

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

I

L. inw. ....

~~380~~

schen

ches

# Zeichnen

Von

H. Becker

Neubearbeitet von

Prof. J. Vonderlinn

Mit 290 Figuren und 23 Tafeln



# Hochbautechnische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen

- Geologie** von Dr. Edgar Daqué.
- I. Allgemeine Geologie. Mit 75 Figuren . . . . . Nr. 13
  - II. Stratigraphie. Mit 56 Figuren und 7 Tafeln . . . . . Nr. 846
- Mineralogie** von Prof. Dr. R. Brauns. Mit 132 Figuren. Nr. 29
- Petrographie** von Prof. Dr. W. Bruhns. Neubearb. von Prof. Dr. P. Ramdohr. Mit 10 Abbild. . . . . Nr. 173
- Praktisches Zahlenrechnen** von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 58 Figuren . . . . . Nr. 405
- Technische Tabellen u. Formeln** v. Dr.-Ing. W. Müller. Mit 106 Figuren . . . . . Nr. 579
- Materialprüfungswesen.** Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von Dipl.-Ingenieur Prof. K. Memmler.
- I. Materialeigenschaften. Festigkeitsversuche. Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren . . . . . Nr. 311
  - II. Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. Baumaterialprüfung. Papierprüfung. Schmiermittelpfung. Einiges für Metallographie. Mit 31 Figuren . . . . . Nr. 312
- Statik** von Prof. W. Hauber.
- I. Die Grundlehre der Statik starrer Körper. Mit 82 Figuren. Nr. 178
  - II. Angewandte Statik. Mit 61 Figuren . . . . . Nr. 179
- Graphische Statik** mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien von Dipl.-Ing. Otto Henkel. 2 Bände. Mit 207 Figuren . . . . . Nr. 603, 695
- Statische Berechnung des Bautechnikers** von Dipl.-Ing. Walter Selckmann.
- I. Die statische Untersuchung der Bauteile des einfachen Wohnhauses. Mit 174 Figuren . . . . . Nr. 784
  - II. Die zusammengesetzte Festigkeit. Die statische Untersuchung des eisernen Dachbinders. Die Stand-sicherheit. Mit 122 Figuren . . . . . Nr. 785
- Festigkeitslehre** von Prof. W. Hauber. Mit 56 Figuren. Nr. 288
- Aufgaben** . . . . . Nr. 491
- sungen** . . . . . Nr. 397
- Hydraulik** . . . . . Nr. 584
- Kinematik** . . . . . Nr. 902, 903
- Dynamik** . . . . . Nr. 519, 957
- Elastizität** . . . . . Nr. 959
- Max Ent** . . . . .
- Nomogramme** . . . . .
- Max Ma** . . . . .

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000296071

- Geometrisches Zeichnen** von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln. Nr. 58
- Schattenkonstruktionen** von Prof. J. Vonderlinn. Mit 114 Figuren. Nr. 236
- Parallelperspektive.** Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn. Mit 121 Figuren. Nr. 260
- Zentral-Perspektive** von Hans Freyberger, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Mit 132 Figuren. Nr. 57
- Darstellende Geometrie** von Prof. Dr. Robert Haußner.  
I. Mit 110 Figuren. Nr. 142  
II. Mit 88 Figuren. Nr. 143
- Die Baustoffkunde** von Prof. H. Haberstroh. 3 Bände.  
I. Die Hauptbaustoffe. Mit 35 Abbildungen. Nr. 506  
II. Die Baustoffe des Hochbaues. Mit 13 Abbildungen. Nr. 853  
III. Die Baustoffe des Tiefbaues. Mit 26 Abbildungen. Nr. 854
- Vermessungskunde** von Prof. Dipl.-Ing. P. Werkmeister.  
I. Stückvermessung und Nivellieren. Mit 146 Figuren. Nr. 468  
II. Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 84 Fig. Nr. 469  
III. Trigonometrie und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie u. Topographie. Mit 61 Figuren. Nr. 862
- Das Veranschlagen im Hochbau.** Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlages von Architekt B. D. A. Emil Beutinger. Mit 16 Figuren. Nr. 385
- Die Kostenberechnung im Ingenieurbau** von Professor E. Kuhlmann und Dr.-Ing. H. Nitzsche. Mit 5 Tafeln. Nr. 750
- Bauführung** von Arch. B. D. A. Emil Beutinger. Mit 20 Fig. Nr. 399
- Maurer- und Steinhauerarbeiten** von Prof. Dipl.-Ing. W. Becker.  
I. Mauern u. Maueröffnungen; Fundamente. Mit 168 Fig. Nr. 419  
II. Bogen und Gewölbe; Steinerne Treppen. Mit 208 Figuren. Nr. 420  
III. Fußböden, Putz- und Stuckarbeiten, Wandbekleidungen und Stängelmse. Mit 128 Figuren. Nr. 421
- Schlosserarbeiten** von Prof. E. Viehweger. 2 Bände. Mit zahlreichen Figuren. Nr. 761, 762
- Eisenkonstruktionen im Hochbau** von Ing. Georg Janetzky. Mit 175 Abb. Nr. 322
- Zimmerarbeiten** von Prof. Carl Oplitz.  
I. Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken u. Deckenbildungen, hölzerne Fußböden, Fachwerkswände, Hänge- und Sprengwerke. Mit 169 Figuren. Nr. 489  
II. Dächer, Wandbekleidungen, Simsschalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüste. Mit 167 Figuren. Nr. 490
- Tischler- (Schreiner-) Arbeiten** von Prof. E. Viehweger.  
I. Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte. Mit 628 Figuren auf 75 Tafeln. Nr. 502  
II. Türen und Tore, Anordnung und Konstruktion, Haustüren, Tore, Balkontüren, Flurtüren. Mit 296 Figuren auf 105 Tafeln. Nr. 503  
III. Innere Türen, Pendeltüren, Schiebetüren, Drehtüren, Wandverkleidungen, Decken. Mit 323 Figuren. Nr. 755

- Der Eisenbetonbau** von Regierungsbaumeister K. Röble.  
Neubearbeitet von Dipl.-Ing. O. Henkel. Mit 77 Figuren. Nr. 349
- Heizung und Lüftung** von Ingenieur Johannes Körting.  
I. Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 24 Figuren . . . . . Nr. 342  
II. Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 172 Figuren . . . . . Nr. 343
- Entwässerung und Reinigung der Gebäude** von Dipl.-Ing. Wilhelm Schwaab. Mit 92 Figuren . . . . . Nr. 822
- Gas- und Wasserversorgung der Gebäude** von Dipl.-Ing. W. Schwaab. Mit 119 Figuren . . . . . Nr. 412
- Wohnhäuser** von Reg.-Baumeister Kurt Gabriel.  
I. Anlage und Konstr. des Wohnhauses. Mit 91 Fig. Nr. 839  
II. Die Räume des Wohnhauses. Mit 44 Figuren . . . Nr. 840
- Gasthäuser und Hotels** von Architekt Max Wohler.  
I. Die Bestandteile und die Einrichtung des Gasthauses. Mit 70 Figuren . . . . . Nr. 525  
II. Die verschiedenen Arten v. Gasthäusern. Mit 82 Fig. Nr. 526
- Geschäfts- u. Warenhäuser** von Baurat H. Schlepmann.  
I. Vom Laden zum „Grand Magasin“. Mit 23 Figuren. Nr. 655  
II. Die weitere Entwicklung d. Kaufhäuser. Mit 39 Figuren. Nr. 656
- Industrielle und gewerbliche Bauten** (Speicher, Lagerhäuser und Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann.  
I. Allgemeines über Anlage und Konstruktion der industriellen und gewerblichen Bauten . . . . . Nr. 511  
II. Speicher und Lagerhäuser. Mit 121 Figuren . . . . Nr. 512  
III. Fabriken. Mit 154 Figuren . . . . . Nr. 513
- Ländliche Bauten** von Baurat Ernst Kühn.  
I. Kultus- und Gemeinde-Bauten. Mit 64 Figuren . . . Nr. 758  
II. Das landwirtsch. Gehöft der Gegenwart. Mit 61 Fig. Nr. 759  
III. Landhäuser, Ferienhäuser, Arbeiterwohnungen, Gasthäuser und Wohnhäuser mit gewerblichen Anlagen. Mit 77 Figuren . . . . . Nr. 760
- Militärische Bauten** von Regierungsbaumeister R. Lang.  
I. Mit 59 Figuren . . . . . Nr. 626
- Die Baukunst des Schulhauses** von Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein.  
I. Das Schulhaus. Mit 38 Figuren . . . . . Nr. 443  
II. Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Figuren. Nr. 444
- Märkte und Markthallen für Lebensmittel** von Städt. Baurat Richard Schachner.  
I. Zweck und Bedeutung von Märkten und Markthallen, ihre Anlage und Ausgestaltung . . . . . Nr. 719  
II. Markthallenbauten. Mit zahlreichen Figuren . . . . Nr. 720
- Öffentliche Bade- und Schwimmanstalten** von Geh. Oberbaurat Dr. Carl Wolff. Mit 51 Figuren . . . . . Nr. 380
- Sportanlagen** von Prof. Dr. E. Schmitt. I. Mit 78 Figuren. Nr. 684

---

Weitere Bände sind in Vorbereitung

# Geometrisches Zeichnen

Von

**H. Becker**

Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg

Neubearbeitet von

**Professor J. Vonderlinn**

Gewerbeschulrat und Baugewerkschuldirektor a. D.

Dritte (der Neubearbeitung 1.) Auflage

Siebenter Neudruck

Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text

*L. Z. Nr. 3962.*



Berlin und Leipzig

**Walter de Gruyter & Co. Breslau**

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.



KD 513:003.63(023)



~~I 380~~

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,  
von der Verlagshandlung vorbehalten.



I 301637

Druck von  
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.  
819323.

Akc. Nr. 5281/50

BRK-B-128/2017

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	5
I. Einfache Konstruktionen zwischen geraden Linien und der Kreislinie . . . . .	12
Aufgaben über Tangentenkonstruktionen an eine und mehrere Kreislinien . . . . .	12
Einige Aufgaben über Kreisberührungen . . . . .	21
Teilung einer geraden Linie . . . . .	23
Konstruktion geradliniger Figuren . . . . .	24
Konstruktion eines Dreiecks. . . . .	25
Konstruktion eines Vierecks . . . . .	26
Konstruktion der regelmäßigen Vielecke . . . . .	43
Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks über gegebener Seite . . . . .	48
Kreisteilungen . . . . .	51
II. Konstruktion der Kegelschnitte, Ellipse, Parabel, Hyperbel . . . . .	56
Ellipsenkonstruktionen . . . . .	56
Konstruktion der Ellipse aus konjugierten Durchmessern . . . . .	60
Konstruktion der Ellipse durch Vergatterung . . . . .	61
Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse aus konjugierten Durchmessern . . . . .	61
Parabelkonstruktionen . . . . .	62
Hyperbelkonstruktionen . . . . .	65
Tangentenkonstruktion von einem Punkte außer- halb eines Kegelschnittes an letzteren . . . . .	67
III. Einige Eigenschaften der Kegelschnitte, die für den Zeichner von Interesse sind: Pol, Polare, Sätze von Pascal und Brianchon . . . . .	68
Einige Konstruktionsaufgaben über Kegel- schnitte . . . . .	71
IV. Konstruktion von Korbogenlinien und Eilini- en . . . . .	75
Konstruktion von Korbogenlinien . . . . .	75
Konstruktion von Eilini- en . . . . .	77

	Seite
V. Die Verwendung der Kreislinie zu bestimmten Bogenformen . . . . .	77
VI. Konstruktion der cyklischen oder Rollkurven einschließlich der wichtigsten Spirallinien . . . .	85
VII. Konstruktion einiger anderer Spirallinien . . . .	92
VIII. Konstruktion der Konchoide . . . . .	96
IX. Konstruktion der Cissoide . . . . .	98
X. Konstruktion einiger Ovallinien . . . . .	100
XI. Verbindung von geraden und krummen Linien zu geometrischen Ornamenten . . . . .	104
XII. Konstruktion von Maßstäben . . . . .	126
XIII. Verkleinern und Vergrößern von Figuren . . . .	128

---

## Einleitung.

Zweck des geometrischen Zeichnens ist die Darstellung und Anwendung geometrischer Konstruktionen. Geometrie und Zeichnen stehen in einer gewissen Wechselwirkung zueinander, indem das Zeichnen die Kenntniss gewisser geometrischer Lehrsätze und Wahrheiten voraussetzt.

Die Aufgaben des geometrischen Zeichnens befassen sich mit der Darstellung von geometrischen Gebilden und zwar auf Grund gewisser Eigenschaften der letzteren.

Die geometrischen Grundgebilde sind Punkte, Linien, welche letztere sowohl gerade, als auch krumm sein können, sowie Figuren, die entweder von geraden oder krummen Linien oder von beiden eingeschlossen sind.

Eine Linie entsteht durch Bewegung eines Punktes; behält die Bewegung stets dieselbe Richtung bei, so entsteht die gerade Linie, ändert sich die Bewegungsrichtung ununterbrochen, so ist das Erzeugnis der Bewegung eine krumme Linie, d. h. eine Kurve (s. Fig. 1). Zwei aufeinanderfolgende Punkte miteinander verbunden geben eine gerade Linie, welche eine Tangente der Kurve genannt wird. Sie hat mit der Kurve zwei unendlich nahe Punkte gemeinsam, welche in der Zeichnung in einen einzigen Punkt, den Berührungspunkt der Tangente mit der Kurve zusammenfallen. Durchschreitet der sich bewegende Punkt dieselbe Stelle der Ebene mehrmals, so entsteht ein Doppelpunkt (s. Fig. 2 u. 3) oder ein mehrfacher Punkt (s. Fig. 4). Hält der bewegliche Punkt einen Augenblick in seiner Bewegung inne und kehrt

dann die Bewegungsrichtung um, so erhält man einen Rückkehrpunkt, der in zweifacher Weise auftreten kann, nämlich als eine Dornspitze (s. Fig. 6) oder als eine Schnabelspitze (s. Fig. 7). Die gerade Linie ist durch zwei Punkte vollständig bestimmt, d. h. durch zwei Punkte läßt sich nur eine einzige gerade Linie hindurchlegen. Hat man zwei gerade Linien, so können diese einen Punkt miteinander gemein haben, d. h. sich schneiden (s. Fig. 8); sie bilden dann unter sich vier Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ , von denen je zwei, wie  $\alpha$  und  $\beta$ , nebeneinander liegen und Nebenwinkel heißen, während je zwei mit der Spitze aneinander stoßende Winkel, wie  $\alpha$ ,  $\alpha'$  und  $\beta$ ,  $\beta'$ , Scheitelwinkel genannt werden. Sind zwei Nebenwinkel, wie  $\alpha$  und  $\beta$  (s. Fig. 9) einander gleich, so stehen die Geraden  $AB$  und  $CD$  aufeinander senkrecht. Alle vier Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  sind dann einander gleich und man bezeichnet jeden derselben als einen „rechten Winkel“. Ein rechter Winkel wird in 90 gleiche Winkel eingeteilt und jeder solche Winkel heißt ein Grad ( $^{\circ}$ ). Jeder Grad kann wieder in 60 Teile geteilt werden; jeder solche Teil heißt eine Minute ( $'$ ), jede Minute wird außerdem noch in 60 Sekunden ( $''$ ) geteilt. Ein rechter Winkel ist also ein Winkel von 90 Grad ( $90^{\circ}$ ). Irgend ein anderer Winkel kann z. B. sein  $\alpha = 79^{\circ} 15' 6''$ , d. h. 79 Grad 15 Minuten und 6 Sekunden. Ein Winkel, der kleiner ist als  $90^{\circ}$ , heißt ein spitzer Winkel, ist er größer als  $90^{\circ}$ , so heißt er stumpf; eine gerade Linie stellt einen Winkel von  $180^{\circ}$  oder einen gestreckten Winkel dar. Die den Winkel begrenzenden geraden Linien heißen seine Schenkel. Zwei Nebenwinkel haben einen Schenkel gemeinsam. Bei zwei Scheitelwinkeln fallen die Schenkel des einen Winkels in die Verlängerungen der Schenkel des anderen.



Fig. 1.

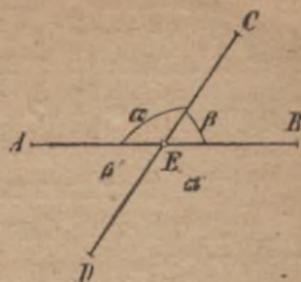


Fig. 8.

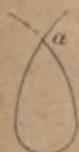


Fig. 2.

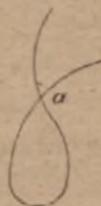


Fig. 3.

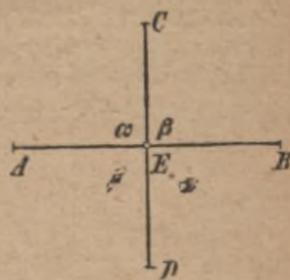


Fig. 9.



Fig. 4.



Fig. 5.

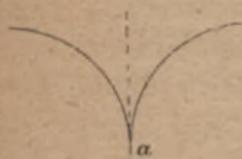


Fig. 6.

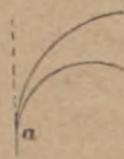


Fig. 7.

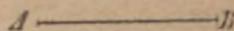


Fig. 10.

Wird der Winkel zweier Geraden immer kleiner und kleiner, so werden die Linien schließlich zueinander parallel (s. Fig. 10). Man sagt in diesem Falle, die Linien schneiden sich in unendlicher Ferne.

Anmerkung. Zum Zeichnen gerader Linien bedient man sich der Reißschiene oder der Zeichendreiecke. Die Zeichenbogen sind in der Regel auf dem Reißbrette befestigt, entweder lediglich mit Heftstiftchen oder sie sind mittels Klebestoffes aufgespannt. Es ist vielfach üblich, die zum oberen oder unteren Reißbrettrande parallelen Linien als wagerechte, die zum linken oder rechten Reißbrettrande parallelen Linien als lotrechte Linien zu bezeichnen.

Beim Zeichnen wagerechter Linien wird die Reißschiene mit dem festen Kopfe nur an die linke Seite des Reißbrettes angelegt, lotrechte Linien

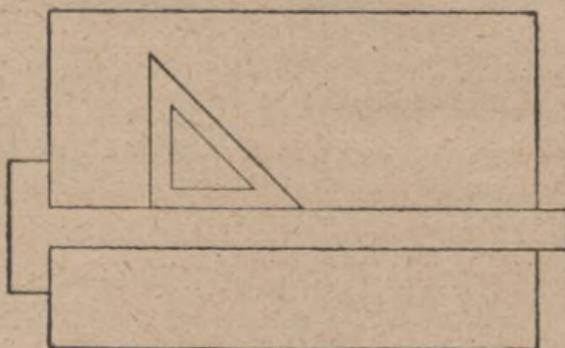


Fig. 7a.

werden mittels des Winkeldreiecks so gezeichnet, daß man dasselbe mit einer Kathete an die Reißschiene legt, welche gleichzeitig an die linke Seite des Reißbrettes angedrückt werden muß (s. Fig. 7a).

Alle Linien werden stets auf der Lichtseite der Schiene bzw. des Winkels und zwar gleichmäßig lang-

sam, aber auf einen Zug gezogen, wobei der Bleistift resp. die Reißfeder senkrecht zu halten ist.

Zum Zwecke des Abstechens von Strecken wird der Zirkel mit den drei ersten Fingern der Rechten gehandhabt; sobald die Strecke abgestochen ist, wird derselbe am Kopfe gefaßt und die Spitze in das Papier leicht eingedrückt.

Beim Ausziehen von Kreisen mittelst Zirkelfeder müssen die Schenkelgelenke des Zirkels stets so weit abgelenkt werden, daß sowohl der freie Schenkel als der Federeinsatz genau senkrecht auf dem Papier aufstehen. Kreise zieht man stets von links nach rechts aus.

Alle Gerätschaften sind im besten Zustande zu erhalten. Man arbeite nie mit stumpfem Bleistift oder stumpfen Zirkelspitzen! Man gewöhne sich, sämtliche Hilfsmittel in eine bestimmte Ordnung neben sich zu legen; sehe von Zeit zu Zeit das bereits Aufgezeichnete durch, um sich vor Fehlern zu sichern.

Zu unterscheiden sind:

Eine voll ausgezogene Linie: \_\_\_\_\_

Eine kurz gestrichelte Linie: .....  
 (Note: The original image shows a line with short, frequent dashes, not a standard dotted line.)

Eine lang gestrichelte Linie: - - - - -

Eine strichpunktierte Linie: - · - · - · - · - · - · - · - · -

Eine Kurve kann auch hervorgebracht werden durch Bewegung einer geraden Linie (s. Fig. 11 u. 12); die einzelnen Lagen der beweglichen Geraden bilden dann

Tangenten an die Kurve, d. h. sie hüllen diese ein. Je zwei aufeinanderfolgende Lagen der beweglichen Geraden ergeben durch ihren Schnitt einen Kurvenpunkt.

Nimmt die bewegliche Gerade mehrfach dieselbe Lage in der Ebene ein, so entsteht eine Doppeltangente (s. Fig. 13) oder eine mehrfache Tangente der Kurve (s. Fig. 14).

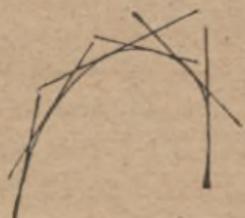


Fig. 11.

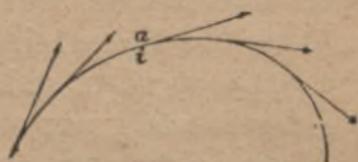


Fig. 12.

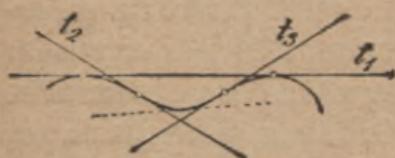


Fig. 13.

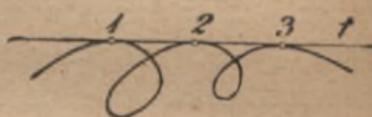


Fig. 14.

Hält die bewegliche Gerade einen Augenblick in der Bewegung inne und ändert dann die Bewegungsrichtung, so entsteht eine Wendetangente der Kurve (s. Tangente  $t_2$  bzw.  $t_3$  in Fig. 13); ihr Berührungspunkt mit der Kurve heißt ein Wendepunkt (s. Fig. 5 u. 13, in letzterer Figur sind  $t_2$  und  $t_3$  Wendetangenten).

Eine wichtige krumme Linie ist die Kreislinie (s. Fig. 15); sie entsteht, wenn eine begrenzte gerade Linie  $MA$  in dem einen ihrer Endpunkte  $M$  festgehalten ist und um diesen Punkt sich dreht. Der Weg des anderen Endpunktes  $A$  ist die Kreislinie. Der festgehaltene Punkt heißt der Mittelpunkt, die bewegliche Strecke ein Halbmesser der Kreislinie. Die Kreislinie hat unzählig viele gleichgroße Halbmesser; alle Punkte des Kreises sind vom Mittelpunkte gleichweit entfernt.

Zwei in eine gerade Linie fallende Halbmesser bilden einen Kreisdurchmesser  $AB$ . Die Verbindungslinie irgend zweier Punkte  $CD$  heißt eine Kreissehne; rücken die Punkte  $C$  und  $D$  einander unendlich nahe, so geht die Kreissehne in eine Kreistangente  $t$  über. Sie berührt die Kreislinie in dem Punkte  $D$ , dem Berührungspunkte. Der Berührungspunkt stellt eigentlich zwei aufeinanderfolgende unendlich nahe Punkte dar. Der durch den Berührungspunkt gezogene Halbmesser steht auf der Tangente senkrecht.

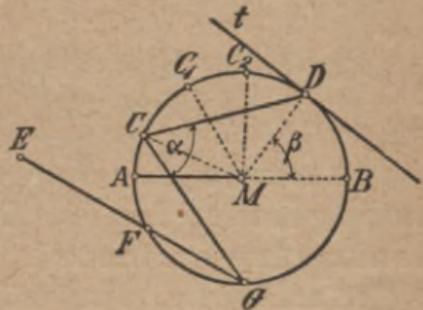


Fig. 15

Eine von einem Punkte außerhalb der Kreislinie nach der letzteren gezogene Linie kann die Kreislinie in höchstens zwei Punkten schneiden und heißt dann eine Kreissekante: zwei Kreissehnen  $CD$  und  $CG$  schließen in  $C$  einen Peripheriewinkel  $\alpha$  ein, zwei Halbmesser  $MD$  und  $MB$  bilden bei  $M$  einen Zentriwinkel  $\beta$ . Eine Sehne, z. B.  $CD$ , teilt die Kreisfläche in zwei Kreisabschnitte (Segmente  $CC_1D$  und  $CGD$ ); zwei Halbmesser begrenzen einen Kreisabschnitt, Sektor.

Die Linien der Ebene grenzen einen bestimmten Teil der letzteren ab und bilden dann eine Figur. Sind die Linien alle gerade, so entstehen eckige Figuren, z. B. das Dreieck, Viereck, Vieleck; sind die Figuren von krummen Linien begrenzt, so erhält man krummlinige Figuren. Setzt sich die Begrenzung aus geraden und krummen Linien zusammen, so ergeben sich gemischtlinige Figuren; regelmäßig heißen die eckigen Figuren, wenn die sämtlichen Winkel und alle Seiten der Figuren einander gleich sind.

## I. Einfache Konstruktionen zwischen geraden Linien und der Kreislinie.

Aufgabe 1. Man soll in einem Punkte  $C$  einer geraden Linie  $AB$  (s. Fig. 16) zu dieser eine Senkrechte errichten.

Auflösung. Man trägt von  $C$  auf  $AB$  zwei gleiche Strecken  $CA = CB$  ab und beschreibt um  $A$  und  $B$  mit einem beliebigen Halbmesser Kreisbogen, die sich in  $D$  schneiden.  $D$  ist ein Punkt der gesuchten Senkrechten.

Aufgabe 2. Von einem Punkte  $C$  ist auf eine Gerade  $AB$  (s. Fig. 17) eine Senkrechte zu fällen.

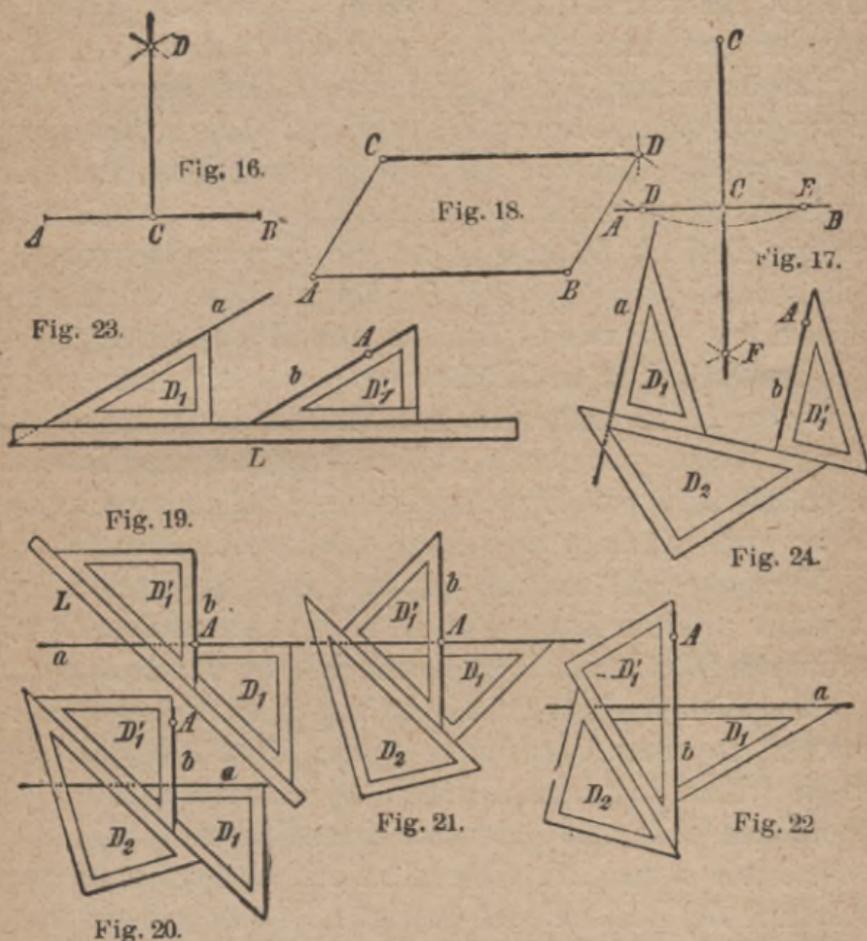
Auflösung. Man beschreibt um  $C$  mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen, der  $AB$  in  $D$  und  $E$  schneidet; zwei Kreisbogen um  $D$  und  $E$  als Mittelpunkte mit gleichem Halbmesser liefern einen Punkt  $F$  der gesuchten Senkrechten.

Aufgabe 3. Durch einen Punkt  $C$  ist zu einer Geraden  $AB$  (s. Fig. 18) eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Ein um  $C$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser  $AB$  beschriebener Kreisbogen trifft den um  $B$  mit einem Halbmesser gleich  $AC$  beschriebenen Kreisbogen in einem Punkte  $D$  der gesuchten Parallelen.

Anmerkung. Mechanische Lösung vorstehender drei Aufgaben.

Das Errichten und Fällen von Senkrechten, sowie das Ziehen von Parallelen zu einer gegebenen Geraden vollführt der Zeichner in der Regel nicht nach den vorstehend angegebenen geometrischen Lösungen, sondern



einfacher mechanisch mittels seiner Zeichenwerkzeuge, der Reißschiene und der Zeichendreiecke. Soll z. B. in einem Punkte  $A$  (s. Fig. 19) zur Linie  $a$  eine Senkrechte errichtet werden, so legt man das Zeichendreieck  $D_1$  mit einer Kathete an die Linie  $a$  an, ein zweites Lineal  $L$ ,

etwa die Reißschiene, kommt nun an die Hypotenuse des Dreiecks  $D_1$  zu liegen. Nunmehr verschiebt man  $D_1$  längs des Lineales  $L$  so lange, bis die zweite Kathete von  $D_1$  durch den Punkt  $A$  hindurchgeht,  $D_1$  also die Lage  $D'_1$  einnimmt. Diese zweite Kathete  $D'_1$  gibt die Lage der gesuchten Senkrechten  $b$  durch  $A$  an.

In ähnlicher Weise geht das Fällen einer Senkrechten vor sich: Dreieck  $D_1$  (s. Fig. 20) liegt mit einer Kathete an der Linie  $a$ , auf welche durch den Punkt  $A$  eine Senkrechte gefällt werden soll; ein zweites Lineal oder ein Dreieck  $D_2$  kommt an die Hypotenuse von  $D_1$  zu liegen. Nunmehr wird  $D_1$  längs  $D_2$  so lange verschoben, bis die zweite Kathete von  $D_1$  durch  $A$  geht.

Das Errichten und Fällen von Senkrechten zu einer gegebenen Linie läßt sich mechanisch noch in etwas anderer Weise vornehmen. Man legt an die Linie  $a$  (s. Fig. 21 u. 22) die Hypotenuse des Zeichendreiecks  $D_1$  und an eine Kathete desselben das zweite Dreieck  $D_2$  an. Nunmehr hält man  $D_2$  fest und legt das Dreieck  $D_1$  mit seiner zweiten Kathete an  $D_2$  an und verschiebt  $D_1$  so lange nach  $D'_1$ , bis die Hypotenuse von  $D'_1$  durch  $A$  geht.

Das Ziehen einer Parallelen durch einen gegebenen Punkt  $A$  zu einer Geraden  $a$  (s. Fig. 23 u. 24) vollzieht sich so: Man legt das Dreieck  $D_1$  entweder mit der Hypotenuse (s. Fig. 23) oder mit einer Kathete (s. Fig. 24) an die Linie  $a$  an. An dieses Dreieck  $D_1$  legt man nun ein Lineal  $L$  (Reißschiene) (s. Fig. 23) oder ein zweites Dreieck  $D_2$  (s. Fig. 24) an und verschiebt längs  $L$  oder  $D_2$  das Dreieck  $D_1$  so lange, bis die Hypotenuse bzw. die Kathete von  $D_1$ , welche an  $a$  lag, durch  $A$  hindurchgeht, und zieht dann die Linie  $b$ .

**Aufgabe 4.** Man soll eine gegebene Strecke  $DE$  (s. Fig. 17) halbieren.

**Auflösung.** Man beschreibt um die Punkte  $D$  und  $E$  als Mittelpunkte mit einem und demselben Halbmesser von beliebiger Größe Kreisbogen, die sich in  $C$  und  $F$  schneiden. Die Verbindungslinie  $CF$  hälftet die Strecke  $DE$  und steht auf letzterer senkrecht. Sie heißt die Mittelsenkrechte von  $DE$ .

**Aufgabe 5.** Man soll durch die drei Ecken eines Dreiecks  $ABC$  (s. Fig. 25) einen Kreis legen.

**Auflösung.** Man konstruiert zu den drei Seiten  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$  die zugehörigen Mittelsenkrechten, die sich im Mittelpunkte  $D$  des gesuchten Kreises schneiden.

**Aufgabe 6.** Man soll den Winkel zweier Geraden halbieren.

**Auflösung.** Man beschreibt um  $A$  als Mittelpunkt (s. Fig. 26) mit einem beliebigen Halbmesser den Kreisbogen  $BC$ , desgleichen um die Punkte  $C$  und  $B$  Kreisbogen mit dem gleichen oder einem anderen beliebigen Halbmesser, die sich in einem Punkte  $D$  der Halbierungslinie  $h$  treffen. Die Senkrechte  $h_1$  zu  $h$  halbiert den Nebenwinkel von  $BAC$ .

**Anwendungen zu Aufgabe 6.** Die Lösung der vorstehenden Aufgabe findet vielseitige praktische Anwendung; ein Fall sei hervorgehoben: Zwei Wege (s. Fig. 27) von ungleicher Breite sind durch einen kreisförmig gekrümmten Weg miteinander zu verbinden. Man verlängert die Wegbegrenzungen  $a$ ,  $c$  und  $b$ ,  $d$  bis zum Schnitt  $A$  und  $B$  und halbiert die Winkel der Linien  $a$ ,  $c$  und  $b$ ,  $d$ . Nimmt man nun die Bogenanfänge auf der Senkrechten  $CD$  zu  $c$  bzw.  $d$  an, so sind in deren Schnitten mit den beiden Halbierungslinien die Mittelpunkte  $M$  und  $M_1$  der kreisförmigen Verbindungsbogen bestimmt.

In ein Dreieck  $ABC$  (s. Fig. 28) ist ein Kreis einzubeschreiben. Der Mittelpunkt ist der Schnittpunkt

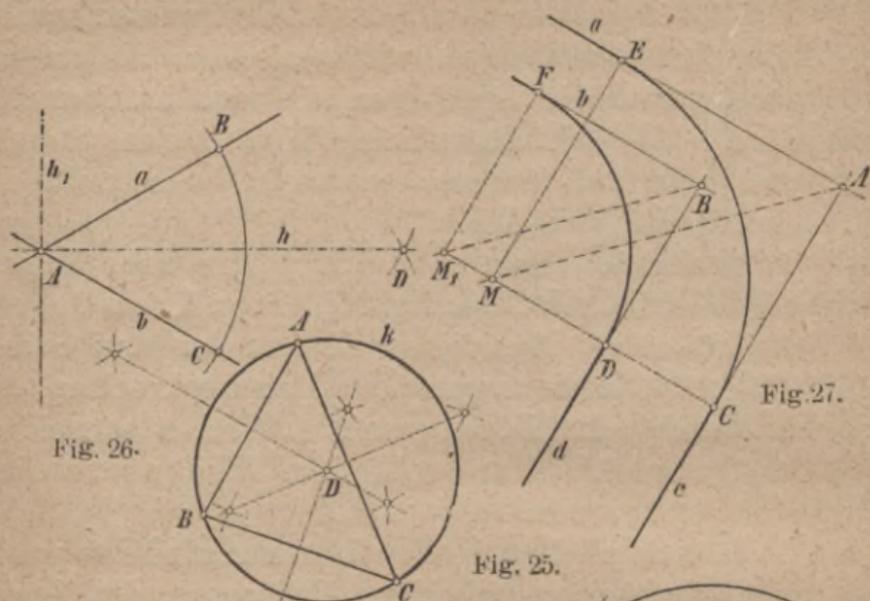


Fig. 26.

Fig. 25.

Fig. 27.

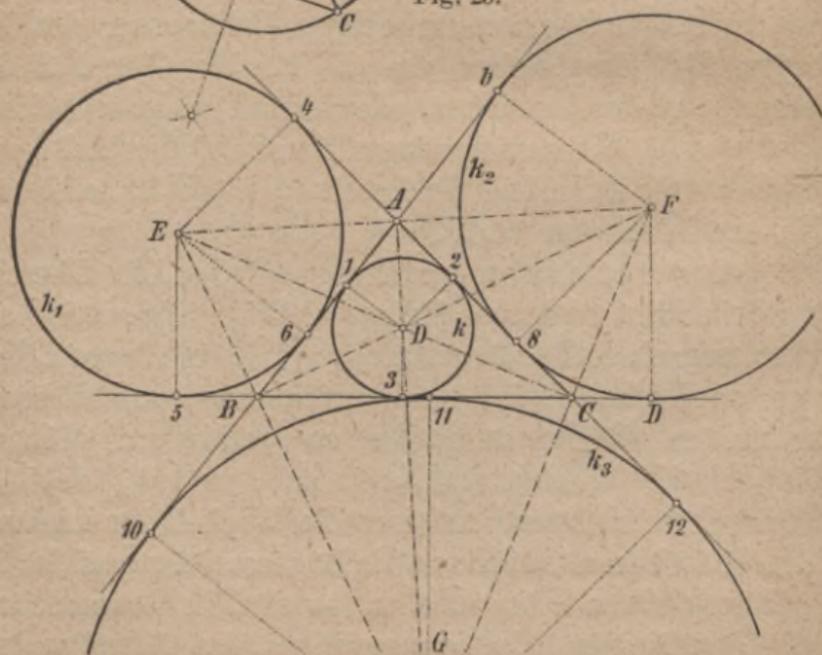


Fig. 28.

der Halbierungslinien der Dreieckswinkel. Nimmt man auch die Halbierungslinien der Dreiecksnebenwinkel hinzu, so ergeben sich vier Kreise, welche je die drei Dreiecksseiten berühren. Einer dieser Kreise, nämlich  $k$ , ist dem Dreieck eingeschrieben, d. h. seine Berührungspunkte mit den Dreiecksseiten liegen auf den Strecken  $AB$ ,  $AC$  und  $BC$ ; die drei übrigen Kreise,  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$ , berühren eine Dreiecksseite zwischen den Dreiecksseiten, die beiden anderen Dreiecksseiten, aber auf deren Verlängerungen über die Dreiecksseiten hinaus.

**Aufgabe 7.** Man soll an eine gegebene Gerade in einem Punkte  $A$  einen Winkel  $\alpha$  von gegebener Größe antragen.

**Auflösung.** Man beschreibt um  $A$  und  $A_1$  als Mittelpunkte mit dem gleichen Halbmesser von beliebiger Größe Kreisbogen, überträgt die Sehne  $C_1D_1$  nach  $CD$  und zieht  $AD$ , welche Linie mit  $AC$  den Winkel  $\alpha$  einschließt.

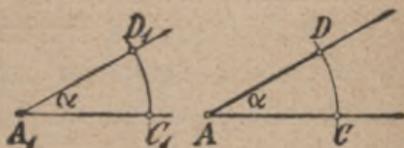


Fig. 29.

**Aufgabe 8.** Von einem Punkte außerhalb eines Kreises ist an letzteren eine Tangente zu konstruieren.

**Auflösung.** Würde der Punkt auf der Kreislinie selbst liegen, so hätte man nur durch den Punkt einen Halbmesser zu zeichnen und zu letzterem durch den gegebenen Punkt eine Senkrechte zu ziehen. Diese wäre dann die gesuchte Tangente.

Liegt aber der gegebene Punkt  $A$  (s. Fig. 30) außerhalb des Kreises  $k$ , so zeichnet man über  $AM$  als Durchmesser den Kreis  $k_1$ ; dieser schneidet aus  $k$  die Berührungspunkte  $B$  und  $C$  der gesuchten Tangenten aus. Es sind zwei solcher Tangenten möglich. Liegt der

Punkt  $A$  in unendlicher Ferne, so ist er ersetzt durch eine Gerade  $g$  (s. Fig. 31), zu welcher parallel an  $k$  die möglichen Tangenten zu ziehen sind. In diesem Falle fällt man von dem Mittelpunkte  $M$  des Kreises  $k$  eine Senkrechte zu  $g$ , sie schneidet dann auf  $k$  die Berührungspunkte  $A$  und  $B$  der gesuchten Tangenten aus.

Eine rein lineare Konstruktion der Tangenten durch einen Punkt  $A$  an einen Kreis  $k$  ist in Fig. 32 angegeben; man zieht durch  $A$  drei beliebige Sekanten nach  $k$ , welche letztere Linie in den Punkten  $1, 2, 3, 4$  und  $E, F$  treffen, die Verbindungslinien  $1F, 2E, 3F, 4E$  liefern zwei Schnittpunkte  $x$  und  $y$ , deren Verbindungslinie auf  $k$  die Berührungspunkte  $B$  und  $C$  der gesuchten Tangenten ausschneidet. In der Geometrie bezeichnet man die Linie  $xy$  als die Polare des Punktes  $A$  bezüglich des Kreises  $k$ , der Punkt  $A$  heißt der zur Polare  $xy$  gehörige Pol. Man wende die vorstehende Konstruktion auf den Fall an, daß die Tangenten parallel zu einer Geraden  $g$  sein sollen.

Aufgabe 9. An zwei gegebene Kreise sind die möglichen gemeinsamen Tangenten zu zeichnen.

Auflösung I. Man zeichnet über  $MM_1$  (s. Fig. 33) als Durchmesser die Kreislinie  $k_2$  und beschreibt um  $M$  mit einem Halbmesser gleich dem Unterschiede der Halbmesser der gegebenen Kreise den Kreisbogen  $AB$ , der  $k_2$  in  $A$  und  $B$  trifft. Die Verbindungslinien  $MA$  und  $MB$  treffen  $k$  in den Berührungspunkten  $C$  und  $D$  der gesuchten Tangenten, welche parallel zu  $M_1A$  und  $M_1B$  zu ziehen sind. Die vorstehende Konstruktion liefert zwei Tangenten, welche die Kreise  $k$  und  $k_1$  von außen berühren. Durchschneidet man die Kreislinie  $k_2$  mit einem Kreise, dessen Halbmesser gleich der Summe der Kreishalbmesser von  $k$  und  $k_1$  ist (s. Fig. 34), so ergeben sich die Punkte  $A$  und  $B$  und die Verbindungs-



linien  $MA$  und  $MB$  liefern die Berührungspunkte  $C$  und  $D$  der möglichen Tangenten, die parallel zu  $M_1A$  und  $M_1B$

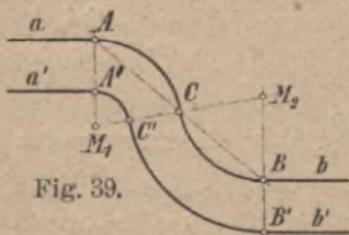


Fig. 39.

