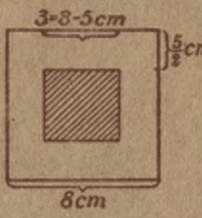
CH-
BLIOTHEK

NER

WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

I. GRUNDLEHREN



RLAG B. G. TEUBNER LEIPZIG UND BERLIN

MATHEMATISCH-
PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

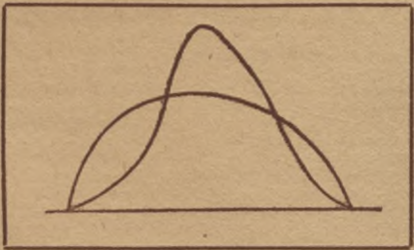
1.-

BAND 33

OTTO MEISSNER

WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

II. ANWENDUNGEN



VERLAG B.G.TEUBNER LEIPZIG UND BERLIN

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik u. Physik. Unter Mitwirkung von Fachgenossen hrsg. von

Dr. W. Lietzmann und **Dr. A. Witting**

Direktor der Oberrealschule zu Jena — Studienrat, Gymnasialprof. in Dresden

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je M. 1.–

Hierzu Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementaren Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/18):

Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 2., durchgeseh. Aufl. (Bd. 2.)

Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I.: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. (Bd. 1.) II.: Die Z. im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 34.)

Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. (Bd. 7.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. (Bd. 9.)

Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. O. Meißner. 2. Auflage. I. Grundlehren (Bd. 4.) II. Anwendungen. (Bd. 33.)

Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman. (Bd. 19.)

Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 3.)

Darstellende Geometrie des Geländes. Von R. Rothe. (Bd. 14.)

Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. (Bd. 26.)

Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. (Bd. 6.)

Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühlke. (Bd. 11.)

Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Von W. Dieck. (Bd. 31.)

Einführung in die Nomographie. I. Teil: Die Funktionsleiter. Von P. Luckey. (Bd. 28.)

Theorie und Praxis des Rechenschiebers. Von A. Rohrberg. (Bd. 23.)

Die Anfertigung mathemat. Modelle. (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel. (Bd. 16.)

Karte und Kroki. Von H. Wolff. (Bd. 27.)

Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Baruch. (Bd. 29.)

Soldaten-Mathematik. Von A. Witting. 2. Aufl. (Bd. 22.)

Die mathemat. Grundlagen der Variations- und Vererbungslehre. Von P. Riebesell. (Bd. 24.)

Mathematik und Malerei. 2 Teile in 1 Bande. Von G. Wolff. (Bd. 20/21.)

Der Goldene Schnitt. Von H. E. Timerding. (Bd. 32.)

Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting und M. Gebhardt. (Bd. 15.)

Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. (Bd. 18.)

Die Quadratur des Kreises. Von E. Beutel. (Bd. 12.)

Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 2. Aufl. (Bd. 10.)

Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. (Bd. 13.)

Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)

Was ist Geld? Von W. Lietzmann. (Bd. 30.)

Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. (Bd. 17.)

Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. (Bd. 8.)

Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. (Bd. 5.)

In Vorbereitung:

Doehlemann, Mathematik und Architektur. Pfeifer, Photogrammetrie. Müller, Der Gegenstand der Mathematik. Luckey, Einführung in die Nomographie. II. Teil: Die Zeichnung als Rechenmaschine.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
33

WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

II. ANWENDUNGEN

VON

OTTO MEISSNER
POTSDAM

ZWEITE AUFLAGE

MIT 5 FIGUREN IM TEXT

1919
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

VORWORT

Da das Bändchen über „Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen“ viel Anklang gefunden hat, vielfach aber der Wunsch nach größerer Ausführlichkeit ausgesprochen wurde, ist die neue Auflage, mit gütiger Einwilligung des Verlags, in zwei Bändchen zerlegt worden.

Im ersten Bändchen ist neu hinzugefügt ein Abschnitt, in dem vor allem der wichtige Laplace-Poissonsche Satz seine gebührende Würdigung findet. Anhangsweise sind die nötigsten Formeln und Begriffe entwickelt, die zu eingehenderem Verständnis der Fachliteratur nötig sind, und geschichtliche Bemerkungen über die im Texte erwähnten Mathematiker hinzugefügt.

Das vorliegende zweite Bändchen, *im wesentlichen auch ohne Kenntnis des ersten verständlich* (so wünschenswert dessen Durcharbeitung dafür begreiflicherweise auch ist), ist der ersten Auflage gegenüber, die im wesentlichen nur Ausgleichungsrechnung und Kollektivmaßlehre in ihren Grundlagen entwickelte (welche Abschnitte bis auf geringe sachliche Verbesserungen unverändert in die Neuauflage übernommen sind), um einen größeren Abschnitt vermehrt, in dem die vielseitigen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Physik, Wärme und Kosmologie allgemeinverständlich behandelt werden, so die Clausiussche Lehre vom „Wärmetode der Welt“ und die ganz andersartigen geistreichen Anschauungen des berühmten schwedischen Forschers Svante Arrhenius.

Potsdam, im Herbst 1918.

Otto Meißner.

INHALTSVERZEICHNIS

ABKÜRZUNGEN

W. = Wahrscheinlichkeit,
W.-R. = Wahrscheinlichkeitsrechnung,
? W. = Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit . . .
d. F. = durchschnittlicher Fehler,
m. F. = mittlerer Fehler,
w. F. = wahrscheinlicher Fehler,
K.-G. = Kollektivgegenstand,
o. M. = ordnendes Merkmal,
Vf. = Verteilungsfunktion,
d. A. = durchschnittliche Abweichung,
m. A. = mittlere Abweichung,
w. A. = wahrscheinliche Abweichung.

VORBEMERKUNG

Zum vollen Verständnis dieses Büchleins ist die Kenntnis der „Wahrscheinlichkeitsrechnung“, Bd. 4 dieser Sammlung, (im folgenden abgekürzt mit W.-R. bezeichnet) wünschenswert, doch dürfte der größte Teil des Textes auch ohnedem ziemlich verständlich sein, nur daß man dann die angezogenen Sätze und Ergebnisse der W.-R. ohne nähere Prüfung einfach hinnehmen muß.

I. AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

§ 1. **Stetige und unstetige Größen.** Die Größen der uns umgebenden Natur sind von zweierlei Art: *stetige*, wenn sie – innerhalb gewisser Grenzen – jeden beliebigen Wert annehmen können, z. B. Luftdruck, Temperatur, Körperlänge; *unstetige*, wenn sie *nicht* beliebiger Zwischenwerte fähig sind wie z. B. die Anzahl der Fühlerglieder einer Insektenart, der Blätter eines Baumes, der Buchstaben eines Werkes, kurz alle Anzahlen, aber auch andere Größen, wie, nach unserer jetzigen Kenntnis, die Atomgewichte, die Wertigkeiten der Elemente und überhaupt die den Elementen zukommenden Eigenschaften.

§ 2. **Unvollkommenheit der Beobachtungen.** Bei der Bestimmung aller dieser Größen haben wir nun stets mit der *Unvollkommenheit* des Beobachters wie des Instruments, mit dem beobachtet wird, zu rechnen. *Völlig* genau zu ermitteln sind nur Anzahlen von mäßiger Größe. Alle anderen Bestimmungen sind mit *Fehlern* behaftet, die allgemein als Beobachtungsfehler, im besonderen als persönliche und Instrumentalfehler bezeichnet werden. Hiermit wollen wir uns jetzt etwas näher befassen.

§ 3. **Beispiel.** Es soll etwa die *Temperatur des Klassenzimmers* von allen Schülern nacheinander abgelesen werden. Die Skala ist nun in *ganze* Grade (vorschriftsmäßig nach der 100teiligen „Celsiusskala“) eingeteilt. Die Ablesung soll aber genauer sein; es muß also „geschätzt“ werden. Im gewöhnlichen Leben schätzt man Halbe, Viertel, „halbe Viertel". In der Tat ist dies „dyadische" (Zweier-)System, entstehend durch fortgesetzte *Halbierung* eines Intervalles, das einfachste und also am meisten naturgemäße. Aus Gründen rechnerischer Bequemlichkeit ist jedoch in Wissenschaft und Technik allgemein die *Zehntelschätzung*[1]) üblich; es scheint deshalb zweckmäßig, dies Verfahren bereits die Schüler anwenden und üben zu lassen. — Beim Ablesen werden nun die einzelnen Schüler etwas voneinander abweichende Werte erhalten; um Beeinflussungen zu vermeiden, würde es gut sein, man ließe die Ergebnisse durch jeden einzelnen aufschreiben und erst nach Vornahme aller Ablesungen laut ansagen.

§ 4. **Fehlerquellen. Zufällige Fehler.** Da anzunehmen ist, daß sich unter gewöhnlichen Verhältnissen die Temperatur während der Ablesezeit nicht meßbar, jedenfalls nicht um ein Zehntelgrad (die „Ablesungsgenauigkeit"), geändert hat, sind die Unterschiede der erhaltenen Werte als *Beobachtungsfehler* anzusehen. Als *wahren* Wert kann man entweder die vom *Lehrer* gemachte Ablesung oder *das Mittel* aller Werte ansehen; auf die letztgenannte Methode der Ermittlung des „richtigen Wertes" wird noch zurückzukommen sein.

Wir wollen nun die Fehlerquellen aufsuchen, die hier möglich sind. Instrumentalfehler könnten nur in Frage kommen, wenn etwa der Lehrer an einem anderen, einem „Normalthermometer", abgelesen hätte. Von solcher Vergleichung mit Normalmaßen reden wir gleich nachher; jetzt handelt es sich also nur um die Beobachterfehler. Hierhin gehört in erster Linie der *parallaktische* Fehler; dieser entsteht, wenn man schräg von oben oder von unten auf die Quecksilberkuppe des Thermometers blickt: man soll stets *das Auge in gleicher Höhe mit der Kuppe* des Quecksilbers (oder der sonstigen „thermometrischen Substanz") halten; und sinngemäß ist bei jedem anderen Apparate zu verfahren. Wie wird nun dieser Fehler wirken? Das kommt ganz darauf an, wie hoch das Thermometer hängt. Hängt es ungefähr in der Augenhöhe der Schüler, so werden die Ablesungen *bald etwas zu groß, bald etwas zu klein* ausfallen, und *im Mittel werden die Fehler*

1) Ein Instrument zur sicheren Schätzung der Zehntel bilde der an besseren *Barometern* oft angebrachte „Nonius".

(hier spielt schon die W.-R. hinein) *sich annähernd aufheben*. Fehler derartigen Charakters nennt man *zufällige Fehler*.

§ 5. **Fortsetzung. Systematische Fehler.** Anders verhält es sich, wenn das Thermometer wesentlich höher oder tiefer hängt, als der Schülergröße entspricht, wenn es sich also etwa 2 m oder nur $^3/_4$ m über dem Fußboden befindet. Dann werden die Ablesungen alle *im gleichen Sinne fehlerhaft*. Derartige „einseitig wirkende" Fehlerursachen bezeichnet man als *systematische* Fehlerquellen und ihre Ergebnisse als systematische Fehler. Wir sehen gleich, daß es zwischen ihnen und den zufälligen Fehlern *allmähliche Übergänge* gibt, was in vielen Fällen höchst störend ist.

§ 6. **Normalwerte. Fehler und Korrektionen.** Bei Vermeidung aller systematischen Fehler bei der Ablesung kann diese recht genau werden; aber der abgelesene Wert kann wegen der *Instrumentalfehler* trotzdem vom wahren Werte noch stark abweichen. Dies kann man berücksichtigen, wenn man das Thermometer mit einem anderen vergleicht, dessen Angaben für den vorliegenden Zweck als „absolut genau" angenommen werden können; entsprechendes gilt für jeden Apparat, dessen Angaben durch Vergleichung mit *Normalinstrumenten* zu berichtigen sind. Bei dem benutzten Thermometer kann die Skala falsch sein (Skalenfehler), die Röhre ungleich weit (Kaliberfehler); bei den üblichen Thermometern mit der Skala auf einem Holzrahmen kann sich die Röhre im Rahmen verschoben haben; ferner ist häufig infolge „elastischer Nachwirkung" die Kugel etwas zusammengedrückt, so daß das Thermometer zu hoch zeigt (Nullpunktsfehler), was man auch leicht durch Eintauchen in schmelzendes Eis, das stets eine Temperatur von 0^0 hat, ermitteln kann. Diese systematischen Fehler *tabuliert* man, und zwar zweckmäßigerweise, außer wo es sich um Spezialuntersuchungen handelt, insgesamt, eben durch Vergleichung mit dem Normalthermometer, *mit umgekehrtem Vorzeichen* und bezeichnet sie als *Korrektionen* (Verbesserungen). Es ist also:

$$\begin{aligned} \text{Normalwert} &= \text{Ablesungswert} + \text{Korrektion}, \\ \text{Ablesungswert} &= \text{Normalwert} \quad + \text{Fehler}, \\ \text{Fehler} &= \text{negativer Korrektion}. \end{aligned}$$

Man hüte sich vor Vorzeichenfehlern und überlege stets genau, ob man es mit Fehlern oder Verbesserungen zu tun hat!

Frage 1: Die elastische Nachwirkung zeigt sich nur bei Quecksilberthermometern; weshalb wohl?

§ 7. **Beispiel. Änderungen der Korrektion.** Beispiel einer Thermometer-Korrektionstabelle:

$$\begin{array}{rl} \text{über } +10^0\text{: Korr.} & +0{,}2^0 \\ +10^0 \text{ bis } -1^0\text{:} & +0{,}1 \\ \text{unter } -1^0\text{:} & 0{,}0. \end{array}$$

Ein in Zentimeter geteiltes *Bandmaß* kann sich *im Laufe der Zeit* gedehnt haben; dann wird die Korrektion etwa der Länge proportional sein, bei 20 cm ungefähr doppelt so groß wie bei 10 cm usw. „Im Laufe der Zeit", sagten wir. Hieraus geht sofort die nicht unwichtige Bemerkung hervor, daß eine *Vergleichung* mit Normalmaßen von Zeit zu Zeit *zu wiederholen* ist, da sich *das Instrument durch den Gebrauch selbst ändert* (das Bandmaß durch die stets vorhandene kleine Dehnung beim Ausziehen). Ein Normalinstrument wird folglich möglichst selten in Gebrauch zu nehmen und sehr schonend zu behandeln sein; doch ist hier nicht der Ort, näher darauf einzugehen.

Derartige Fehler setzt nun die Ausgleichungsrechnung als bereits beseitigt voraus; da diese Beseitigung aber *nie völlig* gelingt, wird auch das Ergebnis immer noch einen, i. a. *kleinen, systematischen* Fehler haben, den man aber nur finden kann, wenn der „wahre Wert" der Größe *anderweitig* bekannt ist.

§ 8. **Wahre und scheinbare Fehler.** Der wahre Wert ist nun meistens *nicht* bekannt. Dann muß man aus den Beobachtungen allein einen mittleren Wert ableiten; *wie*, werden wir gleich sehen. Jedenfalls aber wird das Beobachtungsergebnis dann vom wahren Werte um eine nicht näher bestimmbare Größe — Konstante sagt man — abweichen. Deshalb werden auch die Abweichungen der Einzelbeobachtungen vom Mittel, die sog. *scheinbaren Fehler*, sich um den gleichen Betrag von den *wahren Fehlern* unterscheiden:
scheinbarer Fehler = wahrer Fehler + unbekannter Konstante. Hieraus folgt aber ferner, daß die *Differenz* von zwei scheinbaren Fehlern gleich der Differenz der „entsprechenden"

wahren Fehler, also die wahre Fehlerdifferenz ist: die Konstante fällt dabei heraus.

§ 9. **Beobachtungen von gleicher Genauigkeit. Vernachlässigung von Nebenumständen.** Wir wollen annehmen, die Beobachtungen seien alle „unter möglichst gleichen Umständen" ausgeführt. Das ist wieder jene den Problemen der W.-R. eigene Unbestimmtheit. *Ganz* genau dieselben Umstände wie bei der ersten sind nie bei einer folgenden Beobachtung vorhanden. „Nebensächliche" Umstände können sich ohne Schaden stark ändern; aber was ist nebensächlich? Hat z. B. die Stellung des Mondes (seine Phase) auf meteorologische Beobachtungen Einfluß? Bis heute ist diese Frage noch nicht endgültig entschieden. Oft kann erst *durch die Beobachtungen selbst* entschieden werden, ob ein Umstand als nebensächlich anzusehen ist oder nicht. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, die näheren Umstände der Beobachtung möglichst ausführlich zu beschreiben. Es bedarf auch hier des Takts und der Übung, um das Richtige zu treffen. *Nachträgliche* Änderungen „nicht gehörig reduzierter" Beobachtungen[1]) sind meist unausführbar. So sind die zahlreichen Angaben über die Temperatur der Luft in einigen Kilometern Höhe, die Glaisher vor etwa 50 Jahren in England bei vielfachen Ballonfahrten gemacht, nahezu wertlos, weil die intensive Sonnenstrahlung die Beobachtungen in jetzt nicht mehr genau feststellbarer Weise gefälscht hat.

