[S]chubert XXXIII

Allgemeine Formen- und Invariantentheorie

1. Band

Binäre Formen

von

W. Franz Meyer

G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig

685-

28.-Mk

Sammlung Schubert XXXIII

Allgemeine Formen- und Invarianten-theorie

Erster Band

Binäre Formen

Von

W. Fr. Meyer

in Königsberg i. Pr.

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1909

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig

Einleitung.

Man kann wohl behaupten, daß die Kenntnis der Invariantentheorie keine sehr verbreitete ist, obwohl diese Disziplin in viele Gebiete der Mathematik wesentlich eingreift, und auf ihre Bedeutung stets von neuem hingewiesen wird.

Der Hauptgrund für diese auffällige Erscheinung dürfte meines Erachtens darin liegen, daß bei der historischen Entwicklung der Invariantentheorie die verschiedenartigsten Methoden mitgewirkt haben: algebraische und zahlentheoretische, wie geometrische; funktionentheoretische und gruppentheoretische, reale und symbolische, so daß es in der Tat schwierig ist, den inneren Zusammenhang der auf so verschiedenen Wegen gewonnenen Ergebnisse zu erkennen.

Das Werk, dessen erster Band hiermit vorliegt, ist wesentlich elementar gehalten. Der erste, vorbereitende, Abschnitt entwickelt an der Hand der binären quadratischen und bilinearen Formen bei möglichst wenigen Voraussetzungen die ersten Grundbegriffe der Theorie, mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen auf Geometrie. Der zweite Abschnitt stellt in den Mittelpunkt des Ganzen, wie er auch im zweiten Bande festgehalten werden soll, die Differentialgleichungen für invariante Bildungen binärer Formen, unter Zugrundelegung der Lehre von den Fundamentalsubstitutionen. Im besonderen seien die Ausdehnungen auf unabhängige Substitutionen mehrerer Variabeln betont.

Als Anwendungen gewisser transzendenter Kovarianten dienen die Reihenentwicklungen elliptischer und verwandter Integrale, sowie des Logarithmus einer ganzen Funktion, aus der die Waringschen Potenzsummenformeln hergeleitet werden.

Auch die Symbolik — die im übrigen dem Plane des Werkes gemäß nur anhangsweise behandelt wird — wird dem Gesichtspunkte der Differentialgleichungen untergeordnet.

Der zweite Band wird die Weiterführung auf ternäre und höhere Formen, nebst den wichtigsten Anwendungen, bringen.

Auf eine Auswahl geeigneter Aufgaben, die vielfach Anwendungen bringen, für die im Texte kein Raum war, und die, wie ich hoffe, das Interesse am Gegenstande wesentlich beleben werden, habe ich eine nicht geringe Mühe verwendet.

Das Verzeichnis von Lehrbüchern und Monographien wird manchem weiterstrebenden Leser willkommen sein. Bezüglich der Anwendungen auf die verschiedensten Gebiete der Algebra und Analysis sei besonders auf das Werk von Scheibner hingewiesen, bezüglich der Symbolik auf das Werk von Gordan-Kerschensteiner, sowie hinsichtlich der Anwendungen der Symbolik auf Geometrie auf das Werk von Clebsch-Lindemann.

Königsberg i. Pr., Anfang Mai 1909.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel III.

Bilineare Formen. Differentialgleichungen der Invarianten bilinearer und quadratischer Formen.

Anhang.

Zweiter Abschnitt.

Differentialgleichungen für invariante Bildungen binärer Formen.

Kapitel I.

Charakteristische Differentialgleichungen der Invarianz gegenüber Schiebungen und Streckungen.

Kapitel II.

Seminvarianz.

Kapitel III.

Erweiterungen des Invariantenbegriffes. Transzendente Kovarianten. Die Waringschen Formeln.

Kapitel IV.

Die Invarianten als symmetrische Funktionen der Wurzeln.

Lehrbücher und Monographien.

G. Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra, Dublin 1. ed. 1859; 4. ed. 1885. — Deutsch bearbeitet von W. Fiedler: Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, Leipzig, 1. Aufl. 1863; 2. Aufl. 1877.

F. Brioschi, Teorica dei Covarianti, Roma 1861 (Binäre Formen).

W. Fiedler, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862.

A. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872.

Faà di Bruno, Théorie des formes binaires, Turin 1876. — Deutsch bearbeitet von Th. Walter, mit Unterstützung von M. Noether, Einleitung in die Theorie der binären Formen, Leipzig 1881.

P. Gordan, Über das Formensystem der binären Formen, Univ.-Programm Erlangen, Leipzig 1875.

P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von G. Kerschensteiner, 1. Determinanten; 2. Binäre Formen, Leipzig 1885, 1887.

A. Capelli, Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche, Rom. Linc. Mem. 12 (1882).

A. Capelli, Algebra complementare, 2. ed., Napoli 1898.

A. Capelli, Lezioni sulla teoria delle forme algebriche, Napoli 1902.

E. Study, Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig 1889.

J. Deruyts, Essai d'une théorie générale des formes algébriques, Bruxelles 1891 (Seminvarianten).

W. Fr. Meyer, Bericht über die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie, Deutsche Math.-Vereinigung, 1, Berlin 1892; französische (verkürzte) Ausgabe von H. Fehr, Paris 1897; italienische Ausgabe von G. Vivanti, Napoli 1899.

W. Fr. Meyer, Artikel „Invariantentheorie" in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften, I B 2, Leipzig 1899.

E. B. Elliott, An Introduction to the algebra of Quantics, Oxford 1895.

P. Muth, Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie, Leipzig 1895.

P. Muth, Theorie der Elementarteiler, Leipzig 1899 (Äquivalenz der bilinearen und quadratischen Formen).

H. Andoyer, Theorie des Formes. T. I, Paris 1900.
J. A. Grace and A. Young, Algebra of Invariants, Cambridge 1903.
W. Scheibner, Beiträge zur Teorie der linearen Transformationen, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie, Leipzig 1907.
Vgl. ferner noch die einschlägigen Kapitel in A. Clebsch und F. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, Leipzig 1875/76, französisch von A. Benoist, Paris 1879/83; Bd. II[1], Leipzig 1891; 2. Auflage von Bd. I[1], Leipzig 1908; S. Lie und G. Scheffers, Vorlesungen über Continuierliche Gruppen, Leipzig 1903; H. Weber, Höhere Algebra, Braunschweig 1895/96, Bd. I, II; 2. Auflage 1898; französisch von J. Gries, Paris 1898.

Verzeichnis von Druckfehlern.

S. 29. In Formel (XII) ist dem ersten Gliede rechterhand das negative Vorzeichen vorzusetzen.

S. 30. In Formel (XII′) ist rechterhand der erste Faktor D_f zu ersetzen durch D_F, und der Teilnenner D_F ist beidemal mit dem Faktor 2 zu versehen.

S. 56. In Zeile 3 ist hinter „dritte" ein Komma einzuschieben.

S. 57. In der vorletzten Zeile vor Formel (6) ist das Wort „Aufgaben" besser durch „Gruppen" zu ersetzen.

S. 109. In der viertletzten Zeile von Satz I ist statt „Variabeln" zu lesen „Variable". — In der letzten Zeile vor Formel (3) ist der Punkt durch einen Doppelpunkt (:) zu ersetzen.

S. 112. In der dritten Zeile von Satz III′ ist das Wort „Rüken" durch „Rücken" zu ersetzen. — In Zeile 4 v. u. ist zwischen den Worten „und" und „dann" der Buchstabe λ einzuschieben.

S. 114. In der Anmerkung ist vor dem Punkte einzuschalten: , wo $\left\{\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right. = a \pm i\,b$ gesetzt ist.

S. 161. In der zweiten Zeile der Formel (7) ist statt α_{12} zu lesen α_{22}.

S. 165. In der Anmerkung, erste Zeile hinter Formel (18″), ist hinter dem Worte „durch" einzuschalten: „die kogredienten".

S. 166, Mitte der Seite: In der zweiten Zeile der Formel für $H_{fg}^2 - 4\,D_f\,D_g$ fehlt das Zeichen der geschweiften Klammer. — In der ersten Zeile hinter Formel (21a) ist das Wort „ersten" zu ersetzen durch „zweiten".

S. 173. In der ersten Zeile des zweiten Absatzes hat es statt „§§ 13, 15" zu heißen: „§ 15".

S. 176, Zeile 2. Auf der rechten Seite der Formel für Q ist der erste Faktor x_1^2 zu ersetzen durch x_1^3.

S. 177, Mitte der Seite. In der zweiten Zeile der Formel für Q ist hinter der geschweiften Klammer hinzuzufügen: $+\dots$

S. 179. In der zweiten Zeile von Aufgabe 4 ist vor dem Summenzeichen einzuschalten: $\dots\equiv$.

Erster Abschnitt.

Quadratische und bilineare Formen und deren Invarianten.

Kapitel I.

Quadratische Gleichungen und Formen.

§ 1. Die elementare Auflösung der quadratischen Gleichung als Eigenschaft der quadratischen Form.

Die „elementare Auflösung“ einer quadratischen Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$ in einer „Unbekannten“ x wird durchsichtiger und führt weiter, wenn man sie als eine besondere Eigenschaft von der linken Seite der Gleichung

$$(1) \qquad f(x) \equiv ax^2 + 2bx + c$$

auffaßt; die „Koeffizienten“ a, b, c seien zunächst als reelle Größen gegeben.

Hier spielt x allgemeiner die Rolle einer „Variabeln“: f heißt in diesem Sinne eine quadratische „Form“ von x. Für alle Werte der Größen x, a, b, c gilt die Identität:

$$(\mathrm{I}) \qquad a f(x) \equiv (ax + b)^2 + (ac - b^2)\,.$$

Indem vorderhand $a \neq 0$ angenommen wird, unterscheidet man zwei Hauptfälle, je nachdem der Ausdruck $D_f \equiv D = ac - b^2$ — die „Diskriminante“ der Form f — einen negativen oder positiven Wert besitzt.

Im ersten Hauptfalle, $D < 0$, setze man:

$$(2\mathrm{a}) \qquad -D = b^2 - ac = \varDelta^2\,, \qquad \varDelta = +\sqrt{b^2 - ac}\,.$$

Dann zerlegt sich die rechte Seite von (I), als Differenz zweier Quadrate $(ax+b)^2 - \Delta^2$ in das Produkt:

$$\text{(IIa)} \qquad a f(x) \equiv (ax + b - \Delta)(ax + b + \Delta) .$$

Frägt man jetzt nach den „Wurzeln" der Form f, oder, wie man gewöhnlich sagt, der Gleichung $f = 0$, also nach denjenigen Werten der Variabeln x, für die im besonderen die Form f den Wert Null annimmt, so tritt dieser Fall dann und nur dann ein, wenn irgend einer der beiden Faktoren auf der rechten Seite von (IIa) verschwindet. Man gelangt so zu den „Auflösungsformeln" für die Wurzeln x_1, x_2:

$$\text{(3a)} \qquad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{-b \pm \Delta}{a} .$$

Im zweiten Hauptfalle $D > 0$ setze man:

$$\text{(2b)} \qquad D = ac - b^2 = \Delta^2 , \qquad \Delta = + \sqrt{ac - b^2} ,$$

dann nimmt die rechte Seite von (I) die Gestalt der Summe zweier Quadrate an:

$$\text{(IIb)} \qquad a f(x) \equiv (ax + b)^2 + \Delta^2 .$$

Um hier eine analoge Zerlegung der rechten Seite zu erzielen, wie im ersten Falle, hat man seit Gauß*) das Rechenzeichen $i = \sqrt{-1}$, die „imaginäre Einheit", eingeführt und nachgewiesen, daß „komplexe" Größen von der Gestalt $A + iB$, wo A, B dem bisherigen Gebiet der „reellen" Größen angehören, denselben arithmetischen Grundgesetzen unterliegen wie die reellen Größen. Demgemäß geht (IIb) über in:

$$\text{(IIb}'\text{)} \qquad a f(x) \equiv (ax + b - i\Delta)(ax + b + i\Delta) ,$$

und für die beiden Wurzeln x_1, x_2 von f ergeben sich die „konjugiert komplexen" Werte (die sich nur durch das Vorzeichen von i unterscheiden):

$$\text{(3b)} \qquad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \frac{-b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a} = \frac{-b \pm i\Delta}{a} = -\frac{b}{a} \pm i\frac{\Delta}{a} .$$

*) Vgl. hierüber die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, Art. IA 4 von E. Study: Zur Theorie der komplexen Größen, insbesondere Nr. 2 und 5.

Beide Hauptfälle, $D \lesseqgtr 0$, werden durch den „Übergangs-“ oder „Grenz“fall verbunden, wo die Diskriminante D verschwindet:

$$(2c) \qquad D \equiv ac - b^2 = 0\,.$$

Dann reduziert sich (I) auf

$$(\mathrm{II}c) \qquad a f(x) \equiv (ax + b)^2\,,$$

und f erhält zwei „zusammenfallende“ Wurzeln oder, wie man auch sagt, die „Doppelwurzel“:

$$(3c) \qquad x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}\,.$$

Sämtliche Fälle werden zusammengefaßt durch die Formeln:

$$(\mathrm{II}) \quad a f(x) \equiv (ax + b)^2 + D\,, \qquad (3) \quad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \frac{-b \pm \sqrt{-D}}{a}\,.$$

Man nennt eine derartige ausgezeichnete „Darstellung“ einer Form, wie sie sich für f in (I) darbietet, eine „kanonische“: f erscheint als Aggregat der Quadrate zweier Ausdrücke, von denen der eine linear in x ist, während der andere hier im besonderen x gar nicht enthält oder, wie man sagt, eine „Konstante“ ist.

Das Wesentliche des Ergebnisses wird ausgesprochen durch:

Satz I. „Der elementaren Auflösung der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ liegt die kanonische Darstellung (I) der zugehörigen Form $f(x)$ zugrunde, und die ‚Auflösung‘ erscheint nur als eine einzelne Folgerung aus der ‚Darstellung‘.“

Aus den Auflösungsformeln (3) zieht man zwei Folgerungen, die für die Anwendungen (z. B. in der analytischen Geometrie), wie für die weitere Entwicklung der Theorie wichtiger sind als die Auflösung selbst. Einmal erhält man für die Diskriminante D:

$$(4) \qquad D = ac - b^2 = -\frac{a^2}{4}(x_1 - x_2)^2\,.$$

Andererseits prägt sich der Zusammenhang der Wurzeln der Form f mit deren Koeffizienten in den Formeln aus:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \tag{5}$$

Diese Formeln (5) lassen sich in die eine, mit (I) äquivalente Identität zusammenziehen:

$$f(x) \equiv a(x - x_1)(x - x_2), \tag{I'}$$

die die Bedeutung der x_1, x_2 als der Wurzeln von f in Evidenz setzt.

Einige Spezialfälle von Bedeutung bedürfen einer besonderen Erörterung. Für $c = 0$, $b \neq 0$, $a \neq 0$ wird

$$f(x) \equiv a x^2 + 2 b x \equiv x(a x + 2 b) \equiv a x\left(x + \frac{2b}{a}\right).$$

Es ist also die eine der beiden Wurzeln Null, die andere $-\frac{2b}{a}$. Ist überdies noch, für $a \neq 0$, $b = 0$, so wird $f(x) \equiv a x^2$, und f besitzt die Doppelwurzel Null. Endlich kann der singuläre Fall eintreten (wie häufig in der Geometrie), daß alle drei Koeffizienten verschwinden, so daß die Gleichung $f = 0$ für jeden Wert von x erfüllt wird; dies findet sicher statt, wenn man drei verschiedene Wurzeln von f kennt.

Führt man vermöge $x = \frac{1}{\xi}$ die neue Unbekannte ξ ein, so geht $f(x) = 0$ über in die Gleichung $c\xi^2 + 2b\xi + a = 0$ mit den zu x_1, x_2 reziproken Wurzeln $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$. Sind jetzt b und $c \neq 0$, während $\lim a = 0$ sei, d. h. a gegen Null konvergiere, so wird die eine Wurzel von f unendlich groß ($= \infty$), und umgekehrt, während die andere den Wert $-\frac{c}{2b}$ erhält. Ist auch noch $\lim b = 0$, für $c \neq 0$, so wird ∞ zur Doppelwurzel von f. Für $a = 0$, $c = 0$, $b \neq 0$ wird die eine Wurzel Null, die andere ∞.

Diese speziellen Ergebnisse lassen sich auch direkt aus den Auflösungsformeln (3) entnehmen.

In dem zweiten Hauptfalle (3b), wo f zwei komplexe Wurzeln hat, läßt die Auflösung auch eine rein reelle

Auffassung zu, sobald man eben das Gebiet einer reellen Variabeln zu dem zweier solcher erweitert.

Um sowohl reelle wie komplexe Werte von x zu umfassen, setze man von vornherein x in komplexer Gestalt an: $x = \xi + i\eta$ (ξ, η reell). Dann geht die Form $f(x)$ über in:

$$(1') \quad f(x) \equiv f(\xi + i\eta) \equiv [a(\xi^2 - \eta^2) + 2b\xi + c] + i[2\eta(a\xi + b)].$$

Dieser Ausdruck verschwindet für reelle ξ, η, a, b, c dann und nur dann, wenn zugleich

$$(3') \qquad a(\xi^2 - \eta^2) + 2b\xi + c = 0, \qquad \eta(a\xi + b) = 0.$$

Jetzt ist entweder $\eta = 0$, dann unterliegt die reelle Größe $x = \xi$ der Bedingung $f(\xi \equiv a\xi^2 + 2b\xi + c = 0$, die nur für $D \leq 0$ erfüllt sein kann: das ist der obige erste Hauptfall (3a), eventuell der Grenzfall (3c). Oder aber es ist $\eta \neq 0$; dann muß ξ den Wert $-\frac{b}{a}$ annehmen, und setzt man diesen Wert in die erste Gleichung (3′) ein, so ergibt sich für die reelle Größe η der Wert $\frac{\pm\sqrt{ac - b^2}}{a}$: das ist der obige zweite Hauptfall (3b) mit $D > 0$, wo die beiden reellen Lösungspaare ξ, $\pm\eta$ von (3′) wieder in die komplexe Gestalt $\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \xi \pm i\eta$ zusammengezogen sind.

Aufgabe 1. Mittels der Auflösungsformeln (3) sind die Fälle, wo eine der Wurzeln x_1, x_2, resp. jede von beiden, verschwindet oder unendlich groß wird, direkt zu diskutieren.

Aufgabe 2. Stellt man mit Gauß die komplexe Größe $\xi + i\eta$ durch einen Punkt der Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten ξ, η dar, so sind die Gleichungen (3′) geometrisch zu deuten.

Aufgabe 3. Die Auflösung der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ ist auch für den Fall komplexer Koeffizienten a, b, c algebraisch durchzuführen, nebst geometrischer Deutung der bezüglichen, an die Stelle von (3′) tretenden Gleichungen.

§ 2. Fortsetzung. Verallgemeinerung der Auflösung einer quadratischen Gleichung. Darstellung einer quadratischen Form als Aggregat zweier Quadrate von Linearformen. Involution.

Man erweitere den Gedankengang des § 1, daß für $f(x)$ die allgemeine kanonische Darstellung als Aggregat zweier Quadrate von Linearformen gesucht wird:

$$\text{(III)} \qquad f(x) \equiv k_1(x-\alpha_1)^2 + k_2(x-\alpha_2)^2 .$$

Vergleicht man beiderseits die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x, so gelangt man zu drei Relationen zwischen den vier unbekannten Größen k_1, k_2, α_1, α_2; es wird demgemäß noch eine ∞^1-Schar von Darstellungen (III) existieren, in der (I) als partikuläre Lösung enthalten sein muß. Diese drei Relationen:

$$\text{(6)} \quad a = k_1 + k_2 , \qquad -b = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 , \qquad c = k_2\alpha_1^2 + k_2\alpha_2^2$$

fasse man als drei in k_1, k_2 lineare Gleichungen auf. Sollen dieselben zusammen bestehen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Determinante der Koeffizienten der k_1, k_2, 1 verschwindet:

$$\text{(7)} \quad \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} \equiv (\alpha_2-\alpha_1)\{a\,\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1+\alpha_2) + c\} = 0 .$$

Schließt man den Grenzfall $\alpha_1 = \alpha_2$ zunächst aus, so sind gemäß (7) die α_1, α_2 an die Bedingung gebunden:

$$\text{(IV)} \qquad a\,\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1+\alpha_2) + c = 0 .$$

Denkt man sich (IV) erfüllt, so bestimmen sich k_1, k_2 aus irgend zweien der Relationen (6), etwa durch die beiden ersten*):

$$\text{(8)} \qquad k_1 = \frac{a\,\alpha_2 + b}{\alpha_2 - \alpha_1} , \qquad k_2 = \frac{a\,\alpha_1 + b}{\alpha_1 - \alpha_2} .$$

---

*) Drückt man vermöge (5) die a, b, c durch die Wurzeln x_1, x_2 von $f(x)$ aus, so nimmt die Bedingung (IV) die Gestalt an:

$$\text{(IV')} \qquad x_1x_2 + \alpha_1\alpha_2 - \frac{(x_1+x_2)(\alpha_1+\alpha_2)}{2} = 0$$

(s. § 3), aus der hervorgeht, daß die Beziehung der beiden Paare (x_1, x_2), (α_1, α_2) eine gegenseitige ist. Setzt man demgemäß

Damit nimmt die Identität (III) die Gestalt an:

$$\text{(III}'\text{)} \quad f(x) \equiv \frac{(a\alpha_2 + b)(x-\alpha_1)^2 - (a\alpha_1 + b)(x-\alpha_2)^2}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

mit der Bedingung (IV) für α_1, α_2.

In der Tat leitet die Ausführung der rechten Seite von (III′) vermöge (IV) zur Form $f(x)$ zurück:

$$a x^2 + b x - \{a\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1 + \alpha_2)\} = a x^2 + b x + c\,.$$

Zerlegt man, wie bei (II), die rechte Seite von (III′) in ein Produkt, so wird:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} f(x) \equiv \left[(x-\alpha_1)\sqrt{\dfrac{a\alpha_2+b}{\alpha_2-\alpha_1}} - (x-\alpha_2)\sqrt{\dfrac{a\alpha_1+b}{\alpha_2-\alpha_1}}\right] \\ \qquad\quad \left[(x-\alpha_1)\sqrt{\dfrac{a\alpha_2+b}{\alpha_2-\alpha_1}} + (x-\alpha_2)\sqrt{\dfrac{a\alpha_1+b}{\alpha_2-\alpha_1}}\right]. \end{cases}$$

Um die frühere Darstellung (I) als Spezialfall von (III′) zu erkennen, schreibe man (I) in der Gestalt:

$$\text{(I)} \qquad f(x) \equiv a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a}\,.$$

$F(x) \equiv A x^2 + 2 B x + C \equiv A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, so korrespondiert der kanonischen Darstellung (III) die andere:

$$F(x) \equiv \lambda_1(x-x_1)^2 + \lambda_2(x-x_2)^2\,,$$

wo gemäß (8):

$$\lambda_1 = \frac{A x_2 + B}{x_2 - x_1}\,, \quad \lambda_2 = \frac{A x_1 + B}{x_1 - x_2}\,.$$

Im besonderen kann man fragen, wann in (III) k_1 mit k_2 übereinstimmt. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür [außer (IV)] ist, wie (7) lehrt:

$$x_1 + x_2 = \alpha_1 + \alpha_2\,.$$

Dann aber gelten gleichzeitig die Darstellungen:

$$2(x-x_1)(x-x_2) = (x-\alpha_1)^2 + (x-\alpha_2)^2\,,$$

$$2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2\,.$$

Denkt man sich etwa das Paar (x_1, x_2) gegeben, so sind α_1, α_2 die Wurzeln der Form $x^2 - x(x_1 + x_2) + \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$. Ferner ergibt sich:

$$(x_1 - x_2)^2 = -(\alpha_1 - \alpha_2)^2\,,$$

so daß stets, wenn das eine der beiden Paare reell gewählt ist, das andere konjugiert-komplex ausfällt, und umgekehrt.

Soll hier die rechte Seite mit der von (III′) übereinstimmen, so hat man $\alpha_1 = -\frac{b}{a}$ zu nehmen:

(9) $$a\alpha_1 + b = 0 .$$

Einem beliebigen Werte α_1 entspricht nach (IV) für α_2 der Wert:

(10) $$\alpha_2 = -\frac{b\alpha_1 + c}{a\alpha_1 + b} .$$

Mithin wird im Falle (I) $\alpha_2 = \infty$. Behufs Bestätigung setze man die beiden Werte $\alpha_1 = -\frac{b}{a}$, $\alpha_2 = \infty$ in (III′) ein. Das erste Glied rechts in (III′) wird für $\alpha_1 = -\frac{b}{a}$:

(11a) $$\frac{a\alpha_2 + b}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a + \frac{b}{\alpha_2}}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 .$$

Für $\lim \alpha_2 = \infty$ geht in der Tat (11a) über in das erste Glied $a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2$ der rechten Seite von (I). Das zweite Glied der rechten Seite von (III′) wird:

(11b) $$\frac{-a\alpha_1 + b}{\alpha_2 - \alpha_1}(x - \alpha_2)^2 = [-\alpha_2(a\alpha_1 + b)]\left[\frac{\left(\frac{x}{\alpha_2} - 1\right)^2}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right] .$$

Die zweite eckige Klammer rechts nimmt für $\lim \alpha_2 = \infty$ den Grenzwert 1 an, während die erste eckige Klammer wegen (9) zuvörderst in der unbestimmten Form $0 \cdot \infty$ erscheint. Benutzt man aber vor Ausführung des Grenzprozesses die Relation (10), so wird:

(12) $$-\alpha_2(a\alpha_1 + b) = b\alpha_1 + c ,$$

wo die rechte Seite für $\alpha_1 = -\frac{b}{a}$ direkt in $-\frac{b^2 - ac}{a}$, d. i. das zweite Glied der rechten Seite von (I), übergeht.

Die kanonische Darstellung (V) von $f(x)$ liefert die „verallgemeinerte Auflösung“ der Gleichung $f(x) = 0$:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \frac{\alpha_1 \sqrt{a\,\alpha_2 + b} \pm \alpha_2 \sqrt{a\,\alpha_1 + b}}{\sqrt{a\,\alpha_2 + b} \pm \sqrt{a\,\alpha_1 + b}},$$

die zwei „Parameter“ α_1, α_2 mit sich führt, in denen der eine willkürlich wählbar ist, während der andere durch (IV) oder auch durch (10) bestimmt ist.

Bei wirklicher Ausführung der rechten Seite von (VI) fallen die beiden Parameter α_1, α_2 wieder heraus, und man gelangt zu (3) zurück, aber der Form nach sind diese ∞^1 Auflösungen (VI) von (3) und untereinander als verschieden anzusehen.

Drückt man in (VI) α_2 gemäß (IV) durch α_1 aus, so nimmt (VI) die Gestalt mit nur einem Parameter α_1 an:

$$\text{(VI}') \qquad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \frac{\alpha_1 \mp \dfrac{b\,\alpha_1 + c}{\sqrt{-D}}}{1 \pm \dfrac{a\,\alpha_1 + b}{\sqrt{-D}}}.$$

Dieser Darstellung der Wurzeln von f entspricht eine spezifische, für Anwendungen besonders geeignete Fassung der Darstellung (III′) von f. Indem man lieber x' statt α_1 schreibt, werden gemäß (10) die beiden Quadrate in (III):

$$\text{(13a)} \quad \begin{cases} (x - \alpha_1)^2 = (x - x')^2, \\ (x - \alpha_2)^2 = \dfrac{[x(a\,x' + b) + (b\,x' + c)]^2}{(a\,x' + b)^2} = \dfrac{\{a\,x\,x' + b(x + x') + c\}^2}{(a\,x' + b)^2}; \end{cases}$$

ferner berechnen sich die Größen k_1, k_2 in (III) zu:

$$\text{(13b)} \qquad k_1 = \frac{D}{f(x')}, \qquad k_2 = \frac{(a\,x' + b)^2}{f(x')}.$$

Bedient man sich der Abkürzung:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} f(x\,;\,x') \equiv a\,x\,x' + b(x + x') + c \\ \equiv a(a\,x' + b) + (b\,x' + c) \equiv x'(a\,x + b) + (b\,x + c), \end{cases}$$

so nimmt nunmehr die Identität (III′) die durchsichtigere, von Gauß herrührende Gestalt an:

$$\text{(III}'') \qquad f(x)\,f(x') \equiv f^2(x\,;\,x') + D(x - x')^2,$$

wo x und x' die Rolle zweier gleichberechtigter Variabler spielen.

Der Ausdruck $f(x; x')$ (VII) heißt die nach x' (resp. x) genommene **Polare** der Form $f(x)$ [resp. $f(x')$]; sie ist in x und x' „symmetrisch“, d. h. bleibt bei Vertauschung von x mit x' ungeändert und ist in beiden Größen linear oder, wie man sagt, „bilinear“.

Die durch die Gleichung $f(x; x') = 0$ repräsentierte Beziehung zwischen x und x' heißt eine „Involution“, im besonderen die zur Form $f(x)$ „gehörige“ Involution.

Die obige Relation (IV) zwischen den beiden Parametern α_1, α_2

(IV) $$f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$

ist somit die zu f gehörige Involution.

In der Tat sind ja die Wurzeln der beiden auf der rechten Seite von (III″) auftretenden Linearformen nichts anderes als irgend ein Paar der, (IV) genügenden, Werte α_1, α_2.

An die Formeln (III′) und (IV) schließen sich noch zwei weitere Betrachtungen. Einmal gestattet die Gesamtheit der, (IV) genügenden, Wertepaare (α_1, α_2) auch eine explizite Darstellung. Es seien (α, α'), (β, β') irgend zwei solche Paare, die man sich als Wurzeln der quadratischen Gleichungen $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ gegeben denke, ferner sei unter l ein willkürlicher Parameter verstanden, so befriedigen, auf Grund von (5), auch die Wurzeln einer jeden Gleichung:

(14) $$f_1(x) - l f_2(x) = 0$$

die Involution (IV). Man nennt (14) ein „Büschel“ von (quadratischen) Gleichungen, deren linke Seite ein Büschel von (quadratischen) Formen. Aber umgekehrt werden durch die Wurzelschar (α_1, α_2) von (14) auch sämtliche Lösungen von (IV) geliefert. Man greife nämlich zwei spezielle Lösungen von (IV) heraus, etwa $\alpha = 0$, $\alpha' = \frac{c}{b}$; $\beta = \infty$, $\beta' = -\frac{b}{a}$, d. h. die Wurzeln der Formen $f_1(x) = x(bx + c)$, $f_1(x) \equiv ax + b$. Dann nimmt (14) die Gestalt an:

(15) $$f_1(x) - l f_2(x) \equiv x^2 b + x(c - al) - lb = 0\,.$$

Bedeuten also α_1, α_2 die Wurzeln irgendeiner der Gleichungen (15), so ist gemäß (5):

$$(16) \qquad \alpha_1\alpha_2 = -l\,, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{a\,l - c}{b}\,.$$

Hieraus geht aber durch Elimination von l wieder die Relation (IV) hervor.

Es ist indessen nützlich, die entsprechende Darstellung von (14) allgemein zu bilden. Man wähle von den beiden Paaren von Werten (α, α'), (β, β') etwa α, β beliebig, dann ist nach (10) $\alpha' = \dfrac{-b\alpha + c}{a\alpha + b}$, $\beta' = \dfrac{-b\beta + c}{a\beta + b}$. Bildet man hieraus $\alpha + \alpha'$, $\alpha\alpha'$, $\beta + \beta'$, $\beta\beta'$, so wird (14):

$$(17) \qquad \begin{cases} f_1(x) - l f_2(x) \equiv x^2\{(a\,\alpha + b) - l(a\,\beta + b)\} \\ \qquad - x\{a\,\alpha^2 - c) - l(a\,\beta^2 - c)\} \\ \qquad - \{\alpha(b\,\alpha + c) - l\,\beta(b\,\beta + c)\} = 0\,. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2$ gemäß (5):

$$(18) \qquad \begin{cases} -\alpha_1\alpha_2 = \dfrac{\alpha(b\,\alpha + c) - l\,\beta(b\,\beta + c)}{(a\,\alpha + b) - l(a\,\beta + b)}\,, \\[2ex] \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{(a\,\alpha^2 - c) - l\,(a\,\beta^2 - c)}{(a\,\alpha + b) - l\,(a\,\beta + b)}\,. \end{cases}$$

Die Elimination von l aus (18) liefert die verschwindende Determinante:

$$(19) \begin{vmatrix} -\alpha_1\alpha_2\,, & \alpha(b\,\alpha + c)\,, & \beta(b\,\beta + c) \\ \alpha_1 + \alpha_2\,, & a\,\alpha^2 - c\,, & a\,\beta^2 - c \\ 1\,, & a\,\alpha + b\,, & a\,\beta + b \end{vmatrix} \equiv (\beta - \alpha)\,f(\alpha, \beta)\,f(\alpha_1, \alpha_2) = 0\,.$$

Hier sind aber die beiden Faktoren $\beta - \alpha$ und $f(\alpha, \beta)$ von Null verschieden. Denn die Darstellung (14) der Lösungen von (IV) setzt selbstverständlich voraus, daß nicht etwa die beiden Gleichungen $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ übereinstimmen: dies würde aber eintreten, wenn entweder $\beta = \alpha$, oder aber $f(\alpha, \beta) = 0$ wäre. Somit ist in der Tat die Relation (19) mit (IV) identisch.

Die einfachste Darstellung des Büschels (14) ergibt sich, wenn man f_1 und f_2 als Quadrate von Linearformen wählt. Die Größen α_1, α_2 in (IV) fallen dann und nur dann zusammen: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, wenn $f(\alpha) = 0$, so daß für α gerade die beiden Werte $\alpha = x_1$, $\alpha = x_2$ verbleiben, wobei der Grenzfall $x_1 = x_2$ $(D = 0)$ auszuschließen ist. Dann geht (14) über in:

$$(20) \quad \begin{cases} (x - x_1)^2 - l(x - x_2)^2 \equiv x^2(1 - l) - 2\,x(x_1 - l\,x_2) \\ \qquad\qquad + (x_1^2 - l\,x_2) = 0 \,. \end{cases}$$

Für die Wurzeln α_1, α_2 irgendeiner dieser Gleichungen gilt:

$$(21) \qquad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{x_1^2 - l\,x_2^2}{1 - l}, \qquad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{x_1 - l\,x_2}{1 - l},$$

woraus durch Elimination von l, bis auf den nicht verschwindenden Faktor $x_2 - x_1$, abermals die Relation (IV) erscheint:

$$(22) \qquad (x_2 - x_1) f(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \,.$$

Diese Ergebnisse faßt zusammen:

Satz II. „Die allgemeine kanonische Darstellung einer quadratischen Form $f(x)$ als Aggregat zweier Quadrate von Linearformen $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$ wird durch (III′) oder auch (III″) geliefert; solcher Darstellungen gibt es noch eine ∞^1 Schar, insofern die beiden Parameter α_1, α_2 lediglich der Involutionsbedingung (IV) $f(\alpha_1; \alpha_2) = 0$ zu genügen haben. Dieser Schar von Darstellungen der Form $f(x)$ korrespondiert die Schar (VI) von der Form nach verschiedenen Auflösungen der Gleichung $f(x) = 0$; insbesondere entspringt hieraus die elementare Auflösung (3), indem man einen der beiden Parameter unendlich groß werden läßt.

Die Wertepaare α_1, α_2 der Involution (IV) sind die Wurzeln eines Büschels (14) quadratischer Gleichungen, dessen allgemeine Darstellung durch (17) geliefert wird, während spezielle Darstellungen in (15) und (20) vorliegen."

Die zweite in Aussicht gestellte Betrachtung bezieht sich auf eine andere Schreibweise der Identität (III), nämlich:

$$(\text{III a}) \qquad f(x) \equiv (\alpha\,x + \beta)^2 + (\gamma\,x + \delta)^2 \,.$$

Die Vergleichung mit (III) lehrt, daß sich die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch die $k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2$ folgendermaßen ausdrücken:

$$(23)\quad \alpha = \sqrt{k_1}, \quad \beta = -\alpha_1\sqrt{k_1}, \quad \gamma = \sqrt{k_2}, \quad \delta = -\alpha_2\sqrt{k_2},$$

wo den Radikalen $\sqrt{k_1}$, $\sqrt{k_2}$ ein beliebig wählbares, aber dann festzuhaltendes Vorzeichen beizulegen ist. Von Interesse ist hier die „Determinante" $\alpha\delta - \beta\gamma$ der beiden „darstellenden" Linearformen $\alpha x + \beta$, $\gamma x + \delta$. Man hat zunächst $\alpha\delta - \beta\gamma = (\alpha_2 - \alpha_1)\sqrt{k_1 k_2}$. Setzt man die Werte von k_1, k_2 aus (8) ein, so wird:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \sqrt{-(a\alpha_1 + b)(a\alpha_2 + b)} = \sqrt{-a\{a\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1 + \alpha_2)\} - b^2}$$

oder wegen (IV):

$$(\text{VIII})\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \sqrt{D}.$$

Die früheren Parameter α_1, α_2 erhalten jetzt die Werte $\alpha_1 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\alpha_2 = -\dfrac{\delta}{\gamma}$, so daß die Involutionsbedingung (IV) die Gestalt annimmt:

$$(\text{IV}')\qquad a\beta\delta - b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\alpha\gamma = 0.$$

Die früheren Koeffizienten k_1, k_2 werden: $k_1 = \alpha^2$, $k_2 = \gamma^2$. Drückt man daher in (8) α_1, α_2 durch die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus, so entsteht:

$$(8')\quad \sqrt{k_1} = \alpha = \frac{a\delta - b\gamma}{\sqrt{D}}, \qquad \sqrt{k_2} = \gamma = \frac{b\alpha - a\beta}{\sqrt{D}}.$$

Da eine der vier Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willkürlich bleibt, muß zwischen den vier Relationen (VIII), (IV′), (8′) eine Abhängigkeit bestehen; in der Tat geht durch Multiplikation der beiden Relationen (8′) gerade (IV′) hervor*).

Schließlich ist der Grenzfall zu beachten, daß in (III′) α_2 gegen α_1 konvergiert, daß also $\alpha_1 = \alpha_2$ gemäß (IV) selbst eine Wurzel, etwa x_1, von $f(x)$ ist. Dann versagt die Darstellung (III′), da Zähler und Nenner der rechten

*) Drückt man vermöge (8′) β und δ durch α und γ aus, und setzt diese Werte in (VIII) ein, so ergibt sich $\alpha^2 + \gamma^2 = a$, oder auch $k_1 + k_2 = a$, d. i. aber die erste Relation (8).

Seite zugleich gegen Null konvergieren. Man setze vorderhand $\alpha_1 = x_1$, $\alpha_2 = x_1 + \varepsilon$, so geht (III′) über in:

$$f(x) \equiv \frac{(a x_1 + b + \varepsilon a)(x - x_1)^2 - (a x_1 + b)(x - x_1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon}$$

$$\equiv (x - x_1)\{a(x - x_1) + 2(a x_1 + b)\} - \varepsilon(a x_1 + b) .$$

Hieraus entsteht für $\lim \varepsilon = 0$:

$$f(x) \equiv a(x - x_1)\left(x + x_1 + \frac{2b}{a}\right),$$

oder, da nach (5) $\dfrac{-2b}{a} = x_1 + x_2$, die alte Zerlegungsformel (I′) des § 1:

$$\text{(II′)} \qquad f(x) \equiv a(x - x_1)(x - x_2) .$$

Somit geht im Grenzfalle $\alpha_1 = \alpha_2$ der Charakter der kanonischen Darstellung (III′) verloren; man gelangt vielmehr zu der andersgearteten Identität (II′) zurück.

Aufgabe 1. Das Verfahren des Textes (S. 6) ist auszudehnen auf die kanonische Darstellung einer „kubischen" Form $f(x)$:

$$\text{(a)} \quad f(x) \equiv a x^3 + 3 b x^2 + 3 c x + d \equiv k_1(x - \alpha_1)^3 + k_2(x - \alpha_2)^3 .$$

Es ergeben sich vier, in k_1, k_2 lineare Relationen, und die Elimination der k_1, k_2 liefert die vier Bedingungen:

$$\text{(b}_1\text{)} \quad \begin{cases} \Delta_3 \equiv a \alpha_1 \alpha_2 + b(\alpha_1 + \alpha_2) + c = 0 \\ \Delta_0 \equiv b \alpha_1 \alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2) + d = 0 ; \end{cases}$$

$$\text{(b}_2\text{)} \quad \begin{cases} \Delta_2 \equiv a \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + b(\alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^2) - d = 0 , \\ \Delta_1 \equiv a(\alpha_1 \alpha_2)^2 - c(\alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^2) - d(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 . \end{cases}$$

Zwischen diesen vier Ausdrücken Δ bestehen aber die beiden Identitäten:

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} \Delta_2 \equiv \Delta_3(\alpha_1 + \alpha_2) - \Delta_0 , \\ \Delta_1 \equiv \Delta_3 \alpha_1 \alpha_2 - \Delta_0(\alpha_1 + \alpha_2) , \end{cases}$$

so daß mit den beiden Bedingungen $\Delta_3 = 0$, $\Delta_0 = 0$ die beiden übrigen von selbst erfüllt sind. Somit existiert ein einziges Paar von Werten α_1, α_2, und diese sind die Wurzeln der quadratischen Form:

$$x^2(ac - b^2) + x(ad - bc) + (bd - c^2) .$$

Die k_1, k_2 bestimmen sich, wie in (8).

