WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
L. inw. 380

...chen

...ektive

Von

Hans Freyberger

Neu bearbeitet von

Prof. J. Vonderlinn

Mit 132 Figuren

415618

Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen in kurzen, klaren, allgemeinverständlichen Einzeldarstellungen

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.
Berlin W. 10 und Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000296070

Au[illegible] [illegible]sse
der b[illegible] postfrei

Sammlung Göschen

Zentral-Perspektive

Von

Architekt Hans Freyberger

Neubearbeitet von

Professor J. Vonderlinn

Gewerbeschulrat u. Baugewerkschuldirektor a. D.

Zweite, verbesserte Auflage

Mit 132 Figuren

Berlin und Leipzig

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1923

By/2
68

KD 515.6/9:742(023)
BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW
I 380

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

I 301638

Werbt neue Mitglieder

Druck von
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.
819423.

Akc. Nr. 1748/50

Inhalt.

		Seite
I. Kapitel.	**Geschichte und Zweck der Perspektive**	5
II. Kapitel.	**Zeichnen nach der Natur**	7
III. Kapitel.	**Perspektivische Konstruktionen mit Benutzung von Grund- und Aufriß**	13
	Allgemeine Bemerkungen	13
	Das Durchschnittsverfahren:	
	a) Verwendung eines Sehstrahles	24
	b) Verwendung eines Sehstrahles und einer gegen die Bildebene unter 45° geneigten Wagerechten	24
	c) Verwendung eines Sehstrahles sowie einer gegen die Bildebene unter einem beliebigen Winkel geneigten Geraden	26
IV. Kapitel.	**Freie Perspektive**	31
	Das Augabstandspunktverfahren:	
	a) Verfahren mit Verwendung des ganzen Augabstandes	31
	b) Verfahren mit Verwendung eines verkleinerten Augabstandes	53
	Das Fluchtpunktverfahren:	
	a) Die Fluchtpunkte sind zugänglich	75
	b) Die Fluchtpunkte sind unzugänglich	90
V. Kapitel.	**Vermischte Aufgaben**	99
VI. Kapitel.	**Perspektivische Konstruktionen ganz allgemeiner Art**	114
	Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene	114
	Vermischte Aufgaben	116
VII. Kapitel.	**Schattenperspektive**	128
VIII. Kapitel.	**Spiegelperspektive**	144
IX. Kapitel.	**Luftperspektive**	148

Ver[illegible] Mitgliede

0,10

I. Kapitel.

Geschichte und Zweck der Perspektive.

1. Zweifellos haben die alten Kulturvölker, welche jene herrlichen Bauten schufen, deren Reste noch heute unsere Bewunderung erregen, die Kunst der Zeichnung wohl verstanden. Aufgedeckte Wandmalereien in Pompeji und an anderen Orten, figürliche und landschaftliche Darstellungen auf Vasen zeigen uns deutlich, daß den Griechen und Römern die Gesetze der perspektivischen Erscheinungen nicht fremd waren, und dies ist ja auch nicht zu verwundern bei Völkern von solch scharfer Beobachtungsgabe, wie die Griechen und Römer sie besaßen. Ist ja doch die Natur der beste und vollkommenste Zeichner, mit dessen Hilfe auch heute noch ein großer Teil unserer Künstler die perspektivischen Grundgesetze sich aneignet. Wissenschaftliche Werke über Perspektive sind aus dem Altertum nicht bekannt. Die Literatur über Perspektive hat sich vornehmlich im Mittelalter ausgebildet und bis in die neueste Zeit weiter entwickelt. Überaus zahlreich sind die Werke über Perspektive vom Beginn des 14. Jahrhunderts bis zum heutigen Tage. Von Jan van Eyck angefangen bis zu unserem großen Geometer Steiner ist es eine stattliche Reihe von Künstlern und Gelehrten, welche die Materie der Perspektive bearbeitet und ihre Konstruktionsverfahren so vervollkommnet haben, daß wir heute imstande sind, jede überhaupt lösbare Aufgabe der Perspektive zu lösen.

Unter den Deutschen hat wohl zuerst Albrecht Dürer in seiner „Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit", Nürnberg 1525, die hauptsächlichsten Grundgesetze der Perspektive angegeben. Weitere eingehende Bearbeitung und Ausbildung erfuhr die Perspektive in Italien und Frankreich, und namentlich auch England.

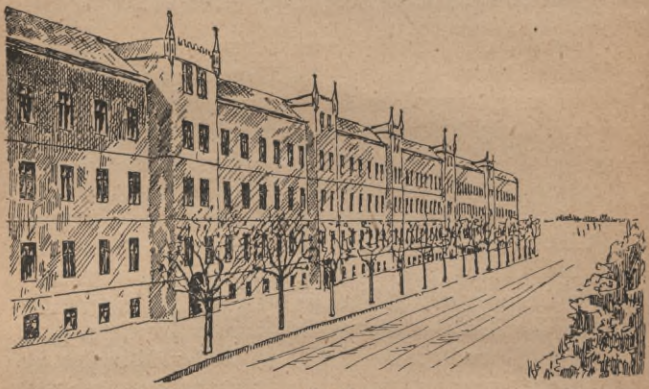


Fig. 1.

2. Der Hauptzweck der Perspektive ist wohl der, in ein und derselben Abbildung die drei Ausdehnungen eines Körpers, Länge, Breite und Höhe, dargestellt, d. h. den Körper so gezeichnet zu erhalten, wie ihn ein Beschauer von einem bestimmten Standpunkt aus sehen würde. Den gleichen Zweck verfolgt auch die Parallelperspektive; sie vereinfacht sich ihre Aufgabe aber dadurch, daß sie den Standpunkt des Beschauers in unendlicher Ferne voraussetzt, ein Standpunkt, der in Wirklichkeit nicht eingenommen werden kann, worin auch der Grund zu suchen ist, daß parallelperspektivische Bilder nie recht befriedigen.

II. Kapitel.

Zeichnen nach der Natur.

3. Eine gute Vorübung für das Studium der perspektivischen Grundgesetze und Konstruktionen ist das freihändige Zeichnen nach der Natur. Die hierbei gemachten Wahrnehmungen erleichtern außerordentlich das Verständnis für die Perspektive. Zunächst fällt dem Be-

Fig. 2.

obachter sofort die Begrenzung des Gesichtsfeldes auf. Denkt man sich, ohne das Auge zu bewegen, durch letzteres nach den äußersten noch wahrnehmbaren Punkten des Gesichtsfeldes Strahlen gezogen, so bilden diese einen Kreiskegel, den Sehkegel, mit einem Öffnungswinkel von etwa 30 bis 40 Grad. Die Achse dieses Kegels kann man als die Sehrichtung bezeichnen. Alles, was nun innerhalb

Fig. 3.

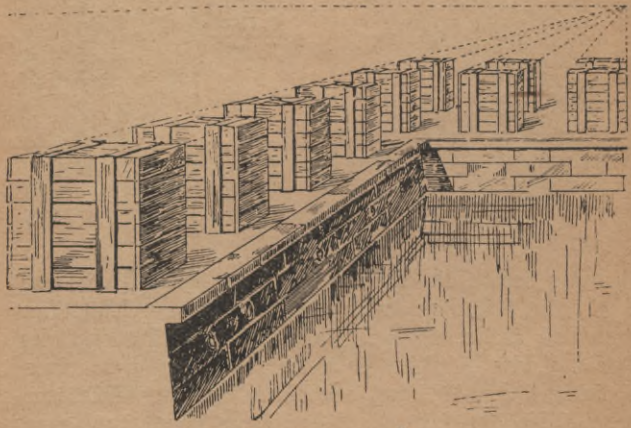


Fig. 4.

dieses Kegels sich befindet, kann von dem Auge wahrgenommen und von dem Beobachter gezeichnet werden. In wagerechtem, ebenem Gelände scheinen sich Himmel und Erde nach einer wagerechten Linie zu durchschneiden. Diese Linie bildet die Gesichtslinie (s. Fig. 1). Alle innerhalb des Sehkegels liegenden wagerechten Begrenzungslinien von Gegenständen haben gegen die Gesichtslinie eine besondere Lage, je nach ihrer Lage zur

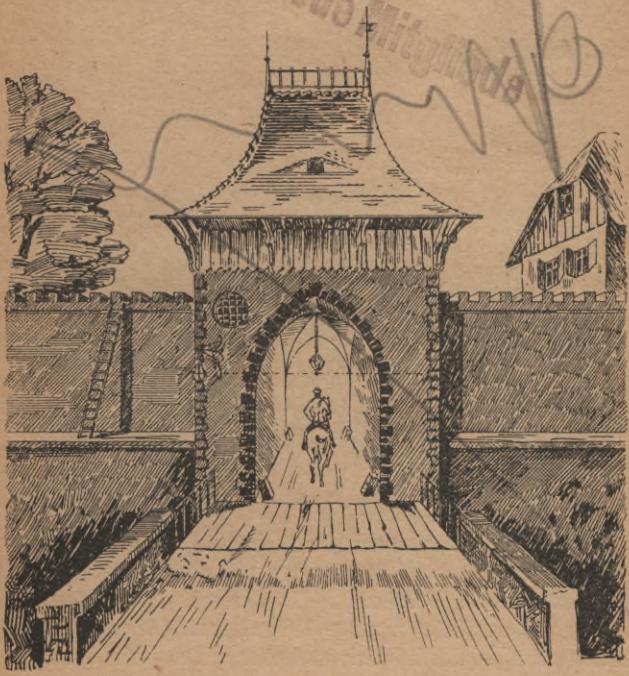


Fig. 5.

Sehrichtung. Sind diese Linien zur Sehrichtung parallel, so scheinen sie alle nach einem Punkte zusammenzulaufen und zwar nach dem Durchschnittspunkte der Achse des Sehkegels mit der Gesichtslinie, nach dem Augpunkte (s. Fig. 2, 3 u. 4).

Fig. 6.

Sind die Linien aber senkrecht zur Sehrichtung, so erscheinen sie dem Beobachter als parallellaufend zur Gesichtslinie (s. Fig. 5 u. 6). Alle übrigen wagerechten und unter sich parallelen geraden Linien haben eine gewisse Neigung zur Gesichtslinie: sie steigen an, wenn sie unter, sie fallen gegen die Gesichtslinie, wenn sie über der letzteren

gelegen sind. Man überzeugt sich hiervon, wenn man etwa den Zeichenstift mit ausgestrecktem Arme in Augenhöhe wagerecht und senkrecht zur Sehrichtung vor sich hin hält und nun die Lage der Linien zu jener des Zeichenstiftes beobachtet.

Fig. 7.

4. Sind an einem Gegenstand lotrechte Begrenzungslinien vorhanden, so erscheinen diese auch dem Beobachter als lotrecht; alle übrigen geraden Linien, welche weder wagerecht noch lotrecht verlaufen, erscheinen dem Beobachter als schräge ansteigende bzw. abfallende Linien, die, wenn die Linien unter sich parallel sind, entweder nach einem über oder unter der Gesichtslinie liegenden Punkte zusammenzulaufen scheinen. Krumme Linien erscheinen in der Regel ebenfalls krumm, kreisförmige Linien erscheinen dem Beobachter als elliptische Linien und zwar

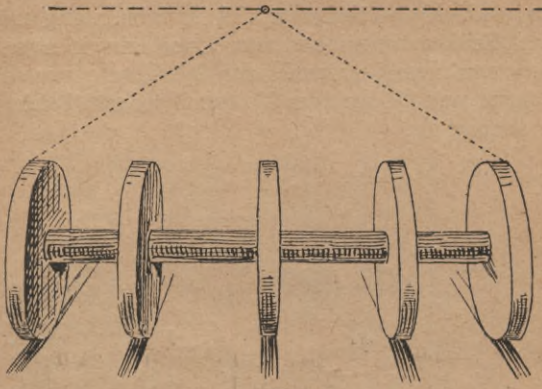


Fig. 8.

Fig. 9.

in verschiedener Breite, je nach der Lage der Kreislinien im Gesichtsfelde bzw. gegen die Gesichtslinie (s. Fig. 7, 8 u. 9).

Auch bezüglich der Größen- und Gestaltsverhältnisse gewahrt man Unterschiede; gleich große Gegenstände erscheinen verschieden groß und zwar um so kleiner, je weiter sie vom Auge des Beschauers entfernt liegen. Je nach der Lage eines Gegenstandes zur Sehrichtung erscheint seine Gestalt dem Beschauer verschieden.

III. Kapitel.

Perspektivische Konstruktionen mit Benutzung von Grund- und Aufriß.

Allgemeine Bemerkungen.

5. Ist irgendein Körper, z. B. das Prisma A, durch Grund- und Aufriß in A_1 und A_2 dargestellt (s. Fig. 11), und wählt man eine Projektionsebene B etwa so wie angegeben, d. h. parallel zu der vorderen Begrenzungsfläche von A und zieht von einem beliebig außerhalb B angenommenen Punkte 0 nach allen Ecken des Körpers Strahlen, welche die Projektionsebene B treffen, so erhält man in letzterer ein Bild des Körpers, welches eine Zentralprojektion des Körpers aus dem Punkte 0 als Projektionszentrum und der Ebene B als Bildebene genannt wird. Der Aufriß dieses Bildes ist durch die Strecke $\overline{1' \cdot 6'}$, der Grundriß durch die Strecke $\overline{4' \cdot 7'}$ dargestellt.

6. Um eine Vorstellung von der Gestalt des Bildes zu gewinnen, kann man die Bildebene parallel zu sich selbst nach $Y_1 Z_2$ verschieben und dann in die Aufrißebene umlegen; man erhält dann Figur A' als Bild des Körpers A (s. Fig. 12). Projiziert man das Projektionszentrum recht-

Fig. 12.

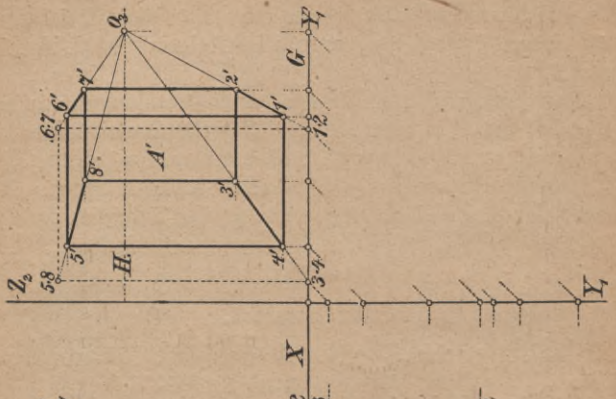


Fig. 11.

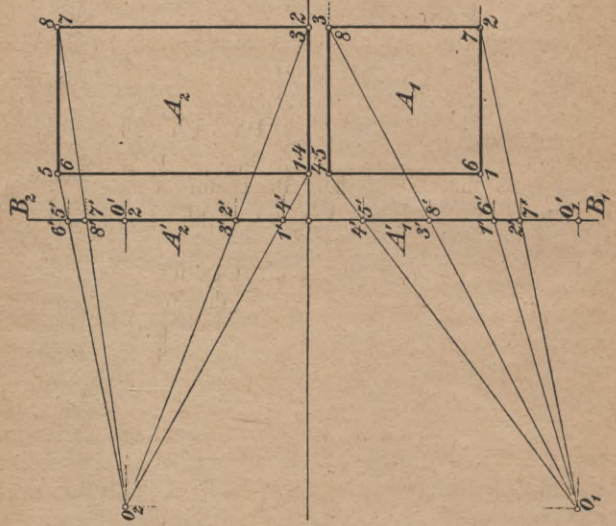


Fig. 10.

winklig auf die Bildebene nach $0_2'$ bzw. $0_1'$ und verschafft sich diese Projektion nach der Umlegung der Bildebene in die Aufrißebene, so ergibt sich der Punkt 0_3.

Denkt man sich nun in 0_3 eine Senkrechte zur Bildebene, also jetzt zur Aufrißebene gleich der Länge der Strecke $\overline{0_2 0_2'}$ errichtet, bringt in deren Endpunkte 0 das Auge an und sieht auf das Bild A', so macht dieses auf den Beschauer den gleichen Eindruck, den das Prisma hervorbringen würde, wenn es vor ihm stände. Man bezeichnet darum das Bild A' als die „Perspektive" des Körpers A, oder als das „perspektivische Bild" desselben und zwar gesehen von einem Auge, das sich in einem Abstande gleich $0_2' 0_2$ senkrecht zur Bildebene über dem Punkte 0_3 befindet.

7. Das in Fig. 12 gestrichelt gezeichnete Rechteck stellt die rechtwinklige Projektion des Körpers A in die Bildebene dar. Der Punkt 0_3, d. h. die rechtwinklige Projektion des Auges auf die Bildebene soll für die Folge der Augpunkt heißen. Es ist ein Unterschied zwischen der Bezeichnung Auge und Augpunkt: ersteres bezeichnet den im Raume befindlichen Standpunkt des Beschauers, letzterer ist ein in der Bildebene liegender Punkt, nämlich der Aufriß des Auges.

Die Linie Y_1' stellt die Schnittlinie der Grundrißebene mit der Bildebene dar und soll für die Folge kurzweg die Grundlinie heißen. Die durch den Augpunkt 0_3 parallel zur Grundlinie gezogene Gerade H heißt die Gesichtslinie; sie stellt den Schnitt der das Auge enthaltenden wagerechten Ebene mit der Bildebene dar. Der Abstand der Geraden H und G ist gleich dem Abstand des Auges von der Grundebene und heißt die „Augenhöhe".

8. An dem in Fig. 11 dargestellten Prisma befinden sich drei Richtungen von geraden Begrenzungslinien,

welche gegen die Bildebene eine besondere Lage haben, nämlich: 1. Die Linien $1 \cdot 4$, $2 \cdot 3$, $5 \cdot 6$ und $7 \cdot 8$; sie sind wagerecht und parallel zur Bildebene, ihre Perspektiven laufen parallel zur Grundlinie. 2. Die Linien $1 \cdot 6$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 8$ und $4 \cdot 5$; sie sind lotrecht, ihre Perspektiven sind ebenfalls lotrecht. 3. Die Linien $1 \cdot 2$, $3 \cdot 4$, $6 \cdot 7$ und $5 \cdot 8$; sie stehen senkrecht zur Bildebene, ihre Perspektiven schneiden sich, gehörig verlängert, im Augpunkt. Vorstehende Ergebnisse lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

„Alle zur Bildebene parallelen, wagerechten, geraden Linien haben als Perspektiven Linien parallel zur Grundlinie."

„Alle lotrechten Linien haben lotrechte Perspektiven."

„Alle zur Bildebene senkrechten Linien haben Perspektiven, die sich im Augpunkt schneiden."

9. Vergleicht man die Gestalten der Begrenzungsflächen des Körpers A mit den Gestalten ihrer perspektivischen Bilder, so findet man, daß die Flächen $1' \cdot 6' \cdot 5' \cdot 4'$ und $2' \cdot 7' \cdot 8' \cdot 3'$ ebenfalls Rechtecke sind und zwar ähnlich den Rechtecken $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ und $2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3$ am Körper A. Alle übrigen Rechtecke des Prismas bilden sich jedoch nicht mehr als Rechtecke, sondern, wie die Fig. 12 zeigt, als Trapeze ab. Würde das Prisma A etwa mit seiner vorderen Fläche $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ in der Bildebene selbst gelegen sein, so hätte sich diese Fläche bei der Abbildung ungeändert erhalten. Vorstehendes läßt sich wieder wie folgt als Satz ausdrücken:

„Die Perspektiven aller zur Bildebene parallelen, ebenen Figuren sind den Figuren ähnlich. Liegt die Figur in der Bildebene, so fällt ihre Perspektive mit ihr zusammen."

In Fig. 12 ist weiter noch zu ersehen, daß die Perspektive eines Punktes und sein Aufriß auf einer Geraden nach dem Augpunkt liegen, was übrigens auch schon in dem Satze über die zur Bildebene senkrechten Geraden enthalten ist.

Weitere Sätze lassen sich wie folgt ableiten.

10. Es sei wieder ein prismatischer Körper gegeben, aber jetzt so gegen die Bildebene gestellt, daß zwei seiner Flächen gegen die erstere eine Neigung von 45° einnehmen. Die Bildebene ist wieder durch die Ebene $B_1 B_2$ dargestellt, das Auge durch 0_1 und 0_2, Fig. 13. Mittels der Strahlen durch die Körperecken im Grund- und Aufriß nach 0_1 und 0_2 ergeben sich Grund- und Aufriß der Perspektive. Durch Verschiebung der Bildebene nach $Y_1 Z_2$ und Umlegung in die Aufrißebene erhält man schließlich das perspektivische Bild A' so, wie Fig. 14 es zeigt. An diesem Bilde erkennt man sofort folgende Eigentümlichkeiten: Die Perspektiven der lotrechten Körperkanten sind wieder lotrecht, dagegen sind keine Perspektiven parallel zur Grundlinie mehr vorhanden, weil der Körper keine zur Bildebene parallelen, wagerechten Kanten besitzt. Auch sind im perspektivischen Bilde keine Rechtecke mehr zu sehen, weil keine der ebenen Begrenzungsflächen des Körpers parallel zur Bildebene gerichtet ist. Dagegen sind jetzt am Körper wagerechte, unter 45° zu der Bildebene geneigte Gerade vorhanden, deren Bilder gehörig verlängert in zwei Punkten d_3 und d_3' auf der Gesichtslinie sich schneiden. Mißt man den Abstand dieser Punkte d_3 und d_3' von dem Punkte 0_3, so ergibt sich hierfür eine Länge, welche gleich ist dem Abstande $\overline{0_1 0_1'}$ des Auges von der Bildebene. Dieser Abstand soll für die Folge kurzweg mit „Augabstand" bezeichnet werden. Die beiden Punkte d_3 und d_3' heißen „Augabstandspunkte".

Fig. 14.

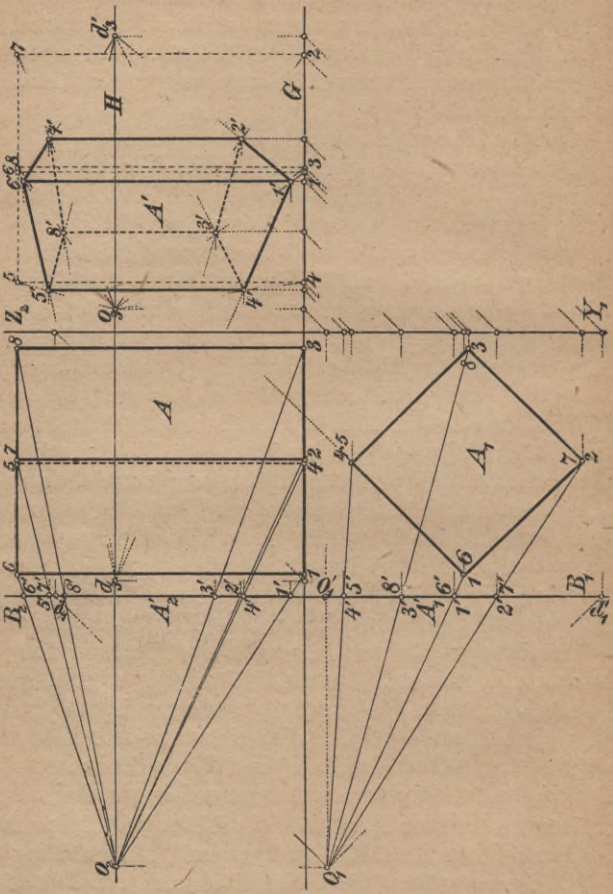


Fig. 13.

Daß solche Punkte vorhanden sein müssen, sieht man ohne weiteres sofort ein, wenn man eine der in Betracht kommenden Körperkanten, z. B. die Kante $1 \cdot 4$, nicht als eine Strecke, sondern als eine gerade Linie von unbegrenzter Länge auffaßt. Läßt man z. B. den Punkt *4* auf der Linie $1 \cdot 4$ in der Richtung $1 \cdot 4$ immer weiter fortrücken, wie dies durch die gestrichelte Linie angedeutet ist, und zieht in jeder Lage des Punktes *4* einen Strahl nach *0*, so erhält man hierdurch in der Bildebene das Bild des jeweiligen Punktes *4*. Unter den verschiedenen Lagen von *4* befindet sich auch die unendlich ferne Lage und in diesem Falle wird der Strahl nach *0* im Grundriß parallel zu $1 \cdot 4$, im Aufriß parallel zur Grundlinie, d. h. er fällt in die Gesichtslinie. Im Grundriß erhält man den Punkt d_1, als Grundriß der Perspektive des unendlich fernen Punktes von $1 \cdot 4$, Überträgt man diesen Punkt in der gleichen Weise wie die übrigen Punkte nach Fig. 14, so kommt er nach d_3 auf die Gesichtslinie zu liegen und zwar links von 0_3 und es ist, da das Dreieck $0_1 0_1' d_1$ (s. Fig. 13) gleichschenklig rechtwinklig ist, die Strecke $\overline{0_1 0_1'} = \overline{0_1' d_1}$, Fig. 13, $= \overline{0_3 d_3}$, Fig. 14.

Für die Prismenrichtung $1 \cdot 2$ erhält man in gleicher Weise einen Augabstandspunkt d_1' (Fig. 13) bzw. d_3' rechts von 0_3 auf der Gesichtslinie; (s. Fig. 14). Einen Punkt d_3 oder d_3', in welchem die Perspektiven von parallelen Geraden zusammentreffen, bezeichnet man allgemein als einen „Fluchtpunkt". Man kann also in bezug auf das vorstehend Ausgeführte den Satz aussprechen:

„Die Perspektiven aller wagerechten gegen die Bildebene unter 45° geneigten Geraden besitzen als Fluchtpunkt einen der beiden Augabstandspunkte."

Fig. 16.

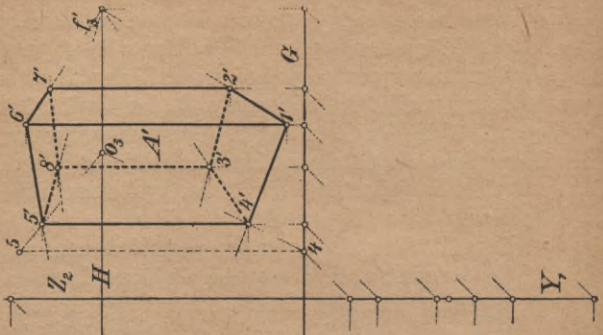
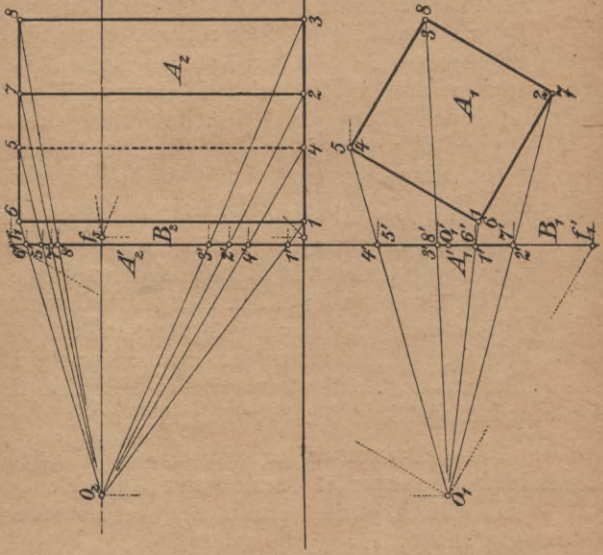

f'_2
G
7'
2'
6'
1'
O_3
A'
8'
3'
5'
4'
5
4
Z_2
H
Y_2

Fig. 15.


8
3
A_2
7
2
5
4
6
1
f_2
B_2
A'_2
O_2
8
3
A_1
5
4
B_1
f'_1
A'_1
O_1

Für alle Geraden, welche von dem Auge aus nach links gerichtet sind, gilt der links liegende, für die nach rechts gerichteten Geraden der rechts vom Augpunkt liegende Augabstandspunkt.

11. Gibt man dem Körper, z. B. dem Prisma A, eine noch allgemeinere Lage gegen die Bildebene, etwa die in Fig. 15 dargestellte, bei welcher die Seitenflächen verschiedene Neigungen gegen die Bildebene einnehmen, so kann man wieder wie in den früheren Fällen verfahren und erhält dann das in Fig. 16 verzeichnete perspektivische Bild A'. Hieran erkennt man, daß die lotrechten Körperkanten wieder lotrechte Bilder haben und daß die Bilder der übrigen wagerechten Körperkanten in zwei auf der Gesichtslinie liegenden Punkten f_3 und f_3' zusammenlaufen. Diese Punkte stellen die Bilder der unendlich fernen Punkte der betreffenden Körperkanten dar und man erhält sie zunächst im Grundriß (s. Fig. 15), indem man durch 0_1 zu den Richtungen $1 \cdot 2$ und $1 \cdot 4$ Parallele zieht, deren Schnittpunkte mit dem Grundriß B_1 der Bildebene ermittelt und diese Punkte nach Fig. 16 überträgt; es ist also $\overline{0_3 f_3}$ Fig. 16 $= \overline{0_1' f_1}$ Fig. 15 und $\overline{0_3 f_3'}$ Fig. 16 $= \overline{0_1' f_1'}$ Fig. 15. Die Linien $1' \cdot 2'$, $3' \cdot 4'$, $5' \cdot 8'$ und $6' \cdot 7'$ schneiden sich in f_3', die Linien $1' \cdot 4'$, $2' \cdot 3'$, $5' \cdot 6'$ und $7' \cdot 8'$ in f_3. Die Punkte f_3 und f_3' heißen die Fluchtpunkte der betreffenden Prismenkanten. Ganz allgemein läßt sich das Vorstehende als Satz ausdrücken:

„Die Perspektiven von wagerechten, parallelen Geraden besitzen auf der Gesichtslinie einen gemeinschaftlichen Fluchtpunkt in dem Durchschnittspunkt des durch das Auge gezogenen Parallelstrahles zur Richtung der parallelen Geraden mit der Bildebene."

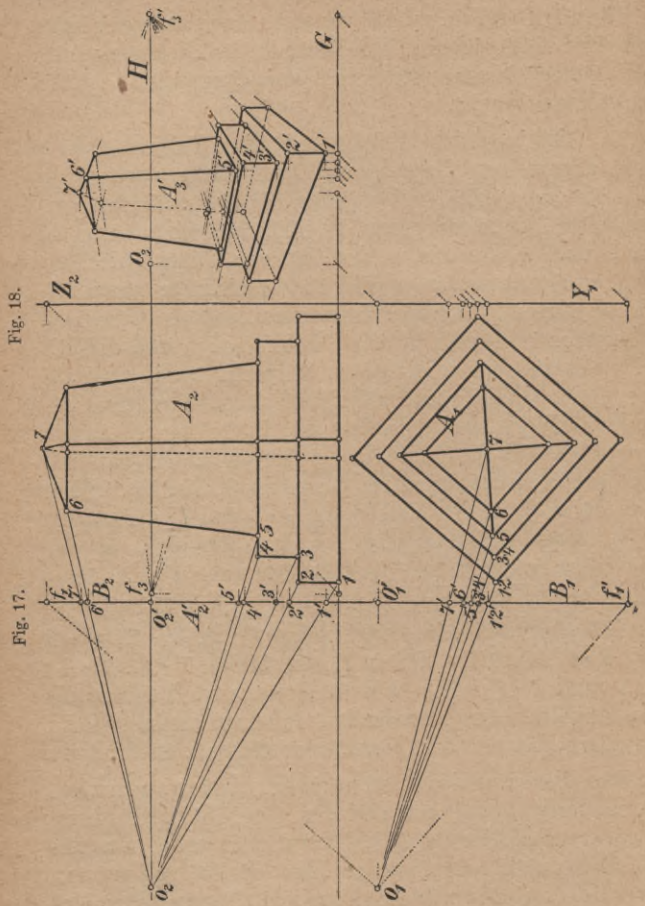

H
G
Z_2
Y_1
A_2
A_1
A'_2
A'_3
B_2
B_1
O_2
O_1
O'_2
O'_1
f_3
f'_3
f_1
f'_1
1
2
3
4
5
6
7
1'
2'
3'
4'
5'
6'
7'
11
12

Fig. 17.

Fig. 18.

12. Nach dem bisher angegebenen Verfahren kann man für jeden ganz beliebig gestalteten Körper (s. z. B. Fig. 17) für ein gegebenes Auge $0_1 0_2$ und eine Bildebene $B_1 B_2$, wenn Grund- und Aufriß des Körpers bekannt sind, das perspektivische Bild konstruieren: Man zieht durch das Auge nach allen Ecken des Körpers Strahlen, bestimmt deren Schnittpunkte mit der Bildebene, verschiebt letztere nach $Y_1 Z_2$ und legt sie dann in die Aufrißebene um, so ergibt sich das perspektivische Bild A' des Körpers (s. Fig. 18).