§ 10. **Arithmetisches Mittel.** Genau wie in der W.-R. bei der Entscheidung über gleich mögliche Fälle lassen wir uns von dem Prinzipe des mangelnden Grundes leiten und betrachten Beobachtungen dann und so lange als gleich genau, wenn und so lange kein Grund für das Gegenteil vorliegt — ein naturgemäß nur relativer, ganz vom Stande unseres augenblicklichen Wissens abhängiger Maßstab. Da in diesem Falle keine Beobachtung vor irgendeiner andern einen Vorzug hat, nimmt man das *arithmetische Mittel*, d. h. die Summe aller Beobachtungsergebnisse, geteilt durch ihre Anzahl, als günstigsten (scheinbaren) Wert an.

---

1) Die direkten oder „rohen" Beobachtungen werden durch Anbringung der Korrektionen „reduziert".

§ 11. **Beispiel. Näherungswert.** Ist z. B. eine Länge von fünf Beobachtern mittels Lineals zu

$$133{,}7 \quad 133{,}6 \quad 133{,}9 \quad 133{,}8 \quad 133{,}5 \text{ cm}$$

bestimmt worden, so nehmen wir das Mittel

$$\tfrac{1}{5}(133{,}7 + 133{,}6 + 133{,}9 + 133{,}8 + 133{,}5) = 133{,}7$$

als den der weiteren Rechnung zugrunde zu legenden Wert an. Da überall 133 steht, kann man diese Größe beim Mittelbilden fortlassen, und eine noch größere *Rechenersparnis* erzielt man durch Benutzung von 133,5 als *Näherungswert*. Man hat dann nur zu bilden

$$133{,}5 + \tfrac{1}{5}(0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3) = 133{,}5 + 0{,}2 = 133{,}7.$$

Durch Einführung solcher Näherungswerte kann man sich zumal bei umfangreicherem Material die Rechenarbeit oft *ganz bedeutend* erleichtern; auch wir werden später an geeigneter Stelle uns das zunutze machen.

§ 12. **Innere Genauigkeit. Warnung vor Überschätzung der Genauigkeit.** Ein Maß für die Genauigkeit einer Beobachtungsreihe bilden naturgemäß die wahren oder, wo diese nicht zu ermitteln sind, die *scheinbaren* Fehler. Ehe wir aber dazu schreiten, ein solches Genauigkeitsmaß mathematisch zu definieren, wollen wir gleich davor warnen, seine Bedeutung zu *überschätzen:* die systematischen Fehler stecken ja noch voll im Mittel! Im Beispiel des vorigen § sind die scheinbaren Fehler:

$$0{,}0 \quad -0{,}1 \quad +0{,}2 \quad +0{,}1, \quad -0{,}2.$$

Angenommen, man hätte die Länge mit einer Teilmaschine gemessen und zu 133,718 cm gefunden, so wären die wahren Fehler:

$$-0{,}018 \quad -0{,}118 \quad +0{,}182 \quad +0{,}082 \quad -0{,}218.$$

Absolut genau sind das natürlich auch nicht die wahren Fehler; wenn aber der Apparat die Tausendstel-mm (μ) genau oder „ziemlich genau" angibt, ist die hier angeführte letzte Stelle ($\frac{1}{100}$ mm) jedenfalls verbürgt.

Hätte aber die Messung 136,179 cm ergeben, so wäre ein systematischer Fehler von + 2,479 vorhanden; die *wahren* Fehler:

$$+2{,}479 \quad +2{,}579 \quad +2{,}279 \quad +2{,}379 \quad +2{,}679$$

wären dann etwa *zehnmal* so groß als die größten *scheinbaren* Fehler. Die *innere Genauigkeit* beweist also nur die *Zuverlässigkeit des Beobachters, nicht* aber die des *Beobachtungsergebnisses.* Wenn, um auf das frühere Beispiel der Thermometerablesung zurückzukommen, das Thermometer zu nahe am Ofen hängt, so wird man nie die wirkliche Zimmertemperatur erhalten, sondern einen zu hohen Wert, mag man auch noch so genau ablesen.

Nun wird man ja im allgemeinen *große* systematische Fehler leicht erkennen und beseitigen können, sei es durch andere Anordnung der Beobachtung, sei es durch Anbringung von Verbesserungen. Aber ganz beseitigen lassen sie sich nie, und es *kann* sehr wohl eine Beobachtungsreihe mit sehr kleinen scheinbaren Fehlern viel weiter entfernt sein vom wahren Werte als eine „anscheinend schlechtere". Aber wir befinden uns auf dem Boden der W.-R., und es ist viel wahrscheinlicher, daß die erste Reihe dann auch tatsächlich eine bessere Annäherung an die Wahrheit gibt, als daß das Gegenteil statthat: das sind eben nur seltene *Ausnahme*fälle.

Wenn aber wiederholte Beobachtungsreihen für dieselbe Größe bei großer innerer Genauigkeit der einzelnen Reihe „sehr schlecht übereinstimmende" Ergebnisse liefern, kann man mit Sicherheit auf das Vorhandensein noch unberücksichtigter systematischer Einflüsse schließen, die dann näher erforscht werden müssen.

§ 13. **Unabhängigkeit der Beobachtungen.** Wie in der W.-R. die *Unabhängigkeit* der *Ereignisse* zu fordern ist, um ihre Methoden anwendbar erscheinen zu lassen, so ist es hier die Unabhängigkeit der *Beobachtungen.* Wenn man eine Länge mit dem Lineal mißt, dies anlegt, nun zehnmal hinsieht und zehnmal denselben Wert aufschreibt, so kann man dies Verfahren nicht als richtig bezeichnen: es sind *keine* zehn *unabhängigen Beobachtungen.* Um diese zu erhalten, muß man vielmehr im vorliegenden Falle das Lineal nach *einer* (zu notierenden) Ablesung fortnehmen und neu anlegen. Anfänger seien vor dem eben beschriebenen Fehler besonders gewarnt. Die so erzielte übertriebene (scheinbare) innere Genauigkeit ist natürlich wertlos. Wie man zu verfahren hat, um *möglichst* unabhängige Beobachtungen zu erhalten, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

§ 14. **Grobe Fehler und ihre Ausschaltung.** Ist einerseits die im vorigen § gerügte Häufung „zu genauer“ Beobachtungen zwecklos, so nimmt man andrerseits eine *Grenze* für die *zulässigen* Abweichungen der Beobachtungswerte vom Mittel an und bezeichnet zu stark abweichende Ergebnisse als *grobe Fehler*, die man dann von der Mittelbildung ausschließt. Was sind aber „grobe Fehler“? Das bleibt wiederum in gewissem Maße der persönlichen Auffassung zur Entscheidung überlassen. Ein Ergebnis *nur* deshalb wegzulassen, weil es schlecht paßt, ist jedenfalls *nicht* berechtigt.

Wir wollen annehmen, in den früheren Beispielen hätten sieben Beobachter mitgewirkt und gefunden

133,7 133,6 133,9 (134,2) 133,8 133,5 (123,8).

Vorhin hätten wir nur die fünf nicht eingeklammerten Werte benutzt. Da man aber andrerseits begreiflicherweise nach möglichst vollständiger Ausnutzung des Beobachtungsmaterials strebt, wird man versuchen, auch die beiden andern Ergebnisse zu verwerten. Nun sieht man leicht, daß die *letzte* Zahl offensichtlich auf einem *Versehen* beim Ablesen der Teilung oder vielleicht auch nur auf einem Schreibfehler beruht; man braucht den Wert also nicht auszuschalten, sondern kann ihn, in 133,8 umgeändert, mitnehmen. In diesem Falle ist das zulässig; im allgemeinen ist aber von einer *willkürlichen Abänderung* = „Verbesserung“ *der Beobachtungswerte* dringend zu warnen. Eher soll man dann „verdächtige“ Werte von der Mittelbildung ausschließen. Eine nachträgliche Veränderung, z. B. auch das *Retuschieren* photographischer Aufnahmen, die für die Wissenschaft Verwendung finden sollen, kommt dem gleich, was man im gewöhnlichen Leben als *Mogeln* bezeichnet.

Es ist z. B. schon *bedenklich*, den andern oben eingeklammerten Wert mitzunehmen. Da nämlich fünf (oder sechs!) Beobachter in den Einern der Zentimeter 3 abgelesen haben, könnte man annehmen, daß hier eine nach der falschen Seite hin ausgeführte Zehntelschätzung vorliegt; der Wert sollte $134 - 0{,}2 = 133{,}8$ statt $134 + 0{,}2 = 134{,}2$ lauten. So „plausibel“ das klingt, ist es doch besser, den Wert fortzulassen.

Man erhält übrigens

aus den 5 „guten" Beobachtungen als Mittel 133,70
aus 6 " " " 133,72
aus allen 7 " " " 133,79;

also immerhin „ziemlich dasselbe".

Man sieht aus dem Beispiel, mit welcher Wilkür man oft verfahren *muß*, um zum Ziele zu kommen, denn willkürlich ist die Fortlassung wie die Mitnahme der beiden „nicht einwandfreien" Beobachtungswerte.

Frage 2: Weshalb nimmt man möglichst viel Beobachtungsmaterial? (Wegen der zufälligen Fehler; wie ist es mit den systematischen?)

Frage 3: Wie groß ist die W. für ein Versehen bei der Ablesung des Wertes 123,8, wenn alle Beobachter gleich geübt sind? (Die W. a priori falschen Ablesens ist dabei beispielshalber zu $\frac{1}{4}$ anzunehmen.)

§ 15. **Rechen- oder Überstellen.** Man pflegt beim Mittel meist eine Dezimalstelle mehr anzugeben als bei den Einzelbeobachtungen; da jenes genauer ist – in welchem Maße, werden wir in den folgenden Paragraphen erfahren –, ist das auch gerechtfertigt. Wie steht es nun aber mit den Fehlern? Angenommen, eine Reihe von Temperaturbeobachtungen habe ergeben:

$36{,}8^0$ $36{,}6^0$ $36{,}7^0$ $36{,}6^0$ $36{,}4^0$ $36{,}9^0$ Mittel: $36{,}67^0$; soll man da die Fehler in Zehntelgraden:

$$+0{,}1 \quad -0{,}1 \quad 0{,}0 \quad -0{,}1 \quad -0{,}3 \quad +0{,}2$$

oder in Hundertstelgraden:

$$+0{,}13 \quad -0{,}07 \quad +0{,}03 \quad -0{,}07 \quad -0{,}27 \quad +0{,}23$$

angeben? Eigentlich würden die Zehntel genügen, da ja auf $\frac{1}{100}^0$ genau nicht abgelesen ist. *Zum Zwecke der Rechnung* aber nimmt man lieber noch eine *Rechenstelle* oder *Überstelle* mit, weil mit den Fehlern häufig noch mathematische Operationen vorzunehmen sind und dann infolge mehrfacher Abrundungen das Ergebnis verschlechtert werden kann. Man muß sich aber vor Augen halten, daß diese letzte Stelle dann eben nur eine *rein rechnerische, keine tatsächliche* Bedeutung hat.

§ 16. **Fehlersumme.** Daß man aus den Fehlern irgendwie etwas über die Genauigkeit der Beobachtungsreihe erfahren kann, wissen wir bereits; es ist nun das „wie" zu erörtern. Daß die *Fehlersumme*, die sich zunächst als einfachste Größe darbietet, kein geeignetes Genauigkeitsmaß sein kann, sehen wir sofort ein. Durch die Bildung des arithmetischen Mittels wird ja gerade erreicht, daß die Summe der scheinbaren Fehler 0 oder nahezu 0 wird. Aber auch im Falle *wahrer* Fehler darf die Fehlersumme nur klein sein. Sonst müßten ja die Fehler eines Vorzeichens (+ oder —) überwiegen, und dann wären wider unsere jetzigen Voraussetzungen noch nicht entfernte systematische Fehler vorhanden.

§ 17. **Durchschnittlicher Fehler (d. F.).** Aber gerade diese letzte Bemerkung weist uns auf ein sehr einfaches Verfahren hin: wir zählen die Fehler *ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen* zusammen. Die Summe ihrer absoluten Werte wird ein brauchbares Maß für die Genauigkeit liefern; ihr Betrag, geteilt durch die Anzahl der Beobachtungswerte wird als *durchschnittlicher* Fehler bezeichnet und z. B. in der Meteorologie sehr vielfach verwandt.

In dem Beispiel von § 11 hätten wir also zu bilden:

$$0{,}0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}6,$$

was durch 5 (Zahl der Beobachtungen) geteilt 0,12 als d. F. ergibt.

§ 18. **Mittlerer Fehler (m. F., kurzweg μ).** Man kann das wechselnde Vorzeichen der Fehler aber noch auf andere Weise fortschaffen: durch *Quadrieren*. Alle Quadrate reeller Zahlen (um andere handelt es sich ja hier nicht!) sind positiv. Die Summe der Fehlerquadrate, geteilt durch die Anzahl der Werte, bezeichnet man nun nach C. F. Gauß als Quadrat des mittleren Fehlers, μ^2. In dem eben angeführten Beispiel ist

$$5\,\mu^2 = 0{,}00 + 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}01 + 0{,}04 = 0{,}10,$$

also $\mu^2 = 0{,}02$ und $\mu = 0{,}14$. Es ist also der m. F. *größer* als der d. F., und zwar ist in unserem Falle das Verhältnis 1,17.

Man könnte noch weiter gehen und Summen höherer Potenzen der Fehler bilden, doch ist das ganz ungebräuchlich und nur theoretisch von gewissem Interesse.

Frage 4: ? d. F. im Beispiele des § 15? Wie groß ist μ?

§ 19. **Wert der Fehlerangabe.** Es ist klar, wird aber leider viel zu wenig beachtet, daß eine mitgeteilte Beobachtungszahl *erst durch Angabe ihres Fehlers*, sei es d. oder m., *Wert erlangt.* In den allzu häufigen Fällen, wo dies unterlassen ist, kann man einen notdürftigen Ersatz in der *Faustregel* finden, daß im allgemeinen die Unsicherheit etwa eine Einheit der letzten mitgeteilten Dezimalstelle ausmacht. Wer aber *Rechenstellen* mit angibt, ohne weitere Bemerkungen über die Genauigkeit zu machen, begeht geradezu eine *Täuschung*; ein solches Verfahren ist durchaus unwissenschaftlich. Als abschreckendes Beispiel sei mitgeteilt: jemand liest an einem Thermometer $18\frac{1}{3}^0$ ab und schreibt $18{,}33^0$ in das Beobachtungsbuch; das wäre nur gerechtfertigt, wenn er die Unsicherheit, etwa $\frac{1}{6}^0 = 0{,}17^0$, mit hinzufügte.

In der Praxis gibt man, wenn überhaupt, den ja auch am bequemsten zu berechnenden durchschnittlichen Fehler an, in der Wissenschaft fast immer den *mittleren*, den man mit $\pm$ hinter das Beobachtungsergebnis setzt, um anzudeuten, daß der Fehler ebensogut positiv wie negativ sein kann. Man läßt ihn auch häufig mit *kleineren Typen* drucken, um die Aufmerksamkeit vom Beobachtungswert, der ja doch immerhin schließlich die Hauptsache bleibt, nicht zu sehr abzulenken, also so:

Beschleunigung der Schwerkraft in Potsdam[1])

$$= 981{,}274 \pm 0{,}003 \text{ cm sec}^{-2}.$$

§ 20. **Fehlerverteilung. Wahrscheinlicher Fehler (w. F.).** Wir haben bisher nur angenommen, daß positive und negative Fehler im Mittel *vieler* Beobachtungen annähernd gleich oft vorkommen, und daß größere Fehler seltener sind als kleinere. In der Ausgleichungsrechnung nimmt man nun ein bestimmtes Gesetz an, nach dem sich die Fehler verteilen, die sog. (Gaußsche) *Fehlerfunktion.* Wir geben hier ein einfaches Beispiel von etwas *anderer* Art.

Nehmen wir drei Würfel und beobachten ihre Augensumme, so ist (vgl. § 10 des II. Abschn. des Bds. über Wahrscheinlichkeitsrechnung) die mittlere Augensumme $10\frac{1}{2}$, und

1) Kühnen und Furtwängler, Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft in Potsdam, S. 380.

es ergeben sich theoretisch entsprechend den möglichen Kombinationen für die einzelnen Augensummen bzw. Abweichungen von der mittleren Augensumme die in der nachstehenden Tabelle angegebenen W.en, deren Summe natürlich = 1 sein muß. Die Tabelle ist wegen der Symmetrie, d. h. weil sich zu $2 \times 10\frac{1}{2} = 21$ ergänzende Augensummen gleiche W. haben, in leicht verständlicher Weise verkürzt. Die Abweichung vom Mittelwert $10\frac{1}{2}$ würde bei einer Beobachtungsreihe einer konstanten Größe als *Fehler* zu bezeichnen sein. Hier paßt der Ausdruck zwar nicht recht, doch soll er gleichwohl beibehalten werden.

