K_2. Diese F_4 hat *J. Steiner* — in Rom, daher auch der Name „Römische Fläche" — gefunden, aber nichts darüber veröffentlicht, sondern nur eine Konstruktion der Flächen *K. Weierstraß* mitgeteilt.

Letzterer[24]) hat daraufhin eine explizite Darstellung der Fläche gegeben, so daß die homogenen Koordinaten eines Flächenpunktes beliebige quadratische Formen in drei homogenen Parametern werden. Merkwürdigerweise meint *Kummer*, dem die Methode der Abbildung von Flächen ferner lag, daß sich aus dieser Darstellung der Fläche die wesentlichen Eigenschaften nur schwer würden ableiten lassen (s. jedoch Abschn. VII).

Noch ist zu erwähnen, daß die Verbindungsgerade der beiden D_2 auf der F_4 liegen kann; im übrigen bietet dieser Fall nichts Beachtenswertes.

9. Dritter Hauptfall (III): Die H sind vom Typus T_2. Die F_4 mit Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$. Die fünf Kummerschen Kegel. Eine solche T_2 geht noch durch zwei D_2 der F_4. Die Schar der $\mathsf{H} = \mathsf{T}_2$ kann nicht durch einen festen Punkt gehen, also sind beide D_2 veränderlich und erfüllen eine $\bar{C}_2$, und umgekehrt. Es gilt also:

„Eine F_4 mit $\bar{C}_2$ wird von allen T_2 in C_2-Paaren geschnitten.“

Die Gleichung einer solchen F_4 mit $\bar{C}_2$ war bereits unter (I) aufgestellt:

$$\text{(III)} \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2\psi = 0.$$

Diese läßt sich sofort auch in die Gestalt bringen

$$\text{(III')} \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv (\varphi + 2\lambda p^2)^2 - 4p^2(\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2) \\ &\equiv \varphi_\lambda - 4p^2\psi_\lambda = 0, \end{aligned}$$

unter λ einen Parameter verstanden, und wo φ_λ und ψ_λ zur Abkürzung dienen.

Die Flächen ψ_λ berühren die F_4 je längs einer C_4. Bestimmt man im besonderen λ so, daß ψ_λ ein Kegel K_2 wird, so umhüllt ein solcher K_2 die F_4 doppelt, so daß jede T des K_2 die F_4 in zwei verschiedenen Punkten berührt, und damit ein C_2-Paar ausschneidet. Wie man leicht erkennt, ist die fragliche Bedingung $f_5(\lambda) = 0$ für λ von der 5. Ordnung. Somit gilt:

„Es gibt im allgemeinen für eine F_4 mit $\bar{C}_2$ fünf Kegel K_2, deren T die F doppelt berühren und aus ihr C_2-Paare ausschneiden; man erhält damit die Gesamtheit der auf der F_4 gelegenen C_2.“

Das sind die fünf, später nach *Kummer* benannten Kegel.

Sonderfälle. Für eine imaginäre Wurzel von $f_5(\lambda) = 0$ wird auch die Schar der zugehörigen T imaginär. Im Falle einer Doppelwurzel treten an Stelle der zwei Scharen von T_2 zwei singuläre T der F_4,

24) *K. Weierstraß,* J. f. Math. 64 (1865), p. 77. Vgl. die synthetischen Ergänzungen von *H. Schroeter,* ib. p. 79.

die sie längs der $\bar{C}_2$ berühren, oder aber eine Schar von T_2, die durch einen festen D_2 gehen.

Hat im besonderen, wie im ersten Hauptfalle, die F_4 noch ein oder zwei Paare von D_2 — deren Verbindungsgeraden die $\bar{C}_2$ je nicht treffen — so bleiben von den fünf Scharen von T_2 nur drei resp. eine übrig; die anderen werden zu singulären T.

So hat bei der *Dupin*schen Zyklide Z_0 (I_2''') die $f_5(\lambda) = 0$ zwei Paare gleicher Wurzeln, denen die vier singulären T entsprechen; dagegen liefert die fünfte Wurzel wieder einen eigentlichen K_2, dessen T C_2-Paare ausschneiden.

Diese letzteren erweisen sich nach *H. A. Schwarz*[25]) als Kreise, so daß die Zyklide Z_0 sogar auf vier verschiedene Arten durch einen beweglichen (veränderlichen) Kreis erzeugbar ist.

Was endlich die R-F_4 anbelangt (s. Abschn. XII), so enthalten deren T_2 zwei erzeugende Gerade, schneiden also noch eine C_2 aus, die im besonderen wieder in ein g-Paar zerfallen kann.

Faßt man das Wesentliche zusammen, so führen die eigentlichen F_4 mit Scharen von C_2 — abgesehen von R-F_4 — auf folgende vier bemerkenswerte Typen:

a) F_4 mit (evtl. auch zerfallender) $\bar{C}_2$, die noch mit 1 bis 4 D_2 behaftet sein kann;
b) F_4 mit einer $\bar{g}$;
c) F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten;
d) die *Steiner*sche F_4.

III. Die F_4 mit Doppelkegelschnitt.

10. Die Abbildung der F_4 auf eine Ebene nach Clebsch. Die 16 Geraden auf der F_4. Unter den von *Kummer* aufgefundenen F_4 haben sich die mit Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ als die bedeutsamsten erwiesen Dieser Gattung von F_4 ist daher der größte Teil der Literatur gewidmet, die sich überhaupt mit F_4 beschäftigt. Es wird daher ein näheres Eingehen auf diese F_4 gerechtfertigt sein. Wenn auch der metrische Sonderfall der Zykliden (s. Abschn. IV) lange vorher bekannt war, so hat auf die allgemeinen F_4 mit einem Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$, nebst einigen ihrer Unterarten, doch erst *E. E. Kummer* (s. Nr. 8) hingewiesen, als solche F_4, auf denen gewisse Scharen von C_2 liegen.

---

25) Nach einer Mitteilung von *H. A. Schwarz* an *Kummer*. Das Ergebnis folgt übrigens unmittelbar aus der Definition der Zyklide Z_0. Denn die fraglichen Paare von C_2, die durch die T des fünften K_2 aus der F_4 ausgeschnitten werden, treffen den Doppelkegelschnitt $\bar{\mathrm{K}}$ je zweimal, sind also Kreise.

Die *Kummer*schen Ergebnisse werden im folgenden, bei Vergleichung mit anderen weitergehenden, unter neuen Gesichtspunkten wieder erscheinen.

Die erste systematische Untersuchung der F_4 mit $\bar{C}_2$ rührt von *A. Clebsch*[26]) her. Er stützt sich — im Anschluß an die von ihm früher (s. Art. „F_3", Nr. **11**) durchgeführte (1, 1)-deutige Abbildung der allgemeinen F_3 auf eine Hilfsebene A — auf eine analoge Abbildung. Unter Beschränkung auf den Fall einer F_4 mit einer reellen, irreduzibeln $\bar{C}_2$ geschieht deren Abbildung dadurch, daß den ebenen Schnitten c_4 der F_4 — die in den beiden Schnittpunkten mit der $\bar{C}_2$ zwei d_2 besitzen, also elliptisch sind — die c_3 eines Gebüsches G mit fünf Grundpunkten („Fundamentalpunkten") A_r $(r = i, k, l, m, n)$ entsprechen, und umgekehrt.

Sind also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ drei homogene Parameter, die als Punktkoordinaten in der Ebene A gedeutet werden, und $f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ vier beliebige (linear unabhängige) ternäre kubische Formen mit fünf gemeinsamen Verschwindungsstellen A, so lautet die Abbildung

$$\varrho x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f_i(\lambda). \tag{1}$$

In der Tat entspricht so der Gesamtheit der Ebenen $(ux) = 0$ und ihren Schnitten mit der F_4 ein Gebüsch G: $(uf) = 0$ von c_3 mit fünf Grundpunkten A. Da sich irgend zwei Individuen von G noch in vier variierenden Punkten treffen, so entsprechen letztere den vier Schnittpunkten der F_4 mit einer Geraden, und vice versa. Umgekehrt weist *Clebsch* nach, daß sich irgendeine F_4 obiger Art auf diese Weise abbilden läßt. Es ist nützlich, den Unterschied dieser Abbildung von der der F_3 hervorzuheben.

Bei letzterer bildeten sich die ∞^3 ebenen Schnitte ab auf das Gebüsch G' der c_3 durch sechs Grundpunkte A_t $(t = i, k, l, m, n, p)$ die umgekehrt das Gebüsch G' eindeutig bestimmen.

Hieraus ließen sich Existenz und Eigenschaften der auf der F_3 liegenden $C_1, C_2, C_3, \ldots$ nebst ihren Schnittpunkten und Konfigurationen ablesen.

Reduziert man die Figur in der Ebene A, indem man irgendeinen der sechs Fundamentalpunkte A von G', etwa A_p, wegläßt, so daß ein Gebüsch G von c_3 durch die fünf Punkte $A_i, \ldots, A_n$ übrigbleibt, so ist man in der Lage, Inzidenzsätze für C auf der F_3 in entsprechende auf der F_4 überzuführen. Andererseits beachte man,

26) *A. Clebsch*, J. f. Math. 69 (1867), p. 142, nebst einer Note, enthaltend den Beweis eines Hilfssatzes über Funktionaldeterminanten, ib. p. 355.

daß durch fünf Punkte A vorab eine ∞^4-lineare Schar von c_3 geht. Um von dieser Schar zu einem Gebüsch G zu gelangen, hat man die Koeffizienten aller in der Schar auftretenden c_3-Formen ein und derselben linearen Relation mit konstanten Koeffizienten zu unterwerfen.

Oder auch, geometrisch gesprochen, man adjungiere der Figur der fünf Punkte A eine beliebig, aber festgewählte Kurve 3. Klasse γ_3 und lege den c_3 durch die fünf A die Bedingung auf, zu dieser γ_3 apolar zu sein.

Ist irgendeine der c_3 durch die fünf A symbolisch dargestellt durch $(ax)^3 = 0$, die γ_3 durch $(\gamma u)^3 = 0$, so lautet die fragliche Bedingung $(a\gamma)^3 = 0$, d. h. die bilineare Invariante von c_3 und γ_3 verschwindet.

Vermöge dieser Apolaritätsanschauung lassen sich manche der *Clebsch*schen Überlegungen einfacher und durchsichtiger gestalten und gestatten überdies, den Ergebnissen eine gewisse Abrundung zu verleihen.

In Analogie zur Theorie der F_3 seien die zehn Verbindungsgeraden (A_r, A_s) mit c_{rs} und der Verbindungskegelschnitt der fünf Punkte A mit $B_p = B$ bezeichnet.

Hieraus folgt sofort, daß auf der F_4 genau 16 Gerade g liegen.

Den 5 Fundamentalpunkten A_r entsprechen 5 Gerade a_r so, daß irgendein Linienelement durch A_r sich eineindeutig abbildet auf ein solches der Geraden a_r.

Den 10 Geraden c_{rs} entsprechen 10 Gerade, die ebenfalls mit c_{rs} bezeichnet seien. Endlich ist das Bild des Kegelschnitts $B_p = B$ eine letzte Gerade $b_p = b$.

Diese 16 Geraden g auf der F_4 sind gleichberechtigt und werden daher von *Clebsch* durch die Ziffern $1, 2, \ldots, 16$ unterschieden. Da aber durch die Abbildung eine der Geraden, nämlich $b_p = b$, bevorzugt wird, erscheint die oben gewählte Bezeichnung zweckmäßiger. In der Tat sind die Tabellen, die *Clebsch* u. a. von den Vieren und Doppelvieren (s. u. Nr. **11**) aufstellt, wenig durchsichtig.

Das Kriterium windschiefer und inzidenter g-Paare läßt sich der Abbildung sofort entnehmen. Windschief sind g-Paare der Typen (a_i, a_k), (a_i, c_{kl}), (b, c_{ik}), (c_{ik}, c_{il}); solcher „Dupel" oder „Zweien" gibt es 80.

Inzident sind g-Paare der Typen (a_i, b), (a_i, c_{ik}), (c_{ik}, c_{lm}); solcher „Inzidenzpaare" gibt es 40.

Als Kontrolle diene, daß sich aus den $16\,g$ im ganzen $\binom{16}{2} = 120 = 80 + 40$ Paare bilden lassen.

Im einzelnen hat man von „Dupeln“ 10 des Typus (a_i, a_k), 30 vom Typus (a_i, c_{kl}), 10 vom Typus (b, c_{ik}) und 30 vom Typus (c_{ik}, c_{il}); andererseits von Inzidenzpaaren 5 vom Typus (a_i, b), 20 vom Typus (a_i, c_{ik}) und 15 vom Typus (c_{ik}, c_{lm}).

Weiter liest man den Satz ab: „Jede der 16 g wird von genau 5 der anderen getroffen.“ So trifft

$$\left\{\begin{array}{llll} a_i & \text{die} & \text{Geraden} & b,\ c_{ik},\ c_{il},\ c_{im},\ c_{in};\\ b & „ & „ & a_i,\ a_k,\ a_l,\ a_m,\ a_n;\\ c_{ik} & „ & „ & a_i,\ a_k,\ c_{lm},\ c_{ln},\ c_{mn}. \end{array}\right.$$

Umgekehrt sind dies die 16 einzigen „Quintupel“ oder „Fünfen“ windschiefer g, die also je eine gemeinsame, der F_4 angehörige Transversale besitzen. Sie seien kurz mit „5“ bezeichnet.

11. Die Vieren und Doppelvieren. Für die weitere Theorie der F_4 mit $\overline{C}_2$ sind von Bedeutung die aus den 16 g herstellbaren windschiefen „Quadrupel“ oder „Vieren“, die kurz mit „4“ bezeichnet seien. Diese zerlegen sich in zwei verschiedene Arten oder Gruppen; bei der ersten, den „4_1“, existiert stets noch eine weitere g, die sie zu einer „5“ ergänzt, bei der zweiten, der „4_2“, nicht.

Man ordne die „4“ in einer Tabelle, etwa nach der Anzahl der je auftretenden a.

In der ersten Spalte steht die Abzählnummer; in der zweiten die jeweils zu einer „5“ ergänzende g (die also bei den Typen „4_2“ fehlt); in der dritten Spalte die vier Elemente der „4“; in der vierten der Typus; in der letzten die Anzahl.

Dann hat man die Tabelle (I):

I.

1	2	3	4	5
1	a_n	$a_i\ a_k\ a_l\ a_m$	4_1	5
2	—	$a_i\ a_k\ a_l\ c_{mn}$	4_2	10
3	c_{mn}	$a_i\ a_k\ c_{lm}\ c_{ln}$	4_1	30
4a	—	$a_i\ c_{kl}\ c_{km}\ c_{kn}$	4_2	20
4b	c_{in}	$a_i\ c_{kl}\ c_{km}\ c_{kn}$	4_1	20
5a	c_{in}	$b\ c_{ik}\ c_{il}\ c_{im}$	4_1	20
5b	—	$b\ c_{ik}\ c_{il}\ c_{kl}$	4_2	10
6	a_i	$c_{ik}\ c_{il}\ c_{im}\ c_{in}$	4_1	5

Diese Vieren „4_1“ und „4_2“ lassen sich wiederum je in Paare von Doppelvieren „$\overline{4}$“ zusammenfassen. Bei der ersteren Gruppe (A_1) treten immer zwei Typen von „4_1“ zusammen, so daß jede g der einen Vier die in derselben Spalte stehende g der zweiten Vier trifft, dagegen zu deren drei anderen g windschief ist. Bei der zweiten Gruppe (A_2) treten immer zwei Typen von „4_2“ so zusammen, daß sich die obige Regel gerade umkehrt: jede g der einen Vier ist windschief zu der in derselben Spalte stehenden g der zweiten Vier, trifft aber deren drei andere g. Die Gruppe (A_1) enthält 40 Doppelvieren und weist drei Untertypen (A_1'), (A_1''), (A_1''') auf; die Gruppe (A_2) enthält 20 Doppelvieren mit zwei Untertypen (A_2'), (A_2'').

In beiden Tabellen gibt die erste Spalte den Untertypus an, die zweite das zugehörige Paar von Nummern der Tabelle (I), die dritte das Paar der Doppelvieren, die vierte die beiden je inzidenten Transversalen, endlich die fünfte die Anzahl.

Dann sind die beiden Tabellen die folgenden:

(A_1)

1	2	3	4	5
(A_1')	1	$a_i\ a_k\ a_l\ a_m$	b	5
	6	$c_{in}\ c_{kn}\ c_{ln}\ c_{mn}$	a_n	
(A_1'')	3	$a_i\ a_k\ c_{lm}\ c_{ln}$	c_{ik}	15
	3'	$c_{li}\ c_{lk}\ a_m\ a_n$	c_{mn}	
(A_1''')	4b	$a_n\ c_{lm}\ c_{km}\ c_{kl}$	a_i	20
	5a	$b\ c_{ik}\ c_{il}\ c_{im}$	c_{in}	

(A_2)

1	2	3	4	5
(A_2')	4a	$a_i\ c_{kl}\ c_{km}\ c_{kn}$	—	10
	4a'	$a_k\ c_{il}\ c_{im}\ c_{in}$	—	
(A_2'')	2	$a_i\ a_k\ a_l\ c_{mn}$	—	10
	5b	$c_{kl}\ c_{il}\ c_{ik}\ b$	—	

Die Gruppe (A_1) der „$\bar{4}_1$“ läßt sich auch dadurch charakterisieren, daß jede „4_1“ eines Paares eine der F_4 angehörige Transversale (in der vorletzten Spalte) besitzt, so daß diese beiden Transversalen ein Inzidenzpaar bilden, von denen die eine die g der einen „4_1“ trifft, die der anderen nicht. Gemäß dieser Regel sind die 40 „$\bar{4}_1$“ der Gruppe (A_1) den 40 Inzidenzpaaren von g $(1, 1)$-deutig zugeordnet.

Dagegen besitzt keine der beiden „4_2“ eines Paares der Gruppe (A_2') eine auf der F_4 gelegene Transversale.

Innerhalb der Gruppe (A_1) lassen sich wiederum zwei „$\bar{4}_1$“ derart zusammenfassen, daß sie gerade alle $16\,g$ erschöpfen; zwei solche „$\bar{4}_1$“ heißen „komplementär“ und bilden zusammen eine „Doppelacht $\bar{8}$“, so daß von letzteren fünf existieren. Zu jeder „$\bar{4}_1$“ in (A_1) gehören vier komplementäre.

Auch dies mag im einzelnen bestätigt werden. Zu irgendeiner „$\overline{4}_1$" von (A_1'), z. B.

$$\left|\begin{matrix} a_i & a_k & a_l & a_m \\ c_{in} & c_{kn} & c_{ln} & c_{mn} \end{matrix}\right|,$$

gehören vier komplementäre des Typus (A_1'''), die durch die Indizes i, k, l, m unterschieden seien:

$$(i)\left|\begin{matrix} b & c_{ik} & c_{il} & c_{im} \\ a_n & c_{im} & c_{km} & c_{kl} \end{matrix}\right|, \quad (k)\left|\begin{matrix} b & c_{ki} & c_{kl} & c_{km} \\ a_n & c_{lm} & c_{im} & c_{il} \end{matrix}\right|,$$

$$(l)\left|\begin{matrix} b & c_{li} & c_{lk} & c_{lm} \\ a_n & c_{km} & c_{im} & c_{ik} \end{matrix}\right|, \quad (m)\left|\begin{matrix} b & c_{mi} & c_{mk} & c_{ml} \\ a_n & c_{kl} & c_{il} & c_{ik} \end{matrix}\right|.$$

Desgleichen gehören zu jeder „$\overline{4}_1$" von (A_1''), z. B.

$$\left|\begin{matrix} a_i & a_k & c_{kl} & c_{km} \\ c_{ni} & c_{nk} & a_l & a_m \end{matrix}\right|,$$

vier komplementäre des Typus (A_1'''), nämlich eben die oben angegebenen. Endlich gehören zu irgendeiner „$\overline{4}_1$" von (A_1''), z. B.

$$\left|\begin{matrix} b & c_{ik} & c_{il} & c_{im} \\ a_n & c_{lm} & c_{km} & c_{nl} \end{matrix}\right|,$$

vier komplementäre derart, daß eine vom Typus (A_1') ist, die drei anderen vom Typus (A_1''):

$$(A_1')\left|\begin{matrix} a_i & a_k & a_l & a_m \\ c_{in} & c_{kn} & c_{ln} & c_{mn} \end{matrix}\right|,$$

$$(A_1'')\left|\begin{matrix} a_i & a_k & c_{lm} & c_{mn} \\ c_{in} & c_{kn} & a_l & a_m \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} a_i & a_l & c_{kn} & c_{mn} \\ c_{in} & c_{ln} & a_k & a_m \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} a_i & a_m & c_{kn} & c_{ln} \\ c_{in} & c_{mn} & a_k & a_l \end{matrix}\right|.$$

Einfacher gestaltet sich eine solche Zusammenfassung von „$\overline{4}_2$" in der Gruppe (A_2).

Zu irgendeinem Paar von (A_2'), z. B.

$$\left|\begin{matrix} a_i & c_{kl} & c_{km} & c_{kn} \\ a_k & c_{il} & c_{im} & c_{in} \end{matrix}\right|,$$

gehört als *einzige* komplementäre eine in (A_2'') enthaltene

$$\left|\begin{matrix} a_l & a_m & a_n & c_{ik} \\ c_{mn} & c_{ln} & c_{lm} & b \end{matrix}\right|,$$

und vice versa.

Man hat also im ganzen in (A_2) zehn solcher Paare von „$\overline{4}_2$".

Diese Konfigurationen der $16\,g$ nebst verwandten verfolgt weiter *J. Pereno.*[27])

27) *J. Pereno,* Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 57.

Andererseits hat *L. Berzolari*[28]) — nach vorgängiger Untersuchung der Gruppierung der 16 g, im Zusammenhange mit den fünf *Kummer*schen Kegeln (s. Nr. 9) — windschiefe Vierseite V aus den 16 g gebildet, derart, daß vier solcher V alle g erschöpfen; sie bilden dann eine „Quaterne" Q.

Solcher Q gibt es drei Arten:

1. die 16 Ebenen E der V einer Q „erster" Art Q_1 zerlegen sich in zwei Gruppen von acht, die je durch einen „*Kummer*schen Punkt" (d. i. Spitze eines *Kummer*schen Kegels) gehen;

2. die 16 E der zweiten Art, Q_2, teilen sich in drei Gruppen von resp. 8, 4, 4; wiederum gehen die E jeder Gruppe durch einen *Kummer*schen Punkt;

3. die 16 E der dritten Art, Q_3, zerlegen sich in eine Gruppe von acht durch einen *Kummer*schen Punkt, und vier Paare, deren Schnittgerade je durch einen der vier weiteren *Kummer*schen Punkte laufen.

Im ganzen gibt es 110 Q: 10 Q_1, 60 Q_2 und 40 Q_3.

Die Verbindungsebene H von zwei inzidenten g ist eine dreifache Tangentialebene T_2, deren es also 40 gibt (s. auch Nr. **10**). Aus ihnen lassen sich 708 Oktaeder herstellen, derart, daß die H eines jeden alle 16 g enthalten. Die verschiedenen Arten dieser Oktaeder werden in Beziehung gesetzt zu den fünf *Kummer*schen Punkten. Aus den 16 g werden auch noch andere Vielseite gebildet.

Hieran schließen sich zwei perspektive Erzeugungen der F_4, die beide zu einer Konstruktion der 16 g führen.

12. Die Kegelschnitte auf der F_4. Wir kehren zurück zur Abbildung der F_4 und suchen die Bilder der auf der F_4 gelegenen Kegelschnitte C_2.

Der Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ selbst bildet sich ersichtlich ab als ein ausgezeichnetes, mit c_3' bezeichnetes Individuum des Gebüsches G, derart, daß jedem Punkte P der $\bar{C}_2$ ein Punktepaar (Q_1', Q_2') auf c_3' entspricht; die Geraden (Q_1', Q_2') laufen alle durch einen ausgezeichneten Punkt Q_0' der c_3'. Weiteres s. u.

Abgesehen von der $\bar{C}_2$ gibt es noch ∞^1 C_2 auf der F_4. Da die Ebene E einer solchen C_2 noch einen zweiten Kegelschnitt C_2' ausschneidet, sind stets zwei solche C_2 als „komplementäre" (oder „koplanare") einander zugeordnet.

Der Gesamtschnitt (C_2, C_2') einer solchen Ebene E mit der F_4 läßt sich als eine zerfallende c_4 mit vier d_2 ansehen. Von diesen fallen zwei in die Schnittpunkte von E mit der $\bar{C}_2$, sind also D_2 der

28) *L. Berzolari,* Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 81.

Fläche, während die beiden anderen die Berührungspunkte einer die F_4 zweimal berührenden Tangentialebene $\mathsf{E} = \mathsf{T}_2$ sind; umgekehrt schneidet jede der ∞^1 T_2 der F_4 zwei komplementäre C_2 aus (s. auch *Kummer* in Nr. **6**). Somit gilt der Satz:

„Die ∞^1 T_2 einer F_4 mit $\overline{C}_2$, und nur diese, schneiden aus der Fläche C_2-Paare aus.“

Das Bild eines solchen C_2-Paares ist offenbar eine solche $c_3^{(i)}$ im Gebüsche G, die zerfällt in irgendeine $c_1^{(i)}$ durch je einen Fundamentalpunkt A_i, und eine, jener $c_1^{(i)}$ (1, 1)-deutig zugeordnete $c_2^{(i)}$ durch die übrigen A.

Man beachte, daß eine $c_1^{(i)}$ genau acht von den Bildkurven der 16 g der F_4 je einmal trifft, während die übrigen acht von der zugeordneten $c_2^{(i)}$ je einmal getroffen werden; das entsprechende gilt also von dem C_2-Paare auf F_4. Denn die $c_1^{(i)}$ geht durch A_i, trifft den Kegelschnitt $B_p = B$ noch in einem Restpunkte und überdies die sechs Geraden $c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{lm}, c_{ln}, c_{mn}$; dagegen geht $c_1^{(i)}$ nicht durch A_k, A_l, A_m, A_n und trifft die vier übrigen c-Geraden je nur in einem dieser A. Und gerade umgekehrt verhält es sich mit der $c_2^{(i)}$.

Vergleicht man dies mit der Gruppe (A_1) (s. Nr. **11**) der Doppelvieren „$\overline{4}_1$“, so sieht man, daß jede der beiden obigen „Achten“ gerade ein Paar komplementärer „$\overline{4}_1$“ liefern, die alle 16 g erschöpfen.

Nun war je ein Paar $(c_1^{(i)}, c_2^{(i)}) = c_3^{(i)}$ das Bild eines in zwei C_2 zerfallenden ebenen Schnittes c_4 der F_4. Die Koeffizienten aller dieser ∞^1 $c_3^{(i)}$-Formen genügen daher (s. oben) ein und derselben linearen Relation mit konstanten Koeffizienten. Seien λ, μ die Parameter der beiden Büschel (c_1) und (c_2) — der Index i werde jetzt unterdrückt —, so ist die Gleichung der $c_3 = c_3(\lambda, \mu)$ von der Gestalt

$$(2) \qquad c_3 \equiv c_3(\lambda, \mu) \equiv (c_1 + \lambda c_1')(c_2 + \mu c_2') = 0.$$

Somit sind die beiden Büschel projektiv aufeinander bezogen; man darf diese Zuordnung so normieren, daß sie die Gestalt $\lambda - \mu = 0$ erhält. Versteht man dann unter c_1, c_1', c_2, c_2' geeignete Individuen beider Büschel, so lautet die Zuordnung einfach

$$(2') \qquad c_1 + \lambda c_1' = 0, \quad c_2 + \lambda c_2' = 0.$$

Im besonderen hat man die drei zugeordneten Paare $\lambda = 0$), c_1 und c_2; $\lambda = \infty$), c_1' und c_2'; $\lambda = 1$), $c_1 + c_1'$ und $c_2 + c_2'$.

Diesen drei Paaren zerfallender c_3 in G entsprechen drei ebene Schnitte der F_4, deren Ebenen analog mit E_0, E_∞, E_1 bezeichnet seien, so daß man die Zuordnungen hat

$$c_1 c_2 \leftrightarrow \mathsf{E}_0, \quad c_1' c_2' \leftrightarrow \mathsf{E}_\infty, \quad (c_1 + c_1')(c_2 + c_2') \leftrightarrow \mathsf{E}_1.$$

Hierbei beachte man noch, daß

$$(c_1 + c_1')(c_2 + c_2') \equiv c_1 c_2 + c_1' c_2' + (c_1 c_2' + c_2 c_1').$$

Damit hat man als vierte Zuordnung für eine gewisse Ebene E'

$$c_1 c_2' + c_2 c_1' \leftrightarrow \mathsf{E}',$$

wo die vier E-Formen an die Identität geknüpft sind

$$\mathsf{E}' \equiv \mathsf{E}_1 - \mathsf{E}_0 - \mathsf{E}_\infty.$$

Multipliziert man andererseits die rechte Seite von (2) aus, so gilt

(2) $$c_3(\lambda, \mu) \equiv c_1 c_2 + \lambda(c_1 c_2' + c_2 c_1') + \lambda^2 c_1' c_2' = 0.$$

Mithin lautet die entsprechende Ebenenrelation

(2a) $$\mathsf{E}_0 + \lambda \mathsf{E}' + \lambda^2 \mathsf{E}_\infty = 0.$$

Diese ∞^1 Ebenen E umhüllen daher einen Kegel K_2 mit der expliziten Gleichung

(2a') $$K_2 \equiv 4 \mathsf{E}_0 \mathsf{E}_\infty - \mathsf{E}'^2 = 0.$$

Hinterher kann man überall den Index i wieder hinzufügen, so daß zu jedem der fünf Fundamendalpunkte A ein solcher Kegel K_2 gehört. Das sind ersichtlich die fünf *Kummer*schen Kegel K_2 (s. Nr. 9).

Weiter bemerke man, daß die beiden projektiv zugeordneten Büschel (2) von c_1 und c_2 als Ort ihrer Paare von Schnittpunkten eine c_3 erzeugen mit der Gleichung

(3) $$c_3 \equiv c_1 c_2' - c_2 c_1' = 0.$$

Diese c_3 ist das Bild einer C_4, längs deren ein Büschel von F_2 die F_4 berührt. Faßt man zusammen, so hat man den Satz:

„Innerhalb des Gebüsches G ist für jeden der fünf Fundamentalpunkte A sein Strahlbüschel (c_1) dem c_2-Büschel (c_2), mit den vier übrigen A als Grundpunkten, projektiv zugeordnet. Je zwei dadurch einander zugeordnete ‚komplementäre' Individuen c_1, c_2 sind die Bilder von zwei ‚komplementären' (‚koplanaren') auf der F_4 gelegenen C_2, und deren Ebenen umhüllen je einen der fünf *Kummer*schen Kegel K_2.

Diese ∞^1 Ebenen sind zweimal berührende Tangentialebenen T_2 der F_4, und deren ∞^1 Paare von Berührungspunkten durchlaufen eine C_4 — das Bild der aus der projektiven Zuordnung der (c_1)- und (c_2)-Büschel hervorgehenden c_3 —, längs deren ein Büschel von F_2 die F_4 berührt. Damit sind zugleich alle C_2 auf der F_4 erschöpft."

Durch das obige ist eine längere Entwicklung bei *Clebsch* wesentlich gekürzt.

Nunmehr betrachten wir genauer die schon oben erwähnte c_3' in G, das Bild des Doppelkegelschnitts $\overline{C}_2$ auf der F_4. Man führe mit

Clebsch auf der c_3' ein geeignet normiertes elliptisches Integral[29]) 1. Gattung u als Argument (oder Parameter) ein. Die fünf Grundpunkte A_i mögen die Argumente u_i erhalten, mit $\sum u_i = s$. Weiterhin mögen die Argumente ausgezeichneter Punkte der c_3' in Klammern beigefügt werden.

Man betrachte zunächst den Kegelschnitt $B_p = B$, das Bild der Geraden $b_p = b$ auf der F_4. Durch b lege man das Ebenenbüschel $\mathsf{E}(b)$. Jede Ebene E desselben trifft die $\bar{C}_2$ in zwei Punkten, von denen der eine, der Inzidenzpunkt P_b $(\bar{C}_2, b)$ von $\bar{C}_2$ und b, fest ist, während der andere, P, mit E variiert. Jeder dieser beiden Punkte ist das Bild eines Punktepaares (Q_1', Q_2') auf c_3'.

Das Bild der Schnitte von $\mathsf{E}(b)$ mit der F_4 ist im G ein c_3-Büschel; dessen Individuen zerfallen aber in den festen Kegelschnitt B und eine variable c_1. Nach dem Apolaritätsprinzip bilden diese c_1 selbst ein Büschel mit einem festen Zentrum $B_0'(u_0')$ auf c_3'.

Andererseits trifft c_3' den Kegelschnitt B in einem Restpunkt $B_0 (u_0 \equiv - s)$. Mithin ist das Bild von P_b (auf $\bar{C}_2$) das Punktepaar (B_0, B_0') auf c_3'. Folglich ist das Bild des laufenden Punktes P (auf $\bar{C}_2$) ein variierendes Punktepaar (Q_1', Q_2') auf c_3', derart, daß alle Geraden $(Q_1' Q_2') = (u, u')$ durch das feste Zentrum B_0' laufen.

Im besonderen muß, für $P = P_b$, die Gerade (B_0, B_0') aus der c_3' den Restpunkt B_0' ausschneiden, d. h. die Tangente t_0' von c_3' in B_0', geht durch B_0. Man hat also $u_0 + 2u_0' \equiv 0$. Der reelle Punkt u_0' kann daher nur eines der beiden Argumente $\frac{s}{2}$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}$ besitzen. Die Normierung von u darf dahin getroffen werden, daß u_0' den Wert $\frac{s}{2}$ erhält.

Überdies geht aus obigem hervor, daß jedes Individuum c_3 in G die c_3' in zwei Punktepaaren (Q_1', Q_2'), (Q_1'', Q_2'') trifft, so daß die Geraden (Q_1', Q_2') und (Q_1'', Q_2'') durch das Zentrum B_0' laufen.

Markiert man umgekehrt auf c_3' zwei beliebige Punkte Q_1', Q_1'', so ergänzen sich diese vermöge der Geraden $(Q_1' B_0')$, $(Q_1'' B_0')$ durch zwei Restpunkte Q_2', Q_2''. Die neun Punkte A_i, (Q_1', Q_2'), (Q_1'', Q_2'') sind die Grundpunkte eines c_3-Büschels in G, das dem Ebenenbüschel durch die beiden Bildpunkte P_1, P_2 auf $\bar{C}_2$ entspricht.

Dies dehnt sich ohne weiteres aus auf den Schnitt der F_4 mit

29) S. die systematische Untersuchung von *A. Harnack*, Math. Ann. 9 (1875), p. 1. Im Texte ist die Normierung von u so getroffen, daß das *Abel*sche Theorem für die $3k$ Schnittpunkte u_i $(i = 1, 2, \ldots, 3k)$ der c_3 mit einer c_k die Gestalt annimmt $\sum u_i \equiv 0$ (mod. ω, ω'), unter ω, ω' die reelle resp. rein imaginäre Periode von u verstanden.

Flächen beliebiger Ordnung. Als Muster diene eine F_2, die aus der $\bar{C}_2$ vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 ausschneide und aus der F_4 eine C_8. Die Bilder der vier Punkte P_i $(i = 1, \ldots, 4)$ sind vier Punktepaare (Q_i', Q_i'') auf c_3', so daß die vier Geraden (Q_i', Q_i'') durch B_0' gehen. Das Bild der C_8 ist eine $c_6 = c_6^{(5)}$ vom Geschlecht Fünf mit d_2 in den A, die die c_3' noch in den vier Punktepaaren (Q_i', Q_i'') trifft. Und umgekehrt.

Im besonderen kann die Bild-c_6 in zwei c_3 durch die A zerfallen, die im allgemeinen *nicht* in G enthalten sind; die C_8 auf der F_4 zerfällt dann in zwei C_4. Es gilt also:

„Eine nicht in G enthaltene c_3 ist das Bild einer C_4 auf F_4. Zwei solche c_3 zusammen sind das Bild eines C_4-Paares auf der F_4, das dann und nur dann von einer F_2 ausgeschnitten wird, wenn die vier Verbindungsgeraden der je vier Restpunkte der beiden c_3 auf c_3' durch B_0' gehen."

Analog verfahre man mit den zehn Geraden c_{ik} in der Bildebene nebst ihren Bildgeraden c_{ik} auf F_4.

Sei $P(c_{ik})$ der Treffpunkt von c_{ik} mit der $\bar{C}_2$, so schneidet das Ebenenbüschel (c_{ik}) aus $\bar{C}_2$ wiederum, außer dem festen Punkte $P(c_{ik})$, noch einen laufenden Punkt P aus. Die Bild-c_3 des Ebenenbüschels (c_{ik}) zerfallen jetzt in die feste Gerade c_{ik} und ein c_2-Büschel mit den Grundpunkten $A_l, A_m, A_n, C_{ik}'(u_{ik}')$.

Andererseits trifft c_{ik} die c_3' in einem festen Restpunkte $C_{ik}(u_{ik})$. Somit ist (C_{ik}, C_{ik}') das Bildpunktepaar des Punktes $P(c_{ik})$ auf $\bar{C}_2$.

Zur Bestimmung der beiden Argumente u_{ik}, u_{ik}' dienen die Relationen

$$u_i + u_k + u_{ik}' \equiv 0, \quad u_{ik} + u_{ik}' + u_0' \equiv 0,$$

wo $u_0' \equiv \frac{s}{2}$. Somit wird

$$u_{ik}' \equiv -(u_i + u_k), \quad u_{ik} \equiv u_i + u_k - \frac{s}{2}. \tag{4}$$

Da nach dem Apolaritätsprinzip die beiden Punkte C_{ik} und B_0' als bekannt anzusehen sind, so ergibt sich C_{ik}' als Schnittpunkt der Geraden (C_{ik}, B_0') mit c_{ik}.

Verfährt man ähnlich mit den fünf Fundamentalpunkten A_i selbst nebst ihren Bildern, den Geraden a_i auf der F_4, so erkennt man, daß dem Inzidenzpunkte $P(a_i)$ auf $\bar{C}_2$ dasjenige Punktepaar auf c_3' entspricht, das sich zusammensetzt aus $A_i(u_i)$ selbst und dem Restschnittpunkte $C_i'(u_i')$ der Geraden (A_i, B_0') mit c_3'. Aus $u_i + u_i' + u_0' \equiv 0$ $\left(u_0' \equiv \frac{s}{2}\right)$ ergibt sich

$$u_i' \equiv -u_i - \frac{s}{2}. \tag{5}$$

13. Die Kurven 3. Ordnung C_3 auf der F_4. Wir kommen zur Abbildung der C_3 auf F_4. Bilder solcher (irreduzibler) C_3 sind:

α) Das Netz der c_1. Eine solche allgemeine c_1 trifft die 10 Geraden c_{ik} je einmal, die $c_2 = B$ zweimal, während sie keinen der A enthält. Die entsprechenden Inzidenzen finden für die C_3 auf der F_4 statt.

β) Ein Netz von c_2 mit irgend drei der A, etwa A_i, A_k, A_l, als Grundpunkten. Eine solche c_2 sei mit $c_2^{(m,n)}$ bezeichnet. Sie geht nicht durch A_m, A_n, trifft auch die drei Geraden c_{ik}, c_{il}, c_{kl} in keinem weiteren Restpunkte; dagegen trifft die $c_2^{(m,n)}$ die Geraden c_{im}, c_{km}, c_{lm}, c_{in}, c_{kn}, c_{ln} je noch einmal, endlich die c_{mn} zweimal.

Solcher c_2-Netze gibt es $\binom{5}{2} = 10$. Das Analoge gilt wiederum auf der F_4.

γ) Ein Netz von $r_3 = r_3^{(i)}$ mit d_2 in A_i und d_1 in $A_k, \ldots, A_n$. Denn jede c_3 in G trifft eine solche $r_3^{(i)}$ noch in drei variabeln Restpunkten.

Eine $r_3^{(i)}$ trifft die Geraden c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{in} in keinem weiteren Restpunkte, ebensowenig die $c_2 = B$; dagegen trifft die $r_3^{(i)}$ die sechs Geraden c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{lm}, c_{ln}, c_{mn} je noch in einem Restpunkt.

Solcher $r_3^{(i)}$-Netze gibt es fünf, entsprechend den fünf A.

Die Zusammenfassung ergibt für die C_3 auf der F_4 den Satz:

„Entsprechend den 16 g der F_4 gibt es auf der F_4 16 ∞^2 stetige gleichberechtigte Scharen von C_3.

Innerhalb jeder Schar trifft irgendein solches Individuum C_3 eine erste der g zweimal, zehn andere einmal, die letzten fünf gar nicht."

Im übrigen gilt das in Nr. 3 für F_4 mit einer C_3 angegebene hinsichtlich einer expliziten irrationalen Punktdarstellung der Fläche.

Aber auch die gegenseitigen Inzidenzen dieser C_3 auf der F_4 lassen sich der Abbildung leicht entnehmen. Denn aus ihr folgt:

α) Eine c_1 trifft jedes Individuum der zehn c_2-Typen (β) zweimal und jedes Individuum der fünf r_3-Typen (γ) dreimal.

β) Eine $c_2^{(m,n)}$ trifft jede c_1 vom Typus (α) zweimal, sechs c_2 vom Typus (ln) zweimal, drei c_2 vom Typus (kl) dreimal, drei r_3 (γ) vom Typus $r_3^{(i)}$, $r_3^{(k)}$, $r_3^{(l)}$ zweimal, und zwei r_3 vom Typus $r_3^{(m)}$, $r_3^{(n)}$ dreimal.

γ) Eine $r_3^{(i)}$ trifft eine c_1 (α) dreimal, sechs c_2 (β) vom Typus (mn) zweimal, vier c_2 vom Typus (in) dreimal, und vier r_3 vom Typus $r_3^{(k)}$ zweimal.

Die Zusammenfassung ergibt für die C_3 auf der F_4:

„Jede C_3 irgendeiner der 16 Scharen trifft jede C_3 von zehn anderen Scharen zweimal, und jede C_3 der fünf übrigen Scharen dreimal."

Endlich das Verhalten der C_3 einer und derselben Schar zueinander regelt sich durch den Satz:

„Innerhalb einer und derselben Schar von C_3 treffen sich je zwei Individuen nur einmal.“

14. Die rationalen Kurven 4. Ordnung R_4 auf der F_4 und ihre Beziehung zu den Vieren zweiter Art. Nunmehr seien auch noch die R_4 auf unseren F_4 mit $\bar{C}_2$ in Betracht gezogen. Deren Bilder sind folgende Gebüsche der drei Typen:

a) $c_2 = c_2^{(m,n)}$, durch irgend zwei Grundpunkte A_m, A_n;

b) $r_3 = r_3^{(i;n)}$, mit d_2 in A_i, d_1 in A_k, A_l, A_m;

c) $r_4 = r_4^{(m,n)}$, mit d_2 in A_i, A_k, A_l und d_1 in A_m, A_n.

Es gibt 10 Typen (a), 20 Typen (b) und 10 Typen (c), also im ganzen 40. Somit gilt:

„Auf der F_4 mit $\bar{C}_2$ gibt es 40 gleichberechtigte ∞^3-Scharen von R_4.“

Man suche weiter die Inzidenzen dieser R_4 mit den 16 g. Aus der Abbildung liest man ab:

a) Eine R_4, als Bild einer $c_2^{(m,n)}$, trifft die 16 g nach dem Schema:

0-mal	a_i, a_k, a_l, c_{mn};
1-mal	a_m, a_n; $c_{im}, c_{km}, c_{lm}, c_{in}, c_{kn}, c_{ln}$;
2-mal	$c_{ik}, c_{il}, c_{kl}, b$.

b) Eine R_4, als Bild einer $r_2^{(i;n)}$, trifft:

0-mal	a_n; c_{ik}, c_{il}, c_{im};
1-mal	a_k, a_l, a_m; $c_{kl}, c_{km}, c_{lm}, c_{in}$; b;
2-mal	a_i; c_{kn}, c_{ln}, c_{mn}.

c) Eine R_4, als Bild einer $r_4^{(m,n)}$, trifft:

0-mal	c_{ik}, c_{il}, c_{kl}; b;
1-mal	a_m, a_n; $c_{im}, c_{in}, c_{km}, c_{kn}, c_{lm}, c_{ln}$;
2-mal	a_i, a_k, a_l; c_{mn}.

Hieraus erkennt man leicht den Zusammenhang mit den Vieren „4_2“ und Doppelvieren „$\bar{4}_2$“, s. oben Nr. **11**.

Man greife etwa eine R_4 des Typus (a) heraus. Die 16 g ordnen sich dann zu „4_2“ und „$\bar{4}_2$“ an wie folgt:

$$\begin{Bmatrix} a_i, & a_k, & a_l, & c_{mn} \\ c_{ik}, & c_{il}, & c_{kl}, & b \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} c_{im}, & c_{km}, & c_{lm}, & a_n \\ c_{in}, & c_{kn}, & c_{ln}, & a_m \end{Bmatrix},$$

Also hat man:

„Greift man aus irgendeiner der 40 ∞^3-Scharen von R_4 auf der F_4 mit $\bar{C}_2$ ein beliebiges Individuum heraus, so trifft dieses vier der

16 g gar nicht, vier andere zweimal und die acht übrigen einmal. Dann bilden die beiden ersten Quadrupel eine „$\overline{4}_2$", desgleichen die letzteren acht g die komplementäre „$\overline{4}_2$". Auf diese Weise sind die 40 Scharen von R_4 den 40 Vieren zweiter Art „4_2" eineindeutig zugeordnet."

Auch die gegenseitigen Inzidenzen der R_4 entnimmt man sofort der Abbildung. Es genügt, etwa von einer $c_2^{(m,n)}$ des Typus (a) auszugehen. Die Anzahlen der jeweiligen freien Schnittpunkte mit allen 40 c der Typen (a), (b), (c), nach Untertypen geordnet, mögen in einer Tabelle zusammengefaßt werden:

Untertypus	Anzahl der c	Anzahl der freien Schnittpunkte
$c_2^{(m,n)}$	1	2
$c_2^{(m,i)}$	6	3
$c_2^{(i,k)}$	3	4
$r_3^{(m,n)}$	2	4
$r_3^{(i,m)}$	6	5
$r_3^{(m,i)}$	6	4
$r_3^{(i,k)}$	6	4
$r_4^{(m,n)}$	1	6
$r_4^{(i,n)}$	6	5
$r_4^{(i,k)}$	3	4

Faßt man das Wesentliche zusammen, so hat man:

„Eine beliebige R_4 irgendeiner der 40 ∞^3-Scharen auf der F_3 trifft eine R_4 derselben Schar zweimal, die R_4 von sechs anderen Scharen dreimal, die von zwanzig weiteren Scharen viermal, die von zwölf weiteren fünfmal, endlich die der letzten Schar sechsmal."

15. Fall eines Knotenpunktes D_2 auf der F_4. Es werde nun auch der Fall eines $D_2 = D$ einer F_4 mit $\overline{C}_2$ (s. *Kummer*, Nr. 7) in der Abbildungsebene untersucht.

Dann müssen irgend drei der fünf Fundamentalpunkte A, etwa A_i, A_k, A_l, auf einer Geraden, die mit c_{ikl} bezeichnet sei, liegen (und umgekehrt).

Das auf die c_3' als Bild der $\overline{C}_2$ Bezügliche bleibt im wesentlichen erhalten.

Innerhalb G zerfalle eine c_3 derart, daß sich die Gerade c_{ikl} abspaltet. Dann bilden die Ergänzungskegelschnitte $c_2 = c_2^{(m,n)}$ ein Netz N mit zwei Grundpunkten A_m, A_n. Irgendeine c_3 in G trifft eine solche $c_2^{(m,n)}$ noch in vier variabeln Punkten.

Dem Netze N muß im Raume ein Ebenenbündel mit dem Zentrum D entsprechen; in der Tat schneidet ja jede Ebene durch D die F_4 in einer r_4 mit drei d_2, deren einer in D liegt, während die beiden anderen, P_1, P_2, der $\bar{C}_2$ angehören.

Die c_3' in der Bildebene schneidet die $c_2^{(m,n)}$ ebenfalls in vier weiteren Punkten. Das sind gerade die obigen; sie zerfallen in zwei Paare (Q_1', Q_2'), (Q_1'', Q_2''), so daß die Geraden (Q_1', Q_2'), (Q_1'', Q_2'') durch das Zentrum B_0' auf der c_3' laufen (s. oben Nr. 12).

Die Gerade c_{ikl} ist das Bild von D selbst.

Der Geraden c_{mn} entspricht auf der F_4 eine Gerade $c_{mn} = b$; desgleichen sind c_{im}, c_{km}, c_{lm}, c_{in}, c_{kn}, c_{ln} die Bilder der sechs gleichbezeichneten g auf F_4.

Weiter sind A_m, A_n Bilder der beiden g: a_m, a_n.

Endlich sind A_i, A_k, A_l die Bilder der drei durch D gehenden (und auf dem Tangentenkegel von D liegenden) Geraden a_i, a_k, a_l.

Wegen der weiteren Fälle des Auftretens von zwei bis vier D_2, sowie des Falles, wo die $\bar{C}_2$ in zwei inzidente Gerade zerfällt — jedoch mit Ausnahme des Falles, wo die $\bar{C}_2$ zu einem Kuspidalkegelschnitt (s. Nr. 17) wird —, sei auf die ausführliche, unter Anwendung und Weiterführung der *Clebsch*schen Methode erfolgte Behandlung von *G. Korndörfer*[30]) verwiesen.

16. Die zur Bestimmung der 16 Geraden g dienende Gleichung 5. Ordnung. Mittels nicht ganz einfacher algebraischer Rechnungen, die auf geeigneter Kombinierung der Gleichungen zweier der fünf *Kummer*schen Kegel beruhen, führt *Clebsch* die Bestimmung der 16 g, die zunächst von einer Gleichung 16. Ordnung $f_{16} = 0$ abhängen, zurück auf die einer Gleichung 5. Ordnung $f_5 = 0$. Die letztere Gleichung ist also eine Resolvente der ersteren. Diese $f_5 = 0$ erweist sich zugleich als die für die fünf *Kummer*schen Kegel.

Denkt man sich die f_5 vollständig aufgelöst, so bedarf es nur noch der Auflösung quadratischer Gleichungen, um die 16 g einzeln darstellen zu können.

Es ist aber auch von Interesse, den geometrischen und gruppentheoretischen Zusammenhang zwischen den beiden obigen Gleichungen und zwei verwandten, der $f_{28} = 0$ für die 28 Doppeltangenten t_2 einer c_4 und der $f_{27} = 0$ für die 27 g einer F_3, zu verfolgen (s. auch „F_3", Nr. 22).

30) *G. Korndörfer,* Math. Ann. 1 (1869), p. 592; 2 (1869), p. 41; 3 (1870), p. 496; 4 (1871), p. 117

Die zugehörigen gruppentheoretischen Betrachtungen hat *C. Jordan*[31]) ausgeführt; im besonderen hat im Anschlusse daran *F. Geiser*[31]) den Zusammenhang zwischen der $f_{16} = 0$ und der $f_5 = 0$ synthetisch illustriert und ergänzt.

Vermöge der *Geiser*schen Tangentenprojektion (s. „F_3", Nr. 16) der F_3 von einem ihrer Punkte P aus auf eine Ebene Π entsprang eine c_4 (vom Geschlecht $p = 3$) mit 28 t_2. Dabei waren 27 dieser t_2 den 27 g der F_3 (1, 1)-deutig zugeordnet, während sich die 28$^{\text{te}}$ t_2 als Spur der Tangentialebene der F_3 in P ergab.

Algebraisch besagt dies, daß sich die Gleichung $f_{28} = 0$ nach Adjunktion irgendeiner ihrer Wurzeln auf die Gleichung $f_{27} = 0$ reduziert, und entsprechend die Gruppe der ersteren auf die der letzteren. Die Gleichung $f_{27} = 0$ besitzt keine Resolvente geringerer Ordnung.

Geht man wiederum von irgendeiner der 27 g, $g = g_0$, der F_3 als einer bekannten aus, d. h. adjungiert man irgendeine Wurzel der $f_{27} = 0$, so spaltet sich die verbleibende Gleichung $f_{26} = 0$ rational in eine Gleichung 10. Ordnung $f_{10} = 0$ und eine 16. Ordnung $f_{16} = 0$.

Die erstere entsprach denjenigen 10 g der F_3 (genauer den 5 inzidenten g-Paaren), die g_0 treffen; die letztere den noch übrigen 16 g, die g_0 nicht treffen.

Diese Gleichung $f_{16} = 0$ ist zugleich die, von der die Bestimmung der 16 g einer F_4 mit $\bar{C}_2$ abhängt.

Die Gleichung $f_{10} = 0$ kommt, nach Auflösung von fünf gleichberechtigten quadratischen Gleichungen — die die Spaltung der 10 g in die 5 Inzidenzpaare bewirkt — zurück auf eine Gleichung 5. Ordnung $f_5' = 0$.

Denkt man sich abermals von dieser $f_5' = 0$ irgendeine Wurzel adjungiert, die einem Inzidenzpaare (g_1, g_2) korrespondiere, so hat man auf der F_3 die Figur von drei Geraden g_0, g_1, g_2, die von einer dreifachen Tangentialebene der F_3 ausgeschnitten werden.

Die vier weiteren g-Paare, die g_0 treffen, entsprechen den Wurzeln einer $f_8 = 0$, auf die sich die $f_{10} = 0$ reduziert, während die beiden g_1 und g_2 treffenden 4 g-Paare zusammen den Wurzeln der $f_{16} = 0$ zugeordnet sind.

Hieraus schließt man, daß die zur Bestimmung der 10 g_0 treffenden g dienende Gleichung $f_5' = 0$ gleichberechtigt (d. i. gruppentheoretisch gleichzusammengesetzt) ist mit der *Clebsch*schen Gleichung $f_5 = 0$ für die 16 g einer F_4 mit $\bar{C}_2$.

31) *C. Jordan*, Paris C. R. 68 (1869), p. 656; J. f. Math. 70 (1869), p. 182; Traité des substitutions, Paris 1873. — *F. Geiser*, J. f. Math. 70 (1869), p. 249. Vgl. auch *J. Pereno*, Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 57.

17. Erzeugung der F_4 durch zwei projektive F_2-Büschel. Die synthetischen Untersuchungen von Juel und Bobek. *Clebsch* gibt auch einige mit der Abbildung der F_4 mit $\overline{C}_2$ eng zusammenhängende projektive Erzeugungen der Fläche an. Merkwürdigerweise erwähnt er dabei nicht die fruchtbarste, die Erzeugung durch zwei projektiv zugeordnete F_2-Büschel.

Diese Erzeugung läßt sich an die *Clebsch*sche Abbildung anschließen. Die C_2 auf der F_4 bildeten, entsprechend den fünf *Kummer*schen Kegeln K_2, fünf ∞^1-Scharen (s. Nr. 12). Deren Bilder waren die Geraden $c_1^{(i)}$ durch A_i und die Kegelschnitte $c_2^{(i)}$ durch A_k, A_l, A_m, A_n. Zu jeder C_2 auf F_4 gehörte eine koplanare, die beiden Bilder waren zwei projektiv entsprechende Individuen der beiden Büschel $c_1^{(i)}$ und $c_2^{(i)}$.

Das Bild der $\overline{C}_2$ war eine ausgezeichnete c_3' im c_3-Gebüsch G

Eine durch die $\overline{C}_2$ gehende F_2 schnitt die F_4 in einer Restkurve C_4; deren Bild war eine (nicht in G enthaltene) c_3 durch die fünf A. Zerfällt im besonderen die C_4 in zwei C_2, so auch die Bild-c_3 in eine $c_1^{(i)}$ und $c_2^{(i)}$. Der Index i werde jetzt wieder unterdrückt.

Hält man eine der beiden C_2, die mit $C_2^{(0)}$ bezeichnet sei, fest, so liegt ein F_2-Büschel vor, das die F_4 noch in einer beweglichen C_2 schneidet.

Das Bild der $C_2^{(0)}$ sei eine $c_2^{(0)}$; dann überstreicht das Bildbüschel der C_2-Schar die ganze Ebene, wie C_2 die ganze F_4 überstreicht.

Das Verfahren werde wiederholt für ein zweites F_2-Büschel mit fester $C_2^{(1)}$ und variierender C_2'.

Es ist zu zeigen, daß die Individuen beider C_2-Scharen sich decken.

Die Bilder der Gesamtschnittkurve irgendeiner F_2 des einen oder andern Büschels sind dargestellt durch Gleichungen von der Gestalt

$$(1) \qquad c_3' c_2^{(0)}(c_1 + \lambda c_1') = 0, \quad c_3' c_2^{(1)}(c_1 + \mu c_1') = 0.$$

Für $\lambda = \mu$ und nur dann, wenn also die beiden F_2-Büschel projektiv aufeinander bezogen sind, fallen die entsprechenden Restkurven C_2, C_2' beider F_2-Büschel zusammen.

Zu demselben Ergebnis gelangt man auch direkt von der *Kummer*schen Gleichung (s. Nr. 7) der F_4 aus:

$$(2) \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4x_m^2\psi = 0.$$

Die Gleichung eines F_2-Büschels durch die $\overline{C}_2$ ($\varphi = 0$, $x_m = 0$) und eine feste $C_2^{(0)}$ lautet

$$(3) \qquad \varphi + 2x_m r + \lambda(\varphi + 2x_m r') = 0.$$

Hier ist das Paar der Ebenen von $\overline{C}_2$ und $C_2^{(0)}$ dargestellt durch

$$(4) \qquad x_m(r - r') = x_m d_r = 0,$$

wo d_r zur Abkürzung steht.

Somit hat man als einfachste Darstellung zweier solcher projektiver F_2-Büschel

$$(5)\qquad \begin{cases}(\varphi + 2x_m r) + \lambda \cdot 2x_m d_r = 0,\\ 2x_m d_s + \lambda(\varphi + 2x_m s) = 0.\end{cases}$$

Das Ergebnis ist also eine F_4 mit der Gleichung

$$(6)\qquad F_4 \equiv (\varphi + 2x_m r)(\varphi + 2x_m s) - 4x_m^2 d_r d_s = 0.$$

Diese ist noch auf die Gestalt (2) zu bringen. Man hat sofort

$$(6')\qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv \{\varphi + x_m(r+s)\}^2 - x_m^2\{(r-s)^2 - 4d_r d_s\}\\ &\equiv \varphi_m^2 - x_m^2\psi_m = 0.\end{aligned}$$

Bei vorgegebenen φ_m, ψ_m hat man geeignete Linearformen r, s, r', s' zu ermitteln, die (6′) genügen.

Zu dem Behuf beziehe man ψ_m auf ein Dreieck, von dem zwei Seiten Tangenten t_r und t_s sind und die dritte Seite die Polare p von deren Schnittpunkt, so daß die Gleichung von ψ_m in der Gestalt erscheint

$$(7)\qquad \psi_m \equiv p^2 + t_r t_s = 0.$$

Die rechte Seite soll mit $(r-s)^2 + d_r d_s$ zur Übereinstimmung gebracht werden. Die Vergleichung führt zu

$$(8)\qquad r - s = p,\quad r - r' = t_r,\quad s - s' = t_s.$$

Bei einteiliger $\overline{C}_2$, wo alle auftretenden Linearformen reell sind, sind bei beliebig angenommenem s die drei übrigen Formen r, r', s' bestimmt, was sich auch durch eine einfache Konstruktion veranschaulichen läßt.

Ist aber die $\overline{C}_2$ nullteilig, so werden r und $-s$, sowie t_r und t_s konjugiert imaginär, so daß (8) die Gestalt annimmt

$$(8')\qquad \begin{aligned} r &= \frac{p}{2} + i\alpha, & r - r' &= \sigma + i\tau,\\ -s &= \frac{p}{2} - i\alpha, & s - s' &= \sigma - i\tau,\end{aligned}$$

woraus sich nach willkürlicher Wahl von α wiederum r, s, r', s' bestimmen.

Die Erzeugung der F_4 mit $\overline{C}_2$ durch zwei projektive F_2-Büschel hat *C. Juel*[32]) direkt auf synthetischem Wege untersucht.

Die F_4 entsteht als Ort der Schnittkurven C_4 der projektiv zugeordneten Individuen zweier F_2-Büschel (α) und (β), die alle einen irreduzibeln (ein- resp. nullteiligen) Kegelschnitt ω gemein haben, der sich als der Doppelkegelschnitt $\overline{C}_2$ der F_4 erweist. Hieraus ergeben sich sofort die C_2-Scharen auf der F_4, sowie die Restschnittkurven C_4' der F_4 mit einer beliebigen, durch ω gehenden F_2.

32) *C. Juel*, Tiddskr. f. Mat. (4) 4 (1880), p. 81, 113.

Die fünf *Kummer*schen Kegel K_2 entstehen als die Enveloppen der Ebenen E solcher Restkegelschnitte, in denen sich (α) und (β) — außer in ω — schneiden. Daraufhin lassen sich die 16 Geraden auf der F_4, die doppelt berührenden Tangentialebenen T_2, sowie die Kurven 3. und 4. Ordnung auf der F_4 diskutieren. Ferner kann die F_4 von C_2-Ebenen berührt werden längs solcher C_4, die durch die vier Rückkehrpunkte (Kuspidalpunkte s. Nr. 18) auf der $\bar{C}_2$ gehen. Diese „einbeschriebenen" Flächen haben verschiedene besondere Eigenschaften. Berührt z. B. eine F_2 eine solche Fläche längs eines ganzen Kegelschnitts, so schneidet sie die F_4 in zwei C_4. Von diesen Flächen kann man auch zu den fünf *Kummer*schen Kegeln K_2 zurückgelangen.

Den Schluß bildet die Untersuchung einer Reihe von geometrischen Örtern, die zu der F_4 in enger Beziehung stehen. So gibt es fünf Systeme von F_2 durch die $\bar{C}_2$, die die F_4 in je zwei Punkten berühren. Der Ort der Pole, die der Ebene der $\bar{C}_2$ in bezug auf die F_2 eines einzelnen Systemes entsprechen, ist wiederum eine F_2. Nimmt man die Pole nur in bezug auf die Flächen durch einen gegebenen Punkt, so erhält man einen einzigen Kegelschnitt. Berühren andererseits die Flächen eine feste Ebene, so erhält man eine C_4, und dies gilt auch, wenn die Flächen eine feste Gerade berühren.

Damit gewinnt der Verfasser auch die Mittel für verschiedene Anzahlbestimmungen.

So gibt es von Kegelschnittflächen, die sich in der $\bar{C}_2$ und zwei anderen C_2 schneiden, und außerdem

1. durch zwei gegebene Punkte gehen, 10;
2. durch einen Punkt gehen und eine Gerade oder Ebene berühren, 20;
3. zwei Gerade oder Ebenen berühren, 40;
4. eine Gerade und eine Ebene berühren, 40.

Unabhängig von *Juel* hat auch *K. Bobek*[33]) die nämliche Erzeugung der F_4 mit $\bar{C}_2$ zugrunde gelegt.

Wir beschränken uns daher, anzuführen, daß er auch die Sonderfälle der F_4 mit einem bis vier D_2 berücksichtigt. Die erforderlichen Konstruktionen werden im einzelnen ausgeführt; auch wird die Beschreibung eines Fadenmodells für die 16 g hinzugefügt.

J. Cardinaal[34]) leitet aus der Erzeugung einer F_4 mit $\bar{C}_2$ durch zwei projektive F_2-Büschel B_1, B_2 die Hauptformen dieser F_4 her.

Greift man aus B_1 und B_2 je zwei beliebige Individuen heraus, so bestimmen diese ein F_2-Gebüsch G in einem ersten Raume S_3.

33) *K. Bobek*, Wien Ber. 90 (1884), p. 923, 1168.
34) *J. Cardinaal,* Amst. Versl. (3) 8 (1891), p. 88.

Sei weiter O ein fester Punkt, so bilden die Polarebenen π' in bezug auf die Individuen in G ein E'-Gebüsch G' in einem zweiten Raume S_3', das zu G in projektiver Beziehung steht. Hieraus erwächst eine Punkttransformation 2. Grades T_2 zwischen beiden Räumen S_3, S_3'. Vermöge dieser T_2 korrespondiert der F_4 mit $\bar{C}_2$ im S_3 eine Fläche 2. Ordnung F_2' im S_3', und den Kegeln innerhalb G, deren Spitzen die Kernfläche K bilden, Ebenen, die eine Fläche 2. Klasse Φ_2' berühren.

Behufs Klassifikation der F_4 mit $\bar{C}_2$ werden zunächst drei Hauptfälle unterschieden, je nachdem die (ein- resp. nullteilige) C_2 irreduzibel ist, oder aber in ein Paar (reeller resp. konjugiert imaginärer) Geraden zerfällt, oder endlich in eine doppeltzählende Gerade ausartet.

Jeder dieser drei Hauptfälle zerlegt sich wieder in acht Unterfälle. Zu dem Behuf unterscheide man hinsichtlich des Gebüsches G, ob dasselbe „allgemein" ist, d. h. keiner besonderen Bedingung genügt, oder aber, wenn die F_2 in G, außer der C_2, noch einen gemeinsamen Grundpunkt besitzen. Die Zeichen für diese beiden Fälle seien w resp. p.

Bei der Regelfläche F_2', die bei willkürlicher Gestalt und Lage durch das Zeichen w' charakterisiert sei, trenne man wieder die beiden Sonderfälle ab, wenn sie ein Kegel wird oder aber eine besondere Lage im S_3' einnimmt; die bezüglichen Zeichen seien k, b.

Man hat dann für die obigen acht Unterfälle das Schema:

Fall	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
G	w	p	w	w	p	p	w	p
F_2'	w'	w'	k	b	b	k	k, b	k, b

Jeweils werden die Lage der Flächen K_2', F_2' und die Kurven auf der erzeugten F_4 untersucht. Von den besonderen Lagen der Fläche F_2' werden 13 unterschieden, je nachdem F_2' die Fläche K berührt oder in speziellen Kurven schneidet.

Daran schließen sich noch Bemerkungen über die Fälle, wo die F_4 eine Zyklide Z ist oder aber in eine Regelfläche R-F_4 ausartet.

18. Die vier Kuspidalpunkte der F_4. F_4 mit Kuspidalkegelschnitt. Man knüpfe wieder an die *Kummer*sche Gleichung (s. Nr. 7) einer F_4 mit $\bar{C}_2$ an:

$$(1)\qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2\psi = 0,$$

deren $\bar{C}_2$ der Schnitt (φ, p) war. Man unterwerfe (1), für $p \equiv x_m$, wiederum der *Kummer*schen Umformung (s. Nr. 9)

$$(1')\qquad F_4 \equiv (\varphi + 2\mu x_m^2)^2 - 4x_m^2(\varphi\mu + x_m^2\mu^2 + \psi)$$
$$\equiv \varphi_m^2 - 4x_m^2\psi_m.$$

Diese läßt sich dazu verwenden, um φ_m zu einem Kegel zu machen.

Sei a_{mm} der Koeffizient von x_m^2, A die Determinante D_μ von φ und α_{mm} der Minor von a_{mm}. Es wird dann $D_\mu \equiv A + 2\mu\alpha_{mm}$ und verschwindet nur für $\mu = \mu_1 = -\frac{A}{2\alpha_{mm}}$; hierbei ist vorausgesetzt, daß φ weder selbst ein Kegel ist, noch die Ebene $x_m = 0$ berührt. Wählt man noch die Spitze dieses Kegels φ_1 als Koordinatenecke A_m und normiert φ_1 zu $x_i x_l - x_k^2$, so läßt (1') die ausgezeichnete Darstellung zu

$$(2) \qquad F_4 \equiv (x_i x_l - x_k^2)^2 - 4x_m^2\psi_m = 0,$$

und A_l genügt den Bedingungen (2).

Der Koeffizient von x_l^2 wird x_i^2, d. h. der D_2 in A_l wird ein uniplanarer und zugleich ist ψ ein in ein Ebenenpaar ausgearteter *Kummer*scher Kegel K_2. Ist dagegen A_l ein beliebiger, nicht der Fläche ψ angehöriger Punkt der $\overline{C}_1$, also $c_0 \neq 0$, so wird der Koeffizient von x_l^2

$$(3) \qquad x_i^2 - 4c_0 x_m^2.$$

Somit zerfällt der Tangentenkegel des D_2 in A_l in ein Paar von Tangentialebenen T, T′ der F_4, das harmonisch ist zur Ebene ($x_m = 0$) der $\overline{C}_2$ und der Tangentialebene $x_i = 0$ (in A_l) des über $\overline{C}_2$ stehenden Kegels mit der Spitze A_m. Dieser Tangentialkegel (T, T′) des D_2 in A_l wird dann und nur dann ein uniplanarer, wenn c_0 verschwindet; die beiden Ebenen T, T′ fallen dann zusammen und zwar in die Ebene $x_i = 0$, und man ist zum Spezialfalle (1′) zurückgelangt.

Endlich beachte man noch, das jede Ebene durch einen uniplanaren D_2 der $\overline{C}_2$ die F_4 in einer c_4 mit Spitze in D_2 schneidet, und umgekehrt.

Daher heißt ein solcher uniplanarer D^2 der $\overline{C}_2$ ein „*Kuspidalpunkt*“ (oder „Rückkehrpunkt“) der F_4. Somit gilt der Satz:

„Eine F_4 mit $\overline{C}_2$ besitzt vier Kuspidalpunkte, die Schnittpunkte der $\overline{C}_2$ mit der Fläche ψ.“

Man frage jetzt nach der Bedeutung der vier Schnittpunkte der $\overline{C}_2$ mit φ, für die also zugleich

$$(4) \qquad \varphi = 0, \quad p = 0, \quad \psi = 0.$$

Ordnet man noch ψ nach x_l, so nimmt damit (1) die Gestalt an

$$(1') \qquad F_4 \equiv (x_i x_l - x_k^2)^2 - 4x_m^2(c_0 x_l^2 + c_1 x_l + c_2) = 0.$$

Überdies werde jetzt die Ecke A_l (auf c_2) so gewählt, daß sie auch auf ψ liegt. Dann verschwindet die Konstante c_0 — und vice versa — und (1′) reduziert sich auf

$$(1'') \qquad F_4 \equiv (x_i x_l - x_k^2)^2 - 4x_m^2(c_1 x_l + c_2) = 0.$$

Nunmehr entnimmt man auch der Gleichung (1) die Beziehung der fünf *Kummer*-Kegel K_2 zu den vier Kuspidalpunkten.

Nach *Kummer* ließ sich (1) umformen wie folgt:

(1a) $$F_4 \equiv (\varphi + 2\lambda p^2)^2 - 4p^2(\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2)$$
$$\equiv \varphi_\lambda^2 - 4p^2\psi_\lambda = 0.$$

Für fünf Werte von λ artete ψ_λ in einen *Kummer*-K_2 aus. Diese fünf K_2 gehören also dem Netze N (φ, p^2, ψ) an.

Die acht Grundpunkte von N rücken viermal zu je zweien auf $\bar{C}_2$ in die vier Kuspidalpunkte. Mithin hat man:

„Die fünf *Kummer*schen Kegel K_3 gehen alle durch die vier Kuspidalpunkte und berühren sich in ihnen."

Man untersuche jetzt den singulären Fall, wo *jeder* Punkt des $\bar{C}_2$ zu einem Kuspidalpunkt wird und damit die $\bar{C}_2$ zu einem „*Kuspidalkegelschnitte*" der F_4.

Zu dem Behuf wähle man wieder $x_m = 0$ als Ebene p, während die beiden Formen φ und ψ beliebig seien. Dann schreibt sich (1) explizite

(5) $$F_4 \equiv \varphi^2 - 4x_m^2\psi$$
$$\equiv (a_0x_m^2 + a_1x_m + a_2)^2 - 4x_m^2(b_0x_m^2 + b_1x_m + b_2),$$

wo a_2 und c_2 als irreduzibel vorausgesetzt sind.

Im allgemeinen waren die vier Kuspidalpunkte die Schnittpunkte von $\bar{C}_2$ mit ψ', also außerhalb der Ebene $x_m = 0$ die gemeinsamen Lösungen von

(6) $$a_2 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Dann sind ∞^1 gemeinsame Lösungen von (6), wenn etwa a_2 als gegeben betrachtet wird, dann und nur dann möglich, wenn entweder c_2 identisch verschwindet, oder aber c_2 mit a_2 übereinstimmt. In ersterem Falle erhält ψ den Faktor x_m, so daß (5) die spezifische Gestalt annimmt

(7) $$F_4 \equiv \varphi^2 - 4x_m^3 q \equiv \varphi^2 - 4x_m^3(q_0x_m + q_1).$$

Umgekehrt ist für jede F_4 vom Typus (7) ihre $\bar{C}_2$ ein Kuspidalkegelschnitt.

In letzerem Falle müßte sein

(8) $$c_2 \equiv a_2.$$

Es fragt sich, ob auch jetzt die Form F_4 (5) auf die Gestalt (7) gebracht werden kann. Zu dem Behuf verfahre man vorerst umgekehrt; man versuche (7) so umzuformen, daß c_2 nicht mehr identisch verschwindet, wohl aber gemäß (8) mit a_2 übereinstimmt. Zu dem Behuf schreibe man an Stelle von (7)

(7') $$F_4 \equiv (\varphi + 2x_m^2)^2 - 4x_m^2(\varphi + x_m^2 + q_0x_m + q_1) \equiv \varphi_m^2 - 4x_m^2\psi_m.$$

Hier ergibt die explizite Entwicklung von ψ_m nach x_m

(9) $$\psi_m \equiv x_m^2(a_0 + 1 + q_0) + x_m(a_1 + q_1) + a_2.$$

Da a_2 auch in φ_m das freie Glied ist, so ist damit zunächst die Bedingung (8) erfüllt. Weiter müßte sein

(10) $$b_0 \equiv a_0 + 1 + q_0, \quad b_1 \equiv a_1 + q_1,$$

oder auch umgekehrt

(10') $$q_0 \equiv b_0 - a_0 - 1, \quad q_1 \equiv b_1 - a_1.$$

Geht man jetzt wieder rückwärts, nimmt für q_0 und q_1 die Werte (10'), so ist man in der Tat von (5) aus, mit der Bedingung (8), zu der gewünschten Darstellung (7) gelangt; man hat nur noch φ durch $\varphi_m \equiv (a_0 + 2)x_m^2 + a_1 x_m + a_2$ zu ersetzen.

Vereinigt man beide Ergebnisse, so gilt der Satz:

„Die Gleichung einer F_4 mit Kuspidalkegelschnitt läßt sich stets auf die Gestalt bringen

(I) $$F_4 \equiv \varphi^2 - 4x_m^3 q = 0,$$

und umgekehrt stellt (I) stets eine solche F_4 dar."

Auf dem Kuspidalkegelschnitt $\varphi = 0$, $x_m = 0$ existieren zwei ausgezeichnete Punkte, für die auch $q = 0$, also innerhalb $x_m = 0$ die Schnittpunkte von $a_2 = 0$ mit $q_1 = 0$. Bedient man sich wieder der *Kummer*schen Umformung

(11) $$F_4 \equiv (\varphi + 2\lambda x_m^2)^2 - 4x_m^2(\varphi\lambda + \lambda^2 x_m^2 + x_m q),$$
$$\equiv \varphi_\lambda^2 - 3x_m^2\psi_\lambda,$$

so gelangt man, wie im allgemeinen Falle, zu den fünf *Kummer*schen Kegeln K_2. Diese gehören dem F_2-Netze $N(\varphi, x_m^2, x_m q)$ an, dessen acht Grundpunkte zu je vier innerhalb $x_m = 0$ in jene beiden Punkte $a_2 = 0$, $q_1 = 0$ zusammenrücken. Zugleich ist ersichtlich, daß alle C_2 der F_4 den Kuspidalkegelschnitt a_2 in den beiden Punkten treffen und in ihnen je eine feste Ebene berühren.

Überdies folgt aus der Darstellung (I) der F_4, daß die Tangentenebenen T der F_4 in den ∞^1 Kuspidalpunkten der $\bar{C}_2$ alle durch einen festen Punkt gehen. Dieser Punkt ist die Spitze des ausgezeichneten Kegels φ_1, und obige T sind zugleich die Tagentenebenen dieses Kegels.

Umgekehrt hat daraufhin *C. Crone*[35]) die F_4 mit Kuspidalkegelschnitt $\bar{C}_2$ durch Bewegung einer veränderlichen C_2 erzeugt, die zwei feste Ebenen in zwei festen Punkten berührt; sie läßt sich also vermöge einer geeigneten Kollineation in eine Rotationsfläche überführen. Es werden im besonderen Umrisse und Realitätseigenschaften solcher

35) *C. Crone*, Dissert. Kjöbenhavn 1881.

F_4 verfolgt. Variiert man die Stellung der erzeugenden C_2, so lassen sich die F_4 in drei Arten unterscheiden:

1. die $\bar{C}_2$ ist einteilig und trifft eine gewisse Ebene E_0 in zwei reellen Punkten;

2. ditto, aber die beiden letzteren Punkte sind nicht reell;

3. die $\bar{C}_2$ ist nullteilig.

Die Ebene E_0 ist eine, die F_4 längs einer erzeugenden C_2 berührende. Die Gattungen 2. und 3. lassen sich auf die erste zurückführen vermöge einer speziellen, nicht reellen Transformation, bei der aber reelle C_2 einander entsprechen.

Um die Verschiedenheiten in den Gestalten der F_4 besser zu übersehen, ist eine Reihe von Zeichnungen der c_4 mit zwei Spitzen beigegeben, die durch die Schnitte der F_4 mit Ebenen entstehen.

Sodann werden die Haupttangentenflächen untersucht; durch jeden Punkt gehen vier solche, von denen zwei reell sind. Insbesondere wird die Realität gewisser Haupttangentenflächen, die in Kegel ausgeartet sind, studiert.

Es folgt die Betrachtung des Umrisses c_6 der F_4, von irgendeinem Punkte aus gesehen. Die c_6 ist zugleich eine γ_6 mit acht Spitzen und acht Wendetangenten, und ist mit sich selbst kollinear mit dem charakteristischen Doppelverhältnis -1. Für jede solche c_6 liegen die vier Geraden durch das Kollineationszentrum, die je zwei Spitzen enthalten, äquianharmonisch.

Im besonderen wird das Projektionszentrum in der Ebene $\bar{C}_2$ gewählt, wobei sich schon alle Formen der c_6 ergeben. Diese hat null bis drei Zweige; höchstens vier Spitzen und vier Wendetangenten sind reell.

Endlich werden noch die C_2 betrachtet, in denen eine Tangentialebene eines *Kummer*schen Kegels die F_4 schneidet; in dem Berührungspunkte der Ebene haben die C_2 eine Berührung 2. Ordnung. Es schließt sich wieder die Realitätsuntersuchung an.

Eine Ergänzung zu dieser Arbeit von *Crone* bildet die von *J. Béla.*[36]) Wie oben, wird zunächst von der *Kummer*schen Gleichung einer F_4 mit $\bar{C}_2$ ausgegangen: $\varphi^2 - 4p^2\psi = 0$, mit $p = 0$, $\varphi = 0$ als $\bar{C}_2$, wo die vier Schnittpunkte der $\bar{C}_2$ mit ψ die Kuspidalpunkte sind. Liegt aber der Kegelschnitt (φ, p) auf ψ, so daß man $\psi \equiv \varphi + \mu p v$ setzen kann, so tritt der Fall des Kuspidalkegelschnittes $\bar{C}_2$ ein.

Setzt man zur Abkürzung

$$U \equiv (\varphi - 2p)^2,\ q \equiv -4(\mu v + p),$$

36) *O. Béla,* Math. Ann. 19 (1881), p. 291.

so nimmt die Gleichung der F_4 die Doppelgestalt an

$$(\mathrm{I}') \qquad F_4 \equiv U^2 + p^3 q = 0,$$
$$\equiv (U + \lambda p^2)^2 - p^2(\lambda^2 p^2 + 2\lambda U - pq).$$

Hieraus lassen sich noch andere Gleichungsformen der F_4 nebst Erzeugungsweisen ableiten. Die Tangentialebenen längs der $\bar{C}_2$ gehen durch einen festen Punkt und umhüllen einen Kegel K_2.

Es folgt die Untersuchung der ebenen Schnitte der F_4, sowie der umschriebenen Kegel, weiter der ebenen c_1, c_2, c_3, die auf der F_4 liegen. Die *Hesse*sche Fläche der F_4 zerfällt in die $F_2 = U$ und eine gewisse zweite $F_2 = H$. Ferner werden C_3 und C_4 auf der F_4 studiert. Jeder der 8 g der Fläche ist eine ∞^2-Schar von C_3 zugeordnet, als Schnitte der F_4 mit F_2, die noch die $\bar{C}_2$ und die betreffende g enthalten. Die C_4 auf der F_4 bilden eine ∞^3-Schar; es sind die Schnitte der F_4 mit F_3 durch $\bar{C}_2$. Andererseits gehören der F_4 noch 12 ∞^1-Scharen von R_4 an.