13. An dem in Rede stehenden Körper finden sich außer den bis jetzt bekannten Linien solche von ganz allgemeiner Lage gegen die Bildebene, wie z. B. die Linien $5 \cdot 6$ und $6 \cdot 7$ usw. Um die Perspektiven solcher Linien zu erhalten, ermittelt man die Perspektiven ihrer Endpunkte und verbindet diese miteinander. Die am Körper auftretenden lotrechten Linien haben wieder lotrechte Perspektiven; jene der auftretenden wagerechten Linien vereinigen sich in den Fluchtpunkten f_3 und f_3', deren Ermittelung mittels des Grundrisses (Fig. 17) wie früher erfolgt.

14. Auf Grund der im vorangegangenen entwickelten Sätze kann man eine ganze Anzahl von Verfahren anführen, nach welchen die perspektivischen Konstruktionen ausgeführt werden können. Am gebräuchlichsten ist für praktische Zwecke das Durchschnittsverfahren, welches darin besteht, daß man durch jeden Punkt des Raumes einen Strahl nach dem Auge und etwa noch eine wagerechte gegen die Bildebene unter irgendeinem Winkel geneigte Gerade zieht und die Perspektiven dieser beiden Linien ermittelt; in ihrem Schnitt liegt die Perspektive des Raumpunktes. Die verschiedenen hierbei auftretenden Möglichkeiten sollen im nachstehenden erörtert werden.

Das Durchschnittsverfahren.

a) Verwendung eines Sehstrahles.

15. Zur Darstellung der Perspektive eines Punktes, z. B. a (s. Fig. 19), zieht man durch den Grundriß einen Sehstrahl; dieser liefert auf B_1 den Grundriß a_1' (s. Fig. 19) des perspektivischen Bildes des Punktes. Durch den Aufriß a_2 zieht man gleichfalls einen Sehstrahl und projiziert auf diesen den Punkt a_1' nach a_2', dann ist a_2' das perspektivische Bild von a.

Ist eine lotrechte Strecke $\overline{ab}$ (s. Fig. 19 u. 20) perspektivisch darzustellen, so ermittelt man den Punkt b_2' in gleicher Weise wie a_2'.

b) Verwendung eines Sehstrahles und einer gegen die Bildebene unter 45° geneigten Wagerechten.

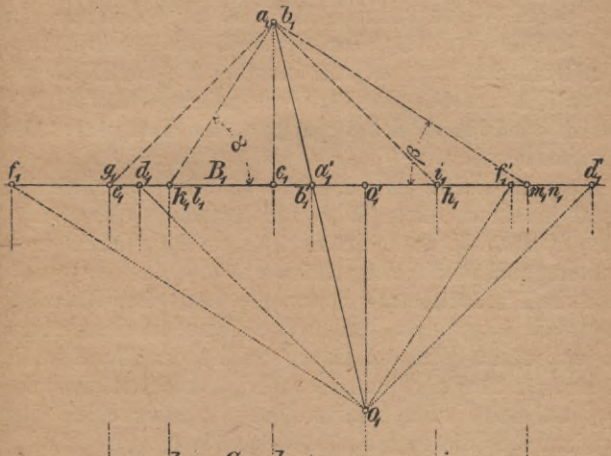
16. Man zeichnet (s. Fig. 19) durch den Grundriß a_1 die Linie a_1e_1 unter 45° gegen B_1 geneigt, projiziert ihren Schnittpunkt e_1 nach e_2 auf G, wenn der Punkt a in der Grundebene liegt, zieht durch e_2 nach dem Augabstandspunkt d_2' rechts von 0_2; diese Linie schneidet auf dem Aufriß a_20_2 des Sehstrahles die Perspektive a_2' von a aus.

Liegt der Schnittpunkt der 45°-Linie durch a_1 mit B_1 rechts von $0_1'$, z. B. in h_1, so zieht man durch h_2 nach dem Augabstandspunkt d_2 links von 0_2.

Liegt der darzustellende Punkt nicht in der Grundrißebene, sondern in einem beliebigen Abstande über oder unter derselben, z. B. in b_2 (s. Fig. 20), so projiziert man die Punkte g_1 oder i_1 auf die durch b_2 zu G gezogene Parallele G_1 nach g_2 oder i_2 und von diesen Punkten nach dem Augabstandspunkte rechts bzw. links von 0_2; letztere Linien liefern auf dem Sehstrahl b_20_2 das perspektivische Bild b_2' von b.

Anmerkung 1. Durch das unter b) genannte Verfahren erspart man sich den Grundriß des Sehstrahles.

Fig. 19.



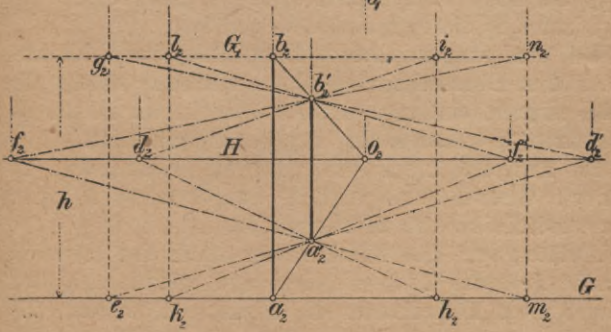


Fig. 20.

c) Verwendung eines Sehstrahles sowie einer gegen die Bildebene unter einem beliebigen Winkel geneigten Geraden.

17. Man zieht durch a_1 eine gegen B_1 unter einem beliebigen Winkel α geneigte Gerade a_1k_1 (s. Fig. 19) und durch 0_1 eine Parallele hierzu bis zum Schnittpunkt f_1' mit B_1, dann ist f_1' der Grundriß des Fluchtpunktes der Geraden a_1k_1; f_1' projiziert man nach f_2' auf H, ebenso k_1 nach k_2 auf G. Die Verbindungslinien a_20_2 und k_2f_2' liefern durch ihren Schnittpunkt a_2' die Perspektive des Punktes a.

Liegt der Aufriß eines Punktes b in einer Parallelen G_1 zu G in einem Abstande h von letzterer, so projiziert man k_1 nach l_2, dann liefern l_2f_2' und b_20_2 durch ihren Schnittpunkt b_2' die Perspektive von b.

18. In Fig. 19 ist noch eine zweite, unter dem Winkel β gegen die B_1 geneigte Linie a_1m_1, die nebenbei senkrecht zu a_1k_1 steht, gezogen; zu ihr gehört der Fluchtpunkt f_1 bzw. f_2. Projiziert man m_1 nach m_2, so liefert die Linie m_2f_2 auf a_20_2 die Perspektive a_2' von a; entsprechend gibt n_2f_2 auf b_20_2 die Perspektive b_2' von b.

Bei der perspektivischen Darstellung eines Körpers nach dem Durchschnittsverfahren wird man häufig alle oder mehrere der unter a bis c bezeichneten Hilfslinien benutzen, je nachdem dies zweckmäßig erscheint.

19. Aufgabe 1. Es ist der in Fig. 21 und 22 durch Grund- und Aufriß dargestellte Körper perspektivisch zu zeichnen.

Auflösung. Die Bildebene sei durch eine lotrechte Kante $1 \cdot 3$ des Körpers gelegt und schließe mit den wagerechten Körperkanten die Winkel von 30° bzw. 60° ein. Das Auge sei durch 0_1 und 0_2, die Grundlinie durch

Fig. 22.

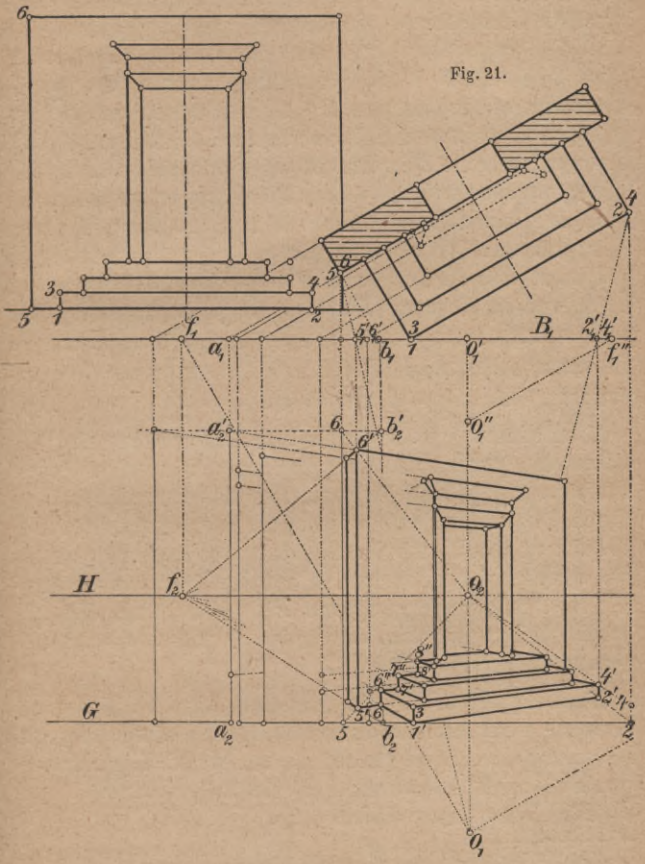


Fig. 21.

Fig. 23.

G und der Augabstand durch die Strecke $\overline{0_1 0_1'}$ gegeben*). Man kann nun jeden einzelnen Punkt mittels der Sehstrahlen konstruieren, wie dies z. B. für die Punkte $2 \cdot 4$ und $5 \cdot 6$ angedeutet ist. Man zieht durch die Grundrisse $2 \cdot 4$ und $5 \cdot 6$ die Sehstrahlen nach 0_1 und projiziert deren Schnittpunkte $2_1' \cdot 4_1'$ und $5_1' \cdot 6_1'$ auf die zugehörigen Aufrisse der Sehstrahlen nach $2' \cdot 4'$ bzw. $5' \cdot 6'$. Im vorliegenden Beispiele ist es zweckmäßig, auch die Fluchtpunkte der wagerechten Körperkanten zu benutzen. Man zieht durch 0_1 die Parallelstrahlen zu den genannten Körperkanten bis zum Schnitt mit der Bildebene und projiziert diese Punkte auf H. In Fig. 23 ist nur der links von 0_2 liegende Fluchtpunkt f_2 zugänglich. Der rechtsseitige Fluchtpunkt f_2' liegt rechts von 0_2 auf H in einem Abstande gleich $5 \times \overline{0_1' f_1''}$, unter der Voraussetzung, daß $\overline{0_1 0_1'} = 5 \times \overline{0_1'' 0_1'}$ ist.

Mit Benutzung eines der beiden Fluchtpunkte und des Sehstrahles ergibt sich nun die Perspektive eines jeden Punktes, z. B. *5* und *6*, wenn man die eine oder andere durch *5* bzw. *6* gehende wagerechte Körperkante bis zum Schnitt a_1 oder b_1 mit der Bildebene verlängert, den Aufriß a_2 bzw. a_2' oder b_2 bzw. b_2' ermittelt, nach den zugehörigen Fluchtpunkt zieht und diesen Strahl zum Durchschnitt bringt mit dem durch den Aufriß von *5* bzw. *6* gezogenen Sehstrahl.

20. Aufgabe 2. Die in den Fig. 24 und 25 durch Grund- und Aufriß dargestellte Gebäudegruppe ist perspektivisch zu zeichnen, wenn der Standpunkt des Beschauers sich in $0_1 0_2$ befindet und B_1 die Bildebene darstellt.

*) Den Augabstand wählt man in der Regel nicht kleiner als das größte wagerechte bzw. lotrechte Körperausmaß.

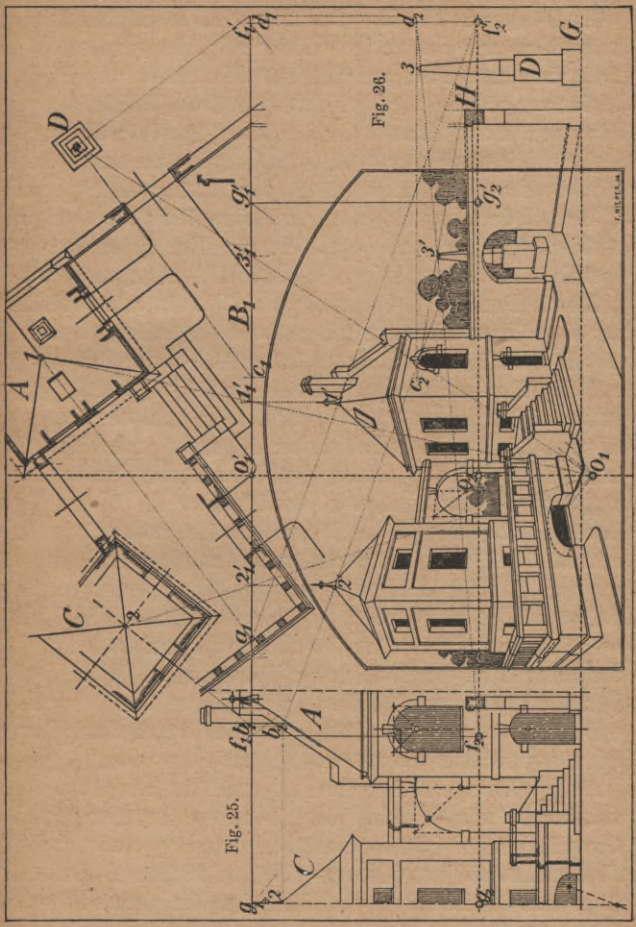


Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
A
B
C
D
G
H

Auflösung. Die Konstruktion wird in gleicher Weise ausgeführt wie im vorigen Beispiel. Im vorliegenden Falle kommen fünf verschiedene Hauptrichtungen von Linien vor, nämlich die Lotrichtung, sodann die Richtungen der wagerechten Kanten der Gebäude A und C; die wagerechten Richtungen von D sind die gleichen wie bei A. Man bestimmt zunächst auf B_1 die Fluchtpunkte f_1 und f_1' für A, dann g_1 und g_1' für C, hierauf die zugehörigen Aufrisse f_2, f_2', g_2 und g_2' auf H. In Fig. 26 ist die perspektivische Konstruktion für die Punkte *1*, *2* und *3* ausgeführt. Durch den Grundriß von *1* ist eine Parallele zu der einen Hauptrichtung gezogen und der Schnittpunkt a_1 mit B_1 ermittelt. Zufällig trifft der Aufriß des Punktes *1* auf die Wagerechte durch a_1, daher fällt a_2 mit a_1 zusammen. Die Perspektive der Linie $1 \cdot a_1$ geht daher durch a_1 nach f_2'. Der Sehstrahl durch *1* nach 0_1 schneidet B_1 in $1_1'$. Im Schnitt der Lotrechten durch $1_1'$ mit dem Strahle $a_1 f_2'$ liegt die Perspektive $1'$ des Punktes *1*. In gleicher Weise wird jeder andere Punkt der Gebäudegruppe ermittelt, z. B. der Punkt *2*: Durch den Grundriß von *2* ist eine Parallele zur einen Hauptrichtung gezogen, sie liefert auf B_1 den Punkt b_1, dessen Aufriß in b_2 liegt. Der Sehstrahl durch *2* ergibt auf B_1 den Punkt $2_1'$. Auf der Lotrechten durch $2_1'$ und auf der Linie $b_2 g_2'$ liegt die Perspektive $2'$ von *2*. Ebenso ist die Perspektive von *3* unter Benutzung eines Parallelstrahles durch *3* zu einer der Hauptrichtungen von D konstruiert worden.

Anmerkung *2*. Für die Folge soll die Bildebene von vornherein mit der Aufrißebene zusammenfallen. Die Grundlinie G tritt dann an die Stelle der Projektionsachse als Schnittlinie von Grund- und Aufrißebene. Da das Auge vor der Bildebene sich befindet, der darzustellende Gegenstand aber hinter ihr, so werden bei einer Umlegung

der Grundrißebene in die Bildebene die Grundrißpunkte unterhalb der Grundlinie G zu liegen kommen und ihre Abstände von letzterer geben die Abstände der Raumpunkte von der Bildebene an.

21. Das Wesentlichste bei der Konstruktion des perspektivischen Bildes eines Gegenstandes nach dem Durchschnittsverfahren war die Benutzung des Sehstrahles als Hilfslinie; hierzu war außer dem Grundriß des Gegenstandes auch der Grundriß des Auges erforderlich. Es gibt nun aber noch eine Reihe von Konstruktionsverfahren, bei welchen man zur Ermittelung des perspektivischen Bildes eines Punktes des Grundrisses des Auges nicht bedarf. Hierzu gehört zunächst das Augabstandspunktverfahren.

IV. Kapitel.

Freie Perspektive.

Das Augabstandspunktverfahren.

a) Verfahren mit Verwendung des ganzen Augabstandes.

22. Bei ihm benutzt man durch jeden Punkt zwei Hilfslinien, von denen die eine wagerecht und zur Bildebene unter 45^0 geneigt erscheint, die andere zu ihr senkrecht steht. Das Bild der ersteren Geraden geht durch einen Augabstandspunkt, das der letzteren nach dem Augpunkt, im Schnitt beider liegt das perspektivische Bild des darzustellenden Punktes.

Ist nun durch $\overline{a_2 e_2}$ (s. Fig. 27) der Aufriß einer lotrechten Strecke dargestellt, so wird nach der Umlegung der Grundrißebene in die Bildebene der Grundriß dieser

Strecke als der Punkt a_1 sich darstellen, dessen Abstand von G den Abstand der Strecke $\overline{ae}$ von der Bildebene bezeichnet. Ist ferner durch 0_2 der Augpunkt gegeben und bezeichnen d_2 und d_2' die beiden auf H liegenden

Fig. 27.

Fig. 28.

Augabstandspunkte, so vollzieht sich die Konstruktion des perspektivischen Bildes des Punktes a sehr einfach: Man zieht durch a_1 die 45°-Linie $a_1 b$, ihre Perspektive ist $b d_2$, das perspektivische Bild von $a_1 a_2$ ist die Verbindungslinie $a_2 0_2$, welche auf $b_2 d_2$ das perspektivische Bild a_2' von a liefert.

Mittels der 45°-Linie $a_1 c$ ergibt sich $c d_2'$ und damit auf $a_2 0_2$ wieder das Bild a_2'. In gleicher Weise verfährt man für den Punkt e und erhält das Bild e_2'.

23. Kennt man den Aufriß e_2 eines Punktes e, sowie seinen Abstand von der Bildebene, so ist der Grundriß e_1 zur Konstruktion des perspektivischen Bildes von e nicht erforderlich; man braucht ja nur durch den Aufriß e_2 eine Parallele zur Grundlinie zu ziehen und auf dieser von e_2 aus entweder nach rechts oder links die Strecke $\overline{e_2 g}$ bzw. $\overline{e_2 h}$ gleich dem Abstand des Punktes e von der Bildebene abzutragen und nach dem Augabstandspunkte links bzw. rechts von 0_2 zu ziehen, um im Schnittpunkt einer dieser Linien mit $e_2 0_2$ das perspektivische Bild e_2' von e zu erhalten.

24. Die im vorstehenden unter 23 angegebene Konstruktion läßt noch eine Verallgemeinerung zu. Zieht man nämlich durch den Aufriß a_2 eines Punktes a (s. Fig. 28) eine Linie $a_2 c$ in ganz beliebiger Richtung, macht $a_2 c$ gleich dem Abstand des Punktes a von der Bildebene, zeichnet durch 0_2 eine Parallele zu $a_2 c$ nach der entgegengesetzten Richtung von $a_2 c$ und trägt $\overline{0_2 d'}$ gleich dem Augabstande ab, so liefert die Verbindungslinie $c d'$ auf $a_2 0_2$ die Perspektive a_2' des Punktes a. Zeichnet man ganz allgemein um den Punkt a_2 als Mittelpunkt einen Kreis K_a mit einem Halbmesser gleich dem Abstand des Punktes a von der Bildebene, um den Augpunkt 0_2 einen

Fig. 30.

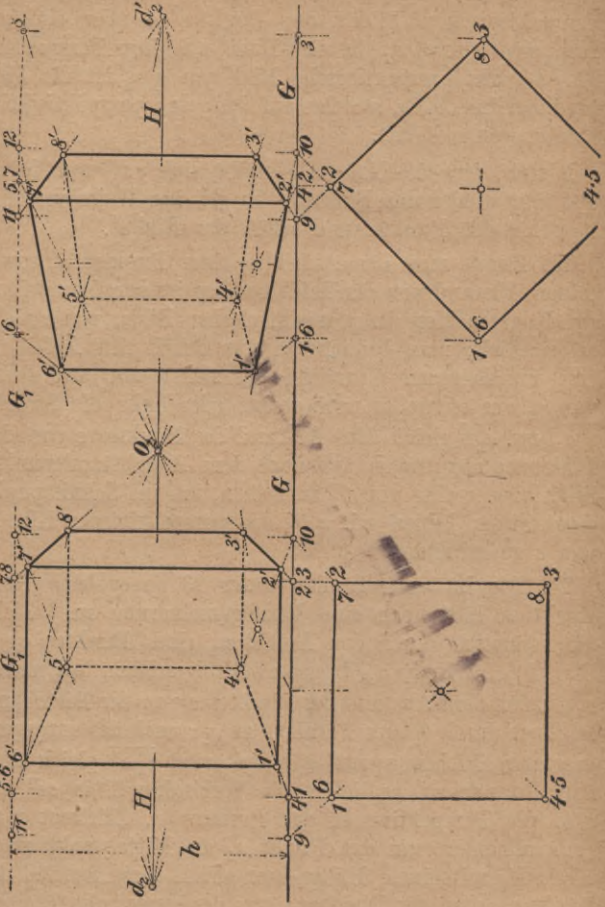


Fig. 29.

Kreis K_d mit einem Halbmesser gleich dem Augabstande, zieht in beiden Kreisen K_a und K_d zwei parallele entgegengesetzt gerichtete Halbmesser, z. B. $a_2 g$ und $0_2 d'''$, so trifft die Verbindungslinie $g d'''$ der Endpunkte dieser Halbmesser die Verbindungslinie $a_2 0_2$ in dem perspektivischen Bilde a_2' des Punktes a. Aus vorstehendem ergibt sich folgender Satz:

„Das perspektivische Bild eines Punktes ist der innere Teilungspunkt der Verbindungsstrecke seines Aufrisses mit dem Augpunkte im Verhältnis des Abstandes des Punktes von der Bildebene zum Augabstande."

Im folgenden soll nun an einer Reihe von Aufgaben das Augabstandspunktverfahren geübt werden.

25. Aufgabe 3. Ein Quadrat $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ (s. Fig. 29) der Grundrißebene, das mit einem Seitenpaar parallel zur Grundlinie gerichtet ist, soll in Perspektive gesetzt werden.

Auflösung. Durch die Aufrißecken $1 \cdot 4$ und $2 \cdot 3$ gehen Linien nach dem Augpunkt; die Quadratdiagonalen $1 \cdot 3$ und $2 \cdot 4$ schneiden G in 9 und 10. Die durch diese Punkte nach den Augabstandspunkten gehenden Linien liefern die Quadratecken $1'$, $3'$ und $2'$, $4'$.

Die beiden Quadratseiten $1' \cdot 2'$ und $3' \cdot 4'$ sind parallel zu G. Die beiden anderen haben den Punkt 0_2 zum Fluchtpunkt.

Aufgabe 4. Das Quadrat $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ (s. Fig. 29) liegt in einer beliebigen wagerechten Ebene G_1; es soll in Perspektive gesetzt werden.

Auflösung. Man verfährt in gleicher Weise wie in Aufgabe 3, nur projiziert man jetzt die Punkte 9 und 10 nach 11 und 12 auf G_1 und zieht von da nach den Augabstandspunkten d_2' und d_2.

26. Aufgabe 5. Das Quadrat $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ (s. Fig. 29) ist Grundriß eines rechtwinkligen Parallelepipeds von der Höhe h; es soll letzteres in Perspektive gesetzt werden.

Auflösung. Man verfährt wie in Aufgabe 3 und 4 und verbindet die Endpunkte der Perspektiven beider Quadrate durch lotrechte Linien.

27. Aufgabe 6. Ein Quadrat der Grundrißebene, dessen Seiten unter 45^0 gegen die Bildebene geneigt sind (s. Fig. 30), soll in Perspektive gesetzt werden.

Auflösung. Von den Aufrißpunkten *1* bis *4* zieht man nach 0_2; durch die Schnittpunkte *9* und *10* der Seiten $2 \cdot 3$ und $1 \cdot 2$ mit G nach den Augabstandspunkten d_2' und d_2. Hierdurch sind die Ecken $1' \cdot 2'$ und $3'$ bestimmt. Die vierte Ecke $4'$ ergibt sich im Schnitt der Linien $1' d_2'$ und $3' d_2$.

28. Aufgabe 7. Das Quadrat liegt in einer wagerechten Ebene G_1 (s. Fig. 30).

Auflösung. An Stelle von G tritt G_1, sonst bleibt die Konstruktion wie in der vorigen Aufgabe.

29. Aufgabe 8. Das Quadrat $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ (s. Fig. 30) ist Grundriß eines rechtwinkligen Parallelepipeds von der Höhe h; es soll letzteres in Perspektive gesetzt werden.

Auflösung. Man verfährt wie in Aufgabe 6 und 7 und verbindet die Eckpunkte der Perspektiven beider Quadrate durch lotrechte Linien.

Anmerkung 3. Hat ein Körper mit rechteckigen wagerechten Begrenzungsflächen eine solche Stellung zur Bildebene, daß die eine Schar der wagerechten Rechtecksseiten zur Bildebene parallel, die andere hierzu senkrecht steht, so nennt man diese Stellung Parallelstellung

im Gegensatz zur Diagonalstellung, welche vorliegt, wenn die genannten Rechtecksseiten zur Bildebene unter 45° geneigt sind. Das Prisma in Fig. 29 befindet sich in Parallelstellung, jenes in Fig. 30 in Diagonalstellung.

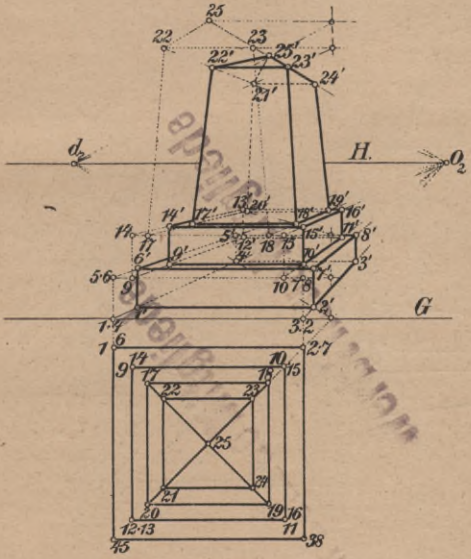


Fig. 31.

30. Aufgabe 9. Der in Fig. 31 durch Grund- und Aufriß in Parallelstellung angedeutete Körper ist in Perspektive zu setzen.

Auflösung. Man zeichnet die Perspektiven aller an dem Körper auftretenden Quadrate mittels Aug- und

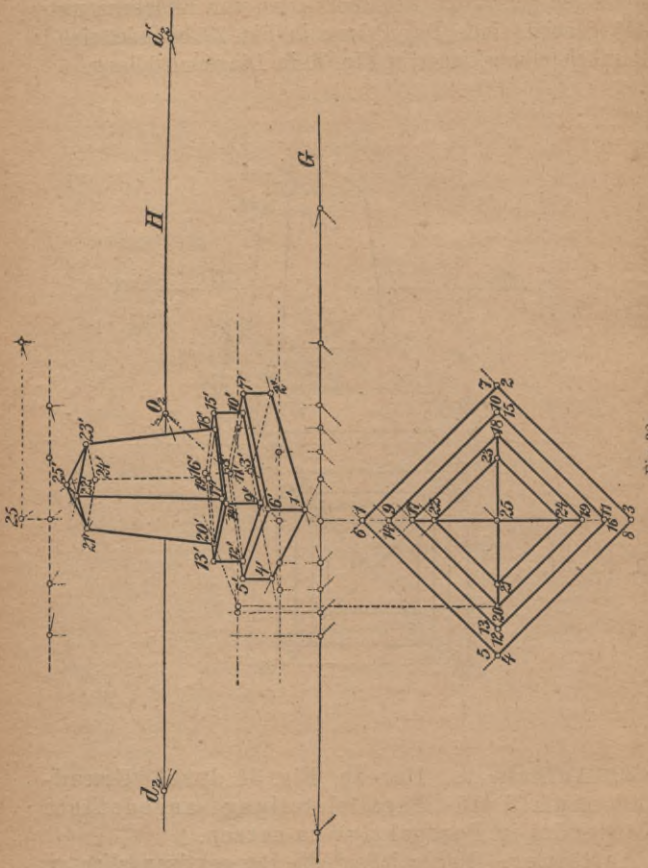


Fig. 32.

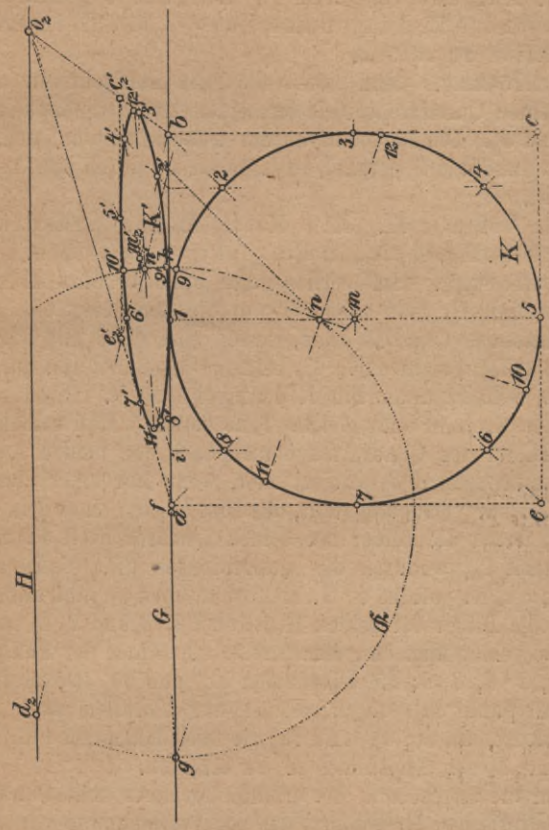


Fig. 33.

linkseitigen Augabstandpunktes; in gleicher Weise bestimmt man auch die Perspektive des obersten Punktes *25*.

31. Aufgabe 10. Der in Aufgabe 9 genannte Körper ist in Diagonalstellung (s. Fig. 32) in Perspektive zu setzen.

Auflösung. Man konstruiert die Perspektiven der einzelnen Quadrate mittels der beiden Augabstandspunkte d_2 und d_2'. Die Perspektiven der Quadratdiagonalen sind zur Grundlinie G parallel, bzw. gehen sie durch den Augpunkt.

32. Aufgabe 11. Ein Kreis K der Grundrißebene (s. Fig. 33) ist in Perspektive zu setzen.

Auflösung. Im vorliegenden Falle berührt K die Grundlinie G; man zeichnet nun um den Kreis ein ihn berührendes Quadrat $abce$, dessen eine Seite mit G zusammenfällt, zieht darin die beiden Diagonalen und durch deren Schnittpunkte mit K Senkrechte zu G. Hierdurch ist der Kreis in acht gleiche Teile geteilt. Man zeichnet die Bilder der Quadratdiagonalen nach den beiden Augabstandspunkten d_2 und d_2' oder, wenn nur einer dieser Punkte zur Verfügung steht, das Bild bd_2 der einen Diagonale, ferner die Bilder der beiden Quadratseiten ae und bc nach 0_2, wodurch die Quadratecken abe_2' bestimmt sind; $e_2'c_2'$ ist parallel zu G. Zieht man noch ac_2' und außerdem die Bilder der beiden Hilfslinien $8 \cdot 6$ und $2 \cdot 4$ nach 0_2, so erhält man von dem Kreise die Bilder der Punkte $1 \cdot 5$, $2 \cdot 4$, $8 \cdot 6$; die Diagonalen ac_2' und be_2' liefern den Schnittpunkt m_2', durch welchen eine Parallele zu G zu ziehen ist, um auf ae_2' und bc_2' die noch fehlenden Punkte $7'$ und $3'$ des Kreisbildes K' zu erhalten.

Auf die angegebene Art erhält man stets acht Punkte des elliptischen Kreisbildes, das zur Verzeichnung von K' vollständig ausreicht.

Anmerkung 4. Von dem elliptischen Kreisbilde K' lassen sich in einfacher Weise die Hauptachsen ermitteln.

Man halbiert die Linie $1 \cdot 5'$ in n', zieht $d_2 n'$ bis nach G, so trifft die durch den Schnittpunkt von $d_2 n'$ mit G gezogene 45°-Linie den Kreisdurchmesser $\overline{1 \cdot 5}$ in einem Punkte n, dem der Punkt n' als perspektivisches Bild entspricht. Ein Kreis $\mathfrak{K}$, dessen Mittelpunkt auf G liegt und die beiden Punkte n und n' enthält, liefert auf G zwei Punkte g und h, durch welche die Hauptachsen von K' hindurchgehen; ihnen entsprechen in K die beiden den Punkt n und die Punkte h und g enthaltenden Kreissehnen $\overline{9 \cdot 10}$ und $\overline{11 \cdot 12}$. Die Bilder von $9 \cdot 10$ und $11 \cdot 12$ geben die Scheitel $9' \cdot 10'$, $11' \cdot 12'$ der Ellipse K'.