Augensumme	Abweichung	216 w	w (Wahrsch.)
3 und 18	— und + 7,5	1	0,005
4 „ 17	. . . 6,5	3	0,014
5 „ 16	. . . 5,5	6	0,028
6 „ 15	. . . 4,5	10	0,046
7 „ 14	. . . 3,5	15	0,069
8 „ 13	. . . 2,5	21	0,097
9 „ 12	. . . 1,5	25	0,116
10 „ 11	. . . 0,5	27	0,125
			0,500 ($\times 2 = 1{,}000$)

Es ist demnach die W., daß der Fehler (die Abweichung) zwischen $-0{,}5$ und $+0{,}5$ fällt, $w_1 = 2 \times 0{,}125 = 0{,}250$
„ $-1{,}5$ „ $+1{,}5$ „ $w_2 = w_1 + 2 \times 0{,}116 = 0{,}482$
„ $-2{,}5$ „ $+2{,}5$ „ $w_3 = w_2 + 2 \times 0{,}097 = 0{,}676$
usf.

Man nennt nun *wahrscheinlichen* Fehler (w. F.) denjenigen, für den mit der W. $\frac{1}{2}$ zu erwarten ist, daß der wirkliche Fehler größer oder kleiner ist; in unserem Falle ist also (annähernd) w. F. = $\pm$ 1,5; Zwischenwerte sind hier ja, der Eigenart der Aufgabe gemäß, ausgeschlossen.

Wir sehen, daß der w. F. *von der Fehlerverteilung* abhängt; d. F. und m. F. sind von ihr unabhängig. Für das Gaußsche Fehlergesetz ist annähernd w. F. = $\frac{2}{3}$ m. F.

Zur Übung wollen wir noch für unsere „ideale" Reihe[1])

1) In der Kollektivmaßlehre werden wir eine wirklich ausgeführte Reihe unter etwas anderen Gesichtspunkten behandeln.

die beiden andern Fehler berechnen. Zur Erleichterung nehmen wir an, es seien gerade 216 Würfe gemacht. Dann haben wir: je einmal den Fehler + und — 7,5, je dreimal + und — 6,5 usw. Das Rechnungsschema gestaltet man am einfachsten so:

Zur Bildung des durchschnittlichen Fehlers:			mittleren Fehlers:		
Fehler	Anzahl	Produkt	F.-Quadrat	Anzahl	Produkt
± 7,5	2	15	56,25	2	112,5
± 6,5	6	39	42,25	6	253,5
± 5,5	12	66	30,25	12	363,0
± 4,5	20	90	20,25	20	405,0
± 3,5	30	105	12,25	30	367,5
± 2,5	42	105	6,25	42	262,5
± 1,5	50	75	2,25	50	112,5
± 0,5	54	27	0,25	54	13,5
	216 in	522		216 in	1890,0

Quadrat des m. F. 8,75

D. F. = 2,42. M. F. = 2,96.

§ 21. **Gewicht einer Reihe.** Nun müssen wir den bereits früher gestreiften Begriff des Gewichts einer Reihe schärfer fassen. Ein Messungsreihe ist — abgesehen von systematischen Fehlern — um so zuverlässiger, je umfangreicher sie ist. Wir setzen deshalb fest: *das Gewicht einer Reihe ist der Anzahl der Einzelbeobachtungen proportional*, falls diese gleich genau sind. Die nicht abzuleugnende Willkür dieser Festsetzung wird durch die Praxis gerechtfertigt, Beobachtungen mit „groben Fehlern“ erhalten das Gewicht 0. Im übrigen sind definitionsgemäß nur die *Verhältnisse* der Gewichte absolute Zahlen, nicht diese selbst.

Beispiel: Verschiedene gleich geübte Beobachter haben einen Winkel gemessen:

A	aus	6	Messungen	zu	88° 13′ 45″,
B	„	8	„	„	88° 14′ 21″,
C	„	12	„	„	88° 13′ 39″,
D	„	3	„	„	88° 13′ 50″,
E	„	1	„	„	88° 14′ 6″.

Wir nehmen die Gewichte gleich der Zahl der Messungen. Beim Mittelbilden ist dann eine Messung vom Gewichte 6, weil aus 6 Einzelmessungen hervorgegangen, sechsfach zu zählen usf. Als *Näherungswert* nehmen wir 88°14′0″ an und haben dann noch zu bilden (in Sekunden):

$$\frac{-6\times 15+8\times 21-12\times 21-3\times 10+1\times 6}{6+8+12+3+1}=\frac{-198}{30}=-6{,}6,$$

d. h. der Mittelwert „unter Berücksichtigung den Gewichte" ist 88°13′53″,4. Das „einfache Mittel" würde 88°13′56″ ergeben haben; es wäre aber eine tadelnswerte, mangelhafte Ausnutzung des Beobachtungsmaterials, wenn man es lediglich aus Bequemlichkeitsgründen hier hätte anwenden wollen.

Frage 5: Wie ist die Formel für das Mittel B, wenn n Beobachtungen $B_1 \ldots B_n$ mit den Gewichten $p_1 \ldots p_n$ gegeben sind? (p = pondus, Gewicht.)

§ 22. **Fehlerfortpflanzung.** Eine Strecke von etwa einem Kilometer Länge soll mittels einer 10 m langen Stange gemessen werden. In welcher Beziehung steht der Fehler der Gesamtlänge zu denen der Einzelmessungen? Es handelt sich natürlich nur um die „zufälligen" Fehler beim Anlegen und Abnehmen. Die Länge der Meßstange selbst ist als genau bekannt und unveränderlich anzusehen, was eine Prüfung an einem Normalmaße, Kenntnis des Ausdehnungskoeffizienten der Stange und entsprechende Verbesserungstafel voraussetzt. Es bezeichne μ_1 den Fehler der ersten Messung M_1 usf., dann ist die Gesamtlänge

gleich	oder
M_1	$10\text{ m}+\mu_1$
$+M_2$	$10\text{ m}+\mu_2$
$+\ldots$	$\ldots\ldots$
$+M_{100}$	$10\text{ m}+\mu_{100}$

+ einem Reste, auf den es hier nicht ankommt.

Dabei *stecken die Vorzeichen noch in den Fehlern*, es sind die μ keine absoluten Werte. Der mittlere Fehler der Gesamtlänge heiße μ, dann ist:

$$\begin{aligned}\mu^2 &= (\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{100})^2\\ &= \mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_{100}^2 \;+\; 2(\mu_1\mu_2+\cdots+\mu_{99}\mu_{100}).\end{aligned}$$

Nimmt man an, genau die Hälfte der μ sei positiv, so sind von den doppelten Produkten

bei	4	Fehlern	2	positiv,	4	negativ;	Verh.	—: + =	2,0
„	6	„	6	„	9	„	„	—: + =	1,5
„	8	„	12	„	16	„	„	—: + =	1,25
„	100	„	2450	„	2500	„	„	—: + =	1,02.

Es sind also stets mehr negative als positive Produkte. Die Summe ist *stets negativ*, wovon man sich auch leicht durch Ausrechnung eines Zahlenbeispiels überzeugt. Im *günstigsten* Falle ist $\mu = 0$, also auch $\mu^2 = 0$; das gibt aber $2(\mu_1\mu_2 + \cdots) = -\mu_1^2 - \cdots$, also < 0. Denken wir uns nun eine sehr häufige (Laplace sagt: unendlich häufige) Wiederholung *derselben* Messung vorgenommen und betrachten ein *bestimmtes* Glied der Summe doppelter Produkte, etwa $2\mu_1\mu_2$, so wird dies bald > 0, bald < 0, und *im Mittel sehr klein* (bei ∞ viel Fällen: genau 0) werden. Diese Bemerkung gilt nun aber für *jedes* Glied. Wir dürfen daher im Durchschnitt sehr vieler Fälle setzen:

$$\mu^2 = \mu_1^2 + \cdots + \mu_{100}^2.$$

Es seien die μ_1 .. etwa 5 mm, so ist

$$\mu^2 = 100 \cdot 25,$$

$$\mu = 10 \cdot 5 = 50 \text{ mm}.$$

Der m. F. von Summen und Differenzen wächst also bei gleicher Genauigkeit *proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen.*

Es seien drei Strecken mit den Längen $13{,}4 \pm 0{,}8$ cm, $27{,}2 \pm 1{,}6$ cm, $23{,}9 \pm 1{,}4$ cm zusammenzusetzen. Das ergibt $64{,}5 \pm 2{,}3$ cm, denn

$$\sqrt{0{,}64 + 2{,}56 + 1{,}96} = \sqrt{5{,}16} = 2{,}27.$$

Aus diesen Betrachtungen geht wohl zur Genüge hervor, weshalb man in der Wissenschaft gerade die Angabe des *mittleren* Fehlers bevorzugt, trotz der Unbequemlichkeit des Quadratebildens und Wurzelziehens.

Frage 6: Wie lautete die Formel für μ^2, wenn n Beob. mit den Gewichten $p_1 \ldots p_n$ und den m. F. $\mu_1 \ldots \mu_n$ gegeben wären?

§ 23. **M. F. des Mittelwerts.** Allgemein gilt nach dem vorigen § für den m. F. μ_s einer Summe von n Einzelwerten:

$$\mu_s^2 = \mu_1^2 + \cdots + \mu_n^2.$$

Wie groß ist nun der m. F. μ_m des Mittels? Das Mittel ist gleich der Summe der Einzelwerte, geteilt durch n, somit wird auch

$$\mu_m = \frac{1}{n}\,\mu_s$$

sein. (Diese Betrachtung ist wissenschaftlich nicht streng, aber für die Praxis ausreichend.) Für den m. F. μ_e eines Einzelwerts hatten wir in § 18 gefunden:

$$\mu_e = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mu_s.$$

Nach der obigen Formel für μ_m ist somit noch:

$$\mu_m = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mu_e.$$

§ 24. **Beziehung zwischen Gewicht und m. F. Genauigkeitsmaß.** Es ist also für das Mittel der m. F. bei vier Beobachtungen: $\frac{1}{2}$ mal so groß, bei neun: $\frac{1}{3}$, bei 25: $\frac{1}{5}$ mal so groß wie bei einer *einzelnen* Beobachtung oder: das *Quadrat* des m. F. ist dem *Gewicht* der Reihe *umgekehrt proportional.* Man bezeichnet daher den *reziproken Wert* des m. F. (oder also die Quadratwurzel aus dem Gewicht, *nicht* dieses selbst!) als *Genauigkeitsmaß* (Präzision).

Wir wollen nun den m. F. für das Beispiel von § 21 berechnen. Zur Erleichterung der Rechnung setzen wir $88^0\,13'53''$ als Mittel an und nehmen als Gewichte den 30. Teil der früher dafür benutzten Zahlen. Es ist dann zu bilden:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{5}8^2 &= \tfrac{1}{5}64 &&= 13\\
\tfrac{4}{15}28^2 &= \tfrac{4}{15}784 &&= 209\\
\tfrac{2}{5}14^2 &= \tfrac{2}{5}196 &&= 78\\
\tfrac{1}{10}3^2 &= \tfrac{1}{10}9 &&= 1\\
\tfrac{1}{30}13^2 &= \tfrac{1}{30}169 &&= \underline{6}\\
& && \ 307
\end{aligned}$$

Das ist direkt das Quadrat des m. F., da ja die Gewichtssumme, die die Zahl der Beobachtungen vertritt, $= 1$ gemacht ist. Die Wurzel ergibt $17'',5$ als m. F. *einer* Beobachtung; der des Mittels ist $\frac{1}{\sqrt{30}}$ davon, d. h. $\pm\, 3'',1$.

Es ist wohl zu beachten, daß das *Quadrat* des Fehlers, *nicht dieser selbst*, mit dem Gewicht zu multiplizieren ist!

§ 25. **M. F. kleiner Reihen. Sehr großer m. F.** Nach dem Besprochenen ist es ohne weiteres klar, daß die Angabe eines m. F. für Reihen *sehr kleinen* Umfanges, also etwa von 5—6 Beobachtungen, wie im Beispiel von § 11, mit großer Unsicherheit behaftet ist. Bei der Herleitung der Ergebnisse war immer eine sehr große Anzahl von Beobachtungen nötig.

Andererseits: ist der m. F. von der Größenordnung des Ergebnisses selbst, so ist dies natürlich ein *bloßes Rechnungsresultat.* Nur theoretisch ist es der „wahrscheinlichste" Wert, praktisch kann es sogar widersinnig sein. Z. B. haben die Messungen für den Stern 1. Größe *Ataïr* (α Cygni) als „relative jährliche Parallaxe[1])" $-0'',012 \pm 0'',023$ ergeben; aber der kleinstmögliche Wert einer Parallaxe ist 0 ($1''$ entspricht einer Entfernung von 3×10^{13} Kilometern). Man könnte in diesem Falle freilich noch annehmen, daß die schwachen Vergleichssterne, deren Parallaxe man = 0 setzt, tatsächlich uns näher ständen als der helle Stern, und zwar im Mittel um ebendiese Größe $+ 0'',012$. Richtiger aber ist es wohl zu sagen: das Ergebnis besagt, besonders im Hinblick auf den m. F., daß die Messungen nicht genau genug sind, um die Entfernung des Sternes feststellen zu können.

§ 26. **Zufallskriterien.** Kann man die systematischen Fehler einer Reihe nicht völlig beseitigen, so kann man über ihren Einfluß sich aus der Fehlerverteilung selbst in vielen Fällen unterrichten. So müssen z. B. in einer zeitlich geordneten Reihe bei rein zufälliger Verteilung positive und negative Fehler „regellos" abwechseln. Finden sich hintereinander *zahlreiche* Fehler *gleichen* Vorzeichens, so sind sicher bei der Untersuchung noch nicht eliminierte systematische Fehler vorhanden gewesen.

E. Abbe hat ein anderes, von Helmert[2]) wesentlich ergänztes Kriterium aufgestellt. Er bildet außer der Summe A der Fehlerquadrate die Summe B der Quadrate der *Differenzen* je zweier aufeinanderfolgenden Fehler. Diese Fehlerdifferenzen sind gleich den Differenzen der zugehörigen Werte; diesen aber kommt ein $\sqrt{2}$ mal so großer Fehler zu

---

1) Parallaxe = Verschiebung. Ist S der Stern, A und B die Stellung der Erde zu einer gewissen Zeit und $^1/_2$ Jahr später, so ist $\sphericalangle ASB$ die jährliche Parallaxe $\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix} \!\!=\!\!= S\right)$

2) Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, 25. Mai 1905.

als den Werten selbst[1]); es muß also annähernd $B = 2A$, $A - \frac{B}{2} = 0$ sein. Letztere Gleichung bildet das „*Abbe*sche Kriterium“, das man auch in der Form $\frac{2A}{B} = 1$ schreiben kann; der m. F. hiervon ist $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ bei n Beobachtungswerten (*Helmerts* Formel).

§ 27. **Aufgabe der Ausgleichungsrechnung.** In der eigentlichen Ausgleichungsrechnung, bis an deren Schwelle uns die bisherigen Betrachtungen geführt haben, handelt es sich nun um die gleichzeitige Bestimmung *mehrerer* Unbekannter aus den „linearen Fehlergleichungen“, deren stets mehr als Unbekannte vorhanden sein müssen, denn im entgegengesetzten Falle sind diese überhaupt unbestimmbar, und falls ebensoviel Gleichungen als Unbekannte da sind, gibt es (i. a.) nur *eine* Lösung, die aber über die *Genauigkeit* des Ergebnisses nichts aussagt.

Sind nun aber *mehr* lineare Gleichungen als Unbekannte vorhanden, so bleiben, wenn man etwa die n Unbekannten aus den ersten n Gleichungen bestimmt und diese nun in die übrigen einsetzt, Fehler übrig. Die „Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler“ wird zu einem *Minimum* gemacht, wenn man sich des Gaußschen Verfahrens bedient, bei dem *alle* Gleichungen zur Berechnung der Unbekannten herangezogen werden.

Näher kann hier auf die Methode der kleinsten Quadrate nicht eingegangen werden. Geschichtlich sei noch bemerkt, daß außer Gauß noch Bessel, Encke, Laplace und Legendre sich als Theoretiker und Praktiker auf diesem Gebiete hervorgetan haben.

§ 28. **Graphische Ausgleichung.** Man gebraucht das Wort Ausgleichung, meist mit dem Zusatze „numerische“ oder „graphische“, auch noch in anderer, etwas engerer Bedeutung.

Sind in einer Beobachtungsreihe *große zufällige* Fehler enthalten, und will man gleichwohl die Einzelbeobachtungen verwerten, etwa zur Aufsuchung *gesetzmäßiger* Abweichun-

---

1) Denn nimmt man an, daß i. a. die Fehler μ_1, μ_2 zweier Werte gleich sind, etwa gleich μ, so ist der m. F. der Summe oder Differenz $\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} = \sqrt{2\mu^2} = \mu\sqrt{2}$.

gen, so kann man sich die Bemerkung zunutze machen, daß die zufälligen Fehler i. a. *oft ihr Vorzeichen wechseln.* Man ersetzt deshalb den Einzelwert durch das Mittel aus ihm selbst und seinen zwei oder vier Nachbarwerten, wobei man ihm auch *doppeltes Gewicht* geben kann; ferner kann man das Verfahren fortsetzen („iterieren"). Die *systematischen* Abweichungen werden dadurch zwar *auch verkleinert*, aber in viel schwächerem Maße als die zufälligen, werden also *relativ deutlicher.* Von „graphischer" Ausgleichung redet man, wenn man die Beobachtungswerte graphisch aufträgt und eine „möglichst glatte" Kurve hin- oder zwischendurch legt (vgl. Fig. 1).