Schreibt man die kanonische Darstellung (a) von $f(x)$ in der Gestalt:

$$(\text{a}') \qquad f(x) \equiv (\alpha x + \beta)^3 + (\gamma x + \delta)^3 ,$$

so findet man:

$$\alpha = \sqrt[3]{k_1}, \quad \beta = -\alpha_1 \sqrt[3]{k_1}, \quad \gamma = \sqrt[3]{k_2}, \quad \delta = -\alpha_2 \sqrt[3]{k_2}$$

und

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \sqrt[3]{(ac - b^2)(\alpha_1 - \alpha_2)} .$$

Aus der kanonischen Darstellung (a) von $f(x)$ ist die Auflösung der kubischen Gleichung $f(x) = 0$ zu entnehmen, insbesondere ist für den „reduzierten" Fall $b = 0$ die Cardanische Formel abzuleiten.

Andererseits verlangt die erweiterte Darstellung:

$$(\text{a}'') \quad f(x) \equiv k_1(x - \alpha_1)^3 + k_2(x - \alpha_2)^3 + k_3(x - \alpha_3)^3$$

für die α_1, α_2, α_3 nur die einzige Bedingung:

$$(\text{d}) \qquad \left\{ \begin{aligned} & a\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + b(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) \\ & \qquad + c(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + d = 0 . \end{aligned} \right.$$

Wie läßt sich hieraus wieder der Fall (a) durch Spezialisierung herleiten? Für welche besonderen kubischen Formen ist in (a″) $k_1 = k_2 = k_3$? Alsdann wird gleichzeitig:

$$3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \equiv (x - \alpha_1)^3 + (x - \alpha_2)^3 + (x - \alpha_3)^3 ,$$

$$3(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \equiv (x - x_1)^3 + (x - x_2)^3 + (x - x_3)^3 .$$

Aufgabe 2. Die Identität (III″) ist direkt zu verifizieren.

Aufgabe 3. Es ist der Satz des Desargues zu beweisen, daß die Kegelschnitte eines Büschels eine beliebige, in der Ebene desselben gelegene Gerade in den Punktepaaren einer Involution schneiden. Die Doppelelemente der Involution (s. § 3) sind diejenigen beiden Punkte der Geraden, in denen sie je von einem Kegelschnitte des Büschels berührt wird. Als Parameter eines Punktes der Geraden nehme man etwa das Verhältnis der Abstände des Punktes von zwei festen Punkten der Geraden.

§ 3. Das Doppelverhältnis, insbesondere das harmonische, zweier Wertepaare. Die bilineare Invariante und die Resultante von zwei quadratischen Formen.

In § 2 (III′) wurde die quadratische Form $f(x) \equiv a x^2 + 2 b x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ als Aggregat der Quadrate zweier Linearformen $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$ dargestellt; hierbei waren die Größen α_1, α_2 irgendeine Lösung der Involution (IV):

$$\text{(I)} \qquad a \alpha_1 \alpha_2 + b(\alpha_1 + \alpha_2) + c = 0 .$$

Diese Involution werde jetzt als selbständiges algebraisches Gebilde weiter behandelt; man denke sich die Größen α_1, α_2 als Wurzeln einer zweiten quadratischen Form F.

$$\text{(1)} \qquad F(x) \equiv A x^2 + 2 B x + C \equiv A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) .$$

Die Relationen (5) des § 1 sind nunmehr für beide Formen f, F heranzuziehen:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{-2b}{a} = x_1 + x_2 , & \dfrac{c}{a} = x_1 x_2 ; \\[2ex] \dfrac{-2B}{A} = \alpha_1 + \alpha_2 , & \dfrac{C}{A} = \alpha_1 \alpha_2 . \end{cases}$$

Man führe in (I) entweder beide Wurzelpaare (x_1, x_2), (α_1, α_2) ein, oder aber beide Koeffiziententripel (a, b, c), (A, B, C), so gewinnt man für die Involution (I) zwei neue Fassungen von Bedeutung, die als „Wurzelgestalt“ resp. als „Koeffizientengestalt“ der Involution bezeichnet seien. Die erstere lautet:

$$(x_1 - \alpha_1)(\alpha_2 - x_2) + (x_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - x_2) = 0$$

oder auch:

$$\text{(II)} \qquad \frac{(x_1 - \alpha_1)(\alpha_2 - x_2)}{(x_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - x_2)} = \frac{(\alpha_1 - x_1)(x_2 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - x_2)(x_1 - \alpha_2)} = -1 .$$

Die linke Seite von (II), gebildet gedacht für zwei beliebige Wertepaare (x_1, x_2). (α_1, α_2) heißt das „Doppelverhältnis“ (abgekürzt „Dv.“) beider Paare; besitzt es im besonderen, wie im Falle der Involution (I), den Wert -1, so wird es „harmonisch“ genannt; man sagt auch, mit Rücksicht auf die Gleichheit der beiden Brüche in (II), die beiden Paare (x_1, x_2), (α_1, α_2) seien „zueinander“ harmonisch. Die Beziehung (II) findet dann ihren Ausdruck in:

Satz I. „Die Gesamtheit der der Involution (I) genügenden Wertepaare (α_1, α_2) deckt sich mit der Gesamtheit der zu dem festen Paare (x_1, x_2) harmonischen Paare (α_1, α_2), wo x_1, x_2 die Wurzeln der Form $f(x) \equiv a x^2 + 2 b x + c$ sind.“

Man nennt x_1, x_2 die „Doppelelemente“ der Involution, da es diejenigen sind, für die beide Elemente eines Paares (α_1, α_2) zusammenfallen.

Vertauscht man in der ersten Gestalt (II) des Dv. zugleich x_1 und α_1, x_2 und α_2, so entsteht gerade die zweite Gestalt (II) des Dv. Vertauscht man dagegen nur x_1 und x_2, oder aber nur α_1 und α_2, so nimmt das Dv. ersichtlich seinen reziproken Wert an. Aber gilt:

Satz II. „Das Dv. $\dfrac{(x_1 - \alpha_1)(\alpha_2 - x_2)}{(x_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - x_2)}$ zweier Wertepaare (x_1, x_2), (α_1, α_2) nimmt bei Vertauschung der Elemente irgendeines Paares, resp. bei Vertauschung beider Paare im ganzen nur zwei verschiedene Werte an, die zueinander reziprok sind; ist im besonderen das Dv. ein harmonisches, so fallen beide Werte (in den Wert -1) zusammen.“

Bedient man sich für Zähler und Nenner der linken Seite von (II) der Abkürzungen:

(3) $$Z = (x_1 - \alpha_1)\,\alpha_2 - x_2), \qquad N = (x_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - x_2),$$

und bezeichnet die beiden Werte des Dv. mit δ_1, δ_2, so sagt Satz I aus, daß:

(4) $$\delta_1 = \frac{Z}{N}, \qquad \delta_2 = \frac{1}{\delta_1} = \frac{N}{Z}.$$

Die „Wurzelgestalt“ (II) der Involution (I) schreibt sich jetzt einfacher:

(IIa) $$Z + N = 0.$$

Drückt man andererseits vermöge (2) die Verbindungen $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2$ durch die A, B, C aus, so gelangt man zur „Koeffizientengestalt“ der Involution (I):

(IIb) $$H \equiv a C - 2 b B + c A = 0,$$

die wiederum erkennen läßt, daß die Beziehung zweier harmonischer Paare eine gegenseitige ist. Der Zusammenhang zwischen den linken Seiten der beiden Gestalten (IIa) und (IIb) tritt ins Licht durch die Identität:

$$\text{(II}') \qquad H \equiv -\frac{aA}{2}(Z+N)\,.$$

Der Ausdruck H (IIb) heißt die „harmonische“ (oder auch „bilineare“) „Invariante“ der beiden Formen f, F (s. § 5); er ist in den Koeffizienten beider Formen bilinear und überdies je „homogen“*), d. h. wenn man die a, b, c oder auch die A, B, C mit je einem und demselben Faktor multipliziert, so tritt dieser vor den ganzen Ausdruck.

Die Gleichung (IIb) führt somit zu:

Satz III. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Wertepaare (x_1, x_2), (α_1, α_2), die Wurzelpaare der Formen f, F, zueinander harmonisch sind, wird durch das Verschwinden der bilinearen Invariante H (IIb) beider Formen angegeben.“

Da bei der Bildung der Bedingung $H = 0$ mit dem Produkt aA heraufmultipliziert ist, so ist noch zu zeigen, daß Satz III gültig bleibt, auch wenn a, oder A, oder beide verschwinden.

Es konvergiere etwa a gegen Null, während $b \neq 0$, $A \neq 0$ sei, so wird nach § 1 eine der beiden Wurzeln von f, z. B. x_1, unendlich. Setzt man zuvörderst $x_1 = \frac{1}{\varepsilon}$, so geht (II) über in:

$$\frac{(1-\alpha_1\varepsilon)(\alpha_2 - x_2)}{(1-\alpha_2\varepsilon)(\alpha_1 - x_2)} = -1\,,$$

mithin für $\lim \varepsilon = 0$ in $\alpha_1 + \alpha_2 - 2x_2 = 0$, d. i. $cA - 2bB = 0$, also in die Bedingung (IIb) für $a = 0$. Das Entsprechende gilt für $\lim A = 0 (B \neq 0,\ b \neq 0)$. Ist aber gleichzeitig $\lim a = 0$, $\lim A = 0$, so setze man vor Ausführung der

---

*) Allgemein heißt ein Ausdruck $f(a, b, c, \ldots)$ in einer Reihe von Größen $a, b, c, \ldots$ homogen von einer Ordnung (Dimension) n, wenn identisch $f(ta, tb, tc \ldots) \equiv t^n f(a, b, c \ldots)$.

Grenzprozesse $x_1 = \frac{1}{\varepsilon}$, $\alpha_1 = \frac{1}{\eta}$, so nimmt (II) die Gestalt an:

$$\frac{(\eta - \varepsilon)(\alpha_2 - x_2)}{(1 - \alpha_2 \varepsilon)(1 - x_2 \eta)} = -1 .$$

Soll diese Relation für $\lim \varepsilon = 0$, $\lim \eta = 0$ richtig sein, so muß $\alpha_2 - x_2$ unendlich werden, also α_2 oder x_2, d. h. es muß b oder B verschwinden. In der Tat reduziert sich die Bedingung (II) jetzt auf $bB = 0$. Konvergieren endlich a und b zugleich gegen Null ($c \neq 0$), werden also x_1 und x_2 unendlich, so setze man $x_1 = \frac{1}{\varepsilon}$, $x_2 = \frac{1}{\eta}$, dann wird (II):

$$\frac{(1 - \alpha_1 \varepsilon)(\alpha_2 \eta - 1)}{(1 - \alpha_2 \varepsilon)(\alpha_1 \eta - 1)} = -1 ,$$

was nur so möglich ist, daß auch α_1 oder α_2 unendlich wird, d. h. daß auch $\lim A = 0$. In der Tat reduziert sich jetzt (IIb) auf $cA = 0$.

Sodann werde der Begriff der Resultante der beiden Formen f, φ eingeführt. Man stelle die notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, daß f und F eine gemeinsame Wurzel besitzen. Da das dann und nur dann eintritt, wenn eines der x_1, x_2 mit einem der α_1, α_2 zusammenfällt, so lautet die fragliche Bedingung in „Wurzelgestalt“:

(IIIa) $(x_1 - \alpha_1)(x_1 - \alpha_2)(x_2 - \alpha_1)(x_2 - \alpha_2) \equiv ZN = 0 .$

Andererseits stelle man vermöge (2) die Bedingung (IIIa) in „Koeffizientengestalt“ auf. Die linke Seite von (IIIa) formt sich um, wie folgt:

$$\begin{aligned}\{x_1^2 - x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2\}&\{x_2^2 - x_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2\} \\ &\equiv (x_1 x_2)^2 + (\alpha_1 \alpha_2)^2 - x_1 x_2 (\alpha_1 + \alpha_2)(x_1 + x_2) \\ &- \alpha_1 \alpha_2 (x_1 + x_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + x_1 x_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \\ &+ \alpha_1 \alpha_2 (x_1 + x_2)^2 - 2 \alpha_1 \alpha_2 x_1 x_2 ,\end{aligned}$$

so daß (IIIa), wegen (2), nach Heraufmultiplikation des Nenners $a^2 A^2$, übergeht in:

(IIIb) $R \equiv 4(aB - bA)(bC - cB) - (aC - cA)^2 = 0 .$

Zwischen den linken Seiten von (IIIa) und (IIIb) besteht die Identität:

$$\text{(III)}\quad -\frac{R}{a^2A^2} \equiv (x_1-\alpha_1)(x_1-\alpha_2)(x_2-\alpha_1)(x_2-\alpha_2) \equiv ZN\,.$$

Der Ausdruck R (IIIb) heißt die „Resultante" von f und F. Es ist wiederum zu zeigen, daß die Äquivalenz der beiden Aussagen (IIIa) und (IIIb) bestehen bleibt, auch wenn der Nenner a^2A^2 verschwindet. Es konvergiere etwa a gegen Null, während $b \neq 0$ sei. Dann hat f die Wurzeln ∞ und $-\frac{c}{2b}$; andererseits reduziert sich (IIIb) auf:

$$(5)\qquad A\{4b(bC-cB)+c^2A\}=0\,.$$

Entweder verschwindet hier der erste Faktor, A, d. h. auch F besitzt eine Wurzel ∞, oder aber der zweite Faktor, was aussagt, daß $-\frac{c}{2b}$ zugleich eine Wurzel von F ist.

Wäre aber überdies $\lim b=0$ $(c\neq 0)$, also $x_1=x_2=\infty$, so reduzierte sich (IIIb) auf $c^2A^2=0$, so daß auch F eine Wurzel ∞ erhielte.

Die Resultante R (IIIb) von f und F ist in den Koeffizienten beider Formen je quadratisch und homogen.

Die Struktur von R wird durchsichtiger, wenn man die Bedingung $R=0$ auf eine andere Art entstehen läßt. Setzt man für den Augenblick:

$$(6)\qquad x^2=\xi\,,\qquad x=\eta\,,$$

womit ausgedrückt werden soll, daß x und x^2 als selbständige Größen aufgefaßt werden, so läßt sich die Forderung einer gemeinsamen Wurzel x der Gleichungen $f=0$, $F=0$ ersetzen durch die andere, daß für die gemeinsame Lösung (ξ,η) der beiden linearen Gleichungen

$$(7)\qquad a\xi+2b\eta+c=0\,,\qquad A\xi+2B\eta+C=0$$

die Bedingung

$$(8)\qquad \eta^2=\xi$$

erfüllt sein muß, und umgekehrt. Die gemeinsame Lösung (ξ,η) von (7) schreibt man bequem in Gestalt der Proportion

$$(9)\qquad \xi:\eta:1=2(bC-cB):(cA-aC):2(aB-bA)\,;$$

die Einsetzung von (9) in (8) führt aber unmittelbar zur Bedingung (IIIb). Es gilt somit:

Satz IV. „Die notwendige und hinreichende Bedingung für eine gemeinsame Wurzel von zwei quadratischen Formen f, F wird geliefert durch das Verschwinden ihrer Resultante R [(IIIa) oder auch (IIIb)].“

Der Prozeß, der aus dem Zusammenbestehen der beiden Gleichungen $f(x)=0$, $F(x)=0$ für irgend einen Wert von x zu der von x freien Bedingung $R=0$ führte, wird als „Elimination“ von x aus $f(x)=0$, $F(x)=0$ bezeichnet.

Diese Hilfsmittel reichen aus, um die quadratische Gleichung, deren Wurzeln die beiden Werte δ_1, δ_2 (4) des Dv. (II) sind, mittels der Koeffizienten von f und F zu bilden. Man hat gemäß (4):

$$\text{(10)}\qquad \delta_1+\delta_2=\frac{Z^2+N^2}{Z\,N}=\frac{(Z+N)^2-2\,Z\,N}{Z\,N}\,,\qquad \delta_1\,\delta_2=1\,,$$

oder, da auf Grund von (II′) und (IIIa):

$$\text{(11)}\qquad Z+N=-\frac{2}{a\,A}H\,,\qquad Z\,N=-\frac{R}{a^2A^2}\,,$$

für $\delta_1+\delta_2$ den Ausdruck

$$\text{(12)}\qquad \delta_1+\delta_2=\frac{-2(2\,H^2+R^2)}{R}\,.$$

Daher sind δ_1, δ_2 die Wurzeln der Gleichung:

$$\text{(IV)}\qquad \delta^2R+2\,\delta(2\,H^2+R)+R=0:$$

Satz V. „Die beiden zueinander reziproken Werte δ_1, δ_2, deren nach Satz II das Dv. zweier Wertepaare (x_1, x_2), (α_1, α_2) fähig ist, sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung (IV).“

Um diese beiden Werte δ_1, δ_2 vermöge Auflösung von (IV) explizite durch H und R, sowie die Diskriminanten D_f und D_F von f und F auszudrücken, ist die Diskriminante D_δ der linken Seite von (IV) näher zu betrachten. Man erhält zunächst:

$$\text{(13)}\qquad D_\delta\equiv(2\,H^2+R)^2-R^2=4\,H^2(H^2+R)\,.$$

Die Ausführung des zweiten Faktors rechts, $H^2 + R$, liefert die wichtige Identität*):

$$\text{(V)} \qquad H^2 + R \equiv 4(ac - b^2)(AC - B^2) \equiv 4\,D_f D_F\,,$$

so daß (13) übergeht in

$$\text{(VI)} \qquad D_\delta \equiv (4\,H)^2 D_f D_F\,.$$

Diese Identität (VI) hat einen einfachen Sinn. Wenn die linke Seite D_δ verschwindet, fallen die beiden Werte δ_1, δ_2 (4) zusammen und umgekehrt. Das ist nur so möglich, daß $\left(\frac{Z}{N}\right)^2 = 1$, wenn also $\frac{Z}{N}$ entweder den Wert -1 oder aber den Wert $+1$ annimmt. Im ersteren Falle ist das Dv. ein harmonisches, also H (II′) $= 0$; im letzteren Falle muß die Bedingung erfüllt sein:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} Z - N \equiv (x_1 - \alpha_1)(\alpha_2 - x_2) - (x_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - x_2) \\ \qquad\qquad \equiv (x_1 - x_2)(\alpha_1 - \alpha_2) = 0\,, \end{cases}$$

es muß also f oder F eine Doppelwurzel besitzen, d. h. D_f oder D_F verschwinden.

Auf Grund von (VI) gewinnt man für δ_1, δ_2, als Wurzeln von (IV), die Ausdrücke:

$$\text{(IV′)} \qquad \begin{cases}\delta_1 \\ \delta_2\end{cases} = \frac{-(2\,H^2 + R) \pm 4\,H\sqrt{D_f D_F}}{R}\,.$$

Damit läßt Satz V die genauere Formulierung zu:

Satz VI. „Die beiden Werte δ_1, δ_2 des Dv. zweier Wertepaare (x_1, x_2), (α_1, α_2), der Wurzelpaare der Formen f, F, sind mittels einer Quadratwurzel durch die bilineare Invariante H, die Resultante R, sowie durch die Diskriminanten D_f, D_F ausdrückbar.“

---

*) Im besonderen ist in (V) der für die projektive Geometrie grundlegende Satz enthalten: „Fallen von den vier Elementen zweier harmonischer Paare (x_1, x_2), (α_1, α_2) irgend zwei zusammen, so fällt mit jenen stets noch ein drittes Element zusammen.“ Denn nach Voraussetzung ist einmal $H = 0$; andererseits ist entweder $x_1 = x_2$ oder aber $\alpha_1 = \alpha_2$, oder endlich fällt eines der x mit einem der α zusammen; somit ist außer $H = 0$ noch entweder $D_f D_F = 0$ oder aber $R = 0$. Setzt man aber in (V) $H = 0$, so folgt aus $D_f D_F = 0$ auch $R = 0$, und umgekehrt.

Über den „invarianten“ Charakter dieser Darstellung (IV′) siehe § 5.

Aufgabe 1. Mittels der auf der Einführung der Größen ξ, η (6) beruhenden Eliminationsmethode sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben werden, daß die drei quadratischen Gleichungen:

$$(\mathrm{a})\qquad \begin{cases} a_1\lambda^2 + b_1\lambda + c_1 = 0\,, \qquad a_2\lambda^2 + b_2\lambda + c_2 = 0\,, \\ \qquad\qquad a_3\lambda^2 + b_3\lambda + c_3 = 0 \end{cases}$$

eine gemeinsame Wurzel besitzen.

Deutet man ξ, η als rechtwinklige Koordinaten des Punktes einer Ebene, so ist der Eliminationsprozeß hier, wie auch im Falle der Textaufgabe, geometrisch zu interpretieren.

Aufgabe 2. Die nämliche Methode ist anzuwenden auf die Elimination der beiden Unbekannten ϱ, λ aus den drei Gleichungen:

$$(\mathrm{b})\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = a_1\lambda^2 + b_1\lambda + c_1\,, \qquad \varrho x_2 = a_2\lambda^2 + b_2\lambda + c_2\,, \\ \qquad\qquad \varrho x_3 = a_3\lambda^2 + b_3\lambda + c_3\,. \end{cases}$$

Aus den drei hieraus hervorgehenden, in ϱ, ξ, η linearen Gleichungen berechne man ξ, η und setze alsdann wiederum $\eta^2 = \xi$. Bedeutet z. B. $(x\,a\,b)$ die dreireihige Determinante der x, a, b, so ist das Eliminationsresultat:

$$(\mathrm{c})\qquad (x\,a\,b)\,(x\,b\,c) - (x\,a\,c)^2 = 0\,.$$

Deutet man die x als homogene Koordinaten eines Punktes der Ebene, so liefern die Gleichungen (b), (c) die explizite resp. implizite Darstellung eines Ordnungskegelschnittes, und (c) zugleich dessen projektive Erzeugung durch zwei Strahlbüschel.

Aufgabe 3. Dieselbe Eliminationsaufgabe ist auf Grund der Resultantengleichung (IIIb) zu behandeln. Man fasse die Verhältnisse der x auf als die gemeinsame Lösung zweier linearer Gleichungen von der Gestalt:

$$(\mathrm{d})\qquad \begin{cases} (u\,x) \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0\,, \\ (v\,x) \equiv v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0\,; \end{cases}$$

die x werden dann proportional den aus der Matrix $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ zu entnehmenden zweireihigen Determinanten

$(uv)_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$. In (d) setze man für die x ihre Werte aus (b) ein und bilde die Resultante R (IIIb) dieser beiden, in λ quadratischen Gleichungen, und führe alsdann statt der $(uv)_{ik}$ wieder die x ein, so gelangt man wiederum zu (c). Welches ist der geometrische Sinn dieses Verfahrens?

Aufgabe 4. Endlich ist die auf (6) beruhende Methode auszudehnen auf die Elimination von ϱ, λ aus den vier Gleichungen:

$$\text{(e)} \qquad \varrho x_i = a_i \lambda^3 + b_i \lambda^2 + c_i \lambda^2 + d_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Man erhält drei, in den x quadratische Gleichungen. Geometrisch stellen diese das Netz der Flächen zweiter Ordnung dar, die durch die Raumkurve dritter Ordnung (e) hindurchgehen.

§ 4. Fortsetzung. Das zu zwei Paaren harmonische Paar. Funktionaldeterminante von zwei quadratischen Formen, als Kombinante und als Kovariante. Homogene Variable; Eulerscher Satz. Extreme Werte einer rationalen Funktion zweiter Ordnung.

Wir gehen jetzt den umgekehrten Weg, wie in § 2, und lösen die für Algebra und Geometrie grundlegende Aufgabe, das zu zwei gegebenen Wertepaaren (x_1, x_2), (α_1, α_2) zugleich harmonische Paar ϑ_1, ϑ_2 zu ermitteln. Die (x_1, x_2), (α_1, α_2) seien wiederum als die Wurzeln der Formen f, F (mit den Koeffizienten a, b, c resp. A, B, C) gedacht, und entsprechend das gesuchte Paar $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ als die Wurzeln der Gleichung:

$$\text{(15)} \qquad \theta(x) \equiv \alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0.$$

Gemäß (IIb) sind für die α, β, γ die beiden Bedingungen zu erfüllen:

$$\text{(16)} \qquad c\alpha + b\beta + a\gamma = 0, \qquad C\alpha + B\beta + A\gamma = 0.$$

Die Verhältnisse der α, β, γ bestimmen sich daher durch:

$$\text{(17)} \qquad \alpha : \beta : \gamma = bA - aB : aC - cA : cB - bC,$$

so daß die gesuchte Gleichung (15) wird:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \theta(x) \equiv x^2(aB - bA) + x(aC - cA) + (bC - cB) \\ \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ 1 & -x & x^2 \end{vmatrix} = 0 \,. \end{cases}$$

Dieses Ergebnis gewinnt eine durchsichtigere Gestalt, wenn man das methodische Hilfsmittel der „Homogenisierung" einführt. Man schreibt die Formen $f(x)$, $F(x)$ „homogen", indem man setzt*):

$$(3') \quad \begin{cases} f(x, y) \equiv a x^2 + 2 b x y + c y^2 \,, \\ F(x, y) \equiv A x^2 + 2 B x y + C y^2 \,, \end{cases}$$

wo y die „homogenisierende Variable" heißt. Der formale Rückgang zur „nichthomogenen" Schreibweise $f(x)$, $F(x)$ erfolgt dadurch, daß man y gleich Eins nimmt.

In den Gleichungen $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$ erscheint jetzt $\frac{x}{y}$ $\left(\text{resp. } \frac{y}{x}\right)$ als Unbekannte; solange dieselbe endliche Werte besitzt, gelangt man auch hier für $y = 1$ zur früheren Bezeichnung x zurück; für eine unendlich große Wurzel $\frac{x}{y}$ dagegen ist $y = 0$ (genauer $\lim y = 0$) zu setzen, während man x etwa den Wert Eins beilegen darf.

Die homogenen Größen bieten somit den Vorteil, unendlich große Werte nichthomogener Größen durch endliche Werte homogener zu ersetzen.

Ein weiterer Vorteil der neuen Bezeichnung erwächst bei Verwendung partieller Ableitungen homogener Formen. Es seien f_x, f_y, F_x, F_y die halben ersten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$, $F(x, y)$ nach x, y:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x \equiv a x + b y \,, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y \equiv b x + c y \,, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} \equiv F_x \equiv A x + B y \,, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} \equiv F_y \equiv B x + C y \,. \end{cases}$$

*) Entsprechend wird eine „binäre Form $n$ter Ordnung" $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ homogen zu: $f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n$.

Dann besteht ersichtlich der „Eulersche Satz" für homogene Formen*):

$$\text{(VIII)} \qquad f \equiv x f_x + y f_y\,, \qquad F \equiv x F_x + y F_y\,.$$

Ferner nimmt die Polarenbildung $f(x, x')$ [§ 2, (VII)] für zwei homogene Variabelnpaare $x, y; x', y'$ die Gestalt an:

$$\text{(IX)} \quad \begin{cases} f(x, y; x', y') \equiv a x x' + b(x y' + y x') + c y y' \\ \qquad\qquad \equiv x' f_x + y' f_y \equiv x f_{x'} + y f_{y'}\,, \end{cases}$$

und analog $F(x, y; x', y')$.

Endlich erscheint jetzt die Form θ, die linke Seite von (VII), in der Gestalt:

$$\text{(VII}') \qquad \theta(x, y) \equiv \begin{vmatrix} a x + b y\,, & b x + c y \\ A x + B y\,, & B x + C y \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix},$$

und heißt die „Funktionaldeterminante" der Formen $f(x, y)$, $F(x, y)$. Auf Grund von (VII) und (VII′) gilt somit:

Satz VII. „Das zu zwei Wertepaaren (x_1, x_2), (α_1, α_2), den Wurzelpaaren der Formen $f(x, y)$, $F(x, y)$, zugleich harmonische Paar $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ wird durch die Wurzeln der Funktionaldeterminante $\theta(x, y)$ von f und F geliefert."

Die Homogenisierung einer quadratischen Form f läßt auch eine weitere Eigenschaft von deren Diskriminante $D_f = a c - b^2$ erkennen.

Das Verschwinden von D sagt aus, daß die beiden Ableitungen $f_x \equiv a x + b y$, $f_y \equiv b x + c y$ eine gemeinsame Wurzel $\frac{x}{y}$ besitzen. Entsprechend der in § 3 eingeführten Benennung heißt daher D_f die Resultante der beiden Linearformen f_x, f_y. Man kann das auch dadurch zum Ausdrucke bringen, daß man sich der halben zweiten partiellen Ableitungen von f bedient:

---

*) S. auch diese Sammlung, Band X, Differentialrechnung von W. Fr. Meyer, § 7.

$$
(18') \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = a\,, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \equiv \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \equiv f_{xy} \equiv f_{yx} = b\,, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = c\,, \end{cases}
$$

dann schreibt sich D_f:

$$
(19) \qquad D_f \equiv a\,c - b \equiv \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}.
$$

Davon werde Gebrauch gemacht für die Funktionaldeterminante $\theta(x, y)$ (VII′) von f und F. Unter k einen variierenden Parameter verstanden, bilde man, wie in § 2, das Formenbüschel $f - kF$ und suche diejenigen Formen desselben, deren Diskriminante verschwindet, die also eine Doppelwurzel besitzen, oder was dasselbe ist, die Quadrate von Linearformen sind. Man hat die beiden Bedingungen:

$$
(20) \qquad f_x - kF_x = 0\,, \qquad f_y - kF_y = 0\,.
$$

Da die Elimination von k aus (20) wieder auf das Verschwinden von θ (VII′) führt, besteht*) der

Satz VIII. „In einem Büschel $f - kF$ quadratischer Formen existieren gerade zwei Quadrate von Linearformen; die Wurzeln der letzteren sind zugleich die der Funktionaldeterminante θ von f und F."

Hieraus geht hervor, daß die Existenz der Funktionaldeterminante θ von der Auswahl der beiden Formen f, F des Büschels $f - kF$ unabhängig sein muß. Dies bestätigt sich leicht direkt.

---

*) Dieses Ergebnis hätte sich auch direkt aus § 2, (III) und (IV) herleiten lassen. Denn die Wurzeln ϑ_1, ϑ_2 von θ liefern das zu den Wurzelpaaren (x_1, x_2), (α_1, α_2) von f, F zugleich harmonische Paar. Dann ist aber $f(x)$ und $F(x)$ als lineares Aggregat der nämlichen beiden Quadrate $(x - \vartheta_1)^2$ und $(x - \vartheta_2)^2$ darstellbar, damit aber auch das Büschel $f - kF$, und die beiden Quadrate müssen dem Büschel angehören.

Indem man auch den Parameter des Büschels homogen macht, ersetze man die Formen f, F durch zwei (sc. verschiedene) lineare „Kombinationen“ m, n derselben:

$$m \equiv k_1 f + k_2 F\,, \qquad n \equiv l_1 f + l_2 F\,. \tag{21}$$

Dann überzeugt man sich sofort*), daß:

$$\begin{vmatrix} m_x & m_y \\ n_x & n_y \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} \cdot \theta\,. \tag{IX}$$

Satz IX. „Die Funktionaldeterminante zweier Formen f, F ändert sich nur um einen, von den Variabeln und Koeffizienten beider Formen unabhängigen Faktor, nämlich um die Determinante der homogenen Parameter, wenn man f, F durch zwei lineare Kombinationen von f, F ersetzt.“

In diesem Sinne heißt die Funktionaldeterminante von f, F eine „Kombinante“ von f und F.

Allgemeiner bezeichnet man eine derartige Erscheinung als „Invarianz“. Neben die durch (IX) ausgedrückte Art der Invarianz von θ tritt eine zweite.

Unterwirft man die Variabeln x, y einer „linearen Substitution“, d. h. führt man „neue“ Variable ξ, η ein durch:

$$x = \alpha\xi + \beta\eta\,, \qquad y = \gamma\xi + \delta\eta \tag{X}$$

mit der „Substitutionsdeterminante“ $\alpha\delta - \beta\gamma$, die von Null verschieden vorausgesetzt werde, so gehen die Formen $f(x, y)$, $F(x, y)$ über in zwei neue Formen $\varphi(\xi, \eta)$, $\Phi(\xi, \eta)$. Dann bestehen die Identitäten**):

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_\xi &\equiv \varphi_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \varphi_y \frac{\partial y}{\partial \xi} = \alpha\varphi_x + \gamma\varphi_y\,, \\ \varphi_\eta &\equiv \varphi_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + \varphi_y \frac{\partial y}{\partial \eta} = \beta\varphi_x + \delta\varphi_y\,, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

---

*) In der Formel (IX) drückt sich der „Multiplikationssatz“ für zweireihige Determinanten aus. Man erkennt übrigens ohne weiteres, daß die Formeln (X), (XI) für zwei beliebige (sc. differenzierbare) Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ gültig bleibt.

**) Über die Regel der Differentiation von Funktionen siehe diese Sammlung, Bd. X, „Differentialrechnung“ von W. Fr. Meyer, § 13.

und entsprechend für Φ_ξ, Φ_η. Somit ist die Funktionaldeterminante der $\varphi(\xi, \eta)$, $\Phi(\xi, \eta)$ mit der von $f(x, y)$, $F(x, y)$ durch die Relation verknüpft:

$$\text{(XI)} \qquad \begin{vmatrix} \varphi_\xi & \varphi_\eta \\ \Phi_\xi & \Phi_\eta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}.$$

Satz X. „Unterwirft man die homogenen Variabeln x, y zweier Formen $f(x, y)$, $F(x, y)$ einer linearen Substitution (X), wodurch f, F in zwei neue Formen $\varphi(\xi, \eta)$, $\Phi(\xi, \eta)$ übergehen, so unterscheidet sich die Funktionaldeterminante der transformierten Formen φ, Φ von der ursprünglichen, von f, F, nur um einen lediglich von den Substitutionskoeffizienten abhängigen Faktor, die Substitutionsdeterminante."

Diese Eigenschaft von θ wird schlechthin als (simultane) „Invarianz" bez. f, F bezeichnet; sie wird in der Folge einer ausgedehnten Klasse von Bildungen zukommen, die im besonderen auch die Variabeln nicht zu enthalten brauchen. Hängt die invariante Bildung, wie hier θ, auch von den Variabeln ab, so heißt sie eine „Kovariante" von f und F.

Die Abhängigkeit der Funktionaldeterminante θ (VII′) von f und F tritt noch auf eine andere Art hervor. Benutzt man die Darstellung (VII) von θ als Determinante, so läßt sich θ in die beiden Gestalten setzen:

$$\text{(23)} \qquad \theta = \begin{vmatrix} c & -b & a \\ C & -B & A \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}, \qquad 2\theta = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ A & 2B & C \\ 1 & -2x & x^2 \end{vmatrix}.$$

Die Multiplikation beider Determinanten liefert, mit Hilfe der beiden Diskriminanten D_f, D_φ und der bilinearen Invariante H (IIb)

$$\text{(24)} \qquad 2\theta^2 = \begin{vmatrix} 2D_f & H & f \\ H & 2D_F & F \\ f & F & 0 \end{vmatrix},$$

also

$$\text{(XII)} \qquad \theta^2 \equiv f^2 D_F + f F H - F^2 D_f.$$

Satz XI. „Das Quadrat der Funktionaldeterminante θ (VII') zweier quadratischer Formen f, F läßt sich vermöge (XII) als homogene quadratische Form in den beiden Variabeln f, F darstellen, wobei als Koeffizienten die beiden Diskriminanten D_f, D_F nebst der bilinearen Invariante H auftreten.“

Mit Rücksicht auf § 1 (II') und § 3 (V) läßt sich die rechte Seite von (XII) zerlegen, wie folgt:

$$\text{(XII')} \qquad -\theta^2 = D_f\left\{f - F\cdot\frac{H+\sqrt{-R}}{D_F}\right\}\left\{f - F\cdot\frac{H-\sqrt{-R}}{D_F}\right\}.$$

Die Struktur der Formeln (XII), (XII') wird durchsichtiger, wenn man zu der mittels (20) formulierten Aufgabe zurückkehrt. Eliminiert man jetzt x an Stelle von k, setzt also die bezüglich x gebildete Resultante der beiden — hinterher wieder nichthomogen geschriebenen — Formen $f_x - kF_x$, $f_y - kF_y$ gleich Null, so gelangt man zu derjenigen quadratischen Gleichung in k, deren Wurzeln eben die beiden Werte k_1, k_2 von k sind, denen Quadrate $(x-\vartheta_1)^2$, $(x-\vartheta_2)^2$ von Linearformen entsprechen:

$$\text{(XIIa)} \qquad \left\{\begin{aligned} D_{f-kF} &\equiv \begin{vmatrix} a-kA, & b-kB \\ b-kB, & c-kC \end{vmatrix} \\ &\equiv D_f - kH + k^2 D_F = 0\,, \end{aligned}\right.$$

deren linke Seite auf Grund von (19) mit der Diskriminante D der Form $f - kF$ übereinstimmt.

Ersetzt man rechter Hand den Parameter k wieder durch $\frac{f}{F}$, so geht die Gleichung (XIIa) direkt über in die aus (XII) durch Nullsetzen von θ hervorgehende. In der Tat sind ϑ_1, ϑ_2 die Wurzeln von θ, so daß die Gleichung $(x-\vartheta_1)^2(x-\vartheta_2)^2 = 0$ mit $\theta^2 = 0$ übereinstimmt; andererseits sind $(x-\vartheta_1)^2 = 0$, $(x-\vartheta_2)^2 = 0$ dieselben Gleichungen wie $f - k_1 F = 0$, $f - k_2 F = 0$, so daß die Gleichung $\theta^2 = 0$ zusammenfällt mit $(f-k_1F)(f-k_2F) = 0$.

Die beiden Werte k_1, k_2 fallen offenbar dann und nur dann zusammen, wenn dies für ϑ_1, ϑ_2 zutrifft; da überdies die Diskriminanten der linken Seiten der beiden Gleichungen $\theta = 0$ (VII) und (XIIa) je vom zweiten Grade in den Koeffizienten von f und F sind, werden sie bis auf einen Zahlenfaktor identisch sein.

In der Tat ist R (IIIb) zugleich die Diskriminante von θ; andererseits, wie schon bei der Ableitung von (XII′) benutzt, wegen § 3 (V) $-R$ die Diskriminante der Form (XIIa):

Satz XII. „Die beiden Diskriminanten der linken Seiten der Gleichungen (VII) und (XIIa), die aus den Relationen (20) $f_x - k F_x = 0$, $f_y - k F_y = 0$ durch Elimination einmal des Parameters k, andererseits der Variabeln x, y hervorgehen, stimmen (bis auf das Vorzeichen) überein, und zwar mit der Resultante R von f, F."

Hierher gehört noch eine weitere, für Anwendungen (z. B. in der Flächentheorie) wichtige Eigenschaft der Funktionaldeterminante θ resp. der Gleichung (XIIa). Man frage nach den extremen*) Werten der soeben schon in Betracht gezogenen rationalen Funktion zweiter Ordnung:

$$k = \frac{f(x)}{F(x)} . \tag{25}$$

Es muß dann die Ableitung $k'(x)$ von k nach x verschwinden:

$$F f_x - f F_x = 0 , \tag{26}$$

wo f_x, F_x für $f'(x)$, $F'(x)$ steht; für die fraglichen Werte des Parameters k bestehen aber die beiden Gleichungen:

$$f - k F = 0 , \quad f_x - k F_x = 0 . \tag{27}$$

Macht man hier wieder homogen, und wendet auf die erstere Relation den Eulerschen Satz (VIII) an, so reduzieren sich die Bedingungen (27) gerade auf die unter (20) erhaltenen:

$$f_x - k F_x = 0 , \quad f_y - k F_y = 0 . \tag{20}$$

Es fragt sich jetzt, ob und wann bei Erfülltsein von (20) reelle extreme Werte von k (25) eintreten. Zu dem Behuf ermittle man das Vorzeichen von $k''(x)$ für die beiden Werte von x, die (20) und damit (VII) genügen. Das

*) Über die bezügliche Regel der Differentialrechnung siehe diese Sammlung, Bd. X, „Differentialrechnung", § 18.