33. Mit Bezugnahme auf das in 23 Gesagte ist auch die Aufgabe der perspektivischen Teilung gelöst, soweit es sich um zur Bildebene senkrechte gerade Linien handelt. Die Aufgaben können in folgende zerfallen:

1. Man soll die wahre Länge einer perspektivisch dargestellten Strecke ermitteln.

2. Man soll auf einer perspektivisch dargestellten Linie eine Strecke von bestimmter Länge abtragen.

3. Man soll eine perspektivisch dargestellte Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher Teile teilen.

4. Man soll eine perspektivisch dargestellte Strecke in einem gegebenen Verhältnis $m:n$ teilen.

Alle diese Aufgaben können mittels des Augabstandspunktes gelöst werden.

34. Aufgabe 12. Man soll die wahre Länge einer perspektivisch gezeichneten Strecke $\overline{a_2 g_2'}$ bestimmen (s. Fig. 34).

Auflösung. Liegt der eine Endpunkt a_2 der gegebenen Strecke auf G, so schneidet die Verbindungslinie $d_2 g_2'$

auf G den Punkt g aus und es ist $\overline{a_2 g}$ die wahre Länge der Strecke $\overline{ag}$.

35. Aufgabe 13. Man soll auf der perspektivisch gezeichneten Linie $a_2 0_2$ (s. Fig. 34) eine Strecke von gegebener Länge auftragen.

Auflösung. Liegt a_2 auf G, so trägt man auf G von a_2 aus die gegebene Länge nach $\overline{a_2 g}$ an und zieht $\overline{g d_2}$, so ist $\overline{a_2 g_2'}$ die Perspektive einer Strecke von der Länge $\overline{a_2 g}$.

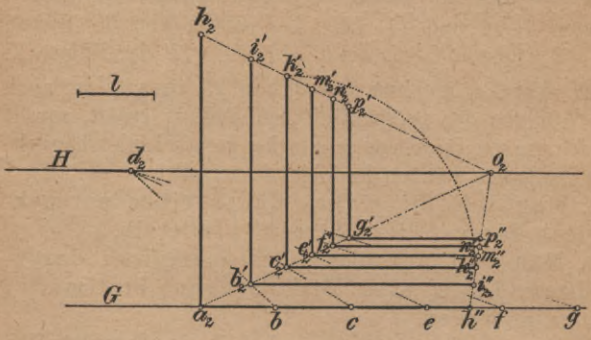


Fig. 34.

36. Aufgabe 14. Man soll eine perspektivisch gezeichnete Strecke $a_2 g_2'$ (s. Fig. 34) in eine beliebige Anzahl, z. B. fünf gleiche Teile teilen.

Auflösung. Liegt a_2 auf G, so zieht man $d_2 g_2'$ bis nach g, teilt die Strecke $\overline{a_2 g}$ in fünf gleiche Teile und zieht durch die Teilungspunkte b, c, e, f nach d_2, so ergeben sich hierdurch die perspektivischen Teilungspunkte b_2', c_2', e_2', f_2'.

37. Aufgabe 15. Man soll auf einer perspektivisch gezeichneten Geraden $a_2 0_2$ (s. Fig. 34) eine

Strecke l von gegebener Länge n mal, $n = 5$, auftragen.

Auflösung. Liegt a_2 auf G, so trägt man von a_2 aus auf letztere Linie die Strecke l fünfmal ab, und zieht durch die sich ergebenden Punkte b, c, e, f und g nach d_2. Diese Verbindungslinien schneiden auf $a_2 0_2$ die Punkte b_2', c_2', e_2', f_2' und g_2' so ab, daß die Strecken $\overline{a_2 b_2'}$, $\overline{b_2' c_2'}$, $\overline{c_2' e_2'}$, $\overline{c_2' f_2'}$, $\overline{f_2' g_2'}$ einander perspektivisch gleich sind.

38. Aufgabe 16. In irgendeinem Punkte einer perspektivisch gezeichneten Geraden $a_2 0_2$ (siehe Fig. 34) ist a) eine Lotrechte oder b) eine zur Grundlinie G Parallele von bestimmter, gegebener Länge perspektivisch zu zeichnen.

Auflösung. Man zeichnet in a_2 auf G eine Lotrechte $\overline{a_2 h_2}$ oder die Wagerechte $\overline{a_2 h''}$ gleich der wahren gegebenen Länge und zieht $h_2 0_2$ bzw. $h'' 0_2$. Soll nun etwa in c_2' die Lotrechte oder Wagerechte von der Länge $\overline{a_2 h_2}$ oder $\overline{a_2 h''}$ gezeichnet werden, so zieht man $c_2' k_2'$ lotrecht oder $c_2' k_2''$ wagerecht, dann ist $\overline{c_2' k_2'} = \overline{c_2' k_2''}$ perspektivisch gleich $\overline{a_2 h_2}$, d. h. eine lotrechte Strecke $a_2 h_2$ erscheint in dem Abstande in welchem der Punkt c von der Bildebene entfernt liegt, nur mehr in der Höhe $\overline{c_2' k_2'}$. Eine Wagerechte von der Länge $\overline{a_2 h''}$ erscheint bei c_2' nur mehr in der Länge der Strecke $c_2' k_2''$. Alle die in Fig. 34 gezogenen Lotrechten und Wagerechten sind perspektivisch gleich lang und zwar gleich $\overline{a_2 h_2}$ bzw. $\overline{a_2 h''}$.

Anmerkung 5. Liegt der eine Endpunkt des perspektivischen Bildes $\overline{a_2' b_2'}$ einer zur Bildebene senkrecht gerichteten Strecke $\overline{ab}$ nicht mehr auf G (s. Fig. 35), so schneiden die Verbindungslinien $a_2' d_2$ und $b_2' d_2$ auf G die wahre Länge $\overline{ab}$ der Strecke $\overline{ab}$ an. Statt des Aug-

abstandspunktes d_2 auf H könnte man auch irgendeinen anderen Punkt, z. B. d'', des Kreises K_d zur Konstruktion benutzen. Man braucht dann nur $a_2'b_2'$ bis zum Schnitt c mit G zu verlängern, durch c eine Parallele zu O_2d'' zu ziehen, so liefern die Verbindungslinien $d''a_2'$ und $d''b_2'$

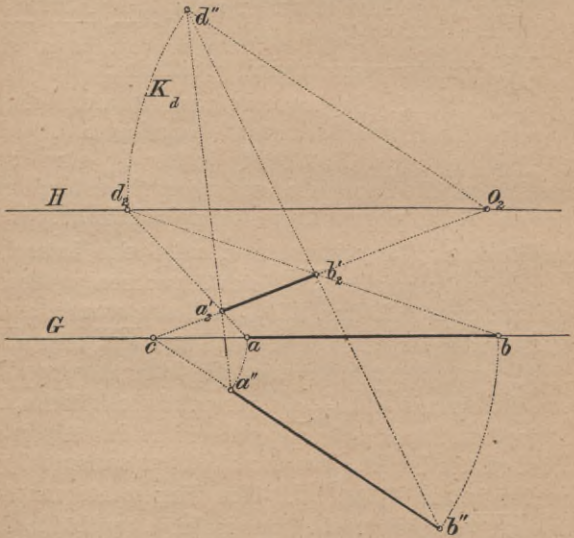


Fig. 35.

auf der genannten Parallelen die Endpunkte a'' und b'' einer Strecke $\overline{a''b''}$, gleich der wahren Länge der Strecke $\overline{ab}$.

39. Aufgabe 17. Von einem Würfel ist das perspektivische Bild $\overline{a_2'b_2'}$ (s. Fig. 36) einer Kante gegeben. Die eine die Kante ab enthaltende Würfelfläche liegt in der Grundrißebene. Man

soll das perspektivische Bild des Würfels zeichnen.

Auflösung. Man verbindet die Endpunkte a_2' und b_2' der Würfelkante mit d_2 und zieht außerdem durch a_2' die Wagerechte $a_2'b''$, so stellt $\overline{a_2'b''}$ die perspektivische Länge der durch a gehenden lotrechten und der zweiten wagerechten Würfelkante dar. Macht man also $\overline{a_2'c_2'} = \overline{a_2'b''}$

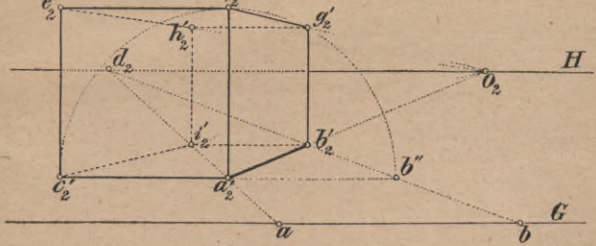


Fig. 36.

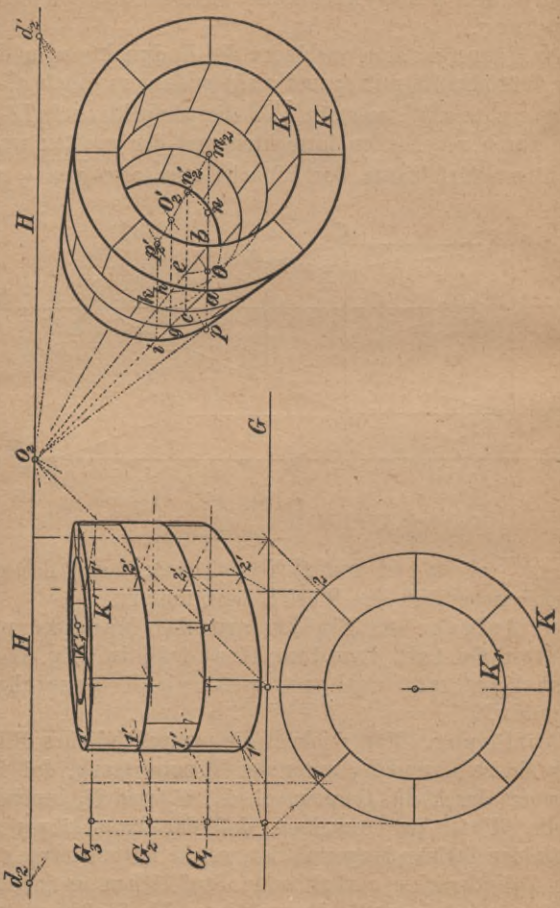
$= \overline{a_2'b''}$, so sind c_2' und f_2' Würfelecken, womit das perspektivische Bild des Würfels bestimmt ist.

40. Aufgabe 18. Ein kreisrunder Mauerkörper, dessen Gestalt aus dem Grundriß in Fig. 37 ersichtlich ist, soll perspektivisch gezeichnet werden.

Auflösung. Man zeichnet die perspektivischen Bilder der Kreise K und K_1 unter der Voraussetzung, daß ihre Ebenen durch die Geraden G, G_1, G_2 und G_3 bestimmt sind. Unter der Annahme, daß der Mauerkörper aus einzelnen Steinen hergestellt ist, welche mittels lotrechten, die Zylinderachse enthaltenden Stoßflächen aneinanderstoßen, erscheinen die Perspektiven der Stoßfugen teils

Fig. 38.

Fig. 37.



als lotrechte Linien, teils als Linien, welche nach dem perspektivischen Bilde des Mittelpunktes der obersten Begrenzungskreise gerichtet sind.

41. Aufgabe 19. Der in Aufgabe 18 bezeichnete Körper ist als Gewölbe mit zur Bildebene senkrecht stehender Achse gedacht. Man soll seine Perspektive zeichnen, wenn ein lotrechter Schnitt durch das Gewölbe mit der Bildebene zusammenfällt.

Auflösung. Die Kreise K und K_1 (s. Fig. 38) liegen in der Bildebene und stellen sich in wahrer Größe dar. Die Mittelpunkte der übrigen Kreise liegen auf der Verbindungslinie $m_2 0_2$ in n_2', $0_2'$, p_2' und ergeben sich, wenn man $m_2 p$ parallel zu H zieht und die Strecken $\overline{m_2 n} = \overline{no} = \overline{op}$ gleich den Abständen der Kreisebenen voneinander abträgt und von den Punkten n, 0 und p nach d_2' zieht. Die Wagerechten durch n_2', $0_2'$, p_2' schneiden auf den Linien $a 0_2$ und $b 0_2$ die zu den Mittelpunkten n_2', $0_2'$, p_2' gehörigen Kreishalbmesser ab.

42. Aufgabe 20. Der in Aufgabe 18 bezeichnete Körper ist als Gewölbe mit wagerechter, zur Bildebene paralleler Achse gedacht. Man soll seine Perspektive zeichnen (s. Fig. 39).

Auflösung. Die Konstruktion des perspektivischen Bildes eines jeden Kreises erfolgt in gleicher Weise, wie in Aufgabe 18 gezeigt worden ist, unter Benutzung der Geraden S, S_1, S_2 und S_3 als Schnittlinien der Kreisebenen mit der Bildebene.

43. Aufgabe 21. In einer zur Bildebene senkrechten, lotrechten Mauer ist ein Fenster angebracht, dessen Ausmaße einerseits durch einen lotrechten Schnitt A durch die Fensterachse,

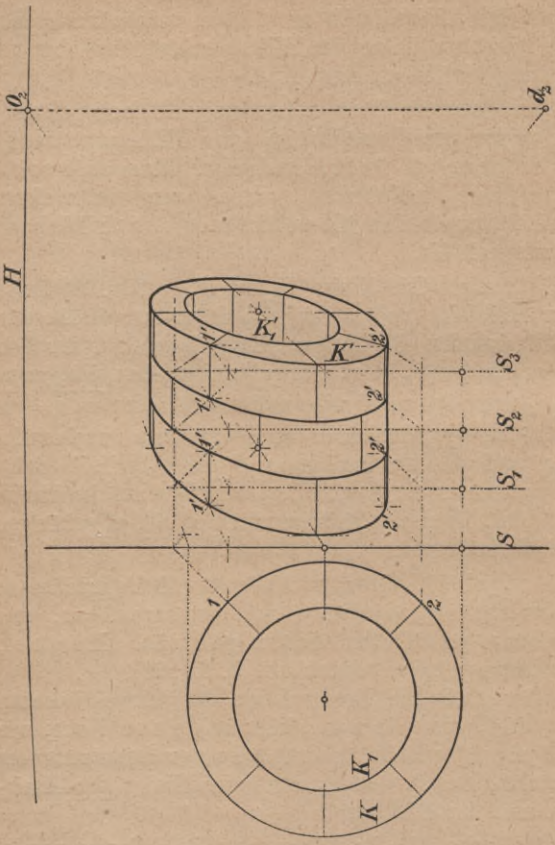


Fig. 39.

andererseits durch die Umlegung B der inneren Fensterwand mit der Projektion des Fensters um diese in die Bildebene gegeben sind (siehe

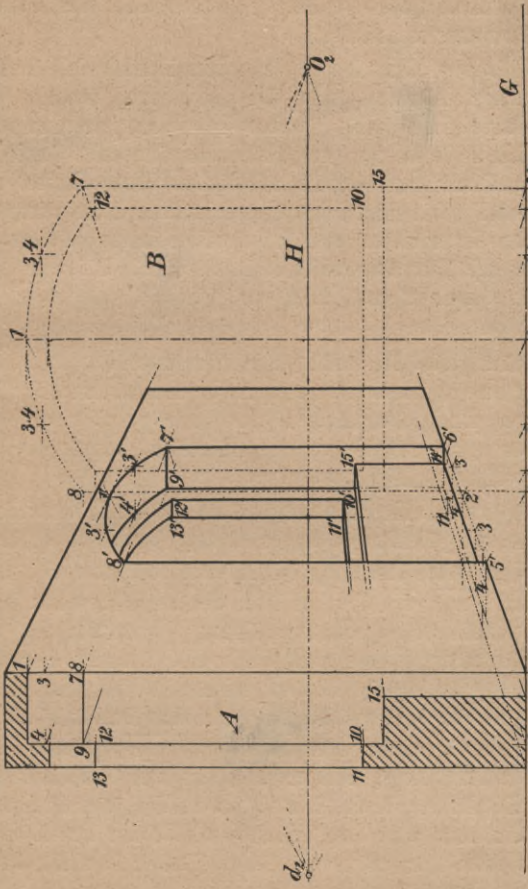


Fig. 40.

Fig. 40). Man soll die Perspektive der Wand mit dem Fenster zeichnen.

Auflösung. Man kennt von jedem Punkte den Aufriß und seinen Abstand von der Bildebene, womit die Perspektive eines jeden Punktes bestimmt ist. Im vorliegenden Falle ist der perspektivische Grundriß des Fensters ermittelt worden; die wirklichen Perspektiven der einzelnen Punkte liegen dann lotrecht über ihren perspektivischen Grundrissen und auf den Verbindungslinien der Aufrisse mit dem Augpunkt, z. B. der Punkt $1'$ in der Lotrechten durch $2'$ auf $2 \cdot 0_2$ und der Verbindungslinie $1 \cdot 0_2$ usw.

44. Aufgabe 22. Ein Tonnengewölbe mit zur Bildebene senkrecht stehender Achse mit Stichkappen und Gurtbogen ist perspektivisch zu zeichnen, wenn die erforderlichen Ausmaße bekannt sind (s. Fig. 41).

Auflösung. Das Tonnengewölbe ist durch den Halbkreis A, die Stichkappe durch B, der Gurtbogen durch C festgelegt, wenn durch $\overline{a_2 c}$ der Abstand der Lotrechten ab und durch $\overline{a_2 g}$, $\overline{a_2 h}$ die Abstände der lotrechten zur Bildebene parallelen Begrenzungsflächen des Gurtbogens von der Bildebene gegeben sind. Die Konstruktion der einzelnen Punkte erfolgt in der gleichen Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe. Um z. B. den Punkt $1'$ zu erhalten, der in einem Abstande gleich $\overline{a_2 c}$ von der Bildebene entfernt liegt, zieht man $c d_2$ bis zum Schnitt a' mit $a_2 0_2$. Die Lotrechte durch a' liefert auf $b_2 0_2$ den Punkt b'. Projiziert man nun den Schnittpunkt 1 der durch b_2 zu G gezogenen Parallelen mit A auf G nach 1, zieht durch lezteren Punkt 1 nach 0_2 und durch a' parallel zu G, so ergibt sich der perspektivische Grundriß $1'$ von $1'$.

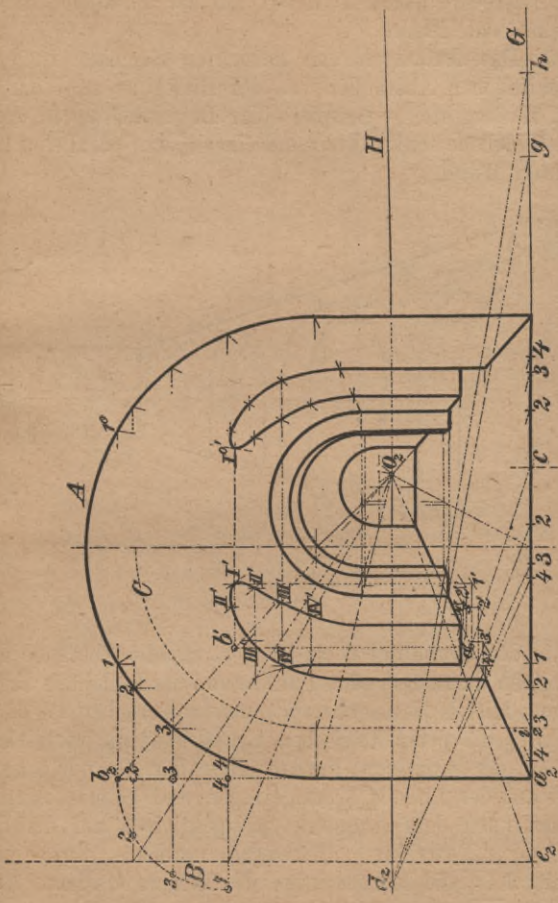


Fig. 41.

Die Lotrechte durch $1'$ liefert auf der Parallelen durch b' zu G den Punkt I'.

45. Das Auftragen von lotrechten Strecken in vorgeschriebenen Abständen von der Bildebene zeigt das in Fig. 42 dargestellte Beispiel einer Bogenstellung in einer zur Bildebene senkrechten und einer hierzu parallelen lotrechten Wand.

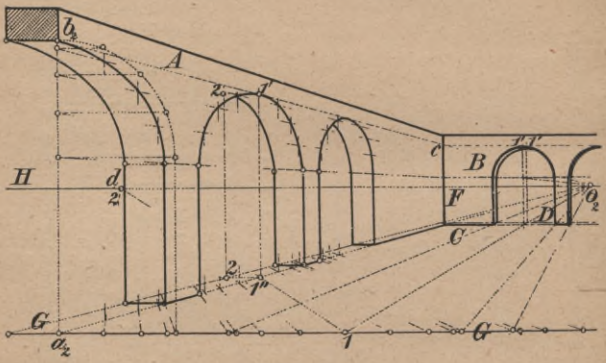


Fig. 42.

Auf der Grundlinie G sind von a_2 aus die Abstände der einzelnen darzustellenden Punkte von der Bildebene abgetragen. Mittels des Augabstandspunktes d_2 ergeben sich dann auf $a_2 0_2$ die perspektivischen Grundrisse; die wirklichen Höhen der einzelnen Punkte über der Grundrißebene sind auf der Linie $a_2 b_2$ aufgetragen und können mittels Linien nach dem Augpunkt perspektivisch auf die betreffenden Lotrechten übertragen werden. Für einen Punkt *1* ist die Konstruktion deutlich zu ersehen. Die Strecke $\overline{a_2 1}$ gibt auf G den Abstand des Punktes *1* von

der Bildebene an, die Strecke $\overline{a_2 b_2}$ ist sein Abstand von der Grundrißebene. Von *1* auf *G* ist nach d_2 gezogen bis zum Schnitt *1''* mit $a_2 0_2$. Die Lotrechte durch *1''* liefert auf $b_2 0_2$ die Perspektive *1'*.

Die Punkte *1* in der Wand *B* ergeben sich, wenn man von *1* auf *G* nach 0_2 zieht bis zum Schnitt mit den Geraden *C* und *D*; die Lotrechten in diesen Schnittpunkten enthalten die Punkte *1'*. Die Linie $b_2 0_2$ schneidet die Schnittlinie von *A* und *B* in einem Punkte *c*, die Wagerechte durch *c* enthält den in *B* liegenden Punkt *1'*, die durch letzteren nach 0_2 gezogene Linie liefert den in der lotrechten Ebene durch *D* liegenden Punkt *1'*.

In Fig. 42 erkennt man deutlich, wie die perspektivischen Bilder gleich langer Lotrechten sich immer mehr verkürzen, je weiter die Linien von der Bildebene abstehen.

b) Verfahren mit Verwendung eines verkleinerten Augabstandes.

46. Die bisherigen Konstruktionen nach dem Augabstandspunktverfahren setzen das Vorhandensein eines Augabstandspunktes auf der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche voraus. Wird der Augabstand aber sehr groß, so kann es leicht vorkommen, daß der Augabstandspunkt über die Grenze der vorhandenen Zeichenfläche hinausfällt, also unzugänglich wird. In diesem Falle versagen die bisherigen Konstruktionen. Man hilft sich dann in folgender Weise:

Ist a_2 der Aufriß eines Punktes *a* (s. Fig. 43) und $\overline{a_2 a_1}$ sein Abstand von der Bildebene, so erhält man mit Benutzung des Augabstandspunktes d_2 und dem Abstand $\overline{a_2 a_1}$ in bekannter Weise die Perspektive a_2' des Punktes *a*.

Nimmt man nun auf H einen Punkt $\frac{d_2}{2}$ in der Mitte von $\overline{o_2 d_2}$ an und zieht von $\frac{d_2}{2}$ nach a_2', so ist unmittelbar zu erkennen, daß die Strecke $\overline{a_2 f} = \overline{\frac{1}{2} ac}$, d. h. gleich dem

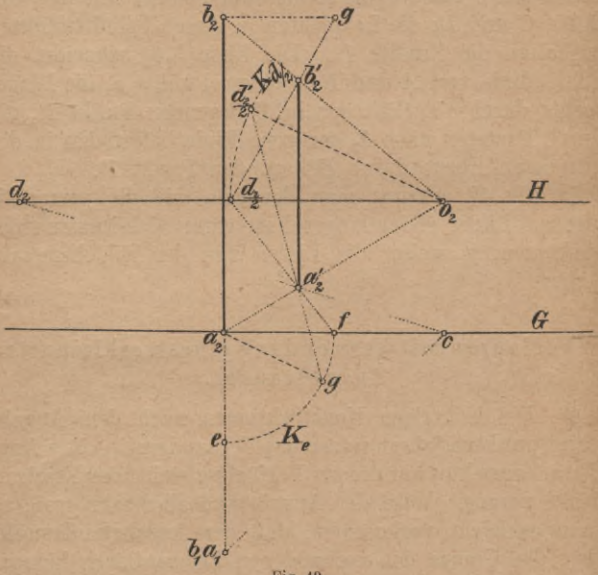


Fig. 43.

halben Abstand des Punktes a von der Bildebene ist. Man kann also auch den Punkt $\frac{d_2}{2}$ zur Konstruktion des perspektivischen Bildes des Punktes a benutzen; man zieht $a_2 0$ und trägt auf G die Strecke $\overline{a_2 f}$ gleich dem halben

Abstand des Punktes a von der Bildebene ab. Die Verbindungslinie $f\frac{d_2}{2}$ liefert auf $a_2 0_2$ die Perspektive a_2' von a.

Die gleiche Konstruktion läßt sich in jeder Höhenlage über oder unter G ausführen, z. B. für den Punkt b_2; $\overline{b_2 g}$ gleich $\overline{a_2 f}$ gleich dem halben Abstand des Punktes b von der Bildebene.

Anstatt die Punkte f und $\frac{d_2}{2}$ auf G bzw. H zu benutzen, kann man auch um 0_2 mit einem Halbmesser gleich dem halben Augabstande einen Kreis $K_{d/2}$ und um a_2 einen Kreis K_e mit einem Halbmesser gleich dem halben Abstande des Punktes a von der Bildebene beschreiben. Zieht man dann in diesen Kreisen zwei parallele, entgegengesetzt gerichtete Halbmesser $\overline{0_2 \frac{d_2'}{2}}$ und $\overline{a_2 g}$, so liefert die Verbindungslinie $\frac{d_2'}{2} g$ auf $a_2 0_2$ ebenfalls das perspektivische Bild a_2' von a. Dieses Verfahren bezeichnet man als Augabstandspunktverfahren mit verkleinertem Augabstande. Hierbei kann die Strecke $\overline{0_2 \frac{d_2}{2}}$ irgendein Bruchteil des Augabstandes, z. B. $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ sein; dann wird aber auch die Strecke $\overline{a_2 f}$ denselben Bruchteil des Abstandes des in Rede stehenden Punktes von der Bildebene betragen müssen. Einige Beispiele sollen die Anwendung des Verfahrens zeigen.

47. Aufgabe 23. Die in Fig. 44 im Aufriß, in Fig. 45 im Grundriß gegebene Säule ist perspektivisch zu zeichnen unter Benutzung des halben Augabstandes.

Auflösung. Die Konstruktion wird ganz in der Weise, wie in 46 gezeigt worden, ausgeführt, und zwar konstruiert

Fig. 46.

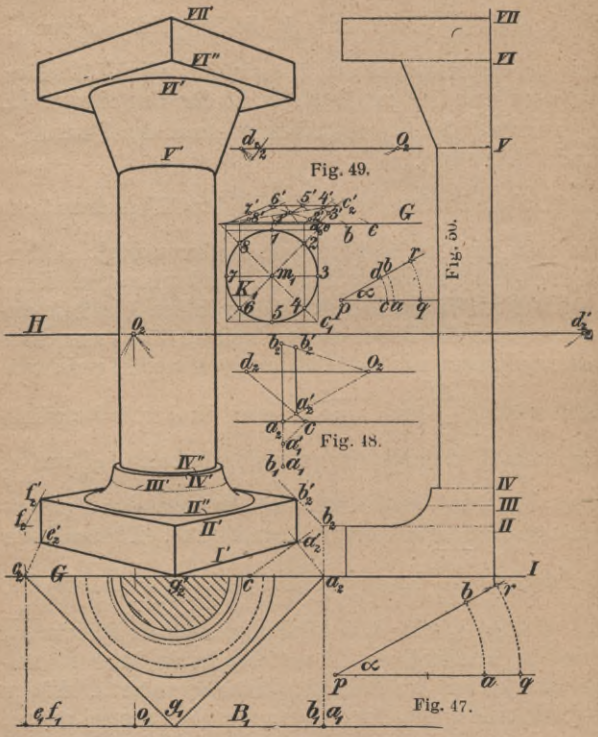


Fig. 45.

Fig. 44.

man die in den Wagerechten I bis *VII* gelegenen Quadrate bzw. Kreise. Die lotrechte Kante durch *g* ist in der Bildebene angenommen. In Fig. 46 ist die Konstruktion der Perspektiven der Punkte *a* und *b*, ebenso *e* und *f* angegeben.

Der Abstand $\overline{a_2 a_1}$ (Fig. 45) wird mittels eines Hilfswinkels α (s. Fig. 47) gehälftet. Es ist Fig. 47 $\overline{pq} = \overline{pr}$

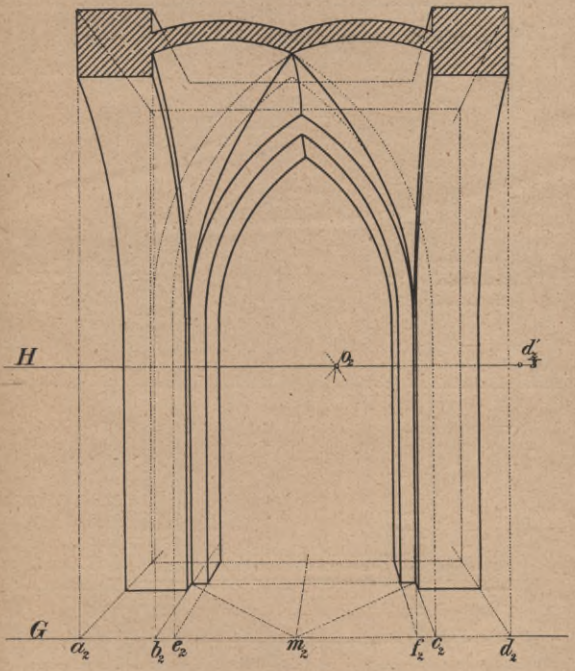


Fig. 51.

$= 2$ und $\overline{qr} = 1$. Hieraus bestimmt sich α, ferner ist $\overline{pa}$ Fig. 47 $= \overline{a_2 a_1}$ Fig. 45 $\overline{pb} = \overline{pa}$ Fig. 47, dann ist $\overline{ab}$ Fig. 47 $= \frac{1}{2}\overline{ap}$ Fig. 47 $= \overline{a_2 c}$ Fig. 46. Die Verbindungs-

linien $a_2 0_2$ und $c \frac{d_2'}{2}$ liefern a_2'. Die Lotrechte durch a_2' liefert im Schnitt mit $b_2 0_2$ die Perspektive b_2' von b.

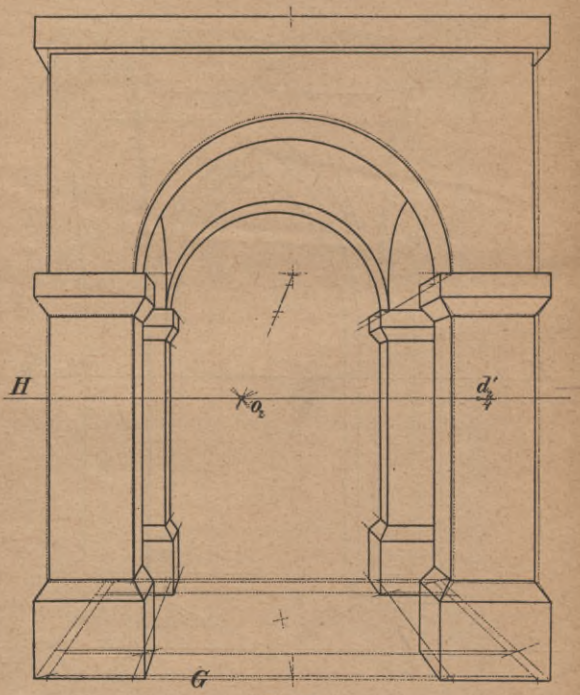


Fig. 52.

Mittels der Linien $e_2 0_2$ und $f_2 0_2$ und der Parallelen durch a_2' und b_2' zu G ergeben sich e_2' und f_2' usw.

In Fig. 48 ist die Konstruktion des perspektivischen Bildes einer lotrechten Strecke $a_2 b_2$ noch besonders

Fig. 54.