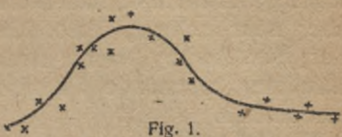


Fig. 1.
Graphische Ausgleichung.

II. STATISTIK

§ 1. **Begriff der Statistik.** Durch Zusammenfassung einer Menge von Individuen oder auch Einzelerscheinungen irgendwelcher Art, die in gewissen Merkmalen übereinstimmen, entsteht eine „statistische Masse" (E. Czuber). Ihre Veränderungen bezeichnet man als statistische Massenerscheinungen. Es ist die Aufgabe der *mathematischen* Statistik, die Methoden zur zahlenmäßigen Beschreibung statistischer Reihen zu geben. Meist beschäftigt sich die Statistik mit dem Menschen als Bevölkerungsstatistik, Kriminalstatistik, Heirats-, Wohnungsstatistik, je nach dem ordnenden Merkmale. Die Gleichförmigkeit des Materials ist fast nie streng, oft nicht einmal annähernd erreichbar. Nehmen wir als Beispiel die *Todesfälle* in einer Stadt. Diese verteilen sich auf alle Altersklassen, die doch unter merklich verschiedenen Verhältnissen (Wohnung, Nahrung, Klima) groß geworden sind, selbst wenn man die ortsfremden Personen ausscheidet, vor allem die Insassen von Krankenhäusern, Gefängnissen und Irrenanstalten.

Beispiel:

Sterbefälle auf 1000 Einwohner im Jahre 1904:

in Friedenau	10,7
in Steglitz	12,8
in Groß-Lichterfelde	17,4.

In Groß-Lichterfelde befindet sich das Teltower Kreiskrankenhaus!

Man erhielte homogenes Material, wenn man eine Liste *gleichzeitig* (etwa im Laufe eines Jahres) *Geborener* herstellte; die Aufstellung solcher Liste wäre leicht, die Verfolgung der in ihr enthaltenen Personen bis zum „Absterben" aber sehr schwer, besonders bei der heutigen Unruhe der Bevölkerung, denn nach auswärts, in andere Verhältnisse, kommende Personen dieser Liste müßte man ausschalten.

Vergleicht man nun aufeinanderfolgende Jahrgänge statistischer Zahlen, so findet man stets Schwankungen. Sind diese klein, gehen sie bald nach oben, bald nach unten, so kann man das Mittel der betr. Zahlen als einen wirklichen Mittelwert, eine W. a posteriori, betrachten, die Schlüsse auf eine „nicht zu ferne" Zukunft zuläßt.

Hunger-, Kriegs- und Seuchenjahre sind dabei natürlich wie „grobe Beobachtungsfehler" von der Berechnung des Mittels auszuschließen.

§ 2. **Systematische Schwankungen.** Sind die Schwankungen *sehr groß* und *regellos* verteilt, so kann man der statistischen Angabe überhaupt keinen volkswirtschaftlichen, sondern nur einen *rein historischen* Wert zuerkennen; der aus einer Anzahl von Jahrgängen gebildete Mittelwert hat nur *formale* Bedeutung. Häufig aber sind die Schwankungen systematischer Art. So nimmt i. a. die Bevölkerung der deutschen Städte stetig zu, die Sterblichkeit ab, also das Alter zu; es steigt die Zahl der Geisteskranken, der geschriebenen Bücher, der Kohlenverbrauch, die Goldproduktion der Erde usf. Dabei ist wesentlich zwischen absoluter und relativer Zunahme zu unterscheiden. In rasch anwachsenden Fabrikstädten nimmt die absolute Zahl der Todesfälle natürlich stark zu, die relative steigt kaum oder sinkt sogar noch.

Als Beispiel einer sehr geringen systematischen Änderung sei das Alter der Bevölkerung Deutschlands 1871 und 1890, in Prozenten ausgedrückt, aufgeführt: (s. S. 27 oben).

Die Verteilung hat sich also *so* geändert, daß der Anteil der extremen Alter größer geworden ist: das deutet einerseits auf Zunahme des Kinderreichtums, andererseits auf bessere soziale Verhältnisse, die lebensverlängernd wirken.

Frage 7: Wie wird der Weltkrieg die Verteilung ändern?

Alter	1871	1890	Differenz
0–10 J.	24,10	24,20	+ 0,10
10–20 „	19,50	20,27	+ 0,77
20–30 „	16,45	16,19	— 0,26
30–40 „	13,31	12,76	— 0,55
40–50 „	10,64	10,38	— 0,26
50–60 „	8,35	7,83	— 0,52
60–70 „	5,20	5,20	0,00
70–80 „	2,09	2,36	+ 0,27
über 80 „	0,36	0,82	+ 0,46
	100,00	100,01	

§ 3. **Verbundene Massenerscheinungen. Dispersion.** Ziemlich häufig kommt es vor, daß eine statistische Größe längere Zeit *wenig* schwankt, um dann plötzlich auf einen wesentlich anderen Wert zu springen und nun längere Zeit in der Nähe von diesem Werte sich zu bewegen. In solchem Falle bezeichnet man (nach Lexis) die statistischen Größen als *verbundene Massenerscheinungen*. Hierher gehört z. B. die Zahl der Teilnehmer an Modetorheiten der verschiedensten Arten, ferner die religiösen *Volkspsychosen* (Kinderkreuzzüge, Flagellanten, Wiedertäufer; in neuester Zeit Spiritismus und „Christian Science“ = Gesundbeten). Ein, allerdings *meteorologisches*, Beispiel zeigt das erwähnte Springen sehr deutlich.

Anzahl der Eistage (Maximaltemperatur unter 0°) in Berlin:

1848–1855	30,5	± 5,3	m. F.
1856–1863	18,0	2,0	„ „
1864–1871	27,4	4,3	„ „
1872–1874	9,0	0,8	„ „
1875–1879	30,2	5,8	„ „
1880–1884	20,6	6,1	„ „
1885–1897	32,5	1,7	„ „
1898–1907	19,4	2,1	„ „
Mittel	25,1	± 1,8	

Die in der Tabelle vorkommenden Bruchteile von Tagen erklären sich durch Division und sind als Rechenstellen aufzufassen.

Der m. F. des Mittels ist aus der Abweichung gegen die Einzeljahrgänge berechnet. Gibt man den einzelnen Perioden sämtlich gleiches Gewicht, was, obwohl nicht ganz streng, hier ausreicht, so ist der m. F. 3,5, was durch $\sqrt{8}$ geteilt nur 1,2 ergibt: dies müßte „eigentlich“ auch der m. F. des Mittels sein. Dieser aber ist *größer*, nämlich 1,8. Das Verhältnis 1,8 : 1,2 = 1,5 nennt man nach Lexis *Dispersion*. *Normale* Dispersion ist 1, bei verbundenen Massenerscheinungen pflegt sie erheblich *größer* als 1 zu sein (wie auch im Beispiel), wenn mehrere Perioden in den Beobachtungszeitraum fallen, dagegen merklich *kleiner* als 1, wenn dieser Zeitraum ganz in eine einzelne Periode fällt.

Im allgemeinen pflegt den statistischen Massenerscheinungen aus den im § 1 angedeuteten Ursachen eine *mäßig übernormale* Dispersion zu eigen zu sein.

§ 4. **Verhältniszahlen, statistische Wahrscheinlichkeit.** Statt der absoluten Werte statistischer Reihen kann man, wie bereits in § 2 geschehen, Verhältniszahlen, Prozente, Promille oder dgl. einführen, was besonders bei großen Absolutwerten die Übersichtlichkeit sehr erhöht. Sind, was der häufigste und wichtigste Fall ist, bei den Prozent- oder sonstigen Verhältniszahlen Zähler und Nenner der Brüche statistische Reihen, so können die so entstandenen relativen Häufigkeiten auch als *statistische Wahrscheinlichkeiten* aufgefaßt werden. So wurden 1905 in Österreich 486777 Knaben-, 459201 Mädchengeburten aufgezeichnet, zusammen also 945978. Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt (für 1905!) wäre hiernach 486777 : 945978 $\sim$ 0,50146, also $>\frac{1}{2}$ (wie in allen Kulturländern; da aber auch die *Sterblichkeit* des männlichen Geschlechts größer ist, ergibt sich dann für das Mittel der *Lebenden* ein *Überschuß* an Frauen!)

Bei verbundenen Massenerscheinungen hat die statistische W. begreiflicherweise nur noch *formale* Bedeutung; es liegen, im Sinne des I. Abschnitts gesprochen, systematische Fehlerursachen vor. Daß diese bei einer sich wesentlich auf den *Menschen* beziehenden Wissenschaft viel häufiger sind als bei Beobachtungen an der „unbelebten“ Natur, ist begreiflich.

§ 5. **Versicherungswesen.** Die hervorragend wichtige praktische Wissenschaft der *Lebensversicherung*, der sich in rasch wachsendem Maße andere Versicherungszweige angeschlossen haben, entnimmt ihre Grundlagen natürlich ebenfalls der Statistik. Die „Sterbetafeln“ werden aus den im vorigen Paragraphen bereits angedeuteten Gründen für Männer und Frauen meist getrennt berechnet. Es ist jedoch im Rahmen dieses Werkchens nicht möglich, eine der Wichtigkeit des Gegenstandes angemessene Darstellung zu geben, die einem selbständigen Bändchen der Sammlung vorbehalten bleiben muß.

III. KOLLEKTIVMASSLEHRE

§ 1. Kollektivgegenstand (K.-G.). Ordnendes Merkmal (O. M.). Die *Kollektivmaßlehre,* mit der wir uns jetzt beschäftigen, ist als selbständiger Zweig der Anwendungsgebiete der W.-R. von Gustav Theodor Fechner eingeführt. Dieser vielseitige Mann war von Hause aus Arzt, wurde ein berühmter Physiker und Philosoph und beschäftigte sich besonders eingehend mit den psychologischen und physiologischen Grundlagen der Wissenschaft: die experimentelle Psychologie ist *seine* Tat. Indem wir seine Definition des Kollektivgegenstandes etwas verallgemeinern, sagen wir: ein *Kollektivgegenstand* ist eine Klasse von Einzelgegenständen oder Individuen oder Ereignissen, die eine individuell (Fechner fügt hier unnötigerweise hinzu: nach Zufall) veränderliche Eigenschaft besitzen, mit Rücksicht auf welche sie sich ordnen lassen, und die daher *ordnendes Merkmal* genannt wird.

Derselbe Kollektivgegenstand (K.-G.) kann natürlich oft nach den verschiedensten Merkmalen geordnet werden, z. B. die Schüler einer Klasse nach Alter, Größe, Leistungen.

§ 2. Stetige und unstetige K.-G. Das ordnende Merkmal kann mitunter nur bestimmte Werte (etwa ganzzahlige) annehmen, dazwischenliegende nicht. Dies ist z. B. der Fall, wenn wir als K.-G. eine Anzahl Würfe mit drei Würfeln, als ordnendes Merkmal (o. M.) die Augensumme betrachten. Man nennt dann in übertragenem Sinne auch den K.-G. *unstetig* (statt nur das o. M.). Im entgegengesetzten Falle heißt er *stetig*; Beispiel: das Lebensalter irgendeiner als K.-G. betrachteten Anzahl von Personen.

Mitunter ist das o. M. *nicht ohne weiteres zahlenmäßig ausdrückbar,* was jedoch für die mathematische Behandlung unerläßlich ist: z. B. die Leistungen der Schüler einer Klasse. Der Schüler weiß aber sehr wohl, wie man sich hilft: die Leistungen werden — nach Schätzung — mit Nummern

(1—5) versehen, womit eine Unterlage für die Rechnung geschaffen ist. Wenn man sagt, daß in der Abgrenzung dieser Nummern eine gewisse Willkür liege, so dürfte man wohl des Beifalles zumal der, sagen wir „weniger guten“, Schüler sicher sein: woher kämen sonst die vielen Klagen über die „Ungerechtigkeit“ der Lehrer. Wir wundern uns nicht über die tatsächlich doch in gewissen *bescheidenen* Grenzen vorhandene Unsicherheit: befinden wir uns doch auf dem Boden eines Anwendungsgebietes der W.-R.!

§ 3. **Argument. Wechselpunkte.** Als mathematische Größe aufgefaßt heißt das o. M. *Argument* des K.-G. Bei unstetigen K.-G. ist man nie im Zweifel, zu welchem Argumentwerte ein bestimmtes Einzelexemplar zu rechnen ist. Bei stetigen aber muß man schon der Ungenauigkeit der Beobachtung, vor allem aber der *Übersichtlichkeit* wegen, einer Abrundung der Werte des Argumentes eintreten lassen. So mißt man etwa die Größe der Schüler nach ganzen Zentimetern, ihr Alter nach Monaten. Dabei ordnet man jedes Individuum *dem* Abrundungswerte zu, dem der ihm wirklich zukommende am nächsten liegt; so ist ein 13 Jahre 11 Monate 19 Tage alter Schüler ebenso wie ein 14 Jahre 5 Tage alter unter „14 Jahre 0 Monate“ einzureihen. Die Grenzen zwischen je zwei benachbarten Abrundungswerten heißen *Wechselpunkte*; bei Messungen nach ganzen Zentimetern sind es halbe Zentimeter, bei Rechnung nach ganzen Monaten sind es 15 Tage[1]). Individuen, deren o. M. einen Wert hat, der gerade auf einen Wechselpunkt fällt, zählt man nach Belieben zu einem der beiden in Frage kommenden Argumentwerte, also einen 13 Jahre 4 Monate 15 Tage alten Schüler zu 13 Jahren 4 Monaten *oder* 13 Jahren 5 Monaten[2]).

§ 4. **Urliste oder primäre Verteilungstafel. Umfang.** Zur rechnerischen Behandlung des K.-G. hat man zunächst die *Urliste* oder „primäre Verteilungstafel“ herzustellen. Man schreibt alle vorkommenden Werte des Arguments[3]) auf

1) In solchen Fällen rechnet man den Monat stets zu 30 Tagen.
2) Die Techniker „runden stets nach oben ab“; manche auf die nächste *gerade* Zahl (hier also 13 Jahre 4 Monate).
3) Bei stetigen K.-G. die in Betracht kommenden Abrundungswerte.

und dazu die *Anzahl* der Exemplare, denen[1]) der betreffende Argumentwert zukommt. Die Gesamtzahl der Individuen (oder Exemplare oder Ereignisse) bezeichnet man als *Umfang* des K.-G. Man drückt die einem bestimmten Werte des Argumentes zukommenden Anzahlen auch oft in Prozenten oder in Bruchteilen des Umfanges aus.

Beispiel: K.-G. Alter der Schüler der Quarta am 15.IV.19..

Urliste.

Umfang 44 (Schüler). Abrundung auf Monate (Wechselpunkte also je $\frac{1}{2}$ Monat).

Alter		Zahl der Schüler		
Jahre	Monate	Anzahl	Prozent	Bruchteile
11	3	1	2,3	0,023
11	4	3	6,8	0,068
11	5	2	4,5	0,045
11	6	4	9,1	0,091
11	7	9	20,4	0,204
11	8	11	25,0	0,250
11	9	1	2,3	0,023
11	10	7	15,9	0,159
11	11	2	4,5	0,045
12	0	0	0,0	0,000
12	1	0	0,0	0,000
12	2	0	0,0	0,000
12	3	1	2,3	0,023
12	4	0	0,0	0,000
12	5	2	4,5	0,045
12	6	0	0,0	0,000
12	7	0	0,0	0,000
12	8	0	0,0	0,000
12	9	1	2,3	0,023
		44	99,9	0,999

Die beiden letzten Zahlen zeigen einen sog. *Abrundungsfehler* von 0,1 bzw. 0,001. Das ist unvermeidlich und auch für die weitere Rechnung ohne Bedeutung.

Im allgemeinen hat es natürlich keinen Sinn, die Ar-

1) Bei unstetigen K.-G. genau, bei stetigen innerhalb der einschließenden Wechselpunkte.

gumentwerte nach oben oder unten hin fortzusetzen, wenn ihnen keine Exemplare des K.-G. mehr entsprechen. Aus *schematischen* Gründen kann es aber unter Umständen nützlich sein, z. B. falls für das Alter der Quartaner ein Formular hergestellt werden sollte, dies von 11 Jahren 0 Monaten bis zu 13 Jahren 0 Monaten gehen zu lassen. Das ist aber mehr eine Frage der *Statistik*, von der schon im vorigen Abschnitt die Rede war. Sehr *unzweckmäßig* wäre es aber, aus Bequemlichkeit *Zwischenwerte* fortzulassen. Es ist durchaus wünschenswert, die Argumentwerte *in gleichen Intervallen* fortschreiten zu lassen; zwar nicht *unbedingt* nötig, aber eine dringend zu empfehlende Rechnungserleichterung.