Vorzeichen von $k''(x)$ ist, wegen $k'(x) = 0$, zugleich das von $Ff'' - fF''$, d. i. von $aF - Af$:

(28) $$aF - Af \equiv 2x(aB - Ab) + (aC - cA) .$$

Hier ist rechts jede der beiden Wurzeln ϑ_1, ϑ_2 von θ (VII) einzusetzen:

(29) $$\begin{cases}\vartheta_1 \\ \vartheta_2\end{cases} = \frac{-(aC - cA) \pm \sqrt{-R}}{2(aB - bA)} .$$

Damit reduziert sich aber (28) auf:

(28′) $$aF - Af = \pm\sqrt{-R} .$$

Somit gilt zunächst:

Satz XIII. „Ist die Resultante R (IIIb) der beiden Formen f, F negativ, so daß ein reelles, zu beiden Paaren (x_1, x_2), (α_1, α_2) harmonisches Paar existiert, so besitzt die rationale Funktion $k = \dfrac{f(x)}{F(x)}$ ein Maximum und ein Minimum; diese beiden extremen Werte k_1, k_2 von k sind die Wurzeln von (XIIa), und die zugehörigen Werte ϑ_1, ϑ_2 von x die Wurzeln der Funktionaldeterminante θ (VII) von f, F."

Dieser Fall tritt sicher ein, wenn wenigstens eine der beiden Diskriminanten D_f, D_F, z. B. D_F, positiv ist, so daß F keine reellen Wurzeln besitzt. Entweder ist dann D_f negativ, so ergibt sich aus (V): $R = 4D_fD_g - H^2$, daß R negativ ausfällt.

Ist dagegen D_f positiv, besitzt also auch f keine reellen Wurzeln, so beachte man, daß auf Grund des Satzes IX bei der Bildung von θ die Form f, ohne θ zu ändern, durch eine beliebige Form des Büschels $f - lF$ ersetzt werden darf. Wählt man den Wert von l so, daß $f - lF$ die Wurzel 0 (resp. ∞) erhält, so wird die Diskriminante von $f - lF$ negativ, womit der in Rede stehende Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt ist. Satz XIII erfährt damit die Ergänzung:

Satz XIII′. „Besitzt auch nur eine der beiden Formen f, F keine reellen Wurzeln, so gilt Satz XIII über die extremen Werte von $k = \dfrac{f}{F}$".

Besitzen endlich beide Formen f, F reelle Wurzeln, so läßt sich aus der Wurzelgestalt (III) von R sofort entnehmen, bei welchen Lagerungen der Intervalle (x_1, x_2), (α_1, α_2) R negativ ausfällt. R nimmt einen negativen Wert an, wenn entweder beide Intervalle sich ausschließen, oder aber das eine das andere enthält, einen positiven Wert dagegen, wenn sich beide Intervalle teilweise überdecken:

Satz XIII″. „Haben beide Formen f, F reelle Wurzelpaare (x_1, x_2), (α_1, α_2), so gilt Satz XIII auch dann noch, wenn entweder beide Intervalle (x_1, x_2), (α_1, α_2) sich ausschließen, oder aber das eine das andere umschließt.“

Die Sätze XIII, XIII′, XIII″ erschöpfen alle Fälle, in denen das zu zwei Paaren f, F zugleich harmonische Paar reell ist, ein Ergebnis von grundlegender Bedeutung für die Theorie des Harmonischen.

Die vorstehend behandelten Fragen werden zu einem gewissen Abschluß gebracht durch die folgende:

Welches ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß drei vorgelegte Wertepaare ein und derselben Involution angehören, so daß ein zu allen drei Paaren harmonisches existiert?

Die drei Paare (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) seien die Wurzeln der Formen:

$$(30)\quad \begin{cases} f \equiv a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2\,, \qquad g \equiv b_0 x^2 + 2 b_1 x + b_2\,, \\ \qquad\qquad h \equiv c_0 x^2 + 2 c_1 x + c_2\,. \end{cases}$$

Aus der Involutionsrelation (IIb) geht hervor, daß die gesuchte Bedingung lautet, entweder in Wurzelgestalt:

$$(31)\qquad \begin{vmatrix} x_1 x_2\,, & x_1 + x_2\,, & 1 \\ y_1 y_2\,, & y_1 + y_2\,, & 1 \\ z_1 z_2\,, & z_1 + z_2\,, & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

oder aber in Koeffizientengestalt*):

$$(32)\qquad H \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

*) Wie leicht zu sehen, geht die linke Seite von (32) durch Multiplikation mit $\frac{-2}{a_0 b_0 c_0}$ in die linke Seite von (31) über.

Die Bildung H heißt die trilineare Invariante von f, g, h (s. § 5). Das Quadrat von H läßt sich durch die Diskriminanten D_f, D_g, D_h von f, g, h und durch die bilinearen Invarianten $H_{f,g}$, $H_{f,h}$, $H_{g,h}$ je zweier derselben ausdrücken.

Denn überträgt man das in (23), (24) auf θ ausgeübte Multiplikationsverfahren auf die Determinante H, so kommt:

$$(33) \qquad 2H^2 \equiv \begin{vmatrix} 2D_f & H_{f,g} & H_{f,h} \\ H_{f,g} & 2D_h & H_{f,h} \\ H_{f,h} & H_{g,h} & 2D_h \end{vmatrix}.$$

Die rechte Seite läßt sich noch durchsichtiger schreiben, da die Bildung der Diskriminante D als besonderer Fall der bilinearen Invariante H erscheint. Läßt man die zu Beginn von § 3 eingeführten Formen f, F zusammenfallen, so daß $A = a$, $B = b$, $C = c$, so geht H (IIb) über in $H_{ff} = 2(ac - b^2) = 2D_f$:

$$(\text{XIII}) \qquad H_{ff} \equiv 2D_f.$$

Damit werden die Elemente der Determinante (33) die sechs Bildungen H_{ik} $(i, k = f, g, h)$; man schreibt abgekürzt:

$$(33') \qquad 2H^2 \equiv |H_{ik}|.$$

Zum Schlusse werde noch die Methode der Homogenisierung zu einem zweiten Beweise für die Gaußsche Identität (III″) des § 2 verwendet.

Bedeuten x, y; x', y' zwei homogene Variabelnpaare, so hat man, bei Benutzung der Bezeichnung (18):

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ f_{x'} & f_{y'} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ax+by, & bx+cy \\ ax'+by', & bx'+cy' \end{vmatrix} = D_f \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \\ &= D_f(xy' - x'y). \end{aligned} \right.$$

Multipliziert man die linke Seite von (34) nochmals mit $xy' - x'y$, so wird:

$$(35) \qquad \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ f_{x'} & f_{y'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} xf_x + yf_y, & xf_{x'} + yf_{y'} \\ x'f_x + y'f_y, & x'f_{x'} + y'f_{y'} \end{vmatrix}.$$

Hier ist rechts nach dem Eulerschen Satze (VIII):

$$xf_x + yf_y \equiv f(x, y), \qquad x'f_{x'} + y'f_{y'} \equiv f(x', y'),$$

andererseits $x f_{x'} + y f_{y'} \equiv x' f_x + y' f_y$ die homogen gemachte Polare (13) von f:

(13′) $f(x, y; x', y') \equiv a x x' + b(x y' + x' y) + c y y'$.

Die Vereinigung von (34) und (35) führt daher zur Gaußschen Identität (III″) des § 2, nur jetzt homogen geschrieben:

(XIV) $f(x, y; x', y') \equiv \{f(x, y; x', y')\}^2 - D_f(x y' - x' y)^2$.

Nunmehr ordnet sich auch leicht die Ausgangsidentität (I) des § 1 als spezieller Fall von (XIV) ein.

Nimmt man nämlich $x' = 1$, $y' = 0$, $y = 1$, so wird:

$$(x y' - x' y)^2 = 1, \quad f(x, y; x', y') \equiv a x + b,$$

$$f(x', y') = a,$$

und (XIV) reduziert sich dadurch auf die fragliche spezielle Identität:

(XV) $$a f(x) \equiv (a x + b)^2 + D_f,$$

die sich auch in die Gestalt setzen läßt:

(XV′) $$D_f \equiv f f_{xx} - f_x^2.$$

Aufgabe 1. Die Ergebnisse der §§ 1—3 sind in homogene Gestalt umzusetzen.

Aufgabe 2. Man stelle von je zweien der drei Formen $f_i = a_i \lambda^2 + b_i \lambda + c_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Funktionaldeterminanten θ_{12}, θ_{23}, θ_{31} auf. Dann sind die Koordinaten u_i einer Tangente des in § 3, Aufgabe 2 behandelten Kegelschnittes $\varrho x_i = f_i$ proportional den θ: $\sigma u_1 = \theta_{23}$, $\sigma u_2 = \theta_{31}$, $\sigma u_3 = \theta_{12}$. Wie hängt diese Tatsache mit der im Texte behandelten (harmonischen) Eigenschaft der Funktionaldeterminante zweier quadratischer Formen zusammen?

Entsprechendes gilt, wenn die f_i drei Formen $n$ter Ordnung sind; die Gleichungen $\varrho x_i = f_i$ repräsentieren dann eine „rationale“ Kurve $n$ter Ordnung.

Aufgabe 3. Durch Ausdehnung der Formeln (22) auf die zweiten partiellen Ableitungen ist die Invarianz der bilinearen resp. trilinearen Invariante von zwei resp. drei quadratischen Formen nachzuweisen; desgleichen, daß für eine Form $n$ter Ordnung $f(x, y)$ die Bildung $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ eine Kovariante ist („Hesse“sche Form von f).

Aufgabe 4. Die Gaußsche Identität (XIV) läßt sich auch auf irrationalem Wege einfach beweisen. Sei $f(x, y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2$, so ist (s. § 1) $a f(x, y) \equiv (a x + b y)^2 - D y^2$, wo $D = b^2 - a c$, und entsprechend für ein zweites Paar von Variabeln x', y'.

Man setze zur Abkürzung $t = a x + b y$, $t' = a x' + b y'$ und zerlege $t^2 - D y^2$ in das Produkt $(t + y\sqrt{D})\,(t - y\sqrt{D})$, und entsprechend $t'^2 - D y'^2$. Nun ist ersichtlich:

$$(t + y\sqrt{D})\,(t' - y'\sqrt{D}) \equiv (t t' - D y y') + \sqrt{D}(y t' - t y') .$$

Wechselt man in dieser Identität auf beiden Seiten das Vorzeichen von $\sqrt{D}$, multipliziert sodann beide Identitäten, so geht nach Einsetzung der Werte von t, t' die Gaußsche Identität hervor.

Aufgabe 5. Die auf (18) beruhende Methode der Polarenbildung läßt sich bei geeigneter Weiterführung auf die kanonische Darstellung von Formen als Potenzsummen verwenden. Soll z. B. für eine binäre kubische Form $f(x, y)$ (s. § 2, Aufgabe 2) die Darstellung $f(x, y) \equiv a_0 y^3 + 3 a_1 y^2 x + 3 a_2 y x^2 + a_3 x^3 \equiv k_1 (x - \alpha_1 y)^3 + k_2 (x - \alpha_2 y)^3$ ermittelt werden, so unterwerfe man beide Seiten der Identität hintereinander den Polarenprozessen $x' \dfrac{\partial}{\partial x} + y' \dfrac{\partial}{\partial y}$, $x'' \dfrac{\partial}{\partial x} + y'' \dfrac{\partial}{\partial y}$. Nimmt man hinterher wieder $y = y' = y'' = 1$ und setzt:

$$s_1 = x + x' + x'',$$

$$s_2 = x x' + x' x'' + x'' x = x x' + x''(x + x') , \qquad s_3 = x x' x'',$$

so ergibt sich die neue Identität: $a_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 \equiv k_1 (x - \alpha_1)\,(x' - \alpha_1)\,(x'' - \alpha_1) + k_2 (x - \alpha_2)\,(x' - \alpha_2)\,(x'' - \alpha_2)$ (aus der rückwärts wieder die ursprüngliche für $x = x' = x''$ hervorgeht). Nun verschwindet die rechte Seite für $x = \alpha_1$, $x' = \alpha_2$ identisch in x'', also auch die linke. Damit gelangt man zu den beiden Relationen: $a_0 + a_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + a_2 \alpha_1 \alpha_2 = 0$, $a_1 + a_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \alpha_1 \alpha_2 = 0$. Hieraus ergeben sich die α_1, α_2, während die k_1, k_2 (wie in § 2) durch Koeffizientenvergleichung bestimmt werden.

Auf analoge Art ist zu beweisen, daß eine binäre Form $n$ter Ordnung für ein ungerades $n = 2\nu - 1$ auf eine einzige Art als Summe von ν $n$ten Potenzen darstellbar ist, und eine Form gerader Ordnung $n = 2\nu$ noch auf ∞^1 Arten als Summe von $\nu + 1$ $n$ten Potenzen.

Soll dagegen eine Form gerader Ordnung $n = 2\nu$ als Summe von ν $n$ten Potenzen darstellbar sein, so ist notwendig und hinreichend, daß eine gewisse Invariante (Sylvesters Kanonizante) verschwindet. Für $n = 2$ ist dieselbe gleich $D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$, für $n = 4$ gleich $j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$ usf.

Aufgabe 6. Ein einfaches Beispiel zu Satz XIII bietet die elementare analytische Geometrie des Raumes. Es seien g, a zwei windschiefe Gerade, ω der nicht stumpfe Winkel beider, ω_λ der nicht stumpfe Winkel, den irgend eine Ebene durch g mit a bildet.

Dann besitzt ω_λ ein Minimum und ein Maximum. Der Minimalwinkel ist Null, d. h. die bezügliche Ebene durch g ist parallel zu a. Der Maximalwinkel ist ω selbst; die diesen Winkel mit a bildende Ebene durch g ist die den kürzesten Abstand zwischen g und a enthaltende. Die beiden besonderen Fälle, daß g senkrecht resp. parallel zu a ist, ordnen sich als Grenzfälle ein.

Kapitel II.

Invarianten quadratischer Formen. Lineare Substitutionen in nicht homogener und homogener Gestalt und Zusammensetzung von solchen. Gruppen von Substitutionen. Das Doppelverhältnis.

§ 5. Einfachste Invarianten quadratischer Formen. Lineare Fundamentalsubstitutionen und Zusammensetzung von solchen.

In § 4 trat die „Funktionaldeterminante“ als erstes Beispiel einer invarianten Bildung auf. Der Keim der Invariantentheorie ist indessen ein noch einfacherer. In § 1 (4) war die Diskriminante D_f einer quadratischen Form f durch die Differenz $x_1 - x_2$ ihrer Wurzeln ausgedrückt; in § 3 (II) war das Dv. zweier Paare (x_1, x_2), $(\alpha_1, (\alpha_2)$ von Wurzeln von Formen f, F, und insbesondere in (II′) deren bilineare Invariante H durch „Wurzeldifferenzen $x_1 - \alpha_1$ usw. dargestellt, und dasselbe war in § 3 (III) mit der Resultante R von f, F der Fall.

Als Ausgangspunkt dient der evidente

Satz I. „Die Differenz zweier Werte x_1, x_2 bleibt ungeändert, wenn man jeden derselben um ein und dieselbe, beliebig gewählte Größe k vermehrt.“

Indem man x_1, x_2 als spezielle Werte einer Variabeln x auffaßt, die Größe k als einen von x unabhängigen Parameter, bedient man sich der Ausdrucksweise:

Satz I′. „Die Differenz $x_1 - x_2$ zweier Werte einer Variabeln x ist eine **absolute Invariante** gegenüber der speziellen **linearen Substitution**:

(I) $$x = \xi + k,$$

insofern vermöge (I) die Identität gilt:

(II) $$x_1 - x_2 = \xi_1 - \xi_2 \text{.“}$$

Die Substitution (I) heißt eine „Translation“ oder „Schiebung“. Indem man sich den Parameter k als variierend denkt, stellt (I) eine „∞^1- (‚einfach-unendliche‘) Schar“ von Translationen dar.

Dieser Schar kommt eine spezifische Eigenschaft zu. Führt man zwei Translationen mit den Parametern k, l hintereinander aus („setzt sie zusammen“):

(1) $$x = \xi + k, \quad \xi = X + l,$$

so ist die durch Elimination von ξ hervorgehende Substitution:

(2) $$x = X + (k + l)$$

wiederum eine Translation. In diesem Sinne sagt man, daß die Transformationen (1) eine „Gruppe“ bilden, und zwar eine „eingliedrige“, da sie einen Parameter mit sich führt. Der Satz I′ erhält damit die Fassung:

Satz I″. Die Differenz $x_1 - x_2$ ist eine absolute Invariante der Translationsgruppe (I).“

Umgekehrt ist diese Eigenschaft von $x_1 - x_2$ charakteristisch für die Gruppe (I). Denn ist die Relation (II) erfüllt für ein beliebig ausgewähltes Paar x_1, ξ_1, sowie für ein variables Paar x, ξ:

(3) $$x - x_1 = \xi - \xi_1,$$

oder auch

$$(3') \qquad x = \xi + (x_1 - \xi_1)\,,$$

so unterscheidet sich (3′) nur in der Schreibweise von (I). Man hat damit, zusammenfassend, den

Satz Ia. „Die Translationen (Schiebungen) (I) bilden eine eingliedrige Gruppe und die Differenz $x_1 - x_2$ irgend zweier Werte der Variabeln x ist die charakteristische absulute Invariante der Gruppe."

Man „übe" insbesondere (I) auf die Form

$$f(x) \equiv a x^2 + 2 b x + c$$

„aus". Vermöge (I) „transformiert" sich $f(x)$ in eine „neue" Form $\varphi(\xi)$:

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} \varphi(\xi) \equiv a(\xi + k)^2 + 2b(\xi + k) + c \\ \qquad = a\xi^2 + 2(ak + b)\,\xi + (ak^2 + 2bk + c) \\ \qquad = \alpha\,\xi^2 + 2\beta\,\xi + \gamma\,, \end{cases}$$

wo, mit Hilfe der in § 3 eingeführten Bezeichnungen:

$$(\mathrm{III}') \qquad \begin{cases} \alpha = a = f_{kk}\,, \quad \beta = ak + b = f_k\,, \\ \qquad\qquad \gamma = ak^2 + 2bk + c = f(k)\,. \end{cases}$$

Zwischen der Diskriminante $D_f = ac - b^2$ von f und deren Wurzeln x_1, x_2 bestand nach § 1 (4) der Zusammenhang:

$$(4) \qquad D_f = -\frac{a^2}{4}(x_1 - x_2)^2\,,$$

also auch, für ξ_1, ξ_2 als Wurzeln von $\varphi(\xi)$, D_φ als Diskriminante von φ:

$$(5) \qquad D_\varphi = -\frac{\alpha^2}{4}(\xi_1 - \xi_2)^2\,.$$

Auf Grund von (II), und da gemäß (III′) $\alpha = a$, entsteht die Identität:

$$(6) \qquad D_\varphi \equiv D_f:$$

Satz II. „Unterwirft man eine quadratische Form $f(x)$ einer Translation (I) der Variabeln x, wodurch sie in $\varphi(\xi)$ (III) übergehe, so stimmen die Diskriminanten D_f, D_φ beider Formen überein."

Oder auch in anderer Ausdrucksweise:

Satz II′. Die Diskriminante D_f der Form $f(x)$ ist gegenüber einer beliebigen, auf $f(x)$ ausgeübten Translation (I) von x eine absolute **Invariante.**“

Die Beziehung (6) bestätigt sich sofort an der Koeffizientengestalt $a c - b^2$ von D_f, denn die Identität:

$$\alpha\gamma - \beta^2 \equiv a(a k^2 + 2 b k + c) - (a k + b)^2 \equiv a c - b^2$$

ist gerade die zu Eingang von § 1 unter (I) aufgestellte; vgl. auch § 4 (XV) und (XV′).

Man wird so zu der Frage geführt, ob nicht die Diskriminante D_f von f noch gegenüber anderen linearen Substitutionen von x ein invariantes Verhalten zeigt. Den Schiebungen (I) treten zur Seite die „Streckungen“

$$\text{(IV)} \qquad x = m\,\xi$$

mit dem Parameter m. Auch diese bilden eine eingliedrige Gruppe, wie aus den Zusammensetzungsformeln:

$$\text{(7)} \qquad x = m\,\xi\,, \qquad \xi = n\,X\,,$$

$$\text{(8)} \qquad x = (m\,n)\,X$$

hervorgeht. Da:

$$\text{(9)} \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}\,,$$

so ist jetzt das Verhältnis $\frac{x_1}{x_2}$ zweier Werte x_1, x_2 von x eine absolute Invariante der „Streckungsgruppe“ (IV), und umgekehrt charakterisiert diese Invariante wieder die Gruppe, da die Substitution:

$$\text{(10)} \qquad \frac{x}{x_1} = \frac{\xi}{\xi_1} \quad \text{d. i.} \quad x = \left(\frac{x_1}{\xi_1}\right)\xi$$

inhaltlich mit (IV) übereinstimmt. Somit gilt

Satz III. „Die Streckungen (IV) bilden eine eingliedrige Gruppe mit der charakteristischen Invariante $\frac{x_1}{x_2}$.“

Die Form $f(x) = a x^2 + 2 b x + c$ geht vermöge (IV) über in $\varphi(\xi)$:

(V) $\varphi(\xi) = (a m^2)\xi^2 + 2(b m)\xi + c = \alpha\xi^2 + 2\beta\xi + \gamma$,

(V′) $\alpha = a m^2, \quad \beta = b m, \quad \gamma = c$.

Für die Diskriminante D_φ von $\varphi(\xi)$ ergibt sich gemäß (4), (IV) und (V′):

(11) $$D_\varphi = -\frac{\alpha^2}{4}(\xi_1 - \xi_2)^2 = -\frac{a^2}{4}(x_1 - x_2)^2 \cdot m^2,$$

somit:

(12) $$D_\varphi = m^2 D_f,$$

wie man auch an der Koeffizientengestalt $\alpha\gamma - \beta^2$ von D_φ auf Grund von (V′) unmittelbar erkennt.

Beim Übergange zur transformierten Form $\varphi(\xi)$ ändert sich also D_f um einen Faktor m^2, der aber nur von dem „Substitutionskoeffizienten" m abhängt. Eine derartige Bildung heißt eine „relative" Invariante.

Satz IV. „Die Diskriminante D_f einer quadratischen Form f ist gegenüber einer auf f ausgeübten Streckung (IV) gemäß (12) eine relative Invariante."

Man setze nunmehr eine Schiebung (I) mit einer Streckung (IV) zusammen, so entsteht eine „ganze lineare"*) Substitution:

(VI) $$x = m\xi + k$$

mit zwei Parametern m, k. Diese bilden eine „zweigliedrige" Gruppe, wie die Zusammensetzungsgleichungen lehren:

(13) $$x = m\xi + k, \quad \xi = n X + l,$$

(14) $$x = (m n) X + (m l + k).$$

Hier ist der Quotient $\dfrac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4}$ der Differenzen je zweier Wertepaare (x_1, x_2), (x_3, x_4) von x gegenüber (IV) absolut

*) In der Geometrie bedient man sich des Ausdrucks „Ähnlichkeitstransformation".

invariant, und diese Invariante charakterisiert wiederum die Gruppe (VI), da sich (VI) in die Gestalt setzen läßt:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_1 - \xi_2}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{x_1 - x_2}{\xi_1 - \xi_2}\xi + \frac{x_2\xi_1 - x_1\xi_2}{\xi_1 - \xi_2}.$$

Satz V. „Die ganzen linearen Substitutionen (VI) bilden eine zweigliedrige Gruppe mit der charakteristischen absoluten Invariante $\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4}$."

Die Verbindung der Sätze II und IV über das Verhalten von D_f gegenüber einer Schiebung und einer Streckung zeigt, daß sich D_f auch nach Ausübung von (VI) auf f nur um den Faktor m^2 ändert. Dies wird durch die Rechnung leicht bestätigt. Die vermöge (VI) transformierte Form $\varphi(\xi)$ wird:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \varphi(\xi) = a(m\,\xi + k)^2 + 2\,b(m\,\xi + k) + c \\ \qquad = (a\,m^2)\,\xi^2 + 2\,m(a\,k + b)\,\xi + (a\,k^2 + 2\,b\,k + c) \\ \qquad = \alpha\,\xi^2 + 2\,\beta\,\xi + \gamma\,, \end{cases}$$

woraus sofort

$$(12) \qquad D_\varphi = m^2\,D_f$$

folgt, mit Rücksicht auf die Sätze II und IV.

Die entsprechende Wurzelrechnung verläuft genau wie bei (11).

Den Übergang von einer ganzen linearen Substitution (VI) zu einer „gebrochenen" $x = \frac{\alpha\,\xi + \beta}{\gamma\,\xi + \delta}$ vermittelt die „reziproke" Substitution:

$$\text{(VIII)} \qquad x = \frac{1}{\xi}.$$

Denkt man sich (VIII) in $f(x)$ vollzogen, und mit ξ^2 heraufmultipliziert, so entsteht die „transformierte" Form $\varphi(\xi)$:

$$\text{(IX)} \qquad \varphi(\xi) = c\,\xi^2 + 2\,b\,\xi + a = \alpha\,\xi^2 + 2\,\beta\,\xi + \gamma\,;$$

da diese Form die reziproken Werte $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ zu Wurzeln besitzt, heißt sie die zu f „reziproke". Gemäß § 1, (4) und (5) kommt:

$$(15)\quad \begin{cases} D_\varphi = -\dfrac{\alpha^2}{4}(\xi_1 - \xi_2)^2 = -\dfrac{c^2}{4}\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right)^2 \\ \quad = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{c}{x_1 x_2}\right)^2 (x_1 - x_2)^2 = -\dfrac{a^2}{4}(x_1 - x_2)^2 , \end{cases}$$

$$(16)\qquad D_\varphi \equiv D_f ,$$

wie auch sofort auf Grund von (IX) aus $\alpha\gamma - \beta^2 = ac - b^2$ hervorgeht:

Satz VI. „Gegenüber der reziproken Substitution (VIII) ist die Diskriminante D_f von f eine absolute Invariante.“

Durch Zusammensetzung der reziproken Substitution (VIII) mit der „ganzen“, (VI), erwachsen spezielle gebrochene Substitutionen vom Typus:

$$(16)\qquad x = \frac{1}{m\xi + k} ,$$

die keine Gruppe bilden. Die Relation (12) bleibt erhalten.

Setzt man endlich (16) nochmals mit einer Schiebung zusammen, so entsteht die gebrochene Substitution:

$$(\mathrm{X})\qquad x = \frac{1}{m\xi + k} + l ,$$

oder ausgeführt:

$$(\mathrm{X}')\qquad x = \frac{(lm)\xi + (1 + kl)}{m\xi + k} = \frac{\alpha_1\xi + \beta_1}{\gamma_1\xi + \delta_1} ,$$

wo die neuen Substitutionskoeffizienten mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ bezeichnet seien:

$$(17)\qquad \alpha_1 = ml , \quad \beta_1 = 1 + kl , \quad \gamma_1 = m , \quad \delta_1 = k .$$

Da (X) nur von den drei Verhältnissen der α_1, β_1, γ_1, δ_1 als Parametern abhängt, darf man sich auf endliche Werte der α_1, β_1, γ_1, δ_1 beschränken. Schreibt man (17) in der Gestalt:

$$(18)\qquad \beta_1 - 1 = \delta_1 l , \quad \alpha_1 = \gamma_1 l ,$$

so lehrt die Elimination von l, daß die α_1, β_1, γ_1, δ_1 an die Relation gebunden sind:

$$(19)\qquad \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = -\gamma_1 .$$

Sei umgekehrt diese Bedingung für vier, im übrigen [bei nicht verschwindender linker Seite von (19)] beliebig gegebene Größen α_1, β_1, γ_1, δ_1 erfüllt, so bestimmen sich die früheren Koeffizienten m, k, l in (X) vermöge (18) durch:

$$(20)\qquad m = \gamma_1, \quad k = \delta_1, \quad l = \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_1 - 1}{\delta_1}.$$

Da es sich empfiehlt, auch in der ersten Darstellung (17) unendliche Werte der m, k, l zu vermeiden, unterscheide man zwei Hauptfälle. Ist **erstens** im besonderen $\gamma_1 = 0$, wo dann $\delta_1 \neq 0$ sein muß, so versagt die Darstellung (X), aber es wird auch die Relation (19) überflüssig*); die Division mit δ_1 führt direkt zur ganzen Substitution (VI):

$$(\mathrm{VI})\qquad x = \frac{\alpha_1 \xi + \beta_1}{\delta_1} = \frac{\alpha_1}{\delta_1}\xi + \frac{\beta_1}{\delta_1} = m\xi + k.$$

Verschwindet hier noch spezieller k, d. i. β_1, so gelangt man zur Streckung (IV) zurück. Als anderer Spezialfall entsteht für $m = 1$, bei beliebigem k, die Schiebung (I), und diese enthält als speziellsten Fall die „**identische**“ Substitution („**Identität**“) $x = \xi$.

Zweitens sei $\gamma_1 \neq 0$, so nennt man die Substitution (X′) eine „**echt**“ gebrochene. Solange dann auch $\delta_1 \neq 0$ — dieser Fall sei als der „**allgemeine**“ bezeichnet —, so ergeben sich aus (20) eindeutig bestimmte, endliche Werte der m, k, l.

Verschwindet dagegen im besonderen δ_1, also auch k, so folgt aus (19) $\beta_1 = 1$; (17) reduziert sich auf:

$$(21)\qquad \alpha_1 = l\,m, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = m, \quad \delta_1 = 0,$$

so daß umgekehrt:

$$(22)\qquad m = \gamma_1, \quad l = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}, \quad k = 0, \quad (\gamma_1 \neq 0).$$

Damit geht (X′) über in:

$$(23)\qquad x = \frac{\alpha_1 \xi + 1}{\gamma_1 \xi} = \frac{1}{\gamma_1 \xi} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{1}{m\xi} + l,$$

*) In der Tat ist die Relation (19) für $\gamma_1 = 0$ unerfüllbar, da deren linke Seite von Null verschieden sein sollte.

übereinstimmend mit der rechten Seite von (X) für $k = 0$. Demnach ordnet sich der Unterfall $\delta_1 = 0$ ($\gamma_1 \neq 0$) — für $k = 0$ — in den allgemeinen der echt gebrochenen Substitution ein.

Sei jetzt umgekehrt eine lineare Substitution S:

$$x = \frac{\alpha\,\xi + \beta}{\gamma\,\xi + \delta} \tag{XI}$$

mit beliebigen, endlichen Substitutionskoeffizienten α, β, γ, δ vorgelegt; es wird lediglich vorausgesetzt, daß die „Substitutionsdeterminante" Δ:

$$\Delta = \alpha\,\delta - \beta\,\gamma \tag{24}$$

von Null verschieden sei*). Eine solche S heiße eine „eigentliche".

Man wird dann (XI), entsprechend den beiden obigen Typen, auf eine „kanonische" (oder „Normal"-) Gestalt bringen.

Entweder ist im besonderen $\gamma = 0$, also $\delta \neq 0$, dann ist (XI) eine ganze Substitution, und die Division mit δ in den Zähler $\alpha\,\xi + \beta$ liefert direkt die „Normalform" (VI).

Oder aber es ist $\gamma \neq 0$, dann ist (XI) eine echt gebrochene Substitution. Um zu vier, der Relation (19) genügenden Substitutionskoeffizienten α_1, β_1, γ_1, δ_1 zu gelangen, erweitere man den Bruch $\dfrac{\alpha\,\xi + \beta}{\gamma\,\xi + \delta}$ in (XI) mit einem konstanten**) Faktor μ:

$$x = \frac{(\mu\,\alpha)\,\xi + (\mu\,\beta)}{(\mu\,\gamma)\,\xi + (\mu\,\delta)}, \tag{25}$$

---

*) Denn im Falle $\Delta = 0$ würde stets ein Wert von ξ existieren, dem jeder Wert von x entspricht, wie man noch deutlicher erkennt, wenn man die S in die Gestalt $x(\gamma\,\xi + \delta) = \alpha\,\xi + \beta$ setzt (cf. § 7). Sind alle vier Koeffizienten von Null verschieden, so ist der fragliche Wert von ξ: $\xi = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\delta}{\gamma}$. Verschwindet aber ein Koeffizient (und damit stets noch ein zweiter), oder verschwinden drei der Koeffizienten, so kann der in Rede stehende Wert von ξ im besonderen auch 0 resp. ∞ sein. Verschwinden endlich alle vier Koeffizienten, so läßt sich die S als eine ganz singuläre auffassen, bei der jedem Wert der einen Variabeln jeder Wert der anderen entspricht.

**) Unter einer „konstanten" Größe ist allgemein eine von den Variabeln (hier x, ξ) unabhängige zu verstehen.

und verfüge über μ so, daß (19) erfüllt wird, dann kommt:

$$\mu = \frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \frac{-\gamma}{\Delta}. \tag{26}$$

Da nach Voraussetzung Zähler und Nenner der rechten Seite von (26) endlich und von Null verschieden sind, so erhält μ einen eindeutig bestimmten, endlichen und von Null verschiedenen Wert, und (XI) nimmt die Gestalt an:

$$x = \frac{-\frac{\alpha\gamma}{\Delta}\xi - \frac{\beta\gamma}{\Delta}}{-\frac{\gamma^2}{\Delta}\xi - \frac{\gamma\delta}{\Delta}} = \frac{\alpha_1\xi + \beta_1}{\gamma_1\xi + \delta_1}. \tag{27}$$

Die neuen Substitutionskoeffizienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ erfüllen jetzt die Bedingung (19), und die alten Koeffizienten k, l, m in (X) berechnen sich sofort aus (20).

Ist speziell $\delta = 0$, wo dann $\beta \neq 0$ sein muß, so wird $\Delta = -\beta\gamma$, $\beta_1 = 1$; man hat also den Unterfall (23), zu dem man aber bequemer direkt von (XI) aus gelangt, indem man (für $\delta = 0$) Zähler und Nenner mit β dividiert:

$$x = \frac{\frac{\alpha}{\beta}\xi + 1}{\frac{\gamma}{\beta}\xi} = \frac{1}{\frac{\gamma}{\beta}\xi} + \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{m\xi} + l. \tag{28}$$

Damit ist eine echt gebrochene Substitution (XI) ($\gamma \neq 0$) stets auf die Normalgestalt:

$$x = \frac{1}{m\xi + k} + l \tag{X}$$

zurückführbar.

Die Zusammenfassung beider Hauptfälle liefert den

Satz VII. „Eine beliebig vorgegebene Substitution (XI) $x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$, mit von Null verschiedener Determinante $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, ist entweder im besonderen, bei $\gamma = 0$, eine ganze Substitution, dann führt Durchdivision mit γ zur Normalform (VI) $x = m\xi + k$. Oder aber, bei $\gamma \neq 0$, ist (XI) eine echt gebrochene Substitution, dann liefert Erweiterung des Zählers und Nenners von (XI) mit dem Faktor $\mu = -\frac{\gamma}{\Delta}$ vermöge (20) die Normalform (X) $x = \frac{1}{m\xi + k} + l$. Der Unterfall $\delta = 0$ entspricht dabei $k = 0$, und umgekehrt; dann genügt, um zu (X) zu gelangen, Durchdivision des Zählers von (XI) mit γ."

Die zwei Normalsubstitutionen (VI) und (X) lassen sich leicht aus den drei einfachsten Substitutionen, (I), (IV), (VIII) — die „Fundamentalsubstitutionen" heißen — zusammensetzen.

Um derartige Zusammensetzungen resp. Zerlegungen von Substitutionen einfach darzustellen, bedient man sich naheliegender Abkürzungen. Der durch eine einzelne Substitution geforderte Übergang von einer ersten Variabeln zu einer zweiten werde mit einem großen lateinischen Buchstaben S, resp. T, U, ... bezeichnet; insbesondere sei A das Zeichen für eine Schiebung (I), M für eine Streckung (IV), R für die reizproke Verwandtschaft (VIII), endlich G für eine ganze Substitution (VI) und E für eine echt gebrochene Substitution (X). Substitutionen derselben Art, aber mit verschiedenen Parametern, seien durch Akzente unterschieden, z. B. $A: x = \xi + k$, $A': x = \xi + k'$.

Übt man S, T hintereinander aus, so daß man zunächst vermöge S von einer ersten Variabeln x zu einer zweiten ξ_1 übergeht, sodann von ξ_1 zu einer dritten, ξ, so versteht man unter dem (symbolischen) Produkte ST diejenige Substitution, die direkt — nach Elimination von ξ_1 — den Übergang von x zu ξ angibt. Im allgemeinen ist ST von TS verschieden: die Multiplikation ist nicht „kommutativ"; liefern aber im besonderen beide Produkte die nämliche Substitution, so heißen S und T vertauschbar.

Aus drei Substitutionen S, T, U entsteht das Produkt $STU = (ST)U = S(TU)$ usf. Das Produkt von beliebig vielen Substitutionen befolgt das „assoziative" Gesetz, d. h. es ist gestattet, eine beliebige Reihe aufeinanderfolgender Faktoren zu einem einzigen zusammenzufassen und diesen wieder mit den übrigen zu verbinden.

Die identische Substitution $x = \xi$, die nur die Bezeichnung der Variabeln ändert, läßt sich bei Zusammensetzungen durch den Faktor 1 repräsentieren, so daß $1 \cdot S = S \cdot 1$ ist.

Es wird A (I) zu 1, wenn der Parameter k den Wert 0, und M (IV) zu 1, wenn der Parameter m den Wert 1 annimmt.

Demgemäß gestalten sich die Zusammensetzungen der zwei Normalsubstitutionen (VI), (X) aus den Fundamentalsubstitutionen A (I), M (IV), R (VIII), wenn Zwischenvariable mit ξ_1, ξ_2, ... bezeichnet seien, wie folgt.

Für die ganze Substitution G (VI) gilt, wie schon angegeben: $x = \xi_1 + k$, $\xi_1 = m\xi$; $x = m\xi + k$ $(m \neq 0)$, also:

$$G = AM \text{ *}), \tag{VI'}$$

wo sich im besonderen A (für $k = 0$) oder M (für $m = 1$) oder auch zugleich beide auf die Einheit reduzieren können. Für die allgemeine, echt gebrochene Substitution E (X) kommt:

$$x = \xi_1 + l\,, \quad \xi_1 = \frac{1}{\xi_2}\,, \quad \xi_2 = m\xi + k\,; \quad x = \frac{1}{m\xi + k} + l\,,$$
$$(m \neq 0)\,,$$

$$E = ARG = ARA'M\,. \tag{X}$$

Für $A' = 1$ $(k = 0)$ spezialisiert sich (X) in (23). Überhaupt können sich A, A', M unabhängig voneinander auf die identische Substitution reduzieren. Es gilt demnach:

Satz VIII. „Die beiden Normalsubstitutionen G (VI): $x = m\xi + k$ und E (X): $x = \dfrac{1}{m\xi + k} + l$, und damit auch jede lineare Substitution S (XI) $x = \dfrac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$ $(\Delta \neq 0)$, lassen sich aus Fundamentalsubstitutionen vom Typus A (I): $x = \xi + k$; M (IV): $x = m\xi$; R (VIII): $x = \dfrac{1}{\xi}$ nach den Regeln $G = AM$, $E = ARG = ARA'M$ zusammensetzen."

*) Man kann hier auch die Reihenfolge rechts umkehren, insofern aus $x = m\xi_1$, $\xi_1 = \xi + l$ folgt: $x = m\xi + k$, wo $k = ml$.

Übrigens sind die angeführten Erzeugungen von (VI) und (X) nicht die einzig möglichen, wohl aber die einfachsten; aus weniger als zwei resp. vier Fundamentalsubstitutionen läßt sich (VI) resp. (X) nicht erzeugen.

Bezüglich eines anderen Typus von Normalsubstitutionen siehe § 6.

Die Sätze VII und VIII mögen dazu dienen, das durch die Sätze II, IV, VI ausgedrückte invariante Verhalten der Diskriminante D_f von $f(x) \equiv a x^2 + 2 b x + c$ gegenüber den auf f ausgeübten Fundamentalsubstitutionen A, M, R unter einem allgemeineren Gesichtspunkt zusammenzufassen und sodann auf verwandte Bildungen zu übertragen.

Bedeute $\varphi(\xi)$ stets die transformierte Form, so war bei A und R nach Satz II resp. VI $D_\varphi = D_f$, bei M nach Satz IV $D_\varphi = m^2 D_f$.

Auf Grund von Satz VIII gilt sonach auch bei G (VI) und E (X) die Identität $D_\varphi = m^2 D_f$.