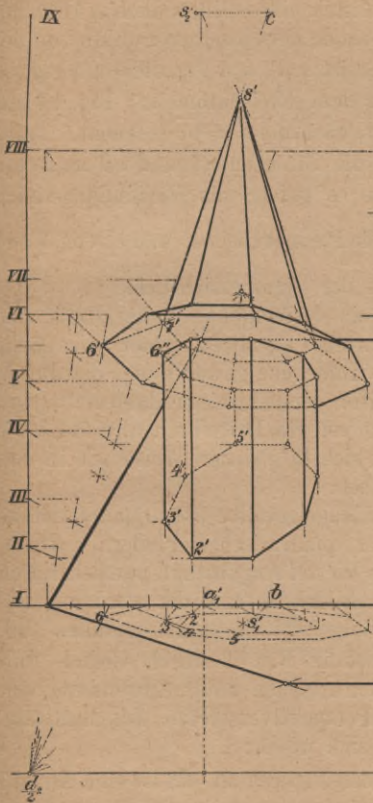
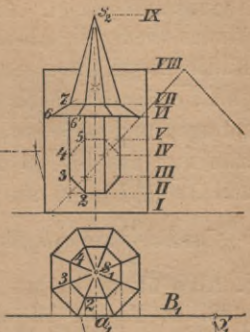


Fig. 53.



herausgezeichnet worden; in Fig. 49 ist die Perspektive eines wagerechten Kreises unter Anwendung vom halben Augabstand gezeigt. Mittels eines Hilfswinkels α (Fig. 50) werden wieder die Abstände der einzelnen Punkte von der Bildebene gehälftet. So ist z. B. $\overline{a_2 3}$ Fig. 49 $= \overline{pa}$ Fig. 50 und $\overline{pc}$ Fig. 50 gleich dem Kreishalbmesser Fig. 49 angetragen und $\overline{pb} = \overline{pa}$, ebenso $\overline{pd} = \overline{pc}$ gemacht. Trägt man nun aus Fig. 50 die Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ nach $\overline{a_2 b}$ und $\overline{bc}$ in Fig. 49 ab, so liefern die Verbindungslinien $b\frac{d_2}{2}$ und $c\frac{d_2}{2}$ auf $a_2 0_2$ die Perspektiven $3'$ und c_2' von 3 und c. Alles übrige ist aus der Figur ersichtlich.

48. In Fig. 51 ist ein lotrechter Schnitt durch den Scheitel eines Kreuzgewölbes parallel zu einer Stirnfläche gezeichnet, letztere als Bildebene gewählt und die durchschnittene Gewölbehälfte perspektivisch dargestellt, und zwar unter Anwendung von ein Drittel Augabstand. Die Konstruktion vollzieht sich in gleicher Weise wie in den vorhergehenden Aufgaben.

49. In Fig. 52 ist ein Kugelgewölbe über quadratischem Grundriß, das auf vier quadratischen Pfeilern aufruht, unter Annahme von ein Viertel Augabstand perspektivisch gezeichnet, wobei die Bildebene mit der vorderen Begrenzungsfläche der Säulenkapitäle zusammenfallen soll.

50. In Fig. 54 ist das in Fig. 53 durch Grund- und Aufriß dargestellte Dachtürmchen unter Anwendung von halbem Augabstand in Perspektive gesetzt. Die Maßstäbe der Figuren verhalten sich wie 1 : 3.

Anmerkung 6. In den Figuren 55—73 ist eine Anzahl von Übungsbeispielen zusammengestellt, welche der Leser nach den vorangegangenen Erörterungen über das Augabstandspunktverfahren selbständig bearbeiten kann. Be-

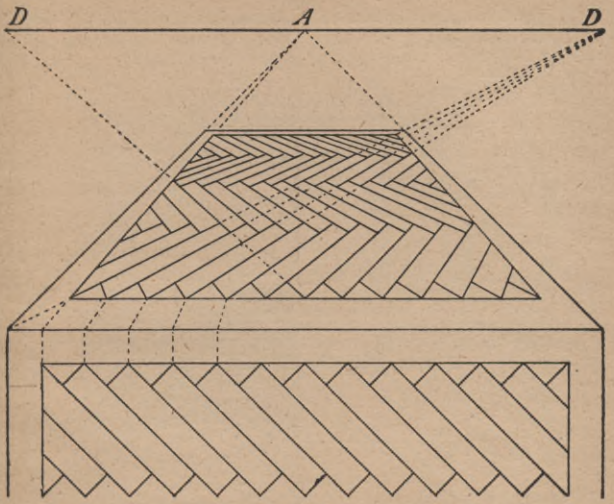


Fig. 55.

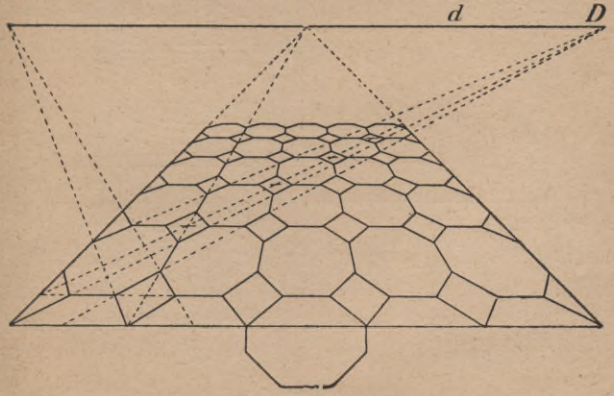


Fig. 56.

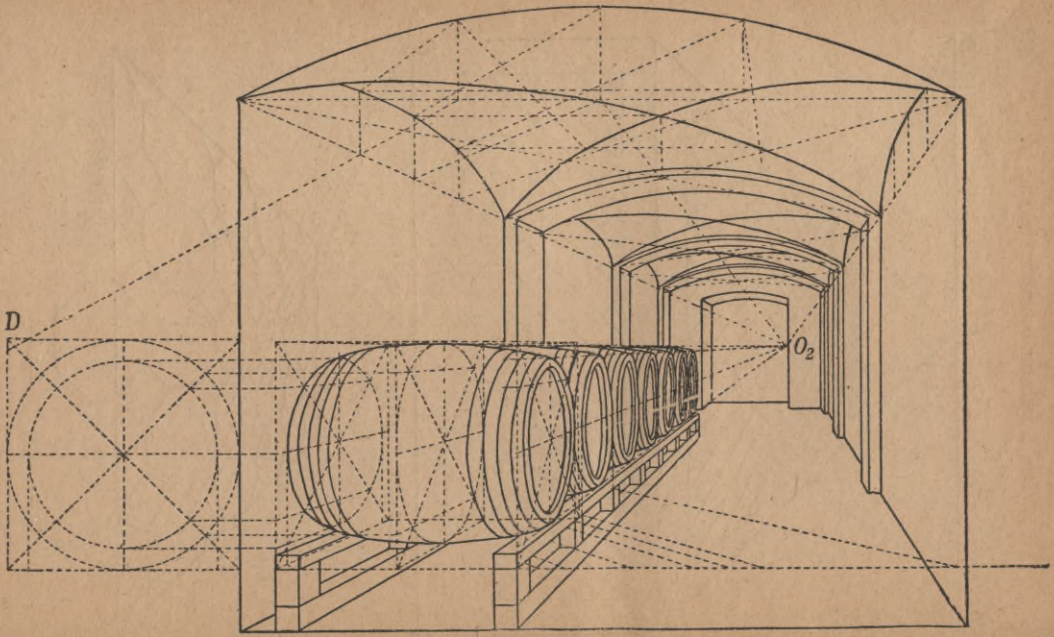


Fig. 57.

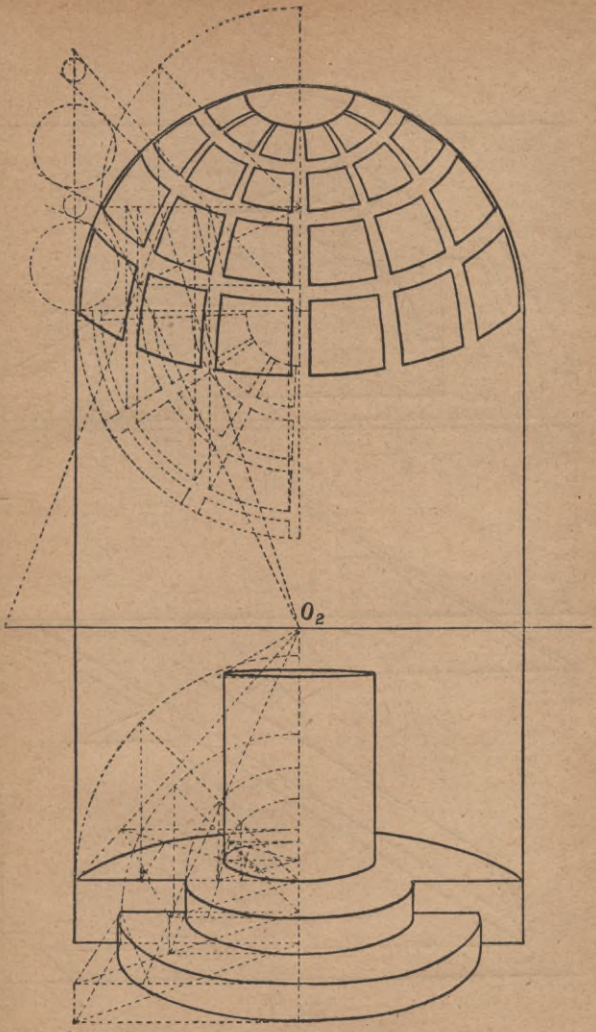


Fig. 58.

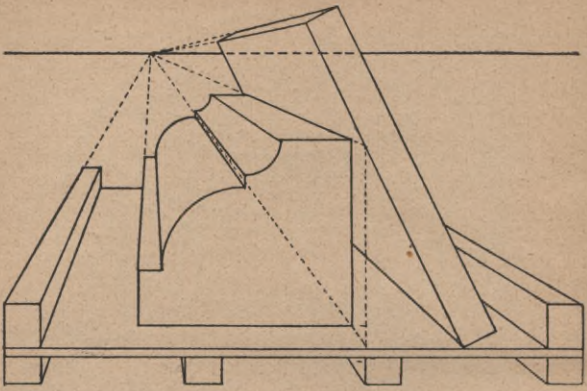


Fig. 59.

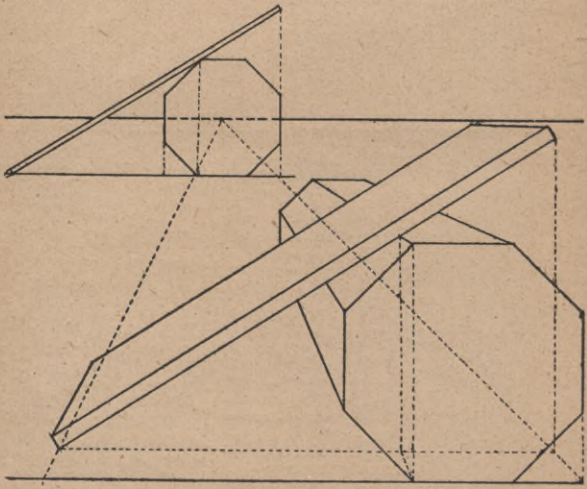


Fig. 60.

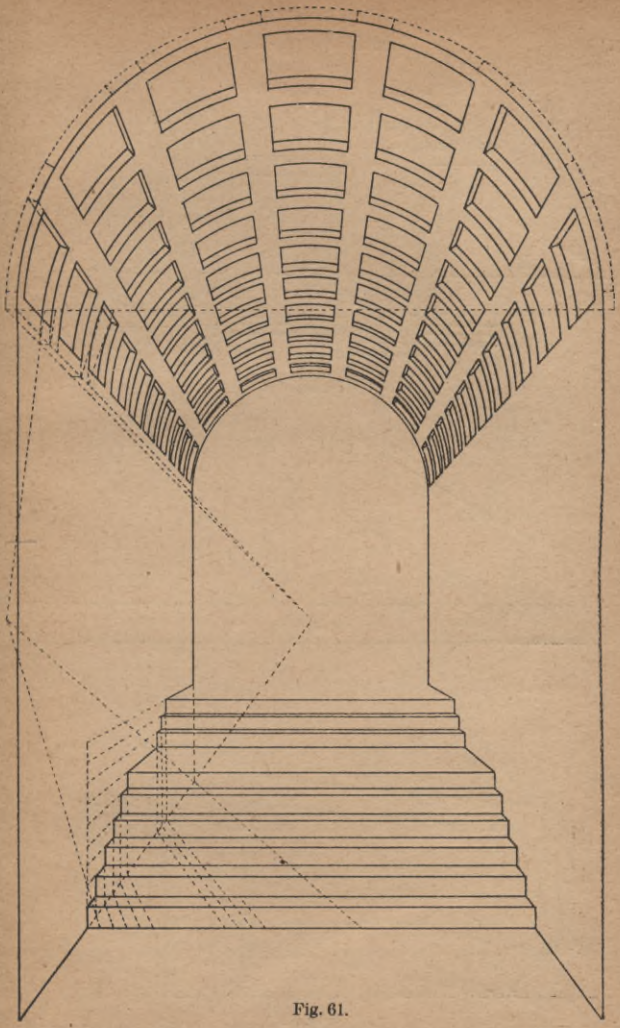


Fig. 61.

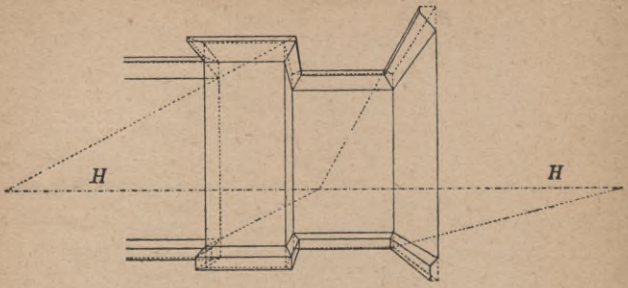
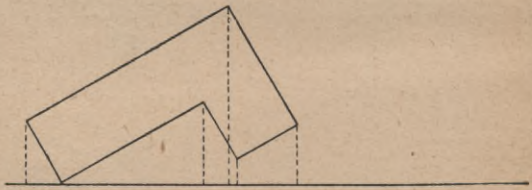


Fig. 62.



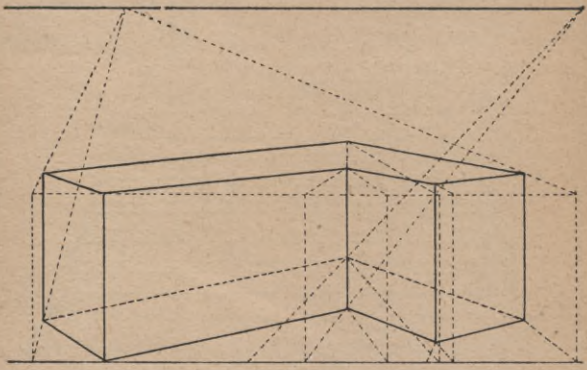


Fig. 63.

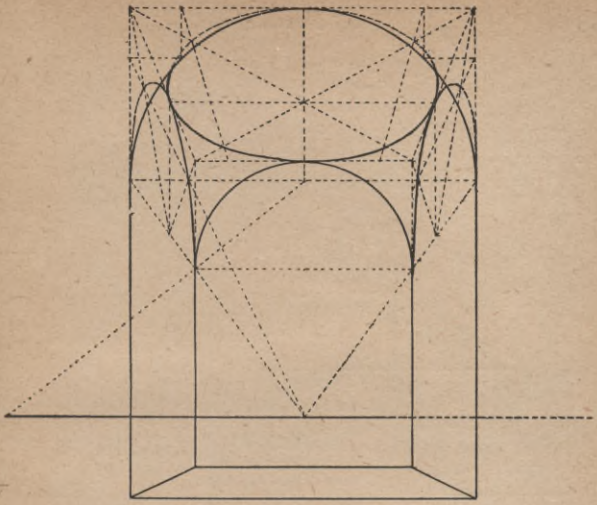


Fig. 64.

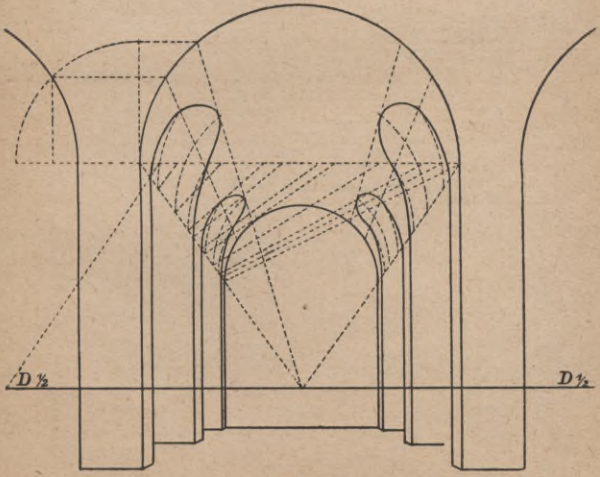


Fig. 65.

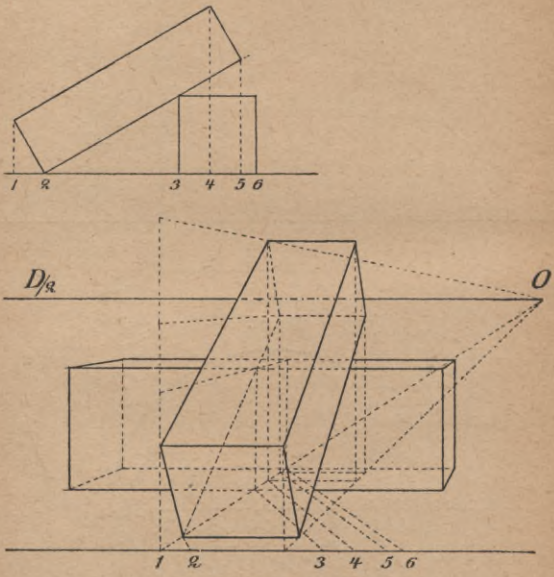


Fig. 66.

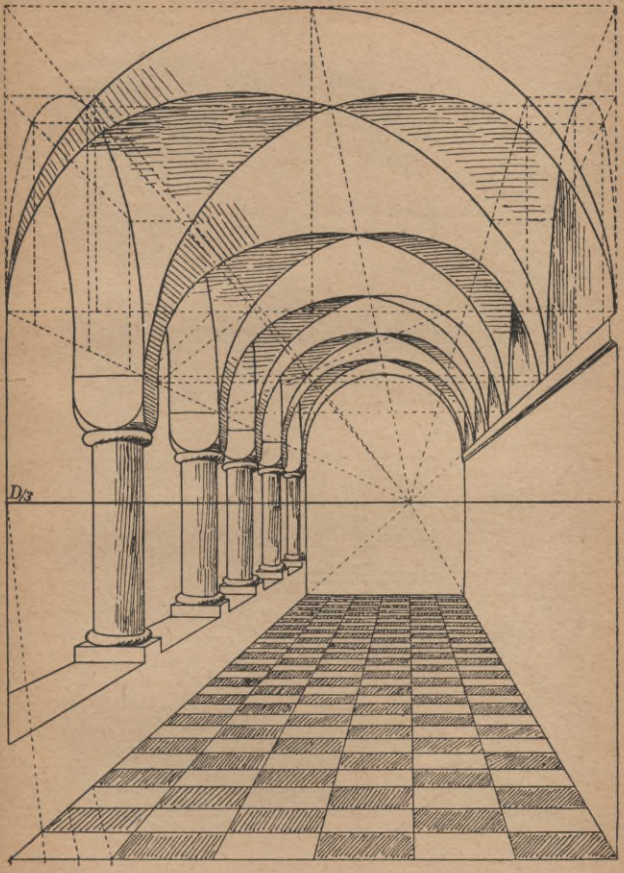


Fig. 67.

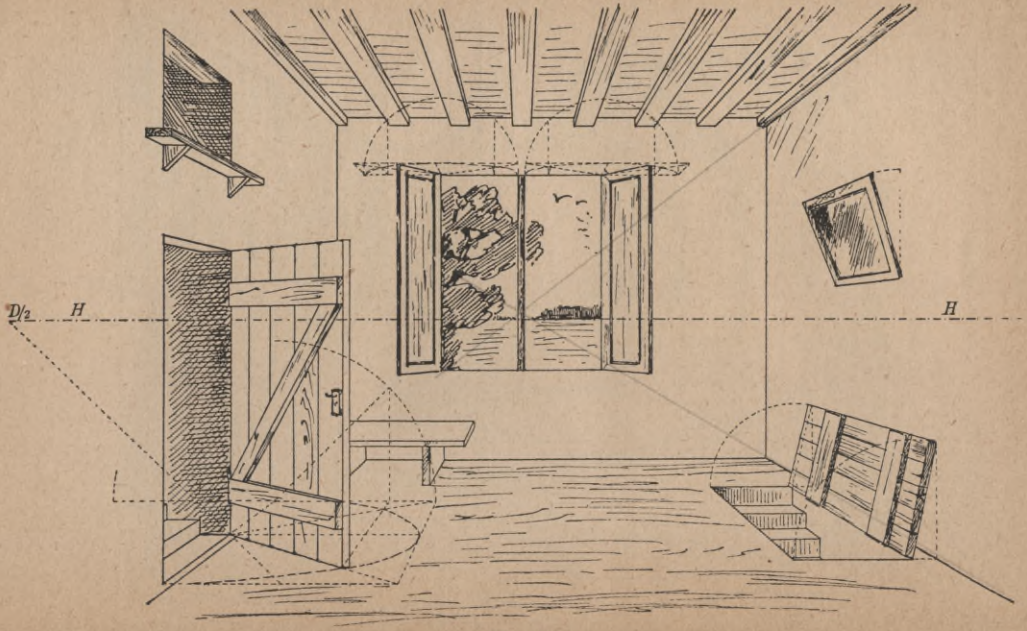


Fig. 68. 8.

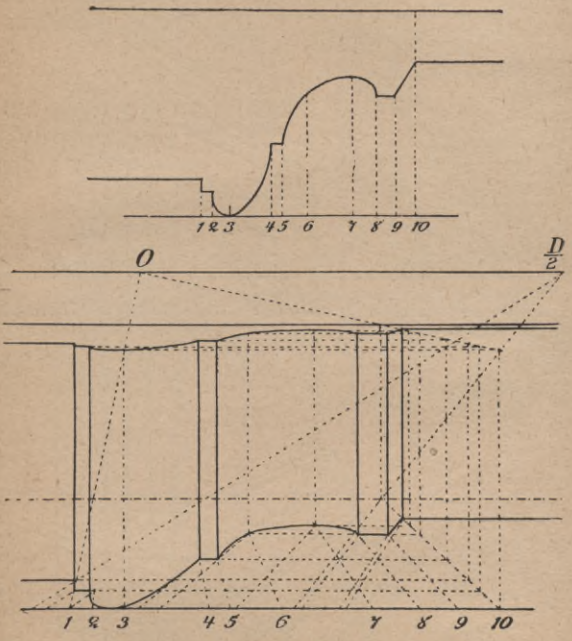


Fig. 69.

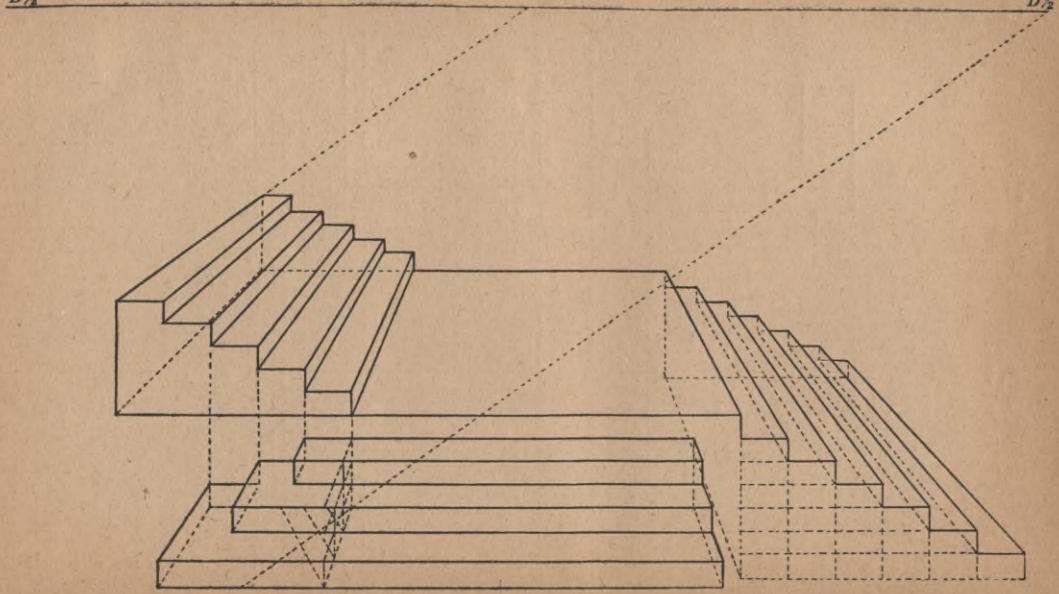


Fig. 70.

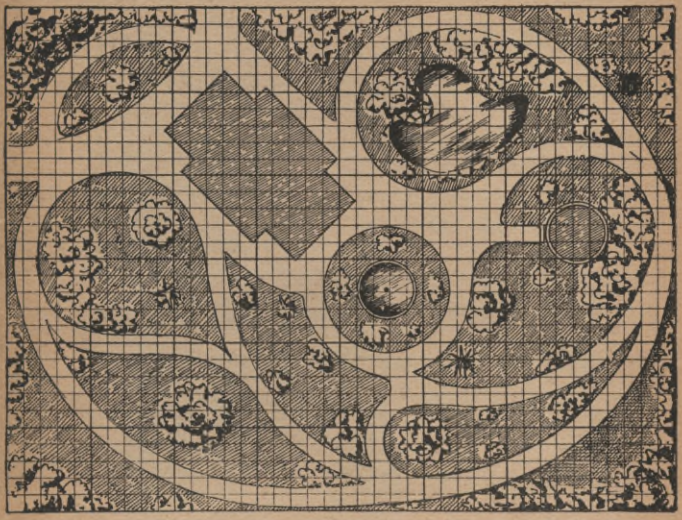


Fig. 71.

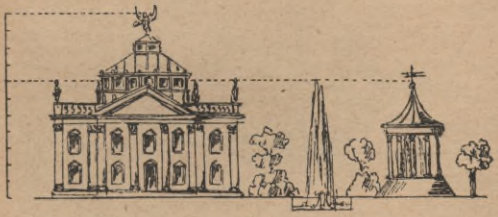


Fig. 72.

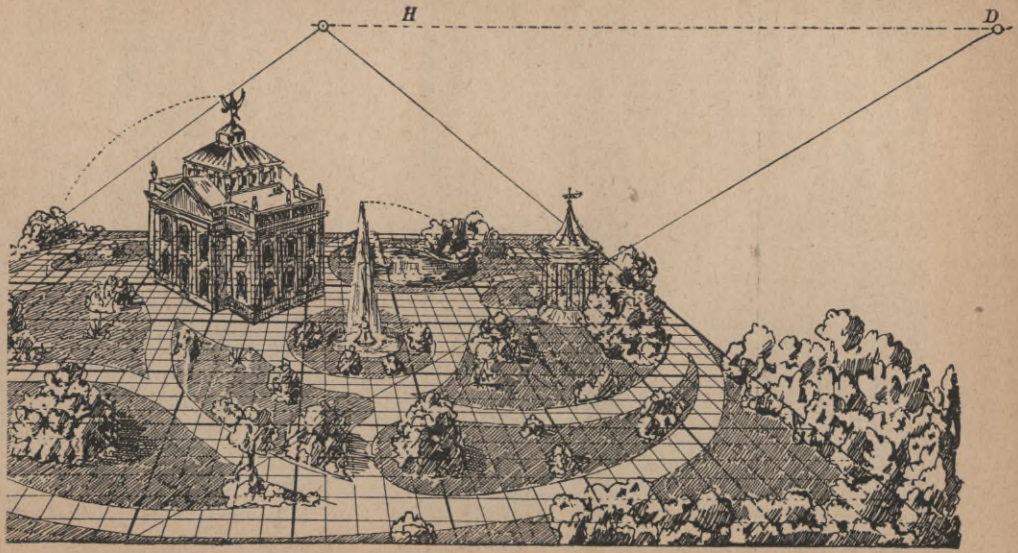


Fig. 73.

züglich des Beispieles in Fig. 71—73 mag noch bemerkt werden, daß über dem rechtwinkligen Grundriß (Fig. 71) ein Quadratnetz gezogen ist, das perspektivisch dargestellt wird. In dieses perspektivische Netz werden die darzustellenden Punkte nach dem Augenmaße eingetragen. Die Länge der Quadratseite wird zweckmäßig auch als Einheit für den Höhenmaßstab festgesetzt, wodurch dann das Auftragen der Höhen in jeder perspektivischen Tiefe leicht erfolgt. In der Figur 73 ist für einzelne Punkte dieses Auftragen der Höhen gezeigt.

In den Fig. 55, 56, 57, 61, 62, 63, 64 und 73 ist mit ganzem Augabstand konstruiert, in den Fig. 58 und 67 mit ein Drittel Augabstand. In den Fig. 59 und 60 treten nur Linien auf, welche zur Bildtafel parallel oder senkrecht gerichtet sind. Die hintere Abgrenzung der Körper ist parallel zur vorderen in beliebigem Abstande von der Bildebene anzunehmen.

In den Fig. 66, 68, 69, 70 ist halber Augabstand verwendet.

Das Fluchtpunktverfahren.

a) Die Fluchtpunkte sind zugänglich.

51. Bei diesem Konstruktionsverfahren benutzt man zur Bestimmung der Perspektive eines Punktes entweder zwei beliebige, aufeinander senkrecht stehende wagerechte Linien A_1 und B_1 (s. Fig. 74), bestimmt deren Fluchtpunkte f_2' und f_2, indem man die durch das Auge gedachte wagerechte Ebene um ihren Schnitt H mit der Bildebene in letztere umlegt und durch das umgelegte Auge $0'$ Parallelen zu den Grundrissen A_1 und B_1 bis zum Schnitt f_2' und f_2 mit H zieht. Die Perspektiven A_2' und B_2' gehen durch die Schnittpunkte c und e von A_1 und B_1 mit G und durch die Fluchtpunkte f_2' und f_2 bzw. und schneiden sich in der

Perspektive a_2' des Punktes a. Liegt der darzustellende Punkt b nicht in der Grundrißebene G, sondern in einer beliebigen Wagerechten I, so projiziert man die Punkte c und e nach c' und e' auf I und verfährt im übrigen wie vorhin.

Anmerkung 7. Anstatt der Geraden A_1 und B_1 kann man auch nur eine von ihnen, etwa A_1 oder B_1, sowie

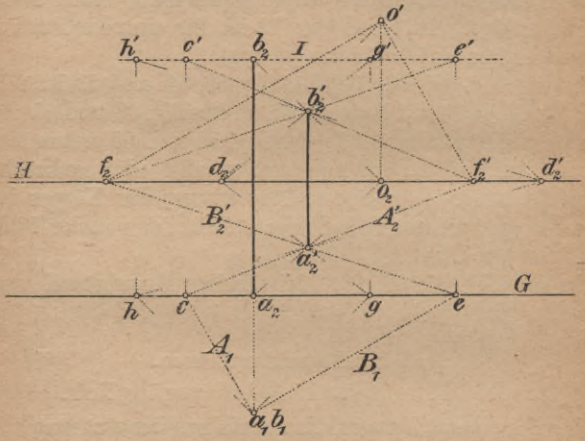


Fig. 74.

die durch den Punkt a gehende Senkrechte zur Bildebene zur Konstruktion des perspektivischen Bildes von a benutzen. Man erhält dann a_2' als Schnitt von A_2' oder B_2' mit $a_2 o_2$; entsprechend verfährt man auch in I. Ebenso läßt sich je eine der beiden Geraden A_1 oder B_1 mit einer zu a unter 45^0 zur Bildebene geneigten Geraden, z. B. $a_1 g$ oder $a_1 h$, zur Konstruktion des perspektivischen Bildes von a verwenden.

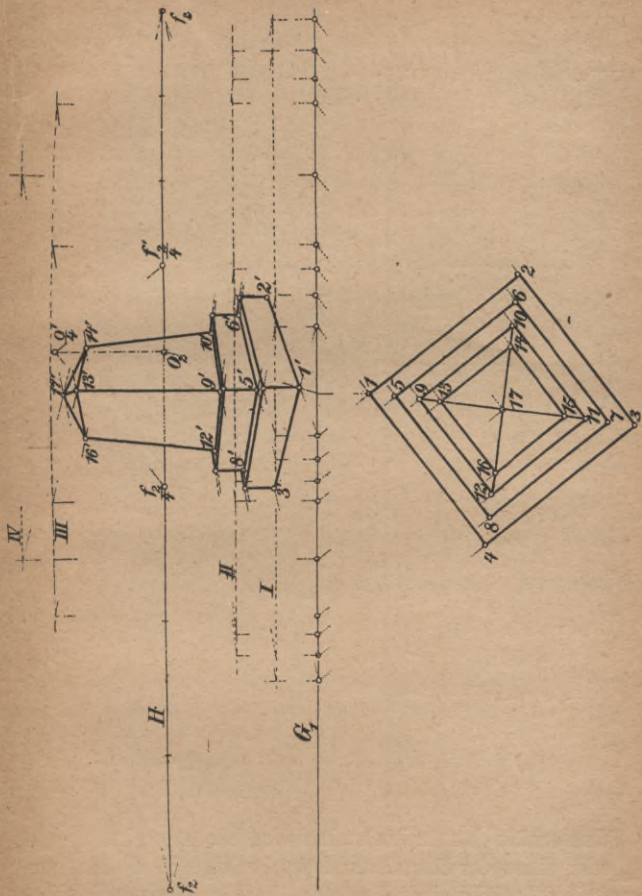


Fig. 75.