Frage 8: Wie würde man verfahren, wenn die Argumentwerte der Urliste in *geometrischer Progression* fortschritten?

§ 5. **Verteilungsfunktion (Vf.). Zusammenhang mit der W.-R.** Das Gesetz, nach dem Argumentwert und Verteilung der Exemplare zusammenhängen, bezeichnet man als *Verteilungsfunktion* (Vf.). Aus unseren einleitenden Betrachtungen ergibt sich sofort, daß *die in Bruchteilen der Einheit ausgedrückten Werte der Verteilungsfunktion nichts anderes sind als die Wahrscheinlichkeiten a posteriori, die dem betreffenden Werte des Argumentes zukommen.*

§ 6. **Reduzierte Verteilungstafel.** Die Werte der Vf. „springen“ gegen Ende der Tafel häufig, so auch im Beispiele des § 4, und auch im dichtesten Teile zeigen sich „zufällige“ Unregelmäßigkeiten. Bei zeichnerischer Darstellung (Fig. 2) wird die Kurve der Vf. *zackig* und unregelmäßig. Eine graphische Ausgleichung hat ihre Bedenken. Man beseitigt die Unregelmäßigkeiten *teilweise* dadurch, daß man eine *Reduktion* der Tafel vornimmt, was manchmal auch die Übersichtlichkeit erhöht. Dies ist vor allem der Fall, wenn die Urliste viele „leere“ Stellen enthält und die auf einen einzelnen Argumentwert entfal-

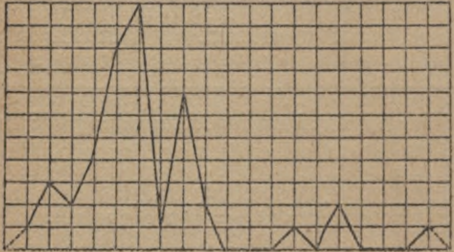


Fig. 2.
Verteilungsfunktion (nach Tabelle des § 4).

lenden Werte der Vf. sehr klein sind, wie dies stattfinden würde, wenn jemand den Einfall hätte, für das Alter der Quartaner aus Beispiel § 4 in seiner Urliste das Argument nach *Tagen* fortschreiten zu lassen; das gäbe eine bandwurmartig lange Liste mit Werten der Vf. von meist 0 und gelegentlich 1. Obwohl die in § 4 aufgestellte Urliste von diesem Vorwurfe nicht getroffen werden kann, wollen wir sie doch beispielsweise verkürzen. Wir ziehen je vier Zeilen zusammen und erhalten folgende

Reduzierte Verteilungstafel.

Alter	11 J. $4\frac{1}{2}$ M.	11 J. $8\frac{1}{2}$ M.	12 J. $\frac{1}{2}$ M.	12 J. $4\frac{1}{2}$ M.	12 J. $8\frac{1}{2}$ M.
Anzahl	10	28	2	3	1

„Natürlicher" wäre es, von 11 Jahren 4 Monaten ab fortzuschreiten. Dann fielen aber die Wechselpunkte auf 11 Jahre 2 Monate, 11 Jahre 6 Monate usf., und wir müßten nach früheren Erörterungen die zugehörigen Werte der Vf. zur Hälfte zwei benachbarten Argumentwerten zuteilen, also die 4 von 11 Jahren 6 Monaten mit 2 bei 11 Jahren 4 Monaten und mit 2 bei 11 Jahren 8 Monaten in Ansatz bringen. Das ist ungenau und außerdem unnatürlich, wenn eine solche Anzahl zufällig ungerade ist, da man dann Werte wie $3\frac{1}{2}$ Schüler erhält. Beim Rechnen mit Prozenten oder Bruchteilen (W. a posteriori) tritt das ja freilich nicht hervor. Für die *Rechnung* ist es allerdings gleichgültig. Bei der *Herstellung* einer Tafel *stetiger* K.-G. ist eine Ungenauigkeit nicht zu vermeiden, da die Argumentwerte nie absolut genau bekannt sind, aber man braucht die Ungenauigkeit nicht noch unnütz zu vergrößern. Vor allem ist eine zuweitgehende Reduktion *deshalb* wenig empfehlenswert, weil sie ein *zu verwaschenes* Bild gibt. Gleichwohl drängt die Praxis auf Kürze und läßt die vollständige Wiedergabe der Urliste nicht immer zu. Es gibt aber *andere* Mittel, um die charakteristischen Merkmale der Urliste mit wenig Zahlen wiederzugeben, und mit diesen wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Frage 9: Wieso ist bei *stetigen* K.-G. eigentlich bereits die Urliste als *reduzierte* Tafel zu bezeichnen?

Frage 10: ? W., daß von den 44 Quartanern zwei *denselben Geburtstag* haben?

§ 7. **Summenfunktion.** Zuvor müssen wir jedoch noch einer wichtigen Größe gedenken, die man als *Summenfunktion* bezeichnet. Man erhält sie einfach durch *sukzessive Addition der Werte der Vf.* von der ersten Zeile an. Sie hat also folgende Eigenschaften: ist 0 für die „zu kleinen“ Argumentwerte, steigt ständig oder bleibt gleich („niemals abnehmende“ Funktion), um beim letzten „möglichen“ Werte des Argumentes gleich dem Umfang des K.-G. (oder 100 % oder 1) zu werden und diesen Betrag für alle „außermöglichen“, „zu großen“ Argumentwerte zu behalten. Beispiel sei wieder der K.-G. des § 4.

Summenfunktion.

Alter	Zahl	Prozent	Bruchteile	Alter	Zahl	Prozent	Bruchteile
11J. 3M.	1	2,3	0,023	12J.0M.	40	90,8	0,908
11 „ 4 „	4	9,1	0,091	12 „ 1 „	40	90,8	0,908
11 „ 5 „	6	13,6	0,136	12 „ 2 „	41	93,1	0,931
11 „ 6 „	10	22,7	0,227	12 „ 3 „	41	93,1	0,931
11 „ 7 „	19	43,1	0,431	12 „ 4 „	41	93,1	0,931
11 „ 8 „	30	68,1	0,681	12 „ 5 „	43	97,6	0,976
11 „ 9 „	31	70,4	0,704	12 „ 6 „	43	97,6	0,976
11 „ 10 „	38	86,3	0,863	12 „ 7 „	43	97,6	0,976
11 „ 11 „	40	90,8	0,908	12 „ 8 „	43	97,6	0,976
12 „ 0 „	40	90,8	0,908	12 „ 9 „	44	100,0	1,000

Graphisch dargestellt hat die Summenfunktion ein „treppenartiges“ Aussehen (Fig. 3) von wesentlich „ruhigerem“ Charakter als die Vf., obwohl beide vollkommen gleichwertig sind. Bei eingehenderer Behandlung der Sache würden wir noch weitere Vorzüge gegenüber der Vf. finden.

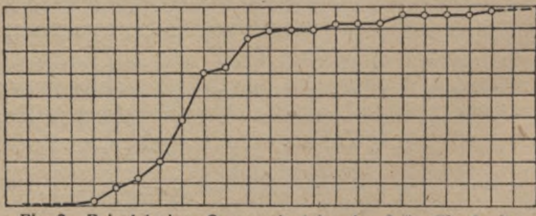


Fig. 3. Beispiel einer Summenfunktion (zu § 4). Fig. 2 gibt die zugehörige Vf.

Frage 11: Was ist die Bedeutung der Summenfunktion vom Standpunkte der W.-R. aus?

§ 8. **Argumentdurchschnitt.** Als wichtigste Größe zur Charakterisierung eines K.-G. bietet sich zunächst der Mittelwert des o. M., der *Argumentdurchschnitt*, dar. Man erhält ihn, indem man jeden Argumentwert mit dem zugehörigen Werte der Verteilungsfunktion multipliziert und die Summe aller Produkte durch den Umfang des K.-G. dividiert. Es entspricht das ganz dem Verfahren der Mittelbildung bei Beobachtungen ungleichen Gewichts, wie wir es im vorigen Abschnitte haben kennen lernen. Auch hier ist es vorteilhaft, einen *Näherungswert* für den Argumentdurchschnitt anzunehmen, um die Rechnung mit möglichst kleinen Zahlen durchführen zu können. So haben wir im Beispiel des § 4, wenn etwa 11 Jahre 8 Monate als vorläufige Näherung angenommen wird[1]), die nachstehende Tabelle:

Abweichung vom Näherungswerte (in Monaten)	Wert der Vf.	Produkt	
−5	1	−5	
−4	3	−12	
−3	2	−6	
−2	4	−8	
−1	9	−9	
(0	11	0)	
+1	1	+1	
+2	7	+14	
+3	2	+6	
+7	1	+7	
+9	2	+18	
+13	1	+13	
	44	+59	+19
		−40	

+ 19 : 44 ist + 0,4; es ist also der Argumentdurchschnitt des K.-G., d. h. das mittlere Alter unserer Quartaner, 11 Jahre 8,4 Monate.

Es ist üblich und gerechtfertigt, den Argumentdurchschnitt eine Stelle genauer anzugeben als die Einzelwerte des Arguments der Urliste. Die Hinzufügung noch weiterer Stellen würde i. a. nur eine *scheinbare* Vergrößerung der Genauigkeit ergeben.

Frage 12: Welche Rolle spielen die Werte der Vf. bei der Berechnung des Argumentdurchschnittes?

§ 9. **Unsymmetrische Verteilung. Mittel aus den Extremen.** Während bei den Beobachtungsfehlern „normaler-

1) *Hier* kann man natürlich von vornherein diejenigen Argumentwerte fortlassen, für die die Verteilungsfunktion den Wert Null hat.

weise" positive und negative Abweichungen nahezu gleich oft und in gleicher Höhe eintreten, mit (relativ!) um so größerer Annäherung an diesen Idealfall, je größer die Zahl der Einzelbeobachtungen, ist dies bei K.-G. i. a. *nicht* der Fall, auch wenn man ihren Umfang noch so sehr vergrößert. Bleiben wir etwa bei unsern Quartanern! Das Alter eines solchen Schülers kann unter unseren jetzigen gesellschaftlichen und gesetzlichen Verhältnissen kaum unter 11, ganz sicher nie unter 10 Jahre sinken; eine *obere* Grenze aber läßt sich im Voraus nicht angeben. Es kommt ja gelegentlich, wiewohl selten, vor, daß noch Männer in gereiftem Alter nachträglich zur Schule gehen; aber selbst wenn wir diese Fälle als außergewöhnliche beiseite lassen (entsprechend „groben Beobachtungsfehlern"), wird doch das äußerste Alter sich nach oben viel weiter vom Mittel entfernen können als nach unten, nämlich infolge des „Sitzenbleibens". In unserem Beispiele ist das sehr deutlich: der niedrigste Argumentwert bleibt nur um 5,4 Monate hinter dem Mittel zurück, der höchste übertrifft ihn um 12,6, also über das Doppelte der erstgenannten Abweichung! Das *Mittel aus den Extremen*, hier $\frac{1}{2}$ (11 J. 3 M. + 12 J. 9 M.) = 12 J. 0 M., übertrifft also (in unserem Falle und nach obiger Bemerkung in der Regel) den Argumentdurchschnitt erheblich, ist ebendeshalb auch weniger zur genaueren Charakteristik eines K.-G. geeignet. Gleichwohl wird es z. B. in der Meteorologie noch oft benutzt, weil zu seiner Bestimmung eine *nur einmalige* Ablesung (eines Extremthermometers) am Tage genügt. Daß es aber auch da sehr unzuverlässig ist, werden wir in § 13 sehen.

Frage 13: Wie wird sich in der Urliste die Tatsache geltend machen, daß das Sitzenbleiben die Schüler um ein Jahr (bei „Doppelanstalten" auch wohl nur $\frac{1}{2}$ Jahr) zurückbringt?

§ 10. **Scheitelwert. Zentralwert.** Wichtiger ist der *Scheitelwert*, auch dichtester Wert oder (insbesondere in der *Biometrie*:) frequenzielles Mittel genant, derjenige, dem der größte Wert der Vf. zukommt. Er beträgt in unserem Beispiele 11 Jahre 8 Monate.

Sekundäre Scheitel sind natürlich auch möglich, ja sogar sehr häufig vorkommend. Sie beruhen teils auf dem Fortschreiten der Argumentwerte nach *zu kleinen* Intervallen (vgl. § 6), wobei auch systematische Beobachtungsfehler eine Rolle spielen können (wenn die Argumentwerte instrumentell ermittelt sind, wie bei Längen, Temperaturen u. ä.), teils deuten sie auf Ungleichartigkeit des Materials hin.

Eine andere bemerkenswerte Größe ist der *Zentralwert* oder „wahrscheinliche" Wert. Er liegt „gerade in der Mitte", d. h. die *Summenfunktion* ist für ihn gleich dem halben Umfange des K.-G. (bei Rechnung nach Bruchteilen $\frac{1}{2}$). Daher auch die Bezeichnung „wahrscheinlicher" Wert, entsprechend wie wahrscheinlicher Fehler. Im Beispiele des § 4 ist er etwa 11 Jahre 7 Monate; durch *Interpolation* fände man 11 Jahre 7,3 Monate, doch hat dies Ergebnis nicht viel mehr Bedeutung als ein bloßes Rechnungsresultat: der Umfang des K.-G. ist zu klein für schärfere Berechnung.

§ 11. **Wahrscheinliche, durchschnittliche und mittlere Abweichung oder Streuung (w. A., d. A. und m. A.).** Der oder die Mittelwerte für sich geben noch *kein zulängliches* Bild von dem K.-G. Auch die Angabe der Extreme, an sich dringend wünschenswert, wenn, wie leider noch sehr häufig geschieht, die im folgenden zu besprechenden Größen nicht angegeben werden, unterrichtet nicht über die *Verteilung* der Exemplare innerhalb der äußersten Grenzen (Fig. 4). Es ist dazu (mindestens) ein *Maß der Abweichung* vom Mittel nötig, entsprechend der Fehlerangabe bei Beobachtungsreihen.

Die *wahrscheinliche* Abweichung (w. A.) erhalten wir, wenn wir vom Argumentdurchschnitt aus nach *beiden* Seiten um so viel vorwärtsgehen, bis die Summe der Werte der Vf. den halben Umfang des K.-G. erreicht. In unserem Beispiel sind 21 Schüler, d. h. gerade die Hälfte der Klasse zwischen 11 Jahre 7 Monate und 11 Jahre 9 Monate alt, es ist ebenso wahrscheinlich, daß das Alter eines beliebigen Schülers innerhalb wie daß es außerhalb dieser Grenzen falle. Die w. A. ist also die Hälfte von zwei Monaten, d. h. ein Monat.

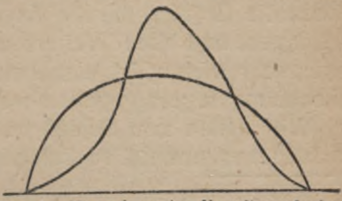


Fig. 4. Verlauf zweier Verteilungsfunktionen mit gleichem Argumentdurchschnitt und gleichen Extremwerten.

Die *durchschnittliche Abweichung* (d.A., entsprechend dem d. F.) erhält man durch Multiplikation der Abweichungen der Argumentwerte in der Urliste vom Durchschnitte mit den zugehörigen Werten der Vf. und Addition ohne Rücksicht auf die Vorzeichen sowie Division mit dem Umfange des K.-G.

Die *mittlere* Abweichung, nach Bruns' Vorgang *Streuung*[1]) genannt, bekommt man durch Quadrieren der einzelnen Abweichungen, Multiplikation der Quadrate mit den Werten der Vf., Addition und Division durch den Umfang.

Die Rechnung ergibt für das von uns gewählte Beispiel:

1. Abweichung vom Argumentdurchschnitt	2. Wert der Verteilgsfkt.	3. Quadrat der Abw.	Abs. Betrag von (1)×(2)	(2)×(3)
— 5,4	1	29,2	5,4	29,2
— 4,4	3	19,4	13,2	58,2
— 3,4	2	11,6	6,8	23,2
— 2,4	4	5,8	9,6	23,2
— 1,4	9	2,0	12,6	18,0
— 0,4	11	0,2	4,4	2,2
+ 0,6	1	0,4	0,6	0,4
+ 1,6	7	2,6	11,2	18,2
+ 2,6	2	6,8	5,2	13,6
+ 6,6	1	43,5	6,6	43,5
+ 8,6	2	74,0	17,2	148,0
+ 12,6	1	158,8	12,6	158.8
	44		105,4	536,5

Es ist also die durchschnittliche Abweichung $\frac{105{,}4}{44} = 2{,}4$, die *Streuung* $\sqrt{\frac{536{,}5}{44}} = \sqrt{12{,}2} = 3{,}5$ Monate, also nicht unbedeutend größer als die d. A.