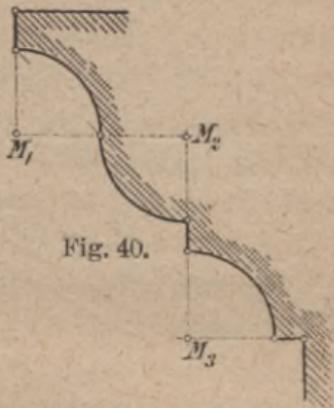


Fig. 40.

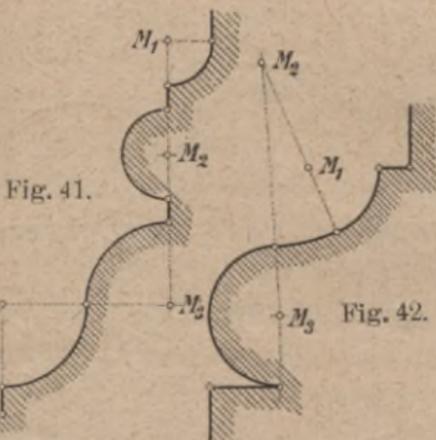


Fig. 41.

Fig. 42.

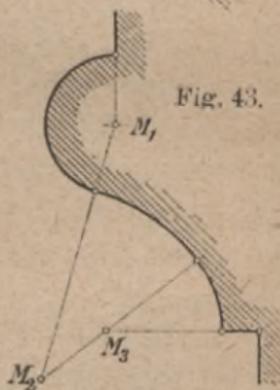


Fig. 43.

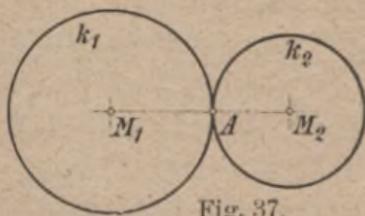


Fig. 37.

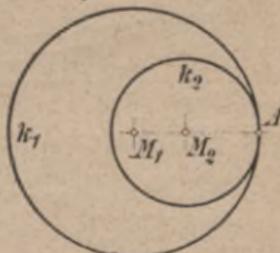


Fig. 38.

zu ziehen sind. An zwei Kreise gibt es höchstens vier Tangenten, zwei äußere und zwei innere.

**Auflösung II.** Die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise schneiden auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte — Zentrale — zwei Punkte  $G$  und  $G_1$  aus (s. Fig. 35), welche die Ähnlichkeitspunkte der Kreise heißen;  $G$  ist der äußere,  $G_1$  der innere Ähnlichkeitspunkt. Zieht man in beiden Kreisen parallele Halbmesser  $MA$  und  $M_1B$  oder  $M_1C$ , so liefern die Verbindungslinien  $AB$  und  $AC$  auf der Zentrale  $MM_1$  die Ähnlichkeitspunkte  $G$  und  $G_1$ ; durch  $G$  und  $G_1$  gehen dann die möglichen Tangenten hindurch.

**Anmerkung.** In Fig. 36 ist die Konstruktion der Polaren angedeutet für einen innerhalb des Kreises liegenden Pol  $A$ . Man zieht durch  $A$  eine senkrechte Sehne  $BC$  zu  $MA$  und konstruiert in  $B$  und  $C$  die Kreistangenten, die sich in  $D$  begegnen. Durch  $D$  geht senkrecht zu  $MD$  die Polare  $a$  hindurch.

### Einige Aufgaben über Kreisberührungen.

Zwei Kreise berühren sich von außen (s. Fig. 37), wenn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte eine Länge gleich der Summe der Kreishalbmesser besitzt und von innen (s. Fig. 38), wenn diese Länge so groß ist wie der Unterschied der Kreishalbmesser.

In den Fig. 39—43 sind einige praktische Anwendungen über Kreisberührungen dargestellt. Fig. 39 zeigt die Verbindung zweier Paare gleich weit voneinander abstehender Parallelen durch Kreisbogen. Sind die Bogenanfänge auf den Senkrechten  $AA'$  und  $BB'$  zu  $a$  bzw.  $b$  gewählt, so zieht man  $AB$ , halbiert diese Länge in  $C$ , dann liegen die Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  auf  $AA'$  bzw.  $BB'$  und auf den Mittelsenkrechten der Strecken  $AC$  und  $BC$ . Die Fig. 40—43 stellen einige Gesimsformen dar, deren Konstruktion ohne weiteres ersichtlich ist;

Fig. 40 ist ein Schnitt durch ein Hauptgesims, Fig. 43 ein solcher durch ein Gurtgesims, die Fig. 41 u. 42 ver sinnbildlichen Schnitte durch Sockelgesimse.

Rektifikation des Kreises. Hierunter versteht man die Aufgabe, eine Strecke so zu bestimmen, daß ihre Länge gleich dem Kreisumfang ist.

Aufgabe 10. Gegeben ein Kreis  $k$  (s. Fig. 44); man soll die Länge des Kreisumfanges zeichnerisch darstellen.

Auflösung. Man zeichnet die beiden aufeinander senkrechten Kreisdurchmesser  $AB$  und  $CD$  und in dem Endpunkte  $C$  des einen Durchmessers eine Tangente  $a$  an  $k$ . Macht man dann  $AE = AM$ , zieht  $ME$  bis zum Schnitt  $F$  mit  $a$ , trägt von  $F$  aus den Kreishalbmesser  $MA = r$  dreimal ab nach  $FG$ , so ist die Verbindungslinie  $DG$  gleich dem halben Kreisumfang.

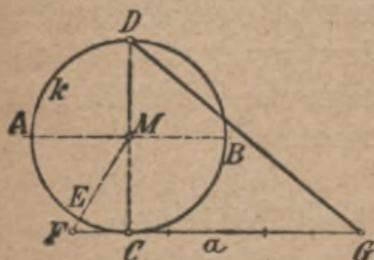


Fig. 44.

Aufgabe 11. Gegeben ein Kreis  $k$  (s. Fig. 45) und auf einer Tangente eine Strecke  $AB$ . Man soll die Länge  $AB$  auf den Kreis übertragen.

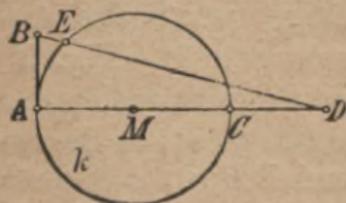


Fig. 45.

Auflösung. Man verlängert den Durchmesser  $AC$  über  $C$  hinaus nach  $D$ , so daß  $CD = CM$  ist, und zieht  $DB$ , welche Linie die Kreisperipherie in  $E$  trifft. Es ist dann Bogen  $AE$  genau genug gleich der Strecke  $AB$ , vorausgesetzt, daß  $AB$  kleiner als der Halbmesser  $MA$  ist.

**Teilung einer geraden Linie.**

**Aufgabe 12.** Man soll eine gegebene Strecke  $AB$  (s. Fig. 46) in  $n$  gleiche Teile teilen.

**Auflösung.** Man trägt in  $A$  an  $AB$  einen beliebigen Winkel  $\alpha$  an; von  $A$  aus trägt man, wenn z. B.  $n = 5$  ist, eine beliebig gewählte Strecke fünfmal nacheinander an nach  $AC$ , zieht  $CB$  und durch

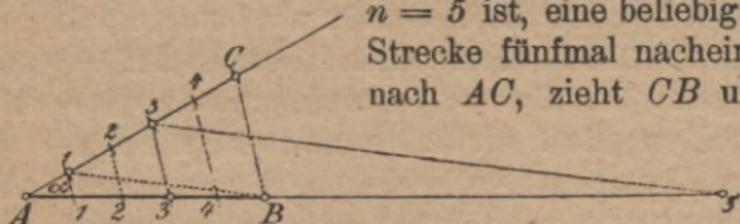


Fig. 46.

die Teilungspunkte 1, 2, 3, 4 Parallele zu  $BC$ , so teilen diese die Strecke  $AB$  in fünf gleiche Teile.

**Aufgabe 13.** Man soll eine gegebene Strecke  $AB$  (s. Fig. 46) in einem gegebenen Verhältnis  $m:n$  teilen.

**Auflösung.** Man legt wieder in  $A$  den Winkel  $\alpha$  an, macht, wenn z. B.  $m:n = 3:2$  sein soll,  $A3 = 3$  und  $3C = 2$ . Zieht man  $CB$ , so liefert die Parallele durch 3 zu  $CB$  den gesuchten Teilungspunkt 3 auf  $AB$ .

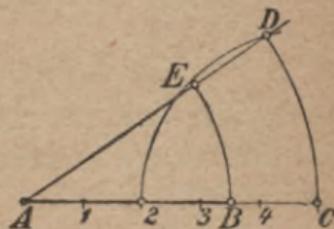


Fig. 47.

**Anmerkung.** Verbindet man den Punkt 1 auf  $AC$  (s. Fig. 46) mit  $B$  und zieht durch 3 eine Parallele zu  $1B$ , so erhält man auf der Verlängerung von  $AB$  einen zweiten Punkt  $3'$ , der  $AB$  so teilt, daß  $A3':B3' = 3:2$  ist, der Punkt  $3'$  heißt der äußere, der Punkt 3 der innere Teilungspunkt. Vier Punkte wie  $A, B, 3, 3'$  heißen vier harmonische Punkte und zwar sind  $A, B$  und  $3, 3'$  je ein konjugiertes Punktpaar. Soll von einer gegebenen Strecke  $AB$  ein be-

stimmter aliquoter Teil, z. B.  $\frac{m}{n} = \frac{3}{5}$  bestimmt werden,

so trägt man auf  $AB$  (s. Fig. 47) von  $A$  aus fünf gleiche Teile von beliebiger Größe ab, beschreibt um  $A$  mit dem Halbmesser  $AC$  einen Kreisbogen und trägt auf ihm  $CD = 3$  ab und zieht  $AD$ . Schlägt man nun mit der gegebenen Strecke  $AB$  den Kreisbogen  $BE$ , so ist  $BE = \frac{3}{5} AB$ .

**Aufgabe 14.** Man soll eine gegebene Strecke  $AB$  so teilen, daß sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt, wie der letztere zum kleineren Abschnitt verhält.

**Auflösung.** Man halbiert  $AB$  in  $C$ , errichtet  $BD$  senkrecht  $AB$  und gleich  $BC$  und zieht  $AD$ ; macht man  $DE = DB$  und  $AF = AE$ , so ist  $F$  der gesuchte Teilungspunkt, d. h. es ist  $AB:AF = AF:FB$ .

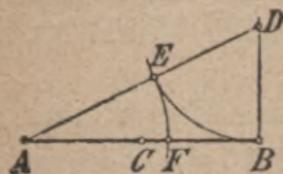


Fig. 48.

**Anmerkung.** Vorstehend angegebene Teilung einer Strecke  $AB$  bezeichnet man in der Geometrie als den Goldenen Schnitt.

### Konstruktion geradliniger Figuren.

Die wichtigsten ebenen geradlinigen Figuren, welche als Grundlage zusammengesetzter Flächengebilde dienen, sind die Dreiecke, Vierecke und Vielecke.

Die Dreiecke unterscheidet man sowohl nach den Seiten wie nach den Winkeln; man kennt das ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige Dreieck (s. Fig. 49, 50, 51), je nachdem alle drei Seiten ungleiche oder zwei Seiten gleiche oder aber alle drei Seiten gleiche Länge besitzen. Mit Bezugnahme auf die Winkel unterscheidet man das rechtwinklige, stumpfwinklige oder spitzwinklige Dreieck, je nachdem

ein Winkel ein Rechter bzw. stumpf ist oder alle drei spitz sind. Unter den Vierecken unterscheidet man außerdem zwischen unregelmäßigen Vierecken und solchen, denen eine gewisse Regelmäßigkeit zukommt. Zu den letzteren zählt das Parallelogramm und das Trapez. Im ersteren sind je zwei einander gegenüberliegende Seiten parallel und gleichlang, im letzteren sind nur ein paar Seiten parallel aber ungleichlang. Unter den Parallelogrammen sind hervorzuheben das Quadrat — alle vier Seiten sind gleichlang, alle Winkel sind Rechte, ferner das Rechteck — die Seiten sind ungleichlang, aber die Winkel sind Rechte, endlich der Rhombus oder die Raute — die Seiten sind gleichlang, die Winkel sind keine Rechte.

### Konstruktion eines Dreiecks.

a) Ungleichseitiges Dreieck — gegeben die drei Seiten (s. Fig. 49). Man macht  $AB = a$ , schlägt um

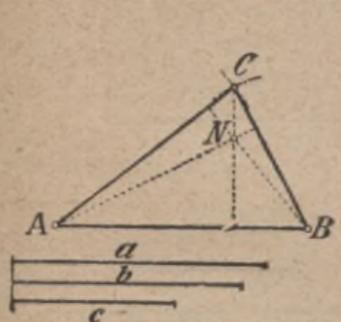


Fig. 49.

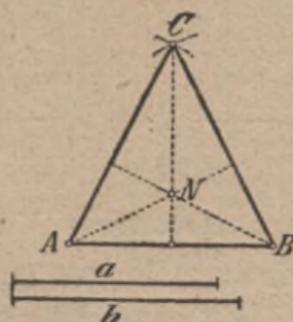


Fig. 50.

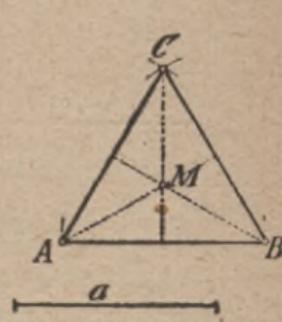


Fig. 51.

$A$  und  $B$  mit den Längen  $b$  und  $c$  Kreisbogen, die sich in  $C$  schneiden.

b) Gleichschenkliges Dreieck. Gegeben die beiden Seiten  $a$  und  $b$ . Man macht  $AB = a$  und beschreibt um  $A$  und  $B$  mit  $b$  Kreisbogen, die den Punkt  $C$  liefern.  $AB$  heißt die Grundlinie des Dreiecks,  $AC$  und  $BC$  sind seine Schenkel.

c) Gleichseitiges Dreieck. Gegeben  $a$ . Man macht  $AB = a$  und beschreibt um  $A$  und  $B$  mit  $a$  Kreisbogen.

In den Fig. 52—55 sind Felderteilungen im gleichseitigen Dreieck angegeben.

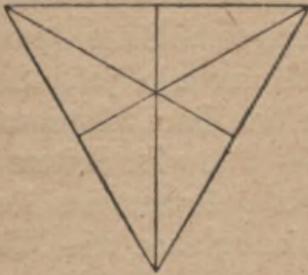


Fig. 52.

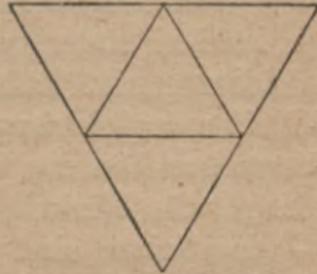


Fig. 53.

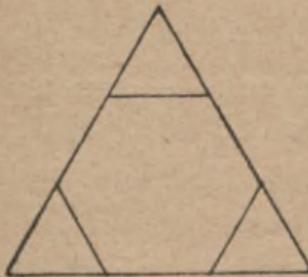


Fig. 54.

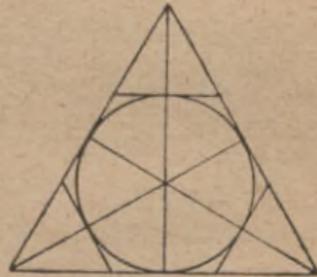


Fig. 55.

### Konstruktion eines Vierecks.

a) Das Quadrat. Es genügt, wenn die Seite  $a$  bekannt ist, dann läßt sich das ganze Quadrat konstruieren (s. Fig. 56). Man macht  $AB = a$ , errichtet in  $A$  und  $B$  die Senkrechten  $AC$  und  $BD = a$ .

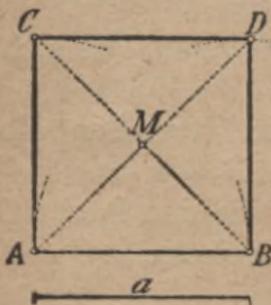
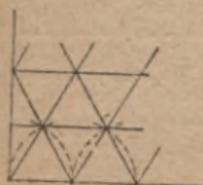
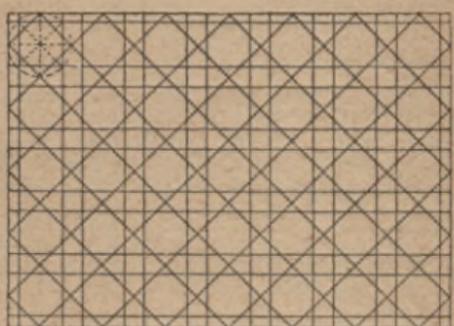
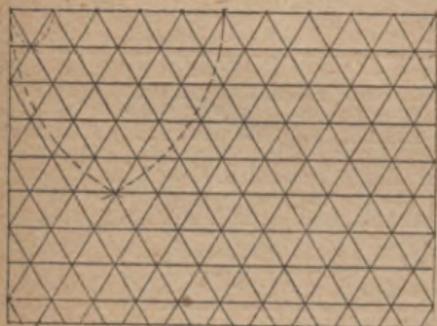
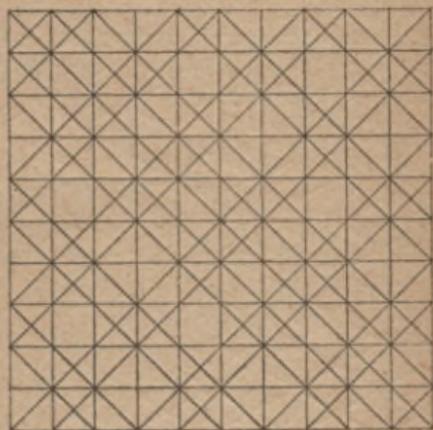
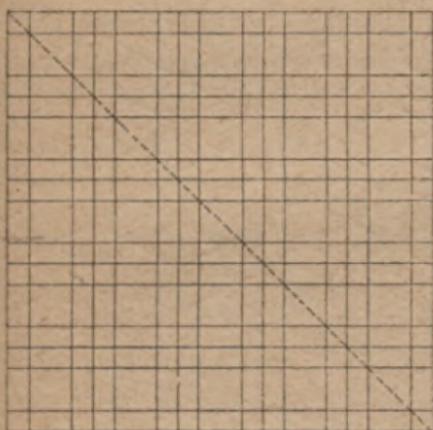
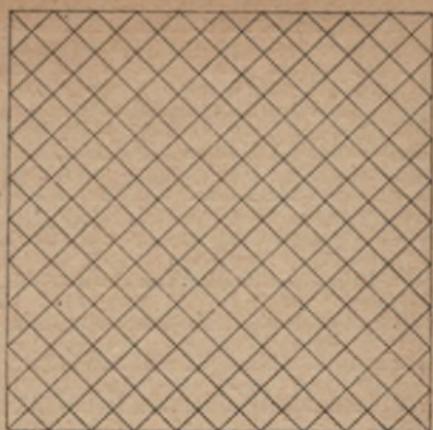
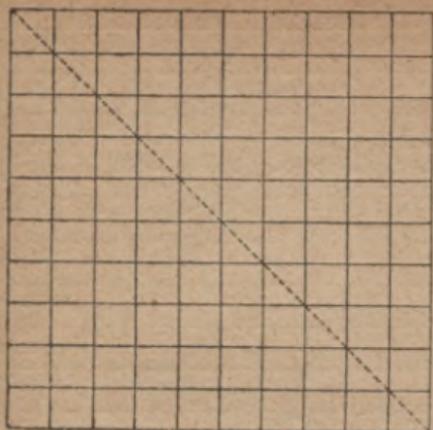
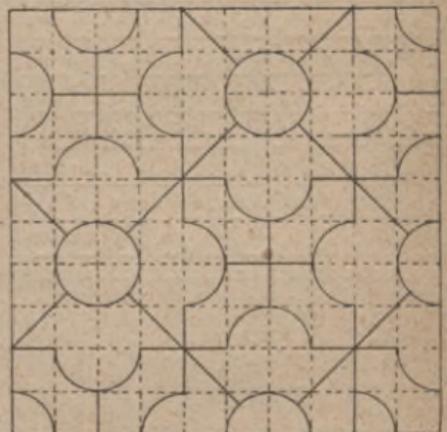
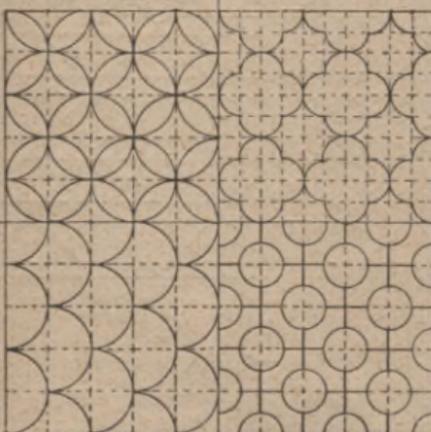
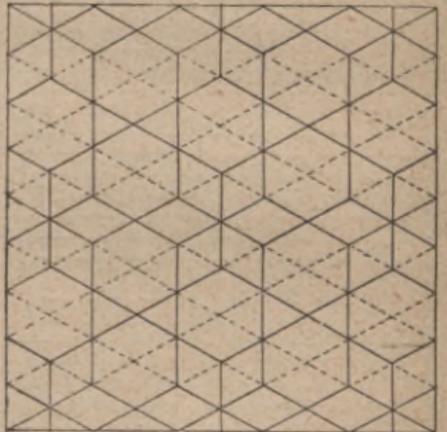
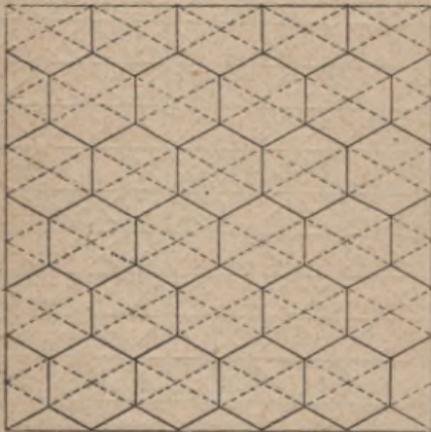
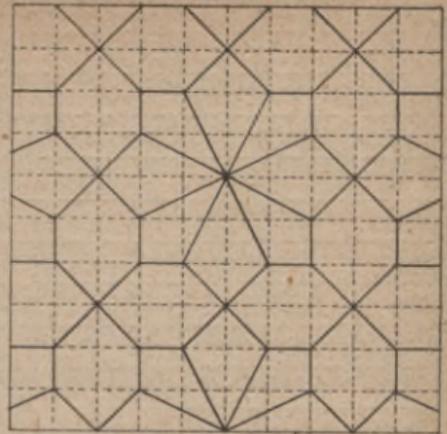
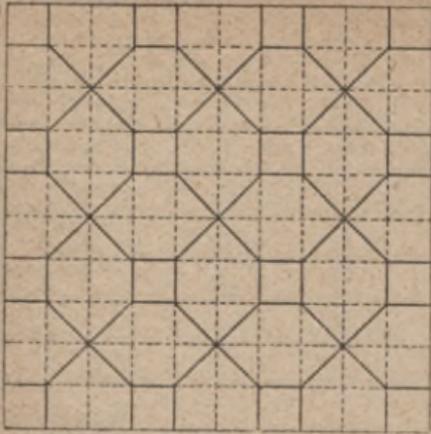


Fig. 56.

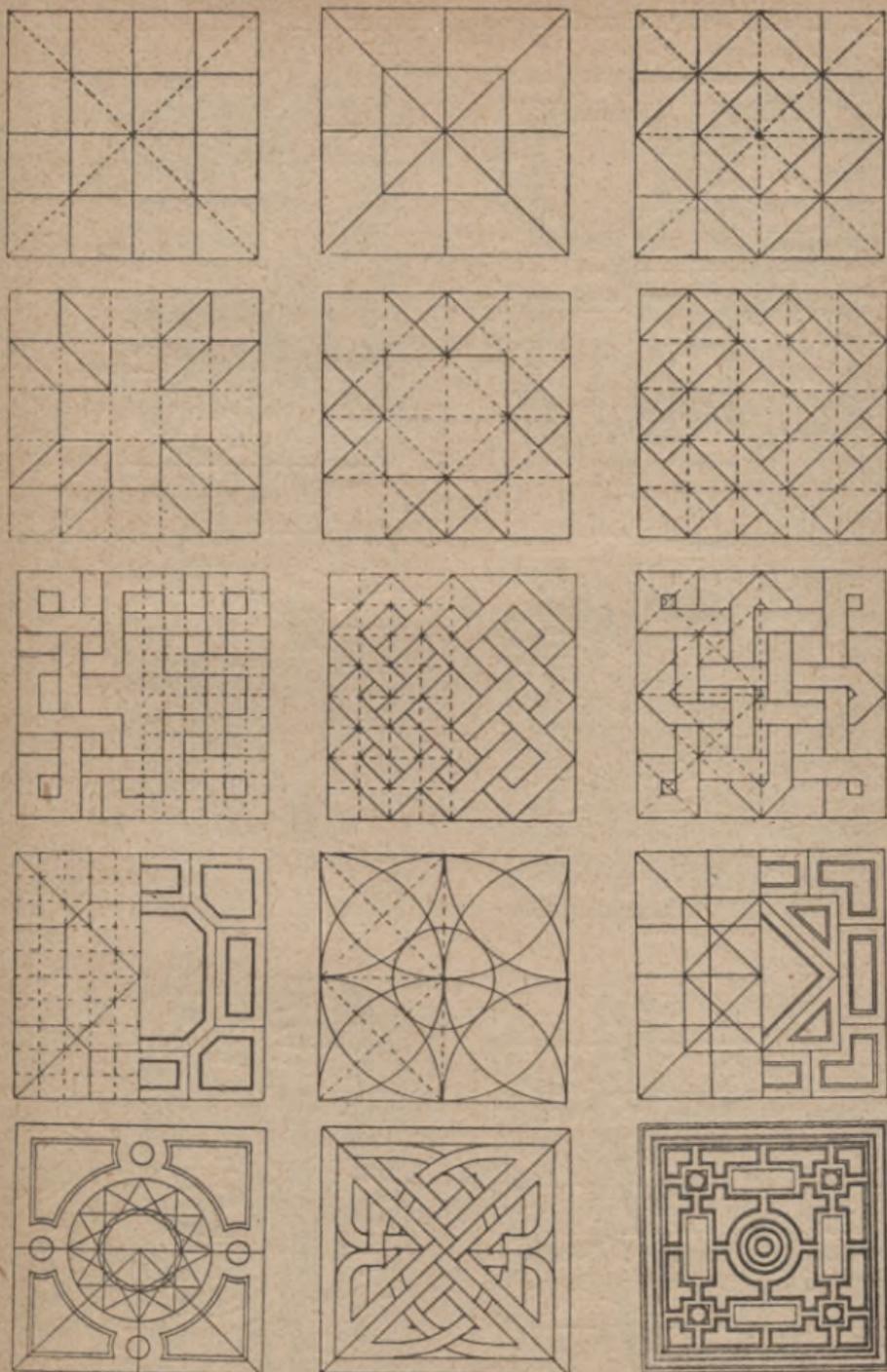
Anmerkung. Die Figuren auf den Tafeln 1—13 zeigen verschiedene Flächenmuster, welche das Quadrat als Grundfigur besitzen. Die Konstruktion der einzelnen Muster läßt sich aus den Zeichnungen ersehen.



Tafel 1. Netze.

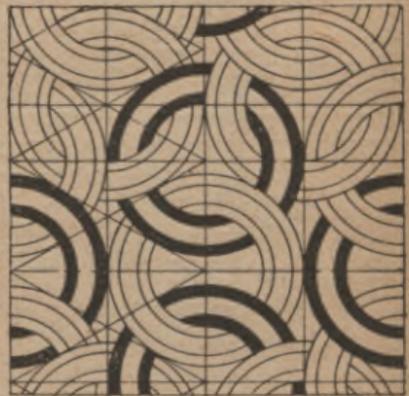
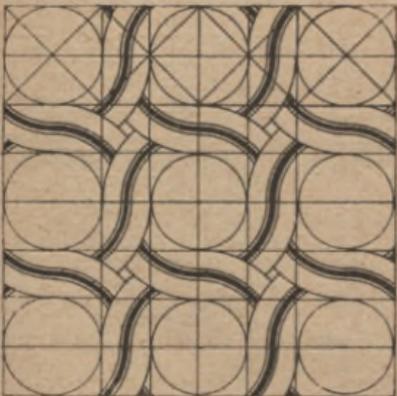
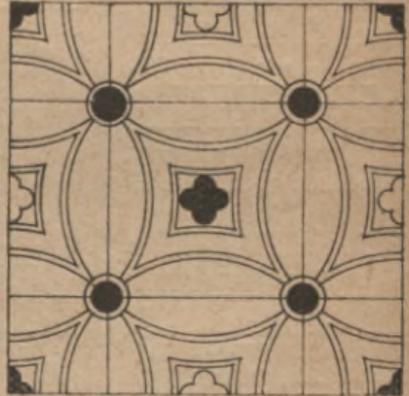
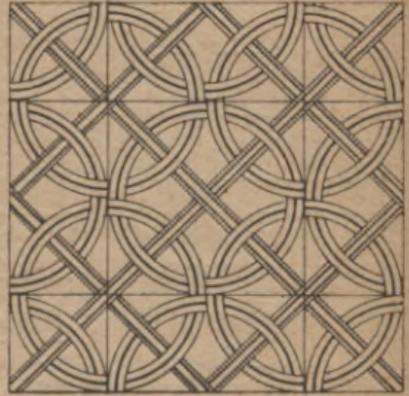
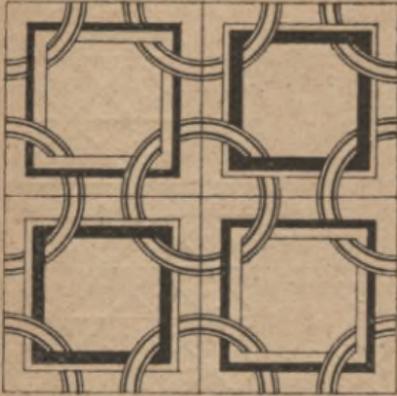


Tafel 2. Flachmuster.

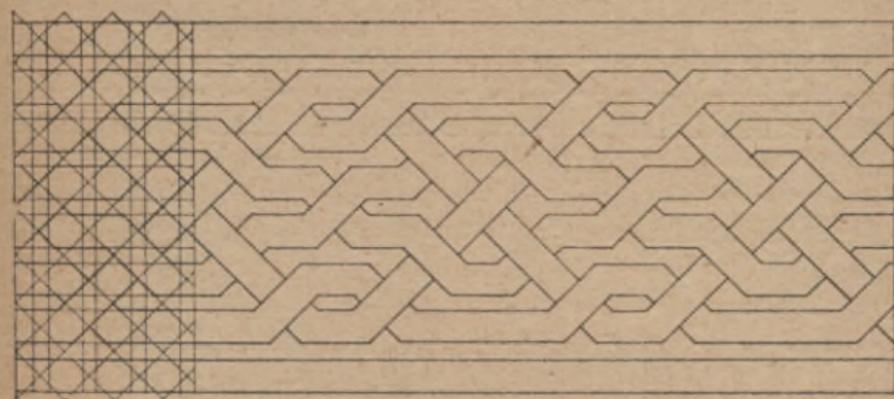
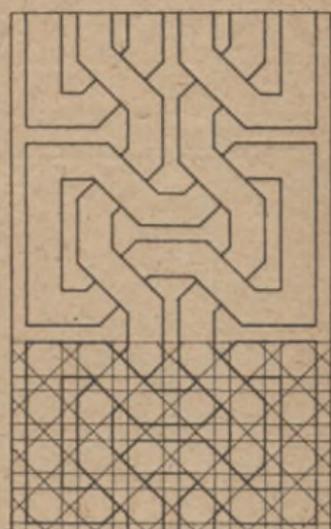
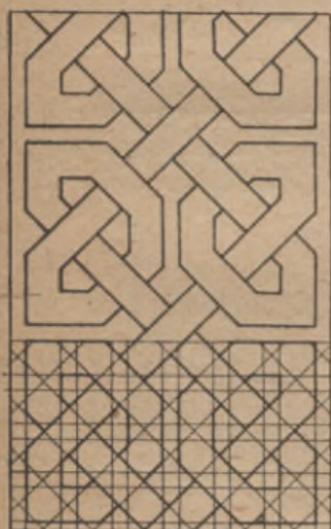
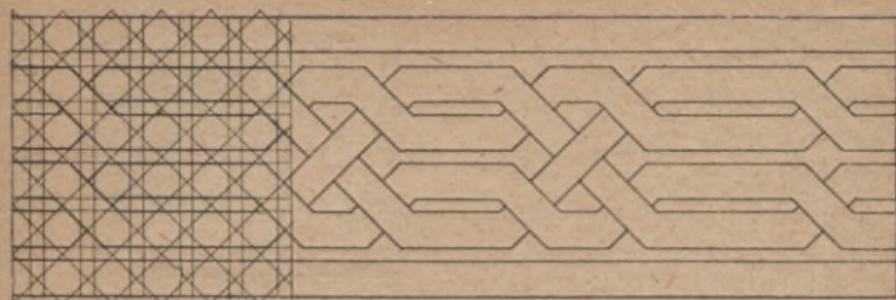


Tafel 3. Felderteilungen des Quadrates.

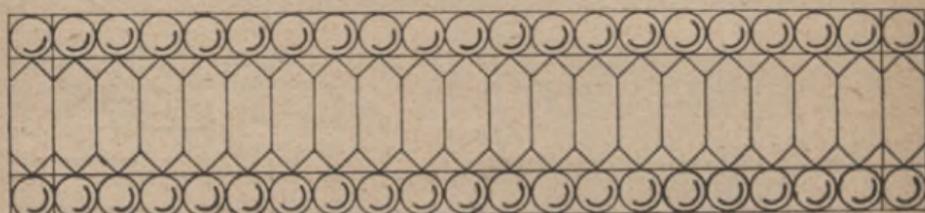
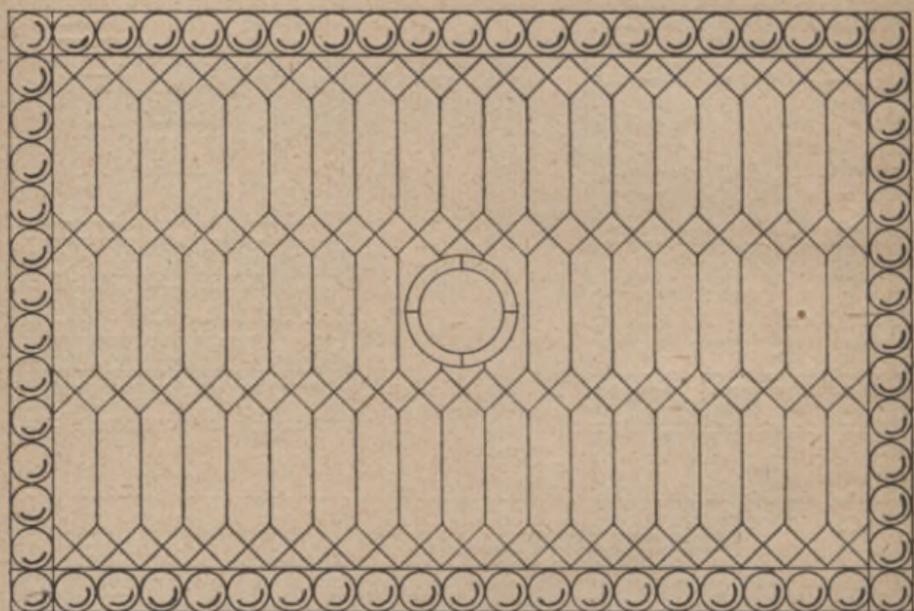
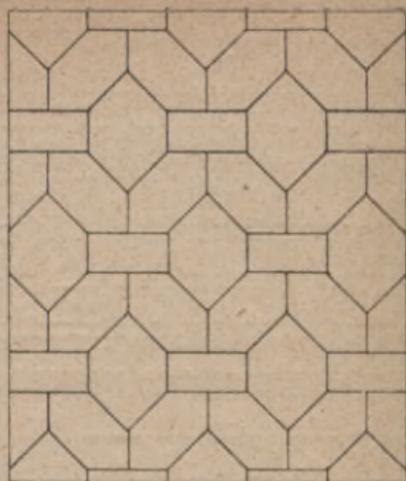
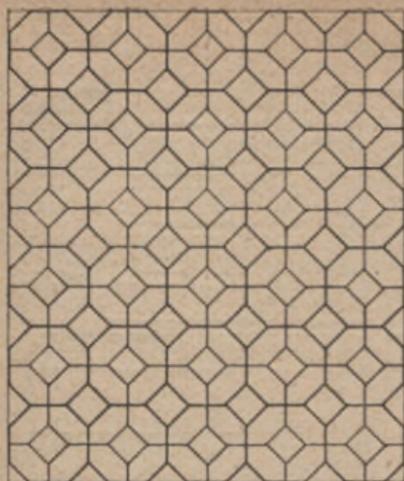
30) I. Einfache Konstruktionen zwischen geraden Linien etc.



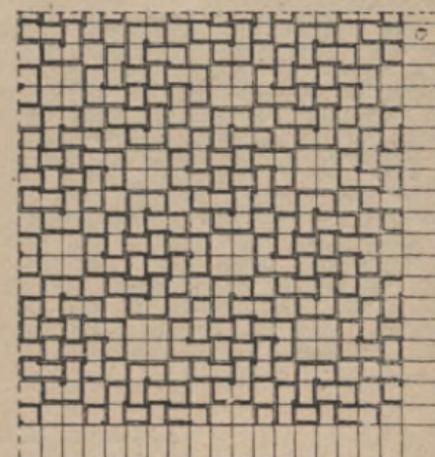
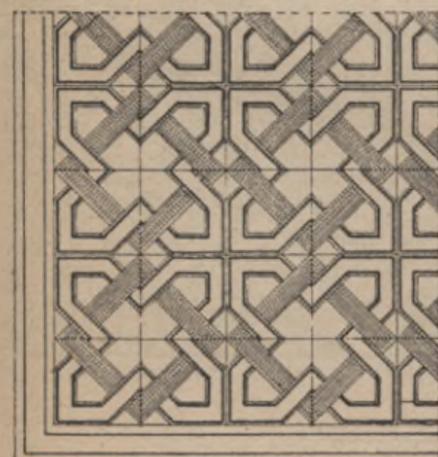
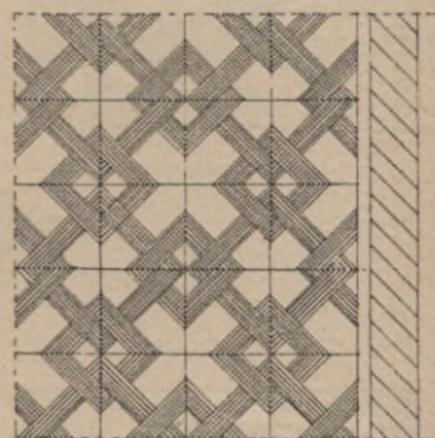
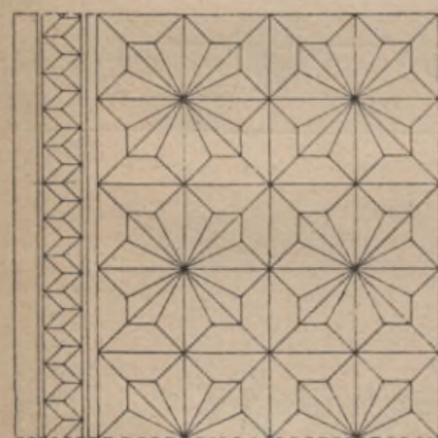
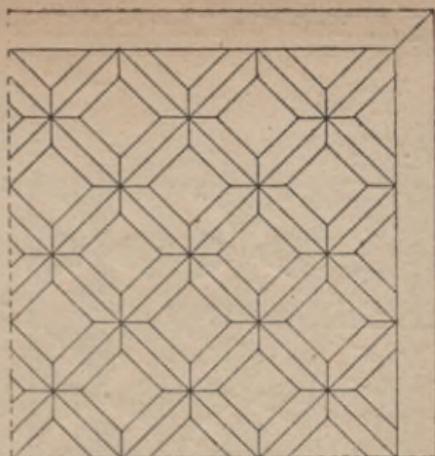
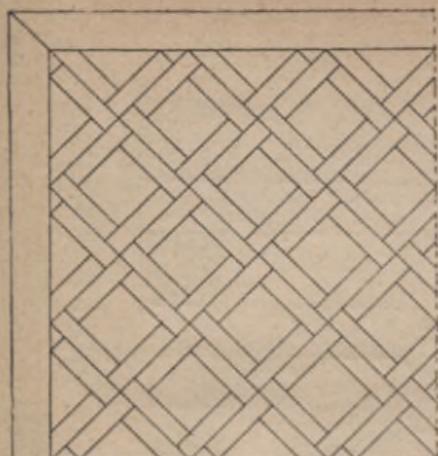
Tafel 5. Plattenbeläge.



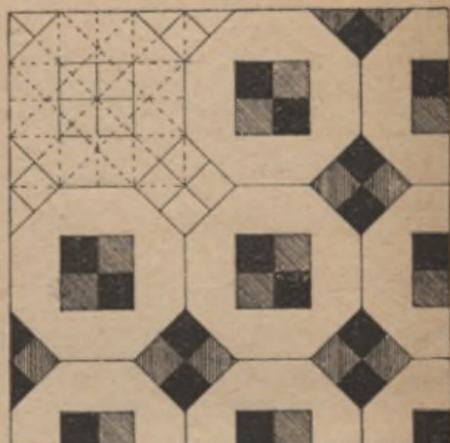
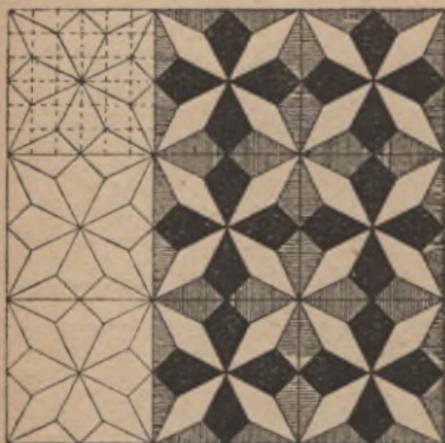
Tafel 5. Maurische Flechtbänder.