Nun geht aber aus (17) hervor, daß die Determinante $\varDelta_E = \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1$ der in der Gestalt (X′) geschriebenen Substitution E (X) mit $-m$ übereinstimmt:

(29) $$\varDelta_E = \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 = -m\,.$$

Andererseits sind die Determinanten $\varDelta_A$, $\varDelta_M$, $\varDelta_R$, $\varDelta_G$ der drei Fundamentalsubstitutionen (I), (IV), (VIII), sowie von G (VI):

(30) $$\varDelta_A = 1\,, \quad \varDelta_M = m\,, \quad \varDelta_R = -1\,, \quad \varDelta_G = m\,.$$

Somit befolgt D_f gegenüber G (VI) resp. E (X) das gemeinsame Verhalten:

(31) $$D_\varphi = \varDelta_G^2 D_f\,, \quad D_\varphi = \varDelta_E^2 D_f\,.$$

Erweitert man endlich die rechte Seite von G resp. E mit einem beliebigen konstanten Faktor ϱ, und benutzt das gemeinsame Zeichen $\varDelta$ für die Determinante der je so erweiterten Substitution, so nimmt $\varDelta$ beidemal noch den Faktor ϱ^2 an:

(32) $$\varDelta = \varrho^2 \varDelta_G \quad \text{resp.} \quad \varDelta = \varrho^2 \varDelta_E\,.$$

Aber auch die Koeffizienten der neuen transformierten Form φ erhalten, gegenüber der bisherigen, den Faktor ϱ^2, also die neue Diskriminante gegenüber der bisherigen den

Faktor ϱ^4. Faßt man zusammen, so gelangt man in beiden Fällen zur Relation:

$$\text{(XII)} \qquad D_\varphi = \Delta^2 D_f$$

und damit zu:

Satz IX. „Übt man auf eine quadratische Form f eine beliebige Substitution S (XI): $x = \dfrac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$ $(\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$ aus, wodurch, nach Heraufmultiplikation des Nenners $(\gamma\xi + \delta)^2$, $f(x)$ in $\varphi(\xi)$ übergehe, so unterscheidet sich die neue Diskriminante D_φ von der alten D_f gemäß (XII) stets nur um das Quadrat der Substitutionsdeterminante Δ."

Die Schlüsse, die zu dem Satze IX führten, lassen sich wesentlich verallgemeinern. An die Stelle der quadratischen Form $f(x)$ trete eine „Form $n$ter Ordnung":

$$\text{(XIII)} \quad f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n\,;$$

an Stelle der Diskriminante D_f eine ganzrationale Funktion $J(a_i)$ der Koeffizienten a_i, die in diesen „homogen" von einer „Dimension" d vorausgesetzt werde, so daß, unter t eine beliebige Variable verstanden, identisch die Bedingung:

$$\text{(XIV)} \qquad J(t\,a_i) \equiv t^d J(a_i)$$

erfüllt sei.

Seien wiederum α, β, γ, δ vier beliebige Größen mit $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, so werde die Substitution S (XI): $x = \dfrac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$ auf $f(x)$ in dem Sinne „ausgeübt", daß man sich nach Einsetzung der rechten Seite von x mit $(\gamma\xi + \delta)^n$ heraufmultipliziert*) denkt; die so aus $f(x)$ hervorgehende Form $\varphi(\xi)$, die nach Potenzen von ξ geordnet, laute:

$$\text{(XV)} \quad \varphi(\xi) \equiv \alpha_0 \xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \alpha_2 \xi^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\xi + \alpha_n\,,$$

heiße die vermöge S „transformierte" Form. Die neuen Koeffizienten α_i sind offenbar in den „Substitutionskoeffizienten" α, β, γ, δ homogen von der Dimension n.

---

*) Diese Heraufmultiplikation wird bei Einführung der homogenen Variabeln überflüssig, siehe § 6.

Für S nehme man der Reihe nach eine A (I), eine M (IV), eine R (VIII), eine G (VI) und eine E (X).

Die ursprüngliche Funktion $J(a_i)$ sei mit J_f, die neue $J(\alpha_i)$ jeweils mit J_φ bezeichnet. Dann werde das invariante Verhalten von J gegenüber A, M, R durch die drei Forderungen festgelegt:

$$\text{(XVI)} \qquad A/J_\varphi = J_f\,; \quad M/J_\varphi = m^\omega J_f\,; \quad R/J_\varphi = (-1)^\omega J_f\,,$$

wo ω eine feste natürliche Zahl sei.

Auf Grund des Satzes VIII und der Festsetzungen (XVI) gilt alsdann auch bei G (VI) und E (X) das gemeinsame Verhalten:

$$(31') \qquad J_\varphi = \Delta_G^\omega J_f\,, \qquad J_\varphi = \Delta_E^\omega J_f\,,$$

wenn Δ_G, Δ_E wieder die Determinanten von G, E bedeuten. Erweitert man endlich, wie damals, Zähler und Nenner von G resp. E mit einem beliebigen konstanten Faktor ϱ, wodurch man zu einer alle Fälle umfassenden Substitution S (XI) mit den Koeffizienten α, β, γ, δ und der Determinante Δ gelangt, so ist genau, wie damals:

$$(32) \qquad \Delta = \varrho^2 \Delta_G \quad \text{resp.} \quad \Delta = \varrho^2 \Delta_E\,.$$

Multipliziert man also jede der beiden Relationen (31') mit $\varrho^{2\omega}$, und bezeichnet die vermöge Ausübung von S transformierte Bildung J wiederum mit J_φ, so verallgemeinern sich die Relationen (31') zu:

$$(\text{XII}') \qquad J_\varphi \equiv \Delta^\omega J_f\,.$$

Andererseits erhalten die Koeffizienten der neuen, vermöge S transformierten Form φ im Vergleich mit den beiden bisherigen (vermöge G resp. E transformierten) den Faktor ϱ^n, mithin die neue Bildung J_φ im Vergleich mit den beiden bisherigen den Faktor ϱ^{nd}.

Somit herrscht zwischen den drei Zahlen n, d, ω die Beziehung:

$$(\text{XVII}) \qquad n\,d = 2\,\omega\,.$$

Eine Bildung J_f, die für jede lineare Substitution S (XI) das Gesetz (XII') befolgt, und damit im besonderen auch die drei Gesetze (XVI), heißt eine „Invariante" der Form f (XIII) und der feste Exponent ω ihr „Gewicht".

Damit ist als Verallgemeinerung des Satzes IX gewonnen:

Satz IX′. „Ist J_f eine ganzrationale Funktion der Koeffizienten a_i einer Form $f(x)$ (XIII) $n$ter Ordnung, homogen in den a_i von einer Dimension d, so ist, damit J_f gemäß der Definition (XII′) eine Invariante von f mit dem Gewichte ω wird, notwendig und hinreichend, daß sich J_f gegenüber einer Schiebung A, einer Streckung M und einer reziproken Substitution R gemäß den drei Regeln (XVI) invariant verhält."

Je nachdem ω eine ungerade oder aber eine gerade Zahl ist, je nachdem also J_f nach Ausübung einer R das Vorzeichen ändert oder nicht, nennt man J_f eine „schiefe" oder eine „gerade" Invariante von f.

Dies gestattet die Ausdehnung auf ein „System" mehrerer Urformen $f_n(x)$, $g_p(x)$, $h_q(x)$, ..., wo:

$$\text{(XIII a)} \quad \begin{cases} f_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n\,, \\ g_p(x) = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + b_2 x^{p-2} + \ldots + b_p\,, \\ h_q(x) = c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + c_2 x^{q-2} + \ldots + c_q\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Vermöge einer S (XI) mögen diese Formen, nach Heraufmultiplikation mit den bezüglichen Nennern $(\gamma\xi + \delta)^n$, $(\gamma\xi + \delta)^p$, ..., übergehen in neue $\varphi_n(\xi)$, $\psi_p(\xi)$, $\chi_q(\xi)$, ... mit Koeffizienten α_i, β_k, γ_l, ...

Der in den (a), (b), (c), ... ganzrationale Ausdruck $J_{f,g,h,\ldots}$ heißt eine Invariante der f, g, h, ..., wenn in Verallgemeinerung von (XII) die Identität besteht:

$$\text{(XII a)} \qquad J_{\varphi,\psi,\chi,\ldots} \equiv \Delta^{\omega} J_{f,g,h,\ldots}$$

Diese ist jedenfalls dann erfüllt, wenn die drei Einzelidentitäten (XVI) gelten, wo wiederum je J_f, J_φ resp. durch $J_{f,g,h,\ldots}$, $J_{\varphi,\psi,\chi,\ldots}$ zu ersetzen sind.

Nimmt man überdies an, daß $J_{f,g,h,\ldots}$ je in den (a), (b), (c), ... einzeln homogen ist, von der resp. Dimension d_f, d_g, d_h, ..., so erkennt man unmittelbar, daß die linke Seite der Identität (XII a) in den Substitutionskoeffizienten α, β, γ, δ homogen ist von der Dimension

$n\,d_f + p\,d_g + q\,d_h + \ldots$, die rechte dagegen von der Dimension $2\,\omega$, so daß sich die Relation (XVII) erweitert zu:

$$\text{(XVIIa)} \qquad n\,d_f + p\,d_g + q\,d_h + \ldots = 2\,\omega\,.$$

Wir kommen hierauf ausführlicher im zweiten Abschnitt (§ 12ff.) zurück.

Wir kehren nochmals zu der speziellen Formel (XII) zurück. Führt man die linke Seite aus, so gelangt man zu einer bereits in § 4 abgeleiteten Formel zurück. Die aus $f(x) = a\,x^2 + 2\,b\,x + c$ vermöge (XI) hervorgehende Form $\varphi(\xi)$ wird:

$$(33)\left\{\begin{aligned} \varphi(\xi) &= a(\alpha\,\xi + \beta)^2 + 2\,b(\alpha\,\xi + \beta)\,(\gamma\,\xi + \delta) + c(\gamma\,\xi + \delta)^2 \\ &= \xi^2(a\,\alpha^2 + 2\,b\,\alpha\,\gamma + c\,\gamma^2) \\ &\quad + 2\,\xi\{[a\,\alpha\,\beta + b(\alpha\,\delta + \beta\,\gamma) + c\,\gamma\,\delta]\} \\ &\quad + (a\,\beta^2 + 2\,b\,\beta\,\delta + c\,\delta^2) \\ &= A\,\xi^2 + 2\,B\,\xi + C\,, \end{aligned}\right.$$

wo die neuen Koeffizienten A, B, C gemäß den in § 4 (XIV) eingeführten Bezeichnungen mit den Bildungen übereinstimmen:

$$(34) \quad A = f(\alpha\,,\gamma)\,, \qquad B = f(\alpha\,,\gamma\,;\beta\,,\delta)\,, \qquad C = f(\beta\,,\delta)\,.$$

Dann ist aber (XII) nichts anderes als die Fundamentalidentität (XIV) des § 4:

$$\text{(XIIa)} \quad f(\alpha\,,\gamma)\,f(\beta\,,\delta) - f^2(\alpha\,,\gamma\,;\beta\,,\delta) = (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)^2\,(a\,c - b^2)\,,$$

wo nur die damals verwendeten Buchstaben x, y; x', y' hier durch α, γ; β, δ ersetzt sind.

Der Satz IX′ möge eine erste Anwendung finden auf die in § 3 aufgestellten Bildungen, die bilineare Invariante H und die Resultante von zwei quadratischen Formen f, F, sowie auf die trilineare Invariante H (§ 4) von drei quadratischen Formen f, g, h.

Die Formen $f(x) = a\,x^2 + 2\,b\,x + c = a(x - x_1)\,(x - x_2)$, $F(x) = A\,x^2 + 2\,B\,x + C = A\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)$ mögen durch irgend eine lineare Substitution übergehen in $\varphi(\xi) = \alpha\,\xi^2 + 2\,\beta\,\xi + \gamma$; $\Phi(\xi) = \mathsf{A}\,\xi^2 + 2\,\mathsf{B}\,\xi + \Gamma$.

Wird H jetzt genauer mit $H_{f,F}$ bezeichnet, die transformierte Bildung mit $H_{\varphi,\Phi}$, so war nach § 3, (IIb), (II′) und (3):

$$(35)\quad \begin{cases} H_{f,F} = aC + cA - 2bB = -\dfrac{aA}{2}(Z+N)\,, \\ Z = (x_1 - \alpha_1)(\alpha_2 - x_2)\,, \qquad N = (x_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - x_2)\,. \end{cases}$$

Bei einer Schiebung $x = \xi + k$ bleiben nach (II) und (III′) sowohl a, A, wie Z, N ungeändert, also auch $H_{f,F}$.

Bei einer Streckung $x = m\xi$ ist nach (V′) $\alpha = a m^2$, $\mathsf{A} = A m^2$, somit $H_{\varphi,\Phi} = -\dfrac{aA}{2}\dfrac{m^4}{m^2}(Z+N) = m^2 H_{f,F}$.

Bei der reziproken Substitution $x = \dfrac{1}{\xi}$ gehen nach (IX) α, A über in resp. c, C, so daß sich ergibt:

$$H_{\varphi,\Phi} = -\frac{cC}{2}\,\frac{Z+N}{\alpha_1\alpha_2\cdot x_1 x_2} = -\frac{aA}{2}(Z+N) = H_{f,F}\,.$$

Auf Grund des Satzes IX′ gilt also allgemein:

$$(\mathrm{XV})\qquad H_{\varphi,\Phi} = \Delta^2 H_{f,F}\,,$$

d. h. H ist eine Invariante der beiden Formen f, F (mit dem Gewicht 2), womit der in § 3 eingeführte Name „bilineare Invariante“ hinterher seine Rechtfertigung findet.

Die Resultante $R_{f,F}$ von f und F war nach § 3 [(IIIb) und (IV′)] definiert durch:

$$(36)\quad \begin{cases} R_{f,F} = 4(aB - bA)(bC - cB) - (aC - cA)^2 \\ \qquad\;\; = -a^2 A^2 Z N\,. \end{cases}$$

Gegenüber einer Schiebung, resp. reziproken Substitution, bleibt $R_{f,F}$ ungeändert, bei einer Streckung nimmt $R_{f,F}$ den Faktor m^4 an, so daß allgemein:

$$(\mathrm{XIX})\qquad R_{\varphi,\Phi} = \Delta^4 R_{f,F}\,,$$

d. h. $R_{f,\Phi}$ ist eine Invariante von f und F mit dem Gewichte 4.

Während bei $H_{f,F}$ und $R_{f,F}$ bequemer mit den Wurzelausdrücken operiert wurde, wird man bei der trilinearen Invariante $H_{f,g,h}$ [§ 4, (32)] der drei Formen

$$f = a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2\,, \qquad g = b_0 x^2 + 2 b_1 x + b_2\,,$$
$$h = c_0 x^2 + 2 c_1 x + c_2$$

(37) $$H_{fgh} = |a_0 \ a_1 \ a_2|$$

lieber den Koeffizientenausdruck (37) benützen.

Bei einer Schiebung: $x = \xi + k$ wird nach (III) das für die transformierten Formen φ, ψ, χ gebildete H:

$$H_{\varphi,\psi,\chi} \equiv |a_0\,,\ a_0 k + a_1\,,\ a_0 k^2 + 2 a_1 k + a_2| \equiv |a_0 \ a_1 \ a_2|$$
$$\equiv H_{f,g,h}\,.$$

Eine Streckung $x = m\,\xi$ liefert nach (V′):

$$H_{\varphi,\psi,\chi} \equiv |a_0 m^2,\ a_1 m\,,\ a_2| \equiv m^3 |a_0 \ a_1 \ a_2| \equiv m^3 H_{f,g,h}\,,$$

und die reziproke Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, zufolge (IX):

$$H_{\varphi,\psi,\chi} \equiv |a_2 \ a_1 \ a_0| \equiv -H_{f,g,h}\,.$$

Somit gilt allgemein:

(XX) $$H_{\varphi,\psi,\chi} \equiv \varDelta^3 H_{f,g,h}\,;$$

$H_{f,g,h}$ ist also eine schiefe Invariante der f, g, h mit dem Gewichte 3. Zu dem Ergebnis (XX) hätte man auch direkt von § 4, (33′) her gelangen können, wonach $H^2 \equiv |H_{ik}|$ war. Da jedes H_{ik} gemäß (XII) und (XVIII) bei einer Substitution S (XI) den Faktor $\varDelta^2$ annimmt, so erhält H^2 den Faktor $\varDelta^6$, H selbst den Faktor $\pm\varDelta^3$. Ein beliebiger Spezialfall läßt erkennen, daß nur das positive Zeichen gilt.

Aufgabe 1. Es ist zu zeigen, daß die folgenden Transformationen in zwei Variabeln x, y die Gruppeneigenschaft besitzen, sowie daß sich die Parameter bei Zusammensetzung der Transformationen einer Gruppe ebenfalls zu einer Gruppe („Parametergruppe“) zusammensetzen; ferner, daß die jeweils mit J_1 und J_2 bezeichneten Ausdrücke zwei absolute charakteristische Invarianten der Gruppe sind, so daß die letztere durch die Gleichungen $J_1' = J_1$, $J_2' = J_2$ darstellbar wird. Schließlich sind die geometrischen Angaben auf ihre Richtigkeit hin zu prüfen; dabei mögen x, y resp. x', y' rechtwinklige Punktkoordinaten der Ebene sein: g_∞ bedeutet die unendlich ferne Gerade,

U_x resp. U_y den unendlich fernen Punkt der x- resp. y-Achse, O den Anfangspunkt $(x = 0, y = 0)$. Mit z resp. z' wird die dritte homogen machende Variable bezeichnet*).

A. Eingliedrige Gruppen.

(1) $$x' = a x, \quad y' = a^\alpha y$$

(α ist eine willkürliche Konstante, $\neq 0, 1$). $J_1 = \frac{x}{x_1}$, $J_2 = \frac{x^\alpha}{y}$. Die x- und y-Achse nebst g_∞ bleiben invariant, sowie jede Kurve der Schar $\frac{x^\alpha}{y} = \text{const.}$; für $\alpha = 2, -1, \frac{1}{2}$ sind das Kegelschnitte.

(2) $$x' = x + k, \quad y' = e^k y.$$

$J_1 = x - x_1$, $J_2 = \frac{e^x}{y}$. Es bleiben invariant g_∞ und auf ihr U_x, U_y, sowie die x-Achse und jede Kurve der Schar $\frac{e^x}{y} = \text{const.}$

(3) $$x' = x + k, \quad y' = y + k x + \frac{k^2}{2}.$$

$J_1 = x - x_1$, $J_2 = 2y - x^2$. Es sind invariant g_∞ und U_y, sowie jede Kurve der Schar $x^2 = 2y + \text{const.}$, d. s. ∞^1 Parabeln mit demselben festen Parameter (Eins) und der y-Achse als Achse, die also g_∞ in U_y berühren.

B. Zweigliedrige Gruppen.

(4) $$x' = a x + k, \quad y' = a^2 y + a k x + k^2.$$

$J_1 = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$, $J_2 = \frac{2y - x^2}{(x - x_1)^2}$. Der Ausdruck $2y - x^2$ ist eine relative Invariante, da $2y' - x'^2 = a^2(2y - x^2)$. Es bleibt die Parabel $2y = x^2$ invariant, und auf ihr der Punkt $U_y(x=0, z=0)$. (Der zweite, auf der Parabel bei einer

---

*) Ausführlicheres findet man in des Verfassers „Tabellen kontinuierlicher Gruppen", Chicago Math. Congress Papers, New York 1896 (1893), die dort auf Grund der von S. Lie angegebenen infinitesimalen Transformationen der Gruppen berechnet sind; vgl. „Theorie der Transformationsgruppen", Bd III, von S. Lie und F. Engel, Leipzig 1893.

einzelnen S (4) invariant bleibende Punkt $x_0 = \frac{k}{1-a}$, $y_0 = \frac{k^2}{2(1-a)^2}$ hängt von den Parametern ab.) Für $\lim a = 1$ entsteht als Grenzfall die Gruppe (3).

(5) $$x' = x + k, \quad y' = y + kx + l.$$

$J_1 = x - x_1$, $J_2 = (y - y_1) - x(x - x_1)$. An Stelle von J_2 läßt sich auch verwenden $J_2^* = x - \frac{dy}{dx}$; ein derartiger Ausdruck heißt eine Differentialinvariante der Gruppe. Faßt man x, y, $\frac{dy}{dx}$ als drei unabhängige Veränderliche auf, so bilden deren Transformationen wiederum eine Gruppe, die „erweiterte" der ursprünglichen Gruppe [siehe auch die Aufgaben (6), (7), (9a)]. Es bleiben g_∞ und U_y invariant.

(6) $$x' = x + k, \quad y' = e^k y + l.$$

$J_1 = x - x_1$, $J_2 = \frac{y - y_1}{e^x}$. Statt J_2 kann auch die Differentialinvariante $J_2^* = \frac{dy}{dx} : e^x$ benützt werden. Es bleiben U_x, U_y und damit auch g_∞ invariant.

(7) $$x' = ax, \quad y' = ay + l.$$

$J_1 = \frac{x}{x_1}$, $J_2 = \frac{y - y_1}{x}$. An die Stelle von J_2 darf auch die Differentialinvariante $J_2^* = \frac{dy}{dx}$ treten. Jeder Punkt von g_∞ bleibt invariant, sowie die y-Achse.

(8) $$x' = ax, \quad y' = a^\alpha y + cx$$

(α ist wiederum eine willkürliche Konstante, $\neq 0, 1$).

$$J_1 = \frac{x}{x_1}, \quad J_2 = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y_1}{x_1}}{x^{\alpha - 1}}.$$

Es bleiben invariant U_x, U_y und damit g_∞ sowie die y-Achse.

C. Dreigliedrige Gruppen.

(9a) $$x' = ax + k, \quad y' = ay + l.$$

$J_1 = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$, $J_2 = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$. Statt J_2 kann man auch $J_2^* = \dfrac{dy}{dx}$ nehmen. Jeder Punkt auf g_∞ ist invariant.

(9b) $$x' = x, \quad y' = cx + dy + l.$$

$J_1 = \dfrac{x}{x_1}$, $J_2 = \dfrac{\varDelta_{012}}{\varDelta_{123}}$, wo $\varDelta_{012} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$, und entsprechend $\varDelta_{123}$. Jeder Strahl durch U_y bleibt invariant.

Die beiden Gruppen (9a), (9b) sind zueinander dualistisch.

(10) $$x' = ax, \quad y' = dy + l.$$

$J_1 = \dfrac{x}{x_1}$, $J_2 = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$. Im übrigen wie bei (8).

(11) $$x' = ax + k, \quad y' = a^2 y + akx + l.$$

$$J_1 = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2},$$

$$J_2 = \frac{y - y_1}{(x - x_1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{x + x_1}{x - x_1} = \frac{(2y - x^2) - (2y_1 - x_1^2)}{2(x - x_1)^2}.$$

Diese Gruppe enthält die für $l = \dfrac{k^2}{2}$ daraus hervorgehende (4) als Untertypus.

(12) $$x' = x + k, \quad y' = y + cx + l.$$

$J_1 = x - x_1$, $J_2 = \varDelta_{012}$ [siehe unter (9b)]. Im übrigen wie bei (9b).

(13a) $$x' = x + k, \quad y' = e^k y + cx + l.$$

$$J_1 = x - x_1, \quad J_2 = \frac{\varDelta_{012}}{e^x}.$$

Es bleibt invariant U_y, sowie doppelzählend die durch ihn laufende Gerade g_∞.

(13b) $$x' = e^t x + k\,,\qquad y' = e^t y + e^t t x + l\,.$$

$$J_1 = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}\,,\qquad J_2 = \frac{y - y_1}{x - x_1} - l(x - x_1)\,.$$

Es bleibt invariant g_∞, sowie doppelzählend auf ihr der Punkt U_y. Die Gruppen (13a) und (13b) sind zueinander dualistisch.

(14) $$\begin{cases} x' : y' : 1 = a^2 x + 2\,a\,b\,y + b^2 : a\,c\,x + (a\,d + b\,c)\,y + b\,d : \\ \qquad\qquad c^2 x + 2\,c\,dy + d^2\,. \end{cases}$$

$$J_1 = \frac{K_{12}^2}{K_1 K_2}\,,\qquad J_2 = \frac{K_{13}^2}{K_1 K_3}\,,$$

wo $K_1 = y_1^2 - x_1$, $K_2 = y_2^2 - x_2$, $K_{12} = 2\,y_1 y_2 - (x_1 + x_2)$.

Der Ausdruck $K = y^2 - x$ ist eine relative Invariante (in allgemeinerem Sinne), insofern $K' = K \cdot \dfrac{\Delta^2}{(c^2 x + 2\,c\,dy + d^2)^2}$, wo $\Delta = a\,d - b\,c$.

Es bleibt die Parabel $y^2 = x$ invariant.

Statt J_1 läßt sich auch der irrationale Ausdruck verwenden:

$$J_1^* = \frac{K_{12} + \sqrt{K_{12}^2 - K_1 K_2}}{K_{12} - \sqrt{K_{12}^2 - K_1 K_2}}\,,$$

und entsprechend für J_2.

Daher bedeutet J_1^* das Doppelverhältnis des Punktepaares (1, 2) zu dem Paare, das die Gerade $\overline{12}$ aus der Parabel $y^2 = x$ ausschneidet (s. § 8). Stellt man diese Parabel mit Hilfe zweier homogener Parameter λ, μ dar:

$$x : y : 1 = \lambda^2 : \lambda\,\mu : \mu^2\,,$$

so entsteht die Gruppe (14) dadurch, daß man λ, μ der binären Substitution unterwirft:

$$\lambda' = a\,\lambda + b\,\mu\,,\qquad \mu' = c\,\lambda + d\mu\,.$$

Verlangt man überdies, daß irgend ein Punkt der Parabel, z. B. $\mu = 0$, bei der Transformation invariant bleibt (so daß $c = 0$ wird), so reduziert sich die Gruppe (14) auf die unter (4) aufgeführte. Über eine andere homogene Behandlung der Gruppe (14) siehe Aufgabe (4) zu § 6.

Analog ist die Gruppe in drei Variabeln x, y, z zu behandeln, bei der die kubische Raumkurve $x:y:z:1 = \lambda^3:\lambda^2\mu:\lambda\mu^2:\mu^3$ invariant bleibt. Setzt man $K \equiv y^2 - xz$, $L \equiv yz - x$, $M \equiv z^2 - y$, $K_{12} \equiv 2y_1y_2 - (x_1z_2 + x_2z_1)$, $L_{12} \equiv y_1z_2 + y_2z_1 - (x_1 + x_2)$, $M_{12} \equiv 2z_1z_2 - (y_1 + y_2)$, so besitzt die Gruppe die drei absoluten charakteristischen Invarianten:

$$J_1 = \frac{K_{12}^2}{K_1K_2}, \qquad J_2 = \frac{L_{12}^2}{L_1L_2}, \qquad J_3 = \frac{M_{12}^2}{M_1M_2}.$$

§ 6. Erzeugung homogener Substitutionen aus Fundamentalsubstitutionen.

Die Verwendung der nicht homogenen Substitutionen S vom allgemeinen Charakter (XI) des § 5:

$$\text{(I)} \qquad S) \quad x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$$

leidet an einigen Übelständen, indem Prozesse, die der Deutlichkeit halber auseinanderzuhalten wären, zusammengezogen erscheinen. So wird bei Ausübung von (I) auf eine Form $n$ter Ordnung $f(x)$ [§ 5, (XIII)] die transformierte Form $\varphi(\xi)$ [l. c. (XV)] auf dem Umwege gewonnen, daß erst mit dem Gesamtnenner $(\gamma\xi + \delta)^n$ heraufmultipliziert und alsdann der letztere unterdrückt wird.

Andererseits, da man den Bruch auf der rechten Seite einer beliebig vorgelegten Substitution S (I) noch mit einem beliebig konstanten Faktor ϱ erweitern kann, gehören zu ein und derselben Substitution S noch ∞^1 einander proportionale Substitutionskoeffizienten, so daß deren Determinante $\varDelta$ völlig unbestimmt bleibt, solange nicht S, wie in § 5, in bestimmter Weise normiert wird.

Man setzt daher die Substitution S (I) lieber in **homogener** Gestalt an:

$$\text{(II)} \qquad x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta,$$

wo x, y resp. ξ, η jeweils als zwei unabhängige Variable aufzufassen sind. Die Determinante $\varDelta$ von S hat jetzt den bestimmten Wert:

$$\text{(III)} \qquad \varDelta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

der nur von Null verschieden vorausgesetzt wird*). Eine solche S heißt eine „eigentliche“.

Wird (II) z. B. auf eine quadratische homogene Form:

$$(1) \qquad f(x, y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2$$

ausgeübt, so geht direkt auf Grund von § 5, (33), (34) als transformierte Form $\varphi(\xi, \eta)$ hervor**):

$$(2) \quad \varphi(\xi, \eta) = \xi^2 f(\alpha, \gamma) + 2\xi\eta f(\alpha, \gamma; \beta, \delta) + \eta^2 f(\beta, \delta).$$

Es entsteht wieder die Aufgabe, eine beliebige Substitution (II) aus homogenen Fundamentalsubstitutionen zusammenzusetzen. Man wird zunächst das in § 5 eingeschlagene Verfahren in homogene Gestalt kleiden. Dabei sind jetzt x, y als „erste“ resp. zweite Variable zu trennen.

Die Schiebung A [§ 5, (I)], die Streckung M [l. c. (IV)] und die reziproke Substitution R [l. c. (VIII)] setzen sich um, wie folgt:

Schiebung (Translation) A_1 der ersten Variabeln x:

$$(\mathrm{IV}) \qquad A_1) \quad x = \xi + k\eta, \quad y = \eta; \qquad (\Delta = 1)$$

Streckung M_1 der ersten Variabeln x:

$$(\mathrm{V}) \qquad M_1) \quad x = m\xi, \quad y = \eta; \qquad (\Delta = m)$$

Reziproke Substitution, bei der beide Variabeln ihre Rolle vertauschen:

$$(\mathrm{VI}) \qquad R) \quad x = \eta, \quad y = \xi. \qquad (\Delta = -1)$$

---

*) Dies ist offenbar die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichungen (II) stets nach ξ, η auflösbar sind.

**) Diese Formel, in Verbindung mit der Gaußschen Identität (§ 2, S. 9), wird auf die Auflösung der diophantischen Gleichung $f(x, y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ angewendet, wo m, a, b, c gegebene, x, y gesuchte ganze Zahlen sind („Darstellung“ einer Zahl m durch eine binäre quadratische Form f von der Diskriminante $D = b^2 - ac$). Beschränkt man sich auf „eigentliche“ Darstellungen $x = \alpha$, $y = \gamma$, wo α, γ teilerfremd sind, bedeutet β, δ eine Lösung der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, und setzt man überdies $l = f(\alpha, \gamma; \beta, \delta)$, $n = f(\beta, \delta)$, so ist $l^2 - mn = D$. Daraus entnimmt man, daß die Kongruenz $x^2 \equiv D \bmod m$ lösbar sein muß, damit m durch eine Form f von der gegebenen Diskriminante D darstellbar ist. Vgl. diese Sammlung, Bd. LIII, „Neuere Zahlentheorie“ von P. Bachmann, S. 106, 110.

Endlich stellt sich die damalige Erweiterung der rechten Seite einer S mit einem Faktor ϱ nunmehr als eine selbständige Substitution E dar, die die „erweiternde“ heiße:

$$\text{(VII)} \qquad E) \quad x = \varrho\,\xi\,, \quad x = \varrho\,\eta\,. \qquad (\varDelta = \varrho^2)$$

Mittels dieser vier homogenen „Fundamentalsubstitutionen“ läßt sich nach dem Vorgange des § 5 jede Substitution S (II) leicht erzeugen. Den Zeichen A_1, M_1, E soll genauer noch der Wert des jeweiligen Parameters hinzugefügt werden, also: $A_1(k)$, $M_1(m)$, $E(\varrho)$ usf.; eine beliebige S (II) schreibt man: $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$.

Sei zuvörderst eine $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$ mit $\gamma = 0$, also $\delta \neq 0$ betrachtet; für $\delta = 1$ reduziert sie sich auf die „ganze“ Substitution $G_1(\alpha, \beta) = S\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ der ersten Variabeln x. Gemäß § 5, (VI) hat man die Zusammensetzung:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \xi_1 + k\,\eta_1\,, & \xi_1 = m\,\xi_2\,; \quad x = m\,\xi_2 + k\,\eta_2\,, \\ y = \eta_1\,, & \eta_1 = \eta_2\,; \quad y = \eta_2\,, \end{cases}$$

oder abgekürzt:

$$\text{(VIII)} \qquad G_1(\alpha, \beta) = S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix} = A_1(\beta)\,M_1(\alpha)\,.$$

Fügt man zu (3) noch eine „Erweiterung“ $E(\varrho)$ hinzu:

$$\xi_2 = \varrho\,\xi_3\,, \quad \eta_2 = \varrho\,\eta_3\,, \qquad (\varrho \neq 0)$$

so entsteht:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = (m\,\varrho)\,\xi_3 + (k\,\varrho)\,\eta_3 = \alpha\,\xi_3 + \beta\,\eta_3\,, \\ y = \varrho\,\eta_3 = \delta\,\eta_3\,, \end{cases}$$

so daß umgekehrt:

$$(5) \qquad \varrho = \delta\,, \quad m = \frac{\alpha}{\delta}\,, \quad k = \frac{\beta}{\delta}\,,$$

und damit:

$$\text{(IX)} \qquad S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix} = A_1\left(\frac{\beta}{\delta}\right)M_1\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)E(\delta)\,.$$

Ist hier im besonderen $\beta = 0$, so reduziert sich $A_1\left(\frac{\beta}{\delta}\right)$ auf die „identische“ Substitution $x = \xi$, $y = \eta$, und (IX) spezialisiert sich zu

$$\text{(IX}'\text{)} \qquad S\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = M_1\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) E(\delta)\,.$$

Ist überdies noch $\alpha = 1$, so hat man die zu (V) analoge „Streckung M_2 der zweiten Variabeln“:

$$\text{(V}'\text{)} \qquad M_2(\delta) = S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = M_1\left(\frac{1}{\delta}\right) E(\delta)\,.$$

Ist dagegen γ in δ (II) von Null verschieden, so setze man nach dem Muster der Herleitung von (X) in § 5 zunächst $A_1(l)$, R, $G_1(m, k)$ zusammen:

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} x = \xi_1 + l\,\eta_1\,, \quad \xi_1 = \eta_2\,; \quad \xi_2 = m\,\xi_3 + k\,\eta_3\,, \\ y = \qquad \eta_1\,, \quad \eta_1 = \xi_2\,; \quad \eta_2 = \qquad\quad \eta_3\,; \end{cases}$$

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} x = (l\,m)\,\xi_3 + (1 + k\,l)\,\eta_3 = \alpha_1\,\xi_3 + \beta_1\,\eta_3\,, \\ y = \quad m\,\xi_3 + \qquad\quad k\,\eta_3 = \gamma_1\,\xi_3 + \delta_1\,\eta_3\,, \end{cases}$$

$$(\alpha_1\,\delta_1 - \beta_1\,\gamma_1 = -\gamma_1 = -m)\,,$$

und die weitere Zusammensetzung mit $E\left(\frac{1}{\mu}\right)$ liefert:

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha_1}{\mu}\,\xi + \dfrac{\beta_1}{\mu}\,\eta = \alpha\,\xi + \beta\,\eta\,, \\[2ex] y = \dfrac{\gamma_1}{\mu}\,\xi + \dfrac{\delta_1}{\mu}\,\eta = \gamma\,\xi + \delta\,\eta\,, \end{cases} \qquad (\varDelta = \alpha\,\delta - \beta\,\gamma)$$

wo μ gemäß § 5, (20) von den α, β, γ, δ abhängt mittels:

$$\text{(9)} \qquad \mu = -\frac{\gamma}{\varDelta} = -\frac{\gamma}{\alpha\,\delta - \beta\,\gamma}\,.$$

Ist demnach umgekehrt eine beliebige S (II) mit $\gamma \neq 0$ vorgelegt, so bestimmen sich die Parameter l, k, m, $\frac{1}{\mu}$ der erzeugenden Fundamentalsubstitutionen A_1, A_1', M_1, E gemäß (9) und § 5, (20) durch:

$$\text{(10)} \qquad l = \frac{\alpha}{\gamma}\,, \quad k = -\frac{\gamma\,\delta}{\varDelta}\,, \quad m = -\frac{\gamma^2}{\varDelta}\,, \quad \frac{1}{\mu} = -\frac{\varDelta}{\gamma}\,,$$

und die Erzeugung von S (II) findet bei $\gamma \neq 0$ ihren Ausdruck in:

$$\text{(X)} \quad \begin{cases} S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = A_1\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) R\, A_1'\left(-\frac{\gamma\,\delta}{\Delta}\right) M_1\left(-\frac{\gamma^2}{\Delta}\right) E\left(-\frac{\Delta}{\gamma}\right) \\ \qquad\qquad\qquad (\gamma \neq 0)\,. \end{cases}$$

In dem Spezialfalle $\delta = 0$ reduziert sich A_1' auf die identische Substitution, so daß, da jetzt $\Delta = -\beta\gamma$, also $\beta \neq 0$:

$$\text{(XI)} \qquad S\begin{pmatrix}\alpha & \delta \\ \gamma & 0\end{pmatrix} = A_1\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) R\, M_1\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) E(\beta)\,.$$

Andererseits spezialisiere man (X) zu der mit (VIII) analogen „ganzen" Substitution G_2 der zweiten Variabeln:

$$\text{(VIII')} \qquad G_2(\gamma\,,\,\delta) = S\begin{pmatrix}0 & 1 \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.$$

Indem man $\alpha = 0$, $\beta = 1$, also $\Delta = -\gamma$ nimmt, kommt:

$$\text{(XII)} \qquad G_2(\gamma\,,\,\delta) = S\begin{pmatrix}0 & 1 \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = R\, A_1'(\delta)\, M_1(\gamma)\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen:

Satz I. „Jede homogene eigentliche Substitution $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ läßt sich bei nicht verschwindendem γ vermöge (X) durch die Fundamentalsubstitutionen A (IV), M_1 (V), J (VI), E (VII) erzeugen, und bei verschwindendem γ vermöge (IX) durch A_1, M_1, E."

Vervollständigt man die Liste: (IV), (V), (V'), (VI), (VII) durch Aufnahme der zu (IV) analogen „Schiebung" A_2 der zweiten Variabeln:

$$\text{(IV')} \qquad A_2) \quad x = \xi\,, \quad y = l\,\xi + \eta\,, \qquad (\Delta = 1)$$

so kann man die in Satz I gelöste Aufgabe dahin erweitern, eine beliebig vorgegebene $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ auf alle möglichen Arten durch eine hinreichende Anzahl jener sechs Fundamentalsubstitutionen zu erzeugen. Man wird zu dem Behuf diese Anzahl so weit wie möglich reduzieren und sodann die übrigen mittels der kleinsten Anzahl von Substitutionen ausdrücken.

Man gehe lieber synthetisch vor und stelle zunächst durch wiederholte Zusammensetzung der beiden Schiebungen A_1 und A_2 — von der Determinante 1 — die allgemeinste mögliche Substitution her.

Setzt man eine beliebige $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ von der Determinante Δ mit einer A_1 oder A_2 zusammen, so kommt:

$$
(11)\quad \left\{\begin{aligned}
S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot A_1(m) &= S\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha m+\beta\\ \gamma, & \gamma m+\delta\end{pmatrix},\\
S\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\cdot A_2(n) &= S\begin{pmatrix}\alpha+n\beta, & \beta\\ \gamma+n\delta, & \delta\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right.
$$

Die neue Substitutionsdeterminante ist beidemal wieder gleich Δ. Da nun für A_1 und A_2 selbst $\Delta = 1$ ist, so gilt, wenn eine Substitution von der Determinante 1 eine „unimodulare“ genannt und mit U bezeichnet wird:

Satz II. „Durch beliebig wiederholte Zusammensetzung der beiden Schiebungen A_1, A_2 — mit sich selbst oder miteinander — gehen immer nur unimodulare Substitutionen U hervor.“

Da ferner bei Zusammensetzung einer beliebigen S mit einer J, $M_1(\mu)$, $M_2(\mu)$, $R(\mu)$ die Determinante Δ resp. den Faktor -1, μ, μ, μ^2 annimmt, so läßt Satz II erwarten, daß sämtliche U durch geeignete wiederholte Zusammensetzung von A_1 und A_2 erschöpft werden.