Historisch sei bemerkt, daß auf das Vorkommen eines Kuspidalkegelschnitts einer F_4 zuerst *A. Cayley*[37]) hingewiesen hat. Bald darauf entwickelte *L. Cremona*[38]) eine allgemeine Methode zur Abbildung von F mit einer Kuspidalkurve, ohne indessen ein Beispiel hierfür anzugeben. Erst etwas später[39]) gelangte er zu zwei solchen, eben der F_4 mit einer kuspidalen $\bar{C}_2$, und einer F_5 mit einer kuspidalen $\bar{C}_4$. Beide Flächen werden aus der F_3 mittels einer gewissen quadratischen *Cremona*transformation abgeleitet.

Über die Behandlung der F_4 mit Kuspidalkegelschnitt vom S_4 aus durch *C. Segre* s. Nr. 20.

19. Die Zeuthensche Tangentenprojektion der F_4 von einem Punkte des Doppelkegelschnitts aus. Die Projektion der F_4 von der Spitze eines Kummerschen Kegels aus. Erzeugung der F_4. *F. Geiser* (s. Art. „F_3" Nr. 16) hatte an eine F_3 von einem ihrer Punkte aus den Kegel K_4 der Tangenten gelegt, und ihn mit einer Projektionsebene Π geschnitten. Die Spur war eine allgemeine c_4 (vom Geschlecht drei). Damit war eine fruchtbare Methode gewonnen, um die Geometrie auf der F_3 auf Grund der bekannten Eigenschaften der c_4, insbesondere von deren Doppeltangenten t_2, zu studieren.

Daraufhin hatte *H. G. Zeuthen* seine voraufgehenden Untersuchungen über die verschiedenen Gestalten der c_4 in Beziehung gesetzt zu den

37) *A. Cayley*, Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 181.

38) *L. Cremona*, Ist. Lomb. R. 1871, p. 140, 159; Gött. Nachr. 1871, p. 29.

39) *L. Cremona*, Math. Ann. 4 (1871), p. 213; Bologna Mem. (3) 2 (1872), p. 117.

Gestalten der F_3 und konnte so eine übersichtliche Klassifikation der letzteren liefern.

Auf die F_4 mit $\overline{C}_2$ hat *Zeuthen*[40]) die *Geiser*sche Methode in zwei umfangreichen Arbeiten übertragen, und hat dadurch die Mittel gewonnen, nicht nur die Ergebnisse von *Clebsch*, (s. Nr. **10**) über die Geometrie *auf* der Fläche auf synthetischem Wege wieder zu gewinnen, sondern auch, wesentlich weitergreifend, in die Raumverhältnisse außerhalb der Fläche Einsicht zu erhalten. Insbesondere werden Form und Zusammenhang solcher F_4, sowie die Realität ihrer 16 Geraden g und ihrer fünf *Kummer*schen Kegel K_2 diskutiert.

Sei P irgendein Punkt der zunächst als einteilig vorausgesetzten $\overline{C}_2$, so lege man von P aus die ∞^1 Tangenten t an die F_4. Diese t bilden — wie bei der F_3 — einen allgemeinen Kegel K_4 der Ordnung 4 und vom Geschlecht 3. Schneidet man den K_4 mit irgendeiner festen Projektionsebene Π, so wird der Schnitt — oder auch der scheinbare Umriß der F_4 von P aus — eine allgemeine c_4. Hieraus werden in der ersten Abhandlung, in der die Grundlagen entwickelt werden, verschiedene allgemeine Eigenschaften der F_4, ihrer 16 g und 5 K_2 abgeleitet.

Die Tangentialebenen T der K_2 schneiden nach *Kummer* (s. Nr. **9**) die F_4 in zwei C_2; deren Projektionen sind 10 der durch *Clebsch* bekannten 63 Systeme von viermal berührenden c_2 der c_4. Da solche c_2 auch weiterhin eine wesentliche Rolle spielen, seien sie kurz mit $c_2^{(4)}$ bezeichnet.

Daneben wird eine zweite Art von Berührungsprojektion der F_4 mit Vorteil verwendet, indem das Projektionszentrum in die Spitze eines der 5 K_2 verlegt wird. Der Umriß der F_4 zerfällt dann in die doppelt zählende Spur des K_2 und, als „eigentliche" Projektion, eine (elliptische) c_4 mit 2 d_2. Hieraus geht eine einfache Konstruktion der F_4 hervor, die zugleich eine Abbildung der F_4 auf eine Doppel-F_2 liefert.

Weiter werden die von *Zeuthen* und *C. Crone* früher (s. Art. „F_3" Nr. **16**) gewonnenen Ergebnisse über die verschiedenen Figuren der (allgemeinen) c_4 und ihrer $c_2^{(4)}$-Systeme, speziell der Doppeltangenten t_2,

---

40) *H. G. Zeuthen*, Festschr. Kjöbenhavn 1879. [Eine italienische Übersetzung von *G. Loria* befindet sich in Ann. di mat. (2) 14 (1887), p. 31.] Den scheinbaren Umriß einer F_4 von einem D_2 aus (sowie verwandter Flächen) als „Übergangskurve", unter Heranziehung der Zweiteilung der hyperelliptischen Funktionen, untersucht *A. Clebsch*, Math. Ann. 3 (1870), p. 45. Die Tangentenprojektion einer F_4 tritt übrigens schon bei *E. Kummer* (s. Nr. 8) auf, in besonderer Anwendung auf die *Steiner*sche Fläche S (s. auch Abschn. VII).

herangezogen und für die Gestalten der F_4 und ihrer Realitätsverhältnisse verwertet.

Bei einteiliger $\overline{C}_2$ läßt sich auf diesem Wege in jedem Einzelfalle die Anzahl der reellen g und die der reellen K_2 bestimmen. Man gelangt so zu einer Einteilung der F_4 in 6 Gattungen, die im einzelnen untersucht werden. Auch die jeweils auftretenden reellen C_2 auf der F_4 sowie ihre imaginären g werden verfolgt.

Am Schluß erfolgt, unter Benutzung des Kontinuitätsprinzips, die Übertragung der Ergebnisse auf den Fall einer nullteiligen $\overline{C}_2$.

Diese Grundzüge wurden in der zweiten Abhandlung weiter entwickelt. Der Verfasser macht es sich geradezu zum Programm, auf Grund der obigen Projektionsmethode, die Verhältnisse auf der F_4 direkt aus den verschiedenen Systemen von $c_2^{(4)}$ der c_4 und ihren gegenseitigen Beziehungen abzuleiten. Dabei wird von dem Kontinuitätsprinzip — dessen Verwendung, da es sich nur um algebraische Gleichungen und deren geometrische Deutung handelt, durchaus zulässig ist — durchgehends Gebrauch gemacht. Auf diese Weise lassen sich projektive Eigenschaften, die zunächst nur für bestimmte Realitätsverhältnisse entwickelt waren, auf den allgemeinen Fall ausdehnen.

Die von einem Punkte P der $\overline{C}_2$ an die F_4 gehenden Tangenten t bildeten einen allgemeinen Kegel K_4, der von einer festen Ebene Π in einer c_4 geschnitten wurde. Die Projektion c irgendeiner Kurve C auf der F_4 berührt die c_4 in den mit C_2 gemeinsamen Punkten. Umgekehrt lassen sich zu einer vorgegebenen c_4 in Π in noch mannigfaltiger Art zugehörige F_4 mit $\overline{C}_2$ herstellen.

Die beiden Tangentialebenen T, T' der F_4 in P schneiden aus Π zwei Doppeltangenten t_2 der c_4 aus; die 26 übrigen t_2 rühren von den F_4 zweimal berührenden und durch P gehenden Ebenen T_2 her. Von diesen 26 T_2 schneiden 10 die F_4 in C_2-Paaren und liefern so 10 weitere t_2; endlich die 16 übrigen T_2 enthalten je eine der 16 g — und außerdem noch eine r_3 — und führen zu den 16 übrigen t_2 der c_4. Bei einteiliger $\overline{C}_2$ und reellen T, T' der F_4 in P treten die eben angegebenen Eigenschaften fast ohne weiteres in Evidenz. Dabei empfiehlt es sich, „sichtbare" und „unsichtbare" Punkte der F_4 zu unterscheiden.

Mittels Bestimmung gewisser charakteristischer Anzahlen gelingt es, ein einfaches arithmetisches Kriterium aufzustellen, das zu entscheiden gestattet, ob zwei gegebene Punkte der F_4 entweder zugleich sichtbar resp. unsichtbar sind, oder aber der eine sichtbar, der andere unsichtbar

Läßt man hinterher den Projektionspunkt P auf der $\overline{C}_2$ variieren, so ergeben sich einzelne C_2-Scharen auf der F_4, die in Scharen von

$c_2^{(4)}$ projiziert werden. Je zwei dieser Scharen sind „konjugiert“ (oder „komplementär“), indem sie die Enveloppe ihrer Ebenen gemein haben. Dabei bestimmt ein Punkt in Π genau zwei $c_2^{(4)}$ einer bestimmten Schar. Entsprechend geht durch irgendeinen Punkt der F_4 eine C_2 irgendeiner Schar und eine andere der konjugierten Schar. Die Ebenen solcher C_2-Paare umhüllen daher Kegel K_2, deren Anzahl fünf ist, da von jedem P der $\bar{C}_2$ zehn T ausgehen. Diese fünf K_2 sind daher die *Kummer*schen K_2, deren Kanten die F_4 doppelt berühren.

Von den C_2 eines Systems werden von P aus sechs in Paare von Doppeltangenten t_2 der c_4 derselben Schar projiziert. Zwei dieser sechs Paare enthalten zusammen die vier t_2, die von den beiden T der F_4 in P und den beiden an den betreffenden K_2 gehenden T in Π ausgeschnitten werden. Die übrigen vier Paare rühren von g-Paaren der F_4 her, die den K_2 berühren. Dasselbe gilt für das konjugierte System und seine Projektion. Die Anordnung der 16 g ist dieselbe wie die von 16 g einer F_3, die eine siebzehnte nicht treffen (s. Art. „F_3“, Nr. 16).

Weiter schneiden die T in P und die Paare der T an die fünf K_2 die sechs t_2-Paare einer Schar aus. Da je zwei von ihnen ihre acht Berührungspunkte auf einer $c_2^{(4)}$ haben, so folgt für die F_4:

„Die vier Haupttangenten in P, und die vier Berührungspunkte der beiden T_2 durch P, die denselben K_2 berühren, liegen auf einem Kegel 2. Ordnung.“

Aus dem bekannten Satze, daß die sechs d_2 der t_2-Paare einer Schar auf einer c_2 liegen, folgt für die F_4:

„Der Kegel, von dem fünf Kanten einen Punkt P der $\bar{C}_2$ mit den Spitzen der *Kummer*schen K_2 verbinden, enthält auch die Tangente der $\bar{C}_2$ in P.“

Für die Geometrie auf der F_4 ist von Bedeutung, daß jede c in Π, die die c_4 überall berührt, als Projektion von zwei verschiedenen C der F_4 angesehen werden kann. Von solchen C werden insbesondere die C_3 untersucht. Die durch P gehenden C_3-Systeme projizieren sich in Systeme von $c_2^{(4)}$; solcher ∞^1-Systeme gibt es 32; variiert P auf der $\bar{C}_2$, so entstehen 16 ∞^2-Scharen. Da ferner der von P ausgehende Projektionskegel die $\bar{C}_2$ in den vier Kuspidalpunkten der F_4 trifft (s. Nr. 18), so folgt, daß die fünf K_2 diese Punkte enthalten.

Neben die bisherige Projektion von P aus stellt sich eine andere, von der Spitze T eines der fünf K_2 aus. Sieht man von dem doppeltzählenden K_2 ab, so ist der Tangentenkegel ein (elliptischer) K_4, der von Π in einer c_4 mit zwei d_2 geschnitten wird. Deren acht t_2 sind die Spuren der von T aus an die vier anderen K_2 gehenden T.

Nunmehr wendet sich *Zeuthen* zur Klassifikation der F_4, die reelle Punkte P auf ihrer $\bar{C}_2$ haben. Letztere zerlegt sich in zwei Gebiete: Das eine „eigentliche" mit reellen T in ihren P, das andere „isolierte" mit imaginären T. Beide Gebiete grenzen in den Kuspidalpunkten aneinander.

Andererseits hatte *Zeuthen* früher für die c_4 sechs Arten ermittelt; je nachdem der Projektionspunkt P dem einen oder anderen Gebiete angehört, hat man es mit verschiedenen Arten von c_4 zu tun. Sodann werden die verschiedenen Realitätsmöglichkeiten diskutiert.

Wieviel reelle Systeme von $c_2^{(4)}$ für die sechs c_4 Arten sich ergeben, und wieviel reelle und imaginäre t_2-Paare in jedem Systeme, entnimmt man einer von *C. Crone*[41]) angegebenen Tabelle. So ergeben sich sechs Arten von F_4; für jede wird die Zahl der reellen g (16, 8, 4, 0) und die der reellen K_2, sowie die Stellung des isolierten Gebietes der $\bar{C}_2$ gegen dieselben bestimmt. Zuletzt wird noch eine einfache Erzeugung der F_4, nach dem Muster einer von „*Darboux*" für die Zykliden Z (s. Abschn. IV) angegebenen, aufgestellt.

Man lege durch einen festen Punkt T eine variierende Gerade g, die zwei feste F_2, die mit σ_2 und δ_2 bezeichnet seien, in Punktepaaren (S, S') und (D, D') trifft. Sodann bestimme man die beiden Punktepaare (M_1, M_2) und (M_1', M_2'), die (D, D') und (T, S) resp. (T, S') harmonisch trennen. Diese beiden Paare (M_1, M_2) und (M_1', M_2') erfüllen eine F_4, deren $\bar{C}_2$ die Berührkurve des von T an die σ_2 gehenden Berührkegels ist, während der von δ_2 ein K_2 der F_4 wird. In dem Sonderfalle, wo σ_2 eine Kugel mit dem Zentrum T ist, entsteht eine Zyklide.

Die Schnittkurve C_4 (σ_2, δ_2) trennt die Punkte von σ_2, denen reelle Punktepaare der F_4 entsprechen, von den anderen. Berücksichtigt man die verschiedenen Gestalten der C_4, so gewinnt man ein zweites Einteilungsprinzip für die F_4, das auch die Fälle mit nullteiliger $\bar{C}_2$ umfaßt.

Nunmehr mögen wieder einige analytische Ergänzungen hinzugefügt werden. Um die Eigenart der *Zeuthen*schen Tangenten-Projektion besser zu erkennen, empfiehlt es sich, vorab einige Vorstufen in Betracht zu ziehen. Punktkoordinaten seien x_i, x_k, x_l, x_m, und die Gleichung einer beliebigen F_4, nach x_m entwickelt, mit bzw. ohne Binomialkoeffizienten geschrieben

$$(1) \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv a_0 x_m^4 + 4a_1 x_m^3 + 6a_2 x_m^2 + 4a_3 x_m + a_4 \\ &\equiv b_0 x_m^4 + b_1 x_{2m}^3 + b_2 x_m^2 + b_3 x_m + b_4 = 0, \end{aligned}$$

41) *C. Crone*, Tiddskr. f. Mat. (3) 5 (1875), p. 161.

wo zunächst $a_0 = b_0 \neq 0$ sei, also die Koordinatenecke A_m nicht der F_4 angehöre.

Von A_m aus werde der Tangentenkegel K an die F_4 gelegt und mit der Projektionsebene $x_m = 0$ geschnitten. Die Gleichung von K ergibt sich sofort durch Nullsetzen der Diskriminante D der als in x_m biquadratischen, binären Form aufgefaßten Form $F_4(x_m)$ (s. Nr. 5). Man kennt die invariante Darstellung von D. Sind g_2 und g_3 die beiden Invarianten von $F_4(x_m)$

$$(2) \qquad g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \quad g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

so wird D

$$(3) \qquad D \equiv g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Damit erhält man als Gleichung des Kegels K und zugleich seiner Spur in der Ebene $x_m = 0$

$$(4) \qquad K \equiv D = 0.$$

Da jedes Glied in D (3) vom Gewichte 12 bez. der a ist, stellt (4) einen Kegel 12. Ordnung K_{12} dar. Die Struktur der Projektion c_{12} läßt sich aus der rechten Seite von (3) ablesen.

Beim nächsten Schritt nehme man an, A_m sei ein einfacher Punkt der F_4, so daß $a_0 \equiv 0$ (aber nicht $a_1 \equiv 0$). Dann treten für g_2 und g_3 die Reduktionen ein

$$(2_1) \qquad g_2 \equiv 3a_2^2 - 4a_1 a_3, \quad -g_3 = a_1^2 a_4 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^3.$$

Jetzt fällt in D (3) auch das mit der ersten Potenz von a_1 als Faktor behaftete Glied $a_1 a_2^4 a_3$ heraus, so daß aus D der Faktor a_1^2 heraustritt, während der zweite Faktor mit D' bezeichnet sei:

$$(3_1) \qquad D \equiv a_1^2 D'.$$

Mithin spaltet sich vom ursprünglichen Kegel K_{12} die Tangentenebene T ($a_1 = 0$) in A_m doppeltzählend ab, und der K_{12} reduziert sich auf einen K_{10}

$$(4') \qquad K_{10} \equiv D' = 0.$$

Hier läßt sich D' einfacher darstellen. Die Form $F_4(x_m)$ in (1) reduziert sich wegen $a_0 = b_0 = 0$ auf die in x_m kubische binäre Form

$$(1') \qquad F_4 \equiv x_m^3 b_1 + x_m^2 b_2 + x_m b_3 + b_4.$$

Dann muß D' mit der Diskriminante dieser kubischen Form übereinstimmen, und man erhält als Gleichung des Kegels K_{10}

$$(4a') \qquad K_{10} \equiv D' \equiv 4(3b_1 b_3 - b_2^2)(3b_2 b_4 - b_3^2) - (9b_1 b_4 - b_2 b_3)^2$$
$$= c_4 c_6 - c_5^2 = 0$$

Die Struktur der rechten Seite sagt aus, daß die Kurve c_4 die Projektionskurve c_{10} 20mal berührt, die Kurve c_6 30mal, so daß die $20 + 30 = 50$ Berührungspunkte von der Kurve c_5 ausgeschnitten werden.

Im nächsten Falle sei A_m ein einzelner Knotenpunkt D_2 der Fläche F_4. Dann verschwindet (außer $a_0 = b_0$) $a_1 \equiv b_1$ identisch, und $a_2 = b_2 = 0$ liefert den Kegel K_2 der Tangenten in D_2. Damit reduziert sich $D'(4\text{a}')$ auf

$$(4'') \qquad \begin{aligned} D'' &\equiv 4b_2^3(3b_2b_4 - b_3^2) + b_2^2b_3^2 \\ &\equiv b_2^2(4b_2b_4 - b_3^2). \end{aligned}$$

Vom Tangentenkegel K_{10} (4a') sondert sich also der Kegel $b_2 = 0$ doppeltzählend ab, und es verbleibt als eigentlicher Projektionskegel ein K_6:

$$(4\text{a}'') \qquad K_6 \equiv 4b_2b_4 - b_3^2 = 0.$$

Hier ist, wie es sein muß, die rechte Seite die Diskriminante (bez. x_m) der abermals reduzierten Form F_4:

$$(1'') \qquad F_4 \equiv x_m^2 b_2 + x_m b_3 + b_4.$$

Wiederum sind in der Projektionsebene $b_2 = 0$ und $b_4 = 0$ Berührkurven der Projektionskurve c_6, deren Berührpunkte auf der Kurve $b_3 = 0$ liegen.

Umgekehrt läßt sich jede c_6 mit einem sechsmal berührenden Kegelschnitte als Tangentenprojektion einer F_4 mit D_2 auffassen. Das ist auch der Ausgangspunkt in der Preisschrift von *K. Rohn* (s. Nr. **63**).

Dies findet nunmehr seine Anwendung auf den Hauptfall, wo eine F_4 mit $\bar{C}_2$ vorliegt und A_m irgendein D_2 der $\bar{C}_2$ ist. Die Gleichung der F_4 ist dann nach *Kummer* (s. Nr. 9) von der Gestalt

$$(5) \qquad \begin{cases} F_4 \equiv \varphi^2 + x_i^2\psi = 0, \\ \varphi \equiv x_m d_1 + d_2, \ \psi = x_m^2 e_0 + 2x_m e_1 + e_2. \end{cases}$$

Hier seien die Koeffizienten d_1, d_2, e_1, e_2 explizite entwickelt:

$$(6) \qquad \begin{cases} d_1 \equiv d_i x_i + d_k x_k + d_l x_l, \\ d_2 \equiv d_{ii} x_i^2 + 2d_{ik} x_i x_k + \cdots, \\ e_1 \equiv e_i x_i + e_k x_k + e_l x_l, \\ e_2 \equiv e_{ii} x_i^2 + 2e_{ik} x_i x_k + \cdots. \end{cases}$$

Ordnet man jetzt F_4 nach x_m, so ergibt sich

$$(5') \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv x_m^2(d_1^2 + e_0 x_i^2) + 2x_m(d_1 d_2 + e_1 x_i^2) + (d_2^2 + e_2 x_i^2) \\ &\equiv x_m^2 \alpha_2 + 2x_m \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{aligned}$$

Die Diskriminante D (bez. x_m) erhält damit den Wert

$$(7) \qquad D \equiv \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 \equiv (d_1^2 + e_0 x_i^2)(d_2^2 + e_2 x_i^2) - (d_1 d_2 + e_1 x_i^2)^2.$$

Hier tritt rechts der Faktor x_i^2 heraus, d. h. geometrisch, vom früheren Projektionskegel K_6 (4a'') sondert sich, doppeltzählend, die durch $x_i = 0$ dargestellte Ebene der $\bar{C}_2$ ab, wie es sein muß. Es verbleibt also als „eigentlicher" oder „*Zeuthen*scher" Projektionskegel K_4 resp. dessen Spur c_4 in der Projektionsebene

$$\text{(I)} \qquad K_4 \equiv c_4 \equiv (e_0 d_2^2 + e_2 d_1^2 - 2 d_1 d_2 e_1) + x_i^2(e_0 e_2 - e_1^2) = 0.$$

Hier haben die beiden Klammerausdrücke eine einfache Bedeutung. Einmal ist $e_0 e_2 - e_1^2$ die Diskriminante der Form $\psi(x_m)$; deren Verschwinden liefert also den von A_m aus an die F_2 $\psi = 0$ gehenden Berührkegel E. Andererseits ist $e_0 d_2^2 + e_2 d_1^2 - 2 d_1 d_2 e_1$ die Resultante $R_{\varphi, \psi} = R$ der quadratischen Formen $\varphi(x_m)$ und $\psi(x_m)$; das Verschwinden von R stellt den über der Schnittkurve $C_4(\varphi, \psi)$ stehenden Kegel 4. Ordnung mit der Spitze A_m dar.

Die Gleichung (I) schreibt sich somit kurz

$$\text{(I')} \qquad K_4 \equiv c_4 \equiv R + x_i^2 E = 0,$$

so daß die Struktur der c_4 auf der Hand liegt.

Ist insbesondere A_m einer der vier Kuspidalpunkte (s. Nr. 18), für den φ, x_i, ψ zugleich verschwinden, so verschwindet das konstante Glied e_0 in ψ. Damit nimmt (I') die Gestalt an

$$\text{(I'')} \qquad K_4 \equiv c_4 \equiv d_1(e_2 d_1 - 2 d_2 e_1) + x_i^2 e_1^2 = 0,$$

wo $d_1 = 0$, $e_1 = 0$ die Spuren der Tangentialebenen von φ, ψ in A_m sind.

Weiter trete jetzt der Fall einer Kuspidal-$\bar{C}_2$ (s. Nr. 18) ein, so daß *jeder* Punkt auf $\bar{C}_2$ ein uniplanarer D_2 wird, oder auch, daß jede Ebene die F_4 in einer c_4 mit zwei auf $\bar{C}_2$ gelegenen Spitzen trifft. Nach früherem (Nr. 18) läßt sich dann die Gleichung der F_4 auf die Gestalt bringen

$$\text{(8)} \qquad F_4 \equiv \varphi^2 + x_i^3 v = 0.$$

Die oben in (5) auftretende Form $\psi \equiv x_m^2 e_0 + 2 x_m e_1 + e_2$ besitzt jetzt den Faktor x_i, so daß man setzen darf

$$\text{(9)} \qquad e_0 = 0, \; e_1 = c_0 x_i, \; e_2 = c_1 x_i.$$

Damit tritt in (I'') der Faktor x_i heraus, und es verbleibt als Projektionskurve eine c_3 mit der Gleichung

$$\text{(I''')} \qquad c_3 \equiv d_1(d_1 c_1 - 2 d_2 c_0) + c_0^2 x_i^3 \equiv 0.$$

Es ist dann die Gerade d_1 — die Spur der T von φ in A_m — eine Wendetangente, und die Spur der C_2 (φ, v), deren Gleichung $d_1 c_1 - 2 d_2 c_0 = 0$ ist, oskuliert die c_3 dreimal, so daß die drei Oskulationspunkte auf der Geraden $x_i = 0$, der Spur der $\bar{C}_2$, liegen.

Endlich sei noch der Fall in Betracht gezogen, wo die F_4 mit einer $\bar{C}_2$ noch einen D_2 außerhalb besitzt (s. *Kummer*, Nr. 7), etwa in der Koordinatenecke A_i. Es sind dann der Form F_4 in (5) die vier weiteren Bedingungen aufzuerlegen, daß die Koeffizienten von x_i^4, $x_i^3 x_k$, $x_i^3 x_l$, $x_i^3 x_m$ verschwinden. Somit muß sein gemäß (6)

$$\begin{cases} (10_i) & e_{ii} + d_{ii}^2 = 0 \\ (10_k) & e_{ik} + 2 d_{ii} d_{ik} = 0, \\ (10_l) & e_{il} + 2 d_{ii} d_{il} = 0, \\ (10_m) & e_i + d_i d_{ii} = 0. \end{cases}$$

Andererseits stelle man die Koeffizienten C_i, C_k, C_l von x_i^4, $x_i^3 x_k$, $x_i^3 x_l$ in der Form c_4 (I) auf.

Der Koeffizient C_i läßt sich leicht auf die Gestalt bringen

$$(11) \qquad C_i \equiv (e_0 + d_i^2)(e_{ii} + d_{ii}^2) - (e_i + d_i d_{ii})^2,$$

oder auch, da $e_{ii} + d_{ii}^2$ und $e_i + d_i d_{ii}$ die linken Seiten von (10) und (10_m) sind, kürzer

$$(11_i) \qquad C_i \equiv (10_i) \cdot (b_0 + d_i^2) - (10_m)^2.$$

Ähnlich ergeben sich für C_k und C_l die Darstellungen

$$(11_k) \qquad \tfrac{1}{2} C_k \equiv (10_i) \cdot d_i d_k + (10_k) \cdot (e_i + d_i^2) - (10_m) \cdot \{e_k + d_k d_{ii} + 2 d_i d_{ik}\},$$

$$(11_l) \qquad \tfrac{1}{2} C_l \equiv (10_i) \cdot d_i d_l + (10_l) \cdot (e_i + d_i^2) - (10_m) \cdot \{e_l + d_l d_{ii} + 2 d_i d_{il}\}.$$

Aus (11_i), (11_k), (11_l) geht hervor, daß C_i, C_k, C_l zugleich mit den Ausdrücken (10) verschwinden, d. h., daß, wie auch geometrisch ersichtlich, die Projektionskurve c_4 einen d_2 erhält.

Aber auch das Umgekehrte läßt sich an der Hand von (10) und (11) ohne Schwierigkeit beweisen, was dem Leser überlassen bleibe, daß die Existenz eines d_2 der c_4 die eines D_2 der F_4 nach sich zieht. Somit gilt:

„So oft die F_4 mit $\bar{C}_2$ einen weiteren D_2 erhält, so oft ist auch dessen Projektion von einem Punkte der $\bar{C}_2$ aus ein d_2 der Projektionskurve c_4, und umgekehrt."

Besitzt im besonderen die F_4 mit $\bar{C}_2$ vier D_2 (s. *Kummer*, Nr. 7), also auch die c_4, so muß die letztere zerfallen, entweder in zwei c_2, oder aber (im singulären Falle) in eine c_1 und eine r_3.

Wir wenden uns jetzt zur analytischen Behandlung der *Zeuthen*schen Erzeugung der F_4 mit $\bar{C}_2$. Die Gleichungen zweier fester F_2 seien, nach x_m geordnet,

$$(12) \qquad \begin{cases} F \equiv a_0 x_m^2 + 2 a_1 x_m + a_2 = 0, \\ G \equiv b_0 x_m^2 + 2 b_1 x_m + b_2 = 0 \end{cases}$$

Im folgenden werde das von *W. F. Meyer* angegebene Übertragungsprinzip herangezogen (s. Nr. 5). Durch die Koordinatenecke A_m werde eine variierende Gerade g gelegt, die die Ebene $x_m = 0$ im Punkte $(x_i, x_k, x_l, 0)$ treffe; der laufende Punkt auf g wird durch den Parameter x_m bestimmt. Den beiden Schnittpunkten von g mit F und G mögen die Parameterwerte α, α' und β, β' entsprechen. Indem wir zugleich die *Zeuthen*sche Erzeugung verallgemeinern, werde noch eine beliebige, vorerst nicht durch A_m gehende Ebene E adjungiert mit der Gleichung

$$\mathsf{E} \equiv x_m \varrho_0 - \varrho_1 = 0. \tag{13}$$

Dem Schnittpunkte R von E mit g kommt dann der Wert $x_m = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}$ zu. Man suche zwei Punktepaare (M_1, M_2), (M_1', M_2') auf g, die zugleich harmonisch sind zu den Paaren (β, β') und (R, α) resp. zu (β, β') und (R, α'). Die beiden Paare (R, α), (R, α') bestimmen sich durch die Wurzeln der Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{ll} (14) & (R, \alpha) \equiv (x_m - \alpha)(x_m \varrho_0 - \varrho_1) \\ & \qquad \equiv x_m^2 \varrho_0 - x_m(\varrho_1 + \alpha\varrho_0) + \alpha\varrho_1 = 0, \\ (14') & (R, \alpha') \equiv x_m^2 \varrho_0 - x_m(\varrho_1 + \alpha'\varrho_0) + \alpha'\varrho_1 = 0. \end{array}\right.$$

Dann erhält man die Gleichungen der beiden Paare (M_1, M_2), $(M_1' M_2')$ durch Nullsetzen der Funktionaldeterminanten von $G(1)$ mit (14) resp. (14′)

$$\left\{\begin{array}{ll} (15) & (M_1, M_2) \equiv x_m^2 p_{01} + x_m p_{02} + p_{12} = 0, \\ (15') & (M_1', M_2') \equiv x_m^2 p_{01}' + x_m p_{02}' + p_{12}' = 0. \end{array}\right.$$

Hier sind die p_{ik} die Determinanten der Matrix

$$\left| \begin{array}{ccc} 2\varrho_0, & -(\varrho_1 + \alpha\varrho_0), & 2\alpha\varrho_1 \\ b_0, & b_1, & b_2 \end{array} \right|, \tag{16}$$

woraus die p_{ik}' durch Vertauschung von α mit α' hervorgehen.

Durch Multiplikation von (15) und (15′) ergibt sich als Ort der Punktepaare (M_1, M_2), (M_1', M_2') eine in den Koeffizienten von F, G, E rationale Gleichung vom vierten Grade in x_m

$$(M_1, M_2) \cdot (M_1', M_2') \equiv K \equiv x_m^4 p_{01} p_{01}' + \cdots \equiv x_m^4 k_0 + \cdots = 0. \tag{17}$$

Da die linke Seite eine in x_m binäre Kovariante des Systems (F, G, E) ist, genügt die Berechnung des Leitgliedes k_0

$$\begin{aligned} (18) \quad k_0 &\equiv p_{01} p_{01}' \\ &\equiv \{(2\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0) + \alpha\varrho_0 b_0\} \cdot \{(2\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0) + \alpha'\varrho_0 b_0\} \\ &\equiv (2\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0)^2 + (\alpha + \alpha')\varrho_0 b_0 (2\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0) + \alpha\alpha'\varrho_0^2 b_0^2. \end{aligned}$$

Man setze hier für $\alpha + \alpha'$ und $\alpha\alpha'$ gemäß (1) ihre Werte $\alpha + \alpha' = -\frac{2a_1}{a_0}$,

$\alpha\alpha' = \frac{a_2}{a_0}$, und entwickle derart, daß in den einzelnen Gliedern nur Leitglieder von Kovarianten resp. Invarianten auftreten. Zu dem Behuf bilde man zunächst die Resultante R_a von G und E

(19) $$R_a = a_0\varrho_1^2 + 2a_1\varrho_0\varrho_1 + a_2\varrho_0^2.$$

Dann ergibt sich als seminvariante Darstellung von k_0

(20) $$k_0 \equiv b_0^2 R_a + 4\varrho_0 q_{01}(\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0),$$

wo $q_{ik} = (ab)_{ik}$.

Um von hier aus zur typischen Darstellung der Kovariante K (17) selbst zu gelangen, hat man nur in (20) die einzelnen Leitglieder von (binären) Kovarianten durch letztere selbst zu ersetzen (während die Invarianten bleiben). Nun ist b_0 das Leitglied von G, ϱ_0 das von E, q_{01} das der Funktionaldeterminante (F, G):

(21) $$(F, G) \equiv q_{01}x_m^2 + q_{02}x_m + q_{12},$$

und $\varrho_0 b_1 + \varrho_1 b_0$ das der Funktionaldeterminante (E, G):

(22) $$(\mathsf{E}, G) = \begin{vmatrix} \varrho_0 & -\varrho_1 \\ x_m b_0 + b_1, & x_m b_1 + b_2 \end{vmatrix}$$
$$\equiv x_m(b_0\varrho_1 + b_1\varrho_0) + (b_1\varrho_1 + b_0\varrho_2).$$

Damit wird die *typische* Darstellung von (17)

(II) $$K \equiv R_a G^2 - 4\mathsf{E}\cdot(F, G)\cdot(G, \mathsf{E}) = 0.$$

Der gesuchte Ort der beiden Punktepaare (M_1, M_2), (M_1', M_2') ist also eine F_6 mit D_2 in A_m, deren weitere Eigenschaften sich aus (II) ablesen lassen, sobald man die geometrische Bedeutung des Verschwindens der einzelnen Faktoren kennt.

Nun stellt $R_a = 0$ den Kegel mit der Spitze A_m dar, der den Schnittkegelschnitt (F, E) projiziert. Sodann ist $(E, G) = 0$ eine F_3, der Ort der Doppelpunkte der Involutionen, die die Gerade g aus den Individuen des Büschels (F, G) ausschneidet. Endlich entsteht die F_2: $(G, \mathsf{E}) = 0$ als Ort des vierten harmonischen Punktes von R in bezug auf die Schnittpunkte (g, F).

Läßt man hinterher im besonderen die Ebene E durch A_m selbst gehen (also $R = A_m$), so daß $\varrho_0 = 0$, so sondert sich in (II) der Faktor ϱ_1^2 ab, d. h. geometrisch, von der F_6 spaltet sich die Ebene E doppeltzählend ab. Damit reduziert sich die F_6 auf die nach der *Zeuthen*schen Vorschrift entstehende F_4, die nunmehr leicht diskutierbar ist.

Für $\varrho = 0$ reduziert sich R_a auf $a_0\varrho_1^2$, E auf $-\varrho_1$, (E, G) auf $\varrho_1(x_m b_0 + b_1) \equiv \varrho_1 G_0$, wo G_0 die Polare von A_m bez. G bedeutet.

Mithin wird die Gleichung der F_4, wenn man noch bequemer $a_0 = 1$ nimmt,

(IIa) $$F_4 \equiv G^2 - 4G_0 \cdot (F, G) = 0.$$

Hier erscheint rechts die *Segre*sche Form (s. Nr. 20) einer F_4 mit $\bar{C}_2$; letztere ist der Schnitt von G mit der Ebene G_0, also der Berührkegelschnitt des von A_m an G gehenden Berührkegels. Von (IIa) aus gelangt man aber auch zur ursprünglichen *Kummer*schen Darstellung (s. Nr. 9). Denn (F, G) gestattet die Umformungen

(21') $$(F, G) \equiv \begin{vmatrix} F_0, & F_1 \\ G_0, & G_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_0, & F \\ G_0, & G \end{vmatrix} = GF_0 - G_0 F.$$

Setzt man dies in (IIa) ein, so entsteht

$$\begin{aligned} F_4 &\equiv G^2 - 4G_0(G_2F_0 - G_0F) \\ &\equiv (G - 2F_0G_0)^2 - 4G_0^2(F_0^2 - F), \end{aligned}$$

oder auch, da $F_0^2 - F$ mit der Diskriminante $D_a \equiv a_1^2 - a_2$ von F übereinstimmt,

(IIa') $$F_4 \equiv (G - 2F_0G_0)^2 - 4G_0^2 D_a = 0.$$

Hieraus liest man noch ab, daß $D_a = 0$ der Berührkegel von A_m an F, einer der fünf *Kummer*schen Kegel ist, in Übereinstimmung mit *Zeuthen*.

Endlich sei noch der *Zeuthen*schen Tangentenprojektion der F_4 mit $\bar{C}_2$ von der Spitze eines *Kummer*kegels K_2 aus gedacht. Zu dem Behuf greife man zurück zum Falle (1) der allgemeinen F_4, der das Projektionszentrum A_m nicht angehörte. Die binäre Diskriminante D der Form $F_4(x_m)$, gleich Null gesetzt, lieferte den von A_m aus an die F_4 gehenden Tangentenkegel 12. Ordnung K_{12}, resp. dessen Spur in der Ebene $x_m = 0$.

Jetzt sei im besonderen die F_4 eine solche mit $\bar{C}_2$, welch letztere man in der Ebene $x_m = 0$ annehme. Die *Kummer*sche Gleichung der F_4, nach x_m geordnet, hat die Gestalt

(22) $$\begin{aligned} F_4 &\equiv \varphi^2 - 4x_m^2\psi \\ &\equiv (a_0x_m^2 + 2a_1x_m + a_2)^2 - 4x_m^2(c_0x_m^2 + 2c_1x_m + c_2) = 0. \end{aligned}$$

Die rechts stehende, in x_m biquadrische binäre Form laute abgekürzt

(23) $$F_4(x_m) \equiv \alpha_0x_m^4 + 4\alpha_1x_m^3 + 6\alpha_2x_m^2 + 4\alpha_3x_m + \alpha_4.$$

Dann ist bekanntlich die Diskriminante D von der Struktur

(24) $$D \equiv \alpha_4(\ ) + \alpha_3^2(\ ).$$

Da aber im vorliegenden Falle $\alpha_4 = a_2^2$, $\alpha_3 = a_1a_2$, so tritt aus D der Faktor a_2^2 heraus. Geometrisch ist $a_2 = 0$ die Gleichung der $\bar{C}_2$; von der Spur des Kegels K_{12} spaltet sich also die $\bar{C}_2$ doppeltzählend ab, wie es sein muß, da ja jeder Punkt der $\bar{C}_2$ ein D_2 der F_4 ist, der vermöge der Tangentenprojektion in einen d_2 übergeht.

Nunmehr werde das Projektionszentrum A_m als Spitze eines *Kummer*kegels K_2 gewählt und $\psi = 0$ als Spitze des letzteren. Dann reduziert sich die Form ψ auf $x_m^2 c_2$ und die Form F_4 (22) auf

$$(22') \qquad F_4(x_m) \equiv (a_0 x_m^2 + 2 a_1 x_m + a_2)^2 - 4 x_m^2 c_2.$$

Demnach erhalten die Koeffizienten α in (23) die Werte

$$(23') \qquad \begin{cases} \alpha_0 = a_0^2, \ \alpha_1 = a_0 a_1, \ \alpha_2 = \frac{1}{3}(a_0 a_2 + 2a_1^2 - 2c_2), \\ \alpha_4 = a_2^2, \ \alpha_3 = a_1 a_2. \end{cases}$$

Die Diskriminante D von (22') ist in ihre Faktoren zu zerlegen. Einmal hat D, wie oben bemerkt, den Faktor a_2^2 und analog auch den Faktor a_0^2. Sodann muß auch der Faktor c_2^2 auftreten, da für $c_2 \equiv 0$ die Form $F_4(x_m)$ das Quadrat einer quadratischen Form (φ) wird, also zwei Doppelwurzeln besitzt.

Geometrisch leuchtet das gleichfalls ein. Denn $c_2 = 0$ liefert die Spur des Kegels K_2, und jede Kante von K_2 berührt die Fläche F_4 zweimal (s. Nr. 9). Mithin existiert eine Zerlegung von D von der Struktur

$$(25) \qquad D \equiv a_0^2 a_2^2 c_2^2 c_4,$$

so daß $c_4 = 0$ die „eigentliche" Projektionskurve ergibt. Berechnet man auf Grund von (23') die beiden Invarianten g_2 und g_3 der Form $F_4(x_m)$, bildet sodann gemäß (3) $D = g_2^3 - 27 g_3^2$, und entwickelt nach Potenzen von c_2, so stellt sich in der Tat heraus, daß die Koeffizienten von $c_2^0, c_2^1, c_2^5, c_2^6$ verschwinden und eine Zerlegung vom Typus (25) resultiert, wo der Restfaktor c_4 die Gestalt annimmt

$$(26) \qquad c_4 = (c_2 - A)^2 - 4 a_1^2 c_2,$$

wobei $A \equiv a_0 a_2 - a_1^2$ die Diskriminante der Form $\varphi(x_m)$ bedeutet. Die Kurve c_4 ist also eine elliptische (mit zwei d_2).

20. Die Segresche Projektion vom S_4 aus. Die Veronesesche Konstruktion. Schon *Steiner* und *Plücker* haben elliptische c_4 mit zwei d_2 untersucht, indem sie die Kurve als Projektion der Schnittkurve C_4 zweier F_2 von irgendeinem Raumpunkt P_0 aus ansahen. Als Sonderfall erscheinen die (elliptischen) c_3, wenn man den Projektionspunkt P_0 auf die C_4 selbst rücken läßt.

Und doch hat es längerer Zeit bedurft, bis man den S_4 zu einer analogen Projektion für die F_4 mit $\bar{C}_2$ benutzte. Dies scheint zuerst durch *G. Veronese*[42]), der schon vorher[43]) die Gesetze des Projizierens

42) *G. Veronese,* Ven. Ist. Atti (6) 2 (1884), p. 1841.

43) *G. Veronese,* Math. Ann. 24 (1884), p. 313.

und Schneidens höherer Räume systematisch untersuchte, geschehen zu sein.

Im S_4 haben zwei Über-F_2, $F_2^{(4)}$ und $G_2^{(4)}$, eine ∞^2-Mannigfaltigkeit $M_4^{(3)}$ der Ordnung 4 gemein. Projiziert man letztere von irgendeinem, zunächst nicht ihr selbst angehörigen Punkte P_0 in einen S_3, so erscheint als Projektion eine F_4 mit $\overline{C}_2$ (s. Art. „F_3", Nr. **16**). Hieraus leitet *Veronese* folgende Konstruktion einer F_4 mit $\overline{C}_2$ her. Man markiere auf einer festen Geraden drei Punkte V, V', S. Durch S lege man eine variierende Raumgerade h. Überdies seien zwei feste F_2, F und F', gegeben; einer der beiden Schnittpunkte von h mit F resp. F' sei A resp. A'. Die beiden Geraden (V, A) und $(V'\ A')$ mögen sich in einem Punkte X treffen. Dann erzeugt X eine F_4 mit $\overline{C}_2$.

Auch die Tangentialebene T der F_4 in X läßt sich leicht bestimmen. Seien T_a und $T_{a'}$ die Tangentialebenen von F und F' in A und A', so ist die Verbindungsebene von X mit der Geraden $(T_a, T_{a'})$ die gesuchte T.

Die $\overline{C}_2$ erhält man in Analogie zu den zwei d_2 einer bizirkularen c_4, indem man von P_0 aus die ∞^1 Sehnen an die $M_4^{(3)}$ legt. Daraus gewinnt man noch eine Konstruktion der $\overline{C}_2$, die man auch unabhängig vom S_4 ausführen kann.

Während sich *Veronese* auf diese Konstruktionen beschränkte, hat fast gleichzeitig *C. Segre* in einer umfangreichen Arbeit[44]) aus dem obigen Projektionsgrundgedanken eine systematische, fast erschöpfende Theorie der F_4 mit $\overline{C}_2$ entwickelt. Nicht nur die bekannten Eigenschaften dieser Flächengattung werden so auf einfache und natürliche Weise wiedergewonnen, sondern auch viele neue hinzugefügt. Vor allem führt den Verfasser seine Methode zu einer vollständigen Klassifikation der F_4 mit $\overline{C}_2$; er gelangt zu 70 verschiedenen Arten, von denen nur etwa die Hälfte vorher bekannt war.

Außer den 18 Arten bei allgemeiner (irreduzibler) $\overline{C}_2$ ergeben sich 5 Arten, wo die F_4 nur von der dritten Klasse ist; sodann mehrere Arten mit Kuspidal-$\overline{C}_2$ (s. Nr. **18**), wo sich beide Schalen der Fläche in zwei Punkten der $\overline{C}_2$, den „clos-Punkten", berühren. Auch die F_4 mit einer in zwei inzidente Doppelgerade $\overline{g}_1$, $\overline{g}_2$ zerfallenden $\overline{C}_2$ werden eingehender als bisher untersucht. Von Interesse ist dabei der Sonderfall, wo der Punkt $(\overline{g}_1, \overline{g}_2)$ ein D_3 der F_4 ist, von dem wieder die *Steiner*sche Fläche S (s. Abschn. VII) ein Unterfall ist.

44) *C. Segre,* Math. Ann. 24 (1884), p. 313. Weitere Ergänzungen finden sich bei *Th. Reye,* Math. Ann. 55 (1902), p. 257; *H. F. Baker,* London Math. Soc. Proc. (2) 11 (1912), p. 285; *V. H. Rao,* ib. (2) 17 (1919), p. 272.

Auch die weiteren Fälle, wo eine der beiden Doppelgeraden, oder auch beide, kuspidal werden, werden genau berücksichtigt. Ferner wird für jede Art der F_4 die Verteilung der 16 g, sowie der ∞^1 C_2-Scharen auf der Fläche bestimmt, nebst der zugehörigen Abbildung niedrigster Ordnung. Weiter werden im besonderen die Arten anallagmatischer F_4 — die durch Inversion in sich übergehen — ermittelt; das Auftreten singulärer Punkte wird eingehend untersucht usf. Eine fruchtbare metrische Anwendung erfährt die Methode für die Zykliden Z (s. Abschn. IV) — für die die $\overline{C}_2$ der nullteilige Kugelkreis $\overline{\mathsf{K}}$ wird —, insbesondere für deren Fokaleigenschaften. Während übrigens bei *Darboux* u. a. ein Brennpunkt einer Zyklide Z eine sie doppelt berührende Nullkugel ist, erscheint hier allgemeiner ein Brennpunkt der Z als eine sie längs einer C berührende Nullkugel. Es sei noch darauf hingewiesen, wie die fünf *Kummer*schen Kegel K_2 (s. Nr. 9) direkt den fünf Überkegeln $K_2^{(4)}$ des F_2-Büschels $(F_2^{(4)}, G_2^{(4)})$ im S_4 entsprechen. Läßt man hinterher im besonderen den Projektionspunkt P_0 auf die $M_3^{(4)}$ selbst rücken, so geht die F_4 in eine allgemeine F_3 über (s. Art. „F_3" Nr. 16).

Indem wir wegen weiterer Einzelheiten auf die Arbeit von *Segre* selbst verweisen, seien dessen synthetischen Entwicklungen einige analytische hinzugefügt.

Man bezeichne Punktkoordinaten im S_4 mit x_i, x_k, x_l, x_m, x_n und wähle den Projektionspunkt als n^{te} Koordinatenecke A_n, den Projektions-S_3 als $x_n = 0$. Ordnet man dann die Gleichungen der beiden Über-F_2 nach x_n, so nehmen sie die Gestalt an

$$(1)\qquad \begin{cases} F_2^{(4)} = F \equiv x_n^2 B_0 + 2x_n B_1 + B_2 = 0, \\ G_2^{(4)} = G \equiv x_n^2 C_0 + 2x_n C_1 + C_2 = 0, \end{cases}$$

wo die B_r, C_s quaternäre Formen in x_i, x_k, x_l, x_m der Ordnung r resp. s bedeuten. Im Büschel $B(F, G)$ befindet sich ein durch A_n gehendes Individuum F' mit der Gleichung

$$(2)\qquad F' \equiv x_n p_{01} + p_{02} = 0,$$

wo $p_{ik} = (BC)_{ik}$. Umgekehrt läßt sich das Büschel B auch aus F' und etwa F (mit $B_0 \neq 0$) zusammensetzen. Die Gleichung der Projektion F_4 der $M_4^{(3)}(F, G)$ ergibt sich durch Nullsetzen der Resultante von F und G

$$(3)\qquad F_4 \equiv p_{02}^2 - 4p_{01}p_{12} = 0.$$

Die $\overline{C}_2$ auf der F_4 ergibt sich als Ort der Spuren der durch A_n gehenden Sekanten der $M_4^{(3)}$. Diese Sekanten sind zugleich die auf F' liegenden, durch A_n gehenden Geraden. Letztere werden gemäß (2) durch $p_{01} = 0$, $p_{02} = 0$ geliefert. Mithin sind dies auch im $S_3(x_n = 0)$ die Bestimmungsgleichungen der $\bar{C}_2$

$$(4) \qquad \bar{C}_2) \quad p_{01} = 0, \; p_{02} = 0.$$

Dies bestätigt sich auch sofort algebraisch an der Hand von (1) und (3). Denn p_{01}, p_{02}, p_{12} sind an zwei lineare Identitäten gebunden

$$(5) \qquad \begin{cases} B_0 p_{12} \equiv B_1 p_{02} - B_2 p_{01}, \\ C_0 p_{12} \equiv C_1 p_{02} - C_2 p_{01}. \end{cases}$$

Verwendet man etwa die erstere (mit $B_0 \neq 0$), so geht (3) über in eine in p_{01} und p_{02} quadratische, homogene Gleichung, woraus hervorgeht, daß die F_4 eine $\bar{C}_2$: $p_{02} = 0$, $p_{01} = 0$ besitzt.

Man wird nun die „*Segre*sche" Gleichungsform (3) der F_4 in die ursprüngliche *Kummer*sche (s. Nr. 9)

$$(6) \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 4p^2\psi = 0$$

überführen wollen, und umgekehrt. Indem wir, wie es erlaubt ist, die Konstante B_0 gleich 1 annehmen, haben wir vermöge (5) den Wert von p_{12}:

$$(5) \qquad p_{12} \equiv B_1 p_{02} - B_2 p_{01}$$

in (3) einzusetzen. Dann ergibt sich durch einfache Umformungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv p_{02}^2 - 4p_{01}(B_1 p_{02} - B_2 p_{01}) \\ &\equiv (p_{02}^2 - 4p_{02} B_1 p_{01}) + 4B_2 p_{01}^2 \\ &\equiv (p_{02} - 2B_1 p_{01})^2 - 4p_{01}^2 (B_1^2 - B_2). \end{aligned}$$

Setzt man hier

$$(8) \qquad p_{02} - 2B_1 p_{01} = \varphi, \quad p_{01} = p, \quad B_1^2 - B_2 = \psi,$$

so ist man in der Tat zur *Kummer*schen Gleichungsform (6) zurückgelangt.

Ein wenig schwieriger gestaltet sich die Umkehrung. Sei also jetzt (6) vorgelegt, so bedienen wir uns einer Modifikation des *Kummer*schen Verfahrens (a. a. O.), um von (6) aus zu den fünf Kegeln K_2 zu gelangen. Versteht man unter q eine beliebige Linearform, so forme man (6) um, wie folgt:

$$(9) \qquad F_4 \equiv (\varphi + 2pq)^2 - 4p(pq^2 + p\psi + \varphi q).$$

Dann besitzt die rechte Seite bereits die Struktur von (3); man hat nur noch zu zeigen, daß sich die drei Bildungen $\varphi + 2pq$, p, $pq^2 + p\psi + \varphi q$ als zweireihige Determinanten p_{01}, p_{02}, p_{12} einer Matrix (BC) (mit $B_0 = C_0 = 1$) darstellen lassen. Zu dem Behuf stelle man eine zu (5) analoge Identität auf, suche also zwei Formen B_1, B_2 so zu bestimmen, daß man hat

$$(10) \qquad \varphi q + pq^2 + p\psi \equiv B_1(\varphi - 2pq) - B_2 p.$$

In der Tat ergibt sich

(10') $$\varphi q + pq^2 + p\psi \equiv q(\varphi + 2pq) - p(q^2 - \psi).$$

Wählt man demnach

(11) $$B_1 = q, \quad B_2 = q^2 - \psi,$$

so ist (10) befriedigt. Nunmehr wähle man C_1, C_2 so, daß

(12) $$\begin{cases} p_{01} \equiv p \equiv C_1 - B_1, \\ p_{02} \equiv \varphi + 2pq \equiv C_2 - B_2 \end{cases}$$

wird, dann ergibt sich

(12') $$\begin{cases} C_1 \equiv B_1 + p \equiv p + q, \\ C_2 \equiv \varphi + 2pq + B_2 \equiv \varphi + 2pq + q^2 - \psi. \end{cases}$$

Als Kontrolle dient die Darstellung von p_{12}; wie leicht zu bestätigen, kommt

(13) $$p_{12} \equiv q\varphi + pq^2 + p\psi \equiv B_1 C_2 - B_2 C_1.$$

Endlich werde auch die *Veronese*sche Konstruktion analytisch behandelt. Ohne die Rechnung im einzelnen auszuführen, genügt es, zu zeigen, daß die Konstruktion auf eine F_4 in der *Segre*schen Gestalt (2) führt. Man wähle auf der Koordinatenkante (A_l, A_m) noch einen festen Punkt als Einheitspunkt E (0, 0, 1, 1).

Durch A_m lege man eine variierende Gerade g, die zwei gegebene F_2: F, G (1) in den Punktepaaren A, A', B, B' treffe, mit den x_m-Werten $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$. Die Spur von g in $x_m = 0$ sei der Punkt $(y_i, y_k, y_l, 0)$, so daß $A(\alpha)$ und $B(\beta)$ die Koordinaten (y_i, y_k, y_l, α), (y_i, y_k, y_l, β) erhalten. Demnach wird $(y_i, y_k, y_l + \varrho, \alpha)$ ein laufender Punkt auf der Geraden (A_l, A), und $(y_i, y_k, y_l + \sigma, \beta + \sigma)$ ein solcher auf der Geraden (E, B).

Für den Schnittpunkt $P(x)$ beider Geraden wird also $\varrho = \sigma = \alpha - \beta$, d. h. P besitzt die Koordinaten

$$(y_i, y_k\ y_l + \alpha - \beta, \alpha)$$

mit den Bedingungen $F(\alpha) = 0$, $G(\beta) = 0$. Schreibt man lieber nichthomogen $x_i = y_i = 1$, so folgt aus (14)

$$y_k = x_k, \quad \alpha = x_m, \quad \beta = y_l + x_m - x_l.$$

Die Einsetzung in $F(\alpha) = 0$, $G(\beta) = 0$ führt zu zwei quadratischen Gleichungen in y_l. Die Elimination von y_l liefert so in der Tat die gewünschte Gleichung $F_4 = 0$ in der *Segre*schen Gestalt (2).

Das *Segre*sche Verfahren läßt noch eine andere fruchtbare Auffassung zu. Die Form $F_4(2)$ trat als Resultante der beiden in x_n binären Formen $F(x_n)$, $G(x_n)$ auf. Bildet man andererseits die Funktionaldeterminante $\Theta = (F, G)$

(14) $$\Theta \equiv (F, G) \equiv p_{01} x_n^2 + p_{02} x_n + p_{12},$$

so erscheint F_4 auch als Diskriminante der Form Θ. Dies besagt geometrisch, daß sich die Fläche F_4 im S_3 auch erzeugen läßt durch Tangentenprojektion (von A_n aus) der durch $\Theta = 0$ dargestellten Mannigfaltigkeit. Letztere ist ersichtlich eine $F_3^{(4)}$, die durch A_n einfach hindurchgeht. Es liegt somit eine Verallgemeinerung der *Geiser*schen Tangentenprojektion einer F_3 im S_3 vor (s. Art „F_3", Nr. **16**), und es gilt:

„Die *Segre*sche Projektionsfläche F_4 mit $\bar{C}_2$ ist zugleich die Tangentenprojektion einer $F_3^{(4)} = \Theta$."

Von dieser Θ lassen sich auf Grund des *W. Fr. Meyer*schen Übertragungsprinzips (s. Nr. **5** und Art. „F_3" Nr. **12**) weitere Eigenschaften angeben. Legt man durch den Punkt A_n in S_4 eine variierende Gerade g, so wird diese von den Individuen des Büschels $B(F, G)$ in den Punktepaaren einer Involution getroffen. Sind D_1, D_2 deren Doppelpunkte, so ist der Ort derselben eben die Fläche Θ.

Im besonderen läßt sich Θ auch auffassen und definieren als Ort der Berührungspunkte der von A_n aus an die Individuen von B gehenden Tangenten; es ist das eine Verallgemeinerung einer *Steiner*schen Erzeugung der F_3 im S_3 (s. Art. „F_3" Nr. **12**).

Ferner befand sich in B ein durch A_n gehendes Individuum F' (3). Auf F' gehen ∞^1 Gerade durch A_n, die durch $p_{01} = p_{02} = p_{12} = 0$ dargestellt sind; diese Geraden gehören zugleich der Fläche Θ an. Legt man weiter von A_n aus die Tangenten an Θ, so ist der Ort der Berührungspunkte die obige $M_3^{(4)}(F, G)$.

Umgekehrt gehe man von einer beliebigen, allgemeinen, durch A_n gehenden $F_3^{(4)}$ aus mit der Gleichung

$$(15) \qquad F_3^{(4)} \equiv c_1 x_n^2 + c_2 x_n + c_3 = 0.$$

Durch einen beliebigen Punkt P einer solchen $F_3^{(4)}$, z. B. $P = A_n$, geht eine endliche Anzahl ($= 6$) von Geraden, die auf der $F_3^{(4)}$ liegen. Denn für $P = A_n$ bestimmen sich diese sechs Geraden durch die sechs gemeinsamen Lösungen der drei Gleichungen

$$(16) \qquad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Und diese liefern im S_3 die sechs Schnittpunkte der C_2 ($c_1 = 0$, $c_2 = 0$) mit der F_3 ($c_3 = 0$), die, mit A_n verbunden, jene sechs Geraden ergeben.

Es gibt aber im besonderen eine endliche Anzahl von Punkten P_0 auf der $F_3^{(4)}$, durch die ∞^1, der $F_3^{(4)}$ angehörige Gerade gehen. Wählt man einen solchen Punkt P_0 wieder als Ecke A_n und zugleich als Zentrum der Tangentenprojektion, so kommt man gerade zu der obigen Konstruktion zurück. Von $P_0 = A_n$ aus gehen ∞^3 Tangenten an die

$F_3^{(4)}$, deren Berührungspunkte eine $M_3^{(4)}$ erfüllen. Durch diese $M_3^{(4)}$ geht ein Büschel $B(F, G)$, das mit dem ursprünglichen übereinstimmt. Dies bestätigt sich auch leicht algebraisch.

Sollen die drei Gleichungen (16) ∞^1 gemeinsame Lösungen besitzen, d. h. soll die $F_3(c_3 = 0)$ die $C_2(c_1 = 0,\ c_2 = 0)$ enthalten, so lassen sich Formen a_1, a_2 angeben, so daß c_3 als lineare Kombination von c_1 und c_2 erscheint in der Gestalt

$$c_3 \equiv a_1 c_2 - a_2 c_1. \tag{17}$$

Man bestimme zwei weitere Formen b_1, b_2, so daß man hat

$$c_1 \equiv b_1 - a_1, \quad c_2 \equiv b_2 - a_2, \tag{18}$$

also umgekehrt

$$b_1 \equiv c_1 + a_1, \quad b_2 \equiv c_2 + a_2, \tag{18'}$$

so werden in der Tat die drei Formen c die Determinanten p_{ik} der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_0 = 1, & a_1, & a_2 \\ b_0 = 1, & b_1, & b_2 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

wie bei (1). Damit hat man ein Mittel gefunden, um die Geometrie auf einer allgemeinen $F_3^{(4)}$ auf die Geometrie einer F_4 mit $\bar{C}_2$ zu übertragen, und vice versa.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß *A. Weiler*[44a]) im Anschluß an die *Segre*sche Projektion den Fall einer F_4 mit Kuspidalkegelschnitt weiter verfolgt hat, unter besonderer Berücksichtigung des Sonderfalles, daß die beiden clos-Punkte koinzidieren.

Am Schlusse dieses Abschnittes seien noch einige andere Betrachtungsweisen der F_4 mit $\bar{C}_2$ erwähnt.

Mit Hilfe eines quadratischen Nullsystems vollzieht *A. Ameseder*[45]) die Abbildung einer F_4 mit $\bar{C}_2$ und einem D_2 auf eine F_2, die früher *Korndörfer*[30]) direkt nach der Methode von *Clebsch* ausgeführt hatte. Dabei ist ein quadratisches Nullsystem dadurch bestimmt, daß jedem Punkte eine mit ihm inzidente Ebene, seine „Nullebene", zugeordnet ist, und vice versa jeder Ebene ein mit ihr inzidenter Punkt, ihr „Nullpunkt", derart, daß die Nullpunkte der Ebenen eines Netzes eine F_2 erfüllen.

Sodann erscheint die F_4 mit $\bar{C}_2$ bei *A. del Re*[46]) als Fundamentalfläche eines speziellen Punkt-Ebenen-Konnexes (1, 2), oder auch als konjugierte Polare eines solchen Konnexes und einer F_2.

44a) *A. Weiler,* Ztschr. Math. Phys. 30 (1885), p. 17.

45) *A. Ameseder,* J. f. Math. 93 (1884), p. 62.

46) *A. del Re,* Rom Linc. Rend. (5) 2 (1893), p. 211.

Was weiter die Klassenform einer F_4 mit $\overline{C}_2$ betrifft, so begnügte man sich mit dem Hinweis, daß jene Form identisch verschwindet. Das Entsprechende findet allgemein statt für die Klassenform Φ_ν einer F_n mit einer Doppelkurve $\overline{C}$. Den inneren Grund für dieses identische Verschwinden von Φ_ν hat *O. Chisini*[47]) aufgedeckt; indem er die Ordnungsform F_n als Grenze einer singularitätenfreien Fläche ansieht, etwa eines Büschels $F_n + \lambda F_n'$, wo F_n' singularitätenfrei ist und der Parameter λ gegen Null konvergiert. Damit erscheint auch die Form Φ_ν als Grenze eines Klassengebildes.

Dann zeigt sich, daß das identische Verschwinden von Φ_ν nach erfolgtem Grenzübergange nur von einem gewissen, gegen Null konvergierenden Faktor herrührt, der noch insoweit unbestimmt ist, als er von der Art der Annäherung an die Grenzfläche F_n abhängt.

Befreit man sich, vor Vollziehung des Grenzprozesses, von diesem Faktor durch Division, so zerfällt der nunmehr nicht identisch verschwindende Restfaktor von Φ_ν seinerseits wieder in drei Faktoren, die, gleich Null gesetzt, folgende Gebilde liefern: 1. die Enveloppe der die F_n eigentlich berührenden Ebenen; 2. doppelt zählend, die Berührungsebenen der Doppelkurve $\overline{C}$; 3. dreifach zählend, die Spitzen der Kurve $\overline{C}$.

Endlich sei im besonderen erwähnt, daß *Lackner*[47a]) für eine F_4 mit zwei (inzidenten) Doppelgeraden und vier isolierten D_2 die Haupttangentenkurven ermittelt hat. Indem er die F_4 in geeigneter Weise auf eine Doppelebene abbildet, gehen die Haupttangentenkurven der Fläche über in eine Schar von Kegelschnitten und lassen sich daraufhin einfach konstruieren.

IV. Die Zykliden.

21. Die Zykliden als F_4 mit dem Kugelkreis als Doppelkegelschnitt. Obschon sich nach *Darboux*[48]) die Zykliden, die mit Z bezeichnet seien, ohne weiteres als metrischer Sonderfall der F_4 mit $\overline{C}_2$ erklären lassen, indem für sie die (nullteilig vorausgesetzte) $\overline{C}_2$ mit dem Kugelkreise $\overline{\mathsf{K}}$ zusammenfällt, so hat doch die historische Entwicklung der Z einen wesentlich anderen Weg eingeschlagen, indem

47) *O. Chisini,* Rom Linc. Rend. (3) 26_1 (1917), p. 575.

47a) *A. Lackner,* Wien Ber. 121, IIa (1912), p. 2519.

48) *G. Darboux,* Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873, 2. Aufl. 1896. Der *Darboux*sche Standpunkt tritt auch selbständig bei *E. Laguerre* hervor in einer Reihe seit 1868 erschienener Abhandlungen, s. Oeuvres II, Paris 1905, p. 41, 54, 164.

die elementargeometrische Durchdringung mit der Kugeltheorie in den Vordergrund gestellt wurde.

Bei dieser spezifischen Entwicklung ist es oft schwer, Eigenschaften der Z als solche von F_4 mit $\bar{C}_2$ wiederzuerkennen.

Im übrigen ist wohl keine Gattung von F_4 so ausgiebig behandelt worden wie die Z, so daß eine vollständige, alle Gesichtspunkte berücksichtigende Darstellung[49]) derselben ein umfangreiches Werk werden würde. Es kann sich daher hier erst recht nur darum handeln, die Hauptmomente herauszugreifen.

22. Die Untersuchung von Casey. In einer ausführlichen Arbeit hat *J. Casey*[50]) die Grundzüge der Theorie der Z selbständig von der Theorie der Kugeln aus entwickelt.

Jeder ebene Schnitt der Z ist eine „bizirkulare" c_4, d. h. eine solche, die in den zwei — konjugiert imaginären — Kreispunkten d_2 besitzt.

Seien $\alpha_r = 0$ $(r = i, k, l, m)$ die Gleichungen von irgend vier Kugeln (die nicht einem Netze angehören), der „Grundkugeln", so ist die Z dargestellt durch eine beliebige quadratische Gleichung in den Variabeln α

$$(1) \qquad Z \equiv \sum\sum a_{rs}\alpha_r\alpha_s = 0. \qquad (r, s = i, k, l, m)$$

Denn sie genügt ersichtlich der obigen Definition in allgemeinster Weise. Die Z läßt sich auch auffassen als Enveloppe einer Kugel $(\alpha x) = 0$, wo die Parameter x an eine quadratische Bedingung geknüpft sind

$$(2) \qquad F_2 \equiv \sum\sum \frac{1}{a_{rs}} x_r x_s = 0.$$

Diese Kugel schneidet die Jacobiana der vier Grundkugeln orthogonal derart, daß ihr Zentrum die F_2 (2) erfüllt.

Man hat daher auch folgende elementare Definition der Z:

„Eine Z ist die Enveloppe einer Kugel, deren Zentrum sich auf einer vorgegebenen F_2 bewegt und die eine vorgegebene Kugel K orthogonal schneidet."

Der Verfasser nennt K die „erzeugende" Kugel und die F_2 die „fokale" F_2.

Tritt im besonderen in (1) eines der α garnicht auf, so reduziert sich die Z, die dann „binodal cyklide" heiße, auf eine solche mit zwei

49) Bezüglich der Einzeldarstellungen von *„Darboux", „Reye", „Loria", „Salmon-Fiedler"* (Kap. 7) s. Lit. Weiter sei noch erwähnt *G. Darboux,* J. Éc. Norm. (2) 1 (1872), p. 273; *G. Humbert,* J. Éc. Pol. 55 (1885), p. 127.

50) *J. Casey,* London Trans. 161 (1871), p. 585; London Math. Soc. Proc. 19 (1871), p. 496. Zur Theorie der Fokal-F_2 vgl. auch *H. Hart,* Mess. (2) 14 (1884), p. 1.

D_2; sie ist die Enveloppe einer Kugel, deren Zentrum eine feste C_2 durchläuft und die eine gegebene Kugel K orthogonal trifft.

Verfolgt man im allgemeinen Falle die Kugeln, deren Zentra einer erzeugenden Geraden der fokalen F_2 angehören, so schneiden sich dieselben in einem Kreise, der auf der Z liegt. Die Z erscheint also auch als Ort eines von nur einem Parameter abhängenden Kreises. Ist im besonderen die Fokal-F_2 ein Kegel K_2, so entspricht jeder Kante von K_2 ein Kreis. So entsteht eine Reihe von Kreisen, die auf einer gegebenen Kugel K liegen und zur Enveloppe eine sphärische C_4 („sphero-quartic") haben, den Schnitt der Kugel K mit dem Kegel K_2.

Diese C_4 stellt sich dar als eine Grenzform der Z und hat Eigenschaften, die denen der Z analog sind. Die C_4 ist die Enveloppe eines variabeln Kreises, dessen Zentrum auf einem gegebenen Kreise der Kugel liegt, der einen gegebenen sphärischen Kegelschnitt auf der Kugel orthogonal schneidet.

Da irgendein Kreis die Z und damit den Kugelkreis $\bar{\mathsf{K}}$ in zwei Punkten trifft, die als D_2 der Z anzusehen sind, so läßt sich die Fläche Z auch definieren als eine F_4, die von jedem Kreise in vier veränderlichen Punkten getroffen wird. Die Z erscheint so als direkte Verallgemeinerung der Kugel, als einer F_2, die von einem Kreise in zwei veränderlichen Punkten getroffen wird.

Man kann diesem Satze nach *W. Fr. Meyer*[51]) eine noch anschaulichere und elementarere Fassung geben. Für die Kugel gilt ersichtlich der Satz:

„Hat eine F_2 die Eigenschaft, daß für irgendeinen partikulären Punkt P_0 außerhalb der F_2 das Produkt $s_1 s_2$ der von P_0 aus gerechneten Sekantenabschnitte s_1, s_2 auf den durch P_0 gehenden Geraden konstant ist, so gilt das nämliche für jeden Punkt P des Raumes und die F_2 ist eine Kugel."

Analog läßt sich aus der Gleichung (1) der Z folgern:

„Hat eine F_4 die Eigenschaft, daß ein partikulärer, nicht auf F_4 gelegener Punkt P_0 existiert, so daß für alle durch P_0 gehenden Geraden g das Produkt $p = s_1 s_2 s_3 s_4$ der vier von P_0 aus gerechneten Sekantenabschnitte s_1, s_2, s_3, s_4 konstant ist, so gilt dies auch für jeden Raumpunkt P, und die F_4 ist eine Z."

Will man sich auf reelle Abschnitte s_1, s_2, s_3, s_4 beschränken, so bedarf sowohl die Lage von P_0, wie die Auswahl der durch ihn gehenden Geraden g einer gewissen Einschränkung.

51) *W. Fr. Meyer,* Ber. Deutsch. Math.-Ver. 38 (1929) (Aufgabe). Eine Lösung von *Gruber,* ib. 39 (1930).

23. Einführung der pentasphärischen Koordinaten nach Darboux. Die analytische Behandlung der Z wird wesentlich einfacher und übersichtlicher, wenn man mit *G. Darboux* (l. c.) pentasphärische Koordinaten s_i $(i = 1, \ldots, 5)$ einführt. Zunächst bilde man die mit Konstanten multiplizierten Potenzen p_i eines Punktes in bezug auf fünf beliebige Kugeln; solche p_i sind überzählige Koordinaten, die an eine quadratische Identität gebunden sind. Wählt man statt der p_i geeignete lineare Verbindungen s_i, so kann man es erreichen, daß die Identität zwischen den s_i die Normalgestalt erhält

$$(3) \qquad \sum s_i^2 = 0.$$

Solche s_i heißen spezifisch „pentasphärische" Koordinaten eines Punktes; man sollte sie auch „*Darboux*sche" nennen. Entsprechend hat man es in der Ebene mit „tetrazyklischen" Koordinaten zu tun.

Die Gleichungen $s_i = 0$ stellen fünf „Grundkugeln" oder „Orthogonalkugeln" dar, die sich zu je zweien orthogonal durchsetzen; vier der Grundkugeln sind (bei reellen Koeffizienten) stets einteilig, die letzte nullteilig. Man darf z. B. setzen bei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z

$$(4) \qquad s_1 = 2rx, \quad s_2 = 2ry, \quad s_3 = 2rz, \quad s_4 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$
$$s_5 = i(x^2 + y^2 + z^2 + r^2).$$

Drei der Kugeln sind hierbei in die Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ausgeartet; der Anfangspunkt O ist der Mittelpunkt der beiden übrigen Kugeln $s_4 = 0$, $s_5 = 0$, mit den Radien r, ir.

Jede Kugel (inkl. Ebene und Punkt) ist darstellbar durch eine lineare Gleichung zwischen den s und umgekehrt; die Orthogonalitätsbedingung für zwei Kugeln ist bilinear in den Koeffizienten usf.

Jede Z ist darstellbar durch eine homogene quadratische Gleichung in den s und umgekehrt.

Im besonderen hat man die eindeutig bestimmte Darstellung

$$(5) \qquad Z \equiv \sum (a_i + \varrho) s_i^2 = 0,$$

wo, mit Rücksicht auf (3), der Parameter ϱ willkürlich bleibt. Die Z geht durch Inversion in bezug auf irgendeine der fünf Grundkugeln in sich über. Solche Flächen heißen nach *Moutard*[52]) „anallagmatische". Umgekehrt ist eine anallagmatische F_4 eine Z.

Zu jeder der fünf Grundkugeln sind ∞^2 Kugeln orthogonal, die die Z doppelt berühren; deren Mittelpunkte erfüllen je eine F_2, eine „Leitfläche" der Z (s. Nr. **21**). Unter diesen ∞^2 Kugeln befinden sich ∞^1 Ebenen. Diese gehen durch das Zentrum der zugehörigen Grund-

52) *Moutard*, Nouv. Ann. (2) 3 (1864), p. 306, 536.

kugel und stehen senkrecht auf den Kanten des Asymptotenkegels der zugehörigen Leitfläche.

Die ∞^1 Ebenen umhüllen daher je einen Kegel 2. Ordnung K_2; das sind die fünf *Kummerschen* Kegel der Z.

Die ∞^1 Ebenen, die die Z doppelt berühren, schneiden sie in Kreispaaren. So ergeben sich zehn Kreisscharen auf der Z (die aber nicht alle einteilig sind).

Die fünf Leitflächen der Z sind konfokal; deren Fokalkurven heißen die ebenen Fokalkurven der Z. Sie sind zugleich die Doppellinien der abwickelbaren Fläche, die der Z längs ihres Doppelkegelschnitts $\bar{\mathsf{K}}$ umschrieben ist.

Von den ebenen Fokalkurven der Z sind zu unterscheiden die sphärischen, in denen die Grundkugeln von den zugehörigen Leitflächen geschnitten werden. Die Punkte dieser Kurven lassen sich ansehen als Punktkugeln, die die Z doppelt berühren.

24. Konfokale Zykliden. Mit Hilfe der pentasphärischen Koordinaten s_i gelangt man mit *Darboux* (l. c.) auch leicht zum Begriff der konfokalen Z.

Die der Gleichung einer Schar konfokaler Mittelpunktsflächen 2. Ordnung nachgebildete Gleichung

$$\sum_i \frac{s_i^2}{\lambda - \alpha_i} = 0 \tag{6}$$

mit dem Parameter λ liefert eine solche Schar konfokaler Z. Wie bei den F_2 schneiden sich diese Z orthogonal, und von ihnen gehen drei durch jeden Raumpunkt. Sie bilden also ein „isothermes" Flächensystem.

Es gilt auch dieses Analogon zu den F_2, daß jede Z der Schar (5) von den anderen in den Krümmungslinien — die also algebraische C sind — geschnitten werden (s. Nr. 29).

25. Zykliken und Fokalflächen. Die Zykliden Z haben ein doppeltes Analogon in Kurven, je nachdem letztere ebene oder aber doppelt gewundene sind. Im ersteren Falle werde das Zeichen ζ, im letzteren das Zeichen Z verwendet. Zusammen führen sie den Namen „Zykliken"; die Kenntnis ihrer Haupteigenschaften ist bei eingehender Untersuchung der Z unerläßlich. Auch hier ist *G. Darboux* (l. c.) als Hauptautor anzusehen.

Die Z sind die Schnittkurven einer Kugel mit einer F_2; die ζ sind bizirkulare c_4 mit zwei d_2 in den beiden (konjugiert imaginären) Kreispunkten.

Eine Z läßt sich auf vier verschiedene Arten ansehen als Enveloppe von Kreisen, die einen festen Kreis auf einer gegebenen Kugel, den „Direktorkreis", rechtwinklig schneiden und deren sphärische Zentra auf einem sphärischen Kegelschnitte, dem „Deferenten", liegen. Diese Kreise werden auf der Kugel ausgeschnitten durch die Tangentialebenen je einer der vier, die Z enthaltenden Kegel 2. Ordnung.

Daher geht eine Z durch eine Inversion J wieder in eine solche über; wählt man im besonderen als J-Zentrum die Spitze eines jener Kegel und den J-Modul geeignet, so geht Z in sich über und heißt (s. oben) nach dem Vorgange von *Moutard* anallagmatisch.

Andererseits läßt sich Z auch durch passende J in einen sphärischen Kegelschnitt überführen.

Die vier Direktorkreise schneiden sich zu je zweien orthogonal, die vier Deferentenkegelschnitte sind konfokal.

Jede der vier Scharen doppelt berührender Kreise enthält vier Nullkreise (d. i. vom Radius Null); ihre Mittelpunkte sind die „Brennpunkte" von Z, die Schnittpunkte je eines Paares von Direktorkreis und Deferent. Von diesen 16 Brennpunkten können aber nur vier reell sein. Zwischen den Abständen eines beliebigen Punktes von Z von drei Brennpunkten desselben Direktorkreises besteht eine lineare Relation.

Die Mittelpunkte der Z doppelt berührenden Nullkugeln durchlaufen die „Fokallinien", selbst vier Z-Kurven, die auf vier Kugeln liegen, die orthogonal sind zur Urkugel.

Jede dieser Fokalkurven hat die drei anderen nebst Z zu Fokalkurven; es findet wieder eine gewisse Abstandsrelation statt.

Von den 16 Brennpunkten sind zwölf durch die vier anderen bestimmt. Durch jeden Punkt einer Kugel gehen zwei sich rechtwinklig durchsetzende Z mit gegebenen Brennpunkten.

Dies findet seine Anwendung auf die Zykliden Z. Hierbei sei bemerkt, daß die Eigenschaften der Z durch Spezialisierung aus der *Kummer*schen Fläche K_m (s. Abschn. XI), mit der sie projektiv verwandt sind, ableitbar sind. Indessen erfordert eine direkte Behandlung der Z einfachere Hilfsmittel, und man kann dann umgekehrt durch Verallgemeinerung zur K_m (wie auch zur allgemeinen F_3) übergehen. Die Definition der Z bei *Darboux* ist die *Casey*sche (s. Nr. 22): Sie sind die Enveloppen von Kugeln K, die eine feste Grundkugel K_0, die „Direktrix", orthogonal schneiden, während ihre Mittelpunkte auf einer festen F_2, der „Deferente" (bei *Casey* „Fokal-F_2") liegen. Eine solche Erzeugung ist auf fünf Weisen möglich; die fünf Direktrizen bilden ein Orthogonalsystem und die fünf Deferenten ein konfokales.

Damit ergeben sich die weiteren Analogien mit den Zykliken: Die Z sind anallagmatisch und durch Inversion in F_2 transformierbar; die Brennlinien sind fünf Z, in denen jede Direktrix die zugehörige Deferente schneidet, usf. Die Brennlinien führen zu den Systemen konfokaler Z (s. Nr. 24).

Bei der elementaren Behandlung der Z ist die Inversion J das Haupthilfsmittel. Eine tiefere Einsicht in die ganze Theorie der Z gewinnt man indessen durch passende projektive Verallgemeinerung der Inversion J. Man gehe von einer festen F_2 aus und einem festen Punkte O. Irgendeinem Punkte A wird (1, 1)-deutig involutorisch ein anderer Punkt A' derart zugeordnet, daß sich in ihm die Gerade $g = (A, O)$ mit der Polarebene π von A bzw. F_2 trifft, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, daß A' auf g zu A harmonisch liegt in bezug auf die beiden Schnittpunkte von g mit F_2. Diese quadratische Verwandtschaft (A, A') ist die in Rede stehende verallgemeinerte Inversion J_0; sie geht wieder in J über, wenn man im besonderen die F_2 als Kugel mit dem Zentrum O wählt.

Diese J_0 erweist sich als nützlich bei der Diskussion singulärer Fälle. Man beachte ferner, daß vermöge J_0 jede K treffende Gerade k wieder in eine solche übergeht, wodurch sich die Betrachtung der Fokaleigenschaften der Z durchsichtiger gestaltet u. a. m. Hierbei wird der Begriff der abwickelbaren „Fokalfläche" von Bedeutung, der sich allgemein für eine beliebige Grundfläche F aufstellen läßt.

Die Erzeugenden h dieser (nullteiligen) Fokalfläche treffen K und berühren F.

Dies gilt auch, wenn man an Stelle der Grundfläche F eine Grundkurve C setzt. Die Erzeugenden der abwickelbaren Fokalfläche treffen K und C. Die Doppelkurven dieser Fläche sind in beiden Fällen die „Fokalkurven"; jeder Punkt einer solchen ist ein „Brennpunkt" von F resp. C.

