

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

~~BIBLIOTEKA GŁÓWNA~~



~~M~~
2619

L. inw.

ich der Baukunde.

Abtheilung I:

Hilfswissenschaften.

Heft 2:

**Anleitung zur Perspektive.
Resultate der reinen Mathematik.**

Bearbeitet

von

J. M. Frangenheim,
Architekt.

Posern,
Regierungsbaumeister.

Mit 182 Illustrationen im Text.

BERLIN.

Kommissions-Verlag von Ernst Toeche.

1887.

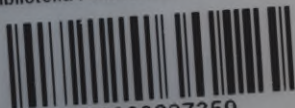


445

~~Bibliothek
der Kgl. Eisenb. Diref.
Breslau.
Sign. *T. 443*.....~~

BIBLIOTHEK
der
Kgl. Eisenb.-Dir. Breslau
T. h. 3.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297359

Handbuch der Baukunde.

Eine
systematische und vollständige Zusammenstellung
der
**Resultate der Bauwissenschaften mit den zugehörigen
Hilfswissenschaften.**

Veranstaltet
von
den Herausgebern der Deutschen Bauzeitung und des
Deutschen Baukalenders.

Abtheilung I.:
Hilfswissenschaften.
Ba 1
2. Heft.
Anleitung zur Perspektive.
Resultate der reinen Mathematik.

BERLIN,
Kommissions-Verlag von Ernst Toeche.



W. 15
6

Anleitung zur Perspektive.
Resultate der reinen Mathematik.

Bearbeitet

von

J. M. Frangenheim,
Architekt.

Posern,
Regierungsbaumeister.

Mit 182 Illustrationen im Text.



BERLIN.

Kommissions-Verlag von Ernst Toeche.

1887.

KD 51(023)



11-348553

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

~~112649~~

Akc. Nr.

~~252649~~

BPK-3-282/2017

Inhalts-Verzeichniss.

Seiten.

III. Ausführung perspektivischer Zeichnungen.

Seite 375—407.

I. Projektions-Arten	375
II. Die Zentral-Projektion	376 — 389
a. Durchschn. oder Glastafel-Methoden. — b. Bestimmung des günstigsten Standpunktes. — c. Ausführung des Bildes. — d. Benutzung d. Verschwindepunkte. — e. Ersetzen der Verschwindepunkte. — f. Darstellung geneigter Geraden. — g. Frontale Lage. — h. Freie Perspektive. — i. Perspekt. eines im Raume liegenden Punktes. — k. Perspekt. Maassstäbe. — l. Benutzung der Theilpunkte. — m. Anwendung des perspekt. Grundrisses. — n. Perspekt. geneigter Geraden. — o. Perspekt. von Monumenten. — p. Perspekt. krummer Linien und krummer Flächen.	
III. Besondere Apparate zur Anfertigung perspekt. Bilder	390 — 394
a. Der Rittersche Perspektograph. — b. Die Methode und der Apparat von Prof. Hauck.	
IV. Physiologische Begründung der Perspektive.	394 — 396
V. Auffindung der Bestimmungsstücke gegebener Perspektiven	396 — 401
a. Photogrammetrisches Verfahren. — b. Rekonstruktion des geometr. Grund- und Aufrisses.	
VI. Decken-Perspektive	401 — 402
VII. Theater-Perspektive	402 — 404
VIII. Schattenkonstruktion in perspektiv. Zeichnungen	404 — 407
a. Zentral-Beleuchtung. — b. Natürliche Beleuchtung.	
IX. Zeichnen nach der Natur	407

IV. Resultate aus der reinen Mathematik.

Seite 409—486.

A. Arithmetik und Algebra. Seite 409—415.

I. Reihen.	409 — 411
a. Einfache arithmet. Reihen. — b. Höhere arithm. Reihen. — c. Geometr. Reihen. — d. Einige besondere Reihen. — e. Binomische Reihe. — f. Transzendente Reihen. — g. Konvergenz der Reihen. — h. Interpolation.	
II. Zinseszinsen- u. Rentenrechnung.	411
III. Kombinatorik	411 — 412
a. Permutationen. — b. Variationen und Kombinationen.	
IV. Determinanten	412 — 413
V. Gleichungen	413 — 415
a. Gleichgn. 1. Grades. — b. Gleichgn. 2. Grades. — c. Gleichgn. 3. Grades. — d. Näherungsweise Lösung der Gleichungen.	

B. Einiges aus der ebenen Geometrie. Seite 416—420.

I. Lehrsätze und Formeln	416 — 418
II. Auflösung geometr. Konstruktions-Aufgaben	418 — 419
a. Methode der Hilfsfiguren. — b. Meth. d. geometr. Oerter. — c. Meth. d. ähnlichen Figuren. — d. Meth. d. algebr. Analyse.	
III. Reguläre Polygone	419
IV. Näherungs-Berechnung ebener Flächen	419 — 420

C. Stereometrie. Seite 420—422.

D. Goniometrie und ebene Trigonometrie. Seite 422—423.

I. Goniometrische Formeln	422 — 423
-------------------------------------	-----------

Inhalts-Verzeichniss.

	Seiten.
a. Besondere Werthe. — b. Beziehungen zwischen d. Funktionen desselben Winkels. — c. Beziehungen zwischen den Funktionen des einfachen Winkels und seines Vielfachen. — d. Beziehungen der Funktionen zweier Winkel. — e. Potenzen von sin und cos. — f. Bogen-Funktionen.	
II. Berechnung ebener Dreiecke	423
E. Sphärische Trigonometrie. Seite 423 — 424.	
I. Das rechtwinklige sphärische Dreieck	423 — 424
II. Gemeines sphärisches Dreieck	424
III. Berechnung sphärischer Dreiecke	424
F. Differential-Rechnung. Seite 425 — 431.	
I. Differential-Formeln	425 — 426
a. Einfache Differentiation. — b. Mehrfache Differentiationen.	
II. Die Reihen von Taylor und Maclaurin	427
III. Unbestimmte Werthe	427
IV. Maxima und Minima	427 — 429
V. Zerlegung rationaler Brüche in Partial-Brüche	429 — 431
G. Integral-Rechnung. Seite 431 — 440.	
I. Ausführung der Integration	431 — 432
II. Integrations-Formeln	432 — 438
a. Hauptformeln. — b. Rationale Funktionen. — c. Irrationale Funktionen. — d. Transzendente Funktionen. — e. Bestimmte Integrale. — f. Näherungsweise Berechnung best. Integrale.	
III. Differential-Gleichungen.	438 — 440
a. Differential-Gleichung 1. Ordnung. — b. Different-Gleichungen 2. Ordnung. — c. Höhere Different-Gleichungen.	
H. Analytische Geometrie der Ebene. Seite 441 — 458.	
I. Die Koordinaten in der Ebene	441
II. Gerade Linie	441 — 442
III. Allgemeine Kurvenlehre	442 — 446
IV. Spezielle Kurvenlehre	446 — 458
a. Kegelschnitte. — b. Transzendente Kurven. — c. Gleichungen einiger transzendent. und algebr. Kurven höherer Ordnung.	
I. Analytische Geometrie des Raumes. Seite 459 — 469.	
I. Die Koordinaten im Raume	459
II. Punkt, Ebene, Gerade	459 — 461
III. Kurven doppelter Krümmung	461 — 462
a. Allgemeine Theorie. — b. Zylindrische Schraubenlinie.	
IV. Krumme Flächen	462 — 469
a. Allgemeine Theorie. — b. Flächen 2. Ordnung.	
K. Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Seite 469 — 486.	
I. Hauptsätze	469 — 471
II. Methode der kleinsten Quadrate.	471 — 477
a. Theorie der Beobachtungsfehler. — b. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe unbek. Grössen aus gegebenen Beobachtgn.	
III. Grafisches Rechnen	477 — 486
a. Die einfachen Rechnungs-Operationen. — b. Grafische Integration. — c. Der Rechenstab und sein Gebrauch.	

III.

Ausführung perspektivischer Zeichnungen.

Bearbeitet von **J. M. Frangenheim**, Architekt, vorm. Direktor der K. Baugewerk-Schule zu Erfurt.

Litteratur:

Weissbach. Anleitung zum axonometr. Zeichnen 1857. — Staudigl. Die axonometr. und schiefe Projektion 1875. — Delabar. Anleitung zum Linearzeichnen. — Schreiber. Lehrbuch d. Perspektive 1875. — v. Peschka u. Koutny. Freie Perspektive 1868. — *de la Gournerie. Traité de perspective linéaire.* — Meydenbauer. Photo-Geometrie: Zeitschr. f. Bauwesen 1867. — Maertens. Der optische Maassstab. — Hauck. Die subjektive Perspektive 1879. — Derselbe. Mittheilungen im Wochenbl. f. Archit. u. Ingen. 4. Jahrg. und in d. Zeitschr. f. Mathemat. u. Physik. 26. u. 27. Jahrg. — Schwedler. Theater-Perspektive; Zeitschr. f. Bauwesen 1859. — Frangenheim. Leitfaden der Linear-Perspekt. 1880. — Derselbe. Perspektiv. Studienblatt 1880. — Burmester. Grundlehren d. Theater-Perspekt. — Derselbe. Relief-Perspektive. — Derselbe. Ueber Theater-Perspektive; Allgem. Bauzeitg. 1884.

I. Projektions-Arten.

Zeichnungen architektonischer Gegenstände werden nach verschiedenen Darstellungs-Arten angefertigt, welche aus den Gesetzen der darstellenden Geometrie hergeleitet sind. Dieselben können den Zweck haben, Gebäude, bzw. Theile davon so abzubilden, dass entweder der Gegenstand nach Gestalt und Grösse genau dargestellt ist, oder dass nur eine Vorstellung von der Gestalt erzielt wird, ohne dass die Maasse direkt aus der Zeichnung entnehmbar sind.

Die Maasse der Gegenstände werden auf drei rechtwinklig zu einander stehende Ebenen bezogen, deren Durchschnitts-Geraden Koordinaten-Axen heissen. Dieselben werden als Längen-, Breiten- und Höhen-Axen mit **X**, **Y**, **Z** bezeichnet.

Die erstgenannte Art der Zeichnungen wird erhalten durch Anwendung der rechtwinkligen (orthogonalen) Parallel-Projektion, wobei die Projektions-Strahlen unter sich und zu einer Axe parallel angenommen werden. Durch Einführung einer Projektions-Ebene, rechtwinklig zu den Strahlen, erhält man die Projektion des darzustellenden Gegenstandes, an dessen Ecken die Strahlen gezogen sind.

Zur Herstellung der an zweiter Stelle oben genannten Zeichnungen, der Zentral- oder perspektivischen Projektion, denkt man die Strahlen in einem Punkt, dem Projektions-Punkt zusammen treffend und durch eine Projektions-Ebene geschnitten.

Zwischen beiden genannten Arten der Projektion steht die schiefwinklige (axonometrische) Projektion, bei welcher die Projektions-Strahlen zwar unter sich, jedoch zu keiner der Koordinaten-Axen parallel sind und durch eine recht- oder schiefwinklig eingeführte Projektions-Ebene geschnitten werden. In dem ersten Falle ist diese Ebene gegen jede der Axen geneigt, so dass alle Ausdehnungen in veränderter Lage erscheinen; im zweiten stellt man die Ebene meist lothrecht und parallel zu zwei Axen, so dass zwei Ausdehnungen in wahrer Länge erscheinen, die dritte aber verändert ist. Zur Vereinfachung der Arbeiten kann man in beiden Fällen die drei Ausdehnungen unverändert bestehen lassen.

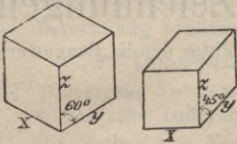
Die **Z**-Axe wird lothrecht angenommen; die Lagen der **X**- und **Y**-Axe werden durch die mit der **Z**-Axe eingeschlossenen Winkel bestimmt; der Maassstab auf **Z** bildet die Einheit; die Maassstäbe für **X** und **Y** werden in Verhältniss-Zahlen zu jener Einheit ausgedrückt.

Je nachdem für die drei Axen, oder nur für zwei der gleiche Maassstab angenommen, oder für jede Axe ein anderer Maassstab gebraucht wird, unterscheidet man die isometrische, dimetrische oder trimetrische Projektion. Diese Axen kann man entweder recht- oder schiefwinklig auf die Bildebene projizieren, so dass 6 Hauptarten der Zeichnung entstehen:

rechtwinklig-isometrisch	schiefwinklig-isometrisch
„ -dimetrisch	„ -dimetrisch
„ -trimetrisch	„ -trimetrisch

Diese Darstellungs-Arten sind für Bautheile, Baukonstruktionen u. s. w. sehr geeignet. Hauptsächlich sind zwei Arten im Gebrauch:

a. die rechtwinklig-isometrische Projektion, bei welcher für die drei Axen der gleiche Maassstab benutzt wird. Der Umriss eines Würfels z. B. projiziert sich als regelmässiges Sechseck; Fig. 24.



b. die schiefwinklig-isometrische Projektion, bei welcher zwei Axen (Z und X) rechtwinklig zu einander stehen und die dritte Axe unter 45° gegen die Z-Axe geneigt ist. Diese Projektions-Art wird auch Kavalier-Perspektive genannt; Fig. 25.

Die durch die zwei genannten Projektions-Arten erzielten Bilder weichen von den natürlichen sehr ab. Viel näher kommen der Natur die durch die dimetrische und trimetrische Projektion erzeugten Bilder, welche daher auch gefälliger erscheinen.

Im allgemeinen kann man für die schiefwinklig-trimetrische Projektion die Winkel der Axen gegen einander beliebig annehmen und auch auf den Axen mit beliebigen Maassstäben arbeiten.

II. Die Zentral-Projektion.

Nach den verschiedenen Anwendungen unterscheidet man:

1. die Glastafel- und die freie Perspektive, für architektonische Gegenstände und für Bilder, welche grosse Ausdehnung haben;
2. die Vogel-Perspektive, bei welcher der Projektions-Punkt über dem darzustellenden Gegenstände angenommen ist;
3. Die Decken-Perspektive, wenn der Projektions-Punkt tiefer als die Decke liegt und die Bildtafel eine Ebene ist. Ist die Bildfläche eine Kugel, so entstehen die Kuppel-Gemälde;
4. die Panoramen-Perspektive, zu deren Konstruktion anstatt einer ebenen eine zylindrische Bildfläche benutzt wird;
5. die Theater-Perspektive, zur Hintergrunds- und Kulissen-Bemalung.

a. Die Durchschnits- oder Glastafel-Methoden.

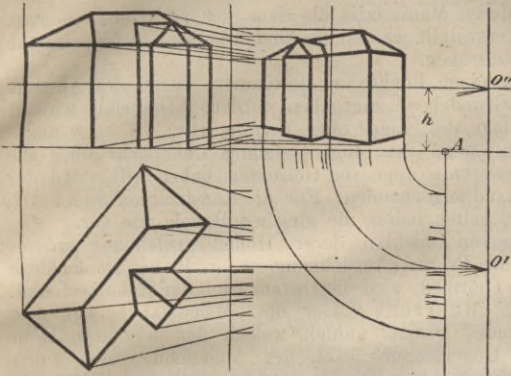
Die Konstruktion perspekt. Bilder für architekton. Zwecke kann nach zwei Arten erfolgen: 1. nach der sog. Durchschnits- oder Glastafel-Methode; 2. nach den Gesetzen der freien Perspektive. Beide Arten führen zu demselben Resultat; welche von ihnen im gegebenen Falle am zweckmässigsten anzuwenden ist, hängt von dem Ermessen des Zeichners und von dem Grad der Fähigkeit ab, den derselbe im perspektiv. Zeichnen erworben hat. In den meisten Fällen wird die vereinigte Anwendung beider Arten am schnellsten zum Ziele führen.

Bei der Durchschnits-Methode muss man Grundriss und Ansicht des darzustellenden Gebäudes aufzeichnen, die Lage der Bildtafel und des Gesichtspunktes in beiden Projektionen fest stellen und von letzterem Strahlen an die Projektionen der sichtbaren Ecken ziehen, welche die Bildtafel in Punkten schneiden. Diese Punkte sind die Zentral-Projektionen der Ecken, welche durch Verschieben und Umklappen der Bildtafel an eine passende Stelle des Zeichenblattes übertragen werden. Durch Verbinden der erhaltenen Zentral-Projektionen der Ecken wird das perspektiv. Bild vollendet; Fig. 26 zeigt die schematische Darstellung eines Gebäudes.

Man ersieht, dass dieses Verfahren mit Vortheil nur für kleine Objekte anzuwenden ist, da vorab es nöthig ist, die Ansicht in der angegebenen Lage des Grundrisses zu zeichnen und alsdann an alle sichtbaren Punkte, sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Projektion, Strahlen zu ziehen sind.

Ist ein Gebäude mit ungleichen Maassen der Oeffnungen in den einzelnen Geschossen zu zeichnen, so muss der Grundriss verändert werden, um die Punkte genau bestimmen zu können. Dies umständliche Verfahren wird in der praktischen Ausführung durch das folgende einfachere, ersetzt:

Fig. 26.



Ein Bogen dient zur Aufnahme einer Kopie eines Geschoss-Grundrisses, von welchem jedoch nur die Einzelheiten (Fenster, Gesims-Vorsprünge etc.) derjenigen Seiten zu zeichnen sind, welche man in der perspektiv. Zeichnung darstellen will. Dieser Grundriss kann nach Bedarf durch Pausen der Grundrisse anderer Stockwerke, sowie der horizontalen Projektion des Daches mit Firsten, Kehlen, Dachfenstern, Schornsteinen etc. ersetzt werden, falls man die Eintragung dieser verschiedenen Theile in den ersten Grundriss nicht vornehmen will.

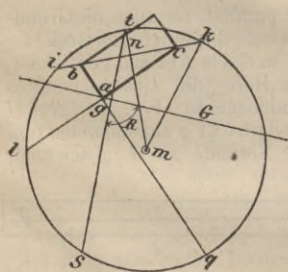
Unterhalb des Grundrisses nimmt man den Standpunkt s (die horizontale Projektion des Gesichtspunktes o) in einer solchen Entfernung an, dass die nach den äussersten Ecken des Gebäudes, bezw. nach den Grenzen der an beiden Seiten angenommenen Umgebung gerichteten Strahlen einen Winkel von ungefähr 37° einschliessen oder, dem entsprechend, in einer Entfernung, welche gleich dem $1-1\frac{1}{2}$ fachen der Diagonalen des Grundrisses ist. Bei dieser Annahme erhält man ein günstiges perspektiv. Bild, das frei von Verzerrungen ist.

b. Bestimmung des günstigsten Standpunktes.

In Fig. 27 verbinde man die äussersten Punkte b, c des Grundrisses, nehme auf der Geraden 2 Punkte i und k als Grenzen der Umgebung an und errichte in dem Halbierungs-Punkt n die Normale nm von der Länge $= \frac{2}{3} ik$. Auf der um m als Mittelp. mit mi als Radius gezeichneten Kreislinie wird der Standpunkt s angenommen und zwar auf dem Bogen lq , der durch Verlängerung der Frontlinien ba und ca bestimmt ist.

Geht man über diesen Bogen hinaus, so fällt die Ansicht einer Seitenfläche fort. Bei der Wahl des Standpunktes muss man darauf achten, die günstigste Ansicht des Gebäudes zu erhalten, so dass kein Zusammenfallen von Gebäudekanten oder Verdecken wichtiger Theile durch vorspringende Risalite stattfindet.

Fig. 27.



Nummehr zieht man nach der Mitte des Gegenstandes, d. h. nach der Mitte t des Bogens itk , die Gerade st , zu der die Grundlinie G , die Schnittgerade der Bildebene mit der Grundebene, normal gezeichnet wird. Der Schnittpunkt g beider Geraden wird Grundpunkt, die Länge sg Distanz genannt.

Am zweckmässigsten wird die Grundlinie G durch die Projektion a der zunächst liegenden lothrechten Kante gelegt, weil man dabei die Erleichterung erzielt, dass die in dieser Kante liegenden Höhen unverkürzt, also nach der gewählten Maassstabs-Grösse in die perspektiv. Zeichnung übertragen werden können.

Nach dieser Vorbereitung kann man von s aus nach allen sichtbaren Punkten des Grundrisses mit einem Lineal oder einer Schnur Strahlen ziehen, welche in den Durchschnittspunkten mit der Grundlinie G die Zentral-Projektionen der betr. Punkte ergeben. Um die Abstände dieser Punkte von dem Grundpunkt g auf das zum Zeichnen der Perspektive bestimmte Blatt am einfachsten übertragen zu können, befestigt man mit Heftzwecken einen Streifen Papier so, dass dessen obere Kante mit

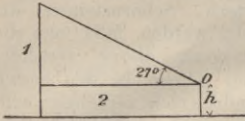
der Grundlinie zusammen fällt. Dieser Streifen, auf welchem beim Ziehen der Strahlen die Punkte direkt erhalten werden, kann erforderlichen Falls für die verschiedenen Grundrisse erneuert werden.

Die vorhin angegebene Konstruktion kann auch auf dem zur Herstellung der Perspektive dienenden Bogen gemacht werden, was jedoch im Interesse der Sauberkeit der Arbeit nicht zu empfehlen ist.

Soll das Bild in einem anderen Maassstabe als dem der zu Grunde liegenden geometrischen Zeichnung hergestellt werden so sind alle Maasse proportional vergrößert oder verkleinert aufzutragen.

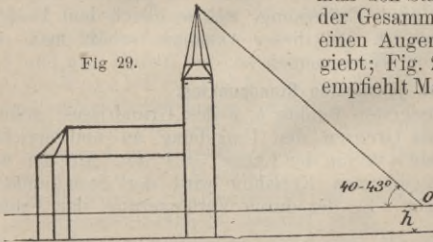
Um die Höhenlage der einzelnen Punkte zu bestimmen, muss der Abstand des Gesichtspunktes über der Grundebene angegeben werden. Derselbe wird in vielen Fällen gleich der Höhenlage des Auges über Terrain, etwa 1,7–2 m angenommen. In bestimmten Fällen, wenn man eine Gesamt-Uebersicht über die Grundriss-Disposition einer grösseren Gruppe von Gebäuden haben will, wird der Gesichtspunkt über dem Gegenstand angenommen. Für die Konstruktion dieser Art, Vogel-Perspektive genannt, gelten indess die gleichen Regeln wie vor.

Zur perspektiv. Darstellung von Objekten, deren Höhen-Ausdehnung grösser als die Breiten-Ausdehnung ist, z. B. bei Denkmälern und Thürmen, wird die Distanz nach der Höhe bestimmt. Nach Maertens („Der opt. Maassstab“) soll man diejenige Distanz wählen, welche der doppelten Höhe des Gegenstandes excl. der Augenhöhe, also einem Augenaufschlags-Winkel von ca. 27° entspricht. Bei dieser Distanz lässt sich der Gegenstand sehr gut über-



sehen und erfüllt unser ganzes Blickfeld; Fig. 28.

Bei hohen Thurmanlagen, wenn sie Theile von Gebäude-Gruppen bilden, kann man den Standpunkt so bestimmen, dass der aus der Gesamt-Baugruppe aufragende Thurm noch einen Augenaufschlags-Winkel von 40–43° ergibt; Fig. 29. Die Beibehaltung dieses Winkels empfiehlt Maertens a. a. O. auch für hohe, zentral



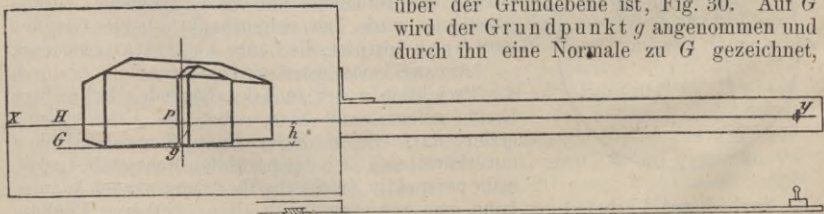
ausgebildete Innenräume, z. B. für Kirchen, welche mit hoch liegenden Kuppeln bedeckt sind, wobei der Standpunkt so zu wählen ist, dass er eine gute Orientirung über das ganze architektonische System des Innenraumes erlaubt. Hierbei er-

geben sich indess oft ideelle Standpunkte, welche in Wirklichkeit vom Zeichner nicht eingenommen werden können.

c. Ausführung des Bildes.

Zur Ausführung der perspektiv. Zeichnung werden 2 parallele Geraden, die Grundlinie G und die Horizont-Linie H , (letztere die Schnitt-Gerade der durch den Gesichtspunkt gelegten wagerechten Ebene mit der Bildebene), in einem Abstand gezeichnet, der gleich der Höhe des Gesichtspunktes über der Grundebene ist, Fig. 30. Auf G wird der Grundpunkt g angenommen und durch ihn eine Normale zu G gezeichnet,

Fig. 30.



welche die Horizontlinie H in p , dem Zentral-Augen- oder Hauptpunkt schneidet; p ist die rechtwinkl. Projektion des Gesichtspunktes auf d. Bildebene.

Anstatt nun, wie an Fig. 26 gezeigt wurde, die Höhen der einzelnen Punkte über oder unter dem Horizont aus der vollständig aufgezeichneten Vertikal-Projektion

herzuleiten, kann dies in einfacher Weise dadurch geschehen, dass man durch jeden Punkt, z. B. durch b und den Gesichtspunkt O eine lothrechte Ebene legt und dieselbe um die mit der Horizontal-Ebene sich ergebende Schnitt-Gerade herunter klappt. Ist b , Fig. 31, die horizontale Projektion einer lothrechten Kante fc , welche nach der Drehung der Ebene normal zu sb sich darstellt, und zieht man die Strahlen sf und sc nach den Endpunkten der Kante, ferner durch das perspektiv. Bild b des Punktes b eine Normale zu sb , so ergeben die Stücke fb und bi die Höhen der Endpunkte über, bezw. unter dem Horizont, welche in die perspektiv. Zeichnung übertragen werden können.

Die Zeichnung der Normalen ist umständlich. Bequemer verfährt man so, dass man an deren Stelle durch b eine Parallele zu G zieht, auf welcher die über oder unter dem Horizont liegenden Höhen abgetragen werden. Durch Strahlen von s nach den Endpunkten gehend bestimmt man im Schnitt mit der Grundlinie G die perspektiv. Bilder der Höhen; siehe Fig. 31 bei Kante n .

Auch dieses Verfahren eignet sich für die praktische Anwendung noch nicht gut, sondern muss durch vorherige Bestimmung einzelner Punkte, der sogen. Verschwinde-Punkte, in welchen die perspektiv. Bilder paralleler Geraden zusammen treffen, vereinfacht werden.

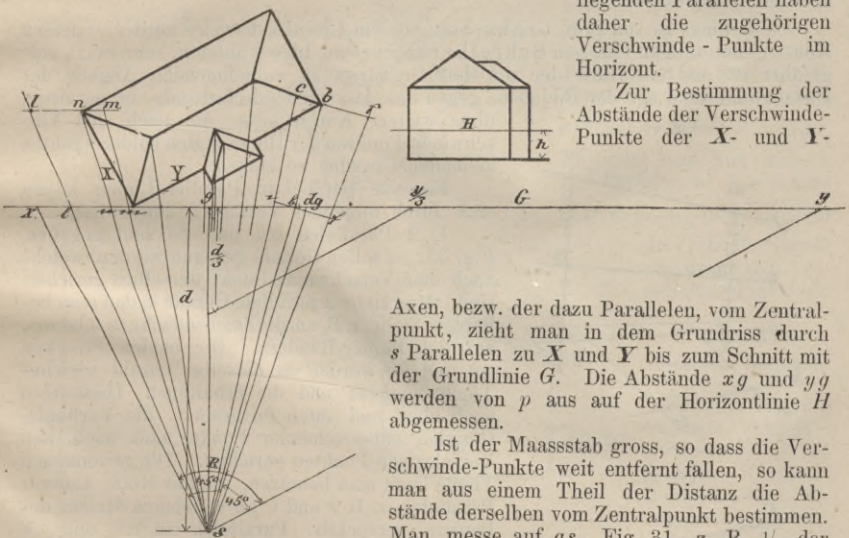
d. Benutzung der Verschwinde-Punkte.

Der Verschwinde-Punkt paralleler Geraden ist das perspektiv. Bild des unendlich entfernt liegenden Schnittpunktes derselben; er liegt in dem Durchschnitts-Punkt des durch den Gesichtspunkt parallel zu den Geraden gelegten Strahls mit der

Bildebene. Alle horizontal liegenden Parallelen haben daher die zugehörigen Verschwinde-Punkte im Horizont.

Zur Bestimmung der Abstände der Verschwinde-Punkte der X - und Y -

Fig. 31.



Axen, bezw. der dazu Parallelen, vom Zentralpunkt, zieht man in dem Grundriss durch s Parallelen zu X und Y bis zum Schnitt mit der Grundlinie G . Die Abstände xg und yg werden von p aus auf der Horizontlinie H abgemessen.

Ist der Maassstab gross, so dass die Verschwinde-Punkte weit entfernt fallen, so kann man aus einem Theil der Distanz die Abstände derselben vom Zentralpunkt bestimmen.

Man messe auf gs , Fig. 31, z. B. $\frac{1}{3}$ der

Distanz ab und ziehe durch den Endpunkt eine Parallele zur Y -Axe bis zum Schnitt mit der Grundlinie. $g \cdot \frac{y}{3}$ ist dann $= \frac{1}{3}$ des Abstandes des Verschwinde-Punktes y von p . Man kann nun die Höhen der einzelnen Architektur-Theile auf der in a errichteten Lothrechten abmessen und durch Benutzung der Verschwinde-Punkte x und y übertragen.

e. Ersetzen der Verschwinde-Punkte.

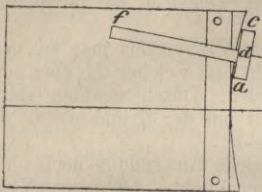
Fällt ein Verschwinde-Punkt ausserhalb des Brettes, so kann man ihn entweder ersetzen, oder auch eine Verlängerungs-Stange am Zeichenbrett anbringen.

Letztere wird entweder in gleicher Ebene durch an der Unterseite liegende Schrauben oder durch ein seitliches Scharnier befestigt. Muss die Anbringung an der linken Seite des Brettes erfolgen, so geschieht dieselbe in der Weise, dass die

Reisschiene ungehindert an dem Brett entlang geführt werden kann. Durch ein Klötzchen wird die Ebene des Zeichenbrettes hergestellt; die Verschwinde-Punkte werden durch Nadeln oder Stifte markirt; s. Fig. 30.

Für Architektur-Perspektiven empfiehlt es sich der Einfachheit wegen mit Benutzung der Verschwinde-Punkte zu arbeiten, da die Benutzung bezüglicher Instrumente u. s. w. zeitraubend ist.

Fig. 32.



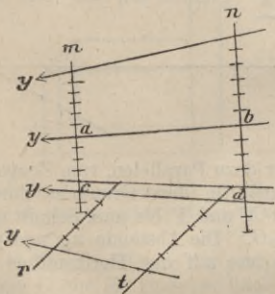
Verhältnissmässig einfach ist das von Prof. Streckfuss angegebene Verfahren, wobei die im Verschwinde-Punkt y zusammenlaufenden Strahlen als Radien eines Kreises angesehen werden; Fig. 32. Man zeichnet um y als Mittelpunkt eine Kreislinie, welche die Seite des Brettes berührt, auf

feste Pappe oder auf ein dünnes Brett und schneidet es nach der Kreislinie aus. An ihm wird die Schiene entlang geführt, an der $cd = ad$ ist, so dass ca in jeder Lage Sehne wird und die Verlängerung von fd als Radius des Kreises durch y geht.

Ein zweites von Prof. Streckfuss angegebenes Instrument, die dreitheilige Schiene, kann zur Benutzung nicht empfohlen werden, weil das Einstellen sehr langsam zu bewerkstelligen ist, 2 Schienen für „rechts“ und „links“ nothwendig sind und ausser dem Horizont noch eine zweite Linie gegeben sein muss, welche nach dem Verschwinde-Punkt geht.

Neuerdings ist von Prof. Cranz-Stuttgart ein Lineal konstruirt worden, ¹⁾ dessen Konstruktion sich an eine von Schreiber angegebene Idee ²⁾ anlehnt, sehr exakt ausgeführt ist und mit Hilfe der aus dem Grundriss zu entnehmenden Angabe der Distanz und der Lage der Bildebene gegen das darzustellende Gebäude, es gestattet, ohne weitere Konstruktion die nach den Verschwinde-Punkten der Horizontalen beider Fronten zielenden Geraden zu ziehen.

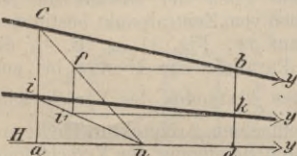
Fig. 33.



Einzelne perspektiv. Parallel-Linien lassen sich durch folgendes Verfahren konstruiren:

1) 2 Parallelen ab und cd sind gegeben, Fig. 33; es sollen Gerade gezogen werden, welche nach dem Verschwinde-Punkt derselben gerichtet sind. Man ziehe 2 parallele Gerade m und n an beliebiger Stelle, z. B. um die Zeichenfläche zu schonen, auf den Papier-Rändern. Die beiden Strecken ac und bd werden in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt und die erhaltenen Theilungen nach oben und unten fortgesetzt; die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte sind nach den Verschwinde-Punkten gerichtet. Die gewonnenen Theile kann man benutzen, um mit Hilfe anderer Parallelen, z. B. r und t , an beliebigen Stellen des Papiers perspektiv. Parallelen zu ab und cd zu ziehen.

Fig. 34.



Eine verhältnissmässige Theilung der Geraden ac und bd kann durch folgende Konstruktion erhalten werden, wenn ad auf dem Horizont liegt; Fig. 34. Ziehe durch b eine Parallele zu H bis zu einem Punkt j , durch den die Gerade cf gezogen werden kann, welche H in einem innerhalb der Zeichenfläche liegenden Punkt n schneidet. Soll nun die auf ca durch den Punkt i gegebene Theilung auf bd übertragen werden, so ziehe man durch j eine Lothrechte;

¹⁾ Beschreibung in der Zeitschr. für Instrumenten-Kunde, 1883.

²⁾ Bereits im Jahre 1798 ist von Thibault die Konstruktion eines solchen Perspektiv-Lineals erfunden und beschrieben worden.

den Schnittpunkt i derselben mit der Verbinde-Geraden in überträgt man durch eine Horizontale auf bd ; ik ist nach demselben Verschwinde-Punkt wie cb und ad gerichtet.

Fig. 35.

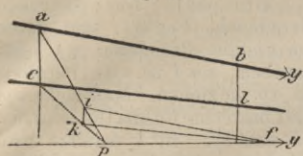


Fig. 36.

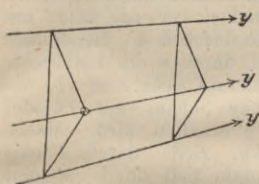


Fig. 37.

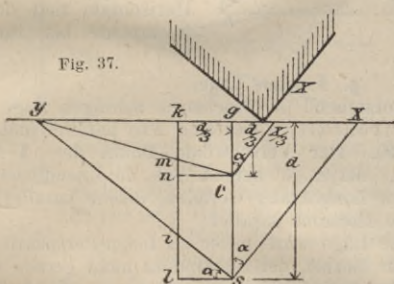
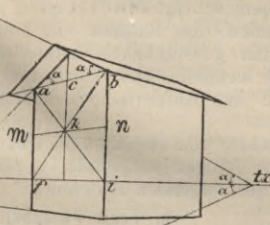
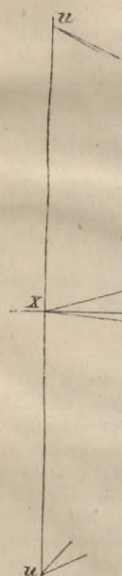


Fig. 38.



2) Ein anderes Verfahren beruht in der Anwendung des Satzes: Werden zwei Dreiecke so gezeichnet, dass die Seiten des einen diejenigen des anderen parallel sind, so schneiden sich die drei Geraden, welche je 2 der entsprechenden Ecken verbinden, in einem Punkte; Fig. 36.

In einigen der mitgetheilten Lösungen musste ausser dem Horizont noch eine zweite Gerade gegeben sein, welche nach dem Verschwinde-Punkt gerichtet ist. Eine solche lässt sich aus einem $\frac{1}{3}$ Stück der Distanz, z. B. $\frac{1}{3}d$ konstruieren, Fig. 37.

gc ist gleich $\frac{1}{3}d$; durch c und s ziehe man Parallelen zur X -Axe. gk wird $=gc$ gemacht und durch k eine Parallele zu gs gezogen. In den kongruenten Dreiecken sl und gc $\frac{x}{3}$ ist $li = \frac{1}{3}gx$. Bestimmt man nun auf kn den Punkt m so dass $mn = \frac{1}{3}li$, d. h. $= \frac{1}{9}gx$ ist, so geht die Verbinde-Gerade cm durch den Verschwinde-Punkt y .

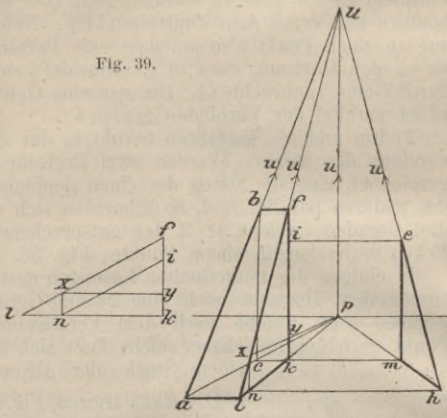
f. Darstellung geneigter Geraden.

Kommen an einem Gebäude geneigte Geraden, z. B. an Giebeln, Treppen-Rampen u. s. w. vor, so kann man die Verschwinde - Punkte zusammen gehöriger

Parallelen fest stellen. Ein solcher liegt, je nach der Lage der Geneigten, lothrecht über oder unter demjenigen der zugehörigen horizontalen Projektion, in dem Schmitte einer durch den Gesichtspunkt O parallel zu der Geneigten gezogenen Geraden mit der Bildebene. Sind die Neigungs - Winkel zweier Seiten eines Giebel-Dreiecks gegen die Horizontal-Ebene gleich, so liegen die Verschwinde-Punkte in gleichen Entfernungen vom Horizont; Fig. 38. In dieser Figur ist ferner angegeben, wie man durch Bilden von Rechtecken (allgemein von Parallelogrammen) Gerade halbiren kann. ab , af und bi sind in den Punkten c , m und n halbirt.

Sollen zu geneigten Geraden Parallelen gezogen werden, ohne die Verschwinde-Punkte zu gebrauchen, so übertrage man die geometrische Konstruktion, in die Perspektive.

Fig. 39.



eh ist die gesuchte Parallele.

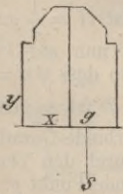
Beispiel: Die steigende Gerade *ab*, Fig. 39, und deren horizontale Projektion *ap* sind gegeben; aus *l* ist eine Parallele zu *ab* zu ziehen. Man ziehe *lp*, die Lothrechte *bc*, die Horizontalen *ck* und *bf*. In *k* errichte man die Lothrechte bis zum Schnitt mit *bf*. *f* ist die gesuchte Parallele.

Um durch *h* eine Parallele zu *lf* zu ziehen, verbinde man *h* mit *p*, ziehe durch *h* die Horizontale *hn* und durch *n* die Lothrechte *nx*. Hierauf ziehe man *xp*, wodurch im Schnitt mit *jk* der Punkt *y* erhalten wird. Mache *fi = ky*, ziehe durch *i* eine Horizontale und durch *m* eine Lothrechte bis zum Schnitt *e*;

g. Frontale Lage.

Im Gegensatz zu der vorstehend besprochenen schrägen Lage der Objekte gegen die Bildtafel steht die frontale, wobei eine Axe parallel und eine normal zu der Bildtafel ist; Fig. 40. Der Verschwinde-Punkt der *Y*-Axe liegt im Zentralpunkt *p*, derjenige der *X*-Axe im Unendlichen; d. h. die perspektiv. Bilder horizontaler Geraden, welche parallel zur Bildtafel liegen, sind dem Horizont parallel.

Fig. 40.



Die frontale Lage wird meist zu Innen-Perspektiven verwandt; es empfiehlt sich hierbei, den Standpunkt nicht gerade der Mitte der Hinterwand gegenüber zu nehmen, weil nur so die Ausbildung einer Seitenwand anschaulicher darstellbar ist.

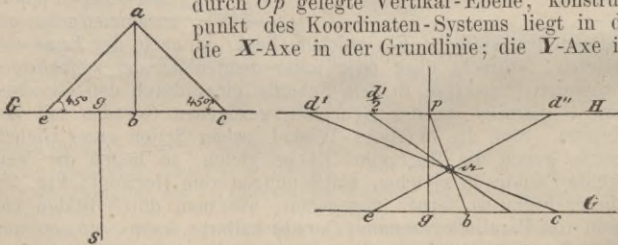
Um sich eine Vorstellung von dem Eindruck eines Innenraumes zu machen, schlägt Maertens a. a. O. vor, von den allgemeinsten Umrisslinien des Raumes ein stereoskopisches Bilderpaar, in der Grösse passend für ein gewöhnliches Stereoskop, in scharfer Ausführung nach perspektiv. Regeln zu fertigen. Der Abstand der Augenpunkte unter einander ist 0,3 m zu nehmen, um das Körperliche des Raumes in grösster Treue zu voller Anschauung zu bringen.

Die perspektiv. Bilder von Objekten in frontaler Lage können nach den vorher gegangenen Besprechungen hergestellt werden; einfacher ist jedoch die Anwendung der Regeln des folgenden Abschnitts.

h. Freie Perspektive.

Bei Gebilden, welche in der Grundebene liegen, wird jeder Punkt durch seine Koordinaten, bezogen auf 3 Ebenen: die Grund-, Bild- und die durch *Op* gelegte Vertikal-Ebene, konstruiert. Der Anfangspunkt des Koordinaten-Systems liegt in dem Grundpunkt *g*, die *X*-Axe in der Grundlinie; die *Y*-Axe ist nach *p* gerichtet und die *Z*-Axe fällt mit der Vertikalen *gp* zusammen. Bestimmung eines Punktes, der in der Grundebene und in gegebenen Ab-

Fig. 41.



ständen von der Vertikal- und der Bildebene liegt; Fig. 40. Durch den Punkt *a*

lege man eine Gerade unter 45° zur Grundlinie, entweder nach rechts oder links und konstruiere die Zentral-Projektion; ab hat den Verschwinde-Punkt in p .

Den Verschwinde-Punkt der unter 45° zur Bildebene geneigten Geraden erhält man, wenn man durch O Parallelen zu denselben bis zum Schnitt mit der Bildebene zieht. Die Schnittpunkte d' oder d'' liegen in einem Abstand von p , welcher gleich der Distanz ist; daher heissen diese Punkte Distanz-Punkte.

Die Zentral-Projektionen der in der Bildebene liegenden Punkte fallen mit den Punkten selbst zusammen; daher kann man die Punkte b , c und e durch ihre Abstände von g bestimmen und den Punkt a durch bp und cd' oder ed'' fest legen.

Liegt der Punkt a zu weit hinter der Bildebene, so dass die Punkte c und e ausserhalb des Papiers fallen, so arbeitet man mit einem Theile des Abstandes, z. B. mit der Hälfte. Man misst die halbe Distanz von p aus nach links und die Hälfte des Abstandes ab von b aus nach rechts ab, verbindet die erhaltenen Punkte durch eine Gerade, wodurch im Schnitt mit bp der gleiche Punkt a bestimmt wird.

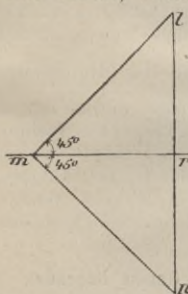


Fig. 42.



Anwendung. Mit Hülfe der Theil-Distanz soll von einem gegebenen Punkt m aus eine horizontale Gerade gezogen werden, welche einen Winkel von 45° zur Grundlinie oder zu einer mit derselben parallelen Geraden bildet, Fig. 42; nach Bestimmung der Geraden ist an derselben im Punkt m ein rechter Winkel

anzutragen. Die Konstruktion ist aus der Figur zu ersehen.

Die Distanz-Punkte können als Theilpunkte für die rechtwinklig zur Bildebene liegenden Geraden bezeichnet werden, da mit ihrer Hülfe Eintheilungen auf denselben ausführbar sind.

Nach den vorstehenden Erklärungen können die in frontaler Lage vorkommenden Grundrisse perspektiv gezeichnet werden. Leicht lassen sich horizontale und vertikale Quadrate unter Benutzung der rechts oder links, oben oder unten liegenden Distanz-Punkte konstruiren. In Fig. 43 sind 2 Quadrate gezeichnet.

Ist eine Gerade ab , Fig. 44, in der Grunde Ebene gegeben, so kann deren Bild durch Benutzung des Verschwinde-Punktes bestimmt werden. Anstatt diesen Punkt auf die früher angegebene Weise fest zu stellen, kann dies in der Zeichnung direkt geschehen, wenn man die Horizont-Ebene mit der durch den Gesichtspunkt gezogenen Parallelen um die Horizont-Linie bis zur Deckung mit der Bildebene dreht. In dem herab geschlagenen Gesichtspunkt (O) legt man

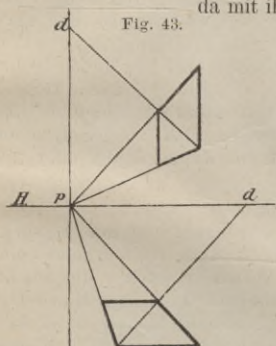


Fig. 43.

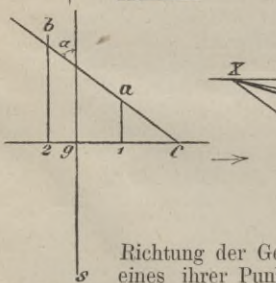
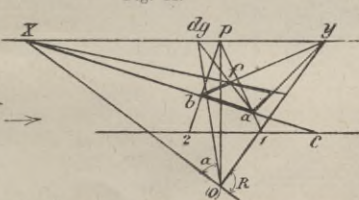


Fig. 44.



den Winkel an, welchen die Gerade mit der Hauptaxe Op bildet und verlängert den Schenkel bis zum Schnitt mit H . (Dieser Winkel ist der Komplement-Winkel desjenigen, den die Gerade mit der Bildebene bildet.) Die

Richtung der Geraden ist bestimmt, wenn man die Zentral-Projektion eines ihrer Punkte hat, z. B. des Durchgangs c der Geraden durch die Bildebene.

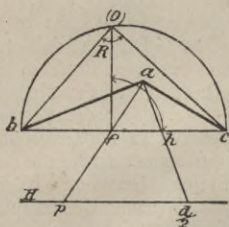
Bestimmte Punkte, z. B. a und b der Geraden werden konstruirt, indem man durch dieselben Normalen zu der Bildebene zieht, welche in p den Verschwinde-Punkt haben.

In irgend einem Punkte der Geraden, z. B. in a kann man einen rechten Winkel antragen, wenn man in (O) an $x(O)$ einen solchen anlegt, hierdurch den Verschwinde-Punkt y des 2. Schenkels bestimmt und y mit a verbindet.

Um über ab ein Quadrat zu zeichnen, hat man zu bedenken, dass die Diagonalen eines Quadrats die rechten Winkel halbiren. Man halbire den Winkel $y(O)x$ durch die Gerade $(O)dg$, welche im Schnitt mit H den Verschwinde-Punkt dg der Diagonalen, den Diagonal-Punkt ergibt. In der perspektiv. Zeichnung ziehe man yb und adg , erhält so den Endpunkt f des Quadrats und ziehe xj , welche im Schnitte mit ay die 4. Ecke des Quadrats bestimmt; Fig. 44.

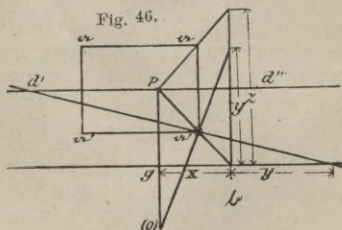
Aufgabe. An die perspektiv. gezeichnete Gerade ab , Fig. 45, in a einen perspektiv. rechten Winkel zu legen, wenn Horizont, Zentralpunkt u. Distanz gegeben sind. Durch einen beliebigen Punkt der Geraden, z. B. durch b , ziehe man eine Parallele zu H , ferner ap , welche dieselbe in f schneidet; in f wird eine Normale zu bf errichtet, welche geometr. gleich af gemacht werden muss. Dies kann mittels Benutzung eines Distanz-Punkts oder eines Theils der Distanz, z. B. der halben Distanz, geschehen. Messe diese von p aus auf

Fig. 45.



Handelt, eine spitz- oder stumpfwinklige Figur zu konstruiren.

Fig. 46.



Personen zu Staffagen u. s. w.

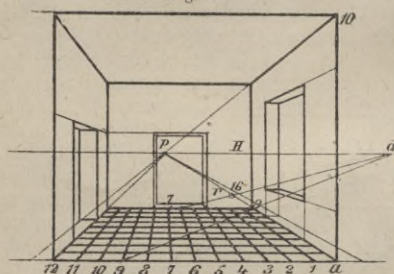
i. Perspektive eines im Raume liegenden Punktes.

Ist ein Punkt im Raum durch seine 3 Koordinaten x, y, z gegeben, so muss man aus x und y die horizontale Projektion des Punktes bestimmen und alsdann noch die Höhen-Ordin. z abtragen; Fig. 46. Das gefundene Höhenmaass $a' a$ kann man durch Parallelen zu H an jede Stelle übertragen, z. B. zu gleich hohen Kanten an frontalen Zeichnungen oder für

k. Perspektivische Maassstäbe.

Die vorangeführte Konstruktion führt unmittelbar zur Erklärung der perspektivischen Maassstäbe; es wird angenommen, dass die 3 Axen nach irgend einer Maasseinheit eingetheilt sind. Die Theilung auf X heisst Breiten-, die auf Z , Höhen- und die auf Y , Tiefen-Maassstab.

Fig. 47.



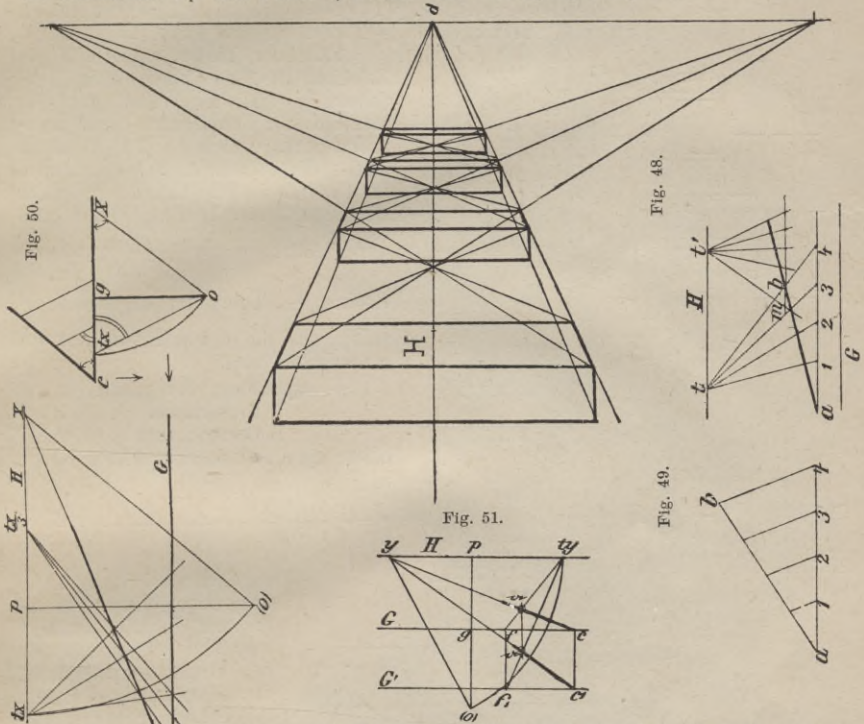
Auf X und Z sind die Maasse unter sich gleich, auf Y abnehmend. Letztere Maasse werden durch Theil-Gerade erhalten, die von den Theilpunkten des Breiten- oder Höhen-Maassstabes nach dem Distanz-Punkt, bzw. nach dem herab geschlagenen Gesichtspunkt (O) gezogen werden. Aus Fig. 46 ist ersichtlich, dass man y auch auf der in b errichteten Lothrechten abmessen und den Endpunkt mit (O) verbinden konnte, um denselben Punkt a' zu erhalten.

Anwendung: Darstellung eines Zimmers in frontaler Lage. Dasselbe soll 12 Maasseinheiten breit, 10 M. Einh. hoch und 9 M. Einh. tief sein. Die Ausführung ist aus Fig. 47 zu ersehen; ebenso wie Thüren, Fenster etc. einzuzeichnen sind.

Sind in einem solchen Raume Möbel zu vertheilen, so kann dies in einfachster

Weise geschehen, indem man den Fussboden in perspektivische Quadrate eintheilt, in welchen alsdann die Grundrisse der Möbel angegeben werden können.

Ist ein Punkt zu bestimmen, der so weit hinter der Bildebene liegt, dass man die Abtragung des Abstandes auf dem Breiten-Maassstab nicht ausführen kann, so ist das Verfahren auf einer andern mit der Bildfläche parallelen horizontalen Geraden fortzusetzen. Wenn z. B. in Fig. 47 ein Punkt zu bestimmen ist, der um 16 Maass-Einheiten hinter der Bildfläche liegt, so ziehe man durch den Punkt 7 (in der hintern Kante des Zimmers liegend) eine Gerade nach d ; man erhält im Schnitt mit ap den Punkt r , welcher der Bedingung entspricht.



Säulen und Pfeiler mit gleichen Zwischenweiten können durch die Konstruktion Fig. 48 leicht bestimmt werden. Als gegeben sind angenommen 1 Pfeiler und 1 Zwischenweite. Die Konstruktion ist ohne weitere Erklärung verständlich.

I. Benutzung der Theilpunkte.

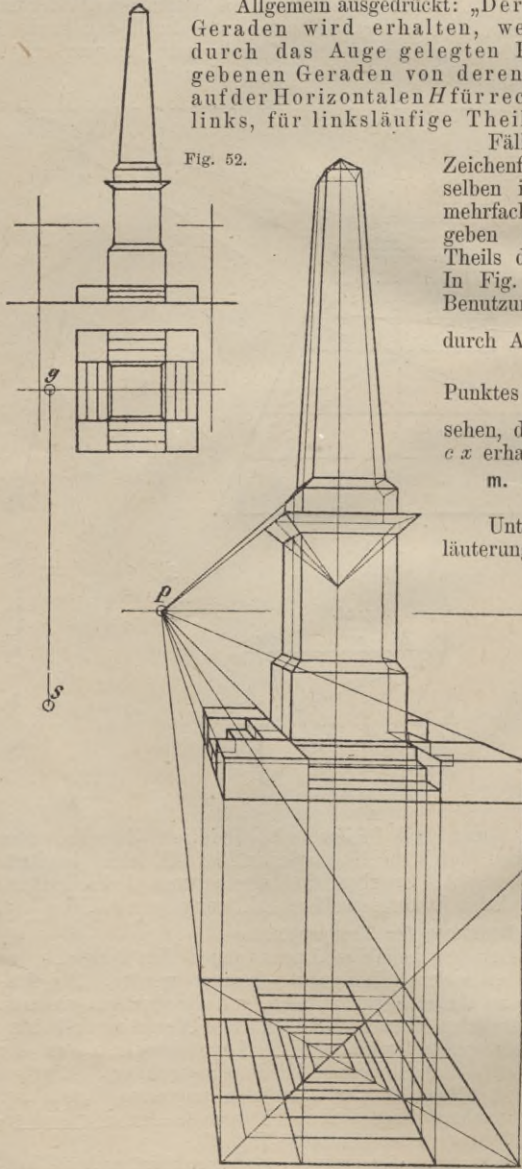
Haben die horizontalen Geraden beliebige Lagen gegen die Bildebene, so müssen zum Eintheilen derselben andere Theilpunkte benutzt werden. Die Aufgabe: ab in n gleiche Theile zu theilen, gründet sich auf die bezügl. geometr. Konstruktion Fig. 49. Die parallelen Theillinien haben einen Verschwinde-Punkt t im Horizont, welcher Theilpunkt genannt wird, weil die Lage desselben von der Grösse der auf der Horizontalen ac abgetragenen Theilstrecke abhängt. Ergeben sich hierbei durch spitzwinkliges Schneiden der Theillinien ungenaue Lagen der Punkte so kann man durch Annahme eines andern Theilpunkts t' die auf ab erhaltenen Theile in der Verlängerung weiter abtragen; Fig. 49.

In vielen Fällen ist es zweckmässig, für eine Gerade einen bestimmten Theilpunkt, welcher aus dem Verschwinde-Punkt der Geraden hergeleitet werden kann, anstatt eines zufälligen zu benutzen. Eine Gerade ca , Fig. 50, ist perspektiv. gezeichnet; auf derselben sind Theile abzutragen, welche in der wirklichen Grösse

auf der Grundlinie G abgemessen werden können. Es entstehen mithin gleichschenklige Dreiecke, zu denen ein ähnliches zu konstruieren ist, in welchem $(O) x$ und $(O) t_x$ (t_x ist der Theilp. für Gerade, welche x zum Verschwindep. haben), vorkommen. Diese Geraden müssen gleich sein. Mithin wird t_x erhalten, wenn man von x aus die Strecke $x(O)$ auf dem Horizont abträgt.

