Integralrec

Von

Prof. Dr. Fr. Junker

Mit 86 Figuren im Text

GJG

Nr 88

Sammlung Göschen

Höhere Analysis

Zweiter Teil

Integralrechnung

Von

Dr. Fr. Junker
Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule
in Göppingen (Württemberg)

Mit 86 Figuren im Text

Dritte, verbesserte Auflage

Neudruck

Berlin und Leipzig
Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
1920

Druck von Julius Beltz in Langensalza.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Integration einfacher Differentiale.

Integrationsmethoden.

II. Abschnitt.

Integration rationaler Differentiale.

III. Abschnitt.

Integration irrationaler Differentiale.

IV. Abschnitt.

Integration transzendenter Differentiale.

V. Abschnitt.

Bestimmte Integrale.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Geometrie der Ebene.

VII. Abschnitt

Anwendung der Integralrechnung auf die Geometrie des Raumes.

VIII. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Statik.

IX. Abschnitt.

Das Doppelintegral und seine Anwendung.

X. Abschnitt.

Exkurs auf das Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

I. Abschnitt.

Integration einfacher Differentiale. Integrationsmethoden.

§ 1. Aufgabe der Integralrechnung. Begriff des unbestimmten Integrals.

Die Integralrechnung beschäftigt sich mit der Aufgabe, zu einem gegebenen Differential die ursprüngliche Funktion aufzusuchen. Sie ist daher als Umkehrung der Differentialrechnung anzusehen. Beispielsweise ist der Quotient $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ offenbar durch Ableitung nach x hervorgegangen aus $y = x^4$.

Man nennt $y = x^4$ das Integral des Differentials $dy = 4x^3\,dx$ und schreibt

$$y = \int 4x^3\,dx = x^4 .$$

Erklärung. Das Integral des Differentials $dy = f(x)\,dx$, geschrieben

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) \tag{1}$$

und gelesen: „Integral $f(x)\,dx$“, ist die Funktion, welche nach x abgeleitet $f(x)$ liefert. Dasselbe ist somit definiert durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x) = F'(x) . \tag{2}$$

Fügt man zur Funktion $F(x)$ additiv eine beliebige Konstante C hinzu, so folgt aus

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

durch Ableitung nach x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\{F(x) + C\}}{dx} = F'(x).$$

Die durch Integration aus $f(x)\,dx$ unmittelbar hervorgegangene Funktion $F(x)$ kann also um eine beliebige Konstante vermehrt (oder vermindert) werden, ohne daß sie ihre Eigenschaft als Integral von $f(x)\,dx$ verliert. Es folgt hieraus der

Lehrsatz: Das Integral eines gegebenen Differentials $f(x)\,dx$ ist bis auf eine willkürlich wählbare Konstante C eindeutig bestimmt, d. h. außer $F(x)$ ist auch $F(x) + C$ Integral von $f(x)\,dx$. Die Konstante C heißt die „Integrationskonstante" und

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

auch das „unbestimmte Integral" von $f(x)\,dx$.

So ist $y = a x^2 + C$ das unbestimmte Integral von $2\,a\,x\,dx$, da man stets dasselbe Differential erhält, welchen Wert man auch der Konstanten C geben mag.

§ 2. Geometrische Bedeutung des unbestimmten Integrals.

Das aus $dy = 2\,a\,x\,dx$ durch Integration hervorgegangene unbestimmte Integral

$$y = a x^2 + C$$

stellt die um $y = C$ in der Richtung der y-Achse verschobene Parabel $y = a x^2$ dar und bei willkürlichem C somit eine Schar von solchen, die sämtlich in den Schnittpunkten mit einer Parallelen zur y-Achse gleiche Neigung gegen die x-Achse besitzen (Fig. 1); denn diese ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{d(ax^2 + C)}{dx} = 2ax.$$

Es gilt daher der

Lehrsatz: Das unbestimmte Integral

$$y = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C$$

des Differentials $dy = f(x)dx$ stellt eine Schar von kongruenten ebenen Kurven dar, die erzeugt wird, indem man die Hauptkurve $y = F(x)$ in der Richtung der y-Achse verschiebt.

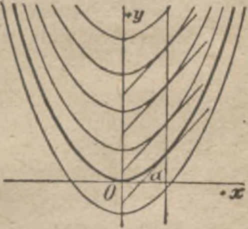

Fig. 1.

§ 3. Integration einfacher Integralformen.

Um ein gegebenes Integral $\int f(x)\,dx = F(x)$ zu bilden, hat man in den Formeln der Differentialrechnung diejenige Funktion $F(x)$ zu suchen, für welche $F'(x) = f(x)$ ist.

Indem man die Formeln der einfachsten Differentiale $dF(x) = f(x)\,dx$ in $F(x) = \int f(x)\,dx$ umschreibt, erhält man die folgenden Integralformen, in denen der Kürze halber die Integrationskonstante C weggelassen ist.

(1) $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\,x$

(3) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}\,a}$ (4) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$

(5) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$ (6) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$ (8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$

(9) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,ctg} x$$

(10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x\,.$$

§ 4. Integration einer Summe oder Differenz.

Nach § 24 der Differentialrechnung*) ist

(1) $$\frac{d(Au \pm Bv)}{dx} = A\frac{du}{dx} \pm B\frac{dv}{dx}$$

oder $$d(Au \pm Bv) = \left(A\frac{du}{dx} \pm B\frac{dv}{dx}\right)dx\,.$$

Hieraus folgt durch beiderseitige Integration

(2) $$Au \pm Bv = \int\left(A\frac{du}{dx} \pm B\frac{dv}{dx}\right)dx\,.$$

Setzen wir hierin $u = \int f(x)\,dx$, $v = \int \varphi(x)\,dx$, woraus sich ergibt

$$\frac{du}{dx} = f(x)\,, \quad \frac{dv}{dx} = \varphi(x)\,,$$

so geht die Gleichung (2) über in

(3) $$A\int f(x)\,dx \pm B\int \varphi(x)\,dx = \int [A\,f(x) \pm B\,\varphi(x)]\,dx\,,$$

womit gewonnen ist der

Lehrsatz: Das Integral einer Summe bzw. Differenz ist gleich der Summe bzw. Differenz der Integrale der einzelnen Glieder.

Für $B = 0$ geht die Gleichung (3) über in

$$A\int f(x)\,dx = \int A\,f(x)\,dx\,.$$

---

*) Dritte Auflage, S. 45.

Lehrsatz: Ein konstanter Faktor unter dem Integralzeichen darf vor dasselbe gesetzt werden.

Beispiele.

1. $$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)\,dx = C + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

2. Aus $1:1 + x^2 = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ folgt durch Integration

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

und hieraus beispielsweise für $x = 1$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

3. $$\int (A \cos x \pm B \sin x)\,dx = A \sin x \mp B \cos x + C.$$

4. $$\int \left(a x^3 + \frac{b}{\sqrt{x}} + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \frac{a}{4} x^4 + 2 b \sqrt{x} + c \arcsin x + C.$$

§ 5. Integration durch Substitution.

Soll das Integral ermittelt werden $\int f[\varphi(x)]\,dx$, so ist es häufig zweckmäßig, durch die Substitution $\varphi(x) = y$ eine neue Veränderliche einzuführen. Folgt hieraus durch Auflösung nach x

$$x = \psi(y), \quad \text{so ist} \quad dx = \psi'(y)\,dy$$

und geht das Integral über in

$$\int f(y)\,\psi'(y)\,dy = F(y) + C.$$

Setzt man nach Ausführung desselben wieder $\varphi(x) = y$, so ergibt sich als gesuchtes Integral

$$F[\varphi(x)] + C.$$

Erklärung. Man nennt den hierdurch angezeigten Weg zur Ermittlung eines Integrals „Integration durch Substitution“. Dieses Verfahren wird stets mit Vorteil angewendet, wenn unter dem Integralzeichen eine Funktion von einer Funktion auftritt.

Die folgenden Beispiele werden die Fruchtbarkeit dieser Methode dartun.

1. $$\int (a + b\,x)^n\,dx = \frac{1}{b}\int y^n\,dy = \frac{y^{n+1}}{b(n+1)} = \frac{(a+b\,x)^{n+1}}{b(n+1)}$$

2. $$\int \frac{dx}{a + b\,x} = \frac{1}{b}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{b}\,\mathrm{l}(a + b\,x). \qquad [a + b\,x = y]$$

3. $$\int \frac{dx}{a + x} = \int \frac{dy}{y} = \mathrm{l}\,y = \mathrm{l}(a + x) \qquad [a + x = y]$$

4. $$\int \sqrt{(a + b\,x)^n}\,dx = \frac{1}{b}\int y^{\frac{n}{2}}\,dy = \frac{(a + b\,x)^{\frac{n}{2}+1}}{b\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

5. $$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\int e^y\,dy = \frac{1}{k}\,e^{kx} \qquad [k\,x = y]$$

$$\left.\begin{aligned}
&6.\quad \int \sin(a + bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos(a + bx)\\
&7.\quad \int \cos(a + bx)\,dx = \frac{1}{b}\sin(a + bx)\\
&8.\quad \int \frac{dx}{\cos^2(a + bx)} = \frac{1}{b}\,\mathrm{tg}(a + bx)\\
&9.\quad \int \frac{dx}{\sin^2(a + bx)} = -\frac{1}{b}\,\mathrm{ctg}\,(a + bx)
\end{aligned}\right\}[a + bx = y]$$

10. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg} y=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$ $[x = a\,y]$

11. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\arcsin y=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ $[x = a\,y]$

12. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{a^2+b\,x^2}=\frac{1}{2\,b}\,\mathrm{l}(a^2+b\,x^2)$ $[b\,x^2 = y]$

13. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int dy=-\sqrt{a^2-x^2}$ $[\sqrt{a^2-x^2}=y]$

14. $\displaystyle\int\operatorname{tg} x\,dx=-\mathrm{l}\cos x$ $[\cos x = y]$

15. $\displaystyle\int\operatorname{ctg} x\,dx=\mathrm{l}\sin x$

16. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\mathrm{l}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y\right]$.

§ 6. Integration durch trigonometrische Substitution.

Häufig ist es vorteilhaft, trigonometrische Funktionen durch Substitution einzuführen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

1. Setzt man $b\,x = a\sin\varphi$, woraus folgt $= a\cos\varphi\,d\varphi$, so geht das Integral über in

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{b}\int d\varphi$$
$$=\frac{1}{b}\,\varphi=\frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{b\,x}{a}\right).$$

2. Hat man zu integrieren $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$, so kann man setzen $b x = a \operatorname{tg} \varphi$, woraus folgt $dx = \frac{a}{b \cos^2 \varphi} d\varphi$. Das gegebene Integral geht alsdann über in

$$\frac{1}{ab}\int d\varphi = \frac{1}{ab} \cdot \varphi = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{bx}{a}.$$

3. Um $\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}$ zu ermitteln, setze man $bx = \frac{a}{\cos\varphi}$, $\varphi = \operatorname{arc}\cos\left(\frac{a}{bx}\right)$, dann folgt hieraus $dx = \frac{a}{b} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi} d\varphi$ und das Integral geht über in

$$\frac{1}{a}\int d\varphi = \frac{\varphi}{a} = \frac{1}{a} \operatorname{arc}\cos\left(\frac{a}{bx}\right).$$

§ 7. Teilweise Integration.

Aus $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ folgt

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx$$

und somit

$$(1) \qquad \begin{cases} \int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = uv - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx \quad \text{oder} \\ \int u\,dv = uv - \int v\,du\,. \end{cases}$$

Erklärung. Man nennt die durch (1) angezeigte Integration die Methode der „teilweisen oder partiellen Integration".

Das folgende Beispiel wird dieselbe erläutern.

1. Um $\int x \sin x\, dx$ zu bilden, setze man $x = u$, $\sin x\, dx = dv$, woraus folgt $dx = du$, $-\cos x = v$, so geht das Integral über in

$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

2. $\int \mathrm{l}x\, dx = x\,\mathrm{l}x - \int x\, d\,\mathrm{l}x = x\,\mathrm{l}x - x$

3. $\int x\,\mathrm{l}x\, dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{l}x\, d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{l}x - \frac{1}{2}\int x^2 d\,\mathrm{l}x$
$$= \frac{1}{2}x^2\mathrm{l}x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2\mathrm{l}x - \frac{1}{4}x^2$$
$$= \frac{x^2}{4}(2\,\mathrm{l}x - 1) = \frac{x^2}{4}(\mathrm{l}x^2 - 1)$$

4. $\int x a^x dx = \frac{1}{\mathrm{l}a}\int x\, d(a^x) = \frac{1}{\mathrm{l}a}\left(a^x x - \frac{a^x}{\mathrm{l}a}\right)$

5. $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

6. $\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$

7. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\mathrm{l}(1+x^2)$

8. $\int \operatorname{arc\,ctg} x\, dx = x \operatorname{arc\,ctg} x + \frac{1}{2}\mathrm{l}(1+x^2)$

9. $\int x \arcsin x\, dx$ geht mit $du = x\, dx$, $u = \frac{x^2}{2}$,

$v = \arcsin x$, $dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ über in

$$\int x \arcsin x\, dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Das letzte Integral kann auf die gleiche Weise weiterbehandelt werden. Setzt man $du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, also $u = \sqrt{1-x^2}$ und $v = x$, so folgt

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= -\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};\end{aligned}$$

somit ist

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x,$$

daher

$$\int x\arcsin x\,dx = \frac{1}{4}(2x^2-1)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}.$$

§ 8. Integration durch allmähliche Reduktion.

1. Die teilweise Integration liefert häufig das Mittel, Integrale gewisser Funktionen auf einfachere derselben Art zurückzuführen und dieselben durch eine Art von Reihenentwicklung zu ermitteln.

Beispielsweise erhält man

$$J_2 = \int \sin^2\varphi\, d\varphi = -\int \sin\varphi\, d\cos\varphi$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi + \int \cos^2\varphi\, d\varphi = -\sin\varphi\cos\varphi + \int (1-\sin^2\varphi)\, d\varphi$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi + \varphi - J_2\,.$$

Hieraus folgt $2\,J_2 = -\sin\varphi\cos\varphi + \varphi$,

also
$$J_2 = \frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\,.$$

Erklärung. Man nennt diese Art der Ermittlung eines Integrals „Integration durch allmähliche Reduktion".

2. Die Reduktionsformeln für $J_n = \int \sin^n\varphi\, d\varphi$ und $J_{-n} = \int \sin^{-n}\varphi\, d\varphi \cdot (n > 0)$.

Mit Hilfe der teilweisen Integration erhalten wir

$$J_k = \int \sin\varphi \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi = -\int \sin^{k-1}\varphi\, d\cos\varphi$$
$$= -\cos\varphi\sin^{k-1}\varphi + (k-1)\int \sin^{k-2}\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi$$
$$= -\cos\varphi\sin^{k-1}\varphi + (k-1)\,[J_{k-2} - J_k]\,.$$

Hieraus folgt die Reduktionsformel

$$(1)\quad \begin{cases} k\,J_k = -\cos\varphi\sin^{k-1}\varphi + (k-1)\,J_{k-2} \text{ oder} \\ J_k = -\dfrac{1}{k}\cos\varphi\sin^{k-1}\varphi + \dfrac{k-1}{k}J_{k-2}\,. \end{cases}$$

Für $k = n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots$ erhält man hieraus

$$J_n = -\frac{1}{n}\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi + \frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

$$J_{n-2} = -\frac{1}{n-2}\cos\varphi\sin^{n-3}\varphi + \frac{n-3}{n-2}J_{n-4}$$

$$J_{n-4} = -\frac{1}{n-4}\cos\varphi\sin^{n-5}\varphi + \frac{n-5}{n-4}J_{n-6}$$

. . . .

. . . .

und für ein gerades n als letzte Gleichungen

$$J_4 = -\tfrac{1}{4}\cos\varphi\sin^3\varphi + \tfrac{3}{4}J_2, \qquad J_2 = -\tfrac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi,$$

bzw. für ein ungerades n

$$J_5 = -\tfrac{1}{5}\cos\varphi\sin^4\varphi + \tfrac{4}{5}J_3,\ J_3 = -\tfrac{1}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi - \tfrac{2}{3}\cos\varphi.$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$1,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2},\ldots,\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{5}{6},$$

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4},\ \text{bzw.}\ldots,\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{6}{7},$$

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}$$

multipliziert und addiert, so ergeben sich die allgemeinen Endformeln:

α) für ein gerades n

$$\begin{aligned}\int\sin^n\varphi\,d\varphi = &-\frac{1}{n}\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi - \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cos\varphi\sin^{n-3}\varphi\\ &-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cos\varphi\sin^{n-5}\varphi - \ldots\\ &-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cos\varphi\sin^3\varphi\\ &-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}(\cos\varphi\sin\varphi-\varphi),\end{aligned} \tag{2}$$

β) für ein ungerades n

$$\int\sin^n\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{n}\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi - \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cos\varphi\sin^{n-3}\varphi$$

$$
(3)\quad \begin{aligned}
&-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cos\varphi\sin^{n-5}\varphi-\ldots\\
&-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{8}{7}\cdot\frac{6}{5}\cos\varphi\sin^4\varphi\\
&-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{8}{7}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\cos\varphi(\sin^2\varphi+2).
\end{aligned}
$$

Setzt man in der Formel (1) $k-2=-i$, $k=-i+2$ und ersetzt man nachträglich wieder i durch k, so ergibt sich die Reduktionsformel

$$
(4)\quad J_{-k}=\int\sin^{-k}\varphi\,d\varphi=-\frac{1}{k-1}\frac{\cos\varphi}{\sin^{k-1}\varphi}+\frac{k-2}{k-1}J_{-k+2},
$$

wo k als positiv vorausgesetzt ist. Auf ähnliche Weise wie oben erhält man auch hierfür die beiden Endformeln:

γ) für ein gerades n

$$
(5)\quad \begin{aligned}
\int\frac{d\varphi}{\sin^n\varphi}=&-\frac{1}{n-1}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1}\varphi}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-3}\varphi}-\ldots\\
&-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}\\
&-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi};
\end{aligned}
$$

δ) für ein ungerades n

$$
(6)\quad \begin{aligned}
\int\frac{d\varphi}{\sin^n\varphi}=&-\frac{1}{n-1}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1}\varphi}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-3}\varphi}-\ldots\\
&-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{5}{4}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^4\varphi}\\
&-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\operatorname{l}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right].
\end{aligned}
$$

3. Mit Hilfe der Formel für die partielle Integration erhalten wir ebenso die Reduktionsformel

$$(7)\qquad \int x^k e^x\,dx = x^k e^x - k\int x^{k-1} e^x\,dx\,,$$

und wenn wir dieselbe wiederholt auf die Integrale $\int x^{k-1} e^x\,dx$, $\int x^{k-2} e^x\,dx, \ldots$ anwenden, schließlich die Endformel

$$(8)\quad \begin{aligned}\int x^k e^x\,dx &= x^k e^x - kx^{k-1} e^x + k(k-1)x^{k-2} e^x - \ldots\\ &= e^x(x^k - kx^{k-1} + k(k-1)x^{k-2} - \ldots).\end{aligned}$$

4. Ist k von 1 verschieden, so gilt ebenso die Rekursionsformel

$$(9)\qquad \int\frac{e^x\,dx}{x^k} = -\frac{e^x}{(k-1)x^{k-1}} + \frac{1}{k-1}\int\frac{e^x\,dx}{x^{k-1}}\,,$$

welcher die Endformel entspricht:

$$(10)\quad \begin{aligned}\int\frac{e^x\,dx}{x^k} = -\frac{e^x}{x^k}\Big\{&\frac{x}{k-1} + \frac{x^2}{(k-1)(k-2)}\\ &+ \frac{x^3}{(k-1)(k-2)(k-3)} + \ldots\Big\}\end{aligned}$$

5. Ähnliche Rekursionsformeln ergeben sich mit Hilfe der teilweisen Integration auch für die folgenden Integrale:

$$(11)\quad \int x^k \sin x\,dx = -x^k\cos x + k\int x^{k-1}\cos x\,dx$$

$$(12)\quad \int x^k \cos x\,dx = x^k\sin x - k\int x^{k-1}\sin x\,dx$$

$$(13)\quad \int x^{-k}\sin x\,dx = -\frac{\sin x}{(k-1)x^{k-1}} + \frac{1}{k-1}\int\frac{\cos x\,dx}{x^{k-1}}$$

$$(14)\quad \int x^{-k}\cos x\,dx = -\frac{\cos x}{(k-1)x^{k-1}} - \frac{1}{k-1}\int\frac{\sin x\,dx}{x^{k-1}}\,,$$

für welche sich entsprechende Endformeln bilden lassen.

§ 9. Integration durch unendliche Reihen.

Läßt sich ein Integral $\int f(x)\,dx$ nicht in endlicher Form darstellen, so ist es häufig zweckmäßig, die Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Maclaurinschen Satzes oder auf irgend eine andere Weise in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln und diese zu integrieren.

Erhält man nach Maclaurin die Reihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

welche innerhalb eines gewissen Gebietes konvergent sei, dann ergibt sich hieraus durch Integration die weitere Reihe

$$\int f(x)\,dx = C + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots,$$

welche in demselben Gebiet konvergent ist.

Beispiele.

1. $$\int \frac{e^{kx}}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + k + \frac{k^2 x}{2\,!} + \frac{k^3 x^2}{3\,!} + \ldots\right) dx$$
$$= C + \mathrm{l}x + \frac{kx}{1\,!} + \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2 x^2}{2\,!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{k^3 x^3}{3\,!} + \ldots$$

2. $$\int \frac{\cos x}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2\,!} + \frac{x^3}{4\,!} - \frac{x^5}{6\,!} + \ldots\right) dx$$
$$= C + \mathrm{l}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2\,!} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4\,!} - \frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{6\,!} + \ldots$$

Anmerkung. Die vorstehenden Potenzreihen liefern das Mittel, neue transzendente Funktionen, wie $\int \frac{e^{kx}}{x}\,dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ usw., für spezielle Werte von x näherungsweise zu berechnen.

II. Abschnitt.

Integration rationaler Differentiale.

§ 10. Hilfssätze aus der Algebra.

Die rationalen Funktionen einer Veränderlichen x zerfallen in ganze und gebrochene Funktionen. Vgl. Differentialrechnung § 4.

Ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

eine ganze rationale Funktion, so kann das Integral des Differentials $f(x)\,dx$ unmittelbar nach § 4 gebildet werden.

Eine (unecht) gebrochene rationale Funktion von der Form

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n},$$

wo $m \gtreqless n$ angenommen ist, kann auf dem Wege der gewöhnlichen Division in eine ganze Funktion und eine echtgebrochene Funktion zerlegt werden. So ist beispielsweise

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{7x - 5}{x^2 - 3x + 2}.$$

Zerlegt man alsdann den echtgebrochenen Teil einer solchen Funktion nach § 11 in Partialbrüche von der Form $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots$, so kann das Integral des Differentials $\frac{f(x)}{F(x)}dx$ ebenfalls gebildet werden. So ist beispielsweise identisch

$$\frac{7x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{9}{x - 2} - \frac{2}{x - 1},$$

daher ist

$$\int \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2-3x+2} = \int (x+3)\,dx + \int \left(\frac{9}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 9\,l(x-2) - 2\,l(x-1)\,.$$

Die Zerlegung einer echtgebrochenen Funktion in Partialbrüche erfordert noch die Kenntnis folgender Lehrsätze. Ist $F(x) = 0$ eine „algebraische Gleichung", so gilt der „Fundamentalsatz der Algebra": Jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

hat mindestens eine (reelle oder imaginäre) Wurzel $x = a$, für welche also $F(a) = 0$ ist.

Erhält man bei der Division von $x - a$ in $F(x)$ die Funktion $\varphi(x)$ als Quotienten und R als Rest, so gilt die Gleichung

$$F(x) = (x-a)\,\varphi(x) + R\,.$$

Da nun für $x = a$ $F(a) = 0$ ist, so folgt hieraus $R = 0$. Es ist somit $F(x) = (x-a)\,\varphi(x)$. Hieraus schließt man, daß auch die Gleichung $\varphi(x) = 0$, welche vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad in x ist, mindestens eine Wurzel $x = b$ besitzt. Es ist somit $\varphi(x) = (x-b)\,\psi(x)$, wo $\psi(x)$ vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grad in x ist usw. Daher schließt man, daß die Gleichung $F(x) = 0$ nicht nur eine, sondern stets n Wurzeln hat. Sind dieselben $a, b, c, \ldots, p$, so läßt sich $F(x)$ auf die Form bringen:

$$F(x) = a_n(x-a)(x-b)\ldots(x-p)\,.$$

Lehrsatz: Die ganze Funktion n^{ten} Grads läßt sich als Produkt von n „Linearfaktoren" $x - a$, $x - b, \ldots, x - p$ darstellen.

Werden mehrere Wurzeln von $F(x) = 0$ einander gleich, treten z. B. die Wurzeln $a, b, c, \ldots$ bzw. λ-, μ-, ν-, $\ldots$-fach auf, so ist

$$F(x) = a_n (x-a)^\lambda (x-b)^\mu (x-c)^\nu \ldots,$$

wo $\lambda + \mu + \nu + \ldots = n$ ist.

Ist eine der Wurzeln von $F(x) = 0$ komplex, also von der Form $x_1 = a + ib$, wo $i = \sqrt{-1}$ die „imaginäre Einheit" bedeutet, so läßt sich beweisen, daß neben $F(a + ib) = 0$ auch $F(a - ib) = 0$ ist. Diese Tatsache wird ausgedrückt durch den

Lehrsatz: Besitzt eine algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten die komplexe Wurzel $x_1 = a + ib$, so wird sie auch durch die hiezu konjugierte Zahl $x_2 = a - ib$ befriedigt. Dabei ist sowohl die Summe dieser (imaginären) Wurzeln als auch deren Produkt eine reelle Zahl:

$$x_1 + x_2 = 2a, \quad x_1 x_2 = a^2 + b^2.$$

§ 11. Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen.

I. Um das Differential $\frac{f(x)}{F(x)} dx$, wo

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n},$$

und $m < n$ ist, integrieren zu können, zerlege man durch Auflösung der Gleichung $F(x) = 0$ den Nenner $F(x)$ in seine n Linearfaktoren

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-n),$$

die zunächst sämtlich verschieden sein sollen, und suche hierauf den Bruch als Summe von n-Einzelbrüchen oder Partialbrüchen mit den Nennern $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., $x-n$ darzustellen. Bezeichnet man die Zähler dieser Brüche mit A, B, C, ..., N, so kann man setzen:

$$(2)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{N}{x-n},$$

wo die Brüche rechts sofort integriert werden können. Man erhält

$$(3)\quad \int \frac{f(x)\,dx}{F(x)} = A\,\mathrm{l}(x-a) + B\,\mathrm{l}(x-b) + \dots + N\,\mathrm{l}(x-n).$$

Hierbei ist zu bemerken, daß an Stelle von $\mathrm{l}(x-a)$ auch $\mathrm{l}(a-x)$ gesetzt werden darf, denn es ist

$$\mathrm{l}(x-a) = \mathrm{l}(a-x) + \mathrm{l}(-1),$$

wo $\mathrm{l}(-1)$ als Teil der Integrationskonstanten angesehen werden kann.

Multipliziert man die Gleichung (2) mit dem Nenner $F(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-n)$ durch, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$(4)\quad \begin{aligned} f(x) = {} & A(x-b)(x-c)\dots(x-n) \\ & + B(x-a)(x-c)\dots(x-n) + \dots \\ & + N(x-a)(x-b)\dots(x-m), \end{aligned}$$

welche zu erkennen gibt, daß für $x=a$, $x=b$, ..., $x=n$ sämtliche Glieder der rechten Seite mit Ausnahme des ersten, zweiten, ..., n^{ten} verschwinden. Setzt man daher der Reihe nach $x=a$, $x=b$, ..., $x=n$, so erhält man die Zähler A, B, ..., N unmittelbar in der Form

$$
(5) \quad \begin{cases}
A = \dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-n)} \\
B = \dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-n)} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
N = \dfrac{f(n)}{(n-a)(n-b)\ldots(n-m)}
\end{cases}
$$

Anmerkung. Da die Gleichung (4) eine identische ist, so müssen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich sein. Auf diesem Wege ergeben sich n lineare Gleichungen, aus denen sich die Zähler $A, B, \ldots N$ ebenfalls ermitteln lassen.

Beispiele.

1. Das Integral zu ermitteln:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)} = \int \frac{3x^2 - 10x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\,dx\,.$$

Da der Nenner in die Linearfaktoren $x-1$, $x-2$, $x+2$ zerfällt, also $a = 1$, $b = 2$, $c = -2$ ist, so erhält man $f(1) = -3$, $f(2) = -4$, $f(-2) = 36$ und daher nach (5)

$$A = \frac{f(1)}{(1-2)(1+2)} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$B = \frac{f(2)}{(2-1)(2+2)} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$C = \frac{f(-2)}{(-2-1)(-2-2)} = \frac{36}{12} = 3\,.$$

Es ist somit

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2}$$

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \mathrm{l}(x-1) - \mathrm{l}(x-2) + 3\,\mathrm{l}(x+2) + C$$

$$= \mathrm{l}\frac{(x-1)(x+2)^3}{x-2} + C\,.$$

2. Das Integral zu bilden:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)} = \int \frac{2x+34}{x^3 - 2x^2 - 11x + 12} dx\,.$$

Der Nenner enthält die Linearfaktoren $x-4$, $x-1$, $x+3$, daher kann man setzen

$$\frac{2x+34}{x^3 - 2x^2 - 11x + 12} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}\,.$$

Hieraus folgt

$$2x + 34 = A(x-1)(x+3) + B(x-4)(x+3) + C(x-4)(x-1)$$

oder

$$2x + 34 = x^2(A+B+C) + x(2A - B - 5C) - 3A - 12B + 4C\,.$$

Zur Bestimmung der Zähler erhält man also die Gleichungen

$$A + B + C = 0\,, \qquad 2A - B - 5C = 2\,,$$
$$-3A - 12B + 4C = 34\,,$$

welche aufgelöst geben $A = 2$, $B = -3$, $C = 1$.

Daher ist

$$\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)} = 2\int\frac{dx}{x-4} - 3\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{x+3}$$
$$= 2\,\mathrm{l}(x-4) - 3\,\mathrm{l}(x-1) + \mathrm{l}(x+3) + C\,.$$

II. Die Zähler $A, B, C, \ldots, N$ der Partialbrüche (2) lassen sich auch durch Ableitung bestimmen.

Ist a eine Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$, so enthält $F(x)$ den Faktor $(x-a)$ und kann somit auf die Form gebracht werden:

$$F(x) = (x-a)\,\varphi(x)\,.$$

Um nun aus dem gesamten Bruch (1) einen Partialbruch mit konstantem Zähler und dem Nenner $(x-a)$ abzusondern, setze man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

oder

$$f(x) = A\,\varphi(x) + (x-a)\,\psi(x)\,.$$

Hieraus folgt für $x = a$:

$$f(a) = A\,\varphi(a) \quad \text{und} \quad A = \frac{f(a)}{\varphi(a)}\,.$$

Die Berechnung von $\varphi(a)$ läßt sich umgehen, denn aus $F(x) = (x-a)\,\varphi(x)$ folgt durch Ableitung

$$F'(x) = \varphi(x) + (x-a)\,\varphi'(x)$$

und hieraus für $x = a$:

$$\varphi(a) = F'(a), \quad \text{d. h. es ist} \quad A = \frac{f(a)}{F'(a)}\,.$$

Sind also $a, b, c, \ldots, n$ die Wurzeln von $F(x) = 0$, so ist

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)},\quad B = \frac{f(b)}{F'(b)},\quad C = \frac{f(c)}{F'(c)},\ \ldots,\ N = \frac{f(n)}{F'(n)}.$$

Der Ausdruck (2) nimmt somit, in Partialbrüche zerlegt, die Gestalt an:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(a)}{(x-a)\,F'(a)} + \frac{f(b)}{(x-b)\,F'(b)} + \cdots + \frac{f(n)}{(x-n)\,F'(n)}, \tag{6}$$

woraus ersichtlich ist, daß die Integration des Differentials $\frac{f(x)}{F(x)}\,dx$ auf Logarithmen führt.