Zuvörderst entsteht:

$$
(12)\quad \left\{\begin{aligned}
A_1(m)\cdot A_2(n) &= U\begin{pmatrix}1+mn, & m\\ n, & 1\end{pmatrix},\\
A_2(n)\,A_1(m) &= U\begin{pmatrix}1, & m\\ n, & 1+mn\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right.
$$

Umgekehrt sind auf diese Weise alle U darstellbar, für die der vierte resp. erste Koeffizient den Wert 1 hat:

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
U\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & 1\end{pmatrix} &= A_1(\beta)\cdot A_2(\gamma), \qquad (\alpha-\beta\gamma=1)\\
U\begin{pmatrix}1, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} &= A_2(\gamma)\cdot A_1(\beta), \qquad (\delta-\beta\gamma=1)
\end{aligned}\right.
$$

da sich α resp. δ von selbst durch den Wert $1+\beta\gamma$ bestimmt. Im besonderen kann bei der ersten U (13) $\alpha = 0$ sein, so daß $\beta\gamma = -1$, oder aber es kann, für $\alpha \neq 0$,

$\beta = 0$ oder $\gamma = 0$ oder auch beides zugleich eintreten, so daß $A_1(\beta) = 1$ oder $A_1(\gamma) = 1$ oder beides zugleich eintritt. Entsprechendes gilt für die zweite U (13).

Die Substitutionen (12) werden jetzt von neuem mit einer $A_1(\mu)$ resp. $A_2(\nu)$ zusammengesetzt:

$$(14) \quad \begin{cases} \quad A_1(m)\, A_2(n)\, A_1(\mu) \\ = U\begin{pmatrix} 1 + mn, & m + \mu(1+mn) = \mu + m(1+n\mu) \\ n, & 1 + n\mu \end{pmatrix}, \\ \quad A_2(n)\, A_1(m)\, A_2(\nu) \\ = U\begin{pmatrix} 1 + m\nu, & m \\ \nu + n(1+m\nu) = n + \nu(1+mn), & 1+mn \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Hier treten beidemal drei willkürliche Parameter m, n, μ resp. n, m, ν auf; man wird also erwarten dürfen, daß eine „allgemeine“ $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, d. h. etwa von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, auf jede der beiden Arten (14) erzeugbar ist.

Es ergibt sich umgekehrt:

$$(15) \quad \begin{cases} n = \gamma, \quad m = \dfrac{\alpha - 1}{\gamma}, \quad \mu = \dfrac{\delta - 1}{\gamma}; \\ m = \beta, \quad \nu = \dfrac{\alpha - 1}{\beta}, \quad n = \dfrac{\delta - 1}{\beta}, \end{cases}$$

woraus dann von selbst, wegen $\Delta = 1$, für β resp. γ die in (14) stehenden Werte folgen. Solange also $\beta \neq 0$ und $\gamma \neq 0$, erhalten gemäß (15) die Parameter n, m, μ resp. m, ν, n stets endliche und bestimmte Werte. Ist $\gamma = 0$, aber $\beta \neq 0$ und vice versa, so versagt zwar die erste Darstellung (15), aber es gilt noch die zweite und vice versa.

Nur für $\beta = 0$ und zugleich $\gamma = 0$ versagen beide Darstellungen (15) und damit (14). Damit ist bewiesen:

Satz III. „Eine beliebig vorgegebene unimodulare $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ist, solange $\beta \neq 0$ und $\gamma \neq 0$, in jeder der beiden Arten aus den beiden Schiebungen A_1 und A_2 erzeugbar:

$$\text{(XIII)}\quad \begin{cases} U\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = A_1\left(\dfrac{\alpha-1}{\gamma}\right) A_2(\gamma)\, A_1\left(\dfrac{\delta-1}{\gamma}\right), \\ U\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = A_2\left(\dfrac{\delta-1}{\beta}\right) A_1(\beta)\, A_2\left(\dfrac{\alpha-1}{\beta}\right). \end{cases}$$

Für $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$ versagt die zweite Darstellung, während die erste bestehen bleibt und vice versa. Nur in dem einen Ausnahmefalle, wo $\beta = 0$, $\gamma = 0$, versagen beide Darstellungen."

Behufs Erledigung dieses Falles $\beta = 0$, $\gamma = 0$ setze man die Substitutionen (14) nochmals mit einer A_2 resp. A_1 zusammen. Es genüge die Ausführung der ersteren Operation:

$$(16)\quad \begin{cases} A_1(m)\, A_2(n)\, A_1(\mu)\, A_2(\nu) \\ = U\begin{pmatrix}(1+mn)(1+\mu\nu)+m\nu, & m+\mu(1+mn) = \mu + m(1+n\mu) \\ n+\nu(1+n\mu) = \nu + n(1+\mu\nu), & 1+n\mu \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Liegt jetzt umgekehrt eine $U\begin{pmatrix}\alpha, & 0\\ 0, & \delta\end{pmatrix}$ mit beliebigem α vor, so daß $\delta = \dfrac{1}{\alpha}$, so lassen sich μ und ν durch m und n ausdrücken:

$$(17)\qquad \mu = \frac{-m}{1+mn}, \qquad \nu = \frac{-n}{1+n\mu} = -n(1+mn).$$

Aus $\delta = 1 + n\mu$ folgt $n = \dfrac{\delta - 1}{\mu} = \dfrac{(1-\delta)(1+mn)}{m}$, und hieraus:

$$(18)\qquad mn = \frac{1-\delta}{\delta} = \alpha - 1.$$

Die Einsetzung in (17) liefert:

$$(19)\qquad \mu = \frac{-m}{\alpha}, \quad \nu = -n\alpha, \quad 1 + mn = \alpha,$$

womit die Parameter μ, ν, n durch den letzten, willkürlich (nur $\neq 0$) bleibenden m und den gegebenen Koeffizienten α ausgedrückt sind. Nimmt man etwa $m = 1$, so geht (19) über in:

$$(20)\qquad \begin{cases} m = 1, \quad \mu = -\dfrac{1}{\alpha} = -\delta, \quad n = \alpha - 1, \\ \nu = -\alpha(\alpha - 1), \end{cases}$$

womit bewiesen ist:

Satz IV. „Die den Ausnahmefall des Satzes III bildende unimodulare $U\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$ ist aus A_1, A_2 erzeugbar vermöge:

(XIV) $$U\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix} = A_1(1)\,A_2(\alpha-1)\,A_1(-\delta)\,A_2\{\alpha(1-\alpha)\}\,.$$

Neben diese Erzeugung tritt eine analoge, wo die A_1 und A_2 in geeigneter Weise vertauscht sind.

Auf Grund der Sätze III, IV und von (12) ist jede unimodulare U durch Schiebungen A_1, A_2 zusammensetzbar."

Dem Satze IV läßt sich eine andere Fassung geben, in der der in § 5 für besondere Fälle erläuterte Begriff der Gruppe hervortritt, wenn man sich eines grundlegenden Satzes über die Zusammensetzung beliebiger S bedient.

Man führe zwei beliebige Substitutionen $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}$ mit den Determinanten Δ und Δ_1 hintereinander aus:

(21) $$\begin{cases} x = \alpha\,\xi_1 + \beta\,\eta_1\,, & y = \gamma\,\xi_1 + \delta\,\eta_1\,;\\ \xi_1 = \alpha_1\,\xi + \beta_1\,\eta\,, & \eta_1 = \gamma_1\,\xi + \delta_1\,\eta\,, \end{cases}$$

so erhält man für die zusammengesetzte Substitution $S\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$

(22) $$\begin{cases} S\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} \equiv S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} S\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}\\ = S\begin{pmatrix}\alpha\,\alpha_1 + \beta\,\gamma_1\,, & \alpha\,\beta_1 + \beta_1\,\delta_1\\ \gamma\,\alpha_1 + \delta\,\gamma_1\,, & \gamma\,\beta_1 + \delta\,\delta_1\end{pmatrix}, \end{cases}$$

so daß sich die neuen Koeffizienten A, B, C, D durch die beiden Reihen der alten:

$$\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma\,,\ \delta\,; \quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1$$

bilinear ausdrücken.

Nach dem Multiplikationssatz für zweireihige Determinanten ergibt sich für die Determinante ∇ von (22):

(XV) $$\nabla \equiv AD - BC = \Delta\Delta_1 = (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)\,(\alpha_1\,\delta_1 - \beta_1\,\gamma_1)\,:$$

Satz V. „Die Determinante des Produktes zweier Substitutionen ist das Produkt aus den Determinanten der zusammengesetzten Substitutionen."

Als Spezialfall ordnet sich Satz II ein, für

$$\nabla = \Delta = \Delta_1 = 1 .$$

Gemäß (22) und (XV) setzen sich zwei „eigentliche“ S, d. h. solche mit $\Delta \neq 0$, stets wieder zu einer solchen zusammen, mithin bildet die Gesamtheit eigentlicher S eine Gruppe Γ, andererseits die Gesamtheit der U, d. i. aller unimodularen*) S eine in Γ enthaltene Gruppe Γ_1, eine „Untergruppe“ von Γ. Weiter sagen die Sätze I, III, V des § 5 jetzt aus, daß die Schiebungen A_1, und ebenso die A_2 für sich eine Untergruppe von Γ_1 bilden, andererseits jeweils die Streckungen M_1, M_2, die ganzen Sub-

*) Die S mit der Determinante $\Delta = -1$ bilden für sich keine Gruppe, wohl aber die Gesamtheit der S mit den Determinanten $\Delta = +1$ und $\Delta = -1$; die letztere Gruppe zerfällt in zwei getrennte (je unter sich stetige) Mannigfaltigkeiten, und heißt daher eine „gemischte“ Gruppe.

Sind in einer S:

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta$$

die Substitutionskoeffizienten ganzzahlig, so entspricht jedem Paar ganzzahliger ξ, η auch ein solches Paar x, y, und, falls $\Delta = +1$ oder $= -1$, auch umgekehrt.

Ist diese Bedingung ($\Delta = \pm 1$) auch notwendig?

Sei vorderhand $\Delta (\neq 0)$ noch unbestimmt, so hat man zunächst

$$\Delta\xi = \delta x - \beta y, \quad \Delta\eta = -\alpha x + \gamma y .$$

Jedem ganzzahligen Paar x, y soll auch ein ebensolches Paar ξ, η entsprechen, insbesondere also den Paaren $x = 0$, $y = 1$ und $x = 1$, $y = 0$. Somit müssen jedenfalls $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch Δ teilbar sein. Sei τ der größte gemeinsame Teiler der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so geht demnach Δ in τ auf:

$$\tau = a\Delta . \tag{1}$$

Andererseits folgt aus $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, daß Δ durch τ^2 teilbar sein muß:

$$\Delta = b\tau^2 . \tag{2}$$

Substituiert man den Wert von τ aus (1) in (2), und setzt $a^2 b = m$, so ergibt sich $\Delta = m\Delta^2$ i. e. $1 = m\Delta$, was in der Tat nur so möglich ist, daß $\Delta = \pm 1$.

Dieser Satz ist für die Zahlentheorie von großer Bedeutung, vgl. diese Sammlung Band LIII, „Neuere Zahlentheorie“ von P. Bachmann, S. 71.

Die unimodularen S mit ganzzahligen α, β, γ, δ bilden wiederum eine Gruppe, und ebenso die S mit ganzzahligen α, β, γ, δ und $\Delta = \pm 1$.

stitutionen G_1, G_2, und endlich die erweiternden Substitutionen E eine Untergruppe von Γ:

Satz VI. „Die U bilden eine Untergruppe Γ_1 der Gruppe Γ aller eigentlichen S; die A_1, A_2 je eine Untergruppe von Γ_1, die M_1, M_2, G_1, G_2 und E je eine Untergruppe von Γ."

Lassen sich alle S irgend einer Gruppe aus einer Anzahl von einfachsten durch Zusammensetzung erhalten, so heißen die letzteren die „erzeugenden" S der Gruppe.

Auf Grund des Satzes VI gestatten die Sätze II, III, IV die Zusammenfassung:

Satz VII. „Die Schiebungen A_1, A_2 sind erzeugende Substitutionen der Gruppe Γ_1 aller unimodularen*) U."

Andererseits erhält Satz I die Formulierung:

Satz I′. „Die Schiebungen A_1 und Streckungen M_1, die reziproke Substitution R und die er-

---

*) Dieser grundlegende Satz ist auf die Gruppe der U mit ganzzahligen Koeffizienten (s. die vorige Anm.) übertragbar. Sei $U\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ eine derartige U; wo keiner der Koeffizienten verschwinde.

Das Produkt $UA_1(h)$ liefert bei ganzzahligem h eine ganzzahlige U_1, wo $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \alpha h + \beta$, und entsprechend $UA_2(k)$ eine U_2 mit $\alpha_2 = \alpha + \beta k$, $\beta_2 = \beta$. Da α und β (wegen $\Delta = 1$) teilerfremd sind, läßt sich in $UA_1(h)$ der Parameter h so wählen, daß $|\beta_1| < |\alpha_1|$, und entsprechend k in $UA_2(k)$ so, daß $|\alpha_2| < |\beta|$. Wendet man diese Regel alternierend an, so entsteht ein Produkt $UA_1(h_1)\,A_2(k_1)\,A_1(h_2)\,A_2(k_2)\ldots$, wo für die sukzessive entstehenden U_1, U_2, $U_3\ldots$ die Ungleichungen gelten:

$$|\alpha| < |\beta_1| < |\alpha_2| < |\beta_3| < |\alpha_4| < \ldots$$

Nach einer endlichen Anzahl von Schritten gelangt man so zu einem verschwindenden β_i resp. α_k, und je nachdem schließt obiges Produkt mit einer A_1 resp. A_2 ab. Durch einen analogen Prozeß läßt sich auch ein γ resp. δ zum Verschwinden bringen. Bezeichnet U_0 eine U mit einem verschwindenden Koeffizienten, und ist z. B.

$$U_0 = UA_1(h_1)\,A_2(k_1)\ldots A_1(h_i)\,A_2(k_i)\,,$$

so ergibt sich hieraus umgekehrt:

$$U = U_0 A_2(-k_i)\,A_1(-h_i)\ldots A_2(-k_1)\,A_1(-h_1)\,.$$

Da $A_1(h)$ durch $|h|$-malige Ausführung von $A_1(+1)$ resp. $A_1(-1)$ hervorgeht, und entsprechend $A_2(k)$, so ist damit zunächst eine beliebige U mittels der Elementarsubstitutionen $A_1(\pm 1)$, $A_2(\pm 1)$ auf eine U_0 zurückgeführt.

weiternde E sind erzeugende Substitutionen der Gruppe Γ aller eigentlichen S."

Von diesen vier letzteren ist aber noch eine entbehrlich, z. B. $A_2(-1)$. Denn versteht man unter B, B' die Substitutionen $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, so hat man:

$$B = A_1(-1)\, A_2(1)\, A_1(-1) = A_2(1)\, A_1(-1)\, A_2(1)\,,$$
$$B' = A_1(1)\, A_2(-1)\, A_1(1) = A_2(-1)\, A_1(1)\, A_2(-1)\,,$$

andererseits $B^2 = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$, $B^3 = B'$, $B^4 = 1$, und diese vier Substitutionen B, B^2, B^3, B^4 sind zugleich die einzigen U, die zwei Nullen aufweisen. Somit ist B nur aus $A_1(-1)$ und $A_2(1)$ erzeugbar, und $A_2(-1)$ gemäß:

$$A_2(-1) = A_1(-1)\, B' A_1(-1)$$

aus $A_1(-1)$ und B. Somit lassen sich statt $A_1(\pm 1)$ und $A_2(1)$ auch $A_1(\pm 1)$ und B als Fundamentalsubstitutionen verwenden.

Nunmehr sind noch alle U_0 durch Zusammensetzung von Fundamentalsubstitutionen herzuleiten. Zuvörderst sind $A_1(\beta)$ und $A_2(\gamma)$ selbst solche U_0:

$$A_1(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix},$$

und diese liefern durch Zusammensetzung mit $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A_1(\beta)\, B^2 = \begin{pmatrix} -1, & -\beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2(\gamma)\, B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\gamma, & -1 \end{pmatrix},$$

d. s. aber alle Typen mit verschwindendem γ resp. β.

Endlich kommt

$$BA_1(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}, \qquad B^3 A_1(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\delta \end{pmatrix};$$

$$BA_2(\alpha) = \begin{pmatrix} -\alpha, & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^3 A_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha, & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

womit alle U_0 erschöpft sind. Daher gilt der für die Zahlentheorie und ihre Anwendungen (auf θ-Funktionen, elliptische Modulfunktionen u. a.) fundamentale Satz: „Jede ganzzahlige U in zwei homogenen Variabeln ist aus den Fundamentalsubstitutionen $A_1(\pm 1)$, $A_2(1)$ oder auch $A_1(\pm 1)$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugbar." (Vgl. hierzu H. Weber, Algebraische Zahlen und elliptische Funktionen, Braunschweig 1892, S. 63.)

Bei den algebraischen U des Textes lassen sich entsprechend statt $A_1(h)$, $A_2(k)$ auch $A_1(h)$ und B, oder auch $A_2(k)$ und B als Fundamentalsubstitutionen wählen. Denn man hat:

$$BA_1(-k)\, B^3 = A_2(k)\,, \quad B^3 A_2(-h)\, B = A_1(h)\,.$$

Vermöge des Satzes VII läßt sich zeigen, daß die Anzahl erzeugender S von Γ auf drei (und nicht weniger) beschränkbar ist. Sei $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ beliebig vorgelegt, mit der Determinante $\varDelta \neq 0$, so ist:

$$(23)\qquad S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} M_1(\mu) = S\begin{pmatrix}\alpha\mu, & \beta\\ \gamma\mu, & \delta\end{pmatrix}. \qquad (\mu \neq 0)$$

Soll sich hier die rechte Seite auf eine U reduzieren, so muß $\mu = \frac{1}{\varDelta}$ sein. Analog kann man mit $M_2(\nu)$, $E(\varrho)$ verfahren, wo dann ν, ϱ resp. die Werte $\frac{1}{\varDelta}$, $\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}$ (bei beliebigem Vorzeichen der Wurzel) annehmen. Man kann kurz schreiben:

$$(\mathrm{XVI})\qquad SM_1\left(\frac{1}{\varDelta}\right) = U, \qquad SM_2\left(\frac{1}{\varDelta}\right) = U, \qquad SE\left(\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}\right) = U,$$

um auszudrücken, daß jedesmal eine unimodulare Substitution hervorgeht.

Nun war vermöge (12), (XIII), (XIV) jede U aus A_1 und A_2 erzeugt; man hat also, wenn man etwa den ersten der drei Fälle (XVI) ins Auge faßt, die damaligen Zeichen α, β, γ, δ zu ersetzen durch $\frac{\alpha}{\varDelta}$, β, $\frac{\gamma}{\varDelta}$, δ und hinterher U mit $M_1(\varDelta)$ zu multiplizieren, um eine beliebige eigentliche $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Determinante $\varDelta$ aus A_1, A_2 und M_1 zu erzeugen:

Satz VIII. „Die beiden Schiebungen A_1, A_2, im Verein mit $M_1(\varDelta)$, oder auch $M_2(\varDelta)$, oder auch $E(\varDelta^2)$, sind drei erzeugende Substitutionen der Gruppe Γ aller eigentlichen S, auf Grund von (XII) und (12), resp. (XIII), resp. (XIV)."

Die Anzahl erzeugender Substitutionen von Γ — bei Beschränkung auf die Fundamentalsubstitutionen A_1, A_2, M_1, M_2, R, E — kann aber auch nicht unter drei sinken, und unter ihnen müssen sich A_1, A_2 befinden.

Setzt man nämlich eine oder mehrere der M_1, M_2, R, E mit A_1 oder aber mit A_2 zusammen, so resultiert stets eine S, von deren Koeffizienten mindestens einer verschwindet.

Behufs Herstellung einer beliebigen S bedarf man demnach beider Schiebungen A_1, A_2, die aber für sich erst die allgemeine U hervorbringen. Dann aber bedarf man, nach Satz VIII, überdies einer, aber auch nur einer M_1 (oder M_2, oder E), um jede S zu erhalten, während die bloße Zusammensetzung von A_1, A_2 mit R nur die Gruppe aller S der Determinanten 1 und -1 liefern würde.

Zur Vervollständigung des Satzes VIII werde noch die explizite Erzeugung von M_2, E und R aus A_1, A_2, M_1 ausgeführt.

Mit Hilfe von (20), (XIV), (XVI) entsteht:

$$\text{(XVII a)}\quad \begin{cases} M_2(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \\ = A_1(1)\, A_2\left(\dfrac{1-\delta}{\delta}\right) A_1(-\delta)\, A_2\left(\dfrac{\delta-1}{\delta^2}\right) M_1(\delta)\,, \end{cases}$$

$$\text{(XVII b)}\quad \begin{cases} E(\varrho) = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix} \\ = A_2(1)\, A_2\left(\dfrac{1-\varrho}{\varrho}\right) A_1(-\varrho)\, A_1\left(\dfrac{\varrho-1}{\varrho^2}\right) M_1(\varrho^2)\,. \end{cases}$$

Was R betrifft, so stelle man mittels (14), (15) $S\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ her:

$$\text{(14)}\qquad S\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A_1(1)\, A_2(-1)\, A_1(1)\,,$$

und setze nochmals mit $M_1(-1)$ zusammen, so entspringt R:

$$\text{(XVII c)}\qquad R = S\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1(1)\, A_2(-1)\, A_1(1)\, M_1(-1)\,.$$

Endlich sei noch die Erzeugung angegeben:

$$\text{(25)}\qquad S\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_1(1)\, A_2(-2)\, A_1(1)\, A_2(-2)\,.$$

Von Bedeutung ist der einfache Zusammenhang zwischen A_1, A_2 und R:

$$\text{(XVIII)}\qquad A_2(n) = R\, A_1(n)\, R\,,\qquad A_1(m) = R\, A_2(m)\, R\,.$$

Damit erhält Satz VIII die Ergänzung:

Satz VIII′. „Im Satze VIII ist das erzeugende Paar A_1, A_2 durch das Paar A_1, R oder auch durch das Paar A_2, R ersetzbar."

Legt man dagegen weniger Gewicht auf eine geringste Anzahl erzeugender Substitutionen von Γ, als auf eine einfache und beide Variable möglichst gleichmäßig berücksichtigende Darstellung, so wird man die beiden Schiebungen A_1, A_2 nebst den beiden Streckungen M_1, M_2 verwenden. Nach § 5, (VI) ist:

$$(26)\quad A_1(k)\,M_1(m) = S\begin{pmatrix} m & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2(l)\,M_2(n) = S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & n \end{pmatrix},$$

folglich durch Zusammensetzung:

$$(27)\quad \begin{cases} A_1(k)\,M_1(m)\,A_2(l)\,M_2(n) = S\begin{pmatrix} m + kl, & kn \\ l & n \end{pmatrix}, \\ A_2(l)\,M_2(n)\,A_1(k)\,M_1(m) = S\begin{pmatrix} m, & k \\ ln, & kl + n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Sollen umgekehrt die vier Koeffizienten rechts jeweils vorgegebene Werte α, β, γ, δ mit $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ haben, so berechnet sich sofort:

$$(\mathrm{XIX})\quad \begin{cases} S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A_1\left(\frac{\beta}{\delta}\right) M_1\left(\frac{\Delta}{\delta}\right) A_2(\gamma)\,M_2(\delta), \\ S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A_2\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) M_2\left(\frac{\Delta}{\alpha}\right) A_1(\beta)\,M_1(\alpha). \end{cases}$$

Vom Geltungsbereiche dieser beiden Darstellungen gilt Analoges, wie bei (XIII); für $\alpha \neq 0$, $\delta \neq 0$ kann man beide Erzeugungen (XIX) benutzen, für $\alpha = 0$, $\delta \neq 0$ gilt nur noch die erstere, und vice versa. Verschwinden dagegen α und δ, so greife man wiederum auf eine der beiden Erzeugungen (XIII) einer U zurück, und setze letztere noch mit einer geeigneten M_1 resp. M_2 zusammen. Man erhält ähnlich, wie bei der Ableitung von (24):

$$(\mathrm{XX})\quad \begin{cases} S\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = A_1(\beta)\,A_2\left(-\frac{1}{\beta}\right) A_1(\beta)\,M_1(\beta\gamma) \\ \qquad = A_2(\gamma)\,A_1\left(-\frac{1}{\gamma}\right) A_2(\gamma)\,M_2(\beta\gamma). \end{cases}$$

Die obigen Sätze, insbesondere V und VIII, über die Erzeugung von S durch Fundamentalsubstitutionen, gestatten wichtige Anwendungen auf die Invarianten. Zunächst vereinfacht sich jetzt der Prozeß der Transformation, der in § 5 zum Begriffe der Invariante führte. Es sei eine Reihe von, in den Variabeln x, y homogenen Formen f_n, g_p, h_q der Ordnungen n, p, q ... vorgelegt:

$$(28)\quad \begin{cases} f_n(x\,,\,y) = a_0\,x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2\,x^{n-2} y^2 + \dots \\ \qquad\qquad + a_{n-1}\,x\,y^{n-1} + a_n\,y^n\,, \\ g_p(x\,,\,y) = b_0\,x^p + b_1\,x^{p-1} y + b_2\,x^{p-2} y^2 + \dots \\ \qquad\qquad + b_{p-1}\,x\,y^{p-1} + b_p\,y^p\,, \\ h_q(x\,,\,y) = c_0\,x^q + c_1\,x^{q-1} y + c_2\,x^{q-2} y^2 + \dots \\ \qquad\qquad + c_{q-1}\,x\,y^{q-1} + c_q\,y^q\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Übt man auf x, y eine eigentliche Substitution (II) $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ mit $\varDelta \neq 0$ aus, so gehen die Formen $f_n(x\,,\,y)$, $g_p(x\,,\,y)$, $h_q(x\,,\,y)$, ... über in neue Formen $\varphi_n(\xi\,,\,\eta)$, $\psi_p(\xi\,,\,\eta)$, $\chi_q(\xi\,,\,\eta)$, ... mit Koeffizienten α_i, β_k, γ_k, ... Gilt dann für eine in den (a), (b), (c) ... ganze und homogene Funktion $J[(a), (b), (c), \dots]$ für alle Werte der (a), (b), (c), ..., α, β, γ, δ die Identität:

$$\text{(XXI)}\quad J[(\alpha)\,,\,(\beta)\,,\,(\gamma)\,,\,\dots] = \varDelta^{\omega} J[(a)\,,\,(b)\,,\,(c)\,,\,\dots]\,,$$

unter ω eine feste natürliche Zahl verstanden, so heißt $J[(a), (b), (c), \dots]$ eine Invariante der Formen $f, g, h, \dots$ vom „Gewichte“ ω, für $\omega = 0$ eine „absolute“, andernfalls eine „relative“.

Aus den Sätzen V und VIII geht dann unmittelbar hervor:

Satz IX. „Damit J zu einer Invariante der Formen f, g, h, ... vom Gewichte ω wird, ist notwendig und hinreichend, daß J bei beliebigen Schiebungen A_1, A_2 beider Variabeln ungeändert bleibt, und sich bei einer Streckung $M_1(\mu)$ der ersten Variabeln (oder auch bei einer Streckung $M_2(\nu)$ der zweiten Variabeln) nur um den Faktor μ^{ω} (resp. ν^{ω}) ändert.“

Aufgabe 1. Satz V ist auf Grund des Multiplikationstheorems der Determinanten auf n Variable auszudehnen.

Aufgabe 2. Der in der Anmerkung *) zu S. 69 bewiesene Satz über die Umkehrbarkeit ganzzahliger homogener Substitutionen in zwei Variabeln läßt sich auf n Variable ausdehnen, auf Grund des elementaren Satzes, daß die Determinante der ersten Minoren einer n-reihigen Determinante D gleich D^{n-1} ist.

Aufgabe 3. Die in der Anmerkung *) zu S. 70, 71 bewiesene Erzeugung der Gruppe aller ganzzahligen unimodularen Substitutionen in zwei homogenen Variabeln ist auf den Fall auszudehnen, wo die Koeffizienten komplexe ganze Zahlen sind (von der Form $a + ib$; a, b ganz rational). Sind α und μ zwei solche Zahlen, so lassen sich bekanntlich stets, und nur auf eine einzige Art, zwei andere solche Zahlen β und ϱ derart finden, daß $\alpha = \beta\mu + \varrho$, wo die Norm von ϱ kleiner ist als die von μ. Damit bleibt das in dem Produkte $U A_1(h) A_2(k) A_1(h_1) A_2(k_1) \ldots$ ausgedrückte alternierende Verfahren für gewisse komplexe ganze Werte der Parameter $h, k, h_1, k_1 \ldots$ gültig. Die Gruppe ist jetzt aus sechs Fundamentalsubstitutionen erzeugbar: Zu den damaligen drei: $A_1(\pm 1)$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ treten noch die drei weiteren $A_1(\pm i)$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ hinzu.

Aufgabe 4. Die in den Aufgaben zu § 5 unter (14) aufgeführte Gruppe:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{aligned} x' : y' : 1 = a^2 x + 2aby + b^2 : acx + (ad + bc)y + bd : \\ c^2 x + 2cdy + d^2 \end{aligned} \right.$$

läßt folgende homogene Behandlung zu. Man suche die lineare Substitution:

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \qquad y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$
$$z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

so zu bestimmen, daß die Form $y^2 - xz$ eine relative Invariante wird, d. h. daß $y'^2 - x'z' = \varrho(y^2 - xz)$ wird, wo ϱ nur von den neun Substitutionskoeffizienten abhängt. Man findet gerade die Gruppe (a), nur jetzt in homogener Gestalt:

$$(\mathrm{a}')\begin{cases} x' = a^2 x + 2aby + b^2 z, \quad y' = acx + (ad+bc)y + bdz, \\ \qquad z' = c^2 x + 2cdy + d^2 z, \end{cases}$$

und für ϱ den Wert $(ad - bc)^2$, während die Substitutionsdeterminante den Wert $(ad - bc)^3$ besitzt.

Geometrisch läßt sich die Gruppe (a′) als die Gesamtheit der Kollineationen (in homogenen Punktkoordinaten x, y, z) auffassen, die den festen Kegelschnitt $y^2 - zx = 0$ in sich, oder wie man sagt, „automorph" transformieren.

Analog ist die lineare homogene Gruppe in vier Variabeln x, y, z, w zu behandeln, für die die drei Formen $x^2 - xz$, $yz - xw$, $z^2 - yw$ relative Invarianten sind. Geometrisch ist das die Gruppe, die die kubische Raumkurve $x : y : z : w = \lambda^3 : \lambda^2 \mu : \lambda \mu^2 : \mu^3$ automorph transformiert [s. die Aufgabe (14) zu § 5].

Aufgabe 5. Für die lineare homogene viergliedrige Gruppe $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$ sind zwei charakteristische absolute Invarianten J_1, J_2 zu ermitteln.

Setzt man zur Abkürzung $d_{01} = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$, $d_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, $d_{20} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix}$, so ergibt sich $J_1 = \frac{d_{01}}{d_{12}}$, $J_2 = \frac{d_{02}}{d_{12}}$. Invariant bleiben der Nullpunkt O und die unendlich ferne Gerade g_∞.

Aufgabe 6. Nach der Methode des Textes (mittels der Fundamentalsubstitutionen) ist zu zeigen, daß eine kubische binäre Form $f_3 \equiv a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3$ die Invariante $R = (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2)$ besitzt, und eine biquadratische binäre Form $f_4 \equiv a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 xy^3 + a_4 y^4$ die beiden Invarianten: $i = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$, $j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$.

Bezeichnet $\varDelta$ die Substitutionsdeterminante, so ist $R' = \varDelta^6 R$, $i' = \varDelta^4 i$, $j' = \varDelta^6 i$, und $\frac{i^3}{j^2}$ ist eine absolute Invariante der f_4.

Ferner ist zu beweisen, wenn zwei Formen f_n, g_n gleicher Ordnung n vorliegen:

$$f_n \equiv a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots$$
$$+ \binom{n}{1} a_{n-1} x^1 y^{n-1} + a_n y^n ,$$

$$g_n \equiv b_0 x^n + \binom{n}{1} b_1 x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{1} b_{n-1} x y^{n-1} + b_n y^n ,$$

daß $J = a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - + \cdots + (-1)^n a_n b_0$ eine Invariante von f_n, g_n ist, so daß $J' = \Delta^n J$, und falls n gerade, $= 2l$, daß die Form f_{2l} die Invariante

$$J = a_0 a_{2l} - \binom{2l}{1} a_1 a_{2l-1} + \binom{2l}{2} a_2 a_{l-2} - + \cdots$$
$$+ (-1)^l \frac{1}{2} \binom{2l}{l} a_l^2$$

besitzt, so daß $J' = \Delta^{2l} J$ wird.

Aufgabe 7. Die Erzeugung der $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ aus Fundamentalsubstitutionen (Schiebungen und Streckungen) ist auf S in $n = 3, 4, \ldots$ homogenen Variabeln ausdehnbar. Im Falle $n = 3$ seien x_1, x_2, x_3 die drei Variabeln. Unter $A_{ik}(h_{ik})$ sei die „Schiebung“ $x_i = \xi_i + h_{ik} \xi_k$, $x_k = \xi_k$, $x_l = \xi_l$ verstanden, unter $M_i(m_i)$ die „Streckung“ $x_i = m_i \xi_i$, $x_k = \xi_k$, $x_l = \xi_l$, und unter $E(m)$ die „Erweiterung“ $x_i = m \xi_i$, $x_k = m \xi_k$, $x_l = m \xi_l$.

Zunächst ist nachzuweisen, daß eine unimodulare U durch geeignete Kombinierung der sechs Schiebungen A_{ik} erzeugbar ist, und hieraus eine beliebige S, falls man noch irgend eine der drei Streckungen oder auch eine Erweiterung hinzunimmt. Die Erzeugung der U läßt sich aber noch weiter reduzieren.

Aus der Identität $A_{ik}(h_{ik}) A_{kl}(h_{kl}) A_{ik}(-h_{ik}) A_{kl}(-h_{kl}) = A_{il}(h_{ik} \cdot h_{kl})$ läßt sich folgern, daß sich die sechs A_{ik} auf drei zyklisch verbundene unter ihnen, A_{ik}, A_{kl}, A_{li}, zurückführen lassen. Somit ist eine U durch drei, und eine beliebige S durch vier Fundamentalsubstitutionen erzeugbar.

Das Analoge gilt für n Variable: Eine U ist auf n, und eine beliebige S auf $n+1$ Fundamentalsubstitutionen reduzierbar.

Mittels des in Anmerkung *) zu S. 70, 71 dargelegten alternierenden Verfahrens (und seiner geeigneten Wiederholung) ist die in Rede stehende Erzeugung der U mit einigen Modifikationen auch übertragbar auf U mit ganzzahligen Koeffizienten.

Aufgabe 8. In einer $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ seien α und δ, β und $-\gamma$ konjugiert komplex, so daß man, bei reellen A, B, C, D setzen kann:

$$(1)\qquad \begin{cases}\alpha = D + iC\,, \\ \delta = D - iC\,;\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta = -B + iA\,, \\ \gamma = B + iA\,.\end{cases}$$

Damit ist, mit Hilfe der Formeln (22) des Textes, zu zeigen, daß die Gesamtheit der (eigentlichen) S (1) eine Gruppe für sich bildet.

Entsprechen den Substitutionen S, S_1, S_2, wo S_2 die aus S und S_1 zusammengesetzte Substitution SS_1 bedeutet, einerseits die Koeffizientensysteme $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$, andererseits vermöge (1) die Größensysteme (A, B, C, D), (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2), so findet die Zusammensetzung von S und S_1 zu S_2 in den letzteren drei Größensystemen ihren Ausdruck in den Relationen:

$$(2)\qquad \begin{cases} A'' = (AD' + DA') + (BC' - CB')\,, \\ B'' = (BD' + DB') + (CA' - AC')\,, \\ C'' = (CD' + DC') + (AB' - BA') \\ D'' = -AA' - BB' - CC' + DD'\,. \end{cases}$$

Sind ferner Δ, Δ_1, Δ_2 die Determinanten von S, S_1, S_2, so hat man z. B.:

$$(3)\qquad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = A^2 + B^2 + C^2 + D^2\,,$$

und es besteht die Identität:

$$(4)\quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 + D_2^2 = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2).$$

Sind die S (1) im besonderen unimodular, so bilden sie eine Untergruppe der obigen Gruppe; dann wird der gemeinsame Wert beider Seiten von (4) die Einheit.

Die Formeln (2), in Verbindung mit (4), stellen das sogenannte Multiplikationstheorem der Quaternionen dar, im Falle unimodularer S das der Einheitsquaternionen.

[Vgl. F. Klein und A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Heft 1 (Leipzig 1893), § 7.]

§ 7. Die Doppelelemente nicht homogener Substitutionen; weitere kanonische Gestalten solcher Substitutionen.

Wir kehren zurück zu den eigentlichen nicht homogenen Substitutionen des § 5 in etwas abgeänderter Bezeichnung:

$$\text{(I)} \qquad S) \quad \mu = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

wo die Koeffizienten α, β, γ, δ gegebene Größen seien mit der Determinante

$$(1) \qquad D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

und leiten für solche S eine Reihe von Eigenschaften ab, die auch bei funktionentheoretischen und geometrischen Anwendungen vielfache Verwendung finden.

Die Auflösung von (I) nach λ liefert die „Umkehrung S^{-1}" der S (I):

$$\text{(I}'\text{)} \qquad S^{-1}) \quad \lambda = \frac{-\delta\mu + \beta}{\gamma\mu - \alpha},$$

die sich nur dadurch von (I) unterscheidet, daß sich α und δ vertauscht und zugleich ihr Vorzeichen geändert haben; (I) ist wieder die Umkehrung von (I′).

Multipliziert man in (I), oder auch (I′), mit dem Nenner herauf, so nimmt S die Gestalt einer in den λ, μ „bilinearen Relation" an:

$$\text{(II)} \qquad \lambda\mu\gamma - \lambda\alpha + \mu\delta - \beta = 0,$$

und umgekehrt stellt jede solche Relation:

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \lambda\mu a + \lambda b + \mu b' + c = 0$$

mit einer von Null verschiedenen „Determinante" $ac - bb'$ eine eigentliche Substitution S (I) dar.

Bedeuten λ_i, λ_k irgend zwei Werte von λ, und μ_i, μ_k die ihnen vermöge (I) „entsprechenden" („zugeordneten") Werte von μ, so folgt aus (I) die Fundamentalformel*):

$$\text{(III)} \qquad \mu_i - \mu_k = (\lambda_i - \lambda_k) \cdot \frac{D}{(\gamma \lambda_i + \delta)(\gamma \lambda_k + \delta)} \, .$$

Vermöge (III) lassen sich aus solchen Differenzen $\lambda_i - \lambda_k$ relative und absolute Invarianten konstruieren.

Setzt man in (I) oder (II) $\lambda = \mu$, so gelangt man zu den beiden sich selbst entsprechenden Werten von λ (oder μ), die mit ω_1, ω_2 bezeichnet und die „Doppelelemente"**) von S genannt werden sollen; ω_1, ω_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\text{(IV)} \qquad \lambda^2 \gamma - \lambda(\alpha - \delta) - \beta = 0 \, .$$

Als „Diskriminante" Δ dieser Gleichung sei, mit leichter Abänderung des Zahlenfaktors gegenüber der Festsetzung (4) des § 1, der Ausdruck:

$$\text{(2)} \qquad \Delta \equiv (\alpha - \delta)^2 + 4 \beta \gamma = (\alpha + \delta)^2 - 4 D$$

eingeführt.

Umgekehrt denke man sich jetzt die Doppelelemente ω_1, ω_2 gegeben als Wurzeln einer beliebigen quadratischen Gleichung:

$$\text{(V)} \qquad a \lambda^2 + 2 b \lambda + c = 0 \, .$$

Die bilineare Gestalt (II) von S zeigt, daß zu (V) noch eine ∞^1-Schar von S gehört:

$$\text{(VI)} \qquad a \lambda \mu + \lambda(b + \varrho) + \mu(b - \varrho) + c = 0 \, ,$$

*) Der Ausdruck $\lambda_i - \lambda_k$ erscheint so als „relative" Invariante in weiterem Sinne, insofern der Faktor von $\lambda_i - \lambda_k$ in (III) noch von den Werten λ_i, λ_k der Variabeln λ abhängt. Bei homogener Schreibweise kommt man auf den gewöhnlichen Begriff der relativen Invariante (s. § 6, S. 75) zurück. Denn setzt man an Stelle von (I) $\mu^{(1)} = \alpha \lambda^{(1)} + \beta \lambda^{(2)}$, $\mu^{(2)} = \gamma \lambda^{(1)} + \delta \lambda^{(2)}$, so wird (III) zu:

$$\mu_i^{(1)} \mu_k^{(2)} - \mu_i^{(2)} \mu_k^{(1)} = \left(\lambda_i^{(1)} \lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)} \lambda_i^{(2)}\right) D \, .$$

Das ist nichts anderes als die Identität (XV) des § 6.