Allgemein ausgedrückt: „Der Theilpunkt horizontaler Geraden wird erhalten, wenn man die Länge des durch das Auge gelegten Parallel-Strahls der gegebenen Geraden von deren Verschwindep.-Punkt aus auf der Horizontalen H für rechtsläufige Theilung nach links, für linksläufige Theilung nach rechts abträgt.

Fig. 52.



Fällt der Theilp. ausserhalb der Zeichenfläche, so kann man denselben in ähnlicher Weise, wie dies mehrfach für den Distanz-Punkt angegeben ist, durch Abtragen eines Theils des Abstandes $x(O)$ ersetzen. In Fig. 50 ist die Gerade cx unter Benutzung des Theilp. t_x und des durch Abtragen von $\frac{x(O)}{3}$ erhaltenen

Punktes $\frac{t_x}{3}$ eingetheilt; es ist zu ersehen, dass die gleiche Eintheilung auf cx erhalten wird.

m. Anwendung des perspektiv. Grundrisses.

Unter Beachtung vorstehender Erläuterungen wird es nicht schwer fallen,

ein Gebäude in Perspektive zu setzen. Zur Vereinfachung der Konstruktion empfiehlt es sich, vorab den Grundriss perspektiv. zu zeichnen und aus diesem durch Lothrechte den Aufriss zu projizieren. Da jedoch die Höhe zwischen Grund- und Horizontlinie in den meisten Fällen zu klein ist, um den Grundriss gut entwickeln zu können, so kann es geboten sein, denselben in einer beliebig tiefer gelegten horizontalen Ebene zu zeichnen. Das Bild eines jeden Punktes in einer solchen Ebene liegt lothrecht unter demjenigen in der Grundebene; Fig. 51 u. 52. Der Diagonal-Punkt ist als Verschwindep. der

Gehrungslinien der Gesimse und Verdachungen, der Horizontal-Projekt. der Kehlen und Grate mit Vortheil zu benutzen.

n. Perspektive geneigter Geraden.

Die Verschwinde-Punkte der an Giebel-Dreiecken etc. vorkommenden geneigten Geraden liegen, wie S. 381 angegeben wurde, lothrecht über oder unter demjenigen der zugehörigen Horizontal-Projektionen. Man trägt den Winkel, den die geneigten Gerade mit der Grundebene bildet, in dem Theilp. t_x der Horizontal-Projekt. ab und erhält im Schnitt mit der im Verschwindep. x errichteten Lothrechten den Verschwindep. u ; Fig. 38. Für senkrechte Ebenen, welche rechtwinklig zur Bildebene stehen, trägt man den Neigungswinkel in dem Distanzpt. ab, da dieser der Theilp. für horizontale Geraden ist, die rechtwinklig zur Bildebene gerichtet sind.

o. Perspektiven von Monumenten.

Für die Darstellung von Gegenständen mit kleiner Grundfläche, z. B. von Monumenten, ist es zu empfehlen, die Bildebene durch die Mitte zu legen, um die Schnittfläche in wirkl. Grösse aufzeichnen zu können; aus den Breiten wird der perspektiv. Grundriss in einer tiefer gelegten horizontalen Ebene gezeichnet und alsdann der Aufriss unter Zuhilfenahme der Höhen vollendet; Fig. 52.

Fig. 53.

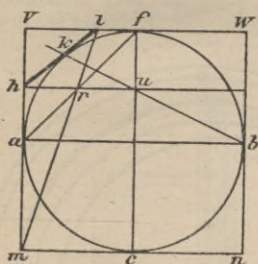


Fig. 54.

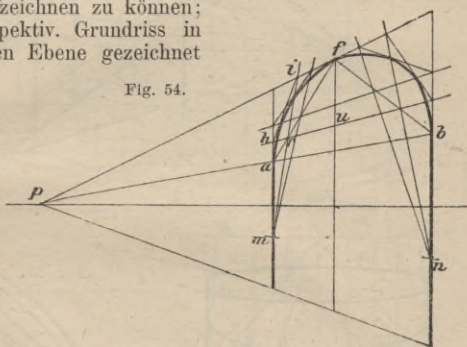
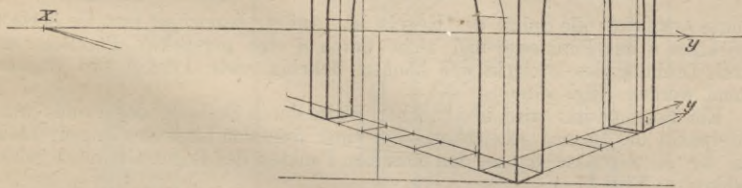


Fig. 55.



p. Perspektiven krummer Linien und krummer Flächen.

Der Kreis kann als Basis eines Kegels angesehen werden, dessen Spitze im Gesichtsp. liegt. Der Schnitt der Bildebene mit dem Kegel ist das perspektiv. Bild des Kreises; dies kann entweder ein Kreis, eine Ellipse (aber auch eine Parabel oder Hyperbel) sein. Ist die Ebene des Kreises parallel der Bildebene, so erhält man als Bild einen Kreis. Ist dieselbe geneigt zur Bildebene, so erhält man als Bild eine der 3 andern Kurven. In den meisten Fällen der Anwendung ist eine Ellipse zu konstruieren; es kann dies durch Bestimmung einzelner Punkte oder, zur Erzielung einer bessern Kurve, durch Anwendung der Konstruktion mit Tangenten geschehen.

Dieselbe gründet sich auf die Bestimmung von Punkten des Kreis-Umfangs, Fig. 53. Zeichne ein Quadrat $mnuv$ um den Kreis und ziehe die Durchmesser ab und cf parallel zu den Seiten des Quadrats. Um die Punkte des Quadranten af zu bestimmen, ziehe man die Sehne af und durch einen belieb. Punkt r derselben eine Parallele hu zu ab ; hierauf zeichne mr , welche im Schnitt mit vw einen

zweiten Punkt *i* der Tangente *hi* ergibt. Auf dieser wird der Berührungspunkt *k* als Schnittpunkt des Strahls *bu* erhalten.

Beispiel. Ein halbkreisförm. Thürbogen ist perspektiv. zu zeichnen; Fig. 54. Ist die Mauerstärke gegeben, so kann aus Grundriss und vorderem Bogen leicht der hintere, zum Theil verdeckt liegende Bogen bestimmt werden; Fig. 55.

Soll ein konzent. Bogen zu dem Halbkreis *abc* gezeichnet werden, so kann dies am einfachsten geschehen, indem man denselben als Grundfläche eines Kegels betrachtet. Die Stärke *cf* des Bogens ist gegeben; durch *c* zieht man eine Horizontale *ch* und verbindet *f* mit *h*; diese schneidet die horizontale Kegelaxe *ms* in dem

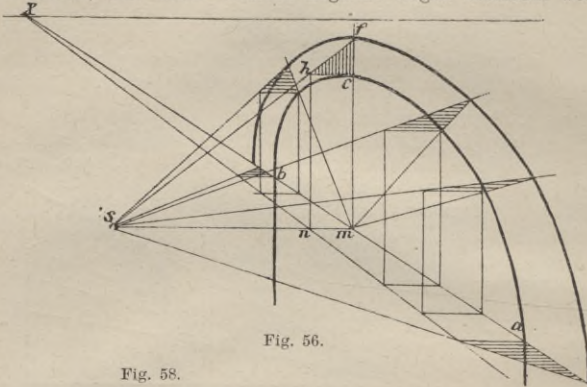


Fig. 56.

Fig. 58.

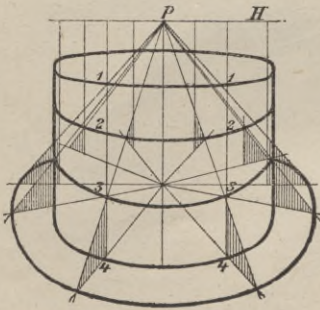
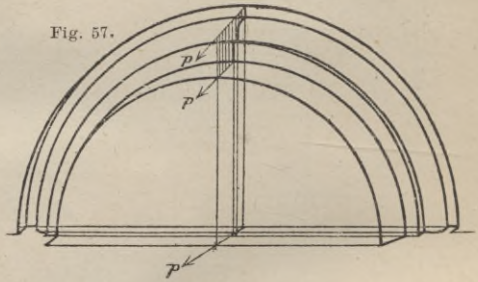


Fig. 57.



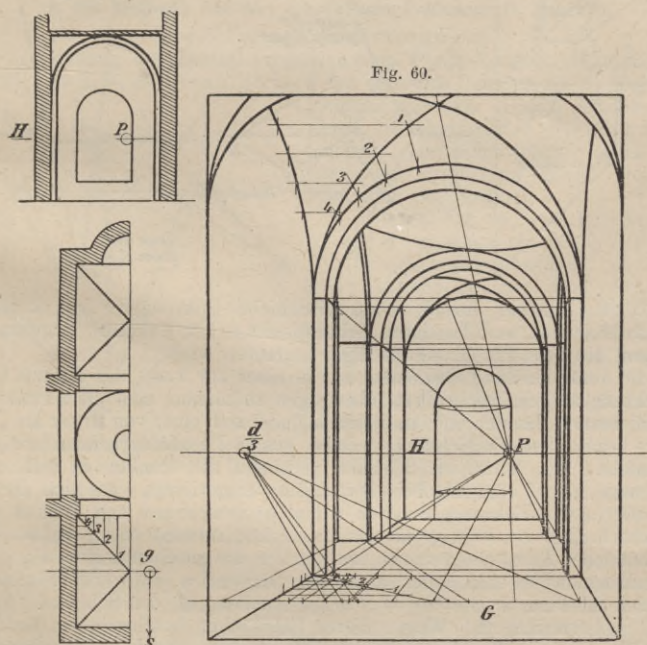
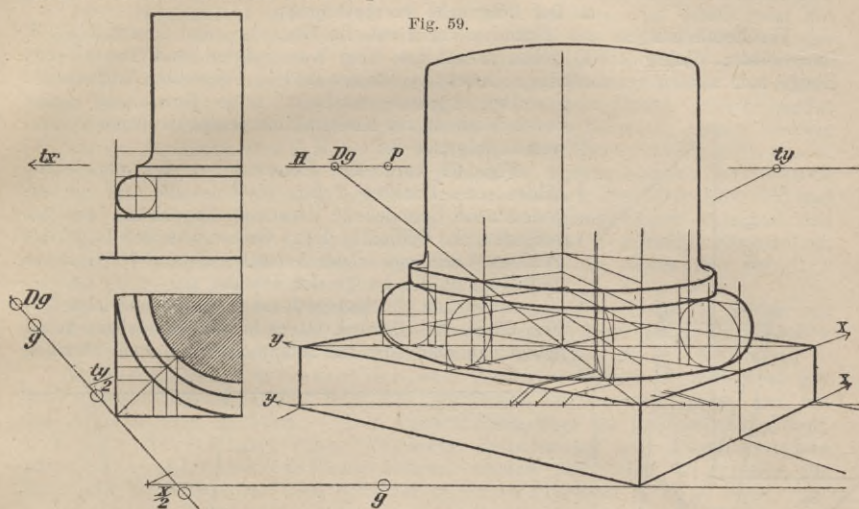
Punkte *s*, welcher die Spitze des Kegels ist. Auf *ms* bezeichnet man die horizontale Projektion *n* des Punktes *h* und zieht durch *n* eine perspektiv. Parallele zu *ab*. Durch Drehung des Dreiecks *cfh* können beliebig viele Punkte des Bogens bestimmt werden; Fig. 56.

Ein Bogengesims wird in ähnlicher Weise durch Drehung des Profils um den Mittelpunkt des Bogens gezeichnet. Bei einer frontalen Lage des Bogens bestimmt man die Mittelpunkte der zu den einzelnen Punkten des Bogen-Gesimses gehörigen Halbkreise; Fig. 57.

Beispiel am horizontalen Kreis. Für Darstellungen von Einfassungen, Stufen eines Denkmals, Thürmen u. s. w. ist häufig die Aufgabe zu lösen, zu einem perspektiv. gezeichneten Kreis konzent. oder in einer andern wagerechten Ebene liegende Kreise von gleichem Durchm. zu zeichnen; Fig. 58. Dazu werden in einzelnen Punkten des Umfangs des gegebenen Kreises Lothrechte bis zum Horizont errichtet und diese in 2, 4 *n* gleiche Theile getheilt. Werden die entsprechenden Theilpunkte durch eine Kurve verbunden, so erhält man die Bilder wagerechter Kreise von gleichem Durchmesser. Die Eintheilungen können nach Bedarf oberhalb des Horizonts oder unterhalb des Kreises übertragen werden. — Soll ein konzentrischer Kreis gezeichnet werden, so verfähre man in gleicher Weise wie vorhin angegeben und denke durch die entsprechenden Theilpunkte Leitlinien eines Kegels gelegt, welcher die wagerechte Ebene des gegebenen Kreises in einem konzentrischen Kreise schneidet.

Beispiel der Darstellung von Umdrehungs-Körpern. Dieselben kommen meist an Säulenbasen und Kapitellen vor und werden am einfachsten perspektiv.

gezeichnet, wenn man den Körper durch Meridian-Ebenen, welche kongruent der Erzeugungs-Ebene sind, geschnitten denkt und die Schnittlinien perspektiv. konstruirt. In Fig. 59 ist der Umriss des Wulstes dadurch erhalten, dass man den erzeugenden Kreis in verschiedenen Lagen zeichnete und an denselben eine ausserhalb berührende krumme Linie zog.



In Fig. 60 ist die innere Perspektive eines mit Gewölben überdeckten Vestibüls in frontaler Lage gezeichnet, in der zur Auftragung der Tiefenmaasse $\frac{1}{3}$ der Distanz benutzt und die Gräte des Kreuzgewölbes durch wagerechte Schnitt-Ebenen konstruirt wurden.

III. Besondere Apparate zur Anfertigung perspektiv. Bilder.

In jüngster Zeit sind 2 Apparate konstruirt worden, welche durch Umfahren der geometr. Figur mit Fahrstiften das perspektiv. Bild mechanisch zeichnen. Diese sind der Perspektograph vom Architekt Ritter in Frankfurt a./M. und ein Apparat von Prof. G. Hauck in Berlin.

a. Der Ritter'sche Perspektograph.

Veröffentlichungen des Erfinders in Deutsche Bauzeitg. und Zentralblatt d. Bauverwaltg. (Jahrg. 1884) geben Aufschluss über Konstruktion und Anwendung. Einige zum nähern Verständniss nothwendige Notizen sind im Folgenden mitgetheilt:

Der Apparat verdankt seine Entstehung einer neuen Methode zur Konstruktion perspektivischer Bilder, welche folgende ist:

Fig. 61 stellt die Konstruktion des perspektiv. Bildes eines Punktes a dar. OO^1 ist die, für die angenommene Grundebene konstante Augenhöhe, aa^1 die veränderliche Ordinate, deren Grösse von der Lage des Punktes a abhängt, r der normale Abstand der Geraden und G giebt die Länge der Distanz an.

In der (mit gleichen Buchstaben wie vor bezeichneten) Fig. 62 ist das Dreieck OO^1a in die Grundebene herab gelegt; an dem Apparat entsprechen den zwei Strahlen

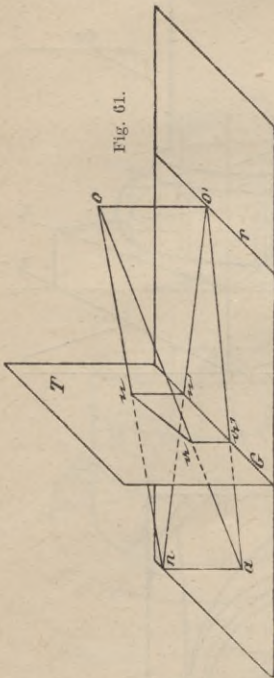


Fig. 61.

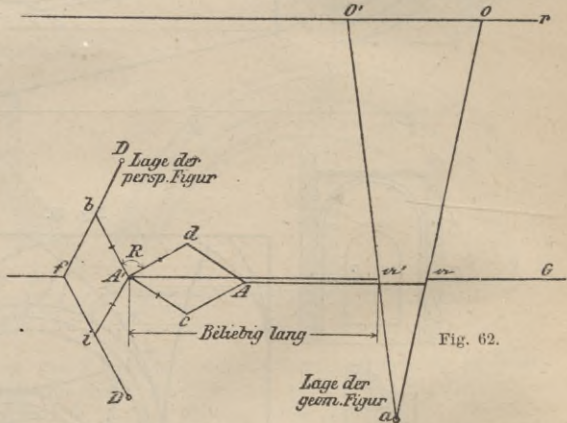


Fig. 62.

aO und aO^1 zwei Lineale, die auf den zwei Schieber-Führungen r und G verschiebbar und drehbar sind und in deren Schnittpunkt a der Fahrstift angebracht ist, mit welchem die geometr. Grundriss-Figur umfahren wird.

Um die veränderlichen Ordinaten aa^1 in einer zur Lage des Lineals G rechtwinkl. Richtung auf ein Zeichenbrett übertragen zu können, sind die 2 Punkte a und a^1 mit Schiebern verbunden und an diesen befindet sich eine, von Ritter als „Froschschenkel“ bezeichnete Vorrichtung, welche aus 2 Parallelogrammen AdA^1c und A^1bfi besteht. Ein hölzerner Schieber verbindet die Punkte a^1 und A^1 , eine eiserne Stange a und A ; beide Schieber sind so eingerichtet, dass sich die Lineale aO und aO^1 in den Führungs-Punkten a und a^1 verschieben und drehen können. Der Froschschenkel AcA^1bjiD besteht aus 2 kongruenten unter rechtem Winkel cA^1i verbundenen Parallelogrammen, an welchen die gleichen Seiten Ac , cA^1 , A^1i und ij vorkommen; es sind daher auch die Diagonalen AA^1 und ib gleich.

Um den Abstand $A^1D = bi = AA^1$ zu machen, ist der Schenkel ib um ein Stück $bD = bf$ verlängert. Wegen dieser Einrichtung beschreibt ein an D angebrachter Bleistift dieselbe Strecke gegen A^1 , welche durch die horizontale Bewegung des Punktes A des Schenkels gegen die Mitte A^1 durchmessen wird. In Folge der festen Verbindung der Punkte a mit A und a^1 mit A^1 wird stets A^1D gleich der gesuchten Ordinate aa^1 , plus einer Konstanten sein.

Beim Umfahren der geometr. Figur mit dem Stift a verschieben sich die Punkte A und A' in ihrer Lage, wodurch der Stift D mechanisch das perspektiv. Bild zeichnet. Dasselbe ist im Vergleich zur eigentlichen Lage über a' um die belieb. Grösse $a'A'$ nach links und um die erwähnte Konstante rechtwinklig zum Lineal G verschoben, um eine Kollision der beiden Zeichenblätter zu vermeiden.

Beide Schenkel jb und fi sind mit Bleistiften versehen, von denen jeder das Spiegelbild des andern zeichnet. Je nach der Grösse der Zeichenblätter und der Höhenlage des Horizonts wird man eine der Spitzen zum Zeichnen gebrauchen. Wird die Höhe $O'O$ nach der anderen Seite umgelegt so zeichnet die untere Spitze das richtige Bild. Zur Ausführung des perspektiv. Bildes eines Gebäudes muss dasselbe entweder in wagerechte oder in vertikale Schichten zerlegt werden. Die letztere Zerlegung wird z. B. bei Architektur-Details, Maasswerk-Fenstern u. s. w. angewandt, während die erstere mehr zum perspektiv. Auftragen ganzer Gebäude geeignet ist. Von jeder Schicht zeichnet man mechanisch das perspektiv. Bild und vollendet die Zeichnung durch Eintragung der Verbindungs-Linien zwischen den einzelnen Schichten. Der Apparat ist für jede Schicht besonders einzustellen, da durch Verschiebung der Grundebenen die Höhenlage des Auges über derselben und die Ordinaten der einzelnen Punkte sich verändern.

Aus den Gesetzen der Perspekt. ist bekannt, dass die Grösse der Bilder von der Grösse der Distanz abhängig ist; durch Verändern der Entfernung der Lineale r und G kann man folglich das Bild nach Wunsch vergrössern oder verkleinern.

Vertikale Kurven in verschiedenen vertikalen Ebenen (Rundtempel mit Bogengängen, Kreuzgewölbe, Interieurs gothischer Kirchen etc.) lassen sich mit dem Apparat nicht zeichnen. — Der Apparat kann aber zur umgekehrten Arbeit, d. h. zur Herstellung einer geometr. Zeichnung aus Photographie oder perspektiv. Darstellung benutzt werden. Beziehb. ist derselbe aus der mech. Werkstätte von Chr. Schröder u. Co. in Frankfurt a. M.

b. Die Methode und der Apparat von Professor G. Hauck*).

Vorbereitende Erörterungen.

Zur Herstellung der Zentral-Projektion eines Punkt-Systems im Raume werden vom Projektions-Zentrum Strahlen nach den einzelnen Punkten des zu projizirenden Systems gezogen. Dieses Strahlen-System werde projizirendes Strahlenbündel genannt. Die Schnittpunkte eines solchen mit einer Projektions-Ebene liefern die Projektion des Systems.

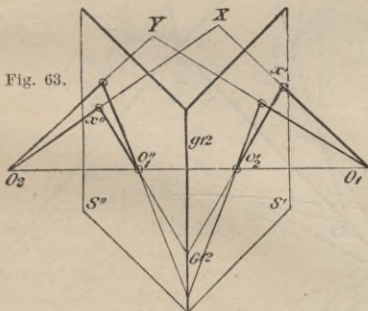


Fig. 63.

Es seien, Fig. 63, zwei Projekt.-Ebenen S' und S'' gegeben, die sich in der Geraden G_{12} (Grundschnitt) schneiden. O_1, O_2 seien 2 Projektions-Zentren und S' sei die Projektions-Ebene für O_1, S'' die Projektions-Ebene für O_2 . Die Verbindungs-Gerade $O_1 O_2$ ergibt auf den Projektions-Ebenen 2 Schnittpunkte o_2', o_1'' (Kernpunkte). Diese haben die Bedeutung: dass jeder die seinem System angehörige Projektion

des gegnerischen Projektions-Zentrums darstellt. Es sei ferner X ein beliebiger Punkt, so sind x' und x'' seine Projektionen auf S' und S'' ; die Projektionen seien als zugeordnete Punkte des Punktes X bezeichnet. Die Projektionen x' und x'' sowie o_2' und o_1'' liegen in der durch O_1, O_2, X gelegten Ebene. Die Schnitte dieser Ebene mit den Projektions-Ebenen sind die durch $x' o_2' o_2''$ und $x'' o_1''$ gelegten Geraden, deren Verlängerungen sich sonach in einem Punkte G_{12} des Grundschnitts schneiden müssen. Dasselbe gilt für jeden andern beliebigen Punkt.

Wird also ein belieb. Punkt-System von 2 Projektions-Zentren auf 2 denselben zugehörige Projektions-Ebenen projiziert, so entspricht den Projektionen der einzelnen Punkte in jeder der Projekt.-Ebenen ein durch die Kernpunkte und die zugeordneten Punkte bestimmtes Strahlen-System. Alle Schnittpunkte zweier den

*) Vergl. Journ. für reine u. angew. Mathematik. Bd. 95. — Deutsche Bauzeitg. 1884, S. 277.

beiden Projektionen desselben Punktes zugehörigen Strahlen liegen auf dem Grund-schnitt (Axe der Perspektivität) und das durch die Kernpunkte gehende Strahlen-System wird als perspektiv. Strahlenbüschel bezeichnet.

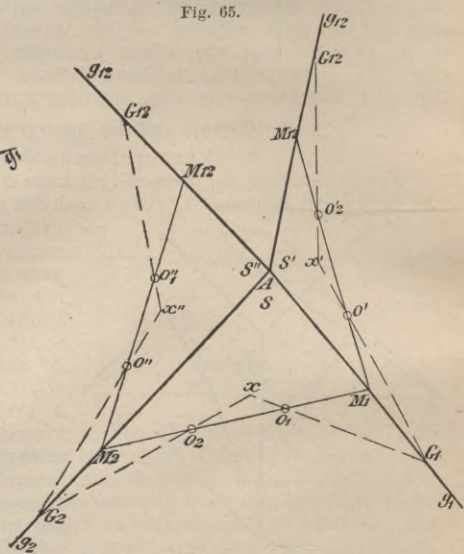
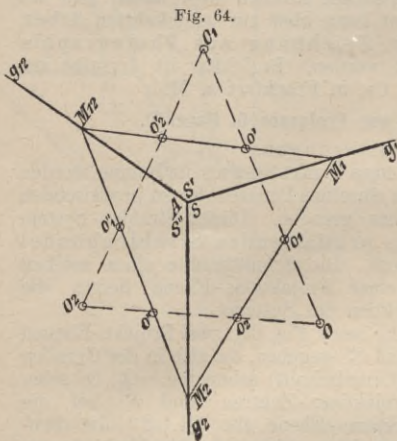
Jedes der durch o_2' und o_1'' gehenden perspektiv. Strahlen-Bündel repräsentirt die seinem System entsprechende Abbildung des projizirenden Strahlenbündels des gegnerischen Systems.

Die vorstehenden Ausführungen gelten auch, wenn eins der Projekt.-Zentren, z. B. O_1 in die Entfernung ∞ fällt, d. h. wenn die Projektion auf S^1 eine Parallel-Projekt. und das von O_1 ausgehende projizirende Strahlen-Bündel ein Parallel-strahlen-Bündel wird.

Findet der besondere Fall statt, dass das zu S' gehörige projizirende Parallel-strahlen-Bündel der 2ten Ebene S'' parallel ist, so rückt auch der Kernpunkt o_1'' in die Entfernung ∞ und es ist auch das perspektiv. Strahlen-Bündel o_1'' der Ebene S'' ein Parallel-Strahlen-System, welches dem projizirenden Bündel O_1 gleich gerichtet ist.

Fundamental-Konstruktion.

Vorbereitungs-Figur; Fig. 64. Es seien S, S', S'' 3 Projektions-Ebenen, welche in den Grundschnitten g_1, g_2, g_{12} sich schneiden, O, O_1, O_2 die zugehörigen Projekt.-Zentren. Auf zweien der Projekt.-Ebenen, z. B. S' und S'' seien die Projektionen eines räumlichen Objekts gegeben. Die Projektion desselben Objekts auf die 3. Ebene S soll durch eine Konstruktion bestimmt werden, welche sich nur in den Projekt.-Ebenen selbst bewegt.

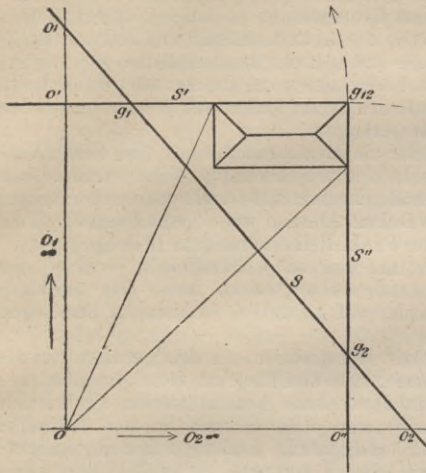


Die vorauf geschickte Erörterung gilt für je zwei der drei Ebenen und liefert das Mittel zur Lösung der vorliegenden Aufgabe. Legt man durch die Projekt.-Zentren eine Ebene, so sei das Dreieck M_1, M_2, M_{12} der Schnitt derselben mit den Projekt.-Ebenen. Die Schnitt-Punkte der Dreiecks-Seiten mit den Verbindungs-Geraden der 3 Projekt.-Zentren liefern die 3 Mal 2 Kernpunkte $o_1, o_1'; o_2', o_1''; o'', o_2$. Die 3 Geraden $M_1 M_2, M_2 M_{12}, M_{12} M_1$ werden Hauptachsen genannt.

Ausführungs-Figur; Fig. 65. Das Dreieck $A g_1 g_2 g_{12}$ wird nach der Kante g_{12} aufgeschnitten gedacht und werden die 2 Ebenen S', S'' in die Ebene S herabgeklappt. Die Abstände der Punkte M_1, M_2, M_{12} von A werden gemessen, die Geraden gezogen und auf denselben die Kernpunkte aufgetragen. Sind nun x' und x'' zwei zugeordnete Punkte der gegebenen Projektion, so wird der zugeordnete Punkt x der gesuchten 3. Projektion folgendermaassen ermittelt: Man zieht $x' o'$ und $x'' o''$ bis zum Schnitt mit den bezüglichen Grundschnitten g_1 und g_2 und zieht

durch diese Schnittpunkte G_1 und G_2 und die Kernpunkte o_1 und o_2 der Ebene S gerade Linien, deren Schnittpunkt x der gesuchte Punkt ist.

Fig. 66.

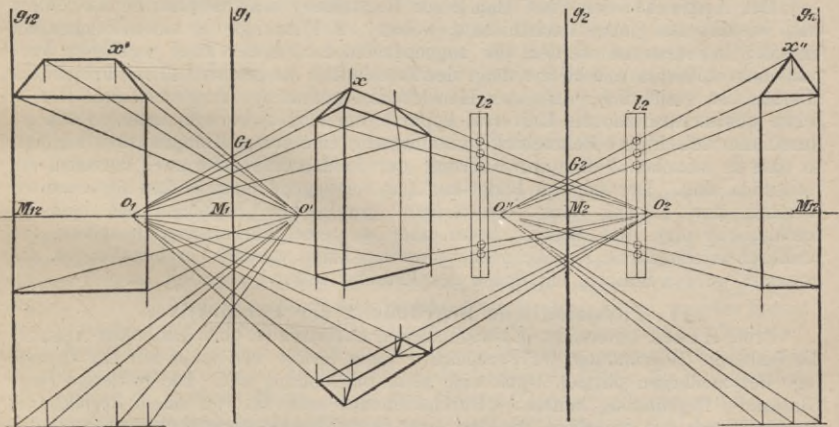


Beispiel. Zentral-Perspektive aus geometr. Aufriss und Seitenriss. Gegeben sind Vorder- und Seitenansicht eines architekton. Objekts; gesucht wird eine bestimmte Zentral-Projektion.

Lage der Grundschnitte und Kernpunkte werden aus einer Vorbereitungs-Figur [66] (Grundriss-Projektion) bestimmt. Die Projektions-Ebenen S S' und S'' stellen sich als Gerade, die Grundschnitte g_1 g_2 und g_{12} als Punkte dar. Das zu S gehörige Projektions-Zentrum O fällt mit der horizontalen Projektion des Augenpunktes zusammen; die zu S' und S'' gehörigen Projektions-Zentren O_1 und O_2 liegen in der Entfernung ∞ rechtwinklig zu den Ebenen. In diesen Richtungen zieht man von O Strahlen, welche die Ebene in den Kernpunkten o' und o_1 , o'' und o_2 schneiden. (Die Punkte o_1 und o_2

sind die Verschwinde-Punkte der Seiten-, bzw. Vorderansicht.) Diese Punkte sind die Horizontal-Projektionen der wirklichen Punkte und letztere liegen in einer Höhe gleich der Augenhöhe über der Grundebene.

Fig. 67, 68, 69.



Um die Ausführungs-Figur [67] zu machen, denkt man die Ebenen im Querschnitt g_{12} aufgeschnitten u. S' und S'' in die Bildebene S herum geklappt. Die 3 Haupttaxen fallen im Horizont zusammen. Gegeben sind (wie in Fig. 65) die zugeordneten Punkte x , und x'' ; den zugeordn. Punkt x der gesuchten Zentral-Projekt. findet man wie folgt: Man verbindet x' o' und x'' o'' , die Schnittp. G_1 und G_2 verbindet man mit o_1 und o_2 , wodurch man im Schnittp. x den gesuchten Punkt erhält. Dies Verfahren ist z. B. für die Konstruktion perspektiv. Bilder von Werken der Kleinkunst geeignet, von denen nur Aufriss und Profilur gegeben sind.

Punkte, welche in der Nähe des Horizonts liegen, können durch diese Konstruktion nicht genau bestimmt werden. Deshalb schlägt Prof. Hauck vor, durch Herunterrücken der Grundebene, die auch in der bisherigen Methode der Perspektive übliche Konstruktion des perspektiv. Grundrisses damit zu verbinden; Fig. 68.

Man kann nun nicht in allen Fällen die Konstruktion auf einem Zeichenblatt ausführen, sondern ist oft genöthigt, dieselbe für jede Ansicht auf einem besonderen Blatte zu machen. Man zieht für jede Ansicht das Strahlenbündel o' bezw. o'' , bezeichnet auf einem, die Stelle des Grundschnitts g_1 oder g_2 einnehmenden Papierstreifen die entstehende Punkt-Reihe durch zweckmässig angeordnete Buchstaben, Zahlen u. s. w. und überträgt die Punkt-Reihe durch Anheften des Papierstreifens auf den in der Zentral-Projekt. bezeichneten entsprechenden Grundschnitt. Durch Verbinden der auf g_1 bezw. g_2 erhaltenen Punkt-Reihen mit o_1 bezw. o_2 werden die Zentral-Projekt. der einzelnen Punkte erhalten.

Findet bei beschränkter Zeichenfläche ein Herausfallen eines oder beider Verschwinde-Punkte o_1 , o_2 statt, so kann man eine proportional getheilte Parallel-Linie benutzen. Fällt z. B. o_2 ausserhalb des Zeichenbretts, so zieht man in der Seitenansicht in doppeltem, oder allgemein n fachem Abstand von o'' eine Parallele l_2 zu g_2 , welche das Strahlenbüschel o'' in einer Punkt-Reihe schneidet. In der perspektiv. Zeichnung überträgt man die Punktreihe auf eine zu g_2 Parallele l_2 , welche den doppelten oder allgemein n -fachen Abstand als g_2 von o_2 hat. Das Strahlenbündel o_2 erhält man durch Verbinden der auf g_2 und l_2 bestimmten homologen Punkte; Fig. 69.

In analoger Weise wird die perspektiv. Konstruktion aus dem geometr. Grundriss und Aufriss durchgeführt. Auch können alle drei Projekt., wenn dieselben gegeben sind, zur Konstruktion der Zentral-Perspektive benutzt werden, wobei sich das Charakteristische der neuen Methode zeigt, dass sie die in den 3 Haupt-Richtungen, der Breiten-, Tiefen- und Höhen-Richtung laufenden Linien unmittelbar, ohne weitere Hilfslinien ergibt.

Zur vortheilhaften Anwendung der neuen Methode kann die Kenntniss der ältern Methode wünschenswerth, und die Verwendung der einzelnen Hilfsmittel derselben: Theilungs-Punkt zum Abtragen von Maassen, Diagonal-Punkt bei Gemäusen u. s. w. in vielen Fällen von Nutzen sein. —

Der Apparat, den Prof. Hauck zur Herstellung von Perspektiven ausgeführt hat, besteht aus einem Mechanismus, welcher 2 Führungs- u. einen Zeichenstift enthält; mit ersteren werden die zugeordneten Linien der zwei gegebenen Projektionen umfahren und liefert dann der Zeichenstift die gesuchte dritte Projektion. Hieraus ist ersichtlich, dass der Hauck'sche Apparat im Vergleich zum Ritter'schen gewissermaassen als Universal-Apparat bezeichnet werden kann. Doch ist durch die vielseitigere Benutzbarkeit nothwendig eine grosse Komplizirtheit bedingt, so dass in manchen Fällen zur Führung der beiden Fahrstifte zwei Personen erforderlich sind. Der Apparat bildet zur Zeit vorwiegend einen höchst interessanten Versuch zur Lösung eines schwierigen graphischen Problems auf einfache mechanische Art und Weise; bevor aber an eine Verbreitung desselben für praktisch-zeichnerische Zwecke gedacht werden kann, werden Vereinfachungen abgewartet werden müssen, mit denen der Erfinder selbst beschäftigt ist. —

IV. Physiologische Begründung der Perspektive.

Prof. Hauck unterzieht in verschiedenen Aufsätzen (s. oben Litteratur-Angabe) die bisherige Begründung der Perspektive einer Kritik und stellt auf der Grundlage der modernen physiol. Optik eine neue Begründung auf. Die bisherige (sog. Glastafel-) Begründung lautete: „Durchschneidet man das von einem Projektions-Zentrum nach den einzelnen Punkten eines Gegenstandes gerichtete Strahlenbündel durch eine Ebene, so entsteht ein perspektiv. Bild desselben, welches in einem an der Stelle des Projektions-Zentrums befindlichen Auge denselben Eindruck hervor bringt, wie der Gegenstand selbst.“ Durch das hierin ausgesprochene Prinzip der Zentrität wird die Uebereinstimmung der Linear-Perspektive mit der Zentral-Projektion begründet.

Diese zentral-projektiv. Abbildung stimmt jedoch nicht mit dem subjektiven Anschauungs-Bilde, welches das Auge von dem Objekte erhält, überein, so dass sie im allgemeinen für die ästhetische Beurtheilung eines Objekts nicht maassgebend sein kann. Bewiesen wird diese Behauptung durch die modernen Anschauungen der physiologischen Optik, nach welcher das Auge keine ruhende *Camera obscura* ist, in der das Netzhaut-Bildchen als Ganzes erscheint, sondern sich beständig bewegt und die verschiedenen Eindrücke nach einander empfängt, welche erst kombinirt werden müssen, um sich eine Vorstellung von der Form des

Ganzen zu machen. Ein weiterer Beweis ist der Umstand, dass das Auge sich bei dem Beschauen einer Abbildung in den wenigsten Fällen in dem Projektions-Zentrum befindet und doch einen angenehmen Eindruck von derselben erhält. Ferner wird eine Abbildung nicht mit einem, sondern mit zwei Augen betrachtet, die sich hierbei anders zu einander stellen müssen, als bei dem Betrachten des wirklichen Gegenstandes. Die Einzel-Eindrücke, die das Auge empfängt, sind zunächst so beschaffen, dass die scheinbare Grösse jeder Strecke dem Gesichtswinkel proportional ist: Prinzip der Konformität. Das hat zur Folge, dass wir Linien zum grössten Theil nicht geradlinig sehen; z. B. erscheinen bei einem Architrav auf gleich hohen Säulen die am nächsten stehenden mittlern Säulen grösser als die entferntern äussern Säulen und daher die horizontalen Kanten des Architravs nothwendig gekrümmt. Dass wir solche Kanten als gerade sehen, rührt von unserm Bewusstsein der Kollinearität her: eine gerade Linie geradlinig zu sehen.

Prof. Hauck verlangt, dass die künstlerische Abbildung eines Gegenstandes eine freie Wiedergabe des Eindrucks sei, den das Auge von dem Natur-Objekte empfängt, ein sogen. „subjektives Anschauungs-Bild.“ Um eine ästhetisch befriedigende Wirkung zu erzielen, muss auf dem Bilde jede gerade Strecke wieder als gerade erscheinen: Prinzip der Kollinearität; die vertikalen Strecken müssen als solche sich darstellen: Prinzip der Vertikalität, und die Grösse einer Strecke muss proportional dem Gesichtswinkel sein: Prinzip der Konformität.

Bei der gewöhnlichen geometr. Perspektive mit senkrechter Bildfläche ist das kollineare System eingehalten; gegen den Rand hin verzerren sich jedoch die Strecken bei kurzer Distanz unnatürlich. Z. B. werden die Gesims-Ausladungen zu stark, Säulenschäfte zu dick und Kugeln elliptisch. Bei Figuren, welche in einiger Entfernung vom Hauptpunkt (Zentralpunkt) dargestellt sind, zeigen Körper von der Mitte nach rechts oder links zunehmende Dickbäuchigkeit und die Köpfe sich elliptisch. Von den Künstlern wird dies bei Darstellungen nicht durchgeführt, auch wenn Innenräume zentral-perspektiv. konstruirt sind.

Um dem System der Konformität zu genügen, muss man eine sphärische Bildfläche benutzen; dies hat jedoch zur Folge, dass sich alle Geraden als grösste Kreise der Kugel abbilden: die Vertikalen laufen zusammen, die Horizontalen neigen sich gegen den Horizont. Das statische Gefühl verlangt jedoch, dass vertikale Linien als solche abgebildet werden und dass gerade Linien möglichst geradlinig erscheinen.

Ein solches sphärisches Bild müsste auch erst wieder in ein ebenes Bild umgewandelt werden, da sonst der Beschauer beim Verlassen des Kugel-Mittelpunktes eine grössere Verzerrung sehen würde als auf einem ebenen Bild.

Um eine Vergleichung zwischen dem konformen und kollinearen System anzustellen, wurde von Prof. Hauck eine Pfeilerhalle auf zweierlei Art gezeichnet: 1. auf eine ebene Tafel, deren Bild die Pfeiler in gleicher Höhe, jedoch mit starker Verzerrung der äussersten Pfeiler zeigt, 2. in der Weise, dass Strahlen vom Projektions-Zentrum O aus nach den im Grund- und Aufriss gegebenen Punkten gezogen werden. Um die Winkel zu bestimmen, welche diese Strahlen bilden, wurden Kreise um O gezeichnet und die Schnittpunkte derselben mit den einzelnen Strahlen bestimmt. Diese Kreisflächen wurden sodann in die Ebene gebreitet, wodurch der Horizont und alle senkrechten Geraden konform abgebildet, jedoch die Bilder der Horizontalen, welche nicht im Horizont liegen, nach dem Horizont konkav gebogen wurden.

Ein Vergleich dieser beiden Bilder zeigt: 1. dass sie bei kleinen Gesichtswinkeln fast überein stimmen; 2. dass bei einem Gesichtswinkel von höchstens 30° , oder bei einer Distanz von wenigstens 2 Bildlängen das gewöhnliche linear-perspektiv. Bild genügt; 3. dass jedoch bei kleinern Distanzen Abänderungen im Sinne der Konformität nothwendig werden, also schwache Biegungen der Horizontal-Linien stattfinden müssen.

Soll nun eine Abbildung die Wiedergabe des subjektiven Anschauungs-Bildes sein, so muss dies durch einen Kompromiss zwischen Kollinearität und Konformität erzielt werden. Bei architektonischen Gegenständen ist vor allem Kollinearität und Vertikalität einzuhalten. Bei krummflächigen Objekten ist die Konformität zu berücksichtigen, da z. B. bei figürlichen Darstellungen die Kollinearität gegenstandslos ist. Bei eben- und krummflächigen Darstellungen ist die Zeichnung zunächst kollinear-perspektiv. anzulegen und es sind nachträglich die zu Tage tretenden

Konformitäts-Verzerrungen im konformen Sinne zu modifiziren, z. B. bei Innenräumen mit kleinen Distanzen.

Prof. Hauck kommt zu dem Schluss, dass das zentral-perspektivische System im allgemeinen die rationellste Form der bildlichen Darstellungen ist, da bei demselben den 3 Bedingungen: 1. der Kollinearität, 2. der Vertikalität und 3. der Konformität (mit Beziehung auf die dem angenommenen Standpunkt entsprechenden Schinkel) im Hauptpunkt genügt ist, so dass also weniger die formalen Gesetze, als die bisherige Begründung sich als unzureichend erweisen. — Mit wachsender Entfernung des Standp. des Beschauers eines Bildes vom Hauptp., welcher der perspektiv. Darstellung zu Grunde liegt, nimmt die Konformitäts-Verzerrung zu. Man kann jedoch der Bedingung der Konformität nicht im höheren Grade, d. h. für andere Punkte gerecht werden, ohne die beiden andern Gesetze zu verletzen.

Fig. 71.

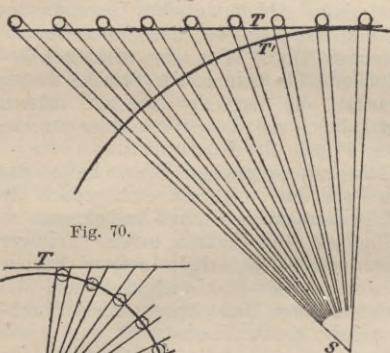
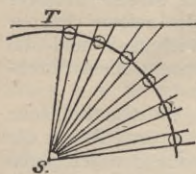


Fig. 70.



(Schinkels Theater-Dekorationen) zu ersehen ist; oder man müsste durch Einführung einer zylindrischen Bildfläche Modifikationen im konformen Sinne eintreten lassen.

Ein Gleiches würde man thun, wenn man eine lange Säulen- oder Pfeilerhalle perspektiv. darzustellen hätte, Fig. 71, da bei Annahme der Bildebene die äussersten Säulen breiter als die mittlern erscheinen würden; auch hier könnten durch Anwendung einer zylindrischen Bildfläche Konformitäts-Verzerrungen vermieden werden.

V. Auffindung der Bestimmungs-Stücke gegebener Perspektiven.

Im allgem. hat man das umgekehrte Verfahren von dem anzuwenden, welches zur Herstellung der perspektiv. Bilder dient.

Fig. 72.

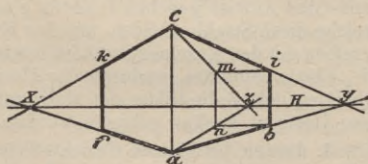
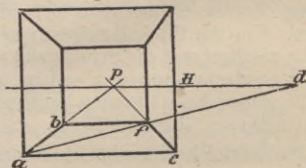


Fig. 73.



Um einen Punkt des Horizonts zu bestimmen, verlängere man die Bilder zweier Horizontalen, z. B. ci und ab , Fig. 72, bis zum Schnittpunkt y . Einen 2. Punkt x des Horizonts erhält man im Durchschnitt der Verlängerungen zweier andern Horizontalen, z. B. ck und af . Die Gerade xy ist der Horizont; x und y sind die Verschwindep. der betr. Geraden und der dazu Parallelen.

Fällt ein Punkt, z. B. y , ausserhalb des Zeichenbretts, so zieht man eine Lothrechte ib , ferner durch ib zwei Gerade im und bn normal zu ib und durch 2 Punkte m und n , welche lothrecht über einander liegen, die Geraden cm und an bis zum Schnittpunkt z , welcher ebenfalls ein Punkt des Horizonts ist.

Bei einer frontalen Lage verlängert man 2 Parallelen, z. B. ab und cf bis zum Schnittpunkt p , Fig. 73. Eine Parallele durch p zu ac gelegt ist der Horizont und p ist der Zentralpunkt.

Kommen quadrat. Theilungen des Fussbodens oder der Decke vor, so erhält man durch Ziehen einer Diagonale im Schnitt mit dem Horizont einen Distanzpunkt. und in dem Abstände pd die Grösse der Distanz selbst. Fällt hierbei der Distanzpunkt ausserhalb der Zeichenfläche. Fig. 74, so bestimmt man einen Theil der Distanz, indem man die Strecke ap in eine beliebig. Zahl gleicher Theile, z. B. in 4, zerlegt und durch den dem Zentralp. p zunächst liegenden Theilp. 1 eine geometr. Parallele zu der Diagonalen zieht; $p \frac{d}{4}$ ist gleich $\frac{1}{4}$ der Distanz.

Fig. 74.

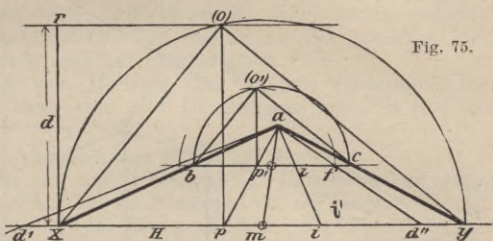
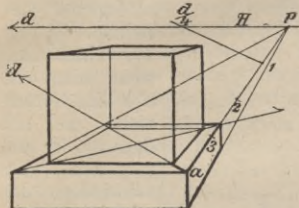


Fig. 75.

Aus einem perspektiv. rechten Winkel kann man alle Bestimmungs-Stücke herleiten, wenn der Horizont, sowie der Zentralp. oder die Distanz gegeben sind.

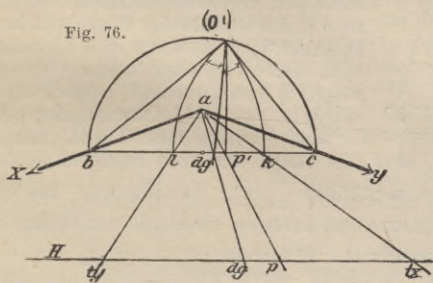
1. Der Zentralp. p ist gegeben: Man verlängere die Schenkel ab und ac bis zum Horizont; Fig. 75. Ueber xy zeichne man einen Halbkreis, errichte in p eine Lothrechte bis zum Schnittpunkt (O) mit der Peripherie. $x(O)y$ ist der herum geklappte geometr. rechte Winkel und $(O)p$ ist die Distanz.

2. Wenn die Distanz $xy = d$ gegeben ist, so zieht man eine Parallele durch r zu dem Horizont bis zum Schnitt (O) mit der Peripherie. Eine Normale von (O) auf H gefällt, ergibt den Zentralp. p . Da die Parallele $r(O)$ im allgem. die Peripherie zwei Mal schneidet, so erhält man zwei Zentralp.

Liegen die Punkte x und y zu weit entfernt, so ziehe man durch einen beliebig. Punkt eines Schenkels, z. B. b , eine Parallele zu H . Ueber bc wird ein Halbkreis gezeichnet und ap gezogen, die im Schnitt mit bc den Punkt p_1 ergibt. In p_1 wird eine Normale zu bc errichtet, welche im Schnitt mit dem Halbkreis einen Punkt (O_1) giebt, der den herunter geschlagenen Gesichtsp. vertritt, wie bc den Horizont.

Dreieck $b(O_1)c$ ist gleich dem perspektiv. Dreieck bac ; daher sind die einzelnen Seiten derselben paarweise einander gleich. Die Distanz wird erhalten, wenn man $p_1(O_1)$ von p_1 nach rechts oder links auf bc abträgt, a mit einem der Punkte verbindet und den Schnittp. d_1 , oder d'' mit dem Horizont H bestimmt. $p d_1$, oder $p d''$ ist gleich der Distanz. Kann wegen Raummangel die Distanz nicht in dieser Weise bestimmt werden, so

Fig. 76.



arbeitet man mit einem Theil der Strecke $p_1 f$, z. B. mit der Hälfte. Man halbire $p_1 f$ in i' , verbinde a mit i' und bestimme den Schnittpunkt i dieser Geraden mit dem Horizont; $p i$ ist gleich der halben Distanz.

Durch Halbiren des rechten Winkels $b(O_1)c$ erhält man den Diagonalp. $d g$; Fig. 76. Die Theilp. von ba und ac sind zu bestimmen.

1. Für ba . $b k$ wird gleich $b(O_1)$ gemacht und ak gezogen. Im Schnitt dieser Geraden mit dem Horizont H erhält man den gesuchten Theilp. t_x .

2. Für ac . cl wird gleich $c(O_1)$ gemacht und al gezogen. Der Schnittp. t_y dieser Geraden mit dem Horizont ist der gesuchte Theilp. Bei unzureichendem Raum bestimme man die Theilp. z. B. t_x durch $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ oder allgemein $\frac{1}{n}$ des Abstandes $b k$.

Ist anstatt des Zentralp. die Distanz gegeben, so kann man nach Andeutung der Fig. 75 leicht die übrigen Stücke bestimmen.

In den meisten Fällen ist weder die Distanz noch der Zentralp. gegeben; man kann jedoch aus der Gehrungs-Linie eines Gesimses, d. h. aus der Halbierungs-Linie eines rechten Winkels, den Diagonalp. fest stellen. Hieraus kann man

den Zentralp. und die Grösse der Distanz bestimmen. Den herunter geschlagenen Gesichtsp. (O), Fig. 77, erhält man, wenn man von $d y$ eine Gerade zieht, die mit den von x und y , den Verschwindep. der rechten Winkels

Fig. 77.



$b a c$, gezogenen Sehnen des über $x y$ gezeichneten Halbkreises Winkel von 45° bildet. Aus (O) fällt man eine Normale auf den Horizont H , welche

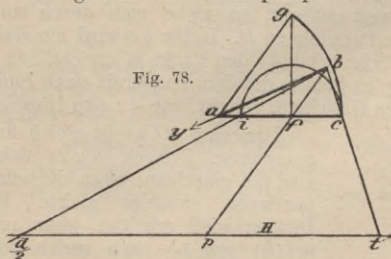
gleich der Distanz ist und in ihrem Fusspunkte den Zentralp. p bestimmt.

An dem rechten Winkel $f i k$ der Figur ist zu ersehen, wie man bei beschränktem Raum zu verfahren hat.

Aufgabe. Aus einer perspektiv. Geraden $a b$, deren Grösse $a c$ bekannt ist,

die Distanz zu finden, wenn H und p gegeben sind; Fig. 78. Der Theilpunkt t der Geraden $a b$ wird im Schnitt. der Geraden $c b$ mit dem Horizont gefunden. Ziehe $p' b$, welche $a c$ in f schneidet; in f errichte man eine Normale zu $a c$, auf welcher der Punkt g dadurch bestimmt wird, dass $a g = a c$ gemacht wird. Das gleichschenklige Dreieck $a g c$ ist gleich dem perspektiv. Dreieck $a c b$; mithin ist $f g = f b$. Durch Umlegen der Geraden $f g$, bezw. eines Theils, etwa der

Fig. 78.



Hälfte derselben, kann die Distanz, bezw. die Hälfte derselben bestimmt werden. $f i = \frac{1}{2} f g$; ziehe $i b$, so erhält man im Schnitt. $\frac{d}{2}$ ihrer Verlängerung mit dem Horizont einen Punkt, dessen Abstand von dem Zentralp. die Hälfte der Distanz ist.

a. Photogrammetrisches Verfahren.*)

Die Methode der Aufnahme der Bauwerke durch Photographie und nachherige Rekonstruktion der photogr. Bilder macht praktische Anwendung von der Umkehrung des perspektiv. Zeichnens.

Mittels eines photogr. Apparats, der in einem Bildwinkel von 90° und darüber ein perspektiv. richtiges Bild ergibt, nämlich des von Busch in Rathenow erfundenen Pantoscops, werden General-Ansichten des Aeusseren über Eck, sowie innere Ansichten eines Gebäudes aufgenommen und daraus die geometr. Ansichten und der Grundriss konstruiert. Auch wird die Aufnahme von Spezial-Ansichten von einem nahen Standpunkt aus, welcher normal zur betr. Wandfläche liegt, empfohlen.

Die Camera des Photographen***) muss zur Aufnahme besonders eingerichtet

*) Zeitschr. für Bauw. 1867, S. 62. — Deutsche Bauzeitg. 1867, S. 125.

**) Vergleiche Abschn. IV.

werden. Die empfindliche Fläche derselben ist die Bildebene; vor derselben werden Horizont und die durch den Zentralp. gehende Vertikal-Ebene durch feine Drähte bezeichnet, welche bei der Aufnahme sich selbstthätig markiren und als schwarze Linien auf dem Bilde erscheinen. Der optische Mittelpunkt der Linse ist der Gesichtspunkt im Sinne der Perspektive. Der Abstand desselben von der empfindlichen Fläche ist die Distanz, welche genau gemessen werden kann und für jedes Instrument als konstant anzunehmen ist.

Als Maasseinheit muss die wirkliche Grösse eines beliebigen Stücks auf dem Bilde bekannt sein; entweder wird das Stück in Wirklichkeit gemessen und die Notiz der Photographie beigefügt, oder, was besser ist, eine scharf getheilte Messlatte wird an einer Stelle des Gebäudes (am besten an der zunächst vortretenden lothrechten Kante) befestigt und mit photographirt.

Man kennt nun auf dem Bilde den Horizont, die Vertikale (Zentralp.), die Distanz und das Maass; hieraus kann man alle Dimensionen herleiten und die geometr. Zeichnungen anfertigen.

b. Rekonstruktion des geometrischen Grund- und Aufrisses.

aus der perspektiv. Zeichnung oder aus einer Photographie. Dieselbe soll an einem Beispiel vorgeführt werden, als welches die im Jahrgang 1872 der Deutsch. Bauztg. veröffentlichte St. Johannis-Kirche zu Altona hier gewählt ist; Fig. 79.