Die Rückkehrkurve einer Fokalfläche ist eine „Minimalkurve", für die jeder Bogen die Länge Null hat.

Die Normalen der Fokalfläche fallen mit den Erzeugenden zusammen, so daß jede Kurve auf der Fokalfläche als eine Krümmungslinie anzusehen ist. Da die Fokalfläche einer Urfläche F diese selbst längs einer Kurve berührt, so ist diese eine Krümmungslinie von F, der Schnitt von F mit der unendlich benachbarten konfokalen Fläche.

Durch Inversion geht die Fokalfläche einer Fläche in die der transformierten Fläche über. Hieran reiht sich noch eine große Reihe von Nebenbetrachtungen und Verallgemeinerungen, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

26. Transzendente Darstellung der Zykliden nach Domsch. Die Zykliden gehören zu den Gattungen von Flächen, deren Punkte sich explizite durch hyperelliptische Funktionen von zwei Variabeln darstellen lassen. Das nämliche gilt auch von den F_4 mit $\bar{C}_2$ überhaupt (s. oben), der *Weddle*schen Fläche und der *Kummer*schen Fläche (Abschn. XI), von dem System konfokaler F_2 und anderen Gebilden. Vorab sei bemerkt, daß sich die Entwicklungen von *Domsch*[53]) vermöge einer geeigneten Kollineation auf die F_4 mit beliebiger irreduzibler ein- oder nullteiliger $\bar{C}_2$ direkt übertragen lassen.

Man kann auf zwei Wegen zu der gewünschten transzendenten Darstellung gelangen.

Entweder direkt, wobei man sich zweckmäßig pentasphärischer Koordinaten bedient.

Oder aber indirekt, indem man davon ausgeht, daß die F_2 — wie auch die *Kummer*sche F_4 — vermöge gewisser Transformationen in Zykliden Z überführbar sind und dann die als bekannt angesehenen Darstellungen der ersteren Fläche auf die Z überträgt.

Domsch schlägt diesen zweiten Weg ein, der den Vorzug größerer Anschaulichkeit besitzt. Vorab wird die Transformation eingehend untersucht, die ein System konfokaler F_2 in ein solches konfokaler Z überführt. Sei K eine feste Kugel, P ein beliebiger Punkt und π die Polarebene von P bez. K. Diese Ebene π läßt sich als Kugel mit unendlich großem Radius auffassen. Man bestimme dann in dem Kugelbüschel (K, π) die beiden Punktkugeln (sc. vom Radius Null) mit den Mittelpunkten P_1, P_2. Damit ist eine $(1, 2)$-deutige Korrespondenz C zwischen den Punkten P und den Punktepaaren P_1, P_2 festgelegt, die die Grundlage des Ganzen bildet. Mit Hilfe der C lassen sich einmal die gestaltlichen Verhältnisse der Z verfolgen, andererseits die *Darboux*schen Entwicklungen (s. Nr. 23), die auf der Anwendung der hyperelliptischen Funktionen auf ein System konfokaler F_2 beruhen, auf die Z übertragen.

Hierbei entsprechen den gemeinsamen Tangenten zweier konfokaler F_2 die gemeinsamen, doppelt berührenden Kreise zweier konfokaler Z. Nunmehr wird die klassische *Lie*sche Transformation[1]) T_l des Geradenraumes in den Kugelraum herangezogen. Vermöge dieser T_l läßt sich die *Kummer*sche Fläche K_m (s. Nr. 71) auf die Z abbilden. Damit geht aber auch die Verteilung hyperelliptischer Parameter auf K_m in eine entsprechende auf Z über. Hierbei spielen auch Kurven

53) *P. Domsch*, Dissert. Leipzig 1885 = Arch. Math. Phys. (2) 1, p. 193; 2, p. 225.

eine Rolle, die durch gewisse, zwischen jenen Parametern festgesetzte Beziehungen bestimmt werden.

Entsprechend den drei verschiedenen Parameterverteilungen auf K_m (s. Nr. 71) ergeben sich ebensoviele auf Z. Die Art der gewonnenen Ergebnisse sei durch ein Beispiel illustriert.

Die 16, gleich Null gesetzten Θ-Funktionen liefern auf Z entweder 5 C_4, eine C_8 und 10 C_{16}, oder 4 C_8 und 12 C_4, oder endlich 16 g, deren jede K trifft.

Diese drei Fälle entsprechen gerade den obigen drei Parameterverteilungen.

Es folgen noch einige weitere Anwendungen auf die K_m. Führt man die beiden oben erwähnten Transformationen hintereinander aus, so erhält man eine solche, die ein System konfokaler F_2 direkt in ein gewisses System von K_m überführt. So gelangt man u. a. zu Schließungssätzen, wo an Stelle eines Polygons eine geschlossene Reihe von Hyperboloidstücken tritt.

27. Die Dupinsche Zyklide. *Ch. Dupin*[54]) gelangte zu dieser Fläche mit $4 D_2$, als er die Flächen bestimmte, deren Krümmungslinien Kreise sind (s. auch bei *Kummer*, Nr. 7). Die Z_0 ist erzeugbar als umhüllt durch die Kugeln, die drei gegebene Kugeln berühren. Sie werden aber zugleich von unendlich vielen Kugeln einer zweiten Schar berührt, so daß die Z_0 von zwei Kugelscharen umhüllt wird. Die Berührungskreise bilden auf Z_0 zwei orthogonale Kreisscharen, eben die Krümmungslinien.

Jede der beiden Kugelscharen ist in einem Kugelnetz enthalten. Es ist jeweils die Potenzachse des einen Netzes die Ähnlichkeitsachse der anderen Kugelschar.

Diese beiden (windschiefen) Achsen stehen aufeinander senkrecht, und die beiden Ebenen, die je durch eine Achse senkrecht zur anderen gelegt werden, sind Symmetrieebenen der Z_0.

Liegen im besonderen beide auf der Z_0, so reduziert sich diese auf eine (zirkulare) F_3 (s. Art. „F_3", Nr. 16). Dann ist in jeder der beiden Kugelscharen eine einzige Ebene enthalten, die von den Kugeln der anderen Schar in den Punkten einer der beiden Achsen berührt wird.

Im allgemeinen Falle dagegen sind in der einen Kugelschar zwei reelle, in der anderen zwei imaginäre Ebenen enthalten, die sich je

54) *Ch. Dupin*, Applications de Géom. Paris 1822. Bezüglich weiterer Literatur sei einmal auf Note 48) hingewiesen, sodann auf: *A. Mannheim*, Nouv. Ann. 19 (1860), p. 67; *Moutard*, ib. (2) 3 (1864), p. 306, 536; *A. Enneper*, Ztschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 393; *H. Lemonnier*, Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 514.

in einer der beiden Achsen schneiden. Diese vier singulären Tangentialebenen, die die Z_0 in Kreisen berühren, treten an die Stelle von vier der fünf *Kummer*schen Kegel. Der fünfte dagegen bleibt erhalten und liefert zwei weitere Kreisscharen auf der Z_0 (s. Nr. 9).

Cl. Maxwell[55]) hat die Gestalten der Z_0 verfolgt und durch stereoskopische Zeichnungen wiedergegeben. Falls die Z_0 zwei reelle D_2 aufweist, bieten sich zwei Typen dar:

1. die *Hornzyklide;* sie setzt sich aus zwei, in den D_2 zusammenstoßenden Hörnern zusammen;

2. die *Spindelzyklide*; sie besteht aus zwei Schalen, die eine spindelförmig, die andere melonenförmig und die erstere umschließend.

Zwei Sondertypen von Z_0 entstehen, wenn die beiden D_2 koinzidieren.

Alle diese Z_0 gehen aus einem Rotationskegel (resp. Rotationszylinder) durch Inversion hervor und sind daher einfach diskutierbar. Hat aber die Z_0 keine reellen D_2, so ist sie eine *Ringzyklide;* ein Sondertypus ist der Kreisring (Torus).

Wählt man die beiden Symmetrieebenen als $z = 0$, $y = 0$, so nimmt, für $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und a, b, c, d als vier Parameter, die Gleichung der Z_0 die Gestalt an

$$\begin{aligned}(1) \qquad Z_0 \equiv \varrho^4 - \sum a \cdot x\varrho^2 + \sum ab \cdot \varrho^2 - (a+b)(c+d)\,y^2 \\ - (b+c)(a+d)\,z^2 - \sum abc \cdot x + abcd = 0.\end{aligned}$$

28. Fokalkurven und Abstandsrelationen. Wir kommen jetzt zu den „Fokalkurven“ der Z_0; sie sind der Ort der Zentren der beiden Kugelscharen in ihren Symmetrieebenen. Das ist, wie bei den konfokalen F_2, eine Ellipse und Hyperbel, wo jede durch die Brennpunkte der anderen geht.

Die Kegel, die von den Punkten je der einen Fokalkurve die andere projizieren, sind Rotationskegel, die die Krümmungskreise der Z_0 enthalten.

Zwischen den Abständen, die von den beiden Brennpunktepaaren — F, F_1 auf der Hyperbel, F', F_1' der Ellipse — der Fokalkurven, und zwei laufenden Punkten der letzteren — Q auf der Hyperbel, R auf der Ellipse — bestimmt werden, bestehen einfache Relationen. Zunächst hat man die elementarbekannten Beziehungen

$$(2) \qquad FQ - F_1 Q = \text{konst.}, \quad F'R + F_1'R = \text{konst.}$$

55) *Cl. Maxwell*, Quart. J. 9 (1868), p. 111. Vgl. auch die Darstellung bei *F. Klein,* Vorlesungen über höhere Geometrie, Göttingen (autographiert) 1893; 3. Aufl., herausg. von *W. Blaschke,* Berlin 1926, § 13.

Sodann gilt

(3) $$QR - FQ - RF' = \text{konst.}$$

Man nehme weiter auf der Geraden (QR) den Punkt P so an, daß stets

(4) $$PQ - FQ = \text{konst.},$$

dann ist auch

(5) $$PR - RF' = \text{konst.},$$

oder auch

(5') $$PR + RF_1' = \text{konst.}$$

Damit hat man eine elementare Konstruktion der Z_0, die vom Punkte P erfüllt wird, und zwar so, daß (PQ) die Normale der Z_0 in P liefert.

Läßt man also die obigen Konstanten variieren, so erhält man eine Schar paralleler Z_0. Man erhält deren Gleichung unmittelbar aus (1), wenn man die a, b, c, d ersetzt durch $a + \lambda$, $b - \lambda$, $c + \lambda$, $d - \lambda$.

29. Die Krümmungslinien auf den Zykliden Z. Wie in Nr. 25 betont, sind nach *G. Darboux*[56]) die Krümmungslinien auf einer Zyklide Z deren Schnitte mit den konfokalen Zykliden.

Da sich zwei bizirkulare c_4 — indem sie in zwei festen Punkten (den Kreispunkten) d_2 besitzen — noch in acht beweglichen Punkten treffen, so haben zwei Zykliden, außer dem doppelt zählenden Kugelkreise K, noch eine C_8 als Restschnittkurve gemein. Somit sind die Krümmungslinien auf einer Z gewisse C_8, die daraufhin genauer untersucht werden. Eine tiefere Einsicht in deren Eigenschaften erhält man aber mit *Darboux* (l. c.), wenn man sich, ähnlich wie bei der Inversion (s. Nr. 25), einer geeigneten projektiven Verallgemeinerung bedient.

Die gewöhnliche Normale n einer Fläche F in einem Punkte P, mit der Tangentialebene T, läßt sich im projektiven Sinne charakterisieren als diejenige durch P laufende Gerade, die zu T bezüglich des Kugelkreises K — aufgefaßt als eine ausgeartete Φ_2 — konjugiert ist.

Ersetzt man hier K durch eine beliebige aber fest gewählte „absolute" Fläche Φ_2, so tritt an Stelle von n die „verallgemeinerte" Normale n', und entsprechend an Stelle der gewöhnlichen Krümmungslinien C die „verallgemeinerten" C'; als Ort der bei Variieren von P auf F entstehenden Treffpunkte benachbarter n'. Wählt man im besonderen im Falle einer Zyklide Z (oder auch allgemeiner einer F_4

56) Vgl. weiter *G. Darboux,* Paris C. R. 92 (1881), p. 29.

mit $\bar{C}_2$) die Fläche Φ_2 als eine der Z eingeschriebene, so gehen die Kurven C' über in die „*Darboux*schen Krümmungslinien" C'' auf Z. Ihre Behandlung basiert auf der Diskussion ihrer Differentialgleichung, falls man als Variable die Linienkoordinaten der verallgemeinerten Normale verwendet (s. Nr. 73).

G. Humbert[57]) hat den Zusammenhang zwischen den *Darboux*schen Krümmungslinien C'' auf Z mit den einbeschriebenen Φ_2 genauer verfolgt und das bemerkenswerte Ergebnis abgeleitet, daß jene C'' von der Auswahl der einzelnen einbeschriebenen Φ_2 ganz unabhängig sind.

V. F_4 mit einer Doppelgeraden $\bar{g}$.

30. Einleitung. Diese Art von F_4 schließt sich an die mit $\bar{C}_2$ an. Sie treten schon bei *Kummer* auf (Nr. 7) als solche, die von ∞^1 Ebenen — nämlich den Ebenen durch die $\bar{g}$ — in C_2 geschnitten werden.

A. Clebsch[58]) hat diese F_4 dann eingehender behandelt und *M. Noether*[59]) einige Ergänzungen dazu gegeben. *Kummer* gibt die durchsichtige Gleichungsform

$$(1) \qquad F_4 \equiv x_i^2\varphi + 2x_ix_k\psi + x_k^2\chi = 0,$$

wo φ, ψ, χ beliebige quadratische Formen sind; die $\bar{g}$ ist: ($x_i = 0$, $x_k = 0$).

Zunächst treten in (1) $3 \cdot 10 = 30$ Koeffizienten auf; es ist aber leicht zu sehen, daß unter den zugehörigen Potenzprodukten der x sechs zweimal vorkommen und eines ($x_i^2x_k^2$) dreimal. Die Anzahl der untereinander verschiedenen Potenzprodukte reduziert sich somit auf 22. Man hat daher:

„Eine F_4 mit vorgegebener $\bar{g}$ erfordert 13 Bedingungen, bei unbestimmt gelassener $\bar{g}$ nur 9."

Jene 13 Bedingungen sagen eben aus, daß gewisse 13 Potenzpunkte der x in der Gleichung der F_4 wegfallen.

Jeder Punkt P' $(0, 0, x_l', x_m')$ auf $\bar{g}$ ist ein D_2 der F_4. Es läßt sich das auch algebraisch bestätigen, indem alle vier Ableitungen der Form F_4 (1) für einen solchen Punkt P', d. i. für $x_i = x_k = 0$, verschwinden. Denn diese Ableitungen enthalten immer nur solche Glieder, die entweder durch x_i oder durch x_k teilbar sind.

57) *G. Humbert*, J. Éc. Pol. 55 (1885), p. 127.

58) *A. Clebsch*, Math. Ann. 1 (1868), p. 260; vgl. *G. Darboux*, Bull. math. astr. 3 (1872), p. 221, 251, 281.

59) *M. Noether*, Math. Ann. 3 (1870), p. 101, 175; 4 (1871), p. 547.

31. Vorstufen zu einer F_4 mit $\bar{g}$. Es ist nützlich, die F_4 (1) mit einer $\bar{g}$ allmählich entstehen zu lassen. Man gehe aus von einer F_4, die zwei reelle D_2[60]), etwa in A_l und A_m, besitzt. Dann müssen die acht Potenzprodukte x_l^4, x_m^4, $x_l^3 x_i$, $x_l^3 x_k$, $x_l^3 x_m$, $x_m^3 x_i$, $x_m^3 x_k$, $x_m^3 x_l$ wegfallen. Mithin treten umgekehrt außer den in (1) angegebenen Gliedern noch die folgenden fünf auf

$$x_l^2 x_m^2,\ x_l^2 x_i x_m,\ x_l^2 x_k x_m,\ x_m^2 x_i x_l,\ x_m^2 x_k x_l,$$

so daß, wie es sein muß, eine F_4 mit zwei gegebenen D_2 von 26 Konstanten abhängt.

Legt man einer solchen F_4 mit zwei D_2 die weitere Bedingung auf, irgendeinen dritten Punkt P' der Geraden g $(x_i = x_k = 0)$ zu enthalten und damit diese selbst, so erfordert dies das Wegfallen des Gliedes $x_l^2 x_m^2$, so daß noch die vier Produkte $x_l^2 x_i x_m$, $x_l^2 x_k x_m$, $x_m^2 x_i x_l$, $x_m^2 x_k x_l$ verbleiben. Versteht man daher unter A ein beliebiges lineares Aggregat derselben

$$(2)\qquad A = a_{im} x_l^2 x_i x_m + a_{km} x_l^2 x_k x_m + a_{il} x_m^2 x_i x_l + a_{kl} x_m^2 x_k x_l,$$

so nimmt die Gleichung der F_4, die die Gerade g enthält und auf ihr zwei D_2, in A_l, A_m, die Gestalt an

$$(3)\qquad F_4 \equiv x_i^2 \varphi + 2 x_i x_k \psi + x_k^2 \chi + A = 0.$$

Weiter verlange man, daß diese F_4 in irgendeinem dritten Punkt P' $(0, 0, x_l', x_m')$ auf g einen D_2 besitze.

Es müssen dann wiederum für P' alle vier Ableitungen der Form F_4 (3), oder auch, was genügt, der Form A verschwinden. Sei A_r die die Ableitung von A nach x_r. Dann verschwinden A_l und A_m von selbst für $x_i = x_k = 0$. Es treten also die beiden Bedingungen hinzu

$$(4)\qquad \begin{cases} A_i \equiv a_{im} x_l' + a_{il} x_m' = 0, \\ A_k \equiv a_{km} x_l' + a_{kl} x_m' = 0. \end{cases}$$

Somit darf man setzen, unter ϱ, σ willkürliche Parameter verstanden,

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{im} = \varrho x_m', & a_{il} = -\varrho x_l', \\ a_{km} = \sigma x_m', & a_{kl} = -\sigma x_l'. \end{cases}$$

Damit nimmt A die spezifische Gestalt an

$$(6)\qquad \begin{aligned} A &\equiv x_l x_m \{\varrho x_m' x_l x_i + \sigma x_m' x_l x_k - \varrho x_l' x_m x_i - \sigma x_l' x_m x_k\} \\ &\equiv x_l x_m (x_l x_m' - x_l' x_m)(\varrho x_i + \sigma x_k). \end{aligned}$$

Nunmehr schneide man die F_4 (3) mit irgendeiner Ebene E_τ durch g

$$(7)\qquad x_i = \tau x_k.$$

60) Über die verschiedenen Formen eines D_2 und ihre gegenseitige Überführung s. *K. Rohn,* Math. Ann. 22 (1883), p. 124.

Solange die F_4 auf g nur zwei D_2 (in A_l, A_m) besitzt, ist der Schnitt mit E_τ eine c_4 mit d_2 in A_m und A_l, deren Gleichung (oder vielmehr die ihrer Projektion von A_i auf die Ebene $x_i = 0$) durch Einsetzung von (7) in die Gleichung der F_4 erhalten wird.

Enthält die F_4 die Gerade g, wie in (3), so spaltet sich in c_4 der Faktor x_k ab, d. h. die c_4 zerfällt in g und eine c_3, die durch A_l, A_m geht und g noch in einem dritten, mit dem Parameter τ in (7) variierenden Punkte $P(\tau)$ trifft. Gemäß (6) ist die Gleichung dieser c_3 von der Gestalt

$$(8) \qquad c_3 \equiv x_k\varphi_2(x_k, x_l, x_m) + x_l x_m(\tau\varrho + \sigma)(x_l x_m' - x_m x_l') = 0.$$

Dann und nur dann, wenn dieser Restpunkt $P(\tau)$ fest ist, d. i. mit $P'(0, 0, x_l', x_m')$ zusammenfällt, besitzt, wie (6) lehrt, die F_4 einen dritten D_2 in P'. Auf einer Geraden g einer F_4 können also drei D_2 liegen, ohne daß damit schon g zu einer Doppelgeraden $\bar{g}$ würde.

Die Forderung eines vierten D_2 aber auf g, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Forderung, daß sich von der c_3 abermals die Gerade g abspaltet, ist algebraisch damit gleichwertig, daß die Gleichung

$$(9) \qquad \tau\varrho + \sigma = 0$$

in τ identisch erfüllt ist. Dann aber verschwinden ϱ und σ einzeln, und man gelangt von (3) zu (1) zurück.

32. Die 16 Geraden auf der Fläche. Man schneide jetzt auch die F_4 (1) mit einer beliebigen Ebene $\mathsf{E}_\tau = \mathsf{E}(\tau)$ des Büschels (7). Eine solche E_τ schneidet aus der F_4 noch eine C_2 aus mit der Gleichungsform

$$(10) \qquad c_2(x_k, x_l, x_m) \equiv \sum\sum a_{rs} x_r x_s = 0.$$

Auf der F_4 existiert also, wie schon *Kummer* (s. Nr. 7) angab, eine ∞^1-Schar von C_2, die von dem Ebenenbüschel mit der Achse g ausgeschnitten wird. Unter diesen C_2 befindet sich eine endliche Anzahl solcher, die in ein Geradenpaar zerfallen. Für solche muß die Determinante $D(\tau)$ der Form c_2 (10) verschwinden. Fügt man jedem Koeffizienten a_{rs} seinen Grad in τ in Klammer bei, so wird die Gleichung $D(\tau) = 0$

$$(11) \qquad D(\tau) \equiv \begin{vmatrix} a_{kk}\,(2), & a_{kl}\,(3), & a_{km}\,(3) \\ a_{kl}\,(3), & a_{ll}\,(2), & a_{lm}\,(2) \\ a_{km}\,(3), & a_{lm}\,(2), & a_{mm}\,(2) \end{vmatrix} = 0.^{61)}$$

Da die linke Seite den Grad 8 in τ erhält, so gilt der Satz:

„Auf einer F_4 mit $\bar{g}$ befinden sich 16 Gerade g, die sich in acht,

61) Eine übersichtlichere Ableitung der Gleichung (11) findet sich bei *W. Fr. Meyer*, Giorn. di mat. 67 (1930), p. 1.

jeweils mit $\bar{g}$ inzidente Paare zerlegen. Je zwei g, die verschiedenen Ebenen angehören, sind windschief."

Ist umgekehrt g irgendeine Gerade auf der F_4, die die $\bar{g}$ treffen muß, so schneidet die Ebene $(g, \bar{g})$ die zugehörige Inzidenzgerade aus.

33. Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Wir kommen zur Abbildung der F_4 (1) mit $\bar{g}$ auf eine Ebene.

Da jede E aus der F_4 eine c_4 mit einem d_2 (auf $\bar{g}$), also vom Geschlecht 2, ausschneidet, so müssen auch die c des Abbildungsgebüsches G solche vom Geschlecht 2 sein, und je zwei solche c müssen sich in vier variierenden Restpunkten treffen.

Diesen Bedingungen genügt nach *Clebsch*[58]) ein c_4-Gebüsch G mit neun Grundpunkten, von denen einer, A_0, ein d_2 ist, während die acht übrigen $A_i, \ldots, A_r$ einfache Punkte d_1 sind. Die acht Grundpunkte $A_i, \ldots, A_r$ sind die Bilder von acht windschiefen g $(= a_i, \ldots, a_r)$ der F_4.

Andererseits liefern die acht Verbindungsgeraden von A_0 mit irgendeinem der A (A_0, A_t) $(t = i, \ldots, r) = c_{0t}$ die acht weiteren g der F_4. Je ein Paar (a_t, c_{0t}) ist ein Inzidenzpaar.

Eine Gerade c_{0t} ergänzt sich mittels der durch alle 9 Fundamentalpunkte gehenden c_3, die mit c_3' bezeichnet sei, zu einer c_4 in G. Andererseits bildet diese c_3' aber auch zu jeder beliebigen Geraden $c_1^{(0)}$ durch A_0 die Ergänzung zu einer c_4 in G.

Somit ist die c_3' das Bild der $\bar{g}$, derart, daß irgendeinem Punkte P auf $\bar{g}$ zwei mit einem A_0 inzidente Punkte Q, Q' auf c_3' entsprechen und umgekehrt.

34. Die Kegelschnitte auf der Fläche. Die Bilder der c_1 (A_0) auf der F_4 sind die ∞^1 C_2, die von den Ebenen des Büschels $(\bar{g})$ ausgeschnitten werden. Es ist dies aber auch die einzige stetige Schar von C_2 auf F_4, da eine stetige Schar von c_4 in G nicht anders zerfallen kann als wie oben angegeben.

Im besonderen befinden sich unter diesen ∞^1 C_2 die acht Inzidenzpaare von g. Indessen existiert auf der F_4 noch eine endliche Anzahl von $C_2 = C_2'$ anderen Charakters.

Man entnimmt der Abbildung, daß es drei Arten von Bildern solcher C_2' gibt. Erstens:

α) Die 28 Geraden $c_{ik} = (A_i, A_k)$.

Diese ergänzen sich jeweils zu einer c_4 in G vermöge der „komplementären":

α') 28 $r_3^{(i,k)}$, mit d_2 in A_0, und d_1 in den 6 übrigen $A_l, \ldots, A_r$.

Je ein solches Paar $(c_{ik}, r_3^{(i,k)})$ ist das Bild von zwei koplanaren C_2' der F_4. Von deren vier gemeinsamen Punkten liegt einer auf $\bar{g}$.

In der Bildebene trifft c_{ik} die c_3' in einem Restpunkte C_{ik}, dessen Verbindungsgerade mit A_0 einen weiteren Restpunkt C_{ik} liefert.

Dann ist das Paar (C_{ik}, C'_{ik}) das Bild des auf $\bar{g}$ gelegenen Schnittpunktes der beiden C_2'.

Andererseits treffen sich c_{ik} und $r_3^{(i,k)}$ in drei Punkten, den Bildern der drei weiteren Schnittpunkte beider C_2'.

Als weitere Bilder von C_2' auf F_4 hat man:

β) Die $c_2 = c_2^{(i,k,l,m)}$ durch A_0 und vier der Grundpunkte A: $A_i, \ldots, A_m$.

Eine solche $c_2^{(i,k,l,m)}$ ergänzt sich mit der „komplementären“ $c_2^{(n,p,q,r)}$ durch A_0 und die vier übrigen A zu einer c_4 in G.

Auch jedes solche c_2-Paar (β) ist das Bild von zwei koplanaren C_2' der F_4. Die c_3' trifft die $c_2^{(i,k,l,m)}$ in einem Restpunkte $C^{(i,k,l,m)}$, dessen Verbindungsgerade mit A_0 einen weiteren Restpunkt $C'^{(i,k,l,m)}$ ausschneidet. Das nämliche Paar C, C' ergibt sich für die komplementäre $c_2^{(n,p,q,r)}$ und liefert das Bild des auf $\bar{g}$ gelegenen Schnittpunktes der beiden C_2', während deren drei übrige Schnittpunkte den (außer A_0) gemeinsamen Punkten der $c_2^{(i,k,l,m)}$ und $c_2^{(n,p,q,r)}$ entsprechen.

Nun gibt es $\binom{8}{4} = 70$ Arten, wie man aus 8 Elementen $i, \ldots, r$ 4 herausgreifen kann, die sich in 35 Paare vom Typus (i, k, l, m), (n, p, q, r) zerlegen.

Damit ist man zu $70 = 2 \cdot 35$ weiteren C_2' (β) auf F_4 gelangt. Hiermit sind zugleich alle Möglichkeiten erschöpft, wie eine c_4 in G zerfallen kann.

Es gibt aber in G noch eine ausgezeichnete rationale $c_4 = r_4'$ mit d_3 in A_0, und d_1 in den acht übrigen A.

Auch diese r_4' wird von einer beliebigen c_4 in G in zwei variierenden Restpunkten getroffen, ist also das Bild einer weiteren C_2' (γ) auf F_4.

Das Bild der koplanaren C_2' ist ersichtlich der Punkt A_0 selbst.

Die c_3' trifft die r_4' in einem Restpunkte C_0, während der Restschnittpunkt der Geraden (A_0, C_0) mit c_3' in A_0 selbst fällt, so daß (A_0, C_0) die Tangente der c_3' in A_0 ist.

Eben dieses Paar (A_0, C_0) ist das Bild des auf $\bar{g}$ gelegenen Schnittpunktes beider C_2' (γ). Die drei Tangenten der r_4' in d_3 (A_0) entsprechen den drei weiteren Schnittpunkten beider C_2'.

Faßt man zusammen, so hat man den Satz:

„Auf einer F_4 mit $\bar{g}$ existieren außer der früheren stetigen ∞^1-Schar von C_2 noch $2 \cdot 28 + 2 \cdot 35 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 64 = 128$ einzelne Kegelschnitte C_2', die sich in 64 Paaren koplanarer anordnen. Diese

64 Paare zerlegen sich in drei Arten gemäß den jeweils komplementären Bildern:

α) Die 28 Geraden $c_{ik} = (A_i, A_k)$,
α') die komplementären 28 $r_3^{(i,k)}$ mit d_2 in A_0 und d_1 in den sechs übrigen $A_l, \ldots, A_r$;

β) die $c_2 = c_2^{(i,k,l,m)}$ durch A_0 und irgend vier der A, etwa $A_i, \ldots, A_m$,
β') die komplementären $c_2^{(n,p,q,r)}$ durch A_0 und die vier übrigen A;

γ) die $c_4 = r_4'$ mit d_3 in A_0 und d_1 in den acht übrigen A,
γ') der Punkt A selbst."

Aus der Abbildung läßt sich aber auch entnehmen, welche der 16 g von irgendeiner der 128 C_2' getroffen werden, sowie die gegenseitigen Schnittverhältnisse von C_2' verschiedener Arten.

Wir begnügen uns mit der Anführung einiger Ergebnisse.

Je sieben windschiefe g der F_4 werden zusammen mit $\bar{g}$ von einer C_2' auf F_4 getroffen, die noch einer achten g begegnet.

Auch so gelangt man zu den 128 C_2', die zu je zweien in 64 dreimal berührenden Ebenen $\overline{\overline{T}}$ liegen. Je zwei solche koplanare C_2' treffen zusammen alle 16 g.

Jede der 128 C_2' wird von 28 anderen doppelt geschnitten, mit denen zusammen sie dieselben zwei g trifft; von 70 anderen C_2' einfach, mit denen zusammen sie dieselben 4 g trifft; endlich von 28 C_2' gar nicht, mit denen zusammen sie dieselben 6 g trifft.

35. Die vier Kuspidalpunkte der F_4 mit $\bar{g}$. Die F_4 mit einer Kuspidalgeraden. Unter den möglichen Spezialfällen der F_4 mit $\bar{g}$ ist bemerkenswert der, wo die $\bar{g}$ zu einer Rückkehrkante (Kuspidalgeraden) wird. Während die F_4 mit $\bar{g}$ im allgemeinen eine Φ_{20} ist, reduziert sie sich im vorliegenden Falle auf eine Φ_{12}.

Vorab sei darauf hingewiesen, daß eine F_4 mit $\bar{g}$ im allgemeinen vier Kuspidalpunkte besitzt.

Um sie zu bestimmen, entwickele man in der Gleichung (1) die drei quadratischen Formen φ, ψ, χ nach x_l und x_m, also etwa für φ

$$\varphi \equiv a_{ii} x_l^2 + 2 b_{ii} x_l x_m + c_{ii} x_m^2 + l_{ii} x_l + m_{ii} x_m + q_{ii}, \tag{12}$$

wo die a, b, c Konstante sind, die l, m lineare Formen in x_i, x_k und die q eine quadratische in x_i, x_k.

Man bediene sich eines beweglichen Koordinatensystems derart, daß drei Ecken A_m, A_i, A_k desselben festbleiben, während die vierte Ecke A_l (des früheren festen Systems) durch einen variierenden Punkt A_l' $(0, 0, 1, \mu)$ auf der Kante (A_l, A_m) ersetzt wird.

Die zugehörige Koordinatentransformation lautet

(13) $$x_i : x_k : x_l : x_m = x_i' : x_k' : x_l' : x_l'\mu - x_m.$$

Dies setze man in (12) ein und ordne nach x_l', so kommt, wenn man nur auf das Glied mit $x_l'^2$ achtet,

(12') $$\varphi' \equiv x_l'^2(a_{ii} + 2b_{ii}\mu + c_{ii}\mu^2) + \cdots.$$

Verfährt man analog mit ψ und χ, so geht die ursprüngliche Gleichung F_4 (1) über in

(14) $$\begin{aligned} F_4' \equiv x_l'^2\{ & a_{ii}x_i^2 + 2a_{ik}x_ix_k + a_{kk}x_k^2) \\ & + 2\mu(b_{ii}x_i^2 + 2b_{ik}x_ix_k + b_{kk}x_k^2) \\ & + \mu^2(c_{ii}x_i^2 + 2c_{ik}x_ix_k + c_{kk}x_k^2)\} + \cdots \\ \equiv x_l'^2 & (a + 2\mu b + \mu^2 c) + \cdots = 0, \end{aligned}$$

wo a, b, c feste quadratische Formen in x_i, x_k sind.

Soll jetzt die Ecke A_l' der Forderung genügen, ein Kuspidalpunkt der F_4 zu werden, so muß der in A_l' liegende D_2, der im allgemeinen ein biplanarer ist, in einen uniplanaren ausarten, d. h. die Diskriminante $D(\mu)$ des Faktors von $x_l'^2$ in (14) muß verschwinden, und umgekehrt. Somit ergibt sich für die Kuspidalpunkte der F_4 auf $\bar{g}$ ($x_i = x_k = 0$) (14) die Bestimmungsgleichung in dem Parameter μ

(15) $$D(\mu) \equiv ac - b^2 = 0.$$

Den vier Wurzeln dieser Gleichung entsprechen die vier Kuspidalpunkte der F_4 (1).

Soll jetzt weiter die $\bar{g}$ zur Kuspidalgeraden werden, so daß jeder D_2 auf $\bar{g}$ ein uniplanarer wird, so muß die Gleichung (15) in μ identisch erfüllt sein, und umgekehrt.

Diese Forderung ist aber gleichwertig mit der anderen, daß der durch die drei quadratischen Formen a, b, c dargestellte Kegelschnitt mit dem Normkegelschnitt seiner Ebene zusammenfällt. Oder auch, man darf den Parameter μ so normieren, daß das Koeffizientensystem der a_{ii}, b_{ii}, c_{ii}, ... in (14) die Werte erhält: $0, 0, \mu^2$; $0, \mu, 0$; $1, 0, 0$. Geht man zurück zur ursprünglichen Gleichung (1) resp. (12), so erkennt man, daß die in x_l, x_m quadratischen Aggregate C_{ii}, C_{ik}, C_{kk} innerhalb der φ, ψ, χ die Gestalt annehmen

(16) $$C_{ii} \equiv x_m^2\mu^2, \quad C_{ik} \equiv x_lx_m\mu, \quad C_{kk} \equiv x_l^2,$$

und damit das entsprechende Aggregat C in der Gleichung der F_4 selbst

(17) $$C \equiv x_i^2x_m^2\mu^2 + 2x_ix_kx_lx_m\mu + x_k^2x_l^2 \equiv (x_ix_m\mu + x_kx_l)^2.$$

Führt man hier wieder mittels (13) statt x_m die neue Koordinate $x_l'\mu - x_m$ ein, so beginnt der nach x_l' geordnete Klammerausdruck in (17) mit

$$(18) \qquad x_l'(x_i\mu + x_k) + \cdots.$$

Während also der Kuspidalpunkt auf $\bar{g}$ variiert, dreht sich seine Tangentialebene um $\bar{g}$.

Zusammenfassend hat man den Satz:

„Soll die Doppelgerade $\bar{g}$ ($x_i = x_k = 0$) einer F_4 (1) zu einer Kuspidalgeraden werden, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß sich das Aggregat der in x_l, x_m quadratischen Glieder in F_4 als volles Quadrat von der Gestalt (17) darstellen läßt.

Durchläuft dann der Kuspidalpunkt die Kuspidalgerade, so dreht sich seine Tangentialebene um die Kuspidalgerade.“

36. Spezielle F_4 mit einer Doppelgeraden. Von der Liniengeometrie aus gelangte *J. Plücker*[62]) zu einer F_4 mit $\bar{g}$ und acht einzelnen D_2.

Es gibt dann vier Ebenenpaare, die die acht D_2, jede Ebene vier von ihnen, enthalten. Durch die $\bar{g}$ gehen vier Ebenen, die die F_4 längs einer Geraden berühren, die jeweils zwei der acht D_2 enthält. Die F_4 ist zugleich eine Φ_4.

Eine F_4 mit $\bar{g}$ und vier weiteren (nicht in einer Ebene gelegenen) D_2 hat *W. Frahm*[63]) durch geeignete Modifikation des *Clebsch*schen Verfahrens auf eine Ebene abgebildet.

Daß auf der (gewöhnlichen) $\bar{g}$ der Reihe nach ein, zwei, drei Punkte D_2 zu D_3 werden können, ohne daß die $\bar{g}$ zu einer $\bar{\bar{g}}$ wird, daß aber das Auftreten eines vierten solchen D_3 die $\bar{g}$ zu einer $\bar{\bar{g}}$ macht, wird in Abschn. VI gezeigt.

Es sei noch hingewiesen auf eine von *M. Noether*[64]) entdeckte, beachtenswerte F_6 mit einer $\bar{g}$ und einer $\bar{C}_4$, die das Geschlecht — 1 besitzt.

---

62) *J. Plücker,* Neue Geometrie des Raumes, I, Leipzig, p. 168. Vgl. die weiteren Ausführungen bei *A. Clebsch,* Math. Ann. 1 (1868), p. 253; 2 (1869), p. 1; *F. Klein,* ib. 2 (1870), p. 371; *A. Cayley,* London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 281.

63) *W. Frahm,* Math. Ann. 7 (1874), p. 512.

64) *M. Noether,* Math. Ann. 21 (1883), p. 399.

VI. F_4 mit dreifachem Punkt und solche mit einer dreifachen Geraden.

37. F_4 mit dreifachem Punkt und ihre Abbildung auf die Ebene. Unter den auf eine Ebene Π abbildbaren F_4 sind auch bemerkenswert die mit einem D_3.[65]) Sei zunächst, im einfachsten Falle, der D_3 ein einzelner gewöhnlicher dreifacher Knotenpunkt.

Uusvicla
str. 1640

Dann geht die Abbildung unmittelbar hervor durch Projektion der F_4 vom D_3 aus auf eine Ebene Π, die man als Koordinatenebene $x_m = 0$ wähle. Verlegt man noch den D_3 in die Gegenecke A_m, so nimmt die Gleichung der F_4 die Gestalt an

$$(1) \qquad F_4 = x_m a_3 - a_4 = 0,$$

wo a_3, a_4 ternäre Formen in x_i, x_k, x_l der Ordnung 3 resp. 4 bedeuten. Die Gleichung $a_3 = 0$ liefert im Raume den Tangentenkegel K_3 des D_3 (in der Ebene Π dessen Spur), während $a_4 = 0$ den Schnitt von Π mit der F_4 darstellt, im Raume den über dieser Kurve stehenden Kegel K_4.

Die beiden Kegel K_3 und K_4 haben 12 Kanten gemein; das sind die 12 Geraden g der F_4. Deren Spuren in Π seien mit A_r ($r = 1, 2, \ldots, 12$) bezeichnet; diese spielen die Rolle der Fundamentalpunkte in Π bei der Abbildung.

Irgendein ebener Schnitt der F_4 projiziert sich in eine c_4 durch die 12 Punkte A, und umgekehrt. Damit hat man den Satz:

„Die Abbildung der F_4 mit D_3 auf eine Ebene Π vollzieht sich durch ein Gebüsch G von c_4 (mit dem Geschlecht $p = 3$) mit 12 auf einer festen c_3 gelegenen Grundpunkten A, den Fundamentalpunkten der Abbildung, und umgekehrt.“

Man beachte hierbei, daß ein „allgemeines“ c_4-Gebüsch bereits durch 11 beliebig angenommene Grundpunkte bestimmt ist; ein solches Gebüsch führt auf eine gewisse rationale F_5 (s. Abschn. VIII und IX). Liegen aber im besonderen 11 solche Grundpunkte A auf einer vorgegebenen elliptischen c_3, so schneidet jene c_4 durch diese 11 Grundpunkte A_s ($s = 1, \ldots, 11$) noch einen festen 12^{ten} Grundpunkt aus der c_3 aus.

Dies bestätigt sich leicht, wenn man wieder (s. Nr. **14**) auf der c_3 einen elliptischen, geeignet normierten Parameter u einführt. Eine c_4 trifft die c_3 in 12 Punkten A_r, deren Argumente u_r seien. Dann unterliegen die 12 u_r der Bedingung $\sum u_r = 0$. Man hat also für den

65) Über die verschiedenen Gestalten eines D_k und ihre Deformationen vgl. *K. Rohn*, Math. Ann. 24 (1884), p. 55.

12^{ten} Grundpunkt $-u_{12} \equiv \sum_{s=1}^{11} u_s$. Damit ist man zum obigen, bei der Abbildung der F_4 mit D_3 auftretenden c_4-Gebüsch zurückgelangt.

Diese Abbildung ist in einfachen Formeln festzulegen.

Irgendein Punkt $P(x)$ der F_4 liefert vermöge seines Projektionsstrahles p den Bildpunkt Q. Man gebe Q in der Ebene $x_m = 0$ die Koordinaten y_i, y_k, y_l. Die Lage von P auf p wird durch Angabe des Parameters x_m bestimmt, wo gemäß (1)

$$(2) \qquad x_m = \frac{a_4(y)}{a_3(y)}.$$

Damit hat man die Abbildungsformeln

$$(3) \qquad x_i : x_k : x_l : x_m = y_i a_3(y) : y_k a_3(y) : y_l a_3(y) : a_4(y).$$

Einige einfache Anwendungen der Abbildung mögen folgen.

Jeder der 12 Grundpunkte A ist das Bild der entsprechenden Geraden g auf der F_4, deren Spur er ist; genauer, den Linienelementen auf g entsprechen die Linienelemente durch A.

Die c_3' ist das Bild des D_3. Legt man durch den D_3 irgendeine Ebene E, so schneidet diese die F_4 in einer r_4 mit d_3 an der Stelle D_3. Die drei Tangenten des d_3 treffen die c_3' in drei Punkten, die auch auf E liegen. Somit ordnen sich die Punkte der c_3' (1, 1)-deutig den durch D_3 gehenden Linienelementen auf der F_4 zu. Eine beliebige Gerade c_1 in Π ist das Bild einer R_4 auf F_4, da jede c_4 in G die c_1 in vier variabeln Punkten trifft.

Nun ergänzt sich die c_1 mit der c_3' zu einer c_4 in G. In der Tat ist ja nach obigem die c_1 die Projektionsspur einer Ebene E durch D_3, die aus der F_4 eine r_4 mit d_3 ausschnitt. Somit reduziert sich die gesuchte R_4 auf eine ebene Kurve r_4. Den Tangenten c_1 der c_3' entsprechen die Schnitte der F_4 mit den Tangentialebenen des K_3.

Geht im besonderen die c_1 durch einen der Punkte A, so entspricht ihr eine in die betreffende Gerade g und eine r_3 (mit d_2 in D_3) zerfallende r_4.

Endlich entspricht einer Geraden $c_{ik} = (A_i, A_k)$ die Rest-C_2, die die Ebene (g_i, g_k) aus der F_4 ausschneidet. Diese $\binom{12}{2} = 66$ C_2 sind die einzigen auf der F_4.

Einer c_2 durch 5 der A entspricht eine C_3 auf F_4, die Restschnittkurve des durch die 5 Geraden g gehenden Kegels 2. Ordnung. Diese $\binom{12}{5} = 792$ C_3 sind die einzigen (irreduziblen) C_3 auf der F_4.

Einer c_2 durch nur 4 der A entspricht eine R_4 auf F_4 mit d_2 in D_3, die Restschnittkurve eines Kegels 2. Ordnung durch die 4 Geraden g.

38. Erzeugung der Fläche durch zwei projektive F_2-Büschel. Die Existenz von R_4-Scharen auf der Fläche muß zu deren Erzeugung durch zwei projektiv zugeordnete F_2-Büschel führen.

Man mache demgemäß den Ansatz

$$(4) \qquad F_4 \equiv \begin{vmatrix} a_1 x_m + a_2, & c_2 \\ b_1 x_m + b_2, & d_2 \end{vmatrix} \equiv x_m(a_1 d_2 - b_1 c_2) + (a_2 d_2 - b_2 c_2).$$

Soll diese Form mit der ursprünglichen (1) übereinstimmen, so müssen die dort gegebenen Formen a_3, a_4 in die Gestalt zu bringen sein

$$(5) \qquad \begin{cases} a_3 \equiv a_1 d_2 - b_1 c_2, \\ a_4 \equiv b_2 c_2 - a_2 d_2. \end{cases}$$

Zu dem Behuf greife man aus den 12 Schnittpunkten A der beiden Kurven a_3, a_4 irgend vier heraus, entweder alle reell oder ein Paar reell, ein zweites konjugiert imaginär oder endlich beide Paare konjugiert imaginär. Durch diese vier Grundpunkte lege man ein Kegelschnittbüschel (c_2, d_2). Dann existiert auf der Kurve a_3 ein bestimmter Punkt (a_1, b_1), so daß die a_3 als erzeugt erscheint durch projektive Zuordnung der beiden Büschel (c_2, d_2), (a_1, b_1), womit die erste Darstellung in (5) erzielt ist.

Sodann treffe irgendein Individuum des Büschels (c_2, d_2) die Kurve a_4 in einem zweiten Quadrupel von Punkten, durch die man ein Kegelschnittbüschel (a_2, b_2) derart lege, daß a_4 erzeugt erscheint durch projektive Zuordnung der beiden Büschel (c_2, d_2), (a_2, b_2), womit man zur zweiten Darstellung in (5) gelangt.

Ersichtlich entsteht jetzt die F_4 (1) durch die beiden projektiv zugeordneten F_2-Büschel

$$(6_\lambda) \qquad \begin{cases} a_1 x_m + a_2 + \lambda c_2 = 0, \\ b_1 x_m + b_2 + \lambda d_2 = 0, \end{cases}$$

resp.

$$(6_\mu) \qquad \begin{cases} a_1 x_m + a_2 + \mu(b_1 x_m + b_2) = 0, \\ c_2 + \mu d_2 = 0. \end{cases}$$

Die spezifische Eigenart dieser beiden Erzeugungen der F_4 mit D_3 (in A_m) liest man unmittelbar aus ihren Darstellungen (6_λ) resp. (6_μ) ab. So liegen im ersteren Falle als Grundkurven der beiden F_2-Büschel zwei R_4 vor, die an derselben Stelle (A_m) einen d_2 besitzen; die projektive Zuordnung beider Büschel ist dabei so zu treffen, daß sich die beiden, je eine der beiden R_4 von dem d_2 aus projizierenden Kegel K_2 einander entsprechen.

39. Die Untersuchung von Rohn. Den F_4 mit D_3 hat *K. Rohn*[66]) eine eingehende Untersuchung zuteil werden lassen, zugleich mit besonderer Berücksichtigung der gestaltlichen Verhältnisse. Auch er legt die Gleichung (1) zugrunde. Solche F_4 mit festem D_3 (in A_m) heißen „*Monoïde*" M_4; die 12 auf ihr gelegenen Geraden $g_1, \ldots, g_{12}$ — die gemeinsamen Kanten der beiden Kegel K_3 ($a_3 = 0$) und K_4 ($a_4 = 0$) — heißen „Hauptgerade".

Da die Gleichung (1) von 24 Konstanten abhängt, kann man neun der g ($g_1, \ldots, g_9$) beliebig annehmen; sie bestimmen den K_3.

Auf dem K_3 lassen sich noch g_{10} und g_{11} beliebig wählen, womit g_{12} bestimmt ist. Es bleiben dann noch vier Konstante zur Verfügung; dementsprechend kann man die M_4 noch durch vier beliebig angenommene Punkte legen.

Wie oben (Nr. 37) lege man irgendeine der 66 Ebenen E_{ik} (g_i, g_k); sie schneidet als Restkurve eine durch A_m gehende $C_2^{(i,k)}$ aus. Eine $C_2^{(i,k)}$ und $C_2^{(l,m)}$ ohne gemeinsamen Index treffen sich noch in einem weiteren Punkte.

Durch je fünf der g, z. B. g_i, g_k, g_l, g_m, g_n, geht ein Kegel K_2, der aus der M_4 noch eine, durch A_m gehende C_3 ausschneidet; solcher C_3 gibt es 792 (l. c.). Zwei C_3 mit verschiedenen Indizes treffen sich noch in fünf Punkten. Durch beide C_3 läßt sich also eine F_2 legen, die noch die, die beiden letzten Indizes führenden C_2 ausschneidet.

Analog werden K_2-Büschel durch vier der g betrachtet, gewisse K_3 u. a. m.

Wann besitzt die M_4 eine weitere, nicht durch A_m gehende Gerade g?

Dann und nur dann, wenn irgend drei der Hauptgeraden in einer Ebene liegen, die eben dann noch eine g ausschneidet. Solcher g kann es aber nicht mehr als 19 geben; in der Tat läßt sich eine M_4 mit 19 g konstruieren.

Nunmehr wird die Möglichkeit von Singularitäten der M_4 außerhalb des D_3 untersucht.

Ein D_2 kann nur eintreten, wenn mindestens zwei der Hauptgeraden koinzidieren, wenn also K_3 und K_4 längs dieser g, auf der der D_2 liegt, eine (gewöhnliche) Berührung haben.

Fallen k der Hauptgeraden zusammen, so erhält die M_4 einen D_k, der die Klasse der Fläche um k erniedrigt.

Ein uniplanarer D_2 kann nur eintreten, wenn die M_4 eine Doppelgerade $\bar{g}$, also noch eine weitere Singularität in A_m besitzt.

---

66) *K. Rohn*, Leipzig Ber. 1884, p. 1.

Trotz dieser verwirrenden Mannigfaltigkeit von weiteren Singularitätsmöglichkeiten gelingt es, eine einfache Regel über das gleichzeitige Auftreten solcher Singularitäten aufzustellen. Man zerlege die Zahl 12 auf irgendeine Art in ganzzahlige Summanden, dann entspricht dieser auch eine bestimmte Art von M_4. Zu jedem Summanden 1 gehört ein D_2, zu jedem Summanden 2 ein D_3, zu jedem Summanden 3 ein biplanarer D_3 usf.

Die Gestalten dieser verschiedenen Arten der Gattungen von M_4 werden verfolgt; von Interesse ist eine M_4 mit 6 D_2, als Spezialfall des Symmetroides (s. Nr. **62**).

Bei dieser gestaltlichen Diskussion erweist es sich als zweckmäßig, folgenden Begriff einzuführen.

Zwei F heißen „gestaltlich gleich", wenn sie durch stetige Änderung der Konstanten ihrer Gleichungen ineinander überführbar sind, ohne daß inzwischen eine Singularität verschwindet oder neu auftritt.

Dann zerlegen sich alle M_4 mit denselben Hauptgeraden in zwei Gruppen. Die M_4 jeder Gruppe sind gestaltlich gleich, und die eine Gruppe besteht aus Spiegelbildern der anderen. Auf diese Weise lassen sich alle M_4 mit gleichem Tangentenkegel K_3 in A_m gestaltlich vergleichen, indem man den Hauptgeraden alle möglichen Lagen erteilt.

Weiterhin sind dann noch die M_4 mit verschiedenen K_3 zu vergleichen, wobei es einen wesentlichen Unterschied macht, ob der K_3 einteilig oder zweiteilig ist; nebst der Lage der Hauptgeraden entscheidet dies die Gestalt.

Daraufhin lassen sich die M_4 zunächst ohne weitere Singularitäten, dann aber auch mit solchen, bis ins einzelnste verfolgen.

Am Schluß finden noch die Sonderfälle der *Steiner*schen Fläche (s. Abschn. VII), sowie der F_4 mit einer dreifachen Geraden $\overline{\overline{g}}$ (s. Nr. **40**) ihre Berücksichtigung.

40. F_4 mit dreifacher Geraden $\overline{\overline{g}}$ und ihre Abbildung. Der nächste Schritt würde sein, zu einer F_4 mit zwei D_3, etwa in A_l und A_m, überzugehen. Da dann in der Gleichung der F_4 x_l und x_m nur linear auftreten dürfen, muß sie die Gestalt haben

$$(1) \qquad F_4 \equiv x_l x_m f_2 + x_l f_3 + x_m g_3 + f_4 = 0,$$

wo die f, g binär in x_i, x_k sind.

Die Gerade (A_l, A_m) ist dann eine $\overline{g}$.

Erst wenn man an irgendeinen dritten Punkt auf (A_l, A_m) die Forderung stellt, ebenfalls ein D_3 der F_4 zu sein, existieren ∞^1 solche; jeder Punkt von (A_l, A_m) ist ein D_3, und die Gerade selbst eine dreifache Gerade $\overline{\overline{g}}$. Man kann dann der Gleichung der F_4 die Gestalt geben

(2) $$F_4 \equiv x_i^3 a + x_i^2 x_k b + x_i x_k^2 c + x_k^3 d = 0,$$

unter a, b, c, d Linearformen aller x verstanden.

Zunächst treten in (2) $4 \cdot 4 = 16$ homogene Koeffizienten auf. Aber von diesen kommen drei (die von $x_i^3 x_k$, $x_i^2 x_k^2$, $x_i x_k^3$) zweimal vor. Mithin hängt eine F_4 mit gegebener $\overline{\overline{g}}$ von $34 - 22 = 12$ Konstanten ab, oder auch, es gilt:

„Die Forderung an eine F_4, eine vorgegebene Gerade g als dreifache $(\overline{\overline{g}})$[67]) zu besitzen, involviert 22 (lineare) Relationen zwischen den Koeffizienten. Läßt man die Lage der $\overline{\overline{g}}$ unbestimmt, so vermindert sich die Zahl 22 um 4."

Jede Ebene E durch $\overline{\overline{g}}$ schneidet eine Restgerade h aus, die F_4 ist also eine Regelfläche R-F_4 und die h sind deren Regelstrahlen (s. Nr. 77).

Sei die Gleichung des E-Büschels durch $\overline{\overline{g}}$

(3) $$\mathsf{E}(\tau) \equiv x_i - \tau x_k = 0,$$

so werde der zugehörige Regelstrahl entsprechend mit $h(\tau)$ bezeichnet.

Nach Einsetzung von (3) in (2) sondert sich, wie es sein muß, der Faktor x_k^3 ab, und es bleibt zur Bestimmung von $h(\tau)$ eine in x_k, x_l, x_m lineare Gleichung von der Gestalt

(4) $$x_k f_4(\tau) + x_l f_3(\tau) + x_m g_3(\tau) = 0.$$

Durch Kombinierung von (4) mit (3) erhält man für die Achsenkoordinaten π von h die explizite Darstellung

(5) $$\pi_{ik} : \pi_{il} : \pi_{im} : \pi_{kl} : \pi_{km} : \pi_{lm} = f_4 : g_3 : h_3 : -\tau g_3 : -\tau h_3 : 0.$$

Eine beliebige Gerade π' trifft die F_4 in vier Punkten, die von einer biquadratischen Gleichung in τ abhängen.

Man markiere auf $\overline{\overline{g}}$ einen beliebig, aber fest gewählten Punkt P' mit der Koordinate $x'_{lm} = \dfrac{x'_l}{x'_m}$.

Für die durch P gehenden Regelstrahlen h erhält man gemäß (4) — wenn man hinterher $x_k = x_k' = 0$ setzt — die kubische Gleichung

(6) $$x_l' f_3(\tau) + x'_m g_3(\tau) = 0.$$

Läßt man nunmehr P' auf $\overline{\overline{g}}$ variieren, so stellt die Gleichung (6) ein Büschel (oder auch eine Involution) kubischer Gleichungen dar mit dem Parameter x'_{lm}. Durch jeden Punkt P' auf $\overline{\overline{g}}$ gehen somit drei Regelstrahlen h, deren Argumente τ die Wurzeln der kubischen Gleichung (6) sind.

---

67) Vgl. „*Salmon-Fiedler*", Kap. 6, Nr. 326 ff., und *A. Armenante*, Ann. di mat. (2) 4 (1870), p. 50.

Behufs Abbildung der F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ auf eine Hilfsebene Π $(x_m = 0)$ von irgendeinem D_3 auf $\overline{\overline{g}}$ aus, etwa A_m, wende man wieder das Mittel der Projektion von D_3 aus an (s. Nr. 37).

Irgendein ebener Schnitt der F_4 projiziert sich in eine r_4 mit d_3 in A_l, der Spur von $\overline{\overline{g}}$, die noch durch drei feste Punkte H_1, H_2, H_3 — die Spuren der drei durch A_m gehenden Regelstrahlen h — einfach hindurchgeht.

Da es von r_4 mit festem d_3 und drei festen d_1 noch eine lineare ∞^5-Schar gibt, so vollzieht sich die Abbildung der F_4 mittels eines Gebüsches G' von r_4 der angegebenen Art; dabei sind die Koeffizienten aller Formen r_4 in G' an zwei feste lineare Bedingungen geknüpft. Indessen läßt sich diese Abbildung vereinfachen, wenn man die ganze Figur in der Ebene einer quadratischen Transformation T_2 unterwirft, mit Fundamentalpunkten in A_l und zweien der H-Punkte, etwa H_2, H_3, während H_1 in einen anderen Punkt H übergehe.

Damit geht das Gebüsch G' von r_4 über in ein anderes Gebüsch G von r_3 mit d_2 in A_l und d_1 in H, und man hat den Satz:

„Die einfachste Abbildung einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ geschieht mittels eines Gebüsches G von r_3 mit einem festen d_2 und einem festen d_1 als Grundpunkten.“

Hieraus folgt eine explizite Darstellung der F_4 in zwei nicht homogenen Parametern λ, μ von der Gestalt

$$\varrho x_i = c^{(i)}(\overset{2}{\lambda}, \overset{1}{\mu}), \tag{7}$$

wo die rechts stehenden ternären Formen c in λ quadratisch, in μ linear sind. Macht man noch mit einer dritten Variabeln ν homogen und sind L, M, N die Koordinatenecken, so ist L der feste d_2 und M der feste d_1.

Umgekehrt führt eine Darstellung vom Typus (7), wo die Formen $c^{(i)}$ im übrigen beliebig, wenn nur linear unabhängig, gegeben seien, zu einer Abbildung einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$.

Ordnet man die rechten Seiten von (7), einmal nach λ, das andere Mal nach μ, so erscheint die F_4 ebensowohl als Ort von ∞^1 Regelstrahlen h, wie als Ort von ∞^1 C_2. Die Bilder der h sind die Geraden c_1' des Büschels (A_l) und die Bilder der C_2 sind die Geraden c_1 des Büschels (H). Jede C_2 trifft jede h einmal. Man erhält die C_2 auf der F_4 direkt als Restkurven der durch irgend zwei von drei zusammengehörigen h gelegten Ebenen.

Im allgemeinen sind die drei von irgendeinem Punkte von $\overline{\overline{g}}$ ausgehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 nicht inzident. Man frage, wann dieser Sonderfall, etwa zunächst für den Punkt A_m, eintritt. Dann sind auch die Spuren H_1, H_2, H_3 inzident, und umgekehrt.

Vermöge der T_2 geht dann das Gebüsch G' von c_4 über in ein Gebüsch G mit einem d_2 in $A_l = L$, dessen eine Tangente fest ist. Wählt man als diese feste Tangente des d_2 etwa die Seite $\nu = 0$, so muß für alle Individuen c in G der Koeffizient von $\lambda^2\mu$ verschwinden, und umgekehrt.

Aus der Invarianz dieser Eigenschaft von G' resp. G folgt, daß die Inzidenz von drei Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 unabhängig ist von der Lage des Projektionszentrums auf $\overline{\overline{g}}$. Sind also für irgendeinen Punkt P' auf $\overline{\overline{g}}$ die drei durch ihn gehenden Regelstrahlen inzident — was nur eine einzige Bedingung erfordert —, so findet das gleiche für jeden Punkt P von $\overline{\overline{g}}$ statt.

Dies mag auch rechnerisch bestätigt werden. Man ordne die Gleichung der F_4, wie im allgemeinen Falle eines einzelnen D_3 (s. Nr. 37), nach x_m

$$(8) \qquad F_4 \equiv c_3 x_m + c_4 = 0.$$

Hier sind jetzt, im Falle einer $\overline{\overline{g}}$ $(x_i = x_k = 0)$, die beiden von x_m freien Formen c_3, c_4 von spezifischer Eigenart.

In c_3 treten nur x_i und x_k auf; c_3 ist also eine binäre kubische Form in x_i, x_k und $c_3 = 0$ stellt drei Gerade h_1', h_2', h_3' durch A_l dar, die Spuren der drei durch A_m gehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3.

Andererseits ist c_4 in x_l linear, also von der Gestalt

$$(9) \qquad c_4 \equiv x_l g_3 + f_4,$$

wo wiederum g_3, f_4 binär in x_i, x_k sind. Die Kurve $c_4 = 0$, der Schnitt der F_4 mit $x_m = 0$, ist, wie es sein muß, eine r_4 mit d_3 in A_l.

Die Gleichung (8) der F_4 nimmt nunmehr die Gestalt an

$$(8') \qquad F_4 \equiv f_4 + x_l g_3 + x_m h_3 = 0.$$

Schneidet man wiederum die F_4 mit den E-Büschel (3) $x_i - \tau x_k = 0$, so reduziert sich (8′) auf (4).

Man schneide jetzt die F_4 vorab mit einer beliebigen, nicht durch A_m gehenden Ebene E_v

$$(10) \qquad \mathsf{E}_v \equiv v_i x_i + v_k x_k + v_l x_l - x_m = 0.$$

Projiziert man die Schnittkurve von A_m aus auf $x_m = 0$, so erhält man eine r_4 mit d_3 in A_l

$$(11) \qquad \begin{aligned} r_4 &\equiv h_3(v_i x_i + v_k x_k + v_l x_l) + (f_4 + x_l g_3) \\ &\equiv \{h_3(v_i x_i + v_k x_k) + f_4\} + x_l(g_3 + h_3 v_l) = 0. \end{aligned}$$

Diese ∞^3 r_4 gehen noch durch drei feste Punkte H_1, H_2, H_3, die Spuren der drei durch A_m gehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3. Nunmehr lege man der Ebene E_v die Beschränkung auf, durch einen festen Punkt $P'(0, 0, x_l', 1) = P'(x_l')$ der $\overline{\overline{g}}$ zu gehen, betrachte also das Büschel der Ebenen $\mathsf{E}_v' = \mathsf{E}_v(P')$. Die Gleichung einer solchen lautet gemäß (10)

$$(12) \qquad \mathsf{E}_v' \equiv v_i x_i + v_k x_k + x_l - x_l' x_m = 0.$$

Die Projektion des Schnittes hat also zur Gleichung

$$(13) \qquad r_4' \equiv g_3(v_i x_i + v_k x_k - x_l' f_4) + x_l(g_3 - x_l' f_3) = 0.$$

Hieraus geht hervor, daß, bei festem P' auf $\overline{\overline{g}}$, das Tangententripel der r_4' in d_3 (A_l) stets das nämliche ist

$$(15) \qquad g_3 - x_l' f_3 = 0.$$

Variiert dagegen P' auf $\overline{\overline{g}}$, so liefert (15) eine kubische Involution von Tangententripeln durch A_l.

Es ist noch zu zeigen, daß die Restschnittpunkte des Tripels (15) mit der r_4' (13) bei fest gedachtem P' zusammenfallen mit den Spuren der durch P' gehenden Regelstrahlen h_1', h_3', h_3'.

Man schneide, wie oben, die F_4 mit irgendeiner Ebene E_τ durch $\overline{\overline{g}}$

$$(3) \qquad \mathsf{E}_\tau \equiv x_i - \tau x_k = 0.$$

Nach Einsetzung in die Gleichung (8′) der F_4 ergibt sich

$$(16) \qquad \mathsf{E}_i \equiv x_k f_4(\tau) + x_l f_3(\tau) + x_m g_3(\tau) = 0.$$

Die beiden Ebenen E_τ und E_i treffen sich in einem Regelstrahl h'.

Um dessen Treffpunkt $P'(x_l')$ auf $\overline{\overline{g}}$ zu bestimmen, hat man in (16) $x_i = x_k = 0$ zu setzen. Damit reduziert sich aber (16) wieder auf (15).

In der Tat gehört so zu jedem gegebenen τ ein Punkt $P'(x_l')$ auf $\overline{\overline{g}}$, umgekehrt aber zu gegebenem P' ein Tripel von τ-Werten.

Zusammenfassend hat man:

„Die ∞^3 Projektionsbilder der ebenen Schnitte einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ $(x_i = x_k = 0)$, für A_m als Projektionszentrum und $x_m = 0$ als Projektionsebene, bilden ein Gebüsch von r_4 mit d_3 in A_l — der Spur von $\overline{\overline{g}}$ — und drei d_1 in drei festen Punkten H_1, H_2, H_3, den Spuren der durch A_m gehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3.

Dagegen bilden die Tangententripel dieser ∞^3 r_4 in A_l nur eine lineare ∞^1-Schar, die kubische Involution (15). Für jedes Bündel von Schnittebenen, dessen Zentrum auf $\overline{\overline{g}}$ liegt, ist das Tangententripel fest.“

41. Die F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ als Achsenfläche einer kubischen Raumkurve. Ein bemerkenswerter Repräsentant der F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ tritt bei den kubischen Raumkurven C_3 auf. Liegt noch eine feste Raumgerade g vor, so gehen von jedem Punkte P auf g drei Achsen a_1, a_2, a_3 der Kurve aus. Diese sind ersichtlich die Regelstrahlen einer F_4 mit $\overline{\overline{g}} = g$.

Es sollen die Abbildungsformeln aufgestellt werden.[68]) Man wähle die C_3 als Normkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. Art. „F_3", Nr. 19),

(a) $$x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1.$$

Von irgendeinem Raumpunkt (x) gehen drei Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an die N_3, wo die elementarsymmetrischen Verbindungen der λ mit den x übereinstimmen. Spaltet man die λ in ein festes Paar (α, β) und ein variierendes Element μ, so sind, für $\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \alpha\beta : \alpha + \beta : 1$, die Koordinaten eines laufenden Punktes (μ) auf der Achse $a(\alpha, \beta)$

(b) $$x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \mu\sigma_2 : \sigma_2 + \mu\sigma_1 : \sigma_1 + \mu\sigma_0 : \sigma_0.$$

Hieraus folgen als Strahlenkoordinaten p_{ik} der Achse a

(c) $$p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23} = \sigma_0^2 : \sigma_0\sigma_1 : \sigma_0\sigma_2 : \sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2 : \sigma_1\sigma_2 : \sigma_2^2.$$

Nunmehr möge die Achse a variieren, doch so, daß sie stets eine feste Gerade g trifft (oder allgemeiner, einem festen linearen Komplex K angehört). Damit sind die σ an eine quadratische Bedingung gebunden

(d) $$c_2(\sigma) = 0.$$

Diese läßt sich wiederum ersetzen durch eine explizite Darstellung in einem Parameter λ

(e) $$\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = f_2(\lambda) : g_2(\lambda) : h_2(\lambda).$$

Setzt man dies in (b) ein, so gelangt man gerade zu den früheren Abbildungsformeln (7) einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$ zurück.

Um von einer solchen Parameterdarstellung zu der impliziten Gleichung der zugehörigen F_4 zu gelangen, hat man aus (b) λ und μ zu eliminieren. Dies geschieht am einfachsten so: Man fasse einen Raumpunkt (x) als Zentrum eines Ebenenbündels $(r), (s), (t)$ auf, so daß die x_i den Determinanten $(rst)_{klm}$ proportional werden.

Man schneide das Gebilde (b) der Reihe nach mit den drei Ebenen $(r), (s), (t)$, so gelangt man zu drei Gleichungen der Form

(f) $$C_r \equiv (\overset{2}{\lambda}, \overset{1}{\mu}; \overset{1}{r}) = 0, \quad C_s \equiv (\overset{2}{\lambda}, \overset{1}{\mu}; \overset{1}{s}) = 0, \quad C_t \equiv (\overset{2}{\lambda}, \overset{1}{\mu}; \overset{1}{t}) = 0,$$

wo nur die Grade in den λ, μ, sowie den r_i, s_i, t_i angegeben sind.

Man bilde jetzt die Resultante R (bez. λ, μ) der drei Formen (f) — was auf die Bildung von Resultanten biquadratischer binärer Formen in λ zurückkommt. R ist in den Determinanten der Koeffizientenmatrix (bez. λ, μ) von (f) vom Grade vier, also auch im besonderen in den Größen $(rst)_{klm} = x_i$, womit die gesuchte Gleichung der F_4 gefunden ist.

68) *W. Fr. Meyer*, Apolarität und rationale Kurven. Tübingen 1883, Abschnitt 3.

VII. Die Steinersche Fläche.

42. Einleitung. Dieser Fläche ist bereits im Art. „F_3“, Nr. **13**, gedacht worden. Dort erschien sie als Reziproke zu einer F_3 mit vier D_2.

Aber auch innerhalb der Theorie der F_4 nimmt S eine charakteristische Stellung ein.[69]) Entweder, wie schon bei *Kummer* (Nr. 8), als F_4 mit drei in einem Punkte — der dann von selbst ein D_3 wird — zusammenstoßenden Doppelgeraden $\bar{g}$, mit der merkwürdigen Eigenschaft, daß auf ihr eine ∞^2-Schar von C_2 liegt, in denen die Fläche von deren Tangentialebenen T geschnitten wird.[70]) Oder aber umgekehrt, wie im folgenden, im Anschluß an Nr. **37**, läßt sich die S als F_4 mit einzelnem D_3, durch den drei Doppelgerade $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ laufen, erklären.

Seien letztere vorerst als reell und verschieden angenommen, so verlege man sie in die drei von A_m ausgehenden Koordinatenkanten, dann hat die Gleichung von S ersichtlich die Gestalt

$$S \equiv a_i x_k^2 x_l^2 + a_k x_l^2 x_i^2 + a_l x_i^2 x_k^2 + b x_m x_i x_k x_l = 0. \tag{1}$$

Gegenüber der allgemeinen Gleichung einer F_4 mit D_3 (in A_m) (s. Nr. **37**) zeichnet sich die S dadurch aus, daß die Spur des Kegels K_3 in der Ebene $x_m = 0$ in drei Gerade, die Koordinatenseiten $x_i = 0$, $x_k = 0$, $x_l = 0$ zerfällt, und die des Kegels K_4 eine r_4 mit d_2 in den Koordinatenecken A_i, A_k, A_l ist.

Von den 12 g der allgemeinen F_4 mit D_3, den Schnittkanten der beiden Kegel K_3 und K_4, fallen jetzt je vier in eine der drei $\bar{g}$.

43. Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Behufs Abbildung der Fläche S auf eine Ebene Π ($x_m = 0$) wende man zunächst wieder die Methode des allgemeinen Falles an, die Projektion vom D_3 aus auf Π. Irgendein ebener Schnitt der S ist eine r_4 mit drei d_2 auf den drei $\bar{g}$. Eine solche r_4 projiziert sich wiederum in eine r_4' mit drei d_2 in A_i, A_k, A_l.

Die Abbildung vollzieht sich also mittels eines gewissen Gebüsches G' solcher r_4'. Von r_4' in Π mit drei festen d_2 gibt es noch eine lineare ∞^5-Schar; soll sich diese auf ein *Gebüsch* G' reduzieren, so

69) Von weiterer Literatur sei erwähnt: *L. Cremona,* J. f. Math. 63 (1864), p. 315; 67 (1867), p. 1; Ist. Lomb. Rend. 4 (1867); *E. Lampe,* Dissert. Berlin 1864; *A. Clebsch,* J. f. Math. 67 (1867), p. 1; *R. Sturm,* Math. Ann. 3 (1871), p. 76; *E. Beltrami,* Bologna Mem. (3) 10 (1879), p. 232; *K. Rohn,* Math. Ann. 24 (1884), p. 149; *E. Laguerre,* Œuvres II, p. 275, 281, 319. Besonders sei hingewiesen auf die Monographie von *F. Gerbaldi,* La superficie di Steiner, Torino 1881.

70) *Th. Vahlen,* Acta Math. 19 (1895), p. 199, liefert einen einfachen Determinantenbeweis für den Satz des Textes.

müssen die Koeffizienten aller r_4' an zwei feste lineare Bedingungen gebunden sein.

Dieses Gebüsch G' von r_4' läßt sich in Ansehung der Abbildung von S durch ein einfacheres Gebüsch G von c_2 ersetzen. Man hat zu dem Behuf, wie in Nr. **40**, nur die ganze Figur einer (1, 1)-deutigen quadratischen Transformation T_2 mit Fundamentalpunkten in A_i, A_k, A_l zu unterwerfen.

Damit geht das Gebüsch G' der r_4' über in ein Gebüsch G von c_2 ohne gemeinsame Grundpunkte, von dem wiederum gilt, daß die Koeffizienten in allen c_2 von G zwei festen linearen Bedingungen unterliegen. Oder auch, in geometrischer Sprechweise, die ∞^3 c_2 in G müssen apolar (konjugiert) sein zu zwei festen Kurven zweiter Klasse γ_2 und damit zu allen Individuen von deren linearer Schar Σ.

Indessen kommt diese Eigenschaft jedem beliebigen Gebüsch G von c_2 zu, d. h. man kann G aus irgend vier linear unabhängigen Individuen $c_2^{(r)}$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ linear zusammensetzen.

Seien y_i, y_k, y_l wiederum die Koordinaten eines Punktes der Ebene Π $(x_m = 0)$, so hat man als einfachste Abbildung von S

$$(2) \qquad \varrho x_r = c_2^{(r)}(y_i, y_k, y_l) = c_2^{(r)}(y),$$

so daß sich die ∞^3 ebenen Schnitte von S auf das Gebüsch G der $c_2^{(r)}$ abbilden. Die Gleichungen (2) sind aber keine anderen, als die bereits von *Weierstraß*[71]) (s. auch Nr. 8) erkannten zur einfachsten expliziten rationalen (quadratischen) Darstellung von S in drei homogenen Parametern.

Die Fruchtbarkeit dieser Abbildungsdarstellung tritt aber erst hervor, wenn man das Gebüsch G der $c_2^{(r)}$ zugleich mit der obigen apolaren Schar Σ in projektivem Sinne als ein Ganzes auffaßt. Umgekehrt kann man von einer beliebigen linearen Schar Σ von Klassenkegelschnitten γ_2 in Π ausgehen; dann ist G dadurch rückwärts als die Gesamtheit der zu den γ_2 in Σ apolaren c_2 bestimmt.

Dieser Auffassung läßt sich eine weitere Vertiefung dadurch erteilen, daß man die Schar Σ als Grundlage einer seit *Steiner* (s. Art. „F_3“, Nr. **13**) wohlbekannten (1, 1)-deutigen involutorischen quadratischen Klassentransformation T_2 betrachtet. Jede Gerade g in der Ebene Π besitzt in bezug auf eine γ_2 in Σ einen Pol, und der Ort dieser Pole ist eine Gerade g', und rückwärts gelangt man so wieder von g' zu g. Die Verwandtschaft T_2 ist somit die der bezüglich Σ „konju-

71) *K. Weierstraß,* J. f. Math. 64 (1865), p. 66; vgl. die Ergänzungen von *H. Schroeter,* ib. p. 79; *A. Cayley,* ib. p. 172; London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 190; ib. 5 (1873), p. 14.

gierten" Geradenpaare (g, g'). Umgekehrt läßt sich eine solche gegeben gedachte T_2 als Grundlage des Ganzen ansehen; denn in der T_2 existieren vier sich selbst entsprechende Gerade („Einheitsgerade"), die als gemeinsame Tangenten der Schar Σ letztere bestimmen. Diese vier Geraden bilden ein Vierseit Ω, dessen Diagonaldreiseit (Hauptdreiseit) Δ zu Seiten die Fundamentalgeraden von T_2 besitzt.

Die T_2 läßt sich invariantentheoretisch einfach darstellen (s. Nr. 5). Seien irgend zwei Individuen φ, ψ der Schar Σ gegeben durch

$$(3) \qquad \varphi \equiv (u\alpha)^2 = 0, \quad \psi \equiv (u\beta)^2 = 0,$$

so erhält man irgendein Geradenpaar (g, g') von T_2 mittels

$$(4) \qquad (u\alpha)(u'\alpha) = 0, \quad (u\beta)(u'\beta) = 0.$$

Löst man hier etwa nach den u_i' auf, so kommt

$$(5) \qquad \varrho u_i' = (u\alpha)(u\beta)(\alpha\beta)_{kl},$$

oder, wenn man diese drei Gleichungen durch Multiplikation mit kontragredienten Variabeln x_i und Addition zu einer einzigen zusammenzieht,

$$(5') \qquad K \equiv (u\alpha)(u\beta)(\alpha\beta x) = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen Konnex $K(u, x)$ dar, der die wesentlichsten Eigenschaften der T_2 unmittelbar erkennen läßt. Irgendeiner Geraden $g(u)$ entspricht derjenige Punkt (x), in dem g von der Bildgeraden $g'(u')$ getroffen wird. Umgekehrt ist einem Punkt (x) ein Paar von Geraden $g(u)$, $g'(u')$ zugeordnet, deren Schnittpunkt er ist.

Zugleich ist im ersteren Falle der Punkt (x) der Berührungspunkt des einen, g berührenden Individuums in Σ. Und im letzteren Falle sind die beiden durch den Punkt (x) gehenden Geraden g, g', die Tangenten desjenigen Individuums in der linearen ∞^2, dem Hauptdreiseit Δ einbeschriebenen Schar von Klassenkegelschnitten, das dem Punkte (x) kollinear zugeordnet ist.

Dreht sich eine Gerade g um den Punkt (x), so umhüllt die Bildgerade g' eben jenes Individuum, das also kürzer als T_2-Bild von (x) bezeichnet werden kann.

Deutet man in bekannter Weise den Konnex (5') als Differentialgleichung, so stellt letztere unmittelbar die Schar Σ dar.

Was endlich die invariantentheoretische Struktur des Ausdruckes K angeht, so liegt hier ersichtlich eine Erweiterung des *Clebsch*schen Übertragungsprinzips (s. Nr. 5 und Art. „F_3", Nr. 12) vor.

In der Tat, geht man zu zwei binären quadratischen Formen zurück

$$(3') \qquad f \equiv (\alpha\lambda)^2, \quad g \equiv (\beta\lambda)^2$$

und bildet deren Funktionaldeterminante

$$(6) \qquad \Theta = (\alpha\lambda)(\beta\lambda)(\alpha\beta),$$

so geht K aus Θ direkt gemäß der *Clebsch*schen Regel hervor. Denn damit gehen die beiden binären linearen Faktoren $(\alpha\lambda)$, $(\beta\lambda)$ über in die beiden ternären Linearfaktoren $(u\alpha)$, $(u\beta)$, und der binäre Klammerfaktor $(\alpha\beta)$ in die mit den x geränderte Bildung $(\alpha\beta x)$.

Hand in Hand damit geht die geometrische Deutung.

Das Verschwinden von Θ liefert das zu den beiden Wurzelpaaren von f und g harmonische Paar, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Doppelelemente der Involution (f, g). Geht man nun wiederum in der Ebene von einem beliebigen Punkte (x) aus, so bilden die von ihm an die Schar $\Sigma(\varphi, \psi)$ gehenden Tangenten eine Involution, deren durch $\Theta = 0$ gelieferte Doppelelemente eben die beiden sich in T_2 entsprechenden Geraden g, g' sind.

Faßt man das Wesentliche zusammen, so hat man den Satz:

„Die projektive Geometrie auf der *Steiner*schen Fläche S ist das räumliche Äquivalent der projektiven Geometrie der ebenen quadratischen Verwandtschaft T_2."

Einige Einzelheiten mögen noch zur Erläuterung dienen.

Die vier gemeinsamen Tangenten von Σ, die vier Einheitsgeraden t_i $(i = 1, \ldots, 4)$ in T_2, sind die Bilder der vier Doppelebenen Δ_i von S.

Das Hauptdreieck Δ als Ganzes ist das Bild des D_3 von S; je drei koplanaren Linienelementen durch D_3 entsprechen drei Linienelemente auf den Seiten von Δ, deren Punkte mit den Ecken von Δ auf einer c_2 liegen.

Einzeln sind die Seiten von Δ die Bilder der drei $\bar{g}$; jedem Punkte auf einer $\bar{g}$ entspricht ein Punktepaar (P, Q) auf der bezüglichen Seite von Δ. Diese ∞^1 Punktepaare bilden eine Involution, deren Doppelelemente die beiden Δ-Ecken der Seite sind. Greift man von den Kanten des durch die vier Doppelebenen Δ_i gebildeten Tetraeders T je ein Paar von Gegenkanten heraus und legt an sie vom D_3 aus die Leitgeraden, so sind diese drei Leitgeraden eben die drei Doppelgeraden $\bar{g}$.

