Meyer, Dr. phil. **Gustav Ferdinand**, ehem. Privatdocent an der Universität Göttingen, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen, mit vorzüglicher Berücksichtigung der von P. Gustav Lejeune-Dirichlet im Sommer 1858 gehaltenen Vorträge über bestimmte Integrale. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. (XVIII u. 628 S.) gr. 8. 1871. geh. n. ℳ 12. —

Dieses Werk steht zu den Dirichletschen Vorlesungen über bestimmte Integrale seinem Ursprunge nach in demselben Verhältnis wie die von Hattendorff herausgegebenen Vorlesungen Riemanns über partielle Differentialgleichungen zu den gleichnamigen Dirichletschen Vorträgen. Ebenso wie diese mit nur geringen Abweichungen vollständig von Riemann wiedergegeben und dann durch bedeutende Zusätze vermehrt worden sind, ebenso hat der Verfasser der Theorie der bestimmten Integrale eine vollständige Wiedergabe der unvergleichlich schönen, strengen und doch so einfachen Dirichletschen Behandlungsweise der Theorie der bestimmten Integrale versucht und überall Betrachtungen hinzugefügt, die Dirichlet wegen der Kürze der Zeit in jener Sommervorlesung entweder eben nur angedeutet, oder ganz unberührt gelassen hat. Außer dieser letzten Vorlesung Dirichlets sind aber auch die Vorlesungen des genialen Forschers und Lehrers über partielle Differentialgleichungen, über die Kräfte, welche im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirken und seine auf Integralrechnung bezüglichen Abhandlungen einer sorgfältigen Berücksichtigung unterzogen worden.

Pasch, Dr. **Moritz**, Professor an der Universität zu Gießen, Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. (VIII u. 188 S. Mit Figuren im Text.) gr. 8. 1882. geh. n. ℳ 3. 20.

Vielleicht wird für manche Zwecke eine Darstellung brauchbar sein, welche, wie die vorliegende, über die einleitenden Teile der Differential- und Integralrechnung nicht hinausgeht, ihren Gegenstand jedoch möglichst genau und ausführlich zu behandeln sucht. Die Schrift ist im Anschluß an Vorlesungen über Infinitesimalrechnung und Funktionentheorie (hauptsächlich im Wintersemester 1878/79) ausgearbeitet worden. Da sie nur als Ergänzung zu Vorlesungen oder Lehrbüchern dienen soll, wurde der Stoff entsprechend begrenzt; so blieben z. B. die Differentialquotienten höherer Ordnung außer Betracht, ebenso die Anwendungen der Theorie; die Tangenten der ebenen Kurven, sowie Quadratur und Rektifikation sind nur herangezogen, um die Begriffsbildung zu erläutern. Für die trigonometrischen Funktionen kann die elementargeometrische Definition bei der analytischen Untersuchung nicht den Ausgangspunkt bilden; indem jene Funktionen aus dem Kreisbogenintegral erzeugt wurden, bot sich zugleich Gelegenheit, den Begriff des Integrationsweges zu erweitern und die Periodizität ohne Zuziehung von komplexen Variabeln zu erklären. Zum Schluß werden die unendlichen Reihen, insbesondere die Potenzreihen besprochen und die Reihenentwickelungen der elementaren Funktionen gegeben.

LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

VON

J.-A. SERRET

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS

DEUTSCH BEARBEITET

VON

AXEL HARNACK

DR., UND PROFESSOR AM POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

ZWEITER BAND: ZWEITE HÄLFTE.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1885.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt

der

zweiten Hälfte des zweiten Bandes.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Zweites Kapitel.

Über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen.

Drittes Kapitel.

Über die Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

Viertes Kapitel.

Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Fünftes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen durch Reihenentwickelung oder durch bestimmte Integrale.

Sechstes Kapitel.

Die partiellen und die totalen Differentialgleichungen.

Siebentes Kapitel.

Über die Methode der Variationsrechnung.

Anhang.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Die Differentialgleichungen.

614. Jede Gleichung, welche mehrere Variabele enthält, und in welcher die Differentiale oder die Ableitungen von irgend welchen Ordnungen vorkommen, heisst allgemein eine *Differentialgleichung*. Hängen die Variabelen, welche in eine Differentialgleichung eingehen, nur von einer einzigen unter ihnen ab, so ist die Gleichung eine *gewöhnliche Differentialgleichung*. Wenn dagegen die Variabelen Funktionen von mehreren unabhängigen sind, so heisst die Gleichung eine *partielle* oder eine *totale Differentialgleichung*, je nachdem die partiellen Ableitungen oder die totalen Differentiale der Variabelen, welche als abhängige zu betrachten sind, auftreten.

Wir werden uns in diesem Kapitel nur mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen. Solch eine Gleichung kann, wie wir eben sagten, nur *eine* unabhängige Variabele, dagegen eine oder mehrere abhängige Variabele, sowie gewisse Ableitungen dieser letzteren enthalten. Die höchste Ordnung unter diesen Ableitungen heisst die *Ordnung* der Differentialgleichung.

Die Zahl der Differentialgleichungen, welche man zu betrachten hat, ist im allgemeinen gleich der Anzahl der abhängigen Variabelen. Ist diese Zahl grösser als 1, so bilden die Gleichungen ein *System von simultanen Differentialgleichungen* (§ 53).

615. Ist eine Differentialgleichung von irgend welcher Ordnung oder ein System von solchen Gleichungen gegeben, so kann man dafür stets ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung substituieren, indem man neue Variabele einführt und die Zahl der Gleichungen vermehrt, wie wir schon im § 70 gezeigt haben. Denn wenn man mit x die unabhängige Variabele bezeichnet, mit y eine der abhängigen und mit m die höchste Ordnung der Ableitungen von y, welche in der gegebenen Gleichung oder dem gegebenen Systeme vorkommen, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \dots \frac{dy^{(m-2)}}{dx} = y'^{m-1)}$$

zu setzen. Diese Gleichungen verbindet man mit den gegebenen, indem man in diesen

$$y', \quad y'', \dots y^{(m-2)}, \quad y^{(m-1)}, \quad \frac{dy^{(m-1)}}{dx}$$

an Stelle von

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \quad \frac{d^m y}{dx^m}$$

setzt.

Desgleichen hat man, wenn n die höchste Ordnung unter den Ableitungen einer anderen Variabelen z in dem Systeme bezeichnet, die neuen Gleichungen:

$$\frac{dz}{dx} = z', \quad \frac{d^2z}{dx^2} = z'', \dots \frac{dz^{(n-2)}}{dx} = z^{(n-1)}$$

einzuführen, nachdem man

$$z', \quad z'', \dots z^{(n-1)}, \quad \frac{dz^{n-1}}{dx}$$

an Stelle von

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \dots \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}, \quad \frac{d^n z}{dx^n}$$

gesetzt hat.

Fährt man so fort, so erhält man ein System, welches dem gegebenen äquivalent ist, und in welchem keine Gleichung von höherer als der ersten Ordnung ist.

616. Wir betrachten nun ein System von n verschiedenen Differentialgleichungen erster Ordnung, in dem, ausser der unabhängigen Variabelen x, n andere Variabele $y, z, \dots u, v$ nebst den Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ vorkommen. Dabei können nun zwei Fälle eintreten: Entweder es bestimmen die n gegebenen Gleichungen die Werte der n Ableitungen

$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$, welche also gegebene Funktionen der Variabelen $x, y, z, \dots u, v$ sind; oder es lässt sich durch Kombination der gegebenen Gleichungen eine bestimmte Anzahl i von Gleichungen bilden, welche nur die Variabelen $x, y, z, \dots u, v$, aber nicht die Ableitungen enthalten, und die an Stelle von i Gleichungen des Systemes treten. Man erkennt jedoch, dass dieser zweite Fall der eines zusammengesetzten Systemes von $n - i$ simultanen Differentialgleichungen ist, welches verbunden ist mit i Gleichungen zwischen den Variabelen allein; durch eine Elimination von i Variabelen kann er auf den ersten zurückgeführt werden. Denn die i Gleichungen zwischen $x, y, z, \dots u, v$ bestimmen i der Variabelen $y, z, \dots u, v$ als Funktionen der übrigen; substituiert man ihre Werte in die $n - i$ Differentialgleichungen, so erhält man ein System von $n - i$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen der Variabelen x und $n - i$ abhängigen Variabelen.

Demnach reduzieren sich alle gewöhnlichen Differentialgleichungen auf ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $n + 1$ Variabelen, durch welches die Werte der Ableitungen der n abhängigen Variabelen als Funktionen aller Variabelen bestimmt werden. Sieht man hierbei von den Schwierigkeiten der Elimination ab, so erhalten die Gleichungen des Systemes, aufgelöst nach den Ableitungen, die Form:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \dots u, v),$$
$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \dots u, v),$$
$$\dots \dots \dots \dots$$
$$\frac{du}{dx} = f_{n-1}(x, y, z, \dots u, v),$$
$$\frac{dv}{dx} = f_n(x, y, z, \dots u, v).$$

$f_1, f_2, \dots f_n$ sind bestimmte Funktionen von $x, y, z, \dots u, v$. Ist die Zahl der Variabelen des simultanen Systemes zwei, so besteht es aus einer Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Die Integralgleichungen.

617. Es sei nun

$$1)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Variabelen x und y. Ist die Funktion $f(x, y)$ nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ für alle reellen und komplexen Werte von x und y, die innerhalb gewisser Bereiche liegen, eindeutig und stetig, so existiert, wie wir später beweisen werden, nur eine einzige Funktion $F(x, x_0, y_0)$, welche sich für $x = x_0$ auf den Wert y_0 reduziert und welche die Eigenschaft hat, dass die Gleichung 1) erfüllt wird, wenn man

$$2)\qquad y = F(x, x_0, y_0)$$

setzt. Dabei bezeichnen x_0 und y_0 willkürliche feste Werte, die innerhalb der für x und y geltenden Grenzen gelegen sind, und $F(x, x_0, y_0)$ ist eine Funktion von x, die innerhalb eines angebbaren Bereiches eindeutig und stetig ist. Die Gleichung 2) heisst das *vollständige oder allgemeine Integral* der Gleichung 1) in diesem Bereiche; man kann dabei x_0 als irgend welchen bestimmten Wert und y_0 als eine willkürliche Konstante betrachten.

Hat man auf irgend einem Wege eine Gleichung

$$3)\qquad \Phi(x, y, C) = 0$$

zwischen den Variabelen x, y und einer willkürlichen Konstante C ermittelt, so dass man hieraus einen Wert von y als Funktion von x bestimmen kann, welcher die Gleichung 1) befriedigt, so fällt die Gleichung 3) mit dem vollständigen Integrale zusammen, vorausgesetzt, dass man die Konstante C so bestimmen kann, dass

$$\Phi(x_0, y_0, C) = 0$$

wird, dass also der Wert von y, der aus der Gleichung 3) folgt, für $x = x_0$ gleich y_0 wird.

Da die Gleichung 1) eine identische wird, wenn man daselbst y und $\frac{dy}{dx}$ durch die Werte ersetzt, welche aus

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

folgen, so muss sie auch aus der Elimination der Konstanten C zwischen diesen beiden Gleichungen hervorgehen. Also haben alle Differentialgleichungen erster Ordnung denselben Ursprung (§ 51).

618. Wir betrachten nun ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabelen $x, y, z, \ldots u, v$, nämlich:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \ldots u, v), \\ \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \ldots u, v), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dv}{dx} = f_n(x, y, z, \ldots u, v). \end{cases}$$

Sind die rechten Seiten dieser Gleichungen ebenso wie ihre partiellen Ableitungen nach den Variabelen eindeutige und stetige Funktionen, wenn die Variabelen reelle und komplexe Werte innerhalb gewisser Bereiche annehmen, und bedeuten $x_0, y_0, z_0, \ldots u_0, v_0$ willkürliche bestimmte Grössen in diesen Bereichen, so existiert, wie wir später sehen werden, immer nur *ein* System von Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ der Variabelen x und der Konstanten $x_0, y_0, \ldots u_0, v_0$, die sich für $x = x_0$ bezüglich auf die Werte $y_0, z_0, \ldots u_0, v_0$ reduzieren und die so geartet sind, dass die Gleichungen des Systemes 1) befriedigt werden, wenn man

$$2)\quad \begin{cases} y = F_1(x, x_0, y_0, \ldots u_0, v_0), \\ z = F_2(x, x_0, y_0, \ldots u_0, v_0), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v = F_n(x, x_0, y_0, \ldots u_0, v_0) \end{cases}$$

setzt. Dieses zweite System bildet das System der *vollständigen Integralgleichungen* oder das *Integralsystem* der Gleichungen 1). Für x_0 kann man einen bestimmten beliebig gewählten Wert annehmen; $y_0, z_0, \ldots u_0, v_0$ sind n willkürliche Konstanten. Hat man auf irgend welchem Wege ein System von n Gleichungen zwischen den Variabelen $x, y, z, \ldots u, v$ und n willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ erhalten, nämlich:

$$
3) \qquad \left\{\begin{array}{l}
\Phi_1(x, y, z, \ldots u, v, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0, \\
\Phi_2(x, y, z, \ldots u, v, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\Phi_n(x, y, z, \ldots u, v, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0,
\end{array}\right.
$$

und erfüllen die aus diesen Gleichungen berechneten Funktionen $y, z, \ldots u, v$ die Differentialgleichungen 1), so ist dieses System 3) mit dem Integralsystem identisch, falls man den Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ solche Werte beilegen kann, dass die Funktionen $y, z, \ldots v$ bezüglich gleich werden den willkürlichen Werten $y_0, z_0 \ldots v_0$, sobald man $x = x_0$ annimmt.

Diese letzte Bedingung ist erfüllt, wenn die Gleichungen 3) die Grössen $C_1, C_2, \ldots C_n$ als Funktionen der Variabelen $x, y, z, \ldots v$ bestimmen lassen, nämlich:

$$
4) \qquad \left\{\begin{array}{l}
C_1 = \Psi_1(x, y, z, \ldots u, v), \\
C_2 = \Psi_2(x, y, z, \ldots u, v), \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
C_n = \Psi_n(x, y, z, \ldots u, v).
\end{array}\right.
$$

Dieses System ist nichts anderes als das Integralsystem in besonderer Form. Jede der Gleichungen, aus denen es besteht, enthält nur *eine* willkürliche Konstante; sie heisst *ein Integral* des Systems 1).

Cauchy hat zuerst in strenger Weise die Existenz der Integralgleichungen festgestellt; sein Beweis für diesen fundamentalen Satz ist jedoch äusserst kompliziert. In einfacherer Weise und mittelst ganz anderer Betrachtungen haben die Herren Briot und Bouquet den Satz bewiesen. Wir geben hier ihre Entwickelung, die in einer Abhandlung im 36. Bande des *Journal de l'École Polytechnique* veröffentlicht ist. Dieselbe beruht auf einigen von Cauchy gegebenen Sätzen aus der Theorie der komplexen Funktionen, die wir zunächst aufstellen wollen.

Die Existenz der Integralgleichungen für eine Differentialgleichung erster Ordnung oder für ein System derselben lässt sich, wenn nur reelle Werte der Variabelen betrachtet werden, unter allgemeineren Voraussetzungen über die Funktionen $f_1, \dots f_n$ darthun. Dieser Beweis ist von Herrn Lipschitz geführt worden („Lehrbuch der Analysis", Bd. 2, pag. 500).

Hilfssätze aus der Funktionentheorie.

619. Erster Satz. *Es sei* x_0 *eine bestimmte Konstante,* $x = x_0 + \varrho e^{i\omega}$ *eine komplexe Variabele,* $f(x)$ *eine eindeutige Funktion dieser Variabelen im engeren Sinne, welche also stetig ist und eine bestimmte stetige Ableitung besitzt, solange der Modul von* r *nicht grösser ist als eine bestimmte Grenze* R. *Bezeichnet nun* M *den grössten Wert, welchen der Modul von* $f(x)$ *annimmt, während* ϱ *von* 0 *bis* R *und* ω *von* 0 *bis* 2π *variiert, so ist*

$$\operatorname{mod}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_0 \leqq n!\,\frac{M}{R^n};$$

$\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_0$ *bedeutet dabei den Wert, welchen die* n^{te} *Ableitung von* $f(x)$ *für* $x = x_0$ *besitzt.*

Denn es ist (§ 500):

$$\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_0 = n!\, R^{-n}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ni\omega} f(x_0 + Re^{i\omega})\, d\omega.$$

Da nun der Modul einer Summe niemals grösser sein kann, als die Summe aus den Moduln der Summanden, so ist auch

$$\operatorname{mod}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right] \leqq n!\, R^{-n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{mod}\,[f(x_0 + Re^{i\omega})]\, d\omega,$$

und weil $\operatorname{mod}[f(x_0 + Re^{i\omega})]$ nicht grösser wird als M, so ist der Wert des Integrales nicht grösser als $M 2\pi$, woraus die Behauptung folgt.

620. Zweiter Satz. *Es seien* $x_0, y_0, z_0, \dots$ m *bestimmte Konstanten,* $x = x_0 + \varrho e^{i\omega}$, $y = y_0 + \varrho' e^{i\omega'}$, $z = z_0 + \varrho'' e^{i\omega''} \dots$ m *komplexe Variabele,* $f(x, y, z, \dots)$ *eine bestimmte Funktion der-*

selben, welche stetig ist und deren erste partielle Ableitungen in Bezug auf jede Variabele ebenfalls stetige Funktionen sind, solange die Moduln ϱ, ϱ', ϱ'' ... *bezüglich nicht grösser werden als die bestimmten Grenzwerte* R, R′, R″... *Bezeichnet* M *den grössten Wert, welchen der Modul von* f(x, y, z ...) *erhält, wenn* ϱ *von* 0 *bis* R, ϱ' *von* 0 *bis* R′, ϱ'' *von* 0 bis R″ *u. s. w., und die Winkel* ω, ω', ω'' ... *von* 0 *bis* 2π *variieren, so ist:*

$$\operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{n+n'+n''\cdots} f(x, y, z \ldots)}{\partial x^n \, \partial y^{n'} \, \partial z^{n''} \ldots}\right]_0 \leqq n!\, n'!\, n''! \cdots \frac{M}{R^n R'^{n'} R''^{n''} \ldots}.$$

Der Index 0 *soll ausdrücken, dass man nach den Differentiationen* x, y, z ... *durch die Werte* x_0, y_0, z_0 ... *zu ersetzen hat.*

Denn wenn man auf $f(x, y, z \ldots)$, betrachtet als Funktion der einzigen Variabelen x, die im vorigen Satze erwähnte Formel anwendet, so erhält man:

$$\frac{R^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, y, z \ldots)}{\partial x^n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\omega} f(x + Re^{i\omega}, y, z, \ldots)\, d\omega,$$

wobei x durch x_0 zu ersetzen ist. Differentiiert man n' mal nach y, wobei den Voraussetzungen zufolge die Differentiation unter dem Integrale vollzogen werden kann, weil die partiellen Ableitungen der Funktion f in Bezug auf y ebenfalls stetige Funktionen werden, so folgt:

$$\frac{R^n}{n!} \frac{\partial^{n+n'} f(x, y, z \ldots)}{\partial x^n \, \partial y^{n'}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\omega} \frac{\partial^{n'} f(x + Re^{i\omega}, y, z \ldots)}{\partial y^{n'}}\, d\omega.$$

Andererseits ist nach der schon angewandten Formel:

$$\frac{R'^{n'}}{n'!} \frac{\partial^{n'} f(x + Re^{i\omega}, y, z \ldots)}{\partial y^{n'}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n'i\omega'} f(x + Re^{i\omega}, y + R'e^{i\omega'}, z \ldots)\, d\omega',$$

wobei sowohl $x = x_0$, als auch $y = y_0$ zu setzen ist. Also ist auch:

$$\frac{R^n}{n!} \frac{R'^{n'}}{n'!} \frac{\partial^{n+n'} f(x, y, z \ldots)}{\partial x^n \, \partial y^{n'}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(n\omega + n'\omega')i} f(x + Re^{i\omega}, y + R'e^{i\omega'}, z \ldots)\, d\omega\, d\omega',$$

wobei wiederum $x = x_0$, $y = y_0$ zu setzen ist.

Man erkennt, dass man durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu der Gleichung gelangt:

$$\frac{R^n}{n!}\frac{R'^{n'}}{n'!}\frac{R''^{n''}}{n''!}\cdots\left[\frac{\partial^{n+n'+n''+\cdots}f(x,y,z\ldots)}{\partial x^n\,\partial y^{n'}\,\partial z^{n''}\ldots}\right]_0$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\cdots\int_0^{2\pi} e^{-(n\omega+n'\omega'+n''\omega''\ldots)i}f(x_0+Re^{i\omega},y+R'e^{i\omega'},\ldots)\,d\omega\,d\omega'\,d\omega''\ldots,$$

in welcher die rechte Seite ein vielfaches Integral von der Ordnung $m = n + n' + n'' + \ldots$ ist. Es ist kaum nötig hinzuzufügen, dass jedes Produkt wie $n! = 1 . 2 \ldots n$ sich auf die Einheit reduziert, wenn $n = 0$ ist. Nun ist der Modul der Funktion unter dem vielfachen Integrale nicht grösser als M; folglich wird auch der Modul des Integrales nicht grösser als

$$\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\cdots\int_0^{2\pi} M\,d\omega\,d\omega'\,d\omega''\ldots,$$

d. h. nicht grösser als M, womit der Satz bewiesen ist.

621. Dritter Satz. *Sind dieselben Bedingungen wie im vorigen Satze erfüllt, so sind alle partiellen Ableitungen der Funktion:*

$$\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}\ldots)=\frac{\mathrm{M}}{\left(1-\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}{\mathrm{R}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{y}-\mathrm{y}_0}{\mathrm{R}'}\right)\left(1-\frac{\mathrm{z}-\mathrm{z}_0}{\mathrm{R}''}\right)\cdots}$$

für $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$, $\mathrm{y}=\mathrm{y}_0$, $\mathrm{z}=\mathrm{z}_0\ldots$ *gleich den Grenzwerten, welche in jenem Satze für die Moduln der entsprechenden partiellen Ableitungen der Funktion* $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}\ldots)$ *angegeben wurden.*

Differentiiert man nämlich die Funktion $\varphi(x, y, z\ldots)$ n-mal nach x, n'-mal nach y, n''-mal nach z u. s. w., so folgt:

$$\frac{\partial^{n+n'+n''\cdots}\varphi(x,y,z\ldots)}{\partial x^n\,\partial y^{n'}\,\partial z^{n''}\ldots}$$

$$=n!\,n'!\,n''!\ldots R^{-n}R'^{-n'}R''^{-n''}\cdots\frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)^{n+1}\left(1-\frac{y-y_0}{R'}\right)^{n'+1}\left(1-\frac{z-z_0}{R''}\right)^{n''+1}\cdots},$$

und setzt man $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0\ldots$, so wird:

$$\left[\frac{\partial^{n+n'+n''+\cdots}\varphi(x,y,z\ldots)}{\partial x^n\,\partial y^{n'}\,\partial z^{n''}\ldots}\right]_0=n!\,n'!\,n''!\cdots\frac{M}{R^n\,R'^{n'}\,R''^{n''}}.$$

Beweis der Existenz des vollständigen Integrales einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabelen.

622. Lehrsatz. *Es seien* x_0, y_0 *zwei willkürlich gewählte Konstanten, und*

$$x = x_0 + \varrho e^{i\omega}, \quad y = y_0 + \varrho' e^{i\omega'}$$

zwei komplexe Variabele. Wenn die Funktion $f(x, y)$ *nebst ihren ersten beiden partiellen Ableitungen* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *eindeutig und stetig bleibt, solange die Moduln* ϱ *und* ϱ' *die Werte* R *und* R' *nicht überschreiten, so existiert eine analytische Funktion* y *der komplexen Variabelen* x, *welche also eindeutig und stetig bleibt, solange der Modul von* $x - x_0$ *kleiner bleibt als eine bestimmte Grösse* r, *welche ferner für* $x = x_0$ *den Wert* y_0 *annimmt, und der Differentialgleichung genügt:*

$$1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Eine Funktion y der komplexen Variabelen x, welche nebst ihrer Ableitung eindeutig und stetig ist, solange der Modul von $x - x_0$ kleiner ist, als eine gegebene Grösse r, ist entwickelbar in eine Reihe nach ganzen Potenzen von $x - x_0$, und es wird (§ 383):

$$2) \quad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots;$$

y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \cdots$ sind die Werte von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} \cdots$ für $x = x_0$.

Wenn solch eine Funktion y die Differentialgleichung 1) befriedigt, so müssen die Koeffizienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \cdots$ als Funktionen von x_0 und y_0 bestimmt sein durch die Gleichung 1) zusammen mit denjenigen, die aus den successiven Differentiationen derselben folgen, nämlich:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

setzt man $x = x_0$, $y = y_0$, so erhält man nacheinander aus diesen Gleichungen die Werte von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \cdots$, und hieraus folgt, dass die Funktion y, wenn sie überhaupt existiert, nur *eine* bestimmte sein kann.

Demnach hat man zweierlei zu beweisen: *erstens*, dass die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung 2) konvergent ist, solange der Modul von $x - x_0$ kleiner bleibt als eine bestimmte Grösse r, wenn die Koeffizienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \cdots$ vermittelst der Gleichungen 3) bestimmt sind; in diesem Falle definiert dann die Reihe auch eine stetige Funktion y (§ 475); und *zweitens*, dass diese Funktion y in der That der Differentialgleichung genügt.

Wir bezeichnen mit M den grössten Modul unter den Werten, welche $f(x, y)$ annimmt, wenn ϱ von 0 bis R, ϱ' von 0 bis R', und die Winkel ω, ω' von 0 bis 2π variieren; ferner setzen wir:

$$4)\qquad \varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)\left(1 - \frac{Y - y_0}{R'}\right)}$$

und betrachten die Differentialgleichung

$$5)\qquad \frac{dY}{dx} = \varphi(x, Y).$$

Wir behaupten nun, dass, solange der Modul von $x - x_0$ eine gewisse Grenze nicht überschreitet, eine eindeutige analytische Funktion Y von x existiert, die der Differentialgleichung 5) genügt und sich für $x = x_0$ auf y_0 reduziert. Die Gleichung 5) lässt sich auf die Form bringen:

$$\left(1-\frac{Y-y_0}{R'}\right)\frac{dY}{dx}-\frac{M}{1-\frac{x-x_0}{R}}=0,$$

die man, wie leicht zu sehen, durch Differentiation der Gleichung

$$6)\qquad (Y-y_0)-\frac{(Y-y_0)^2}{2R'}+MRl\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)=0$$

gewinnt. Diese Integralgleichung ist vom zweiten Grade in Bezug auf $Y-y_0$, und ihre beiden Wurzeln werden einander gleich, wenn

$$l\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)=-\frac{R'}{2MR}\quad \text{oder}\quad x-x_0=R\left(1-e^{-\frac{R'}{2MR}}\right)$$

ist. Setzt man also:

$$r=R\left(1-e^{-\frac{R'}{2MR}}\right),$$

so ist diejenige der beiden Wurzeln von Y in der Gleichung 6), welche sich für $x=x_0$ auf den Wert y_0 reduziert, eine eindeutige und stetige Funktion von x, solange der Modul von $x-x_0$ kleiner ist als r, und folglich für diese Werte der Variabelen in eine Reihe entwickelbar von der Form:

$$7)\qquad Y=y_0+\left(\frac{dY}{dx}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots$$

Die Koeffizienten $\left(\frac{dY}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0\cdots$ dieser Entwickelung gewinnt man, indem man die Werte $x=x_0$, $Y=y_0$ in das System substituiert, welches aus der Gleichung 5) und den durch Differentiation aus ihr abgeleiteten besteht, nämlich:

$$8)\quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dx}=\varphi(x,Y), \\[2ex] \dfrac{d^2Y}{dx^2}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y}\dfrac{dY}{dx}, \\[2ex] \dfrac{d^3Y}{dx^3}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial Y}\dfrac{dY}{dx}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2}\left(\dfrac{dY}{dx}\right)^2+\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y}\dfrac{d^2Y}{dx^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ferner ist nach der Gleichung 4):

$$\frac{R^n}{n!}\frac{R'^{n'}}{n'!}\frac{\partial^{n+n'}\varphi}{\partial x^n \partial Y^{n'}} = \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)^{n+1}\left(1-\frac{Y-y_0}{R'}\right)^{n'+1}};$$

das Produkt $n!$ oder $n'!$ reduziert sich auf eins, wenn n oder n' null ist. Die Formel lehrt, dass alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^{n+n'}\varphi(x,Y)}{\partial x^n \partial Y^{n'}}$$

für $x=x_0$, $Y=y_0$ positive Werte haben, und daraus folgt nach den Gleichungen 8), dass auch die Grössen

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0 \cdots$$

sämtlich positiv sind.

Bezeichnen wir nun mit A den grössten Modul aller Werte, welche die Funktion Y annimmt, wenn der Modul ϱ von $x-x_0$ von 0 bis r und das Argument ω von 0 bis 2π variiert, so ist nach dem ersten Hilfssatze (§ 619):

$$9)\qquad \left(\frac{d^nY}{dx^n}\right)_0 \leqq n!\,\frac{A}{r^n}.$$

Wenn wir jetzt die beiden Gleichungssysteme 3) und 8) mit einander vergleichen und dabei $x=x_0$, $y=Y=y_0$ setzen, so folgt aus der ersten Gleichung des Systemes 3) und der ersten des Systemes 8), dass

$$\operatorname{mod}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \leqq \left(\frac{dY}{dx}\right)_0.$$

Ferner erkennt man nach dem dritten Hilfssatze (§ 621), dass die Moduln der beiden Glieder auf der rechten Seite der zweiten Gleichung 3) nicht grösser sind als die entsprechenden Glieder in der zweiten Gleichung 8), und da diese letzteren positiv sind, so folgt, dass auch

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \leqq \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0$$

ist u. s. w.; also wird allgemein:

$$\mathrm{mod}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 \leqq \left(\frac{d^n Y}{dx^n}\right)_0$$

und wegen der Ungleichung 9):

$$10)\qquad \mathrm{mod}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 \leqq n!\,\frac{A}{r^n},$$

oder:

$$\mathrm{mod}\left[\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 \frac{(x-x_0)^n}{n!}\right] \leqq A\cdot \mathrm{mod}\cdot\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^n.$$

Ist der Modul von $x - x_0$ kleiner als r, so ist die geometrische Progression, deren allgemeines Glied $A \,.\, \mathrm{mod}\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^n$ ist, konvergent; also ist auch die mit den Moduln der Glieder in der Reihe 2) gebildete Reihe konvergent unter derselben Annahme (§ 97), d. h. die Reihe 2) ist selbst konvergent (§ 363) und ihre Summe ist eine bestimmte, stetige Funktion y. Die Ungleichung 10) beweist zugleich auch die Konvergenz der Reihe, welche durch gliedweise Differentiation der Reihe 2) nach x erhalten wird. Diese letztere Reihe stellt den Differentialquotienten der Funktion y dar, also den Wert $\frac{dy}{dx}$, wie schon früher allgemein bewiesen wurde (§ 111).

Es erübrigt uns also nur noch zu zeigen, dass die durch die Gleichung 2) definierte Funktion y in der That der gegebenen Differentialgleichung 1) genügt. Es ist einerseits:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 \frac{x-x_0}{1} + \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots,$$

andererseits:

$$f(x, y) = f_0 + f'_0 \frac{x-x_0}{1} + f''_0 \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

Wir nennen dabei f_0 den Wert $f(x_0, y_0)$ und bezeichnen mit f'_0, $f''_0 \ldots$ die Werte, welche für $x = x_0$, $y = y_0$ die Quotienten f', f'', ... annehmen, welche man durch Division der totalen Differentiale, df, $d^2 f$, ... bezüglich mit dx, dx^2 ... erhält. Die Grössen f', f'' ... sind also bestimmt durch die Gleichungen:

$$11)\quad \begin{cases} f' = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}, \\ f'' = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2 y}{dx^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und hieraus folgen die Werte $f'_0, f''_0 \ldots$, indem man $x = x_0$, $y = y_0$ setzt und die Differentialquotienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \cdots$ durch ihre Werte aus den Gleichungen 3) ersetzt. Nun sieht man aber, dass die Gleichungen 11) identisch sind mit den Gleichungen 3), abgesehen von der ersten derselben; also wird:

$$f'_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \quad f''_0 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \quad f'''_0 = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \cdots,$$

und mithin genügt die Funktion 2) in der That der Differentialgleichung 1).

Beweis der Existenz des Integralsystemes für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

623. Die Herren Briot und Bouquet haben ihre Untersuchung auch auf den Fall eines Systemes von simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung ausgedehnt und den allgemeinen Satz bewiesen:

Lehrsatz. *Es seien* $x_0, y_0, z_0, \ldots m + 1$ *beliebig gewählte Konstanten, und*

$$x = x_0 + \varrho e^{i\omega}, \quad y = y_0 + \varrho' e^{i\omega'}, \quad z = z_0 + \varrho'' e^{i\omega''}, \ldots$$

$m + 1$ *Variabele. Wenn die* m *Funktionen*

$$f_1(x, y, z, \ldots), \quad f_2(x, y, z, \ldots), \quad f_3(x, y, z, \ldots), \ldots$$

nebst ihren ersten partiellen Ableitungen in Bezug auf jede Variabele eindeutig und stetig bleiben, solange die Moduln $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ *bezüglich die Grenzen* $R, R', R'', \ldots$ *nicht überschreiten, so existieren* m *analytische Funktionen* $y, z, \ldots$ *der Variabelen* x, *welche eindeutig und stetig bleiben, solange der Modul von* $x - x_0$ *kleiner bleibt, als eine bestimmte Grenze* r, *welche ferner für* $x = x_0$ *die*

Werte y_0, z_0, ... *bezüglich annehmen und welche die* m *simultanen Differentialgleichungen:*

$$1)\qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \ldots), \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \ldots), \ldots$$

befriedigen.

Mit M_1, M_2, ... bezeichnen wir die Maxima der Moduln der Werte, welche die Funktionen f_1, f_2, ... erhalten, wenn $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ von 0 bis R, von 0 bis R', von 0 bis R'', ... und die Winkel $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ von 0 bis 2π variieren; wir setzen ferner:

$$\varphi(x, Y, Z, \ldots) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)\left(1 - \frac{Y - y_0}{R'}\right)\left(1 - \frac{Z - z_0}{R''}\right)\cdots}$$

und betrachten die m simultanen Gleichungen:

$$2)\qquad \frac{dY}{dx} = M_1\varphi(x, Y, Z, \ldots), \quad \frac{dZ}{dx} = M_2\varphi(x, Y, Z, \ldots), \ldots$$

Man kann dann Funktionen $Y, Z, \ldots$ ermitteln, die diesen Differentialgleichungen genügen und sich zugleich für $x = x_0$ bezüglich auf die Werte $y_0, z_0, \ldots$ reduzieren. Setzt man nämlich:

$$3)\qquad Y - y_0 = M_1 S, \quad Z - z_0 = M_2 S, \ldots$$

und bestimmt man die Funktion S derart, dass sie für $x = x_0$ verschwindet, und die Gleichung erfüllt:

$$4)\qquad \frac{dS}{dx} = \varphi(x, y_0 + M_1 S, z_0 + M_2 S, \ldots),$$

so ist ersichtlich, dass die Gleichungen 2) identische werden. Die Gleichung 4) lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\left(1 - \frac{M_1 S}{R'}\right)\left(1 - \frac{M_2 S}{R''}\right)\cdots\frac{dS}{dx} - \frac{1}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = 0,$$

oder:

$$\left[1 - \left(\frac{M_1}{R'} + \frac{M_2}{R''} + \cdots\right)S + \left(\frac{M_1 M_2}{R'R''} + \cdots\right)S^2 - \cdots\right]\frac{dS}{dx} - \frac{1}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = 0,$$

und man erhält dieselbe durch Differentiation der folgenden:

$$5)\qquad \left[S - \left(\frac{M_1}{R'} + \frac{M_2}{R''} + \cdots\right)\frac{S^2}{2} + \left(\frac{M_1 M_2}{R'R''} + \cdots\right)\frac{S^3}{3} - \cdots\right] + Rl\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) = 0.$$

Es sei r der kleinste Modul, welcher $x - x_0$ zu erteilen ist, damit die Gleichung für S zwei gleiche Wurzeln bekommt. Solange der Modul von $x - x_0$ kleiner als r bleibt, ist diejenige der Wurzeln S, welche für $x = x_0$ verschwindet, eine stetige Funktion von x, die in eine konvergente Reihe nach ganzen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar ist. Bezeichnet man nun weiter mit A den grössten Modul dieser Funktion S für alle Werte von ϱ zwischen 0 und r und von ω zwischen 0 und 2π, so ist (§ 619):

$$6)\qquad \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n S}{dx^n}\right)_0 < \frac{A}{r^n}.$$

Endlich erkennt man, dass auch die Funktionen $Y, Z, \ldots$, da sie proportional zu S sind, ebenso wie diese Funktion sich in konvergente Reihen nach Potenzen von $x - x_0$ entwickeln lassen.

Nach dem dritten Hilfssatze im § 621 sind die Moduln der partiellen Ableitungen der Funktionen $f_1(x, y, z, \ldots)$, $f_2(x, y, z, \ldots)$ für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ nicht grösser als die Werte der entsprechenden Ableitungen der Funktionen $M_1 \varphi(x, Y, Z, \ldots)$, $M_2 \varphi(x, Y, Z, \ldots)$ für $x = x_0$, $Y = y_0$, $Z = z_0, \ldots$ Daraus folgt, wie im § 622, indem man das System der Gleichungen 1) und der durch Differentiation aus diesen abgeleiteten mit den Gleichungen 2) und ihren Ableitungen vergleicht, dass die Werte:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \ldots \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0, \ldots,$$

welche aus den ersten Gleichungen berechnet werden, ihrem Betrage nach nicht grösser sind als die reellen und positiven Werte:

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0, \ldots \left(\frac{dZ}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2Z}{dx^2}\right)_0, \ldots,$$

gebildet aus dem zweiten Systeme. Also ist, gemäss den Gleichungen 3) und der Ungleichung 6):

$$\operatorname{mod}\left[\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 \frac{(x - x_0)^n}{n!}\right] < M_1 A \,.\, \operatorname{mod}\left(\frac{x - x_0}{r}\right)^n,$$

$$\operatorname{mod}\left[\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_0 \frac{(x - x_0)^n}{n!}\right] < M_2 A \,.\, \operatorname{mod}\left(\frac{x - x_0}{r}\right)^n,$$

. . . .

Demnach sind die Reihen:

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots,$$
$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

konvergent, solange $\operatorname{mod}(x - x_0) < r$ ist. Diese Reihen definieren also Funktionen $y, z, \dots$, welche innerhalb dieses Gebietes stetig bleiben, und dieselbe Überlegung, welche im § 622 ausgeführt wurde, beweist, dass diese Funktionen in der That den Differentialgleichungen genügen.

624. Bemerkung. Es ist leicht zu erkennen, dass man in dem vorigen Beweise die Moduln $R', R'', \dots$ durch den kleinsten Wert unter ihnen $\mathfrak{R}$, und die Maxima $M_1, M_2, \dots$ durch den grössten Wert unter ihnen $\mathfrak{M}$ ersetzen kann. Die Gleichungen 4) und 5) werden dann:

$$\left(1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} S\right)^m \frac{dS}{dx} - \frac{1}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{R}}{(m+1)\mathfrak{M}}\left[1 - \left(1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} S\right)^{m+1}\right] + Rl\left(\frac{x - x_0}{R}\right) = 0.$$

Die Ableitung dieser Gleichung in Bezug auf S ergiebt: $1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} S = 0$. Es ist also für den Fall zweier gleicher Wurzeln:

$$\frac{\mathfrak{R}}{(m+1)\mathfrak{M}} + Rl\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) = 0,$$

also:

$$x - x_0 = R\left(1 - e^{-\frac{\mathfrak{R}}{(m+1)\mathfrak{M}R}}\right),$$

und folglich kann man für die Grösse r den Wert fixieren:

$$r = R\left(1 - e^{-\frac{\mathfrak{R}}{(m+1)\mathfrak{M}R}}\right).$$

Eigenschaften der Integrale eines Systemes von Differentialgleichungen erster Ordnung.

625. Wir betrachten ein System von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $n + 1$ Variabelen $x, x_1, x_2, \dots x_n$, durch welches die Ableitungen:

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{dx_2}{dx}, \dots \frac{dx_n}{dx}$$

bestimmte Werte erhalten. Wir bezeichnen diese Werte mit:

$$\frac{X_1}{X}, \quad \frac{X_2}{X}, \dots \frac{X_n}{X},$$

so dass die Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \dots \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X}.$$

Man kann dieselben in einer einzigen Formel zusammenfassen, nämlich:

1) $$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

$X, X_1, X_2, \dots X_n$ sind bestimmte Funktionen der Variabelen $x, x_1, \dots x_n$, mit Ausnahme einer unter ihnen, die willkürlich gewählt werden kann, da nur die Verhältnisse in Betracht kommen.

Nachdem die Existenz eines Integralsystemes festgestellt ist, nehmen wir an, wie im § 618, dass die Gleichungen dieses Systemes nach den n willkürlichen Konstanten, welche sie enthalten, aufgelöst sind, und stellen sie dar in der Form:

2) $$\begin{cases} \Psi_1(x, x_1, x_2, \dots x_n) = C_1, \\ \Psi_2(x, x_1, x_2, \dots x_n) = C_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Psi_n(x, x_1, x_2, \dots x_n) = C_n. \end{cases}$$

Bei der Differentiation dieser Gleichungen fallen die willkürlichen Konstanten $C_1, \dots C_n$ fort, und folglich bilden die aus der Differentiation hervorgehenden Differentialgleichungen ein System, das dem ursprünglichen äquivalent ist. Mit anderen Worten: Die Gleichungen

3) $$d\Psi_1 = 0, \quad d\Psi_2 = 0, \dots d\Psi_n = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\Psi_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\Psi_2}{dx} = 0, \dots \frac{d\Psi_n}{dx} = 0$$

werden identisch erfüllt, wenn man für $dx, dx_1, \dots dx_n$ Grössen einsetzt, die zu $X, X_1, \dots X_n$ proportional sind.

Wir sagten (§ 618), dass jede der Gleichungen 2) ein Integral des Systemes 1) genannt wird. Da aber auch die

Zusammensetzungen, welche man aus diesen Gleichungen bilden kann, für die Gleichungen substituiert werden können, so werden wir allgemein ein *Integral* des Systemes 1) jede Gleichung:

$$4)\qquad \Pi(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = \Gamma$$

nennen, deren rechte Seite eine willkürliche Konstante Γ und deren linke Seite solch eine Funktion der Variabelen $x, x_1, \ldots x_n$ ist, dass ihr Differential $d\Pi$ identisch null wird, wenn man für die Differentiale $dx, dx_1, \ldots dx_n$ Grössen einsetzt, die proportional sind zu $X, X_1, \ldots X_n$.

Man erkennt, dass solch eine Funktion erhalten wird, wenn man eine beliebige Funktion von $\Psi_1, \ldots \Psi_n$ gleich einer willkürlichen Konstante Γ setzt. Denn differentiiert man die Gleichung:

$$5)\qquad F(\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n) = \Gamma,$$

so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi_1}\frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{\partial F}{\partial \Psi_2}\frac{d\Psi_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \Psi_n}\frac{d\Psi_n}{dx} = 0,$$

und diese Gleichung ist identisch erfüllt vermöge der Gleichungen 3).

Es lässt sich aber auch leicht der umgekehrte Satz beweisen: wenn die Gleichung 4) ein Integral des Systemes 1) ist, so ist sie notwendig von der Form 5). Wir nehmen an, dass X nicht null ist. $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ sind n Funktionen der $n+1$ Veränderlichen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und fallen der Annahme nach mit dem Integralsysteme zusammen. Man kann nun auch umgekehrt $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Funktionen von x und $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ betrachten. Die Gleichung 4) geht dann über in eine Funktion von $x, \Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$, die mit

$$F(x, \Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n) = \Gamma$$

bezeichnet werde. Die Differentiation ergiebt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \Psi_1}\frac{d\Psi_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \Psi_n}\frac{d\Psi_n}{dx} = 0.$$

Da diese Gleichung, weil F ein Integral ist, durch das System identisch befriedigt sein muss, und da zufolge der Gleichungen 3) $\frac{d\Psi_1}{dx} = \frac{d\Psi_2}{dx} = \cdots = \frac{d\Psi_n}{dx} = 0$ wird, so folgt, dass:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

sein muss. Dies besagt, dass die Funktion F unabhängig von x, d. h. als eine Funktion von $\Psi_1, \ldots \Psi_n$ darstellbar ist. Es giebt also für das System 1) nur n verschiedene, oder was dasselbe ausdrückt, von einander unabhängige Integrale.

Der Begriff der Unabhängigkeit zweier Funktionen von zwei Variabelen, oder allgemein mehrerer Funktionen von mehreren Variabelen ist von Jacobi aufgestellt und in folgender Weise begründet worden.

Sind $u = f_1(x_1, x_2)$, $v = f_2(x_1, x_2)$ zwei Funktionen der beiden Variabelen x_1 und x_2, so heissen diese beiden Funktionen von einander unabhängig, wenn es möglich ist, aus diesen beiden Gleichungen die Variabelen x_1 und x_2 umgekehrt als Funktionen von u und v darzustellen; dagegen sind die beiden Funktionen abhängig von einander, wenn die Elimination einer Variabelen zwischen diesen beiden Gleichungen zugleich die Elimination der anderen Variabelen herbeiführt, so dass also eine Gleichung von der Form:

$$1) \qquad \varphi(u, v) = 0$$

oder, was dasselbe besagt, von der Form:

$$2) \qquad v = \varphi(u)$$

besteht. Besteht solch eine Funktionalgleichung, so verschwindet die Determinante, gebildet aus den ersten partiellen Ableitungen der Funktionen u und v, identisch. Denn es folgt aus der Gleichung 1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0,$$

also ist auch:

$$3) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0.$$

Diese Determinante heisst die *Funktionaldeterminante* der beiden Funktionen, und der bewiesene Satz lässt sich umkehren:

Verschwindet die Funktionaldeterminante der beiden Funktionen u *und* v, *welche von den Variabelen* x_1 *und* x_2 *abhängen, identisch, so sind diese beiden Funktionen nicht unabhängig von einander, es besteht zwischen ihnen eine Funktionalgleichung.*

Denn denkt man sich die erste Funktion $u = f_1(x_1, x_2)$ nach einer der beiden Variabelen, die in derselben enthalten sind, aufgelöst, also etwa:

$$x_2 = \varphi(x_1, u)$$

ermittelt, und substituiert man diesen Wert in die zweite Funktion, so wird dieselbe im allgemeinen eine Funktion von x_1 und u; wir bezeichnen sie mit

$$v = f_2(x_1, u).$$

Es ist zu zeigen, dass in dieser Gleichung für v die Variabele x_1 explicite nicht mehr vorkommt, dass also die partielle Ableitung $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ identisch verschwindet. Aus der Gleichung $v = f_2(x_1, u)$ folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2},$$

und setzt man diese Werte in die Funktionaldeterminante ein, die der Voraussetzung nach identisch verschwindet, so wird:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Da $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ nicht identisch verschwinden kann, weil sonst u die Variabele x_2 nicht enthalten würde, so ist also:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad v = f_2(u).$$

Dieselben Sätze gelten für ein System, welches aus n Funktionen von n Variabelen besteht. Sind

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad u_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

die gegebenen Funktionen, so heissen dieselben unabhängig von einander, wenn sich aus ihnen die n Variabelen $x_1, \ldots x_n$ umgekehrt als Funktionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ darstellen lassen; dagegen heissen die Funktionen abhängig, wenn zwischen denselben eine oder mehrere Gleichungen bestehen. In diesem Falle verschwindet, wie leicht zu beweisen ist, die Funktionaldeterminante identisch, und umgekehrt aus dem Verschwinden der Funktionaldeterminante folgt, dass zwischen den Funktionen mindestens eine Gleichung besteht.

Der Beweis dieses letzten Satzes ergiebt sich folgendermassen durch Schluss von $n-1$ auf n. Es sei bewiesen, dass zwischen $n-1$ Funktionen von $n-1$ Variabelen dann und nur dann eine

Abhängigkeit besteht, wenn die Funktionaldeterminante derselben identisch null ist; es soll gezeigt werden, dass auch aus dem Verschwinden der Funktionaldeterminante von n Funktionen mit n Variabelen eine Abhängigkeit zwischen diesen Funktionen folgt. Aus den n Funktionen $u_1, u_2, \dots u_n$ müssen sich $n-1$ auswählen lassen, vermittelst deren man die Variabelen $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ umgekehrt als Funktionen dieser Funktionen und der letzten Variabelen x_n darstellen kann. Denn wäre solch eine Auswahl nicht möglich, so würden ja $n-1$ Funktionen nicht unabhängig von einander sein in Bezug auf die $n-1$ Variabelen, es bestünde vielmehr eine Funktionalgleichung zwischen ihnen, in welcher nur noch die Variabele x_n explicite vorkommen könnte. Aus zwei dieser Funktionalgleichungen liesse sich dann auch x_n eliminieren, und man erhielte eine Funktionalgleichung zwischen den n Funktionen, infolge deren auch die Funktionaldeterminante identisch verschwindet.

Es seien also die Variabelen $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ als Funktionen von $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ und der letzten Variabelen x_n dargestellt. Substituiert man diese Grössen in die letzte Funktion, so wird auch u_n eine Funktion derselben; wir bezeichnen sie mit

$$u_n = f_n(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, x_n).$$

Es ist zu zeigen, dass, falls die Funktionaldeterminante identisch verschwindet, die Variabele x_n in dieser Gleichung nicht mehr explicite vorkommen kann, so dass dieselbe in der That eine Relation zwischen den n Funktionen ausdrückt. Es wird:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_2} = \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Trägt man diese Werte in die Funktionaldeterminante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots\dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

ein, so reduziert sich dieselbe auf die Form:

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_{n-1}} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Funktionaldeterminante der $n-1$ Funktionen $u_1, \ldots u_{n-1}$ in Bezug auf die $n-1$ Variabelen nicht identisch verschwindet, weil zwischen diesen Funktionen keine Abhängigkeit bestehen sollte, so folgt, dass dann

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0$$

sein muss, womit die Behauptung bewiesen ist.

Auf Grund dieser allgemeinen Begriffe können wir die obigen Sätze über das simultane System und seine Integralgleichungen noch klarer fassen.

Besitzt das System der Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} \cdots = \frac{dx_n}{X_n},$$

das Integralsystem

$$\Psi_1(x, x_1, \ldots x_n) = C_1, \ldots \Psi_n(x, x_1, \ldots x_n) = C_n,$$

so müssen die Funktionen $\Psi_1, \ldots \Psi_n$ so beschaffen sein, dass sich aus den Gleichungen:

$$\frac{d\Psi_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\Psi_2}{dx} = 0, \cdots \frac{d\Psi_n}{dx} = 0$$

die Differentialquotienten $\frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \cdots \frac{dx_n}{dx}$ berechnen lassen, d. h. es muss die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden sein, also sind die n Funktionen in Bezug auf die n Variabelen $x_1, \ldots x_n$ unabhängig, oder mit anderen Worten nach diesen Variabelen auflösbar.

Wenn aber ausser diesen n Funktionen noch eine weitere vorhanden ist:

$$\Pi(x, x_1, \dots x_n) = \Gamma,$$

welche ebenfalls ein Integral bildet, für welche also auch:

$$\frac{d\Pi}{dx} = 0$$

wird, falls man für die Differentialquotienten die ihnen proportionalen Werte einsetzt, so verschwindet die Funktionaldeterminante der $n+1$ Funktionen: $\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_n, \Pi$, gebildet mit den $n+1$ Veränderlichen $x, x_1, \dots x_n$, d. h. es besteht eine Abhängigkeit:

$$\Pi = f(\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_n).$$

626. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung:

$$\Pi(x, x_1, x_2, \dots x_n) = \text{const}$$

ein Integral des Systemes

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

ist, besteht darin, dass zufolge dieser Gleichungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} dx_n = 0$$

wird, dass also identisch die Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} X + \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} X_n = 0.$$

Man hat also den Satz:

Lehrsatz I. *Ist $\Pi = const$ ein Integral des simultanen Systemes:*

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{x}}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{x}_1}{\mathrm{X}_1} = \dots = \frac{\mathrm{d}\mathrm{x}_\mathrm{n}}{\mathrm{X}_\mathrm{n}},$$

so genügt die Funktion Π, identisch der partiellen Differentialgleichung:

$$\mathrm{X}\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{X}_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{x}_1} + \dots + \mathrm{X}_\mathrm{n} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{n}} = 0.$$

Umgekehrt: *Jede Funktion Π, welche dieser partiellen Differentialgleichung genügt, giebt, wenn man sie einer willkürlichen Konstanten gleich setzt, ein Integral des Systemes jener simultanen Differentialgleichungen.*

Nach den Sätzen im vorigen Paragraphen gilt dann ferner der

Lehrsatz II. *Wenn die partielle Differentialgleichung:*

$$\mathrm{X}\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{X}_1\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{x}_1} + \cdots + \mathrm{X}_\mathrm{n}\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{n}} = 0$$

erfüllt ist, dadurch, dass man für Π *successive* n *von einander unabhängige Funktionen* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_\mathrm{n}$ *einsetzt, so ist jede andere Funktion* Π*, welche derselben Gleichung genügt, notwendig eine Funktion von* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_\mathrm{n}$.

Die Reduktion der Systeme von Differentialgleichungen mit mehreren Variabelen auf Differentialgleichungen, welche nur zwei Variabele enthalten.

627. Eine Differentialgleichung von irgend welcher Ordnung mit zwei Variabelen, oder allgemein ein System von n Differentialgleichungen irgend welcher Ordnung mit $n+1$ Variabelen, lässt sich, wie wir gesehen haben (§ 615), auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Man kann nun aber auch umgekehrt leicht beweisen, dass solch ein System sich auf Differentialgleichungen zurückführen lässt, von denen jede nur zwei Variabele enthält. Es seien die n Differentialgleichungen:

$$1)\qquad \frac{dy}{dx} = Y, \quad \frac{dz}{dx} = Z, \ldots \frac{dv}{dx} = V,$$

wobei $Y, Z, \ldots V$ gegebene Funktionen der $n+1$ Variabelen $x, y, z, \ldots v$ sind. Das Integralsystem enthält n willkürliche Konstanten, und wir können annehmen, dass die Gleichungen dieses Systemes aufgelöst sind nach $y, z, \ldots v$. Betrachten wir nun speziell die Gleichung, welche y als Funktion von x und diesen willkürlichen Konstanten definiert: Wenn die n Konstanten in dieser Gleichung enthalten sind, so muss man im allgemeinen, um sie zu eliminieren, mit derselben die n Gleichungen verbinden, welche durch n successive Differentiationen aus ihr hervorgehen. In diesem Falle hängt also y vermittelst einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von x ab. Enthält aber der Ausdruck für y nur

i willkürliche Konstanten, wobei $i < n$ ist, so reichen bereits i Differentiationen zur Elimination derselben hin, und y hängt nur durch eine Differentialgleichung i^{ter} Ordnung von x ab.

628. Diese Differentialgleichung für y kann aus den gegebenen Gleichungen erhalten werden; denn, indem man die erste der Gleichungen 1) differentiiert, bekommt man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \cdots + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

also auf Grund der Gleichungen 1):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} Y + \frac{\partial Y}{\partial z} Z + \cdots + \frac{\partial Y}{\partial v} V.$$

Wir bezeichnen zur Abkürzung die rechte Seite dieser Gleichung mit Y_1 und haben also:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y_1.$$

Differentiieren wir diese Gleichung und benutzen wir abermals die Differentialgleichungen 1), so erhalten wir die neue Gleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = Y_2,$$

wobei Y_2 eine bekannte Funktion der Variabelen $x, y, z, \ldots v$ ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens bildet man ein System von n Gleichungen:

$$2) \qquad \frac{dy}{dx} = Y, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = Y_1, \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = Y_{n-1},$$

deren rechte Seiten bekannte Funktionen von $x, y, z, \ldots v$ sind.

Wenn die n Gleichungen 2) sämtlich notwendig sind zur Elimination der $n-1$ Variabelen $z, \ldots v$, so werden diese Variabelen durch die $n-1$ ersten Gleichungen als Funktionen von

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

bestimmt; substituiert man dann diese Werte in die letzte Gleichung 2), so erhält man eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Es kann aber auch eintreten, dass die i ersten Gleichungen 2) hinreichen, um die Differentialgleichung zwischen x und y zu bilden. Diese Gleichung wird dann von der Ordnung i, und $i-1$ der $n-1$ Variabelen $z \ldots v$ werden alsdann vermittelst der $i-1$ ersten Gleichungen 2) darstellbar als Funktionen der $n-i$ anderen und der Grössen:

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}};$$

wenn man alsdann die Werte dieser $i-1$ Variabelen in diejenigen der Gleichungen 1) substituiert, welche die Ableitungen der $n-i$ anderen Variabelen enthalten, so werden diese letzteren bestimmt durch ein System von $n-i$ Differentialgleichungen, welches analog dem Systeme 1) ist, mit dem einzigen Unterschiede, dass die rechten Seiten eine Funktion y enthalten, welche durch eine Differentialgleichung i^{ter} Ordnung bestimmt ist, sowie die $i-1$ ersten Ableitungen dieser Funktion. Verfährt man alsdann mit diesem Systeme ebenso, wie mit dem Systeme 1), so kann man eine andere Variabele z von einer Differentialgleichung abhängig machen, die eine bestimmte Ordnung j gleich oder kleiner als $n-i$ besitzt, und welche die Funktion y, sowie die Ableitungen derselben bis zur Ordnung $i-1$ enthalten kann, da die Ableitung von der Ordnung i, sowie die höheren, sich durch die Ableitungen niederer Ordnung ausdrücken lassen. Ist die Zahl j gleich $n-i$, so werden die übrigen $n-i-1$ Variabelen bestimmt als Funktionen von

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}}, \quad z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^{j-1}z}{dx^{j-1}};$$

ist dagegen j kleiner als $n-i$, so können $j-1$ dieser Variabelen ausgedrückt werden als Funktionen der vorstehenden Grössen und der $n-i-j$ übrigen Variabelen. Man sieht nun ein, dass man durch Fortsetzung desselben Verfahrens ein System von Differentialgleichungen bilden wird, deren Ordnungen die Summe n haben. Jede dieser Gleichungen wird nur eine einzige abhängige Variabele enthalten, ausser denen, die in den vorhergehenden Gleichungen vorkommen, und die wir uns durch diese Gleichungen bestimmt denken. Diejenigen Variabelen aber, welche nicht in diesen Differentialgleichungen vorkommen, sind als Funktionen der übrigen Variabelen und deren Ableitungen bestimmt.

629. Um die Differentialgleichung zu bilden, durch welche zwei der Variabelen, die in einem simultanen Systeme vorkommen, verbunden sind, brauchen diese Gleichungen nicht notwendig in der Form gegeben zu sein, die wir im vorigen Paragraphen voraussetzten. Die Differentiation und Elimination führt in allen Fällen zu der gesuchten Gleichung.

Betrachten wir z. B. zwei simultane Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{aligned} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^p z}{dx^p}\right) = 0, \\ F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^q z}{dz^q}\right) = 0, \end{aligned}$$

welche drei Variabele x, y, z enthalten, von denen die erste als die unabhängige betrachtet wird. Die erste Gleichung ist in Bezug auf y von der Ordnung m, in Bezug auf z von der Ordnung p; die zweite ist bezüglich von der Ordnung n und q.

Es sei μ die Zahl der Differentialgleichungen, aus denen das System von Differentialgleichungen erster Ordnung, aufgelöst nach den Ableitungen, besteht, welches man an Stelle des gegebenen setzen kann (§ 616).

Wenn die Gleichungen 1) die Werte der höchsten Ableitung von y, nämlich $\frac{d^m y}{dx^m}$ oder $\frac{d^n y}{dx^n}$ (je nachdem m grösser oder kleiner als n ist), und ebenso der höchsten Ableitung von z, nämlich $\frac{d^p z}{dx^p}$ oder $\frac{d^q z}{dx^q}$, als Funktionen der niederen Ableitungen und der Variabelen x, y, z bestimmen lassen, was notwendig erfordert, dass die höchsten Ableitungen nicht beide nur in derselben Gleichung enthalten sind, dass also die Differenzen $m - n$, $p - q$ nicht von gleichem Zeichen sind, so wird die Zahl μ gleich der grösseren der beiden Summen $m + q$, $n + p$. Ist dieses aber nicht der Fall, so wird μ kleiner als die grössere dieser Summen.

Um nun die Elimination von z zu vollziehen, differentiieren wir die vorgelegten Gleichungen, und zwar die erste

q-mal, die zweite p-mal; zusammen mit den beiden gegebenen erhalten wir ein System von $p+q+2$ Gleichungen. Die Ableitungen von z treten in diesem Systeme bis zur $p+q^{\text{ten}}$ Ordnung auf, und die höchste Ordnung der Ableitungen von y ist gleich der grösseren der beiden Zahlen $m+q$ und $n+p$. Es handelt sich darum, die $p+q+1$ Grössen

$$z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^{p+q}z}{dx^{p+q}}$$

zwischen den $p+q+2$ Gleichungen zu eliminieren. Sind alle diese Gleichungen zur Elimination notwendig, so bestimmen $p+q+1$ unter ihnen die Werte von

$$z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^{p+q}z}{dx^{p+q}},$$

und die Substitution dieser Werte in die letzte Gleichung giebt eine Differentialgleichung:

$$2) \qquad \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^i y}{dx^i}\right) = 0,$$

deren Ordnung i gleich μ ist. Zugleich hat man, wie wir schon sagten:

$$3) \qquad z = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}}\right).$$

Wenn aber die $p+q+2$ Gleichungen, welche wir gebildet haben, nicht alle zur Elimination notwendig sind, so kann die Ordnung i der resultierenden Gleichung 3) kleiner werden als μ. Alsdann folgt aus dem im vorigen Paragraphen Gesagten, dass z nicht mehr als Funktion von $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots$ bestimmt ist, sondern von einer Differentialgleichung abhängt:

$$4) \qquad \Pi\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^{\mu-i}z}{dx^{\mu-i}}\right) = 0,$$

deren Ordnung $\mu - i$ ist, und in welcher auch die Funktion y mit ihren $i-1$ ersten Ableitungen, welche durch die Gleichung 3) definiert ist, vorkommt.

Die Integrale verschiedener Ordnungen einer Differentialgleichung höherer Ordnung mit zwei Variabelen.

630. Nachdem wir gezeigt haben, dass die gewöhnlichen Differentialgleichungen sich immer auf ein System von Gleichungen erster Ordnung bringen lassen, welche die Ableitungen als Funktion der Variabelen definieren, haben wir weiter gesehen, dass solch ein System wiederum durch eine oder durch mehrere Differentialgleichungen von bestimmter Ordnung ersetzt werden kann, in denen immer nur zwei Variabele vorkommen, ausserdem aber noch Funktionen, welche durch die vorhergehenden Differentialgleichungen definiert sind. Der Fall einer einzigen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung n zwischen zwei Variabelen kann also als der einfachste angesehen werden, und wir haben noch einige wichtige allgemeine Betrachtungen hierüber anzustellen.

Es sei

$$1)\qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

eine Differentialgleichung von der Ordnung n; setzt man:

$$2)\qquad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \cdots \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)},$$

so bestimmt die Gleichung 1) einen Wert von $\frac{d^ny}{dx^n}$ oder $\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$ als Funktion von $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$; es sei Y dieser Wert, also:

$$3)\qquad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = Y.$$

Wir nehmen an, dass die Funktion Y die Bedingungen erfüllt, welche durch die allgemeine Theorie in §§ 622 und 623 gefordert wurden. Das aus den simultanen Gleichungen 2) und 3) gebildete System besitzt alsdann ein Integralsystem, welches $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ als Funktionen von x definiert, und sich für $x = x_0$ bezüglich auf die willkürlich fixierten Konstanten $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$ reduziert. Bezeichnet man diejenige Gleichung des Systemes, durch welche y bestimmt wird, mit

4) $$y = \Phi(x, y_0, y'_0, \dots y_0^{(n-1)}),$$

so ist leicht zu sehen, dass die $n-1$ übrigen Gleichungen erhalten werden, indem man diese Gleichung successive $(n-1)$-mal differentiiert. Die Gleichung 4) heisst das *vollständige Integral* der Gleichung 1) innerhalb des Bereiches, für welche sie Geltung hat, und da das Integralsystem der simultanen Gleichungen 2) und 3) unter den angenommenen Voraussetzungen ein eindeutiges ist, so erkennt man:

Hat man auf irgend welchem Wege eine Gleichung ermittelt

5) $$f(x, y, C_1, C_2, \dots C_n) = 0,$$

welche n *willkürliche Konstanten* $C_1, C_2, \dots C_n$ *enthält und durch welche* y *als eine Funktion von* x *definiert wird, die der Gleichung 1) genügt, so wird die Gleichung 5) mit dem vollständigen Integrale dieser Differentialgleichung zusammenfallen, wenn man den Konstanten solche Werte beilegen kann, dass* y *und seine* $n-1$ *ersten Ableitungen für einen bestimmten beliebig fixierten Wert von* x *willkürlich gegebene Werte erhalten.*

Diese letztere Bedingung wird erfüllt sein, wenn das System, welches aus der Gleichung 5) und aus den durch $n-1$ Differentiationen aus ihr abgeleiteten Gleichungen besteht, die Werte der willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \dots C_{n-1}$ als Funktionen von

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

darstellen lässt.

631. Die Differentialgleichung 1) wird reproduziert, wenn man aus dem vollständigen Integrale 5) die willkürlichen Konstanten vermittelst der Differentiation eliminiert. Nehmen wir aber an, dass man aus der Gleichung 5) nur i willkürliche Konstanten eliminieren will, nämlich

$$C_1, C_2, \dots C_i,$$

so muss man i Differentiationen ausführen, und man kann beweisen, dass, wie man auch die Prozesse der Differentiation und Elimination kombinieren mag, das erhaltene Resultat immer dasselbe bleibt. Denn setzen wir voraus, dass man zwei verschiedene Gleichungen bilden könnte, in denen die Konstanten $C_1, C_2, \dots C_i$ nicht mehr vorkommen; dann seien also:

$$\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^i y}{dx^i}, C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots C_n\right) = 0,$$

$$\Psi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^i y}{dx^i}, C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots C_n\right) = 0$$

diese beiden Gleichungen. Wenn dieselben für $\frac{d^i y}{dx^i}$ nicht den nämlichen Wert liefern, so kann man diese Ableitung eliminieren und eine Gleichung höchstens von der Ordnung $i-1$ bilden, welche $n-i$ willkürliche Konstanten enthält:

$$\Pi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{i-1} y}{dx^{i-1}}, C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots C_n\right) = 0.$$

Verbindet man mit dieser diejenigen, welche durch $n-i$ Differentiationen daraus folgen, so hat man ein System von $n-i+1$ Gleichungen, zwischen denen man die Konstanten $C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots C_n$ eliminieren kann. Das Resultat dieser Elimination wird eine nicht identische Differentialgleichung, deren Ordnung nicht höher ist als $n-1$ und die keine willkürliche Grösse mehr enthält. Man würde also, wenn man $x = x_0$ setzt, eine Relation zwischen $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \cdots \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)_0$ erhalten, und demnach wären diese Grössen nicht mehr, wie sie sein müssen, von einander unabhängig.

632. Demnach werden wir ein *erstes Integral* oder Integral *erster Ordnung* einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung die Gleichung nennen, welche aus dem vollständigen Integrale durch Elimination von $n-1$ Konstanten gewonnen wird. Die Zahl dieser ersten Integrale ist gleich n; jedes derselben ist eine Differentialgleichung von der Ordnung $n-1$, welche je eine der willkürlichen Konstanten enthält. Das System der n ersten Integrale bildet das Integralsystem für das System von Differentialgleichungen erster Ordnung, durch welches man die gegebene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ersetzen kann.

Ebenso werden wir ein *zweites Integral* oder Integral *zweiter Ordnung* die Gleichung nennen, welche man durch Elimination von $n-2$ der Konstanten aus dem vollständigen Integrale gewinnt. Die Zahl derselben ist gleich der Anzahl der

Kombinationen zu je zwei aus n Elementen, also gleich $\frac{n(n-1)}{2}$; jedes dieser Integrale ist eine Differentialgleichung $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung, die zwei willkürliche Konstanten enthält.

Allgemein nennen wir die Gleichung, welche durch Elimination von $n-i$ willkürlichen Konstanten gebildet wird, ein *Integral von der Ordnung* i der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Die Zahl dieser Integrale ist gleich der Anzahl der Kombinationen von n Elementen zu je i, also

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i};$$

jedes dieser Integrale ist eine Differentialgleichung $n-i^{\text{ter}}$ Ordnung, welche i willkürliche Konstanten enthält.

Bei der Ordnung n hat man nur *ein* Integral, welches eben das vollständige Integral selbst ist.

633. Ist die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

gegeben, und hat man auf irgend einem Wege eine Differentialgleichung von der Ordnung $n-i$ gefunden:

$$\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}, C_1, C_2, \ldots C_i\right) = 0,$$

welche i willkürliche Konstanten enthält, und durch welche $\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}$ als eine Funktion bestimmt ist, die der gegebenen Gleichung genügt, so kann man dieselbe als ein Integral von der Ordnung i ansehen, falls diese Gleichung in Verbindung mit denjenigen, die durch $i-1$ Differentiationen aus ihr hervorgehen, die Werte der Konstanten als Funktionen von $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ bestimmen lässt.

Denn bei dieser Annahme können die i Konstanten so fixiert werden, dass

$$\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

für $x = x_0$ die willkürlichen Werte $\left(\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}\right)_0, \cdots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0$ annehmen; ferner liefert die Gleichung $(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung ein vollständiges Integral mit $n-i$ Konstanten, und diese neuen Konstanten können so gewählt werden, dass $y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-i-1}y}{dx^{n-i-1}}$ bezüglich die Werte $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \cdots \left(\frac{d^{n-i-1}y}{dx^{n-i-1}}\right)_0$ annehmen für $x = x_0$. Das vollständige Integral der Differentialgleichung $(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung wird also zugleich auch das vollständige der vorgelegten.

Schliesslich bemerken wir noch den folgenden Satz, welcher aus den bisherigen Betrachtungen resultiert:

Kennt man k *erste Integrale einer Differentialgleichung* n^{ter} *Ordnung, so erhält man ein Integral von der Ordnung* k, *indem man die* k — 1 *höchsten Ableitungen zwischen den* k *ersten Integralen eliminiert. Die weitere Integration hängt also dann im allgemeinen von einer Differentialgleichung* $(\mathrm{n}-\mathrm{k})^{\text{ter}}$ *Ordnung ab.*

Insbesondere also:

Kennt man die n *ersten Integrale einer Differentialgleichung* n^{ter} *Ordnung, so erhält man das vollständige Integral, indem man die* n — 1 *Ableitungen aus denselben eliminiert.*

Definition der partikulären und der singulären Integrale.

634. Wenn man den willkürlichen Konstanten, welche in den Integralen einer Differentialgleichung oder eines Systemes solcher Gleichungen enthalten sind, besondere bestimmte Werte beilegt, so bekommt man Gleichungen, welche man *partikuläre Integrale* genannt hat. Die Betrachtung partikulärer Integrale ist bei gewissen Fragen sehr wichtig, wie wir noch später sehen werden, indessen beabsichtigen wir jetzt nicht auf dieselben einzugehen.

Die Differentialgleichungen können auch noch Lösungen zulassen, welche nicht in ihren sogenannten vollständigen oder allgemeinen Integralen enthalten sind. Diese Lösungen kann man im allgemeinen durch reine Eliminationsprozesse erhalten; man hat sie *singuläre Lösungen* genannt.

Die allgemeine Theorie, durch welche wir die Existenz der Integrale festgestellt haben, kann diese singulären Lösungen nicht zur Evidenz bringen; denn diese Theorie setzt voraus, dass bestimmte Funktionen innerhalb bestimmter Bereiche durchaus eindeutig und regulär sind, während die singulären Integrale gerade von solchen Werten der Variabelen abhängen, für welche diese Funktionen singulär werden. Im folgenden werden wir zuerst den Fall der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen untersuchen; alsdann werden wir zeigen, wie man die nämlichen Betrachtungen auf Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen kann.

Über die singuläre Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung, gegründet auf die Betrachtung des vollständigen Integrales.

635. Die singuläre Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich, wie wir zuerst zeigen wollen, leicht aus dem vollständigen Integrale gewinnen.

Es sei

1) $$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

die Differentialgleichung und

2) $$y = f(x, C)$$

ihr vollständiges Integral, in welchem C die willkürliche Konstante bedeutet. Die Differentiation dieser Gleichung 2) giebt

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x, C)}{\partial x}.$$

Die Gleichung 2) wird ein Ausdruck für alle Funktionen von x, wenn man in derselben C als eine unbestimmte Funktion von x ansieht. Differentiiert man die Gleichung 2) unter dieser Annahme, so erhält man:

4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x, C)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx}.$$

Da nun aber die Gleichung 2) der Differentialgleichung 1) genügen soll, so hat man für alle Werte von x und C die Identität:

$$5)\qquad \frac{\partial f(x, C)}{\partial x} = F[x, f(x, C)],$$

und diese Identität wird nicht aufgehoben, wenn man an Stelle von C eine beliebige Funktion von x setzt. Damit nun auch dann die Gleichung 2) der Differentialgleichung genügt, muss nach 4)

$$\frac{\partial f(x, C)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \cdot \frac{dC}{dx} = F[x, f(x, C)]$$

sein, wenn C eine bestimmte Funktion von x ist, und da die Gleichung 5) ebenfalls besteht, so muss

$$\frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \cdot \frac{dC}{dx} = 0$$

sein. Diese Gleichung zerlegt sich in zwei, nämlich

$$6)\qquad \frac{dC}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad 7)\qquad \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} = 0.$$

Die Gleichung 6) giebt $C = \text{const}$ und führt also auf das vollständige Integral zurück. Die Gleichung 7) dagegen definiert C als eine bestimmte Funktion von x, nämlich

$$8)\qquad C = \psi(x).$$

Die Lösung

$$9)\qquad y = f[x, \psi(x)]$$

kann indessen auch noch als besonderer Fall in dem vollständigen Integrale enthalten sein; dies tritt insbesondere dann ein, wenn sich $\psi(x)$ auf eine Konstante reduziert. Diese Betrachtung liefert keine singulären Lösungen, wenn die Gleichung 7) C nicht enthält, das heisst also, wenn C linear in der nach y aufgelösten Funktion enthalten ist.

636. Es ist zu bemerken, dass die Gleichung 7) sich in der Form

$$10)\qquad \frac{\partial y}{\partial C} = 0$$

darstellen lässt, wobei $\frac{\partial y}{\partial C}$ aus dem vollständigen Integrale ermittelt ist. Wenn dieses nun nicht nach y aufgelöst ist, vielmehr die Form:

$$11) \qquad \Phi(x, y, C) = 0$$

hat, so tritt an Stelle der Gleichung 10):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial C} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0 \quad \text{oder} \quad 12) \quad \frac{\partial y}{\partial C} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = 0.$$

Diese Formel schliesst aber, ebenso wie die Gleichung $\frac{\partial y}{\partial C} = 0$, die etwaigen singulären Lösungen $x = \text{const}$ aus, da sie nur y als Funktion von x so definiert, dass die Differentialgleichung befriedigt wird. Da man aber ebenso x als die abhängige Variabele ansehen kann, so gelangt man auf demselben Wege zu der Gleichung:

$$13) \qquad \frac{\partial x}{\partial C} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = 0,$$

und diese schliesst nur die etwaigen singulären Lösungen $y = \text{const}$ aus.

Die singulären Lösungen werden erhalten, indem man vermittelst der Gleichung 12) oder 13) C aus der Gleichung 11) eliminiert. Wenn die Gleichung 11) von solcher Form ist, dass $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ immer endliche Werte behalten, so kann man an Stelle der Gleichungen 12) oder 13) einfach

$$14) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

nehmen. Dabei tritt aber ein besonderer Fall, in welchem die hieraus berechneten Werte von C keine singulären Lösungen zu liefern brauchen, ein, wenn die Grössen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ebenfalls verschwinden

Denn betrachtet man in der Gleichung

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

C als eine Funktion von x und y, so wird für diese allgemeine Funktion der Differentialquotient aus der Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

zu berechnen sein. Bestimmt man nun C als Funktion der Variabelen x, y so, dass $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$ wird, so wird für diese Funktion der Differentialquotient aus der Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0$$

bestimmt, falls nicht $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ebenfalls verschwinden, sobald man für C die gefundene Funktion einsetzt, d. h. aber, falls die Kurve

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

nicht den Ort von Punkten liefert, die für die Integralkurven

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

singulär sind. In diesem Falle müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein, soll die durch Elimination von C aus $\Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$ gefundene Funktion eine Lösung der Differentialgleichung sein.

Wenn dagegen für $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$ nur $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ verschwindet, so wird für die zu bildende Funktion $\frac{dy}{dx} = 0$, und $y = \text{const}$ wird eine Lösung der Differentialgleichung; und ebenso wird, wenn $\frac{\partial \Phi}{\partial C}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ gleichzeitig null sind, $x = \text{const}$ eine Lösung.

Desgleichen tritt ein besonderer Fall ein, wenn die Funktionen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ gleichzeitig unendlich werden.

Diese Entwickelungen zeigen, in Verbindung mit den Formeln der §§ 207 und 209, dass das singuläre Integral einer Differentialgleichung nichts anderes ist, als die Einhüllende des vollständigen Integralsystemes, während die Gleichungen $\Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$ ausserdem noch den Ort der singulären Punkte der Integralkurven des vollständigen Systemes ergeben können, welcher keine Einhüllende und dann auch kein singuläres Integral zu sein braucht. Ein singuläres Integral ist ebenso wie eine Einhüllende nur dann vorhanden, wenn durch jeden Punkt der Ebene im allgemeinen mehr als eine

Integralkurve hindurchgeht, also wenn in der vollständigen Integralgleichung 11), nachdem man ihre linke Seite auf eine eindeutig bestimmte Form gebracht hat, die willkürliche Konstante nicht nur in der ersten Potenz enthalten ist.

637. Beispiel. Es sei die Differentialgleichung:

$$y - 2x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

gegeben, welche man durch Elimination von C zwischen der Gleichung

$$\Phi(x, y, C) = (3xy + 2x^3 + C)^2 - 4(y + x^2)^3 = 0$$

und der durch Differentiation nach x und y daraus abgeleiteten Gleichung erhält. Hier wird:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 2(3xy + 2x^3 + C)$$

und die Elimination von C zwischen $\Phi = 0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$ giebt $(y + x^2)^3 = 0$ oder

$$y = -x^2.$$

Aber dieser Wert von y genügt nicht der Differentialgleichung; vielmehr erkennt man, dass die beiden Ableitungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(3xy + 2x^3 + C)(3y + 6x^2) - 12(y + x^2)^2 2x,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(3xy + 2x^3 + C)\,3x - 12(y + x^2)^2$$

beide zugleich null werden, wenn man $\Phi = 0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$ setzt. Diese Kurve ist Ort der Spitzen der Integralkurven.

Die Herleitung des singulären Integrales einer Differentialgleichung erster Ordnung aus der Differentialgleichung.

638. Es sei

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{1}$$

die Differentialgleichung und

2) $$y = f(x, C)$$

ihr vollständiges Integral, so dass:

3) $$\frac{\partial f(x, C)}{\partial x} = F[x, f(x, C)]$$

eine Identität ist. Differentiiert man diese Gleichung nach C, so folgt:

4) $$\frac{\partial^2 f(x, C)}{\partial C\, \partial x} = \frac{\partial F[x, f(x, C)]}{\partial f} \frac{\partial f(x, C)}{\partial C}$$

oder

5) $$\frac{\dfrac{\partial^2 f(x, C)}{\partial C\, \partial x}}{\dfrac{\partial^2 f(x, C)}{\partial C^2}} \cdot \frac{\dfrac{\partial^2 f(x, C)}{\partial C^2}}{\dfrac{\partial f(x, C)}{\partial C}} = \frac{\partial F[x, f(x, C)]}{\partial f},$$

eine Gleichung, die ebenfalls eine Identität ist, mag man auch für C irgend welche Funktion von x substituieren. Wir geben C den Wert, welchen die Gleichung 8) des § 635 darstellt und der dem singulären Integrale angehört, nämlich $\psi(x)$. Der erste Faktor der linken Seite behält dabei einen von 0 verschiedenen Wert, denn er ist der Wert von $-\frac{dC}{dx}$ oder $-\psi'(x)$; in der That erhält man durch Differentiation der Gleichung 7) im vorigen Paragraphen:

$$\frac{\partial^2 f(x, C)}{\partial x\, \partial C} + \frac{\partial^2 f(x, C)}{\partial C^2} \cdot \frac{dC}{dx} = 0,$$

und da C nicht eine Konstante, sondern eine Funktion von x ist, so kann also $\frac{dC}{dx}$ nicht identisch gleich null sein. Der zweite Faktor wird dagegen unendlich. Denn setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\partial f(x, C)}{\partial C} = f'(x, C),$$

so ist der Faktor θ, den wir betrachten:

$$\theta = \frac{\dfrac{\partial f'(x, C)}{\partial C}}{f'(x, C)} = \frac{\partial \log [\pm f'(x, C)]}{\partial C}.$$

Wenn θ endlich bleibt für $C = \psi(x)$, so ist auch:

$$\int_{\psi}^{C} \theta\, dC = \log \frac{f'(x, C)}{f'(x, \psi)}$$

endlich, was aber nicht der Fall sein kann, da für $C = \psi(x)$ der Nenner in diesem Ausdrucke verschwindet.

Also macht der Wert $C = \psi(x)$ den Wert $\frac{\partial F[x, f(x, C)]}{\partial f}$ unendlich. Man kann dies in der Form:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \infty$$

schreiben. Mit anderen Worten: Die singulären Integrale der Differentialgleichung 1), mit Ausnahme derer, welche von der Form $x = \text{const}$ sind, müssen der Gleichung:

$$\text{6)} \qquad \frac{1}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = 0$$

genügen. Man kann dieselben also bestimmen, ohne das vollständige Integral zu kennen; jedoch ist keineswegs gesagt, dass auch umgekehrt die Funktionen, welche sich aus dieser Gleichung ergeben, immer singuläre Integrale sein müssen; vielmehr hat man, sobald die Funktionen aus dieser Gleichung ermittelt sind, zu untersuchen, ob sie zugleich Lösungen der Differentialgleichungen sind.

Die vorgelegte Gleichung lässt sich aber auch in der Form:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{F(x, y)}$$

darstellen; und dieselbe Untersuchung lehrt, dass die singulären Integrale mit Ausnahme derer, welche von der Form $y = \text{const}$ sind, die Gleichung

$$\frac{\partial \frac{1}{F(x, y)}}{\partial x} = \infty \quad \text{oder} \quad \frac{1}{[F(x, y)]^2} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \infty$$

erfüllen, das heisst:

$$7)\qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \infty \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}} = 0,$$

denn $F(x, y) = 0$ würde zufolge der Gleichung 1) $\frac{dy}{dx} = 0$ oder $y = \text{const}$, also die ausgeschlossene Form ergeben.

639. Die Gleichungen 6) und 7) lassen sich schreiben:

$$8)\qquad \frac{\partial y'}{\partial y} = \infty \quad \text{und} \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = \infty,$$

indem man y' für $\frac{dy}{dx}$ einführt. Wenn also die vorgelegte Gleichung die Form:

$$9)\qquad \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dy}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \Psi(x, y, y') = 0$$

hat, so wird die Gleichung 6):

$$10)\qquad \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y'}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = 0,$$

und die Gleichung 7):

$$11)\qquad \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y'}}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = 0.$$

Ist die Differentialgleichung so geordnet, dass $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ nicht unendlich werden können, so hat man für die singulären Lösungen einfach:

$$12)\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y'} = 0$$

zu setzen. Die Elimination von y' zwischen 9) und 10) oder zwischen 9) und 11) oder endlich auch zwischen 9) und 12) giebt diejenigen Gleichungen, welche singuläre Integrale sein können; im letzteren Falle dürfen jedoch nicht $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ und $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ebenfalls beide null werden. Die Anwendung der Gleichung 12) lehrt, dass man die singulären Lösungen erhält, indem man den Ort der Punkte bestimmt, in denen die Differentialgleichung mindestens zwei gleiche Werte für $\frac{dy}{dx}$ liefert.

640. Aber es ist evident, dass die Werte von y als Funktionen von x, für welche die Differentialgleichung gleiche Wurzeln für y' bekommt, im allgemeinen nicht zugleich Lösungen der Differentialgleichungen sind.

Betrachten wir den einfachsten Fall, wo die Gleichung vom zweiten Grade in $\frac{dy}{dx}$ ist, nämlich:

$$\left(\frac{dy}{dx} - P\right)^2 = Q \quad \text{oder aufgelöst:} \quad \frac{dy}{dx} = P \pm \sqrt{Q}.$$

P und Q seien zwei Funktionen der Variabelen x und y. Die Werte von y, welche aus der Gleichung $Q = 0$ folgen und welche sich ergeben, indem man die Gleichungen:

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \infty \quad \text{oder} \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \infty \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y'} = 0$$

anwendet, werden nun im allgemeinen nicht die Gleichung $\frac{dy}{dx} = P$ befriedigen. Dies tritt nur in besonderen Fällen ein, wenn weitere Bedingungen erfüllt sind. Betrachtet man z. B. die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{2(ax + b^2)} + \frac{1}{2(ax + b)} \sqrt{a^2 y^2 - 4b^2(ax + b^2)}.$$

Hier erfüllt die Funktion $y = \frac{2b}{a}\sqrt{ax + b^2}$, für welche die Wurzel verschwindet, die gegebene Differentialgleichung. Als ganze Funktion dargestellt, lautet diese Differentialgleichung:

$$ay'(y - xy') - b^2(1 + y'^2) = 0,$$

und ihr vollständiges Integral ist:

$$aC(y - Cx) - b^2(1 + C^2) = 0,$$

wobei C die willkürliche Konstante bedeutet.

Die Ergebnisse der bisherigen Untersuchung über die singulären Integrale einer Differentialgleichung kann man, mit besonderer Berücksichtigung derjenigen Differentialgleichungen, in welchen der Differentialquotient $y' = \frac{dy}{dx}$ nur algebraisch rational vorkommt, in folgenden Sätzen geometrischen Inhaltes zusammenfassen.

Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ordnet jedem Punkte der Ebene im allgemeinen eine oder auch mehrere Fortschreitungsrichtungen zu, je nachdem $f(x, y)$ eine eindeutige oder mehrdeutige Funktion der Koordinaten x, y ist. Die Differentialgleichung vollständig integrieren, heisst dasjenige Kurvensystem bestimmen, dessen Tangentenrichtung in jedem Punkte zusammenfällt mit einer der Fortschreitungsrichtungen, welche dem Punkte durch die Differentialgleichung zugeordnet ist.

Ist $f(x, y)$ eine rationale algebraische Funktion gleich $\frac{M}{N}$ oder eine Funktion, welche in der ganzen Ebene den Charakter einer rationalen Funktion hat, so geht durch jeden Punkt nur eine bestimmte Fortschreitungsrichtung und nur die Punkte, für welche gleichzeitig $M = 0$ und $N = 0$ ist, sind singuläre Punkte. In diesem Falle geht auch durch jeden Punkt der Ebene mit Ausnahme der singulären nur eine Integralkurve hindurch, und das Integralsystem enthält die willkürliche Konstante linear. Ist dagegen die Funktion $f(x, y)$ eine mehrdeutige, so dass sich die Differentialgleichung auf die Form $\varphi(x, y, y') = 0$ bringen lässt, in welcher y' algebraisch in der n^{ten} Potenz eingeht, während die Koeffizienten eindeutige Funktionen von x und y sind, so gehen im allgemeinen durch jeden Punkt der Ebene n verschiedene reelle oder komplexe Fortschreitungsrichtungen und das vollständige Integralsystem überdeckt die Ebene im allgemeinen ebenfalls n-fach, d. h. die willkürliche Konstante muss auch in der n^{ten} Potenz in der Integralgleichung enthalten sein. Es giebt dann aber einen Ort von Punkten, der auch aus mehreren rationalen Kurven zusammengesetzt sein kann, für welche mindestens zwei Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen. Dieser Ort berechnet sich aus der Elimination von y' aus den Gleichungen:

$$1) \qquad \varphi(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

Nur diese Gleichung kann ganz oder teilweise zugleich eine Lösung der Differentialgleichung, insbesonders ein singuläres Integral liefern. Im allgemeinen ist sie das nicht, sondern stellt den Ort von Rückkehrpunkten oder höheren singulären Punkten der Integralkurven dar. Falls sie eine Lösung der Differentialgleichung ist, muss der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der durch die Gleichungen 1) dargestellten Kurve in jedem Punkte gleich einem der Werte y'

sein, welche durch die Differentialgleichung dem Punkte zugeordnet werden, d. h. es muss auch

$$2)\qquad \frac{\partial\varphi(x, y, y')}{\partial x} + y' \frac{\partial\varphi(x, y, y')}{\partial y} = 0$$

werden, ohne dass $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ einzeln null sind. Das singuläre Integral bildet immer eine Einhüllende des vollständigen Integralsystemes und kann daher aus diesem durch Differentiation nach der willkürlichen Konstante und Elimination derselben berechnet werden, doch ergiebt auch dieser Prozess zugleich den Ort von singulären Punkten der Integralkurven, falls solche vorhanden sind, der nicht zugleich eine Einhüllende zu sein braucht.