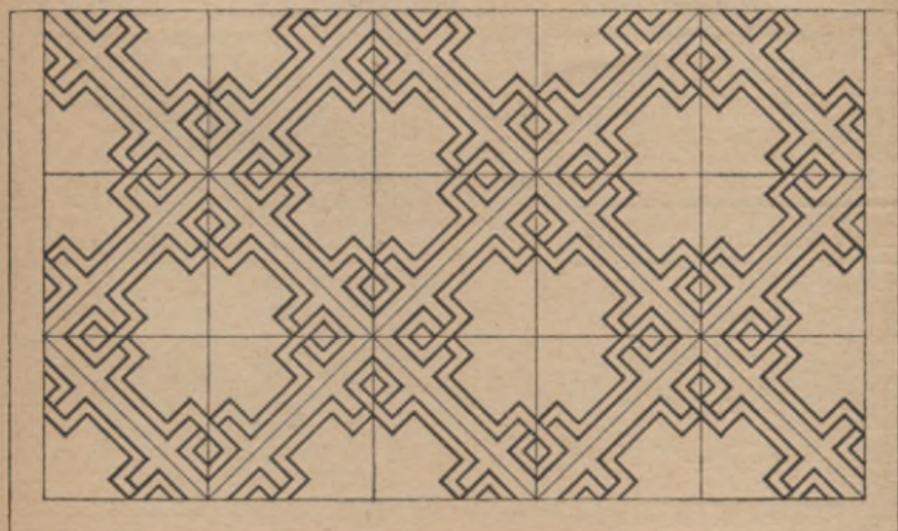
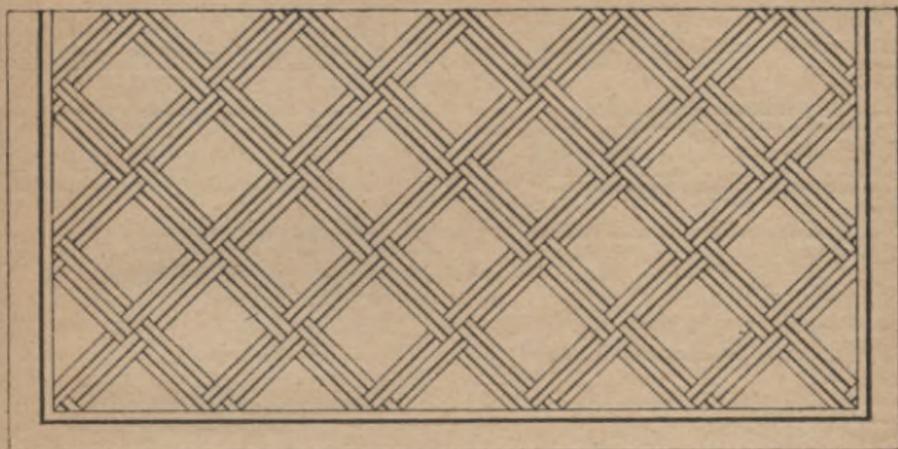
Tafel 6. Fensterverglasungen.



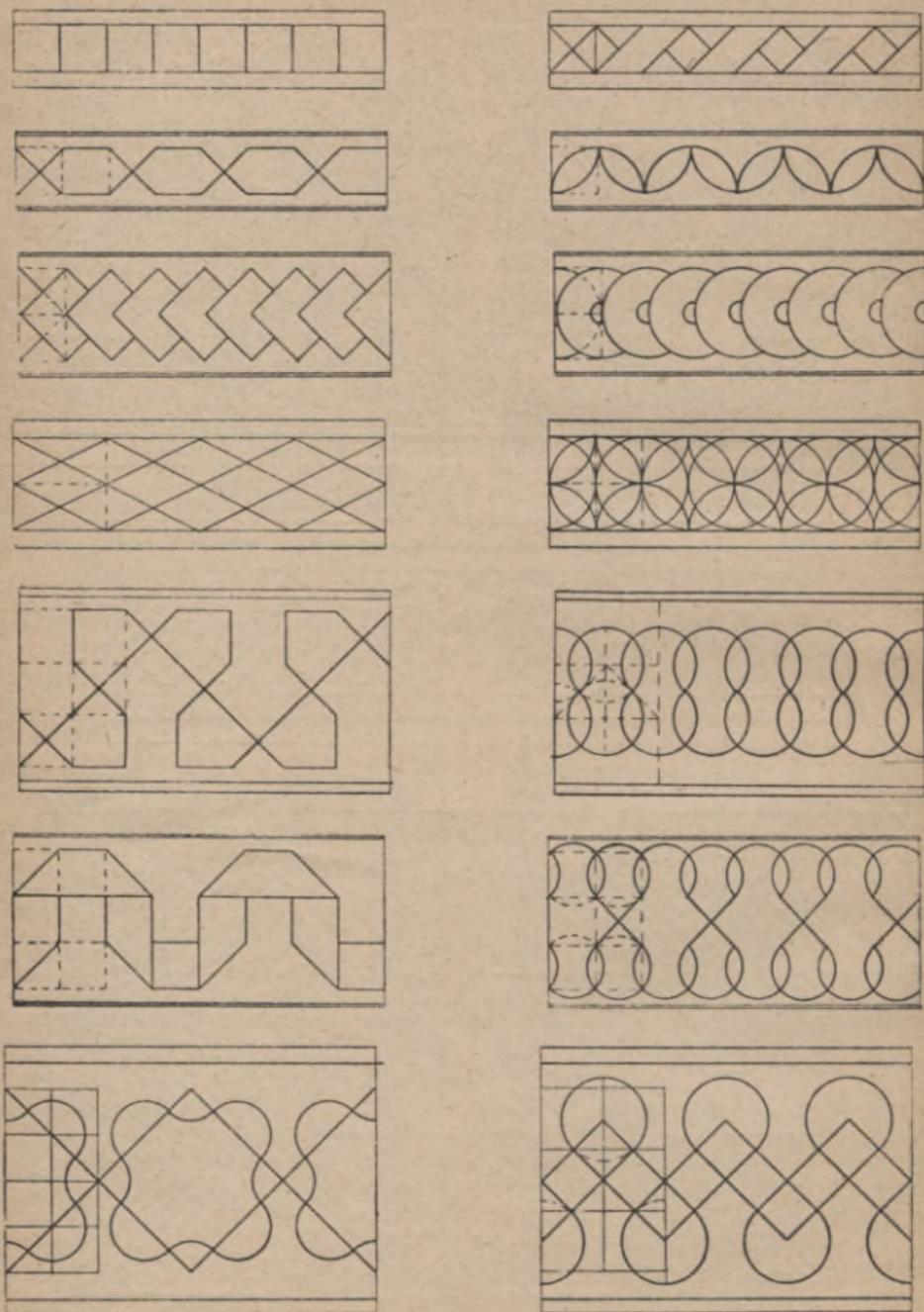
Tafel 7. Parkettmuster.



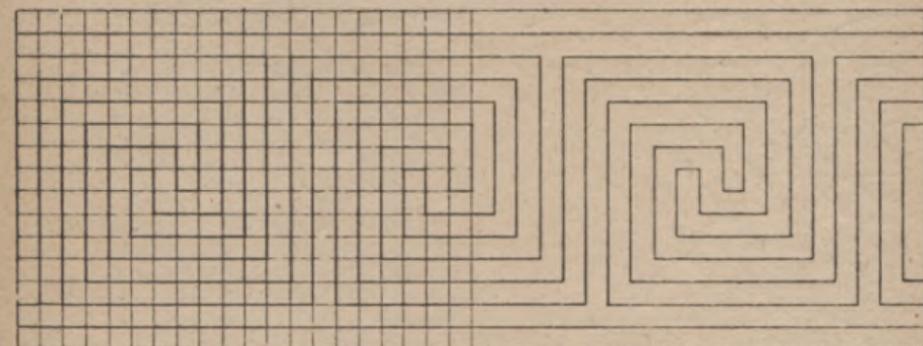
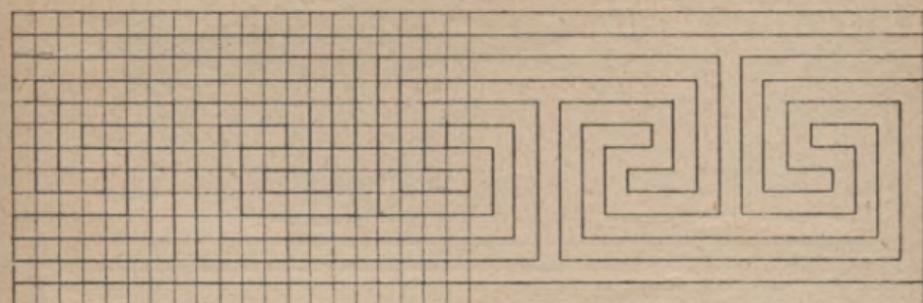
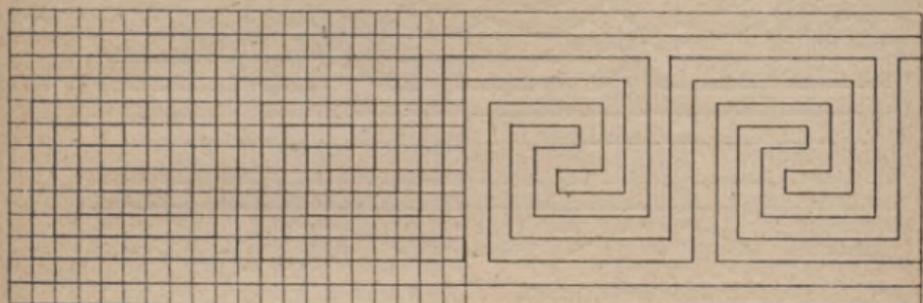
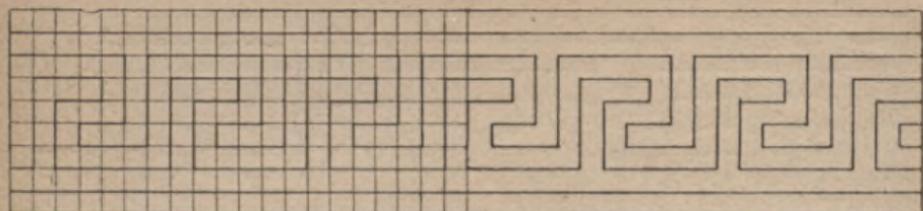
Tafel 8. Plattenbeläge.



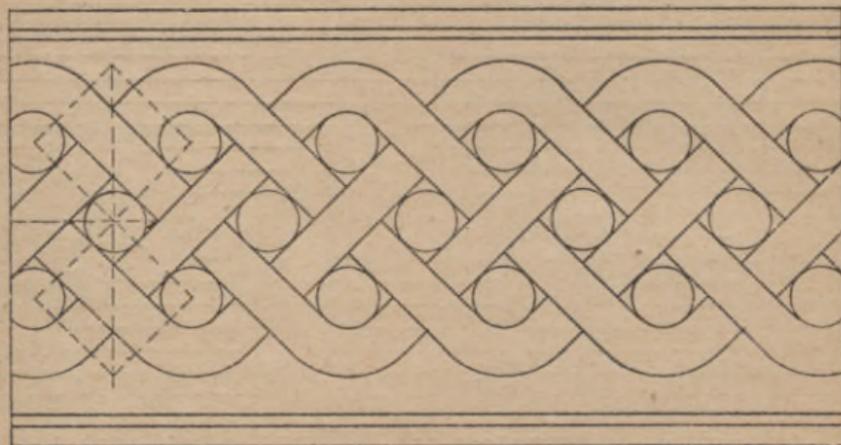
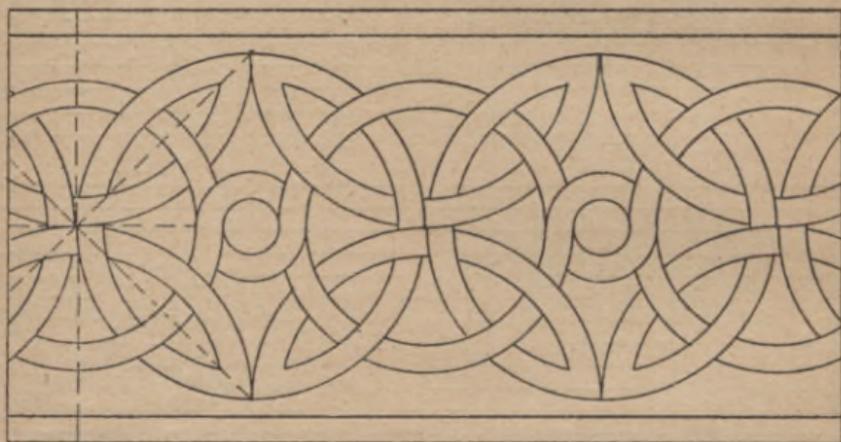
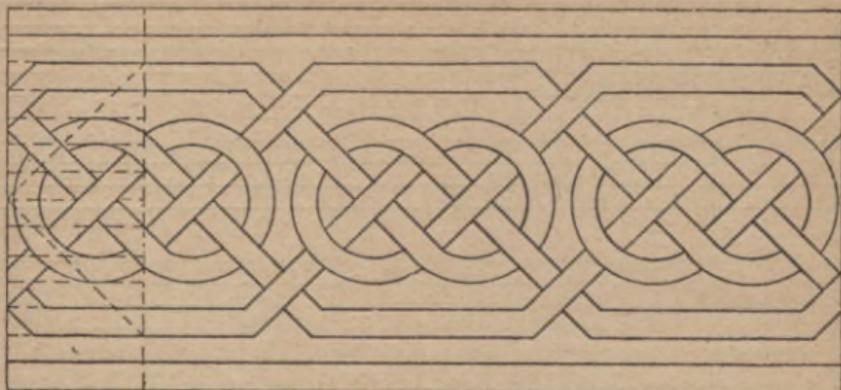
Tafel 9. Parkettmuster.



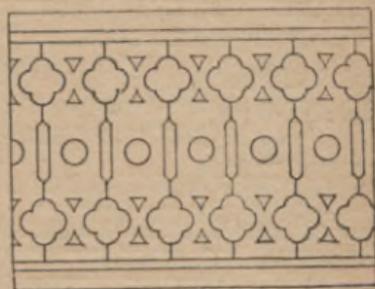
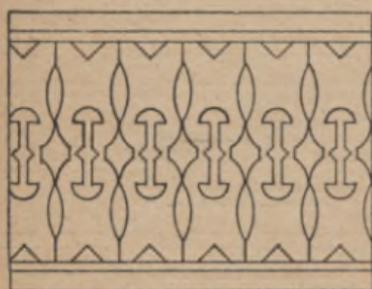
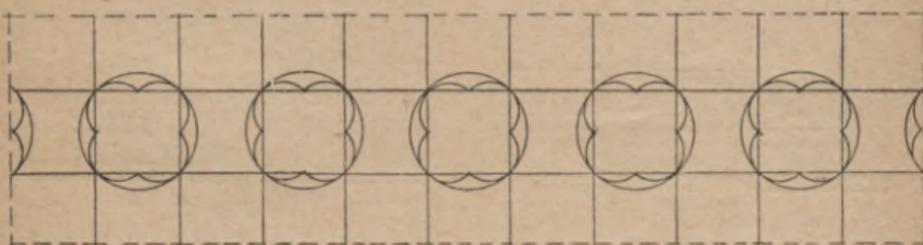
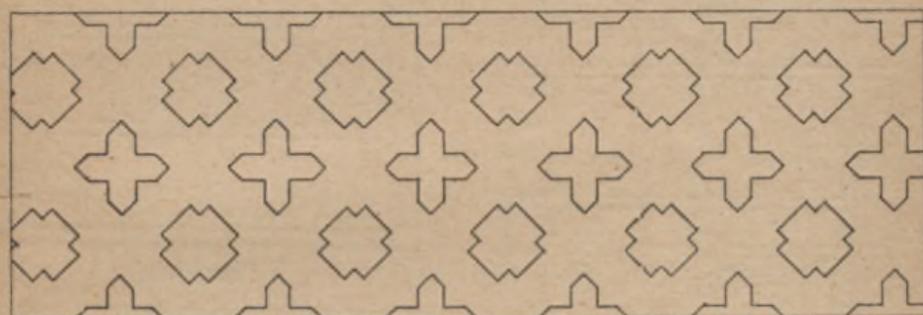
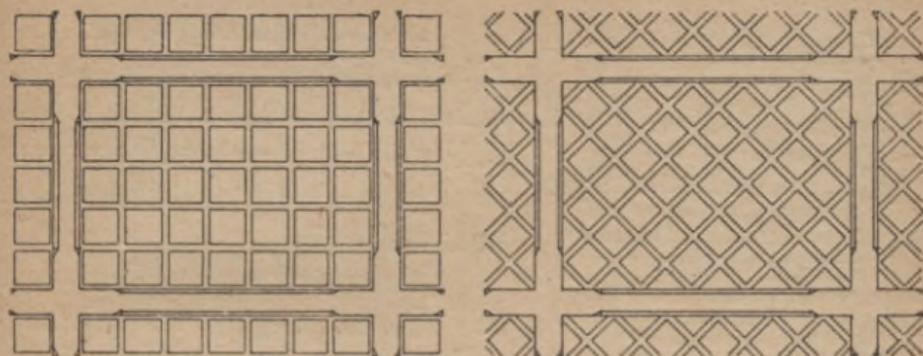
Tafel 10. Einfache Bandmuster.



Tafel 11. Mäander.



Tafel 12. Flechtbänder.



Tafel 13. Rahmen- und Gitterwerke.

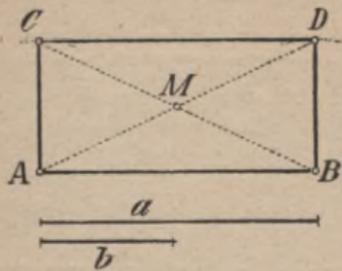


Fig. 57.

b) Das Rechteck. Es müssen mindestens zwei Seiten bekannt sein  $a$  und  $b$ . Man macht (s. Fig. 57)  $AB = a$  und errichtet in  $A$  und  $B$  die Senkrechte  $AC$  und  $BD = b$ .

Anmerkung. Die Fig. 58 bis 62 zeigen verschiedene Flächenmuster, welchen das Rechteck als Grundlage dient.

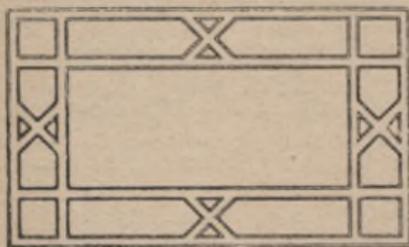


Fig. 58.

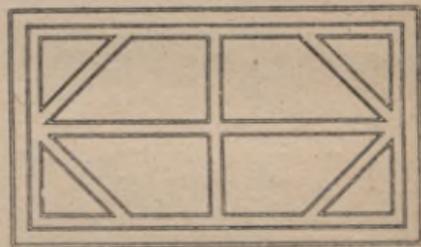


Fig. 59.

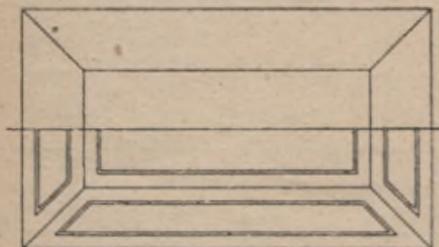


Fig. 60.

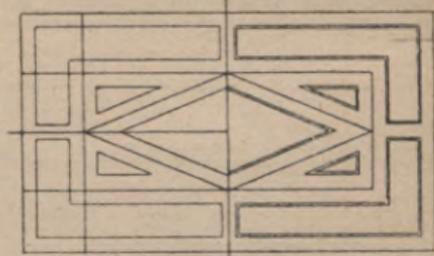


Fig. 61.

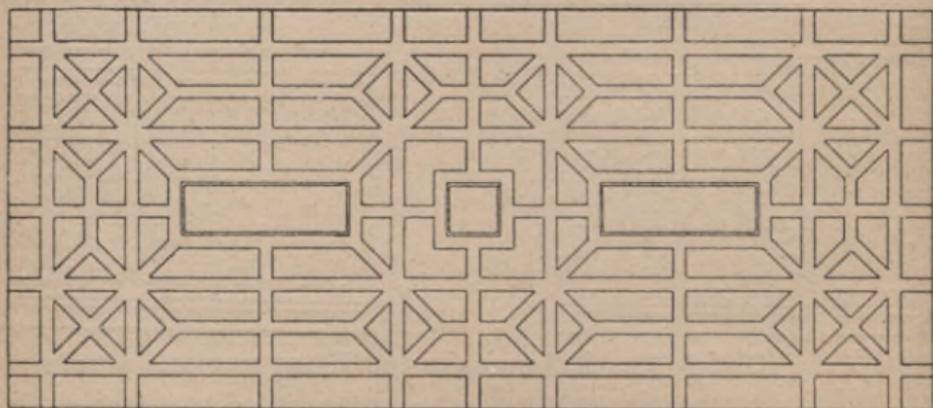


Fig. 62.

c) Das Parallelogramm. Gegeben mindestens zwei Seiten  $a$  und  $b$  und ein Winkel  $\alpha$ . Man macht (s. Fig. 63)  $AB = a$ , trägt ein  $A$  und  $B$  an  $AB$  den Winkel  $\alpha$  an und macht  $AC = AD = b$ .

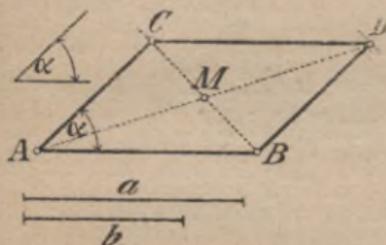


Fig. 63.

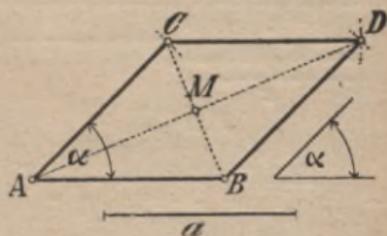


Fig. 64.

d) Der Rhombus. Gegeben eine Seite  $a$  und ein Winkel  $\alpha$ . Die gleiche Konstruktion wie vorhin, nur ist  $AC = BD = a$  (s. Fig. 64).

Anmerkung. Die Fig. 65—67 zeigen einige Flächenmuster, denen der Rhombus als Grundlage dient.

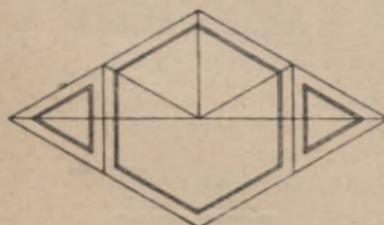


Fig. 65.

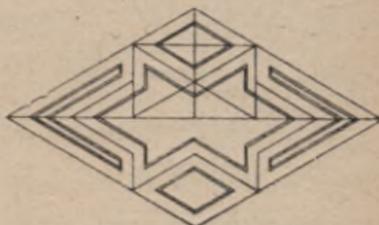


Fig. 66.

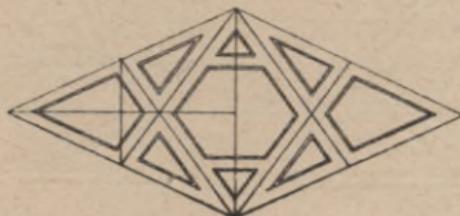


Fig. 67.

e) Das Trapez zeigt zwei parallele Seiten; zur Konstruktion sind erforderlich mindestens die beiden

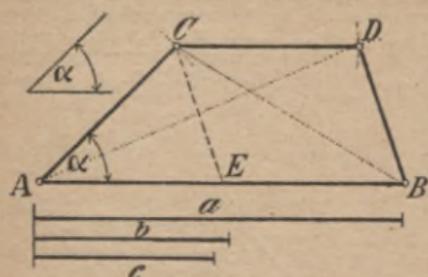


Fig. 68.

parallelen Seiten  $a$  und  $c$  und noch zwei Stücke, z. B. ein Winkel und eine der nichtparallelen Seiten  $b$ . Man macht  $AB = a$  (s. Fig. 68), trägt in  $A$  den Winkel  $\alpha$  an, macht  $AC = b$ , zieht  $CD$  parallel zu  $AB$  und gleich  $c$ .

Anmerkung. Fig. 69 und 70 haben ein beliebiges Viereck, Fig. 71 und 72 ein Trapez als Grundform.

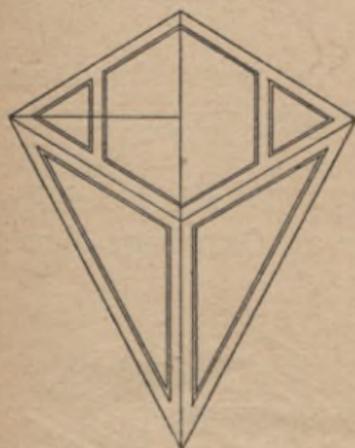


Fig. 69.

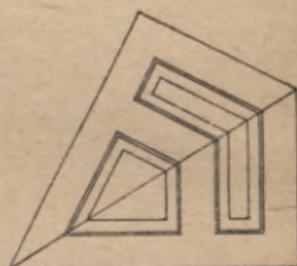


Fig. 70.

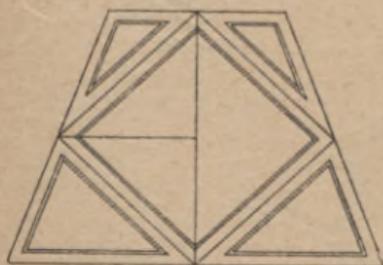


Fig. 71.

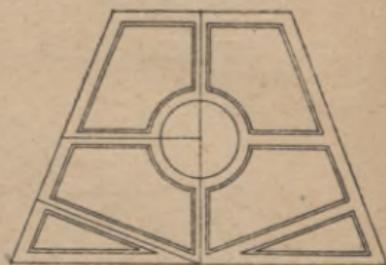


Fig. 72.

Anmerkung. Die Verbindungslinien zweier nicht aufeinanderfolgender Punkte im Viereck heißen Diagonalen; jedes Viereck besitzt zwei Diagonalen.

Beim Parallelogramm heißt der Schnittpunkt  $M$  der Diagonalen sein Mittelpunkt; in ihm hälften sich die Diagonalen, welche außerdem beim Quadrat und beim Rechteck gleiche Länge besitzen. Beim Quadrat und Rhombus stehen sie aufeinander senkrecht.

Das Trapez kann durch eine Parallele durch eine Ecke zu einer der nichtparallelen Seiten in ein Dreieck und ein Parallelogramm zerlegt werden (s. Fig. 68). Wichtige Punkte des Dreiecks sind der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten oder jener der drei Halbierungslinien der Dreieckswinkel; ersterer ist Mittelpunkt des Umkreises, letzterer jener des Innkreises. Die drei Mitteltransversalen, d. h. die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten liefern einen Punkt, den man ebenfalls Mittelpunkt (Schwerpunkt) des Dreiecks nennen kann. Auch die drei Höhen schneiden sich in einem Punkte; beim gleichseitigen Dreieck sind alle drei, beim gleichschenkligen zwei Höhen einander gleich; beim ungleichseitigen Dreieck sind auch die Höhen ungleich (s. Fig. 49—51).

### Konstruktion der regelmäßigen Vielecke.

Unter den Vielecken sind für den Zeichner von Wichtigkeit die regelmäßigen Vielecke, das sind solche, bei denen alle Seiten und Winkel einander gleich sind, deren Ecken daher auf einer Kreislinie liegen, dem Umkreis, während die Seiten einen zweiten Kreis mit dem gleichen Mittelpunkte, den Innkreis berühren; der Mittelpunkt dieser beiden Kreise ist zugleich der Mittelpunkt des Vielecks. Bei den folgenden Konstruktionen soll zunächst der Umkreis als gegeben vorausgesetzt werden.

a) Das Sechseck, Zwölfeck und Dreieck (s. Fig. 73). Man zieht zwei aufeinander senkrechte

Durchmesser  $AB$  und  $CD$  und trägt von deren Endpunkten aus den Kreishalbmesser als Sehne in den Kreis ein, so sind hierdurch die Punkte  $E$  bis  $N$  bestimmt und es bilden die Verbindungslinien  $DEGCHFD$  ein regelmäßiges Sechseck; ein zweites regelmäßiges Sechseck ist durch die Verbindung  $AKNBLJA$  gegeben. Die Ecken  $A$  bis  $N$  bilden die Ecken eines regelmäßigen Zwölfecks. Überspringt man beim Verbinden der Zwölfeckspunkte auf dem Kreise immer drei aufeinanderfolgende Punkte, so erhält man die regelmäßigen Dreiecke  $DGH$  und  $CEF$ .

b) Das Achteck, Viereck (s. Fig. 74). Um die Endpunkte zweier aufeinander senkrechten Kreisdurchmesser  $AB$  und  $CD$  beschreibt man mit dem Halbmesser des Umkreises Kreisbogen, die sich in  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$  begegnen. Die Verbindungslinien  $EG$  und  $FH$  schneiden auf dem Kreise die noch fehlenden Ecken des Achtecks aus. Überspringt man beim Verbinden der Eckpunkte je einen Punkt, so entsteht das regelmäßige Viereck (Quadrat). In Fig. 74 sind zwei Quadrate  $ADBC$  und  $LJNK$  eingetragen.

c) Das Fünfeck (s. Fig. 75). Man zieht die beiden aufeinander senkrechten Durchmesser  $AB$  und  $CD$ , halbiert  $MB$  in  $E$ , macht  $EF = ED$ , dann ist die Länge  $DF$  gleich der Fünfecksseite und fünfmal in den Kreis einzutragen.

d) Das Zehneck (s. Fig. 76). Man konstruiert wie beim Fünfeck; die Strecke  $MF$  ist gleich der Zehneckseite.

e) Das Siebeneck (s. Fig. 77). Nachdem man die beiden aufeinander senkrechten Durchmesser  $AB$  und  $CD$  bestimmt hat, beschreibt man um  $C$  mit dem Halbmesser  $CM$  den Kreisbogen  $EF$  und zieht die Sehne  $EF$ ; deren Hälfte  $EG$  ist gleich der Länge der Siebenecksseite.

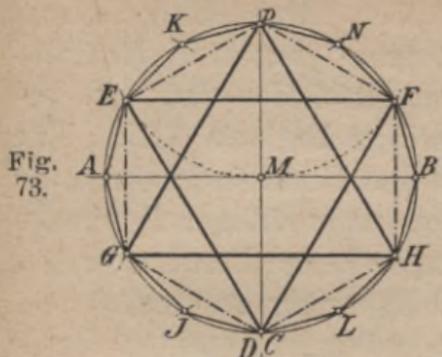


Fig. 73.

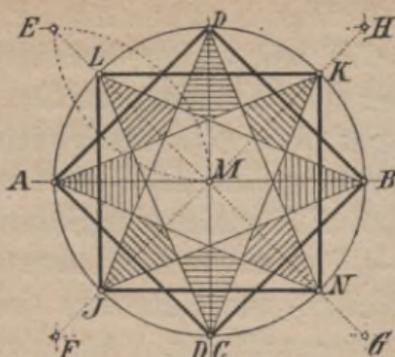


Fig. 74.

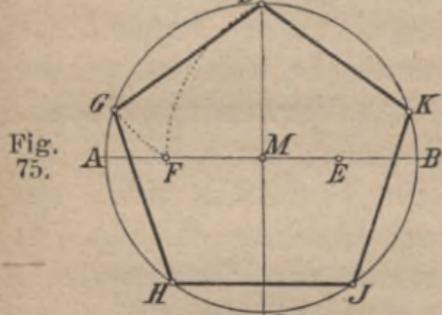


Fig. 75.

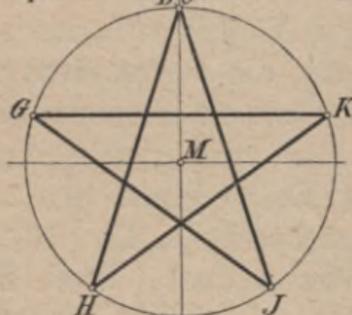


Fig. 79.

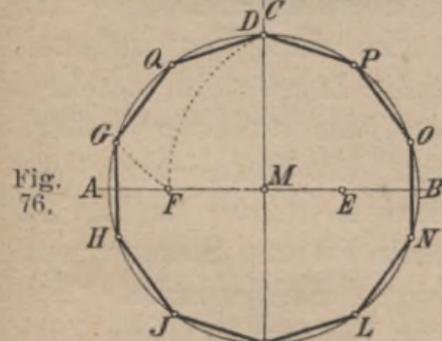


Fig. 76.

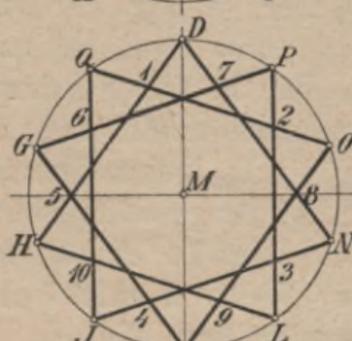


Fig. 80.

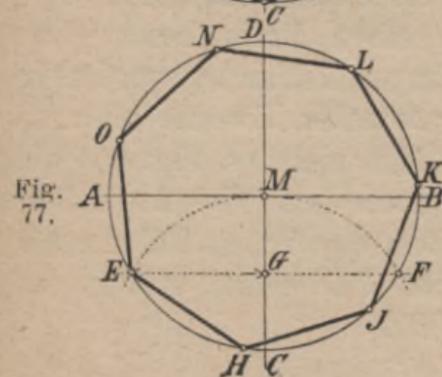


Fig. 77.

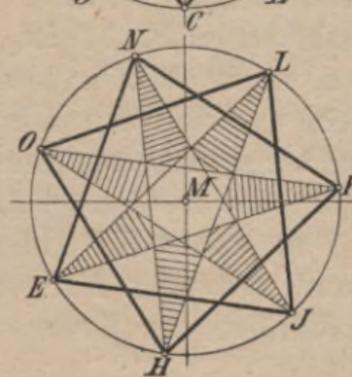


Fig. 81.

f) Das Neuneck (s. Fig. 78). Man bestimmt  $AB$  und  $CD$  wie bisher, zeichnet um  $C$  mit  $CM$  als Halbmesser den Kreisbogen  $EF$ , macht  $GH = MC$  und beschreibt über  $GH$  das gleichseitige Dreieck  $GHH$ . Die Verbindungslinie  $MJ$  liefert auf dem Umkreis den Punkt  $K$  so, daß  $EK$  gleich der Seite des regelmäßigen Neunecks ist. — Die im vorstehenden angegebenen Konstruktionen des Sieben- und Neunecks sind Näherungskonstruktionen.

Anmerkung. Aus den bisher mitgeteilten regelmäßigen Vielecken lassen sich noch andere regelmäßige Vielecke, die sogenannten Sternvielecke, ableiten, welche vielfach zu ornamentalen Zwecken Verwendung finden. So bilden zwei gleichseitige Dreiecke, deren Ecken zugleich Ecken eines regelmäßigen Sechsecks sind, ein Sternsechseck (s. Fig. 73), zwei Quadrate (s. Fig. 74) ein Sternachteck, zwei Sechsecke ein Sternzwölfeck. Das Fünfeck (s. Fig. 79) ist ein Sternfünfeck. Aus dem Zehneck sind zwei Sternzehnecke abzuleiten, nämlich einmal das in Fig. 80 dargestellte Zehneck, ein zweites Sternzehneck erhält man, indem man zwei regelmäßige Sternfünfecke ineinanderzeichnet. Ein Sternsiebeneck ist in Fig. 81 dargestellt; Sternneunecke zeigen die Fig. 82 bis 84. Fig. 74 enthält noch ein zweites Sternachteck.

g) Vieleck mit beliebiger Seitenzahl. Soll ein regelmäßiges Vieleck, dessen Seitenzahl irgend eine Primzahl  $n$ , z. B. 11 ist, in einen Kreis beschrieben werden, so ist hierfür nurmehr ein Näherungsverfahren möglich, das aber für alle praktischen Zwecke als ausreichend genau gelten kann. Man zieht (s. Fig. 85) die Kreistangente in  $C$ , trägt  $ME$  unter dem Winkel von  $30^\circ$  an  $MC$  an, macht  $EF$  gleich dem dreifachen Halbmesser  $MC$  und verbindet  $FD$ , so ist  $FD$  genau genug der halbe Umfang des Kreises  $MCD$ .

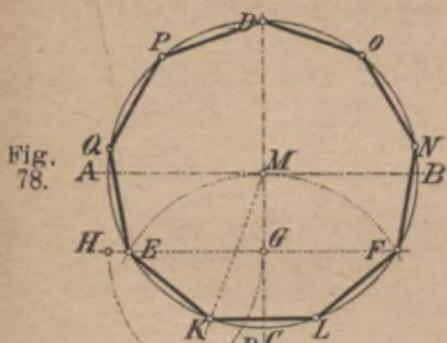


Fig. 78.

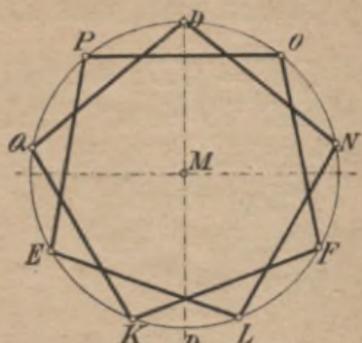


Fig. 82.

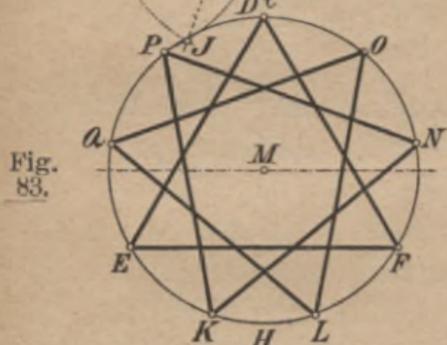


Fig. 83.

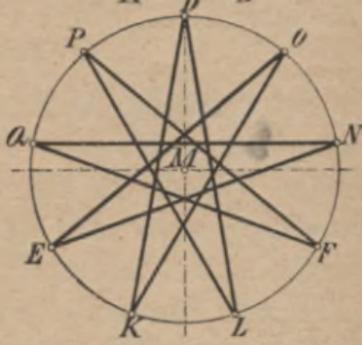


Fig. 84.

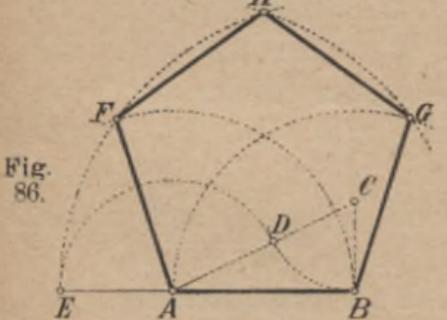


Fig. 86.

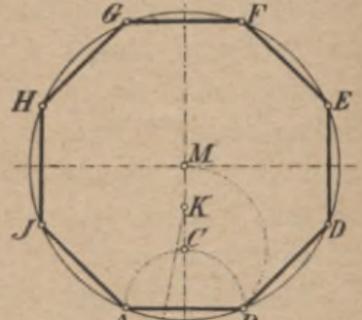


Fig. 87.

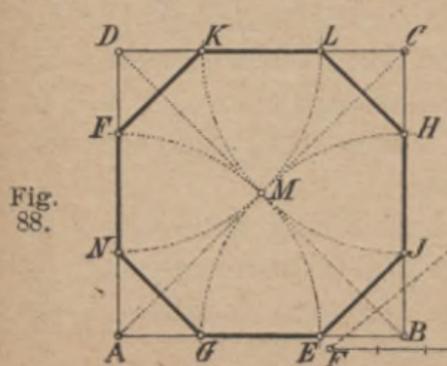


Fig. 88.

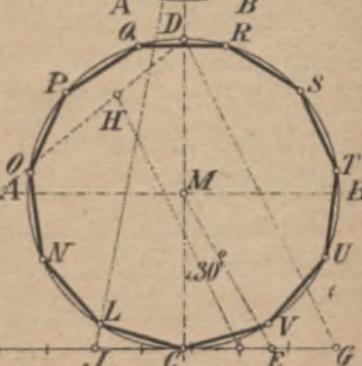


Fig. 85.

Macht man nun  $DH = \frac{2}{11} DF$ , ferner  $CJ = DH$

und  $DK = MD$ ; so trifft die Verbindungslinie  $KJ$  die Kreislinie in einem Punkte  $L$  so, daß  $CL$  die Seite des regelmäßigen Elfecks ist.

Anmerkung. Es ist klar, daß vorstehende Konstruktion für jedes Vieleck Gültigkeit besitzt, für welches  $n$  größer als 10 ist.

### Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks über gegebener Seite.

Sehr häufig tritt an den Zeichner die Aufgabe heran, über einer gegebenen Strecke als Seite ein regelmäßiges Vieleck zu konstruieren. Für das Fünfeck und Achteck, welcher Fall in der Praxis wohl am häufigsten auftritt, soll die Aufgabe gelöst werden. Ist  $AB$  (s. Fig. 86) die Seite eines regelmäßigen Fünfecks, so errichtet man  $BC$  senkrecht zu  $AB$  und gleich  $\frac{1}{2} AB$ , zieht  $AC$  und macht  $CD = CB$ . Überträgt man nun  $AD$  nach  $AE$ , so ist  $BE$  gleich der Länge der Fünfecksdiagonale. Man beschreibt nun um die Punkte  $A$  und  $B$  mit den Halbmessern gleich der Fünfecksseite und Fünfecksdiagonale Kreisbogen, die sich in den Fünfeckspunkten  $F$ ,  $G$  und  $H$  schneiden.

Für das Achteck ergibt sich folgende Konstruktion: Man beschreibt (s. Fig. 87) über der Seite  $AB$  als Durchmesser einen Halbkreis, der von der Mittelsenkrechten zu  $AB$  in  $C$  durchschnitten wird. Macht man  $CM = CB$ , so ist  $M$  der Mittelpunkt des Umkreises für das Achteck, wodurch letzteres bestimmt ist.

Beim Achteck begegnet man häufig auch der Aufgabe: In ein Quadrat  $ABCD$  (s. Fig. 88) ein regelmäßiges Achteck einzubeschreiben. Man bestimmt in diesem Falle

den Mittelpunkt  $M$  und beschreibt um die vier Ecken  $A, B, C, D$  Kreisbogen, welche den Punkt  $M$  enthalten, so liefern diese auf den Quadratseiten die Achteckspunkte  $E, F, G, H, J, K$  und  $L, N$ .

In den Fig. 89—98 sind für vieleckige Grundfiguren einige Felderteilungen dargestellt; in den Fig. 89 und 90 für das Fünfeck, Fig. 91—94 für das Sechseck, Fig. 96 für das Achteck. In Fig. 97 ist das Zwölfeck und Fig. 95 und 98 ein Sternachteck als Grundfigur verwendet.