Wählt man zugleich T als Koordinatentetraeder, so wird die Klassengleichung von S von der Gestalt

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{4} \frac{\alpha_i}{u_i} = 0.$$

Irgendeinem ebenen Schnitte von S entsprach eine c_2 des Gebüsches G und umgekehrt. Eine solche c_2 artet nur dann in ein Geradenpaar (c_1, c_1') aus, wenn dieses ein Paar (g, g') in T_2 ist. Dann zerfällt aber auch die Bild-r_4 auf S in zwei C_2, so daß von deren vier Grundpunkten drei auf den $\bar{g}$ liegen, während der letzte, das Bild des Punktes $(c_1, c_1') = (g, g')$, der Berührungspunkt einer Tangentialebene von S

ist und umgekehrt. Damit ergibt sich der Satz (s. Art. „F_3“, Nr. 13): „Die Tangentialebenen der Fläche S schneiden die ∞^2 C_2-Paare aus ihr aus.“

Das obige Verfahren gestattet aber auch, den verschiedenen Sonderfällen, die hinsichtlich der drei $\bar{g}$ eintreten können, gerecht zu werden.

So können von den Seiten von Δ zwei konjugiert-imaginär werden, und damit auch zwei der $\bar{g}$ und umgekehrt. Die Gleichung von S nimmt dann die Gestalt an

$$(1') \quad S \equiv x_m x_l (x_i^2 + x_k^2) + a_l (x_i^2 + x_k^2)^2 + x_l^2 (a_k x_i^2 + a_i x_k^2) = 0.$$

Weiter können irgend zwei Seiten von Δ oder sogar alle drei koinzidieren und entsprechend wiederum zwei der $\bar{g}$ oder alle drei.

Im ersteren Falle wähle man als $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$ die Kante $(x_i = 0, x_l = 0)$ und als $\bar{g}_3$ die Kante $(x_k = 0, x_l = 0)$, so gehört zu S die Gleichung

$$(8) \quad S \equiv c x_m x_i x_l^2 - (a x_l^4 + b x_i^2 x_k^2) = 0.$$

Schneidet man eine solche S mit irgendeiner Ebene $(\alpha x) = 0$ in einer r_4, so wird die Gleichung von deren Projektion auf die Ebene $x_m = 0$

$$(8') \quad r_4 \equiv (\alpha_i x_i + \alpha_k x_k + \alpha_l x_l) x_i x_l^2 + (a x_l^4 + b x_i^2 x_k^2) = 0.$$

Diese r_4 besitzt in der Ecke A_k $(x_i = x_l = 0)$ einen Berührknoten (tacnode).

Fallen endlich alle drei $\bar{g}$ zusammen, etwa in die Kante $(x_i = x_l = 0)$, so nimmt die Gleichung von S die Gestalt an

$$(9) \quad S \equiv c x_m x_i^3 - a (x_k^2 - x_i x_l)^2 = 0.$$

Der Schnitt mit einer Ebene $(\alpha x) = 0$ führt zu einer r_4, deren Projektion auf die Ebene $x_m = 0$ die Gleichung hat

$$(9') \quad (\alpha_i x_i + \alpha_k x_k + \alpha_l x_l) x_i^3 + a (x_k^2 - x_i x_l)^2 = 0.$$

Eine solche r_4 besitzt in der Ecke A_k $(x_i = x_l = 0)$ einen Schmiegknoten (oscnode).

Läßt man in beiden Fällen die Ebene (α) geeignet variieren, so gelangt man, wie *Moore* und *Neelley* ausgeführt haben[72]), zur Gesamtheit aller projektiv verschiedenen Typen von r_4 mit tacnode und oscnode. Zugleich lassen sich die Invarianten der r_4 in übersichtlicher Weise durch die Koordinaten α_i der Schnittebene ausdrücken.

44. Normaldarstellungen der Fläche. Wir kehren zurück zu dem „allgemeinen Falle“, wo die vier Einheitsgeraden t_i und damit auch die Seiten von Δ reell ausfallen. Wählt man Δ in der Hilfsebene als Koordinatendreieck $(y_i = 0, y_k = 0, y_l = 0)$ und irgendeine der vier

72) *L. T. Moore* und *J. H. Neelley*, Amer. J. Math. 50 (1928), p. 467.

Geraden t_i, etwa t_m, als Gerade $y_i + y_k + y_l = 0$, so kann man setzen

$$(10)\qquad \begin{cases} -t_m = y_i + y_k + y_l, & t_i = -y_i + y_k + y_l, \\ t_k = y_i - y_k + y_l, & t_l = y_i + y_k - y_l, \end{cases}$$

so daß die t an die lineare Identität gebunden sind

$$(11)\qquad \sum_i^m t_i \equiv 0.$$

Damit erhält man für S die einfachste Parameterdarstellung

$$(12)\qquad \varrho x_i = t_i^2,$$

und im Anschluß daran, als einfachste implizite Gleichung von S in der irrationalen Gestalt,

$$(13)\qquad S \equiv \sum_i^m \sqrt{x_i} = 0.$$

Führt man die rechten Seiten von (12) aus, wobei zur Abkürzung $y_i^2 + y_k^2 + y_l^2 = s$ gesetzt werde, so kommt

$$(12')\qquad \begin{cases} t_i^2 = s - 2y_iy_k - 2y_iy_l + 2y_ky_l, \\ t_k^2 = s - 2y_iy_k + 2y_iy_l - 2y_ky_l, \\ t_l^2 = s + 2y_iy_k - 2y_iy_l - 2y_ky_l, \\ t_m^2 = s + 2y_iy_k + 2y_iy_l + 2y_ky_l. \end{cases}$$

Durch Umkehrung ergibt sich

$$(14)\qquad 4s = \sum_{r=i}^m t_r^2, \quad 8y_iy_k = -t_i^2 - t_k^2 + t_l^2 + t_m^2, \text{ usf.}$$

Führt man demgemäß neue Raumpunktkoordinaten z ein vermöge

$$(15)\qquad z_m = \sum x_r, \quad z_i = x_i - x_k - x_l + x_m, \text{ usf.,}$$

so lautet in ihnen die Parameterdarstellung von S

$$(16)\quad \sigma z_m = y_i^2 + y_k^2 + y_l^2, \quad \sigma z_i = 2y_ky_l, \quad \sigma z_k = 2y_iy_l, \quad \sigma z_l = 2y_iy_k.$$

An die Darstellung (2) knüpfen sich weitere Bemerkungen. Zunächst fragt es sich, wie man von (2) aus durch Elimination der Größen ϱ, λ, μ zur Gleichung der S zurückgelangt. Zu dem Behuf frage man, wann sich drei Ebenen $(rx) = 0$, $(sx) = 0$, $(tx) = 0$ in einem Punkte (x) der S treffen, so daß $x_i = (rst)_{klm}$ wird. Dies führt zu drei c_2-Gleichungen, die je in den r, s, t linear sind

$$(17)\qquad c_2^{(r)}(r; \lambda, \mu) = 0, \quad c_2^{(s)}(s; \lambda, \mu) = 0, \quad c_2^{(t)}(t; \lambda, \mu) = 0.$$

Man stelle in bekannter Weise die Resultante R bez. λ, μ der rechten Seiten von (17) auf, indem man die Ableitungen J_λ, J_μ, J_ν der *Jacobi*schen Determinante J nach λ, μ und einer homogenen Variabeln ν gleich Null setzt und aus ihnen und (17) die Quadrate und

Produkte der λ, μ, ν eliminiert. Die Resultante R ist vom vierten Grade in den dreireihigen Determinanten der Koeffizientenmatrix bez. λ, μ von (17).

Diese dreireihigen Determinanten gehen aber von selbst über in vierreihige vom Typus $(abcx)$, wo die Kolonnen der a, b, c der ursprünglichen Koeffizientenmatrix von (2) angehören. Daraufhin liefert $R=0$ direkt die gesuchte Gleichung von S.

Sodann lassen sich die vier Darstellungsformeln (2) formal in eine einzige zusammenziehen, indem man mit kontragredienten Variabeln u multipliziert und addiert

$$\varrho(ux)=\sum_r c_2^{(r)}(y)u_r. \tag{18}$$

Hier ist die rechte Seite linear in den quaternären u, quadratisch in den ternären y, also symbolisch geschrieben

$$S\equiv(u\alpha)(ay)^2. \tag{19}$$

Diese Form S läßt sich mit *A. Goller*[73]) als einzige Grundform der ganzen Theorie verwenden; die projektiven Eigenschaften der Fläche S werden gleichwertig mit dem Verschwinden gewisser Komitanten der Form S (19). Auf diesem Wege untersucht *Goller* die Asymptotenkurven (s. u. Nr. **46**) der Fläche, ihre *Hesse*sche Fläche u. a. m. (s. Art. „F_3“, Nr. **13**, Note 46).

Sodann gestatten die rechten Seiten von (2) noch eine andere Auffassung, indem man sich dieselben hervorgegangen denkt aus quaternären (quadratischen) Formen $C_2^{(r)}$ (z_i, z_k, z_l, z_m), wo man hinterher die z wieder durch Linearformen in ternären Variabeln y ersetzt.

Deutet man diesen algebraischen Vorgang geometrisch, so gelangt man zu der synthetischen Erzeugung der S durch *Th. Reye*[74]): Man hat nur die Raumpunkte eines S_3' kollinear auf ein F_2-Gebüsch eines S_3 zu beziehen, so entsprechen den Ebenen Flächen S. Umgekehrt hat hierauf *Reye*[74]) die Abbildung der Fläche S gegründet. Einem Punkte des einen Raumes entspricht eine Gruppe von acht assoziierten Punkten im anderen, einer Geraden eine C_4, einer F_n eine F_{4n}, und im besonderen einer Ebene eine S.

Die analytische Ausführung findet sich bei *V. Snyder* und *F. R. Sharpe.*[75]) Synthetische Ergänzungen rühren von *A. Jopke*[76]) her.

---

73) *A. Goller,* Progr. Ludwigs-Realschule München 1902.

74) *Th. Reye,* J. f. Math. 86 (1878), p. 84; Math. Ann. 48 (1896), p. 113. Vgl. auch „*Reye*“, p. 140.

75) *V. Snyder* und *F. R. Sharpe,* Amer. Math. Soc. Trans. 19 (1898), p. 275.

76) *A. Jopke,* Arch. Math. Phys. (3) 18 (1910), p. 133.

Der Formelapparat vereinfacht sich, wenn man mit *E. Timerding*[77]) das F_2-Gebüsch als ein solches mit gemeinsamem Poltetraeder wählt. Der mannigfachen Erweiterungen der *Weierstraß*schen Formeln (2) auf Flächen höherer Ordnung und in höheren Räumen ist in Art. „F_3", Nr. **13**, Note 48a gedacht worden.

45. Weiteres zur Abbildung der Fläche. Bezüglich der Abbildung der Fläche S durch das c_2-Gebüsch G seien noch einige Ergänzungen hinzugefügt.

Die vier gemeinsamen Tangenten ($t_i = 0$) der zu G apolaren Schar Σ bildeten ein Vierseit Ω; auf den Seiten von dessen Hauptdreieck Δ liegen je zwei Gegenecken von Ω, und diese sind die Doppelelemente der zugehörigen „Ω-Involution".

Jede c_2 in G trifft die Seiten von Δ in Punktepaaren der zugehörigen Ω-Involution. Umgekehrt, trifft eine c_2 irgend zwei der Seiten in Punktepaaren der Ω-Involution, so auch die dritte und ist dann in G enthalten. Diese Regel überträgt sich ohne weiteres auf Schnitte von S mit F_n. Die Bilder sind c_{2n}, die die Seiten von Δ in n Punktepaaren der Ω-Involution treffen usf.

Die in Geradenpaare (g, g') zerfallenden c_2 in G waren die Bilder der von den Tangentialebenen von S ausgeschnittenen C_2-Paare. Ist der Punkt $P(g, g')$ beliebig vorgegeben, so ergeben sich g und g', indem man die auf zwei der Seiten von Δ befindlichen Ω-Involutionen von P aus projiziert und dann das den beiden Geradeninvolutionen gemeinsame Paar bestimmt.

46. Die Haupttangentenkurven der Fläche. Das Bild irgendeiner *nicht* in G enthaltenen c_2 ist eine R_4 auf S; dies gilt also im besonderen von den irreduzibeln Individuen γ_2 der Schar Σ oder auch den „Inkegelschnitten" von Ω. Deren Bilder R_4 sind aber nach *G. Darboux*[78]) die Haupttangentenkurven von S.

Dieser bemerkenswerte Satz geht fast unmittelbar aus den elementaren Eigenschaften der Verwandtschaft T_2 hervor.

Je zwei Gerade g, g' entsprachen sich in T_2, wenn sie bez. Σ konjugiert waren; sie bildeten zugleich die zerfallenden c_2 in G. Sei etwa die Gerade g gegeben, so wird sie von einer bestimmten γ_2 der Schar Σ in einem Punkte P_1 berührt; dann geht g' ebenfalls durch P_1. Andererseits sind g, g' die Bilder der beiden C_2, die auf S von der Tangentialebene im Bildpunkte P (von P_1) ausgeschnitten werden. Die Tangenten der beiden C_2 in P sind die beiden durch P laufenden

77) *H. E. Timerding,* Ann. di mat. (3) 1 (1917), p. 98.

78) *G. Darboux,* Soc. phil. B. 10 (1873), p. 37.

Haupttangenten h von S. Wandert jetzt g als Tangente längs der obigen γ_2, so haben γ_2 und g im jeweiligen Berührungspunkte P_1 die Fortschreitungsrichtung gemein, und die γ_2 in Σ sind die einzigen Kurven dieser Art. Somit sind in der Tat die γ_2 in Σ die Bilder der Haupttangentenkurven auf S, die sich als Kurven R_4 weiterhin diskutieren lassen.

47. Der Satz von Lie. Wir stellen noch einige Sätze allgemeineren Charakters über die S zusammen und verweisen wegen weiterer Einzelheiten wiederum auf Art. „F_3“, Nr. **13.**

S. Lie[79]) hat den Satz aufgestellt:

„Der Ort der Pole irgendeiner festen Ebene ε in bezug auf alle auf einer S gelegenen C_2 ist wiederum eine S. Berührt im besonderen ε die S, so reduziert sich der Ort auf eine F_2. Der Satz bleibt auch gültig, wenn die gegebene S in eine R-F_3 ausartet.“

Die *Lie*sche Fläche sei mit S_ε bezeichnet. *G. Koenigs*[80]) findet den Satz unabhängig von *Lie* und gibt einen analytischen Beweis. Er bemerkt weiter, daß die Doppelberührebenen $\overline{\mathrm{T}}$ von S einfache Berührebenen T von S_ε sind, und daß S_ε die Schnittkurve (S, ε) enthält.

A. Brambilla[81]) stellt eine Art von Reziprozitätsgesetz auf: „Berührt eine Ebene η die S_ε, so berührt auch ε die S_η.“ Er gibt auch Ausdehnungen des *Lie*schen Satzes auf „zweidimensionale S“ im S_4 und S_5.

D. Montesano[82]) untersucht die Beziehungen zwischen den beiden Flächen S und S_ε genauer; er fragt auch nach den Örtern, die bei Variieren der Ebene ε von den $\bar{g}$, dem D_3 und den Doppelberührebenen $\overline{\mathrm{T}}$ der S_ε beschrieben werden.

Sein Ausgangspunkt ist eigenartig. Es liege eine F_3 zugrunde und ein fester Raumpunkt P (außerhalb der F_3). Durch P lege man irgendeine Gerade g und denke sich auf ihr die drei vierten harmonischen Punkte Q in bezug auf je zwei der drei Schnittpunkte von F_3 mit g bestimmt. Bei Variieren von g erfüllen die Punktetripel Q eine kubische Fläche M_3. Das Auftreten irgendeines D_2 der F_3 bewirkt auch das eines entsprechenden D_2' der M_3 und vice versa.

Hat also im besonderen die F_3 vier D_2, ist also die Reziproke zu einer S, so findet das nämliche für die M_3 statt.

Dualistisch ist somit bei gegebener Ebene ε jeder S eine zweite, eben die S_ε zugeordnet, womit der *Lie*sche Satz durchsichtig bewiesen ist.

---

79) *S. Lie,* Arch. Math. og Nat. 3 (1878), p. 84. Der Satz war schon 1869 der Universität zu Kristiania eingereicht, s. *M. Noether,* Math. Ann. 53 (1900), p. 3.

80) *G. Koenigs,* Soc. math. Fr. Bull. 16 (1888), p. 15.

81) *A. Brambilla,* Napoli Rend. (3) 4 (1898), p. 19.

82) *D. Montesano,* Napoli Rend. (3) 5 (1899), p. 88.

Bei Variieren von ε beschreiben die $\bar{g}$ von S_ε singuläre lineare Komplexe, die die $\bar{g}$ von $\bar{S}$ zu Achsen haben; der D_3 beschreibt den Raum doppelt und die T von S_ε entsprechen sich in einer (nicht involutorischen) *Cremona*-Transformation.

Erweiterungen anderer Art gibt *C. Rosati.*[83]) Man denke sich irgendeine C_4 auf S herausgegriffen. Der Ort der Pole der Sehnen von C_4 in bezug auf die durch ihre Treffpunkte gehenden C_2 von S ist wiederum eine S. Zerfällt im besonderen die C_4 in zwei C_2, so zerfällt der in Rede stehende Ort in die Ebenen der beiden C_2 und eine F_2. Ist andererseits die C_4 eine Haupttangentenkurve auf S, so fällt der Ort mit S zusammen u. a. m. Artet die S in eine R-F_3 aus, so erfahren diese Sätze gewisse Modifikationen.

Der Verfasser leitet seine Sätze her durch geeignete Projektion der im S_5 gelegenen zweidimensionalen *Veronese*schen Fläche

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \lambda_1^2 : \lambda_2^2 : \lambda_3^2 : \lambda_2\lambda_3 : \lambda_1\lambda_3 : \lambda_1\lambda_2,$$

die zuerst *G. Veronese*[84]) genauer untersucht hat.

Für den *Lie*schen Satz hat *W. Franz Meyer* einen invariantentheoretischen Beweis geliefert (s. „F_3", Nr. 13). Sei S wiederum dargestellt durch

$$\text{(a)} \qquad \varrho x_i = c^{(i)}(\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t).$$

Die ∞^2, auf S gelegenen C_2 ergeben sich hieraus bei Ersetzung der $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t$ durch beliebige Linearformen eines Parameters λ

$$\text{(b)} \qquad \lambda_k = \alpha_k\lambda + \beta_k \qquad (k = r, s, t).$$

Für $u_r = (\alpha\beta)_{st}$ geht damit (a) über in

$$\text{(c)} \qquad \varrho x_i = f_i(\lambda) = a_i\lambda^2 + 2b_i\lambda + c_i.$$

Für die Schnittpunkte λ_1, λ_2 einer solchen C_2 mit einer Ebene ε hat man die Gleichung

$$\text{(d)} \qquad \lambda^2(a\varepsilon) + 2\lambda(b\varepsilon) + (c\varepsilon) = 0,$$

oder auch für $\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \lambda_1\lambda_2 : \lambda_1 + \lambda_2 : 1$

$$\text{(d}'\text{)} \qquad \sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = (c\varepsilon) : -2(b\varepsilon) : (a\varepsilon).$$

Nun hat der Pol $P'(x')$ von ε bez. C_2 die Koordinaten

$$\text{(e)} \qquad \varrho x_i' = a_i\sigma_2 + b_i\sigma_1 + c_i\sigma_0.$$

Setzt man hier die Werte der σ aus (d') ein, und ordnet nach den ε_i, so ergibt sich für den gesuchten Ort der Pole $P'(x')$

$$\text{(f)} \qquad \varrho x_r' = \varepsilon_i\eta_{ir} + \varepsilon_k\eta_{kr} + \varepsilon_l\eta_{lr} + \varepsilon_m\eta_{mr} \qquad (r = i, k, l, m),$$

83) *C. Rosati*, Torino Atti 35 (1900), p. 12.

84) *G. Veronese*, Rom Linc. Mem. (3) 19 (1884).

wo unter η_{rs} die in den Koeffizienten bilineare, in den Variabeln u quadratische Kontravariante der Formen $c^{(r)}$ und $c^{(s)}$ zu verstehen ist, so daß im besonderen für $r = s$ η_{rr} die Klassenform von $c^{(r)}$ wird.

Dann stellt (f) die gesuchte S_ε dar. Das Beweisprinzip ist ausdehnbar auf Formen $c^{(i)}$ höheren Grades und in mehr Parametern, sowie auf den S_n.

48. Die Sätze von Darboux, Picard und Castelnuovo. Eine Reihe weiterer Sätze bezweckt, wenn man von den *R-F* absieht, wie es im folgenden stets der Fall sei, die Fläche S auf Grund gewisser, auf ihr gelegener C-Scharen zu charakterisieren.

Schon *Kummer* (Nr. 8) hatte erkannt, daß die S die einzigen F_4 mit einer ∞^2-Schar von C_2 sind.

Diesen Satz verallgemeinert *G. Darboux*, im Anschluß an seine Untersuchung[85]) über C_2, die mit einer F_4 einen möglichst hohen Kontakt haben, dahin, daß überhaupt eine F mit ∞^2 C_2 eine S ist.

Eine weitere Verallgemeinerung rührt von *E. Picard*[86]) her („*Picard*scher Satz“). Danach ist die S auch dadurch charakterisierbar, daß sie eine F mit ebenen rationalen Schnitten ist. *Picards* erste Mitteilung (1878) hierüber deutet den Beweis nur an; erst 1886 erfolgt eine ausführlichere Begründung.

Indessen stellte *G. B. Guccia*[87]) eine Lücke im *Picard*schen Beweise fest, und er ersetzt ihn daher durch einen anderen unter Ausdehnung der Methoden, die *M. Noether*[88]) zur Untersuchung der F mit Scharen rationaler C verwendet hatte.

Noch allgemeinere Gesichtspunkte treten bei *G. Castelnuovo*[89]) auf. In einer ersten Arbeit geht er aus von Eigenschaften ebener c, die bei eindeutiger Transformation erhalten bleiben. Daraufhin untersucht er solche Familien von F, deren ebene Schnitte ein vorgegebenes Geschlecht p besitzen. Für $p \leqq 2$ ergibt sich, daß solche Flächen rational sind. Für $p = 0$ resultiert als Spezialfall der *Picard*sche Satz.

In abermaliger Erweiterung unter Benutzung eines Hilfssatzes von *L. Kronecker* beweist *Castelnuovo*, daß die irreduzibeln F, die von Ebenen in einem ∞^2-System reduzibler C geschnitten werden, Flächen S sind („*Castelnuovo*scher Satz“). Auf den S_4 hat den *Picard*schen Satz *E. H. Moore*[90]) ausgedehnt.

---

85) *G. Darboux*, Bull. Math. Astr. (2) 4 (1880), p. 348.

86) *E. Picard*, Paris Soc. Phil. 1878, p. 127; J. f. Math. 100 (1886), p. 71.

87) *G. B. Guccia*, Palermo Rend. 1 (1887), p. 165.

88) *M. Noether*, Math. Ann. 3 (1871), p. 161.

89) *G. Castelnuovo*, Rom Linc. Rend. (5) 3_1 (1894), p. 22.

90) *E. H. Moore*, Amer. J. Math. 10 (1887), p. 27.

49. Verallgemeinerungen der Weierstraßschen Darstellung der Fläche. Die *Weierstraß*sche Darstellung (2) der S ist verschiedentlich verallgemeinert worden.

So hat *G. Koenigs*[91]) überhaupt F mit Scharen von C_2 untersucht, derart, daß durch jeden Punkt der F n C_2 gehen.

Den Fall mit doppelter C_2-Erzeugung, insbesondere Kreiserzeugung, verfolgt eingehend *E. Cosserat.*[92])

Mit Hilfe dieser Methode haben *G. Veronese, E. Ascione, E. Cosserat*[93]) die S auch als Projektion vom S_4 aus untersucht.

Andererseits hat man das Analogon der S im S_n in Betracht gezogen. *A. Tanturri*[94]) studiert den Fall $n = 4$, den allgemeinen Fall *A. Brambilla.*[94])

Endlich läßt sich die *Weierstraß*sche Darstellung der S in der spezifischen Form (12) ausdehnen, indem man mit *A. Brambilla*[95]) die vier Quadrate linearer Ternärformen durch n^{te} Potenzen ersetzt; es ist beachtenswert, daß sich auch jetzt noch die Haupttangentenkurven als Inkegelschnitte eines Vierseits abbilden.

Ferner haben sich an die irrationale Darstellung (13) der S weitere Untersuchungen angeschlossen.

So hat *C. Segre*[96]) mittels der geometrischen Eigenschaften der Transformation $\varrho x_i' = x_i^2$ die Haupteigenschaften der S abgeleitet.

Die irrationale Darstellung (13) der S in der Gestalt $\sum_{i=1}^{i=4} \sqrt{A_i x_i} = 0$ dehnt *A. Brambilla*[97]) auf den nächst höheren Fall aus $\sum_{i=1}^{i=5} \sqrt{A_i x_i} = 0$ und untersucht die so entstehende F_8.

Aus der irrationalen Darstellung der S leitet *A. Roberts*[98]) drei orthogonale Transformationen ab, die S in sich überführen.

91) *G. Koenigs,* Paris C. R. 105 (1887), p. 407; J. Éc. Norm. (3) 5_2 (1887), p. 177. Vgl. *G. Jung,* Palermo Rend. 4 (1890), p. 253; *Ed. Weyr,* Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 351.

92) *E. Cosserat,* Paris C. R. 124 (1887), p. 1004; 130 (1900), p. 311, 385 (im besonderen doppelte Kreiserzeugung). Vgl. *H. Sisam,* Amer. J. Math. 30 (1908), p. 99.

93) *G. Veronese,* Rom Linc. Mem. (3) 19 (1884), p. 19; *E. Ascione,* Rom Linc. Rend. (5) 6_1 (1897), p. 162, 240; *E. Cosserat,* s. Note 92).

94) *A. Tanturri,* Giorn. di mat. (2) 14 (1907), p. 45, 291; *A. Brambilla,* Napoli Atti (2) 9 (1899), p. 185.

95) *A. Brambilla,* Torino Atti 20 (1885), p. 781; Lomb. Ist. Rend. (2) 21 (1888), p. 334, 541; Palermo Rend. 2 (1888), p. 176. Vgl. *G. Lazzeri,* Veneto Ist. Atti (6) 6 (1888), p. 171.

96) *C. Segre,* Giorn. di mat. 21 (1883), p. 358.

97) *A. Brambilla,* Giorn. di mat. 35 (1897), p. 1.

98) *A. Roberts,* Mess. 11 (1885), p. 132.

50. Metrische Beziehungen. Eine metrische Spezialisierung liegt bei *K. Merz*[99]) vor, indem er bei rechtwinkligen x, y, z die Gleichung $\sqrt{\frac{x}{\alpha}} + \sqrt{\frac{y}{\beta}} + \sqrt{\frac{z}{\gamma}} = 1$ zugrunde legt. Vermöge der Transformation $\xi^2 = x,\ \eta^2 = y,\ \zeta^2 = z$ (s. *Segre* oben) wird die S abgebildet auf ein Oktaeder. Die Ebenen desselben erscheinen als Ort der Doppelgeraden eines gewissen Strahlensystems.

Auch sei noch hingewiesen auf eine gewisse F_4 als projektive Verallgemeinerung der S bei *P. L. Schoute.*[100]) Auf einer solchen F_4 liegen weder C_{2n+1} noch elliptische C_4, wie das für die S schon *„Cremona“* und *„Sturm“* gezeigt hatten.

Die R_4 auf S studiert *G. Armenante.*[101]) Eine Konstruktion der Tangentialebene gibt *J. Rowe.*[101a])

Noch seien einige weitere metrische Eigenschaften der S erwähnt. *E. Amigues*[102]) betrachtet die S als eine gewisse „Mittelpunktsfläche“.

Der Umriß der S von irgendeinem Punkte einer der drei $\bar{g}$ aus ist nach *Cayley-Sharp*[103]) eine Ellipse.

Bei *W. Schmidt*[104]) erscheint die S als Ort der Punkte, für die die Summe der auf zwei feste windschiefe Gerade gefällten Lote gleich deren kürzestem Abstand ist. Ersetzt man diesen durch eine beliebige Konstante, so entsteht eine allgemeinere F_4 (s. Nr. 86).

51. Die Krümmungslinien auf der Fläche S. Behufs Bestimmung der Krümmungslinien von S, deren Gleichung wieder in der irrationalen Gestalt

$$S \equiv \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} - 1 = 0 \tag{13'}$$

angenommen sei, entwickelt *G. Darboux*[105]) eine allgemeinere Methode. Zugrunde liegt das *Dupin*sche Theorem, wonach sich die Flächen eines ∞^3-orthogonalen Systems in ihren Krümmungslinien schneiden (s. Art. III D 9, *E. Salkowski*, Dreifach orthogonale Systeme). Es liege ein ∞^1-Flächensystem mit einem Parameter u vor in der Gestalt

$$X + Y + Z \equiv u, \tag{α}$$

99) *K. Merz,* Dissert. Techn. Hochsch. Zürich 1914; Schweiz. Naturf. Ges. 1914, p. 102. Siehe auch die historischen Notizen von *K. Merz,* Ens. Math. 19 (1917), p. 89.

100) *P. L. Schoute,* Amsterdam Ak. 4 (1896), p. 224, 272.

101) *A. Armenante,* Giorn. di mat. 12 (1874), p. 250.

101a) *J. Rowe,* Amer. Math. Soc. Proc. 12 (1911), p. 295.

102) *E. Amigues,* Paris C. R. 86 (1878), p. 38.

103) *A. Cayley-Sharp,* Educ. Times 39 (1883), p. 31.

104) *W. Schmidt,* Progr. Realgymn. Lüdenscheid 1889.

105) *G. Darboux,* Paris C. R. 84 (1877), p. 382.

wo X, Y, Z je nur von x, y, z abhängen, und überdies drei Bedingungen genügen von dem Typus

$$(\beta) \qquad X'X'' \equiv 2(X'' - a)(X'' - b) \quad \text{usf.}$$

Eine solche Schar (α) gehört nach einem Satze von *J. A. Serret* einem ∞^3-Orthogonalsysteme an (s. Art. III D 3, *R. v. Lilienthal*, Kurven auf einer Fläche, Nr. **35**).

Es wird zunächst untersucht, wie sich die beiden anderen Scharen des Systems als Enveloppen von Flächen ergeben, die sich durch eine gewisse Quadratur bestimmen lassen. Sodann wird die Erweiterung verfolgt, wenn auf den rechten Seiten der Bedingungen (β) an die Stelle des Faktors 2 eine beliebige Konstante $2k$ tritt.

Daraus läßt sich folgern, daß sich unendlichviele algebraische ∞^3-orthogonale Flächensysteme angeben lassen, deren drei Scharen der nämlichen Gleichungsform genügen und sich nur durch die Parameterwerte unterscheiden.

Dies findet im besonderen seine Anwendung auf die Fläche S (13′) sowie auch auf die F_3 mit $4\,D_2$ (s. „F_3", Nr. **13**) mit der Gleichung $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} - 1 = 0$ und allgemeiner auf die Fläche mit der Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m - 1 = 0.$

VIII. Rationale Flächen vierter und höherer Ordnung.

52. Einleitung. Rationale Flächen oder auch solche vom Geschlecht Null sind solche, die sich durch ein homaloides Gebüsch von Kurven in einer Ebene mit einer endlichen Anzahl von Grundpunkten A („Fundamentalpunkten") auf die Ebene abbilden lassen (s. Art. III C 11, *L. Berzolari*, Algebraische Transformationen).

Diese Abbildung ist eine (1, 1)-deutige mit Ausnahme der Fundamentalpunkte A; letzteren entsprechen Kurven C auf der Fläche, oder genauer, die Linienelemente durch einen Punkt A korrespondieren (1, 1)-deutig den Linienelementen auf C. Vermöge einer solchen Abbildung lassen sich die homogenen Koordinaten eines Punktes P einer rationalen Fläche F darstellen als Formen derselben Ordnung in drei homogenen Parametern und umgekehrt; diese Parameter sind die Punktkoordinaten in der Bildebene.

53. Die Typen rationaler F_4. Wir beschränken uns in der Hauptsache auf die rationalen F_4, da man solche höherer Ordnung nur unvollständig kennt.

In den voraufgehenden Abschnitten ist bereits eine Reihe rationaler F_4 behandelt worden; diese besaßen entweder eine mehrfache Kurve oder aber einen D_3.

M. Noether[106]) bewies, daß alle F_4 mit einer mehrfachen Kurve rational sind.

Zu diesen Typen rationaler F_4 tritt zunächt noch der einer F_4 mit Selbstberührungspunkt (s. auch Nr. 7), der durch *Noether* und *L. Cremona* erledigt wurde.[107])

Die Abbildung geschieht durch ein Gebüsch G von c_6 mit 7 d_2 und 4 d_1.

Man beachte hierbei, daß G ein c_6-Gebüsch von besonderer Art ist. Durch sieben beliebige Punkte als d_2 geht, da eine allgemeine c_6 von 27 Konstanten abhängt, eine ∞^6-lineare Schar von c_6, also durch vier weitere einfache Punkte nur ein Netz. Die obigen 7 + 4 Punkte sind somit an die Bedingung geknüpft, daß eine c_6, die in den sieben ersteren Punkten d_2 besitzt und noch durch drei weitere der vier letzteren Punkte einfach hindurchgeht, auch den vierten Punkt enthalten muß.

Irgend zwei c_6 in G treffen sich in $36 - 4 \cdot 7 - 4 = 4$ variierenden Punkten, wie es sein muß.

Die Theorie der rationalen F_4 brachte *Noether*[108]) dadurch zum Abschluß, daß er zeigte, wie nur noch zwei weitere Typen existieren.

Die Form der F_4-Gleichung für den ersteren Typus lautet

$$(1)\qquad F_4 \equiv f_1^2 x_4^2 + 2\{f_1 x_3(x_3 + g_1) + g_3\} x_4 + x_3^4 + 2x_3^3 h_1 \\ + x_3^2 h_2 + x_3 h_3 + h_4 = 0,$$

wo die f, g, h binäre Formen in x_1, x_2 mit dem jeweiligen Index als Ordnung bedeuten.

Die Abbildung vollzieht sich durch ein Gebüsch G von c_7 mit einem d_3 und 9 d_2 als Grundpunkten.

Bezüglich der Grundpunkte von G tritt eine ähnliche Erscheinung ein wie soeben.

Da eine allgemeine c_7 von 35 Konstanten abhängt, so gibt es nur ein Netz von c_7, die an einer beliebigen Stelle einen d_3 besitzen und an neun weiteren beliebigen Stellen d_2; denn man hat $35 - 6 - 3 \cdot 9 = 2$. Soll aber statt des Netzes ein Gebüsch G eintreten, so müssen die zehn Grundpunkte einer gewissen Bedingung unterliegen. Andererseits treffen sich irgend zwei Individuen von G in $49 - 9 - 9 \cdot 4 = 4$ beweglichen Punkten, wie es sein muß.

---

106) *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1871), p. 161; 4 (1871), p. 547.

107) *M. Noether,* Gött. Nachr. 1871, p. 267; *L. Cremona,* Math. Ann. 4 (1871), p. 213; „In Memoriam Chelini", Milano 1881, p. 413.

108) *M. Noether,* Math. Ann. 33 (1889), p. 546. Vgl. *G. Jung,* Ann. di mat. (2) 15 (1887), p. 277; *D. Montesano,* Napoli Rend. (3) 6 (1900), p. 158.

Der letzte Typus ist charakterisiert durch die Gleichungsform

$$(2)\quad F_4 \equiv x_1^2 x_4^2 - 2(x_3 x_1 f_1 + g_3) x_4 - x_3^3 x_1 + x_3^2 h_2 + x_3 h_3 + h_4 = 0,$$

wo wiederum die f, g, h Binärformen in x_1, x_2 sind.

Das Abbildungsgebüsch G besteht aus c_9 mit 8 d_3, einem d_2 und einem d_1. Auch hier sind die Lagen der zehn Grundpunkte einer Beschränkung unterworfen.

Denn da eine allgemeine c_9 von 54 Konstanten abhängt, so wären bei beliebiger Lage der Grundpunkte $8 \cdot 6 + 3 + 1 = 52$ Bedingungen zu erfüllen, so daß dann nur ein Netz von c_9 existierte.

Andererseits treffen sich irgend zwei c_9 von G in $81 - 8 \cdot 9 - 4 - 1 = 4$ beweglichen Punkten, wie es sein muß.

IX. Flächen vierter und höherer Ordnung mit endlichvielen Geraden.

54. Flächen vierter und höherer Ordnung ohne Singularitäten mit einer endlichen Anzahl von Geraden. Mangels einer systematischen Kenntnis dieser besonderen F_4, $F_5, \ldots$ — kennt man doch nicht einmal die jeweilige Maximalanzahl von Geraden auf der Fläche — beschränken wir uns darauf, eine Reihe von beachtenswerten Typen herauszugreifen.

Zunächst die F_4.

Wie schon in Nr. **3** hervorgehoben, erfordert das Auftreten einer Geraden g auf einer F_4 eine invariante Bedingung für die Konstanten der Fläche, so daß auf einer punktallgemeinen F_4 keine g liegen kann.

Die Gleichung einer F_4 mit einer vorgelegten g $(x_i = 0,\ x_k = 0)$, wo fünf Bedingungen zu erfüllen sind, hat die Struktur

$$(1)\qquad F_4 \equiv x_i F_3 + x_k G_3 = 0.$$

Im nächst höheren Falle von zwei Geraden g_1, g_2 ist zu unterscheiden, ob diese windschief oder aber inzident sind; im ersteren Falle sind zehn, im letzteren neun Bedingungen zu erfüllen.

Bei zwei windschiefen Geraden

$$g_1(x_i = 0,\ x_k = 0), \quad g_2(x_l = 0,\ x_m = 0)$$

ist die Gleichung der F_4 von der Gestalt

$$(2\,\mathrm{a})\qquad F_4 \equiv x_i x_l F_2 + x_i x_m G_2 + x_k x_l H_2 + x_k x_m L_2 = 0.$$

Dagegen bei zwei inzidenten Geraden

$$g_1(x_i = 0,\ x_k = 0), \quad g_2(x_i = 0,\ x_l = 0)$$

$$(2\,\mathrm{b})\qquad F_4 = x_i F_3 + x_k x_l G_2 = 0.$$

Wir gehen über zu F_4 mit drei Geraden g_1, g_2, g_3. Man hat wieder die drei Hauptfälle zu unterscheiden, wo entweder alle drei g windschief sind, oder aber nur zwei, oder endlich, wo je zwei der g inzident sind.

Erster Fall. Alle drei g sind windschief, so daß etwa

$$g_1(a=0,\ a'=0),\quad g_2(x_i=0,\ x_k=0),\quad g_3(x_l=0,\ x_m=0).$$

Es sind 15 Bedingungen zu befriedigen. Gemäß (2a) muß die Gleichung der F_3 von der Struktur sein

$$(3\,\mathrm{a})\qquad \begin{aligned} F_4 \equiv\ & a(x_i x_l a_1 + x_i x_m b_1 + x_k x_l c_1 + x_k x_m d_1) \\ & + a'(x_i x_l a_1' + x_i x_m b_1' + x_k x_l c_1' + x_k x_m d_1') = 0. \end{aligned}$$

Zweiter Fall. Nur zwei der drei g, g_1 und g_2 sind windschief. Es treten zwei Unterfälle ein, je nachdem die dritte Gerade g_3 nur eine jener beiden, oder aber beide trifft; bei ersterem sind 14, bei letzterem 13 Bedingungen zu erfüllen.

Im ersteren Unterfalle seien die isolierte Gerade $g = g_3$ $(a=0,\ a'=0)$, die beiden anderen $g_1(x_i=0,\ x_k=0)$, $g_2(x_i=0,\ x_l=0)$. Man hat gemäß (2b) die Gleichungsform

$$(3\,\mathrm{b})\qquad F_4 \equiv a(x_i F_2 + x_k x_l F_1) + a'(x_i F_2' + x_k x_l F_1') = 0.$$

Im zweiten Unterfalle seien die beiden windschiefen Geraden wieder $g_1(x_i=0,\ x_k=0)$, $g_2(x_l=0,\ x_m=0)$, dagegen die dritte, beide treffende, g_3 etwa $(x_k=0,\ x_m=0)$.

Es entsteht die Gleichungsform

$$(3\,\mathrm{b}')\qquad \begin{aligned} F_4 \equiv\ & x_i x_l(x_k F_1 + x_m F_1') + x_i x_m(x_k G_1 + x_m G_1') \\ & + x_k x_l(x_k H_1 + x_m H_1') + x_k x_m(x_k L_1 + x_m L_1') = 0. \end{aligned}$$

Dritter Fall. Je zwei der drei g sind inzident. Dann liegen entweder alle drei g in einer Ebene $(x_m=0)$, also

$$g_1(x_m=0,\ x_i=0),\quad g_2(x_m=0,\ x_k=0),\quad g_3(x_m=0,\ x_l=0),$$

oder aber sie laufen durch einen Punkt (A_m), also

$$g_1(x_i=0,\ x_k=0),\quad g_2(x_i=0,\ x_l=0),\quad g_3(x_k=0,\ x_l=0).$$

Die Gleichungsformen der F_4 werden

$$(3\,\mathrm{c})\qquad F_4 \equiv x_m F_3 + x_i x_k x_l F_1 = 0,$$

resp.

$$(3\,\mathrm{c}')\qquad F_4 \equiv x_k x_l F_2 + x_l x_i G_2 + x_i x_k H_2 = 0.$$

Mithin besitzen diese letzteren F_4 einen D_2 im Punkte A_m, in dem die drei Geraden g zusammenstoßen.

Hieran schließen sich die Fälle, wo durch einen D_2 mehr als drei Gerade der F_4 gehen; sie seien hier gleich mit behandelt, wenn sie auch ihrer Natur nach zu Nr. 55 gehören.

Eine vierte Gerade g_4 treffe die Ebene $x_m = 0$ in einem Punkte $Q(y_i, y_k, y_l, 0)$. Man ordne demgemäß in (3 c′) die Formen F_2, G_2, H_2 nach x_m,

(4) $F_2 \equiv x_m^2 a_0 + x_m a_1 + a_2, \quad G_2 \equiv x_m^2 b_0 + \cdots, \quad H_2 \equiv x_m^2 c_0 + \cdots.$

Die Gerade $g_4 = (A_m, Q)$ trifft die F_3 in zwei Restpunkten, die von der in x_m quadratischen Gleichung abhängen

$$(5) \qquad \begin{aligned} &x_m^2(a_0 y_k y_l + b_0 y_l y_i + c_0 y_i y_k) \\ &\quad + x_m\{a_1(y) y_k y_l + \cdots\} + \{a_2(y) y_k y_l + \cdots\} = 0. \end{aligned}$$

Soll g_4 der F_4 angehören, so muß (5) in x_m identisch erfüllt sein, so daß man einzeln hat

$$(6) \qquad \begin{gathered} a_0 y_k y_l + b_0 y_l y_i + c_0 y_i y_k = 0, \\ a_1(y) y_k y_l + \cdots = 0, \quad a_2(y) y_k y_l + \cdots = 0. \end{gathered}$$

Bei gegebener Geraden g, d. h. bei gegebenem Punkte $Q(y)$, lassen sich in mannigfaltiger Weise Wertsysteme der a_0, b_0, c_0, sowie der in $a_1, \ldots, a_2, \ldots$ auftretenden Koeffizienten angeben, die (6) erfüllen.

Analog verhält es sich mit einer fünften Geraden g_5, die durch den Punkt $R(z)$ in $x_m = 0$ festgelegt sei. Soll auch g_5 der F_4 angehören, so treten zu (6) drei weitere Bedingungen hinzu, die aus (6) durch Vertauschung der y mit den z hervortreten.

Die Konstanten a_0, b_0, c_0 sind jetzt an zwei lineare homogene Bedingungen gebunden, sind also im allgemeinen bestimmt, und verschwinden nicht zugleich, d. h. der Punkt A_m bleibt noch ein D_2.

Dieser Fall tritt z. B. bei der *Weddleschen Fläche* ein (s. Nr. **65**).

Es werde zu einer sechsten Geraden g_6 durch A_m übergegangen, die durch einen Punkt $S(s)$ in der Ebene $x_m = 0$ bestimmt sei. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Die drei Konstanten a_0, b_0, c_0 unterliegen jetzt drei Bedingungen von dem in (6) angegebenen Typus. Entweder, „im allgemeinen", sind die drei Punkte Q, R, S beliebig, d. h. sie liegen *nicht* mit den drei Koordinatenecken A_i, A_k, A_l auf einer c_2. Dann liegen drei in a_0, b_0, c_0 lineare homogene Relationen mit nichtverschwindender Koeffizientendeterminante vor. Mithin verschwinden die a_0, b_0, c_0 einzeln, d. h. die F_4 besitzt in A_m einen D_3 (siehe Nr. **37**), und ihre Gleichung nimmt die Form an

$$(7) \qquad F_4 \equiv x_m a_3 + a_4 = 0.$$

Oder aber im besonderen, jene Determinante verschwindet, die a_0, b_0, c_0 verschwinden nicht zugleich und sind bestimmt; der D_2 in A_m bleibt ein solcher.

Ordnet man die Gleichung der F_4 nach x_m, wie folgt

$$(8) \qquad F_4 \equiv x_m^2 K_2 + x_m K_3 + K_4 = 0,$$

so ist die Gleichung des von A_m an die F_4 gehenden Tangentenkegels K_2 des D_2

$$(9) \qquad K_2 \equiv a_0 x_k x_l + b_0 x_l x_i + c_0 x_i x_k = 0.$$

Die sechs Geraden g sind jetzt Kanten dieses Kegels K_2 und zugleich solche des kubischen Kegels K_3 und des biquadratischen K_4.

Mehr als sechs Gerade durch A_m könnte die F_4 nur in dem singulären Falle besitzen, wenn die Form K_3 identisch verschwindet, dann würden die acht gemeinsamen Kanten der beiden Kegel K_2 und K_4 auf der F_4 liegen.

Wir kehren zurück zu F_4 mit windschiefen Geraden. Indem die Fälle mit vier, fünf, sechs solchen Geraden übergangen seien, werde der Fall von sieben solchen Geraden ins Auge gefaßt. Da die Existenz solcher, beliebig gegeben gedachter sieben Geraden auf einer F_4 $7 \cdot 5 = 35$ unabhängige Bedingungen involviert, so müssen jene sieben Geraden einer gewissen Abhängigkeit unterliegen. Diese hat *Cayley*[109]) näher untersucht. Wie später *E. Wakeford*[110]) ausgeführt hat, steht eine solche F_4 mit sieben windschiefen g in enger Verbindung mit einer gewissen kubischen Raumtransformation T_3 (s. „F_3", Nr. **11**).

Man gehe von vier beliebigen windschiefen Geraden $h_1, \ldots, h_4$ aus. Durch diese geht ein Gebüsch G von F_3, dessen Gleichung sei

$$(10) \qquad G \equiv \sum_{i=1}^{4} u_i' F_3^{(i)} = 0.$$

Man ordne den F_3 dieses Gebüsches G das Gebüsch der Ebenen $\mathsf{E}(u')$ eines zweiten Raumes kollinear zu. Dadurch wird eine kubische *Cremona*sche Punkttransformation T_3 zwischen beiden Räumen festgelegt. Umgekehrt korrespondiert dabei das Gebüsch der Ebenen $\mathsf{E}(u)$ des ersten Raumes einem Gebüsche G' von Flächen 3. Ordnung F_3' im zweiten Raume, wiederum mit vier gemeinsamen Geraden $h_1', \ldots, h_4'$.

Eine beliebige Gerade g des ersten Raumes geht vermöge der T_3 über in eine C_3, die die vier Geraden h' zu Sekanten hat, und vice versa.

Von besonderem Interesse ist eine gewisse F_4 mit zehn windschiefen Geraden g. Diese F_4 ist der Ort der Spitzen der Kegel eines „allgemeinen" F_2-Gebüsches G, d. h. eines solchen ohne gemeinsame Grundpunkte, und steht in engster Verbindung mit der Theorie der „allgemeinen" ebenen rationalen Kurven 6. Ordnung r_6, d. h. solcher,

109) *A. Cayley*, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198.

110) *E. K. Wakeford*, London Math. Soc. Proc. (2) 21 (1921), p. 98; vgl. dazu die Bemerkungen von *H. F. Baker*, ib. p. 114.

die zehn d_2 besitzen. Es werde von diesen r_6 ausgegangen.[111]) Die Parameterdarstellung einer solchen r_6 lautet

$$(11)\qquad \varrho x_i = f_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo die f_i binäre Formen 6. Ordnung in λ sind.

Zu diesem Netz von Formen f gehört ein apolares Gebüsch von Formen φ derselben Ordnung, das sich zusammensetze aus

$$(12)\qquad \varphi_a = (a\lambda)^6, \quad \varphi_b = (b\lambda)^6, \quad \varphi_c = (c\lambda)^6, \quad \varphi_d = (d\lambda)^6,$$

mit realen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_6$ usf.

Bedeuten $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ irgend sechs Parameterwerte und s_k ($k = 0, 1, \ldots, 6$) deren homogene elementarsymmetrische Verbindungen, so bilde man vermöge Polarisation nach den $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ aus (12) die vier Linearformen

$$(13)\qquad \begin{array}{ll} (as) \equiv \sum a_k s_k, & (bs) \equiv \sum b_k s_k, \\ (cs) \equiv \sum c_k s_k, & (ds) \equiv \sum d_k s_k. \end{array}$$

Dann besagt das „Schnittpunkttheorem", daß die sechs Punkte $(\lambda_1), \ldots, (\lambda_6)$ der r_6 dann und nur dann auf einer Geraden liegen, wenn die vier Bedingungen erfüllt sind

$$(14)\qquad (as) = 0, \quad (bs) = 0, \quad (cs) = 0, \quad (ds) = 0.$$

Man spalte weiter die sechs Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ in zwei Reihen von je drei, etwa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$, und bezeichne deren elementarsymmetrische Verbindungen mit σ_r resp. τ_s. Setzt man dann

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_0 = a_0\sigma_0 + \cdots + a_3\sigma_3, \\ A_1 = a_1\sigma_0 + \cdots + a_4\sigma_3, \\ A_2 = a_2\sigma_0 + \cdots + a_5\sigma_3, \\ A_3 = a_3\sigma_0 + \cdots + a_6\sigma_3 \quad \text{usf.,} \end{array}\right.$$

so nehmen die Gleichungen (14) die Form an

$$(14')\qquad (as) \equiv \sum \tau_i A_i = 0, \quad (bs) \equiv \sum \tau_i B_i = 0 \quad \text{usf.}$$
$$(i = 0, 1, 2, 3).$$

Eliminiert man hieraus die τ, so ergibt sich als Kriterium für die Inzidenz dreier Punkte $(\lambda_1), (\lambda_2), (\lambda_3)$ der r_6 die Bedingung

$$(16)\qquad F_4 \equiv | A_i, B_i, C_i, D_i | = 0,$$

die also von derselben Struktur ist wie die Gleichung (s. Nr. 65) der Kegelspitzenfläche eines F_2-Gebüsches, nur daß hier zwischen den Koeffizienten A, B, C, D gewisse Gleichheiten bestehen. Nunmehr ziehe man die kubische Normkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. Nr. 3) heran. Die Koordi-

111) *W. Fr. Meyer,* Apolarität und rat. Kurven. Tübingen 1883, Abschn. III.

naten x_i irgendeines Raumpunktes $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, von dem die drei (Schmiegungs-)Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an die N_3 gehen, fallen mit den σ_i zusammen.

Dem Gebüsch (12) der Formen φ, oder auch dem der Formen (14'), ist ein F_2-Gebüsch $G\,(F_a, F_b, F_c, F_d)$ (1, 1)-deutig zugeordnet. Die Gleichungen der $F_a, \ldots, F_d$ ergeben sich aus (14) für $\sigma_i = \tau_i$, so daß man hat

$$(17) \qquad F_a \equiv \sum_{i,k} x_i x_k a_{i+k} \equiv (ax)^2 = 0 \text{ usf.}$$

Andererseits ist der Normkurve N_3 eine ∞^2 Schar Σ von Flächen 2. Klasse Φ einbeschrieben, die sich aus drei Individuen $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$ zusammensetzen, deren Gleichungen sind

$$(18) \qquad \begin{cases} \Phi_\alpha \equiv u_0 u_2 - u_1^2 \equiv (u\alpha)^2 = 0, \\ \Phi_\beta \equiv u_0 u_3 - u_1 u_2 \equiv (u\beta)^2 = 0, \\ \Phi_\gamma \equiv u_1 u_3 - u_2^2 \equiv (u\gamma)^2 = 0. \end{cases}$$

Dann bestehen die zwölf Beziehungen zwischen den Flächen F und Φ

$$(19) \qquad \begin{cases} (a\alpha)^2 = 0, & (b\alpha)^2 = 0, & (c\alpha)^2 = 0, & (d\alpha)^2 = 0, \\ (a\beta)^2 = 0, & (b\beta)^2 = 0, & (c\beta)^2 = 0, & (d\beta)^2 = 0, \\ (a\gamma)^2 = 0, & (b\gamma)^2 = 0, & (c\gamma)^2 = 0, & (d\gamma)^2 = 0. \end{cases}$$

Diese sagen aus, daß jede Fläche F des Gebüsches G apolar ist zu jeder Fläche Φ der Schar Σ, oder kurz, daß das Gebüsch G apolar ist zur Normkurve N_3.

Vermöge (14') ist je ein Punktepaar (σ), (τ) der Fläche F_4 konjugiert zu G, d. h. zu jeder Fläche in G. Man hat damit den Satz: „Beschreibt man der Normkurve N_3 ein beliebiges, durch (1) dargestelltes Netz von Hexaedern um, so erfüllen deren Ecken die Kegelspitzenfläche F_4 eines F_2-Gebüsches G. Je ein Paar von Gegenecken eines solchen Hexaeders ist konjugiert in bezug auf die F_2 des Gebüsches G, oder auch, das Hexaeder ist ein ‚Polhexaeder' von G."

Sei ferner $d_2(\alpha_i, \beta_i)$ irgendeiner der zehn d_2 der r_6 (1). Da das Paar (α_i, β_i) mit jedem Punkte λ der r_6 ein Inzidenztripel bildet, so folgt: „Auf der Fläche F_4 liegen zehn windschiefe Gerade $g_i(\alpha_i, \beta_i)$, die zugleich Achsen der Normkurve N_3 sind." Weitere Gerade auf der F_4 existieren nicht.

Endlich beachte man noch, daß die Fläche F_4 die Normkurve N_3 in zwölf Punkten trifft, die von einer Gleichung $\Theta(\lambda) = 0$ abhängen, wo Θ die Funktionaldeterminante der Formen f (oder auch der Formen φ) bedeutet. Die Gleichung $\Theta(\lambda) = 0$ liefert andererseits für die r_6 deren zwölf Wendepunkte.

Es handelt sich nun um die Umkehrung der bisherigen Entwickelungen, indem man jetzt von einem allgemeinen F_2-Gebüsch G (ohne Grundpunkte) ausgeht. Gibt es dann eine kubische Kurve Γ_3, die zu G apolar ist?

Da eine Γ_3 von zwölf Konstanten abhängt, andererseits zwölf Bedingungen vorliegen, so können nur zwei Fälle eintreten; entweder gibt es eine endliche Anzahl von Γ_3, oder aber im allgemeinen keine Γ_3, wenn jedoch im besonderen eine, so auch unendlich viele.

Der letztere Fall kann nicht eintreten. Denn nach Nr. **65** befinden sich in G zehn Ebenenpaare, und deren zehn Schnittachsen wären dann die gemeinsamen Achsen von ∞ Γ_3, was ausgeschlossen ist. Mithin gibt es eine endliche Anzahl von zu G apolaren Γ_3, wo diese Anzahl nur gleich Eins oder Zwei sein kann.

Hier greift die vielseitige Untersuchung von *A. B. Coble*[112]) ein. Er bringt die kubischen Kurven $C_3 = \Gamma_3$ und die r_6 in einen direkten Zusammenhang. Man denke sich zwei beliebige Kurven C_3, C_3' gegeben und auf jeder einen Parameter λ, resp. λ' ausgebreitet. Man lege etwa durch C_3' das Netz N' von F_2, so schneidet dieses auf C_3 ein Netz von Punktsextrupeln $f_6(\lambda)$ von der Form (1) aus, das also durch eine r_6 repräsentiert werden kann. Analog entsteht vice versa eine r_6'. Sieht man dual die beiden kubischen Kurven als Klassengebilde (Gewinde) Γ_3, Γ_3' an und operiert entsprechend mit den einbeschriebenen Flächen 2. Klasse Φ_2, so bildet sich die Raumfigur von neuem ab auf ein Paar von r_6. Im ganzen treten also als Bilder der Raumfigur $(C_3, C_3') = (\Gamma_3, \Gamma_3')$ vier gleichberechtige rationale Kurven 6. Ordnung vom Typus r_6 (1) auf.

Legt man nun etwa das Paar (Γ_3, Γ_3') zugrunde, so korrespondieren wie früher deren zehn gemeinsamen Achsen die zehn d_2 der r_6.

Dann aber weist *Coble* nach, daß auf diese Weise, bei beliebiger Lage der C_3, C_3', in der Tat das allgemeinste Netz (1) von binären Formen $f_6(\lambda)$ entsteht.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß *Coble* auch transzendente Hilfsmittel heranzieht, indem er die Figur (C_3, C_3') zu den *Abel*schen Modularfunktionen vom Geschlecht $p = 4$ in enge Beziehung setzt.

Faßt man das obige zusammen, so ist die Umkehrfrage jetzt beantwortet, und es gilt der Satz: „Zu einem F_2-Gebüsch gehört ein einziges Paar von Γ_3, so daß deren zehn gemeinsame Achsen die Schnittlinien der zehn in G enthaltenen Ebenenpaare sind. Die Kegelspitzenfläche F_4 von G enthält jene zehn Geraden (und keine wei-

112) *A. B. Coble,* Amer. J. Math. 41 (1919), p. 43; ib. 46 (1924), p. 143.

teren), und G ist das zu Γ_3 wie zu Γ_3' apolare F_2-Gebüsch. Überdies erscheint die F_4 als Ort der zehn Paare von Gegenecken von je ∞^2, Γ_3 resp. Γ_3' umbeschriebenen Hexaedern, und jedes solche Punktepaar ist konjugiert in bezug auf G."

Auf die Sonderfälle, wo sich die zehn d_2 der r_6 zu höheren Singularitäten vereinigen, werde nicht eingegangen und nur erwähnt, daß im Falle eines d_5 die F_4 sich zur *Hesse*schen Fläche $H(F_3)$ einer F_3 spezialisiert (s. Art. „F_3", Nr. 19).

Der bisher behandelte Fall einer F_4 mit zehn g ist, vom Standpunkte der ebenen rationalen Kurven r_n aus, nur das Anfangsglied einer Kette von $F_4, F_5, \ldots$ mit einer endlichen Anzahl von Geraden g.[111]) In der Tat, geht man von einer allgemeinen r_n aus, die also $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ d_2 besitzt und durch $\varrho x_i = f_n^{(i)}(\lambda)$ dargestellt ist, stellt das Schnittpunkttheorem auf und leitet aus ihm, ähnlich wie bei der r_6, das Inzidenzkriterium für irgend drei Punkte der r_n ab, so gelangt man zu dem Satze:

„Eine allgemeine ebene rationale Kurve r_n $(n \geq 6)$ führt zu einer F_n mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ (und nicht mehr) Geraden, die Achsen einer Γ_3 sind. Die F_n erscheint als Ort der Ecken eines Netzes von n-flachen, die der Γ_3 umbeschrieben sind. Die Gleichung der F_n erhält man durch Nullsetzen einer n-reihigen Determinante, mit quaternären Linearformen als Elementen, deren Koeffizienten kettenförmig aufsteigen."

Zu einzelnen F_4 mit einer besonders hohen Anzahl von g gelangt *F. Schur*[113]); so zu einer „symmetrisch-tetraedralen" F_4 mit 48 g, und zwei weiteren F_4 mit 52 resp. 64 g.

Systematisch wird die Lagerung endlichvieler g auf einer F_n in zwei Arbeiten von *G. Affolter*[114]) untersucht, indem er sie je nach der Natur der Restkurven in zwei Hauptgruppen einteilt. Man gehe von den durch eine g auf einer F_n laufenden Ebenen aus, für die die Restkurve c_{n-1} irgendwie zerfällt. Eine Gruppe von g auf der Fläche heißt von der u^{ten} Klasse, wenn durch jede g der Gruppe u Ebenen gehen, für die die Restkurve c_{n-1} in gleicher Weise ausartet. So z. B. bilden die 27 g einer F_3 eine Gruppe 5. Klasse.

Bezeichnet man ferner eine nicht der F_n angehörige Schnittachse zweier Ebenen, von denen jede durch eine g der Fläche geht, als eine

113) *F. Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 1; J. f. Math. 95 (1883), p. 207 (symmetrisch-tetraedrale F_4 mit 48 g); Math. Ann. 20 (1882), p. 84 (F_4 mit 52 resp. 64 g). Vgl. hierzu *P. Veronese,* Math. Ann. 19 (1881), p. 161.

114) *G. Affolter,* Math. Ann. 27 (1886), p. 277; 29 (1887), p. 1.

„Kante", so enthält eine g-Gruppe „erster Art" keine Kante, durch die mehr als zwei, eine g der Fläche enthaltende Ebenen gehen.

Dagegen heißt eine g-Gruppe von der „zweiten Art", wenn durch eine oder mehrere Kanten mehr als zwei solcher Ebenen gehen.

In der ersten Abhandlung werden zunächst F_n mit g-Gruppen erster Art verfolgt, wo die Degeneration der Restkurven eine vollständige ist. In der zweiten Abhandlung bestimmt der Verfasser diejenigen Gruppen erster Art, wo die Degeneration der Restkurven keine vollständige ist. Es wäre wünschenswert, wenn diese allgemeinen Entwicklungen einmal abgerundet und andererseits von ihnen konkrete Anwendungen gemacht würden.

55. Flächen vierter und höherer Ordnung mit Singularitäten und einer endlichen Anzahl von Geraden. Die Methode, mittels deren *Clebsch* die F_3, die F_4 mit einer $\overline{C}_2$ resp. $\overline{g}$ auf eine Ebene eindeutig abgebildet hatte, ist von ihm selbst, sowie von *M. Noether, A. Cayley, L. Cremona, G. Darboux* u. a. auf höhere Fälle ausgedehnt worden. (S. Art. III C 11, *L. Berzolari,* Algebraische Transformationen.)

Wir beschränken uns auf F_5 mit mehrfachen C. Eine solche enthält eine endliche Anzahl von Geraden:

1. wenn sie eine dreifache Gerade $\overline{\overline{g}}$ enthält,

2. wenn zwei windschiefe doppelte Geraden $\overline{g}_1$ und $\overline{g}_2$ in der Fläche liegen,

3. wenn sie eine doppelte kubische Raumkurve $\overline{C}_3$ besitzt,

4. wenn sie eine doppelte $\overline{C}_4$ erster Spezies hat,

5. wenn sie mit einer doppelten Raumkurve 5. Ordnung $\overline{C}_5$ behaftet ist, die einen dreifachen Punkt d_3 besitzt.

Während bei der Abbildung dieser Flächen die endlichvielen Geraden gewissermaßen als Nebenprodukte auftreten, werden sie von *R. Sturm*[115]) mit synthetischen Mitteln direkt abgeleitet. Dabei werden ihre Anzahl und Lage, ferner die Kegelschnitte auf der Fläche und sonstige Singularitäten, die eventuell noch auftreten können, eingehend untersucht.

Auch Flächen von allgemeinerer Form werden berücksichtigt. So die F_n mit einer $(n-2)$-fachen Geraden, die stets eine endliche Anzahl einfacher Geraden besitzen, sowie überhaupt F_n, die eine — durch die Ordnungzahl n beschränkte — Anzahl vielfacher Geraden besitzen. Letztere Flächen sind dann ausführlicher von *J. de Vries*[116]) untersucht worden.

---

115) *R. Sturm,* Math. Ann. 3 (1871), p. 249.

116) *J. de Vries,* Arch. Teyler (2) 8 (1902), p. 235; Amsterdam Versl. 10 (1902), p. 742.

Was Flächen mit nur singulären Punkten und einer endlichen Anzahl von g betrifft, so sei (s. Nr. 39) an die F_4 mit einem D_3 erinnert, von denen *K. Rohn* nachwies, daß zu den zwölf durch den D_3 selbst gehenden g eventuell noch eine, zwei bis zu 19 weiteren hinzutreten können.

X. Flächen 4. Ordnung mit weniger als 16 Doppelpunkten.

56. Einleitung. Die Theorie dieser F_4-Typen ist so vielgestaltig, daß wir auf die eingehende Monographie von „*Jessop*" (s. Lit.) verweisen müssen. Im folgenden seien nur einige solcher Typen hervorgehoben, deren Studium die Entwickelung der Flächen höherer Ordnung wesentlich beeinflußt hat. Vorab sei bemerkt, daß die F_4 mit einem, resp. unendlichvielen D_2 resp. D_3 bereits in den Abschnitten V, VI, VII behandelt sind.

Eine Anzahl von bemerkenswerten F_4 mit 11 bis 16 d_2 tritt in den verschiedenen Arbeiten von *Kummer*[117]) auf.

57. Die Untersuchungen von Cayley. In einer systematischen Theorie hat *A. Cayley*[118]) die Grundlagen entwickelt. Eines seiner Hauptergebnisse ist überraschend. Das Auftreten eines D_2 an einer bestimmten Stelle involviert für eine F vier Bedingungen. Man sollte also erwarten, daß F_4 mit acht D_2 in acht beliebig gewählten Punkten existieren, da die Anzahl $8 \cdot 4 = 32$ der Bedingungen noch um zwei geringer ist als die der Konstanten der F_3. *Cayley* zeigt aber, daß nicht mehr als sieben D_2 einer F_4 willkürlich angenommen werden können.

Es seien sieben Punkte $P_1, \ldots, P_7$ beliebig vorgegeben, so gibt es noch eine lineare ∞^6 Schar von F_4, die in ihnen D_2 besitzen. Die verfügbaren sechs Konstanten suche man so zu bestimmen, daß diese F_4 noch weitere D_2 erhält.

Hinsichtlich des Auftretens eines achten D_2 in einem Punkte P_8 können zwei verschiedene Fälle eintreten. Entweder sind die acht Punkte $P_1, \ldots, P_8$ assoziiert, d. h. die Grundpunkte eines F_2-Netzes, so daß P_8 bereits durch die $P_1, \ldots, P_7$ mitbestimmt ist (s. u. Nr. 61), oder aber P_8 muß der Bedingung unterliegen, einer gewissen F_6 anzugehören, so daß eine solche F_4, nach Wahl von P_8, noch von vier Konstanten abhängt. Diese lassen sich weiter so bestimmen, daß noch ein neunter, resp. zehnter D_2 hinzutritt.

---

117) *E. E. Kummer,* Berlin Berichte 1864, p. 216, 246; Berlin Abh. 1866 („Über algebraische Strahlensysteme"); Berlin Ber. 1872, p. 474.

118) *A. Cayley,* London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198, 234, 281.

Eine größere Anzahl von D_2 ist nur dann möglich, wenn die sieben Ausgangspunkte gewisse Bedingungen erfüllen. Von besonderem Interesse ist die eine F_4 mit zehn D_2. Hierher gehört das „Symmetroid" (s. unten auch Nr. 62), d. h. eine F_4, die darstellbar ist durch Nullsetzen einer symmetrischen Determinante 4. Ordnung, deren Elemente quaternäre Linearformen sind. Nebenbei sei bemerkt, daß die bei *Kummer* auftretende F_4 mit elf D_2 ein Sonderfall des Symmetroides ist.

Verbindet man irgeneinen der zehn D_2 eines Symmetroides mit den neun weiteren durch Gerade, so sind letztere die gemeinsamen Kanten zweier kubischen Kegel K_3, K_3', die zusammen den vom ersten D_2 an die F_4 gehenden Tangentenkegel K_6 bilden.

Allgemein liege eine F_4 mit k D_2 vor, so greife man irgendeinen der D_2 heraus und lege von ihm aus den Tangentenkegel K_6 an die F_4, der die übrigen $k - 1$ D_2 enthalten muß. Dieser K_6 ist in erster Linie für die Natur der F_4 und insonderheit der $k - 1$ übrigen D_2 maßgebend.

Hieraus geht u. a. eine neue Eigenschaft des Symmetroides hervor. Es liege überhaupt eine F_4 mit zehn D_2 vor. Hat dann ein einziger derselben die Beschaffenheit, daß der von ihm ausgehende Tangentenkegel K_6 in zwei kubische Kegel K_3, K_3' zerfällt, so trifft dies auch für die neun anderen D_2 zu, und die F_4 ist ein Symmetroid.

Weiter werden noch F_4 mit 13 bis 16 D_2 behandelt, wobei die *Kummer*schen Ergebnisse verschiedene formale Ergänzungen erfahren. Durchweg werden die Lagenbeziehungen zwischen den D_2 und den K_6 durch Diagramme erläutert.

58. **F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten. F_4 mit vier uniplanaren Doppelpunkten.** Die F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten (die nicht (1, 1)-deutig auf eine Ebene abbildbar ist) fand zuerst *Kummer* (s. Nr. 7) unter denen, die eine Schar von C_2 besitzen. In der Tat schneidet das Büschel von Ebenen durch die beiden Selbstberührungspunkte Paare von sich berührenden C_2 aus der F_4 aus, die die obige Schar bilden.

Für vier singuläre Tangentialebenen des Büschels fallen die C_2 eines Paares zusammen. Die Gleichungsform für die F_4 lautet

$$(1) \qquad F_4 \equiv F_2^2(x_1, x_2, x_3, x_4) - f_4(x_1, x_2) = 0.$$

Die Gleichung einer F_4 mit vier reellen uniplanaren D_2, die man in die Koordinatenecken verlege, erhält man in der Gestalt

$$(2) \qquad \begin{aligned} F_4 &\equiv (a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{34}x_3x_4)^2 + 2ax_1x_2x_3x_4 \\ &\equiv F_2^2 + 2ax_1x_2x_3x_4 = 0. \end{aligned}$$

Die vier D_2 in den Ecken A_r $(r = i, k, l, m)$ sind also in Doppelebenen T_r ausgeartet; es ist z. B. die Gleichung von T_m

$$(3)\qquad \mathsf{T}_m \equiv a_{im}x_i + a_{km}x_k + a_{lm}x_l = 0.$$

Diese vier Ebenen T sind aber zugleich die vier Tangentialebenen der Fläche F_2 in den A, so daß sich deren Eigenschaften unmittelbar auf die F_4 (2) übertragen lassen.

Es seien einige dieser Eigenschaften der vier Ebenen T angeführt. Die Spurgerade von T_m in der Ebene $x_m = 0$ sei mit t_m bezeichnet, so daß, in dieser Ebene gedeutet, die Gleichung (3) zugleich die von t_m ist:

$$(3')\qquad t_m \equiv a_{im}x_i + a_{km}x_k + a_{lm}x_l = 0.$$

Man beachte dabei, daß diese vier Spurgeraden t ungeändert bleiben, wenn man die F_2 in (2) durch die ∞^4-lineare Schar ersetzt

$$(4)\qquad \sum a_i x_i^2 + \sum\sum a_{ik}x_i x_k = 0 \qquad (i \neq k),$$

mit willkürlichen Konstanten a_i. Man bestimme die Schnittpunkte von t_m mit den Seiten des Dreiecks (A_i, A_k, A_l), z. B. mit $(A_i\ A_k)$, die als Koordinatenkante im Raume durch $x_l = 0$, $x_m = 0$ dargestellt ist. Für den Schnittpunkt hat die Koordinate $x_{ik} = \frac{x_i}{x_k}$ auf der Kante gemäß (3) den Wert

$$(5)\qquad x_{ik} = -\frac{a_{km}}{a_{im}}.$$

Auf der nämlichen Kante $(x_l = 0,\ x_m = 0)$ befindet sich noch ein zweiter Spurpunkt, der mit der Geraden t_l (oder auch der Ebene T_l). Er heiße der „Nebenspurpunkt", und x'_{ik} sei seine Koordinate. Dann folgt aus (5): $x'_{ik} = -\frac{a_{kl}}{a_{il}}$. Somit hat man für die drei Nebenspurpunkte auf den Seiten des Dreiecks (A_i, A_k, A_l)

$$(6)\qquad x'_{ik} = -\frac{a_{kl}}{a_{il}},\quad x'_{kl} = -\frac{a_{li}}{a_{ki}},\quad x'_{li} = -\frac{a_{ik}}{a_{lk}}.$$

Hieraus geht hervor, daß die drei Nebenspurpunkte in der Ebene $x_m = 0$ ebenfalls einer Geraden angehören; diese sei mit t'_m bezeichnet und heiße die zu t_m gehörige m^{te} „Nebengerade".

Die Gleichung von t'_m wird

$$(7)\qquad t'_m \equiv \frac{x_i}{a_{kl}} + \frac{x_k}{a_{li}} + \frac{x_l}{a_{ik}} = 0,$$

oder auch

$$(7\,\text{a})\qquad t'_m \equiv x_i a_{ik} a_{il} + x_k a_{ki} a_{kl} + x_l a_{li} a_{lk} = 0.$$

Bildet man jetzt durch Multiplikation von (4) und (7 a) die Gleichung des Geradenpaares (t_m, t'_m) und setzt noch zur Abkürzung

$$(8)\qquad \begin{cases} p_i = a_{ik}a_{il}a_{im}, \\ p_{ik} = p_{lm} = a_{il}a_{km} + a_{im}a_{kl} \quad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

so kommt

$$(9)\qquad t_m t'_m \equiv x_i^2 p_i + x_k^2 p_k + x_l^2 p_l + x_i x_k a_{ik} p_{ik} + x_k x_l a_{kl} p_{kl} + x_l x_i a_{il} p_{il} = 0.$$

Hieraus folgt sofort, daß die vier Geradenpaare (t, t') auf einem Hyperboloide G_2 liegen, dessen Gleichung lautet

$$(10)\qquad G_2 \equiv (x_i^2 p_i + \cdots + x_m^2 p_m) + \{x_i x_k (a_{ik} p_{ik} + a_{lm} p_{lm}) + \cdots\} = 0.$$

Somit gilt für die F_4 (2) mit vier uniplanaren D_2 in den Koordinatenecken A der Satz:

„Die vier Doppelebenen T der D_2 in den A schneiden die Gegenebenen des Tetraeders (A) in vier Geraden t, die auf einem Hyperboloide G_2 (10) liegen. Dieses schneidet auf jeder Gegenebene noch eine zweite Gerade t' (7a) aus.“

Für dieses Hyperboloid möge auch die Klassengleichung $\Gamma_2 = 0$ angegeben werden.

Die Fläche Γ_2 besitzt die vier Gegenebenen als Tangentialebenen mit den Erzeugenden t, t', also mit deren jeweiligem Schnittpunkt T als Berührungspunkt. Setzt man weiter zur Abkürzung

$$(11)\qquad \begin{cases} d_{ik} = d_{lm} = a_{ik}a_{lm} - a_{il}a_{km} \\ d_{kl} = d_{im} = a_{kl}a_{im} - a_{ik}a_{lm} \\ d_{li} = d_{km} = a_{il}a_{km} - a_{kl}a_{im}, \end{cases}$$

so hat man auf Grund von (4) und (7a) für die Koordinaten $x_i^{(m)}$, $x_k^{(m)}$, $x_l^{(m)}$ des Punktes T_m die Werte

$$(12)\qquad x_i^{(m)} : x_k^{(m)} : x_l^{(m)} = a_{kl}d_{kl} : a_{li}d_{li} : a_{ik}d_{ik}.$$

Damit ergibt sich als Gleichung der Klassenfläche Γ_2

$$(13)\qquad \Gamma_2 \equiv \sum d_{il}(u_i u_k a_{lm} + u_l u_m a_{ik})$$

$$\equiv \begin{vmatrix} u_i u_k a_{lm} + u_l u_m a_{ik}, & u_i u_l a_{km} + u_k u_m a_{il}, & u_k u_l a_{km} + u_i u_m a_{kl} \\ a_{ik}a_{lm}, & a_{il}a_{km}, & a_{im}a_{il} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Auf die vorliegende F_4 (2) sei auch die Methode der Tangentenprojektion (s. Nr. **19**) von irgendeinem der vier uniplanaren D_2, etwa in A_m, auf die Gegenebene $(x_m = 0)$ angewendet.

Zu dem Behuf ordne man die Gleichung (2) nach x_m

$$(2_m)\qquad F_4 \equiv (x_m t_m + k_m)^2 + 2a x_m x_i x_k x_l \equiv x_m^2 t_m^2 + 2x_m(t_m k_m + a x_i x_k x_l) + k_m^2 + 0,$$

wo

(14) $$k_m \equiv x_i x_k a_{ik} + x_k x_l a_{kl} + x_l x_i a_{li}.$$

Hier stellt, wie oben in der Ebene $x_m = 0$, die Gleichung (3′) $t_m = 0$ die Spur der Doppelebene des Kegels K_2 im $D_2\,(A_m)$ dar, und $k_m = 0$ den Schnittkegelschnitt der F_2 mit der Ebene $x_m = 0$, längs dessen die letztere die F_4 berührt.

Um den gesuchten Tangentenkegel $K_6^{(m)}$, der von A_m aus an die F_4 geht, oder auch seine Spur $k_6^{(m)}$ in der Ebene $x_m = 0$, zu erhalten, hat man die Diskriminante der in x_m quadratischen Gleichung (2_m) gleich Null zu setzen. Dann ergibt sich als Gleichung von $k_6^{(m)}$

(15) $$k_6^{(m)} \equiv (t_m k_m + a x_i x_k x_l)^2 - t_m^2 k_m^2 \equiv x_i x_k x_l (2 t_m k_m + a x_i x_k x_l)$$
$$\equiv x_i x_k x_l c_3^{(m)} = 0.$$

Damit ergibt sich der Satz:

„Liegt eine F_4 (2) mit vier uniplanaren D_2 in den Koordinatenecken A vor, und legt man von irgendeinem der D_2, etwa A_m, die Tangenten an die F_4, so treffen diese die Gegenebene $x_m = 0$ in den Punkten einer Übergangskurve $k_6^{(m)}$. Diese Kurve 6. Ordnung zerfällt aber in die Seiten des Dreiecks (A_i, A_k, A_l) und eine Kurve 3. Ordnung $c_3^{(m)}$. Letztere geht einmal durch die drei Spurpunkte der Doppelebene des $D_2(A_m)$ in den Seiten des Dreiecks und berührt andererseits den Berührungskegelschnitt k_m der Ebene $x_m = 0$ mit der F_4 in den Ecken des Dreiecks. Bei Variieren der Konstanten a in der Gleichung der F_4 bilden die Kurven $c_3^{(m)}$ das c_3-Büschel durch jene neun Grundpunkte."

59. F_4 mit vier beliebigen Doppelpunkten. Es ist nützlich, einer F_4 mit vier uniplanaren D_2 in den Ecken A eine F_4 mit vier allgemeinen D_2 in den A gegenüberzustellen. Die Gleichung einer solchen F_4 ist von der Form

(1) $$F_4 \equiv (x_i^2 x_k^2 b_{ik} + \cdots + x_l^2 x_m^2 b_{lm})$$
$$+ (x_i^2 x_k x_l b_{kl}^{(i)} + \cdots + x_m^2 x_i x_k b_{ik}^{(m)} + \cdots)$$
$$+ 4 b x_i x_k x_l x_m = 0.$$

Die Gleichung des Tangentenkegels K_m des $D_2(A_m)$, oder auch seines Spurkegelschnitts k_m in der Gegenebene $x_m = 0$, lautet

(2) $$K_m \equiv x_i^2 b_{im} + x_k^2 b_{km} + x_l^2 b_{lm}$$
$$+ x_k x_l b_{kl}^{(m)} + x_i x_l b_{il}^{(m)} + x_i x_k b_{ik}^{(m)} = 0.$$

Dieser trifft die Kante $(x_l = 0,\ x_m = 0)$ in dem Punktepaar $(ik)^{(m)}$ mit der Gleichung

(3) $$(ik)^{(m)} \equiv x_i^2 b_{im} + x_k^2 b_{km} + x_i x_k b_{ik}^{(m)} = 0.$$

Dieselbe Kante wird aber auch von K_l resp. k_l in einem „Nebenpunktepaar" $(ik)^{(l)}$ geschnitten mit der Gleichung

$$(3')\qquad (ik)^{(l)} \equiv x_i^2 b_{il} + x_k^2 b_{kl} + x_i x_k b_{ik}^{(l)} = 0.$$

Man bilde jetzt durch Multiplikation von (3) und (3') die Gleichung für das Aggregat der beiden Punktepaare $(ik)^{(l)}$, $(ik)^{(m)}$ und füge noch den Faktor b_{ik} hinzu, so ergibt sich

$$(4)\qquad (ik)^{(l)}(ik)^{(m)} = x_i^4 q_i + x_k^4 q_k + x_i^3 x_k q_{ik}^{(i)} + x_i^2 x_k^2 q_{ik} + x_i x_k^3 q_{ik}^{(k)},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(5)\qquad \begin{cases} q_i \equiv b_{ik} b_{il} b_{im}, \quad q_k \equiv b_{ki} b_{kl} b_{km}, \\ q_{ik}^{(i)} \equiv b_{ik}(b_{im} b_{ik}^{(l)} + b_{il} b_{ik}^{(m)}), \\ q_{ik}^{(k)} \equiv b_{ik}(b_{km} b_{ik}^{(l)} + b_{kl} b_{ik}^{(m)}), \\ q_{ik} \equiv b_{ik}(b_{il} b_{km} + b_{im} b_{kl} + b_{ik}^{(l)} b_{ik}^{(m)}) \text{ usf.} \end{cases}$$

Das nämliche Verfahren sei auf die fünf übrigen Kanten angewendet. Aus der Struktur von (4) liest man den Satz ab:

„Liegt eine F_4 mit vier D_2 in den Ecken A eines Tetraeders T vor, so befinden sich auf jeder der sechs Kanten, z. B. (A_i, A_k), von T zwei Punktepaare, die von den Tangentenkegeln der beiden D_2 in A_l und A_m ausgeschnitten werden. Diese $4 \cdot 6 = 24$ Punkte sind Grundpunkte einer ∞^{12}-linearen Schar von Flächen 4. Ordnung."