Multipliziert man die Gleichung (6) mit $F(x)$ durch, so erhält man die „Interpolationsformel von Lagrange“

$$f(x) = \frac{f(a)\,F(x)}{(x-a)\,F'(a)} + \frac{f(b)\,F(x)}{(x-b)\,F'(b)} + \cdots + \frac{f(n)\,F(x)}{(x-n)\,F'(n)}, \tag{7}$$

welche dazu dient, eine den Grad n nicht erreichende rationale Funktion $f(x)$ zu bestimmen, welche für die n Zahlenwerte $a, b, c, \ldots, n$ der Veränderlichen x die Werte $f(a), f(b), f(c), \ldots, f(n)$ annimmt.

Beispiel. Es sei das Differential zu integrieren:

$$\frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \frac{-4x^2 - 16x + 38}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}\,dx.$$

Durch Auflösung der Gleichung $F(x) = 0$ erhält man als Wurzeln $-2, 4, 1$. Daher kann man setzen

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-1}.$$

Zur Bestimmung der Zähler A, B, C bilde man nun $F'(x) = 3x^2 - 6x - 6$, dann ist $F'(-2) = 18$, $F'(4) = 18$, $F'(1) = -9$; $f(-2) = 54$, $f(4) = -90$, $f(1) = 18$ und somit

$$A = \frac{54}{18} = 3, \quad B = \frac{-90}{18} = -5, \quad C = \frac{18}{-9} = -2.$$

Daher ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-4} - \frac{2}{x-1}$$

und als Integral des Differentials $\frac{f(x)\,dx}{F(x)}$ der Ausdruck

$$\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)} = 3\,\mathrm{l}(x+2) - 5\,\mathrm{l}(x-4) - 2\,\mathrm{l}(x-1) + C$$
$$= \mathrm{l}\frac{(x+2)^3}{(x-4)^5(x-1)^2} + C.$$

III. Treten im Nenner imaginäre Wurzelfaktoren auf, so kann man die Zerlegung in Partialbrüche in derselben Weise vornehmen wie oben.

Hat man zu der Wurzel $a + ib$ der Gleichung $F(x) = 0$ oder zu dem Faktor $(x - a - ib)$ von $F(x)$ als Nenner eines Partialbruches den Zähler

$$A = \frac{f(a+ib)}{F'(a+ib)} = p + iq \tag{8}$$

erhalten, so erhält man nach § 10 zu der konjugierten Wurzel $a - ib$ oder zu dem konjugierten Wurzelfaktor $x - a + ib$ von $F(x)$ notwendig den Zähler

$$B = \frac{f(a-ib)}{F'(a-ib)} = p - iq \tag{9}$$

und alsdann durch Vereinigung der beiden konjugierten Partialbrüche

$$(10)\quad \frac{p+iq}{x-a-ib}+\frac{p-iq}{x-a+ib}=\frac{2p(x-a)-2bq}{(x-a)^2+b^2}.$$

Die Integration liefert alsdann

$$(11)\quad p\int\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}dx-2bq\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^2+b^2}$$

$$=p\,\mathrm{l}\{(x-a)^2+b^2\}-2q\operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{b}.$$

Dieses Resultat kann angeschrieben werden, sobald $p+iq$ bekannt ist.

Enthält also der Nenner imaginäre Linearfaktoren $a+ib$ und $a-ib$, so bestimmen sich die Zähler der betreffenden Partialbrüche nach (8) und (9), und es können alsdann die betreffenden Partialbrüche unmittelbar nach (11) angeschrieben werden.

Beispiele.

1. Das Integral $\int\frac{dx}{x^3-1}$ durch Partialbruchzerlegung auszuwerten.

Der Nenner x^3-1 zerfällt in die Linearfaktoren

$$x-1;\ x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right),\ x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right).$$

Daher ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{C}{x-1}+\frac{A}{x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}}+\frac{B}{x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}}.$$

Nun ist $f(x) = 1$, $F(x) = x^3 - 1$, $F'(x) = 3x^2$, daher

$$C = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{3}; \quad \text{also}$$

$$A = \frac{1}{F'\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2} = -\frac{1}{6} + \frac{i}{6}\sqrt{3};$$

$$B = \frac{1}{F'\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2} = -\frac{1}{6} - \frac{i}{6}\sqrt{3};$$

somit ist nach der obigen Bezeichnung $p = -\frac{1}{6}$, $q = \frac{\sqrt{3}}{6}$, daher ergibt sich als gesuchtes Integral

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} l(x-1) - \frac{1}{6} l(x^2 + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

2. Ermittle ebenso das Integral $\int \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$.

3. Das Integral $\int \frac{x\,dx}{x^3 + 1}$ zu ermitteln.

§ 12. Partialbruchzerlegung bei mehrfach vorkommenden Wurzelfaktoren im Nenner.

1. Lehrsatz: Enthält der Nenner $F(x)$ den Faktor $(x - a)$ k-fach, so läßt sich der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ in zwei Teile von der Form zerlegen:

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)},$$

wo A eine Konstante und $f_1(x)$ eine rationale Funktion von x ist, deren Grad kleiner als der von $f(x)$ ist.

Bringt man die rechte Seite der Gleichung (1) auf gleiche Benennung, so folgt durch Vergleichung der beiderseitigen Zähler

$$(2) \qquad f(x) = A_k \varphi(x) + (x - a) f_1(x) .$$

Hieraus folgt, daß, wenn $f(x)$ vom Grad m ist, $f_1(x)$ nicht höher als vom Grad $m - 1$ sein kann, und weiter für $x = a$:

$$f(a) = A_k \varphi(a) \quad \text{oder} \quad A_k = \frac{f(a)}{\varphi(a)},$$

womit A bestimmt ist.

Setzt man den Wert von A_k in (2) ein, so ergibt sich für $f_1(x)$ der Ausdruck

$$f_1(x) = \frac{f(x)\,\varphi(a) - f(a)\,\varphi(x)}{(x-a)\,\varphi(a)},$$

dessen Zähler durch $x - a$ teilbar ist, welche Werte die Funktionen f und φ auch annehmen mögen.

Wie sich aus $\frac{f(x)}{F(x)}$ der Partialbruch $\frac{A_k}{(x-a)^k}$ abscheiden läßt, so kann auch das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (1) weiter zerlegt werden:

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)} = \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2}\varphi(x)} .$$

Man findet

$$f_1(x) = A_{k-1}\varphi(x) + (x-a) f_2(x)$$

und hieraus $A_{k-1} = \frac{f_1(a)}{\varphi(a)}$ usw.

Fährt man so fort, so gelangt man zu folgender Darstellung des Bruches (1):

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + \dots \\ + \frac{A_1}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\end{aligned}$$

und erhält den

Lehrsatz: Enthält die echt gebrochene Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ den Faktor $(x-a)$ k-fach im Nenner, so läßt sich dieselbe in der Form (3) in Partialbrüche zerlegen.

2. Berechnung der Zähler $A_k, A_{k-1}, \dots, A_1$.

α) Enthält der Nenner außer $(x-a)^k$ keine weiteren Faktoren mehr, so kann man setzen

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} \\ + \frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + \dots + \frac{A_1}{x-a}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, indem man mit $(x-a)^k$ durchmultipliziert,

$$\begin{aligned}f(x) = A_k + A_{k-1}(x-a) + A_{k-2}(x-a)^2 + \dots \\ + A_1(x-a)^{k-1}.\end{aligned}$$

Wird diese Gleichung $(k-1)$-mal nach x abgeleitet und in den erhaltenen Ableitungen $x = a$ gesetzt, so resultiert ein System von Gleichungen, aus denen sich ergibt

$$A_k = f(a), \quad A_{k-1} = \frac{1}{1!} f'(a), \quad A_{k-2} = \frac{1}{2!} f''(a), \dots,$$

$$A_1 = \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) ,$$

womit man als Integral des obigen Ausdrucks erhält

$$\int \frac{f(x)}{(x-a)^k} dx = -\frac{A_k}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$$
$$-\frac{A_{k-1}}{(k-2)(x-a)^{k-2}} - \dots - \frac{A_2}{x-a} + A_1 \, \mathrm{l}(x-a) .$$

Beispiel.

$$\frac{x^2+4}{(x-2)^3} = \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_1}{x-2} .$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4 &&= A_3 + A_2(x-2) + A_1(x-2)^2 \\ f'(x) &= 2x &&= A_2 + 2A_1(x-2) \\ f''(x) &= 2 &&= 2A_1 . \end{aligned}$$

Hieraus folgt für $x = 2$

$$A_3 = 8 , \quad A_2 = 4 , \quad A_1 = 1 ,$$

somit ist

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)^3} dx = -\frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} + \mathrm{l}(x-2) .$$

β) Der Nenner enthalte außer $(x-a)^k$ noch andere ein- oder mehrfach vorkommende Wurzelfaktoren, deren Produkt $\varphi(x)$ sei. In diesem Falle setze man

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k \varphi(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \dots$$
$$+ \frac{A_1}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} ,$$

woraus folgt

$$f(x) = \varphi(x)\{A_k + A_{k-1}(x-a) + \ldots + A_1(x-a)^{k-1}\} + \psi(x)(x-a)^k.$$

Wird diese Gleichung k-mal nach x differentiiert und hernach überall $x = a$ gesetzt, so ergibt sich ein System von Gleichungen, aus denen sich die Zähler A berechnen lassen.

Sind hierbei die in $\varphi(x)$ enthaltenen Faktoren sämtlich verschieden, so ist es zweckmäßig, die denselben entsprechenden Partialbrüche nach § 11 zuerst zu bestimmen und dieselben mit dem Ausdruck links zu vereinigen, wodurch der entstehende Bruch mit den Faktoren von $\varphi(x)$ vereinfacht werden kann.

Beispiele.

1. $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{3x - 4x^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

$$F'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2, \quad B = \frac{f(-2)}{F'(-2)} = -\frac{22}{9}$$

Es ist somit

$$\frac{3x - 4x^2}{(x-1)^2(x+2)} + \frac{22}{9(x+2)} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1}$$

und

$$\frac{11 - 14x}{9} = A_2 + A_1(x-1), \quad A_2 = -\frac{1}{3}, \quad A_1 = -\frac{14}{9},$$

somit ist

$$\int \frac{3x - 4x^2}{(x-1)^2(x+2)}\,dx = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{14}{9}\,l(x-1) - \frac{22}{9}\,l(x+2).$$

2. Das Integral $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)^2}$ zu ermitteln.

Man erhält unmittelbar die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^4}{(x^2-1)^2} = 1 + \frac{2x^2-1}{(x^2-1)^2} = 1 + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1}.$$

Hieraus folgt

$$2x^2 - 1 = A_2(x+1)^2 + A_1(x-1)(x+1)^2 + B_2(x-1)^2 + B_1(x+1)(x-1)^2$$

und hieraus durch Ableitung

$$4x = 2A_2(x+1) + A_1\{(x+1)^2 + 2(x-1)(x+1)\} + 2B_2(x-1) + B_1\{(x-1)^2 + 2(x-1)(x+1)\}$$

Setzt man in diesen Gleichungen zunächst $x =$ dann $x = -1$, so folgt

$$1 = 4A_2 \qquad\qquad 1 = 4B_2$$

$$4 = 4A_2 + 4A_1 \qquad\qquad -4 = -4B_2 + 4B_1$$

und hieraus

$$A_2 = \frac{1}{4}, \quad A_1 = \frac{3}{4}, \quad B_2 = \frac{1}{4}, \quad B_1 = -\frac{3}{4}.$$

Daher ist

$$\frac{x^4}{(x^2-1)^2} = 1 + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{3}{4(x+1)}$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)^2} = x - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4}\,\mathrm{l}(x-1) - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{3}{4}\,\mathrm{l}(x+1) = \frac{2x^3-3x}{2(x^2-1)} + \frac{3}{4}\,\mathrm{l}\frac{x-1}{x+1}.$$

III. Abschnitt.

Integration irrationaler Differentiale.

§ 13. Die Irrationalität besteht nur in gebrochenen Exponenten von x oder in der n^{ten} Wurzel aus einer linearen Funktion von x.

Erklärung. Das Differential $f(x)\,dx$ heißt irrational, wenn in der Funktion $f(x)$ die Veränderliche x unter einem oder mehreren Wurzelzeichen auftritt.

Im folgenden sollen nur die Fälle besprochen werden, in denen sich die irrationalen Differentiale durch Änderung der Veränderlichen in rationale Differentiale verwandeln lassen.

a) Enthält die Funktion $f(x)$ nur ganze und gebrochene Exponenten von x, deren kleinstes gemeinschaftliches Vielfache k sei, so setze man

$$x = t^k, \quad dx = k\,t^{k-1}\,dt,$$

dann wird

$$f(x)\,dx = k\,f(t^k)\,t^{k-1}\,dt \tag{1}$$

ein rationales Differential und kann daher nach den Methoden des vorigen Abschnitts integriert werden.

Beispiele.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$. Man setze $x = t^2$, $dx = 2\,t\,dt$, dann geht das gegebene Integral über in

$$\int\frac{2\,t\,dt}{t^2+t} = 2\int\frac{dt}{t+1} = 2\,l(t+1) = 2\,l(\sqrt{x}+1).$$

Ebenso erhält man für $x = t^2$:

2. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = -x + 4\sqrt{x} - 4\,\mathrm{l}(\sqrt{x}+1)$.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$. Man setze $x = t^6$, so folgt $dx = 6\,t^5\,dt$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}} = \int \frac{6\,t^5\,dt}{t^4+t^3} = 6\int \frac{t^2\,dt}{t+1} = 6\int \left\{t - 1 + \frac{1}{t+1}\right\} dt$$

$$= 6\left(\frac{t^2}{2} - t + \mathrm{l}(t+1)\right) = 6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \mathrm{l}(\sqrt[6]{x}+1)\right).$$

4. $\displaystyle\int \frac{x+a}{\sqrt{a\,x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}\,(x+3\,a)$.

b) Ist das zu ermittelnde Integral von der Form

$$J = \int f(x, y)\,dx, \tag{2}$$

wo $y = \sqrt[n]{\dfrac{a+\alpha x}{b+\beta x}}$ die n^{te} Wurzel aus einer linearen Funktion von x ist, so setze man

$$\frac{a+\alpha x}{b+\beta x} = y^n \quad \text{oder} \quad x = \frac{b\,y^n - a}{\alpha - \beta\,y^n}, \tag{3}$$

dann folgt hieraus durch Differentiation

$$dx = n\,(\alpha\,b - \beta\,a)\,\frac{y^{n-1}\,dy}{(\alpha - \beta\,y^n)^2}, \tag{4}$$

womit das Integral (2) übergeht in

$$J = n\,(\alpha\,b - \beta\,a)\int f\left(\frac{b\,y^n - a}{\alpha - \beta\,y^n}, y\right)\frac{y^{n-1}\,dy}{(\alpha - \beta\,y^n)^2},$$

d. h. in ein solches einer rationalen Funktion von y allein, das nach dem vorigen Abschnitt behandelt werden kann.

Lehrsatz: Enthält das Integral (2) keine andere Irrationalität als die n^{te} Wurzel aus einer linearen Funktion von x, so geht dasselbe durch die Substitution (3), bzw. (4) in das Integral einer rationalen Funktion von der Form (5) über.

Beispiel. Das Integral $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}$ zu ermitteln.

Setzt man $\sqrt{a+bx} = y$, so folgt hieraus

$$a + bx = y^2 \quad \text{und} \quad b\,dx = 2\,y\,dy\,,$$

womit das Integral übergeht in

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b^2}\int (y^2 - a)\,dy = \frac{2}{3\,b^2}(y^3 - 3\,a\,y)$$

$$= \frac{2}{3\,b^2}(b\,x - 2\,a)\sqrt{a+bx}\,.$$

Übungsbeispiele.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}\,.$

2. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3\,b}\sqrt{(a+bx)^3}\,.$

3. $\int x\sqrt{2\,a - x}\,dx = \frac{2}{15}(x - 2\,a)(3\,x + 4\,a)\sqrt{2\,a - x}\,.$

4. $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = \sqrt{a^2 - x^2} + a \arcsin\frac{x}{a}\,.$

5. $\int (b+x)\sqrt{a-x}\,dx = \frac{2}{5}(a-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(a+b)(a-x)^{\frac{3}{2}}$.

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x-a}{a}}$.

§ 14. Ausdruck zweiten Grades unter einer Quadratwurzel.

1. Enthält das zu integrierende Differential neben rationalen Ausdrücken von x keine andere Irrationalität als die Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion zweiten Grades in x, ist dasselbe also von der Form

$$f(x, W)\,dx, \quad \text{wo} \quad W = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$$

und a, b, c reelle Konstanten sind, von denen c nicht verschwinden soll, so gilt auch hier der

Lehrsatz: Ist $f(x, W)$ eine rationale Funktion von x und W, wo $W = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$ ist, so läßt sich das irrationale Differential $f(x, W)dx$ durch Einführung einer neuen Veränderlichen stets auf ein rationales Differential zurückführen und daher nach den Methoden des vorigen Abschnitts integrieren.

Wie eine einfache Überlegung ergibt, kann die Funktion $f(x, W)$ stets auf die Form gebracht werden:

$$(1)\; f(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}) = F(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)\sqrt{a + 2bx + cx^2}},$$

wo $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ganze rationale Funktionen der Veränderlichen x sind.

Der erste Teil rechts kann als rationale Funktion von x nach den Methoden des vorigen Abschnitts unmittelbar integriert werden.

Entwickelt man alsdann im zweiten Teil der Gleichung (1) den Bruch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ nach der Methode der gebrochenen rationalen Funktionen in Partialbrüche, so erkennt man, daß dieser Teil nur Glieder von der Form

$$\frac{x^n}{W} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{(x-k)^n W} \tag{2}$$

enthalten kann, wo $W = \sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}$ gesetzt ist.

Die Integrale dieser Funktionen aber können mit Hilfe zweier Reduktionsformeln auf das Integral

$$\int \frac{dx}{W} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}}$$

zurückgeführt werden.

Um dies zu zeigen, differentiiere man den Ausdruck $x^{n-1}\,W$ nach x:

$$d(x^{n-1}\,W) = (n-1)\,x^{n-2}\,W\,dx + \frac{x^{n-1}\,(b + c\,x)}{W}\,dx\,.$$

Diese Beziehung geht umgeformt über in

$$c\,n\,\frac{x^n\,dx}{W} = d(x^{n-1}\,W) - b(2n-1)\frac{x^{n-1}}{W}\,dx - a(n-1)\frac{x^{n-2}}{W}\,dx$$

und gibt integriert die Reduktionsformel

$$\int \frac{x^n\,dx}{W} = \frac{1}{c\,n}\,x^{n-1}\,W - \frac{b(2\,n-1)}{c\,n}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{W} - \frac{a(n-1)}{c\,n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{W}\,,$$

welche für jeden ganzzahligen Wert von $n \gtrless 0$ Gültigkeit hat.

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel für $n = n\,,\ n-1\,,\ n-2\,,\ \ldots,\ 3\,,\ 2\,,\ 1$ gelangt man schließlich zu dem Integral

$$\int \frac{dx}{W} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}\,. \tag{3}$$

Die von den Partialbrüchen aus $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ herrührenden Glieder der Funktion (1) sind von der Form

$$\int \frac{dx}{(x-k)^m\, W},$$

wo $m = m, m-1, \ldots, 3, 2, 1$ sein kann. Setzen wir hierin $x - k = z$, $x = k + z$, so wird $dx = dz$ und

$$\begin{aligned} a + 2bx + cx^2 &= a + 2b(k+z) + c(k+z)^2 \\ &= a + 2bk + ck^2 + 2(b+ck)z + cz^2 \\ &= a' + 2b'z + cz^2, \end{aligned}$$

und es geht das obige Integral über in

$$\int \frac{dx}{(x-k)^m\, W} = \int \frac{dz}{z^m \sqrt{a' + 2b'z + cz^2}},$$

d. h. in ein solches von der Form $\int \frac{dx}{x^m\, W}$.

Da die Formel (3) für alle möglichen Werte von n, also auch für negative, gültig sein muß, so können wir $n - 2 = -m$ setzen. Alsdann ergibt sich nach einiger Umformung die weitere Reduktionsformel

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^m\, W} = -\frac{1}{a(m-1)} \Bigg\{ \frac{W}{x^{m-1}} &+ b(2m-3) \int \frac{dx}{x^{m-1}\, W} \\ &+ c(m-2) \int \frac{dx}{x^{m-2}\, W} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{4}$$

die für alle Werte von $m \gtreqless 2$ brauchbar ist, für $m = 1$ dagegen kein Resultat liefert. Für $m = 2$ läßt sich das

Integral $\int \frac{dx}{x^2 W}$ überführen in $\int \frac{dx}{x W}$. Das letztere geht mit der Substitution $\frac{1}{x} = z$, $-\frac{dx}{x^2} = dz$ über in

$$\int \frac{dx}{x W} = \int \frac{\frac{1}{x^2} dx}{\sqrt{\frac{a}{x^2} + \frac{2b}{x} + c}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{a z^2 + 2 b z + c}},$$

d. h. in ein solches von der Form (3).

Wir gelangen deshalb zu dem

Lehrsatz: Die in dem Integral der Funktion (1)

$$\int f(x, W)\, dx = \int F(x)\, dx + \int \frac{\varphi(x)\, dx}{\psi(x)\, W}$$

nach Zerlegung der Funktion $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in Partialbrüche auftretenden Einzelintegrale von der Form

$$\int \frac{x^n\, dx}{W} \quad \text{oder} \quad \int \frac{dx}{(x-k)^m W}$$

lassen sich sämtlich auf das Integral

$$\int \frac{dx}{W} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \tag{5}$$

zurückführen.

2. Um bei der Ermittlung dieses Integrals imaginäre Faktoren nach Möglichkeit zu vermeiden, sollen folgende Fälle unterschieden werden:

a) Ist $c > 0$, also positiv, so setze man

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = t + x\sqrt{c},$$

dann ergibt sich

$$t^2+2tx\sqrt{c}=a+2bx \text{ und } 2t\,dt+2x\sqrt{c}\,dt+2t\sqrt{c}\,dx=2b\,dx,$$

woraus folgt

$$dx=\frac{t+x\sqrt{c}}{b-t\sqrt{c}}dt$$

und

$$\int\frac{dx}{W}=\int\frac{dt}{b-t\sqrt{c}}=-\frac{1}{\sqrt{c}}\mathrm{l}(b-t\sqrt{c})$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{c}}\mathrm{l}(b+cx-\sqrt{c}\,W) \quad \text{oder}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\mathrm{l}(b+cx+\sqrt{c}\,W).$$

Lehrsatz: Ist der Koeffizient c unter dem Quadratwurzelzeichen positiv, so läßt sich das Integral (4) auf einen Logarithmus zurückführen.

b) Ist $c<0$, also negativ, so ist

$$\int\frac{dx}{W}=\int\frac{\sqrt{-c}\,dx}{\sqrt{(b^2-ac)-(b+cx)^2}}.$$

Setzt man hierin

$$t=\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}, \quad dx=\frac{1}{c}\sqrt{b^2-ac}\,dt,$$

so geht das Integral über in

$$(6) \quad \int\frac{dx}{W}=-\frac{1}{\sqrt{-c}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

Lehrsatz: Ist der Koeffizient c des Gliedes cx^2 unter dem Quadratwurzelzeichen negativ, so läßt sich das Integral auf einen Arcussinus zurückführen.

Die Formel (6) ist unbrauchbar, wenn $b^2 - ac = 0$ ist, was nur eintreten kann, wenn neben c auch a negativ wird. In diesem Fall ist $\sqrt{a + 2bx + cx^2} = \sqrt{a} + x\sqrt{c}$ und

$$(7) \qquad \int \frac{dx}{W} = \int \frac{dx}{x\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \mathrm{l}(x\sqrt{c} + \sqrt{a}) .$$

Das Integral ist imaginär.

3. Setzt man y an Stelle von W, so stellt die Gleichung

$$(8) \quad y = \sqrt{a + 2bx + cx^2} \text{ oder } cx^2 - y^2 + 2bx + a = 0$$

Fig. 2.

a) für $c > 0$ eine symmetrisch zur x-Achse liegende Hyperbel mit den Asymptoten

$$y = \pm x\sqrt{c} \pm \frac{b}{\sqrt{c}}$$

dar; b) für $c < 0$ und $b^2 - ac \gtrless 0$ eine Ellipse bzw. einen imaginären Kegelschnitt dar. Im ersten Fall ist bei veränderlichem t durch

$$y = x\sqrt{c} + t$$

ein Parallelstrahlenbüschel angezeigt, dessen Strahlen parallel zu einer Asymptote der betreffenden Hyperbel sind und diese daher nur noch in einem im Endlichen liegenden Punkt schneiden können. Die Koordinaten dieses Punktes wie auch das Differential $\frac{dx}{y}$ lassen sich deshalb rational durch den Parameter t ausdrücken:

$$x = \frac{a - t^2}{2(t\sqrt{c} - b)}, \; y = x\sqrt{c} + t, \; dx = -\frac{a\sqrt{c} - bt}{(t\sqrt{c} - b)^2} dt .$$

Im zweiten Fall $c < 0$ und $b^2 - ac > 0$ stellt die Gleichung (8) eine zur x-Achse symmetrisch liegende Ellipse dar, welche dieselbe in den Punkten $y = 0$, $x = \alpha$ und $y = 0$, $x = \beta$ schneiden möge. Dann ist deren Gleichung auch angegeben durch

$$y^2 = c(x - \alpha)(x - \beta) .$$

Bei veränderlichem t stellt alsdann $y = t(x - \alpha)$ ein Strahlenbüschel durch den einen jener Punkte $(\alpha, 0)$ dar,

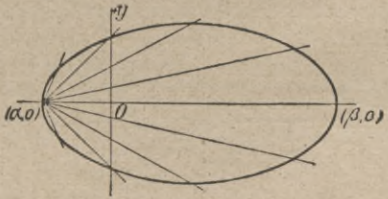

Fig. 3.

dessen Strahlen die Ellipse je nur noch in einem Punkte treffen, dessen Koordinaten sich mit dem Differential $\frac{dx}{y}$ rational durch den Parameter t ausdrücken lassen. Man erhält

$$x = \frac{t^2\alpha - c\beta}{t^2 - c}, \quad y = \frac{tc(\alpha - \beta)}{t^2 - c}, \quad dx = \frac{2c(\alpha - \beta)t\,dt}{(t^2 - c)^2} .$$

§ 15. Übungsbeispiele.

a) Um das Integral

$$\int \frac{f(x)}{W} dx = \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0) \frac{dx}{W}$$

auf das Integral $\int \frac{dx}{W}$ zurückzuführen, setze man

$$\int \frac{f(x)}{W} dx = (\alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) W + \beta \int \frac{dx}{W},$$

wo $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_1, \alpha_0; \beta$ Zahlenkoeffizienten bedeuten, die sich berechnen lassen, indem man vorstehende Gleichung differentiiert und nach Wegschaffung des Nenners W die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten miteinander vergleicht. Wie dies im einzelnen Fall ausgeführt wird, soll an folgendem Beispiel gezeigt werden.

1. Zur Reduktion des Integrals setze man

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x + 2}{\sqrt{1-x^2}} dx = (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) \sqrt{1-x^2} + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dann ergibt sich nach beiderseitiger Differentiation und Wegschaffung des Nenners

$$3x^3 - 2x^2 + 5x + 2 = (2\alpha_2 x + \alpha_1)(1 - x^2) - (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) x + \beta$$

und hieraus durch Koeffizientenvergleichung

$$3 = -3\alpha_2, \quad -2 = -2\alpha_1, \quad 5 = 2\alpha_2 - \alpha_0, \quad 2 = \alpha_1 + \beta,$$

woraus folgt $\alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_0 = -7$, $\beta = 1$. Es ist daher

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x + 2}{\sqrt{1-x^2}} dx = (-x^2 + x - 7)\sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

Weitere Reduktionen:

2. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3 + 2x - 5x^2}} = -\frac{1}{5} W + \frac{1}{5\sqrt{5}} \arcsin \frac{5x-1}{4}$$

3. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{2c^2}\right) W + \frac{1}{2c^2}(3b^2 - ac)\int \frac{dx}{W}$$

4. $$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2} W + \frac{a^2}{2} \mathrm{l}\{x + W\}$$

5. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{W}\,dx = \frac{x}{2} W + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

6. $$\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2} W - \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{a-x}{a}$$

7. $$\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx = \frac{x+a}{2} W - \frac{a^2}{2} \mathrm{l}(x+a+W).$$

Versteht man unter c eine positive Zahl, so gelten folgende Integrale:

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{c}} \mathrm{l}\left(b + cx \mp \sqrt{c}\,W\right)$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}$$

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \mathrm{l}\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$$

11. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

12. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{c} W - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{W},$$

daher ist für $c > 0$

13a. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{c}W+\frac{b}{c\sqrt{c}}\,\mathrm{l}(b+cx-\sqrt{c}W)$$

und für $c<0$

13b. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{c}W+\frac{b}{c\sqrt{-c}}\arcsin\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

b) Integrale von der Form

$$\int\frac{dx}{(x-k)^m\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

werden durch die Substitution $x-k=\frac{1}{z}$, $dx=-\frac{dz}{z^2}$ auf solche von der vorigen Art zurückgeführt, wie die folgenden Beispiele zeigen:

14. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-3x^2}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{2z-3}}=-\sqrt{2z-3}$$
$$-\sqrt{\frac{2-3x}{x}}$$

15. $$\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-2x+3}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{l}\frac{2x+\sqrt{6}\sqrt{x^2-2x+3}}{x-3}$$

16. $$\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1-x^2}}=-i\int\frac{z\,dz}{\sqrt{1+2z}}$$

17. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{l}\,\frac{a+bx+\sqrt{a}\cdot W}{x}$$

für $a>0$.

18. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{a+bx}{x\sqrt{b^2-ac}}$$

für $a<0$.

19. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-p)^k\sqrt{a+2bx+cx^2}}=-\int\frac{z^{k-1}dz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2}}$,

wo $A=c$, $B=b+cp$, $C=a+2bp+cp^2$ gesetzt ist.

§ 16. Höhere transzendente Integrale und Funktionen.

In den vorhergehenden Paragraphen ist die Integration der algebraischen Differentiale $f(x)\,dx$ für folgende drei Fälle behandelt worden. Es war $f(x)$ von der Form

1. $f(x)=\varphi(x)$ gleich einer rationalen Funktion von x,

2. $f(x)=\varphi\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{a+bx}{c+dx}}\right)$,

3. $f(x)=\varphi(x,\sqrt{a+2bx+cx^2})$.

Die Integrale dieser Funktionen sind, wie wir gesehen haben, durch algebraische, logarithmische und zyklometrische Funktionen darstellbar. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn $f(x)$ entweder die Quadratwurzel aus einer den zweiten Grad übersteigenden ganzen Funktion von x oder höhere Wurzeln aus nichtlinearen Funktionen enthält. Funktionen dieser Art werden als höhere transzendente Funktionen bezeichnet.

Erklärung. Enthält die Funktion $f(x)$ die Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion dritten oder vierten Grades von x, so wird

$$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4})\,dx$$

nach Legendre als „elliptisches Integral" bezeichnet. Ein solches Integral ist außer durch algebraische, logarithmische und zyklometrische Funktionen noch durch elliptische Funktionen darstellbar.

Treten noch höhere Funktionen unter dem Wurzelzeichen auf, oder sind in f höhere Wurzeln aus nichtlinearen Funktionen von x enthalten, so gelangt man zu den sogenannten „hyperelliptischen Funktionen“, die wie auch die elliptischen Funktionen aus dem Kreise unserer Betrachtungen weggelassen werden sollen, da ihr Studium den Rahmen der Elementarmathematik überschreiten würde.

IV. Abschnitt.

Integration transzendenter Differentiale.

---

§ 17. Transzendente Differentiale.

Erklärung. Ein Differential $f(x)\,dx$ heißt transzendent, wenn $f(x)$ einzelne oder mehrere der transzendenten Funktionen a^x, e^x; $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$; $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$ enthält.

Bei der Integration transzendenter Differentiale kommen hauptsächlich folgende Methoden in Betracht:

α) Integration durch Substitution einer neuen Veränderlichen;

β) Reduktion der Integrale auf einfachere derselben Art mit Hilfe der teilweisen Integration nach der Formel

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx;$$

γ) Integration durch Rationalisierung des gegebenen transzendenten Differentials (siehe § 20);

δ) Integration durch Reihenentwicklung.