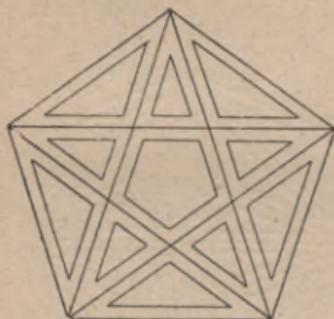


Fig. 89.

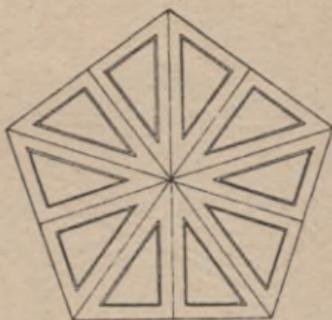


Fig. 90.

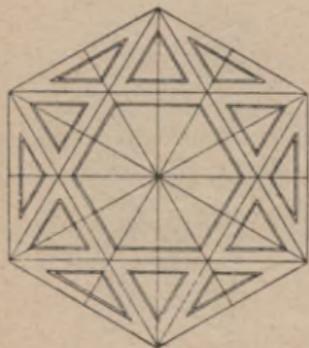


Fig. 91.

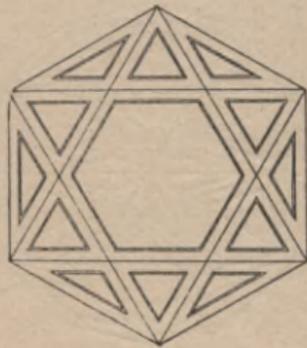


Fig. 92.

### Felderteilung regelmäßiger Vielecke.

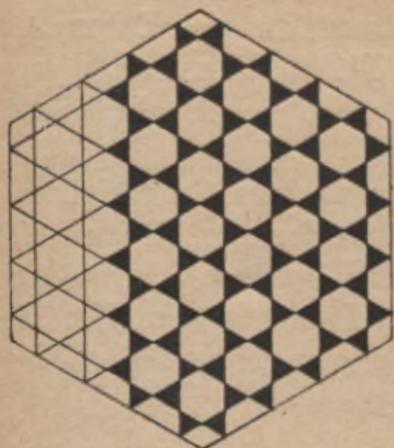


Fig. 93.

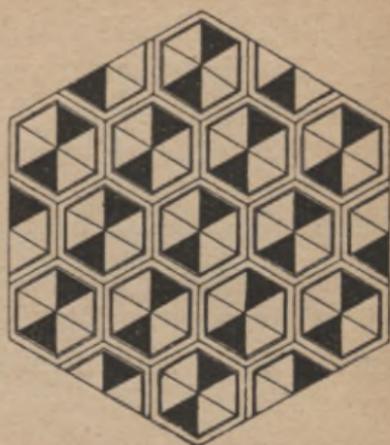


Fig. 94.

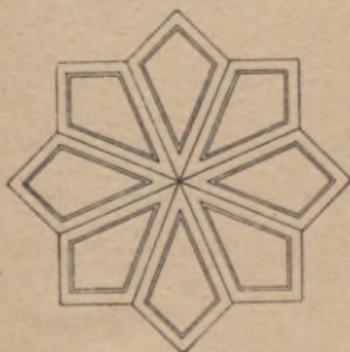


Fig. 95.

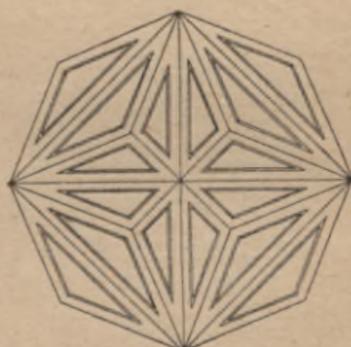


Fig. 96.

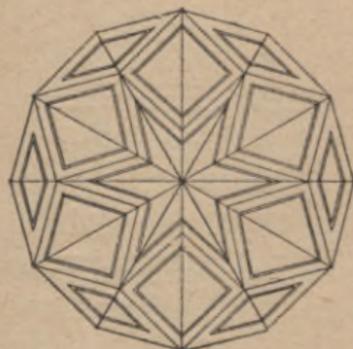


Fig. 97.



Fig. 98.

Felderteilung regelmäßiger Vielecke.

**Kreisteilungen.**

Die Fig. 99—111 veranschaulichen die mannigfaltigsten Kreisteilungen.

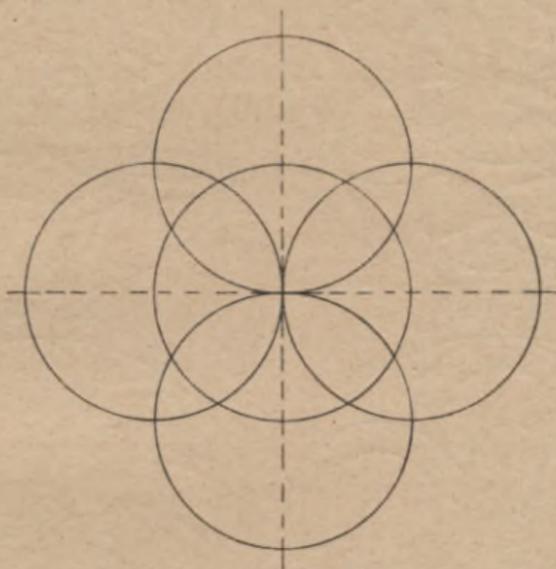


Fig. 99.

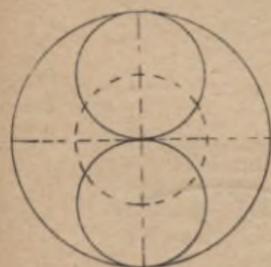


Fig. 100.

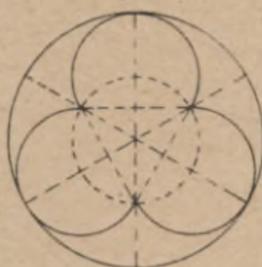


Fig. 101.

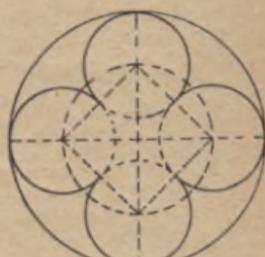


Fig. 102.

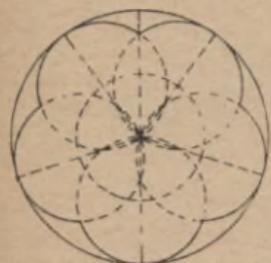


Fig. 103.

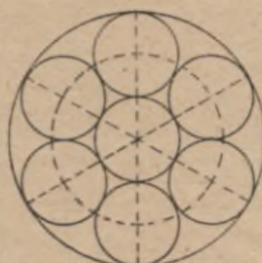


Fig. 104.

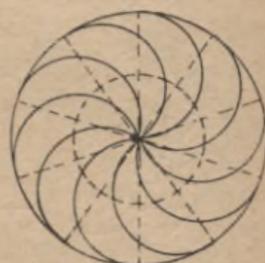


Fig. 105.

**Teilung des Kreises.**



Fig. 106.

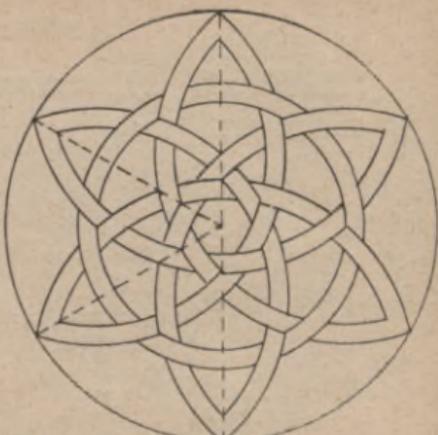


Fig. 107.

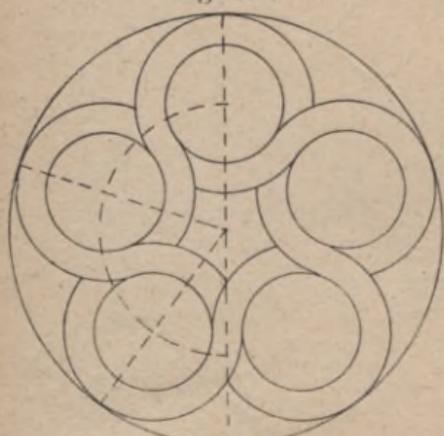


Fig. 108.



Fig. 109.



Fig. 110.

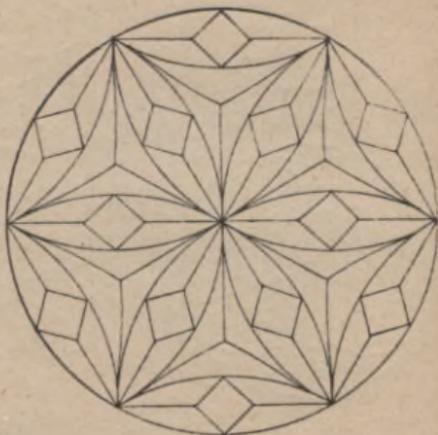


Fig. 111.

**Teilungen des Kreises.**

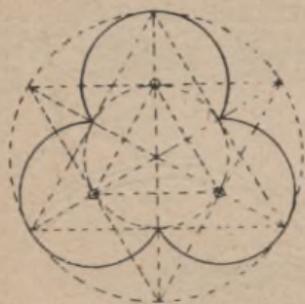


Fig. 112.



Fig. 116.

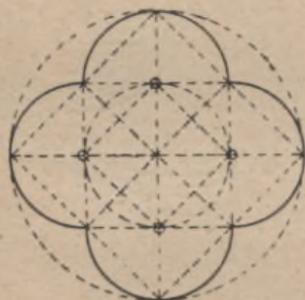


Fig. 113.



Fig. 117.

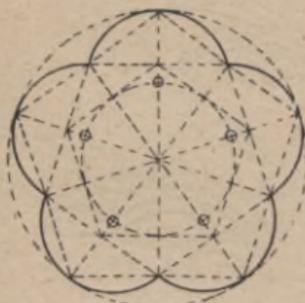


Fig. 114.



Fig. 118.

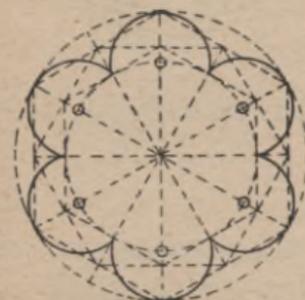


Fig. 115.

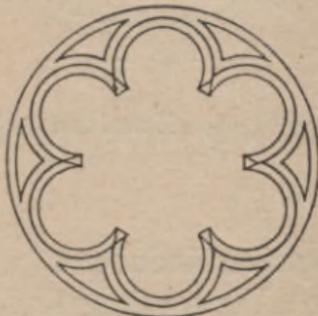


Fig. 119.

**Dreibogen. Vierbogen. Fünfbogen. Sechsbogen.**

Die Fig. 112—127 zeigen gleichfalls Kreisteilungen als Grundlagen für ornamentale Ausbildungen von Kreis-

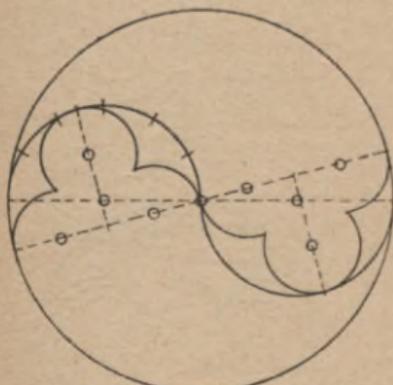


Fig. 120.



Fig. 122.

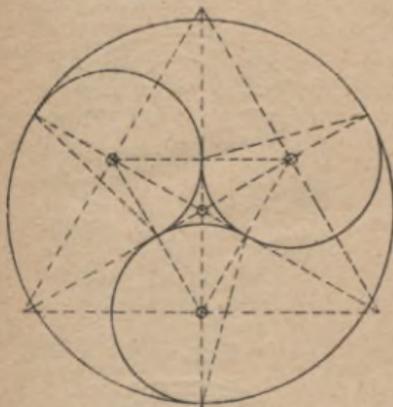


Fig. 121.



Fig. 123.

**Zweischweifung. Dreischweifung.**

bogenverbindungen, wie solche in der Architektur vielfach Verwendung finden, z. B. der Drei-, Vier-, Fünf- und

Sechsbogen, Fig. 112—119, ferner Zwei-, Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsschweifung (s. Fig. 120—127).

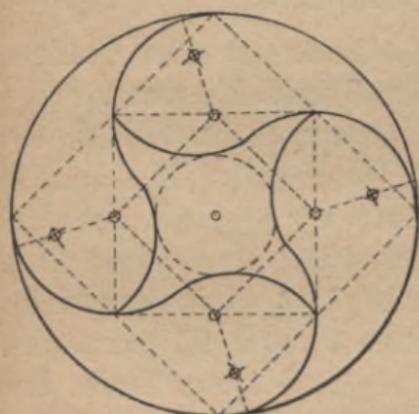


Fig. 124.

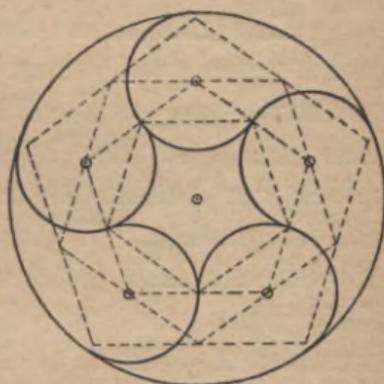


Fig. 125.

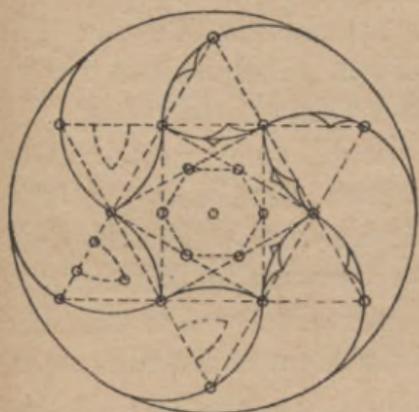


Fig. 126.

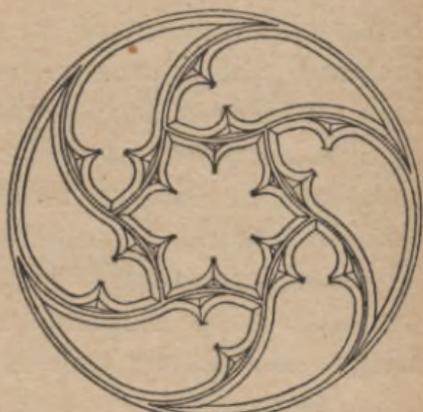


Fig. 127.

**Vierschweifung. Fünfschweifung. Sechsschweifung.**

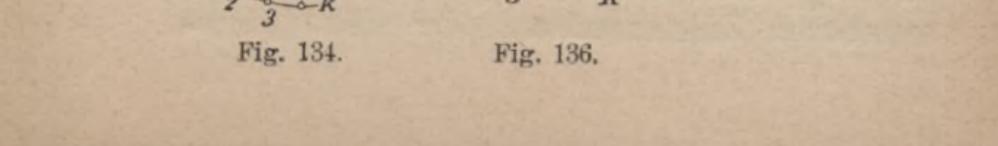
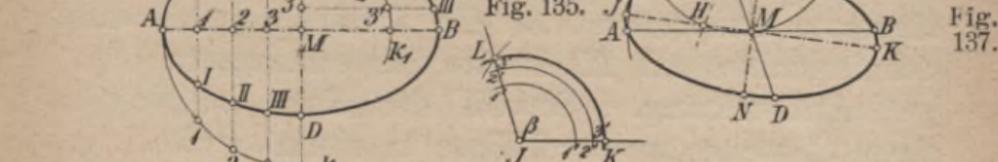
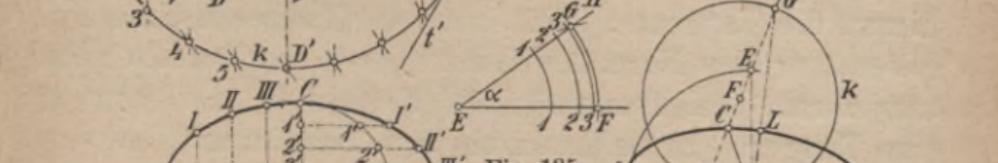
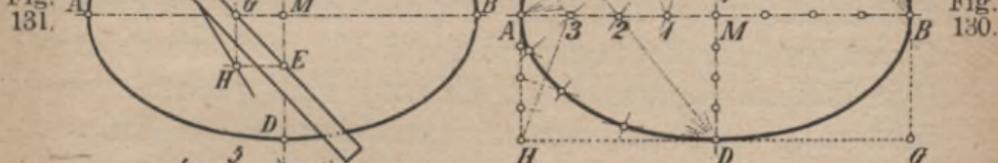
Die geometrische Konstruktion dieser Gebilde ist aus den Fig. 112—115 bzw. 120—126 ersichtlich.

## II. Konstruktion der Kegelschnitte, Ellipse, Parabel, Hyperbel.

### Ellipsenkonstruktionen.

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei festen Punkten  $F$  und  $F_1$ , den Brennpunkten, eine gegebene Abstandssumme haben. Halbiert man  $FF_1$  (s. Fig. 128) in  $M$  und trägt  $MA = MB$  gleich der halben Abstandssumme ab, so sind  $A$  und  $B$  Ellipsenpunkte. Weitere Punkte erhält man, wenn man die Strecke  $AB$  in den Punkten  $1, 2, 3$  in ungleiche Teile teilt und um die Punkte  $F$  und  $F_1$  mit den Strecken  $A \cdot 1, B \cdot 1, A \cdot 2, B \cdot 2, A \cdot 3, B \cdot 3$  etc. Kreise beschreibt, die sich in den Ellipsenpunkten  $I, II, III$  schneiden. Beschreibt man um  $F$  und  $F_1$  mit dem Halbmesser  $MA$  Kreise, so ergeben sich die Punkte  $C$  und  $D$  auf der Senkrechten durch  $M$  zu  $AB$ . Die Linien  $AB$  und  $CD$  heißen die Hauptachsen der Ellipse.  $AB$  ist die große,  $CD$  die kleine Hauptachse.  $M$  ist der Mittelpunkt; die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  heißen die Ellipsenscheitel. Die Hauptachsen sind Symmetrieachsen der Kurve. Jede den Mittelpunkt enthaltende Ellipsensehne, wie z. B.  $I \cdot I, II \cdot II$  etc., heißt ein Durchmesser; er wird im Mittelpunkt gehälftet. Die Ellipsendurchmesser sind von ungleicher Länge.  $AB$  ist der größte,  $CD$  der kleinste Durchmesser.

Tangenten- und Normalenkonstruktion. Um in einem Punkte, z. B.  $III$  (s. Fig. 128), die Tangente und Normale zu konstruieren, verbindet man  $III$  mit den beiden Brennpunkten  $F$  und  $F_1$  und halbiert die Winkel dieser Verbindungslinien (Fahrstrahlen); die innere Halbierungslinie gibt die Normale, die äußere die Tangente an die Ellipse im Punkt  $III$ .



**Andere Konstruktion der Ellipse.** Gegeben die beiden Hauptachsen (s. Fig. 129). Man beschreibt um den Mittelpunkt  $M$  mit den Halbmessern  $MA$  und  $MB$  Kreise  $k_1$  und  $k_2$ . Zieht man durch  $M$  eine Anzahl von Strahlen, welche die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  in den Punkten  $1, 2, 3$  treffen und durch die Punkte auf  $k_1$  Parallele zur großen, durch jene auf  $k_2$  Parallele zur kleinen Achse, so schneiden sich diese Parallelen in Punkten  $I, II, III$  etc. der Ellipse.

**Andere Ellipsenkonstruktion.** Gegeben die beiden Hauptachsen (s. Fig. 130). Man zeichnet das Rechteck  $E, F, G, H$ . Teilt man  $AE$  in etwa vier gleiche Teile, ebenso  $MA$ , so treffen sich die Verbindungslinien der Teilungspunkte auf  $AE$  mit dem Punkte  $C$  und jene der Teilungspunkte auf  $MA$  mit dem Punkte  $D$  in Ellipsenpunkten  $I, II, III$  etc. Entsprechend verfährt man auch mit den übrigen Vierteln der Ellipse. Man kann auch den Durchmesser  $AB$  zur Konstruktion benutzen; dann teilt man  $CF$  und  $MC$  ein und zieht die Strahlen nach  $A$  und  $B$  beziehungsweise.

**Tangenten- und Normalenkonstruktion.** Die Normale im Punkte  $III$  (s. Fig. 129) ergibt sich, wenn man  $M3$  bis zum Schnitt  $E$  mit einem mit dem Halbmesser gleich der Summe der beiden Halbachsen beschriebenen Kreise  $k_3$  zieht;  $EIII$  ist die Normale, die Senkrechte hierzu die Tangente. Will man die Tangente ohne Zuhilfenahme der Normalen konstruieren, so braucht man nur durch den Punkt  $3'$  des Kreises  $k_2$  an letzteren eine Tangente zu zeichnen bis zum Schnitt mit der verlängerten Hauptachse  $AB$ ; die Verbindungslinie dieses Schnittpunktes mit  $III$  ist die Ellipsentangente.

**Anmerkung.** Sowohl der Kreis  $k_1$  wie der Kreis  $k_2$  stehen zu der Ellipse in einem gewissen geometrischen Zusammenhang, der sich dadurch charak-

terisiert, daß den Ellipsenpunkten  $I, II, III$  etc. gewisse Kreispunkte  $1, 2, 3$  auf  $k_1$ , bzw.  $1', 2', 3'$  auf  $k_2$  so zugeteilt sind, daß die Verbindungslinien  $I \cdot 1, II \cdot 2, III \cdot 3$ , bzw.  $I \cdot 1', II \cdot 2', III \cdot 3'$  zueinander parallel sind, und außerdem je zwei Linien der einen Figur, wie z. B.  $I \cdot III$  und  $1 \cdot 3$  oder  $1' \cdot 3'$ , sich auf einer Geraden, nämlich der kleinen bzw. großen Ellipsenachse schneiden. Dieser geometrische Zusammenhang heißt Affinität und zwei Figuren sind affin, wenn sie in diesem Zusammenhange zueinander stehen. Die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  sind also zur Ellipse affin. Die Richtung der Verbindungslinie entsprechender Punkte, wie  $1 \cdot I$  oder  $1' \cdot I$  etc., heißt Affinitätsrichtung; die Linie, auf welcher sich entsprechende Gerade schneiden, wie  $1 \cdot 3$  und  $I \cdot III$ , heißt die Affinitätsachse. Die Affinitätsbeziehung zweier Figuren wird sehr häufig zu Konstruktionszwecken benutzt.

In Fig. 130 ergibt sich die Tangente z. B. im Punkte  $II$ , wenn man den Schnittpunkt  $J$  von  $AC$  mit der Verbindungslinie  $D \cdot II$  mit  $H$  verbindet und außerdem durch  $J$  eine Parallele zu  $AB$  zieht. Die Linie  $HJ$  liefert auf  $EC$  einen Punkt  $K$  der Tangente in  $II$ , ebenso gibt die Parallele durch  $J$  zu  $AB$  auf  $AE$  einen Punkt  $L$  dieser Tangente.

Andere Ellipsenkonstruktion. Gegeben die beiden Hauptachsen (s. Fig. 131). Auf einem Papierstreifen trägt man die Strecken  $EF = MA$  und  $FG = MC$  ab. Bewegt man nun den Streifen so, daß der Punkt  $E$  die kleine Achse durchläuft, während  $G$  stets auf der großen Achse bleibt, so beschreibt bei dieser Bewegung der Punkt  $F$  die gezeichnete Ellipse. Die in den Schnittpunkten  $E$  und  $G$  zu den Achsen errichteten Senkrechten schneiden sich in einem Punkte  $H$  der Ellipsennormalen  $n$  in  $F$ . Die Tangente  $t$  steht senkrecht hierzu.

Anmerkung. Die oben angegebene Normalenkonstruktion gewinnt eine besondere Bedeutung für den Techniker, wenn es sich darum handelt, die Richtung der Lagerfugen für einen elliptischen Mauerbogen festzusetzen. Man führt die angegebene Konstruktion auf dem Lehrbogen aus, indem man statt eines Papierstreifens ein Brettstück benutzt.

### Konstruktion der Ellipse aus konjugierten Durchmessern.

Zwei Durchmesser  $AB$  und  $CD$  (s. F. 132) einer Ellipse heißen konjugiert, wenn die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers parallel zum andern Durchmesser sind. Aus zwei solchen Durchmessern läßt sich die Ellipse ohne Benutzung der Hauptachsen in mehrfacher Weise konstruieren:

1. Konstruktion. Man beschreibt (s. Fig. 132) über  $AB$  als Durchmesser den Kreis  $k$  und teilt ihn ein. Durch die Teilungspunkte  $1, 2, 3$  etc. zieht man Senkrechte zu  $MA$  und durch deren Schnittpunkte  $1', 2', 3' \dots$  mit  $MA$  Parallele zu  $CD$ . Durch die Punkte  $1, 2, 3 \dots$  auf  $k$  zieht man ferner Parallele zu der Verbindungslinie  $CC'$ . Diese treffen die Parallelen zu  $CD$  in den Ellipsenpunkten  $I, II, III \dots$ . Die Tangentenkonstruktion bleibt dieselbe wie in Fig. 129. Man zieht in  $2$  die Tangente  $t'$  an  $k$  und durch deren Schnittpunkt mit  $AB$  die Ellipsentangente  $t$  nach dem Punkte  $II$ .

Anmerkung. Die Ellipse und der Kreis  $k$  sind wieder affine Figuren mit  $AB$  als Affinitätsachse und  $CC'$  als Affinitätsrichtung. Man könnte die Ellipse auch als affine Figur zu einem über  $CD$  als Durchmesser beschriebenen Kreise konstruieren. Der Leser versuche diese Konstruktion.

2. Konstruktion. Man kann mit Benutzung der beiden konjugierten Durchmesser  $AB$  und  $CD$  (s. Fig. 133) die Ellipse in derselben Weise konstruieren wie in Fig. 130. Die Konstruktion ist in Fig. 133 ausgeführt und entspricht genau derjenigen in Fig. 130. Auch die Buchstabenbezeichnung ist die nämliche wie in Fig. 130.

### Konstruktion der Ellipse durch Vergatterung.

Gegeben die beiden Hauptachsen. Man beschreibt über  $AB$  als Durchmesser den Kreis  $k$  (s. Fig. 134), teilt  $MA$  ein und zieht durch die Teilungspunkte Senkrechte zu  $MA$ . Die halben Kreissehnen verkleinert man nun im Verhältnis der beiden Hauptachsen mittels eines Proportionalwinkels  $\alpha$  (s. Fig. 135). Man macht  $EF = MB$ , schlägt in  $E$  mit  $EF$  einen Kreisbogen, auf welchem man  $FG = MC$  abträgt. Hierdurch ist der Winkel  $\alpha$  bestimmt. Beschreibt man nun mit den Längen  $1 \cdot 1$ ,  $2 \cdot 2$ ,  $3 \cdot 3$  (s. Fig. 134) um  $E$  (s. Fig. 135) Kreise, so geben die Längen  $1 \cdot 1$ ,  $2 \cdot 2$ ,  $3 \cdot 3$  (s. Fig. 135) die Abstände der Ellipsenpunkte  $I$ ,  $II$ ,  $III$  (s. Fig. 134) von  $MA$  an.

Ähnlich läßt sich auch die kleine Achse zur Ellipsenkonstruktion benutzen. Man vergrößert mittels eines Proportionalwinkels  $\beta$  (s. Fig. 136) ( $JK = JL = MC$ ,  $LK = MB$ ) die Kreissehnen  $1' \cdot 1'$ ,  $2' \cdot 2'$ ,  $3' \cdot 3'$  im Verhältnis der beiden Ellipsenachsen und erhält hierdurch die Ellipsenpunkte  $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$ .

### Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse aus konjugierten Durchmessern.

Gegeben (s. Fig. 137) die beiden Durchmesser  $AB$  und  $CD$ . Man errichtet  $ME$  senkrecht zu  $MA$  und gleich  $MA$ , zieht  $CE$ , halbiert  $CE$  in  $F$  und beschreibt

um  $F$  als Mittelpunkt einen den Punkt  $M$  enthaltenden Kreis  $k$ , der die verlängerte  $CE$  in zwei Punkten  $G$  und  $H$  trifft, durch welche die Hauptachsen der Ellipse hindurchgehen. Die Längen der Hauptachsen sind  $AB = 2HE$  und  $CD = 2EG$ .

### Parabelkonstruktionen.

Die Parabel ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem festen Punkte  $F$  (s. Fig. 138), dem Brennpunkte, und einer festen Geraden  $a$ , der Leitlinie, gleiche Entfernung besitzen.

1. Konstruktion der Parabel. Gegeben der Brennpunkt  $F$  und die Leitlinie  $a$ . Die Senkrechte durch  $F$  zu  $a$  gibt die Parabelachse, auf ihr liegt der Parabelscheitel im Halbierungspunkte  $C$  der Strecke  $FB$ . Weitere Punkte erhält man durch Annahme beliebiger Punkte  $1, 2, 3, 4$  etc. auf der Achse. Beschreibt man nämlich um  $F$  als Mittelpunkt Kreise mit den Halbmessern  $B \cdot 1, B \cdot 2, B \cdot 3$  etc., so werden diese von den in den Punkten  $1, 2, 3 \dots$  zur Leitlinie gezogenen Parallelen in den Parabelpunkten  $I, II, III \dots$  getroffen. Die Senkrechte im Punkte  $C$  zur Achse gibt die Scheiteltangente  $s$ .

Tangente und Normale in einem beliebigen Parabelpunkt, z. B.  $II$ . Man zieht  $IIF$  und fällt von  $II$  eine Senkrechte  $III$  zu  $a$ . Die innere Halbierungslinie des Winkels  $HIIF$  gibt die Tangente  $t$ , die Senkrechte hierzu die Normale  $n$ .

Andere Parabelkonstruktionen. 1. Gegeben der Scheitel  $A$ , die Achse  $AB$  und ein Punkt  $C$  (s. Fig. 139). Man zeichnet das Rechteck  $ABCD$ , teilt in demselben die Strecken  $CD$  und  $CB$  in gleiche Teile ein und zieht durch die Teilungspunkte auf  $BC$  Parallele

Fig. 138.

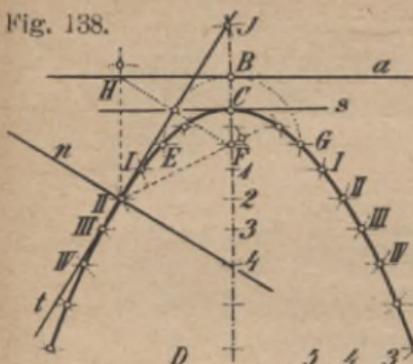


Fig. 139.

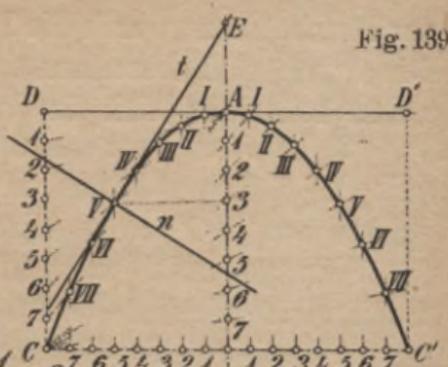


Fig. 140.

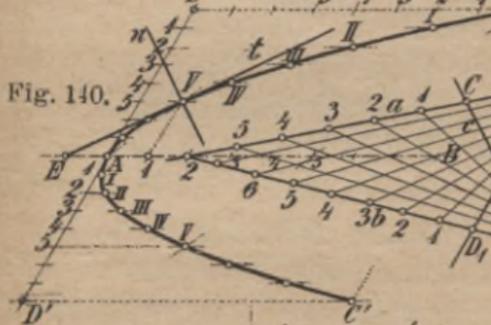


Fig. 141.

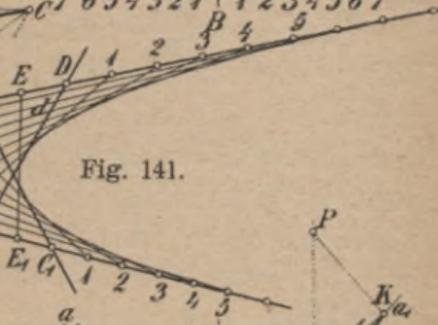


Fig. 142.

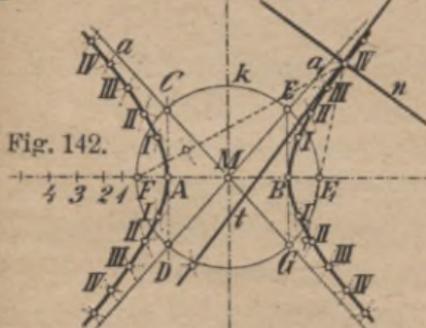


Fig. 143.

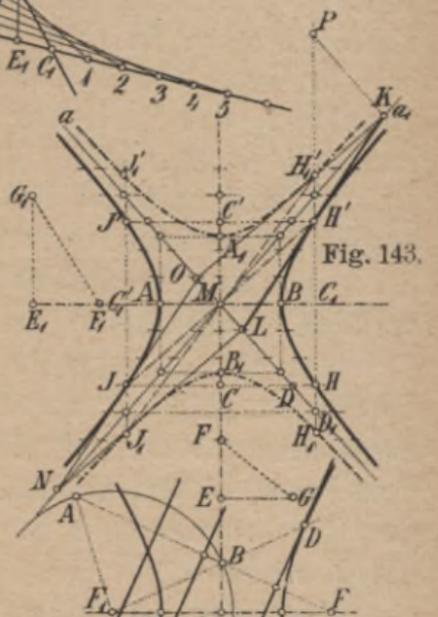


Fig. 144.

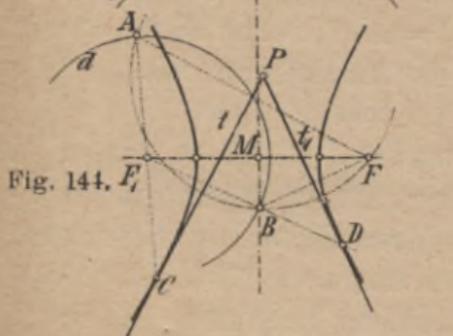
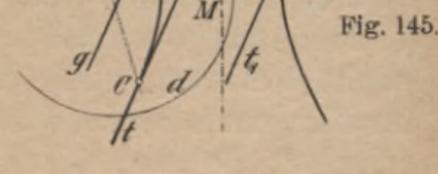


Fig. 145.



zur Parabelachse, durch die Teilungspunkte auf  $CD$  nach  $A$ . Die durch gleichbezeichnete Teilungspunkte gehenden Geraden schneiden sich in Parabelpunkten  $I, II, III$  etc.

2. Man zeichnet das Rechteck  $ABC'D'$  (s. Fig. 139), teilt die Seiten  $AB$  und  $BC'$  ein. Durch die Teilungspunkte auf  $BC'$  zieht man Parallele zur Parabelachse, die Teilungspunkte auf  $AB$  verbindet man mit  $C$ ; die durch gleichbezeichnete Punkte gehenden Geraden liefern durch ihren Schnitt Parabelpunkte.

Tangenten- und Normalenkonstruktion. Man fällt von einem Punkte, z. B.  $V$  (s. Fig. 139), eine Senkrechte zur Parabelachse (der Fußpunkt fällt zufällig mit dem Punkte  $\beta$  auf  $AB$  zusammen) und macht  $AE = A \cdot \beta$ ; dann ist  $E$  ein Punkt der Parabeltangente  $t$  im Punkte  $V$ , die Senkrechte zu  $t$  in  $V$  gibt die Normale  $n$ .

3. Gegeben ein Punkt  $A$ , die Tangente  $AD$  daselbst, die Achsenrichtung und ein weiterer Punkt  $C$  (s. Fig. 140).

a) Man zeichnet das Parallelogramm  $ABCD$  und verfährt im übrigen wie in Fig. 139, linke Seite.

b) Man zeichnet das Parallelogramm  $ABC'D'$  und verfährt im übrigen wie in Fig. 139, rechte Seite.

Zur Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Punkte, z. B.  $V$  (s. Fig. 140), zieht man durch  $V$  die Parallele zu  $AD$ ; sie trifft die Gerade  $AB$  zufällig in dem Punkte  $I$  und macht  $AE = A \cdot I$ ; so ist  $E$  ein Punkt der Parabeltangente  $t$  in  $V$ , die Senkrechte hierzu gibt die Normale  $n$ .

4. Gegeben vier gerade Linien  $a, b, c, d$  (s. Fig. 141) als Tangenten einer Parabel. Gesucht beliebig viele weitere Parabeltangenten. Die Tangenten  $c$  und  $d$  liefern auf  $a$  und  $b$  die Schnittpunkte  $C, D$  bzw.  $C_1, D_1$ ; halbiert man nun  $CD$  in  $E$ ,  $C_1D_1$  in  $E_1$ , so ist die Verbindungslinie  $EE_1$  eine Parabel-

tangente. Trägt man ferner den Abschnitt  $DE$  von  $D$  bzw.  $C$  aus auf  $a$  ab nach 1, 2, 3 etc., desgl. den Abschnitt  $D_1E_1$  von  $D_1$  und  $C_1$  aus auf  $b$  nach 1, 2, 3..., so sind die Verbindungslinien 1·1, 2·2, 3·3 etc. weitere Parabeltangente.

### Hyperbelkonstruktionen.

Die Hyperbel ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei festen Punkten  $F$  und  $F_1$ , den Brennpunkten, eine gegebene Abstandsdifferenz besitzen.

1. Konstruktion der Hyperbel. Zieht man (s. Fig. 142)  $FF_1$ , halbiert die Strecke  $FF_1$  in  $M$  und trägt von  $M$  aus auf  $FF_1$ , nach beiden Seiten hin die Strecke  $MA = MB$  gleich der halben gegebenen Abstandsdifferenz ab, so sind  $A$  und  $B$  zwei Hyperbelpunkte und zwar heißen sie die Hyperbelscheitel. Die Linie  $AB$  ist die reelle Achse der Hyperbel, im Gegensatz zu der imaginären Achse, welche durch  $M$  senkrecht zu  $AB$  hindurchgeht. Wählt man auf  $AB$  die Punkte 1, 2, 3... beliebig und beschreibt aus  $F$  und  $F_1$  mit den Halbmessern 1· $A$  und 1· $B$ , 2· $A$  und 2· $B$ , 3· $A$  und 3· $B$  Kreisbogen, so liefern deren Schnittpunkte Hyperbelpunkte I, II, III.

Anmerkung. Beschreibt man um  $M$ , dem Mittelpunkt der Hyperbel, mit dem Halbmesser  $MF$  einen Kreis  $k$ , so wird derselbe von den Senkrechten in  $A$  und  $B$  zu  $AB$  in den Punkten  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $G$  geschnitten. Die Verbindungslinien  $MCG$  und  $MDE$  heißen die Asymptoten der Hyperbel, sie berühren letztere in unendlicher Ferne. Die Hyperbel erstreckt sich nach zwei Richtungen hin in unendliche Ferne. Jede durch den Mittelpunkt  $M$  gehende und die Hyperbel treffende Gerade heißt ein Durchmesser der Hyperbel.

Tangenten- und Normalenkonstruktion in einem beliebigen Hyperbelpunkte, z. B.  $IV$  (s. Fig. 142). Man verbindet  $IV$  mit  $F$  und  $F_1$ . Die innere Halbierungslinie des Winkels  $FIVF_1$  gibt die Tangente  $t$ , die äußere die Normale  $n$  für den Hyperbelpunkt  $IV$ .

2. Konstruktion der Hyperbel. Gegeben die Scheitel  $A$  und  $B$  und die beiden Asymptoten  $a$  und  $a_1$  (s. Fig. 143). Durch die beiden Scheitel  $A$  und  $B$  ist die reelle Achse der Größe und Lage nach, die imaginäre Achse der Lage nach bestimmt. Wählt man auf der letzteren Achse einen Punkt  $C$  beliebig, zieht durch  $C$  eine Parallele zu  $AB$  und konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck  $EFG$ , in welchem die eine Kathete  $EF$  gleich der reellen Halbachse  $MA$ , die andere Kathete gleich der Strecke  $CD$  ist, so ist die Hypotenuse  $FG$  gleich der Entfernung der auf der Linie  $CD$  liegenden Hyperbelpunkte  $H$  und  $J$  von der imaginären Hyperbelachse  $MC$ . Man hat also nur  $CH = CJ = FG$  abzutragen, um die Hyperbelpunkte  $H$  und  $J$  zu erhalten. Symmetrisch zu  $C$  hinsichtlich  $AB$  liegt der Punkt  $C'$  und auf der Parallelen durch  $C'$  zu  $AB$  liegen die zu  $H$  und  $J$  hinsichtlich  $AB$  symmetrischen Punkte  $H'$  und  $J'$ . Für jede weitere Parallele zur Achse  $AB$  ist die Konstruktion zu wiederholen.

Tangenten- und Normalenkonstruktion in einem beliebigen Punkte, z. B.  $H'$  (s. Fig. 143). Man zieht durch  $H'$  die Senkrechte zu  $AB$  bis zum Schnitt  $D_1$  mit der Asymptote  $a$  und macht  $H'P = H'D_1$ ; die Parallele  $PK$  zu  $a$  trifft  $a_1$  in einem Punkte  $K$  der Hyperbel-tangente in  $H'$ .

Anmerkung. Zeichnet man ein Rechteck, dessen Ecken auf den Asymptoten  $a$  und  $a_1$  liegen und von

welchen zwei Seiten die Hyperbeltangenten in den Scheiteln  $A$  und  $B$  sind, so ergeben sich hierdurch auf der imaginären Hyperbelachse die Punkte  $A_1$  und  $B_1$  als Scheitel einer zweiten Hyperbel mit den nämlichen Asymptoten  $a$  und  $a_1$ . Diese zweite Hyperbel ist in der Zeichnung strichpunktiert gezeichnet, sie heißt die zur ursprünglichen Hyperbel konjugierte Hyperbel. Ihre Punkte bestimmen sich in gleicher Weise wie bei der ursprünglichen Hyperbel. Man zieht z. B. durch  $C_1$  die Parallele zu  $A_1B_1$ , macht  $E_1F_1 = MA_1$ ,  $E_1G_1 = C_1D_1$ , dann ist  $C_1H_1 = C_1H'_1 = F_1G_1$  etc. Konjugierte Durchmesser einer Hyperbel erhält man, wenn man in einem Punkte, z. B.  $H'$ , eine Tangente an die Hyperbel zeichnet, desgl. in dem Schnittpunkte  $J$  der Linie  $MH'$  mit der Hyperbel; diese Tangenten treffen die Asymptoten in vier Punkten  $K, L, N, O$  eines Parallelogrammes, für welches die Linien  $OK$  und  $NL$  Tangenten an die konjugierte Hyperbel sind. Die Verbindungslinie  $H'_1J_1$  der Mittelpunkte von  $OK$  und  $NL$  ist der zu  $H'J$  konjugierte Hyperbeldurchmesser.