In der Tat geht durch jene 24 Punkte zunächst eine Fläche 4. Ordnung G_4 mit der Gleichung

$$(6)\qquad \begin{aligned} G_4 \equiv (x_i^4 q_i + \cdots + x_m^4 q_m) + (x_i^2 x_k^2 q_{ik} + \cdots + x_l^2 x_m^2 q_{lm}) \\ + (x_i^3 x_k q_{ik}^{(i)} + x_i x_k^3 q_{ik}^{(k)} + \cdots + x_l^3 x_m q_{lm}^{(l)} + x_l x_m^3 q_{lm}^{(m)}) = 0. \end{aligned}$$

Fügt man hier der rechten Seite noch die 13 Potenzprodukte $x_i^2 x_k x_l$, $\ldots$, $x_m^2 x_k x_l$, $x_i x_k x_l x_m$ mit willkürlichen Koeffizienten hinzu, so entsteht die ∞^{12}-lineare Schar des obigen Satzes.

Der Schnitt der F_4 (1) mit irgendeiner der vier T-Ebenen, z. B. $x_m = 0$, muß in zwei Kegelschnitte zerfallen, von denen der eine k_m ist, während der zweite, der „Nebenkegelschnitt", mit k_m' bezeichnet sei. Auch die Gleichung von k_m' ist leicht aufzustellen.

Die drei Seiten des Dreiecks (A_i, A_k, A_l) werden der Reihe nach von den Kegeln $K_l^{(l)}$, $K_i^{(i)}$, $K_k^{(k)}$ in den Nebenpunktepaaren $(ik)^{(l)}$, $(kl)^{(i)}$, $(li)^{(k)}$ geschnitten, deren Gleichungen nach dem Muster von $(ik)^{(l)}$ in (3') zu bilden sind. Multipliziert man diese drei Gleichungen noch mit resp. b_{ik}, b_{kl}, b_{li}, so erkennt man, daß jene drei Nebenpunktepaare in der Tat auf einem Kegelschnitte k_m' liegen mit der Gleichung

$$(7)\qquad \begin{aligned} k_m' \equiv x_i^2 b_{ik} b_{il} + x_k^2 b_{ki} b_{kl} + x_l^2 b_{li} b_{lk} + x_i x_k b_{ik} b_{ik}^{(l)} \\ + x_k x_l b_{kl} b_{kl}^{(i)} + x_l x_i b_{li} b_{li}^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle bilde man das Produkt der beiden Gleichungen (2) mit (7) für k_m und k'_m, so gelangt man zu der Gleichung für den Schnitt der Fläche F_4 (1) mit der Ebene $x_m = 0$.

Es gilt daher auch der Satz:

„Besitzt eine F_4 in den vier Ecken A eines Tetraeders T Doppelpunkte, deren Tangentenkegel die bezüglichen Gegenebenen von T in vier Kegelschnitten k_i $(i = 1, 3, 3, 4)$ schneiden, so geht durch diese noch ein Büschel von Flächen 4. Ordnung G_4. Letztere schneiden aus jeder der vier Ebenen noch einen Restkegelschnitt k' aus."

Es ist nützlich, den beiden Sätzen Konstantenabzählungen hinzuzufügen. Im ersteren Falle liegen $6 \cdot 4 = 24$ gewisse Punkte auf den Kanten eines Tetraeders T vor. Soll eine Fläche 4. Ordnung durch 24 beliebige Punkte gehen, so involviert das ebenso viele (lineare) Bedingungen, so daß es solcher Flächen noch eine lineare ∞^{10}-Schar gibt. Da aber durch obige 24 Schnittpunkte der vier Tangentenkegel K mit den Kanten von T noch eine linear ∞^{13}-Schar von G_4 ging, so folgt, daß die zugehörigen 24 Bedingungen an drei Syzygien gebunden sind.

Ähnlich verhält es sich im zweiten Falle mit dem Büschel von G_4 durch die vier Spurkegelschnitte k der Kegel K. Soll ein gegebener (irreduzibler) Kegelschnitt einer Fläche 4. Ordnung angehören, so involviert das neun (lineare) Bedingungen. Im Falle von vier, je zueinander windschiefen Kegelschnitten würde das zu $4 \cdot 9 = 36$ Bedingungen führen, so daß eine solche Fläche gar nicht existierte. Vergleicht man dies mit dem für die vier Kegelschnitte k tatsächlich existierenden Büschel von G_4 (6), so erkennt man, daß auch die 36 zugehörigen Bedingungen genau drei Syzygien unterliegen müssen.

Behufs weiterer Untersuchung der durch eine F_4 mit vier D_2 gebildeten Figur werde die kubische, (1, 1)-deutige involutorische Punktverwandtschaft T_3 (s. Art. „F_3", Nr. **11**)

$$\varrho x_i x_i' = c_i \tag{8}$$

herangezogen, die bequemer in der Normalgestalt

$$\sigma x_i x_i = 1 \tag{8'}$$

verwendet werde.

Sei wieder T das Koordinatentetraeder mit den Ecken A, so geht vermöge der T_3 eine beliebige Gerade g über in eine C_3 durch die A (und vice versa), eine beliebige Ebene E in eine F_3 mit D_2 in den A, und eine beliebige F_2 durch die A wieder in eine solche. Die Ausübung der T_3 auf die Gleichung (1) einer F_4 mit vier D_2 in den A zeigt sofort, daß die Gleichung ihre Struktur nicht ändert. Es gilt also allgemein der Satz:

„Besitzt eine F_4 wenigstens vier D_2, die ein eigentliches Tetraeder T bilden, so geht die F_4 vermöge einer T als Fundamentaltetraeder wieder in eine solche F_4 über."

Denn die etwaigen weiteren D_2 der F_4 gehen vermöge der T_3 ebenfalls in solche über.

Man frage jetzt im besonderen, wann die F_4 (1) vermöge der normierten T_3 (8') in sich selbst übergeht. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß je zwei „komplementäre" Koeffizienten in (1) gleich werden, d. h. daß die Beziehungen erfüllt sind

$$(9)\qquad b_{ik} = b_{lm}, \text{ usf.}; \quad b_{ik}^{(l)} = b_{ik}^{(m)} = 2c_{ik}, \text{ usf.},$$

so daß sich die Anzahl von 19 Koeffizienten in (1) auf 10 reduziert, und die Gleichung der vermöge T_3 automorphen F_4 mit $4\,D_2$ in den A lautet

$$(10)\quad F_4 \equiv b_{ik}(x_i^2x_k^2 + x_l^2x_m^2) + \cdots + 2c_{ik}x_ix_k(x_l^2 + x_m^2) + \cdots + 4b\,x_ix_kx_lx_m = 0.$$

Entsprechend reduzieren sich die beiden Gleichungen (2), (7) für die Kegelschnitte k_m, k_m' auf

$$(11)\quad k_m \equiv x_i^2b_{kl} + x_k^2b_{il} + x_l^2b_{ik} + 2x_ix_kc_{ik} + 2x_ix_lc_{il} + 2x_kx_lc_{kl} = 0,$$

$$(11')\quad k_m' \equiv x_i^2b_{ik}b_{il} + x_k^2b_{ki}b_{kl} + x_l^2b_{li}b_{lk} + 2x_ix_kb_{ik}c_{ik} + 2x_ix_lb_{il}c_{il} + 2x_kx_lb_{kl}c_{kl} = 0.$$

Stellt man die weitere Forderung auf, daß irgendein Paar der vier Kegelschnitte k, k', z. B. k_m, k_m', zusammenfällt, so ist das ersichtlich nur so möglich, daß die drei Koeffizienten b_{ik}, b_{il}, b_{kl} einander gleich werden, also gleich Eins gesetzt werden können. Dann aber fallen auch die drei übrigen Paare (k, k') je zusammen und alle vier Kegelschnitte k liegen auf einer Fläche 2. Ordnung F_2 mit der Gleichung

$$(12)\quad F_2 \equiv x_i^2 + x_k^2 + x_l^2 + x_m^2 + 2x_ix_kc_{ik} + \cdots + 2x_lx_mc_{lm} = 0.$$

Die Gleichungen der vier Kegelschnitte $k = k'$, z. B. von $k_m = k_m'$, reduzieren sich jetzt auf

$$(13)\quad k_m \equiv k_m' = x_i^2 + x_k^2 + x_l^2 + 2x_ix_kc_{ik} + 2x_ix_lc_{il} + 2x_kx_lc_{kl} = 0,$$

und die der F_4 auf

$$(14)\quad F_4 \equiv x_i^2x_k^2 + \cdots + x_l^2x_m^2 + 2c_{ik}x_ix_k(x_l^2 + x_m^2) + \cdots + 4bx_ix_kx_lx_m = 0.$$

Endlich sei noch die weitere Forderung gestellt, daß von den sechs Koeffizienten c je zwei „komplementäre" zusammenfallen, daß also die drei Beziehungen bestehen

$$(9')\qquad c_{ik} = c_{lm} = a, \quad c_{il} = c_{km} = b, \quad c_{im} = c_{kl} = c.$$

Geometrisch bedeutet das, daß die F_2 (12) apolar ist zu den drei Flächen 2. Klasse

$$u_i u_k - u_l u_m = 0, \quad u_i u_l - u_k u_m = 0, \quad u_i u_m - u_k u_l = 0.$$

Jede derselben ist in sich dual und dadurch bestimmt, daß sie zwei Paare von Gegenkanten des Tetraeders T enthält und überdies den Einheitspunkt $E(1, 1, 1, 1)$ enthält. Diese drei Flächen seien als die „Einheitsflächen" (2. Grades) von T bezeichnet. Letzterer Punkt E war aber einer der acht sich selbst entsprechenden Punkte der Verwandtschaft T_3 (8′). Offenbar sind diese acht Punkte gleichberechtigt und man könnte an Stelle von E auch irgendeinen der sieben anderen wählen, wozu nur unwesentliche Vorzeichenänderungen der Koordinaten x_i erforderlich wären.

Damit reduziert sich endlich die Gleichung der F_4 auf die Form

$$(15)\quad \begin{aligned} F_4 \equiv x_i^2 x_k^2 + \cdots + x_l^2 x_m^2 + 2a\{x_i x_k(x_l^2 + x_m^2) + x_l x_m(x_i^2 + x_k^2)\} \\ + \cdots + 4\nu x_i x_k x_l x_m = 0 \end{aligned}$$

und die Form F_2 auf

$$(16)\quad F_2 \equiv x_i^2 + \cdots + x_m^2 + 2a(x_i x_k + x_l x_m) + \cdots = 0.$$

Für die so eingeschränkte F_4 (15) vereinfacht sich die Gleichung (6) des G-Büschels mit dem Parameter $\varkappa$ zu

$$(17)\quad \begin{aligned} G_4 \equiv & \sum x_i^4 + 4\sum a\{x_i x_k(x_i^2 + x_k^2) + x_l x_m(x_l^2 + x_m^2)\} \\ & + 4\sum(1 + a^2)(x_i^2 x_k^2 + x_l^2 x_m^2) \\ & + 4\sum(a + 2bc)\{x_i x_k(x_l^2 + x_m^2) + x_l x_m(x_i^2 + x_k^2)\} \\ & + 4\varkappa x_i x_k x_l x_m = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat eine große Ähnlichkeit mit einer der Normalgleichungen der *Kummer*schen Fläche K_m (s. Nr. 68). Bezieht man nämlich diese auf ein syzygetisches Tetraeter als Koordinatentetraeder, so lautet ihre Gleichung

$$(18)\quad K_m \equiv F_2^2 - 4k x_i x_k x_l x_m = 0,$$

wo

$$(19)\quad \begin{cases} F_2 \equiv \sum x_i^2 + 2\sum a(x_i x_k + x_l x_m), \\ k \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1. \end{cases}$$

Entwickelt man die rechte Seite von (18), so gelangt man gerade zur Gleichung (17), falls man noch dem Parameter $\varkappa$ den speziellen Wert beilegt

$$(20)\quad \varkappa = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 = 2(a^2 b^2 c^2) - k.$$

Hieraus folgt der Satz:

„Es liege eine F_4 mit vier D_2 in den Ecken A eines Tetraeders T vor mit folgender Eigenart. Die F_4 gehe erstens in sich über vermöge einer kubischen Punktverwandschaft T_3 mit den A als Fundamentalpunkten und E als irgendeinem (reellen) ihrer acht sich selbst entsprechenden Punkte.

Zweitens sollen die Tangentenkegel in den D_2 die bezüglichen Gegenebenen von T in vier, einer F_2 angehörigen Kegelschnitten k schneiden.

Drittens soll diese F_2 zu den drei auf E als Einheitspunkt bezogenen Einheitsflächen 2. Klasse apolar sein. Dann befindet sich in dem Büschel von Flächen 4. Ordnung G_4, die die Ebenen von T längs der Kegelschnitte k berühren, ein Individuum, das eine *Kummer*sche Fläche ist, mit T als einem syzygetischen Tetraeder.

Umgekehrt gehört zu einer *Kummer*schen Fläche mit T als einem ihrer syzygetischen Tetraeder ein Büschel von Flächen 4. Ordnung F_4 mit D_2 in den Ecken von T, das überdies die drei obigen Eigenschaften besitzt.“

Die beiden obigen Tetraeder sind zwei reziproke syzygetische Tetraeder der K_m (s. Nr. 68).

60. Die Weddlesche Fläche 4. Ordnung. Die *Weddle*sche Fläche W_d (s. auch Nr. 65) ist eine solche mit 6 D_2 in sechs beliebigen Punkten $P_1, \ldots, P_6$, und zwar ist sie der Ort der Spitzen der durch die sechs Punkte gehenden Kegel 2. Ordnung. Die W_d wird daher auch kurz als „Kegelspitzenfläche“ bezeichnet. Sie tritt zuerst bei *Weddle*[119]) auf, der einige ihrer Eigenschaften angibt. Man kann die W_d auch auffassen als Ort der Spitzen der in Kegel ausgearteten F_2 eines Gebüsches G mit sechs Grundpunkten $P_1, \ldots, P_6$. Diese Auffassung erweist sich insbesondere als fruchtbar für die Theorie der *Kummer*schen Fläche K_m mit 16 D_2 (s. Nr. 66).

Deutet man nämlich die vier homogenen Parameter, die in der Gleichung irgendeines F_2-Individuums von G auftreten, als Punktkoordinaten in einem zweiten Raume, so erfüllen die Punkte, deren Koordinaten Parameter von Kegeln in G sind, eine „Bildfläche“ der W_d, so daß beide Flächen (1, 1)-deutig aufeinander bezogen sind. Diese Bildfläche ist eben die *Kummer*sche Fläche K_m.

Die Fläche W_d hat *C. Hierholzer*[120]) eingehender untersucht. Er stellt ihre Gleichung in der Gestalt auf

$$(1)\quad W_d \equiv \sum (a_i - a_k) x_i x_k (a_l x_m^2 - a_m x_l^2) = 0 \quad (i, k = 1,2,3,4;\ i \neq k).$$

Auf der W_d liegen 25 Gerade. Einmal die 15 Geraden g_{ik}, die je zwei

119) *Weddle*, Cambr. Dubl. Math. J. 5 (1850). Vgl. *A. Cayley*, Paris C. R. 52 (1861), p. 1216; London Math. Soc. Proc. 3 (1870), p. 67.

120) *C. Hierholzer*, Math. Ann. 4 (1871), p. 172.

Punkte P_i, P_k verbinden, andererseits die 10 Geraden $g_{ikl} = g_{mnp}$, die Schnittachsen je zweier Gegenebenen (ikl) und (mnp) des Sechsecks der Grundpunkte G_r $(r = i, \ldots, p)$.

Auf der Fläche W_d liegt auch die durch die sechs Grundpunkte bestimmte kubische Kurve C_3. Hierauf beruht (s. Nr. 3) die explizite irrationale Darstellung, die *Bateman*[121]) für die Punkte der W_d angegeben hat.

Diese C_3 liegt aber auch der von *E. Hunyady*[122]) herrührenden transzendenten Darstellung für die Punkte der Fläche durch Thetafunktionen von zwei Variabeln zugrunde.

61. F_4 mit acht assoziierten Doppelpunkten. Diese F_3 besitzen $8\,D_2$ in acht assoziierten Punkten, d. h. den Grundpunkten eines F_2-Netzes (φ, ψ, χ); sie sind von *Cayley*[123]) eingehend untersucht (s. auch Nr. 57). Man erhält ihre Gleichung durch Nullsetzen einer beliebigen, in den homogenen Größen φ, ψ, χ quadratischen Form oder, in *Cayleys* Bezeichnung,

$$(1) \qquad F_4 \equiv (\varphi, \psi\ \chi)^2 = 0.$$

Schließt man nullteilige Flächen aus, so läßt sich der Gleichung (1) die kanonische Gestalt geben

$$(1') \qquad F_4 \equiv \psi^2 - \varphi\chi = 0.$$

Tritt der Sonderfall ein, daß eine der beiden Flächen φ, χ, etwa die erstere, in eine doppeltzählende Ebene u ausartet, so daß (1′) übergeht in

$$(2) \qquad F_4 \equiv \psi^2 - u^2\varphi = 0,$$

so liegt eine F_4 mit $\bar{C}_2$ und vier weiteren D_2 $(\psi = 0, \varphi = 0, u = 0)$ vor (s. Nr. 7), von der wiederum die *Dupin*sche Zyklide (s. Nr. 27) ein metrischer Sonderfall ist.

Zerfällt noch spezieller in (2) die Form φ in zwei Linearformen u, v, deren eine u ist, so daß sich (2) spezialisiert zu

$$(3) \qquad F_4 \equiv \psi^2 - u^3 v = 0,$$

so hat man die F_4 mit einem Kuspidalkegelschnitt (s. Nr. 18).

62. Das Cayleysche Symmetroid. Die desmische Fläche 4. Ordnung. Die Gleichung des Symmetroides F_4', einer F_4 mit $10\,D_2$, erhält man durch Nullsetzen einer symmetrischen vierreihigen Determi-

121) *H. Bateman,* London Math. Soc. Proc. (2) 3 (1905), p. 225.

122) *E. Hunyady,* J. f. Math. 92 (1882), p. 304; vgl. *F. Caspary,* Paris C. R. 112 (1891), p. 1356; Bull. Soc. Fr. math. (2) 15 (1891), p. 388; *F. Schottky,* J. f. Math. 105 (1889), p. 238; *G. Humbert,* J. de Math. (4) 9 (1893), p. 466.

123) *A. Cayley,* Quart. J. 10 (1870), p. 34; 11 (1871), p. 111.

nante, deren Elemente quaternäre Linearformen a_{ik} sind

$$(1) \qquad F_4' \equiv |a_{ik}| = 0.$$

Sie ist zuerst von *Cayley*[124]) genauer untersucht (s. auch Nr. **57** und Nrr. **65**, **66**).

Ihre Eigenschaften treten am übersichtlichsten hervor, wenn man die a_{ik} auffaßt als Koeffizienten in der Gleichung eines allgemeinen F_2-Gebüsches G mit vier homogenen Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$

$$(2) \qquad G \equiv \sum_i \sum_k x_i x_k (\lambda_1 b_{ik} + \lambda_2 b'_{ik} + \lambda_3 b''_{ik} + \lambda_4 b'''_{ik}) \equiv \sum_i \sum_k x_i x_k a_{ik} = 0.$$

Man deute die λ als Punktkoordinaten in einem zweiten Raume S_3'. Dann erscheint die Gleichung (1) als Bedingung dafür, daß eine F_2 in G in einen Kegel K_2 ausartet. Die Spitzen dieser Kegel erfüllen die „Kegelspitzenfläche" 4. Ordnung F_4, und deren Punkte P sind den Punkten P' des Symmetroides F_4' (1, 1)-deutig zugeordnet. In diesem Sinne erscheint also das Symmetroid F_4' als „Bildfläche" der Kegelspitzenfläche F_4 und kann als eine Vorstufe zur *Kummer*schen Fläche K_m (s. Nr. **66**) angesehen werden.

Im F_2-Gebüsch G (2) gibt es, als ausgeartete Kegel, zehn Ebenenpaare, deren Schnittachsen — die der Kegelspitzenfläche F_4 angehören — den 10 D_2 des Symmetroides F_4' (1) entsprechen.

Daß die F_4' (1) 10 D_2 besitzt, läßt sich nach *Clebsch*[125]) auch direkt aus der Determinante (1) entnehmen, insofern es zehn Wertsysteme der λ gibt, für die alle ersten Minoren zugleich verschwinden.

Nach *A. B. Coble*[126]) lassen sich die beiden Flächen F_4 und F_4' durch eine Cremonatransformation ineinander überführen, was zu der Figur zweier kubischer Kurven C_3, C_3' in enger Beziehung steht (s. Nr. **54**).

Sind im besonderen die a_{ik} in (1) die zweiten Ableitungen einer kubischen Form F_3, so geht das Symmetroid (1) über in die *Hesse*sche Fläche $H(F_3)$ der F_3 (s. Art. „F_3", Nr. **3**).

Spezialisiert man andererseits die Gleichung (1) dahin, daß rechts die vier Diagonalelemente a_{ii} identisch verschwinden, so treten zu den zehn bisherigen D_2 noch vier weitere hinzu, indem jeder der vier Schnitt-

124) *A. Cayley,* London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 44.

125) *A. Clebsch,* J. f. Math. 59 (1861), p. 193. *Clebsch* führt den Beweis nur für den speziellen Fall, wo das Symmetroid zur *Hesse*schen Fläche einer F_3 wird; sein Verfahren ist aber auf den Fall des allgemeineren Symmetroides ausdehnbar, s. *Cayley,* Note 124).

126) S. Note 112).

punkte von drei Ebenen des Typus $a_{ik} = 0$, $a_{il} = 0$, $a_{im} = 0$ zu einem neuen D_2 wird.

In diesem Falle läßt sich, wie die Entwicklung der Determinante (1) lehrt, die Fläche am einfachsten irrational darstellen vermöge der Gleichung

$$\sqrt{a_{ik}a_{lm}} + \sqrt{a_{il}a_{km}} + \sqrt{a_{im}a_{kl}} = 0. \tag{3}$$

Sodann werde auf eine beachtenswerte F_4 mit 12 D_2 hingewiesen, die „desmische" Fläche. Ihre 12 D_2 sind die Ecken dreier „desmischer" Tetraeder; solche sind nach *C. Stéphanos*[127]) dadurch definiert, daß sie — als ausgeartete Flächen 4. Ordnung aufgefaßt — einem F_4-Büschel angehören.

Die desmische F_4 ist auch dadurch bemerkenswert, daß sie, nach *G. Veronese*[128]), die Reziproke ist zu der projektiven Verallgemeinerung der Zentralfläche[129]) einer F_2. Letztere Verallgemeinerung ist, wie *W. Stahl*[130]) gezeigt hat, eine Fläche der 4. Klasse und der 12. Ordnung.

Endlich sei noch erwähnt, daß den F_4 mit 13 D_2 *B. Levi*[131]) eine eingehende Untersuchung hat zu Teil werden lassen.

63. Die Untersuchung von Rohn über F_4 mit 9 bis 15 Doppelpunkten. Einen wesentlichen Beitrag zur Theorie der F_4 mit einer endlichen Anzahl von D_2, insonderheit derer mit 9 bis 15 D_2, sowie der F_4überhaupt, hat *K. Rohn*[132]) in seiner Leipziger Preisschrift geliefert.

Seine Untersuchung zerfällt in zwei Hauptteile.

Der erste Teil ist den D_2 gewidmet, die überhaupt bei einer F_4 auftreten können, und den möglichen Beziehungen zwischen diesen D_2. Das Haupthilfsmittel besteht in der ausgiebigen Betrachtung des von einem als existierend angenommenen D_2 an die F_4 gehenden Tangentenkegels K_6 (s. auch Nr. **19** und **31**) und seines Schnittes mit einer festen Projektionsebene Π.

Es werde, wie früher, der D_2 in die Koordinatenecke A_m ($x_i = 0$, $x_k = 0$, $x_l = 0$) verlegt, und die Ebene Π in die Koordinatenebene

127) *C. Stéphanos,* Bull. Math. Astr. (2) 3 (1879), p. 424. Vgl. *H. Schroeter,* Ztschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 178.

128) *G. Veronese,* Rom Linc. Mem. (3) 9 (1881).

129) Über diese Zentrafläche siehe *G. Salmon,* Quart. J. 2 (1858), p. 207; *A. Clebsch,* J. f. Math. 62 (1863), p. 64; *A. Cayley,* Cambr. Phil. Trans. 12 (1873), p. 319; *F. Caspary,* J. f. Math. 81 (1876), p. 143; 83 (1877), p. 72; *„Salmon-Fiedler",* p. 337 ff.

130) *W. Stahl,* J. f. Math. 101 (1887), p. 73.

131) *B. Levi,* „Sulla superficie del quarto ordine con 13 punti doppi", Torino 1904.

132) *K. Rohn,* Leipzig Ber. 1884, p. 52; Preisschrift der *Jablonowski*schen Gesellschaft, Leipzig 1886.

$x_m = 0$. Ordnet man demgemäß die Gleichung der F_4 nach x_m, so nimmt sie die Gestalt an

$$(1) \qquad F_4 \equiv u_2 x_m^2 + 2 u_3 x_m + u_4 = 0,$$

wo u_r $(r = 2, 3, 4)$ eine ternäre Form der Ordnung r in x_i, x_k, x_l bedeutet. Die Gleichung des Tangentenkegels K_6 oder auch seiner Spur k_6 in der Ebene Π lautet dann

$$(2) \qquad k_6 \equiv u_2 u_4 - u_3^2 = 0.$$

Dies ist eine ebene Kurve 6. Ordnung von der spezifischen Eigenart, daß sie von einem Kegelschnitt c_2 $(u_2 = 0)$ überall, also in sechs Punkten berührt wird; diese lassen sich von einer c_3 $(u_3 = 0)$ derart aus der k_6 ausschneiden, daß in deren 12 Restschnittpunkten eine c_4 $(u_4 = 0)$ die k_6 berührt.

Umgekehrt läßt sich jede, im übrigen beliebig vorgegebene c_6 in der Ebene Π, die von einer c_2 in sechs Punkten berührt wird, als Spur des Tangentenkegels K_6, der von einem D_2 (in A_m) einer F_4 an diese Fläche geht, auffassen. Solcher zu $c_6 = k_6$ zugehöriger F_4 gibt es noch eine lineare ∞^7-Schar, die linear ineinander transformierbar sind.

Durch Betrachtung aller Spezialisierungen dieser c_6 kann man zu allen F_4 mit mindestens einem D_2 gelangen, und aus den Eigenschaften der jeweiligen c_6 auf das eventuelle Auftreten weiterer D_2 der F_4 und ihrer Beziehungen zueinander schließen.

Die als endlich vorausgesetzte Anzahl der D_2 kann jeden Wert von 1 bis 16 annehmen; der Maximalwert 16 führt zur *Kummer*schen Fläche K_m (s. Absch. XI).

Die verschiedenen Arten der c_6 mit sechsmal berührendem Kegelschnitt werden daraufhin genau diskutiert; unter diesen c_6 beanspruchen ein besonderes Interesse die mit resp. 8, 9, 10 d_2, und unter diesen wiederum die letzteren mit 10 d_2, wo die c_6 rational wird.

Nunmehr erfolgt die systematische Übertragung der Eigenschaften der c_6 auf die F_4 mit D_2, die daraufhin sachgemäß klassifiziert werden. Ist die Anzahl der D_2 größer als sieben, so ist deren Lage nicht mehr willkürlich, sondern gewissen Bedingungen unterworfen (s. auch *Cayley* in Nr. 57).

Der zweite Teil der Abhandlung beschäftigt sich mit den gestaltlichen Verhältnissen der in Rede stehenden F_4.

Hierbei kommt einmal der Umstand zur Geltung, daß jede Gerade, die mit einer F_4 mehr als vier Punkte gemein hat, ihr ganz angehören muß (s. Nr. 3).

Sodann spielt eine wesentliche Rolle die „Methode der Grenzfälle". Man gehe von den Grenzfällen aus, wo die F_4 irgendwie ausartet, z. B.

in eine doppelt zählende F_2 oder, wo sie bereits eine gewisse Anzahl von D_2 besitzt; durch stetige Deformation dieser „Grenzflächen" werden dann die „allgemeinen", einschließlich derer ohne D_2, abgeleitet. Drittens zieht der Verfasser auch mit Vorteil die Eigenschaften der Strahlensysteme heran, die von den Doppeltangenten t_2 der F_4 gebildet werden.

Wir begnügen uns hier mit der Angabe der gestaltlichen Hauptformen, deren eine F_4 ohne D_2 fähig ist. Es können auftreten:

1. Zwei ineinanderliegende Ovale;
2. F_4 ohne reellen Punkt (nullteilige F_4);
3. 1 bis 12 auseinanderliegende Ovale;
4. Ein Ring (vom Zusammenhang p), der evtl. noch von 1 bis 11 Ovalen begleitet sein kann;
5. Zwei Ringe mit $p = 1$;
6. Zwei „halbpaare" F_4-Teile mit $p = 1$;
7. Ein halbpaarer Teil vom Zusammenhang p und evtl. noch 1 bis 11 Ovale.

Hierbei ist unter einem „paaren" Flächenteil ein solcher zu verstehen, auf dem sich nur paare C-Züge befinden; unter einem „unpaaren" Teile ein solcher mit nur unpaaren C-Zügen; endlich unter einem „halbpaaren" Teil ein solcher mit paaren und unpaaren C-Zügen.

Wenn auch so, wie der Verfasser hervorhebt, noch keine vollständige Einsicht in die gestaltlichen Verhältnisse der F_4 gewonnen ist, so doch ein allgemeiner Überblick.

Wenn man den hier auftretenden Gestaltenreichtum bedenkt, der über 1000 charakteristisch verschiedener Typen umfaßt, so wird man in der Tat bezweifeln, ob eine völlig befriedigende Übersicht überhaupt erreichbar ist.

XI. Die Weddlesche und die Kummersche Fläche. Das Tetraedroid und die Wellenfläche.

64. Das allgemeine F_2-Gebüsch. Die Kegelspitzenfläche und ihre Bildfläche. Da die Grundlage dieses Abschnitts durch ein F_2-Gebüsch mit sechs Grundpunkten gebildet wird, mögen einige Hilfsentwicklungen über ein allgemeines F_2-Gebüsch vorausgeschickt werden (s. auch Nrr. 54, 57).

Seien F, H, L, M vier beliebige, linear unabhängige F_2, so bilde man aus ihnen mittels vier Parameter $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ ein Gebüsch G mit der Gleichung

$$(1) \qquad G \equiv \lambda F + \mu H + \nu L + \varrho M = 0.$$

Soll im besonderen ein Individuum $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ von G ein Kegel K mit der Spitze (x) sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß alle ersten Ableitungen G_i der Form G für ein Wertesystem (x) zugleich verschwinden

(2) $$G_i \equiv \lambda F_i + \mu H_i + \nu L_i + \varrho M_i = 0.$$

Von hier aus kann man in zwei Richtungen vorgehen.

Einmal eliminiere man aus (2) die Parameter, so ergibt sich die Gleichung einer $F_4 = F_4'$

(3) $$F_4' \equiv |F_i, H_i, L_i, M_i| = 0.$$

Diese F_4' ist der Ort der Spitzen (x) aller in G enthaltenen Kegel K und wird daher als „Kegelspitzenfläche G" bezeichnet.

Die Gleichung (3) läßt sich auch symbolisch in einfacher Gestalt schreiben. Setzt man

(4) $$F \equiv (ax)^2, \quad H \equiv (bx)^2, \quad L \equiv (cx)^2, \quad M \equiv (dx)^2,$$

so erhält man sofort

(3') $$F_4' \equiv (ax)(bx)(cx)(dx)(abcd) = 0.$$

Die Gleichung (3) läßt aber noch eine andere Auffassung zu. Man stelle die Bedingungen dafür auf, daß ein Punkt (x') zum Punkte (x) in bezug auf alle Individuen $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ in G konjugiert sei, so hat man das System der in (x') und (x) symmetrischen Polargleichungen

(5) $$G_{xx'} \equiv \lambda F_{xx'} + \mu H_{xx'} + \nu L_{xx'} + \varrho M_{xx'} = 0.$$

Da diese Gleichung in den Parametern identisch zu erfüllen ist, löst sie sich in die vier Einzelgleichungen auf

(5') $$F_{xx'} = 0, \quad H_{xx'} = 0, \quad L_{xx'} = 0, \quad M_{xx'} = 0.$$

Je nachdem man hier die x' oder die x eliminiert, erhält man die nämliche Gleichung (3), nur einmal in den x, das andere Mal in den x' geschrieben. Hieraus folgt:

„Jedem Punkte (x) der F_4' als Spitze eines Kegels K im Gebüsch G ist ein anderer Punkt (x') der F_4' (1, 1)-deutig involutorisch zugeordnet. Je zwei solche Punkte (x) und (x') sind konjugiert in bezug auf alle F_2 des Gebüsches G. Zu jedem Kegel K mit der Spitze (x) gehört (1, 1)-deutig involutorisch ein Kegel K', mit der Spitze (x').

Nunmehr greife die zweite, an (2) anknüpfende Betrachtung Platz. Schreibt man real

(6) $$\begin{cases} F \equiv \sum\sum a_{ik} x_i x_k, & H \equiv \sum\sum b_{ik} x_i x_k, \\ L \equiv \sum\sum c_{ik} x_i x_k, & M \equiv \sum\sum d_{ik} x_i x_k, \end{cases}$$

und setzt, für $r, s = i, k, l, m,$

(7) $$G_{rs} \equiv \lambda a_{rs} + \mu b_{rs} + \nu c_{rs} + \varrho d_{rs},$$

so lautet das Eliminationsresultat

$$(8) \qquad F_4''(\lambda, \mu, \nu, \varrho) \equiv |G_{rs}| = 0,$$

wo $|G_{rs}|$ eine symmetrische vierreihige Determinante ist.[132a])

Deutet man die Gleichung (8) in einem zweiten Raume $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$, so stellt sie wiederum eine Fläche 4. Ordnung F_4'' dar. Beide Flächen

---

132a) Man kann auch, was für manche Zwecke vorteilhaft ist, die Parameter λ, μ, ν, ϱ als Koordinaten einer Ebene deuten. Es liegt dann der duale Standpunkt vor, den *Th. Reye* vertritt, J. f. Math. 86 (1878), p. 84, s. auch „*Reye*", Vortrag 28. Vgl. auch *Darboux*[173]).

Da *Reye* den Gebrauch von Koordinaten verschmäht, adjungiert er der Figur des F_2-Gebüsches G einen beliebig, aber fest angenommenen Punkt, und ordnet dann die Polarebenen Π' dieses Punktes in bezug auf die F_2 in G diesen in einem zweiten Raume S_3' projektiv zu. An die Stelle der Bildfläche F_4'' von F_4' tritt jetzt eine Fläche 4. Klasse Φ_4'.

Einem F_2-Büschel B in G, mit einer C_4 als Basis, entspricht eine Gerade g', einem F_2-Netze N in G, mit einer Basis von 8 assoziierten Punkten, ein Punkt P'.

Das Bild einer beliebigen Ebene E ist eine *Steiner*sche Fläche S', die daraufhin genauer untersucht wird (s. auch Nr. 44).

Das Bild einer beliebigen Geraden g ist eine C_2'; liegt aber im besonderen ein „Hauptstrahl" s vor, d. i. die Verbindungsgerade irgend zweier assoziierter Punkte, so reduziert sich ihr Bild auf eine Gerade s'.

Die Spitzen der Kegel in G erfüllen die Kernfläche K_4; deren Punkte bilden sich (1, 1)-deutig ab auf die Tangentialebenen T' der Φ_4' und damit zugleich auf deren Berührungspunkte P'.

Die Bilder der 10 Ebenenpaare in G, deren Achsen der K_4 angehören, sind singuläre T' der Φ_4'.

Die Geraden s' sind die Doppeltangenten t_2' der Φ_4'; sie bilden eine Kongruenz $\mathfrak{K}$ (28, 12) der Ordnung 28 und der Klasse 12.

Hierauf werden der Reihe nach die Sonderfälle diskutiert, wo das Gebüsch G 1, 2, . . ., 6 Grundpunkte G_i besitzt. Hierbei ist zu beachten, daß jede durch einen Grundpunkt G_i gehende Gerade g_i ein Hauptstrahl ist.

Das Bild von G_i selbst ist eine Ebene α_i', das des Kegels in G mit der Spitze in G_i eine C_2' in α_i'.

Das Bild des Geradenbündels (G_i) ist eine Kongruenz, die stets von der zweiten Klasse ist, während ihre Ordnung bei einem einzigen Grundpunkt gleich 7 ist und mit jedem weiteren Grundpunkte um Eins sinkt.

Man gelangt so, wenn man wieder die dualen Gebilde heranzieht, zu sechs von *Kummer*[117]) untersuchten Kongruenzen 2. Ordnung.

Jeder Verbindungsgeraden von zwei Grundpunkten entspricht ein D_2' auf Φ_4'.

Im Falle von sechs Grundpunkten, wo die Φ_4' wieder in die *Kummer*sche Fläche K_m übergeht, entstehen so 15 D_2'. Ein 16$^{\text{ter}}$ D_2' ist das Bild der durch die Grundpunkte gehenden und auf der K_4 — als Haupttangentenkurve — gelegenen C_3.

In allen Fällen ist die Φ_4' zugleich die Brennfläche je einer der zugehörigen Kongruenzen; im besonderen erscheint so die K_m als Brennfläche von sechs Kongruenzen (2, 2). (S. auch Nr. 69.)

F_4' und F_4'' sind (1, 1)-deutig aufeinander bezogen: Einem Punkte (x) der F_4' als Spitze eines Kegels K im Gebüsche G entspricht ein Bildpunkt $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ der F_4'', wo $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ die zum Kegel K in G gehörigen Parameterwerte bedeuten.

Auch auf der Fläche F_4'' findet zwischen deren Punkten eine (1, 1)-deutige involutorische Beziehung statt; jedem Punkte $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ als Bild eines Kegels K in G entspricht ein Punkt $(\lambda', \mu', \nu', \varrho')$ als Bild des Kegels K' in G.

Die Fläche „F_4" heiße daher die „Bildfläche" von F_4'.

Nun sind die Koeffizienten $a_{rs}, b_{rs}, c_{rs}, d_{rs}$ der Linearformen G_{rs} völlig beliebig angenommen, d. h. die symmetrische Determinante $|G_{rs}|$ enthält im übrigen ganz beliebige quaternäre Linearformen der $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ als Elemente. Dies liefert den Satz:

„Eine symmetrische vierreihige Determinante mit quaternären Linearformen in vier Punktvariabeln $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ als Elementen läßt sich, gleich Null gesetzt, als Bildfläche F_4'' der Kegelspitzenfläche F_4' eines F_2-Gebüsches auffassen."

Diese Fläche F_4'' hat zuerst *A. Cayley* von anderen Gesichtspunkten ausgehend (s. Nr. **62**) eingehend untersucht und mit dem Namen „Symmetroid" belegt. Er stellt vor allem fest, daß sie $10\, D_2$ besitzt.

Reye[133]) hat den Zusammenhang dieses Satzes mit dem F_2-Gebüsch hergestellt, indem er ihn auf den Satz zurückführt, daß sich in einem F_2-Gebüsch G zehn Ebenenpaare als zerfallende Kegel K befinden.

Sei ein solches etwa $F \equiv x_i x_k = 0$, so entspricht ihm das Parametersystem $\lambda = 1$, $\mu = \nu = \varrho = 0$.

Für letzteres verschwinden aber alle ersten Minoren der Determinante $|G_{rs}|$.

Andererseits zeigt *Reye* direkt, daß alle ersten Minoren einer symmetrischen Determinante vom Typus $|G_{rs}|$ für zehn Wertsysteme der Variabeln $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ zugleich verschwinden. Nunmehr werde noch ein Hilfssatz herangezogen, der gleich allgemein ausgesprochen werde:

„Liegt eine n-reihige Determinante D vor mit n-ären Linearformen in Variabeln x_i als Elementen, und verschwinden für ein gewisses Wertsystem der Variabeln x_i alle ersten Minoren zugleich, so ist der entsprechende Punkt der durch $D = 0$ im S_{n-1} dargestellten Mannigfaltigkeit F_n ein D_2."

In der Tat, bildet man die Ableitung $D_i = \frac{\partial D}{\partial x_i}$, indem man in bekannter Weise der Reihe nach die Elemente jeder Reihe nach x_i differenziert und dann mit den zugehörigen ersten Minoren multipliziert,

133) *Th. Reye*, J. f. Math. 77 (1874), p. 269; 82 (1877), p. 54.

so erscheint D_i als ein Aggregat von Gliedern, deren jedes einen ersten Minor als Faktor besitzt.

Somit verschwinden für das in Rede stehende Wertsystem der x alle ersten Ableitungen von D, d. h. der entsprechende Punkt der F_n ist ein D_2.

Folglich gehört zu jedem der in G enthaltenen zehn Ebenenpaare, als Kegel K aufgefaßt, ein D_2 der F_4''. Endlich, beachtet man noch, daß, unter $(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ irgendeines der zehn Ebenenpaare in G verstanden, jeder Punkt auf der Achse $(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ als Spitze eines Kegels K, nämlich des in $(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ ausgearteten, angesehen werden kann, so folgt, daß die Achsen der zehn, in G enthaltenen Ebenenpaare ganz auf der Fläche F_4' liegen.

Faßt man zusammen, so ergibt sich der Satz:

„Im F_2-Gebüsch G befinden sich als ausgeartete Kegel K zehn Ebenenpaare, deren Achsen ganz auf der Kegelspitzenfläche F_4' liegen. Diesen zehn ausgearteten Kegeln entsprechen auf der Bildfläche F_4'' zehn Punkte, die für sie D_2 sind.“

65. Das F_2-Gebüsch mit sechs Grundpunkten. Behufs näherer Einsicht in die Struktur eines F_2-Gebüsches mit sechs, zunächst reell angenommenen Grundpunkten (von denen keine vier inzident seien), frage man zunächst nach den algebraischen wie geometrischen Beziehungen der zehn Ebenenpaare zueinander, deren jedes alle sechs Punkte enthält.

Man nehme irgend vier der sechs Grundpunkte als Ecken A_i, A_k, A_l, A_m des Koordinatentetraeders T; die beiden weiteren Punkte seien mit $Y(y)$ und $Z(z)$ bezeichnet. In bezug auf T hat man zwei Typen der zehn Ebenenpaare zu unterscheiden. Einmal die vier Paare (A_i, A_k, A_l), (A_m, Y, Z), andererseits die sechs Paare (A_i, A_k, Y), (A_l, A_m, Z) nebst dem jeweiligen komplementären (durch Vertauschung von Y und Z hervorgehenden) (A_i, A_k, Z), (A_l, A_m, Y), so daß man drei solcher Doppelpaare hat.

Die zugehörigen Gleichungen, für $p_{rs} = (yz)_{rs}$, lauten

$$\left\{\begin{aligned}
&(1_m) && F_m \equiv x_m (xyz)_{ikl} \equiv x_m (x_i p_{kl} + x_k p_{li} + x_l p_{ik}) = 0,\\
&(1_{ik}) && F_{ik} \equiv (xy)_{ik} (xz)_{lm} \equiv x_i x_l y_k z_m + x_k x_m y_i z_l - x_i x_m y_k z_l\\
& && \qquad - x_k x_l y_i z_m = 0,\\
&(1_{lm}) && F_{lm} \equiv (xy)_{lm} (xz)_{ik} \equiv x_i x_l y_m z_k + x_k x_m y_l z_i - x_i x_m y_l z_k\\
& && \qquad - x_k x_l y_m z_i = 0,
\end{aligned}\right.$$

nebst den durch zyklische Vertauschung der Indizes daraus hervorgehenden. Zwischen diesen zehn quadratischen Formen bestehen gewisse lineare Identitäten mit numerischen Koeffizienten.

Um diese aufzustellen, gehe man aus von der identisch verschwindenden Determinante

(2) $$(xyxz) \equiv 0.$$

Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der ersten Reihe, so ergibt sich als erste Identität

(I) $$\sum_l^m F_i \equiv 0.$$

Entwickelt man andererseits die Determinante (2) nach dem *Laplace*schen Satze, so gelangt man zur zweiten Identität

(II) $$\sum_i \sum_k F_{ik} \equiv 0.$$

Weiter betrachte man irgendeine der drei gleichberechtigten Differenzen

(3) $$D_{ik} \equiv F_{ik} - F_{lm}, \quad D_{il} \equiv F_{il} - F_{mk}, \quad D_{im} \equiv F_{im} - F_{kl},$$

etwa die erste. Gemäß (1_m) und (1_{ik}), (1_{lm}) wird explizite

(4) $$\begin{aligned} D_{ik} \equiv F_{ik} - F_{lm} &\equiv x_i x_l p_{km} + x_k x_m p_{il} - x_i x_m p_{kl} - x_k x_l p_{im} \\ &\equiv x_i(x_k p_{ml} + x_l p_{km} + x_m p_{lk}) + x_k(x_i p_{lm} + x_l p_{mi} + x_m p_{il}). \end{aligned}$$

Gemäß (1_m) und (I) folgt hieraus eine dritte Art von Identitäten

(III) $$\begin{cases} D_{ik} \equiv F_{ik} - F_{lm} \equiv F_i + F_k \equiv -(F_l + F_m), \\ D_{il} \equiv F_{il} - F_{mk} \equiv F_i + F_l \equiv -(F_k + F_m), \\ D_{im} \equiv F_{im} - F_{kl} \equiv F_i + F_m \equiv -(F_k + F_l). \end{cases}$$

Daraufhin lassen sich sofort die $F_i, \ldots, F_m$ durch die $F_{ik}, \ldots$ linear ausdrücken.

Denn durch geeignete Addition ergibt sich

(III′) $$\begin{cases} 2F_i \equiv D_{ik} + D_{il} + D_{im}, \\ 2F_k \equiv D_{ik} - D_{il} - D_{im}, \\ 2F_l \equiv -D_{ik} + D_{il} - D_{im}, \\ 2F_m \equiv -D_{ik} - D_{il} + D_{im}. \end{cases}$$

Durch Addition dieser Darstellungen gelangt man wieder zu (I) zurück. Somit gilt zunächst:

„Zwischen den zehn quadratischen Formen $F_i, \ldots, F_{ik}, \ldots$ bestehen fünf unabhängige lineare Identitäten mit numerischen Koeffizienten, die durch (III′) und (II) angegeben sind."

Indessen läßt sich die Darstellung (III′) noch vereinfachen. Denn die Kombinierung mit (II) führt (III′) über in

(III″) $$F_i \equiv F_{ik} + F_{il} + F_{im} \equiv -(F_{kl} + F_{mk} + F_{lm}) \text{ usf.}$$

Daß hiermit alle linearen Identitäten mit numerischen Koeffizienten zwischen den $F_i, \ldots, F_{ik}, \ldots$ erschöpft sind, erkennt man, wenn man irgend vier lineare unabhängige Formen herausgreift, etwa F_{ik}, F_{lm}, F_{im}, F_{kl}, und durch sie etwa F_m linear ausdrückt, wie es möglich sein muß, da ja alle zehn Formen einem F_2-Gebüsch angehören. Man bilde also den Ansatz

$$(5)\qquad \nu_m F_m \equiv \lambda_{ik}F_{ik} + \lambda_{lm}F_{lm} + \lambda_{im}F_{im} + \lambda_{kl}F_{kl},$$

und ermittele die Verhältnisse der Koeffizienten ν_m, $\lambda_{ik}, \ldots$.

Da links die Koeffizienten von $x_k x_l$, $x_i x_k$, $x_i x_l$ verschwinden, muß es auch rechts sein, und man hat die drei Bedingungen

$$\begin{cases} (6_{kl}) & \lambda_{ik} y_i z_m + \lambda_{lm} y_m z_i = 0, \\ (6_{ik}) & \lambda_{im} y_m z_l + \lambda_{kl} y_l z_m = 0, \\ (6_{il}) & (\lambda_{ik} - \lambda_{kl}) y_k z_m - (\lambda_{im} - \lambda_{lm}) y_m z_k = 0. \end{cases}$$

Die beiden ersten liefern, unter ϱ, σ zwei Proportionalitätsfaktoren verstanden,

$$\begin{cases} (6'_{kl}) & \lambda_{ik} = \varrho y_m z_i, \quad \lambda_{lm} = -\varrho y_i z_m, \\ (6'_{ik}) & \lambda_{im} = \sigma y_l z_m, \quad \lambda_{kl} = -\sigma y_m z_l, \end{cases}$$

und nach Einsetzung in (6_{il})

$$(6'_{il})\qquad \varrho = p_{kl}, \quad \sigma = p_{ik}.$$

Damit erhalten die vier Größen $\lambda_{ik}, \ldots$ die endgültige Form

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda_{ik} = p_{kl} y_m z_i, & \lambda_{lm} = -p_{kl} y_i z_m, \\ \lambda_{im} = p_{ik} y_l z_m, & \lambda_{kl} = -p_{ik} y_m z_l. \end{cases}$$

Durch Eintragung in (5) bestimmt sich der letzte Faktor ν_m, indem die Koeffizienten von $x_i x_m$, $x_k x_m$, $x_l x_m$ rechts mit den entsprechenden in F_m proportional werden müssen.

Die Vergleichung führt in der Tat jedesmal zu demselben Werte von ν_m

$$(8)\qquad \nu_m = y_i y_l z_k z_m - y_k y_m z_i z_l.$$

Trägt man die Werte von λ und von ν_m aus (7) und (8) in (5) ein, so wird die gewünschte Identität

$$(9)\quad (y_i y_l z_k z_m - y_k y_m z_i z_l) F_m \equiv p_{kl}(y_m z_i F_{ik} - y_i z_m F_{lm}) \\ + p_{ik}(y_l z_m F_{im} - y_m z_l F_{kl}),$$

und analog für F_i, F_k, F_l.

Nunmehr läßt sich auch F_{mk} (oder auch F_{il}) in F_{ik}, F_{lm}, F_{im}, F_{kl} ausdrücken.

Aus (1_{lm}) ergibt sich, nach Multiplikation mit ν_m,

$$\nu_m F_{mk} \equiv \nu_m F_m - \nu_m F_{im} - \nu_m F_{lm}.$$

Nach Eintragung von $\nu_m F_m$ aus (9) ergibt sich

$$\nu_m F_{mk} \equiv \lambda_{ik} F_{ik} + F_{lm}(\lambda_{lm} - \nu_m) + F_{im}(\lambda_{im} - \nu_m) + \lambda_{kl} F_{kl}.$$

Hier ist $\begin{cases} \lambda_{lm} - \nu_m \equiv - p_{im} y_k z_l, \\ \lambda_{im} - \nu_m \equiv - p_{lm} y_k z_i. \end{cases}$

Nach Einsetzung dieser Werte, sowie derer von λ_{ik} und λ_{kl} wird die gewünschte Identität

$$(10)\quad (y_i y_l z_k z_m - y_k y_m z_i z_l) F_{mk} \equiv p_{kl} y_m z_i F_{ik} - p_{im} y_k z_l F_{lm}$$
$$- p_{lm} y_k z_i F_{im} - p_{ik} y_m z_l F_{kl}.$$

Hinterher lassen sich die bisherigen Darstellungen formal vereinfachen, wenn man den Punkt Z als Einheitspunkt $E(1, 1, 1, 1)$ normiert.

Es genüge die Darstellung des Gebüsches G in $F_{ik}, F_{lm}, F_{im}, F_{kl}$. Diese lautet explizite

$$\text{(IV)}\quad G \equiv x_i x_l \{ y_k(\lambda_{ik} - \lambda_{kl}) - y_m(\lambda_{im} - \lambda_{lm}) \}$$
$$+ x_k x_m \{ y_i(\lambda_{ik} - \lambda_{im}) - y_l(\lambda_{kl} - \lambda_{lm}) \} - x_i x_m (\lambda_{ik} y_k + \lambda_{lm} y_l)$$
$$- x_k x_l (\lambda_{ik} y_i + \lambda_{lm} y_m) + x_i x_k (\lambda_{im} y_m + \lambda_{kl} y_l)$$
$$+ x_l x_m (\lambda_{im} y_i + \lambda_{kl} y_k).$$

66. Die Weddlesche Fläche und die Kummersche Fläche als ihre Bildfläche. Invariante Darstellung beider Flächen. Von dem allgemeinen F_2-Gebüsch G der Nr. **64** ausgehend, könnte man nun der Reihe nach die Sonderfälle diskutieren, wo G k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) Grundpunkte besitzt (die allen F_2 in G gemeinsam sind). Ohne auf die Zwischenfälle näher einzugehen, begnügen wir uns mit folgendem Hinweis. In G mögen einer oder mehrere (bis zu sechs) Grundpunkte auftreten.

Man wähle einen solchen als Koordinatenecke A_i, so daß die vier Bedingungen $a_{ii} = b_{ii} = c_{ii} = d_{ii} = 0$ erfüllt sind (und umgekehrt). Dann verschwinden in der Determinante $F_4' \equiv |F_i, H_i, L_i, M_i|$ für A_i die Elemente der i^{ten} Reihe, d. h. A_i gehört der F_4' an (wie auch geometrisch ersichtlich ist). In der Tat ergeben sich die Parameterwerte $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \varrho_i$ des Kegels K_i in G mit der Spitze A_i aus den drei linearen Gleichungen

$$G_{ir} \equiv \lambda a_{ir} + \mu b_{ir} + \nu c_{ir} + \varrho d_{ir} = 0 \qquad (r = k, l, m).$$

Andererseits verschwindet in der Bilddeterminante $F_4'' \equiv |G_{rs}|$ nach Voraussetzung das Element G_{ii} identisch. Entwickelt man daher die Determinante $|G_{rs}|$ nach den Elementen der i^{ten} Reihe und Kolonne, so erscheint $|G_{rs}|$ als eine quadratische Form in G_{ik}, G_{il}, G_{im}.

Mithin verschwindet $|G_{rs}|$ für die Parameterwerte $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \varrho_i$ von K_i in der 2^{ten} Ordnung, d. i., der Bildpunkt von A_i ist ein D_2 der Bildfläche F_4''. Somit gilt:

„Jeder Grundpunkt des Gebüsches G gehört der Kegelspitzenfläche F_4' einfach an, und sein Bildpunkt auf der Bildfläche F_4'' als ein D_2."

Läßt man daher im F_2-Gebüsch G der Reihe nach 1, 2, . . ., 6 Grundpunkte zu, so besitzt die Bildfläche F_4'' der Reihe nach 11, 12, . . ., 16 D_2.

Der letzte Fall ist der wichtigste, da er zur *Kummer*schen Fläche[134]) (s. Nr. **68**) mit 16 D_2 führt. Umgekehrt läßt sich also letztere stets als Bildfläche der zu einem F_2-Gebüsch G mit sechs Grundpunkten gehörigen Kegelspitzenfläche auffassen.

Nunmehr gehen wir gleich zum letzten und wichtigsten Fall über, einem F_2-Gebüsch G mit sechs beliebigen Grundpunkten (von denen keine vier inzident sind) und knüpfen zu dem Behuf wieder an Nr. **65** an. Umgekehrt ist dann, nach Annahme der sechs Grundpunkte, das Gebüsch G völlig bestimmt. Auf die zugehörige Kegelspitzenfläche F_4' hat zuerst *Th. Weddle* (s. Nr. **61**) hingewiesen und ihre einfachsten Eigenschaften abgeleitet. Diese Fläche wird daher „*Weddlesche Fläche*" genannt; sie sei mit W_d bezeichnet.

Eingehender ist diese Fläche später von *C. Hierholzer* (Nr. **60**) untersucht. Wie in Nr. **65** seien vier der sechs (als reell angenommenen) Grundpunkte als die Koordinatenecken A_i, A_k, A_l, A_m gewählt, und die beiden übrigen mit $Y(y)$ und $Z(z)$ bezeichnet.

Man erkennt sofort, daß auf der W_d $10 + 15 = 25$ Gerade g liegen; einmal die 15 Verbindungsgeraden je zweier der sechs Grenzpunkte, andererseits die Achsen der zehn in G enthaltenen Ebenenpaare. Aus der ersteren Eigenschaft folgt zugleich, daß die sechs Grundpunkte D_2 auf W_d sind; jeder von ihnen ist die Spitze eines Kegels K, der durch die fünf von dem Grundpunkte nach den fünf anderen laufenden Geraden als Kanten bestimmt ist.

Durch die sechs Grundpunkte geht eine kubische Raumkurve C_3, die ebenfalls ganz auf der Fläche W_d liegt. Denn von jedem Punkte der C_3 aus projiziert sich letztere durch einen Kegel K, der durch die sechs Grundpunkte geht.

Um die Gleichung der Fläche W_d aufzustellen, könnte man von dem in Nr. **64** durch die vier Individuen $F \equiv F_{ik}$, $H \equiv F_{lm}$, $L \equiv F_{im}$, $M \equiv F_{kl}$ bestimmten Gebüsch G ausgehen, und von hier aus die Gleichung $W_d \equiv |F_i, H_i, L_i, M_i| = 0$ bilden. Indessen würde die so erhaltene Gleichung einmal in ihrer Struktur unsymmetrisch ausfallen und überdies mit einem fremden, von den y_i, z_i abhängigen (und in diesen quadratischen) Faktor behaftet sein.

134) Diesen Standpunkt haben wohl zuerst *Darboux*[173]), *Th. Reye*[132a]) und *R. de Paolis* betont, Rom Linc Rend. (4) 6_2 (1890), p 3. Die (1, 1)-deutige Beziehung zwischen den Punkten der W_d und K_m hat *F. Schottky* eingehend verfolgt, besonders in transzendenter Hinsicht, J. f. Math. 105 (1899), p. 269.

Hierholzer umgeht diese Schwierigkeit vermöge einer einfachen Abzählung.

Konstruiert man eine F_4 so, daß sie in den sechs Grundpunkten D_2 besitzt (was 24 Bedingungen involviert) und weiter die zehn Verbindungsgeraden je zweier von fünf der D_2 enthält (was zehn weitere Bedingungen erfordert), so ist eine solche F_4 bereits eindeutig festgelegt, muß also mit der W_d übereinstimmen und daher auch die fünf Geraden, die den sechsten Grundpunkt mit den übrigen verbinden, enthalten.

Daraufhin wird die Gleichung der W_d direkt aufgestellt in der Gestalt

$$(\mathrm{I}) \qquad W_d \equiv \left|\frac{y_i z_i}{x_i}, x_i, y_i, z_i\right| = 0,$$

oder auch, unter Vermeidung der Nenner,

$$(\mathrm{I}) \qquad W_d \equiv |y_i z_i x_k x_l x_m, x_i, y_i, z_i| = 0.$$

Aus dieser Darstellung lassen sich die oben angegebenen Eigenschaften unmittelbar ablesen.

Entwickelt man rechts nach dem *Laplace*schen Satze, so hat man, wenn man noch zur Abkürzung setzt

$$(1) \qquad y_i z_i = p_i, \quad (yz)_{ik} = p_{ik},$$

die ausgeführte Darstellung

$$(\mathrm{Ia}) \qquad W_d \equiv \sum_i \sum_k x_i x_k p_{ik} (p_l x_m^2 - p_m x_l^2) = 0.$$

Man unterwerfe jetzt die W_d der (1, 1)-deutigen involutorischen kubischen Punkttransformation T_3 (s. Nr. **59** und Art. „F_3", Nr. **13**)

$$(2) \qquad \sigma x_i x_i' = 1.$$

Einem Punkte $P(x)$ entspricht dabei ein Punkt $P'(x')$, so daß P und P' konjugiert sind in bezug auf das F_2-Netz durch die acht Einheitspunkte $E(x_i = e_i = \pm 1)$.

Die Koordinatenecken A_i sind die vier Fundamentalpunkte der T_3. Einer Geraden durch A_i entspricht wieder eine solche, einer beliebigen Geraden g eine C_3 durch die vier A und vice versa, einer F_2 durch die vier A wieder eine solche.

Somit geht das F_2-Gebüsch G vermöge der T_3 in ein ebensolches Gebüsch G über, nur daß an Stelle der zwei letzten Grundpunkte $Y(y_i)$, $Z(z_i)$ die transformierten $Y'\left(\frac{1}{y_i}\right)$, $Z'\left(\frac{1}{z_i}\right)$ treten.

Ferner geht jeder Kegel K in G mit der Spitze P über in einen Kegel K' mit der Spitze P'.

Hieraus folgt:

„Vermöge einer (1, 1)-deutigen involutorischen kubischen Punkttransformation T_3 mit den Koordinatenecken als Fundamentalpunkten geht die *Weddle*sche Fläche W_d (I) über in eine ebensolche, nur daß an Stelle der beiden letzten Grundpunkte Y, Z die transformierten Y', Z' treten."

Dies muß sich auch an der Gleichung (I) direkt bestätigen lassen. Vermöge der T_3 (2) entsteht aus (I) die transformierte Gleichung

(I′) $$W_d' \equiv \left| p_i x_i,\ \frac{1}{x_i},\ y_i,\ z_i \right| = 0.$$

Andererseits ersetze man in (I) direkt die Punkte Y, Z durch Y', Z', so entsteht die Gleichung

(I″) $$W_d'' \equiv \left| \frac{1}{p_i x_i},\ x_i,\ \frac{1}{y_i},\ \frac{1}{z_i} \right| = 0$$

Beide Gleichungen (I′) und (I″) müßten übereinstimmen, also ineinander überführbar sein.

Nun liefert die *Laplace*sche Entwicklung von (I′) explizite

(I′) $$\sum_i \sum_k x_i x_k p_{ik} (p_l x_m' - p_m x_l') = 0.$$

Andererseits multipliziere man die i^{te} Reihe ($i = 1, 2, 3, 4$) in (I″) mit p_i und entwickle dann wieder nach dem *Laplace*schen Satze, so entsteht in der Tat die nämliche Gleichung (I′).

Noch sei bemerkt, daß die Grundkurve C_3 der W_d vermöge der T_3 übergeht in die Gerade (Y', Z'), und vice versa die Gerade (Y, Z) in die Grundkurve C_3' der W_d'.

Weiter gelten für die W_d als eine F_4 mit einer C_3 die in Nr. **3** gemachten Angaben hinsichtlich der Restkurven C_5, sowie der irrationalen expliziten Parameterdarstellung der Fläche.

Letztere gestattet hier für die W_d eine spezifische Vereinfachung. Durch die Grundkurve C_3 geht ein F_2-Netz N. Sei N etwa linear zusammengesetzt aus den drei Flächen H, L, M, und sei F irgendeine weitere, nicht in N enthaltene F_2 innerhalb G, deren geeignete Auswahl noch vorbehalten bleibe. Nun bildeten je zwei Punkte P, Q, die bezüglich aller Individuen in G konjugiert waren, ein zusammengehöriges Punktepaar auf der Kegelspitzenfläche F_4' eines Gebüsches G.

Im vorliegenden Falle der W_d sind also zwei solche Punkte P, Q einmal konjugiert bez. N (d. h. aller Individuen in N), andererseits bez. F.

Aber (s. Art. „F_3", Nr. **11**) zwei, bez. N konjugierte Punkte liegen stets auf einer Sehne s der C_3, und zugleich harmonisch zu den beiden Treffpunkten von s mit der C_3, und umgekehrt.

Hieraus folgt:

„Auf irgendeiner Sehne s der C_3 betrachte man einmal die Involution J_1 der zu den beiden Treffpunkten von s mit der C_3 harmonischen Punktepaare, andererseits die Involution J_2 der bez. F konjugierten (also zu den beiden Schnittpunkten von s mit F harmonischen) Punktepaare. Das diesen beiden Involutionen gemeinsame Paar P, Q liefert die beiden Restschnittpunkte von s mit der *Weddle*schen Fläche W_d, und umgekehrt."

Daraufhin läßt sich die gewünschte irrationale Darstellung der W_d auf Grund der *Hierholzer*schen Gleichung (I) der W_d, sowie der expliziten Darstellung der C_3 unschwer ableiten.

Die Parameterdarstellung der C_3 lautet

$$\varrho x_i = \frac{p_i}{\lambda y_i + \mu z_i} = \frac{p_i}{f_i} \qquad (p_i = y_i z_i), \tag{3}$$

wo f_i zur Abkürzung steht. Der nichthomogene Parameter $\frac{\lambda}{\mu}$ sei mit ν bezeichnet. Die Sekante s verbinde zwei C_3-Punkte (ν'), (ν''), und die Einsetzung von deren Koordinaten in irgendeine Form werde entsprechend durch einen resp. zwei Akzente angegeben.

Die vier Grundpunkte A_i haben die Parameterwerte $\nu_i = -\frac{z_i}{y_i}$, und zu den beiden weiteren Y, Z gehören die Werte ∞, 0. Diese sechs Werte sind also die Wurzeln der Form 6. Ordnung

$$f(\lambda, \mu) \equiv \lambda \mu f_i f_k f_l f_m. \tag{4}$$

Ein laufender Punkt auf der Sekante s hat, unter τ einen Parameter verstanden, die Koordinaten

$$\varrho x_i = p_i\left(\frac{1}{f_i'} + \frac{\tau}{f_i''}\right). \tag{5}$$

Den beiden Restschnittpunkten P, Q von s mit W_d entsprechen dann zwei, nur durch das Vorzeichen verschiedene Werte von τ, Wurzeln der Gleichung

$$\tau^2 f'' - f' = 0. \tag{6}$$

Damit wird die gesuchte irrationale Darstellung der *Weddle*schen Fläche W_d

$$\varrho x_i = p_i\left(\frac{\sqrt{f''}}{f_i'} + \frac{\sqrt{f'}}{f_i''}\right). \tag{7}$$

Die Bedeutung der Grundkurve C_3 für die *Weddle*sche Fläche W_d tritt noch mehr hervor, wenn man die C_3 als Normalkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ wählt (s Nr. **3** und Art. „F_3", Nr. **19**). Indem die Koordinaten jetzt zweckmäßiger mit den Indizes 3, 2, 1, 0 versehen werden, lautet die explizite Darstellung der N_3 resp. N_3

$$\begin{cases} x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1, \\ u_3 : u_2 : u_1 : u_0 = -1 : \lambda : -\lambda^2 : \lambda^3. \end{cases} \tag{8}$$

Das F_2-Netz N durch N_3 setzt sich linear aus drei Individuen H, L, M zusammen

$$(9)\quad \begin{cases} H \equiv 3x_0x_2 - x_1^2 = 0, \quad L \equiv 9x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \\ M \equiv 3x_1x_3 - x_2^2 = 0, \end{cases}$$

wo die linken Seiten die Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} 3x_0, x_1, & x_2 \\ x_1, x_2, & 3x_3 \end{vmatrix}$ sind.

Die sechs Grundpunkte des F_2-Gebüsches G werden durch sechs Werte des Parameters λ bestimmt, die man sich als Wurzeln einer beliebigen Gleichung 6. Grades

$$(10)\quad f(\lambda) = a_0 + 6a_1\lambda + 15a_2\lambda^2 + \cdots + 6a_5\lambda^5 + a_6\lambda^6 \equiv (a\lambda)^6 = 0$$

gegeben denke.

Es wird sich zeigen, daß diese Gleichung (10) das Fundament in der invariantentheoretischen Behandlung der *Weddle*schen — und weiterhin der *Kummer*schen — Fläche bildet. Vorab sei bereits bemerkt, daß diese Behandlung der früheren erheblich überlegen ist, insofern sie von irgendwelchen Realitätsbeschränkungen unabhängig ist und auch irgendwelche Koinzidenzen der Grundpunkte, d. i. der Wurzeln von $f(\lambda)$, gestattet.

Das F_2-Gebüsch G durch die sechs Grundpunkte setze man wiederum linear zusammen aus dem Netze $N(H, L, M)$ in (9) und einer geeigneten, nicht in N enthaltenen F_2, die mit F bezeichnet sei. Als eine solche empfiehlt sich die zu N_3 apolare (konjugierte) Fläche F durch die Grundpunkte mit der Gleichung

$$(11)\quad \begin{aligned} F(x) \equiv a_0x_0^2 &+ 2a_1x_0x_1 + (2a_2x_0x_2 + a_2x_1^2) \\ &+ (2a_3x_0x_3 + 2a_3x_1x_2) + (2a_4x_1x_3 + a_4x_2^2) \\ &+ 2a_5x_2x_3 + a_6x_3^2 \equiv (ax)^2 = 0. \end{aligned}$$

Der laufende Punkt einer Sekante $s(\alpha, \beta)$ der N_3 hat die Koordinaten

$$(12)\quad x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \alpha^3 + \tau\beta^3 : 3(\alpha^2 + \tau\beta^2) : 3(\alpha + \tau\beta) : 1 + \tau.$$

Den beiden Schnittpunkten von s mit F entsprechen zwei Parameterwerte τ', τ'', die die Wurzeln der Gleichung werden

$$(13)\quad f(\alpha) + \tau(\quad) + \tau^2 f(\beta) = 0,$$

wo der Koeffizient von τ nur angedeutet ist. Andererseits sind $0, \infty$ die τ-Parameter der beiden Treffpunkte (α) und (β) von s mit N_3. Nun waren die beiden Restschnittpunkte P, Q von s mit der Fläche W_d zu jenen beiden Punktepaaren harmonisch; ihre Parameterwerte τ_1, τ_2 sind also die Wurzeln der Gleichung

$$(14)\quad \tau^2 f(\beta) - f(\alpha) = 0.$$

Mithin lautet die gesuchte irrational-explizite Darstellung der *Weddle*-schen Fläche W_d

$$\text{(II)} \quad x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \alpha^3\sqrt{f(\beta)} + \beta^3\sqrt{f(\alpha)} : 3(\alpha^2\sqrt{f(\beta)} + \beta^2\sqrt{f(\alpha)}) \\ : 3(\alpha\sqrt{f(\beta)} + \beta\sqrt{f(\alpha)}) : \sqrt{f(\beta)} + \sqrt{f(\alpha)}.$$

Die Vergleichung mit der früheren Darstellung (7) zeigt die formale Ähnlichkeit, wie es nicht anders sein kann; während aber dort eine künstliche und nicht einfache Rechnung erforderlich war, ergibt sich (II) fast ohne Rechnung.

Man wird nun auch die rationale implizite Gleichung der W_d auf Grund der $C_3 = N_3$ in invarianter Gestalt zu haben wünschen.

Zu dem Behuf normiere man die drei Formen (9) mit dem Faktor 2 und schreibe $F = A$, sowie

$$\text{(9')} \quad \begin{cases} B \equiv 2(3x_0x_2 - x_1^2) = 2\varphi, \\ C \equiv 2(9x_0x_3 - x_1x_2) = 2\psi, \\ D \equiv 2(3x_1x_3 - x_2^2) = 2\chi. \end{cases}$$

Auch mögen vorübergehend die Indizes i, k, l, m statt 0, 1, 2, 3 verwendet werden.

Nun war die Gleichung der W_d

$$\text{(I)} \quad W_d \equiv |A_iB_iC_iD_i| = 0.$$

Aus (9') entnimmt man die Werte der B_r, C_r, D_r $(r = i, k, l, m)$

$$\text{(15)} \quad \begin{cases} B_i = 3x_l, & B_k = -2x_k, & B_l = 3x_i, & B_m = 0, \\ C_i = 9x_m, & C_k = -x_l, & C_l = -x_k, & C_m = 9x_i, \\ D_i = 0, & D_k = 3x_m, & D_l = -2x_l, & D_m = 3x_k. \end{cases}$$

Entwickelt man die Determinante (I) nach den A_r $(r = i, k, l, m)$, so ergibt sich

$$\text{(16)} \quad |A_i, B_i, C_i, D_i| \equiv \sum_r A_r \mathsf{A}_r,$$

wo die A_r die Determinanten der Matrix (15) sind.

Damit ergibt sich die Gleichung der W_d in der Gestalt

$$\text{(Ib)} \quad W_d \equiv A_i(2x_k\varphi - 3x_i\psi) + 3A_k(x_l\varphi - 3x_i\chi) \\ + 3A_l(-x_k\chi + 3x_m\varphi) + A_m(3x_m\psi - 2x_l\chi) = 0.$$

Diese ist noch einiger Modifikationen fähig auf Grund der beiden Identitäten

$$\text{(17)} \quad \begin{cases} 3x_i\chi - x_k\psi + x_l\varphi \equiv 0, \\ x_k\chi - x_l\psi + 3x_m\varphi \equiv 0. \end{cases}$$

Ordnet man dagegen (Ib) nach den φ, ψ, χ, so kommt die andere Darstellung

$$\text{(Ic)} \quad W_d \equiv -\chi(9x_iA_k + 3x_kA_l + 2x_lA_m) \\ + \varphi(2x_kA_i + 3x_kA_l + 9x_lA_m) - 3\psi(x_iA_i - x_mA_m) = 0.$$

Hieraus ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Fläche W_d die Grundkurve $C_3 = N_3$ enthält, da die rechte Seite von (Ic) mit φ, ψ, χ zugleich verschwindet.

Wir kommen zur invarianten Darstellung der *Kummer*schen Fläche. Gemäß Nr. 64 war die *Kummer*sche Fläche, die mit K_m bezeichnet sei, die Bildfläche der *Weddle*schen Fläche W_d mit der Gleichung

$$K_m \equiv |G_{rs}| = 0. \tag{I}$$

Im Anschluß an Nr. 66 werde auch K_m in invarianter Form aufgestellt. Schreibt man die Indizes i, k, l, m wieder als $0, 1, 2, 3$, so hat man zunächst, wenn die Parameter des F_2-Netzes N mit ν_1, ν_2, ν_3 bezeichnet werden, die Darstellung

$$K_m \equiv \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 + 3\nu_1, & a_3 + 9\nu_2 \\ a_1, & a_2 + 2\nu_1, & a_3 - \nu_2, & a_4 + 3\nu_3 \\ a_2 + 3\nu_1, & a_3 - \nu_2, & a_4 - 2\nu_3, & a_5 \\ a_3 + 9\nu_2, & a_4 + 3\nu_3, & a_5, & a_6 \end{vmatrix} = 0. \tag{I'}$$

Diese Determinante wird man, etwa mittels des *Laplace*schen Satzes, nach den Potenzprodukten der ν entwickeln.

Macht man noch mit einer vierten Variabeln ν_0 homogen und ordnet nach Potenzen von ν_0, so ergibt sich eine Darstellung von der Struktur

$$K_m = C_0\nu_0^4 + C_1\nu_0^3 + C_2\nu_0^2 + C_3\nu_0 + C_4 = 0, \tag{Ia}$$

wo die C ternäre Formen in ν_1, ν_2, ν_3 von der durch den Index angegebenen Ordnung sind.

Diese Koeffizienten müssen sich darstellen lassen als invariante Komitanten der binären Grundform $f_6(\lambda)$, deren Wurzeln die sechs Grundpunkte (auf der N_3) des F_2-Gebüsches lieferten (s. Nr. 66). Zunächst ist ersichtlich, daß C_0 mit der Determinante $|A|$ der zur N_3 apolaren Fläche $F = A$ übereinstimmt

$$C_0 \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}, \tag{1$_0$}$$

die zugleich die *Sylvester*sche Katalektikante der Grundform f_6 ist.

Das Verschwinden von C_0 bedeutet, daß die Fläche $F = A$ ein Kegel K des Gebüsches G wird.

Im folgenden empfiehlt es sich, die Größen ν_1, ν_2, ν_3 als Punktkoordinaten in der Ebene $\nu_0 = 0$ anzusehen, bezogen auf einen Normkegelschnitt N_2 ($= \mathsf{N}_2$)

$$N_2 \equiv \nu_1\nu_3 - \nu_2^2 = 0. \tag{2}$$

Führt man neben ν_2 noch die Variable ν_2' ein, so daß

(3) $$-2\nu_2 = \nu_2',$$

so geht (2) über in die übliche Gleichung von N_2

(2) $$N_2 \equiv 4\nu_1\nu_3 - \nu_2'^2 = 0,$$

oder auch explizite

(2a′) $$\nu_3 : \nu_2' : \nu_1 = \lambda^2 : 2\lambda : 1.$$

In der Ebene $\nu_0 = 0$ existiert eine zum Klassennormkegelschnitt N_2 apolare und durch die sechs Punkte, die den Wurzeln von $f_6(\lambda) = 0$ auf N_2 entsprechen, gehende $c_3 = c_3'$ mit der Gleichung

(4) $$c_3' \equiv \nu_1^3 a_0 + \nu_2'^3 a_3 + \nu_3^3 a_6 + 3\nu_1^2\nu_2' a_1 + 3\nu_1^2\nu_3 a_2 + 3\nu_3^2\nu_2' a_5 + 3\nu_3^2\nu_1 a_4 + 6\nu_1\nu_2'\nu_3 a_3 = 0.$$

Verschwindet wie oben im besonderen $C_0 = |A|$, so läßt die Form $f_6(\lambda)$ die kanonische Darstellung als Summe von drei sechsten Potenzen zu. Entsprechend erscheint dann, wie durch Polarisation der f_6 hervorgeht, die Form c_3' als Summe von drei Kuben. Das Letztere bedeutet aber geometrisch, daß die Kurve 3. Ordnung c_3' eine äquianharmonische ist.

Nunmehr entwickele man behufs Ermittlung der weiteren Koeffizienten $C_1, \ldots, C_4$ in (Ia) die Determinante K_m in (I′) nach dem *Laplace*schen Satze, so erhält man zunächst für

(5) $$p_{ik} = \begin{vmatrix} a_i, & a_k \\ a_{i+1}, & a_{k+1} \end{vmatrix},$$

ein Aggregat von der Struktur

(6) $$K_m \equiv A_1 + A_2 + B_1 + B_2 - C_1 - C_2,$$

wo einzeln

(7) $$\begin{cases} \begin{cases} A_1 \equiv (p_{01} - 2a_0\nu_1)(p_{45} - 2a_6\nu_3), \\ A_2 \equiv \{p_{23} + 3a_2\nu_3 - 8a_3\nu_2 + 3a_4\nu_1 + 9(\nu_1\nu_3 + \nu_2^2)\}^2; \end{cases} \\ \begin{cases} B_1 \equiv (p_{03} - 3a_0\nu_3 - 9a_1\nu_2)(p_{34} - a_4\nu_5 - a_5\nu_2 + 6\nu_3), \\ B_2 \equiv (p_{12} - a_1\nu_2 - a_2\nu_1 + 6\nu_1^2)(p_{25} + 3a_6\nu_1 - 9a_5\nu_1); \end{cases} \\ \begin{cases} C_1 \equiv (p_{02} - a_0\nu_2 - 3a_1\nu_1)(p_{35} - a_6\nu_2 - 3a_5\nu_3), \\ C_2 \equiv (p_{13} + 3a_1\nu_3 - 9a_2\nu^2 + 2a_3\nu_1 + 18\nu_1\nu_2) \\ \qquad \cdot (p_{24} + 2a_3\nu_3 - 9a_4\nu_2 + 3a_5\nu_1 + 18\nu_2\nu_3) \end{cases} \end{cases}$$

Man berechne jetzt hieraus den Koeffizienten C_1 von ν_0^3 in (Ia), eine Linearform in ν_1, ν_2, ν_3,

(8) $$C_1 \equiv \gamma_1\nu_1 + \gamma_2\nu_2 + \gamma_3\nu_3.$$

Die Ausdrücke für die Koeffizienten γ lassen sich linear in den ersten Minoren von $|A|$ bilden. Bedient man sich für die Koeffizienten von

A und f_6 der zweiten Bezeichnung $a_{ik} = a_{i+k}$, und ist entsprechend α_{rs} der Minor von a_{rs} in $|A|$, so erhält man einfach

(9) $\gamma_1 = 2(\alpha_{22} - 3\alpha_{13}),\quad \gamma_2 = 2(\cdot\,\alpha_{03} - \cdot\,\alpha_{12}),\quad \gamma_3 = 2(\alpha_{11} - 3\alpha_{02}),$

wo die im folgenden nicht in Betracht kommenden numerischen Faktoren in γ_2 nur angedeutet sind. Nun geht aus der Herleitung der Form K_m hervor, daß die Darstellung (Ia) eine typische sein muß, d. h. die Koeffizienten $C_0, C_1, \ldots, C_4$ sind (in v_1, v_2, v_3) ternäre Invarianten von f_6 und N_2.

Demnach repräsentiert die Gleichung $C_1 = 0$ eine invariante Gerade, und deren Schnittpunkte mit N_2 müssen sich bestimmen lassen durch die Wurzeln derjenigen quadratischen Kovariante $f_2(\lambda)$ von $f_6(\lambda)$, die in den Koeffizienten der letzteren kubisch ist.