Eine ausführlichere Diskussion über die Bestimmung der singulären Integrale aus der Differentialgleichung ist von Darboux, *Bulletin des sciences mathématiques T. IV, 1873,* gegeben worden; daselbst werden die drei gleichzeitigen Bedingungen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

behandelt.

Die Kurve, welche durch Elimination von y' vermittelst der beiden Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

definiert ist, stellt im allgemeinen den Ort der Wendepunkte dar, während durch eine Kurve, für welche die drei obigen Bedingungen zugleich erfüllt sind, und überdies $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ wird, ein Ort von Berührungspunkten getrennter Integralkurven geliefert wird.

641. Die bisherigen Resultate lassen nun auch im allgemeinen entscheiden, ob eine gegebene Lösung $y = \varphi(x)$ einer Differentialgleichung

$$1)\qquad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

ein partikuläres oder ein singuläres Integral ist. Bezeichnen wir mit z eine neue Variabele und setzen wir

$$y = \varphi(x) + z,$$

so wird die transformierte Differentialgleichung befriedigt durch $z = 0$. Wir wollen annehmen, dass sie sich auf die Form

2) $$\frac{dz}{dx} = z^{\mu}\, \Psi(x, z)$$

bringen lässt, in welcher $\Psi(x, z)$ eine stetige Funktion ist, die für $z = 0$ weder null noch unendlich wird, und μ ein positiver Exponent ist. Auch sei die Ableitung $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ in der Umgebung $z = 0$ stetig oder doch nur an der Stelle $z = 0$ bestimmt unendlich. Es handelt sich also darum, die Beschaffenheit der Lösung $z = 0$ zu erkennen. Wenn sie ein singuläres Integral ist, so ist notwendig und hinreichend, dass die Ableitung von $z^{\mu}\, \Psi(x, z)$ nach z unendlich wird für $z = 0$. Diese Ableitung ist:

3) $$\mu z^{\mu - 1}\, \Psi(x, z) + z^{\mu}\, \Psi'(x, z),$$

indem man $\Psi'(x, z)$ an Stelle von $\frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial z}$ schreibt.

Ist nun $\mu > 1$ oder $\mu = 1$, so hat das erste Glied dieses Ausdruckes einen endlichen Wert für $z = 0$, und das nämliche gilt auch für den zweiten Term, denn es ist, wenn man mit θ eine Grösse zwischen 0 und 1 bezeichnet:

4) $$(\theta z)^{\mu}\, \Psi'(x, \theta z) = \theta^{\mu} . z^{\mu - 1} [\Psi(x, z) - \Psi(x, 0)],$$

und die rechte Seite in dieser Gleichung bleibt für $z = 0$ unseren Annahmen nach endlich, folglich auch die linke Seite. Also ist die Lösung $z = 0$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung.

Ist aber $\mu < 1$, so wird das erste Glied des Ausdruckes 3) unendlich für $z = 0$, und die Ordnung des Unendlichen ist $1 - \mu$; auch das zweite Glied kann unendlich werden, aber nach der Gleichung 4) ist die Ordnung des Unendlichen kleiner als $1 - \mu$, so dass also zwischen den beiden Gliedern keine Reduktion eintreten kann. In diesem Falle ist die Lösung $z = 0$ ein singuläres Integral der Gleichung 2) und folglich $y = \varphi(x)$ ein singuläres der Gleichung 1).

Ich bemerke noch, dass man die singuläre Lösung durch eine Änderung der Variabelen verschwinden lassen kann. Denn setzt man $z = u^{\frac{1}{1-\mu}}$, so wird die Gleichung 2):

$$5) \qquad \frac{du}{dx} = (1-\mu)\,\Psi\left(x, u^{\frac{1}{1-\mu}}\right),$$

und diese Gleichung lässt nicht mehr die Lösung $z = 0$ oder $u = 0$ zu. Diese Bemerkung ist zuerst von Poisson gemacht worden.

642. Schliesslich haben wir noch auf einen wichtigen Umstand hinzuweisen. Das singuläre Integral stellt die Einhüllende oder, anders gesagt, den Ort der Durchschnittspunkte aufeinander folgender Kurven des vollständigen Integralsystemes dar. Es kann nun eintreten, dass die Einhüllende oder auch nur eine der Kurven, aus denen sie sich zusammensetzt, selbst einen Teil des Systemes der Eingehüllten bildet. Man hat dann den bemerkenswerten Fall einer Lösung, welche den doppelten Charakter eines singulären und eines partikulären Integrales besitzt. Es wird nützlich sein, hiervon ein Beispiel zu geben. Es sei

$$y = C(x-C)^2$$

die Gleichung des Systemes der Eingehüllten. Die Differentiation nach C liefert:

$$(x-C)\,(x-3C) = 0.$$

Die Einhüllende setzt sich also aus zwei Kurven zusammen, deren Gleichungen erhalten werden, indem man C durch x, und durch $\frac{x}{3}$ in der Gleichung des Systemes ersetzt.

Es folgt so:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y = \frac{4\,x^3}{27}.$$

Die Lösung $y = 0$ ist zugleich ein besonderer Fall der Systemskurven, sie entspricht dem Werte $C = 0$.

Nur bei einem Kurvensysteme, welches die Konstante C mindestens in der dritten Potenz enthält, welches also die Ebene mindestens dreifach überdeckt, kann dieser Fall eintreten. Die Einhüllende bildet den Ort der Punkte, in denen mindestens drei Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen, und die Tangente der Ortskurve ist in jedem Punkte mit dieser Richtung identisch.

Die Herleitung der singulären Integrale der Differentialgleichungen höherer Ordnung aus irgend einem ihrer ersten Integrale.

643. Die Betrachtungen, welche wir entwickelt haben, sind auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung anwendbar.

Wir setzen:

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \ldots \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = y^{(n)},$$

und untersuchen die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$1) \qquad y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}).$$

Es sei

$$2) \qquad y^{(n-1)} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-2)}, C)$$

eines der n ersten Integrale, C die willkürliche Konstante. Differentiiert man die Gleichung 2), so folgt:

$$3) \qquad y^{(n)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}$$

Diese Gleichung muss zu einer identischen werden, wenn man $y^{(n)}$ und $y^{(n-1)}$ durch ihre Werte aus den Gleichungen 2) und 3) ersetzt; also besteht die Gleichung:

$$4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} f = F(x, y, y', \ldots y^{(n-2)}, f)$$

identisch, welches nur die Werte von $x, y, y', \ldots y^{(n-2)}$ und C sein mögen.

Betrachtet man nun C als eine Funktion von

$$x, y, y', \ldots y^{(n-2)},$$

so kann die rechte Seite der Gleichung 2) als eine willkürliche Funktion dieser Grössen angesehen werden. Es ist zu untersuchen, ob auch unter diesem Gesichtspunkte die Gleichung 2) der Gleichung 1) genügen kann.

Der Ausdruck 3) für $y^{(n)}$ muss jetzt noch um das Glied $\frac{\partial f}{\partial C} \frac{dC}{dx}$ vermehrt werden, und da die Gleichung 4) bestehen muss, auch wenn man der linken Seite dieses Glied hinzufügt, so muss diese Grösse null sein. Der Faktor

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

ergiebt, $C = \text{const}$, und führt auf das erste Integral zurück. Man bekommt also für das singuläre Integral die Gleichung:

5)
$$\frac{\partial f}{\partial C} = 0;$$

aus derselben berechnet sich der Wert von C als Funktion der Grössen $x, y, y', \dots y^{(n-2)}$. Trägt man diesen Wert in die Gleichung 2) ein, so erhält man das singuläre Integral. Man sieht, dass diese Lösung von der Form ist:

6)
$$\frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C} = 0, \quad y^{(n-1)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-2)}, C),$$

und dass, wenn das erste Integral in der Form:

7)
$$\Phi(x, y, y', \dots y^{(n-1)}, C) = 0$$

dargestellt ist, die singuläre Lösung durch die Gleichungen:

8)
$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}}} = 0, \quad \Phi = 0$$

gegeben ist.

644. Man darf nicht denken, dass jedem ersten Integrale der Gleichung 1) auch eine besondere singuläre Lösung entsprechen kann; im Gegenteil, es lässt sich leicht beweisen, dass, wenn man die angegebene Regel auf jedes der n Integrale anwendet, immer das nämliche singuläre Integral erhalten wird. Denn ist:

9)
$$\Phi(x, y, y', \dots y^{(n-1)}, B) = 0$$

ein anderes erstes Integral der Gleichung 1), wobei B die willkürliche Konstante ist, so erhält man, indem man $y^{(n-1)}$ aus den beiden Gleichungen 7) und 9) eliminiert, eine Gleichung von der Ordnung $(n - 2)$:

10)
$$\Psi(x, y, y', \dots y^{(n-2)}, B, C) = 0,$$

welche ein zweites Integral der Gleichung 1) ist. Wir nehmen nun an, dass man die Gleichung 10) auf solch eine Form gebracht hat, dass die partiellen Ableitungen von Ψ nicht unendlich werden können, solange die Grössen, welche in Ψ vorkommen, endlich bleiben. Das Resultat der Differentiation der Gleichung 10) bezeichnen wir mit

$$11)\qquad \Psi'(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, B, C) = 0.$$

Dann ist evident, dass man die Gleichungen 7) oder 9) durch Elimination von B oder von C aus den Gleichungen 10) und 11) erhält. Denkt man sich also in der Gleichung 11) B ersetzt durch seinen Wert, wie er aus der Gleichung 10) folgt, so wird diese Gleichung mit der Gleichung 7) identisch. Demnach kann sie zur Berechnung der partiellen Ableitung $\frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C}$ dienen, die, gleich null gesetzt, nach § 643 das singuläre Integral liefert, welches zum ersten Integrale 7) gehört.

Wir differentiieren also die Gleichungen 10) und 11); indem wir dabei C als eine willkürliche Variabele, B und $y^{(n-1)}$ als zwei Funktionen dieser Variabelen ansehen, so folgt:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial C} + \frac{\partial \Psi}{\partial B}\frac{dB}{dC} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial C} + \frac{\partial \Psi'}{\partial B}\frac{dB}{dC} + \frac{\partial \Psi'}{\partial y^{(n-1)}}\frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C} = 0.$$

Eliminieren wir nun $\frac{dB}{dC}$ zwischen diesen beiden Gleichungen, so erhalten wir, weil $\frac{\partial \Psi'}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial \Psi}{\partial y^{(n-2)}}$ ist:

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial B}\frac{\partial \Psi}{\partial y^{(n-2)}}\frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C} = \frac{\partial \Psi}{\partial B}\frac{\partial \Psi'}{\partial C} - \frac{\partial \Psi}{\partial C}\frac{\partial \Psi'}{\partial B}.$$

Also ist das singuläre Integral, berechnet aus einem der ersten Integrale 7) oder 9), definiert durch die Gleichung:

$$12)\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial B}\frac{\partial \Psi'}{\partial C} - \frac{\partial \Psi}{\partial C}\frac{\partial \Psi'}{\partial B} = 0.$$

Man erhält dasselbe durch Elimination von B und C aus den Gleichungen 10), 11) und 12).

Die Herleitung der singulären Integrale der Differentialgleichungen höherer Ordnung aus der Differentialgleichung.

645. Das singuläre Integral einer Differentialgleichung beliebiger Ordnung kann, wenn es existiert, auch aus der Differentialgleichung selbst bestimmt werden, ohne dass man irgend ein Integral derselben zu kennen braucht. Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$1)\qquad F(x, y, y', \dots y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,$$

und es sei

$$2)\qquad f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}, C) = 0$$

irgend eines ihrer n ersten Integrale. Differentiiert man die Gleichung 2), so wird:

$$3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass man aus dieser Gleichung den Wert von C als Funktion von $x, y, y', \dots y^{(n)}$ bestimmt und in die vorhergehende substituiert hat, so erhält man die ursprüngliche Differentialgleichung selbst, und man kann also diese Gleichung zur Berechnung der Ableitung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $y^{(n+1)}$ anwenden, welche man direkt durch Differentiation der Gleichung 1) erhält. Die Differentiation der Gleichung 2) ergiebt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right) + \frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + y' \frac{\partial C}{\partial y} + \cdots + y^{(n+1)} \frac{\partial C}{\partial y^{(n)}}\right) = 0.$$

Der erste Teil der linken Seite ist aber null wegen der Gleichung 3), und also ist:

$$4)\qquad \frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + y' \frac{\partial C}{\partial y} + \cdots + y^{(n+1)} \frac{\partial C}{\partial y^{(n)}}\right) = 0.$$

Dies ist also die Form, auf welche man die Gleichung für $y^{(n+1)}$ bringen kann, welche durch Differentiation der Gleichung 1) erhalten wird. Für die singuläre Lösung ist diese Gleichung identisch erfüllt und kann nicht zur Berechnung von $y^{(n+1)}$ dienen; denn für solch eine Lösung ist

$\frac{\partial f}{\partial C} = 0$, wenn man, was gestattet ist, voraussetzt, dass die Gleichung 2) nach $y^{(n-1)}$ aufgelöst ist. Übrigens würde es auch leicht sein, zu beweisen, dass der Wert von $y^{(n+1)}$, welcher aus der Gleichung 4) hervorgeht, nachdem man den Faktor $\frac{\partial f}{\partial C}$ unterdrückt hat, im allgemeinen nicht dem singulären Integrale angehört.

Nehmen wir also an, dass die Gleichung 1) auf solch eine Form gebracht ist, dass ihre linke Seite eine eindeutige Funktion der in ihr enthaltenen Grössen ist, und dass auch die partiellen Ableitungen bei allen endlichen Werten endlich bleiben, so ergiebt die Differentiation:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} + y^{(n+1)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

Da nun diese Gleichung den Wert von $y^{(n+1)}$, welcher zum singulären Integrale gehört, nicht bestimmen lässt, so muss notwendig für diese Lösung:

$$5) \qquad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

und

$$6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = 0$$

sein. Die Gleichung 5) giebt zusammen mit der Gleichung 1) durch Elimination von $y^{(n)}$ eine Lösung, vorausgesetzt, dass für diese Funktion zugleich auch die Gleichung 6) erfüllt ist. Es ist aber hiermit nicht gesagt, dass diese Lösung in allen Fällen eine singuläre ist, sie kann vielmehr auch eine partikuläre sein.

646. Schliesslich haben wir noch eine Bemerkung in Bezug auf die Theorie der singulären Integrale zu machen Es sei:

$$1) \qquad \Pi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

das singuläre Integral der Gleichung n^{ter} Ordnung:

$$2) \qquad F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0.$$

Ist diese singuläre Lösung wirklich von der Ordnung $n-1$, so enthält ihr vollständiges Integral $n-1$ willkürliche

Konstanten, und es genügt dasselbe der vorgelegten Differentialgleichung. Die singuläre Lösung kann nun selbst wieder ein singuläres Integral besitzen, aber dieses singuläre Integral genügt im allgemeinen nicht der ursprünglichen Differentialgleichung.

Denn nach unserer Annahme wird die Gleichung 2) erfüllt, wenn man in dieselbe die Werte von $y^{(n-1)}$ und $y^{(n)}$ substituiert, welche aus der Gleichung 1) und der durch Differentiation aus dieser abgeleiteten hervorgehen. Diese letztere ist

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} + y' \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial \Pi}{\partial y^{(n-1)}} = 0.$$

Sie bestimmt aber nicht mehr, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, den Wert $y^{(n)}$, wenn es sich um die singuläre Lösung der Gleichung 1) handelt.

Eine Differentialgleichung höherer Ordnung besitzt kein singuläres Integral, wenn durch dieselbe der Wert $y^{(n)}$ als eine durchaus eindeutige Funktion von $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ definiert ist.

Denn alsdann ist jedes partikuläre Integral durch seine Anfangswerte $x_0, y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$ eindeutig fixiert. Die Theorie der singulären Integrale bei einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, sowie bei einem Systeme von Differentialgleichungen ist ausführlicher von Herrn Mayer (Math. Annal. Bd. 22) behandelt worden.

Anwendung der Theorie auf ein Beispiel.

647. Die wichtige Theorie, welche wir dargestellt haben, glaube ich durch ein Beispiel erläutern zu müssen. Wir behandeln die Gleichung:

$$1) \qquad y - ax^2 - bx - 4a^2 - b^2 = 0,$$

welche Lagrange in seinen *Leçons sur le calcul des fonctions* betrachtet hat; a und b sind zwei willkürliche Konstanten. Aus derselben folgt:

$$2) \qquad \frac{dy}{dx} - 2ax - b = 0.$$

Die Elimination von b ergiebt:

3) $$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y\right] - a\left(4x\frac{dy}{dx} + x^2\right) + 4a^2(1+x^2) = 0,$$

und die Elimination von a:

4) $$\left[2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^3\frac{dy}{dx} - 2yx^2\right] - b\left(4\frac{dy}{dx} - x^3\right) + 2b^2(1+x^2) = 0.$$

Ferner liefert die Gleichung 2):

5) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a = 0,$$

also $a = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$. Trägt man diesen Wert von a in die Gleichung 3) ein, so wird:

6) $$(1+x^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(2x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Die Gleichung 6) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Gleichungen 3) und 4) sind ihre ersten Integrale, die Gleichung 1) ihr vollständiges. Drückt man die Bedingung aus, dass die Wurzeln a der Gleichung 3) oder die Wurzeln b der Gleichung 4) gleich werden, so findet man das singuläre Integral der Gleichung 6), nämlich:

7) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx} - (1+x^2)x - \frac{x^4}{16} = 0.$$

Will man diese Gleichung 7) aus der Differentialgleichung 6) gewinnen, so hat man diese letztere zu differentiieren; man erhält:

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left[(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{4}\right] = 0.$$

Setzt man den Koeffizienten von $\frac{d^3y}{dx^3}$ gleich null, so folgt:

8) $$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{4} = 0;$$

endlich ergiebt die Elimination von $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus den Gleichungen 6) und 8) die Gleichung 7), welche wir vermittelst der ersten Integrale bestimmt haben.

Löst man die Gleichung 7) nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so findet man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + x^3}{4} + \frac{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}}{4},$$

was man auch schreiben kann:

$$\frac{8\frac{dy}{dx} + 4x + 2x^3}{\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}} - 2\sqrt{1 + x^2} = 0.$$

Der erste Teil der linken Seite ist die Ableitung von $\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}$, während der zweite Teil $2\sqrt{1 + x^2}$ die Ableitung von

$$x\sqrt{1 + x^2} + l\,(x + \sqrt{1 + x^2})$$

ist. Also erhält man die singuläre Lösung 7) durch Differentiation der Gleichung:

$$9)\quad \sqrt{16\,y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1 + x^2} - l\,(x + \sqrt{1 + x^2}) = H,$$

wobei H eine willkürliche Konstante bezeichnet, d. h. die Gleichung 9) ist das vollständige Integral dieser singulären Lösung.

Die Gleichung 7) hat selbst ein singuläres Integral, das man aus ihrem vollständigen entnehmen kann. Da dieses nach der willkürlichen Konstante aufgelöst ist, so hat man die erste Ableitung der linken Seite nach y gleich null zu setzen. Man findet hiernach:

$$16y + 4x^2 + x^4 = 0, \quad \text{also} \quad y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}.$$

Dieser Wert von y befriedigt zwar die Gleichung 7), aber nicht die Gleichung 1).

Über eine bemerkenswerte Klasse von Differentialgleichungen.

648. Zum Schlusse dieses Kapitels will ich nur noch einige summarische Bemerkungen über eine Klasse von Differentialgleichungen anführen, welche zuerst von Lagrange behandelt worden sind und deren Theorie ausführlich in einer Abhandlung im 18. Bande des *Journal de Mathématiques pures et appliquées* von mir entwickelt worden ist.

Es seien x, y zwei Variabele, $y', y'', \ldots$ die successiven Ableitungen von y, α und β zwei willkürliche Konstanten. Wenn die beiden Gleichungen:

$$1) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = \alpha, \\ \psi(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = \beta \end{cases}$$

zwei erste Integrale derselben Differentialgleichung $V = 0$ sind und aus denselben durch Elimination von $y^{(n)}$ eine Gleichung:

$$2) \qquad f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, \alpha, \beta) = 0$$

folgt, so ist diese letzte ein zweites Integral der Gleichung $V = 0$. Die nämliche Gleichung 2) ist nun ein erstes Integral der Gleichung:

$$3) \qquad F(\varphi, \psi) = 0,$$

wobei F eine beliebige Funktion bezeichnet, wenn man in jener α und β als Konstante betrachtet, die unter einander durch die Gleichung:

$$4) \qquad F(\alpha, \beta) = 0$$

verbunden sind. Denn wenn man die Gleichung 2) und die aus derselben durch Differentiation abgeleitete nach α und β auflöst, so findet man nach unserer Annahme $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$, und weil man voraussetzt, dass α und β durch die Gleichung 4) verbunden sind, so ist klar, dass die Gleichung 3) befriedigt ist.

Um nun das singuläre Integral der Gleichung 3) zu erhalten, kann man ihr erstes Integral 2) anwenden. Setzen wir voraus, dass dieses Integral auf solch eine Form gebracht ist, dass die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ nicht unendlich werden kann, so genügt es, die Gleichung 2) nach der willkürlichen Konstanten α zu differentiieren, indem man dabei β als Funktion von α ansieht; alsdann folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

Andererseits ergiebt die Gleichung 4):

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta} d\beta = 0,$$

und hieraus folgt durch Elimination von $\frac{d\beta}{d\alpha}$:

5) $$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

Diese Gleichung ist das gesuchte singuläre Integral.

649. Erstes Beispiel. *Es soll eine ebene Kurve bestimmt werden, wenn die Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte, ihre Evolute, gegeben ist.*

Bezeichnet man mit x, y die Koordinaten der gesuchte Kurve, mit α, β die der Krümmungsmittelpunkte, so ist (§ 195):

1) $$\alpha = x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}, \quad \beta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Ist also:

2) $$F(\alpha, \beta) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Kurve, so ist die Differentialgleichung des Problemes:

3) $$F\left[x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}, \quad y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right] = 0;$$

sie ist von der zweiten Ordnung. Betrachtet man aber α und β als willkürliche Konstanten, so sind die Gleichungen 1) zwei erste Integrale der nämlichen Gleichung dritter Ordnung:

4) $$\left(1+\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

Man hat hier also den im vorigen Paragraphen behandelten Fall. Eliminiert man $\frac{d^2y}{dx^2}$ zwischen den Gleichungen 1), so erhält man:

5) $$(\alpha - x) + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

und diese Gleichung ist ein erstes Integral der Gleichung 5), wenn α und β zwei Konstanten sind, die mit einander durch die Gleichung 2) verbunden sind. Die linke Seite der Gleichung 5) ist bis auf einen konstanten Faktor die Ableitung von

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2;$$

bezeichnet man also mit R eine neue willkürliche Konstante, so ist das vollständige Integral der Gleichung 3):

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

α und β sind durch die Gleichung 2) verbunden. Die vollständige Lösung des vorgelegten Problemes ist also gegeben durch einen Kreis mit willkürlichem Radius, dessen Mittelpunkt ein willkürlicher Punkt der gegebenen Kurve ist. Im Sinne der Geometrie aber ist dieses nicht die eigentliche Lösung, vielmehr ist diese nichts anderes als das singuläre Integral der Gleichung 3). Um dieses zu erhalten, muss man die Gleichung 5) differentiieren, indem man α und β als die einzigen Variabelen betrachtet. Dies ergiebt:

$$6) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha}\,\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Der Quotient $\frac{d\beta}{d\alpha}$ muss aus der Gleichung 1) berechnet werden. Diese Gleichung 6), welche nur von der ersten Ordnung ist, muss man ansetzen, wenn man die Evolventen der gegebenen Kurve bestimmen will.

650. Zweites Beispiel. *Es sollen die Krümmungskurven einer Fläche zweiter Ordnung mit Mittelpunkt gefunden werden.*

Die Gleichung der gegebenen Fläche sei:

$$1) \qquad \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1.$$

Die Differentialgleichung der Projektionen der Krümmungskurven auf die xy-Ebene wird dann, wenn man $dy = y'dx$ setzt (§ 341):

$$2) \qquad \frac{c^2}{\varrho^2}\left(x^2 - \frac{xy}{y'}\right) - \frac{c^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2}(y^2 - xyy') - b^2 = 0,$$

oder:

$$3) \qquad \alpha - \beta - b^2 = 0,$$

indem man

$$4)\qquad \frac{c^2}{\varrho^2}\left(x^2 - \frac{xy}{y'}\right) = \alpha, \quad \frac{c^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2}(y^2 - xyy') = \beta$$

einführt. Betrachtet man nun α und β als willkürliche Konstanten, so ergeben diese beiden Gleichungen übereinstimmend durch Differentiation:

$$xyy'' - yy' + xy'^2 = 0;$$

sie sind also die zwei ersten Integrale dieser Differentialgleichung, und folglich kann man auf die Gleichung 2) das Theorem des § 648 anwenden. Eliminiert man y' zwischen den Gleichungen 4), so folgt:

$$\frac{c^2}{\varrho^2}\,\frac{x^2}{\alpha} + \frac{c^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2}\,\frac{y^2}{\beta} = 1;$$

da α und β durch die Gleichung 3) verbunden sind, so setzen wir $\alpha = \mu^2$, $\beta = \mu^2 - b^2$, und die Gleichung der Projektionen der Krümmungskurven wird schliesslich:

$$5)\qquad \frac{c^2 x^2}{\varrho^2 \mu^2} + \frac{(c^2 - b^2)\,y^2}{(\varrho^2 - b^2)\,(\mu^2 - b^2)} = 1,$$

wobei μ^2 die willkürliche Konstante ist.

Da diese Gleichung in Bezug auf ϱ und μ symmetrisch ist, so stellt sie auch, wenn man ϱ als einen variabelen Parameter und μ als eine bestimmte Grösse betrachtet, die Projektionen der Krümmungskurven der Fläche:

$$6)\qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1$$

dar; und wenn man gleichzeitig den Grössen ϱ und μ bestimmte Werte beilegt, so repräsentiert die Gleichung 5) die Projektion einer Krümmungskurve, die den Flächen 1) und 6) gemeinsam ist, die also den Durchschnitt dieser beiden Flächen bildet.

Wenn in der Gleichung 1) $\varrho > c > b$ angenommen wird, so muss μ zwischen c und b gelegen, oder kleiner als b sein, damit die beiden Flächen sich schneiden Hieraus schliesst man, dass die drei Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

in denen b und $c > b$ bestimmte Konstanten, ϱ, μ, ν drei variabele Parameter sind, ϱ zwischen ∞ und c, μ zwischen c und b, ν zwischen b und 0, ein System von drei Flächenfamilien darstellen, so dass jede Fläche der einen Familie von allen Flächen der beiden anderen in ihren Krümmungskurven geschnitten wird, eine Eigenschaft, welche wir vermittelst des Dupinschen Theorems bereits bewiesen haben (§ 338).

651. Drittes Beispiel. Die Gleichung

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

auf welche wir im folgenden Kapitel noch zurückkommen werden, gehört zu der behandelten Klasse; denn die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \quad y - x\frac{dy}{dx} = \beta,$$

in denen α und β willkürliche Konstanten sind, sind die ersten Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Eliminiert man $\frac{dy}{dx}$, so erhält man:

$$y = \alpha x + \beta,$$

und dies ist das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung, wenn man dabei zwischen α und β die Gleichung

$$\beta = f(\alpha)$$

annimmt. Das singuläre Integral erhält man durch Elimination von α aus den Gleichungen:

$$y = \alpha x + f(\alpha), \quad 0 = x + f'(\alpha).$$

Zweites Kapitel.

Über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen.

Die Trennung der Variabelen.

652. Nachdem wir die allgemeinen Grundlagen der Theorie der Differentialgleichungen entwickelt haben, müssen wir nun die Fälle untersuchen, bei denen man die Integrale in geschlossener Form ermitteln, d. h. entweder durch explicite oder implicite elementare Funktionen, oder mit Hilfe bestimmter Integrale darstellen kann; durch diese letzteren werden, wie wir gesehen haben, im allgemeinen neue transscendente Funktionen, wie z. B. die elliptischen, definiert. Eine Differentialgleichung wird also als gelöst betrachtet, wenn es gelungen ist, die allgemeine Funktionalgleichung zwischen den Variabelen zu bilden, welche die Ableitung derselben nicht mehr enthält, mögen auch in dieser Gleichung neue Funktionen, insbesondere Quadraturen auftreten, deren Untersuchung freilich weitere Aufgaben darbietet. In dem vorliegenden Kapitel behandeln wir nur die Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen.

Der einfachste Fall ist hier derjenige, bei welchem die Variabelen getrennt sind; dann hängt die Integration der Gleichung nur von Quadraturen ab. Wir sagen, dass die Variabelen in einer Differentialgleichung getrennt sind, wenn dieselbe auf die Form gebracht ist:

$$1)\qquad X + Y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad X\,dx + Y\,dy = 0,$$

wobei X eine eindeutig gegebene, integrierbare Funktion von x, und ebenso Y eine Funktion von y ist. Bezeichnet man mit x_0 und y_0 irgend welche bestimmte Grössen, mit C eine willkürliche Konstante, so ist das vollständige Integral der Gleichung 1):

$$2)\qquad \int\limits_{x_0}^{x} X\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Y\,dy = C.$$

Statt dieses Integrales kann man auch schreiben:

$$3)\qquad \int\limits_{x_0}^{x} X\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Y\,dy = 0,$$

wenn x_0 irgend einen bestimmten Wert und y_0 eine willkürliche Konstante bezeichnen; diese Konstante ist dann gerade der Wert, welchen y annimmt, falls man der Variabelen x den Wert x_0 beilegt.

Dass in der That diese Funktion zwischen x und y den Forderungen genügt, ist leicht einzusehen, indem man die gewonnene Gleichung differentiiert, und dass auch nur die Funktion y, welche aus der Gleichung 3) hervorgeht, wenn man sich dieselbe nach y aufgelöst denkt, die Differentialgleichung befriedigt und für $x = x_0$ gleich y_0 wird, folgt, nach dem allgemeinen Lehrsatze im § 622 aus der Eindeutigkeit des Integrales, solange X und Y und deren successive Ableitungen eindeutige Funktionen von x und y sind.

Will man nur die reellen Werte von x und y betrachten, so kann man die Vollständigkeit der Lösung 3) noch unter allgemeineren Voraussetzungen einsehen. Man muss zu diesem Zwecke auf den im § 618 citierten Beweis von Herrn Lipschitz für die Existenz und Eindeutigkeit eines Integrales der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ zurückgehen, innerhalb eines Gebietes, in welchem $f(x, y)$ eine eindeutige und stetige Funktion der beiden Variabelen x und y ist.

Das Problem der Integration einer Differentialgleichung ist demnach als gelöst zu betrachten, sobald die Variabelen getrennt sind; diese Trennung lässt sich bisweilen vermittelst einer Transformation der Variabelen vollziehen, wie wir an Beispielen in diesem Kapitel sehen werden.

Wenn die Gleichung $\frac{1}{X} = 0$ die Wurzel $x = a$ hat, so ist für die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{X}{Y} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{Y}{X}$$

$x = a$ eine Lösung, also entweder ein partikuläres oder ein singuläres Integral (§ 641). Desgleichen wenn $\frac{1}{Y} = 0$ die Wurzel $y = b$ hat, so wird $y = b$ ein partikuläres oder ein singuläres Integral.

653. Beispiele. 1. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1 - y^2}{1 - x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{1 - x^2} + \frac{dy}{1 - y^2} = 0$$

hat das Integral:

$$\int_0^x \frac{dx}{1 - x^2} + \int_0^y \frac{dy}{1 - y^2} = C.$$

Nun ist

$$\int_0^x \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1 + x} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1 - x} = l\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}},$$

und ebenso:

$$\int_0^y \frac{dy}{1 - y^2} = l\sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}.$$

Schreibt man also $l\sqrt{C}$ an Stelle von C, sc wird das obige Integral gleich:

$$\frac{(1 + x)(1 + y)}{(1 - x)(1 - y)} = C.$$

Für $C = 0$ erhält man die partikulären Integrale $x = -1$, $y = -1$; für $C = \infty$ die beiden anderen partikulären Integrale $x = +1$, $y = +1$, was mit dem allgemeinen Satze im § 641 übereinstimmt

2. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} \pm \frac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$$

hat das vollständige Integral:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin C,$$

wobei C die willkürliche Konstante bedeutet. Bildet man den Sinus der auf beiden Seiten stehenden Glieder, so folgt:

$$x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2} = C;$$

auch hier wird die Differentialgleichung befriedigt, indem man $x = \pm 1$ oder $y = \pm 1$ setzt; aber diese Lösungen sind jetzt singuläre und nicht partikuläre Integrale; denn dieselben ergeben sich nicht aus der vollständigen Integralgleichung durch einen besonderen Wert der Konstanten; auch steht dies in Übereinstimmung mit der Theorie im § 641.

Integration der Gleichungen $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

654. Wenn sich bei einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

die rechte Seite als eine Funktion des Quotienten $\frac{y}{x}$ darstellen lässt, also:

$$1)\qquad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

wird, so kann man vermittelst der Substitution:

$$2)\qquad \frac{y}{x} = z \quad \text{oder} \quad y = xz,$$

wobei z als neue Variabele an Stelle von y eingeführt wird, die Variabelen trennen. Denn man erhält:

$$3)\qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z,$$

also an Stelle der Gleichung 1):

$$4)\qquad x\frac{dz}{dx} + z = f(z) \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{f(z) - z} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Bezeichnet man mit C die willkürliche Konstante, so folgt durch Integration:

$$5)\ \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = C \quad \text{oder} \quad \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - l\,\frac{x}{x_0} = C.$$

Die Werte x_0 und z_0 können beliebig fixiert werden; betrachtet man aber z_0 als die willkürliche Konstante, so kann man einfacher schreiben:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - l\,\frac{x}{x_0} = 0.$$

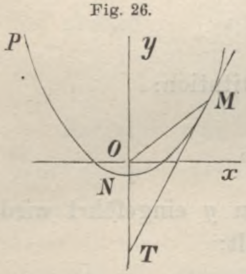
Wenn in der Differentialgleichung:

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad \text{oder} \quad M + N\frac{dy}{dx} = 0$$

M und N *homogene Funktionen* derselben Ordnung von x und y bezeichnen, so gehört sie zu der betrachteten Art; denn der Quotient $\frac{M}{N}$ ist alsdann eine homogene Funktion null[ter] Ordnung von x und y, also in der Form $-f\left(\frac{y}{x}\right)$ darstellbar.

655. Beispiel I. *Es seien die beiden rechtwinkligen Axen* Ox *und* Oy *gegeben; man soll eine Kurve* MNP *bestimmen, so dass der Radiusvektor* OM *stets gleich ist der Entfernung* OT *zwischen dem Koordinatenanfangspunkte und dem Schnittpunkte, den die Tangente des Punktes* M *mit der Ordinatenaxe bildet.*

Fig. 26.



Die Gleichung der Tangente MT im Punkte $M(x, y)$ ist:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

und setzt man $X = 0$, $Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, so erhält man die Differentialgleichung der gesuchten Kurve, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \mp \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Wir setzen $y = xz$, $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$, alsdann wird diese Gleichung:

$$x\frac{dz}{dx} + z = z \mp \sqrt{1 + z^2}$$

oder:

$$\frac{dz}{\mp\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Hier sind die Variabelen getrennt, und da

$$\int \frac{dx}{x} = l(x) + \text{const}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = l(z + \sqrt{1+z^2}) + \text{const}$$

ist, so wird das Integral gleich:

$$l(z \mp \sqrt{1+z^2}) = lx - lC,$$

wobei lC die willkürliche Konstante bedeutet. Dasselbe ist auch gleich:

$$z \mp \sqrt{1+z^2} = \frac{x}{C},$$

und liefert also die beiden Funktionen:

$$z - \sqrt{1+z^2} = \frac{x}{C} \quad \text{oder} \quad z + \sqrt{1+z^2} = \frac{x}{C}.$$

Man vereinigt dieselben zu dem einen Ausdruck:

$$\left(z - \sqrt{1+z^2} - \frac{x}{C}\right)\left(z + \sqrt{1+z^2} - \frac{x}{C}\right) = 0$$

oder:

$$\left(z - \frac{x}{C}\right)^2 - (1+z^2) = 0, \quad \text{also} \quad \frac{-2zx}{C} + \frac{x^2}{C^2} - 1 = 0.$$

Setzt man wieder $\frac{y}{x}$ an Stelle von z, so folgt:

$$x^2 - C^2 - 2Cy = 0.$$

Diese Gleichung stellt die Parabeln dar, deren Brennpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist, und deren Axe mit der y-Axe zusammenfällt. Durch Differentiation nach C folgt:

$$2C(C+y) = 0.$$

$C = 0$ liefert das partikuläre Integral $x^2 = 0$, also die y-Axe; $C = -y$ giebt die singuläre Lösung:

$$x^2 + y^2 = 0,$$

welche ein imaginäres Linienpaar darstellt; in der That wird die Differentialgleichung befriedigt, indem man $y = \pm x\sqrt{-1}$ setzt.

656. Beispiel II. *Das Integral der Differentialgleichung*

$$(\mathrm{a}x + \mathrm{b}y)\,dx + (\mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y)\,dy = 0$$

zu bestimmen, in welcher a, b, a', b' *gegebene Konstanten sind.*

Durch die Substitution:

$$y = xz, \quad dy = x\,dz + z\,dx$$

wird die vorgelegte Gleichung:

$$x(a + bz)\,dx + x(a' + b'z)\,(x\,dz + z\,dx) = 0$$

oder:

$$\frac{(a' + b'z)\,dz}{a + (b + a')\,z + b'z^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

oder:

$$2\frac{dx}{x} + \frac{(b + a') + 2b'z}{a + (b + a')\,z + b'z^2}\,dz + \frac{(a' - b)}{a + (b + a')\,z + b'z^2}\,dz = 0.$$

Die ersten beiden Glieder dieser Summe sind das Differential von

$$l(x^2) + l\,[a + (b + a')\,z + b'z^2] = l\,[ax^2 + (b + a')\,xy + b'y^2],$$

folglich erhält man durch Integration:

$$l\,[ax^2 + (b + a')\,xy + b'y^2] + \int \frac{(a' - b)\,dz}{a + (b + a')\,z + b'z^2}\,dz = \text{const.}$$

Setzt man

$$(a' - b)^2 - 4(ab' - ba') = \pm H,$$

wobei H eine positive Grösse ist, so bekommt das Integral der obigen Gleichung den Wert:

$$\frac{a' - b}{\sqrt{H}}\,l\,\frac{2b'z + b + a' - \sqrt{H}}{2b'z + b + a' + \sqrt{H}}$$

oder:

$$\frac{2(a' - b)}{\sqrt{H}}\,\text{arctang}\,\frac{2b'z + b + a'}{\sqrt{H}},$$

je nachdem $\pm H$ einen positiven oder einen negativen Wert bedeutet. Also wird das Integral der gegebenen Differentialgleichung im ersten Falle gleich:

$$l\,[ax^2 + (b + a')\,xy + b'y^2] + \frac{a' - b}{\sqrt{H}}\,l\,\frac{2b'y + (b + a' - \sqrt{H})\,x}{2b'y + (b + a' + \sqrt{H})\,x} = C,$$

im zweiten Falle gleich:

$$l\,[ax^2 + (b + a')\,xy + b'y^2] + \frac{2(a' - b)}{\sqrt{H}}\,\text{arctang}\,\frac{2b'y + (b + a')\,x}{x\sqrt{H}} = C.$$

Ist $H = 0$, so wird das letzte Glied algebraisch, und man erkennt leicht, dass es den Wert hat:

$$\frac{-2(a'-b)x}{2b'y+(b+a')x}.$$

Das Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist nur dann eine algebraische Funktion, wenn die Grösse $\pm H$ positiv ist, und in diesem Falle muss dann überdies

$$\frac{a'-b}{\sqrt{H}}$$

ein rationaler Bruch sein.

Dieselbe Differentialgleichung lässt sich noch in anderer Weise integrieren, was zu einer einfacheren Einsicht in die Natur der Integralfunktion führt und insbesondere das Verhalten derselben in dem singulären Punkte erkennen lässt, für welchen $ax + by = 0$ und $a'x + b'y = 0$, also $x = 0$ und $y = 0$ wird, und welcher hier der einzige im Endlichen gelegene singuläre Punkt ist. Führt man an Stelle der Variabelen x und y zwei neue Variabele ξ und η durch die lineare Substitution

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y$$

ein, so kann man die Konstanten λ_1 und λ_2 so bestimmen, dass die Differentialgleichung die Form erhält:

$$g\eta\, d\xi + g'\xi\, d\eta = 0.$$

Der Sinn dieser Transformation ist der, dass zwei lineare partikuläre Integrale $\xi = 0$ und $\eta = 0$ ermittelt werden. Es wird nämlich:

$$d\xi = dx + \lambda_1\, dy, \quad d\eta = dx + \lambda_2\, dy,$$

also:

$$g(x + \lambda_2 y)(dx + \lambda_1\, dy) + g'(x + \lambda_1 y)(dx + \lambda_2\, dy) = 0,$$

und soll diese Gleichung mit der ursprünglichen identisch sein, so muss:

$$g + g' = a, \qquad g\lambda_1 + g'\lambda_2 = a',$$
$$g\lambda_2 + g'\lambda_1 = b, \quad \lambda_1\lambda_2(g + g') = b'$$

sein. Hieraus folgt, wenn wir den speziellen Fall $a = 0$ bei Seite lassen:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{b'}{a}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{a'+b}{a},$$

d. h. λ_1 und λ_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$a\lambda^2 - (a'+b)\lambda + b' = 0.$$

Alsdann sind g und g' zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$g + g' = a, \quad g\lambda_2 + g'\lambda_1 = b,$$

und es wird:

$$(g\lambda_1 + g'\lambda_2)(g'\lambda_1 + g\lambda_2) = a'b = g^2\lambda_1\lambda_2 + g'^2\lambda_1\lambda_2 + gg'(\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2),$$

ferner:

$$\lambda_1\lambda_2(g + g')^2 = ab',$$

also:

$$a'b - ab' = gg'(\lambda_1 - \lambda_2)^2,$$

und das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$g\eta\, d\xi + g'\xi\, d\eta = 0$$

wird:

$$l(\xi^g\eta^{g'}) = \text{const} \quad \text{oder} \quad (x + \lambda_1 y)^g(x + \lambda_2 y)^{g'} = C.$$

Diese Gleichung umfasst folgende Fälle, wenn die Koeffizienten a, a', b, b' als reell vorausgesetzt werden:

1. Sind die beiden Wurzeln λ von 0 verschieden, ungleich und reell, also:

$$4ab' - (a' + b)^2 = 4(ab' - a'b) - (a' - b)^2 < 0,$$

so sind auch g und g' beide reell, und entweder von gleichem Zeichen, wenn $a'b - ab' > 0$ ist, oder von ungleichem, wenn $a'b - ab' < 0$ ist. Im ersten Falle haben die Integralkurven $(x + \lambda_1 y)^g(x + \lambda_2 y)^{g'} = C$ die Eigenschaft, dass *nur die Kurve, für welche* $C = 0$ *ist, durch den singulären Punkt hindurchgeht;* d. h. die Geraden $x + \lambda_1 y = 0$ und $x + \lambda_2 y = 0$ sind partikuläre Integrale der Differentialgleichung, sie bilden zwei ausgezeichnete Richtungen in dem singulären Punkte. Im zweiten Falle nehme man g als positiv an, g' als negativ und gebe der Integralfunktion die Form:

$$(x + \lambda_1 y)^g = C(x + \lambda_2 y)^{-g'},$$

so erkennt man, *dass jede Kurve des Integralsystemes durch den singulären Punkt hindurchgeht,* und zwar wird, je nachdem $-\dfrac{g}{g'}$ kleiner oder grösser als eins ist, immer nur eine der beiden ausgezeichneten Richtungen von allen übrigen Integralkurven berührt, während für den ganz speziellen Fall $g = -g'$ die Integralkurven in dem singulären Punkte lauter verschiedene Tangentenrichtungen erhalten. Ist $ab' - ba' = 0$, so erhält man ein System von parallelen Geraden, von denen eine durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgeht; eine andere durch diesen Punkt gehende Gerade löst sich als Faktor aus der Differentialgleichung ab. Die Kurven sind algebraisch, wenn $\dfrac{g}{g'}$ rational ist, d. h. wenn

$$\frac{a' - b}{\sqrt{(a' - b)^2 - 4(ab' - a'b)}}$$

rational ist, wie früher schon gefunden wurde.

2. Sind die beiden Wurzeln konjugiert imaginär, also:

$$4ab' - (a' + b)^2 = 4(ab' - a'b) - (a' - b)^2 > 0,$$

so sind auch die beiden Wurzeln g und g' im allgemeinen ebenfalls konjugiert imaginär, und giebt man denselben die Form $g = \alpha + i\beta$, $g' = \alpha - i\beta$, so wird

$$(x + \lambda_1 y)^{\alpha + i\beta}(x + \lambda_2 y)^{\alpha - i\beta} = C$$

das Integralsystem. Schreibt man die Grössen λ_1 und λ_2 in der Form:

$$\lambda_1 = m + in, \quad \lambda_2 = m - in,$$

und setzt man $x + my = x'$, $ny = y'$, so wird dieses System gleich:

$$(x' + iy')^{\alpha + i\beta}(x' - iy')^{\alpha - i\beta} = C \quad \text{oder} \quad (x'^2 + y'^2)^\alpha \left(\frac{x' + iy'}{x' - iy'}\right)^{i\beta} = C.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten erkennt man, dass diese Kurven ein System von logarithmischen Spiralen bilden, deren Pol der Koordinatenanfangspunkt ist; *keine reelle Kurve des Integralsystemes geht also durch den singulären Punkt,* sondern jede umkreist denselben asymptotisch.

3. Sind die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 einander gleich, also:

$$4(ab' - a'b) - (a' - b)^2 = 0,$$

so ist die angegebene Transformation nicht durchführbar. Da hier:

$$a\lambda^2 - (a' + b)\lambda + b' = 0 \quad \text{und} \quad 2a\lambda - (a' + b) = 0$$

ist, so setze man:

$$x = \xi - \lambda y, \quad dx = d\xi - \lambda\, dy.$$

Die Differentialgleichung erhält dadurch die Form:

$$d\xi(a\xi + ky) - k\xi\, dy = 0 \quad \text{oder} \quad a\frac{d\xi}{\xi} - k\frac{\xi\, dy - y\, d\xi}{\xi^2} = 0,$$

wobei $k = b - a\lambda = a\lambda - a'$ gesetzt ist; also wird das Integral:

$$al\xi - k\frac{y}{\xi} = C \quad \text{oder} \quad \xi^a = Ce^{k\frac{y}{\xi}},$$

d. h. in den ursprünglichen Koordinaten:

$$(x + \lambda y)^a = Ce^{k\frac{y}{x + \lambda y}}.$$

In diesem Falle gehen alle Integralkurven durch den singulären Punkt und berühren dort die *eine* ausgezeichnete Richtung $x + \lambda y = 0$, sie haben im Koordinatenanfangspunkt eine Spitze.

Diese verschiedenen Arten eines singulären Punktes sind im wesentlichen auch für die Singularitäten der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung überhaupt massgebend.

657. Beispiel III. *Das Integral der Differentialgleichung*

$$(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0$$

zu bestimmen. Diese Gleichung ist nicht homogen in Bezug auf die Variabelen x und y, doch kann sie durch eine parallele Verschiebung des Koordinatensystemes in eine homogene verwandelt werden. Setzt man:

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y',$$

wobei x' und y' die neuen Variabelen bedeuten, und bestimmt man x_0 und y_0 derart, dass:

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \quad \text{und} \quad a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$$

wird, so erhält die Differentialgleichung die Form:

$$(ax' + by')\,dx' + (a'x' + b'y')\,dy' = 0,$$

und wird also mit der soeben behandelten identisch.

Direkter noch kann man setzen:

$$ax + by + c = u, \quad a'x + b'y + c' = v,$$

wobei u und v die neuen Variabelen sind; alsdann wird:

$$x = \frac{b'(u - c) - b(v - c')}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a(v - c') - a'(u - c)}{ab' - a'b},$$

und die gegebene Differentialgleichung bekommt die Form:

$$u(b'du - b\,dv) + v(a\,dv - a'du) = 0$$

oder

$$(b'u - a'v)\,du + (av - bu)\,dv = 0;$$

sie ist homogen in Bezug auf u und v.

Die beiden Transformationen sind nicht anwendbar, wenn

$$ab' - ba' = 0$$

ist, also $b' = \frac{ba'}{a}$; alsdann ist die Differentialgleichung:

$$(ax + by + c)\,dx + \left[\frac{a'}{a}(ax + by) + c'\right] dy = 0.$$

Um die Variabelen zu trennen, hat man zu setzen:

$$ax + by = z, \quad \text{also} \quad dy = \frac{dz - a\,dx}{b},$$

und die Gleichung wird:

$$a\,dx + \frac{a'z + ac'}{(b-a')z + (bc - ac')}\,dz = 0,$$

so dass die Variabelen getrennt sind. Diese Gleichung gilt auch für den Fall, dass $a' = 0$, $b' = 0$ ist; ist $a = 0$ und $b = 0$, so hat man $a'x + b'y = z$ zu setzen.

Die Integration der linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

658. Eine Differentialgleichung erster Ordnung heisst *linear*, wenn in derselben die eine Variabele und ihre Ableitung nur in erster Potenz und nicht mit einander multipliziert vorkommen. Solch eine Gleichung ist also von der Form

$$1)\qquad \frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0,$$

wobei X und X_1 gegebene Funktionen der unabhängigen Variabelen x sind. Diese Gleichung lässt sich leicht integrieren, indem man eine Trennung der Variabelen herbeiführt. Zu dem Zwecke setzt man:

$$2)\qquad y = \theta z,$$

wobei z eine neue Variabele und θ eine Funktion von x ist, die noch willkürlich bestimmt werden kann. Es wird:

$$3)\qquad \frac{dy}{dx} = \theta\frac{dz}{dx} + z\frac{d\theta}{dx},$$

und die Gleichung 1) erhält die Form:

$$4)\qquad \theta\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{d\theta}{dx} + X\theta\right) + X_1 = 0.$$

Nun lässt sich die Funktion θ durch die Bedingung bestimmen, dass:

$$5)\qquad \frac{d\theta}{dx} + X\theta = 0$$

wird, überdies können wir festsetzen, dass θ gleich 1 wird für $x = x_0$. In der Differentialgleichung 5) sind die Variabelen getrennt, wenn man sie in der Form schreibt:

$$\frac{d\theta}{\theta} + X\,dx = 0;$$

hieraus folgt:

$$6) \qquad l(\theta) = -\int_{x_0}^{x} X\,dx, \quad \theta = e^{-\int_{x_0}^{x} X\,dx}.$$

Ferner reduziert sich nun die Gleichung 4) auf die Form:

$$\theta\frac{dz}{dx} + X_1 = 0 \quad \text{oder} \quad dz + \frac{X_1\,dx}{\theta} = 0.$$

Die Variabelen sind hier getrennt, und die Integration ergiebt:

$$z = -\int_{x_0}^{x} \frac{X_1\,dx}{\theta} + C,$$

wobei C die willkürliche Konstante ist. Demnach wird das vollständige Integral der Gleichung 1):

$$7) \qquad y = e^{-\int_{x_0}^{x} X\,dx}\left[C - \int_{x_0}^{x} X_1 e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}\,dx\right].$$

659. Beispiel I. *Das Integral der Differentialgleichung*

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - xy = a$$

zu bestimmen, wobei a *eine gegebene Konstante ist.*

Hier ist:

$$X = -\frac{x}{1+x^2}, \quad X_1 = -\frac{a}{1+x^2},$$

also:

$$-\int_0^x X\,dx = l\sqrt{1+x^2}, \quad \theta = \sqrt{1+x^2};$$

ferner:

$$\int \frac{X_1}{\theta}\,dx = -a\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{ax}{\sqrt{1+x^2}} + \text{const};$$

also ist das gesuchte Integral:

$$y = ax + C\sqrt{1+x^2},$$

wobei C die willkürliche Konstante bedeutet.

660. **Beispiel II.** *Die Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{dx} + 2\,\frac{y}{x} = \int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$$

zu integrieren.

Hier ist:

$$X = \frac{2}{x}, \quad X_1 = -\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

ferner:

$$\int\limits_1^x X\,dx = 2l(x), \quad \theta = \frac{1}{x^2},$$

folglich:

$$\int \frac{X_1}{\theta}\,dx = \int x^2 X_1\,dx = \frac{x^3}{3}\,X_1 - \frac{1}{3}\int x^3\,\frac{dX_1}{dx}\,dx.$$

Nun ist:

$$\int x^3\,\frac{dX_1}{dx}\,dx = -\int x^2 \sin x\,dx = (x^2-2)\cos x - 2x\sin x + \text{const},$$

also:

$$\int \frac{X_1}{\theta}\,dx = -\frac{x^3}{3}\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{1}{3}(x^2-2)\cos x + \frac{2}{3}\,x\sin x + \text{const},$$

mithin ist das gesuchte Integral:

$$y = \frac{C}{x^2} + \frac{x}{3}\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{x^2-2}{3x^2}\cos x - \frac{2}{3}\,\frac{\sin x}{x}.$$

Anmerkung. Wie aus den im § 639 aufgestellten Sätzen hervorgeht, kann eine lineare Differentialgleichung keine singulären Lösungen haben, wenn die Funktionen X und X_1 eindeutige Funktionen von x sind. Dagegen sind solche Lösungen wohl möglich, falls die Funktionen mehrdeutig werden und man die Gesamtheit aller möglichen Lösungen ins Auge fasst. In der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1+x}} = 0$$

zum Beispiel wird, wenn man der Quadratwurzel das positive Zeichen beilegt, das Integral gleich:

$$l(y) + 2\sqrt{1+x} = \text{const} \quad \text{oder} \quad y = Ce^{-2\sqrt{1+x}}.$$

Betrachtet man auch die Gleichung mit negativem Zeichen der Quadratwurzel, so ist das Integral:

$$l(y) - 2\sqrt{1+x} = \text{const} \quad \text{oder} \quad y = Ce^{+2\sqrt{1+x}}.$$

Die Gesamtheit des Integralsystemes ist demnach:

$$[l(y) - C]^2 - 4(1+x) = 0,$$

und dieses System besitzt als Einhüllende die Gerade $1 + x = 0$, welche der Differentialgleichung genügt und kein partikuläres Integral ist.

Über eine Klasse von Differentialgleichungen, die auf lineare zurückführbar sind.

661. Die Gleichungen von der Form:

$$1) \qquad \frac{dy}{dx} + Xy + X_1 y^n = 0,$$

in welchen X und X_1 gegebene Funktionen von x bezeichnen, lassen sich auf die lineare Form bringen vermittelst der Substitution:

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z, \quad y^{-n}\,dy = dz.$$

Denn dividiert man die ursprüngliche Gleichung mit y^n, so wird sie:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Xy^{1-n} + X_1 = 0,$$

und folglich ergiebt die Substitution:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,Xz + X_1 = 0.$$

Auch kann man direkt auf die Gleichung 1) das Integrationsverfahren anwenden, das wir im § 658 benutzten. Denn setzt man:

$$y = \theta z, \quad \frac{dy}{dx} = \theta\frac{dz}{dx} + z\frac{d\theta}{dx},$$

so wird die Gleichung:

$$2) \qquad \theta\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{d\theta}{dx} + \theta X\right) + X_1\theta^n z^n = 0.$$

Dieselbe reduziert sich auf die Form:

$$3)\qquad \frac{dz}{dx} + X_1 \theta^{n-1} z^n = 0,$$

wenn man θ so bestimmt, dass

$$4)\qquad \frac{d\theta}{dx} + \theta X = 0$$

wird. Diese Gleichung ergiebt wie früher:

$$\theta = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} X dx}.$$

Die Gleichung 3) wird, wenn man die Variabelen trennt:

$$\frac{dz}{z^n} + X_1 \theta^{n-1} dx = 0.$$

Integriert man diese und bezeichnet man mit C die Konstante, so folgt:

$$\frac{z^{1-n}}{1-n} = -\int\limits_{x_0}^{x} X_1 \theta^{n-1} dx + C.$$

Also ist das Integral der Gleichung 1):

$$y^{1-n} = (1-n)\, e^{-(1-n)\int\limits_{x_0}^{x} X dx} \left[C - \int\limits_{x_0}^{x} e^{(1-n)\int\limits_{x_0}^{x} X dx} X_1 \, dx \right].$$

Auf die lineare Gleichung lässt sich nun auch die Gleichung

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy + \chi(x, y)\,(x\, dy - y\, dx) = 0$$

zurückführen, in welcher φ und ψ homogene Funktionen vom Grade n und χ eine homogene Funktion vom Grade q ist. Denn setzt man:

$$\frac{y}{x} = t, \quad x\, dy - y\, dx = x^2\, dt,$$

so wird die Gleichung:

$$x^n \Phi\, dx + x^n \Psi(x\, dt + t\, dx) + x^{q+2} \mathsf{X}\, dt = 0$$

oder

$$(\Phi + t\Psi) \frac{dx}{dt} + x\Psi + x^{q-n+2} \mathsf{X} = 0,$$

so dass man die soeben gelöste Gleichung erhält. Ist $q = n - 2$, so ist diese Gleichung eine lineare.

Über eine Klasse von Gleichungen, deren vollständiges Integral sich bestimmen lässt, sobald ein partikuläres bekannt ist.

662. Die Differentialgleichungen, von denen wir hier handeln wollen, haben die Form:

$$1) \qquad \frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y + X_2 = 0;$$

X, X_1, X_2 sind gegebene Funktionen von x. Wenn man dieser Gleichung genügen kann, indem man $y = Y$ setzt, wobei Y eine bestimmte Funktion von x bedeutet, so kann man auch ihr vollständiges Integral finden. Setzt man nämlich:

$$y = Y + z, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} + \frac{dz}{dx},$$

wobei z eine neue Variabele ist, so wird, weil

$$\frac{dY}{dx} + XY^2 + X_1 Y + X = 0$$

ist, die Gleichung für z:

$$2) \qquad \frac{dz}{dx} + (X_1 + 2XY)\,z + Xz^2 = 0.$$

Diese Gleichung gehört zu den im vorigen Paragraphen behandelten, wenn man daselbst $n = 2$ setzt; ihr vollständiges Integral lässt sich demnach bestimmen.

So wird z. B. die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y - (Xx^2 + X_1 x + 1) = 0$$

erfüllt, wenn man $y = x$ setzt; also erhält man durch die Substitution $y = x + z$ die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} + (X_1 + 2Xx)\,z + Xz^2 = 0.$$

Die Riccatische Gleichung.

663. Die sogenannte Riccatische Differentialgleichung gehört zu der soeben behandelten Klasse; sie lautet:

$$1) \qquad \frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m;$$

a und b sind konstante Koeffizienten, m ein beliebiger, aber fester Exponent.

Ist $m = 0$, so lassen sich die Variabelen ohne weiteres trennen; es ist:

$$\frac{dy}{y^2 - \frac{b}{a}} + a\,dx = 0,$$

also wird, indem man integriert:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\, l \frac{y - \sqrt{\frac{b}{a}}}{y + \sqrt{\frac{b}{a}}} + a(x - C) = 0.$$

Löst man die Gleichung nach y auf, so wird:

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{e^{a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}} + e^{-a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}{e^{a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}} - e^{-a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}.$$

Ist $\frac{b}{a}$ negativ, so kann man dafür schreiben (§ 368):

$$y = \sqrt{-\frac{b}{a}} \operatorname{cotg}\left[a(x-c)\sqrt{-\frac{b}{a}}\right].$$

Die Gleichung 1) ist noch in gewissen Fällen vermittelst algebraischer und logarithmischer oder cyklometrischer Funktionen integrierbar. Der Weg, welchen wir bei dieser Untersuchung einschlagen wollen, besteht darin, dass wir die Differentialgleichung auf eine andere derselben Form zurückführen, bei welcher der Exponent m null ist.

664. Wir führen zunächst die Transformation

$$y = My' + N$$

ein, y' ist eine neue Variabele, M und N sind Funktionen von x, die wir noch beliebig bestimmen können; nun ist:

$$\frac{dy}{dx} = M\frac{dy'}{dx} + y'\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx},$$

und wenn man diese Werte in die Gleichung 1) einführt, so folgt:

$$M\frac{dy'}{dx} + \left(\frac{dM}{dx} + 2aMN\right)y' + aM^2y'^2 + \left(\frac{dN}{dx} + aN^2 - bx^m\right) = 0.$$

Um M und N zu bestimmen, setzen wir jetzt:

$$\frac{dN}{dx} + aN^2 = 0, \quad \frac{dM}{dx} + 2aMN = 0.$$

Hier lassen sich in der ersten Gleichung die Variabelen trennen; es ist:

$$\frac{dN}{N^2} + a\,dx = 0, \quad \text{also} \quad -\frac{1}{N} + ax = \text{const.}$$

Wir wählen

$$N = \frac{1}{ax},$$

so dass die zweite Gleichung die Form erhält:

$$\frac{dM}{dx} + \frac{2}{x}M = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dM}{M} + \frac{2}{x}dx = 0.$$

Demnach wird:

$$l(M) + l(x^2) = \text{const} \quad \text{oder} \quad Mx^2 = C,$$

so dass wir

$$M = \frac{1}{x^2}$$

setzen können; die angewandte Transformation ist folglich:

2) $$y = \frac{y'}{x^2} + \frac{1}{ax},$$

und die transformierte Gleichung wird:

3) $$\frac{dy'}{dx} + \frac{a}{x^2}y'^2 - bx^{m+2} = 0.$$

Für den Fall $m = -2$ wird diese Gleichung:

$$\frac{dy'}{dx} = b - a\frac{y'^2}{x^2},$$

und da die rechte Seite eine Funktion des Quotienten $\frac{y'}{x}$ ist, so ist sie nach dem Verfahren des § 654 integrierbar.

Unsere Transformation führt also zu einer Integration der Riccatischen Gleichung, wenn $m = -2$ ist.

Die Gleichung 3) hat nicht mehr die Form der ursprünglichen, doch erhält sie dieselbe vermittelst einer neuen Transformation der Variabelen; wir setzen:

$$4)\qquad y' = \frac{1}{y_1}, \quad x = x_1^{\frac{1}{m+3}},$$

also:

$$dy' = -\frac{1}{y_1^2}\,dy_1, \quad dx = \frac{1}{m+3}\,x_1^{-\frac{m+2}{m+3}}\,dx_1;$$

substituiert man diese Werte in die Gleichung 3) und bezeichnet man zur Abkürzung:

$$5)\qquad a_1 = \frac{b}{m+3}, \quad b_1 = \frac{a}{m+3}, \quad m_1 = -\frac{m+4}{m+3},$$

so folgt:

$$6)\qquad \frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{m_1}.$$

Diese Gleichung ist der Form nach mit der ursprünglichen identisch; sie ist integrabel, wenn $m_1 = 0$ ist, also wenn $m = -4$ ist; also ist auch die ursprüngliche bei dieser Annahme integrabel.

665. Die Transformation, durch welche wir von der Gleichung 1) zur Gleichung 6) übergegangen sind, kann nun auf diese letztere angewandt werden, und wendet man denselben Prozess weiter an, so erhält man eine unbegrenzte Reihe von transformierten Gleichungen, die man in allgemeiner Weise durch

$$\frac{dy_i}{dx_i} + a_i y_i^2 = b_i x_i^{m_i}$$

bezeichnen kann. Gelangt man dabei zu einer Gleichung, in welcher m_i null ist, so ist diese, wie wir gesehen haben, integrabel, und also sind es auch alle transformierten Gleichungen, die ihr vorangehen.

Man kann leicht die Fälle bestimmen, in denen dies eintritt. Bezeichnen wir mit $\theta(m)$ die Funktion von m, welche durch die Gleichung

$$\theta(m) = -\frac{m+4}{m+3}$$

definiert ist, und setzen wir zur Abkürzung:

$$\theta\theta(m) = \theta^2 m, \quad \theta\theta^2(m) = \theta^3(m), \ldots$$

so ist:

$$m_i = \theta^i(m).$$

Hieraus findet man durch vollständige Induktion:

$$m_i = -\frac{(2i-1)m + 4i}{im + (2i+1)},$$

denn diese Formel gilt für $i = 1$, und man erkennt leicht, dass sie, wenn sie für einen Index i gilt, auch für den Index $i+1$ giltig bleibt. Damit nun $m_i = 0$ wird, muss

$$m = -\frac{4i}{2i-1}$$

sein. Wenn also die Zahl m diese Form hat, wobei i eine ganze positive Zahl ist, so ist die Riccatische Gleichung vermittelst algebraischer und logarithmischer Funktionen integrierbar.

Es giebt aber noch einen anderen Fall der Integrabilität. Macht man die Substitution:

$$y = \frac{1}{Y}, \quad x = X^{\frac{1}{m+1}},$$

so erhält die ursprüngliche Gleichung die Form:

$$\frac{dY}{dx} + \frac{b}{m+1}\, Y^2 = aX^{-\frac{m}{m+1}}$$

und diese Gleichung ist nach dem vorigen integrabel, wenn

$$-\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1} \quad \text{oder} \quad m = -\frac{4i}{2i+1}$$

ist. Wir können also die Riccatische Gleichung mittelst der elementaren Funktionen integrieren, wenn die Zahl m die Form hat:

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1},$$

wobei i eine ganze positive Zahl ist. Der Fall $m = -2$, welcher oben behandelt wurde, gehört zu $i = \infty$.

Die Riccatische Gleichung kann in eine lineare Gleichung zweiter Ordnung verwandelt werden, indem man

$$y = \frac{1}{az}\frac{dz}{dx},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{az^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{az}\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{ay^2}{x} + \frac{1}{az}\frac{d^2z}{dx^2}$$

setzt; die transformierte Gleichung wird:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - ab\,zx^m = 0.$$

Die Differentialgleichung $L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$, in welcher L, M, N lineare Funktionen sind.

666. Die Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ lässt sich, wie wir gesehen haben (§ 657), leicht integrieren, wenn P und Q lineare Funktionen der beiden Variabelen x und y sind. Euler und andere nach ihm (siehe insbesonders Minding: Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung; Abh. der Petersb. Akad. 1862 und Crelles Journal, Bd. 40) haben weiter den Fall untersucht, wo P und Q ganze Funktionen zweiten Grades sind; doch lässt sich hierbei die Integration nur dann auf Quadraturen zurückführen, wenn die Polynome P und Q speziellen Bedingungen genügen.

Die anfangs genannten Differentialgleichungen sind aber als besonderer Fall in einer allgemeinen Gleichung enthalten, für welche Jacobi (Crelle, Journal, Bd. 24) zuerst eine Methode der Integration gegeben hat. Dies ist die Gleichung:

$$1)\qquad L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0,$$

wobei L, M, N lineare Funktionen sind, nämlich:

$$2)\qquad \begin{cases} L = A + A'x + A''y, \\ M = B + B'x + B''y, \\ N = C + C'x + C''y; \end{cases}$$

$A, A', \ldots$ sind gegebene Konstanten. Die Methode, welche wir hier entwickeln wollen, unterscheidet sich im Grunde nicht von der Jacobischen, sie besteht darin, dass diese Differentialgleichung *drei* lineare partikuläre Integrale besitzt, durch deren Ermittelung und explicite Einführung die Differentialgleichung so transformiert wird, dass die Variabelen getrennt sind, oder mit anderen Worten so, dass sie exakt wird. Es seien

$$3)\qquad \begin{cases} U = a + bx + cy, \\ U' = a' + b'x + c'y, \\ U'' = a'' + b''x + c''y \end{cases}$$

drei lineare Funktionen, deren Koeffizienten zunächst noch unbestimmt sind. Bezeichnet man mit Δ die Determinante dieser Koeffizienten:

$$4)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

ferner mit $\alpha, \beta, \ldots, \alpha' \ldots$ die Unterdeterminanten von $a, b, \ldots$ $a' \ldots$, also:

$$5)\qquad \begin{cases} \alpha = b'c'' - b''c', & \alpha' = b''c - bc'', & \alpha'' = bc' - b'c, \\ \beta = c'a'' - c''a', & \beta' = c''a - ca'', & \beta'' = ca' - c'a, \\ \gamma = a'b'' - a''b', & \gamma' = a''b - ab'', & \gamma'' = ab' - a'b, \end{cases}$$

so ist:

$$6)\qquad \begin{cases} a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' = \Delta, & b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' = 0, & c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' = 0, \\ a\beta + a'\beta' + a''\beta'' = 0, & b\beta + b'\beta' + b''\beta'' = \Delta, & c\beta + c'\beta' + c''\beta'' = 0, \\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' = 0, & b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' = 0, & c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma'' = \Delta, \end{cases}$$

und auf Grund dieser Relationen ergeben die Gleichungen 3):

$$7)\qquad \begin{cases} \alpha U + \alpha' U' + \alpha'' U'' = \Delta, \\ \beta U + \beta' U' + \beta'' U'' = x\Delta, \\ \gamma U + \gamma' U' + \gamma'' U'' = y\Delta. \end{cases}$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$8)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = A\alpha + A'\beta + A''\gamma, & \mathsf{B} = B\alpha + B'\beta + B''\gamma, & \Gamma = C\alpha + C'\beta + C''\gamma, \\ \mathsf{A}' = A\alpha' + A'\beta' + A''\gamma', & \mathsf{B}' = B\alpha' + B'\beta' + B''\gamma', & \Gamma' = C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma', \\ \mathsf{A}'' = A\alpha'' + A'\beta'' + A''\gamma'', & \mathsf{B}'' = B\alpha'' + B'\beta'' + B''\gamma'', & \Gamma'' = C\alpha'' + C'\beta'' + C''\gamma'', \end{cases}$$

und addiert man die Gleichungen 7), nachdem man sie bezüglich mit A, A', A'', ferner mit B, B', B'', und endlich mit C, C', C'' multipliziert hat, so folgt:

$$9)\quad \begin{cases} \mathsf{A}U + \mathsf{A}'U' + \mathsf{A}''U'' = L\Delta, \\ \mathsf{B}U + \mathsf{B}'U' + \mathsf{B}''U'' = M\Delta, \\ \Gamma U + \Gamma' U' + \Gamma'' U'' = N\Delta. \end{cases}$$

Die Gleichungen 3) ergeben durch Differentiation:

$$dU = b\,dx + c\,dy, \quad dU' = b'dx + c'dy, \quad dU'' = b''dx + c''dy,$$

und hieraus folgt auf Grund der Gleichungen 4):

$$\begin{aligned} U'dU'' - U''dU' &= \alpha(x\,dy - y\,dx) - \beta\,dy + \gamma\,dx, \\ U''dU - U\,dU'' &= \alpha'(x\,dy - y\,dx) - \beta'dy + \gamma'dx, \\ UdU' - U'dU &= \alpha''(x\,dy - y\,dx) - \beta''dy + \gamma''dx. \end{aligned}$$

Löst man dieselben nach $x\,dy - y\,dx$, dy und dx auf, indem man die Gleichungen 6) benutzt, so wird:

$$10)\quad \begin{cases} (x\,dy - y\,dx)\,\Delta = (a'U'' - a''U')dU + (a''U - aU'')dU' + (aU' - a'U)dU'', \\ -dy\,\Delta = (b'U'' - b''U')dU + (b''U - bU'')dU' + (bU' - b'U)dU'', \\ dx\,\Delta = (c'U'' - c''U')dU + (c''U - cU'')dU' + (cU' - c'U)dU''. \end{cases}$$

Wir substituieren nun die Werte von L, M, N, $x\,dy - y\,dx$, dy, dx aus den Gleichungen 9) und 10) in die Differentialgleichung. Das Resultat dieser Substitution wird eine Gleichung zwischen den Variabelen U, U', U'' und ihren Differentialen. Die eine dieser Variabelen ist nach der ersten der Gleichungen 7) durch die beiden anderen ausdrückbar; für unsern Zweck ist es indessen besser, alle drei beizubehalten. Da die neun Konstanten der Polynome U, U', U'' noch unbestimmt sind, so können wir die Verhältnisse zwischen je drei Grössen, die zu derselben linearen Funktion gehören, durch je zwei lineare Gleichungen bestimmen, und indem wir drei neue Grössen λ, λ', λ'' einführen, die neun Gleichungen bilden:

$$11)\quad \begin{cases} a\mathsf{A} + b\mathsf{B} + c\Gamma = \lambda\Delta, & a'\mathsf{A} + b'\mathsf{B} + c'\Gamma = 0, & a''\mathsf{A} + b''\mathsf{B} + c''\Gamma = 0, \\ a\mathsf{A}' + b\mathsf{B}' + c\Gamma' = 0, & a'\mathsf{A}' + b'\mathsf{B}' + c'\Gamma' = \lambda'\Delta, & a''\mathsf{A}' + b''\mathsf{B}' + c''\Gamma' = 0, \\ a\mathsf{A}'' + b\mathsf{B}'' + c\Gamma'' = 0, & a'\mathsf{A}'' + b'\mathsf{B}'' + c'\Gamma'' = 0, & a''\mathsf{A}'' + b''\mathsf{B}'' + c''\Gamma'' = \lambda''\Delta. \end{cases}$$

Alsdann erhält die ursprüngliche Differentialgleichung durch die angegebene Transformation die Form:

$$(\lambda' - \lambda'')\,U'U''dU + (\lambda'' - \lambda)\,U''U\,dU' + (\lambda - \lambda')\,UU'dU'' = 0$$

oder:

$$12)\quad (\lambda' - \lambda'')\frac{dU}{U} + (\lambda'' - \lambda)\frac{dU'}{U'} + (\lambda - \lambda')\frac{dU''}{U''} = 0.$$

In dieser Gleichung sind die drei Variabelen getrennt; integriert man dieselbe und bezeichnet man mit K eine willkürliche Konstante, so erhält man:

$$13)\quad (\lambda' - \lambda'')\, lU + (\lambda'' - \lambda)\, lU' + (\lambda - \lambda')\, lU'' = lK.$$

Bezeichnet man mit $U^{\lambda'-\lambda''}$ die Grösse, deren Logarithmus gleich $(\lambda' - \lambda'')\, lU$ ist, auch in dem Falle, wo $\lambda' - \lambda''$ und U imaginär sind, so ist das Integral der gegebenen Gleichung:

$$14)\quad U^{\lambda'-\lambda''}\, U'^{\lambda''-\lambda}\, U''^{\lambda-\lambda'} = K.$$

Es sind nur noch die Koeffizienten der Funktionen U, U', U'', sowie die Exponenten $\lambda, \lambda', \lambda''$ aus den obigen Gleichungen zu berechnen. Zu dem Zwecke betrachten wir die drei Gleichungen in der ersten Gruppe 11). Wir addieren dieselben, nachdem wir sie bezüglich mit a, a', a'', ferner mit b, b', b'' und endlich mit c, c', c'' multipliziert haben. Auf Grund der Gleichungen 4) und 6) erhält man:

$$15)\quad \begin{cases} (A - \lambda)\, a + Bb + Cc = 0, \\ A'a + (B' - \lambda)\, b + C'c = 0, \\ A''a + B''b + (C'' - \lambda)\, c = 0. \end{cases}$$

Verfährt man ebenso mit den Gleichungen der zweiten und dritten Gruppe, so erhält man zwei Systeme von Gleichungen, die aus dem System 15) hervorgehen, wenn man bezüglich a, b, c, λ durch a', b', c', λ' und a'', b'', c'', λ'' ersetzt. Die Gleichungen 15) sind homogen in Bezug auf a, b, c, und eliminiert man diese Grössen, so erhält man eine Gleichung dritten Grades:

$$16)\quad F(\lambda) = 0,$$

deren linke Seite gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B & C \\ A' & B' - \lambda & C' \\ A'' & B'' & C'' - \lambda \end{vmatrix}$$

ist; also ist

$$17)\quad \begin{cases} F(\lambda) = (A - \lambda)(B' - \lambda)(C'' - \lambda) - B''C'(A - \lambda) \\ \qquad - CA''(B' - \lambda) - A'B(C'' - \lambda) + A''BC' + A'B''C. \end{cases}$$

Die Gleichungen 15) lassen nur die Verhältnisse der drei Konstanten a, b, c bestimmen. Setzt man

18) $B'C''-B''C'=D,\ C'A''-C''A'=D',\ A'B''-A''B'=D''$

und $B'+C''=E$, so folgt aus den letzten beiden Gleichungen 15):

$$\frac{a}{D-E\lambda+\lambda^2}=\frac{b}{D'+A'\lambda}=\frac{c}{D''+A''\lambda}.$$

Man kann diese Verhältnisse gleich eins annehmen und demnach setzen:

19) $a=D-E\lambda+\lambda^2,\quad b=D'+A'\lambda,\quad c=D''+A''\lambda.$

Die Gleichung 16) hat die drei Wurzeln λ, λ', λ'', und ersetzt man in den Formeln 19) λ durch λ' und durch λ'', so erhält man die Werte von a', b', c' und a'', b'', c''. Also wird:

$$20)\left\{\begin{aligned} U&=(D-E\lambda+\lambda^2)+(D'+A'\lambda)x+(D''+A''\lambda)y,\\ U'&=(D-E\lambda'+\lambda'^2)+(D'+A'\lambda')x+(D''+A''\lambda')y,\\ U''&=(D-E\lambda''+\lambda''^2)+(D'+A'\lambda'')x+(D''+A''\lambda'')y\end{aligned}\right.$$

Demnach beruht die Integration der vorgelegten Differentialgleichung auf der Lösung der Gleichung dritten Grades 16).

667. Die Differentialgleichung 12) wird eine Identität, und die Integrale 13) und 14) werden daher illusorisch, wenn die kubische Gleichung für λ gleiche Wurzeln enthält. Man kann indessen die Lösung dieses speziellen Falles leicht aus unserer Analyse ableiten. Setzt man:

$$l(U)=f(\lambda),$$

so wird das Integral 13):

21) $(\lambda'-\lambda'')f(\lambda)+(\lambda''-\lambda)f(\lambda')+(\lambda-\lambda')f(\lambda'')=\text{const}$

oder, indem man $\lambda'=\lambda+h$ einführt und mit h dividiert:

$$(\lambda''-\lambda)\,\frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h}+f(\lambda)-f(\lambda'')=\text{const.}$$

Die Koeffizienten A, B, ... der ursprünglichen Gleichung bleiben zunächst ganz willkürlich; wir wollen sie nun nach bestimmten Werten konvergieren lassen, für welche die zugehörige Gleichung in λ zwei gleiche Wurzeln bekommt. Bei jedem Wertsysteme der Koeffizienten stellt die vorige Gleichung das Integral dar; dasselbe gilt nun auch für den Grenzfall, und man erhält demnach für dieses Integral:

$$22)\qquad (\lambda'' - \lambda) f'(\lambda) + f(\lambda) - f(\lambda'') = \text{const}$$

oder

$$23)\qquad (\lambda'' - \lambda) \frac{U_1}{U} + l(U) - l(U'') = \text{const};$$

U_1 bedeutet die Ableitung von U in Bezug auf λ, d. h.

$$24)\qquad U_1 = (2\lambda - E) + A'x + A''y.$$

Setzt man in der Gleichung 22) $\lambda'' = \lambda + h$, und dividiert mit $-\frac{1}{2}h^2$, so folgt:

$$\frac{f(\lambda + h) - f(\lambda) - h f'(\lambda)}{\frac{1}{2}h^2} = \text{const}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Koeffizienten $A, B, \ldots$ nur der einen Bedingung unterworfen sind, die für die Gleichheit zweier Wurzeln der Gleichung 16) notwendig ist, und lassen wir dieselben nach bestimmten Grenzen konvergieren, für welche die drei Wurzeln der Gleichung 16) einander gleich werden, so wird die Grenze für die vorstehende Integralgleichung:

$$f''(\lambda) = \text{const}, \quad \text{d. h.} \quad U\frac{d^2U}{d\lambda^2} - \left(\frac{dU}{d\lambda}\right)^2 = KU^2,$$

oder endlich:

$$25)\qquad KU^2 + U_1^2 - 2U = 0.$$

Hat also die Gleichung 16) drei gleiche Wurzeln, so ist das Integral der gegebenen Differentialgleichung eine rationale Funktion zweiter Ordnung.

Betrachten wir z. B. den Fall, wo die Gleichung 16) drei Wurzeln gleich null besitzt. Die Bedingungen dafür sind:

$$A(B'C'' - B''C') + A'(B''C - BC'') + A''(BC' - B'C) = 0,$$
$$(A'B - AB') + (B''C' - B'C'') + (CA'' - C''A) = 0,$$
$$A + B' + C'' = 0.$$

Man erhält zunächst:

$$U = D + D'x + D''y, \quad U_1 = A + A'x + A''y = L;$$

ferner wird, wie man aus den Gleichungen 2) und 18) auf Grund der vorliegenden Bedingungen erkennt:

$$DL + D'M + D''N = 0,$$
$$AL + A'M + A''N = U.$$

Betrachtet man also A, A', A'', D, D', D'' als gegebene Grössen, und die Funktionen M und N als durch diese Gleichungen bestimmt, so ist das Integral der Differentialgleichung

$$L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$$

gleich

$$KU^2 - 2U + L^2 = 0,$$

wobei K die willkürliche Konstante ist.

Die in diesem Paragraphen behandelte Differentialgleichung

$$L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$$

bildet die projektivische Verallgemeinerung der Differentialgleichung, in welcher die Koeffizienten von dx und dy lineare Funktionen von x und y sind (§§ 656 und 657). Denn führt man an Stelle von x und y homogene Koordinaten ein, indem man

$$y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x = \frac{x_1}{x_3}$$

setzt, so ist

$$\frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1}, \quad \text{also} \quad x\,dy - y\,dx = \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_3{}^2},$$

und die Differentialgleichung bekommt die Form

$$L(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) - M(x_3\,dx_2 - x_2\,dx_3) + N(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3) = 0,$$

wobei

$$L = Ax_3 + A'x_1 + A''x_2,$$
$$M = Bx_3 + B'x_1 + B''x_2,$$
$$N = Cx_3 + C'x_1 + C''x_2$$

ist; dieselbe lässt sich symmetrischer schreiben, indem man

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3,$$
$$M = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$
$$N = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

setzt; alsdann wird die Differentialgleichung:

$$L(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) + M(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) + N(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3) = 0,$$

und die Koeffizienten sind homogene Funktionen ersten Grades von x_1, x_2, x_3. Sind dieselben homogene Funktionen n^{ten} Grades, so erhält man die allgemeine Form einer Differentialgleichung ersten Grades mit algebraischen Koeffizienten, die zuerst von Clebsch (Math. Annal., Bd. 6, sowie Vorlesungen über Geometrie, herausg. v. Lindemann) als „Konnex n^{ter} Ordnung und erster Klasse" eingeführt wurde. Die Integrale dieser Gleichungen in homogener Form behandelte Herr Darboux (*Bulletin des sciences mathém. S. II, t. 2*) und Herr Voss (Math. Annal., Bd. 23); die geometrischen Eigenschaften des Integralsystemes der Gleichung ersten Grades sind von den Herren Klein und Lie (Math. Annal., Bd. 4) besonders untersucht worden.

In der homogenen Form lassen sich die obigen Untersuchungen über die drei partikulären Integrale folgendermassen in Kürze darstellen. Damit eine lineare Funktion $u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ partikuläres Integral der Differentialgleichung:

$$c_x(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) + a_x(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) + b_x(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3) = 0$$

sei, muss:

$$u_3 c_x + u_1 a_x + u_2 b_x = \lambda \,.\, u_x$$

sein, wenn λ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet; dies ergiebt das System:

$$\begin{aligned} u_1 a_1 + u_2 b_1 + u_3 c_1 &= \lambda u_1, \\ u_1 a_2 + u_2 b_2 + u_3 c_2 &= \lambda u_2, \\ u_1 a_3 + u_2 b_3 + u_3 c_3 &= \lambda u_3; \end{aligned}$$

aus demselben folgt die kubische Gleichung für λ:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

und wenn dieselbe drei verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hat, erhält man aus dem vorigen Systeme drei verschiedene Gerade. Bezeichnet man diese mit u_x, v_x, w_x, so wird

$$f = u_x^{\alpha} v_x^{\beta} w_x^{\gamma} = \text{const}$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung, wenn erstlich:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

ist, weil die homogene Funktion von null^{ter} Dimension sein muss und wenn zweitens:

$$L \frac{\partial f}{\partial x_3} + M \frac{\partial f}{\partial x_1} + N \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

identisch verschwindet. Da nun

$$L\frac{\partial u}{\partial x_3}+M\frac{\partial u}{\partial x_1}+N\frac{\partial u}{\partial x_2}=\lambda_1 u_x,$$

$$L\frac{\partial v}{\partial x_3}+M\frac{\partial v}{\partial x_3}+N\frac{\partial v}{\partial x_2}=\lambda_2 v_x,$$

$$L\frac{\partial w}{\partial x_3}+M\frac{\partial w}{\partial x_3}+N\frac{\partial v}{\partial x_3}=\lambda_3 w_x,$$

so wird

$$L\frac{\partial f}{\partial x_3}+M\frac{\partial f}{\partial x_1}+N\frac{\partial f}{\partial x_2}=u_x{}^{\alpha}v_x{}^{\beta}w_x{}^{\gamma}(\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma).$$

Also muss auch:

$$\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma=0$$

sein. Den beiden Gleichungen wird genügt, wenn man

$$\alpha=\lambda_2-\lambda_3,\quad \beta=\lambda_3-\lambda_1,\quad \gamma=\lambda_1-\lambda_2$$

setzt, das heisst:

$$u_x{}^{\lambda_2-\lambda_3}v_x{}^{\lambda_3-\lambda_1}w_x{}^{\lambda_1-\lambda_2}=\text{const}$$

ist das gesuchte Integral.

Ein bedeutender Wert der homogenen Darstellung auch für das Integrationsproblem algebraischer Differentialgleichungen liegt, abgesehen von der Symmetrie der Darstellung, sowie von der hier unmittelbar ersichtlichen Dualität des Problemes, in dem Umstande, dass Resultate, bei denen die unendlich ferne Gerade ausgezeichnet ist, sich ohne weiteres auch übertragen lassen auf Gleichungen, in denen eine endliche Gerade dieselbe Rolle spielt; so ist die oben behandelte Differentialgleichung

$$L(x\,dy-y\,dx)-M\,dy+N\,dx=0$$

im wesentlichen identisch mit der Gleichung $-M\,dy+N\,dx=0$, wenn L, M, N lineare Funktionen sind, nur dass bei der letzteren die unendlich ferne Gerade (oder die Gerade $x_3=0$) ein partikuläres Integral ist, während bei der ersteren an die Stelle derselben eine andere Gerade tritt.

Über Differentialgleichungen erster Ordnung, die nicht nach dem Differentialquotienten aufgelöst sind.

668. Während wir bisher nur solche Gleichungen betrachteten, in denen der Differentialquotient in erster Potenz enthalten ist, die also nach demselben aufgelöst sind, wollen wir nun einige Fälle behandeln, in denen man das gesuchte Integral finden kann, wiewohl die Differentialgleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

nicht in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ linear ist.

1. Wenn die Gleichung die Variabelen x und y nicht enthält, also von der Form ist:

$$F\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

so drückt sie aus, dass $\frac{dy}{dx} = \alpha$ ist, wobei α einen konstanten Wert bedeutet, der zugleich eine Wurzel der Gleichung $F(\alpha) = 0$ ist. Die Integration ergiebt:

$$y = \alpha x + C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet. Hieraus folgt

$$\alpha = \frac{y - C}{x},$$

und folglich ist

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$$

das gesuchte vollständige Integral.

2. Enthält die gegebene Gleichung die Variabele y nicht, so erfordert die Integration nur Qnadraturen, sobald man die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst hat. Kann man diese Auflösung nicht ausführen, dagegen die Gleichung nach x auflösen, so lässt sich die Aufgabe gleichfalls auf Quadraturen bringen. Denn setzt man

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad dy = p\,dx,$$

und nimmt man an, dass die Gleichung nach x aufgelöst die Form hat:

$$x = f(p),$$

so ist

$$dx = f'(p)\,dp, \quad \text{also} \quad dy = p f'(p)\,dp.$$

In dieser Gleichung sind die Variabelen y und p getrennt; es wird

$$y = \int p f'(p)\, dp + C.$$

Man hat demnach zwei Gleichungen, welche die Werte von x und y als Funktionen von p ausdrücken. Kann man nun p zwischen diesen Gleichungen eliminieren, so ist das Integral durch eine einzige Gleichung zwischen x, y und C dargestellt.

3. Enthält die gegebene Gleichung die Variabele x nicht, und kann man sie nach y auflösen, so erhält man das Integral ebenfalls durch das nämliche Verfahren. Denn setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, so ist:

$$y = f(p),$$

also $dy = f'(p)\, dp$, demnach $dx = \frac{1}{p} f'(p)\, dp$; und dies ergiebt:

$$x = \int \frac{1}{p} f'(p)\, dp + C.$$

Auch hier ist das gesuchte Integral durch zwei Gleichungen zwischen x, y, C und der Variabelen p ausgedrückt, die schliesslich noch zu eliminieren ist, um die eine Integralgleichung zu gewinnen.