### Tangentenkonstruktion von einem Punkte außerhalb eines Kegelschnittes an letzteren.

Voraussetzung ist, daß von dem Kegelschnitt die Brennpunkte und außerdem ein Punkt der Kurve gegeben sind.

Die Konstruktion ist für alle drei Kegelschnitte die nämliche. Liegt eine Ellipse vor und ist  $P$  der gegebene Punkt (s. Fig. 146), so beschreibt man um den einen Brennpunkt  $F_1$  mit einem Halbmesser, gleich der großen Achse, den Kreis  $d$  und außerdem um  $P$  einen den zweiten Brennpunkt  $F'$  enthaltenden Kreis, welcher  $d$  in den Punkten  $A$  und  $B$  trifft. Die ge-

suchten Tangenten  $t$  und  $t_1$  stehen dann senkrecht zu den Linien  $AF$  und  $BF$ ; ihre Berührungspunkte  $C$  und  $D$  liegen auf den Verbindungslinien  $AF_1$  und  $BF_1$ . Für die Hyperbel (s. Fig. 144) gilt wörtlich der gleiche Text. Für die Parabel (s. Fig. 147) vereinfacht sich die Konstruktion insofern, als der Kreis  $d$  in die Gerade  $d$  übergeht, deren Lage bekannt ist. Der Kreis um  $P$  durch  $F$  schneidet  $d$  in  $A$  und  $B$ . Die Tangenten  $t$  und  $t_1$  stehen senkrecht zu  $FA$  und  $FB$ , ihre Berührungspunkte  $C$  und  $D$  liegen auf den Parallelen zur Achse durch die Punkte  $A$  und  $B$ .

Anmerkung. Ist statt eines Punktes  $P$  eine Gerade  $g$  gegeben, zu welcher parallel die möglichen Tangenten an einen Kegelschnitt gezogen werden sollen, so bleibt die Konstruktion die gleiche wie vorher, nur geht der Kreis um  $P$  durch  $F$  in eine Senkrechte durch  $F$  zur gegebenen Geraden  $g$  über (s. Fig. 145, 148 u. 149).

Von einem Punkte außerhalb, bezw. parallel zu einer Geraden, sind an einem Kegelschnitt höchstens zwei Tangenten möglich. Wie verhält es sich hiermit bei der Parabel?

### III. Einige Eigenschaften der Kegelschnitte, die für den Zeichner von Interesse sind: Pol, Polare, Sätze von Pascal und Brianchon.

1. Pol und Polare eines Kegelschnittes. Zieht man von einem Punkte  $P$  (s. Fig. 150) die Kegelschnittssekanten  $PAA_1$ ,  $PBB_1$ ,  $PCC_1$  ... und verbindet  $AB_1$  und  $A_1B$ ,  $BC_1$  und  $B_1C$ , so liegen die Schnittpunkte  $X$  und  $Z$  auf einer Geraden  $p$ . Die Gerade  $p$  heißt die Polare des Punktes  $P$  hinsichtlich des Kegelschnittes, der Punkt  $P$  ist der Pol der Geraden  $p$ .

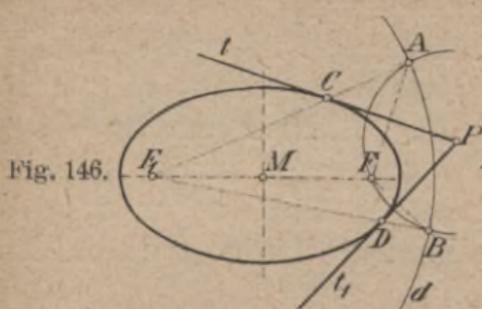


Fig. 146.

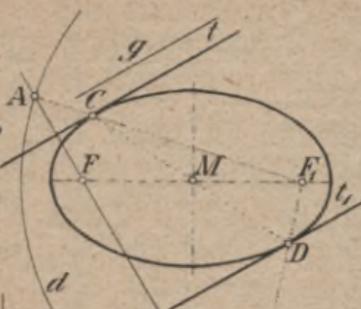


Fig. 148.

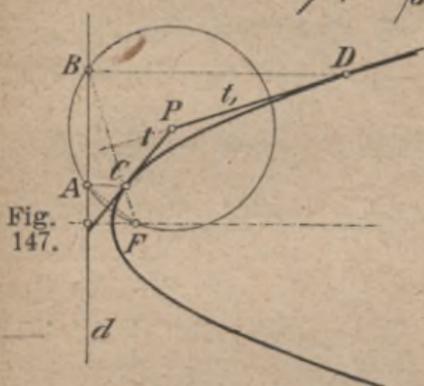


Fig. 147.

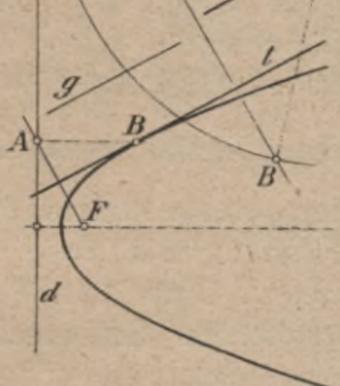


Fig. 149.

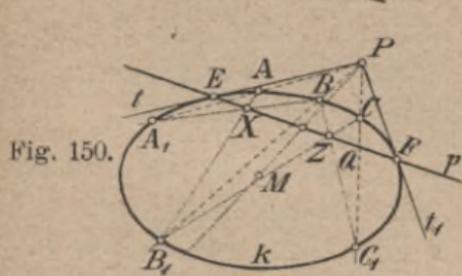


Fig. 150.

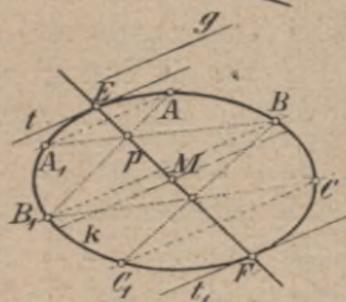


Fig. 151.

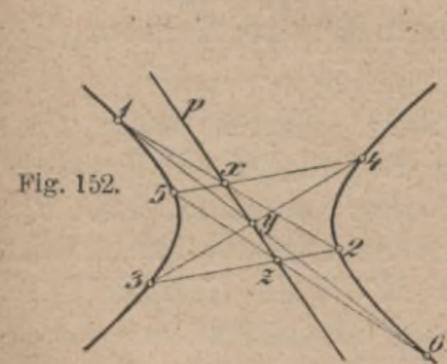


Fig. 152.

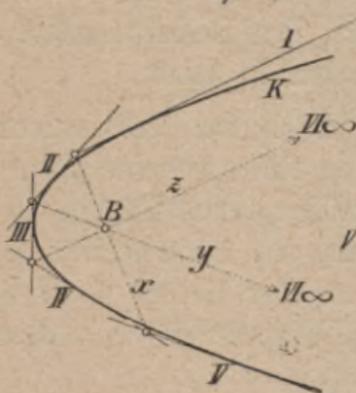


Fig. 153.

Liegt  $P$  außerhalb des Kegelschnittes, so schneidet die Polare  $p$  ihn in zwei Punkten  $E$  und  $F$ , den Berührungspunkten, der von  $P$  an den Kegelschnitt möglichen Tangenten (s. auch Fig. 146). Liegt  $P$  innerhalb des Kegelschnittes  $k$ , so liegt  $p$  außerhalb von  $k$ ; liegt  $P$  auf  $k$ , so geht  $p$  durch  $P$  und ist Tangente an  $k$  in  $P$ . Liegt  $P$  unendlich fern, so geht die Polare  $p$  durch den Mittelpunkt  $M$  von  $k$ .

Eine Sekante, z. B.  $PC_1$  (s. Fig. 150), schneidet  $p$  in  $Q$ , und die Punkte  $P$  und  $Q$  teilen die Sehne  $CC_1$  in gleichem Verhältnis, d. h. es ist  $\frac{PC}{PC_1} = -\frac{QC}{QC_1}$ .

Vier solche Punkte  $PQCC_1$  heißen vier harmonische Punkte und zwar sind  $P$  und  $Q$  harmonisch konjugiert zu  $C$  und  $C_1$ . Vorstehendes gilt für alle den Pol enthaltenden Sekanten. Im Falle der Fig. 151 werden die Sekanten und damit auch die Tangenten parallel zur gegebenen Richtung  $g$ , und die Polare  $p$  ist der zur Richtung  $g$  konjugierte Durchmesser, in ihm werden alle zu  $g$  parallele Sehnen halbiert.

2. Pascalscher Satz. Irgend sechs Punkte eines Kegelschnittes bilden ein Pascalsches Sechseck, z. B. die Punkte  $1 \cdot 2 \dots 6$  der Fig. 152. Die Seiten  $1 \cdot 2$  und  $4 \cdot 5$ ,  $2 \cdot 3$  und  $5 \cdot 6$ ,  $3 \cdot 4$  und  $6 \cdot 1$  heißen Gegenseiten; ihre Schnittpunkte liegen auf einer Geraden  $p$ , der Pascalschen Linie.

3. Brianchonscher Satz. Irgend sechs Tangenten eines Kegelschnittes, z. B.  $I, II, III, IV, V$  und die unendlich ferne Tangente  $VI$  einer Parabel (s. Fig. 153), bilden ein Brianchonsches Sechseck. Die Schnittpunkte der Seiten  $I \cdot II$  und  $IV \cdot V$ ,  $II \cdot III$  und  $V \cdot VI$ ,  $III \cdot IV$  und  $VI \cdot I$  heißen die Gegenecken des Sech-

seites und ihre Verbindungslinien schneiden sich in einem Punkte  $B$ , dem Brianchonschen Punkte.

Mittels der beiden Sätze von Pascal und Brianchon lassen sich die mannigfaltigsten Aufgaben über Kegelschnitte lösen. Im folgenden sollen nur einige für die Zeichner interessante und wichtige Konstruktionen hervorgehoben werden. Aus den genannten beiden Sätzen folgt zunächst, daß ein Kegelschnitt durch fünf voneinander unabhängige Elemente, z. B. Punkte oder Tangenten bestimmt ist und daß sich dann beliebig viele weitere Punkte und Tangenten konstruieren lassen.

### Einige Konstruktionsaufgaben über Kegelschnitte.

**Aufgabe.** Gegeben fünf Punkte  $1, 2, 3, 4$  und  $5$  (s. Fig. 154) eines Kegelschnittes; gesucht beliebig viele weitere Punkte.

**Auflösung.** Man bestimmt den Schnittpunkt  $x$  von  $1 \cdot 2$  und  $4 \cdot 5$  und zieht durch  $x$  eine beliebige Gerade  $p$  als Pascalsche Linie; dann ergibt sich im Schnittpunkte von  $2 \cdot 3$  mit  $p$  der Punkt  $y$ , durch welchen die Linie  $5 \cdot 6$  hindurchgehen muß. Die Linie  $p$  trifft aber auch die Verbindungslinie  $3 \cdot 4$  in einem Punkte  $z$ , durch welchen  $1 \cdot 6$  hindurchgeht. Der Punkt  $6$  liegt also im Schnitt von  $x \cdot 1$  und  $y \cdot 5$ . Durch Annahme beliebig vieler durch  $x$  gehender Linien  $p$  ergeben sich beliebig viele Punkte  $6$  des Kegelschnittes  $k$ . In Fig. 154 ist die Konstruktion für eine Ellipse, in Fig. 155 für eine Hyperbel ausgeführt.

**Aufgabe.** Gegeben fünf Punkte eines Kegelschnittes; gesucht in einem der Punkte, z. B.  $1$ , die Tangente.

**Auflösung.** Die Tangente ist die Verbindungslinie zweier unendlich naher Punkte; es kann daher

der Punkt  $1$  doppelt, nämlich mit  $1 \cdot 6$  bezeichnet werden. Nachdem nunmehr sechs Punkte des Kegelschnittes, nämlich  $1, 2, 3, 4, 5, 6$ , bekannt sind, ergibt die Anwendung des Pascalschen Satzes die Linie  $1 \cdot 6$  oder  $t$ ; es schneiden sich nämlich  $1 \cdot 2$  und  $4 \cdot 5$  in  $x$ ,  $2 \cdot 3$  und  $5 \cdot 6$  in  $y$ , hierdurch ist  $p$  und damit auch der Schnittpunkt  $x$  von  $3 \cdot 4$  und  $p$  bestimmt. Durch  $x$  geht die gesuchte Tangente  $1 \cdot 6$  hindurch; in Fig. 156 ist die Konstruktion für eine Ellipse, in Fig. 157 für eine Hyperbel durchgeführt.

**Aufgabe.** Gegeben vier Tangenten einer Parabel, gesucht beliebig viele weitere Tangenten.

**Auflösung.** Die gegebenen Tangenten (s. Fig. 158) heißen  $I, II, III, IV$ , die unendlich ferne Gerade heiße  $V$ . Die Verbindungslinie der Schnittpunkte von  $I, II$  und  $IV, V$  geht durch den Punkt  $a$  parallel zu  $IV$ . Wählt man auf dieser Parallelen die Punkte  $B, B_1$  als Brianchonsche Punkte beliebig, so liefern die Verbindungslinien  $\gamma B, \gamma B_1$  auf  $I$  die Punkte  $\gamma', \gamma'_1$ , und die gesuchten weiteren Tangenten  $VI, VI'$  sind parallel zu den Verbindungslinien  $\beta B, \beta B_1$  und gehen durch  $\gamma'$  und  $\gamma'_1$  hindurch.

**Aufgabe.** Gegeben vier Tangenten einer Parabel; gesucht auf einer derselben, z. B.  $III$ , der Berührungspunkt (s. Fig. 159).

**Auflösung.** Der Berührungspunkt einer Tangente mit einem Kegelschnitt ist als Schnittpunkt zweier aufeinanderfolgender Tangenten aufzufassen. Die Tangente  $III$ , auf welcher der Berührungspunkt gesucht wird, kann daher als  $III \cdot IV$  bezeichnet werden. Dann ist hierdurch das Brianchonsche Sechseit  $I, II, III, IV, V, VI$  und damit auch der Brianchonsche Punkt  $B$  bestimmt.  $I \cdot II$  und  $IV \cdot V$  liefern die Verbindungslinie  $\alpha \alpha'$ ,

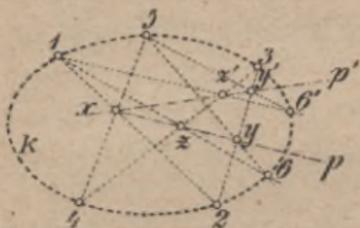


Fig. 154.

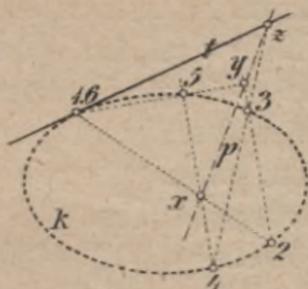


Fig. 156.

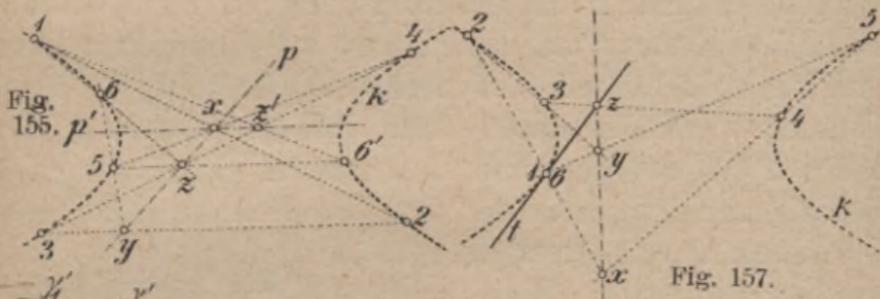


Fig. 155.

Fig. 157.

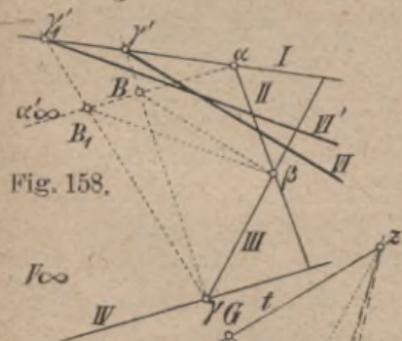


Fig. 158.

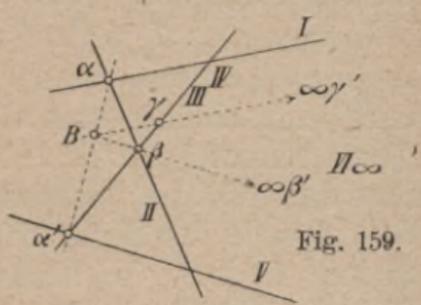


Fig. 159.

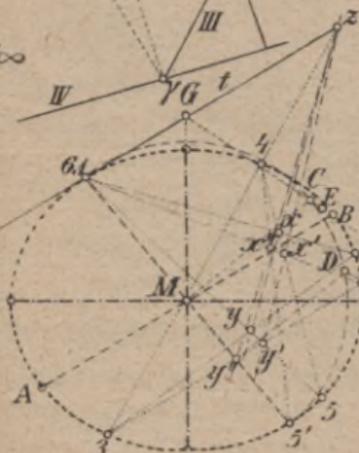


Fig. 160.

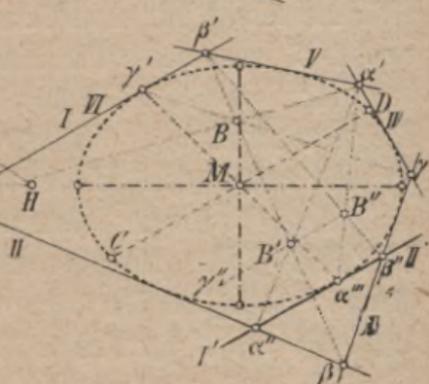


Fig. 161.

*II* und *III* schneiden sich in  $\beta$ , die Parallele durch  $\beta$  zu  $V$  liefert auf  $\alpha\alpha'$  den Brianchonschen Punkt  $B$  und die durch  $B$  zu  $I$  gezogene Parallele trifft *III* in dem gesuchten Berührungspunkt  $\gamma$ .

**Aufgabe.** Gegeben fünf Punkte eines Kegelschnittes (Ellipse), gesucht die Hauptachsen derselben (s. Fig. 160).

**Auflösung.** Sind  $1, 2, 3, 4, 5$  die gegebenen fünf Punkte, so ermittelt man zunächst in  $1$  die Tangente  $t$ ; hierauf zieht man durch einen der übrigen Punkte, etwa  $3$ , eine Parallele zu  $t$  und konstruiert auf dieser Parallelen den Punkt  $2'$  mittels des Sechsecks  $1, 2', 3, 4, 5, 6$ . Nunmehr verbindet man  $6 \cdot 1$  mit dem Mittelpunkt  $y''$  der Sehne  $2' \cdot 3$  und bestimmt den zweiten Schnittpunkt  $5'$  dieser Verbindungslinie mit dem Kegelschnitt. Die Linie  $1 \cdot 5'$  ist ein Durchmesser und seine Mitte der Mittelpunkt  $M$  des Kegelschnittes. Eine Parallele durch  $M$  zu  $t$  liefert die Lage des zu  $1 \cdot 5'$  konjugierten Durchmessers, dessen Länge man mittels eines über  $1 \cdot 5'$  als Durchmesser beschriebenen Kreises ermittelt. Man zeichnet nämlich durch  $y''$  die Senkrechte  $y''D$  zu  $1 \cdot 5'$  bis zum Kreise, verbindet  $2'D$ , zieht durch  $M$  die Senkrechte  $MC$  zu  $1 \cdot 5'$  und durch  $C$  (Schnittpunkt der Senkrechten  $MC$  dem Kreise über  $1 \cdot 5'$ ) parallel zu  $D2'$ ; so ergibt sich der Endpunkt  $B$  des Halbmessers  $MB$ . Aus den konjugierten Durchmessern  $AB$  und  $1 \cdot 5'$  lassen sich die Hauptachsen (s. Fig. 137) ermitteln.

**Aufgabe.** Gegeben fünf Tangenten eines Kegelschnittes (Ellipse), gesucht der Mittelpunkt und die Hauptachsen (s. Fig. 161).

**Auflösung.** Gegeben sind die fünf Tangenten  $I, II, III, IV, V$ . Man sucht zunächst auf einer Tangente etwa  $I$  den Berührungspunkt  $\gamma'$ . Hierauf konstruiert man die zu  $I$  parallele Tangente  $II'$  mittels des Sechs-

eckes  $I, II', III, IV, V, VI$  und auf  $II'$  den Berührungspunkt  $\alpha'''$ . Es ist damit der Durchmesser  $\overline{\gamma' \alpha'''}$ , der Mittelpunkt  $M$  und die Lage des zu  $\overline{\gamma' \alpha'''}$  konjugierten Durchmessers bestimmt. Ermittelt man noch auf einer der übrigen gegebenen Tangenten den Berührungspunkt, so läßt sich in gleicher Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Länge  $CD$  des zu  $\overline{\gamma' \alpha'''}$  konjugierten Durchmessers bestimmen, worauf sich auch die Hauptachsen (s. Fig. 137) konstruieren lassen.

#### IV. Konstruktion von Korbboegenlinien und Eiliniën.

##### Konstruktion von Korbboegenlinien.

— Statt des elliptischen Bogens verwendet man in der Praxis häufig eine aus Kreisbogen zusammengesetzte Linie, die Korbboegenlinie oder kurzweg den Korbbogen:

1. Konstruktion. Gegeben  $AA$  (s. Fig. 162). Man teilt  $AA$  durch  $S$  und  $S_1$  in drei gleiche Teile und beschreibt um  $S$  und  $S_1$  mit den Halbmessern  $SA$  und  $S_1A$  Kreisbogen, die sich in  $S_{11}$  und  $S_{111}$  schneiden. Von  $S_{11}$  und  $S_{111}$  zieht man Gerade durch  $S$  und  $S_1$  bis zum Schnitt

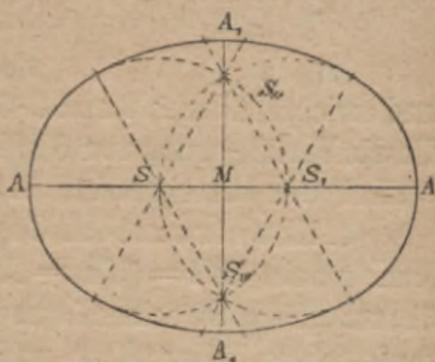


Fig. 162.

mit den beiden Kreisbogen um  $S$  und  $S_1$ , und benutzt diese Längen als Halbmesser zweier weiteren Kreise um  $S_{11}$  und  $S_{111}$ , die den Korbbogen schließen und die Senkrechte zu  $AA$  durch den Halbierungspunkt  $M$  in den Punkten  $A_1, A_2$  schneiden. Berechnet man das Verhältnis der Halbachsen  $MA : MA_1$ , so ergibt sich dafür  $1 : 0,756$ , also ungefähr  $4 : 3$ .

2. Konstruktion. Gegeben  $KK_1$  (s. Figur 163). Man teilt  $KK_1$  in vier gleiche Teile, beschreibt um die Teilungspunkte 1 und 3 Kreisbögen durch  $K$  und  $K_1$ . Ein dritter Kreis, dessen Mittelpunkt in der dritten Ecke des über  $1\cdot3$  als Seite beschriebenen gleichseitigen Dreiecks liegt, verbindet die zuerst beschriebenen Kreisbögen zu dem in Fig. 163 dargestellten Korbbogen. Hier ist das Achsenverhältnis  $1 : 0.634$ , also ungefähr  $8 : 5^*$ .

3. Konstruktion. Gegeben  $K, K_1$  und  $S$  (s. Fig. 164). Man macht  $S \cdot 2 = K \cdot 1 = K_1 \cdot 3$  gleich einer beliebigen Strecke, aber kleiner als  $KM$  und  $SM$ , verbindet  $1 \cdot 2 \cdot 3$

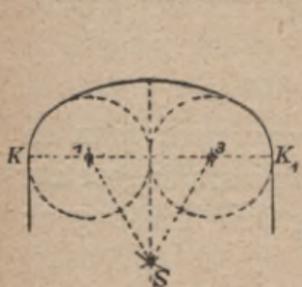


Fig. 163.

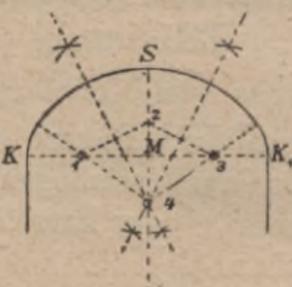


Fig. 164.

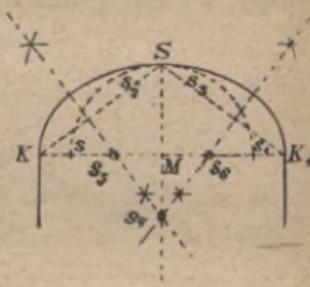


Fig. 165.

and errichtet über  $1, 2$  und  $2 \cdot 3$  je eine Halbierungssenkrechte, die die Verlängerung von  $SM$  in  $4$  trifft. Die Punkte  $1, 4$  und  $3$  sind die Mittelpunkte für die Kreise des Korb Bogens.

4. Konstruktion. Gegeben  $K, K_1$  und  $S$  (s. Fig. 165). Man macht  $Ms = Ms_1 = MS$ , zieht  $SK$  und  $SK_1$  und überträgt die Strecke  $Ks$  nach  $Ss_2 = Ss_3$ . Die Halbierungssenkrechten über  $Ks_2$  und  $K_1s_3$  schneiden sich in  $s_4$  auf  $MS$  und treffen die Linie  $KK_1$  in  $s_5$  und  $s_6$ . Die Punkte  $s_5, s_4$  und  $s_6$  sind die Mittelpunkte für die Kreisbögen des Korb Bogens\*\*).

\*) Während diese beiden Konstruktionen Korbboegen von bestimmten Achsenverhältnissen liefern, bei denen daher nur eine Achse gegeben sein kann, können bei den folgenden beide Achsen beliebig gegeben werden.

\*\*\*) Diese Konstruktion (4) ist (3) dadurch überlegen, daß — wie auch bei 1) u. 2) — der mittlere Kreis die beiden äußeren  $\sim$  schneidet, daß die Tangenten der Kreise in den Schnittpunkten zusammenfallen, was bei der dritten nicht der Fall ist.

**Konstruktion von Eiliniën.**

Durch Verbindung mehrerer Kreislinien kann man eine Eilinie hervorbringen (s. Fig. 166 u. 167).

1. Konstruktion. Gegeben  $DD_1$ . Man beschreibt über  $DD_1$  als Durchmesser einen Kreis und zieht  $DM_1$  und  $D_1M_1$ . Die Punkte  $D$ ,  $D_1$  und  $M_1$  sind dann die Mittelpunkte für die Kreisbogen  $D_1F$ ,  $DE$  und  $EF$  der Eilinie.

2. Konstruktion. Gegeben  $AB$  und  $MD$ . Man beschreibt über  $AB$  als Durchmesser den Halbkreis  $ACB$ ; wählt auf  $MD$  den Punkt  $M_1$  beliebig und zeichnet um  $M_1$  als Mittelpunkt den Kreisbogen  $A_1DB_1$ , wobei selbstverständlich der Halbmesser  $M_1D$  kleiner als  $MA$  zu nehmen ist. Zieht man durch  $M_1$  die Parallele  $A_1B_1$  zu  $AB$ , so treffen die Verbindungslinien  $AA_1$  und  $BB_1$  die Kreislinie  $M_1A_1DB_1$  in den Punkten  $E$  und  $E_1$ , und die Geraden  $EM_1$  und  $E_1M_1$  schneiden auf  $AB$  die Mittelpunkte  $G$  und  $F$  für die Kreisbogen  $AE$  und  $BE_1$  aus.

**V. Die Verwendung der Kreislinie zu bestimmten Bogenformen.**

Die Kreislinie findet vielfach Verwendung als Stirnlinie von Gewölbebogen, das sind Überdeckungen von Maueröffnungen durch Wölbungen, die man wegen ihrer geringen Tiefe in der Bautechnik im Gegensatz zu den eigentlichen Gewölben als Mauerbogen bezeichnet. Je nach der Form der Stirnlinie unterscheidet man folgende Bogen:

1. Der Halbkreisbogen (s. Fig. 168).

2. Der Segmentbogen (s. Fig. 169 und 170).

3. Der Spitzbogen (s. Fig. 171—173). In Fig. 171 liegen die Mittelpunkte der beiden Kreis-

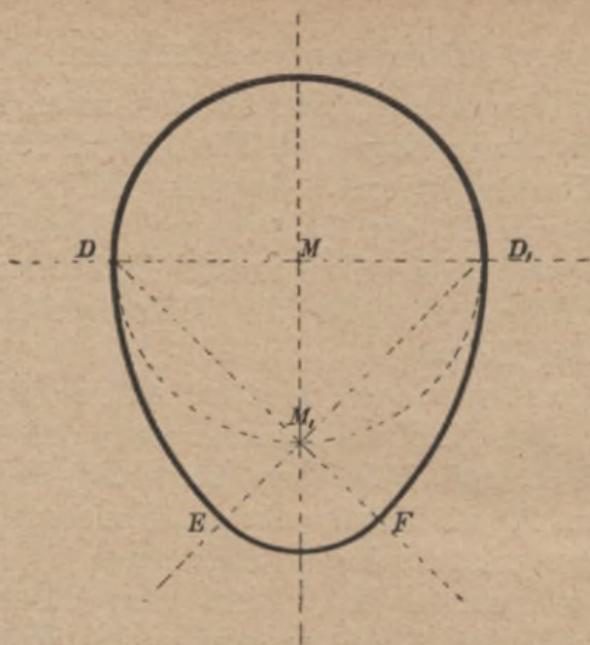


Fig. 166.

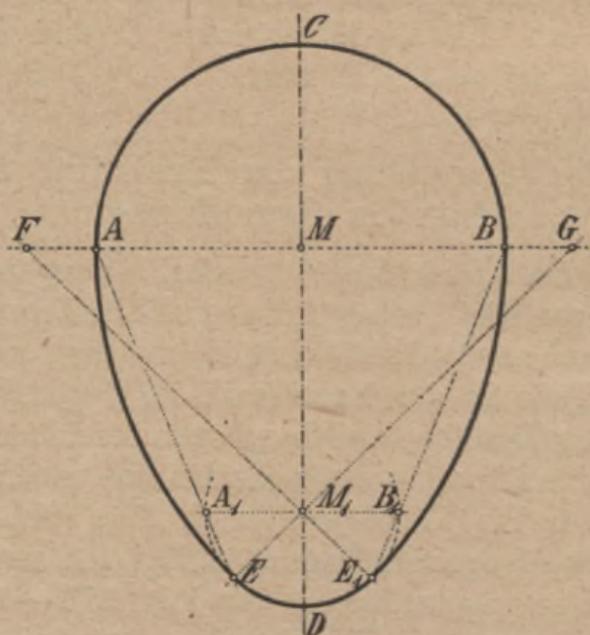


Fig. 167.

Ovale.

bogen in  $K$  und  $K_1$ , bei Fig. 172 innerhalb der Strecke  $KK_1$ , bei Fig. 173 außerhalb der Strecke  $KK_1$ . Fig. 172 bezeichnet man als gedrückten, Fig. 173 als überhöhten Spitzbogen. Der Spitzbogen findet namentlich in der gotischen Baukunst Verwendung.

4. Abarten des Spitzbogens stellen dar die Fig. 174 u. 175. Den in Fig. 174 u. 175 dargestellten

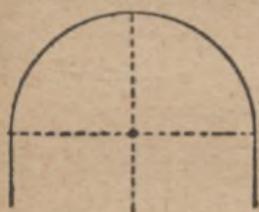


Fig. 168.

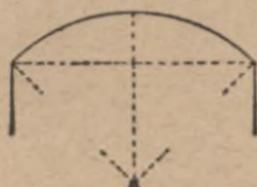


Fig. 169.

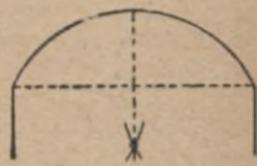


Fig. 170.

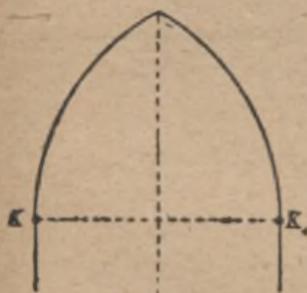


Fig. 171.

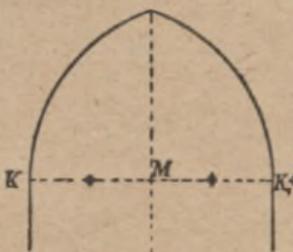


Fig. 172.

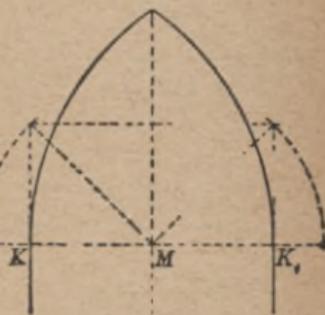


Fig. 173.

### Bogenlinien.

Bogen, der vielfach in der englischen Gotik Verwendung findet, bezeichnet man auch als Tudorbogen. Die Konstruktionen sind aus den Figuren zu ersehen. In Fig. 174 ist  $KK_1$  in vier Teile geteilt; ferner ist über  $KK_1$  ein Halbkreis beschrieben, welcher von den um 1 und 3 mit den Halbmessern  $13$  beschriebenen Kreisen in  $m$  und  $m_1$  getroffen wird. Die Punkte 1, 3,  $m$  und  $m_1$  sind die Mittelpunkte für die Kreise des Tudorbogens. In Fig. 175

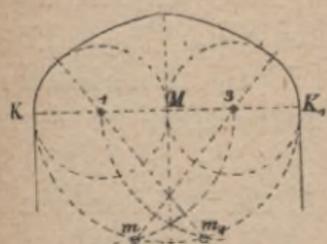


Fig. 174.

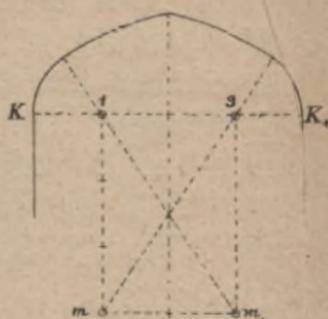


Fig. 175.

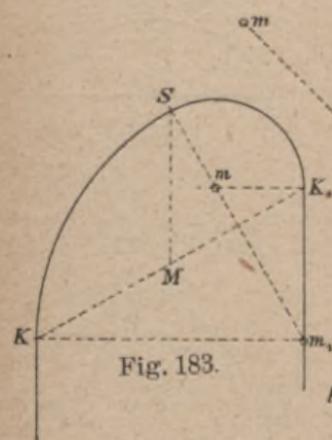


Fig. 183.

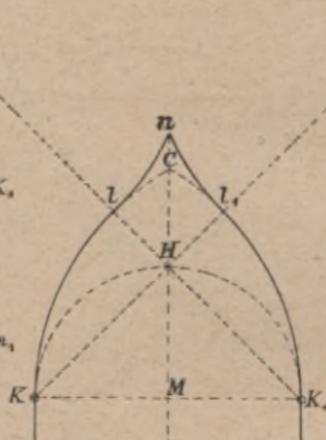


Fig. 176.

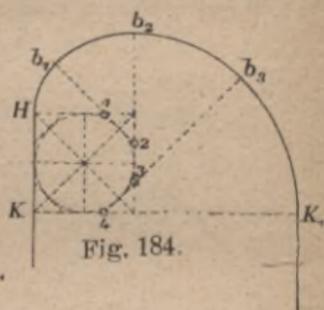


Fig. 184.

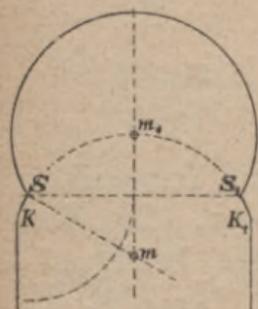


Fig. 180.

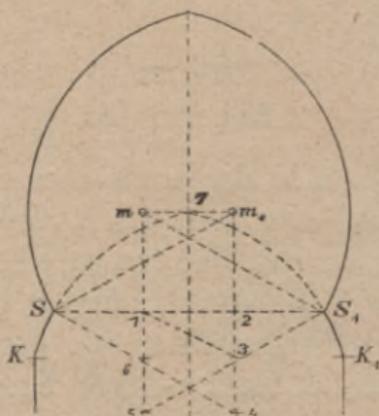


Fig. 181.

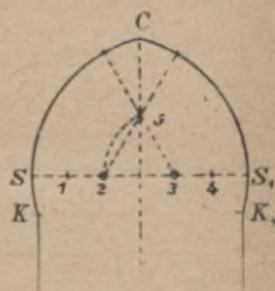


Fig. 182.

**Bogenlinien.**

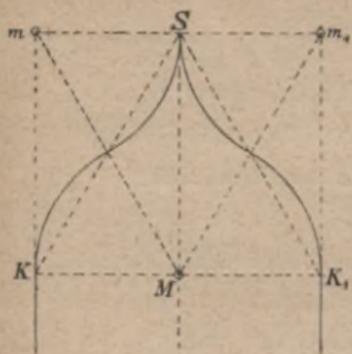


Fig. 177.

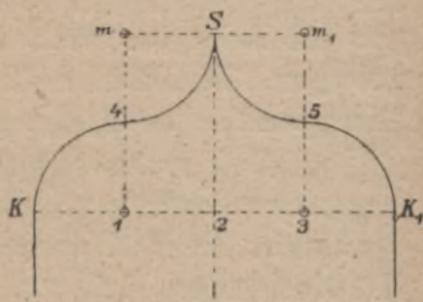


Fig. 178.

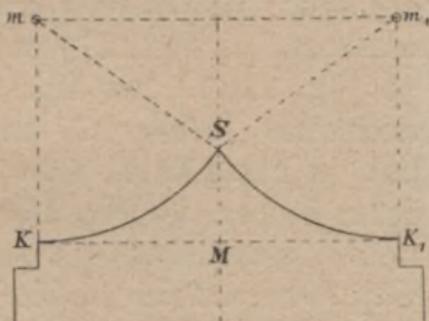


Fig. 179.

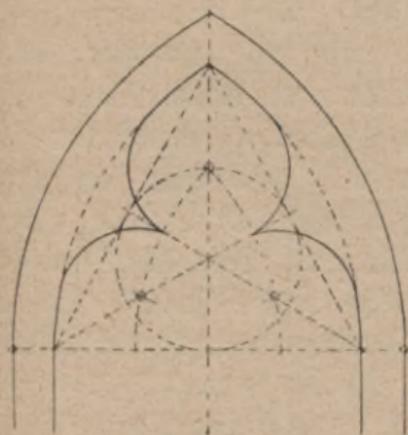


Fig. 185.

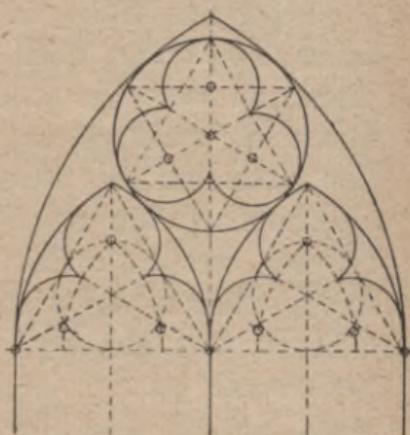


Fig. 186.

**Karniesbogen. Sternbogen. Besetzte Bogen.**

ist  $KK_1$  wieder in vier gleiche Teile geteilt, durch die Teilungspunkte 1 und 3 sind Senkrechte zu  $KK_1$  gezogen und auf ihnen die Strecken  $1m$  und  $3m_1 = \frac{3}{4}KK_1$  abgetragen. Die Punkte 1, 3,  $m$  und  $m_1$  sind wieder die Mittelpunkte der Kreisbogen des Tudorbogens.

5. Der Karniesbogen (s. Fig. 176) ist gleichfalls eine Abart des Spitzbogens. Man schlägt über  $KK_1$  einen Halbkreis, zieht  $KH$  und  $K_1H$ , schlägt um  $K$  und  $K_1$  die Kreisbogen  $K_1l_1$  und  $Kl$ , macht  $lm = l_1m_1 = KK_1$ , so geben  $m$  und  $m_1$  die Mittelpunkte für die Kreisbogen  $ln$  und  $l_1n$ .

Der Karniesbogen tritt noch in zwei Abarten auf, als spitzer Karniesbogen (s. Fig. 177) und als gedrückter Karniesbogen (s. Fig. 178). Die Konstruktion ist aus den Figuren ersichtlich. In Fig. 177 ist die Figur  $KK_1m_1m$  ein Quadrat, in Fig. 178 ist  $13m_1m$  ein Quadrat.

6. Der Sternbogen (s. Fig. 179). Gegeben  $K$ ,  $K_1$  und  $S$ .  $m$  und  $m_1$  gelegen auf den Senkrechten durch  $K$  und  $K_1$  zu  $KK_1$ , sowie auf den Halbierungssenkrechten zu  $SK$  und  $SK_1$  geben die Mittelpunkte des Bogens.

7. Der Hufeisenbogen (s. Fig. 180—182).

Gegeben  $SS_1$ , in Fig. 180 trägt man in  $S$  die Linie  $Sm$  unter dem Winkel von  $30^\circ$  an und erhält hierdurch  $m$ . Um  $m$  beschreibt man einen Kreisbogen durch  $S$ , wodurch auch der Punkt  $m_1$  bestimmt ist. Ein Kreis um  $m_1$  durch  $S$  und  $S_1$  vollendet den Hufeisenbogen. Die zu  $SS_1$  parallele Sehne  $KK_1$  kann beliebig groß gewählt werden. In Fig. 181 ist der Hufeisenbogen spitzbogenförmig ausgebildet. Es ist  $SS_1$  in drei gleiche Teile geteilt, durch 1 und 2 sind Senkrechte zu  $SS_1$  gezogen. Es ist ferner  $2 \cdot 3 = 1 \cdot 6 = \frac{1}{6}SS_1$ ,  $2 \cdot 4 = 1 \cdot 5 = 1 \cdot 3$ . Aus 4 und 5 sind Kreisbogen durch  $S$  und  $S_1$  beschrieben, die sich in 7 schneiden.