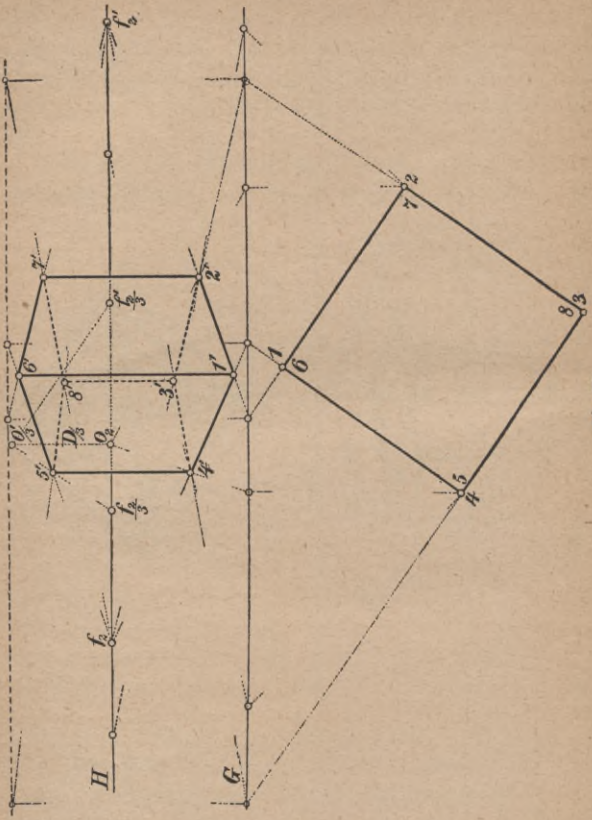


Fig. 76.

Man erhält dann mittels eines der Fluchtpunkte f_2' und f_2 oder eines der Augabstandspunkte d_2 und d_2' das perspektivische Bild eines Punktes. In Fig. 74 sind die diesbezüglichen Linien angedeutet.

52. Das Fluchtpunktverfahren wird man vornehmlich verwenden bei parallelepipedisch geformten Körpern, indem man die Fluchtpunkte der wagerechten Körperkanten bestimmt und diese zur Konstruktion des perspektivischen Bildes der einzelnen Punkte am Körper, wie vorstehend angegeben, verwendet. In Fig. 75 und 76 sind einzelne Beispiele nach dem Fluchtpunktverfahren ausgeführt. Fig. 75 zeigt den schon früher in Fig. 31 und 32 behandelten Körper; in Fig. 76 ist ein rechtwinkliges Parallelepiped in beliebiger schräger Stellung seiner wagerechten Kanten zur Bildebene perspektivisch gezeichnet. Die Konstruktionen sind so deutlich ausgeführt, daß sie aus den Figuren entnommen werden können.

Anmerkung 8. Bezüglich der Bestimmung der Fluchtpunkte der wagerechten Körperkanten soll hier noch einiges bemerkt werden. Anstatt in 0_2 senkrecht zu H den ganzen Augabstand aufzutragen, kann man auch einen Bruchteil desselben, z. B. $^1/_4$ (Fig. 75) oder $^1/_3$ (Fig. 76), davon benutzen und durch den Endpunkt $\frac{0'}{4}$ oder $\frac{0'}{3}$ Parallele zu den wagerechten Körperkanten ziehen. Man braucht dann nur die Strecken $0_2\,\frac{f_2}{4}$, $0_2\,\frac{f_2'}{4}$ (Fig. 75), $0_2\,\frac{f_2}{3}$, $0_2\,\frac{f_2'}{3}$ (Fig. 76) viermal bzw. dreimal von 0_2 aus auf H abzutragen, um die richtigen Fluchtpunkte f_2 bzw. f_2' zu erhalten.

Bestimmung der wahren Länge einer perspektivisch gegebenen wagerechten Strecke. Teilungspunkt, Teilungskreis, Neigungswinkel einer wagerechten Geraden mit der Bildebene, perspektivische Teilung.

53. Ist $a_2'b_2'$ das perspektivische Bild einer wagerechten Strecke (s. Fig. 77) und $0'$ das umgelegte Auge, so ergibt

sich im Schnitt der verlängerten $a_2'b_2'$ mit G und H bzw. der Schnittpunkt c der Geraden ab mit der Bildebene, sowie ihr Fluchtpunkt f_2. Die Verbindungslinie $0'f_2$ liefert die Umlegung des Parallelstrahles der Geraden ab in die Bildebene. Eine Parallele durch c zu $0'f_2$ gibt daher die Umlegung der Geraden ab in die Bildebene. Zieht man von $0'$ nach a_2' und b_2', so liefern diese Verbindungslinien auf der umgelegten Geraden ab die Endpunkte a_1 und b_1 der Strecke $\overline{ab}$, d. h. $\overline{a_1b_1}$ ist die wahre Länge von $\overline{ab}$. Zieht man noch $0_2a_2'$ und $0_2b_2'$, so treffen diese Linien die Grundlinie G in den Punkten a_2 und b_2, den Aufrissen der Punkte a und b und es stehen die Verbindungslinien a_2a_1 und b_2b_1 senkrecht zu G. Beschreibt man um f_2 einen durch $0'$ gehenden Kreis K_t bis zum Schnitt t mit H, so wird, wenn man ta_2' zieht bis zum Schnitt a'' mit G, $\overline{ca''} = \overline{ca_1}$ sein, ebenso ist, wenn man tb_2' bis zum Schnitt b'' mit G zieht, $\overline{cb''} = \overline{cb_1}$.

Würde man auf dem Kreise K_t einen willkürlichen Punkt q wählen und von f_2 nach diesem Punkte q und durch c eine Parallele hierzu ziehen, so würden die Verbindungslinien qa_2' und qb_2' auf der letztgenannten Parallelen ebenfalls eine Strecke gleich der wahren Länge von $\overline{ab}$ ausschneiden.

54. Umgekehrt läßt sich nunmehr auch auf einer perspektivisch gezeichneten Linie cf_2 von einem Punkte a_2' aus eine Strecke von gegebener Länge perspektivisch antragen. Man verschafft sich den Punkt $0'$, zieht durch c eine Parallele zu $0'f_2$, sowie die Linie $0'a_2'$ bis zum Schnitt a_1 mit der genannten Parallelen und trägt nun auf letzterer von a_1 die gegebene Strecke nach $\overline{a_1b_1}$ ab. Die Verbindungslinie b_10' liefert auf cf_2 den Punkt b_2', so daß die Strecke $\overline{a_2'b_2'}$ perspektivisch gleich der Länge $\overline{a_1b_1}$ ist.

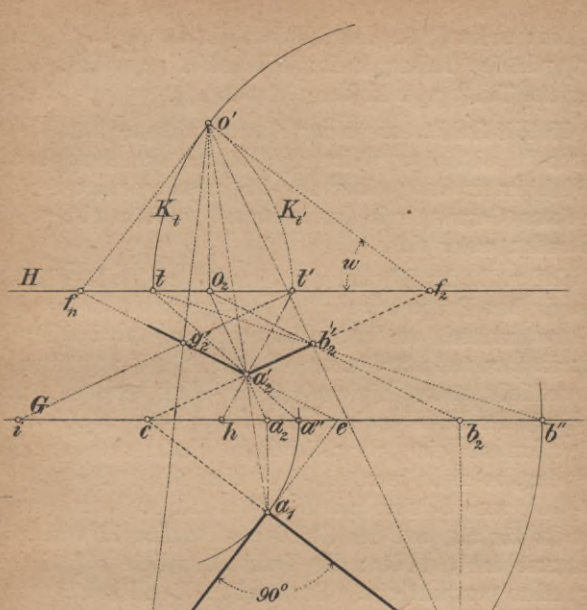


Fig. 77.

Jeder auf dem Kreise K_t angenommene Punkt spielt dieselbe Rolle wie der Punkt $0'$, insbesondere auch der Punkt t auf H. Mit Hilfe von t erhält man den Punkt b_2' ebenfalls; man zieht ta_2' bis zum Schnitt a'' mit G, trägt $\overline{a''b''}$ gleich der gegebenen Strecke ab und verbindet b'' mit t; $b''t$ liefert auf cf_2 den Punkt b_2'.

Anmerkung 9. Der Kreis K_t heißt der zur Geraden cf_2 gehörige Teilungskreis; jeder auf K_t gewählte Punkt ist ein Teilungspunkt der Geraden cf_2.

55. Mit Zuhilfenahme der Fluchtpunkte ergibt sich nun auch in einfacher Weise die Lösung der Aufgabe der Winkelermittelung einer zur Bildebene geneigten wagerechten Geraden mit der letzteren, sowie zweier solcher Geraden unter sich.

Soll z. B. der Winkel der Geraden ab (s. Fig. 77), die durch ihre Perspektive $a_2'b_2'$ gegeben ist, mit der Bildebene ermittelt werden, so braucht man nur den Fluchtpunkt f_2 von ab mit dem umgelegten Auge $0'$ zu verbinden, so schließt letztere Linie mit H den Winkel w der Geraden ab mit der Bildebene ein. Soll ferner etwa in a_2'' auf der Geraden ab eine perspektivische Senkrechte errichtet werden, so zieht man durch $0'$ eine Senkrechte 0_2f_n zu $0'f_2$ bis zum Schnitt mit H und erhält in f_n den Fluchtpunkt für alle auf der Geraden ab senkrecht stehenden wagerechten Geraden; die Verbindungslinie $a_2'f_n$ ist die gesuchte perspektivische Senkrechte. Den Punkt f_n nennt man den Normalenfluchtpunkt der Geraden ab.

Soll weiter auf der Geraden $a_2'f_n$ eine Strecke von gegebener Länge perspektivisch angetragen werden, so kann man diese Strecke entweder auf der Senkrechten durch a_1 zu a_1b_1 gleich $\overline{a_1g_1}$ abtragen und g_10' ziehen, oder man verschafft sich den auf H liegenden Teilungspunkt der Senkrechten zu ab, indem man um f_n den Kreis $K_{t'}$ durch $0'$ zeichnet und seinen Schnitt t' mit H ermittelt; zieht man nun $t'a_2'$ bis zum Schnitt h mit G, trägt $\overline{hi}$ gleich der gegebenen Länge ab, so liefert die Verbindungslinie it' auf $a_2'f_n$ den Punkt g_2' ebenfalls. Das Antragen eines von 90^0 verschiedenen Winkels an eine gegebene Gerade der

Grundrißebene soll in der folgenden Aufgabe gezeigt werden.

Anmerkung 10. Aus dem in Nr. 55 Gesagten ergibt sich, daß der Fluchtpunkt einer zu einer perspektivisch gegebenen wagerechten Geraden senkrechten Geraden, eine ganz bestimmte Lage auf der Gesichtslinie besitzt, die bei gegebenem Augabstand in einfacher Weise ermittelt werden kann. Ist nun aber der Augabstand nicht

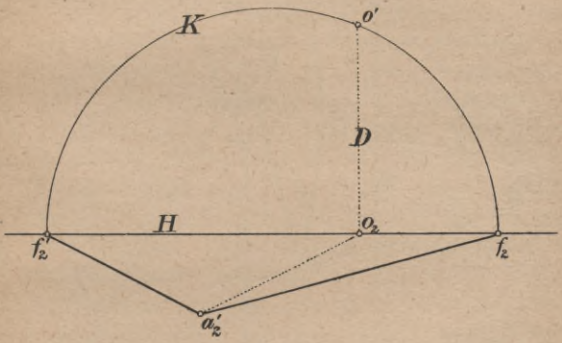
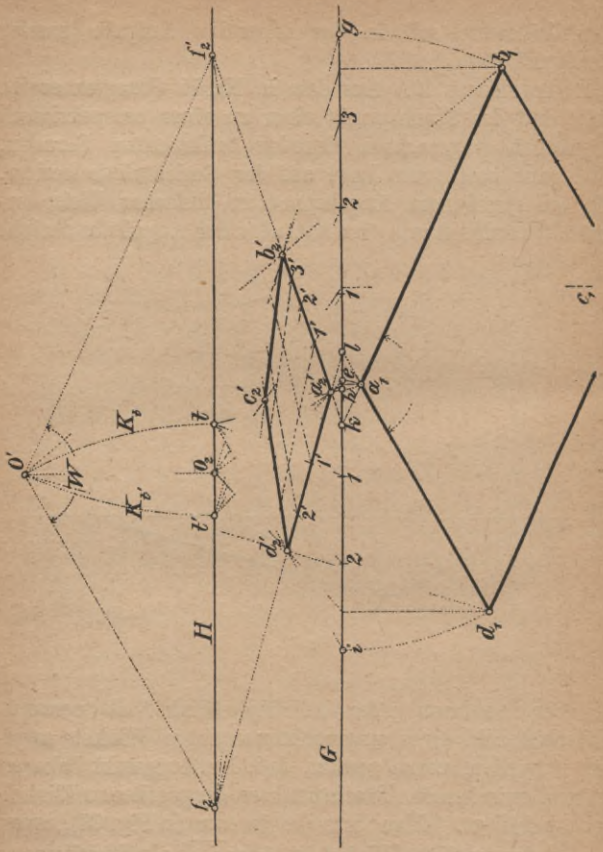


Fig. 78.

gegeben, so kann jeder beliebige Winkel als perspektivisches Bild eines wagerechten rechten Winkels angesehen werden, vorausgesetzt, daß der Augpunkt bekannt ist und zwischen den Fluchtpunkten der gegebenen Winkelschenkel liegt. Man braucht ja nur (s. Fig. 78), wenn $f_2 a_2' f_2'$ der fragliche Winkel ist, über $\overline{f_2 f_2'}$ als Durchmesser einen Halbkreis zu beschreiben, der von der Senkrechten zu H durch 0_2 in $0'$ so getroffen wird, daß die Länge $\overline{0_2 0'}$ den gesuchten Augabstand D darstellt.



56. Aufgabe 24. Es soll die Perspektive eines in der Grundrißebene G liegenden Parallelogrammes gezeichnet werden, wenn gegeben ist

die Perspektive $\overline{a_2' b_2'}$ einer Seite $\overline{a_1 b_1}$ desselben (s. Fig. 79); außerdem kennt man den Winkel bei a seiner Größe nach. Die zweite durch a gehende Parallelogrammseite soll eine Länge gleich $^1/_3$ von $\overline{ab}$ besitzen.

Auflösung. Man bestimmt die Umlegung $0'$ des Auges 0, sowie den Fluchtpunkt f_2' von $a_2' b_2'$ auf H. An $f_2' 0'$ trägt man in $0'$ den gegebenen Winkel W an und verlängert den zweiten Winkelschenkel bis zum Schnitt f_2 mit H, dann ist f_2 der Fluchtpunkt der zweiten durch a gehenden Parallelogrammseite. Nunmehr bestimmt man mittels der Teilungskreise K_t und $K_{t'}$ die Teilungspunkte t und t' auf H. Die Verbindungslinien $t' a_2'$ und $t' b_2'$ schneiden auf G die wahre Länge $\overline{eg}$ der Seite $\overline{ab}$ ab. Diese Strecke teilt man in vier gleiche Teile, zieht $t a_2'$ bis zum Schnitt h mit G, trägt die Strecke $\overline{hi} = {}^3/_4$ der Länge $\overline{eg}$ ab, so schneidet die Verbindungslinie it auf $a_2' f_2$ die Parallelogrammecke d_2' aus. Damit ist das perspektivische Bild des Parallelogramms bestimmt.

Verlängert man $a_2' b_2'$ und $a_2' d_2'$ bis zum Schnitt k und l mit G und zieht durch k und l Parallelen zu $0' f_2'$ bzw. $0' f_2$, so erhält man hierdurch die umgelegten Parallelogrammseiten $a_1 b_1$ und $a_1 d_1$; die Ecken b_1, c_1 und d_1 lassen sich auf verschiedene Weise ermitteln: entweder trägt man von a_1 aus die Strecken $\overline{eg}$ und $\overline{hi}$ auf den Parallelogrammseiten nach $\overline{a_1 b_1}$ und $\overline{a_1 d_1}$ ab und zieht durch b_1 und d_1 Parallelen zu $a_1 d_1$ bzw. $a_1 b_1$, oder man verbindet die Ecken a_2', b_2' und d_2' mit $0'$, so liegen auf diesen Verbindungslinien ebenfalls die Ecken a_1, b_1 und d_1; auf den Parallelen durch b_1 und d_1 zu $a_1 d_1$ und $a_1 b_1$ ergibt sich wieder die Ecke c_1. Auch der Augpunkt 0_2 läßt sich zur Bestimmung der wahren Gestalt des Parallelogrammes benutzen. Man

zieht durch die Ecken a_2', b_2', c_2', d_2' nach O_2 bis zum Schnitt mit G und durch letztere Schnittpunkte Senkrechte zu

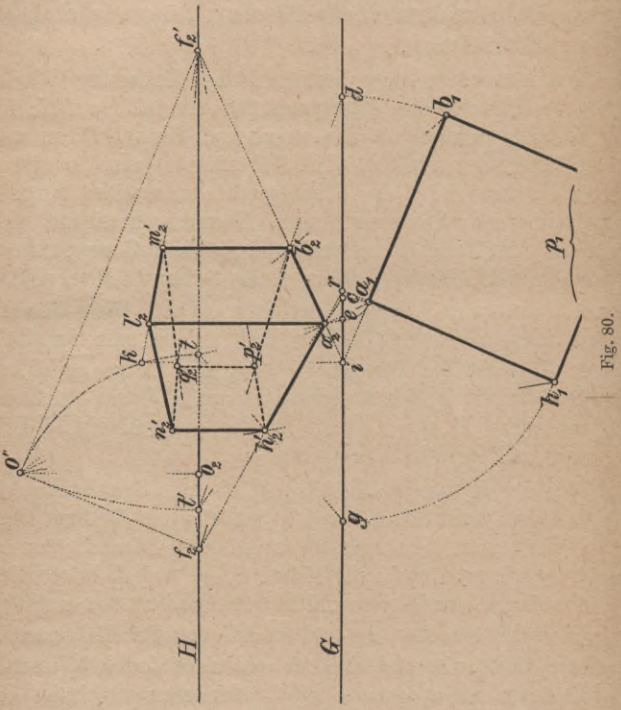


Fig. 80.

G, so liegen auf letzteren Senkrechten gleichfalls die Ecken a_1 bis d_1.

57. Aufgabe 25. Das in Fig. 79 perspektivisch gezeichnete Parallelogramm ist durch Teilung

seiner Seiten in zwölf gleiche Parallelogramme zu zerlegen.

Auflösung. Will man die Parallelogrammseiten $\overline{ab}$ und $\overline{ad}$ in vier bzw. drei gleiche Teile teilen, so braucht man nur durch die Teilungspunkte $1 \cdot 2 \cdot 3$ auf $\overline{eg}$ bzw. $1 \cdot 2$ auf $\overline{hi}$ nach den Teilungspunkten t' und t zu ziehen; es ergeben sich hierdurch die Teilungspunkte $1' \cdot 2' \cdot 3'$ auf $a_2' b_2'$ bzw. $1' \cdot 2'$ auf $a_2' d_2'$. Zieht man nun durch diese Teilungspunkte nach den zugehörigen Fluchtpunkten f_2 und f_2', so ist dadurch das Parallelogramm $a_2' b_2' c_2' d_2'$ in 12 einander gleiche Parallelogramme zerlegt.

58. Aufgabe 26. Von einem Würfel, der mit einer Fläche in der Grundrißebene aufliegt, ist das perspektivische Bild $a_2' b_2'$ einer Kante gegeben (s. Fig. 80). Man soll das Bild des Würfels zeichnen.

Auflösung. Man verlängert $a_2' b_2'$ bis zum Schnitt f_2' bzw. i mit H und G, zieht $0' f_2'$ und senkrecht hierzu durch $0'$ die Gerade $0' f_2$. Nunmehr bestimmt man die beiden Teilungspunkte t und t'. Die Verbindungslinien $t' a_2'$ und $t' b_2'$ liefern auf G die Punkte c und d, womit die wahre Länge der Würfelkante bestimmt ist. Mittels des Teilungspunktes t überträgt man diese Länge auf die Linie $a_2' f_2$ nach $\overline{a_2' h_2'}$. $t a_2'$ liefert auf G den Punkt e, $\overline{eg} = \overline{cd}$, gt schneidet $a_2' f_2$ in h_2'. Durch Ziehen von $h_2' f_2'$ und $b_2' f_2$ ergibt sich p_2'. Macht man ferner auf der Lotrechten durch i die Strecke $\overline{ik}$ gleich der wahren Länge der Würfelkante, so schneidet $k f_2'$ auf der Lotrechten durch a_2' die Würfelecke l_2' aus, womit auch die noch fehlenden Würfelecken m_2', n_2' und q_2' bestimmt sind. Die Umlegung der untersten wagerechten Würfelfläche ergibt sich in bekannter Weise.

Fig. 81.

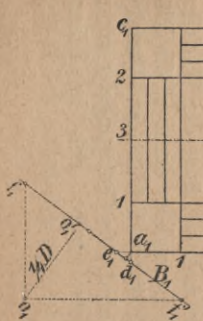


Fig. 82.

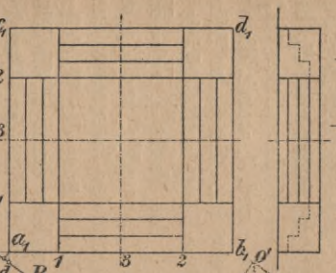


Fig. 85.

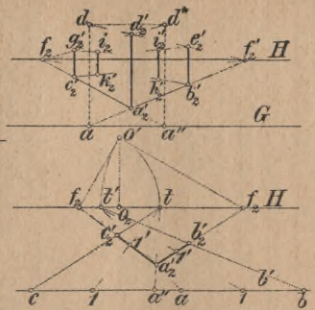


Fig. 84.

Fig. 83.

59. Aufgabe 27. Der in Fig. 81 und 82 im Grund- und Aufriß gezeichnete treppenförmige Unterbau soll in Perspektive gesetzt werden. Standpunkt und Bildebene sind aus Fig. 81 zu ersehen.

Auflösung. Die Lotrechte, auf welcher der Augpunkt liegt, ist in Fig. 81 durch den Punkt $0_1'$, in Fig. 83 durch die Linie $0_1'0_2$ gegeben. Der Maßstab der Fig. 83 ist doppelt so groß wie jener der Fig. 81 und 82. In Fig. 83 ist $0_2 0'$ senkrecht zu H und gleich $0_1 0_1'$ Fig. 81 gleich $^1/_4 D$ angetragen. Überträgt man nun aus Fig. 81 die Abstände $\overline{0_1' f_1'}$ und $\overline{0_1' f_1}$ nach $0_2 \frac{f_2'}{4}$ und $0_2 \frac{f_2}{4}$ (Fig. 83), bestimmt die Teilungspunkte $\frac{t'}{4}$ und $\frac{t}{4}$, so sind damit auch die wirklichen Fluchtpunkte und Teilungspunkte, nämlich f_2', f_2, t' und t, bestimmt, wenn man $\overline{0_2 f_2'} = 4\, \overline{0_2 \frac{f_2'}{4}}$ usw. abträgt. Die Konstruktion des perspektivischen Bildes des Körpers kann nun nach dem Bisherigen mittels der Flucht- und Teilungspunkte vorgenommen werden. In Fig. 84 und 85 ist das Abtragen von Längen auf perspektivisch gegebenen Linien, sowie das Auftragen von Höhen auf Lotrechten in verschiedenen Abständen von der Bildtafel besonders herausgezeichnet.

In Fig. 83 ist zunächst der Grundriß des Körpers perspektivisch gezeichnet. Aus Fig. 81 entnimmt man die Strecke $\overline{0_1' d_1}$ und überträgt sie in doppelter Größe nach $\overline{0_1' d}$ (Fig. 83), zieht $d f_2'$; ferner überträgt man die Strecke $\overline{0_1' e_1}$ (Fig. 81) in doppelter Größe nach $\overline{0_1' e}$ (Fig. 83) und zieht nach f_2', wodurch die Perspektive a_2' bestimmt ist. Entnimmt man aus Fig. 81 die Längen $\overline{e_1 b_1}$ und $\overline{d_1 c_1}$,

überträgt sie in doppelter Größe nach $\overline{eb}$ bzw. $\overline{dc}$ (Fig. 83), so liefern die Verbindungslinien $\overline{ct}$ und $\overline{bt'}$ die perspektivischen Bilder c_2' und b_2'. Das Auftragen der Höhen geschieht auf der Lotrechten eg. Von hier überträgt man sie mittels des Fluchtpunktes f_2' auf $a_2'g_2'$, von wo sie mittels der Fluchtpunkte f_2' und f_2 auf alle in den Flächen agb und agc liegenden Lotrechten übertragen werden können.

b) Die Fluchtpunkte sind unzugänglich.

60. Bei den im vorstehenden angeführten Konstruktionen war das Vorhandensein der Fluchtpunkte auf dem zur Verfügung stehenden Zeichenblatte Vorbedingung. In vielen praktischen Fällen, wie bei der Herstellung der Perspektiven von Architekturstücken, z. B. Ansichten von Gebäuden, sind diese Fluchtpunkte auch tatsächlich vorhanden, weil man auf solch großen Brettern zeichnet, daß die Fluchtpunkte darauf noch Platz finden, oder weil man die Gesichtslinie mittels am Reißbrette befestigter Leisten so weit verlängert, daß darauf die Fluchtpunkte vermerkt werden können. Manchmal hat man aber die Fluchtpunkte doch nicht zur Verfügung und es entsteht die Aufgabe, nach unzugänglichen Fluchtpunkten gerade Linien ziehen und auf diesen gegebene Strecken perspektivisch auftragen zu müssen. Hierfür gibt es aber mannigfache Lösungen, von welchen einige der wichtigsten angegeben werden sollen.

61. Aufgabe 28. Eine wagerechte Gerade A (s. Fig. 86) ist durch ihr perspektivisches Bild A_2' gegeben. Man soll:

a) durch einen Punkt a von A eine Senkrechte zu A zeichnen;

b) von a_2 aus auf A_2' eine Strecke von gegebener Länge perspektivisch auftragen.

Auflösung a). Man verbindet $a_2 0_2$ und nimmt auf $a_2 0_2$ einen Punkt a_2'' so an, daß $\overline{0_2 a_2''} = \frac{1}{n} \overline{a_2 0_2}$ ist; im vorliegenden Falle sei $\overline{0_2 a_2''} = \frac{1}{2} \overline{a_2 0_2}$. Durch a_2'' zieht

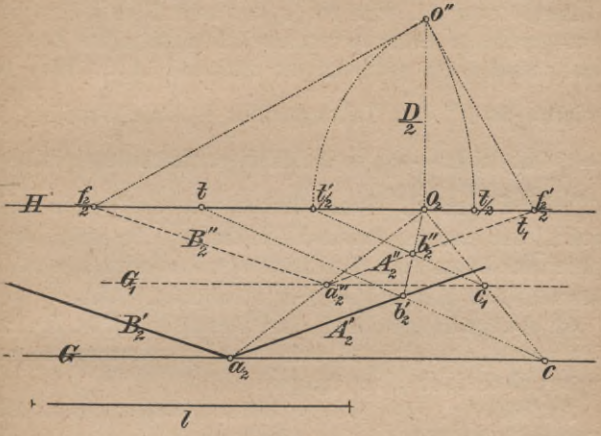


Fig. 86.

man eine Parallele G_1 zu G und betrachtet G_1 als Grundlinie für eine Bildebene, welche nur halb so weit vom Auge absteht als die ursprüngliche Bildebene. Für G_1 als Grundlinie und $\frac{D}{2}$ als Augabstand löst man nun die entsprechende Aufgabe. Man zieht durch a_2'' eine geometrische Parallele A_2'' zu A_2' und betrachtet diese als perspektivisches Bild für die neue Bildebene, dann ist der Schnittpunkt $\frac{f_2'}{2}$ der

Fluchtpunkt von A_2''. Bestimmt man die Umlegung $0''$ von 0, so liefert die Senkrechte durch $0''$ zu $0''\frac{f_2'}{2}$ den Normalenfluchtpunkt $\frac{f_2}{2}$ für die Gerade A_2''. Eine geometrische Parallele zu B_2'' durch a_2 gibt das perspektivische Bild B_2' einer durch a_2 zu A geführten Senkrechten.

Auflösung b). Um von a_2 aus auf A_2' eine Strecke l von gegebener Größe perspektivisch abzutragen, benutzt man wieder die geometrische Parallele A_2''. Man bestimmt zu A_2'' den Teilungspunkt $\frac{t'}{2}$, trägt auf G_1 $\overline{a_2'' c_1} = \frac{1}{2} l$ ab, zieht $\frac{t'}{2} c_1$, so liefert diese Verbindungslinie auf A_2'' den Punkt b_2''. Durch Ziehen von $0_2 b_2''$ ergibt sich auf A_2' der gesuchte Punkt b_2', so daß $\overline{a_2' b_2'}$ perspektivisch gleich der Länge l ist. Man hätte b_2' auch dadurch erhalten können, daß man $\overline{a_2 b_2'} = 2 \cdot \overline{a_2'' b_2''}$ abträgt.

62. Aufgabe 29. Auf der Geraden B_2' (s. Fig. 86) ist von a_2 aus eine Strecke von gegebener Länge l perspektivisch abzutragen.

Auflösung. Die Lösung bleibt dieselbe wie in Auflösung b) der Aufgabe 28. Man benutzt die geometrische Parallele B_2'' zu B_2' und den zugehörigen Teilungspunkt $\frac{t}{2}$.

63. Aufgabe 30. Eine Gerade A (Fig. 87) ist durch ihr perspektivisches Bild A_2' gegeben. Man soll:

a) durch einen Punkt a_2' von A_2' eine perspektivische Senkrechte zu A_2' ziehen;

b) auf A_2' vom Punkte a_2' eine Strecke von gegebener Länge perspektivisch auftragen.

Auflösung a) und b). Die Lösung ist dem Wesen nach die gleiche wie in Aufgabe 28. Man zieht $a_2' 0_2$,

macht $\overline{a_2'' 0_2} = \frac{1}{3}\overline{a_2' 0_2}$, ebenso $\overline{a_1 0_2} = \frac{1}{3}\overline{a 0_2}$, dann geht durch a_1 die Linie G_1. Die geometrische Parallele durch a_2'' zu A_2' liefert den Fluchtpunkt $\frac{t_2'}{3}$. Hiermit ist auch der Fluchtpunkt $\frac{t_2}{3}$ der zu A senkrechten Geraden bestimmt. Mittels der Fluchtpunkte $\frac{t_2'}{3}$ und $\frac{t_2}{3}$ ergeben sich die Tei-

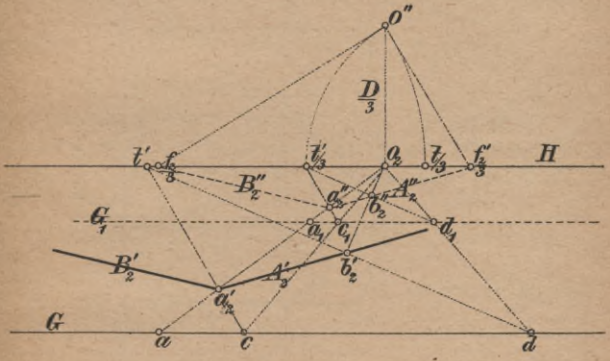


Fig. 87.

lungspunkte $\frac{t'}{3}$ und $\frac{t}{3}$. Um nun auf A_2' von a_2' aus eine Strecke $= l$ abzutragen, zieht man $a_2'' \frac{t'}{3}$ bis zum Schnitt c_1 mit G_1, trägt $\overline{c_1 d_1} = \frac{1}{3} l$ ab und zieht $d_1 \frac{t'}{3}$, welche Verbindungslinie auf A_2'' den Punkt b_2'' liefert; $0_2 b_2''$ schneidet auf A_2' den Punkt b_2' so aus, daß $\overline{a_2' b_2'}$ perspektivisch $= l$ ist. Zieht man $a_2'' \frac{t_2}{3}$ und durch a_2' eine geometrische Parallele B_2' hierzu, so ist B_2' perspektivisch senkrecht auf A_2'.