§ 18. Integration transzendenter Differentiale durch Substitution.

a) Ist f eine algebraische (rationale) Funktion der elementaren transzendenten Funktionen

$$e^x,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi,\ \operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{ctg}\varphi,\ \arcsin x,\ \arccos x,$$
$$\operatorname{arc\,tg} x,\ \operatorname{arc\,ctg} x,$$

so lassen sich die folgenden transzendenten Integrale durch die beigefügten Substitutionen direkt in Integrale algebraischer (rationaler) Funktionen überführen.

1. $$\int f(e^{kx})\, e^{kx}\, dx = \frac{1}{k}\int f(z)\, dz,\quad z = e^{kx},\quad dz = k e^{kx}\, dx.$$

2. $$\int f(\mathrm{l}x)\frac{dx}{x} = \int f(z)\, dz,\quad z = \mathrm{l}x,\quad dz = \frac{dx}{x}.$$

3. $$\int f(\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = \int f(z)\, dz,\quad z = \sin\varphi,$$
$$dz = \cos\varphi\, d\varphi.$$

4. $$\int f(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = -\int f(z)\, dz,\quad z = \cos\varphi,$$
$$dz = -\sin\varphi\, d\varphi.$$

5. $$\int f(\operatorname{tg}\varphi)\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int f(z)\, dz,\quad z = \operatorname{tg}\varphi,$$
$$dz = d\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

6. $$\int f(\operatorname{ctg}\varphi)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\int f(z)\, dz,\quad z = \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$dz = d\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

7. $$\int f(\operatorname{arc}\sin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int f(z)\,dz\,,\quad z=\operatorname{arc}\sin x\,,$$
$$dz=d\operatorname{arc}\sin x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

8. $$\int f(\operatorname{arc}\cos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int f(z)\,dz\,,\quad z=\operatorname{arc}\cos x\,,$$
$$dz=d\operatorname{arc}\cos x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

9. $$\int f(\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)\frac{dx}{1+x^2}=\int f(z)\,dz\,,\quad z=\operatorname{arc}\operatorname{tg}x\,,$$
$$dz=d\operatorname{arc}\operatorname{tg}x=\frac{dx}{1+x^2}\,.$$

10. $$\int f(\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x)\frac{dx}{1+x^2}=-\int f(z)\,dz\,,\quad z=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x\,,$$
$$dz=d\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x=-\frac{dx}{1+x^2}\,.$$

b) Wie die folgenden Integrale transzendenter Differentiale in solche algebraischer Differentiale übergeführt werden können, zeigen die beigefügten Substitutionen:

11. $$\int f(e^{kx})\,dx=\frac{1}{k}\int f(z)\frac{dz}{z}\,,\quad z=e^{kx}\,,\quad \mathrm{l}z=kx\,,$$
$$\frac{dz}{z}=k\,dx\,.$$

12. $$\int f(\sin\varphi)\,d\varphi=\int f(z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,,\quad z=\sin\varphi\,,$$
$$\varphi=\operatorname{arc}\sin z\,,\quad d\varphi=\frac{dz}{\sqrt{1-z^3}}\,.$$

13. $$\int f(\cos\varphi)\,d\varphi = -\int f(z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \quad z = \cos\varphi,$$
$$\varphi = \operatorname{arc}\cos z, \quad d\varphi = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

14. $$\int f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi = \int f(z)\frac{dz}{1+z^2}, \quad z = \operatorname{tg}\varphi,$$
$$\varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg} z, \; d\varphi = \frac{dz}{1+z^2}.$$

15. $$\int f(\operatorname{ctg}\varphi)\,d\varphi = -\int f(z)\frac{dz}{1+z^2}, \quad z = \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\varphi = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} z, \quad d\varphi = -\frac{dz}{1+z^2}.$$

Setzt man $z = \sin\varphi$, so folgt hieraus:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-z^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}},$$
$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}, \quad d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

daher ist allgemein

16. $$\int f(\sin\varphi, \cos\varphi, \operatorname{tg}\varphi, \operatorname{ctg}\varphi)\,d\varphi$$
$$= \int f\left(z, \sqrt{1-z^2}, \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Man sieht hieraus:

Jedes transzendente Differential, welches die trigonometrischen Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$ enthält, läßt sich durch Substitution in ein algebraisches Differential überführen.

Beispiele.

1. $\int (e^{ax} + \sqrt{e^x})\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + 2\sqrt{e^x}$.

2. $\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx = 2\,\mathrm{l}(e^x - 1) - x$.

3. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arc\,tg} e^x$.

4. $\int \frac{e^x\, dx}{(e^x - 1)^3} = -\frac{1}{2(e^x - 1)^2}$.

5. $\int (e^x + e^{-x})\, dx = e^x - e^{-x}$.

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$.

8. $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\mathrm{l}(\cos x)$.

9. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \mathrm{l}(\sin x)$.

10. $\int \operatorname{tg} k x\, dx = -\frac{1}{k}\,\mathrm{l}(\cos k x)$.

11. $\int \cos^2 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$.

12. $\int \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 x) \cos x$.

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$.

14. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$.

§ 19. Integration transzendenter Differentiale durch allmähliche Reduktion.

1. Integrale von der Form

$$\int x^m e^{kx}\,dx$$

werden durch die teilweise Integration nach der Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

gelöst. Setzt man

$$u = x^m, \quad dv = e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\,de^{kx}, \quad v = \frac{e^{kx}}{k},$$

so folgt hieraus, wie schon aus § 7 zu ersehen ist, die Reduktionsformel

$$(1) \qquad \int x^m e^{kx}\,dx = \frac{x^m e^{kx}}{k} - \frac{m}{k}\int x^{m-1} e^{kx}\,dx.$$

Beispiele.

1. $\int x\;e^x\,dx = e^x(x-1)$.
2. $\int x^2 e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$.
3. $\int x^3 e^x\,dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$ usf.

2. Integrale von der Form $\int f(\mathrm{l}x)\,dx$ werden auf solche der vorigen Art zurückgeführt, indem man setzt

$$(2) \qquad \begin{gathered} z = \mathrm{l}x, \quad x = e^z, \quad dx = e^z\,dz \\ \int f(\mathrm{l}x)\,dx = \int f(z)\,e^z\,dz. \end{gathered}$$

Beispielsweise ist

1. $\int \mathrm{l}x\,dx = \int z\,e^z\,dz = e^z(z-1) = x(\mathrm{l}x - 1)$.
2. $\int (\mathrm{l}x)^2\,dx = \int z^2 e^z\,dz = e^z(z^2 - 2z + 2)$
   $= x\{(\mathrm{l}x)^2 - 2\,\mathrm{l}x + 2\}$.
3. $\int \{\mathrm{l}x + 1\}\,dx = x\,\mathrm{l}x$.

3. Wie schon in § 8 weiter ausgeführt worden ist, lassen sich auch die folgenden Integrale durch allmähliche Reduktion ermitteln.

$$\begin{aligned}&\int \sin^m x\,dx\,, \quad \int \cos^m x\,dx\,, \quad \int \sin^m x \cos^m x\,dx\,,\\ &\int x^k \sin x\,dx\,, \quad \int x^k \cos x\,dx\,.\end{aligned} \tag{3}$$

4. Auch die folgenden Integrale können mit Hilfe der teilweisen Integration ermittelt werden.

$$J_1 = \int e^{ax} \cos b\,x\,dx\,, \quad J_2 = \int e^{ax} \sin b\,x\,dx\,.$$

Man erhält nach dieser Methode

$$J_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \sin b\,x - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin b\,x\,dx\,,$$

$$J_2 = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos b\,x + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos b\,x\,dx\,,$$

woraus sich ergibt

$$J_1 = e^{ax} \frac{a \cos b\,x + b \sin b\,x}{a^2 + b^2}\,, \quad J_2 = e^{ax} \frac{a \sin b\,x - b \cos b\,x}{a^2 + b^2}\,.$$

5. Integrale, welche Kreisfunktionen enthalten, wie z. B. $\int f(\operatorname{arc} \sin x)\,dx$, werden durch die Substitution

$$z = \operatorname{arc} \sin x\,, \quad x = \sin z\,, \quad dx = \cos z\,dz$$

zurückgeführt auf

$$\int f(\operatorname{arc} \sin x)\,dx = \int f(z) \cos z\,dz\,,$$

die nach 1. oder nach § 8 zu behandeln sind.

Beispiele hierzu finden sich in § 7, Nr. 5—9.

6. Der Integrallogarithmus $\int \frac{dx}{\operatorname{l} x}$ kann nur durch Reihenentwicklung näherungsweise ermittelt werden.

§ 20. Integration transzendenter Differentiale durch Rationalisierung.

Die Methode der Rationalisierung eines Differentials $f(x)\,dx$ ist mit Vorteil anwendbar, wenn $f(x)$ eine rationale Funktion der elementaren trigonometrischen Funktionen

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{ctg}\varphi$$

ist.

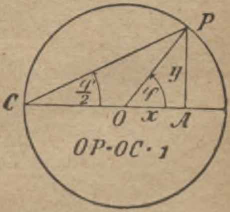

Fig. 4.

Setzt man in einem Kreis vom Radius 1 die Koordinaten des Punktes P:

$$OA = x, \quad AP = y,$$

so ist

$$(1) \quad \cos\varphi = x, \quad \sin\varphi = y, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y}.$$

Zieht man nun CP, so ist $\angle OCP = \frac{\varphi}{2}$, und wenn man $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{1+x} = \lambda$ oder $\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} \lambda$ setzt, so folgt

$$(2) \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \quad \cos\varphi = \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{1-\lambda^2}{2\lambda}, \quad d\varphi = \dfrac{2\,d\lambda}{1+\lambda^2}, \end{cases}$$

womit angezeigt ist, daß durch die Substitution (1) jede rationale Funktion der elementaren transzendenten Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$ als rationale Funktion des Parameters λ dargestellt werden kann. Somit gilt der

Satz: Jedes transzendente Differential $f(\varphi)\,d\varphi$, welches nur trigonometrische Funktionen der Veränderlichen φ rational enthält, läßt sich als rationales Differential darstellen.

Beispiele.

1. $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \int \frac{d\lambda}{\lambda} = 1\lambda = 1\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$

2. $$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int \frac{d\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = 1\,\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

3. $$\int \mathrm{tg}\,\varphi\, d\varphi = \int \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} \cdot \frac{2\,d\lambda}{1+\lambda^2} = \int \frac{d\lambda^2}{1-\lambda^2} + \int \frac{d\lambda^2}{1+\lambda^2}$$
$$= 1\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} = 1\frac{1}{\cos\varphi} = -1\cos\varphi$$

4. $$\int \mathrm{ctg}\,\varphi\, d\varphi = -\int \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$
$$= 1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 1\sin\varphi\,.$$

V. Abschnitt.

Bestimmte Integrale.

§ 21. Das bestimmte Integral.

Bezeichnet man mit $F(x)$ eine Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist, so heißt $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$ mit der Konstanten C. Diese läßt sich bestimmen, indem man der Veränderlichen x einen Wert beilegt, durch welchen das Integral verschwindet. Ist a ein solcher, also

$\int f(a)\,d\,a = 0$, so ist auch $F(a) + C = 0$ und C
$= -F(a)$.

Wir erhalten alsdann das bestimmte Integral

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)\,,$$

wo x die obere und a die untere Grenze heißt.

Lehrsatz: Das bestimmte Integral $\int_b^a f(x)\,dx$ zwischen den Grenzen a und b wird erhalten, indem man ohne Rücksicht auf die Konstante das unbestimmte Integral ermittelt und die Differenz der Werte bildet, welche dasselbe bzw. für $x = a$ und $x = b$ annimmt.

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)\,. \tag{1}$$

Beispiele.

1. $$\int_b^a (a^2 + a\,x + x^2)\,dx = a^2 x + \frac{1}{2}\,a\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 \Bigg|_{x=0}^{x=a}$$
$$= a^3 + \frac{1}{2}\,a^3 + \frac{1}{3}\,a^3 = \frac{11}{6}\,a^3\,.$$

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1\,.$$

3. $$\int_0^v \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\Bigg|_0^a = \frac{1}{a}\{\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0\} = \frac{\pi}{4a}\,.$$

§ 22. Das bestimmte Integral als eine Summe von unendlich kleinen Größen.

Es sei $y = f(x)$ eine Funktion von x, welche innerhalb des Gebietes $x = x$ bis $x = a$ eindeutig, endlich und stetig ist, dann zeigt die durch $y = f(x)$ dargestellte ebene Kurve zwischen den Punkten P und Q mit den Abszissen $\acute{x}$ und a einen stetigen Verlauf. Der Inhalt der Fläche $PABC$, der von den Ordinaten $y = f(x)$, $b = f(a)$, der Abszissenachse und dem Kurvenbogen PQ begrenzt ist, sei U. Teilt man die Strecke $AB = a - x$

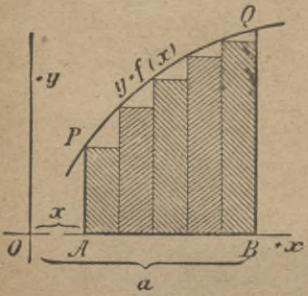

Fig. 5.

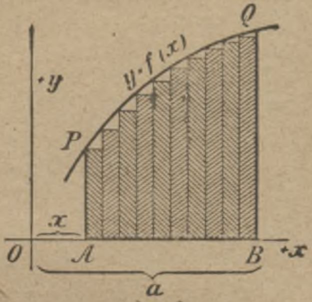

Fig. 6.

(Fig. 5 und 6) in n gleiche Teile Δx und errichtet man in den Teilpunkten Lote, welche den Bogen PQ in den Punkten P_1, P_2, ... treffen mögen, dann ist*) der Flächeninhalt U näherungsweise angegeben durch

$$U_n = \Delta x \{f(x) + f(x + \Delta x) + f(x + 2\,\Delta x) + \ldots \\ + f(x + [n-1]\,\Delta)\} \quad \text{oder}$$

$$(1) \qquad U_n' = \Delta x \{f(x + \Delta x) + f(x + 2\,\Delta x) + \ldots \\ + f(x + n\,\Delta x)\},$$

*) Sammlung Göschen, Bd. 87, § 78.

wo U_n bzw. U'_n eine Summe von Rechtecken darstellt, die kleiner bzw. größer als U ist:

$$U_n < U > U'_n . \tag{2}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) erhält man

$$U'_n - U_n = \Delta x \{f(x + n \Delta x) - f(x)\} . \tag{3}$$

Läßt man hierin n immer größer uud damit Δx immer kleiner werden, so nähert sich die rechte Seite dieser Gleichung mehr und mehr der Grenze 0, d. h. es ist

$$\lim (U'_n - U_n)_{n=\infty} = 0$$

$$\text{oder} \qquad \lim U_n = \lim U'_n . \tag{4}$$

Zufolge dieser Gleichung kann aber die Ungleichung (2) nur bestehen, wenn

$$\lim U_n = U = \lim U'_n \tag{5}$$

ist. Es ergibt sich somit der

Lehrsatz: Jede der beiden Summen (1) nähert sich mit unendlich wachsendem n dem Grenzwert U, der geometrisch den Inhalt der Fläche $PABQ$ darstellt.

Wie die Gleichung (1) zeigt, kann dieser Inhalt als eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Rechtecken angesehen werden.

Entwickelt man in dem Ausdruck für U_n jede der Funktionen $f(x + i \Delta x)$ nach Potenzen von $i \Delta x$ und faßt die Koeffizienten gleicher Potenzen von Δx zusammen, so läßt sich $\lim U_n$, wie in § 78 der Differentialrechnung gezeigt worden ist, durch die Potenzreihe darstellen:

$$\begin{aligned} \lim U_n = (a - x) f(x) &+ \frac{1}{2!} (a - x)^2 f'(x) \\ &+ \frac{1}{3!} (a - x)^3 f''(x) + \ldots , \end{aligned} \tag{6}$$

welche unter den gegebenen Voraussetzungen konvergent ist und den Grenzwert U besitzt. Es gilt somit der

Lehrsatz: Der Inhalt U der Fläche $PABQ$ ist ausgedrückt durch die konvergente Potenzreihe

$$U=(a-x)f(x)+\frac{1}{2!}(a-x)^2 f'(x)+\frac{1}{3!}(a-x)^3 f''(x)+\dots$$

Ist nun $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ das unbestimmte Integral des Differentials $f(x)\,dx$, so folgt hieraus durch Ableitung

$$(7)\qquad f(x)=F'(x),\ f'(x)=F''(x),\ f''(x)=F'''(x),\dots$$

Entwickelt man alsdann den Ausdruck $F(x)+C$ mit Hilfe des Taylorschen Lehrsatzes nach Potenzen von $x+h$, so folgt

$$F(x+h)+C=F(x)+C+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{2!}F''(x)+\dots,$$

oder wenn wir $h=a-x$ setzen und die Bedingungen (7) berücksichtigen,

$$F(a)=F(x)+(a-x)f(x)+\frac{1}{2!}(a-x)^2 f'(x)+\dots$$

oder

$$F(a)-F(x)=\lim U_n=U.$$

Da nun der Annahme gemäß $F(x)$ das unbestimmte Integral des Differentials $f(x)\,dx$ ist, so stellt nach dem vorigen Paragraphen $F(a)-F(x)$ das bestimmte Integral desselben Differentials zwischen den Grenzen a und x dar. Es ist daher

$$(8)\qquad U=\lim U_n=\int_x^a f(x)\,dx=F(a)-F(x),$$

woraus die Sätze folgen:

Lehrsatz: Das bestimmte Integral

$$\int_x^a f(x)\,dx = F(a) - F(x)$$

des Differentials $f(x)\,dx$ stellt geometrisch den Inhalt der Fläche U dar, der von den Ordinaten $y = f(x)$, $b = f(a)$ der Punkte P und Q mit den Abszissen x und a, der Abszissenachse und dem Bogen QP der Kurve $y = f(x)$ begrenzt wird.

Nach den Gleichungen (6) und (8) läßt sich das bestimmte Integral des Differentials $f(x)\,dx$ auch als Grenzwert einer Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Elementen betrachten, welche in (1) mit U_n oder U'_n bezeichnet ist.

Vergleicht man (6) und (8) miteinander, so gelangt man zu dem weiteren

Lehrsatz: Das bestimmte Integral $\int_x^a f(x)\,dx$ des Differentials $f(x)\,dx$ läßt sich in eine konvergente nach Potenzen von $(a - x)$ fortschreitende Potenzreihe entwickeln, deren Koeffizienten durch Ableitung von $f(x)$ erhalten werden.

$$\int_x^a f(x)\,dx = (a - x)\,f(x) + \frac{1}{2!}(a - x)^2 f'(x) + \frac{1}{3!}(a - x)^3 f''(x) + \ldots$$

Dieser Satz kann dazu dienen, ein bestimmtes Integral mit endlichen Grenzen nur mit Hilfe der Differentialrechnung zu berechnen.

§ 23. Lehrsätze über das bestimmte Integral.

1. Aus Formel (1) des § 21 ergibt sich durch Vertauschung der Grenzen a und b unmittelbar der

Lehrsatz: Ein bestimmtes Integral geht in seinen entgegengesetzten Wert über, wenn man die Grenzen miteinander vertauscht.

Es ist

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{1}$$

2. Zunächst folgt der weitere

Lehrsatz: Ein bestimmtes Integral wird stets gleich Null, sobald die Grenzen einander gleich werden.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,. \tag{2}$$

3. Nach § 21 ist der Wert des bestimmten Integrals zwischen den Grenzen a und b:

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)\,.$$

Da nun jederzeit in identischer Weise die Gleichung erfüllt ist:

$$F(a) - F(b) = F(a) - F(c) + F(c) - F(b)\,,$$

so folgt auch

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\,. \tag{3}$$

Lehrsatz: Anstatt die Integration von der Grenze b bis zur Grenze a direkt auszuführen, kann man auch eine oder mehrere Zwischengrenzen c einführen und zunächst von der Grenze b bis zur Grenze c integrieren und nachträglich die Integration von c bis a fortsetzen.

Geometrisch bedeutet die Formel (3), daß man den Flächeninhalt $PABQ$ auch als Summe der Flächenteile $PACR$ und $RCBQ$ betrachten kann; denn es ist Fläche

$$PACR = \int_b^c f(x)\,dx\,,$$

$$\text{Fläche } RCBQ = \int_c^a f(x)\,dx\,,$$

woraus man durch Addition erhält

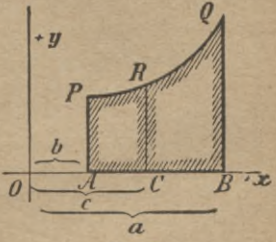

Fig. 7.

$$PABQ = PACR + RCBQ$$

oder

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx\,.$$

§ 24. Integration bis $x = \infty$ oder bis und über eine Unstetigkeitsstelle von $f(x)$.

a) Integration bis $x = \infty$.

Ist die Funktion $f(x)$ eindeutig und stetig für alle Werte von $x \gtreqless b$, so kann man auch eine der Grenzen, z. B. die obere, unendlich groß werden lassen.

Erklärung. Nähert sich hierbei das Integral einem bestimmten Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \int_b^x f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \{F(x) - F(b)\}\,,$$

so heißt derselbe der Wert des Integrals für (die obere Grenze) $x = \infty$.

In derselben Weise sind auch die Fälle zu behandeln, in denen die untere Grenze gleich $+\infty$ oder eine der Grenzen $-\infty$ wird.

$$\int_{+\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{x=+\infty} \{F(a) - F(x)\}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x=+\infty} F(x) - \lim_{x=-\infty} F(x)\,.$$

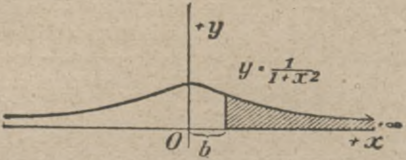

Fig. 8.

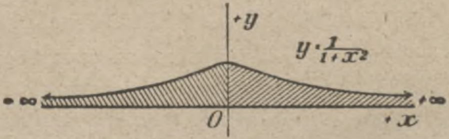

Fig. 9.

Ein solches Integral kann einen endlichen und bestimmten Wert erhalten oder auch unbestimmt werden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiele.

1. $$\int_{b}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} b\,. \qquad \text{(Fig. 8.)}$$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\,. \qquad \text{(Fig. 9.)}$$

3. $$\int_0^{-\infty} a^x\,dx = -\frac{1}{\mathrm{l}a}, \quad a > 1. \qquad \text{(Fig. 10.)}$$

Hierdurch ist der Flächeninhalt angegeben, der von der Exponentialkurve $y = a^x$, der y-Achse und der negativen x-Achse begrenzt wird.

4. Unbestimmt wird der Wert des Integrals

$$\int_\alpha^\infty \cos x\,dx = \sin(x = \infty) - \sin\alpha = \text{unbestimmt}.$$

b) Integration bis zu einer Unstetigkeitsstelle von $f(x)$.

Es kann auch der Fall eintreten, daß $f(x)$ selbst für eine der Grenzen unstetig wird.

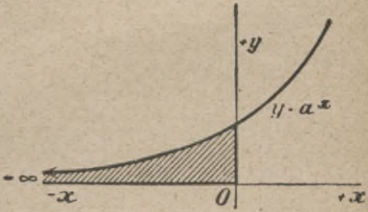

Fig. 10.

Erklärung. Wenn die Funktion $f(x)$ für $x = a$ durch Unendlichwerden selbst unstetig wird, so bezeichnen wir den Wert des Integrals mit

$$\int_b^{x=a} f(x)\,dx = \lim_{x=a} \int_b^x f(x)\,dx = \lim \{F(x) - F(b)\}_{x=a}$$

für den Fall, daß sich hierbei überhaupt ein bestimmter Grenzwert ergibt. Ist dies nicht der Fall, so darf die Integration nicht bis $x = a$ ausgedehnt werden.

Beispiele.

1. $$\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a.$$ 2. $$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \pi.$$

$$3. \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Integration über eine Unstetigkeitsstelle von $f(x)$.

Erklärung. Wird die Funktion $f(x)$ für einen Wert $x = c$ unendlich, der zwischen den Grenzen des Integrals b und a liegt ($b < c < a$), so versteht man unter dem letzteren den Grenzwert, nach welchem die Summe

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{x=c} \int_b^x f(x)\,dx + \lim_{x=c} \int_x^a f(x)\,dx$$

konvergiert.

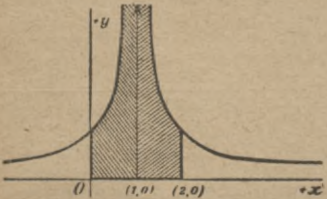

Fig. 11.

Ein solches Integral kann einen endlichen und bestimmten Wert haben; es kann aber auch unendlich oder unbestimmt werden.

Beispiel. Die binomische Hyperbel 5. Ordnung, deren Gleichung

$$y^3 (x-1)^2 - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

ist, hat in $x = 1$ einen unendlich fernen Punkt. Der Inhalt des schraffierten Flächenstücks ist angegeben durch

$$U = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^1 + 3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_1^2$$

$$= -3\sqrt[3]{-1} + 3\sqrt[3]{1} = 6.$$

§ 25. Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ durch ein unendliches Produkt.

Integriert man unter der Voraussetzung eines positiven n in den Formeln (2) und (3) von § 8 zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so folgt

1. für ein gerades n:

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n};$$

2. für ein ungerades n:

$$(2) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \, d\varphi = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdots \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Da nun die Funktion $\sin \varphi$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ stets einen positiven echten Bruch darstellt, so gilt für jedes ganzzahlige $k > 0$:

$$(3) \qquad \sin^k \varphi > \sin^{k+1} \varphi \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \varphi \, d\varphi > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+1} \varphi \, d\varphi .$$

Setzt man nun hierin und in den Formeln (1) und (2) $k = 2n - 1$, $k = 2n$, so folgt

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} > \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} \end{cases}$$

oder nach einiger Umformung

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1},$$

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

Nun ist aber leicht zu erkennen, daß sich die beiden rechten Seiten dieser Gleichungen für $n = \infty$ der gleichen Grenze nähern; daher ist

$$(5)\qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\right\}.$$

Lehrsatz: Die irrationale Zahl $\frac{\pi}{2}$ läßt sich darstellen durch das unendliche Produkt

$$(6)\qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots$$

§ 26. Einige weitere bestimmte Integrale.

1. Mit Hilfe der teilweisen Integration erhält man die Rekursionsformel

$$\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ist hierin n eine gerade Zahl, so gelangt man durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel schließlich zu dem Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

für ein ungerades n schließlich zu dem folgenden:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Je nachdem n gerade oder ungerade ist, ergeben sich schließlich die beiden Endformeln

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n(n-2)}x^{n-3} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)\dots 5}{n(n-2)\dots 4}x\right\} + \frac{(n-1)(n-3)\dots 5\cdot 3}{n(n-2)\dots 4\cdot 2}\arcsin x + C.$$

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n(n-2)}x^{n-3} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)\dots 4\cdot 2}{n(n-2)\dots 5\cdot 3\cdot 1}\right\} + C.$$

Nimmt man hierin das Integral zwischen den Grenzen 1 und 0, so folgt

a) für ein gerades n:

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(n-1)(n-3)\dots 5\cdot 3}{n(n-2)\dots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2};$$

b) für ein ungerades n:

$$(2)\qquad \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(n-1)(n-3)\dots 4\cdot 2}{n(n-2)\dots 3\cdot 1}.$$

2. Nach der Binomialformel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

erhält man

$$(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\varphi - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\cos^4\varphi$$
$$- \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\cos^6\varphi - \dots$$

Durch Integration und Benutzung der Formel (1) in § 25 für $n = 2, 4, 6, \ldots$ ergibt sich hieraus das bestimmte Integral

$$(3)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 3\,\varepsilon^4 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 5\,\varepsilon^6 - \ldots\right\},$$

das wir bei der Quadratur und Rektifikation der Ellipse und einiger anderer Kurven verwenden können (§ 30, 5).

Ebenso erhält man die weitere Formel

$$(4)\quad \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi = \pi\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 3\,\varepsilon^4 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 5\,\varepsilon^6 - \ldots\right\},$$

die wir ebenfalls später gebrauchen können.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Geometrie der Ebene.

---

§ 27. Quadratur der Kurven in rechtwinkligen Koordinaten.

Erklärung. Wie schon in der Differentialrechnung*) § 11 und § 69 ausgeführt wurde, versteht man unter der

*) Sammlung Göschen, Bd. 87.

Quadratur einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten die Berechnung des Flächeninhalts U, der von den Ordinaten zweier Kurvenpunkte P und Q, dem zugehörigen Kurvenbogen uud der Abszissenachse begrenzt wird.

Lehrsatz: Nach Formel (8) bzw. (6) in § 22 ist der schraffierte Flächeninhalt U (Fig. 12) angegeben durch das bestimmte Integral

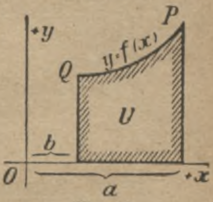

Fig. 12.

(1) $U = \int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$

bzw. durch die konvergente Potenzreihe

$$U = (a-b)\,f(b) + \frac{1}{2!}(a-b)^2 f'(b) + \frac{1}{3!}(a-b)^3 f''(b) + \ldots \tag{2}$$

Beispiele.

1. Quadratur der Parabel $y = a x^2$.

$$U = a\int_b^x x^2\,dx = \frac{a}{3}(x^3 - b^3),$$

woraus für $b = 0$ folgt: $U = \frac{a x^3}{3} = \frac{1}{3} x y$.

2. Quadratur der Spitzpunktsparabel $y^2 = p^2 x^3$.

$$U = p\int_b^x x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}\,p\,x^{\frac{5}{2}}\Big|_b^x = \frac{2}{5}\,p\,(x^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}}),$$

woraus für $b = 0$ folgt: $U = \frac{2}{5}\,p\,x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} x y$.

3. Sind m und n ganze positive Zahlen, so stellt $y^n = a x^m$ eine binomische Parabel dar, die von der m^{ten} oder n^{ten} Ordnung ist, je nachdem $m > n$ oder $n > m$ ist und durch den Ursprung hindurchgeht.

Sind x und y die Koordinaten eines Kurvenpunkts P, so ist der schraffierte Flächeninhalt (Fig. 13) angegeben durch

$$U = a^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n} a^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n} x y \,.$$

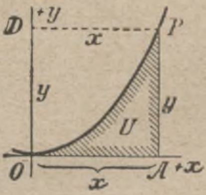

Fig. 13.

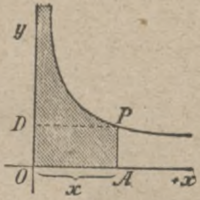

Fig. 14.

Da nun Rechteck $DOAP = xy$ ist, so ergibt sich für den nichtschraffierten Teil desselben der Inhalt

$$DOP = \frac{m}{m+n} x y \,.$$

Lehrsatz: Fällt man von einem Punkt der parabolischen Kurve $y^n = a x^m$ Lote auf die beiden Achsen Ox und Oy, so teilt die Kurve das Rechteck $DOAP$ in zwei Teile DOP und OAP, die sich wie m zu n verhalten. $DOP : OAP = m : n$.

4. Sind m und n ganze positive Zahlen, so ist durch $x^m y^n = a$ eine binomische Hyperbel $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung dargestellt.

Wird $n > m$ vorausgesetzt, so ist der Inhalt des schraffierten Flächenteils (Fig. 14), der sich ins Unendliche erstreckt, angegeben durch

$$U = a^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{n-m} a^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n}{n-m} xy .$$

Das schraffierte Flächenstück zwischen der y-Achse und der Ordinate PA wird endlich, solange $n > m$ ist; es wird aber unendlich, sobald $n < m$ oder $n = m$ ist, z. B. für $x^2 y = a$ oder $xy = a$.

5. Quadratur der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 .$$

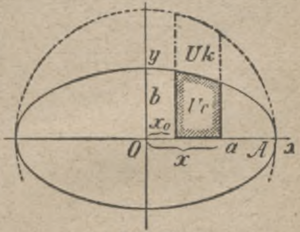

Fig. 15.

$$U_e = \frac{b}{a} \int_{x_0}^{x} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{1}{2} ab \arcsin \frac{x}{a} + \frac{bx}{2a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)_{x_0}^{x}$$

Beschreibt man um O mit $OA = a$ einen Kreis, so ist

$$U_k = \int_{x_0}^{x} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \Bigg|_{x_0}^{x} .$$

Für $x_0 = 0$ und $x = a$ ergibt sich hieraus als Flächeninhalt des Ellipsenquadranten $U = \frac{\pi}{4} ab$ und somit als Inhalt der ganzen Ellipse $U = \pi ab$.