669. Der zuletzt behandelte Fall ist enthalten unter denjenigen, bei welchen die vorgelegte Differentialgleichung nach der einen Variabelen y aufgelöst werden kann. Wir betrachten allgemein die Gleichung:

$$1)\qquad y = f(x, p),$$

wobei p wie früher die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ bedeutet; durch Differentiation erhält man:

$$2)\qquad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx},$$

und dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und p. Kann man das Integral derselben

$$3)\qquad \Phi(x, p, C) = 0$$

bestimmen, so ergiebt die Elimination von p zwischen den Gleichungen 1) und 3) eine Gleichung:

4) $$F(x, y, C) = 0,$$

welche das vollständige Integral der ursprünglichen Differentialgleichung ist.

Die Integration der Gleichungen, welche linear in Bezug auf die Variabelen sind.

670. Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist:

1) $$y = x\varphi(p) + \psi(p),$$

wobei $p = \frac{dy}{dx}$ ist, und $\varphi(p)$ und $\psi(p)$ gegebene Funktionen von p bezeichnen. Wir wenden nun das Verfahren an, welches im vorigen Paragraphen angegeben wurde; die Differentiation ergiebt:

2) $$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

oder:

3) $$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0.$$

Betrachten wir nun x als Funktion der unabhängigen Variabelen p, so ist diese Gleichung eine lineare und das Integral derselben wird nach § 658:

4) $$x = e^{-\int\limits_{p_0}^{p} \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[C - \int\limits_{p_0}^{p} e^{\int\limits_{p_0}^{p} \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp} \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}dp\right].$$

Sonach erhält man das Integral der Gleichung 1), wenn man p zwischen den Gleichungen 1) und 4) eliminiert.

671. Diese Formeln sind aber illusorisch, wenn $\varphi(p) = p$ ist; dieser Fall muss also besonders behandelt werden. Die Gleichung 1) ist alsdann:

5) $$y = px + \psi(p),$$

und die Gleichung 2), welche man durch Differentiation hieraus gewinnt, wird:

6) $$[x + \psi'(p)]\,dp = 0.$$

Also ist die neue Differentialgleichung:

7) $$dp = 0;$$

ausserdem kann aber auch

8) $$x + \psi'(p) = 0$$

gesetzt werden. Die Gleichung 7) ergiebt durch Differentiation:

$$p = C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist; und substituiert man diesen Wert in die Gleichung 5), so folgt:

9) $$y = Cx + \psi(C)$$

als das vollständige Integral, wie wir schon im § 651 erkannten. Betrachtet man aber zweitens die Gleichung 8), und entnimmt man aus derselben den Wert von p, um ihn in die Gleichung 5) zu substituieren, so erhält man eine Lösung der Differentialgleichung, die keine willkürliche Konstante enthält und die das singuläre Integral derselben bildet. Dieses Ergebnis stimmt mit der allgemeinen Theorie der singulären Integrale, die wir im vorigen Kapitel entwickelt haben, überein. Denn die Gleichung 8) ist die Ableitung der Differentialgleichung in Bezug auf den Differentialquotienten $p = \frac{dy}{dx}\cdot$ Die Elimination von p muss also das singuläre Integral liefern; auch sieht man, dass die zur Elimination notwendige Rechnung identisch ist mit der Elimination von C zwischen dem vollständigen Integrale und seiner Ableitung nach C.

Über die Transformation der Differentialgleichungen von Punkt- in Linienkoordinaten bei nicht homogener Form.

Die Gleichung $ux + vy + 1 = 0$ stellt bei variabelen Werten von u und v die Gesamtheit aller Geraden dar, welche durch den Punkt x, y gehen, und auf den Koordinatenaxen die Abschnitte $-\frac{1}{u}$ und $-\frac{1}{v}$ bestimmen. Wie wir eine von einem Punkte ausgehende Richtung als Verbindung des Punktes x, y, mit einem unendlich benachbarten $x + dx$, $y + dy$ fixieren, so lässt sich auch jeder Punkt als Durchschnitt einer Geraden mit einer benachbarten darstellen. Liegt ein Punkt x, y auf einer Geraden $ux + vy + 1 = 0$ und der benachbarten $(u + du)x + (v + dv)y + 1 = 0$, so wird:

$$x = -\frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \quad y = \frac{du}{u\,dv - v\,du},$$

während der Richtungskoeffizient der Geraden gleich $-\frac{u}{v}$ ist.

Eine Differentialgleichung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ ordnet jedem Punkte x, y eine oder mehrere durch ihn hindurchgehende Richtungen zu, aber auch umgekehrt jeder Geraden eine Reihe auf ihr gelegener Punkte. Denn betrachtet man eine bestimmte Gerade, wodurch $\frac{dy}{dx}$ einen bestimmten Wert erhält, so stellt die Gleichung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ eine Kurve dar, welche auf der Geraden die gesuchten Punkte ausschneidet. Da nun das Integrationsproblem diejenigen Kurven bestimmt, welche in ihren Punkten die vorgeschriebene Richtung als Tangente besitzen, so erkennt man, dass dieses Problem in sich dual ist, d. h. dass es zugleich diejenigen Kurven als Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten liefert, deren Berührungspunkt jedesmal ein der Tangentenrichtung zugeordneter Punkt ist. Die Differentialgleichung des nämlichen Kurvensystemes in Linienkoordinaten erhält man bei nicht homogenen Koordinaten (bei homogenen ergeben sich die erforderlichen Substitutionen noch unmittelbarer), wenn man die Substitutionen macht.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}, \quad x = -\frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \quad y = \frac{du}{u\,dv - v\,du}.$$

Wir führen an Stelle derselben noch die Werte ein:

$$-\frac{u}{v} = u_1, \quad v_1 = \frac{1}{v},$$

so hat man die zweckmässigere Substitution:

$$\frac{dy}{dx} = u_1, \quad x = \frac{dv_1}{du_1}, \quad y = u_1\frac{dv_1}{du_1} - v_1.$$

Erhält man auf diese Weise eine Differentialgleichung, deren Integral sich in bestimmter Form darstellen lässt, so hat man damit das Integral in Linienkoordinaten gewonnen. Setzt man umgekehrt in dieser Integralgleichung:

$$u_1 = \frac{dy}{dx}, \quad v_1 = x\frac{dy}{dx} - y,$$

so hat man aus derselben, sowie aus der ursprünglichen Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}$ zu eliminieren, um das Integral in Punktkoordinaten aufzustellen.

Einen besonderen Wert gewinnt diese Substitution bei den Gleichungen, in welchen, wie in den zuletzt betrachteten x und y linear auftreten. Die Gleichung

$$y - x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) - \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

erhält durch die angegebene Substitution die Form:

$$\left(u_1 \frac{dv_1}{du_1} - v_1\right) - \frac{dv_1}{du_1}\varphi(u_1) - \psi(u_1) = 0$$

oder:

$$\frac{dv_1}{du_1}[u_1 - \varphi(u_1)] - v_1 - \psi(u_1) = 0;$$

sie wird eine lineare Gleichung. Da aber diese transformierte Gleichung auch dann integrabel bleibt, wenn das letzte Glied mit einer beliebigen Potenz von v_1 multipliziert ist (§ 661), so erhält man eine Verallgemeinerung dieses Satzes in der Form: Für die Differentialgleichung

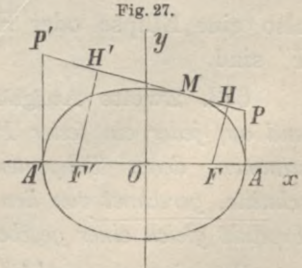
$$y - x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^n \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

in welcher φ, ψ gegebene Funktionen von $\frac{dy}{dx}$ sind und n einen beliebigen Exponenten bedeutet, lässt sich das Integral in Linienkoordinaten immer durch Quadraturen angeben.

Anwendungen auf geometrische Aufgaben.

672. Erste Aufgabe. *Zwei Punkte* F *und* F' *mit dem Abstande* 2c *sind gegeben; man soll eine Kurve bestimmen, so dass das Produkt der Entfernungen dieser beiden Punkte von jeder Tangente gleich einer gegebenen Grösse* b² *ist.*

Fig. 27.



Die Gerade FF' wählen wir zur x-Axe und legen die y-Axe senkrecht durch die Mitte O der Strecke $2c$. Setzen wir $\frac{dy}{dx} = p$, so wird die Gleichung der Tangente in einem Punkt x, y der gesuchten Kurve:

$$\eta - y = p(\xi - x).$$

Die Entfernungen FH, $F'H'$ dieser Tangente von den Punkten F und F' haben die Werte:

$$FH = \frac{y - px + pc}{\sqrt{1+p^2}}, \quad F'H' = \frac{y - px - pc}{\sqrt{1+p^2}};$$

also wird die Gleichung des Problemes:

$$\frac{(y-px)^2 - p^2c^2}{1+p^2} = \pm b^2$$

oder, wenn man $a^2 = c^2 \pm b^2$ setzt:

$$y = px + \sqrt{a^2p^2 \pm b^2}.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung wird nach § 671:

$$y = Cx + \sqrt{a^2C^2 \pm b^2},$$

es stellt gerade Linien dar; die eigentliche Lösung des geometrischen Problems ist aber durch das singuläre Integral der Differentialgleichung gegeben, für welches

$$x + \frac{a^2C}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}} = 0 \quad \text{oder} \quad x = -\frac{a^2C}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}}$$

wird; trägt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein, so erhält man:

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}},$$

und die Elimination von C ergiebt:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

also eine Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte F und F' sind.

673. Zweite Aufgabe. *Es sind zwei parallele Geraden und auf jeder ein fester Punkt gegeben; man soll die Kurve bestimmen, deren Tangenten auf den gegebenen Parallelen Abschnitte, gerechnet von den festen Punkten an, bestimmen, deren Produkt gleich einer gegebenen Grösse ist.*

Es seien AP, $A'P'$ die gegebenen Geraden, A und A' die gegebenen Punkte auf denselben (Figur im § 672); zur x-Axe wählen wir die Gerade AA', und zur y-Axe eine Parallele zu den Geraden AP, $A'P'$, gelegt durch die Mitte O

der Strecke AA'. Dieses Koordinatensystem braucht also kein rechtwinkliges zu sein. Die Tangente der gesuchten Kurve hat die Gleichung

$$\eta - y = p(\xi - x),$$

und wenn man mit $2a$ die Entfernung AA' bezeichnet, so erhalten die Strecken AP, $A'P'$ zwischen den Punkten A, A' und der Tangente die Werte:

$$\pm AP = y - px - pa, \quad \pm A'P' = y - px + pa;$$

also wird die Differentialgleichung des Problemes:

$$(y - px)^2 - a^2 p^2 = \pm b^2$$

oder:

$$y = px + \sqrt{a^2 p^2 \pm b^2}.$$

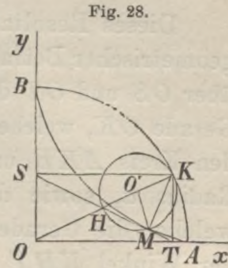
Man erkennt, dass dieses die nämliche Gleichung wie vorhin ist; die eigentliche Lösung wird hier ebenso das singuläre Integral:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

es stellt eine Ellipse oder Hyperbel dar, die auf zwei konjugierte Durchmesser bezogen sind.

674. Dritte Aufgabe. *Es soll die Kurve bestimmt werden, für welche der Abschnitt ihrer Tangente zwischen zwei rechtwinkligen Axen stets einer gegebenen Grösse gleich ist.*

Fig. 28.



Es seien T und S die Punkte, in denen die Tangente der gesuchten Kurve die gegebenen Geraden schneidet; hat man diese zu Koordinatenaxen gewählt, so ist die Gleichung der Tangente:

$$(\eta - y) = p(\xi - x),$$

und es wird:

$$\pm OS = y - px, \quad \pm OT = -\frac{y - px}{p}.$$

Also wird die Differentialgleichung:

$$(y - px)^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) = a^2$$

oder:

1) $$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Wie in den vorigen beiden Problemen erhält man das vollständige Integral, indem man p durch eine Konstante ersetzt, und das singuläre, welches die gesuchte Kurve liefert, wenn man p aus der Differentialgleichung und ihrer Ableitung nach p, nämlich

$$2)\qquad 0 = x + \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

eliminiert. Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt:

$$x = -\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\quad y = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Erhebt man diese Gleichungen auf die Potenz $\frac{2}{3}$ und addiert sie dann, so bekommt man die Gleichung:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Dieselbe stellt eine Epicykloide dar, welche von einem Kreise mit dem Radius $\frac{a}{4}$ erzeugt wird, der im Innern des Kreises mit dem Radius a rollt.

Dieses Resultat lässt sich auch sehr einfach vermittelst geometrischer Betrachtungen ableiten. Denn konstruieren wir über OS und OT das Rechteck $OSKT$, ziehen wir ferner die Gerade OK, welche ST in H schneidet, und beschreiben wir den Kreis AKB um den Punkt O als Mittelpunkt mit dem Radius a, sowie den Kreis O' über HK als Durchmesser, welcher die Gerade ST noch im Punkte M schneidet, so ist der Winkel KHT doppelt so gross wie KOA und halb so gross wie $KO'M$; dieser letztere ist also das Vierfache des Winkels KOA; andererseits ist der Radius $O'K$ der vierte Teil vom Radius OK; also sind die beiden Kreisbogen KM und KA unter einander gleich. Hieraus folgt, dass der Ort des Punktes M eine Epicykloide ist, deren Anfangspunkt A ist. Wir wissen aber, dass MH oder ST die Tangente an diese Epicykloide ist, die also die Einhüllende der beweglichen Geraden ST wird.

Das Problem der Trajektorien.

675. Das allgemeine Problem dieser Art ist das folgende:

Ein System von Kurven ist gegeben, dargestellt durch eine Gleichung, in welcher ein variabeler Parameter enthalten ist; es sollen die Kurven bestimmt werden, welche die gegebenen unter einem bestimmten Winkel schneiden.

Ist der vorgeschriebene Winkel ein rechter, so heissen die gesuchten Kurven die *orthogonalen Trajektorien* des Systemes.

Die Aufgabe führt immer auf eine Differentialgleichung erster Ordnung. Die gegebenen Kurven seien auf zwei rechtwinklige Axen bezogen, und ihre Gleichung sei durch

$$1)\qquad F(x, y, \alpha) = 0$$

dargestellt, wobei α den variabelen Parameter bezeichnet; ist $M(x, y)$ ein Durchschnittspunkt zwischen einer Kurve des Systemes und einer Trajektorie, bezeichnen wir ferner mit c, c_1 die Richtungskoeffizienten der beiden Tangenten im Punkte M, mit V die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels zwischen den beiden Kurven, so ist:

$$\frac{c_1 - c}{1 + cc_1} = V.$$

Der Koeffizient c ist der Wert von $\frac{dy}{dx}$, welcher aus der Gleichung 1) folgt, d. h. es ist:

$$c = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}};$$

da ferner c_1 der Wert von $\frac{dy}{dx}$ für die gesuchte Kurve ist, so wird:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx}} = V$$

oder

$$2)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y} + V\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} - V\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0.$$

Eliminiert man α zwischen den Gleichungen 1) und 2), so erhält man eine Gleichung:

$$3)\qquad \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

welche die Differentialgleichung der gesuchten Trajektorien ist.

In Bezug auf die Eindeutigkeit des Winkels, dessen trigonometrische Tangente den gegebenen Wert V hat, ist noch folgendes zu bemerken: Hat man als positiven Drehungssinn die Drehung von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe festgesetzt, so bedeutet c die trigonometrische Tangente des Winkels, um welchen man im positiven Sinne die Abscisse zu drehen hat, damit sie in die Lage der Tangente kommt; ferner ist V die trigonometrische Tangente des Winkels, um welchen man diese Tangente in demselben Sinne weiter zu bewegen hat, damit sie in die Tangente der gesuchten Trajektorie übergeht.

Bei rechtwinkligen Trajektorien ist $V = \infty$; die Gleichung 2) reduziert sich daher auf:

$$4)\qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0,$$

und die Elimination von α zwischen den Gleichungen 1) und 4) liefert die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien.

676. Erstes Beispiel. *Die Kurven zu bestimmen, welche das System* $y = \alpha x^m$ *unter einem konstanten gegebenen Winkel schneiden.*

Der Wert von $\frac{dy}{dx}$ wird hier gleich $\alpha m x^{m-1}$; bezeichnet man also mit $\frac{1}{k}$ die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels, so ist die Differentialgleichung der gesuchten Trajektorien:

$$\frac{\frac{dy}{dx} - m\frac{y}{x}}{1 + m\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{k} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{m\frac{y}{x} + \frac{1}{k}}{1 - \frac{m}{k}\frac{y}{x}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Funktion von $\frac{y}{x}$, also lässt sich die Integration nach der Methode des § 654 ausführen.

Wir untersuchen nun den Fall $m = 1$; die gegebenen Kurven bilden alsdann ein System von Geraden, die durch den Koordinatenanfangspunkt gehen; die Differentialgleichung wird

$$x\,dx + y\,dy = k(x\,dy - y\,dx).$$

Man erkennt unmittelbar, dass $x\,dy - y\,dx$ das Differential des doppelten Sektors ist, welcher von dem Radiusvektor des Punktes x, y mit einem festen Radius gebildet wird, und welcher im Polarkoordinatensysteme durch $\varrho^2\,d\omega$ ausgedrückt wird. Desgleichen ist $x\,dx + y\,dy$ das halbe Differential $\varrho\,d\varrho$ des Quadrates ϱ^2; also wird:

$$\varrho\,d\varrho = k\varrho^2\,d\omega \quad \text{oder} \quad \frac{d\varrho}{\varrho} = k\,d\omega.$$

Demnach ergiebt die Integration:

$$\varrho = Ce^{k\omega}.$$

Die gesuchten Trajektorien sind logarithmische Spiralen, was mit einer bekannten Eigenschaft dieser Kurven übereinstimmt (§ 247).

677. Zweites Beispiel. *Die orthogonalen Trajektorien eines Systemes von konfokalen Ellipsen zu bestimmen.*

Die Gleichung der gegebenen Ellipsen ist

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} = 1,$$

wobei ϱ den variabelen Parameter und b eine feste Grösse bezeichnet; für die Ellipsen ist $\varrho^2 > b^2$. Die Differentiation ergiebt:

$$\frac{x\,dx}{\varrho^2} = \frac{y\,dy}{b^2 - \varrho^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{b^2},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} = \frac{x}{dx}\,\frac{x\,dx + y\,dy}{b^2}, \quad \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} = -\frac{y}{dy}\,\frac{x\,dx + y\,dy}{b^2},$$

also durch Addition:

$$\frac{(x\,dy - y\,dx)(x\,dx + y\,dy)}{b^2\,dx\,dy} = 1.$$

Diese Differentialgleichung gehört den gegebenen Ellipsen an. Um hieraus die der orthogonalen Trajektorien zu gewinnen, hat man $\frac{dy}{dx}$ durch $-\frac{dx}{dy}$ oder dy durch $-dx$, dx durch dy zu ersetzen; bei dieser Vertauschung bleibt aber die vorstehende Gleichung ungeändert; also bleibt auch das Integral das nämliche, d. h. die Gleichung der gegebenen Ellipsen stellt zugleich das System der gesuchten Trajektorien dar. Nur um die beiden Systeme zu unterscheiden, die algebraisch irreducibel sind, kann man ϱ^2 durch einen anderen Parameter μ^2 ersetzen, also die Gleichung schreiben:

$$\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \mu^2} = 1.$$

Nimmt man $\mu^2 < b^2$ an, so stellt diese Gleichung Hyperbeln dar, deren Brennpunkte mit denen der Ellipsen zusammenfallen, und welche diese unter rechten Winkeln schneiden.

678. Drittes Beispiel. *Die rechtwinkligen Trajektorien aller gleichseitigen Hyperbeln zu bestimmen, deren Mittelpunkt ein gegebener Punkt ist, und die durch einen zweiten gegebenen Punkt gehen.*

Im Polarkoordinatensystem haben die gegebenen Hyperbeln die Gleichung:

$$\varrho^2 = \frac{a^2 \cos 2\alpha}{\cos(2\omega - 2\alpha)} \quad \text{oder} \quad \operatorname{cotg}(2\omega - 2\alpha) = \frac{a^2 \sin 2\omega}{\varrho^2 - a^2 \cos 2\omega};$$

α ist hier der variabele Parameter und a bedeutet die Entfernung des Mittelpunktes vom gegebenen Punkte auf der Axe. Die logarithmische Differentiation ergiebt:

$$\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega} = \operatorname{tang}(2\omega - 2\alpha) \quad \text{oder} \quad \frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega} = \frac{\varrho^2 - a^2 \cos 2\omega}{a^2 \sin 2\omega}.$$

Nun ist $\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega}$ die Tangente des Winkels zwischen der Normalen und dem Radiusvektor; folglich erhält man die Differentialgleichung der gesuchten Kurven, wenn man für $\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega}$ den reciproken, negativen Wert einsetzt, also:

$$\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega} = \frac{a^2 \sin 2\omega}{a^2 \cos 2\omega - \varrho^2}$$

oder

$$\frac{d(a^2 \cos 2\omega)}{d\varrho} = -\frac{2}{\varrho}(a^2 \cos 2\omega) + 2\varrho.$$

Diese Gleichung ist eine lineare, wenn man $a^2 \cos 2\omega$ und ϱ als die Variabelen betrachtet; bezeichnet man mit $a^4 - b^4$ die willkürliche Konstante, so erhält man das Integral:

$$a^2 \cos 2\omega = \frac{1}{2\varrho^2}[\varrho^4 + a^4 - b^4]$$

oder

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\omega + a^4 = b^4.$$

Diese Gleichung, in welcher b der variabele Parameter ist, stellt ein System von Cassinischen Kurven mit den nämlichen Brennpunkten dar (§ 565).

Der integrierende Faktor der Differentialgleichung.

679. Ist die Differentialgleichung nach dem Differentialquotienten aufgelöst, also von der Form:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

so kann man auf beliebig viele verschiedene Weisen

$$F(x, y) = -\frac{P}{Q}$$

setzen, wobei P und Q Funktionen von x und y sind, dann erhält die gegebene Differentialgleichung die Form

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Sind die Funktionen P und Q so gewählt, dass $P\,dx + Q\,dy$ ein exaktes Differential ist (§ 482), wenn x sowohl wie y als unabhängige Variabele angesehen werden, so dass man

$$du = P\,dx + Q\,dy$$

setzen kann, wobei u eine Funktion von x und y ist, so ist evident, dass das Integral der gegebenen Gleichung

$$u = \text{const}$$

wird. Will man aber, nachdem die mit P und Q bezeichneten Funktionen gewählt sind, an die Stelle derselben andere einführen, so werden diese den ersteren bis auf einen Faktor μ gleich, und die gegebene Differentialgleichung erhält die Form

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0.$$

Ist die linke Seite dieser Gleichung das exakte Differential einer Funktion u, so ist das Integral der Gleichung wiederum $u = \text{const.}$ Wie nun auch die Funktionen P und Q ursprünglich gegeben sein mögen, es existiert immer ein Faktor μ, durch welchen diese Eigenschaft herbeigeführt wird; diesen Satz wollen wir zunächst beweisen.

680. **Lehrsatz I.** *Sind* P *und* Q *zwei gegebene Funktionen der beiden unabhängigen Variabelen* x *und* y, *so giebt es immer einen Faktor* μ *derart, dass das Produkt dieses Faktors mit dem Differentiale* P dx + Q dy *ein exaktes Differential liefert.*

Wir wissen, dass die Differentialgleichung

$$P dx + Q dy = 0 \tag{1}$$

ein Integral besitzt. Nimmt man nun an, dass dieses Integral nach der willkürlichen Konstante, die es enthält, aufgelöst ist, so hat es die Form

$$u = C, \tag{2}$$

wobei u eine Funktion von x und y ist. Die Gleichung 2) ergiebt durch Differentiation:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0, \tag{3}$$

und der Wert von $\frac{dy}{dx}$, welcher aus dieser Gleichung folgt, muss bei jedem Werte von x und y gleich sein dem Werte, den die Differentialgleichung 1) liefert; also ist

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Q}. \tag{4}$$

Diese Gleichung 4) besteht zunächst auf Grund der Gleichung 2), aber man erkennt, dass sie in der That identisch bei allen Werten von x und y bestehen muss; denn sie ist unabhängig von C, und der Wert von y, welcher durch die Gleichung 2) gegeben ist, ist eine Funktion von x und C. Bei jedem Werte von x kann daher y noch willkürlich fixiert werden.

Bezeichnet man mit μ den gemeinsamen Wert der beiden Quotienten in der Gleichung 4), so wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu Q,$$

und folglich ist:

$$5) \qquad \mu(P\,dx + Q\,dy) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = du.$$

Der Ausdruck $P\,dx + Q\,dy$ wird also ein exaktes Differential, wenn er mit dem Faktor μ multipliziert wird. Derselbe heisst der *integrierende Faktor* der Differentialgleichung, weil das Integral $u = \text{const}$ sich nach der früheren Regel (§ 481) durch blosse Quadraturen bestimmen lässt, sobald solch ein Faktor ermittelt ist.

681. **Lehrsatz II.** *Es giebt unendlich viele Faktoren, durch welche der Ausdruck* $\mathrm{P\,dx + Q\,dy}$ *ein exaktes Differential wird.*

Wir haben bewiesen, dass immer ein Faktor μ existiert, so dass

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = du$$

wird, wobei u eine Funktion von x und y ist. Multipliziert man nun diese Gleichung mit einer beliebigen Funktion $\varphi(u)$ von u, so wird

$$\mu\varphi(u)(P\,dx + Q\,dy) = \varphi(u)\,du,$$

und dies ist ebenfalls ein exaktes Differential. Wie also auch die Funktion $\varphi(u)$ gewählt sein mag, das Differential wird exakt, sobald man es mit dem Faktor $\mu\varphi(u)$ multipliziert.

Zu bemerken ist dabei noch, dass $\mu\varphi(u)$ der allgemeine Ausdruck für alle integrierenden Faktoren ist. Denn ist M solch ein Faktor, und also:

$$M(P\,dy + Q\,dy) = dU,$$

wobei U eine Funktion von x und y bedeutet, so ist

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{dU}{M} = \frac{du}{\mu},$$

demnach

$$dU = \frac{M}{\mu}\,du.$$

Da nun u eine Funktion von x und y ist, so kann man y als Funktion von u und x betrachten; also ist U eine Funktion von u und x. Die letzte Gleichung aber zeigt, dass die partielle Ableitung von U nach x null ist. Hieraus folgt, dass U nur eine Funktion von u allein ist, und dass folglich auch dasselbe für die Ableitung $\frac{\partial U}{\partial u}$ gilt; mithin wird

$$\frac{M}{\mu} = \varphi(u) \quad \text{oder} \quad M = \mu\varphi(u),$$

was zu beweisen war.

682. Lehrsatz III. *Sind* M *und* μ *zwei integrierende Faktoren des Differentiales* $\mathrm{P\,dx + Q\,dy}$, *und ist der Quotient dieser beiden Faktoren nicht identisch konstant, so ist das vollständige Integral der Differentialgleichung* $\mathrm{P\,dx + Q\,dy = 0}$ *gleich* $\frac{\mathrm{M}}{\mu} = \mathrm{C}$, *wobei* C *eine willkürliche Konstante bedeutet.*

Nach unserer Annahme ist

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = du,$$

und da auch das Produkt $M(P\,dx + Q\,dy)$ ein exaktes Differential ist, so ist nach dem vorigen Satze:

$$\frac{M}{\mu} = \varphi(u),$$

wobei $\varphi(u)$ eine bestimmte Funktion von u oder eine Konstante sein muss, doch haben wir den letzteren Fall ausgeschlossen. Die Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ lässt sich nun in der Form schreiben $du = 0$, ihr Integral ist also $u = \text{const}$ oder, was auf das nämliche hinauskommt:

$$\varphi(u) = \text{const}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{M}{\mu} = C.$$

Wir werden später noch wichtige Anwendungen von diesem Satze machen.

683. Der integrierende Faktor μ liefert nicht nur das allgemeine Integral der Differentialgleichung, sondern auch das singuläre, falls ein solches existiert.

Die Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ kann nämlich in der Form

$$\frac{1}{\mu} du = 0$$

geschrieben werden und zerlegt sich also in die beiden Gleichungen:

$$du = 0, \quad \frac{1}{\mu} = 0.$$

Die erste liefert das allgemeine Integral, die zweite enthält die singulären Lösungen.

Man kann dieses aus unserer allgemeinen Theorie der singulären Integrale ableiten. Denn da hier das vollständige Integral

$$u - C = 0$$

ist, so muss man, um die singulären Lösungen zu erhalten, das Verhältnis der partiellen Ableitungen von $u - C$ nach C und nach y, oder nach C und nach x null setzen (§ 636). Die erste dieser Ableitungen wird hier -1, also erhält man

$$\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}} = 0, \quad \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} = 0,$$

und auf Grund der Gleichung $du = \mu(P dx + Q dy)$ ergeben diese Gleichungen:

$$\frac{1}{\mu} = 0.$$

Die in denselben enthaltenen Funktionen sind entweder singuläre oder partikuläre Integrale. Sind P und Q durchaus eindeutige Funktionen der Variabelen x und y, so ist kein singuläres Integral vorhanden; $P = 0$ und $Q = 0$ bestimmen singuläre Punkte.

Untersuchungen über die Bestimmung des integrierenden Faktors. Die infinitesimale Transformation.

684. Soll der Ausdruck

$$1) \qquad \mu P dx + \mu Q dy$$

ein exaktes Differential sein, so muss die Bedingung erfüllt sein (§ 483):

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

oder

2) $$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Diese Gleichung, von welcher die unbekannte Funktion μ abhängt, ist eine partielle Differentialgleichung; die Bestimmung von μ beruht also sozusagen auf einem Probleme höherer Ordnung als die ursprüngliche Aufgabe der Integration der Gleichung $P dx + Q dy = 0$.

Es giebt indessen gewisse Fälle, aus denen sich der Faktor μ auf Grund dieser Gleichung leicht ermitteln lässt; die einfachsten derselben wollen wir hier angeben.

685. Die homogene Gleichung. Sind P und Q homogene Funktionen vom gleichen Grade m, so kann man eine homogene Funktion μ vom Grade n finden, so dass

1) $$\mu(P dx + Q dy)$$

ein exaktes Differential wird. Denn es wird μP eine homogene Funktion vom Grade $m + n$, und folglich ist identisch (§§ 84 und 136):

$$x\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + y\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = (m+n)\mu P.$$

Die Bedingung, dass der Ausdruck 1) exakt ist, nämlich:

2) $$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

kann also in der Form geschrieben werden:

$$x\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + y\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = (m+n)\mu P$$

oder weil $y\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q y)}{\partial x}$ und $x\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P x)}{\partial x} - \mu P$ ist:

$$\frac{\partial[\mu(Px + Qy)]}{\partial x} = (m+n+1)\mu P.$$

Die Zahl n ist noch unbestimmt; wir setzen also:

$$m + n + 1 = 0;$$

folglich wird die Bedingung 2):

$$3)\qquad \frac{\partial[\mu(Px+Qy)]}{\partial x}=0.$$

Die analoge Untersuchung lehrt, dass die Bedingung 2) auch in der Form:

$$4)\qquad \frac{\partial[\mu(Px+Qy)]}{\partial y}=0$$

dargestellt werden kann, und die Gleichungen 3) und 4) besagen, dass $\mu(Px+Qy)$ eine Konstante ist. Setzt man dieselbe gleich 1, so wird

$$5)\qquad \mu=\frac{1}{Px+Qy}.$$

Hieraus folgt, dass, wenn P und Q homogene Funktionen desselben Grades sind, der Ausdruck

$$\frac{P\,dx+Q\,dy}{Px+Qy}$$

ein exaktes Differential ist. Um also die Differentialgleichung

$$6)\qquad P\,dx+Q\,dy=0$$

zu integrieren, hat man nach der Methode des § 483 das Integral des exakten Differentiales $\frac{P\,dx+Q\,dy}{Px+Qy}$ zu bestimmen und dasselbe gleich einer Konstante zu setzen.

Ist die linke Seite der Gleichung 6) selbst schon ein exaktes Differential, so kennen wir zwei integrierende Faktoren der Gleichung 6), nämlich $\frac{1}{Px+Qy}$ und 1; setzt man den Quotienten dieser beiden Faktoren gleich einer willkürlichen Konstante, so erhält man das vollständige Integral (§ 682); dasselbe wird dann:

$$Px+Qy=C.$$

Diese Methode unterscheidet sich im Grunde nicht von der früheren im § 654 behandelten; denn ist

$$\frac{P}{Q}=-f\left(\frac{y}{x}\right),$$

so wird die linke Seite der Gleichung 6):

$$Q\left[dy - f\left(\frac{y}{x}\right)dx\right]$$

oder, indem man $y = xz$, $dy = x\,dz + z\,dx$ setzt:

$$Qx[z - f(z)]\left[\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z - f(z)}\right].$$

Durch diese Transformation wurde früher die Trennung der Variabelen herbeigeführt, und man sieht, dass dieser Ausdruck ein exaktes Differential wird, wenn man ihn mit dem Faktor

$$\frac{1}{Qx[z - f(z)]} = \frac{1}{Px + Qy}$$

multipliziert.

686. Der integrierende Faktor μ des Differentiales

$$P\,dx + Q\,dy$$

lässt sich auch leicht bestimmen, falls man von ihm weiss, dass er nur eine Funktion von x oder von y allein ist. Nehmen wir z. B. an, dass μ nur von x abhängt, dass also $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ist, so bekommt die allgemeine Gleichung des integrierenden Faktors, nämlich:

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

die Form:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu}.$$

Unsere Annahme erfordert nun, dass der Quotient

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = X$$

ist, wobei X nur eine Funktion von x bedeutet. Ist dieses der Fall, so wird

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = X \quad \text{oder} \quad \frac{d\mu}{\mu} = X\,dx,$$

also:

$$l(\mu) = \int_{x_0}^{x} X\,dx + \text{const} \quad \text{oder} \quad \mu = Ce^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}.$$

Nehmen wir, was immer gestattet ist, an, dass $Q = 1$ ist; damit dann der obige Quotient nur eine Funktion von x allein ist, muss

$$\frac{\partial P}{\partial y} = X$$

unabhängig von y sein, d. h. $P = Xy + X_1$; X und X_1 sind Funktionen von x. Der vorletzte Ausdruck hat dann die Form:

$$dy + (Xy + X_1)\,dx$$

und $e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}$ ist ein integrierender Faktor. Um also die *lineare* Gleichung:

$$dy + (Xy + X_1)\,dx = 0$$

zu integrieren (§ 658), hat man sie mit dem integrierenden Faktor zu multiplizieren; es wird

$$dy\,e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx} + y\,e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}\,X\,dx + e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}\,X_1\,dx = 0,$$

und die Integration ergiebt:

$$y\,e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}\,X_1\,dx = \text{const.}$$

687. Wir untersuchen schliesslich nur noch den Fall, wo der Ausdruck $P\,dx + Q\,dy$ exakt wird, wenn man ihn mit einem Faktor μ von der Form XY multipliziert, wobei X und Y bezüglich Funktionen von x und y sind. Die Bedingungsgleichung ist hier

$$\frac{\partial(XYP)}{\partial y} = \frac{\partial(XYQ)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\,\frac{\frac{\partial X}{\partial x}}{X} - P\,\frac{\frac{\partial Y}{\partial y}}{Y};$$

dies erfordert, dass die Differenz $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ von der Form ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\varphi(x) - P\psi(y).$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man setzen:

$$\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x} = \varphi(x), \quad \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \psi(y),$$

also:

$$X = e^{\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(x)dx}, \quad Y = e^{\int\limits_{y_0}^{y}\psi(y)dy}, \quad \mu = XY.$$

Für Differentialgleichungen, welche durch geometrische Probleme definiert sind, wie dies z. B. bei gewissen Kurvensystemen auf gegebenen Flächen der Fall ist, ist die Frage nach der geometrischen Bedeutung des integrierenden Faktors von Wert, weil sich auf diese Weise oft unmittelbar erkennen lässt, wie derselbe zu bilden ist. Diese Frage ist von Herrn Lie vermittelst seiner allgemeinen Theorie der infinitesimalen Transformation beantwortet worden und gewinnt bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung eine besonders einfache Form (Abhandlungen der Gesell. d. W., Christiania 1874, Math. Annal., Bd. 11 und 20).

Eine Transformation heisst eine infinitesimale, wenn sie jeden Punkt der Ebene in einen benachbarten überführt; solch eine Transformation wird analytisch dargestellt, indem man an Stelle des Punktes xy den Punkt $x + dx$, $y + dy$ treten lässt, wobei die Grössen dx, dy als unendlich kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden.

Analytisch kann man diese Transformation so ausdrücken, dass man an Stelle von x, y den Punkt x', y' treten lässt, so dass zwischen den Koordinaten dieser beiden Punkte, indem man mit dt eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung bezeichnet, die Gleichungen bestehen:

$$1) \qquad x = x' + \varphi(x', y')\,dt, \quad y = y' + \psi(x', y')\,dt;$$

φ und ψ sind bestimmte, im allgemeinen wenigstens stetige Funktionen von x', y', mithin folgt bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung auch umgekehrt:

$$2) \qquad x' = x - \varphi(x, y)\,dt, \quad y' = y - \psi(x, y)\,dt.$$

Wir wollen die Gleichungen 1) in der Form

$$x = x' + \varphi_1 dt, \quad y = y' + \psi_1 dt,$$

die Gleichungen 2) in der Form

$$x' = x - \varphi\,dt, \quad y' = y - \psi\,dt$$

schreiben.

Eine beliebige Kurve $f(x, y) = 0$ geht durch solch eine Transformation über in eine unendlich benachbarte Kurve, deren Gleichung die Form hat:

$$f(x', y') + \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\varphi_1 + \frac{\partial f'}{\partial y_1}\psi_1\right)dt = 0.$$

Ist die Transformation so gewählt, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi_1 = 0$$

wird für alle Punkte der Gleichung $f = 0$, so ist die Kurve in sich transformiert, das heisst jeder Kurvenpunkt ist in der Richtung seiner Tangente in einen unendlich benachbarten Kurvenpunkt übergeführt.

Das Wesentliche der infinitesimalen Transformation besteht also darin, dass jedem Punkte x, y der Ebene eine Richtung zugeordnet wird, längs welcher er unendlich wenig verschoben wird. Diese Richtung ist bestimmt durch den Quotienten:

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}.$$

Ist eine Differentialgleichung

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P}{Q}$$

gegeben, und unterwerfen wir die Punkte der Ebene einer infinitesimalen Transformation, so kann dieselbe erstlich so gewählt werden, dass dabei jeder Punkt längs der Richtung verschoben wird, welche ihm durch die Differentialgleichung zugeordnet ist; zu dem Zwecke hat man nur φ und ψ so zu bestimmen, dass

$$\frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} = f(x, y) = -\frac{P}{Q}$$

wird; bei diesen Transformationen, für welche also $P\varphi + Q\psi = 0$ ist, bleibt auch jede Integralkurve der Differentialgleichung ungeändert; sie wird in sich transformiert.

Bei allen übrigen infinitesimalen Transformationen wird jede Integralkurve in eine neue unendlich benachbarte Kurve verwandelt. Sind diese neuen Kurven aber die Integralkurven, so sagen wir, *dass die Differentialgleichung die infinitesimale Transformation 1) und 2) gestattet.* Die Relation, welche zwischen P, Q, φ, ψ in diesem Falle bestehen muss, ist nun zu ermitteln.

Das Integralsystem der Gleichung $P dx + Q dy = 0$ wollen wir uns in der Form $F(x, y) = C$ denken, oder auch, was indessen nicht allgemeiner ist, in der Form $\Phi(F) = C$, wobei Φ eine willkürliche Funktion von F bedeutet. Die Kurve $F(x, y) = C$ geht bei der Transformation über in

$$F(x', y') + \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial y'}\psi_1\right) dt = C.$$

Soll diese neue Kurve ebenfalls dem Integralsysteme angehören, so muss

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial y'}\psi_1 = \text{const}$$

vermöge $F = C$ sein, oder, was dasselbe besagt, es muss:

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial y'}\psi_1 = \Phi(F)$$

sein, wenn wiederum Φ eine willkürliche Funktion von F bedeutet. Bezeichnet man nun einen integrierenden Faktor der Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ mit μ, so ist:

$$\mu P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Mithin besteht, wenn die Differentialgleichung die infinitesimale Transformation φ, ψ gestattet, die Gleichung

$$\mu(P\varphi + Q\psi) = \Phi(F) \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{\Phi(F)}{P\varphi + Q\psi}.$$

Hieraus erkennt man, dass auch der Quotient

$$\frac{1}{P\varphi + Q\psi}$$

integrierender Faktor ist, und sonach ist der Satz bewiesen:

Gestattet die Differentialgleichung $\mathrm{P\,dx + Q\,dy = 0}$ *die infinitesimale Transformation* φ, ψ, *so ist der Ausdruck* $\mathrm{P}\varphi + Q\psi$ *ein integrierender Divisor der Differentialgleichung.*

Dieser Satz ist auch umkehrbar:

Ist ein integrierender Faktor μ *der Differentialgleichung bekannt, und bestimmt man zwei Funktionen* φ *und* ψ *so, dass*

$$\mathrm{P}\varphi + \mathrm{Q}\psi = \frac{1}{\mu}$$

wird, so gestattet die Differentialgleichung die infinitesimale Transformation φ, ψ.

Denn sie verwandelt eine Integralkurve $F(x, y) = C$ in

$$F(x', y') + \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial y'}\psi_1\right) dt = C$$

oder weil $\frac{\partial F}{\partial x} = \mu P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q$ und $\mu(P\varphi + Q\psi) = 1$ ist, in

$$F(x', y') + dt = C.$$

Da alle integrierenden Faktoren einer Differentialgleichung durch $\mu\,\Phi(F)$ darstellbar sind, wenn μ eine Form des Faktors, und F die Integralfunktion bedeutet, so sind auch alle infinitesimalen Transformationen, welche eine Differentialgleichung gestattet, in der Relation

$$P\varphi + Q\psi = \frac{1}{\mu\Phi(F)}$$

enthalten.

Man kann die Bedingung für φ und ψ auch direkt aus der Differentialgleichung ableiten. Denn die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} = f(x, y)$$

bleibt dann, und nur dann in sich ungeändert, wenn ein Punkt x, y mit seiner Fortschreitungsrichtung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ in einen Punkt x', y' derart übergeht, dass dabei auch die Fortschreitungsrichtung des Punktes x, y in die des Punktes x', y' übergeführt wird. Wird nun $x' = x - \varphi\, dt$, $y' = y - \psi\, dt$ der transformierte des Punktes x, y, so wird für den Punkt $x + dx$, $y + dy$ der transformierte gleich:

$$x + dx - \varphi\, dt - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy\right) dt, \quad y + dy - \psi\, dt - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy\right) dt.$$

Es muss also die Gleichung bestehen:

$$\frac{dy - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy\right) dt}{dx - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy\right) dt} = f(x, y) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\psi\right) dt$$

oder da $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ist:

$$f(x, y) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} f\right) dt = f(x, y) - f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} f\right) dt - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\psi\right) dt,$$

wobei unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung fortgelassen sind. Diese Bedingung reduziert sich aber auf die Form:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + f\frac{\partial\psi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial f}{\partial x} - \psi\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial\varphi}{\partial x} - f^2\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\psi - f\varphi}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-f}{\psi - f\varphi}\right].$$

Setzt man also $f = -\frac{P}{Q}$, so erhält man die Bedingung des integrierenden Faktors:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Q}{P\varphi + Q\psi}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P}{P\varphi + Q\psi}\right].$$

Beispiele. 1. *Die homogene Gleichung* $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ist so beschaffen, dass alle Punkte der Ebene, in denen $\frac{dy}{dx}$ denselben Wert hat, auf Geraden liegen, welche vom Koordinatenanfangspunkte ausgehen. Daraus folgt, dass die Differentialgleichung eine Ähnlichkeitstransformation sogar bei endlicher Verschiebung zulässt, deren Centrum der Koordinatenanfangspunkt ist. In der That, setzt man $x = \alpha x'$, $y = \alpha y'$, so behält die Differentialgleichung ungeändert ihre Form. Mithin ist auch die infinitesimale Transformation $x' = x(1 - dt)$, $y' = y(1 - dt)$ zulässig, und folglich ist

$$\frac{1}{xf\left(\frac{y}{x}\right) - 1}$$

integrierender Faktor.

2. *Parallelkurven.* Eine Differentialgleichung sei so geartet, dass ihr vollständiges Integralsystem ein Parallelkurvensystem bildet, d. h. trägt man auf den Normalen einer Integralkurve beliebige aber konstante Strecken ab, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine Parallelkurve, welche gleichfalls der Differentialgleichung genügen muss. Die Kosinus der Winkel, welche die Normale mit den Axen bildet, sind, wenn $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve darstellt:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}.$$

Trägt man nun auf der Normalen eine konstante Strecke l ab, so gehen die Koordinaten des Kurvenpunktes x, y über in:

$$x' = x + l\cos\alpha = x + l\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}, \quad y' = y + l\cos\beta = y + l\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}.$$

Die infinitesimale Transformation ist demnach:

$$\varphi = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}, \quad \psi = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}},$$

und also

$$\frac{1}{P\varphi + Q\psi} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y}} = \mu$$

ein integrierender Faktor. Weil aber

$$\mu P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

ist, so folgt

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

Weiss man also, dass eine Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ ein System von Parallelkurven definiert, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

integrierender Faktor. Es ist leicht, auch die Umkehr dieses Satzes zu beweisen.

3. Wenn eine Differentialgleichung die infinitesimale Rotation um den Koordinatenanfangspunkt gestattet, so ist ihr integrierender Divisor $Py - Qx$, denn in diesem Falle sind die Transformationsgleichungen

$$x' = x + y\,dt, \quad y' = y - x\,dt.$$

Dieser Satz lässt z. B. die Krümmungslinien einer Schraubenfläche bestimmen, und allgemein die Krümmungslinien oder Haupttangentenkurven einer jeden Fläche, die eine Rotation, durch welche sie ungeändert bleibt, zulässt.

Die Fundamentaleigenschaften der elementaren transscendenten Funktionen, abgeleitet aus den Integralen ihrer algebraischen Differentiale.

688. Die wesentlichen Eigenschaften der Logarithmen und der cyklometrischen Funktionen lassen sich leicht vermittelst der Integralrechnung erkennen; wäre die Theorie dieser

Transscendenten nicht schon früher entwickelt worden, so hätte man sicherlich ihre Grundlagen aus den ersten Sätzen in der Theorie der Differentialgleichungen gewonnen, wie solches bei den elliptischen Funktionen und den höheren Transscendenten mit algebraischen Differentialen in der That geschehen ist. Auf einige Entwickelungen dieser Art wollen wir hier eingehen.

Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$1)\qquad \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0.$$

Die Variabelen sind hier getrennt, aber die Integration jedes Gliedes erfordert den Begriff des Logarithmus. Wenn diese Funktion noch nicht eingeführt ist, so muss man das Integral durch die Gleichung

$$\int_1^x \frac{dx}{x}+\int_1^y \frac{dy}{y}=C$$

darstellen. Soll sich der Wert von y für $x=1$ auf eine bestimmte Grösse z reduzieren, so muss man die Konstante C durch die Bedingung bestimmen:

$$\int_1^z \frac{dy}{y}=C \quad \text{oder} \quad \int_1^z \frac{dz}{z}=C,$$

indem man die Variabele unter dem Integralzeichen ebenfalls mit z bezeichnet; unser Integral wird demnach:

$$2)\qquad \int_1^x \frac{dx}{x}+\int_1^y \frac{dy}{y}=\int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Andererseits ist evident, dass die Gleichung 1) ein algebraisches Integral zulässt; denn wenn man die Nenner beseitigt, so folgt:

$$y\,dx+x\,dy=0 \quad \text{oder} \quad d(xy)=0,$$

also ist das Integral:

$$xy=\text{const},$$

und wenn man die Konstante so bestimmt, dass $y=z$ wird für $x=1$, so erhält man:

3) $$xy = z;$$
die Gleichungen 2) und 3) drücken die nämliche Relation zwischen x, y, z aus, mit anderen Worten, sie sind äquivalent.

Wenn die Transscendente $\int\limits_1^x \frac{dx}{x}$ hier zum erstenmal auftritt, muss man ihr einen Namen geben; wir nennen sie *Logarithmus* und schreiben:

$$\int\limits_1^x \frac{dx}{x} = \log x.$$

Dann giebt uns die Gleichung 2), wenn wir xy an Stelle von z einführen:

$$\log xy = \log x + \log y,$$

und dies ist die Fundamentaleigenschaft des Logarithmus.

An Stelle der Logarithmen können wir nun auch die inversen Funktionen einführen; es sei:

$$\int\limits_1^x \frac{dx}{x} = u, \quad \int\limits_1^y \frac{dy}{y} = v, \quad \int\limits_1^z \frac{dz}{z} = w.$$

Da u eine Funktion von x ist, so kann man auch x als eine Funktion von u betrachten; wir bezeichnen diese Funktion mit dem Symbol e^u, so folgt:

$$x = e^u, \quad y = e^v, \quad z = e^w,$$

und die Gleichungen 2) und 3) erhalten die Form:

$$u + v = w, \quad e^u \cdot e^v = e^w,$$

folglich:

$$e^{u+v} = e^u \cdot e^v,$$

wodurch die Fundamentaleigenschaft der Exponentialfunktion ausgedrückt ist.

Diese Definition bezieht sich zunächst nur auf reelle Werte der Variabelen x und y, und zwar auch nur auf positive, weil das Integral $\int\limits_1^x \frac{dx}{x}$ keine stetige Funktion von x mehr ist, wenn der Nullpunkt im Integrationsintervall liegt. Will man also diese transscendente Funktion bei allen reellen und komplexen Werten von x untersuchen, so hat man vor allem den Einfluss des singulären Punktes $x = 0$ und den Wert des Integrales bei komplexen Integrationswegen zu bestimmen.

689. Wir betrachten zweitens die Differentialgleichung:

$$\text{4)} \qquad \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0.$$

Die Variabelen sind getrennt, und das Integral erhält, wenn man mit z den Wert bezeichnet, welchen y für $x = 0$ annehmen soll, die Form:

$$\text{5)} \qquad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Die Gleichung 4) lässt sich aber noch folgendermassen schreiben:

$$[1 - xy + y(x+y)]\, dx + [1 - xy + x(x+y)]\, dy = 0$$

oder:

$$(1 - xy)(dx + dy) - (x+y)\, d(1 - xy) = 0$$

oder endlich:

$$\frac{(1-xy)\, d(x+y) - (x+y)\, d(1-xy)}{(1-xy)^2} = 0.$$

Die linke Seite ist nun das Differential von $\frac{x+y}{1-xy}$, und diese Grösse wird für $x = 0$ und $y = z$ ebenfalls gleich z; folglich wird das Integral der Gleichung 4), das schon durch die Gleichung 5) dargestellt ist, auch gleich:

$$\text{6)} \qquad \frac{x+y}{1-xy} = z.$$

Wir setzen nun:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctang} x = u, \quad \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctang} y \quad v, \quad \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctang} z = w$$

so haben wir für die neue Transscendente die Gleichungen:

$$\operatorname{arctang} x + \operatorname{arctang} y = \operatorname{arctang} z = \operatorname{arctang} \frac{x+y}{1-xy},$$

die für alle reellen Werte der Variabelen x, y Geltung hat, während wir bei komplexen Werten die singulären Punkte $x = \pm\sqrt{-1}$ noch näher untersuchen müssten. Definiert man die inversen Funktionen durch das Symbol $\operatorname{tang} u$, so erhalten die Gleichungen 5) und 6) die Form:

$$u + v = w, \quad \frac{\operatorname{tang} u + \operatorname{tang} v}{1 - \operatorname{tang} u \operatorname{tang} v} = \operatorname{tang} w,$$

folglich ist:

$$\operatorname{tang}(u+v) = \frac{\operatorname{tang} u + \operatorname{tang} v}{1 - \operatorname{tang} u \operatorname{tang} v},$$

und dies ist die Fundamentaleigenschaft der Funktion $\operatorname{tang} u$.

690. Wir betrachten schliesslich noch die Gleichung:

$$7) \qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Das Integral, derart bestimmt, dass für $x = 0$ $y = z$ ist, wird:

$$8) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Multipliziert man aber die Differentialgleichung mit dem Faktor $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy$, so folgt:

$$\left[\sqrt{1-y^2}\,dx - x\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\right] + \left[\sqrt{1-x^2}\,dy - y\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = 0$$

oder:

$$d(x\sqrt{1-y^2}) + d(y\sqrt{1-x^2}) = 0.$$

Das Integral wird also, wenn man es gleichfalls so bestimmt, dass $y = z$ ist für $x = 0$:

$$9) \qquad x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = z.$$

Ferner bleibt die linke Seite der Gleichung 7), welche ein exaktes Differential ist, auch noch exakt, wenn man sie mit dem Faktor

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy$$

multipliziert; man braucht also bloss diesen Faktor konstant zu setzen, um das Integral der Gleichung 7) zu gewinnen

(§ 682). Bestimmt man diese Konstante wiederum so, dass für $x=0$, $y=z$ wird, so erhält man:

$$10)\qquad \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy=\sqrt{1-z^2}.$$

Die drei Gleichungen 8), 9), 10) stellen die nämliche Relation zwischen den Grössen x, y, z dar. Die letzten beiden sind algebraisch, während die erste transscendente Funktionen enthält.

Setzen wir nun:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=u,\quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=v,\quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=w,$$

so ist u eine Funktion von x, und wir können auch umgekehrt x sowohl, wie $\sqrt{1-x^2}$ als Funktionen von x betrachten, wenigstens solange der absolute Betrag von x kleiner als eins ist. Wir bezeichnen diese Funktionen mit den Symbolen $\sin u$, $\cos u$, so ist:

$$\begin{array}{rrr} x=\sin u, & y=\sin v, & z=\sin w, \\ \sqrt{1-x^2}=\cos u, & \sqrt{1-y^2}=\cos v, & \sqrt{1-z^2}=\cos w. \end{array}$$

Die Gleichung 8) wird:

$$u+v=w,$$

und die Gleichungen 9) und 10) geben folglich die Relationen:

$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v,$$
$$\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v,$$

wodurch die Fundamentaleigenschaften der Funktionen *sinus* und *cosinus* ausgedrückt sind. Man könnte nun auch auf diesem Wege die anderen bekannten Eigenschaften dieser Funktionen, z. B. ihre Periodicität, aufs neue ableiten; doch wollen wir hierbei nicht verweilen, sondern diese Betrachtungen nur noch schliesslich, nach dem Vorgang von Euler, auf den Beweis der charakteristischen Eigenschaft der elliptischen Funktionen anwenden.

Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen.

691. Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$1)\qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}=0,$$

wobei k^2 eine gegebene Grösse zwischen 0 und 1 bezeichnet. Die Variabelen sind hier getrennt, und wenn man das Integral so bestimmt, dass für $x=0$, $y=z$ wird, so erhält man:

$$2)\quad \int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}+\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}},$$

eine Gleichung, in welcher jedes Glied ein elliptisches Integral erster Gattung ist.

Euler hat nun erkannt, dass die Gleichung 1) auch ein algebraisches Integral besitzt; dasselbe lässt sich bestimmen, indem man folgendermassen vorgeht. Wir setzen:

$$X=(1-x^2)(1-k^2x^2),$$
$$Y=(1-y^2)(1-k^2y^2),$$

so dass die vorgelegte Gleichung die Form bekommt:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0,$$

oder, indem man die Nenner beseitigt und dabei die Gleichung mit einer noch unbekannten Funktion T multipliziert:

$$3)\qquad T\sqrt{Y}\,dx+T\sqrt{X}\,dy=0.$$

Nun ist aber:

$$T\sqrt{Y}\,dx=d(xT\sqrt{Y})-\frac{Tx\,dY}{2\sqrt{Y}}-x\sqrt{Y}\,dT,$$

$$T\sqrt{X}\,dy=d(yT\sqrt{X})-\frac{Ty\,dX}{2\sqrt{X}}-y\sqrt{X}\,dT,$$

und die Gleichung 3) wird sonach:

$$4)\quad d[T(x\sqrt{Y}+y\sqrt{X})]-\frac{T}{2}\left(\frac{xY'dy}{\sqrt{Y}}+\frac{yX'dx}{\sqrt{X}}\right)-(x\sqrt{Y}+y\sqrt{X})\,dT=0,$$

X' und Y' bezeichnen die Ableitungen $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dY}{dy}$.

Man kann nun die Funktion T so bestimmen, dass sich diese Gleichung auf

$$5)\qquad d[T(x\sqrt{Y}+y\sqrt{X})]=0$$

reduziert. Zu dem Zwecke müssen sich die übrigen Terme auf Grund der Gleichung 1) gegenseitig aufheben. Ersetzen wir also dT durch

$$\frac{\partial T}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial y}dy,$$

und bemerken wir, dass dx und dy proportional zu $\sqrt{X}$ und $-\sqrt{Y}$ sind, so hat die Funktion T der Bedingung zu genügen:

$$6)\quad \frac{T}{2}(xY'-yX')-(y\sqrt{X}+x\sqrt{Y})\left(\frac{\partial T}{\partial x}\sqrt{X}-\frac{\partial T}{\partial y}\sqrt{Y}\right)=0.$$

Diese Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung; für unseren Zweck genügt es aber, irgend eine partikuläre Lösung derselben zu kennen. Wir untersuchen, ob ein rationaler Wert von T diese Gleichung befriedigt; man erkennt, dass, wenn solch ein Wert existiert, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial T}{\partial x}$ und $\frac{\partial T}{\partial y}$ proportional zu y und x sein müssen, damit die Quadratwurzeln aus der Gleichung 6) verschwinden. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man für T eine Funktion des Produktes xy wählt, denn bezeichnet man mit T' die Ableitung von T in Bezug auf dieses Produkt, so wird:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=T'y,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=T'x.$$

Die Substitution dieser Werte in die Gleichung 6) ergiebt:

$$\frac{T'}{T}=\frac{xY'-yX'}{2(y^2X-x^2Y)},$$

oder, wenn man an Stelle von X, Y, X', Y' ihre Werte einsetzt:

$$7)\qquad \frac{T'}{T}=\frac{2k^2xy}{1-k^2x^2y^2};$$

dieser Ausdruck ist in der That eine rationale Funktion des Produktes xy, und diese Funktion ist die Ableitung von $-l(1-k^2x^2y^2)$; das Integral der Gleichung 7) ist also:

$$l(T)=-l(1-k^2x^2y^2)+\text{const.}$$

Die Konstante können wir gleich null setzen, und demnach wird:

$$8)\qquad T = \frac{1}{1 - k^2x^2y^2}.$$

Dieser Wert von T genügt der Gleichung 6), folglich erhält die Gleichung 1) die Form:

$$9)\qquad d\,\frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{1 - k^2x^2y^2} = 0,$$

also wird ihr Integral:

$$\frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{1 - k^2x^2y^2} = \text{const.}$$

Setzt man für X und Y ihre Werte ein, und bestimmt man die Konstante so, dass für $x = 0$, $y = z$ wird, so erhält man die Gleichung:

$$10)\qquad \frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2} + y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1 - k^2x^2y^2} = z.$$

Vermittelst dieser Gleichung kann man nun auch die beiden Wurzeln: $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{1-k^2z^2}$, welche die Werte von $\sqrt{1-y^2}$ und $\sqrt{1-k^2y^2}$ für $x = 0$ darstellen, als Funktionen von x und y ausdrücken; man findet leicht:

$$11)\qquad \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-k^2y^2}}{1 - k^2x^2y^2} = \sqrt{1-z^2},$$

$$12)\qquad \frac{\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-k^2y^2} - k^2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1 - k^2x^2y^2} = \sqrt{1-k^2z^2}.$$

692. Jede der Gleichungen 2), 10), 11), 12) stellt das Integral der Gleichung 1) dar, in welchem für $x = 0$, $y = z$ wird. Setzt man nun:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = u, \qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} = v,$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}} = w,$$

und ferner, wie im § 438:

$$x = \sin am\, u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos am\, u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am\, u,$$

so wird die Gleichung 2):

$$w = u + v,$$

und die Gleichungen 10), 11), 12) geben folglich:

$$\sin am(u+v) = \frac{\sin am\, u \cos am\, v \,\Delta\, am\, v + \sin am\, v \cos am\, u \,\Delta\, am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v},$$

$$\cos am(u+v) = \frac{\cos am\, u \cos am\, v - \sin am\, u \sin am\, v \,\Delta\, am\, u \,\Delta\, am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v},$$

$$\Delta\, am(u+v) = \frac{\Delta\, am\, u \,\Delta\, am\, v - k^2 \sin am\, u \sin am\, v \cos am\, u \cos am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v}.$$

Diese Formeln stellen das Additionstheorem der elliptischen Funktionen dar. Wir beschränken uns hierbei auf die Angabe dieses Resultates, dessen Beweis noch nicht bei unbeschränkter Variabilität der Argumente geführt ist, das wir indessen nicht weiter entwickeln können, ohne die Grenzen, welche wir uns gesteckt haben, zu überschreiten.

Drittes Kapitel.

Über die Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

Die Integration der Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = X$.

693. Alle Fälle der gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich, wie wir sahen, wie gross auch die Zahl der Variabelen sein mag, auf den Fall einer Differentialgleichung von bestimmter Ordnung zwischen zwei Variabelen zurückführen. Nachdem wir die bekannteren Resultate aus der Theorie der Gleichungen erster Ordnung entwickelt haben, müssen wir nun Gleichungen höherer Ordnung betrachten. Sieht man aber hierbei von den *linearen* Gleichungen ab, die wir zum Gegenstand besonderer Untersuchung im nächsten Kapitel machen werden, so haben wir für diese Theorie kein allgemeines Prinzip, keine Methode der Integration, und die folgenden Entwickelungen sind daher auf eine sehr kleine Zahl spezieller Fälle beschränkt.

Wir verweilen zunächst bei dem einfachsten Fall, wo eine Ableitung bestimmter Ordnung der unbekannten Funktion gegeben ist. Hier hängt die auszuführende Integration nur von Quadraturen ab. Es sei also

$$1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = X$$

die gegebene Gleichung, X eine bekannte Funktion von x allein, man soll das vollständige Integral bestimmen. Wir bezeichnen mit $y_0, y'_0, \dots y_0^{(n-1)}$ die Werte, welche y und seine $n-1$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ annehmen sollen.

Multipliziert man dann die Gleichung 1) mit dx, so folgt durch Integration

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} X\,dx + y_0^{(n-1)} = X_1 + y_0^{(n-1)}.$$

Integriert man sodann diese Gleichung, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} &= \int_{x_0}^{x} X_1\,dx + y_0^{(n-1)}(x-x_0) + y_0^{(n-2)}\\ &= X_2 + y_0^{(n-1)}(x-x_0) + y_0^{(n-2)}.\end{aligned}$$

Fährt man in derselben Weise fort, so erhält man schliesslich

$$y = X_n + P_{n-1},$$

wobei

$$P_{n-1} = y_0 + y'_0(x-x_0) + \frac{1}{2!}y''_0(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n-1!}y_0^{(n-1)}(x-x_0)^{n-1}$$

ist, und X_n das $n+1^{\text{te}}$ Glied in der Reihe $X, X_1, X_2, \ldots X_n$ bezeichnet. Diese Funktionen werden von der zweiten an für $x = x_0$ null und jede von ihnen ist die Ableitung der folgenden; also ist

$$2)\qquad X_n = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \cdots \int_{x_0}^{x} X\,dx.$$

Die Anzahl der auszuführenden Integrationen ist gleich n.

Durch die teilweise Integration lässt sich indessen diese Formel so transformieren, dass die Berechnung von X_n nur eine einzige Quadratur erfordert; es ist

$$3)\qquad X_1 = \int_{x_0}^{x} X\,dx \quad \text{und ebenso} \quad X_2 = \int_{x_0}^{x} X_1\,dx.$$

Die teilweise Integration verwandelt nun den Ausdruck für X_2 in den folgenden

$$X_2 = x X_1 - \int_{x_0}^{x} \frac{dX_1}{dx}\,x\,dx = x\int_{x_0}^{x} X\,dx - \int_{x_0}^{x} Xx\,dx,$$

oder wenn wir die Variabele unter dem Integral, also auch in der Funktion X, mit z bezeichnen:

$$4)\qquad X_2 = \int_{x_0}^{x} (x - z)\, X\, dz.$$

Bezeichnet man die Variabele in der Funktion X_2 mit t, so ist:

$$X_3 = \int_{x_0}^{x} X_2\, dt = \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} (t - z)\, X\, dz,$$

wobei in X an Stelle von x die Variabele z zu schreiben ist. Kehrt man in diesem zweifachen Integrale die Reihenfolge der Integrationen um, so wird (§ 588):

$$5)\qquad X_3 = \int_{x_0}^{x} X\, dz \int_{z}^{x} (t - z)\, dt = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (x - z)^2\, X\, dz.$$

Ebenso folgt weiter, wenn man die Variabele in X_3 mit t bezeichnet:

$$X_4 = \int_{x_0}^{x} X_3\, dt = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} (t - z)^2\, X\, dz = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} X\, dz \int_{z}^{x} (t - z)^2\, dz,$$

also:

$$6)\qquad X_4 = \frac{1}{3!} \int_{x_0}^{x} (x - z)^3\, X\, dz.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich schliessen, dass X_n von der Form

$$7)\qquad X_n = \frac{1}{n - 1!} \int_{x_0}^{x} (x - z)^{n-1}\, X\, dz$$

sein wird, und diese Gleichung bestätigt man durch Schluss von n auf $n + 1$, denn es wird wie vorhin, wenn wir mit t die Variabele in X_n bezeichnen:

$$X_{n+1} = \int_{x_0}^{x} X_n\, dt = \frac{1}{n - 1!} \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} (t - z)^{n-1}\, X\, dz = \frac{1}{n - 1!} \int_{x_0}^{x} X\, dz \int_{z}^{x} (t - z)^{n-1}\, dt,$$

also:

$$X_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - z)^n\, X\, dz.$$

Mithin ist das vollständige Integral der Gleichung 1):

$$8)\qquad y = \frac{1}{n-1!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1} X\,dz + P_{n-1};$$

P_{n-1} ist ein willkürliches Polynom in x vom Grade $n-1$.

Dabei ist zu bemerken, dass wir unter dem vollständigen Integrale der Gleichung 6) eine stetige Funktion von x verstehen, deren $n-1$ erste Ableitungen ebenfalls stetig sind, deren n^{te} Ableitung den gegebenen Wert X hat, und welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für einen gegebenen Wert x_0 von x die beliebig gegebenen Werte $y_0, y'_0, \dots y_0^{(n-1)}$ annimmt.

694. Nehmen wir an, dass die Funktion X die n^{te} Ableitung $f^n(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist, so ist evident, dass die Gleichung

$$y = f(x) - f(x_0) - \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) - \cdots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(x_0)$$

das Integral der Gleichung 1) ist, so bestimmt, dass y und seine $n-1$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ null werden. Dasselbe Integral ist aber auch durch die obige Gleichung 8) dargestellt, wenn man daselbst $X = f^n(z)$ und P_{n-1} gleich null setzt. Also ist:

$$f(x) - f(x_0) - \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) - \cdots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(x_0)$$

$$= \frac{1}{n-1!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1} f^n(z)\,dz,$$

oder wenn man $x = x_0 + h$ und $z = x_0 + h - t$ unter dem Integral setzt:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(x_0)$$

$$+ \frac{1}{n-1!}\int_0^h t^{n-1} f^n(x_0+h-t)\,dt.$$

Auf diese Weise erhalten wir einen neuen Beweis der Taylorschen Gleichung (§ 472).

Über die Gleichungen, welche nur zwei aufeinander folgende Ableitungen der unbekannten Funktion enthalten.

695. Wir betrachten zuerst eine Gleichung von der Form:

$$1)\qquad F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

oder

$$2)\qquad F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0,$$

indem wir $\frac{dy}{dx} = p$ einführen. Kann man die Gleichung nach $\frac{dp}{dx}$ auflösen, und wird:

$$3)\qquad \frac{dp}{dx} = f(p) \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dp}{f(p)},$$

so erhält man:

$$4)\qquad x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} + C.$$

Kann man ferner diese Gleichung nach p auflösen, so dass

$$p = \varphi(x) \quad \text{oder} \quad dy = \varphi(x)\, dx$$

wird, so folgt:

$$5)\qquad y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx + C';$$

C' ist eine zweite willkürliche Konstante, und die Gleichung 6) ist das vollständige Integral der gegebenen.

Dieses Integral lässt sich aber auch auf folgendem Wege ableiten, der immer anwendbar ist, auch wenn die Gleichung 4) nicht nach p aufgelöst werden kann. Multipliziert man die Gleichung 3) mit p, so folgt

$$p\, dx = dy = \frac{p\, dp}{f(p)},$$

also

$$6)\qquad y = \int_{p_0}^{p} \frac{p\, dp}{f(p)} + C_1.$$

Das vollständige Integral ergiebt sich dann vermittelst der Elimination von p aus den Gleichungen 4) und 6).

696. Kann man die Gleichung 2) nicht nach $\frac{dp}{dx}$ auflösen, dagegen die Auflösung nach p vollziehen, so erhält man das Integral auf folgendem Wege. Wir setzen $\frac{dp}{dx} = q$ und nehmen an, dass die gegebene Gleichung die Form

$$7) \qquad p = \varphi(q)$$

erhält. Dann wird

$$dp = \varphi'(q)\, dq,$$

also weil $dx = \frac{dp}{q}$, $dy = \frac{p\,dp}{q}$ ist:

$$dx = \frac{\varphi'(q)}{q}\, dq, \quad dy = \frac{\varphi(q)\,\varphi'(q)}{q}\, dq.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$8) \quad x = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi'(q)}{q}\, dq + C, \quad y = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi(q)\,\varphi'(q)}{q}\, dq + C_1.$$

Das gesuchte Integral ergiebt sich aus der Elimination von q zwischen diesen beiden Gleichungen.

697. Nehmen wir schliesslich an, dass die gegebene Gleichung weder nach p, noch auch nach q aufgelöst werden kann, dass man aber p und q als Funktionen einer neuen Variabelen dargestellt hat, derart, dass

$$9) \qquad p = \psi(t), \quad q = \chi(t)$$

ist, so folgt hieraus

$$dp = \psi'(t)\, dt,$$

und die Gleichungen $dx = \frac{dp}{q}$, $dy = \frac{p\,dp}{q}$ werden also:

$$dx = \frac{\psi'(t)}{\chi(t)}\, dt, \quad dy = \frac{\psi(t)\,\psi'(t)}{\chi(t)}\, dt,$$

so dass das gesuchte Integral aus den beiden Gleichungen erhalten wird:

$$10) \quad x = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(t)}{\chi(t)}\, dt + C, \quad y = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi(t)\,\psi'(t)}{\chi(t)}\, dt + C_1.$$

698. Beispiel. *Es soll die ebene Kurve bestimmt werden, deren Krümmungsradius eine Projektion von konstanter Länge auf eine feste Richtung liefert.*

Der Krümmungsradius hat bei rechtwinkligen Koordinaten den Wert

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

und der Kosinus des Winkels, den seine Richtung mit der x-Axe bildet, ist

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Wählen wir also die gegebene feste Richtung zur x-Axe, so ist die Gleichung des Problemes

$$\frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}=a,$$

wobei a die gegebene Länge bedeutet. Setzt man $\frac{dy}{dx}=p$, so wird diese Gleichung

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p(1+p^2)}{a},$$

also:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dp}{p(1+p^2)}=\frac{dp}{p}-\frac{p\,dp}{1+p^2},$$

$$\frac{dy}{a}=\frac{dp}{1+p^2}.$$

Integriert man diese und bezeichnet mit x_0, y_0 willkürliche Konstanten, so folgt:

$$\frac{x-x_0}{a}=l\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\quad \frac{y-y_0}{a}=\operatorname{arctang} p,$$

und die Elimination von p ergiebt:

$$\frac{x-x_0}{a}=l\left(\sin\frac{y-y_0}{a}\right).$$

699. Wir betrachten nun die allgemeinere Differentialgleichung:

$$1)\qquad F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

die sich für $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$ auf die Form

$$2)\qquad F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0$$

reduziert. Nehmen wir an, dass diese Gleichung nach $\frac{dp}{dx}$ aufgelöst ist, so dass

$$3)\qquad \frac{dp}{dx} = f(p)$$

wird, so folgt durch Integration:

$$4)\qquad x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} + C.$$

Kann dann diese Gleichung nach p aufgelöst werden, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$p = X \quad \text{oder} \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = X,$$

wobei X eine gegebene Funktion von x mit einer willkürlichen Konstante ist. Dies ist der im § 693 behandelte Fall.

700. Kann aber die Gleichung 4) nicht nach p aufgelöst werden, so hat man gemäss der Gleichung 3):

$$d\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p\,dx = \frac{p\,dp}{f(p)},$$

also:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{p_0}^{p} \frac{p\,dp}{f(p)} + C_1.$$

Setzt man zur Abkürzung $P = \int_{p_0}^{p} \frac{p\,dp}{f(p)}$, so kann man diese Gleichung schreiben:

$$d\,\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = (P + C_1)\,dx = \frac{P\,dp}{f(p)} + C_1\,dx,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_{p_0}^{p} \frac{P\,dp}{f(p)} + C_1 x + C_2;$$

fährt man so fort, so erhält man den Wert von y durch Quadraturen.

Über die Gleichungen, welche nur zwei Ableitungen enthalten, deren Ordnungen um zwei Einheiten differieren.

701. Es sei zunächst die Gleichung

$$1)\qquad F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0$$

gegeben, welche nur die unbekannte Funktion y nebst ihrer Ableitung zweiter Ordnung enthält. Lässt sich dieselbe nach $\frac{d^2y}{dx^2}$ auflösen, so dass

$$2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

wird, so erhält man durch Multiplikation mit $2dy$:

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx} = 2f(y)\,dy.$$

Die linke Seite ist das Differential von $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; folglich ist, wenn C eine willkürliche Konstante und y_0 irgend ein Anfangswert von y bezeichnet:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy + C.$$

Hieraus folgert man:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy + C}},$$

und ferner, da die Variabelen getrennt sind:

3) $$x = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2\int\limits_{y_0}^{y} f(y)\,dy + C}} + C'.$$

Dies ist das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung 2).

702. Ist die ursprüngliche Gleichung nach y auflösbar, so setzen wir:

4) $$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q,$$

und es sei

5) $$y = \varphi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \varphi(q)$$

die aufgelöste Gleichung. Die Differentiation ergiebt:

$$dy = \varphi'(q)\,dq;$$

andererseits ist nach den Gleichungen 4) $dy = \frac{p\,dp}{q}$, also:

$$p\,dp = q\varphi'(q)\,dq.$$

Mithin wird

6) $$p^2 = 2\int\limits_{q_0}^{q} q\varphi'(q)\,dq + C,$$

also:

$$p = \sqrt{2\int\limits_{q_0}^{q} q\varphi'(q)\,dq + C}.$$

Die Gleichung $dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(q)\,dq}{p}$ wird folglich:

$$dx = \frac{\varphi'(q)\,dq}{\sqrt{2\int\limits_{q_0}^{q} q\varphi'(q)\,dq + C}},$$

also:

7) $$x = \int\limits_{q_0}^{q} \frac{\varphi'(q)\,dq}{\sqrt{2\int\limits_{q_0}^{q} q\varphi'(q)\,dq + C}} + C_1.$$

Das gesuchte Integral ist das Resultat der Elimination von q zwischen den Gleichungen 5) und 7).

703. Beispiel. Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - my = 0$$

ergiebt:

$$2\,\frac{d^2y}{dx}\,\frac{dy}{dx} - 2my\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

also:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m(y^2 + C);$$

ferner

$$\sqrt{m}\,dx = \frac{dy}{\sqrt{y^2+C}}.$$

Mithin wird:

$$x\sqrt{m} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2+C}} + \text{const} = l(y + \sqrt{y^2+C}) - l(C');$$

C' ist hier eine Konstante. Man hat also:

$$y + \sqrt{y^2+C} = C' e^{x\sqrt{m}},$$

und indem man von beiden Seiten den reciproken Wert bildet:

$$-y + \sqrt{y^2+C} = \frac{C}{C'}\,e^{-x\sqrt{m}}.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der vorigen, und schreibt man statt $\frac{C'}{2}$ und $\frac{-C}{2C'}$ einfach C und C', so folgt:

$$y = Ce^{x\sqrt{m}} + C'e^{-x\sqrt{m}},$$

und dies ist das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung. Ist m eine negative Zahl, gleich $-n^2$, so kann man schreiben:

$$y = C\,\frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} + C'\,\frac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

oder:

$$y = C\cos nx + C'\sin nx;$$

C und C' bezeichnen auch hier willkürliche Konstanten. Man kann auch $C = A\cos\alpha$, $C' = -A\sin\alpha$ setzen; alsdann wird das Integral:

$$y = A\cos(nx + \alpha),$$

und A und α sind die willkürlichen Konstanten.

704. Auf den in § 701 behandelten Fall lässt sich die Gleichung

$$1)\qquad F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) = 0$$

zurückführen, welche nur die Ableitungen $\frac{d^n y}{dx^n}$ und $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$ enthält. Dazu hat man nur

$$2)\qquad \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = p$$

zu setzen, so wird die Differentialgleichung:

$$3)\qquad F\left(\frac{d^2 p}{dx^2}, p\right) = 0.$$

Die Bestimmung von p als Funktion von x enthält keine anderen Schwierigkeiten als die der Elimination, und beruht, wie wir gesehen haben, im übrigen auf Quadraturen.

Nehmen wir an, dass die Gleichung 3) nach $\frac{d^2 p}{dx^2}$ auflösbar ist, so dass

$$4)\qquad \frac{d^2 p}{dx^2} = f(p)$$

wird, so erhält man:

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{2\int_{p_0}^{p} f(p)\, dp + C} = \psi(p),$$

ferner:

$$5)\qquad x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\psi(p)} + C'.$$

Kann diese Gleichung nach p aufgelöst werden, so lässt sich y vermittelst der Gleichung 2) durch Quadraturen bestimmen (§ 693). Ist diese Auflösung aber nicht ausführbar, so hat man wie vorhin (§ 700) zu verfahren; es ist:

$$d\,\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = p\, dx = \frac{p\, dp}{\psi(p)},$$

also:

$$\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = \int_{p_0}^{p} \frac{p\, dp}{\psi(p)} + C_1 = P + C_1.$$

Daraus folgt weiter:

$$d\,\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} = (P + C_1)\,dx = \frac{P\,dp}{\psi(p)} + C_1\,dp,$$

also:

$$\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{P\,dp}{\psi(p)} + C_1\,x + C_2.$$

Auf diese Weise fortfahrend gewinnt man den Wert von y als Funktion von p durch Quadraturen.

Fälle, in denen sich die Ordnung der Differentialgleichungen erniedrigen lässt.

705. Die Ordnung einer Differentialgleichung lässt sich immer erniedrigen, wenn die Gleichung nicht die unbekannte Funktion, sondern nur ihre Ableitungen enthält. Denn ist die gegebene Gleichung von der Form:

$$F\left(x, \frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

wobei $\frac{d^m y}{dx^m}$ die Ableitung niedrigster Ordnung bezeichnet, welche hier auftritt, so folgt, indem man

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p$$

setzt, eine Differentialgleichung von der Ordnung $n - m$, nämlich:

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \cdots \frac{d^{n-m}p}{dx^{n-m}}\right) = 0.$$

Ist der Wert der Funktion hieraus ermittelt, so erhält man y durch Quadraturen.

Zweitens kann man aber auch die Ordnung stets um eine Einheit erniedrigen, wenn die unabhängige Variabele nicht explicite vorkommt. Denn wählt man in der Gleichung n^{ter} Ordnung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

y zur unabhängigen Variabelen, so wird man auf den vorigen Fall zurückgeführt. Setzt man also:

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p\,\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = p\,\frac{d\left(p\,\frac{dp}{dy}\right)}{dy} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und nach Substitution dieser Werte reduziert sich die Gleichung auf die $n-1^{\text{te}}$ Ordnung. Ist dann der Wert von p als Funktion von y bekannt, so ist x aus der Gleichung

$$dx = \frac{dy}{p}$$

zu bestimmen, was nur noch eine Quadratur erfordert.

706. *Gleichungen, welche in Bezug auf die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen homogen sind.* Ist die Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

homogen in Bezug auf $y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}$, so kann man ihre Ordnung um eine Einheit erniedrigen vermittelst der Substitution:

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

wobei z eine neue unbekannte Funktion von x ist. Denn es folgt hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = z e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right) e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \ldots$$

und nach der Substitution dieser Werte lässt sich die Exponentialfunktion als Faktor absondern, da die Gleichung in Bezug auf $y, \frac{dy}{dx} \cdots$ homogen ist. Man erhält sonach eine Differentialgleichung für z:

$$\Phi\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

von der Ordnung $n - 1$. Ist der Wert von z bekannt, so findet man y durch eine Quadratur, wobei noch eine willkürliche Konstante auftritt.

707. Auf diesen Fall lässt sich auch eine Differentialgleichung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

zurückführen, welche die unabhängige Variabele x nicht enthält und in Bezug auf

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}, \quad \frac{\frac{d^3y}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \cdots$$

homogen ist. Denn setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, so wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p^2\,\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \cdots$$

und nach der Substitution dieser Werte erhält man eine Gleichung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, die in Bezug auf $p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \cdots$ homogen ist und die sich folglich auf die Ordnung $n - 2$ reduzieren lässt.

708. *Gleichungen zweiter Ordnung, die in Bezug auf die Variabelen und ihre Differentiale homogen sind.* Es sei

$$1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

eine Gleichung zweiter Ordnung, die homogen ist, wenn man die Dimensionen von x und y gleich 1, von $\frac{dy}{dx}$ gleich 0, von $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich -1 annimmt. Setzt man dann:

$$2) \qquad y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{x},$$

so wird die Gleichung nach Substitution dieser Werte die Variabele x nicht mehr enthalten, und also von der Form

$$3) \qquad f(u, p, q) = 0$$

sein.

Die Gleichungen 2) ergeben:

$$dy = u\,dx + x\,du = p\,dx, \quad d^2y = dp\,dx = \frac{q}{x}\,dx^2;$$

also:

4)
$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{q}.$$

Nehmen wir nun an, dass man aus der Gleichung 3)

$$q = \varphi(u, p)$$

berechnen kann, so erhält man:

$$\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{\varphi(u,p)},$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Variabelen p und u. Hat man diese Gleichung integriert, so dass der Wert von p als Funktion von u bekannt ist, so erfordert die Lösung des Problemes nur noch eine Quadratur, denn man erhält die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u},$$

in welcher die Variabelen getrennt sind. Es wird also u eine Funktion von x, und sonach $y = ux$.

Ist allgemein die Differentialgleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

homogen, wenn die Dimension von x und y gleich 1, von $\frac{dy}{dx}$ gleich 0, von $\frac{d^ny}{dx^n}$ gleich $-(n-1)$ gesetzt wird, so lässt sich durch die Transformation:

$$x = e^z, \quad y = ue^z,$$

also:

$$dx = e^z\,dz, \quad dy = e^z(u\,dz + du),$$

ferner:

$$\frac{dy}{dx} = \left(u + \frac{du}{dz}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\right)e^{-z},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Gleichung in eine Differentialgleichung zwischen u und z transformieren, aus welcher e^z herausfällt, die also die Variabele z nicht mehr enthält, und demnach in eine Gleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung verwandelt werden kann.

Anwendungen auf geometrische Aufgaben.

709. Erste Aufgabe. *Die ebenen Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius einer gegebenen Funktion der Abscisse proportional ist.*

Bezeichnet man mit x und y die rechtwinkligen Koordinaten, so ist die Gleichung des Problemes:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=f(x).$$

Dieselbe enthält die Variabele y nicht und kann auf die erste Ordnung gebracht werden, indem man

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

setzt. Alsdann wird:

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dx}{f(x)}.$$

Die Integration ergiebt:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{f(x)}+C,$$

also:

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{f(x)}+C}{\sqrt{1-\left[\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{f(x)}+C\right]^2}}=\varphi(x),$$

und folglich erhält man y durch eine neue Quadratur, nämlich

$$y=\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+C_1.$$

Hat z. B. $f(x)$ den Wert $\frac{a^2}{2x}$, so wird, wenn man $x_0=0$ nimmt und $\frac{c}{a^2}$ an Stelle von C schreibt:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)} = \frac{x^2}{a^2}, \quad \varphi(x) = \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2+c)^2}},$$

ferner:

$$y = \int_0^x \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2+c)^2}}\, dx + C_1.$$

Diese Kurve tritt in der Mechanik unter dem Namen „Elastische Kurve" auf, ihr Krümmungsradius ist der Abscisse umgekehrt proportional.

710. **Zweite Aufgabe.** *Die ebenen Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius dem Kubus der Normalen proportional ist.*

Bezeichnet man mit x und y rechtwinklige Koordinaten, mit p die Ableitung $\frac{dy}{dx}$, so haben Krümmungsradius und Normale die Werte:

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}}, \quad y\sqrt{1+p^2},$$

und die Gleichung des Problemes ist also:

$$\frac{dp}{dx} = \pm \frac{a^2}{y^3},$$

a ist eine gegebene Länge. Diese Gleichung zweiter Ordnung enthält die Variabele x nicht; man hat also y als unabhängige Variabele zu wählen, und für dx den Wert $\frac{dy}{p}$ zu setzen, so wird:

$$\pm \frac{p\,dp}{dy} = \frac{a^2}{y^3} \quad \text{oder} \quad \pm p\,dp = a^2 \frac{dy}{y^3}.$$

Bezeichnet man mit $\frac{1}{n}$ eine willkürliche Konstante, so folgt:

$$p^2 = \pm \frac{a^2}{y^2} + \frac{1}{n},$$

also:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 \pm n a^2}}{y\sqrt{n}} \quad \text{oder} \quad dx = \sqrt{n}\, \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 \pm n a^2}}.$$

Ist dann x_0 eine neue willkürliche Konstante, so erhält man

$$x - x_0 = \sqrt{n}\sqrt{y^2 \pm n a^2} \quad \text{oder} \quad (x - x_0)^2 - n y^2 = \pm n^2 a^2;$$

die gesuchte Kurve ist also im allgemeinen eine Ellipse oder eine Hyperbel. Für den Fall $\frac{1}{n} = 0$ bekommt man eine Parabel.

711. **Dritte Aufgabe.** *Die ebenen Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius proportional der Normalen ist.*

Bezeichnet man mit n eine gegebene positive oder negative Zahl, so wird die Gleichung des Problemes:

$$\frac{1 + p^2}{\frac{dp}{dx}} = ny.$$

Wir ersetzen, da x nicht vorkommt, dx durch $\frac{dy}{p}$, so wird:

$$\frac{2p\,dp}{1 + p^2} = \frac{2}{n}\,\frac{dy}{y}.$$

Die Integration liefert, wenn c eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$l(1 + p^2) = \frac{2}{n}(ly - lc) = l\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}},$$

also:

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1} \quad \text{und} \quad dx = \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Die zweite Integration ergiebt:

$$x - x_0 = \int\limits_{y_0}^{y} \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy,$$

wobei x_0 eine willkürliche Konstante, y_0 einen beliebig fixierten Anfangswert von y bedeutet.

Der Ausdruck für dx ist ein binomisches Differential, und dies Integral lässt sich also durch elementare Funktionen darstellen, wenn entweder $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ eine ganze Zahl ist, also wenn n eine ganze Zahl ist. Die bemerkenswertesten Fälle sind hierbei $n = \pm 1$ und $n = \pm 2$.

1. Für $n = -1$ erhält man, indem man $y_0 = c$ setzt:

$$x - x_0 = \int_c^y \frac{y\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = -\sqrt{c^2 - y^2},$$

also:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = c^2;$$

die gesuchte Kurve ist ein Kreis.

2. Für $n = +1$ ist:

$$\frac{x - x_0}{c} = \int_c^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = l\,\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c},$$

also:

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{\frac{x - x_0}{c}},$$

und bildet man auf beiden Seiten den reciproken Wert:

$$\frac{y - \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{-\frac{x - x_0}{c}}.$$

Durch Addition folgt:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x - x_0}{c}} + e^{-\frac{x - x_0}{c}}\right),$$

die gesuchte Kurve ist also eine Kettenlinie (§ 224).

3. Ist $n = -2$, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c - y}{y}},$$

und dies ist die Differentialgleichung einer Cykloide, bei welcher der Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich c ist (§ 231).

4. Ist $n = +2$, so hat man:

$$x - x_0 = \sqrt{c}\int_c^y \frac{dy}{\sqrt{y - c}} = 2\sqrt{c}\sqrt{y - c},$$

also:

$$y - c = \frac{(x - x_0)^2}{4c},$$

und dies ist die Gleichung einer Parabel.

712. Vierte Aufgabe. *Die Rotationsflächen zu bestimmen, für welche die mittlere Krümmung in allen Punkten konstant ist.*

Bei einer Rotationsfläche bilden die Meridiane und die Parallelkreise die beiden Systeme der Krümmungskurven. Hieraus folgt, dass der eine Hauptkrümmungsradius der der Meridiankurve ist, während der andere gleich ist der Strecke der Normalen zwischen der Axe und dem Flächenpunkte.