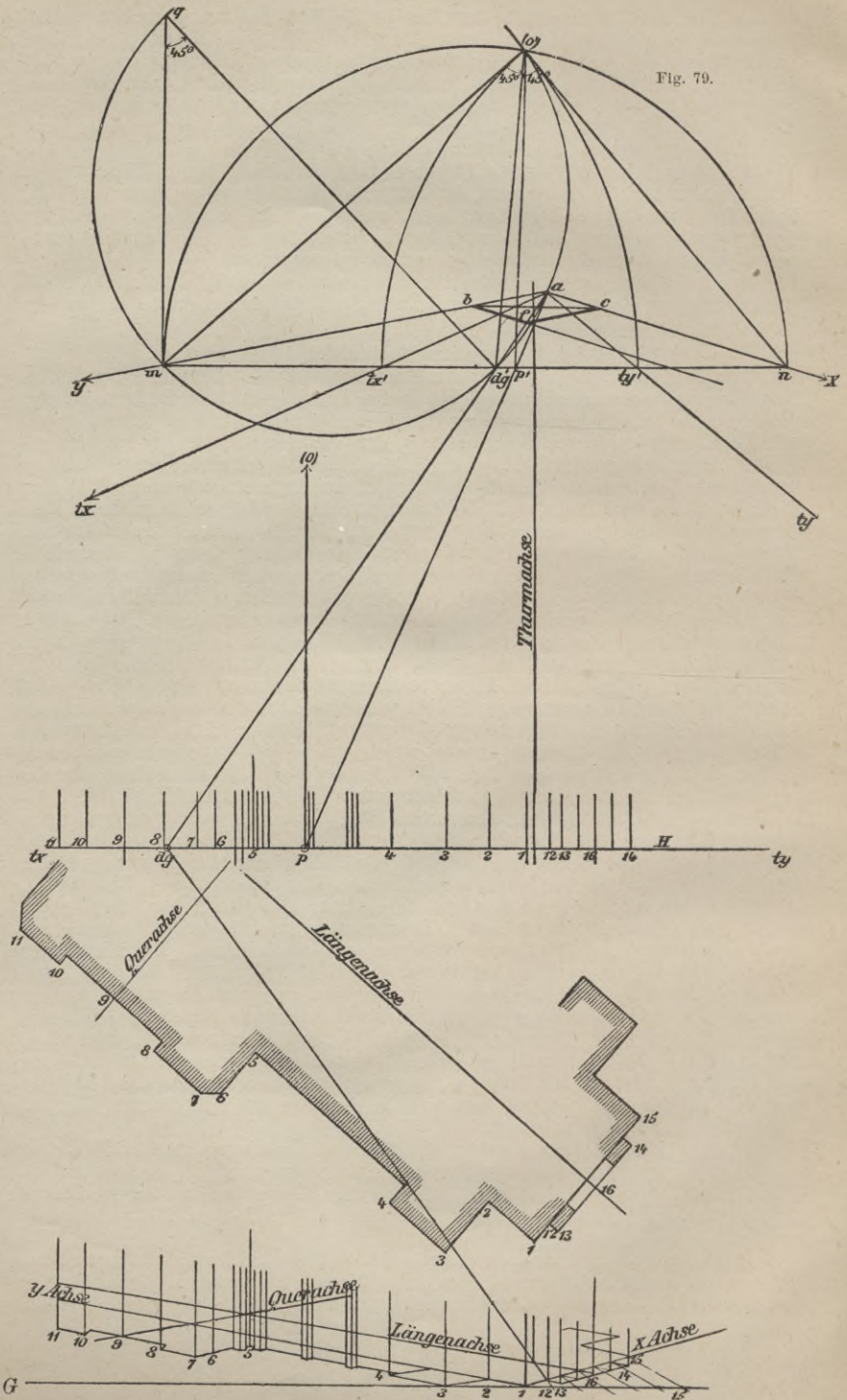
Zuerst wurden durch Verlängerung der längsten Geraden (First, Hauptgesims, Abdeckplatten der Strebepfeiler u. s. w.) die Verschwinde-Punkte x und y der Schenkel der rechten Winkel und hierauf der Horizont H bestimmt. In der Figur ist weder die Distanz noch der Zentralp. bekannt; dagegen kommen an dem Thurne Quadrate vor, welche zur Bestimmung des Diagonalp. dienen können. Mittels der Verschwindep. wird das Quadrat $abcf$ konstruirt und in demselben die Diagonale af gezogen, welche in der Verlängerung den Horizont im Diagonalp. dg schneidet. Da die Verschwindep. x und y weitab fallen, wird zur Bestimmung der übrigen Punkte eine Hilfs-Figur konstruirt: Durch einen belieb. Punkt m des Schenkels ab wird eine Parallele zu H bis zum Schnitt mit ac gezogen und über mn ein Halbkreis gezeichnet, auf dessen Umfang der Punkt (O'), der Ersatzp. des Gesichtsp. (O) in der Hilfs-Figur, bestimmt werden muss. Derselbe wird im Schnitt des über mn gezeichneten Halbkreises mit einem über mdg' gezeichneten Kreise, der die Peripherie-Winkel von 45° umfasst, erhalten. Zur Bestimmung errichtet man in m eine Normale zu mn , welche gleich mdg' gemacht wird, verbindet q mit dg' und zeichnet durch die 3 Punkte m, q, dg' einen Kreis, der die verlangte Eigenschaft besitzt. Den Schnittpunkt (O') der beiden Kreise verbindet man mit m und n , so hat man den rechten Winkel man geometrisch gezeichnet. Von (O') fällt man eine Normale auf mn , wodurch p' , der Ersatzp. des Zentralp. und (O') p' als Ersatz der Distanz erhalten wird. Zieht man durch a und p' eine Gerade, so erhält man im Schnitt derselben mit dem Horizont den Zentralp. p . Aus der Proportion $ap':ap = (O')p':d$ bestimmt man die Grösse der Distanz ($O)p$). Die Ersatzp. ty' und tx' der Theilpunkte werden bestimmt, indem man $m(O')$ bzw. $n(O')$ von m , bzw. von n aus auf mn abmisst. Im Schnitt der Geraden aty' und atx' mit H erhält man die Theilp. ty und tx .

Nach diesen Vorbereitungen konstruirt man den perspektiv. Grundriss in einer beliebig tiefer liegenden wagerechten Ebene und denkt die Bildebene durch eine Kante, z. B. durch die Thurm-kante 1 gelegt. Unter Benutzung der Verschwindep. und der durch die Hauptkante gezogenen Lothrechten zeichnet man den Thurm mit der Portalhalle und die Treppen-Thürmchen auf, schliesst dann das Langhaus und das Querschiff an. Alsdann kann man die einzelnen Bautheile, Portale, Fenster, Strebepfeiler u. s. w. einzeichnen.

Um nun den Grundriss geometr. im Maassstab der eingeführten Bildebene zu zeichnen, muss man die einzelnen Strecken mittels der Theilp. ty und tx auf die durch Punkt 1 gelegte Grundlinie G übertragen. Hierbei ist zu beachten, dass die Strecken vorab durch perspektiv. Parallelen auf der Y - und X -Axe bestimmt werden müssen.

Den Grundriss kann man an einer belieb. Stelle aufzeichnen; es wird mit den beiden sich rechtwinkl. schneidenden Axen X und Y begonnen. Der Schnittp. derselben stellt die Kante 1 dar, durch welche die Bildfläche gelegt ist. Die auf

Fig. 79.



der Grundlinie G abzumessenden wirklichen Maasse werden auf die X -, bezw. Y -Axe übertragen, und wird darnach der Grundriss, so weit er aus der nun vorliegenden einen Perspektive überhaupt herleitbar ist, aufgezeichnet.

In ähnlicher Weise kann man den Aufriss geometr. zeichnen, indem man die wirkliche Grösse der Kante 1 aus der Perspektive entnimmt und als Höhe benutzt. Die Grössen der übrigen Kanten, bezw. sämtliche Höhen werden auf die Kante 1 übertragen, um in dieser die wirklichen Maassen zu erhalten.

Ist nun das Maass der in 1 errichteten Kante oder irgend eine Länge, welche an dem Gebäude vorkommt, nach Maass bekannt, so ist man im Stande, die sämtlichen Original-Maasse der an der perspektiv. Zeichnung vorkommenden Ausdehnungen des Gebäudes zu bestimmen. Um das ganze Gebäude geometr. aufzeichnen zu können, müssen noch weitere Ansichten, z. B. des Chors und des Inneren perspektiv. dargestellt sein, von welchen die gleichen Rekonstruktionen auszuführen sind.

Kommt kein Quadrat vor, aus dessen Diagonale der Diagonalp. bestimmt werden kann, sind jedoch gleiche Maasse der Fenster, Strebepfeiler, Pilaster u. s. w. an verschiedenen Seiten, welche unter 90° zusammen stossen, vorhanden, so zieht man durch die Endpunkte dieser gleichen Strecken Gerade nach den Verschwindep. x und y , welche sich in Quadraten schneiden.

Durch Ziehen der Diagonalen in letzteren bestimmt man den Diagonalp. In gleicher Weise sind zur Bestimmung dieses Punktes Gesims-, Gehrungs-Linien, Horizontal-Projektionen von Graten und Kehlen u. s. w. zu benutzen. —

Ist ein Bauwerk photographisch aufgenommen, so wird dasselbe nach der vorstehend gegebenen Anleitung geometrisch rekonstruiert; bekannt ist hierbei die Entfernung des Bildes von dem Projektions-Zentrum. Ist ferner noch der Abstand der photogr. Camera von dem Bauwerk bekannt, oder sind an einzelnen Stellen Maassstäbe aufgestellt gewesen, welche mit photographirt worden sind, so kann aus diesen Angaben das Bauwerk nach den Original-Maassen geometr. aufgetragen werden.

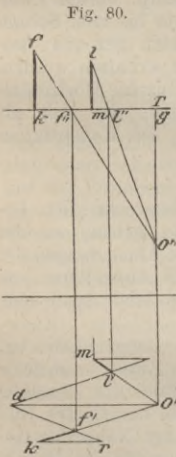
Sind keine Bestimmungs-Stücke vorhanden, aus denen der Diagonalp. herzuleiten ist, jedoch die Schenkel eines horizontalen rechten Winkels gegeben, welche eine andere Lage als die Hauptaxen des Gebäudes gegen die Bildebene haben, so kann man deren Verschwindep., und aus diesen, sowie aus denjenigen der Hauptaxen den Zentralp. herleiten. Nach dem früher Gesagten ist man alsdann im Stande, alle übrigen Hilfspunkte zu bestimmen.

Zur Rekonstruktion des Grund- und Aufrisses aus einer frontalen Innen-Perspektive bestimmt man den Zentralpunkt, den Horizont und aus quadrat. Eintheilungen des Fussbodens, der Decke u. s. w., den Distanzp. Dieser ist Theilp. für die nach dem Zentralp. gerichteten Geraden; mithin kann man die Maasse auf die Grundlinie einer eingeführten Bildebene übertragen und somit den Grundriss geometr. aufzeichnen.

Bei Beurtheilung der Fig. 79 ist zu berücksichtigen, dass an derselben nur das Verfahren erläutert, aber nicht eine wirkliche, genaue Rekonstruktion vorgeführt werden sollte.

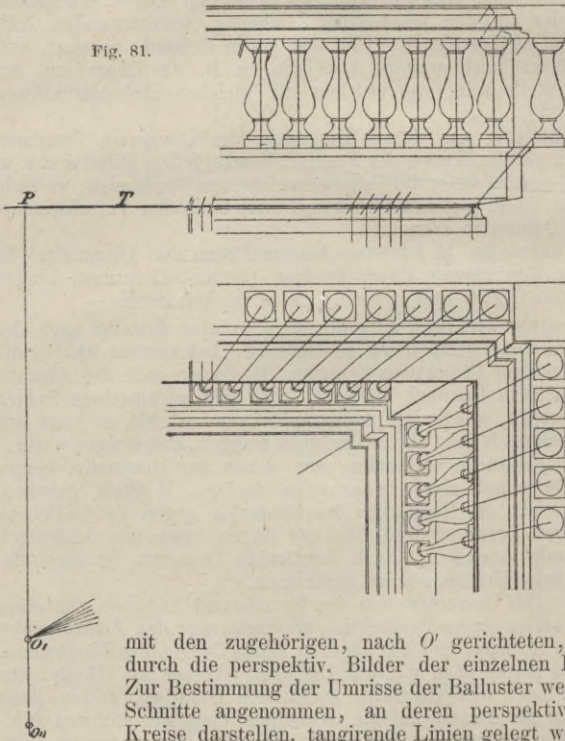
VI. Decken-Perspektive.

Damit bezeichnet man die Darstellung von Architekturen an Deckengemälden. Dieselbe unterscheidet sich von der bisher besprochenen Linear-Perspektive nur durch die Lage der Bildebene, da die Decke die Stelle der Bildebene vertritt; die darzustellenden Gegenstände werden über derselben angenommen. Der Gesichtspunkt wird unterhalb, am besten $1,6$ — $1,8$ m über dem Fussboden, auf welchem der Beschauer steht, gewählt. In Fig. 80 sind die Decke und der Gesichtspunkt O in horizontaler und vertikaler Projektion gegeben; das perspektiv. Bild des oberhalb der Decke liegenden Punktes f soll bestimmt werden. Im Schnitte des von O_1 nach f gezogenen Strahls mit der Bildebene erhält man das Bild des Punktes f . f' ist die Vertikal-Projektion und der senkrecht darunter liegende Punkt f'' die Horizontal-Projektion des Bildes. In dieser Weise kann jeder



fernere Punkt bestimmt werden. Für alle auf der Bildebene senkrecht stehenden Geraden ist O' der Verschwindep., z. B. für $k f$ und $m l$. Die Entfernung $O'' g$ des Punktes O'' von der Bildebene ist die Distanz; mit Hülfe eines Distanzp. kann ebenfalls der Punkt f' bestimmt werden. In irgend einer Richtung misst man von O' die Distanz $O'' g$ ab und zieht durch k eine Parallele zu $O' d$, welche gleich dem Abstand $f k$ des Punktes f von der Bildebene gemacht wird. Im Schnitt der Verbindungsgeraden $r d$ mit $k O'$ erhält man denselben Punkt j' als Bild des Punktes f .

Fig. 81.



Zur weiteren Erläuterung des Verfahrens ist in Fig. 81. die Ecke eines Zimmers dargestellt, über dessen Decke sich scheinbar eine Balustrade erheben soll. Die Bildebene T ist durch die Decke gelegt, O' bezeichnet die horizontale und O'' die vertikale Projektion des Gesichtsp.; $O' p$ giebt die Distanz an.

Aus O' zieht man Strahlen nach den Horizontal-Projektionen der Punkte des Sockels, des Deckgesimses, des Eckpfeilers und der Balluster. Aus O'' werden Strahlen nach den Punkten der Vertikal-Projektionen gezogen und deren Schnittpunkte mit der Bildebene bestimmt. Durch diese Schnittp. werden Lothrechte bis zum Schnitt

mit den zugehörigen, nach O' gerichteten, Strahlen gezogen, wodurch die perspektiv. Bilder der einzelnen Punkte erhalten werden. Zur Bestimmung der Umrisse der Balluster werden einzelne Horizontal-Schnitte angenommen, an deren perspektiv. Bilder, die sich als Kreise darstellen, tangirende Linien gelegt werden. Die Konstruktion ist durch die Figur hinreichend erklärt.*)

VII. Theater-Perspektive.

Die perspektiv. Einrichtung der Bühne eines Theaters bezweckt, den Beschauern ein möglichst natürliches Bild von der Oertlichkeit zu geben, an der die Handlung eines Stückes spielt. Zu vielen Oertlichkeiten sind die Abmessungen der Bühne nicht genügend, so dass es nöthig ist, durch passende Anstellung von Dekorationen dieselben zu vergrößern, d. h. die natürliche Perspektive durch eine künstliche zu unterstützen.

Während nun bei der gewöhnlichen Perspektive eine Ebene angenommen ist, auf welcher das Bild konstruirt wird, sind für den vorliegenden Zweck mehrere parallele Ebenen anzunehmen, auf denen von dem Dekorations-Maler die einzelnen Theile so dargestellt sein müssen, dass die Gesamtheit derselben ein natürliches Bild ergibt; streng genommen ist dies allerdings nur für die in der Nähe des Gesichtsp. sitzenden Zuschauer möglich. Da ein Zusammentreffen der im Hauptpunkt sich vereinigenden Horizontalen nur für die in der Nähe des Gesichtsp.

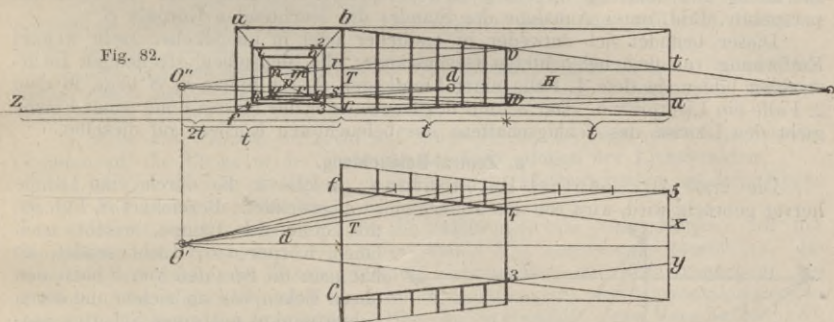
*) Die beiden Werke: „Andrea Pozzo. Die Maler- und Baumeister-Perspektive und: Schübler. *Perspectiva Picturae* (1719) enthalten reiche Sammlungen von Deckengemälden und Scheinkuppeln, welche, von hier maassgebenden Gesichtspunkten aus beurtheilt, für jeden Architekten Interesse haben.

sitzenden Zuschauer sichtbar ist, müssen solche Linien durch Gegenstände, welche sie zum Theil verdecken, unterbrochen werden, so dass es zur Unmöglichkeit wird, genauer zu erkennen, ob die Linien sich vereinigen oder nicht. Hieraus ist zu entnehmen, dass die Darstellung um so schwieriger ist, als das Beschauen des Bildes von den verschiedensten Punkten des Zuschauer-Raums aus erfolgt.

In dieser Hinsicht ist die Anordnung des Zuschauer-Raums im Wagner-Theater zu Bayreuth günstiger als diejenige der übrigen Theater, in welchen die Sitze sowohl zu ebener Erde, als auch in mehreren Logen-Reihen über einander angeordnet sind, während im Wagner-Theater die Sitze, nach dem Vorbild der antiken Amphitheater aufsteigen, gleichzeitig sich die Sitzreihen erweitern, ohne dass die gerade Richtung nach der Bühne zu verloren geht; dadurch ist die Anordnung derselben den Gesetzen der Perspektive unterworfen.¹⁾

Das Bühnenpodium steigt vom Proscenium zum Hintergrunde an, gewöhnlich mit 1 : 24; dies soll verhüten, dass den im Parket sitzenden Zuschauern die Schauspieler, wenn sie eine Stellung im Hintergrunde der Bühne einnehmen, kleiner erscheinen.

Kulissen sind, entweder stehend oder hängend, auf beiden Seiten der Bühne angeordnet. Z. B. ist das neue Theater in Frankfurt a. M. als Bogentheater eingerichtet, so dass die Kulissen nicht senkrecht stehen, sondern hängend Theile eines sogen. ausgeschnittenen Prospekts, eines Bogens werden. Oberhalb derselben sind quer laufende, vertikal aufgehängte Leinwand-Streifen (Soffiten) auf welchen Frieße, Decken, Gewölbe, Baumzweige dargestellt werden.



Auf dem Hintergrunde einer Dekoration ist die Haupt-Ansicht zum Abschluss der auf den Kulissen gemalten Einzeltheile der Wände enthalten.

Den Gesichtspunkt nimmt man an dem der Bühne gegenüber liegenden Ende des Saals und in einer Höhe an, welche der Augenhöhe eines am Proscenium stehenden Schauspielers gleich ist. Die rechtwinklige Projektion dieses Punktes auf die Bildebene (Vorhang) ist der Verschwindep. für die horizontalen Gesimse der Kulissen, welche rechtwinklig zur Bildebene gerichtet sind. Hierdurch kommen diese aber mit der aufsteigenden Schnittlinie des Podiums mit einer durch die Vorderkanten der Kulissen gelegten vertikalen Ebene in Konflikt, da sie einen höher liegenden Verschwinde-Punkt haben. Indem die Zuschauer geneigt sind, das Bühnenpodium, also auch die genannte Schnittlinie, als horizontal anzunehmen, werden scheinbar alle wirklichen horizontalen Wand-Gesimse nach dem Hintergrunde zu abfallen, was um so auffälliger dann sein wird, wenn sich Personen auf dem Bühnenpodium bewegen. Dieser Missstand lässt sich durch Verdeckung der genannten Schnittlinie beseitigen.

Nach einem Vorschlag von Förg²⁾ könnte dies auch dadurch geschehen, dass man die Gesimse parallel zum Bühnen-Fussboden und gleichzeitig die Kulissen nicht parallel zu einander, sondern nach dem Hintergrund zu divergirend aufstellte. Förg machte diese Angaben unter Hinweis auf die geneigte Lage der Gesimse an den oberen Kolonnaden bei der St. Peterskirche zu Rom.

¹⁾ S. Deutsche Bauzeitg. 1875, S. 1.

²⁾ Deutsche Bauztg. 1879 S. 129.

Will man die Bühne nur nach der natürlichen Perspektive einrichten, so hat man auf der Geraden cp , Fig. 82, die Tiefe der Bühne anzugeben, indem man das Maass t von c aus auf der Grundlinie abträgt und unter Benutzung des Distanzp. d den Schnittp. g auf cp bestimmt; $ghik$ würde die Grösse des Hintergrundes angeben. Um ein scheinbar grösseres Tiefenmaass zu erzielen, trägt man die beabsichtigte Tiefe, z. B. $2t$ von c aus ab, erhält durch Ziehen der Geraden sd den Schnittp. l auf cp und kann nun die Hintergrund-Grösse $lmnq$ bestimmen. Diese entspricht einer Entfernung des Hintergrundes $= 2t$ von der Vorhang-Ebene und kann in der Zeichnung durch die Höhe tu und die Breite xy angegeben werden. Durch Ziehen der Linien bt , cu und fx , cy bestimmt man auf dem im Abstände t aufgestellten Hintergrunde die wirkliche Höhe und Breite desselben, welche in der Vorder-Ansicht zu dem Rechteck 1, 2, 3, 4 zusammen gestellt werden können.

Die Buchstaben $bvwc$ und $f43c$ markiren den Bühnenraum im Durchschnitt und Grundriss. Sollen in diesem Raume Kulissen angeordnet werden, so muss man auf der scheinbaren Länge der Bühne $f5$ nach der beabsichtigten Zahl der Kulissen gleiche Theile annehmen, z. B. 6 und die Theilp. mit O , verbinden, um in den Schnitten mit der Linie $f4$ die Stellen der einzelnen Zwischenwände zu erhalten, welche nun auch im Aufriss angegeben werden können.

VIII. Schatten-Konstruktion in perspektiv. Zeichnungen.

Die Begrenzungs-Linien der Schatten konstruirt man entweder in der geometr. Zeichnung und überträgt dieselben nach perspektiv. Gesetzen, oder direkt in das perspektiv. Bild, unter Annahme des Standes des leuchtenden Körpers S .

Dieser befindet sich entweder in endlicher oder in unendlicher (sehr weiter) Entfernung von dem beleuchteten Gegenstande; die denselben streifenden Lichtstrahlen bilden in dem 1. Falle einen Lichtkegel, dessen Spitze in S liegt, in dem 2. Falle ein Lichtprisma. Der Schnitt des Kegels oder des Prisma's mit einer Fläche giebt den Umriss des Schlagschattens des beleuchteten Körpers auf dieselbe.

a. Zentral-Beleuchtung.

Die erste Art: Zentral-Beleuchtung, welche z. B. durch eine Lampe hervor gebracht wird, wird von den Malern meist angewendet. Bezeichnet S , Fig. 83,

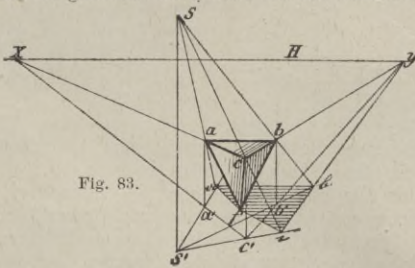


Fig. 83.

die Stelle der Lampe, welche nach einem Körper abc Licht sendet, so hat man die Strahlen von S nach den obren Ecken abc zu ziehen und deren Schnittpunkte mit einer Schatten auf-fangenden Fläche zu bestimmen. Soll dies z. B. die durch f gelegte wa-gerechte Ebene sein, so muss man S und die 3 Punkte abc auf diese Ebene projiziren und durch S' , a' , b' , c' Strahlen ziehen, welche die Lichtstrahlen in a , b , c schneiden. Diese Punkte sind die Schlag-schatten der oberen Ecken; werden dieselben mit einander und mit f verbunden, so erhält man die Schatten der Kanten und in der Figur abc den Schlagschatten des Körpers auf die wagerechte Ebene. Aus der Figur ist zu ersehen, dass die Schatten cb , bezw. ca dieselben Verschwinde-Punkte wie cb' und $c'b'$, bezw. ca und $c'a'$ haben.

b. Natürliche Beleuchtung.

Die zweite Art, die natürl. Beleuchtung wird vorzugsweise bei Architektur-Darstellungen voraus gesetzt. Hierbei können die Lichtstrahlen als parallele Geraden angenommen werden und haben als solche in der Zeichnung einen Verschwindepunkt S . Die Sonne kann in vor, oder hinter der Bildebene stehend angenommen werden; den Verschwindep. der Lichtstrahlen kann man entweder beliebig annehmen, wodurch der Stand der Sonne bestimmt ist, oder man kann denselben aus der in horizontaler und vertikaler Projektion gegebenen Richtung der Lichtstrahlen konstruiren. Steht:

1. die Sonne in der Bildebene, so sind die Lichtstrahlen und deren horizontale Projektionen der Bildebene parallel.

Letztere sind demnach in der Perspektive der Grundlinie parallel. Um den Schlag-

schatten eines Körpers auf der Grundebene zu bestimmen, hat man durch die
 obern Ecken deselben zu der gegebenen Richtung des Lichtstrahls Parallelen und durch die entsprechenden untern Ecken zu der Grundlinie Parallelen zu ziehen. Durch Verbindung der Schnittp., welche die Schlag-

sind, erhält man die Schattengrenze; Fig. 84.

2. Die Sonne steht vor oder hinter der Bildebene.

Bei der Annahme des Sonnenstandes vor der Bildebene liegt der Verschwindep. der Lichtstrahlen unter dem Horizont; über demselben liegt der Verschwindep., wenn die Sonne hinter der Bildebene steht. In vielen Fällen wird der Stand der Sonne vor der Bildebene, links vom Beschauer angenommen.

Regeln. 1. Der Schlagschatten einer Geraden auf eine Fläche liegt in der Schnittlinie der in der Richtung der Lichtstrahlen durch sie geführten Schatten-Ebene mit der Fläche.

2. Der Schatten einer Geraden auf eine Ebene ist eine Gerade; er wird bestimmt durch den Schatten zweier Punkte oder durch einen Punkt und den der Schattenlinie zugehörigen Verschwindepunkt.

3. Steht eine Gerade lothrecht auf einer Ebene so liegt der Schatten der Geraden auf die Ebene in der Richtung der Projektionen der Lichtstrahlen.

4. Ist eine Gerade parallel zu einer Ebene, so ist ihr Schatten auf diese Ebene parallel und gleich der Geraden.

Andeutung der Lösung. Ist die Schatten-Grenze eines Körpers auf der Grundebene zu bestimmen, so muss man, wie vorstehend ausgeführt, die Schnittp. der durch die Ecken gelegten Lichtstrahlen mit der Grundebene bestimmen. Am einfachsten sind diese unter Zuhilfenahme der horizontalen Projektionen der Lichtstrahlen zu erlangen. Diese haben ebenfalls einen Verschwindep. S' , der im Horizont lothrecht über oder unter dem Verschwindep. der Lichtstrahlen liegt, je nachdem die Sonne vor oder hinter der Bildebene steht.

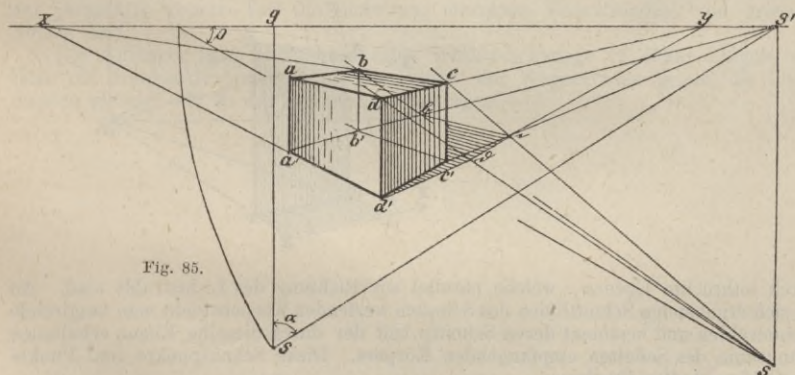


Fig. 85.

Beispiele. Steht die Sonne vor der Bildebene, links vom Beschauer, so liegt S rechts unter dem Horizont, S' lothrecht über S im Horizont Fig. 85. Zur Bestimmung des Schlagschattens ziehe man Strahlen von S an die obern Ecken des Körpers und von S' an die zugehörigen horizontalen Projektionen der Ecken.

In den Schnitten entsprechender Geraden erhält man die Schatten der obren Punkte, welche zur Bestimmung der Schatten-Grenze verbunden werden.

Steht die Sonne hinter der Bildebene, links vom Beschauer, so liegt S links über dem Horizont und S' lothrecht unter S im Horizont, Fig. 86. Man ziehe von S' nach den in der Grundebene liegenden Punkten Gerade und schneide dieselben durch Strahlen, welche von S durch die entsprechenden obren Ecken des Körpers gezogen werden. Die Ausführung ist aus Fig. 85, 86 zu ersehen. In diesen ist ferner gezeigt, wie man S und S' bestimmen kann, wenn die Richtung der Lichtstrahlen bekannt ist.

Nimmt man die Strahlen überein stimmend mit der in der geometr. Schatten-Konstruktion üblichen Annahme, also in der Richtung der Diagonalen eines Würfels, dessen eine Seitenfläche parallel der Bildebene ist, von links oben, vorn nach rechts unten, hinten, so liegt der Verschwindep. der horizontalen Projektionen der Strahlen in dem rechts vom Zentralp. liegenden Distanzp. und derjenige der Strahlen liegt lothrecht unter demselben in einem Abstände gleich der Distanz.

Ist der Schlagschatten, den ein Körper auf einen andern Körper wirft, zu bestimmen, so schneide man die beiden Körper

Fig. 86.

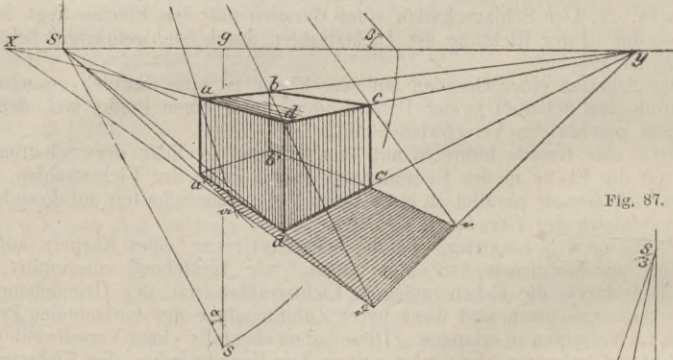
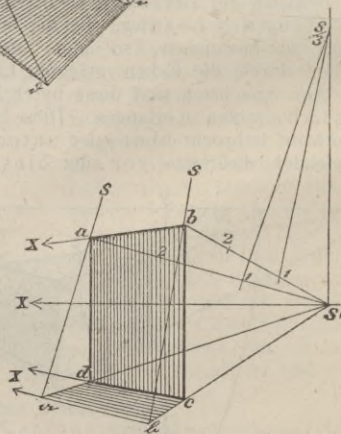


Fig. 87.



durch lothrechte Ebenen, welche parallel zur Richtung des Lichtstrahls sind. An die sich ergebenden Schnittlinien des Schatten werfenden Körpers zieht man tangirende Lichtstrahlen und bestimmt deren Schnittp. mit der durch dieselbe Ebene erhaltenen Schnittlinie des Schatten empfangenden Körpers. Diese Schnittpunkte sind Punkte des Schlagschatten-Umrisses.

Liegt S ausserhalb des Zeichen-Brettes, so müssen die Strahlen nach dem unzugänglichen Verschwindep. gezogen werden; man kann zur Lösung der Aufgabe auch mit einem Theil z. B. mit $\frac{1}{3}$ des Abstandes SS' arbeiten; Fig. 87.

Theile bS' in 3 gleiche Theile, verbinde den Punkt 1 mit $\frac{S}{3}$, so ist der durch b zu legende Strahl parallel zu diesen Geraden. In gleicher Weise verfährt man für andere Punkte.

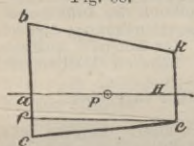
Im übrigen mag hier nochmals ausdrücklich auf die im Eingange kurz berührte Lösung hingewiesen werden, dass man jede Aufgabe der perspektiv. Schatten-Konstruktion dadurch lösen kann, dass man die Schatten-Konstruktion zunächst geometrisch (nach orthogonaler Projektion) ausführt und die so erlangten Bestimmungs-Stücke der Schatten-Figuren alsdann in die perspektiv. Zeichnung umsetzt, nach den unter II. (S. 376 ff.) gegebenen Regeln. Indess ist diese Verfahrungsweise umständlich und nur rätlich, wenn es sich um sehr schwierige Fälle, wie z. B. die Konstruktion von Schlagschatten auf runden oder geneigten Flächen handelt.

IX. Zeichnen nach der Natur.

Die Distanz ist so zu wählen, dass man ein darzustellendes Gebäude — ohne den Kopf bewegen zu müssen —, mit einem Blick übersehen kann; die Grenzen der Zeichnung können leicht fest gestellt werden. Zur Bestimmung des Horizonts und des Zentralp. hält man mit ausgestrecktem Arm ein dünnes, flaches Lineal, welches in Millimeter eingetheilt ist, wagerecht so vor das Auge, dass man weder Unter- noch Aufsicht auf die Fläche des Lineals hat.

Der Anfänger steckt am besten einen Stock so weit vom Auge ab, als er den Arm ausstrecken kann, vor sich in die Erde, um das Lineal anhalten zu können. Auf dem durch dasselbe bezeichneten Horizont merkt man die Lage des Zentralp. p , welche durch einen in normaler Richtung vom Auge gegen den Horizont gehaltenen Bleistift bestimmt werden kann, sowie den Abstand dieses Punktes von einer lothrechten Kante.

Fig. 88.



In der Zeichnung (Fig. 88) giebt man den Horizont, den Punkt p und die lothrechte Kante an. Die Grösse der über und unter dem Horizont sichtbaren Kantenstücke ab und ac bestimmt man durch Abschätzen auf dem lothrecht gehaltenen Lineal. Soll nun eine andere lothrechte Kante gezeichnet werden, so hält man das Lineal wagerecht, so dass der untere Punkt e eben sichtbar bleibt und merkt den Schnittp. f dieser Wagerechten mit bc , sowie die Grösse des Abstandes ef .

Die abgeschätzten Maasse ef und af werden in die Zeichnung übertragen und wird durch e eine Lothrechte als Bild der Kante gezeichnet; die Grösse ek derselben wird abgeschätzt u. s. w. Vorab überträgt man die scheinbaren Grössen der Hauptkanten und hierauf diejenigen der Einzelheiten, wobei die Kenntniss der perspektiv. Gesetze und die Benutzung einzelner Verschwindep. von grossem Nutzen sind.

Der Anfänger kann auch durch eine Winkel-Schmiege (2 dünne Lineale von Holz, die drehbar verbunden sind) die Winkel der Wagerechten gegen die Lothrechten messen und in die Zeichnung übertragen.

IV.

Resultate aus der reinen Mathematik.

Bearbeitet von F. Posern, Reg.-Baumeister zu Berlin.

Litteratur.

Die Zahl der brauchbaren Hand- und Lehrbücher ist sehr gross; es haben daher nur einige der verbreitetsten hier Aufnahme gefunden.

Für das **Gesamt-Gebiet** der nachstehenden Sammlung von Resultaten vergl. man:

Schloemilch. Handbuch der Mathematik; unter Mitwirkung von Reidt und Heger. Breslau 1880/81, Trewendt. (Dasselbe ist vorwiegend zu Grunde gelegt.)

Für **Elementar-Mathematik**:

Aschenborn. Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Geometrie. Berlin 1867, 1873, Decker. — Baltzer. Elemente der Mathematik. Leipzig 1875, Hirzel. — Reidt. Elemente der Mathematik. Berlin 1881, Grote.

Für **Höhere Analysis** und deren Anwendungen:

Autenheimer. Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung. Weimar 1875, Voigt. — Cournot. Theorie der Funktionen; deutsch von Schnuse, Darmstadt 1845. — Duhamel. Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung; deutsch von Wagner, Braunschweig 1855, Vieweg. — Kulp. Differential- u. Integralrechnung. Darmstadt. — Minding. Handbuch der Differential- u. Integralrechnung. Berlin. — Navier. Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung; deutsch von Wittstein, Hannover 1875, Hahn. — Schloemilch. Compendium der höheren Analysis. Braunschweig 1874, 1881, Vieweg. — Teilkampf. Grundzüge der höheren Mathematik. Hannover 1872. —

Einige Spezialwerke sind in Fussnoten etc. zu den einzelnen Abschnitten angegeben.

Für **Geschichte der Mathematik**:

Hankel. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874, Teubner. — Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1882, Teubner.

Formel-Sammlungen:

Hütte. Ingenieurs Taschenbuch. Berlin, Ernst & Korn. — Ligowski. Taschenbuch für Mathematik. Berlin, Ernst & Korn. — Lacroix. *Carnet de l'ingénieur*, Paris.

Aufgaben-Sammlungen:

Bardey. Aufgaben-Sammlung über alle Theile der Elementar-Mathematik. Leipzig 1882, Teubner. — Bardey. Algebraische Gleichungen. Leipzig 1883, Teubner. — Heis. Sammlung von Beispielen aus der Arithmetik und Algebra. Köln 1883, Dumont-Schauberg. — Meier-Hirsch. Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Buchstaben-Rechnung und Algebra. Berlin 1881, Dunker. — Reidt. Planimetrische Aufgaben. Breslau 1882, Trewendt. — Reidt. Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie. Leipzig 1877, Teubner. — Lieblein. Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. Prag, Satow. — Schloemilch. Uebungsbuch zum Studium der höhern Analysis. Leipzig 1882, Teubner. — Sohnke. Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Halle 1875/77, Schmidt.

Logarithmen-Tafeln:

Vega. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch (7stellig). Berlin 1883, Weidmann. — Schroen. Siebenstellige gemeine Logarithmen. Braunschweig 1882, Vieweg. — Bremiker. Logarithm.-trigonometr. Handbuch (6stellig). Berlin 1883, Nikolai. — Schloemilch. Fünfstellige logarithm.-trigonometr. Tafeln. Braunschweig 1882, Vieweg. — Albrecht. Logarithm.-trigonometr. Tafeln (5stellig). Berlin 1884, Stankiewicz. — Rühmann. Logarithm.-trigonometr. und andere nützliche Tafeln. Leipzig 1883, Arnold.

Vorbemerkung.

Es werden in diesem Abschnitt folgende Bezeichnungen durchgängig gebraucht werden:

l_n = natürlicher Logarithmus.

lg = gemeiner Logarithmus.

lg_a = Logarithmus nach der Basis a .

$\binom{n}{p}$ = p ter Binomial-Koeffizient der Potenz n .

$F(x), f(x), g(x), \psi(x)$ etc. = Funktion von x .

$df(x, y, z \dots)$ = vollständiges Differential.

$\frac{\partial f(x, y, z \dots)}{\partial x} dx$ = partielles Differential nach x .

$f'(x); f''(x); f'''(x); f^{IV}(x)$ u. s. w. = 1., 2., 3., 4. u. s. w. Abgeleitete.

A. Arithmetik und Algebra.

I. Reihen.

a. Einfache arithmetische Reihen.

Für die arithmetische Reihe: $a, a + d, a + 2d, a + nd \dots$ ist:

1. das n te Glied $\dots u = a + (n - 1)d$
2. die Summe der n ersten Glieder $\dots S = \frac{2a + (n - 1)d}{2} n = \frac{a + u}{2} n$

Hieraus ergibt sich der Satz:

Die Summe einer einfachen arithmetischen Reihe ist gleich dem arithm. Mittel aus dem ersten und letzten Gliede, multipliziert mit der Anzahl der Glieder der Reihe.

Beispiel. Die Geschwindigk. eines fallenden Körpers ist zur Zeit $t_0 = v$; welches ist die Endgeschwindigkeit nach weitem t Sek. und der in der Zeit t zurück gelegte Weg, wenn g die Beschleunigung der Schwere.

Aus (1) folgt $v_1 = v + gt$; aus (2) $s = vt + \frac{gt^2}{2}$

b. Höhere arithmetische Reihen.

Ist: $a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \dots$ eine höhere arithm. Reihe

$$\left. \begin{array}{l} \triangle(a_0) \quad \triangle(a_1) \quad \triangle(a_2) \quad \triangle(a_3) \dots \text{ihre 1te} \\ \triangle_2(a_0) \quad \triangle_2(a_1) \quad \triangle_2(a_2) \dots \text{ihre 2te} \end{array} \right\} \text{Differenz-Reihe}$$

u. s. w.

so ist das $n + 1$ te Glied der Hauptreihe:

1. $a_n = a_0 + n\triangle(a_0) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \triangle_2(a_0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \triangle_3(a_0) + \dots$
und die Summe der n ersten Glieder von a_0 bis a_{n-1}
2. $S = na_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \triangle a_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \triangle_2(a_0) + \dots$

Ist die Reihe von der k ten Ordnung, so schliesst sowohl die Formel für a_n als auch die für S mit dem Gliede ab, welches $\triangle_k(a_n)$ enthält. — Die Gl. (1) dient auch zum Interpoliren zwischen die Glieder einer gegebenen Reihe für gebrochene Werthe von n .

Beispiel. Es sei $\cot g. 50^\circ 42' 14.4''$ zu berechnen, wenn aus Tabellen die Werthe der $\cot g.$ für volle Minuten zu entnehmen sind. Die Reihe der bezügl. Werthe kann als eine höhere arithmet. Reihe angesehen werden und man erhält:

$a_0 = \cot g. 50^\circ 42' = 10,01871$	\triangle	\triangle_2	\triangle_3
$a_1 = 43' = 9,98931$	$-0,02940$	$+0,00016$	$+0,00002$
$a_2 = 44' = 9,96007$	$-0,02924$	$+0,00018$	
$a_3 = 45' = 9,93101$	$-0,02906$		

Die Einheit für n ist hier = 60, also ist für das zwischen a_0 und a_1 zu interpolirende Glied $n = \frac{14,4}{60} = 0,24$; sonach: $a_n = 10,01871 - 0,24 \cdot 0,02940 - 0,12 \cdot 0,76 \cdot 0,00016 = 10,01164$, da alle höhern Differenzen als $\triangle_2(a_0)$ vernachlässigt werden können.

c. Geometrische Reihen (Progressionen).

Für die geometrische Reihe $a, ax, ax^2, ax^3 \dots$ ist:

1. das n te Glied $\dots u = ax^{n-1}$
2. die Summe der n ersten Glieder $\dots S = a \frac{x^n - 1}{x - 1}$
3. Ist $n = \infty$ und x ein echter Bruch, so ist die Summe der Reihe eine endliche bestimmte Grösse und zwar: $S = \frac{a}{1 - x}$

d. Einige besondere Reihen.

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $p + (p+1) + (p+2) + \dots u = \frac{(u+p)(u-p+1)}{2}$
3. $2 + 4 + 6 + 8 + \dots 2n = n(n+1)$
4. $1 + 3 + 5 + 7 + \dots 2n - 1 = n^2$
5. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

In Gleich. (2) bezeichnet u den Werth des letzten Gliedes, in den übrigen Gl. (1 u. 3-7) n dagegen eine Stellenzahl.

$$6. 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \right]^2$$

$$7. 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

Für den Fall, dass die Anzahl der Glieder = ∞ wird:

$$8. 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \dots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

e. Binomische Reihe.

$$1. (a \pm b)^n = a^n \pm an^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots$$

Die allgem. Form des p ten Binomial-Koeffizienten ist:

$$2. \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} = \binom{n}{p} \text{ oder auch } (n)_p$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Binomial-Koeffizienten sind:

$$3. \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad 4. \binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$$

Nach (4) können die Binomial-Koeffizienten für eine beliebige Potenz durch Addition aus denjenigen der vorher gehenden Potenz berechnet werden; man erhält dabei das sogen. Pascal'sche Dreieck:

n = 0.	1
1.	1 1
2.	1 2 1
3.	1 3 3 1
4.	1 4 6 4 1
5.	1 5 10 10 5 1
6.	1 6 15 20 15 6 1
7.	1 7 21 35 35 21 7 1

f. Transzendente Reihen.

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$2. a^x = 1 + \frac{(\ln a)^1}{1!} x + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} x^3 + \dots$$

$$3. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$4. \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

$$5. \ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right)$$

$$6. e = 2, 718 \ 281 \ 828 \ 459$$

$$7. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$8. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$9. \arctang x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$10. \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$11. \frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} - \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} - \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} + \dots \text{ (Formel v. Wallis)}$$

$$12. \pi = 3, 141 \ 592 \ 653 \ 589 \ 793.$$

g. Konvergenz der Reihen.

1. Eine unendliche Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel ist konvergent, wenn die absoluten Werthe der Glieder von einer bestimmten Stelle an bis zu der Grenze o abnehmen.

2. Ist eine Reihe von der allgemeinen Form:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n \text{ gegeben so gilt die Regel:}$$

Wenn $\lim. \frac{q_{m+1}}{q_m} < 1$ so konvergiert die Reihe;

„ $\lim. \frac{q_{m+1}}{q_m} > 1$ so divergiert die Reihe;

„ $\lim. \frac{q_{m+1}}{q_m} = 1$ so ist eine besondere Untersuchung erforderlich. In

den meisten Fällen führt die Anwendung des folgenden Satzes zum Ziele:

Für $\lim. m \left(1 - \frac{q_{m+1}}{q_m} \right) > 1$ konvergiert die Reihe,

„ $\lim. m \left(1 - \frac{q_{m+1}}{q_m} \right) < 1$ divergiert die Reihe

Beispiel. Gegeben sei die Reihe:

$$\frac{x}{1} + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

man erhält: $\lim_{q_m \rightarrow 1} \frac{q_m + 1}{q_m} = \lim_{(2m-3) \rightarrow 1} \frac{(2m-3)^2}{(2m-3)(2m-1)} x^2 = \lim_{(2-\frac{3}{m}) \rightarrow 1} \frac{(\frac{2-3}{m})^2}{(\frac{2-3}{m})(\frac{2-1}{m})} x^2 = x^2.$

Ist $x < 1$ so konvergiert die Reihe; ist $x > 1$ so divergiert dieselbe. Für $x=1$ untersucht man

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \left(1 - \frac{q_m + 1}{q_m} \right) = \lim_{(2m-2) \rightarrow \infty} \frac{m(6m-7)}{(2m-2)(2m-1)} = \lim_{(\frac{6-\frac{7}{m}}{2-\frac{2}{m}})(\frac{2-\frac{1}{m}}{2-\frac{1}{m}})} = \frac{3}{2} > 1$$

Die vorgelegte Reihe ist also für den Werth $x=1$ konvergent.

h. Interpolation.

Es sei $y=f(x)$ eine eindeutige Funktion von x , welche mit ihren Ableitungen innerhalb der betrachteten Intervalle stetig veränderlich bleibt. Die Form der $f(x)$ sei unbekannt.

Man kenne eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ und die denselben entsprechenden Werthe $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Für ein x , welches in der Nähe von x_1, x_2, x_3, \dots liegt, findet man näherungsweise das zugehörige y nach der Formel von Lagrange:

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \dots + A_n y_n$$

worin zu setzen:

$$A_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}; A_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)};$$

$$A_n = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Beispiel: Es seien für eine Kurve, deren Gleichung unbekannt ist, gemessen

$x = 1 \quad 3 \quad 4 \quad 6$ $y = 4 \quad 20 \quad 35 \quad 84$; man erhält:

$$y = \frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} 4 + \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} 20 + \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)} 35 +$$

$$+ \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} 84 \text{ oder: } y = \frac{1}{6} (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$$

durch welche Beziehung näherungsweise die Gleichung der Kurve zwischen den beobachteten Abszissen-Werthen gegeben ist.

II. Zinseszinsen- und Renten-Rechnung.

Es bezeichnen: K_0 das Anfangs-Kapital, p die jährlichen Zinsen von 1, (z. B. $p = 0,05$), K_t den Endwerth des Kapitals nach t Jahren; ferner werde gesetzt: $1 + p = q$ (Diskont-Faktor). Es ist:

1. Wenn die Zinsen am Ende jedes Jahres zum Kapital geschlagen werden: $K_t = K_0 q^t$
2. " " " in jedem Zeit-Element dt " " " " " $K_t = K_0 e^{t p}$
3. Wird am Ende eines jeden Jahres ein konstanter Betrag r zum Kapital hinzu gefügt oder fort genommen, so wächst $K_t = K_0 q^t \pm \frac{r(q^t - 1)}{p}$ das Anfangs Kapital in t Jahren auf die Summe:
4. Das Kapital K_0 erreicht diesen Betrag K_t in $t = \frac{\lg(p K_t \pm r) - \lg(p K_0 \pm r)}{\lg q}$ Jahren:
5. Für den speziellen Fall, dass r negativ und grösser als die jährlichen Zinsen des Kapitals ist, wird das Kapital K_0 aufgezehrt nach Jahren: $t = \frac{\lg r - \lg(r - p K_0)}{\lg q}$
6. Soll eine Rente r für die folgenden n Jahre gekauft werden, so hat man dafür zu zahlen: $K = \frac{r(q^n - 1)}{p q^n}$

III. Kombinatorik.

a. Permutationen.

1. Zahl der Permutationen von n ungleichen Elementen $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$
2. Zahl der Permutationen von n Elementen, } $= \frac{n!}{p!} = (p+1)(p+2)\dots n$ worunter p von gleicher Art sind:
3. Zahl der Permutationen von n Elem., worunter } $= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ $n-m$ der einen und m der andern Art sind:
4. Zahl der Permutationen von n Elementen, } $= \frac{n!}{p!q!r!}$ worunter je p, q, r gleicher Art sind:

Beispiel 1. Die Permutationen aus den 3 Elementen a, b, c sind:

$\begin{array}{ccc|ccc} abc & & & bac & & cab \\ acb & & & bca & & cba \end{array}$

Beispiel 2. Die Permutationen aus den 4 Elementen $aabc$ sind:

$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} aabc & abac & acab & baac & bcaa & caab & cbaa \\ aacb & abca & acba & bacaa & caba & & \end{array}$

b. Variationen und Kombinationen.

1. Zahl der Variationen zur p ten Klasse für n Elementen mit Wiederholungen = n^p

2. Dsgl. ohne Wiederholungen = $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$

3. Zahl der Kombinationen zur p ten Klasse mit n Elementen ohne Wiederhol. $\left\{ \begin{array}{l} n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad p \end{array} \right. = \binom{n}{p}$

4. Desgl. mit Wiederholungen = $\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}$

Bemerk. Man variirt und kombinirt ohne oder mit Wiederholungen, je nachdem dasselbe Element in eine Komplexion nur ein Mal oder wiederholt eingeführt werden darf. Für die 3 Elemente a, b, c erhält man z. B. folgende Variationen und Kombinationen 2ter Klasse:

Variationen mit Wiederholungen: $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.$
 Dsgl. ohne " $ab, ac, ba, bc, ca, cb.$
 Kombinationen mit " $aa, ab, ac, bb, bc, cc.$
 Dsgl. ohne " $ab, ac, bc.$

IV. Determinanten.

Litteratur: Baltzer. Theorie u. Anwendung der Determinanten. Leipzig 1881, Hirzel. — Günther. Lehrbuch der Determinanten-Theorie. Erlangen 1875, Beisold.

1. Eine Determin. von n Zeilen u. n Kolonnen (n^2 Elementen) ist vom n ten Grade.

2. Die allgemeine Form der Determinanten ist:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 a_1^4 \dots a_1^n \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 a_2^4 \dots a_2^n \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 a_3^4 \dots a_3^n \\ \vdots \\ a_n^1 a_n^2 a_n^3 a_n^4 \dots a_n^n \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n$$

3. Eine Determinante wird aufgelöst, indem man als 1tes Glied der Auflösung die vom 1ten Element der 1ten bis zum letzten Element der letzten Zeile gehende Diagonal-Reihe bildet und die übrigen Glieder durch Permutation der untern oder obern Indizes ableitet.

4. Die Determinante n ten Grades enthält in ihrer Auflösung $n!$ Glieder, welche zur Hälfte positiv und zur Hälfte negativ sind, je nachdem die Zahl der Inversionen in der Permutation der Indizes gerade oder ungerade ist.

Eine Inversion bildet jedes Elementen-Paar des Gliedes, in welchem ein dem zu permutirenden Index nach höheres Element einem niedern voraus geht. (Das Glied $- a_2^1 a_5^2 a_3^3 a_1^4 a_4^5$ enthält z. B. 5 Inversionen der untern, zu permutirenden Indizes: $a_2^1 a_1^4, a_5^2 a_3^3, a_5^2 a_1^4, a_5^2 a_4^5, a_3^3 a_1^4$, ist also negativ.

5. Die Berechnung einer Determinante vom n ten Grade kann auch erfolgen indem man sie in n Unter-Determinanten vom $(n-1)$ ten Grade zerlegt; die allgemeine Form dieser Auflösung ist:

$$R = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \dots + a_i^k A_i^k + \dots + a_n^k A_n^k \text{ oder:}$$

$$R = a_i^1 A_i^1 + a_i^2 A_i^2 + \dots + a_i^k A_i^k + \dots + a_i^n A_i^n$$

Die Unter-Determinante ist positiv oder negativ, je nachdem $i+k$ gerade oder ungerade ist. Die Unter-Determinante zu Element a_i^k wird erhalten, wenn man in der ursprünglichen Determinante die i te Zeile und die k te Kolonne streicht.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \\ a_3^1 a_3^2 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 a_2^3 \\ a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 a_1^3 \\ a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} + a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 a_1^3 \\ a_2^2 a_2^3 \end{vmatrix}$$

6. In einer Determinante kann man die Zeilen mit den Kolonnen vertauschen.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \\ a_2^1 a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 a_2^1 \\ a_1^2 a_2^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 a_2^1 a_3^1 \\ a_1^2 a_2^2 a_3^2 \\ a_1^3 a_2^3 a_3^3 \end{vmatrix}$$

7. Vertauscht man in einer Determinante 2 Zeilen oder 2 Kolonnen mit einander, so ist die neue Determinante gleich der ersten mit entgegen gesetztem Zeichen.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1^2 a_1^1 a_1^3 \\ a_2^2 a_2^1 a_2^3 \\ a_3^2 a_3^1 a_3^3 \end{vmatrix}$$

8. Sind in einer Determinante die Elemente zweier Zeilen oder zweier Kolonnen entsprechend gleich, so ist sie = 0.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_1^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Sind alle Elemente einer Zeile oder Kolonne mit Ausnahme eines einzigen = 0, so reduziert sich die Determinante auf das Produkt dieses einen Elements mit der zu ihm gehörigen Unter-Determinante.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 0 0 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 a_2^3 \\ a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 0 a_2^3 \\ a_3^1 0 a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^2 a_2^3 \\ a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix}$$

10. Kehrt man die Vorzeichen sämtlicher Elemente irgend einer Zeile oder Kolonne um, so behält die Determinante ihren absoluten Werth und ändert ihr Vorzeichen.

11. Der Werth einer Determinante wird nicht geändert, wenn man zu dem Element einer Zeile oder Kolonne das ihr entsprechende Element einer parallelen Reihe, letztere multipliziert mit einem und demselben Faktor, addirt oder subtrahirt.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 \pm p a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 \pm p a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 \pm p a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 \pm p a_2^1 a_1^2 \pm p a_2^2 a_1^3 \pm p a_2^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

12. Eine Determinante wird mit einer Zahl multipliziert oder dividirt, indem man alle Elemente einer Zeile oder Kolonne mit derselben multipliziert oder dividirt.

$$v \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p a_1^1 p a_1^2 p a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ p a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ p a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix}$$

13. $\begin{vmatrix} a_1^1 + b_1^1 & a_1^2 + b_1^2 \\ a_2^1 + b_2^1 & a_2^2 + b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \\ a_2^1 a_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1^1 b_1^2 \\ b_2^1 b_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1^1 a_1^2 \\ a_2^1 b_1^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^2 \\ b_2^1 a_1^2 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 - a & x_2 - a & x_3 - a \\ y_1 - b & y_2 - b & y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 x_1 - a & y_1 - b \\ 1 x_2 - a & y_2 - b \\ 1 x_3 - a & y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 x_1 y_1 \\ 1 x_2 y_2 \\ 1 x_3 y_3 \end{vmatrix}$

15. Multiplikation zweier Determinanten.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \\ a_2^1 a_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1^1 b_1^2 \\ b_2^1 b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_1^2 b_1^2 & a_1^1 b_2^1 + a_1^2 b_2^2 \\ a_2^1 b_1^1 + a_2^2 b_1^2 & a_2^1 b_2^1 + a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n \times \Sigma \pm b_1^1 b_2^2 b_3^3 \dots b_n^n = \Sigma \pm [(a_1^1 b_1^1 + a_1^2 b_1^2 + a_1^3 b_1^3 + \dots) \cdot (a_2^1 b_2^1 + a_2^2 b_2^2 + a_2^3 b_2^3 + \dots) \dots]$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1^1 b_1^2 \\ b_2^1 b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1^1 b_1^2 \\ 0 & b_2^1 b_2^2 \end{vmatrix}$$

V. Gleichungen.

a. Gleichungen 1. Grades.

a. Allgemeine Auflösung.