Ist $b = a$, so geht die Ellipse in einen Kreis über, für welchen wie bekannt $U = \pi a^2$ ist.

6. Quadratur der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Es ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (Fig. 16) und

$$U = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)\right\}_{x_0}^{x}.$$

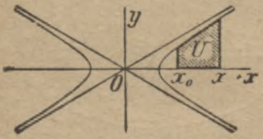

Fig. 16.

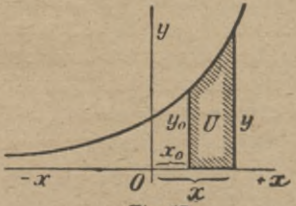

Fig. 17.

Für $x_0 = a$ folgt hieraus

$$U = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\,\mathrm{l}\left\{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right\}.$$

7. Die Exponentialkurve (Fig. 17) $y = a^x$ hat den Flächeninhalt

$$U = \int_{x_0}^{x} a^x\,dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}a}\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{1}{\mathrm{l}a}(y - y_0).$$

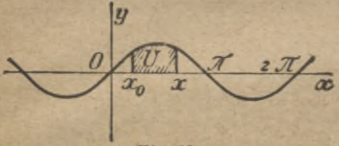

Fig. 18.

8. Für die Sinuslinie (Fig. 18) $y = \sin x$ ist

$$U = \int_{x_0}^{x}\sin x\,dx = -\cos x + \cos x_0.$$

Für $x_0 = 0$ und $x = \pi$ ergibt sich als Inhalt eines Abschnitts $U = 1 + 1 = 2$.

9. Für die Kurve dritter Ordnung (Fig. 19), welche die Gleichung besitzt:

$$y^2 x - a^2 (a - x) = 0 \quad \text{oder} \quad y = a \sqrt{\frac{a - x}{x}},$$

ergibt sich als Flächeninhalt über $0\,x$:

$$U_x = \int_0^x a \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx = a \int_0^x \frac{a - x}{\sqrt{a x - x^2}}\,dx$$

$$= a^2 \left(\arc \sin \sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{1}{a} \sqrt{a x - x^2} \right)_0^x$$

(vgl. § 15) und hieraus für $x = a$ als Inhalt der Fläche zwischen y-Achse, x-Achse und Kurve

$$U_a = \frac{\pi}{2} a^2 .$$

Daher hat die ganze Fläche zwischen y-Achse und Kurve den Inhalt $J = 2\,U_a = \pi\,a^2$.

Ein Flächenstreifen parallel zur x-Achse zu den Ordinaten 0 und y hat den Inhalt

$$U'_y = \int_0^y x\,dy = \int \frac{a^3}{a^2 + y^2}\,dy$$

$$= a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{a} .$$

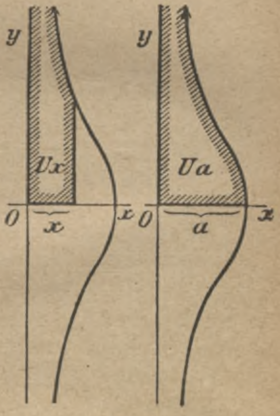

Fig. 19.

Für $y = \infty$ folgt hieraus $U'_\infty = U_a = \frac{\pi}{2} a^2$.

Daher ist ebenso wie oben $J = 2\,U'_\infty = \pi\,a^2$.

10. Für die Zykloide (Fig. 20), deren Gleichung in Parameterform $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$ ist, erhalten wir $dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$ und als Flächeninhalt

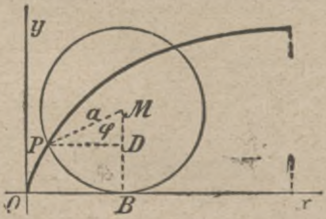

Fig. 20.

$$U_x = \int_0^x y\,dx = a^2 \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= a^2 \int_0^\varphi (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right).$$

Für $\varphi = \pi$ folgt hieraus als Inhalt eines ganzen Zykloidenabschnitts

$$U_{2\pi} = \int_0^{2\pi} y\,dx = 3\pi a^2.$$

§ 28. Quadratur in Polarkoordinaten.

Erklärung. Unter der Quadratur in Polarkoordinaten versteht man gewöhnlich die Berechnung des Flächeninhaltes U, der von dem Kurvenbogen PQ, den Radienvektoren OP und OQ mit den Azimuts φ und α begrenzt ist.

Die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten sei

$$r = f(\varphi)\,,$$

wo r den Radiusvektor zum Kurvenpunkt P und φ das zugehörige Azimut bezeichnet. Läßt man alsdann das Azimut φ um die unendlich kleine Größe $d\varphi$ zunehmen, so unterscheidet sich das zugehörige Flächenelement $OPP' = dU$ von dem elementaren Kreissektor $OPD = \frac{r^2}{2}\,d\varphi$ nur um

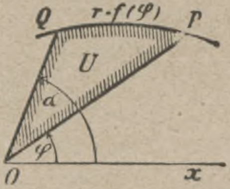

Fig. 21.

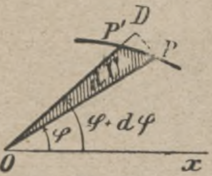

Fig. 22.

eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung. Dieser darf deshalb an Stelle des ersteren gesetzt werden. Es ist also

$$(1) \qquad dU = \frac{1}{2}\,r^2\,d\varphi\,,$$

woraus sich durch Integration als Inhalt des Flächenstücks U (Fig. 22) ergibt

$$(2) \qquad U = \frac{1}{2}\int_{\varphi}^{\alpha} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi}^{\alpha} f^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Lehrsatz: Ist die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten gegeben $r = f(\varphi)$, so ist der Inhalt der Fläche OPQ, welche vom Kurvenbogen PQ, den Radienvektoren OQ und OP (Azimut α bzw. φ) begrenzt wird, angegeben durch das bestimmte Integral (2).

Beispiel.

1. Die Lemniskate hat die Gleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi .$$

Es ist somit

$$U = \frac{1}{2}\int_0^\alpha a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha .$$

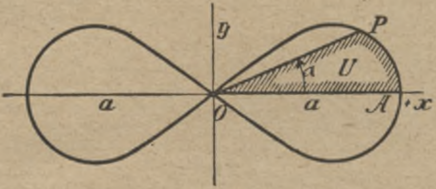

Fig. 23.

Für $\alpha = \frac{\pi}{4} (r = 0)$ folgt hieraus $U = \frac{a^2}{4}$, $4U = a^2$.

Der Flächeninhalt, der von den beiden Schleifen der Lemniskate eingeschlossen wird, ist gleich dem Quadrat über $OA = a$ der halben Symmetrieachse.

2. Die Kardioide (Fig. 24) hat die Gleichung

$$r = 2a(1 + \cos\varphi) ,$$

daher ist

$$U = \frac{1}{2}\int_0^\varphi 4a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 2a^2\int_0^\varphi (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi$$

$$= a^2(3\varphi + 4\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) ,$$

somit ist die halbe Kardioidenfläche

$$\frac{U}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2 d\varphi = 3\pi a^2 , \quad \text{also} \quad U = 6\pi a^2 .$$

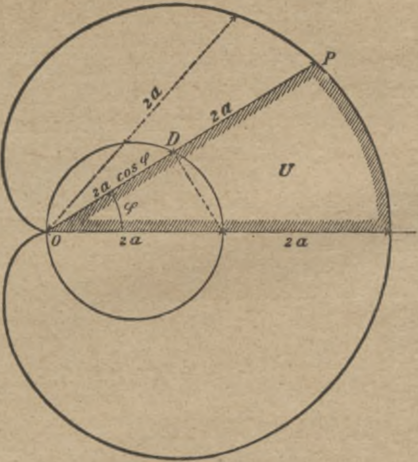

Fig. 24.

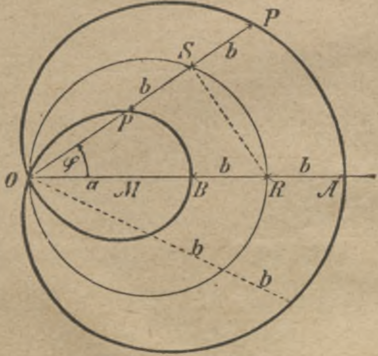

Fig. 25.

3. Allgemeinere Kardioiden (Fig. 25) ergeben sich, wenn man auf den von O aus gezogenen Strahlen von der Peripherie des Kreises aus eine beliebige Strecke b heraus- oder hereinträgt. Die äußere, bzw. innere Schleife erhält alsdann in Polarkoordinaten die Gleichung

$$r = 2a\cos\varphi + b\,, \quad \text{bzw.} \quad r = 2a\cos\varphi - b\,.$$

Die erste derselben gibt für $r = 2a + b$ und $r = 0$ $\varphi = 0$ und $\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{b}{2a}\right)$, daher ist der halbe Flächeninhalt der ersten Schleife angegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{U}{2} &= \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_0} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_0}(4a^2\cos^2\varphi + 4ab\cos\varphi + b^2)\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}(2a^2+b^2)\varphi + a^2\sin\varphi\cos\varphi + 2ab\sin\varphi\Big|_0^{\varphi_0} \\ &= \frac{1}{2}(2a^2+b^2)\arccos\left(-\frac{b}{2a}\right) - \frac{3}{4}b\sqrt{4a^2-b^2}\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$U = (2a^2+b^2)\arccos\left(-\frac{b}{2a}\right) - \frac{3}{2}b\sqrt{4a^2-b^2}\,.$$

Ebenso ergibt sich für den Inhalt der inneren Schleife

$$U' = (2a^2+b^2)\arccos\left(\frac{b}{2a}\right) + \frac{3}{2}b\sqrt{4a^2-b^2}\,.$$

Aus beiden Formeln erhält man für $b = 0$ $U = \pi a^2$ als Inhalt eines Kreises vom Radius a, wie zu erwarten war.

4. Die in Fig. 24 dargestellte Kurve (Kardioide) läßt sich auch als Fußpunktskurve des Kreises (Fig. 26) erzeugen, deren Pol in der Peripherie liegt.

Diese erhält die Gleichung

$$r = OD + DP = a\cos\varphi + a \quad \text{oder} \quad r = a(1 + \cos\varphi)\,,$$

deren rechte Seite bis auf den Faktor 2 mit der Gleichung der Kardioide übereinstimmt.

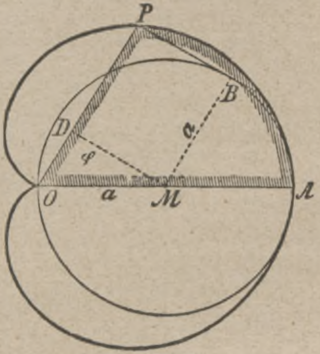

Fig. 26.

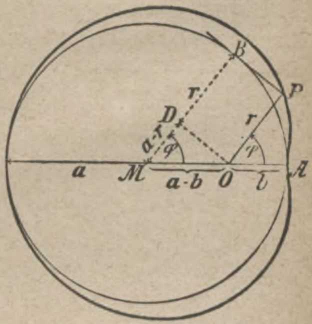

Fig. 27.

Der Inhalt dieser Kurve ist daher nach **2**:

$$U = 6\,\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\,\pi\,a^2\,.$$

Man sieht hieraus, daß die Fläche zwischen Fußpunktskurve und dem ergänzenden Kreis gleich der halben Kreisfläche ist.

Der Pol O kann auch innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen.

Im ersten Fall ist, wenn O von der Peripherie die Entfernung b hat (Fig. 27),

$$r = OP = MB - MD = a - (a - b)\cos\varphi\,.$$

Der Flächeninhalt der ganzen Kurve ist demnach

$$U_{2\pi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{a + (a-b)\cos\varphi\right\}^2 d\varphi$$

$$= \pi a^2 + \frac{\pi}{2}(a-b)^2,$$

wobei der zweite Ausdruck den Inhalt der Fläche angibt, welche zwischen Kreis und Kurve liegt.

Im zweiten Fall, wenn O außerhalb des Kreises liegt, erhält die Kurve einen Doppelpunkt im Pol und nimmt die Gestalt von Fig. 25 an, deren Inhalt berechnet worden ist.

§ 29. Näherungsformeln zur Quadratur der Kurven.

a) Rechtecksformel.

Teilt man wie in § 16 oder § 78 der Differentialrechnung*) die Strecke $A_0 A_n = a - b$ in n gleiche Teile (Fig. 28) von der Länge $\delta = \dfrac{a-b}{n}$ und zieht man durch die Teilpunkte $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ Parallelen zur y-Achse, welche die Längen

$y_0 = f(b)$, $y_1 = f(b+\delta)$, $y_2 = f(b + 2\,\delta), \ldots, y_n = f(a)$ erhalten mögen, so läßt sich der Inhalt der Fläche $P_0 A_0 A_n P_n$ näherungsweise als Summe von n Rechtecken von der Breite δ durch jede der beiden Formeln ausdrücken.

$$(1) \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} U_n &= \delta(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) \\ U_n' &= \delta(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n), \end{aligned}$$

wo U_n die Summe der kürzeren (schraffierten), U' die Summe der längeren Rechtecke darstellt. Ist U der wahre Inhalt der Fläche $P_0 A_0 A_n P_n$, so ist stets

$$U_n < U < U_n'.$$

Wie schon in § 78 der Differentialrechnung*) gezeigt

---

*) Sammlung Göschen, Bd. 87.

worden ist, wird der Fehler, den man begeht, wenn man U_n oder U'_n an Stelle von U setzt, um so kleiner, je größer n wird. Im Grenzfall ist

$$\lim_{n=\infty} U_n = U = \lim_{n=\infty} U'_n .$$

b) Trapezformel.

Eine größere Annäherung an U wird bei endlichem n gewöhnlich erzielt, wenn man das arithmetische Mittel von

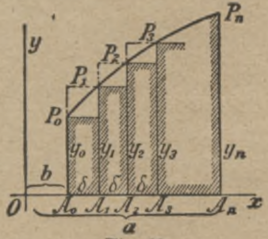

Fig. 28.

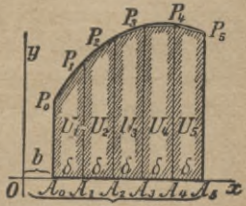

Fig. 29.

U_n und U'_n bildet und dieses an Stelle von U setzt (Fig. 29).

$$U''_n = \frac{1}{2}\left(U_n + U'_n\right)$$

$$(2) \qquad = \delta\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Geometrisch stellt diese Formel eine Summe von n Trapezen $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ von der Höhe δ und den Grundlinien $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ dar. Die Formel (2) heißt deshalb auch Trapezformel.

c) Die Simpsonsche Regel

gründet sich auf die Verwendung der Parabel

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

zur näherungsweisen Berechnung von U.

Legt man durch die Punkte P_0, P_1, P_2, welche in diesem Fall die Koordinaten $x_0\, y_0$, $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$ haben sollen, obige Parabel, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma \\ y_1 &= \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma \\ y_2 &= \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma\,, \end{aligned} \tag{3}$$

aus denen sich die Koeffizienten α, β, γ eindeutig berechnen lassen.

Diese Parabel wird sich zwischen den Punkten P_0, P_1, P_2 im allgemeinen näher an die Kurve schmiegen, als dies für die Rechtecke in a) und die Trapeze in b) der Fall ist.

Näherungsweise kann also zwischen diesen Punkten die Parabel an Stelle der Kurve gesetzt werden. Der Inhalt der beiden ersten Flächenstreifen ist alsdann näherungsweise

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 = \int_{x_0}^{x_2} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, dx &= \frac{\alpha}{3}(x_2^3 - x_0^3) \\ &+ \frac{\beta}{2}(x_2^2 - x_0^2) + \gamma (x_2 - x_0)\,. \end{aligned}$$

Setzt man hierin $x_2 - x_0 = 2\,\delta$ und benutzt die Gleichungen (3), so geht diese Formel über in

$$U_1 + U_2 = \frac{\delta}{3}(y_0 + 4\, y_1 + y_2)\,.$$

Wählt man n gerade $n = 2r$ und bildet ebenso $U_3 + U_4$, $U_5 + U_6, \ldots, U_{n-1} + U_n$ und addiert die erhaltenen Ausdrücke, so ergibt sich als dritte Näherungsformel

$$\begin{aligned} U = \frac{\delta}{3}\Big\{(y_0 + y_{2r}) + 2(y_2 + y_4) + \cdots + y_{2r-2}) \\ + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2r-1})\Big\}, \end{aligned} \tag{4}$$

welche als „**Simpsonsche Regel**" bekannt ist.

Beispiel. Für $\delta = 1$, $h_0; h_1; \ldots; h_{10} = 4$; 4,3; 4,1; 3,7; 3,1; 2,9; 3,2; 3,6; 4; 3,9; 3,1 ergibt sich nach den Rechtecksformeln

$$U_n = 36{,}8\ ,\ U'_n = 35{,}9$$

und hieraus nach der Trapezformel

$$U''_n = \frac{1}{2}(U_n + U'_n) = 36{,}35\,.$$

Die Simpsonsche Regel endlich gibt

$$U = 36{,}5\,.$$

§ 30. **Rektifikation ebener Kurven in rechtwinkligen Koordinaten.**

Erklärung. Unter der Rektifikation einer Kurve versteht man die Berechnung der Länge s des Kurvenbogens QP zwischen den Punkten Q und P mit den Abszissen b und a.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung der gegebenen Kurve, so ist nach § 71 der Differentialrechnung*) das Linienelement angegeben durch

$$(1)\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,.$$

Durch Integration folgt hieraus als Länge des Kurvenbogens PQ (Fig. 30)

$$(2)\qquad s = \int_b^a \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_b^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

Lehrsatz: Die Länge des Kurvenbogens zwischen den Punkten P und Q mit den Abszissen a und b ist angegeben durch das bestimmte Integral (2).

*) Sammlung Göschen, Bd. 87.

Beispiele.

1. Für die Asteroide (Sternkurve) (Fig. 31), deren Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ist, erhält man

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}, \quad y' = -x^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}},$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}\, dx,$$

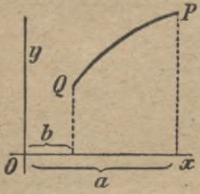

Fig. 30.

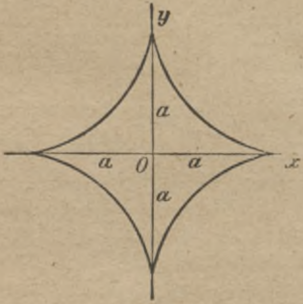

Fig. 31.

somit ist $$s = \int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{2} a.$$

Ganzer Umfang $S = 6a$.

2. Die Kurve (Fig. 32) hat die Gleichung

$$9ay^2 = x(x - 3a)^2;$$

daher ist $$y = \frac{x - 3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad y' = \frac{x - a}{2\sqrt{ax}}, \quad \text{also}$$

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{4ax}}\, dx = \int_0^x \frac{x + a}{2\sqrt{ax}}\, dx = \frac{1}{3}(x + 3a)\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Für die halbe Schleife erhält man mit $x = 3a$:

$$s = 2a\sqrt{3}\,.$$

Ganze Schleife $\qquad 2s = 4a\sqrt{3}\,.$

3. Für die Parabel (Fig. 33), deren Gleichung $x^2 = 2py$ ist, ergibt sich $y = \frac{x^2}{2p}$, $\; y' = \frac{x}{p}$ und somit als Länge des Kurvenbogens OP (vgl. § 15, 4)

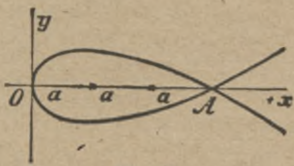

Fig. 32.

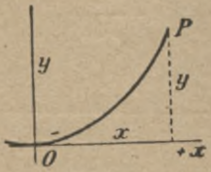

Fig. 33.

$$OP = s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\frac{p^2}{2}\,\mathrm{l}\left(\sqrt{x^2 + p^2} + x\right) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + p^2}\right\}_0^x$$

$$= \frac{p}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{x^2 + p^2} + x}{p} + \frac{x}{2p}\sqrt{x^2 + p^2}\,.$$

4. Die Kettenlinie (Fig. 34) hat die Gleichung

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

daher ist $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ und

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

$$= \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \sqrt{y^2 - a^2} = AB\,.$$

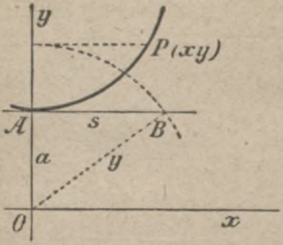

Fig. 34.

Der Bogen der Kettenlinie vom tiefsten Punkt A derselben bis zu einem beliebigen Kurvenpunkt $P(x\,y)$ ist gleich $\sqrt{y^2 - a^2}$, wo y die Ordinate dieses Punktes ist.

5. Rektifikation der Ellipse. In Funktion eines Parameters t lassen sich die Koordinaten eines Ellipsenpunktes P (Fig. 35) darstellen durch

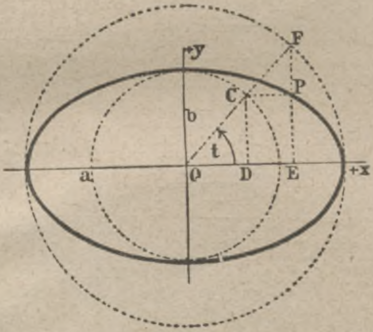

Fig. 35.

$$x = a\cos t\,, \qquad y = b\sin t\,,$$

$$dx = -a\sin t\, dt\,, \quad dy = b\cos t\, dt\,.$$

Bezeichnet man mit s die ganze Länge der Ellipse, so ist

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt\,,$$

wo $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die numerische Exzentrizität bezeichnet.

Dieses Integral ist als ein elliptisches nicht in endlicher Form darstellbar. Entwickelt man jedoch die Quadratwurzel nach Potenzen von $\cos^2 t$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, so folgt

$$\frac{s}{4} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 t - \frac{\varepsilon^4}{8} \cos^4 t - \frac{\varepsilon^6}{16} \cos^6 t - \ldots\right) dt$$

$$= \frac{a\pi}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - 3\left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \varepsilon^4 - 5\left(\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \varepsilon^6 - \ldots\right\},$$

womit der Bogen der Ellipse durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt ist. — Für $a = b$ oder $\varepsilon = 0$ geht die Ellipse in einen Kreis über, dessen Quadrant bekanntlich einen Bogen von der Länge $\frac{s}{4} = \frac{\pi}{2} a$ besitzt.

§ 31. Rektifikation in Polarkoordinaten.

Wendet man Polarkoordinaten an: $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, so folgt hieraus

$$dx = dr \cos\varphi - r \sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = dr \sin\varphi + r \cos\varphi\, d\varphi.$$

Setzt man diese Werte in $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ein, so ergibt sich für das Linienelement der Ausdruck

$$(1) \qquad ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi\,,$$

und hieraus durch Integration als Länge des Kurvenbogens PQ (Fig. 36)

(2) $$s = \int_{\alpha}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi\,.$$

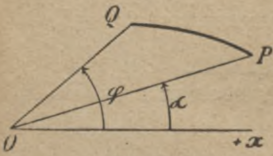

Fig. 36.

Lehrsatz: In Polarkoordinaten ist die Länge des Kurvenbogens $PQ = s$ zwischen den Punkten P bzw. Q vom Azimut α bzw. φ angegeben durch das bestimmte Integral (2).

Beispiele.

1. Für die Spirale des Archimedes ist $r = a\varphi$, $r' = a$, also

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int_0^{\varphi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi$$

$$= \frac{a}{2}\left\{\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \mathrm{l}\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right)\right\}.$$

Vergleiche § 15, 4.

2. Für die Kardioide (Fig. 24) ist

$$r = 2a(1+\cos\varphi)\,, \quad r' = -2a\sin\varphi\,,$$

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = 2a\int_0^{\varphi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi\,,$$

$$= 4a\int_0^{\varphi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\,.$$

Für $\varphi = \pi$ ergibt sich hieraus als halber Umfang der Kardioide $\frac{S}{2} = 8a$, woraus folgt $S = 16a$.

3. Für die allgemeine Fußpunktskurve des Kreises (§ 28), deren Gleichung $r = a - (a - b)\cos\varphi$ ist, ergibt sich als Kurvenlänge

$$S = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2 + (a-b)^2 - 2a(a-b)\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$= 2(2a - b)\int_0^\pi \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi,$$

wo $\lambda^2 = 4a(a-b) : (2a-b)^2$ gesetzt ist.

Dies ist ein elliptisches Integral und läßt sich als solches in ähnlicher Weise wie der Ellipsenbogen (§ 29), durch Reihenentwicklung berechnen. Man erhält nach § 26, Formel (4)

$$S = \pi\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2 - \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 3\cdot\lambda^4 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 5\lambda^6 \ldots\right\}.$$

4. Für die Länge eines Zykloidenabschnitts erhält man

$$S = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a.$$

§ 32. Teilung von Flächen und ebenen Kurven.

a) Für rechtwinklige Koordinaten.

Nach § 27 ist der Inhalt U der Fläche $BCDA$ dargestellt durch die Formel $U = \int_b^a f(x)\, dx$.

Ist nun $ME = y$ die Ordinate des Punktes M, welche dieselbe halbiert, so ist offenbar

$$(1) \qquad \int_b^x f(x)\,dx = \int_x^a f(x)\,dx$$

oder, wenn $F(x)$ das Integral $\int f(x)\,dx$ bezeichnet,

$$F(x) - F(b) = F(a) - F(x)$$

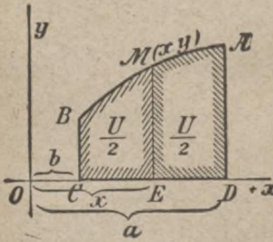

Fig. 37.

oder

$$(2) \quad F(x) = \tfrac{1}{2}\{F(a) + F(b)\}\ .$$

Soll die Fläche $BCDA$ durch die Ordinate y des Punktes M in zwei Teile zerlegt werden, die sich verhalten wie $m:n$, so berechnet sich die zugehörige Abszisse aus

$$(3) \quad \begin{cases} \int_b^x f(x)\,dx : \int_x^a f(x)\,dx = m:n \quad \text{oder aus} \\ F(x) = \dfrac{m\,F(a) + n\,F(b)}{m+n}\,. \end{cases}$$

Ist ebenso M der Mittelpunkt des Bogens AB (Fig. 37), dessen Koordinaten x, y sein sollen, so berechnet sich die Abszisse dieses Punktes aus der Gleichung

$$\frac{s}{2} = \int_b^x ds = \int_x^a ds$$

oder, wenn $F(x) = \int ds$ gesetzt wird, aus

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\{F(a) + F(b)\}\,.$$

Der Punkt M teilt den Bogen AB im Verhältnis $m:n$, wenn die Bedingung besteht:

$$(4)\qquad \begin{cases} \int\limits_b^x ds : \int\limits_x^a ds = m : n \quad \text{oder wenn} \\ F(x) = \dfrac{m\,F(a) + n\,F(b)}{m+n}\,. \end{cases}$$

Lehrsatz: Die Abszisse des Punktes M, dessen Ordinate y die Fläche $BCDA$, bzw. den Bogen BA im Verhältnis $m:n$ teilt, berechnet sich als Wurzel der Gleichung (3), bzw. (4).

b) Für Polarkoordinaten.

Ist die Gleichung der Fläche in Polarkoordinaten r, φ gegeben: $r = f(\varphi)$, so berechnet sich das Azimut ψ, dessen Radiusvektor $OP = r$ die Fläche AOB (Fig. 38) halbiert, aus

$$\int\limits_\psi^\alpha r^2\,d\varphi = \int\limits_\beta^\psi r^2\,d\varphi\,,$$

oder wenn $\Phi(\varphi) = \int r^2\,d\varphi$ gesetzt wird, aus

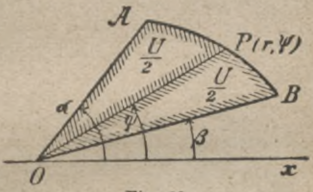

Fig. 38.

$$\Phi(\psi) = \tfrac{1}{2}\{\Phi(\alpha) + \Phi(\beta)\}\,.$$

Soll sich die Fläche $OAP : OBP = m:n$ verhalten, so erhält man das Azimut ψ des gesuchten Vektors OP aus

$$(5)\qquad \begin{cases} n\int\limits_\psi^\alpha r^2\,d\varphi = m\int\limits_\beta^\psi r^2\,d\varphi \quad \text{oder aus} \\ \Phi(\psi) = \dfrac{n\,\Phi(\alpha) + m\,\Phi(\beta)}{m+n}\,. \end{cases}$$

Ist ψ hieraus berechnet, so ergibt sich der Wert des zugehörigen Vektors aus der Gleichung $r = f(\psi)$.

Ebenso berechnet sich das Azimut ψ desjenigen Vektors, der den Bogen AB im Verhältnis $m:n$ teilt, aus der Gleichung

$$(6)\qquad \begin{cases} n\int\limits_{\psi}^{\alpha} ds = m\int\limits_{\beta}^{\psi} ds \quad \text{oder aus} \\ \Phi(\psi) = \dfrac{n\,\Phi(\alpha) + m\,\Phi(\beta)}{m+n}. \end{cases}$$

Beispiele.

1. Die Fläche der Parabel $y = p\,x^2$ durch eine Parallele zur y-Achse im Verhältnis $m:n$ zu teilen.

Man berechnet die Abszisse x des Punktes P aus

$$n\int\limits_0^x p\,x^2\,dx = m\int\limits_x^a p\,x^2\,dx$$

und erhält

$$x^3 = \frac{m\,a^3}{m+n}, \quad \text{also} \quad x = a\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}.$$

2. Fläche und Bogen der Kardioide $r = 2\,a(1+\cos\varphi)$ durch einen Radiusvektor zu halbieren.

Die Fläche wird durch einen Vektor vom Azimut ψ halbiert, wenn die Bedingung stattfindet:

$$\int\limits_0^{\psi} r^2\,d\varphi = \int\limits_{\psi}^{\pi} r^2\,d\varphi,$$

woraus sich als (transzendente) Bestimmungsgleichung für ψ ergibt:

$$\cos\psi\sin\psi + 4\sin\psi - \frac{3}{2}(\pi - 2\,\psi) = 0.$$

Der Radiusvektor (r, ψ) halbiert den Bogen der Kardioide, wenn $\int\limits_0^\psi ds = \int\limits_\psi^\pi ds$ oder wenn nach § 31

$$2 \sin \frac{\psi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{oder}$$

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{1}{2},\ \psi = \frac{\pi}{3} = 60^0 \text{ und } r = 2a\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3a \text{ ist.}$$

3. Den Kreisquadranten OAB (Fig. 39) durch Parallelen zu OB in n gleiche Teile zu teilen.

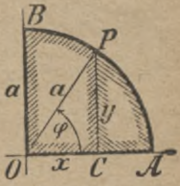

Fig. 39.

Ist $PC = y$ die k^{te} Teilgerade, so verhält sich Fläche

$$BOCP : CPA = k : n - k;$$

daher erhält man zur Berechnung der Abszisse x des Punktes P die Gleichung

$$(n-k)\int\limits_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = k \int\limits_x^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad \text{oder}$$

$$(n-k)\left\{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right\}$$

$$= k\left\{\frac{\pi}{2} a^2 - x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right\} \quad \text{oder}$$

$$x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} a^2 .$$

Setzt man hierin $\frac{x}{a} = \cos\varphi$ und demgemäß

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \sin\varphi \quad \text{und} \quad \arcsin \frac{x}{a} = \varphi - \frac{\pi}{2},$$

so geht unsere Gleichung über in

$$\cos\varphi\sin\varphi - \varphi + \frac{\pi}{2}\left(\frac{n-k}{n}\right) = 0\,,$$

die zur Berechnung des Winkels φ dient.

4. Den Quadranten der Lemniskate $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ durch einen Radiusvektor r, φ zu halbieren.

Man erhält als Bedingungsgleichung zur Berechnung

von φ: $$\int_0^{\varphi}\cos 2\varphi\, d\varphi = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\, d\varphi$$

und hieraus $\sin 2\varphi = 1 - \sin 2\varphi$ oder $2\sin 2\varphi = 1$,

$$\sin 2\varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{12}; \qquad = \frac{a}{2}\sqrt[4]{12}\,,$$

wodurch eine einfache Konstruktion angezeigt ist.