Hiermit sei die Darstellung der *Theorie* der Kollektivmaßlehre für uns abgeschlossen; zum weiteren Eindringen sei das Brunssche Buch (vgl. Literaturverzeichnis) empfohlen, welches die Größen, die die Asymmetrie der Verteilung kennzeichnen, und alles Weitere ausführlich behandelt, und wo, was sehr wichtig ist, eingehende, für die Praxis brauchbare Rechnungsregeln gegeben werden.

Wir stellen zum Schluß noch für unser Beispiel die verschiedenen ermittelten Zahlenwerte zusammen.

1) Die *Dispersion* (II. § 3), deren wörtliche Übersetzung Streuung wäre, ist aber nach Erklärung der *Quotient* zweier Streuungen, der beobachteten und der „normalen“.

K.-G. Schüler der Quarta.
Umfang: 44 (Schüler). Ordnendes Merkmal: Alter.

(Arg. d.) *Durchschnittliches Alter:* 11. J. 8,4 M.
(Zentralw.) *Wahrscheinliches Alter:* 11. J. 7,3 M.
(Scheitelw.) *Häufigstes Alter:* 11. J. 8 M.

Mittlere Abweichung (Streuung) 3,5 M.
Durchschnittliche Abweichung 2,4 M.
Wahrscheinliche Abweichung 1 M.

Extreme: 11 J. 3 M. und 12 J. 9 M.

Frage 14: Welchen Operationen bei Beobachtungsreihen entspricht die Bildung der m. A., d. A., w. A.?

§ 12. **Augensumme beim Werfen mit drei Würfeln.** Dies Beispiel haben wir bereits im I. Abschnitt über Ausgleichungsrechnung als Beispiel einer Fehlerverteilung behandelt. *Hier* betrachten wir eine wirklich ausgeführte Reihe mit dem Umfang von 108 (Würfen) als K.-G.

Aus der Verteilungstafel finden wir leicht zunächst den Argumentdurchschnitt 10,49 (statt theoretisch 10,5, also nur sehr wenig abweichend). Mit dem abgerundeten Werte 10,5 ergeben die letzten Spalten die d. und m. A., jene zu

Augensumme	Zahl der Würfe (Z.)	W. a post.	W.-Summe	Z. × Abw. v. 10,0	Abw. v. 10,5	Z. × Abw. (abs. B)	Z. × Abw.²
3	0	0,000	0,000	0	— 7,5	0,0	0,00
4	1	0,009	0,009	— 6	— 6,5	6,5	42,25
5	6	0,055	0,064	— 30	— 5,5	33,0	181,50
6	6	0,055	0,119	— 24	— 4,5	27,0	121,50
7	5	0,046	0,165	— 15	— 3,5	16,5	61,25
8	9	0,083	0,248	— 18	— 2,5	22,5	56,25
9	12	0,112	0,360	— 12	— 1,5	18,0	27,00
10	13	0,120	0,480	0	— 0.5	6,5	3,25
11	13	0,120	0,600	+ 13	+ 0,5	6,5	3,25
12	16	0,148	0,748	+ 32	+ 1,5	24,0	36,00
13	11	0,103	0,851	+ 33	+ 2,5	27,5	68.75
14	5	0,046	0,897	+ 20	+ 3,5	17,5	61,25
15	7	0,065	0,962	+ 35	+ 4,5	31,5	141,75
16	3	0,028	0,990	+ 18	+ 5,5	16,5	90,75
17	1	0,009	0,999	+ 7	+ 6,5	6,5	42,25
18	0	0,000	0,999	0	+ 7,5	0,0	0,00
	108	0,999		+ 53		260,0	937,00

$\frac{260}{108} = 2{,}41$, diese, die „Streuung", zu $\sqrt{\frac{937}{108}} = 2{,}94$. Das Verhältnis m. A.: d. A. ist hier gleich 1,22 (theoretisch 1,25). Die wahrscheinliche Abweichung ist 1,5, denn genau die Hälfte aller 108 Würfe hat Augensummen zwischen $9 = 10{,}5 - 1{,}5$ und $12 = 10{,}5 + 1{,}5$ ergeben. Daß der Scheitelwert 12 (statt 10 oder 11) ist, ist natürlich zufällig; der Zentralwert kommt 10 am nächsten. Es ist also die Übereinstimmung mit der Theorie als sehr gut zu bezeichnen; natürlich spricht das nicht für die Güte der Theorie, vielmehr für die der Würfel.

§ 13. **Mittlere Tagestemperaturen im Januar 1901 bis 1908 in Potsdam,** Kgl. Meteorologisch-magnetisches Observatorium auf dem Telegraphenberge[1]). Dies ist im Gegensatz zum vorigen ein *stetiger* K.-G. Als Intervalle sind in der „primären Verteilungstafel" Grade genommen, und zwar so, daß die *ganzen* Grade „Wechselpunkte" wurden.

Nehmen wir als vorläufiges Mittel $-0{,}5^0$ an, so erhalten wir die Werte der vierten Spalte. $+508 - 525 = -17$ gibt als Verbesserung des Näherungswertes nur

$$-\frac{17}{248} = -0{,}07,$$

so daß das Mittel genau zu $-0{,}57^0$ anzusetzen ist. Das wäre also die mittlere Januartemperatur der Jahre 1901–1908. Wenn wir mit Rücksicht auf das Fortschreiten der Argumentwerte nach ganzen Graden $-0{,}5^0$ als Mittel beibehalten, können wir aus Spalte 4 auch gleich die d. A. erhalten; sie ist offenbar $\frac{+508+525}{248} = 4{,}16^0$. Als Streuung dagegen ergibt sich aus der letzten Spalte der Wert $\sqrt{\frac{6447}{248}} = 5{,}11^0$. Das Verhältnis m. A.: d. A. folgt hier zu 1,23, also sehr nahe gleich dem zu erwartenden Werte (vgl. auch § 12). Bemerken wir ferner, daß in dem Intervall $-4{,}5^0 \cdots +2{,}5^0$ 117 von 248 Werten liegen (0,486 statt 0,5 in Bruchteilen der Einheit), so ergibt sich die *wahrscheinliche* A. zu etwa 4^0; wegen der starken Asymmetrie ist dieser Wert jedoch

1) So benannt nach einem der vor 100 Jahren üblichen „optischen" Telegraphen, der dort bis in die 50er Jahre des vorigen Jahrhunderts gestanden hatte.

Temperatur Celsius-Grade	Anzahl Tage	Bruchteile	Anzahl × Abw. v. — 0,5	Quadrat der Abw.	Anzahl × Qu. d. A.
— 16,5	1	0,004	— 16	256	256
— 15,5	1	0,004	— 15	225	225
— 14,5	1	0,004	— 14	196	196
— 13 5	3	0,012	— 39	169	507
— 12,5	1	0,004	— 12	144	144
— 11,5	2	0,008	— 22	121	244
— 10,5	3	0,012	— 30	100	300
— 9,5	6	0,024	— 54	81	486
— 8,5	6	0,024	— 48	64	384
— 7,5	8	0,032	— 56	49	392
— 6,5	7	0,028	— 42	36	252
— 5,5	13	0,052	— 65	25	325
— 4,5	7	0.028	— 28	16	102
— 3,5	17	0,069	— 51	9	153
— 2,5	9	0,036	— 18	4	36
— 1,5	15	0,061	— 15	1	15
— 0,5	17	0,069	0	0	0
+ 0,5	17	0.069	+ 17	1	17
+ 1,5	21	0,085	+ 42	4	84
+ 2,5	17	0,069	+ 51	9	153
+ 3,5	21	0,085	+ 84	16	336
+ 4,5	30	0,121	+ 150	25	750
+ 5,5	15	0,061	+ 90	36	540
+ 6,5	6	0.024	+ 42	49	294
+ 7,5	4	0,016	+ 32	64	256
	248	1,001	+ 508 — 525		6447

nur von geringer Bedeutung. Als *Zentralwert* ergibt sich + 0,5°, oberhalb dessen 114, unterhalb dessen 117 Werte liegen. Der *Scheitelwert* ist noch viel höher: + 4,5°, übertrifft also den Mittelwert um über 5°! Das ist übrigens eine ganz allgemein dem mitteleuropäischen Winter zukommende Erscheinung.

Wir stellen die gefundenen Werte nochmals zusammen:
K.-G.: Temperaturen im Januar (1901—1908) in Potsdam.

Umfang: 248 (Tage).

Mittelwert: — 0,57° ± 0,32° m. F.
Zentralwert: + 0,5°. Z. — M. = + 1,1°.
Scheitelwert: + 4,5°. Sch. — M. = + 5,1°.
Mittl. Abw. 5,11°. D. A. 4,16°. W. A. 4°.

Extreme: — 16,5° und + 7,5°.
(Differenz: 24°, Mittel — 4,5°.)

Wir wollen für dies Beispiel noch eine *reduzierte* Verteilungstafel feststellen. Sie mag von 2^0 zu 2^0 fortschreiten. Das ergibt folgende Tabelle.

Temperatur Intervall	Mittelwert	Zahl d. Tage	Anzahl × Abw. v. — 0,5	Quadrat der Abw.	Quadrat × Anzahl
-17^0 bis -15^0	-16^0	2	-31	240,25	480,50
-15 „ -13	-14	4	-54	182,25	769,00
-13 „ -11	-12	3	$-34\frac{1}{2}$	132,25	396,75
-11 „ -9	-10	9	$-85\frac{1}{2}$	90,25	812,25
-9 „ -7	-8	14	-105	56,25	787,50
-7 „ -5	-6	20	-110	30,25	605,00
-5 „ -3	-4	24	-84	12,25	294,00
-3 „ -1	-2	24	-36	2,25	54,00
-1 „ $+1$	0	34	$+17$	0,25	8,50
$+1$ „ $+3$	$+2$	38	$+95$	6,25	237,50
$+3$ „ $+5$	$+4$	51	$+229\frac{1}{2}$	20,25	1032,75
$+5$ „ $+7$	$+6$	21	$+136\frac{1}{2}$	42,25	887,25
$+7$ „ $+9$	$+8$	4	$+34$	72,25	289,00
		248	$+512$ -540		6654,00

Aus ihr leiten wir unschwer ab:
Mittelwert: $-0{,}5^0$ (Näherungswert) $-0{,}11^0 = -0{,}61^0$.

$$\text{Streuung} \sqrt{\frac{6654}{248}} = 5{,}18^0. \quad \text{D. A.} = 4{,}25^0.$$

Scheitelwert $+4^0$. Zentralwert 0^0.

Natürlich sind diese Werte *ungenauer* als die aus der Urliste direkt abgeleiteten, wiewohl sie in *diesem* Falle noch ganz leidlich mit ihnen übereinstimmen. Auch die Urliste ist übrigens schon zusammengezogen, da im Originale die Tagestemperaturen, 24 stündige Mittel eines selbstzeichnenden Thermographen, sogar auf Hundertstel Celsiusgrade angegeben sind. Daß dies jedoch *reine Rechenstellen* sind, geht aus dem m. F. unseres Mittels, $\pm 0{,}32^0$, hervor.

Die Größe des m. F. bzw. der Streuung, und die zahlreichen Zacken, die die Vf. bei der Zeichnung (die dem Leser empfohlen sei) aufweist, legen den Verdacht der Inhomogenität des Beobachtungsmaterials nahe. Und dieser ist auch begründet: der Grund liegt darin, daß die Häufigkeit der Windrichtung, von der die Temperatur im Winter wesentlich abhängt, sehr verschieden ist, daß nämlich abnorm warme West- und Südwestwinde am häufigsten sind, während die kalten

NE- und E-Winde auch ein sehr merkliches sekundäres Häufigkeitsmaximum zeigen. Diese Häufigkeit wechselt ferner in den einzelnen Jahrgängen sehr bedeutend. Es sei hier darauf hingewiesen, daß die Methoden der Kollektivmaßlehre in der Meteorologie bisher *noch viel zu wenig* verwendet werden, und daß hier noch ein weites Tätigkeitsfeld fast brach liegt; das Beobachtungsmaterial selbst ist teilweise sehr umfangreich und gediegen und harrt nur einer sachkundigen Bearbeitung als K.-G.

Frage 15: Wie drückt sich die große positive Differenz Scheitelwert — Mittelwert in der Häufigkeit zu hoher und zu tiefer Temperaturen aus?

Frage 16: Wie ergibt sich der m. F. des Mittelwertes aus der Streuung?

Frage 17: Wieviel Jahre wären hiernach nötig, um einen m. F. von $\pm 0{,}1^{\circ}$ zu erhalten?

IV. ANWENDUNGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG AUF PHYSIKALISCHE UND KOSMOLOGISCHE FRAGEN

1. DIE KINETISCHE THEORIE DER GASE

§ 1. **Vorbemerkung.** Zum vollen Verständnis des folgenden ist einige Kenntnis der elementaren Physik und eine gewisse Vertrautheit mit ihren Begriffen erforderlich.

§ 2. **Atomtheorie.** Schon im Altertum wurde, zuerst wohl von Demokritos aus Abdera, die Lehre aufgestellt, daß alle Körper aus kleinsten, selbst *nicht* mehr teilbaren Teilchen zusammengesetzt seien, die deshalb als „Atome" (α privativum und τέμνω schneide, teile) bezeichnet wurden. Diese damals kaum verifizierbare Hypothese[1]) wurde in der Neuzeit von Gassendi als Arbeitshypothese in die moderne Physik eingeführt, erwies sich dort wie in der Chemie (seit etwa 1800) als äußerst fruchtbar, blieb aber nach Ansicht so hervorragender Forscher wie Mach und W. Ostwald noch immer hypothetisch. Erst durch die Entdeckungen auf dem Gebiete der Radioaktivität und die hervorragenden theoretischen und praktischen Untersuchungen vor allem M. v. Laues

1) Vgl. indes den Vers (nach Choirilos):
Gutta cavat lapidem, consumitur anulus usu
Et teritur pressa vomer aduncus humo.

über Röntgenstrahlung und Kristallstruktur hat sie einen so hohen Grad von Gewißheit erlangt, daß man sie als begründete *Theorie* anzusehen hat und das „Atom als Tatsache" annehmen darf, wogegen H. Poincaré noch vor wenigen Jahren energisch Einspruch erhob.[1])

§ 3. **Kinetische Gastheorie.** Man nimmt also jetzt an, daß *alle* Körper aus *Molekülen* (besser: Molekeln, von lat. molecula, Verkleinerung von moles = Masse) bestehen, die zwar die letzten *physikalischen* Einheiten bilden, aber meist aus mehreren, gleichartigen (bei „Elementen", z. B. den Metallen) oder ungleichartigen (bei Verbindungen) *Atomen* zusammengesetzt sind; letztere, die *chemischen* Einheiten, bestehen wiederum aus noch kleineren, *Elektronen* genannten Gebilden; die Einzelheiten sind uns zurzeit noch nicht ausreichend bekannt.

Während nun bei den festen und flüssigen Körpern die Moleküle so eng aneinander liegen, daß sie durch die gegenseitige Anziehung zusammengehalten und an freier Bewegung gehindert werden (weshalb diese Körper i. a. auch nur wenig zusammendrückbar sind), bewegen sie sich bei den *Gasen* unabhängig voneinander mit großen Geschwindigkeiten, bis sie einander sehr nahe kommen oder gegen die Wand des Gefäßes stoßen, auf die sie infolgedessen einen gewissen *Druck* ausüben. Ein *nicht* in ein Gefäß eingeschlossenes Gas müßte sich *bei Abwesenheit der Schwerkraft* ins Grenzenlose ausbreiten.

§ 4. **Eingreifen der W.-R.** Man nimmt nun weiter an, daß die Geschwindigkeiten der *einzelnen* Moleküle nicht alle gleich (was die einfachste Annahme wäre), sondern ganz verschieden sind, ja daß sie vielleicht jeden beliebigen Wert haben können. Es gibt dann aber einen bestimmten (oder doch innerhalb verhältnismäßig enger Grenzen liegenden) *Mittelwert* aller Geschwindigkeiten, der noch stark von der Temperatur abhängt;[2]) man hat ihn z. B. für gewöhnliche Luft bei 0^0 C zu 485 m in der Sekunde gefunden! Da aber die Moleküle für gewöhnlich selbst in einem Gase doch recht dicht bei ein-

1) Der Wert der Wissenschaft (Teubner 1906) S. 167. — Allerdings ist nach den jetzigen Anschauungen (§ 3) die Bezeichnung dieser kleinsten Teilchen als „Atome" nicht mehr streng richtig.

2) Man *definiert* sogar die Temperatur durch Angabe der mittleren Geschwindigkeit des Gases. Vgl. Abschnitt 2 § 1.

ander sind, ist die *mittlere Weglänge*, die ein Teilchen in gerader Linie unter dem Drucke einer Atmosphäre zurücklegt, nur 0,0001 mm (0,1 μ). Nach Zurücklegung dieses Weges prallt es bereits gegen ein anderes und wird aus seiner Bahn abgelenkt, erhält auch i. a. eine andre Geschwindigkeit. Es *können* aber auch viel größere Weglängen, z. B. 1 mm, und viel höhere Geschwindigkeiten vorkommen, etwa 5 km in der Sekunde. Die angegebenen Zahlen sind eben nur *Mittelwerte.* Hier greift nun die W.-R. ein.