**) Auch der Ausdruck „Einheitselemente" ist üblich.

unter ϱ einen willkürlichen Parameter verstanden, oder auch in der Gestalt (I):

$$\text{(VI}'\text{)} \qquad \mu = \frac{-(b+\varrho)\lambda - c}{a\lambda + (b-\varrho)}\,.$$

Es werde zunächst der „allgemeine" Fall betrachtet, wo ω_1, ω_2, die Wurzeln von (V), endlich und verschieden sind, so daß $a \neq 0$, $\Delta \neq 0$. Bedeutet k ebenfalls einen willkürlichen Parameter ($\neq 0, \infty$)*), so werde als „kanonische" Gestalt der Substitution (VI) festgesetzt:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{\mu-\omega_1}{\mu-\omega_2} = k\,\frac{\lambda-\omega_1}{\lambda-\omega_2}\,.$$

In der Tat sind ω_1, ω_2 die Doppelelemente der Substitution (VII). Daß aber (VII) auch sämtliche S mit den Doppelelementen ω_1, ω_2 liefert, lehrt die Vergleichung mit (VI). Bringt man (VII) auf die bilineare Gestalt, so ergibt sich, nach Division mit $1-k$:

$$\text{(VII}'\text{)} \quad \lambda\mu - \lambda\,\frac{\omega_1 - k\,\omega_2}{1-k} - \mu\,\frac{\omega_2 - k\,\omega_1}{1-k} + \omega_1\omega_2 = 0\,.$$

Hier ist der Divisor $1-k$ von Null verschieden anzunehmen. Denn für $k=1$ würde (VII) übergehen in $(\lambda-\mu)(\omega_1-\omega_2)=0$, also, wegen $\omega_1 \neq \omega_2$, $\lambda=\mu$, d. i. die identische Substitution, für die jedes Element als Doppelelement anzusehen ist. Schließt man diesen Fall, als trivial, aus, so verbleiben die durch (VII′) dargestellten S.

Da (VII′) für $\lambda=\mu$ in die Gleichung mit den Wurzeln ω_1, ω_2 übergehen muß, so muß die Summe der Koeffizienten von $-\lambda$ und $-\mu$ in (VII′) den Wert $\omega_1+\omega_2$ haben; man darf also (VII′) auch in der Gestalt schreiben:

$$\text{(VII}''\text{)} \quad \lambda\mu - \lambda\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \sigma\right) - \mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} - \sigma\right) + \omega_1\omega_2 = 0\,,$$

*) In den Grenzfällen $k=0$ resp. ∞ würde sich die Formel (VII) reduzieren auf $(\mu-\omega_1)(\lambda-\omega_2)=0$ resp. $(\mu-\omega_2)(\lambda-\omega_1)=0$. Diese Substitutionen sind aber uneigentliche (s. Anm. *) zu S. 45), insofern einem festen Wert von λ resp. μ jeder Wert von μ resp. λ entspricht.

wo sich σ durch Subtraktion der Koeffizienten von $-\lambda$ und $-\mu$ (VII′) bestimmt:

$$\sigma = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \, \frac{1+k}{1-k}, \tag{3a}$$

und hieraus umgekehrt k:

$$k = \frac{\sigma - \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}}{\sigma + \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}}. \tag{3b}$$

Zu jedem Werte von k in (VII) resp. (VII′) gehört so ein bestimmter endlicher Wert von σ, und umgekehrt (einem unendlich großen Wert von σ würde gerade der ausgeschlossene Fall $k=1$ entsprechen). Der Parameter σ in (VII″) ist von dem Parameter ϱ in (VI) nur unwesentlich verschieden, denn da nach (V) $\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2} = -\dfrac{b}{a}$, so ergibt sich $\sigma = -\dfrac{\varrho}{a}$.

Kürzer und direkter hätte (III) zu (VII) geführt. Aus (III) folgt sofort:

$$\frac{\mu - \omega_1}{\mu - \omega_2} = \frac{\gamma\,\omega_2 + \delta}{\gamma\,\omega_1 + \delta} \cdot \frac{\lambda - \omega_1}{\lambda - \omega_2}, \tag{4}$$

wo sich der erste Faktor rechterhand:

$$k = \frac{\omega_2 + \dfrac{\delta}{\gamma}}{\omega_1 + \dfrac{\delta}{\gamma}} \tag{5}$$

wegen der Willkürlichkeit von $\dfrac{\delta}{\gamma}$ als Parameter k von (VII) auffassen läßt [gemäß (IV) ist $\gamma \neq 0$].

Nunmehr sind die besonderen Fälle ins Auge zu fassen, wo entweder ein Doppelelement unendlich groß wird, oder aber beide Doppelelemente zusammenfallen, oder endlich beides zugleich eintritt. Bleibe etwa ω_1 endlich, während ω_2 unendlich groß werde, so daß γ in (IV) resp. a in (V) verschwindet, während $\alpha \neq \delta$, $b \neq 0$

bleibt. Dann darf man in (I) mit δ, das $\neq 0$ sein muß, durchdividieren, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\delta = 1$ setzen, so daß sich (I) reduziert auf:

$$\text{(VIII)} \qquad \mu = \alpha\lambda + \beta\,, \quad (\omega_1 \text{ endlich, } \omega_2 = \infty)$$

wo α sowohl von 1 als von 0 verschieden sein muß. Für $\lambda = \mu$ ergibt sich $\omega_1 = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

Die Substitution (VIII) fällt mit der „ganzen" Substitution G (VI) des § 5 zusammen, während (I) für $\gamma \neq 0$ eine „echt gebrochene" Substitution hieß.

Durch Einführung von ω_1 nimmt (VIII) die Gestalt an:

$$\text{(VIII}'\text{)} \qquad \mu - \omega_1 = \alpha(\lambda - \omega_1)\,,$$

wo α als willkürlicher Parameter fungiert, wenn man sich nur ω_1 (mit $\omega_2 = \infty$) als gegeben denkt.

Die Vergleichung von (VIII') mit (VII) legt es nahe, die erstere Gestalt aus der letzteren durch einen Grenzprozeß abzuleiten. In der Tat wird für $\omega_2 = \dfrac{1}{\varepsilon}$ (VII) zu:

$$\text{(6)} \qquad \frac{\mu - \omega_1}{\varepsilon\mu - 1} = k\,\frac{\lambda - \omega_1}{\varepsilon\lambda - 1}\,,$$

und (6) geht für $\lim \varepsilon = 0$ direkt in (VIII') über, wenn man α statt k schreibt.

In dem kanonischen Falle $\omega_1 = 0$ nimmt (VIII) resp. (VIII') die Gestalt an:

$$\text{(IX)} \qquad \mu = \alpha\lambda\,, \qquad (\omega_1 = 0\,, \quad \omega_2 = \infty)$$

d. i. aber die „Streckung" (IV) des § 5.

Andererseits möge ω_1 mit ω_2 zusammenfallen:

$$\text{(7)} \qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega\,,$$

wo ω vorerst als endlich vorausgesetzt werde. Dann wird (V) zu:

$$\text{(8)} \qquad (\lambda - \omega)^2 \equiv \lambda^2 - 2\lambda\omega + \omega^2 = 0\,.$$

Gemäß (VI) ist jede zugehörige S mit dem endlichen Doppelelement $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ und einem Parameter ϱ dargestellt durch:

$$(9)\quad\begin{cases} \lambda\mu - \lambda(\omega + \varrho) - \mu(\omega - \varrho) + \omega^2 \\ \equiv (\lambda\mu - \lambda\omega - \mu\omega + \omega^2) - \lambda\varrho + \mu\varrho \\ \equiv (\lambda - \omega)(\mu - \omega) - \lambda\varrho + \mu\varrho \\ \equiv (\lambda - \omega)(\mu - \omega) - (\lambda - \omega)\varrho + (\mu - \omega)\varrho = 0\,. \end{cases}$$

Hier ist der Wert $\varrho = 0$ auszuschließen, da sich sonst (9) auf $(\lambda - \omega)(\mu - \omega) = 0$ reduzieren würde, d. h. λ resp. μ auf eine Konstante, was bei einer eigentlichen S nicht eintreten kann.

Man darf also (9) mit dem Produkte $\varrho(\lambda - \omega)(\mu - \omega)$ dividieren und erhält, wenn man für $\frac{1}{\varrho}$ bequemer c schreibt:

$$(\mathrm{X})\qquad \frac{1}{\mu - \omega} = \frac{1}{\lambda - \omega} + c$$

(endliches Doppelelement $\omega = \omega_1 = \omega_2$) .

Auch (X) läßt sich aus (VII) durch einen Grenzprozeß ableiten. Man setze $\omega_2 = \omega$, $\omega_1 = \omega - \varepsilon$, so kann man (VII) so schreiben:

$$1 + \frac{\varepsilon}{\mu - \omega} = k\left\{1 + \frac{\varepsilon}{\lambda - \omega}\right\}$$

oder:

$$\frac{\varepsilon}{\mu - \omega} = \frac{k\varepsilon}{\mu - \omega} + k - 1$$

oder endlich:

$$(10)\qquad \frac{1}{\mu - \omega} = \frac{k}{\lambda - \omega} + \frac{k-1}{\varepsilon}\,.$$

Hier lasse man ε gegen 0 und zugleich k gegen 1 konvergieren, derart, daß:

$$(11)\qquad k - 1 = c\,\varepsilon$$

erfüllt bleibt, wo c einen neuen endlichen Parameter bedeutet. Dann geht für $\lim\varepsilon = 0$, $\lim k = 1$ in der Tat (10) in (X) über. Der singuläre Fall $\lim c = 0$ entspricht der identischen Substitution $\lambda = \mu$.

In dem kanonischen Falle $\omega = 0$ wird (X) zu:

$$(\mathrm{X}')\qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\lambda} + c\,.$$

Schließlich ist der Fall $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \infty$ zu erledigen.

Man gehe auf (V) und (VI) zurück. Es ist jetzt $a = b = 0$, während $c(\neq 0)$ gleich 1 gesetzt werden darf. Damit wird (VI):

$$\lambda \varrho - \mu \varrho + 1 = 0 . \qquad (\varrho \neq 0) \tag{12}$$

Nimmt man $k = -\frac{1}{\varrho}$ als Parameter, so entsteht aus (12):

$$\mu = \lambda + k , \tag{XI}$$

d. i. die „Schiebung" (I) des § 5.

Um auch (XI) aus (X) durch Grenzübergang zu gewinnen, schreibe man zuvörderst $\frac{1}{\varepsilon}$ für ω in (X):

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon \mu - 1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon \lambda - 1} + c$$

oder:

$$(\varepsilon \lambda - 1) = (\varepsilon \mu - 1) + \frac{c}{\varepsilon} (\varepsilon \lambda - 1)(\varepsilon \mu - 1)$$

oder endlich:

$$\lambda = \mu + \frac{c}{\varepsilon^2} (\varepsilon \lambda - 1)(\varepsilon \mu - 1) . \tag{13}$$

Man setze nun die Relation fest:

$$c = -k \varepsilon^2 , \tag{14}$$

wo k einen neuen endlichen Parameter bedeutet, und lasse c zugleich mit ε gegen Null konvergieren, so geht aus (13) in der Tat (XI) hervor. Der singuläre Fall $k = 0$ gehört wiederum zur identischen S.

Nunmehr ist ein anderer wichtiger Unterfall der S (I) zu besprechen, der schon in § 2 auftrat.

Im allgemeinen entsprechen sich, wenn man von jedem der Doppelelemente ω_1, ω_2 absieht, irgend zwei Elemente λ, μ in (I) nicht wechselseitig; vielmehr, wenn irgend einem Werte λ_1 von λ der Wert μ_1 von μ zugeordnet ist, so entspricht dem Werte μ_1 von λ ein von λ_1 verschiedener Wert von μ.

Sollen aber in (I) resp. (I′) λ und μ stets*) wechselseitig korrespondieren, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß:

$$\alpha + \delta = 0 . \tag{15}$$

In der Tat wird dann (und nur dann), wie es sein muß, die bilineare Gestalt (II) von S symmetrisch in λ und μ:

$$\gamma \lambda \mu - \alpha(\lambda + \mu) + \beta = 0 . \tag{XII}$$

Nach § 2 heißt dann $S(\alpha = -\delta)$ eine „Involution"; eine solche ist durch ihre Doppelelemente ω_1, ω_2 bereits völlig bestimmt. Sind ω_1, ω_2 wieder gegeben als Wurzeln von

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 , \tag{V}$$

so lautet gemäß (VI) die zugehörige Involution:

$$a\lambda\mu + b(\lambda + \mu) + c = 0 , \tag{XII′}$$

oder, in der Gestalt (I):

$$\mu = \frac{-b\lambda - c}{a\lambda + b} . \tag{XII″}$$

Aus (2): $\Delta = (\alpha + \delta)^2 - 4D$ folgt jetzt für $\alpha + \delta = 0$, da $D \neq 0$, daß auch $\Delta \neq 0$ ist, so daß bei einer eigentlichen Involution die Doppelelemente stets getrennt sind.

Für den kanonischen Fall $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \infty$, also $a = c = 0$ in (V), entsteht aus (XII):

$$\lambda + \mu = 0 . \tag{XIII}$$

Ein anderer kanonischer Fall tritt ein, wenn $(0, \infty)$ ein Elementenpaar der Involution ist. Dann verschwindet b in (V), während a und c endlich und von Null verschieden sind. Führt man $-\frac{c}{a}$ als Parameter k ein, so nimmt (XII) die Gestalt an:

$$\lambda\mu = k \tag{XIV}$$

---

*) Hierzu genügt bereits die Existenz eines einzigen, sich gegenseitig entsprechenden Paares $\lambda_1, \mu_1 (\lambda_1 \neq \mu_1)$. Denn vermöge (II) ist dann zugleich $\lambda_1\mu_1\gamma - \lambda_1\alpha + \mu_1\delta - \beta = 0$, $\lambda_1\mu_1\gamma - \mu_1\alpha + \lambda_1\delta - \beta = 0$, woraus durch Subtraktion entsteht $(\mu_1 - \lambda_1)(\alpha + \delta) = 0$, d. i. aber die Bedingung (15).

mit den Doppelelementen:

(16) $$\begin{cases}\omega_1\\ \omega_2\end{cases} = \pm\sqrt{k}\,.$$

Ist überdies im besondern das eine der Doppelelemente gleich 1, also das andere gleich -1, so resultiert die „reziproke“ Substitution R (VIII) des § 5:

(XIV′) $$\lambda\mu = 1\,.$$

Die wesentlichsten dieser Ergebnisse fassen wir zusammen in:

Satz I. „Führt man in die nichthomogene Substitution S (I) $\mu = \dfrac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ deren Doppelelemente ω_1, ω_2 ein, so ergeben sich eine Reihe kanonischer Darstellungen von S.

Solange ω_1, ω_2 endlich und ungleich sind, erhält S die Gestalt (VII) $\dfrac{\mu-\omega_1}{\mu-\omega_2} = k\dfrac{\lambda-\omega_1}{\lambda-\omega_2}$, wo k endlich und von Null und Eins verschieden ist.

Rückt ω_2 ins Unendliche, während ω_1 endlich bleibt, so wird S zur ganzen Substitution G (VIII): $\mu = \alpha\lambda + \beta$, oder auch $\mu - \omega_1 = \alpha(\lambda - \omega_1)$, wo α endlich, von Null und Eins verschieden ist. Für $\omega_1 = 0$ geht G (VIII) in die Streckung M (IX): $\mu = \alpha\lambda$ über. Rückt auch noch ω_1 ins Unendliche, so geht aus G (VIII) die Schiebung A (XI): $\mu = \lambda + c$ hervor. In dem singulären Falle k resp. $\alpha = 1$, resp. $c = 0$ wird (VII), (VIII), (IX), (XI) zur identischen Substitution, für die jedes Element Doppelelement ist. Fallen andererseits beide Doppelelemente von S in einen endlichen Wert ω zusammen, so geht (VII) über in (X): $\dfrac{1}{\mu-\omega} = \dfrac{1}{\lambda-\omega} + k$, also für $\omega = 0$ in (X′) $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\lambda} + k$.

Eine Substitution S wird zur Involution (XI) $a\lambda\mu + b(\lambda+\mu) + c = 0$, wenn je zwei Elemente λ, μ sich wechselseitig entsprechen; eine Involution ist durch ihre Doppelelemente, die Wurzeln von (V) $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ eindeutig festgelegt. Sind diese

Doppelelemente 0, ∞, so nimmt (XII) die kanonische Gestalt (XIII) $\lambda + \mu = 0$ an; andererseits, für 0, ∞ als ein Paar der Involution, die Gestalt (XIV) $\lambda\mu = k$, die für $k = 1$ mit der reziproken Substitution R übereinstimmt."

Die Darstellung (VII) von S (I) läßt sich erweitern. Sind (λ_1, μ_1) (λ_2, μ_2) irgend zwei gegebene Elementenpaare von S, so leitet man aus (III), wie oben (VII), die Darstellung ab:

$$\text{(XV)} \qquad \frac{\mu - \mu_1}{\mu - \mu_2} = k \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2},$$

wo k wieder einen Parameter bedeutet. Dieser bestimmt sich, sobald noch ein drittes Paar (λ_3, μ_3) bekannt oder gegeben ist, durch:

$$\text{(17)} \qquad \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_2} = k \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2},$$

und die Elimination von k aus (XV) und (17) liefert für S:

$$\text{(XVI)} \qquad \frac{(\mu - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)}{(\mu - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)} = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}.$$

Der links stehende Ausdruck, der schon in § 3 betrachtet wurde und in § 8 näher untersucht werden soll, heißt das „Doppelverhältnis" („Dv.") der vier Elemente μ, μ_1, μ_2, μ_3, und entsprechend rechts das von λ, λ_1, λ_2, λ_3. In (XV), (XVI) ist enthalten:

Satz II. „Eine Substitution S mit zwei gegebenen Elementenpaaren (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) wird durch (XV) dargestellt. Ist noch ein drittes Paar (λ_3, μ_3) gegeben, so sagt die S aus, daß das von irgend einem Werte λ mit λ_1, λ_2, λ_3 gebildete Dv. den nämlichen Wert besitzt, wie dasjenige aus den vier vermöge S entsprechenden Elementen μ, μ_1, μ_2, μ_3. Oder auch: Das Dv. von irgend vier Werten der Variabeln λ ist gegenüber einer beliebigen eigentlichen S (I) eine absolute Invariante, und als solche charakteristisch für die S, oder endlich: Dieses Dv. ist die charakteristische (absolute) Invariante der Gruppe Γ aller eigentlichen S."

Es werde nunmehr zur gleichzeitigen Normierung von zwei Substitutionen S und S_1 geschritten, in Erweiterung der in § 2 angestellten Betrachtungen über quadratische Formen. Man gehe von der bilinearen Darstellung aus:

$$(18)\qquad \begin{cases} S) & f(\lambda,\mu) \equiv a\lambda\mu + b\lambda + b'\mu + c = 0\,, \\ S_1) & f_1(\lambda,\mu) \equiv a_1\lambda\mu + b_1\lambda + b_1'\mu + c_1 = 0\,. \end{cases}$$

Man suche die in beiden Substitutionen sich zugleich entsprechenden Paare (λ, μ). Die Elimination von μ resp. λ aus (18) führt zu den beiden quadratischen Gleichungen:

$$(19\text{a})\qquad \Lambda \equiv \begin{vmatrix} a\lambda + b', & b\lambda + c \\ a_1\lambda + b_1', & b_1\lambda + c_1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$(19\text{b})\qquad \mathrm{M} \equiv \begin{vmatrix} a\mu + b, & b'\mu + c \\ a_1\mu + b_1, & b_1'\mu + c_1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

deren Wurzeln mit λ_1, λ_2 resp. μ_1, μ_2 bezeichnet seien.

Dann sind (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) die beiden Paare der gesuchten Art, wo sich die Zuordnung von λ_1 zu μ_1 (und damit von λ_2 zu μ_2) durch (18) regelt*). Gemäß (XV) existieren dann für beide Substitutionen S, S_1 die kanonischen Gestalten:

$$(\text{XVII})\qquad \frac{\mu-\mu_1}{\mu-\mu_2} = k\,\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2}\,, \qquad \frac{\mu-\mu_1}{\mu-\mu_2} = k_1\,\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2}\,.$$

Die Werte von k, k_1 bestimmen sich durch Vergleichung mit (18); man erhält:

$$(20)\ \begin{cases} 1-k : k\mu_2 - \mu_1 : k\lambda_1 - \lambda_2 : \lambda_2\mu_1 - k\lambda_1\mu_2 = a : b : b' : c\,, \\ 1-k_1 : k_1\mu_2 - \mu_1 : k_1\lambda_1 - \lambda_2 : \lambda_2\mu_1 - k_1\lambda_1\mu_2 = a_1 : b_1 : b_1' : c_1\,, \end{cases}$$

---

*) Eine direkte Ausrechnung ist beschwerlich. Man berücksichtige indessen, daß für ein beiden Relationen (18) genügendes Paar λ, μ auch die Relation

$$\lambda(ab_1 - ba_1) + \mu(b'a_1 - b_1'a) + (ca_1 - c_1a) = 0$$

erfüllt sein muß. Zieht man ferner die Gleichung (25) heran, so ordnen sich die Paare (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) nach der Regel zusammen:

$$\begin{cases}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{cases} = -\frac{(p_{14} - p_{23}) \pm \sqrt{D_\lambda}}{2p_{12}}\,, \qquad \begin{cases}\mu_1 \\ \mu_2\end{cases} = -\frac{(p_{14} + p_{23}) \mp \sqrt{D_\lambda}}{2p_{13}}\,,$$

wo entweder die beiden oberen oder aber die beiden unteren Vorzeichen der Quadratwurzel gelten. (Wegen der Bedeutung der Zeichen p, D_λ s. u. S. 91, 92.)

wo sich k resp. k_1 je irgend einer, in diesen beiden fortlaufenden Proportionen enthaltenen Proportion entnehmen lassen.

In dem besonderen Falle $k = 1$ resp. $k_1 = 1$ reduziert sich die eine der Substitutionen (XVII) auf die identische, die andere, da jetzt sowohl λ_1, λ_2 wie μ_1, μ_2 mit deren Doppelelementen ω_1, ω_2 zusammenfallen, auf die Gestalt (VII).

Mit Rücksicht auf (III) zieht die Gleichheit von λ_1 und λ_2 die von μ_1 und μ_2 nach sich, und umgekehrt.

Die beiden Diskriminanten D_λ, D_μ der quadratischen Formen Λ, M (19) stehen also in der Beziehung, daß das Verschwinden der einen das der anderen bewirkt, und da beide je vom zweiten Grade in den Koeffizienten von (18) sind, werden sie bis auf einen Zahlenfaktor übereinstimmen. Um dies durch Rechnung zu erhärten, bezeichne man solche zweireihige Determinanten, wie $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ mit $(a\,b)$, dann lauten die beiden Formen Λ, M (19) explizite:

$$(19\text{a}')\quad \Lambda \equiv \lambda^2 (a\,b) + \lambda \{(a\,c) - (b\,b')\} + (b'c) \equiv \lambda^2 A_0 + \lambda A_1 + A_2\,,$$

$$(19\text{b}')\quad \mathsf{M} \equiv \mu^2 (a\,b') + \mu \{(a\,c) + (b\,b')\} + (b\,c) \equiv \mu^2 B_0 + \mu B_1 + B_2\,,$$

die, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, durch gleichzeitige Vertauschung von b, b_1 und b', b_1' und von λ mit μ auseinander hervorgehen.

Führt man die Differenzen:

$$(21)\qquad \delta = b' - b\,, \qquad \delta_1 = b_1' - b_1$$

als selbständige Größen ein und setzt $b' = b + \delta$, $b_1' = b_1 + \delta_1$, so werden die Koeffizienten in (19'):

$$(22)\quad \begin{cases} A_0 = (a\,b)\,, & A_1 = (a\,c) - (b\,\delta)\,, \quad A_2 = (b\,c) - (c\,\delta)\,, \\ B_0 = (a\,b) + (a\,\delta)\,, & B_1 = (a\,c) + (b\,\delta)\,, \quad B_2 = (b\,c)\,. \end{cases}$$

Damit erhalten die beiden Diskriminanten D_λ, D_μ von (19) die Werte:

$$(23)\quad \begin{cases} D_\lambda \equiv 4 A_0 A_2 - A_1^2 = 4 (a\,b) \{(b\,c) - (c\,\delta)\} - \{(a\,c) - (b\,\delta)\}^2, \\ D_\mu \equiv 4 B_0 B_2 - B_1^2 = 4 (b\,c) \{(a\,b) + (a\,\delta)\} - \{(a\,c) + (b\,\delta)\}^2, \end{cases}$$

deren Subtraktion liefert:

$$(24)\quad \frac{D_\mu - D_\lambda}{4} = (a\,b)\,(c\,\delta) + (a\,c)\,(\delta\,b) + (a\,\delta)\,(b\,c)\,.$$

Wie man sich durch Ausrechnung*) überzeugt, verschwindet die rechte Seite von (24) identisch, und es wird in der Tat:

$$(25) \qquad D_\lambda = D_\mu .$$

Um D_λ durch einfachere (nämlich invariante) Bildungen auszudrücken, beachte man, daß für $b' = b$, $b_1' = b_1$, i. e. $\delta = 0$, $\delta_1 = 0$ die Substitutionen (18) zu Involutionen werden, und daß dann die Funktionaldeterminante [§ 3, (VII)] der beiden zugehörigen quadratischen Formen

$$f \equiv a\lambda^2 + 2b\lambda + c, \qquad f_1 \equiv a_1\lambda^2 + 2b_1\lambda + c_1$$

mit den beiden jetzt übereinstimmenden Formen $\Lambda = \mathsf{M}$ (19) zusammenfällt, deren Diskriminante gemäß § 3, (V) durch die beiden Diskriminanten von f, f_1 und deren bilineare Invariante H ausdrückbar war.

Man versuche daher, die drei letzteren Invarianten auf die bilinearen Formen $f(\lambda, \mu)$, $f_1(\lambda, \mu)$ (18) zu übertragen, und führe demgemäß folgende Ausdrücke ein:

$$(26) \qquad D \equiv ac - bb', \qquad D_1 \equiv a_1c_1 - b_1b_1',$$

$$(27) \qquad H \equiv (ac_1 + ca_1) - (bb_1' + b_1b').$$

Die beiden ersteren mögen, wie schon oben bei (II′), die „Determinante" von f resp. f_1 heißen, und H wiederum die „bilineare Invariante" von f und f_1. Daß diese Bildungen Invarianten (sogar in erweitertem Sinne) von f und f_1 sind, wie es von vornherein wahrscheinlich**) ist, wird § 9 lehren.

Führt man auch in (26), (27) die Größen δ, δ_1 (21) ein, so nehmen D, D_1, H die Gestalt an:

$$(26') \qquad D \equiv (ac - b^2) - b\delta, \qquad D_1 \equiv (a_1c_1 - b_1^2) - b_1\delta_1,$$

$$(27') \qquad H \equiv (ac_1 + ca_1 - 2bb_1) - (b\delta_1 + b_1\delta),$$

---

*) Sind λ_i, λ_k, λ_l, λ_m vier beliebige Größen, so ist offenbar

$$(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_l - \lambda_m) + (\lambda_i - \lambda_l)(\lambda_m - \lambda_k) + (\lambda_i - \lambda_m)(\lambda_k - \lambda_l) \equiv 0 .$$

Ersetzt man hier homogenisierend jedes Produkt $\lambda_i\lambda_k$ durch $\lambda_i\lambda_k\mu_l\mu_m$ und setzt zur Abkürzung $p_{ik} = \lambda_i\mu_k - \lambda_k\mu_i$, so resultiert $p_{ik}p_{lm} + p_{il}p_{mk} + p_{im}p_{kl} \equiv 0$, d. i. die Identität des Textes. In der Geometrie spielt dieselbe als „Linienkoordinatenidentität" eine wesentliche Rolle.

**) Man berücksichtige die Relation (XVIII).

während sich für $D_\lambda = D_\mu$ durch Addition von (23) und mit Berücksichtigung von (25) der Ausdruck ergibt:

$$(28)\quad \begin{cases} D_\lambda \equiv \{4(a\,b)\,(b\,c) - (a\,c)^2\} - (b\,\delta)^2 - 2(a\,b)\,(c\,\delta) \\ \qquad\qquad + 2(b\,c)\,(a\,\delta)\,. \end{cases}$$

Auf Grund von § 3, (V) ist aber:

$$(29)\quad \begin{cases} 4(a\,b)\,(b\,c) - (a\,c)^2 = 4(a\,c - b^2)\,(a_1 c_1 - b_1^2) \\ \qquad\qquad - (a\,c_1 + c\,a_1 - 2\,b\,b_1)^2\,. \end{cases}$$

Bildet man in Analogie zur rechten Seite von (29) den verallgemeinerten Ausdruck $4\,DD_1 - H^2$ und vergleicht diesen mit D_λ (28), indem man die Differenz beider herstellt, so kommt wegen (29):

$$(30)\quad \begin{cases} (4\,DD_1 - H^2) - D_\lambda \equiv -4\,b\,\delta(a_1 c_1 - b_1^2) - 4\,b_1\delta_1(ac - b^2) \\ \qquad + 2(a\,c_1 + c\,a_1 - 2\,b\,b_1)\,(b\,\delta_1 + b_1\,\delta) \\ \qquad + 2(a\,b_1 - a_1 b)\,(c\,\delta_1 - c_1\,\delta) \\ \qquad - 2(b\,c_1 - b_1 c)\,(a\,\delta_1 - a_1\,\delta) + (b\,\delta_1 - b_1\,\delta)^2 \\ \qquad - (b\,\delta_1 + b_1\,\delta)^2 + 4\,b\,b_1\,\delta\,\delta_1\,. \end{cases}$$

Bei der Entwicklung der rechten Seiten zerstören sich aber je zwei Terme, und es resultiert als Verallgemeinerung von § 3, (V) die Identität:

$$(\mathrm{XVIII})\qquad D_\lambda = D_\mu \equiv 4\,DD_1 - H^2\,.$$

Damit gilt:

Satz III. „Zwei verschiedene Substitutionen S, S_1 lassen sich mit Hilfe der beiden ihnen gemeinsamen Elementenpaare (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) gleichzeitig in die kanonische Gestalt (XVII) setzen. Die Diskriminanten D_λ, D_μ der beiden quadratischen Formen Λ, M, deren Wurzeln die Paare (λ_1, λ_2), (μ_1, μ_2) sind, stimmen überein, und es ist, in Verallgemeinerung der Relation (V) des § 3:

$$D_\lambda = D_\mu = 4\,DD_1 - H^2\,,$$

wo D, D_1 die beiden Determinanten und H die bilineare Invariante der beiden bilinearen Formen $f(\lambda, \mu)$, $f_1(\lambda, \mu)$ sind, die durch ihr Verschwinden die beiden Substitutionen S, S_1 darstellen.“

Die Darstellung (II) resp. (II′) einer S (I) durch Nullsetzen einer bilinearen Form $f(\lambda, \mu)$ führt zur Übertragung der oben abgeleiteten kanonischen Gestalten der S auf die entsprechenden Formen f selbst. Der Unterschied ist im wesentlichen bloß der, daß in die Darstellungen der S nur die Verhältnisse der Koeffizienten α, β, γ, δ (I) resp. a, b, b', c (II′) eingingen, während die entsprechenden Darstellungen der Formen f (II′) von jenen Koeffizienten selbst abhängen.

Bei der Durchsichtigkeit des Übertragungsprinzips möge die Durchführung einiger Fälle genügen.

Die Determinante $D = ac - bb'$ der bilinearen Form

$$(18) \qquad f(\lambda, \mu) = a\lambda\mu + b\lambda + b'\mu + c$$

war ursprünglich die Determinante der durch $f = 0$ dargestellten Substitution S. Um die Bedeutung des Verschwindens von D — wobei S zu einer uneigentlichen Substitution wurde — für die Form f zu erkennen, führe man, falls $D = 0$, was dann stets möglich ist, drei Hilfsgrößen ϱ, ϱ', τ ein, so daß $D = 0$ identisch erfüllt wird:

$$(31) \qquad a = \varrho\varrho', \qquad c = \tau^2, \qquad b = \varrho\tau, \qquad b' = \varrho'\tau,$$

also umgekehrt*):

$$(31') \qquad \tau = \sqrt{c}, \qquad \varrho = \frac{b}{\sqrt{c}}, \qquad \varrho' = \frac{b'}{\sqrt{c}},$$

wo der Quadratwurzel ein bestimmtes Vorzeichen beigelegt werde. Dann zerfällt f in das Produkt:

$$(32) \qquad f(\lambda, \mu) \equiv (\varrho\lambda + \tau)(\varrho'\mu + \tau).$$

Umgekehrt erkennt man, daß für eine in zwei Linearformen in λ resp. μ zerfallende Form f die Determinante D verschwindet; f heißt dann „ausgeartet". Somit ergibt sich:

Satz IV. „Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Ausartung einer bilinearen Form f in zwei in λ resp. μ lineare Faktoren ist das Verschwinden der Determinante D von f."

*) Diese Darstellung (31′) versagt für $c = 0$. Aber dann verschwindet wegen $D = 0$ auch b oder b', und man hat unmittelbar: $f \equiv \mu(a\lambda + b')$ resp. $f \equiv \lambda(a\mu + b)$.

Für $b = b'$, $\lambda = \mu$ hat man den Spezialfall (IIc) des § 1.

Entsprechend werde die kanonische Darstellung einer quadratischen Form (§ 2) dahin ausgedehnt, daß man eine beliebige Form $f(\lambda, \mu)$ $(D \neq 0)$ als Aggregat zweier zerfallender Formen darzustellen versucht:

$$\text{(XIX)} \quad \begin{cases} f(\lambda, \mu) \equiv a\lambda\mu + b\lambda + b'\mu + c \\ \qquad\qquad \equiv k_1(\lambda - \lambda_1)(\mu - \mu_2) + k_2(\lambda - \lambda_2)(\mu - \mu_1). \end{cases}$$

Soll dies möglich sein, so genügen jedenfalls die beiden Paare (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) der Bedingung $f(\lambda, \mu) = 0$, sind also Paare der Substitution $f = 0$. Um die Umkehrung zu beweisen, beachte man, daß, in Verallgemeinerung von (20), die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit (XIX) durch Vergleichung der Koeffizienten geliefert werden:

$$(33) \quad \begin{cases} a = k_1 + k_2, & -b = \mu_2 k_1 + \mu_1 k_2, \\ -b' = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2, & c = \lambda_1 \mu_2 k_1 + \lambda_2 \mu_1 k_2. \end{cases}$$

Die Elimination der k_1, k_2 lehrt, daß die λ_1, μ_1; λ_2, μ_2 den vier Gleichungen zu genügen haben, die durch Nullsetzen aller Determinanten der Koeffizientenmatrix von (33) entstehen, was man kürzer so schreibt:

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} a & -b & -b' & c \\ 1 & \mu_2 & \lambda_1 & \lambda_1 \mu_2 \\ 1 & \mu_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \mu_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Umgekehrt, sind diese vier Bedingungen (34) erfüllt, so existiert auch ein Paar von Werten k_1, k_2, das (33) genügt.

Aber die vier Bedingungen (34) sind tatsächlich mit nur zweien gleichwertig, nämlich

$$(35) \quad \begin{cases} f(\lambda_1, \mu_1) \equiv a\lambda_1\mu_1 + b\lambda_1 + b'\mu_1 + c = 0, \\ f(\lambda_2, \mu_2) \equiv a\lambda_2\mu_2 + b\lambda_2 + b'\mu_2 + c = 0. \end{cases}$$

Denn die vier Gleichungen (34) gehen aus (35) durch sukzessive Elimination der Koeffizienten a, b, b', c hervor. Denkt man sich (35) erfüllt, so bestimmen sich die k_1, k_2 aus irgend zweien der Gleichungen (33). Setzt man

$L_i = a\lambda_i + b'$, $M_i = a\mu_i + b$ $(i = 1, 2)$, so gestatten k_1, k_2 die Doppeldarstellung:

$$(33') \quad k_1 = \frac{L_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{M_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad k_2 = \frac{L_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{M_2}{\mu_2 - \mu_1}.$$

Die aus (XIX) als besonderer Fall folgende Darstellbarkeit der Gleichung $f = 0$ durch die λ_1, μ_1; λ_2, μ_2 stimmt, wie es sein muß, mit der kanonischen Darstellung (XV) der Substitution $f = 0$ überein: der dortige Faktor k wird jetzt:

$$(36) \qquad k = -\frac{k_1}{k_2}.$$

Damit ist auch die simultane kanonische Darstellung (XIX) zweier Bilinearformen (18) $f(\lambda, \mu)$, $f_1(\lambda, \mu)$ erledigt, sobald man, wie damals bei den Gleichungen $f = 0$, $f_1 = 0$, die Paare (λ_1, λ_2), (μ_1, μ_2) als Wurzeln der Gleichungen (19) wählt.

Kehrt man zu der einen Form $f(\lambda, \mu)$ (18) zurück, so kann man auch, statt k_1, k_2 aus (33) zu entnehmen, irgend ein drittes, der Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ genügendes Paar (λ_3, μ_3) heranziehen. Aus $f(\lambda_1, \mu_1) = 0$, $f(\lambda_2, \mu_2) = 0$, $f(\lambda_3, \mu_3) = 0$ ergeben sich die a, b, b', c als proportional den Determinanten der aus den $\lambda_i\mu_i$, λ_i, μ_i, 1 $(i = 1, 2, 3)$ gebildeten Matrix; setzt man dieselben in $f(\lambda, \mu)$ ein, so ergibt sich für f zuvörderst:

$$(37) \quad \begin{cases} f(\lambda, \mu) \equiv a\lambda\mu + b\lambda + b'\mu + c \\[1ex] \equiv \dfrac{a}{|\lambda_i \mu_i 1|} \begin{vmatrix} \lambda\mu, & \lambda, & \mu, & 1 \\ \lambda_1\mu_1, & \lambda_1, & \mu_1, & 1 \\ \lambda_2\mu_2, & \lambda_2, & \mu_2, & 1 \\ \lambda_3\mu_3, & \lambda_3, & \mu_3, & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{a}{|\lambda_i \mu_i 1|}\, \varphi(\lambda, \mu), \end{cases}$$

wo die vierreihige Determinante mit $\varphi(\lambda, \mu)$ bezeichnet sei.

Hier ist der erste Koeffizient a als von Null verschieden anzunehmen; dann ist aber auch $|\lambda_i \mu_i 1| \neq 0$, da andernfalls die drei Paare (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), (λ_3, μ_3) voneinander abhängig wären, was ausgeschlossen sein soll.

Verschwindet dagegen a, so genügen zur Darstellung von f bereits zwei, die Bedingung $f(\lambda, \mu) = 0$ erfüllende

Paare (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), und man erhält die Doppeldarstellung

$$(38)\quad \begin{cases} f(\lambda, \mu) \equiv b\lambda + b'\mu + c \\ \equiv \dfrac{b}{\mu_1 - \mu_2} \begin{vmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 1 \end{vmatrix} \equiv \dfrac{b'}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{vmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 1 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

die stets möglich ist; denn b und b' können wegen $D \neq 0$ nicht verschwinden, und mit $\lambda_1 = \lambda_2$ würde auch $\mu_1 = \mu_2$ sein, und umgekehrt, d. h. beide Paare (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) würden zusammenfallen.

Die vierreihige Determinante $\varphi(\lambda, \mu)$ in (37) läßt sich so umformen, daß nur Differenzen der λ resp. μ auftreten. Zieht man die Elemente der ersten Reihe sukzessive von denen der drei übrigen Reihen ab, so reduziert sich $\varphi(\lambda, \mu)$ auf eine dreireihige Determinante; zieht man in dieser die mit μ multiplizierten Elemente der zweiten Kolonne von denen der ersten ab, so resultiert die Darstellung:

$$(39)\quad \begin{cases} -\varphi(\lambda, \mu) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3) \\ \qquad + (\lambda - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_3) \\ \qquad + (\lambda - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2), \end{cases}$$

oder auch, unter Benutzung der Identität*):

$$(40)\quad \begin{cases} (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) + (\lambda - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1) \\ \qquad + (\lambda - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) \equiv 0 \end{cases}$$

die folgende:

$$(41)\quad \begin{cases} -\varphi(\lambda, \mu) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\mu - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3) \\ \qquad - (\mu - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)(\lambda - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3). \end{cases}$$

In der Tat sagt das Nullsetzen der rechten Seite gemäß (XVI) aus, daß das Dv. der vier Werte λ, λ_1, λ_2, λ_3 gleich dem der vermöge $f(\lambda, \mu) = 0$ entsprechenden Werte μ, μ_1, μ_2, μ_3 ist, wie es sein muß.

Bisher war die Bilinearform $f(\lambda, \mu)$ als gegeben betrachtet; sieht man indessen dieselbe, d. h. die Koeffizienten a, b, b', c, umgekehrt als unbekannt an, und die zwei,

*) Siehe die oben auf die Formel (24) bezügliche Anmerkung.

resp. drei Wertepaare $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2; [\lambda_3, \mu_3]$ als beliebig gegeben, so ergibt sich im ersteren Falle für die zugehörige Form $f(\lambda, \mu)$ die rechte Seite von (XIX), wenn darin k_1 und k_2 als willkürliche Parameter angesehen werden, und entsprechend im letzteren Falle die mit einem willkürlichen Parameter k multiplizierte Form $\varphi(\lambda, \mu)$ in (37), resp. (41).