Soll die Fläche allgemein durch einen Radiusvektor im Verhältnis $m:n$ geteilt werden, so berechnet sich das zugehörige Azimut φ aus

$$n\sin 2\varphi = m(1-\sin 2\varphi)\,,$$

$$\sin 2\varphi = \frac{m}{m+n}, \quad \varphi = \frac{1}{2}\arcsin\frac{m}{m+n}$$

und der Vektor selbst aus

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi = \frac{2a^2}{m+n}\cdot\sqrt{n^2+2mn}\,,$$

$$r = a\sqrt{\frac{2}{m+n}}\sqrt[4]{2mn+n^2}\,.$$

VII. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Geometrie des Raumes.

§ 33. Kubatur begrenzter Räume.

Erklärung. Unter der Kubatur eines Volumens versteht man gewöhnlich die Berechnung eines Rauminhalts, der von ebenen oder gesetzmäßig gekrümmten Flächen oder von beiden begrenzt ist.

Eine Ebene $x = x$ parallel zur yz-Ebene schneide aus dem Körper (Fig. 40) eine Scheibe ABC vom Flächeninhalt U_x heraus, der mit Hilfe der gegebenen Flächengleichung $F(xyz) = 0$ in Funktion von x ausgedrückt werden könne:

$$U_x = f(x).$$

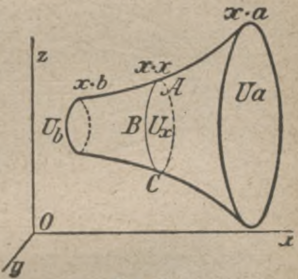

Fig. 40.

Alsdann unterscheidet sich der Rauminhalt, der von der Fläche $F(xyz)$ und den Ebenen x und $x + dx$ begrenzt wird, um eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung von dem Inhalt des Zylinders, der als Grundfläche U und als Höhe dx hat. Dieser Zylinder darf daher an Stelle der Scheibe gesetzt werden. Die Summe aller dieser Scheiben zwischen den Ebenen $x = b$ und $x = a$ ist alsdann angegeben durch

(1) $$V = \int_b^a U_x \, dx = \int_b^a f(x) \, dx .$$

Lehrsatz: Der Rauminhalt V, der von den beiden Vertikalebenen $x = b$ und $x = a$ und der Fläche F begrenzt wird, ist durch das bestimmte Integral (1) ausgedrückt.

Beispiele.

1. Die Gleichung $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

stellt ein Paraboloid dar, welches die yz-Ebene in $x = 0$ berührt und die zx- bzw. xy-Ebene nach den Parabeln $z^2 = c^2 x$ bzw. $y^2 = b^2 x$ schneidet. (Fig. 41.) Jeder ebene Schnitt U parallel zur yz-Ebene ist eine Ellipse, welche in der Entfernung x von dieser Ebene den Inhalt $U = \pi b c x$ hat. Der Rauminhalt V des Paraboloids zwischen den Ebenen $x = 0$, $x = a$ ist alsdann nach Formel (1)

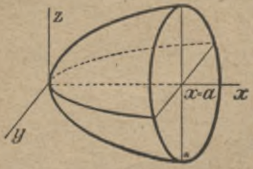

Fig. 41.

$$V = \pi \int_0^a b c x \, dx = \pi b c \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a = \frac{\pi}{2} a^2 b c .$$

2. Das dreiachsige Ellipsoid (Fig. 42) hat bekanntlich die Gleichung

$$F(x y z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0 .$$

Ein Querschnitt, parallel zur yz-Ebene in der Entfernung x gelegt, schneidet dasselbe nach einer Ellipse mit den Achsen $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ und dem Inhalt $U = \pi \frac{b c}{a^2}(a^2 - x^2) = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

Der Inhalt des ganzen Ellipsoids ist somit angegeben durch

$$V = \int_{-a}^{+a} \pi\, b\, c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\, \pi\, a\, b\, c\,,$$

woraus für $c = b = a$ als Inhalt einer Kugel vom Radius a hervorgeht $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

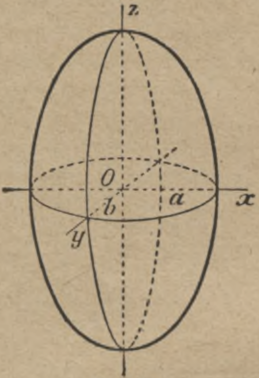

Fig. 42.

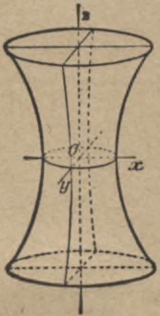

Fig. 43.

3. Das einmantelige Hyperboloid (Fig. 43) hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

Ein Schnitt senkrecht zur z-Achse in der Entfernung z von der xy-Ebene gibt eine Ellipse von den Halbachsen $\frac{a}{c}\sqrt{z^2 + c^2}$, $\frac{b}{c}\sqrt{z^2 + c^2}$

und dem Inhalt $U = \pi \frac{a\,b}{c^2}(z^2 + c^2)$.

Der Rauminhalt des einmanteligen Hyperboloides ist

$$\text{daher} \quad V = \int_0^h \pi a b \left(1 + \frac{x^2}{c^2}\right) dx = \pi a b h \left(1 + \frac{h^2}{3 c^2}\right).$$

Für $h = c$ folgt hieraus $V = \frac{4}{3} \pi a b c$.

4. In der Entfernung c (Fig. 44) von der Ebene eines Kreises vom Radius a liegt parallel zur Kreisebene eine Leitlinie. An dem Kreisumfang und der Leitlinie gleitet beständig senkrecht zu derselben eine Gerade hin. Gesucht ist das Volumen des erzeugten Konoids.

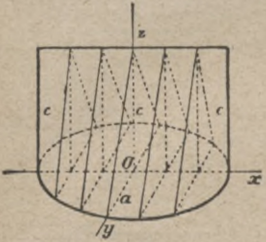

Fig. 44.

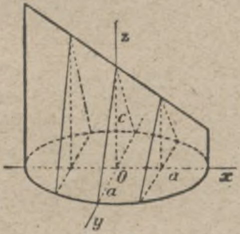

Fig. 45.

Es ist $U = y \cdot c = c\sqrt{a^2 - x^2}$, $dV = U dx$, also

$$V = \int_{-a}^{+a} U dx = c \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \pi c a^2 .$$

Schneidet die Leitlinie von der x-Achse bzw. z-Achse die Stücke a' und c ab, so ist (Fig. 45)

$$U = y \cdot z = y c \left(1 + \frac{x}{a'}\right), \quad \text{daher auch}$$

$$V = \int_{-a}^{+a} U dx = c \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} \left(1 - \frac{x}{a'}\right) dx = \pi c a^2 .$$

§ 34. Kubatur von Rotationskörpern.

In der xy-Ebene liegt die Kurve (Fig. 46) $y = f(x)$. Dreht sich dieselbe um die x-Achse, so beschreibt irgend ein Punkt P derselben mit den Koordinaten xy einen Kreis vom Radius y, der somit den Inhalt hat:

(1) $$U = \pi y^2 = \pi f^2(x) .$$

Legt man in der Entfernung dx von derselben eine weitere Ebene senkrecht zur x-Achse, so schneidet diese aus dem erzeugten Umdrehungskörper einen zweiten Kreis aus, der mit dem ersteren und der Drehungsoberfläche einen Raum einschließt, der sich nur um ein unendlich Kleines höherer Ordnung von dem Inhalt $U dx$ des Zylinders unterscheidet, der zur Grundfläche U und zur Höhe dx hat. Dieser darf also an Stelle jenes Rauminhalts gesetzt werden. Es ist

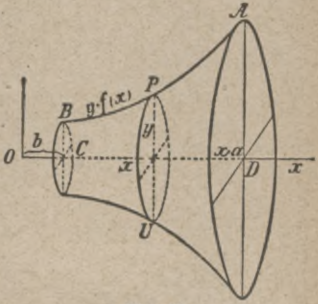

Fig. 46.

(2) $$dV = U dx = \pi y^2 dx = \pi f^2(x) dx .$$

Hieraus ergibt sich durch Integration als Inhalt des Drehungskörpers zwischen den Ebenen $x = b$ und $x = a$:

(3) $$V = \int_b^a U dx = \pi \int_b^a y^2 dx = \pi \int_b^a f^2(x) dx .$$

Lehrsatz: Dreht sich eine ebene Kurve $y = f(x)$, die in der xy-Ebene liegt, um die x-Achse, so beschreibt die Fläche $BCDA$ zwischen den Kurvenpunkten A und B mit den Abszissen

a und b einen Rotationskörper, dessen Inhalt durch das bestimmte Integral (3) angegeben ist.

Beispiele.

1. Die Parabel $y = p x^2$ erzeugt bei der Drehung um die x-Achse einen Umdrehungskörper, dessen Inhalt zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = x$ angegeben ist durch

$$V = \pi \int_0^x y^2 \, dx = \pi \int_0^x p^2 x^4 \, dx = \frac{\pi}{5} p^2 x^5 = \frac{\pi}{5} x y^2 .$$

2. Dreht sich die schleifenförmige Kurve

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$

um die x-Achse, so ist der Inhalt des erzeugten Rotationskörpers zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = x$

$$V = \pi \int_0^x \frac{x^2}{a^2} (a^2 - x^2) \, dx = \frac{\pi}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} a^2 - \frac{x^5}{5} \right) .$$

Die ganze Schleife beschreibt somit einen Körper vom Inhalt $V = \frac{4}{15} \pi a^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3$.

3. Durch Drehung der Cissoide $(2a - x) y^2 = x^3$ um die x-Achse wird ein Körper erzeugt, der den Inhalt besitzt: $V_a = \pi \int_0^a \frac{x^3}{2a - x} \, dx = 8 \pi a^3 \left(12 - \frac{2}{3} \right)$.

4. Der Rotationskörper der Asteroide (Fig. 31), deren Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ist, hat den Rauminhalt

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^x (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 \, dx \\ &= 3 \pi x \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{a^4 x^2} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{a^2 x^4} - \frac{x^2}{9} \right) . \end{aligned}$$

Der ganze Inhalt des erzeugten Körpers ist somit

$$V = \frac{32}{105}\pi a^3 = \frac{8}{35}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 .$$

5. Die Zykloide hat die Gleichungen

$$x = a(t - \sin t ,$$
$$y = a(1 - \cos t) .$$

Bei der Drehung um die x-Achse erzeugt dieselbe einen Rotationskörper vom Inhalt $V = \pi\int\limits_0^x y^2\,dx$.

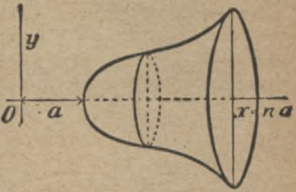

Fig. 47.

Nun ist $dx = a(1-\cos t)\,dt$, daher ist auch

$$V = \pi a^3\int\limits_0^\varphi (1-\cos t)^3\,dt = \pi a^3 \{t - 3\sin t$$
$$+ \tfrac{3}{2}(t + \sin t\cos t) - \tfrac{1}{3}\sin t\cos^2 t - \tfrac{2}{3}\sin t\}_0^\varphi .$$

Der erste Abschnitt $t = 2\pi$ erzeugt daher einen Rotationskörper vom Inhalt $V_{2\pi} = 5\pi^2 a^3$.

6. Die Kurve (Fig. 47) $by^2 + ax^2 - x^3 = 0$ beschreibt bei der Drehung um die x-Achse einen Rotationskörper, dessen Inhalt ist:

$$V = \frac{\pi}{b}\int\limits_a^{x=na}(x^3 - ax^2)\,dx = \frac{\pi a^4}{12\,b}(3n^4 - 4n^3 + 1) .$$

§ 35. Kubatur von zylindrischen Räumen.

Gegeben seien die Kurven $y = f(x)$ in der xy-Ebene und $z = \varphi(x)$ in der zx-Ebene.

Gesucht sei der Rauminhalt V, der von den Zylinderflächen $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ und den beiden parallelen

Ebenen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird (Fig. 48). Eine Ebene $x = x$ senkrecht zur x-Achse schneidet aus dem Körper ein Rechteck $PADB$ von den Seiten

$$PA = z = \varphi(x) \quad \text{und} \quad PB = y = f(x)$$

heraus, welches den Inhalt $U = y\,z = f(x)\,\varphi(x)$ hat. Der Inhalt des Körpers zwischen den Ebenen $x = b$ und $x = a$ ist somit angegeben durch

$$V = \int_b^a y\,z\,dx = \int_b^a f(x)\,\varphi(x)\,dx\,. \tag{1}$$

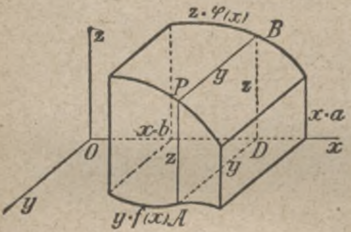

Fig. 48.

Lehrsatz: Der Inhalt des zylindrischen Raumes, der von den beiden Zylinderflächen $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, den Ebenen $x = b$ und $x = a$, der zx-Ebene und der xy-Ebene eingeschlossen wird, ist angegeben durch das bestimmte Integral (1).

Beispiele.

1. Den Inhalt des Körpers zu bestimmen, der von den beiden Zylinderflächen $y^2 = x(2\,a - x)$, $z^2 = 4\,a\,x$, der $z\,x$- und $x\,y$-Ebene begrenzt wird.

Man erhält $y = \sqrt{x\,(2\,a - x)}$, $\quad z = 2\sqrt{a\,x}$,

$$V = \int_0^{2a} 2\sqrt{a\,x^2(2\,a - x)}\,dx = 2\sqrt{a}\int_0^{2a} x\sqrt{2\,a - x}\,dx\,.$$

Setzt man $\sqrt{2\,a - x} = t$, $x = 2\,a - t^2$, $dx = -2\,t\,dt$, so ergibt sich nach § 14 bzw. 15

$$\int x\sqrt{2a-x}\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{(2a-x)^5} - \frac{4}{3}a\sqrt{(2a-x)^3},$$

daher ist $V = \frac{32}{15}a^3\sqrt{2}$.

2. Der Rauminhalt, der von den beiden parabolischen Zylinderflächen $z^2 = ax$, $y^2 = bx$, der Ebene $x = x$ und der zx-Ebene eingeschlossen wird, ist angegeben durch

$$V = \int_0^x \sqrt{ax}\sqrt{bx}\,dx = \sqrt{ab}\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}xyz.$$

3. Den Rauminhalt (Fig. 49) zu bestimmen, der von der Ebene $z = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, der Zylinderfläche $x^2 + y^2 = a^2$, der xy- und der zx-Ebene begrenzt wird.

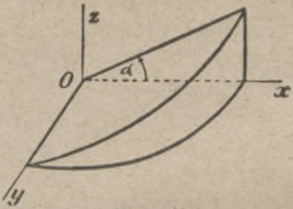

Fig. 49.

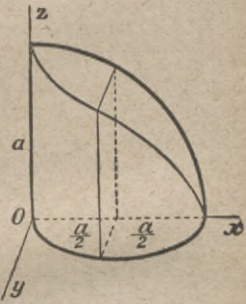

Fig. 50.

Es ist $y = f = \sqrt{a^2 - x^2}$, $z = \varphi = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, daher

$$V = \int_0^a \mathrm{tg}\,\alpha \cdot x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{tg}\,\alpha \Big|_0^a = \frac{1}{3}a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

4. Man berechne den Rauminhalt (Fig. 50), der von den Zylinderflächen $y = f(x) = \sqrt{x(a-x)}$, $z = \varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ und der zx-Ebene begrenzt wird.

Man erhält

$$V=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{a\,x-x^2}\,dx=\int_0^a (a-x)\sqrt{a\,x+x^2}\,dx$$

$$=\int_0^a \frac{a^2x-x^3}{\sqrt{a\,x+x^2}}\,dx=\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{5}{12}a\,x+\frac{3}{8}a^2\right)\sqrt{a\,x+x^2}$$

$$-\frac{3}{16}a^3\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{2}+x+\sqrt{a\,x+x^2}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{11}{24}a^3\sqrt{2}-\frac{3}{16}a^3\,\mathrm{l}\,(3+2\sqrt{2})\,.$$

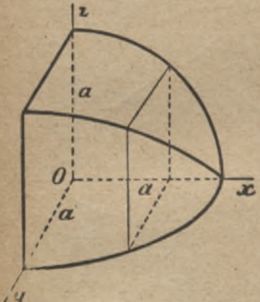

Fig. 51.

5. Den Rauminhalt (Fig. 51) zu berechnen, der von den beiden Zylinderflächen $z=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\sqrt{a^2-x^2}$ und den drei Koordinatenebenen begrenzt ist.

Es ist $\frac{1}{8}V=\int_0^a y\,z\,dx$

$$=\int_0^a (a^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}a^3,$$

somit $$V=\frac{16}{3}a^3.$$

§ 36. Oberflächenberechnung (Komplanation) von Rotationskörpern.

In der $x\,y$-Ebene liegt die Kurve $y=f(x)$ (Fig. 52). Wird dieselbe um die x-Achse gedreht, so beschreibt irgend ein Punkt P derselben einen **Kreis vom Radius**

$y = f(x)$, dessen Umfang $2\pi y = 2\pi f(x)$ ist. Die Sehne $PP' = ds$, welche den Punkt P mit dem benachbarten Punkt P' verbindet, beschreibt hierbei eine reifförmige Fläche, deren Inhalt

(1) $$dU = 2\pi y\,ds = 2\pi f(x)\,ds$$

ist. Hieraus ergibt sich aber durch Integration als Oberfläche des Umdrehungskörpers, den der Kurvenbogen BA zwischen den Punkten B und A mit den Abszissen b und a beschreibt,

(2) $$U = 2\pi\int_b^a y\,ds = 2\pi\int_b^a f(x)\,ds.$$

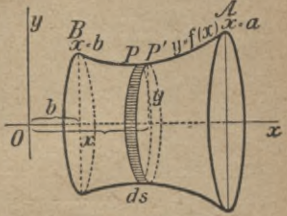

Fig. 52.

Nun ist bekanntlich $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, daher ist diese Oberfläche auch angegeben durch

(3) $$U = 2\pi\int_b^a f(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Lehrsatz: Der Kurvenbogen AB zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ beschreibt bei der Drehung um die x-Achse eine Rotationsfläche, deren Oberfläche durch das bestimmte Integral (3) angegeben ist.

Beispiele.

1. Oberfläche der Halbkugel, erzeugt durch Drehung eines Viertelkreises um die x-Achse.

Es sei $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung eines Kreises vom Radius a, dann ist

$$U = 2\pi\int_0^a y\,ds = 2\pi\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,ds.$$

Nun ist $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, daher

$$U = 2\pi \int_0^a a\,dx = 2\pi a^2 .$$

Die Oberfläche der ganzen Kugel ist daher, wie bekannt, $O = 2U = 4\pi a^2$.

2. Rotationsoberfläche der Sinuslinie $y = \sin x$:

$$U_x = 2\pi \int_0^x y\,ds .$$

Es ist $y' = \cos x$, $ds = \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$, daher

$$U_x = 2\pi \int_0^x \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx = -2\pi \int_0^x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,d\cos x$$

$$= -2\pi \left\{ \frac{\cos x}{2} \sqrt{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{2} \mathrm{l}\left(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right) \right\}_x^0 .$$

Ein Abschnitt der Sinuslinie beschreibt somit bei der Drehung um die x-Achse die Oberfläche

$$U_\pi = -2\pi \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{l}(-1 + \sqrt{2}) \right)$$

$$+ 2\pi \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{l}(1 + \sqrt{2}) \right\} = 2\pi\sqrt{2} + \pi \mathrm{l}(3 + 2\sqrt{2}) .$$

3. Fläche, erzeugt durch Drehung der Parabel $y^2 = 2px$ um die x-Achse.

Es ist $y = \sqrt{2px}$, $y' = \sqrt{\frac{p}{2x}}$, $ds = \sqrt{\frac{p + 2x}{2x}}\,dx$, somit

$$U_x = 2\pi \int_0^x \sqrt{2px} \cdot \sqrt{\frac{p + 2x}{2x}}\,dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^x \sqrt{p + 2x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3} \pi \sqrt{p}\,(p + 2x) \sqrt{p + 2x} .$$

4. Rotationsfläche der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Man erhält $\frac{1}{2} O = 2\pi \int\limits_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6}{5} \pi a^2$,

somit $\quad O = \frac{12}{5} \pi a^2 = \frac{3}{5} \cdot 4 \pi a^2$.

5. Für die Zykloide $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$ ergibt sich $dx = a(1 - \cos\varphi)$, $dy = a \sin\varphi$,

$$y' = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi}, \quad ds = 2a \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi, \quad \text{somit ist}$$

$$U = 2\pi \int\limits_0^x y\, ds = 16\pi a^2 \int\limits_0^\varphi \sin^3\frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2}$$
$$= -\frac{16}{3} \pi a^2 \cos\frac{\varphi}{2} \left(2 + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Für $\varphi = 2\pi$ folgt hieraus als Oberfläche eines rotierenden geschlossenen Zykloidenabschnitts

$$U_{2\pi} = \frac{32}{3} \pi a^2 = \frac{8}{3} \cdot 4 \pi a^2.$$

§ 37. Oberfläche von Zylinderflächen.

1. Gegeben seien die beiden Zylinderflächen $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$, die sich nach der Raumkurve PQ durchdringen mögen.

Gesucht ist der Inhalt der Scheitelfläche $PCDQ$ sowie derjenige der Stirnfläche $PABQ$ (Fig. 53).

Hat der Punkt T die Koordinaten $x y z$, so darf der Flächenstreifen TS bis auf eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung mit einem Rechteck von der Breite

$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ und der Länge y verwechselt werden, daher ist näherungsweise das Element der Zylinderfläche $PCDQ$:

$$(1) \qquad dU_{zx} = y\,ds = y\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx\,.$$

Ebenso ergibt sich für das Element der Zylinderfläche $PABQ$:

$$(2) \qquad dU_{yx} = z\,ds = z\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,;$$

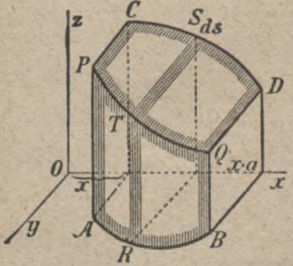

Fig. 53.

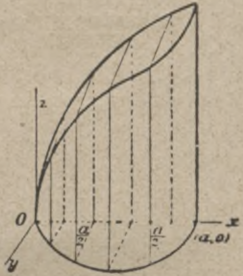

Fig. 54.

somit ist Scheitelfläche $PCDQ$ angegeben durch

$$(3) \qquad U_{zx} = \int_x^a y\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx = \int_x^a f(x)\sqrt{1 + \varphi'^2}\,dx\,.$$

Ebenso erhält man für die Stirnfläche $PABQ$:

$$(4) \qquad U_{yx} = \int_x^a z\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_x^a \varphi(x)\sqrt{1 + f'^2}\,dx\,.$$

Lehrsatz: **Die Oberfläche der Zylinderfläche $PCDQ$ bzw. $PABQ$ ist angegeben durch das bestimmte Integral (3) bzw. (4).**

2. Ist an Stelle der Zylinderfläche $z = \varphi(x)$ die allgemeinere Fläche $z = F(xy)$ gegeben, welche die Zylinderfläche nach der Kurve PQ schneiden möge, so ist die Oberfläche $PABQ = U$ des letzten Zylinders dargestellt durch

$$U = \int z\,ds = \int F(xy)\sqrt{1+f'^2}\,dx$$

(5) oder
$$U = \int_x^a F(x, f)\sqrt{1+f'^2}\,dx\,.$$

Beispiele.

1. Rauminhalt, Stirn- und Scheitelfläche der Durchdringung der beiden Zylinder $y^2 = ax - x^2$, $z^2 = 4ax$ (Fig. 54) zu berechnen.

α) Der Rauminhalt ist nach § 35

$$V = \int_0^a y\,z\,dx = \int_0^x \sqrt{4ax}\sqrt{ax - x^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^a x\sqrt{a^2 - ax}\,dx = \frac{8}{15}a^3\,.$$

β) Stirnfläche $U_{yz} = \int_0^a z\,ds\,.$ Dabei ist

$$y = \sqrt{ax - x^2}\,,\quad y' = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}\,,\quad ds = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}}\,,$$

somit Stirnfläche

$$U_{yz} = a\sqrt{a}\int_0^a \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = a\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a - x}} = 2a^2\,.$$

γ) Scheitelfläche $U_{zx} = \int_0^a y\,ds_1\,.$ Dabei ist

$$z = 2\sqrt{ax}\,,\quad z' = \frac{a}{\sqrt{ax}} = \sqrt{\frac{a}{x}}\,,\quad ds_1 = \sqrt{1 + \frac{a}{x}}\,dx\,,$$

somit Scheitelfläche

$$U_{zx} = \int_0^a \sqrt{ax - x^2}\sqrt{1 + \frac{a}{x}}\,dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\pi}{4}a^2 .$$

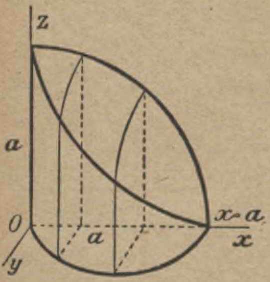

Fig. 55.

2. Durchdringung von Kreiszylinder und Kugel (Fig. 55)

$$y = \sqrt{ax - x^2},$$

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - ax}.$$

Man erhält $y' = \dfrac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}$,

$$ds = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}},$$

somit ist der Inhalt der zylindrischen Stirnfläche

$$U_a = \int_0^a z\,ds = \frac{a}{2}\int_0^a \sqrt{a^2 - ax}\cdot\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{a\sqrt{a}}{2}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = a^2 .$$

3. Durchdringung der Zylinderfläche $y^2 = ax - x^2$ mit der Kegelfläche $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

Man erhält wie in Nr. 2

$$y = \sqrt{ax - x^2}, \qquad ds = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

und somit für die ganze Oberfläche des Zylinders zwischen xy-Ebene und Kegelfläche

$$2U = 2\int_0^a z\,ds = 2\int_0^a \frac{c}{a}\sqrt{ax}\,\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}} = -2c\sqrt{a^2 - ax}\Bigg|_0^a = 2ac,$$

§ 38. Rektifikation der Raumkurven.

Eine Raumkurve kann als Schnittlinie zweier Flächen, z. B. zweier zu den Koordinationsebenen senkrechter Zylinderflächen betrachtet werden, dann ist sie dargestellt durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = x\,, \quad y = f(x)\,, \quad z = g(x)\,.$$

Sind die Koordinaten eines Punktes im Raum in Funktion eines Parameters t ausgedrückt, so läßt sich eine Raumkurve auch darstellen durch die Gleichungen

$$(2) \qquad x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad z = \chi(t)\,.$$

Sind alsdann P und P' zwei benachbarte Punkte derselben mit den Koordinaten xyz, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, so ist deren Entfernung angegeben durch

$$(3) \qquad \Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\,.$$

Rücken die beiden Punkte P und P' unendlich nahe zusammen, so ergibt sich hieraus als Linienelement der Raumkurve

$$(4) \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \quad \text{oder auch}$$

$$(5) \qquad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

Durch Integration folgt endlich hieraus als Länge des Kurvenbogens PQ (Fig. 56) zwischen zwei Punkten P und Q mit den Abszissen x_0 und x:

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'^2 + g'^2}\, dx \quad \text{oder} \tag{6}$$

$$s = \int_{x_0 = \varphi(t_0)}^{x = \varphi(t)} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}\, dt\,. \tag{7}$$

Beispiele.

1. Die Schraubenlinie (Fig. 57) hat die Gleichungen

$$x = r\cos t\,, \quad y = r\sin t\,,$$

$$z = \frac{h}{2\pi} t\,, \quad \text{daher ist}$$

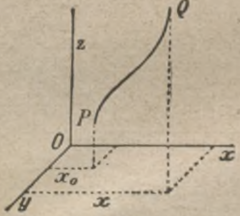

Fig. 56.

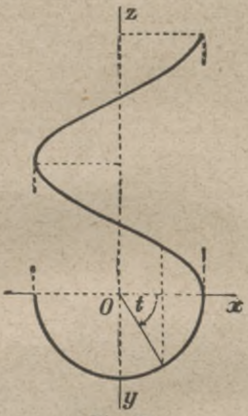

Fig. 57.

$$x' = -r\sin t\,, \quad y' = r\cos t\,, \quad z' = \frac{h}{2\pi}\,,$$

somit $$s = \int_0^t \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi r^2 + h^2}\cdot t\,.$$

2. Die im vorigen Paragraphen, Aufgabe 2, auftretende sphärische Kurve hat in Polarkoordinaten die Gleichungen

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos t)\,,\quad y = \frac{a}{2}\sin t\,,\quad z = a\cos\frac{t}{2}\,.$$

Hieraus folgt

$$x' = -\frac{a}{2}\sin t\,,\quad y' = \frac{a}{2}\cos t\,,\quad z' = -\frac{a}{2}\sin\frac{t}{2}\,.$$

Der in Figur 55 gezeichnete Teil dieser Raumkurve erhält die Länge

$$s = \int_0^\pi \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^\pi \sqrt{1 + \sin^2\frac{t}{2}}\,dt\,.$$

Dieses Integral ist ein elliptisches und kann auf die Form gebracht werden:

$$s = \frac{a}{2}\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\frac{t}{2}}\,dt\,,$$

welche zeigt, daß das Integral am einfachsten durch Reihenentwicklung zu ermitteln ist.

3. Die Länge der Schnittkurve der beiden Flächen

$$y = \frac{2x^3}{3a^2}\,,\quad z = \frac{x^2}{a}$$

vom Ursprung bis zum Punkt $P\,(xyz)$ zu berechnen.

Man erhält

$$y' = \frac{2\,x^2}{a^2}\,, \quad z' = \frac{2\,x}{a}$$

und daher nach Formel (4)

$$ds = \sqrt{1 + \frac{4\,x^4}{a^4} + \frac{4\,x^2}{a^2}}\,dx = \left(1 + \frac{2\,x^2}{a^2}\right) dx\,.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$s = \int_0^x \left(1 + \frac{2\,x^2}{a^2}\right) dx = x + \frac{2}{3}\,\frac{x^3}{a^2} = x + y\,.$$

VIII. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Statik

§ 39. Momente eines Punktsystemes.

Erklärung. Hat ein materieller Punkt P_i, in welchem wir uns die Masse m_i vereinigt denken können, von einer festen Geraden g die Entfernung p_i, so heißt das Produkt

$$(1) \qquad M_r = p_i^r\, m_i$$

das „Moment r^{ter} Ordnung" der Masse m_i in bezug auf die Gerade g.

Sind mehrere Punkte P_1, P_2, ..., P_n mit den Massen m_1, m_2, ..., m_n gegeben (Fig. 58), die von g die Entfernungen p_1, p_2, ..., p_n haben sollen, so heißt ebenso

$$(2) \quad M_r = \sum_{i=1}^{i=r} p_i^r\, m_i = m_1 p_1^r + m_2 p_2^r + \ldots + m_n p_n^r$$

das „Moment r^{ter} Ordnung des Punktsystems P_1, $P_2, \ldots, P_n$“ in bezug auf die „Momentachse“ g.

Für $r = 0$ geht die Gleichung (2) über in

$$(3) \qquad M_0 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i = m_1 + m_2 + \ldots + m_n,$$

wo M_0 die Gesamtsumme des Massensystems m_i darstellt.

Für $r = 1$ heißt

$$(4) \quad M_1 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i m_i = p_1 m_1 + p_2 m_2 + \ldots + p_n m_n$$

das „statische Moment des Punktsystems P_1, $P_2, \ldots, P_n$“ in bezug auf die Momentachse g.

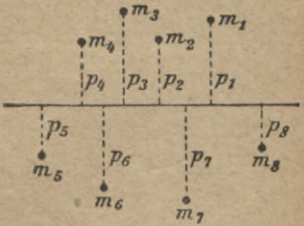

Fig. 58.

Wählt man p so, daß

$$(5) \qquad \begin{cases} p\,\Sigma m_i = \Sigma p_i m_i \quad \text{oder} \\ p = \dfrac{\Sigma p_i m_i}{\Sigma m_i} = \dfrac{M_1}{M_0} \end{cases}$$

ist, so heißt $p M_0 = p \Sigma m_i$ das statische Moment des Schwerpunktes.