Bezeichnet man also mit R den ersten, mit N den zweiten Krümmungsradius, so ist die Gleichung des Problemes:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{N} = a;$$

a bezeichnet eine gegebene Länge. In dieser Formel haben R und N gleiche Zeichen oder entgegengesetzte, je nachdem die Radien von gleicher oder entgegengesetzter Richtung sind. Wir beziehen nun eine Meridiankurve auf zwei rechtwinklige Axen, von denen die x-Axe mit der Axe der Rotationsfläche zusammenfallen soll. R und N bekommen gleiche Zeichen, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, und umgekehrt. Man muss also

$$R = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

setzen, und das Vorzeichen von $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ in diesen Ausdrücken ist dann willkürlich. Die Gleichung des Problemes wird nun, indem man wiederum

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \quad \text{und} \quad dx = \frac{dy}{p}$$

setzt:

$$-\frac{p\,\frac{dp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}.$$

Um sie zu integrieren, braucht man sie nur mit $y\,dy$ zu multiplizieren; denn es wird:

$$\frac{-y\,p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{dy}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{y\,dy}{a},$$

und die linke Seite ist das exakte Differential von $\frac{y}{\sqrt{1+p^2}}$; folglich erhält man:

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{y^2 \pm b^2}{2a};$$

$\pm \frac{b^2}{2a}$ ist die willkürliche Konstante. Hieraus folgt:

$$p = \frac{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}{y^2 \pm b^2}$$

oder

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}.$$

Das Problem ist also auf eine Quadratur zurückgeführt.

713. Ist die Konstante b null, so wird die Differentialgleichung:

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{4a^2 - y^2}},$$

wenn man von der Lösung $y = 0$ absieht. Die Integration giebt:

$$x - x_0 = -\sqrt{4a^2 - y^2} \quad \text{oder} \quad (x - x_0)^2 + y^2 = 4a^2,$$

also einen Kreis. Dass die Kugel eine der gesuchten Flächen sein muss, ist von vornherein evident.

Setzt man $b^2 = ca$, wobei c eine neue Konstante ist, und lässt man alsdann a unendlich werden, so reduziert sich die allgemeine Differentialgleichung auf die folgende:

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{4y^2 - c^2}};$$

hieraus folgt:

$$\frac{2(x - x_0)}{c} = l\,\frac{y + \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{4}}}{\frac{1}{2}c}$$

und

$$y = \frac{c}{4}\left[e^{\frac{2(x-x_0)}{c}} + e^{-\frac{2(x-x_0)}{c}}\right].$$

Diese Gleichung stellt eine Kettenlinie dar, welche, wie wir wissen, der Ort der Brennpunkte einer Parabel ist, die ohne zu gleiten auf einer festen Geraden rollt (§ 224). Die Rotationsfläche, welche die Kurve erzeugt, indem sie um die Abscissenaxe rotiert, hat die Eigenschaft, dass ihre mittlere Krümmung in jedem Punkte null ist, d. h. dass überall die Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet sind.

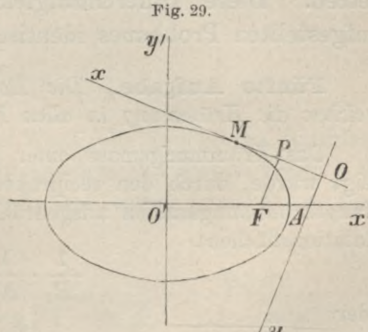
Von dieser Thatsache ausgehend und dabei bemerkend, dass in dem allgemeinen Fall, wo die Konstanten a und b unbestimmt bleiben, das Integral des Differentiales dx keine anderen Transscendenten enthält, als solche, die den Bogen einer Ellipse oder Hyperbel ausdrücken, hat Delaunay zuerst den Gedanken gehabt, dass sich der Meridian einer Rotationsfläche mit konstanter mittlerer Krümmung durch den Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel erzeugen lassen muss, wenn diese Kurven, ohne zu gleiten, auf einer festen Geraden rollen. Diesen eleganten Satz hat er in einer Abhandlung im 6. Bande des *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Ser. 1 bewiesen, und man kann seine Giltigkeit in folgender Weise bestätigen.

Es sei

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ihre Hauptaxen; wir bezeichnen mit $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ die Entfernung eines Brennpunktes F vom Mittelpunkt, mit s' den Bogen AM der Ellipse, zwischen dem Scheitel A und dem Punkte $M(x', y')$. Im Punkte M konstruieren wir die Tangente Ox, tragen von M aus die Länge $MO = s'$ ab und ziehen durch O die Gerade Oy senkrecht zu Ox; endlich bezeichnen wir mit y das Lot FP vom Brennpunkt F auf die Tangente Ox und mit x die Entfernung PO des Fusspunktes dieses Lotes vom Punkte O. Man hat dann, nach bekannten Formeln:

Fig. 29.



$$y = b\sqrt{\frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}}, \quad x = s' - \frac{cyy'}{b^2}.$$

Die erste dieser Gleichungen und die der Ellipse bestimmen x' und y' als Funktion von y. Man findet:

$$x' = \frac{a^2}{c}\,\frac{b^2 - y^2}{b^2 + y^2},$$

$$y' = \frac{b^2\sqrt{4a^2y^2 - (b^2 + y^2)^2}}{c(b^2 + y^2)}.$$

Hieraus folgert man leicht:

$$ds' = \frac{8\,a^2b^2y^2\,dy}{(b^2 + y^2)^2\sqrt{4a^2y^2 - (b^2 + y^2)^2}},$$

$$\frac{c}{b^2}\,d(yy') = \frac{8\,a^2b^2y^2 - (b^2 + y^2)^3}{(b^2 + y^2)^2\sqrt{4\,a^2y^2 - (b^2 + y^2)^2}}\,dy.$$

Die Differenz der linken Seiten dieser Gleichungen ist nichts anderes als dx, also ist:

$$dx = \frac{(b^2 + y^2)}{\sqrt{4\,a^2y^2 - (b^2 + y^2)^2}}\,dy.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Kurve, welche vom Brennpunkte F beschrieben wird, wenn die Ellipse, ohne zu gleiten, auf der Geraden Ox rollt; will man an Stelle der Ellipse eine Hyperbel einführen, so muss man $-b^2$ statt b^2 setzen. Diese Differentialgleichung ist aber mit der des aufgestellten Problemes identisch.

Fünfte Aufgabe. *Die Rotationsflächen zu bestimmen, bei welchen die Krümmung in allen Punkten konstant ist.*

Das Krümmungsmass einer Fläche wird, wie im § 320 gezeigt wurde, durch den reciproken Wert des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien ausgedrückt, also wird wie vorhin für die Rotationsflächen:

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{N} = k$$

oder

$$\frac{-\dfrac{d^2y}{dx^2}}{y\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^2} = k.$$

Dabei bedeutet k eine positive oder negative gegebene Zahl, im ersten Falle sind die Hauptkrümmungsradien gleich gerichtet und die Fläche besitzt eine positive konstante Krümmung, im anderen Falle sind sie entgegen gerichtet und die Krümmung der Fläche ist negativ. Führt man wiederum die Substitution $\frac{dy}{dx} = p$ ein, so folgt:

$$\frac{-p\frac{dp}{dy}}{y(1+p^2)^2} = k \quad \text{oder} \quad \frac{-p\,dp}{(1+p^2)^2} = ky\,dy.$$

Also ist:

$$\frac{1}{1+p^2} = k(y^2+C) \quad \text{oder} \quad p^2 = \frac{1-k(y^2+C)}{k(y^2+C)},$$

wenn C eine willkürliche Konstante bedeutet. Die vollständige Lösung der Aufgabe hängt sonach von der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-k(y^2+C)}{k(y^2+C)}} \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dy\sqrt{k(y^2+C)}}{\sqrt{1-k(y^2+C)}},$$

ab und wird durch die Quadratur

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy\sqrt{k(y^2+C)}}{\sqrt{1-k(y^2+C)}}$$

erhalten. Giebt man der Grösse k einen positiven Wert und setzt man die Konstante C gleich 0, so ist:

$$dx = \frac{y\,dy\sqrt{k}}{\sqrt{1-ky^2}}, \quad \text{also} \quad x - x_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{1-ky^2},$$

mithin

$$(x-x_0)^2 + y^2 = \frac{1}{k}.$$

Diese Meridiankurve ist ein Kreis, die zugehörige Rotationsfläche eine Kugel, für welche das Quadrat des Radius gleich k ist.

Ist k negativ, gleich $-m^2$, und wählt man C so, dass $kC = -m^2C = 1$ ist, so folgt:

$$dx = \frac{dy\sqrt{1-m^2y^2}}{my} = \frac{dy}{my\sqrt{1-m^2y^2}} - \frac{my\,dy}{\sqrt{1-m^2y^2}}.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist:

$$x - x_0 = \frac{1}{m}\,l\,\frac{\sqrt{1-m^2y^2}-1}{my} + \frac{\sqrt{1-m^2y^2}}{m}.$$

Es stellt, wenn wir m positiv annehmen, eine Kurve dar, welche im Punkte $x = x_0$, $y = -\frac{1}{m}$ eine Spitze hat und daselbst eine Tangente parallel der Ordinatenaxe besitzt; von diesem Punkte aus erstreckt sich die Kurve in zwei symmetrischen Ästen nach der Abscissenaxe hin, der sie ihre konvexe Seite zuwendet und zu welcher sie asymptotisch verläuft. Sie hat überdies die Eigenschaft, dass die Länge der Tangente, d. h. die Strecke zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenaxe konstant gleich $\frac{1}{m}$ ist und heisst die *Traktrix.*

714. Sechste Aufgabe. *Das allgemeine Integral der Gleichung*

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{y^2}{x^3} = 0$$

zu bestimmen. Diese Gleichung ist homogen in Bezug auf y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; man hat also zu setzen:

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{dy}{dx} = z\,e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right) e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

und erhält die Gleichung erster Ordnung:

$$z\frac{dz}{dx} + z^3 + \frac{2}{x^3} = 0.$$

Diese Gleichung wird homogen, wenn man

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}$$

einführt, denn diese Substitution ergiebt:

$$t^2 z\frac{dz}{dt} - (z^3 + 2t^3) = 0.$$

Für $z = ut$, $dz = u\,dt + t\,du$ erhält sie die Form:

$$\frac{dt}{t} - \frac{u\,du}{u^3 - u^2 + 2} = 0$$

oder

$$\frac{dt}{t} + \frac{1}{5}\frac{du}{u+1} - \frac{1}{5}\frac{(u-1)\,du}{(u-1)^2+1} - \frac{3}{5}\frac{du}{(u-1)^2+1} = 0.$$

Integriert man diese und ersetzt wieder t durch $\frac{1}{x}$, u durch zx, so folgt:

$$-lx + \frac{1}{5}\,l\frac{xz+1}{\sqrt{(xz-1)^2+1}} - \frac{3}{5}\operatorname{arctang}(xz-1) = C.$$

Nachdem der Wert von z durch diese Gleichung definiert ist, wird das gesuchte Integral gleich:

$$y = Ce^{\int_{x_0}^{x} z\,dx};$$

es enthält die beiden willkürlichen Konstanten x_0 und C.

715. **Siebente Aufgabe.** *Die ebenen Kurven zu bestimmen, deren Bogenlängen proportional den entsprechenden Bogen der Evolute sind.*

Bezeichnen wir mit s den Bogen der gesuchten Kurve, der von einem willkürlich fixierten Punkte an gerechnet wird, mit s_1 den entsprechenden der Evolute, mit α eine gegebene Konstante, so ist die Gleichung des Problemes:

$$s_1 = \alpha s \quad \text{oder} \quad ds_1 = \alpha\, ds;$$

da nun ds_1 gleich dem Differentiale des Krümmungsradius der gesuchten Kurve ist, so wird

$$dR = \alpha\, ds.$$

Führt man rechtwinklige Koordinaten ein, so wird diese Gleichung von der dritten Ordnung; folglich treten bei der Integration drei willkürliche Konstanten auf.

Diese Integration lässt sich nun leicht in folgender Weise ausführen.

Es sei φ der Neigungswinkel der Tangente zur x-Axe; dann ist:

$$R = \frac{ds}{d\varphi},$$

und unsere Differentialgleichung wird

$$\frac{dR}{R} = \alpha\, d\varphi;$$

die Integration ergiebt also:

$$lR - la = \alpha\varphi \quad \text{oder} \quad R = ae^{\alpha\varphi},$$

wobei a eine willkürliche Konstante ist. Man hat also auch

$$ds = ae^{\alpha\varphi}\, d\varphi,$$

und folglich:

$$dx = ae^{\alpha\varphi} \cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = ae^{\alpha\varphi} \sin\varphi\, d\varphi.$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man die zweite mit $i = \sqrt{-1}$ multipliziert hat, so folgt:

$$d(x + iy) = a\, e^{(\alpha + i)\varphi}\, d\varphi.$$

Die Integration ergiebt, wenn man mit $x_0 + iy_0$ eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$(x - x_0) + i(y - y_0) = \frac{a}{\alpha + i}\, e^{(\alpha + i)\varphi}.$$

Diese Gleichung zerlegt sich in zwei andere, und wenn man aus diesen den Winkel φ eliminiert, so erhält man das gesuchte Integral, das die drei willkürlichen Konstanten x_0, y_0, α enthält. Wir setzen:

$$\frac{a}{\alpha + i} = m\, e^{\mu i},$$

ferner

$$x - x_0 = \varrho \cos(\omega + \mu), \quad y - y_0 = \varrho \sin(\omega + \mu),$$

so sind ϱ und ω Polarkoordinaten, und die obige Gleichung wird:

$$\varrho\, e^{i\omega} = m\, e^{\alpha\varphi}\, e^{i\varphi},$$

also:

$$\varrho = m\, e^{\alpha\varphi}, \quad \omega = \varphi, \quad \text{und folglich} \quad \varrho = m\, e^{\alpha\omega}.$$

Sonach ist die logarithmische Spirale die einzige Kurve, welche die in Rede stehende Eigenschaft besitzt. Die vorstehende Lösung liefert zugleich ein Beispiel, wie man geometrische Aufgaben der behandelten Art vereinfachen kann.

716. Achte Aufgabe. *Die ebenen Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius proportional ist dem von einem festen Punkte ausgehenden Radiusvektor.*

Indem wir die gesuchte Kurve als Enveloppe ihrer Tangenten betrachten, wenden wir nach § 210 die beiden Gleichungen an:

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = f(\varphi),$$
$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = f'(\varphi),$$

welche die rechtwinkligen Koordinaten als Funktionen der Variabelen φ und $f(\varphi)$ ausdrücken lassen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt nämlich:

$$x = f(\varphi) \sin\varphi + f'(\varphi) \cos\varphi,$$
$$y = -f(\varphi) \cos\varphi + f'(\varphi) \sin\varphi,$$

also:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{[f(\varphi)]^2+[f'(\varphi)]^2};$$

ferner:

$$dx=[f(\varphi)+f''(\varphi)]\cos\varphi\,d\varphi,\quad dy=[f(\varphi)+f''(\varphi)]\sin\varphi\,d\varphi,$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=ds=[f(\varphi)+f''(\varphi)]\,d\varphi.$$

Da der Krümmungsradius gleich $\frac{ds}{d\varphi}$ und der Radiusvektor gleich $\sqrt{x^2+y^2}$ ist, so wird die Differentialgleichung des Problemes:

$$\frac{d^2f}{d\varphi^2}+f=m\sqrt{f^2+\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2},$$

wobei m eine gegebene Zahl ist. Da diese Gleichung die Variabele φ nicht enthält, so setzen wir:

$$\frac{df}{d\varphi}=f',\quad \frac{d^2f}{d\varphi^2}=f'\frac{df'}{df},$$

so dass

$$f'\frac{df'}{df}+f=m\sqrt{f^2+f'^2}$$

wird. Die Integration lässt sich hier ohne weiteres ausführen, denn es ist

$$\frac{f\,df+f'\,df'}{\sqrt{f^2+f'^2}}=m\,df,$$

also:

$$\sqrt{f^2+f'^2}=m(f-C).$$

Da nun $f'=\frac{df}{d\varphi}$ ist, so folgt weiter:

$$d\varphi=\frac{df}{\sqrt{m^2(f-C)^2-f^2}}.$$

Ist $m^2<1$, so ergiebt die Integration:

$$\varphi-\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\arcsin\left(\frac{1-m^2}{mC}f+m\right).$$

Hieraus folgt, wenn man $\frac{mC}{1-m^2}=a$, $\sqrt{1-m^2}=\mu$ setzt:

$$f(\varphi)=-a\sqrt{1-\mu^2}+a\sin\mu(\varphi-\varphi_0);$$

a und φ_0 sind willkürliche Konstanten. Die gesuchten Kurven sind algebraisch, wenn μ eine rationale Zahl ist.

Ist $m^2 > 1$, so erhält man:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}\, l(t + \sqrt{t^2-1});$$

t bezeichnet die Grösse $\frac{m^2-1}{mC} f - m$, und φ_0 ist eine Konstante. Setzt man $\frac{mC}{m^2-1} = a$, $\sqrt{m^2-1} = \mu$, so wird:

$$f(\varphi) = a\sqrt{1+\mu^2} + a\,\frac{e^{\mu(\varphi-\varphi_0)} + e^{-\mu(\varphi-\varphi_0)}}{2}.$$

Im Falle $m^2 = 1$ hat man

$$d\varphi = \frac{df}{\sqrt{-2Cf + C^2}}$$

und hieraus, wenn man $\frac{C}{2} = a$ setzt:

$$f(\varphi) = a[1 - (\varphi - \varphi_0)^2].$$

Der integrierende Faktor einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

717. Wir betrachten eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen den Variabelen x und y, und nehmen an, dass dieselbe auf die Form gebracht ist:

$$1)\qquad P\frac{d^n y}{dx^n} + Q = 0,$$

wobei P und Q Funktionen von x, y, $\frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ sein mögen. Man kann nun schreiben:

$$2)\qquad Pd\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\,dx = 0,$$

und wenn die linke Seite dieser Gleichung das exakte Differential einer Funktion u von x, y, $\frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ ist, so ist evident, dass die Gleichung

$$u = \text{const}$$

ein erstes Integral der Differentialgleichung 1) ist.

Wie auch die Funktionen P und Q zusammengesetzt sein mögen, es existieren immer Faktoren λ, mittelst deren die linke Seite der Gleichung 2) das exakte Differential einer Funktion u von $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ wird.

Denn betrachten wir eines der ersten Integrale der Gleichung 2), und ist

$$u = C$$

dieses Integral, aufgelöst nach der Konstanten, die es enthält, so erhält man durch Differentiation desselben, indem man $y^{(i)}$ an Stelle von $\frac{d^i y}{dx^i}$ schreibt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}} y^n = 0,$$

und der Wert $y^{(n)}$, der aus dieser Gleichung folgt, muss mit dem Werte, welchen die ursprüngliche Differentialgleichung, nämlich

$$Q + Py^{(n)} = 0$$

ergiebt, identisch sein; also ist

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} y' + \frac{\partial u}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}}{Q}.$$

Bezeichnet man also mit λ den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}} = \lambda P,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} = \lambda Q.$$

Hieraus folgt, dass der Ausdruck

$$\lambda P dy^{(n-1)} + \lambda Q dx$$

ein exaktes Differential ist.

Man kann durch eine Überlegung, analog der im § 683 gegebenen, feststellen, dass ein singuläres Integral der Differentialgleichung die Gleichung $\frac{1}{\lambda} = 0$ befriedigen muss. Wir beschränken uns indes auf diese Angabe.

Die Bestimmung der integrierenden Faktoren bieten indes im allgemeinen unüberwindliche Schwierigkeiten; es giebt jedoch Fälle, in denen die Ermittelung sich leicht darbietet. Wir wollen hier eines der von Euler behandelten Beispiele geben.

718. Die Gleichung, um die es sich handelt, ist die folgende:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha y}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2} = 0.$$

Prüft man ihre Form, so erkennt man, dass man eine Untersuchung anstellen kann, ob es nicht einen Faktor von der Form $\left(2X_1\frac{dy}{dx} + 2X_2 y\right)dx$ giebt, der die linke Seite der Gleichung in das exakte Differential einer Funktion u von $x, y, \frac{dy}{dx}$ verwandelt. Existiert solch ein Faktor, so hat der Teil

$$\frac{\partial u}{\partial y'}\,dy'$$

seines totalen Differentiales den Wert

$$\frac{\partial\,[X_1 y'^2 + 2X_2 y y']}{\partial y'}\,dy',$$

und folglich ist

$$u = X_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2X_2 y\frac{dy}{dx} + U,$$

wobei U nur noch eine Funktion von x und y ist. Setzt man das Differential von u gleich null, so folgt:

$$\left(2X_1\frac{dy}{dx} + 2X_2 y\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dX_1}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dX_2}{dx}\frac{dy}{dx}y + 2X_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dU}{dx} = 0,$$

und damit diese Gleichung mit der gegebenen identisch ist, muss

$$\frac{2X_1\alpha y\,dy + 2X_2\alpha y^2\,dx}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2} - \left(\frac{dX_1}{dx} + 2X_2\right)\frac{dy^2}{dx} - 2\frac{dX_2}{dx}y\,dy = dU$$

sein. Der erste Teil dieses Wertes von dU wird ein exaktes Differential, wenn man

$$X_1 = \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2,$$

$$X_2 = -\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx} = -\delta - \varepsilon x$$

setzt, und dann folgt, dass der nachbleibende Teil ebenfalls ein exaktes Differential ist. Man erhält:

$$dU = -\frac{\alpha}{\beta}\, d\, \frac{\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2}{\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2} + \varepsilon d(y^2),$$

und folglich:

$$U = -\frac{\alpha}{\beta}\, \frac{\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2}{\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2} + \varepsilon y^2 + C;$$

C ist eine Konstante. Der Faktor, welchen wir benutzt haben, ist

$$2(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)\frac{dy}{dx} - 2(\delta + \varepsilon x)\, y,$$

und wir erhalten als erstes Integral der gegebenen Gleichung:

$$(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(\delta + \varepsilon x)\, y\, \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)}{\beta(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)} + \varepsilon y^2 + C = 0.$$

Anwendung der Differentiation zur Integration von Differentialgleichungen.

719. Es sei

1) $$U = 0$$

eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen den Variabelen x und y; indem man dieselbe differentiiert, erhält man eine Gleichung $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung

2) $$U_1 = 0,$$

und man kann nun verschiedene Kombinationen der Gleichungen 1) und 2) bilden. Es sei:

3) $$V_1 = 0$$

eine Gleichung $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus solch einer Kombination hervorgeht. Kann man nun ein erstes Integral der Gleichung 3) bilden, welches von der ursprünglichen Gleichung verschieden ist, so kennt man auch ein erstes Integral dieser letzteren; denn wenn

4) $$V = 0$$

ein erstes Integral der Gleichung 3) ist, und man eliminiert $\frac{d^n y}{dx^n}$ zwischen den Gleichungen 1) und 4), so ist das Resultat eine Gleichung

5) $$W = 0$$

von der Ordnung $n-1$ mit einer willkürlichen Konstante, welche die ursprüngliche Gleichung befriedigen muss.

Ist die Gleichung 1) von der ersten Ordnung, so liefert die Gleichung 5) ihr vollständiges Integral.

720. Beispiel. Um ein Beispiel für diese Integrationsmethode zu geben, betrachten wir die Bestimmung der Krümmungskurven auf einer centrischen Fläche zweiter Ordnung. Die Gleichung der Fläche sei:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1,$$

und wenn man

$$A = \frac{(c^2 - b^2)\varrho^2}{c^2(\varrho^2 - b^2)}, \quad B = \frac{b^2\varrho^2}{c^2}$$

setzt, so wird die Differentialgleichung der Projektionen der Krümmungskurven auf die xy-Ebene (§ 341):

1) $$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Durch Differentiation derselben erhält man:

2) $$\left(2Axy\frac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 - B\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0,$$

und die Elimination von $x^2 - Ay^2 - B$ zwischen den Gleichungen 1) und 2) ergiebt, mit Unterdrückung des gemeinsamen Faktors $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$:

3) $$xy\frac{d^2y}{dx^2} + \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung mit $xy\frac{dy}{dx}$, so folgt:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{y} - \frac{1}{x} = 0;$$

und man erhält durch Integration:

$$l\frac{dy}{dx} + ly - lx = C$$

oder

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = C, \tag{4}$$

wobei C eine Konstante ist. Die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ zwischen den Gleichungen 1) und 4) liefert schliesslich:

$$y^2 - Cx^2 + \frac{BC}{AC+1} = 0, \tag{5}$$

was mit dem früher erhaltenen Resultate (§§ 338 und 650) übereinstimmt.

Lösung einer Aufgabe, welche die Integration eines Systemes von simultanen Differentialgleichungen erfordert.

721. Wir sahen, dass die Integration eines Systemes von simultanen Differentialgleichungen beliebiger Ordnungen sich immer durch Elimination zurückführen lässt auf die Integration von einer oder von mehreren Gleichungen, von denen jede nur zwei Variabele enthält. Solch eine Reduktion ist aber durchaus nicht immer dazu geeignet, das Problem zu vereinfachen. Da jede allgemeine Integrationsmethode fehlt, so wird es nützlich sein, hier ein besonderes Beispiel zu betrachten, welches wir der Geometrie entnehmen.

Aufgabe. *Es sollen die orthogonalen Trajektorien einer beweglichen Ebene bestimmt werden.*

Es seien x, y, z drei rechtwinklige Koordinaten und

$$1)\qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - u = 0$$

die Gleichung der beweglichen Ebene; die Entfernung u der Ebene vom Anfangspunkte und die Winkel α, β, γ, die ihre Normale mit den Axen bildet, sind gegebene Funktionen eines Parameters t. Die gesuchten Trajektorien sollen senkrecht zur Ebene sein, also werden die Differentialgleichungen des Problemes:

$$2)\qquad \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma}.$$

Man kann annehmen, dass man aus der Gleichung 1) den Wert von t als Funktion von x, y, z bestimmt hat, und die Kosinus der Winkel α, β, γ können demnach in den Gleichungen 2) als Funktionen von x, y, z angesehen werden. Um diese Gleichungen zu integrieren, benutzen wir die im § 274 aufgestellten Formeln, sowie die Bezeichnungen daselbst. Es sind also α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der gesuchten Kurve mit den Koordinatenaxen bildet, ferner bezeichnen wir mit φ, ψ, χ und mit λ, μ, ν die Winkel, welche die Hauptnormale und die Axe der Oskulationsebene mit den Koordinatenaxen bilden, ferner sind $d\sigma$ und $d\tau$ Kontingenz- und Torsionswinkel, ds das Bogenelement; also:

$$3)\qquad \begin{cases} d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}, \\ d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}. \end{cases}$$

Nun ist jedes Glied der Gleichung 2) gleich ds, und folglich:

$$4)\qquad dx = ds\cos\alpha,\quad dy = ds\cos\beta,\quad dz = ds\cos\gamma.$$

Wir setzen

$$5)\qquad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = U,$$

und indem wir diese Gleichung zweimal differentiieren und die Gleichungen 4) beachten, erhalten wir (§ 274):

$$6)\qquad x\cos\varphi + y\cos\psi + z\cos\chi = \frac{dU}{d\tau},$$

$$7)\qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = -\frac{d\tau}{d\sigma}\left[U + \frac{d\,\dfrac{dU}{d\tau}}{d\tau}\right].$$

Vergleicht man die Gleichungen 1) und 7), so folgt:

$$8)\qquad \frac{d\,\dfrac{dU}{d\tau}}{d\tau} + U = -u\,\frac{d\sigma}{d\tau}.$$

Nach der ersten Gleichung 3) ist $d\sigma$ das Produkt von dt mit einer gegebenen Funktion von t, weil $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ selbst gegebene Funktionen von t sind. Ferner sind nach den Formeln im § 274 $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ und $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ gleichfalls bekannte Funktionen von t; endlich ist nach der zweiten Gleichung 3) auch $d\tau$ das Produkt solch einer Funktion mit dt. Hieraus folgt, dass die Gleichung 8) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen den Variabelen U und t ist; ihre Integration liefert also zwei willkürliche Konstanten. Ist der Wert von U bekannt, so sind die Koordinaten x, y, z durch die Gleichungen 5), 6) und 7) als Funktionen des Parameters t gegeben; diese Gleichungen können durch

$$9)\qquad V=0,\quad dV=0,\quad d^2V=0$$

dargestellt werden, wenn man

$$10)\qquad V = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu - U$$

setzt. Die Gleichung 8) gehört zu den linearen Differentialgleichungen, die im folgenden Kapitel behandelt werden. Ihre Integration lässt sich indessen leicht auch folgendermassen ausführen. Es seien X und Y zwei neue Variabale, definiert durch die Gleichungen:

$$X\sin\tau - Y\cos\tau = U,\quad X\cos\tau + Y\sin\tau = \frac{dU}{d\tau},$$

so ist:

$$X = U\sin\tau + \frac{dU}{d\tau}\cos\tau,\quad Y = -U\cos\tau + \frac{dU}{d\tau}\sin\tau;$$

ferner:

$$dX = \left[U + \frac{d\,\dfrac{dU}{d\tau}}{d\tau}\right]\cos\tau\,d\tau,\quad dY = \left[U + \frac{d\,\dfrac{dU}{d\tau}}{d\tau}\right]\sin\tau\,d\tau,$$

und also vermöge der Gleichung 8):

$$dX = -u\,\frac{d\sigma}{d\tau}\cos\tau\,d\tau,\quad dY = -u\,\frac{d\sigma}{d\tau}\sin\tau\,d\tau.$$

Integriert man diese Gleichungen und bezeichnet man mit A und B zwei willkürliche Konstanten, so folgt:

$$X = A - \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \cos\tau \, d\tau, \quad Y = B - \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \sin\tau \, d\tau,$$

und sonach ist:

$$11) \quad U = A \sin\tau - B\cos\tau - \sin\tau \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \cos\tau \, d\tau + \cos\tau \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \sin\tau \, d\tau.$$

Diese Gleichung stellt U als Funktion von τ dar, oder wenn man will, als Funktion des Parameters t. Die gestellte Aufgabe ist damit gelöst.

Viertes Kapitel.

Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Definition der linearen Gleichungen.

722. Eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung heisst *linear*, wenn in derselben die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen nur in der ersten Potenz und nicht mit einander multipliziert vorkommen.

Wird die unabhängige Variabele mit x, die unbekannte Funktion mit y bezeichnet, so ist die allgemeine Form einer linearen Gleichung mit zwei Variabelen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = V;$$

die Koeffizienten $P_1, P_2, \ldots P_n, V$ sind gegebene Funktionen von x, die sich auch auf Konstanten reduzieren können.

Ist die Grösse V null, so sagen wir, dass die lineare Gleichung *kein zweites Glied hat*, oder dass sie *homogen* ist. Später wird gezeigt werden, dass die Integration einer linearen Gleichung mit zweitem Gliede immer auf die Integration der linearen Gleichung ohne zweites Glied zurückkommt, welche man erhält, indem man an Stelle der Funktion V den Wert null substituiert.

Es ist nach den allgemeinen Sätzen über singuläre Integrale (§ 645) evident, dass die linearen Gleichungen keine singulären Integrale haben, wenn die Funktionen P und V eindeutige Funktionen von x sind. Es giebt vielmehr nur singuläre Punkte an den Stellen, an welchen eine oder mehrere dieser Funktionen singulär werden.

Die Eigenschaften der linearen Gleichungen ohne zweites Glied.

723. Erste Eigenschaft. *Die Ordnung einer linearen Gleichung ohne zweites Glied kann immer um eine Einheit erniedrigt werden.*

Die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

gehört zu der Klasse der homogenen (§ 706); ihre Ordnung wird folglich erniedrigt, wenn man

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = z e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right) e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \ldots$$

setzt; die neue Gleichung ist aber nicht mehr linear.

Im Falle $n = 2$ hat man

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 = 0,$$

und die Transformation ergiebt:

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + P_1 z + P_2 = 0.$$

724. Zweite Eigenschaft. *Kennt man eine Funktion* $\mathrm{y} = \mathrm{y}_1$, *welche die lineare Gleichung*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

befriedigt (y_1 *bedeutet eine bestimmte Funktion von* x), *so wird die Gleichung auch durch* $\mathrm{y} = \mathrm{C}\mathrm{y}_1$ *erfüllt, wobei* C *eine willkürliche Konstante ist.*

Denn das Resultat der Substitution von Cy_1 an Stelle von y in die linke Seite der obigen Gleichung ist gleich dem Produkte der Konstante C mit dem Resultate der Substitution von y_1.

725. Dritte Eigenschaft. *Wird der linearen Gleichung durch die Funktionen* $y = y_1$, $y = y_2, \ldots y = y_i$ *genügt, so genügt ihr auch die Funktion* $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_i$.

Denn die Substitution von $y_1 + y_2 + \cdots + y_i$ in die linke Seite der Gleichung ergiebt einen Ausdruck, der gleich ist der Summe aus den Werten, welche bei der Substitution von $y_1, y_2, \ldots y_i$ erhalten werden.

Aus den beiden letzten Eigenschaften folgt: Kennt man i-Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_i$ einer linearen Gleichung ohne zweites Glied, so kann man auch eine Lösung derselben Gleichung mit i willkürlichen Konstanten bilden, nämlich:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_i y_i;$$

und wenn die Zahl i gleich ist der Ordnung n der Gleichung, so kann man auf diese Weise das vollständige Integral der Differentialgleichung bilden, vorausgesetzt, dass die willkürlichen Konstanten derart von einander unabhängig sind, dass man der Funktion y und ihren $n-1$ ersten Ableitungen willkürliche Werte y_0, $y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$ beilegen kann bei einem willkürlich fixierten Werte von x.

Diese letztere Bedingung lässt sich auf zweierlei Weisen ausdrücken. Erstlich erkennt man, dass jedenfalls keine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten zwischen den Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ bestehen darf. Denn wäre

$$y_n = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_{n-1} y_{n-1},$$

wobei $a_1, \ldots a_{n-1}$ Konstanten sind, so würde sich, wenn man diesen Wert von y_n in den Ausdruck y einsetzt, die Gleichung:

$$y = (C_1 + C_n a_1) y_1 + (C_2 + C_n a_2) y_2 + \cdots (C_{n-1} + C_n a_{n-1}) y_{n-1}$$

ergeben, die thatsächlich nur von $n-1$ Konstanten abhängt.

Sodann erfordert aber die Annahme der n willkürlichen Werte $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$, dass das Gleichungssystem besteht:

$$\begin{aligned}
y_0 &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \\
y'_0 &= C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \cdots + C_n y'_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_0^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite stehen die Werte der Funktionen $y_1, \dots y_n$ und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen, gebildet für den willkürlichen Wert von x. Aus diesem Systeme müssen sich die Konstanten $C_1, C_2 \dots C_n$ berechnen lassen, und dazu ist notwendig und hinreichend, dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots y'_n \\ . & . & \dots . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nicht identisch, d. h. bei allen Werten von x verschwindet. Diese Bedingung ist aber mit der vorigen äquivalent; denn verschwindet diese Determinante identisch, so besteht immer eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten zwischen den Funktionen $y_1 \dots y_n$, und umgekehrt. Das letztere ist unmittelbar einleuchtend, das erstere lässt sich folgendermassen beweisen.

Verschwindet die Determinante identisch, so kann man immer n Funktionen $u_1, u_2, \dots u_n$ so wählen, dass

$$\begin{aligned} &u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n = 0, \\ &u_1 y'_1 + u_2 y'_2 + \cdots + u_n y'_n = 0, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{aligned}$$

wird; denn man braucht für die Funktionen u nur die Unterdeterminanten einzusetzen, welche zu einer Horizontalreihe von Δ, z. B. der letzten, gehören.

Wir wollen zeigen, dass die Funktionen u dann stets derselben Funktion von x, multipliziert mit verschiedenen Konstanten gleich sind. Differentiiert man die obigen Gleichungen successive, so erhält man jedesmal mit Berücksichtigung der folgenden:

$$\begin{aligned} &u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + \cdots + u'_n y_n = 0, \\ &u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \cdots + u'_n y'_n = 0, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &u'_1 y_1^{(n-2)} + u'_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-2)} = 0, \\ &u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-1)} + \left(u_1 y_1^{(n)} + u_2^{(n)} y_2^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n}\right) = 0. \end{aligned}$$

Wenn aber die Determinante Δ identisch verschwindet, so ist auch:

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots y'_n \\ . & . & \dots . \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Also ist auch $u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)} = 0$. Mithin bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + \cdots + u'_n y_n &= 0, \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \cdots + u'_n y'_n &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-1)} &= 0, \end{aligned}$$

und aus diesem Gleichungssysteme, zusammen mit dem Systeme für die Funktion u folgt, dass

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{u'_2}{u_2} = \cdots = \frac{u'_n}{u_n}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Wert dieser Quotienten mit ϱ, so ist:

$$u_1 = C_1 e^{\int \varrho\, dx}, \quad u_2 = C_2 e^{\int \varrho\, dx}, \ldots u_n = C_n e^{\int \varrho\, dx}.$$

Ein System von n Funktionen, welches zur Bildung des vollständigen Integrales ausreicht, also linear unabhängige Integrale enthält, heisst ein *Fundamentalsystem*, und die Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ die *Elemente* desselben.

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots y_n \\ y'_1 & \ldots y'_n \\ \cdot & \ldots \cdot \\ y_1^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

eines Fundamentalsystems hat die Eigenschaft, dass

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots y_n \\ \cdot & \ldots \cdot \\ y_1^{(n-2)} & \ldots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

ist; setzt man nun $y_i^n = -P_1 y_i^{(n-1)} - P_2 y_i^{(n-2)} - \ldots - P_n y_i$ in diese Determinante, so folgt:

$$\frac{d\Delta}{dx} = -P_1 \begin{vmatrix} y_1 & \ldots y_n \\ \cdot & \ldots \cdot \\ y_1^{(n-2)} & \ldots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -P_1 \Delta$$

oder:

$$\frac{d\Delta}{\Delta} = -P_1\, dx.$$

Demnach wird:

$$l\Delta = -\int P_1\, dx + C \quad \text{oder} \quad \Delta = Ce^{-\int P_1 dx}.$$

Hieraus erkennt man: Hat man n Funktionen ausfindig gemacht, welche für einen willkürlich fixierten Wert von x ein Fundamentalsystem bilden, so bilden dieselben auch für jeden anderen Wert von x ein Fundamentalsystem, mit Ausnahme der Punkte, in denen

$$e^{-\int P_1 dx}$$

gleich null, d. h. $\int P_1 dx$ unendlich wird. Diese Punkte gehören aber zu den singulären Punkten der Differentialgleichung.

726. Vierte Eigenschaft. *Alle Lösungen einer linearen Gleichung* n^ter^ *Ordnung ohne zweites Glied sind in dem Ausdruck*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

enthalten, wobei $C_1, C_2, \ldots C_n$ *willkürliche Konstanten sind und die Funktionen* $y_1 \ldots y_n$ *ein Fundamentalsystem bilden.*

Diese Eigenschaft folgt allgemein aus dem Begriffe des vollständigen Integrales einer Differentialgleichung, kann aber noch direkt folgendermassen bewiesen werden: Sie ist evident für den Fall $n = 1$; denn hier ist die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = -P_1 dx.$$

Daraus folgt

$$y = C_1 y_1,$$

wenn man

$$y_1 = e^{-\int_{x_0}^{x} P dx}$$

setzt.

Demnach genügt es, zu beweisen, dass die ausgesprochene Eigenschaft, falls sie für Gleichungen von der Ordnung $n-1$ gilt, auch bei Gleichungen von der Ordnung n giltig bleibt. Nehmen wir also an, dass der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

durch eine Funktion $y = y_1$ genügt wird, wobei y_1 eine Funktion von x ohne willkürliche Konstante sein mag, und machen wir die Substitution

$$y = y_1 z,$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = y_1 \frac{dz}{dx} + z \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y_1 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dz}{dx} + z \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots$$

so wird, wenn man diese Werte in die Differentialgleichung substituiert, der Koeffizient von z gleich:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + P_n y_1,$$

also der Annahme nach gleich null. Setzt man also $\frac{dz}{dx} = u$, so erhält man eine lineare Gleichung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung ohne zweites Glied zur Bestimmung von u; alle ihre Lösungen werden der Voraussetzung nach durch die Formel:

$$u = C_2 u_1 + C_3 u_2 + \cdots + C_n u_{n-1}$$

dargestellt, wenn $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ ein Fundamentalsystem bilden, folglich ist der allgemeine Wert von z gleich:

$$z = C_1 + C_2 \int_{x_0}^{x} u_1\, dx + C_3 \int_{x_0}^{x} u_2\, dx + \cdots + C_n \int_{x_0}^{x} u_{n-1}\, dx.$$

Sonach erhält man den allgemeinen Wert von y in der Form:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int_{x_0}^{x} u_1\, dx + C_3 y_1 \int_{x_0}^{x} u_2\, dx + \cdots + C_n y_1 \int_{x_0}^{x} u_{n-1}\, dx,$$

womit der Satz bewiesen ist.

In der That kann hier auch zwischen den n partikulären Integralen keine lineare Gleichung bestehen; denn wäre

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1 \int_{x_0}^{x} u_1\, dx + \cdots + \alpha_n y_1 \int_{x_0}^{x_1} u_{n-1}\, dx = 0,$$

so würde folgen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \int_{x_0}^{x} u_1\, dx + \cdots + \alpha_n \int_{x_0}^{x_1} u_{n-1}\, dx = 0,$$

also, indem man differentiiert:

$$\alpha_2 u_1 + \cdots + \alpha_n u_{n-1} = 0,$$

was der Annahme, dass $u_1 \ldots u_{n-1}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, widerstreitet.

Die Integration einer linearen Gleichung mit zweitem Gliede in dem Falle, dass man das Integral der Gleichung ohne zweites Glied kennt.

727. Wir setzen, um die Formeln abzukürzen:

$$1)\quad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n,$$

und betrachten die Gleichung n^{ter} Ordnung:

2) $$\Phi(y) = V,$$

deren rechte Seite eine gegebene Funktion von x ist. Kennt man das vollständige Integral der Gleichung

3) $$\Phi(y) = 0,$$

so kann man stets durch blosse Quadraturen das Integral der Gleichung 2) ableiten.

Es sei

4) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

das Integral der Gleichung 3); $C_1, C_2, \ldots C_n$ sind dabei willkürliche Konstanten. Betrachtet man diese Grössen als willkürliche Funktionen von x, so kann die rechte Seite der Gleichung 4) noch jedwede Funktion darstellen, und folglich ist sie auch geeignet, das allgemeine Integral der Gleichung 2) auszudrücken. Man kann dabei noch für $n-1$ der Grössen C willkürliche Funktionswerte wählen, oder zwischen ihnen $n-1$ Relationen festsetzen, denn solange eine der Grössen willkürlich bleibt, thun wir nichts anderes, als dass wir an Stelle von y eine neue, unbekannte Funktion einführen.

Differentiiert man nun die Gleichung 4) unter der Annahme, dass die willkürlichen Grössen variabel sind, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx}, \\ &\quad + y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx}, \end{aligned}$$

und da wir noch $n-1$ Relationen einführen können, so setzen wir zuerst:

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0;$$

folglich wird der Wert von $\frac{dy}{dx}$ einfach gleich:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx},$$

so dass er die nämliche Form hat, wie bei der Annahme willkürlicher Konstanten. Wir bilden nun in ähnlicher Weise die folgenden Ableitungen von y, bis zu der Ableitung $n-1^{\text{ter}}$

Ordnung, indem wir dabei zwischen den willkürlichen Funktionen C immer die Relationen festsetzen, welche notwendig sind, damit die Formeln für diese Ableitungen die nämlichen sind, wie bei der Annahme willkürlicher Konstanten. Diese Relationen sind dann:

$$5)\quad \begin{cases} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y_2 \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \dfrac{dC_n}{dx} = 0, \\ \dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{dy_n}{dx}\dfrac{dC_n}{dx} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\dfrac{dC_n}{dx} = 0, \end{cases}$$

und gleichzeitig erhält man:

$$6)\quad \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \\ \dfrac{dy}{dx} = C_1 \dfrac{dy_1}{dx} + C_2 \dfrac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n \dfrac{dy_n}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = C_1 \dfrac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \dfrac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + C_n \dfrac{d^2y_n}{dx^2}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_2 \dfrac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + C_n \dfrac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}. \end{cases}$$

Nun müssen wir noch den Wert von $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ bilden; dabei können wir nun nicht mehr eine neue Relation zwischen den willkürlichen Funktionen einführen, und so liefert die letzte der Gleichungen 6) durch Differentiation:

$$7)\quad \begin{cases} \dfrac{d^n y}{dx^n} = C_1 \dfrac{d^n y_1}{dx^n} + C_2 \dfrac{d^n y_2}{dx^n} + \cdots + C_n \dfrac{d^n y_n}{dx^n} \\ \qquad + \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_n}{dx}. \end{cases}$$

Wir substituieren nun in die Gleichung 2) die Werte von y und seinen n ersten Ableitungen, die aus den Gleichungen 6) und 7) folgen; es wird:

$$C_1 \Phi(y_1) + C_2 \Phi(y_2) + \cdots + C_n \Phi(y_n)$$
$$+ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx} = V.$$

Die Grössen $\Phi(y_1), \Phi(y_2), \ldots \Phi(y_n)$ sind nun aber der Annahme nach null; also wird:

$$8)\quad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx} = V.$$

Da nun die Determinante Δ der Funktionen $y_1, \ldots y_n$ nicht identisch verschwindet, weil diese ein Fundamentalsystem bilden, so lassen die Gleichungen 5) und 8) die Werte von $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \cdots \frac{dC_n}{dx}$ als Funktionen von x berechnen.

Um diese Werte zu bilden, addieren wir die Gleichungen 5) und 8), nachdem wir die ersteren zuvor mit den Faktoren $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-2}$ multipliziert haben, und setzen allgemein:

$$9)\quad \varphi(y) = \lambda_0 y + \lambda_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + \lambda_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

Man erhält:

$$10)\qquad \varphi(y_1)\frac{dC_1}{dx} + \varphi(y_2)\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \varphi(y_n)\frac{dC_n}{dx} = V.$$

Um den Wert von $\frac{dC_i}{dx}$ zu erhalten, muss man die Faktoren λ so bestimmen, dass

$$11)\qquad \varphi(y_1) = 0, \quad \varphi(y_2) = 0, \ldots \varphi(y_n) = 0$$

mit Ausnahme von $\varphi(y_i)$ ist, alsdann ist:

$$12)\qquad \frac{dC_i}{dx} = \frac{V}{\varphi_i(y_i)},$$

wobei $\varphi_i(y_i)$ den Wert bezeichnet, welchen $\varphi(y_i)$ annimmt, wenn die Koeffizienten λ den Gleichungen 11) genügen. Ist also c_i eine willkürliche Konstante, so wird:

$$C_i = c_i + \int_{x_0}^{x} \frac{V\,dx}{\varphi_i(y_i)}.$$

Setzt man demnach:

$$X = y_1\int_{x_0}^{x}\frac{V\,dx}{\varphi_1(y_1)} + y_2\int_{x_0}^{x}\frac{V\,dx}{\varphi_2(y_2)} + \cdots + y_n\int_{x_0}^{x}\frac{V\,dx}{\varphi_n(y_n)},$$

so ist das vollständige Integral der Gleichung 2):

$$y = X + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n;$$

es setzt sich also aus dem vollständigen Integrale der Gleichung 3) und einem partikulären Integrale X der Gleichung 2) zusammen.

728. Methode von Cauchy. Die Methode, welche wir hier nach Lagrange entwickelt haben, beruht auf der *Variation der willkürlichen Konstanten* und besitzt eine weittragende Bedeutung in der Analysis; sie hat uns eine sehr elegante Lösung der gestellten Aufgabe geliefert. Ein anderes Verfahren, welches Cauchy angegeben hat, ist aber gleichfalls bemerkenswert.

Es handelt sich um die Integration der Gleichung:

$$1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = F(x),$$

deren rechte Seite wir mit $F(x)$ bezeichnen, und wir nehmen an, dass das vollständige Integral $y = Y$ der Gleichung:

$$2)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

bekannt ist. Die n willkürlichen Konstanten, welche in Y enthalten sind, können so bestimmt werden, dass für $x = \alpha$ die Gleichungen bestehen:

$$3)\quad Y = 0,\quad \frac{dY}{dx} = 0, \cdots \frac{d^{n-2} Y}{dx^{n-2}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} = F(\alpha).$$

Alsdann wird die Gleichung 1) befriedigt, indem man:

$$4)\quad y = \int_0^x Y\,d\alpha$$

setzt.

In der That, man differentiiere die Gleichung 4) und bezeichne mit (Y) den Wert von Y für $\alpha = x$, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{dY}{dx}\,d\alpha + (Y),$$

oder

$$5)\quad \frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{dY}{dx}\,d\alpha.$$

Denn die Gleichungen 3) bestehen, wenn man x durch α ersetzt, also auch, wenn man α durch x ersetzt, und folglich ist (Y) identisch null.

Ebenso werden die Ableitungen $\frac{d^2Y}{dx^2}, \cdots \frac{d^{n-2}Y}{dx^{n-2}}$ für $\alpha = x$ null, und sonach erhält man durch auf einander folgende Differentiationen:

$$6) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \displaystyle\int_0^x \frac{d^2Y}{dx^2}\, d\alpha, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \displaystyle\int_0^x \frac{d^3Y}{dx^3}\, d\alpha, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \displaystyle\int_0^x \frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}\, d\alpha; \end{cases}$$

schliesslich ergiebt eine neue Differentiation:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^nY}{dx^n}\, d\alpha + \left(\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}\right);$$

$\left(\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}\right)$ bedeutet den Wert von $\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}$ für $x = \alpha$. Dieser Wert ist aber gleich $F(x)$, weil der Annahme nach $\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}$ sich für $x = \alpha$ auf $F(\alpha)$ reduziert; also erhält man:

$$7) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^nY}{dx^n}\, d\alpha + F(x).$$

Werden die Werte von $y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}$ aus den Gleichungen 4), 5), 6) und 7) in die Gleichung 1) substituiert, so bekommt man:

$$\int_0^x \left(\frac{d^nY}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}} + \cdots P_{n-1}\frac{dY}{dx} + P_nY\right) d\alpha = 0,$$

und dies ist in der That eine Identität, weil der Koeffizient von $d\alpha$ unter dem Integrale der Annahme nach verschwindet.

Sonach kennt man eine Lösung der Gleichung 1); bezeichnet man dieselbe mit X und setzt dann $y = X + z$, so hat z der Differentialgleichung 2) zu genügen, wie man aus der Substitution von y und seinen Ableitungen leicht findet. Daraus folgt, dass man das vollständige Integral der Gleichung 1) durch Addition von X und dem Integrale der Gleichung 2) erhält.

Reduktion einer linearen Differentialgleichung auf eine andere niederer Ordnung vermittelst partikulärer Integrale.

729. Wir setzen, wie im § 727:

$$1)\qquad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y;$$

$P_1, \ldots P_n, V$ sind gegebene Funktionen von x. Das vollständige Integral der Gleichung

$$2)\qquad \Phi(y) = V$$

wird, wie wir sahen, durch Quadraturen erhalten, sobald man das vollständige Integral der Gleichung

$$3)\qquad \Phi(y) = 0$$

kennt, oder, was auf das nämliche hinauskommt, sobald man n partikuläre Integrale dieser Gleichung kennt, welche von einander linear unabhängig sind, also ein Fundamentalsystem bilden. Dieses Resultat wollen wir nun verallgemeinern, indem wir beweisen, dass die Integration der Gleichung 2) nur noch die Integration einer linearen Gleichung von der Ordnung $n - i$ erfordert, sobald man i partikuläre Integrale der Gleichung 3) kennt.

Ist *ein* partikuläres Integral y_1 der Gleichung 3) bekannt, so hat man ein allgemeineres, indem man

$$4)\qquad y = C_1 y_1$$

setzt, wobei C_1 willkürlich ist; betrachtet man nun C_1 als eine Variabele, so kann die Gleichung 4) das allgemeine Integral der

Gleichung 2) darstellen; dies ist die nämliche Transformation der Variabelen, wie im § 726. Die Gleichung 4) giebt durch Differentiation (§ 64):

$$5) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{dC_1}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2 \frac{dC_1}{dx} \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{d^2C_1}{dx^2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{d^ny}{dx^n} = C_1 \frac{d^ny_1}{dx^n} + \frac{n}{1} \frac{dC_1}{dx} \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{d^2C_1}{dx^2} \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + \cdots + y_1 \frac{d^nC_1}{dx^n}, \end{cases}$$

und da $\Phi(y_1)$ der Annahme nach null ist, so erhält man durch die Substitution der Werte 4) und 5) in die Gleichung 2) eine Gleichung von der Form:

$$6) \qquad \frac{d^nC_1}{dx^n} + Q_1 \frac{d^{n-1}C_1}{dx^{n-1}} + \cdots + Q_{n-1} \frac{dC_1}{dx} = V,$$

wobei $Q_1, \ldots Q_{n-1}$ bekannte Funktionen von x sind. Die Gleichung 6), aus welcher man den Wert von C_1 zu bestimmen hat, ist linear und von der n^{ten} Ordnung. Da sie aber nur die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält und nicht die Funktion selber, so kann man ihre Ordnung um eine Einheit erniedrigen, indem man

$$7) \qquad \frac{dC_1}{dx} = u$$

setzt; sie wird also:

$$8) \qquad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + Q_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + Q_{n-1}u = V.$$

Kann man das allgemeine Integral dieser Gleichung bestimmen, so erhält man aus der Gleichung 7), wenn c_1 eine willkürliche Konstante bedeutet:

$$C_1 = c_1 + \int_{x_0}^{x} u\,dx,$$

und schliesslich giebt die Gleichung 4):

$$9) \qquad y = c_1 y_1 + y_1 \int_{x_0}^{x} u\,dx,$$

was das vollständige Integral der gegebenen Gleichung ist.

Demnach lässt die Kenntnis eines partikulären Integrales der Gleichung 3) die Ordnung der ursprünglichen Gleichung 2) um eine Einheit erniedrigen, ohne dass die lineare Form dabei zerstört wird.

730. Wir nehmen nun weiter an, dass i partikuläre Integrale der Gleichung 3)

$$y_1, y_2, \cdots y_i,$$

zwischen denen keine lineare Relation besteht, bekannt sind. Vermittelst des Integrales y_1 führt man, wie wir gesehen haben, die Integration der Gleichung 2) auf die der Gleichung 8) zurück, die wir kurz mit

$$\Psi(u) = V \tag{10}$$

bezeichnen wollen. Von der Gleichung

$$\Psi(u) = 0 \tag{11}$$

kennt man nun aber $i-1$ partikuläre Integrale; denn es ist ersichtlich, dass man von der Gleichung 11) zur Gleichung 3) durch die Substitution

$$u = \frac{d\dfrac{y}{y_1}}{dx}$$

gelangt, und weil $y_2, y_3, \ldots y_i$ Lösungen dieser letzteren Gleichung sind, so wird die Gleichung 11) durch die Werte:

$$\frac{d\dfrac{y_2}{y_1}}{dx}, \frac{d\dfrac{y_3}{y_1}}{dx}, \ldots \frac{d\dfrac{y_i}{y_1}}{dx}$$

erfüllt, die von einander auch noch linear unabhängig sind, wenn solches bei den Funktionen $y_1, \ldots y_n$ der Fall ist.

Man kann nun auf die Gleichung 10) alles übertragen, was wir von der Gleichung 2) ausgesagt haben; ihre Integration wird auf die einer linearen Gleichung $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung gebracht, und von der entsprechenden Gleichung ohne zweites Glied sind $i-2$ linear unabhängige, partikuläre Integrale bekannt. Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man schliesslich eine lineare Gleichung von der Ordnung $n-i$, von deren Integration die Lösung der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung allein noch abhängt.

731. Bemerkungen. Die Kenntnis eines partikulären Integrales y_1 der Gleichung 2) führt, wie wir gesehen haben, die Integration dieser Gleichung auf die der Gleichung 3) zurück; mit anderen Worten, sie liefert ein Mittel, das zweite Glied verschwinden zu lassen, nicht aber die Ordnung der Gleichung zu erniedrigen. Hieraus folgt, dass man, wenn i partikuläre Integrale derselben Gleichung 2) bekannt sind, das zweite Glied verschwinden lassen und die Ordnung der Gleichung um $i-1$ Einheiten erniedrigen kann; denn ist das Integral y_1 dazu verwandt, um das zweite Glied aufzuheben, so kennt man $i-1$ Integrale, nämlich $y_2 - y_1$, $y_3 - y_1$, $\dots y_i - y_1$ der transformierten Gleichung.

Ist das Verhältnis von V zu P_n konstant, so hat man eine Lösung der Gleichung 2), indem man $y = \frac{V}{P_n}$ setzt; diese Gleichung ist also unmittelbar auf die Gleichung 3) zurückführbar.

Endlich sieht man durch die vorstehenden Entwickelungen direkt ein, dass die linearen Gleichungen keine singulären Integrale besitzen, falls ihre Koeffizienten in der ganzen Ebene eindeutige Funktionen sind, die nur an einzelnen Stellen singuläre Punkte haben. Denn wir haben gezeigt, dass, wenn y_1 eine Lösung der Gleichung $\Phi(y) = 0$ ist, jedes Integral in der Form

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

dargestellt wird, $y = y_1$ ist also ein partikuläres Integral. Desgleichen wird, wenn y_0 eine Lösung von $\Phi(y) = V$ bedeutet, das allgemeine Integral dieser Gleichung von der Form:

$$y = y_0 + C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n,$$

so dass also auch y_0 ein partikuläres Integral ist.

Zweite Methode der Reduktion einer linearen Gleichung auf eine lineare Gleichung niederer Ordnung.

732. Die im vorigen Abschnitt ausgeführte Reduktion lässt sich noch in einer anderen, konciseren Weise ausführen, die uns ein neues Beispiel von der Variation der willkürlichen Konstanten liefert.

Die Gleichung n^{ter} Ordnung sei

$$1)\qquad \Phi(y) = V,$$

und es seien i partikuläre und linear unabhängige Integrale der Gleichung

$$2)\qquad \Phi(y) = 0$$

bekannt. Man erhält ein allgemeineres partikuläres Integral der Gleichung 2), indem man

$$3)\qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_i y_i$$

setzt, wobei $C_1, C_2, .., C_i$ willkürliche Konstanten sind. Betrachtet man dieselben aber als Variabele, d. h. als Funktionen von x, so kann die Gleichung 3) auch das vollständige Integral der Differentialgleichung 1) darstellen; man kann dabei noch $i-1$ willkürliche Relationen zwischen diesen Grössen annehmen. Indem wir nun ebenso wie im § 727 vorgehen, werden wir diese Relationen so wählen, dass die $i-1$ Ableitungen von y die nämlichen Ausdrücke gewinnen, wie wenn die willkürlichen Grössen konstant sind. Wir setzen also:

$$4)\qquad \begin{cases} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y_2 \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + y_i \dfrac{dC_i}{dx} = 0, \\ \dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{dy_i}{dx}\dfrac{dC_i}{dx} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{i-2}y_1}{dx^{i-2}}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{d^{i-2}y_2}{dx^{i-2}}\dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{i-2}y_i}{dx^{i-2}}\dfrac{dC_i}{dx} = 0, \end{cases}$$

und dann wird:

$$5)\qquad \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_i y_i, \\ \dfrac{dy}{dx} = C_1 \dfrac{dy_1}{dx} + C_2 \dfrac{dy_2}{dx} + \cdots + C_i \dfrac{dy_i}{dx}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}} = C_1 \dfrac{d^{i-1}y_1}{dx^{i-1}} + C_2 \dfrac{d^{i-2}y_2}{dx^{i-2}} + \cdots + C_i \dfrac{d^{i-2}y_i}{dx^{i-2}}. \end{cases}$$

Ferner setzen wir:

$$
6)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^{i-1}y_1}{dx^{i-1}}\dfrac{dC_1}{dx}+\dfrac{d^{i-1}y_2}{dx^{i-1}}\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+\dfrac{d^{i-1}y_i}{dx^{i-1}}\dfrac{dC_i}{dx}=z, \\
\dfrac{d^{i}y_1}{dx^{i}}\dfrac{dC_1}{dx}+\dfrac{d^{i}y_2}{dx^{i}}\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+\dfrac{d^{i}y_i}{dx^{i}}\dfrac{dC_i}{dx}=z_1, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_1}{dx}+\dfrac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+\dfrac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_i}{dx}=z_{n-i},
\end{cases}
$$

und schreiben noch zur Abkürzung:

$$
7)\quad \begin{cases}
Z=z, \\
Z_1=\dfrac{dz}{dx}+z_1, \\
Z_2=\dfrac{d^2z}{dx^2}+\dfrac{dz_1}{dx}+z_2, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
Z_{n-i}=\dfrac{d^{n-i}z}{dx^{n-i}}+\cdots+\dfrac{dz_{n-i-1}}{dx}+z_{n-i}.
\end{cases}
$$

Indem man nun die letzte der Gleichungen 5) differentiiert und alsdann die Differentiation wiederholt bis zur Ordnung $n-i+1$, bekommt man die Gleichungen:

$$
8)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^iy}{dx^i}=C_1\dfrac{d^iy_1}{dx^i}+C_2\dfrac{d^iy_2}{dx^i}+\cdots+C_i\dfrac{d^iy_i}{dx^i}+Z, \\
\dfrac{d^{i+1}y}{dx^{i+1}}=C_1\dfrac{d^{i+1}y_1}{dx^{i+1}}+C_2\dfrac{d^{i+1}y_2}{dx^{i+2}}+\cdots+C_i\dfrac{d^{i+1}y_i}{dx^{i+1}}+Z_1, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\dfrac{d^ny}{dx^n}=C_1\dfrac{d^ny_1}{dx^n}+C_2\dfrac{d^ny_2}{dx^n}+\cdots+C_i\dfrac{d^ny_i}{dx^n}+Z_{n-i}.
\end{cases}
$$

Substituiert man nun in die Gleichung 1) die Werte von y und seinen n ersten Ableitungen aus den Systemen 5) und 8), so erhält man, weil $y_1, y_2, \ldots y_i$ partikuläre Integrale der Gleichung 2) sind:

$$
9)\qquad Z_{n-i}+P_1Z_{n-i-1}+\cdots+P_{n-i}Z=V.
$$

Nun bestimmt aber das aus den Gleichungen 4) und der ersten Gleichung 6) bestehende System die Grössen:

$$\frac{dC_1}{dx}, \ \frac{dC_2}{dx}, \ldots \ \frac{dC_i}{dx}$$

als Funktionen von der Form

$$10) \quad \frac{dC_1}{dx} = X_1 z, \quad \frac{dC_2}{dx} = X_2 z, \ldots \frac{dC_i}{dx} = X_i z,$$

wobei die Grössen X_1, $X_2, \ldots X_i$ bestimmte gegebene Funktionen von x sind, da die Grössen $y_1, \ldots y_i$ von einander linear unabhängig sind; ferner folgt aus den $n - i$ übrigen Gleichungen des Systemes 6):

$$11) \quad z_1 = \Xi_1 z, \quad z_2 = \Xi_2 z, \ldots z_{n-i} = \Xi_{n-i} z,$$

wobei Ξ_1, $\Xi_2, \ldots \Xi_{n-i}$ ebenfalls gegebene Funktionen von x sind. Hieraus folgt, dass die mit Z_k bezeichneten Grössen lineare Funktionen von z und seinen k ersten Ableitungen sind; mithin ist die Gleichung 9), auf die wir die ursprüngliche zurückgeführt haben, eine lineare Gleichung von der Ordnung $n - i$.

Das allgemeine Integral der Gleichung 9) enthält $n - i$ willkürliche Konstanten; ist dieses Integral bekannt, so hat man nach den Gleichungen 10):

$$12) \quad C_1 = c_1 + \int_{x_0}^{x} X_1 z \, dx, \quad C_2 = c_2 + \int_{x_0}^{x} X_2 z \, dx, \ldots \ C_i = c_i + \int_{x_0}^{x} X_i z \, dx;$$

c_1, $c_2, \ldots c_i$ bezeichnen i neue willkürliche Konstanten. Vermittelst dieser Werte von C ergiebt die Gleichung 3) das vollständige Integral der ursprünglichen Differentialgleichung; es enthält n willkürliche Konstanten.

Über die linearen Gleichungen zweiter Ordnung.

733. Die lineare Gleichung zweiter Ordnung ist von der Form:

$$1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = V,$$

P_1, P_2, V sind gegebene Funktionen von x. Nach der allgemeinen Theorie (§ 729) hängt die Integration dieser Gleichung nur noch von einer linearen Gleichung erster Ordnung ab, sobald man eine Lösung $y = y_1$ der zugehörigen Gleichung ohne zweites Glied kennt; da die Gleichung erster Ordnung immer integriert werden kann, so kann man dann auch das vollständige Integral der Gleichung 1) bestimmen. Dieses Integral erhält man folgendermassen. Es ist der Voraussetzung nach:

2) $$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + P_1 \frac{dy_1}{dx} + P_2 y_1 = 0.$$

Subtrahiert man also die Gleichungen 1) und 2), nachdem man die erste mit y_1, die zweite mit y multipliziert hat, so folgt:

$$\left(y_1 \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 y_1}{dx^2}\right) + P_1 \left(y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx}\right) = V y_1,$$

oder wenn man

3) $$y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = z, \quad \text{also} \quad y_1 \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$$

setzt:

4) $$\frac{dz}{dx} + P_1 z = V y_1.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

5) $$z = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P_1\, dx} \left[C_1 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{x} P_1\, dx} V y_1\, dx \right];$$

die Gleichung 3) ergiebt ferner:

$$\frac{d\,\dfrac{y}{y_1}}{dx} = \frac{z}{{y_1}^2},$$

also durch Integration:

6) $$y = C y_1 + y_1 \int\limits_{x_0}^{x} \frac{z}{{y_1}^2}\, dx.$$

Dieser Ausdruck enthält zwei willkürliche Konstanten C und C_1.

734. Eine Eigenschaft der Integrale der Gleichung ohne zweites Glied:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0,$$

welche Sturm bemerkt hat, wollen wir hier noch angeben. Es seien y_1 und y_2 zwei partikuläre Integrale, mit denen man das vollständige Integral zusammensetzen kann. Es ist dann, wie eben bewiesen wurde (siehe auch den allgemeinen Determinantensatz § 725):

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C_1 e^{-\int_{x_0}^{x} P_1 dx}.$$

Hieraus folgt, dass die Funktion $y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}$ immer dasselbe Zeichen hat, bei allen reellen Werten von x, solange wir ein Intervall betrachten, in welchem kein singulärer Punkt der Funktion P_1 gelegen ist, und in welchem also y_1 und y_2 nebst ihren Ableitungen ebenfalls stetig sind. In solch einem Intervalle können also auch y_1 und $\frac{dy_1}{dx}$ oder y_2 und $\frac{dy_2}{dx}$ nicht gleichzeitig verschwinden. Nehmen wir an, dass

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} > 0$$

ist; wenn die Funktion y_1 für $x = a$ und für $x = b$ verschwindet, so hat man für den einen sowie für den andern dieser Werte von x:

$$y_2 \frac{dy_1}{dx} < 0,$$

folglich sind y_2 und $\frac{dy_1}{dx}$ von entgegengesetztem Zeichen. Es sei nun $b > a$; wenn x von a bis b wächst, so ändert $\frac{dy_1}{dx}$ sein Zeichen für einen bestimmten Wert α von x; folglich muss auch y_2 sein Zeichen ändern, bevor $x = b$ wird. Wenn also die Funktion y_2 endlich und stetig bleibt, so muss sie für einen Wert von x zwischen a und b verschwinden. Ebenso erkennt man, dass y_1, wenn es stetig bleibt, notwendig für einen Wert x verschwindet innerhalb zweier Werte, für welche y_2 null wird.

Hieraus folgt, dass, wenn x wächst und dabei ein Intervall durchläuft, in welchem kein singulärer Punkt von P_1 gelegen ist, die Werte, für welche die Funktionen y_1 und y_2 verschwinden, abwechselnd auf einander folgen müssen.

Die linearen Gleichungen ohne zweites Glied mit konstanten Koeffizienten.

735. Wir setzen wie im § 727:

$$1)\quad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y,$$

$P_1, P_2, \ldots P_n$ seien Konstanten oder Funktionen von x; ferner nennen wir

$$2)\qquad f(r) = r^n + P_1 r^{n-1} + \cdots + P_{n-1} r + P_n,$$

wobei r noch unbestimmt ist; ersetzt man y durch die Exponentialfunktion e^{rx}, so wird

$$3)\qquad \Phi(e^{rx}) = e^{rx} f(r).$$

Diese Gleichung 3) ist eine Identität; wir differentiieren sie i mal in Bezug auf r; die Ableitung i^{ter} Ordnung der linken Seite wird:

$$\frac{d^i \Phi(e^{rx})}{dr^i} = \Phi\left(\frac{d^i e^{rx}}{dr^i}\right) = \Phi(x^i e^{rx}).$$

Die Ableitung i^{ter} Ordnung der rechten Seite erhält man nach der Regel für die Differentiation eines Produktes im § 66; indem man die successiven Ableitungen des Polynomes $f(r)$ mit $f'(r), f''(r), \ldots$ bezeichnet, ergiebt sich:

$$4)\quad \Phi(x^i e^{rx}) = e^{rx}\left[f^i(r) + ixf^{i-1}(r) + \frac{i(i-1)}{1.2}x^2 f^{i-2}(r) + \cdots + x^i f(r)\right].$$

Wir betrachten nun die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung ohne zweites Glied:

$$5)\qquad \Phi(y) = 0,$$

und gleichzeitig die entsprechende algebraische Gleichung

$$6)\qquad f(r) = 0,$$

welche die *charakteristische Gleichung* genannt wird.

Wenn diese letztere eine Wurzel r_1 unabhängig von x besitzt, so erkennt man aus der Gleichung 3), dass die Differentialgleichung das partikuläre Integral $y = e^{r_1 x}$ hat. Ist ferner r_1 eine vielfache Wurzel, und bezeichnet μ den Grad dieser Vielfachheit, so bestehen auch die Gleichungen:

$$f'(r_1) = 0, \quad f''(r_1) = 0, \dots f^{\mu-1}(r_1) = 0;$$

folglich ergiebt die Gleichung 4) für die Werte $i = 1, 2, \dots \mu - 1$:

$$\Phi(x^i e^{r_1 x}) = 0,$$

woraus folgt, dass die Gleichung 1) die μ Lösungen

$$e^{r_1 x}, \quad x e^{r_1 x}, \quad x^2 e^{r_1 x}, \dots x^{\mu-1} e^{r_1 x}$$

zulässt.

Sind die Koeffizienten $P_1, P_2, \dots P_n$ konstant, so hat die charakteristische Gleichung n, von x unabhängige Wurzeln, und folglich erhält man den Satz:

Für eine lineare Differentialgleichung n^ter^ *Ordnung ohne zweites Glied mit konstanten Koeffizienten bestimmt jede Wurzel der charakteristischen Gleichung so viele partikuläre Integrale, als die Ordnung ihrer Vielfachheit beträgt; folglich ist die gesamte Anzahl dieser partikulären Integrale gleich der Ordnung der Differentialgleichung.*

Dieser Satz lässt das vollständige Integral bilden. Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von einander sämtlich verschieden, und bezeichnet man dieselben mit $r_1, r_2, \dots r_n$, so wird das vollständige Integral der Gleichung 5):

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

Im allgemeinen Fall seien $r_1, r_2, \dots r_i$ die von einander verschiedenen Wurzeln und $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_i$ die Ordnungen ihrer Vielfachheit, alsdann wird das vollständige Integral:

$$y = p_1 e^{r_1 x} + p_2 e^{r_2 x} + \cdots + p_i e^{r_i x},$$

wobei $p_1, p_2, \dots p_i$ Polynome in x mit willkürlichen Koeffizienten und von den Ordnungen $\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \dots \mu_i - 1$ bezüglich sind.

736. Damit die Lösung, welche wir auf diese Weise gebildet haben, wirklich das vollständige Integral ist, müssen die n partikulären Integrale von einander linear unabhängig sein, oder die Determinante derselben (§ 725) darf nicht identisch verschwinden.

Dass dieses in der That nicht der Fall ist, beweist man folgendermassen: Sind die n Wurzeln von $f(r) = 0$ sämtlich von einander verschieden, so wird:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \ldots y_n = e^{r_n x},$$

also:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots \frac{dy_n}{dx} \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \ldots \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2+\cdots+r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots r_n \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante auf der rechten Seite verschwindet nicht, denn sie ist gleich dem Produkte aus den Differenzen der Werte r.

Damit ist also bewiesen: Sind die Werte $r_1, r_2, \ldots r_n$ alle von einander verschieden, so besteht zwischen den Funktionen $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots e^{r_n x}$ keine Identität von der Form:

$$a_1 e^{r_1 x} + a_2 e^{r_2 x} + \cdots + a_n e^{r_n x} = 0,$$

wenn die Koeffizienten $a_1 \ldots a_n$ Konstante sind, die nicht sämtlich den Wert null haben.

Im allgemeinen Falle, wo i verschiedene Wurzeln vom Grade $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_i$ vorhanden sind, hat man den Satz zu beweisen, dass keine Relation von der Form

$$p_1 e^{r_1 x} + p_2 e^{r_2 x} + \cdots + p_i e^{r_i x} = 0$$

möglich ist, wenn $p_1, p_2, \ldots p_i$ Polynome vom Grade $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1, \ldots \mu_i - 1$ mit beliebigen Koeffizienten, die nicht sämtlich gleich null sind, bezeichnen. Der Beweis lässt sich folgendermassen führen: Angenommen, es gäbe solch eine Relation, alsdann differentiiere man dieselbe $i-1$ mal nach einander; setzt man dann der Kürze wegen:

$$p_i^{(k)} = r_i^k p_i + k r_i^{k-1} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{k(k-1)}{1.2} r_i^{k-2} \frac{\partial p_i}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^k p_i}{\partial x^k},$$

so erhält man ein System von i Gleichungen, nämlich:

$$\begin{aligned} &p_1 e^{r_1 x} + p_2 e^{r_2 x} + \cdots + p_i e^{r_i x} = 0, \\ &p_1^{(1)} e^{r_1 x} + p_2^{(1)} e^{r_2 x} + \cdots + p_i^{(1)} e^{r_i x} = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &p_1^{(i-1)} e^{r_1 x} + p_2^{(i-1)} e^{r_2 x} + \cdots + p_i^{(i-1)} e^{r_i x} = 0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen bei allen Werten von x bestehen sollen, so muss auch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \dots p_i \\ p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & \dots p_i^{(1)} \\ . & . & \dots . \\ p_1^{(i-1)} & p_2^{(i-1)} & \dots p_i^{(i-1)} \end{vmatrix}$$

identisch, d. h. bei allen Werten von x verschwinden. Der Koeffizient der höchsten Potenz von x in dieser Determinante wird aber, abgesehen von den eingeführten konstanten Faktoren:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ r_1 & r_2 & \dots r_i \\ . & . & \dots . \\ r_1^{i-1} & r_2^{i-1} & \dots r_i^{i-1} \end{vmatrix}$$

und verschwindet, da die Werte $r_1, r_2, \dots r_i$ von einander verschieden sind, nicht.

737. Methode von d'Alembert. Wir haben vorhin bewiesen, dass jede Wurzel der charakteristischen Gleichung ebenso viele partikuläre Integrale liefert, als der Grad ihrer Vielfachheit beträgt. Doch lässt sich der Übergang von den ungleichen Wurzeln zu den vielfachen auch leicht vollziehen ohne diesen Satz, indem man eine allgemeine Methode von d'Alembert benutzt, welche bei verschiedenen Problemen der Analysis von Wert ist. Es sei wie gewöhnlich

1) $$\Phi(y) = 0$$

die lineare Gleichung und

2) $$f(r) = 0$$

ihre Charakteristik. Wir wollen zunächst annehmen, dass diese Gleichung nur eine einzige vielfache Wurzel r_1 besitzt, und dass der Grad ihrer Vielfachheit 2 ist. Wir bezeichnen nun mit

3) $$\Psi(y) = 0$$

die lineare Gleichung, welche zu der Charakteristik

4) $$\frac{(r - r_1 - h)\, f(r)}{r - r_1} = 0$$

gehört, wobei h eine beliebig kleine Grösse ist. Da diese Gleichung keine vielfachen Wurzeln besitzt, so ist das vollständige Integral der Gleichung 3):

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{(r_1 + h)x} + C_3 e^{r_3 x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Nun ist aber:

$$e^{(r_1+h)x} = e^{r_1 x}\left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{2!} + \cdots\right)$$

und setzt man $C_1 + C_2 = D_1$, $C_2 h = D_2$, so wird der Wert von y:

$$y = e^{r_1 x}\left(D_1 + D_2 x + D_2 h \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) + C_3 e^{r_3 x} + \cdots + C_n e^{r_n x};$$

D_1 und D_2 sind zwei willkürliche Konstanten, welche man statt C_1 und C_2 einführen und von h unabhängig annehmen kann. Lässt man nun h unbegrenzt abnehmen, so geht die Gleichung 3) schliesslich in die Gleichung 1) über; zugleich wird der vorstehende Wert von y:

$$y = e^{r_1 x}(D_1 + D_2 x) + C_3 e^{r_3 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

was mit dem früheren Resultate übereinstimmt.

Nehmen wir nun an, dass die charakteristische Gleichung drei gleiche Wurzeln r_1 hat; die Gleichung 4) hat alsdann zwei Wurzeln gleich r_1 und eine Wurzel r_3 gleich $r_1 + h$; das allgemeine Integral der Gleichung 3) ist folglich:

$$y = (D_1 + D_2 x)\, e^{r_1 x} + C_3\, e^{(r_1+h)x} + \cdots + C_n\, e^{r_n x}.$$

Entwickelt man e^{hx} in eine Reihe und setzt dabei:

$$D_1 + C_3 = E_1, \quad D_2 + C_3 h = E_2, \quad C_3 \frac{h^2}{2} = E_3,$$

so folgt:

$$y = \left(E_1 + E_2 x + E_3 x^2 + \frac{E_3 h}{3} x^3 + \cdots\right) e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

Wenn nun h nach null konvergiert, so erhält man als Grenzwert:

$$y = (E_1 + E_2 x + E_3 x^2)\, e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

und dies ist das Integral der linearen Gleichung in dem Fall einer dreifachen Wurzel r_1.

Indem man so fortfährt, erkennt man, dass, wenn μ_1 den Grad der Vielfachheit der Wurzel r_1 bezeichnet, das vollständige Integral die Form bekommt:

$$y = P_1 e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

wobei P_1 ein beliebiges Polynom in x vom Grade $\mu - 1$ ist; verfährt man ebenso in Bezug auf die anderen vielfachen

Wurzeln, welche die Gleichung $f(r)=0$ enthalten kann, so erhält man vollständig das Resultat, zu dem wir im § 735 gelangt sind.

738. Wir haben bisher keinerlei Voraussetzung über die Art der Wurzeln der charakteristischen Gleichung gemacht. Sind die Koeffizienten derselben reell, so treten im allgemeinen konjugiert komplexe Wurzeln in den Gliedern der Integralgleichung auf; man kann diese jedoch auf eine reelle Form bringen.

Es seien $r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$ zwei konjugiert imaginäre Wurzeln; sind dieselben einfache, so gehören zu ihnen in dem Integrale die Glieder:

$$C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x),$$

die man durch

$$(A\cos\beta x+B\sin\beta x)\,e^{\alpha x}$$

ersetzen kann, wenn man

$$A=C_1+C_2,\quad B=(C_1-C_2)\,i$$

setzt. Auch kann man

$$A=G\cos g,\quad B=-G\sin g$$

einführen, so dass die beiden Terme den Wert:

$$Ge^{\alpha x}\cos(\beta x+g)$$

annehmen. G und g sind alsdann die beiden willkürlichen Konstanten.

Man erkennt nun unmittelbar, dass wenn die beiden konjugierten Wurzeln r_1 und r_2 vielfache von der Ordnung μ sind, im allgemeinen Integrale die Glieder auftreten:

$$e^{\alpha x}[G\cos(\beta x+g)+G_1 x\cos(\beta x+g_1)+\cdots+G_{\mu-1}x^{\mu-1}\cos(\beta x+g_{\mu-1})];$$

$G, G_1\ldots G_{\mu-1}, g, g_1\cdots g_{\mu-1}$ bezeichnen 2μ willkürliche Konstanten.

Für die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$$

zum Beispiel, welche wir schon im § 703 behandelt haben, wird die charakteristische Gleichung $r^2+n^2=0$, und hieraus folgt $r=\pm in$; das vollständige Integral wird also:

$$y=A\cos nx+B\sin nx\quad\text{oder}\quad y=G\cos(nx+g).$$

739. Der Satz des § 735 ist bisweilen auch anwendbar auf lineare Gleichungen, in denen die Koeffizienten nicht sämtlich konstant sind. Wir wollen hierfür ein Beispiel geben.

Für die Gleichung vierter Ordnung:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - (x+3)\frac{d^3y}{dx^3} + 3(x+1)\frac{d^2y}{dx^2} - (3x+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

ist die charakteristische Gleichung:

$$(r-1)^3(r-x) = 0;$$

sie hat drei gleiche Wurzeln mit dem Werte 1, und folglich wird der Differentialgleichung genügt, wenn man

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^x$$

setzt. Da nun drei partikuläre Integrale bekannt sind, so kann man die Gleichung auf eine lineare erster Ordnung bringen, und sie folglich vollständig integrieren. Man gelangt indessen noch leichter zu diesem Resultat, wenn man bloss die Lösung

$$y = C e^x$$

anwendet. Betrachtet man C als variabel, so erhält man für C die Differentialgleichung:

$$\frac{d^4C}{dx^4} + (1-x)\frac{d^3C}{dx^3} = 0,$$

also wenn man $\frac{d^3C}{dx^3} = u$ setzt:

$$\frac{du}{dx} + (1-x)u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = (x-1)\,dx.$$

Demnach ist $l(u) = \frac{(x-1)^2}{2} + \text{const}$; also $u = ce^{\frac{1}{2}(x-1)^2}$.

Folglich ist:

$$\frac{d^3C}{dx^3} = ce^{\frac{1}{2}(x-1)^2},$$

und indem man nach der Methode des § 693 integriert:

$$C = c\int_0^x (x-z)^2 e^{\frac{1}{2}(z-1)^2} dz + c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Das vollständige Integral ist also:

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\, e^x + ce^x \int_0^x (x-z)^2 e^{\frac{1}{2}(z-1)^2} dz;$$

c_0, c_1, c_2, c sind vier willkürliche Konstanten.

Die linearen Gleichungen mit zweitem Gliede und konstanten Koeffizienten.

740. Um das vollständige Integral der Gleichung

$$1)\qquad \Phi(y) = V$$

zu bilden, braucht man nur, wie wir gesehen haben, ein partikuläres Integral dieser Gleichung zu kennen, und dieses zu dem vollständigen Integrale der reduzierten Gleichung

$$2)\qquad \Phi(y) = 0$$

zu addieren. Im § 727 haben wir bewiesen, dass man das partikuläre Integral $y = X$ durch die Gleichung

$$X = y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{V\,dx}{\varphi_1(y_1)} + y_2 \int_{x_0}^{x} \frac{V\,dx}{\varphi_2(y_2)} + \cdots + y_n \int_{x_0}^{x} \frac{V\,dx}{\varphi_n(y_n)}$$

erhält. In derselben bezeichnen $y_1, y_2, \ldots y_n$ partikuläre Integrale der Gleichung 2), und $\varphi_i(y)$ stellt die Funktion

$$\lambda_0 y + \lambda_1 \frac{dy}{dx} + \lambda_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

dar, wobei die Koeffizienten λ so bestimmt sind, dass

$\varphi_i(y_1) = 0,\quad \varphi_i(y_2) = 0, \ldots \varphi_i(y_n) = 0$ mit Ausnahme von $\varphi_i(y_i) = 0$.

Dieses Resultat wollen wir nun auf den Fall anwenden, dass die Koeffizienten von $\Phi(y)$ konstant sind, und die charakteristische Gleichung keine gleichen Wurzeln hat. Hier ist $y_i = e^{r_i x}$ und $\varphi_i(y)$ ist das Produkt von e^{rx} mit dem Polynome:

$$\lambda_0 + \lambda_1 r + \lambda_2 r^2 + \cdots + \lambda_{n-2} r^{n-2} + r^{n-1},$$

welches null werden muss, wenn man $r = r_1, r_2, \ldots r_n$ mit Ausnahme von r_i einsetzt. Hieraus folgt, dass, wenn $f(r)$ die Funktion in der charakteristischen Gleichung bezeichnet:

$$\varphi_i(y) = e^{rx} \frac{f(r)}{r - r_i}$$

ist, und für $y = y_i$ oder $r = r_i$ wird:

$$\varphi_i(y_i) = e^{r_i x} f'(r_i).$$

Demnach ergiebt die Formel 3):

$$4)\quad X = \frac{e^{r_1 x}}{f'(r_1)} \int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x} V\,dx + \frac{e^{r_2 x}}{f'(r_2)} \int_{x_0}^{x} e^{-r_2 x} V\,dx + \cdots + \frac{e^{r_n x}}{f'(r_n)} \int_{x_0}^{x} e^{-r_n x} V\,dx.$$

Man erhält genau denselben Ausdruck, wenn man die Methode von Cauchy anwendet, die im § 728 entwickelt wurde.

Es würde nicht schwierig sein, aus dieser Gleichung den Ausdruck abzuleiten für den Fall, dass die charakteristische Gleichung vielfache Wurzeln hat; doch halten wir es nicht für nötig, diese Untersuchung auszuführen. Man löst in jedem einzelnen Falle die Aufgabe leicht, indem man die allgemeine Formel 3) benutzt.

741. Beispiele. 1. Die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - n^2 y = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

ergiebt zunächst für die reduzierte Form die Charakteristik $f(r) = r^2 - n^2 = 0$, also $r = \pm n$; folglich das Integral:

$$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}.$$

Da nun $f'(r) = 2r$ ist und

$$\int e^{-rx} V\,dx = -\frac{e^{rx} V}{r} + \frac{1}{r} \int e^{-rx} \frac{dV}{dx}\,dx,$$

so erhält man:

$$X = -\frac{1}{n^2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{e^{nx}}{2n^2} \int_0^x \frac{e^{-nx}\,dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{e^{-nx}}{2n^2} \int_0^x \frac{e^{nx}\,dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

oder wenn man α als Variabele unter dem Integral einführt:

$$X = \frac{1}{2n^2} \int_0^x \frac{\left[e^{\frac{n(x-\alpha)}{2}} - e^{-\frac{n(x-\alpha)}{2}}\right]^2}{\sqrt{1+\alpha^4}}\,d\alpha.$$

Das gesuchte Integral ist also:

$$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} + X.$$

2. Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2n\frac{dy}{dx} + n^2 y = V$$

besitzt als Charakteristik der reduzierten die Gleichung $(r-n)^2 = 0$, und die partikulären Integrale dieser letzteren sind $y_1 = e^{nx}$, $y_2 = xe^{nx}$; ferner hat man in den Bezeichnungen des § 740:

$$\varphi_1(y_1) = -\frac{e^{nx}}{x}, \quad \varphi_2(y) = e^{nx}.$$

Setzt man also:

$$X = -e^{nx}\int_{x_0}^{x} Vx\,e^{-nx}\,dx + xe^{nx}\int_{x_0}^{x} Ve^{-nx}\,dx,$$

so erhält man das vollständige Integral:

$$y = (C_1 + C_2 x)\,e^{nx} + X.$$

742. Ohne die allgemeinen Formeln zu benutzen, kann man auch in jedem besonderen Fall eine direkte Rechnung ausführen, nach der Methode, vermittelst deren wir zu jenen Formeln gelangt sind.

Wir müssen aber noch zwei Fälle angeben, bei denen man unmittelbar zur Kenntnis eines partikulären Integrales gelangt.

Erstens, wenn das zweite Glied V eine ganze Funktion ist:

$$V = A_0 x^i + A_1 x^{i-1} + \cdots + A_{i-1}x + A_i,$$

so wird man

$$y = a_0 x^i + a_1 x^{i-1} + \cdots + a_{i-1}x + a_i$$

setzen, und indem man diesen Wert in die Gleichung einführt, gewinnt man $i+1$ Gleichungen, welche zur Bestimmung der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_i$ dienen.

Zweitens, wenn das zweite Glied V die Form hat:

$$V = A\cos\mu x + B\sin\mu x \quad \text{oder} \quad V = Ae^{\mu x i} + Be^{-\mu x i},$$

so hat man

$$y = a\cos\mu x + b\sin\mu x \quad \text{oder} \quad y = ae^{\mu x i} + be^{-\mu x i}$$

zu setzen, und man erhält zwei Gleichungen, aus denen man die Werte von a und b entnehmen kann. Dabei ist indessen zu bemerken, dass diese Gleichungen auch unendliche Werte für a und b ergeben können, indem die Koeffizienten von a und b in den Gleichungen identisch verschwinden; in diesem Falle muss man die Form des Wertes von y modifizieren.

Ist die gegebene Gleichung $\Phi(y) = V$, so hat man, was auch der Wert von μ sein mag:

$$\Phi(ae^{\pm x\mu i}) = ae^{\pm x\mu i} f(\pm \mu i) \qquad i = \sqrt{-1}$$

und demnach, wenn man nach $\pm \mu i$ differentiiert:

$$\Phi(axe^{\pm x\mu i}) = ae^{\pm x\mu i}[f'(\pm \mu i) + xf(\pm \mu i)],$$

. . . .