Dabei ist nur vorauszusetzen, daß im ersteren Falle $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$ ist und im letzteren, daß nicht alle vier Determinanten der Matrix $|\lambda_i \mu_i, \lambda_i, \mu_i, 1|$ $(i = 1, 2, 3)$ zugleich verschwinden*), d. h. daß zwischen den drei Paaren (λ_1, μ_1) (λ_2, μ_2) (λ_3, μ_3) keine Abhängigkeit besteht.

Die Ergebnisse (XIX) und (41) lassen sich auch direkt aus dem Ausdrucke (18) für $f(\lambda, \mu)$ herleiten. Sei wieder (λ_1, μ_1) ein Paar der Substitution $f(\lambda, \mu) = 0$. Zieht man von dem mit $a\lambda_1 + b'$ multiplizierten Ausdrucke $f(\lambda, \mu)$ den mit $a\lambda + b'$ multiplizierten (verschwindenden) Ausdruck $f(\lambda_1, \mu_1)$ ab und verfährt ebenso mit einem zweiten Paare (λ_2, μ_2), so ergibt sich:

$$(42) \begin{cases} f(\lambda, \mu)(a\lambda_1 + b') \equiv (a\lambda + b')(a\lambda_1 + b')(\mu - \mu_1) + D(\lambda_1 - \lambda), \\ f(\lambda, \mu)(a\lambda_2 + b') \equiv (a\lambda + b')(a\lambda_2 + b')(\mu - \mu_2) + D(\lambda_2 - \lambda). \end{cases}$$

Die Elimination von D führt zu der mit (XIX) äquivalenten Darstellung:

$$(43) \begin{cases} f(\lambda, \mu)(\lambda_2 - \lambda_1) \equiv (a\lambda_2 + b')(\lambda - \lambda_1)(\mu - \mu_2) \\ \qquad\qquad - (a\lambda_1 + b')(\lambda - \lambda_2)(\mu - \mu_1). \end{cases}$$

Die völlige Übereinstimmung mit (XIX) tritt hervor, sobald man beachtet, daß die erste und dritte der Relationen (33) für k_1, k_2 die Werte liefert [vgl. (33′)]:

$$(44) \qquad k_1 = \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad k_2 = \frac{a\lambda_1 + b'}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

---

*) Dann müßten die Dv. $(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $(\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ für alle Werte von λ, μ übereinstimmen, was nur so möglich wäre, daß zwei der Paare (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), (λ_3, μ_3) zusamenfallen; das letztere ist aber von vornherein ausgeschlossen. In der Tat kann die in Rede stehende Übereinstimmung beider Dv. dann und nur dann eintreten, wenn $(\lambda_1 - \lambda_3)(\mu_2 - \mu_3) = 0$. und $(\lambda_2 - \lambda_3)(\mu_1 - \mu_3) = 0$. Betrachtet man hier die Paare (λ_1, μ_1) (λ_2, μ_2) beliebig, aber fest gewählt, so bleiben nur die beiden Möglichkeiten $\lambda_1 = \lambda_3$, $\mu_1 = \mu_3$ oder aber $\lambda_2 = \lambda_3$, $\mu_2 = \mu_3$.

Fügt man zu (43) diejenige Identität hinzu, die aus (43) durch Einsetzen eines dritten, der Bedingung $f(\lambda, \mu) = 0$ genügenden Paares (λ_3, μ_3) hervorgeht, und eliminiert $a\lambda_2 + b'$, so gelangt man zu der mit (41) äquivalenten Darstellung:

$$(45)\quad \begin{cases} f(\lambda, \mu)(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\mu_3 - \mu_2) \\ \qquad \equiv (a\lambda_1 + b')\,[(\lambda - \lambda_1)(\mu - \mu_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\mu_3 - \mu_1) \\ \qquad - (\lambda - \lambda_2)(\mu - \mu_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\mu_3 - \mu_2)]\,. \end{cases}$$

Indem wir die Überführung der weiteren, im ersten Teile dieses Paragraphen für Substitutionen mittels ihrer Doppelelemente hergestellten kanonischen Gestalten in die entsprechenden der Form $f(\lambda, \mu)$ dem Leser überlassen, heben wir das Übertragungsprinzip hervor:

Satz V. „Jeder kanonischen Darstellung einer Substitution S korrespondiert eine solche für die zugehörige Bilinearform $f(\lambda, \mu)$: hierbei kann man sich entweder die Form f als vorgelegt denken, und die darstellenden Elementenpaare der Bedingung $f(\lambda, \mu) = 0$ gemäß gewählt, oder aber umgekehrt diese Paare beliebig angenommen und die Form f dadurch bedingt."

Schließlich ziehe man noch die zu zwei Bilinearformen $f(\lambda, \mu)$, $f_1(\lambda, \mu)$ (18) gehörigen quadratischen „Doppelelementsformen" $f(\lambda, \lambda)$, $f_1(\lambda, \lambda)$ heran:

$$(46)\quad \begin{cases} f(\lambda, \lambda) \equiv a\lambda^2 + 2\lambda\dfrac{b + b'}{2} + c\,, \\[2ex] f_1(\lambda, \lambda) \equiv a_1\lambda^2 + 2\lambda\dfrac{b_1 + b_1'}{2} + c_1\,, \end{cases}$$

und frage nach dem Zusammenhange zwischen deren Diskriminanten Δ, Δ_1 und ihrer bilinearen Invariante H mit den zu den Bilinearformen $f(\lambda, \mu)$, $f_1(\lambda, \mu)$ gehörigen Determinanten D, D_1 (27), deren bilinearen Invariante H (27) und den beiden Linearausdrücken $\delta = b' - b$, $\delta_1 = b_1' - b_1$ (21). Man erhält sofort:

$$(47)\qquad \Delta \equiv D - \frac{\delta^2}{4}\,, \qquad \Delta_1 \equiv D_1 - \frac{\delta_1^2}{4}\,,$$

$$(48)\qquad \mathsf{H} \equiv H - \frac{\delta\delta_1}{2}\,.$$

Die Bildung δ resp. δ_1 (21) heißt „die lineare Invariante" der Bilinearform f resp. f_1; über ihre Invariantennatur vgl. § 9.

Aufgabe 1. Die Formel (III) des Textes läßt folgende Ausdehnung zu. Die allgemeine lineare achtgliedrige Gruppe in zwei nicht homogenen Variabeln x, y wird dargestellt durch:

$$(1) \qquad x' = \frac{ax + by + k}{ex + fy + g}, \qquad y' = \frac{cx + dy + l}{ex + fy + g}.$$

Es bezeichne $Z(x, y) = Z$ den gemeinsamen Nenner, so daß $Z(x_i, y_i) = Z_i$ usf., und $\varDelta_{ikl}$ die Determinante $\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$ (s. die Aufgabe 9b zu § 5), D die Determinante der neun Substitutionskoeffizienten, so gilt für die transformierte Bildung $\varDelta'_{ikl}$ die Identität:

$$(1') \qquad \varDelta'_{ikl} = \varDelta_{ikl} \frac{D}{Z_i Z_k Z_l},$$

so daß wiederum $\varDelta_{ikl}$ als relative Invariante in erweitertem Sinne erscheint. Eine entsprechende Formel besteht für n Variable.

Setzt man dagegen die Gruppe in homogene Gestalt um, so wird $\varDelta_{ikl\ldots}$ zu einer relativen Invariante in gewöhnlichem Sinne, insofern $\varDelta'_{ikl\ldots} = D\varDelta_{ikl\ldots}$ Die letztere Formel ist nur ein anderer Ausdruck für das Multiplikationstheorem der n-reihigen Determinanten.

Aufgabe 2. Die Formel (1′) ist anzuwenden, um zwei charakteristische absolute Invarianten J_1, J_2 der allgemeinen projektiven Gruppe (1) in x, y zu ermitteln. Entspricht der Index 0 dem Wertepaare (x, y), so wird:

$$(a) \qquad J_1 = \frac{\varDelta_{0ik}\varDelta_{0lm}}{\varDelta_{0il}\varDelta_{0km}},$$

und J_2 geht daraus hervor, wenn man den Index 0 mit irgend einem der vier übrigen vertauscht. Da $\frac{1}{2}\varDelta_{0ik}$ den Inhalt des durch die drei Punkte (x, y), (x_i, y_i), (x_k, y_k) gebildeten Dreiecks angibt, so führt der Ausdruck (a) den Namen „Dreiecksdoppelverhältnis". Dieser Ausdruck läßt sich auch deuten als das Doppelverhältnis der vier Strahlen, die den Punkt (x, y) mit den vier übrigen verbinden; die absolute Invarianz von J_1 wird damit geometrisch unmittelbar ersichtlich.

Aufgabe 3. Man spezialisiere die Gruppe (1) einmal dahin, daß die unendlich ferne Gerade g_∞ (und damit auch zwei gewisse Punkte auf ihr) invariant bleibt, das andere Mal (dualistisch) dahin, daß der Nullpunkt O invariant bleibt. Dann entstehen die beiden sechsgliedrigen Gruppen:

$$\text{(2a)} \qquad x' = a x + b y + k, \qquad y' = c x + d y + l;$$

$$\text{(2b)} \qquad x' = \frac{a x + b y}{e x + f y + 1}, \qquad y' = \frac{c x + d y}{e x + f y + 1}.$$

Nimmt man in ersterem Falle für (x_0, y_0), (x_m, y_m) die beiden sich selbst entsprechenden Punkte auf g_∞, so reduziert sich der Quotient $\frac{\Delta_{0lm}}{\Delta_{0km}}$ auf die Einheit; wählt man in letzterem Falle (x_0, y_0) als Nullpunkt, so reduziert sich Δ_{0ik} auf $d_{ik} = \begin{vmatrix} x_i, & y_i \\ x_k, & y_k \end{vmatrix}$ (s. Aufgabe 5 zu § 6). Damit ergeben sich für beide Fälle die Invarianten:

$$\text{(2a)} \qquad J_1 = \frac{\Delta_{0ik}}{\Delta_{0kl}}, \qquad J_2 = \frac{\Delta_{0il}}{\Delta_{0kl}};$$

$$\text{(2b)} \qquad J_1 = \frac{d_{ik}\, d_{lm}}{d_{il}\, d_{km}}, \qquad J_2 = \frac{d_{ik}\, d_{ln}}{d_{il}\, d_{kn}},$$

was sich auch direkt aus den Gruppen (2a), (2b) ableiten läßt.

Legt man überdies den Gruppen (2a), (2b) die Beschränkung $ad - bc = 1$ auf, so gehen die beiden Gruppen in zwei fünfgliedrige über, für die noch jeder Dreiecksinhalt (und damit überhaupt jeder Flächeninhalt der Ebene) invariant bleibt. Nunmehr treten noch die weiteren Reduktionen ein:

$$\text{(3a)} \qquad J_1 = \Delta_{0ik}, \qquad J_2 = \Delta_{0kl};$$

$$\text{(3b)} \qquad J_1 = d_{ik}, \qquad J_2 = d_{il}.$$

Die Formel (a) ist ebenfalls auf n Variable übertragbar. Man hat z. B. im Falle $n = 3$ das „Tetraederdoppelverhältnis“ $J_1 = \frac{\Delta_{01ik}\,\Delta_{01lm}}{\Delta_{01il}\,\Delta_{01km}}$, aus dem sich zwei weitere absolute Invarianten der bezüglichen Gruppe ergeben, wenn man z. B. 1 mit i resp. k vertauscht. Und entsprechend allgemein. J_1 stellt auch das Dv. der vier Ebenen dar, die die Gerade $\overline{01}$ mit den vier übrigen Punkten verbinden, usf.

Desgleichen treten die den Fällen (2a), (2b), (3a), (3b) analogen Verallgemeinerungen ein.

Von der Formel (a) läßt sich eine Anwendung machen auf den in Aufgabe 2 zu § 4 dargestellten Kegelschnitt C_2, $x : y : 1 = f_2(\lambda) : g_2(\lambda) : h_2(\lambda)$. Es ergibt sich, daß das Dv. der vier Strahlen, die einen beliebigen Punkt (λ) der C_2 mit vier festen Punkten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ der C_2 verbinden, konstant ist, nämlich gleich dem Dv. $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$; analog gilt das Dualistische (Projektive Erzeugung der C_2).

Entsprechend ist bei einer kubischen Raumkurve φ_3, $x : y : z : 1 = f_3(\lambda) : g_3(\lambda) : h_3(\lambda) : i_3(\lambda)$ das Dv. der vier Ebenen, die irgend eine Sehne der φ_3 mit vier festen Punkten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ der φ_3 verbinden, wiederum konstant, gleich dem Dv. $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$, und analog dualistisch.

Entsprechendes gilt für eine Kurve n-ter Ordnung im Raume von n Dimensionen.

Aufgabe 4. Die im Texte entwickelten kanonischen Gestalten der bilinearen Relation (II′) nebst den bezüglichen Bedingungen sind auf die bilineare Form (18) zu übertragen.

Aufgabe 5. In der linearen Substitution (I) $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ seien Variable und Koeffizienten komplexe Größen. Deutet man, wie in § 1, Aufgabe 2, z' und z als Punkte der Ebene, so stellt (I) eine (quadratische) Punktverwandtschaft dar, bei der jedem Kreise wieder ein Kreis entspricht (Möbiussche Kreisverwandtschaft). Gibt ein horizontaler Strich je die konjugiert-komplexe Größe an, so läßt sich die Gleichung eines Kreises in die Gestalt setzen: $a z \bar{z} + b z + \bar{b} \bar{z} + c = 0$, wo a, c reell sind. Gemäß Formel (III) des Textes ist $\lim \dfrac{z' - z_i'}{z' - z_k'} = \lim \dfrac{z - z_i}{z - z_k}$, wo der Grenzprozeß so zu vollziehen ist, daß die Punkte z_i, z_k dem Punkte z in irgend einer Weise beliebig nahe rücken (und damit von selbst die Punkte z_i', z_k' dem Punkte z'). Daraus folgt, daß sowohl das Verhältnis zweier von z ausgehenden Linienelemente vermöge der Substitution (I) ungeändert bleibt, wie auch der Winkel, den beide einschließen. In diesem Sinne stellt (I) eine „konforme" Abbildung der Ebene dar.

Den besonderen, im Texte (s. auch § 5) behandelten Fällen von (I) entsprechen vielgebrauchte Verwandtschaften der Ebene resp. Gruppen von solchen.

So stellt die reziproke Substitution (XIV) $zz' = k$, wo k reell, die „Inversion" der Ebene, oder die „Transformation durch reziproke Radien" r, r' in bezug auf den Nullpunkt O dar $(rr' = k)$, verbunden mit einer Spiegelung an der x-Achse, womit zugleich eine Umlegung der Winkel verknüpft ist; die Inversion für sich allein wird durch $\bar{z}z' = k$ repräsentiert.

Sodann führen die Fälle (VIII), (IX), (XI) zu folgenden reellen projektiven Gruppen der Ebene. Die jeweils charakteristischen beiden absoluten Invarianten sind wiederum (wie in den Aufgaben zu § 5) mit J_1 und J_2 bezeichnet.

(VIII) $$z' = z + k : \qquad (k = a + ib)$$

Zweigliedrige Gruppe der Schiebungen (Translationen)

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b,$$

mit $J_1 = x - x_1$, $J_2 = y - y_1$. Jeder Punkt auf g_∞ bleibt invariant.

(IX) $$z' = \alpha z.$$

Hier sei zunächst α reell, $= m$, also $z' = mz$, so entsteht die eingliedrige Gruppe der Streckungen*) vom Nullpunkt aus:

(IXa) $$x' = mx, \qquad y' = my,$$

$J_1 = \dfrac{x}{x_1}$, $J_2 = \dfrac{y}{x}$. Der Nullpunkt sowie jeder Punkt auf g_∞ bleibt invariant.

Andererseits sei der absolute Betrag von α gleich 1: $\alpha = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$; also $z' = e^{i\varphi}z$, so entsteht die eingliedrige Gruppe der Drehungen um O:

(IXb) $$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

*) Bei negativem m ist die bezügliche Streckung noch zu kombinieren mit einer Spiegelung in bezug auf den Anfangspunkt O. Der Kürze halber umfasse das Wort „Streckung" in diesem Falle beide Operationen.

$J_1 = x y_1 - x_1 y$, $J_2 = x x_1 + y y_1$; irgend eine von beiden Invarianten ist auch ersetzbar durch $J^* = x^2 + y^2$. Invariant bleiben g_∞, O, sowie auf g_∞ die beiden sogenannten „Kreispunkte“ $\frac{y}{x} = \pm i$, und jeder Kreis mit dem Mittelpunkte O. Die Gruppe (IXb) ist projektiv gleichwertig mit der in (1) S. 56 unter den Aufgaben zu § 5 aufgeführten: $x' = a x$, $y' = a^\alpha y$, wenn man der willkürlichen Konstanten α den Wert -1 gibt*). An die Stelle der beiden Kreispunkte treten dann die Punkte U_x, U_y auf g_∞.

Nunmehr sei α eine beliebige komplexe Größe, $\alpha = m e^{i\varphi}$:

$$\text{(IX)} \quad z' = m e^{i\varphi} z \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x' = m \cos\varphi\, x - m \sin\varphi\, y\,, \\ y' = m \sin\varphi\, x + m \cos\varphi\, y\,. \end{cases}$$

Dies ist die zweigliedrige Gruppe der „Drehstreckungen“ bez. O, d. h. der aus den Drehungen um O und den Streckungen von O aus zusammengesetzten Operationen; mit $J_1 = \frac{x y_1 - x_1 y}{x x_1 + y y_1}$, $J_2 = \frac{x y_2 - x_2 y}{x x_2 + y y_2}$, wo irgend eine derselben ersetzbar ist durch $J^* = \frac{x^2 + y^2}{x_1^2 + y_1^2}$.

Invariant sind g_∞, O und die beiden Kreispunkte auf g_∞.

Führt man vermöge einer (imaginären) Kollineation die beiden Kreispunkte über in die unendlich fernen Punkte U_x, U_y der beiden Achsen, so wird die Gruppe (IX) projektiv gleichwertig mit: $x' = m x$, $y' = n y$ mit $J_1 = \frac{x}{x_1}$, $J_2 = \frac{y}{y_1}$.

$$\text{(VIII)} \qquad z' = \alpha z + k\,.$$

Man hat hier dieselben drei Fälle zu unterscheiden, wie bei (IX).

$$\text{(VIIIa)} \qquad \alpha \text{ reell} = m: \quad z' = m z + k\,, \qquad (k = a + i b)$$

*) Umgekehrt entspricht jener Gruppe (1) bei beliebiger Konstanten α die Gruppe der erweiterten Drehungen („Drehstrekkungen“):

$$x' = x \cdot m \cos\varphi - y \cdot m \sin\varphi\,, \quad y' = x \cdot m \sin\varphi + y \cdot m \cos\varphi\,,$$

wo $m = e^{\beta\varphi}$, und $\beta = \alpha + 1$.

d. i. die dreigliedrige Gruppe:

$$x' = mx + a\,, \qquad y' = my + b$$

[siehe die Gruppe (9a) in den Aufgaben zu § 5] mit $J_1 = \dfrac{x - x_1}{x - x_2}$, $J_2 = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$. Jeder Punkt auf g_∞ bleibt invariant. Die Schiebungen der Ebene sind kombiniert mit der Änderung des Maßstabes.

(VIIIb) $\qquad \alpha = e^{i\varphi}: \quad z' = e^{i\varphi} z + k\,,$

d. i. die dreigliedrige Gruppe:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a\,, \qquad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b\,,$$

$$J_1 = (x - x_1)(y - y_2) - (x - x_2)(y - y_1) = \Delta_{012}\,,$$

$$J_2 = (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)\,.$$

Invariant bleiben auf g_∞ die beiden Kreispunkte. Außer einer Schiebung wird jede Strecke um den Winkel φ gegen die positive Richtung der x-Achse gedreht.

(VIII) $\qquad \alpha = m e^{i\varphi}: \quad z' = m e^{i\varphi} z\,,$

d. i. die viergliedrige Gruppe der projektiven Ähnlichkeitstransformationen:

$$x' = m\cos\varphi\, x - m\sin\varphi\, y + a\,, \quad y' = m\sin\varphi\, x + m\cos\varphi\, y + b\,,$$

mit $J_1 = \dfrac{(x - x_1)(y - y_2) - (x - x_2)(y - y_1)}{(x - x_1)(x - x_2) - (y - y_1)(y - y_2)}$, woraus sich J_2 durch Vertauschung von (x_2, y_2) mit (x_3, y_3) ergibt. Statt J_2 dient auch $J^* = \dfrac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$. Invariant bleiben die beiden Kreispunkte auf g_∞.

Verlegt man dieselben wiederum in die Punkte U_x, U_y, so entsteht die mit (VIII) projektiv gleichwertige Gruppe:

$$x' = mx + a\,, \qquad y' = ny + b\,,$$

mit

$$J_1 = \frac{x - x_1}{x - x_2}\,, \qquad J_2 = \frac{y - y_1}{y - y_2}\,.$$

Die Gruppe (VIII) entsteht durch Zusammensetzung der Schiebungen, Streckungen, Drehungen und der Spiegelungen in bezug auf O.

Aufgabe 6. Deutet man einen (reellen) Wert λ als einen Punkt λ der C_2, $x:y:1 = \lambda^2:\lambda:1$, so stellt eine Substitution (I) $\lambda' = \dfrac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ (bei reellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) eine (reelle) projektive Beziehung auf der C_2 dar. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte (λ, λ') umhüllen eine zweite C_2, die die erste an zwei Stellen (λ_1, λ_2) berührt; λ_1, λ_2 sind die Doppelelemente von (I).

Ist die projektive Beziehung (I) insbesondere eine involutorische, so artet der zweite Kegelschnitt in einen (doppeltzählenden) Punkt aus.

Repräsentiert man analog eine Involution auf der kubischen Raumkurve $x:y:z:1 = \lambda^3:\lambda^2:\lambda:1$, so bilden die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte (λ, λ') die eine Regelschar einer, der Kurve umbeschriebenen Fläche 2. Klasse; die Gesamtheit dieser Flächen ist damit der Gesamtheit der Involutionen eineindeutig zugeordnet.

Entsprechend gilt in Ebene und Raum das Dualistische.

§ 8. Das Doppelverhältnis.

In § 3 trat bereits das zweier Werte δ, $\dfrac{1}{\delta}$ fähige Doppelverhältnis („Dv.") zweier Werte (x_1, x_2), (α_1, α_2) auf. Im Anschluß an den Satz II des § 7 betrachte man jetzt allgemeiner, bei Zugrundelegung von vier gleichberechtigten Elementen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, als deren Doppelverhältnis*) („Dv.") $\delta = (1\,2\,3\,4)$ den der natürlichen Anordnung (Permutation) der vier Indizes entsprechenden Ausdruck:

$$\text{(I)} \qquad \delta = (1\,2\,3\,4) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}.$$

Hier geht der Nenner aus dem Zähler durch Vertauschung der beiden „mittleren" Elemente λ_2, λ_3 hervor. In § 3 wurde bewiesen, daß $\delta = (1\,2\,3\,4)$ übereinstimmt mit $(2\,1\,4\,3) = (3\,4\,1\,2) = (4\,3\,2\,1)$, andererseits $\dfrac{1}{\delta} = (1\,3\,2\,4)$ mit $(2\,4\,1\,3) = (3\,1\,4\,2) = (4\,2\,3\,1)$. Nach der Ausdrucksweise

*) Vielfach ist auch der Ausdruck „anharmonisches Verhältnis" im Gebrauch.

des § 3 war $\delta = (1\,2\,3\,4)$ das Dv. der beiden Paare (λ_1, λ_4), (λ_2, λ_3). Da sich aber vier Elemente auf drei verschiedene Arten in zwei Paare trennen lassen, so fallen die 24, den 24 Permutationen der Indizes 1, 2, 3, 4 korrespondierenden Werte des Dv. zu je vieren zusammen, und von den sechs verbleibenden im allgemeinen verschiedenen Werten, sind dreimal zwei zueinander reziprok.

Gemäß der obigen Regel für je vier gleiche Werte der Dv. darf man irgend ein Element, z. B. das erste λ_1, an seiner Stelle festhalten und sich auf die sechs Permutationen der drei übrigen beschränken, wobei stets $(1\,i\,k\,l) \cdot (1\,k\,i\,l) = 1$.

Faßt man einmal die drei „positiven" Permutationen 234, 342, 423 zusammen, andererseits die drei „negativen" 324, 432, 243, so liefern die letzteren der Reihe nach drei Dv., die reziprok sind zu den drei Dv., die zu den drei ersteren gehören.

Man führe ferner den Begriff der zyklischen Folge von vier Elementen ein. Man sagt, die drei Permutationen 1234, 1342, 1423 seien in „zyklischer" Folge genommen, wenn diese vier Elemente, auch bei Überspringung von einem oder zweien, stets in demselben „Sinne" 12341234 durchlaufen werden. Dann entspricht den positiven Permutationen 234, 342, 423 der Indizes 2, 3, 4 gerade die soeben angegebene zyklische Folge und den drei negativen 243, 432, 324 die zweite durch 1243 bestimmte zyklische Folge.

In § 3 waren bereits Zähler und Nenner von δ als selbständige Größen eingeführt; entsprechend bilde man jetzt die drei der zyklischen Folge 1234, 1342, 1423 zugeordneten gleichberechtigten Differenzenprodukte:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} P_{12,34} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4), \quad P_{13,42} = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2), \\ \qquad P_{14,23} = (\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3). \end{cases}$$

Addiert man, so zerstören sich, wie schon unter (24) in § 7 angegeben, je zwei der sechs Produkte $\pm\lambda_i\lambda_k$, und es resultiert die grundlegende Identität:

$$\text{(III)} \qquad P_{12,34} + P_{13,42} + P_{14,23} = 0\,.$$

Die Division mit $P_{13,42}$ liefert die Relation:

$$(1) \qquad (1\,4\,3\,2) = 1 - (1\,2\,3\,4) = 1 - \delta\,.$$

Wendet man die Regel abermals auf $(1\,3\,4\,2) = \frac{1}{1-\delta}$ an, so ergibt sich $(1\,2\,4\,3) = 1 - \frac{1}{1-\delta} = \frac{-\delta}{1-\delta}$, also $(1\,4\,2\,3) = -\frac{1-\delta}{\delta}$.

Damit sind die sechs verschiedenen Werte des Dv. (I) erschöpft und — bei festgehaltenem ersten Element — repräsentiert durch die Tabelle:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \delta = (1\,2\,3\,4)\,, & \frac{1}{\delta} = (1\,3\,2\,4)\,, \\ \frac{1}{1-\delta} = (1\,3\,4\,2)\,, & 1-\delta = (1\,4\,3\,2)\,, \\ -\frac{1-\delta}{\delta} = (1\,4\,2\,3)\,, & -\frac{\delta}{1-\delta} = (1\,2\,4\,3)\,. \end{cases}$$

Hier stehen links die positiven Permutationen der drei Elemente $2, 3, 4$, rechts die negativen; die Anordnung der Tabelle entspricht zugleich der Trennung der vier Elemente $1, 2, 3, 4$ in die drei Paare $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(4\,2)$, $(1\,4)(2\,3)$.

Da unter den sechs in (IV) vorkommenden Permutationen der Elemente $2, 3, 4$ die Ausgangspermutation beliebig auswählbar ist, so muß man auch, wenn das zugehörige Dv. wieder mit δ bezeichnet wird, durch die übrigen fünf Permutationen wieder zu den fünf übrigen Werten (IV) des Dv. gelangen. Konstruiert man also die sechs Substitutionen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \lambda = \delta\,, & \lambda = \frac{1}{\delta}\,, & \lambda = 1-\delta\,, \\ \lambda = \frac{1}{1-\delta}\,, & \lambda = \frac{-\delta}{1-\delta}\,, & \lambda = -\frac{1-\delta}{\delta}\,, \end{cases}$$

so führt die Zusammensetzung irgend zweier derselben stets wieder zu einer der Substitutionen (2), d. h. diese bilden eine Gruppe.

Somit gilt:

Satz I. „Unterwirft man das Dv. $\delta = (1\,2\,3\,4) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}$ den 24 Permutationen der Indizes $1, 2, 3, 4$, so fallen von den 24 zugeordneten Werten des Dv. je vier zusammen, indem stets für irgend eine Permutation $iklm$

$$(iklm) = (kiml) = (lmik) = (mlki)$$

wird. Die verbleibenden sechs verschiedenen Werte des Dv. werden durch die Tabelle (IV) angegeben und stellen die Dv. der drei Paare

$$(\lambda_1 \lambda_2)(\lambda_3 \lambda_4), \ (\lambda_1 \lambda_3)(\lambda_4 \lambda_2), \ (\lambda_1 \lambda_4)(\lambda_2 \lambda_3)$$

dar. Faßt man δ als eine Variabeln auf und setzt der Reihe nach die sechs Werte des Dv. gleich einer zweiten Variabeln λ, so ergibt sich eine Gruppe (2) von sechs linearen Substitutionen von λ."

In § 3 traten bereits partikuläre Werte des Dv. auf, z. B. -1, $+1$, 0, ∞, für die von den sechs Werten (IV) einige zusammenfielen.

Um alle derartigen Fälle zu erschöpfen, genügt es, da die sechs Werte (IV) des Dv. gleichberechtigt sind, den ersten, δ, je einem der übrigen gleichzusetzen. Man erkennt leicht, daß nur drei Hauptfälle möglich sind.

Entweder nimmt δ im besonderen einen der drei Werte 0, 1, ∞ an, dann fallen die sechs Werte (IV) zu je zweien zusammen, und zwar eben in jene drei Werte. Das Entsprechende gilt für die drei Werte -1, 2, $\frac{1}{2}$ von δ. Die Einzelheiten lese man aus den beiden Tabellen ab:

(3)

δ	$\frac{1}{\delta}$	$1-\delta$	$\frac{1}{1-\delta}$	$\frac{-\delta}{1-\delta}$	$-\frac{1-\delta}{\delta}$
1	1	0	∞	∞	0
0	∞	1	1	0	∞
∞	0	∞	0	1	1

(4)

δ	$\frac{1}{\delta}$	$1-\delta$	$\frac{1}{1-\delta}$	$\frac{-\delta}{1-\delta}$	$-\frac{1-\delta}{\delta}$
-1	-1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
1	$\frac{1}{2}$	-1	-1	2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	2	-1	-1

Der dritte Hauptfall tritt ein, wenn etwa $\delta = \dfrac{1}{1-\delta}$ gesetzt wird, d. i.

(5) $$\delta^2 - \delta + 1 = 0;$$

dann ist zugleich $\delta = -\frac{1-\delta}{\delta}$; andererseits fallen auch die drei reziproken Werte zusammen.

Bezeichnet man die beiden (komplexen) Wurzeln von (5) mit η_1, η_2, so daß:

$$(6) \quad \begin{cases} \eta_1 \\ \eta_2 \end{cases} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \qquad \eta_1 + \eta_2 = 1, \qquad \eta_1 \eta_2 = 1,$$

so wird die Verteilung von η_1, η_2 auf die sechs Werte (IV) durch die Tabelle erläutert:

(7)

δ	$\frac{1}{\delta}$	$1-\delta$	$\frac{1}{1-\delta}$	$-\frac{\delta}{1-\delta}$	$-\frac{1-\delta}{\delta}$
η_1	η_2	η_2	η_1	η_2	η_1
η_2	η_1	η_1	η_2	η_1	η_2

Im Falle (4) heißt das Dv. ein „harmonisches“, in Übereinstimmung mit § 3, im Falle (7) ein „äquianharmonisches“. Man hat demnach den

Satz II. „Von den sechs Werten (IV) eines Dv. können im besonderen nur auf drei wesentlich verschiedene Arten zwei zusammenfallen. Entweder ist irgend ein Ausgangswert gleich $1, 0, \infty$, oder aber gleich $-1, 2, \frac{1}{2}$, dann fallen beidemal je zwei der sechs Werte (IV) des Dv. zusammen und zwar in eben jene drei Werte. Oder endlich ist irgendein Ausgangswert eine Wurzel η_1 oder η_2 der Gleichung $\delta^2 - \delta + 1 = 0$, dann fallen je drei Werte (IV) des Dv. zusammen, und zwar in eben jene beiden Werte.“

Man mag die drei Tabellen (3), (4), (7) durch eine weitere vervollständigen, die jeweils die Wurzeln der quadratischen Gleichung erkennen läßt, die durch Gleichsetzen irgend zweier der sechs Werte (IV) entsteht. Um dabei den Wert ∞ deutlicher hervortreten zu lassen, mache man jeden der sechs Brüche (IV) homogen, indem man $\frac{\delta}{\varepsilon}$ statt δ schreibt. Dann ergeben sich für die Differenzen je zweier der sechs Werte (IV) die Relationen:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\varepsilon}{\delta}+\dfrac{\varepsilon-\delta}{\delta}=\dfrac{2\,\varepsilon-\delta}{\delta}\\[2ex]
\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon-\delta}+\dfrac{\delta}{\varepsilon-\delta}=\dfrac{\varepsilon+\delta}{\varepsilon-\delta}\\[2ex]
\dfrac{\delta}{\varepsilon}-\dfrac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon}=\dfrac{2\,\delta-\varepsilon}{\varepsilon}
\end{array}
\right.\\[6ex]
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\varepsilon}{\delta}-\dfrac{\delta}{\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon}+\dfrac{\varepsilon-\delta}{\delta}=\dfrac{(\varepsilon-\delta)\,(\varepsilon+\delta)}{\varepsilon\,\delta}\\[2ex]
\dfrac{\delta}{\varepsilon}+\dfrac{\delta}{\varepsilon-\delta}=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon-\delta}-\dfrac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon}=\dfrac{\delta(\delta-2\,\varepsilon)}{\varepsilon(\delta-\varepsilon)}\\[2ex]
\dfrac{-\delta}{\varepsilon-\delta}+\dfrac{\varepsilon-\delta}{\delta}=\dfrac{\varepsilon}{\delta}-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon-\delta}=\dfrac{\varepsilon(2\,\delta-\varepsilon)}{\delta(\delta-\varepsilon)}
\end{array}
\right.\\[6ex]
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon-\delta}-\dfrac{\delta}{\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon}+\dfrac{\delta}{\varepsilon-\delta}=\dfrac{\delta^2-\delta\,\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon(\varepsilon-\delta)}\\[2ex]
\dfrac{\delta}{\varepsilon}-\dfrac{\varepsilon-\delta}{\delta}=\dfrac{\varepsilon}{\delta}-\dfrac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon}=\dfrac{\delta^2-\delta\,\varepsilon+\varepsilon^2}{\delta\,\varepsilon}\\[2ex]
\dfrac{\varepsilon}{\delta}-\dfrac{\delta}{\varepsilon-\delta}=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon-\delta}+\dfrac{\varepsilon-\delta}{\delta}=\dfrac{\delta^2-\delta\,\varepsilon+\varepsilon^2}{\delta(\varepsilon-\delta)}\,.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\tag{8}
$$

Die drei Hauptfälle des Satzes II bedürfen einer näheren Diskussion. Im ersten Falle nimmt das Dv. δ (I) den Wert 0 an für $\lambda_1=\lambda_2$ oder $\lambda_3=\lambda_4$, den Wert ∞ für $\lambda_1=\lambda_3$ oder $\lambda_2=\lambda_4$, den Wert 1 für $\lambda_1=\lambda_4$ oder $\lambda_2=\lambda_3$:

Satz III. „Das Dv. nimmt dann und nur dann einen der drei Werte 0, 1, ∞ an, wenn irgend zwei der vier Elemente des Dv. zusammenfallen."

Dieser Satz erleidet aber eine Ausnahme, wenn nicht nur zwei, sondern drei der vier Elemente zusammenrücken. Man setze etwa $\lambda_1=\lambda_3+\varepsilon$, $\lambda_2=\lambda_3+\eta$, so nimmt δ die Gestalt an:

$$
\delta=\left(1-\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\frac{1}{1+\dfrac{\eta}{\lambda_3-\lambda_4}}\,.
\tag{9}
$$

Läßt man nunmehr ε und η zugleich gegen Null konvergieren, jedoch so, daß $\eta=\varrho\,\varepsilon$, wo ϱ ein beliebig gewählter Wert ist, so konvergiert δ, für $\lambda_3 \neq \lambda_4$, gegen den Wert $1 - \varrho$. Dies ändert sich nicht wesentlich, wenn auch noch λ_3 und λ_4 zusammenrücken. Für $\lambda_3 - \lambda_4 = \zeta$ geht der Ausdruck (9) für δ über in:

$$\delta = \left(1 - \frac{\eta}{\varepsilon}\right) \frac{1}{1 + \frac{\eta}{\zeta}} . \tag{10}$$

Konvergieren ε, η, ζ zugleich gegen Null derart, daß $\eta = \varrho\,\varepsilon$, $\eta = \sigma\,\zeta$, wo auch σ beliebig sei, so konvergiert δ gegen $\dfrac{1 - \varrho}{1 + \sigma}$. Damit erfährt Satz III die Ergänzung:

Satz III′. „Satz III gilt im allgemeinen nur in dem Sinne, daß nicht mehr als zwei Elemente zusammenfallen. Rüken drei oder auch alle vier Elemente zusammen, so kann hinsichtlich der Art des Zusammenrückens stets so verfügt werden, daß das Dv. jeden beliebig vorgegebenen Wert erhält.“

Dagegen bleibt Satz III offenbar dann erhalten, wenn sich die vier Elemente in zwei Paare von gleichen Elementen zerlegen, z. B. $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, und wenn überdies $\lambda_1 \neq \lambda_3$ bleibt.

Der zweite Hauptfall des Satzes II, das harmonische Dv., ist schon in § 3 nach verschiedenen Richtungen untersucht worden, insbesondere auch hinsichtlich der dabei auftretenden Realitätsverhältnisse. Von den drei Werten -1, 2, $\frac{1}{2}$ eines harmonischen Dv. (I) ist der erste, für die Anwendungen bequemste dadurch charakterisiert, daß dann, in der Sprechweise des § 3, das Paar der „äußeren“ Elemente (λ_1, λ_4) harmonisch ist zu dem der „inneren“ Elemente (λ_2, λ_3).

Sind drei ungleiche Elemente λ_1, λ_2, λ_3 beliebig vorgegeben, so läßt sich auf dreierlei Weisen ein zu ihnen harmonisches viertes Element λ bestimmen. Denn man kann von den λ_1, λ_2, λ_3 irgend ein Paar, z. B. (λ_1, λ_2), herausgreifen und dann so wählen, daß die beiden Paare (λ_1, λ_2), (λ_3, λ) harmonische werden. Demnach hängt λ von einer kubischen Gleichung ab, die in unentwickelter Form lautet:

$$(\mathrm{V})\quad \begin{cases} [(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda)+(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda)] \\ \cdot[(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda)+(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda)] \\ \cdot[(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda)+(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda)]=0\,. \end{cases}$$

Um mit harmonischen Paaren bequem operieren zu können, werde ein Satz über eine kanonische Gestaltung des Dv. eingeschaltet. Legt man den Elementen eines Paares, etwa des inneren oder auch des äußeren, die Werte 0, ∞ bei, z. B. $\lambda_2=0$, $\lambda_3=\infty$, so nimmt das Dv. den Wert $\frac{\lambda_1}{\lambda_4}$ an:

$$(11)\quad \begin{cases} (\lambda_1,0,\infty,\lambda_4)=(\lambda_4,\infty,0,\lambda_1)=(0,\lambda_1,\lambda_4,\infty) \\ \qquad\qquad\qquad =(\infty,\lambda_4,\lambda_1,0)=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_4}\,, \end{cases}$$

und dieser Wert reduziert sich für $\lambda_4=1$ auf das Element λ_1 selbst:

$$(12)\quad \begin{cases} \lambda_1=(\lambda_1,0,\infty,1)=(1,\infty,0,\lambda_1) \\ \quad\;=(0,\lambda_1,1,\infty)=(\infty,1,\lambda_1,0)\,. \end{cases}$$

Damit erhält man den u. a. für die projektive Geometrie grundlegenden Satz:

S a t z IV. „Das Verhältnis zweier Werte läßt sich auffassen als das aus diesem Paare und dem Paare $(0,\infty)$ gebildete Dv.; insbesondere erscheint ein beliebiger Wert λ als Dv. des Paares $(\lambda, 1)$ und des Paares $(0,\infty)$."