Für $r = 2$ heißt

$$(6) \quad M_2 = \Sigma p_i^2 m_i = p_1^2 m_1 + p_2^2 m_2 + \ldots + p_n^2 m_n$$

das „Trägheitsmoment“ des Massensystems in bezug auf die „Trägheitsachse“ g.

Denkt man sich die Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ nicht in einzelnen Punkten der Ebene liegend, sondern auf einer Kurve, einer Fläche oder auch im Raum stetig verteilt, so treten an Stelle der Summenformeln (2) bis (6) Integrale, wie die folgenden Paragraphen zeigen werden.

§ 40. Schwerpunkt von krummen Linien.

1. Nehmen wir an, irgend eine Masse sei auf einer Kurve stetig verteilt und die Dichte der Belegung sei konstant und gleich ϱ, so ist $\varrho\,ds$ die Masse, welche längs des Kurvenelements ds verteilt ist. Die statischen Momente dieser Masse in bezug auf die beiden Koordinatenachsen sind alsdann

$$\varrho\, y\, ds\,, \quad \text{bzw.} \quad \varrho\, x\, ds\,.$$

Durch Integration ergeben sich hieraus die statischen Momente des ganzen Kurvenbogens zwischen den Punkten P und Q mit den Abszissen a und b (Fig. 59)

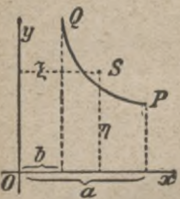

Fig. 59.

$$(1) \qquad \int_b^a \varrho\, y\, ds\,, \quad \text{bzw.} \quad \int_b^a \varrho\, x\, ds\,.$$

Erklärung. Der Schwerpunkt S eines Gebildes ist derjenige Punkt, in welchem man sich die Masse des ganzen Gebildes vereinigt denken kann. Hat derselbe die Koordinaten ξ und η, so sind

$$(2) \qquad \eta \int_b^a \varrho\, ds\,, \quad \text{bzw.} \quad \xi \int_b^a \varrho\, ds$$

die statischen Momente des Schwerpunktes des Bogens PQ in bezug auf die x-Achse bzw. y-Achse. Da nun im Falle des Gleichgewichts die entsprechenden Momente von (1) und (2) einander gleich sein müssen, so ist

$$\eta \int \varrho\, ds = \int \varrho\, y\, ds\,, \quad \xi \int \varrho\, ds = \int \varrho\, x\, ds$$

oder

$$(3) \qquad \xi = \int_b^a x\, ds : \int_b^a ds\,, \quad \eta = \int_b^a y\, ds : \int_b^a ds\,,$$

womit die Schwerpunktskoordinaten des Bogens PQ bestimmt sind.

Lehrsatz: Die Schwerpunktskoordinaten eines Kurvenbogens zwischen den Punkten P und Q mit den Abszissen a und b sind dargestellt durch die Ausdrücke (3).

2. Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben: $r = f(\varphi)$, so ist $\varrho\, ds\, r \sin\varphi$ das Moment des Elements ds in bezug auf die Polarachse x und ebenso $\varrho\, ds\, r \cos\varphi$ das Moment desselben in bezug auf die y-Achse. Das Moment des ganzen Bogens in bezug auf die Polarachse bzw. y-Achse ist daher

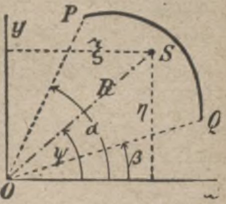

Fig. 60.

$$\varrho\int_{\beta}^{\alpha} ds\, r \sin\varphi\,, \quad \text{bzw.} \quad \varrho\int_{\beta}^{\alpha} ds\, r \cos\varphi\,.$$

Sind ξ, η die Koordinaten des Schwerpunkts des Bogens PQ (Fig. 60), so berechnen sich dieselben aus

$$(4) \qquad \xi = \int_{\beta}^{\alpha} r \cos\varphi\, ds : \int_{\beta}^{\alpha} ds\,, \quad \eta = \int_{\beta}^{\alpha} r \sin\varphi\, ds : \int_{\beta}^{\alpha} ds\,.$$

Die zugehörigen Polarkoordinaten R, ψ des Schwerpunkts S berechnen sich alsdann aus

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\eta}{\xi}\,.$$

Beispiele.

1. Für den Schwerpunkt des Viertelkreisbogens ergibt sich

$$\xi = \eta = \int_0^a x\, ds : \int_0^a ds = \int_0^a y\, ds : \int_0^a ds = \frac{2\,a}{\pi}\,.$$

2. Für den Schwerpunkt des Asteroidenbogens (Fig. 61) erhält man mit Berücksichtigung von § 30 Beispiel 1

$$\xi = \eta = \int_0^a x\,ds : \frac{3}{2}a = \int_0^a y\,ds : \frac{3a}{2},$$

$$\int x\,ds = \int x\,a^{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{1}{3}}\,dx = a^{+\frac{1}{3}}\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\,dx = \tfrac{3}{5}\,a^2\,;$$

somit ist

$$\xi = \eta = \tfrac{3}{5}\,a^2 : \tfrac{3}{2}\,a = \tfrac{2}{5}\,a\,.$$

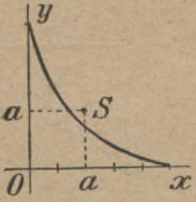

Fig. 61.

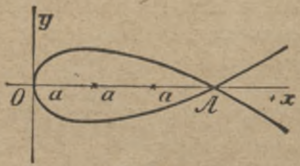

Fig. 62.

3. Die Koordinaten des Schwerpunkts des (oberen) Bogens der Kurve $9\,a\,y^2 = x(x - 3\,a)^2$ (Fig. 62) vom Ursprung bis zum Punkt mit der Abszisse x zu berechnen.

Man erhält für den oberen Kurvenbogen zwischen $x = 0$ und $x = 3\,a$, für welchen y positiv ist,

$$3\,y\sqrt{a} = (3\,a - x)\sqrt{x}\,,$$

somit $$y' = \frac{a - x}{2\sqrt{a\,x}}, \quad s = \int_0^x ds = \frac{x + 3\,a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$\int_0^x x\,ds = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\left(\frac{x^2}{5} + \frac{a\,x}{3}\right),$$

$$\int_0^x y\,ds = \frac{1}{18\,a}(3\,a\,x^2 + 9\,a^2 x - x^3)\,.$$

Daher ist

$$\xi = \frac{x(3\,x + 5\,a)}{5\,(x + 3\,a)}\,,\quad \eta = \frac{3\,a\,x^2 + 9\,a^2 x - x^3}{6\,a\,(x + 3\,a)} \cdot \sqrt{\frac{a}{x}}\,.$$

Für $x = 3\,a$ folgt hieraus $\xi = \frac{7}{5}\,a\,,\quad \eta = \frac{a}{4}\sqrt{3}\,.$

4. Für den Schwerpunkt des Bogens der Zykloide

$$x = a\,(\varphi - \sin\varphi)\,,\quad y = a\,(1 - \cos\varphi)$$

erhalten wir

$$\xi = \int_0^{2\pi} x\,ds : \int_0^{2\pi} ds = \frac{8\,\pi\,a^2}{8\,a} = a\,\pi\,,$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} y\,ds : \int_0^{2\pi} ds = \frac{32\,a^2}{3 \cdot 8\,a} = \frac{4}{3}\,a\,.$$

§ 41. Schwerpunkt von ebenen Figuren.

Denkt man sich die Fläche $PABQ$ (Fig. 63) durch Parallelen zur y-Achse in Streifen von der Breite dx geteilt, so ist der Inhalt eines solchen bis auf eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung durch das Produkt $y\,dx$ angegeben. Ist die Dichte der Flächenbelegung konstant und gleich ϱ, so ist $\varrho\,y\,dx$ dessen Masse und sind $\frac{y}{2} \cdot \varrho\,y\,dx$, bzw. $x \cdot \varrho\,y\,dx$ die Massenmomente jenes Streifens in bezug auf die x-Achse, bzw. y-Achse.

Die Momente der ganzen Fläche in bezug auf diese Achsen sind daher angegeben durch

$$\frac{1}{2}\int_b^a \varrho y^2 dx, \quad \text{bzw.} \quad \int_b^a \varrho x y dx.$$

Sind daher ξ und η die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche $PABQ$, so gelten die Gleichungen

$$\eta \int_b^a \varrho y dx = \frac{1}{2}\int_b^a \varrho y^2 dx, \quad \xi \int_b^a \varrho y dx = \int_b^a \varrho x y dx,$$

woraus folgt

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi &= \int_b^a x y dx : \int_b^a y dx, \\ \eta &= \frac{1}{2}\int_b^a y^2 dx : \int_b^a y dx. \end{aligned}$$

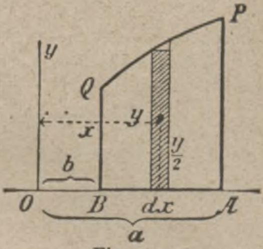

Fig. 63

Lehrsatz: Die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche $PABQ$ sind angegeben durch die Gleichungen (1).

Beispiele.

1. Den Schwerpunkt der Fläche der Parabel $y^2 = 2px$ zu bestimmen.

Man erhält

$$\xi = \frac{\int_0^x x\sqrt{2px}\,dx}{\int_0^x \sqrt{2px}\,dx} = \frac{3}{5}x, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_0^x 2px\,dx}{\int_0^x \sqrt{2px}\,dx} = \frac{3}{8}y.$$

2. Für den Schwerpunkt des Kreisquadranten (Fig. 64) $x^2 + y^2 = a^2$ erhält man nach Formel (2)

$$\xi = \eta = \frac{4a}{3\pi}.$$

Fig. 64.

3. Für den Schwerpunkt des Ellipsenquadranten ($x = a\cos t$, $y = b\sin t$) erhält man

$$\int_0^a x\,y\,dx = a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\,dt = \frac{a^2 b}{3},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx = \frac{a\,b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt = \frac{a\,b^2}{3},$$

$$\int_0^a y\,dx = a\,b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}a\,b;$$

daher ist

$$\xi = \frac{a^2 b}{3} : \frac{\pi}{4}a\,b = \frac{4a}{3\pi}, \qquad \eta = \frac{a\,b^2}{3} : \frac{\pi}{4}a\,b = \frac{4b}{3\pi}.$$

Für den Schwerpunkt der halben Ellipsenfläche ist

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{4b}{3\pi}.$$

4. Den Schwerpunkt der Zykloidenfläche zu bestimmen.

Es ist $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, also $dx = a(1 - \cos t)\,dt$, $dy = -a \sin t\, dt$ und

$$\int_0^{2\pi} x\,y\,dx = a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2\,dt = 3\,\pi^2 a^3\,,$$

$$\int_0^{2\pi} y\,dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt = 3\,\pi\,a^2\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2\,dx = \tfrac{1}{2}\,a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,dt = \tfrac{5}{2}\,\pi\,a^3\,.$$

Daher ist

$$\xi = \int x\,y\,dx : \int y\,dx = \frac{3\,\pi^2 a^3}{3\,\pi\,a} = \pi\,a\,,$$

$$\eta = \frac{1}{2}\int y^2\,dx : \int y\,dx = \frac{2\frac{1}{2}\,\pi\,a^3}{3\,\pi\,a^2} = \frac{5}{6}\,a\,.$$

§ 42. Schwerpunkt einer beliebigen Figur.

Es sei der Schwerpunkt der Fläche U (Fig. 65) gesucht, die von den beiden Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$, sowie den beiden zur x-Achse senkreckten Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

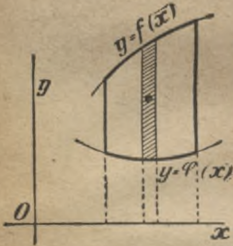

Fig. 65.

Man erhält als Flächeninhalt

$$(1)\quad U = \int_b^a \{f(x) - \varphi(x)\}\,dx\,,$$

und als Moment in bezug auf die y-Achse nach § 41

$$M_y = \int_b^a x\,\{f(x) - \varphi(x)\}\,dx\,.$$

Zur Berechnung des Moments in bezug auf die x-Achse sei bemerkt, daß das Rechteck $[f(x) - \varphi(x)]\,dx$ an Stelle des elementaren Flächenstreifens zwischen den Ordinaten zu den Abszissen x und $x + dx$ gesetzt werden darf und dieses Rechteck die Schwerpunktsordinate $\frac{1}{2}[f(x) + \varphi(x)]$ besitzt; daher ist

$$M_x = \int_b^a \tfrac{1}{2}\{f(x) + \varphi(x)\}\{f(x) - \varphi(x)\}\,dx$$

oder

$$M_x = \frac{1}{2}\int_b^a \{f^2 - \varphi^2\}\,dx\,. \tag{3}$$

Es ergeben sich somit als Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = \frac{M_y}{U}, \quad \eta = \frac{M_x}{U}\,. \tag{4}$$

Lehrsatz: Die Schwerpunktskoordinaten der Fläche, welche von den beiden Kurven $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ und den beiden Parallelen zur y-Achse $x = b$ und $x = a$ begrenzt wird, sind angegeben durch die bestimmten Integrale (4).

Beispiele.

1. Die beiden Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ oder

$$y = \sqrt{2px} = f \quad \text{und} \quad y = \frac{x^2}{2p} = \varphi$$

schneiden sich im Punkt P mit den Koordinaten $x = y = 2p$. Gesucht ist der Schwerpunkt des (linsenförmigen) gemeinschaftlichen Flächenstücks (Fig. 66) beider Kurven. Man erhält (nach 1) $$U=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\frac{4}{3}p^2,$$

(nach 3) $$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(2px-\frac{x^4}{4p^2}\right)dx=\frac{6}{5}p^3,$$

(nach 2) $$M_y=\int_0^{2p}x\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\frac{6}{5}p^3;$$

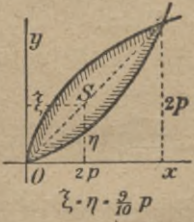

Fig. 66.

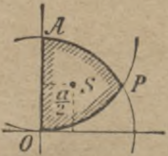

Fig. 67.

daher ist

$$\xi=\eta=\frac{M_y}{U}=\frac{M_x}{U}=\frac{6}{5}p^3:\frac{4}{3}p^2=\frac{9}{10}p.$$

2. Den Schwerpunkt der halben gemeinschaftlichen Fläche AOP der beiden Kreise $f=y=\sqrt{a^2-x^2}$ und $\varphi=y=a-\sqrt{a^2-x^2}$ (Fig. 67) zu bestimmen.

Man erhält nach vorstehenden Formeln

$$U=\int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}}\left(2\sqrt{a^2-x^2}-a\right)dx=\frac{a^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3}),$$

$$M_y = \int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}} x\left(2\sqrt{a^2 - x^2} - a\right) dx = \frac{5\,a^3}{24},$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}} \left(2\,a\sqrt{a^2 - x^2} - a^2\right) dx = \frac{a^3}{24}(4\,\pi - 3\sqrt{3})\,.$$

Daher ist

$$\xi = \frac{M_y}{U} = \frac{5\,a}{2\,(4\,\pi - 3\sqrt{3})}, \quad \eta = \frac{M_x}{U} = \frac{a}{2}\,.$$

§ 43. Schwerpunkt von räumlichen Gebilden.

Schneiden die Ebenen $x = x$ und $x + dx$ aus der Fläche f eine Scheibe vom Inhalt $U\,dx$ aus, so ist $x\,U\,dx$ das Moment dieser Scheibe in bezug auf die $y\,z$-Ebene und $\int_b^a x\,U\,dx$ die Summe der Momente sämtlicher Scheiben von $x = b$ bis $x = a$ oder das Moment des ganzen Körpers in bezug auf die $y\,z$-Ebene. Ist daher ξ die Schwerpunktsabszisse des Körpers, so muß

$$\xi \int_b^a U\,dx = \int_b^a x\,U\,dx$$

sein, woraus sich ergibt

$$\xi = \int_b^a x\,U\,dx : \int_b^a U\,dx\,. \tag{1}$$

Lehrsatz: Die Schwerpunktsabszisse ξ des räumlichen Gebildes, das von der Fläche f und den Ebenen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird, ist ausgedrückt durch das bestimmte Integral (1).

Dreht sich beispielsweise die ebene Kurve $z = f(x)$ in der zx-Ebene um die x-Achse, so beschreibt sie einen Rotationskörper, für welchen $U = \pi z^2 = \pi f^2(x)$ ist.

Der Schwerpunkt desselben hat von der yz-Ebene die Entfernung

$$\xi = \int_b^a x f^2(x)\, dx : \int_b^a f^2(x)\, dx \,. \tag{2}$$

Beispiele.

1. Für das Paraboloid (Fig. 68) $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ ist $U = \pi b c x$, daher hat der Schwerpunkt desselben von der yz-Ebene die Entfernung

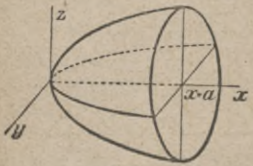

Fig. 68.

$$\xi = \pi b c \int_0^a x^2\, dx : \pi b c \int_0^a x\, dx$$

$$= \frac{a^3}{3} : \frac{a^2}{2} = \frac{2}{3} a \,.$$

2. Die schleifenförmige Kurve $a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ erzeugt bei der Drehung um die x-Achse einen Rotationskörper, dessen Schwerpunkt von der yz-Ebene die Entfernung hat:

$$\xi = \frac{\int_0^a x y^2\, dx}{\int_0^a y^2\, dx} = \frac{\int_0^a (a^2 x^3 - x^5)\, dx}{\int_0^a (a^2 x^2 - x^4)\, dx} = \frac{5}{8} a \,.$$

§ 44. Erste Guldinische Regel.

Gegeben sei die Kurve $y = f(x)$ in der xy-Ebene. Dreht sich dieselbe um die x-Achse, so beschreibt beispielsweise der Punkt P mit der Ordinate y einen Kreis, dessen Inhalt

$$U = \pi y^2 = \pi f^2(x) \tag{1}$$

ist. Der Inhalt des auf diese Weise erzeugten Rotationskörpers zwischen den Ebenen $x = b$ und $x = a$ ist alsdann nach § 34

$$V = \int_b^a U\,dx = \pi \int_b^a y^2\,dx = 2\pi \int_b^a \frac{y^2}{2}\,dx\,. \tag{2}$$

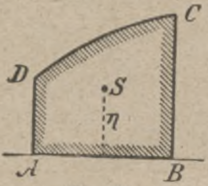

Fig. 69.

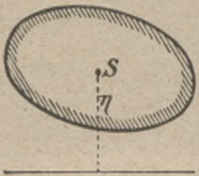

Fig. 70.

Nun ist nach § 41 $\frac{1}{2}\int_b^a y^2\,dx$ das Moment der Fläche $DABC$ (Fig. 69) in bezug auf die x-Achse. Ist daher η die Ordinate des Schwerpunktes dieser Figur (Meridianfigur), deren Inhalt F sei, so ist

$$\eta F = M_x = \frac{1}{2}\int_b^a y^2\,dx\,, \tag{3}$$

daher ist

$$V = 2\pi \int_b^a \frac{y^2}{2}\,dx = 2\pi M_x = 2\pi\eta F\,. \tag{4}$$

Es gilt somit der

Lehrsatz: Der Rauminhalt des Rotationskörpers, der durch Drehung einer Figur — Meridianfigur (Fig. 69 und 70) um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugt wird, ist gleich dem Inhalt dieser Figur (hier $DABC$) multipliziert mit dem Weg $2\pi\eta$, den ihr Schwerpunkt S bei der Drehung beschreibt.

Dieser Satz heißt „die erste Guldinische Regel" und gilt für jede beliebige Figur, welche Umgrenzung dieselbe auch haben möge.

Fig. 71.

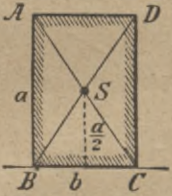

Fig. 72.

Sind in Formel (4) V und F bekannt, so läßt sich hieraus die Ordinate η des Schwerpunkts der Meridianfigur berechnen.

(3) $$\eta = V : 2\pi F.$$

In vielen Fällen ist diese Art der Ermittlung des Schwerpunkts ebener Figuren sehr einfach (s. Beispiel 4).

Beispiele.

1. Ist die Meridianfigur ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 71) von der Seite a, das um eine Seite gedreht werde, so ist $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, $\eta = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, daher $V = \frac{\pi}{4}a^3$.

2. Rauminhalt des von dem Rechteck $ABCD$ (Fig. 72) bei der Drehung um die Seite $BC = b$ beschriebenen Wulstes $V = a\,b \cdot 2\,\pi \dfrac{a}{2} = \pi\,a^2\,b$.

3. Bei der Drehung um die Bahnlinie beschreibt nach § 34 ein Zweig der Zykloide $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$ eine Rotationsfläche vom Inhalt

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2\,dx = 16\,\pi\,a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{\varphi}{2}\,d\,\frac{\varphi}{2} = 5\,\pi^2\,a^3\,.$$

Nun ist nach § 41, 4 die Schwerpunktsordinate des gedrehten Zweiges $\eta = \frac{5}{6}\,a$ und dessen Flächeninhalt nach § 27, 10 $U_{2\pi} = 3\,\pi\,a^2$; daher ist auch nach der Guldinischen Regel

$$V = 2\,\pi\,\eta \cdot U_{2\pi} = 2\,\pi \cdot \tfrac{5}{6}\,a \cdot 3\,\pi\,a^2 = 5\,\pi^2\,a^3\,.$$

4. Dreht sich ein Halbkreis vom Inhalt $U = \dfrac{\pi}{2} a^2$ um seinen Durchmesser, so beschreibt er eine Kugelfläche vom Inhalt $V = \frac{4}{3}\,\pi\,a^3$, daher ist nach Formel (3) die Entfernung des Schwerpunktes der Halbkreisfläche vom zugehörigen Durchmesser

$$\eta = \frac{V}{2\,\pi\,F} = \frac{4\,a}{3\,\pi}\,.$$

5. Ebenso ist für den Kreisquadranten (Fig. 64)

$$\xi = \eta = \frac{V}{2\,\pi\,F} = \frac{\frac{2}{3}\,\pi\,a^3}{2\,\pi \cdot \frac{\pi\,a^2}{4}} = \frac{4\,a}{3\,\pi}\,.$$

§ 45. Zweite Guldinische Regel.

Nach § 36 beschreibt der Zweig AB der Kurve (Fig. 73) $y = f(x)$ bei der Drehung um die x-Achse einen Rotationskörper, dessen Oberfläche angegeben ist durch

$$(1) \qquad O = 2\pi \int_b^a y\, ds\,.$$

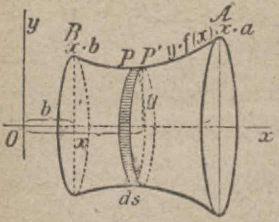

Fig. 73.

Nun ist nach § 40 $y\, ds$ das Moment des Elements ds in bezug auf die x-Achse. Das Integral $\int_b^a y\, ds$ gibt die Summe aller dieser Momente von $x = b$ bis $x = a$ an, die nach § 40 gleich $\eta \int_b^a ds$ ist, wo η die Schwerpunktsordinate des Bogens AB (Fig. 73) und $\int_b^a ds = s$ die Länge desselben bezeichnet. Es ist daher

$$(2) \qquad O = 2\pi \int_b^a y\, ds = 2\pi\eta \int_b^a ds \quad \text{oder} \quad O = 2\pi\eta s\,,$$

d. h. die bei der Drehung um die x-Achse von dem Bogen AB beschriebene Fläche ist gleich der Länge s dieses Bogens mal dem Weg seines Schwerpunktes.

Dieser Satz gilt stets, ob der Bogen AB eine geschlossene Figur darstellt oder nicht, ob er gesetzmäßig krummlinig oder unregelmäßig gestaltet ist. Er repräsentiert die „zweite Guldinische Regel“:

Eine geschlossene ebene Kurve (Fig. 75) beschreibt bei der Drehung um eine außerhalb des Umfangs in ihrer Ebene liegende Achse einen Flächeninhalt, der gleich dem Produkt aus dem Umfang der Meridianfigur und dem Weg ihres Umfangschwerpunktes ist.

Aus Formel (2) folgt $\eta = O : 2\pi s$.

Die zweite Guldinische Regel kann also auch analog der ersten zu Schwerpunktsbestimmungen von Kurvenbögen benutzt werden. Siehe Beispiel 3 und 4.

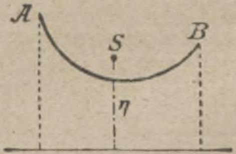

Fig. 74.

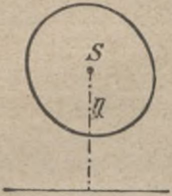

Fig. 75.

Beispiele.

1. In § 40 erhielt man als Koordinaten des Schwerpunkts des Viertelkreisbogens $\xi = \eta = \frac{2a}{\pi}$. Da dessen Länge $s = \frac{\pi}{2} a$ ist, so beschreibt derselbe bei der Drehung um eine der Achsen die Fläche

$$O = 2\pi\eta s = 2\pi\xi s = 2\pi \cdot \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} a = 2\pi a^2,$$

was bekanntlich der Flächeninhalt einer Halbkugel ist.

2. Für den Zykloidenbogen ist nach § 30 bzw. § 40

$$S = 8a, \quad \xi = \pi a, \quad \eta = \frac{4}{3} a.$$

Eine Schleife der Zykloide beschreibt daher bei der Drehung um die Scheiteltangente bzw. die Bahnlinie einen Rotationskörper, dessen Oberfläche angegeben ist durch

$$O = 2\pi\xi \cdot S = 16\pi^2 a^2, \text{ bzw. } O = 2\pi\eta S = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

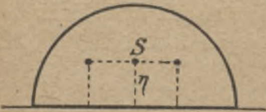

Fig. 76.

3. Dreht sich ein Halbkreis vom Radius a (Fig. 76) und von der Länge $s = \pi a$ um seinen Durchmesser, so beschreibt er eine Kugel, deren Oberfläche $O = 4\pi a^2$ ist. Der Schwerpunkt des Halbkreisbogens hat daher vom Durchmesser die Entfernung

$$\eta = \frac{O}{2\pi s} = \frac{2a}{\pi}.$$

4. Dreht sich ein Kreisquadrant um einen Halbmesser, so beschreibt der zugehörige Bogen von der Länge $s = \frac{\pi}{2} a$ eine Halbkugel, deren Oberfläche $O = 2\pi a^2$ ist. Der Schwerpunkt S eines Viertelkreisbogens hat daher von den beiden äußeren Halbmessern die Entfernungen (vgl. § 40, 1)

$$\xi = \eta = \frac{O}{2\pi s} = \frac{2a}{\pi}.$$

IX. Abschnitt.

Das Doppelintegral und seine Anwendung.

§ 46. Das unbestimmte Doppelintegral.

1. Wie man eine Funktion $y = F(x)$ zwei- oder mehrfach nach x ableiten kann und dabei erhält

$$\frac{dy}{dx} = y' = F'(x)\,, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = F''(x) = f(x)\,,$$

so ergibt sich auch umgekehrt durch Integration

$$\frac{dy}{dx} = y' = \int F''(x)\,dx + C_1 = \int f(x)\,dx + C_1$$

und hieraus durch weitere Integration

$$\begin{aligned} y &= \int\{\int F''(x)\,dx + C_1\}\,dx + C_2 \\ &= \int\int f(x)\,dx\,dx + C_1\,x + C_2 = F(x,\,C_1,\,C_2)\,, \end{aligned}$$

wo C_1 und C_2 die Integrationskonstanten bezeichnen, die zunächst beliebig gewählt werden können.

Erklärung. Unter dem zweifachen Integral des Differentials $f(x)\,dx\,dx$ versteht man eine Funktion $F(x,\,C_1,\,C_2)$ von x, welche zweimal nach x abgeleitet $f(x)$ gibt.

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = f(x)\,.$$

2. Enthält die Funktion $f(x\,y)$ zwei Veränderliche x und y, die unabhängig voneinander sein sollen, so versteht man unter dem zweifachen Integral

$$V = \int\int f(x\,y)\,dx\,dy = F(x\,y)$$

eine Funktion $F(xy)$, welche nach x und y abgeleitet $f(xy)$ liefert.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(xy) = \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial y}}{\partial x}.$$

Hieraus folgt beispielsweise

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int f(xy)\, dy ,$$

wo rechts dy an Stelle von ∂y gesetzt ist. Erhält man bei der Ausführung dieses Integrals, wobei x als Konstante anzusehen ist,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int f(xy)\, dy = G(xy) + g(x) ,$$

wo $g(x)$ eine willkürliche Funktion von x allein oder eine Konstante sein kann, so folgt hieraus durch weitere Integration

$$F = \int\int f(xy)\, dx\, dy = \int G(xy)\, dx + \int g(x)\, dx + \psi(y) ,$$

wo bei der Integration y als konstant anzusehen ist und $\psi(y)$ von y allein abhängt oder eine Konstante bedeutet. Führt das Integral $\int G(xy)\, dx$ auf $H(xy)$ und $\int g(x)\, dx$ auf $\varphi(x)$, so ist das unbestimmte Doppelintegral allgemein dargestellt durch

$$F(xy) = \int \{\int f(xy)\, dx\}\, dy = H(xy) + \varphi(x) + \psi(y) .$$

Dasselbe enthält demnach an Stelle der Konstanten zwei willkürliche Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$.

§ 47. Das bestimmte Doppelintegral und seine geometrische Bedeutung.

1. In der xy-Ebene liege ein Viereck $ABCD$ (Fig. 77), dessen Seiten durch $x = x$, $x = a$, $y = y$, $y = b$ bestimmt sind.

Alsdann sei $z = f(xy)$ eine Funktion von x und y, welche für alle Punkte jenes Vierecks, sowie im Innern desselben eindeutig und stetig ist.

Es soll der Rauminhalt V bestimmt werden, der von der Fläche $z = f(xy)$, den Ebenen $x = x$, $x = a$; $y = y$, $y = b$ und der xy-Ebene begrenzt ist.

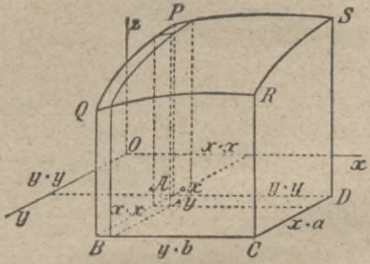

Fig. 77.

Teilt man $AD = a - x$ in m gleiche Teile von der Länge $\Delta x = \dfrac{a - x}{m}$ und ebenso $AB = b - y$ in n gleiche Teile von der Länge $\Delta y = \dfrac{b - y}{n}$ und legt man durch die Teilpunkte Ebenen parallel zur yz-Ebene, bzw. parallel zur zx-Ebene, so wird der Raum V in mn Säulchen zerschnitten, welche näherungsweise als Prismen von der Grundfläche

$$\Delta x \, \Delta y = \frac{a - x}{m} \cdot \frac{b - y}{n}$$

und den Höhen $z_{kh} = f(x + k\Delta x,\ y + h\Delta y)$, wo $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, $h = 0, 1, \ldots, n - 1$ ist, betrachtet werden können. Durch Addition dieser mn Prismen ergibt sich für V näherungsweise der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
V_{mn} = \Delta x \Delta y \{ & f(xy) + f(x+\Delta x, y) + f(x, y+\Delta y) \\
& + f(x + 2\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y+\Delta y) \\
(1) \quad & + f(x, y + 2\Delta y)\} + \ldots \\
& + f(x + [m-1]\Delta x, y) + \ldots \\
& + f(x, y + [n-1]\Delta y)\},
\end{aligned}
$$

der dem wahren Wert V um so näher kommt, je größer m und n gewählt werden. Beim Übergang zur Grenze für $m = \infty$ und $n = \infty$ ist

$$\lim V_{mn} = V. \tag{2}$$

Um diesen Grenzwert zu erhalten, entwickle man in (1) jede der Funktionen $f(x + k\Delta x, y + h\Delta y)$ nach Potenzen und Produkten von Δx und Δy und setze

$$\Delta x = \frac{a-x}{m}, \quad \Delta y = \frac{b-y}{n},$$

dann ergibt sich auf ganz ähnliche Weise wie in § 78 der Differentialrechnung*) für $\lim V_{mn}$ die Reihenentwicklung

$$
\begin{aligned}
\lim V_{mn} = (a-x)(b-y)\Big[& f(xy) + \frac{1}{2!}\left((a-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (b-y)\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
(3) \quad & + \frac{1}{3!}\left((a-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{3}{2}(a-x)(b-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (b-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \ldots\Big],
\end{aligned}
$$

wodurch der Rauminhalt V ermittelt ist.