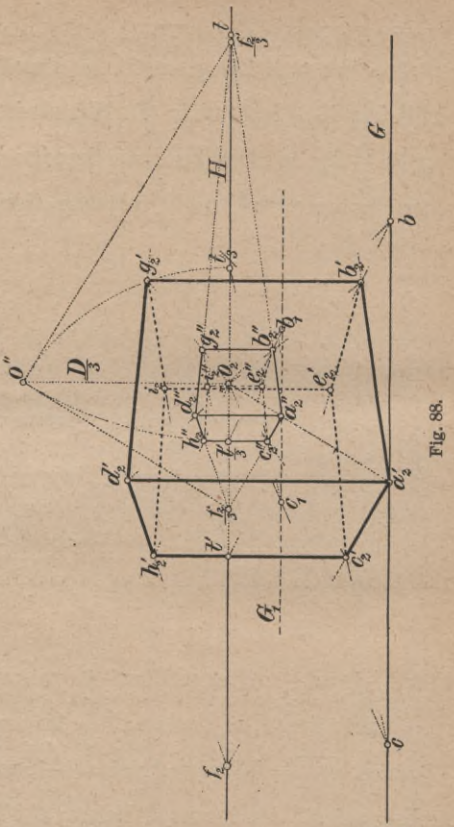


Fig. 88.

Anmerkung 11. Würde man $\overline{0_2 t'} = 3\, 0_2 \frac{t'}{3}$ abtragen, $t' a_2'$ bis zum Schnitt c mit G ziehen und $cd = l$ auftragen, so erhielte man im Schnitt von $t'd$ mit A_2' ebenfalls den Punkt b_2'.

64. Aufgabe 31. Es ist die Aufgabe 26 zu lösen, unter Anwendung eines Augabstandes $= \frac{D}{3}$, d. h. bei nichtzugänglichen Fluchtpunkten.

Auflösung. Ist $a_2' b_2'$ die gegebene Würfelkante, so verschafft man sich G_1, ebenso $a_2'' b_2''$ wie früher. Hiernach ergeben sich dann mittels des umgelegten Auges $0''$ die Fluchtpunkte $\frac{f_2'}{3}$ und $\frac{f_2}{3}$, ebenso die Teilungspunkte $\frac{t'}{3}$ und $\frac{t}{3}$. Mittels der genannten Punkte konstruiert man jetzt den zur Kante $a_2'' b_2''$ gehörigen Würfel. Verbindet man dessen Ecken a_2'' bis i_2'' mit 0_2 und verlängert diese Verbindungslinien über die Würfelecken hinaus um das Doppelte ihrer Längen, so ergeben sich hierdurch die Würfelecken a_2' bis i_2'.

Anmerkung 12. In Fig. 88 sind mittels der Teilungspunkte $\frac{t'}{3}$ und $\frac{t}{3}$ die wirklichen Teilungspunkte t' und t bestimmt worden; ferner ist auch der linksseitige Fluchtpunkt f_2 ermittelt, $\overline{0_2 f_2} = 3\ \overline{0_2 \frac{f_2}{3}}$. Damit lassen sich dann ebenfalls die Würfelecken c_2' bis i_2' ermitteln. Man zieht $t' b_2'$ und erhält hierdurch auf G den Punkt b; macht man $\overline{a_2' c} = \overline{a_2' b}$, zieht $a_2' f_2$ und ct, so ergibt sich hierdurch der Punkt c_2'. Probe: 0_2, c_2'' und c_2' müssen in einer Geraden liegen, $\overline{0_2 c_2'} = 3\ \overline{0_2 c_2''}$, $c_2' e_2'$ parallel zu $c_2'' e_2''$ usw.

Anmerkung 13. Hat man sehr viele Linien nach einem unzugänglichen Fluchtpunkt zu ziehen, so kann man sich auch des folgenden Verfahrens bedienen. Ist $m n$ das perspektivische Bild einer Geraden mit unzugänglichem Fluchtpunkt, so fällt man von zweien ihrer

Punkte, etwa n und m (s. Fig. 89), Senkrechte zu H und teilt die Strecken $\overline{mo}$ und $\overline{np}$ in die gleiche, aber beliebige Anzahl gleicher Teile und verbindet die gleichbezeichneten Teilungspunkte $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$ usw. Die Teilstrecken kann man über H hinaus nach oben beliebig fortsetzen und nun

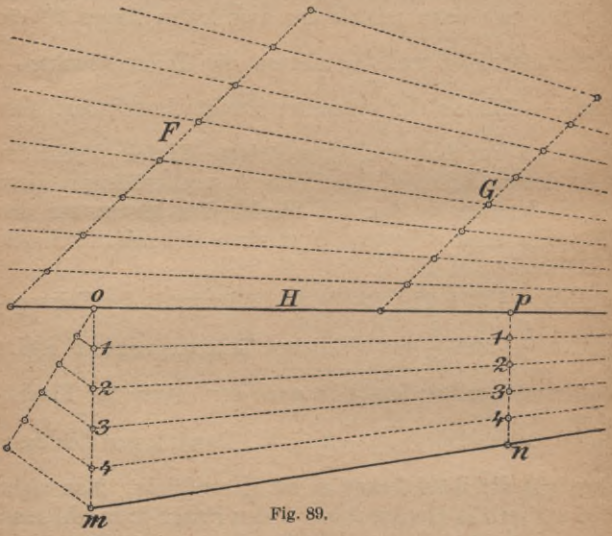


Fig. 89.

zwischen je zweien der Verbindungslinien nach dem Augenmaße Linien ziehen, welche genau genug durch den Fluchtpunkt von mn hindurchgehen.

Die Teilung kann auch auf beliebig schiefschneidenden geometrischen Parallelen, z. B. zwischen H und FG, ausgeführt werden. Soll durch einen gegebenen Punkt p (s. Fig. 89a) eine Linie nach einem unzugänglichen Flucht-

punkt, d. h. nach dem Schnittpunkt zweier Geraden H und aa' gezogen werden, so wählt man auf H einen Punkt b beliebig. Hierdurch ist das Dreieck abp bestimmt. Durch a' zieht man $a'b'$ und $a'p'$ parallel zu ab bzw. ap, wodurch der Punkt p' festgelegt wird. Die Verbindungslinie pp' geht durch den Schnittpunkt von H und aa'.

Anmerkung 14. Ist ein beliebiger Winkel $b_2' a_2' c_2'$ (s. Fig. 90) als perspektivisches Bild eines wagerechten rechten Winkels so gegeben, daß die Fluchtpunkte der Winkelschenkel unzugänglich sind, so kann man auch in diesem Falle, wenn der Augpunkt 0_2 bekannt ist, den Augabstand und die zur perspektivischen Konstruktion erforderlichen Punkte, wie Teilungs- oder Augabstandspunkte, in einfacher Weise wie folgt konstruieren:

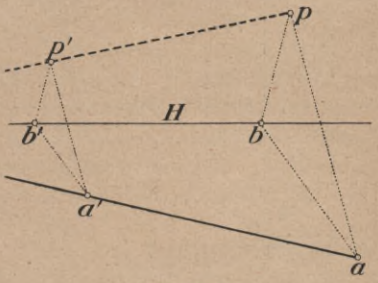


Fig. 89a.

Man zeichnet eine Parallele zu H, welche die Schenkel des gegebenen Winkels in den Punkten b_2' und c_2' trifft, zieht $a_2' 0_2$, welche $b_2' c_2'$ in $0_2'$ durchschneidet, und beschreibt über $\overline{b_2' c_2'}$ als Durchmesser den Halbkreis K, welcher von der Senkrechten durch $0_2'$ zu $b_2' c_2'$ in $0'$ getroffen wird.

Will man nun den Augabstand D bestimmen, so macht man $\overline{0_2' h} = \overline{0_2' 0'}$, zieht $a_2' h$ bis zum Schnitt d_2 mit H, so ist $\overline{0_2 d_2} = D$. Zur Ermittelung der Teilungspunkte für die Winkelschenkel $a_2' c_2'$ und $a_2' b_2'$ beschreibt man um c_2' und b_2' Kreise durch $0'$, welche auf $b_2' c_2'$ die Punkte e und

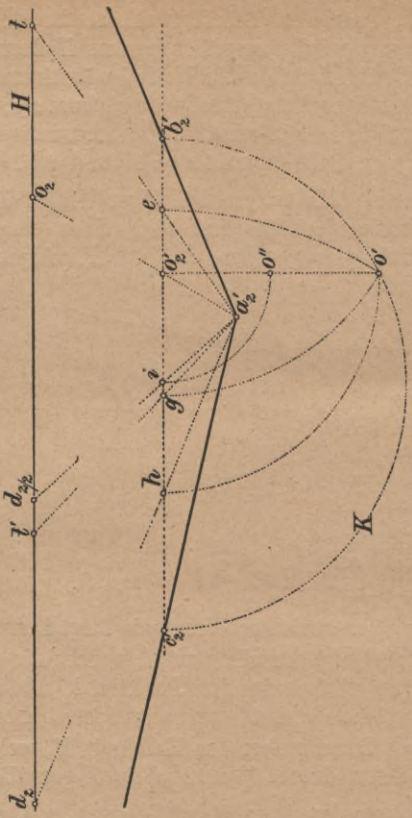


Fig. 90.

g ergeben. Die Verbindungslinien a'_2e und a'_2g liefern auf H die Teilungspunkte t und t'.

Würde der Punkt d_2 außerhalb der Zeichenfläche liegen, so könnte man einen Bruchteil des Augabstandes etwa

$\frac{D}{2}$ ermitteln, wenn man $\overline{0_2 0'}$ in $\overline{0''}$ halbiert, $\overline{0_2' i} = \overline{0_2' 0'}$ abträgt und $a_2' i$ bis zum Schnitt mit H zieht; dann ist $\overline{0_2 \frac{d_2}{2}} = \frac{D}{2}$.

V. Kapitel.

Vermischte Aufgaben.

65. Im vorangegangenen sind nunmehr alle Mittel gegeben, um das perspektivische Bild irgendwelchen Körpers darstellen zu können, sobald dessen Ausmaße sowie seine Lage zur Bildebene bekannt sind. Welches Verfahren zur Konstruktion des Bildes benutzt wird, hängt von der Beschaffenheit des Körpers selbst ab. Häufig wird man bei einem und demselben Körper mehrere Verfahren zu gleicher Zeit benutzen, je nachdem das eine oder andere schneller zum Ziele führt.

Anmerkung 15. In Fig. 92 ist der in Fig. 91 im Aufriß skizzierte Körper perspektivisch dargestellt, wobei das Bild des rechten Winkels an der vorderen untersten Ecke beliebig angenommen ist.

Anmerkung 15a. Das in Fig. 92 angewandte Verfahren zur Ermittelung der zur Konstruktion des perspektivischen Bildes erforderlichen Flucht- bzw. Teilungspunkte soll im nachstehenden erläutert werden. Der Punkt a_2, (s. Fig. 92a) ist die angenommene Körperecke und $a' a_2 f$ das Bild eines rechten Winkels. Man wählt den Punkt p beliebig und zieht nach f und den unzugänglichen Fluchtpunkt g mittels der beiden ähnlichen Dreiecke $p a_2 b$ und $p' a' b'$. Ist p' bestimmt, so zieht man $0_2 p$ und nimmt auf dieser Linie den Punkt $0_2'$ etwa so an, daß $\overline{p o_2'} = \frac{1}{3} \overline{p o_2}$ ist. Eine Parallele zu H durch o_2' liefert auf pf und pg

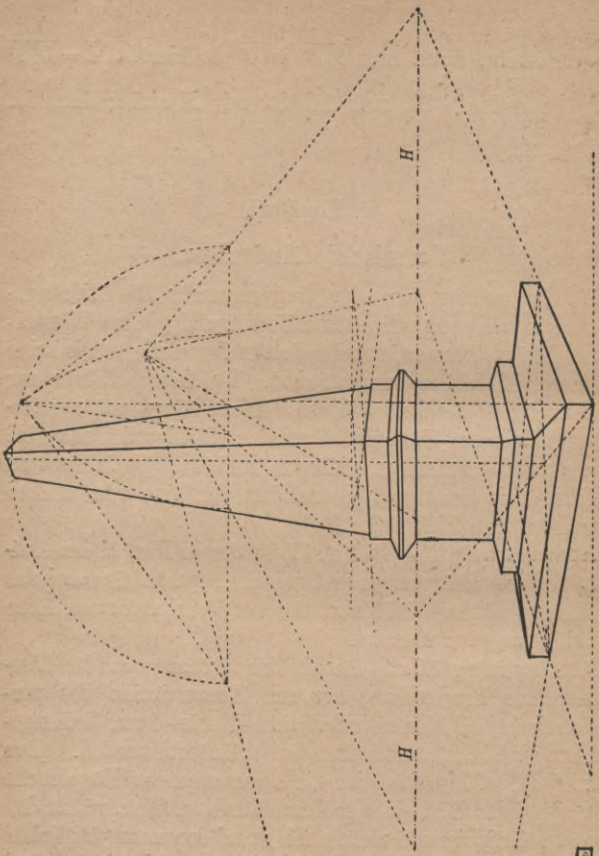


Fig. 92.

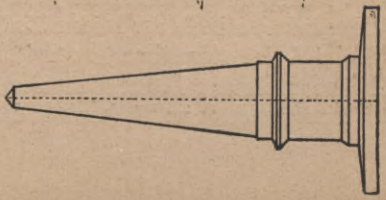


Fig. 91.

die Punkte f' und g'. Schlägt man über $\overline{f'g'}$ einen Halbkreis, so ergibt sich auf der Senkrechten durch o_2' zu $f'g'$ im Schnitt mit dem Halbkreise der Punkt $0'$. Die Linien $0'g'$ und $0'f'$ bilden die Umlegungen der Schenkel des

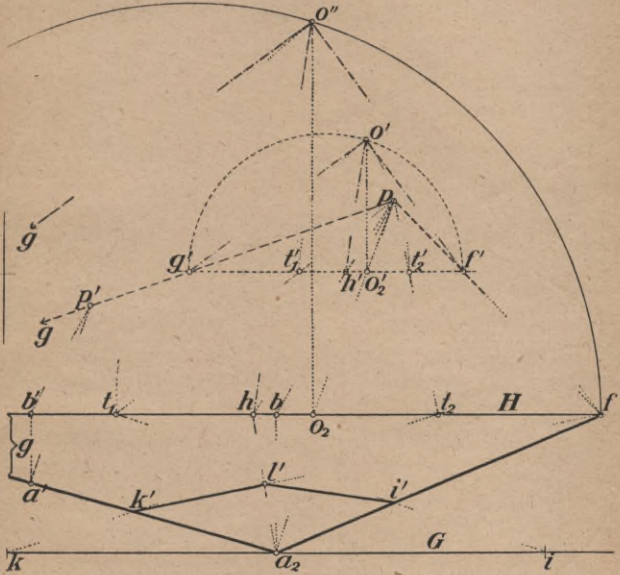


Fig. 92a.

rechten Winkels bei 0. Mittels der Kreisbögen um f' und g' durch $0'$ ergeben sich die Teilungspunkte t_1' und t_2'; durch Ziehen von $p\,t_1'$ und $p\,t_2'$ gewinnt man auf H die gesuchten Teilungspunkte t_1 und t_2. In der Fig. 92a ist durch $0'$ noch die Halbierungslinie des Winkels $g'0'f'$ eingezeichnet, wodurch in h' bzw. h der Fluchtpunkt für die genannte Winkelhalbierende gegeben ist. Nunmehr

kann für ein Quadrat von gegebener Seitenlänge $= \overline{a_2 i}$ $= \overline{a_2 k}$ mit der Ecke a_2 und den Seiten $a_2 f$ bzw. $a_2 a'$ das perspektivische Bild gezeichnet werden. $k t_2$ gibt auf $a_2 a'$

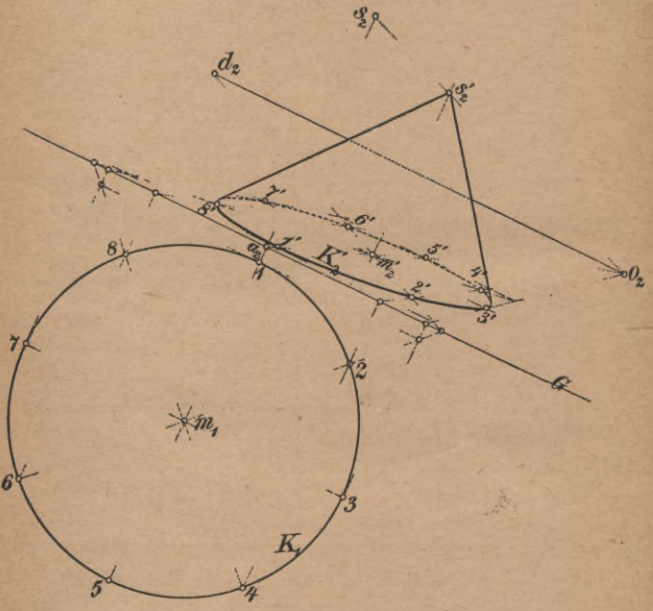


Fig. 93.

den Punkt k', $k' f$ und $a_2 h$ schneiden sich in l', it, liefert auf $a_2 f$ die noch fehlende vierte Quadratecke i'. In gleicher Weise ergeben sich die Quadrate des Körpers Fig. 91 in Fig. 92, wobei die Höhenlagen aus Fig. 91, die in halb so

großem Maßstab wie Fig. 92 gezeichnet ist, entnommen und auf die Lotrechte durch die vorderste Körperecke aufgetragen sind.

Anmerkung 15b. Eine Parallele durch f (s. Fig. 92a) zu $f'0'$ und die Senkrechte durch 0_2 zu H schneiden sich in dem umgelegten Auge $0''$, so daß also die Strecke $\overline{0_2 0''}$ den wirklichen Augabstand darstellt, also $= \overline{3\,0_2' 0'}$ ist. Es ist ferner $\overline{0_2 t_1} = \overline{3\,0_2' t_1'}$, $\overline{0_2 t_2} = \overline{3\,0_2 t_2'}$ und $\overline{0_2 h} = \overline{3\,0_2' h'}$.

66. Aufgabe 32. Ein senkrechter Kreiskegel, dessen Grundfläche in einer zur Bildebene senkrechten, zur Grundrißebene aber geneigten Ebene liegt, ist perspektivisch darzustellen, wenn der Halbmesser des Grundkreises, die Kegelhöhe, sowie die Lage des Mittelpunktes des Grundkreises in dessen Ebene gegeben sind.

Auflösung. Ist durch G (s. Fig. 93) die Spur der Grundkreisebene gegeben und letztere in die Bildebene umgelegt und der Mittelpunkt des Grundkreises in m_1 angenommen, so beschreibt man um m_1 mit dem gegebenen Halbmesser den Kreis K_1, teilt ihn, wie angegeben, in acht gleiche Teile und ermittelt die Perspektiven der Kreispunkte mittels des Augpunktes 0_2 und eines auf der durch 0_2 zu G gezogenen Parallelen angenommenen Augabstandspunktes d_2 in bekannter Weise; ebenso bestimmt man die Perspektive m_2' von m_1. Trägt man dann in a_2 auf der Senkrechten zu G die Kegelhöhe nach $\overline{a_2 s_2}$ an, zieht $s_2 0_2$ und durch m_2' eine Parallele zu $a_2 s_2$, so ergibt sich hierdurch das perspektivische Bild s_2' der Kegelspitze. Die Tangenten von s_2' an K_2' begrenzen den perspektivischen Umriß des Kegels.

67. Aufgabe 33. Von einer Kugel kennt man den Aufriß ihres Mittelpunktes, dessen Abstand

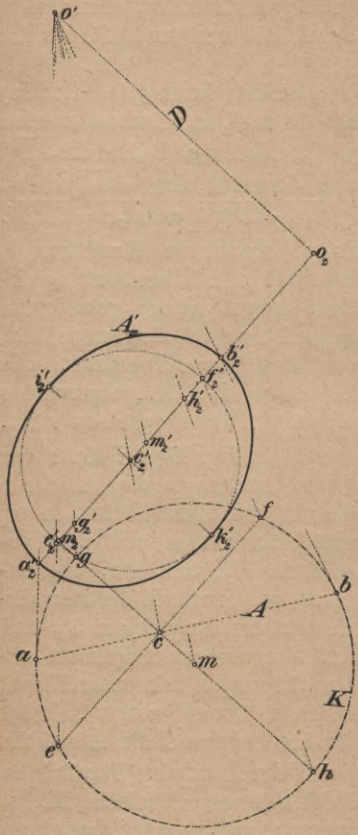


Fig. 94.

von der Bildebene, sowie den Halbmesser. Man soll das perspektivische Bild der Kugel zeichnen.

Auflösung. Ist m_2 (s. Fig. 94) der Aufriß des Kugelmittelpunktes, so zieht man $m_2 0_2$ und errichtet in 0_2 und m_2 Senkrechte zu $m_2 0_2$; auf der ersten Senkrechten trägt man den Augabstand $\overline{0_2 0'}$, auf der zweiten den Abstand $\overline{m_2 m}$ des Kugelmittelpunktes von der Bildebene ab. Zieht man $m 0'$, so durchschneidet diese Linie $m_2 0_2$ im perspektivischen Bilde m_2' des Kugelmittelpunktes m. Beschreibt man um m mit dem Kugelhalbmesser den Kreis K und zieht von $0'$ Tangenten an K, so durchschneiden diese $m_2 0_2$ in den Punkten a_2' und b_2', den perspektivischen Bildern der Berührungspunkte a und b, der von $0'$ an K gezogenen Tangenten.

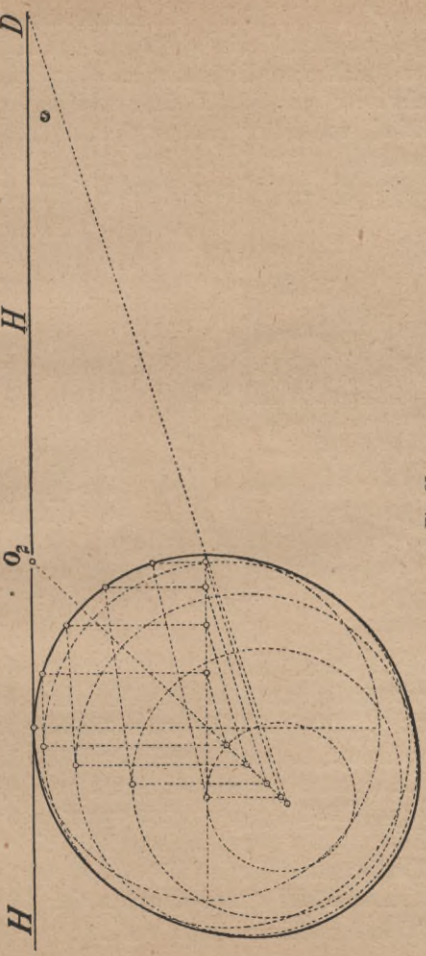


Fig. 95.

Die Punkte a_2' und b_2' bilden die Endpunkte der großen Achse des elliptischen Umrisses A_2' des Kugelbildes. Zieht man ab, so trifft diese Linie den zu $0_2 m_2$ senkrechten Kreisdurchmesser gh von K in c und das perspektivische Bild c_2' von c liegt auf $m_2 0_2$ und auf $0'c$ und liefert den Mittelpunkt der Ellipse A_2'. Die perspektivischen Bilder g_2' und h_2' von g und h liegen auf $m_2 0_2$;

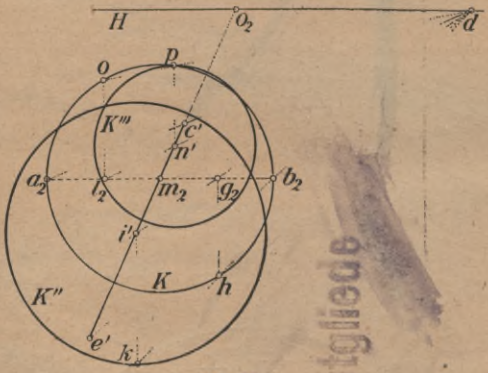


Fig. 95a.

sie stellen die Brennpunkte der Ellipse A_2' dar, womit letztere vollständig bestimmt ist. Man braucht ja nur um g_2' und h_2' Kreise mit einem Halbmesser gleich $\overline{a_2' c_2'}$ zu beschreiben, so liefern diese in ihren Schnittpunkten i_2', k_2' die Endpunkte der kleinen Achse von A_2'.

Anmerkung 16. Die kleine Achse von A_2' bestimmt sich auch noch in etwas anderer Weise. Man zieht durch c eine zu $0_2' a_2'$ parallele Kreissehne ef und bestimmt die perspektivischen Bilder e_2' und f_2' auf $m_2 0_2$. Die Strecke $\overline{e_2' f_2'}$ ist gleich der kleinen Achse von A_2'.

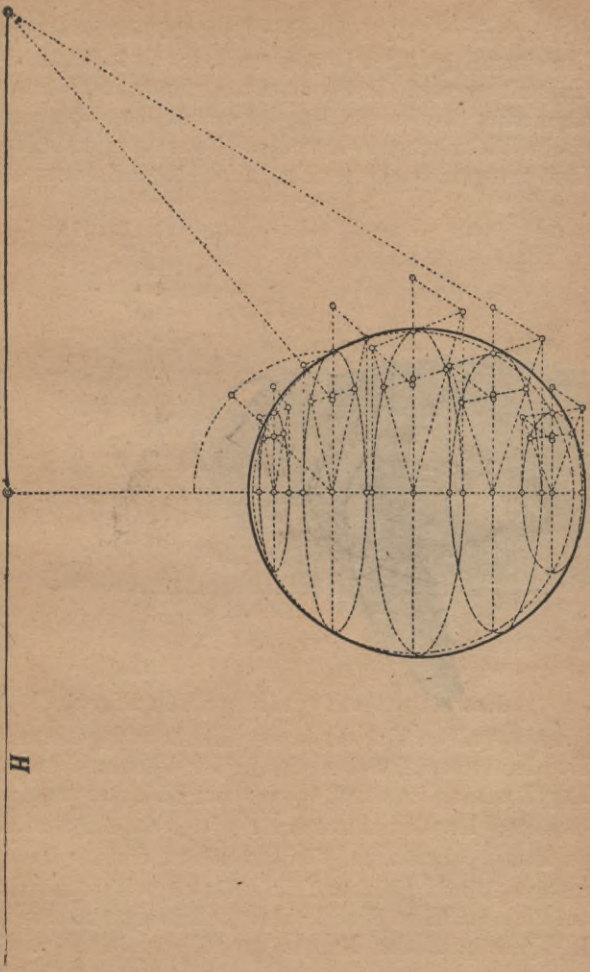


Fig. 96.

Anmerkung 17. In den Fig. 95 und 96 ist die Perspektive einer Kugel noch in anderer Weise als in Aufgabe 33 ermittelt worden. In Fig. 95 wurden lotrechte, in Fig. 96 wagerechte Kreise der Kugel benutzt, deren perspektivische Bilder konstruiert und an letztere eine umhüllende Linie gezogen, welche den Umriß des Kugelbildes darstellt.

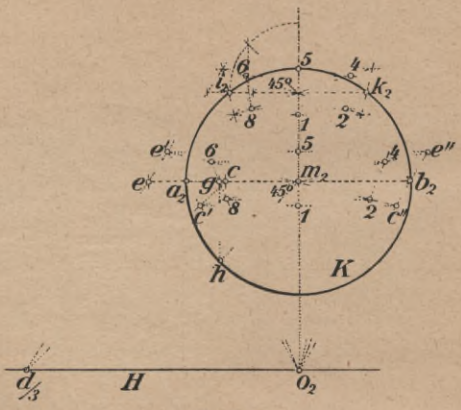


Fig. 96a.

Konstruktionsverfahren für Fig. 95.

Ist m_2 (s. Fig. 95a) der in der Bildebene angenommene Kugelmittelpunkt und K der in der Bildebene liegende Kugelkreis, so ist durch m_2 der zur Bildebene senkrecht gerichtete Kugeldurchmesser $\overline{c'e'}$ mittels des Augabstandspunktes $\bar{d}$ abgetragen. Teilt man nun die Strecke $\overline{a_2 b_2}$ in eine Anzahl gleicher Teile, überträgt diese mittels d auf $c'e'$, so stellen diese Punkte die Mittelpunkte von zur Bildebene parallelen Kreisen dar, die gezeichnet werden

können, wenn ihre Halbmesser bekannt sind. Die sie umhüllende Linie bildet den elliptischen Umriß der Kugel.

Dem Mittelpunkte g_2 von $\overline{m_2 b_2}$ entspricht auf $\overline{c' e'}$ der Punkt i' als perspektivisches Bild eines Punktes i auf dem zur Bildebene senkrechten Kugeldurchmesser $\overline{ce}$, der von m ebenso weit absteht wie g_2. Der zur Bildebene parallele Kugelkreis mit dem Mittelpunkte i hat einen Halbmesser gleich der halben Sehne $g_2 h$; sein perspektivisches Bild ist der um i' beschriebene Kreis K'', dessen Halbmesser $\overline{i' k}$ mittels der Linie dh auf der Parallelen durch i' zu $g_2 h$ abgeschnitten wird.

Auf die gleiche Art können alle übrigen zur Bildebene parallelen Kugelkreise ermittelt werden, deren Mittelpunkte die Teilungspunkte auf dem Kugeldurchmesser $c' e'$ sind. In der Fig. 95a ist noch der dem Punkte l_2 entsprechende Kreis K''' mit dem Mittelpunkte n' und dem Halbmesser $\overline{n' p}$ eingezeichnet.

Konstruktionsverfahren für Fig. 96.

Ist der Kugelmittelpunkt m_2 als in der Bildebene liegend vorausgesetzt, dann ist K der in der Bildebene liegende Kugelkreis. Ist nun $a_2 b_2$ der Aufriß des größten wagerechten Kugelkreises, so zeichnet man das zu $a_2 b_2$ gehörige Quadrat mittels $1/3$ Augabstands $\overline{a_2 c} = \overline{a_2 e} = \frac{1}{3} \overline{m_2 a_2}$. Die Linien durch c und e nach $d/_3$ liefern auf $0_2 a_2$ die Punkte c' und e', womit das Quadrat $c' e' e'' c''$ bestimmt ist. Mittels der unter 45^0 gegen $a_2 b_2$ geneigten Geraden $m_2 h$ ergeben sich der Punkt g und im Schnitt von $g 0_2$ mit den Quadratdiagonalen zwei Punkte 6 und 8 des Kreisbildes.

Auf den Parallelen zu $a_2 b_2$ durch 6 und 8 und den Quadratdiagonalen liegen die Punkte 4 und 2. Es ist noch

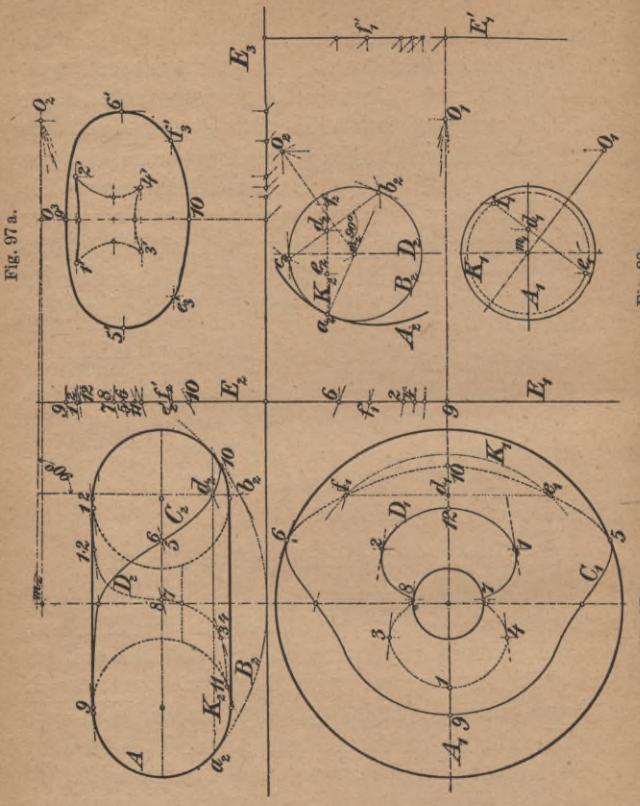


Fig. 97a. Fig. 98. Fig. 97.

für einen zweiten Kreis $i_2 k_2$ das perspektivische Bild, in gleicher Weise, wie eben beschrieben, konstruiert.

68. Aufgabe 34. Ein Kreisring, der im Grund- und Aufriß gegeben ist, soll perspektivisch dargestellt werden.

Auflösung. Es sei durch E_1, E_2 die Bildebene, durch 0_1, 0_2 das Auge bezeichnet. Zur Gewinnung des perspektivischen Bildes hat man vom Punkte *0* aus an den Kreisring einen Tangentenkegel zu zeichnen und dessen Schnitt mit der Bildebene aufzusuchen, so bildet diese Durchschnittslinie den perspektivischen Umriß des Ringbildes. Im vorliegenden Falle ist die Bildebene, nach Ermittelung der Durchschnittspunkte der einzelnen Tangenten von *0* an den Kreisring mit der Bildebene, nach E_1' verschoben und dann in die Aufrißebene nach E_3 umgelegt worden. Die Konstruktion der Berührungslinie eines Tangentenkegels mit der Oberfläche eines Umdrehungskörpers ist in Anmerkung 18 besonders angegeben. Auf die dort angegebene Weise bestimmt man in Fig. 97 die Berührungslinien *C* und *D* des Tangentenkegels mit der Spitze *0* und der Ringoberfläche. Die Bestimmung der Schnittpunkte einzelner Tangenten mit der Bildebene ist aus Fig. 97 zu ersehen, z. B. für die Tangenten durch die Punkte *e* und *f*. Unter den Mantellinien des Tangentenkegels gibt es im vorliegenden Falle vier, welche die Kurve *D* in den Punkten *1*, *2*, *3*, *4* berühren. Die Schnittpunkte dieser Mantellinien mit der Bildebene bilden für den Umriß des perspektivischen Bildes „Spitzen", d. h. Rückkehrpunkte *1'*, *2'*, *3'* und *4'* (s. Fig. 97a). Die Lage der Punkte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ läßt sich nur annähernd feststellen, indem man von 0_2 aus Tangenten an D_2 zieht, desgleichen von 0_1 aus an D_1.