§ 5. **Maxwellsches Verteilungsgesetz.** Wir können nämlich für einen gewissen Zeitpunkt die Moleküle eines Gases als Kollektivgegenstand mit dem ordnenden Merkmale der Geschwindigkeit betrachten. Man findet dann (unter gewissen „plausiblen" Annahmen), daß die *Abweichungen* vom Mittelwerte genau dasselbe Gesetz befolgen wie die *zufälligen Fehler* von Beobachtungsreihen. Dies in der Methode der kleinsten Quadrate nach C. F. Gauß benannte Gesetz heißt in der kinetischen Gastheorie nach J. Cl. Maxwell, der es hier zuerst aufstellte. Die Abweichungen vom Mittelwerte nehmen danach außerordentlich rasch ab, aber völlig ausgeschlossen sind selbst „beliebig" große *nicht.*

§ 6. **Beharren im wahrscheinlichsten Zustande.** Die Verteilung nach dem Gauß-Maxwellschen Gesetze ist nicht die einzig denkbare oder mögliche, sondern nur die *wahrscheinlichste.* D. h.: ist ein Gas zwangsweise in einen *andern,* „unwahrscheinlicheren" Zustand gebracht, so versetzt es sich von selbst wieder in den wahrscheinlichsten. Das rührt, wie man durch Rechnung zeigen kann, von der Wirkung der Stöße her, die übergroße Geschwindigkeiten bald auf ein ziemlich normales Maß zurückführen. Man nimmt hierbei übrigens die Moleküle als absolut elastische Kugeln an. Es ist aber leicht einzusehen, daß nur ein *Schwanken um* den wahrscheinlichsten Zustand eintreten kann, während dieser selbst *nur vorübergehend einmal* streng erreicht werden kann.

Wir wollen uns das an einem Urnenbeispiele näher veranschaulichen. Eine Urne enthalte 100 000 weiße und 200 000 schwarze Kugeln. Die wahrscheinlichste Verteilung bei 300 000 Zügen mit Zurücklegen ist die, daß 100 000 mal eine weiße, 200 000 mal eine schwarze Kugel erschienen ist; aber es ist äußerst unwahrscheinlich („physisch unmöglich"), daß diese

Zahlen *genau* stimmen. Dagegen ist es nahezu sicher (W. fast = 1), daß die Zahl der weißen Kugeln bei wirklicher Ausführung zwischen 90000 und 110000 liegt; ja in Wirklichkeit würden auch bei *sehr vielen* Reihen von je 300000 Zügen die Zahlen fast immer innerhalb noch viel engerer Grenzen liegen. Nehmen wir aber an, daß ruchlose Mathematiker dazu verdammt würden, in der Hölle in alle Ewigkeit solche Ziehungen anzustellen, so würde schließlich, vielleicht nach Ablauf von 10 hoch so und soviel Jahren, einmal eine Ziehungsreihe von 300000 Zügen stattfinden, die *lauter weiße* Kugeln ergäbe. Aber schon die nächste Reihe würde wieder ein sehr annähernd normales Ergebnis (rund 100000mal weiß) zeitigen.

Genau die gleichen Überlegungen gelten also auch für die Abweichungen der einzelnen Moleküle vom Mittel der Geschwindigkeiten und Weglängen. Das eben behandelte Beispiel wird uns später noch recht nützlich sein; da der Gegenstand etwas schwierig ist, wollen wir noch einige weitere Erläuterungen geben. Daß sich sehr große Geschwindigkeiten nicht lange erhalten werden, ist bereits gesagt; und doch wird von Zeit zu Zeit immer wieder einmal der Fall eintreten, daß die Geschwindigkeit eines bestimmten Moleküls durch mehrfache Stöße ständig bis auf einen sehr hohen Wert gesteigert wird. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Stoße eine Geschwindigkeits*zuwachs* zu erhalten, ist offenbar *im Mittel einhalb*; da $2^{10} = 1024$ ist, wird es also unter 100000 Fällen etwa 100 mal sich ereignen, daß ein Molekül bei 10 aufeinanderfolgenden Stößen stets an Geschwindigkeit zunimmt. Wir erkennen nun auch, daß und weshalb es ein recht *unwahrscheinlicher* Zustand ist, daß *alle* Moleküle *gleiche* Geschwindigkeit besitzen: nehmen wir das für einen Augenblick an, so werden die Zusammenstöße diesen Zustand sofort ändern, und es ist so gut wie ausgeschlossen, daß – außer nach Verlauf äußerst langer Zeiten – die Stöße *so* wirken, daß in einem Moment alle Moleküle wiederum genau dieselbe Geschwindigkeit besitzen!

§ 7. Stoneysche Lehre vom Verluste der Atmosphäre der Himmelskörper. Man kann nun beweisen, daß ein Körper, der eine Geschwindigkeit von > 11 km in der Sekunde hat, von der Erde nicht mehr zurückgehalten werden kann, falls ihn die *Richtung* seiner Geschwindigkeit von der Erde wegführt. An der „Grenze der Atmosphäre“ muß also jedes Luftmolekül, das zufällig über 11 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$ (dies die übliche Schreibweise) Geschwindigkeit erlangt hat, auf Nimmerwiedersehen in den Weltraum enteilen, wenn es durch keinen Zusammenstoß mit einem andern weder Richtung noch Größe seiner Geschwindigkeit ändern kann. Findet also kein genügender Ersatz statt, so muß die Erde ihre Atmosphäre allmählich verlieren. Diese Lehre von der Zerstreuung der Gase eines Planeten in den Weltraum gilt ganz allgemein. Die Erde hat nun noch tätige Vulkane; die bei der allmählichen *Entgasung des Erdkörpers* infolge seiner Abkühlung freiwerdenden Gase ersetzen den Verlust etwa. Ein Himmelskörper mit völlig fester Rinde wie der Mond muß also seine Atmosphäre schließlich fast *ganz* verlieren[1]: das ist auch in der Tat der Fall. Als der Mond noch tätige Vulkane hatte, hat er jedenfalls *vorübergehend* eine der jetzigen Erdatmosphäre ähnliche Lufthülle besessen. – Ebenso hat man Grund anzunehmen, daß auf dem *Mars* die sehr dünne Atmosphäre vorwiegend aus der schwerbeweglichen *Kohlensäure* (und wenig Wasserdampf) besteht, die auch wegen der tieferen Temperatur weniger leicht entweichen kann.

§ 8. **Diffusion. Nichtumkehrbarkeit.** Da die meisten Gase in dünnen Schichten durchsichtig sind, kann man ihre Mischung mit dem Auge nicht direkt wahrnehmen. Wohl aber kann man es bei mischbaren Flüssigkeiten. Nicht alle Flüssigkeiten lassen sich mischen; manche, wie Petroleum und Wasser, Wasser und Quecksilber, (so gut wie) gar nicht, andere (Wasser und Äther) nur in bestimmten Mengenverhältnissen (eutektische Mischungen, besonders bei Eruptivgesteinen!), viele aber, z. B. Wasser und rote Tinte, in beliebigem Verhältnis. Gießt man langsam Wasser auf rote Tinte, so bleibt beides zunächst getrennt, allmählich aber, bei Schütteln viel schneller, *vermischen* sich die beiden Flüs-

1) Man hat indes Grund zu der Annahme, daß der ganze Bereich des Sonnensystems mit allerdings äußerst stark verdünnten Gasen erfüllt ist: die Planetenatmosphären sind als örtliche Verdichtungen, entsprechend der Anziehungskraft des Planeten, aufzufassen, und so wird auch der Mond eine gewisse, sehr dünne Atmosphäre besitzen.

sigkeiten zu einer *einheitlichen*, gleichförmigen Mischung von überall gleicher Konzentration. Dieser „wahrscheinlichste" Zustand stellt sich, wie gesagt, wenn auch nur langsam, von selbst, d. h. *ohne Zufuhr fremder Energie* ein. Ist er aber eingetreten, so kann man ihn nur durch Zuführung *weiterer* Energie wieder rückgängig machen, etwa, indem man durch Erhitzen, also Zufuhr von Wärmeenergie, das Wasser verdampfen läßt. Man bezeichnet daher die *Diffusion* (Vermischung) als einen *nicht umkehrbaren Vorgang* (irreversibeln Prozeß). Mit Gasen verhält es sich ganz entsprechend, nur daß sich *alle* Gase vermischen, und, der leichteren Beweglichkeit ihrer Teilchen entsprechend, in viel kürzerer Zeit. Doch nicht augenblicklich: man kann die gegen Luft schwere *Kohlensäure* geradezu aus einem Gefäße in ein anderes *gießen*, wobei man sich zur Sichtbarmachung des Vorgangs den Umstand zunutze macht, daß ein brennender Span in Kohlensäure erlischt.

Wir wollen den Vorgang der Diffusion noch an einem Beispiele erläutern. Wir benutzen diesmal eine um ihre Achse drehbare *Trommel* als Urne und füllen sie zunächst fast zur Hälfte mit weißen Kugeln; dann legen wir gleichviel schwarze darauf, daß noch soviel Platz bleibt, daß sich die Kugeln bequem verschieben können. (Dieser Zustand entspricht also den Gasen oder den Flüssigkeiten *vor* der Vermischung). Nun *drehen* wir die Trommel stetig; was wird geschehen? Offenbar werden sich die Kugeln mehr und mehr mischen; der „sehr unwahrscheinliche" Anfangszustand wird in immer wahrscheinlichere übergehen. Nach „hinreichend langer" Zeit wird die Mischung *so* sein, daß beim Anhalten der Trommel und beliebigem Herausgreifen einer Anzahl von Kugeln *stets annähernd* ebensoviele weiße wie schwarze erhalten werden. Und das wird „im allgemeinen" so bleiben; die ursprüngliche Verteilung wird nie (nie? vgl. § 6) wieder eintreten: der *Vorgang ist nicht umkehrbar* (es sei denn durch neue Energiezufuhr; im Bilde, wenn wir die Kugeln wieder sortieren).

2. WÄRMELEHRE

§ 1. Wärme = Bewegung. Bis vor 100 Jahren hielt man allgemein die Wärme für einen Stoff (so noch Carnot); Ausdrücke wie „freie" und „gebundene" Wärme legen noch davon Zeugnis ab. Jetzt erklärt man sie als Bewegung, also als eine Energieart „kinetischer Natur". Es ist bei den Gasen – streng nur bei einatomigen idealen Gasen – die Temperatur, aber vom „absoluten Nullpunkte" – 273^0 C. aus gemessen[1]), der Quadratwurzel der mittleren Geschwindigkeit direkt proportional. Bei Flüssigkeiten und festen Körpern ist es grundsätzlich ähnlich; nur bleiben i. a. die Moleküle, wohl immer zu *Verbänden* von beträchtlicher Molekülanzahl vereinigt, in der Nähe eines „mittleren Ortes"; die vereinzelte Loslösung wird als *Verdunstung* bezeichnet. Ebenso wie der Körper oberflächlich Moleküle abgibt, nimmt er solche auch aus der Umgebung auf, so daß er eine Art „verdünnter" Lösung der Körper seiner Umgebung wird, aus deren Zusammenhang man geradezu seine *Vorgeschichte* erkennen könnte. Wenn z. B. eine Flasche destillierten Wassers die großen Universitätsferien über aufbewahrt wird, ist dies Wasser für feinste Untersuchungen nicht mehr brauchbar, weil es *zu viel Glas* aufgelöst hat! Auch *das* ist ein Streben nach einem wahrscheinlicheren Zustande. Eine Stahlklinge werde in einen Holzstiel gesteckt; das gibt einen *unstetigen* Übergang zwischen Holz und Stahl, aber im Laufe der Zeit dringen von jedem Stoffe Teilchen in den andern und bilden so eine, natürlich sehr dünne, *vermittelnde* Schicht: „natura non facit saltum". Völlig durchsetzen kann sich diese Tendenz nur bei den *Gasen*; man nennt sie dort Diffusion; hierüber ist im letzten § des vorigen Kapitels gesprochen worden.

§ 2. **Wärmegleichgewicht. Entropiegesetz.** Es ist eine allbekannte Tatsache, daß zwei Körper von verschiedener Temperatur, die miteinander in Berührung gebracht werden, ihre Wärme ausgleichen, und zwar so, daß der kältere wärmer, der wärmere kälter wird, bis beide genau die gleiche Temperatur erreicht haben. Daß bei diesem *ohne äußere* Einwirkung vor sich gehenden Austausche die Wärme stets vom *wärmeren zum kälteren* Körper übergeht, ist eine äußerst wichtige Tatsache, so alltäglich sie ist, und so „selbstverständlich" sie erscheinen mag. Denn man sieht sofort, daß es sich hier um einen „nicht umkehrbaren" Vorgang handelt: in jedem *endlichen, in sich abgeschlossenen* System von Körpern ist

1) Die sog. „absolute Temperatur".

der wahrscheinlichste Zustand, daß alle dieselbe Temperatur haben, und dieser Zustand ändert sich „von selbst" *nicht*, nachdem er einmal eingetreten ist.

Man bezeichnet nun die Wärmemenge, die ein Körper erhält oder abgibt, geteilt durch seine absolute Temperatur[1]) (§ 1), als *Entropie*zu- oder abnahme. In unserem Falle der Berührung zweier ungleich warmer Körper (unter Vernachlässigung der beiderseitigen Ausstrahlung) gibt zwar der wärmere Körper mit der abs. Temp. T genau dieselbe Wärmemenge W ab, die der kältere mit der abs. Temp. t empfängt, aber dessen Entropiezunahme $+\frac{W}{t}$ ist größer als die Entropieabnahme $-\frac{W}{T}$ des wärmeren, und die Gesamtentropieänderung unseres „Systems", $\frac{W}{t}-\frac{W}{T}$, ist somit *stets positiv*. Dies Gesetz von der Zunahme der Entropie abgeschlossener Systeme heißt auch „*zweiter Hauptsatz der Wärmelehre*": es sagt über den *Verlauf* der Energieänderungen etwas aus, während der „erste Hauptsatz", das Energiegesetz, nur die Konstanz der Energie festlegt, ohne über ihre Änderungen etwas anzugeben.

§ 3. **Wärmetod der Welt. Zerstreuung oder Entwertung der Energie.** Wenn wir die „ganze Welt" betrachten, so ist außer ihr kein Körper mehr da, der neue Energie zuführen könnte. Nach dem Schlusse des vorigen § erhalten wir also den Satz von Clausius:

Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu; das Weltall nähert sich stetig dem Zustande des Temperaturgleichgewichts.

Unsere Betrachtung ist indes noch unvollständig. Wärme ist ja nur *eine* Form der Energie. Es können sich aber auch andere Energieformen in Wärme umsetzen; so verlaufen chemische Prozesse oft unter sehr starker Wärmeentbindung. Auch diese Wärme gleicht sich natürlich aus. Bei elektrischen Strömen entsteht Joulesche Wärme, bei mechanischen Vorgängen, die sonst umkehrbar wären, *Reibungswärme*; kurz bei *jeder* Energieumwandlung und -übertragung entsteht

1) Es sei zur Vereinfachung angenommen, daß T sich dabei nicht wesentlich ändert. Andernfalls ist näherungsweise eine mittlere Temperatur anzunehmen.

Wärme, die sich im Raume zerstreut.[1]) Die *Erhaltung* der Energie bleibt dabei völlig gewahrt. Aber die sog. freie oder nutzbare Energie wird immer kleiner. Denn die Wärmeenergie eines Körpers, der gleiche Temperatur wie seine Umgebung hat, ist „entwertet": sie kann *nicht* mehr in andere Energieformen umgesetzt werden. Das ist es, was Lord Kelvin (früher: Sir William Thomson, † 1908) als „Zerstreuung der Energie" bezeichnete, und was dem Wesen nach mit dem eingangs dieses § angeführten Clausiusschen Satze identisch ist. Schließlich würde es im Weltall keine andere Energieform mehr geben als überall gleichmäßig verteilte Wärme; das wäre der „wahrscheinlichste Zustand des Weltalls". Freilich würde er erst in unendlich langer Zeit *gänzlich* verwirklicht; aber die Welt besteht ja schon (nach dem Satze des mangelnden Grundes) unendlich lange, und doch ist der *Wärmetod* noch *nicht* eingetreten.

§ 4. **Brownsche Bewegungen.** Viele Physiker wollten deshalb das Entropiegesetz nicht als streng gültig ansehen. Die Brownschen „Wimmelbewegungen" äußerst kleiner Körperchen, die in einer Flüssigkeit schweben, sollten dartun, daß man schon im Mikroskop beobachten könne, wie bei sehr kleinen Teilchen manchmal Bewegung in Wärme, manchmal Wärme in Bewegung übergeht, natürlich bei stets gleichbleibender Energie, aber ständig, umkehrbar, dem Entropiegesetze zum Trotz. Daß sich Bewegung in die „niedere Energieform" Wärme umsetzt, wird allgemein zugegeben; das umgekehrte erklärt man so: *große* in der Flüssigkeit enthaltene Teilchen werden von zahlreichen auf Wärmebewegung zurückzuführenden Stößen der Flüssigkeitsmoleküle auf allen Seiten getroffen, so daß sich die Wirkung der Stöße so gut wie völlig aufhebt. Bei *sehr kleinen* Teilchen aber kann diese Ausgleichung *nicht* stattfinden, sie erhalten eine sichtbare Geschwindigkeit in bestimmter Richtung (aus der sie gerade von „zu wenig" Flüssigkeitsteilchen gestoßen werden), d. h.