Nach diesen Formeln kann man, wenn $f(\pm \mu i)$ nicht null ist, $y = ae^{\mu x i} + be^{-\mu x i}$ setzen, oder, was auf das nämliche hinauskommt:

$$y = a \cos \mu x + b \sin \mu x.$$

Ist aber $f(\pm \mu i) = 0$, jedoch $f'(\pm \mu i)$ von null verschieden, so kann man

$$y = x(a \cos \mu x + b \sin \mu x)$$

setzen, u. s. w.

Wir betrachten als Beispiel die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x;$$

hier ist:

$$f(\pm \mu i) = -\mu^2 + 1, \quad f'(\pm \mu i) = 2\mu i,$$

und da μ gleich 1 sein muss, so hat man zu setzen:

$$y = x(a \cos x + b \sin x),$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = x(-a \sin x + b \cos x) + (a \cos x + b \sin x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x(a \cos x + b \sin x) + 2(-a \sin x + b \cos x);$$

substituiert man diese Werte in die Gleichung, so folgt:

$$2(-a \sin x + b \cos x) = \cos x,$$

also:

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}.$$

Man erhält demnach das partikuläre Integral $\frac{1}{2} x \sin x$, und das vollständige ist:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Über eine lineare Gleichung, welche auf eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten zurückführbar ist.

743. Die linearen Gleichungen, um welche es sich hier handelt, sind von der Form:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{A_1}{ax+b} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{A_i}{(ax+b)^i} \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n} y = V;$$

$A_1, A_2, \ldots A_n$, a und b sind Konstanten, die rechte Seite V irgend eine Funktion von x.

Diese Gleichung kann in eine andere mit konstanten Koeffizienten transformiert werden; man hat zu diesem Zweck

$$ax + b = e^t$$

zu setzen, und t als unabhängige Variabele an Stelle von x einzuführen.

Es wird:

$$a \frac{dx}{dt} = e^t = ax + b, \quad \text{also} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{a}{ax+b},$$

und folglich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b} \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{a^2}{(ax+b)^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Substituiert man diese Werte und multipliziert sodann die Gleichung mit $(ax + b)^n$, so erhält man eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Es ist indessen nicht notwendig, diese Transformation auszuführen, um das Integral zu gewinnen. Denn schreibt man die Gleichung kurz:

$$1) \qquad \Phi(y) = V,$$

so genügt es, das vollständige Integral von $\Phi(y) = 0$ zu bilden, und zu diesem gelangt man leicht auf folgendem

Wege. Ersetzt man y durch $(ax+b)^r$ oder durch $e^{r\,l(ax+b)}$, so erhält man ein Resultat von der Form:

$$2)\qquad \Phi[(ax+b)^r] = (ax+b)^{r-n} f(r),$$

wobei $f(r)$ ein ganzes Polynom in r vom Grade n ist. Differentiiert man nun diese Gleichung i-mal in Bezug auf r, so erhält man:

$$3)\quad \begin{cases} \Phi[(ax+b)^r\, l^i(ax+b)] \\ = (ax+b)^{r-n}\left[f^i(r) + \frac{i}{1} l(ax+b) f^{i-1}(r) + \cdots + l^i(ax+b) f(r)\right], \end{cases}$$

und es folgt aus den Gleichungen 2) und 3), dass einer Wurzel r_1 der Charakteristik $f(r)=0$, deren Vielfachheit gleich μ ist, μ partikuläre Integrale der Gleichung 2) entsprechen, nämlich:

$$\begin{gathered} (ax+b)^{r_1}, \\ (ax+b)^{r_1}\, l(ax+b), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (ax+b)^{r_1}\, l^{\mu-1}(ax+b). \end{gathered}$$

Ist r_1 komplex, so ist $(ax+b)^{r_1}$ gleich $e^{r_1 l(ax+b)}$.

Auf diese Weise kennt man also n partikuläre Integrale der Gleichung 2), und aus ihnen kann man, wie wir wissen, das vollständige Integral der Gleichung 1) ableiten.

744. Beispiel. Die Gleichung zweiter Ordnung:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (2n-1)\, x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

gehört zu der behandelten Klasse. Setzt man $y = x^r$ und unterdrückt den Faktor x^r, so erhält man als charakteristische Gleichung:

$$r(r-1) - (2n-1)\, r + n^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (r-n)^2 = 0;$$

die beiden Wurzeln sind gleich n; und folglich werden die partikulären Integrale x^n, $x^n\, lx$; das vollständige Integral ist also:

$$y = x^n (C_1 + C_2\, lx).$$

Über Systeme von simultanen linearen Gleichungen.

745. Die Integration irgend eines Systemes von simultanen Differentialgleichungen kann durch Elimination (§ 627) auf die Integration von einer oder von mehreren Differentialgleichungen gebracht werden, von denen jede nur zwei Variabele enthält. Es ist evident, dass diese letzteren Gleichungen lineare sind, wenn die Gleichungen des Systemes lineare waren. Wir wollen nun zunächst zwei Beispiele für diese Methode behandeln.

Es seien zwei simultane Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0$$

gegeben; aus der zweiten entnimmt man:

$$y = \frac{dz}{dx} + z,$$

also durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx};$$

werden diese Werte in die erste Gleichung substituiert, so folgt:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 4\frac{dz}{dx} + 4z = 0.$$

Diese Gleichung ist eine lineare mit konstanten Koeffizienten, ihr entspricht die charakteristische Gleichung $(r+2)^2 = 0$, und ihr vollständiges Integral ist also, wenn C_1 und C_2 zwei willkürliche Konstanten bezeichnen:

$$z = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x}.$$

Hieraus folgt dann:

$$y = [(C_2 - C_1) - C_2 x]\, e^{-2x}.$$

746. Wir wollen zweitens die beiden simultanen Gleichungen:

$$2\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} - 9y + 2x = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + y - 6x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

integrieren. Löst man dieselben nach y und $\frac{dy}{dt}$ auf, so erhält man die beiden folgenden:

$$11y = 2\frac{d^2x}{dt^2} - 11\frac{dx}{dt} + 14x + 2\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}},$$

$$11\frac{dy}{dt} = 9\frac{d^2x}{dt^2} - 44\frac{dx}{dt} + 52x + 9\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Differentiiert man nun die erste derselben und subtrahiert vom Resultat die zweite, so folgt:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 10\frac{d^2x}{dt^2} + 29\frac{dx}{dt} - 26x = \frac{9}{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Die charakteristische Gleichung wird hier:

$$f(r) = r^3 - 10r^2 + 29r - 26 = 0,$$

also ist:

$$f'(r) = 3r^2 - 20r + 29;$$

ferner ist, was auch die Funktion V sein mag:

$$\int e^{-rt}V\,dt = -\frac{1}{r}e^{-rt}V + \frac{1}{r}\int e^{-rt}\frac{dV}{dt}\,dt.$$

Man erkennt nun leicht, dass man ein partikuläres Integral der Gleichung für x erhält, wenn man die Summe der Werte bildet, welche der Ausdruck

$$\frac{9-2r}{2r(r^2-8r+13)}\,e^{rt}\int_0^t \frac{e^{-rt}dt}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{9}{2(r^2-8r+13)}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

annimmt, wenn man für r die drei Wurzeln 2, $4+\sqrt{3}$, $4-\sqrt{3}$ der charakteristischen Gleichung einsetzt. Man bekommt demnach das vollständige Integral, wenn man hierzu die Summe:

$$C_1e^{2t} + C_2e^{(4+\sqrt{3})t} + C_3e^{(4-\sqrt{3})t}$$

addiert, wo C_1, C_2, C_3 willkürliche Konstanten sind. Nachdem sonach der Wert von x bekannt ist, findet man den Wert von y vermittelst einer der beiden obigen Gleichungen.

747. Differentialgleichungen, welche nicht die lineare Form haben, können bisweilen auf diese Form durch Einführung neuer Variabelen gebracht werden. Als Beispiel hierfür betrachten wir die drei Differentialgleichungen, welche in der Formel:

$$1)\qquad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x}$$

enthalten sind. Führt man eine neue Variabele t ein, deren Differential gleich ist diesen Verhältnissen, so erhält man die vier Gleichungen:

$$2)\qquad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = x;$$

hieraus folgt, wenn man t als die unabhängige Variabele ansieht:

$$3)\qquad y = \frac{dx}{dt}, \quad z = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad u = \frac{d^3x}{dt^3}$$

und

$$4)\qquad \frac{d^4x}{dt^4} - x = 0.$$

Die charakteristische Gleichung dieser letzten ist $r^4 - 1 = 0$, also:

$$r = \pm 1, \quad r = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Die beiden konjugiert imaginären Wurzeln führen in dem vollständigen Integrale der Gleichung 4) das Glied $C\cos(t - t_0)$ herbei, wo C und t_0 zwei willkürliche Konstanten sind. Die beiden zu den reellen Werten von r gehörigen Glieder kann man mit Ae^{t-t_0} und $Be^{-(t-t_0)}$ bezeichnen, wobei A und B neue willkürliche Konstanten sind. Da aber die Variabele t nur durch ihr Differential definiert ist, so kann man auch t an Stelle von $t - t_0$ setzen; folglich erhält man, da y, z, u durch die Gleichungen 3) bestimmt sind, das Integralsystem:

$$\begin{aligned} x &= Ae^t + Be^{-t} + C\cos t, \\ y &= Ae^t - Be^{-t} - C\sin t, \\ z &= Ae^t + Be^{-t} - C\cos t, \\ u &= Ae^t - Be^{-t} + C\sin t. \end{aligned}$$

Setzt man

$$4C^2 = \alpha, \quad 16AB = \beta, \quad \log 4A = \gamma,$$

so folgt aus diesem Systeme:

$$\begin{aligned} \alpha &= (x - z)^2 + (y - u)^2, \\ \beta &= (x + z)^2 - (y + u)^2, \\ \gamma &= \log(x + y + z + u) + \operatorname{arc\,tang} \frac{y - u}{z - x}. \end{aligned}$$

Die Methode von d'Alembert, ein System von linearen Gleichungen erster Ordnung auf Gleichungen zwischen zwei Variabelen zurückzuführen.

748. Eine bemerkenswerte Methode der Reduktion eines beliebigen Systemes von simultanen linearen Gleichungen verdankt man d'Alembert. Wir wollen annehmen, dass das gegebene lineare System auf die erste Ordnung gebracht ist, indem man nötigen Falles neue Variabele eingeführt hat, wie dies im § 615 gezeigt wurde.

Das System zweier Gleichungen. Die beiden linearen Gleichungen seien:

$$1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + Py + Qz = V, \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} + P'y + Q'z = V'; \end{cases}$$

P, Q, P', Q', V, V' sind gegebene Funktionen der als unabhängig betrachteten Variabelen x. Addiert man diese beiden Gleichungen, nachdem man die zweite mit einem noch unbestimmten Faktor λ multipliziert hat, so erhält man

$$2)\quad \left(\frac{dy}{dx} + \lambda\,\frac{dz}{dx}\right) + (P + \lambda P')y + (Q + \lambda Q')z = V + \lambda V'.$$

Wir bezeichnen mit t eine neue Variabele und setzen:

$$3)\qquad y + \lambda z = t,$$

also:

$$4)\qquad \frac{dy}{dx} + \lambda\,\frac{dz}{dx} + z\,\frac{d\lambda}{dx} = \frac{dt}{dx}.$$

Ersetzt man nun in der Gleichung 2) y und $\dfrac{dy}{dx}$ durch ihre Werte aus den Gleichungen 3) und 4), so folgt:

$$\frac{dt}{dx} + (P+\lambda P')t - z\left[\frac{d\lambda}{dx} + (P+\lambda P')\lambda - (Q+\lambda Q')\right] = V + \lambda V'.$$

Man kann nun über den unbestimmten Faktor λ so verfügen, dass die Variabele z aus dieser Gleichung verschwindet, d. h. also, dass

$$5)\qquad \frac{d\lambda}{dx} + P'\lambda^2 + (P - Q')\lambda - Q = 0$$

wird, und folglich:

$$6)\qquad \frac{dt}{dx} + (P + \lambda P')t = V + \lambda V'.$$

Diese Gleichung ist linear, und aus derselben folgt durch Integration:

$$7)\quad t = e^{-\int\limits_{x_0}^{x}(P+\lambda P')\,dx}\left[C + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{x}(P+\lambda P')\,dx}(V + \lambda V')\,dx\right]$$

oder, wie wir kurz schreiben wollen:

$$8)\qquad t = F(x, \lambda, C),$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist.

Die Gleichung 5), von welcher λ abhängt, ist nicht linear, aber man braucht auch nicht ihr vollständiges Integral zu kennen; zwei partikuläre Integrale λ_1 und λ_2 genügen. Denn die Werte von t, welche diesen Werten von λ entsprechen, sind $y + \lambda_1 z$, $y + \lambda_2 z$; die Gleichung 8) ergiebt also, wenn man nach einander C_1 und C_2 an Stelle von C schreibt:

$$9)\qquad \begin{cases} y + \lambda_1 z = F(x, \lambda_1, C_1), \\ y + \lambda_2 z = F(x, \lambda_2, C_2). \end{cases}$$

Jede derselben ist ein Integral des gegebenen Systemes.

749. Die Methode von d'Alembert führt direkt zur Bestimmung der Integrale linearer Differentialgleichungen, wenn die Koeffizienten konstant sind.

Es seien P, Q, P', Q' Konstante; wenn die quadratische Gleichung

$$10)\qquad P'\lambda^2 + (P - Q')\lambda - Q = 0$$

zwei ungleiche Wurzeln hat, $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, so hat man die beiden gesuchten Lösungen der Differentialgleichung 5), indem man $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ setzt. Man erhält hier:

$$t = e^{-(P+\lambda P')x}\left[C + \int\limits_{x_0}^{x} e^{(P+\lambda P')x}(V + \lambda V')\,dx\right]$$

und die Gleichungen 9) werden also:

$$11)\quad \begin{cases} y + \lambda_1 z = e^{-(P+\lambda_1 P')x}\left[C_1 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{(P+\lambda_1 P')x}(V+\lambda_1 V')\,dx\right], \\ y + \lambda_2 z = e^{-(P+\lambda_2 P')x}\left[C_2 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{(P+\lambda_2 P')x}(V+\lambda_2 V')\,dx\right]. \end{cases}$$

Ist $Q = 0$, so ist eine der Wurzeln λ_1, λ_2 gleich null; in diesem Falle ist eine der Gleichungen 11) das Integral der ersten der gegebenen Gleichungen, welche die Variabele z nicht enthält. Ist $P' = 0$, so ist eine der Wurzeln der Gleichung 10) unendlich; dieser Fall ist dem Falle, wo $Q = 0$ ist, analog. Die zweite der gegebenen Differentialgleichungen enthält y nicht, und lässt also z als Funktion von x bestimmen; y ist alsdann durch Integration der ersten Gleichung gegeben.

Sind die beiden Wurzeln einander gleich und λ_1 ihr Wert, so hat die Gleichung 5) die Form:

$$\frac{d\lambda}{dx} + P'(\lambda - \lambda_1)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^2} + P'dx = 0.$$

Durch Integration erhält man:

$$-\frac{1}{\lambda - \lambda_1} + P'x = G, \quad \text{also} \quad \lambda - \lambda_1 = \frac{1}{P'x - G},$$

wobei G eine willkürliche Konstante bezeichnet. Es genügt für G zwei partikuläre Werte einzusetzen, um zwei verschiedene Werte für λ zu bekommen, die wir brauchen. Setzt man $G = \infty$ und sodann $G = 0$, so erhält man:

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_1 + \frac{1}{P'x},$$

und die entsprechenden Werte von $e^{-\int_{x_0}^{x}(P+\lambda P')dx}$ sind:

$$e^{-(P+\lambda_1 P')x}, \quad \frac{1}{x}\, e^{-(P+\lambda_1 P')x}.$$

750. Man kann auch bemerken, dass die auf den besonderen Fall $\lambda_2 = \lambda_1$ bezüglichen Formeln leicht aus den Gleichungen 11) des allgemeinen Falles abgeleitet werden können. Denn die Gleichheit der Wurzeln λ hört auf, wenn man die Koeffizienten in passender Weise ändert; zu dem

Zwecke genügt es, die Gleichung mit $\frac{\lambda - \lambda_1 - h}{\lambda - \lambda_1}$ zu multiplizieren. Dabei können wir aber annehmen, dass P und P' nicht verändert sind, dass sich vielmehr diese Änderung nur auf die Koeffizienten Q und Q' erstreckt, die in den Gleichungen 11) nicht vorkommen. Nun können diese Integrale dargestellt werden in der Form:

$$y + \lambda_1 z = F(x, \lambda_1, C_1),$$
$$y + (\lambda_1 + h) z = F(x, \lambda_1 + h, C_1 + h C_2),$$

indem man $C_1 + hC_2$ an Stelle von C_2 schreibt. Die zweite Gleichung kann nun durch

$$z = \frac{F(x, \lambda_1 + h, C_1 + hC_2) - F(x, \lambda_1 C_1)}{h}$$

ersetzt werden, und für den Grenzfall $h = 0$ reduziert sie sich auf:

$$z = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + C_2 \frac{\partial F}{\partial C_1}.$$

751. Beispiel. Die beiden, schon im § 745 behandelten simultanen Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0$$

ergeben nach der Methode von d'Alembert:

$$\frac{dt}{dx} + (3 - \lambda) t = 0,$$
$$\frac{d\lambda}{dx} - (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\lambda}{(\lambda - 1)^2} - dx = 0, \quad \text{also} \quad \lambda = 1 + \frac{1}{G - x}.$$

Man kann hier also

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_1 = 1 - \frac{1}{x}$$

setzen. Sind dann t_1, t_2 die Werte von t, welche diesen Werten von λ entsprechen, so ist:

$$\frac{dt_1}{dx} + 2t_1 = 0, \quad \frac{dt_2}{dx} + \left(2 + \frac{1}{x}\right) t_2 = 0,$$

also:

$$y + z = C_1 e^{-2x}, \quad y + z - \frac{z}{x} = C_2 \frac{e^{-2x}}{x}.$$

752. Das System mit beliebig vielen Gleichungen. Es seien n lineare Gleichungen erster Ordnung gegeben:

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} + P_1^{(1)} x_1 + P_2^{(1)} x_2 + \cdots + P_n^{(1)} x_n = V_1, \\ \dfrac{dx_2}{dx} + P_1^{(2)} x_1 + P_2^{(2)} x_2 + \cdots + P_n^{(2)} x_n = V_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dx_n}{dx} + P_1^{(n)} x_1 + P_2^{(n)} x_2 + \cdots + P_n^{(n)} x_n = V_n. \end{cases}$$

Die Koeffizienten $P_i^{(k)}$ und die rechten Seiten V_i sind gegebene Funktionen der unabhängigen Variabelen x. Wir addieren diese Gleichungen, nachdem wir sie zuvor mit den unbestimmten Faktoren

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}, 1$$

multipliziert haben, und setzen ferner

$$2) \qquad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + x_n = t,$$

sodann:

$$3) \quad \begin{cases} \lambda_1 P_1^{(1)} + \lambda_2 P_1^{(2)} + \cdots + \lambda_{n-1} P_1^{(n-1)} + P_1^{(n)} = \mathfrak{P}_1, \\ \lambda_1 P_2^{(1)} + \lambda_2 P_2^{(2)} + \cdots + \lambda_{n-1} P_2^{(n-1)} + P_2^{(n)} = \mathfrak{P}_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_1 P_n^{(1)} + \lambda_2 P_n^{(2)} + \cdots + \lambda_{n-1} P_n^{(n-1)} + P_n^{(n)} = \mathfrak{P}_n \end{cases}$$

und

$$4) \qquad \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_{n-1} V_{n-1} + V_n = \mathfrak{V}.$$

Man erhält:

$$\frac{dt}{dx} + \left(\mathfrak{P}_1 - \frac{d\lambda_1}{dx}\right) x_1 + \cdots + \left(\mathfrak{P}_{n-1} - \frac{d\lambda_{n-1}}{dx}\right) x_{n-1} + \mathfrak{P}_n x_n = \mathfrak{V}.$$

Wir ersetzen nun x_n durch seinen Wert aus der Gleichung 2) und benutzen die Unbestimmtheit der Faktoren λ, um die Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ zu eliminieren; die vorstehende Gleichung reduziert sich dann auf

$$5)\qquad \frac{dt}{dx} + \mathfrak{P}_n t = \mathfrak{B},$$

und man bekommt zur Bestimmung von λ die $n-1$ Gleichungen:

$$6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_1}{dx} + \mathfrak{P}_n\lambda_1 - \mathfrak{P}_1 = 0, \\ \dfrac{d\lambda_2}{dx} + \mathfrak{P}_n\lambda_2 - \mathfrak{P}_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{d\lambda_{n-1}}{dx} + \mathfrak{P}_n\lambda_{n-1} - \mathfrak{P}_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung 5) ist linear, aus ihr folgt:

$$7)\qquad t = e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\mathfrak{P}_n dx}\left[C + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{x}\mathfrak{P}_n dx}\,\mathfrak{B}\,dx\right];$$

C ist eine willkürliche Konstante.

Die $n-1$ Gleichungen 6) sind nicht linear; doch genügt es für unsern Zweck, n Systeme von Werten für die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ zu kennen, welche diese Gleichungen befriedigen. Denn bezeichnen wir allgemein mit

$$\lambda_1^{(i)},\ \lambda_2^{(i)}, \ldots\ \lambda_{n-1}^{(i)},$$

wobei der Index i von 1 bis n variiert, irgend eines dieser Systeme und mit $t^{(i)}$ den Wert von t, welchen die Gleichung 7) ergiebt, wenn man daselbst den Faktoren λ die Werte $\lambda^{(i)}$ beilegt und C_i an Stelle von C schreibt, so hat man n Integrale des simultanen Systemes von Differentialgleichungen, nämlich:

$$8)\qquad \begin{cases} \lambda_1^{(1)}x_1 + \lambda_2^{(1)}x_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(1)}x_{n-1} + x_n = t^{(1)}, \\ \lambda_1^{(2)}x_1 + \lambda_2^{(2)}x_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(2)}x_{n-1} + x_n = t^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_1^{(n)}x_1 + \lambda_2^{(n)}x_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(n)}x_{n-1} + x_n = t^{(n)}. \end{cases}$$

Die Determinante der Koeffizienten auf der linken Seite darf nicht verschwinden, und alsdann erhält man aus diesen Gleichungen für $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Werte von der Form:

$$9)\quad \begin{cases} x_1 = T_1^{(1)} t^{(1)} + T_1^{(2)} t^{(2)} + \cdots + T_1^{(n)} t^{(n)}, \\ x_2 = T_2^{(1)} t^{(1)} + T_2^{(2)} t^{(2)} + \cdots + T_2^{(n)} t^{(n)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n = T_n^{(1)} t^{(1)} + T_n^{(2)} t^{(2)} + \cdots + T_n^{(n)} t^{(n)}. \end{cases}$$

Die Koeffizienten T sind Funktionen von λ.

Ist nun X_i der Wert, welchen x_i annimmt, wenn man den Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ den Wert null beilegt, ist ferner z_i der Wert, welchen x_i erhält, wenn man die rechten Seiten $V_1, V_2, \ldots V_n$ der gegebenen Differentialgleichungen null setzt, so ist aus der Gleichung 7) ersichtlich, dass die Gleichungen 9) die Form erhalten:

$$x_1 = X_1 + z_1, \quad x_2 = X_2 + z_2, \ldots x_n = X_n + z_n.$$

Es besteht demnach der Satz:

Die Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$, *welche das Integralsystem des gegebenen simultanen Systemes 1) bilden, werden erhalten, indem man zu den Werten* $X_1, X_2, \ldots X_n$, *welche eine partikuläre Lösung ohne willkürliche Konstanten darstellen, diejenigen Werte von* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *addiert, welche das Integralsystem des Systemes 1) sind, wenn in demselben die rechten Seiten gleich null gesetzt werden.*

753. Sind die Koeffizienten der gegebenen Gleichungen konstant, so existieren im allgemeinen n Systeme der unbestimmten Faktoren λ, die sich auf Konstante reduzieren. Denn nehmen wir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ konstant an, so werden die Gleichungen 6):

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\lambda_1} = \frac{\mathfrak{P}_2}{\lambda_2} = \cdots = \frac{\mathfrak{P}_{n-1}}{\lambda_{n-1}} = \frac{\mathfrak{P}_n}{1}.$$

Bezeichnet man also mit ϱ den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse, so erhält man, indem man für $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_n$ ihre Werte 3) einsetzt:

$$10)\quad \begin{cases} (P_1^{(1)} - \varrho)\lambda_1 + P_1^{(2)}\lambda_2 + \cdots + P_1^{(n-1)}\lambda_{n-1} + P_1^{(n)} = 0, \\ P_2^{(1)}\lambda_1 + (P_2^{(2)} - \varrho)\lambda_2 + \cdots + P_2^{(n-1)}\lambda_{n-1} + P_2^{(n)} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_n^{(1)}\lambda_1 + P_n^{(2)}\lambda_2 + \cdots + P_n^{(n-1)}\lambda_{n-1} + (P_n^{(n)} - \varrho) = 0. \end{cases}$$

Die Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ zwischen diesen Gleichungen führt zu einer Gleichung

$$11) \qquad F(\varrho) = 0$$

vom Grade n in ϱ, deren linke Seite die Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} P_1^{(1)} - \varrho & P_1^{(2)} & \ldots P_1^{(n-1)} & P_1^{(n)} \\ P_2^{(1)} & P_2^{(2)} - \varrho & \ldots P_2^{(n-1)} & P_2^{(n)} \\ . & . & \ldots \; . & . \\ P_n^{(1)} & P_n^{(2)} & \ldots P_n^{(n-1)} & P_n^{(n)} - \varrho \end{vmatrix}.$$

Jeder Wurzel ϱ der Gleichung 11) entsprechen bestimmte Werte von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$, welche durch $n-1$ der Gleichungen 10) geliefert werden. Sind also die Wurzeln der Gleichung 11) alle verschieden, so erhält man auf diese Weise die notwendige Anzahl von Systemen für die Faktoren λ. Die Gleichung 7), welche die rechten Seiten der Integrale 8) bestimmt, wird hier

$$t = Ce^{-\varrho x} + e^{-\varrho x} \int_{x_0}^{x} e^{\varrho x} \mathfrak{V}\, dx.$$

Hat die Gleichung 11) gleiche Wurzeln, so giebt dieses Verfahren nicht n verschiedene Integrale; man kann dann, um die Zahl derselben zu vervollständigen, einen Weg einschlagen, der dem für zwei Gleichungen benutzten ganz analog ist.

Die Integration eines Systemes von linearen Gleichungen mit zweitem Gliede, wenn die Integrale der nämlichen Gleichungen ohne zweites Glied bekannt sind.

754. Die in dem § 723 und den folgenden hinsichtlich der linearen Gleichungen ohne zweites Glied mit zwei Variabelen aufgestellten Eigenschaften lassen sich auf simultane Systeme linearer Gleichungen ohne weiteres ausdehnen. Kennt man ferner die Integrale eines Systemes ohne zweite Glieder, so ist es leicht, hieraus auch die Integrale des Systemes mit zweitem Gliede abzuleiten, sowohl vermittelst der Methode von Cauchy (§ 728), als auch vermittelst der Variation der willkürlichen Konstanten. Wir wollen diese letztere Methode anwenden.

Wir betrachten die n Gleichungen:

$$
1)\quad \begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dx} + P_1^{(1)} x_1 + P_2^{(1)} x_2 + \cdots + P_n^{(1)} x_n = V_1, \\
\dfrac{dx_2}{dx} + P_1^{(2)} x_1 + P_2^{(2)} x_2 + \cdots + P_n^{(2)} x_n = V_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{dx_n}{dx} + P_1^{(n)} x_1 + P_2^{(n)} x_2 + \cdots + P_n^{(n)} x_n = V_n
\end{cases}
$$

und nehmen an, dass man n Systeme von partikulären Integralen für den Fall kennt, wo die rechten Seiten null sind, nämlich:

$$
\begin{array}{l}
x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}, \\
x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \ldots x_n^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots \\
x_1^{(n)},\ x_2^{(n)}, \ldots x_n^{(n)}.
\end{array}
$$

Dann ist evident, dass man den nämlichen Gleichungen ohne zweites Glied genügt, wenn man

$$
2)\quad \begin{cases}
x_1 = C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_1^{(2)} + \cdots + C_n x_1^{(n)}, \\
x_2 = C_1 x_2^{(1)} + C_2 x_2^{(2)} + \cdots + C_n x_2^{(n)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = C_1 x_n^{(1)} + C_2 x_n^{(2)} + \cdots + C_n x_n^{(n)}
\end{cases}
$$

setzt. Betrachtet man nun die willkürlichen Grössen C als variabel, so kann man die Gleichungen 2) als das Integralsystem der Gleichungen 1) ansehen. Dieses Verfahren ist, wie wir schon früher bemerkt haben, nichts anderes als eine Transformation der Variabelen.

Die Substitution der Werte 2) von $x_1, x_2, \ldots x_n$ in die Gleichungen 1) ergiebt nach den Reduktionen, die aus unserer Annahme hervorgehen:

$$
3)\quad \begin{cases}
x_1^{(1)} \dfrac{dC_1}{dx} + x_1^{(2)} \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + x_1^{(n)} \dfrac{dC_n}{dx} = V_1, \\
x_2^{(1)} \dfrac{dC_1}{dx} + x_2^{(2)} \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + x_2^{(n)} \dfrac{dC_n}{dx} = V_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(1)} \dfrac{dC_1}{dx} + x_n^{(2)} \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + x_n^{(n)} \dfrac{dC_n}{dx} = V_n.
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen liefern für $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx} \cdots \frac{dC_n}{dx}$ bestimmte Werte, falls die Gleichungen 2) bei konstanten Werten von C_1 wirklich die allgemeinen Integrale des Systemes ohne zweites Glied, d. h. auflösbar nach C sind. Man erhält sonach:

$$4) \qquad \frac{dC_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dC_2}{dx} = X_2, \quad \ldots \quad \frac{dC_n}{dx} = X_n,$$

wobei die Grössen $X_1, \ldots X_n$ bekannte Funktionen von x sind, und hieraus folgt:

$$5) \qquad C_1 = c_1 + \int_{x_0}^{x} X_1\, dx, \quad \ldots \quad C_n = c_n + \int_{x_0}^{x} X_n\, dx,$$

$c_1, c_2, \ldots c_n$ sind willkürliche Konstanten.

Die Bedingung, dass das System partikulärer Integrale das allgemeine Integralsystem liefert, kann wiederum in zweierlei Form ausgedrückt werden. Da die Gleichungen 2) nach den Konstanten auflösbar sein müssen, damit einem willkürlich fixierten Werte von x beliebig gewählte Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ entsprechen, darf die Determinante der partikulären Integrale

$$6) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

nicht identisch, d. h. bei allen Werten von x verschwinden. Diese Bedingung aber ist äquivalent mit der folgenden: Es dürfen zwischen den Integralen der nämlichen Variabelen keine linearen Relationen mit konstanten Koeffizienten bestehen, also kein, simultanes Gleichungssystem von der Form:

$$7) \qquad \begin{cases} \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)} + \cdots + \alpha_n x_1^{(n)} = 0, \\ \alpha_1 x_2^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(2)} + \cdots + \alpha_n x_2^{(n)} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)} + \cdots + \alpha_n x_n^{(n)} = 0, \end{cases}$$

in welchem die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ Konstante bezeichnen. Dass solch ein System immer das Verschwinden der obigen Determinante nach sich zieht, ist leicht einzusehen; aber auch umgekehrt folgt aus dem identischen Verschwinden der obigen Determinante dieses lineare System zwischen den Funktionen $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \ldots x_n^{(i)}$, wenn diese zugleich Integrale des simultanen Systemes linearer Differentialgleichungen sind. Denn ist die Determinante Δ null bei allen Werten von x, so kann man n Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ angeben, so dass die Gleichungen:

$$8)\quad \begin{cases} u_1 x_1^{(1)} + u_2 x_1^{(2)} + \cdots + u_n x_1^{(n)} = 0, \\ u_1 x_2^{(1)} + u_2 x_2^{(2)} + \cdots + u_n x_2^{(n)} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1 x_n^{(1)} + u_2 x_n^{(2)} + \cdots + u_n x_n^{(n)} = 0 \end{cases}$$

identisch bestehen. Man braucht für die Funktionen u nur Werte einzusetzen, welche den Unterdeterminanten einer Horizontalzeile in der obigen Determinante Δ proportional sind. Dann ist aber auch

$$\begin{gathered} u_1 \frac{dx_1^{(1)}}{dx} + u_2 \frac{dx_1^{(2)}}{dx} + \cdots + u_n \frac{dx_1^{(n)}}{dx} = 0, \\ u_1 \frac{dx_2^{(1)}}{dx} + u_2 \frac{dx_2^{(2)}}{dx} + \cdots + u_n \frac{dx_2^{(n)}}{dx} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1 \frac{dx_n^{(1)}}{dx} + u_2 \frac{dx_n^{(2)}}{dx} + \cdots + u_n \frac{dx_n^{(n)}}{dx} = 0, \end{gathered}$$

wie man ohne weiteres erkennt, wenn man für die Differentialquotienten ihre Werte aus dem linearen Differentialgleichungssystem einsetzt. Differentiiert man also das vorhergehende System, so ist:

$$9)\quad \begin{cases} u'_1 x_1^{(1)} + u'_2 x_1^{(2)} + \cdots + u'_n x_1^{(n)} = 0, \\ u'_1 x_2^{(1)} + u'_2 x_2^{(2)} + \cdots + u'_n x_2^{(n)} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u'_1 x_n^{(1)} + u'_2 x_n^{(2)} + \cdots + u'_n x_n^{(n)} = 0, \end{cases}$$

wobei u'_i die Ableitung von u_i bezeichnet. Hieraus folgt im Zusammenhange mit den Gleichungen 8), dass

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{u'_2}{u_2} = \cdots = \frac{u'_n}{u_n}$$

ist; oder wenn man den gemeinsamen Wert dieser Quotienten mit ϱ bezeichnet:

$$10)\quad u_1 = \alpha_1 e^{\int \varrho\, dx}, \quad u_2 = \alpha_2 e^{\int \varrho\, dx}, \ldots u_n = \alpha_n e^{\int \varrho\, dx},$$

d. h. die Verhältnisse der Funktionen u sind konstant.

Zweite Methode zur Bestimmung der Integrale eines Systemes mit konstanten Koeffizienten.

755. An Stelle der d'Alembertschen Methode kann man bei konstanten Koeffizienten auch das Verfahren benutzen, welches wir bei einer linearen Gleichung mit zwei Variabelen angewandt haben. Es seien die n Gleichungen ohne zweites Glied:

$$1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} + P_1^{(1)} x_1 + P_2^{(1)} x_2 + \cdots + P_n^{(1)} x_n = 0, \\ \dfrac{dx_2}{dx} + P_1^{(2)} x_1 + P_2^{(2)} x_2 + \cdots + P_n^{(2)} x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dx_n}{dx} + P_1^{(n)} x_1 + P_2^{(n)} x_2 + \cdots + P_n^{(n)} x_n = 0; \end{cases}$$

die Koeffizienten P sind konstant. Wir setzen:

$$2)\qquad x_1 = \lambda_1 e^{-\varrho x}, \quad x_2 = \lambda_2 e^{-\varrho x}, \ldots x_{n-1} = \lambda_{n-1} e^{-\varrho x}, \quad x_n = e^{-\varrho x},$$

und substituieren diese Werte in die Gleichungen 1); nach Unterdrückung des Faktors $e^{-\varrho x}$ erhält man:

$$3)\qquad \begin{cases} (P_1^{(1)} - \varrho)\lambda_1 + P_2^{(1)}\lambda_2 + \cdots + P_{n-1}^{(1)}\lambda_{n-1} + P_n^{(1)} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_1^{(n)}\lambda_1 + P_2^{(n)}\lambda_2 + \cdots + P_{n-1}^{(n)}\lambda_{n-1} + (P_n^{(n)} - \varrho) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind die nämlichen, wie die Gleichungen 10) im § 753, und führen also auch durch Elimination der Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ auf die nämliche Gleichung n^{ten} Grades für ϱ; jeder Wurzel dieser Gleichung

$$4)\qquad F(\varrho) = 0$$

entsprechen im allgemeinen bestimmte Werte von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$.

Hat die Gleichung 4) n verschiedene Wurzeln, so kann man mittelst der Gleichungen 2) n Systeme von linear unabhängigen, partikulären Integralen bilden. Sind also

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$$

die n Wurzeln von ϱ,

$$\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, \ldots \lambda_i^{(n)}$$

die entsprechenden Werte von λ_i, und

$$C_1, C_2, \ldots C_n$$

n willkürliche Konstanten, so werden die Integrale des gegebenen Systemes:

$$5)\quad \begin{cases} x_1 = C_1 \lambda_1^{(1)} e^{-\varrho_1 x} + C_2 \lambda_1^{(2)} e^{-\varrho_2 x} + \cdots + C_n \lambda_1^{(n)} e^{-\varrho_n x}, \\ x_2 = C_1 \lambda_2^{(1)} e^{-\varrho_1 x} + C_2 \lambda_2^{(2)} e^{-\varrho_2 x} + \cdots + C_n \lambda_2^{(n)} e^{-\varrho_n x}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n = C_1 e^{-\varrho_1 x} + C_2 e^{-\varrho_2 x} + \cdots + C_n e^{-\varrho_n x}. \end{cases}$$

Es ist leicht, in jedem Falle die Modifikationen zu finden, denen diese Gleichungen zu unterwerfen sind, wenn einige der Wurzeln ϱ unter einander gleich werden. Was wir im § 750 darüber gesagt haben, erscheint uns ausreichend, und wir wollen bei dieser Frage nicht weiter verweilen.

Über eine Klasse von linearen Gleichungen.

756. Wir halten es für nützlich, zum Schlusse dieses Kapitels noch ein bemerkenswertes Resultat anzugeben, welches von Jacobi gefunden ist, und im Zusammenhange steht mit der Theorie, von der wir hier handeln.

Wir betrachten ein System von n beliebigen Differentialgleichungen *erster Ordnung* zwischen einer unabhängigen Variabelen x und n abhängigen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Mit x'_i bezeichnen wir die Ableitung $\frac{dx_i}{dx}$ und mit

$$1)\qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots F_n = 0$$

die gegebenen Differentialgleichungen. $F_1, F_2, \ldots F_n$ sind irgend welche Funktionen von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und den Ableitungen $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$.

Wir nehmen an, dass man die vollständigen Integrale des Systemes 1) kennt, und dass dieselben nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufgelöst sind; wir bezeichnen sie mit

$$2)\qquad x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \ldots, \quad x_n = X_n;$$

$X_1, X_2, \ldots X_n$ sind Funktionen von x und von n willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Trägt man die Werte 2) in die Gleichungen 1) ein, so werden diese Identitäten, und man gewinnt aus ihnen neue

Identitäten durch Differentiation nach den willkürlichen Konstanten. Differentiieren wir z. B. die Gleichung

$$F_i = 0$$

nach der willkürlichen Konstante a_μ, so folgt:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_\mu}+\frac{\partial F_i}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial a_\mu}\right)+\cdots+\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial a_\mu}+\frac{\partial F_i}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial a_\mu}\right)=0,$$

eine Gleichung, welche identisch erfüllt ist nach der Substitution der Werte 2). Nun ist aber $\frac{\partial x'_k}{\partial a_\mu}$ gleich $\frac{\partial \frac{\partial x_k}{\partial a_\mu}}{\partial x}$; wenn man also mit $U_i^{(k)}$, $V_i^{(k)}$ die Werte darstellt, welche $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial F_i}{\partial x'_k}$ nach Substitution der Werte 2) annehmen, so haben wir die Identität:

$$3)\quad \left[U_i^{(1)}\frac{\partial X_1}{\partial a_\mu}+V_i^{(1)}\frac{\partial \frac{\partial X_1}{\partial a_\mu}}{\partial x}\right]+\cdots+\left[U_i^{(n)}\frac{\partial X_n}{\partial a_\mu}+V_i^{(n)}\frac{\partial \frac{\partial X_n}{\partial a_\mu}}{\partial x}\right]=0.$$

Dies festgesetzt, betrachten wir die n linearen simultanen Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \left(U_1^{(1)}z_1+V_1^{(1)}\frac{dz_1}{dx}\right)+\cdots+\left(U_1^{(n)}z_n+V_1^{(n)}\frac{dz_n}{dx}\right)=0, \\ \left(U_2^{(1)}z_1+V_2^{(1)}\frac{dz_1}{dx}\right)+\cdots+\left(U_2^{(n)}z_n+V_2^{(n)}\frac{dz_n}{dx}\right)=0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \left(U_n^{(1)}z_1+V_n^{(1)}\frac{dz_1}{dx}\right)+\cdots+\left(U_n^{(n)}z_n+V_n^{(n)}\frac{dz_n}{dx}\right)=0, \end{cases}$$

in denen $z_1, z_2, \ldots z_n$ unbekannte Funktionen bezeichnen, und die Grössen U, V gegebene Funktionen von z und von n Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ sind. Auf Grund der Identität 3), welche bei jedem Wert von i gleich 1 bis i gleich n gilt, sind die Gleichungen 4) erfüllt, wenn man

$$z_1=\frac{\partial X_1}{\partial a_\mu},\quad z_2=\frac{\partial X_2}{\partial a_\mu},\cdots\quad z_n=\frac{\partial X_n}{\partial a_\mu}$$

setzt; also wird das vollständige Integralsystem der Gleichungen 4):

$$
5) \quad \left\{ \begin{aligned}
z_1 &= C_1 \frac{\partial X_1}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial X_1}{\partial a_2} + \cdots + C_n \frac{\partial X_1}{\partial a_n}, \\
z_2 &= C_1 \frac{\partial X_2}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial X_2}{\partial a_2} + \cdots + C_n \frac{\partial X_2}{\partial a_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_n &= C_1 \frac{\partial X_n}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial X_n}{\partial a_2} + \cdots + C_n \frac{\partial X_n}{\partial a_n},
\end{aligned} \right.
$$

wobei $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkürliche Konstanten sind.

So führt also jedes System von simultanen Gleichungen, dessen vollständiges Integral bekannt ist, zu einem Systeme von linearen Differentialgleichungen mit variabelen Koeffizienten, dessen Integral alsdann durch einfache Differentiationen gewonnen wird.

Fünftes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen durch Reihenentwickelung oder durch bestimmte Integrale.

Anwendung der Taylorschen und der Mac-Laurinschen Entwickelung.

757. Es giebt in der Analysis keine allgemeine Methode, um die Integration der Differentialgleichungen auf Quadraturen zurückzuführen; man muss daher bei der Lösung von Differentialgleichungen im allgemeinen die Methoden der Entwickelung in unendliche Reihen anwenden. Aber auch die Anwendung dieses Verfahrens wird bei nicht linearen Gleichungen schwierig, falls man sich nicht auf eine sehr kleine Anzahl von Gliedern beschränken kann, um auf diese Weise wenigstens eine angenäherte Darstellung des Integrales zu gewinnen. Wir stellen uns die Aufgabe, in diesem Kapitel einige Grundzüge des Verfahrens anzugeben, welches zur Integration vermittelst unendlicher Reihen dient.

Zunächst bietet sich die Anwendung der Taylorschen und Mac-Laurinschen Formeln dar. Wir haben die erstere bereits benutzt, um die Existenz der Integralgleichungen zu beweisen; an ihre Stelle kann man auch die Entwickelung von Mac-Laurin einführen, welche oft zu einfacheren Resultaten führt, die aber, weil sie vom Punkte $x = 0$ ausgeht, nicht immer das vollständige Integral liefert, wie im folgenden an einem Beispiel gezeigt werden soll.

Die Möglichkeit der Potenzreihenentwickelung lässt sich bei linearen Gleichungen bestimmter nachweisen, als bei den nicht linearen Gleichungen, weil bei den ersteren unmittelbar aus der Differentialgleichung erkannt werden kann, welche Stellen allein singuläre Punkte für das vollständige Integral werden können, so dass der

Konvergenzbereich der Potenzreihe, wenn ein beliebiger Punkt zum Mittelpunkte der Entwickelung gewählt ist, von vornherein festgestellt werden kann. Es wird daher nützlich sein, den allgemeinen Beweis der §§ 622 und 623 für eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung besonders zu betrachten in der Form, welche Herr Fuchs (Journ. f. Math., Bd. 66) ihm gegeben hat.

Es sei

$$1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} = P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y$$

eine lineare Gleichung n^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten Funktionen von x sind, die innerhalb eines gegebenen Bereiches T der Ebene, deren Punkte die reellen und komplexen Werte von x darstellen, in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig werden, im übrigen aber innerhalb dieser Fläche eindeutig und stetig sind. Diejenigen Punkte innerhalb T, für welche eine oder mehrere der Funktionen P unstetig sind, nennen wir *singuläre* Punkte. Es sei ferner x_0 irgend ein Punkt in T und um denselben ein Kreis beschrieben, welcher sich bis zum nächsten singulären Punkte erstreckt, so dass also innerhalb dieses Kreises kein singulärer Punkt liegt; das Innere dieses Kreises nennen wir *das Gebiet des Punktes* x_0. Alsdann besteht der Satz:

Zu jedem Punkte x_0, *der nicht zu den singulären gehört, giebt es eine eindeutige und stetige, analytische Funktion* y, *welche der Differentialgleichung genügt und so beschaffen ist, dass* $y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ *für* $x = x_0$ *beliebig gewählte Werte annehmen; diese Funktion ist also innerhalb des Gebietes des Punktes* x_0 *durch eine konvergente, nach ganzen Potenzen von* $x - x_0$ *fortschreitende Reihe darstellbar.*

In dem Gebiete von x_0 innerhalb T seien die Maxima der Moduln der Funktionen $P_1, P_2, \dots P_n$ bezüglich $M_1, M_2, \dots M_n$; ist a_1 der dem Punkte x_0 zunächst liegende singuläre Punkt, und setzt man $\operatorname{mod}(a_1 - x_0) = R$, und

$$2)\quad \frac{M_1}{1 - \dfrac{x - x_0}{R}} = \varphi_1, \quad \frac{M_2}{1 - \dfrac{x - x_0}{R}} = \varphi_2, \cdots \frac{M_n}{1 - \dfrac{x - x_0}{R}} = \varphi_n,$$

so ist bekanntlich für jedes ganzzahlige m (§ 619):

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^m P_1}{dx^m}\right)_0 < m!\,\frac{M_1}{R^m}, \quad \operatorname{mod}\left(\frac{d^m P_2}{dx^m}\right)_0 < m!\,\frac{M_2}{R^m}, \cdots \operatorname{mod}\left(\frac{d^m P_n}{dx^m}\right)_0 < m!\,\frac{M_n}{R^m},$$

wenn wir mit dem Index 0 bezeichnen, dass die Funktionen für $x = x_0$ zu bilden sind; also ist auch

$$3)\left\{\begin{array}{l}\operatorname{mod}\left(\frac{d^m P_1}{dx^m}\right)_0 < \operatorname{mod}\left(\frac{d^m \varphi_1}{dx^m}\right)_0, \quad \operatorname{mod}\left(\frac{d^m P_2}{dx^m}\right)_0 < \operatorname{mod}\left(\frac{d^m \varphi_2}{dx^m}\right)_0, \\ \qquad \ldots \operatorname{mod}\left(\frac{d^m P_n}{dx^m}\right)_0 < \operatorname{mod}\left(\frac{d^m \varphi_n}{dx^m}\right)_0.\end{array}\right.$$

Die sämtlichen Ableitungen einer Funktion, welche der linearen Differentialgleichung genügt, lassen sich auf die Form bringen ($k \geqq n$):

$$4) \qquad \frac{d^k y}{dx^k} = \alpha_1^{(k)} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \alpha_2^{(k)} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + \alpha_n^{(k)} y,$$

wobei die Koeffizienten α sich aus den Grössen P und deren Ableitungen durch die Operation der Addition und Multiplikation zusammensetzen.

Bildet man nun die lineare Differentialgleichung

$$5) \qquad \frac{d^n u}{dx^n} = \varphi_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \varphi_2 \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \cdots + \varphi_n u,$$

so lassen sich die sämtlichen Ableitungen einer Funktion u, welche derselben genügt, in der Form darstellen:

$$6) \qquad \frac{d^k u}{dx^k} = \beta_1^{(k)} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \beta_2^{(k)} \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \cdots + \beta_n^{(k)} u.$$

Die Grössen β werden aus den entsprechenden Grössen α dadurch abgeleitet, dass man an Stelle einer jeden Funktion P und ihrer Ableitungen die entsprechende Funktion φ und ihre entsprechenden Ableitungen einsetzt.

Hieraus folgt, dass für den Wert $x = x_0$

$$\beta_1^{(k)} > \operatorname{mod} \alpha_1^{(k)}, \quad \beta_2^{(k)} > \operatorname{mod} \alpha_2^{(k)}, \ldots \beta_n^{(k)} > \operatorname{mod} \alpha_n^{(k)}$$

ist. Wenn sich also eine Funktion u bestimmen lässt, welche in dem Gebiete von x_0 eindeutig und stetig ist, ferner der Differentialgleichung 5) genügt und für $x = x_0$ nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen beliebig gegebene positive Werte annimmt, so existiert auch eine in dem Gebiete von x_0 eindeutige, kontinuierliche und endliche Funktion y von der Beschaffenheit, dass sie der Differentialgleichung 1) genügt und dass $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ für $x = x_0$ beliebig gegebene Werte annehmen.

Setzt man $\frac{x - x_0}{R} = z$, so lässt sich die Gleichung 5) auf die Form bringen:

$$7) \; (1 - z) \frac{d^n u}{dz^n} = M_1 R \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + M_2 R^2 \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-2}} + \cdots + M_n R^n u.$$

Man kann derselben durch eine Potenzreihe

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

genügen; man erhält nämlich zur Bestimmung der Koeffizienten allgemein die Rekursionsformel:

$$8)\quad \left\{\begin{aligned}(n+k)(n+k-1)\dots(k+1)a_{n+k} = {} & (n+k-1)(n+k-2)\dots(k+1)[k+M_1R]\,a_{n+k-1}\\ & +(n+k-2)(n+k-3)\dots(k+1)M_2R^2 a_{n+k-2}\\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ & + M_n R^n a_k.\end{aligned}\right.$$

Wählt man die Anfangsglieder $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$ positiv, so werden auch alle übrigen Koeffizienten positiv; und es ist:

$$a_{n+k} = \frac{k + M_1 R}{n+k} a_{n+k-1} + \psi,$$

wobei ψ eine positive Grösse ist.

Man kann nun annehmen, dass $M_1 R > n$ ist. Denn wenn dieses nicht stattfindet, so bleiben alle früheren Schlüsse giltig, wenn man M_1 so gross annimmt, dass diese Bedingung erfüllt ist; also ist

$$a_{n+k} > a_{n+k-1}$$

für jedes ganzzahlige k, d. h. die Koeffizienten der Reihe wachsen mit wachsendem Index. Ist also $r < s$, so ist $\frac{a_r}{a_s}$ nicht unendlich für alle Werte von r und s. Aus der Gleichung 8) folgt nun:

$$\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} = \frac{k+M_1R}{n+k} + \frac{M_2R^2}{(n+k)(n+k-1)}\frac{a_{n+k-2}}{a_{n+k-1}} + \cdots$$
$$+ \frac{M_nR^n}{(n+k)(n+k-1)\dots k+1}\cdot\frac{a_k}{a_{n+k-1}}.$$

Hieraus folgt für $k=\infty$:

$$\lim \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} = 1,$$

und also ist

$$\lim \frac{z^{n+k}a_{n+k}}{z^{n+k-1}a_{n+k-1}} = z \qquad \text{für } k = \infty,$$

d. h. die Reihe für u ist konvergent, solange der Modul von z kleiner als eins ist. Die Differentialgleichung 5) hat also ein in dem Gebiete von x_0 giltiges Integral der Form $\sum_{k=0}^{k=\infty} b_k(x-x_0)^k$, derart, dass $b_0, b_1, \dots b_{n-1}$ beliebige positive Werte erhalten können, und hiermit ist die Existenz einer Funktion y von der geforderten Beschaffenheit für das Gebiet des Punktes x_0 bewiesen.

Für einen singulären Punkt gilt der bewiesene Satz nicht mehr; es ist ebenso wohl möglich, dass keine einzige Funktion existiert, welche der Differentialgleichung genügt und in dem Gebiete des singulären Punktes regulär ist, wie auch, dass n partikuläre Funktionen dieser Art, welche ein Fundamentalsystem bilden, vorhanden sind.

Grundlegend wird hierbei der Satz von Herrn Fuchs, den wir nur ohne Beweis anführen wollen: Bei einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, in welcher die Koeffizienten die oben angeführten Eigenschaften haben, giebt es, wenn a_1 irgend einen der singulären Punkte bezeichnet, stets ein Fundamentalsystem, wovon wenigstens ein Element mit einer Potenz von $x - a_1$ multipliziert in dem Gebiete von a_1 eindeutig und stetig, also durch eine Reihe nach ganzen Potenzen von $x - a_1$ darstellbar wird.

758. Wir betrachten die lineare Gleichung zweiter Ordnung, welche bei verschiedenen Problemen der mathematischen Physik auftritt:

$$1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0.$$

Der Punkt $x = 0$ ist der einzige singuläre Punkt im endlichen, n und m^2 bezeichnen zwei reelle, positive oder negative, gegebene Zahlen. Wir multiplizieren die Gleichung mit x und differentiieren sie alsdann $\mu - 1$ mal; es wird

$$2)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2n\frac{dy}{dx} - m^2xy = 0,$$

$$3)\quad \left[x\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} + (\mu-1)\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right] + 2n\frac{d^\mu y}{dx^\mu} - m^2\left[x\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}} + (\mu-1)\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}}\right] = 0.$$

Für $x = 0$ ergeben diese Gleichungen, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ endlich sein sollen:

$$4)\qquad \frac{dy}{dx} = 0,\quad (2n + \mu - 1)\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = (\mu - 1)m^2\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}};$$

für den Fall $\mu = 2$ ist diese letztere Gleichung:

$$5)\qquad (2n+1)\frac{d^2y}{dx^2} = m^2y.$$

Man erkennt, dass wenn $2n$ nicht eine ganze negative Zahl ist, die Ableitungen ungerader Ordnung null sind, während die Ableitungen gerader Ordnung durch die Formel geliefert werden:

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k-1)} m^{2k} y.$$

Bezeichnet also C den willkürlichen Wert von y, welcher zu $x=0$ gehört, so ergiebt die Mac-Laurinsche Formel ein partikuläres Integral der Gleichung 1):

$$6)\ y = C\left[1 + \frac{m^2x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4x^4}{2.4.(2n+1)(2n+3)} + \frac{m^6x^6}{2.4.6.(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \cdots\right].$$

Diese Formel ist illusorisch, wenn $2n$ gleich einer ganzen negativen ungeraden Zahl ist. Lassen wir aber diesen Fall vorerst bei Seite, so ist die Reihe bei allen endlichen Werten von x konvergent, denn das Verhältnis des $k+1^{\text{ten}}$ Gliedes zum k^{ten} ist:

$$\frac{m^2x^2}{2k.(2n+2k-1)}$$

und konvergiert also nach null, wenn k unendlich wird.

759. Untersuchen wir nun den Fall, wo $2n$ gleich einer ganzen negativen Zahl ist. Ist diese ganze Zahl ungerade, so sieht man aus den Gleichungen 4), dass die Ableitungen ungerader Ordnung für $x=0$ null sind, wie in dem allgemeinen Fall. Dieselbe Gleichung lehrt auch, dass $\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}} = 0$ ist für $\mu = 1-2n$, wenn die höheren Ableitungen endlich bleiben sollen, und folglich ist:

$$y=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=0, \cdots \frac{d^{-1-2n}y}{dx^{-1-2n}} = 0.$$

Die Ableitung $\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$ kann nun willkürlich gewählt werden; aber alle folgenden Ableitungen gerader Ordnung sind dann bestimmt. Bezeichnet man also mit C_1 den willkürlichen Wert von

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(1-2n)}\,\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$$

für $x=0$, so giebt die Mac-Laurinsche Entwickelung:

$$7)\quad \begin{cases} y = C_1 x^{1-2n}\Big[1 + \dfrac{m^2x^2}{2.(3-2n)} + \dfrac{m^4x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)} \\ \qquad\qquad + \dfrac{m^6x^6}{2.4.6.(3-2n)(5-2n)(7-2n)} + \cdots\Big]. \end{cases}$$

Ist $2n$ eine ganze negative, gerade Zahl, so werden die Ableitungen ungerader Ordnung für $x=0$ ebenfalls null, nach den Gleichungen 4), bis zu denjenigen, deren Ordnung $-1-2n$ ist. Der Wert der Ableitung $\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$ kann willkürlich gewählt werden, wie in dem vorigen Fall, und die Ableitungen gerader Ordnung, welche auf diese folgen, sind dann bestimmt. Andererseits ist auch der Wert von y für $x=0$ willkürlich in diesem Falle, und er bestimmt die Werte der Ableitungen gerader Ordnung. Also giebt die Mac-Laurinsche Formel hier eine Lösung, welche zwei willkürliche Konstanten enthält, und die man durch Addition der in den Gleichungen 6) und 7) enthaltenen Reihen bilden kann. Diese Lösung ist das vollständige Integral.

Man kann dasselbe in allen Fällen durch die Taylorsche Entwickelung gewinnen, indem man einen beliebigen anderen Punkt x_0 zum Mittelpunkt der Reihenentwickelung macht; die Koeffizienten sind aus den Gleichungen 2) und 3) zu berechnen, und die Reihe konvergiert sicherlich, solange $\operatorname{mod}(x-x_0) < \operatorname{mod} x_0$ ist. Das Resultat ist indessen kompliziert, und die Ausführung der Rechnung bietet weiter kein Interesse.

Die Transformation der Variabelen verbunden mit der Mac-Laurinschen Entwickelung.

760. Wir haben soeben ein partikuläres Integral der Gleichung

$$1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\,\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$$

erhalten; um das vollständige Integral zu bilden, muss man ein zweites partikuläres kennen, und da dieses im allgemeinen nicht nach der Formel von Mac-Laurin entwickelbar ist, so ist es angezeigt, zu untersuchen, ob nicht durch eine Änderung der Variabelen die Anwendung dieser Formel zulässig wird. Zu dem Zwecke setzen wir

$$y = x^{\mu} z,$$

wobei μ ein noch unbestimmter Exponent und z eine neue Variabele ist. Die Differentiation liefert:

$$\frac{dy}{dx} = x^{\mu} \frac{dz}{dx} + \mu x^{\mu-1} z,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^{\mu} \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu x^{\mu-1} \frac{dz}{dx} + \mu(\mu-1) x^{\mu-2} z.$$

Trägt man diese Werte in die Gleichung 1) ein und dividiert alsdann dieselbe durch x^{μ}, so folgt:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2n+2\mu}{x} \frac{dz}{dx} + \left[\frac{\mu(2n+\mu-1)}{x^2} - m^2\right] z = 0.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie die vorige, wenn man

$$\mu = 1 - 2n$$

annimmt; alsdann wird sie:

$$2) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2(1-n)}{x} \frac{dz}{dx} - m^2 z = 0,$$

und folgt also aus der Gleichung 1), indem man dort n in $1-n$ verwandelt; man führt also den Fall, dass n negativ ist, auf den Fall n positiv zurück. Nun ist evident, dass man ein neues partikuläres Integral der Gleichung 1) bekommt, indem man n in $1-n$ verwandelt in dem Integrale, welches wir im vorigen Paragraphen entwickelt haben, und dieses noch mit x^{1-2n} multipliziert.

Mit den beiden partikulären Integralen lässt sich das vollständige bilden, wie wir es schon für den Fall, dass $2n$ eine ganze negative gerade Zahl ist, erhalten haben, nämlich:

$$3) \quad \begin{cases} y = C\left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4 x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)} + \cdots\right] \\ \quad + C' x^{1-2n}\left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^4 x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)} + \cdots\right]. \end{cases}$$

C und C' sind zwei willkürliche Konstanten. Dabei muss man noch immer den Fall, dass $2n$ eine ganze ungerade, positive oder negative Zahl ist, ausnehmen. Ist $2n = 1$, so werden die beiden partikulären Integrale identisch, und wenn $2n$ eine ganze ungerade Zahl verschieden von $+1$ ist, so wird eines der beiden Integrale illusorisch. Wir kommen später noch auf diese Ausnahmefälle zurück.

761. Der Fall $n = 1$ mag noch besonders bemerkt werden; man kann hier leicht die Summen der beiden Reihen durch elementare Funktionen ausdrücken. Schreibt man Cm an telle von C, so wird die Gleichung 3):

$$y = \frac{C}{x}\left(\frac{mx}{1} + \frac{m^3 x^3}{1.2.3} + \frac{m^5 x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right)$$
$$+ \frac{C'}{x}\left(1 + \frac{m^2 x^2}{1.2} + \frac{m^4 x^4}{1.2.3.4} + \cdots\right)$$

oder:

$$y = \frac{C}{x}\,\frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} + \frac{C'}{x}\,\frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}.$$

Bezeichnet man mit A und B zwei neue willkürliche Konstanten, so kann man auch schreiben:

$$y = \frac{Ae^{mx} + Be^{-mx}}{x}.$$

Die Transformation, welche wir in dem vorigen Paragraphen ausführten, liefert dieses Resultat unmittelbar; denn für $n = 1$ reduziert sich die Gleichung 2) auf

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - m^2 z = 0,$$

und ihr vollständiges Integral ist:

$$z = Ae^{mx} + Be^{-mx}.$$

Wenn m^2 negativ ist, und man setzt $m^2 = -\mu^2$, so lässt sich das Integral auch schreiben:

$$y = \frac{C \sin \mu x + C' \cos \mu x}{x}.$$

15*

Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

762. An Stelle der Mac-Laurinschen Entwickelung kann man die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwerten, die eine grössere Allgemeinheit mit sich führt.

Wir betrachten wieder die Gleichung:

$$1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2n}{x}\frac{dy}{dx}-m^2y=0,$$

und versuchen derselben zu genügen, indem wir setzen:

$$2)\qquad y=Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+Dx^\delta+\cdots,$$

wobei α, β, γ, δ ... wachsende Exponenten sein sollen. Aus der Gleichung 2) kann man folgern:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\alpha Ax^{\alpha-1}+\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\delta Dx^{\delta-1}+\cdots \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}+\beta(\beta-1)Bx^{\beta-2}+\gamma(\gamma-1)Cx^{\gamma-2} \\ \qquad\qquad +\delta(\delta-1)Dx^{\delta-2}+\cdots \end{cases}$$

Trägt man diese Werte in die Gleichung 1) ein, so wird:

$$A[\alpha(\alpha+2n-1)x^{\alpha-2}-m^2x^\alpha]+B[\beta(\beta+2n-1)x^{\beta-2}-m^2x^\beta]+\cdots=0,$$

und dieses muss sich auf eine Identität reduzieren lassen. Der kleinste Exponent von x in dieser Gleichung ist $\alpha-2$, und damit das Glied dieser Ordnung verschwindet, muss

$$\alpha=0 \quad\text{oder}\quad \alpha=1-2n$$

sein. Unter den übrigen Termen sind von kleinster Ordnung diejenigen, welche die Faktoren x^α, $x^{\beta-2}$ enthalten. Es kann nun nicht $\beta-2>\alpha$ sein, denn daraus würde folgen, dass $A=0$ ist, eine Annahme, welche zu verwerfen ist. Also ist:

$$\beta-2=\alpha \quad\text{oder}\quad \beta-2<\alpha.$$

Bei der zweiten Annahme müsste

$$\beta(\beta+2n-1)=0$$

sein, d. h. entweder $\beta=0$ oder $\beta=1-2n$. Dieses ist nur zulässig, wenn man für α den kleineren der beiden Werte 0 und $1-2n$ gewählt hat; alsdann kann man für β den grösseren dieser beiden Werte wählen. Hat man aber für α den grösseren der Werte 0 und $1-2n$ gewählt, so muss man $\beta = \alpha + 2$ setzen.

Wir nehmen an, dass α und β die Werte 0 und $1-2n$ erhalten haben; da nun γ nicht einen dieser Werte mehr erhalten kann, so folgt, dass $\gamma = \alpha + 2$, ferner dass $\delta = \beta + 2$ u. s. w. ist. Sind die Exponenten bekannt, so lassen sich die Koeffizienten ohne weiteres bestimmen. Einfacher ist es noch, wenn wir die Werte $\alpha = 0$, $\alpha = 1 - 2n$ nach einander anwenden und annehmen, dass

$$\beta = \alpha + 2, \quad \gamma = \beta + 2, \quad \delta = \gamma + 2, \ldots$$

ist. Auf diese Weise erhält man zuerst

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 6, \ldots$$

und indem man die Bedingungen bildet, dass die Glieder gleicher Ordnung in x verschwinden, erhält man:

$$B = \frac{m^2 A}{2(2n+1)}, \quad C = \frac{m^2 B}{4(2n+3)}, \quad D = \frac{m^2 C}{6(2n+5)}, \ldots$$

Setzt man sodann

$$\alpha = 1 - 2n, \quad \beta = 3 - 2n, \quad \gamma = 5 - 2n, \ldots$$

und verfährt in der nämlichen Weise, so folgt:

$$B = \frac{m^2 A}{2(3-2n)}, \quad C = \frac{m^2 B}{4(5-2n)}, \quad D = \frac{m^2 C}{6(7-2n)}, \ldots$$

Sonach hat man, wenn man in beiden Fällen $A = 1$ annimmt, die beiden partikulären Integrale:

$$y_1 = 1 + \frac{m^2 x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4 x^4}{2 \,.\, 4(2n+1)(2n+3)} + \cdots,$$

$$y_2 = x^{1-2n}\left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^4 x^4}{2 \,.\, 4(3-2n)(5-2n)} + \cdots\right],$$

wonach man das bereits früher erhaltene allgemeine Integral

$$y = C y_1 + C' y_2$$

zusammensetzt, mit Ausnahme des Falles, dass $2n$ eine ganze ungerade Zahl ist.

763. Wir wollen jetzt diesen besonderen Fall untersuchen. Da die Annahme eines negativen n sich auf den Fall des positiven n zurückführen lässt, wie wir eben gesehen haben, so nehmen wir an, dass

$$2n = 2r + 1$$

ist, wobei r null oder positiv ist. Die vorgelegte Gleichung wird also:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2r+1}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0,$$

und wir kennen ein partikuläres Integral, nämlich:

$$y_1 = 1 + \frac{m^2x^2}{2(2r+2)} + \frac{m^4x^4}{2.4.(2r+2)(2r+4)} + \cdots$$

Wenn man diesen Wert von y_1 anwendet, so wird das allgemeine Integral dargestellt durch

$$y = Cy_1 + C'y_1\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{y_1^{\,2}x^{2r+1}},$$

wobei C und C' zwei willkürliche Konstanten und x_0 irgend ein Anfangswert von x ist (§ 733). Verfährt man mit der Funktion $\frac{1}{y_1^{\,2}x^{2r+1}}$, wie wenn es sich um einen rationalen Bruch handelt, so kann man derselben die Form:

$$\frac{a_0}{x^{2r+1}} + \frac{a_1}{x^{2r}} + \cdots + \frac{a_{r-1}}{x} + \frac{Y}{y_1^{\,2}}$$

geben, wobei Y eine eindeutige Funktion von x ist, welche für $x = 0$ endlich bleibt. Folglich hat man:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{y_1^{\,2}x^{2r+1}} = \frac{P}{x^{2r}} + Gl(x) + V;$$

P bezeichnet ein Polynom vom Grade $2r$, G eine Konstante und V eine eindeutige Funktion, welche endlich bleibt für $x = 0$. Hieraus folgt, dass die vorgelegte Gleichung ein Integral von der Form:

$$y = y_1\left(\frac{P}{x^{2r}} + G\,l(x)\right) + z$$

haben muss, wobei z eine Funktion ist, die eindeutig und endlich bleibt für $x = 0$. Demnach ist es angezeigt, die Substitution anzuwenden, welche durch die vorstehende Formel ausgedrückt wird, und alsdann die Entwickelung von Mac-Laurin oder das Verfahren der unbestimmten Koeffizienten auf die transformierte Gleichung für z anzuwenden. Diese wird sich von der ursprünglichen nur durch ein zweites Glied unterscheiden, welches durch die Substitution eingeführt ist.

764. Wir beschränken uns darauf, die Rechnung für den einfachsten Fall, wo $r = 0$ ist, auszuführen. Die gegebene Gleichung ist dann:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} - m^2y = 0,$$

und ein partikuläres Integral derselben ist:

$$y_1 = 1 + \frac{m^2x^2}{2^2} + \frac{m^4x^4}{2^2.\,4^2} + \frac{m^6x^6}{2^2.\,4^2.\,6^2} + \cdots$$

oder:

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{m^{2k}x^{2k}}{2^2.\,4^2\ldots(2k)^2}.$$

Das mit P bezeichnete Polynom reduziert sich hier auf eine Konstante, und das Produkt Py_1 kann mit z vereinigt werden; ferner ist evident, dass es gestattet ist, $G = 1$ zu setzen, und folglich können wir

$$y = y_1\,lx + z$$

annehmen; also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}\,lx + \frac{y_1}{x} + \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2}\,lx + \frac{2}{x}\,\frac{dy_1}{dx} - \frac{y_1}{x^2} + \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Trägt man diese Werte in die Differentialgleichung ein, so erhält man die transformierte:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dz}{dx} - m^2z = -\,\frac{2}{x}\,\frac{dy_1}{dx}.$$

Wir setzen nun:

$$z = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_k x^{2k} + \cdots$$

und bezeichnen zur Abkürzung mit

$$A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \cdots + A_k x^{2k} + \cdots$$

den Wert von y_1. Substituiert man diese Werte von z und von y_1 in die Differentialgleichung und setzt die Koeffizienten gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich, so folgt:

$$4k^2 a_k - m^2 a_{k-1} = -4k A_k$$

oder:

$$\frac{a_k}{A_k} - \frac{a_{k-1}}{A_{k-1}} = -\frac{1}{k},$$

und folglich:

$$\frac{a_k}{A_k} - \frac{a_0}{A_0} = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

Nichts hindert uns $a_0 = 0$ anzunehmen, und also wird:

$$a_k = -\frac{m^{2k}}{2^2 . 4^2 \ldots (2k)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

Also hat man als zweites partikuläres Integral:

$$y_2 = y_1 \, lx - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{2^2 . 4^2 \ldots (2k)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

765. Wir hatten schon Gelegenheit zu bemerken, dass es auch von Nutzen sein kann, eine Änderung der Variabelen zu vollziehen, bevor man eine Reihenentwickelung ausführt. Wir wollen dafür ein neues Beispiel geben, indem wir die nämliche Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0$$

beibehalten. Wir setzen $\mu = \pm m$ und führen die Substitution aus:

$$y = z e^{\mu x}, \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) e^{\mu x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx} + \mu^2 z\right) e^{\mu x}.$$

Da $\mu^2 = m^2$ ist, so erhalten wir die transformierte Gleichung für z:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2n}{x}\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) = 0.$$

Versuchen wir nun derselben durch eine Reihe

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

zu genügen, so folgt, indem wir die Koeffizienten irgend einer Potenz von x null setzen:

$$k(2n + k - 1)\, a_k + 2\mu(n + k - 1)\, a_{k-1} = 0.$$

Ist $2n$ nicht eine ganze negative Zahl, so bestimmt diese Gleichung das Verhältnis der Koeffizienten a_k, a_{k-1}, und daraus gewinnt man den Wert von a_k, nämlich:

$$a_k = (-2\mu)^k \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1.2\ldots k.(2n)(2n+1)\ldots(2n+k-1)}\, a_0;$$

der erste Koeffizient a_0 bleibt willkürlich.

Ist n eine ganze negative Zahl $-r$, so zeigt die erhaltene Relation zwischen a_k und a_{k-1}, dass a_{r+1} null ist, und folglich gilt dasselbe auch für $a_{r+2}, a_{r+3}, \ldots$ Andererseits kann man aber auch die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_{2r}$ null setzen, a_{2r+1} willkürlich annehmen, und alsdann sind die folgenden Koeffizienten bestimmt als Funktionen von a_{2r+1}. Demnach erhält man in dem vorliegenden Fall die beiden folgenden Integrale der Gleichung für z:

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r,$$
$$z = a_{2r+1} x^{2r+1} + a_{2r+2} x^{2r+2} + \cdots,$$

und mithin ein partikuläres Integral der ursprünglichen Gleichung durch einen Ausdruck, welcher nur eine endliche Anzahl von Gliedern besitzt. Wir bemerken dabei, dass man zwei partikuläre Integrale dieser Art hat, da man für μ den doppelten Wert $\pm m$ wählen kann.

Hieraus folgt, dass sich das vollständige Integral der gegebenen Gleichung in endlicher Form darstellen lässt, wenn n eine ganze negative Zahl ist. Dasselbe gilt auch, wenn n eine ganze positive Zahl ist, denn dieser Fall lässt sich, wie wir bereits sahen, auf den vorigen zurückführen.

Man erhält dann auch das Integral in einer bemerkenswerten Form, indem man folgendermassen verfährt.

766. Wir setzen:

$$z = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}},$$

und die Differentialgleichung wird:

$$\left[x\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + n\frac{d^n u}{dx^n}\right] + \left[(2\mu x + n)\frac{d^n u}{dx^n} + 2n\mu\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right] = 0.$$

Der erste Teil dieses Ausdruckes ist die n^{te} Ableitung der Funktion $x\frac{du}{dx}$; desgleichen ist der zweite die n^{te} Ableitung von $(2\mu x + n)u$. Integriert man also die Gleichung n-mal, und bezeichnet man mit P_{n-1} ein willkürliches Polynom von x vom Grade $n-1$, so erhält man:

$$x\frac{du}{dx} + (2\mu x + n)u = P_{n-1}.$$

Da wir aber nur einen partikulären Wert von u brauchen, so können wir $P_{n-1} = 0$ setzen; also wird die vorstehende Gleichung, wenn man die Variabelen trennt:

$$\frac{du}{u} + \left(2\mu + \frac{n}{x}\right)dx = 0,$$

und hieraus folgt:

$$l(u) + 2\mu x + nlx = \text{const}.$$

Setzt man die Konstante ebenfalls null, so wird:

$$u = e^{-2\mu x}x^{-n},$$

und demnach:

$$z = \frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x}x^{-n})}{dx^{n-1}}, \quad y = e^{\mu x}\frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x}x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

Den Werten $+m$ und $-m$ von μ entsprechen zwei partikuläre Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung; das vollständige Integral ist also, im Falle eines positiven ganzzahligen n:

$$y = Ce^{mx}\frac{d^{n-1}(e^{-2mx}x^{-n})}{dx^{n-1}} + C'e^{-mx}\frac{d^{n-1}(e^{2mx}x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

Ist n eine ganze negative Zahl, so muss man $1-n$ an Stelle von n schreiben, und das erhaltene Resultat mit x^{1-2n} multiplizieren (§ 760). Es wird also in diesem Falle das vollständige Integral:

$$y = Ce^{mx}x^{1-2n}\frac{d^{-n}(e^{-2mx}x^{n-1})}{dx^{-n}} + C'e^{-mx}x^{1-2n}\frac{d^{-n}(e^{mx}x^{n-1})}{dx^{-n}}.$$

Die Gleichung von Riccati.

767. Die Riccatische Gleichung, mit der wir uns schon im § 663 beschäftigt haben, ist:

$$1)\qquad \frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m,$$

a und b sind gegebene Konstanten, m ein beliebiger Exponent. Man kann die Gleichung auf eine lineare bringen, indem man

$$2)\qquad y = \frac{1}{az}\frac{dz}{dx}$$

setzt; also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{az}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{az^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2;$$

aus dieser Substitution folgt:

$$3)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = abx^m z.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist von der Form:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2;$$

trägt man diesen Wert in die Formel 2) ein, und setzt man dabei $\frac{C_2}{C_1} = C$, so erhält man:

$$4)\qquad y = \frac{1}{a}\frac{\frac{dz_1}{dx} + C\frac{dz_2}{dx}}{z_1 + Cz_2}.$$

Diese Gleichung, welche eine willkürliche Konstante enthält, ist das vollständige Integral der Riccatischen Gleichung. Es sind also die beiden partikulären Integrale z_1 und

z_2 zu bestimmen. Man kann dieselben ohne Schwierigkeit durch Reihen darstellen, indem man die Methode der unbestimmten Koeffizienten anwendet; indessen lässt sich diese neue Rechnung dadurch vermeiden, dass man die Gleichung 3) auf die vorher von uns behandelte Form bringt. Denn setzen wir:

$$x^{\frac{m+2}{2}} = t,$$

und wählen t zur unabhängigen Variabelen an Stelle von x, so wird:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m+2}{2} x^{\frac{m}{2}} \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(m+2)^2}{4} x^m \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m^2+2m}{4} x^{\frac{m-2}{2}} \frac{dz}{dt}.$$

Trägt man diese Werte in die Gleichung 3) ein, so folgt:

$$5) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} + \frac{4ab}{(m+2)^2} z = 0.$$

Zugleich erhält man nach der Formel 4):

$$y = \frac{(m+2)\, x^{\frac{m}{2}}}{2a} \frac{\frac{dz_1}{dt} + C \frac{dz_2}{dt}}{z_1 + Cz_2},$$

wenn z_1 und z_2 zwei von einander unabhängige partikuläre Integrale der Gleichung 5) sind. Man sieht, dass diese Gleichung die nämliche ist, wie die in den §§ 758 flg. behandelte. Ihr Integral kann in endlicher Form dargestellt werden, wenn $\frac{m}{m+2}$ eine ganze gerade Zahl $\pm 2i$ ist, d. h. wenn m die Form hat:

$$m = \frac{-4i}{1 \mp 2i}.$$

So findet man also wieder den Fall der Integrabilität durch elementare Funktionen, den wir schon im § 665 erhalten haben.

Über die Integration von Differentialgleichungen vermittelst bestimmter Integrale.

768. Anstatt die Integrale durch Reihen darzustellen, ist es oftmals vorteilhaft, bestimmte Integrale anzuwenden. Die

Aufgabe, welche hierbei zu lösen ist, besteht also darin, dass man durch solch ein Integral die Summe einer bestimmten Reihe ausdrückt. Eine allgemeine Regel hierfür lässt sich nicht aufstellen; auch beschränken wir uns darauf, nur ein Beispiel zur Erläuterung anzugeben. Wir wählen wieder die Gleichung:

$$1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\,\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0;$$

sie besitzt, wie wir gesehen haben, ein Integral von der Form

$$2)\qquad y = A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \cdots + A_k x^{2k} + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten A der Bedingung genügen:

$$3)\qquad A_k = \frac{m^2}{2k(2n+2k-1)} A_{k-1}.$$

Setzt man

$$4)\qquad \varphi(k) = \frac{2k-1}{2n+2k-1}\,\varphi(k-1),$$

so wird die Bedingung 3):

$$\frac{A_k}{\varphi(k)} = \frac{m^2}{2k(2k-1)}\,\frac{A_{k-1}}{\varphi(k-1)},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{A_k}{\varphi(k)} = \frac{m^{2k}}{(2k)!}\,\frac{A_0}{\varphi(0)}.$$

Da A_0 willkürlich ist, so wählen wir $A_0 = \varphi(0)$, also wird:

$$A_k = \frac{m^{2k}}{(2k)!}\,\varphi(k).$$

Wenn nun n positiv ist, so wird der Gleichung 4) genügt, wenn man

$$\varphi(k) = \int_0^{\pi} \cos^{2k}\omega \sin^{2n-1}\omega\, d\omega$$

setzt, wie man aus der teilweisen Integration erkennt; man kann demnach

$$A_k = \frac{m^{2k}}{(2k)!}\int_0^{\pi} \cos^{2k}\omega \sin^{2n-1}\omega\, d\omega$$

setzen, und die Gleichung 2) ergiebt als Integral:

$$y_1 = \int_0^\pi \left(1 + \frac{m^2x^2\cos^2\omega}{1.2} + \frac{m^4x^4\cos^4\omega}{1.2.3.4} + \cdots\right)\sin^{2n-1}\omega\, d\omega$$

oder

$$y_1 = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(e^{mx\cos\omega} + e^{-mx\cos\omega}\right)\sin^{2n-1}\omega\, d\omega.$$

Um ein zweites Integral zu bekommen, kann man (§ 760) n in $1-n$ verwandeln, und sodann mit x^{1-2n} multiplizieren; also wird:

$$y_2 = x^{1-2n}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left(e^{mx\cos\omega} + e^{-mx\cos\omega}\right)\sin^{1-2n}\omega\, d\omega.$$

Dies setzt aber voraus, dass $n < 1$ ist, denn sonst wird dieses Integral unendlich.

769. Ist m^2 negativ, und setzen wir $m^2 = -\mu^2$, so ist das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 y = 0,$$

wenn n zwischen 0 und 1 enthalten ist, gleich:

$$y = C\int_0^\pi \cos(\mu x\cos\omega)\sin^{2n-1}\omega\, d\omega + C'x^{1-2n}\int_0^\pi \cos(\mu x\cos\omega)\sin^{1-2n}\omega\, d\omega.$$

Ist $n = \frac{1}{2}$, so werden die beiden partikulären Integrale in dieser Formel identisch; doch kann man leicht das allgemeine Integral, welches diesem Falle entspricht, erhalten, wenn man das Verfahren anwendet, dessen wir uns schon mehrmals bedient haben. Wir setzen $2n = 1 - h$, so wird:

$$\sin^{2n-1}\omega = 1 - h\log(\sin\omega) + \frac{h^2\log^2(\sin\omega)}{1.2}(\sin\omega)^{\theta h},$$

$$(x\sin\omega)^{1-2n} = 1 + h\log(x\sin\omega) + \frac{h^2\log^2(x\sin\omega)}{1.2}(x\sin\omega)^{\theta' h};$$

θ und θ' sind Werte zwischen 0 und 1. Trägt man diese Grössen in die obige Formel ein und ersetzt man dabei $C + C'$ durch C_1, $C'h$ durch C_2, lässt man endlich h null werden, so folgt:

$$y = C_1 \int_0^\pi \cos(\mu x \cos\omega)\, d\omega + C_2 \int_0^\pi \cos(\mu x \cos\omega) \log(x \sin\omega)\, d\omega,$$

und dies ist das vollständige Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 y = 0.$$

Dieses Resultat lässt sich auch leicht aus der Entwickelung im § 764 ableiten.

Über die Berechnung bestimmter Integrale vermittelst der Integration von Differentialgleichungen.

770. Die Aufgabe, um die es sich hier handelt, ist die Umkehr der vorigen. Enthält ein bestimmtes Integral einen variabelen Parameter, so kann man das Problem stellen, eine Differentialgleichung zu bilden, welcher dieses Integral genügt, und in welcher das Integral als die unbekannte Funktion eingeht. Lässt sich diese Gleichung nun auf anderem Wege integrieren, so kann man auf diese Weise den Wert des bestimmten Integrales berechnen. Wir wollen hierfür ein Beispiel geben.

Wir betrachten das bestimmte Integral:

$$1) \qquad y = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\, d\alpha,$$

wobei der Exponent $n+1$ als positiv vorausgesetzt ist. Die teilweise Integration ergiebt:

$$\int \frac{\cos\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\, d\alpha = \frac{\sin\alpha x}{x(1+\alpha^2)^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{x}\int \frac{\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}}\, \alpha\, d\alpha,$$

also:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\, d\alpha = \frac{2(n+1)}{x}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}}\, \alpha\, d\alpha$$

oder

$$2) \qquad xy = 2(n+1)\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}}\, \alpha\, d\alpha.$$

Differentiiert man diese Gleichung zweimal, so folgt:

$$3)\qquad \frac{d^2(xy)}{dx^2} = -2(n+1)\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}}\,\alpha^3\,d\alpha.$$

Damit dieses Integral einen bestimmten endlichen Wert hat, muss $2n+1$ positiv sein. Demnach wird:

$$4)\qquad \frac{d^2(xy)}{dx^2} - xy = -2(n+1)\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\,\alpha\,d\alpha.$$

Die Differentiation der Gleichung 1) ergiebt aber auch

$$5)\qquad \frac{dy}{dx} = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\,\alpha\,d\alpha,$$

und also ist nach den Gleichungen 4) und 5):

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2} - xy = 2(n+1)\frac{dy}{dx}$$

oder

$$6)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung, welche wir in den vorigen Abschnitten behandelt haben. Wir können sie in endlicher Form integrieren, wenn n eine ganze Zahl ist; in diesem Falle kann man also auch das bestimmte Integral in expliciter geschlossener Form angeben.

Ist z. B. $n=0$, so reduziert sich die Differentialgleichung auf:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0,$$

und ihr vollständiges Integral ist:

$$y = Ce^x + C'e^{-x}.$$

Es müssen nur noch die Konstanten C und C' bestimmt werden. Zunächst erhält man, wenn x positiv ist, $C=0$;

denn das vorgelegte bestimmte Integral kann nicht mit x unbegrenzt wachsen. Ferner wird dieses Integral für $x = 0$ gleich $\int\limits_0^\infty \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\pi}{2}$, also ist $C' = \frac{\pi}{2}$, und folglich:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

für $x > 0$, wie wir bereits im § 496 gefunden haben.

Beispiel für die Berechnung einer unendlichen Reihe vermittelst Integration einer Differentialgleichung.

771. Die Summe einer unendlichen Reihe, deren Glieder von einer Variabelen abhängen, lässt sich bisweilen dadurch bestimmen, dass man eine Differentialgleichung bildet, welcher die Reihensumme genügt, und dass man alsdann diese Gleichung in geschlossener Form zu integrieren sucht. Auf diese Weise kann man auch öfters zu einer Transformation der Reihe in eine andere gelangen, welche für die numerische Berechnung bequemer ist.

Als Beispiel behandeln wir die Aufgabe, die Summe der konvergenten Reihe:

$$1) \left\{ \begin{aligned} X = 1 - \frac{x^2}{1.3.5} + \frac{x^4}{1.3.5.7.9} - \cdots \\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.3.5\ldots(4n+1)} + \cdots \end{aligned} \right.$$

zu finden. Indem wir die Variabele x als reell und positiv annehmen, setzen wir

$$y = X\sqrt{x},$$

so wird

$$2) \left\{ \begin{aligned} y = x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1.3.5} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{1.3.5.7.9} - \cdots \\ + (-1)^n \frac{x^{\frac{4n+1}{2}}}{1.3.5\ldots(4n+1)} + \cdots \end{aligned} \right.$$

Differentiiert man diese Gleichung zweimal und multipliziert man das Resultat mit 4, so folgt:

$$3)\quad 4\frac{d^2y}{dx^2} = -x^{-\frac{3}{2}} - \left[x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1.3.5} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{1.3.5.7.9} - \dots\right],$$

ferner, indem man die Gleichungen 2) und 3) addiert:

$$4)\qquad 4\frac{d^2y}{dx^2} + y = -x^{-\frac{3}{2}}.$$

Diese Gleichung ist eine lineare mit konstanten Koeffizienten, und ihr vollständiges Integral wird nach den früheren Regeln:

$$5)\quad y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\left[C + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx\right] + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\left[C' + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx\right].$$

Hieraus folgt:

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x}{2}\left[C + \displaystyle\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x}{2}\left[C' + \displaystyle\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx\right]. \end{cases}$$

Um die Konstanten C und C' zu bestimmen, nehmen wir $x = 0$ an und vergleichen die Gleichungen 5) und 6) mit der Gleichung 2) und der folgenden, die aus der Differentiation der Gleichung 2) hervorgeht:

$$7)\quad \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1.3} + \frac{1}{2}\,\frac{x^{\frac{7}{2}}}{1.3.5.7} - \dots$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 2) und 7) verschwinden für $x = 0$; folglich muss das nämliche bei den Gleichungen 5) und 6) eintreten, also ist $C = 0$ und $C' = 0$. Setzt man also $X\sqrt{x}$ an Stelle von y, so hat man:

$$8)\quad X\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx.$$

Da der Wert von x positiv angenommen ist, so ist (§ 516):

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\alpha\frac{x}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha$$

oder

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha x}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha;$$

führt man diesen Wert auf der rechten Seite der Gleichung 8) ein, und vertauscht man zugleich die Reihenfolge der Integrationen, so wird:

$$X\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cos\frac{x}{2} \int_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha \int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \cos\frac{x}{2}\, dx$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sin\frac{x}{2} \int_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha \int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \sin\frac{x}{2}\, dx.$$

Nun ist nach § 488:

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \cos\frac{x}{2}\, dx = \frac{2e^{-\frac{1}{2}\alpha x}}{1+\alpha^2}\left(-\alpha\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2},$$

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \sin\frac{x}{2}\, dx = \frac{2e^{-\frac{1}{2}\alpha x}}{1+\alpha^2}\left(-\cos\frac{x}{2} - \alpha\sin\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{1+\alpha^2};$$

also wird

$$X\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\frac{x}{2} \int_0^\infty \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin\frac{x}{2} \int_0^\infty \frac{\alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Die beiden Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha}{1+\alpha^2} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha}{1+\alpha^2}$$

reduzieren sich auf

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{4}-1}dz}{1+z} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

indem man $\alpha = z^{-\frac{1}{2}}$ in dem ersten und $\alpha = z^{\frac{1}{2}}$ in dem zweiten setzt; also ist:

$$9)\quad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,d\alpha}{1+\alpha^2}$$

oder

$$10)\qquad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) - V,$$

indem man

$$11)\qquad V = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,d\alpha}{1+\alpha^2}$$

einführt. Das Produkt $V\sqrt{2\pi x}$ wird für $x = +\infty$ null; ist also der Wert von x sehr gross, so hat man nahezu:

$$12)\qquad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right).$$

Es ist evident, dass für solche Werte von x die Anwendung der Gleichung 1) unpraktisch wäre. Wir können aber noch weiter gehen, indem wir V in eine Reihe entwickeln, welche für die Berechnung von X bei grossen Werten von x sehr bequem ist. Es ist:

$$\frac{1}{1+\alpha^2} = 1 - \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha^{2n-2} + (-1)^n\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^2},$$

also:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\Bigg[\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,d\alpha - \int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\,\alpha^{\frac{5}{2}}\,d\alpha + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\,\alpha^{\frac{4n-3}{2}}\,d\alpha + (-1)^n\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\,\alpha^{\frac{4n+1}{2}}}{1+\alpha^2}\,d\alpha\Bigg].$$

Das letzte Integral kann durch

$$\theta \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{4n-1}{2}} d\alpha$$

dargestellt werden, wenn θ eine Grösse zwischen 0 und 1 bezeichnet; ferner ist (§ 516):

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{\frac{4i+1}{2}} d\alpha = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{4i+3}{2}} \Gamma\left(\frac{4i+3}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2\pi x}\, \frac{1.3.5\ldots(4i+1)}{x^{2i+2}},$$

also:

$$13) \begin{cases} V = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1.3.5}{x^4} + \cdots + (-1)^{n-1}.\dfrac{1.3.5\ldots 4n-3}{x^{2n}} \\ \qquad\qquad + \theta(-1)^n \dfrac{1.3.5\ldots(4n-1)}{x^{2n+2}}. \end{cases}$$

Lässt man n unbegrenzt wachsen, so erhält man eine divergente Reihe; da aber der Fehler, welchen man begeht, wenn man die Reihe bei einem Gliede abbricht, kleiner ist als der Wert des nächstfolgenden Gliedes, so ist die Reihe doch sehr dienlich zur Berechnung von V bei grossen Werten von x. Sie ist, wie man sieht, der Stirlingschen Reihe darin ähnlich. Ist z. B. $x > 10\,000$, so kann man den Wert von X mit sieben genauen Dezimalstellen vermittelst der angenäherten Formel 12) berechnen.