Ein System von n Gl. mit n Unbekannten gegeben; die allgemeine Form ist:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \dots + a_1^k x_k + \dots + a_1^n x_n &= c_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \dots + a_2^k x_k + \dots + a_2^n x_n &= c_2 \\ a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 + \dots + a_3^k x_k + \dots + a_3^n x_n &= c_3 \\ \vdots & \vdots \\ a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + a_i^3 x_3 + \dots + a_i^k x_k + \dots + a_i^n x_n &= c_i \\ \vdots & \vdots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \dots + a_n^k x_k + \dots + a_n^n x_n &= c_n \end{aligned}$$

Der Werth einer beliebigen Unbekannten ist:
$$x_k = \frac{\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \dots a_{k-1}^{k-1} c_k a_{k+1}^{k+1} \dots a_n^n}{\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \dots a_{k-1}^{k-1} a_k^k a_{k+1}^{k+1} \dots a_n^n}$$

Ist ein System von n homogenen Gl. gegeben, für welche also die Glieder ohne Unbekannte = 0 sind, so bestehen für die Unbekannten von 0 verschiedene Werthe nur dann, wenn der Bedingung genügt ist:

$$\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n = 0$$

Denn nur unter Erfüllung dieser Bedingung erscheint die Gl. für x_k unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$.

Die n homogenen Gl. genügen nicht zur Bestimmung der n Unbekannten, sondern es können nur die Verhältnisse derselben bestimmt werden. Dividirt man die n Gl. durch eine der Unbekannten, so erhält man die $n - 1$ neuen Unbekannten:

$\frac{x_1}{x_k}, \frac{x_2}{x_k}, \frac{x_3}{x_k}, \dots$. Die n Gl. haben dann n Bedingungen zu genügen, nämlich den $n - 1$ Unbekannten und der Bedingung: $\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n = 0$.

β. Mit 2 Unbekannten.

$$\left. \begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 &= c_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad x_1 = \frac{c_1 a_2^2 - c_2 a_1^2}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2}; \quad x_2 = \frac{c_2 a_1^1 - c_1 a_2^1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2}$$

γ. Mit 3 Unbekannten.

$$\left. \begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 &= c_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 &= c_2 \\ a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 &= c_3 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\Sigma c_1 a_2^2 a_3^3}{\Sigma a_1^1 a_2^2 a_3^3} \\ x_2 &= \frac{\Sigma a_1^1 c_2 a_3^3}{\Sigma a_1^1 a_2^2 a_3^3} \\ x_3 &= \frac{\Sigma a_1^1 a_2^2 c_3}{\Sigma a_1^1 a_2^2 a_3^3} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} & \text{Worin z. B. d. Zähler für } x_2: \\ & \left| \begin{array}{l} a_1^1 c_1 a_1^3 \\ a_2^1 c_2 a_2^3 \\ a_3^1 c_3 a_3^3 \end{array} \right| \end{aligned} \right\}$$

b. Gleichungen 2. Grades.

$$1. \quad ax^2 + bx + c = 0; \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die 2 Werthe für x sind entweder beide imaginär oder beide reell.

$$2. \quad \left. \begin{aligned} x \pm y &= s \\ xy &= p \end{aligned} \right\} \quad x = \frac{s + \sqrt{s^2 \mp 4p}}{2}; \quad y = \pm \frac{s - \sqrt{s^2 \mp 4p}}{2}$$

c. Gleichungen 3. Grades.

1. Durch Auflösung der Gl. $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ erhält man eine kubische Gl. von der allgemeinen Form: $x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

Jeder der Werthe $\alpha, \beta, \gamma = x$ gesetzt, bringt die Gl. auf 0; die Werthe α, β, γ sind die 3 Wurzeln der Gl.

2. Für die kub. Gl. $x^3 - a^3$ ist $x_1 = a$ eine Wurzel der Gl. Durch Division erhält man aus $\frac{x^3 - a^3}{x - a}$ eine quadratische Gleichung und aus dieser die beiden

andern imaginären Wurzeln: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} a; \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} a$

3. Die vollständige Gl. $Ax^3 \pm Bx^2 + Cx \pm D = 0$ lässt sich stets auf die Form $x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$ zurück führen. Durch die Substitution: $x = y \mp \frac{a}{3}$ erhält man eine reduzierte kubische Gl. von der Gestalt: $y^3 \pm py \pm q = 0$.

Alsdann ist nach der Cardanischen Formel:

$$y = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} q^2 \pm \frac{1}{27} p^3}} + \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} q^2 \pm \frac{1}{27} p^3}}$$

y muss mindestens einen reellen Werth haben. Aus dem erlangten Werthe von y erhält man die 1. Wurzel $x_1 = a$. Durch Division der kub. Gl. durch $x - a$ wird dieselbe auf eine quadratische zurück geführt, aus welcher die beiden anderen Wurzeln β und γ bestimmt werden.

Ist die reduzierte kub. Gl. von der Form: $y^3 - py \pm q = 0$, so ist für den Fall, dass: $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} q^2$ die Cardanische Formel nicht anwendbar; man benutze dann die unten folgenden Formeln ad c.

4. Zur Anwendung einer ununterbrochenen logarithm. Rechnung bei vieltstelligen Zahlen, bezw. in dem vorgedachten Falle benutze man die nachstehenden Formeln:

<p>a.</p> $y^3 + p y \pm q = 0$	$r = 2\sqrt{\frac{p}{3}}; \tan \varphi = \frac{r^3}{4q}; \sqrt[3]{\tan \frac{1}{2} \varphi} = \operatorname{tg} \theta$ $y_1 = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cotg 2\theta$ $y_2 = \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \cotg 2\theta \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{cosec} 2\theta \sqrt{-3}$ $y_0 = \mp \sqrt{\frac{p}{3}} \cotg 2\theta \mp \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{cosec} 2\theta \sqrt{-3}$
<p>b.</p> $y^3 - p y \pm q = 0$ $\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{4}$	$r = 2\sqrt{\frac{p}{3}}; \sin \varphi = \frac{r^3}{4q}; \sqrt[3]{\tan \frac{1}{2} \varphi} = \operatorname{tg} \theta$ $y_1 = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{cosec} 2\theta$ $y_2 = \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{cosec} 2\theta \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \cotg 2\theta \sqrt{-3}$ $y_3 = \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{cosec} 2\theta \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \cotg 2\theta \sqrt{-3}$
<p>c.</p> $y^3 - p y \pm q = 0$ $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$	$r = 2\sqrt{\frac{p}{3}}; \sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3}$ $y_1 = \pm 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin \varphi$ $y_2 = \pm 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin (60^\circ - \varphi)$ $y_3 = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin (60^\circ + \varphi)$

Beispiel 1. $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$

Durch die Substitution $x = y + 1$ erhält man: $y^3 - 2y - 4 = 0$; daraus:

$$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - \frac{8}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - \frac{8}{27}}} = 2, \text{ und } x_1 = 3$$

Durch Division der ursprünglichen Gl. durch $x - 3$ erhält man die quadratische Gl. $x^2 + 1 = 0$, welche 2 imaginäre Wurzeln hat.

Beispiel 2. $y^3 - 19y + 30 = 0$

$r = 2\sqrt{\frac{19}{3}}$	$\lg r = 0,70185$	$\lg \sin \varphi = 9,59915$	
$\sin 3\varphi = \frac{120}{r^3}$	$\lg \sin 3\varphi = 9,97363$	$\lg \sin (60^\circ - \varphi) = 9,77529$	$y_1 = 1,9999$
	$3\varphi = 70^\circ 14'$	$\lg \sin (60^\circ + \varphi) = 9,99712$	$y_2 = 3,0001$
	$\varphi = 23^\circ 24' 7''$	$\lg y_1 = 0,30100$	$y_3 = -5,0000$
	$60^\circ - \varphi = 36^\circ 35' 3''$	$\lg y_2 = 0,47714$	
	$60^\circ + \varphi = 83^\circ 24' 7''$	$\lg y_3 = 0,69897 (n)$	

d. Näherungsweise Lösung der Gleichungen.

(Methode von Newton).

Die Gleichung sei gegeben unter der Form: $f(x) = 0$; ihre 1. Ableitung = $f'(x)$; man suche durch Probieren einen Näherungswert a ; dann erhält man die weitem Näherungswerte wie bestehend:

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$c = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \text{ etc.}$$

Beispiel: $f(x) = x^4 - 100x - 365 = 0$; $f'(x) = 4x^3 - 100$.

Man findet durch Probieren x zwischen 5 und 6 liegend; setzt man $a = 5$, so wird:

$$b = 5 - \frac{5^4 - 500 - 365}{4 \cdot 5^3 - 100} = 5,6; \quad c = 5,6 - \frac{5,6^4 - 560 - 365}{4 \cdot 5,6^3 - 100} = 5,503$$

und in derselben Weise die weitem Annäherungen:

$$d = 5,49999; \quad e = 5,49988; \quad f = 5,499873.$$

Die Rechnung wird mitunter vereinfacht, wenn man sich für die 1. Annäherung des graphischen Verfahrens bedient, indem man nach einander x eine Reihe von Werthen in ganzen Zahlen beilegt, die berechneten $f(x)$ zu den bezüglichen x als Ordinaten aufträgt, durch deren Endpunkte eine Kurve verzeichnet wird und denjenigen Werth von x aus der Zeichnung abgreift, für welchen $y = 0$ wird.

B. Einiges aus der ebenen Geometrie.

Litteratur: Steiner. Vorlesungen über synthetische Geometrie. Leipzig, Teubner 1875.
 — Wenk. Die synthetische Geometrie der Ebene. Leipzig 1882, Winter. — Reye. Geometrie der Lage. Hannover, Rümpler.

I. Lehrsätze und Formeln.

1. Winkel halbirende Eck-Transversalen.

Die Theilungen der gegenüber liegenden Seite verhalten sich wie die anliegenden Seiten, Fig. 89 und 90:

Fig. 89.

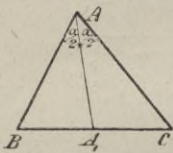


Fig. 90.

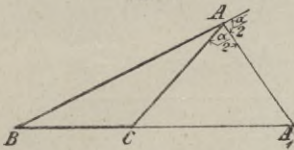


Fig. 91.

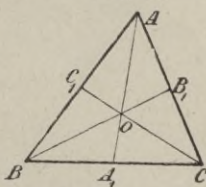
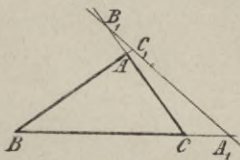


Fig. 94.



$$\overline{BA_1} : \overline{CA_1} = \overline{BA} : \overline{CA}.$$

2. Eck-Transversalen durch einen beliebigen Punkt. Das Produkt dreier nicht aneinander liegender Seiten-Abschnitte ist = dem Produkt der 3 andern Abschnitte, Fig. 91 u. 92:

$$\overline{BC_1} \cdot \overline{AB_1} \cdot \overline{CA_1} = \overline{C_1A} \cdot \overline{B_1C} \cdot \overline{A_1B}.$$

3. Beliebige Transversalen.

Der Satz lautet wie der voraus gehende, Fig. 93 u. 94:

$$\overline{BC_1} \cdot \overline{AB_1} \cdot \overline{CA_1} = \overline{C_1A} \cdot \overline{B_1C} \cdot \overline{A_1B}.$$

4. Harmonische Theilung.

Eine Strecke ist durch 2 Punkte harmonisch getheilt, wenn die Abstände des einen Punktes von den Endpunkten der Strecke sich verhalten wie die Abstände des andern Punktes von den entsprechenden Endpunkten der Strecke. Von den beiden theilenden Punkten liegt einer stets auf der Verlängerung der Linie, Fig. 95.

Fig. 92.

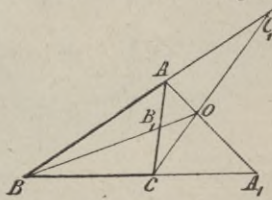
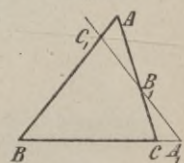


Fig. 93.



Wenn die Strecke $\overline{AA_1}$ durch X und X_1 harmonisch getheilt ist, so ist auch die Strecke $\overline{XX_1}$ durch A und A_1 harmonisch getheilt:

$$\overline{AX} : \overline{A_1X} = \overline{AX_1} : \overline{A_1X_1} \text{ (harm. Theilung v. } \overline{AA_1})$$

$$\overline{AX} : \overline{AX_1} = \overline{A_1X} : \overline{A_1X_1} \text{ (harm. Theilung v. } \overline{XX_1})$$

5. Legt man durch 4 harmonische Punkte ein Strahlenbüschel und zieht eine Linie \parallel einem Strahl,

Fig. 95.

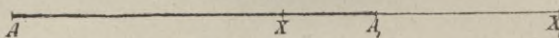
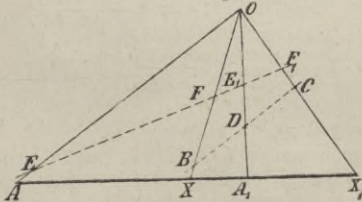


Fig. 96.



so schneiden die beiden andern Strahlen auf demselben gleiche Strecken ab, Fig. 96:

$$\overline{BD} = \overline{DC}$$

6. Jede beliebig durch ein harmonisches Strahlenbüschel geführte Linie wird durch dasselbe harmonisch getheilt:

$$\overline{EF} : \overline{E_1F} = \overline{EF_1} : \overline{E_1F_1}$$

7. Zieht man durch einen Punkt die 3 Eck-Transversalen eines Dreiecks und durch die Fusspunkte zweier derselben eine Transversale bis zum Schnitt mit der 3ten Seite, so wird sowohl diese

Transversale als auch die 3te Eck-Transversale und die 3te Dreiecks-Seite harmonisch getheilt, Fig. 97 u. 98 :

Fig. 97.

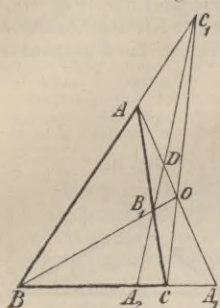
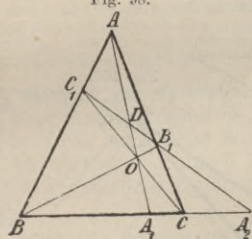


Fig. 98.



$$\frac{C_1 D}{A D} : \frac{B_1 D}{O D} = \frac{C_1 A_2}{A A_1} : \frac{B_1 A_2}{O A_1}$$

$$\frac{B A_1}{C A_1} = \frac{B A_2}{C A_2}$$

8. Sich schneidende Sehnen im Kreise, Fig. 99: $ab = a_1 b_1$

9. Sich schneidende Sekanten: $a_2 b_2 = a_1 b_1$

10. Tangente und Sekante, Fig. 100: $a^2 = a_1 b_1$

11. Aus (10) ergibt sich folgende Beziehung:

Zieht man für 2 sich schneidende Kreise die gemeinschaftl. Sekante, so sind die von einem

Fig. 101.

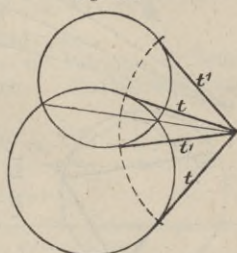


Fig. 99.

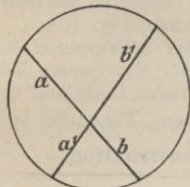


Fig. 100.

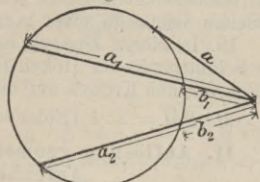


Fig. 102.

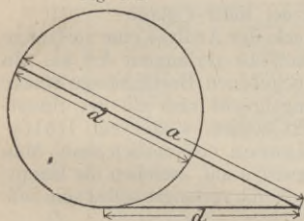


Fig. 103.

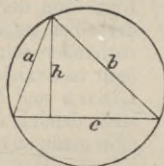
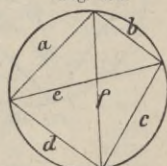


Fig. 104.



beliebigen Punkt derselben an beide Kreise gezogenen Tangenten t und t_1 einander gleich, Fig. 101.

12. Goldener Schnitt. Zieht man an einen Kreis eine dem Durchmesser an Länge gleiche Tangente und von dem Endpunkte derselben eine Sekante durch den Mittelpunkt des Kreises, so ist letztere nach dem goldenen Schnitt getheilt und es ist, Fig. 102:

$$\frac{a}{d} = \frac{d}{a-d}; d^2 = a(a-d)$$

13. Dreieck im Kreise, Fig. 103. Man setze $a + b + c = 2s$; dann ist:

$$ab = 2hr; F = \frac{abc}{4r} \text{ und: } r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

14. Sehnen-Viereck, Fig 104. Man setze: $a + b + c + d = 2s$; dann ist: $ac + bd = ef$ und: $F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

15. Halbirt man 2 Winkel eines Dreiecks und den 3ten Aussenwinkel, so l.

liegen die Schnittpunkte der Halbierungs-Linien mit den gegenüber liegenden Seiten der Winkel in einer geraden Linie, Fig. 105.

16. Die Durchschnits-Punkte der Halb.-Linien der 3. Aussenwinkel eines Dreiecks mit den gegenüber liegenden Seiten liegen in einer geraden Linie, Fig. 106.

17. Fällt man von einem belieb. Punkte der Peripherie eines Kreises Normalen auf die 3 Seiten eines belieb. eingeschriebenen Dreiecks, so liegen die Fusspunkte dieser Normalen auf einer geraden Linie, Fig. 107.

Fig. 108.

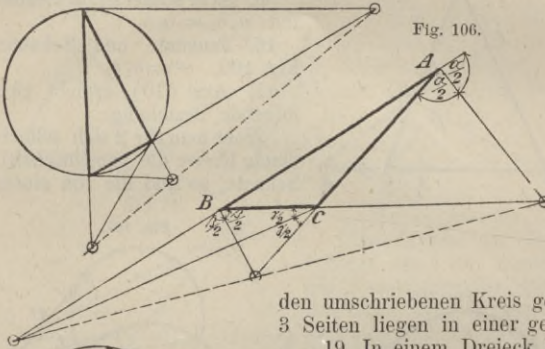
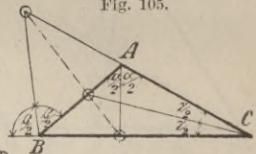


Fig. 105.



18. Die Durchschn.-Punkte der in den Eckpunkten eines Dreiecks an den umschriebenen Kreis gelegten Tangenten mit den 3 Seiten liegen in einer geraden Linie, Fig. 108.

19. In einem Dreieck liegen der Schwerpunkt S , der Schnittpunkt der Höhen H und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf einer geraden Linie und es ist $\overline{SH} : \overline{SM} = 2 : 1$ (Euler'scher Satz), Fig. 109.

II. Auflösung geometr. Konstruktions-Aufgaben. *)

Dieselbe erfolgt unter Zugrundelegung folgender Methoden:

a. Methode der Hilfs-Figuren.

Man nehme zum Zweck der Analyse eine vorläufige Figur von der in der Aufgabe verlangten Art an. In derselben müssen alle gegebenen Bestimmungs-Stücke vorhanden sein, oder angebracht und mit der Hauptfigur in Beziehung gesetzt werden, wozu event. Hilfs-Linien und Hilfs-Figuren erforderlich sind. Man stellt danach die Bedingungen auf, welchen die Hauptfigur genügen muss, wenn sie die verlangte selbst sein soll.

Beispiel: Ein Dreieck aus 2 Winkeln und dem Umfang zu konstruieren. Die Hilfs-Figur giebt unmittelbar die zur Konstruktion erforderlichen Beziehungen, Fig. 110.

b. Methode der geometrischen Oerter.

Wenn die Auflösung der Aufgabe auf die Aufsuchung eines Punktes hinaus läuft, so lässt man zunächst eine der Bestimmungen der Aufgabe unbeachtet. Es giebt dann unzählige Punkte, welche der unbestimmt gewordenen Aufgabe entsprechen. Der geomtr. Ort ist zu ermitteln und der gesuchte Punkt liegt im Durchschnitt zweier geomtr. Oerter, wenn dieselben Linien sind.

Beispiel: Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren wenn die Hypothenuse und die Höhe gegeben ist; Fig. 111. Der Halbkreis über der Hypothenuse ist der Ort der Spitze aller rechtwinkligen Dreiecke mit der gegebenen Hypothenuse. Zieht man im Abstände gleich der gegebenen Höhe eine Parallele zum Durchmesser, so liefert der Schnittpunkt derselben mit dem Kreise die Spitze des gesuchten Dreiecks.

*) Nach Schloemilch: Handbuch der Mathematik. Bd. I., S. 309 ff.

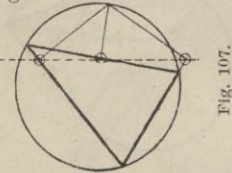


Fig. 107.

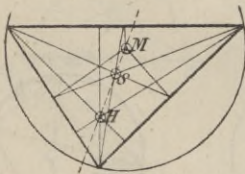


Fig. 109.

Fig. 110.

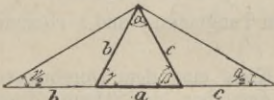
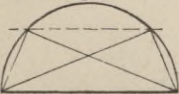


Fig. 111.



c. Methode der ähnlichen Figuren.

Ist durch einen Theil der Bestimmungs-Stücke die Gestalt der Figur bestimmt, so kann eine der gesuchten ähnliche Hilfs-Figur gezeichnet werden. Unter Berücksichtigung der in der Hilfs-Figur nicht benutzten Stücke kann dann die gesuchte Figur gezeichnet werden.

Beispiel: Ein Dreieck aus 2 Winkeln und der Summe der Radien des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises zu zeichnen.

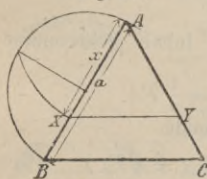
Unter Benutzung der Winkel erhält man ein dem gesuchten ähnliches Dreieck. Konstruirt man in letzterem den um- und den eingeschriebenen Kreis, so wird die Summe von deren Radien zur gegebenen Strecke sich verhalten, wie die eine Seite des Hilfs-Dreiecks zu einer Seite des gesuchten Dreiecks, wonach die Aufgabe zu lösen ist.

d. Methode der algebraischen Analyse.

Hängt die Lösung einer Aufgabe davon ab, dass eine Strecke von gesuchter Länge konstruirt wird, so stelle man diese Strecke als die Unbekannte x einer Gleichung dar, welche im übrigen nur durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmte Grössen enthält. Der gefundene Ausdruck für x ist geometrisch zu deuten und zu konstruiren.

Beispiel: Ein Dreieck durch eine Parallele zur Grundlinie zu halbiren. Sei XY die gesuchte Parallele, so verhalten sich die entsprechenden Dreiecks-Flächen $F_a : F_x = a^2 : x^2 = 2 : 1$ woraus $2x^2 = a^2$. x ist also die Kathete eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse a ist, Fig. 112.

Fig. 112.



III. Reguläre Polygone.

F Inhalt, U Umfang, a Seite des Polygons, n Seitenzahl, R Radius des umschriebenen, r Radius des eingeschriebenen Kreises.

$$1. F = \frac{n}{4} a^2 \cotg \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = n r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

$$2. U = n a = 2 n R \sin \frac{\pi}{n} = 2 n r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

Seitenzahl	Polygon-Inhalt		Polygon-Winkel	Zentri-Winkel	Drehm. d. umgeschriebenen Kreises	Polygonseite
3	0,4330 a^2	1,2990 R^2	60°	120°	0,5574 a	1,7321 R
4	1,0000 "	2,0000 "	90°	90°	0,7071 "	1,4142 "
5	1,7205 "	2,3776 "	108°	72°	0,8507 "	1,1756 "
6	2,5981 "	2,5981 "	120°	60°	1,0000 "	1,0000 "
7	3,6339 "	2,7364 "	128° 34' 3"	51° 25' 7"	1,1524 "	0,8678 "
8	4,8284 "	2,8284 "	135°	45°	1,3066 "	0,7654 "
9	6,1818 "	2,8925 "	140°	40°	1,4619 "	0,6840 "
10	7,6942 "	2,9389 "	144°	36°	1,6180 "	0,6180 "
11	9,3656 "	2,9735 "	147° 16' 36"	32° 43' 64"	1,7747 "	0,5635 "
12	11,1962 "	3,0000 "	150°	30°	1,9319 "	0,5176 "
13	13,1858 "	3,0207 "	152° 18' 46"	27° 41' 54"	2,0893 "	0,4786 "
14	15,3345 "	3,0372 "	154° 17' 14"	25° 42' 86"	2,2470 "	0,4450 "
15	17,6424 "	3,0505 "	156°	24°	2,4049 "	0,4158 "
16	20,1094 "	3,0615 "	157° 30"	22° 30"	2,5629 "	0,3902 "

IV. Näherungs-Berechnung ebener Flächen.

Die Fläche wird durch Ordinaten a in n Theile von gleicher Breite Δ zerlegt; Fig. 113. Man errichte in der Mitte jedes Stückes Δ die Ordinate h . Es sei die Fläche zwischen a_0 und a_n mit F_a , diejenige zwischen h_1 und h_n mit F_n bezeichnet. Den Inhalt der Fläche berechnet man näherungsweise nach einer der nachstehenden Formeln, welche zusammen gestellt sind, entsprechend der grösseren Genauigkeit, die sie für die Berechnung gewähren.

$$1. F_a = \Delta \left[\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2} \right]; \quad 2. F_a = \Delta \Sigma(h)$$

3. $F_a = \frac{1}{6} \Delta [a_0 + a_n + 4(h_1 + h_2 + \dots + h_n) + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})]$ (Simpson'sche Regel).

4. $F_a = \Delta \left[\Sigma \left(h + \frac{1}{12} (a_0 - h_1) + \frac{1}{12} (a_n - h_n) \right) \right]$ (Poncelet'sche Quadratur).

5. $F_a = \Delta \left[\Sigma \left(h + \frac{1}{72} (8a_0 + h_2 - 9h_1) + \frac{1}{72} (8a_n + h_{n-1} - 9h_n) \right) \right]$ (Formel von Franke*).

6. Für den Flächentheil zwischen h_1 und h_n erhält man, wenn noch die ausserhalb desselben gelegenen Ordinaten a_0 und a_n gemessen sind, mit grösserer Genauigkeit als bei Anwendung der Formel (5):

$F_a = \Delta \left[(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \frac{1}{24} (a_0 + a_n - a_1 - a_{n-1}) \right]$ (Formel von Franke).

7. Mittels der Interpolations-Methode. Hat man mit Hülfe der Lagrange'schen Interpolations-Formel S. 411 die Gleichung der Kurve ermittelt, so findet man aus dieser nach $F = \int y dx$ die Fläche.

Beispiel zu (7). In dem Beispiel S. 411 ist gefunden: $y = \frac{1}{6} x^3 + x^2 + \frac{11}{6} x + 1$, sonach:

$y dx = dx + \frac{11}{6} x dx + x^2 dx + \frac{1}{6} x^3 dx$; $F = \int y dx = \left[x + \frac{11}{12} x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} \right]_{x_1}^{x_2}$

und durch Einführung der Grenzwerte: $F = 165 - 55 = 110$.

C. Stereometrie.

J körperlicher Inhalt, F u. bezw. f Inhalt ebener, O Inhalt gekrümmter Flächen, r Radius des in Betracht kommenden Kreises.

1. Prismatoid; **) Fig. 114. Die gewöhnlich benutzte Formel ist:

$J = \frac{1}{6} h (F + 4M + f)$

Fig. 114.

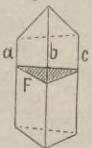


worin F und f die parallelen Endfl., h deren normaler Abstand und M die Durchschnittsfläche in der halben Höhe des Prismatoids ist.

Die Inhalts-Formel des Prismatoids gilt als allgemeine Inhalts-Formel genau für alle Körper, welche von ebenen parallelen Endflächen und einer Fläche 2. Ordnung begrenzt werden, auch dann wenn eine oder beide Endflächen = 0 werden.

Beispiel: Für ein 3 axes Ellipsoid ist $F = o$; $f = o$; $M = ab\pi$; $h = 2c$; also $J = \frac{4}{3} abc\pi$

Fig. 115.



2. Prisma. $J = Fh$.
Schief abgeschnittenes Prisma; Fig. 115.

$J = F \frac{a + b + c}{3}$

wobei F der normal zu den 3 Kanten genommene Querschnitt ist.

3. Pyramide. $J = \frac{1}{3} Fh$.

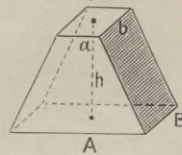
Abgestumpfte Pyramide.

$J = \frac{h}{3} (F + f + \sqrt{Ff})$

worin h der normale Abstand d. Endfl.

4. Obelisk; Fig. 116.

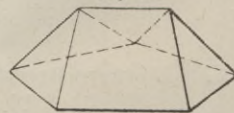
Fig. 116.



$J = \frac{h}{6} [(2A + a)B + (2a + A)B]$

5. Keil; Fig. 117. $J = \frac{1}{6} h (F + 4M)$

Fig. 117.



worin h d. Normale von der der Grundfläche parallelen Schneide auf die Grundfläche u. M die Durchschnittsfläche in $\frac{1}{2} h$.

Ist D die Durchschnittsfläche in der Höhe $\frac{1}{3} h$ über der Grundfläche, so ist:

$J = \frac{3}{4} h D$.

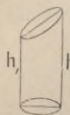
*) Vergl. Franke. Einfache Formeln zur Berechnung des Inhalts etc. Zeitschr. d. Arch.-u. Ing.-Vereins zu Hannover. 1875. S. 177.

**) Vergl. Wittstein. Das Prismatoid. Hannover, Hahn, 1860. — Ueber die allgemeine Inhalts-Formel des Prismatoids von Sinram: $J = \frac{h}{6} \left[\frac{D}{x(1-x)} + F \frac{2-3x}{1-x} + f \frac{3x-1}{x} \right]$, worin D eine beliebige, den Endflächen parallele Querschnittsfläche und h der Abstand derselben von der oberen Endfläche ist; vergl. Deutsch. Bauzeitg. 1879, S. 99.

6. Zylinder. $J = r^2 \pi h$; $O = 2r \pi h$
 Schief abgeschnittener gerader Zylinder;

Fig. 118. $J = r^2 \pi \frac{h_1 + h}{2}$; $O = r \pi (h_1 + h)$

Fig. 118.



7. Kegel. $J = \frac{1}{3} r^2 \pi h = 1,0472 r^2 h$.

Mantel des geraden Kegels:

$$O = r \pi \sqrt{r^2 + h^2}$$

Abgestumpfter Kegel; Fig. 119.

Fig. 119.

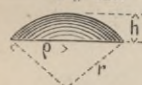


$$J = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

$$h = 1,0472 (R^2 + Rr + r^2) h$$

8. Kugel. $J = \frac{4}{3} r^3 \pi = 4,1888 r^3 = \frac{1}{6} d^3 \pi = 0,5236 d^3$. $O = 4 r^2 \pi = d^2 \pi$

Fig. 120.



Kugel-Kalotte; Fig. 120.

$$J = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$$

$$= \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2);$$

$$O = 2 \pi r h$$

Fig. 121.



Kugelzone; Fig. 121. (a u. b Radien d. Endfläch.)

$$J = \frac{\pi h}{2} (a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3})$$

$$O = 2r \pi h$$

14. Rotationskörper. — Guldin'sche Regel.

a. Inhalt der Umdrehungs-Fläche, Fig. 126, entstanden durch Drehung einer krummen Linie S um eine Axe OO ist = Länge der Linie \times Weg ihres Schwerpunkts.

$$O = s 2 \rho \pi \text{ (bei voller Umdrehung).}$$

b. Inhalt des Umdrehungs-Körpers, Fig. 127, entstanden durch Drehung einer Fläche F um einer Axe OO ist = Inhalt der Fläche \times Weg ihres Schwerpunkts.

$$J = F 2 \rho \pi \text{ (bei voller Umdrehung).}$$

Beispiel. Ring mit kreisförmigem Querschnitt, Fig. 128. $O = 4 R r \pi^2$; $J = 2 R r^2 \pi^2$

Fig. 126.

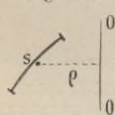


Fig. 128.

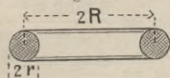


Fig. 130.

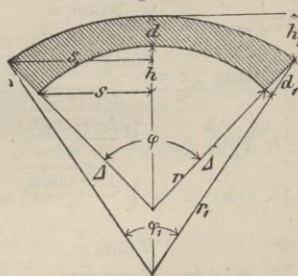


Fig. 129.

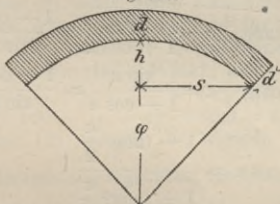
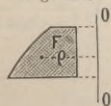


Fig. 127.



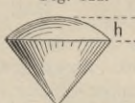
15. Kappengewölbe.

a. mit konstanter Stärke, Fig. 129: $J = \frac{\varphi \pi}{360} (2rd + d^2) l$, worin l die Länge des Gewölbes und $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h}$;

b. mit Verstärkung nach den Widerlagern, Fig. 130.

$$J = [F_1 - (F_0 + 2 \Delta)] l = \left[r_1^2 \frac{\varphi_1 \pi}{360} - \left(r^2 \frac{\varphi \pi}{360} + s_1 m \right) \right] l$$

Fig. 122.

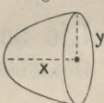


Kugel - Ausschnitt; Fig. 122. $J = \frac{2}{3} r^2 \pi h$

9. Umdrehungs-Paraboloid; Fig. 123.

$$J = \frac{y^2 \pi x}{2}$$

Fig. 123.



10. Relative Zahlen über Inhalte von Kegel, Umdrehungs-Paraboloid, Kugel und Zylinder von gleicher Höhe; Fig. 124.

$$J = 1/3 : 1/2 : 2/3 : 1.$$

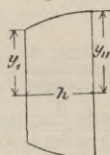
Fig. 124.



11. Zoned. Rotations-Paraboloids; Fig. 125.

$$J = \pi h \frac{y_1^2 + y_n^2}{2}$$

Fig. 125.



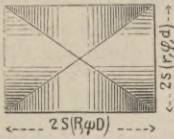
12. Umdrehungs-Ellipsoid, (entstanden bei Drehung um die Axe a).

$$J = \frac{4}{3} \pi a b^2$$

13. Dreiaxiges Ellipsoid.

$$J = \frac{4}{3} abc \pi$$

Fig. 131.



worin: $\tan \frac{\varphi_1}{2} = \frac{s_1}{r_1 - h_1}$; $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r - h}$ und:
 $s_1 = s + d_1 \sin \varphi/2$; $m = r_1 - (r + d)$; $h + d - h_1 = d_1 \cos \varphi/2$
 16. Kreuzgewölbe über rechteckigem Grundriss mit konstanter Stärke der Ansteigung und ohne Busen), Fig. 131. Sehr angenähert ist:

$$J = \frac{\varphi \pi}{360} (2rd + d^2) S + \frac{\psi \pi}{360} (2RD + D^2) s$$

D. Goniometrie und ebene Trigonometrie.

I. Goniometrische Formeln.

a. Besondere Werthe.

Grad	30	45	60	90
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tang	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

b. Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
- $1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

$$4. \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$$

$$5. \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\cotg \alpha}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}} = \frac{1}{\sec \alpha}$$

$$6. \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cotg \alpha}$$

c. Beziehungen zwischen d. Funktionen d. einfachen Winkels u. seines Vielfachen.

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$
- $\sin n\alpha = n \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - \binom{n}{3} \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \binom{n}{5} \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \dots$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$
- $\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + \binom{n}{4} \sin^4 \alpha \cos^{n-4} \alpha - \dots$
- $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
- $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$
- $\cotg 2\alpha = \frac{\cotg^2 \alpha - 1}{2 \cotg \alpha}$
- $\cotg 3\alpha = \frac{\cotg^3 \alpha - 3 \cotg \alpha}{3 \cotg^2 \alpha - 1}$
- $\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
- $\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$
- $\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
- $\cotg \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$
- $\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$
- $\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$
- $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{1 \pm \sin 2\alpha}$

d. Beziehungen der Funktionen zweier Winkel.

- $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- $\tan (\alpha \pm \beta) = [\tan \alpha \pm \tan \beta] : [1 \mp \tan \alpha \tan \beta]$
- $\cotg (\alpha \pm \beta) = [\cotg \alpha \cotg \beta \mp 1] : [\cotg \beta \pm \cotg \alpha]$

$$\begin{aligned}
 5. \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) & 7. \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\
 6. \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) & 8. \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\
 9. \operatorname{tang} \alpha \pm \operatorname{tang} \beta &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} & 10. \operatorname{cotg} \alpha \pm \operatorname{cotg} \beta &= \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} \\
 11. 2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) & 13. 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\
 12. 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) & 14. 2 \cos \alpha \sin \beta &= \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \\
 15. \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta &= \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) \\
 16. \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta &= \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

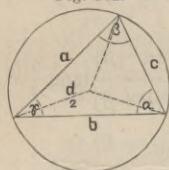
e. Potenzen von sin und cos.

$$\begin{aligned}
 1. 2 \sin^2 \alpha &= 1 - \cos 2\alpha & 5. 2^3 \sin^6 \alpha &= \cos 6\alpha - 6 \cos 4\alpha + 15 \cos 2\alpha - 10 \\
 2. 2^2 \sin^3 \alpha &= -\sin 3\alpha + 3 \sin \alpha & 6. 2 \cos^2 \alpha &= 1 + \cos 2\alpha \\
 3. 2^3 \sin^4 \alpha &= \cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3 & 7. 2^2 \cos^3 \alpha &= \cos 3\alpha + 3 \cos \alpha \\
 4. 2^4 \sin^5 \alpha &= \sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin \alpha & 8. 2^3 \cos^4 \alpha &= \cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3 \\
 & & 9. 2^4 \cos^5 \alpha &= \cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos \alpha \\
 & & 10. 2^5 \cos^6 \alpha &= \cos 6\alpha + 6 \cos 4\alpha + 15 \cos 2\alpha + 10
 \end{aligned}$$

f. Bogen-Funktionen.

$$\begin{aligned}
 1. \operatorname{arc} \sin u &= \operatorname{arc} \cos \sqrt{1 - u^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cos u \\
 2. \operatorname{arc} \cos u &= \operatorname{arc} \sin \sqrt{1 - u^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\sqrt{1 - u^2}}{u} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin u \\
 3. \operatorname{arc} \operatorname{tang} u &= \operatorname{arc} \sin \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \frac{1}{u}
 \end{aligned}$$

Fig. 132.



II. Berechnung ebener Dreiecke.

Seitenlängen des Dreiecks, Fig. 132 a, b, c ; gegenüber liegende Winkel: α, β, γ ; Flächen-Inhalt: F ; Radius des umschriebenen Kreises: r . Zur Abkürzung ist gesetzt:

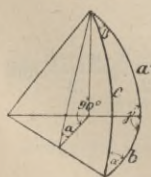
$$\frac{a + b + c}{2} = s; \quad \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}} = \rho$$

$$\begin{aligned}
 1. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} &= 2r & 4. \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha &= \frac{\rho}{s - a}; \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = \frac{\rho}{s - b}; \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma = \frac{\rho}{s - c} \\
 2. c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\
 3. \frac{a + b}{a - b} &= \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2}} & 5. \cos \frac{1}{2} \alpha &= \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}}; \sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}} \\
 & & 6. F &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}
 \end{aligned}$$

Auflösung schiefwinkliger Dreiecke.

Gegeben	Auflösung.
a, b, c	α aus (2), oder, behuf Anwendung logarithm. Rechnung aus (5), wobei die Anwendung des \cos für sehr kleine Winkel, die des \sin für Winkel nahe 90° zu vermeiden ist. Darauf die übrigen Winkel aus (1), oder die 3 Winkel aus (4).
a, b, α	β aus (1); $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$, c aus (1).
a, α, β	$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$; b und c aus (1).
a, b, γ	c aus (2), darauf die übrigen Stücke aus (1). Oder besser behuf

Fig. 133.



E. Sphärische Trigonometrie.

I. Das rechtwinklige sphärische Dreieck, Fig. 133.

a, b, c Seiten, α, β, γ Winkel des Dreiecks, worunter $\gamma = 90^\circ$.

$$\begin{aligned}
 1. \cos c &= \cos a \cos b & 2. \sin \alpha &= \frac{\sin a}{\sin c}; \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}
 \end{aligned}$$

3. $\cos a = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } c}$; $\cos \beta = \frac{\text{tang } a}{\text{tang } c}$
 5. $\cos a = \cos a \sin \beta$

4. $\text{tang } a = \frac{\text{tang } a}{\sin b}$; $\text{tang } \beta = \frac{\text{tang } b}{\sin a}$
 6. $\cos c = \text{cotg } a \text{ cotg } \beta$.

II. Gemeines sphärisches Dreieck, Fig. 134.

F Inhalt des sphär. Dreiecks; r Kugelradius; zur Abkürzung wird gesetzt:

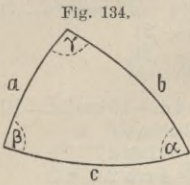


Fig. 134.

$a + b + c = 2s$ u.: $\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s} = \text{tang }^2 \rho$;
 $a + \beta + \gamma = 2\sigma$ u.: $-\frac{\cos(\sigma-a) \cos(\sigma-\beta) \cos(\sigma-\gamma)}{\cos \sigma} = \text{cotg }^2 r$

1. $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$
 2. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$
 3. $\cos a = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$

4. $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$ 5. $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$
 6. $\text{tang } \frac{1}{2} a = \frac{\text{tang } \rho}{\sin(s-a)}$; $\text{tang } \frac{1}{2} \beta = \frac{\text{tang } \rho}{\sin(s-b)}$; $\text{tang } \frac{1}{2} \gamma = \frac{\text{tang } \rho}{\sin(s-c)}$
 7. $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{-\frac{\cos \sigma \cos(\sigma-a)}{\sin \beta \sin \gamma}}$ 8. $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta) \cos(\sigma-\gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$
 9. $\text{cotg } \frac{1}{2} a = \frac{\text{cotg } r}{\cos(\sigma-a)}$; $\text{cotg } \frac{1}{2} b = \frac{\text{cotg } r}{\cos(\sigma-\beta)}$; $\text{cotg } \frac{1}{2} c = \frac{\text{cotg } r}{\cos(\sigma-\gamma)}$

Neper'sche Analogien:

10. $\text{tang } \frac{1}{2}(a+\beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \text{cotg } \frac{1}{2} \gamma$; 11. $\text{tang } \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(a+\beta)} \text{tang } \frac{1}{2} c$
 $\text{tang } \frac{1}{2}(a-\beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \text{cotg } \frac{1}{2} \gamma$ $\text{tang } \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(a+\beta)} \text{tang } \frac{1}{2} c$

Gauss'sche Formeln:

12. $\cos \frac{1}{2}(a+\beta) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2} \gamma$; 14. $\cos \frac{1}{2}(a-\beta) \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2} \gamma$
 13. $\sin \frac{1}{2}(a+\beta) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2} \gamma$; 15. $\sin \frac{1}{2}(a-\beta) \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2} \gamma$
 16. Grösse des sphär. Dreiecks: $F = \frac{a+\beta+\gamma-180^\circ}{180^\circ} r^2 \pi = \frac{\varepsilon}{180^\circ} r^2 \pi$

Sind nicht die 3 Winkel, sondern nur die 3 Seiten des sphär. Dreiecks gemessen, so kann der sphär. Exzess $\varepsilon = a + \beta + \gamma - 180^\circ$ aus letztern unmittelbar berechnet werden nach der Gl.

17. $\text{tang }^2 \frac{1}{4} \varepsilon = \text{tang } \frac{1}{2} s \text{ tang } \frac{1}{2} (s-a) \text{ tang } \frac{1}{2} (s-b) \text{ tang } \frac{1}{2} (s-c)$

III. Berechnung sphärischer Dreiecke.

Gegeben	Auflösung
a, b, c	die Winkel aus (4), (5) oder (6).
a, β, γ	die Seiten aus (7), (8) oder (9).
a, β, c	$\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$ aus (11) darauf γ aus (1).
a, b, γ	$\frac{a+\beta}{2}$ und $\frac{a-\beta}{2}$ aus (10), darauf c aus (1), oder $\frac{a+\beta}{2}$, $\frac{a-\beta}{2}$ und c aus (13).
a, b, α	β aus (1), alsdann γ und c aus (10) und (11).
a, β, α	b aus (1), alsdann γ und c aus (10) und (11).

F. Differential-Rechnung.

I. Differential-Formeln.

a. Einfache Differentiation.

1. $d(ax) = a dx$
2. $d(x^n) = n x^{n-1} dx$
3. $d(a^x) = a^x \ln a dx$
4. $d(e^x) = e^x dx$
5. $d(x+y) = dx + dy$

6. $d(xy) = xdy + ydx$
7. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$
8. $d(x^y) = x^y \left(y \frac{dx}{x} + \ln x dy \right)$

$$9. d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

$$10. d(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \frac{dx}{x}$$

$$11. d \sin x = \cos x dx$$

$$14. d \cos x = -\sin x dx$$

$$12. d \operatorname{tng} x = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$15. d \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$13. d \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$16. d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$17. d \ln \sin x = \operatorname{cotg} x dx$$

$$19. d \ln \cos x = -\operatorname{tng} x dx$$

$$18. d \ln \operatorname{tng} x = \frac{2 dx}{\sin 2x}$$

$$20. d \ln \operatorname{cotg} x = -\frac{2 dx}{\sin 2x}$$

$$21. d \operatorname{arc} \sin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$24. d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$22. d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$25. d \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

$$23. d \operatorname{arc} \sec x = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx$$

$$26. d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x = -\frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx$$

27. Differentiation abhängiger Variablen.

Ist $u = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, so ist: $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx}$

Ist $u = f(z)$, $z = \varphi(y)$, $y = \psi(x)$, so ist: $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$

28. Differentiation der Funktionen von mehreren Urvariablen.

$$df(x, y, z \dots) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots$$

Die Grössen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$... heissen partielle Differential-Quotienten oder partielle Ableitungen nach $x, y, z \dots$. Dieselben werden gebildet; indem bei der Differentiation der Funktion nur diejenige Variable, nach welcher die Ableitung genommen wird, als veränderlich, alle andern Variablen als konstant angesehen werden.

Beispiel: $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2by$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 2cz$. u. $df = 2ax dx + 2by dy + 2cz dz$

29. Differentiation einer Funktion von mehreren abhängigen Variablen.

$u = f(x, y, z \dots)$ und $x = \varphi_1(t)$; $y = \varphi_2(t)$; $z = \varphi_3(t) \dots$

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} dt + \dots$$

30. Differentiation unentwickelter Funktionen zweier Variablen.

$f(x, y) = 0$. Aus $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$ folgt: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$

Beispiel: $ax^2 + by^2 = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2by$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by}$

b. Mehrfache Differentiationen.

1. Funktionen einer Urvariablen.

$$\begin{aligned}
 y &= f(x) \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad (1. \text{ Ableitung, } 1. \text{ Differential-Quotient}) \\
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{df'(x)}{dx} = f''(x) \quad (2. \text{ " } 2. \text{ " " "}) \\
 &\vdots \\
 \frac{d^n y}{dx^n} &= \frac{df^{n-1}(x)}{dx} = f^n(x) \quad (n\text{te " } n\text{ter " "})
 \end{aligned}$$

2. Funktionen zweier Urvariablen.

$$\begin{aligned}
 u &= f(x, y) \\
 du &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\
 d^2u &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \\
 d^3u &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 \\
 &\vdots \\
 d^n u &= \binom{n}{0} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \binom{n}{2} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} y^2} dx^{n-2} y^2 + \dots
 \end{aligned}$$

worin $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ die Binomial-Koeffizienten (Vergl. S. 410).

Man schreibt kürzer in symbolischer Form:

$$d^n u = \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy \right)^n \partial^n f \quad \text{oder} \quad \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u.$$

3. Funktionen mehrerer Urvariablen.

$$\begin{aligned}
 u &= f(x, y, z, \dots) \\
 d^n u &= \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy + \frac{1}{\partial z} dz + \dots \right)^n \partial^n f
 \end{aligned}$$

4. Unentwickelte Funktionen.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= 0. \\
 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} &= f^1(x, y) = 0. \quad \frac{\partial f^1}{\partial x} + \frac{\partial f^1}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.
 \end{aligned}$$

In diese Gl. sind die durch Bildung von $\frac{\partial f^1}{\partial x}$ und $\frac{\partial f^1}{\partial y}$ entstehenden Werthe

einzusetzen, unter Berücksichtigung dass $\frac{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\partial x} = 0$ und man erhält:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Hierin ist endlich noch der Werth für $\frac{dy}{dx}$ nach a (30) einzusetzen. In analoger Weise werden die höheren Differential-Quotienten gebildet.

5. Funktionen von zwei abhängigen Variablen.

$$\begin{aligned}
 u &= f(x, y); \quad x = \varphi(t); \quad y = \psi(t) \\
 du &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\
 dt &= \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial t} dt \\
 \frac{d^2 u}{dt^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{dt^2}
 \end{aligned}$$

u. s. w.

II. Die Reihen von Taylor und Maclaurin.

A. $f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{1.2\dots(n-1)}h^{n-1} + R_n$

worin: $R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^n(x+\theta h)}{1.2.3\dots(n-1)p} h^n$

B. $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2\dots(n-1)}x^{n-1} + R_n$

worin: $R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^n(\theta x)}{1.2\dots(n-1)p} x^n$

Voraussetzung der Gültigkeit der Reihen ist, dass $f(x), f'(x), f''(x) \dots$ in dem Intervall x bis $x+h$, bezw. 0 bis x endlich und stetig bleiben.

Zur Beurtheilung d. Restglieder (R) ist $p = 1$ u. $= n$, $\theta = 0$ u. $= 1$ zu setzen.

III. Unbestimmte Werthe.

1. $\frac{0}{0}$. Nimmt der Bruch $\frac{F(x)}{f(x)}$ für den speziellen Werth $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, so erhält man den wahren Werth von $\frac{F(x)}{f(x)}$ wenn man $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ bildet und hierin $x = a$ setzt. Ist auch dieser Bruch noch unbestimmt, so bildet man $\frac{F''(x)}{f''(x)}$ u. s. f.

2. $\frac{\infty}{\infty}$. Es ist $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{1} = \frac{0}{0}$. Man verfährt also wie vor.

3. $0 \cdot \infty$. Es ist $0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0}$. Wird also $F(x) \cdot f(x) = 0 \cdot \infty$, so schreibe man: $\frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, welcher Bruch nach (1) zu behandeln ist.

4. $0^0; 100; \infty^0$. Ergiebt der Ausdruck $y = F(x)^{f(x)}$ eine dieser Formen, so bilde man: $\ln y = f(x) \ln F(x)$ wodurch die Behandlung auf einen der Fälle 1–3 zurück geführt ist.

5. $\infty - \infty$. Ergiebt $y = \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{f(x)}$ obige Form, so schreibe man:
 $y = \frac{f(x) - F(x)}{F(x) \cdot f(x)}$ und hat dann Fall (1) oder (2).

Beispiel 1.
 $\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x = a$
 $\frac{F'(x)}{f'(x)} = \frac{m x^{m-1}}{n x^{n-1}}; \frac{F'(a)}{f'(a)} = \frac{m}{n} a^{m-n}$

Beispiel 2.
 $\frac{x - \sin x}{x^3}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x = 0$.
 $\frac{F'(x)}{f'(x)} = \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ " " "
 $\frac{F''(x)}{f''(x)} = \frac{\sin x}{6x}$ " " "
 $\frac{F'''(x)}{f'''(x)} = \frac{\cos x}{6}$ wird $= \frac{1}{6}$ für $x = 0$.

IV. Maxima und Minima.

1. Funktion einer Urvariablen.

Ist $y = f(x)$, so bestimmt man die eminenten Werthe von $f(x)$ nach dem Satze:

Man bestimme die Wurzeln aus der Gleich. $\frac{dy}{dx} = 0$

Denjenigen unter diesen Wurzeln entsprechen eminente Werthe von y , für welche der seiner Ordnung nach niedrigste nicht verschwindende Differential-Quotient von gerader Ordnung ist. Und zwar entsprechen den Wurzeln Maxima oder Minima von y , je nachdem sie den betr. Differential-Quotienten negativ oder positiv machen.

Beispiel 1. $y = x^2 - 6x + 7; \frac{dy}{dx} = 2x - 6 = 0; x = +3$

$\frac{d^2y}{dx^2} = +2$; also wird y ein Minimum für $x = 3$ und $y_{\min.} = 9 - 18 + 7 = -2$

Beispiel 2. $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4ax + a^2 = 0; \text{ liefert die Wurzeln } \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = \frac{1}{3}a \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4a \begin{cases} \text{dieser Werth wird positiv für } x = a \\ \text{und negativ für } x = \frac{1}{3}a \end{cases}$$

für $x = a$ wird $y = 0$ ein Minimum; für $x = \frac{1}{3}a$ wird $y = \frac{4}{27}a^3$ ein Maximum.

Beispiel 3. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \text{ liefert die Wurzeln } \begin{cases} x_1 = 0; x_3 = 1 \\ x_2 = 0; x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x \begin{cases} \text{wird negativ für } x_3 \\ \text{positiv „ „ } x_4 \end{cases} \text{ wird } = 0 \text{ für } x_1 \text{ und } x_2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 120x + 30 \text{ wird } = 30 \text{ für } x_1 \text{ und } x_2$$

Den Werthen x_1 und x_2 entsprechen hiernach keine eminenten Werthe von y , da die niedrigste Ableitung, welche bei Einsetzung dieser Werthe nicht verschwindet, von der 3ten Ordnung ist. Für $x_3 = 1$ wird $y = 2$ ein Minimum; für $x_4 = 3$ wird $y = 26$ ein Maximum.

2. Funktionen von mehreren Urvariablen.

Eine Funktion $u = f(x, y, z, \dots)$ hat für ein bestimmtes Werth-System der Variablen einen eminenten Werth, wenn für dasselbe sämmtliche partiellen Differential-Quotienten der 1ten Ordnung verschwinden und wenn die niedrigste Ordnung, für welche sie nicht sämmtlich verschwinden, eine gerade ist.

Verschwinden für das gedachte Werth-System sämmtliche partiellen Differential-Quotienten der 2ten Ordnung, so wird die weitere Untersuchung meistens sehr umständlich und man wird vorziehen, aus der Natur der vorliegenden Funktion auf andere Weise zu entscheiden, ob eminente Werthe vorhanden sind oder nicht. Bei Funktionen von mehr als 2 Urvariablen fällt die Untersuchung über die Natur des eminenten Werths bereits ziemlich verwickelt aus.*)

Für eine Funktion zweier Variablen $u = f(x, y)$ gelten, falls die 2ten Ableitungen die Entscheidung liefern, für Bestimmung der emin. Werthe folgende Regeln:

Die aus den Gleich. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ abgeleiteten Werthe müssen die

Bedingung: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ erfüllen, und entsprechen einem Maximum

oder Minimum von $f(x, y)$; je nachdem sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ gleichzeitig negativ oder positiv machen.

Beispiel. Die Zahl 30 in 3 Theile so zu zerlegen, dass das Produkt aus dem 1ten \times Quadrat des 2ten \times Kubus des 3ten ein Maximum ergibt.

$$u = x^3 y^2 (30 - x - y)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 y^2 (30 - x - y) - x^3 y^2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2x^3 y (30 - x - y) - x^3 y^2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= 15 \\ y_1 &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy^2(30 - x - y) - 6x^2y^2 \dots \dots \dots \text{ für } x_1, y_1 = -90000$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^3(30 - x - y) - 4x^3y \dots \dots \dots \text{ für } x_1, y_1 = -101250$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x^2y(30 - x - y) - 3x^2y^2 - 2x^3y \dots \dots \dots \text{ für } x_1, y_1 = -67500$$

$$90000 \cdot 101250 > (67500)^2. - z \text{ wird zu einem Maximum für } z = 15^3 \cdot 10^2 \cdot 5.$$

3. Unentwickelte Funktionen.

$f(x, y) = 0$. Die eminenten Werthe von y ergeben sich durch die gleichzeitige Erfüllung der Bedingungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad f(x, y) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} > 0$$

und zwar erreicht y ein Maximum, wenn $\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] : \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] < 0$

y „ Minimum „ $\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] : \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] > 0$

*) Werthvolle Hilfsmittel zur Vereinfachung der Untersuchung liefert die Anwendung der Determinanten-Theorie. Vergl. Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten, § 6, No. 2 und Schloemich. Handbuch der Mathematik. Bd. 2. S. 509 ff.

Beispiel: $y^3 - 3ayx + x^3 = 0; x_1 = a\sqrt[3]{2}; \frac{\partial f}{\partial x} = -3ay + 3x^2 = 0; y_1 = a\sqrt[3]{4}$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - ax$, für x_1 und $y_1 > 0$. $-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{6x}{3y^2 - 3ax}$, für $x_1 y_1 = -\frac{1}{a}$

sonach $y_1 = a\sqrt[3]{4}$ ein Maximum.