Um $f_2(\lambda)$ zu bilden, gehe man aus von der Polarform

(10) $$(a\mu)^4(a\lambda)^2 \equiv \mu^4 A_0(\lambda) + 4\mu^3 A_1(\lambda) + \cdots,$$

wo

(11) $$A_i(\lambda) \equiv a_i\lambda^2 + 2a_{i+1}\lambda + a_{i+2} \qquad (i = 0, \ldots, 4).$$

Dann wird die Invariante g_2 der in μ biquadratischen binären Form (10) diejenige biquadratische Kovariante $f_4(\lambda)$ von $f_6(\lambda)$, die in den a quadratisch ist

(12) $$\begin{aligned} f_4(\lambda) &\equiv A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2 \equiv (p_{12} - 3p_{03}) + 2\lambda(p_{04} - 2p_{13}) \\ &+ \lambda^2(p_{05} + p_{14} - 8p_{23}) + 2\lambda^3(p_{15} - 2p_{24}) + \lambda^4(p_{25} - 3p_{34}) \\ &\equiv b_0 + 4b_1\lambda + \cdots + b_4\lambda^4. \end{aligned}$$

Schreibt man hier μ für λ und bildet die bilineare Invariante der beiden in μ biquadratischen Formen (10) und (12), so gelangt man zu der gesuchten Kovariante $f_2(\lambda)$

(13) $$f_2(\lambda) \equiv (b_0A_4 + b_4A_0) - 4(b_1A_3 + b_3A_1) + 6b_2A_2.$$

Entwickelt man die rechte Seite nach Potenzen von λ, so ergibt sich in der Tat

(14) $$f_2(\lambda) \equiv \gamma_1 - \gamma_2\lambda + \gamma_3\lambda^2$$

und diese geht aus C_1 vermöge (2a') hervor.

Ähnlich läßt sich der Koeffizient C_2 von v_0^2 in (Ia) behandeln. Da $C_2 = 0$ ein bez. N_2 invarianter Kegelschnitt c_2' sein muß, trifft er N_2 in vier Punkten, deren Argumente die Wurzeln der in den a kubischen biquadratischen Kovariante sind. Diese Kovariante muß also mit $f_4(\lambda)$ in (12) übereinstimmen. Daraufhin lassen sich die Koeffizienten c_{ik} in C_2

(15) $$C_2 \equiv v_1^2c_{11} + 2v_1v_2c_{12} + \cdots$$

leicht berechnen. Für das Leitglied c_{11} ergibt sich

$$(16_{11})\qquad c_{11} \equiv 3(p_{03} - 3p_{12}).$$

Schneidet man C_2 mit N_2, d. h. wendet (2a′) an, so stellt sich in der Tat heraus, daß die „Schnittpunktform" bis auf den Faktor 3 mit der Kovariante f_4 zusammenfällt. Weiter notiere man noch den Wert von c_{12}

$$(16_{12})\qquad c_{12} \equiv 6(2p_{13} - p_{04}).$$

Der Kegelschnitt $C_2 = 0$ läßt sich nun noch genauer bestimmen. Er gehört dem Büschel B von c_2 an, das durch die vier Grundpunkte $f_4(\lambda) = 0$ geht. Denkt man sich den in B enthaltenen, zu N_2 apolaren Kegelschnitt c_2' (mit denselben Koeffizienten wie $f_4(\lambda)$) herausgegriffen, so muß sich C_2 als lineare Kombination von c_2' und dem Produkt $g_2 N_2$ darstellen lassen, wo g_2 die quadratische Invariante von f_6 ist

$$(17)\qquad g_2 \equiv a_0 a_6 - 5a_1 a_5 + 15 a_2 a_4 - 10 a_3^2 \equiv p_{05} - 5p_{14} + 10 p_{23}.$$

Stellt man andererseits C_2 explizite auf, so ergibt sich die gewünschte Darstellung

$$(18)\qquad C_2 \equiv c_2' + \tfrac{1}{4} g_2 N_2.$$

Weiter ergibt sich als Koeffizient C_3 von v_0^3 in (Ia) durch explizite Entwicklung in homogenen Koordinaten s_0, s_1, s_2

$$(19)\qquad \frac{1}{2\cdot 9} C_3 \equiv a_0 s_0^3 + a_3 s_1^3 + a_6 s_2^3 + 3a_1 s_0^2 s_1 + 3a_2 s_0 s_1^2 + 3a_2 s_0^2 s_2 + 3a_5 s_2^2 s_1 + 3a_4 s_2 s_1^2 + 3a_4 s_2^2 s_0 + 6a_3 s_0 s_1 s_2.$$

Die Gleichung $C_3 = 0$ liefert also gerade die oben schon erwähnte, zu N_3 apolare c_3, die durch die den Wurzeln von $f_6 = 0$ entsprechenden sechs Grundpunkte auf N_2 geht.

Endlich erhält man für das freie Glied C_4 in (Ia) ohne weiteres

$$(20)\qquad C_4 \equiv 4\cdot 9\cdot 9\cdot N_2^2.$$

Damit ist die typische Darstellung der Form K_m in der Gestalt (Ia) im einzelnen durchgeführt. Aus (Ia) bestätigt man noch, daß den sechs Kegeln K des Gebüsches G — durch die sechs Grundpunkte $f_6(\lambda) = 0$ auf N_3 — sechs D_2 auf der Fläche K_m entsprechen. Man bilde zu dem Behuf die ersten Ableitungen der Form K_m nach den v.

Man erkennt sofort, daß $\frac{\partial K_m}{\partial v_0}$ verschwindet für $v_0 = 0$, $C_3 = 0$ und die drei weiteren Ableitungen für $v_0 = 0$, $N_2 = 0$. Die sechs gemeinsamen Lösungssysteme von $v_0 = 0$, $C_3 = 0$, $N_2 = 0$ sind aber gerade die Wurzeln von $f_6(\lambda) = 0$.

Überdies geht aus dem Faktor N_2^2 von C_4 (20) hervor, daß die Ebene $v_0 = 0$ eine Doppelebene Δ_2 der Fläche K_m ist (s. Nr. 68).

67. Die Kummersche Fläche als Projektion vom S_4 aus. Der bisherigen Erklärung der *Kummer*schen Fläche K_m als Bildfläche der *Weddle*schen Fläche W_d werde jetzt eine solche von ganz anderem Charakter gegenübergestellt.

Nach dem Vorgange von *F. Geiser* (s. Art. „F_3", Nr. 16) und *Zeuthen* (s. Nr. 19), die an eine F_3 (von einem ihrer Punkte aus) resp. an eine F_4 mit $\bar{C}_2$ (von einem Punkte der $\bar{C}_2$ aus) den Tangentenkegel legten, hat *C. Segre*[135]) auch die dreidimensionale kubische „Fläche" $F_3^{(4)}$ im S_4 behandelt.

Sei die Gleichung einer durch die Koordinatenecke A_n gehenden $F_3^{(4)}$

(1) $$F_3^{(4)} \equiv F_1 x_n^2 + 2F_2 x_n + F_3 = 0,$$

wo F_r $(r = 1, 2, 3)$ eine quaternäre Form der Ordnung r sei.

Legt man von A_n aus die Tangenten an die $F_3^{(4)}$, so erfüllen diese einen „Kegel" $K_6^{(3)}$ der Ordnung 6 mit der Gleichung

(2) $$K_6^{(3)} \equiv F_1 F_3 - F_2^2 = 0.$$

Im S_3 (x_i, x_k, x_l, x_m) gedeutet, stellt (2) auch die Spur des Kegels im

135) *C. Segre,* Torino Atti 22 (1887), p. 791; Torino Mem. (2) 39 (1888). Vgl. *G. Castelnuovo,* Ven. Ist. A. (6) 5 (1889), p. 1249; (6) 6 (1889), p. 525; (7) 2 (1891), p. 855. In den beiden ersten Arbeiten wird die *Graßmann*sche Erzeugung der F_3 (s. Art. „F_3", Nr. 7) auf den S_4 (und weiterhin auch auf den S_n) ausgedehnt.

Danach entsteht eine gewisse spezielle F_3 im S_4 durch drei kollinear aufeinander bezogene Netze von S_3, ist also durch eine Gleichung von der Gestalt $|ABC| = 0$, mit Linearformen als Elementen, darstellbar. Eine solche F_3 besitzt sechs D_2 und es gibt drei verschiedene ∞^2-Systeme von Geraden, die der F_3 angehören. Im besonderen läßt sich die kollineare Zuordnung so wählen, daß noch vier weitere D_2 hinzutreten, womit die F_3 in die *Segre*sche V_3 übergeht.

Die dritte Arbeit enthält eine systematische Untersuchung der Liniengeometrie des S_4. Eine Gerade wird durch zehn homogene Koordinaten $p_{ik} = (xy)_{ik}$ festgelegt, die an drei unabhängige Relationen gebunden sind.

Vor allem handelt es sich um die linearen Geradenkomplexe K_1, sowie um Büschel, Netze, Gebüsche derselben und die damit verknüpften singulären Erscheinungen.

Ein spezieller K_1 besteht aus den ∞^5 Geraden, die eine Ebene S_2 treffen.

Von besonderem Interesse ist die Theorie der Gebüsche von K_1. In einem solchen Gebüsche sind fünf spezielle K_1 enthalten, von denen vier den letzten mitbestimmen; das ist eine Verallgemeinerung des *Segre*schen Satzes (im Texte) über die fünf Ebenen α. Die allen Individuen des Gebüsches gemeinsamen ∞^2 Geraden erfüllen die *Segre*sche V_3, die so eine neue Beleuchtung erfährt.

Es wird auch festgestellt, daß die V_3 rational ist, indem deren S_3-Schnitten die lineare ∞^4-Schar von F_2 mit fünf Grundpunkten in einem Bild-S_3 zugeordnet wird.

Umgekehrt legt diese Abbildung behufs Ableitung der Eigenschaften der V_3 zugrunde *E. Dragoni,* Giorn. di mat. 40 (1902), p. 255.

S_3 dar, also eine Fläche 4. Ordnung F_4

(2′) $$F_4 \equiv F_1 F_3 - F_2^2 = 0.$$

Auf der $F_3^{(4)}$ liegen ∞^2 Gerade g (s. Nr. **20**); durch einen „allgemeinen" Punkt der $F_3^{(4)}$, z. B. A_n, gehen sechs solcher g, die sich durch die gemeinsamen Lösungen der drei Gleichungen

(3) $$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

bestimmen.

Im S_3 bedeuten diese Gleichungen der Reihe nach eine Ebene E, eine F_2 und eine F_3; die gemeinsamen Lösungen sind also die sechs Punkte P_i $(i = 1, \ldots, 6)$, in denen der Schnittkegelschnitt C_2 von E und F_2 die F_3 trifft, und somit die sechs obigen, von A_n auf der $F_3^{(4)}$ ausgehenden Geraden g_i die Geraden (A_n, P_i). Da für die Koordinaten eines Punktes P_i die linke Seite von (2′) in der zweiten Ordnung verschwindet, so sind die sechs Punkte P_i sechs Knotenpunkte D_2 der F_4, die auf C_2 liegen.

Umgekehrt läßt sich ersichtlich die Gleichung einer F_4 (im S_3) mit sechs auf einem Kegelschnitte C_2 liegenden D_2 auf die Form (2′) bringen. Es gilt also zunächst der Satz:

„Legt man an eine kubische dreidimensionale Mannigfaltigkeit $F_3^{(4)}$ im S_4 von einem beliebigen Punkte der $F_3^{(4)}$ aus den dreidimensionalen Tangentenkegel und schneidet diesen mit einem S_3, so ergibt sich eine Fläche 4. Ordnung F_4 mit sechs auf einem Kegelschnitt gelegenen D_2. Umgekehrt läßt sich eine solche F_4 auf noch mannigfaltige Art als Tangentenprojektion einer $F_3^{(4)}$ im S_4 von einem ihrer Punkte aus auffassen."

Auch die *Kummer*sche Fläche K_m mit 16 D_2 besitzt solche Sextupel von D_2 und zwar 16 (s. Nr. **66**).

Andererseits beachte man, daß, wenn im besonderen die $F_3^{(4)}$ Knotenpunkte D_2 besitzt, jeder solche D_2 bei der obigen Tangentenprojektion in einen D_2 der F_4 übergeht.

Soll also im besonderen die F_4 zu einer K_m werden, so müßte entsprechend eine $F_3^{(4)}$ im S_4 hergestellt werden, die 10 D_2 besäße; diese würden sich dann in der Tat in zehn weitere D_2 der F_4 projizieren.

Hier setzt die Untersuchung von *C. Segre* ein.

Er stellt zunächst fest, daß die Maximalanzahl der einer $F_3^{(4)}$ angehörigen D_2 eben gleich zehn ist, und daß solche $F_3^{(4)}$, und zwar im wesentlichen in nur einer Art, existieren. Damit ist bereits der Satz bewiesen:

„Die *Kummer*sche Fläche K_m läßt sich auffassen als scheinbarer Umriß einer $F_3^{(4)}$ im S_4 mit 10 D_2 von einem ihrer Punkte aus."

Zu einer solchen $F_3^{(4)}$ kann man auf verschiedene Weise gelangen. Die einfachste legt die ∞^2 Geraden g einer $F_3^{(4)}$ zugrunde.

Man denke sich vier allgemein gehaltene „Ebenen“ $F_1^{(4)}$ im S_4 gegeben, die mit α_i ($i = 1, \ldots, 4$) bezeichnet seien. Damit im S_4 eine Gerade g eine Ebene (in einem Punkte) trifft, ist *eine* Bedingung notwendig und hinreichend. Es gibt also ∞^2 g, die die vier Ebenen α_i treffen. *Segre* beweist nun den eigenartigen Satz:

„Die ∞^2 Geraden g im S_4, die vier gegebene Ebenen α_i ($i = 1, \ldots, 4$) treffen, treffen auch noch eine fünfte Ebene α_5, und die zehn Punkte, von denen je einer zweien der fünf Ebenen gemeinsam ist, sind zehn D_2 einer $F_3^{(4)}$, die durch die ∞^2 g erzeugt wird.“

Diese 10 D_2 der $F_3^{(4)}$ bilden eine an sich bemerkenswerte Konfiguration. Nach obigem liegen auf jeder der fünf Ebenen α, die offenbar ganz der $F_3^{(4)}$ angehören, vier der D_2. Solcher Gruppen von fünf Ebenen gibt es aber nicht nur eine, sondern sechs, zu denen im ganzen 15 Ebenen gehören.

Dementsprechend enthält die $F_3^{(4)}$ sechs ∞^2-Systeme von Geraden g derart, daß durch jeden Punkt der $F_3^{(4)}$ eine Gerade jedes Systems geht — das sind die eingangs betrachteten sechs Geraden — und in jedem S_3 zwei Gerade jedes Systems liegen. Die $F_3^{(4)}$ läßt sich daraufhin auch erzeugen durch drei „Netze“ (r_1), (r_2), (r_3) von S_3, je mit einer der Geraden r als Träger, die derart projektiv verbunden sind, daß sich immer drei Tripel entsprechender S_3 in einer Ebene schneiden, die die Geraden r_1, r_2, r_3 trifft.

Die $F_3^{(4)}$ geht durch 15 involutorische Kollineationen, deren jede eine Ebene der $F_3^{(4)}$ als Achsenebene besitzt, in sich über.

Die als Umriß der $F_3^{(4)}$ erscheinende *Kummer*sche Fläche K_m tritt aber bei dieser Methode zugleich als Brennfläche von Strahlensystemen auf (s. Nr. 69). Es gilt nämlich der Satz:

„Die Projektionen der sechs ∞^2-Geradensysteme der $F_3^{(4)}$ sind die sechs Strahlensysteme, von denen K_m die Brennfläche ist.“

Wie bei der F_3 und F_4 mit $\overline{\overline{C}}_2$, stehen die $F_3^{(4)}$ und ihre Tangentenprojektion, die K_m, derart in gegenseitiger Beziehung, daß man aus den Eigenschaften je eines der beiden Gebilde die korrespondierenden des anderen ableiten kann.

Verlegt man allgemeiner das Projektionszentrum außerhalb der $F_3^{(4)}$, so ist der Umriß die allgemeinste $F_6 = \Phi_4$, die den Schnitt einer F_2 und F_3 zur Kuspidalkurve hat, und 10 D_2 besitzt, die sich zu je vier auf 15 doppeltberührende Ebenen verteilen. Die Fläche ist Brennfläche für sechs Strahlensysteme (3, 2).

Man projiziere die $F_3^{(4)}$ wiederum von einem ihrer Punkte aus auf einen S_3, andererseits aus einem ihrer D_2 in einen S_3'. So gelangt man zu einer ein-zweideutigen Punktverwandtschaft zwischen S_3 und S_3'.

Dann ist die Übergangsfläche eine Fläche 4. Ordnung, aber auch die Doppelfläche; letztere besitzt $9\,D_2$, die Schnittpunkte je dreier Erzeugenden einer F_2.

Diese Entwicklungen finden einen gewissen Abschluß, wenn man eine $F_3^{(4)}$, sofern sie nur mindestens *eine* Ebene besitzt, selbst wieder als Projektion einer Mannigfaltigkeit $M_4^{(4)}$ (von einem ihrer Punkte aus) ansieht, die die Basis eines Büschels von $F_2^{(5)}$ im S_5 ist, analog Nr. **16** im Art. „F_3".

Andererseits lassen sich aber die $M_4^{(4)}$ als quadratische Komplexe K_2 des S_3 deuten.

Somit entsteht eine neue Beziehung zwischen den obigen F_4, insbesondere der *Kummer*schen Fläche K_m und den Komplexen K_2.

Insbesondere läßt sich nach dieser Methode ein tetraedraler K_2[135a])

---

135 a) Sind $p_{ik} = (xy)_{ik}$ die sechs Koordinaten einer Geraden, zwischen denen also die Relation $P \equiv p_{ik}p_{lm} + p_{il}p_{mk} + p_{im}p_{kl} = 0$ besteht, so ist ein tetraedraler Komplex K_t — die Gesamtheit der Geraden, die die Ebenen eines festen Tetraeders, etwa des Koordinatentetraeders, nach konstantem Doppelverhältnis schneiden — durch eine Gleichung von der Form

$$K_t \equiv p_{ik}p_{lm} + k p_{im}p_{kl} = 0$$

dargestellt. Man deute die p_{ik} als Punktkoordinaten x_r $(r = i, k, l, m, n, p)$ in einem S_5. Dann stellen die beiden Gleichungen $P = 0$, $K_t = 0$ zwei Über-F_2 dar, die eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M 4. Ordnung gemein haben.

Projiziert man diese M von einem partikulären ihrer Punkte aus auf einen S_4 $(x_p = 0)$ und läßt in dessen Punktkoordinaten x_i, x_k, x_l, x_m, x_n noch gewisse konstante Faktoren eingehen, so läßt sich die Gleichung der Projektion in der Normalgestalt schreiben

$$V_3 \equiv x_i x_k x_n - x_l x_m s = 0, \quad \text{wo} \quad s = \Sigma x.$$

Dies ist in der Tat die *Segre*sche V_3. Einmal erhält man neun D_2, indem man von den beiden Produkten $x_i x_k x_n$ und $x_l x_m s$ je zwei Faktoren einzeln gleich Null setzt. Der zehnte D_2 berechnet sich, indem man diejenige gemeinsame Lösung der fünf, gleich Null gesetzten, ersten Ableitungen von V_3 nach den x bestimmt, für die keiner jener sechs Faktoren verschwindet. Demgemäß erhält der zehnte $D_2 = E_1$ die Koordinaten (1, 1, —1, —1, 1).

Es ist nützlich, die Koordinaten der zehn D_2 in einer Tabelle zusammenzustellen:

	x_i	x_k	x_l	x_m	x_n
(1_{ik})	0	0	0	0	1
(2_{ik})	0	0	0	—1	1
(3_{ik})	0	0	—1	0	1
(1_{in})	0	1	0	0	0
(2_{in})	0	1	0	—1	0
(3_{in})	0	1	—1	0	0
(1_{kn})	1	0	0	0	0
(2_{kn})	1	0	0	—1	0
(3_{kn})	1	0	—1	0	0
(E_1)	1	1	—1	—1	1

so auf einen Doppelraum abbilden, daß dessen Übergangsfläche die K_m wird.

Durch Tangentenprojektion der V_3 von einem ihrer Punkte aus geht, wie im Texte, eine K_m als Grenzfläche hervor. Dieser entspricht rückwärts innerhalb des K_t eine Grenzkongruenz, die daraufhin (s. Nr. 71) *E. A. Weiß*, Berlin Math. Ges. 27 (1928), p. 48 durch ϑ-Funktionen $\vartheta(u, v)$ $(p = 2)$ dargestellt hat.

Der Gleichförmigkeit halber führe man s als sechste überzählige Koordinate x_p ein, so daß man das Matrixschema hat

$$\begin{vmatrix} x_i & x_k & x_n \\ x_l & x_m & x_p \end{vmatrix}.$$

Von den 15 Ebenen, die je sechs D_2 tragen, erhält man zunächst neun durch gleichzeitiges Nullsetzen je eines x der ersten und zweiten Reihe; eine solche Ebene läßt sich also durch zwei Indizes festlegen, z. B. $x_i = 0$, $x_l = 0$ durch $[il]$. Die sechs übrigen Ebenen sind gerade die durch den zehnten $D_2 = E_1$ gehenden. Deren Gleichungen sind, bei Abkürzungen mittels dreier Indizes, die folgenden:

$$\begin{array}{l|l}
[i, kl] = [i, nm] & x_k + x_l = 0, \quad x_n + x_m = 0, \\
[i, nl] = [i, km] & x_n + x_l = 0, \quad x_k + x_m = 0; \\
[k, il] = [k, nm] & x_i + x_l = 0, \quad x_n + x_m = 0, \\
[k, nl] = [k, im] & x_n + x_l = 0, \quad x_l + x_m = 0; \\
[n, il] = [n, km] & x_i + x_l = 0, \quad x_k + x_m = 0, \\
[n, kl] = [n, im] & x_k + x_l = 0, \quad x_i + x_m = 0
\end{array}$$

Auch die $10\, D_2$ lassen sich durch zwei Indizes angeben. Zunächst erhält man die Gleichungen von neun der D_2 durch gleichzeitiges Nullsetzen je zweier x beider Reihen der Matrix. Somit bestimmen die beiden übrigen Indizes den D_2, z. B. (np): $x_i = 0$, $x_k = 0$, $x_l = 0$, $x_m = 0$. Dem zehnten $D_2 = E_1$ ist das Zeichen (lm) beizulegen. Zur Vergleichung mit den Bezeichnungen der 15 Ebenen und $10\, D_2$ in Nr. 67 dienen die beiden folgenden Schemata:

I. Die 15 Ebenen.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
S_i & S_k & S_n & S_{il} & S_{kl} & S_{nl} & S_{im} & S_{km} & S_{nm} \\
[il] & [km] & [np] & [nm] & [ip] & [kl] & [kp] & [nl] & [im]
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
S_m & S_l & S_{lm} & S_{in} & S_{kn} & S_{ik} \\
[i, nm] & [k, nl] & [n, km] & [i, nl] & [k, nm] & [n, kl]
\end{array}$$

II. Die $10\, D_2$.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
D_{kn} & D_{in} & D_{ik} & D_{nl} & D_{il} & D_{kl} & D_{km} & D_{nm} & D_{im} & D_{lm} \\
(il) & (km) & (np) & (im) & (kp) & (nl) & (ip) & (kl) & (nm) & (lm)
\end{array}$$

Sodann sollen noch in der neuen Bezeichnung die Sextupel der Ebenen angegeben werden, die durch je einen der neun D_2 (exkl. $E_1 = (lm)$) gehen. Es sind nur zwei Typen zu unterscheiden, je nachdem der Index p auftritt oder nicht. Als Repräsentanten mögen (np) und (il) dienen:

$$\begin{array}{c|l}
(np) & [il],\ [km]; \quad [im],\ [kl]; \quad [n, il],\ [n, im]; \\
(il) & [km],\ [np]; \quad [kp],\ [nm]; \quad [k, il],\ [n, il].
\end{array}$$

Bei den 15 Ebenen, insofern sie je ein Quadrupel von D_2 tragen, sind wiederum nur zwei Typen zu unterscheiden, je nachdem die Ebene durch

68. Die 16 D_2 und 16 Δ_2, syzygetische und azygetische Tetraeder der Kummerschen Fläche. Normaldarstellungen. Die lineare Konstruktion von H. Weber. Die Kummersche Konfiguration. Nach Untersuchung einer Reihe von F_4 mit $< 16\, D_2$ (s. Abschn. X) stieß *E. E. Kummer*[136]) bis zu der nach ihm benannten Fläche mit der Maximalzahl von 16 D_2 vor. Sie sei wieder mit K_m bezeichnet. Unter Benutzung verschiedener Gleichungsformen der Fläche leitet er die Grundeigenschaften ihrer Singularitäten ab.

Es kommt 16 mal vor, daß 6 D_2 auf einer C_2 liegen, deren Ebene dann eine Doppelebene Δ_2 der Fläche ist. Umgekehrt kommt es 16 mal vor, daß 6 Δ_2 Tangentenebenen eines Kegels K_2 sind, dessen Spitze ein D_2 der Fläche ist. Die Fläche K_m ist also in sich dual.

Bei der verwirrenden Mannigfaltigkeit von Auffassungen und Ergänzungen, deren die K_m fähig ist, erscheint es zweckmäßig, eine der einfachsten, als Bildfläche der *Weddle*schen Fläche (s. Nr. **66**), in den Vordergrund zu stellen.

Die sechs Grundpunkte des F_2-Gebüsches G seien wieder die Koordinatenecken A_i, ein Punkt $A(a_i)$, während der letzte Punkt B als Einheitspunkt $E(1)$ gewählt werde. Bedient man sich noch der Abkürzungen $a_{rs} = a_r - a_s$, $\lambda_{rs} = \lambda_r - \lambda_s$ $(r, s = i, k, l)$ und zeichnet einen der vier Indizes, etwa m, aus, so lautet die Gleichung des Gebüsches G mit den Parametern λ_i, λ_k, λ_l, λ_m

$$G \equiv \lambda_i F_2^{(i)} + \lambda_k F_2^{(k)} + \lambda_l F_2^{(l)} + \lambda_m F_2^{(m)} = 0, \tag{1}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} F_2^{(i)} &\equiv x_i a_m (x_k a_{lm} + x_l a_{mk} + x_m a_{kl}), \quad \text{usf.}, \\ F_2^{(m)} &\equiv x_i x_k a_l a_{ik} + x_k x_l a_i a_{kl} + x_l x_i a_k a_{li}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Setzt man dies in (1) ein und ordnet nach den Potenzprodukten der x, so geht (1) über in

$$G \equiv \sum x_t x_u f_{tu} = 0, \tag{3}$$

$E_1 = (lm)$ geht oder nicht. Als Repräsentanten mögen $[n, il]$ und $[il]$ dienen:

$$\begin{array}{r|ll|} [n, il] = [n, km] & (il),\ (km); & (np),\ (lm) \\ [il] & (km),\ (np); & (kp),\ (nm) \end{array}\,.$$

Endlich seien noch die sechs *Segre*schen Pentaeder (s. Nr. **67**), deren fünf Ebenen sich zu je zweien in den zehn D_2 treffen, kurz charakterisiert. Diese lassen sich am übersichtlichsten durch fünfreihige symmetrische Matrizes, mit Lücken in der Hauptdiagonale, darstellen. Auch sie zerlegen sich in zwei Typen von je drei Pentaedern, je nachdem die beiden, durch $E_1 = (lm)$ gehenden Ebenen eines solchen dem einen oder dem anderen der beiden Tripel (S_l, S_m, S_{lm}), (S_{in}, S_{kn}, S_{ik}) angehören. Ihre explizite Aufstellung darf dem Leser überlassen bleiben.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß die obigen Typenunterschiede nur darauf beruhen, daß das Indizespaar l, m formal ausgezeichnet worden ist.

136) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. 1864, p. 246, 495.

wo

$$(4)\quad \begin{cases} f_{ik} \equiv \lambda_m a_l a_{ik} + \lambda_{ik} a_m a_{lm}, \\ f_{kl} \equiv \lambda_m a_i a_{kl} + \lambda_{kl} a_m a_{im}, \\ f_{li} \equiv \lambda_m a_k a_{li} + \lambda_{li} a_m a_{km}, \\ f_{im} \equiv \lambda_i a_m a_{kl}, \quad f_{km} \equiv \lambda_k a_m a_{li}, \quad f_{lm} \equiv \lambda_l a_m a_{ik}. \end{cases}$$

Die Gleichung der K_m ergibt sich durch Nullsetzen der Determinante der quadratischen Form G (3), lautet also[136a])

$$\text{(I)}\qquad K_m \equiv |f_{tu}| = 0 \qquad (f_{tt} = 0),$$

wo man noch in der letzten Kolonne und Reihe den gemeinsamen Faktor a_m unterdrücken kann. Entwickelt man die Determinante in (I) und setzt zur Abkürzung

$$(5)\qquad r_i \equiv f_{im} f_{kl}, \quad r_k \equiv f_{km} f_{li}, \quad r_l \equiv f_{lm} f_{ik},$$

so lautet die explizite rationale Gleichung der K_m

$$\text{(Ia)}\qquad K_m \equiv r_i^2 + r_k^2 + r_l^2 - 2 r_i r_k - 2 r_i r_l - 2 r_k r_l = 0.$$

Formal noch übersichtlicher lautet die irrationale Gleichung

$$\text{(Ib)}\qquad K_m \equiv \sqrt{r_i} + \sqrt{r_k} + \sqrt{r_l} = 0.$$

Schreibt man hinterher wieder den Buchstaben x statt λ, so zeigt die Ausführung der Produkte r in (5), daß man erhält

$$(5')\qquad \begin{aligned} r_i &\equiv x_i a_{kl} \{x_m a_i a_{kl} + (x_k - x_l) a_m a_{im}\} \\ &\equiv x_i \{x_m a_i a_{kl}^2 + (x_k - x_l) a_m a_{im} a_{ki}\} \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

Man führe demgemäß zur Abkürzung die Ausdrücke ein

$$(6)\qquad \begin{cases} A_i \equiv a_i a_{kl}^2, & A_k \equiv a_k a_{li}^2, & A_l \equiv a_l a_{ik}^2, \\ B_i \equiv a_m a_{im} a_{kl}, & B_k \equiv a_m a_{km} a_{li}, & B_l \equiv a_m a_{lm} a_{ik}, \end{cases}$$

so daß die B an die Identität gebunden sind

$$(7)\qquad B_i + B_k + B_l \equiv 0,$$

so lautet die irrationale Gleichung (Ib) der K explizite

$$\text{(Ib)}\qquad \sum_{r=i}^{r=l} \sqrt{x_r (x_m A_r + (x_s - x_t) B_r)} = 0.$$

Hierbei ist die K_m auf ein „azygetisches" Tetraeder bezogen (s. u.).

136a) Zu einer derartigen irrationalen Darstellung der K_m gelangt *A. Cayley*, J. f. Math. 78 (1871), p. 292, auf Grund der *Riemann*schen Theorie der Doppeltangenten einer c_4. Daraufhin werden sechs — den zweiten Ableitungen von f entsprechende — in zwei Tripel zerlegte überzählige Koordinaten eines Raumpunktes eingeführt, zwischen denen zwei geeignet normierte Identitäten bestehen. Aus der so sich ergebenden irrationalen Darstellung der K_m lassen sich die Gleichungen der 16 Δ_2 ablesen. Eine modifizierte Darstellung gibt *Cayley*, ib. 94 (1883), p. 270.

Nach *Cayley*[137]) läßt sich die Gleichung (Ib) so umformen, daß man die Gleichungen der 16 Δ_2 ohne weiteres ablesen kann. Führt man neue Variable y derart ein, daß man hat

$$(8)\qquad y_i : y_k : y_l : y_m = C_i x_i : C_k x_k : C_l x_l : -C_i C_k C_l x_m,$$

so geht (Ib) über in

$$(\mathrm{Ib}')\qquad \sum_{r=i}^{l} \sqrt{y_r B_r (y_r C_s - y_s C_r) - \frac{y_m}{B_r}} = 0.$$

Es werden dann die Gleichungen von 8 Δ_2

$$(9)\qquad \begin{cases} y_i = 0, \quad y_k = 0, \quad y_l = 0, \quad y_m = 0; \\ \frac{y_i}{B_i} + \frac{y_k}{B_k} + \frac{y_l}{B_l} = 0, \\ y_k C_l - y_l C_k - \frac{y_m}{B_i} = 0, \quad \text{usf.} \end{cases}$$

Die übrigen 8 Δ_2 ergeben sich hieraus gemäß einer gewissen Vertauschungsregel.

Man führe nämlich noch Größen C_r', C_r'' ein gemäß

$$(10)\qquad C_r \equiv C_r' C_r'' \qquad (r = i, k, l),$$

mit den Identitäten

$$(10')\qquad \sum C_r' \equiv 0, \quad \sum C_r'' \equiv 0,$$

so hat man nur in den obigen Gleichungen (9) die C_r mit den C_r' resp. C_r'' zu vertauschen, um die weiteren 8 Δ_2 zu erhalten.

Wir kommen zu den Beziehungen der 16 D_2 und 16 Δ_2 der K_m zu den Grundpunkten und Geraden der W_d. Die Punkte der K_m und W_d waren nach Nr. **66** (1, 1)-deutig aufeinander bezogen.

Läßt man die beiden Räume der W_d und K_m zusammenfallen und bezeichnet die sechs Grundpunkte des F_2-Gebüsches G mit 1, 2, . . ., 6, so entsprechen diesen auf der K_m 6 D_2: (1), (2), . . ., (6), dagegen die zehn übrigen den zehn Ebenenpaaren (ikl), (mnp), usf. Man kann daher diese 10 D_2 der K_m entsprechend bezeichnen mit $\binom{i\,k\,l}{m\,n\,p}$ oder noch kürzer mit (ikl) resp. (mnp), usf. Hält man hier etwa den ersten Index $i = 1$ fest, so entsprechen den zehn Kombinationen zu je zweien der fünf übrigen gerade die 10 D_2.

Durch die sechs Grundpunkte $i, \ldots, p$ ging eine bestimmte C_3.

Ist (i, k) irgendeine der 15 Verbindungsgeraden je zweier der sechs Grundpunkte, so geht durch C_3 ein F_2-Netz N, und durch (i, k) ein ein Netz N_{ik} von F_2 innerhalb des Gebüsches G.

Diesen 16 Netzen entsprechen die 16 Δ_2 von K_m, jeweils als Ort der Punkte, die den F_2 eines Netzes entsprechen.

137) *A. Cayley*, J. f. Math. 73 (1871), p. 292.

Diese 16 Δ_2 berühren die K_m je längs einer C_2 und enthalten je sechs D_2 auf einer solchen.

So gehen durch die C_3 die sechs Kegel K_2, die aus je einem der sechs Grundpunkte die übrigen projizieren; die Ebene $\Delta_2(0)$, die dem F_2-Netz N entspricht, enthält die den sechs K_2 entsprechenden D_2. Ferner ist die Gerade (i, k) in vier der zehn Ebenenpaare enthalten und liegt auf zweien der sechs K_2; die $\Delta_2(i, k)$ enthält also die sechs jenen besonderen F_2 entsprechenden D_2. Dual ist jeder D_2 in sechs der Δ_2 enthalten.

Durch jede der 15 Verbindungslinien der sechs D_2, die einer Δ_2 angehören, geht immer noch eine weitere Δ_2 hindurch. Die 120 Verbindungsgeraden von je zwei der D_2 fallen zusammen mit den 120 Schnittlinien je zweier der Δ_2.

Damit lassen sich die gegenseitigen Inzidenzen der 16 D_2 und 16 Δ_2 in einem einfachen Schema festlegen.

In der Ebene $\Delta_2(0)$ liegen die D_2

$$(0) \mid \quad (i),\ (k),\ (l),\ (m),\ (n),\ (p);$$

und in irgendeiner der 15 $\Delta_2(ik)$ die D_2

$$(ik) \mid (i),\ (k);\ (ikl) = (mnp),\ (ikm) = (lnp),\ (ikn) = (lmp),$$
$$(ikp) = (lmn).$$

Umgekehrt gehen durch einen $D_2(i)$ die 6 Δ_2

$$(i) \mid \quad (0),\ (ik),\ (il),\ (im),\ (in),\ (ip)$$

und durch einen $D_2(ikl) = D_2(mnp)$ die 6 Δ_2

$$(ikl) = (mnp) \mid (ik),\ (il),\ (kl);\ (mn),\ (mp),\ (np).$$

Beim ersten Schema gehören die 6 D_2 je einer C_2 an, beim zweiten die 6 Δ_2 als Berührungsebenen einem Kegel K_2.

Hieraus geht hervor, daß die Schnittachse irgend zweier Δ_2 zwei D_2 trägt, und daß dual durch den Verbindungsstrahl irgend zweier D_2 zwei Δ_2 gehen.

Es zeigt sich das deutlich an den beiden folgenden Schemata wo bei jedem drei Typen zu unterscheiden sind.

Die Achse $[(0), (ik)]$ trägt die beiden D_2 $(i), (k)$;
„ „ $[(ik), (lm)]$ „ „ „ „ $(ikn), (ikp)$;
„ „ $[(ik), (il)]$ „ „ „ „ $(i), (ikl)$.

Durch den Strahl $[(i), (k)]$ gehen die beiden Δ_2 $(0), (ik)$;
„ „ „ $[(i), (ikl)]$ „ „ „ „ $(ik), (il)$;
„ „ „ $[(ikl), (ikm)]$ „ „ „ „ $(ik), (np)$.

Nunmehr seien die syzygetischen und azygetischen Tetraeder betrachtet.

Nach *H. Weber*[138]) existieren zwei ausgezeichnete Arten von Tetraedern, die sich aus D_2 und Δ_2 herstellen lassen. So bilden die vier Punkte (i), (k), (l), (ikl) ein Tetraeder T_1, dessen Ecken D_2 und dessen Seiten Δ_2 sind; diese Δ_2 sind $(0), (ik), (il), (kl)$. Solcher „azygetischer" oder „*Rosenhain*scher" Tetraeder T_1 gibt es 80. Auf ein solches Tetraeder T_1 als Koordinatentetraeder war oben in (Ib) die Gleichung der K_m bezogen.

Andererseits betrachte man ein Tetraeder T_2 vom Seitentypus $[(0), (ik), (lm), (np)]$. Hier sind die Seiten Δ_2, die Ecken aber *keine* D_2. Jede der sechs Kanten trägt zwei D_2 nach der Tabelle

$$\left\{\begin{array}{l|l}
(0),\ (ik) & (i),\ (k), \\
(0),\ (lm) & (l),\ (m), \\
(0),\ (np) & (n),\ (p) \\
(ik),\ (lm) & (ikp) = (lmn),\ (ikn) = (lmp), \\
(ik),\ (np) & (ikl) = (npm),\ (ikm) = (npl), \\
(lm),\ (np) & (lmi) = (npk),\ (lmk) = (npi).
\end{array}\right.$$

Es verbeiben also noch als die vier letzten D_2

$$(iln) = (kmp), \quad (ilp) = (kmn), \quad (lmn) = (klp), \quad (imp) = (kln).$$

Diese vier D_2 bilden die Ecken des zu T_2 „reziproken" Tetraeders T_2'. Dessen Ecken sind D_2, während seine Seiten keine Δ_2 sind. Durch dessen Kanten gehen dual je zwei Δ_2, daß sind eben die, die nach Ausschluß der Seiten-Δ_2 von T_2 noch übrig bleiben.

Diese Tetraeder T_2, T_2' heißen „syzygetische" oder „*Göpel*sche" Tetraeder. Im ganzen gibt es 60 solcher Tetraeder, oder auch 30 Paare (T_2, T_2').

Zwei reziproke syzygetische Tetraeder umfassen zusammen alle 16 D_2 und 16 Δ_2.

Andererseits lassen sich die azygetischen Tetraeder T_1 in Gruppen von vieren anordnen, deren Ecken und Seiten alle 16 D_2 und 16 Δ_2 erschöpfen. Eine solche Anordnung ist z. B.

$$\begin{array}{llll}
(0) & (kl) & (li) & (ik) \\
(np) & (im) & (km) & (lm) \\
(mp) & (in) & (kn) & (ln) \\
(mn) & (ip) & (kp) & (lp).
\end{array}$$

Ihr entspricht die analoge Anordnung der D_2

$$\begin{array}{llll}
(ikl) & (i) & (k) & (l) \\
(m) & (inp) & (ilm) & (ikm) \\
(n) & (imp) & (iln) & (ikm) \\
(p) & (imn) & (ilp) & (ikp).
\end{array}$$

138) *H. Weber*, J. f. Math. 84 (1878), p. 332.

Durch irgendeinen der 16 D_2 des ersten Schemas gehen je die sechs Δ_2, deren Symbole eine Zeile und eine Spalte bilden, ausgenommen das der Zeile und Spalte gemeinsame Element. Analog liest man aus dem zweiten Schema die in einer Δ_2 liegenden sechs D_2 ab.

Jede Zeile und jede Spalte des ersten Schemas ergibt die Seiten, und die analoge Zeile oder Spalte des zweiten Schemas die Ecken eines azygetischen Tetraeders. Eine solche Anordnung der 16 D_2 und Δ_2 heißt eine „Viervier".

Wählt man ein syzygetisches Tetraeder als Koordinatentetraeder, so erhält die Gleichung der K_m nach *Kummer*[139]) die Gestalt (s. auch Nr. 71)

(11) $$\varphi^2 - 16 k x_i x_k x_l x_m = 0,$$

wo

(12) $$\begin{cases} \varphi \equiv \sum x_i^2 + 2 \sum\limits_k^m a_k (x_i x_k + x_l x_m), \\ k \equiv \sum\limits_k^m a_k^2 - 1 - 2 a_k a_l a_m. \end{cases}$$

Aus der *Kummer*schen Gleichung (11) der K_m lassen sich die Inzidenzeigenschaften der aus den 16 D_2 und 16 Δ_2 bestehenden Figur direkt ableiten. Es zeigt sich, daß diese Eigenschaften lediglich von der relativen Lage einer Fläche 2. Ordnung φ zu einem Tetraeder (Vierflach) T_2, das als Koordinatentetraeder gewählt werde, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, von den zwölf Punkten, die φ aus den Kanten von T_2 ausschneidet. Dabei lassen sich diese zwölf Punkte auch ohne Bezugnahme auf eine Fläche φ direkt und elementar konstruieren.

Da die Indizes $i, k, l, \ldots$ bereits für die D_2 und Δ_2 Verwendung finden, seien Punktkoordinaten mit x_r, x_s, x_t, x_u bezeichnet, also die Ecken von T_2 mit A_r, A_s, A_t A_u, und die entsprechenden Ebenenkoordinaten mit v_r, v_s, v_t, v_u.

Unter der Koordinate irgendeines Punktes auf einer Kante von T_2, z. B. $(x_t = 0,\ x_u = 0)$, sei das Verhältnis $x_{rs} = \frac{x_r}{x_s}$ verstanden, wo die Indizes stets in natürlicher Folge genommen seien. Wählt man einen beliebigen Raumpunkt als Einheitspunkt $E(1, 1, 1, 1)$, und projiziert diesen mittels einer Ebene durch irgendeine Kante auf deren Gegenkante, so heiße die Projektion auf letzterer deren (positiver) Einheitspunkt; der zugehörige negative Einheitspunkt bestimmt sich dadurch, daß das Paar der beiden Einheitspunkte harmonisch liegt zum Eckenpaar der Kante.

139) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. 1864, p. 253.

Bezieht man die Punktreihen irgend zweier Gegenkanten, z. B. $(x_t = 0,\ x_u = 0)$ und $(x_r = 0,\ x_s = 0)$ derart projektiv aufeinander, daß sich die in natürlicher Folge genommenen Ecken A_r und A_s, A_t und A_u entsprechen, sowie die beiden positiven (und damit von selbst auch die beiden negativen) Einheitspunkte, so besitzen irgend zwei zugeordnete Punkte gleiche Koordinatenwerte $x_{rs} = x_{tu}$, und umgekehrt.

Die Fläche φ werde zunächst mit den drei in irgendeiner Ebene von T_2, etwa $x_u = 0$, gelegenen Kanten geschnitten. Nimmt man als Muster die Kante $(x_t = 0,\ x_u = 0)$, so sind die Koordinaten der beiden Schnittpunkte die Wurzeln α, α' der Gleichung

$$x_r^2 + 2a x_r x_t + x_s^2 = 0,$$

so daß α, α' die Werte $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ erhalten, wo $\alpha\alpha' = 1$, $\alpha + \alpha' = -2a$ ist. Dabei entspreche der Wert α einem beliebig, aber fest gewählten Vorzeichen der Quadratwurzel.

Analoges gelte von den Punktepaaren β, β', resp. γ, γ' der beiden anderen Kanten. Die Relation $\alpha\alpha' = 1$ besagt geometrisch, daß das Paar (α, α') harmonisch liegt zum Paare der Einheitspunkte auf der Kante usf. Vermöge der obigen Projektivitäten entstehen dann als Schnittpunkte von φ mit den drei Gegenkanten die gleich zu bezeichnenden Paare (α, α') usf.

Umgekehrt lassen sich diese sechs Punktepaare auf den Kanten von T_2 direkt und unabhängig von der Fläche φ bilden.

Man markiere auf den drei Kanten irgendeiner Ebene von T_2, z. B. $x_u = 0$, beliebig drei Punkte α, β, γ (sc. außerhalb der Ecken). Nach Wahl des Einheitspunktes E sind dann die weiteren neun Punkte auf Grund der obigen harmonischen Konstruktionen festgelegt. Bei gegebenem T_2 hängt somit die ganze Figur von sechs Konstanten ab. Nunmehr werden die zwölf Kantenpunkte zu gewissen zwölf D_2 einer K_m gemacht.

Die Indizes r, s, t, u seien so gewählt, daß der Reihe nach die Ebenen $x_u = 0$, $x_t = 0$, $x_s = 0$, $x_r = 0$ mit den Δ_2-Ebenen (0), (ik), (lm), (np) zusammenfallen, d. h. mit den Ebenen irgendeines syzygetischen Tetraeders.

Auf Grund der früheren Inzidenzschemata lassen sich dann die Koordinaten der zwölf auf den Kanten von T_2 gelegenen D_2, sowie der zwölf, sie je zu vier verbindenden Δ_2-Ebenen („Inzidenzebenen“) angeben. Dies zeigen die beiden folgenden Tabellen, wo der Einfachheit halber nur die Argumente α, β, γ verwendet sind.

(A) Tabelle der Raumkoordinaten der zwölf D_2 auf den Kanten von T_2.

	x_r	x_s	x_t	x_u
(i)	α	1	0	0
(k)	1	α	0	0
(l)	β	0	1	0
(m)	1	0	β	0
(n)	0	γ	1	0
(p)	0	1	γ	0
(ikl)	0	β	0	1
(imn)	0	1	0	β
(ikn)	γ	0	0	1
(ikp)	1	0	0	γ
(ilm)	0	0	α	1
(inp)	0	0	1	α

(B) Tabelle der Koordinaten der zwölf Inzidenzebenen.

	v_r	v_s	v_t	v_u
(il)	1	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha\beta$
(km)	$\alpha\beta$	$-\beta$	$-\alpha$	1
(in)	1	$-\alpha$	$\alpha\gamma$	$-\gamma$
(kp)	$\alpha\gamma$	$-\gamma$	1	$-\alpha$
(ln)	$-\gamma$	$-\beta$	$\beta\gamma$	1
(mp)	$-\beta$	$-\gamma$	1	$\beta\gamma$
(kl)	$-\alpha$	1	$\alpha\beta$	$-\beta$
(im)	$-\beta$	$\alpha\beta$	1	$-\alpha$
(kn)	$-\alpha$	1	$-\gamma$	$\alpha\gamma$
(ip)	$-\gamma$	$\alpha\gamma$	$-\alpha$	1
(nm)	$\beta\gamma$	1	$-\gamma$	$-\beta$
(lp)	1	$\beta\gamma$	$-\beta$	$-\gamma$

Die vier noch fehlenden D_2: (imp), (iln), (ilp), (imn) bilden die Ecken A_r', A_s', A_t', A_u' des zu T_2 reziproken Tetraeders (Vierecks) T_2.

Auf Grund der Tabellen (A) und (B) lassen sich die Koordinaten der vier D_2 berechnen. Setzt man zur Abkürzung

$$\mathsf{A} = \alpha + \beta\gamma, \quad \mathsf{B} = \beta + \alpha\gamma, \quad \Gamma = \gamma + \alpha\beta, \quad \Delta = \alpha\beta\gamma + 1,$$

so sind die Koordinaten der D_2 in der folgenden Tabelle enthalten.

(C) Tabelle der Koordinaten für die Ecken des reziproken Tetraeders T_2'.

	x_r	x_s	x_t	x_u
$(imp) = A_r'$	Δ	A	B	Γ
$(iln) = A_s'$	A	Δ	Γ	B
$(ilp) = A_t'$	B	Γ	Δ	A
$(imn) = A_u'$	Γ	B	A	Δ

Die Matrix der Koordinaten ist symmetrisch und hat vier gleiche Diagonalelemente Δ. Faßt man das bisherige zusammen, so hat man den Satz:

„Man wähle einen beliebigen Raumpunkt E als Einheitspunkt eines Koordinatentetraeders T_2 mit den Ecken A_r, A_r, A_t, A_u, und bestimme durch Projektion die sechs positiven Einheitspunkte auf den Kanten und damit auch die sechs negativen.

Sodann markiere man auf den drei Kanten in irgendeiner Ebene von T_2, z. B. $x_u = 0$, drei beliebige Punkte α, β, γ nebst den drei zugehörigen α', β' γ' derart, daß je ein Paar (α, α') usf. harmonisch liegt zum Paar der Einheitspunkte auf der Kante. Vermöge geeigneter projektiver Zuordnung der Punkte je zweier Gegenkanten von T_2 ergeben sich auf den drei Gegenkanten der obigen drei weitere Punktepaare mit denselben Koordinaten (α, α') usf. In jeder Ebene von T_2 liegen die drei Punktepaare auf einem Kegelschnitt C_2, und diese vier C_2 gehören einer bestimmten Fläche zweiter Ordnung φ an.

Es existieren dann zwölf Inzidenzebenen derart, daß immer vier der obigen zwölf Punkte, auf zwei Paaren von Gegenkanten, einer solchen Ebene angehören. Diese zwölf Inzidenzebenen gehen sechsmal zu zweien durch die Kanten eines zweiten Tetraeders T_2' mit den Ecken A_r', A_s', A_t', A_u'. Die zwölf Punkte, zusammen mit den vier Ecken von T_2', bilden die 16 D_2, und die zwölf Ebenen, zusammen mit den vier Ebenen von T_2, die 16 Δ_2 einer bestimmten *Kummer*schen Fläche K_m, für die T_2 und T_2' reziproke syzygetische Tetraeder sind.“

Zur Bestimmung dieser K_m dient folgende Regel. Es gibt ein Büschel B von F_4, die die Ebenen von T_2 längs der Kegelschnitte C_2 berühren. Greift man in B dasjenige Individuum heraus, das irgendeine Ecke von T_2' enthält und damit von selbst die vier Ecken von T_2' als D_2 besitzt, so ist dieses Individuum die *Kummer*sche Fläche K_m mit den obigen 16 Punkten und 16 Ebenen als D_2 und Δ_2."

Mit Rücksicht auf die Reziprozität der beiden Tetraeder T_2 und T_2' wird man T_2' als ein neues Koordinatentetraeder (x_r', x_s', x_t', x_u') einführen, wo die Wahl des neuen Einheitspunktes E' noch vorbehalten bleibe.

Die einfachste aller Koordinatentransformationen, die T_2' in T_2 überführen, lautet auf Grund der Tabelle (C)

$$\text{(D)}\quad \begin{cases} \varrho x_r = \Delta x_r' + \mathrm{A} x_s' + \mathrm{B} x_t' + \Gamma x_u' \\ \varrho x_s = \mathrm{A} x_r' + \Delta x_s' + \Gamma x_t' + \mathrm{B} x_u' \\ \varrho x_t = \mathrm{B} x_r' + \Gamma x_s' + \Delta x_t' + \mathrm{A} x_u' \\ \varrho x_u = \Gamma x_r' + \mathrm{B} x_s' + \mathrm{A} x_t' + \Delta x_u'. \end{cases}$$

Behufs Umkehrung hat man die vier verschiedenen Minoren der Koeffizientendeterminante von (D) zu berechnen. Man führe die zu den Δ, A, B, Γ „konjugierten" Werte Δ', A', B', Γ' ein gemäß

$$\text{(E)}\quad \Delta' = \alpha\beta\gamma - 1, \quad \mathrm{A}' = \alpha - \beta\gamma, \quad \mathrm{B}' = \beta - \alpha\gamma, \quad \Gamma' = \gamma - \alpha\beta,$$

so daß umgekehrt die zu den letzteren konjugierten Werte wieder die Δ, A, B, Γ werden.

Dann ergibt sich, daß die Minoren von Δ, A, B, Γ in (D) eben den konjugierten Größen (E) proportional sind.

Damit erhält man als Umkehrung der Koordinatentransformation (D)

$$\text{(D')}\quad \begin{cases} \varrho' x_r' = \Delta' x_r + \mathrm{A}' x_s + \mathrm{B}' x_t + \Gamma' x_u \\ \varrho' x_s' = \mathrm{A}' x_r + \Delta' x_s + \Gamma' x_t + \mathrm{B}' x_u \\ \varrho' x_t' = \mathrm{B}' x_r + \Gamma' x_s + \Delta' x_t + \mathrm{A}' x_u \\ \varrho' x_u' = \Gamma' x_r + \mathrm{B}' x_s + \mathrm{A}' x_t + \Delta' x_u. \end{cases}$$

Die Reziprozität der beiden Tetraeder T_2, T_2' tritt in der Struktur von (D) und (D') deutlich hervor; die alten Koordinaten der Ecken von T_1' sind konjugiert zu den neuen Koordinaten der Ecken von T_2. Man sollte daher lieber die beiden Tetraeder als „konjugierte" statt als „reziproke" bezeichnen.

Überdies liest man aus (D) und (D') ab, daß die Einheitspunkte E, E' der beiden Tetraeder T_2, T_2' zusammenfallen.

Man bestimme jetzt die neuen Koordinaten der zwölf D_2 auf den Kanten von T_2. Es genügt, als Muster etwa den Punkt (i) auf der

Kante $x_t = 0$, $x_u = 0$ mit der Koordinate $x_{rs} = \alpha$ zu betrachten. Aus (D′) folgt für die neuen Koordinaten von (i)

$$\text{(F)} \qquad (i) \mid \; x_r' \; : \; x_s' \; : \; x_t' \; : \; x_u' \\ = \alpha\Delta' + \mathsf{A}' : \alpha\mathsf{A}' + \Delta' : \alpha\mathsf{B}' + \Gamma' : \alpha\Gamma' + \mathsf{B}'.$$

Nach Einsetzung der Werte von Δ', A', B', Γ' aus (E) vereinfachen sich die rechten Seiten von (F), so daß (F) übergeht in

$$(\mathrm{F}_1) \qquad (i) \mid \; x_r' : x_s' : \; x_t' \; : x_u' \\ = \beta\gamma \; : \; 1 \; : \; -\gamma \; : \; -\beta.$$

Vergleicht man dies mit der Tabelle (B), so erkennt man, daß die neuen Koordinaten von (i) übereinstimmen mit den alten Koordinaten der Inzidenzebene (im). Fährt man so fort, so ergibt sich, daß vermöge der Korrelation

$$(\mathrm{G}) \qquad \sigma' v_\lambda' = x_\lambda, \quad \text{oder auch} \quad \sigma v_\lambda = x_\lambda' \qquad (\lambda = r, s, t, u)$$

die neuen resp. alten Koordinaten der 16 D_2 übereinstimmen mit den alten resp. neuen Koordinaten der 16 Δ_2.

Dies läßt sich noch genauer verfolgen. Die Tabellen (A) und (B) zeigen, daß sich die zwölf Punkte D_2 auf den Kanten von T_2 in drei syzygetische Tetraeder vom Typus T_2 zerlegen, derart, daß bei jedem immer nur eines der drei Argumente α, β, γ auftritt, und entsprechend die zwölf Inzidenzebenen Δ_2 in drei syzygetische Tetraeder vom Typus T_2', derart, daß immer gerade die beiden anderen Argumente auftreten. Je eines der ersteren Tetraeder ist reziprok zu dem entsprechenden letzterem, und jedes dieser drei Tetraederpaare geht ineinander über vermöge der Korrelation (G).

Verbindet man dies mit dem früher eingeführten Begriff einer „Viervier" und seiner Reziproken, so ergibt sich durch Zusammenfassung der Satz:

„Zerlegt man die Figur der 16 D_2 und 16 Δ_2 einer *Kummer*schen Fläche K_m auf irgendeine der 20 gleichberechtigten Arten in eine Viervier syzygetischer Tetraeder und ihre reziproke, so existiert eine bestimmte Korrelation, die jedes der vier Paare reziproker Tetraeder ineinander überführt. Wählt man irgend eines dieser vier Paare als ein Paar von Koordinatentetraedern mit demselben Einheitspunkt, so läßt sich die Korrelation in der Normalform (G) darstellen."

Die auf ein Tetraeder T_2' bezogene Klassengleichung[139a]) der K_m ist also genau von derselben Form, wie die auf ein Tetraeder T_2 bezogene Ordnungsgleichung.

139a) Eine direkte Ableitung der Klassengleichung findet sich bei *A. Cayley* und *J. C. Sharp*, Ed. Times 11 (1884), p. 110.

Man vergleiche die obigen, auf dem ursprünglichen Tetraeder T_2 als Koordinatentetraeder beruhenden Rechnungen mit den ergänzenden der Nr. 59, die an das Koordinatentetraeder T_2' als ursprüngliches anknüpften.

Wir gelangen zur *Weber-Schroeter*schen linearen Konstruktion der 16 D_2 aus sechs derselben. Nach *H. Weber*[138]) lassen sich aus gewissen sechs der 16 D_2 die übrigen linear konstruieren, was *H. Schroeter*[140]) näher ausgeführt hat.

Diese Konstruktion, unter Verwendung einiger Vereinfachungen, ist folgende. Aus den 16 D_2 lassen sich sechs solche herausgreifen, die ein eigentliches Sechsek bilden (von dem keine vier Ecken inzident sind), z. B.:

$$(i),\quad (k),\quad (l),\quad (ikm) = (lnp),\quad (ilm) = (knp),\quad (klm) = (inp). \tag{13}$$

Jeder weitere D_2 aber ist mit dreien in (13) inzident.

Aus den sechs D_2 in (13) leitet man zunächst durch Verbindung acht Δ_2 ab, nach dem Schema

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} (0) = [(i),\ (k),\ (l)], \\ \left\{\begin{array}{l} (ik) = [(i),\ (k),\ (ikn)], \\ (il) = [(i),\ (l),\ (ilm)], \\ (kl) = [(k),\ (l),\ (klm)], \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} (im) = [(i),\ (imk),\ (iml)], \\ (km) = [(k),\ (kml),\ (kmi)], \\ (lm) = [(l),\ (lmk),\ (lmi)], \end{array}\right. \\ (np) = [(npi),\ (npk),\ (npl)]. \end{array}\right.$$

Hieraus gewinnt man wieder zwei weitere D_2, (m) und (ikl), als Schnittpunkte dreier Ebenen

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} (ikl) = [(ik),\ (il),\ (kl)], \\ (m) = [(im),\ (km),\ (lm)]. \end{array}\right.$$

Damit sind jetzt acht D_2 und acht Δ_2 bekannt.

Um zu den beiden weiteren D_2, (n) und (p), zu gelangen, betrachte man in der Ebene (0) die vier bekannten D_2 $(i), (k), (l), (m)$. Auch die Verbindungsgerade c_{np} der beiden gesuchten D_2, (n) und (p), kennt man als Schnittlinie der Δ_2-Ebenen (0) und (np).

140) *H. Schröter*, J. f. Math. 100 (1887), p. 231. Eine einfache lineare Konstruktion gibt auch *Th. Reye*, J. f. Math. 86 (1878), p. 209. Ausgehend von einem (räumlichen) Sechseck legt er den Satz zugrunde, daß durch ein Fünfeck ein Polarsystem bestimmt wird. Von den Eigenschaften der *Kummer*schen Konfiguration wird hierbei nichts vorausgesetzt, vielmehr werden jene aus der Konstruktion selbst hergeleitet.

Nun sollen die sechs D_2 in der Ebene (0) einer $c_2 = c_2^{(n,p)}$ angehören.

Das Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten (i), (k), (l), (m) schneidet daher auf der Geraden c_{np} eine Jnvolution J aus, der das gesuchte Paar (n), (p) als Elementenpaar angehören muß. Diese Überlegung wiederhole man entsprechend für die Ebene (np). In dieser liegen die vier bekannten D_2

(16) $(npi) = (klm)$, $(npk) = (ilm)$, $(npl) = (ikm)$, $(npm) = (ikl)$.

Wiederum sollen diese vier Punkte mit den beiden Restpunkten (n), (p) einer $c_2' = c_2'^{(np)}$ angehören. Legt man daher ein zweites Kegelschnittbüschel in der Ebene (np) mit den vier Punkten (16) als Grundpunkten, so schneidet dieses aus der Geraden c_{np} ebenfalls eine Involution J' aus, der das gesuchte Paar (n), (p) als Elementenpaar angehören muß. Damit ergibt sich aber das gesuchte D_2-Paar (n), (p) auf der Geraden c_{np} als das den beiden Involutionen J und J' gemeinsame Punktepaar, das sich in diesem Falle linear konstruieren läßt.

Die noch fehlenden D_2 und Δ_2 erhält man nunmehr ohne weiteres je als Schnittpunkte von drei bekannten Δ_2-Ebenen, resp. als Verbindungsebenen von drei bekannten D_2.

Hiermit ist die gewünschte lineare Konstruktion geleistet. Man beachte noch, wie sich bei Entwicklung dieser Konstruktion die der Reihe nach auftretenden 16 D_2 und 16 Δ_2 von selbst zu einer Viervier aufbauen. Es genüge die Betrachtung der D_2. Vermöge (14) und (15) war man zu acht bekannten D_2 gelangt

(17) $\qquad (i), (k), (l), (ikl); \quad (m), (ikm), (ilm), (klm).$

Diese beiden Quadrupel bilden bereits zwei azygetische Tetraeder. Ordnet man die acht übrigen, nunmehr ebenfalls bekannten D_2 in zwei Quadrupeln wie folgt

$$(17') \qquad \begin{cases} (ikn), & (iln), & (imn), & (p), \\ (ikp), & (ilp), & (imp), & (n), \end{cases}$$

so bilden diese wiederum zwei azygetische Tetraeder, und in (17) und (17') zusammen hat man die in Rede stehende Viervier.

Die Figur der 16 D_2 und 16 Δ_2 wird als „*Kummer*sche Konfiguration" bezeichnet. Diese ist weiterhin, unter den mannigfaltigsten Gesichtspunkten, auch ganz unabhängig von der *Kummer*schen Fläche K_m, weiter verfolgt worden.[141])

---

141) *F. Klein,* Math. Ann. 2 (1869), p. 198; 5 (1872), p. 295; 27 (1886), p. 106. *E. Caporali,* Rom Linc. Mem. (2) 1878. *Th. Reye,* J. f. Math. 86 (1878),

69. Liniengeometrische Behandlung der Kummerschen Fläche. Die Kummersche Fläche als Singularitätenfläche eines quadratischen Komplexes und als Brennfläche einer quadratischen Kongruenz. Die Fläche K_m tritt unter zwei Gesichtspunkten in der Liniengeometrie auf, einmal als Singularitätenfläche quadratischer Komplexe K_2, andererseits als Brennfläche gewisser quadratischer Kongruenzen $\mathfrak{K}_2$.

Ein quadratischer Komplex K_2 wird nach *J. Plücker*[142]) durch eine quadratische Gleichung zwischen Linienkoordinaten geliefert. Hieraus geht hervor, daß die durch irgendeinen Punkt P laufenden Geraden von K_2 die Kanten eines quadratischen Ordnungskegels sind, und dual die in irgendeiner festen Ebene E gelegenen Geraden von K_2 die Tangenten eines Klassenkegelschnitts sind.

Legt man jetzt dem Kegel resp. Kegelschnitt die Bedingung auf, zu zerfallen — in ein Paar von Ebenen resp. Punkten —, so ist der Ort der Punkte P eine Fläche 4. Ordnung F_4, und die Enveloppe der Ebenen E eine Fläche 4. Klasse P_4.

Aber diese beiden Flächen fallen nach *F. Klein*[143]) zusammen, und zwar in eine in sich duale, allgemeine *Kummer*sche Fläche K_m, und diese heißt daher die „Singularitätenfläche" des Komplexes K_2. Die K_m erscheint zugleich als Singularitätenfläche von ∞^1 K_2 (siehe Nrr. 70, 71).

Die Gleichung der K_m geht direkt aus irgendeiner der 15 gleichberechtigten Normalgleichungen des K_2 hervor. Die K_m ist gemäß der Definition der Singularitätenfläche der Ort der Punkte, deren Komplexkegel in ein Ebenenpaar degeneriert. Für $p_{ik} = (xy)_{ik}$ lautet eine Normalgleichung des K_2

$$(1) \qquad K_2 = a_{12}p_{12}^2 + \cdots + a_{34}p_{34}^2 + 2ap_{12}p_{34} + 2bp_{23}p_{14} + 2cp_{31}p_{24} = 0.$$

Man denke sich nach den y geordnet und dann die Diskriminante $\Delta(y) = \Delta$ gleich Null gesetzt. Es ist Δ eine dreireihige Determinante

p. 84, 209. *R. de Paolis,* Rom Linc. Rend. (4) 6_2 (1890), p. 3. *E. Ciani,* Giorn. di mat. 34 (1896), p. 177; Ist. Lomb. Rend. 35 (1897), p. 235; Giorn. di mat. (36) (1898), p. 68; Ann. di mat. (3) 2 (1898), p. 53. *V. Martinetti,* Giorn. di mat. 34 (1896), p. 192; 35 (1897), p. 235; Palermo Rend. 16 (1902), p. 196. *H. E. Timerding,* Math. Ann. 54 (1901), p. 498. *L. Berzolari,* Rom. Linc. Rend. 16_1 (1907), p. 726; Palermo Rend. 24 (1907), p. 1.

142) *J. Plücker,* Neue Geometrie des Raumes 1 (1868); 2 (1869), hrsg. von *F. Klein,* Leipzig. Bezüglich der im folgenden zur Verwendung kommenden liniengeometrischen Hilfsmittel sei auf den Art. III C 8, *K. Zindler,* Algebraische Liniengeometrie, verwiesen.

143) *F. Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p. 218.

von der Struktur

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{cc} \Delta \equiv a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2 + a_{14}x_4^2, & -a_{12}x_2x_2 + (b-c)x_3x_4, \\ & -a_{13}x_1x_3 + (a-b)x_2x_4 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \end{array}\right| .$$

Entwickelt man rechts, und führt noch neue Koordinaten X_i ein vermöge

$$(3)\qquad X_i = x_i \sqrt[4]{a_{ik}a_{il}a_{im}},$$

so ergibt sich die Gleichung der K_m in der einfachen Form

$$(4)\qquad K_m \equiv \sum X_i^4 + \sum a(X_1^2X_2^2 + X_3^2X_4^2) + \nu X_1X_2X_3X_4 = 0.$$

Dies ist aber gerade die Struktur der *Göpel*schen Relation zwischen vier ϑ-Funktionen (s. Nrr. **69** u. **71**).

Auf andere Weise geht *Cayley*[144]) vor, der die Kenntnis der 16 D_2 voraussetzt (s. Nr. **68**). Er zeigt zunächst, daß sich die Koordinaten der 16 D_2 der K_m bei geeigneter Wahl des Koordinatentetraeders durch nur vier Größen $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l, \alpha_m$ ausdrücken lassen.

Man gehe von der natürlichen Anordnung $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l, \alpha_m)$ aus, und leite aus ihr durch Umstellung die drei weiteren her

$$(\alpha_k, \alpha_i, \alpha_m, \alpha_l), \quad (\alpha_l, \alpha_m, \alpha_i, \alpha_k), \quad (\alpha_m, \alpha_l, \alpha_k, \alpha_i).$$

Aus jedem dieser vier Quadrupel gehen drei andere nach der nämlichen Regel hervor: Man halte das erste Element fest und ändere von je zweien der drei folgenden das Vorzeichen, z. B. beim ersten Quadrupel

$$(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l, \alpha_m), \quad (\alpha_i, \alpha_k, -\alpha_i, -\alpha_m), \quad (\alpha_i, -\alpha_k, \alpha_l, -\alpha_m),$$
$$(\alpha_i, -\alpha_k, -\alpha_l, \alpha_m).$$

Dann hat man in diesen 16 Quadrupeln gerade die Koordinaten der 16 D_2. *Cayley* bildet dann direkt die Gleichung der K_m. Führt man noch mit *Borchardt* (s. Nr. **71**) gewisse lineare Verbindungen p, q, r, s der Koordinaten als neue ein, so erkennt man, daß die Form der *Cayley*schen Gleichung keine andere ist als die ursprünglich von *Kummer* aufgestellte (s. Nr. **68**)

$$(5)\qquad \Phi^2 - 16\, Kpqrs = 0,$$

wo, für a, b, c als Konstante, Φ und K die Ausdrücke sind

$$(6)\qquad \begin{cases} \Phi \equiv \sum p^2 + \sum 2a(ps + qr), \\ K \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1. \end{cases}$$

Sei g eine nicht zu K_2 gehörige Gerade, so wird g von unendvielen Geraden von K_2 getroffen, die man nach obigem entweder in

144) *A. Cayley*, J. f. Math. 73 (1871), p. 292.

Scharen von Kegelschnittstangenten oder von Erzeugenden quadratischer Kegel ordnen kann, so umhüllen[145]) diese Treffgeraden eine „zu g gehörige *Plücker*sche Komplexfläche“. Es soll deren Gleichung gebildet werden.

Für $p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$ sei die Gleichung des Komplexes K_2

(7) $$K_2 \equiv \varphi(p_{ik}) = 0.$$

Ist weiter (w) irgendein Raumpunkt, so betrachte man einen laufenden Punkt $(z + \lambda w) = (\lambda)$ auf der Geraden $\{(z), (w)\}$. Der Komplexkegel dieses Punktes (λ) ist dargestellt durch

(8) $$\varphi\{y_i(z_k + \lambda w_k) - y_k(z_i + \lambda w_i)\} \equiv \varphi_{zz} + 2\lambda\varphi_{zw} + \lambda^2\varphi_{ww} = 0,$$

eine in den y quadratische Gleichung, die durch das Wertsystem $(z + \lambda w)$ doppelt erfüllt wird; andererseits läßt sich (8) auch als eine in λ quadratische Gleichung ansehen.

Bildet man in letzterem Sinne die Diskriminante D_λ bez. λ und setzt sie gleich Null

(9) $$D \equiv \varphi_{zz}\varphi_{ww} - (\varphi_{zw})^2 = 0,$$

so hat man die Komplexfläche; sie ist von der Ordnung 4 und gemäß der dualen Natur der Linienkoordinaten auch von der Klasse 4.

Die acht Grundpunkte des F_2-Netzes $\varphi_{zz} = 0$, $\varphi_{zw} = 0$, $\varphi_{ww} = 0$ sind D_2 der Fläche; durch sie gehen die Komplexkegel der Punkte von g. Es ist also g eine Doppelgerade der Fläche, die Punkte in ihr sind Doppelpunkte ihrer ebenen Schnitte, und die Ebenen durch sie Doppelebenen ihrer Berührkegel.

Den acht D_2 entsprechen dual acht Doppeltangentialebenen Δ_2, die längs Kegelschnitten berühren und von den Komplexkegelschnitten in den Ebenen der Geraden berührt werden. Für eine Ebene durch g und einen der D_2 reduziert sich der Komplexkegelschnitt auf den Punkt D_2 und einen weiteren Punkt, d. h. die acht D_2 liegen viermal zu zweien in Ebenen durch g. Entsprechend gehen die acht Δ_2 viermal zu je zweien durch Punkte auf g. Jene sind die singulären Ebenen $\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_4$, diese die singulären Punkte $E_1, \ldots, E_4$ von g.

Die Verbindungslinien s_i der den E_i angehörigen Paare (i, i') von D_2 treffen g in vier Punkten P_i; der zu P_i bez. der beiden D_2 vierte harmonische Punkt sei P_i'. Dualistisch seien σ_i die Schnittlinien der durch die E_i gehenden Paare der Δ_2: $[i, i']$.

Die Δ_2 enthalten je vier D_2, und durch die D_2 gehen je vier Δ_2. Dann lassen sich die acht D_2 den acht Δ_2 mittels linearer Komplexe

145) *J. Plücker*[142]), 1, p. 168f. Als eine spezielle F_4 mit einer $\bar{g}$ (s. Nrr. 33, 36) wird die Komplexfläche auf eine Ebene abgebildet von *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1869), p. 371; vgl. *A. Cayley*, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 281.

so zuordnen, daß jedem D_2 die vier Δ_2 entsprechen, in denen er liegt. Dabei sind die singulären E_i den singulären E_i, und die singulären s_i den singulären σ_i durch denselben Komplex zugeordnet. Mithin ist in bezug auf ihn das ganze Singularitätensystem, und überhaupt die ganze Komplexfläche sich selbst konjugiert. So sind das Büschel der singulären Ebenen und die Reihe der singulären Punkte einander projektiv (s. auch Nr. 36).

Wir kommen jetzt zur Auffassung der K_m als Brennfläche. Ein (algebraisches) quadratisches Strahlensystem (Kongruenz) $\mathfrak{K}_2$ ist definiert als Gesamtheit von ∞^2 Geraden g derart, daß durch jeden Punkt zwei der g gehen und in jeder Ebene zwei der g liegen. Jede Gerade g der $\mathfrak{K}_2$ wird von zwei benachbarten „getroffen", d. h. genauer, der kürzeste Abstand ist von der dritten Ordnung unendlich klein; der Fußpunkt dieses Abstandes auf g ist dann der obige „Treffpunkt" und heißt „Brennpunkt".

Es gibt also auf jeder Geraden der $\mathfrak{K}_2$ zwei Brennpunkte; deren Ort ist die zweimantlige „Brennfläche". Diese Brennfläche einer $\mathfrak{K}_2$ erweist sich als identisch mit der K_m [146]); die Geraden der $\mathfrak{K}_2$ sind die Doppeltangenten der K_m. Umgekehrt läßt sich eine vorgelegte K_m noch auf sechs verschiedene Arten als Brennfläche einer $\mathfrak{K}_2$ ansehen. Die sechs zugehörigen linearen Komplexe (s. Nr. 70) sind paarweise in Involution.

Aus der Auffassung der K_m als Singularitätenfläche eines K_2 ergibt sich eine Reihe bemerkenswerter Folgerungen. Die schon oben betonte Dualität der Fläche in sich äußert sich einmal in den Eigenschaften der *Kummer*schen Konfiguration der $16\,D_2$ und $16\,\Delta_2$ (s. Nr. 68).

Sodann ist nach *F. Klein* [147]) für irgendeine Gerade g das Doppelverhältnis ihrer vier Schnittpunkte A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ mit der K_m gleich dem Doppelverhältnis der vier an die Fläche gehenden Tangentialebenen B_i. *Klein* [147]) gibt für diesen Satz auch einen direkten Beweis.

Im allgemeinen Falle, wo g dem K_2 nicht angehört und die vier Punkte A_i getrennt sind, zerfällt für jeden A_i der Komplexkegel in ein Ebenenpaar (α_i, α_i') und für jede Ebene B_i die Komplexkurve in ein Punktepaar (B_i, B_i'). Die acht Punkte B_i, B_i', und die acht Ebenen α_i, α_i' bilden eine Konfiguration 8_4. Die ersteren sind die acht D_2 der Komplexfläche; die Verbindungslinien (B_i, B_i') und die Schnittachsen (α_i, α_i') gehören der Komplexfläche an. Modifikationen treten ein, wenn z. B. g dem K_2 angehört, wo dann vier der acht D_2 in die Punkte A_i fallen.

146) *F. Klein* und *S. Lie,* Berlin Ber. 1870, p. 891 = Math. Ann. 23 (1884), p. 579. Vgl. auch Nrr. 67, 70.

147) *F. Klein,* Math. Ann. 7 (1874), p. 208.

Weitere Besonderheiten finden statt, wenn g die K_m berührt, wo *F. Klein*[148]) sieben Fälle unterscheidet.

Ferner führte die Auffassung der K_m als Singularitätenfläche *F. Klein*[149]) zu dem Satze, daß es 16 Kollineationen und 16 Korrelationen gibt, die die K_m in sich überführen.

Im Zusammenhange mit gewissen, der K_m zugleich ein- und umbeschriebenen Konfigurationen (s. Nr. **72**) gelangte *F. Klein*[150]) zu 32 weiteren solchen „automorphen" Transformationen der K_m.

G. Fano[151]) legte sich die Frage vor, ob damit alle automorphen Transformationen der K_m erschöpft seien. Dies ist nicht der Fall; er fand vielmehr, daß noch unendlich viele weitere solcher Transformationen existieren. Er geht dabei von allgemeineren Gesichtspunkten aus. Die Grundlage wird durch den Satz gebildet, daß, wenn auf einer F_4 vom Geschlechte 1 eine Kurve C_n vom Geschlechte 2 liegt, so auch ein ganzes Netz solcher (s. auch Nr. **3**). Die Kurven dieses Netzes schneiden sich je in den Punktepaaren einer rationalen Involution J, die eine Abbildung der F_4 auf eine Doppelebene mit einer Verzweigungskurve c_6 gestattet (vgl. Nr. **19**). Die Geraden, die die Punktepaare von J verbinden, bilden eine rationale Kongruenz. Dies findet seine Anwendung auf den besonderen Fall $n = 6$, der u. a. durch eine K_m realisiert wird. Dann ergibt sich, daß die K_m ∞^1 birationale automorphe Transformationen gestattet, die eine diskrete Gruppe bilden. Hiermit wird die Auffassung als Brennfläche einer quadratischen Kongruenz $\mathfrak{K}_2$ verknüpft (s. oben). Im besonderen erzeugen dann die sechs zugehörigen J eine Gruppe G_{32} von 32 birationalen automorphen Transformationen, von denen 16 mit den 16 *Klein*schen Kollineationen zusammenfallen. Diese G_{32} führt auch jede Haupttangentenkurve der K_m in sich über (s. Nr. **70**).

70. Die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche. Von liniengeometrischen Gesichtspunkten ausgehend haben *F. Klein* und *S. Lie*[152]) die Haupttangentenkurven der K_m untersucht. Als Grundlage diente die ∞^1-Schar (s. Nr. **69**) der quadratischen Komplexe K_2, deren jeder dieselbe K_m zur Singularitätenfläche besitzt.

---

148) *F. Klein* bei *J. Plücker*[142]) im letzten Abschnitt von Bd. 2.

149) *G. Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p. 218. Die 16 Kollineationen bilden eine Gruppe G_{16}, deren vollständiges Invariantensystem *E. Study* aufgestellt hat, Leipzig Ber. 44 (1892), p. 122.

150) *F. Klein,* Math. Ann. 27 (1887), p. 142.

151) *G. Fano,* Lomb. Ist. Rend. (2) 39 (1906), p. 1071.

152) *F. Klein* und *S. Lie,* Berlin Ber. 1870, p. 891 = Math. Ann. 23 (1884), p. 579. Vgl. weiter *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1871), p. 145; *F. Klein,* ib. p. 257, 278.

Für irgendeinen der K_2 liegen die beiden Punkte, die in einer Tangentialebene T der K_m die ausgeartete Komplexkurve repräsentieren, auf der Schnittkurve (T, K_m) und liegen zugleich mit dem Berührungspunkte der T auf einer Geraden, der zugehörigen „singulären" Geraden.

Durchlaufen diejenigen Punkte der K_m, deren singuläre Gerade eine Haupttangente ist, eine Haupttangentenkurve, die sich als eine $C_{16} = \Gamma_{16}$ erweist, so gehört zu jedem der ∞^1 erzeugenden K_2 eine Haupttangentenkurve der K_m, womit ihre Gesamtheit erhalten wird.

Jede dieser Kurven hat 16 Spitzen in den 16 D_2, und 16 stationäre Ebenen in den 16 Δ_2 der K_m, sowie $6 \cdot 16 = 96$ stationäre Tangenten. Entsprechend den in der ∞^1-Schar der K_2 enthaltenen sechs doppelt zählenden linearen Komplexen K_1 gibt es sechs ausgezeichnete Haupttangentenkurven $C_8 = \Gamma_8$, ohne Spitzen und stationäre Ebenen.

Andererseits erscheint die K_m auch als Brennfläche (s. Nr. 69) eines je einem der sechs K_1 angehörigen Geradensystems des einen Systems seiner Doppeltangenten.

F. Klein[153]) vollzieht auf Grund seiner vier Parameter einer Geraden (s. Nr. 71) eine direkte Integration der Differentialgleichung der Haupttangentenkurven.