Anmerkung 18. Die Aufgabe, an einen Umdrehungskörper die Berührungslinie des Tangentenkegels mit gegebener Spitze zu ermitteln, kann in einfacher Weise wie folgt gelöst werden: Ist *A* (s. Fig. 98) die Meridiankurve eines Umdrehungskörpers, so wählt man auf *A* einen beliebigen Punkt *a* und legt durch ihn einen Parallelkreis *K*,

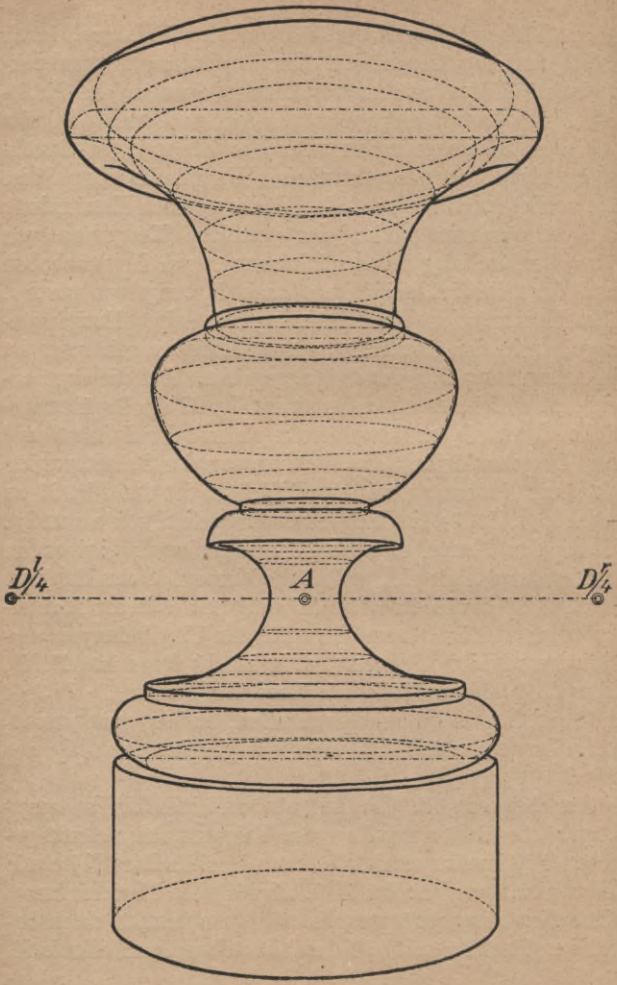


Fig. 99.

dessen Aufriß die Senkrechte K_2 zu D_2 ist. Zeichnet man ferner durch a_2 eine Normale zu A_2, welche die Achse D_2 in einem Punkte m_2 trifft, und um m_2 als Mittelpunkt einen die Linie A_2 in a_2 berührenden Kreis B_2, so ist letzterer die Meridiankurve einer die Oberfläche des Umdrehungskörpers nach dem Kreise B berührenden Kugel. Legt man von 0 aus an diese Kugel einen Tangentenkegel, so berührt dieser die Kugel nach einem Kreise, dessen Ebene die Ebene des Meridians A nach einer Geraden bc schneidet, deren Aufriß die Verbindungslinie $b_2 c_2$ der von 0_2 an B_2 gezogenen Tangenten ist. $b_2 c_2$ trifft K_2 in einem Punkte d_2, dem auf A_1 der Punkt d_1 als Grundriß entspricht. Die durch d_1 zu $m_1 0_1$ gezogene Senkrechte schneidet auf K_1 zwei Punkte e_1 und f_1 aus, welche dem Berührungskreise des Tangentenkegels aus 0 an die Kugel B und damit an die Oberfläche des Umdrehungskörpers A angehören. In gleicher Weise kann man für jeden Parallelkreis die auf ihm liegenden Punkte der Berührungskurve ermitteln.

In Fig. 97 ist die Konstruktion der Berührungskurve des Tangentenkegels aus 0 für den Parallelkreis K_2 in der eben beschriebenen Weise durchgeführt.

Anmerkung 19. Für einen Umdrehungskörper läßt sich das perspektivische Bild auch mit Zuhilfenahme einer hinreichenden Anzahl von Parallelkreisen ermitteln, indem man deren perspektivische Bilder konstruiert und sie durch eine berührende Umrißlinie einschließt. Fig. 99 zeigt ein Beispiel dieser Art. Die Konstruktion der perspektivischen Bilder der einzelnen Parallelkreise vollzieht sich geradeso, wie in Anmerkung 17 beschrieben.

VI. Kapitel.

Perspektivische Konstruktionen ganz allgemeiner Art.

69. Im vorangegangenen sind die Mittel zur Lösung aller Aufgaben der Projektionslehre im Sinne der Zentralprojektion gegeben. Einige dieser Aufgaben sollen im nachstehenden behandelt werden.

Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene.

70. Ein Punkt wird entweder durch seinen Aufriß a_2 und sein Bild a_2' (s. Fig. 100), oder durch ersteren und seinen Abstand $\overline{a_2 a'}$ von der Bildebene gegeben (s. Fig. 101). Aufriß und Bild liegen stets auf einer Geraden nach dem Augpunkt.

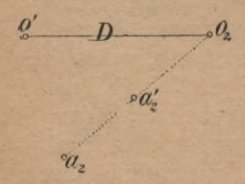


Fig. 100.

Eine gerade Linie wird entweder durch zwei beliebige ihrer Punkte a und b (s. Fig. 102), oder aber durch ihren Schnittpunkt s mit der Bildebene, d. h. durch ihre Spur sowie durch ihren Fluchtpunkt f_2' gegeben (s. Fig. 103).

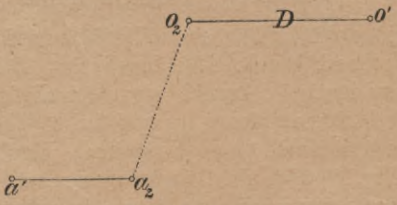


Fig. 101.

Eine gegen die Bildebene beliebig geneigte Ebene wird in der Regel dargestellt durch ihre Schnittlinie S mit der

Bildebene, d. h. durch ihre Spur, sowie durch die Spur Q_2' einer zu ihr durch das Projektionszentrum gelegten Parallelebene. Die Spur dieser Parallelebene heißt die Flucht

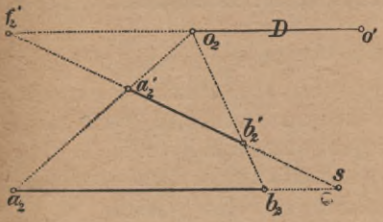


Fig. 102.

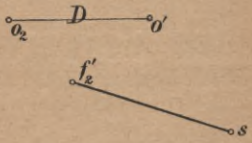


Fig. 103.

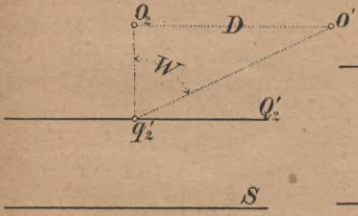


Fig. 104.

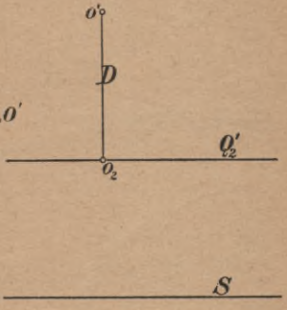


Fig. 105.

der gegebenen Ebene. Spur und Flucht einer Ebene sind parallele Gerade (s. Fig. 104). Steht die Ebene auf der Bildebene senkrecht, so geht ihre Flucht Q_2' durch den Augpunkt (s. Fig. 105).

Selbstverständlich kann eine Ebene auch durch andere Bestimmungstücke gegeben sein, z. B. durch drei nicht

in einer Geraden liegende Punkte, durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade, durch einen Punkt und eine nicht durch letzteren hindurchgehende Gerade. Es lassen sich dann stets Spur und Flucht der Ebene konstruieren.

Vermischte Aufgaben.

71. Aufgabe 35. Gegeben ein Punkt a durch seinen Aufriß a_2 und seinen Abstand von der Bildebene (s. Fig. 106); gesucht sein Bild.

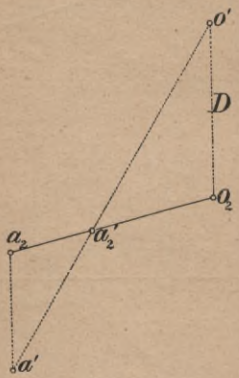


Fig. 106.

Auflösung. Man zeichnet durch 0_2 eine Gerade $\overline{0_2 0'}$ gleich dem Augabstand D, zieht hierzu durch a_2 eine Parallele $\overline{a_2 a'}$ gleich dem gegebenen Abstand. Die Verbindungslinie $a'0'$ liefert auf $a_2 0_2$ das Bild a_2' von a.

72. Aufgabe 36. Gegeben ein Punkt a durch seinen Aufriß a_2 und sein Bild a_2' (s. Fig. 106); gesucht sein Abstand von der Bildebene.

Auflösung. Man zeichnet durch 0_2 und a_2 zwei Parallele, macht erstere gleich $\overline{0_2 0'} = D$ und zieht $0' a_2'$, so trifft diese die zweite Parallele in a', die Strecke $\overline{a_2 a'}$ ist der Abstand des Punktes a von der Bildebene.

73. Aufgabe 37. Eine Gerade ab ist gegeben durch zwei Punkte a und b (s. Fig. 102); gesucht Spur und Flucht der Geraden.

Auflösung. Sind die Punkte je durch Aufriß a_2 und b_2 und Bild a_2' und b_2' gegeben, so ist der Schnittpunkt von

a_2b_2 und $a_2'b_2'$ die Spur s der Geraden ab. Eine Parallele durch 0_2 zu a_2b_2 liefert auf $a_2'b_2'$ den Fluchtpunkt f_2'.

74. Aufgabe 38. Eine Gerade A ist gegeben durch Spur und Flucht; außerdem sind auf der

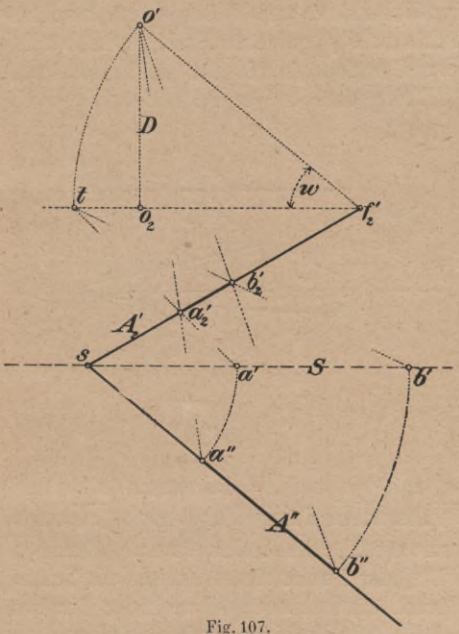


Fig. 107.

Geraden zwei Punkte a und b durch ihre Bilder a_2' und b_2' gegeben (s. Fig. 107). Man soll den Winkel der Geraden mit der Bildebene und die wahre Länge von $\overline{ab}$ konstruieren.

Auflösung. Man verbindet $0_2 f_2'$, zieht $0_2 0'$ senkrecht zu $0_2 f_2'$ und gleich D, so ist $0' f_2'$ der umgelegte Parallelstrahl zur Geraden A und bildet mit $0_2 f_2'$ den Neigungswinkel w der Geraden A mit der Bildebene. Zieht man durch s eine Parallele S zu $0_2 f_2'$, so ist S die Spur einer die Gerade A enthaltenden, zur Bildebene senkrechten Ebene. Eine durch s zu $0' f_2'$ geführte Parallele A'' stellt die Umlegung der Geraden A mit der sie enthaltenden projizierenden Ebene dar, und es schneiden die Verbindungs-

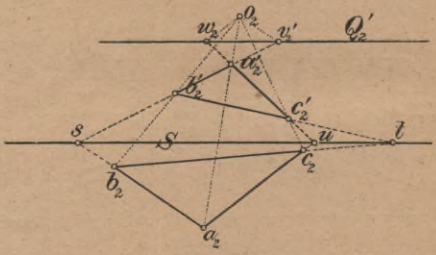


Fig. 108.

linien $0' a_2'$ und $0' b_2'$ auf A'' die Punkte a'' und b'' so aus, daß $\overline{a'' b''}$ die wahre Länge der Strecke $\overline{ab}$ darstellt.

Anmerkung 20. Beschreibt man um f_2' mit $f_2' 0'$ einen Kreis, so ist jeder Punkt dieses Kreises ein Teilungspunkt für die Gerade A, insbesondere auch der Punkt t (s. Fig. 107) auf $0_2 f_2'$. Die Verbindungslinien $t a_2'$ und $t b_2'$ liefern daher auf S die Punkte a' und b', so daß $\overline{a' b'}$ ebenfalls die wahre Länge von $\overline{ab}$ darstellt.

75. Aufgabe 39. Eine gegen die Bildebene beliebig geneigte Ebene ist durch Spur S und Flucht Q_2' gegeben (s. Fig. 104). Gesucht ist der

Neigungswinkel W der Ebene SQ_2' mit der Bildebene.

Auflösung. Man fällt von 0_2 eine Senkrechte $0_2q_2'$ auf Q_2', macht $\overline{0_20'}$ senkrecht zu $0_2q_2'$ und gleich D und zieht $0'q_2'$, so schließt letztere Linie mit $0_2q_2'$ den Neigungswinkel W der Ebene SQ_2' mit der Bildebene ein.

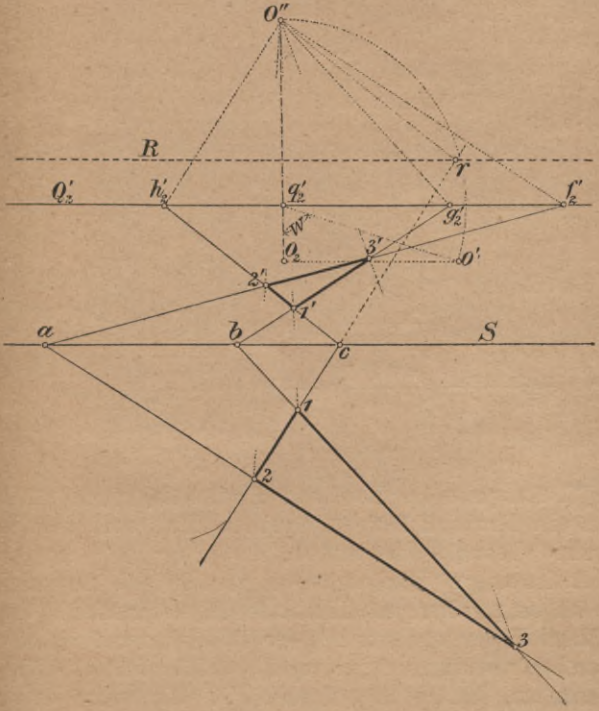


Fig. 109.

76. Aufgabe 40. Eine Ebene ist durch drei Punkte a, b, c (s. Fig. 108) dargestellt; gesucht Spur und Flucht der Ebene.

Auflösung. Man bestimmt die Spuren und Fluchten der Verbindungslinien der drei Punkte. Die Verbindungslinie der ersteren gibt die Spur S, die der letzteren die Flucht Q_2' der Ebene.

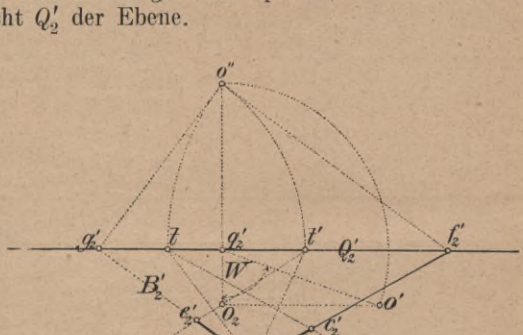


Fig. 110.

77. Aufgabe 41. In einer Ebene SQ_2' (s. Fig. 109) ist ein Dreieck $1 \cdot 2 \cdot 3$ gegeben. Man soll dessen wahre Gestalt bestimmen.

Auflösung. Man verlängert zunächst die Dreiecksseiten bis zur Spur und Flucht der Ebene, bestimmt den Winkel W der letzteren mit der Bildebene und legt die Parallelebene durch 0 zur gegebenen Ebene in die Bildebene um, dann gelangt 0 nach $0''$. Zieht man ferner durch die Spuren a, b, c der Dreieckseiten Parallele zu

den Strahlen $0''f_2'$, $0''g_2'$ und $0''h_2'$, so treffen sich erstere in den Ecken *3*, *2*, *1* des Dreiecks.

Anmerkung 20a. Eine Parallele durch $0''$ zu ch_2' durchschneidet die Gerade $c \cdot 2$ in einem Punkte r, dessen perspektivisches Bild der unendlich ferne Punkt r' von $c2'$ ist. Zieht man durch r eine Parallele zu S, so erhält man eine Gerade R, deren Bild R' in unendlicher Ferne gelegen ist.

78. Aufgabe 42. In einer Ebene SQ_2' ist eine Gerade A durch Spur s und Flucht f_2' und auf ihr ein Punkt a_2' gegeben (s. Fig. 110). Im Punkte a ist auf der Geraden A eine Senkrechte B zu errichten und auf beiden Geraden A und B eine Strecke von bestimmter Länge von a aus abzutragen.

Auflösung. Man fällt $0_2q_2'$ senkrecht zu Q_2', bestimmt $0''$, zieht $0''f_2'$ und senkrecht hierzu durch $0''$ die Linie $0''g_2'$, dann ist die Verbindungslinie $a_2'g_2'$ die gesuchte Senkrechte B_2'. Bestimmt man mittels der Kreisbögen um f_2' und g_2' durch $0''$ die Teilungspunkte t und t', so braucht man nur ta_2' und $t'a_2'$ zu ziehen und von deren Schnittpunkten b und d mit S die Strecken $\overline{bc} = \overline{de}$ gleich der gegebenen Strecke abzutragen, dann liefern die Verbindungslinien tc und $t'e$ auf A_2' und B_2' die Punkte c_2' und e_2', so daß $\overline{a_2'c_2'}$ und $\overline{a_2'e_2'}$ einander perspektivisch gleich sind.

Anmerkung 21. Zieht man durch a_2' eine Parallele zu S, so werden die Strecken $\overline{a_2'c'}$ und $\overline{a_2'e'}$ gleich lang. Man kann sich daher das Abtragen der gegebenen Strecke auf S von d aus ersparen. Man braucht ja nur, wenn $\overline{bc}$ abgetragen und tc gezogen ist, die Strecke $\overline{a_2'e'} = \overline{a_2'c'}$

abzutragen und $e't'$ zu ziehen, so ergibt sich hierdurch auf $a_2' g_2'$ ebenfalls der Punkt e_2'.

79. Aufgabe 43. In einem Punkte a_2' einer Ebene SQ_2' ist eine Senkrechte zu letzterer zu errichten

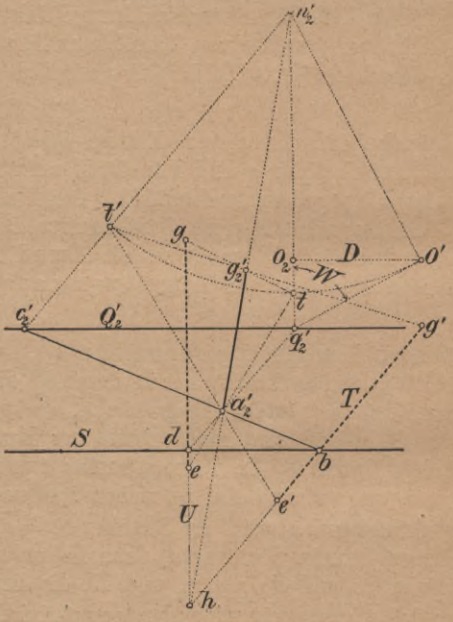


Fig. 111.

und auf ihr von a aus eine Strecke von gegebener Länge abzutragen (s. Fig. 111).

Auflösung. Man bestimmt q_2' und $0'$, zieht $0' n_2'$ senkrecht zu $q_2' 0'$, so ist n_2' der Normalenfluchtpunkt der Ebene SQ_2'. Die Verbindungslinie $a_2' n_2'$ ist daher das Bild der

gesuchten Senkrechten. Ermittelt man den Teilungspunkt t auf $q_2'n_2'$, zieht $q_2'a_2'$ bis zum Schnitt d mit S und durch d eine Parallele U zu $q_2'n_2'$, so kann man nunmehr ta_2' bis zum Schnitt e mit U ziehen, $\overline{eg}$ gleich der gegebenen Strecke auf U abtragen und gt verbinden. Letztere Linie liefert auf $a_2'n_2'$ den Punkt g_2' so, daß $\overline{a_2'g_2'}$ perspektivisch gleich eg ist.

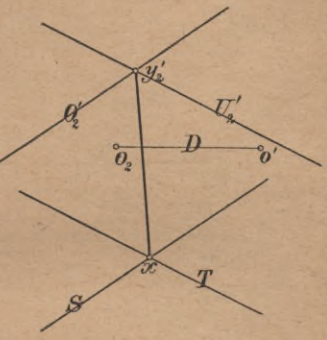


Fig. 112.

Anmerkung 22. Man könnte durch a_2' auch eine ganz beliebige Gerade bc_2' der Ebene SQ_2' ziehen, c_2' mit n_2' verbinden, durch b eine Parallele T zu $c_2'n_2'$ ziehen und auf $c_2'n_2'$ den Teilungspunkt t' ermitteln. Die Verbindungslinie $t'a_2'$ ergibt dann auf T den Punkt e', von welchem aus auf T die gegebene Strecke nach $\overline{e'g'}$ abzutragen ist. Die Verbindungslinie $g't'$ gibt ebenfalls den Punkt g_2'.

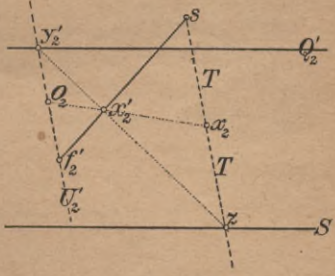


Fig. 113.

80. Aufgabe 44. Zwei Ebenen SQ_2' und TU_2' sind gegeben; gesucht ihre Schnittlinie.

Auflösung. Die Schnittpunkte x von S und T und y_2' von Q_2' und U_2' liefern Spur und Flucht der Schnittlinie (s. Fig. 112).

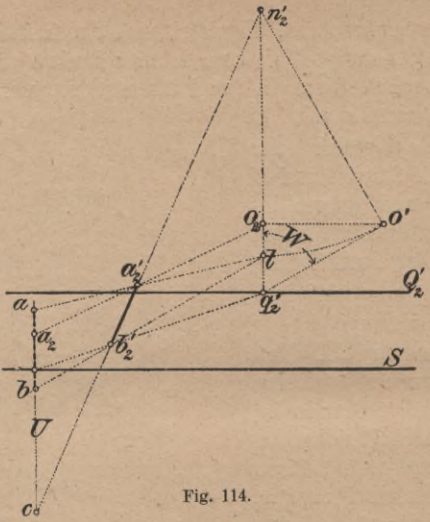


Fig. 114.

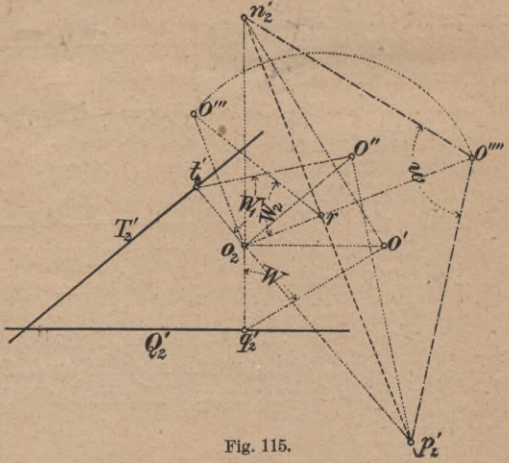


Fig. 115.

81. Aufgabe 45. Eine Ebene und eine Gerade sind je gegeben durch Spur und Flucht; gesucht der Schnittpunkt beider.

Auflösung. Man legt durch die Gerade sf_2' eine projizierende Ebene TU_2' (s. Fig. 113). Deren Schnittlinie

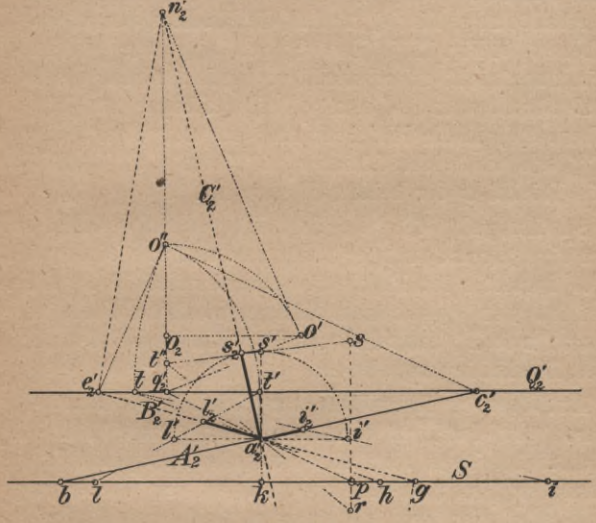


Fig. 116.

$y_2'z$ liefert auf sf_2' den Schnittpunkt x_2' der Ebene SQ_2' mit der Geraden sf_2'.

82. Aufgabe 46. Von einem Punkte a ist auf eine Ebene SQ_2' eine Senkrechte zu fällen und deren Länge vom Punkte a bis zu ihrem Fußpunkte zu ermitteln (s. Fig. 114).

Auflösung. Man bestimmt den Normalenfluchtpunkt n_2' der Ebene, zieht $n_2'a_2'$ und ermittelt den Schnittpunkt

b_2' dieser Linie mit der Ebene SQ_2'. Im übrigen verfährt man wie in Aufgabe 43. Die gesuchte Länge ist gleich der Strecke $\overline{ab}$.

83. Aufgabe 47. Gegeben zwei Ebenen, gesucht ihr Winkel.

Auflösung. Sind Q_2' und T_2' die Fluchten der gegebenen Ebenen (s. Fig. 115) (ihre Spuren sind zur Winkelbestimmung nicht erforderlich), so bestimmt man die Normalenfluchtpunkte n_2' und p_2' beider Ebenen und legt die Ebene $0np$ in die Bildebene um; es gelangt dann 0 nach $0''''$ und die beiden Linien $n_2'\ 0''''$ und $p_2'\ 0''''$ schließen den Winkel w der beiden Ebenen ein.

84. Aufgabe 48. In der Ebene SQ_2' (s. Fig. 116) ist eine Gerade A_2' gegeben und auf ihr ein Punkt a_2'. Punkt a ist Ecke eines rechtwinkligen Dreibeines von gegebener Länge, von welchem eine Seite mit A_2' zusammenfällt. Man soll das Bild des Dreibeins zeichnen.

Auflösung. Man zeichnet zunächst in der Ebene SQ_2' durch den Punkt a eine Gerade B_2' senkrecht zu A_2', hierauf bestimmt man den Normalenfluchtpunkt n_2' der Ebene SQ_2' und erhält hierdurch in der Verbindungslinie $n_2'a_2'$ das Bild der dritten Seite des Dreibeines. Mittels der Teilungspunkte t, t' und t'' trägt man nunmehr die gegebene Länge von a_2' auf den Geraden A_2', B_2', C_2' perspektivisch ab. Man zieht ta_2' bis zum Schnitt h mit S und macht $\overline{hi}$ gleich der gegebenen Strecke. ti liefert auf A_2' den Punkt i_2'. Zieht man $t'a_2'$ bis k, macht $\overline{kl} = \overline{hi}$, so liefert lt' auf B_2' den Punkt l_2'. Zieht man endlich $q_2'a_2'$ bis zum Schnitt p mit S und durch p eine Parallele zu $0_2n_2'$, verbindet ferner $t''a_2'$ bis zum Schnitt r mit der genannten Parallelen, so ist $\overline{rs} = \overline{hi}$ abzutragen;

st'' liefert auf C_2' den Punkt s_2'. Das Dreibein ist nunmehr gezeichnet.

85. Aufgabe 49. Von einem Würfel kennt man eine Ecke d durch Bild d_2' und Aufriß d_2, außerdem die Fluchtpunkte der Würfelkanten sowie

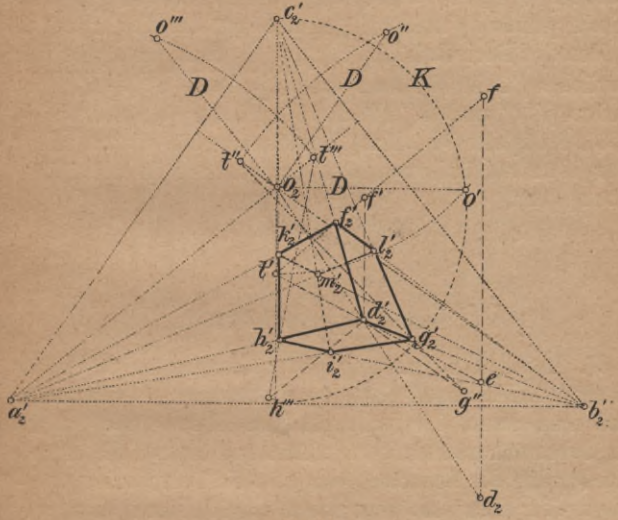


Fig. 117.

die Länge einer Kante; gesucht das Bild des Würfels.

Auflösung. Die drei Fluchtpunkte a_2', b_2' und c_2' bilden ein Dreieck, dessen Höhenschnittpunkt den Augpunkt O_2 darstellt. Mittels eines über einer der Dreieckshöhen beschriebenen Halbkreises K ergibt sich der Augabstand D; die Punkte d_2' und d_2 können nun auf einer durch O_2

gehenden Geraden beliebig gewählt werden. Hierdurch sind aber dann die Bilder der drei an der Ecke d_2' zusammenstoßenden Würfelkanten gegeben und man kann auf ihnen von d_2' aus mittels der Teilungspunkte t', t'' und t''' die gegebene Kantenlänge perspektivisch abtragen. ($d_2 f$ parallel $0_2 c_2'$, $e f$ = gegebene Würfelkantenlänge, Verbindungslinie $t' f$ liefert f_2'.) Zieht man durch d_2' Parallele zu den drei Dreieckshöhen $0_2 c_2'$, $0_2 b_2'$, $0_2 a_2'$, so ergibt sich zunächst f'. Macht man dann $\overline{d_2' g''} = \overline{d_2' h'''} = \overline{d_2' f'}$, so liefern $g'' t''$ und $h''' t'''$ die Würfelecken g_2' und h_2'.

86. Aufgabe 50. Man bestimme die Spur einer der Würfelflächen und lege letztere in die Bildebene um.

VII. Kapitel.

Schattenperspektive.

87. Bei der Darstellung des Schattens in perspektivischen Zeichnungen kann man entweder so verfahren, daß man zuerst im rechtwinkligen Grund- und Aufriß die Schattenkonstruktion ausführt und hierauf die einzelnen Punkte der Schattengrenzen in die Perspektive überträgt, oder aber man konstruiert unmittelbar in den perspektivischen Zeichnungen die Schatten. Im folgenden sollen einige dieser Konstruktionen gezeigt werden. Selbstverständlich gelten die geometrischen Regeln auch für die Schattenkonstruktionen in der Perspektive. Was zunächst die Lichtstrahlen anbetrifft, so werden im allgemeinen diese wieder als zueinander parallel vorausgesetzt; in diesem Falle besitzen sie einen gemeinsamen Fluchtpunkt, den Lichtstrahlenfluchtpunkt. Benutzt man auch die perspektivischen Bilder der Grundrisse der Licht-

strahlen als perspektivische Grundrisse, so gehört auch zu den letzteren ein auf der Gesichtslinie liegender Fluchtpunkt, der Grundrißfluchtpunkt. Lichtstrahlenfluchtpunkt und Grundrißfluchtpunkt liegen stets in einer Senkrechten zur Gesichtlinie.