---

1) Wie die Wärme verhält sich die Energie der Lage (potentielle E.): Das Wasser strömt von selbst nur bergab, der Stein fällt abwärts. – Elektrizitäten verschiedener Spannung streben nach Ausgleichung (Blitz!). In wissenschaftlicher Ausdrucksweise: „Energie geht stets vom höheren zum tieferen Potential über".

es wird Wärme in Bewegungsenergie, in die höhere Energieform, übergesetzt.

Übrigens widerspricht diese Auffassung dem Entropiegesetze eigentlich gar nicht, wenn man seine wahre Bedeutung in der Herbeiführung des wahrscheinlichsten Zustandes sieht (vgl. unten § 13)! Wir wissen ja, um unsere oft gebrauchten Urnen wieder einmal zum Vergleiche heranzuziehen: wenn wir aus einer Urne mit gleichviel weißen und schwarzen Kugeln aufs Geratewohl 10 herausgreifen, werden durchaus nicht immer 5 weiß und 5 schwarz sein, sondern auch einmal 6 und 4 oder 9 und 1. Um das Bild zu verlassen: die Brownschen Bewegungen zeigen, daß *im kleinen* die Umkehrbarkeit von *im großen nicht* umkehrbaren Vorgängen (Übergang von Bewegung in Wärme) möglich ist.

3. KOSMOGONIE

§ 1. **Ablehnung der Lehre vom Wärmetod.** Wie schon oben erwähnt, erhebt sich der Clausiusschen Lehre vom Wärmetod der Welt gegenüber sofort der Einwand: weshalb ist er denn nicht schon eingetreten? Manche haben darin sogar einen Beweis dafür sehen wollen, daß die Welt vor zwar sehr langer, aber immerhin endlicher Zeit von Gott geschaffen sei. In diesem Fall wäre der Einwand natürlich hinfällig. Aber es muß betont werden, daß wir garnicht berechtigt sind, unsere auf begrenztem Gebiete gefundenen Erfahrungen auf das unendliche Weltall auszudehnen! Extrapolationen werden um so unsicherer, in je größere räumliche und zeitliche Entfernung von uns sie sich erstrecken.

§ 2. **Boltzmannsches H-Theorem.** Am schärfsten und tiefsten hat Ludwig Boltzmann die Frage behandelt. Auch er nimmt, teilweise in Anlehnung an Gibbs, die W.-R. zu Hilfe. — Mechanische Bewegung kann *restlos* in andere Energieformen, auch in Wärme, übergeführt werden; sie verhält sich wie eine Wärmemenge eines Körpers von unendlich hoher Temperatur. Das ist aber ein sehr „unwahrscheinlicher" Zustand.[1]) Es gelang Boltzmann, die Entropie direkt einer Wahrscheinlich-

1) Denn, von der Wärmebewegung abgesehen, haben *alle* Moleküle eines bewegten Körpers *genau gleich* große und gleich gerichtete Geschwindigkeit.

keit proportional zu setzen, so daß der Clausiussche Satz in Boltzmannscher Fassung lautet: „Die Welt strebt einem immer wahrscheinlicheren Zustande zu“. Aber dabei bleiben wir nicht stehen. Der Einfachheit halber wollen wir unsere folgende Überlegung nur für gasförmige Körper durchführen. Hier ist ja die Sache sehr einfach, da die Wärme gleich der Bewegungsenergie der Moleküle ist. Nun haben wir bereits gesehen, daß ein unwahrscheinlicher Zustand die *Neigung* hat, schließlich in den wahrscheinlichsten überzugehen, diesen aber nie ganz zu erreichen, sondern um ihn herum zu schwanken (oszillieren). Die Abweichungen sind *im allgemeinen klein*; wenn wir aber nur lange genug warten, treten schließlich auch einmal *sehr große* auf. Das, auf das Universum angewandt, ist das sog. „Boltzmannsche H-Theorem“.

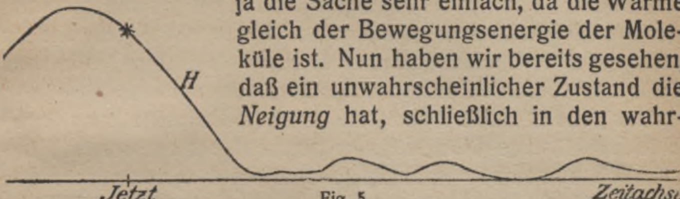


Fig. 5.

Die beistehende Kurve (Fig. 5) gibt ein Bild der Größe *H*, welche die Abweichung des jeweiligen Zustandes vom wahrscheinlichsten darstellt. Augenblicklich ist die Welt „zufälligerweise“ in einem „ungeheuer unwahrscheinlichen“ Zustand; im allgemeinen verläuft *H* in der Zeit *sehr dicht an der Nulllinie*, nur einzelne Buckel erheben sich nach sehr langen Zeiten, um so seltener, je höher sie sind. Die Zeiten *zwischen* den *merklichen* Erhebungen sind als *sehr groß* im Vergleich zu den Zeiten des *Bestehens* dieser Buckel anzusehen. Wie Dornröschen im Waldesschlosse schlummert (nach Boltzmann!) die Welt äonenlang — man denkt unwillkürlich an den indischen Brahma — aber ein ewiges Wesen (etwa der „ewigjunge“ Chidher aus 1001 Nacht), für das eine Million unserer Jahre gleich einer billionstel Sekunde wäre, würde mit Staunen sehen, daß nach sehr langer Zeit, während der die Welt „wie tot“ dagelegen hätte, sich schließlich einmal das Universum in einem *noch* viel unwahrscheinlicheren Zustande als dem jetzigen befände!

§ 3. Maxwellscher Dämon. J. Cl. Maxwell, der scharfsinnige Begründer der kinetischen Gastheorie, dachte sich folgendes aus, um zu zeigen, daß die Nichtumkehrbarkeit von

Vorgängen wie Diffusion und Wärmeausgleichung keine absolute sei. Er nahm ein durch eine durchlöcherte Wand in zwei Abteilungen geteiltes Gefäß an; in dem einen sollte ein Gas sein, die Öffnung sollte ein „Dämon" nach Belieben (ohne Energieaufwand) öffnen oder schließen können. Wenn nun der Dämon jedes Molekül mit *größerer* als der Durchschnittsgeschwindigkeit, also ein „zu warmes" hindurchließe, die andern aber nicht, so könnte er durch diese Auslese das Gas in zwei Teile mit verschiedener Temperatur trennen!

Das scheint bloße Phantasie. Aber die Diffusion kann durch halbdurchlässige Wände („semipermeable Membranen") tatsächlich teilweise rückgängig gemacht werden, und wir werden gleich sehen, wie nach der Auffassung von Arrhenius die Maxwellsche Fiktion in der Sternenwelt tatsächlich in gewisser Art verwirklicht wird.

§ 4. **Zusammensetzung des uns sichtbaren Weltalls.** Während bisher nicht wenige Astronomen annahmen, daß alle unseren Fernröhren erreichbaren Gebilde, Sonnen wie Nebel, unserem Milchstraßensystem angehörten, daß also wenigstens das *für uns zugängliche* Universum von *endlicher*, annähernd meßbarer Ausdehnung sei, vertraten andere, z. B. Scheiner, von jeher die Ansicht, daß die *Spiralnebel* unserm Milchstraßensystem gleichwertige Gebilde darstellten, worauf besonders ihr Spektrum hindeutete. Nach jüngst, mitten im Weltkrieg, ausgeführten Untersuchungen amerikanischer und deutscher Astronomen scheint die letztere Ansicht nunmehr als ziemlich *gesichert* angesehen werden zu dürfen, und es ergibt sich ferner die überraschende Tatsache, daß unser Milchstraßensystem gegen die Spiralnebel eine außerordentlich große relative Bewegung von mehreren 100 km in der Sekunde besitzt. Da nun auch die Entfernung dieser Spiralnebel, bzw. der uns nächsten, wenigstens der Größenordnung nach bekannt ist, scheinen doch recht „große" Teile der Welt sich in „sehr unwahrscheinlichen" Zuständen zu befinden.

§ 5. **Die Ansichten von Arrhenius.** Der berühmte schwedische Gelehrte Sv. Arrhenius nimmt deshalb an, daß der zweite Hauptsatz der Wärmelehre (wie er sich im *kleinen* auf die Brownschen Bewegungen nicht anwenden ließ) innerhalb der ausgedehnten Sternsysteme nicht gültig ist. Er gilt für die Sterne und ihre Planeten, aber nicht für die gasförmigen Nebelflecke. Diese sind mit den im vorigen Paragraphen genannten „Spiralnebeln" nicht zu verwechseln; diese sind ja tatsächlich Sternsysteme, die „echten" Nebel aber, sämtlich innerhalb *unseres* Milchstraßensystems befindlich, bestehen aus ungeheuer ausgedehnten Gasmassen von vielleicht 10^0 abs. Temp. $= - 263^0$ C. und äußerst geringer Dichte, folglich auch sehr kleiner Schwerkraft. Ihr Leuchten ist „Luminiszenz", d. h. es beruht *nicht* auf *hoher* Temperatur des Gebildes. Was geschieht nun, wenn die Strahlen der Fixsterne in diese Nebelflecke dringen? Die bestrahlten Moleküle *erwärmen* sich, d. h. *bewegen* sich *schneller* und enteilen teilweise, von keiner merklichen Anziehungskraft zurückgehalten, in den Weltraum (die Geschwindigkeit, die für die Erde 11 km beträgt, ist hier vielleicht hundertmal kleiner!). Die nichtbestrahlten kalten Moleküle aber bleiben zurück, und so entpuppt sich der „Maxwellsche Dämon" schließlich als die Strahlung der Sterne! Die *äußeren* Teile der Nebelflecke also *kühlen sich* unter *Abnahme der Entropie ab*, geraten also in „unwahrscheinlichere Zustände". Im *Innern* der Nebelflecke aber bilden Meteore und kosmischer Staub Verdichtungskerne für die Moleküle der inneren Schichten; sie zwingen die an ihnen vorbei ziehenden bestrahlten, also warmen, Moleküle, sie (die Meteore) in elliptischen Bahnen zu umkreisen, und allmählich entstehen so Sternhaufen mit vereinzelten Nebelfetzen dazwischen, wie z. B. die *Plejaden* im Sternbilde des Stieres. In diesem Stadium findet aber schon wieder Entropiezunahme statt.

Beim Zusammenstoße von zwei „erloschenen" Sonnen, d. h. Fixsternen, deren äußere Rinde wie die der Erde erkaltet ist, findet das Aufleuchten eines *neuen Sternes* statt; es ist jetzt, seit der Himmel so scharf unter Kontrolle steht, kein seltenes Ereignis mehr. Dabei steigt die Leuchtkraft nachweislich oft in wenigen Stunden auf das Hunderttausendfache, vermutlich oft noch viel mehr. Bei dem Zusammenprall werden die noch heißen Gase des Innern der Sterne frei und eilen weit hinaus in den Weltraum, so daß der neue Stern schließlich zum *Nebelfleck* wird. So ist der Kreislauf geschlossen.

Man kann diese geistvolle Lehre von Arrhenius (vgl. seine Bücher über „das Werden der Welten"), in der sicher ein großer Wahrheitsgehalt steckt, mögen auch manche Einzelheiten anfechtbar sein, dahin deuten, daß die Größe der Boltzmannschen *H*-Funktion nicht nur zeitlich, sondern auch örtlich stark wechselt: stehen *wir* auf dem *absteigenden* Aste einer Erhebung, so die Nebelflecke auf einem aufsteigenden. Unsere nächste Umgebung geht ruhig und friedlich immer wahrscheinlicheren Zuständen entgegen; anderswo aber findet das umgekehrte statt. Und so bleibt auch nach Arrhenius die *Entwickelung des Weltalls : ein Wahrscheinlichkeitsproblem.*

SCHLUSSWORT

Kehren wir von unserem Ausflug in das unermeßliche Weltall auf unsere kleine Erde zurück. Dort wie hier spielt „das Gesetz des Zufalls“ seine eigenartige Rolle. — Viele Anwendungsgebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir nur flüchtig gestreift, andere, wie die auf Vererbungslehre[1]), auf die jetzt — leider! — zu so großer Wichtigkeit gelangte Ballistik (Theorie des Schießens), auf die hochbedeutsamen Erscheinungen der Radioaktivität, gar nicht behandelt. Doch auch so wird der Leser dieses Büchleins von der außerordentlich vielseitigen Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine hinreichende Vorstellung bekommen haben, und vielleicht den Anreiz, sich eingehender damit zu befassen.

---

1) Hierüber handelt Math.-phys. Bibl. Bd. 24 von P. Riebesell.

ANTWORTEN ZU DEN FRAGEN IM TEXTE

1. Bei Quecksilberthermometern ist der Raum oberhalb des Quecksilbers (nahezu) luftleer; durch den äußeren Luftdruck wird in diesem Falle bei minderwertigen Glassorten die Kugel allmählich etwas zusammengedrückt.

2. Systematische Fehler können auch bei sehr umfangreichen Beobachtungsreihen noch erhebliche Beträge erreichen, wenn sie lange Zeit in dem gleichen Sinne wirken.

3. W., daß alle Beobachtungen fehlerlos sind, ist $=(1-\frac{1}{4})^7=(\frac{3}{4})^7$, also die W., daß ein Fehler gemacht ist: $1-(\frac{3}{4})^7=\frac{14197}{16384}\sim\frac{7}{8}$.

4. D. F. $=\pm 0{,}13$; $\mu=\pm 0{,}16$. Ihr Verhältnis $=1{,}23:1$.

5. $B=(p_1 B_1+\cdots+p_n B_n):(p_1+\cdots+p_n)$.

6. $\mu=$ Quadratwurzel aus Summe $p_1\,\mu_1{}^2+\cdots$.

7. Der Anteil der Alter von 20—50 Jahren wird relativ abnehmen, wahrscheinlich aber auch der Alter von 0—10 Jahren (weniger Geburten) und über 70 Jahre (wegen der zu schlechten Lebensverhältnisse!).

8. Man rechnet mit den *Logarithmen*, die dann in *arithmetischer* Folge (Progression) fortschreiten.

9. Bei stetigen K.-G. gehören nie zwei Exemplare *genau* zum gleichen Argumentwerte.

10. W., daß ein Schüler mit keinem anderen gleichzeitig Geburtstag hat, $=(1-\frac{1}{365})^{43}$; die verlangte W. ist die komplementäre $1-0{,}889=0{,}111$.

11. Die in Bruchteilen der Einheit ausgedrückte Summenfunktion für einen Arg.wert A ist die W. a posteriori dafür, daß ein Gegenstand des K.-G. zu einem Werte $\leq A$ gehört.

12. Der Wert der Vf. entspricht dem Gewicht.

13. Die Urliste wird in Abständen von je $\frac{1}{2}$ Jahren sekundäre Maxima zeigen.

14. Bildung des m. F., d. F., w. F.

15. Die extrem tiefen Temperaturen entfernen sich weiter vom Mittel als die hohen, sind aber dafür seltener.

16. Durch Division mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen (annähernd).

17. Um den m. F. von 0,32 auf 0,1 zu bringen, ist eine $(3{,}2)^2$ $=10{,}24$ mal so lange Zeit nötig, also etwa 82 Jahre.

LITERATUR

Zum allgemeinen Verständnis:

O. Meißner, Wahrscheinlichkeitsrechnung. I. Teil. Math.-phys. Bibl. Bd. 4.

P. Riebesell, Math. Grundlagen der Variations- und Vererbungslehre. Math.-phys. Bibl. Bd. 24. Dort auch weitere Literaturangaben.

Ferner im besonderen zu Abschnitt:

I. C. F. Gauss, Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. Berlin, 1887, Springer.
F. R. Helmert, Ausgleichungsrechnung 2. Aufl. Leipzig, 1907, Teubner.
J. Kozák, Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung usw. 3 Bde. (2 und 3: Theorie des Schießwesens). Wien und Leipzig, 1907—1910, Fromme.

II. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik. Leipzig, 1906, Teubner.
A. Manes, Grundzüge des Versicherungswesens. Aus Natur und Geisteswelt Bd. 105, 3. Aufl.
A. Loewy, Versicherungsmathematik. Sammlung Göschen.

III. E. Czuber, W.-R. und ihre Anwendunegn. 2. Aufl. Leipzig, 1910, Teubner.
Bruns, W.-R. und Kollektivmaßlehre Leipzig, 1906, Teubner.

IV. Kultur der Gegenwart. Band: Physik. Leipzig, 1914, Teubner.
Sv. Arrhenius, Das Werden der Welten. 2 Bde. Leipzig, 1907, 1909, Akadem. Verlagsgesellschaft.