V. Zerlegung rationaler Brüche in Partial-Brüche.

Die allgemeine Form des rationalen echten Bruches ist:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots}{x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots}; \quad m > n$$

Man zerlege $F(x)$ in ihre linearen Faktoren durch Auflösung der Gl.:

$$F(x) = 0.$$

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Wurzeln dieser Gl., so erhält man:

entweder $F(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots$; oder $F(x) = (x - \alpha)^p(x - \beta)^q(x - \gamma)^r \dots$

1. Es sei $F(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots$. Man zerlege dann:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{x - \beta} + \frac{A_3}{x - \gamma} + \dots$$

Die Zähler der Partialbrüche erhält man aus den Gleich.:

$$A_1 = \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}; \quad A_2 = \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}; \quad A_3 = \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)} \text{ u. s. w.}$$

Die Werthe $f(\alpha) \dots$ werden dargestellt, wenn man in der Formel für $f(x)$ $x = \alpha$ einsetzt. $F'(x)$ wird erhalten, wenn man in der 1. Ableitung von $F(x)$ $x = \alpha$ einsetzt. Bequemer wird dieser Werth dargestellt, wenn in $\frac{F(x)}{x - \alpha} = (x - \beta)(x - \gamma) \dots$ für x die Werthe α eingesetzt werden.

Analog werden $f'(\beta), f'(\gamma) \dots$ ermittelt.

2. Es sei $F(x) = (x - \alpha)^p(x - \beta)^q(x - \gamma)^r \dots$. Man zerlege dann:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = & \frac{A_0}{(x - \alpha)^p} + \frac{A_1}{(x - \alpha)^{p-1}} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^{p-2}} + \dots + \frac{A_{p-1}}{x - \alpha} \\ & + \frac{B_0}{(x - \beta)^q} + \frac{B_1}{(x - \beta)^{q-1}} + \frac{B_2}{(x - \beta)^{q-2}} + \dots + \frac{B_{q-1}}{x - \beta} \\ & + \frac{C_0}{(x - \gamma)^r} + \frac{C_1}{(x - \gamma)^{r-1}} + \frac{C_2}{(x - \gamma)^{r-2}} + \dots + \frac{C_{r-1}}{x - \gamma} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Setzt man das Produkt aller von α unabhängigen Faktoren: $(x - \beta)^q(x - \gamma)^r \dots = \varphi(x)$, so erhält man folgendes Bildungsgesetz für die Zähler A :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \varphi(\alpha) A_0 \\ f'(\alpha) &= \varphi'(\alpha) A_0 + \varphi(\alpha) 1 \cdot A_1 \\ f''(\alpha) &= \varphi''(\alpha) A_0 + \binom{2}{1} \varphi'(\alpha) 1 \cdot A_1 + \varphi(\alpha) 1 \cdot 2 \cdot A_2 \\ f'''(\alpha) &= \varphi'''(\alpha) A_0 + \binom{3}{1} \varphi''(\alpha) 1 \cdot A_1 + \binom{3}{2} \varphi'(\alpha) 1 \cdot 2 \cdot A_2 + \varphi(\alpha) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot A_3 \\ f^{IV}(\alpha) &= \varphi^{IV}(\alpha) A_0 + \binom{4}{1} \varphi'''(\alpha) 1 \cdot A_1 + \binom{4}{2} \varphi''(\alpha) 1 \cdot 2 \cdot A_2 + \binom{4}{3} \varphi'(\alpha) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot A_3 \\ &+ \varphi(\alpha) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot A_4 \end{aligned}$$

worin $\binom{n}{p}$ die entsprechenden Binomial-Koeffizienten sind. In analoger Weise ermittelt man die Zähler B, C etc.

3. Ergiebt die Gleich. $F(x) = 0$ imaginäre Wurzeln, so fasse man das Produkt zweier konjugirten Faktoren zusammen. Ist $\alpha_1 = r + s\sqrt{-1}$ eine Wurzel, so ist auch eine 2. Wurzel $\alpha_2 = r - s\sqrt{-1}$ vorhanden. Das Produkt der entsprechenden Faktoren ist:

$$[x - (r + s\sqrt{-1})][x - (r - s\sqrt{-1})] = (x - r)^2 + s^2$$

Man erhält hiernach für den Nenner die allgemeine Zerlegung:

$$F(x) = [(x - r)^2 + s^2] \varphi(x)$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0 x + B_0}{(x - r)^2 + s^2} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

und schreibe dann:

$$A_0 \text{ u. } B_0 \text{ erhält man aus der Gleich. } \frac{f(r + s\sqrt{-1})}{\varphi(r + s\sqrt{-1})} = A_0(r + s\sqrt{-1}) + B_0$$

Die linke Seite der Gleich. nimmt hierbei einen komplexen Werth an; man kann daher schreiben:

$$M + N\sqrt{-1} = A_0(r + s\sqrt{-1}) + B_0$$

Durch Vergleichung der realen und imaginären Werthe erhält man dann:

$$A_0 = \frac{N}{s}; \quad B_0 = M - \frac{r}{s}N$$

4. Führt die Zerlegung des Nenners in Produkte auf die allgemeine Form:

$$F(x) = [(x-r)^2 + s^2]^n \varphi(x) = U^n \varphi(x)$$

so zerlege man den Bruch wie folgt:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0 x + B_0}{U^n} + \frac{A_1 x + B_1}{U^{n-1}} + \frac{A_2 x + B_2}{U^{n-2}} + \dots + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

Die Werthe A_0 und B_0 erhält man wie ad 3 durch Gleichsetzung von:

$$\frac{f(r + s\sqrt{-1})}{\varphi(r + s\sqrt{-1})} = A(r + s\sqrt{-1}) + B.$$

Man bilde dann:

$$\frac{F(x) - \varphi(x)[A_0 x + B_0]}{U} = Z(x)$$

so ist:
$$\frac{Z(r + s\sqrt{-1})}{\varphi(r + s\sqrt{-1})} = M_1 x + N_1 = A_1(r + s\sqrt{-1}) + B_1$$

woraus wieder durch Gleichsetzung der Koeffizienten realer und imaginärer Größen rechts und links die Werthe für A_1 und B_1 gefunden werden.

In analoger Weise fährt man fort, bis sämtliche Werthe für A und B bestimmt sind.

5. In allen gedachten Fällen kann die Ermittlung der Zähler auch nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten (S. 431) erfolgen. Das Verfahren ist sehr durchsichtig, jedoch nur bei einfachen Formen der betr. Funktionen bequemer als die andern Methoden.

Beispiel zu 1.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^3 + 9x^2 - 4x + 7}{(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)}$$

$a=2; \beta=3; \gamma=-2; \delta=3.$

$$\begin{aligned} F_1(a) &= -20; F_1(\beta) = 30; F_1(\gamma) = 20; F_1(\delta) = -30 \\ f(a) &= 43; f(\beta) = 103; f(\gamma) = 43; f(\delta) = 73 \\ f(x) &= -\frac{43}{20} \frac{1}{x-2} + \frac{103}{30} \frac{1}{x-3} + \frac{43}{20} \frac{1}{x+2} - \frac{73}{30} \frac{1}{x+3} \\ F(x) &= -\frac{43}{20} \frac{1}{x-2} + \frac{103}{30} \frac{1}{x-3} + \frac{43}{20} \frac{1}{x+2} - \frac{73}{30} \frac{1}{x+3} \end{aligned}$$

Beispiel zu 2 u. 3.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^4 - 26x^2 - 32}{(x+2)^3(x^2-2x+2)} = \frac{A_3}{(x+2)^3} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_1}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

$a_1 = -2; a_2 = 1 + \sqrt{-1}; a_3 = 1 - \sqrt{-1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 26x^2 - 32 & f(a_1) &= 120 & \varphi(x) &= x^2 - 2x + 2 & \varphi(a_1) &= 10 \\ f'(x) &= 4x^3 - 52x & f'(a_1) &= 72 & \varphi'(x) &= 2x - 2 & \varphi'(a_1) &= -6 \\ f''(x) &= 12x^2 - 62 & f''(a_1) &= -4 & \varphi''(x) &= 2 & \varphi''(a_1) &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 120 &= 10A_3 & A_3 &= 12 \\ 72 &= -72 + 10A_2 & A_2 &= 0 \\ -4 &= 24 + 0 + 20A_1 & A_1 &= 1 \end{aligned}$$

Setzt man $(x+2)^3 = \varphi_1(x)$; so ist:

$$\begin{aligned} \varphi_1(a_2) &= 18 + 26\sqrt{-1}; \quad f(a_2) = -36 - 52\sqrt{-1} \\ -36 - 52\sqrt{-1} &= [18 + 26\sqrt{-1}] [B(1 + \sqrt{-1}) + C] = 8B + 18C + 44B\sqrt{-1} + 29C\sqrt{-1} \\ -36 &= 8B + 18C & B &= 0 \\ -52 &= 44B + 26C & C &= 2 \end{aligned}$$

Beispiel zu 4.
$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{(x^2-2x+5)^2(x+1)^3} = \frac{A_0 x + B_0}{U^2} + \frac{A_1 x + B_1}{U} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

Es ist $a_1 = 1 + 2\sqrt{-1}; a_2 = 1 - 2\sqrt{-1};$

$$\varphi(a) = (x+1)^3; \quad \varphi(a) = (2 + 2\sqrt{-1})^3 = 16(\sqrt{-1} - 1); \text{ man erhält:}$$

$$\frac{1}{16(\sqrt{-1} - 1)} = -\frac{\sqrt{-1} + 1}{32} = A_0(1 + 2\sqrt{-1}) + B_0; \quad A_0 = -\frac{1}{64}; \quad B_0 = -\frac{1}{64}$$

Man bildet jetzt:

$$f(x) - \varphi(x)(A_0 x + B_0) = 1 - (x+1)^3 \left(-\frac{x}{64} - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{64}(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 65)$$

Dieser Ausdruck durch $x^2 - 2x + 5$ dividirt, liefert:

$$\chi(x) = \frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13); \quad \chi(a_1) = \frac{16}{64}(1 + \sqrt{-1}) \text{ und wie früher } \varphi(a) = 1 - 2\sqrt{-1}$$

sonach:
$$\frac{1}{64} \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{-1} - 1} = \frac{1}{64} \sqrt{-1} = A_1(1 + 2\sqrt{-1}) + B_1; \quad A_1 = -\frac{1}{128}; \quad B_1 = -\frac{1}{128}$$

Beispiel zu 5.
$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x+5}{(x-3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Wird die rechte Seite auf einenlei Nenner gebracht, so erhält man durch Gleichsetzung der Zähler:

$$x+5 = x^2(A+B) + x(A+C-3B) + A-3C$$

Die zu gleichen Potenzen von x gehörigen Koeffizienten müssen gleich sein, daher:

$$\left. \begin{aligned} A+B &= 0 \\ A+C-3B &= 1 \\ A-3C &= 5 \end{aligned} \right\} \text{woraus: } \begin{cases} A = \frac{8}{13} \\ B = -\frac{8}{13} \\ C = -\frac{19}{13} \end{cases}$$

G. Integral-Rechnung.

I. Ausführung der Integration.

Nach dem Grundsatz: $\int f df(x) = f(x)$ gewinnt man durch Umkehrung von Differential-Formeln eine Anzahl von Grundformeln der Integration. — Dieselben sind auf S. 432, 433 zusammen gestellt; dieser Zusammenstellung sind auch die einfachern der durch Transformation gewonnenen Integral-Formeln hinzu gefügt.

Sofern die zu integrierende Funktion nicht unmittelbar die Gestalt einer Grundformel zeigt, muss sie durch gewisse Kunstgriffe auf dieselbe zurück geführt werden. Man bedient sich hierbei der folgenden Transformationen:

1. Einsetzung neuer Variabeln.*)

Beispiele: $\int \sin(px+q) dx$

Man setze $px+q = z$; $dx = \frac{dz}{p}$ und erhält $\frac{1}{p} \int \sin z dz$, welches nach (18) aufgelöst werden kann.

2. Theilweise Integration. Aus: $d(uv) = u dv + v du$ ergibt sich:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Beispiel: $\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c$.

3. Zerlegung in Partialbrüche. Die Operation ist bei allen rationalen gebrochenen Funktionen von der Form $\frac{f(x)}{F(x)}$ anzuwenden. Ist der Bruch kein echter, so muss er durch Division in eine ganze rationale Funktion und einen rationalen echten Bruch verwandelt werden. Erstere ist nach den Grundformeln ohne weiteres integrierbar. Letzterer wird nach S. 429 in Partialbrüche zerlegt und dadurch auf die Formen:

$\frac{A}{(x-a)^n}$ bzw. $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-r)^2+s^2}$, $\frac{Ax+B}{[(x-r)^2+s^2]^n}$ gebracht, welche nach II. a (4), b II. u. III. integrirt werden.

4. Methode der unbestimmten Koeffizienten.**)

Dieselbe ist an Stelle der Integration durch Theile bei der Integration der zusammen gesetzten rationalen und irrationalen gebrochenen Funktionen

von der Form: $\int \frac{f(x) dx}{[F(x)]^n}$ und $\int \frac{f(x) dx}{[F(x)]^n [\varphi(x)]^m}$.

I. $\int \frac{f(x) dx}{[F(x)]^n}$. Man schreibe: $\int \frac{f(x) dx}{[F(x)]^n} = \frac{\psi(x)}{[F(x)]^{n-1}} + \int \frac{Z(x)}{F(x)}$

Durch Differentiation, Division durch dx und Multiplikation mit $[F(x)]^n$ erhält man:

$$f(x) = F(x) d\psi(x) - (n-1) \psi(x) dF(x) + Z(x) [F(x)]^{n-1}.$$

Für $Z(x)$ hat man eine solche Funktion von x einzuführen, dass $\frac{Z(x)}{F(x)}$ eine echt gebrochene Funktion ist; wenn also die allgemeine Form von $F(x) = a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a^0$ ist, so ist die allgemeine Form von $Z(x) = A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n$.

Für $\psi(x)$ ist die allgemeine Form: $\psi(x) = B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \dots + B_{n-1}$.

Daher $d\psi(x) = q B_0 x^{n-2} + (q-1) B_1 x^{n-3} + \dots + B_{n-1}$.

q ist derart zu bestimmen, dass die Glieder $F(x) d\psi(x)$ bzw. $\psi(x) dF(x)$ von demselben Grade sind, als $f(x)$ oder $Z(x) [F(x)]^{n-1}$, je nachdem die eine oder die andere Funktion von höherem Grade ist. Die Koeffizienten $A_1, A_2, \dots; B_0, B_1, \dots$

*) Ueber Substitution goniometrischer Funktionen vergl. auch: Rodde, Integration mit Hülfe der Einsetzung goniometrischer Funktionen. Zeitschr. d. Arch. u. Ing.-Vereins zu Hannover 1857, S. 339.

**) Vergl. Grütiefen, Integration zusammen gesetzter Funktionen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Berlin 1865, Beelitz.

dann nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten zu bestimmen. Zu bemerken ist hierbei, dass zunächst nach jener Bestimmung stets die Anzahl der unbestimmten Koeffizienten um 1 grösser ist, als die Zahl der Bedingungs-Gleichungen. Wird dann nach der obigen Bestimmung die rechte Seite der Gleichung von höherem Grade als die linke, so verringere man $\psi(x)$ und $Z(x)$ um einen Grad; bleibt dagegen die linke Seite von gleichem oder höherem Grade, so wird der zu x^0 gehörige Koeffizient in $\psi(x)$ gestrichen, wodurch die Unbestimmtheit beseitigt ist.

Die entstehenden Schluss-Integrale werden nach (3) dies. Abschn. behandelt.

$$\text{II. } \int \frac{f(x) dx}{[F(x)]^n [\varphi(x)]^m} = \frac{\varphi(x)}{[F(x)]^{n-1} [\varphi(x)]^{m-1}} + \int \frac{Z(x)}{F(x) \varphi(x)}$$

Die weitere Behandlung ist analog wie vor.

$$\text{III. } \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^m}} = \int \frac{f(x) dx}{W^{\frac{m}{2}}} = \frac{\psi(x)}{W^{\frac{m}{2}-1}} + \int \frac{Z(x) dx}{W^{\frac{1}{2}}}$$

In diesen Fällen wird $Z(x)$ konstant = C . Die weitere Behandlung wie vor, (vergl. S. 434).

$$\text{Beispiel. } \int \frac{9x^2 dx}{(3+x^2)^3} = \frac{F(x)}{(3+x^2)^2} + \int \frac{f(x)}{3+x^2}$$

$$9x^2 = dF(x)(3+x^2) - 4x F(x) + f(x)(9+6x^2+x^4); f(x) = Rx + Q.$$

Die höchste in dem von $F(x)$ und $dF(x)$ freien Theil der Gleich. ist x^5 ; $F(x)$ würde also zunächst vom 4ten Grade sein. Da die höchste Potenz auf der rechten Seite der Gleich. vorkommt, ist $F(x)$ um einen Grad zu verringern, daher:

$$F(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Durch Einsetzen und Auflösung erhält man die Bestimmungs-Gleich.:

$$\begin{array}{l|l} R=0 & 9A-3C+6Q=9 \\ -A+Q=0 & 6B-4D+9R=0 \\ -2B+6R=0 & 3C+9Q=0 \end{array} \left. \begin{array}{l} R=0 \\ B=0 \\ D=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A=3/8 \\ C=-9/8 \\ Q=3/8 \end{array}$$

$$\int \frac{9x^2 dx}{(3+x^2)^3} = \frac{3x(x^2-3)}{8(3+x^2)^2} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{3+x^2}$$

5. Auflösung der Funktion oder eines Theils derselben in eine konvergente unendliche Reihe.

I. Nach dem binomischen Lehrsatz.

$$\text{Beispiel. } \int \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)(1-bx)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} \left(1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \dots\right)$$

II. Nach der Maclaurin'schen Reihe:

$$\int f(x) dx = f(0)x + f'(0) \frac{x^2}{2} + \frac{f''(0)}{2!} \frac{x^3}{3} + \frac{f'''(0)}{3!} \frac{x^4}{4} + \dots + C$$

II. Integrations-Formeln.

a. Haupt-Formeln.

Vorbem.: Die willkürliche Konstante ist Kürze halber hier und in der Folge fortgelassen worden.

$$1. \int [F(x) + f(x) + \varphi(x) + \dots] dx = \int F(x) dx + \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx + \dots$$

$$2. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$3. \int u dv = \int uv - \int v du$$

$$4. \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \text{ od. } = -\arccos x$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctang x \text{ od. } = -\text{arc cotg } x$$

$$6. \int e^x dx = e^x$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \arccos(1-x)$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$12. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sec } x$$

$$8. \int \ln x dx = x \ln x - x$$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

20. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

21. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \text{tang } \frac{x}{2}$

15. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$

22. $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\cotg \frac{x}{2}$

16. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

23. $\int \text{tang } x dx = -\ln \cos x$

17. $\int \cos x dx = \sin x$

24. $\int \cotg x dx = \ln \sin x$

18. $\int \sin x dx = -\cos x$

25. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \text{tang } \frac{x}{2}$

19. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang } x$

26. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \text{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$

27. $\int \arcsin x dx = x \arcsin x \pm \sqrt{1-x^2}$

28. $\int \arccos x dx = x \arccos x \mp \sqrt{1-x^2}$

29. $\int \arctang x dx = x \arctang x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

30. $\int \text{arc cotg } x dx = x \text{ arc cotg } x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

Quadranten: I II III IV
 $\int \arcsin x dx$ + - - +
 $\int \arccos x dx$ - - + +

b. Rationale Funktionen.

I. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}$ Man integriere das 2. Glied des Summen-Ausdrucks partiell und erhält nach Zusammenziehung:

$$\frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

II. $\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^n}$ Man substituirt: $x+r=sz$; $(x+r)^2+s^2=s^2(z^2+1)$; $dx=sdz$, u. erhält:

$$= \int \frac{dx}{[(x+r)^2+s^2]^n} = \frac{1}{s^{2n-1}} \int \frac{dz}{(1+z^2)^n}; \text{ weitere Behandlg. nach I.}$$

1. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctang \sqrt{\frac{b}{a}} x$

2. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$

3. $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctang \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}$ wenn

$4ac-b^2$ positiv; $\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b-2cx}{\sqrt{b^2-4ac}+b+2cx}$ wenn b^2-4ac positiv;

$-\frac{1}{b+2cx}$ wenn $b^2=4ac$.

III. $\int \frac{(Ax+B) dx}{(a+bx+cx^2)^n} = A \int \frac{(x+r) dx}{[(x+r)^2+s^2]^n} + (B-Ar) \int \frac{dx}{[(x+r)^2+s^2]^n}$

Durch die Substitution $x+r=sz$ ist das 1. Summenglied unmittelbar, das 2. Summenglied nach II zu integrieren.

1. $\int \frac{(Ax+B) dx}{a+bx+cx^2} = \frac{A}{2c} \ln(a+bx+cx^2) + \frac{2Bc-Ab}{2c} \int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$

c. Irrationale Funktionen.

IV. $\int F[x \sqrt[n]{(a+bx)^m}] dx$. Man substituirt $a+bx = z^n$; $x = \frac{z^n - a}{b}$;

$$dx = \frac{n}{b} z^{n-1} dz \text{ und erh\u00e4lt: } \frac{n}{b} \int F\left[\frac{z^n - a}{b} z^p\right] dz$$

$$1. \int \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{3b} (\sqrt{a+bx})^3; \quad 2. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx}$$

$$3. \int \frac{A+Bx}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2}{3b^2} (3Ab - 2aB + Bbx) \sqrt{a+bx}$$

V. $\int F[x^{m-1}(a+bx)^{\frac{p}{q}}] dx$. Die Funktion kann rational gemacht werden, wenn $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ ganze Zahlen sind.

Man substituirt im erstern Falle: $a+bx^n = z^q$; im letztern Falle: $a+bx^n = x^n z^q$.

VI. $\int F[x^m, (a+bx)^{\frac{p}{q}}, (a+bx)^{\frac{r}{s}}, (a+bx)^{\frac{t}{u}} \dots] dx$. Man substituirt: $a+bx^n = z^{qsu}$.

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ Substitution wie bei II; man erh\u00e4lt: $A \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} =$
 $= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+r)^2 + s^2}}$ Dasselbe wird je nach dem Zeichen und dem Werth von z nach a, (9), (13) oder (14) aufgel\u00f6st.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(x\sqrt{c} + \sqrt{a+cx^2})$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{a-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{\sqrt{c} x}{a}$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}} = \frac{2}{\sqrt{c}} \ln(\sqrt{b+cx} + \sqrt{cx})$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{bx-cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{b-2cx}{b}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln[b+2cx+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}]$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{b-2cx}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

VIII. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}$. Man substituirt: $x = \frac{1}{y}$; $dx = -\frac{dy}{y^2}$ u. erh\u00e4lt danach die Form VII.

$$1. \int \frac{dx}{x\sqrt{bx+cx^2}} = -\frac{2\sqrt{bx+cx^2}}{bx}$$

$$2. \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{bx+2a+2\sqrt{a}\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$$

$$3. \int \frac{dx}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \left(\sin = \frac{bx-2a}{x\sqrt{4ac+b^2}} \right)$$

IX. $\int \frac{F(x) dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^m}} = \int \frac{F(x) dx}{W^2}$. Man setze:

$$\int \frac{F(x) dx}{W^2} = \frac{\phi(x)}{W^{2-1}} + C \int \frac{dx}{W^2} \text{ Die Differentiation liefert:}$$

$$F(x) = W d\phi(x) - \left(\frac{m}{2} - 1\right) \phi(x) dW + CW^{\frac{m-1}{2}}. \text{ (Vergl. S. 431.)}$$

Da m eine ungerade Zahl, ist $W^{\frac{m-1}{2}}$ rational. Man bestimme $\psi(x)$ nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Ist die höchste Potenz, welche in $F(x)$ oder $W^{\frac{m-1}{2}}$ vorkommt, x^n so ist: $\psi(x) = B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} \dots B_{n-1}$. Das Rest-Integral liefert VII.

X.
$$\int \frac{F(x) dx}{x^n \sqrt{(a + bx + cx^2)^m}} = \int \frac{F(x) dx}{x^n W^{\frac{m}{2}}}$$
. Man setze:

$$\int \frac{F(x) dx}{x^n W^{\frac{m}{2}}} = \frac{\psi(x)}{x^{n-1} W^{\frac{m}{2}-1}} + \int \frac{Cx + D}{W^{\frac{m}{2}}} dx$$
. Die Differentiation liefert:

$$F(x) = x W d\psi(x) - \psi(x) \left[(n-1) W + \left(\frac{m}{2} - 1\right) x dW \right] + (Cx + D) x^{n-1} W^{\frac{m-1}{2}}$$

Bestimmung von $\psi(x)$ wie vor.

XI.
$$\int \frac{\sqrt{(a + bx + cx^2)^m}}{x^n} dx = \int \frac{W^{\frac{m}{2}} dx}{x^n}$$
. Man setze:

$$\int \frac{W^{\frac{m}{2}} dx}{x^n} = \int \frac{W^{\frac{m+1}{2}} dx}{x^n W^{\frac{1}{2}}} = \frac{\psi(x) W^{\frac{1}{2}}}{x^{n-1}} + \int \frac{Cx + D}{x W^{\frac{1}{2}}}$$
. Die Differentiat. liefert:

$$W^{\frac{m+1}{2}} = x W d\psi(x) + \psi(x) \left[\frac{x}{2} dW - (n-1) W \right] + (Cx + D) x^{n-1}$$

 Bestimmung von $\psi(x)$ wie vor.

XII.
$$\int x^n \sqrt{a + bx + cx^2} dx = \int x^n W^{\frac{m}{2}} dx$$
. Man setze:

$$\int x^n W^{\frac{m}{2}} dx = \int \frac{x^n W^{\frac{m+1}{2}} dx}{W^{\frac{1}{2}}} = \psi(x) W^{\frac{1}{2}} + C \int \frac{dx}{W^{\frac{1}{2}}}$$
. Die Differentiat. liefert:

$$x^n W^{\frac{m+1}{2}} = W d\psi(x) + \frac{1}{2} \psi(x) dW$$
. Bestimmung von $\psi(x)$ wie vor.

1.
$$\int dx \sqrt{a + bx + cx^2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{b}{4c}\right) \sqrt{a + bx + cx^2} + \frac{4ac - b^2}{8c} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

XIII.
$$\int \frac{dx}{(x-a)^n W^{\frac{m}{2}}}$$
 und
$$\int \frac{W^{\frac{m}{2}} dx}{(x-a)^n}$$
;
$$\int (x-a)^n W^{\frac{m}{2}}$$
.

Diese Integrale werden durch die Substitutionen $x - a = \frac{1}{y}$ und $dx = -\frac{dy}{y^2}$ auf eine der Formen X, XI, XII gebracht.

XIV.
$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{W^{\frac{m}{2}}}$$
 wird durch Zerlegung von $\frac{f(x)}{F(x)}$ in ein Polynom von Brüchen nach S. 431 auf die vorauf behandelte Form gebracht.

d. Transzendente Funktionen.

XV.
$$\int f(e^{ax}) dx$$
. Man substituirt: $e^{ax} = y$; $dx = \frac{dy}{ay}$ und erhält $\frac{1}{a} \int f(y) \frac{dy}{y}$.

XVI.
$$\int f(x) e^x dx = e^x [f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \dots]$$
.

XVII.
$$\int \frac{e^x dx}{x^n}$$
. Es liefert:
$$\int x^k e^x dx = \frac{x^{k+1} e^x}{k+1} - \frac{1}{k+1} \int x^{k+1} e^x dx$$
 und durch Substitution $k+1 = -n$:

$$\int \frac{e^x dx}{x^n} = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} dx$$

XVIII. $\int x^n e^{mx} dx$, $\int \frac{e^{mx} dx}{x^n}$. Die Substit. $mx = y$ liefert d. Formen XVI. u. XVII.

XIX. $\int f(ax) dx$ und $\int f(ax) \varphi(x) dx$. Durch Substitution $x = \frac{y}{\ln a}$ erh. man:

$$\frac{1}{\ln a} \int f(e^y) dy \text{ und } \frac{1}{\ln a} \int f(e^y) \varphi\left(\frac{y}{\ln a}\right) dy$$

XX. $\int f(x) \ln x dx$ liefert durch theilweise Integration:

$$\ln x \int f(x) dx - \int \frac{f(x) dx}{x} dx$$

XXI. $\int f(x) \ln \varphi(x) dx$ liefert durch theilweise Integration:

$$\ln \varphi(x) \int f(x) dx - \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} (\int f(x) dx) dx$$

$$1. \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 \quad 2. \int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1}$$

XXII. $\int \frac{e^x dx}{x} = \ln(-x) + x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

XXIII. $\int f(\sin x) dx$, und $\int f(\cos x) dx$. Man setze $\sin x$ bez. $\cos x = z$;

$$dx = \pm \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \text{ und erh\u00e4lt: } \pm \int \psi(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

XXIV. $\int f(\tan x) dx$. Man setze $\tan x = z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$ und erh\u00e4lt:

$$\int \psi(z) \frac{dz}{1+z^2}$$

XXV. 1. $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$

$$2. \int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$3. \int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$4. \int \cotg^n x dx = -\frac{\cotg^{n-1} x}{n-1} - \int \cotg^{n-2} x dx$$

$$5. \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

XXVI. $\int f(\sin x, \cos x) dx$. In den meisten F\u00e4llen ist zu substituieren:

$$\tan \frac{1}{2} x = z; dx = \frac{2z}{1+z^2}; \sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \frac{2z}{1+z^2}; \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

und man erh\u00e4lt die Formen: $\int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \frac{2dz}{1+z^2}$

XXVII. 1. $\int \sin^p x \cos^q x dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x dx$

$$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} x \cos^q x dx$$

$$2. \int \sin^{-p} x \cos^q x dx = \frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} - \frac{p-q-2}{p-1} \int \sin^{-p+2} x \cos^q x dx$$

$$3. \int \sin^p x \cos^{-q} x dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+2} x}{q-1} + \frac{q-p-2}{q-1} \int \sin^p x \cos^{-q+2} x dx$$

XXVIII. $\int f(\sin x, \cos x, \tan x) dx$. Je 2 Funktionen werden durch die 3. ausgedr\u00fcckt; weitere Behandlung nach XXIII oder XXIV.

XXIX. 1. $\int x^p \sin x dx = -x^p \cos x + p \int x^{p-1} \cos x dx$

$$2. \int x^p \cos x dx = x^p \sin x - p \int x^{p-1} \sin x dx$$

- XXX. 1. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$
 2. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$
 3. $\int e^{-ax} \sin bx \, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx + b \cos bx)$
 4. $\int e^{-ax} \cos bx \, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx - b \sin bx)$

- XXXI. 1. $\int f(x) \arcsin x \, dx = \arcsin x \int f(x) \, dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x) \, dx$
 2. $\int f(x) \arccos x \, dx = \arccos x \int f(x) \, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x) \, dx$
 3. $\int f(x) \arctan x \, dx = \arctan x \int f(x) \, dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \int f(x) \, dx$
 4. $\int f(\arcsin x) \, dx$; $\arcsin x = z$; $x = \sin z$. Man erhält: $\int f(z) \cos z \, dz$
 5. $\int f(\arccos x) \, dx$; $\arccos x = z$; $x = \cos z$. " " $-\int f(z) \sin z \, dz$
 6. $\int f(\arctan x) \, dx$; $\arctan x = z$; $x = \tan z$. " " $\int f(z) \frac{dz}{\cos^2 z}$

e. Bestimmte Integrale.

1. $\int_a^b = -\int_b^a$; 2. $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$; 3. $\int_a^c - \int_b^c = \int_a^b$;
 4. $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}$; 5. $\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{4a}$; 6. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$;
 7. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$; 8. $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$; 9. $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x} \, dx = \infty$;
 10. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}$; 11. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n \cdot 2}$
 12. $\int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1$ 13. $\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

f. Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale.

Zur näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) \, dx$ theile man $b - a$ in n gleiche Theile: $\frac{b-a}{n} = \Delta$ und berechne die zu den Werthen $x = a, x = a + \Delta, x = a + 2\Delta \dots x = a + n\Delta$ gehörigen Werthe $f(x) = y_0, y_1, y_2 \dots y_n$:

$$1. \int_a^b f(x) \, dx = \Delta \left[\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right] - \frac{1}{12} (\Delta)^2 [f'(b) - f'(a)] + \frac{1}{384} \rho \frac{(b-a)^5}{n^4} M$$

in welchem Näherungs-Werth ρ ein nicht näher bekannter positiver oder negativer Bruch und M der absolut grösste Werth, welchen $f^{IV}(x)$ in dem Intervall $x = a$ bis $x = b$ einnimmt, ist. Das Schlussglied dient zur Abschätzung d. Fehlers d. vorausgehenden Summe, indem man ρ nach einander die Werthe 0 und 1 giebt.

Soll $\int_a^b f(x) \, dx$ auf p Dezimalstellen genau berechnet werden, so bestimme

man n aus der Beziehung $\left(\frac{1}{10}\right)^p > \frac{1}{384} \frac{(b-a)^5}{n^4} M$ oder: $n > \sqrt[4]{\frac{10^p (b-a)^5 M}{384}}$

$$2. \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3} \Delta [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots y_{n-2}) + y_n] - \rho \frac{5}{288} \frac{(b-a)^5}{n^4} M$$

n muss eine gerade Zahl sein. Gebrauch des Schlussgliedés wie vor. Man erhält

$$\text{unter gleichen Voraussetzungen: } n > \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 10^5 (b-a)^5 M}{288}}$$

Der Genauigkeitsgrad der Formel (2) ist demnach geringer als derjenige der Formel (1).*)

$$3. \int_a^b f(x) dx = \Delta \left[\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right] - \frac{B_1(\Delta)^2}{1 \cdot 2} [f'(b) - f'(a)] \\ + \frac{B_3(\Delta)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} [f'''(b) - f'''(a)] - + - \dots$$

In dieser Formel bezeichnen B_1, B_3, \dots die Bernouilli'schen Zahlen:

$$B_1 = \frac{1}{6}; B_3 = \frac{1}{30}; B_5 = \frac{1}{42}; B_7 = \frac{1}{30}; B_9 = \frac{5}{66}; B_{11} = \frac{691}{2730} \text{ u. s. w.}$$

III. Differential-Gleichungen.

a. Differential-Gleichungen 1. Ordnung.

1. Die allgemeine Form der Differential-Gleichung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ wird durch Multiplikation mit dx auf die Form gebracht:

$$M dx + N dy = 0$$

worin M und N Funktionen von x und y sind. Die Gl. bildet das vollständige Differential einer Funktion $\varphi(x, y) = C$, wenn die Bedingungen erfüllt ist:

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so existirt ein integrierender Faktor μ , durch dessen Multiplikation die Gl. $\mu M dx + \mu N dy = 0$ zu einem vollständigen Differential wird.

Die Integration ist immer ausführbar, wenn $M = F(x)$ und $N = f(y)$, oder wenn die Gl. auf diese Form zurück geführt werden kann. (Vergl. 2-6).

2. Die Variablen sind getrennt: $F(x) dx + f(y) dy = 0$
Dann ist: $\int F(x) dx + \int f(y) dy = C$

3. Trennung der Variablen durch Multiplikation oder Division:

$$F(x) \theta(y) dx + f(x) \psi(y) dy = 0$$

Man dividire durch $f(x) \theta(y)$ und erhält: $\frac{F(x)}{f(x)} dx + \frac{\psi(y)}{\theta(y)} dy = 0$

4. Wenn die Form der Funktion die Darstellung ermöglicht von: $\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogene Differential-Gleichungen) wird die Trennung der Variablen erreicht durch die Substitution: $y = xz$.

Wegen $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(z)$ ist: $z dx + x dz = f(z) dx$ und das Resultat:

$$\ln x = - \int \frac{dz}{z + f(z)} + C$$

5. Dieselbe Substitution führt zum Ziel bei der Form: $y' = \frac{y}{x} + F(x)f\left(\frac{y}{x}\right)$

Man erhält: $x dz = F(x)f(z) dx; \int \frac{dz}{f(z)} = \int \frac{F(x)}{x} dx + C$

6. In der Differential-Gleichg. $(ax + by + c) dx + (a'x + b'y + c') dy = 0$ substituirt man:

$$x = u + a; y = v + \beta$$

und bestimme a und β aus den Bedingungen: $aa + b\beta = -c; a'a + b'\beta = -c'$
Man erhält: $(au + bv) du + (a'u + b'v) dv = 0$ welche Gl. nach (4) weiter zu

*) Vergl. Schloemilch. Compendium der höhern Analysis. Kap. XIV. § 82.

behandeln ist. Sollte $ab - a'b = 0$ sein, so setze man: $ax + by = z$;
 $b dy = dz - a dx$; $a' = na$; $b' = nb$. Man erhält:

$$b(z + c) dx + (nz + c')(dz - a dx) = 0$$

in welcher Gl. die Trennung der Variablen leicht zu bewirken ist.

7. Lineare Differential-Gleich.: $dy + yf(x) dx + \varphi(x) dx = 0$

Man substituirt: $y = Xt$; $t dX + X dt + Xt f(x) dx + \varphi(x) dx = 0$

Da für y 2 neue Variablen eingetreten sind, ist eine willkürliche Annahme zulässig; man setze:

I. $t dX + \varphi(x) dx = 0$ und II. $dt + t f(x) dx = 0$

Aus (II.) folgt durch Integration: $t = e^{-\int f(x) dx}$

Sonach aus (I.): $X = C - \int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx$

Also die Lösung: $y = e^{-\int f(x) dx} (C - \int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx)$

8. Auf den Fall (7) werden zurück geführt die Gl.:

- I. $F(x) dy + y f(x) dx + \varphi(x) dx = 0$ mittels Division durch $F(x)$
- II. $\psi^1 y dy + \psi(y) f(x) dx + \varphi(x) dx = 0$ mittels d. Substit. $\psi(y) = z$; $\psi^1(y) dy = dz$
- III. $dy + y f(x) dx + y^{n+1} \varphi(x) dx = 0$ mittels der Substitution $y^n = \frac{1}{u}$

9. Ist die Differential-Gleich. $M dx + N dy = F(x,y) dx + f(x,y) dy = 0$ das vollständige Differential von φ , also $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, so setze man: $\varphi = \psi + \int Y dy$

oder: $\psi = \theta + \int X dx$

Es ist dann: $\psi = \int M dx$ indem y als konstant betrachtet wird.

bezw.: $\theta = \int N dy$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „

$Y = N - \frac{\partial \psi}{\partial y}$; bzw. $X = M - \frac{\partial \theta}{\partial x}$

10. Ist die Differential-Gleich. $M dx + N dy = i(x,y) dx + f(x,y) dy = 0$ kein vollständiges Differential und keine der Transformationen sub 3 — 8 anwendbar, so muss der integrierende Faktor aus der Beziehung:

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

bestimmt werden. Die Auflösung dieser Gl. ist in den meisten Fällen nicht durchführbar. In dem speziellen Falle, dass:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) : N \text{ bzw. } \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) : M$$

Funktionen von x bzw. y allein sind, ist auch μ eine Funktion von x , bzw. von y allein. Der integrierende Faktor wird dann bestimmt aus:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N Q = M P \text{ und } \frac{\partial \mu}{\mu} = Q dx = - P dy$$

sonach: $\mu = e^{-\int Q dx}$ oder: $\mu = e^{-\int P dy}$

Bemerk. Mit Hilfe der vorstehenden Bestimmung des integrierenden Faktors ist die lineare Gl. sub 7 kürzer lösbar; man erhält $\mu = e^{\int f(x) dx}$

b. Differential-Gleichungen 2. Ordnung.

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$ Lösung 1: $y = \int dx \int f(x) dx + Cx + C_1$
 „ 2: $y = x \int f(x) dx - \int x f(x) dx + Cx + C_1$

2. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y)$; $x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C}} + C_1$

Allgemein: $F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, y\right) = 0$. Man substituirt $\frac{dy}{dx} = z$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, eliminiere dx aus den beiden Gl. $F\left(\frac{dz}{dx}, y\right)$ und $\frac{dy}{dx} = z$. Die Lösung ergibt sich durch Integration von $F\left(\frac{z dz}{dy}, y\right) = 0$

3. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Man substituirt $\frac{dy}{dx} = z$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$. Man erhält
 $x = \int \frac{dz}{f(z)} + C$; $y = \int \frac{z dz}{f(z)} + C_1$

4. $F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0$. Die Substitution $\frac{dy}{dx} = z$ liefert die Differential-Gleich. 1. Ordnung: $F\left(\frac{dz}{dx}, z, x\right) = 0$

5. $F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0$. Die Substitution $\frac{dy}{dx} = z$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = z \frac{dz}{dy}$ liefert die Differential-Gleich. 1. Ordnung: $F\left(z \frac{dz}{dy}, z, y\right) = 0$.

c. Höhere Differential-Gleichungen.

$$1. a \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

Man bestimme aus der Gl. $a w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n = 0$ die Wurzeln; es seien dieselben u_1, u_2, u_3, \dots .

so ist die Lösung: $y = C_1 e^{u_1 x} + C_2 e^{u_2 x} + \dots + C_n e^{u_n x}$
 worin C_1, C_2, \dots, C_n die Konstanten sind.

2. Treten imaginäre Wurzeln auf so seien $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ zwei zusammen gehörige imaginäre Wurzeln; die entsprechenden Glieder in der Gl. für y in (1) werden:

$$e^{\alpha x} (C_1 e^{\beta x \sqrt{-1}} + C_2 e^{\beta x \sqrt{-1}}) = e^{\alpha x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x)$$

worin B_1 und B_2 2 neue Konstanten sind.

3. Sind r Wurzeln einander gleich, ist also: $u_k = u_{k+1} = \dots = u_{k+r}$, so wird die Summe der entsprechenden Glieder:

$$e^{u_k x} (D_1 + D_{11} x + D_{111} x^2 + \dots + D_r x^{r-1})$$

worin D_1, D_{11}, \dots neue Konstanten sind.

$$4. a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

Man bestimmt zunächst aus der Gl.: $a w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n = 0$ die Wurzeln u_1, u_2, \dots ; dann ist die Lösung: $y = z_1 e^{u_1 x} + z_2 e^{u_2 x} + z_n e^{u_n x}$
 z_1, z_2, z_3, \dots werden berechnet aus den Gl.:

$$\begin{array}{ccccccc} e^{u_1 x} & \frac{dz_1}{dx} + e^{u_2 x} & \frac{dz_2}{dx} + \dots & e^{u_n x} & \frac{dz_n}{dx} & = & 0 \\ u_1 e^{u_1 x} & \frac{dz_1}{dx} + u_2 e^{u_2 x} & \frac{dz_2}{dx} + \dots & u_n e^{u_n x} & \frac{dz_n}{dx} & = & 0 \\ u_1^2 e^{u_1 x} & \frac{dz_1}{dx} + u_2^2 e^{u_2 x} & \frac{dz_2}{dx} + \dots & u_n^2 e^{u_n x} & \frac{dz_n}{dx} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{n-1} e^{u_1 x} & \frac{dz_1}{dx} + u_2^{n-1} e^{u_2 x} & \frac{dz_2}{dx} + \dots & u_n^{n-1} e^{u_n x} & \frac{dz_n}{dx} & = & 0 \end{array}$$

H. Analytische Geometrie der Ebene.

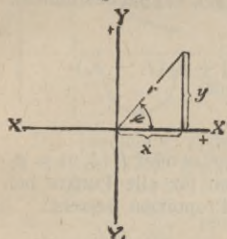
Litteratur: O. Fort & O. Schloemilch. Lehrb. d. analyt. Geometrie. 1. Th. Analyt. Geom. d. Ebene. 5. Aufl. Leipzig, Teubner. — Grelle. Analytische Geometrie der Ebene. Hannover, Rümpler.

I. Die Koordinaten in der Ebene. (Fig. 135).

1. Richtungen: OX, OY positiv; Richtungen: OX_1, OY_1 negativ.

Die Richtung des Radiusvektor wird stets durch den Winkel desselben mit der positiven Richtung der Koordinaten-Axen gemessen; der Winkel wird nach beiden Seiten bis 180° gezählt, Fig. 136.

Fig. 135.



2. Verschiebung der Koordin.-Axen. x', y' Koordin. des neuen Systems; x, y desgl. des alten Systems.

a. Parallel-Verschiebung. a, b Koordinaten des Nullpunkts des alten Systems in Bezug auf das neue; daher:

$$x' = x + a; \quad y' = y + b$$

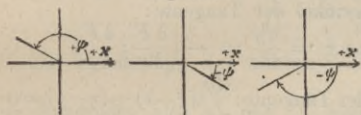
b. Drehung der Koordinaten-Axen. α Winkel der alten X-Axe gegen die neue:

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha; \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

c. Drehung u. Verschiebung. Bezeichnungen wie vor.

$$x' = a + x \cos \alpha - y \sin \alpha; \quad y' = b + x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Fig. 136.



II. Gerade Linie.

1. Allgem. Gleichg. der geraden Linie:

$$Ax + By + C = 0$$

2. Gleichg. einer Geraden t , die auf der Y-Axe die Länge b abschneidet und für welche $\tan(xt) = m$ ist:

$$y = mx + b$$

3. Gleichg. einer Geraden, welche auf der X- und Y-Axe die Längen a und bezw. b abschneidet:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

4. Gleichg. einer Geraden, deren Abstand vom Nullpunkt $= n_0$ ist und deren Normale mit der X-Axe den Winkel (nx) bildet (Normalform):

$$x \cos(nx) + y \sin(nx) - n_0 = 0$$

5. Ist die Gleichg. einer Geraden gegeben in der allgem. Form: $Ax + By + C = 0$, so wird dieselbe in die Normalform übergeführt durch Multiplikation mit dem Faktor:

$$R = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \text{es ist also: } \cos(nx) = AR; \quad \sin(nx) = BR; \quad n_0 = -CR$$

6. Abstand eines Punktes (x_1, y_1) von der Geraden ad 4:

$$p = \pm [x_1 \cos(nx) + y_1 \sin(nx) - n_0]$$

p ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Nullpunkt und der Punkt (x_1, y_1) auf verschiedenen oder auf derselben Seite der Geraden liegen.

7. Der Winkel zweier Geraden t_1, t_2 ist gleich dem Winkel ihrer Normalen, also:

$$\cos(t_1 t_2) = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}}; \quad \sin(t_2 t_1) = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}}$$

8. Zwei Gerade sind daher:

parallel, wenn $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ oder $A_1 : B_1 = A_2 : B_2$

normal, wenn $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ oder $A_2 : B_2 = -B_1 : A_1$ ist.

Die Gleichg. jeder zur Geraden $Ax + By + C = 0$ parallelen oder normalen Geraden hat somit bei willkürlichem m, n, C die Form:

Parallele: $mAx + mBy + C_1 = 0$ oder: $Ax + By + c = 0$

Normale: $nBx - nAy + C_1 = 0$ oder: $Bx - Ay + \gamma = 0$

worin c und γ willkürliche Konstanten sind.

9. Sollen Parallele und Normale zur Geraden $Ax + By + C = 0$ durch einen gegebenen Punkt x_1, y_1 gehen, so ist die Gleichg. der

Parallelen: $A(\xi - x_1) + B(\eta - y_1) = 0$; Normalen: $B(\xi - x_1) - A(\eta - y_1) = 0$.

10. Die Koordinaten des Schnittpunkts zweier Geraden sind:

$$x = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \quad y = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

11. Gleichg. einer Geraden (x_1, y_1) , welche durch 2 gegebene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

12. Ist F die Fläche eines durch die Punkte (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) bestimmten Dreiecks, so ist:

$$2F = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = y_0(x_2 - x_1) + y_1(x_0 - x_2) + y_2(x_1 - x_0)$$

III. Allgemeine Kurvenlehre.

1. Allgemeine Gleichg. in Normal-Koordinaten: $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$.

2. Zwei Kurven $F(x, y)$ und $\Phi(\xi, \eta)$ sind ähnlich, wenn für alle Punkte bei für jede Kurve passend gewähltem Koordinaten-System die Proportion besteht:

$$x : \xi = y : \eta$$

3. Tangente, Normale, Fig. 137.

Richtungswinkel der Tangente:

$$\text{tang } \tau = \frac{dy}{dx} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

$$\text{Gleichg. der Tangente: } \frac{dy}{dx} (\xi - x) - (\eta - y) = 0$$

$$\text{Gleichg. der Normale: } \xi - x + \frac{dy}{dx} (\eta - y) = 0$$

$$\text{Tangente: } PT = y \frac{dx}{dy} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2};$$

$$\text{Subtangente: } P'T = y \frac{dx}{dy}$$

$$\text{Normale: } PN = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}; \quad \text{Subnormale: } P'N = y \frac{dy}{dx}$$

4. Asymptoten. Erstreckt sich eine Kurve ins Unendliche, so ist die Tangente, welche die Kurve in der Unendlichkeit berührt, eine Asymptote. Die Gleichg. der Asymptote wird erhalten, wenn man in der allgem. Tangenten-Gleichg. y durch x eliminiert und $x = \infty$ setzt.

5. Krümmung der Kurven; ausgezeichnete Punkte.

Für $\left. \begin{matrix} \text{positive} \\ \text{negative} \end{matrix} \right\}$ Werthe $\frac{dy}{dx}$ $\left. \begin{matrix} \text{steigt} \\ \text{fällt} \end{matrix} \right\}$ die Kurve

„ Werthe $\frac{dy}{dx} = 0$ ist die Tangente \parallel der X Axe.

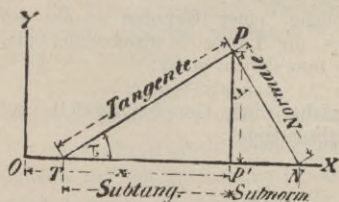
„ „ $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist die Tangente \parallel der Y Axe.

„ positive Werthe $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist die Kurve konvex gegen die X -Axe.

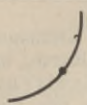

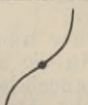
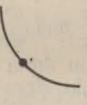
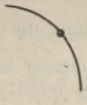
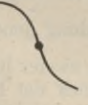


„ negative „ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist die Kurve konkav gegen die X -Axe.

„ Werthe $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ hat, wenn gleichzeitig $\frac{dy}{dx}$ nicht verschwindet, die Kurve einen Wendepunkt.

Fig. 137.



Tafel zur Darstellung der Beziehungen ad 5.

		Die 2. Ableitung ist:		
		+	-	0
Die 1. Ableitung ist:	+	 steigend und konvex	 steigend und konkav	 Wendepunkt im Steigen
	-	 fallend und konvex	 fallend und konkav	 Wendepunkt im Fallen
	0	 Minimum	 Maximum	Unbestimmt

Die besonders wichtigen Kulminations-Punkte (Maxima und Minima) werden nach den S. 427 ff. gegebenen Regeln ermittelt.

6. Mehrfache Punkte. Erscheint für einen Punkt der Kurve der Werth $\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, so müssen die Gleichn.:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \frac{\partial F}{\partial y} = 0; F(x, y) = 0 \text{ zusammen bestehen.}$$

Zur Ermittlung des wahren Werthes von $\frac{dy}{dx}$ sind Zähler und Nenner des betr. Ausdrucks, also $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ nochmals nach dx zu differentiiren. Man erhält $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichg.:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

durch Auflösung nach $\frac{dy}{dx} = \tan \tau$. Man erhält 2 Wurzelwerthe für $\tan \tau$; der betr. Punkt ist ein Doppelpunkt, in welchem 2 Tangenten sich schneiden. Sind beide Wurzeln gleich, so fallen die Tangenten zusammen und der Punkt ist ein Rückkehrpunkt oder Wendepunkt. — Sind die Wurzeln imaginär, so erhält man einen isolirten oder konjugirten Punkt, in welchem die Kurve keine reellen Tangenten hat.

7. Berührung von Kurven. Wenn 2 Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ einen Punkt gemeinschaftlich haben und die Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bis zur n^{ten} incl. einander gleich sind, so haben die Kurven eine Berührung n^{ter} Ordnung.

Die Tangente einer Kurve hat mit derselben im allgem. eine Berührung 1^{ter} Ordnung, in den Wendepunkten eine Berührung 2^{ter} Ordnung.

8. Krümmungskreis. Der Krümmungskreis hat mit der Kurve eine Berührung 2^{ter} Ordnung. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Krümmungsmittelpunkt, sein Radius der Krümmungs-Halbmesser, der reziproke Werth des Radius ist die Krümmung der Kurve in dem betr. Punkte.

$$\text{Krümmungs-Radius } \rho = \frac{ds}{d\tau} = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Ist N die Länge der Normalen (vergl. 3), so ist auch $\rho = \frac{N^3}{y^3 \frac{d^2 y}{dx^2}}$

Koordinaten des Krümmungs-Mittelpunkts:

$$\xi = x - \frac{\frac{dy}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \quad \eta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

9. Evolute und Evolvente. Der geometr. Ort der Krümmungs-Mittelp. einer Kurve ist die abgewinkelte Kurve oder Evolute der Kurve, im Vergleich wozu die ursprüngliche Kurve die Abwickelungs-Kurve oder Evolvente heisst.

Die Gleichg. der Evolute wird gefunden, wenn man aus den Gleichgn. der Koordinaten des Krümmungs-Mittelp. mit Hilfe der Gleichg. der Evolvente und durch Verbindung jener beiden Gleichgn. die Werthe $x, y, \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ eliminiert.

Die Differenz zweier Krümmungs-Halbmesser ist gleich dem von ihren Endpunkten begrenzten Stück der Evolute. Hieraus folgt, dass der Endpunkt eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Fadens, welcher auf die Evolute gewickelt ist, die Evolvente beschreiben muss, wenn der Faden stets in Richtung der Tangente angezogen, von der Evolute abgewickelt wird.

10. Rektifikation:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

11. Quadratur. Fläche zwischen den Ordinaten y_2, y_1 :

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

12. Polar-Koordinaten. (Fig. 138). Allgem. Gleichg. der Kurve: $r = f(\psi)$, bezw. $F(r, \psi) = 0$. Beziehung zwischen Polar-Koordinaten und rechtwinkl. Koordinat.

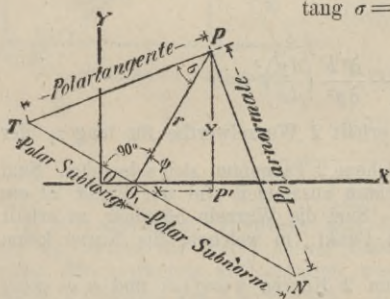
$$y = r \sin \psi;$$

$$x = a + r \cos \psi$$

Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor:

$$\text{tang } \sigma = \frac{r d\psi}{dr}$$

Fig. 138.



$$\text{Polar-Tangente: } PT = \frac{r}{\cos \sigma}$$

$$\text{Polar-Subtangente: } O_1 T = r \text{ tang } \sigma$$

$$\text{Polar-Normale: } PN = \frac{r}{\sin \sigma}$$

$$\text{Polar-Subnormale: } O_1 N = \frac{r}{\text{tang } \sigma}$$

Krümmungs-Halbmesser:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\psi^2}}$$

$$\text{Bogenlänge: } s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2} dr = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2} d\psi$$

$$\text{Quadratur (Sektor zwischen } r_2 \text{ und } r_1): F = \frac{1}{2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} r^2 d\psi$$

Beispiel 1. Untersuchung der Kurve der Gleichg.: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

Für $x < a$ ist die Kurve imaginär. Für $x = \pm a$ wird $y = 0$. Zu jedem positiven oder negativen Werthe von x gehören 2 gleiche Werthe von y , von denen einer positiv, der andere negativ ist. Die Kurve besteht also aus 2 getrennten Aesten, welche symmetrisch zur X- und Y-Axe liegen und die X-Axe rechts und links vom Nullpunkte in der Entfernung a von demselben schneiden.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{b^2 x}{a^2 y}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{b a}{x^3 \sqrt{(1 - \frac{a^2}{x^2})^3}} = - \frac{b^4}{a^2 y^3}$$

Da für den reellen Theil der Kurve $x > a$, ist die 1. Ableitung positiv, die 2. negativ für alle positiven und negativen x , für alle positiven y . Die Kurve steigt daher stetig und ist durchweg gegen die X Axe konkav. Die Kurve hat kein Maximum; für $x = a$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$. Die Tangente im Scheitel der Kurve ist \parallel der Y -Axe.

$$\text{Gleichg. der Tangente: } \eta = \frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \left[\xi - \frac{a^2}{x^2} \right]$$

Für $x = \infty$ ergibt sich die Gleichg. der Asymptote: $\eta = \frac{b}{a} \xi$. Die Asymptote geht also durch den Nullpunkt; ihr Neigungswinkel λ gegen die X -Axe ist: $\lambda = \arctan \frac{b}{a}$.

$$\text{Subtangente} = \frac{a^2}{b^2} \frac{y^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}; \quad \text{Subnormale} = \frac{b^2}{a^2} x.$$

$$\text{Krümmungshalbm.} : \rho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{\left[x^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) - a^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{a b}$$

$$\text{Koordinaten des Krümmungs-Mittelp.: } \xi = \frac{x^3 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)}{a^2}; \quad \eta = \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{a b} (x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Aus der Gleichg. für } \xi \text{ erhält man: } x^2 = \frac{a^{\frac{4}{3}} \xi^{\frac{2}{3}}}{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^{\frac{2}{3}}}$$

Eliminirt man mittels dieser Beziehung x aus der Gleichg. für η , so erhält man die Gleichg. der Evolute:

$$\xi^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \eta^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Fläche vom Scheitel bis $x = x_1$:

$$F = \int_a^{x_1} y dx = \frac{b}{a} \int_a^{x_1} \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right]_a^{x_1}$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$$

$$\text{Bogenlänge: } s = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{x^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) - a^2}{x^2 - a^2}}. \quad \text{Man setze:}$$

$1 + \frac{b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ und $x = \frac{a}{\cos \theta}$; dann erhält man:

$$s = a \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\varepsilon^2 - \cos^2 \theta} = a \varepsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Da wegen $\varepsilon > 1$ der Bruch $\left(\frac{\cos \theta}{\varepsilon} \right)^2 < 1$, entwickle man den Faktor $\left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz, wodurch man erhält:

$$s = a \varepsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{\cos^4 \theta}{\varepsilon^4} - \dots \right)$$

welches Integral nach bekannten Regeln aufzulösen ist. Bei Einsetzung der Grenzwerte ist zu berücksichtigen, dass $\theta_1 = \arccos \frac{x_1}{a}$ und $\theta_2 = \arccos \frac{x_2}{a}$ ist.