S. Lie[154]) legt seine später so bekannt gewordene „Geraden-Kugel-Transformation" zugrunde, eine Berührungstransformation, die inzidente Gerade in sich berührende Kugeln überführt, und die Krümmunglinien einer Fläche in die Haupttangentenkurven einer anderen. Auf diesem Wege werden von neuem die wesentlichsten Eigenschaften der Haupttangentenkurven der K_m gewonnen.

Unter Benutzung der *Klein*schen Linienkoordinaten liefert *Th. Reye*[155]) einen neuen, rechnerischen Beweis für den Hauptsatz von *Klein* und *Lie*. Überdies gelangt er so zu weiteren Angaben für die charakteristischen Anzahlen der Haupttangentenkurven. Eine solche ist vom Geschlechte 17, vom Range 48 und besitzt 72 scheinbare Doppelpunkte.

Für die sechs ausgezeichneten Kurven reduzieren sich diese Anzahlen auf resp. 5, 24, 16. Ferner wird festgestellt, daß sich die Berührungspunkte der 96 stationären Tangenten gleichmäßig auf die

---

153) *F. Klein,* Göttinger Nachr. 1871, p. 44.

154) *S. Lie,* Kristiania Verh. S. 1871, p. 57, 182. Bezüglich der Geraden-Kugeltransformation vgl. etwa die elementare Darstellung bei *F. Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie. 3. Aufl., Berlin, hrsg. von *W. Blaschke,* § 71.

155) *Th. Reye,* J. f. Math. 97 (1884), p. 242. Über die eingeschlagene Methode vgl. auch die voraufgehende Arbeit, ib. 95 (1883), p. 330.

sechs ausgezeichneten Haupttangentenkurven verteilen. Überdies wird eine vollständige Ableitung der verschiedenen Gleichungsformen gegeben.

Das Hauptergebnis ist aber der Satz, daß sich die Hauptangentenkurven der K_m durch F_4 ausschneiden lassen. Genauer ist jede dieser Kurven die Grundkurve eines F_4-Büschels, und diese ∞^1-Büschel gehören einem Netze an.

Die verwickelte Rechnung, die zu diesem Satze führt, hat *C. Segre*[156]) durch einfache synthetische Betrachtungen ersetzt.

Daß die Haupttangentenkurven der K_m nach *G. Fano* durch die 32 linearen *Klein*schen automorphen Transformationen in sich übergehen, ist schon in Nr. 69 betont worden.

71. Transzendente Behandlung der Kummerschen Fläche. *C. W. Borchardt*[157]) hat die K_m durch die *Göpel*sche biquadratische Relation zwischen vier ϑ-Funktionen mit zwei Variabeln dargestellt. *Göpel*[158]) hatte gewisse 16 ϑ-Funktionen aufgestellt, die durch einfache Substitutionen in die 16 entsprechenden *Weierstraß*schen $\vartheta(v_1, v_2)$ in zwei Argumenten v_1, v_2 übergehen. Diese zerlegen sich in sechs „gerade" ϑ_{ii}' $(i = 0, \ldots, 5)$, und zehn „ungerade" ϑ_{rs} $(r \neq s, r, s = 0, \ldots, 4)$. „Nullwerte" heißen die 16 hieraus für $v_1 = v_2 = 0$ hervorgehenden Funktionswerte.

Vermehrt man die v_1, v_2 um „Perioden", so bleiben die ϑ-Verhältnisse, bis auf das Vorzeichen, ungeändert. Vermehrt man um halbe Perioden, so gehen aus irgendeinem der ϑ die 15 übrigen, jeweils bis auf einen gewissen Exponentialfaktor, hervor.

Göpel hat gewisse 60 Systeme von je vier der ϑ herausgehoben, die durch eine homogene biquadratische Relation verbunden sind. Je vier dieser „*Göpel*schen" Relationen gehen aus einander durch Vermehrung der Argumente um halbe Perioden hervor; eine von solchen vier Relationen enthält nur gerade ϑ, die anderen zwei gerade und zwei ungerade, und in den vier Relationen treten alle 16 ϑ auf.

Als Repräsentanten kann man die erste Relation wählen; solcher Repräsentanten gibt es also 15. Bezeichnet man die vier in einer solchen Relation auftretenden ϑ mit x, y, z, w, deren Nullwerte mit x_0, y_0, z_0, w_0, so schreibe man die Relation kurz

$$\text{(I)} \qquad \Phi(x, y, z, w;\ x_0, y_0, z_0, w_0) = 0.$$

156) *C. Segre*, J. f. Math. 98 (1885), p. 301.

157) *C. W. Borchardt*, J. f. Math. 83 (1877), p. 234. Bezüglich der im folgenden zur Verwendung gelangenden Hilfsmittel aus der Theorie der ϑ-Funktionen sei auf die Artikel II B 6, 7 von *A. Krazer* und *W. Wirtinger* verwiesen.

158) *A. Göpel*, J. f. Math. 35 (1847), p. 277.

Dann verschwindet nicht nur die Form Φ für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $w = w_0$, sondern auch ihre ersten partiellen Ableitungen Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_w. Deutet man jetzt x, y, z, w als homogene Koordinaten eines Raumpunktes P, so stellt $\Phi = 0$ eine F_4 dar, die in $P_0(x_0, y_0, z_0, w_0)$ einen D_2 besitzt. Da die Form Φ aber bei gewissen Vertauschungen der Variablen ungeändert bleibt, so gehen aus P_0 noch 15 weitere D_2 der F_4 hervor. Diese F_4 erweist sich daher als die *Kummer*sche Fläche K_m. Führt man Linearverbindungen der x, y, z, w als neue Koordinaten p, q, r, s ein und setzt, unter a, b, c Konstante verstanden,

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi \equiv \sum r^2 + 2\sum a(ps + qr), \\ K \equiv \sum a^2 - 2abc - 1, \end{cases}$$

so geht (I) über in die *Kummer*sche Gleichung der K_m (s. Nr. 68)

$$(\mathrm{I}') \qquad F_4 \equiv \varphi^2 - 16\,Kpqrs = 0.$$

Somit lassen sich die nichthomogenen Koordinaten eines Punktes der Fläche darstellen als ϑ-Quotienten.

Es sei noch bemerkt, daß sich diese ϑ-Quotienten nach Formeln, die *Rosenhain*[159]) aufgestellt hat, ersetzen lassen durch algebraische Funktionen zweier Parameter ξ, η, die nur Quadratwurzeln aus ganzen Funktionen je eines dieser Paramter von einer Ordnung $\leqq 6$ enthalten.

Im wesentlichen zu denselben Ergebnissen gelangt *A. Cayley*[160]) auf einem anderen Wege. Auch er legt die 16 Gleichungen zugrunde, die *Göpel* für die Quadrate der 16 $\vartheta(u, u')$ gegeben hat. Aus ihnen hatte *Göpel* zunächst zwischen je fünf der ϑ^2 lineare Relationen hergeleitet, die sich aber nach *Rosenhain* auf solche zwischen nur vier ϑ^2 reduzieren lassen.

Cayley stellt letztere Relationen direkt auf, und zeigt ihren Zusammenhang mit der *Kummer*schen Fläche K_m. Hierbei entsprechen die 16 ϑ^2 den 16 D_2 der Fläche; linear verbundene ϑ^2 entsprechen solchen D_2, die in derselben singulären Tangentialebene (Doppelebene) Δ_2 liegen.

Ferner lassen sich nach *Göpel* und *Rosenhain* die Verhältnisse je zweier der 16 ϑ^2 rational ausdrücken durch x, x' und eine quadratische Irrationalität $\sqrt{X}$ resp. $\sqrt{X'}$, wo X von der Form ist

$$X \equiv x(1-x)(1-lx)(1-mx)(1-nx).$$

Cayley legt statt dessen die allgemeine Form 6. Ordnung X zugrunde vom Typus

$$(2) \quad \begin{cases} X \equiv f_3(x)\, g_3(x), \\ f_3(x) \equiv (a-x)(b-x)(c-x), \quad g_3(x) \equiv (d-x)(e-x)(f-x). \end{cases}$$

159) *G. Rosenhain*, J. f. Math. 28 (1844), p. 249; 29 (1845), p. 1.

160) *A. Cayley*, J. f. Math. 83 (1877), p. 210, 220; 84 (1877), p. 235.

Dann wurden die 16 ϑ^2 proportional einmal sechs Formen vom Typus $[a] \equiv (a-x)(a-x')$, andererseits zehn Irrationalitäten vom Typus

$$(3) \qquad [fg] \equiv \left(\frac{1}{x-x'}\right)^2 \{\sqrt{f_3(x) g_3(x')} - \sqrt{f_3(x') g_3(x)}\}.$$

Cayley fügt eine Tabelle dieser Funktionen $[a]$, $[fg]$ hinzu für die besonderen Werte von $x, x' = 0, \infty, ab, ac$ usf. Auf dieser Grundlage wird dann *Borchardts* Darstellung der *Kummer*schen Fläche K_m mittels der *Göpel*schen biquadratischen Relationen zwischen vier gewissen ϑ^2 in modifizierter Form von neuem abgeleitet.

Diese Untersuchungen von *Borchardt* und *Cayley* setzt *H. Weber*[161]) in Beziehung zu den Charakteristiken der $\vartheta(v_1, v_2)$ in zwei Argumenten v_1, v_2. Diese Untersuchung ist zunächst analog mit den von ihm früher[162]) für die *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht 3 durchgeführten Entwickelungen.

Die $\vartheta(v_1, v_2)$ mit der Charakteristik $\begin{Bmatrix} g_1, & g_2 \\ h_1, & h_2 \end{Bmatrix} = [gh]$ werden mittels bekannter Doppelsummen definiert. Eine Charakteristik $[g, h]$ heißt gerade oder ungerade, je nachdem $g_1 h_1 + g_2 h_2$ gerade oder ungerade ist; je nachdem sind die $\vartheta(v_1, v_2)$ gerade oder ungerade Funktionen der v_1, v_2. Es gibt sechs gerade und zehn ungerade Charakteristiken; die ersteren seien bezeichnet mit (β_i) $(i = 1, \ldots, 6)$.

Unter der Summe $(\omega + \omega')$ zweier Charakteristiken $(\omega) = (g, h)$ und $(\omega') = (g', h')$ werde die neue

$$(\omega + \omega') = \begin{Bmatrix} g_1 + g_1', & h_1 + h_1' \\ g_2 + g_2', & h_2 + h_2' \end{Bmatrix},$$

bei Reduktion der Elemente mod. 2 verstanden.

Für diese Summen werden fünf einfache Verbindungs- und Zerlegungsgesetze aufgestellt. Mit Hilfe dieser Gesetze wird gezeigt, daß sich 16 Systeme von je sechs ϑ^2 finden lassen derart, daß zwischen je vier ϑ^2 eines Systems eine homogene lineare Gleichung besteht.

Ferner besteht zwischen drei Produkten von je zwei ϑ mit derselben Charakteristikensumme eine homogene lineare Relation; solcher gibt es 120. Hieraus lassen sich die *Göpel*schen Relationen 4. Ordnung ableiten.

Die Beziehung zu den hyperelliptischen Integralen wird gewonnen, indem man zwei solche für v_1 und v_2 einsetzt

$$(4) \qquad v_1 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{f_1(z)\,dz}{\sqrt{f_6(z)}}, \quad v_2 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{g_1(z)\,dz}{\sqrt{f_6(z)}},$$

161) *H. Weber,* J. f. Math. 84 (1878), p. 332.

162) *H. Weber,* Preisschrift Berlin 1876.

wo f_1, g_1 binäre Formen in z der 1. Ordnung sind, $f_6(z)$ eine solche der 6. Ordnung. Dann lassen sich die Quotienten zweier ϑ algebraisch durch z_1 und z_2 darstellen.

Setzt man jetzt irgend vier der ϑ^2 proportional Punktkoordinaten p, q, r, s, so erhält man eine F_4 mit v_1, v_2 als Parametern. Das Nullsetzen irgendeiner ϑ liefert einen ebenen Schnitt der F_4. Für die F_4 ergeben sich 120 gleichberechtigte Darstellungen. Die F_4 ist die allgemeinste mit 16 D_2, also die *Kummer*sche Fläche K_m. Die obigen 16 ebenen Schnitte sind Doppel-C_2, die je sechs D_2 tragen.

Von diesen 16 Doppelebenen Δ_2 gehen 16 mal je sechs durch einen D_2; mittels der Charakteristiken läßt sich entscheiden, ob eine bestimmte Δ_2 durch einen bestimmten D_2 geht, oder nicht.

Bezüglich der Lagenverhältnisse der Δ_2 und D_2 (s. Nr. 68) ergibt sich weiter:

1. Durch irgend zwei D_2 gehen zwei Δ_2;
2. die Tripel von D_2 zerfallen in zwei Klassen von 320 resp. 240, je nachdem ihre Ebene eine Δ_2 ist, oder nicht;
3. die Quadrupel (Tetraeder T) von vier D_2 zerfallen in drei Klassen;
   a) 80 „T_1 erster Art“ mit vier D_2, die zusammen alle 16 D_2 enthalten;
   b) 60 „T_2 zweiter Art“, ohne Δ_2;
   c) 1440 „T_3 dritter Art“ mit genau zwei Δ_2.

Die 16 D_2 lassen sich auf 15 Arten in vier T_2 zusammenfassen, deren jedes die drei anderen bestimmt. Zwischen gewissen Systemen von sechs D_2 bestehen gewisse projektive Beziehungen; stehen sechs D_2 nicht in einer solchen Beziehung, so bilden je vier derselben ein T_2.

Das Hauptergebnis ist dann: „Aus sechs D_2 der letzteren Art lassen sich die übrigen linear konstruieren.“ Diese Konstruktion hat *H. Schroeter*[163]) im einzelnen ausgeführt (s. Nr. 68). Das der K_m polar entsprechende Gebilde ist wieder eine K_m.

Am Schlusse wird der Sonderfall der Wellenfläche W_l (s. Nr. 73) und ihrer projektiven Umformungen behandelt, wo viermal vier D_2 in einer Ebene liegen. Die entsprechenden ϑ gehen vermöge einer quadratischen Transformation in elliptische über.

Die vielseitigste hierher gehörige Untersuchung verdankt man *K. Rohn.*[164]) Sie nimmt ihren Ausgang von der Liniengeometrie (s. Nr. 69). Sind $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 6)$ sechs lineare, je in Involution

163) *H. Schroeter*, J. f. Math. 100 (1887), p. 231.

164) *K. Rohn*, Dissert. München 1878. *Rohn* hat auch im math. Seminar der techn. Hochschule München drei Gipsmodelle der K_m verfertigt. Verlag A. Brill, Darmstadt 1877.

stehende Komplexe K_1 mit der Identität $\sum x_i^2 \equiv 0$, also die x_i die *Klein*schen[165]) Linienkoordinaten, so läßt sich die allgemeinste Gleichung eines quadratischen Komplexes K_2 auf die Form bringen

$$(5) \qquad K_2 \equiv \sum \frac{x_i^2}{k_i} = 0.$$

Dann ist durch

$$(6) \qquad K_2^{(\lambda)} \equiv \sum \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0$$

eine Schar konfokaler K_2 dargestellt. Die Wurzeln von (6) sind die „elliptischen" Linienkoordinaten eines Punktes. Sieht man in (6) die x_i als gegeben an, so ergeben sich vier λ-Werte; umgekehrt, sind letztere gegeben, so haben die vier entsprechenden konfokalen K_2 32 Gerade gemein, die sich aber nur durch die Vorzeichen ihrer Koordinaten unterscheiden.

Die K_2 der konfokalen Schar (6) haben dieselbe Singularitätenfläche F_4, die von den Geraden berührt wird, für die je zwei der vier λ koinzidieren.

Diese F_4 ist die *Kummer*sche Fläche K_m. Alle Tangenten in einem Punkte P der K_m gehören zwei konfokalen Komplexen $K_2(\lambda_1)$ und $K_2(\lambda_2)$ an. Durch λ_1 und λ_2 werden also je 32 Punkte der K_m bestimmt. Die Kurven $\lambda_1 =$ konst, $\lambda_2 =$ konst sind die beiden Scharen der Haupttangentenkurven. Aus dem Studium der λ folgt eine große Reihe weiterer Beziehungen.

Vor allem werden die Lagenbeziehungen und gestaltlichen Verhältnisse der K_m untersucht; es empfiehlt sich zu dem Behuf die Ableitung der K_m aus einer doppeltzählenden, einem Tetraeder einbeschriebenen F_2 mittels Variieren der Konstanten. So gelangt man zu den Lagegesetzen der 16 D_2 und 16 Δ_2, usf., unter besonderer Berücksichtigung der Realität.

Auf dieser geometrischen Grundlage erwächst nun in naturgemäßer Weise die transzendente Behandlung der K_m.

Die 32 Punkte (λ_1, λ_2) werden durch Einführung hyperelliptischer Funktionen derart getrennt, daß die Vieldeutigkeit auf Unterschiede in den Perioden zurückkommt. Sodann wird die Verteilung der λ_1, λ_2 auf die 16 Felder mit hyperbolischer Krümmung und die 16 Felder mit elliptischer Krümmung genauer untersucht.

Nunmehr läßt sich der Zusammenhang des bisherigen mit der *Borchardt-Cayley*schen Darstellung einsehen.

---

165) *F. Klein*, Math. Ann. 5 (1872), p. 261. Vgl. auch die weiteren Ausführungen in zwei Abhandlungen von *C. Segre*, Torino Mem. (2) 36 (1884).

Der von *Rohn* erzielte Fortschritt kennzeichnet sich vor allem darin, das die Darstellung der K_m eine eindeutige wird, gegenüber der dortigen 16-Deutigkeit. Umgekehrt läßt sich diese Vieldeutigkeit vermöge einer gewissen quadratischen Transformation beseitigen, womit der Zusammenhang zwischen jenen 16 Darstellungen aufgedeckt wird.

In einer zweiten Arbeit von *Rohn*[166]) wird die quadratische Transformation der hyperelliptischen Funktionen für sich behandelt; hierbei werden alle Transformationen, die dieselben Bedingungen zwischen den ϑ liefern, als gleichwertig angesehen. Die Zuordnungen der ϑ, sowie der Perioden, werden sodann an der *Kummer*schen Fläche K_m interpretiert, und führen so zu manchen Ergänzungen der früheren Darstellung. Hingewiesen sei noch auf die Eigenschaften der Parameter gewisser Punktgruppen auf der K_m, sowie auf die der Kurven, längs deren die K_m von anderen Flächen berührt wird.

Dadurch erscheinen die identischen Relationen zwischen den ϑ unter allgemeinerem Gesichtspunkte.

In einer dritten Arbeit[167]) geht *Rohn* auf die verschiedenen Gestalten der K_m — und im Anschluß daran der R-F_4 mit zwei Doppelgeraden — näher ein, unter besonderer Berücksichtigung der Realitätsverhältnisse. Das Hauptergebnis ist, daß es acht verschiedene K_m, und sieben verschiedene R-F_4 gibt. Zunächst werden wieder die sechs *Klein*schen Linienkoordinaten x_i zugrunde gelegt. Sodann setzt die topologische Behandlung ein. Diese führt auch zu den Gleichungen der acht K_m-Arten in Punktkoordinaten; aus einer der Gleichungen lassen sich die übrigen durch imaginäre lineare Transformationen herleiten. Hierbei ist zu beachten, daß die übliche quadratische Relation zwischen Linienkoordinaten durch reelle lineare Transformation auf die Gestalt

$$z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 + z_5^2 - z_6^2 = 0 \tag{7}$$

gebracht werden kann. Um die linke Seite in eine Summe von sechs Quadraten überzuführen, bedarf man einer imaginären Substitution S. Solcher S hat man nach *Klein*[165]) vier zu unterscheiden, die zu ebensoviel Typen von Koordinatensystemen führen.

Die Fläche K_m wird wieder als gemeinsame Singularitätenfläche einer konfokalen Schar von quadratischen Komplexen $\sum \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0$ eingeführt. Vermöge der vier obigen Typen von Koordinatensystemen werden die verschiedenen Gattungen von K_m bestimmt. Die K_m wird

166) *K. Rohn*, Math. Ann. 15 (1879), p. 315.
167) *K. Rohn*, Math. Ann. 18 (1881), p. 96.

dann und nur dann reell, wenn die imaginären Komplexe des konfokalen Systems paarweise konjugiert sind. Beim ersten Typus (I) sind die sechs Konstanten k reell, beim zweiten (II) vier, beim dritten (III) zwei, beim vierten (IV) keine; die nicht reellen sind stets paarweise konjugiert. Die einzelnen Typen ergeben wieder Unterabteilungen: Ia, Ib, Ic, IIa, IIb, III, IVa, IVb. So sind bei der ersten (Ia) alle 16 D_2 und 16 Δ_2 reell; die Fläche besteht aus acht Teilen von tetraedrischer Form. Bei der zweiten (Ib) ist weder ein D_2 noch eine Δ_2 reell; die Fläche besteht aus zwei Teilen, deren jeder mit einem einschaligen Hyperboloid Ähnlichkeit hat. Bei einer dritten Gattung (IIa) sind acht D_2 und acht Δ_2 reell; die Fläche besteht aus vier tetraedrischen Teilen. Bei einer vierten Gattung (IIb) verhält es sich wie bei (Ib), nur daß die Fläche jetzt aus einem einzigen Teile besteht.

Bei einer fünften und sechsten Gattung (III), (IVa) hat man vier reelle D_2 und vier reelle Δ_2; bei der ersteren sind die beiden Teile tetraedrisch, bei der letzteren ähnlich einem Ellipsoide resp. zweischaligem Hyperboloide (wie bei der Wellenfläche). Endlich weisen die beiden letzten Gattungen (Ic), (IVb) nur imaginäre Flächen auf.

Bei der topologischen Behandlung dienen die Grenzfälle, wo die Fläche zerfällt, als Ausgangsflächen, aus denen dann durch Deformation (Variation der Konstanten) die einzelnen Gestalten hervorgehen.

Von besonderer Bedeutung ist der Grenzfall einer doppelt zählenden F_2. Auf ihr greife man acht Erzeugende, je vier aus einer Schar, heraus; die 16 Schnittpunkte vertreten dann die D_2 und die 16 zugehörigen Berührungsebenen die Δ_2, und die Erzeugenden selbst die Berührungskegelschnitte in den D_2. Die Erzeugenden teilen (je nach ihrer Realität) die F_2 in Felder, die denen der K_m entsprechen.

Als Sonderfälle der K_m treten die obigen R-F_4 auf; fünf Arten gehen aus dem Typus (I) hervor, und zwei weitere aus dem Typus (II).

Damit darf die Frage nach den Gestaltsverhältnissen der K_m als vollständig beantwortet gelten.

Unabhängig von *Rohn* entwickelt auch *G. Darboux*[168]) den Zusammenhang der K_m mit den $\vartheta(v_1, v_2)$ von den *Klein*schen Linienkoordinaten aus. Wie bei *Weber* (s. oben) wird auch der Sonderfall der Wellenfläche berücksichtigt.

Darboux fügt aber noch eine einfache geometrische Interpretation des obigen Zusammenhanges hinzu.

Die Methode gilt zunächst allgemein für F_4, die wenigstens *einen* D_2 besitzen.

---

168) *G. Darboux,* Paris C. R. 92 (1881), p. 685, 1193.

Projiziert man die Punkte (x, y, z, t) der F_4 von einem solchen D_2 aus auf eine Bildebene E, etwa $t = 0$, so wird dadurch, wie bei *Clebsch* (s. Nr. **19**) die F_4 auf die doppelt gedachte E abgebildet. Die Übergangskurve, in der beide Blätter von E zusammenhängen, ist eine c_6 (s. Nr. **63**).

Damit gelangt man bereits zu einer irrationalen Darstellung der F_4, bei der nur eine einzige quadratische Irrationalität auftritt.

In dem besonderen Falle der K_m zerfällt aber die c_6 in sechs Gerade, die einen Kegelschnitt k berühren. Bei passender Wahl des Koordinatentetraeders wird k zum Normkegelschnitt $y^2 - xz = 0$. Eine Tangente desselben hat zur Gleichung $xm^2 + 2ym + z = 0$ mit dem Parameter m.

Zwei Tangenten ($m = \varrho$, und $m = \varrho_1$) bestimmen einen Schnittpunkt (ϱ, ϱ_1) mit den „Normkoordinaten" ϱ, ϱ_1. Seien jetzt $a, b, \ldots, f$ die Parameter der obigen sechs Tangenten und setzt man wie früher

$$f_3(x) \equiv (a - x)(b - x)(c - x),$$
$$g_3(x) \equiv (d - x)(e - x)(f - x),$$

so hat man als irrationale Darstellung der K_m

$$(8) \quad x : y : z : t = (a - \varrho)(a - \varrho_1) : (b - \varrho)(b - \varrho_1) : (c - \varrho)(c - \varrho_1) : R,$$

wo

$$(9) \qquad R \equiv \frac{\sqrt{f_3(\varrho) g_3(\varrho_1)} \pm \sqrt{f_3(\varrho_1) g_3(\varrho)}}{\varrho - \varrho_1},$$

ähnlich wie bei *Borchardt* und *Cayley*.

An *Darboux* schließt sich noch eine modifizierte Darstellung für die Koordinaten der Punkte der K_m durch irrationale Funktionen zweier Parameter durch *F. Brioschi*.[169]) Er geht hierbei aus von den 15 algebraischen Funktionen, die sich durch die Beziehung zwischen zwei ϑ ausdrücken lassen, und verwendet dann Eigenschaften dieser algebraischen Funktionen, die von *C. Weierstraß* aufgestellt waren.

Faßt man zusammen, so hat man drei Arten von Parameterdarstellungen der K_m zu unterscheiden (s. auch Nr. **26**).

Einmal hat man nach *Cayley* und *Weber* vier geeignet ausgewählte $\vartheta_i^2(v_1, v_2)$, die den Koordinaten y_i der K_m proportional sind.

Diese ϑ_i^2 ersetzt sodann *Borchardt* durch vier linear unabhängige Θ_i 2. Ordnung, mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die in den ϑ^2 linear sind. Vermöge quadratischer Transformation der Θ geht hieraus die *Borchardt*sche Darstellung der K_m durch hyperelliptische Funktionen hervor.

169) *F. Brioschi,* Paris C. R. 92 (1881), p. 944.

Drittens hat man die, der Liniengeometrie entstammende *Klein-Rohn*sche Darstellung

$$x_i = \frac{\lambda - \varkappa_i}{\sqrt{f'(\varkappa_i)}} \frac{\Theta_i(u_1, u_2)}{c_i},$$

von der aus man durch Einführung der doppelten Argumente wiederum zur Darstellung durch hyperelliptische Funktionen gelangt.

Eine vollständige Übersicht findet man bei *W. Reichardt.*[169a])

Auf den inneren Zusammenhang der transzendenten Darstellungen der F_4 mit $\bar{C}_2$, insonderheit der Zykliden Z (s. Nr. 26), der *Weddle*schen Fläche W_d (s. Nr. 66) und der *Kummer*schen Fläche K_m ist schon früher hingewiesen. Diese Zusammenhänge, die sich auch auf einige verwandte Gebilde, so auf eine F_2, und die gemeinsamen Tangenten zweier F_2 erstrecken, hat neuerdings *E. A. Weiß*[170]) einheitlich zusammengefaßt. Man kann diese Gebilde entweder unabhängig voneinander untersuchen und mit den entsprechenden ϑ-Relationen in Verbindung setzen, oder aber von der Parameterdarstellung eines dieser Gebilde ausgehen und die der übrigen durch geeignete Transformationen daraus gewinnen.

Die Abbildung von *P. Domsch*[53]) (Nr. 26) führt eine Schar von F_2 in eine Schar konfokaler Z über. Die Z ihrerseits hängt vermöge der *Lie*schen[154]) Geraden-Kugel-Transformation mit der K_m zusammen. Von der K_m, die man als F_4 oder Φ_4 ansehen kann, führt eine von *Th. Reye*[171]) und *R. de Paolis*[171]) herrührende, und unabhängig von diesen durch *F. Schottky*[172]) mit der ϑ-Theorie verknüpfte Abbildung — oder auch eine von *G. Darboux*[173]) behandelte Verwandtschaft zur W_d.

169a) *W. Reichardt,* Nova Acta Leop. 50 (1887), p. 1887.

170) *E. A. Weiß,* J. f. Math. 159 (1928), p. 191.

171) *Th. Reye,* J. f. Math. 86 (1879), p. 84, 209; *R. de Paolis,* Rom Linc. Rend. (4) 6_2 (1890), p. 3.

172) *F. Schottky,* J. f. Math. 105 (1889), p. 233. Die 16 ϑ zerlegen sich in 6 gerade ϑ_r ($r = i, \ldots, p$) und 10 ungerade $\vartheta_{ikl} = \vartheta_{mnp}$. Man bilde die 20 Produkte vom Typus $F_{ikl} = \vartheta_i \vartheta_k \vartheta_l \vartheta_{ikl}$. Diese lassen sich durch vier geeignete lineare Verbindungen x, y, z, w linear ausdrücken, die dann Koordinaten' einer W_d sind.

Die 20 Verbindungsebenen (ikl) je dreier der sechs Grundpunkte G_i des zugehörigen F_2-Gebüsches entsprechen den 20 Gleichungen $F_{ikl} = 0$. Die mit dem Produkte Π der geraden ϑ multiplizierten 16 ϑ^2 verschwinden in allen G_i. Aus diesen 16 Ausdrücken lassen sich vier linear unabhängige X, Y, Z, W auswählen, durch die die anderen linear ausdrückbar sind.

Das Quadrat der Funktionaldeterminante der X, Y, Z, W ist in letzteren rational und liefert, gleich Null gesetzt, die Gleichung der K_m.

173) *G. Darboux,* Bull. Math. Astr. 1 (1870), p. 348 (Sur les systèmes de coniques et de surfaces du second ordre). Hier finden sich bereits bemerkens-

Weiter hat *F. Caspary*[174]) aus den Relationen zwischen den Elementen orthogonaler Matrizen die *Göpel*sche[158]) biquadratische Relation hergeleitet, und so den Zusammenhang zwischen solchen Matrizen und der K_m hergestellt.

Es sei noch bemerkt, daß *E. A. Weiß*[175]) unter Deutung der Elemente orthogonaler Matrizen als Koordinaten von Ebenen resp. Geraden die K_m und Z liniengeometrisch auf den S_4 abgebildet hat.

Unabhängig von den bisher skizzierten Überlegungen hat *O. Staude*[176]) die Parameterdarstellung der gemeinsamen Tangenten zweier F_2 abgeleitet.

Diese Kette gegenseitiger Zusammenhänge schließt *Weiß*[170]), indem er die *Staude*sche Parameterdarstellung durch eine gewisse quadratische Transformation aus den beiden Parameterdarstellungen der W_d gewinnt.

Unter Zugrundelegung der *Schottky*schen Darstellung der W_d wird zunächst in Anlehnung an *G. Humbert*[177]) die *Caspary*sche[178]) Para-

---

werte Hinweise auf die gegenseitigen Beziehungen zwischen der Kegelspitzenfläche F' eines F_2-Gebüsches G und ihrer Bildfläche F'', im Sinne von Nr. 66. Hierbei erscheint F' als Ort der bezüglich aller F_2 in G konjugierten Punktepaare.

Die 10 Achsen der 10 Ebenenpaare in G gehören der Fläche F' an, andererseits entsprechen den 10 Achsen 10 D_2 der Bildfläche F''. Mit jedem Grundpunkte G_i von G wächst diese Anzahl der D_2 um Eins; bei sechs Grundpunkten G_i wird F'' zur *Kummer*schen Fläche K_m mit 16 D_2. Auch die gegenseitige Beziehung zwischen den Räumen von F' und F'' wird studiert; so entsprechen den Ebenen des ersteren Raumes F_3 mit 4 D_2 im letzteren Raume, u. s. f.

Die Methode ist rein synthetisch.

174) *F. Caspary,* J. f. Math. 94 (1883), p. 74. Vgl. Note 178).

175) *E. A. Weiß,* Zusatz zu einer Abhandlung von *E. Study* über *Lie*s Kugelgeometrie, Berlin Ber. 1926, p. 381.

176) *O. Staude,* Habilitationsschrift Leipzig 1883 = Math. Ann. 22 (1884), p. 1, 145.

177) *G. Humbert,* J. de math. (4) 9 (1893), p. 468. Die K_m erscheint hier als Sonderfall der „hyperelliptischen" Flächen F, deren Punktkoordinaten x, y, z sich als eindeutige, vierfach-periodische Funktionen von zwei Parametern u, v darstellen lassen.

Diese Darstellung läßt sich überführen in eine solche durch Quotienten von ϑ's q^{ter} Ordnung, die geeignet normiert werden.

Die Kurven auf F erhält man durch Nullsetzen von ϑ-Funktionen.

Im Falle der K_m ($q = 2$) werden die homogenen Koordinaten $x_i, \ldots, x_m$ proportional vier ($= 2^2$) linear unabhängigen geraden $\vartheta(u, v)$ 2. Ordnung mit der Charakteristik Null. Jedem Punkte P der K_m entsprechen, wie bei *Cayley* und *Weber,* zwei Paare (u, v), $(-u, -v)$.

Daraufhin werden die Kurven C auf der K_m eingehend untersucht, indem ϑ beliebiger Ordnung gleich Null gesetzt werden.

Es gibt nur C_{2n} gerader Ordnung auf K_m. Längs einer C_{2n} läßt sich eine meterdarstellung abgeleitet. Sodann führt eine Abbildung von der W_d zu den gemeinsamen Tangenten zweier F_2. Diese Abbildung vermittelt endlich den Übergang von den *Schottky*schen Ausgangsformeln zur Parameterdarstellung jener gemeinsamen Tangenten.

72. **Konfigurationen, die der Kummerschen Fläche zugleich ein- und umgeschrieben sind.** Als eine Anwendung der transzendenten Darstellung der K_m hatte *Rohn* (s. Nr. 71) verschiedene mit ihr verbundene Konfigurationen untersucht. Diese Sätze werden von *F. Klein*[179]) im Zusammenhange dargelegt und weitergeführt.

Wie bei *Rohn* ist die Grundlage die konfokale Schar von quadratischen Komplexen K_2

$$(1) \qquad \Delta(\lambda) \equiv \sum \frac{x_i^2}{\varkappa_i - \lambda} = 0$$

mit K_m als Singularitätenfläche. Denkt man sich eine Gerade g durch ihre Koordinaten x_i gegeben, so trifft g die K_m in vier Punkten 1, 2, 3, 4, und zugleich gehen durch g vier Ebenen I, II, III, IV. Zu ihrer Bestimmung dient die Gleichung (1) mit ihren Wurzeln als elliptischen Koordinaten von g.

Jeder Zerlegung der vier Punkte in zwei Paare entspricht rational eine solche der vier Ebenen. Entsprechen sich z. B. die Paare (1, 2), (3, 4) und (I, II), (III, IV), so heißen sie bez. K_m „konjugiert“.

Ein der K_m zugleich ein- und umschriebenes Tetraeder T, für das je zwei seiner Ebenen und die zwei Ecken ihrer Kante konjugiert sind, heißt „ausgezeichnet“. Ein solches Tetraeder T, deren es ∞^5 gibt, steht zu den vier Wurzeln von (1) in enger Beziehung.

Nimmt man für ein T eine Ebene E (als Ebene von K_m) beliebig an, ferner auf der Schnittkurve von E mit K_m drei Ecken von T, so

F_n umbeschreiben. Sodann werden die C_{2n} bei vorgegebenem n hinsichtlich ihrer Scharen und Familien verfolgt. Adjungiert man noch evtl. ein bis vier C_2, so läßt sich eine C_{2n} als voller Schnitt der K_m mit einer Fläche F erhalten. So gelangt man zu 216 Scharen von C_6, zu 32 Familien von C_8, usf.

Es sei noch auf eine andere Arbeit von *Humbert*, Paris C. R. 120 (1895), p. 863, hingewiesen, wo eine gewisse, durch *Abel*sche Funktionen ($p = 3$) definierte F_6 in Zusammenhang mit der K_m und der Theorie der ebenen Kurven 4. Klasse γ_4 gebracht wird.

178) *F. Caspary*, Paris C. R. 112 (1891), p. 1356. Hier tritt, gegenüber *Schottky*[172]), die Vereinfachung ein, daß die Koordinaten einer W_d Produkte von nur drei ϑ (darunter einer ungeraden) werden.

In einer anschließenden Arbeit, Bull. Math. Astr. (2) 15 (1891), p. 308, werden statt der ϑ hyperelliptische Funktionen 1. Gattung eingeführt, die zu einfacher, expliziter wie impliziter Darstellung der W_d führen. Hier findet man auch ausführliche Literaturangaben über die W_d.

179) *F. Klein*, Math. Ann. 27 (1886), p. 106.

ist T bestimmt, und mittels konjugierter Paare einfach konstruierbar. Aus solchen T setzen sich weitere Konfigurationen zusammen, die wiederum der K_m ein- und umbeschrieben sind.

So entsteht u. a. eine gewisse Konfiguration $(16)_6$, die von D_2 und Δ_2 einer neuen *Kummer*schen Fläche K_m' gebildet wird. Jedes T, daß sich aus Ebenen und Ecken der Konfiguration bilden läßt, ist bez. K_m ausgezeichnet. Zwischen K_m und K_m' besteht volle Gegenseitigkeit. Setzt man

(2) $$f(\lambda) \equiv (\lambda - \varkappa_1) \dots (\lambda - \varkappa_6),$$

so seien die beiden zu K_m gehörigen hyperelliptischen Integrale v_1, v_2

(3) $$v_1 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad v_2 = \int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}.$$

Diese werden auf der zu $\sqrt{f(\lambda)}$ gehörigen zweiblättrigen *Riemann*schen Fläche F hinerstreckt, wobei als untere Grenze etwa der Verzweigungspunkt $\varkappa_6$ genommen werde. Man hat dann für v_1 und v_2 je die fünf Perioden

(4) $$P_i = 2\int_{\varkappa_6}^{\varkappa_i} dv \quad \text{mit} \quad \sum P_i = 0.$$

Man führe noch eine zweite, 32-blättrige Fläche F_1 ein, die zu der Proportion $\sqrt{\lambda - \varkappa_1} : \sqrt{\lambda - \varkappa_2} : \cdots : \sqrt{\lambda - \varkappa_6}$ gehört. Die v werden hierbei von der Form $\int_{\sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_i}}^{\sqrt{\lambda - \varkappa_i}} dv$, bei geeigneter Normierung der Wurzelvorzeichen.

Jeder $g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ entspricht ein Punktquadrupel auf F_1. Für $\lambda_3 = \lambda_4$ erhält man eine Tangente der K_m, für $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ eine Haupttangente, für $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ eine Gerade durch einen D_2 oder in einer Δ_2, usf.

Im Falle einer Tangente seien u', u'' die beiden ungleichen v-Parameterpaare, dem Berührungspunkte gebe man die Parameter $U = u_1' - u_1''$, $U_2 = u_2' - u_2''$ und der Berührungsebene die Parameter $(U_1) = u_1' + u_1''$, $(U_2) = u_2' + u_2''$.

Umgekehrt gehört zu jedem Paare U_1, U_2 resp. (U_1), (U_2) stets nur ein Punkt resp. eine Ebene der K_m.

Mit Hilfe dieser neuen Parameter werden zunächst die hyperelliptischen c_4 untersucht, die die Ebenen von K_m aus ihr ausschneiden; diese c_4 lassen sich auf die Fläche F eindeutig beziehen.

An einer solchen c_4 werden die Integrale v hinerstreckt und das *Abel*sche Theorem für Schnitte mit Geraden (und Kegelschnitten) aufgestellt. Hieraus erwächst das entsprechende Theorem für den Schnitt von K_m mit einer Geraden. Ferner lassen sich so die Kongruenzen angeben, denen die Parameter einer Geraden zu genügen haben, damit sie durch einen gegebenen Punkt von K_m geht, usf.

Konjugierte Punkte und Ebenen sind jetzt dargestellt durch

$$(U), (U) + 2v_1 + 2v_2; \quad (U) + 2v_1, (U) + 2v_2.$$

Mit diesen transzendenten Mitteln lassen sich die obigen Konfigurationen einfach und übersichtlich behandeln, wobei sich eine Reihe von Verallgemeinerungen von selbst anschließt.

Zugleich ergeben sich damit 32 weitere Transformationen, die die K_m in sich überführen (s. Nr. 69).

73. Das Cayleysche Tetraedroid und die Wellenfläche. Das Tetraedroid T_c ist ein besonderer Fall der K_m; die 16 D_2 liegen zu je vier auf den Seiten eines Tetraeders und bilden in ihnen vollständige Vierecke, deren Diagonalpunkte in den bezüglichen Ecken liegen. Diese Fläche hat *Cayley*[180]) gefunden und in zwei weiteren Abhandlungen[181]) eingehend untersucht, in der letzteren als Spezialfall der K_m. Aus einer einfachen Raumtransformation leitet die Fläche *Timerding*[182]) her.

Die vier Tangentialkegel in den einer Tetraederseite angehörigen D_2 sind zugleich Tangentialkegel einer F_2, von der das Tetraeder ein Poltetraeder ist. Die Koordinaten der 16 D_2 bilden eine Matrix von der Form

(1) $$|0, \ \pm a_{ik}, \ \pm a_{il}, \ \pm a_{im}|,$$

wo $a_{rs} = a_{sr}$.

Legt man also durch zwei Paare von D_2, die mit einer bestimmten Tetraederecke inzident sind, die Verbindungsebene, so enthält diese noch ein drittes Paar von D_2.

Die so erhaltenen Ebenen bilden dual vier vollständige Vierflache, deren Scheitel die vier Tetraederecken sind, während ihre Dia-

180) *A. Cayley*, J. de math. 11 (1846), p. 291 (Sur la surface des ondes).

181) *A. Cayley*, J. f. Math. 65 (1866), p. 284; ib. 87 (1879), p. 161. — Ein einfaches Kriterium dafür, daß sich eine K_m auf eine T_c reduziert, hat *J. J. Hutchinson* angegeben, Annals Math. 11 (1897), p. 198; Amer. Math. Soc. Bull. (2) 4 (1898), p. 327.

Die Punkte der K_m, wie auch der zugehörigen W_d, waren darstellbar durch hyperelliptische Funktionen ($p = 2$) von zwei hyperelliptischen Integralen v_1, v_2 (s. Nr. 71).

Das fragliche Kriterium lautet dann, daß die sechs, den u, v gemeinsamen Verzweigungspunkte in Involution liegen, wobei sich beide Integrale auf elliptische 1. Gattung reduzieren.

Auch die sechs Grundpunkte G_i des zugehörigen F_2-Gebüsches liegen dann auf ihrer C_3 in Involution. Überdies gehören dann der W_d (außer den bereits vorhandenen 25 g) noch zwei weitere g an.

182) *H. E. Timerding*, Ann. di mat. (3) 1 (1898), p. 95.

gonalebenen mit den Seiten des Tetraeders zusammenfallen. Die Gleichungen dieser Ebenen lauten

$$(2) \qquad \pm a_{lm} x_k \pm a_{mk} x_l \pm a_{kl} x_m = 0, \quad \text{usf.};$$

sie stellen die 16, je sechs D_2 enthaltenden Doppelebenen Δ_2 dar, entsprechend der allgemeinen Theorie der K_m. Die Gleichung der Fläche T_c lautet mittels einer fünfreihigen Determinante

$$(3) \qquad T_c \equiv \begin{vmatrix} 0 & x_i^2 & x_k^2 & x_l^2 & x_m^2 \\ x_i^2 & 0 & a_{ik}^2 & a_{il}^2 & a_{im}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

ist also in den x^2 quadratisch. Auf T_c liegen zwei Scharen von C_4, die das Grundtetraeder zum Poltetraeder haben.

Es gibt eine transzendente explizite Darstellung der T_c in elliptischen Funktionen su, cu, du, mit den Argumenten u, v und den Moduln $\varkappa$, λ

$$(4) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = su(\varkappa, u)\, du(\lambda, v) : cu(\varkappa, u)\, cu(\lambda, v) \\ : du(\varkappa, u)\, su(\lambda, v) : 1.$$

Die beiden obigen Scharen von C_4 fallen mit den Parameterkurven $u =$ konst., $v =$ konst. zusammen.

Gewisse F_4 lassen sich nach *K. Rohn*[183]) auf mehrere Arten als Tetraedroid T_c ansehen.

Wir kommen zur Wellenfläche W_l. Die *Fresnel*sche Wellenfläche W_l[184]) ist wiederum ein (metrischer) Spezialfall des Tetraedroids T_c. Es sind für sie nur vier der D_2 reell. Bei der ungemeinen Ausdehnung der Literatur beschränken wir uns auf das Wesentlichste.

Fresnel gelangte zu ihr (1827) bei der Untersuchung der Fortpflanzung des Lichtes in doppelt brechenden Medien. Geometrisch erzeugt er die Fläche, indem er im Mittelpunkte eines Ellipsoides auf dessen Zentralschnitten Lote gleich den Achsenlängen der Schnittellipse abträgt. Damit erhält er die Gleichung der W_l, wenn $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ gesetzt wird, in der übersichtlichen Gestalt

$$(5) \qquad W_l \equiv \frac{x^2}{\varrho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} - 1 = 0.$$

183) *K. Rohn*, Leipzig Ber. 1884, p. 10. *C. Segre*, ib. p. 132, fügt den Fall hinzu, wo sich eine F_4 auf sechs Arten als T_c ansehen läßt. Vgl. auch *E. Bertini*, Lomb. Ist. Rend. (2) 29 (1896), p. 566.

184) *J. Fresnel*, Paris Mém. 7 (1827), p. 126. Von weiterer Literatur sei erwähnt: *M. Ampère*, Ann. Chim. Phys. 39 (1828), p. 113; *A. Cauchy*, Exerc. de math. Bd. 5 (1830); Paris C. R. 13 (1841), p. 319; *J. Plücker*, J. f. Math. 19 (1839), p. 1, 91. Ein Literaturverzeichnis (bis 1896) gibt *G. Loria*, Il passato e il presente delle principali teorie geometriche, Torino 1896, p. 114 ff. — Bezüglich der Einzeleigenschaften der W_l sei auf *„Salmon-Fiedler"*, p. 323 ff., verwiesen.

Die Hauptebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ schneiden die W_l je in einer Ellipse und einem Kreise; in der E_∞ wird der Kreis der Kugelkreis K.

Sei, wie üblich, $a^2 > b^2 > c^2$, so ergeben sich in

$$(6) \qquad x = \pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

die Koordinaten der vier reellen D_2. Hieraus geht die von *H. Weber*[185]) gegebene Darstellung durch elliptische Funktionen hervor.

Bezüglich der Krümmungslinien der W_l s. Nr. 74.

Auch die Klassengleichung der $W_l = \Omega_l$ nimmt eine einfache Gestalt an. Setzt man $\sigma^2 = u^2 + v^2 + w^2$, so hat man

$$(7) \qquad \Omega_l \equiv \frac{u^2}{a^2\sigma^2 - 1} + \frac{v^2}{b^2\sigma^2 - 1} + \frac{w^2}{c^2\sigma^2 - 1} = 0;$$

die Ω_l ist also eine Φ_4, wie es sein muß.

74. Die Haupttangentenkurven und die Krümmungslinien auf der Wellenfläche. Die Differentialgleichungen dieser Kurven lassen sich zwar durch Spezialisierung aus denen der entsprechenden Kurven auf der *Kummer*schen Fläche K_m (s. Nr. 70) herleiten, und so im besonderen auch die geometrischen Eigenschaften der ersteren Gattung für die W_l gewinnen.

Es empfiehlt sich aber auch, nach dem Vorgange von *G. Darboux*[186]), ein direktes Verfahren, das überdies manche neuen Gesichtspunkte eröffnet.

Seien $P(x, y, z)$ irgendein Punkt einer zunächst beliebigen Fläche F, n die orientierte Normale mit den Richtungskosinus p, q, r, und p', q', r' die Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$, so daß $\sum pp' = 0$, so lassen sich die sechs Größen $p, \ldots, p', \ldots$ als homogene Strahlenkoordinaten von n ansehen. Dann nehmen die Differentialgleichungen der Haupttangentenkurven (a), resp. der Krümmungslinien (b), die elegante Gestalt an

$$\begin{cases} \text{(a)} \qquad \sum dp\,dx = 0, \\ \text{(b)} \qquad \sum dp\,dp' = 0. \end{cases}$$

Dies finde seine Anwendung auf die Wellenfläche W_l mit dem Mittelpunkte O.

Die Gerade OP treffe W_l auf derselben Seite in einem zweiten

185) *H. Weber*, J. f. Math. 84 (1878), p. 332. Vgl. *A. Cayley*, Quart. J. 3 (1860); Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 1; *O. Böklen*, Ztschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 400; 25 (1880), p. 346; 27 (1882), p. 160; *G. Darboux*, Paris C. R. 97 (1882), p. 1133; *E. Lacour*, Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 266.

186) *G. Darboux*, Paris C. R. 97 (1883), p. 1039, 1133.

Punkte P_1; die parallelen Tangentialebenen in P, P_1 seien T, T_1, und α, β' die Quadrate der Abstände von O und T resp. T_1. Endlich seien β, α' die Quadrate der Radienvektoren (OP) resp. (OP_1). Bedeuten a, b, c gewisse Konstanten, so besteht die Identität

$$\text{(c)}\quad x(x-\beta)(x-\beta')-(x-a)(x-b)(x-c)\equiv\frac{abc}{\alpha\alpha'}(x-\alpha)(x-\alpha'),$$

die zwei Relationen zwischen den α, β, α', β' liefert.

Setzt man dann

$$\text{(d)}\qquad x=C\left(\frac{a-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(a-\beta)^{n_1}(a-\beta')^{n_2},\ \text{usf.},$$

wo y, z aus x hervorgehen, indem man die Konstante C durch C', C'' und entsprechend a durch b, c ersetzt, so liegt in (d) die explizite Darstellung einer Fläche vor, die die Wellenfläche W_l als Sonderfall $(m_1=n_2=0,\ m_2=n_1=\frac{1}{2})$ enthält.

Aus (d) ergeben sich die Größen p, q, r durch

$$\text{(e)}\quad p=\frac{1}{C(a-b)(a-c)}\left(\frac{a-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{1-m_2}(a-\beta)^{1-n_1}(a-\beta')^{1-n_2},\ \text{usf.}$$

Genügen dann noch die Exponenten in (d) der Bedingung

$$\text{(f)}\qquad m_1+n_1+m_2+n_2=0,$$

wie es bei der W_l der Fall ist, und setzt man zur Abkürzung

$$\text{(g)}\qquad f(x)\equiv(x-a)(x-b)(x-c),$$

so lautet die „elliptische“ Differentialgleichung der Haupttangentenkurven

$$\text{(a}'\text{)}\qquad \frac{(d\beta)^2}{f(\beta)}=\frac{(d\beta')^2}{f(\beta')},$$

wo die Variabeln β, β' bereits separiert sind.

Vermöge des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung ergibt sich aus (a′) die algebraische Beziehung zwischen β und β'.

Diesem Ergebnis gibt *Darboux* eine einfache geometrische Deutung. Die Geraden, die die Seiten eines Tetraeders T nach konstantem Doppelverhältnis K treffen, erfüllen bekanntlich einen quadratischen Komplex, den sogenannten „tetraedralen“.

Mithin sind die durch einen festen Raumpunkt Q gehenden Geraden des Komplexes die Kanten eines Kegels 2. Ordnung K_2 mit der Spitze Q.

Unter Anwendung auf die Wellenfläche W_l seien die Seiten von T die drei Hauptebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ nebst E_∞, und Q gehöre der W_l an. Legt man endlich noch dem Kegel K_2 die Bedingung auf, die W_l zu berühren, so beschreibt die Spitze Q eine Haupttangentenkurve der W_l; läßt man hinterher die Konstante $\varkappa$ variieren, so hat man die ganze Schar der Haupttangentenkurven.

Es werden auch noch gewisse weitere Flächengattungen mit derselben Eigenschaft angegeben.

Weniger einfach verhält es sich mit den Krümmungslinien der W_l.

Ein Versuch von *P. Zech*[187]), deren Differentialgleichungen direkt zu integrieren, mißlang, wie[188]) *E. Combescure* und *F. Brioschi* feststellten. Durch geeignete Wahl von Parameterkurven brachten beide Autoren die Gleichung der Krümmungslinien auf gewisse kanonische Formen.

Darboux (l. c.) untersucht zuvörderst die Krümmungslinien einer beliebigen Fläche oder auch ihrer Projektionen auf eine Tangentialebene in der Nähe eines Nabelpunktes. Diese Kurven sind im allgemeinen *nicht* algebraisch, sondern nur dann, wenn drei gewisse, in der Gleichung auftretende Konstante A, B, C rationale Zahlwerte besitzen. Diese Bedingung ist aber bei der W_l erfüllt.

Somit sind die Krümmungslinien der W_l in der Nähe eines Nabelpunktes algebraisch und haben die Gestalt gewisser C_{10}. Hieraus läßt sich aber noch kein Schluß auf den Gesamtcharakter der Kurven ziehen.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien der W_l läßt sich auf die einfache Form bringen

$$\text{(b}'\text{)}\quad f(\alpha)(d\beta)^2 + f(\beta)(d\alpha)^2 - d\alpha d\beta\left[2f(\alpha) + (\beta - \alpha)\left\{f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}\right\}\right] = 0.$$

Sie hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß ihre Gestalt bei Vertauschung von β mit β' ungeändert bleibt.

In dem besonderen Falle, wo sich die kubische Form $f(x)$ auf eine quadratische reduziert, läßt sich die Gleichung (b′) integrieren. Setzt man

$$\text{(h)}\qquad x f(x) \equiv \varphi(x), \quad v \equiv \alpha(\beta - \alpha), \quad w \equiv \frac{\varphi(\alpha)}{v},$$

und führt neue Variable y, p derart ein, daß

$$\text{(i)}\quad \alpha - w\frac{d\alpha}{dw} \equiv y, \quad -w \equiv \frac{dy}{dp}, \quad \frac{d\alpha}{dw} \equiv p, \quad \alpha \equiv y - p\frac{dy}{dp},$$

so geht (b′) über in

$$\text{(b}''\text{)}\qquad \int \frac{dp}{p^{\frac{2}{3}}(1+p)^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{dy}{\varphi(y)^{\frac{1}{3}}}.$$

Es fragt sich nun, wann tritt bei der W_l der obige Spezialfall ein?

187) *P. Zech*, J. f. Math. 54 (1857), p. 72; 55 (1858), p. 94.

188) *E. Combescure*, Ann. di mat. 2 (1859), p. 278; *F. Brioschi*, ib. p. 285. S. auch Art. „F_3“, Nr. 23, Note 117.

Dies ist erstens der Fall, wenn, gemäß der Konstruktion der W_l aus einem Ellipsoide, an die Stelle des letzteren ein Zylinder tritt.

Oder aber, wenn sich das Ellipsoid, und damit auch die W_l selbst, nur wenig von einer Kugel unterscheidet, wie das bei den in der Optik vorkommenden Wellenflächen W_l in der Tat der Fall ist.

Hier lassen sich also die Krümmungslinien der W_l als bekannt ansehen.

Dagegen können, wie *Darboux* aus seinen Entwicklungen folgert, die Krümmungslinien der W_l im allgemeinen keine algebraischen Kurven bestimmter Ordnung sein.

Eine vollständige Lösung der Aufgabe wäre wünschenswert.

XII. Regelflächen vierter und höherer Ordnung.

75. Einleitung über Regelflächen 4. Ordnung R-F_4. Der erste, der sich mit R-F_4 und ihrer Erzeugung beschäftigte, scheint *M. Chasles*[189]) gewesen zu sein; er studiert auch Kurven auf der Fläche. Sodann hat sie *A. Cayley*[190]) in einer Reihe von Arbeiten nach verschiedenen Richtungen hin untersucht.

Eine vollständige Klassifikation ihrer 13 Arten gelang aber erst auf rein geometrischem Wege *L. Cremona*[191]), dessen Abhandlung von 1868 immer noch als grundlegend anzusehen ist. Bei der Einteilung wird das Verhältnis der R-F_4 zur jeweiligen Reziprokalfläche, sowie die Natur der Doppelkurve berücksichtigt. Liniengeometrisch hat *A. Voss*[192]) die R-F_4 untersucht und insbesondere das Auftreten singulärer Torsalgeraden verfolgt. Eine übersichtliche Ableitung der *Cremona*schen Er-

189) *M. Chasles*, Paris C. R. 53 (1861), p. 888.

190) *A. Cayley*, London Trans. 153 (1863), p. 453. In einer zweiten Arbeit, ib. 154 (1864), p. 559, werden bei der Klassifikation acht Arten von R-F_4 unterschieden und ihre Gleichungen diskutiert. — In einer dritten Arbeit, ib. 189 (1869), p. 111, werden vier weitere Arten hinzugefügt.

191) *L. Cremona*, Bologna Mem. (2) 8 (1868), p. 235.

192) *A. Voss*, Math. Ann. 8 (1874), p. 54. Bezüglich der Torsalgeraden vgl. auch *R. Sturm*, Math. Ann. 6 (1873), p. 255; *H. Schubert*, Math. Ann. 17 (1880), p. 574; *F. E. Björling*, Stockholm Öfs. 15 (1888), p. 587; Stockholm Vet. Bih. XV. *Sturm* und *Schubert* bestimmen die Anzahl der Torsalgeraden h_t einer R-F_n, vom Range r, als $2(r-n)$, ersterer direkt, letzterer mittels einer Formel aus der abzählenden Geometrie.

Man beachte noch den charakteristischen Unterschied zwischen einer Torsalgeraden h_t und einer beliebigen Erzeugenden h einer R-F. Bei einer beliebigen h sind deren Punkten P ihre Tangentialebenen T projektiv zugeordnet. Für eine h_t artet aber diese Projektivität aus; es gibt einen ausgezeichneten Punkt P' auf h_t, dem alle T entsprechen, und vice versa eine ausgezeichnete Ebene T', der alle P entsprechen.

gebnisse von einem einzigen Transformations-Gesichtspunkte aus (s. u. Nr. 82) hat neuerdings *Wong* gegeben.

76. Die abwickelbare R-F_4. Sie hat zur Rückkehrkante eine (irreduzible) kubische Raumkurve $C_3 = \Gamma_3$, deren Tangenten t die R-F_4 erzeugen, während die Tangentialebenen T der R-F_4 längs der Γ_3 zugleich deren (Schmiegungs-)Ebenen Σ sind und ein „kubisches Ebenengewinde" bilden. Die Ebene Σ schneidet jeweils aus der R-F_4 noch eine C_2 aus, den Ort der Spuren der t in Σ. Das sind die ∞^1 C_2 auf der R-F_4 (s. *Kummer*, Nr. 6).

Wählt man die $C_3 = \Gamma_3$ als Normkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. Nr. 3)

$$(1)\qquad \begin{aligned} N_3)&\left\{ x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1, \right.\\ \mathsf{N}_3)&\left\{ u_3 : u_2 : u_1 : u_0 = 1 : -\lambda : \lambda^2 : -\lambda^3, \right. \end{aligned}$$

und bezeichnet die Determinanten der Matrix

$$(2)\qquad \begin{Vmatrix} 3x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 3x_0 \end{Vmatrix}$$

mit φ, ψ, χ, so daß

$$(3)\qquad \varphi \equiv 3x_1x_3 - x_2^2, \quad \psi \equiv x_1x_2 - 9x_0x_3, \quad \chi \equiv 3x_0x_2 - x_1^2,$$

so erhält man als Gleichung der R-F_4

$$(4)\qquad \psi^2 + 4\varphi\chi = 0.$$

Diese R-F_4 ist vom Geschlecht Null.

77. Die R-F_4 mit dreifacher Geraden $\overline{\overline{g}}$. Unterarten. Diese Flächen sind als F_4 mit ∞^1 D_3 bereits in Nr. **40** berücksichtigt worden, insbesondere hinsichtlich ihrer Abbildung auf eine Ebene, so daß wir uns hier auf einige Ergänzungen beschränken können.

Die Fläche läßt sich geometrisch am einfachsten erzeugen als Ort der Schnittlinien der Ebenen E eines Büschels B mit den Ebenen Σ eines auf B projektiv bezogenen kubischen Gewindes Γ_3; die Achse von B wird zur $\overline{\overline{g}}$ der Fläche. Stellt man das Gewinde Γ_3 allgemein dar durch eine Gleichung von der Form

$$(5)\qquad \Gamma \equiv u_0\lambda^3 + 3u_1\lambda^2 + 3u_2\lambda + u_3 = 0,$$

wo die u beliebige Linearformen der x bedeuten, und das Büschel B mit der Achse ($x_i = x_k = 0$) durch

$$(5')\qquad \mathsf{B} \equiv x_i - \lambda x_k = 0,$$

so liefert die Elimination von λ als Gleichung der R-F_4 mit der $\overline{\overline{g}}$ ($x_i = x_k = 0$)

$$(6)\qquad u_0x_i^3 + 3u_1x_i^2x_k + 3u_2x_ix_k^2 + u_3x_k^3 = 0.$$

Dies war aber gerade die frühere (Nr. **40**) zugrunde gelegte Darstellung einer F_4 mit $\overline{\overline{g}}$; man gelangt also umgekehrt von (6) aus sofort wieder zu den beiden projektiv bezogenen Gebilden B und Γ_3 zurück.

Fallen im besonderen zwei von den drei λ-Wurzeln der Gleichung (5) zusammen, so gelangt man zu einem „Torsalpunkt" der F_4 auf $\overline{\overline{g}}$. Ist also $D(\lambda)$ die Diskriminante von (5) bez. λ, so liefert $D = 0$ die vier Torsalpunkte, die Schnittpunkte von $\overline{\overline{g}}$ mit der abwickelbaren R-F_4 von Γ_3 (s. oben Nr. 76). Von jedem der Torsalpunkte gehen zwei benachbarte Regelstrahlen h der Fläche aus; deren Verbindungsebene ist eine „Torsalebene" der Fläche, die sie längs der ganzen Geraden h berührt.

Unterarten der R-F_4 mit $\overline{\overline{g}}$. Im allgemeinen (s. Nr. 40) liegen die drei von irgendeinem Punkte der $\overline{\overline{g}}$ ausgehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 nicht in einer Ebene.

Die Gleichung der Fläche läßt sich dann, vermöge geeigneter Wahl des Koordinatentetraeders, auf die Normalgestalt bringen

$$(6_\alpha) \qquad x_i^2 x_l l + x_k^2 x_m m - \varrho x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (\varrho \neq 0),$$

wo $l \equiv a x_i + b x_k$ und $m \equiv c x_i + d x_k$ Linearformen in x_i und x_k bedeuten.

Liegen dagegen im besonderen die drei Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 einmal, und da dann die Konstante ϱ den Wert Null annehmen muß, stets in einer Ebene, so reduziert sich die Gleichung (6_α) auf

$$(6_\beta) \qquad x_i^3 x_l l + x_k^2 x_m m = 0,$$

und die Gerade $x_l = x_m = 0$ gehört als einfache Leitlinie e der Fläche an. Umgekehrt führt die Forderung einer solchen Leitlinie e für die Fläche (6_α) eben zur vorliegenden Fläche (6_β).

Führt man in (6_β) die Parameter $\frac{x_i}{x_k} = \lambda$, $\frac{x_l}{x_m} = \mu$ ein, so stellt (6_β) eine (3, 1)-deutige Korrespondenz zwischen λ und μ dar, und umgekehrt läßt sich eine beliebige solche Korrespondenz vermöge geeigneter linearer Umformung von μ in die Gestalt (6_β) setzen. Damit hat man:

„Der Typus (6_β) von R-F_4 mit einer dreifachen Geraden $\overline{\overline{g}}$ und einer einfachen Leitgeraden e läßt sich erzeugen durch die Schnittgeraden entsprechender Ebenen in einer (3, 1)-Korrespondenz der beiden Büschel $(\overline{\overline{g}})$ und (e), oder auch dualistisch, durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte in einer (3, 1)-Korrespondenz der beiden Punktreihen $(\overline{\overline{g}})$ und (e). Und umgekehrt." Diese Fläche ist also ihre eigene Reziproke..

Andererseits verlange man, daß in (6_α) die beiden Linearformen l, m einander proportional werden, so daß die Resultante $R \equiv ad - bc$

von l und m verschwindet. Dann verwandelt sich (6_α), für $l \equiv ax_i + bx_k$, in

$$(6_\gamma) \qquad l(x_i^2 x_l + x_k^2 x_m) - \varrho x_i^2 x_k^2 = 0.$$

Die $\overline{\overline{g}}$ berührt jetzt die abwickelbare Fläche des Gewindes Γ_3, und von den drei durch einen beliebigen Punkt von $\overline{\overline{g}}$ gehenden Regelstrahlen h_1, h_2, h_3 fällt immer einer, etwa h_1, in die $\overline{\overline{g}}$.

Diese Fläche ist erzeugbar als Ort aller Geraden, die entsprechende Punkte einer festen Geraden g und eines zu dieser in einer (1, 2)-Korrespondenz stehenden Kegelschnittes k verbinden; hierbei ist angenommen, daß sich k und g in einem Punkte treffen, der als Punkt von g nicht mit einem der beiden ihm auf k entsprechenden Punkte zusammenfällt.

Ein noch speziellerer Fall bietet sich dar, wenn sich die Gleichung der R-F_4 in die Gestalt bringen läßt

$$(6_\delta) \qquad x_k(x_i^2 x_l + x_k^2 x_m) - x_i^4 = 0.$$

Die Ebene $x_k = 0$ enthält nur die $\overline{\overline{g}}$ und berührt die R-F_4 längs ihr, ist also eine „Torsalebene".

Es folgt weiter der Typus

$$(6_\varepsilon) \qquad f_2(x_i, x_k)(x_i x_l + x_k x_m) - \varrho x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (\varrho \neq 0).$$

Durch jeden Punkt der $\overline{\overline{g}}$ geht (außer dieser) nur *ein* Regelstrahl h. Für zwei Punkte von $\overline{\overline{g}}$ fällt h mit $\overline{\overline{g}}$ zusammen, entsprechend den Wurzeln von $f_2 = 0$. Diese beiden Punkte koinzidieren in dem Sonderfalle

$$(6_\zeta) \qquad f_1^2(x_i, x_k)(x_i x_l + x_k x_m) - \varrho x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (\varrho \neq 0).$$

Von den drei durch die $\overline{\overline{g}}$ gehenden Mänteln der Fläche koinzidieren zwei zu einem „Kuspidalmantel".

Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche in einer r_4, deren d_3 auf $\overline{\overline{g}}$ aus einer Spitze besteht, durch die ein weiterer Kurvenzweig geht.[193])

Damit sind die R-F_4 mit einer $\overline{\overline{g}}$ erschöpft.

Bei den weiteren Fällen tritt stets die Erscheinung ein, daß die Punkte der — irreduziblen oder auch reduziblen — Doppelkurve $\overline{C}$ (2, 2)-deutig aufeinander bezogen sind. Dies läßt sich nach *K. Rohn*[194]) bei Berücksichtigung der Realitätsunterabteilungen mit Vorteil verwerten.

Vermöge linearer Umformung läßt sich die obige (2, 2)-Korrespondenz auf eine symmetrische Gestalt bringen, die sich dann weiterhin spezialisieren läßt.

---

193) *K. Rohn*, Math. Ann. 24 (1884), p. 147.

194) *K. Rohn*, Math. Ann. 28 (1887), p. 284.

Auf diese Weise gelingt die Einteilung und die Aufstellung der Gleichungen für die verschiedenen R-F_4 in ungezwungener Weise.

Die Doppelkurve $\overline{C}$ kann der Reihe nach bestehen aus einer $\overline{C}_3$, einer $\overline{C}_2$ und $\overline{g}$, einer $\overline{\overline{g}}$, aus zwei $\overline{g}$, endlich aus einer Selbstberührungsgeraden. Für zehn dieser Flächenarten hat *K. Rohn* Fadenmodelle anfertigen lassen.

78. R-F_4 mit irreduzibler kubischer Doppelkurve. Es kommen zunächst die F_4 mit einer — irreduziblen oder reduziblen — $\overline{C}_3$ in Betracht. Die grundlegende Arbeit verdankt man *Clebsch*.[195]) Mit Ausnahme der *Steiner*schen Fläche S, wo die $\overline{C}_3$ in drei durch einen Punkt laufende $\overline{g}$ zerfällt (s. Abschn. VII), liegt stets eine R-F_4 vor. Allgemein gilt, daß die Regelstrahlen h der R-F_4 Sekanten der $\overline{C}_3$ sind und einem linearen Geradenkomplex K_1 angehören.

Hauptfall. Die $\overline{C}_3$ ist irreduzibel.

Man hat zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem der Komplex K_1 allgemein oder speziell ist; die beiden Flächenarten seien kurz mit R resp. R' bezeichnet. Zunächst kommen die R in Betracht. Wie in Nr. 76 (s. auch Art. „F_3", Nr. 11) wähle man die C_3 wieder als Normalkurve N_3

$$\text{(a)} \qquad x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1,$$

und setze

$$\text{(b)} \qquad \varphi_3 \equiv 3x_1x_3 - x_2^2, \quad \varphi_2 \equiv x_1x_2 - 9x_0x_3, \quad \varphi_1 \equiv 3x_0x_2 - x_1^2.$$

Das durch die N_3 gehende F_2-Netz N ist demgemäß dargestellt durch

$$\text{(c)} \qquad N \equiv \varrho_3\varphi_3 + \varrho_2\varphi_2 + \varrho_1\varphi_1 \equiv \begin{vmatrix} 3x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 3x_0 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine F_4 mit N_3 als Doppelkurve ist somit durch eine allgemeine quadratische Gleichung in den φ dargestellt

$$\text{(7)} \qquad \sum\sum a_{rs}\varphi_r\varphi_s = 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

Trifft ein Regelstrahl h der R-F_4 die N_3 in zwei Punkten λ_1, λ_2, und setzt man $\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \lambda_1\lambda_2 : \lambda_1 + \lambda_2 : 1$, so genügen die σ der quadratischen Gleichung

$$\text{(7')} \qquad a_{22}\sigma_2^2 + a_{11}\sigma_1^2 + a_{00}\sigma_0^2 + 2a_{21}\sigma_2\sigma_1 + \cdots = 0.$$

Die beiden von einem Punkte der N_3 ausgehenden Regelstrahlen h_1, h_2 koinzidieren, wenn der Parameter λ der Bedingung genügt

$$\text{(8)} \qquad (a_{00}\lambda^2 + 2a_{01}\lambda + a_{11})(a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22}) - \{a_{01}\lambda^2 + (a_{11} + a_{02})\lambda + a_{12}\}^2 = 0.$$

Dies liefert die vier Kuspidalpunkte auf der N_3.

195) *A. Clebsch*, Math. Ann. 2 (1870), p. 445.

Der lineare Komplex K_1, dem die h von R angehören, hat in Strahlenkoordinaten $p_{ik} = (xy)_{ik}$ die Gleichung

$$(9) \quad a_{00}p_{01} + a_{11}p_{03} + a_{22}p_{23} + 2a_{12}p_{13} + (a_{11} + 2a_{02})p_{12} + 2a_{01}p_{02} = 0.$$

Die Ebene, die zwei von irgendeinem Punkte P der $\overline{N}_3$ ausgehende Regelstrahlen h_1, h_2 verbindet, schneidet aus der R noch eine C_2 aus. Analog schneidet eine Ebene, die zwei von einem zweiten Punkte P' der $\overline{N}_3$ ausgehende h_1', h_2' verbindet, eine C_2' aus. Diese beiden C_2' sind projektiv aufeinander bezogen und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte sind die Regelstrahlen h der R.

Umgekehrt ist die Fläche R, wie schon *Clebsch*[195]) erkannte, erzeugbar durch die Verbindungslinien h entsprechender Punkte von zwei projektiv aufeinander bezogenen, sich nicht treffenden Raumkegelschnitten C_2, C_2'.

Hinterher läßt sich hieraus die $\overline{C}_3$ von R bestimmen. Man ermittele einmal die zwei Punktepaare, die auf jedem Kegelschnitt den Schnittpunkten seiner Ebene mit dem anderen entsprechen; andererseits die zwei Schnittpunkte der Verbindungslinien dieser Paare entsprechender Punkte.

Die durch diese sechs Punkte festgelegte C_3 ist die gesuchte Doppelkurve von R.

Der Sonderfall der Fläche R' tritt ein, wenn der Komplex K_1 in einen speziellen ausartet, also die Bedingung erfüllt ist

$$(7_\alpha) \qquad S \equiv a_{00}a_{22} + a_{11}(a_{11} + 2a_{02}) - 4a_{01}a_{12} = 0.$$

Die von allen Geraden von K_1 getroffene feste Gerade e wird eine einfache Leitlinie der Fläche R'. Man hat also:

„Die Fläche R' entsteht als Ort der eine gegebene Gerade e treffenden Sekanten einer gegebenen C_3."

Jede Ebene durch e trifft die C_3 in drei Punkten, deren Verbindungsgeraden die drei in der Ebene liegenden Regelstrahlen der R' sind. Für vier Ebenen fallen zwei dieser drei Regelstrahlen zusammen.

Es ist auch vorteilhaft, sich nach dem Vorgange von *W. Fr. Meyer* (s. Art. „F_3", Nr. **11**, **12**) einer Abbildung auf eine (σ)-Ebene zu bedienen, in der ein Punkt $(\sigma) = (\lambda_1, \lambda_2)$ auf einen Normkegelschnitt $N_2 = \mathsf{N}_2$ bezogen ist.

Diese Abbildung erscheint in zweifacher Gestalt.

Einmal entsprechen durch Kombinierung von (7') und (9) den ∞^5 linearen Komplexen K_1 (1, 1)-deutig die ∞^5 Kegelschnitte c_2 der (σ)-Ebene. Artet im besonderen der Komplex K_1 in einen speziellen aus, als Ort der eine feste Gerade e treffenden Geraden, so daß die

Bedingung (7_α) erfüllt ist, so sagt das in der (σ)-Ebene aus, daß die dem K_1 entsprechende c_2 ein „Schließungskegelschnitt" des Normkegelschnitts N_2 wird, d. h. daß es ein und damit ∞^1 eigentliche „Schließungsdreiecke" Δ gibt, die N_2 um- und c_2 einbeschrieben sind. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Argumente (auf N_2) der Seiten eines solchen Dreiecks Δ, so treffen sich die drei Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der N_3 in einem Punkte P auf der Leitgeraden e; gleitet Δ längs N_2, so durchläuft P die Gerade e.

Somit sind im besonderen die ∞^4 speziellen linearen Komplexe K_1 (1, 1)-deutig auf die ∞^4 Schließungskegelschnitte c_2 von N_2 bezogen.

Bei der zweiten Auffassung der Abbildung erscheinen die c_2 der (σ)-Ebene als Bilder der Regelflächen R resp. R' selbst, insofern die Fläche definiert wird als Ort der Sekanten der N_3, die einem gegebenen, allgemeinen resp. speziellen linearen Komplexe K_1 angehören.

Der laufende Punkt (x) einer Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$ hat die Koordinaten

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 + \tau : 3(\lambda_1 + \tau\lambda_2) : 3(\lambda_1^2 + \tau\lambda_2^2) : \lambda_1^3 + \tau\lambda_2^3.$$

Damit hat man als Linienkoordinaten p_{ik} der Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$

$$(10) \quad p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23} = \sigma_0^2 : \sigma_0\sigma_1 : \tfrac{1}{3}(\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2) : 3\sigma_0\sigma_2 : \sigma_1\sigma_2 : \sigma_2^2.$$

Sollen diese Sekanten s einem gegebenen linearen Komplexe K_1 (9) angehören, so gelangt man unmittelbar zur c_2-Gleichung (7′) und vice versa. Die Regelstrahlen h der Fläche R resp. R' bilden sich so (1, 1)-deutig auf die Punkte der c_2 ab.

Dies läßt sich noch genauer verfolgen. Die bisher nur schematische (σ)-Ebene werde als eine Raumebene E gewählt, die die N_3 in drei reellen getrennten Punkten E_1, E_2, E_3 treffe.

Die abwickelbare R-F_4 der N_3 (s. Nr. 76) schneidet E in einer r_4 mit drei Spitzen in E_1, E_2, E_3, deren Tangenten sich in einem Punkte E treffen. Auf die Ebene E werde die quadratische Punkttransformation T_2 angewendet mit Fundamentalpunkten in E_1, E_2, E_3, und E als einem sich selbst entsprechenden Punkte.

Vermöge dieser T_2 geht die r_4 über in einen dem Dreieck $\Delta(E_i)$ einbeschriebenen Kegelschnitt („Inkegelschnitt"), der als Normkegelschnitt $N_2 = \mathsf{N}_2$ von E zugrunde gelegt werde. Jeder Tangente λ der r_4 als Spur einer Ebene λ der N_3 entspricht (1, 1)-deutig eine Tangente λ von N_2.

Eine beliebige Sekante (λ_1, λ_2) treffe E in einem Punkte P'. Dann ist das T_2-Bild von P' gerade derjenige Punkt P, von dem die Tangenten λ_1, λ_2 an N_2 gehen, der also mit $P(\lambda_1, \lambda_2) = P(\sigma)$ zu bezeichnen ist.

Nunmehr ist der Übergang von der Fläche R resp. R' zum Kegelschnitte $c_2(\sigma)$ in E, und umgekehrt, einfach zu vollziehen.

Die Fläche R resp. R' schneidet die Ebene E in einer r_4' mit drei d_2 in E_1, E_2, E_3. Vermöge der T_2 geht die r_4' direkt in die $c_2(\sigma)$ über. Umgekehrt, liegt eine $c_2(\sigma)$ in E vor, so ist ihr T_2-Bild eine r_4' mit drei d_2 in E_1, E_2, E_3. Durch diese geht eine einzige F_4 mit N_3 als Doppelkurve, und diese ist die in Rede stehende R resp. R'.

79. Die Mohrmannsche Untersuchung der R-F_4 mit irreduzibler kubischer Doppelkurve. Die Theorie der beiden Flächenarten R, R' hat *H. Mohrmann*[196]) zu einem gewissen Abschlusse gebracht, indem er zugleich die Arbeiten seiner Vorgänger einer Kritik unterzieht.

So ist die *Clebsch*sche[195]) Erzeugung der R durch zwei projektiv bezogene C_2 auf die R beschränkt, da die R' überhaupt keine (irreduzibeln) C_2 enthalten.

In der Tat sind die R und R' als Punktgebilde wesentlich verschieden. Zu dem Behuf werden die R und R' als Projektionen gewisser Normalflächen F_4, F_4' im S_5 aufgefaßt.

Die F_4 tragen doppeltbinäre Gebiete, sind eindeutig abbildbar auf eine eigentliche F_2 im S_3, und gestatten eine mit der Gruppe der Kreisverwandtschaften holoedrisch-isomorphe Kollineationsgruppe.

Dagegen tragen die F_4' *Jonquières*sche Gebiete 2. Ordnung und 2. Art, und gestatten eine, mit der automorphen Kollineationsgruppe eines Kegels 2. Ordnung holoedrisch-isomorphe Kollineationsgruppe.

Rohn[194]) hatte die symmetrische doppeltquadratische Korrespondenz J zugrunde gelegt, die die Erzeugenden h der R unter den Punkten der $\bar{C}_3$ hervorrufen. Aber es fehlt der Spezialfall der kubisch-zyklischen J mit verschwindender Invariante S, und eben dieser führt zur R'.

Sturm[192]) hat die R synthetisch untersucht. Er beachtet aber nicht, daß zwei Spezialfälle der J, der obige und das Zerfallen in zwei bilineare, nicht-involutorische Korrespondenzen, einander teilweise überdecken, also nicht ausschließen.

80. Die R-F_4 mit reduzibler kubischer Doppelkurve. Nunmehr sind die Fälle zu erörtern, wo die $\bar{C}_3$ reduzibel wird.

Der Fall (α): Die $\bar{C}_3$ zerfällt in einen Kegelschnitt $\bar{k}$ und eine ihn treffende Gerade $\bar{g}$. Man ordne die Punkte von $\bar{k}$ und $\bar{g}$ in einer (2, 2)-deutigen Korrespondenz derart zu, daß der Inzidenzpunkt sich selbst entspricht. Die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte sind die Regelstrahlen der R-F_4. Man normiere die Punkte (z) von $\bar{k}$ durch $z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \lambda^2 : \lambda : 1 : 0$ und die Punkte y von $\bar{g}$ durch $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 0 : 0 : \lambda' : 1$, so wird die Verbindungslinie von (z) und (y) ein Regel-

196) *H. Mohrmann*, Math. Ann. 89 (1923), p. 1.

strahl h der R-F_4, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$(10) \qquad \lambda^2\lambda'^2 + a\lambda\lambda' + b\lambda + c = 0.$$

Die Gleichung der R-F_4 wird dann

$$(11) \quad (x_1x_3 - x_2^2)^2 + a(x_1x_3 - x_2^2)x_2x_4 + (bx_1 + cx_2)\,x_2x_4^2 = 0.$$

Man kann die Fläche auch erzeugen durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eines Kegelschnitts k' und einer Geraden g, wenn diese in einer (2, 1)-Korrespondenz stehen, und sich nicht treffen.

Der Fall (β): Haben dagegen k' und g einen Punkt entsprechend gemein, so fällt k' mit dem Doppelkegelschnitt $\bar{k}$ zusammen; in (10) und (11) erhält dann die Konstante c den Wert Null. Auf $\bar{k}$ gibt es einen, auf $\bar{g}$ zwei Kuspidalpunkte.