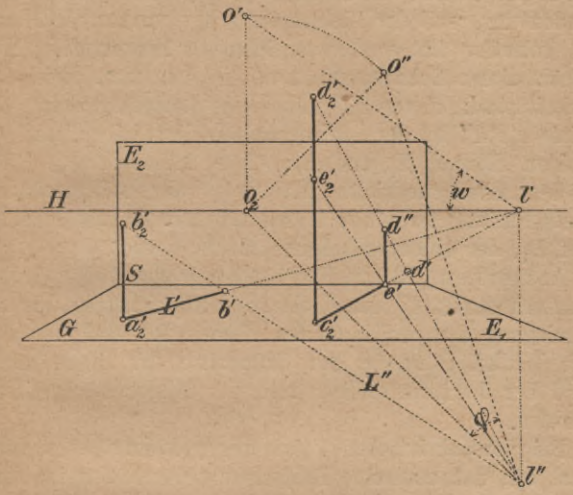


Fig. 118.

Ist in Fig. 118 die Grundrißebene E_1 und eine zur Aufrißebene parallele Ebene E_2 perspektivisch abgebildet und eine lotrechte Gerade ab gegeben und ihr Schatten auf die Ebenen E_1 und E_2 perspektivisch darzustellen, so zeichnet man durch a_2' einen Lichtstrahlengrundriß nach dem Grundrißfluchtpunkt l' und durch b_2' einen Lichtstrahl nach dem Lichtstrahlenfluchtpunkt l''.

Beide Lichtstrahlen treffen sich z. B. in b'; b' ist der Schlagschatten des Punktes b auf die Ebene E_1 in perspektivischer Darstellung. In Fig. 118 ist eine lotrechte Gerade cd dargestellt und ihr Schatten konstruiert. Hier fällt der Schatten des Punktes d auf den hinter der Ebene E_2 liegenden Teil der Ebene E_1 und hat als solcher keine Bedeutung, weil der Lichtstrahl schon vorher die Ebene E_2 getroffen hat und dort Schatten hervorruft. Man erhält diesen Schattenpunkt d'', in dem man durch den Schnittpunkt e' von $c_2'l'$ mit S eine Lotrechte zieht. Die Linie $c_2'e'd''$ ist der Schlagschatten der Linie cd auf die beiden Ebenen E_1 und E_2. Der Schnittpunkt e' des Lichtstrahlengrundrisses mit S ist der Schlagschatten eines Punktes e von ed. Der untere Teil ce ruft Schatten auf E_1, der obere ed solchen auf E_2 hervor.

Anmerkung 23. In Fig. 118 bezeichnet l' den Grundrißfluchtpunkt, l'' den Lichtstrahlenfluchtpunkt. Durch Umlegung der projizierenden Ebenen $0l'$ und $0l''$ sind die Winkel w und φ der Grundrisse der Lichtstrahlen und der letzteren selbst mit der Bildebene bestimmt worden.

Bei perspektivischen Zeichnungen kommt es manchmal vor, daß man eine Beleuchtung durch eine im Endlichen befindliche Lichtquelle voraussetzt. In diesem Falle ist die Lichtquelle dargestellt durch einen Punkt, und es enthalten die perspektivischen Bilder der Lichtstrahlen das perspektivische Bild l_2' des leuchtenden Punktes (s. Fig. 126), während die Lichtstrahlengrundrisse durch den perspektivischen Grundriß l_1' der Lichtquelle hindurchgehen (s. Fig. 126).

88. Aufgabe 51. Es ist der Schlagschatten einer lotrechten Geraden ab auf die Ebenen E_1 und E zu konstruieren (s. Fig. 119).

Auflösung. Man bestimmt die Schnittlinie einer durch ab parallel zur Lichtrichtung gelegten Ebene mit der Ebene E. Diese Schnittlinie trifft den Lichtstrahl durch b in dem Schattenpunkt b^0. Zur Ausführung der angedeuteten Konstruktion bestimmt man den perspektivischen Grundriß einer zweiten Geraden der Ebene E,

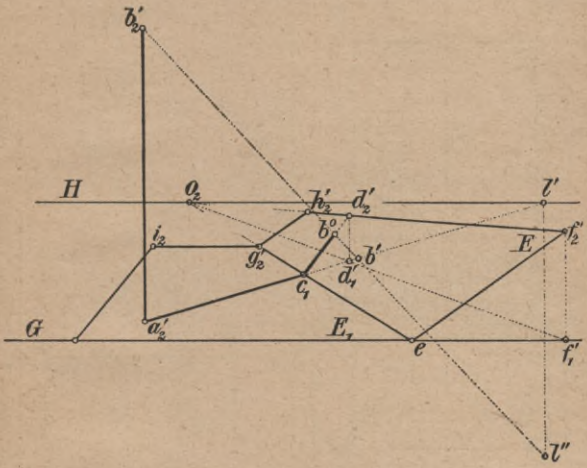


Fig. 119.

etwa der Linie $0_2 f_2'$ in $0_2 f_1'$, zieht ferner durch a_2' den Lichtstrahl nach l' und durch dessen Schnitt d_1' mit $0_2 f_1'$ die Lotrechte $d_1' d_2'$. Die Verbindungslinie $c_1 d_2'$ liefert auf $b_2' l''$ den Punkt b^0. Der Gesamtschatten von ab auf die Ebenen E_1 und E ist der Linienzug $a_2' c_1 b^0$.

89. Aufgabe 52. Ein rechtwinkliges Parallelepiped, das mit einer Fläche in der Grundriß-

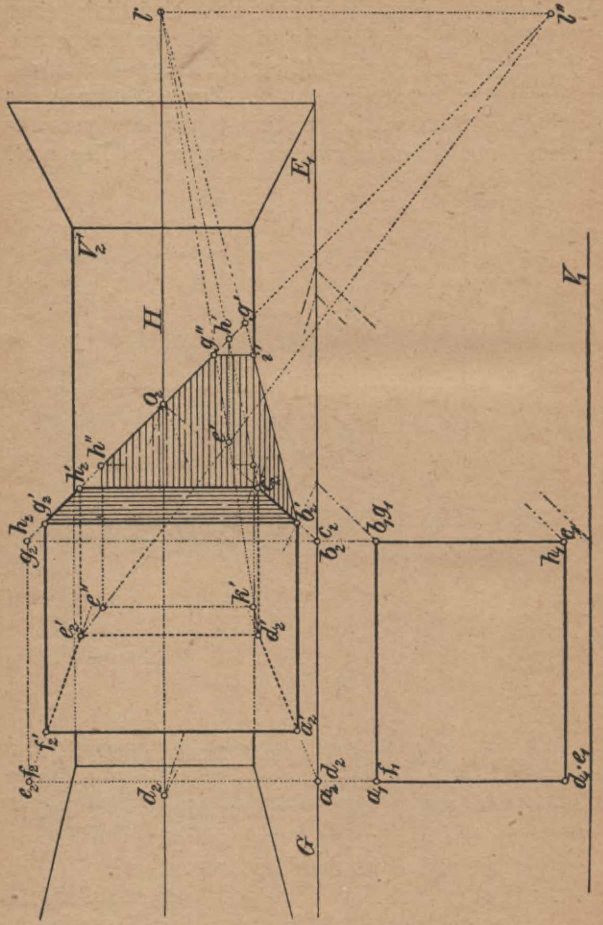


Fig. 120.

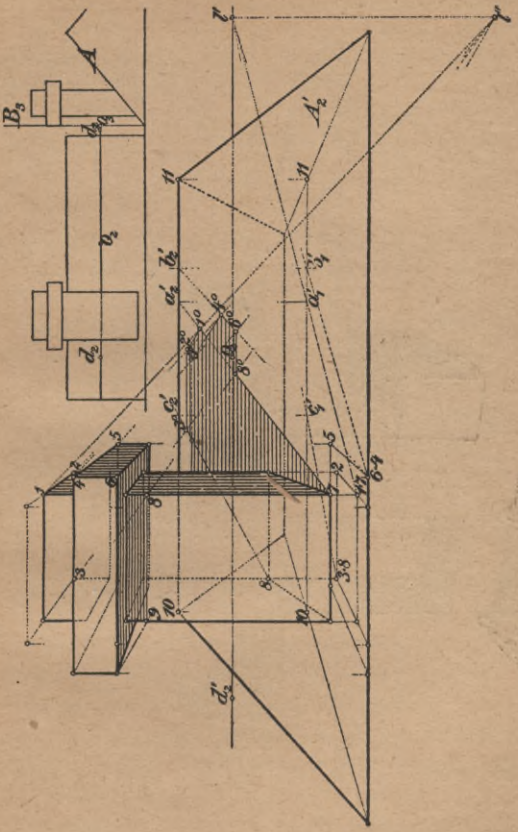


Fig. 121.

Fig. 122.

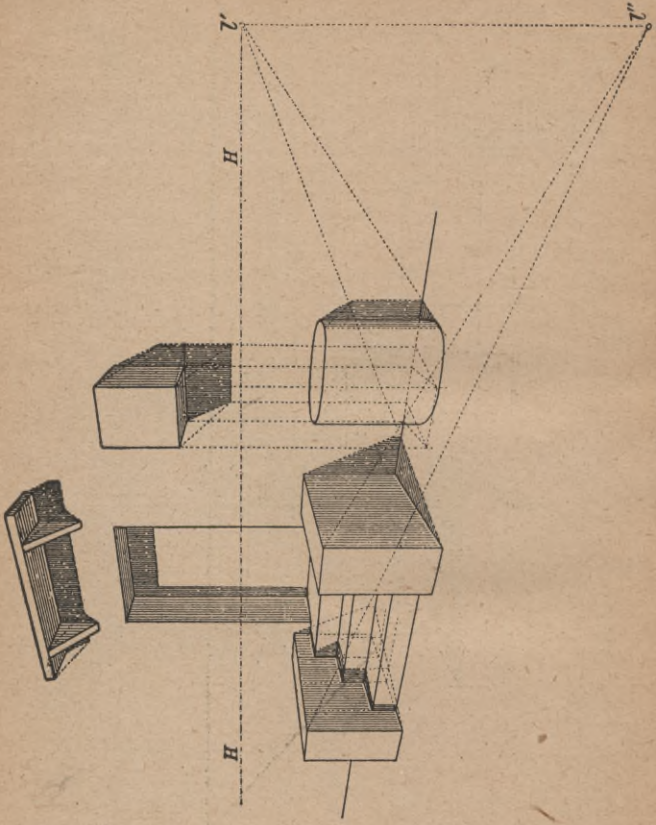


Fig. 123.

ebene aufliegt, ist gegeben (s. Fig. 120). Es ist sein Schatten auf die Ebene *E* und auf eine zur Bildebene parallele Ebene *V* zu konstruieren.

Auflösung. Die Konstruktion vollzieht sich in der gleichen Weise wie in der vorigen Aufgabe. Schatten ruft der Linienzug $b_2' g_2' h_2' e_2' d_2'$ hervor, man erhält hierfür als Schatten $b_2' i' g'' h'' e'' k' d_2'$.

90. Aufgabe 53. Die in Fig. 121 im Auf- und Seitenriß dargestellte Schornsteinendigung ist perspektivisch zu zeichnen und die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Zur perspektivischen Darstellung des Körpers hat man die Maße aus den Fig. 121 zu entnehmen und dreifach vergrößert zu verwenden.

Die Konstruktion des Schattens ist aus Fig. 122 zu ersehen. Die Lichtstrahlenfluchtpunkte sind l' und l''. Zur Ermittelung der Schlagschatten auf die Dachfläche A verfährt man in gleicher Weise, wie in Aufgabe 51 gezeigt wurde. Z. B. liefert die Hilfsebene durch die Kante $1 \cdot 7$ mit der Ebene A die Schnittlinie $7 a_2'$ und auf dieser den Schattenpunkt 1^0. Die Hilfsebene durch $6 \cdot 4$ ergibt die Schnittlinie $6 \cdot 4 b_2'$ mit A und hierauf die Schattenpunkte 4^0 und 6^0 usw.

91. Aufgabe 54. Für die in Fig. 123 perspektivisch gezeichnete Körperzusammenstellung ist die Schattenkonstruktion auszuführen, unter der Voraussetzung, daß l' und l'' die bezüglichen Lichtstrahlenfluchtpunkte darstellen.

Auflösung. In der Zeichnung ist die Konstruktion hinlänglich deutlich verzeichnet, so daß eine weitere Beschreibung überflüssig ist.

Aufgabe 54a. Für den in Fig. 123a dargestellten zylindrischen Gewölbebogen ist die Schattenkonstruktion für die Lichtrichtung $l' l''$ auszuführen.

Auflösung. Die Verbindungslinie $0_2 l''$ ist die Flucht einer zur Licht- und Zylinderrichtung parallelen Ebene. Legt man parallel hierzu etwa an den Kreis M_2' eine Tangente, so geht durch ihren Berührungspunkt g_2' mit M_2' und durch 0_2 die Linie der Selbstschattengrenze $g_2' h_2'$ der zylindrischen Gewölbeleibung. Es wird Schatten von dem Linienzug i_2', c_2', *1*, *2*, *3*, *4*, g_2' auf die Gewölbeleibung, sowie auf die Flächen *A* und *B* hervorgerufen. Eine durch $e_2' b_2$ parallel zur Lichtrichtung geführte Ebene schneidet die Fläche des Begrenzungskreises N_2 nach einer zu $l'' 0_2$ parallelen Geraden und diese den Kreis N_2 in *4'*. Die durch *4'* gezogene Linie $4' \cdot 0_2$ liefert auf M_2' den Punkt *4*, dessen Schatten 4^0 im Schnitt des Lichtstrahles $l''4$ mit $e_2' b_2$ liegt. Ein weiterer Punkt von M_2', etwa *2*, ergibt den Schatten 2^0 auf die Fläche *A*. Zieht man durch *k* auf $b_2 k$ den Grundrißlichtstrahl $l'3$, so ergibt sich auf M_1' der Punkt *3*, dem auf M_2' der Punkt *3* entspricht $l''3$ liefert auf $b_2 k$ den Schlagschattenpunkt 3^0. Zum Punkt *1* gehört der Schlagschattenpunkt 1^0 auf *B*, zu c_2' der Schlagschattenpunkt c^0. Der Gesamtschlagschatten ist begrenzt durch i_2', c^0, 1^0, *n*, 2^0, 4^0, g_2'.

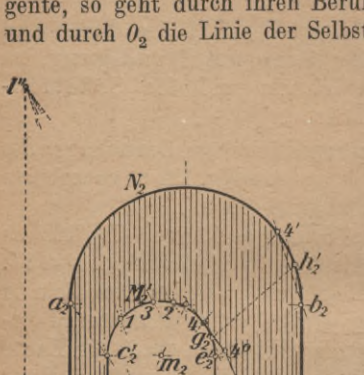


Fig. 123a.

Aufgabe 54b. Eine Ebene SQ_2' ist gegeben (s. Fig. 123b). Man soll durch einen Punkt a_2' der Ebene eine zu letzterer senkrechte Gerade ab von beliebiger Länge zeichnen und ihren Schatten auf die Ebene SQ_2' konstruieren für eine gegebene Lichtrichtung $l'l''$.

Auflösung. Man zeichnet durch 0_2 senkrecht zu S_2 und ermittelt den Normalenfluchtpunkt n_2' der Ebene, zieht durch n_2' nach a_2' und nimmt b_2' auf letzterer Linie beliebig an. Die Linie $l'l''$ trifft Q_2' in c_2' und es ist $a_2'c_2'$ die Projektion der Lichtrichtung auf die Ebene SQ_2'; der durch b_2' nach l'' gezogene Lichtstrahl liefert auf $a_2'c_2'$ den Schlagschatten b_0 des Punktes b auf die Ebene SQ_2'. Es ist also $a_2'b_0$ der Schatten von ab auf die Ebene SQ_2'.

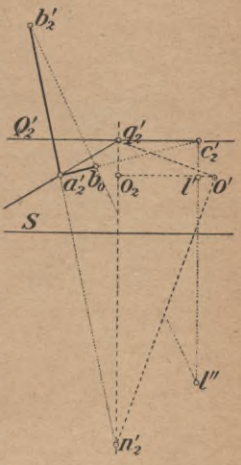


Fig. 123b.

92. Aufgabe 55. Für den in Fig. 124 perspektivisch dargestellten senkrechten Kreiskegel ist die Schattenkonstruktion auszuführen für eine durch L'' dargestellte Lichtstrahlenrichtung.

Auflösung. Im vorliegenden Falle ist der Lichtstrahlenfluchtpunkt l'' als unzugänglich angenommen und ersetzt durch die Gerade L'', zu welcher der durch s_2' geführte Lichtstrahl parallel sein soll. r_2' ist der Fluchtpunkt der Lichtstrahlenprojektion auf die Grundkreisebene des Kegels. Man zieht also $r_2's_1'$ und durch s_2'

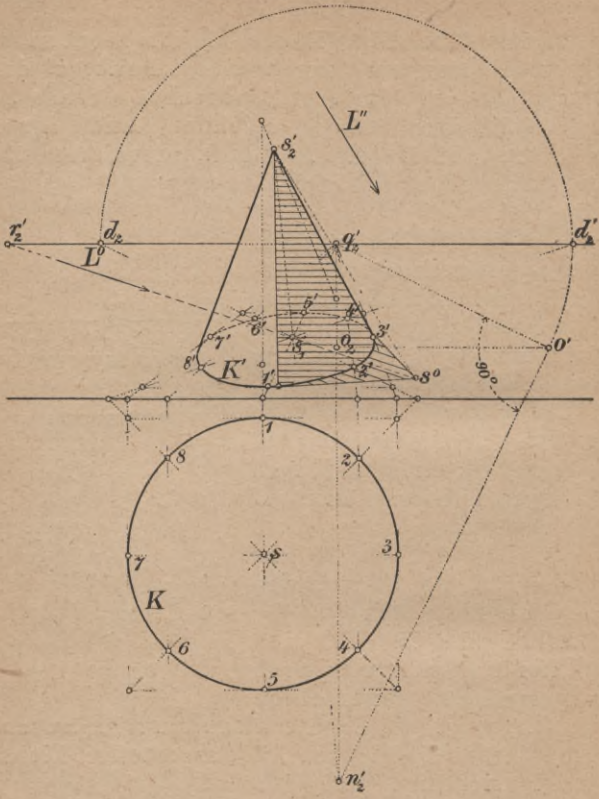


Fig. 124.

eine Parallele zu L'', so liefert diese den Schlagschattenpunkt s^0.

Anmerkung 24. Es kann auch der Fall eintreten, daß die Fluchtpunkte l' und l'' ins Unendliche fallen,

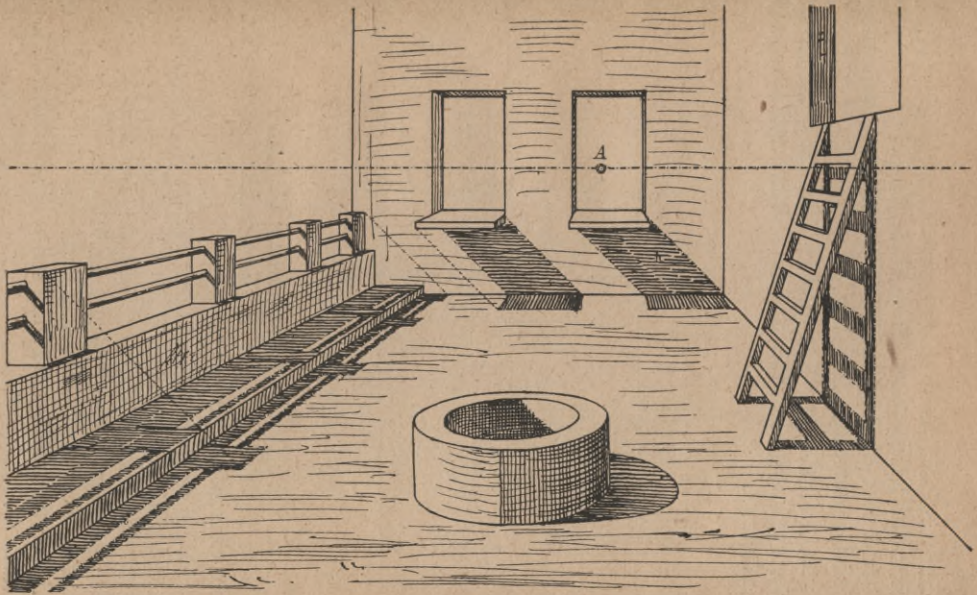


Fig. 125.

dann sind die Lichtstrahlen parallel zur Bildebene; die perspektivischen Grundrisse sind parallel zur Grundlinie G oder S, die perspektivischen Bilder selbst zu einer beliebig gewählten Richtung.

93. Aufgabe 56. Für die in Fig. 125 gezeichnete Darstellung ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

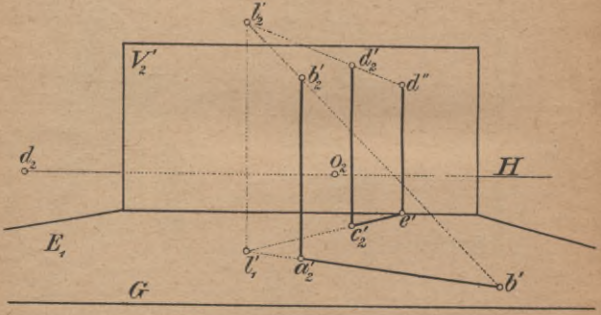


Fig. 126.

Auflösung. Die Lichtrichtung ist parallel zur Bildebene angenommen und die Konstruktion des Schattens für einzelne Punkte angedeutet.

94. Bei zentraler Beleuchtung vollzieht sich die Schattenkonstruktion in gleicher Weise wie bisher, es gehen aber jetzt die perspektivischen Bilder der Lichtstrahlen durch das perspektivische Bild der Lichtquelle, die Grundrißbilder der Lichtstrahlen aber durch das Grundrißbild der Lichtquelle. Einige Beispiele sollen diese Konstruktionen erläutern.

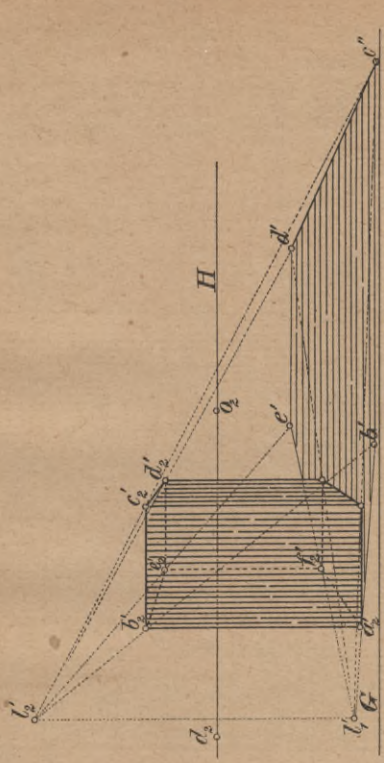


Fig. 127.

95. Aufgabe 57. Gegeben eine lotrechte Strecke ab oder cd (s. Fig. 126), gesucht der Schatten auf eine wagerechte bzw. lotrechte Ebene.

Auflösung. Die Lichtstrahlen durch l_1' und l_2' schneiden sich in b' und es ist $a_2' b'$ der Schlagschatten der Geraden ab auf die Ebene E_1. Für die Gerade cd liefert der Licht-

strahl durch l_2' auf V_2' den Punkt d'' und es ist der Schatten von $c\,d$ der Linienzug $c_2' e'\, d''$.

96. Aufgabe 58. Für das in Fig. 127 gezeichnete Prisma ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

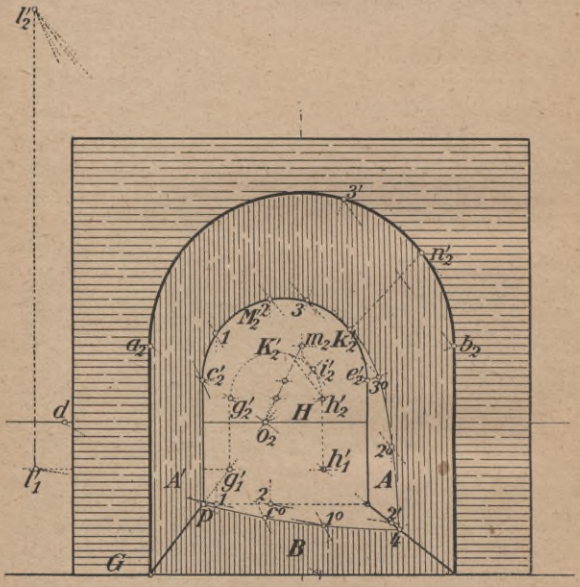


Fig. 128.

Auflösung. Die Lichtquelle ist durch $l_1' l_2'$ gegeben und die Schattenkonstruktion aus Fig. 127 vollständig zu ersehen.

97. Aufgabe 59. Für die Darstellung in Fig. 128 ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

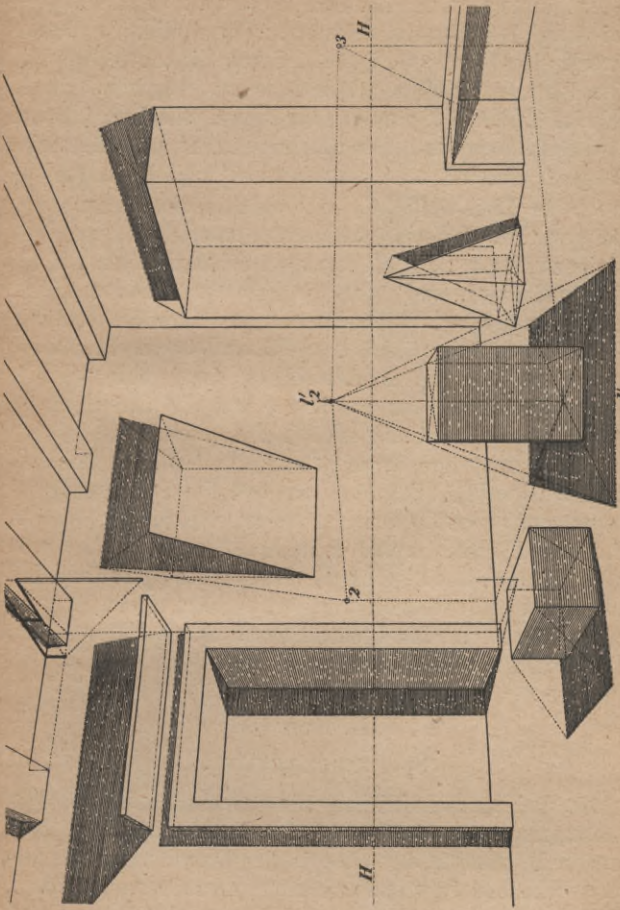


Fig. 129.

Auflösung. Zunächst ist für die zylindrische Bogenleibung die Selbstschattengrenze zu ermitteln. Zu diesem Zwecke legt man (s. Fig. 128) durch die Lotrechte $l_1' l_2'$ eine Ebene parallel zur Bildebene und bestimmt deren Schnitt $K_2' h_2' h_1' g_1' g_2'$ mit der verlängert gedachten inneren Gewölbeleibung und den Flächen A, A' und B. Eine Tangente durch l_2' an K_2' berührt in i_2' und bestimmt dadurch die Linie $0_2 i_2' k_2' n_2'$, von welcher die Strecke $k_2' n_2'$ die gesuchte Selbstschattengrenze darstellt. Von dem Linienzug k_2', *3*, *2*, *1*, c_2', p gelangt Schlagschatten auf die Gewölbeleibung sowie auf die Flächen A und B. Die Ebene durch b_2, e_2', l_2' schneidet aus dem Gewölbe die Linie $3 \cdot 3'$ aus, $b_2 3'$ ist parallel zu $l_2' i_2'$ und bestimmt auf M_2' den Punkt *3*. Der Lichtstrahl $3 l_2'$ liefert auf $e_2' b_2$ den Schlagschatten 3^0 des Punktes *3* auf die Grenzlinie $e\,b$ zwischen Gewölbeleibung und Wand A. Die übrigen Punkte von M_2' werfen ihre Schatten auf A und B z. B. Punkt *2* nach 2^0, Punkt *1* nach 1^0, c_2' nach c^0. Die Schlagschattenbegrenzungen auf B und A schneidet sich auf der Schnittlinie der Flächen A und B in *4*.

98. Aufgabe 60. Für die Darstellung in Fig. 129 ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Die Lichtquelle ist durch $l_1' l_2'$ gegeben. Die Konstruktion ist aus der Figur 129 zu ersehen.

VIII. Kapitel.

Spiegelperspektive.

99. Bei landschaftlichen oder architektonischen Darstellungen treten häufig die Erscheinungen der Spiegelung auf, z. B. wenn infolge eines in der Umgebung vorhandenen stehenden Gewässers die daran anstoßenden Gebäude, Bäume usw. sich widerspiegeln. Bei der Abbildung solcher

Gegenstände müssen dann auch die Gesetze der Spiegelung entsprechende Berücksichtigung erfahren. Ist nun a (s. Fig. 130) ein Punkt eines Gegenstandes, z. B. das Wipfelende eines Baumes, AB eine spiegelnde Fläche, so wird ein von a ausgehender Lichtstrahl etwa in c die Spiegelfläche treffen und von dieser unter dem gleichen

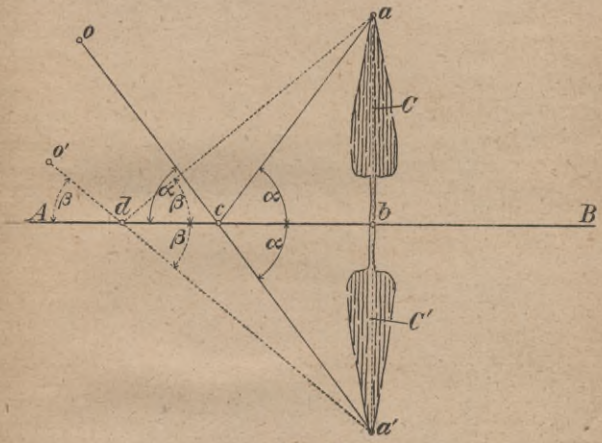
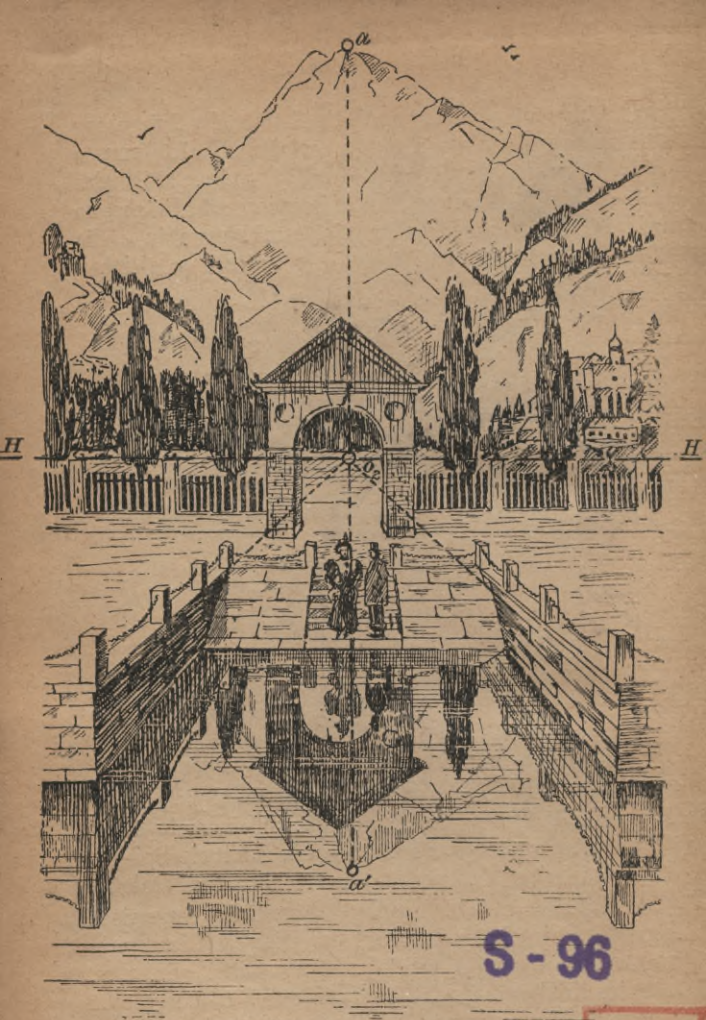


Fig. 130.

Winkel α, unter dem der Lichtstrahl die Spiegelfläche trifft, zurückgeworfen werden und nach einem in 0 befindlichen Auge gelangen; letzteres sieht somit ein Spiegelbild von a in a', so daß wegen der Gleichheit der Winkel α die Strecke $\overline{ab} = \overline{a'b}$ ist. Ein in $0'$ befindliches Auge sieht das gleiche Spiegelbild a' von a, weil hier ein Lichtstrahl ad unter dem Winkel β nach $0'$ zurückgeworfen wird usw. Das Spiegelbild von C wird hiernach durch C' dargestellt sein, welche Figur symmetrisch liegt zu C hinsichtlich der



S - 96
S. 61
BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Fig. 131.

Mai Bibliothek

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
I-301638

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000296070