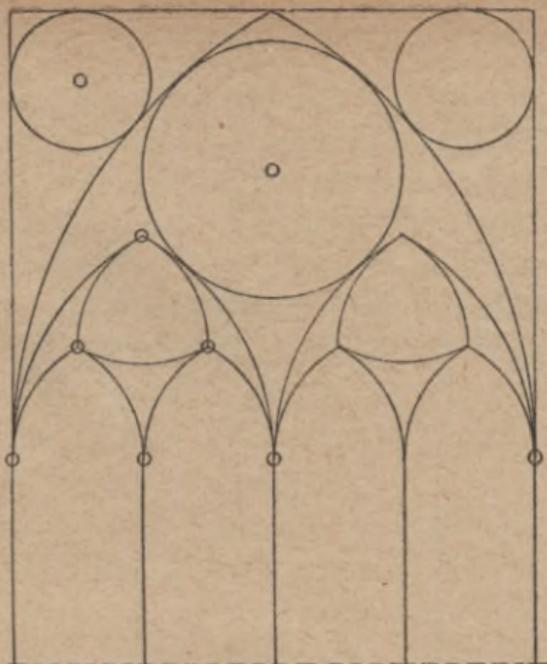


Fig. 187.

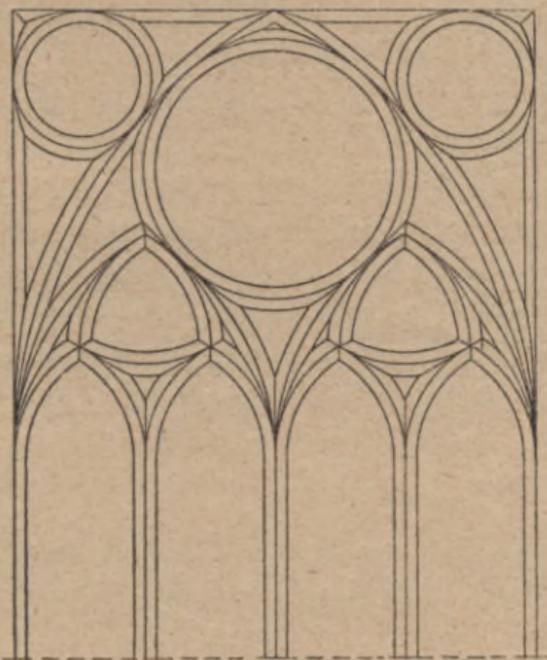


Fig. 188.

### Gotisches Fenstermaßwerk.

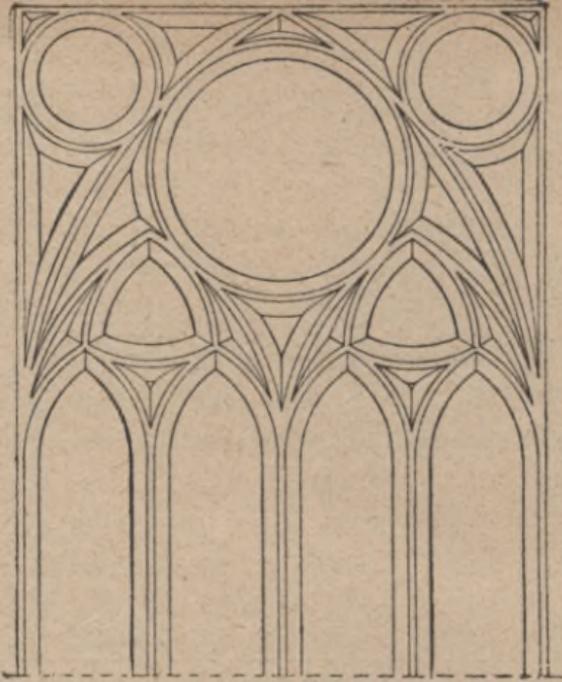


Fig. 189.

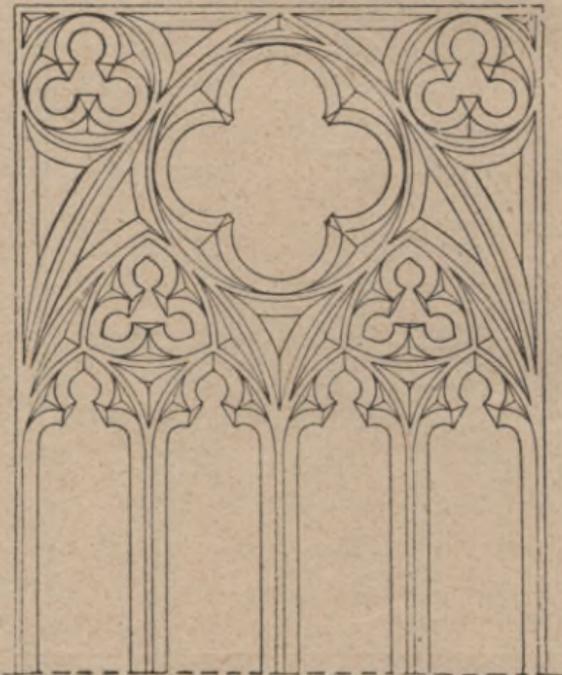


Fig. 190.

**Gotisches Fenstermaßwerk.**

Durch 7 geht eine Parallele zu  $SS_1$  und schneidet aus den Linien  $2 \cdot 4$  und  $6 \cdot 5$  die Punkte  $m_1$  und  $m$  aus, als Mittelpunkte von Kreisbögen, die  $S$  und  $S_1$  enthalten. Die Verbindungslinie  $3 \cdot 6$  enthält die Punkte  $K$  und  $K_1$ . In Fig. 182 ist  $SS_1$  in 6 gleiche Teile geteilt. Die Mittelpunkte des Hufeisenbogens sind die Punkte 2 und 3. Die Strecke  $S \cdot 1$  ist nach  $SK = SK_1$  abzutragen.

8. Der steigende Bogen (s. Fig. 183 und 184). Dieser Bogen dient zuweilen als Stirnlinie für Gewölbe zur Unterstützung von Treppen.

In Fig. 183 ist gegeben die Kämpferlinie  $KK_1$ . Man halbiert diese in  $M$ , zieht  $MS$  vertikal und gleich  $KM$ . Eine von  $S$  auf  $KK_1$  gefällte Senkrechte schneidet die Horizontale durch  $K$  in dem Mittelpunkte  $m_1$  des Bogens  $KS$ , der zweite Mittelpunkt  $m$  für den Bogen  $SK_1$  liegt auf der Horizontalen durch  $K_1$  und auf der Linie  $Sm_1$ .

In Fig. 184 ist gegeben  $K_1H$ . Ziehe durch  $K_1$  die Horizontale, beschreibe über  $KH$  ein Quadrat und in dieses ein Achteck; die Ecken  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$  sind dann die Mittelpunkte für die Kreisbögen  $Hb_1$ ,  $b_1b_2$ ,  $b_2b_3$  und  $b_3K_1$ .

9. Besetzte Bogen sind solche, bei welchen die zu Grunde liegende Bogenform durch weitere Kreisbogenlinien in irgend einer Art ausgefüllt, besetzt ist. Solche Besetzungen zeigen z. B. die Figuren 185—190. Derartige Bogen trifft man vielfach in der gotischen Baukunst als Fensterbogen verwendet.

## VI. Konstruktion der cyklischen oder Rollkurven einschließlich der wichtigsten Spirallinien.

Praktische Bedeutung haben nur jene Rollkurven, welche durch Rollen eines Kreises auf einer Geraden oder einem Kreise, oder aber durch Rollen einer Geraden

auf einem Kreise hervorgebracht werden. Die bewegliche Linie ist stets die Erzeugungskurve, die feste die Leitkurve. Folgende Fälle sind denkbar.

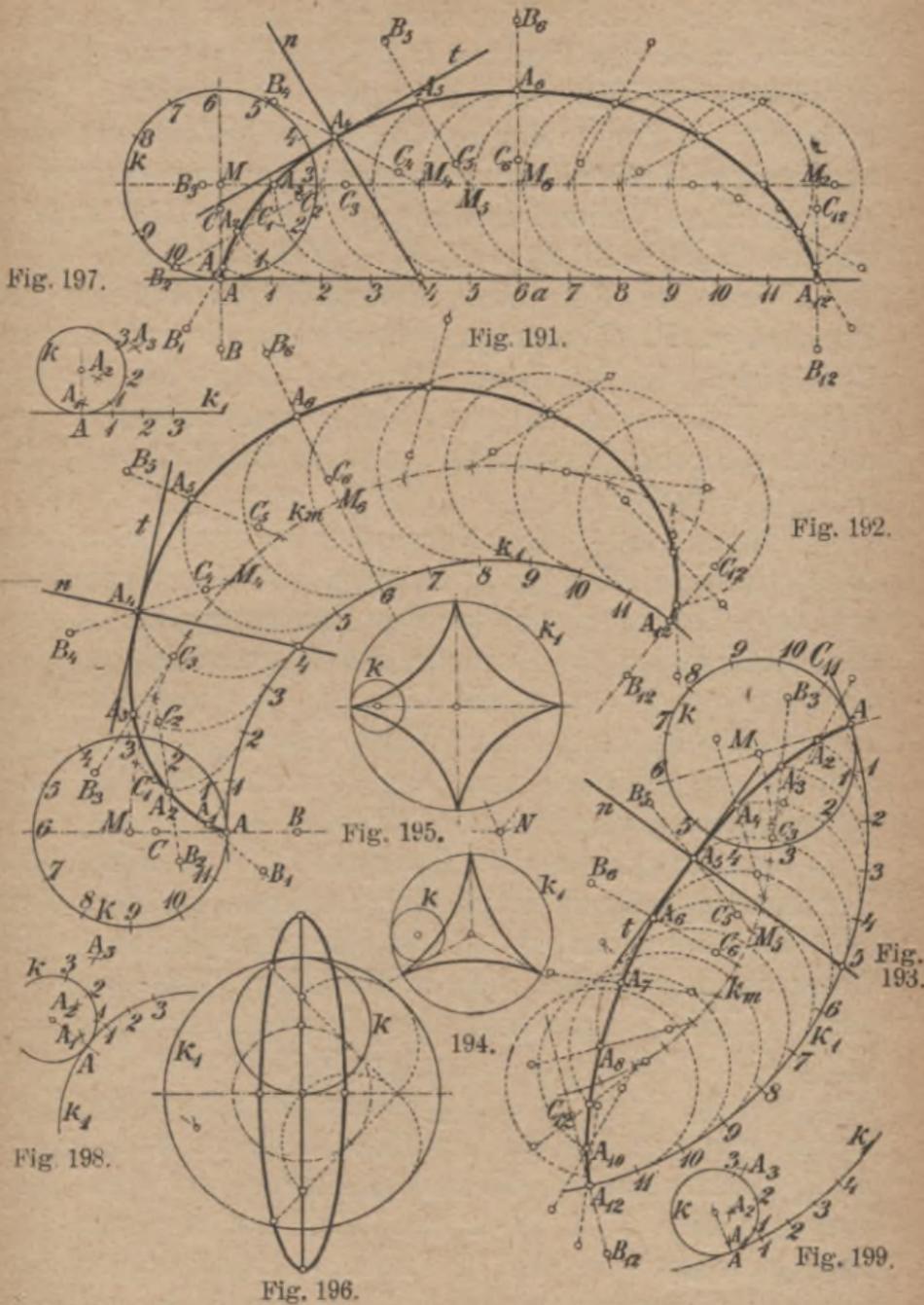
1. Die Leitkurve ist eine gerade Linie  $a$ , die Erzeugungskurve ein Kreis  $k$ . Die entstehende Linie heißt Cykloide.

2. Leit- und Erzeugungskurve sind Kreise und zwar rollt der Erzeugungskreis  $k$  auf der Außenseite des Leitkreises  $k_1$ . Die Rollkurve heißt Epicykloide.

3. Leit- und Erzeugungskurve sind Kreise, es rollt der Erzeugungskreis auf der Innenseite des Leitkreises. Die Rollkurve heißt Hypocykloide.

4. Die Leitkurve ist ein Kreis  $k$ , die Erzeugungskurve eine Gerade. Die Rollkurve heißt Evolvente.

Konstruktion der gewöhnlichen Cykloide. Diese entsteht als Weg eines Punktes  $A$  des Erzeugungskreises  $k$  beim Abrollen auf  $a$ . Man trägt auf der Geraden  $a$  (s. Fig. 191) von  $A$  aus den Kreisumfang von  $k$  nach  $A_1 A_{12}$  ab, teilt diese Strecke, ebenso wie den Kreis  $k$  in etwa 12 gleiche Teile, zieht durch die Teilungspunkte auf  $a$  Senkrechte zu  $a$  bis zum Schnitt mit einer durch den Mittelpunkt  $M$  zu  $a$  gezogenen Parallelen; dann liefern diese Durchschnittspunkte die Lagen der Mittelpunkte des beweglichen Kreises, während die Teilungspunkte auf  $a$  die Berührungspunkte des beweglichen Kreises mit  $a$  darstellen. Zeichnet man in den 12 Stellungen den beweglichen Kreis, und trägt vom jeweiligen Berührungspunkte aus den bis dahin abgerollten Kreisbogen auf dem zugehörigen Kreise ab, z. B. für den Kreis mit dem Mittelpunkte  $M_4$  den Bogen  $A \cdot 4 = 4 \cdot A_4$ , so ist  $A_4$  ein Punkt der Cykloide. In gleicher Weise  $1 \cdot A_1 = A \cdot 1$ ,  $2 \cdot A_2 = A \cdot 2$ ,  $3 \cdot A_3 = A \cdot 3$  etc.



Verfolgt man den Weg eines außerhalb von  $k$  liegenden Punktes, z. B. des Punktes  $B$  bei der Bewegung von  $k$ , so erhält man die verschlungene Cykloide. Man verbindet die Punkte der gewöhnlichen Cykloide mit dem zugehörigen Kreismittelpunkte und trägt von letzterem aus auf diese Verbindungslinie die Strecke  $MB$  ab; so ist also  $M_4 B_4 = M_5 B_5 = M_6 B_6 = MB$  etc.

Wird der Weg eines innerhalb von  $k$  liegenden Punktes, z. B.  $C$  verfolgt, so entsteht die gedehnte Cykloide. Es ist dabei für jede Lage des beweglichen Kreises die auf der Verbindungslinie  $MA$  gemessene Strecke gleich  $MC$ , also z. B.  $M_4 C_4 = M_5 C_5 = M_6 C_6 = MC$  etc.

Tangenten- und Normalenkonstruktion für die Cykloide. Die Verbindungslinie des Kurvenpunktes mit dem Berührungspunkte des Erzeugungskreises und der Leitlinie ist die Normale des Kurvenpunktes, also z. B. für den Punkt  $A_4$  die Linie  $A_4 \cdot 4$ ; die Senkrechte hierzu gibt die Tangente  $t$ . Würde man  $B_4 \cdot 4$  oder  $C_4 \cdot 4$  ziehen, so erhielte man die Normale für die verschlungene bzw. gedehnte Cykloide.

Konstruktion der Epicykloide (s. Fig. 192). Der Erzeugungskreis ist  $k$ , der Leitkreis  $k_1$ , der Weg des Berührungspunktes  $A$  ist die Epicykloide. Die Konstruktion vollzieht sich in ähnlicher Weise wie bei der Cykloide. Man teilt den Erzeugungskreis  $k$  ein (12 gleiche Teile) und überträgt die Teile auf den Umfang von  $k_1$ , dann ist  $AA_{12}$  gleich der Länge des Umfangs von  $k$ . Die Mittelpunkte  $M$  liegen auf einem zu  $k_1$  konzentrischen Kreise  $k_m$ , sowie auf den Verbindungslinien  $N \cdot 1, N \cdot 2$  etc. Zeichnet man nun den Erzeugungskreis in den 12 Lagen, so hat man nur von seinen Berührungspunkten  $1, 2, 3, 4$  mit  $k_1$  auf den

einzelnen Kreislagen die bis dahin abgerollten Bogen aufzutragen, so daß also ist  $1 \cdot A_1 = A \cdot 1$ ,  $2 \cdot A_2 = A \cdot 2$ ,  $3 \cdot A_3 = A \cdot 3$  etc. Den Weg eines außerhalb von  $k$  liegenden Punktes, z. B.  $B$ , nennt man eine verschlungene, den eines innerhalb von  $k$  liegenden Punktes  $C$  eine gedehnte Epicykloide. Die Konstruktion eines Punktes dieser Kurven ist ganz ähnlich wie bei der Cykloide. Man zieht z. B.  $A_4 M_4$  und macht  $M_4 B_4 = MB$ , ebenso  $M_4 C_4 = MC$ ; dann liegen die Punkte  $B$  auf einer verschlungenen, die Punkte  $C$  auf einer gedehnten Epicykloide.

Die Normale in einem Punkte, z. B.  $A_4$ , ist wieder die Verbindungslinie  $A_4 4$  des Punktes  $A_4$  mit dem Berührungspunkte  $4$  des zu  $A_4$  gehörigen Erzeugungskreises mit dem Leitkreise; die Tangente steht senkrecht hierzu. Die Verbindungslinie  $B_4 \cdot 4$  oder  $C_4 \cdot 4$  gibt die Normale für die verschlungene bezw. gedehnte Epicykloide.

Konstruktion der Hypocykloide (s. Fig. 193). Erzeugungskreis ist  $k$ , Leitkreis  $k_1$ . Weg des Berührungspunktes  $A$  von  $k$  und  $k_1$  ist die Hypocykloide.

Man teilt  $k$  ein (12 gleiche Teile) und überträgt die Teile auf den Umfang von  $k_1$ , dann ist  $AA_{12}$  gleich dem Umfange von  $k$ . Die Mittelpunkte des Erzeugungskreises in seinen verschiedenen Lagen liegen auf dem zu  $k_1$  konzentrischen Kreise  $k_m$ . Zeichnet man nun  $k$  in seinen 12 Lagen, so hat man nur die Bogenstücke  $1 \cdot A_1 = A \cdot 1$ ,  $2 \cdot A_2 = A \cdot 2$ ,  $3 \cdot A_3 = A \cdot 3$  etc. abzutragen, dann gehören die Punkte  $A_1, A_2 \dots$  einer Hypocykloide an. Wählt man auf  $MA$  einen Punkt außerhalb oder innerhalb von  $k$ , z. B.  $B$  oder  $C$ , so ist der Weg von  $B$  eine verschlungene, der von  $C$  eine gedehnte Hypocykloide. Es ist z. B.  $M_5 B_5 = MB$ ,  $M_5 C_5 = MC$ .

Normale und Tangente werden wie bei der Epicycloide konstruiert: für  $A_5$  ist  $A_5 5$  die Normale  $n$ , die Senkrechte hierzu die Tangente  $t$ . In den Fig. 194—195 sind besondere Fälle der Hypocykloide angedeutet. Fig. 194 zeigt die Steinersche Hypocykloide; es ist hierbei der Halbmesser von  $k$  ein Drittel von jenem des Kreises  $k_1$ . Fig. 195 zeigt die Asteroide, d. i. eine Hypocykloide mit vier Spitzen; hierbei ist der Halbmesser von  $k$  gleich einem Viertel von jenem von  $k_1$ . Fig. 196 stellt eine verschlungene Hypocykloide dar, die in eine Ellipse übergegangen ist; es ist hierbei der Halbmesser von  $k$  halb so groß wie jener von  $k_1$ .

Näherungskonstruktionen für die drei Kurven Cykloide, Epicycloide und Hypocykloide (s. Fig. 197—199). Man trägt vom Berührungspunkt  $A$  von Leit- und Erzeugungskreis auf beiden Linien eine kleine Strecke ab nach 1, 2, 3... Um  $A$  beschreibt man mit den Längen  $1 \cdot 1$ ,  $2 \cdot 2$ ,  $3 \cdot 3$  etc. Kreisbogen, desgl. um die Punkte 1, 2, 3... auf  $k_1$  mit den Sehnenlängen  $A \cdot 1$ ,  $A \cdot 2$ ,  $A \cdot 3$ ... Die Schnittpunkte entsprechender Kreisbogen liefern die Punkte  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ...

Konstruktion der Kreisevolvente (s. Fig. 200). Erzeugungslinie die Kreistangente  $k$ , Leitkreis  $k_1$ . Weg des Berührungspunktes  $A$  gibt die Kreisevolvente. Teilt man  $k_1$  ein (12 gleiche Teile), zieht die Tangenten in den Teilungspunkten, so braucht man auf letzteren von ihren Berührungspunkten aus nur die zwischen den letzteren Punkten und dem Anfangspunkte  $A$  liegenden Kreisbogen abzutragen, also  $1 \cdot A_1 = 1 \cdot A$ ,  $2 \cdot A_2 = 2 \cdot A$ ,  $3 \cdot A_3 = 3 \cdot A$ , um in den Punkten  $A_1$ ,  $A_2$ ... Evolventenpunkte zu erhalten. Verfolgt man bei der Bewegung der Kreistangente den Weg eines außerhalb der letzteren liegenden Punktes, z. B.  $B$  (fällt zusammen mit  $M$ ) oder  $C$ ,

so entsteht im ersten Falle die verschlungene, im zweiten die gedehnte Kreisevolvente. Man erhält deren Punkte, wenn man zunächst die gewöhnliche Kreisevolvente konstruiert und hierauf in deren Punkten Senkrechte zur zugehörigen Kreistangente zieht und auf diese die Strecke  $AB$  oder  $AC$  ( $AM$ ) nach der entsprechenden Seite hin abträgt. Die Tangenten an die Kreisevolvente stehen senkrecht zu den entsprechenden Kreistangenten, die letzteren sind die Normalen für die Kreisevolvente. Im Punkte  $A_8$  ist eine Tangente und Normale eingetragen.

Fällt der die Kurve beschreibende Punkt mit dem Kreismittelpunkte  $M$  zusammen, so führt die entstehende Kurve die Bezeichnung archimedische Spirale; sie kann auch hervorgebracht werden durch Drehung eines Strahles um einen Punkt und Bewegung eines Punktes auf diesem Strahle so, daß sein Abstand von  $M$  proportional dem Drehungswinkel des beweglichen Strahles ist, gemessen von einer Anfangslage aus. Teilt man also einen beliebigen Kreis  $k$  (s. Fig. 201) ein (12 gleiche Teile), zieht die Strahlen  $M \cdot 1$ ,  $M \cdot 2$ ,  $M \cdot 3$ ,  $M \cdot 4 \dots$  und trägt auf letzteren eine Strecke auf gleich  $0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12} \dots$  des Kreisumfangs von  $k$ , so liegen die Punkte  $A_1, A_2, A_3 \dots$  auf einer archimedischen Spirale. In dem Punkte  $A_9$  ist eine Tangente konstruiert. Man zieht  $MA_9$ , senkrecht hierzu den Halbmesser  $MB$ , so ist  $A_9B$  die Normale  $n$  und die Senkrechte hierzu die Tangente  $t$  an die archimedische Spirale im Punkte  $A_9$ .

Anmerkung. Die Kreisevolvente (s. Fig. 200) und der Kreis  $k_1$  stehen in einer eigentümlichen Beziehung zueinander, insofern die Normalen der Evolvente Tangenten an die Kreislinie  $k_1$  sind. Eine Kurve, deren Tangenten zugleich die Normalen einer anderen Kurve

sind, heißt die Evolute dieser Kurve, während diese selbst eine Evolvente der letzteren ist. Es ist klar, daß es zu jeder Kurve nur eine Evolute, dagegen un-  
zählig viele Evolventen gibt.

## VII. Konstruktion einiger anderer Spirallinien.

Die hyperbolische Spirale (s. Fig. 202) entsteht durch Bewegung eines Punktes derart, daß derselbe auf einem um  $M$  sich drehenden Strahle so fortschreitet, daß sein Abstand vom Kreismittelpunkte stets umgekehrt proportional ist dem Drehungswinkel des Strahles, gemessen von einer Anfangslage  $y$  aus. Zeichnet man daher den Kreis  $k$  beliebig, teilt ihn in gleiche Teile ein, zieht durch die Teilungspunkte  $1, 2, 3, 4$  Strahlen nach  $M$ , so ist  $MA$  gleich dem Halbmesser  $r$  von  $k$ ,  $MA_1 = r \cdot \frac{1}{1^2}$ ,  $MA_2 = r \cdot \frac{1}{2^2}$ ,  $MA_3 = r \cdot \frac{1}{3^2}$  etc. abzutragen, um in den Punkten  $A_1, A_2, A_3 \dots$  Punkte der hyperbolischen Spirale zu erhalten. Hat der Strahl einen Winkel von  $360^\circ$  zurückgelegt, so liegt der entsprechende Punkt  $A_{12}$  wieder auf  $MA$ , aber in unendlicher Ferne. Dreht man von  $MA$  aus den Strahl in entgegengesetzter Richtung weiter und trägt auf den Lagen  $M \cdot 11, M \cdot 10, M \cdot 9$  die Längen  $\frac{r \cdot 12}{13}, \frac{r \cdot 12}{14}, \frac{r \cdot 12}{15} \dots$  auf, so ergeben sich die Punkte  $B_1, B_2, B_3 \dots$  der Kurve. Diese nähert sich immer mehr dem Mittelpunkte  $M$ , ohne ihn je zu erreichen, sie nähert sich ihm asymptotisch und besitzt demnach unendlich viele Umgänge, wenn man das einem Drehungswinkel von  $360^\circ$  entsprechende Kurvenstück einen Umgang nennt. Im Punkte  $A_{12}$  besitzt die Kurve eine Asymptote, welche durch den auf der Senkrechten zu  $MA$  in einem Abstände gleich  $2r\pi$  liegenden Punkt  $C$  hindurchgeht.

Fig. 200.

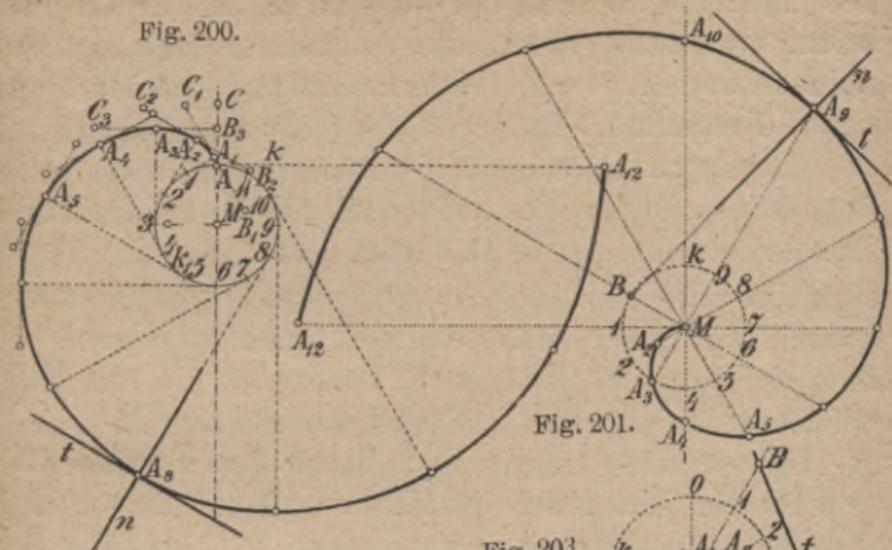


Fig. 201.

Fig. 203.

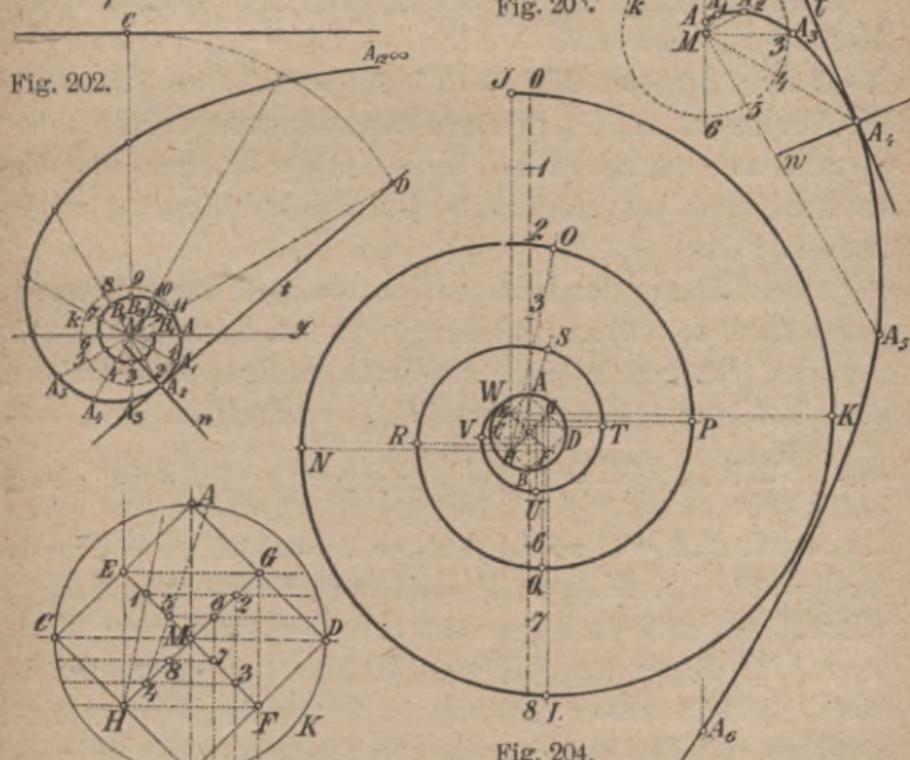
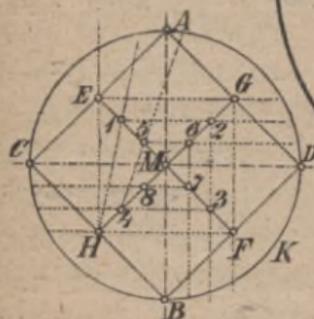


Fig. 204.

Fig. 205.



Die Tangente in einem Punkte z. B.  $A_2$  erhält man, indem man  $MA_2$  zieht, die Senkrechte  $MD$  zu  $MA_2$  errichtet und  $MD = MC = 2r\pi$  abträgt.  $A_2D$  ist die gesuchte Tangente  $t$ , die Normale  $n$  steht senkrecht hierzu.

Die logarithmische Spirale (s. Fig. 203) ist der Weg eines Punktes, der auf einem um  $M$  sich drehenden Strahle fortschreitet, so daß seine Abstände von  $M$  nach einer geometrischen Reihe wachsen, wenn die Drehungswinkel nach einer arithmetischen Reihe zunehmen. Ist also ein Kreis  $k$  von einem Punkte  $O$  aus in zwölf gleiche Teile eingeteilt und sind die Strahlen  $M \cdot 1$ ,  $M \cdot 2$ ,  $M \cdot 3$  gezogen, so trägt man z. B. auf dem Strahle  $M \cdot 0$  eine Strecke  $MA$  gleich der Einheit ab; auf dem Strahle  $M \cdot 1$  ist dann abzutragen die Strecke  $MA_1 = 2MA$ , auf  $M \cdot 2$  die Strecke  $MA_2 = 2MA_1 = 4MA$ , auf dem Strahle  $M \cdot 3$  die Strecke  $MA_3 = 2MA_2 = 4MA_1 = 8MA$  etc. Die Punkte  $A_1, A_2, A_3$  gehören dann einer logarithmischen Spirale an. Auch diese Linie erstreckt sich ins Unendliche und hat gleichfalls den Punkt  $M$  als asymptotischen Punkt.

Die Längen der Leitstrahlen wachsen nach Potenzen, einer Zahl  $\varepsilon$ , deren Größe gleich ist dem Quotienten aus den Längen zweier aufeinanderfolgender Strahlen, wie  $MA$  und  $MA_1$  oder  $MA_1$  und  $MA_2$  etc., also

$$\varepsilon = \frac{MA_1}{MA} = \frac{MA_2}{MA_1}. \quad \text{Im vorliegenden Falle ist } \varepsilon = 2,$$

d. h. es ist  $MA = 2^0 = 1$ ,  $MA_1 = 2^1 = 2$ ,  $MA_2 = 2^2 = 4$ ,  $MA_3 = 2^3 = 8$ ,  $MA_4 = 2^4 = 16$  etc. Bezeichnet man die Winkel aufeinanderfolgender Strahlen  $MA$  und  $MA_1$ , bzw. die Bogenlänge dieses Winkels auf einem Kreise mit dem Halbmesser eins mit  $\varphi$ , ferner den Winkel eines Strahles mit der zugehörigen Kurventangente mit  $\alpha$ , so findet bei der logarithmischen Spirale die Beziehung

statt  $tg \alpha = \frac{\text{arc } \varphi}{l \varepsilon}$ . Hierbei bezeichnet  $l \varepsilon$  den natür-

lichen Logarithmus von  $\varepsilon$ ; im vorliegenden Falle von 2. Der natürliche Logarithmus einer Zahl ist auf die Basis  $e = 2,7182$  bezogen, und man erhält diesen natürlichen Logarithmus aus dem gewöhnlichen auf die Basis 10 bezogenen Logarithmus einer Zahl, wenn man letzteren durch den Logarithmus von  $e$ , d. h. von 2,7182, bezogen auf die Basis 10, dividiert. Es ist also:

$$l \varepsilon = \frac{\log \varepsilon}{\log e} \quad \text{also} \quad l \varepsilon = \frac{\log 2}{\log e} = \frac{0,3010300}{0,4342945} = 0,698.$$

Man hat daher für den Winkel  $\alpha$  der Kurventangente mit einem Strahle z. B.  $MA_4 = tg \alpha = \frac{2 \pi}{12 \cdot 0,968} = \frac{6,28}{12 \cdot 0,968} = 0,749$ . Errichtet man daher im Punkte  $M$  die Senkrechte  $MB$  zu  $MA_4$  und macht  $MB = 0,749 \cdot MA_4$ , so ist  $B$  ein Punkt der Kurventangente in  $A_4$ , die Normale steht senkrecht hierzu.

Die ionische Schnecke (s. Fig. 204 u. 205) ist eine aus Kreisbogen zusammengesetzte Spirale. Gegeben ist (s. Fig. 204) die Strecke  $\overline{08}$ , welche in acht gleiche Teile geteilt wird. Über dem fünften Teile, von  $0$  aus gerechnet, beschreibt man als Diagonale ein Quadrat  $ABCD$ ; in Fig. 205 ist dieses Quadrat in vergrößertem Maßstabe herausgezeichnet. In dem Quadrate (s. Fig. 204) werden die beiden Mittellinien  $EF$  und  $GH$  gezogen, jede derselben in sechs gleiche Teile geteilt und die Teilungspunkte, so wie die Fig. 205 zeigt, verbunden. Die Bezeichnungen der Fig. 205 muß man sich in die Fig. 204 übertragen denken. Man zeichnet dann die folgenden Kreisbogen. Aus  $E$  mit dem Halbmesser  $EC$  bis zum Punkte  $K$  auf  $EG$ , aus  $G$  durch  $K$  bis

zum Punkte  $L$  auf  $GF$ , aus  $F$  durch  $L$  bis zum Punkte  $N$  auf  $FH$ , aus  $H$  durch  $N$  bis zum Punkte  $O$  auf  $H \cdot 1$ , aus  $1$  durch  $O$  bis zum Punkte  $P$  auf  $1 \cdot 2$ , aus  $2$  durch  $P$  bis zum Punkte  $Q$  auf  $2 \cdot 3$ , aus  $3$  durch  $Q$  bis zum Punkte  $R$  auf  $3 \cdot 4$ , aus  $4$  durch  $R$  bis zum Punkte  $S$  auf  $4 \cdot 5$ , aus  $5$  durch  $S$  bis zum Punkte  $T$  auf  $5 \cdot 6$ , aus  $6$  durch  $T$  bis  $U$  auf  $6 \cdot 7$ , aus  $7$  durch  $U$  bis  $V$  auf  $7 \cdot 8$ , aus  $8$  durch  $V$  bis zum Punkte  $W$  auf dem, dem Quadrate  $ABCD$  umschriebenen Kreise, welchen man das Auge der Schnecke nennt. Die ionische Schnecke findet in der Architektur Verwendung beim Kapitäl der ionischen Säule.

### VIII. Konstruktion der Konchoide.

Die Konchoide (s. Fig. 206—208) entsteht durch Drehung eines Strahles um einen festen Punkt  $P$  als Ort jener Punkte, welche von den Durchschnittspunkten des beweglichen Strahles mit einer festen Geraden  $a$  einen gegebenen Abstand besitzen. Zieht man also durch  $P$  eine Anzahl von Strahlen:  $P \cdot 0$ ,  $P \cdot 1$ ,  $P \cdot 2 \dots$  und trägt von deren Schnittpunkten  $1$ ,  $2$ ,  $3 \dots$  auf  $a$  die gegebene Strecke nach  $OA_0$  bzw.  $OA'_0$ ,  $1A_1$  bzw.  $1A'_1$ ,  $2A_2$  bzw.  $2A'_2 \dots$  ab, so gehören die Punkte  $A_0$ ,  $A'_0$ ,  $A_1$ ,  $A'_1$ ,  $A_2$ ,  $A'_2$  einer Konchoide an. Sie besitzt drei

Formen, je nachdem die gegebene Strecke  $OA_0 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} PO$

ist (s. Fig. 206—208): im ersten Falle gehört der Punkt  $P$ , der Pol der Kurve, der letzteren nicht an; im zweiten Falle ist er ein Rückkehrpunkt; im dritten Falle endlich ein Doppelpunkt. In allen drei Fällen erstreckt sich die Kurve ins Unendliche und hat die Gerade  $a$  zur Asymptote.

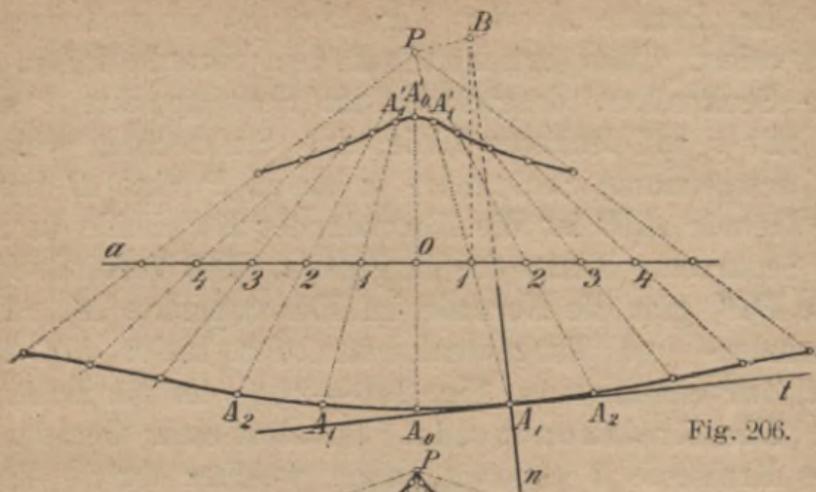


Fig. 206.

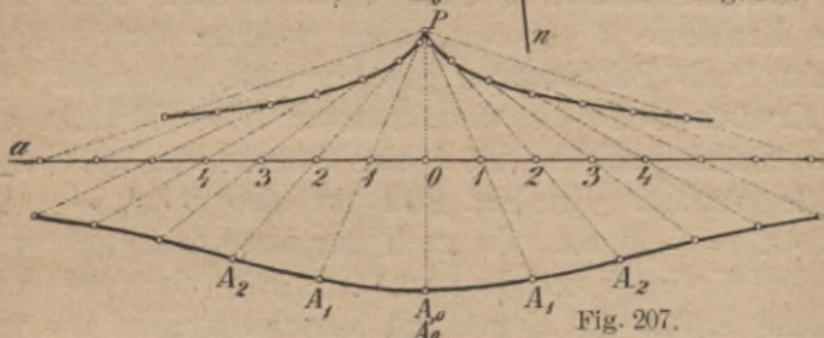


Fig. 207.

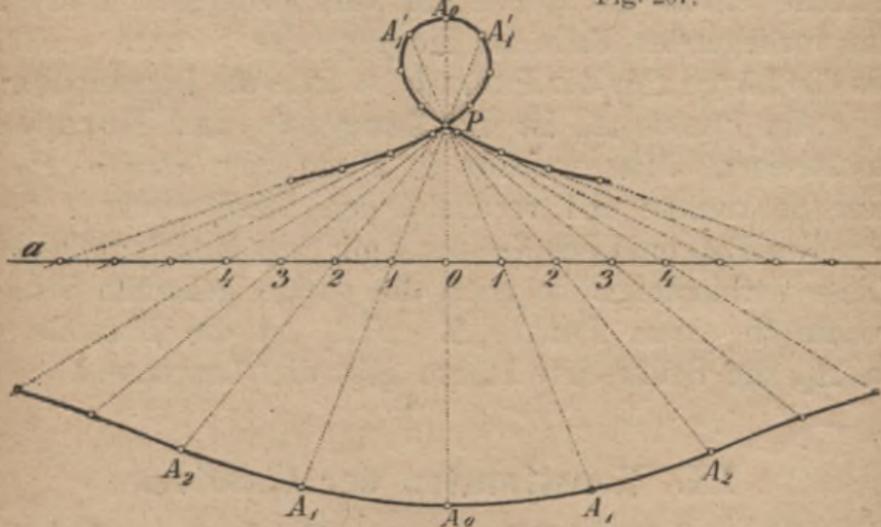


Fig. 208.

Im Punkte  $A_1$  der Fig. 206 ist eine Tangente konstruiert. Man errichtet auf dem Strahle  $P1$  in  $P$  eine Senkrechte, desgleichen im Schnittpunkte  $1$  von  $P1$  mit  $a$  auf letzterer Linie eine Senkrechte, welche die erstgenannte Senkrechte in einem Punkte  $B$  trifft. Die Gerade  $A_1B$  ist die Normale der Konchoide in  $A_1$ , die Senkrechte hierzu die Tangente  $t$ . Die Verbindungslinie  $BA'_1$  gibt die Normale im Kurvenpunkte  $A'_1$ . Die Normalen- und Tangentenkonstruktion bleibt für alle drei Kurvenformen (s. Fig. 206—208) die nämliche.

Die Kreiskonchoide. Ist statt einer Geraden  $a$  eine Kreislinie  $k$  gegeben, nach welcher durch einen Punkt  $P$  als Pol Strahlen gezogen sind, so erhält man die Kreiskonchoide, wenn man auf diesen Strahlen von ihren Schnittpunkten mit  $k$  eine Strecke von gegebener Größe abträgt. In Fig. 209 ist also  $0 \cdot A_0 = 0 \cdot A'_0 = 1 \cdot A_1 = 1 \cdot A'_1$  etc. Je nach der Lage des Punktes  $P$  zu dem Kreise  $k$  und je nach der Größe der gegebenen Strecke erhält die Kurve die verschiedensten Formen. Im vorliegenden Falle ist die gegebene Strecke größer als die Länge  $PS$ , der Punkt  $P$  ist dann ein Doppelpunkt.

Im Punkte  $A_1$  ist die Tangente und Normale konstruiert. Man errichtet in  $P$  auf dem Strahle  $P \cdot 1$  eine Senkrechte und verbindet den Schnittpunkt  $1$  des Strahles  $PA_1$  und des Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkte  $M$ . Diese Verbindungslinie trifft die vorhin genannte Senkrechte in einem Punkte  $B$ .  $BA_1$  ist die Normale  $n$  in  $A_1$ , die Senkrechte hierzu gibt die Tangente  $t$ .