Der Fall (γ): Die $\bar{C}_3$ zerfällt in drei Doppelgerade[197]), von denen die eine $\bar{g}_1$, die beiden andern $\bar{g}_2, \bar{g}_3$ trifft (die selbst windschief sind). Man wähle die drei Geraden als Koordinatenkanten

$$g_1(x_1 = x_2 = 0), \quad g_2(x_1 = x_4 = 0), \quad g_3(x_3 = x_4 = 0).$$

Dann wird die Gleichung der R-F_4

$$(12) \qquad x_1^2x_3^2 + ax_1x_2x_3x_4 + (bx_1 + cx_2)x_2x_4^2 = 0.$$

Es ist $\bar{g}_1$ ein doppelter Regelstrahl, während $\bar{g}_2, \bar{g}_3$ doppelte Leitlinien der Fläche werden.

Die Fläche ist erzeugbar als Ort der Geraden, die zwei windschiefe Geraden g_2, g_3 und einen Kegelschnitt k, der weder mit g_2 noch mit g_3 einen Punkt gemein hat, treffen.

Oder auch als Ort der Geraden, die zwei feste Gerade g_2, g_3, und eine C_3, die mit jeder dieser Geraden einen Punkt gemein hat, schneiden.

Oder auch als Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte von zwei projektiv bezogenen C_2, falls die Punkte, in denen jede dieser C_2 die Ebene der andern trifft, paarweise einander zugeordnet sind. Die Schnittlinie beider Ebenen ist der doppelte Regelstrahl $\bar{g}_1$.

Oder endlich als Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte einer Geraden g und eines Kegelschnitts k, die in einer Korrespondenz (1, 2) stehen, derart, daß die beiden Punkte, die der Spur P von g in der Ebene von k auf k entsprechen, mit P in einer Geraden g_2 liegen. Diese beiden Geraden g_1, g_2 sind Doppelgeraden; die dritte, g_3, geht durch denjenigen Punkt O von g_2, in dem sich die Verbindungslinien der Punktepaare schneiden, die auf k den einzelnen Punkten von g_1 entsprechen, und geht ferner durch den Schnittpunkt der Ge-

197) *D. Segen,* J. f. Math. 112 (1893), p. 39.

raden, die die Schnittpunkte von k und irgendeiner Ebene durch g_1 mit den entsprechenden Punkten auf g_2 verbinden.

Auf g_2 und g_3 liegen zwei Kuspidalpunkte.

Der Fall (δ). Fallen im vorigen Falle im besonderen P und O zusammen, so auch g_2 und g_3.

Die Gleichung der Fläche wird

$$(13)\quad x_1^2(ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2) + x_1(x_1x_4 - x_2x_3)(dx_1 + ex_2) + (x_1x_4 - x_2x_3)^2 = 0.$$

Hierbei ist $x_1 = x_3 = 0$ der Doppelstrahl $\bar{g}_1$, und $x_1 = x_2 = 0$ die doppelt zu zählende Leitlinie $g_2 = g_3$.

81. Die R-F_4 vom Geschlecht 1 mit zwei windschiefen Doppelgeraden. Während die obigen R-F_4 alle vom Geschlecht 0 waren, gibt es noch einen Typus vom Geschlecht 1 mit zwei windschiefen — evtl. auch koinzidierenden — Doppelgeraden.

Man wähle sie als Koordinatenkanten

$$\bar{g}_1(x_1 = x_2 = 0), \quad \bar{g}_2(x_3 = x_4 = 0).$$

Die Gleichung der Fläche lautet, je nachdem man nach x_1, x_2 oder nach x_3, x_4 ordnet,

$$(14)\quad \begin{aligned} & x_1^2(ax_3^2 + 2bx_3x_4 + cx_4^2) + 2x_1x_2(a'x_3^2 + 2b'x_3x_4 + c'x_4^2) \\ & \quad + x_2^2(a''x_3^2 + 2b''x_3x_4 + c''x_4^2) \\ \equiv\ & x_3^2(ax_1^2 + 2a'x_1x_2 + a''x_2^2) + 2x_3x_4(bx_1^2 + 2b'x_1x_2 + b''x_2^2) \\ & \quad + x_4^2(cx_1^2 + 2c'x_1x_2 + c''x_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man die beiden Verhältnisse $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$ und $\frac{x_3}{x_4} = \mu$ als Parameter der Punktreihen auf $\bar{g}_2$ resp. $\bar{g}_1$, so erscheint (14) als doppeltquadratische Gleichung in λ und μ.

Somit erscheint die Fläche als Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte von zwei in einer (2, 2)-Korrespondenz stehenden Geraden g_1, g_2. Durch jeden Punkt von g_1 gehen zwei Regelstrahlen, die mit g_2 in einer Ebene liegen und vice versa.

Auf jeder der beiden Doppelgeraden $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ liegen vier Kuspidalpunkte.

Die Fläche ist auch erzeugbar als Ort der Strahlen, die zwei gegebene Gerade g_1, g_2 und eine ebene c_3, die g_1 wie g_2 einmal schneidet, treffen.

Dieser letzteren Erzeugung kann man sich auch in dem Sonderfalle bedienen, wo g_1 und g_2 in eine Gerade g koinzidieren.

Es treffe g die c_3 in O. Die c_3 steht zu g in einer (2, 1)-Korrespondenz derart, daß die Punktepaare von c_3, die den einzelnen Punkten von g entsprechen, mit O stets in einer Geraden liegen, wodurch das Strahlenbüschel (O) auf die Punktreihe (g) projektiv bezogen wird.

Die Fläche ist der Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte von c_3 und g.

Wählt man g als Kante $(x_1 = x_2 = 0)$, so nimmt die Gleichung der Fläche die Gestalt an

$$(15)\qquad f_4(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) \cdot (x_1 x_4 - x_2 x_3) + (x_1 x_4 - x_2 x_3)^2 = 0,$$

wo f_4 und f_2 binär in x_1, x_2 sind.

82. **Die Polaren-Methode von Wong.** Von einem einheitlichen und natürlichen Prinzip aus hat *Wong*[198]) die R-F_4 hergeleitet.

Es handelt sich um die liniengeometrische Ausdehnung der schon öfter benutzten quadratischen Punkttransformation T_2 der Ebene auf den Raum. Es liege ein F_2-Büschel $B(F, G)$ vor. Man ordne jedem Punkte P als seine „Polare" p die gemeinsame Schnittlinie seiner Polarebenen in bezug auf die Individuen in B zu. Durchläuft P irgendeine Raumkurve C, so beschreibt seine Polare p eine gewisse R-F.

Dies werde im besonderen auf die R-F_4 angewendet. Seien die Gleichungen von F und G

$$(16)\qquad \begin{cases} F \equiv \sum\sum a_{ik} x_i x_k \equiv (ax)^2 = 0, \\ G \equiv \sum\sum b_{ik} x_i x_k \equiv (bx)^2 = 0; \end{cases}$$

der Punkt P habe die Koordinaten (y). Versteht man unter F_r, G_r $(r = i, k, l, m)$ die ersten Ableitungen von F, G, so bestehen zwischen den x und y die beiden Beziehungen

$$(17)\qquad \begin{cases} \sum x_i F_i(y) \equiv \sum y_i F_i(x) \equiv (ax)(ay) = 0, \\ \sum x_i G_i(y) \equiv \sum y_i G_i(x) \equiv (bx)(by) = 0. \end{cases}$$

Sind π_{ik} die Achsenkoordinaten der Geraden p, so folgt aus (17):

$$(18)\qquad \varrho \pi_{ik} = (ay)(by)(ab)_{ik} \equiv \begin{vmatrix} F_i(y), & F_k(y) \\ G_i(y), & G_k(y) \end{vmatrix}.$$

Diese Darstellungen (18) lassen sich auch in eine einzige zusammenziehen. Bedeutet r irgendeine p treffende Gerade mit den Achsenkoordinaten $r_{lm} = (uv)_{lm}$, so läßt sich (18) ersetzen durch die Gleichung des linearen Komplexes, dessen Geraden p treffen,

$$(19)\qquad (\pi r) \equiv (ay)(by)(abuv) \equiv |F_i(y),\ G_i(y),\ u_i,\ v_i| = 0.$$

Analog zur T_2 liegt in (19) eine Erweiterung des *Clebsch*schen Übertragungsprinzips auf Komitanten vor (s. Nr. 5).

198) *B. C. Wong,* California Univ. Publ. 1 (1924), p. 371.

Eine Gerade g, deren Punktreihe von einem Parameter λ abhänge, trifft die beiden Flächen F, G in zwei Punktepaaren $f \equiv (a\lambda)^2 = 0$, $g \equiv (b\lambda)^2 = 0$, und das Büschel B in der Involution J: $f + \varrho g = 0$. Die Doppelpunkte D_1, D_2 von J bestimmen sich durch die Wurzeln der Funktionaldeterminante Θ von f, g: $\Theta \equiv (a\lambda)(b\lambda)(ab) = 0$.

Vermöge des Übertragungsprinzips gehen $(a\lambda)$, $(b\lambda)$ über in die quaternären Linearformen (ay), (by), und der binäre Klammerfaktor (ab) in die geänderte Determinante $(abuv)$, so daß $\Theta = 0$ übergeht in (19).

Läßt man jetzt die Gerade g variieren, so wird die Gesamtheit der Punktepaare D_1, D_2 direkt durch (21) dargestellt.

Es durchlaufe zunächst der Punkt $P(y)$ eine feste Gerade $g(y)$, die als Schnitt zweier Ebenen $(\alpha y) = 0$, $(\beta y) = 0$ gedacht sei. Kombiniert man diese beiden Gleichungen mit (17) und eliminiert die y, so ergibt sich

$$(20) \qquad |F_i(x),\ G_i(x),\ \alpha_i,\ \beta_i| = 0,$$

d. i. die Gleichung einer F_2. Beschreibt also ein Punkt P eine Gerade g, so durchläuft die Polare p die Erzeugenden (der einen Schar) einer R-F_2 (20).

Aber auch explizite läßt sich diese Schar der p leicht darstellen.

Man bestimme die Punkte $P(y)$ auf g durch einen Parameter τ, gemäß

$$(21) \qquad \varrho y_r = f_r(\tau) = c_r\tau + d_r \qquad (r = i, k, l, m),$$

so hat man für die Schar der p als Erzeugende der R-F_2 (20)

$$(22) \qquad \sigma\pi_{ik} = \begin{vmatrix} F_i[f_r(\tau)], & F_k[f_r(\tau)] \\ G_i[f_r(\tau)], & G_k[f_r(\tau)] \end{vmatrix},$$

wo die rechten Seiten quadratische binäre Formen in τ sind.

Nunmehr durchlaufe der Punkt $P(y)$ einen Raumkegelschnitt C_2, der gedacht sei als Schnitt einer festen Ebene $(\alpha y) = 0$ mit einer festen F_2: $F_2(y) = 0$. Man löse dann zunächst die drei Gleichungen

$$(23) \qquad \sum y_i F_i(x) = 0, \quad \sum y_i G_i(x) = 0, \quad (\alpha y) = 0$$

nach den y auf

$$(24) \qquad \omega y_i = \begin{vmatrix} F_k(x), & F_l(x), & F_m(x) \\ G_k(x), & G_l(x), & G_m(x) \\ \alpha_k, & \alpha_l, & \alpha_m \end{vmatrix} \equiv (FG\alpha)_{klm}.$$

Die Einsetzung dieser Werte der y in $F_2(y) = 0$ liefert als Ort der Geraden p eine R-F_4

$$(25) \qquad R\text{-}F_4 \equiv F_2[(FG)] = 0.$$

Deren explizite Darstellung vollzieht sich wie oben die der R-F_2.

Man stelle die C_2 explizite dar mittels eines Parameters τ

$$\varrho y_r = g_r(\tau) = a_r\tau^2 + 2b_r\tau + c_r \qquad (r = i, k, l, m). \tag{26}$$

Die Einsetzung in (22) liefert die Regelstrahlen p der R-F_4

$$\sigma\pi_{ik} = \begin{vmatrix} F_i[g_r(\tau)], & F_k[g_r(\tau)] \\ G_i[g_r(\tau)], & G_k[g_r(\tau)] \end{vmatrix}, \tag{27}$$

wo die rechten Seiten biquadratische binäre Formen in τ sind.

Durchläuft also ein Punkt P eine C_2, so beschreibt seine Polare p eine R-F_4, die durch (23) resp. (27) dargestellt ist.

Überdies läßt sich aus obigem eine einheitliche direkte Erzeugung der R-F_4 durch zwei projektiv zugeordnete F_2-Büschel entnehmen. Zu dem Behuf hat man nur die Erzeugung der C_2 durch zwei projektiv bezogene Geradenbüschel zugrunde zu legen. Dies überträgt sich auf die Erzeugung der R-F_4 wie folgt.

Es liegen zwei F_2-Büschel B_1 und B_2 vor, deren Basiskurve je in eine Gerade und eine C_3 zerfällt. Die beiden Büschel B_1, B_2 lassen sich projektiv so aufeinander beziehen, daß sich je zwei zugeordnete Individuen in einer C_4 schneiden, die wiederum in eine Gerade p und eine C_3 zerfällt. Dann ist die R-F_4 der Ort der Geraden p.

Die Geraden p bilden einen tetraedralen Komplex, indem sie die Ebenen des gemeinsamen Poltetraeders des Büschels B nach konstantem Doppelverhältnis treffen. Wählt man dieses Tetraeder als Koordinatentetraeder („allgemeiner Fall"), so vereinfacht sich die Rechnung erheblich. Es ist hierbei vorteilhaft, die C_2 innerhalb ihrer Ebene auf ein Dreiseit von Geraden g zu beziehen und entsprechend die R-F_4 auf deren drei Bild-F_2.

Den ∞^2 Punkten Y einer Ebene u entspricht eine Kongruenz von Geraden p, die Sekanten einer bestimmten C_3 sind; jede C in u geht über in eine R-F durch die C_3.

Nach diesem Verfahren hat *Wong*[198]) sämtliche 12 *Cremona*schen Typen von R-F_4 hergeleitet. Läßt man zunächt das F_2-Büschel B ein allgemeines sein und variiert in geeigneter Weise die Lage der C_2, so gelangt man bereits zu neun Typen der R-F_4.

Behufs der drei noch übrigen Typen hat man das Büschel B geeignet zu spezialisieren, etwa so, daß sich die Individuen von B längs einer festen Geraden berühren. Man legt dann wieder der Gleichung von B eine spezifische Normalform zugrunde.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die R-F_4 als ausgeartete *Kummer*sche Flächen auch als Singularitätenflächen spezieller quadratischer Komplexe K_2 studiert werden können. Unter den 58 projektiv verschiedenen Gattungen von K_2 befinden sich nach *A. Weiler*[198a]) 38 solche, die eine R-F_4 zur Singularitätenfläche haben.

Läßt sich im besonderen ein K_2 durch lineare Kongruenzen $\mathfrak{K}_1$ erzeugen, so bilden deren Direktrizen die Erzeugenden h einer R-F_4, die der Singularitätenfläche angehört. Umgekehrt, falls die Singularitätenfläche eine R-F_4 ist, muß jede ihrer h Direktrix einer $\mathfrak{K}_1$ des K_2 sein.

Daraufhin lassen sich diese $\mathfrak{K}_1$ bestimmen und konstruieren.

83. Die Regelflächen 5. Ordnung. Diese hat in einer vielzitierten Abhandlung *H. A. Schwarz*[199]) behandelt, und vollständig klassifiziert. Je nach der Natur der Doppelkurve gelangt er zu 15 verschiedenen Arten; für zehn derselben ist das Geschlecht gleich Null, für vier weitere ist $p = 1$, und für die letztere $p = 2$.

Die Doppelkurve ist der Reihe nach:

1. eine vierfache Gerade;
2. eine C_6 mit D_3;
3. eine dreifache Gerade und eine C_3;
4. eine dreifache Gerade, ein Kegelschnitt und eine Doppelerzeugende;
5. eine dreifache und eine zweifache Gerade nebst zwei Doppelerzeugenden; hierbei können im besonderen die beiden ersteren Geraden koinzidieren;
6. eine zweifache Gerade und eine C_5 mit D_3;
7. eine zweifache Gerade, eine R_4 mit d_2 und eine Doppelerzeugende;
8. ein Kegelschnitt und eine R_4 mit D_2;
9. drei Kegelschnitte, die je zwei Punkte gemein haben, von denen einer allen drei Kegelschnitten angehört;
10. eine Doppelerzeugende und eine C_5 mit D_2;
11. eine C_5;
12. eine dreifache Gerade und ein zweifacher Kegelschnitt;
13. eine dreifache und eine zweifache Gerade nebst einer Doppelerzeugenden;
14. eine zweifache Gerade und eine C_4;
15. eine dreifache und eine zweifache Gerade, die evtl. auch koinzidieren können.

198a) *A. Weiler*, Ztschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 257; J. f. Math. 95 (1883), p. 140. In einer früheren Arbeit, Math. Ann. 7 (1873), p. 145, hatte *Weiler* die 58 Gattungen quadratischer Komplexe aufgestellt.

199) *H. A. Schwarz*, J. f. Math. 67 (1866), p. 23.

84. Die Regelflächen sechster und höherer Ordnung. Einen ersten Versuch in der Klassifikation dieser Flächen R-F_6 macht *J. Bergstedt.*[200]) Indem er sich im wesentlichen der *Schwarz*schen Methode bedient, gelangt er, ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, zu neun verschiedenen Arten.

Weiter dringt *K. Fink*[201]) vor. Die Haupteinteilungsgesichtspunkte bleiben das Geschlecht p der Fläche R-F_6, und die Natur ihrer Doppelkurve.

Vorab wird allgemein das Maximum von p einer R-F_n durch Ermittlung der Anzahl der D_2 derjenigen Restkurve C bestimmt, die durch eine zwei erzeugende Gerade enthaltende Ebene ausgeschnitten wird.

Im Falle $n = 6$ werden sodann für jede mögliche Beschaffenheit des irreduzibeln Bestandteils von C das Geschlecht und die Ordnung der Doppelkurve $\bar{C}$ angegeben, sowie die Erzeugung der R-F_6 als Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier aufeinander bezogenen Kurven.

Insbesondere werden im Falle $p = 0$ Ordnung und Geschlecht der $\bar{C}$ nebst der Anzahl ihrer D_3 ermittelt. Für $p = 1$ beschränkt sich *Fink* auf Spezialfälle.

Behufs einer vollständigen Klassifikation der R-F_6 verwendet *A. Wiman*[202]) neue Methoden. Zugrunde wird gelegt der Komplex K niedrigster Ordnung, dem die Regelstrahlen der Fläche R-F_6 angehören; dieser Komplex wird in geeigneter Weise auf den Punktraum abgebildet, so daß sich die Fläche in eine Kurve C transformiert (vgl. auch hinsichtlich der R-F_4 Nr. 82).

Die Abbildung wird so gewählt, daß die Komplexkegel stets in Gerade übergeführt werden, die selbst einen gewissen, leicht bestimmbaren Komplex bilden. Hierbei wird die Doppelkurve $\bar{C}$ der R-F_6 abgebildet auf die Sekantenregelfläche der Bildkurve, die diesem Komplex angehört. Die Vereinfachung der gestellten Aufgabe besteht darin, daß erst die Eigenschaften jener Sekantenregelflächen für sich untersucht, und dann auf die Doppelkurve $\bar{C}$ übertragen werden.

Die Fundamentalgebilde der Abbildung werden naturgemäß so bestimmt, daß die Ordnung der Bildkurve einen kleinsten Wert erhält; es treten dann nur die drei Fälle ein, wo diese Ordnung gleich resp. 3, 4, 5 wird. Als Hilfskomplex läßt sich ein tetraedraler K benutzen, der sich mittels eines F_2-Büschels B einfach auf den Punktraum abbilden läßt, in dem K von den Polargeraden der Punkte bez. B gebildet wird (s. Nr. 82).

200) *J. Bergstedt,* Lund Akad. Afh. 1886.

201) *K. Fink,* Dissert. Tübingen 1887.

202) *A. Wiman,* Dissert. Lund 1892.

In dem Sonderfalle, wo die R-F_6 Leitgerade besitzt, geht K in einen speziellen linearen Komplex über; eine der F_2 in B artet in ein Ebenenpaar aus.

Enthält ein allgemeiner linearer Komplex die Erzeugenden h der R-F_6, so hat die Sekantenregelfläche eine C_2 als Leitkurve, und umgekehrt.

Es werden daraufhin für die verschiedenen Arten der R-F_6 folgende Anzahlen ermittelt:

	$p=0$	$p=1$	$p=2$
Mit einer Leitgeraden	32	18	7
Ohne Leitgerade	36	11	2

Eine R-F_6 ohne zwei Leitgerade hat also höchstens das Geschlecht 2.

Überdies werden allgemein für eine R-F_n ohne dreifache Kurve und Leitgerade die Anzahl t der D_3 und die des Geschlechtes P der $\bar{C}$ ausgedrückt durch die Ordnung n der Fläche, das Geschlecht p und die Zahl f der D_2

$$\begin{cases} t = \frac{1}{6}(n-4)\{(n-2)(n-3)-6p\}, \\ P = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)+p(n-5)-f. \end{cases}$$

Mithin muß $p \leqq \frac{1}{6}(n-2)(n-3)$ sein.

Entsprechende Formeln gelten für R-F mit einer Leitgeraden.

XIII. Metrisch bemerkenswerte Flächen vierter und höherer Ordnung.

85. Aus Flächen 2. Ordnung abgeleitete Flächen vierter und höherer Ordnung. Vorab mögen zwei Arbeiten von *E. E. Kummer* besprochen werden, da sie allgemeinere Gesichtspunkte enthalten. Beidemal wird die Einhüllende einer Schar von F_2 betrachtet.

Sei zunächst[203]) eine quadratische Schar von F_2 vorgelegt mit dem Parameter λ

(1) $$\lambda^2\varphi + 2\lambda\psi + \chi = 0.$$

Dann ist die Einhüllende die F_4

(2) $$F_4 \equiv \psi^2 - \varphi\chi = 0.$$

Diese Gattung von F_4 umfaßt eine Reihe bekannterer, so die F_4 mit C_2 (Abschn. III), die *Kummer*sche Fläche K_m (Abschn. XII), die F_4 mit acht assoziierten D_2 (Nr. **61**), die *Steiner*sche Fläche S (Abschn. VII), die R-F_4 mit kubischer Doppelkurve (Nr. **78** ff.) u. a.

Während im allgemeinen die Doppeltangenten t_2 einer F_4 ein

203) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. 1872, p. 474.

Strahlensystem (12, 28) bilden, so ist es für die F_4 (2) charakteristisch, daß das System in zwei zerfällt: (α) (4, 12), und (β) (8, 16).

Das System (α) besteht aus den Erzeugenden aller einhüllenden F_2, enthält also im besonderen die Kanten der acht, in der F_2-Schar (1) existierenden Kegel.

Adjungiert man der F_4 (2) noch die Scheitel jener acht Kegel, so erhält man die vollständige Brennfläche des Strahlensystems (α).

Dies ist der Spezialfall eines allgemeinen Gesetzes. Man betrachte das System der Doppeltangenten t_2 einer F_n. Dann zerfällt die Brennfläche dieses Systems in die F_n selbst, und die abwickelbare Fläche der doppelt berührenden Ebenen T_2 der F_n.

Kehren wir zur F_4 (2) zurück, so enthält das System (α) auch die Kanten der acht Kegel, die gebildet werden von den durch die acht Grundpunkte des Netzes (φ, ψ, χ) gehenden Strahlen; diese acht Grundpunkte sind D_2 der F_4. Diese acht Kegel sind die Orte der durch die D_2 gehenden Tangenten der F_4.

Die von den T_2 der F_2 (2) eingehüllte abwickelbare Fläche ist eine F_{96}, die aber zerfällt in jene acht doppelzählenden Kegel 6. Ordnung und eine F_{48}.

In gewissen Fällen kann das System (α) der Ordnung 4 in zwei Systeme 2. Ordnung zerfallen. Man kann auf diese Weise alle Strahlensysteme 2. Ordnung erhalten, die Brennflächen, aber keine Brennkurven haben, exkl. die der Klasse 7.

Das Obige findet dann noch seine Anwendung auf die *Kummer*sche Fläche K_m

$$K_m \equiv \varphi^2 - pqrs = 0, \tag{3}$$

wobei verschiedene Modifikationen eintreten.

Als Spezialfall der K_m erscheint die *Steiner*sche Fläche S. Es werden am Schlusse einige Gipsmodelle der K_m beschrieben.

Beim nächsten Schritt[204]) liegt eine kubische Schar von F_2 vor

$$\lambda^3\varphi + 3\lambda^2\psi + 3\lambda\chi + \omega = 0. \tag{4}$$

Die einhüllende Fläche F dieser Schar erhält man durch Nullsetzen der Diskriminante der in λ kubischen Form (4)

$$F \equiv 4(\psi^2 - \varphi\chi)(\chi^2 - \varphi\omega) - (\varphi\omega - \psi\chi)^2 = 0. \tag{5}$$

Diese Fläche F ist eine F_8, die insofern ein bemerkenswertes Seitenstück zur *Kummer*schen Fläche K_m bildet, als auch sie zu sich selbst dual (reziprok) ist. Diese F_8 erscheint auch als Brennfläche eines Strahlensystems (3, 3), falls die drei durch irgendeinen Punkt gehenden Strahlen des Systems nicht inzident sind.

204) *E. E. Kummer*, Berlin Ber. 1878, p. 25.

Die F_8 hat eine Wendekurve C_8, zwölf singuläre, längs C_2 berührende Tangentenebenen T, sowie zwölf D_2, die auf sechs Schnittachsen der zwölf T liegen. Jede dieser T ist in vier Punkten Schmiegungsebene der C_8, die zugleich auf den Berührungs-C_2 der T liegen. In einem Zusatze bemerkt *Cayley*[205]), daß die obige F_8 zu einer Gattung von Flächen gehört, die er[206]) als Schnitte von drei gewissen, projektiv bezogenen Komplexen erhalten hat.

Das *Kummer*sche Verfahren ließe sich fortsetzen, indem man einhüllende Flächen von biquadratischen, ... F_2-Scharen betrachtet. Diese Flächen scheinen aber zu kompliziert zu sein, um noch Interesse zu erwecken. Vgl. indessen (weiter unten) eine spezielle biquadratische F_2-Schar als Enveloppe der Parallelflächen des Ellipsoides.

Ist im besonderen in der Gleichung (2) eine der beiden quadratischen Formen φ, χ das Quadrat einer Linearform p, so spezialisiert sich die F_4 (2) zu einer F_4 mit $\bar{C}_2$; für $p = 0$ als E_∞, und ψ als einen Minimalkegel tritt die Reduktion auf eine Zyklide Z ein. Als ein bemerkenswerter Unterfall der letzteren bietet sich die Inverse einer zentrischen F_2 in bezug auf deren Mittelpunkt als Pol dar. Macht man x, y, z noch mit q homogen, so sei die F_2, mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt, dargestellt durch

$$(6) \qquad F_2 \equiv G_2 - q^2 = 0,$$

wo G_2 eine quadratische Form in x, y, z ist. Vermöge der Inversion bez. O geht (6) über in die F_4

$$(7) \qquad F_4 \equiv q^2 G_2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0,$$

also in eine leicht zu diskutierende Z. Ist im besonderen (6) ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c, so geht (7) über in

$$(7') \qquad F_4 = q^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Diese F_4 tritt in der Mathematik deformierbarer Körper als „Elastizitätsoberfläche“ auf.

Cayley[207]) untersucht die Zentralinverse einer zentrischen F_2, indem er deren Gleichung auf verschiedene Formen bringt.

Im Falle eines Ellipsoides studiert *Cayley*[208]) die parabolische Kurve der in Rede stehenden Fläche, d. i. den Schnitt mit ihrer *Hesse*schen Fläche. Nach Abspaltung von vier doppelt zu zählenden Geraden, den

205) *A. Cayley*, ib. p. 309.
206) *A. Cayley*, London Math. Soc. Proc. 2 (1870).
207) *A. Cayley*, Quart. J. 11 (1871), p. 283.
208) *A. Cayley*, Quart. J. 15 (1877), p. 141.

K treffenden Kanten des Asymptotenkegels des Ellipsoides, bleibt als „eigentliche" parabolische Kurve eine C_8.

Das Problem der Quadratur der Elastizitätsoberfläche hat, nach dem Vorgange von *K. G. J. Jacobi*, *Ed. Hutt*[209]) eingehend behandelt. Indem er innerhalb des Doppelintegrals der Quadratur zwei geeignete neue Variable einführt, läßt sich die Integration nach der einen algebraisch ausführen; die Integration nach der zweiten Variabeln führt auf ein elliptisches Integral.

Dies Ergebnis dehnt *Hutt* weiterhin auf irgendeine Parallelfläche zur Elastizitätsoberfläche aus. Weiter bietet sich als ein eigenartiger metrischer Unterfall von (4) dar in der Schar konfokaler Mittelpunkts-F_2

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-q^2=0.$$

Nach Heraufmultiplikation der Nenner und Verwendung von Summenabkürzungen, wie $\sum x^2 = x^2 + y^2 + z^2$ u. a., nimmt (8) die Gestalt an

$$(8') \qquad \lambda^3 q^2 + \lambda^2\{\sum x^2 - q^2\sum a^2\} - \lambda\{\sum x^2(b^2+c^2) - q^2\sum b^2c^2\} + \{q^2a^2b^2c^2 + \sum x^2b^2c^2\} = 0.$$

Die zugehörige F_8 (5) besitzt nur ∞^1 reelle Punkte, nämlich die der beiden einteiligen Fokalkegelschnitte der Schar (8).

Diese beiden Fokalkegelschnitte nebst dem dritten (nullteiligen), sowie dem Kugelkreise K sind Doppelkegelschnitte $\overline{C}_2$ der F_8. Daraufhin läßt sich die Form F_8 als Summe von (7 resp. 10) Quadraten darstellen.

Die F_8 ist auch insofern bemerkenswert, als sie nach *F. Geiser*[210]) zusammenfällt mit dem Ort der Spitzen (x, y, z, q) der an das Ellipsoid (a, b, c) gehenden Rotationskegel. Dies setzt *Geiser* in Beziehung zum Hauptachsenproblem des Ellipsoides (oder allgemeiner, einer zentrischen F_2).

Diese drei Hauptachsen hängen von einer gewissen kubischen Gleichung $f_3(\lambda) = 0$ ab. *E. E. Kummer*[210]) hatte gezeigt, daß die Diskriminante von f_3 als Summe von Quadraten darstellbar ist.

Auf Grund der Quadratsummendarstellung der Form F_8 liefert *Geiser* einen neuen Beweis des *Kummer*schen Satzes, wobei zugleich dessen innerer Grund anschaulich hervortritt.

Es werde noch auf einige weitere, den zentrischen F_2 und im be-

---

209) *Ed. Hutt*, Progr. Tilsit 1868. Die *Jacobi*sche Quadratur findet sich in J. f. Math. 39 (1850), p. 299.

210) *F. Geiser*, J. f. Math. 77 (1876), p. 47. Bezüglich des *Kummer*schen Satzes s. J. f. Math. 26 (1843), p. 268.

sonderen dem Ellipsoide entspringende Flächen höherer Ordnung eingegangen.

Da kommt vor allem die vielfach (s. „*Salmon-Fiedler*", Nr. 273) untersuchte Parallelfläche des Ellipsoides in Betracht. Hierbei sei bemerkt, daß *S. Roberts*[211]) für die Parallelfläche einer zentrischen F_2 Ordnung, Klasse und einige Singularitäten bestimmt hat.

Weiter zeigt *Cayley*[211a]), daß sich diese Fläche als Enveloppe einer biquadratischen Schar von F_2 ansehen läßt. Ist die Gleichung des Ellipsoides

$$(9) \qquad E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \equiv \sum \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0,$$

und h der Abtsand zwischen Ellipsoid und Parallelfläche, so lautet die Gleichung der Schar mit dem Parameter ϱ

$$(10) \qquad \sum \frac{x^2}{a^2 + \varrho} - \left(1 + \frac{h^2}{\varrho}\right) = 0.$$

Bringt man die Nenner herauf, so ergibt sich links eine biquadratische Form $f_4(\varrho)$. Durch Nullsetzen von deren Diskriminante erhält man die Gleichung der Parallelfläche; diese erweist sich also als eine F_{12}. Sind g_2 und g_3 die Invarianten von $f_4(\varrho)$, so wird die Gleichung

$$(11) \qquad F_{12} \equiv g_2^3 - 27 g_3^2 = 0.$$

Hier stellt $g_2 = 0$ eine F_4, und $g_3 = 0$ eine F_6 dar; deren Schnittkurve, eine C_{24}, ist die Kuspidalkurve der F_{12}.

Eine eingehende Untersuchung der Parallelfläche verdankt man *Th Craig.*[212]) Die Fläche ist eine F_{12} (s. oben bei *Cayley*) mit einer C_{24} als Kuspidalkurve.

Nach Aufstellung der Gleichung der F_{12} werden die Krümmungsparameter u, v des Ellipsoides als unabhängige Variable eingeführt. Es ergibt sich dann für $\alpha = b - c$, $\beta = c - a$, $\gamma = a - b$ die einfache explizite irrationale Darstellung der F_{12}

$$(12) \qquad x = \sqrt{\frac{a(a+u)+v}{-\beta\gamma}} \left(1 + \frac{h}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right), \quad \text{usf.}$$

Nach Diskussion der Hauptschnitte der Fläche wird dann ihre Kuspidalkurve C_{24} untersucht. Diese zerfällt in die drei Fokalkegelschnitte des Ellipsoides, den Kugelkreis K und 16 Tangenten des letzteren.

Sodann hat *J. C. Malet*[212a]) die negative Fußpunktfläche F'' einer

211) *S. Roberts*, London Math. Soc. Proc. 4 (1872), p. 57.

211a) *A. Cayley*, Mess. 5 (1870), p. 191.

212) *Th. Craig*, J. f. Math. 93 (1889), p. 251.

212a) *J. C. Malet*, Dublin Trans. 1878 (zwei Abhandlungen).

zentrischen F_2 untersucht. Vorab wird als Vorbereitung der Fall der Ebene, also einer zentrischen c_2 behandelt.

Die gesuchte Kurve erweist sich als eine r_6 mit vier d_2 und sechs Spitzen. Die Spitzen liegen auf einer c_2, ihre Tangenten berühren eine γ_2; die acht Tangenten in den vier d_2 berühren eine γ_2', und die sechs Berührungspunkte der drei Doppeltangenten t_2 liegen auf einer c_2'.

Rechnung und geometrische Deutung verlaufen analog bei dem Raumproblem, nur daß hier naturgemäß die Singularitäten der fraglichen F_6 komplizierter sind.

Das in Rede stehende Problem läßt sich verallgemeinern. In der Ebene suche man den Ort der Mittelpunkte eines veränderlichen Kreises, der einen gegebenen Kreis orthogonal schneidet und eine gegebene Kurve c berührt. Andere Unterfälle dieser Verallgemeinerung sind die Parallelkurve von c nebst ihrer negativen Fußpunktkurve, sowie der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der die c und einen festen Kreis berührt.

Entsprechende Ansätze werden für den Fall des Raumes gemacht.

Weiter sei die „Gegenfußpunktsfläche" F' des Ellipsoides erwähnt. Allgemein, bei beliebiger Urfläche F, versteht *Th. Craig*[212]) unter der Fläche F' den Ort der Fußpunkte der Ebenen, die man durch einen festen Punkt P_0, den Pol, senkrecht zu den Normalen von F legen kann.

Für das Ellipsoid (9) als Urfläche und dessen Mittelpunkt als Pol erweist sich die fragliche Fläche F' als eine F_{10}.

Die Ableitung ihrer Gleichung erfolgt durch eine umständliche Elimination. Aus der Gleichung lassen sich einige Gestaltsverhältnisse der Fläche ableiten.

Eine einfachere explizite Darstellung ergibt sich, wenn man, wie oben, die Krümmungsparameter u, v des Ellipsoides als Parameter einführt. Damit gewinnt man die Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Fläche F', aus denen man weitere Eigenschaften derselben ableiten kann.

Die Fläche F' hängt mit der Urfläche F und deren Fußpunktfläche F'' nach einem einfachen Gesetze zusammen:

Die beiden Normalen in entsprechenden Punkten der beiden letzteren Flächen treffen sich in dem entsprechenden Punkte der ersteren Fläche.

Zu einer eigentümlichen Fläche gelangt *L. Glaisher*[213]), indem er nach dem Ort der Mittelpunkte der Sehnen konstanter Länge eines Ellipsoides fragt.

---

213) *L. Glaisher,* Quart. J. 16 (1879), p. 283.

Vorab wird die analoge Frage in der Ebene für eine Ellipse erörtert. Es ergibt sich als Ort eine c_4, die eingehend diskutiert wird. Für das Ellipsoid ergibt sich als Ort ein räumliches Gebiet, das von Teilen einer gewissen F_6 begrenzt wird. Ist die Gleichung des Ellipsoides E, wie in (9), gegeben, und k die konstante Sehnenlänge, so lautet die Gleichung der F_6

$$(13) \qquad F_6 = \sum \frac{x^2}{a^2(a^2E^2 + k^2)} = 0.$$

Irgendeiner der drei Hauptschnitte der F_6 zerfällt in eine c_4 der obigen Art und eine Ellipse, die zu dem zugehörigen Hauptschnitt des Ellipsoides ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Zwischen diesen beiden Kurven verläuft jeweils der Streifen des Ortsraumes.

Es wird noch auf gewisse Analogien zwischen der F_6 und der Wellenfläche hinsichtlich Gleichungsform und Gestalt hingewiesen.

Im Falle eines Rotationsellipsoides treten gewisse Vereinfachungen ein.

Bezüglich mehr elementarer Eigenschaften von, aus einer F_2 (resp. C_2) abgeleiteten metrischen Flächen höherer Ordnung (positive und negative Fußpunktfläche, Parallelfläche, Torusfläche u. a.) sei auf „*Salmon-Fiedler*", Kap. IV verwiesen.

86. **Andere bemerkenswerte metrische Flächen vierter und höherer Ordnung.** Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sollen hier nur einige beachtenswerte Typen metrischer F_4 herausgehoben werden. Bei *W. Marx*[214]) liegt die stereometrische Aufgabe zugrunde, drei gegebene Raumgerade a, b, c durch eine Ebene nach einem Dreieck Δ mit vorgeschriebenen Winkeln α, β, γ zu schneiden. Man verbinde einen beliebig, aber fest gewählten Punkt A auf a mit einem auf b variierenden Punkte B durch eine Strecke s. Über s konstruiere man ein Dreieck Δ der gesuchten Art. Dann beschreibt die dritte Ecke von Δ einen Kreis, und dieser Kreis beschreibt bei (auf b) variierendem Punkte B eine F_4 mit einem Doppelkegelschnitt, der selbst ein gewisser Kreis durch A ist. Diese F_4 wird diskutiert; ihre vier Schnittpunkte mit der Geraden c führen zu den vier Lösungen der obigen Aufgabe.

A. Sucharda[215]) untersucht eingehend „Rückungsflächen", die entstehen durch Parallelverschiebung eines (unveränderlichen) Kegelschnitts C längs eines festen Kegelschnitts C_0. Diese Flächen gehören zur Gattung der F_4 mit $\overline{C}_2$.

214) *W. Marx,* Dissert. München 1880.

215) *A. Sucharda,* Casopis 13 (1884), p. 1, 161; ib. 15 (1886), p. 149; Wien Ber. 97 (1888), p. 1083; ib. 99 (1890), p. 549; ib. 101 (1892), p. 585.

In einer ersten Arbeit (1884) sind im besonderen C und C_0 Kreise, deren Ebenen orthogonal sind. Es werden für eine solche „Kreisrückungsfläche" ihre Symmetrieverhältnisse, ihre $\bar{C}_2$, ihre Kurve der parabolischen Punkte und ihre Kuspidalpunkte diskutiert, sodann ihre Polarflächen, ihre *Steiner*sche Fläche u. a. m. In einer zweiten Arbeit (1886) werden C und C_0 als beliebige Kegelschnitte angenommen. Es handelt sich vor allem um die Ermittelung der 16 Geraden g der F_4, und deren Anordnung. Als Hilfsmittel dient die *Geiser*sche Verallgemeinerung[215a]) der Inversion (s. Nr. 25): Jedem Punkte X entspreche ein Punkt Y derart, daß ihre Verbindungsgerade p durch einen festen Punkt P_0 geht, und das Paar (X, Y) durch die Schnittpunkte von h mit einer festen F_2 harmonisch getrennt wird. Als zu transformierende Rückungs-F_4 wird im besonderen eine durch zwei gleichseitige Hyperbeln C, C_0 bestimmte gewählt, und als F_2 ein die $\bar{C}_2$ enthaltendes Rotationshyperboloid.

Die Transformierte der F_4 ist eine F_8, die sich aber nach Absonderung einer Ebene und eines Doppelkegels auf eine spezielle F_3 reduziert, in deren 27 Geraden die 16 der F_4 enthalten sind. Je vier dieser 16 g fallen in eine Gerade zusammen.

Die Methode ist auf den allgemeinen Fall übertragbar.

In drei weiteren Arbeiten[215]) werden Rückungs-F_4 mit einem Mittelpunkt untersucht; diese entstehen, wenn C und C_0 zentrische Kegelschnitte sind. Es werden (1889) wiederum die Singularitäten der F_4 ermittelt u. a. m. Die F_4 enthält zwei Systeme unter sich und mit C resp. C_0 kongruenter und homothetischer Kegelschnitte. Im besonderen wird (1888) die Normalenfläche F längs eines solchen verfolgt. Der Richtungskegel von F ist ein Kegel 2. Ordnung. Alle hierher gehörigen Berührungsaufgaben sind mit Zirkel und Lineal lösbar. Die Fläche F ist erzeugbar aus zwei ebenen c in (1, 2)-Korrespondenz. Die Fläche ist eine F_6 vom Geschlecht 0 und vom Range 10. Als Doppelkurve tritt eine C_{10} auf, die aber in eine C_2 (in E_∞) und eine C_8 zerfällt.

Beachtenswert ist, wie in einer letzten Arbeit (1892) genauer ausgeführt wird, daß sich die ziemlich verwickelten Singularitäten der Fläche in Paaren von reziproken anordnen lassen.

Zu einem metrischen Repräsentanten einer F_4 mit zerfallender $\bar{C}_2$ und vier isolierten D_2 führt eine stereometrische Aufgabe bei *W. Schmidt.*[216]) Die F_4 ist der Ort der Punkte, deren Entfernungen

215a) *F. Geiser,* J. f. Math. 70 (1869), p. 249.

216) *W. Schmidt,* Progr. Realgymn. Lüdenscheid 1889. Den Sonderfall, wo die beiden Geraden g_1, g_2 inzident sind, hatten bereits *A. Luchterhandt,* Progr.

l_1, l_2 von zwei gegebenen windschiefen Geraden g_1, g_2 eine konstante Summe k besitzen. Die vier D_2 bestimmen ein windschiefes Rechteck, dessen Diagonalen g_1 und g_2 sind, während die Seiten der F_4 angehören, womit alle g der Fläche erschöpft sind. Die F_4 besteht aus zwei, in den D_2 zusammenhängenden Mänteln, von denen aber nur der endliche (mit elliptischer Krümmung) der Aufgabe entspricht; für die Punkte des unendlichen Mantels (mit hyperbolischer Krümmung) ist $l_1 - l_2 = k$.

Für $k < \delta$, wo δ den kürzesten Abstand zwischen g_1 und g_2 bedeutet, verschwindet der endliche Mantel. Für den Grenzfall $k = \delta$ resultiert die *Steiner*sche Fläche S (s. Art. „F_3", Nr. **13**).

Zu einer speziellen F_4 mit $\bar{C}_2$ führt eine instruktive Aufgabe aus der Differentialgeometrie. Man suche mit *F. Rudio*[217]) eine Fläche F, deren Krümmungsmittelpunktsfläche aus zwei konfokalen (Mittelpunkts-) F_2 besteht. Sei $a^2 > b^2 > c^2$, so stellt

(1) $$\sum_x \frac{x^2}{a^2-\lambda} = 1$$

ein konfokales F_2-System dar. Durch irgendeinen Punkt $P(x, y, z) = P(\lambda, u, v)$ gehen drei solcher F_2, wo λ, u, v, die Wurzeln von (1), die elliptischen Koordinaten von P sind. Vom Punkte P, der auf der $F_2(\lambda)$ liegt, gehen zwei Gerade t_1, t_2 aus, die $F_2(\lambda)$ und eine weitere $F_2(\mu)$ des Systems (1) berühren.

Setzt man zur Abkürzung

(2) $$U = \frac{\sqrt{f(u)}}{(\lambda-u)(\mu-u)}, \quad V = \frac{\sqrt{f(v)}}{(\lambda-v)(\mu-v)},$$

wo $f(v) = (a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v)$, so erhält man für die Richtungskosinus ξ, η, ζ von t_1, resp. t_2 die Werte

(3) $$\xi = x\left[\frac{U}{a^2-u}\cdot\frac{\mu-u}{v-u} + \frac{V}{a^2-v}\cdot\frac{\mu-v}{u-v}\right] \text{ usf.}$$

Das Strahlensystem

(4) $$x' = x + \varrho\xi$$

wird zum Normalensystem einer Fläche F, sobald man ϱ den Wert beilegt

(5) $$\varrho = \frac{1}{2}\left\{\int\frac{du}{U} + \int\frac{dv}{V}\right\}.$$

Diese Fläche F ist die in Rede stehende F_4 mit $\bar{C}_2$.

Friedrich-Wilhelm-Gymn. Berlin 1861, und ausführlicher *R. Gantzer*, Progr. Stendal 1876, untersucht. Die Gestaltsverhältnisse der Fläche sind im wesentlichen dieselben, wie im allgemeinen Falle.

217) *F. Rudio*, J. f. Math. 94 (1883), p. 240; ib. 105 (1888), p. 85. Vgl. auch *F. Klein*, Höhere Geom., 3. Aufl., hrsg. von *E. Blaschke*, Berlin 1926, § 6.

Die Methode und ihr Ergebnis lassen sich, wie in einer weiteren Arbeit[217]) gezeigt wird, ausdehnen auf die Mittelpunktsfläche F eines Strahlensystems 4. Ordnung und 4. Klasse, dessen Brennfläche aus zwei konfokalen F_2 besteht.

Eine einfache stereometrische Aufgabe führt *L. Heffter*[218]) zu „Isogonalflächen" 4. Ordnung. Sind in der Ebene zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben, so ist bekanntlich der Ort der Punkte P, deren Verbindungslinien mit P_1, P_2 einen konstanten Winkel φ einschließen, ein System von zwei Kreisen, daß man auch als eine zerfallende c_4 („Isogonalkurve") auffassen kann.

Für den Raum bieten sich, wenn wiederum zwei Punkte P_1, P_2 gegeben sind, drei verschiedene Ausdehnungen dar.

Erstens, die „Isogonalfläche $J_\varphi(P_1, P_2)$", als Ort der Punkte P, deren Verbindungslinien mit P_1, P_2 einen konstanten Winkel φ bilden. Zweitens, die „Isogonalfläche $J_\varphi(g, A)$", als Ort der Punkte P, für die die Ebene (P, g) mit dem Strahle (P, A) einen konstanten Winkel φ bildet. Drittens, die „Isogonalfläche $J_\varphi(g_1, g_2)$", als Ort der Punkte P, für die die beiden Ebenen (P, g_1) und (P, g_2) einen konstanten Winkel φ einschließen.

Diese drei Arten von Flächen, die stets von der 4^{ten} Ordnung sind, werden geometrisch wie analytisch eingehend untersucht.

Im ersten Falle ergibt sich offenbar die Rotationsfläche der in zwei Kreise zerfallenden c_4. Im zweiten Falle gelangt man zu einer F_4, die die Gerade g als Doppelgerade und den Punkt A als D_2 besitzt. Im dritten Falle resultiert eine R-F_4. Daß die Fläche eine R-F sein muß, erkennt man, wenn man sie so entstehen läßt, daß eine variierende Ebene E_1 des Büschels (g_1) stets mit einer, ihr projektiv zugeordneten Ebene E_2 des Büschels (g_2), die mit E_1 den Winkel φ bildet, geschnitten wird. Die Fläche besteht aus allen Tangentenpaaren, die von g_2 an die, aus der Fläche $J_\varphi(g_1, A_2)$ vom Büschel $\mathsf{E}_1(g_1)$ — oder auch, die von g_1 an die, aus der Fläche $J_\varphi(g_2, A_1)$ vom Büschel $\mathsf{E}_2(g_2)$ — ausgeschnittenen Kreise gehen.

Hierbei bedeuten A_1 und A_2 die Endpunkte der kürzesten Entfernung δ zwischen g_1 und g_2. Die Gestalt dieser R-F_4 variiert, je nachdem der Winkel $\alpha(g_1, g_2) \lesseqgtr \varphi$ ist.

Für $\alpha < \varphi$ besteht die R-F_4 aus zwei in sich geschlossenen Mänteln, die sich in g_1 und g_2 durchsetzen. Für $\alpha > \varphi$ existiert nur ein einziger Mantel, der sich längs der Geraden g_1 und g_2 durchsetzt, die aber nicht ihrer ganzen Ausdehnung nach der Fläche reell angehören.

218) *L. Heffter*, J. f. Math. 105 (1895), p. 1; Ztschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 163.

Im Grenzfalle $\alpha = \varphi$ wird die Gerade $\delta = (A_1, A_2)$ zu einer Doppelerzeugenden der R-F_4. Man hat wiederum einen einzigen Mantel, der sich in den drei Geraden δ, g_1, g_2 durchsetzt, wo g_1 und g_2 ihrer ganzen Ausdehnung nach der Fläche angehören. Es wird auch der andere Grenzfall berücksichtigt, wo g_1 und g_2 inzident sind; die R-F_4 artet dann in einen „Isogonalkegel" aus.

In einem Nachtrage[218]) setzt der Verfasser auseinander, wie man von den verschiedenen F_4-Formen ein anschauliches Bild gewinnen kann, und beschreibt Modelle und Apparate, die von *W. Schmidt* in Gießen ausgeführt sind.

Von größerer Bedeutung als diese speziellen Untersuchungen sind die über Flächen mit Symmetriebenen $\mathsf{E}^{(s)}$, die sich mit denen regulärer Körper $K^{(s)}$ decken. Solche Flächen mögen kurz „symmetrische" heißen und mit $F^{(s)}$ bezeichnet werden. Es sei von vornherein betont, daß durch das Studium dieser Flächengattungen auch die Theorie der $K^{(s)}$ wesentlich gefördert wird.

Die beiden grundlegenden Abhandlungen sind die von *E. Lecornu* und *E. Goursat*.[219])

In der ersten wird, zunächst unabhängig von der Zahl und Anordnung der $\mathsf{E}^{(s)}$, die Gleichungsform der $F^{(s)}$ bestimmt. Als Grundlage dient der Satz:

„Haben drei (algebraische) Flächen $L =$ konst., $M =$ konst., $N =$ konst. gerade so viel gemeinsame Punkte, als zur Herstellung der Symmetrie erforderlich ist, so ist jede $F^{(s)}$ als ganze Funktion von L, M, N darstellbar."

L, M, N heißen „symmetrische Elemente". Für die weiteren Rechnungen werden vorab solche drei Elemente möglichst einfach ausgewählt: $L = x^2 + y^2 + z^2$, M und N je als Produkt der Abstände eines Punktes von den $\mathsf{E}^{(s)}$ eines auf die beiden einfachsten Arten zu wählenden symmetrischen Systems.

Für m, n als die Ordnungen von M, N erweist sich die Zahl der $\mathsf{E}^{(s)}$ des zugehörigen $K^{(s)}$ gleich $m + n - 1$. Nunmehr werden, im Anschluß an die fünf regulären $K^{(s)}$, drei Typen solcher symmetrischen Systeme unterschieden: Der „tetraedrische" Typus (I), der „kubo-oktaedrische" (II), und der „ikosi-dodekaedrische" (III).

Beim Typus (I) mit sechs $\mathsf{E}^{(s)}$ ist zu setzen

$$\text{(I)}\begin{cases} M = xyz, \\ N = -(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z). \end{cases}$$

219) *E. Lecornu,* Acta math. 10 (1887), p. 201; *E. Goursat,* Ann. Éc. Norm. (3) 4 (1887), p. 159, 241, 316.

Die Gleichung der zugehörigen $F^{(s)}$ lautet

$$(\mathrm{I}') \qquad F^{(s)} \equiv \varphi\{x^2 + y^2 + z^2,\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\ xyz\} = 0.$$

Für besondere Fälle bestehen verschiedene Beziehungen zu anderen Zweigen der Geometrie.

Beim Typus (II) mit neun $\mathsf{E}^{(s)}$ hat man

$$(\mathrm{II}) \quad M = x^2y^2z^2, \quad N = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2.$$

Die Gleichung der zugehörigen $F^{(s)}$ läßt sich auf die einfache Form bringen

$$(\mathrm{II}') \qquad F^{(s)} \equiv \varphi(x^2, y^2, z^2) = 0.$$

Im besonderen ergibt sich so eine biquadradische $F_4^{(s)}$. Vermöge der Substitution $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$ geht sie in eine Rotations-F_2 über. Die Lage der D_2 der F_4, sowie ihrer 24 reellen Geraden, wird diskutiert.

In diese Klasse von $F^{(s)}$ gehört auch die „pseudosphärische" F_4, $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, und die F_6: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{a^2}$.

Beim Typus III mit 15 $\mathsf{E}^{(s)}$ setze man, unter λ den Wert $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ verstanden,

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} M = (z^2 - \lambda^2y^2)(y^2 - \lambda^2x^2)(x^2 - \lambda^2z^2), \\ N = (y^2 - \lambda^4z^2)(z^2 - \lambda^4x^2)(x^2 - \lambda^4y^2)(x^4 + y^4 + z^4 \\ \qquad\qquad - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2). \end{cases}$$

Die zugehörige $F^{(s)}$-Gleichung ist wiederum

$$(\mathrm{III}') \qquad \varphi(L, M, N) = 0.$$

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß algebraischen $F^{(s)}$ bei allen drei Typen stets algebraische Gleichungen $\varphi = 0$ entsprechen, und vice versa.

Wir kommen zur *Goursat*schen weitergreifenden Untersuchung.[219]) Diese zerlegt sich in drei Teile. Der erste deckt sich im wesentlichen, abgesehen von der Auswahl der speziellen Probleme, mit den Methoden und Ergebnissen von *Lecornu*.

Außer den obigen drei $K^{(s)}$-Typen werden aber auch noch die der regelmäßigen Pyramide und Doppelpyramide berücksichtigt.

Ferner werden mit Vorteil Minimalkoordinaten $s = x + iy$, $\bar{s} = x - iy$ verwendet, und mit deren Hilfe die Klassengleichung der $F^{(s)}$ aufgestellt. Instruktive Beispiele werden durch gewisse F_3, F_4, F_6 geliefert.

Der zweite Teil ist den symmetrischen Minimalflächen $M^{(s)}$ gewidmet. (Bezüglich der allgemeinen Theorie der Minimalflächen siehe Art. III D 5, *R. v. Lilienthal*, Besondere Flächen, Kap. 6.) Ist P irgendein Punkt einer zunächst beliebigen Minimalfläche M, $p(s, \bar{s})$ sein sphärisches Bild, so entspricht jeder Kurve auf M als Ort von Punkten P seine sphärische Bildkurve als Ort der Punkte p.

Dadurch läßt sich jede Minimalkurve Γ vermöge der „charakteristischen Variabeln“ $\sigma = -\frac{dx}{dz} - i\frac{dy}{dz}$ durch eine „charakteristische Funktion $F(\sigma)$“ darstellen.

Aus der Kurve Γ wird gemäß der *Lie*schen Theorie (s. Nr. 87) durch Translation einer zweiten solchen Kurve Γ' jede M erzeugt; aus der charakteristischen Funktion von Γ läßt sich die von Γ' ableiten. Nunmehr trete die Bedingung ein, daß die M zu einer $M^{(s)}$ wird. Hierbei sind zwei Arten von Symmetrie zu unterscheiden. Entweder entsprechen zwei symmetrisch zu einer $\mathsf{E}^{(s)}$ gelegenen Kugelpunkten zwei symmetrisch gelegene Flächenpunkte, oder aber zwei symmetrisch zur Y-Achse gelegenen Kugelpunkten entsprechen zwei symmetrisch zur Y-Ebene gelegene Punkte der Fläche. Die Minimalkurve Γ muß dann derart sein, daß ihr symmetrisches Gegenbild entweder mit Γ selbst, oder aber mit deren konjugierter Kurve $\bar{\Gamma}$ zusammenfällt.

Für jeden der Körper $K^{(s)}$ werden Γ, Γ' nebst den zugehörigen charakteristischen Funktionen $F(\sigma)$ bestimmt.

Den beiden obigen Arten von Symmetrie korrespondieren dann die Bedingungen $\bar{F}(\sigma) = F(\sigma)$ resp. $-\sigma^2 F\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = F(\sigma)$.

Diese beiden Bedingungen erweisen sich für algebraische $M^{(s)}$ je als hinreichend (für transzendente aber nicht).

Im dritten Teile werden die Gleichungen der $F^{(s)}$ funktionentheoretisch behandelt. Weiter wird die Symmetrie der Typen (I) und (II) auf den S_n, insbesondere den S_4, ausgedehnt.

Endlich wird noch auf eine Verallgemeinerung der Theorie hingewiesen. Es handelt sich dann um Flächen, die, ohne die Symmetrie eines $K^{(s)}$ zu besitzen, durch alle einen $K^{(s)}$ in sich überführenden Rotationen ebenfalls in sich übergehen.

E. Ciani[220]) macht auf eine Lücke bei *Goursat* aufmerksam. Es handelt sich für die $\mathsf{E}^{(s)}$ eines Büschels B um die Maximalzahl von $\mathsf{E}^{(s)}$, die eine $F^{(s)}$ haben kann, ohne eine Rotationsfläche zu sein, deren Achse die Achse von B ist. Für den Fall der Ebene hatte *Ciani* das analoge Problem bereits in einer voraufgehenden Arbeit behandelt.

Die beiden Hauptergebnisse sind:

1. Eine F_n kann ν $(< n)$ E eines B zu $\mathsf{E}^{(s)}$ haben, aber nicht mehr als n;

220) *E. Ciani*, Rom Linc. Rend. (4) 6_1 (1890), p. 399.

2. Alle F einer ungeraden Ordnung, mit einer geraden Anzahl von $\mathsf{E}^{(s)}$ in B, enthalten eine g_∞, durch die alle zur B-Achse senkrechten Geraden gehen.

Hiervon wird im besonderen eine Anwendung auf die symmetrischen F_3 gemacht (s. auch Art. „F_3“, Nr. 23).

Den drei von *Goursat* angegebenen Typen, von denen der erste zur Doppelpyramide gehört, der zweite tetraedrisch ist, und der dritte eine einzige $\mathsf{E}^{(s)}$ besitzt, fügt *Ciani* noch zwei weitere Typen hinzu:

4. die F_3 mit zwei orthogonalen $\mathsf{E}^{(s)}$;
5. die F_3 mit drei unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ gegeneinander geneigten $\mathsf{E}^{(s)}$.

Außer diesen fünf Typen symmetrischer F_3 existieren keine weiteren.

Im Falle der Doppelpyramide wird die F_3 nebst ihrer *Hesse*schen Fläche H genauer untersucht. Dabei tritt ein Spezialfall auf, wo das Problem der 27 g der F_3 nur von der Lösung einer kubischen Gleichung abhängt.

Nach *Juhel Rénoy*[221]) wird eine $F_4^{(s)}$ mit drei je zueinander senkrechten $\mathsf{E}^{(s)}$ und doppeltem Asymptotenkegel von jeder doppelt berührenden Ebene sowie von jeder doppelt berührenden F_2 mit demselben Asymptotenkegel in zwei Kegelschnitten geschnitten. Indessen hat diese Doppeleigenschaft mit der Symmetrie nichts zu tun, denn jede F_4 mit $\bar{C}_2$ wird von einer doppelt berührenden Ebene, sowie von einer doppelt berührenden, durch die C_2 gehenden F_2 in zwei Kegelschnitten geschnitten Der Schnitt ist beidemal eine r_4 mit vier d_2, zerfällt also in zwei c_2 (s. Nr. 9).

Eine große Reihe spezieller $F^{(s)}$, insbesondere hexaedrischer $F_4^{(s)}$ mit neun $\mathsf{E}^{(s)}$, unter Berücksichtigung ihrer reellen Geraden, wird von *E. Lebon*[222]) diskutiert. Als Sonderfälle seien etwa die „Kuboide“ und „Oktaedroide“ erwähnt, die die Kanten eines Würfels resp. Oktaeders enthalten.

Mehrere Arbeiten hat auch *S. Mangeot*[223]) den $F^{(s)}$ und gewissen Verallgemeinerungen gewidmet. Es sei hier nur auf letztere eingegangen, da die Betrachtungen über die $F^{(s)}$ nicht über die von *Lecornu* und *Goursat* hinausgehen.

---

221) *Juhel Rénoy,* Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 282.

222) *E. Lebon,* J. de math. spec. (3) 3 (1889), p. 103, 134, 159, 193, 219, 241, 282.

223) *S. Mangeot,* Paris C. R. 112 (1891), p. 1497; Nouv. Ann. (3) 10 (1891), p. 235; Ass. Fr. 20 (1891), p. 221; Paris C. R. 114 (1892), p. 1463; Soc. Math. Fr. Bull. 20 (1892), p. 84.

Es liege eine feste zentrische F_2 vor; auf der Normalen n in irgendeinem Flächenpunkte P denke man sich zwei gleiche (variierende) Längen von P aus abgetragen. Der Ort der Endpunkte heißt eine bez. F_2 symmetrische Fläche. Ist die Gleichung der F_2

$$(6) \qquad F_2 \equiv \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0,$$

so ist die Gleichung der symmetrischen Fläche von F von der Form

$$(7) \qquad F \equiv \varphi(x^a, y^b, z^c) = 0.$$

Daraufhin werden die algebraischen F weiter verfolgt.

Das Verfahren ist auf eine beliebige Urfläche, die dann selbst eine $F^{(s)}$ sein mag, ausgedehnt.

Bezüglich der zahlreichen speziellen metrischen algebraischen Flächen, die der Theorie der Komplexe und Kongruenzen entspringen, sei auf den Art. III C 8, *K. Zindler*, Algebraische Liniengeometrie, verwiesen.

87. **Algebraische Minimalflächen.** (Über die allgemeine Theorie der Minimalflächen s. Art. III D 5, *R. v. Lilienthal*, Besondere Flächen, Kap. 6.) *L. Henneberg*[224]) fragt nach dem Minimalwert der Klassenanzahl ν für eine reelle algebraische Minimalfläche. Zu dem Behuf beweist er vorab das Kriterium: Je nachdem irgendein eine Minimalfläche berührender Zylinder als Orthogonalschnitt die Evolute einer algebraischen oder aber transzendenten Kurve besitzt, ist die Fläche selbst algebraisch oder aber transzendent.

Daraufhin läßt sich zeigen, daß der gesuchte Minimalwert von ν gleich Fünf ist.

In der Tat existiert eine solche Minimal-Φ_5, deren Ordnung (irrtümlich, s. u.) als 17 angegeben wird.

Diese Φ_5 erfährt eine eingehende Behandlung durch *C. Schilling.*[225]) Zugrunde liegt die allgemeine *Lie*sche Theorie der Minimalflächen; danach wird eine solche unter geometrischer Deutung einer *Weierstraß*schen Integraldarstellung erklärt als Ort der Mittelpunkte der Strecken, die irgend zwei Punkte zweier gegebener Minimalkurven verbinden.

Indessen läßt die *Lie*sche Theorie hier, wo es sich im besonderen um die Bestimmung charakteristischer Anzahlen algebraischer Minimalflächen handelt, verschiedene vereinfachende Modifikationen zu.

Die algebraischen Minimal-Φ_5 sind alle einander ähnlich und lassen

---

224) *L. Henneberg*, Ann. di mat. (2) 9 (1879), p. 54.

225) *C. Schilling*, Dissert. Göttingen 1880.

sich durch zwei (komplexe) Parameter s, s_1 rational explizite darstellen vermöge

$$(1)\quad \begin{cases} x = \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s_1^3}\right) - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}\right) + 3(s - s_1) - (s^3 + s_1^3), \\ y = i\left[\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s_1^3}\right) + 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_1}\right) + 3(s - s_1) + (s^3 - s_1^3)\right], \\ z = 3\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s_1^2}\right) + 3(s^2 + s_1^2). \end{cases}$$

Die reellen Punkte entsprechen konjugierten Werten von s und s_1. Setzt man daher $s = re^{iq}$, $s_1 = re^{-iq}$, so wird die reelle Φ_5 dargestellt durch

$$(1')\quad \begin{cases} x = 2(r^{-3} - r^3)\cos 3q - 6(r^{-1} - r)\cos q, \\ y = 2(r^{-3} - r^3)\sin 3q + 6(r^{-1} - r)\sin q, \\ z = 6(r^{-2} + r^2)\cos 2q. \end{cases}$$

Im einzelnen werden diskutiert die Schnitte der Fläche mit den Koordinatenebenen und E_∞, eine Schar von einhüllenden Zylindern 6. Ordnung, und ihre Singularitäten.

Die Fläche besitzt eine Doppelgerade (die z-Achse), fünf dreifache Gerade, zwei Doppelkurven $\bar{c}_5$ in den beiden Symmetrieebenen, und vier Rückkehrkurven C_6.

Die Ordnung der Φ_5 ist gleich 10 (nicht 17, wie *Henneberg* angegeben hatte).

Ein stereoskopisches Bild eines Modelles ist beigefügt.

Nunmehr gehen wir noch kurz auf einige allgemeinere Untersuchungen über algebraische Minimalflächen ein. Zur Abkürzung sei eine Minimalfläche mit M, eine algebraische mit M_a bezeichnet; eine abwickelbare Fläche mit A, eine algebraische mit A_a; endlich der Kugelkreis, wie früher, mit K.

Es handelt sich nach *S. Lie*[226]) vor allem um Kriterien dafür, ob eine vorgelegte M eine M_a ist oder nicht, und im ersteren Falle darum, deren charakteristische Anzahlen (Ordnung, Klasse, Rang usf.) zu ermitteln.

Für die algebraischen Zwecke empfiehlt es sich, mit *Lie*[227]) die oben angegebene Erklärung einer M durch folgende, im wesentlichen gleichartige, zu ersetzen: Sind zwei Minimalkurven C_0, K_0 gegeben, die einen Punkt P_0 gemein haben, so entsteht die allgemeinste M durch Translation von C_0 längs K_0, indem P_0 die K_0 durchläuft, oder auch vice versa.

Die M ist dann und nur dann reell, wenn C_0 und K_0 konjugiert-komplex sind, und algebraisch dann und nur dann, wenn C_0 und K_0

226) *S. Lie*, Arch. for Math. og Nat. 2 (1877), p. 295.

227) *S. Lie*, ib. 3 (1878), p. 166.

beide algebraisch sind. Kann C_0 durch Translation in K_0 übergeführt werden, so überdecken die Minimalkurven der Fläche diese doppelt; letztere heißen „Doppelflächen".

Der Kegel von Tangenten, die von einem Punkte auf K an eine M gehen, zerfällt im allgemeinen in mehrere Kegel, deren jeder die M längs einer Minimalkurve berührt. Dies führt zu einer einfachen Formel für die Klasse einer M_a.

Ebenso wird eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Ordnung einer M_a entwickelt.

In einer zweiten Arbeit werden weitere Kriterien für die M_a entwickelt. Es sei etwa das folgende angeführt. Enthält eine M eine ebene Krümmungslinie c, so ist die M dann und nur dann eine M_a, wenn die c die Evolute einer algebraischen Kurve ist.

Umgekehrt berührt jede M_a ∞^3 Evoluten algebraischer Kurven längs des Ortes der Krümmungsmittelpunkte.

Weiter[228]) wird gezeigt, daß die Tangentenkegel einer M_a diese nach ∞^3 algebraischen Kurven berühren.

Insbesondere lassen sich in jedem algebraischen Kegel ∞^∞ M_a einbeschreiben und bestimmen.

Eine vierte Arbeit[229]) knüpft an den oben[224]) erwähnten Satz von *Henneberg* an, daß der orthogonale Querschnitt eines jeden, einer M_a umbeschriebenen Zylinders, die Evolute einer algebraischen Kurve ist.

Lie stellt das allgemeine Problem („*Lie*sches Problem"), alle A_a zu bestimmen, denen sich M_a einbeschreiben lassen. Sieht man eine erste solche A_a als bekannt an, so lassen sich in der Tat alle übrigen (∞^∞) A_a dieser Art bestimmen.

Für besondere Fälle werden einfache Konstruktionen der A_a angegeben.

In zwei umfangreichen Abhandlungen[230]) werden die bisherigen Entwicklungen von *Lie* zusammengefaßt und weitergeführt. In der ersten sind die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Klasse und Ordnung einer M_a zusammengestellt. In der zweiten Abhandlung wird der Zusammenhang zwischen der Krümmungstheorie algebraischer Kurven und der Theorie der einer A_a einbeschriebenen M_a systematisch entwickelt.

Eine allgemeine Erledigung des *Lie*schen Problems verdankt man *G. Darboux*[231]), und zwar gleich in drei Arten von Lösungen.

228) *S. Lie*, ib. 4 (1878), p. 224.

229) *S. Lie*, ib. 4 (1878), p. 340.

230) *S. Lie*, Math. Ann. 14 (1879), p. 341; 15 (1879), p. 465.

231) *G. Darboux*, Paris C. R. 102 (1886), p. 1513.

Die erste Lösung ist analytisch und beruht auf der *Weierstraß*schen Integraldarstellung der M.

Die zweite Lösung verfährt geometrisch und dringt bis zur Konstruktion der Berührungskurven (A_a, M_a) vor.

Am eigenartigsten ist die dritte [232]) Lösung, sie sich geometrischer wie analytischer Hilfsmittel bedient. Geometrisch geht sie von einer, von *A. Ribaucour* [233]) herrührenden Entstehung der M aus, die sich durch besondere Einfachheit und Anschaulichkeit auszeichnet.

Gegeben seien zwei durch den Kugelkreis K gehende abwickelbare Flächen. Sei t eine gemeinsame Tangente, und β der Mittelpunkt von deren Strecke zwischen den beiden Berührungspunkten. Man errichte in β die zu t senkrechte Ebene E, dann ist die Einhüllende der E die allgemeinste M.

Indem *Darboux* noch einen weiteren Hilfssatz über Regelflächen heranzieht, leitet er durch Rechnung folgende Lösung des Problems ab. Um alle M_a zu erhalten, die einer vorgelegten A_a einbeschrieben sind, bestimme man vorab alle R-F, deren Erzeugende h senkrecht auf den Ebenen von A_a stehen, und für die der Schnittpunkt jeder h in der entsprechenden Ebene von A_a liegt.

Die Rückkehrkanten der beiden A_a, die jeder der R-F und K umbeschrieben sind, sind die Minimalkurven Γ, Γ_1, durch deren Translation (gemäß *Lie*) die gesuchten M_a entstehen.

Von der *Weierstraß*schen Integraldarstellung der M geht auch *O. Vivanti* [234]) aus. In jener treten zwei willkürliche Funktionen $F(u)$, $F_1(v)$ auf; die M ist nur reell, wenn F und F_1 konjugiert komplex sind, und den reellen Punkten der M entsprechen dann konjugiertkomplexe Werte der Variabeln u, v.

Es wird zunächst gezeigt, daß für die von *Henneberg* [224]) und *Schilling* [225]) studierte Minimal-Φ_5 die Funktion $F(u)$ den Wert besitzt

$$F(u) = \left(u - \frac{1}{u}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}. \tag{2}$$

Es wird nunmehr der allgemeinere Fall betrachtet

$$F(u) = \left(\frac{1}{u} - u\right)^{\alpha}\left(u + \frac{1}{u}\right)^{\beta}\frac{1}{u^2}, \tag{3}$$

wo die Exponenten α, β $(\geqq 1)$ ganzzahlig sind, und β ungerade ist. Behufs Untersuchung der zugehörigen M_a wird das Integral H gebildet

$$H(m, n; u) = \int\left(\frac{1}{u} - u\right)^{m}\left(\frac{1}{u} + u\right)^{n}\frac{du}{u}, \tag{4}$$

232) *G. Darboux,* ib. 104 (1887), p. 728.

233) *A. Ribaucour,* Brux. Mém. cour. 44 (1882).

234) *O. Vivanti,* Ztschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 137.

wo die Exponenten m, n ($\geqq 0$) ganzzahlig sind, aber nicht zugleich verschwinden.

H ist nur dann algebraisch, wenn wenigstens eine der Zahlen m, n ungerade ist. Hieraus wird abgeleitet, daß die zu (3) gehörige M nur dann algebraisch (und zwar rational) wird, wenn α und β ungerade sind.

Für die so entstehenden M_a werden Ordnung, Klasse und Singularitäten ermittelt.

Die einzige, rein geometrisch vorgehende Untersuchung der M_a rührt von *R. Sturm*[235]) her. Es empfiehlt sich, vorab die *Lie*sche Mittelpunktserzeugung der M zu verallgemeinern. Gegeben seien zwei *beliebige* Kurven Γ, Γ_1, und eine Fläche F werde definiert als Ort der Mittelpunkte P der irgend zwei Punkte von Γ, Γ_1 verbindenden Strecken. Es wird dann direkt untersucht, wieviele solcher Punkte P auf einer beliebigen Geraden g liegen, und wieviel Berührungsebenen durch g an die Fläche F gehen. Damit bestimmt sich Ordnung und Klasse der F.

Der besondere Fall der Flächen M tritt ein, wenn die Tangenten von Γ und Γ_1 den Kugelkreis K treffen, und die M wird zu einer M_a, wenn Γ und Γ_1 algebraisch sind.

Auf diesem Wege werden auch die Eigenschaften der *Henneberg-Schilling*schen Minimal-Φ_5 abgeleitet.

Endlich sei noch auf eine Untersuchung der M_a durch *R. Glaser*[236]) hingewiesen.

Handelt es sich nur um die spezifischen Eigenschaften der M_a, so läßt sich die allgemeine *Lie*sche Translationstheorie der M nach verschiedenen Richtungen vereinfachen. Man gehe wieder aus von zwei Minimalkurven Γ, Γ_1. Eine solche Γ läßt sich wiederum bestimmen durch eine gewisse ebene Kurve γ. Letztere wird vermöge einer Inversion in sich transformiert, womit eine entsprechende Transformation der M resp. M_a verknüpft ist. Damit ergibt sich eine eigenartige Entstehung der M_a, die es gestattet, Ordnung, Klasse, Rang und Singularitäten direkt zu diskutieren.

Dies findet seine Anwendung u. a. auf eine von *A. Enneper*[237]) gefundene Minimal-F_9.

Symmetrische algebraische Minimalflächen sind bereits in Nr. 86 berücksichtigt worden.

---

235) *R. Sturm*, J. f. Math. 105 (1889), p. 101.

236) *R. Glaser*, Dissert. Tübingen 1891.

237) *A. Enneper*, Gött. Nachr. 1867, p. 297; Gött. Abh. 29 (1882), p. 41, 68.

Literatur-Nachträge.

Zu Abschnitt VIII.

Einige spezielle rationale Flächen:

F_5 mit $\overline{C}_3$: *A. Clebsch,* Math. Ann. 1 (1869), p. 284.

F_5 mit zwei windschiefen $\overline{g}$: *A. Clebsch,* ib. p. 307.

F_5 mit $\overline{C}_4$: *A. Clebsch,* Gött. Abh. 15 (1870), Math. Ann. 3 (1871), p. 71; *M. Noether,* ib. 3 (1871), p. 198, 568; *L. Cremona,* ib. 4 (1871), p. 215, 218.

F_{m+n+1} mit zwei windschiefen Geraden der Vielfachheiten m, n: *G. B. Guccia,* Assoc. Fr. 9 (1880), p. 191.

Eine Reihe rationaler F_5, die außer isolierten vielfachen Punkten evtl. noch eine $\overline{g}$ oder eine $\overline{C}_2$ besitzen: *S. E. Hill,* Math. Rev. 1 (1896), p. 1; *D. Montesano,* Napoli Rend. (3) 6 (1900), p. 158; (3) 7 (1901), p. 67; (3) 13 (1907), p. 66; *A. Pensa,* Dissert. Torino 1899, Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 249.

Rationale F mit C_2-Scharen, nebst ihrer Abbildung: *P. del Pezzo,* Palermo Rend. 1 (1887), p. 241; *G. Castelnuovo,* ib. 4 (1890), p. 73, durch Projektion aus dem S_n ($n > 3$); *Th. Reye,* Math. Ann. 48 (1897), p. 113, durch Abbildung bekannter Flächen mittels eines F_2-Gebüsches.

Einige dieser Flächen auch bei: *G. Koenigs,* Ann. Éc. Norm. (3) 5 (1888), p. 177; Paris C. R. 105 (1887), p. 407; 109 (1889), p. 364; *E. Cosserat,* Paris C. R. 124 (1887), p. 1004; 130 (1900), p. 311, 385; *L. Godeaux,* Ens. math. 15 (1913), p. 310; *C. H. Sisam,* Amer. Math. Soc. Bull. (2) 22 (1916), p. 381; Amer. J. Math. 38 (1916), p. 373.

Eine Reihe obiger F mit ∞ C_2 wird auch erhalten bei der Lösung des Problems, alle F gegebener Ordnung mit $\infty\, C_2$ zu bestimmen:

F_5: *M. de Franchis,* Rom Linc. Rend. (5) 15_2 (1906), p. 217, 284; Palermo Rend. 35 (1913), p. 47; *C. H. Sisam,* Amer. J. Math. 30 (1908), p. 99; *E. G. Togliatti,* Rom Linc. Rend. (5) 21_2 (1912), p. 35; Ist. Lomb. Mem. (3) 12 (1916), p. 243; *G. Marletta,* Catania Acc. Gioenia A. (5) 8 (1915), Nr. 14.

F_6: *G. Marletta,* Rom Linc. Rend. (5) 24_2 (1915), p. 109, 359; Palermo Rend. 40 (1915), p. 217; *E. G. Togliatti,* Rom Linc. Rend. (5) 24_2 (1915), p. 307, 329, 388; Ist. Lomb. Mem. (s. oben).

F_7: *Gels. Grimaldi,* Giorn. di mat. (3) 7 (1916), p. 341.

F_7 mit elliptischen Büscheln von C_2 (deren Ebenen kein Büschel bilden): *Gels. Grimaldi,* Palermo Rend. 42 (1917), p. 80.

F_8 mit $\infty\, C_2$, deren Ebenen kein Büschel bilden: *M. Bartolo,* Catania Acc. Gioenia A. (5) 12 (1918), Nr. 11; *Gels. Grimaldi,* ib. (5) 11 (1918), Nr. 9.

F_9 desgleichen: *S. Ragonesi,* Acireale Acc. Dafnica A. (2) 4 (1914—15), Nr. 5.

F_8 mit einem elliptischen Büschel von C_2: *Concettina Lango,* Catania Acc. Gioenia A. (5) 15 (1925), Nr. 2 bis.

F_6 und F_7 mit einem Büschel von c_3 (deren Ebenen kein Büschel bilden): *G. Marletta,* Palermo Rend. 41 (1916), p. 180.

F_6 mit einem Büschel von c_3 in Ebenen eines Büschels: *G. Marletta,* Palermo Rend. 42 (1917), p. 116.

F_6 und F_7 mit einem Büschel von r_3, deren Ebenen kein Büschel bilden: *A. Cataliotti,* Catania Acc. Gioenia A. (5) 11 (1918), Nr. 8.

Zu Abschnitt XII.

Rationale Regelflächen R-F und ihre ebene Abbildung: *A. Armenante,* Ann. di mat. (2) 4 (1869), p. 50; vollständig bei *A. Clebsch,* Math. Ann. 5 (1872), p. 1. Durch Reduktion der Abbildung auf eine Minimalordnung vermöge quadratischer Transformationen gibt *Clebsch* eine Klassifikation der rationalen R-F_n gemäß der Ordnung m der Leitkurve niedrigster Ordnung. Leitkurve einer R-F ist eine einfache Kurve, die jede Erzeugende in einem Punkte trifft. Dabei kann die Zahl m variieren von 1 bis $\frac{n}{2}$ resp. $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Diese analytisch bewiesenen Ergebnisse von *Clebsch* leitet synthetisch ab *C. Segre,* Torino A. 19 (1884), p. 355, durch Projektion einer R-F_n im S_{n+1}.

Im besonderen untersuchen die rationalen R-F_{m+n} mit zwei geradlinigen Leitkurven der Ordnungen m, n: *L. Cremona,* Ann. di mat. (2) 1 (1867—68), p. 248; *G. Pittarelli,* Rom Linc. Rend. (4) 7_1 (1891), p. 391, 452; (5) 3_2 (1894), p. 264.

(Herrn *L. Berzolari,* der auch die Nachträge geliefert hat, und Herrn *E. A. Weiß* bin ich wegen verschiedener Ratschläge zu Dank verpflichtet.)

(Abgeschlossen im August 1930.)

200.00