Man kann leicht beweisen, dass die Gleichung $X = 0$ eine unendliche Anzahl reeller Wurzeln besitzt, und dass die positiven Wurzeln, geordnet nach ihrer Grösse, sich immer weniger von den entsprechenden Wurzeln der Gleichung $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0$ unterscheiden, welche in der Formel $x = (4i+3)\frac{\pi}{2}$ enthalten sind. Doch überlassen wir es dem Leser, diese weiteren Folgerungen zu entwickeln.

Sechstes Kapitel.

Die partiellen und die totalen Differentialgleichungen.

Über partielle Differentialgleichungen, auf welche man die Integrationsmethoden der gewöhnlichen anwenden kann.

772. Eine partielle Differentialgleichung enthält zwei oder mehrere unabhängige Variabele, eine oder mehrere unbekannte Funktionen dieser Variabelen, sowie einige der partiellen Ableitungen dieser Funktionen. Bei den Aufgaben, welche auf solche Gleichungen führen, ist die Zahl der Gleichungen gewöhnlich gleich der Anzahl der unbekannten Funktionen. Die folgenden Entwickelungen beschränken sich auf den Fall einer einzigen Gleichung, welche nur *eine* unbekannte Funktion enthält.

Das Problem der Integration einer partiellen Differentialgleichung wird als gelöst betrachtet, wenn es gelungen ist, dasselbe auf die Integration eines Systemes von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückzuführen.

Die Reduktion ist von selbst gegeben, wenn die partiellen Ableitungen, welche in der Gleichung vorkommen, sich nur auf eine einzige der Variabelen beziehen. Denn in diesem Falle kann man, wie leicht ersichtlich, so vorgehen, wie wenn eine jede der anderen Variabelen ein konstanter Parameter wäre; doch hat man die Konstanten, welche durch die Integrationen eingeführt werden, als willkürliche Funktionen dieser Variabelen zu betrachten.

Nehmen wir z. B. die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z f(x, y) = F(x, y),$$

in welcher z eine unbekannte Funktion der Variabelen x und y ist, und f, F gegebene Funktionen derselben bezeichnen. Wird die Variabele y als Konstante behandelt, so ergiebt die Integration (§ 658):

$$z = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx} \left[C + \int\limits_{x_0}^{x} F(x,y)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx}\, dx \right].$$

Aber die Konstante C ist hier eine willkürliche Funktion von y; schreibt man also $\varphi(y)$ an Stelle von C, so wird:

$$z = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx} \left[\varphi(y) + \int\limits_{x_0}^{x} F(x,y)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx}\, dx \right].$$

773. In derselben Weise kann man auch bei gewissen Differentialgleichungen vorgehen, welche die Ableitungen nach mehreren unabhängigen Variabelen enthalten. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y);$$

a ist eine gegebene Konstante und $f(x, y)$ eine gegebene stetige Funktion der Variabelen x, y. Setzt man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,$$

so wird:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + ap = f(x, y),$$

und in dieser Form gehört sie zu der Klasse der Gleichungen, von welchen wir oben handelten. Integriert man dieselbe, wie wenn x eine Konstante wäre, und bezeichnet man mit X' die willkürliche Konstante, so erhält man:

$$p = X' e^{-ay} + e^{-ay} \int\limits_{y_0}^{y} e^{ay} f(x, y)\, dy.$$

In dieser Gleichung muss man X' als eine willkürliche Funktion von x betrachten. Setzt man nun wieder $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ an Stelle von p, so ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X' e^{-ay} + e^{-ay} \int_{y_0}^{y} e^{ay} f(x, y)\, dy.$$

Indem man nun diese Gleichung integriert und dabei mit Y die willkürliche Konstante, d. h. eine willkürliche Funktion von y, und mit X die willkürliche Funktion von x bezeichnet, deren Ableitung X' ist, so wird:

$$Z = Y + X e^{-ay} + e^{-ay} \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} e^{ay} f(x, y)\, dy.$$

Es ist evident, dass diese Formel die allgemeinste Lösung der vorgelegten Differentialgleichung liefert; d. h. alle Funktionen z, welche nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ stetig sind und der Differentialgleichung genügen. Sie enthält zwei willkürliche Funktionen X, Y, die erste ist unabhängig von y, die zweite unabhängig von x.

Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

774. Wir werden später die Definition des *allgemeinen Integrales* einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung geben und nachweisen, dass die Bestimmung desselben immer auf die Integration eines Systemes von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführbar ist, wie gross auch die Zahl der unabhängigen Variabelen sein mag. Hier werden wir uns mit dem besonderen Fall derjenigen partiellen Gleichungen erster Ordnung beschäftigen, in denen die Ableitungen nur im ersten Grade und nicht mit einander multipliziert vorkommen.

Die linearen Gleichungen mit zwei unabhängigen Variabelen. Es seien x, y, z drei Variabele, von denen die letzte als Funktion der beiden anderen betrachtet wird; wir setzen:

$$dz = p\, dx + q\, dy,$$

womit ausgedrückt ist, dass p und q die partiellen Ableitungen von z in Bezug auf x und auf y darstellen.

Die partielle Differentialgleichung, welche wir untersuchen, ist:

$$1)\qquad Pp + Qq = R;$$

P, Q, R bezeichnen hier gegebene Funktionen der drei Variabelen x, y, z.

Wir haben früher gesehen (§ 83), dass, wenn u und v gegebene Funktionen von x, y, z sind, eine partielle Differentialgleichung von derselben Form wie oben erhalten wird, wenn man die willkürliche Funktion φ der Gleichung

$$2)\qquad v = \varphi(u)$$

aus den Gleichungen eliminiert, welche man durch Differentiation nach x und nach y hieraus ableitet. Infolge dessen untersuchen wir nun umgekehrt, ob man in allen Fällen der Gleichung 1) genügen kann, indem man für z eine Funktion wählt, wie sie durch die Gleichung 2) definiert ist, wobei φ eine willkürliche Funktion bezeichnet, u und v aber bestimmte Funktionen von x, y, z, deren Form von den Koeffizienten P, Q, R abhängig ist.

Differentiiert man die Gleichung 2) nach x und nach y, so folgt:

$$3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} + p\dfrac{\partial v}{\partial z} = \varphi'(u)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + p\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} + q\dfrac{\partial v}{\partial z} = \varphi'(u)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + q\dfrac{\partial u}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Damit also die Gleichung 2) eine Lösung der Gleichung 1) ergiebt, ist notwendig und hinreichend, dass man eine identische Gleichung bekommt, wenn man p und q aus den Gleichungen 1) und 3) eliminiert. Um diese Elimination auszuführen, braucht man die Gleichungen 3) nur zu addieren, nachdem man sie mit P und Q multipliziert hat; dann folgt, indem man die Gleichung 1) benutzt:

$$\left(P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \varphi'(u)\left(P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Diese Gleichung besteht, unabhängig von der Funktion φ, identisch, wenn bei allen Werten von x, y, z die Gleichungen gelten:

$$4) \quad \begin{cases} P\dfrac{\partial u}{\partial x} + Q\dfrac{\partial u}{\partial y} + R\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ P\dfrac{\partial v}{\partial x} + Q\dfrac{\partial v}{\partial y} + R\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Nun haben wir im § 626 bewiesen, dass die beiden Integrale des simultanen Systemes:

$$5) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

wenn man dieselben mit

$$6) \qquad u = \text{const}, \quad v = \text{const}$$

bezeichnet, den Gleichungen 4) identisch genügen. Wählt man also für u und v in der Gleichung 2) die Funktionen, welche als Integrale des Systemes 5) bestimmt sind, so liefert diese Gleichung eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, wie auch immer die Funktion φ angenommen wird.

775. Wir wollen nun noch beweisen, dass jede Lösung der Gleichung 1) in der Gleichung 2) enthalten ist. Nehmen wir an, dass die Gleichung 1) erfüllt ist durch eine Funktion z, die durch die Gleichung

$$7) \qquad F(x, y, z) = 0$$

definiert ist, so folgt aus dieser durch Differentiation:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

und indem man diese Werte von p und q in die Differentialgleichung 1) einsetzt, muss unserer Annahme nach

$$8) \qquad P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

werden, bei allen Werten von x und y, wenn man für z seinen Wert aus der Gleichung 7) substituiert.

Die Grössen, welche wir mit u und v bezeichnet haben, sind aber gegebene Funktionen von x, y, z. Also kann man

y, z als Funktionen von u, v, x, oder x, z als Funktionen von u, v, y betrachten. Es sei demnach:

9) $$F(x, y, z) = f(u, v, x) = f_1(u, v, y);$$

dann ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z},$$

und die Substitution dieser Werte in die Gleichung 8) ergiebt auf Grund der Gleichungen 4):

$$P\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Desgleichen folgt aus der Formel 9):

$$Q\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

Reduziert sich die linke Seite der Gleichung 7) nicht auf eine Funktion der Variabelen u und v allein, so werden die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ nicht identisch null; man kann dann aber auch nicht annehmen, dass eine der Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ auf Grund der Gleichung 7) $f(u, v, x) = 0$ oder $f_1(u, v, y) = 0$ besteht; denn die Elimination von x oder von y würde eine Endgleichung zwischen u und v ergeben, was zufolge der Unabhängigkeit der Funktionen u und v (§ 625, Zusatz) nicht möglich ist. Also müssten P und Q null werden vermittelst der Gleichung 7), und dies erfordert, dass auch R gleich null wird. Es ist also evident, dass, wenn P, Q, R gleichzeitig für eine Funktion z der Variabelen x und y verschwinden, diese Funktion der Differentialgleichung genügt. Indem wir aber von diesen singulären Lösungen, die nur in besonderen Fällen auftreten, absehen, erkennen wir, dass die Gleichung 7) notwendig von der Form

$$\Phi(u, v) = 0$$

ist, woraus man für v einen Wert

$$v = \varphi(v)$$

ableiten kann, der nur von u allein abhängt.

Das Problem, welches wir hier durch Zurückführung auf die Integration eines simultanen Systemes von zwei Gleichungen gelöst haben, lässt sich geometrisch folgendermassen interpretieren. Wie die Koordinaten x, y, z geometrisch einen Punkt im Raume darstellen, so wird durch die Grössen p, q, welche zu solch einem Wertsystem gehören, eine Ebene in dem betreffenden Punkt festgelegt, indem man derselben die Gleichung giebt:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

wobei ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten bedeuten. Betrachten wir einen Punkt, mit einer durch ihn gelegten Ebene als ein Element, so giebt es ∞^5 Elemente, entsprechend den fünf Grössen x, y, z, p, q. Eine partielle Differentialgleichung

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

welche eine Relation zwischen diesen fünf Grössen darstellt, umfasst ∞^4 Elemente, indem zu jedem Punkte des Raumes nur noch einfach unendlich viele Ebenen gehören. Ein Integral der Differentialgleichung ist jede Fläche $z = F(x, y)$, welche die Eigenschaft hat, dass jeder Flächenpunkt mit seiner Tangentenebene ein Element bildet, welches der Differentialgleichung angehört.

Ist nun insbesondere die Differentialgleichung eine lineare, also von der Form:

$$Pp + Qq = R,$$

und sind P, Q, R eindeutige Funktionen, so bilden die Ebenen, welche jedem Punkte des Raumes zugeordnet werden, ein lineares Ebenenbüschel. Denn haben x, y, z bestimmte Werte, so ist für jede diesem Punkte zugeordnete Ebene

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

die eine Koordinate q darstellbar durch $\dfrac{R - Pp}{Q}$, so dass die Gleichung der Ebene wird:

$$Q(\zeta - z) = Qp(\xi - x) + (R - Pp)(\eta - y);$$

dieselbe enthält in ihren Koeffizienten nur eine Variabele, welche in der ersten Potenz auftritt, und alle die Ebenen, die sich bei willkürlichen Werten von p ergeben, schneiden sich demnach längs der Geraden, deren Gleichungen sind:

$$Q(\zeta - z) = R(\eta - y), \quad Q(\xi - x) = P(\eta - y).$$

Durch eine lineare partielle Differentialgleichung wird demnach jedem Punkte eine Richtung zugeordnet, welche man durch das simultane System

$$Q\,dz = R\,dy, \quad Q\,dx = P\,dy \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

darstellen kann, wodurch ausgedrückt ist, dass der zum Punkt x, y, z benachbarte Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ auf der vorgeschriebenen Richtung liegt.

Soll nun eine Fläche die Eigenschaft haben, dass ihre Punkte und Tangentenebenen Elemente bilden, welche den Differentialgleichungen genügen, d. h. soll sie ein Integral dieser Gleichung sein, so muss durch jeden Punkt der Fläche auch die zugeordnete Richtung hindurchgehen und in der Tangentenebene liegen. Die Richtungen, welche durch das simultane System dargestellt werden, bestimmen aber ein System von ∞^2 Kurven im Raum; dasselbe wird durch das vollständige Integral des simultanen Systemes geliefert, welches wir durch

$$u = C, \quad v = C'$$

bezeichneten. Jede dieser Gleichungen liefert ein einfach unendliches Flächensystem, und jede Fläche des einen Systemes wird von jeder Fläche des anderen längs einer dieser Kurven geschnitten.

Weil nun jede Integralfläche in jedem ihrer Punkte zugleich die vorgeschriebene Fortschreitungsrichtung enthält, so enthält sie auch die ganze Kurve, welche von dieser Fortschreitungsrichtung bestimmt ist; das heisst, auf jeder Integralfläche liegen einfach unendlich viele Kurven; und umgekehrt jede Fläche, welche einfach unendlich viele Kurven enthält, ist eine Integralfläche. Einfach unendlich viele Kurven des Systemes $u = C$, $v = C'$ erhält man, indem man zwischen den Konstanten C und C' eine willkürliche Relation annimmt, d. h. jede Integralfläche lässt sich in der Form

$$v = \varphi(u)$$

darstellen, und alle Flächen dieser Form sind Integrale.

Die Tangentenebenen, welche die verschiedenen Integralflächen in den Punkten einer auf ihnen gelegenen Kurve $u = C$, $v = C'$ besitzen, können von einander verschieden sein, da ja in jedem Punkte der Raumkurve noch einfach unendlich viele Ebenen, welche durch die Tangente hindurchgehen, vorhanden sind, mit anderen Worten: zwei Integralflächen können sich längs einer der Raumkurven schneiden, wie ja auch umgekehrt jeder Schnitt zweier Integralflächen eine Kurve des Systemes sein muss. Dagegen ist das Gesetz, nach welchem sich die Tangentenebenen längs einer Raumkurve auf einer Fläche ändern, vollkommen festgelegt, wenn man in einem Punkte der Raumkurve die Tangentenebene kennt, so dass, wenn zwei Integralflächen in einem gemeinsamen Punkte dieselbe Tangentenebene haben, sie sich auch in allen Punkten der Kurve berühren. Denn ist $\varphi(u, v) = 0$ die Gleichung einer Integralfläche, auf welcher die Kurve $u = C_1$, $v = C_2$ liegt, wobei unter C_1 und C_2 zwei bestimmte Grössen verstanden sind, welche der Relation $\varphi(C_1, C_2) = 0$ genügen, so ist die Tangentenebene der Fläche in den Punkten dieser Kurve durch die partiellen Ableitungen bestimmt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z};$$

dieselben bestimmen eine Ebene, welche in jedem Punkte der Kurve durch die Tangente derselben hindurchgeht, denn für diese ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial u}{\partial z}(\zeta - z) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial v}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial v}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Innerhalb des Ebenenbüschels um die Tangente ist aber die Tangentenebene der Fläche durch den Wert $\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ fixiert, welcher, da u und v in allen Punkten der Kurve die festen Werte C_1 und C_2 haben, in allen Punkten der Kurve unverändert derselbe ist, so dass, wie wir sagten, die Tangentenebenen längs einer Kurve durch ein Anfangselement vollkommen bestimmt sind.

Will man dieses Gesetz der Tangentenebene direkt an der Differentialgleichung erkennen, so hat man folgendermassen zu verfahren: Die Gleichung

$$Pp + Qq = R$$

ist eine Identität, wenn man z als eine Integralfunktion von x und y betrachtet und p und q die Ableitungen von z sind. Also bleibt die Gleichung erhalten, wenn man sie partiell, sowohl nach x wie nach y differentiiert; es wird demnach:

$$p\left(\frac{\partial P}{\partial x} + p\frac{\partial P}{\partial z}\right) + P\frac{\partial p}{\partial x} + q\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial R}{\partial z},$$

$$p\left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) + P\frac{\partial p}{\partial y} + q\left(\frac{\partial Q}{\partial y} + q\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} + q\frac{\partial R}{\partial}.$$

Geht man in der Richtung einer Systemskurve weiter, so ist:

$$dx : dy = P : Q,$$

ferner ist:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{und also} \quad P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial p}{\partial y} = P\frac{dp}{dx};$$

mithin wird die erste Gleichung, indem man

$$Pp + Qq - R = f, \quad \frac{\partial P}{\partial x}p + \frac{\partial Q}{\partial x}q - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

setzt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + P\frac{dp}{dx} = 0,$$

und ebenso die zweite:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + Q\frac{dq}{dy} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die totalen Änderungen, welche die Koordinaten p und q erfahren, wenn man längs einer Systemskurve fortschreitet; man erkennt aus denselben wiederum, dass jede Integralfläche nicht nur ein bestimmtes Gesetz für diese Änderung der Tangentenebene liefert, sondern dass dieselbe durch ein Anfangselement für alle Integralflächen festgelegt ist.

Giebt man dem simultanen Systeme

$dx:dy:dz = P:Q:R$ die Form $dx:dy:dz = \frac{\partial f}{\partial p}:\frac{\partial f}{\partial q}:p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}$,

so kann man das Gesetz der Fortschreitungsrichtung und der Tangentenebene durch die Gleichungen:

$$dx:dy:dz:dp:dq = \frac{\partial f}{\partial p}:\frac{\partial f}{\partial q}:p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}:-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right):-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

darstellen. Bezeichnet man eine Raumkurve dieses Systemes mit einer bestimmten, durch ein Anfangselement festgelegten Zuordnung ihrer Tangentenebenen als eine Charakteristik der partiellen Differentialgleichungen, so giebt es ∞^3 Charakteristiken, die durch das vollständige Integral dieser simultanen vier Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Gleichung $f(x, y, z, p, q) = 0$ erhalten werden Auf jeder Integralfläche sind einfach unendlich viele Charakteristiken zu einer Fläche vereinigt.

776. Lineare Gleichungen mit beliebig vielen Variabelen. Die vorstehende Entwickelung lässt sich auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung anwenden, welche in Bezug auf die Ableitungen linear sind, wie gross auch die Zahl der unabhängigen Variabelen sein mag. Dies wollen wir hier nachweisen.

Wir werden mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n unabhängigen Variabelen bezeichnen, mit x die Hauptvariabele, d. h. die unbekannte Funktion der unabhängigen; ferner werden wir

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n$$

setzen, so dass die Grössen p die partiellen Ableitungen sind.

Die allgemeine Form der partiellen Differentialgleichungen, welche wir nun betrachten, ist:

$$1)\qquad P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n = P;$$

$P_1, P_2, \ldots P_n$ und P sind gegebene Funktionen der $n+1$ Variabelen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$. Wir haben im § 83 gezeigt: sind $u_1, u_2, \ldots u_n$ gegebene Funktionen der Variabelen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und stellt Φ eine willkürliche Funktion dar, so führt die Gleichung

$$2)\qquad \Phi(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) = 0$$

zu einer partiellen Differentialgleichung von der Form 1), wenn man dieselbe partiell differentiiert, und die willkürliche Funktion eliminiert. Wir untersuchen nun umgekehrt, ob es möglich ist, wenn die Gleichung 1) gegeben ist, ihr durch eine Gleichung von der Form 2) Genüge zu leisten, indem die Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ in geeigneter Weise bestimmt werden. Indem man die Gleichung 2) nach jeder der unabhängigen Variabelen differentiiert, erhält man das System:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) = 0. \end{cases}$$

Damit die Gleichung 2) der gegebenen Differentialgleichung 1) genügt, ist notwendig und hinreichend, dass die Elimination der Ableitungen $p_1, p_2, \ldots p_n$ zwischen den Gleichungen 1) und 3) zu einer Identität führt. Diese Elimination lässt sich dadurch ausführen, dass man die Gleichungen 3) addiert, nachdem man sie zuvor mit $P_1, P_2, \ldots P_n$ multipliziert hat, und dass man dabei die Gleichung 1) berücksichtigt; man findet so:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(P\frac{\partial u_1}{\partial x}+P_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right)\\
&+\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(P\frac{\partial u_2}{\partial x}+P_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(P\frac{\partial u_n}{\partial x}+P_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)=0.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist erfüllt, was auch die Funktion Φ sein mag, wenn die Identitäten bestehen:

$$
4)\qquad \begin{cases}
P\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+P_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+P_n\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}=0,\\
P\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+P_1\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\cdots+P_n\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P\dfrac{\partial u_n}{\partial x}+P_1\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}+\cdots+P_n\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}=0,
\end{cases}
$$

und wir wissen (§ 626), dass diese Gleichungen in der That gelten, wenn die Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ derart gewählt sind, dass die Gleichungen

$$u_1=\text{const},\quad u_2=\text{const},\ \ldots\ u_n=\text{const}$$

die n Integrale sind des Systemes von simultanen Differentialgleichungen

$$5)\qquad \frac{dx}{P}=\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}.$$

777. In der nämlichen Weise wie im § 775 kann man ferner zeigen, dass jede Lösung der Gleichung 1) in der Gleichung 2) enthalten sein muss; denn es sei:

$$6)\qquad F(x, x_1, x_2, \ldots x_n)=0$$

solch eine Lösung, so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial x}=0,\ \cdots\ \frac{\partial F}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F}{\partial x}=0;$$

entnimmt man hieraus die Werte von $p_1, p_2, \ldots p_n$, und substituiert dieselben in die Gleichung 1), so folgt:

$$7) \qquad P\frac{\partial F}{\partial x} + P_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + P_n\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass man die Variabelen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ mit Ausnahme von x_i als Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_n$ und x_i dargestellt hat, und dass:

$$F(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = f_i(u_1, u_2, \ldots u_n, x_i)$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x},\\
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial F}{\partial x_{i-1}} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_{i-1}},\\
\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{d f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial F}{\partial x_n} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}.
\end{aligned}$$

Indem man diese Werte in die Gleichung 7) einführt, und dieselbe vermittelst der Gleichungen 4) reduziert, folgt:

$$P_i\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0.$$

Wenn also die Koeffizienten $P_1, P_2, \ldots P_n$ und P nicht vermittelst der Gleichung 6) verschwinden, so muss

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$$

sein, und diese Gleichung muss, da zwischen den Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ keine Relation besteht, identisch erfüllt sein. Hieraus folgt, dass die Gleichung 6) in der That die Form 2) hat.

778. Die vorstehende Methode führt zu der allgemeinsten Lösung der vorgelegten Gleichung und wir können sie daher *das allgemeine Integral* derselben nennen. Das Resultat unserer Untersuchungen lässt sich in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Lehrsatz. *Es seien* $x, x_1, \ldots x_n$ *die* $n+1$ *Variabelen, von denen die erste eine Funktion der anderen ist;*

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

sei das totale Differential dx *von* x, *endlich* $P, P_1, P_2, \ldots P_n$ *gegebene Funktionen der* $n+1$ *Variabelen. Um das allgemeine Integral der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n = P$$

zu erhalten, genügt es, das simultane System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n}$$

zu integrieren. Bezeichnet man mit

$$u_1 = const, \quad u_2 = const, \ldots u_n = const$$

die Integrale dieser Gleichungen, dieselben aufgelöst nach den willkürlichen Konstanten, so ist das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0,$$

wobei Φ *eine willkürliche Funktion bedeutet.*

Bemerkung. Die im Zusatz zu § 775 gegebenen Erörterungen lassen sich auch auf den allgemeinen Fall übertragen, wenn man in einer Mannigfaltigkeit von $n+1$ Dimensionen die entsprechenden geometrischen Formulierungen wie im dreidimensionalen Gebiete anwendet.

Die willkürliche Funktion ist bei gegebenen Problemen aus besonderen Bedingungen zu bestimmen. Man kann z. B. als Bedingung stellen, dass x sich auf eine gegebene Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ reduzieren soll, wenn man der Variabelen x_n einen bestimmten Wert ξ_n beilegt. Denn es ist leicht zu sehen, wie sich die Funktion Φ stets so bestimmen lässt, dass diese Bedingung erfüllt wird. Bezeichnet nämlich ξ_n einen bestimmten Wert und f die gegebene Funktion, so werden, indem man

$$x = \xi_n, \quad x = f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$$

annimmt, $u_1, u_2, \ldots u_n$ Funktionen der $n-1$ Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Es sei also:

$$u_1 = \psi_1(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}),$$
$$u_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u_n = \psi_n(x_1, x_2, \ldots x_{n-1});$$

dann ergiebt die Elimination von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ zwischen diesen Gleichungen ein Resultat von der Form

$$\Psi(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0,$$

und es ist evident, dass die geforderte Bedingung erfüllt ist, wenn man für Φ die Funktion Ψ wählt.

Anwendungen der Integration linearer partieller Differentialgleichungen.

779. Erstes Beispiel. *Man soll die Gleichung der Cylinderflächen aus der partiellen Differentialgleichung für diese Flächen ableiten.*

Werden die geradlinigen Koordinaten im Raum mit x, y, z bezeichnet, und wird wie gewöhnlich $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt, so liefert die Bedingung, dass die Tangentenebene parallel zu einer festen Geraden ist, die partielle Differentialgleichung der Cylinder (§ 348):

1) $$ap + bq = 1,$$

wobei a und b gegebene Konstanten sind. Diese Gleichung ist zu integrieren.

Zu dem Zwecke bilden wir das simultane System

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

oder

$$dx - a\,dz = 0, \quad dy - b\,dz = 0.$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$x - az = \text{const}, \quad y - bz = \text{const},$$

und folglich ist das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

2) $$\Phi(x - az, y - bz) = 0.$$

Will man die willkürliche Funktion durch die Bedingung bestimmen, dass die Cylinderfläche durch eine gegebene Kurve geht, deren Gleichungen

$$3)\qquad \varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0$$

sind, so setze man

$$x - az = u, \quad y - bz = v.$$

Alsdann lassen sich die Gleichungen 3) folgendermassen schreiben:

$$\varphi(u + az, v + bz, z) = 0, \quad \psi(u + az, v + bz, z) = 0.$$

Eliminiert man aus denselben z, so bekommt man eine Gleichung von der Form:

$$\Psi(u, v) = 0 \quad \text{oder} \quad \Psi(x - az, y - bz) = 0,$$

folglich muss man für Φ die Funktion Ψ wählen.

Nehmen wir zweitens an, dass die Funktion Φ durch die Bedingung zu bestimmen ist, dass der Cylinder einer gegebenen Fläche

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

umschrieben sei. Alsdann genügt es, die Berührungskurve zwischen dieser Fläche und dem Cylinder zu ermitteln; denn ist diese Kurve bekannt, so hat man die Bedingungen des vorigen Falles. Wir bilden die Gleichungen der Tangentenebenen im Punkte (x, y, z) an die gegebene Fläche und an den Cylinder, nämlich:

$$(\xi - x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Da die Tangentenebenen zusammenfallen, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

und wegen der Gleichung 1) wird:

$$a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt zusammen mit der Flächengleichung die gemeinsame Berührungskurve; man gewinnt alsdann die Lösung ebenso wie vorhin.

Die Differentialgleichungen der Charakteristiken werden für die vorliegende partielle Differentialgleichung:

$$dx : dy : dz : dp : dq = a : b : 1 : 0 : 0,$$

d. h. für dieselben ist $dp = 0$ und $dq = 0$, also $p = C$, $q = C'$, wobei die Konstanten C und C' der Relation genügen $aC + bC' = 1$. Es bildet also eine Erzeugende des Cylinders zusammen mit einer festen durch dieselbe gehenden Ebene eine Charakteristik. In der That ist für jede Cylinderfläche die Tangentenebene längs einer Erzeugenden invariant.

780. Zweites Beispiel. *Man soll die Gleichung der Kegelflächen aus ihrer partiellen Differentialgleichung ableiten.*

Die partielle Differentialgleichung der Kegelflächen wird erhalten (§ 349), indem man die Bedingung ausdrückt, dass jede Tangentenebene durch einen festen Punkt hindurchgeht, welcher der Scheitel der Fläche ist. In geradlinigen Koordinaten wird also diese Gleichung

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0,$$

wobei x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Scheitels sind. Um sie zu integrieren, hat man die Integrale der simultanen Gleichungen

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}$$

zu bestimmen. Dieselben sind

$$l(x - x_0) - l(z - z_0) = \text{const}, \quad l(y - y_0) - l(z - z_0) = \text{const},$$

oder

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \text{const}, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \text{const}.$$

Hieraus folgt, dass das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$$

ist. Man muss in derselben Weise wie vorhin verfahren, wenn man die Funktion Φ aus den Bedingungen bestimmen will, dass der Kegel durch eine gegebene Kurve geht oder einer gegebenen Fläche umschrieben ist.

Die Differentialgleichungen der Charakteristiken sind hier:

$$dx : dy : dz : dp : dq = x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 : 0 : 0;$$

sie drücken wiederum aus, dass längs einer Erzeugenden die Tangentenebene einer Fläche ungeändert bleibt.

781. Drittes Beispiel. *Die Gleichung der Konoidflächen aus ihrer partiellen Differentialgleichung zu bestimmen.*

Die partielle Differentialgleichung wird erhalten (§ 350), indem man die Bedingung darstellt, dass die Tangentenebene in jedem Punkte die Erzeugende enthält, welche durch denselben hindurchgeht. Diese Gleichung wird, in geradlinigen Koordinaten:

$$px + qy = 0,$$

wenn man die Leitgerade zur z-Axe und die Leitebene zur xy-Ebene wählt. Man hat also die Integrale des simultanen Systemes

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$$

zu bestimmen; dieselben sind:

$$\frac{y}{x} = \text{const}, \quad z = \text{const},$$

und folglich ist

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

die Gleichung der Konoidflächen, wobei φ eine willkürliche Funktion ist.

Die Charakteristiken haben dem Systeme zu genügen:

$$dx : dy : dz : dp : dq = x : y : 0 : -p : -q,$$

also ist

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \quad \text{oder} \quad \frac{q}{p} = \text{const.}$$

Aus der partiellen Differentialgleichung folgt

$$\frac{q}{p} = -\frac{x}{y},$$

und da für eine Erzeugende $\frac{y}{x} = C$, d. h. konstant ist, so ist

$$\frac{q}{p} = -\frac{1}{C} = \text{const}$$

das Gesetz, nach welchem sich die Tangentenebenen einer Fläche längs einer Erzeugenden ändern.

782. Viertes Beispiel. *Die Gleichung der Rotationsflächen mit gegebener Axe aus ihrer partiellen Differentialgleichung zu finden.*

Die partielle Differentialgleichung ist

$$py - qx = 0,$$

wenn man annimmt, dass die Koordinaten rechtwinklig sind, und dass die z-Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt; man erhält dieselbe (§ 351), indem man die Bedingung ausdrückt, dass die Normale die Axe schneidet. Hier muss man die simultanen Gleichungen

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

oder

$$x\,dx + y\,dy = 0, \quad dz = 0$$

integrieren. Die Integrale sind

$$x^2 + y^2 = \text{const}, \quad z = \text{const};$$

also ist das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$x^2 + y^2 = \varphi(z),$$

wenn φ eine willkürliche Funktion bezeichnet.

Die Charakteristiken werden dargestellt durch:

$$dx : dy : dz : dp : dq = y : -x : 0 : q : -p,$$

also ist:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{y}{q} = \frac{x}{p} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dq} = \frac{x}{p} = \frac{y}{q},$$

folglich wird $\frac{p}{x} = C_1$ und $\frac{q}{y} = C_2$, und zufolge der partiellen Differentialgleichung ist $C_1 = C_2$. Die erzeugenden Kurven werden hier von den zweifach unendlich vielen Kreisen gebildet, deren Ebene der xy-Ebene parallel ist, und deren Mittelpunkt auf der z-Axe liegt. In den Punkten solch einer Erzeugenden ändern sich die Tangentenebenen einer Fläche so, dass

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = C_1$$

konstant bleibt. Dadurch ist ausgedrückt, dass die Ebene in ihrem Berührungspunkte die Tangente des Kreises enthält und die Rotationsaxe in einem festen Punkte schneidet, für welchen

$$\zeta = z - px - qy = z - C_1(x^2 + y^2)$$

ist.

783. Fünftes Beispiel. *Man soll die partielle Differentialgleichung*

1) $$z = px + qy + f(x, y)$$

integrieren, wobei $f(x, y)$ *eine gegebene Funktion bezeichnet.*

Das System der gewöhnlichen Gleichungen, welches man hier zu bilden hat, ist

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - f(x, y)}$$

oder:

2) $$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} + \frac{f(x, y)}{x} = 0.$$

Aus der ersten folgt $l(y) = l(x) + \text{const}$, oder

3) $$y = Cx.$$

Trägt man diesen Wert von y in die zweite Gleichung ein, so folgt:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} + \frac{f(x, Cx)}{x} = 0.$$

Diese Gleichung ist eine lineare, und ihr Integral wird:

4) $$z = C'x - x\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, Cx)}{x^2}\, dx,$$

wenn C' eine neue Konstante und x_0 irgend einen Anfangswert von x bezeichnet. Nun muss man die beiden Integrale 3) und 4) nach den Konstanten C und C' auflösen, und zwischen diesen Werten eine willkürliche Relation einführen. Zu dem Zwecke ersetzen wir die Variabele x unter dem Integrale durch ein anderes Zeichen ξ; es wird also:

$$z = C'x - x\int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi, C\xi)}{\xi^2}\, d\xi,$$

oder, indem man für C seinen Wert aus der Gleichung 3) substituiert:

$$5)\qquad z = C'x - x\int_{x_0}^{x} \frac{f\left(\xi, \frac{y\xi}{x}\right)}{\xi^2}\, d\xi.$$

Sonach sind aus den Gleichungen 3) und 5) die Werte von C und C' zu entnehmen, und in die Gleichung

$$6)\qquad C' = \varphi(C)$$

einzusetzen, wobei φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Man erhält folglich:

$$7)\qquad z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x\int_{x_0}^{x} \frac{f\left(\xi, \frac{y\xi}{x}\right)}{\xi^2}\, d\xi.$$

Dies ist das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung 1). Nehmen wir an, dass die Funktion $f(x, y)$ gleich ist:

$$f(x, y) = \frac{axy}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + y^2}},$$

wobei a eine gegebene Konstante bezeichnet; dann lautet die Differentialgleichung:

$$z = px + qy + \frac{axy}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{a^2 + y^2}},$$

und nach der Formel 7) ist ihr allgemeines Integral, indem man $x_0 = 0$ wählt:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - ay\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 + \xi^2}\sqrt{a^2 + \frac{y^2\xi^2}{x^2}}},$$

oder, wenn man $x > 0$ annimmt, und unter dem Integrale $\xi = \alpha x$, $d\xi = x\, d\alpha$ setzt:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - axy\int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{a^2 + x^2\alpha^2}\sqrt{a^2 + y^2\alpha^2}}.$$

Über totale Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabelen.

784. Bevor wir die Untersuchung der partiellen Differentialgleichungen fortsetzen, müssen wir von den totalen Differentialgleichungen handeln. Wir beschränken uns dabei auf den Fall dreier Variabelen x, y, z, von denen die eine als Funktion der beiden anderen angesehen wird; die Gleichung, welche wir zu untersuchen haben, ist:

$$1) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

P, Q, R sind gegebene Funktionen von x, y, z. Es handelt sich nun darum festzustellen, ob eine Funktion z von x und y existiert, welche die Gleichung 1) befriedigt, und diese Funktion, falls sie existiert, zu bestimmen. Eine Funktion $z = f(x, y)$ genügt der Differentialgleichung dann, wenn ihr totales Differential $dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$ bei jedem Werte der unabhängigen Variabelen identisch ist mit dem totalen Differentiale $dz = -\frac{P}{R}\,dx - \frac{Q}{R}\,dy$. Dies erfordert also, dass unter der Bedingung $z = f(x, y)$ die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{Q}{R}.$$

Bezeichnet man die partiellen Ableitungen der gesuchten Funktion z mit p und q, so kann man diese Gleichungen auch schreiben:

$$2) \qquad P + Rp = 0, \quad Q + Rq = 0.$$

Also müssen wir durch die nämliche Funktion z zwei partielle Differentialgleichungen zugleich befriedigen, und dieses ist nicht anders möglich, als wenn zwischen den beiden Gleichungen eine Beziehung besteht. In der That, differentiiert man die erste der Gleichungen 2) nach y, die andere nach x, so folgt:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) + p\left(\frac{\partial R}{\partial y} + q\frac{\partial R}{\partial z}\right) + R\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial R}{\partial z}\right) + R\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Substrahiert man diese Gleichungen von einander, und beachtet, dass $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ ist, so folgt:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0,$$

oder, indem man p und q vermittelst der Gleichungen 2) eliminiert:

$$3)\quad R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0.$$

Diese Gleichung muss vermittelst der Funktion $f(x, y, z) = 0$ befriedigt sein, falls diese Funktion ein Integral der totalen Differentialgleichung 1) sein soll. Verlangen wir aber weiter, dass die Differentialgleichung 1) ein Flächensystem als Integral besitzt, welches wir in der Form $f(x, y, z) = \text{const}$ annehmen können, so muss die Gleichung 3) bei allen Werten von x, y und z gelten, d. h. sie muss identisch erfüllt sein. Diese Bedingung zwischen den Funktionen P, Q, R ist eine *notwendige*, damit die Gleichung 1) *integrabel* ist. Wir können aber ferner beweisen, dass sie auch *hinreichend* ist; dies wollen wir nun thun, indem wir direkt auf die Bestimmung der Lösungen eingehen, welche die Gleichung 1) zulassen kann.

785. Wir bezeichnen mit μ einen Faktor, mittels dessen der Ausdruck $Q\,dy + R\,dz$ ein exaktes Differential einer Funktion u der Variabelen y und z wird; dieser Faktor μ und die Funktion u werden im allgemeinen noch von der Grösse x abhängen, welche zunächst als ein Parameter betrachtet wird. Wir setzen also:

$$4)\qquad \mu Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial u}{\partial z},$$

und schreiben ferner:

$$5)\qquad \mu P = \frac{\partial u}{\partial x} + X.$$

X bezeichnet dabei eine bestimmte Funktion von x, y, z. Die Gleichung 1), multipliziert mit μ, wird nun:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + X\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0,$$

oder:

6) $$du + X\,dx = 0.$$

Da u eine Funktion von x, y, z ist, so kann man z als Funktion von x, y, u betrachten, und also wird auch X eine Funktion der nämlichen Variabelen. Da nun aber die Differentiale du, dx allein in der Gleichung 6) vorkommen, so hängt u einzig und allein von x ab. Damit also das Problem der Integration möglich ist, darf die Funktion X nicht die Variabele y enthalten, muss vielmehr nur eine Funktion von u und x sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so existiert ein Faktor, abhängig von x und u, welcher die linke Seite der Gleichung 6) zu einem exakten Differential macht. Bezeichnet man solch einen Faktor mit $\frac{\lambda}{\mu}$, so ist evident, dass λ ein Integrabilitätsfaktor der ursprünglichen Gleichung ist. Sonach hat man den Satz:

Ist die Gleichung $\mathrm{P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0}$ *integrabel, d. h. genügt derselben eine Funktion* $\mathrm{f(x, y, z) = C}$, *wobei* C *eine willkürliche Konstante bedeutet, so existiert ein Faktor* λ, *so dass* $\lambda\mathrm{(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)}$ *ein exaktes Differential* dU *ist. Die Gleichung wird also erfüllt, wenn man* $\mathrm{U = C}$ *setzt, wobei* C *eine willkürliche Konstante bedeutet.*

786. Kehren wir nun zur Bedingung dieser Integrabilität zurück; sie ist ausgedrückt durch die Gleichung $\frac{\partial X}{\partial y} = 0$, wenn man z als eine Funktion von x, y, u betrachtet. Wird aber X dargestellt vermittelst x, y, z, so wird dieselbe:

$$\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

der Wert von $\frac{\partial z}{\partial y}$ muss dabei aus der Gleichung entnommen werden, welche u als Funktion von x, y, z definiert, und folglich erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

eliminiert man also $\frac{\partial z}{\partial y}$, so wird unsere Bedingung:

$$7) \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

Andererseits ist nach den Formeln 4) und 5):

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial x};$$

werden diese Werte, und ebenso die Werte von $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, welche aus der Formel 4) hervorgehen, in die Bedingungsgleichung 7) substituiert, so wird dieselbe:

$$\mu Q\left[\frac{\partial(\mu R)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial z}\right] + \mu R\left[\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}\right] = 0.$$

Addiert man hierzu die Identität:

$$\mu P\left[\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}\right] = 0,$$

welche aus der Gleichung 4) folgt, so erhält man nach Ausführung der Differentiation und nach Beseitigung des Faktor μ:

$$8) \quad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0,$$

und dies ist die im § 784 erhaltene Bedingung.

Man sieht, dass, wenn dieselbe erfüllt ist, die Grösse X, welche in der Gleichung 6) auftritt, eine Funktion der Variabelen x und u wird. Demnach wird diese Gleichung 6), welche nur eine Transformation der ursprünglichen ist, eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren allgemeines Integral in der Form

$$U = C$$

darstellbar ist, wobei C eine willkürliche Konstante und U eine Funktion von x und u, d. h. von x, y, z bedeutet.

Die vorstehende Untersuchung lehrt also, dass die Bedingungsgleichung 8) notwendig und hinreichend ist; sie giebt zugleich den Weg an, auf welchem das Integral, wenn es existiert, zu bestimmen ist.

Die Differentialgleichung $P dx + Q dy + R dz = 0$ ist von Herrn Voss (Math. Annal. Bd. 16 u. 23) geometrisch interpretiert worden. Durch dieselbe wird jedem Punkt des Raumes ein Strahlbüschel von Fortschreitungsrichtungen zugeordnet, welche in einer durch den Punkt gehenden Ebene

$$P(\xi - x) + Q(\eta - y) + R(\zeta - z) = 0$$

gelegen sind; sonach erhält man ein Punkt-Ebenensystem allgemeinster Art, das im besonderen den Charakter der Zuordnung annehmen kann, welche durch ein Flächensystem zwischen den Punkten der Flächen und ihren Tangentenebenen erzeugt wird. Hier soll nur kurz angegeben werden, in welcher Weise sich der Inhalt der Integrabilitätsbedingung ausdrücken lässt. Geht man von einem Punkte (x, y, z) in einer bestimmten, der zugeordneten Ebene angehörigen Richtung d_1x, d_1y, d_1z fort, so entspricht diesem neuen Punkte die Ebene

$$(P + d_1P)(\xi - x - d_1x) + (Q + d_1Q)(\eta - y_1 - d_1y) + (R + d_1R)(\zeta - z_1 - d_1z) = 0,$$

und es ist
$$P d_1x + Q d_1y + R d_1z = 0.$$

Die beiden Ebenen schneiden sich längs einer Richtung, welche durch die Gleichungen

$$d_2x : d_2y : d_2z = Q d_1R - R d_1Q : R d_1P - P d_1R : P d_1Q - Q d_1P$$

bestimmt ist, vermöge deren zwischen den beiden Richtungen d_1 und d_2 eine *projektive* Beziehung stattfindet, deren Doppelelemente durch die Gleichungen

$$\varrho\, dx = Q\, dR - R\, dQ,$$
$$\varrho\, dy = R\, dP - P\, dR,$$
$$\varrho\, dz = P\, dQ - Q\, dP$$

oder durch die quadratische Gleichung für ϱ:

$$\varrho^2 - \varrho G - H = 0$$

bestimmt sind, in welcher

$$G = P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x),$$

$$H = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z & P \\ Q_x & Q_y & Q_z & Q \\ R_x & R_y & R_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix},$$

wenn zur Abkürzung $\dfrac{\partial P}{\partial x} = P_x$ u. s. w. gesetzt wird.

Die projektive Beziehung ist im allgemeinen keine *involutorische;* sie wird dieses nur dann, wenn in der quadratischen Gleichung $G = 0$ ist; dann ordnen sich die benachbarten Ebenen genau so, wie die einem Flächenpunkte benachbarten Tangentialebenen, d. h. je zwei Richtungen d_1 und d_2 sind einander wechselseitig konjugiert, und die beiden sich selbst entsprechenden Richtungen sind die der Haupttangenten (§ 317). Ist die Gleichung $G = 0$ identisch erfüllt, so gruppieren sich die Flächenelemente zu einfach unendlich vielen Flächen eines Systemes, dem Integrale der Differentialgleichung.

787. Der Fall, dass P, Q, R homogene Funktionen von gleichem Grade sind. — Wir nehmen an, dass die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, und setzen:

$$x = x'z, \quad y = y'z,$$

$$P = P'z^n, \quad Q = Q'z^n, \quad R = R'z^n,$$

P', Q', R' sind Funktionen von x' und y'. Die vorgelegte Differentialgleichung, dividiert durch z^{n+1}, wird dann:

$$(P'dx' + Q'dy') + (P'x' + Q'y' + R')\frac{dz}{z} = 0$$

oder:

$$\frac{dz}{z} + \frac{P\,dx' + Q'dy'}{P'x' + Q'y' + R'} = 0.$$

Das zweite Glied in dieser Gleichung hängt nur von den Variabelen x' und y' ab und muss, auf Grund der Bedingungsgleichung, ein exaktes Differential sein.

Als Beispiel behandeln wir die Gleichung:

$$(y^2 + yz + z^2)\,dx + (x^2 + xz + z^2)\,dy + (x^2 + xy + y^2)\,dz = 0.$$

Hier ist:

$$P' = y'^2 + y' + 1, \quad Q' = x'^2 + x' + 1, \quad R' = x'^2 + x'y' + y'^2,$$

und die gegebene Gleichung bekommt die Form:

$$\frac{dz}{z} + \frac{(y'^2 + y' + 1)\,dx' + (x'^2 + x' + 1)\,dy'}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = 0.$$

Nun wird durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{y'^2 + y' + 1}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = \frac{y' + 1}{x'y' + x' + y'} - \frac{1}{x' + y' + 1},$$

$$\frac{x'^2 + x' + 1}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = \frac{x' + 1}{x'y' + x' + y'} - \frac{1}{x' + y' + 1},$$

so dass unsere Gleichung in der Form darstellbar ist:

$$\frac{dz}{z} + \frac{d(x'y' + x' + y')}{x'y' + x' + y'} - \frac{d(x' + y' + 1)}{x' + y' + 1} = 0.$$

Jedes dieser Glieder ist ein exaktes Differential; die Integration ergiebt, wenn man mit α eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$lz + l(x'y' + x' + y') - l(x' + y' + 1) = l\alpha,$$

also:

$$z = \frac{\alpha(x' + y' + 1)}{x'y' + x' + y'}$$

oder, wenn man $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ an Stelle von x' und y' einführt:

$$xy + xz + zy = \alpha(x + y + z).$$

Definition des allgemeinen Integrales einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Die vollständigen Integrale.

788. Die Variabele x werde als Funktion der n Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ betrachtet und

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n$$

gesetzt. Jede Gleichung von der Form

$$F(x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$

ist alsdann eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Wenn man x als Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ so bestimmt hat, dass diese Funktion der vorgelegten Gleichung genügt und sich auf eine willkürliche Funktion ξ von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ reduziert, wenn man der einen Variabelen x_n einen bestimmten, willkürlich gewählten Wert ξ_n beilegt, so heisst die Gleichung, welche diesen Wert von x definiert, *das allgemeine Integral* der vorgelegten Differentialgleichung.

Die vorgelegte Gleichung, sowie diejenigen, welche man aus derselben durch successive Differentiationen ableitet, bestimmen die Werte von x und seiner Ableitungen verschiedener Ordnung in Bezug auf x_n als Funktionen von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Ableitungen von x in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$.

Hieraus erkennt man leicht, dass das allgemeine Integral, wenn es existiert, auch ein eindeutig bestimmtes ist.

Die Existenz des allgemeinen Integrales ist vorhin für die partiellen Gleichungen, welche linear in Bezug auf die Ableitungen sind, bewiesen worden, und wird nachher für alle partiellen Gleichungen erster Ordnung vermittelst der Methode bewiesen werden, welche zugleich zur Bestimmung des Integrales dient.

789. Lagrange hat als *vollständiges Integral* einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Variabelen jede Funktion der n Variabelen bezeichnet, welche der Differentialgleichung genügt und n willkürliche Konstanten enthält. Es sei

$$1)\qquad F(x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den n unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$, und

$$2)\qquad f(x, x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$$

ein vollständiges Integral derselben. Differentiiert man diese Gleichung successive nach jeder der unabhängigen Variabelen, so wird:

$$3)\quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Die Gleichung 1) muss identisch, d. h. bei allen Werten von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $a_1, a_2, \ldots a_n$ erfüllt sein, wenn man in derselben x und $p_1, p_2, \ldots p_n$ durch ihre Werte ersetzt, welche aus den Gleichungen 2) und 3) hervorgehen; also muss man die Gleichung 1) reproduzieren, wenn man die n willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ ans den Gleichungen 2) und 3) eliminiert.

Da das allgemeine Integral der Gleichung 1) eine willkürliche Funktion von $n-1$ Variabelen enthält, so ist evident, dass man aus derselben unendlich viele vollständige Integrale ableiten kann. Aber besonders bemerkenswert ist, dass man aus einem vollständigen Integrale eine Lösung ableiten kann, welche eine willkürliche Funktion von $n-1$ Variabelen enthält und im allgemeinen mit dem allgemeinen Integrale zusammenfällt.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes betrachten wir die willkürliche Konstante a_n der Gleichung 2) als eine willkürliche Funktion $\varphi(a_1, a_2, \dots a_{n-1})$ der $n-1$ übrigen Konstanten. Die Gleichung 2), welche die Gleichung 1) befriedigt unter der Annahme, dass die willkürlichen Grössen konstant sind, verliert diese Eigenschaft nicht, auch wenn man dieselben als variabel betrachtet, falls nur die Gleichungen 3) dabei bestehen bleiben.

Wir bilden das totale Differential der Gleichung 2), indem wir die willkürlichen Grössen als variabel ansehen und dabei annehmen, dass a_n durch seinen Wert

$$4)\qquad a_n = \varphi(a_1, a_2, \dots a_{n-1})$$

ersetzt ist; wir schreiben dabei auch

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n$$

an Stelle von dx, so wird

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx_n + \frac{\partial f}{\partial a_1}da_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}da_{n-1} = 0.$$

Es ist evident, dass man hieraus die Gleichungen 3) gewinnt, wenn die willkürlichen Grössen $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ durch die Gleichungen

$$5)\qquad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} = 0$$

definiert werden.

Könnte man die Grössen $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ zwischen den Gleichungen 2), 4), 5) eliminieren, so erhielte man eine Gleichung, welche eine willkürliche Funktion von $n-1$ Grössen enthält und der ursprünglichen Differentialgleichung genügt. Diese Elimination aber ist allgemein nicht möglich wegen der willkürlichen Funktion φ, die in die Gleichung 2) eingeht und deren partielle Ableitungen in den Gleichungen 5) auftreten; man muss also das System der Gleichungen 2) und 5) zusammen mit der Gleichung 4) beibehalten; dasselbe definiert in ausreichender Weise das allgemeine Integral.

Man erkennt demnach, dass jede partielle Differentialgleichung umgekehrt aus der Elimination einer willkürlichen Funktion resultiert gemäss der im § 87 entwickelten Methode. Dies setzt indessen voraus, dass die Existenz des allgemeinen Integrales bewiesen ist.

790. Die vorstehenden Bemerkungen beziehen sich auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir haben aber im § 778 gesehen, dass bei den linearen Gleichungen sich das allgemeine Integral in einer besonderen Form darstellen lässt, die nur für diese Art von Gleichungen Geltung hat. Dieses Integral muss also mit demjenigen übereinstimmen, welches man aus einem vollständigen Integrale ableitet. Wir wollen dies an einem Beispiel nachweisen.

Wir betrachten die Gleichung

$$z = px + qy,$$

welche in Bezug auf die Ableitungen linear ist; z ist eine unbekannte Funktion der Variabelen x und y, und wir setzen wie gewöhnlich:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Der vorliegenden Gleichung wird nun genügt, indem man

$$z = ax + by$$

annimmt, wobei a und b Konstanten sind, denn hieraus folgt $p = a$, $q = b$. Diese Gleichung ist also ein vollständiges Integral. Um das allgemeine zu erhalten, hat man nach der Methode des § 789 b durch eine willkürliche Funktion $\varphi(a)$ von a zu ersetzen und alsdann a zwischen den beiden Gleichungen

$$z = ax + y\varphi(a), \quad 0 = x + y\,\varphi'(a)$$

zu eliminieren, von denen die zweite aus der Differentiation der ersten nach a hervorgeht. Nach der zweiten Gleichung ist $\varphi'(a) = -\frac{x}{y}$, also sind a und $\varphi(a)$ Funktionen von $\frac{y}{x}$, und die erste Gleichung lehrt, dass

$$\frac{z}{x} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist. Die Funktion ψ bleibt dabei noch willkürlich, und sonach erhalten wir auf diesem Wege dasselbe Integral wie im § 778.

Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabelen.

791. Das Problem der Integration partieller Differentialgleichungen ist gegenwärtig vollständig gelöst bei den Gleichungen erster Ordnung, d. h. die Integration solch einer Gleichung kann, wie gross auch die Zahl der unabhängigen Variabelen ist, immer auf die Integration eines simultanen Systemes von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Unter den Methoden, welche dazu dienen, muss man vor allem die von Jacobi und die von Cauchy unterscheiden. Die letztere werde ich hier zu Grunde legen und zugleich einige Entwickelungen mitteilen, die auf eine Schwierigkeit Bezug nehmen, welche dieser Methode anhaftet; dieselben habe ich bereits an einem anderen Orte veröffentlicht.*

792. Wir betrachten zuerst den Fall zweier unabhängigen Variabelen. Es sei

$$1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

die vorgelegte Gleichung, in welcher z eine unbekannte Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, y und p und q bezüglich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ bezeichnen.

Die Aufgabe ist, einen Wert z zu finden, welcher der Gleichung 1) genügt bei allen Werten von x und y, und welcher sich für einen gegebenen Wert x_0 von x auf eine willkürlich gegebene Funktion $f(y)$ von y reduziert. Es müssen also gleichzeitig die Gleichungen gelten:

$$x = x_0, \quad z = f(y), \quad q = \frac{df(y)}{dy} = f'(y);$$

durch diese Bedingungen ist die Aufgabe vollkommen bestimmt.

Wir führen, mit Cauchy, eine unbestimmte Funktion y_0 von x und y ein; alsdann kann man y als eine Funktion von x und y_0 ansehen, und also sind auch z, p, q Funktionen der nämlichen beiden Variabelen. Es ist:

---

* *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LIII* und *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, t. III.*

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial y_0}\,dy_0,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y_0}\,dy_0,$$

und wenn man diese Werte von dz und dy in die Gleichung, welche p und q definiert,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

überträgt, so folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y_0}\,dy_0 = p\,dx + q\left(\frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial y_0}\,dy_0\right).$$

Da diese Relation bei allen Werten von dx und dy_0 gilt, so wird

2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\,\frac{\partial y}{\partial x},$$

3) $$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q\,\frac{\partial y}{\partial y_0}.$$

Differentiiert man die Gleichung 2) nach y_0 und die Gleichung 3) nach x, so folgt aus der Subtraktion derselben:

4) $$\frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0}\,\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Dies festgestellt, bezeichnen wir mit

$$dF = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq$$

das totale Differential der linken Seite in der Gleichung 1). Differentiiert man die Gleichung 1) nach y_0, so folgt:

5) $$Y\,\frac{\partial y}{\partial y_0} + Z\,\frac{\partial z}{\partial y_0} + P\,\frac{\partial p}{\partial y_0} + Q\,\frac{\partial q}{\partial y_0} = 0.$$

In diese Gleichung tragen wir die Werte von $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ und $\frac{\partial p}{\partial y_0}$ aus den Gleichungen 3) und 4) ein, so wird:

6) $$\left(Y + Zq + P\,\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Q - P\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial y_0} = 0.$$

Die Funktion von x und y_0 aber, durch welche y ausgedrückt wird, ist bisher noch unbestimmt; wir verfügen über dieselbe so, dass

7) $$P\frac{\partial y}{\partial x} - Q = 0$$

wird, und legen ihr überdies die Bedingung auf, dass sie sich für $x = x_0$ auf y_0 reduziert. Also bestehen gleichzeitig die Relationen

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad q = q_0, \quad p = p_0,$$

wenn man zur Abkürzung

$$z_0 = f(y), \quad q_0 = f'(y_0)$$

setzt und p_0 durch die Gleichung

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

bestimmt.

Die Gleichung 7) reduziert nun die Gleichung 6) auf:

8) $$Y + Zq + P\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

so dass die vorgelegte Aufgabe darauf zurückgeführt ist, vier Funktionen y, z, p, q der beiden unabhängigen Variabelen x und y_0 zu finden, welche allgemein den fünf Gleichungen 1), 2), 3), 7), 8) genügen, und die sich für $x = x_0$ bezüglich auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren. Wir erwähnen dabei nicht die Gleichung 4), weil sie, wie wir gesehen haben, aus den Gleichungen 2) und 3) hervorgeht.

793. Die Gleichungen 1), 2), 7), 8) genügen, wie wir zeigen werden, zur Bestimmung der Unbekannten y, z, p, q; die Gleichung 3) ist also überflüssig und muss von selbst dann erfüllt sein. Diesen wichtigen Satz hat Cauchy folgendermassen bewiesen.

Wir nehmen an, dass aus den Gleichungen 1), 2), 7), 8) für y, z, p, q bestimmte Werte gewonnen sind, Funktionen von x und y_0, welche sich für $x = x_0$ bezüglich auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren. Die beiden Seiten der Gleichung 3) sind dann ebenfalls bestimmte Funktionen von x und y_0, und indem wir mit T ihre Differenz bezeichnen, ist

9) $$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0} + T.$$

Differentiiert man dieselbe nach x und subtrahiert davon die Gleichung 2), nachdem sie zuvor nach y_0 differentiiert ist, so hat man an Stelle der Gleichung 4):

$$10)\qquad \frac{\partial p}{\partial y_0} = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Trägt man nun in die Gleichung 5) die Werte von $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ und $\frac{\partial p}{\partial y_0}$ aus den Gleichungen 9) und 10) ein, so wird

$$11)\ \left(Y + Zq + P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Q - P\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial y_0} + P\frac{\partial T}{\partial x} + ZT = 0,$$

und dies reduziert sich auf:

$$P\frac{\partial T}{\partial x} + TZ = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{Z}{P}.$$

Da die Grösse $-\frac{Z}{P}$ als Funktion von x und y_0 dargestellt ist, so wird, wenn das Integral $-\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}\,dx$ einen endlichen und bestimmten Wert hat, hiernach:

$$12)\qquad l\frac{T}{T_0} = -\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}\,dx, \quad T = T_0 e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx}$$

wobei T_0 den Wert bezeichnet, welchen T für $x = x_0$ erhält. Da aber die Annahme $x = x_0$ die Grösse $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ auf q_0 und $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ auf 1 reduziert, so lehrt die Gleichung 9), dass $T_0 = 0$ ist, und folglich ist nach Gleichung 12) allgemein:

$$T = 0.$$

Wir werden später den besondern Fall behandeln, wo das Integral $\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}\,dx$ keinen endlichen und bestimmten Wert hat.

794. Auf Grund der letzten Untersuchung haben wir nur die Gleichungen 1), 2), 7) und 8) zu betrachten. Die Gleichung 1) lässt sich nun auch durch ihre Ableitung nach x ersetzen; denn diese abgeleitete Gleichung ist nicht allgemeiner als die ursprüngliche, weil die Werte von y, z, p, q sich auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren sollen für $x = x_0$. Dieselbe wird:

$$X + Y\frac{\partial y}{\partial x} + Z\frac{\partial z}{\partial x} + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

und indem man $\frac{\partial z}{\partial x}$, Q und Y durch ihre Werte aus den Gleichungen 2), 7) und 8) ersetzt, erhält man

$$13)\qquad X + Zp + P\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Das Problem, welches wir zu lösen haben, besteht also jetzt darin, vermittelst vier der Gleichungen 1), 2), 7), 8), 13) die Werte von y, z, p, q als Funktionen von x und y_0 zu bestimmen, die sich für $x = x_0$ auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren.

Die Gleichungen 2), 7), 8), 13) bilden thatsächlich ein System von vier simultanen partiellen Differentialgleichungen; da aber diese Gleichungen die unabhängige Variabele y_0 nicht enthalten, so lassen sie sich wie gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln; sie sind in der einen Formel enthalten:

$$14)\qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + Zp} = \frac{-dq}{Y + Zq}$$

und eine derselben kann, wie wir nochmals wiederholen, durch die Gleichung 1) ersetzt werden.

Ist die linke Seite der Gleichung 1) eine lineare Funktion in Bezug auf die Ableitungen p und q, so hat F die Form $Pp + Qq - R$, wobei P, Q, R Funktionen von x, y, z sind. In diesem Falle lassen die beiden ersten der in der Formel 14) enthaltenen Gleichungen, nämlich:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

für sich allein bereits die Werte von y und z als Funktionen von x und y_0 bestimmen. Sonach kommt man für lineare Gleichungen auf die Regel des § 774 zurück.

795. Nehmen wir nun allgemein an, dass man aus den Gleichungen 14) die Werte von y, z, p, q bestimmt hat, welche sich für $x = x_0$ auf y_0, z_0, p_0, q_0 reduzieren; es seien:

$$15)\qquad \begin{cases} y = f_1(x, y_0, z_0, q_0), \\ z = f_2(x, y_0, z_0, q_0), \\ p = f_3(x, y_0, z_0, q_0), \\ q = f_4(x, y_0, z_0, q_0) \end{cases}$$

diese Werte; wir schreiben die Grösse p_0 nicht in diesen Gleichungen, weil man immer annehmen kann, dass man ihren Wert aus der Gleichung $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ berechnet und substituiert hat; dagegen ist x_0 ein bestimmter numerischer Wert, der nicht weiter in Betracht kommt.

Die beiden ersten der Gleichungen 15) geben die Lösung des gestellten Problemes, wenn man z_0 durch $f(y_0)$, q_0 durch $f'(y_0)$ ersetzt. Erteilt man der Funktion $f(y_0)$ eine bestimmte Form, und kann man alsdann y_0 zwischen den beiden genannten Gleichungen eliminieren, so hat man den Ausdruck der unbekannten Funktion z in x und y. Wenn aber die Funktion $f(y_0)$ oder z_0 unbestimmt bleibt, so wird die Elimination von y_0 unmöglich, ausser wenn die Werte von y und z beide unabhängig von q_0 sind. Im letzteren Falle ist, wenn man die beiden ersten Gleichungen 15) nach y_0 und z_0 auflöst:

$$y_0 = \varphi(x, y, z), \quad z_0 = \psi(x, y, z),$$

und die Lösung des Problemes wird durch die Gleichung

$$\varphi = f(\psi)$$

gegeben; hieraus kann man schliessen, dass alsdann die vorgelegte Differentialgleichung notwendig in Bezug auf die Ableitungen p und q linear sein muss (§ 83).

Sieht man von dem Falle der linearen Gleichung ab, so kann keiner der Ausdrücke für y und z unabhängig von q_0 sein. Denn trägt man in die Gleichung 3) die Werte von y, z, q ein, welche aus den Gleichungen 15) gewonnen werden, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial y_0} + \frac{\partial f_2}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_2}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) - f_4 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) = 0.$$

Diese Gleichung muss eine Identität sein, und folglich müssen sich die mit $\frac{\partial q_0}{\partial y_0}$ multiplizierten Terme gegenseitig aufheben. Also muss identisch:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_0} - f_4 \frac{\partial f_1}{\partial q_0} = 0$$

sein. Da nun der Faktor $f_4 = q$ nicht im allgemeinen null sein kann, so folgt, dass, wenn eine der Grössen $\frac{\partial f_1}{\partial q_0}$, $\frac{\partial f_2}{\partial q_0}$ identisch null ist, auch die andere identisch verschwindet; folglich enthalten die Funktionen f_1 und f_2 entweder beide die Grösse q_0 oder sie sind beide von q_0 unabhängig; dieser letztere Fall tritt aber, wie wir eben sahen, nur bei den linearen Gleichungen ein.

Wenn man nun q_0 zwischen den beiden ersten Gleichungen 15) eliminiert, so erhält man eine Gleichung, welche an Stelle der zweiten treten kann und die wir mit

16) $$V(x, y, z, y_0, z_0) = 0 \quad \text{oder} \quad V = 0$$

bezeichnen wollen. Bildet man das totale Differential derselben, und ersetzt man dabei dz_0 durch $q_0 dy_0$, dz durch $p\,dx + q\,dy$, so folgt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial V}{\partial z_0}\right) dy_0 = 0.$$

Aber die erste der Gleichungen 15) ergiebt:

$$dy = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) dy_0;$$

wird dieser Wert von dy in die vorhergehende Gleichung eingetragen, so bleiben nur die beiden unabhängigen Differentiale dx und dy nach; setzt man also die Koeffizienten derselben null, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial V}{\partial z_0}\right) = 0.$$

Diese Gleichungen müssen identisch erfüllt sein, wenn man y, z, p, q durch ihre Werte aus den Gleichungen 15) ersetzt. Diese enthalten aber die willkürliche Grösse $\frac{\partial q_0}{\partial y_0}$

nicht; folglich muss diese aus der letzten Gleichung verschwinden. Wenn wir also von dem Fall absehen, dass die ursprüngliche Differentialgleichung linear ist, so wird $\frac{\partial f_1}{\partial q_0}$ nicht null; also muss $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$ verschwinden, und sonach ergeben die Gleichungen das simultane System:

$$17)\qquad \frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial V}{\partial z_0} = 0$$

und

$$18)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Also werden die vier Gleichungen 16), 17) und 18) durch die Gleichungen 15) identisch erfüllt; sie bestimmen andererseits die Werte von y, z, p, q, und folglich können sie die Gleichungen 15) vertreten.

Ersetzt man insbesondere, in der Funktion V, z_0 durch $f(y_0)$, so wird das gesuchte Integral der partiellen Differentialgleichung 1) das Resultat der Elimination von y_0 zwischen den beiden Gleichungen:

$$19)\qquad V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_0}\right) = 0$$

$\left(\frac{\partial V}{\partial y_0}\right)$ bezeichnet die Ableitung von V nach y_0, wenn dabei z_0 als Funktion von y_0 angesehen wird. Um also dieses Integral zu erhalten, genügt es, die Funktion V zu kennen, und man erhält dasselbe, indem man die Grössen p, q, p_0, q_0 zwischen den vier Integralen der Gleichungen 14) und der Gleichung $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ eliminiert.

796. Wir haben hierbei noch zu bemerken, dass die Gleichung

$$V = 0$$

ein vollständiges Integral der Gleichung 1) darstellt, wenn man y_0 und z_0 als zwei willkürliche Konstanten betrachtet. Denn aus der allgemeinen Lösung, welche wir entwickelt haben, kann man umgekehrt die partielle Differentialgleichung ableiten, indem man y_0 und z_0 zwischen den Gleichungen 16) und 18) eliminiert. Anstatt nun die Grössen y_0 und z_0 als Variabele zu betrachten, welche die Gleichung 17) befriedigen, kann man dieselben auch als Konstanten ansehen, und es ist klar, dass dabei die Gleichungen 18) bestehen bleiben, und bei der Elimination von y_0 und z_0 immer noch auf die Gleichung 1) zurückführen. Die Gleichung 16), welche also zwei willkürliche Konstanten enthält, ist demnach ein vollständiges Integral der Gleichung 1).

797. Beispiel. Um eine Anwendung der vorstehenden Theorie zu geben, betrachten wir die Gleichung:

$$z - apq = 0,$$

wobei a eine Konstante bedeutet. Hier ist:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 1,$$

$$P = -aq, \quad Q = -ap, \quad Pp + Qq = -2apq = -2z,$$

und die zu integrierenden simultanen Gleichungen sind also:

$$\frac{dx}{aq} = \frac{dy}{ap} = \frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q};$$

man findet hieraus unmittelbar die vier Integrale:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z_0}}, \quad \frac{x - x_0}{aq_0} = \frac{y - y_0}{ap_0} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{\sqrt{z_0}},$$

und man kann p_0 und q_0 zwischen den beiden letzten Gleichungen mit einmal eliminieren, wenn man die Gleichung $z_0 - ap_0 q_0 = 0$ benutzt; es ist:

$$\frac{(\sqrt{z} - \sqrt{z_0})^2}{z_0} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{a^2 p_0 q_0} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{a z_0}.$$

Setzt man also:

$$V = a[\sqrt{z} - \sqrt{f(y_0)}]^2 - (x - x_0)(y - y_0),$$

so ist das allgemeine Integral der Gleichung $z - apq = 0$ das Resultat der Elimination von y_0 zwischen den Gleichungen:

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_0} = 0.$$

Der geometrische Inhalt der Integrationsmethode. Indem wir, ebenso wie in den Erläuterungen zum § 775 die Grössen p, q als Koordinaten einer Ebene ansehen, welche durch den Punkt x, y, z hindurchgeht, und jeden Punkt des Raumes mit einer durch ihn gehenden Ebene als Element betrachten, erkennen wir, dass durch eine partielle Differentialgleichung $f(x,y,z,p,q)=0$ vierfach unendlich viele Elemente bestimmt werden. Erteilt man den Punktkoordinaten bestimmte Werte, so bilden die zu diesem Punkt gehörigen Ebenen ein einfach unendliches System, welches bei der linearen Gleichung ein lineares Ebenenbüschel ist, bei der allgemeinen Gleichung dagegen eine Kegelfläche umhüllt, deren Spitze der betrachtete Punkt ist. Sonach hat man sich in jedem Punkte des Raumes einen von Ebenen umhüllten Kegel zu denken. Unter einem Integrale der partiellen Differentialgleichung versteht man nun jede Fläche, welche die Eigenschaft hat, dass in jedem Punkte der Fläche die Tangentenebene dem zugeordneten Kegel angehört, oder also, dass sich in jedem Punkte die Fläche mit dem zugeordneten Kegel berührt. Hieraus erkennt man sofort zweierlei. *Erstlich:* Um sämtliche Elemente der Differentialgleichung in Flächen geordnet zu umfassen, ist im allgemeinen ein zweifach unendliches Flächensystem notwendig und hinreichend, denn auf jeder Fläche liegen zweifach unendlich viele Elemente. Dieses Flächensystem bildet daher ein *vollständiges Integral. Zweitens:* Jede Integralfläche hat die Eigenschaft, dass von jedem ihrer Punkte eine Richtung ausgeht, die in der Tangentenebene liegt, und zugleich eine Kante des dem Punkte durch die Differentialgleichung zugeordneten Kegels bildet.

Wir wollen nun zunächst die Gleichungen der zu einem Punkte x, y, z gehörigen Fortschreitungsrichtungen, d. h. die Erzeugenden des zugehörigen Kegels entwickeln. Da jede dieser Linien definiert wird durch den Schnitt einer Ebene p, q mit der benachbarten $p+\delta p$, $q+\delta q$, so muss, wenn wir mit dx, dy, dz die Koordinaten der Richtung bezeichnen:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

sein, und auch:

$$dz = (p+\delta p)\,dx + (q+\delta q)\,dy, \quad \text{also:} \quad \delta p\,dx + \delta q\,dy = 0.$$

Da nun $f(x,y,z,p,q)=0$ und $f(x,y,z,p+\delta p, q+\delta q)=0$ ist, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial p}\,\delta p + \frac{\partial f}{\partial q}\,\delta q = 0$$

oder in unserer früheren Bezeichnung:

$$P\,\delta p + Q\,\delta q = 0.$$

Sonach wird:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\delta q}{\delta p} = \frac{P}{Q},$$

d. h.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp+Qq}.$$

Indem man in solch einer Richtung auf irgend einer Integralfläche fortgeht, erleidet die zugehörige Tangentenebene eine ganz bestimmte Änderung, deren Grösse dp, dq folgendermassen zu bestimmen ist.

Denkt man sich z und folglich auch p und q als Funktionen von x und y so definiert, dass bei allen Werten dieser Variabelen die partielle Differentialgleichung erfüllt ist, so müssen, wenn wir für die partiellen Ableitungen von f die früheren Bezeichnungen wählen: $\frac{\partial f}{\partial x} = X$ u. s. w., die Gleichungen bestehen:

$$X + Zp + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$Y + Zq + P\frac{\partial p}{\partial y} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Nun ist aber $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, und wenn wir in der vorgeschriebenen Richtung vorgehen, wird:

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial p}{\partial y} = P\frac{dp}{dx}, \quad P\frac{\partial q}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = P\frac{dq}{dx}.$$

Demnach erhalten die beiden obigen Gleichungen die Form:

$$(X + Zp) + P\frac{dp}{dx} = 0, \quad (Y + Zq) + P\frac{dq}{dx} = 0,$$

und sonach sind wir für die Fortschreitung längs einer Erzeugenden des Kegels auf das System (s. Gleichung 14) geführt:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + Zp} = -\frac{dq}{Y + Zq},$$

und zugleich ist der Satz bewiesen: *Alle Integralflächen, welche in einem gemeinsamen Punkte dieselbe Tangentenebene haben, berühren sich längs einer von diesem Punkte ausgehenden Kurve, denn das Gesetz, nach welchem sich die Tangentenebene ändert, wenn man in derselben längs der Erzeugenden des zugehörigen Kegels fortschreitet, ist für alle Integralflächen das nämliche.*

Sonach bestimmen die von jedem Punkte des Raumes ausgehenden, einfach unendlich vielen Fortschreitungsrichtungen eines Kegels ein System von dreifach unendlich vielen räumlichen Kurven, oder besser ein System von *charakteristischen Streifen*, indem zu jeder Raumkurve zugleich ein bestimmtes System von Tangentenebenen gehört; jede Integralfläche hat die Eigenschaft, dass auf derselben ein einfach unendliches System dieser charakteristischen Streifen gelegen ist, und dass die Tangentenebenen der Fläche in den Punkten solch eines Streifens mit den Ebenen, welche demselben zugeordnet sind, zusammenfallen. Ein charakteristischer Streifen ist durch sein Anfangselement bestimmt. Die Gleichungen derselben werden durch Integration des obigen Systemes erhalten, das, weil die Bedingung $f(x, y, z, p, q) = 0$ erfüllt ist, vollständig integriert auf vier Gleichungen mit drei willkürlichen Konstanten führt, welche wir in der Form

$$
\begin{aligned}
y &= f_1(x, C_1, C_2, C_3),\\
z &= f_2(x, C_1, C_2, C_3),\\
p &= f_3(x, C_1, C_2, C_3),\\
q &= f_4(x, C_1, C_2, C_3)
\end{aligned}
$$

voraussetzen können. Die beiden ersten derselben bestimmen die Kurven, die beiden anderen die zugehörigen Tangentenebenen.

Man darf nun aber hieraus nicht schliessen, dass es im allgemeinen genügt, aus dem dreifach unendlichen Kurvensysteme ein einfach unendliches, welches eine Fläche bestimmt, herauszugreifen, um auf diese Weise eine Integralfläche zu bilden; es muss vielmehr die Bedingung erfüllt sein, dass die Tangentenebene der Fläche in jedem Punkte einer solchen Kurve auch die Koordinatenwerte p und q erhält. Ein einfach unendliches System von Kurven ergiebt sich, wenn man zwischen den willkürlichen Konstanten C_1, C_2, C_3 zwei willkürliche Relationen einführt, $C_2 = \varphi_1(C_1)$, $C_3 = \varphi_2(C_1)$, und alsdann aus den beiden Gleichungen

$$y = f_1(x, C_1, \varphi_1, \varphi_2), \quad z = f_2(x, C_1, \varphi_1, \varphi_2)$$

die Grösse C eliminiert. Für solch eine Fläche werden die Koordinaten π, $\varkappa$ der Tangentenebene aus den Gleichungen bestimmt:

$$\pi = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{df_2}{dC_1}\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad \varkappa = \frac{df_2}{dC_1}\frac{\partial C_1}{\partial y},$$

und es ist:

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{df_1}{dC_1}\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad 1 = \frac{df_1}{dC_1}\frac{\partial C_1}{\partial y},$$

also:

$$\pi\frac{df_1}{dC_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{df_1}{dC_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{df_2}{dC_1}, \quad \varkappa\frac{df_1}{dC_1} = \frac{df_2}{dC_1}.$$

Wenn nun π und $\varkappa$ die Werte $p = f_3$, $q = f_4$ haben sollen, so müssen die beiden Gleichungen erfüllt sein:

$$\left(f_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\frac{df_1}{dC_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{df_2}{dC_1}, \quad f_4\frac{df_1}{dC_1} = \frac{df_2}{dC_1};$$

dividiert man dieselben, so folgt:

$$f_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x} = -f_4 \frac{\partial f_1}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x},$$

und diese Gleichung ist in der That erfüllt, weil die Funktionen f Integrale des Systemes sind (s. auch Gleichung 2 im § 792); mithin reduzieren sich die beiden Bedingungsgleichungen für die Funktionen $C_2 = \varphi_1(C_1)$, $C_3 = \varphi_2(C_1)$ auf die eine Gleichung:

$$f_4 \frac{df_1}{dC_1} = \frac{df_2}{dC_1},$$

oder

$$f_4 \left(\frac{\partial f_1}{\partial C_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dC_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dC_1} \right) = \frac{\partial f_2}{\partial C_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dC_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dC_1},$$

und dies ist in etwas anderer Form die Gleichung 3) im § 792:

$$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q \frac{\partial y}{\partial y_0}.$$

Dieser Bedingungsgleichung wird nun bei der Cauchyschen Integrationsmethode in der That dadurch genügt, dass man für $x = x_0$, also in einer bestimmten Ebene, eine willkürliche Kurve $z_0 = f(y_0)$ annimmt, und alle die charakteristischen Streifen zu einer Fläche vereinigt, welche von den Punkten dieser Kurve ausgehen, und deren zugehörige Ebenen durch die Tangenten der Kurve gehen. Denn auf diese Weise führt man zwischen den Konstanten C_1, C_2, C_3 die Bedingungen ein:

$$\begin{aligned}
y_0 &= f_1(x_0, C_1, C_2, C_3),\\
z_0 &= f_2(x_0, C_1, C_2, C_3) = f(y_0),\\
p_0 &= f_3(x_0, C_1, C_2, C_3),\\
q_0 &= f_4(x_0, C_1, C_2, C_3) = f'(y_0),
\end{aligned}$$

und es ist also wie erforderlich:

$$f_4 \frac{df_1}{dC_1} = \frac{df_2}{dC_1} = f'(y_0) \frac{dy_0}{dC_1}$$

für den Wert $x = x_0$. Es ist nun aber zu zeigen, dass diese Gleichung bei allen Werten von x fortbesteht, nachdem sie für $x = x_0$ erfüllt ist, und dazu ist der Beweis im § 793 geführt. In unserer gegenwärtigen Bezeichnung können wir denselben folgendermassen formulieren. Es soll bewiesen werden, dass die Differenz

$$f_4 \frac{df_1}{dC_1} - \frac{df_2}{dC_1} = T,$$

welche für $x = x_0$ den Wert $T = 0$ hat, von x ganz unabhängig ist. Es wird:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{df_1}{dC_1} + f_4\frac{d^2 f_1}{\partial x\, dC_1} - \frac{d^2 f_2}{\partial x\, dC_1}$$

oder weil $\frac{\partial f_2}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}$ ist:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{dy}{dC_1} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dq}{dC_1}\right) - \frac{dp}{dC_1}.$$

Da nun die partielle Differentialgleichung $f(x, y, z, p, q) = 0$ bei allen Werten von C_1 erfüllt ist, so ist auch:

$$Y\frac{dy}{dC_1} + Z\frac{dz}{dC_1} + P\frac{dp}{dC_1} + Q\frac{dq}{dC_1} = 0$$

oder wenn man für $\frac{dz}{dC_1}$ den Wert $q\frac{dy}{dC_1} - T$ einsetzt:

$$(Y + Zq)\frac{dy_1}{dC_1} - ZT + P\frac{dp}{dC_1} + Q\frac{dq}{dC_1} = 0.$$

Entnimmt man hieraus den Wert von $\frac{dp}{dC_1}$ und substituiert denselben in die obige Gleichung, so folgt:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{ZT}{P} + \frac{dy_1}{dC_1}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{Y + Zq}{P}\right) + \frac{dq}{dC_1}\left(\frac{Q}{P} - \frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Die in den beiden letzten Klammern enthaltenen Ausdrücke verschwinden, und demnach wird, wie früher:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{Z}{P}, \quad \text{also} \quad T = T_0 e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx}.$$

vorausgesetzt, dass das Integral einen bestimmten endlichen Wert hat; nun ist T_0 gleich null, also ist auch $T = 0$ bei allen Werten von x.

Vereinigt man alle charakteristischen Streifen, welche von einem bestimmten Punkte ausgehen, der in der Ebene $x = x_0$ liegt und dort die Koordinaten y_0, z_0 hat, so sind die Grössen C_1, C_2, C_3 aus den vier Gleichungen

$$y = f_1(x, C_1, C_2, C_3), \qquad z = f_2(x, C_1, C_2, C_3),$$
$$y_0 = f_1(x_0, C_1, C_2, C_3), \quad z_0 = f_2(x_0, C_1, C_2, C_3)$$

zu eliminieren. Es ergiebt sich eine Fläche, in deren Gleichung, abgesehen von der Konstante x_0, noch die willkürlichen Grössen y_0 und z_0 auftreten, also ein zweifach unendliches Flächensystem:

$$V(x, y, z, y_0, z_0) = 0.$$

Für jede in diesem Systeme enthaltene Fläche sind die beiden notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt; denn es ist auch hier:

$$f_4 \frac{df_1}{dC_1} = \frac{df_2}{dC_1}$$

für $x = x_0$, weil $\frac{df_1}{dC_1}$ und $\frac{df_2}{dC_1}$ beide gleich null sind.

798. Die entwickelte Methode setzt voraus, dass das Integral $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\, dx$ einen endlichen und bestimmten Wert behält; mit diesem Integrale wollen wir uns nun näher beschäftigen. Wir nehmen der Kürze wegen an, dass die Gleichung 16) nach z aufgelöst ist und dass man aus ihr den Wert $z = M$ gewonnen hat, wobei M eine gegebene Funktion von x, y, y_0, z_0 ist. Die Gleichungen 16) und 17), welche die gesuchte Lösung der Gleichung 1) darstellen, sind dann einfacher:

$$z = M, \tag{20}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial M}{\partial z_0} = 0, \tag{21}$$

und die Gleichungen 18), welche die Werte von p und q bestimmen, werden:

$$p = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{22}$$

Um die ursprüngliche Differentialgleichung zu rekonstruieren, muss man y_0 und z_0 aus den Gleichungen 20) und 22) eliminieren; folglich wird das totale Differential dF der linken Seite dieser Gleichung erhalten, wenn man die totalen Differentiale der Funktionen $M - z$, $\frac{\partial M}{\partial x} - p$, $\frac{\partial M}{\partial y} - q$ addiert, nachdem man dieselben bezüglich mit den Faktoren λ, μ, ν multipliziert hat, welche so bestimmt sind, dass die Differentiale dy_0 und dz_0 verschwinden; dieselben sind hier als unabhängig zu betrachten. Man hat also:

$$23)\begin{cases} dF = \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y}\right) dx \\ \qquad + \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) dy - \lambda dz - \mu dp - \nu dq, \end{cases}$$

und die Faktoren λ, μ, ν müssen die beiden folgenden Gleichungen erfüllen:

$$24)\begin{cases} \lambda \frac{\partial M}{\partial y_0} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0} = 0, \\ \lambda \frac{\partial M}{\partial z_0} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} = 0. \end{cases}$$

Aus der Gleichung 23) folgt:

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{\lambda}{\mu}$$

und wegen der Gleichungen 24) wird:

$$-\frac{Z}{P} = \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0}}.$$

Um das Integral, welches wir zu untersuchen haben, zu gewinnen, muss man in diesem Ausdruck y durch seinen Wert aus der Gleichung 21) ersetzen, ferner mit dx multiplizieren, und zwischen den Grenzen x_0 und x integrieren. Man kann aber die Elimination von y vermeiden, wenn man folgendermassen verfährt. Addiert man zum Zähler des obigen Ausdruckes für $-\frac{Z}{P}$ die Grösse

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\right)}{\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0}$$

und subtrahiert dieselbe wiederum, so erhält man:

$$-\frac{Z}{P} dx$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}\left(\frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0}\right) dx + \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0}\left(\frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} - \frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}\right) dx}{\frac{\partial M}{\partial z_0}\left(\frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0}\right)}$$

Wenn man nun, unter der Annahme, dass x und y die einzigen Variabelen sind, die Gleichung 21) in der Form:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}} + q_0 = 0$$

differentiiert, so findet man:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y_0} - \frac{\partial M}{\partial y_0}\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial z_0}\right)dx = \left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial y_0}\right)dy,$$

und dadurch reduziert sich der vorstehende Ausdruck für $-\frac{Z}{P}$ auf:

$$-\frac{Z}{P}\,dx = \frac{\partial \log \frac{\partial M}{\partial z_0}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \log \frac{\partial M}{\partial z_0}}{\partial y}\,dy = d \log \frac{\partial M}{\partial z_0}.$$

Da die Funktion M für $x = x_0$ und $y = y_0$ gleich z_0 wird, so folgt, dass bei der nämlichen Annahme $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ gleich eins wird. Integriert man also die obige Gleichung zwischen den Grenzen x_0 und x, so ist

$$25)\qquad -\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx = \log \frac{\partial M}{\partial z_0}.$$

799. Die Behauptung im § 793 gilt nicht mehr, wenn das Integral $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$ keinen endlichen und bestimmten Wert hat. Wie Herr Bertrand bemerkt hat, tritt dieses nicht nur in einigen besonderen Fällen, sondern auch in ganz allgemeinen ein. In der That, es genügt, der Funktion $f(y)$ oder $f(y_0)$ oder z_0 allgemein solch eine Form beizulegen, dass das Integral, um welches es sich handelt, unendlich wird. Indessen lässt sich beweisen:

Wenn für eine besondere Form der Funktion $\mathrm{f(y)}$ *das Integral* $\int_{\mathrm{x_0}}^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}\,\mathrm{dx}$ *keinen endlichen und bestimmten Wert mehr* *hat, so werden die Gleichungen, welche wir entwickelt haben, illusorisch und liefern nicht mehr eine Lösung der vorgelegten Aufgabe. Diese wird alsdann durch das vollständige Integral von Lagrange gegeben, welches mit dem allgemeinen Integrale verbunden ist.*

Denn man erkennt aus der Gleichung 25): Hat das Integral $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$ keinen endlichen und bestimmten Wert mehr für eine bestimmte Form der Funktion $f(y)$, so wird die partielle Ableitung $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ entweder null oder unendlich oder unbestimmt nach der Substitution des Wertes von y, welcher aus der Gleichung 21) entnommen wird. Dann aber ist evident, dass man aus der Gleichung 21) keinen bestimmten Wert von y entnehmen kann, welcher sich für $x = x_0$ auf y_0 reduziert, weil bei der Annahme $x = x_0$ und $y = y_0$ die Ableitung $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ sich auf den Wert eins reduzieren müsste. Die Unmöglichkeit, einen bestimmten Wert von y aus der Gleichung 21) zu berechnen, der sich für $x = x_0$ auf y_0 reduziert, lässt schliessen, dass bei der Annahme $x = x_0$ die Variabele y aus der linken Seite dieser Gleichung verschwindet, und weil diese erfüllt ist, wenn man zugleich $x = x_0$ und $y = y_0$ setzt, so ist evident, dass sie identisch erfüllt ist bei allen Werten von y, wenn man $x = x_0$ setzt. Hieraus folgt, dass y_0 aus der Gleichung 20) verschwindet, wenn man $x = x_0$ setzt, denn die Ableitung der linken Seite nach y_0 ist identisch null. Diese Gleichung giebt also bei der Annahme $x = x_0$:

$$z = f(y),$$

weil, wie wir wissen, dieselbe identisch statt hat, wenn man $y = y_0$, $z = z_0$ setzt und weil $z_0 = f(y_0)$ ist. Wir schliessen also, dass in dem besonderen Fall, mit welchem wir uns beschäftigen, die Lösung des Problemes nicht mehr durch das System der Gleichungen 20) und 21), sondern allein durch die Gleichung 20) gegeben ist.