Lehrsatz: Der Rauminhalt V, der von der Fläche $z = f(xy)$, den vier Ebenen $x = x$, $x = a$, $y = y$, $y = b$ und der xy-Ebene begrenzt ist, läßt sich durch eine konvergente Potenzreihe von der Form (3) darstellen, deren Grenzwert V ist.

Setzt man hierhin $x = 0$, $y = 0$, so folgt weiter: Der Rauminhalt V, der von der Fläche $z = f(xy)$, den Ebenen $x = a$ und $y = b$, sowie den drei Ko-

*) Sammlung Göschen, Bd. 87.

ordinatenebenen begrenzt ist, ist angegeben durch die Reihe

$$
(4) \quad \begin{aligned} V = a\,b \Big\{ & f(x\,y) + \frac{1}{2!}\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ & + \frac{1}{3!}\left(a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{3}{2}\,a\,b\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \cdots \Big\}_{x=0,\ y=0}. \end{aligned}
$$

Beispiel. Ist $z = f(x\,y) = A\,x^2 + B\,y^2$ die Gleichung eines Paraboloids, welches die $x\,y$-Ebene im Ursprung berührt, so ist der Rauminhalt, der von dieser Fläche, den Ebenen $x = a$, $y = b$ und den Koordinatenebenen begrenzt ist, angegeben durch

$$V = \frac{a\,b}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{a\,b}{3}\,(A\,a^2 + B\,b^2)\,.$$

Setzt man nach $c = A\,a^2 + B\,b^2$, so ist

$$V = \frac{a\,b\,c}{3}\,.$$

2. Denken wir uns in $z = f(x\,y)$ die Variable $x = x$ konstant, so hat in Figur 77 die Fläche $PABQ$ den Inhalt

$$(5) \qquad U_1 = \int_{y=y}^{b} f(x,\,y)\,dy\,.$$

Legt man nun parallel zu dieser Fläche in der Entfernung dx eine weitere Ebene, so schneiden dieselben aus dem Raum V eine Scheibe aus, deren Rauminhalt bis auf eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung durch

$$U_1\,dx = \left(\int_{y}^{b} f(x,\,y)\,dy\right)dx$$

angegeben ist. Der Inhalt aller dieser Scheiben $U_1\,U_2\,U_3 \ldots$, die von $x = x$ bis $x = a$ durch Ebenen parallel zur

yz-Ebene in der Entfernung dx voneinander gelegt werden können, ist angegeben durch das Doppelintegral

$$V = \int_x^a \left(\int_y^b f(x, y)\, dy \right) dx ,$$

wo bei der letzten Integration y und b als Konstante anzusehen sind.

Da man zu dem gleichen Resultat gelangen muß, wenn man den Raum V durch Ebenen parallel zur zx-Ebene zerlegt und die erhaltenen Scheiben summiert, so folgt

$$(6) \qquad V = \int_x^a \left(\int_y^b f(x, y)\, dy \right) dx = \int_y^b \left(\int_x^a f(x, y)\, dx \right) dy ,$$

wo, bei der Integration nach x, bzw. y, dy und y, bzw. dx und x als konstant anzusehen sind.

Ergibt sich bei der folgenden Integration

$$\int f(xy)\, dy = G(x, y) + C ,$$

wo x als konstant gedacht ist, so ist das bestimmte Integral (5) angegeben durch

$$U_1 = \int_y^b f(x, y)\, dy = G(x, b) - G(x, y) .$$

Hieraus folgt weiter durch Integration nach x:

$$V = \int_x^a \left(\int_y^b f(x, y)\, dy \right) dx = \int_x^a G(x, b)\, dx - \int_x^a G(x, y)\, dx .$$

Die beiden Integrale rechts sind offenbar von derselben Form und können durch Vertauschung von b und y ineinander übergeführt werden. Erhält man

$$\int G(x, y)\, dx = F(x, y) + C ,$$

so ist

$$\int_x^a G(x, y)\, dx = F(a, y) - F(x, y),$$

und wenn man hierin b mit y vertauscht,

$$\int_x^a G(x, b)\, dx = F(a, b) - F(x, b).$$

Das Doppelintegral V zwischen den Grenzen a, x und b, y ist somit dargestellt durch

$$(6)\quad V = \int_x^a \int_y^b f(x, y)\, dx\, dy = F(a, b) - F(a, y) - F(x, b) + F(x, y).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung gibt zu erkennen, daß sich das Integral nicht ändert, wenn man a mit x und gleichzeitig b mit y vertauscht. Ein Doppelintegral bleibt somit seinem Werte nach ungeändert, wenn man die oberen Grenzen mit den unteren vertauscht.

Der Wert des Doppelintegrals geht jedoch in den entgegengesetzten über, sobald man nur die Grenzen eines Integrals miteinander vertauscht.

3. Es erübrigt noch zu zeigen, daß die Entwicklung (3) von $\lim V_{mn}$ mit dem Doppelintegral (5) bzw. (6) übereinstimmt.

Nach der Definition des Doppelintegrals ist

$$(7)\qquad f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}.$$

Hieraus folgt

$$(7')\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\, \partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^3 F}{\partial x\, \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial x^3\, \partial y}, \ldots$$

Entwickelt man alsdann $F(x + k, y + h)$ nach Potenzen und Produkten von k und h, ebenso $F(x + k, y)$,

$F(x, y+h)$ nach Potenzen von k, bzw. h und setzt nachträglich $k=a-x$, $h=b-y$, so folgt

$$F(a, b) = F(xy) + (a-x)\frac{\partial F}{\partial x} + (b-y)\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{(a-x)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2(a-x)(b-y)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (b-y)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right\} + \dots$$

$$-F(a, y) = -F(xy) - (a-x)\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2!}(a-x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dots$$

$$-F(x, b) = -F(xy) - (b-y)\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2!}(b-y)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \dots$$

$$F(xy) = F(xy)$$

Nach Addition dieser Gleichungen und mit Berücksichtigung von (7) und (7′) ergibt sich unmittelbar

$$F(a, b) - F(a, y) - F(x, b) + F(x, y) = \lim V_{mn}$$

oder

$$\lim V_{mn} = V = \int\limits_x^a \int\limits_y^b f(xy)\, dx\, dy,$$

womit die Übereinstimmung der Reihenentwicklung (3) mit dem Wert des bestimmten Doppelintegrals (6) gezeigt ist.

§ 48. Doppelintegrale mit veränderlichen Grenzen.

In der xy-Ebene (Fig 78) liege eine krumme Linie, welche die Gleichung $y = \varphi(x)$ besitzen und die x-Achse im Punkte $x = a$, die y-Achse im Punkte $y = b$ schneiden möge. Ferner sei gegeben die Fläche $z = f(xy)$, welche für alle Punkte des Kurvenbogens AB oder innerhalb der Figur OAB eindeutig und endlich sei. Sodann werde über OAB als Basis ein senkrechter Zylinder konstruiert, dessen obere Begrenzungsfläche von der Fläche $z = f(x\,y)$ gebildet werde und dessen Inhalt V sei. Legt man hierauf in der Entfernung $OD = x$ eine Ebene parallel zur $y\,z$-Ebene, so ist der Inhalt der Fläche $CDEF$ angegeben durch das Integral

$$CDEF = \int_0^y f(x\,y)\,dy\,,$$

wo x als konstant zu betrachten ist. Legt man alsdann parallel zu dieser Ebene eine zweite Ebene in der Entfernung $x + dx$ von der $y\,z$-Ebene, so schneiden beide Ebenen aus dem Raum V eine Scheibe aus, deren Inhalt bis auf eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung richtig angegeben ist durch

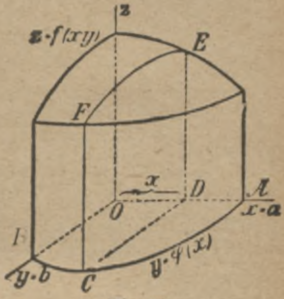

Fig. 78.

(1) $$U_x = \left(\int_0^y f(x\,y)\,dy\right)dx\,.$$

Durch Summation aller derartigen Scheiben von $x = 0$ bis $x = a$ ergibt sich alsdann der Inhalt V, der nunmehr ausgedrückt ist durch das Doppelintegral

(2) $$V = \int_0^a \left(\int_0^{y=\varphi(x)} f(x\,y)\,dy\right)dx\,.$$

Legt man die Ebenen parallel zur $z\,x$-Ebene, so läßt sich V auch berechnen durch

(3) $$V = \int_0^b \left(\int_0^{x=\psi(y)} f(x\,y)\,dx\right)dy\,.$$

Lehrsatz: Der Rauminhalt V, der von der Zylinderfläche $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$, der xy-Ebene und der Fläche $z = f(xy)$ begrenzt wird, ist angegeben durch jedes der beiden Doppelintegrale (2) oder (3).

Beispiel.

Zur Berechnung des Oktanten des dreiachsigen Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ erhält man

$$z = f(xy) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

und in der xy-Ebene die Kurve $y = \varphi(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Daher ist

$$V = \frac{c}{b}\int_0^a \left\{ \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy \right\} dx\,.$$

Für das innere Integral, in welchem x als konstant anzusehen ist, erhält man den Ausdruck

$$\int \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy = \frac{y}{2}\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}$$
$$+ \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{y}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\,,$$

der nach Einführung der Grenzen übergeht in

$$\frac{\pi b^2}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad \text{daher ist}$$

$$V = \frac{\pi b c}{4} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi a b c}{6}.$$

Das Gesamtvolumen des Ellipsoids ist daher

$$8V = \tfrac{4}{3} \pi a b c .$$

§ 49. Oberflächenberechnung mit Doppelintegralen.

Es sei $z = f(xy)$ die Gleichung einer krummen Fläche und $P(xyz)$ ein beliebiger Punkt derselben. Die in letzterem errichtete Flächennormale hat nach § 79 der Differentialrechnung*) die Gleichung

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{1}, \quad \text{wo}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

gesetzt ist. Der Winkel γ, den die Normale mit der z-Achse macht, ist bestimmt durch

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

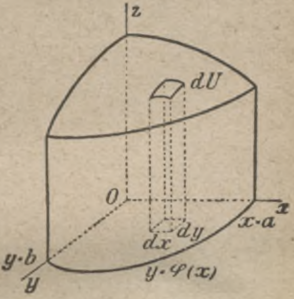

Fig. 79.

Um die Oberfläche U desjenigen Teils der Fläche $z = f(xy)$ (Fig. 79) zu berechnen, welcher oberhalb der stark gezeichneten Kurve $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$ in der xy-Ebene liegt, teile man die letztere durch Ebenen parallel zur yz- und zx-Ebene in unendlich kleine Rechtecke $dx\,dy$. Das über einem solchen liegende Element dU der Fläche $z = f(xy)$ kann ohne Fehler als

*) Sammlung Göschen, Bd. 87.

eben und als in der Tangentenebene liegend angesehen werden. Der Winkel, den letztere mit der xy-Ebene macht, ist gleich dem Winkel γ, den die Flächennormale mit der z-Achse macht. Die Projektion des Flächenstücks dU auf die xy-Ebene ist somit dargestellt durch

$$dx\,dy = dU\cos\gamma\,,$$

woraus folgt

$$dU = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}\,.$$

Aus diesem Differential läßt sich U in Form eines Doppelintegrals angeben.

Lehrsatz: Der Flächeninhalt U ist dargestellt durch jedes der beiden Doppelintegrale

$$U = \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{y=\varphi(x)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dy\right)dx$$

oder

$$U = \int\limits_0^b \left(\int\limits_0^{x=\psi(y)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\right)dy\,.$$

Beispiel.

Die Oberfläche eines Kugeloktanten zu berechnen.

Die Gleichung der Kugel sei

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0\,,$$

dann ist

$$z = f(xy) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,, \qquad y = \varphi(x) = \sqrt{a^2-x^2}\,,$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,,$$

$$U = a\int\limits_0^a \left\{\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right\}dx\,.$$

Das innere Integral ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Nach Eintragung der Grenzen geht U über in

$$U = a\,\frac{\pi}{2}\int_0^a dx = \frac{\pi}{2}\,a^2\,.$$

Die ganze Kugel hat daher die Oberfläche

$$O = 8\,U = 4\,\pi\,a^2\,.$$

§ 50. Anwendung von Polarkoordinaten.

Eine zur z-Achse parallel laufende Zylinderfläche (Fig. 80) habe in Polarkoordinaten die Gleichung $r = f(\varphi)$ und werde nach oben durch die Fläche $z = F(r\,,\,\varphi)$ begrenzt.

Es ist der Rauminhalt dieser Zylinderfläche und der Inhalt ihrer oberen Begrenzungsfläche zu bestimmen.

Das in Fig. 80 schraffierte Element der xy-Ebene hat in Polarkoordinaten den Inhalt $r\,d\varphi\,dr$ und demgemäß das zugehörige Element des Zylinders den Rauminhalt

$$dV = z\,r\,d\varphi\,dr = F(r,\,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi\,.$$

Daher ist das von dem zu $r = f(\varphi)$ gehörigen Zylinder, der xy-Ebene und der Fläche $z = F(r\,,\,\varphi)$ begrenzte Volumen ausgedrückt durch

$$V = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{f(\varphi)} F(r,\,\varphi)\,r\,dr\right\}d\varphi\,. \tag{1}$$

Lehrsatz: Das von der xy-Ebene, der Zylinderfläche $r = f(\varphi)$ und der krummen Fläche $z = F(r,\varphi)$ begrenzte Volumen ist dargestellt durch das Doppelintegral (1).

Bezeichnen wir wieder wie im vorigen Paragraphen das über dem schraffierten Element $r\,d\varphi\,dr$ der xy-Ebene liegende Element der Fläche F mit dU, so ist ebenso wie dort

$$dU = \frac{r\,dr\,d\varphi}{\cos\gamma},$$

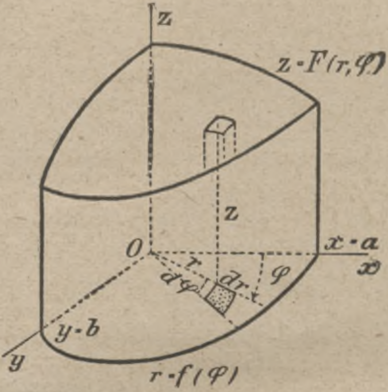

Fig. 80.

wo γ den Neigungswinkel der zu dU gehörigen Normalen der Fläche $F(r, \varphi)$ bezeichnet. Die Oberfläche U selbst ist somit ausgedrückt durch

$$(2) \qquad U = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{f(\varphi)} \frac{r\,dr}{\cos\gamma} \right\} d\varphi\,.$$

Lehrsatz: **Das über der Zylinderfläche $r = f(\varphi)$ liegende Stück der krummen Fläche $z = F(r, \varphi)$ hat den Inhalt U, der durch das Doppelintegral (2) ausgedrückt ist.**

Beispiele.

1. Inhalt und Oberfläche der Kugel zu berechnen. Liegt der Mittelpunkt der Kugel im Ursprung 0, so hat diese die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

und schneidet die xy-Ebene nach einem Kreis, dessen Gleichung $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ ist. Führt man Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein, so ist

$$z = F(r, \varphi) = \sqrt{a^2 - r^2}, \quad r = f(\varphi) = a\,.$$

Daher ist

$$\tfrac{1}{2} V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r\,dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3}\,d\varphi = \tfrac{2}{3}\pi a^3$$

und $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. Nun ist

$$z = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,,$$

daher

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

und demnach

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}\,.$$

Nach Formel (2) ist somit

$$\frac{U}{2} = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a \frac{a\,r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} a^2\,d\varphi = 2\pi a^2$$

und $U = 4\pi a^2$.

2. Inhalt und Scheitelfläche des Körpers zu berechnen, der von der xy-Ebene, der Kegelfläche

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

und der Zylinderfläche $y^2 - ax + x^2 = 0$ begrenzt wird.

Führt man Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein, so findet man

$$z = F(x, \varphi) = \frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{cr}{a}, \quad r = f(\varphi) = a\cos\varphi .$$

Daher ist nach Formel (1)

$$\frac{V}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{a\cos\varphi} \frac{c}{a} r \cdot r\, dr \right\} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{3} c a^2 \cos^3\varphi\, d\varphi = \tfrac{2}{9}\, c\, a^2 ,$$

also $V = \frac{4}{9}\, c\, a^2$.

Ferner ist $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c}{a}\cos\varphi$, $q = \frac{c}{a}\sin\varphi$, somit

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

daher ergibt sich nach Formel (2) für die halbe Scheitelfläche der Ausdruck

$$\frac{U}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\varphi} \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a} r\, dr \right) d\varphi = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi,$$

woraus nach Ausführung der Integrale folgt

$$\frac{U}{2} = \frac{\pi}{8}\, a\sqrt{a^2+c^2}, \quad U = \frac{\pi}{4}\, a\sqrt{a^2+c^2},$$

X. Abschnitt.

Exkurs auf das Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

§ 51. Die verschiedenen Arten von Differentialgleichungen.

1. Erklärung. Eine Gleichung, welche Veränderliche und deren Differentiale zugleich enthält, heißt eine Differentialgleichung.

Enthält dieselbe nur eine unabhängige Veränderliche, so liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung vor.

So ist beispielsweise $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ oder $\varphi(x, y, y') = 0$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, $\varphi(x, y, y', y'') = 0$ eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, allgemein $\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ eine gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

Die Gleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

repräsentiert eine gewöhnliche (lineare) Differentialgleichung dritter Ordnung.

2. Ist die Zahl der abhängigen Veränderlichen größer als 1, so erhält man gewöhnlich ein System von simultanen Differentialgleichungen.

Sind y und z Funktionen von x, so stellen die beiden Gleichungen

$$\varphi\left(\frac{dy}{dx}, y, \frac{dz}{dx}, z, x\right) = 0, \quad \psi\left(\frac{dy}{dx}, y, \frac{dz}{dx}, z, x\right) = 0$$

ein simultanes System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen x dar, die man beispielsweise erhält, indem man die beiden Gleichungen einer Raumkurve nach x differentiiert.

3. Erklärung. Sind die abhängigen Veränderlichen Funktionen von mehreren unabhängigen, so heißt die Gleichung eine partielle oder eine totale (oder auch exakte) Differentialgleichung, je nachdem die partiellen Ableitungen oder die totalen Differentiale der Veränderlichen, welche als unabhängige zu betrachten sind, auftreten.

§ 52. Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen.

Erklärung. Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \qquad \varphi(x\,y\,y') = \varphi\left(x\,y\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

integrieren, heißt eine Funktion $F(x\,y\,C) = 0$ suchen, welche, nach x differentiiert, wieder auf die Differentialgleichung (1) führt.

Da bei der Integration eine Konstante C auftritt, so erhält man gewöhnlich nicht nur eine einzige Lösung, sondern ein System von Integralkurven

$$F(x\,y\,,\,C) = 0\,,$$

die zusammen die allgemeine Lösung oder das allgemeine Integral ausmachen.

Jedem speziellen Wert von C entspricht eine Lösung, die man als partikuläre Lösung bezeichnet.

Da $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$ die trigonometrische Tangente des Winkels α ist, den die Kurventangente im Punkt $P(x\,y)$

mit der Abszissenachse macht, so ist durch die Differentialgleichung (1) jedem Punkt der Lösungskurven die in demselben stattfindende Fortschreitungsrichtung zugeordnet.

Es sei die Differentialgleichung $f(x\,y\,y') = 0$ gegeben und die allgemeine Lösung $F(x\,y\,C) = 0$ gesucht.

Durch Differentiation erhält man hieraus

$$(2)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \quad \text{oder} \quad M\,dx + N\,dy = 0\,,$$

womit die allgemeine Gestalt einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung illustriert ist.

Ist in dieser Gleichung M bzw. N nur eine Funktion von x bzw. y allein, ist die Gleichung also von der Form

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0\,,$$

so heißt die Differentialgleichung eine solche mit separierten Veränderlichen. Durch Integration folgt hieraus

$$(3)\qquad \int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy + C = 0$$

als allgemeine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung mit separierten Veränderlichen.

Lassen sich in einer Differentialgleichung erster Ordnung die Veränderlichen trennen, so kann man die allgemeine Lösung unmittelbar durch zwei Integrationen (Quadraturen) gewinnen.

Wie die Trennung (Separation) der Veränderlichen gewöhnlich bewerkstelligt wird, soll an folgenden Beispielen gezeigt werden.

Beispiele.

1. Die Kurven zu bestimmen, deren Subtangente gleich der zugehörigen Abszisse ist.

Nach § 60 des ersten Bändchens ergibt sich als Differentialgleichung

$$\frac{y}{y'} = x \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0 .$$

Durch Integration folgt hieraus

$$l y - l x = l c \quad \text{oder} \quad y = c x ,$$

wo c die Integrationskonstante bedeutet. Man sieht hieraus, daß jede gerade Linie durch den Ursprung die geforderte Eigenschaft besitzt.

2. Für welche Kurve ist die Subtangente gleich dem n^{ten} Teil der zugehörigen Abszisse?

Die gewöhnliche Differentialgleichung lautet

$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} - n\frac{dx}{x} = 0 .$$

Durch Integration ergibt sich hieraus als allgemeine Lösung

$$l y - n l x = l c \quad \text{oder} \quad y = c x^n .$$

Die binomische Parabel n^{ter} Ordnung hat die verlangte Eigenschaft.

3. Die Kurven zu bestimmen, deren Subtangente gleich a ist.

Man erhält als Differentialgleichung

$$\frac{y}{y'} = a \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} - \frac{dx}{a} - 0 .$$

Durch Integration folgt hieraus

$$l y - \frac{x}{a} = l c , \quad l y - l c = \frac{x}{a} \quad \text{oder} \quad y = c e^{\frac{x}{a}} .$$

Für ein System von Exponentialkurven ist die Subtangente konstant.

4. Für welche Kurve ist die Subnormale konstant und gleich a?

Nach § 69 der Differentialrechnung ist die Subnormale $S_n = y\,y'$, daher lautet die gegebene Differentialgleichung

$$y\,y' = a \quad \text{oder} \quad y\,dy - a\,dx = 0\,.$$

Hieraus folgt direkt durch Integration

$$\frac{y^2}{2} - a\,x + C = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 - 2\,a\,x + C = 0\,.$$

Die Parabel ist die einzige Kurve, deren Subnormale konstant ist. (Vgl. § 69 der Differentialrechnung.)

5. Für welche Kurve ist die Fläche zwischen der Kurve, der Abszissenachse und der Ordinate zum Punkt $P(x\,y)$ gleich $\frac{n}{m+n}\,x\,y$?

Man erhält als Bedingungsgleichung $\int\limits_0^x y\,dx = \frac{n}{m+n}\,x\,y$

und hieraus durch Differentiation nach x:

$$y\,dx = \frac{n}{m+n}(x\,dy + y\,dx) \quad \text{oder} \quad n\,\frac{dy}{y} - m\,\frac{dx}{x} = 0\,.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$n\,l\,y - m\,l\,x = l\,c \quad \text{oder} \quad y^n = c\,x^m\,,$$

d. h. die parabolischen Kurven haben die verlangte Eigenschaft. (Siehe § 27.)

§ 53. Homogene Differentialgleichungen.

1. Für gewisse Fälle lassen sich auch Differentialgleichungen erster Ordnung mit nichtseparierten Veränderlichen (durch Substitution) auf solche mit separierten Veränderlichen zurückführen.

Dies ist zunächst für die homogenen Differentialgleichungen der Fall.

Erklärung. Eine homogene Differentialgleichung

$$M(xy)\,dx + N(xy)\,dy = 0$$

ist eine solche, in welcher M und N homogene Funktionen gleichen Grades von x und y sind.

Dies vorausgesetzt, läßt sich die Gleichung auf die Form bringen:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(xy)}{N(xy)} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Setzt man hierin $y = xz$, so folgt hieraus durch Differentiation $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z = \varphi(z)$, woraus die neue Differentialgleichung entspringt:

$$(2) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z},$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind. Durch Integration ergibt sich schließlich hieraus

$$(3) \quad lx = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} + C = F(z) + C = F\left(\frac{y}{x}\right) + C.$$

Beispiele.

1. Für welche Kurve ist die Subtangente gleich $y - ax$, wo x und y die Koordinaten des Berührungspunktes bezeichnen?

Man erhält als Differentialgleichung

$$\frac{y}{y'} = y - ax \quad \text{oder} \quad y\,dx = (y - ax)\,dy,$$

die zu der eben behandelten Klasse gehört. Setzt man $y = z x$, so folgt hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y - a x} = x \frac{dz}{dx} + z$$

oder nach Substitution von $y = z x$ die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{(z - a) dz}{z - z^2 + a z} = -\frac{a dz}{z(a+1)} - \frac{dz}{(a+1)(z - a - 1)},$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind. Durch Integration erhält man

$$lx = -\frac{1}{a+1}\{a\, lz + l(z - a - 1)\} + lC \quad \text{oder}$$

$$x^{a+1} z^a (z - a - 1) = C \quad \text{oder} \quad y^a (y - a x - x) - C = 0.$$

2. Für welche Kurve ist das Lot vom Ursprung auf die Tangente gleich der Abszisse x des Berührungspunktes?

Man erhält als Differentialgleichung

$$(y^2 - x^2)\, dx - 2 x y\, dy = 0.$$

Da diese homogen ist, so setze man $y = z x$, $y' = z' x + z$; dann folgt aus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2 x y} = x \frac{dz}{dx} + z = \frac{z^2 - 1}{2 z}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} + \frac{2 z\, dz}{z^2 + 1} = 0,$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind. Durch Integration ergibt sich hieraus

$$lx + l(z^2 + 1) = lc \quad \text{oder} \quad x(z^2 + 1) = c$$

oder

$$x^2 + y^2 - c x = 0.$$

Jeder Kreis, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt und der die y-Achse im Ursprung berührt, hat somit die verlangte Eigenschaft (Fig. 81).

2. Durch dieselbe Substitution lassen sich auch Gleichungen von der Form integrieren:

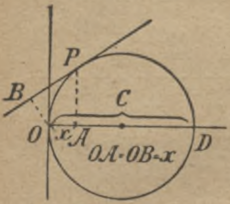

Fig. 81.

(4) $y' + P(x)\,y + Q(x) = 0\,.$

Setzt man nämlich $y = \varphi(x)\,z$, wo φ eine Funktion von x allein sein soll, so folgt hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\frac{dz}{dx} + z\frac{d\varphi}{dx},$$

womit (4) übergeht in

$$\varphi\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{d\varphi}{dx} + P\,\varphi\right) + Q = 0\,. \tag{5}$$

Da nun φ willkürlich ist, so kann man diese Funktion so bestimmen, daß $\dfrac{d\varphi}{dx} + P\varphi = 0$ ist.

Hieraus folgt nun $\dfrac{d\varphi}{\varphi} + P\,dx = 0$ und nach Integration dieser Gleichung

$$l\varphi + \int P\,dx = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = e^{-\int P\,dx}.$$

Aus (5) folgt weiter

$$dz = -\frac{Q}{\varphi}dx\,, \quad z = -\int\frac{Q}{\varphi}dx + C = -\int Qe^{\int P\,dx}dx + C$$

und mit Berücksichtigung von $y = \varphi z$ endlich

$$y = e^{-\int P\,dx}\left\{C - \int Qe^{\int P\,dx}dx\right\}.$$

Beispiele.

1. Es sei $y' - y + x = 0$, dann ist $P = -1$, $Q = x$, somit

$$\varphi = e^x \quad \text{und} \quad y = e^x\{C - \int x e^{-x} dx\}.$$

Nun ist $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$, daher ergibt sich als gesuchtes Integral

$$y = Ce^x + x + 1.$$

2. Für welche Kurve ist $y' = \frac{y - x}{x}$?

Bringt man diese Differentialgleichung auf die Form (4) $y' - \frac{y}{x} + 1 = 0$, so ist $P = -\frac{1}{x}$, $Q = 1$, daher ist

$$\varphi = e^{lx} = x \quad \text{und} \quad y = x\left(C - \int \frac{dx}{x}\right) = x(C - lx).$$

§ 54. Vollständige Differentialgleichungen.

1. Erklärung. Es sei

$$(1) \qquad P\,dx + Q\,dy = 0$$

die gegebene Differentialgleichung, in welcher P und Q Funktionen von x und y sein sollen. Dieselbe wird eine exakte oder vollständige (auch totale) Differentialgleichung — und der Ausdruck $P\,dx + Q\,dy$ ein vollkommenes Differential — genannt, wenn sie durch Differentiation einer Funktion $f(xy) = f$ entstanden ist. Alsdann ist die Gleichung (1) identisch mit der folgenden:

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

und es heißt $f(xy)=0$ das **vollständige** Integral derselben. Vergleicht man die Gleichungen (1) und (2) miteinander, so folgt

$$P=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q=\frac{\partial f}{\partial y}$$

und hieraus

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

Dies ist die Bedingung, daß (1) eine vollständige Differentialgleichung ist.

Lehrsatz: **Das Differential (2) ist das totale Differential einer Funktion f, sobald die Bedingung erfüllt ist:**

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so setze man

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P \text{ und integriere } f=\int P\,\partial x\,,$$

wobei das in P enthaltene y zunächst noch als konstant angesehen werden kann. Da nun in der zu addierenden Konstanten noch eine Funktion $\varphi(y)$ von y enthalten sein kann, so ist diese noch zu dem erhaltenen Integral hinzuzufügen.

$$f=\int P\,\partial x+\varphi(y)\,.$$

Der Wert von φ wird ermittelt, indem man dieses Integral wieder differentiiert und das Resultat mit der gegebenen Differentialgleichung $dx = P\,dx + Q\,dy$ vergleicht.

Beispiel.

Für die Differentialgleichung

$$dz = (3x^2 - ay - y^2)\,dx + (-ax + 2by - 2xy)\,dy$$

ist die Bedingung (3) erfüllt; daher stellt dz das totale Differential einer Funktion $f(xy) = f$ dar, die man aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - ay - y^2$$

ermitteln kann, indem man unter Voraussetzung eines konstanten y bildet

$$z = f = \int (3x^2 - ay - y^2)\,\partial x + \varphi(y)$$
$$= x^3 - axy - xy^2 + \varphi(y)\,.$$

Bildet man das totale Differential dieser Funktion

$$dz = (3x^2 - ay - y^2)\,dx + \left(-ax - 2xy + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dy$$

und vergleicht man dasselbe mit der gegebenen Differentialgleichung, so folgt $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2by$ und hieraus

$$\varphi = \int 2by\,\partial y + C = by^2 + C\,.$$

Das gesuchte Integral lautet daher

$$z = x^3 - axy - xy^2 + by^2 + C\,.$$

2. Ist jedoch für das Differential

(4) $$M dx + N dy = 0$$

die Bedingung $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ nicht erfüllt, so ist (4) auch kein vollkommenes oder exaktes Differential.

In diesem Fall multipliziere man die Gleichung (4) mit dem Faktor μ, der eine Funktion von x oder y oder von beiden oder auch eine Konstante sein kann, wobei man erhält

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 . \tag{5}$$

Läßt sich dann der Faktor μ so bestimmen, daß die Bedingung erfüllt wird:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \tag{6}$$

so ist (5) ein exaktes Differential.

Erklärung. Die Funktion $\mu(xy)$, mit der man die Differentialgleichung (4) multiplizieren muß, damit deren linke Seite ein exaktes Differential wird, heißt der „integrierende Faktor“ oder auch der „Eulersche Multiplikator“.

Betrachtet man beispielsweise

a) $\frac{y}{x^2} = C$ oder b) $\frac{x^2}{y} = C$ oder c) $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x^2} = C$

als vollständiges Integral, so erhält man hieraus durch Differentiation als zugehörige vollkommene Differentialgleichung

a) $\frac{1}{x^3}(x dy - 2 y dx) = 0$, b) $-\frac{x}{y^2}(x dy - 2 y dx) = 0$,

c) $\frac{x}{x^4 + y^2}(x dy - 2 y dx) = 0$.