Beispiel 2. Untersuchung der Kurve der Gleichg. $x^4 - 2ay^3 - 2a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x-a)(x+a); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2ay(y+a)$$

Die Werthe für $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ werden gleichzeitig = 0 für folgende Werthe-Paare von x und y :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x = (0) & 0 & +a & (-a) & -a & (-a) \\ y = (0) & -a & 0 & 0 & 0 & (-a) \end{array}$$

Für diese Werthe-Paare erscheint $\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, müsste

also nach S. 428 weiter untersucht werden. Indessen genügen der gegebenen Kurvengleichung die eingeklammerten Werth-Paare (das 1., 4. und 6.) nicht; diese sind also überhaupt auszuschließen. Für das 2., 3. und 5. Werthe-Paar erhält man folgende Werthe der partiellen 2. Ableitungen:

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4(3x^2 - a^2)$	$x=0; y=-a$	$x=a; y=0$	$x=-a; y=0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$	0	0	0
$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -6a(2y+a)$	$+6a^2$	$-6a^2$	$-6a^2$

Man erhält $\frac{dy}{dx}$ durch Einsetzung obiger Werthe in die quadratische Gleichg.:

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$, sonach:

$x=0 \left\{ \begin{array}{l} 6a^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0; \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}; \\ y=a \end{array} \right.$
 $x=a \left\{ \begin{array}{l} 6a^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0; \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}; \\ y=0 \end{array} \right.$
 $x=-a \left\{ \begin{array}{l} 6a^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0; \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}; \\ y=0 \end{array} \right.$

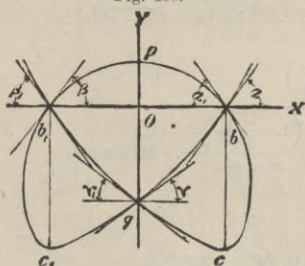
Den Gleichgn. $F(x, y) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ genügen die Werthe-Paare:

$x=0$	$x=a$	$x=-a$
$y=\frac{a}{2}$	$y=-\frac{3}{2}a$	$y=-\frac{3}{2}a$

Für diese Werthe-Paare verschwindet $\frac{\partial F}{\partial y}$ nicht; dieselben liefern also die eminenten Werthe

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4(3x^2 - a^2)$	$x=0; y=\frac{a}{2}$	$x=a; y=-\frac{3}{2}a$	$x=-a; y=-\frac{3}{2}a$
$\frac{\partial F}{\partial y} = -4ay(y+a)$	$-3a^3$	$-3a^3$	$-3a^3$
sonach: $-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$	< 0 (Max.)	> 0 (Minim.)	> 0 (Minim.)

Fig. 139.



Man erhält sonach das Bild der Kurve wenn man für $x = \pm a, y = 0$: $\tan \alpha = \tan \alpha_1 = \tan \beta = \tan \beta_1 = \sqrt{4/3}$; für $x = 0, y = -a$: $\tan \gamma = \tan \gamma_1 = \sqrt{2/3}$; ferner $op = \frac{3}{2}a, ob = ob_1 = oq = a, bc = b_1c_1 = \frac{3}{2}a$ macht, Fig. 139.

IV. Spezielle Kurvenlehre.

a. Kegelschnitte.

a. Allgemeine Beziehungen.

1. Die Kurven der Gleichg. 2. Grades heissen Kegelschnitte. Die allgem. Form der Gleichg. ist:

$$a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + 2a_{02}x + 2a_{12}y + a_{22} = 0.$$

Je nachdem $a_{01}^2 - a_{00}a_{11} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$ ist, entstehen bezw. Ellipse, Parabel, Hyperbel.

2. Die Koordinaten des Mittelpunkts des Kegelschnitts werden bestimmt aus den Gleichgn.:

$$a_{00}x^2 + a_{01}y_0 + a_{02} = 0; \quad a_{01}x_0 + a_{11}y_0 + a_{12} = 0$$

$$x_0 = \frac{a_{02}a_{11} - a_{01}a_{12}}{a_{00}a_{11} - a_{01}^2}, \quad y_0 = \frac{a_{12}a_{00} - a_{02}a_{01}}{a_{00}a_{11} - a_{01}^2}$$

Der Mittelpunkt liegt im Unendlichen wenn $a_{00}a_{11} - a_{01}^2 = 0$; $a_{00}a_{11} - a_{01}^2 = 0$ und die Zähler der Brüche für x_0, y_0 nicht gleichzeitig verschwinden.

3. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf einer geraden Linie; dieselbe heisst Durchmesser des Kegelschnitts. Sämmtliche Durchmesser schneiden sich im Mittelpunkt des Kegelschnitts und werden hier halbirt.

4. Die Tangente am Endpunkte eines Durchmessers ist der von dem Durchmesser halbirtten Schaar von Sehnen parallel.

5. Ist D_1 ein Durchmesser und D_2 ein 2. Durchmesser, welcher der von D_1 halbirtten Schaar von Sehnen parallel ist, so ist auch D_1 der von D_2 halbirtten Sehnschaar parallel. Die beiden Durchmesser D_1 und D_2 sind konjugirt.

6. Für die Parabel liegt der Mittelpunkt im Unendlichen.

Für den Kreis stehen alle konjugirtten Durchmesser normal aufeinander.

7. Allgemeine Scheitelgleichg. der Kegelschnitte in Bezug auf die Hauptaxen-Richtung als Abszissen-Axe: $y^2 = 2px + qx^2$

Es ist: für die Apollonische Parabel $q = 0$; für die Hyperbel $q > 0$;
 Ellipse $q < 0$; den Kreis $q = -1$.

Sind $2a$ und $2b$ die Hauptaxen des Kegelschnitts, so ist absolut, also ohne Berücksichtigung des Vorzeichens von q : $p = \frac{b^2}{a}$; $q = \frac{b^2}{a^2}$; $p = aq$

8. Bewegt sich ein Punkt P in der Weise, dass seine jedesmaligen Entfernungen: PF von einem festen Punkte F , und PQ von einer festen Geraden in einem konstanten Verhältniss $\frac{PF}{PQ} = \varepsilon$ stehen, so ist der Ort des Punktes:

eine Parabel } je nachdem ε $\left\{ \begin{array}{l} = 1 \\ < 1 \\ > 1 \end{array} \right.$ ist.
 eine Ellipse }
 eine Hyperbel }

Der gedachte feste Punkt liegt auf der Hauptaxe und liefert einen Brennpunkt; die gegebene feste Linie steht normal zur Hauptaxe und heisst Direktrix.

9. Die doppelte Ordin. im Brennp. ist $= 2p$ u. heisst Parameter d. Kegelschnitts.

10. Der Abstand des Brennpunkts vom Mittelpunkt $= e$ heisst lineäre Exzentrizität, das Verhältniss $\frac{e}{a} = \varepsilon$ die numerische Exzentrizität.

11. Die Projektion der Normalen auf den Leitstrahl vom Brennpunkt nach dem Berührungspunkt der zugehörigen Tangente ist konstant $= p$.

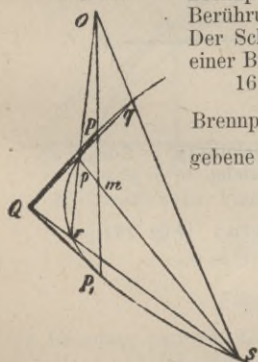
12. Ist σ der Winkel der Tangente mit dem Leitstrahl vom Brennpunkt, so ist der Krümmungs-Radius: $\rho = \frac{p}{\sin^2 \sigma}$

13. Tangente und Normale eines Kegelschnitts halbiren die Winkel der Leitstrahlen aus den Brennpunkten nach dem Berührungspunkte der bezügl. Tangente. Bei der Parabel liegt einer der Brennpunkte im Unendlichen; der 2. Leitstrahl ist also parallel der Hauptaxe und ein Durchmesser.

14. Die Winkel, welche 2 von einem Punkte ausserhalb des Kegelschnitts nach den Brennpunkten gezogene Gerade mit den von diesem Punkte an den Kegelschnitt gelegten Tangenten bilden, sind gleich.

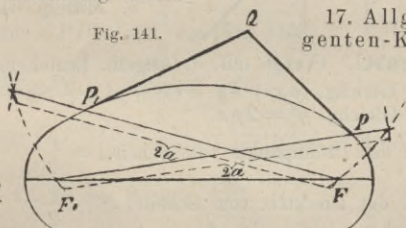
15. Die vom Durchschnittspunkt der Tangente mit der Direktrix nach dem Brennpunkt gezogene Gerade steht normal auf dem nach dem Berührungspunkt gezogenen Leitstrahl aus dem Brennpunkt. Der Schnittpunkt zweier Tangenten, welche an die Endpunkte einer Brennpunkts-Sehne gelegt sind, liegt also auf der Direktrix.

Fig. 140.



16. Polargleichung der Kegelschnitte in Bezug auf den Brennpunkt: $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \psi}$, worin p und ε die oben angegebene Bedeutung haben.

Fig. 141.



17. Allgemeine Tangenten-Konstruktion von einem gegebenen Punkte Q ausserhalb des Kegelschnitts.

a., Fig. 140. Man ziehe 2 belieb. Sekanten, durch d. Schnittpunkte p, q, r, s , 2 andere Sekanten, welche sich in O schneiden, sowie die Diagonalen des Vierecks $pqr s$. Ziehe durch O und den Diagonalen-Schnittpunkt m eine Gerade, welche den Kegelschnitt in den gesuchten Berührungspunkten P und P_1 schneidet.

β ., Fig. 141. Man beschreibe aus Q einen Kreis durch einen Brennpunkt, von dem andern Brennpunkt einen Kreis mit dem Radius $2a$, ziehe von letzterem Brennpunkt eine Gerade nach dem Schnittpunkt beider Kreise; dieser schneidet den Kegelschnitt in dem Berührungspunkt einer Tangente aus Q .

18. Allgem. Konstruktion des Krümmungs-Halbmessers, Fig. 142: Man konstruiere für den betr. Kurvenpunkt die Normale PN und ziehe den Leitstrahl PF durch den Brennpunkt. Im Fusspunkt der Normalen $NK \perp PN$, $KM \perp KP$. M ist Krümmungs-Mittelpunkt.

Fig. 142.

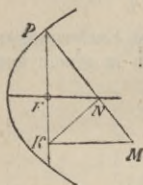
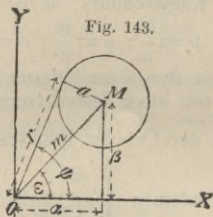


Fig. 143.



β . Kreis. (Fig. 143.)

1. Allgem. Gleichung.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

2. Wenn α und β die Mittelpunktkoordinaten, a der Radius, ist:

$$(x^2 - \alpha^2) + (y^2 - \beta^2) = a^2; \quad \alpha = -\frac{A}{2};$$

$$\beta = -\frac{B}{2}; \quad a = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

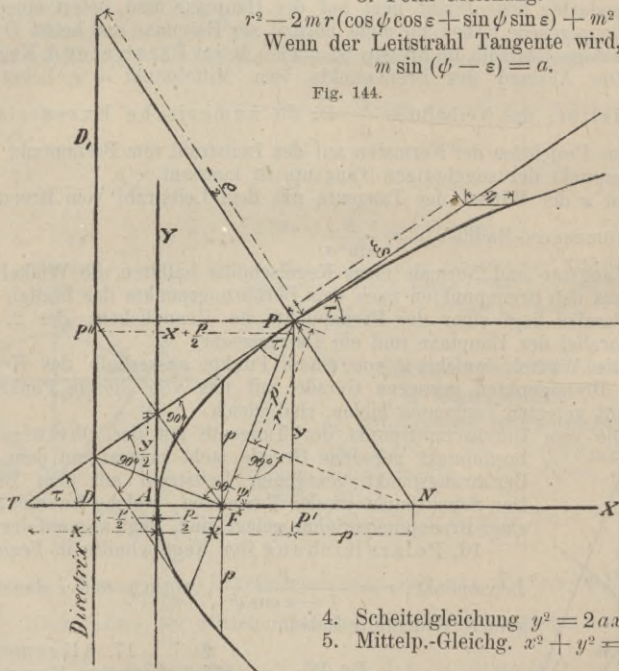
3. Polar-Gleichung.

$$r^2 - 2mr(\cos \phi \cos \varepsilon + \sin \phi \sin \varepsilon) + m^2 - a^2 = 0.$$

Wenn der Leitstrahl Tangente wird, ist:

$$m \sin(\phi - \varepsilon) = a.$$

Fig. 144.



4. Scheiteltgleichung $y^2 = 2ax - x^2$.

5. Mittelp.-Gleichg. $x^2 + y^2 = a^2$.

γ . Parabel. (Vergl. unt. α , Allgem. Beziehungen.) [Fig. 144.]

1. Allgem. Gleichg. $(ax + by + c)^2 + Ax + By + C = 0$.

2. Scheitel-Gleichg. $y^2 = 2px$.

3. Abstand des Brennpunkts vom Scheitel $= \frac{p}{2}$

4. Abstand der Direktrix vom Scheitel $= -\frac{p}{2}$

5. Länge des Leitstrahls nach dem Punkte $(x, y) =$ Abstand des Punktes (x, y) von der Direktrix $\left. \vphantom{\text{Abstand}} \right\} = x + \frac{p}{2}$

6. Gleichg. der Tangente: $\eta y = p(\xi + x)$.

7. Gleichg. der Normalen: $\eta - y = \frac{y}{p}(\xi - x)$.

8. Subtangente $= 2x$; Subnormale $= p$.

Der Brennpunkt halbirte die Strecke zwischen den Fusspunkten der Tangente und der Normalen auf der Hauptaxe.

9. Ordinate des Schnittpunkts der Tangente mit der Y -Axe $= \frac{y}{2}$.

10. Der Fusspunkt des Loths vom Brennpunkt auf eine Tangente liegt im Schnittpunkt derselben mit der Y -Axe.

11. Jeder Durchmesser ist der Hauptaxe parallel. Er ist der Richtung der Tangente an seinem Endpunkte, also auch der Richtung der von ihm halbirten Sehenschaar konjugirt.

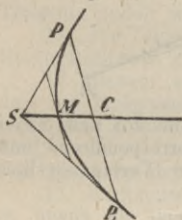
12. Betrachtet man einen Durchmesser und seine konjugirte Tangente als Koordin.-Axen, so ist die Gleichg. der Parabel bezogen auf dieses System:

$$\eta^2 = \frac{2p}{\sin 2\tau} \xi = 2\rho_1 \xi$$

13. Die Winkel welche ein Leitstrahl vom Brennpunkt und ein Durchmesser durch den Berührungspunkt einer Tangente mit der Tangente bilden, sind gleich.

14. Zieht man durch die Endpunkte einer Sehne 2 Tangenten: PS und P_1S so schneiden sich dieselben auf dem der Sehnen-Richtung konjugirten Durchmesser; Fig. 145. Der Durchschnittspunkt M der Parabel mit dem Durchmesser halbirte die Strecke CS .

Fig. 145.



15. Zieht man von einem Punkte der Direktrix 2 Tangenten an die Parabel, so sind dieselben normal zu einander.

16. Polar-Gleichg. f. d. Brennpunkt als Pol: $r = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\psi}{2}}$

17. Krümmungshalbm. $\rho = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} = \frac{PN^3}{p^2}$

Die Projektion desselben auf die X -Axe ist $= 2PF = 2PP'$
 Krümmungshalbm. im Scheitel $= p$.

Gleichg. d. Evolute. $27\rho y^2 = 8(x-p)^3$ (Neil'sche oder semikub. Parabel.)

Fig. 146.

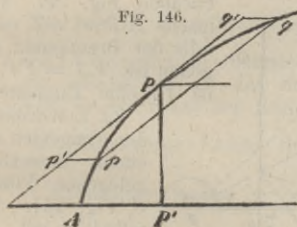


Fig. 147.

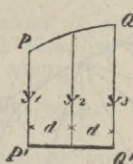
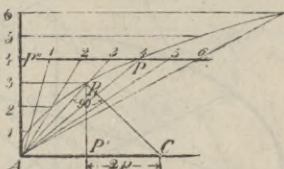


Fig. 148.



18. Quadratur. Fläche $APP' = \frac{2}{3} xy$ (Fig. 146)

$$\text{Fläche } pPq = \frac{2}{3} p p' q q'$$

$$\text{Fläche } P'PQ'Q' = \frac{d}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3); \text{ (Fig. 147). } P'Q' \text{ ist eine}$$

zur Hauptaxe parallele Gerade.

19. Rektifikation. Länge des Bogens AP :

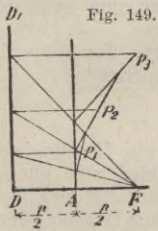
$$s = \frac{p}{2} \left[\sqrt{\frac{2x}{p} \left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \ln \left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}} \right) \right]$$

Ist $\frac{x}{y}$ ein kleiner Bruch, so ist annähernd: $s = y \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{x}{y}\right)^4 \right]$

20. Konstruktion der Parabel.

α . Wenn die Axe AX , der Scheitel A und ein Punkt P der Parabel gegeben sind, Fig. 148. Ziehe AY , und $PP'' \perp AY$. Theile AP'' und PP'' in die gleiche

Anzahl von Theilen, welche Theilung beliebig weit auf den Verlängerungen fortgesetzt wird. Verbinde die Theilpunkte auf PP'' mit A , ziehe durch die Theilpunkte von AP'' Linien $\parallel AX$. Die Schnittpunkte korrespondirend nummerirter Theilpunkte sind Punkte der Parabel. — Zur Ermittlung des Brennpunktes ziehe man von einem belieb. Punkte der Parabel $P, P' \perp AX, P, C \perp AP$; dann ist $P'C = 2p$, der Brennpunkts-Abstand $AF = \frac{1}{4} P'C$.



β . Wenn der Scheitel A und der Brennpunkt F gegeben sind, Fig. 149. Lässt man auf AY den Scheitel eines rechten Winkels so gleiten, dass der eine Schenkel stets durch F geht, so tangirt der andere Schenkel in jeder Lage des Winkels die Parabel. Will man die Berührungspunkte jeder Tangente ermitteln, so ziehe man in der Entfernung $AD = AF$ die Direktrix DD_1 , verlängere den durch F gehenden Schenkel des rechten Winkels bis zum Schnitt mit der Direktrix, ziehe durch den Schnittpunkt eine Parallele zu AX , so trifft diese den andern Schenkel in einem Punkt der Kurve.

γ . Wenn 2 Tangenten und die Berührungspunkte derselben

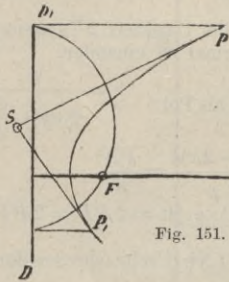


Fig. 151.

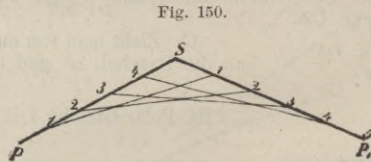
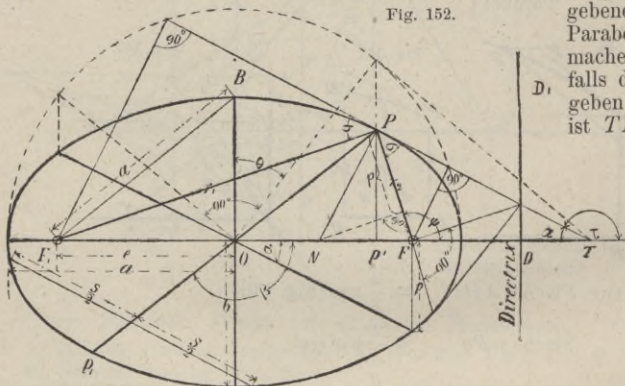


Fig. 150.

gegeben sind, Fig. 150. Man theile PS und SP_1 in gleiche Theile und verbinde die korrespondirend nummerirten Theile mit einander. Die Verbindungslinien sind Tangenten der Parabel.

21. Konstruktion einer Tangente an einem gegebenen Punkt P der Parabel, Fig. 144. Man mache $AP_1 = AT$, oder, falls der Brennpunkt gegeben ist, $FT = FP$, so ist TP eine Tangente.

Fig. 152.



22. Konstruktion der Tangenten von einem ausserhalb gelegenen Punkte S , Fig. 151. Beschreibe mit SF einen Kreis, ziehe von den Schnittpunkten desselben mit der Direktrix gerade Linien $\parallel OX$.

Die Schnittpunkte dieser mit der Parabel sind die Berührungsp. der Tangenten. Die Konstruktion ist identisch mit der allgem. Konstruktion ad α , 17 β , S. 447, da der 2. Brennp. in unendlicher Entfernung liegt, also der Kreis aus dem 2. Brennp. mit $2a$ als Radius mit der Direktrix zusammen fällt.

Wenn die Axe und der Brennpunkt nicht gegeben sind nach α , 17 α , S. 447.

23. Konstruktion des Krümmungsradius (Vergl. S. 448).

δ . Ellipse. (Vergl. unt. α , Allgem. Beziehungen, S. 446) [Fig. 152.]

1. Scheitel-Gleichg. $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$.

2. Mittelp.-Gleichg. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, bzw. $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$; oder $x = a \sin \theta$

$y = b \cos \theta$. Der Winkel θ heisst Amplitude.

3. Die Summe der Leitstrahlen eines Punktes nach den Brennpunkten ist gleich der Länge der grossen Axe.

$$r = a - \frac{e}{a} x; r_1 = a + \frac{e}{a} x; r + r_1 = 2a.$$

Wenn also die Axen gegeben sind, werden die Brennpunkte ermittelt, indem man $BF = BF_1 = a$ macht.

4. Lineäre Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

5. Gleichg. der Tangente $\eta - y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (\xi - x)$ oder $\frac{\eta y}{b^2} + \frac{\xi x}{a^2} = 1$.

6. Gleichg. der Normalen $\eta - y = \frac{a^2 y}{b^2 x} (\xi - x)$.

7. Subtangente $= \frac{a^2 - x^2}{x}$; Subnormale $= \frac{b^2 x}{a^2}$.

8. $ON = \frac{e^2}{a^2} x$; $FN = \frac{e}{a} r$; $F_1 N = e r_1$; $\frac{FN}{F_1 N} = \frac{r}{r_1}$.

9. Der perm. Ort der Fusspunkte aller Lothe, welche von den Brennpunkten auf Tangenten an die Ellipse gefällt werden, ist ein Kreis, welcher mit dem Radius a um den Mittelpunkt beschrieben ist.

10. Das Rechteck aus den Lothen, welche von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällt sind, ist $= b^2$.

11. Die Tangente bildet mit den Leitstrahlen aus den Brennpunkten nach dem Berührungspunkt gleiche Winkel.

12. Bewegt sich eine gerade Linie von unveränderlicher Länge dergestalt, dass ihre Endpunkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten, so beschreibt jeder ihrer Punkte eine Ellipse (für den Halbirungspunkt wird derselbe ein Kreis). Sind a und b die Abstände eines Punktes von den Endpunkten der Linie, so sind die Axen der von dem Punkte beschriebenen Ellipse $= a$ und b .

13. Konjugirte Durchmesser: $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$. Wenn α und β die Winkel der Durchmesser mit der positiven Richtung der grossen Axe: $\tan \alpha \cdot \tan \beta = -\frac{b^2}{a^2}$.

14. Gleichg. der Ellipse bezogen auf 2 konjug. Durchm. als Axen: $\frac{x'^2}{a_1^2} + \frac{y'^2}{b_1^2} = 1$.

15. Legt man in den Scheitelpunkten von zwei konjug. Durchmessern 4 Tangenten an die Ellipse, so ist das durch dieselben gebildete Parallelogramm $=$ dem 4 fachen Rechteck aus den beiden Axen.

16. Krümmungs-Radius im Punkte xy : $\rho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(r r_1)^{\frac{3}{2}}}{ab}$

Krümmungs-Radius im Scheitel der grossen Axe $\rho_a = \frac{b^2}{a} = p$

" " " " " " $\rho_b = \frac{a^2}{b}$

17. Polargleichg. in Bezug auf einen Brennpunkt $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$

18. Quadratur. Fläche der ganzen Ellipse $= ab\pi$. Ein beliebiges Ellipsen-Segment verhält sich zu dem Projektions-Segment auf dem umgeschriebenen Kreise

$$= b : a. \text{ Fläche } OBPP_1 = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

19. Rektifikation. Der Umfang der ganzen Ellipse ist:

$$S = \pi(a+b) \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \frac{1}{64} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^4 + \frac{1}{256} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^6 + \dots \right] = \pi(a+b)z$$

$\frac{a-b}{a+b} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,00
$z =$	1,0000	1,0025	1,0100	1,0226	1,0404	1,0635	1,0922	1,1677	1,2732

20. Konstruktion der Ellipse.*)

α . Wenn die Hauptaxen gegeben sind, Fig. 153. Man konstruiere aus dem Mittelpunkt O 2 Kreise mit den Radien a und b , ziehe eine beliebige Gerade aus O , und durch $p \parallel OY$, so ist P ein Punkt der Ellipse.

Fig. 153.

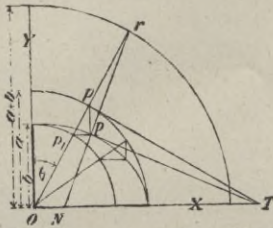
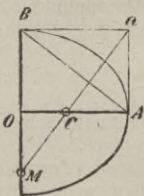


Fig. 155.



Ist pT eine Tangente an den Kreis, so ist PT eine Tangente an die Ellipse.

Beschreibt man um O einen 3. Kreis mit dem Radius $a + b$, verlängert den Radius Op bis zum Schnitt r und zieht rP , so ist letztere eine Normale der Ellipse in P .

β . Wenn 2 konjugierte Durchmesser gegeben sind.

I. Fig. 154. Man ziehe durch die Endpunkte jedes Durchmessers Parallele zu dem andern Durchmesser, wodurch man das Tangenten-Viereck QQ_1cd erhält. Ziehe QP_1 und die beliebige Gerade dm durch $n \parallel PP_1$, so ist mn_1 eine Tangente.

Fig. 154.

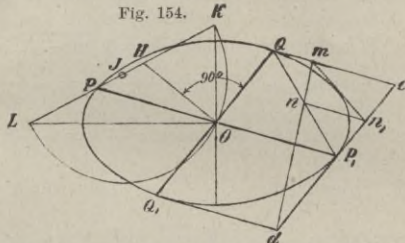
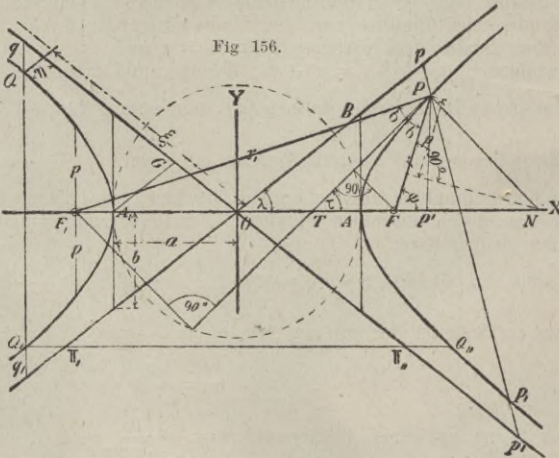


Fig. 156.



II. Fig. 154. Sind PP_1, QQ_1 die konjugierten Durchmesser, so ziehe man $OH \perp OQ$ und $= OQ$, halbiere HP , verzeichne von dem Halbierungspunkte I einen Kreis durch O , verlängere HP bis zum Schnitt mit diesem Kreise, dann geben OK u. OL die Richtungen der Hauptaxen und es ist: $HK = PL = b$; $HL = PK = a$.

21. Konstruktion d. Krümmungs-Mittelp. (nach α , 18). Zur Ermittlung der Krümmungs-Mittelp. für die Scheitel ziehe man (Fig.

155) AB , aus dem Schnittpunkt a der Scheiteltangenten eine Normale auf AB , deren Schnittpunkte C und M mit den Axen liefern die bezügl. Krümmungs-Mittelp.

ε . Hyperbel. (Vergl. unter α , Allgem. Beziehungen.) [Fig. 156.]

1. Scheitel-Gleichg. $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$.

2. Mittelp.-Gleichg. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, bzw. $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$ oder: $x = a \sec \theta$; $y = b \tan \theta$.

3. Lineäre Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 + b^2}$; also $OF = OB$.

*) Zur Lösung von Konstruktions-Aufgaben in Bezug auf die Ellipse gelangt man in den meisten Fällen am kürzesten, wenn man die Ellipse als Projektion eines Kreises vom Radius a betrachtet. Es ist dabei zu beachten, dass 2 konjugierten Durchmessern der Ellipse 2 zu einander normale Durchmesser im Kreise entsprechen.

4. Die Differenz d. Leitstrahlen eines Punktes ist gleich der Länge der grossen Axe :

$$r_1 - r = 2a; \quad r = \frac{ex}{a} - a; \quad r_1 = \frac{ex}{a} + a.$$

5. Gleichg. der Tangente. $\eta - y = \frac{b^2x}{a^2y} (\xi - x)$, oder $\frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1$.

6. Gleichg. der Normalen. $\eta - y = -\frac{a^2y}{b^2x} (\xi - x)$.

7. Tangente $PT = \frac{ay}{bx} \sqrt{rr_1}$; Normale $PN = \frac{b}{a} \sqrt{rr_1}$;

$$\text{Subtangente } TP^1 = \frac{x^2 - a^2}{x}; \quad \text{Subnormale } NP^1 = \frac{b^2x}{a^2}$$

$$MT = \frac{a^2}{x}; \quad TF = e - \frac{a^2}{x} = \frac{a}{x} r; \quad TF_1 = \frac{a}{x} r_1.$$

8. Die Tangente halbt den Winkel der Leitstrahlen nach dem Berührungspunkte.

9. Der Ort der Fusspunkte aller Lothe, welche von den Brennpunkten auf die Tangenten gefällt sind, ist ein mit dem Radius a aus dem Mittelpunkte beschriebener Kreis.

10. Konjugirte Durchmesser. Sind α und β die Winkel zweier konjugirten Durchmesser mit der positiven Richtung der Hauptaxe, so ist: $\tan \alpha \tan \beta = \frac{b^2}{a^2}$

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2; \quad a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha) = ab.$$

11. Gleichg. der Hyperbel auf 2 konjugirte Durchmesser als Axen bezogen.

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1.$$

12. Mittelp.-Gleichg. der Asymptoten. $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ oder $y = \pm \frac{b}{a} x$.

$$\text{Winkel der Asymptote mit der } X\text{-Axe. } \tan \lambda = \frac{b}{a}.$$

13. Asymptoten-Gleichg. der Hyperbel. $\xi \eta = \frac{a^2 + b^2}{4}$. Für die Asymptoten als

Koordinaten-Axen ist also die Grösse des Rechtecks aus Abszisse und Ordinate konstant.

Ist AG die Ordinate des Scheitels, so ist $\overline{AG}^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$. AG heisst „Potenz

der Hyperbel“.

14. Zieht man eine beliebige Sekante, so sind die Abschnitte derselben zwischen der Hyperbel und den Asymptoten gleich. Also z. B. $Pp = P_1p_1$.

15. Zieht man eine Sekante normal zur Hauptaxe, so wird das zwischen den Asymptoten liegende Stück durch einen Ast der Hyperbel so getheilt, dass das Produkt der Theile konstant $= b^2$ ist. Also z. B. $qQ, Qq_1 = q_1Q_1, Q_1q_1 = b^2$.

16. Zieht man eine Sekante parallel der Hauptaxe, so wird das zwischen den beiden Aesten der Kurve liegende Stück durch eine Asymptote so getheilt, dass das Produkt der Theile konstant $= a^2$ ist. Also z. B.:

$$Q, II, . II, Q,, = Q, II,, . II,, Q,, = a^2.$$

17. Zieht man eine beliebige Tangente, so wird das zwischen den Asymptoten liegende Stück derselben im Berührungspunkte halbt.

18. Die von beliebigen Tangenten und den Asymptoten gebildeten Dreiecke sind gleichflächig.

$$19. \text{ Krümmungs-Halbm. im Punkte } (x, y). \quad \rho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(rr_1)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

$$\text{Krümmungs-Halbm. im Scheitel} = \frac{b^2}{a} = p.$$

20. Quadratur. Fläche $APP' = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$. Fläche zwischen

Asymptote, Kurve und 2 Asymptoten - Ordinaten $= \frac{ab}{2} \ln \frac{\xi_2}{\xi_1}$.

21. Gleichseitige Hyperbel. $a = b$; $e = a\sqrt{2}$.

Mittelp.-Gleichg. für die Hauptaxe als Abzissen-Axe $x^2 - y^2 = a^2$.

Parameter $p = a$; Subnormale $= x$.

Krümmungs-Radius $= (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, im Scheitel $= a$.

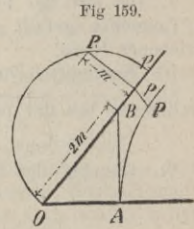
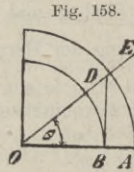
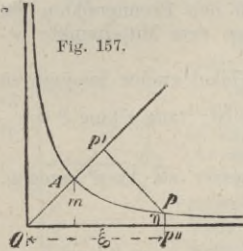
Sektor $OAP = \ln(x + y)$.

Asymptoten-Gleichg. $\xi\eta = \frac{a^2}{2} = m^2$ (Fig. 157). Für den Scheitel ist $\xi = \eta = m$.

Fläche zwischen den Ordinaten m u. $\eta = m^2 \ln \frac{\xi}{m}$.

22. Konstruktion der Hyperbel.

a. Wenn a und b gegeben sind, Fig. 158. Man verzeichne 2 konzent. Kreise mit a und b als Radien, ziehe an dieselben Tangenten normal zur Hauptaxe und vom Mittelpunkt eine beliebige Richtung, welche die Tangenten in D und E schneidet. Dann ist OE eine Abszisse, BD die dazu gehörige Ordinate.



β . Wenn die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel gegeben sind, Fig. 159. Man ziehe die Asymptoten-Ordinate pP , mache $pp_1 = pP$ und verzeichne den Halbkreis über Op_1 . Für die Normale $pR = m$ ist dann: $m^2 = Op \cdot Pp = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

Macht man also $OB = 2m$ und $BA \perp OX$, so ist $OA = a$, $AB = b$. Die Konstruktion kann nach a weiter geführt werden, doch sind auch mit Hilfe von m für belieb. Asymptoten-Abzissen die Asymptoten-Ordinaten nach 13. zu konstruieren.

Endlich können b oder a auch nach 15. oder 16. bezw. ohne Kenntniss von a und b , beliebig viele Hyperbelpunkte nach 14. gefunden werden.

23. Konstruktion der Tangente an einen Punkt der Hyperbel. Nach 8.; die Brennpunkte sind ev. nach 4. zu ermitteln.

24. Konstrukt. einer Tangente v. einem Punkte ausserh. d. Hyperbel. Nach a , 17).

b. Transzendente Kurven.

a. **Gemeine Kykloide**; Fig. 160.

1. Die Kykloide ist der Weg, den irgend ein Punkt eines Kreises mit dem Radius r beschreibt, wenn letzterer ohne zu gleiten, auf einer Geraden fortrollt.

2. Gleichg. der Kykloide in Bezug auf die Koordinaten-Axen AX und AY :

$$x = r(\alpha - \sin \alpha); y = r(1 - \cos \alpha)$$

$$x = r \arccos \frac{r - y}{r} \mp \sqrt{(2r - y)y}$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \tan \tau = \cotg \frac{1}{2} \alpha,$$

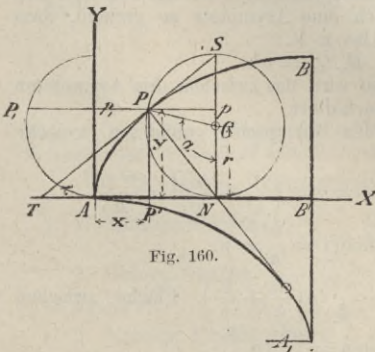
$$\text{also } \tau = 90 - \frac{1}{2} \alpha$$

Es ist also PS Tangente, PN Normale in P .

4. Krümmungshalbmesser

$$\rho = -4r \sin \frac{1}{2} \alpha = -2\sqrt{2ry} = 2PN$$

5. Die Evolute der Kykloide ist eine ihrer Evolvente kongruente Kykloide.



6. Bogen $PB = 2 \sqrt{2r(2r - y)}$
 Bogen der halben Kykloide. $AB = 4r$

7. Fläche $APP' = \frac{r^2}{4} (6\alpha - 8 \sin \alpha + \sin 2\alpha)$

Halbe Kykloiden-Fläche. $ABB' = \frac{3}{2} \pi r^2$

Fläche zwischen Kykloiden-Bogen AP , Kreisbogen PN , Abszissen-Axe $AN = r \cdot x$.

8. Konstruktion der Kykloide. $AN =$ Bogen NP ; von P , aus $\parallel Ax$; $pP = p, P$.

9. Die verlängerte oder verkürzte Kykloide entsteht, wenn der erzeugende Punkt ausserhalb oder innerhalb des rollenden Kreises im Abstände p von dessen Mittelpunkt liegt. Ihre Gleichg. ist:

$$x = r\alpha - p \sin \alpha; y = r - p \cos \alpha$$

β . Epikykloide und Hypokykloide; Fig. 161, 162.

1. Rollt der Kreis mit dem Radius r auf der Peripherie eines andern Kreises mit dem Radius R , so beschreibt ein Punkt auf dem Umfange des erstern eine Epikykloide oder Hypokykloide, je nachdem derselbe den Kreis äusserlich oder innerlich berührt.

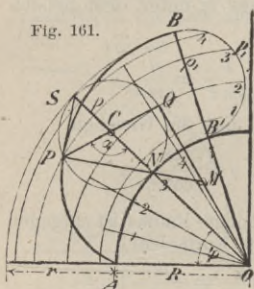


Fig. 161.

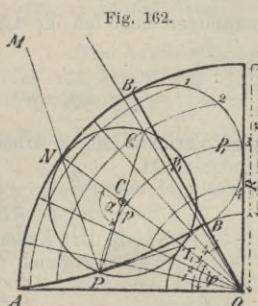


Fig. 162.

2. Gleichung.

$$x = (R \pm r) \cos \left(\frac{r}{R} \alpha \right) \mp r \cos \left(\frac{R \pm r}{R} \alpha \right)$$

$$y = (R \pm r) \sin \left(\frac{r}{R} \alpha \right) - r \sin \left(\frac{R \pm r}{R} \alpha \right)$$

Das obere Zeichen gilt für die Epikykloide, das untere für die Hypokykloide. In beiden Fällen ist $r\alpha = R\varphi$.

Sind die Radien beider Kreise einander gleich, so entsteht als Epikykloide die Kardioid. — Ist $r = \frac{R}{2}$ so wird die Hypokykloide eine gerade Linie, welche mit der X-Axe zusammen fällt.

3. Die Normale geht immer durch den Berührungspunkt des erzeugenden und des Grundkreises für die betr. Lage, also $P'N$ Normale, $P'S$ Tangente.

4. Krümmungs-Radius. $\rho = \frac{4r(R \pm r)}{R \pm 2r} \sin \frac{1}{2} \alpha$

Für A ist $\rho = 0$; für B ist $\rho = 4r \frac{R \pm r}{R \pm 2r}$

5. Die Evolute ist eine ähnliche Epi- oder Hypokykloide

6. Rektifikation. Der Bogen, welcher dem Winkel α entspricht, ist:

$$s = 4r \frac{R \pm r}{R} \left(1 - \cos \frac{1}{2} \alpha \right); \text{ Bogen } AB = 4r \frac{R \pm r}{R}$$

7. Konstruktion. Man theile den Bogen $BB_1 = 180^\circ$ und den Bogen $AB_1 =$

$\frac{r}{R} 180^\circ$ in dieselbe Anzahl gleicher Theile. Sind N und P_1 korrespondirende Theilpunkte, so ziehe man durch N einen Radius von O , durch P_1 einen Kreisbogen aus O und mache $pP = p_1 P_1$, so ist P ein Punkt der Kurve.

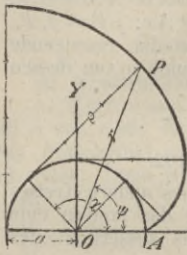
Zur Konstruktion des Krümmungs-Mittelp. verlängere man den durch den Kurvenpunkt gezogenen Radius des erzeugenden Kreises bis zum gegenseitigen Schnitt Q mit diesem Kreise, ziehe eine Gerade durch O und Q . Der Schnittpunkt M der Normalen $P'N$ mit dieser Geraden ist der Krümmungs-Mittelp. zu P .

γ. Kreis-Evolvente; Fig. 163.

1. Bei Abwicklung eines Fadens von der Peripherie eines Kreises mit dem Radius a beschreibt jeder Punkt desselben eine Kreis-Evolvente.

2. Gleichg. $x = a(\cos \alpha + a \sin \alpha)$; $y = a(\sin \alpha - a \cos \alpha)$

Fig. 163.



Polar-Gleichg. $\psi = \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} - \arctan \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}$

3. Rektifikation. Der Bogen AP , welcher den Winkel α und ψ entspricht, ist: $S = \frac{\rho^2}{2a} = \frac{a\alpha^2}{2}$

4. Quadratur. Fläche $AP O = \frac{1}{6} a^2 \alpha^3$

δ. Kettenlinie; Fig. 164.

1. Gleichg. $y = \frac{m}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}} \right)$; $x = m \ln \left(\frac{y \pm \sqrt{y^2 - m^2}}{m} \right)$

Der Anfangspunkt der Koordinaten liegt um die Länge m unter dem tiefsten Punkt der Kettenlinie.

2. $\frac{dy}{dx} = \tanh \tau = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} \right) = \frac{1}{m} \sqrt{y^2 - m^2}$; $\frac{1}{\cos \tau} = \frac{y}{m}$

Führt man τ als unabhängige Variable ein, so erhält man die Gleichgn.

$$x = m \ln \frac{1 + \sin \tau}{\cos \tau} = m \ln \tanh \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right); \quad y = \frac{m}{\cos \tau}$$

3. Der Krümmungs-Radius ist entgegen gesetzt gleich der Normalen.

$$\rho = \frac{y^2}{m} = \frac{m}{\cos^2 \tau}$$

4. Rektifikation. Bogen $AP = s =$

$$= \frac{m}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} \right) = m \tanh \tau = \sqrt{y^2 - m^2} = Pp = OK, \text{ wenn } pP' \perp Pp, AK \parallel pP'.$$

Es ist ferner $pP' = m$. (Vergl. unter ε.)

5. Quadratur. Fläche $O A P P' = F$

$$F = \frac{m^2}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} \right) = m^2 \tanh \tau = m \sqrt{y^2 - m^2}$$

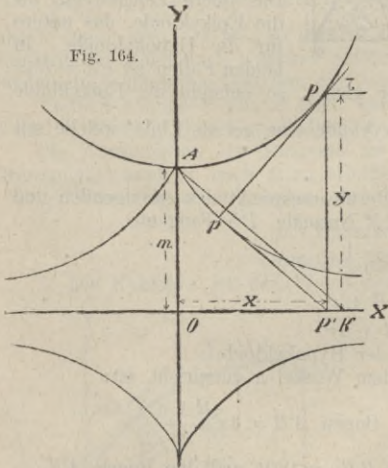
6. Liegen die Aufhängepunkte gleich hoch, und ist $2l$ die Spannweite, $2L$ die Länge der Kette, α der Aufhängewinkel, so hat man die Bestimmungs-Gleichgn.:

$$\frac{L}{l} = \frac{\tanh \alpha}{\ln \tanh \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}; \quad m = L \cotg \alpha$$

Liegen die Aufhängepunkte nicht gleich hoch, und ist $2b$ die Entfernung der Vertikalen durch die Aufhängepunkte, so berechne man m und α für eine Kette der Spannweite $2b$, deren Länge $= 2 \sqrt{L^2 - b^2}$ ist; dann ist m die entsprechende Konstante der Kette mit ungleicher Aufhängung, und deren Aufhängewinkel α_1 und α_2 sind bestimmt durch:

$$\tanh \alpha_1 = \frac{L}{m} - \frac{b}{m \sin \alpha}; \quad \tanh \alpha_2 = \frac{L}{m} + \frac{b}{m \sin \alpha}$$

Fig. 164.



ε. **Traktorien.**

Traktorien besitzen die Eigenschaft, dass für jeden Punkt derselben die Tangente, gerechnet vom Berührungspunkt bis zum Durchschnitt mit einer gegebenen Kurve (Direktrix), eine konstante Grösse a ist. Die Gleichg. der Traktorie wird bestimmt aus dem System von Gleichg.:

$$(y - \eta) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a; \quad y - \eta = \frac{dy}{dx} (\xi - x); \quad f(\xi, \eta) = 0$$

worin ξ, η die Koordinaten der Direktrix bezeichnen.

Am bekanntesten ist die Traktorie von Huyghens, für welche die Direktrix eine Gerade ist. Die Gleichg. derselben ist, Fig. 164:

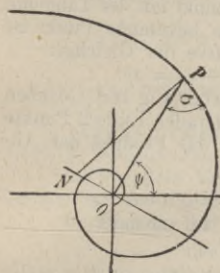
$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}; \quad x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right)$$

Die Evolute dieser Kurve ist eine Kettenlinie, die Beziehung zwischen den Konstanten der Evolute und der Evolvente ist: $m = a$.

ζ. **Spiralen.**

Bewegt sich ein Punkt P auf einem Radiusvektor r während dieser gleichzeitig um einen festen Punkt O rotirt, so ist der Weg des Punktes P eine Spirale. Die bekannteren Spiralen sind:

Fig. 165.



1. Die Archimedische Spirale, Fig. 165. Der Weg von P auf dem Radiusvektor ist proportional dem Drehungswinkel.

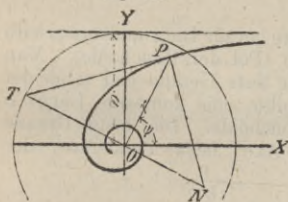
Polar-Gleichg. $r = a \psi$. Polar-Subtangente $OT = \frac{r^2}{a}$;

Polar-Subnormale $ON = a$

Der Fusspunkt der Polarnormalen liegt also auf einem Kreise vom Radius a .

2. Die hyperbolische Spirale, Fig. 166. Der Weg des Punktes auf dem Radiusvektor ist umgekehrt proportional dem Drehungsbogen.

Fig. 166.

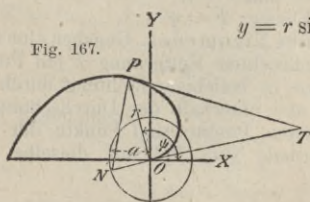


Polar-Gleichg. $r = \frac{a}{\psi}$.

Gleichg. für Normal-Koordinaten. $x = r \cos \psi = \frac{a \cos \psi}{\psi}$;

$y = r \sin \psi = \frac{a \sin \psi}{\psi}$.

Fig. 167.



Der Punkt O ist ein asymptotischer Punkt, um welchen die Kurve unendlich viele Windungen macht, ohne ihn

im Endlichen zu erreichen. Die zur X -Achse parallele Gerade in der Entfernung $y = a$ ist eine Asymptote der Kurve.

Die Polar-Subtangente ist konstant $= a$; Polar-Subnormale $= \frac{r^2}{a}$.

Legt man um O eine Schaar konzentrischer Kreise und trägt auf denselben von OX aus gleiche Bogenlängen $= a$ ab, so ist der Ort der so bestimmten Kreise eine hyperbolische Spirale.

3. Die logarithmische Spirale, Fig. 167. Die Radien-Vektoren wachsen in geometrischer, die Bögen in arithmetischer Proportion.

Polar-Gleichg. $r = e^{a\psi}$; für $\psi = 0$ ist $r = 1$.

Der Punkt O ist ein asymptotischer Punkt der Kurve. Der Winkel σ der Tangente mit dem Radiusvektor ist konstant: $\cotg \sigma = a$.

Polar-Subnormale $ON = ra$; Polar-Normale $PN = r \sqrt{1 + a^2} = \frac{r}{\sin \sigma}$.

Polar-Tangente $PT = r \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = \frac{r}{\cos \sigma}$; Polar-Subtangente $= \frac{r}{a}$.

Krümmungs-Radius $\rho =$ der Polar-Normalen.

Die Evolute der Kurve ist eine kongruente Spirale, welche um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln a}{a}$ gegen die ursprüngliche Spirale gedreht ist.

Bogenlänge zwischen den Punkten P'' und P :

$$s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} (r'' - r') = \frac{r'' - r'}{\cos \sigma}$$

Die ganze Bogenlänge vom Punkte P bis zum Pol O ist gleich der Polar-Tangente für den Punkt P .

c. Gleichungen einiger anderweiten transzendenten und algebraischen Kurven höherer Ordnung.

1. Cissoide. Gegeben ein Kreis mit dem Durchmesser $2a$; im Endpunkt eines festen Durchmessers welcher als X -Axe dient, wird eine Tangente gezogen, vom andern Endpunkt, welcher Koordinaten-Nullpunkt ist, eine Sekante bis zum Schnitt mit jener Tangente. Die Länge der Sehne, welche der Kreis von der Sekante abschneidet, wird auf derselben von ihrem Schnittpunkt mit der Tangente abgesetzt. Der so bestimmte Punkt ist ein Punkt der Kurve der Gleichg.:

$$y^2 (a - x) = x^3$$

2. Lemniscate, Fig 168. Gegeben auf einer festen geraden Linie 2 Punkte F, F_1 im Abstände $2c$. Der Ort aller Punkte, für welche das Produkt der Abstände von F und F_1 : $FP \cdot F_1P_1 = c^2$, ist eine Lemniscate.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2 (x^2 - y^2) \text{ oder } r = c \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\phi} = a \sqrt{\cos 2\phi}$$

Die im Nullpunkt sich schneidenden Aeste stehen senkrecht auf einander.

Die halbe Axe ist: $a = c \sqrt{2}$.

Ist σ der Winkel zwischen einer Normalen und dem Radiusvektor, so ist $\sigma = 2\phi$
Für y_{\max} ist $\phi = 30^\circ$ und $r = c$

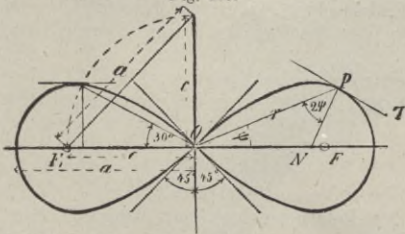
Ganze Lemniscaten-Fläche: $F = a^2$

3. Konchoide des Nicomedes. Gegeben eine feste gerade Linie und ausserhalb derselben in der senkrechten Entfernung b ein Punkt (Pol der Konchoide). Man zieht vom Pol Gerade in beliebiger Richtung durch die feste Gerade und schneidet auf ihnen oberhalb und unterhalb der Durchschnittspunkte eine konstante Länge a ab. Die so bestimmten Punkte sind Punkte der Konchoide. Die feste Gerade ist X -Axe, die Normale vom Pol auf dieselbe Y -Axe, bezw. Polar-Axe, der Pol Polar-Nullpunkt.

$$(x^2 + y^2) (y - b)^2 = a^2 y^2 \text{ oder } r = a + \frac{b}{\cos \phi}$$

4. Descartes'sches Blatt. $x^3 + y^3 = 3axy$.
5. Cassinoide. $(x^2 + y^2 + a^2)^2 = 4a^2 x^2 + b^4$.
6. Kurve der Maria Agnesi. $y^4 x^2 = 4a^4 (2ax - x^2)$.
7. Kardioide. $(y^2 + x^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$ oder $r = a (1 + \cos \phi)$.
8. Vierblatt. $(y^2 + x^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$ oder $r = a \sin 2\phi$.
9. Logarithmische Linie oder Logistik. $x = a \ln y$.
10. Parabolische Spirale. $r^2 = a^2 \phi$.
11. Neoide oder Spinnlinie. $r = a + \frac{b}{\pi} \phi$.
12. Quadratrix von Tschirnhaus. $y = a \sin \frac{\pi x}{2a}$.
13. Quadratrix des Dinostratus. $y = x \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2a} \right)$.

Fig. 168.



J. Analytische Geometrie des Raumes.

Litteratur: Fort u. Schloemilch. Lehrb. d. analyt. Geometrie. 2. Th. Analyt. Geom. d. Raumes; 4. Aufl.; Leipzig, Teubner.

I. Koordinaten im Raume.

Die Richtungen OX, OY, OZ sind positiv, die Richtungen OX_1, OY_1, OZ_1 negativ zu denken, Fig. 169.

Fig. 169.

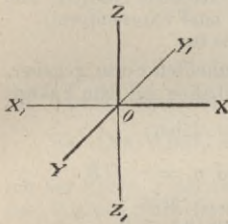
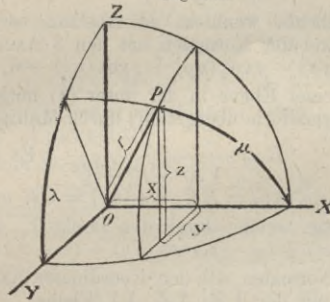


Fig. 170.



1. Polar-Koordinaten, Fig. 170. Die Lage eines Punktes P wird mittels Polar-Koordinaten bestimmt durch den Radiusvektor r , den Winkel μ desselben gegen die X -Achse und den Winkel λ der durch X und r gelegten Ebene mit der XY -Ebene.

2. Beziehungen zwischen Polar- und Parallel-Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \mu; & r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ y &= r \sin \mu \cos \lambda; & \cos \mu &= \frac{x}{r}; \sin \mu = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r} \\ z &= r \sin \mu \sin \lambda; & \cos \lambda &= \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}; \sin \lambda = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

3. Transformation rechtwinkliger Koordinaten.

x', y', z' , Koordinaten des neuen, x, y, z des alten Systems.

a. Parallele Verschiebung. a, b, c Koordinaten des neuen Nullpunktes bezogen auf das alte System. $x' = x - a; y' = y - b; z' = z - c$.

b. Drehung bei gemeinschaftlichem Nullpunkt. Es seien die \cos der Winkel

der Axen:	OX	OY	OZ	dann ist:
mit der Axe OX'	$\alpha,$	$\beta,$	$\gamma,$	
" " "	$\alpha,,$	$\beta,,$	$\gamma,,$	
" " "	$\alpha,,,$	$\beta,,,$	$\gamma,,,$	

$x,$	$\alpha,$	$x + \beta,$	$y + \gamma,$	z	$x = \alpha, x' + \alpha,, y' + \alpha,,, z'$
$y,$	$\alpha,,$	$x + \beta,,$	$y + \gamma,,$	z	$y = \beta, x' + \beta,, y' + \beta,,, z'$
$z,$	$\alpha,,,$	$x + \beta,,,$	$y + \gamma,,,$	z	$z = \gamma, x' + \gamma,, y' + \gamma,,, z'$

Es bestehen ferner folgende Beziehungen:

$\alpha,^2 + \beta,^2 + \gamma,^2 = 1$	$\alpha, \alpha,, + \beta, \beta,, + \gamma, \gamma,, = 0$
$\alpha,,^2 + \beta,,^2 + \gamma,,^2 = 1$	$\alpha, \alpha,,, + \beta, \beta,,, + \gamma, \gamma,,, = 0$
$\alpha,,,^2 + \beta,,,^2 + \gamma,,,^2 = 1$	$\alpha,, \alpha,,, + \beta,, \beta,,, + \gamma,, \gamma,,, = 0$
$\alpha,^2 + \alpha,,^2 + \alpha,,,^2 = 1$	$\alpha, \beta, + \alpha,, \beta,, + \alpha,,, \beta,,, = 0$
$\beta,^2 + \beta,,^2 + \beta,,,^2 = 1$	$\alpha, \gamma, + \alpha,, \gamma,, + \alpha,,, \gamma,,, = 0$
$\gamma,^2 + \gamma,,^2 + \gamma,,,^2 = 1$	$\beta, \gamma, + \beta,, \gamma,, + \beta,,, \gamma,,, = 0$

c. Drehung und Verschiebung:

$x' = \alpha, (x - a) + \alpha,, (y - b) + \alpha,,, (z - c)$	$x = \alpha, x' + \beta, y' + \gamma, z' + a$
$y' = \beta, (x - a) + \beta,, (y - b) + \beta,,, (z - c)$	$y = \alpha,, x' + \beta,,, y' + \gamma,,, z' + b$
$z' = \gamma, (x - a) + \gamma,, (y - b) + \gamma,,, (z - c)$	$z = \alpha,,, x' + \beta,,, y' + \gamma,,, z' + c$

II. Punkt, Ebene, gerade Linie.

1. Sind x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 die Raum-Koordin. von 2 Punkten, ist r deren Entfernung u. sind $(rx), (ry), (rz)$ die Winkel von r mit den 3 Koordin.-Achsen, so ist:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \\ \cos (rx) &= \frac{x_1 - x_0}{r}; \cos (ry) = \frac{y_1 - y_0}{r}; \cos (rz) = \frac{z_1 - z_0}{r} \\ \cos^2 (rx) + \cos^2 (ry) + \cos^2 (rz) &= 1 \end{aligned}$$

2. Der Winkel $(r_1 r_2)$ zweier Richtungen r_1 und r_2 ist bestimmt durch:

$$\cos(r_1 r_2) = \cos(r_1 x) \cos(r_2 x) + \cos(r_1 y) \cos(r_2 y) + \cos(r_1 z) \cos(r_2 z):$$

3. Sind zwei Richtungen r_1 und r_2 zu einander normal, so ist:

$$0 = \cos(r_1 x) \cos(r_2 x) + \cos(r_1 y) \cos(r_2 y) + \cos(r_1 z) \cos(r_2 z).$$

4. Allgemeine Gleichg. der Ebene. $Ax + By + Cz + D = 0$

5. Gleichg. einer Ebene, welche die Axen in den Entfernungen a, b, c vom Koordinaten-Anfang schneidet. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

6. Gleichg. einer Ebene, wenn n_0 ihr Abstand vom Koordin.-Nullpkt. und $(nx), (ny), (nz)$ die Winkel der Normalen mit den 3 Axen sind (Normalform):
 $x \cos(nx) + y \cos(ny) + z \cos(nz) - n_0 = 0.$

7. Ist die Gleichg. einer Ebene in der unter (4) mitgetheilten Form gegeben, so wird dieselbe in die Normalform übergeführt durch Multiplikation mit dem Faktor:

$$R = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \text{ Es ist daher:}$$

$$\cos(nx) = AR; \cos(ny) = BR; \cos(nz) = CR \text{ und } n_0 = -DR$$

8. Gleichg. der Ebene, welche durch den Punkt x_1, y_1, z_1 geht.

$$(x - x_1) \cos(nx) + (y - y_1) \cos(ny) + (z - z_1) \cos(nz) = 0.$$

9. Die Winkel der Normalen mit den Koordinaten-Axen X, Y, Z sind gleich den Winkeln der Ebene mit der YZ, XZ, XY Ebene.

10. Der Abstand p eines Punktes x_1, y_1, z_1 von der Ebene ist:

$$p = \pm [x_1 \cos(nx) + y_1 \cos(ny) + z_1 \cos(nz) - n_0].$$

Das positive oder negative Vorzeichen gilt, je nachdem Punkt und Nullpunkt auf verschiedenen oder auf derselben Seite der Ebene liegen.