## IX. Konstruktion der Cissoide.

Gegeben ist ein Kreis  $k$  (s. Fig. 210), auf demselben ein Punkt  $P$  und die Tangente  $a$  in dem zweiten

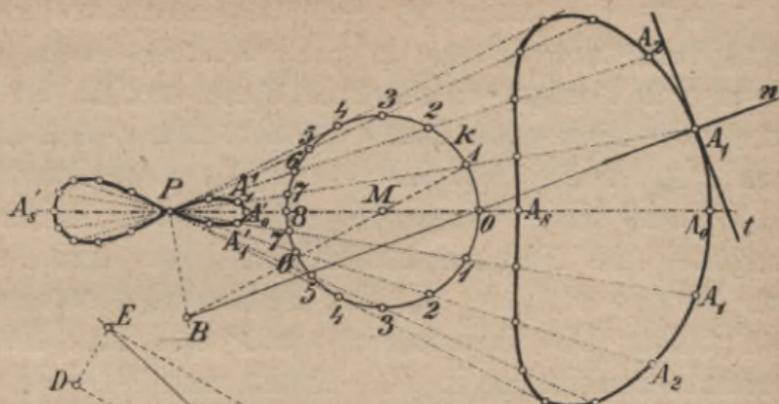


Fig. 209.

Fig. 210.

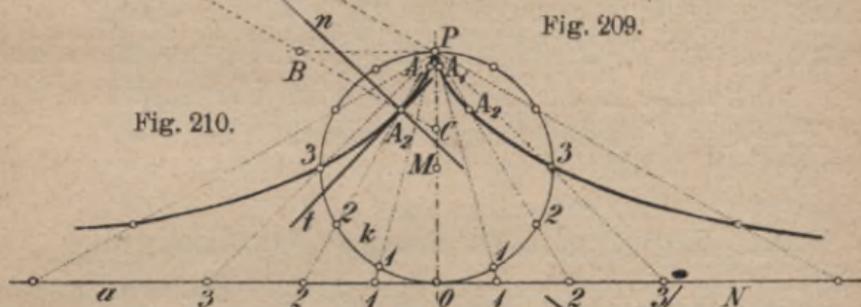


Fig. 211.

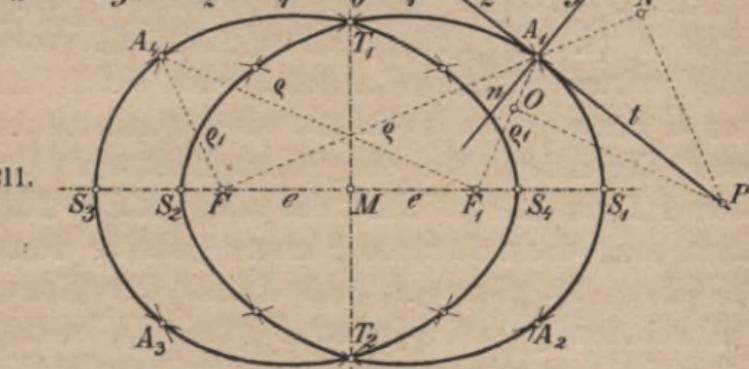
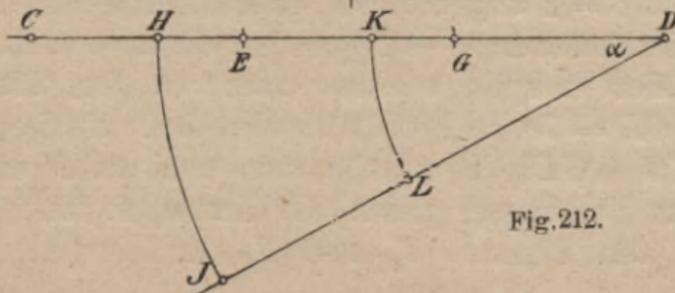


Fig. 212.



Endpunkte des durch  $P$  gehenden Kreisdurchmessers. Zieht man durch  $P$  alle möglichen Kreissehnen, welche  $k$  und  $a$  in Punkten  $1, 1, 2, 2, 3, 3$  etc. treffen, und trägt auf diesen Linien von  $P$  aus die Strecken  $1 \cdot 1, 2 \cdot 2, 3 \cdot 3$  nach  $PA_1, PA_2, PA_3 \dots$  ab, so liegen die Punkte  $A_1, A_2 \dots$  auf einer Cissoide. Im Punkte  $A_2$  ist eine Tangente und Normale konstruiert. Man errichtet auf dem Strahle  $PA_2$  in  $A_2$  eine Senkrechte, welche  $PM$  in  $C$  trifft. Die Kreistangente in  $P$  schneidet die eben genannte Senkrechte in  $B$ . Macht man  $BD = BC$ , errichtet in  $D$  eine Senkrechte zu  $DC$  und in  $P$  eine Senkrechte zu  $P \cdot 2$ , so treffen sich diese beiden Linien in einem Punkte  $E$  der Normalen  $n$  im Kurvenpunkte  $A_2$ , die Tangente  $t$  steht senkrecht hierzu.

## X. Konstruktion einiger Ovallinien.

Das Oval von Cartesius ist der Ort eines Punktes  $A$  (s. Fig. 211), dessen Abstände von zwei festen Punkten  $F$  und  $F_1$ , jeder mit einem anderen Faktor  $\alpha$  bzw.  $\beta$  multipliziert, eine konstante Summe bilden. Verbindet man die festen Punkte  $F$  und  $F_1$ , halbiert  $FF_1$  in  $M$ , bezeichnet die Länge  $MF = MF_1 = e$ , so kann man die konstante Summe beliebig festsetzen, z. B.  $= 5e$ . Ist dann  $A_1$  ein Punkt der Kurve mit den Abständen  $\varrho$  und  $\varrho_1$  von  $F$  und  $F_1$ , sind ferner  $\alpha = 1$  und  $\beta = 2$  angenommen, so gilt für jeden Kurvenpunkt die Beziehung  $\varrho + 2\varrho_1 = 5e$ , woraus die folgende Konstruktion entspringt. Man macht (s. Fig. 212) die Strecke  $CD = 5e$  und teilt sie in drei gleiche Teile  $CE = EG = GD$ . Beschreibt man nun um  $F$  und  $F_1$  mit einem Halbmesser gleich  $GD$  Kreise, so treffen sich diese in den Punkten  $T_1$  und  $T_2$  der Kurve. Diese

schneidet die Verbindungslinie  $FF_1$  in vier Punkten  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  und  $S_4$ , welche sich in einfacher Weise ergeben. Bezeichnet man die Strecke  $F_1S_1 = FS_3$  mit  $x$ , die Strecke  $FS_2 = F_1S_4$  mit  $y$ , so hat man zur Bestimmung von  $x$  und  $y$  die Beziehungen:

$$\begin{aligned} 2e + x + 2x &= 5e \text{ und} \\ y + 2(2e + y) &= 5e, \end{aligned}$$

hieraus folgt

$$\begin{aligned} x &= e \text{ und} \\ y &= e/3. \end{aligned}$$

Macht man also  $F_1S_1 = FS_3 = e$  und  $F_1S_4 = FS_2 = \frac{1}{3}e$ , so erhält man die Punkte des Ovals auf der Linie  $FF_1$ .

Zur Konstruktion eines beliebigen weiteren Punktes bestimmt man sich zunächst den Winkel  $\alpha$  (s. Fig. 212) so, daß  $DH = 2$ ,  $HJ = 1$  ist, teilt dann  $CD = 5e$  in einem Punkte  $K$  in zwei beliebige Teile und schlägt aus  $D$  den Kreisbogen  $KL$ . Beschreibt man jetzt um die Punkte  $F$  und  $F_1$  (s. Fig. 211) mit den Halbmessern  $CK$  und  $KL$  Kreisbogen, so liefern deren Schnittpunkte die Kurvenpunkte  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  und  $A_4$ .

Im Punkte  $A_1$  ist die Tangente und Normale konstruiert. Man zieht  $FA_1$  und  $F_1A_1$ , macht  $A_1N = 2$  und  $A_1O = 1$ , dann treffen sich die in  $N$  und  $O$  zu  $A_1N$  bzw.  $A_1O$  errichteten Senkrechten in einem Punkte  $P$  der Tangente  $t$ . Die Normale  $n$  steht senkrecht hierzu.

Anmerkung. Das Oval besitzt die Linie  $FF_1$  als Symmetrieachse, die auf ihr liegenden Punkte  $S_1$  bis  $S_4$  sind Scheitel des Ovals — eine zweite Symmetrieachse ist die Linie  $T_1T_2$ . Die Punkte  $T_1$  und  $T_2$  sind Doppelpunkte. Die Kurve besteht aus zwei Ovalen, die zur Achse  $T_1T_2$  symmetrisch liegen und sich in den Punkten  $T_1$  und  $T_2$  begegnen.

Das Oval von Cassini ist der Ort eines Punktes  $A_1$ , für welchen das Produkt seiner Abstände von zwei festen Punkten  $F$  und  $F_1$  (s. Fig. 213) von konstanter Größe ist. Ist  $BC$  (s. Fig. 214) die Seite eines Quadrates, dessen Inhalt gleich dem Werte des obengenannten Produktes sein soll, so hat man nur durch  $B$  eine Senkrechte  $a$  zu  $BC$  zu ziehen, auf  $a$  einen beliebigen Punkt  $D$  zu wählen und um  $D$  einen durch  $C$  gehenden Kreis zu beschreiben, der  $a$  in  $E$  und  $G$  trifft; so geben die um  $F$  und  $F_1$  (s. Fig. 213) mit den Halbmessern gleich den Strecken  $BE$  und  $BG$  beschriebenen Kreise in ihren Durchschnittspunkten  $A_1$  bis  $A_4$  Punkte des Ovals an. Durch Annahme beliebiger Punkte  $D$  und Wiederholung des Verfahrens lassen sich beliebig viele Punkte des Ovals bestimmen. Beschreibt man um  $F$  und  $F_1$  mit einem Halbmesser gleich  $BC$  Kreise, so ergeben sich auf der Senkrechten durch den Mittelpunkt  $M$  von  $FF_1$  zwei Punkte  $T_1$  und  $T_2$  des Ovals. Auf  $FF_1$  selbst liegen zwei Punkte  $S_1$  und  $S_2$  in einem Abstände  $MS_1 = MS_2 = \sqrt{q^2 + e^2}$ , wobei  $BC = q$  (s. Fig. 214) und  $MF = e$  gesetzt ist. Das Oval hat demnach zwei Symmetrieachsen,  $S_1 S_2$ ,  $T_1 T_2$ , und vier Scheitel,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $T_1$  und  $T_2$ .

Anmerkung. Kennt man von dem Oval von vornherein die vier Scheitel, so lassen sich die Punkte  $F$  und  $F_1$  und damit auch weitere Kurvenpunkte ermitteln. Man macht (s. Fig. 215)  $AB = MS_1$ ,  $BC$  senkrecht  $AB$  und gleich  $MT_1$ , zieht  $AC$  und beschreibt über  $AC$  als Durchmesser einen Halbkreis; letzterer trifft die im Mittelpunkte  $D$  von  $AC$  auf  $AC$  errichtete Senkrechte in  $E$ ; es ist nun  $T_1 F = T_1 F_1$  (s. Fig. 213)  $= AE$  (s. Fig. 215), wodurch  $F$  und  $F_1$  bestimmt sind.

Anmerkung. Die Punkte  $F$  und  $F_1$  lassen sich noch auf eine andere Art bestimmen. Man macht (s. Fig. 216)  $AB = MS_1$ , beschreibt über  $AB$  einen

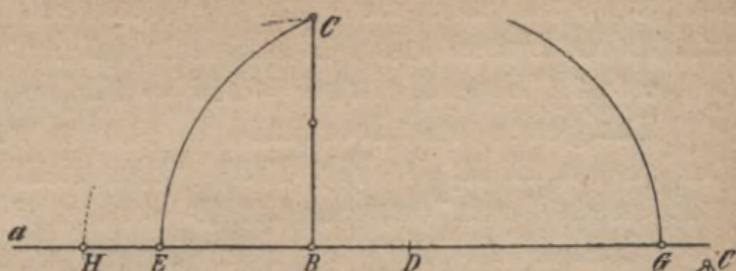


Fig. 214.

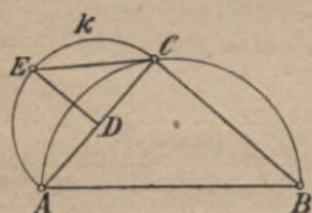


Fig. 216.

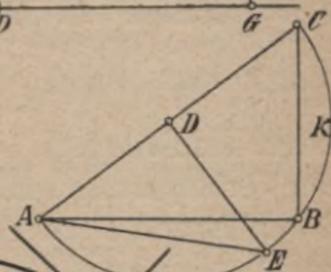


Fig. 215.

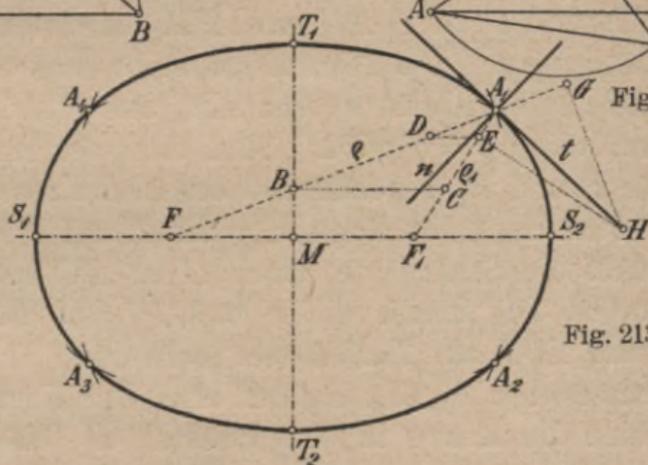


Fig. 213.

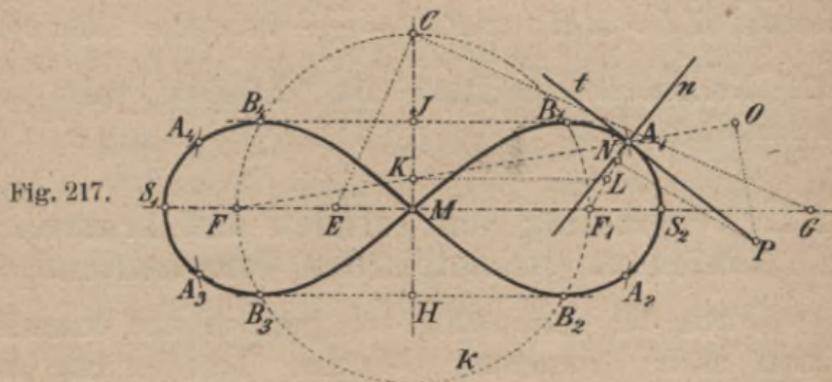


Fig. 217.

Halbkreis und macht die Sehne  $BC$  gleich  $MT_1$ . Halbirt man  $AC$  in  $D$ , errichtet  $DE$  senkrecht auf  $AC$  und gleich  $DC$ , so ist  $CE$  (s. Fig. 216) =  $MF = MF_1$  (s. Fig. 213).

Tangente und Normale in einem beliebigen Punkte, z. B.  $A_1$  (s. Fig. 213). Man zieht  $A_1F$  und  $A_1F_1$  und durch den Schnitt  $B$  von  $A_1F$  mit  $MT_1$  eine Parallele zu  $MS_2$  bis zum Schnitt  $C$  mit  $A_1F_1$ .

Macht man nun  $A_1E = \frac{1}{n} AC$ ,  $A_1G = \frac{1}{n} AB$  (im vor-

liegenden Falle ist  $n = 3$  angenommen) und zwar  $A_1G$  auf der Verlängerung von  $FA_1$ , so treffen sich die Senkrechten durch  $E$  und  $G$  zu  $F_1A_1$  bzw.  $FA_1$  in einem Punkte  $H$  der Tangente  $t$ . Die Normale  $n$  steht senkrecht hierzu.

Die Lemniskate entsteht aus dem Oval von Cassini, wenn  $e = q$  wird. Sind dann (s. Fig. 217) die Punkte  $F$  und  $F_1$  gegeben und beschreibt man über  $FF_1$  als Durchmesser den Kreis  $k$ , wählt  $E$  auf  $FF_1$  beliebig, so liefert die Senkrechte durch  $C$  zu  $EC$  auf  $FF_1$  den Punkt  $G$ . Die Kreise um  $F$  und  $F_1$  mit den Strecken  $ME$  und  $MG$  als Halbmesser schneiden sich in den Kurvenpunkten  $A_1, A_2, A_3$  und  $A_4$ . Der Kreis  $k$  durchschneidet die Kurve in den Punkten  $B_1$  bis  $B_4$ , deren Abstand  $MJ = MH$  von  $FF_1 = \frac{MC}{2}$  ist. Die Tangenten- und Normalenkonstruktion ist dieselbe wie beim Cassinischen Oval.

## XI. Verbindung von geraden und krummen Linien zu geometrischen Ornamenten.

Durch die Verbindung von geraden und krummen Linien nach bestimmten Gesetzen der Reihung und Symmetrie entsteht das geometrische Ornament. Das

geometrische Ornament ist so alt wie die menschliche Kultur. In den folgenden Figuren sind Ornamente dargestellt, herrührend von den verschiedenen Völkern und aus den verschiedensten Zeitperioden.

Die Fig. 218—222 zeigen Ornamente wilder Völkerstämme, und zwar enthält Fig. 218 eine Verzierung in geflochtenem Stroh, Fig. 219 eine solche auf Leinenzeug von den Sandwichinseln. Die Fig. 220—223 zeigen Holzschnitzereien von den Südsee- und Freundschaftsinseln, Fig. 224 gibt die Abbildung einer Schnitzereiarbeit von Tahiti wieder.

Die Fig. 225—230 geben ein Abbild von ägyptischen Ornamenten entnommen aus Malereien von Wänden, Grabdecken, Gerätschaften aus den verschiedensten Gegenden Ägyptens.

Die Fig. 231—235 sind assyrische und persische Ornamente, Fig. 231—232 enthalten Abbildungen von einer Säulenbasis aus Persepolis, Fig. 233 gibt eine Darstellung von einem Ornament aus Nimrud, Fig. 234 ist das Motiv für eine Glasur, Fig. 235 ein solches für eine Schnitzereiarbeit.

Tafel 14 ist einem persischen Manuskripte entnommen.

Einzelne Beispiele aus der griechischen und römischen Ornamentik zeigen die Fig. 236—264, und zwar geben die Fig. 236—252 Abbildungen von Bemalungen griechischer Tongefäße und Mosaiken aus Pompeji und Ravenna.

Die Fig. 252—258 zeigen einfache und mehrstreifige Mäanderbänder, die Fig. 259—264 enthalten Mosaiken aus Sizilien, die Fig. 265—267 geben byzantinische Ornamente, Tafel 15 gibt eine Abbildung aus dem Ornamentenschatze der Alhambra wieder.



Fig. 218.

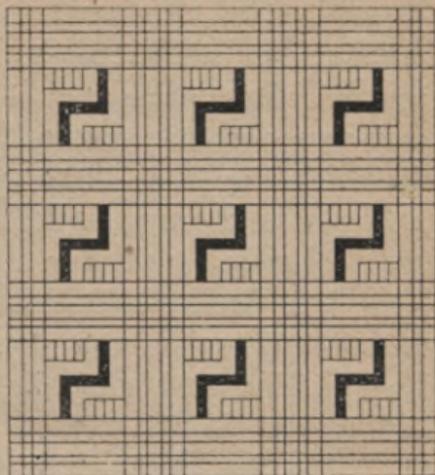


Fig. 219.



Fig. 220.



Fig. 221.



Fig. 224.



Fig. 222.



Fig. 223.

Ornamente wilder Völkerstämme.

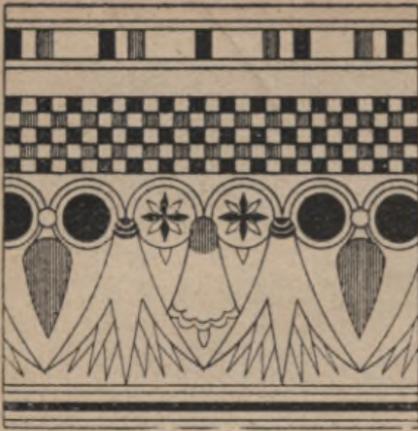


Fig. 225.

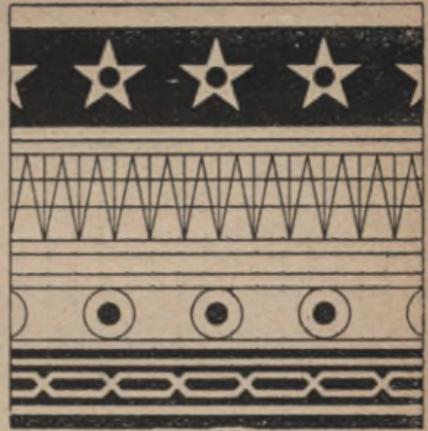


Fig. 226.

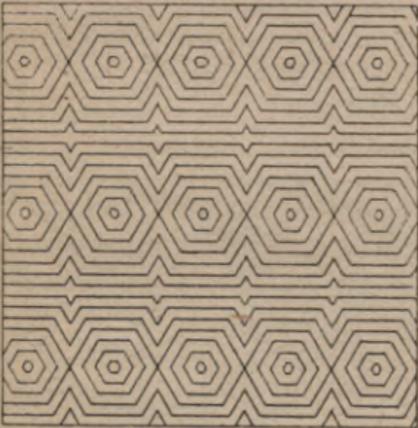


Fig. 227.

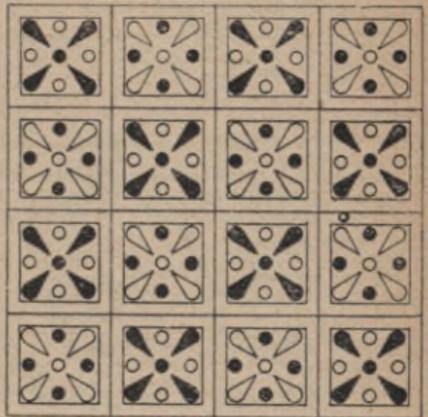


Fig. 228.



Fig. 229.



Fig. 230.

Ägyptische Ornamente.

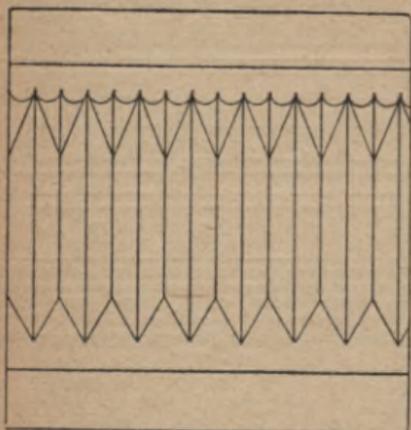


Fig. 231.

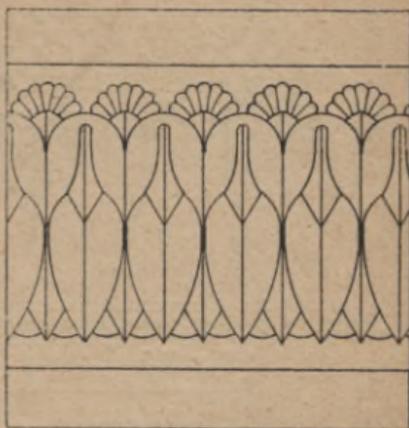


Fig. 232.

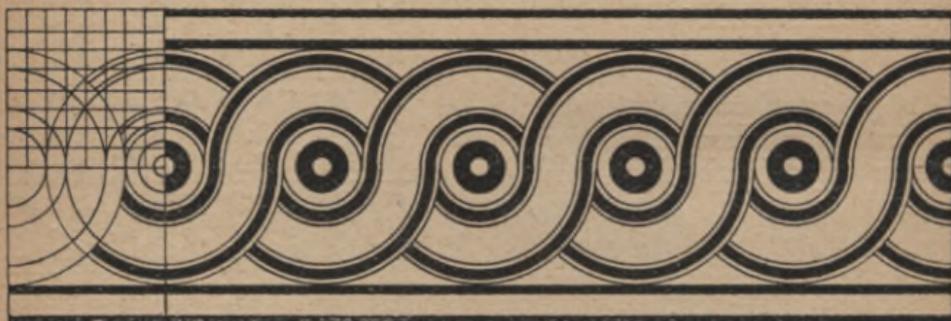


Fig. 233.



Fig. 234.



Fig. 235.



Tafel 14. Aus einem persischen Manuskript.



Fig. 237.

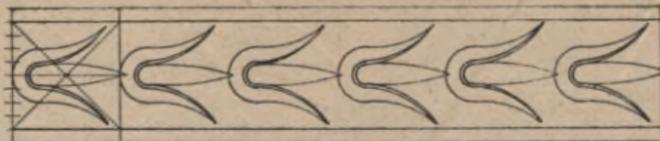


Fig. 236.



Fig. 238.



Fig. 239.



Fig. 240.



Fig. 241.



Fig. 243.

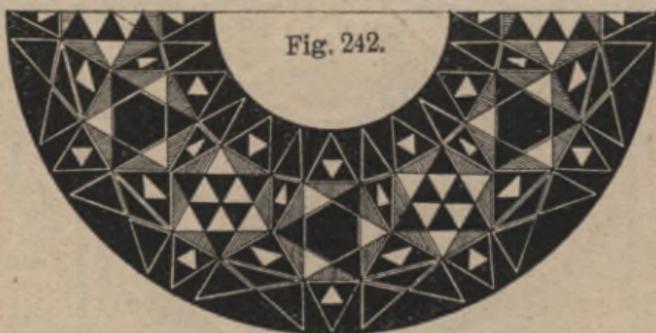


Fig. 242.

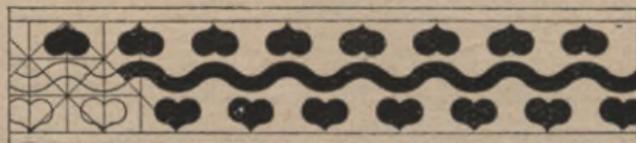


Fig. 245.



Fig. 244.

Von griechischen Tongefäßen.  
Pompejanische Mosaik.

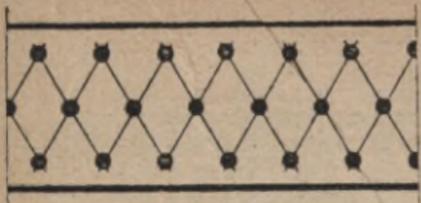


Fig. 246.

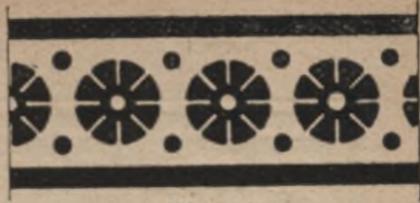


Fig. 247.

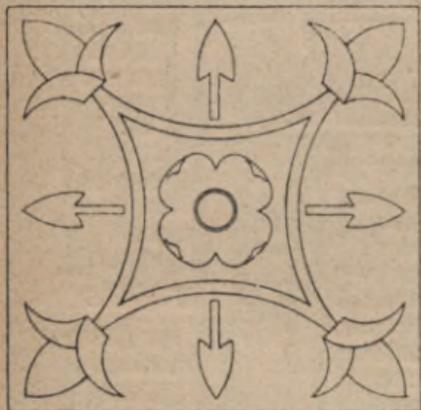


Fig. 248

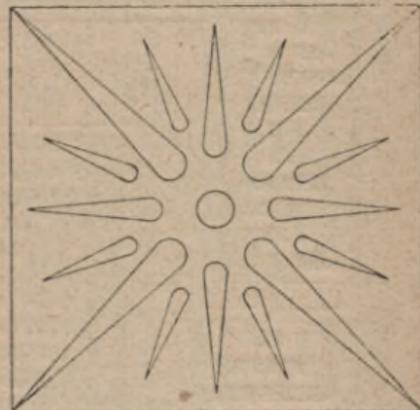


Fig. 249.



Fig. 250.

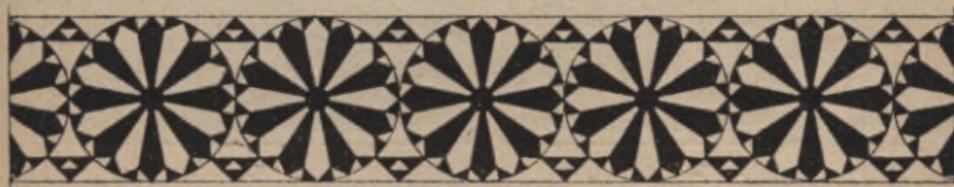


Fig. 251.

Griechische Ornamente. Mosaiken aus Ravenna.



Fig. 22.



Fig. 253.



Fig. 254.



Fig. 256.



Fig. 255.



Fig. 257.



Fig. 258.

Einfache und mehrstreifige Mäander.



Fig. 259.



Fig. 263.



Fig. 264.



Fig. 260.



Fig. 261.



Fig. 262.

Mosaiken aus Sizilien.



Fig. 265.



Fig. 266.

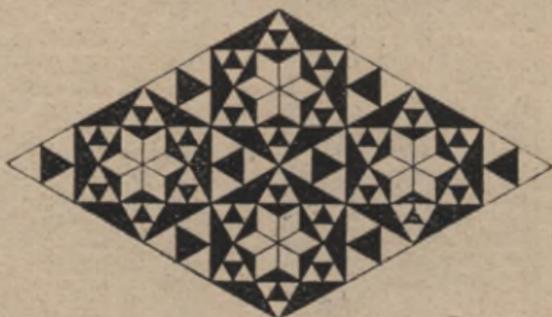
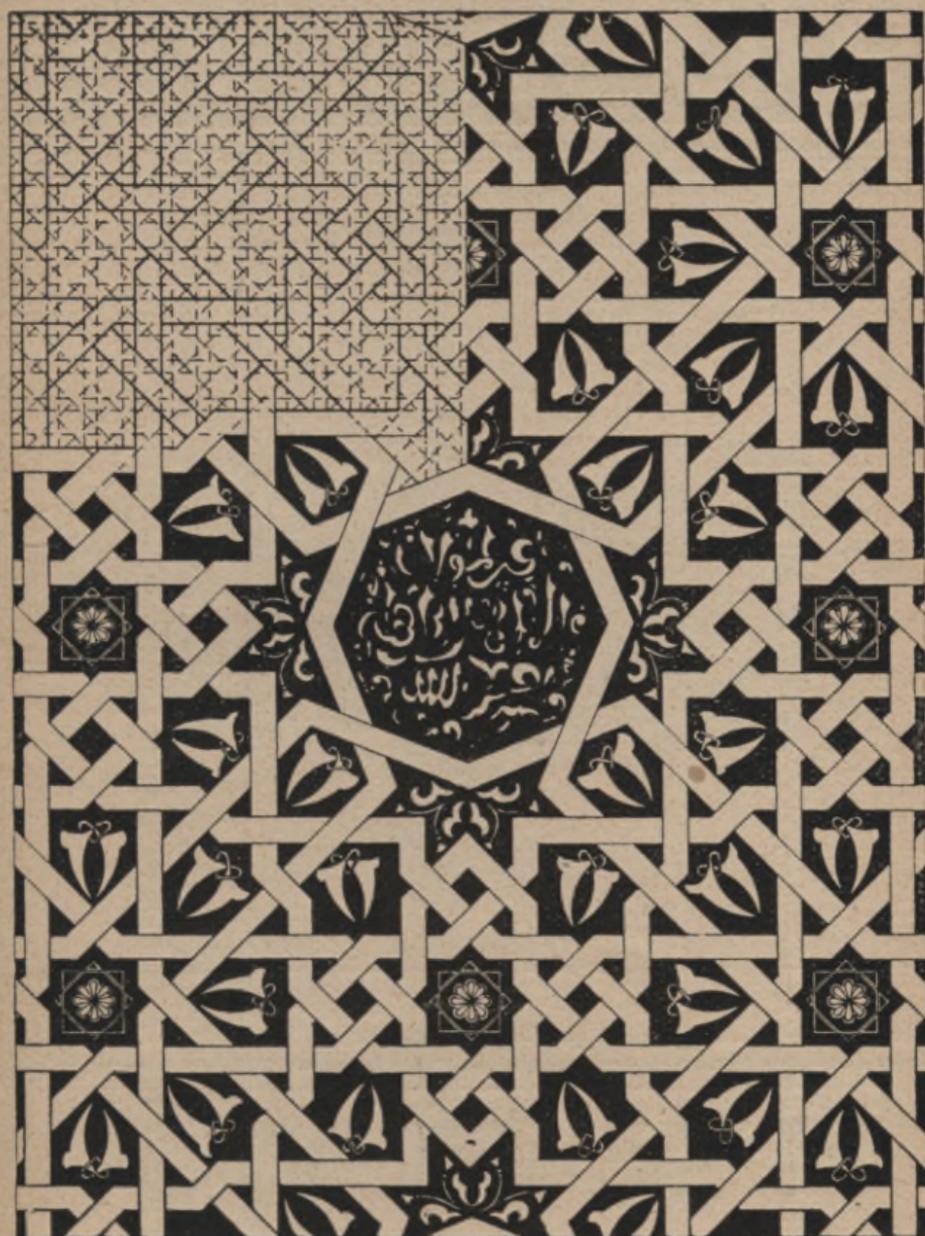


Fig. 267.

**Byzantinische Ornamente.**



Tafel 15. Maurisches Täfelwerk aus der Alhambra.



Fig. 268.

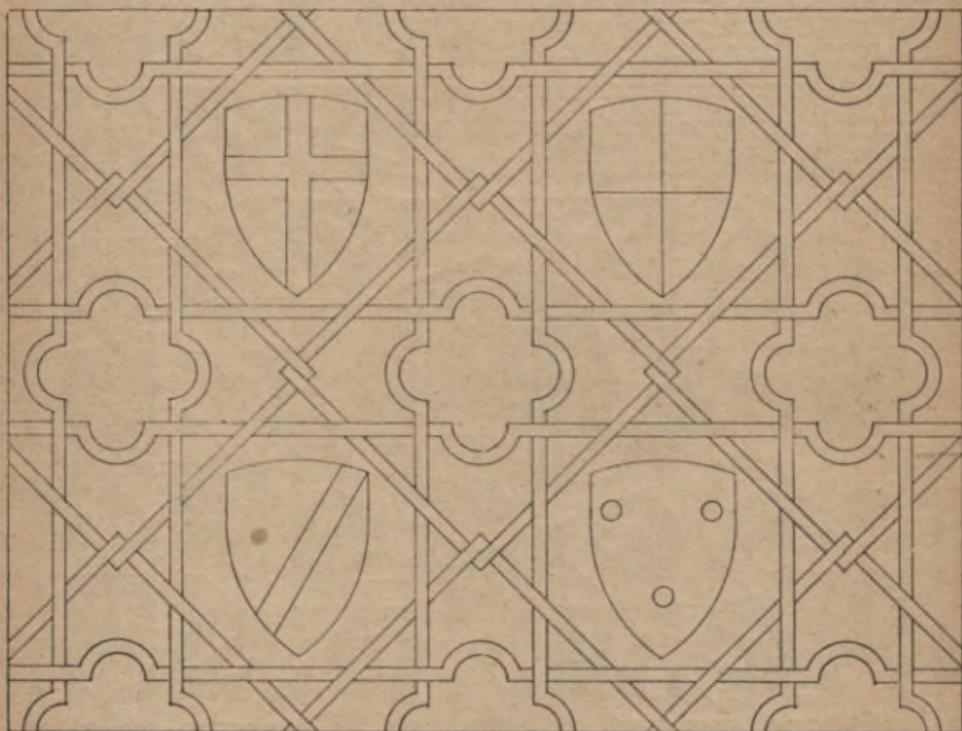


Fig. 269.

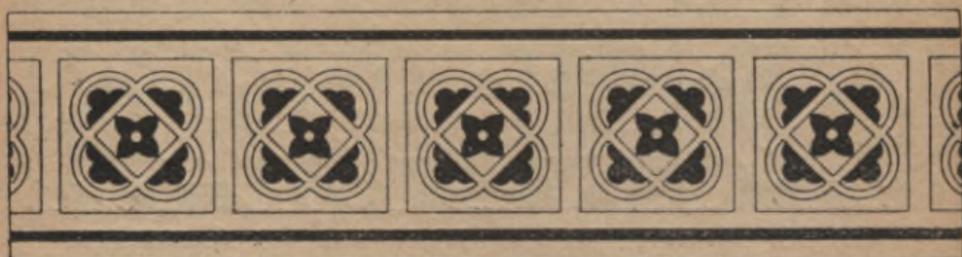


Fig. 270.

**Mittelalterliche Ornamente.**



Fig. 271.



Fig. 272.



Fig. 273.

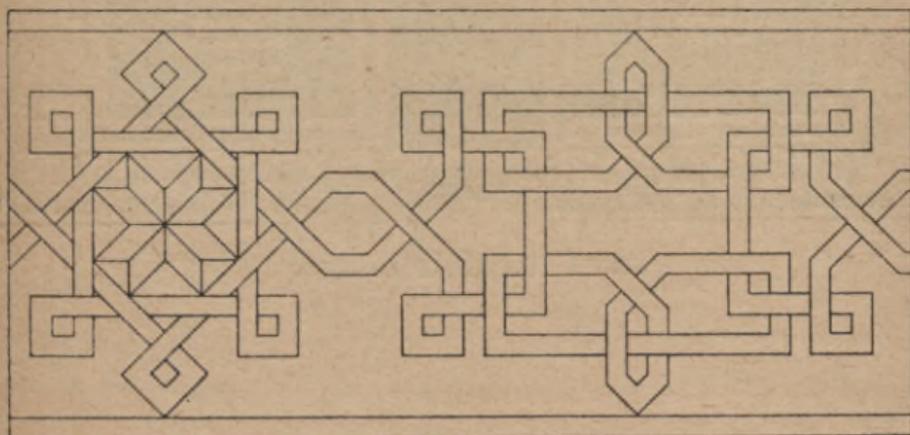
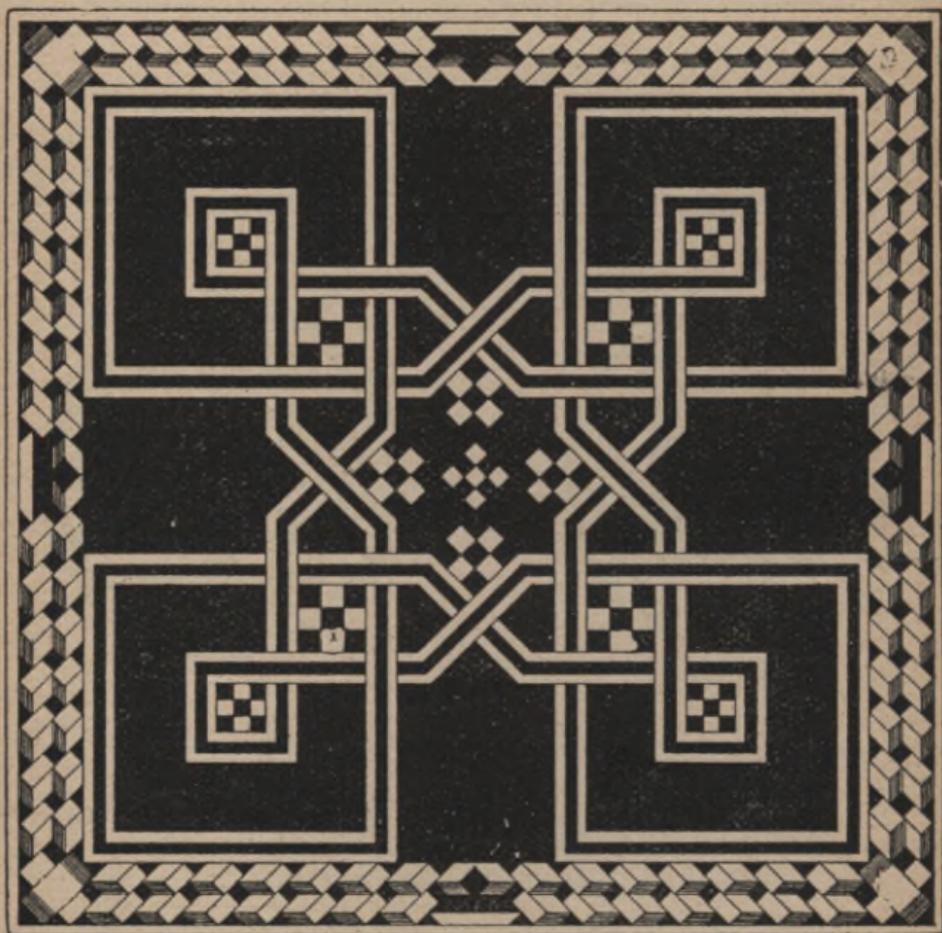
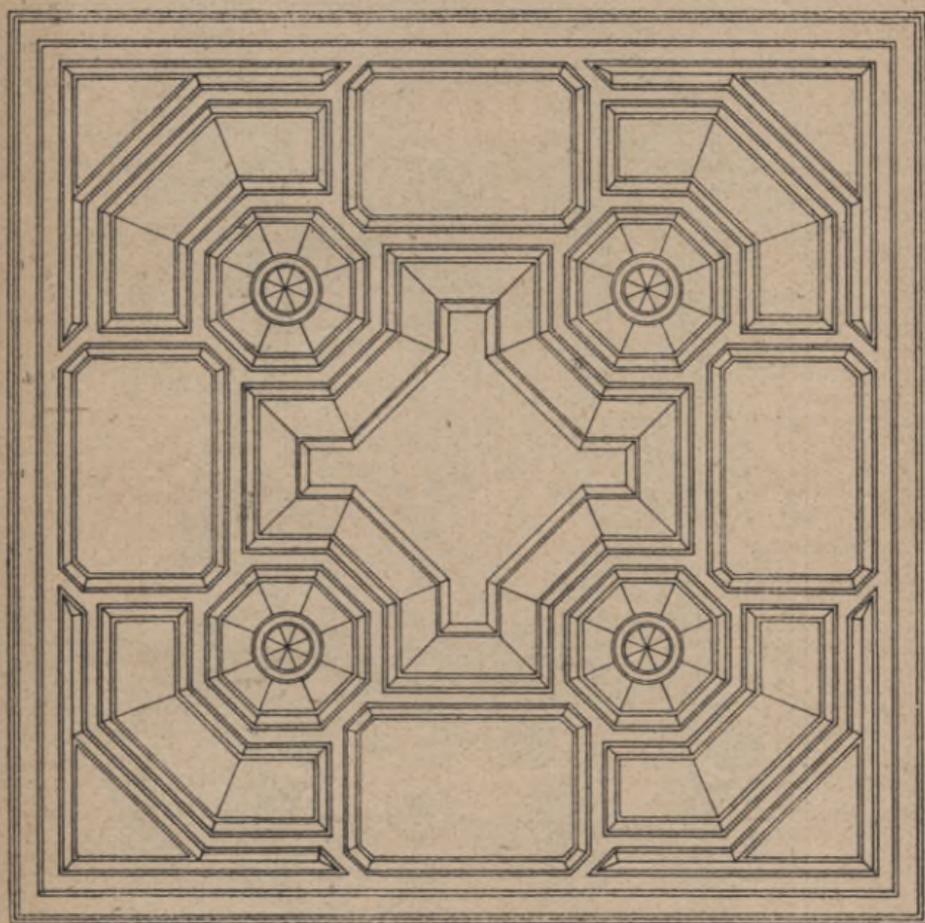


Fig. 274.