Für die Gleichung

$$x dy - 2 y dx = 0$$

ist daher die Bedingung (3) nicht erfüllt. Sie wird aber zu einer vollkommenen Differentialgleichung, wenn man sie mit einem der (integrierenden) Faktoren $\frac{1}{x^3}$

oder $-\frac{x}{y^2}$ oder $\frac{x}{x^1+y^2}$ multipliziert. Wir erhalten somit die Lehrsätze:

Jede Differentialgleichung von der Form (4) besitzt einen integrierenden Faktor, durch dessen Zusatz die linke Seite derselben zu einem vollkommenen Differential wird.

Es gibt nicht nur einen, sondern unendlich viele integrierende Faktoren.

Kennt man zwei verschiedene integrierende Faktoren μ_1 und μ_2, so ist der Quotient $\frac{\mu_1}{\mu_2} = C$ das vollständige Integral der Differentialgleichung.

Für das obige Beispiel ist

$$\mu_1 = \frac{1}{x^3}, \quad \mu_2 = -\frac{x}{y^2}, \quad \mu_3 = \frac{x}{x^4+y^2},$$

daher ist

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{y^2}{x^4} = C \quad \text{oder} \quad \frac{y}{x^2} = C_1;$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_3} = \frac{x^4+y^2}{x^4} = 1 + \frac{y^2}{x^4} = C \quad \text{oder} \quad \frac{y}{x^2} = C_1;$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_3} = -\frac{x^4+y^2}{y^2} = -\frac{x^4}{y^2} - 1 = C \,\text{oder}\, \frac{x^4}{y^2} = C_1 \text{ oder } \frac{y}{x^2} = C_2.$$

3. Zur Bestimmung des integrierenden Faktors diene folgende Betrachtung. Da nach Voraussetzung die linkt Seite von (5) ein vollkommenes Differential ist, so folgt

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

oder

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \tag{7}$$

als Bestimmungsgleichung für μ. Da dies eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist, so ist die Bestimmung von μ aus derselben gewöhnlich schwieriger als die Integration der gegebenen Gleichung selbst. Zur Integration der letzteren genügt aber irgend eine Lösung von (4), und es ist häufig möglich, eine solche zu ermitteln. Insbesondere ist dies der Fall, wenn sich μ als eine Funktion von x oder von y allein darstellen läßt.

Ist beispielsweise μ nur von x abhängig, so ist $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, womit die Gleichung (7) übergeht in

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = X\,.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$l\,\mu = \int X\,\partial x + (C)\,, \quad \mu = e^{\int X \partial x}\,.$$

Der integrierende Faktor μ läßt sich als eine Funktion von x allein ansehen, wenn $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ eine Funktion von x allein ist. Setzt man diese gleich X, so ist $\mu = e^{\int X \partial x}$.

Beispiel.

Für obige Differentialgleichung $x\,dy - 2\,y\,dx = 0$ ist $M = -2\,y$, $N = x$, daher

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = X = -\frac{3}{x} \quad \text{und}$$

$$l\,\mu = -3\int\frac{\partial x}{x} = -3\,l\,x = l\,\frac{1}{x^3} \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{1}{x^3}\,.$$

§ 55. Partikuläre und singuläre Lösungen.

1. Erklärung. Jedem Wert der Konstanten $C (C = 0, 1, 3, \ldots, C_1, C_2, \ldots)$ in der allgemeinen Lösung $F(xy\,C) = 0$ der Differentialgleichung $\varphi(xyy') = 0$ entspricht eine Lösung, die man als „Partikularlösung“ oder als „partikuläres Integral“ bezeichnet.

Außer den unendlich vielen Lösungen, welche den wechselnden Werten von C entsprechen, kann eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung noch eine „singuläre“ Lösung besitzen, welche dadurch charakterisiert ist,

a) daß sie sich nicht durch partikularisierende Konstante bilden läßt;

b) daß sie im allgemeinen ohne jede Integration durch reine Eliminationsprozesse ermittelt werden kann.

Geometrisch stellt die singuläre Lösung eine Kurve dar, welche von den partikulären Kurven umhüllt wird.

Bekanntlich hat das Tangentenpaar, das man vom Punkt $P(\xi\eta)$ an den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ziehen kann, die Gleichung

$$(x\xi + y\eta - r^2)^2 - (x^2 + y^2 - r^2)(\xi^2 + \eta^2 - r^2) = 0,$$

wo mit x, y die laufenden Koordinaten bezeichnet sind.

Setzt man hierin $\xi = x + dx$, $\eta = y + dy$, so hat das Tangentenpaar mit dem Kreis zwei unendlich benachbarte Punkte gemeinsam, d. h. die Verbindungslinie von $P(xy)$ mit $P(x + dx, y + dy)$ ist Tangente an den Kreis, wenn $\dfrac{dy}{dx} = p$ der Gleichung genügt:

$$(y\,dx - x\,dy)^2 - r^2(dx^2 + dy^2) = 0,$$

die auch geschrieben werden kann:

$$\varphi(xy, p) \equiv y^2 - r^2 - 2xyp + (x^2 - r^2)p^2 = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades, deren partikuläre Lösungen durch die unendlich vielen Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ angegeben sind. Die Umhüllungslinie dieser Tangenten oder der Kreis selbst repräsentiert ihre singuläre Lösung.

2. Das singuläre Integral aus dem allgemeinen Integral herzuleiten.

Die gegebene Differentialgleichung $\varphi(x\,y\,y') = 0$ besitze als allgemeine Lösung $F(x\,y\,C) = 0$.

Nimmt man hierin an, C sei eine Funktion von x, dann erhält man durch Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial C} \cdot \frac{dC}{dx} = 0 .$$

Bestimmt man nun C so, daß $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ ist, oder wenn man sich diese Gleichung nach C aufgelöst denkt, daß $C = f(x)$ ist, so ist

$$F\{x\,y\,,\, f(x)\} = 0$$

das gesuchte singuläre Integral von $\varphi(x\,y\,y') = 0$.

Wird C als Funktion von x und y betrachtet, so folgt durch Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \cdot y'\right) = 0 .$$

Hierin läßt sich nun C ebenfalls so bestimmen, daß $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ ist. Folgt hieraus $C = f(x\,y)$, so ist

$$F\{x\,y\,,\, f(x\,y)\} = 0$$

die singuläre Lösung von $\varphi(x\,y\,y') = 0$.

Die Ableitung y' berechnet sich alsdann aus

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 ,$$

falls C nicht so bestimmt ist, daß gleichzeitig

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

wird.

Lehrsatz: Das singuläre Integral $\Phi(xy) = 0$ der Differentialgleichung $\varphi(x\,y\,y') = 0$ enthält keine partikularisierende Konstante und ergibt sich immer durch Elimination von C aus

$$F(x\,y\,C) = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0 .$$

Hieraus geht auch hervor, daß $\Phi(x\,y) = 0$ die Umhüllungslinie der Kurven des Systems $F(x\,y\,C) = 0$ ist. Vergleiche hierüber § 77 der Differentialrechnung*).

Sind $x\,y$ die laufenden Koordinaten, so ist

$$\xi\, x + \eta\, y - r^2 = 0$$

die Gleichung der Tangente im Punkt $P(\xi\,\eta)$ an den Kreis $\xi^2 + \eta^2 - r^2 = 0$. Setzt man nun $\xi = \sqrt{r^2 - \eta^2}$ und nachträglich $\eta = C$, so hat die Tangentenschar, welche die allgemeine Lösung der Differentialgleichung darstellt, die Gleichung

$$F(x\,y\,C) = y\,C + x\sqrt{r^2 - C^2} - r^2 = 0 .$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0 = y - \frac{C x}{\sqrt{r^2 - C^2}} \quad \text{oder} \quad C = \frac{r\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ,$$

*) Sammlung Göschen, Bd. 87.

somit ist

$$F\left(xy, \frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{ry^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\sqrt{r^2 - \frac{r^2y^2}{x^2+y^2}} - r^2 = 0$$

oder $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ die singuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung, wie zu erwarten war.

3. Endlich kann das singuläre Integral auch aus der Differentialgleichung selbst hergeleitet werden.

Wie aus den obigen Betrachtungen hervorgeht, ist die singuläre Kurve als Umhüllungslinie der partikulären Kurven anzusehen. Dieselbe kann somit auch als der geometrische Ort des Schnittpunkts zweier konsekutiver Partikulärkurven ermittelt werden. Je zwei derselben schneiden sich im allgemeinen in einem Punkt, in welchem sich zwei verschiedene Tangenten an die beiden Kurven ziehen lassen. Soll die singuläre Kurve durch denselben hindurchgehen, so müssen die beiden Partikulärkurven unendlich wenig voneinander abweichen und die beiden Tangenten ihres Schnittpunkts zusammenfallen. Dies ist aber der Fall, wenn neben

$$\varphi(xyp) = 0 \quad \text{auch noch} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$$

ist. Erhält man aus der letzten Gleichung $p = \psi(xy)$, so stellt

$$\varphi(xy, \psi) = 0$$

die singuläre Lösung der Differentialgleichung dar

Lehrsatz: **Die singuläre Lösung der Differentialgleichung $\varphi(xy, p) = 0$ ergibt sich stets durch Elimination von** $p = y' = \frac{dy}{dx}$ aus

$$\varphi(xy, p) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.$$

Durch partielle Ableitung der Differentialgleichung in 1. folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -2xy + 2(x^2 - r^2)p = 0 \text{ und hieraus } p = \frac{xy}{x^2 - r^2}.$$

Substituiert man diesen Wert in $\varphi(xy, p) = 0$, so ergibt sich auch hier als singuläre Lösung der Kreis

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

wie es sein soll.

Anmerkung. Sind M und N rationale Funktionen von x und y, so hat, wie leicht zu erkennen ist, eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades von der Form $M\,dx + N\,dy = 0$ keine singuläre Lösung.

§ 56. Differentialgleichungen erster Ordnung n^{ten} Grades.

Erklärung. Eine Differentialgleichung erster Ordnung n^{ten} Grades ist von der Form

$$(1) \qquad (y')^n + f_1 (y')^{n-1} + \ldots + f_n = 0,$$

wo $f_1, f_2, \ldots, f_n$ Funktionen von x und y oder auch konstante Zahlen sein können.

Bei der Integration einer solchen kommen hauptsächlich zwei Methoden in Betracht.

a) Die Methode der Zerlegung ist anwendbar, wenn sich die Differentialgleichung (1) nach $\frac{dy}{dx} = y'$ auflösen läßt Die auf diesem Wege resultierenden Wurzeln der Gleichung (1)

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = g_1(xy), \quad \frac{dy}{dx} = g_2(xy), \ldots, \quad \frac{dy}{dx} = g_n(xy)$$

stellen n lineare Differentialgleichungen erster Ordnung dar, welche sich nach den Methoden der vorigen Paragraphen auflösen lassen. Ergeben sich hierbei die Integrale

$$\varphi_1(x\,y\,c_1) = 0\,,\quad \varphi_2(x\,y\,c_2) = 0\,,\quad \varphi_n(x\,y\,c_n) = 0\,,$$

so ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) dargestellt durch

$$(3)\qquad \varphi_1(x\,y\,c_1)\cdot\varphi_2(x\,y\,c_2)\,\ldots\,\varphi_n(x\,y\,c_n)\,,$$

worin

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = C$$

gesetzt werden darf, ohne daß die Allgemeinheit der Lösung dadurch beeinträchtigt wird.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) ist somit angegeben durch

$$(4)\quad F(x\,y\,C) \equiv \varphi_1(x\,y\,C)\,\varphi_2(x\,y\,C)\,\ldots\,\varphi_n(x\,y\,C) = 0\,.$$

Beispiele.

1. Für welche Kurve ist das Quadrat der Subtangente gleich dem Rechteck aus den Koordinaten des zugehörigen Kurvenpunktes?

Nach § 69 der Differentialrechnung*) ist die Subtangente ausgedrückt durch $\frac{y}{y'}$, daher erhalten wir als Differentialgleichung eine solche vom zweiten Grad

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2 = x\,y \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x}\,,\quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{y}{x}}$$

und

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} \mp \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0\,,$$

*) Sammlung Göschen, Bd. 87.

welche die beiden Integrale gibt:

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = C_1\,, \quad \sqrt{y} + \sqrt{x} = C_2\,.$$

Das allgemeine Integral ist daher dargestellt durch

$$F(x\,y\,C) \equiv \left(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - C\right)\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - C\right) = 0$$

oder durch $y - x - 2\,C\sqrt{y} + C^2 = 0$.

2. Für welche Kurve ist das Quadrat der Subnormale $y\,y'$ gleich dem Rechteck aus den Koordinaten des zugehörigen Kurvenpunktes?

Man erhält als Differentialgleichung

$$y^2\,y'^2 = x\,y \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x}{y} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{x}{y}}\,,$$

welche die beiden Lösungen gibt:

$$y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} = C_1\,, \quad y^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} = C_2\,.$$

Die allgemeine Lösung ist daher

$$F(x\,y\,C) \equiv y^3 - x^3 - 2\,C y^{\frac{3}{2}} + C^2 = 0\,.$$

b) Die Methode der wiederholten Differentiation wird zur Lösung der gegebenen Differentialgleichung (1) benutzt, wenn sich dieselbe leicht nach y oder x auflösen läßt.

Gibt dieselbe nach y aufgelöst die Gleichung

$$(5) \qquad y = f(x, p)\,, \quad \text{wo} \quad p = \frac{dy}{dx}$$

gesetzt ist, so folgt hieraus durch Ableitung nach x:

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}\,,$$

d. h. eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades zwischen x und p von der Form

$$\varphi\left(x p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \tag{6*}$$

Führt dieselbe auf das Integral

$$J(x, p, C) = 0; \tag{7}$$

so ergibt sich durch Elimination von p aus dieser Gleichung und der gegebenen Gleichung (5) das gesuchte allgemeine Integral der Differentialgleichung (1)

$$F(x y C) = 0. \tag{8}$$

Läßt sich andererseits die Differentialgleichung (1) nach x auflösen und somit auf die Form bringen:

$$x = f(y, p), \tag{9}$$

so folgt hieraus durch Differentiation nach x

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx},$$

oder da

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

ist,

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Man erhält also auch auf diesem Wege eine lineare Differentialgleichung zwischen y und p von der Form

$$\varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0, \tag{10}$$

welche das Integral

$$J(y\,p\,C) = 0$$

geben möge. Durch Elimination von p aus dieser Gleichung und der gegebenen Differentialgleichung erhält man ebenfalls das allgemeine Integral

$$F(x\,y\,C) = 0\,.$$

c) **Ist die Differentialgleichung von der (Clairautschen) Form**

(11) $$y = xp + \varphi(p)\,,$$

so folgt hieraus durch Differentiation

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

oder

(12) $$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) = 0\,.$$

Der erste Faktor gleich Null gesetzt: $\frac{dp}{dx} = 0$ gibt integriert $p = C$ und demgemäß als allgemeines Integral

(13) $$y = xC + \varphi(C)\,.$$

Setzt man den zweiten Faktor gleich Null:

(14) $$x + \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0\,,$$

so läßt sich hieraus und aus (11) p eliminieren. Man erhält alsdann eine Lösung der Differentialgleichung (11), welche keine Konstante enthält und als **singuläre** Lösung derselben zu bezeichnen ist.

Man sieht hieraus, daß das allgemeine Integral der Differentialgleichung (11) von der Form ist:

$$y = xC + \varphi(C)$$

und unmittelbar angeschrieben werden kann.

Fig. 82.

Die singuläre Lösung derselben erhält man durch Elimination von p aus

$$x + \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \quad \text{und} \quad y = xp + \varphi(p).$$

Geometrisch stellt das allgemeine Integral (1) eine Schar von Geraden (partikuläre Lösungen) dar, welche eine Kurve umhüllen (Fig. 82), die durch das singuläre Integral ausgedrückt ist.

Beispiele.

1. Eine Gerade schneidet von den Achsen zwei Stücke ab, deren Summe, Differenz, Produkt und Quotient konstant gleich a ist. Welches sind die Kurven, die von dieser Geraden umhüllt werden?

Nehmen wir an, die umhüllende Gerade berühre die gesuchte Kurve im Punkt $P(x\,y)$, so hat sie als Tangente an dieselbe die Gleichung

$$\eta - y = p(\xi - x).$$

Für $\eta = 0$ bzw. $\xi = 0$ ergeben sich hieraus als Achsenabschnitte $\frac{1}{p}(px - y)$ bzw. $y - px$. Daher erhalten wir die Differentialgleichungen:

a) für die Summe:

$$y = xp - \frac{ap}{1-p}, \quad y = xC - \frac{aC}{1-C},$$

b) für die Differenz:

$$y = xp - \frac{ap}{1+p}, \quad y = xC - \frac{aC}{1+C},$$

c) für das Produkt:

$$y = xp + a\sqrt{-p},$$

$$y = xC + a\sqrt{-C},$$

d) für den Quotienten:

$$ap = -1, \quad ay + x = C.$$

Dieselben sind von der Clairautschen Form und erhalten daher die nebenstehenden allgemeinen Lösungen.

Fig. 83.

Die singulären Lösungen obiger Differentialgleichungen sind in den beiden ersten Fällen angegeben durch

a) $$(x-y)^2 - 2a(x+y) + a^2 = 0,$$

b) $$(x+y)^2 - 2a(x-y) + a^2 = 0,$$

und stellen gewöhnliche Parabeln dar, die symmetrisch zu den beiden Medianen liegen (Fig. 83) und die Koordinatenachsen in den Punkten $(a, 0)$, $(0, a)$, $(0, -a)$ berühren. Im dritten Fall ergibt sich als singuläre Lösung die gleichseitige Hyperbel

c) $$4xy - a^2 = 0,$$

die in der Figur 83 punktiert gezeichnet ist.

Die Differentialgleichung d) ist linear und besitzt daher keine singuläre Lösung.

2. Zu beweisen: Der eine Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel beständig auf einer Geraden gleitet und dessen anderer Schenkel durch einen festen Punkt geht, umhüllt eine Parabel.

3. Eine Strecke von konstanter Länge a gleite beständig mit ihren Endpunkten auf den Koordinatenachsen hin. Welche Kurve wird hierbei umhüllt?

Man erhält als Differentialgleichung der Geradenschar

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

und als zugehörige singuläre Lösung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Dies ist die Gleichung der Asteroide.

§ 57. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

mögen hier auch noch kurz berührt werden, weil sie in der Mechanik eine wichtige Rolle spielen.

a) Eine solche ist von der Form

$$f(x, y, y', y'') = 0\,. \tag{1}$$

Sie enthält neben der ersten Ableitung y', wodurch für jeden Punkt $P(xy)$ der Ebene eine gewisse Fortschreitungsrichtung bestimmt ist, noch die zweite Ableitung y'', wodurch demselben außerdem noch die Krümmung der Lösungskurven in dem betreffenden Punkt zugeordnet ist. Näherungsweise ergibt sich als geometrische Lösung ein Kreisbogenpolygon, das im Grenzfall in die Lösungskurve übergeht.

Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält zwei willkürliche Konstanten.

Wie schon im ersten Bändchen § 82 ff. ausgeführt worden ist, ist die Bewegung eines Punktes in einer Geraden angegeben durch eine Differentialgleichung von der Form

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t)\,, \tag{2}$$

wo x den zur Zeit t zurückgelegten Weg und x'' die erlangte Beschleunigung bezeichnet. Wir unterscheiden hierbei drei Fälle.

1. Die Beschleunigung sei konstant und gleich A. Dann ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A \quad \text{oder} \quad \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = A \quad \text{oder} \quad dx' = A\,dt\,.$$

Durch Integration folgt hieraus als erstes Integral mit einer Konstanten C_1:

$$x' = \frac{dx}{dt} = At + C_1$$

und durch weitere Integration als zweites Integral mit zwei Konstanten C_1, C_2:

$$x = \tfrac{1}{2} At^2 + C_1 t + C_2\,,$$

wodurch einerseits die Geschwindigkeit, andererseits der Weg in Funktion der Zeit ausgedrückt ist.

Für $A = g = 9{,}81$ erhält man die Formeln des freien Falles, wie sie in Bändchen 87, § 82 aufgestellt worden sind.

2. Die Beschleunigung sei nur abhängig von der Zeit. Dann ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) \quad \text{oder} \quad d\left(\frac{dx}{dt}\right) = f(t)\,dt\,.$$

Hieraus erhält man durch Integration unmittelbar die beiden Integrale

$$x' = \frac{dx}{dt} = \int f(t)\, dt + C_1 ,$$

$$x = \int \{ \int f(t)\, dt + C_1 \} dt + C_2 .$$

3. Die Beschleunigung soll nur von der Entfernung x des bewegten Punktes abhängen. Dann ist

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) ,$$

oder $\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} dt = f(x)\, dx$, oder $x' dx' = f(x)\, dx$.

Durch Integration folgt hieraus als erstes Integral

$$\frac{x'^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int f(x)\, dx + C_1 ,$$

woraus sich die Geschwindigkeit des bewegten Punktes berechnet:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2\int f(x)\, dx + C_1} = W .$$

Daraus erhält man $dt = dx : W$, also als zweites Integral

$$t = \int \frac{dx}{W} + C_2 ,$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Bei kleinen Schwingungen ergibt sich beispielsweise die Differentialgleichung $\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x$, deren Integrale auf die Form gebracht werden können:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \sqrt{a^2 - k^2 x^2} , \quad x = \frac{a}{k} \sin k(t - b) ,$$

wo a und b die Integrationskonstanten bezeichnen.

b) Durch ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

ist, wie schon im Bändchen 87 ausgeführt worden ist, die Bewegung eines Punktes in der Ebene bestimmt. Nach § 84 desselben ergeben sich für den schiefen Wurf die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

woraus unmittelbar durch Integration die vier Integrale

$$x' = \frac{dx}{dt} = C_1, \quad y' = \frac{dy}{dt} = -gt + C_2,$$

$$x = C_1 t + C_3, \quad y = -\tfrac{1}{2} g t^2 + C_2 t + C_4$$

mit den Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4 hervorgehen.

§ 58. Planetenbewegung.

1. Ein materieller Punkt P (Planet) (Fig. 84) von der Masse m bewege sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz frei um die Sonne S, deren Masse M sei. Der Einfachheit halber werde vorausgesetzt, daß die Bewegung in einer Ebene stattfindet, und angenommen, daß bei Beginn derselben ($t = 0$) der Punkt P die x-Achse mit der Geschwindigkeit v_0 passiere, die in diesem Augenblick normal zur x-Achse gerichtet ist.

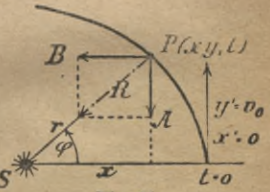

Fig. 84.

Nach Newton ist alsdann die Größe der Kraft, mit welcher sich Planet und Sonne anziehen, ausgedrückt durch

$$(1) \qquad R = k \frac{Mm}{r^2}.$$

Befindet sich der materielle Punkt zur Zeit t im Punkte $P(xy)$, dessen Radiusvektor $r = PS$ mit der x-Achse den Winkel φ mache (Fig. 84), so gelten die dynamischen Differentialgleichungen

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = PB = R\cos\varphi\,, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2} = PA = R\sin\varphi$$

oder, da $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ ist,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x}{r}\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{y}{r}\,,$$

welche nach Division mit m übergehen in

$$x'' = -kM\frac{x}{r^3}\,, \quad y'' = -kM\frac{y}{r^3}\,, \tag{2}$$

wobei noch die Gleichung besteht:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{3}$$

2. Multipliziert man die Gleichungen (2) mit

$$2x' = 2\frac{dx}{dt} \quad \text{bzw.} \quad 2y' = 2\frac{dy}{dt}\,,$$

so ergibt sich durch Addition

$$2x'x'' + 2y'y'' = -k\frac{M}{r^3}(2xx' + 2yy')$$

oder

$$\frac{d(x'^2 + y'^2)}{dt} = -k\frac{M}{r^3}\frac{d(x^2 + y^2)}{dt}$$

oder

$$d(x'^2 + y'^2) = -2kM\frac{dr}{r^2}\,.$$

Durch Integration folgt hieraus als erstes Integral der Differentialgleichungen (2) das **Prinzip der lebendigen Kraft**

$$x'^2 + y'^2 = 2k\frac{M}{r} + \Gamma \tag{4}$$

oder

$$v^2 = 2k\frac{M}{r} + \Gamma, \tag{4*}$$

worin sich die Konstante Γ durch die Bedingung ermitteln läßt, daß, für $t = 0$ $x' = 0$, $y' = v_0$, $r = r_0$ ist.

3. Werden andererseits die Gleichungen (2) mit $-y$ bzw. x multipliziert und addiert, so folgt

$$xy'' - yx'' = 0$$

und hieraus durch Integration als zweites Integral das **Prinzip der Flächen**

$$xy' - yx' = 2U. \tag{5}$$

Da für $t = 0$, $x = r_0$ die Geschwindigkeitskomponenten $x' = 0$, $y' = v_0$ gegeben sind, so ergibt sich hieraus

$$r_0 v_0 = 2U, \quad \text{also} \quad U = \frac{r_0 v_0}{2},$$

womit U bestimmt ist.

Die Gleichung (5) kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = 2U \quad \text{oder} \quad \frac{x(y + dy) - y(x + dx)}{dt} = 2U.$$

Hierin ist bekanntlich durch $x(y + dy) - y(x + dx)$ das doppelte Flächenstück $2\,df$ dargestellt, welches der Radiusvektor in der Zeit dt beschrieben hat. Daher ist auch

$$\frac{2\,df}{dt} = 2U \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dt} = U. \tag{6}$$

Man bezeichnet $\frac{df}{dt} = U = \frac{1}{2}(xy' - yx')$ gewöhnlich als Flächengeschwindigkeit des Radiusvektors r. Man kann daher sagen: Bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne ist die Flächengeschwindigkeit konstant.

Durch Integration geht (6) über in $f = Ut + C$ oder, da $C = 0$ wird, in

$$f = Ut, \tag{7}$$

d. h. bei der Planetenbewegung sind die zurückgelegten Flächenräume proportional der Zeit. Diese Tatsache wird gewöhnlich ausgedrückt durch

das zweite Keplersche Gesetz: Bei der Bewegung eines Planeten beschreibt der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

4. Um die Bahnkurve zu bestimmen, multipliziere man die Gleichungen (2) mit $2U = xy' - yx'$, dann erhalten wir

$$2Ux'' = -kM\frac{x(xy' - yx')}{r^3} = -kM\frac{d\left(\frac{y}{r}\right)}{dt},$$

$$2Uy'' = -kM\frac{y(xy' - yx')}{r^3} = +kM\frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{dt}$$

und hieraus durch Integration

$$2Ux' = -kM\frac{y}{r} + B, \quad 2Uy' = +kM\frac{x}{r} + A.$$

Mit Berücksichtigung der anfänglich gemachten Annahmen ergibt sich hieraus $B = 0$, $A = r_0 v_0 - kM$.

Werden beide Gleichungen mit $-y$, bzw. $+x$ multipliziert und addiert, so ergibt sich ein weiteres Integral aus der Gleichung $2U(xy' - yx') = kMr + Ax$ oder $4U^2 = kMr + Ar\cos\varphi$ oder

$$(8) \qquad r = \frac{4U^2}{kM + A\cos\varphi},$$

die für $C = \frac{4U^2}{kM}$, $\varepsilon = -\frac{A}{kM}$ die Gestalt erhält:

$$r = \frac{C}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

und bekanntlich die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten r, φ darstellt, bezogen auf einen Brennpunkt als Pol.

Je nachdem $\varepsilon = 0, 1, <1, >1$ ist, ist derselbe ein Kreis, eine Parabel, eine Ellipse, eine Hyperbel. Somit gilt der Satz:

Bewegt sich ein materieller Punkt P unter dem Einfluß der Anziehung eines festen materiellen Zentrums S nach dem Newtonschen Gesetz, so beschreibt derselbe einen Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkt F sich S befindet.

Bei der Planetenbewegung ist die Bahnlinie eine Ellipse. Hierfür läßt sich dieser Satz auch aussprechen als

erstes Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Hat diese Ellipse (Fig. 85) die große Achse a, die kleine Achse b und die lineare Exzentrizität ε, so folgt aus (8) für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$:

$$a - \varepsilon = \frac{4U^2}{kM + A}, \quad a + \varepsilon = \frac{4U^2}{kM - A},$$

woraus sich ergibt

$$(9)\quad a = \frac{4\,U^2 k M}{k^2 M^2 - A^2}\,, \quad b = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} = \frac{4\,U^2}{\sqrt{k^2 M^2 - A^2}}\,,$$

und hieraus $4\,a = k\,M b^2 : U^2$.

5. Nach Formel (7) ist $f = Ut$, also auch $F = UT$, wenn F den Inhalt der ganzen Ellipse und T die Umlaufszeit bezeichnet. Es ist also auch $\pi a b = UT$, woraus folgt

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{U^2} = \frac{4\,\pi^2}{k\,M}\,a^3.$$

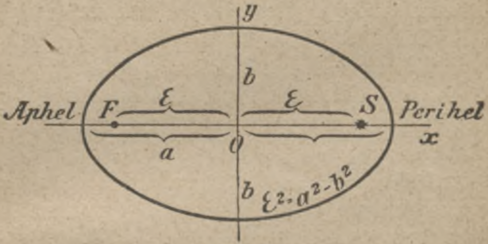

Fig. 85.

Für einen anderen Planeten mit der großen Achse a_1 ist ebenso

$$T_1^2 = \frac{4\,\pi^2}{k\,M}\,a_1^3\,,$$

also auch

$$(10)\qquad T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3\,.$$

Hieraus folgt aber das

dritte Keplersche Gesetz: Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Achsen ihrer Bahnen.

6. Führt man Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi$$

ein, so ist

$$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'\,, \quad y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'\,,$$

$$x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2\,, \quad xy' - yx' = r^2\varphi\,,$$

womit die beiden Prinzipien (4) und (5) in Polarkoordinaten die Gestalt erhalten:

$$\text{(11)} \quad r'^2 + r^2\varphi'^2 = 2k\frac{M}{r} + \Gamma\,, \quad r^2\varphi' = 2U\,.$$

Man erhält

$$r^2 r'^2 = 2kMr + r^2\Gamma\,,$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\sqrt{2kMr + r^2\Gamma} = \frac{1}{r}W\,,$$

$$\text{(12)} \qquad t = \int\frac{r\,dr}{W} = f(r)\,.$$

Ferner ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2U}{r^2}\,, \quad \text{also} \quad d\varphi = \frac{2U}{r^2}\,dt = \frac{2U}{r^2}\cdot\frac{r\,dr}{W}\,,$$

somit

$$\text{(13)} \qquad \varphi = 2U\int\frac{dr}{rW} = g(r)\,.$$

Durch die Gleichung (12) läßt sich r in Funktion der Zeit ausdrücken. Die Gleichung (13) stellt die Bahnkurve dar. Damit sind sämtliche Integrale der Differentialgleichung (2) ermittelt.

7. Zieht man im Punkt P des Kegelschnitts (Fig. 86), in welchem sich der materielle Punkt zur Zeit t befindet, die Tangente an die Bahnkurve, deren Neigungswinkel

gegen die x-Achse δ sei, und fällt man vom Pol S das Lot SH auf dieselbe, so ist $p = r\sin(\vartheta - \varphi)$ und

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,,$$

$$x' = v_x = v\cos\vartheta\,, \quad y' = v_y = v\sin\vartheta\,,$$

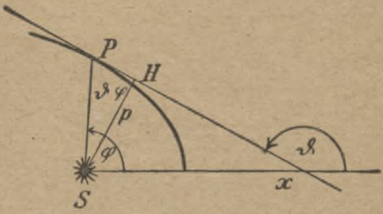

Fig. 86.

daher geht die Gleichung (5) über in

$$r\,v(\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta) = 2\,U$$

oder in

$$r\,v\sin(\vartheta - \varphi) = 2\,U\,,$$

woraus folgt

$$v = \frac{2\,U}{r\sin(\vartheta - \varphi)} = \frac{2\,U}{p}\,.$$

Es gilt daher der Satz: Die Geschwindigkeit v, die ein Planet zu irgend einer Zeit erreicht, ist dem Abstand der augenblicklichen Bahntangente von der Sonne umgekehrt proportional.

Dieser Abstand ist am kleinsten zur Zeit des Perihels und am größten zur Zeit des Aphels (Fig. 85). Daher ist auch die Geschwindigkeit der Planeten am größten zur Zeit des Perihels und am kleinsten zur Zeit des Aphels.

20