11. Der Winkel zweier Ebenen T und T_1 ist = dem Winkel ihrer Normalen, also nach (9) und (2), wenn n und n_1 die Normalen sind:

$$\cos(TT_1) = \cos(nx) \cos(n_1x) + \cos(ny) \cos(n_1y) + \cos(nz) \cos(n_1z) =$$

$$= \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

12. Zwei Ebenen sind daher normal zu einander, wenn: $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$
 desgl. parallel " " : $A : B : C = A_1 : B_1 : C_1$

13. Gleichg. einer durch die Punkte $(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), (x_3 y_3 z_3)$ gelegten Ebene.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

14. Ist l die Länge und sind l_1, l_2, l_3 die 3 Projektionen einer Geraden so ist:
 $2l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2.$

15. Ist f eine ebene Figur und sind f_{xy}, f_{xz}, f_{yz} die 3 Projektionen derselben so ist:

$$f_{xy} = f \cos(nz); f_{xz} = f \cos(ny); f_{yz} = f \cos(nx); f^2 = f_{xy}^2 + f_{xz}^2 + f_{yz}^2.$$

16. Das Volumen V eines durch die Punkte $(x_0 y_0 z_0), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), (x_3 y_3 z_3)$ gelegten Tetraeders ist:

$$6V = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

17. Ein elementarer normaler Kegel, dessen Grundfläche ein Parallelogramm mit den Seiten ds und $d\sigma$ und dessen Coordin. x, y, z der Grundfläche, x_0, y_0, z_0 der Spitze sind, hat das Volumen:

$$dV = \frac{1}{3} ds d\sigma \begin{vmatrix} x_0 - x & y_0 - y & z_0 - z \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \end{vmatrix}$$

18. Die Gleichg. einer Geraden l im Raume ist im allgem. durch die Gleichgn. von zwei Projektionen bestimmt. $y = Mx + Q; z = Nx + R.$

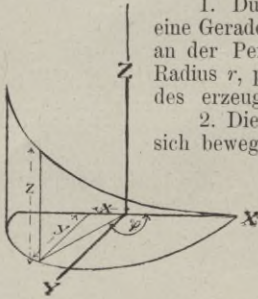
5. Bogen-Differential:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ und: } ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

6. Winkel der Tangente t mit den Koordin.-Axen:

$$\cos(tx) = \frac{dx}{ds}; \quad \cos(ty) = \frac{dy}{ds}; \quad \cos(tz) = \frac{dz}{ds}$$

Fig. 171.



b. Zylindrische Schraubenlinie; Fig. 171.

1. Durchläuft ein Punkt P mit gleichförmiger Geschwindigkeit eine Gerade PP_1 , während diese selbst mit gleichf. Geschwindigkeit an der Peripherie eines zu ihrer Stellung normalen Kreises vom Radius r , parallel zu ihrer Anfangslage fortgleitet, so ist der Ort des erzeugenden Punktes eine zylindrische Schraubenlinie.

2. Die Axe des Zylinders, auf dessen Oberfläche der Punkt P sich bewegt, ist die Z -Axe; die X -Axe geht durch die Anfangslage des Punktes. Es sei h der Weg des Punktes auf der Geraden, welcher dem einmaligen Durchlaufen der Kreis-Peripherie entspricht (Ganghöhe). Führt man den Winkel φ ein, so ist:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = \frac{h \varphi}{2\pi} \text{ oder:}$$

$$x = r \cos \left(\frac{2\pi z}{h}\right); \quad y = r \sin \left(\frac{2\pi z}{h}\right); \quad \text{Neigung: } \tan \alpha = \frac{h}{2r\pi}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cot \varphi; \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\tan \alpha}{\sin \varphi}$$

Gleichn. d. Tangente: $y - y_1 = -\cot \varphi (x - x_1); \quad z - z_1 = -\frac{\tan \alpha}{\sin \varphi} (x - x_1)$.

Bogenlänge einer ganzen Windung der Schraubenlinie:

$$s = \frac{h}{\sin \alpha} = \sqrt{h^2 + 4r^2 + \pi^2}$$

Gleichg. der Vertikal-Projektion der Schraubenlinie: $z = \frac{h}{2\pi} \arccos \left(\frac{x}{r}\right)$.

IV. Krumme Flächen.

a. Allgemeine Theorie.

Allgem. Gleichg. der Fläche in Normal-Koordinaten:

$$f(x, y) = z \text{ oder } F(x, y, z) = 0$$

Allgem. Gleichg. der Fläche in Polar-Koordinaten:

$$r = f(\mu, \lambda) \text{ oder } F(r, \mu, \lambda) = 0$$

2. Gleichg. der berührenden Ebene im Punkte x, y, z :

$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x} (\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y} (\eta - y) \text{ oder: } \frac{\partial F}{\partial x} (\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y} (\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z} (\zeta - z) = 0$$

3. Gleichg. der Normalen im Punkte x, y, z :

$$\xi - x + \frac{\partial z}{\partial x} (\zeta - z) = 0; \quad \eta - y + \frac{\partial z}{\partial y} (\zeta - z) = 0 \text{ oder:}$$

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

4. Winkel der Normalen mit den Koordinaten-Axen. Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = N; \quad \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = R$$

$$\cos(nx) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{1}{N}; \quad \cos(ny) = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{1}{N}; \quad \cos(nz) = -\frac{1}{N} \text{ oder:}$$

$$\cos(nx) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{1}{R}; \quad \cos(ny) = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{1}{R}; \quad \cos(nz) = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{1}{R}$$

5. Krümmung der Flächen.

Jede durch die Normale gelegte Ebene liefert einen Normalschnitt.

Diejenigen 2 Normalschnitte, für welche ρ ein Maximum (ρ_1) bzw. ein Minimum (ρ_2) wird, heißen Haupt-Normalschnitte. Die Haupt-Normalschnitte stehen senkrecht zu einander. Setzt man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

so erhält man ρ_1 und ρ_2 aus den Beziehungen:

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}; \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}$$

Ist ρ der Krümmungshalbmesser eines beliebigen Normalschnitts, dessen Ebene mit der Ebene zu ρ_1 den Winkel φ bildet, so ist:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_2}$$

Der Quotient $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ heisst das Maass der Krümmung der Fläche in dem betr. Punkte.

6. Komplation von Rotationsflächen; volle Umdrehung.

Die in der YZ -Ebene gegebene Kurve $z = f(x)$ rotirt um die X -Axe. Die Fläche beivoller Umdrehung (2π) ist: $s = 2\pi \int z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dz$.

7. Volumen von Rotationskörpern wie vor.

$$V = \pi \int y^2 dx.$$

8. Allgemeine Komplation von Rotationsflächen, Fig. 172. Die in der XZ -Ebene gegebene Kurve $z = f(x)$ rotirt um die X -Axe. Die Rotationsfläche wird von einem Zylinder geschnitten, dessen in der XY -Ebene gelegene Leitkurve durch die Gleichg. $y = \varphi(x)$ gegeben ist:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \arcsin \frac{y}{z} dz$$

9. Komplation von Zylinderflächen, Fig. 173. Die in der XZ -Ebene gelegene Leitlinie des Zylinders ist durch die Gleichg. $z = f(x)$ gegeben. Die Fläche dieses Zylinders wird durch einen vertikalen Zylinder geschnitten, dessen Leitlinie durch die Gleichg. $y = \varphi(x)$ gegeben ist:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx.$$

10. Allgemeine Volumen-Ermittlung, Fig. 174. Volumen eines Zylinders begrenzt durch eine Fläche $z = f(x, y)$ mit

in der XY -Ebene gelegener Leitkurve der Gleichg. $y = \varphi(x)$:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dx dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx$$

Die Integrations-Folge geht von rechts nach links. Bei der Integration $\int f(x, y) dy$ ist x als konstant, bei der Integration $\int f(x, y) dx$ ist y als konstant zu betrachten.

Die Grenzwerte y und y_0 sind als Funktionen von x , bzw. x und x_0 als Funktionen von y darzustellen.

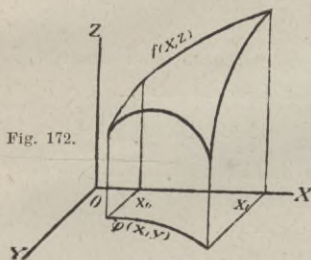


Fig. 172.

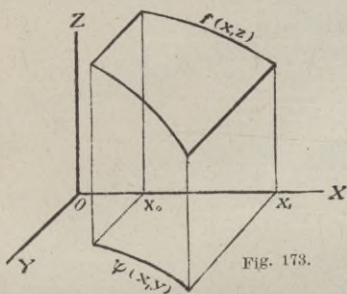
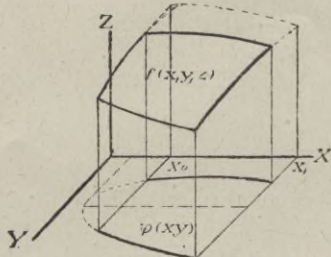


Fig. 173.

Ist die Gleichg. d. Leitkurve in Polar-Koordin. gegeben, also durch: $r = \varphi(\theta)$, so ist:

$$V = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{z_0}^z f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{r_0}^r f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = \int_{r_0}^{r_1} dr \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta$$

Fig. 174.



wobei zur Ausführung der Integration analoge Erwägungen wie vor maassgebend sind.

Ist die Gleichg. der Fläche in Polar-Koordin. gegeben, so ist d. Volumen eines Kegels, dessen Spitze im Nullp. liegt, u. dessen Grundfläche auf der krummen Fläche durch die Grenzwerte von μ u. λ bestimmt ist:

$$V = \frac{1}{3} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\mu_0}^{\mu} r^3 \sin \mu d\mu d\lambda$$

11. Allgemeine Komplanation.

Es sei die Gleichg. der krummen Fläche gegeben durch $z = f(x, y)$, die Projektion des zu berechnenden Flächentheils auf die XY-Ebene begrenzt durch eine Kurve der Gleichg. $y = \varphi(x)$; dann ist, vergl. Fig. 174:

$$S = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Für die Integrations-Folge u. die Bestimmung der Grenzen sind analoge Erwägungen wie ad (10) maassgebend.

Für Polar-Koordinaten ist:

$$S = \iint \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)^2\right] \sin^2 \mu + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2} r d\mu d\lambda$$

Die Integrations-Grenzen sind aus der Begrenzung d. Flächenstücks herzuleiten.

12. Einführung neuer Variablen in Doppel-Integrale.

$$\iint f(x, y) dx dy; \quad x = \varphi(s, t); \quad y = \psi(s, t)$$

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f[\varphi(s, t); \psi(s, t)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) ds dt$$

Beispiel 1. Dreiaxiges Ellipsoid der Gleichg.:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad z = c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}.$$

Gleichg. der berührenden Ebene:

$$\frac{2x}{a^2} (\xi - x) + \frac{2y}{b^2} (\eta - y) + \frac{2z}{c^2} (\zeta - z) = 0 \quad \text{oder:} \quad \frac{x^2}{a^2} \xi + \frac{y^2}{b^2} \eta + \frac{z^2}{c^2} \zeta = 1$$

Gleichg. der Normalen: $\frac{a^2}{2x} (\xi - x) = \frac{b^2}{2y} (\eta - y) = \frac{c^2}{2z} (\zeta - z)$

Winkel der Normalen mit d. Koordin.-Aren:

$$\cos(\mu x) = \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}; \quad \cos(\mu y) = \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}; \quad \cos(\mu z) = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Beispiel 2. Fläche des Umdrehungs-Paraboloids.

Gleichg. der Erzeugungskurve in der XZ-Ebene: $z = \sqrt{2px}$

$$\text{Oberfläche: } S = 2\pi \int z dz \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} = \frac{2}{3} \pi a^2 \left[\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} - 1 \right]$$

$$\text{Inhalt: } V = \int_0^x 2ax dx = a\pi x^2 = \frac{z^2 x \pi}{2}$$

Beispiel 3. Oberfläche eines kreisförmigen Kuppelgewölbes, Fig. 175, 176.

der Gleichg:

$$y = \frac{b}{l}x; z = \sqrt{a^2 - (x+a)^2} - \beta$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x+a}{\sqrt{a^2 - (x+a)^2}}; 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 - (x+a)^2}$$

Fig. 175.

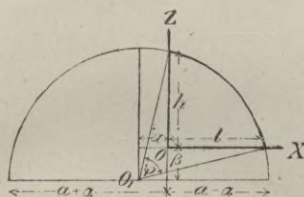


Fig. 176.

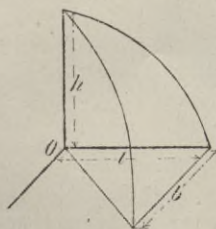
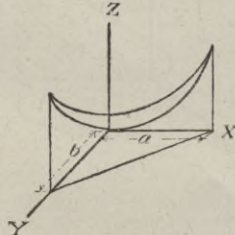


Fig. 177.



Ein durch die Abszissen x_2, x_1 bestimmter Bogen ist:

$$s = -\int \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - (x+a)^2}}$$

Eine durch die Abszissen x_2, x_1 bestimmtes Oberflächenstück ist:

$$S = \frac{ab}{l} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - (x+a)^2}} = \frac{ab}{l} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x+a) dx}{\sqrt{a^2 - (x+a)^2}} - a \frac{ab}{l} \int_{x_1}^{x_2} \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - (x+a)^2}} =$$

$$= \frac{ab}{l} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x+a) dx}{\sqrt{a^2 - (x+a)^2}} - \frac{ab}{l} s = \frac{b}{l} \left[-a \sqrt{a^2 - (x+a)^2} - as \right]_{x_1}^{x_2}$$

Für die ganze Oberfläche wird $x_2 = l; x_1 = 0; s_2 = a\varphi; s_1 = 0$, sonach:

$$S = \frac{ab}{l} \left[\sqrt{a^2 - a^2} - \sqrt{a^2 - (l+a)^2} - a\varphi \right]$$

Man beachte, dass: $\sqrt{a^2 - a^2} = h + \beta$ (Fig. 175) und $\sqrt{a^2 - (l+a)^2} = \beta$; danach ist:

$$S = \frac{ba}{l} (h - a\varphi).$$

Beispiel 4. Kugel-Oberfläche der Gleichg: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}; \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}; 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}$$

Die Projektion eines Oktanten auf die XY-Ebene ist ein Viertelkreis mit der Gleichg. der Begrenzungskurve: $a^2 = x^2 + y^2$. Die Integrations-Grenzen sind also:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}; y_0 = 0; x_1 = a; x_0 = 0$$

$$S = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} a dy \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8 \int_0^a dx \left[a \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= 8 \int_0^a dx a \arcsin(1) = 4a\pi \int_0^a dx = 4a^2\pi$$

Beispiel 5, Fig. 177. Die Basis eines Volumens sei ein rechtwinkl. Dreieck mit den Seiten a und b , die obere Begrenzung die Fläche eines elliptischen Paraboloids, bestimmt durch d. Gleichg:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = mx^2 + ny^2$$

Die Grundfläche ist bestimmt durch d. Gleichg: $y = b \left(1 - \frac{x}{a}\right)$.

$$\text{Es ist nach (10): } V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^y f(mx^2 + ny^2) dy$$

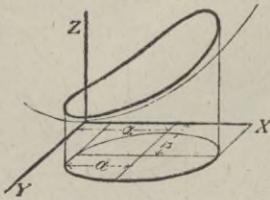
Die Integrations-Grenzen sind: $y_0 = 0; y = b \left(1 - \frac{x}{a}\right); x_0 = 0; x_1 = a$

$$V = \int_0^a dx \left[mx^2y + \frac{1}{3} ny^3 \right]_0^{b \left(1 - \frac{x}{a}\right)} = \int_0^a dx \left[mx^2b \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \frac{n}{3} b^3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right]$$

$$V = \frac{1}{12} ab \left[ma^2 + nb^2 \right]$$

Beispiel 6, Fig. 178. Die obere Begrenzung des Volumens sei durch die Fläche in Beispl. 5 gegeben; die untere Begrenzung sei ein Kreis der Gleichg.: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a^2$. Die Integrations-Grenzen sind: $y = \beta + \sqrt{a^2 - (x - \alpha)^2}$; $y_0 = \beta - \sqrt{a^2 - (x - \alpha)^2}$; $x = \alpha + a$; $x_0 = \alpha - a$.

Fig. 178.



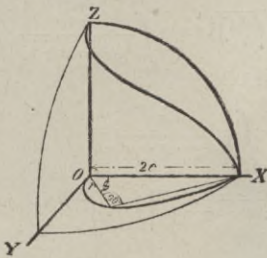
$$V = \int_{\alpha - a}^{\alpha + a} dx \left[m x^2 y + \frac{1}{2} n y^3 \right]_{\beta - \sqrt{a^2 - (x - \alpha)^2}}^{\beta + \sqrt{a^2 - (x - \alpha)^2}}$$

$$V = \int_{\alpha - a}^{\alpha + a} dx \left[2 m x^2 \sqrt{a^2 - (x - \alpha)^2} + \frac{2n}{3} \sqrt{a^2 - (x - \alpha)^2} (3\beta^2 + a^2 - (x - \alpha)^2) \right]$$

welches einfache Integral nach bekannten Regeln zu behandeln ist.

Beispiel 7. Volumen eines Zylinders mit der halbkreisförmigen Basis vom Durchmesser $OX = 2c$ u. der um O mit dem Radius $2c$ beschriebenen Kugelfläche als oberer Begrenzung, Fig. 179.

Fig. 179.



Polar-Gleichg. der Leitkurve. $r = 2c \cos \theta$
 Gleichg. d. Kugelfläche. $z = \sqrt{4c^2 - x^2 - y^2}$
 $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$; sonach: $z = \sqrt{4c^2 - r^2}$

$V = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{r_0}^r \sqrt{4c^2 - r^2} r dr$. Die Integrations-Grenzen sind:

$r = 2c \cos \theta$; $r_0 = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\theta_0 = 0$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2c \cos \theta} \left[(r^2 - 4c^2)^{\frac{3}{2}} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{3} (2c)^3 (1 - \sin^3 \theta)$$

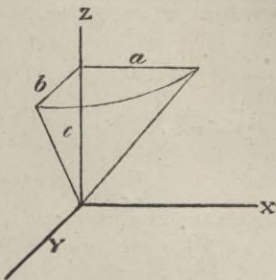
$$= \frac{1}{3} (2c)^3 \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{3}{8} \right).$$

b. Flächen 2. Ordnung.

a. Zylinder.

Die Gleichg. des normalen Zylinders ist durch die Gleichg. seiner Leitkurve bestimmt. Die Leitkurve des Zylinders 2. Ordnung ist eine Kurve 2. Ordnung.

Fig. 180.



Elliptischer Zylinder: $\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hyperbolischer Zylinder: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parabolischer Zylinder: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{2y}{p} = 0$.

β. Kegel.

1. Allgemeine Gleichg. des Kegels 2. Ordnung:
 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$.

2. Fällt die Axe des Kegels mit der Z-Axe zusammen, seine Spitze in den Nullpunkt und ist die Leitfläche in der zur XY-Ebene parallelen

Ebene c bestimmt, Fig. 180, so sind die Gleichgn.:

des Rotations-Kegels: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$; des elliptischen Kegels: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

γ. Kugel.

1. Sind α, β, γ die Mittelpunkts-Koordin. der Kugel, ist a deren Radius, so ist die Gleichg.: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2$

2. Mittelpunkts-Gleichg. der Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

δ. **Ellipsoid**, Fig. 181.*)

1. Mittelpunkts-Gleichg.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
2. Gleichg. der Tangenten-Ebene: $\frac{x}{a^2} \xi + \frac{y}{b^2} \eta + \frac{z}{c^2} \zeta = 0$.
3. Gleichg. d. Normalen: $\xi - x = (\zeta - z) \frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}$; $\eta - y = (\zeta - z) \frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z}$.
4. Winkel d. Normalen mit den Axen:

$$\cos(nx) = \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}; \cos(ny) = \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}; \cos(nz) = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Fig. 181.

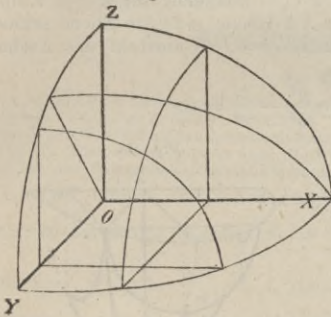
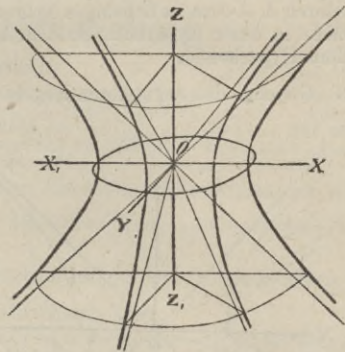


Fig. 182.



5. Der Hauptschnitt der XZ -Ebene ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und c . Eine Ebene der Gleichg. $y = k_1$ schneidet d. Ellipsoid in einer jener ähnlichen Ellipse mit d. Halbachsen: $a_1 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - k_1^2}$; $c_1 = \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - k_1^2}$. Der Hauptschnitt der YZ -Ebene ist eine Ellipse mit d. Halbachsen b u. c ; eine Ebene der Gleichg. $x = k_2$ schneidet das Ellipsoid in einer jener ähnlichen Ellipse mit d. Halbachsen $b_2 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - k_2^2}$; $c_2 = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - k_2^2}$. Der Hauptschnitt der XY Ebene ist eine Ellipse mit d. Halbachsen a u. b . Eine Ebene d. Gleichg. $z = k_3$ schneidet das Ellipsoid in einer jener ähnlichen Ellipse mit d. Halbachsen $a_3 = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - k_3^2}$; $b_3 = \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - k_3^2}$. Eine durch d. X -Axe gelegte Ebene, welche mit d. XZ -Ebene den Winkel α bildet, schneidet d. Ellipsoid in einer Ellipse der Gleichg.:

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{c^2} \right) y^2 = 1.$$

ε. **Einschaliges Hyperboloid**, Fig. 182.

1. Mittelpunkts-Gleichg.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2. Das Hyperboloid wird von d. XY -Ebene in einer Ellipse mit d. Halbachsen a und b , von d. XZ -Ebene in einer Hyperbel mit d. Halbachsen a und c , von d. YZ -Ebene in einer Hyperbel m. d. Halbachsen b und c geschnitten. Alle Vertikalschnitte d. Hyperboloids sind Hyperbeln; alle Horizontalschnitte sind Ellipsen. Sind die Halbachsen $a = b$, so entsteht das einschalige Rotations-Hyperboloid.

*) M. s. auch: Jenny. Das Ellipsoid; elementar bearbeitet. Basel 1877; Schweighauser.

3. Gleichg. des Asymptoten-Kegels: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

4. Volumen zwischen der XY -Ebene und den zur Z -Axe normalen Schnitt-ebenen im Abstände z : $V = \pi \frac{ab}{c^2} \left(\frac{1}{3} z^3 + c^2 z \right)$

5. Volumen zwischen den zur Z -Axe normalen Schnitt-Ebenen: $z = \mp c$: $V = \frac{8}{3} \pi abc$.

ζ. Zweischaliges Hyperboloid, Fig. 183.

1. Mittelpunkts-Gleichg.: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2. Der Schnitt der ZY -Ebene ist imaginär; die Schnitte der XZ - u. XY -Ebene sind Hyperbeln mit d. Halbaxen a, b u. a, c . Alle Vertikalschnitte d. ZY -Ebene in d. Entfernung k vom Mittelpunkt sind für $k < a$ imaginär, für $k > a$ Ellipsen. Eine durch d. X -Axe in beliebiger Neigung zur XY -Ebene geführte Ebene schneidet d. Fläche in einer Hyperbel. Sind d. Halbaxen $b = c$, so entsteht das 2 schalige Rotations-Hyperboloid.

3. Gleichg. des Asymptoten-Kegels: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Fig. 183.

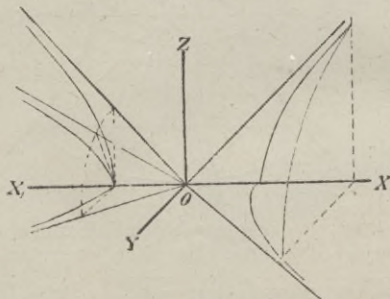
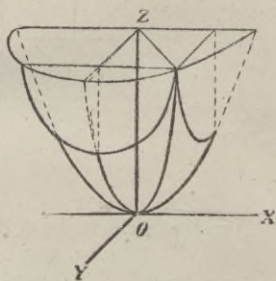


Fig. 184.



η. Elliptisches Paraboloid, Fig. 184.

1. Scheitelgleichg.:

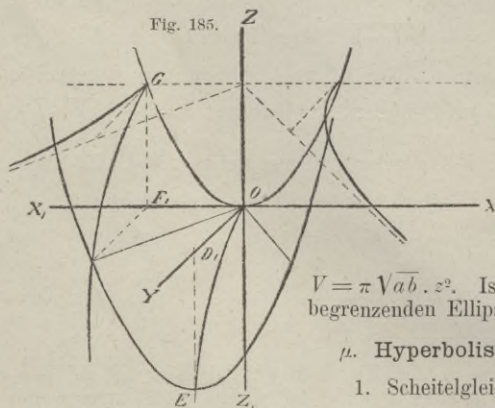
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0.$$

2. Alle horizontalen Schnitte sind Ellipsen, alle vertikalen Schnitte Parabeln; die Parabeln S. Hauptschnitte der ZX - und ZY -Ebene haben d. Parameter p bzw. q . — Ist $p = q$, so entsteht d. Rotations-Paraboloid.

3. Inhalt eines normal zur Z -Axe abgeschnittenen Segments:

$V = \pi \sqrt{ab} \cdot z^2$. Ist F die Fläche der das Segment begrenzenden Ellipse, so ist auch: $V = \frac{1}{3} Fz$.

Fig. 185.



μ. Hyperbolisches Paraboloid, Fig. 185.

1. Scheitelgleichg.: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$.

2. Der Hauptschnitt d. XZ -Ebene ist eine Parabel mit d. Parameter p , deren Scheitel der Nullpunkt, deren Axe die Z -Axe ist. Der Hauptschnitt der ZY -Ebene ist eine Parabel mit d. Parameter q , deren Scheitel der Nullpunkt, deren Axe die negative Z -Axe ist. Eine Ebene $x = k$ schneidet die Fläche in einer dem Haupt-

schnitt der ZY -Ebene kongruenten Parabel, deren Axe die Vertikalspur GF_1 der schneidenden Ebene, deren Scheitel der Schnittpunkt G der Geraden GF_1 ist. Die Ebene $y = k$, schneidet die Fläche in einer dem Hauptschnitt der ZX -Ebene kongruenten Parabel, deren Axe die Vertikalspur ED_1 der schneidenden Ebene, deren Scheitel der Schnittpunkt E der Geraden ED_1 ist. Der Hauptschnitt der XY -Ebene liefert 2 durch den Nullpunkt gehende Gerade mit den Gleichgu.:

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0; \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Der Schnitt einer Ebene $z = k_2$ ist: für positives k eine Hyperbel, deren Hauptaxe in d. Richtung d. X -Axe liegt, mit d. Halbachsen $a = \sqrt{2p k_2}$; $b = \sqrt{2q k_2}$; für negatives $k_2 = -l$, worin $l > 0$, eine Hyperbel, deren Hauptaxe in d. Richtung d. Y -Axe liegt mit d. Halbachsen $a = \sqrt{2pl}$; $b = \sqrt{2ql}$. Die Asymptoten aller durch d. horizontalen Schnitte gelieferten Hyperbeln liegen in d. vertik. Ebenen, welche durch die vom Hauptschnitt der XY -Ebene gelieferten Geraden gelegt sind.

K. Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

I. Hauptsätze.

Litteratur. Laplace. *Théorie analytique des probabilités*; Paris 1812. — Laplace. *Essai philosophique sur les probabilités*; Paris 1814. Deutsch von Tönnies, Heidelberg 1819. — Poisson. *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeits-Rechnung*. Deutsch von Schmuse, Braunschweig 1841. Meyer. — Cantor. *Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeits-Rechnung*. Halle 1874. — Hagen. *Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung*. Berlin 1882; Ernst & Korn.

1. Sind unter n möglichen Fällen a dem Eintreffen eines Ereignisses gleich günstig, so heisst der Quotient $W = \frac{a}{n}$ die absolute Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. $W_1 = 1 - \frac{a}{n}$, d. i. die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens des Ereignisses, heisst die entgegen gesetzte Wahrscheinlichkeit.

Die Wahrscheinlichk. ist also stets < 1 und $W = 0$ ist in der Wahrscheinlichk.-Rechnung das Symbol der Unmöglichkeit, $W = 1$ das Symbol der Gewissheit. Ist $W = \frac{1}{2}$, so ist das Eintreffen zweifelhaft; ist $W > \frac{1}{2}$, so ist im engern Sinne das Eintreffen wahrscheinlich; ist $W < \frac{1}{2}$, so ist im engern Sinne das Eintreffen unwahrscheinlich.

Beispiel 1. Wahrscheinlichk. mit 2 Würfeln einen Pasch zu werfen. Zahl der möglichen Kombinationen = 6.6; Zahl der Kombinationen, welche dem betr. Ereigniss günstig sind = 6, sonach Wahrscheinlichk. desselben = $\frac{6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$.

Beispiel 2. Wahrscheinlichk. mit 2 Würfeln eine Folge zu werfen. Zahl der möglichen Kombinationen = 6.6. Zahl der Kombinationen, welche dem Ereigniss günstig sind = 19, (nämlich: 12, 23, 34, 45, 56, 21, 32, 43, 54, 65); sonach Wahrscheinlichk. desselben = $\frac{19}{36} = \frac{5}{18}$.

2. Sind unter n gleich möglichen Fällen die Ereignisse E_1, E_2, E_3, \dots mit den Wahrscheinlichk. W_1, W_2, W_3, \dots , so ist die Wahrscheinlichk. für das Eintreffen irgend eines dieser Ereignisse: $W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$.

Die totale Wahrscheinlichk. ist = Summe der partiellen Wahrscheinlichk.

Beispiel. Die Wahrscheinlichk. mit 2 Würfeln Pasch oder Folge zu werfen, ist nach den vorauf geschickten Beispielen = $\frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{4}{9}$.

3. Relative Wahrscheinlichk. zweier Ereignisse nennt man die Wahrscheinlichk., welche man erhält, wenn man diejen. möglichen Fälle, welche überhaupt keinem der betrachteten Ereignisse günstig sind, als nicht vorhanden betrachtet.

Sind W_1 und W_2 die absoluten Wahrscheinlichk. der beiden Ereignisse, so sind $\frac{W_1}{W_1 + W_2}$ und $\frac{W_2}{W_1 + W_2}$ deren relative Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel. Die Wahrscheinlichk., aus einer Urne, welche 7 weisse, 9 schwarze und 5 rothe Kugeln enthält, eher eine schwarze als eine weisse Kugel zu ziehen ist = $\frac{9}{16}$ oder = $\frac{21}{7+9}$.

4. Die Wahrscheinlichk. für das Zusammentreffen von einander unabhängiger Ereignisse, oder für das Eintreffen derselben in einer vorbestimmten Reihenfolge

ist = dem Produkt der absoluten Wahrscheinlichk. jedes einzelnen Ereignisses. Die Wahrscheinlichk., dass ein Ereigniss E mit der Wahrscheinlichk. W , p Male nach einander eintreffe, ist also $= W^p$.

Beispiel. Die Wahrscheinlichk. aus einer Urne, welche 3 schwarze und 5 weisse Kugeln enthält, im ersten Zuge eine weisse und, nachdem die gezogene Kugel zurück gelegt wurde, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist $= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$.

Die Wahrscheinlichk. in 5 Zügen jedesmal eine weisse Kugel zu ziehen, wenn die gezogene Kugel stets wieder zurück gelegt wird, ist $= \left(\frac{5}{8}\right)^5 = \frac{3125}{32768} = 0,095 \dots$

5. Die Wahrscheinlichk. für das Zusammentreffen zweier von einander abhängigen Ereignisse ist gleich dem Produkt aus der Wahrscheinlichk. des ersten Ereignisses und der Wahrscheinlichk., welche nach dem Eintreffen des ersten für das Eintreffen des zweiten noch vorhanden ist.

Die Wahrscheinlichk., dass ein Ereigniss E mit der anfänglichen Wahrscheinlichk. $W = \frac{a}{n}$, p Male hinter einander eintreffe, wenn sowohl die Zahl der möglichen Fälle als auch die Zahl der dem Ereigniss günstigen Fälle bei jeder Wiederholung sich um 1 vermindert, ist also:

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-p+1)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}$$

Beispiel. Die Wahrscheinlichk., aus einer Urne, welche 3 schwarze und 5 weisse Kugeln enthält, beim 1. Zug eine weisse, beim 2. Zug eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn die gezogene Kugel nicht wieder hinein gelegt wird, ist $= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$.

Die Wahrscheinlichk. 5 Mal nach einander eine weisse Kugel zu ziehen, wenn die gezogene Kugel nicht wieder hineingelegt wird, ist $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{120}{6720} = 0,018$.

6. Sind α und β die Wahrscheinlichk. zweier Ereignisse E_1, E_2 , so ist die Wahrscheinlichk., dass in bestimmter Reihenfolge E_1, p Male, E_2, q Male eintreten:

$$W = \alpha^p \beta^q$$

Wenn die Reihenfolge eine beliebige, so ist:

$$W = \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha^p \beta^q = \binom{p+q}{q} \alpha^p \beta^q$$

7. Sind nur die Ereignisse E_1 und E_2 möglich, ist also β die entgegen gesetzte Wahrscheinlichk. von α , und $\alpha + \beta = 1$, ferner $p + q = z$, so ist die Wahrscheinlichk. des p maligen Eintreffens von E_1 in beliebiger $W = \binom{z}{p} \alpha^p (1-\alpha)^{z-p}$ Folge bei z Versuchen:

Es stellen also die einzelnen Glieder der Entwicklung von $(\alpha + \beta)^z = \alpha^z + z\alpha^{z-1}(1-\alpha) + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} \alpha^{z-2}(1-\alpha)^2 + \dots$ die Wahrscheinlichk. des p maligen Eintreffens von E für die verschiedenen Werthe von p dar.

Werden α und z als gegeben betrachtet, so ist die Bedingung für $W_{\max.}$: $(z+1)\alpha > p$; $(z+1)\alpha < (p+1)$. Je grösser z ist, je mehr nähert sich die Bedingung für $W_{\max.}$ der Beziehung $p = \alpha n$ und $W_{\max.}$ für $p = \alpha n$ dem Werth 1.

8. Die Wahrscheinlichk. für eine der verschiedenen möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses ist ein Bruch, dessen Zähler die Wahrscheinlichk. ist, womit diese Ursache das Ereigniss herbei führt, und dessen Nenner die Summe der Wahrscheinlichk. der sämtlichen möglichen Ursachen ist.

Sind diese Ursachen nicht gleich wahrscheinlich, so muss man jede Wahrscheinlichk., mit der sie das Ereigniss herbei führt, mit der Wahrscheinlichk. der Ursache selbst, sowohl im Zähler wie im Nenner multiplizieren.

Beispiel. In einer Urne sind 2 Kugeln, deren Farbe unbekannt ist; in 2 Zügen, nach welchen die gezogene Kugel stets wieder zurück gelegt wurde, ist eine weisse Kugel gezogen. Es sind 2 Ursachen dieses Ereignisses möglich: nämlich, dass die Urne 2 weisse Kugeln oder 1 weisse Kugel enthält. Die 1te Ursache führt das 2malige Treffen der weissen Kugel mit der Wahrscheinlichk. 1, die 2te Ursache mit der Wahrscheinlichk. $\frac{1}{4}$ herbei. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiss sind, ist daher $\frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$, dass 1 Kugel weiss ist, $= \frac{1/4}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$

9. Die Wahrscheinlichk. eines künftigen möglichen Ereignisses erhält man, wenn man für das bereits früher beobachtete Eintreffen die Wahrscheinlichk. jeder möglichen Ursache desselben mit der Wahrscheinlichk. multipliziert, womit diese Ursache das Ereigniss auch in Zukunft herbei führen kann. Die Summe dieser Produkte drückt die Wahrscheinlichk. des künftigen Eintreffens aus.

Beispiel. Es sei zu ermitteln, mit welcher Wahrscheinlichk. in dem Beispiel zu 8 das Treffen einer weissen Kugel beim 3ten Zuge zu erwarten ist.

Für die 1te Ursache, dass beide Kugeln weiss sind, ist die Wahrscheinlichk. des Treffens der weissen Kugel beim 3ten Zuge = 1, für die 2te Ursache = $\frac{1}{2}$, daher die Wahrscheinlichk. des erwarteten Ereignisses = $1 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$

II. Methode der kleinsten Quadrate.

Litteratur: Hagen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. — Hagen. Der Konstanten wahrscheinliche Fehler; Nachtrag zur 3. Aufl. der Grundzüge der Wahrscheinlichk.-Rechnung; Berlin 1884, Ernst & Korn. — Navier. Lehrbuch der Different.- u. Integr.-Rechnung; deutsch v. Wittstein. Bd. II. — Schloemilch. Handbuch der Mathematik. Bd. II. — Henke. Die Methode der kleinsten Quadrate; Inaugural-Dissertation. Leipzig 1868. — Vogler. Grundzüge der Ausgleichungs-Rechnung; elementar entwickelt. Braunschweig 1883. Vieweg. — Helmert. Die Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendung auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente. 1872. — Jordan. Handbuch der Vermessungskunde. Stuttgart 1877, Metzler.

a. Theorie der Beobachtungs-Fehler.

Jede Beobachtung ist mit zufälligen Fehlern behaftet. Jeder Fehler kann angesehen werden als die Summe einer unendlich grossen Anzahl von elementaren Fehlern, welche eben so leicht positiv als negativ ausfallen. Unter dieser Voraussetzung lässt sich die Wahrscheinlichk. des Vorkommens eines Fehlers von der endlichen Grösse Δ darstellen als $f(\Delta)$ nach folgendem Gesetz: Sei η die Möglichkeit des Vorkommens, ω die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens, so ist:

$$\eta = \eta_0 e^{-h^2 \Delta^2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}; \quad \omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta.$$

Stellt man η als Ordinaten zu den Werthen Δ als Abszissen dar, so ist die Wahrscheinlichk. des Vorkommens eines Fehlers Δ gleich einem Flächenelement $\eta d\Delta$ dieser Kurve, Fig. 15.

Die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen eines Fehlers in den Grenzen Δ_2 und Δ_1 ist: $W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta$.

Die Fläche der ganzen Kurve ist = 1. Für $\Delta = 0$ wird $\eta = \eta_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ ein Maximum. Die Kurve verläuft in 2 zur Y-Axe symmetrischen Aesten; die X-Axe ist Asymptote der Kurve. Für die Abszisse $\frac{\sqrt{\Sigma(\Delta^2)}}{m} = \varepsilon$, worin m die Anzahl der Fehler und die Ordinate $\eta = 0,60653 \eta_0$ hat die Kurve einen Wendepunkt.

Bestimmt man die Ordinate η_r , welche die rechts, bzw. links von η_0 gelegene Fläche der Kurve halbirt und nennt die zu den Werthen von η_r gehörigen Abszissen r , so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Fehlers in den Grenzen $+r$ und $-r = \frac{1}{2}$. Man nennt r den wahrscheinlichen Fehler. Dieser bezeichnet also diejenige Grenze, welche von den positiven wie negativen Fehlern eben so oft überschritten wie nicht erreicht wird.

Die Konstante h ist abhängig von dem Werthe des grössten möglichen Fehlers und bestimmt durch die Beziehung: $h = \sqrt{\frac{2}{n}}$, worin n die Anzahl der unendlich vielen elementaren Fehler ist. Der Werth h ist das Maass der Präzision der Beobachtung und heisst Präzisions-Koeffizient. Da h aus der obigen Beziehung nicht bestimmt werden kann, benutzt man dazu den wahrscheinlichen Fehler r wie diesen desgleichen als Einheit des Maasses zur Darstellung der Fehler.

Die Beziehungen dieser Grösse zu den andern Grössen sind: $r = \frac{\rho}{h}$

$$\rho = 0,4769364; r = 0,67449 \sqrt{\frac{\sum (\Delta^2)}{m}}, \text{ worin } m \text{ die Anzahl der Fehler.}$$

Die Präzision der Beobachtung ist also den wahrscheinlichen Fehlern umgekehrt proportional. Die folgende Tabelle giebt für die Präzision 1, die Werthe der Wahrscheinlichkeiten, dass die Fehler in den Grenzen 0 und Δ bleiben. Die Werthe von Δ sind als Vielfache von r ausgedrückt. Die Differenzen der 2. Rubrik liefern die Wahrscheinlichk. für das Vorkommen des Fehlers in dem Intervall Δ_1 bis Δ_2 . Multipliziert man die Zahlen der Rubrik 2 und 3 mit 1000, so ersieht man, wie gross bei 1000 Beobachtungen nach der Theorie die Zahl der Fehler in dem betr. Intervall ungefähr ist, wenn die Fehler alle nur zufällige sind.

Tabelle der Ordinaten η für d. Absziss. Δ , welche in der Einh. d. wahr- scheinl. Fehlers gemessen sind.			Tabelle der Wahrscheinlichk. W , dass positive oder negative Fehler die Grenze Δ nicht überschreiten. W ist in der Einh. des wahrscheinl. Fehlers gemessen.								
Δ	η		Δ	W	Differ.	Δ	W	Differ.	Δ	W	Differ.
0,0	1,000	η_0	0,0	0,000		1,5	0,688		3,0	0,957	
0,5	0,945	"	1	054	0,054	6	719	0,031	1	963	
1,0	0,797	"	2	107	054	7	748	029	2	969	0,025
1,5	0,599	"	3	160	053	8	795	027	3	974	
2,0	0,403	"	4	213	052	9	800	025	4	978	
2,5	0,241	"	0,5	264	051	2,0	823	023	3,5	982	
3,0	0,128	"	6	314	050	1	843	021	6	985	
3,5	0,061	"	7	363	049	2	862	019	7	987	0,011
4,0	0,026	"	8	411	047	3	879	017	8	990	
4,5	0,010	"	9	456	046	4	895	015	9	991	
5,0	0,003	"	1,0	500	044	2,5	908	014	4,0	993	
5,5	0,001	"	1	542	042	6	921	012	2	995	
			2	582	040	7	931	011	4	997	0,006
			3	619	038	8	941	010	6	998	
			4	655	035	9	950	008	8	999	
			1,5	688	033	3,0	957	007	5,0	999	

b. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe unbekannter Grössen aus gegebenen Beobachtungen.

Eine Grösse F sei dargestellt als Funktion einer Anzahl von Konstanten a, b, c, \dots und von unabhängigen Veränderlichen x, y, z, \dots . Die analyt. Form der Funktion F sei als gegeben voraus gesetzt. Man kenne durch Beobachtung eine Anzahl von Werthen für F , welche gegebenen Werthen von x, y, z, \dots entsprechen. Es sind die Werthe der Konstanten a, b, c, \dots zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Beobachtungen, also auch der Bedingungen-Gleichungen grösser ist, als die Anzahl der Unbekannten.

Ist die Anzahl der unbekanntn Konstanten $= n$, diejenige der Gleichungen $= m$ und $m > n$, so kann man je n Gleichungen zur Bestimmung der Unbekanntn verbinden. Aber man erhält, weil die beobachteten Werthe von F mit unvermeidlichen Beobachtungs-Fehlern behaftet sind, je nach der Wahl der zu verbindenden Gleichungen andere Werthe der Konstanten.

Die Aufgabe geht nun dahin: diejenige Komplexion von Werthen der Konstanten zu bestimmen, welche für die gegebenen Beobachtungswerte von F die wahrscheinlichste ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehler $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_n$ zusammen treffen,

$$\text{ist: } \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_n = \left(\frac{h d \Delta}{\sqrt{\pi}} \right)^n e^{- (h^2 \Delta^2 + h^2 \Delta^2 + \dots + h^2 \Delta_n^2)}.$$

Diejenige Komplexion von Konstanten ist hiernach also die wahrscheinlichste, für welche: $\Sigma (h^2 \Delta^2)$ ein Minimum wird.

Man denke sich unter h eine Zahl von der Beschaffenheit, dass $\frac{h_1^2}{h^2}, \frac{h_2^2}{h^2}, \dots, \frac{h_n^2}{h^2}$ ganze Zahlen werden, welche der Reihe nach mit $g_1, g_2, g_3 \dots$ bezeichnet werden. Dann gilt die Bedingung:

Wenn die Präzisionen ungleich sind: $\Sigma (g \Delta^2)$ ein Minimum.

Wenn die Präzisionen gleich sind: $\Sigma (\Delta^2)$ ein Minimum.

Der 1. Fall wird also auf den 2. einfachern zurück geführt, da man die einzelnen Werthe von Δ so oft in die Summen-Ausdrücke einzuführen hat, als die zugehörigen Koeffizienten g anzeigen. Diese heissen die Gewichte der Beobachtungen.

a. Lineäre Funktionen.

Die Funktion sei linear in Bezug auf die zu berechnenden Konstanten, die allgem. Form also: $F = ax + by + cz + \dots$

Die beobachteten Werthe $F_1, F_2, F_3 \dots$ sind mit den Fehlern $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots$ behaftet; die Gleichgn. für die Fehler lauten daher:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= -F_1 + ax_1 + by_1 + cz_1 + \dots \\ \Delta_2 &= -F_2 + ax_2 + by_2 + cz_2 + \dots \\ \Delta_3 &= -F_3 + ax_3 + by_3 + cz_3 + \dots \end{aligned} \right\} (A).$$

Als Ausdruck der Bedingung, dass $\Sigma (\Delta^2)$ ein Minimum werden soll, hat man die n Gleichgn.:

$$\frac{d \Sigma (g \Delta^2)}{da} = 0, \quad \frac{d \Sigma (g \Delta^2)}{db} = 0, \quad \frac{d \Sigma (g \Delta^2)}{dc} = 0, \dots (B).$$

Durch Entwicklung der Ausdrücke erhält man sodann die Bedingungs-Gleichungen (Normal-Gleichungen) für die Bestimmung der wahrscheinlichen Werthe der Konstanten, wenn die Beobachtungen ungleiche Präzisionen haben:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (g Fx) &= a \Sigma (g xx) + b \Sigma (g xy) + c \Sigma (g xz) + \dots \\ \Sigma (g Fy) &= a \Sigma (g yx) + b \Sigma (g yy) + c \Sigma (g yz) + \dots \\ \Sigma (g Fz) &= a \Sigma (g zx) + b \Sigma (g zy) + c \Sigma (g zz) + \dots \end{aligned} \right\} (I)$$

worin z. B.: $\Sigma (g yz) = g_1 y_1 z_1 + g_2 y_2 z_2 + g_3 y_3 z_3 + \dots$

Wenn die Präzisionen gleich sind:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (Fx) &= a \Sigma (xx) + b \Sigma (xy) + c \Sigma (xz) + \dots \\ \Sigma (Fy) &= a \Sigma (yx) + b \Sigma (yy) + c \Sigma (yz) + \dots \\ \Sigma (Fz) &= a \Sigma (zx) + b \Sigma (zy) + c \Sigma (zz) + \dots \end{aligned} \right\} (Ia)$$

Die Anzahl der Gleichg. ist überein stimmend mit der Anzahl der Konstanten. In diese Gleichg. sind die beobachteten Werthe von $F, x, y, z \dots$ einzuführen und die Werthe der Konstanten danach zu ermitteln.

Wenn in einer gegebenen Gleichg. für F eine der zu berechnenden Konstanten mit keiner Variablen verbunden erscheint, ist in allen Bestimmungs-Gleichungen der Werth der betr. Variablen = 1 zu setzen. Also z. B. in einer Gleichg. $F = a + by$ an Stelle von x in der obigen Gleichg. der Werth $x = 1$; sonach ist $\Sigma (x^2) = m$, wenn m die Zahl der Beobachtungen ist.

Für die Konstanten erhält man Ausdrücke von der Form:

$$\left. \begin{aligned} a &= A_1 \Sigma (Fx) + B_1 \Sigma (Fy) + C_1 \Sigma (Fz) + \dots \\ b &= A_2 \Sigma (Fx) + B_2 \Sigma (Fy) + C_2 \Sigma (Fz) + \dots \\ c &= A_3 \Sigma (Fx) + B_3 \Sigma (Fy) + C_3 \Sigma (Fz) + \dots \end{aligned} \right\} (II)$$

Berechnet man unter Einsetzung der ermittelten wahrscheinlichen Werthe der Konstanten in die Gleichg. für $F = f(x, y, z \dots)$, die Werthe von F , welche den bei der Beobachtung benutzten Werthen der Variablen entsprechen, und bezeichnet die

Differenzen der korrespondirenden berechneten und beobachteten Werthe von F mit $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ so ist

der wahrscheinl. Werth des mittleren Fehlerquadrats: $\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma(\delta^2)}{m-n}}$; also: $r = 0,674 \sqrt{\frac{\Sigma(\delta^2)}{m-n}}$,

worin m die Anzahl der Beobachtungen, n die Anzahl der Konstanten. Man kann 1 gegen 1 wetten, dass r in den Grenzen liegt: $0,674 \sqrt{\frac{\Sigma(\delta^2)}{m-n}} \left(1 \pm \frac{\rho}{\sqrt{m}}\right)$.

Die wahrscheinl. Fehler d. berechn. Konstanten sind: $R_a = r \sqrt{A_1}$;

$R_b = r \sqrt{B_2}$; $R_c = r \sqrt{C_3} \dots$

β. Anwendungen.

1. Ausgleichung direkter Beobachtungen. Die beobachtete Grösse sei von keiner Variablen abhängig, also ihr analyt. Ausdruck von der Form: $F = a$. Liegen m Beobachtungen von ungleicher Präzision vor, so ist: $a = \frac{\Sigma(Fh^2)}{\Sigma(h^2)} = \frac{\Sigma(Fg)}{\Sigma(g)}$

Liegen m Beobachtungen von gleicher Präzision vor, so ist: $a = \frac{\Sigma(F)}{m}$

Bei Beobachtungen gleicher Güte einer von keiner Variablen abhängigen Grösse ist also das arithmetische Mittel der wahrscheinliche Werth der Grösse.

Wahrscheinlicher Beobachtungs-Fehler: $r = 0,67449 \sqrt{\frac{\Sigma(\delta^2)}{m-1}}$

Wahrscheinlicher Fehler des arithmetischen Mittels: $R_a = \frac{r}{\sqrt{\frac{m}{\delta^2}}}$

Beispiel: Eine 3 Mal wiederholte Winkelmessung hat die Werthe ergeben:

	δ	δ^2
51° 27' 11,7	0,667	0,444889
51° 27' 11,4	0,367	0,134689
51° 27' 10,0	1,033	1,067089
$\Sigma(F) = 154^{\circ} 21' 33,1''$	$\Sigma(\delta^2) = 1,646667$	
$a = 51^{\circ} 27' 11,633''$	$r = 0,615$; $R_a = 0,355$	

Die wahrscheinl. Grenzen von R_a sind: $0,355 \left(1 \pm \frac{0,477}{\sqrt{3}}\right) = 0,631$ und $0,079$. Man kann also 1 gegen 1 wetten, dass der wahre Werth von a zwischen $51^{\circ} 27' 10,40''$ und $51^{\circ} 27' 11,66''$ liegt.

2. Die analyt. Form der beobachteten Grösse sei: $F = ax$.

Man erhält aus $\Sigma(Fx) = a \Sigma(x^2)$ die wahrscheinlichen Werthe der Konstante: $a = \frac{\Sigma(Fx)}{\Sigma(x^2)}$

Wahrscheinlicher Fehler der Beobachtung: $r = 0,674 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m-1}}$

Wahrscheinlicher Fehler der berechneten Konstanten: $R_a = \frac{r}{\sqrt{\Sigma(x^2)}}$

3. Die Form der beobachteten Grösse ist: $F = a + by$.

Die Beding.-Gleich. sind: $\Sigma(F) = am + b \Sigma(y)$; $\Sigma(Fy) = a \Sigma(y) + b \Sigma(y^2)$.

Die wahrscheinlichen Werthe der Konstanten sind:

$$a = \frac{\Sigma(y^2) \Sigma(F) - \Sigma(y) \Sigma(Fy)}{m \Sigma(y^2) - [\Sigma(y)]^2}; \quad b = \frac{m \Sigma(Fy) - \Sigma(y) \Sigma(F)}{m \Sigma(y^2) - [\Sigma(y)]^2}$$

Der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung ist: $r = 0,674 \sqrt{\frac{\Sigma(\delta^2)}{m-2}}$

Die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Konstanten sind:

$$R_a = r \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{m \Sigma y^2 - [\Sigma(y)]^2}}; \quad R_b = r \sqrt{\frac{m}{m \Sigma y^2 - [\Sigma(y)]^2}}$$

Beispiel: Für eine gerade Linie seien für 5 Abszissenwerthe y die zugehörigen Ordinatenwerthe F gemessen, wie folgt:

$y = 0$	1	4	10	15
$F = 31$	36	49	81	104

Schema für die Berechnung:

y	F	Fy	y^2
0	30,72	0,00	0
1	35,70	35,70	1
4	50,30	201,20	16
10	80,00	800,00	100
15	104,49	1566,00	225
$\Sigma(y)=30$	301,12	2602,00	342

Unter Berücksichtigung, dass $m = 5$, erhält man:

$$a = \frac{342 \cdot 301,12 - 30 \cdot 2602}{5 \cdot 342 - 30 \cdot 30} = 30,7692$$

$$b = \frac{5 \cdot 2602,90 - 30 \cdot 301,12}{5 \cdot 342 - 30 \cdot 30} = 4,9147$$

Zur Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler und der Grenzen der Genauigkeit sind die Werthe von F nach der Gleichg. $F = a + by$ zu berechnen, welche den wahrscheinlichen Werthen der Konstanten entsprechen. Die weitere Rechnung erhält folgendes Schema:

Werthe von F		δ	δ^2
beob.	berechnet		
30,72	30,7692	0,0492	0,00242064
35,70	35,6839	0,0161	0,00025921
50,30	50,4289	0,1289	0,01661521
80,00	79,9162	0,0838	0,00702244
104,49	104,4897	0,0897	0,00804609
		δ^2	0,03436359

$$r = 0,674 \sqrt{\frac{0,03436359}{3}} = 0,072$$

$$R_a = 0,072 \sqrt{\frac{342}{810}} = 0,047$$

$$R_b = 0,072 \sqrt{\frac{5}{810}} = 0,005$$

γ . Wahrscheinliche Fehler abhängiger Grössen.