Geometrisch bedeutet die Gleichung $z = M$ ein zweifach unendliches Flächensystem, wenn die Grössen y_0 und z_0 als variabele

Parameter betrachtet werden. In der Ebene $x = x_0$ liefert dieses Flächensystem im allgemeinen ein zweifach unendliches Kurvensystem. Indem man nun die Relation $z_0 = f(y_0)$ einführt, hebt man aus diesem Kurvensysteme ein einfach unendliches heraus, und die Gleichung 21) liefert zusammen mit der Gleichung 20) die Einhüllende dieses Systemes, von welcher die charakteristischen Streifen ausgehen, welche eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung zusammensetzen. Wird nun bei der Substitution $z_0 = f(y_0)$ die Gleichung $z = M$ unabhängig von y_0, so heisst dies, dass sämtliche Flächen, welche aus dieser Relation hervorgehen, sich in der nämlichen der Ebene $x = x_0$ angehörigen Kurve schneiden. Jede Fläche $z = M$, welche durch diese Kurve geht, bildet alsdann eine Lösung der Differentialgleichung.

800. Wir wollen diese Darlegungen an einem Beispiele erläutern. Es sei gegeben die Gleichung

$$F = pz - pqy - aq = 0,$$

wobei a eine Konstante bedeutet. Hier ist

$$X = 0, \quad Y = -pq, \quad Z = p,$$

$$P = z - qy = \frac{aq}{p}, \quad Q = -py - a = -\frac{pz}{q}.$$

Das simultane System wird demnach:

$$-\frac{p\,dx}{aq} = \frac{q\,dy}{pz} = \frac{dz}{pqy} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{0},$$

und hieraus findet man ohne Schwierigkeit:

$$q = q_0, \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p_0^{\,2}} + \frac{2(x - x_0)}{aq_0},$$

$$\frac{z}{p} = \frac{z_0}{p_0} + (x - x_0), \quad \frac{y}{p} = \frac{y_0}{p_0} - \frac{x - x_0}{q_0},$$

also wenn man p_0 durch seinen Wert $\dfrac{aq_0}{z_0 - q_0 y_0}$ ersetzt:

$$y = \frac{y_0(z_0 - q_0 y_0) - a(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2a\,q_0(x - x_0)}},$$

$$z = \frac{z_0(z_0 - q_0 y_0) + a\,q_0(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2a\,q_0(x - x_0)}},$$

$$p = \frac{a\,q_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2a\,q_0(x - x_0)}},$$

$$q = q_0.$$

Dies sind die Werte von y, z, p, q als Funktion von x, y_0, z_0, q_0. Nun ist:

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{p^2}{aq} = -\frac{a q_0}{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2 a q_0 (x - x_0)}$$

und

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\, dx = \log \frac{z_0 - q_0 y_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2 a q_0 (x - x_0)}}.$$

Man sieht hieraus, dass das Integral $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\, dx$ unendlich wird, wenn man

$$z_0 - q_0 y_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dz_0}{dy_0} = \frac{z_0}{y_0}$$

setzt; in diesem Falle ist der Wert von z_0:

$$z_0 = \alpha y_0, \quad \text{also} \quad q_0 = \alpha,$$

wenn α eine willkürliche Konstante bedeutet. Wenn man aber für z_0 diesen Wert annimmt, so werden unsere Gleichungen illusorisch, denn sie geben für y und z die Werte:

$$y = -\sqrt{\frac{a}{2\alpha}(x - x_0)}, \quad z = \sqrt{\frac{a\alpha}{2}(x - x_0)},$$

und diese sind unabhängig von y_0.

Wir eliminieren nun q_0 zwischen den beiden Gleichungen, welche die Werte von y und z bestimmen; man erhält aus diesen Gleichungen:

$$z + q_0 y = \frac{z_0^2 - q_0^2 y_0^2}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2 a q_0 (x - x_0)}},$$

$$z - q_0 y = \sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2 a q_0 (x - x_0)},$$

und durch Multiplikation:

$$z^2 - q_0^2 y^2 = z_0^2 - q_0^2 y_0^2 \quad \text{oder} \quad z^2 - z_0^2 = q_0^2 (y^2 - y_0^2);$$

vermittelst derselben reduziert sich die zweite Gleichung, ins Quadrat erhoben, auf:

$$q_0 (y^2 - y_0^2) = (yz - y_0 z_0) + a(x - x_0).$$

Die Elimination von q_0 zwischen diesen beiden letzten Gleichungen lässt sich unmittelbar ausführen, und man erhält:

$$(y^2 - y_0^2)(z^2 - z_0^2) - [(yz - y_0 z_0) + a(x - x_0)]^2 = 0$$

oder

$$z^2 - 2\left[z_0 - \frac{a(x-x_0)}{y_0}\right]\frac{y}{y_0}z + \frac{y^2}{y_0^2}z_0^2 - \frac{2a(x-x_0)}{y_0}z_0 + \frac{a^2(x-x_0)^2}{y_0^2} = 0;$$

dies ist die Gleichung, welche wir allgemein mit $V = 0$ bezeichnet haben. Aus derselben folgt:

$$z = \left[z_0 - \frac{a(x-x_0)}{y_0}\right]\frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right)\left(2az_0 - a^2\frac{x-x_0}{y_0}\right)},$$

eine Formel, deren rechte Seite die mit M bezeichnete Grösse ist. Man kann nun leicht verifizieren, dass die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial M}{\partial z_0} = 0$$

den oben für y erhaltenen Wert liefert, und wenn man denselben in den Ausdruck für $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ substituiert, so findet man:

$$\frac{\partial M}{\partial z_0} = \frac{z_0 - q_0 y_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

was mit den allgemeinen Ergebnissen unserer Theorie übereinstimmt.

Setzt man nun $z_0 = \alpha y_0$ in die Gleichung $z = M$, so erhält man:

$$z = \left[\alpha - \frac{a(x-x_0)}{y_0^2}\right]y + \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right)\left(2a\alpha y_0 - a^2\frac{x-x_0}{y_0}\right)};$$

dieser Wert von z genügt der vorgelegten Gleichung, wenn man α und y_0 als willkürliche Konstanten betrachtet; andererseits reduziert er sich auf

$$z = \alpha y$$

für $x = x_0$. Er liefert also die Lösung des vorgelegten Problemes für den Fall, dass man die Funktion $f(y)$ gleich αy annimmt.

Erweiterung der vorigen Methode auf den Fall einer beliebigen Anzahl von unabhängigen Variabelen.

801. Die vorige Methode ist anwendbar, wie gross auch die Zahl der Variabelen sein mag; dies wollen wir im folgenden nachweisen, ohne dabei auf eine Diskussion von Einzelheiten einzugehen.

Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n unabhängigen Variabelen, mit x die abhängige; ferner setzen wir:

$$1)\qquad dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n$$

und betrachten die partielle Differentialgleichung

$$2)\qquad F(x, x_1, x_2, \ldots x_n,\ p_1, p_2, \ldots p_n) = 0,$$

deren linke Seite eine gegebene Funktion der $2n+1$ Variabelen

$$x,\ x_1, x_2, \ldots x_n,\ p_1, p_2, \ldots p_n$$

ist. Die unbekannte Funktion x ist nicht vollständig bestimmt durch die Bedingung, dass sie der Gleichung 2) genügen soll; sie wird dies aber im allgemeinen (§ 788), wenn man ausserdem verlangt, dass sie sich auf eine gegebene Funktion

$$\xi = f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$$

der $n-1$ Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ reduziert, wenn man der Variabelen x_n den besonderen Wert ξ_n beilegt. Setzt man also:

$$d\xi = \omega_1\,dx_1 + \omega_2\,dx_2 + \cdots + \omega_{n-1}\,dx_{n-1},$$

so muss für $x_n = \xi_n$ nicht nur $x = \xi$, sondern auch

$$p_1 = \omega_1,\quad p_2 = \omega_2,\ \ldots\ p_{n-1} = \omega_{n-1}$$

sein. Dies festgesetzt, bezeichnen wir mit

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_{n-1}$$

unbestimmte Funktionen von

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-1},\ x_n;$$

man kann dann umgekehrt auch

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-1}$$

als Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, x_n$ betrachten, und folglich wird auch x eine Funktion der nämlichen Variabelen. Die Gleichung 1) lässt die partiellen Ableitungen von x bei dieser Annahme berechnen; denn es ist:

$$3)\qquad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_1\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \cdots + p_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + p_n$$

und

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \cdots + p_{n-1} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi_2} = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \cdots + p_{n-1} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi_{n-1}} = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}}. \end{cases}$$

Differentiiert man die Gleichung 3) nach ξ_i und die i^{te} Gleichung 4) nach x_n und subtrahiert sodann die beiden erhaltenen Gleichungen, so wird:

$$5)\quad \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\right)$$

oder kürzer:

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_n}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial x_n}\right).$$

Da der Index i die Werte $1, 2, \ldots n-1$ annehmen kann, so vertritt die Gleichung 5) ein System von $n-1$ verschiedenen Gleichungen. Wir bezeichnen nun mit

$$dF = X\,dx + X_1\,dx_1 + \cdots + X_n\,dx_n + P_1\,dp_1 + \cdots + P_n\,dp_n$$

das totale Differential der linken Seite der Gleichung 2); alsdann wird, wenn man die Gleichung 2) nach ξ_i differentiiert:

$$X\frac{\partial x}{\partial \xi_i} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \cdots + X_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} + P_1\frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} + \cdots + P_n\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = 0$$

oder, wenn man $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$ und $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ durch ihre Werte aus den Gleichungen 4) und 5) ersetzt:

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\left(X_1 + Xp_1 + P_n\dfrac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) + \cdots + \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}\left(X_{n-1} + Xp_{n-1} + P_n\dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right) \\ \qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial \xi_i}\left(P_1 - P_n\dfrac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) + \cdots + \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}\left(P_{n-1} - P_n\dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\right) = 0, \end{cases}$$

und diese Formel repräsentiert $n-1$ Gleichungen, indem der Index i die Werte $1, 2, \ldots n-1$ erhalten kann.

Da nun aber die Funktionen von $x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$, welche die Werte von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ darstellen, bisher noch unbestimmt sind, so setzen wir fest, dass dieselben den $n-1$ Gleichungen

$$7)\qquad P_1 - P_n \frac{\partial x_1}{\partial x_n} = 0, \ldots P_{n-1} - P_n \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$

genügen und sich überdies für $x_n = \xi_n$ auf $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ bezüglich reduzieren sollen, derart, dass für $x_n = \xi_n$ die Gleichungen bestehen:

$$x = \xi, \quad x_1 = \xi_1, \ldots x_{n-1} = \xi_{n-1}, \quad p_1 = \omega_1, \ldots p_{n-1} = \omega_{n-1}$$

und auch

$$p_n = \omega_n,$$

wobei der Wert von ω_n durch die Gleichung

$$F(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = 0$$

bestimmt ist. Die Gleichungen 7) reduzieren die $n-1$ Gleichungen 6) auf:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\left(X_1 + Xp_1 + P_n \frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) + \cdots + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}\left(X_{n-1} + Xp_{n-1} + P_n \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right) = 0,$$

und diese können nicht anders erfüllt sein als dadurch, dass man setzt:

$$8)\qquad \begin{cases} X_1 + Xp_1 + P_n \dfrac{\partial p_1}{\partial x_n} = 0, \\ X_2 + Xp_2 + P_n \dfrac{\partial p_2}{\partial x_n} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_{n-1} + Xp_{n-1} + P_n \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

weil die Determinante D, gebildet mit den $(n-1)^2$ Grössen:

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, & \ldots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, & \ldots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_{n-1}}, & \ldots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}}, \end{array}$$

nicht null sein kann zufolge der Unabhängigkeit der Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n$. Denn es ist:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x_n}\, dx_n + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\, d\xi_1 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}}\, d\xi_{n-1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$dx_{n-1} = \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\, dx_n + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1}\, d\xi_1 + \cdots + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}}\, d\xi_{n-1},$$

und wenn die Determinante D null wäre, so könnte man durch Elimination der Differentiale $d\xi_1, d\xi_2, \ldots d\xi_{n-1}$ eine oder mehrere Gleichungen von der Form

$$M_1\, dx_1 + M_2\, dx_2 + \cdots + M_n\, dx_n = 0$$

bilden; dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn eine Relation zwischen den Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ existiert. Da diese unabhängig von einander sind, so kann D nicht verschwinden, und folglich müssen die Gleichungen 8) bestehen.

Demnach ist das Problem darauf zurückgeführt, $2n$ Funktionen

$$x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \quad p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$$

der n Variabelen

$$x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$$

zu finden, welche den $3n-1$ Gleichungen 2), 3), 4), 7), 8) genügen, und sich für $x = x_n$ bezüglich auf

$$\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n$$

reduzieren.

802. Es genügen aber die $2n$ Gleichungen 2), 3), 7), 8) zur Bestimmung der $2n$ Funktionen; es muss also gezeigt werden, dass die Gleichungen 4) von selbst erfüllt sind, und dies gelingt, indem man die im § 793 befolgte Methode hier wiederholt. Wir nehmen also an, dass man aus den Gleichungen 2), 3), 7), 8) die Werte von $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, p_1, p_2, \ldots p_n$ als Funktionen von $x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ bestimmt hat, die sich für $x_n = \xi_n$ auf $\xi, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ reduzieren. Bezeichnen wir dann mit $T_1, T_2, \ldots T_{n-1}$ die Differenzen zwischen den beiden Seiten der bezüglichen Gleichungen des Systemes 4), so dass

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \cdots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} + T_i$$

ist, so folgt, indem man diese Gleichung nach x_n differentiiert und davon die Gleichung 3), differentiiert nach ξ_i, subtrahiert:

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{=n} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_n} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial T_i}{\partial x_n}.$$

Wendet man die obigen Werte von $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$ und $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ an Stelle der durch die Gleichungen 4) und 5) gelieferten an, so entsteht eine Gleichung, die sich von der Gleichung 6) nur dadurch unterscheidet, dass ihre linke Seite die neuen Terme

$$X T_i + P_n \frac{\partial T_i}{\partial x_n}$$

enthält, und da alle übrigen Terme infolge der Gleichungen 7) und 8) verschwinden, so erhält man:

$$X T_i + P_n \frac{\partial T_i}{\partial x_n} = 0,$$

wobei der Index i die $n-1$ Werte $1, 2, \ldots n-1$ annehmen kann. Hieraus folgt:

$$T_i = \theta_i e^{-\int\limits_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{T_n} dx_n}$$

wenn man mit θ_i den Wert bezeichnet, welchen T_i für $x_n = \xi_n$ erhält. Man erkennt nun unmittelbar, dass θ_i null ist, und folglich ist auch

$$T_i = 0,$$

wenn das Integral $\int\limits_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n$ einen endlichen und bestimmten Wert hat. Für die Diskussion der Fälle, wo dieses Integral unendlich oder unbestimmt wird, verweise ich den Leser auf die im § 791 zitierten Abhandlungen.

803. Nach dem Vorstehenden genügt es, die $2n$ Gleichungen 2), 3), 7) und 8) zu betrachten. Man kann die erste derselben auch durch ihr Differential in Bezug auf x_n ersetzen, nämlich:

$$X \frac{\partial x}{\partial x_n} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \cdots + X_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + X_n + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_n} + \cdots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0,$$

weil das vorgelegte Problem keine Unbestimmtheit mehr enthält. Indem man hierbei $\frac{\partial x}{\partial x_n}$ durch seinen Wert aus der Gleichung 3) ersetzt, und ferner $\frac{\partial x_1}{\partial x_n}, \dots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}$ und $\frac{\partial p_1}{\partial x_n}, \dots \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}$ durch ihre Werte aus den Gleichungen 7) und 8), so folgt:

$$9) \qquad X_n + X p_n + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0.$$

Demnach sind wir dazu gelangt, vermittelst der $2n$ Gleichungen 3), 7), 8) und 9) die Werte von $x, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, p_1, p_2, \dots p_n$ zu bestimmen, die sich für $x_n = \xi_n$ bezüglich auf $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ reduzieren.

Die Gleichungen, um welche es sich handelt, sind ihrem Wesen nach partielle Differentialgleichungen. Da sie aber die Variabelen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}$ nicht enthalten, so lassen sie sich wie gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln. Man kann sie in einer Formel zusammenfassen, nämlich:

$$10) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{P_1} = \dfrac{dx_2}{P_2} = \cdots = \dfrac{dx_n}{P_n} = \dfrac{dx}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n} \\ \qquad = \dfrac{-dp_1}{X_1 + X p_1} = \cdots = \dfrac{-dp_n}{X_n + X p_n}; \end{cases}$$

man darf dabei aber nicht ausser Acht lassen, dass die Gleichung 1) an Stelle einer in der Formel 10) enthaltenen Gleichung treten kann.

804. Wir nehmen nun an, dass man die Gleichungen 10) integriert hat, und dass die willkürlichen Konstanten so bestimmt sind, dass

$$x = \xi, \quad x_i = \xi_i, \quad p_i = \omega_i$$

ist für $x_n = \xi_n$. Es seien also:

$$11) \quad \begin{cases} x = \varphi(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n), \\ x_1 = \varphi_1(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n); \end{cases}$$

$$12) \quad \begin{cases} p_1 = \psi_1(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n), \\ p_2 = \psi_2(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_n = \psi_n(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots \omega_n) \end{cases}$$

die nach $x, x_1, \dots x_{n-1}, p_1, \dots p_n$ aufgelösten Integrale. Das allgemeine Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung geht aus der Elimination von

$$\xi, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

zwischen den n Gleichungen 11) und den $n+1$ Gleichungen

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = 0,$$

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}),$$

$$\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \quad \omega_2 = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \cdots \omega_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial \xi_{n-1}}$$

hervor; diese Elimination ist im allgemeinen nicht möglich, ausser wenn man die willkürliche Funktion f fixiert hat. Ich will hier nicht die verschiedenen Formen diskutieren, welche man in den verschiedenen Fällen den Gleichungen 11) geben kann und verweise hierfür auf die bereits genannte Abhandlung.

Desgleichen überlassen wir es dem Leser, den Inhalt der hier dargelegten Integrationsmethode nach Art der bei drei Variabelen gegebenen Erläuterungen zu konstruieren. Eine umfassendere Behandlung derselben führt auf die Anschauungen und vereinfachten Integrationsmethoden, welche von den Herren Lie und Mayer in den Mathematischen Annalen veröffentlicht worden sind.

Bemerkung über die singulären Lösungen, welche die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zulassen können.

805. Ohne auf Entwickelungen einzugehen, welche die Grenzen dieses Werkes überschreiten würden, müssen wir doch darauf hinweisen, dass die Methode, welche wir angewandt haben, auch gewisse singuläre Lösungen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmen lässt.

Es sei $F = 0$ eine partielle Differentialgleichung, welche die Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die Funktion x dieser Variabelen und ihre Ableitungen $p_1, p_2, \ldots p_n$ enthält; ferner sei $V = 0$ ein vollständiges Integral dieser Gleichung, in welchem die n willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ vorkommen. Da die Gleichung $V = 0$ jede beliebige Beziehung ausdrückt, wenn man die willkürlichen Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ als variabel betrachtet, so ist evident, dass sie auch alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung liefert, wenn die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ nur so bestimmt werden, dass sie der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0$$

genügen. Indem man die Differentiale $da_1, da_2, \ldots da_n$ null setzt, kommt man auf das vollständige Integral zurück; ferner erhält man, wie gezeigt wurde, das allgemeine Integral, wenn man eine willkürliche Relation zwischen $a_1, a_2, \ldots a_n$ annimmt, und sodann eines der Differentiale $da_1, da_2, \ldots da_n$ vermittelst dieser Relation eliminiert, und die Koeffizienten der übrigen Differentiale null setzt. Man genügt aber auch der obigen Gleichung, indem man

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \cdots \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0$$

setzt. Die Elimination von $a_1, a_2, \ldots a_n$ zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung $V = 0$ giebt im allgemeinen eine singuläre Lösung der vorgelegten Gleichung.

806. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$z - px - qy = f(p, q),$$

welche die unabhängigen Variabelen x, y, die Funktion z und ihre Ableitungen p, q enthält; $f(p, q)$ bezeichnet eine gegebene Funktion von p und q. Ein vollständiges Integral dieser Gleichung ist

$$z - ax - by = f(a, b),$$

wobei a und b Konstanten sind. Das allgemeine Integral resultiert aus der Elimination von a zwischen dieser Gleichung und ihrer Ableitung nach a, wenn dabei b als eine willkürliche Funktion von a angesehen wird. Endlich hat man die singuläre Lösung, wenn man a und b zwischen den drei Gleichungen

$$z - ax - by = f(a, b), \quad x + \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad y + \frac{\partial f}{\partial b} = 0$$

eliminiert. Bezeichnen x, y, z geradlinige Koordinaten, so stellt das vollständige Integral ein zweifach unendliches System von Ebenen, das allgemeine eine developpabele Fläche dar, die Enveloppe einer beweglichen Ebene, deren Gleichung eine willkürliche Funktion enthält. Endlich liefert das singuläre Integral eine bestimmte Fläche, welche die Ebenen des vollständigen Integrales und die developpabelen Flächen des allgemeinen Integrales berührt. Diese Resultate stimmen mit den Aussagen im § 354 überein.

Über die Integration einer Klasse von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabelen.

807. Die Analysis besitzt noch keine allgemeine Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen, welche von höherer als der ersten Ordnung sind. Es giebt indessen einige Methoden, welche in gewissen Fällen zum Ziele führen, und in dieser Beziehung tritt vor allem die Klasse der Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabelen hervor, welche zum ersten Mal von Monge untersucht und sodann von Ampère wieder aufgenommen wurde in einer Abhandlung, welche im *Journal de l'École Polytechnique* (Cah. 17 und 18) enthalten ist. Die Resultate, zu denen dieselben gelangt sind, glauben wir hier noch mitteilen zu müssen.

Indem die Variabelen durch x, y, z dargestellt sind, setzen wir:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Wir bezeichnen nun mit u und v zwei gegebene Funktionen von x, y, z, p, q, nämlich

$$u = f(x, y, z, p, q), \quad v = f_1(x, y, z, p, q),$$

und betrachten die Gleichung erster Ordnung:

$$\Phi(u, v) = 0, \tag{1}$$

in welcher Φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Indem man ebenso wie im § 82 verfährt, kann man diese willkürliche Funktion eliminieren und also eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung bilden. Denn es ergeben die Differentiationen nach x und nach y bezüglich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}\right]+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}\right]=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}\right]+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}\right]=0,$$

und indem man die Verhältnisse der Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ hieraus eliminiert, erhält man eine Gleichung von der Form:

$$2)\qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

in welcher H, K, L, M, N gegebene Funktionen von x, y, z, p, q sind.

Die Gleichung 1), aus welcher wir die Gleichung 2) gewonnen haben, kann auch in der Form $v = \varphi(u)$ dargestellt werden, wobei φ eine willkürliche Funktion von u bezeichnet; sie heisst ein *intermediäres Integral* der Gleichung 2), und das Problem der Integration der Gleichung 2) ist dann auf die Integration der Gleichung 1) zurückgeführt.

808. Wir nehmen nun an, dass H, K, L, M, N in der Gleichung 2) gegebene Funktionen von x, y, z, p, q bezeichnen. Es kann der Umstand eintreten, dass diese Gleichung 2) kein intermediäres Integral besitzt. Existiert aber ein solches Integral, so lässt sich dasselbe folgendermassen bestimmen.

Wir führen mit Ampère eine Funktion von x und y ein, die zunächst noch unbestimmt ist und die wir mit α bezeichnen werden; y lässt sich als eine Funktion von x und α betrachten, und folglich werden auch z, p, q Funktionen von x und α. Nach den für die Änderung der unabhängigen Variabelen geltenden Formeln wird:

$$3)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = q\frac{\partial y}{\partial \alpha};$$

$$4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = r + s\dfrac{\partial y}{\partial x}, & \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = s\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}, \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial x} = s + t\dfrac{\partial y}{\partial x}, & \dfrac{\partial q}{\partial \alpha} = t\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Die Elimination von s und t zwischen den drei letzten Gleichungen 4) giebt zunächst:

$$5)\qquad \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x};$$

ferner hat man nach den nämlichen Gleichungen 4):

$$6)\qquad \begin{cases} t = \dfrac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}, \quad s = \dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}; \\[2ex] r = \left(\dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}, \end{cases}$$

also:

$$7)\qquad rt - s^2 = -\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Wir substituieren nun in die Gleichung 2) die Werte von r, s, t, $rt - s^2$ aus den Gleichungen 6) und 7), so folgt:

$$8)\qquad \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\,\frac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}} = 0,$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = H\left(\dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) + 2K\dfrac{\partial q}{\partial x} + M - N\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}\right)^2, \\[2ex] \mathfrak{Q} = H\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2K\dfrac{\partial y}{\partial x} + L + N\left(\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial q}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Wir verfügen jetzt über die unbekannte Funktion von x und α, welche y definiert, derart, dass $\mathfrak{Q} = 0$ wird; die Gleichung 8) reduziert sich alsdann auf $\mathfrak{P} = 0$; mithin ist das Problem darauf zurückgeführt, vier Funktionen y, z, p, q von x und α zu finden, welche den beiden Gleichungen 3) genügen, ferner der Gleichung 5), und endlich den beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{P} = 0, \quad \mathfrak{Q} = 0.$$

Wenn man in der zweiten Gleichung 9) an Stelle von $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial q}{\partial x}$ ihre Werte aus den Gleichungen 4) einsetzt, so folgt:

$$\mathfrak{Q} = (H + Nt)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2(K - Ns)\frac{\partial y}{\partial x} + (L + Nr),$$

und folglich ergiebt die Gleichung $\mathfrak{Q} = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{(K - Ns)^2 - (H + Nt)(L + Nr)}}{H + Nt}$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$10)\qquad G = K^2 - HL + MN$$

setzt und die Gleichung 2) beachtet:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{G}}{H + Nt}.$$

Hieraus folgt:

$$H\frac{\partial y}{\partial x} + N\left(s + t\frac{\partial y}{\partial x}\right) = K \pm \sqrt{G}$$

oder, indem man wieder $\frac{\partial q}{\partial x}$ an Stelle von $s + t\frac{\partial y}{\partial x}$ einführt:

$$11)\qquad H\frac{\partial y}{\partial x} + N\frac{\partial q}{\partial x} - K \mp \sqrt{G} = 0.$$

Die Gleichung $\mathfrak{P} = 0$ wird, wenn man $H\frac{\partial y}{\partial x}$ durch seinen Wert aus der Gleichung 11) ersetzt:

$$12)\qquad H\frac{\partial p}{\partial x} + (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial q}{\partial x} + M = 0.$$

Wenn N nicht null ist, so kann die Gleichung 12) auch durch die folgende ersetzt werden:

$$13)\qquad N\frac{\partial p}{\partial x} - (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial y}{\partial x} + L = 0,$$

welche man durch Elimination von $\frac{\partial q}{\partial x}$ aus den beiden vorigen erhält.

809. Die Einführung der Variabelen α hat den Zweck, die Erzeugung einer durch die partielle Differentialgleichung dargestellten Fläche vermittelst eines Systemes von Kurven zur Evidenz zu bringen. Dieser Parameter α ist konstant für eine erzeugende Kurve, längs welcher y und z Funktionen von x allein sind, und folglich ist für solch eine Kurve $d\alpha$ gleich null. Die Gleichungen 11) und 12), welche für diese Kurve gelten, können also folgendermassen geschrieben werden:

$$14)\quad \begin{cases} H\,dy + N\,dq - (K \pm \sqrt{G})\,dx = 0, \\ H\,dp + (K \mp \sqrt{G})\,dq + M\,dx = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0. \end{cases}$$

Die Methode der Integration, welche wir im Auge haben, führt nur in dem Falle zum Ziel, wo man eine Funktion V der Grössen x, y, z, p, q bestimmen kann, deren totales Differential auf Grund der drei Gleichungen 14) null wird. Nun ist:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial p}dp + \frac{\partial V}{\partial q}dq;$$

wir eliminieren dp, dq, dz zwischen den Gleichungen 14) und der Gleichung $dV = 0$, und setzen die Koeffizienten der nachbleibenden Differentiale dx und dy gleich null, so folgt:

$$15)\quad \begin{cases} N\dfrac{\partial V}{\partial x} + Np\dfrac{\partial V}{\partial z} - L\dfrac{\partial V}{\partial p} + (K \pm \sqrt{G})\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ N\dfrac{\partial V}{\partial y} + Nq\dfrac{\partial V}{\partial z} + (K \mp \sqrt{G})\dfrac{\partial V}{\partial p} - H\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

oder durch Elimination von $\dfrac{\partial V}{\partial q}$:

$$16)\quad H\frac{\partial V}{\partial x} + (K \pm \sqrt{G})\frac{\partial V}{\partial y} + [Hp + (K \pm \sqrt{G})\,q]\,\frac{\partial V}{\partial z} - M\frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

Die beiden Gleichungen 15) reduzieren sich auf eine einzige, wenn $N = 0$ ist; in diesem Falle tritt die Gleichung 16) an die Stelle von einer derselben.

Die Funktion V muss also zugleich zweien partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen. Umgekehrt lässt sich leicht beweisen, dass, wenn eine Funktion V existiert, welche die Gleichungen 15) und folglich auch die Gleichung 16) erfüllt, dieselbe auch der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung genügt, wenn man

$$17) \qquad dV = 0 \quad \text{oder} \quad V = \text{const}$$

setzt. Denn die Gleichung 17) ergiebt durch Differentiation nach x und y:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} + r\frac{\partial V}{\partial p} + s\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} + s\frac{\partial V}{\partial p} + t\frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Berechnet man hieraus die Werte von $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$, um sie in die Gleichung 15) einzuführen, von denen wir annahmen, dass sie identisch erfüllt sind, so folgt:

$$-(L + Nr)\frac{\partial V}{\partial p} + (K \pm \sqrt{G} - Ns)\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

$$(K \mp \sqrt{G} - Ns)\frac{\partial V}{\partial p} - (H + Nt)\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

und die Elimination der Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$ ergiebt folglich:

$$(L + Nr)(H + Nt) - (K - Ns)^2 + G = 0,$$

also:

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0.$$

810. Wir nehmen demnach an, dass die Gleichungen 15) eine gemeinsame Lösung besitzen. Enthält diese Lösung eine willkürliche Funktion, so liefert sie ein intermediäres Integral der ursprünglichen Gleichung. Diese Annahme wird erfüllt sein, wenn man zwei Funktionen u und v von x, y, z, p, q finden kann, deren Differentiale vermöge der Gleichungen 14) null werden; denn es ist evident, dass dann dieselbe Eigenschaft auch der Funktion $\Phi(u, v)$ zukommt, was auch immer die Funktion Φ sein mag; man genügt folglich den Gleichungen 15), indem man $V = \Phi(u, v)$ annimmt, und hat sonach das intermediäre Integral

$$\Phi(u, v) = 0 \quad \text{oder} \quad v = \varphi(u);$$

φ bezeichnet wie Φ eine willkürliche Funktion. Die Erzeugende der durch dieses Integral dargestellten Fläche ist definiert durch die beiden Gleichungen

$$u = \alpha, \quad v = \varphi(\alpha),$$

wobei α ein variabeler Parameter ist.

Es bleibt nun noch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zu integrieren. Wenn aber die mit G bezeichnete Grösse nicht null ist, so kann unsere Methode uns zwei intermediäre Integrale liefern:

$$v = \varphi(u), \quad v_1 = \varphi(u_1),$$

indem man die Wurzel $\sqrt{G}$ nach einander mit dem positiven und mit dem negativen Zeichen nimmt. Dann hängt die Bestimmung von z nur von der Integration einer totalen Differentialgleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ab, indem p und q bestimmte Funktionen von x, y, z auf Grund der beiden intermediären Integrale sind. Um diese letzte Rechnung auszuführen, kann man als unabhängige Variabele die Grössen wählen, von denen die willkürlichen Funktionen abhängen.

811. Die vorstehende Methode lässt sich ohne Schwierigkeit auf alle partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausdehnen, welche intermediäre Integrale zulassen. Handelt es sich aber dabei um eine Gleichung, welche nicht die Form hat, welche wir voraussetzten, so enthalten die entsprechenden Gleichungen wie 14), auf welche die Methode führt, noch die Ableitungen r, s, t; man muss denselben dann noch die beiden Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

hinzufügen. Die weitere Rechnung bleibt mit einigen Komplikationen die nämliche; wir können indessen bei diesem Gegenstande nicht verweilen.

Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die aus bestimmten Flächenfamilien hervorgehen.

Eine Flächenfamilie, bei welcher sich jede Fläche aus einfach unendlich vielen Kurven eines zweifach unendlichen Systemes zusammensetzt, ist durch eine *lineare* partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung charakterisiert; eine Flächenfamilie dagegen, bei welcher jede Fläche das Umhüllungsgebilde eines einfach unendlichen Flächensystemes bildet, das aus einem zweifach unendlichen beliebig herausgegriffen wird, hängt von einer *nicht linearen* partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnung ab. Wir wollen zeigen, wie man durch Erweiterung dieser Sätze zu gewissen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung kommt.

Es sei ein System von dreifach unendlich vielen Raumkurven gegeben durch die Gleichungen:

$$1)\quad F(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad \Phi(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0,$$

in welchen α_1, α_2, α_3 willkürliche Konstanten sind. Greift man ein einfach unendliches System heraus, indem man die willkürlichen Gleichungen:

$$\alpha_2 = \varphi(\alpha_1), \quad \alpha_3 = \psi(\alpha_1)$$

einführt, so entsteht eine Fläche. Die partiellen Ableitungen p, q für dieselbe sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y};$$

also ist:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} : \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + p\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + q\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + p\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + q\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}$$

oder:

$$2)\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0.$$

Die Gleichungen 1) und 2) enthalten die willkürlichen Grössen α_1, α_2, α_3, nicht aber die Ableitungen derselben; schreibt man die Gleichung 2) in der Form:

$$3)\quad Z + pX + qY = 0,$$

so ist sie eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Man kann in derselben zwei der Konstanten vermittelst der Gleichungen 1) eliminieren; alsdann enthält die Gleichung noch eine willkürliche Konstante, und also ist die Flächenfamilie auf drei verschiedene Weisen durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche noch eine willkürliche Konstante enthält, charakterisierbar. Man bilde nun weiter durch partielle Differentiation nach x und nach y:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right) + rX + sY = 0,$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right) + p\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right) + sX + tY = 0,$$

und ersetze $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} : \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}$ durch seinen Wert aus der obigen Gleichung, so wird:

$$\frac{\frac{\partial Z}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial x} + q\frac{\partial Y}{\partial x} + rX + sY}{\frac{\partial Z}{\partial y} + p\frac{\partial X}{\partial y} + q\frac{\partial Y}{\partial y} + sX + tY} = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$\frac{A + rX + sY}{B + sX + tY} = \frac{C}{D},$$

so ist

$$4)\quad (AD - BC) + rXD + s(YD - XC) - tYC = 0,$$

und dies ist die Form der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, auf welche jede Fläche des betrachteten Systemes führt, wenn man hier noch die eine willkürliche Grösse α_1 vermittelst der Gleichung 3) eliminiert. Zwischen den Koeffizienten von r, s, t besteht die Beziehung, dass

$$-4XYCD = (YD - XC)^2$$

ist, denn es ist

$$\frac{Y}{X} = -\frac{C}{D}.$$

Die Flächenfamilie ist also charakterisiert durch eine lineare partielle Gleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$\mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} = 0,$$

in welcher $\mathrm{HL} - \mathrm{K}^2 = 0$ *ist; wobei diese Gleichung drei erste Integrale mit je einer willkürlichen Konstanten, oder, da zwischen den willkürlichen Konstanten zwei willkürliche Funktionen eingeführt werden können, zwei intermediäre Integrale besitzt.*

Es werde ferner ein dreifach unendliches System von Flächen betrachtet:

$$1)\qquad z = F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

und aus demselben vermittelst zweier willkürlicher Funktionen:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad \psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

ein einfach unendliches System herausgehoben. Jede Einhüllende solch eines Systemes gehört einer Flächenfamilie an, deren partielle Differentialgleichung ermittelt werden soll; es ist:

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y},$$

und da für die einhüllende Fläche auch

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

wird, so ist

$$2)\qquad p = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Da man aus den Gleichungen 1) und 2) zwei willkürliche Konstanten eliminieren kann, so sieht man, dass die Flächenfamilie auf dreierlei verschiedene Weisen durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung charakterisiert werden kann, in welcher eine willkürliche Konstante vorkommt. Es ist nun weiter:

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$s = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

oder weil auch

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

so wird:

$$\left(r - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(s - \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right) = -\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right),$$

$$\left(t - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2.$$

Also ist

$$\left(r - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\left(t - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - \left(s - \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$$

oder

$$3)\quad r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-2s\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-(rt-s^2)-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]=0.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0,$$

indem man sich aus den Gleichungen 1), 2), 3) die willkürlichen Konstanten eliminiert denkt, so ist:

$$\frac{H}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}=\frac{K}{-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}}=\frac{L}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}=\frac{M}{-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]}=\frac{N}{-1},$$

und es ist

$$K^2-(HL-MN)=G=0.$$

Die betrachtete Flächenfamilie hängt ab von einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche nicht mehr linear ist, sondern das Glied $rt-s^2$ *enthalten muss. Zwischen den Koeffizienten derselben besteht die Relation* $G=0$, *und sie besitzt drei erste Integrale mit je einer willkürlichen Konstanten oder zwei intermediäre Integrale.*

Dass nun auch umgekehrt eine Differentialgleichung, welche diese Eigenschaften hat, auf solch eine Flächenfamilie führt, ist aus den oben entwickelten Integrationsmethoden leicht zu beweisen.

Anwendung auf einige Beispiele.

812. Erstes Beispiel. *Es soll die Gleichung*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad \textit{oder} \quad r-a^2t=0$$

integriert werden, wobei a *eine Konstante ist.*

Hier ist

$$H=1,\quad K=0,\quad L=-a^2,\quad M=0,\quad N=0,\quad \sqrt{G}=a.$$

Die Gleichungen 14) des § 809 ergeben:

$$dy\mp a\,dx=0,\quad dp\mp a\,dq=0,$$

also

$$y\mp ax=\text{const},\quad p\mp aq=\text{const};$$

man hat folglich zwei intermediäre Integrale, die man in der Form schreiben kann:

$$p + aq = 2a\varphi'(y + ax), \quad p - aq = -2a\psi'(y - ax);$$

φ und ψ sind willkürliche Funktionen, deren Ableitungen φ' und ψ' sind. Hieraus folgt:

$$p = a\varphi'(y + ax) - a\psi'(y - ax),$$
$$q = \varphi'(y + ax) + \psi'(y - ax),$$

ferner:

$$dz = \varphi'(y + ax)(dy + a\,dx) + \psi'(y - ax)(dy - a\,dx),$$

und schliesslich

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax);$$

es ist unnütz, hier noch eine willkürliche Konstante hinzuzufügen, weil φ und ψ willkürliche Funktionen sind.

813. Die Gleichung $r - a^2 t = 0$ ist die nämliche, auf welche das Problem der *schwingenden Saiten* führt; man kann ihr Integral auch unmittelbar erhalten, ohne dass man dabei auf die allgemeine Theorie der vorigen Paragraphen zurückgeht. Es genügt:

$$y + ax = \alpha, \; y - ax = \beta$$

zu setzen, und α und β als neue Variabele einzuführen. Dann ist:

$$p = a\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \beta}\right), \quad q = \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\right),$$

$$r = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\right),$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}.$$

Die ursprüngliche Differentialgleichung wird demnach:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \dfrac{\partial z}{\partial \beta}}{\partial \alpha} = 0,$$

hieraus folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \psi'(\beta),$$

wobei $\psi'(\beta)$ die Ableitung einer willkürlichen Funktion $\psi(\beta)$ ist. Eine zweite Integration ergiebt:

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

wobei φ eine zweite willkürliche Funktion ist; dies ist das Resultat, auf welches auch unsere allgemeine Methode geführt hat.

814. Zweites Beispiel. *Es soll die partielle Differentialgleichung*

$$rt - s^2 = 0$$

integriert werden, welche den developpabelen Flächen angehört (§ 353).

Die Gleichungen 15) des § 809 reduzieren sich hier auf

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Um die erste zu integrieren, muss man y, p, q als Konstanten ansehen, bei der Integration der zweiten hat man x, p, q als Konstanten zu betrachten. Also hat man für die erste Gleichung

$$V = \text{einer Funktion von } z - px, y, p, q,$$

und für die zweite

$$V = \text{einer Funktion von } z - qy, x, p, q;$$

man erhält also eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen, wenn man

$$V = \Phi(z - px - qy, p, q)$$

setzt; und man genügt der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung, wenn man diesen Wert von V null setzt.

Demnach hat man zwei intermediäre Integrale der Gleichung $rt - s^2 = 0$, nämlich:

$$q = \varphi(p), \quad z - px + qy = \psi(p),$$

wobei φ und ψ willkürliche Funktionen sind. Man muss aber bemerken, dass in dem vorliegenden Falle auch eine Lösung existiert, welche eine willkürliche Funktion von zwei Grössen enthält, nämlich:

$$z - px + qy = \psi(p, q).$$

Um die Integration zu vollenden, hat man die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ mit den intermediären Integralen zu verbinden; dieselben ergeben durch Differentiation:

$$dq = \varphi'(p)\,dp, \quad x\,dp + y\,dq + \psi'(p)\,dp = 0,$$

also wird durch Elimination von dq:

$$x + y\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

Das gesuchte Integral folgt also aus der Elimination von p zwischen den beiden Gleichungen

$$z = px + y\varphi(p) + \psi(p), \quad 0 = x + y\varphi'(p) + \psi'(p).$$

Man erhält demnach die einhüllende Fläche einer beweglichen Ebene.

815. Drittes Beispiel. *Es sollen die Flächen bestimmt werden, bei denen das eine System der Krümmungskurven in parallelen Ebenen gelegen ist.*

Indem wir x, y, z als rechtwinklige Koordinaten und die zur Ebene xz parallelen als Ebenen der Krümmungskurven annehmen, wird die partielle Differentialgleichung der gesuchten Flächen (§ 322):

$$pqr - (1 + p^2)s = 0.$$

Hier ist

$$H = pq, \quad 2K = -(1 + p^2),$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \sqrt{G} = \frac{1 + p^2}{2}.$$

Die Gleichungen 14) im § 809 werden also, wenn man $\sqrt{G}$ das Zeichen $+$ giebt:

$$dy = 0, \quad pq\,dp - (1 + p^2)\,dq = 0,$$

und wenn man $\sqrt{G}$ mit dem Zeichen $-$ nimmt:

$$pq\,dy + (1 + p^2)\,dx = 0, \quad dp = 0.$$

Wir betrachten zunächst das erste System; es ist $y = \text{const}$, ferner:

$$\frac{p\,dp}{1 + p^2} - \frac{dq}{q} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{q}{\sqrt{1 + p^2}} = \text{const.}$$

Man bekommt also das intermediäre Integral

$$q = \sqrt{1 + p^2}\,\varphi'(y),$$

wobei $\varphi'(y)$ die Ableitung einer willkürlichen Funktion $\varphi(y)$ ist.

Die Gleichungen des zweiten Systemes sind, weil $dz = p\,dx + q\,dy$ ist:

$$p\,dz + dx = 0, \quad dp = 0,$$

also ist:

$$pz + x = \text{const} \quad \text{und} \quad p = \text{const},$$

und folglich wird

$$x = -pz + \Psi(p)$$

das zweite intermediäre Integral, in dem Ψ eine willkürliche Funktion ist. Es bleibt also die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

zu integrieren; zu dem Zwecke wählen wir y und q als die unabhängigen Variabelen. Das zweite Integral ergiebt:

$$dx = -p\,dz - z\,dp + \Psi'(p)\,dp.$$

Indem man diesen Wert von dx und ebenso den Wert von dq aus dem ersten Integral substituiert, erhält man:

$$\sqrt{1+p^2}\,dz + \frac{zp\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\Psi'(p)\,dp + \varphi'(y)\,dy.$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung sind exakte Differentiale, und da

$$\int \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\Psi'(p)\,dp = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\Psi(p) - \int \Psi(p)\,\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$$

ist, so wird, wenn man zur Beseitigung des Integralzeichens

$$\Psi(p) = (1+p^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{d\,\dfrac{\psi(p)}{\sqrt{1+p^2}}}{dp}$$

setzt, wobei $\psi(p)$ eine neue willkürliche Funktion ist:

$$z\sqrt{1+p^2} = -p\sqrt{1+p^2}\,\psi'(p) + \sqrt{1+p^2}\,\psi(p) + \varphi(y).$$

Zugleich bekommt das zweite intermediäre Integral die Form:

$$x + pz = -(1+p^2)\,\psi'(p) + p\psi(p),$$

und die Gleichung der gesuchten Flächen ist das Resultat der Elimination von p zwischen den beiden vorigen Gleichungen. Setzt man:

$$V = z - px - \sqrt{1+p^2}\,\varphi(y) - \psi(p),$$

so kann das System dieser beiden Gleichungen durch

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial p} = 0$$

ersetzt werden. Die Flächen, zu denen diese Gleichungen gehören, besitzen Kurven von Nabelpunkten (§ 319), die durch die Gleichung

$$\frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}$$

bestimmt sind.

Anwendung der Transformation von Legendre.

816. Diese Transformation haben wir im § 92 kennen gelernt; sie ist bei Integrationsproblemen oftmals von Nutzen, und wir wollen hier ein Beispiel dafür geben.

Aufgabe. *Es soll die allgemeine Gleichung der Flächen bestimmt werden, bei denen in jedem Punkte die Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet sind.*

Für diese Flächen ist also die mittlere Krümmung allenthalben gleich null (§ 311); sie heissen *Minimalflächen.* Ihre partielle Differentialgleichung ist nach § 320:

1) $$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Wendet man die Transformation von Legendre an, indem man

2) $$u = px + qy - z,$$

also

3) $$x = \frac{\partial u}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial q}$$

setzt, und p und q als unabhängige Variabele einführt, so wird die Gleichung 1):

4) $$(1+q^2)\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + 2pq\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} + (1+p^2)\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = 0.$$

Die Gleichungen 3) liefern:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\, \partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{\partial y}{\partial q},$$

und folglich kann die Gleichung 4) in jeder der beiden folgenden Formen geschrieben werden:

$$(1+q^2)\frac{\partial y}{\partial q} + 2pq\frac{\partial x}{\partial q} + (1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p} = 0,$$

$$(1+q^2)\frac{\partial y}{\partial q} + 2pq\frac{\partial y}{\partial p} + (1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p} = 0.$$

Indem man die erste dieser Gleichungen nach p und die zweite nach q differentiiert, erhält man zwei neue Gleichungen, welche sich aus der folgenden:

$$5)\ (1+q^2)\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} + 2pq\frac{\partial^2 U}{\partial p\, \partial q} + (1+p^2)\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} + 2q\frac{\partial U}{\partial q} + 2p\frac{\partial U}{\partial p} = 0$$

ableiten lassen, wenn man hier $U = x$ und $U = y$ setzt. Und wenn man u durch $px + qy - z$ in der Gleichung 4) ersetzt, und das eben gefundene Resultat beachtet, so erkennt man, dass die Gleichung 5) auch für $U = z$ erfüllt ist. Demnach genügen die drei Koordinaten x, y, z, betrachtet als Funktionen von p und q, der nämlichen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die Methode des § 809 ist auf diese Gleichung 5) nicht anwendbar; indessen werden die Gleichungen 15) in jenem Paragraphen, übertragen auf die gegenwärtigen Bezeichnungen, durch eine Funktion V der beiden Variabelen p und q erfüllt, und indem man diese Funktion gleich einer willkürlichen Konstante α setzt, erhält man ein partikuläres Integral der Gleichung 5). Das nämliche Integral kann man auch aus der ersten der Gleichungen 14) im § 809 erhalten, nämlich:

$$(1+p^2)\,dq - (pq \pm \sqrt{-1-p^2-q^2})\,dp = 0.$$

Diese Gleichung giebt, differentiiert unter der Annahme, dass $dq = \text{const}$ ist:

$$d^2 p = 0, \quad \text{also} \quad \frac{dp}{dq} = \text{const}.$$

Wir bezeichnen die Konstante mit α oder β, je nachdem die Wurzel $\sqrt{-1-p^2-q^2}$ mit dem einen oder dem andern Vorzeichen genommen wird; also ist:

$$6)\qquad \begin{cases} 1+p^2=\alpha(pq+\sqrt{-1-p^2-q^2}), \\ 1+p^2=\beta(pq-\sqrt{-1-p^2-q^2}). \end{cases}$$

Da die Gleichung 5) erfüllt ist, wenn man U den Wert von α oder von β beilegt, so ist evident, dass sich dieselbe vereinfacht, indem man α und β als unabhängige Variabele an Stelle von p und q einführt. Es folgt aus den Gleichungen 6):

$$p=\alpha q+\sqrt{-1-\alpha^2}, \quad p=\beta q+\sqrt{-1-\beta^2},$$

also:

$$p=\frac{\alpha\sqrt{-1-\beta^2}-\beta\sqrt{-1-\alpha^2}}{\alpha-\beta}, \quad q=\frac{\sqrt{-1-\beta^2}-\sqrt{-1-\alpha^2}}{\alpha-\beta},$$

und man findet, dass sich die Gleichung 5) auf

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0$$

reduziert, deren Integral

$$U=\Phi(\alpha)+\Psi(\beta)$$

ist, wobei Φ und Ψ willkürliche Funktionen sind. Man kann also schreiben:

$$x=\frac{\partial u}{\partial p}=\varphi'(\alpha)+\psi'(\beta),$$

wobei φ und ψ willkürliche Funktionen sind. Unter der Annahme $q=\text{const}$ hat man:

$$dp=q\,d\alpha+d\sqrt{-1-\alpha^2}=q\,d\beta+d\sqrt{-1-\beta^2},$$

also ist:

$$\frac{\partial u}{\partial p}dp=q[\varphi'(\alpha)\,d\alpha+\psi'(\beta)\,d\beta]+\varphi'(\alpha)\,d\sqrt{-1-\alpha^2}+\psi'(\beta)\,d\sqrt{-1-\beta^2},$$

und

$$u = q[\varphi(\alpha) + \psi(\beta)] + \varphi'(\alpha)\sqrt{-1-\alpha^2} + \psi'(\beta)\sqrt{-1-\beta^2}$$
$$-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha - \int_{\beta_0}^{\beta}\sqrt{-1-\beta^2}\,\psi''(\beta)\,d\beta + \chi(q),$$

wobei $\chi(q)$ eine bestimmte Funktion von q ist. Differentiiert man nach q, so folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial q} = y = [\varphi(\alpha) + \psi(\beta)] + q\left[\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dq} + \psi'(\beta)\frac{d\beta}{dq}\right] + \varphi'(\alpha)\frac{d\sqrt{-1-\alpha^2}}{dq}$$
$$+ \psi'(\beta)\frac{d\sqrt{-1-\beta^2}}{dq} + \chi'(q),$$

und es ist, wenn p konstant ist:

$$0 = \alpha\,dq + q\,d\alpha + d\sqrt{-1-\alpha^2} = \beta\,dq + q\,d\beta + d\sqrt{-1-\beta^2},$$

also:

$$y = [\varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha)] + [\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)] + \chi'(q).$$

Da aber y von der Form $\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)$ ist, so muss $\chi'(q)$ eine Konstante sein; man kann dieselbe mit den willkürlichen Funktionen φ und ψ vereinigen, also $\chi'(q)$ null setzen. Folglich ist:

$$y = [\varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha)] + [\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)].$$

Da die Funktion $\chi(q)$ konstant ist, so lässt sie sich mit den Integralen zusammenziehen, welche in dem obigen Werte von u auftreten, und deren untere Grenzen willkürlich sind. Aus diesem Werte von u folgt der Wert von z nach der Gleichung 2), nämlich:

$$z = \int\sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha + \int\sqrt{-1-\beta^2}\,\psi''(\beta)\,d\beta.$$

Demnach geht das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung aus der Elimination von α und β zwischen den drei Gleichungen hervor:

$$7)\quad \begin{cases} x = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta), \\ y = \varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) - \beta\psi'(\beta), \\ z = \int\sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha + \int\sqrt{-1-\beta^2}\,\psi''(\beta)\,d\beta, \end{cases}$$

wobei φ und ψ willkürliche Funktionen bedeuten. Wiewohl diese Gleichungen komplexe Grössen enthalten, so stellen sie doch auch unendlich viele reelle Flächen dar.

Über lineare partielle Differentialgleichungen.

817. Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung irgendwelcher Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von unabhängigen Variabelen, die aber in Bezug auf die unbekannte Funktion und ihre partiellen Ableitungen linear ist.

Es ist evident, dass man, wenn diese Gleichung ein *zweites Glied* enthält, nur eine partikuläre Lösung der Gleichung zu kennen braucht, um dieses zweite Glied verschwinden zu lassen.

Hat die vorgelegte Gleichung kein zweites Glied, so besitzt sie zwei Eigenschaften, die wir für den Fall der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung in den §§ 724 und 725 festgestellt haben, nämlich *erstens:* kennt man eine Funktion, die der partiellen Gleichung genügt, so erhält man eine allgemeinere Lösung, wenn man diese Funktion mit einer willkürlichen Konstante multipliziert; *zweitens:* wenn gegebene Funktionen in irgend welcher Anzahl die Gleichung befriedigen, so genügt ihr auch die Summe dieser Funktionen.

Wenn es sich um eine lineare partielle Differentialgleichung ohne zweites Glied handelt, deren Koeffizienten konstant sind, so liefern die genannten Eigenschaften eine Lösung der Differentialgleichung, welche so viele willkürliche Konstanten enthält, als man nur will; bisweilen führen sie auch zu einer Lösung, welche willkürliche Funktionen enthält. Um dies zu zeigen, betrachten wir den Fall zweier unabhängiger Variabelen x und y; doch lässt sich unsere Untersuchung auf alle diese Fälle ausdehnen.

818. Die lineare partielle Differentialgleichung sei:

$$1)\quad 0 = a_0 z + \left(b_0 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(c_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \cdots,$$

ihre Ordnung sei n und ihre Koeffizienten konstant. Wir ersetzen z durch $e^{\alpha x + \beta y}$, so wird das Resultat dieser Substitution $e^{\alpha x + \beta y} f(\alpha, \beta)$, wenn man

$$f(\alpha, \beta) = a_0 + (b_0 \alpha + b_1 \beta) + (c_0 \alpha^2 + c_1 \alpha\beta + c_2 \beta^2) + \cdots$$

setzt. Ist also die Gleichung

$$f(\alpha, \beta) = 0 \tag{2}$$

erfüllt, wenn man $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ setzt, und bezeichnet C_0 eine willkürliche Konstante, so wird der Gleichung 1) durch die Funktion

$$z = C_0 e^{\alpha_0 x + \beta_0 y}$$

genügt; und da die Gleichung 2) unendlich viele Lösungen (α, β) zulässt, so ist auch:

$$z = \Sigma C e^{\alpha x + \beta y} \tag{3}$$

eine Lösung der Gleichung 1) und enthält beliebig viele Terme.

819. Der Fall, dass einige der Wurzeln β der Gleichung 2) lineare Funktionen von α sind, ist besonders zu bemerken; alsdann kann man eine Lösung der partiellen Differentialgleichung bilden, welche eben so viele willkürliche Funktionen enthält, als solche Wurzeln β vorkommen. Denn nehmen wir an, dass man aus der Gleichung 2)

$$\beta = m\alpha + n$$

entnehmen kann, so giebt die Formel 3), wenn man für β diesen Wert nimmt:

$$z = e^{ny} \Sigma C e^{(x + my)\alpha}.$$

Die Zahl der Glieder in dieser Summe ist unbestimmt; die Exponenten α in denselben und die Koeffizienten C sind willkürlich; also ist die Summe eine willkürliche Funktion von e^{x+my} oder auch von $x + my$. Folglich erhält man die Lösung:

$$z = e^{ny} \Phi(x + my),$$

wobei Φ eine willkürliche Funktion bezeichnet, wie man nun umgekehrt leicht verifizieren kann.

Hat die Gleichung 2) eine zweite Wurzel

$$\beta = m_1 \alpha + n_1,$$

die eine lineare Funktion von α ist, so kann man die neue Lösung

$$z = e^{n_1 y}\,\Phi_1(x + m_1 y)$$

bilden, und so fort. Die Summe dieser Lösungen, nämlich:

$$z = e^{ny}\,\Phi(x + my) + e^{n_1 y}\,\Phi_1(x + m_1 y) + \dots$$

ist auch noch eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.

820. Anwendung auf das Problem der schwingenden Saiten. Verschiedene Fragen der mathematischen Physik führen auf partielle Differentialgleichungen der hier betrachteten Art. Bei diesen Aufgaben muss die unbekannte Funktion überdies noch gewissen besonderen Anfangs- oder Grenzbedingungen genügen, und um die vollständige Lösung zu erhalten, muss man über die willkürlichen Elemente so verfügen können, dass die geforderten Bedingungen erfüllt sind. Wir beschränken uns hier auf die Gleichung des Problemes der schwingenden Saiten, das uns schon in den §§ 812 und 813 beschäftigt hat.

Die Aufgabe besteht hier darin, eine Funktion y der Variabelen x und t zu finden, welche der Gleichung

$$1)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

genügt und so beschaffen ist, dass für $t = 0$

$$2)\qquad y = F(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = f(x)$$

wird, wobei $F(x)$ und $f(x)$ gegebene Funktionen von x sind; a bedeutet eine reelle Konstante.

Indem man $e^{\alpha x + \beta t}$ für y in die Gleichung 1) substituiert, erhält man

$$\beta^2 - a^2\alpha^2 = 0,$$

und hieraus folgt:

$$\beta = +a\alpha, \quad \beta = -a\alpha,$$

also genügt man der Gleichung 1) (§ 819), indem man

$$3)\qquad y = \Phi(x + at) + \Psi(x - at)$$

setzt, wobei Φ und Ψ willkürliche Funktionen sind. Es bleibt also die Bedingung für $t = 0$ zu erfüllen; man folgert aus 3):

$$4)\qquad \frac{\partial y}{\partial t} = a\Phi'(x + at) - a\Psi'(x - at),$$

und für $t = 0$ geben die Gleichungen 3) und 4):

$$y = \Phi(x) + \Psi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = a\Phi'(x) - a\Psi'(x).$$

Um den Gleichungen 2) zu genügen, muss man

$$\Phi(x) + \Psi(x) = F(x), \quad \Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F_1(x),$$

setzen, also wird

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}F(x) + \tfrac{1}{2}F_1(x), \quad \Psi(x) = \tfrac{1}{2}F(x) - \tfrac{1}{2}F_1(x),$$

und folglich ist:

$$y = \frac{F(x+at) + F(x-at)}{2} + \frac{F_1(x+at) - F_1(x-at)}{2}.$$

Die vollständige Lösung des physikalischen Problemes wird aus dieser allgemeinen Gleichung gewonnen, indem man noch die Bedingungen beachtet, dass die schwingende Saite von der Länge l in ihren Endpunkten $x = 0$ und $x = l$ festgehalten ist.

Über die Integration partieller Differentialgleichungen durch unendliche Reihen oder durch bestimmte Integrale.

821. Die Fälle, in denen man die partiellen Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung vollkommen durch allgemeine Funktionen integrieren kann, sind an Zahl sehr gering, und man ist daher bei den Anwendungen darauf gewiesen, die Integration vermittelst unendlicher Reihen zu versuchen. Aber auch dieses Verfahren ist nur bei den linearen Gleichungen durchführbar; man kann dann die Formel von Maclaurin oder die von Taylor wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen anwenden. Oftmals ist auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten vorzuziehen, sie bietet eine grössere Allgemeinheit, denn sie lässt die Entwickelung der Integrale in eine Reihe finden, welche nach Potenzen irgend einer Funktion der unabhängigen Variabelen fortschreitet.

Man kann auch das Integral der nämlichen Gleichung durch verschiedene Reihen darstellen, welche oft auch durch die Zahl der willkürlichen Funktionen sich unterscheiden. Hieraus folgt, dass man nicht von vornherein die Zahl und Beschaffenheit der willkürlichen Funktionen angeben kann, welche in dem allgemeinsten Integrale einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung auftreten.

822. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung

$$1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

die in der mathematischen Theorie der Wärmeleitung auftritt; a bezeichnet eine gegebene reelle Konstante. Aus der Differentiation nach t folgt:

$$2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\,\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} = a\,\dfrac{\partial^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}}{\partial x^2} = a^2\,\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a^2\,\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4\,\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^4 \dfrac{\partial u}{\partial t}}{\partial x^4} = a^3\,\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^6}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und wenn man t den besondern Wert t_0 beilegt, so bestimmen die Gleichungen 1) und 2) die entsprechenden Werte der aufeinander folgenden Ableitungen von u nach t. Aber der Wert von u bleibt eine willkürliche Funktion von x; bezeichnet man ihn mit $F(x)$, so hat man nach der Formel von Taylor:

$$3)\qquad \begin{cases} u = F(x) + \dfrac{a\,F''(x)}{1}(t-t_0) + \dfrac{a^2 F^4(x)}{1\,.\,2}(t-t_0)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \dfrac{a^3 F^6(x)}{1\,.\,2\,.\,3}(t-t_0)^3 + \cdots, \end{cases}$$

ein Ausdruck, der eine einzige willkürliche Funktion $F(x)$ enthält.

Wir wollen nun u nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickeln, wobei x_0 eine willkürlich gewählte, bestimmte Grösse ist. Die Gleichung 1) ergiebt:

$$4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial u}{\partial t},$$

ferner:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{1}{a} \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{a} \frac{\partial \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\partial t^2} = \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \cdots$$

Die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial x}$, welche zu $x = x_0$ gehören, bleiben hier willkürliche Funktionen von t; bezeichnet man sie mit $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, so bestimmen die vorstehenden Gleichungen die Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \cdots$ und es wird nach der Formel von Taylor:

$$5) \begin{cases} u = \varphi(t) + \frac{\varphi'(t)}{1.2} \frac{(x-x_0)^2}{a} + \frac{\varphi''(t)}{4!} \frac{(x-x_0)^4}{a^2} + \cdots \\ \qquad + \frac{\psi(t)}{1}(x-x_0) + \frac{\psi'(t)}{3!} \frac{(x-x_0)^3}{a} + \frac{\psi''(t)}{5!} \frac{(x-x_0)^5}{a^2} + \cdots \end{cases}$$

Dieser Ausdruck von u setzt sich aus zwei verschiedenen Reihen zusammen und enthält zwei willkürliche Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$. Indessen ist die Formel 5 nicht allgemeiner als die Formel 3); Poisson hat gezeigt, dass sich die beiden Gleichungen in einander überführen lassen, wenn man voraussetzt, dass die Reihen konvergent sind (*Théorie mathématique de la chaleur, p. 137*). Diese letztere Voraussetzung ist überhaupt eine Annahme, welche wir über die Beschaffenheit des Integrales gemacht haben, dieselbe ist aber keineswegs notwendig für das allgemeinste Integral der Differentialgleichung 1).*

823. Anstatt die Integrale in Reihen zu entwickeln, kann man sie bisweilen auch zweckmässig durch bestimmte Integrale darstellen; wir beschränken uns dabei nur auf ein Beispiel für diese Methode und wählen wieder die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

* Eine allgemeine Methode für die Integration linearer partieller Differentialgleichungen dieser Art ist im Anhang gegeben.

Indem wir auf dieselbe die Methode des § 818 anwenden, ergiebt die Substitution von $e^{\alpha x + \beta t}$ für u:

$$\beta = a\alpha^2,$$

und folglich hat man als Lösung unserer Gleichung:

$$u = Ce^{a\alpha^2 t}e^{\alpha x} + C_1 e^{a\alpha_1^2 t}e^{\alpha_1 x} + \dots,$$

welche eine unendliche Anzahl von willkürlichen Konstanten $C, C_1, \dots \alpha, \alpha_1, \dots$ enthält. Nun ist (§ 498):

$$e^{\alpha^2 at} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} e^{2\alpha\omega\sqrt{at}}\, d\omega,$$

also kann man schreiben:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} [Ce^{\alpha(x+2\omega\sqrt{at})} + C_1 e^{\alpha_1(x+2\omega\sqrt{at})} + \dots]\, d\omega.$$

Die Reihe

$$Ce^{\alpha x} + C_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots$$

kann eine willkürliche Funktion von e^x oder eine willkürliche Funktion von x darstellen; bezeichnet man dieselbe mit $F(x)$, so wird der Wert von u:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2\omega\sqrt{at})\, e^{-\omega^2}\, d\omega;$$

sie reduziert sich auf $F(x)$ für $t = 0$, und also wird sie mit der Formel 3) § 822 identisch, wenn man dort $t_0 = 0$ setzt. Indessen muss man bemerken, dass die vorstehende Formel nur dann gilt, wenn $F(x)$ so beschaffen ist, dass das Produkt $e^{-x^2} F(x)$ verschwindet, wenn x unendlich wird.

Die Untersuchung, von welcher wir hier nur einen Begriff geben wollten, ist für die Probleme der mathematischen Physik überaus wichtig. Die besonderen Schriften hierüber, wie das Werk von Poisson, enthalten viele Beispiele hierzu, so dass wir es für überflüssig halten, auf weitere Entwickelungen hier einzugehen.

Siebentes Kapitel.

Über die Methode der Variationsrechnung.

Definition der Variationen eines Systemes von Variabelen, welche von einer unter ihnen abhängen.

824. Es seien x und y zwei Variabele, welche von einander abhängen, so dass

$$1) \qquad y = f(x)$$

ist. Betrachtet man x und y als Koordinaten, so stellt diese Gleichung eine Kurve dar, und wenn man diese Kurve mit einer andern vergleichen will, welche durch irgend eine andere Gleichung

$$2) \qquad y = f_1(x)$$

definiert ist, so kann man beide Kurven, und zwar auf unendlich viele verschiedene Weisen, in der nämlichen Familie vereinigen, deren Gleichung

$$3) \qquad y = F(x, \alpha)$$

einen variabelen Parameter α enthält. Die Funktion F muss so gewählt werden, dass sie sich successive auf f und f_1 reduziert, wenn man dem Parameter α zwei besondere Werte beilegt. So kann man z. B., indem man mit α_0 und α_1 irgend zwei bestimmte Werte von α bezeichnet:

$$F(x, \alpha) = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} f(x) + \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} f_1(x)$$

setzen, denn diese Formel giebt:

$$F(x, \alpha_0) = f(x), \quad F(x, \alpha_1) = f_1(x).$$

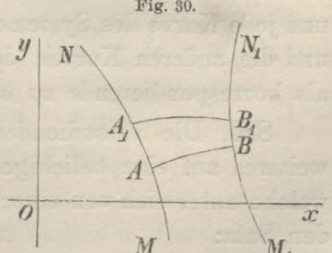
Und wenn man die allgemeinste Funktion $F(x, \alpha)$ haben will, welche die angegebene Bedingung erfüllt, so braucht man bloss diesem Ausdruck eine willkürliche Funktion von x und α hinzuzufügen, welche der einzigen Bedingung unterworfen ist, dass sie für $\alpha = \alpha_0$ und $\alpha = \alpha_1$ bei allen Werten von x verschwindet.

Lässt man α von α_0 bis α_1 variieren, so fällt die durch die Gleichung 3) dargestellte Kurve zuerst mit der Kurve 1) zusammen, alsdann deformiert sie sich stetig, wenn wir annehmen, dass bei jedem Wert von x die Funktion $F(x, \alpha)$ eine stetige Funktion von α ist, und geht schliesslich in die Kurve 2) über.

Will man zwei Bogen der Kurven 1) und 2) mit einander vergleichen, welche zwischen den Ordinaten enthalten sind, die zu zwei gegebenen Werten x_0 und X von x gehören, so kann man annehmen, dass, während α von α_0 bis α_1 variiert, die verschiedenen Punkte des ersten Bogens in die Punkte des zweiten übergehen, indem sie sich auf Parallelen zur y-Axe bewegen; alsdann sind die Punkte der Kurven 3), welche einem Werte von x zwischen x_0 und X entsprechen, *korrespondierende.*

825. Wie nun aber auch die Bogen der beiden Kurven, welche mit einander verglichen werden sollen, gewählt sind, man kann immer den zweiten Bogen als durch Deformation des ersten entstanden betrachten, d. h. indem man die verschiedenen Punkte des ersten gewisse Wege durchlaufen lässt. Die Endpunkte jedes dieser Wege werden *korrespondierende* Punkte der beiden Kurven. Diese Deformation lässt sich auch auf unendlich viele verschiedene Weisen ausführen, und dies wollen wir hier nun zeigen.

Fig. 30.



Es seien AB und A_1B_1 die Bogen der beiden Kurven, die wir als korrespondierend betrachten. Wir können die Bogen MN und M_1N_1 willkürlich wählen, auf denen sich die Endpunkte AB des ersten Bogens bewegen, um nach der Deformation mit den Endpunkten A_1, B_1 des zweiten zusammen zu fallen. Indem wir aber wie im vorigen Paragraphen verfahren, können wir die beiden Kurven MN, M_1N_1, und zwar auf unendlich viele verschiedene Weisen, in der nämlichen Familie von Kurven zusammenfassen, die durch eine Gleichung

$$4)\qquad \Phi(x, y, t) = 0$$

dargestellt ist, wobei t einen variabelen Parameter bezeichnet; die Kurven MN und M_1N_1 gehören zu zwei bestimmten Werten t_0 und t_1 des Parameters t. Es sei nun

$$5)\qquad F(x, y, \alpha) = 0$$

die Gleichung einer Kurvenfamilie, welche die beiden Kurven AB, A_1B_1 enthält, und wir wollen wie vorhin annehmen, dass diese beiden zu den Werten α_0 und α_1 des Parameters α gehören.

Die Systeme der Kurven 4) und 5) lassen nun alle Punkte der Ebene bestimmen; denn fixiert man die Werte von x und y, so ergeben diese Gleichungen die Werte von t und α. Man kann also x und y als Funktionen von t und α betrachten; wir nehmen an, dass aus den Gleichungen 4) und 5):

$$6)\qquad x = \varphi(t, \alpha), \quad y = \psi(t, \alpha)$$

berechnet ist. Lässt man t variieren, indem man α als konstant betrachtet, so bestimmen diese Gleichungen eine Kurve des Systemes α, welches die beiden gegebenen Kurven AB, A_1B_1 enthält. Lässt man dagegen α variieren, indem man t als konstant betrachtet, so bestimmen die Gleichungen 6) eine Kurve des Systemes t, welches die Kurven MN, M_1N_1 enthält, und jede Kurve des Systemes t schneidet die gegebenen Kurven und die anderen Kurven des Systemes α in Punkten, welche als korrespondierende zu betrachten sind.

826. Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf eine beliebige Anzahl von Variabelen ausdehnen, welche unter sich von einer abhängen. Man erhält den folgenden Satz:

Es lassen sich immer, und zwar auf unendlich viele verschiedene Weisen, n *Funktionen* Φ, Ψ, X ... *der beiden Variabelen* t *und* α *finden,*

7) $\quad x = \Phi(t, \alpha), \quad y = \Psi(t, \alpha), \quad z = X(t, \alpha), \ldots$

so dass für die Werte $\alpha = \alpha_0$ *und* $\alpha = \alpha_1$:

$$8) \quad \begin{cases} x = \varphi_0(t), & y = \psi_0(t), \quad z = \chi_0(t), \ldots \\ x = \varphi_1(t), & y = \psi_1(t), \quad z = \chi_1(t), \ldots \end{cases}$$

wird, und für die Werte $t = t_0$ *und* $t = t_1$:

$$9) \quad \begin{cases} x = \Phi_0(\alpha), & y = \Psi_0(\alpha), \quad z = X_0(\alpha), \\ x = \Phi_1(\alpha), & y = \Psi_1(\alpha), \quad z = X_1(\alpha), \end{cases}$$

wie auch die Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \ldots$ *und* $\Phi_0, \Phi_1, \Psi_0, \Psi_1, \ldots$ *gegeben sein mögen.*

Es ist evident, dass die Funktionen $\Phi_0, \Psi_0, X_0 \ldots$ gleich $\varphi_0, \psi_0, \chi_0, \ldots$ werden müssen, wenn man $\alpha = \alpha_0$, $t = t_0$ annimmt, und gleich $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \ldots$ wenn man $\alpha = \alpha_1$, $t = t_0$ annimmt; desgleichen müssen die Funktionen $\Phi_1, \Psi_1, X_1 \ldots$ gleich $\varphi_0, \psi_0, \chi_0, \ldots$ werden oder gleich $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \ldots$ wenn man $\alpha = \alpha_0$, $t = t_1$ oder $\alpha = \alpha_1$, $t = t_1$ setzt.

Setzt man z. B.:

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, \alpha_0) &= \varphi_0(t_0) = \Phi_0(\alpha_0) = A, \\ \Phi(t_0, \alpha_1) &= \varphi_1(t_0) = \Phi_0(\alpha_1) = B, \\ \Phi(t_1, \alpha_0) &= \varphi_0(t_1) = \Phi_1(\alpha_0) = C, \\ \Phi(t_1, \alpha_1) &= \varphi_1(t_1) = \Phi_1(\alpha_1) = D, \end{aligned}$$

so kann man für $\Phi(t, \alpha)$ den folgenden Ausdruck wählen:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \alpha) = {} & \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} \varphi_0(t) + \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \varphi_1(t) \\ & + \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \left[\Phi_0(\alpha) - A \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} - B \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \right] \\ & + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \left[\Phi_1(\alpha) - C \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} - D \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \right], \end{aligned}$$

und ebenso für die übrigen, $\Psi(t, \alpha) \ldots$

Die Gleichungen in der ersten Zeile des Systemes 8) definieren irgend ein System von Variabelen, welche unter sich von einer abhängen. Nimmt man x zur unabhängigen Variabelen, so lassen sie sich durch

10) $$y = f(x), \quad z = f^{(1)}(x), \quad u = f^{(2)}(x), \ldots$$

darstellen. Ebenso definieren die Gleichungen der zweiten Zeile im System 8) ein zweites System von Funktionen:

11) $$y = f_1(x), \quad z = f_1^{(1)}(x), \quad u = f_1^{(2)}(x), \ldots$$

und diese beiden Systeme sind in dem allgemeineren Systeme enthalten, welches durch die Gleichungen 7) definiert ist; das eine gehört zum Werte $\alpha = \alpha_0$, das andere zum Werte $\alpha = \alpha_1$.

827. Erteilt man dem Parameter α irgend einen bestimmten Wert, so definieren die Gleichungen 7) ein System von Funktionen $y, z, \ldots$ der Variabelen x. Setzt man nun weiter:

$$\begin{aligned}
dy &= y'\,dx, & dz &= z'\,dx, & du &= u'\,dx, \ldots \\
dy' &= y''\,dx, & dz' &= z''\,dx, & du' &= u''\,dx, \ldots \\
dy'' &= y'''\,dx, & dz'' &= z'''\,dx, & du'' &= u'''\,dx, \ldots \\
&\ldots & &\ldots & &\ldots
\end{aligned}$$

so können die neuen Variabelen $y', z', u', \ldots y'', z'', u'', \ldots$ ebenso wie $x, y, z, \ldots$ als Funktionen von t und α ausgedrückt werden. So giebt z. B. die Differentiation der Gleichungen 7):

$$dx = \frac{\partial \Phi(t, \alpha)}{\partial t}\,dt, \quad dy = \frac{\partial \Psi(t, \alpha)}{\partial t}\,dt, \quad dz = \frac{\partial X(t, \alpha)}{\partial t}\,dt, \ldots$$

und hieraus schliesst man:

$$y' = \frac{\partial \Psi(t, \alpha)}{\partial t} : \frac{\partial \Phi(t, \alpha)}{\partial t}, \quad z' = \frac{\partial X(t, \alpha)}{\partial t} : \frac{\partial \Phi(t, \alpha)}{\partial t}, \ldots$$

man erhält ebenso durch eine neue Differentiation $y'', z'', \ldots$ und so weiter.

828. Indem die Variabelen $x, y, z, \ldots y', z', \ldots y'', z'', \ldots$ als Funktionen von t und α ausgedrückt sind, betrachten wir t als konstant, und lassen α um $d\alpha$ sich ändern. Die Änderungen, welche die Grössen $x, y, z, \ldots$ dabei erleiden, werden dann ausgedrückt durch:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{\partial \Phi(t, \alpha)}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2 \Phi(t, \alpha)}{\partial \alpha^2}\,\frac{d\alpha^2}{1.2} + \cdots \\
\Delta y &= \frac{\partial \Psi(t, \alpha)}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2 \Psi(t, \alpha)}{\partial \alpha^2}\,\frac{d\alpha^2}{1.2} + \cdots \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Wendet man nun das Zeichen δ an, um die Differentiale verschiedener Ordnungen in Bezug auf die Variabele α allein zu bezeichnen, so kann man einfacher schreiben:

$$\Delta x = \delta x + \frac{\delta^2 x}{1.2} + \cdots,$$

$$\Delta y = \delta y + \frac{\delta^2 y}{1.2} + \cdots,$$

$$\Delta z = \delta z + \frac{\delta^2 z}{1.2} + \cdots,$$

und ebenso ist auch

$$\Delta y' = \delta y' + \frac{\delta^2 y'}{1.2} + \cdots,$$

$$\Delta z' = \delta z' + \frac{\delta^2 z'}{1.2} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Differentiale

$$\delta x, \delta y, \delta z, \ldots \delta y', \delta z', \ldots \delta y'', \ldots$$

heissen die *Variationen* der Variabelen

$$x, y, z, \ldots y', z', \ldots y'', \ldots;$$

sie beziehen sich auf die Änderung des Systemes von Funktionen, welches die Gleichungen 7) bei einem bestimmten Wert von α bestimmen, zu einem neuen Systeme, welches aus den nämlichen Gleichungen 7) hervorgeht, wenn α um das Differential $d\alpha$ geändert ist. In dem folgenden werden wir nun $\alpha = \alpha_0$ annehmen; dann fällt das System 7) mit dem gegebenen Systeme 10) zusammen, und die Variationen

$$\delta x, \delta y, \delta z, \ldots \delta y', \ldots$$

beziehen sich auf eine Änderung der Funktionen dieses Systemes; dabei ist diese Änderung eine willkürliche; denn das System 7) definiert für $\alpha = \alpha_1$ ein System von willkürlichen Funktionen, und die Differenz $\alpha_1 - \alpha_0$ kann so klein angenommen werden, als man nur will.

Die zweiten Differentiale

$$\delta^2 x, \delta^2 y, \delta^2 z, \ldots \delta^2 y', \ldots$$

werden die *Variationen der zweiten Ordnung* der Variabelen $x, y, z, \ldots y', \ldots$ genannt, desgleichen

$$\delta^3 x, \delta^3 y, \delta^3 z, \ldots \delta^3 y', \ldots$$

die *Variationen der dritten Ordnung*, u. s. f.

Es sei nun allgemein

$$V = F(x, y, z, \ldots y', z', \ldots y'', \ldots)$$

eine Funktion der Variabelen $x, y, z, \ldots y', z' \ldots$ Die Funktionen $y, z, \ldots$ sind durch die Gleichungen 10) definiert; wenn man an Stelle des Systemes 10) das System 7) substituiert, das mit dem ersteren für $\alpha = \alpha_0$ zusammenfällt, so erhalten die successiven Differentiale von V, in Bezug auf α, für $\alpha = \alpha_0$ Werte, welche genau die *Variationen* verschiedener Ordnungen der Funktion V sind.

Da diese Variationen also nichts anderes sind, als Differentiale, so sind die Regeln der Differentiation auf sie anwendbar, und man erhält z. B. den folgenden Ausdruck für die Variation erster Ordnung δV:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \cdots$$

Diese Betrachtungen sind auch anwendbar auf den Fall eines Systemes von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variabelen. Doch unterlassen wir diese Erweiterung, da sie zum Plane unseres Werkes nicht mehr gehört.

Lehrsätze über die Vertauschung der Charakteristiken.

829. Lehrsatz I. *Die Ordnung der Operationen, welche durch die Charakteristiken* d *und* δ *ausgedrückt sind, lässt sich vertauschen.*

Denn es sei

$$V = F(x, y, z, \ldots y', z', \ldots y'', \ldots)$$

und die Variabelen $x, y, z, \ldots y', z', \ldots y''$ seien ausgedrückt als Funktionen der beiden Variabelen t und α, wie oben ausgeführt wurde; dann ist:

$$V = f(t, \alpha),$$

wobei wir annehmen, dass α einen bestimmten Wert α_0 hat. Nun hat man, der Definition gemäss:

$$dV = \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial t}\,dt, \quad \delta V = \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha}\,d\alpha;$$

da die Variabelen t und α unabhängig sind, so sind ihre Differentiale dt und $d\alpha$ willkürlich und konstant. Differentiiert man also die beiden vorigen Formeln, die erste nach α, die zweite nach t, so erhält man:

$$\delta\, dV = \frac{\partial \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial t}}{\partial \alpha}\,dt\,d\alpha, \quad d\,\delta V = \frac{\partial \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha}}{\partial t}\,dt\,d\alpha,$$

also wenn

$$\frac{\partial^2 f(t,\alpha)}{\partial\alpha\,\partial t} = \frac{\partial^2 f(t,\alpha)}{\partial t\,\partial\alpha},$$

ist (§ 60)

$$\delta\, dV = d\,\delta V,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Folgerung. *Es ist, was auch die ganzen Zahlen* m *und* n *sein mögen:*

$$\delta^n d^m V = d^m \delta^n V.$$

Bemerkung. Man erkennt, dass die Beweise der vorstehenden Sätze auf der Vertauschbarkeit in der Reihenfolge partieller Differentiationen einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen basieren. Ist V als stetige Funktion der Grössen $x, y, z, \ldots y', \ldots$ gegeben, und sind diese als stetige Funktionen der Variabelen t definiert, so müssen auch die willkürlichen Funktionen des Systemes 7) § 826 so definiert sein, dass nicht nur V eine stetige Funktion von t und α wird, sondern auch die partiellen Ableitungen von V der geforderten Bedingung genügen. Wir erreichen dieses jedenfalls, wenn wir voraussetzen, dass diese willkürlichen Funktionen stets der Einschränkung unterworfen werden, dass sie nebst ihren in Betracht kommenden partiellen Ableitungen stetige Funktionen der beiden Variabelen t und α sind.

830. Lehrsatz II. *Die Ordnung der Operationen, welche durch die Charakteristiken $\int$ und δ ausgedrückt sind, lässt sich vertauschen, was auch die Grenzen sein mögen, zwischen denen die Integration auszuführen ist.*

Es sei

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx;$$

V bezeichne eine gegebene Funktion:

$$V = F(x, y, z, \ldots y', z', \ldots y'', \ldots)$$

einer unabhängigen Variabelen x, der verschiedenen Funktionen $y, z, \ldots$ von x und der Ableitungen dieser Funktionen. Sie kann überdies auch noch abhängen von den Werten $x, y, z, \ldots y', z', \ldots$ an den Grenzen der Integration.

Man kann $x, y, z, \ldots y', z', \ldots$ als Funktion der beiden Variabelen t und α ausdrücken, aber man muss nach der Substitution dieser Werte in V für α einen bestimmten Wert α_0 annehmen. Wenn nun t_0 und t_1 die Werte von t bezeichnen, welche den Grenzen x_0 und x_1 entsprechen, wobei wir annehmen, dass, während x das Intervall von x_0 bis x_1 durchläuft, t stets in demselben Sinne sich ändert, so kann man schreiben:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(V \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Um nun δS zu erhalten, muss man dieses Integral nach α differentiieren, und da die Grenzen t_0 und t_1 unabhängig von α sind, so kann die Integration unter dem Integralzeichen ausgeführt werden (§ 479). Man erhält also:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \delta \left(V \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Da aber dt eine Konstante ist, so ist $\delta \left(V \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\delta (V dx)}{dt}$; folglich:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \frac{\delta (V dx)}{dt} dt,$$

oder, indem man zur unabhängigen Variabelen x zurückkehrt:

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta (V dx)}{dx} dx.$$

Man schreibt auch bisweilen

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \delta (V dx),$$

indem man den Faktor dx unterdrückt, der im Zähler und Nenner unter dem Integrale auftritt, und dabei annimmt, dass sich die Integration auf die unabhängige Variabele x bezieht. Die vorstehende Formel enthält die Behauptung des ausgesprochenen Satzes und gilt, welches auch die Grenzen x_0 und x_1 sein mögen. Dieselben sind konstant, wenn die Variabele x mit t zusammenfällt, im allgemeinen Falle aber variieren sie mit α.

Darstellung der Variationen einer Funktion und ihrer Ableitungen als Funktion der Variation der unabhängigen Variabelen und einer neuen Variabelen.

831. Es sei y eine gegebene Funktion der Variabelen x; wir setzen wie früher:

1) $$dy = y'\,dx, \quad dy' = y''\,dx, \ldots$$

und definieren ferner:

2) $$\omega = \delta y - y'\,\delta x, \quad \text{also} \quad \delta y = y'\,\delta x + \omega.$$

Differentiiert man die erste Gleichung 1) mittelst der Charakteristik δ und die vorstehende Gleichung mittelst d, so folgt:

$$\delta\,dy = \delta y'\,dx + y'\,\delta\,dx, \quad d\,\delta y = dy'\,\delta x + y'd\,\delta x + d\omega;$$

da die Ordnung der beiden Charakteristiken d und δ vertauscht werden kann, so ergiebt die Vergleichung:

$$\delta y'\,dx = dy'\,\delta x + d\omega,$$

oder, wenn man mit dx dividiert, und die zweite Gleichung 1) benutzt:

$$\delta y' = y''\,\delta x + \frac{d\omega}{dx}.$$

Desgleichen folgt, wenn man die zweite Gleichung 1) mit δ und die vorstehende mit d differentiiert:

$$\delta\,dy' = \delta y''\,dx + y''\delta\,dx, \quad d\,\delta y' = dy''\,\delta x + y''\,d\,\delta x + d\,\frac{d\omega}{dx},$$

also

$$\delta y''\,dx = dy''\,\delta x + d\,\frac{d\omega}{dx} \quad \text{oder} \quad \delta y'' = y'''\,\delta x + \frac{d^2\omega}{dx^2}.$$

Fährt man so fort, so werden die Gleichungen erhalten:

3) $\delta y = y'\delta x + \omega,\ \delta y' = y''\delta x + \frac{d\omega}{dx},\ \delta y'' = y'''\delta x + \frac{d^2\omega}{dx^2}, \cdots$

und allgemein

$$\delta y^{(n-1)} = y^{(n)}\delta x + \frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}},$$

welche die Variationen δy, $\delta y'$, $\delta y''$, ... lediglich durch die Grössen δx und ω darstellen.