**Ornamente der Renaissance.**



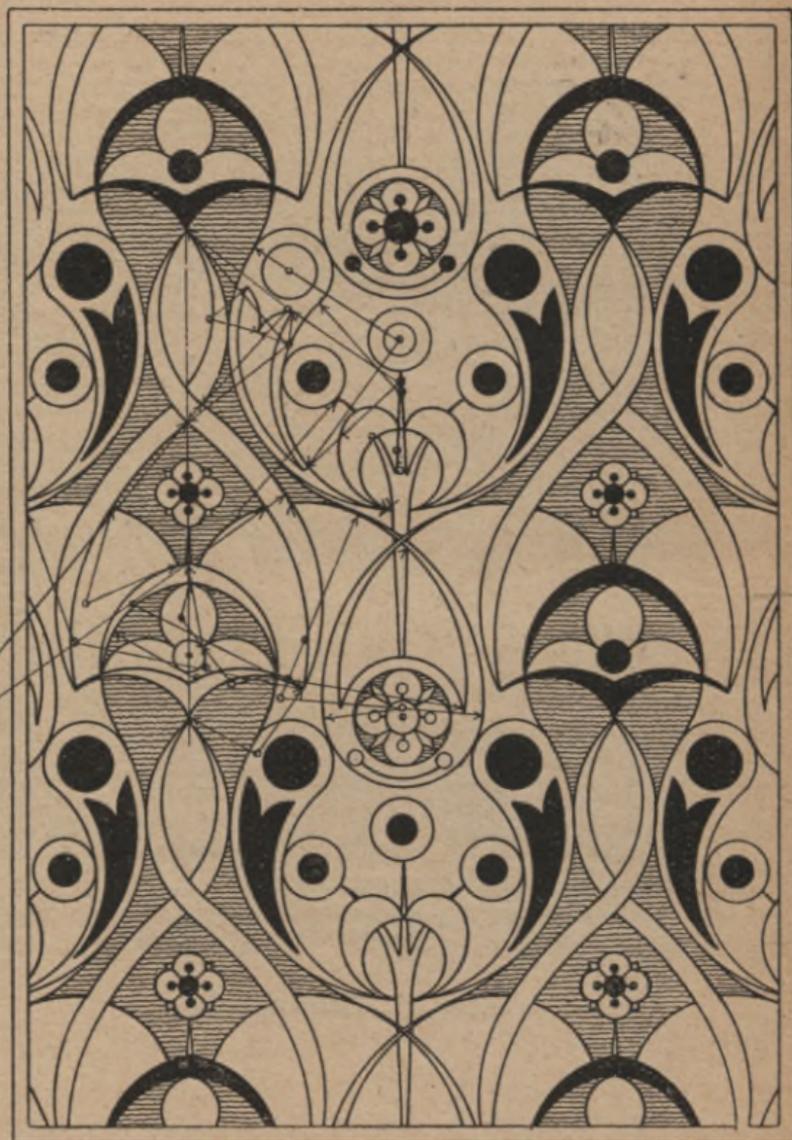
Tafel 16. Holzeinlage.



Tafel 17. Holzdecke.

MODERNE ORNAMENTE

TAPETE.

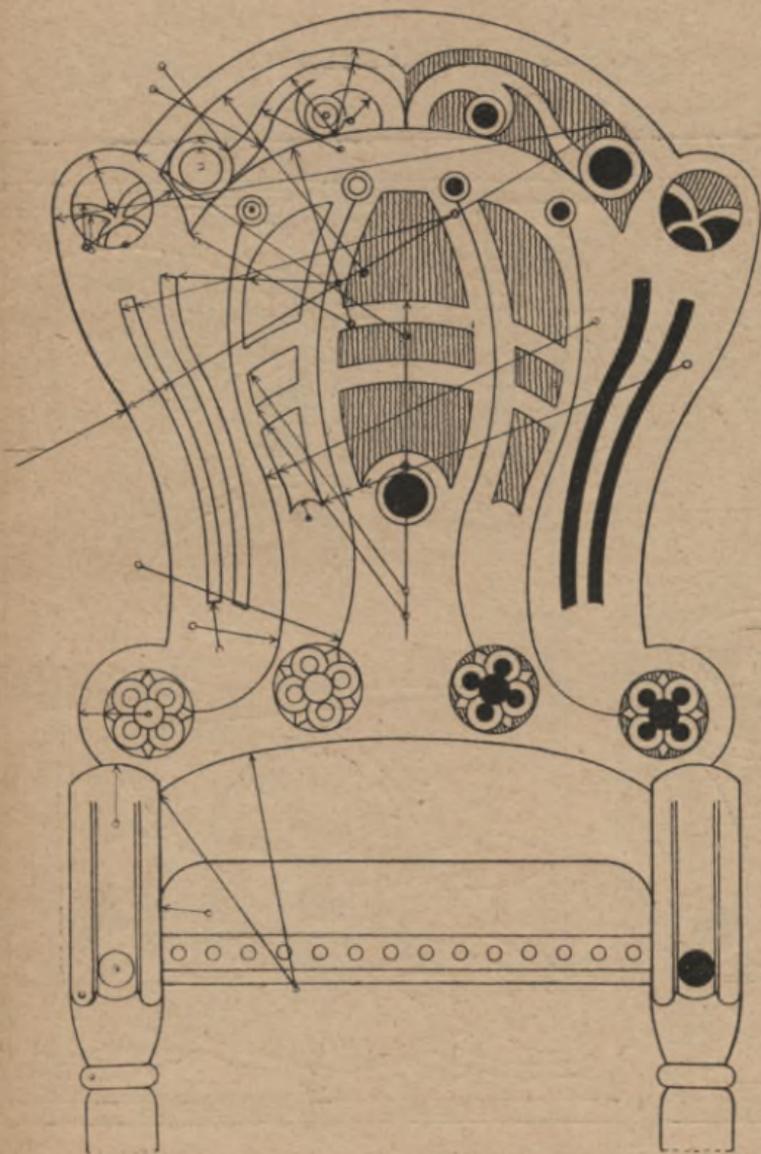


*Color & Druck*

Tafel 18.

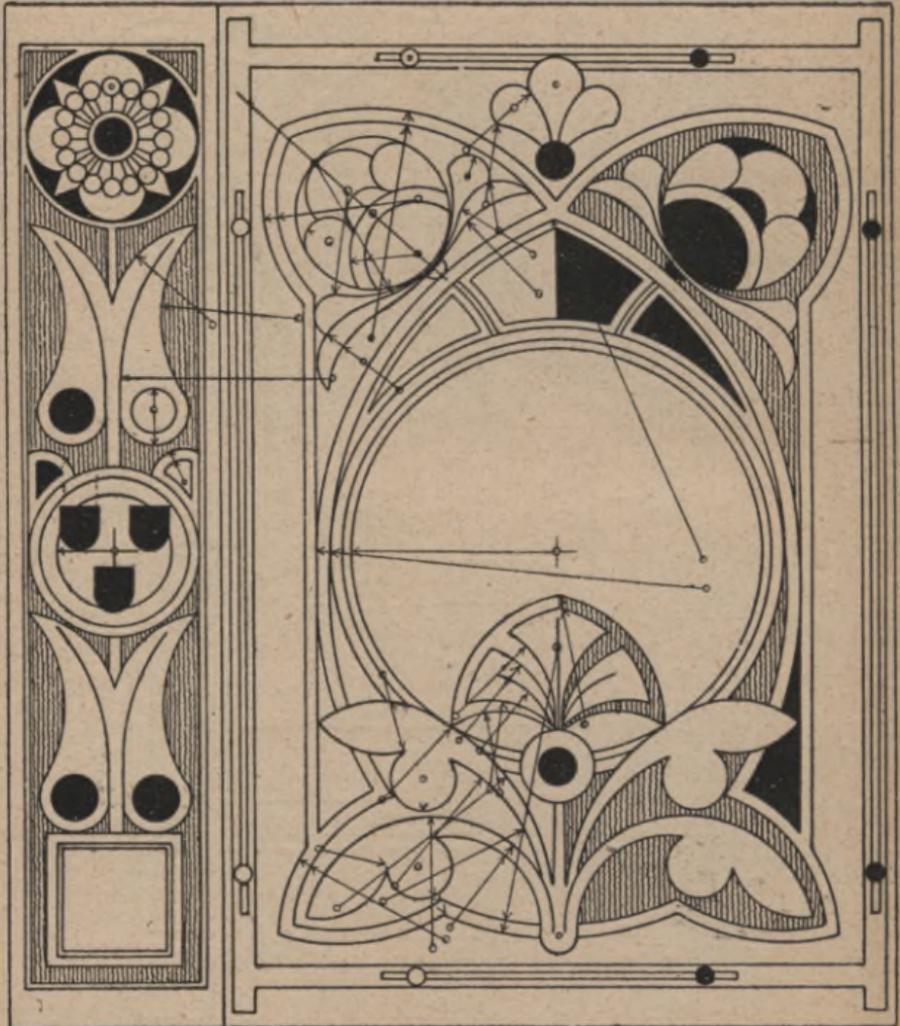
MODERNE ORNAMENTE

STUHLLEHNE.



Tafel 19.

BUCHHEINBAND.



*Göbel & Buschmann*

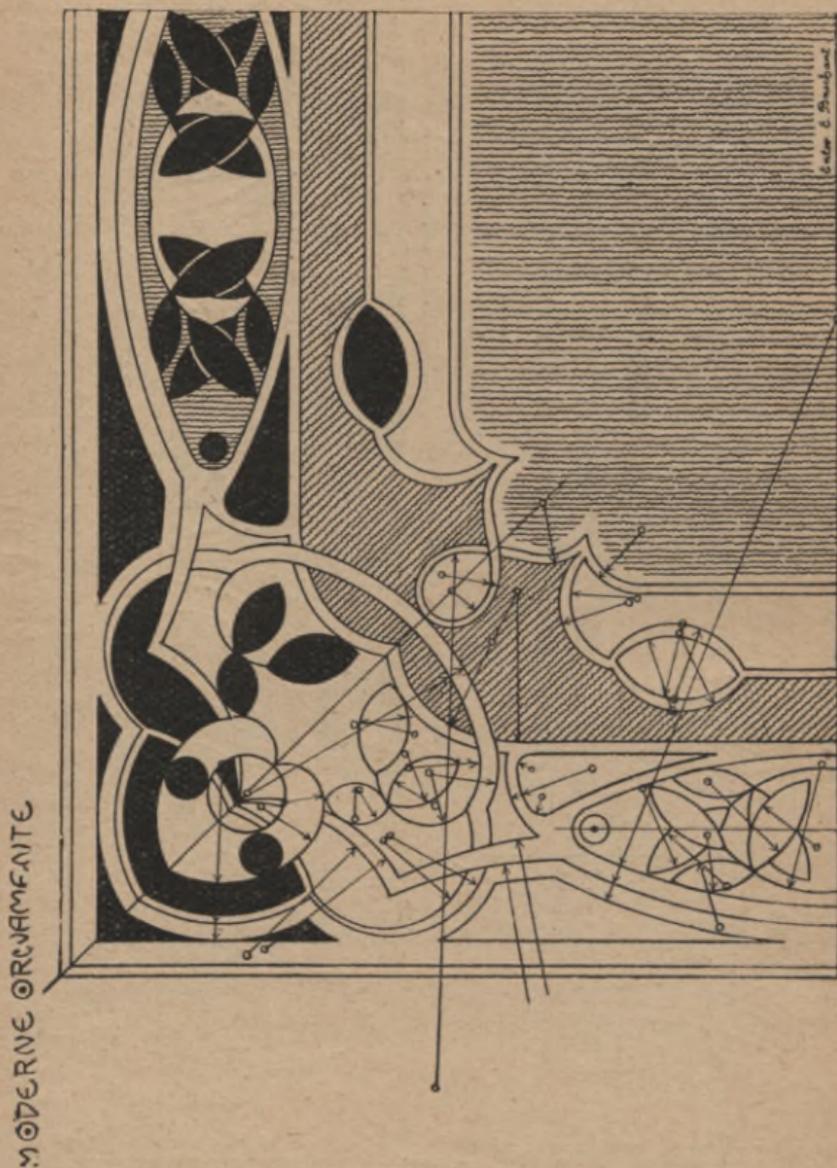
FRIESVERZIERUNGEN.

MODERNE ORNAMENTE



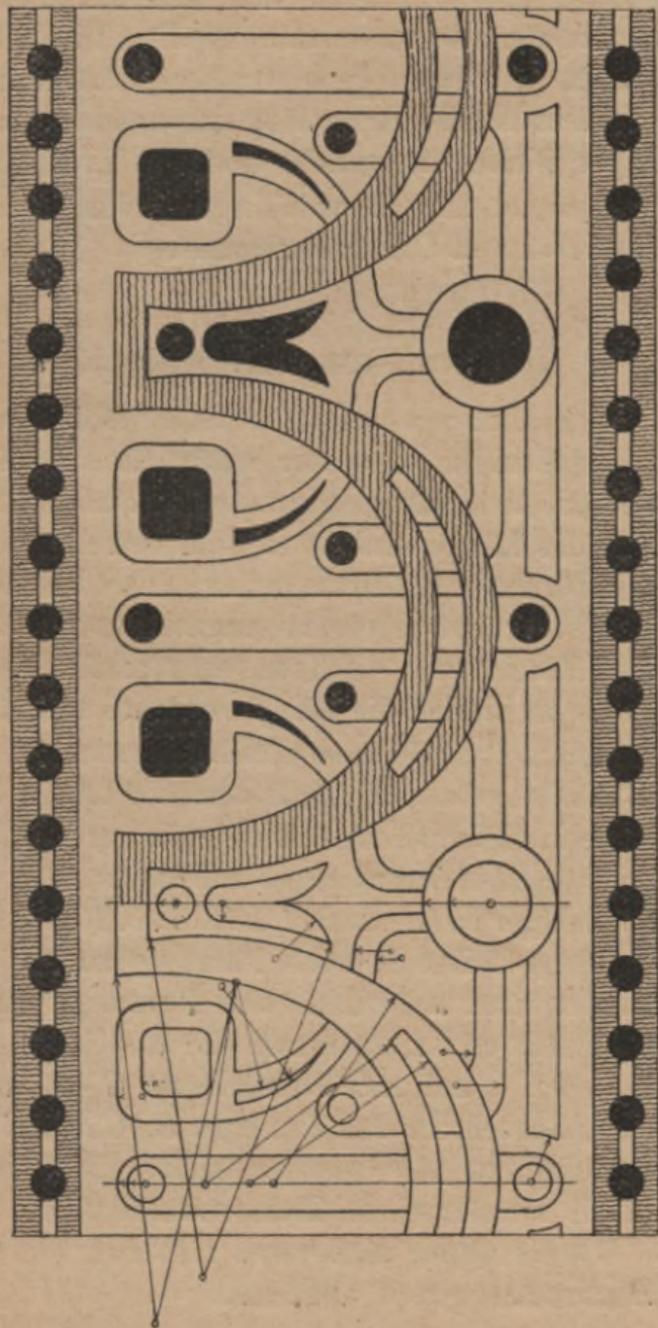
*Edo & Soubert*

Tafel 21.



FRIESVERZIERUNG

MODERNE ORNAMENTE



Prof. J. Schilling

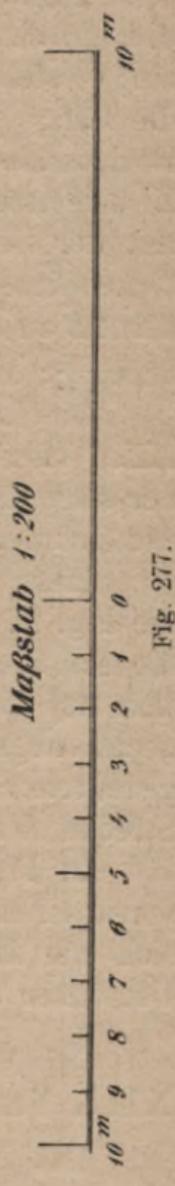
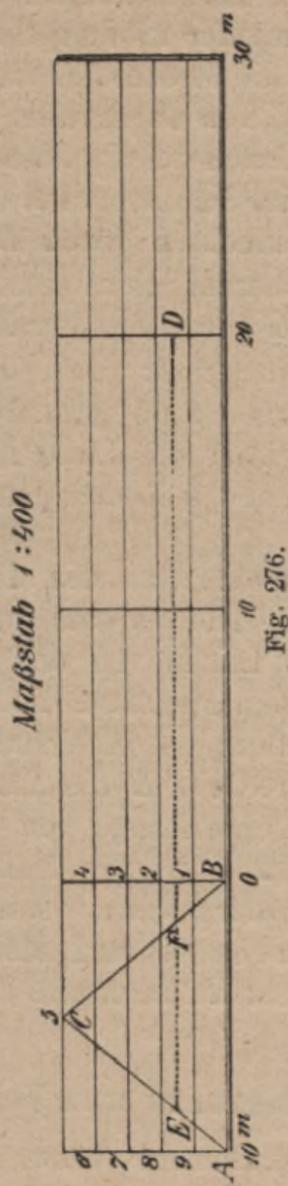
Tafel 23.

In den Fig. 268—274 und auf Tafel 16 u. 17 sind endlich einige Ornamente aus dem Mittelalter und der Renaissanceperiode zusammengestellt. Die Tafeln 18 bis 23 stellen moderne geometrische Ornamente dar. Aus allen diesen Abbildungen läßt sich ersehen, in welcher vielgestaltiger Weise die gerade und die Kreislinie verwendet worden ist zur Hervorbringung von mehr oder weniger interessanten Ornamentformen.

## XII. Konstruktion von Maßstäben.

Soll die Zeichnung eines Gegenstandes in einem bestimmten Verhältnisse zu seiner natürlichen Größe ausgeführt werden, so bedarf es hierzu eines Maßstabes. Auf diesem muß die Längeneinheit in dem betreffenden Verhältnis zur natürlichen Größe aufgetragen und dem üblichen Längenmaßsystem entsprechend eingeteilt sein. Zweckmäßig ist die Einrichtung des Transversalmaßstabes (siehe Fig. 275). Es ist hierbei die Längeneinheit, z. B. 10 m in  $\frac{1}{500}$  der natürlichen Größe, also gleich 2 cm, nach  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  abgetragen. Teilt man die Länge  $AB$  der Fig. 275 in zehn gleiche Teile, errichtet ferner im Punkte  $A$  eine Senkrechte zu  $AB$  und trägt auf dieser zehn gleiche Teile von beliebiger Größe nach 1, 2, 3, 4 . . . 10 ab, so kann man durch diese Teilungspunkte Parallele zu  $AF$  ziehen.

Verbindet man außerdem den Punkt  $G$  mit dem Punkte 9 auf  $AB$  und zieht durch die übrigen Teilungspunkte 8, 7, 6 . . . auf  $AB$  Parallele zu  $G \cdot 9$ , so erhält man, wenn außerdem in den Punkten  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$  noch Senkrechte zu  $AF$  gezogen sind, die Zeichnung der Fig. 275, welche einen Transversalmaßstab 1:500 darstellt. Mittels dieses Maßstabes läßt sich eine Länge bis auf Zentimeter genau abgreifen.



Soll z. B. die Länge 25 m abgegriffen werden, so setzt man den Zirkel mit der einen Spitze im Punkte  $D$ , d. i. 20 m, mit der zweiten Spitze im Punkte  $5$  auf  $AB$  ein; so stellt die Strecke  $5D$  die Länge von 25 m dar. Soll die Länge 26,8 m abgegriffen werden, so sucht man die Horizontale durch den Punkt  $8$  auf  $AG$  auf, setzt die eine Zirkelspitze im Schnittpunkte der genannten Horizontalen mit der Senkrechten durch  $D$  zu  $AB$  ein, die andere Zirkelspitze aber im Schnittpunkte  $H$  der durch den Punkt  $6$  auf  $AB$  zu  $9G$  gezogenen Parallelen mit der Horizontalen durch  $8$ ; man erhält dann die Strecke  $HJ = 26,8$  m.

Die Länge 33,65 ist dargestellt durch die Strecke  $KL$ . Hierbei ist die Linie  $KL$  in der Mitte zwischen der sechsten und siebenten Horizontalen schätzungsweise anzunehmen.

Eine andere Art des Transversalmaßstabes zeigt die Fig. 276. Hierbei sind nur fünf Horizontalen sowie die schrägen Linien  $AC$  und  $BC$  gezogen. Es lassen sich auf diesem Maßstabe die Längen bis auf Decimeter genau abgreifen; so bezeichnet beispielsweise die angedeutete Strecke  $DE$  die Länge 28,4 m, während die Strecke  $DF$  eine Länge von 21,6 m darstellt.

In Fig. 277 ist ein Maßstab 1:200 ohne Transversalteilung dargestellt. Auf diesem Maßstabe lassen sich die Längen bis auf Meter genau abgreifen, die Decimeter sind zu schätzen.

### XIII. Verkleinern und Vergrößern von Figuren.

Das Verkleinern bzw. Vergrößern von Figuren kann in verschiedener Art bewirkt werden.

Eine dieser Arten ist die Zuhilfenahme eines verjüngten Maßstabes. Sie wird mit Vorteil gebraucht,

wenn es sich darum handelt, einen Lageplan eines Geländes auf Grund von ausgeführten Messungen herzustellen, so wie die Fig. 278 zeigt. Es ist das Polygon  $ABCDE$  auf dem Felde abgesteckt und sind in demselben die Längen seiner Seiten und die von letzteren eingeschlossenen Winkel gemessen worden.

Die Längen sind dann in einem zu wählenden Maßstabe, im vorliegenden Falle im Maßstabe der Fig. 275, in Fig. 278 aufzutragen. In den Punkten  $A$  und  $B$  etc. sind die gemessenen Winkel anzutragen. Auf dem Felde sind innerhalb des Polygons  $ABCDE$  noch weitere Hilfslinien abgesteckt und diese als Achsen für die Aufnahme der einzelnen Geländepunkte benutzt worden, indem von den letzteren Punkten Senkrechte auf die genannten Achsen gefällt und deren Längen gemessen wurden. Die so gemessenen Längen sind in der Zeichnung in dem gewählten Maßstabe auf den entsprechenden Linien abzutragen. So ergibt sich die Zeichnung in Fig. 278. Diese Zeichnung ist im Maßstabe  $1:500$  der natürlichen Größe hergestellt. Fig. 279 zeigt eine Verkleinerung der Zeichnung in Fig. 278 und zwar im Maßstabe  $1:666\frac{2}{3}$ . Es werden alle Längen der Fig. 278 im Maßstabe  $1:666\frac{2}{3}$  in Fig. 279 auf den korrespondierenden Linien abgetragen.

Die Verkleinerung oder Vergrößerung kann auch mittels eines Diagrammes (s. Fig. 283) bewerkstelligt werden. Soll das Verhältnis der Verkleinerung zum Original ein gegebenes, z. B.  $5:8$  sein, so zieht man (s. Fig. 283) von einem beliebigen Punkte  $a$  aus einen Strahl  $aO$ , errichtet in  $O$  eine Senkrechte zu  $aO$  und trägt auf letzterer  $O5 = 5$  und  $O8$  und  $8$  Einheiten ab und zieht die Linien  $a5$ ,  $a8$ . Ist Fig. 281 die Originalfigur, so zieht man durch diese eine beliebige Gerade  $GG$  als Abszissenachse, welcher in der Ver-

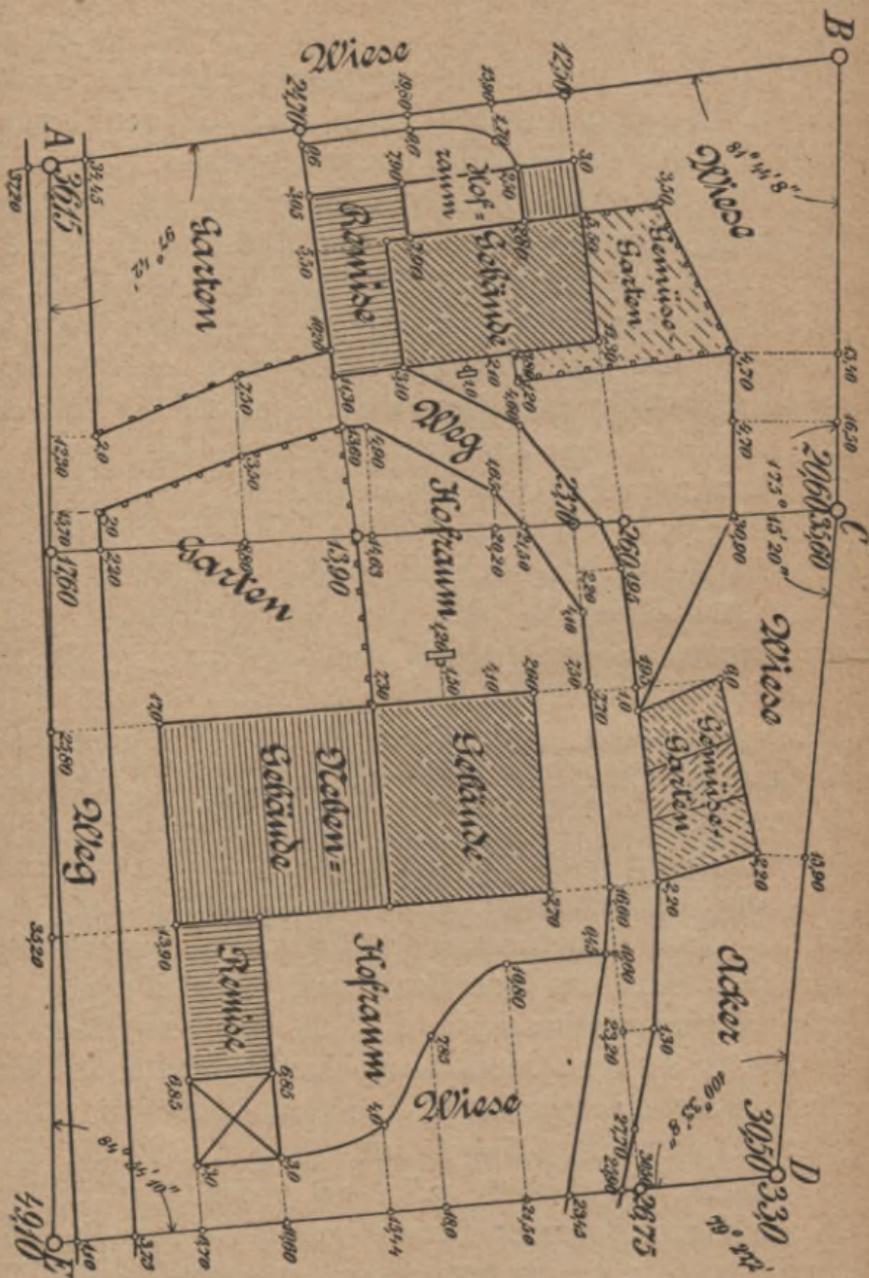


Fig. 278.

kleinerung (s. Fig. 282) die Gerade  $G_1 G_1$  entsprechen soll. Von den Ecken der Originalfigur fällt man Senkrechte zur Achse  $G$ , z. B. durch  $h$  die Senkrechte  $hh_1$ .

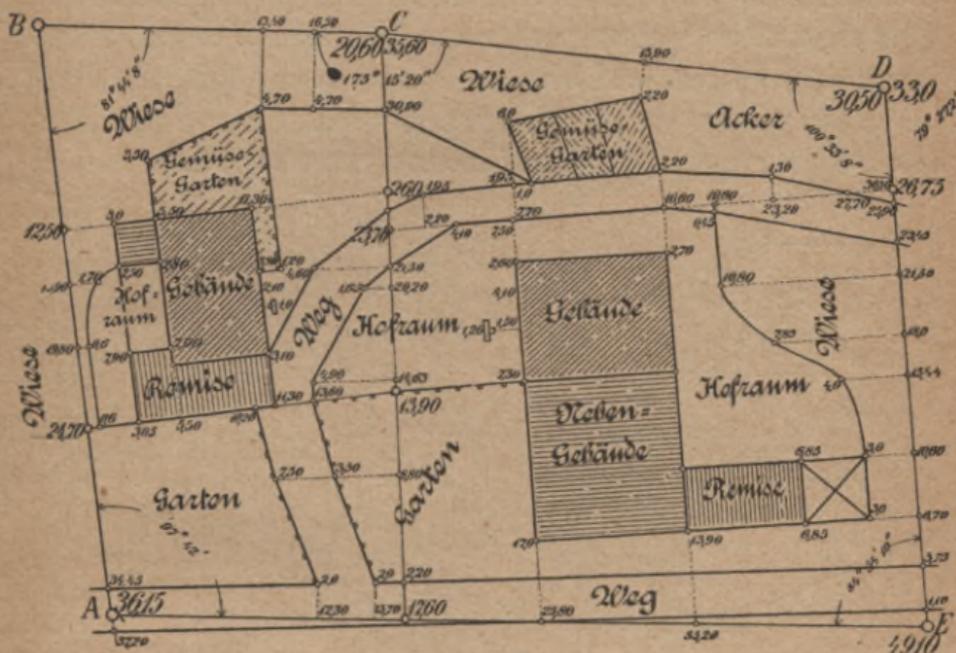


Fig. 279.

Maßstab 1:666 2/3

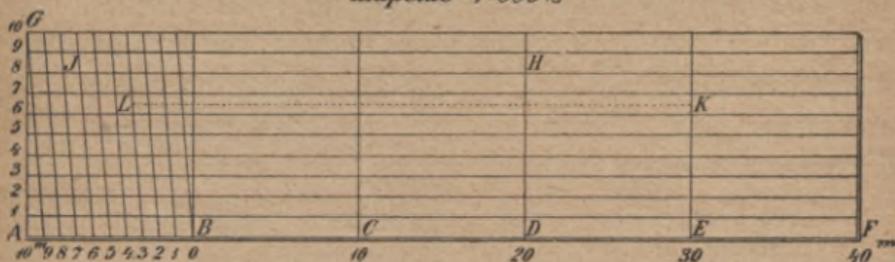


Fig. 280.

Die Strecken  $Gh_1$  und  $h_1h$  die Koordinaten des Punktes  $h$ , sind im Verhältnis 5:8 zu verkleinern und in Fig. 282 abzutragen, was dadurch geschieht, daß man die Strecke  $Gh_1$

in den Zirkel faßt und letzteren so bewegt, daß die eine Zirkelspitze auf dem Strahl  $aO$  (s. Fig. 283) verbleibt, während die andere auf den Strahl  $aS$  so zu liegen kommt, daß beide Zirkelspitzen in einer Parallelen zu  $OS$  sich befinden. Hat man diese Stellung gefunden, hält man die eine Zirkelspitze auf  $aO$  fest und bringt die zweite auf den Strahl  $aS$ , so daß wieder beide Zirkelspitzen in einer Parallelen zu  $OS$  liegen. Die so gefundene Strecke trägt man in

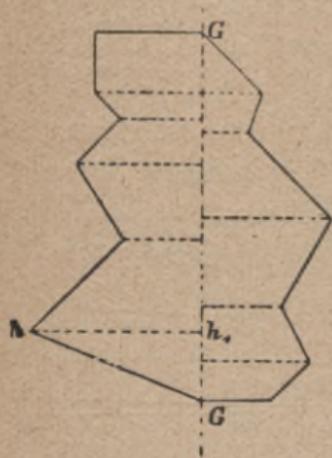


Fig. 281.

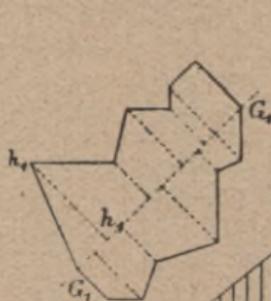


Fig. 282.

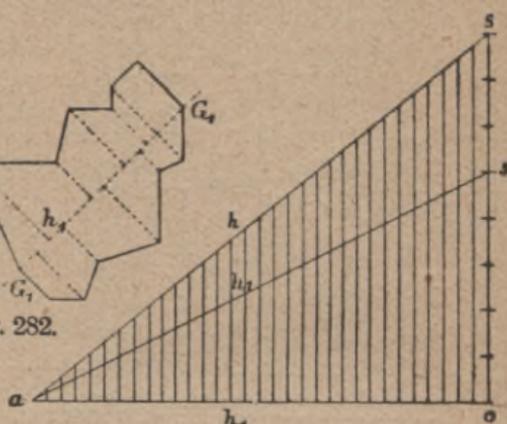
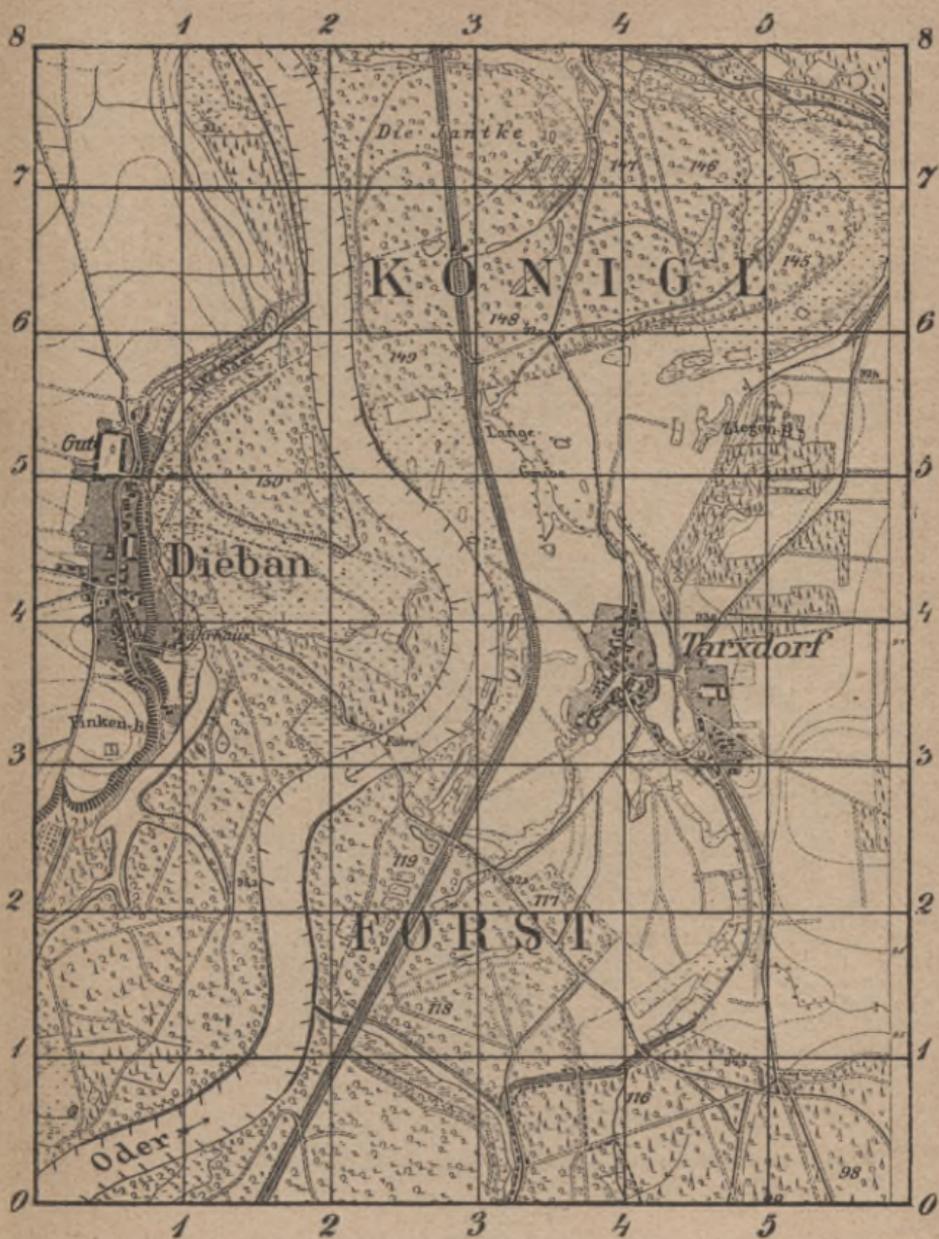


Fig. 283.

Fig. 282 von  $G_1$  aus nach  $G_1 h_1$  ab. Mit der Strecke  $h h_1$  (s. Fig. 281) verfährt man ebenso und erhält hierdurch die Länge  $h_1 h_1$  (s. Fig. 283), welche nach Fig. 282 abzutragen ist. Ganz ebenso verfährt man mit den Koordinaten eines jeden Punktes der Originalfigur.

Das Vergrößern und Verkleinern einer Figur kann auch mittels eines Quadratnetzes geschehen, mit dem man die Originalfigur und dementsprechend auch die Verkleinerung versieht. Ist z. B. Fig. 284 die Originalfigur, welche im Verhältnis 3:2 verkleinert werden soll, so versieht man die Fig. 284 mit einem Quadratnetz wie



Maßstab 1:37500

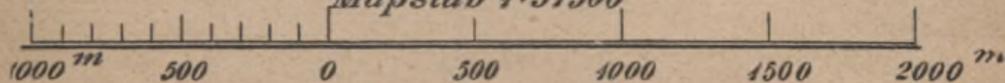


Fig. 284.



Fig. 285.

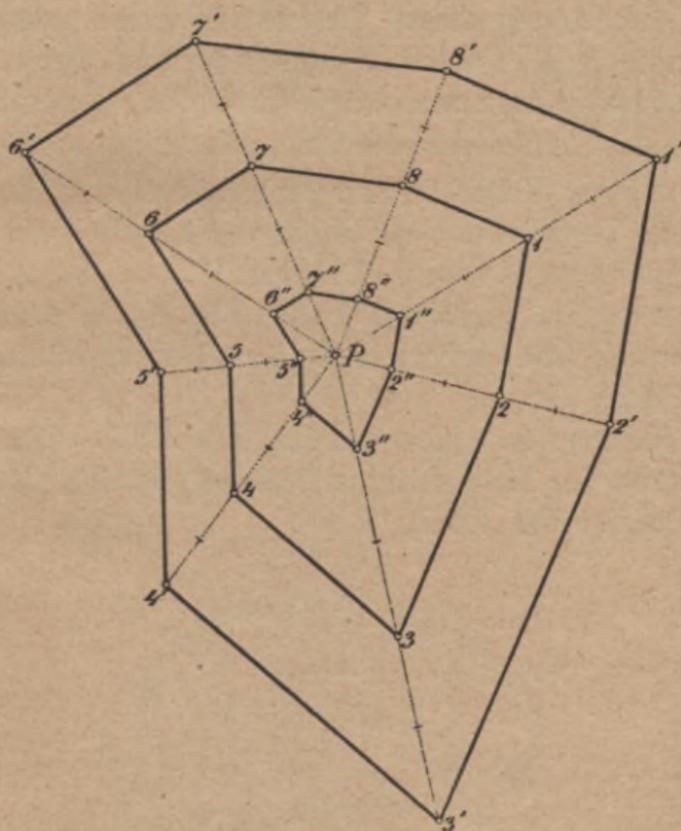
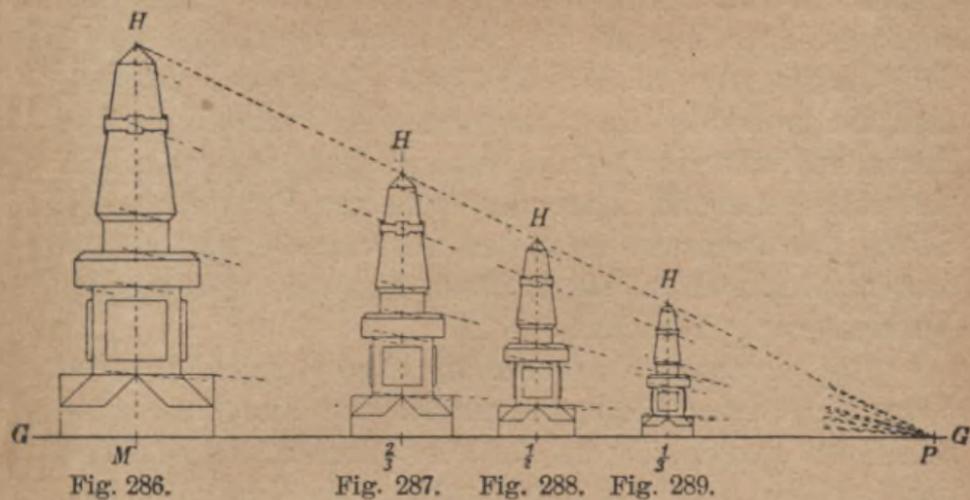
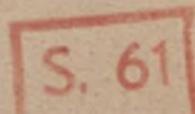


Fig. 290.

geschehen, und zeichnet (s. Fig. 285) dieses Quadratnetz ebenfalls, aber so, daß die Seite eines Quadrates nur  $\frac{2}{3}$  der Quadratseite in Fig. 284 ist. Nunmehr zeichnet man die innerhalb eines Quadrates der Originalfigur 284 liegenden Punkte in das entsprechende Quadrat der Fig. 285 ein, indem man die Lage der einzelnen Punkte zu den Seiten des Quadrates nach dem Augenmaße schätzt und dementsprechend in das in Rede stehende Quadrat der Verkleinerung überträgt.

Ein einfaches Verfahren für das Verkleinern oder Vergrößern einer Figur besteht in der Annahme eines beliebigen Punktes  $P$  als Pol und Ziehen von Strahlen nach diesem Pole von den Punkten des Originales aus. Werden die Längen dieser Strahlen in einem gegebenen Verhältnisse vom Punkte  $P$  aus verkürzt bzw. verlängert, so liefert die nunmehrige Verbindung der einzelnen Punkte in der Reihenfolge des Originales die gesuchte Verkleinerung bzw. Vergrößerung der Originalfigur. Fig. 290 zeigt dieses Verfahren. Das Polygon  $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$  stellt das Originalpolygon dar. Die Fig.  $1'' \dots 8''$  ist eine Verkleinerung im Verhältnisse  $1:3$ . Fig.  $1' \dots 8'$  ist eine Vergrößerung im Verhältnisse  $5:3$ . Der gewählte Pol ist der Punkt  $P$ .

In gleicher Art sind in den Fig. 287—289 Verkleinerungen der Originalfigur 286 dargestellt. Der gewählte Pol ist der Punkt  $P$ .



30 - 3

|S - 96



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301637



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296071