1. Allgemeine Lösung. Ist f eine Funktion der von einander unabhängigen Grössen $a, b, c \dots$, für welche die wahrscheinlichen Werthe und die wahrscheinlichen Fehler dieser Werthe $r_a, r_b, r_c \dots$ ermittelt sind, so bestimmt man den wahrscheinlichen Fehler R_f des durch Einsetzung der wahrscheinlichen Werthe von $a, b, c \dots$ berechneten Werthes von f aus der Gleichg.:

$$(R_f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 (r_a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 (r_b)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 (r_c)^2 + \dots$$

2. Wahrscheinlicher Fehler einer Summe.

$$f = a + b + c + \dots; \frac{\partial f}{\partial a} = 1; \frac{\partial f}{\partial b} = 1; \frac{\partial f}{\partial c} = 1 \dots; R_f = \sqrt{(r_a)^2 + (r_b)^2 + (r_c)^2 + \dots}$$

3. Wahrscheinlicher Fehler eines Produkts:

$$f = a \cdot b \cdot c \dots; \frac{\partial f}{\partial a} = b \cdot c \dots; \frac{\partial f}{\partial b} = a \cdot c \dots; \frac{\partial f}{\partial c} = a \cdot b \dots;$$

$$R_f = \sqrt{(r_a)^2 b^2 c^2 \dots + (r_b)^2 a^2 c^2 \dots + (r_c)^2 a^2 b^2 \dots + \dots}$$

Beispiel. Zur Berechnung einer rechteckigen Fläche sind die Seitenlängen a und b , jede wiederholt gemessen; man erhielt: $a = 530,74; r_a = 0,3036; b = 27,027; r_b = 0,0839$

$$f = ab = 14344,7; R_f = \sqrt{(0,3036)^2 (27,027)^2 + (0,0839)^2 (530,74)^2} = 45,27.$$

4. $f = \frac{1}{a}; R_f = \frac{1}{a^2}(r_a),$ 5. $f = a^n; R_f = n \cdot a^{n-1}(r_a)$

6. $f = a^{\frac{1}{n}}; R_f = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}}(r_a).$

δ . Nicht lineäre Gleichungen.

Sind die für F gegebenen n Gleichg. nicht linear in Bezug auf die m Konstanten $a, b, c \dots$, so fasse man von den Gleichgn. m beliebige zusammen und bestimme hieraus m Näherungswerthe $a_1, b_1, c_1 \dots$ der Konstanten.

Die wahren Werthe der Konstanten sind dann: $a + \alpha; b + \beta; c + \gamma; \dots$

Sind $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$ die den Näherungswerthen $a_1, b_1, c_1 \dots$ entsprechenden Werthe von $F; F_1, F_2, F_3 \dots$ die beobachteten Werthe von F , so erhält man, wenn F nach dem Taylor'schen Satz unter Vernachlässigung der höhern Potenzen in eine Reihe entwickelt wird, n Gleichungen für Δ :

$$\Delta_1 = -F_1 + \theta_1 + a \frac{d\theta_1}{da_1} + \beta \frac{d\theta_1}{db_1} + \gamma \frac{d\theta_1}{dc_1} + \dots$$

$$\Delta_2 = -F_2 + \theta_2 + a \frac{d\theta_2}{da_1} + \beta \frac{d\theta_2}{db_1} + \gamma \frac{d\theta_2}{dc_1} + \dots$$

$$\Delta_3 = -F_3 + \theta_3 + a \frac{d\theta_3}{da_1} + \beta \frac{d\theta_3}{db_1} + \gamma \frac{d\theta_3}{dc_1} + \dots$$

aus welchen nach der Bedingung: $\Sigma(\mathcal{J}^2) = \text{Minimum}$ oder:

$$\frac{d \Sigma(\mathcal{J}^2)}{d a} = 0; \quad \frac{d \Sigma(\mathcal{J}^2)}{d \beta} = 0; \quad \frac{d \Sigma(\mathcal{J}^2)}{d \gamma} = 0 \dots \dots$$

die Korrekturen $a, \beta, \gamma \dots$ zu berechnen sind.

Die Gleichgn. sind im Bau ganz analog den Gleichgn. sub α (A); man erhält also die erforderl. Bestimmungs-Gleichgn., wenn man in den Normal-Gleichgn. (Ia) für

$$a, \beta, \gamma, \dots \dots \frac{d \theta}{d a}, \frac{d \theta}{d \beta}, \frac{d \theta}{d \gamma}, \dots \dots F - \theta.$$

Sollten die gefundenen Werthe der Korrekturen a, β, γ, \dots so bedeutend ausfallen, dass man die höhern Potenzen nicht glaubt vernachlässigen zu dürfen, so hat man die so erhaltenen Werthe der Konstanten $a_1 + a; b_1 + \beta; c_1 + \gamma \dots$ als neue Näherungswerthe anzusehen, mit welchen man die Rechnung wiederholt.

Das vorstehend angegebene Verfahren kann auch dann benutzt werden, wenn die Funktion F linear in Bezug auf die Konstanten $a, b, c \dots$ ist. Da nach Feststellung der angenäherten Werthe a_1, b_1, c_1, \dots die Korrekturen a, β, γ, \dots sich im allgemeinen nur noch auf Dezimalstellen beschränken, erreicht man dadurch bei verwickelten Aufgaben eine Erleichterung in der Berechnung.

ε. Ausgleichung von Beobachtungen mit Bedingungs-Gleichungen.

Es seien die r Grössen $x_1, x_2, x_3 \dots$ direkt beobachtet; die Beobachtung lieferte die Werthe $l_1, l_2, l_3 \dots$ Für die Grössen $x_1, x_2, x_3 \dots$ bestehen gewisse

$$\left. \begin{array}{l} \text{Beziehungen, welche durch } q \text{ lineäre} \\ \text{Gleichgn. ausgedrückt sind:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots = 0 \\ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots = 0 \\ \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \dots = 0 \end{array} \quad \text{(A)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Die beobachteten Werthe } l_1, l_2, l_3 \dots \\ \text{genügen diesen Gleichgn. nicht, sondern} \\ \text{liefen die Widersprüche:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \dots = \omega_a \\ \beta_0 + \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \dots = \omega_\beta \\ \gamma_0 + \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \dots = \omega_\gamma \end{array} \quad \text{(B)}$$

An den Beobachtungswerten sind daher die Verbesserungen $\lambda_1 = x_1 - l_1, \lambda_2 = x_2 - l_2, \lambda_3 = x_3 - l_3 \dots$ anzubringen, deren wahrscheinl. Werthe ermittelt werden müssen. Man erhält zunächst durch Verbindung der Gleichgn. (A) und (B) unter Einführung von λ die q neuen Bedingungs-Gleichgn. für die Verbesserungen:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_a = \omega_a + a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + \dots = 0 \\ \varphi_\beta = \omega_\beta + \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \beta_3 \lambda_3 + \dots = 0 \\ \varphi_\gamma = \omega_\gamma + \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2 + \gamma_3 \lambda_3 + \dots = 0 \end{array} \right\} \text{(I)}$$

Man gelangt zur Bestimmung der Unbekannten aus der Bedingung: $\theta = \Sigma(\lambda^2) + 2k_a \varphi_a + 2k_\beta \varphi_\beta + 2k_\gamma \varphi_\gamma + \dots = \text{Minimum}$, worin die Grössen k

neue Unbekannte (Korrelaten), welche bestimmt werden aus: $\frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} = 0; \dots$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Man erhält die } r \text{ Korrelaten-} \\ \text{Gleichungen:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} g_1 \lambda_1 + a_1 k_a + \beta_1 k_\beta + \gamma_1 k_\gamma + \dots = 0 \\ g_2 \lambda_2 + a_2 k_a + \beta_2 k_\beta + \gamma_2 k_\gamma + \dots = 0 \\ g_3 \lambda_3 + a_3 k_a + \beta_3 k_\beta + \gamma_3 k_\gamma + \dots = 0 \end{array} \quad \text{(II)}$$

Aus denselben bestimmt man die Werthe λ_1 . Durch Einsetzung derselben in die Gleichgn. (I) erhält man die q Normal-Gleichgn.:

$$\left. \begin{array}{l} \omega_a = k_a \Sigma \left(\frac{a^2}{g} \right) - k_\beta \Sigma \left(\frac{a\beta}{g} \right) - k_\gamma \Sigma \left(\frac{a\gamma}{g} \right) - \dots = 0 \\ \omega_\beta = k_a \Sigma \left(\frac{\beta a}{g} \right) - k_\beta \Sigma \left(\frac{\beta^2}{g} \right) - k_\gamma \Sigma \left(\frac{\beta\gamma}{g} \right) - \dots = 0 \\ \omega_\gamma = k_a \Sigma \left(\frac{\gamma a}{g} \right) - k_\beta \Sigma \left(\frac{\gamma\beta}{g} \right) - k_\gamma \Sigma \left(\frac{\gamma^2}{g} \right) - \dots = 0 \end{array} \right\} \text{(III)}$$

worin z. B. $\Sigma \left(\frac{\gamma\beta}{g} \right) = \frac{\gamma_1 \beta_1}{g_1} + \frac{\gamma_2 \beta_2}{g_2} + \frac{\gamma_3 \beta_3}{g_3} + \dots$

Die Auflösung des Systems der q Normal-Gleichungen liefert die q Werthe für k und deren Einsetzung in die Korrelaten-Gleichgn. die r Werthe für λ .

Häufig lautet die Bedingungs-Gleichung für die Verbesserungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \omega = 0.$$

Dann erhält man die Werthe $\lambda_1 = \frac{\omega}{g_1 \sum \frac{1}{g}}$; $\lambda_2 = \frac{\omega}{g_2 \sum \frac{1}{g}}$; ... $\lambda_i = \frac{\omega}{g_i \sum \frac{1}{g}}$ für die Verbesserungen:

Beispiel 1. Die 3 Winkel eines Dreiecks sind gemessen zu $a = 30^\circ 55' 3''$, $b = 75^\circ 32' 58''$, $c = 73^\circ 32' 5''$. Die Gewichte der einzelnen Messungen seien gleich zu nehmen. Die Summe liefert sonach: $180^\circ 0' 6''$. Man erhält die Bedingungs-Gleichg. für die Verbesserungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 6'' = 0; \text{ sonach: } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2''.$$

Beispiel 2. Ein zum Ausgangspunkt zurück kehrendes Nivellement liefert den Schlussfehler ω , welcher auf die einzelnen Theilstrecken zu vertheilen ist. Man kann die Gewichte der Nivellements der Theilstrecken, wenn nicht besondere Erwägungen in Betracht kommen, den Längen l derselben umgekehrt proportional setzen. Daher das Gewicht $g_i = \frac{\text{Konst.}}{l_i}$ und die Verbesserung: $\lambda = \frac{\omega l_i}{\sum(l)}$

2. Sind einige der Bedingungs-Gleichungen $f(x_1, x_2, \dots)$ nicht linear, so betrachtet man die beobachteten Werthe als Annäherungen und bestimmt die Verbesserungen unter der Voraussetzung, dass nur deren 1. Potenzen zu berücksichtigen sind, indem man setzt: $f(x_1, x_2, \dots) = f(l_1, l_2, \dots) + \frac{\partial f(l)}{\partial l_1} \lambda_1 + \frac{\partial f(l)}{\partial l_2} \lambda_2 + \dots = 0$.

Durch Subtraktion von: $f(l_1, l_2, \dots) - \omega = 0$ erhält man die in Bezug auf λ lineären

$$\text{Gleichgn. für die Verbesserungen: } \omega + \frac{\partial f(l)}{\partial l_1} \lambda_1 + \frac{\partial f(l)}{\partial l_2} \lambda_2 + \dots = 0,$$

wonach die weitere Behandlung analog dem Vorfurgehenden wird.

Beispiel: In einem Dreieck hat man für die Seiten x^1, y^1, z^1 und die gegenüber liegenden Winkel u^1, v^1, w^1 durch direkte Beobachtungen von gleichem Gewichte die Grössen x, y, z, u, v, w gefunden. Zwischen den zu bestimmenden Grössen bestehen die Beziehungen:

$$x^1 + v^1 + w^1 - 180^\circ = 0; x^1 \cos v^1 + y^1 \cos u^1 - z^1 = 0; x^1 \cos w^1 + z^1 \cos u^1 - y^1 = 0.$$

Die Beobachtungen enthalten die Widersprüche:

$$u + v + w - 180^\circ - \omega_\alpha; x \cos v + y \cos u - z = \omega_\beta; x \cos w + z \cos u - y = \omega_\gamma.$$

Die zu ermittelnden Verbesserungen seien: $\xi, \eta, \zeta, u, v, w$.

Man erhält die Bestimmungs-Gleichungen für die Verbesserungen:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
			$u +$	$v +$	$w + \omega_\alpha = 0$
	$\cos v \cdot \xi + \cos u \cdot \eta -$	$\zeta - y \sin u \cdot u - x \sin v \cdot v$			$+ \omega_\beta = 0$
	$\cos w \cdot \xi -$	$\eta + \cos u \cdot \zeta - z \sin u \cdot u$		$- x \sin w \cdot w + \omega_\gamma = 0$	
			$\xi +$	$\cos vk_\beta + \cos wk_\gamma = 0.$	
			$\eta +$	$\cos uk_\beta - k_\gamma = 0.$	
			$\zeta -$	$k_\beta + \cos uk_\gamma = 0.$	
			$u + k_\alpha - y \sin uk_\beta - z \sin uk_\gamma = 0.$		
			$v + k_\alpha - x \sin vk_\beta$	$= 0.$	
			$w + k_\alpha$	$- x \sin wk_\gamma = 0.$	

und die Korrelaten-Gleichungen:

Durch Substitution der Werthe für die Verbesserungen in die Fehler-Gleichg. erhält man 3 lineäre Gleichg. für die Bestimmung der Korrelaten und nach deren Auflösung und Einsetzung der Werthe für k in die Korrelaten-Gleichg. aus diesen die Verbesserungen.

L. Grafisches Rechnen.

Litteratur: v. Ott. Grundzüge des grafischen Rechnens und der grafischen Statik; Prag. — Nehls. Ueber grafische Integration; Hannover 1877, Rümpler.

I. Die einfachen Rechnungs-Operationen.

1. Verwandlungen von Verhältnissen, Fig. 186.

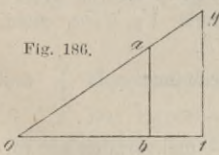


Fig. 186.

Gegeben das Verhältniss $a : b$, welches durch ein anderes N ersetzt werden soll, in letzteren ist N gegeben. Man trage von O aus b als Abszisse, a als Ordin. auf und ziehe die Gerade Oa . Die hierdurch bestimmte zur Abszisse N gehörige Ordin. ist die gesuchte Grösse y , weil $y : N = a : b$. Macht man $N = 1$, so wird das Verhältn. $a : b$ direkt durch die Länge y dargestellt.

2. Konstruktion von reziproken Werthen.

Gegeben der Werth a , zu konstruiren $y = \frac{1}{a}$, Fig. 187. Die Figur liefert die ohne weiteres verständliche Konstruktion; denn es ist: $a : 1 = 1 : y; y = \frac{1}{a}$.

3. Addition und Subtraktion von Verhältn., Fig. 188.

Ist die Summe $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} + \dots$ zu bilden, so trage man die Verhältn. auf

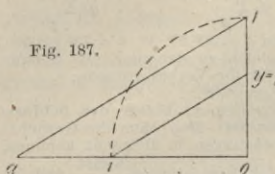


Fig. 187.

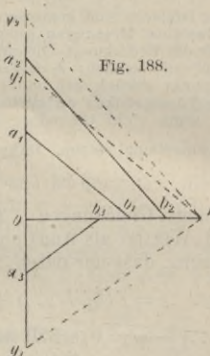
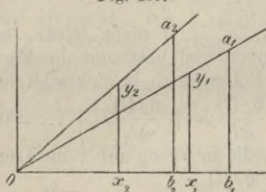


Fig. 188.

den gemeinschaftl. Nenner $N = 1$. Die konstruirten Strecken $y_1, y_2, y_3 \dots$ können dann direkt addirt werden. Der Uebersichtlichkeit halber können negative Verhältnisse nach unten abgetragen werden. Die Längen $y_1, y_2 \dots$ müssen, wie ersichtlich, von O abgemessen, also zum Zwecke der grafischen Addition nach an einander gefügt werden.

Fig. 189.



4. Multiplikation u. Division von Verhältn., Fig. 189.

Zu konstruiren sei: $\frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2}$

Man konstruire die Verhältnisse $a_1 : b_1$ und $a_2 : b_2$, trage von O die beliebige Abscisse x ab, und konstruire das Verhältn.: $y_1 : x_1 = a_1 : b_1$. Trage dann von O die Abscisse $x_2 = y_1$ ab und konstruire das Verhältn.: $y_2 : x_2 = a_2 : b_2$.

Wegen $x_2 = y_1 = x_1 \frac{a_1}{b_1}$ ist dann $\frac{y_2}{x_2} = \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2}$. Wird der willkürl. Nenner $x_1 = 1$ gemacht, so liefert die letzte Ordin. y_2 unmittelbar das Resultat der Rechnung.

In gleicher Weise konstruirt man das Produkt aus mehreren Verhältn. $\frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} \frac{a_3}{b_3} \dots$, indem man weiter die Abscisse $x_3 = y_2$ absetzt, das Verhältniss $y_3 : x_3 = a_3 : b_3$ konstruirt, $x_2 = y_3$ macht und das Verhältniss $y_4 : x_4 = a_4 : b_4$ konstruirt, u. s. f. Ist $x_1 = 1$, so liefert die letzte Ordin. stets unmittelbar das Resultat der Multiplikation.

Fig. 190 zeigt diese Konstruktion in etwas anderer Anordnung. Die zu

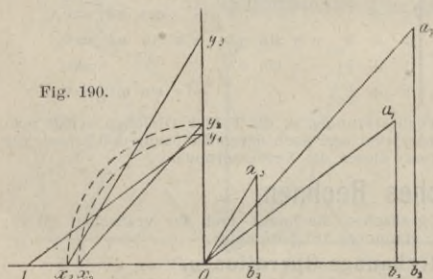


Fig. 190.

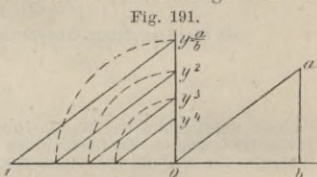


Fig. 191.

multiplizirenden Verhältnisse sind rechts von O aufgetragen, die Länge 1 bzw. die Abscissen $x_2 = y_1, x_3 = y_2$ u. s. w. sind nach links abgetragen; die y Werthe werden

auf der durch O gelegten y -Axe erhalten, in dem man zuerst $1 y_1 \parallel Oa_1$ zieht, $Ox_2 = Oy_1$ macht, $x_2 y_2 \parallel Oa_2$ zieht, u. s. f.

Sind in der Reihe der Faktoren ganze Zahlen, so schreibt man $a = \frac{a}{1}$ und verfährt wie vor.

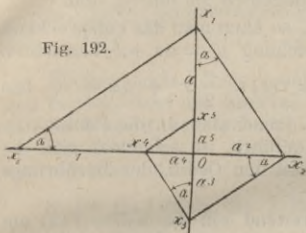
Zur Ausführung der Division schreibe man $\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2}$ und verfährt wie vor.

5. Potenziren. Man konstruirt $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \frac{a}{b} \frac{a}{b} \dots$ nach (4), Fig. 191. —

Ist $\frac{a}{b} > 1$, so wachsen die Ordinaten sehr schnell; um der Zeichnung keine zu

grosse Ausdehnung zu geben, konstruiert man $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ und bildet die Reziproke nach 2.

Fig. 192.



Ist a^n zu konstruieren, so verfährt man am bequemsten nach Fig. 192. Man mache $Ox_0 = 1$, $Ox_1 = a$, ziehe $x_1x_2 \perp Ox_0x_1$, dann ist $Ox_2 = a^2$, weil $1 : a = a : Ox_2$.

Zieht man weiter $x_2x_3 \perp x_1x_2$, so ist $Ox_3 = a^3$, zieht man $x_3x_4 \perp x_2x_3$, so ist $Ox_4 = a^4$ u. s. f., weil $Ox_3 : a^2 = a^2 : a$; $Ox_4 : a^3 = a^3 : a^2$; $Ox_4 = a^4$ u. s. f.

Auch in diesem Falle ist es oft, um keine zu grosse Ausdehnung der Zeichnung zu erhalten, zweckmässig, $\left(\frac{1}{a}\right)^n$ zu konstruieren, und zum

Schluss die Reziproke a^n zu bilden. Eine entsprechende Anordnung der Zeichnung zeigt Fig. 193.

Fig. 193.

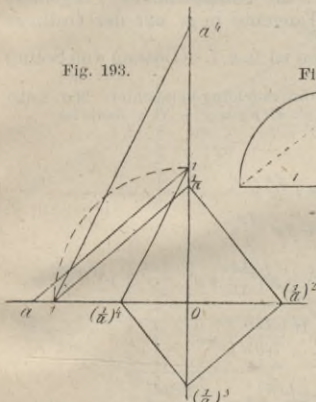


Fig. 194.



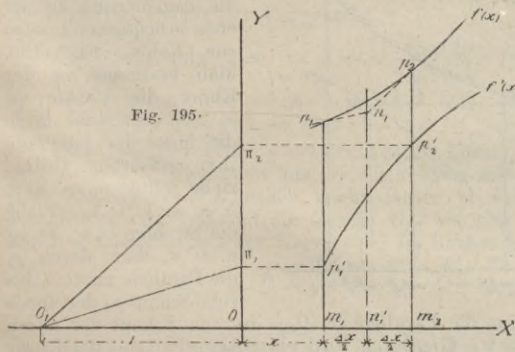
6. Ausziehen der Quadratwurzel. Um $y = \sqrt{a}$ zu erhalten, konstruiere man $1 : y = y : a$; etwa nach Fig. 194. In analoger Weise erhält man $y = \sqrt{ab}$, in dem man konstruiert: $a : y = y : b$. Den Werth

$h = \sqrt{a^2 + b^2}$ erhält man in der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b , den Werth $\sqrt{a^2 - b^2}$ durch die 2. Kathete eines rechtw. Dreiecks mit der Hypotenuse a und einer Kathete b . Sind $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ und $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ zu bilden, so konstruiere man zunächst $h^2 = a^2 + b^2$, darauf $y = \sqrt{h^2 \pm c^2}$.

II. Grafische Integration.

1. Fig. 195. Gegeben sei die Kurve $f'(x) = \frac{dy}{dx}$; es kann die Kurve $f(x)$

Fig. 195.



folgendermassen näherungsweise konstruiert werden. Es sei bestimmt, dass die Kurve $f(x)$ durch den Punkt p_1 gehen soll; durch diese Bestimmung ist die Integrationskonstante gegeben und die Konstruktion hat von dem Punkte p_1 auszugehen.

Man bestimme die Abszisse $Om_1 = x$ zu p_1' und trage von hier die Längen Δx weiter auf der Abszissen-Axe ab, führe durch die Endpunkte der Δx sowie auch durch deren Halbierungs-

Punkte Ordinaten. Man trage ferner von O auf die Länge $OO_1 = 1$ ab.

Von dem der Anfangs-Abszisse x entsprechenden Punkte p_1' der Kurve $f'(x)$ ziehe man $p_1'\pi_1 \parallel O_1X$; der Strahl $O_1\pi_1$ liefert dann die Tangenten-Richtung in p_1 ; denn es ist: $\text{tang } \pi_1 O_1 O = \frac{dy}{dx}$, und die durch $p_1 \parallel O_1\pi_1$ gezogene Gerade ist eine Tangente der Kurve $f(x)$.

In analoger Weise ist für jeden weitem durch die beliebige Abszisse x bestimmten Punkt die Tangenten-Richtung zu konstruiren, es handelt sich nur darum, noch die Punkte zu ermitteln, durch welche die Tangenten zu führen sind.

Macht man die Intervalle Δx hinreichend klein, so kann man das entsprechende Stück der Kurven $f'(x)$ als gerade Linie der Gleichung $y' = ax + b$ betrachten; diesem Verlauf von $f'(x)$ entspricht die Kurve $y = f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$. Dies ist eine Parabel, deren Hauptaxe \parallel der Y -Axe liegt. Sind aber an die Punkte p_1, p_2 einer solchen Parabel die Tangenten $p_1 n_1, p_2 n_1$ geführt, so schneiden sich dieselben auf der Ordin., welche in der Mitte zwischen den Ordin. der Berührungspunkte liegt.

Hiernach kann vom Punkte p_1 weiter fortschreitend ein die Kurve $f(x)$ umschliessendes Tangenten-Polygon konstruirt werden. Ist p_2' der der Abszisse $x + \Delta x$ entsprechende Punkt von $f'(x)$, so ist $O_1 \pi$ die entsprechende Tangenten-Richtung, zu der \parallel durch den Schnittpunkt n_1 der Tangente in p_1 mit der Ordinate zu $x + \frac{\Delta x}{2}$, die 2. Tangente der Kurve $f(x)$ zu ziehen ist u. s. f. (Lösung von Solin.)

Die Genauigkeit der Konstruktion wird durch folgende Untersuchung beleuchtet. Man setze $n_1 p_1 - m_1 p_1 = \delta_1; m_2 p_2 - n_1 n_1 = \delta_2; \delta_1 + \delta_2 = \Delta y; m_1 p_1 = y'; m_1 p_2 = y' + \Delta y'$; dann ist

$$\begin{aligned} \delta_1: \frac{\Delta x}{2} &= \pi_1 0:1 = y':1; \delta_1 = y' \frac{\Delta x}{2}; \\ \delta_2: \frac{\Delta x}{2} &= \pi_2 0:1 = y' + \Delta y':1; \delta_2 = (y' + \Delta y') \frac{\Delta x}{2} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \delta_1 + \delta_2 = \frac{\Delta x}{2} (2y' + \Delta y') = y' \Delta x + \Delta y' \frac{\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

Nach der Taylorschen Reihe ist: $\Delta y = f'(x + \Delta x) - f'(x) = y'' \frac{\Delta x}{1!} + y''' \frac{\Delta x^2}{2!} + y^{IV} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$

Durch Einsetzung in den obigen Werth Δy erhält man:

$$\Delta y = y' \frac{\Delta x}{1!} + y'' \frac{(\Delta x)^2}{2!} + y''' \frac{(\Delta x)^3}{2 \cdot 2!} + y^{IV} \frac{(\Delta x)^4}{2 \cdot 3!} + \dots$$

Der genaue Werth Δy ist:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = y' \frac{\Delta x}{1!} + y'' \frac{(\Delta x)^2}{2!} + y''' \frac{(\Delta x)^3}{3!} + y^{IV} \frac{(\Delta x)^4}{4!} + \dots$$

Die Differenz beträgt: $\Delta y - \Delta y = -\left(\frac{1}{2} y''' \frac{(\Delta x)^3}{3!} + y^{IV} \frac{(\Delta x)^4}{4!} + \dots\right)$

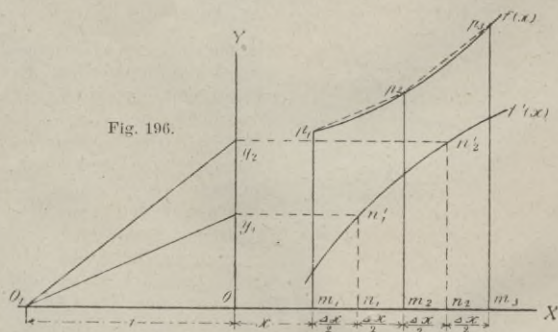


Fig. 196.

2. Etwas grösser ist die Annäherung in der eben so bequemen Lösung von Nehls, Fig. 196. Man bestimme auf der Kurve die Punkte n_1, n_2, \dots durch die durch die Mitte der Intervalle Δx geführten Ordin., ziehe weiter $n_1 \nu_1, n_2 \nu_2$ u. s. w. $\parallel OX$. Ziehe die Strahlen $O_1 \nu_1, O_2 \nu_2$ u. s. w. dann durch p_1 die Parallele zu $O_1 \nu_1$ bis zum Schnitt p_2 der durch $x + \Delta x$ geführten Ordin., durch p_2 die Parallele zu $O_1 \nu_2$ bis zum Schnitt der durch $x + 2\Delta x$ geführten Ordin. u. s. w. Hierdurch wird ein Sehnen-Polygon der Kurve $f(x)$ erhalten.

Nennt man Δy die konstruirte Grösse $m_1 p_1 - m_2 p_2$, so ist: $\Delta y: \Delta x = \pi_1 0:1 = n_1: n_1'; \Delta y = \Delta x \cdot n_1 n_1'$. Nach dem Taylorschen Lehrsatz ist:

$$n_1 n_1' = f^1\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = y' + y'' \frac{\Delta x}{2 \cdot 1!} + y''' \frac{(\Delta x)^2}{2^2 \cdot 2!} + y^{IV} \frac{(\Delta x)^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots$$

also: $(\Delta y) = \Delta x \cdot f^1\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = y' \Delta x + y'' \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot 1!} + y''' \frac{(\Delta x)^3}{2^2 \cdot 2!} + y^{IV} \frac{(\Delta x)^4}{2^3 \cdot 3!} + \dots$

Der genaue Werth Δy ist aber:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = y' \Delta x + y'' \frac{(\Delta x)^2}{1.2} + y''' \frac{(\Delta x)^3}{2.3} + y^{IV} \frac{(\Delta x)^4}{2.3.4} + \dots$$

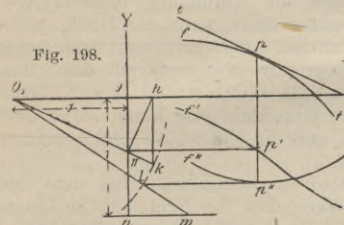
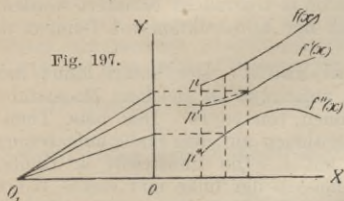
Die Differenz des konstruirten gegen den exakten Werth ist:

$$\Delta y - \overline{\Delta y} = \frac{1}{3!} y''' \frac{\Delta x^3}{3!} + \frac{1}{4!} y^{IV} \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

Es mag noch hervor gehoben werden, was auch aus der ganzen Erörterung sich ergibt, dass das Intervall Δx nicht für die ganze Konstruktion gleich gross zu sein braucht, sondern nach Bedarf geändert werden kann.

Das Verfahren ist auch leicht umkehrbar, d. h. die Konstruktion von $f'(x)$ zu der gegebenen Kurve $f(x)$ auszuführen.

3. Ist die Gleich. des 2. Differential-Quotienten $\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x)$ sowie die Konstante für $f'(x)$ und $f(x)$ gegeben, so lässt sich auf ganz analoge Art zu der Kurve $f''(x)$ die Kurve $f'(x)$ und zu letzterer die Kurve $f(x)$ herstellen. Um die direkt durch Konstruktion gewonnenen Punkte benutzen zu können, ist es bequem die Kurve $f'(x)$ nach dem Nehls'schen, die Kurve $f(x)$ nach dem Solin'schen Verfahren zu konstruieren, Fig. 197. Umgekehrt lassen sich bei gegebener Kurve $f(x)$ leicht die Kurven $f'(x)$ und $f''(x)$ herstellen.



Mit den 3 Kurven sind im allgemeinen alle Momente gegeben, welche für weitere Konstruktionen erforderlich sind. Soll an die Kurve $f(x)$, Fig. 198, im Punkte p eine Tangente gezogen werden, so führe man die Ordin. durch p bis zum Schnittpunkte π' mit $f'(x)$, ziehe $\pi' \pi \parallel OX$, so liefert der Strahl $O_1 \pi$ die Tangenten-Richtung. Soll von einem Punkte t ausserhalb eine Tangente an $f(x)$ gezogen werden, so ist durch Anlegen des Lineals dies in der Zeichnung unmittelbar ausführbar, der Berührungspunkt selbst aber nicht scharf anzugeben. Zieht man den

Strahl $O_1 \pi$ parallel der gezeichneten Tangente $t p$, die Gerade $\pi p' \parallel OX$ bis zum Schnittpunkt ρ' der $f'(x)$, durch ρ' die Ordin. bis zum Schnittp. ρ der $f(x)$, so ist ρ der Berührungspunkt der Tangente.

Der Krümmungshalbm. ist $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. Der Strahl $O_1 \pi$ liefert den Werth

$\sqrt{1 + y'^2}$. Man ziehe $\pi h \perp O_1 \pi$, $h k \perp OX$. Dann ist: $O_1 h : O_1 \pi = O_1 \pi : 1$; $O_1 h = O_1 \pi^2$; $O_1 k : O_1 h = O_1 \pi : 1$; $O_1 k = O_1 \pi^3 = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

Zieht man durch den ρ entsprechenden Punkt ρ'' der Kurve $f''(x)$ die Gerade $\rho'' l \parallel OX$, beschreibt aus O_1 einen Kreis mit dem Halbmesser $O_1 k$, welcher jene Parallele in l schneidet, zieht ferner in der Entfernung 1 von OX eine Parallele nm zu OX und die Gerade $O_1 l$ bis zum Schnitt m mit nm , so ist $O_1 m$ der Krümmungshalbm. der Kurve $f(x)$ im Punkte ρ . Denn es ist:

$$O_1 m : 1 = O_1 l : y'' = O_1 k : y''; \quad O_1 m = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Bemerk. Die Gleich. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x)$ ist die Different.-Gleich. einer Seilkurve

mit dem Horizontalzug $H=1$ für die Belastung $f''(x)$ pro Einheit von x . Die Kurve $f''(x)$ stellt also das Belastungsgesetz, die Kurve $f'(x)$ die Form der Seilkurve dar.

Beispiel. Ist das Belastungs-Gesetz $f''(x) = \text{Const.}$, so ist die Kurve $f''(x)$ eine zur X -Axe parallele Gerade, die Kurve $f'(x)$ eine zur X -Axe geneigte Gerade, die Seilkurve $f(x)$ eine Parabel deren Axe \parallel der Y -Axe ist.

III. Der Rechenstab und sein Gebrauch.

Litteratur. Theorie u. Gebrauch d. logarithm. Rechenschieber; Separatdruck aus Culmann's graphischer Statik; mit Beispielen erläutert von Tetmajer, Zürich 1875. — Ott. Logarithm. Rechenschieber, Prag 1874. — Ruth. Theorie der logarithm. Rechenschieber, Graz 1878. — Wüst. Anleitung zum Gebrauch d. Taschen-Rechenschiebers; Halle 1880. Hofstetter. — Der Rechenstab aus d. mechan.-mathem. Institut von Dennert u. Pape. Altona 1873. — Benededer. Der logarithm. Rechenstab; Cannstatt 1884; Selbstverlag d. Verf.

Der logarithm. Rechenstab od. Rechenschieber, *sliding rule*, welcher 1624 v. Prof. Gunter in London seinem Prinzip nach erfunden, 1627 v. Wingate u. 1657 v. Seth Partridge verbessert worden ist, dient zur Ausführung v. Multiplikationen, Divisionen, Potenzirungen und Radizirungen mit Hilfe der grafisch, als Längen, aufgetragenen Logarithmen der betr. Zahlen auf verschiebbaren Stäben.

Er besteht aus einem Lineal, einem in demselben gleitenden Schieber und einem über dem Lineal verschiebbaren, metallenen Läufer. Letzterer dient nur dazu, jede aufgefundenene oder durch Rechnung gewonnene Ablesung fest zu halten, während man mit d. Schieber weiter arbeitet. Die Theilungen auf Schieber u. Lineal sollen in Folgendem einzeln mit Angabe ihres Gebrauchs erläutert werden, wobei der Beschreibung der Rechenschieber nach der Konstruktion von Dennert u. Pape in Altona zu Grunde gelegt wird.

1. Die untere Schieber- und Lineal-Skala. Der untere Rand des Lineals und des Schiebers erhalten von links anfangend in gleichem Maasstabe als Längen aufgetragen die gemeinen Logarithmen von 1—10. Den betr. Theilstrichen sind die Zahlen beigesezt, deren Logarithmen auf dem Stabe aufgetragen sind. Da $\log 1 = 0$, beginnt d. Theilg. links mit 1. Die Endstriche d. Theilg. bei $\log 1$ und $\log 10$, beide mit 1 bezeichnet, heissen der linke und rechte Index der Skalen. Die Unterabtheilungen ermöglichen die Auffindung mehrzifferiger Zahlen, wobei Schätzung zu Hilfe genommen werden muss, wenn die Theilg. nicht ausreicht. Es ist hierbei zu beachten, dass die Mantisse der Logarithmen unabhängig von dem Stellenwerth der betr. Zahl ist, so dass man also z. B. an demselben Punkte einer Theilg. abliest: 2,1, 21, 210, 2100, 0,21, 0,021, 0,0021 u. s. f., überhaupt $21 \cdot 10^n$, wo n jede positive oder negative Grundzahl sein kann. Man liest bei Ausführung der Rechnungen also zunächst nur die Ziffern ab und bestimmt die Stellenzahl nach weiter zu gebenden Regeln.

2. Um Multiplikationen oder Divisionen auszuführen, hat man den logarithmischen Längen der betr. Zahlen durch Verrücken des Schiebers im Lineal zu addiren oder zu subtrahiren. Also $ab = \text{num} (\log a + \log b)$ nach Fig. 199.

Fig. 199.

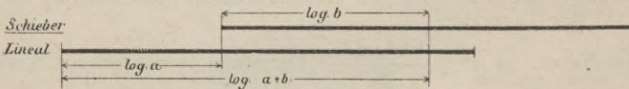
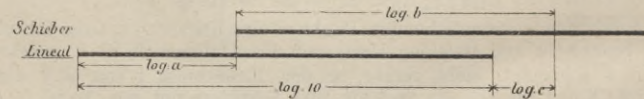
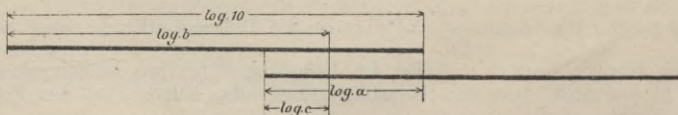


Fig. 200.



stehenden Ende des Schiebers wiederholt, Fig. 200. Es ist dann:
 $\log a + \log b - \log 10 = \log c$.

Fig. 201.



Man stelle jetzt den Schieber so weit nach links, dass der rechte Index desselben über a steht. Der Theilstrich b der Schieberskala koinzidiert dann mit dem Theilstrich für c auf d. Lineal; denn es ist, Fig. 201: $\log c = \log a - \log 10 + \log b$.

3. Fällt das Resultat über die Lineal-skala um die (einstweilen unbestimmte) Länge $\log c$ hinaus, so stelle man sich vor, die Theilg. werde unter dem über-

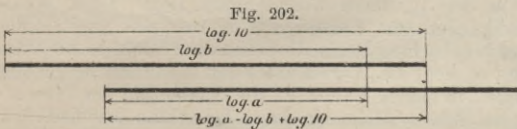
4. Man erhält ferner als allgemeine Regel zur Bestimmung der Stellenzahl des Produkts: die Zahl der Ziffern vor dem Komma wird positiv, die Zahl der Nullen hinter dem Komma negativ als Stellenzahl gerechnet. Erscheint das Produkt rechts vom 1. Faktor in derselben Skala, so ist zur Bestimmung der Stellenzahl desselben die Stellensumme der Faktoren um 1 zu vermindern; erscheint d. Produkt links, so erhält man als Stellenzahl desselben einfach d. Stellensumme beider Faktoren:

Beispiel. 1) $24 \cdot 1,6 = 38,4$.
 Stellensumme: $2 + 1 = 3$
 Resultat rechts also $- 1$
 Stellenzahl $+ 2$
 3) $2,4 \cdot 4,8 = 11,52$.
 Stellensumme: $1 + 1 = 2$
 Resultat links
 Stellenzahl 2

2) $0,024 \cdot 1,6 = 0,0384$.
 Stellensumme: $-1 + 1 = 0$
 Resultat rechts $- 1$
 Stellenzahl $- 1$
 4) $0,0024 \cdot 0,048 = 0,0001152$
 Stellensumme: $-2 - 1 = -3$
 Resultat links
 Stellenzahl $- 3$

5. Ist eine Reihe von Zahlen mit demselben Faktor a zu multiplizieren, so stellt man den Schieber-Anfang auf den Theilstrich a der Lineal-Skala und liest die Produkte einzeln ab. Ist also z. B. eine Reihe von Zahlen aus preuss. Fuss in Meter umzurechnen, so stellt man den linken Schieber-Index auf die Reduktions-Zahl 0,314 und liest auf dem Schieber die Fusse, auf dem Lineal darunter die Meter ab.

6. Division: $\log \left(\frac{a}{b} \right) = \log a - \log b$. Man stellt den Divisor b mit dem Schieber über den Dividend. a und liest die Differenz $\log \left(\frac{a}{b} \right)$ an dem linken



Schieber-Index ab. Fällt d. Resultat links über d. Schieber-Ende hinaus, so liest man ab, Fig. 202: $\log a - \log b + \log c$.

7. Für die Bestimmung der Stellen-Zahl ist die

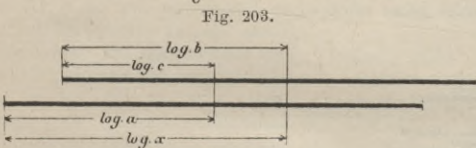
Regel: Die Stellen-Differenz ist um 1 zu vermehren, wenn d. Resultat links vom Dividenden in derselben Skala erscheint.

Beispiel 1) $\frac{0,0384}{2,4} = 0,016$.
 Stellen-Differenz: $-1 - 1 = -2$
 Resultat links mithin $+1$
 Stellenzahl -1

2) $\frac{1152}{48} = 24$
 Stellen-Differenz: $.. 4 - 2 = 2$
 Resultat rechts
 Stellenzahl 2

8. Ist Multiplikation und Division zu kombinieren, z. B.:

$$x = \frac{a \cdot b}{c}, \text{ so stellt man: } \log a - \log c + \log b, \text{ Fig. 203.}$$



9. Für die Stellen-Zahl des Resultats gilt die Regel: Die Stellen-Zahl ist direkt gleich der totalen Stellen-Zahl, (d. h. Stellen-Summe d. Zählers minus Stellen-Zahl des Nenners), wenn das Resultat in die Skalenhälfte

des 1. Faktors fällt. Sie ist um 1 kleiner, wenn das Resultat auf der Skalenhälfte rechts, um 1 grösser, wenn dasselbe auf die Skalenhälfte links vom 1. Faktor abgelesen wird.

10. Bei wiederholten Multiplikationen, $a \cdot b \cdot c \cdot d \dots$ wird die Multiplikation $a \cdot b$ ausgeführt, das Resultat ohne Ablesen mit dem Läufer fest gehalten, die 2. Multipl. $(a \cdot b) \cdot c$ ausgeführt, das Resultat wieder mit dem Läufer fest gehalten u. s. f.

Wiederholte Multipl. und Divis. werden analog mit Hilfe dem Läufers ausgeführt. Man zerlegt dabei die Operation wie folgt:

$$\frac{a \ b \ c \ d \ e}{m \ n \ o \ p} = \frac{a \ b \ c \ d \ e}{m \ n \ o \ p}$$

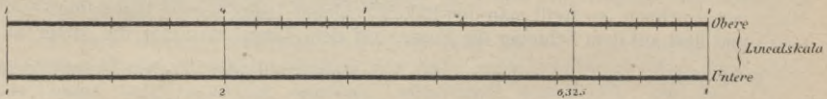
11. Die Stellen-Zahl wird in den Fällen 10. nach der Regel bestimmt: Man hat der algebr. Stellen-Summe so oft 1 zuzusetzen, als ein Divisions-Resultat in

derselben Skala links, so oft 1 abzusetzen, als ein Multiplikations-Resultat in derselben Skala rechts vom letzter vorher gehenden Resultat erscheint.

12. Die untere Schieber- und Lineal-Skala sind nach demselben Prinzip wie die obere angeordnet; doch ist hier die Einheit nur der Hälfte der untern. Es sind 2 gleiche Skalen hinter einander gesetzt. Man hat also 3 Indices der Skalen. Mit derselben können dieselben Operationen wie mit der untern ausgeführt werden. Die Skala enthält einen, die Zahl $\pi = 3,14$ darstellenden Theilstrich, welcher zu Umrechnungen von preuss. Fuss in Meter (Reduktions-Zahl 0,3139) und zu Multiplikation und Division mit der Zahl π benutzt werden kann.

13. Quadraturen und Quadratwurzeln. Die Länge, welche unten $\log a$ darstellt, ist oben $= 2 \log a = \log(a^2)$. Man liest also mit Hilfe des Läufers der Quadrate der untern Zahlen auf der obern Skala ab. — Beim Ausziehen der Quadratwurzel hat man zu beobachten, dass für jede 1, 3, 5 . . . stellige Zahl die Wurzel unter der 1., für jede 2, 4, 6 . . . stellige Zahl unter der 2. Skala erscheint; z. B. Fig. 204, $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{40} = 6,325$

Fig. 204.



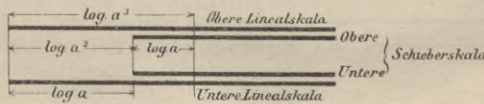
14. Allgemein gilt zur Bestimmung der Stellenzahl die Regel: Hat die zu quadrende Zahl n Stellen, so hat das Quadrat $2n$ Stellen, wenn es in der 2., $(2n - 1)$ Stellen, wenn es in der 1., obern Lineal-Skala liegt. Beim Wurzelausziehen theilt man den Radikanden vom Komma aus in Gruppen von 2 Ziffern. Enthält die 1. Gruppe links, bezw. bei echten Dezimalbrüchen die 1. Gruppe mit Ziffern, welche nicht = 0 sind, 1 Ziffer, so liegt die Wurzel unter der 1., enthält sie 2 Ziffern, unter der 2. obern Lineal-Skala. In beiden Fällen ist die Stellenzahl der Wurzel = der Gruppenzahl des Radikanden links vom Komma, bezw. bei echten Dezimalbrüchen = der negativ bezeichneten Zahl der Gruppen rechts, welche nur 0 erhalten.

Beispiel:

Radikand.	Wurzel unter der:	Stellenzahl der Wurzel.	Wurzel.	Radikand.	Wurzel unter der:	Stellenzahl der Wurzel.	Wurzel.
3 600	2. Skala	2	60,00	0,0360	1. Skala	0	0,1897
360	1. "	2	18,97	0,0036	2. "	- 1	0,06
36	2. "	1	6,00	0,00036	1. "	- 1	0,01897
3,6	1. "	1	1,897	0,000036	2. "	- 2	0,006
0,36	2. "	0	0,6				

15. Das Ausziehen der Wurzel kann auch ohne Benutzung der obern Lineal-Skala bewirkt werden, indem man den Radikanden mit dem Läufer fest hält und den Schieber so ver-

Fig. 205.



stellt, dass er die Länge des Radikanden halbirt, sein linker Index auf den Lineal also dieselbe Zahl zeigt, welche der Läufer

auf der Schieber-Skala abschneidet, Fig. 205.

16. Die Ausführungsweise kombinirter Rechnungen ist leicht ersichtlich; als Beispiel diene die nachstehende Bestimmung:

$$90,9 \sqrt{\frac{1}{4800} \frac{576}{108}} = 3,03 \text{ (ohne Zwischen-Resultate abzulesen).}$$

Man nehme $\frac{576}{108} \frac{1}{4800}$ auf der obern Skala, nehme mit dem Läufer die Wurzel auf der untern Lineal-Skala, stelle auf diese das rechte Schieberende ein und liest unter 90,9 das Resultat 3,03 ab.

17. Kubiziren erfolgt durch die Operation $a^2 a = a^3$, Fig. 205. Fällt a^3 über das obere Lineal rechts hinaus, so wird der Schieber linkshin verschoben, hat die zu potenzirende Zahl n Stellen, so hat der Kubus:

$$\begin{matrix} 3n - 2 \text{ Stellen, wenn er in der 1. } \\ 3n - 1 \text{ " " " " " " 2. } \end{matrix} \left. \begin{matrix} \text{obern Lineal-} \\ \text{Skala erscheint.} \end{matrix} \right\}$$

3n Stellen, wenn der Schieber nach links verschoben wurde und das Resultat in d. 2. Linealskala fällt.

Beispiel.

a	Resultat in der 1. Skala. Stellenzahl von a^3	a^3
210	$3 \cdot 3 - 2 = 7$	9 261 000
21	$3 \cdot 2 - 2 = 4$	9 261
2,1	$3 \cdot 1 - 2 = 1$	9,261
0,21	$3 \cdot 0 - 2 = -2$	0,009 261
0,021	$-3 \cdot 1 - 2 = -5$	0,00009261

18. Ausziehen der Kubikwurzel. Man stellt den Läuferstrich auf den Radikanden der obern Lineal-Skala und verstellt den Schieber, bis die obere Schieberskala unter dem Läuferstrich und die untere Lineal-Skala am linken Schieberende dieselbe Zahl zeigen, Fig. 205.

19. Theilt man den Radikanden in Gruppen von je 3 Ziffern und erhält die 1. Gruppe links, bezw. bei echten Dezimalbrüchen d. 1. Gruppe rechts mit wirklichen Zahlen:

1 Ziffer, so nimmt man den Radikanden in der 1. obern Lineal-Skala

2 " " " " " " " " " " 2. " " " "

3 " " so benutzt man das rechte untere Schieberende und nimmt d. Radikanden in d. 2. Lineal-Skala. Hierbei ist zu beachten, dass in echten Dezimalbrüchen die Gruppe von der Form:

0,8 = 0,800 oder 0,85 = 0,850 als 3 ziffrig } zu betrachten ist.
 0,08 = 0,080 als 2 " "
 0,008 als 1 " "

Die Stellenzahl der Wurzel ist = der Gruppenzahl des Radikanden wie beim Ausziehen der Quadratwurzel.

Fig. 206.

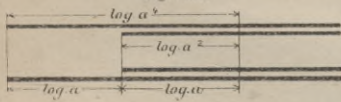
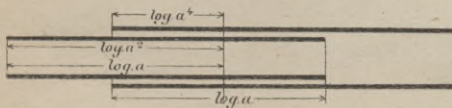


Fig. 207.



20. Die 4. Potenz wird durch die Operation $(a \cdot a)^2$ gebildet., Fig. 206, Fällt das Resultat über die 2. obere Lineal-Skala hinaus, so verstellt man den Schieber in bekannter Weise nach links, Fig. 207.

21. Das Ausziehen der 4. Wurzel geschieht durch 2maliges Ausziehen d. Quadratwurzel oder nach Fig. 206. Man hält den Radikanden auf der oberen Lineal-Skala mit dem Läufer fest und verstellt den Schieber, bis sein linkes Ende auf der untern Lineal-Skala die Zahl abschneidet, welche gleichzeitig auf der untern

Schieber-Skala unter dem Läufer erscheint.

22. Die Sinus-Theilung. Zieht man den Schieber heraus und steckt ihn umgekehrt in das Lineal so hinein, dass die auf der Rückseite mit S bezeichnete Theilung unter der obern Lineal-Theilung steht, so liest man auf dem Schieber den Winkel in Grad und Minuten, darüber auf dem Lineal den zugehörigen \sin ab. Und zwar gehen die \sin der 1. Skala von 0,01 — 0,1 ($\sin 0^\circ 35'$ bis $\sin 5^\circ 45'$), in der 2. Skala von 0,1 1,0 ($\sin 5^\circ, 45' - \sin 90^\circ$). Die Ausführung der Rechnungen mit dieser Skala ist im übrigen dieselbe, wie im Voraufgehenden angegeben.

Zur Bestimmung der Stellenzahl gilt die folgende Regel: Sei z d. Stellenzahl der mit $\sin a$ zu multiplizirenden oder durch $\sin a$ zu dividirenden Zahl, so hat:

a. das Produkt $z - 2$ Stellen, wenn rechts von a in derselb. Skala

$z - 1$ " " " " " d. folgend. "
 " " " " " d. vorhergeh. "
 " " " " " derselben "

b. d. Quotient $z + 2$ Stellen, wenn links von a in derselb. Skala

$z + 1$ " " " " " d. vorhergeh. "
 " " " " " d. folgend. "
 " " " " " derselb. "

23. Die Tangenten-Theilung. Bei umgekehrtem Schieber liest man auf

der untern Lineal-Skala der Tangenten den darüber auf der untern Schieber-Skala angegebenen Winkel, jedoch nur von $0,1 - 1,0$, entsprechend den Winkeln $5^{\circ} 43'$ bis 45° . Ist der betr. Winkel $> 45^{\circ}$, so liest man ab: $\frac{a}{\tan(90-\beta)}$ anstatt $\tan \beta$.

Die Stellenzahl wird bei Ausführung der Rechnung $a \tan \alpha$; $\frac{a}{\tan \alpha}$ folgendermaassen bestimmt:

Das Produkt hat z Stellen, wenn es links von a erscheint

„ „ „ $z-1$ „ „ „ rechts „ „ „
 Der Quotient „ $z+1$ „ „ „ er links „ „ „
 „ „ „ z „ „ „ rechts „ „ „

24. Die Winkel unter $5^{\circ} 43'$ werden ersetzt durch die entsprechenden sinus; der hierbei begangene Fehler zeigt sich erst in der 4. Dezimale. Bei Multiplikation mit grossen Faktoren bringt man bei Winkeln von $3^{\circ} 30'$ bis $5^{\circ} 43'$ eine Korrektur an durch Vergrösserung der \sin um 3 ‰ , indem man also $\sin \alpha \cdot 1,03$ für $\tan \alpha$ einführt. Für Winkel $< 3^{\circ} 30'$ wird einfach der \sin beibehalten.

25. Für Arbeiten mit ganz kleinen Winkeln dienen die auf der Rückseite des Rechenstabes angegebenen Zahlenwerthe: $\text{arc. } 1' = \frac{1}{3437,7}$ u. $\text{arc } 1'' = \frac{1}{206265}$. Bei kleinen Winkeln (bis $35'$ auf 6 Dezimalstellen übereinstimmend) sind für die \tan u. \sin die Bogenlängen zu gebrauchen.

26. Logarithmen werden abgelesen auf der mittleren Theilung der Rückseite des Schiebers und zwar am untern Index im Ausschnitt des Lineals, während man die zugehörigen *Num.* auf der untern Lineal-Skala am linken Schieber-Index abliest.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
 KRAKÓW

S-96

195



II-349553

Im unterzeichneten Kommissions-Verlage ersch

Handbuch der Ba

Abtheilung III:

Baukunde des Ingenieurs.

Heft 1:

Der Grundbau.

Bearbeitet von

L. Brennecke k. preuss. Regierungs-Baumeister.

Mit 683 Illustrationen im Text.

Den Herausgebern des Handbuchs der Baukunde ist es gelungen, für die vorliegende Bearbeitung des Abschnitts über Grundbau die durch zahlreiche Ausführungen im In- und Auslande an eigenen Erfahrungen reich gewordene Kraft eines Spezialisten, des jetzigen kgl. preussischen Regierungs-Baumeisters L. Brennecke zu gewinnen, dessen Veröffentlichungen über Grundbauten in den technischen Zeitschriften der letzten Jahre ebenso zahlreiche als hochgeschätzte sind. Der Hr. Verfasser behandelt in einem 1. Theile:

Das Allgemeine des Grundbaues:

Hülfsmaschinen und Geräte zum Grundbau; Baugrund und Tiefe der Fundamente; Einschliessung und Trockenlegung der Baugrube; endlich die im einzelnen Falle zu treffende Wahl der Gründungsweise, wobei Zeit- und Kosten-Erforderniss sowie sonstige Bedingungen gegen einander abgewogen werden.

In einem 2. Theile des Buchs werden besprochen:

Die verschiedenen bisher im Gebrauch befindl. Gründungsweisen:

Befestigung schlechten Baugrundes; Beton-Gründungen; Gründungen mit Pfahlrost und eisernen Pfählen; desgleichen Gründungen in Kästen mit geschlossenem Boden; Schwimmpfeiler; die Brunnen- und Kasten-Gründung; die Luftdruck-Gründung; die Gefrier-Gründung und eine Anzahl kombinirter, bezw. weniger oft gebräuchter Gründungsweisen. Den Schluss dieses Theiles bildet ein kurzer Abschnitt über Sicherung der Fundamente gegen Unterspülung und Feuchtigkeit, sowie über Bauten auf wandelbarem Grunde.

Einzelne Theile, welche der Verfasser behandelt — wie namentlich die Luftdruck- und die Gefrier-Gründung — haben bisher überhaupt noch keine zusammenhängende Bearbeitung gefunden. Im übrigen werden auf keiner Seite des Buchs Beleuchtungen des Gegenstandes von den verschiedensten Seiten aus, kritisches Urtheil und Kathschläge vermisst werden, wie sie nur aus eigener vielfacher Erfahrung geschöpft werden können.

Hinter der textlichen Haltung bleibt der bildliche Theil des Buchs nicht zurück, da derselbe nicht weniger als 683 Figuren im Text, theils in recht grossem Maasstabe ausgeführt, umfasst.

Preis: **Mk. 7.00.** Eleg. in Ganzleinen gbd. **Mk. 8.00.**

Bestellungen nimmt jede Buchhandlung entgegen, auch werden dieselben bei Einsendung des Betrages von der Verlagsbuchhandlung direkt und portofrei ausgeführt.

Berlin S.W.,

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

Verlagstoeche,
Verlagsbuchhandlung.

100000297359