832. Vermittelst dieser Formeln kann man einen sehr einfachen Ausdruck für die Variation einer Funktion von x und y und den Ableitungen y', y'', ... erhalten. Es sei:

4) $$V = F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)});$$

wir bezeichnen das totale Differential dV von V mit

5) $$dV = X\,dx + Y\,dy + Y'dy' + \cdots + Y^{(n)}dy^{(n)},$$

so ist (§ 828):

6) $$\delta V = X\,\delta x + Y\,\delta y + Y'\delta y' + \cdots + Y^{(n)}\delta y^{(n)}.$$

Subtrahiert man die Gleichungen 5) und 6), nachdem man die erste mit $\frac{\delta x}{dx}$ multipliziert hat, so folgt:

$$\delta V - dV\frac{\delta x}{dx} = Y(\delta y - y'\delta x) + Y'(\delta y' - y''\delta x) + \cdots + Y^{(n)}(\delta y^n - y^{(n+1)}\delta x)$$

oder vermittelst der Formeln 3):

7) $$\delta V = dV\frac{\delta x}{dx} + Y\omega + Y'\frac{d\omega}{dx} + Y''\frac{d^2\omega}{dx^2} + \cdots + Y^{n)}\frac{d^n\omega}{dx^n}.$$

Enthält die Funktion V noch andere Funktionen von x, nämlich z, u, ... mit ihren Ableitungen z', u', ... z'', u'', ... so muss man der rechten Seite der Formel 5) noch die Glieder

$$Z\,dz + Z'dz' + \cdots + U\,du + U'du' + \cdots$$

hinzufügen, und der rechten Seite der Formel 6) die analogen Glieder

$$Z\,\delta z + Z'\delta z' + \cdots + U\,\delta u + U'\delta u' + \cdots;$$

setzt man also

$$\omega_1 = \delta z - z'\delta x, \quad \omega_2 = \delta u - u'\delta x, \ldots$$

so ist evident, dass die Gleichung 7) noch die Variation δV darstellt, wenn man auf der rechten Seite noch die Glieder addiert:

$$Z\omega_1 + Z'\frac{d\omega_1}{dx} + \cdots + U\omega_2 + U'\frac{d\omega_2}{dx} + \cdots$$

Berechnung der Variation eines bestimmten Integrales.

833. Wir stellen uns die Aufgabe, die Variation des bestimmten Integrales

1) $$S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx$$

zu berechnen. Dabei nehmen wir zunächst an, dass V unabhängig ist von den Grenzen x_0 und x_1, welche im allgemeinen mit α veränderlich sind, und dass V auch nur eine einzige Funktion y von x enthält; also ist

2) $$V = F(x, y, y'', \ldots y^{(n)}).$$

Indem man die Gleichung 1) mit δ differentiiert, wird (§ 830):

3) $$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta(V dx)}{dx}\,dx;$$

und da man die Ordnungen der Differentiationen d und δ vertauschen kann, so ist

$$\delta(V dx) = \delta V\,dx + V d\delta x;$$

ferner ist (§ 832):

$$\delta V = dV\frac{\delta x}{dx} + Y\omega + Y'\frac{d\omega}{dx} + \cdots + Y^{(n)}\frac{d^n\omega}{dx^n},$$

wenn man $dV = X\,dx + Y\,dy + Y'dy' + \cdots + Y^{(n)}dy^{(n)}$ und $\omega = \delta y - y'\delta x$ setzt. Hiernach folgt:

4) $$\delta(V dx) = d(V\delta x) + \left(Y\omega + Y'\frac{d\omega}{dx} + \cdots + Y^n\frac{d^n\omega}{dx^n}\right)dx,$$

und mithin ergiebt die Gleichung 3):

$$
5)\quad \begin{cases} \delta S = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{d(V\delta x)}{dx}\,dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} Y\omega\,dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} Y'\frac{d\omega}{dx}\,dx + \cdots \\ \qquad\qquad + \int\limits_{x_0}^{x} Y^{(n)}\frac{d^n\omega}{dx^n}\,dx. \end{cases}
$$

Das erste der in dieser Formel enthaltenen Integrale ist gleich der Differenz der Werte, welche das Produkt $V\delta x$ an den Grenzen des Integrales annimmt; unter den folgenden Integralen können diejenigen, welche von den Ableitungen ω abhängen, vermittelst der teilweisen Integration in andere transformiert werden, in denen nur die Grösse ω vorkommt. Denn es ist:

$$
\int Y'\frac{d\omega}{dx}\,dx = Y'\omega - \int\frac{dY'}{dx}\,\omega\,dx,
$$

$$
\int Y''\frac{d^2\omega}{dx^2}\,dx = Y''\frac{d\omega}{dx} - \frac{dY''}{dx}\,\omega + \int\frac{d^2Y''}{dx^2}\,\omega\,dx,
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

also wenn man x_0 und x_1 als Grenzen wählt:

$$
6)\quad \begin{cases} \int\limits_{x_0}^{x_1} Y'\frac{d\omega}{dx}\,dx = [Y'\omega]_{x_0}^{x_1} - \int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{dY'}{dx}\,\omega\,dx, \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} Y''\frac{d^2\omega}{dx^2}\,dx = \left[Y''\frac{d\omega}{dx} - \frac{dY''}{dx}\,\omega\right]_{x_0}^{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{d^2Y''}{dx^2}\,\omega\,dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}
$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$
7)\qquad K = Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \cdots + (-1)^n\frac{d^nY^{(n)}}{dx^n}
$$

und

$$
8)\quad \begin{cases} F = V\delta x + \left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2Y'''}{dx^2} - \cdots\right)\omega + \left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \cdots\right)\frac{d\omega}{dx} \\ \qquad + (Y''' - \cdots)\frac{d^2\omega}{dx^2} + \cdots + Y^{(n)}\frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}}, \end{cases}
$$

und bezeichnet man ferner mit Γ_0 und Γ_1 die Werte, welche Γ an den Grenzen der Integration erhält, so wird der Ausdruck 5) von δS, auf Grund der Formeln 6):

$$9)\qquad \delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx.$$

Ersetzt man $\omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2}, \cdots$ durch ihre Werte $\delta y - y'\delta x$, $\delta y' - y''\delta x$, $\delta y'' - y'''\delta x$, so wird der Ausdruck 8) für Γ:

$$10)\left\{\begin{aligned} \Gamma = \delta x \Big[V - \Big(Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2 Y'''}{dx^2} \cdots\Big) y' - \Big(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \cdots\Big) y'' \\ - (Y''' - \cdots) y''' - \cdots \Big] \\ + \Big(Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2 Y'''}{dx^2} - \cdots\Big)\delta y + \Big(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \cdots\Big)\delta y' + \cdots + Y^n \delta y^{(n-1)}. \end{aligned}\right.$$

834. Wir haben angenommen, dass in dem Ausdruck V nur eine einzige Funktion von x mit einigen ihrer Ableitungen vorkommt; doch ist evident, dass sich die Berechnung der Variation δS in der nämlichen Art vollziehen lässt, auch wenn V noch andere Funktionen $z, u, \ldots$ mit ihren Ableitungen $z', z'', \ldots z^{(p)}, u', u'', \ldots u^{(q)} \ldots$ enthält. Denn setzt man wie im § 832:

$$\omega_1 = \delta z - z'\delta x, \quad \omega_2 = \delta u - u'\delta x, \ldots$$

so giebt die Gleichung 4) auch noch die Variation $\delta(V dx)$, falls man auf der rechten Seite die Glieder

$$\Big(Z\omega_1 + Z'\frac{d\omega_1}{dx} + \cdots + Z^{(p)}\frac{d^p\omega_1}{dx^p}\Big) + \Big(U\omega_2 + U'\frac{d\omega_2}{dx} + \cdots + U^{(q)}\frac{d^q\omega_2}{dx^q}\Big) + \cdots$$

hinzufügt. Indem man auf diese neuen Terme das nämliche Verfahren wie vorhin anwendet, findet man den folgenden Ausdruck:

$$11)\quad \delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + H\omega_1 + G\omega_2 + \cdots)\, dx,$$

wobei K die in der Gleichung 7) definierte Grösse bezeichnet, und überdies

$$12)\quad \begin{cases} H = Z - \dfrac{dZ'}{dx} + \dfrac{d^2 Z''}{dx^2} - \cdots + (-1)^p \dfrac{d^p Z^{(p)}}{dx^p}, \\ G = U - \dfrac{dU'}{dx} + \dfrac{d^2 U''}{dx^2} - \cdots + (-1)^q \dfrac{d^q U^{(q)}}{dx^q}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

ist. Ferner bezeichnen Γ_0 und Γ_1 immer die Werte, welche Γ an den Grenzen der Integration erhält, d. h. die Werte, welche zu $x = x_0$ und zu $x = x_1$ gehören. Zu dem allgemeinen Ausdruck von Γ aber, wie er durch die Formel 10) gegeben ist, muss man jetzt noch neue Glieder hinzufügen, nämlich die, welche aus den bereits vorhandenen, die Buchstaben Y und y enthaltenden, dadurch hervorgehen, dass man diese Buchstaben durch Z und z, ferner durch U und u u. s. w. ersetzt.

835. Es ist nun endlich noch der Fall zu untersuchen, wo die Funktion V von den Werten abhängt, welche die Variabelen $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}, z, z', \ldots z^{(p-1)}, \ldots$ an den Grenzen des Integrales erhalten. In diesem Falle setzt sich die Variation von Vdx aus zwei Teilen zusammen, nämlich demjenigen, welchen man erhält, ohne dass man die auf die Grenzen bezüglichen Grössen variiert, und demjenigen, welchen man erhält, wenn nur diese Grössen variiert werden. Wir haben den ersten Teil in den vorigen Paragraphen behandelt; bezeichnet man mit δ' die Variationen in Bezug auf die Grenzen allein, so wird der zweite Teil $\delta'(Vdx)$ oder $\delta' V dx$. Man hat also dem Ausdruck 11) für δS nur das Glied

$$\varDelta = \int_{x_0}^{x_1} \delta' V dx$$

hinzuzufügen. Es ist aber:

$$13)\quad \begin{cases} \delta' V = \dfrac{\partial V}{\partial x_0}\delta x_0 + \dfrac{\partial V}{\partial y_0}\delta y_0 + \dfrac{\partial V}{\partial y'_0}\delta y'_0 + \cdots + \dfrac{\partial V}{\partial y_0{}^{(n-1)}}\delta y_0{}^{(n-1)} + \dfrac{\partial V}{\partial z_0}\delta z_0 + \cdots \\ \quad + \dfrac{\partial V}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial V}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial V}{\partial y'_1}\delta y'_1 + \cdots + \dfrac{\partial V}{\partial y_1{}^{(n-1)}}\delta y_1{}^{(n-1)} + \dfrac{\partial V}{\partial z_1}\delta z_1 + \cdots \end{cases}$$

also, indem man integriert:

$$14)\begin{cases} \Delta = \delta x_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_0} dx + \delta y_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_0} dx + \cdots + \delta y_0^{(n-1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_0^{(n-1)}} dx \\ \qquad + \delta z_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial z_0} dx + \cdots \\ + \delta x_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} dx + \delta y_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_0} dx + \cdots + \delta y_1^{(n-1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_1^{(n-1)}} dx \\ \qquad + \delta z_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial z_1} dx + \cdots \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$15) \qquad \mathfrak{G} = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \Delta,$$

so wird der vollständige Ausdruck von δS:

$$16) \qquad \delta S = \mathfrak{G} + \int\limits_{x_0}^{x_1} (K\omega + H\omega_1 + G\omega_2 + \cdots)\, dx,$$

und man sieht, dass die durch Δ in den Ausdruck $\mathfrak{G}$ eingeführten Terme von der nämlichen Form wie die schon vorhandenen sind.

Andere Darstellung der Variation eines bestimmten Integrales.

836. Der Benutzung der allgemeinen Formel des vorigen Paragraphen ist bei bestimmten Problemen die direkte Berechnung bisweilen vorzuziehen. Man kann dabei die Einführung der Grössen $\omega, \omega_1, \ldots$ vermeiden, indem man folgendermassen verfährt. Das gegebene Integral sei:

$$S = \int\limits_{x_0}^{x} V\, dx,$$

so wird $\delta S = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\delta(V\, dx)}{dx} dx$, wofür wir einfach schreiben:

$$\delta S = \int \delta (V dx),$$

indem wir die Variabele, nach welcher zu integrieren ist, nicht bezeichnen; die Werte, welche diese Variabele für $x = x_0$ und $x = x_1$ annimmt, sind als die Grenzen des Integrales zu wählen.

Nun ist V eine Funktion von $x, y, y', \ldots z, z', \ldots$; wir führen aber an Stelle der Ableitungen $y', y'', \ldots z', \ldots$ die Differentiale der Variabelen $x, y, z, \ldots$ ein; die unabhängige Variabele ist der Parameter t, dessen Variation null ist. Da nun

$$y = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}, \ldots \quad z' = \frac{dz}{dx}, \ldots$$

ist, so wird $V dx$ eine Funktion von $x, y, z, \ldots dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$ Indem man dieses Produkt mittelst der Charakteristik δ differentiiert und dabei beachtet, dass die Reihenfolge der Operationen d und δ vertauschbar ist, erhält man ein Resultat von der Form:

$$\begin{aligned} \delta(V dx) = X_0 \delta x + X_1 d\,\delta x + X_2 d^2 \delta x + \cdots \\ + Y_0 \delta y + Y_1 d\,\delta y + Y_2 d^2 \delta y + \cdots \\ + Z_0 \delta z + Z_1 d\,\delta z + Z_2 d^2 \delta z + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die mit d bezeichneten Differentiationen beziehen sich auf die Variabele t und die teilweise Integration ergiebt:

$$\begin{aligned} &\int X_1 d\,\delta x = X_1 \delta x - \int d X_1 \delta x, \\ &\int X_2 d^2 \delta x = X_2 d\,\delta x - d X_2 \delta x + \int d^2 X_2 \delta x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\int Y_1 d\,\delta y = Y_1 \delta y - \int d Y_1 \delta y, \\ &\int Y_2 d^2 \delta y = Y_2 d\,\delta y - d Y_2 \delta y + \int d^2 Y_2 \delta y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Setzt man also:

$$\begin{aligned} X &= X_0 - d X_1 + d^2 X_2 - \cdots \\ Y &= Y_0 - d Y_1 + d^2 Y_2 - \cdots \\ Z &= Z_0 - d Z_1 + d^2 Z_2 - \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und

$$\Gamma = (X_1 - dX_2 + \cdots)\,\delta x + (X_2 - \cdots)\,\delta\,dx + \cdots$$
$$+ (Y_1 - dY_2 + \cdots)\,\delta y + (Y_2 - \cdots)\,\delta\,dy + \cdots$$
$$+ (Z_1 - dZ_2 + \cdots)\,\delta z + (Z_2 - \cdots)\,\delta\,dz + \cdots$$

bezeichnet man ferner mit Γ_0 und Γ_1 die Werte von Γ an den Grenzen, für welche bezüglich $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ und $x = x_1$, $y = y_1, \ldots$ ist, so wird:

$$\delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \cdots),$$

und wenn x die Variabele ist, nach welcher integriert werden soll, so muss man schreiben:

$$\delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \cdots}{dx}\,dx.$$

Wir haben hier angenommen, dass die Funktion V unabhängig ist von den Werten, welche die Variabelen an den Grenzen erhalten; andernfalls hat man dem vorstehenden Ausdruck für δS noch die neuen Terme hinzuzufügen, die im § 835 berechnet wurden.

Die obige Formel stimmt mit der des § 835 überein, wenn man δy, $\delta z, \ldots$ durch die Ausdrücke

$$\frac{dy}{dx}\,\delta x + \omega, \quad \frac{dz}{dx}\,\delta x + \omega_1, \ldots$$

ersetzt; durch diese Substitution wird $X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \cdots$ gleich:

$$(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \cdots)\,\frac{\delta x}{dx} + Y\omega + Z\omega_1 + \cdots;$$

hieraus folgt, dass identisch

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \cdots = 0$$

ist, und dass Y, $Z\ldots$ nichts anderes sind als die dort mit K, $H\ldots$ bezeichneten Grössen.

837. Wir haben die Variation des bestimmten Integrales S unter der allgemeinsten Annahme berechnet, indem wir eine beliebige Änderung in dem Systeme der Funktionen von x annahmen, welche mit y, $z, \ldots$ bezeichnet wurden. Nehmen wir aber an, dass die Variabele x mit der Variabelen t zusammenfällt, deren Variation null ist, so werden die Grenzen x_0, x_1 konstant, und es ist auch $\delta x = 0$.

Dann sind die mit ω, $\omega_1, \ldots$ bezeichneten Grössen nichts anderes als die Variationen δy, $\delta z \ldots$ Der Ausdruck für δS wird also:

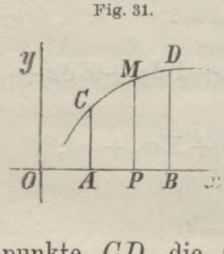
$$\delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{Y \delta y + Z \delta z + \cdots}{dx} dx.$$

Die Aufgabe der Variationsrechnung.

838. Die Variationsrechnung ist von Lagrange ausgebildet worden, um gewisse Probleme des Maximum und Minimum von besonderer Art zu lösen; sie kann aber auch mit Erfolg für verschiedene andere Fragen angewandt werden. In den genannten Problemen des Maximum und Minimum handelt es sich um die Bestimmung von Funktionen einer unabhängigen Variabelen, für welche ein bestimmtes Integral, das von diesen Funktionen abhängt, ein Maximum oder Minimum wird. Einige Probleme dieser Art wurden schon vor Lagrange gelöst. Wir geben hier als Beispiel:

Es soll eine ebene Kurve CMD *gefunden werden, welche durch zwei gegebene Punkte* C *und* D *geht und die Eigenschaft hat, dass die Fläche, welche durch den Bogen* CD *bei der Rotation um eine in der Ebene gelegene Axe erzeugt wird, ein Minimum ist.*

Fig. 31.



Bestimmt man zwei rechtwinklige Koordinatenaxen Ox, Oy, von denen die erste mit der Rotationsaxe zusammenfällt, legt man ferner durch die Endpunkte CD die Ordinaten CA, DB, und setzt $OA = x_0$, $OB = x_1$, so wird die von dem Bogen CD erzeugte Fläche gleich $2\pi S$, wobei S das Integral bezeichnet:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Es handelt sich hier also um das Problem: welches ist die Funktion von x, die man für y zu substituieren hat, damit der Wert von S ein Minimum wird.

Anstatt die Endpunkte C und D des gesuchten Bogens fest zu geben, kann man annehmen, dass diese Punkte nur der Bedingung unterworfen sind, dass sie auf zwei gegebenen Kurven liegen müssen; auch hier handelt es sich um das Minimum des Integrales S, doch sind die Grenzen x_0, x_1 nicht mehr von vornherein vollständig bestimmt.

Untersuchung der Maximal- und Minimalwerte eines bestimmten Integrales.

839. Das bestimmte Integral sei

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx,$$

und

$$V = F(x, y, y', \dots y^{(n)}, z, z', \dots z^{(p)}, \dots);$$

$y, z, \dots$ seien Funktionen von x, und $y', y'', \dots z', \dots$ ihre Ableitungen. Die Funktion V kann auch von den Werten abhängen, welche die Variabelen an den Grenzen des Integrales annehmen; was diese Grenzen anlangt, so sind sie entweder fest gegeben oder bestimmten Bedingungen unterworfen. Es sollen die Funktionen $y, z, \dots$ bestimmt werden, welche einem Maximum oder Minimum von S entsprechen.

Das System der zu bestimmenden Funktionen, sowie jedes andere, welches sich von demselben beliebig wenig unterscheidet, kann, wie wir gesehen haben, in einem allgemeineren zusammengefasst werden, welches von einem Parameter α abhängt. In diesem letzteren Systeme sind alle Variabelen $x, y, z, \dots$, sowie ihre Ableitungen $y', z', \dots y'', \dots$ als Funktionen einer neuen Variabelen t und des Parameters α gegeben, und dasselbe gilt auch für die besonderen Werte, welche diese Variabelen an den Grenzen annehmen, welche von den Grenzen t_0 und t_1 der Variabelen t und vom Parameter α abhängen. Nach Substitution dieser Werte von $x, y, \dots$ wird der Ausdruck von S:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(V \frac{dx}{dt}\right) dt$$

und reduziert sich also auf eine einfache Funktion des Parameters α.

Man hat also das gewöhnliche Problem eines Maximum oder Minimum. Die notwendige Bedingung für ein Maximum oder Minimum besteht darin, dass die Ableitung $\frac{dS}{d\alpha}$ oder das Differential dS null ist; dieses Differential ist aber nichts anderes als die Variation von S, also ist die genannte Bedingung

$$\delta S = 0.$$

Wir wissen aber, dass dieselbe nicht ausreicht. Für ein Maximum muss überdies $\frac{d^2S}{d\alpha^2}$ oder $\frac{d^2S}{d\alpha^2}d\alpha^2$ negativ sein und für ein Minimum positiv. Dies Differential ist die Variation zweiter Ordnung $\delta^2 S$; also muss

$$\delta^2 S < 0 \text{ für ein Maximum,} \quad \delta^2 S > 0 \text{ für ein Minimum}$$

sein. Ist $\delta^2 S = 0$, so muss für ein Maximum sowohl wie für ein Minimum $\delta^3 S = 0$ sein. Wir wollen indessen diese Diskussion nicht weiter fortsetzen, denn bei den einfacheren Aufgaben kann man aus der Natur derselben direkt entscheiden, ob wirklich ein Maximum oder ein Minimum vorliegt. Auch beschränken wir uns darauf, die Bedingung $\delta S = 0$ zu untersuchen, welche dem Maximum und Minimum gemeinsam ist.

840. Der Fall, dass V nur eine einzige Funktion y von x enthält. Unter der allgemeinsten Annahme ist nach Formel 16) § 835:

$$\delta S = \mathfrak{G} + \int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx.$$

Die Bedingung $\delta S = 0$ erfordert, dass einzeln

$$\mathfrak{G} = 0 \quad \text{und} \quad K = 0$$

ist. Denn nehmen wir an, dass man die Variationen in Bezug auf die Grenzen fixiert hat. Da die *Deformation*, welche aus der Variation des Parameters α hervorgeht, vollkommen willkürlich ist, so ist auch die Funktion ω selbst willkürlich, und wenn K nicht null ist, so kann man ω derart wählen, dass es für alle Werte von x zwischen x_0 und x_1 entweder beständig dasselbe Vorzeichen wie K hat, oder beständig das entgegengesetzte. Also hat das Integral $\int\limits_{x_0}^{x_1} K\omega\,dx$ einen von null verschiedenen Wert und ist nach Belieben positiv oder negativ; folglich kann man, wie nun auch $\mathfrak{S}$ gewählt sein mag, immer bewirken, dass δS nicht null ist. Die Bedingung des Maximum und des Minimum erfordert also, dass

$$1)\qquad K = 0$$

ist, und hieraus folgt notwendig, dass auch

$$2)\qquad \mathfrak{S} = 0$$

ist. Es sei nun

$$V = F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})$$

und

$$dV = X\,dx + Y\,dy + Y'dy' + \cdots + Y^{(n)}dy^{(n)};$$

alsdann kann die Gleichung 1) in der Form geschrieben werden (§ 833):

$$3)\qquad Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} + \cdots + (-1)^n \frac{d^nY^{(n)}}{dx^n} = 0.$$

Dies ist, wie man sieht, eine Differentialgleichung, deren Ordnung im allgemeinen gleich $2n$ ist; ihr Integral enthält also $2n$ willkürliche Konstanten. Wir nehmen an, dass dieses Integral gefunden ist und bezeichnen es mit

$$4)\qquad y = f(x, C_1, C_2, \ldots C_{2n}).$$

Diese Gleichung lehrt die unbekannte Funktion y kennen, und es sind also nur noch die $2n$ Konstanten so zu bestimmen, dass auch die Bedingung 2) erfüllt ist. Hierbei muss man verschiedene Fälle unterscheiden.

1. Sind die Werte von

$$x_0, y_0, y'_0, \cdots y_0^{n-1}, \; x_1, y_1, y'_1, \cdots y_1^{n-1}$$

an den Grenzen gegeben, so sind die Variationen dieser Grössen null, und die Gleichung 2) ist von selbst erfüllt. Differentiiert man nun die Gleichung 4) $n-1$ mal, so erhält man:

$$5)\qquad \left\{\begin{aligned} y' &= f'(x, C_1, C_2, \ldots C_{2n}),\\ y'' &= f''(x, C_1, C_2, \ldots C_{2n}),\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ y^{(n-1)} &= f^{n-1}(x, C_1, C_2, \ldots C_{2n}).\end{aligned}\right.$$

Ersetzt man alsdann in den Gleichungen 4) und 5) $x, y, y', \dots y^{(n-1)}$ zuerst durch $x_0, y_0, y'_0, \dots y_0^{(n-1)}$, sodann durch $x_1, y_1, y'_1, \dots y_1^{(n-1)}$, so bekommt man ein System von $2n$ Gleichungen, nämlich:

$$
6) \quad \begin{cases}
y_0 = f(x_0, C_1, C_2, \dots C_{2n}), \\
y'_0 = f'(x_0, C_1, C_2, \dots C_{2n}), \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
y_0^{(n-1)} = f^{n-1}(x_0, C_1, C_2, \dots C_{2n}); \\
y_1 = f(x_1, C_1, C_2, \dots C_{2n}), \\
y'_1 = f'(x_1, C_1, C_2, \dots C_{2n}), \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
y_1^{(n-1)} = f^{n-1}(x_1, C_1, C_2 \dots C_{2n}),
\end{cases}
$$

welche zur Bestimmung der $2n$ willkürlichen Grössen dienen.

2. Sind nur die Werte von einigen unter den $2n$ Grössen $x_0, y_0, \dots y_0^{(n-1)}, x_1, y_1, \dots y_1^{(n-1)}$ gegeben, oder allgemeiner, sind i Gleichungen zwischen diesen Grössen gegeben:

$$
7) \qquad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \dots M_i = 0,
$$

so differentiiere man diese Gleichungen mit der Charakteristik δ. Die resultierenden Gleichungen:

$$
\frac{\partial M_1}{\partial x_0}\,\delta x_0 + \frac{\partial M_1}{\partial y_0}\,\delta y_0 + \cdots + \frac{\partial M_1}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \cdots = 0,
$$
$$
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
$$
$$
\frac{\partial M_i}{\partial x_0}\,\delta x_0 + \frac{\partial M_i}{\partial y_0}\,\delta y_0 + \cdots + \frac{\partial M_i}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \cdots = 0
$$

lassen i Variationen als Funktionen der $2n + 2 - i$ übrigen ausdrücken. Man kann die Werte dieser i Variationen in die Gleichung 2) eintragen, und da die nachbleibenden Variationen willkürlich sind, so muss man ihre Koeffizienten gleich null setzen. Man erhält also $2n + 2 - i$ Gleichungen, welche vereinigt mit den Gleichungen 6) und 7) die Zahl der $4n + 2$ Gleichungen vervollständigen, die notwendig sind, um die $2n$ willkürlichen Konstanten und die $2n + 2$ zu den Grenzen gehörigen Grössen zu bestimmen.

3. Ist gar keine Relation zwischen den Grenzwerten gegeben, so bleiben die Variationen dieser Werte willkürlich und

die Gleichung 2) zerlegt sich in $2n+2$ verschiedene Gleichungen. Dieselben genügen mit den $2n$ Gleichungen 6) zur Bestimmung der $4n+2$ Unbekannten. Dieser Fall ist in dem vorigen enthalten, wenn man annimmt, dass sich die Zahl i auf null reduziert.

Bemerkung. Es kann eintreten, dass die Ordnung der Gleichung 3) kleiner wird als $2n$; dies folgt z. B. notwendig dann, wenn V in Bezug auf die Ableitung $y^{(n)}$ linear ist. Dieser Fall bietet indessen keine besonderen Schwierigkeiten, und wir überlassen dem Leser die Modifikationen zu untersuchen, welche er erfordert.

841. Der Fall, dass V mehrere Funktionen von x enthält. Wir wollen nun annehmen, dass V μ Funktionen $y, z, u, \ldots$ von x enthält nebst einigen ihrer Ableitungen, und setzen dabei zunächst voraus, dass keine Relation zwischen den Funktionen $y, z, u, \ldots$ und der unabhängigen Variabelen x gegeben ist. Dann wird die Variation des Integrales $S=\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$ nach § 835 gleich

$$\delta S = \mathfrak{G} + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + H\omega_1 + G\omega_2 \ldots)\,dx,$$

und ich behaupte, die Bedingung $\delta S = 0$ erfordert, dass einzeln

$$K=0, \quad H=0, \quad G=0, \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}=0$$

ist. Zum Beweise nehmen wir an, dass die Grössen $K, H, G, \ldots$ nicht sämtlich gleich null sind und dass man die Variationen an den Grenzen fixiert hat. Da die Funktionen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ willkürlich sind, so kann man sie derart wählen, dass sie bei jedem Werte von x zwischen x_0 und x_1 entweder dasselbe Zeichen bezüglich haben wie $K, H, G, \ldots$ oder auch das entgegengesetzte. Es hat also das Integral in δS einen von null verschiedenen Wert, dessen Zeichen willkürlich fixiert werden kann. Hieraus folgt, dass man stets bewirken kann, dass δS nicht null wird. Also muss

$$K=0, \quad H=0, \quad G=0, \ldots$$

sein, und hieraus folgt auch $\mathfrak{G}=0$.

Die ersten Gleichungen bilden ein System von simultanen Differentialgleichungen, deren Integrale zunächst bestimmt werden müssen. Alsdann muss die Bedingung $\mathfrak{G} = 0$ erfüllt und es müssen die durch die Integration eingeführten Grössen, sowie die Grössen an den Grenzen bestimmt werden, falls letztere nicht gegeben sind. Diese Rechnung bietet nach dem früher Gesagten keine Schwierigkeiten; der Weg, welcher einzuschlagen ist, bleibt genau der nämliche.

842. Es erübrigt nur noch der Fall, wo die in V enthaltenen Funktionen $y, z, u, \ldots$ von x mit der Variabelen durch eine oder mehrere gegebene Gleichungen verknüpft sind. Es sei

$$\Phi(x, y, z, u, \ldots) = 0$$

solch eine Gleichung. Indem man dieselbe sowohl mit der Charakteristik δ wie auch mit d differentiiert, erhält man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\delta u + \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,du + \cdots = 0.$$

Subtrahiert man diese Gleichungen, nachdem man die zweite mit $\frac{\delta x}{dx}$ multipliziert hat, und erinnert man sich, dass

$$\delta y - \frac{dy}{dx}\,\delta x = \omega, \quad \delta z - \frac{dz}{dx}\,\delta x = \omega_1, \quad du - \frac{du}{dx}\,\delta x = \omega_2, \ldots$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\omega_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\omega_2 + \cdots = 0.$$

Es entspricht also jeder zwischen x, y, z, u, ... gegebenen Gleichung eine lineare Gleichung zwischen ω, ω_1, ω_2, ... Ist die Zahl jener Gleichungen gleich i, so kann man i der Grössen ω, ω_1, ω_2, ... als Funktionen der $\mu - i$ übrigen ausdrücken, und wenn man diese Werte in den Ausdruck von δS substituiert, so wird:

$$\delta S = \mathfrak{G} + \int_{x_0}^{x_1} (K'\omega + H'\omega_1 + G'\omega_2 + \cdots)\,dx.$$

Die $\mu - i$ nachbleibenden Funktionen erfordern, dass

$$K' = 0, \quad H' = 0, \quad G' = 0, \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{G} = 0$$

wird. Die ersten Gleichungen bilden verbunden mit den i gegebenen $\Phi(x, y, z, u, \ldots) = 0 \ldots$ ein System von μ simultanen Gleichungen, welches zu integrieren ist. Die Gleichung $\mathfrak{G} = 0$ dient schliesslich zur Bestimmung der willkürlichen Grössen und zur Berechnung der Werte an den Grenzen.

Enthält die Funktion V nur zwei Funktionen y, z, welche mit x durch die Relation

$$\Phi(x, y, z,) = 0$$

verbunden sind, so wird:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\omega_1 = 0, \quad \text{also} \quad \omega_1 = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}\,\omega,$$

ferner:

$$\delta S = \mathfrak{G} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} - H\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}\,\omega\,dx.$$

Die Bedingungen eines Maximum oder Minimum sind folglich

$$K\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} - H\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{G} = 0.$$

Über eine besondere Klasse von relativen Maxima und Minima.

843. Nachdem wir zuerst gezeigt haben, wie man die Bedingungen für ein Maximum oder Minimum eines bestimmten Integrales

$$1) \qquad S = \int_{x_0}^{x} V\,dx$$

finden kann, wenn keinerlei Einschränkung vorhanden ist, haben wir ferner den Fall behandelt, wo die in V enthaltenen Variabelen unter sich durch gegebene Gleichungen verbunden sind. Es kann auch eintreten, dass die Bedingungsgleichungen sowohl die Ableitungen der unbekannten Funktionen als auch ein oder mehrere bestimmte Integrale enthalten. Es ist nicht unsere Absicht, die allgemeine Lösung dieser Frage zu entwickeln; wir wollen nur den einfachsten Fall behandeln, bei welchem ein Maximum oder Minimum des Integrales S zu bestimmen ist, indem dabei die neue Bedingung erfüllt werden soll, dass ein zweites bestimmtes Integral

$$2)\qquad S' = \int_{x_0}^{x_1} V' dx$$

einen gegebenen Wert l erhält. Bei diesem neuen Probleme, das sich leicht auf die Aufgaben in §§ 840 und 841 zurückführen lässt, handelt es sich darum, die Bedingungen eines relativen Maximum oder Minimum zu finden.

Wir machen hier dieselben Überlegungen wie im § 839; das System der unbekannten Funktionen und jedes andere System, welches sich von dem ersten beliebig wenig unterscheidet, kann aufgefasst werden als enthalten in einem allgemeineren Systeme, das von einem Parameter α abhängt. Überdies lassen sich in diesem Systeme alle Variabelen durch eine Variabele t ausdrücken, welche unabhängig von α ist, und folglich ist:

$$S = \int_{t_0}^{t} V \frac{dx}{dt}\, dt, \quad S' = \int_{t_0}^{t} V' \frac{dx}{dt}\, dt,$$

so dass S und S' Funktionen von α werden. Die zweite dieser Funktionen aber muss sich auf eine Konstante reduzieren, weil das Integral S' immer denselben Wert behalten soll bei dem Übergange von einem Systeme der Funktionen zu einem andern; folglich ist $\frac{dS'}{d\alpha} = 0$, wie im § 839. Also hat man

$$3)\qquad \delta S = 0, \quad \delta S' = 0.$$

844. Nehmen wir zuerst an, dass V und V' nur eine einzige Funktion y von x enthalten; die Ausdrücke δS und $\delta S'$ können dargestellt werden in der Form:

$$4) \qquad \delta S = \mathfrak{G} + \int_{x_0}^{x_1} K \omega \, dx, \quad \delta S' = \mathfrak{G}' + \int_{x_0}^{x_1} K' \omega \, dx;$$

$\mathfrak{G}'$ und K' bezeichnen dabei analoge Grössen wie $\mathfrak{G}$ und K. Wir setzen nun mit Cauchy:

$$5) \qquad \int_{x_0}^{x} K' \omega \, dx = \varphi(x),$$

so folgt durch Differentiation:

$$6) \qquad K' \omega = \varphi'(x), \quad \text{also} \quad \omega = \frac{\varphi'(x)}{K'}.$$

Da $\varphi(x_0)$ null ist nach Gleichung 5), so wird der Ausdruck für $\delta S'$:

$$7) \qquad \delta S' = \mathfrak{G}' + \varphi(x_1),$$

und der von δS wird, wenn man ω durch seinen Wert 6) ersetzt:

$$\delta S = \mathfrak{G} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{K'} \varphi'(x) \, dx.$$

Die teilweise Integration ergiebt:

$$\int \frac{K}{K'} \varphi'(x) \, dx = \frac{K}{K'} \varphi(x) - \int \frac{d \frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x) \, dx;$$

bezeichnet man also mit K_1 und K'_1 die Werte von K und K' für $x = x_1$, so wird, weil $\varphi(x_0) = 0$ ist:

$$8) \qquad \delta S = \mathfrak{G} + \frac{K_1}{K'_1} \varphi(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d \frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x) \, dx.$$

Die Funktion $\varphi(x)$ ist vollkommen willkürlich; sie muss nur, ihrer Definition nach, für $x = x_0$ verschwinden.

Nun erkennt man aus der Gleichung 7), dass die Bedingung $\delta S' = 0$ äquivalent ist mit $\varphi(x_1) = -\mathfrak{G}'$, und dadurch wird die Formel 8):

$$\delta S = \left(\mathfrak{G} - \frac{K_1}{K'_1} \mathfrak{G}' \right) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d \frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x) \, dx.$$

Da die Funktion $\varphi(x)$ willkürlich gewählt werden kann, so lehrt die im § 840 angestellte Überlegung, dass die Bedingung $\delta S = 0$ erfordert:

$$9) \qquad \mathfrak{G} - \frac{K_1}{K'_1}\mathfrak{G}' = 0, \qquad \frac{d\frac{K}{K'}}{dx} = 0.$$

Die zweite Gleichung ergiebt durch Integration $\frac{K}{K'} = -a$ oder:

$$10) \qquad K + aK' = 0,$$

wobei a eine Konstante ist; die erste Gleichung wird sonach:

$$11) \qquad \mathfrak{G} + a\mathfrak{G}' = 0.$$

Die Gleichungen 10) und 11) sind die gesuchten Bedingungen des relativen Maximum oder Minimum, sie sind, wie man sieht, zugleich die Bedingungen des absoluten Maximum oder Minimum für das Integral:

$$12) \qquad S + aS' = \int_{x_0}^{x_1}(V + aV')\,dx,$$

so dass das Problem auf jenes zurückkommt, welches im § 841 gelöst wurde. Zwar haben wir hier eine willkürliche Konstante, nämlich a, mehr, aber wir haben auch eine neue Gleichung, nämlich $S' = l$.

845. Die vorstehende Untersuchung lässt sich ohne weiteres auf den Fall anwenden, wo V und V' mehrere Funktionen $y, z, \ldots$ der unabhängigen Variabelen x enthalten. Denn es wird:

$$\delta S = \mathfrak{G} + \int_{x_0}^{x_1}(K\omega + H\omega_1 + \cdots)\,dx,$$

$$\delta S' = \mathfrak{G}' + \int_{x_0}^{x_1}(K'\omega + H'\omega_1 + \cdots)\,dx.$$

Wir setzen:

$$\int_{x_0}^{x}(K'\omega + H'\omega_1 + \cdots)\,dx = \varphi(x),$$

also:

$$K'\omega + H'\omega_1 + \cdots = \varphi'(x), \quad \omega = \frac{\varphi'(x)}{K'} - \frac{H'}{K'}\omega_1 - \cdots;$$

es ist $\varphi(x_0) = 0$, und die Bedingung $\delta S' = 0$ giebt $\varphi(x_1) = -\mathfrak{G}'$; ferner wird der Ausdruck für δS:

$$\delta S = \mathfrak{G} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{K}{K'}\varphi'(x) + \left(H - \frac{KH'}{K'}\right)\omega_1 + \cdots\right] dx,$$

und die teilweise Integration ergiebt, da $\varphi(x_1) = -\mathfrak{G}'$ ist:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{K'}\varphi'(x)\,dx = -\frac{K_1}{K'_1}\mathfrak{G}' - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\frac{K}{K'}}{dx}\varphi(x)\,dx,$$

also ist:

$$\delta S = \left(\mathfrak{G} - \frac{K_1}{K'_1}\mathfrak{G}'\right) + \int_{x_0}^{x_1} \left[-\frac{d\frac{K}{K'}}{dx}\varphi(x) + \left(H - \frac{KH'}{K'}\right)\omega_1 + \cdots\right] dx.$$

Da die Funktionen $\varphi(x)$, $\omega_1, \ldots$ willkürlich sind, so erfordert die Bedingung $\delta S = 0$, dass

$$\frac{d\frac{K}{K'}}{dx} = 0, \quad \frac{H}{H'} = \frac{K}{K'}, \cdots \quad \text{und} \quad \mathfrak{G} - \frac{K}{K'}\mathfrak{G}' = 0$$

ist. Die erste dieser Gleichungen liefert $\frac{K}{K'} = -a$, d. h. konstant; also werden die Bedingungen des relativen Maximum und Minimum jetzt:

$$K + aK' = 0, \quad H + aH' = 0, \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{G} + a\mathfrak{G}' = 0;$$

sie sind genau die Bedingungen des absoluten Maximum oder Minimum für das Integral $S + aS'$.

Bemerkungen über einige besondere Fälle.

846. Da sich die Untersuchung relativer Maxima und Minima auf die der absoluten zurückführen lässt, so betrachten wir hier nur den letzteren Fall. Wir setzen:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V dx$$

und nehmen an, dass V nur eine einzige Funktion y von x mit ihren beiden ersten Ableitungen y', y'' enthält.

Es sei:

$$V = f(x, y, y', y''), \quad dV = X dx + Y dy + Y' dy' + Y'' dy'',$$

so dass die unbekannte Funktion y von der Differentialgleichung

$$1) \qquad Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} = 0$$

abhängt, welche im allgemeinen von der vierten Ordnung ist. Wir wollen hier einige Fälle allgemeinerer Art angeben, in denen man unmittelbar eine oder zwei Integrationen ausführen kann.

1. Enthält V die Variabele y nicht, ist also $V = f(x, y', y'')$, so wird Y null, und die Gleichung 1) reduziert sich auf

$$-\frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} = 0.$$

Integriert man dieselbe und bezeichnet C eine Konstante, so ist

$$2) \qquad -Y' + \frac{dY''}{dx} = C,$$

welches im allgemeinen eine Gleichung dritter Ordnung ist. In derselben Weise kann man verfahren, wenn V nur ein Glied erster Ordnung in y enthält, denn alsdann ist Y konstant und man erhält:

$$Yx - Y' + \frac{dY''}{dx} = C.$$

2. Nehmen wir an, dass V die Variabele x nicht enthält, also dass $V = f(y, y', y'')$ ist, wenn dann die identische Gleichung:

$$dV = Y dy + Y' dy' + Y'' dy''$$

nach Y aufgelöst und dieser Wert in die Gleichung 1) eingesetzt wird, so heisst diese:

$$dV - \left(Y'dy' + \frac{dY'}{dx}dy\right) + \left(\frac{d^2Y''}{dx^2}dy - Y''dy''\right) = 0$$

oder weil $dy = y'dx$, $dy' = y''dx$ ist:

$$dV - \left(Y'\frac{dy'}{dx} + y'\frac{dY'}{dx}\right)dx + \left(y'd\,\frac{dY''}{dx} - Y''d\frac{dy'}{dx}\right) = 0.$$

Die linke Seite ist ein exaktes Differential, also ist:

3) $$V - y'\left(Y' - \frac{dY''}{dx}\right) - Y''y'' = C.$$

3. Nehmen wir an, dass V weder x noch y enthält, also $V = f(y', y'')$ ist. Es liegen hier also beide Fälle zugleich vor, die wir soeben behandelt haben, und weil $Y = 0$ ist, so hat man die beiden ersten Integrale der Gleichung 1):

$$-Y' + \frac{dY''}{dx} = C', \quad V - y'\left(Y' - \frac{dY''}{dx}\right) - Y''y'' = C,$$

wobei C und C' willkürliche Konstanten sind. Die Elimination von $\frac{dY''}{dx}$, welche im allgemeinen allein die höchste Ableitung von y enthält, giebt also das zweite Integral:

4) $$V = Y''y'' + C'y' + C.$$

Anwendung der Variationsrechnung auf die Lösung einiger Aufgaben.

847. Erste Aufgabe. *Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten zu finden.*

Es seien x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 die Koordinaten der Endpunkte der gesuchten Linie in Bezug auf drei rechtwinklige Axen. Die Länge dieser Linie wird dann:

1) $$S = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx.$$

Indem man alle früheren Bezeichnungen beibehält, ist hier

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}, \quad dV = \frac{y' dy' + z' dz'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}};$$

ferner:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

$$Y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad Z' = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Die Gleichungen $K = 0$, $H = 0$, welche die unbekannten Funktionen bestimmen, sind hier:

$$\frac{dY'}{dx} = 0, \quad \frac{dZ'}{dx} = 0,$$

woraus folgt:

$$Y' = \text{const}, \quad Z' = \text{const},$$

also:

$$y' = C, \quad z' = C',$$

und weiter:

$$2) \qquad y = Cx + C_1, \quad z = C'x + C'_1;$$

die gesuchte Linie ist also eine Gerade. Die Bedingung $\mathfrak{G} = 0$ wird hier:

$$(V_1 - Y'_1 y'_1 - Z'_1 z'_1)\,\delta x_1 + Y'_1\,\delta y_1 + Z'_1\,\delta z_1$$
$$- (V_0 - Y'_0 y'_0 - Z'_0 z'_0)\,\delta x_0 - Y'_0\,\delta y_0 - Z'_0\,\delta z_0 = 0,$$

indem man die Indices 0 und 1 zur Darstellung der Werte anwendet, welche die betrachteten Grössen an den Grenzen annehmen. Bezeichnet man das Differential der Bogenlänge der gesuchten Linie mit ds, die Länge gerechnet von irgend einem Anfangspunkt, so kann man schreiben:

$$Y' = \frac{dy}{ds}, \quad Z' = \frac{dz}{ds}, \quad \text{und} \quad V - Y'y' - Z'z' = \frac{dx}{ds},$$

also ist die Grenzbedingung:

$$3) \quad \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right) \delta z_1\right] - \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0\right] = 0.$$

848. Wir wenden uns zur Bestimmung der Konstanten. Sind die Endpunkte der gesuchten Linie gegeben, so sind die Variationen δx_0, δx_1, δy_0, δy_1, δz_0, δz_1 sämtlich null und die Bedingung 3) ist von selbst erfüllt. Alsdann werden die Konstanten C, C_1, C', C'_1 dadurch bestimmt, dass man die durch die Gleichungen 2) dargestellte Gerade durch die beiden gegebenen Punkte (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) gehen lässt.

Sind die Endpunkte nicht gegeben, sondern die Koordinaten derselben durch i gegebene Gleichungen verbunden, so hat man diese Gleichungen mit der Charakteristik δ zu differentiieren; sodann eliminiert man i Variationen zwischen den erhaltenen Gleichungen und der Gleichung 3); endlich hat man die Koeffizienten der $6 - i$ übrigen Variationen null zu setzen. Indem man die i gegebenen Gleichungen beachtet, sowie diejenigen, welche ausdrücken, dass die Gerade 2) durch die Punkte (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) hindurchgeht, bekommt man die 10 notwendigen Gleichungen zur Bestimmung der 6 Koordinaten und der 4 willkürlichen Grössen.

Wir behandeln als Beispiel den Fall, wo die Koordinaten x_0, y_0, z_0 unabhängig von x_1, y_1, z_1 sind. Die Gleichung 3) zerlegt sich in die beiden:

$$4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 = 0, \\ &\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Ist nun der Endpunkt (x_0, y_0, z_0) an die Bedingung gebunden, dass er stets auf einer Fläche $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ bleiben soll, so wird:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial z_0} \delta z_0 = 0.$$

Eliminiert man δx_0 zwischen dieser Gleichung und der zweiten Gleichung 4), und setzt sodann die Koeffizienten von δy_0 und δz_0 gleich null, so folgt:

$$\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{\left(\frac{dz}{ds}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}.$$

Diese Gleichung besagt, dass die Linie von kleinster Länge normal zur gegebenen Fläche ist, was mit dem Ergebnis im § 157 übereinstimmt.

Soll der Endpunkt (x_0, y_0, z_0) auf einer gegebenen Kurve bleiben, so hat man zwei Gleichungen:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

also wird:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}\,\delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y_0}\,\delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial z_0}\,\delta z_0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\,\delta x_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0}\,\delta y_0 + \frac{\partial f}{\partial z_0}\,\delta z_0 = 0.$$

Die Variationen δx_0, δy_0, δz_0, deren Verhältnisse durch diese Gleichungen bestimmt werden, sind proportional zu den Kosinus der Winkel, welche die Tangente der gegebenen Kurve im Punkte (x_0, y_0, z_0) mit den Axen bildet; also drückt die zweite Gleichung 4) aus, dass die gegebene Kurve die kürzeste Linie zur Normalen hat.

Es ist evident, dass die vorigen Sätze sowohl für den einen, wie für den andern Endpunkt dieser Linie gelten.

849. Anstatt die allgemeinen Formeln zu verwenden, kann man auch direkt die Bedingungen für das Minimum des Integrales

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx}\, dx$$

herleiten, indem man wie im § 836 verfährt. Es ist:

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_1} \frac{\delta\, ds}{dx}\, dx \quad \text{oder} \quad \delta S = \int \delta\, ds.$$

Die Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ergiebt:

$$ds\, \delta\, ds = dx\, \delta\, dx + dy\, \delta\, dy + dz\, \delta\, dz,$$

also:

$$\delta S = \int \left(\frac{dx}{ds}\, d\,\delta x + \frac{dy}{ds}\, d\,\delta y + \frac{dz}{ds}\, d\,\delta z\right);$$

und dies wird vermittelst der teilweisen Integration:

$$\delta S = \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1\right] - \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0\right]$$

$$- \int \left(\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds}\right).$$

Da die Variationen δx, δy, δz unter dem Integralzeichen willkürlich sind, so sind die Bedingungen für das Minimum:

$$d\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} = 0, \quad d\frac{dz}{ds} = 0;$$

diese drei Gleichungen reduzieren sich auf zwei, und es folgt wie vorhin:

$$\frac{dy}{dx} = \text{const}, \quad \frac{dz}{dx} = \text{const}.$$

Die Grenzbedingungen sind genau die nämlichen wie früher.

850. Zweite Aufgabe. *Es soll die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten, die auf einer gegebenen Fläche liegen, gefunden werden.*

Die gesuchte Linie heisst eine *geodätische Linie* auf der Fläche. Es seien (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) die Koordinaten der gegebenen Punkte in Bezug auf drei rechtwinklige Axen, und

$$1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche. Wir behalten alle Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei. Der für δS erhaltene Wert gehört auch zum vorliegenden Probleme, und die Bedingungen des Maximum und Minimum bleiben:

$$2) \qquad \delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$3) \quad \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1\right] - \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0\right] = 0,$$

nur müssen hier die Variationen δx, δy, δz noch der Gleichung

$$4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0$$

genügen. Eliminiert man δz zwischen den Gleichungen 2) und 4) und setzt alsdann die Koeffizienten der nachbleibenden Variationen δx, δy null, so folgt:

$$5) \qquad \frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die beiden in dieser Formel enthaltenen Gleichungen sich auf eine reduzieren, auf Grund der Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds}=0,$$

$$\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\,d\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}\,d\frac{dz}{ds}=0,$$

von denen die zweite aus der Differentiation der Identität folgt:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Die gesuchte Kurve ist also bestimmt durch zwei der Gleichungen 1) und 5). Die durch die Integration eingeführten Konstanten und die Koordinaten $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$, falls letztere veränderlich sind, sind aus den Grenzbedingungen zu bestimmen.

Die Zähler in den Gleichungen 5) sind proportional den Kosinus der Winkel, welche die Hauptnormale der geodätischen Linie mit den Axen bildet; die Nenner dagegen sind proportional den Kosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche mit denselben Axen bildet; folglich fallen diese Normalen zusammen, und man hat den Satz:

Die Oskulationsebene einer geodätischen Linie auf einer Fläche ist stets normal zur Fläche.

Die Eigenschaft, die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten zu sein, gilt nicht notwendig für alle Bogen einer geodätischen Linie. So sind z. B. auf der Kugel die geodätischen Linien die Hauptkreise. Betrachtet man zwei Punkte auf der Peripherie solch eines grössten Kreises, so gehört die Eigenschaft eines Minimums nur zu einem Bogen, welcher kleiner ist als der Halbkreis.

851. Dritte Aufgabe. *Es soll die ebene Kurve bestimmt werden, welche durch zwei Punkte geht, die entweder selbst gegeben oder gegebenen Bedingungen unterworfen sind, und welche bei ihrer Rotation um eine in der Ebene gegebene Axe eine Fläche von kleinster Grösse erzeugt.*

Wählt man zwei rechtwinklige Axen in der Ebene, von denen die eine, x, mit der Rotationsaxe zusammenfällt, so ist die Fläche, deren Minimum gesucht wird, gleich dem Produkt von 2π mit dem Integrale

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Also wird nach den allgemeinen Formeln im § 833:

$$V = y\sqrt{1 + y'^2}, \quad X = 0, \quad Y = \sqrt{1 + y'^2}, \quad Y' = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Die Gleichung

$$K = 0 \quad \text{oder} \quad Y - \frac{dY'}{dx} = 0$$

gehört zu den im § 846 behandelten Fällen und liefert als erstes Integral:

$$V = Y'y' + c \quad \text{oder} \quad \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c.$$

Hieraus folgt:

$$dx = \frac{c\, dy}{\sqrt{y^2 - c^2}}, \quad \text{also} \quad \frac{x - \alpha}{c} = l\, \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c};$$

α und c sind willkürliche Konstanten. Man kann dies schreiben,

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{\frac{x-\alpha}{c}}, \quad \frac{y - \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{-\frac{x-\alpha}{c}};$$

also

$$y = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{x-\alpha}{2}} + e^{-\frac{x-\alpha}{2}}\right].$$

Dies ist die Gleichung einer Kettenlinie. Die Grenzbedingung ist hier:

$$(\delta x_1 + y'_1 \delta y_1) - (\delta x_0 + y'_0 \delta y_0) = 0,$$

sie dient zur Bestimmung der Koordinaten x_1, y_1 und x_0, y_0 wenn diese variabel sind.

Sind die Endpunkte gegeben, so genügt die Gleichung der Kurve zur Bestimmung der Konstanten c und α; nehmen wir z. B. an, dass die Ordinaten dieser Endpunkte gleich sind und wählen wir zur y-Axe die Senkrechte im gleichen Abstande zu diesen Punkten, so ist $x_1 = -x_0$; folglich wird die Konstante α null und die Gleichung der Kurve:

$$y = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right].$$

Die Konstante c ist also aus der Bedingung:

$$y_0 = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{x_0}{c}} + e^{-\frac{x_0}{c}}\right]$$

zu bestimmen. Ist das Verhältnis $\frac{y_0}{x_0}$ kleiner als eine bestimmte Grenze, welche man leicht ermitteln kann, so hat die vorstehende Gleichung keine reelle Wurzel c; in diesem Falle existiert weder ein Maximum noch ein Minimum.

Sind die Endpunkte auf zwei gegebenen Kurven beweglich, so hat man:

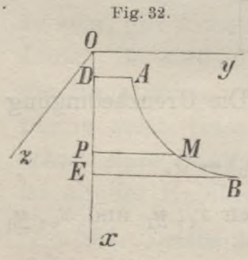
$$\delta x_1 + y'_1 \delta y_1 = 0, \quad \delta x_0 + y'_0 \delta y_0 = 0;$$

hieraus folgert man leicht, dass die gesuchte Kettenlinie normal zu den beiden gegebenen Kurven ist.

852. Vierte Aufgabe. *Es seien zwei Punkte* A *und* B *in verschiedener Höhe gegeben; man soll die Kurve* AMB *finden, welche ein schwerer Punkt durchlaufen muss, um in der kürzesten Zeit von* A *nach* B *zu gelangen.*

Die gesuchte Kurve heisst die *Brachistochrone.* Wir wählen drei rechtwinklige Axen, von denen die x-Axe parallel zur Richtung der Schwere ist, und bezeichnen mit x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 die Koordinaten der Punkte A und B. Die durch die Schwere verursachte Beschleunigung heisse g, die Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ seien wie gewöhnlich durch y' und z' dargestellt, so ist die Zeit, welche ein schwerer Punkt gebraucht, um ohne Anfangsgeschwindigkeit von A nach B zu gelangen, wie in der Mechanik bewiesen wird, gleich dem Produkte aus der Konstante $\sqrt{2g}$ mit dem Integral

Fig. 32.



$$S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{x - x_0}}\, dx.$$

Es handelt sich also um die Bedingungen des Minimums von S. Hier ist:

$$V = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{x - x_0}}, \quad X = -\frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{2(x - x_0)^{\frac{3}{2}}}, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

$$Y' = \frac{y'}{\sqrt{x - x_0}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad Z' = \frac{z'}{\sqrt{x - x_0}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}};$$

ferner:

$$K = -\frac{dY'}{dx}, \quad H = -\frac{dZ'}{dx}.$$

Da die Punkte A und B gegeben sind, so werden die Bedingungen des Minimums hier:

$$\frac{dY'}{dx} = 0, \quad \frac{dZ'}{dx} = 0,$$

also:

$$Y' = c, \quad Z' = c',$$

wobei c und c' willkürliche Konstanten sind. Also ist

$$y' = c\sqrt{x - x_0}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}, \quad z' = c'\sqrt{x - x_0}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

und folglich:

$$z' = \frac{c'}{c} y';$$

integriert man diese Gleichung und bezeichnet man mit c'' eine neue Konstante, so erhält man die Gleichung:

$$z = \frac{c'}{c} y + c'',$$

welches die Gleichung einer vertikalen Ebene ist, die die gesuchte Kurve enthält. Diese Ebene geht durch die beiden gegebenen Punkte und ist daher bestimmt. Man kann sie zur Ebene xy wählen, dann ist $c' = 0$, $c'' = 0$, also $z = 0$, $z' = 0$, und

$$y' = c\sqrt{x - x_0}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Löst man diese Gleichung nach y' auf, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x - x_0}{\frac{1}{c^2} - (x - x_0)}},$$

und dies ist die Differentialgleichung einer Cykloide, deren Basislinie horizontal ist (§ 231); die Bestimmung derselben wird vervollständigt dadurch, dass sie durch die Punkte A und B gehen soll; $\frac{1}{c^2}$ ist der Durchmesser des erzeugenden Kreises.

853. Nehmen wir nun an, dass die Endpunkte A und B nicht gegeben, sondern nur gewissen Bedingungen unterworfen sind. Die Gleichung

$$z = \frac{c'}{c} y + y''$$

findet immer statt, und folglich ist die gesuchte Kurve auch noch in einer vertikalen Ebene gelegen. Wiewohl diese Ebene noch unbekannt ist, so hindert nichts, in dieselbe zwei Koordinatenaxen zu verlegen, und die Untersuchung im vorigen Paragraphen lehrt, dass die Kurve in allen Fällen eine Cykloide ist.

Es handelt sich also nur um die Bestimmung der Endpunkte und des Radius für den erzeugenden Kreis. Die Grenzbedingung $\mathfrak{G} = 0$ ist hier:

$$[(V - Y'y' - Z'z')\,\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z]_0^1 + \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_0}\,dx = 0.$$

Es ist nun:

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -X,$$

also:

$$\frac{\partial V}{\partial x_0}\,dx = -X\,dx = (Y'dy' + Z'dz' - dV),$$

und weil Y' und Z' konstante Werte sind, so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x_0}\,dx = d(Y'z' + Z'z' - V);$$

unsere Gleichung wird also:

$$[(V-Y'y'-Z'z')\delta x+Y'\delta y+Z'\delta z]_0^1-[V-Y'y'-Z'z']_0^1\delta x_0=0$$

oder, wenn man V, Y' und Z' durch ihre Werte ersetzt:

$$\left[\frac{\delta x+y'\delta y+z'\delta z}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]_0^1-\left[\frac{1}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]_0^1\delta x_0=0.$$

Endlich wird, da

$$\frac{1}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\frac{c}{y'}=\frac{c'}{z'}$$

ist, wenn man mit λ den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse bezeichnet, und weil die Produkte $\lambda y'$ und $\lambda z'$ konstant sind:

$$\lambda_0 y'_0=\lambda_1 y'_1,\quad \lambda_0 z'_0=\lambda_1 z'_1,$$

und folglich ist die Bedingungsgleichung nach Beseitigung des Faktors λ_1:

$$(\delta x_1+y'_1\delta y_1+z'_1\delta z_1)-(\delta x_0+y'_1\delta y_0+z'_1\delta z_0)=0.$$

Welches nun auch die Bedingungen sein mögen, denen die Endpunkte genügen sollen, man kann die Lösung jetzt leicht vollenden.

Nehmen wir an, dass jeder dieser Punkte auf einer gegebenen Kurve liegen soll, so hat man einzeln:

$$\delta x_1+y'_1\delta y_1+z'_1\delta z_1=0,$$
$$\delta x_0+y'_0\delta y_0+z'_0\delta z_0=0.$$

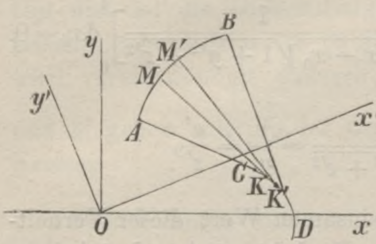
Hieraus folgert man:

Die Brachistochrone ist normal zu der gegebenen Kurve, welche durch den Endpunkt geht, und die Tangente der anderen Kurve, welche durch den Ausgangspunkt geht, ist senkrecht zu der Tangente der Brachistochrone im Endpunkte.

854. Fünfte Aufgabe. *Es soll eine ebene Kurve* AMB *gefunden werden, so dass die Fläche* ABCD, *zwischen dem Bogen* AMB, *den Krümmungsradien* AC *und* BD, *welche zu den Endpunkten* A *und* B *gehören, und dem Bogen* CD *der Evolute, der zwischen den Krümmungsmittelpunkten* C *und* D *enthalten ist, ein Minimum wird.*

Es sei MK der Krümmungsradius in einem Punkte M des Bogens $AM = s$, $M'K'$ der unendlich benachbarte Krümmungsradius, so wird die zwischen den Radien R und den beiden Kurven enthaltene Fläche gleich $R\,ds\,(1 + \varepsilon)$, wobei ε unendlich klein ist. Bezieht man also die Kurve auf zwei rechtwinklige Axen Ox und Oy, so ist das Integral, welches ein Minimum werden soll:

Fig. 33.



$$S = \int_{x_0}^{x_1} R\,\frac{ds}{dx}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}\,dx.$$

Also hat man:

$$V = \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}, \quad X = 0, \quad Y = 0.$$

Da der dritte Fall des § 846 vorliegt, so besitzt die Gleichung des Minimums als zweites Integral:

$$V = C + C'y' + Y''y'',$$

und dieses Integral reduziert sich hier auf:

$$V = C + C'y',$$

wobei C und C' willkürliche Konstanten sind, weil $Y''y'' = -V$ ist. Setzt man $R\,\dfrac{ds}{dx}$ an Stelle von V, $\dfrac{dy}{dx}$ an Stelle von y', so wird:

$$R\,\frac{ds}{dx} = C + C'\,\frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad R = C\,\frac{dx}{ds} + C'\,\frac{dy}{ds}.$$

Wir setzen

$$\frac{dx}{ds} = \sin\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\varphi,$$

ferner

$$C = 4a\cos\alpha, \quad C' = -4a\sin\alpha,$$

wobei a und α neue willkürliche Grössen sind, so wird:

$$R = 4a\sin(\varphi - \alpha).$$

Wenn man aber die Axen um einen Winkel α dreht und immer mit φ die Neigung der Tangente der gesuchten Kurve mit der x-Axe bezeichnet, so hat man einfach:

$$R = 4a \sin\varphi \quad \text{oder} \quad ds = 4a \sin\varphi \, d\varphi,$$

denn $d\varphi$ ist der Kontingenzwinkel. Also folgt:

$$dx = ds \sin\varphi = 4a \sin\varphi^2 \, d\varphi = 2a(1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi,$$

$$dy = ds \cos\varphi = 4a \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 2a \sin 2\varphi \, d\varphi,$$

mithin, indem man integriert und mit x_0, y_0 neue willkürliche Konstanten bezeichnet:

$$x - x_0 = a(2\varphi - \sin 2\varphi), \quad y - y_0 = a(1 - \cos 2\varphi).$$

Die gesuchte Kurve ist sonach eine Cykloide.

855. Sechste Aufgabe. *Es sind zwei rechtwinklige Axen* Ox, Oy *und zwei Punkte* C, D *in ihrer Ebene gegeben. Es soll unter allen Kurven von gegebener Länge, welche in dieser Ebene liegen und durch die Punkte* C *und* D *begrenzt sind, diejenige bestimmt werden, für welche die Fläche* ABCD *zwischen der Kurve, der* x*-Axe und den Ordinaten der Endpunkte ein Maximum wird.*

Das Integral, welches ein Maximum werden soll, ist hier:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \, dx,$$

und dabei muss

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = l$$

sein, wo l eine gegebene Länge bedeutet. Man muss also (§ 843) das absolute Maximum des Integrales

$$S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} (y + a\sqrt{1 + y'^2}) \, dx$$

suchen, in dem a eine unbestimmte Grösse ist. Hier wird

$$V = y + a\sqrt{1 + y'^2}, \quad X = 0, \quad Y = 1, \quad Y' = \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

und man hat den zweiten Fall des § 846; die Gleichung des Maximum besitzt das erste Integral:

$$V - y'Y' = c \quad \text{oder} \quad y + \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

wobei c eine willkürliche Konstante ist. Hieraus folgt:

$$dx = \frac{(c-y)\,dy}{\sqrt{a^2-(c-y)^2}},$$

also:

$$x - c' = \sqrt{a^2-(c-y)^2} \quad \text{oder} \quad (x-c')^2 + (y-c)^2 = a^2.$$

Die gesuchte Kurve ist also ein Kreisbogen mit dem Radius a.

856. Siebente Aufgabe. *Welche Kurve ist unter allen isoperimetrischen, die man in einer Ebene zwischen zwei gegebenen Punkten ziehen kann, diejenige, die bei der Rotation um eine in der nämlichen Ebene gegebene Gerade die grösste oder die kleinste Rotationsfläche erzeugt?*

Das Integral, welches ein Maximum oder Minimum werden soll, ist:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

überdies muss

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$$

sein; man muss also das absolute Maximum oder Minimum von

$$S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} (y+a)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

bestimmen. Da a eine Konstante ist, so ist die Rechnung die nämliche wie in der dritten Aufgabe (§ 851), und folglich ist die Kurve, welche die grösste oder die kleinste Fläche erzeugt, eine Kettenlinie.

857. Achte Aufgabe. *Welche Kurve ist unter allen isoperimetrischen diejenige, für welche das Volumen der Rotationsfläche am kleinsten wird?*

Das Integral, welches ein Minimum werden soll, ist

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx,$$

und wie vorhin, ist

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l.$$

Man muss das absolute Minimum von

$$S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + a\sqrt{1 + y'^2})\, dx$$

bestimmen, und hier ist:

$$V = y^2 + a\sqrt{1 + y'^2}, \quad X = 0, \quad Y = 2y, \quad Y' = \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

also wird wie bei der sechsten Aufgabe

$$V - y'Y' = c$$

das erste Integral der Differentialgleichung, d. h:

$$y^2 + \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \quad \text{oder} \quad dx = \frac{(y^2 - c)\, dy}{\sqrt{a^2 - (c - y^2)^2}}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der *elastischen Kurve* (§ 709).

858. Neunte Aufgabe. *Es soll die ebene Kurve bestimmt werden, welche bei der Rotation um eine in ihrer Ebene gelegene Axe die kleinste Fläche erzeugt, welche ein gegebenes Volumen enthält.*

Das Integral, welches ein Minimum werden soll, ist

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

und dabei ist

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx = \text{const} = l.$$

Wir suchen das absolute Minimum des Integrales

$$2aS + S' = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2ay\sqrt{1 + y'^2})\, dx,$$

wobei a unbestimmt ist.

Nun wird

$$V = y^2 + 2ay\sqrt{1 + y'^2}, \quad X = 0,$$

also erhält man als erstes Integral der zum Minimum gehörigen Gleichung:

$$V - y'Y' = \pm b^2 \quad \text{oder} \quad y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm b^2,$$

wobei b eine willkürliche Konstante ist. Demnach wird

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}.$$

Diese Gleichung ist die nämliche, welche wir im § 712 untersucht haben; sie gehört zu einer Kurve, welche von dem Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel beschrieben wird, wenn diese ohne zu gleiten auf einer festen, in ihrer Ebene gelegenen Geraden rollt.

Anhang.

Zur Integration der partiellen Differentialgleichung in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Der im § 383 (Band I) gegebene Beweis für die Entwickelbarkeit einer Funktion der komplexen Variabelen z nach ganzen Potenzen von z innerhalb eines Gebietes, in welchem $f(z)$ eine eindeutige und stetige Funktion ist, die zugleich eine eindeutige und stetige Ableitung $f'(z)$ besitzt, stützt sich auf den Integralsatz von Cauchy, der in den §§ 379 bis 382 für die Kreisfläche ausgeführt und in kürzerer Darstellung im § 500 wiederholt ist. Man kann vermittelst der Fourierschen Reihe einen direkteren Beweis für dieses grundlegende Theorem geben, der unmittelbar auf die Potenzreihe führt. Ich teile denselben hier mit, im wesentlichen in der Form, wie ich ihn im 21. Bande der Math. Annalen aufgestellt habe, da er zugleich eine allgemeine Methode für die Integration linearer partieller Differentialgleichungen enthält, durch welche sich nicht nur die in den §§ 820—823 erwähnten Aufgaben, sondern auch die analogen von Kugelfunktionen abhängigen Probleme der Potentialtheorie in exakter Weise erledigen lassen.

1. Es sei ein die Ebene $z = x + iy$ oder einen Teil derselben einfach überdeckendes und einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet gegeben; für alle Punkte im Innern des Gebietes sei eine Funktion $w = u + iv$ definiert, welche dort überall *einen* bestimmten endlichen mit der Lage des Punktes xy stetig sich ändernden Wert hat und ferner partielle Ableitungen nach x und y besitzt, die ebenfalls für alle Punkte im Innern stetig sind und dabei den Gleichungen

$$1)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

genügen: so soll gezeigt werden, dass die Funktion w eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ in dem Sinne ist, dass sich dieselbe überall im Gebiete durch Potenzreihen darstellen lässt; d. h. bezeichnet a einen beliebigen Punkt im Innern des Gebietes, so ist:

$$w = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \cdots + a_n(z - a)^n + \cdots$$

und diese Reihe konvergiert zum mindesten für alle Punkte z innerhalb eines Kreises um den Punkt a als Mittelpunkt, der ganz im Innern des anfänglich definierten Gebietes liegt, also die Randkurve allenfalls berührt, aber nicht durchschneidet. Aus dieser Reihe folgt, dass auch alle Ableitungen der Funktion w innerhalb des gegebenen Gebietes Funktionen der komplexen Variabelen z ohne singuläre Punkte sind.

Man kann das Problem auch nur vermittelst der reellen Funktionen u und v aussprechen: Wenn zwei Funktionen u und v der reellen Veränderlichen x und y die Eigenschaft haben, dass sie nebst ihren ersten partiellen Ableitungen innerhalb eines gegebenen Gebietes eindeutig und stetig sind, und dass zweitens zwischen diesen Ableitungen die Gleichungen 1) bestehen, so existieren auch alle höheren Ableitungen der beiden Funktionen u und v, und diese selbst lassen sich als die reellen und imaginären Bestandteile einer nach Potenzen von $z - a$ fortschreitenden Reihe entwickeln.

Endlich kann man noch einen Schritt weiter gehen und das Problem nur an *einer* der Funktionen u oder v formulieren. Setzt man nämlich von der Funktion u voraus, dass sie auch eine zweite partielle Ableitung nach x besitzt und dass dieselbe eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist, so erhält man durch Differentiation der ersten Differentialgleichung zwischen u und v:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

und daraus folgt, dass man die zweite Differentialgleichung sub 1) nach y differentiieren kann und dass demnach

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ist. Man erhält folglich die Gleichung:

$$2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Umgekehrt: wenn eine Funktion u die Eigenschaft hat, dass ihre zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ innerhalb eines Gebietes stetig sind und dieser Gleichung genügen, so lässt sich immer eine stetige Funktion v ausfindig machen, für welche

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

wird; denn die Bedingung des exakten Differentiales ist erfüllt. Sonach wird mit den vorigen Problemen zugleich das dritte bewiesen sein: Wenn eine Funktion u der beiden reellen Veränderlichen x

und y innerhalb eines Gebietes eindeutig und nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ stetig ist, während die zweiten Ableitungen die Gleichung 2) befriedigen, so sind auch alle Ableitungen von u stetige Funktionen der beiden Variabelen in diesem Gebiete.

2. Da es sich um den Nachweis einer Potenzentwickelung um einen beliebigen Punkt $a = \alpha + i\beta$ handelt, so führe man Polarkoordinaten ein:

$$x = \alpha + r\cos\vartheta, \quad y = \beta + r\sin\vartheta,$$

so wird:

$$w = f(\alpha + r\cos\vartheta, \beta + r\sin\vartheta) = u(r, \vartheta) + iv(r, \vartheta).$$

Der Radius r darf nur so gross gewählt werden, dass der zugehörige Kreis nicht über das gegebene Gebiet hinausreicht; dieser Maximalwert von r, welcher zu einem bestimmten α und β gehört, heisse R. Die Funktionen u und v sind stetige Funktionen der Variabelen r und ϑ, und ausserdem periodische Funktionen von ϑ mit der Periode 2π. Es wird nun:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial w}{\partial x} r\sin\vartheta + \frac{\partial w}{\partial y} r\cos\vartheta,$$

also:

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right)(\cos\vartheta - i\sin\vartheta);$$

mithin lautet die Differentialgleichung 1) in Polarkoordinaten:

$$3) \qquad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0.$$

Dieselbe zerlegt sich in die beiden:

$$4) \qquad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0.$$

Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ auch an der Stelle $r = 0$ endlich bleiben, so ist bei allen Werten von ϑ:

$$5) \qquad \lim_{r=0}\left[\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right] = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r=0}\left[\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right] = 0.$$

Weil nun auf jedem Kreise mit dem Radius $r < R$ u und v stetige Funktionen von ϑ sind, welche überdies die stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial v}{\partial \vartheta}$ besitzen, so sind die Werte von u und v ausnahmslos durch Fouriersche Reihen darstellbar; d. h. es ist:

$$6)\quad \begin{cases} u(r,\vartheta) = A_0 + \sum\limits_{k=1}^{k=\infty} (A_k \cos k\vartheta + B_k \sin k\vartheta), \\ v(r,\vartheta) = \mathsf{A}_0 + \sum\limits_{k=1}^{k=\infty} (\mathsf{A}_k \cos k\vartheta + \mathsf{B}_k \sin k\vartheta), \end{cases}$$

wobei

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(r,\vartheta)\,d\vartheta, \qquad A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(r,\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(r,\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta,$$

und analoge Gleichungen für v gelten. Demnach ist:

$$7)\quad w = A_0 + i\mathsf{A}_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k + i\mathsf{A}_k)\cos k\vartheta + (B_k + i\mathsf{B}_k)\sin k\vartheta.$$

Die Koeffizienten A_k, B_k, A_k, B_k sind reelle Funktionen des Radius r. Wie beschaffen müssen dieselben sein, damit die partiellen Differentialgleichungen 4) erfüllt sind? Man kann die Frage nicht so lösen, dass man die Reihen 6) gliedweise sowohl nach r wie nach ϑ differentiiert; denn damit würde die Darstellbarkeit der Funktionen $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ etc. durch trigonometrische Reihen vorausgesetzt werden, die aus der Stetigkeit dieser Funktionen allein nicht hervorgeht. Man gelangt vielmehr zu den gesuchten Relationen auf entgegengesetztem Wege, indem man die Differentialgleichungen integriert.

Multipliziert man die erste der Gleichungen 4) mit $\sin k\vartheta$, so wird:

$$\frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta - \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\sin k\vartheta = 0,$$

und da diese Gleichung bei allen Werten von ϑ gilt, so wird auch:

$$8)\quad r\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta\,d\vartheta - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}\sin k\vartheta\,d\vartheta = 0.$$

Das zweite Integral lässt sich durch partielle Integration umformen; es ist:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \sin k\vartheta \, d\vartheta = [v \sin k\vartheta]_{-\pi}^{+\pi} - k \int\limits_{-\pi}^{+\pi} v \cos k\vartheta \, d\vartheta,$$

und da der erste Term der rechten Seite verschwindet, so lautet nunmehr die Gleichung 8):

$$r \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta \, d\vartheta + k \int\limits_{-\pi}^{+\pi} v \cos k\vartheta \, d\vartheta = 0.$$

Da ferner $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist, so ist:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta \, d\vartheta = \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} u \sin k\vartheta \, d\vartheta,$$

und sonach erhält man an Stelle von 8) die Bedingungsgleichung:

$$9) \qquad r \frac{\partial B_k}{\partial r} + k \mathsf{A}_k = 0.$$

Wird dieselbe Differentialgleichung 4) mit $\cos k\vartheta$ multipliziert, so folgt nach demselben Verfahren:

$$10) \qquad r \frac{\partial A_k}{\partial r} - k \mathsf{B}_k = 0,$$

und wird die zweite der Gleichungen 4) in derselben Weise behandelt, so erhält man:

$$11) \qquad r \frac{\partial \mathsf{B}_k}{\partial r} - k A_k = 0,$$

$$12) \qquad r \frac{\partial \mathsf{A}_k}{\partial r} + k B_k = 0.$$

Das simultane System dieser vier Gleichungen definiert die Koeffizienten für die Reihenentwickelungen 6) der Funktionen u und v; dasselbe gilt für alle Werte von $k = 1$ an. Für $k = 0$ hat man die Gleichungen:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\vartheta - \frac{1}{r} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial A_0}{\partial r} = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial r} d\vartheta + \frac{1}{r} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \mathsf{A}_0}{\partial r} = 0,$$

da u und v auf jedem Kreise stetige und periodische Funktionen von ϑ sein müssen. Also sind A_0 und A_0 Konstanten. Das obige System aber lässt sich in einfachster Weise vollständig integrieren. Differentiiert man die Gleichung 9) nach r, was gestattet ist, da A_k eine Ableitung nach r besitzt, so folgt vermittelst der Gleichung 12):

$$\frac{\partial B_k}{\partial r} + r\frac{\partial^2 B_k}{\partial r^2} + k\frac{\partial \mathsf{A}_k}{\partial r} = 0$$

oder:

$$13)\qquad \frac{\partial^2 B_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial B_k}{\partial r} - \frac{k}{r^2}\,B_k = 0.$$

Demnach wird:

$$14)\qquad \begin{cases} B_k = C_1 r^k + C_2 r^{-k}, \\ \mathsf{A}_k = -\,C_1 r^k + C_2 r^{-k}, \end{cases}$$

und ferner:

$$A_k = C'_1 r^k + C'_2 r^{-k},$$
$$\mathsf{B}_k = C'_1 r^k - C'_2 r^{-k}.$$

Die Grössen C_1, C_2, C'_1, C'_2 sind vier willkürliche reelle Integrationskonstanten. Da aber $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ auch für $r = 0$ endlich bleibt, so ist auch $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta\, d\vartheta = \frac{\partial B_k}{\partial r}$ für $r = 0$ endlich. Mithin müssen die Koeffizienten der negativen Potenzen von r sämtlich null sein, d. h. es ist:

$$15)\qquad B_k = C_1 r^k,\quad \mathsf{A}_k = -\,C_1 r^k,\quad A_k = C'_1 r^k,\quad \mathsf{B}_k = C'_1 r^k.$$

Weil solche Gleichungen für sämtliche Werte von k gelten, während die beiden Integrationskonstanten je nach den Werten von k verschieden sein können, so sollen diese Konstanten ebenfalls durch den Index k unterschieden werden. Man setze also:

$$A_0 = C_0,\quad \mathsf{A}_0 = C'_0,\quad -B_k = \mathsf{A}_k = C'_k r^k,\quad \mathsf{B}_k = A_k = C_k r^k,$$

so erhält die Reihe 7) die Form:

$$w = (C_0 + iC'_0) + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-C'_k + iC_k)\, r^k \sin k\vartheta + (C_k + iC'_k)\, r^k \cos k\vartheta$$

oder:

$$16)\qquad \begin{cases} w = (C_0 + iC'_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC'_k)\, r^k e^{ik\vartheta}, \\ \quad = (C_0 + iC'_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC'_k)\,(z-a)^k, \end{cases}$$

sie ist also eine Potenzreihe der komplexen Variabelen $z - a$.

3. Das Auftreten der negativen Potenzen von r in dem vollständigen Integrale des simultanen Systemes weist darauf hin, dass die soeben entwickelte Methode sofort eine Erweiterung des Problemes gestattet: Es sei die Funktion w so beschaffen, dass sie für eine endliche Anzahl von Stellen im Innern des gegebenen Gebietes unendlich wird. In diesem Falle kann man solch einen Punkt c mit einem Kreise von beliebig kleinem Radius ϱ umschliessen, dessen Mittelpunkt c ist, und ausserdem einen zweiten Kreis vom Radius R mit demselben Mittelpunkt konstruieren, dessen Radius so gross gewählt wird, dass in dem ringförmigen Gebiete zwischen ϱ und R kein Unendlichkeitspunkt der Funktion angetroffen wird. Für alle Werte von r zwischen ϱ und R ist alsdann die Funktion w durch eine konvergente Potenzreihe von der Form

$$17)\quad w = (C_0 + iC'_0) + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC'_k)\, r^k e^{ik\vartheta} + (D_k + iD'_k)\, r^{-k} e^{-ik\vartheta}$$

ausdrückbar, wobei D_k und D'_k ein neues Paar von Integrationskonstanten bezeichnen, welches oben zuerst C'_1 und C_2 genannt wurde. Diese Entwickelung bleibt bei beliebig kleinen Werten von r giltig. Wird nun die Funktion im Punkte c derart unendlich, dass das Produkt $w(z-c)$ für $z = c$ gleich null wird, so müssen auch jetzt noch alle Koeffizienten der negativen Potenzen von r verschwinden, und es besteht also der Satz: Wenn für eine Funktion w, welche im übrigen den anfänglichen Bedingungen (§ 1) genügt, nur die Möglichkeit offen gelassen wird, dass sie in einzelnen Punkten im Innern des Gebietes unendlich wird, so jedoch, dass für jeden beliebigen Punkt der Fläche, wo $z = z'$ ist, $w(z - z')$ für $z = z'$ gleich null wird, so ist sie notwendig nebst allen ihren Differentialquotienten in allen Punkten im Innern der Fläche ohne Ausnahme endlich und stetig.

Sind in dem Gebiete beliebig viele Unendlichkeitsstellen enthalten, so gilt die vorstehende Reihe für jedes durch zwei konzentrische Kreise begrenzte Gebiet, in welchem keine singulären Punkte gelegen sind; nur kann in diesem Falle der innere Kreis im allgemeinen nicht mehr beliebig klein gemacht werden.

Zusätze. Es soll nun untersucht werden, in welcher Weise sich die Voraussetzungen des Theoremes (§ 1) noch erweitern lassen, ohne dass die Giltigkeit desselben aufhört. Es sei nach wie vor w innerhalb des Gebietes eine *durchaus stetige* Funktion (ohne Unendlichkeitspunkte); aber es gebe Stellen, von denen nicht bekannt ist, ob an denselben die Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

vermittelst endlicher bestimmter Werte der Ableitungen erfüllt ist, Stellen also, an denen entweder diese Ableitungen einzeln oder beide unbestimmt, auch unendlich werden, oder an denen dieselben nicht mehr der Differentialgleichung genügen könnten. Auch werde die Möglichkeit offen gelassen, dass Stellen vorhanden sind, an denen diese Ableitungen, mögen sie dort der Differentialgleichung genügen oder nicht, nicht mehr stetige Funktionen der beiden Variabelen x und y sind.

Wählt man wiederum einen beliebigen Punkt im Innern des Bereiches zum Mittelpunkt der Reihenentwickelungen, wie sie durch die Gleichungen 7) definiert sind, so werden alle früheren Schlüsse, aus denen hervorging, dass die Koeffizienten gemäss den Gleichungen 15) Potenzen von r multipliziert mit bestimmten Konstanten sind, anwendbar sein, wenn dreierlei erhalten bleibt. Erstlich müssen diese Koeffizienten noch immer stetige Funktionen von r bleiben, und dies ist zufolge der Definition derselben vermittelst bestimmter Integrale in der That der Fall, wenn w durchaus stetig ist. Zweitens müssen auch ihre Ableitungen: $\frac{\partial A_k}{\partial r}$, $\frac{\partial B_k}{\partial r}$, $\frac{\partial \mathsf{A}_k}{\partial r}$, $\frac{\partial \mathsf{B}_k}{\partial r}$ stetige Funktionen von r sein, und drittens müssen die Differentialgleichungen 9) bis 12), wenn sie auch nicht von vornherein als für jeden Wert von r geltende bekannt sind, doch in beliebiger Nähe eines jeden Wertes Geltung haben. Sind nämlich die Koeffizienten nebst ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen von r, so folgt, dass diese Differentialgleichungen ausnahmlos erfüllt sind, weil zwei stetige Funktionen $\frac{\partial B_k}{\partial r}$ und A_k, welche der Gleichung 9)

$$r\frac{\partial B_k}{\partial r} + k\mathsf{A}_k = 0$$

in jedem kleinsten Intervalle mindestens an einer Stelle genügen, durchweg diese Relation befriedigen.

Die Stetigkeit der ersten Ableitungen bleibt gesichert, sobald das simultane System erster Ordnung bei allen Werten von r mit Ausnahme einer *diskreten* Menge Geltung hat, oder genauer, sobald man weiss, dass die Gleichung

$$\frac{\partial B_k}{\partial r} = -\frac{k}{r}\mathsf{A}_k$$

und die analogen im allgemeinen besteht, nämlich so, dass die Werte von r zwischen 0 und R, für welche die beiden Seiten um mehr als eine beliebig kleine Zahl δ differieren, stets nur eine Menge bilden, die sich in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen lässt, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann. (Bd. II. 1, pag. 76.) Denn wenn dieses der Fall ist, so folgt durch Integration, dass die Funktion B_k die Ableitung $-\frac{k}{r}\mathsf{A}_k$ besitzt, die in der That durchaus stetig ist. Dabei ist allerdings noch angenommen, dass die Ableitung $\frac{\partial B_k}{\partial r}$ bei ihrer Integration nach r die Funktion B_k liefert, was aus den angenommenen Bedingungen dann unmittelbar hervorgeht, wenn die Ableitung zugleich durchaus endlich ist, dagegen eine besondere Bedingung ist, wenn auch die Möglichkeit offen gelassen wird, dass dieselbe unendlich ist. Die Forderung, dass das simultane System bis auf Werte einer diskreten Menge von r gegeben sein muss, soll nun vermittelst der ursprünglichen Differentialgleichungen 4) ausgedrückt werden.

Aus der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\sin k\vartheta = 0$ und den analogen kann bei festem Werte von r stets die Gleichung

$$\int\limits_{r_0}^{r} dr \int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\sin k\vartheta\right) d\vartheta = 0$$

gefolgert werden, wenn innerhalb des ebenen Gebietes alle die Stellen, an welchen die obige Gleichung nicht gilt, in Flächenelemente eingeschlossen werden können, deren Summe beliebig klein ist. Führt man zunächst die innere Integration aus, so folgt:

$$\int\limits_{r_0}^{r} dr \int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta\, d\vartheta + \int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{r}\, k\int\limits_{-\pi}^{+\pi} v\cos k\vartheta\, d\vartheta = 0.$$

Vertauscht man die Integration im ersten Integrale, was gestattet ist, wenn wir die doppelte Integrierbarkeit von $\frac{\partial u}{\partial r}$ voraussetzen, so wird dasselbe gleich:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\sin k\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{r_0}^{r}\frac{\partial u}{\partial r}\, dr = \int\limits_{-\pi}^{+\pi}\sin k\vartheta\, d\vartheta\, [u]_{r_0}^{r}.$$

Also wird in unserer früheren Bezeichnung:

$$[B_k]_{r_0}^{r} + k\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\mathsf{A}_k}{r}\, dr = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial B_k}{\partial r} + \frac{k}{r}\mathsf{A}_k = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Sonach lässt sich dem Hauptsatze die Fassung geben: Wenn eine Funktion w innerhalb eines die Ebene einfach überdeckenden Gebietes ausnahmslos stetig ist und der Differentialgleichung $\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ „im allgemeinen" genügt, d.h. so, dass die Punkte, an denen diese Differentialgleichung nicht erfüllt ist, sowie die Punkte, an denen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ (oder die partiellen Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial \vartheta}$) unbestimmt zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen oder unstetig werden, nur ein *lineares* System erfüllen, d. h. in eine endliche Anzahl von Flächenelementen eingeschlossen werden können, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann; wenn ferner die partiellen Ableitungen die doppelte Integrierbarkeit gestatten, so dass

$$\int\!\!\int \frac{\partial w}{\partial x}\, dx\, dy = \int [w]_{x_0}^{x} dy, \qquad \int\!\!\int \frac{\partial w}{\partial y}\, dx\, dy = \int [w]_{y_0}^{y} dx$$

ist, so ist die Funktion w nebst allen ihren partiellen Differentialquotienten für alle Punkte im Innern dieser Fläche endlich und stetig, und es sind überhaupt keine Ausnahmepunkte vorhanden.

Wird schliesslich noch die Möglichkeit offen gelassen, dass auch die Funktion w an irgend welchen Stellen im Innern des Gebietes zwar endlich bleibt, aber unstetig wird, so gelten alle früheren Sätze, wenn diese Unstetigkeitsstellen so verteilt sind, dass erstlich die Integrale A_0, A_0, A_k, A_k, B_k, B_k stetige Funktionen von r bleiben, und dass zweitens, weil der Satz der teilweisen Integration auf jedem Kreise und jedem Radiusvektor angewandt wurde, u und v nur bei Werten von r, die eine diskrete Menge bilden, unstetige Funktionen von ϑ sind, und ebenso nur bei diskreten Werten von ϑ, unstetige Funktionen von r. Diesen Forderungen wird genügt, falls die Stellen, an denen die Stetigkeitsbedingung von w nicht gegeben ist, auf einer beliebigen Kurve nur eine diskrete Menge bilden, und ebenso die Kurven selbst, auf denen sie gelegen sind, nur ein diskretes System zusammensetzen. Unter diesen Bedingungen kann w überhaupt an keiner Stelle im Innern des Gebietes unstetig sein, wenn eine durch Abänderung des Wertes in einzelnen Punkten hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist.

Ende des zweiten Bandes.