Soll daher das Dv. der Paare (λ,μ) und $(0,\infty)$ ein harmonisches sein, so ergibt sich dafür die in der Geometrie viel gebrauchte Bedingung:

$$(13)\qquad \lambda+\mu=0\,.$$

Wir kommen zum dritten Falle des Satzes II, dem äquianharmonischen Dv. Denkt man sich wiederum drei (ungleiche) Elemente λ_1, λ_2, λ_3 beliebig gegeben, so erhält man für ein viertes, mit jenen ein äquianharmonisches Dv. bildendes Element, gemäß (5) zwei Werte, λ, λ', die Wurzeln der Gleichung:

$$(14)\quad \begin{cases} [(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda)]^2-[(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda)\cdot(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda)] \\ \qquad\qquad\qquad +[(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda)]^2=0\,. \end{cases}$$

Sind andererseits zwei Paare (λ_1, λ_2), (λ_3, λ_4) als Wurzeln zweier quadratischer Formen $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ gegeben, so läßt sich die Bedingung dafür, daß das Dv. beider Paare ein äquianharmonisches sei, durch Invarianten von f und g ausdrücken. Sind D_f, D_g die Diskriminanten von f und g, H deren bilineare Invariante, R ihre Resultante, so galt nach § 3 (12) für die Summe der beiden zueinander reziproken Werte des Dv. beider Paare $(\lambda_1 \lambda_2)$, $(\lambda_3 \lambda_4)$:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{-2\,(2H^2 + R)}{R}, \tag{15}$$

und zwischen H, R, $D_f \cdot D_g$ bestand die Relation (§ 3, V):

$$H^2 + R \equiv 4\,D_f D_g\,. \tag{16}$$

Da das Dv. nach (5) ein äquianharmonisches nur für $\delta_1 + \delta_2 = 1$ wird, ergibt sich die gesuchte Bedingung in irgend einer der drei Gestalten:

$$4\,H^2 + 3\,R = 0\,, \quad R = 16\,D_f D_g\,, \quad H^2 = -12\,D_f D_g\,. \tag{17}$$

Indem wir zu (14) zurückkehren, fragen wir nach dem Realitätszusammenhange zwischen dem Tripel $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ und den beiden Wurzeln λ, λ' von (14).

Sind alle drei Elemente λ_1, λ_2, λ_3 reell, so verlege man dieselben auf Grund des Satzes II des § 7, vermöge der reellen Substitution $\mu = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}$, in die Stellen $0, \infty, 1$. Dann werden nach Satz IV die beiden äquianharmonischen Dv. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda)$ und $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda')$ mit λ resp. λ' selbst identisch, und sind die Wurzeln von (5), also konjugiert komplex.

Sind andererseits von den drei Elementen λ_1, λ_2, λ_3 eines, etwa λ_3, reell, die beiden anderen konjugiert komplex, so verlege man, vermöge der reellen*) Substitution $\frac{\mu - i}{\mu + i} = -\frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}$, die λ_1, λ_2, λ_3 in die Stellen i, $-i$, 0, so reduziert sich das Dv. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda)$, wenn

---

*) In reeller Darstellung nimmt die Substitution die Gestalt an: $\mu = \frac{b\,(\lambda - \lambda_3)}{(a - \lambda)(a - \lambda_3) + b^2}$.

man wieder λ statt μ schreibt, auf $-\dfrac{\lambda - i}{\lambda + i}$. Soll dieses ein äquianharmonisches sein, so liefert (5) für λ, λ' die Gleichung:

$$(18) \qquad (\lambda - i)^2 + (\lambda - i)(\lambda + i) + (\lambda + i)^2 \equiv 3\lambda^2 - 1 = 0\,,$$

deren Wurzeln die reellen Werte $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ besitzen. Damit ist bewiesen:

Satz V. „Die beiden Werte λ, λ', deren jeder mit drei gegebenen Elementen ein äquianharmonisches Dv. bestimmt, sind konjugiert komplex oder aber reell, je nachdem alle drei Elemente reell sind, oder aber nur eines reell, die beiden andern konjugiert komplex.“

Der Begriff des (zweiwertigen) Dv. (I) zweier Paare (λ_1, λ_4), (λ_2, λ_3) führt noch zu einer andern bemerkenswerten Eigenschaft. Es werde das eine, etwa das äußere, jetzt mit (x_1, x_2) bezeichnete Paar festgehalten, während das andere variiere; man setze für das letztere einmal zwei Werte (ξ, η), das andere Mal die Werte (η, ζ). Dieser Festsetzung mögen die Bezeichnungen $D_{\xi\eta}$, $D_{\eta\zeta}$ entsprechen:

$$(19) \qquad D_{\xi\eta} = (x_1, \xi, \eta, x_2)\,, \quad D_{\eta\zeta} = (x_1, \eta, \zeta, x_2)\,.$$

Dann entsteht durch Multiplikation:

$$(20) \qquad D_{\xi\eta}\, D_{\eta\zeta} = D_{\xi\zeta}\,.$$

Nach Satz III ist $D_{\xi\xi} = 1$, also ist in (20) als besonderer Fall die bereits in § 3 (10) aufgestellte Relation enthalten:

$$(20') \qquad D_{\xi\eta}\, D_{\eta\xi} = D_{\xi\xi} = 1\,.$$

Um die in (20), (20′) auftretenden Multiplikationen auf Additionen zurückzuführen, führe man den auf eine feste Basis, etwa die Basis e der natürlichen Logarithmen, bezogenen Logarithmus l eines Dv. $D_{\xi\eta}$ als selbständige Funktion $E(\xi, \eta)$ zweier Variabeln ξ, η ein:

$$(21) \qquad l\,D_{\xi\eta} = E(\xi, \eta)\,.$$

Dann vereinfachen sich (20), (20′) zu:

$$\text{(VI)}\qquad \begin{cases} E(\xi, \eta) + E(\eta, \zeta) = E(\xi, \zeta)\,, \\ E(\xi, \eta) = -E(\eta, \xi)\,, \quad E(\xi, \xi) = 0\,. \end{cases}$$

Genau dieselben Regeln gelten aber für die „Differenzfunktion“ $[\xi, \eta]$:

$$\text{(22)}\qquad [\xi, \eta] = \eta - \xi\,,$$

nämlich:

$$\text{(VI}^1\text{)}\qquad \begin{cases} [\xi, \eta] + [\eta, \zeta] = [\xi, \zeta]\,, \\ [\xi, \eta] = -[\eta, \xi]\,, \quad [\xi, \xi] = 0\,, \end{cases}$$

auf denen das Rechnen mit Differenzen in der elementaren Arithmetik beruht. Somit gilt:

Satz VI. „Faßt man im Dv. (x_1, ξ, η, x_2) zweier Paare (x_1, x_2), (ξ, η) das eine, etwa (x_1, x_2), als fest auf, das andere, (ξ, η), als variabel, und bezeichnet in diesem Sinne das Dv. mit $D_{\xi\eta}$, so besitzt der auf eine beliebig, aber fest gewählte Basis bezogene Logarithmus $l D_{\xi\eta} = E(\xi, \eta)$ die charakteristischen Eigenschaften der Differenz $\eta - \xi = [\xi, \eta]$.“

Dieser Satz kann als Grundlage der „nichteuklidischen Geometrie“ dienen, wo die Funktion $E(\xi, \eta)$ verwendet wird, um den euklidischen Begriff der Entfernung resp. des Winkels zu verallgemeinern.

Zum Schlusse sei auf eine bemerkenswerte Beziehung der sechs Werte (IV) eines Dv. zu den sechs Grundfunktionen der elementaren Trigonometrie hingewiesen. Setzt man δ (I) etwa gleich $\sin^2\alpha$, so folgt:

$$\text{(23)}\qquad \begin{cases} \delta = \sin^2\alpha\,, \quad 1 - \delta = \cos^2\alpha\,, \quad \dfrac{-\delta}{1-\delta} = -\operatorname{tg}^2\alpha\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\delta} = \operatorname{cosec}^2\alpha\,, \quad \dfrac{1}{1-\delta} = \sec^2\alpha\,, \quad -\dfrac{1-\delta}{\delta} = -\operatorname{cotg}^2\alpha\,. \end{cases}$$

Die Verbindung mit Satz (IV) liefert daher den:

Satz VII. „Die sechs Werte (IV) eines Dv. stimmen, abgesehen vom Vorzeichen, überein mit den Quadraten der sechs trigonometrischen Grundfunktionen. Umgekehrt erscheinen diese Quadrate, abgesehen vom Vorzeichen, als die sechs Werte des Dv., das $\sin^2\alpha$ (oder $-\mathrm{tg}^2\alpha$) mit den Elementen $0, \infty, 1$ bildet."

Die innere Bedeutung dieses Satzes tritt ebenfalls erst in der nichteuklidischen Geometrie zutage.

Die Entwickelungen der §§ 5—8 gestatten die Ausdehnung auf komplexe Variable und Koeffizienten.

Aufgabe 1. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ fünf beliebige Elemente, so besteht zwischen den drei Dv.: $D_{23} = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5)$, $D_{34} = (\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5)$, $D_{42} = (\lambda_1 \lambda_4 \lambda_2 \lambda_5)$ die Identität:

$$D_{23} D_{34} D_{42} = 1 . \tag{a}$$

Legt man die Elemente λ_1, λ_5 in die Stellen $0, \infty$, so nimmt (a) die einfache Gestalt an: $\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \cdot \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 1$.

Aufgabe 2. Es ist die Gleichung 6. Grades explizite zu entwickeln, deren Wurzeln die sechs Werte eines Dv. sind.

Aufgabe 3. Die Gleichungen (V), (14) des Textes für das harmonische resp. äquianharmonische Dv. sind zu entwickeln. Ferner ist zu zeigen, daß, wenn die gegebenen Elemente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Wurzeln der kubischen binären Form $f \equiv a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3$ gedacht werden, die beiden in Rede stehenden Gleichungen durch Nullsetzen der Kovarianten Δ und Q von f erhalten werden, wo $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ und $Q = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \Delta_x & \Delta_y \end{vmatrix}$ ist. (Vgl. die Aufgabe 3 zu § 4, S. 35, sowie § 4, S. 29.)

Aufgabe 4. Sind z_1, z_2, z_3, z_4 vier komplexe Größen, die als vier Punkte einer Ebene gedeutet werden (s. die Aufgabe 4 zu § 7), so ist das Dv. $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ dann und nur dann reell, wenn die vier Punkte auf einem Kreise liegen. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist das Dv. dasselbe, wie das der vier Strahlen, die irgend einen Punkt des Kreises mit jenen vier festen Punkten des Kreises verbinden. Die Dv.-Relation (III) des Textes:

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_3)(z_4 - z_2) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) \equiv 0$$

deckt sich in diesem Falle geometrisch mit dem Ptolemäischen Satze und seiner Umkehrung (s. auch Aufgabe 5 zu § 7).

Aufgabe 5. Denkt man sich zwei Raumpunkte A, B in Tetraederkoordinaten a_i, b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) gegeben, so hat ein beliebiger Punkt der Geraden AB die Koordinaten $a_i\lambda + b_i\mu$. Man nennt die sechs Größen $p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$ die (homogenen) Strahlenkoordinaten der Geraden; in der Tat ändern sich die p_{ik} bei einer linearen Substitution der Parameter λ, μ (d. i. bei der Wahl neuer Grundpunkte) gemäß Satz V des § 6 nur um einen und denselben Faktor. Zwischen den p_{ik} besteht die Relation (S. 92) $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ und keine weitere. Das Dv. der vier Punkte, in denen die Gerade die Ebenen des Koordinatentetraeders trifft, wird durch $\dfrac{p_{12}\,p_{34}}{p_{13}\,p_{24}}$ angegeben, ebenso wie das Dv. der vier Ebenen, durch die die Gerade von den Ecken des Tetraeders aus projiziert wird.

Kapitel III.

Bilineare Formen. Differentialgleichungen der Invarianten bilinearer und quadratischer Formen.

§ 9. Einfachste invariante Bildungen bilinearer Formen.

Die bisher gelegentlich eingeführten, als invariante Bildungen bilinearer Formen bezeichneten Ausdrücke sollen jetzt, nebst einigen anschließenden, auf ihre Invarianz hin genauer untersucht werden. Eine Bilinearform $f_{11} = f$ zweier unabhängiger Variabeln x, y werde in homogener Gestalt angesetzt, mit zwei Variabelnpaaren (x_1, x_2), (y_1, y_2):

$$(1)\qquad \begin{cases} f_{11} = f \equiv f(x_1, x_2; y_1, y_2) \equiv a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2\,. \end{cases}$$

Beide Variabelnpaare mögen gemäß § 6 homogenen Substitutionen S unterworfen werden, und zwar vorderhand verschiedenen und voneinander unabhängigen („inkongruenten“, „inkogredienten“) eigentlichen Substitutionen S_1, S_2:

$$(2\text{a})\qquad S_1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2\,, \\ x_2 &= \gamma_1\xi_1 + \delta_1\xi_2\,, \end{aligned}$$

$$(2\text{b})\qquad S_2)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \alpha_2\eta_1 + \beta_2\eta_2\,, \\ y_2 &= \gamma_2\eta_1 + \delta_2\eta_2\,, \end{aligned}$$

mit den von Null verschiedenen Determinanten:

(3) $$\Delta_1 = \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 , \quad \Delta_2 = \alpha_2 \delta_2 - \beta_2 \gamma_2 .$$

Stimmen im besonderen die Koeffizienten von S_1, S_2 je überein, so heißen die S_1, S_2 „kongruent“ oder „kogredient“.

Vermöge (2) transformiert sich die Bilinearform f (1) in eine neue $\varphi = \varphi_{11} = \varphi(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$:

(4) $$\begin{cases} \varphi(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) \equiv a_{11}(\alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2)(\alpha_2 \eta_1 + \beta_2 \eta_2) \\ + a_{12}(\alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2)(\gamma_2 \eta_1 + \delta_2 \eta_2) + a_{21}(\gamma_1 \xi_1 + \delta_1 \xi_2)(\alpha_2 \eta_1 + \beta_2 \eta_2) \\ + a_{22}(\gamma_1 \xi_1 + \delta_1 \xi_2)(\gamma_2 \eta_1 + \delta_2 \eta_2) \equiv \alpha_{11} \xi_1 \eta_1 + \alpha_{12} \xi_1 \eta_2 + \alpha_{21} \xi_2 \eta_1 \\ \qquad + \alpha_{22} \xi_2 \eta_2 . \end{cases}$$

Die neuen Koeffizienten α sind homogen und linear in den alten, a, von f, sowie bilinear in den Koeffizienten der S_1, S_2 (2):

(5) $$\begin{cases} \alpha_{11} = a_{11} \alpha_1 \alpha_2 + a_{12} \alpha_1 \gamma_2 + a_{21} \gamma_1 \alpha_2 + a_{22} \gamma_1 \gamma_2 , \\ \alpha_{12} = a_{11} \alpha_1 \beta_2 + a_{12} \alpha_1 \delta_2 + a_{21} \gamma_1 \beta_2 + a_{22} \gamma_1 \delta_2 , \\ \alpha_{21} = a_{11} \beta_1 \alpha_2 + a_{12} \beta_1 \gamma_2 + a_{21} \delta_1 \alpha_2 + a_{22} \delta_1 \gamma_2 , \\ \alpha_{22} = a_{11} \beta_1 \beta_2 + a_{12} \beta_1 \delta_2 + a_{21} \delta_1 \beta_2 + a_{22} \delta_1 \delta_2 . \end{cases}$$

Demnach erfahren die Koeffizienten a von f vermöge (2) ebenfalls eine „lineare Substitution“, die man die durch (2) „induzierte“ nennt. Man ordne die rechten Seiten von (5) nach den Koeffizienten von S_1 resp. S_2:

(5') $$\begin{cases} \alpha_{11} = \alpha_1(a_{11} \alpha_2 + a_{12} \gamma_2) + \gamma_1(a_{21} \alpha_2 + a_{22} \gamma_2) \\ \qquad = \alpha_2(a_{11} \alpha_1 + a_{21} \gamma_1) + \gamma_2(a_{12} \alpha_1 + a_{22} \gamma_1) , \\ \alpha_{12} = \alpha_1(a_{11} \beta_2 + a_{12} \delta_2) + \gamma_1(a_{21} \beta_2 + a_{22} \delta_2) \\ \qquad = \beta_2(a_{11} \alpha_1 + a_{21} \gamma_1) + \delta_2(a_{12} \alpha_1 + a_{22} \gamma_1) , \\ \alpha_{21} = \beta_1(a_{11} \alpha_2 + a_{12} \gamma_2) + \delta_1(a_{21} \alpha_2 + a_{22} \gamma_2) \\ \qquad = \alpha_2(a_{11} \beta_1 + a_{21} \delta_1) + \gamma_2(a_{12} \beta_1 + a_{22} \delta_1) , \\ \alpha_{22} = \beta_1(a_{11} \beta_2 + a_{12} \delta_2) + \delta_1(a_{21} \beta_2 + a_{22} \delta_2) \\ \qquad = \beta_2(a_{11} \beta_1 + a_{21} \delta_1) + \delta_2(a_{12} \beta_1 + a_{22} \delta_1) . \end{cases}$$

Die Formeln (5′) sollen zuerst auf die „Determinante“ D_f [§ 7, (26)] von f:

(6) $$D_f \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

angewendet werden. Man erhält für die Determinante D_φ von φ:

(7) $$\begin{cases} D_\varphi \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}\alpha_2 + a_{12}\gamma_2\,, & a_{21}\alpha_2 + a_{22}\gamma_2 \\ a_{11}\beta_2 + a_{12}\delta_2\,, & a_{21}\beta_2 + a_{22}\delta_2 \end{vmatrix} \\ \qquad\quad = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{21} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

also gemäß (3):

(I) $$D_\varphi \equiv \Delta_1\, \Delta_2\, D_f\,.$$

Die Determinante D_f einer Bilinearform f erscheint so als eine „Invariante“ von f in „erweitertem Sinne“, insofern sie sich nach Ausübung zweier inkongruenter S_1, S_2 um das Produkt $\Delta_1\,\Delta_2$ von deren Determinanten ändert. Für kogrediente $S_1 = S_2 = S$ $(\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta)$ reduziert sich der Faktor $\Delta_1\,\Delta_2$ in (I) auf Δ^2, und damit der Begriff der Invariante auf den früher [§ 6 (S. 75)] eingeführten.

Für $a_{12} = a_{21}$ spezialisiert sich f (1) zu der Polare [§ 4 (13′)] $f(x_1, x_2; y_1, y_2)$ einer quadratischen Form $a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{22}\,x_2^2$, und zugleich die Identität (I) zu der l. c. in (XIV) aufgestellten. Umgekehrt läßt sich der Prozeß der Polarenbildung auf bilineare Formen f (1) ausdehnen. Man bilde die partiellen Ableitungen von f nach den einzelnen Variabeln:

(8) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \equiv f_{x_1} \equiv a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2\,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_1} \equiv f_{y_1} \equiv a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2\,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \equiv f_{x_2} \equiv a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2\,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2} \equiv f_{y_2} \equiv a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst wieder der „Eulersche Satz“ für Formen f als Erweiterung von (IX) in § 4:

$$\text{(II)} \qquad x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} \equiv y_1 f_{y_1} + y_2 f_{y_2} \equiv f(x_1, x_2; y_1, y_2).$$

Sodann erscheinen jetzt die Formeln (5′) in der Gestalt:

$$(5'') \quad \begin{cases} \alpha_{11} \equiv f(\alpha_1, \gamma_1; \alpha_2, \gamma_2), \qquad \alpha_{22} \equiv f(\beta_1, \delta_1; \beta_2, \delta_2), \\ \alpha_{12} \equiv \alpha_1 f_{x_1}(\beta_2, \delta_2) + \gamma_1 f_{x_2}(\beta_2, \delta_2) \\ \qquad \equiv \beta_2 f_{y_1}(\alpha_1, \gamma_1) + \delta_2 f_{y_2}(\alpha_1, \gamma_1), \\ \alpha_{21} \equiv \alpha_2 f_{y_1}(\beta_1, \delta_1) + \gamma_2 f_{y_2}(\beta_1, \delta_1) \\ \qquad \equiv \beta_1 f_{x_1}(\alpha_2, \gamma_2) + \delta_1 f_{x_2}(\alpha_2, \gamma_2). \end{cases}$$

Die rechte Seite von α_{12} heißt die „Polare“ der Form $f(\alpha_1, \gamma_1; \alpha_2, \gamma_2)$ bez. des Paares (α_2, γ_2) nach dem Paare (β_2, δ_2), die identisch ist mit der Polare der Form $f(\beta_1, \delta_1; \beta_2, \delta_2)$ bez. des Paares (β_1, δ_1) nach dem Paare (α_1, γ_1); und entsprechend bei α_{21}.

Die Identität (I) werde, gestützt auf § 6, nach einer zweiten Methode hergeleitet, deren Verwendung um so mehr am Platze ist, je verwickelter die auf ihre Invarianz zu prüfenden Bildungen sind.

Man setze die S_1, S_2 (2) aus „Fundamentalsubstitutionen“ zusammen; ändert sich bei jeder solchen der vorgelegte Ausdruck stets um ein und dieselbe Potenz der Determinante Δ_1 resp. Δ_2, so findet dasselbe, mit Rücksicht auf den Satz (V) des § 6, auch bei jeder beliebigen Substitution S_1 resp. S_2 statt.

Da S_1 und S_2 in ihrer Wirkung auf f (1) unabhängig voneinander sind, also auch ihre Reihenfolge gleichgültig ist — wie auch die doppelte Struktur der α in (5′) erkennen läßt —, so genügt es, die S_1, S_2 einzeln auszuüben.

Als Fundamentalsubstitutionen von S_1 (resp. S_2) nehme man die beiden Schiebungen $A_1(h_1)$ resp. $A_2(h_2)$: $x_1 = \xi_1 + h_1 \xi_2$, $x_2 = \xi_2$ resp. $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2 + h_2 \xi_1$ und die beiden Streckungen $M_1(m_1)$ resp. $M_2(m_2)$: $x_1 = m_1 \xi_1$, $x_2 = \xi_2$ resp. $x_1 = \xi_1$, $x_2 = m_2 \xi_2$.

Vermöge Ausübung von $A_1(h_1)$, $A_2(h_2)$ auf x_1, x_2 in f (1) werden die α:

$$(9) \quad \begin{cases} A_1(h_1) \mid \alpha_{11} = a_{11}, \ \alpha_{12} = a_{12}; \ \alpha_{21} = a_{21} + h_1 a_{11}, \ \alpha_{22} = a_{22} + h_1 a_{12}; \\ A_2(h_2) \mid \alpha_{22} = a_{22}, \ \alpha_{21} = a_{21}; \ \alpha_{12} = a_{12} + h_2 a_{22}, \ \alpha_{11} = a_{11} + h_2 a_{21}, \end{cases}$$

und analog bei Ausübung von $A_1(l_1)$, $A_2(l_2)$ auf die y_1, y_2:

$$(10)\quad \begin{cases} A_1(l_1) \mid \alpha_{21}=a_{21}\,,\ \alpha_{11}=a_{11}\,;\ \alpha_{12}=a_{12}+l_1 a_{11}\,,\ \alpha_{22}=a_{22}+l_1 a_{21}\,; \\ A_2(l_2) \mid \alpha_{12}=a_{12}\,,\ \alpha_{22}=a_{22}\,;\ \alpha_{21}=a_{21}+l_2 a_{22}\,,\ \alpha_{11}=a_{11}+l_2 a_{12}\,. \end{cases}$$

Andererseits liefern die Streckungen $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$, ausgeübt auf x_1, x_2:

$$(11)\quad \begin{cases} M_1(m_1) \mid \alpha_{11}=m_1 a_{11}\,,\ \alpha_{12}=m_1 a_{12}\,;\ \alpha_{21}=a_{21}\,,\ \alpha_{22}=a_{22}\,; \\ M_2(m_2) \mid \alpha_{11}=a_{11}\,,\ \alpha_{12}=a_{12}\,;\ \alpha_{21}=m_2 a_{21}\,,\ \alpha_{22}=m_2 a_{22}\,, \end{cases}$$

und entsprechend die Streckungen $M_1(n_1)$, $M_2(n_2)$ hinsichtlich der y_1, y_2:

$$(12)\quad \begin{cases} M_1(n_1) \mid \alpha_{11}=n_1 a_{11}\,,\ \alpha_{12}=a_{12}\,,\ \alpha_{21}=n_1 a_{21}\,,\ \alpha_{22}=a_{22}\,; \\ M_2(n_2) \mid \alpha_{11}=a_{11}\,,\ \alpha_{12}=n_2 a_{12}\,,\ \alpha_{21}=a_{21}\,,\ \alpha_{22}=n_2 a_{22}\,. \end{cases}$$

Die Wirkung der Substitutionen A und M auf die Determinante D_f (6) äußert sich dann in den Relationen:

$$(13)\quad \begin{cases} A \mid D_\varphi \equiv D_f\,, \\ M_1(m_1) \mid D_\varphi \equiv m_1 D_f\,, \quad M_2(m_2) \mid D_\varphi \equiv m_2 D_f\,; \\ M_1(n_1) \mid D_\varphi \equiv n_1 D_f\,, \quad M_2(n_2) \mid D_\varphi \equiv n_2 D_f\,. \end{cases}$$

Damit ist aber die relative Invarianz (I) von D_f bei beliebigen S_1, S_2 von neuem bewiesen. Nach dem Satze (VII) des § 6 bleibt D_f gegenüber jeder unimodularen S_1, S_2 absolut invariant.

In § 8 (21) war die in den a lineare Bildung eingeführt:

$$(14)\quad \delta_f \equiv a_{12} - a_{21}\,.$$

Vermöge (5) ergibt sich für die transformierte Bildung δ_φ:

$$(15)\quad \begin{cases} -\delta_\varphi \equiv \alpha_{21} - \alpha_{12} = a_{11}(\alpha_2\,\beta_1 - \alpha_1\,\beta_2) + a_{22}(\gamma_2\,\delta_1 - \gamma_1\,\delta_2) \\ \qquad + a_{21}(\alpha_2\,\delta_1 - \beta_2\,\gamma_1) - a_{12}(\alpha_1\,\delta_2 - \beta_1\,\gamma_2)\,. \end{cases}$$

Soll sich δ_φ, bei unbestimmt gedachten a, nur bis auf einen, von den Koeffizienten der S_1, S_2 abhängigen Faktor von δ_f unterscheiden, so müssen in (15) die Koeffizienten von a_{11} und a_{22} verschwinden und die von a_{21} und $-a_{12}$ übereinstimmen. Eine leichte Rechnung lehrt, daß dann die α_2, β_2, γ_2, δ_2 resp. den α_1, β_1, γ_1, δ_1 proportional sein müssen. Derartige Substitutionen S_1, S_2 heißen selbst

„proportionale“. Somit ist δ_f bei kogredienten $S_1 = S_2 = S$ relativ invariant:

$$\text{(III)} \qquad \delta_\varphi \equiv \Delta\, \delta_f\,;$$

bei inkogredienten S_1, S_2 aber nur in dem, von $S_1 = S_2$ unwesentlich verschiedenen Falle proportionaler S_1, S_2. In der Tat, geht man von dem ersten Falle zum zweiten über, indem man alle Koeffizienten, etwa von S_1, einen und denselben konstanten Faktor ϱ annehmen läßt, so nehmen diesen Faktor auch alle α an, und es wird $\delta_\varphi \equiv \varrho\, \Delta\, \delta_f$. Auf Grund von (III) rechtfertigt sich der in § 8 für δ_f eingeführte Ausdruck: „lineare Invariante“ von f. (Vgl. § 10.)

Nunmehr seien zwei Bilinearformen vorgelegt, in abgekürzter Schreibweise:

$$\text{(16)} \qquad f \equiv \sum a_{ik} x_i y_k\,, \quad g \equiv \sum b_{ik} x_i y_k\,.$$

In § 7 (27) trat die „bilineare Invariante“ $H = H_{fg}$ auf:

$$\text{(17)} \qquad H_{fg} \equiv a_{11}\, b_{22} + a_{22}\, b_{11} - a_{12}\, b_{21} - a_{21}\, b_{12}\,.$$

Vermöge S_1, S_2 (2) gehen f, g über in Formen φ, ψ mit Koeffizienten α_{ik}, β_{ik}. Eine direkte Berechnung von $H_{\varphi\psi}$ ist bereits umständlich und unübersichtlich.

Greift man indessen auf die Schiebungen A_1, A_2 und die Streckungen M_1, M_2 zurück, so ergibt sich bei den ersteren gemäß (9):

$$\text{(18)} \left\{\begin{aligned} A_1(h_1) \mid H_{\varphi\psi} \equiv\ & a_{11}(b_{22} + h_1 b_{12}) + b_{11}(a_{22} + h_1 a_{12}) \\ & - a_{12}(b_{21} + h_1 b_{11}) - b_{12}(a_{21} + h_1 a_{11}) = H_{fg}\,, \\ A_2(h_2) \mid H_{\varphi\psi} \equiv\ & b_{22}(a_{11} + h_2 a_{21}) + a_{22}(b_{11} + h_2 b_{21}) \\ & - b_{21}(a_{12} + h_2 a_{22}) - a_{21}(b_{12} + h_2 b_{22}) = H_{fg}\,, \end{aligned}\right.$$

und analog bei den Schiebungen $A_1(l_1)$, $A_2(l_2)$ wegen (10).

Andererseits nimmt H_{fg} nach Ausführung der Streckungen $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$, $M_1(n_1)$, $M_2(n_2)$ vermöge (11), (12) resp. die Faktoren m_1, m_2, n_1, n_2 an. Mithin gilt für beliebige S_1, S_2:

$$\text{(IV)} \qquad H_{\varphi\psi} \equiv \Delta_1\, \Delta_2\, H_{fg}\,,$$

und damit die Rechtfertigung der Bezeichnung „bilineare Invariante“ für H (vgl. § 10).

Das Ergebnis (IV) gewinnt man auch aus der Invarianz (I) von D_f nach einer bereits in § 4 auf die bilineare Invariante H_{fg} zweier quadratischer Formen angewandten Methode. Man bilde aus f, g (16) das „Büschel“ (mit dem Parameter λ):

$$f + \lambda g \equiv \sum (a_{ik} + \lambda b_{ik}) x_i y_k \,, \tag{19}$$

und wende (I) auf die Form (19) an. Mit Rücksicht auf die Identität:

$$D_{f+\lambda g} \equiv D_f + \lambda H_{fg} + \lambda^2 D_g \,, \tag{20}$$

und die entsprechende für $D_{\varphi + \lambda \psi}$ gilt dann die weitere:

$$D_\varphi + \lambda H_{\varphi\psi} + \lambda^2 D_\psi \equiv \Delta_1 \Delta_2 (D_f + \lambda H_{fg} + \lambda^2 D_g) \,. \tag{21}$$

Die Vergleichung der beiden Koeffizienten von λ liefert (IV) direkt. Der Entstehung von D_{fg} aus D_f vermöge (20) läßt sich eine übersichtlichere und verallgemeinerungsfähige Gestalt geben.

Der Ausdruck $D_{f+\lambda g}$ sei als Funktion der vier Koeffizienten $a_{ik} + \lambda b_{ik}$ von (19) mit $D[a_{ik} + \lambda b_{ik}]$ bezeichnet.

Die Maclaurinsche Entwickelung liefert:

$$D_{f+\lambda g} \equiv D_f + \lambda \cdot \frac{d D[a_{ik} + \lambda b_{ik}]}{d\lambda \ (\lambda = 0)} + \cdots \tag{22}$$

Da

$$\frac{d(a_{ik} + \lambda b_{ik})}{d\lambda} = b_{ik} \,, \qquad \frac{\partial D[a_{ik} + \lambda b_{ik}]}{\partial (a_{ik} + \lambda b_{ik}) \ (\lambda = 0)} = \frac{\partial D_f}{\partial a_{ik}} \,,$$

so lehrt die Vergleichung mit (20), daß:

$$H_{fg} = \sum b_{ik} \frac{\partial D_f}{\partial a_{ik}} \,. \tag{23}$$

Da der Beweis übertragbar ist auf Invarianten von Formen beliebiger Ordnung mit einem Paare oder mehreren Paaren homogener Variabeln, so gilt:

Satz I. „Aus einer Invariante J einer oder mehrerer Urformen geht eine neue Invariante hervor, wenn man die partiellen Ableitungen von J nach den Koeffizienten der einzelnen Formen jeweils multipliziert mit den entsprechenden Koeffizienten neuer Formen gleicher Ordnungen und die

Summe dieser Produkte bildet. Die so aus J hergeleitete Bildung ist eine Invariante des Systems, das aus den ursprünglichen und den hinzugenommenen Formen besteht.“

Die angegebene Operation, die Verallgemeinerung von (23), wird als „Polarenbildung“ in bezug auf die Koeffizienten bezeichnet, in ihrer spezifischen Anwendung auf die Invarianten als „Aronholdscher Prozeß“ *).

So ergibt sich z. B. für $D_f = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$: $\frac{\partial D}{\partial a_{11}} = a_{22}$, $\frac{\partial D}{\partial a_{22}} = a_{11}$, $\frac{\partial D}{\partial a_{12}} = -a_{21}$, $\frac{\partial D}{\partial a_{21}} = -a_{12}$. Durch Multiplikation mit resp. b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{21} und Addition entsteht H (17).

Man bilde jetzt die Matrix der Koeffizienten von f, g (16):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \tag{24}$$

und prüfe die in ihr enthaltenen zweireihigen Determinanten auf ihr Verhalten gegenüber den Fundamentalsubstitutionen (9) bis (12). Es sei p_{ik} die aus der i-ten und k-ten Kolonne (i, $k = 1, 2, 3, 4$) von (24) gebildete Determinante, π_{ik} die jeweils transformierte. Man findet leicht:

$$\tag{25} \left\{ \begin{array}{l|l} A_1(h_1) & \pi_{12} = p_{12}, \ \pi_{13} = p_{13}, \ \pi_{14} = p_{14} + h_1 p_{12}, \ \pi_{23} = p_{23} - h_1 p_{12}, \\ & \pi_{24} = p_{24}, \ \pi_{34} = p_{34} + h_1(p_{14} - p_{23}) + h_1^2 p_{12}; \\ A_2(h_2) & \pi_{12} = p_{12} + h_2(p_{14} - p_{23}) + h_2^2 p_{34}, \ \pi_{13} = p_{13}, \ \pi_{14} = p_{14} + h_2 p_{34}, \\ & \pi_{23} = p_{23} - h_2 p_{34}, \ \pi_{24} = p_{24}, \ \pi_{34} = p_{34}; \\ A_1(l_1) & \pi_{12} = p_{12}, \ \pi_{13} = p_{13}, \ \pi_{14} = p_{14} + l_1 p_{13}, \ \pi_{23} = p_{23} + l_1 p_{13}, \\ & \pi_{24} = p_{24} + l_1(p_{14} + p_{23}) + l_1^2 p_{13}, \ \pi_{34} = p_{34}; \\ A_2(l_2) & \pi_{12} = p_{12}, \ \pi_{13} = p_{13} + l_2(p_{14} - p_{23}) + l_2^2 p_{24}, \ \pi_{14} = p_{14} + l_2 p_{24}, \\ & \pi_{23} = p_{23} + l_2 p_{24}, \ \pi_{24} = p_{24}, \ \pi_{34} = p_{34}. \end{array} \right.$$

Dies finde zunächst Anwendung auf die beiden, unter (19) in § 7 eingeführten „Funktionaldeterminanten“ $\vartheta^{(y)}$, $\vartheta^{(x)}$ von f, g bez. (x_1, x_2) resp. (y_1, y_2). Mittels (8) erhält man:

---

*) S. Aronhold, Journ. für Math., Bd. 62 (1863), S. 281.

$$
(26)\begin{cases}
\vartheta^{(y)} \equiv \begin{vmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{vmatrix} \equiv y_1^2 p_{13} + y_1 y_2 (p_{14} + p_{23}) + y_2^2 p_{24}\,, \\
\vartheta^{(x)} \equiv \begin{vmatrix} f_{y_1} & f_{y_2} \\ g_{y_1} & g_{y_2} \end{vmatrix} \equiv x_1^2 p_{12} + x_1 x_2 (p_{14} - p_{23}) + x_2^2 p_{34}\,,
\end{cases}
$$

die auseinander hervorgehen, wenn man gleichzeitig die Variabelnpaare und die Indizes 2, 3 vertauscht. Nach § 7 (25) stimmen die Diskriminanten von (26) überein:

$$
(27)\quad D_\vartheta^{(f,g)} \equiv 4 p_{13} p_{24} - (p_{14} + p_{23})^2 = 4 p_{12} p_{34} - (p_{14} - p_{23})^2 .
$$

Bei Ausübung der Schiebungen $A_1(h_1)$, $A_2(h_2)$ (25) geht $\pi_{13}\pi_{24}$ über in $p_{13}p_{24}$, $\pi_{14}+\pi_{23}$ in $p_{14}+p_{23}+h_1p_{12}-h_1p_{12}$ resp. $p_{14}+p_{23}+h_2p_{34}-h_2p_{34}=p_{14}+p_{23}$, und analog bei $A_1(l_1)$, $A_2(l_2)$ $\pi_{12}\pi_{34}$ in $p_{12}p_{34}$, $\pi_{14}-\pi_{23}$ in $p_{14}-p_{23}$. Mithin bleibt bei allen vier Schiebungen A der Ausdruck (27) ungeändert:

$$
(28)\qquad A \mid D_\vartheta^{(\varphi,\psi)} \equiv D_\vartheta^{(f,g)} .
$$

Andererseits ändert sich D_ϑ gegenüber den Streckungen (11), (12) jeweils um m_1^2, m_2^2, n_1^2, n_2^2. Mithin ist gegenüber beliebigen S_1, S_2:

$$
(\mathrm{V})\qquad D_\vartheta^{(\varphi,\psi)} \equiv \Delta_1^2 \Delta_2^2 D_\vartheta^{(f,g)} .
$$

Nunmehr ziehe man die Formen $\vartheta_{f,g}^{(y)}$, $\vartheta_{f,g}^{(x)}$ (26) selbst in Betracht. Es genügt die Untersuchung etwa der ersteren. Beim Übergange von $\vartheta_{f,g}^{(y)}$ zu $\vartheta_{\varphi,\psi}^{(\eta)}$ sind einmal die p_{ik} durch die π_{ik} zu ersetzen, ferner aber mittels Umkehrung der S_2 (2) die y_1, y_2 durch die η_1, η_2. Insbesondere liefert die Umkehrung der Schiebungen $A_1(l_1)$, $A_2(l_2)$:

$$
(29)\qquad \begin{cases} A_1(l_1) \mid \eta_1 = y_1 - l\, y_2\,, \qquad \eta_2 = y_2\,; \\ A_2(l_2) \mid \eta_1 = y_1\,, \qquad \eta_2 = y_2 - l_2\, y_1 . \end{cases}
$$

Auf Grund von (25), (26) wird:

$$
(30)\begin{cases} A_1(h_1) \\ A_2(h_2) \end{cases}\Bigg|\; \begin{aligned} \vartheta_{\varphi,\psi}^{(\eta)} &\equiv y_1^2 \pi_{13} + y_1 y_2 (\pi_{14} + \pi_{23}) + y_2^2 \pi_{24}\,, \\ &\equiv y_1^2 p_{13} + y_1 y_2 (p_{14} + p_{23}) + y_2^2 p_{24} = \vartheta_{f,g}^{(y)} . \end{aligned}
$$

Sodann liefert die Ausübung von $A_1(l_1)$ vermöge (25) und (29):

$$(31)\begin{cases} A_1(l_1) \mid \vartheta^{(\eta)}_{\Phi,\psi} \equiv y_1^2 \pi_{13} + y_1 y_2 (\pi_{14} + \pi_{23} - 2 l_1 \pi_{13}) \\ \qquad + y_2^2 \{\pi_{24} - l_1(\pi_{14} + \pi_{23}) + l_1^2 \pi_{13})\} \\ \qquad \equiv y_1^2 p_{13} + y_1 y_2 (p_{14} + p_{23}) + y_2^2 p_{24} \equiv \vartheta^{(y)}_{f,g} \end{cases}$$

und analog bei $A_2(l_2)$.

Andererseits ergeben die Streckungen $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ (11) von x_1, x_2:

$$(32)\begin{cases} M_1(m_1) \mid \pi_{13} = m_1 p_{13}, \quad \pi_{14} + \pi_{23} = m_1(p_{14} + p_{23}), \quad \pi_{24} = m_1 p_{24}; \\ M_2(m_2) \mid \pi_{13} = m_2 p_{13}, \quad \pi_{14} + \pi_{23} = m_2(p_{14} + p_{23}), \quad \pi_{24} = m_2 p_{24}; \end{cases}$$

folglich, da die y_1, y_2 hierbei ungeändert bleiben:

$$(33)\quad M_1(m_1) \mid \vartheta^{(\eta)}_{\varphi\psi} \equiv m_1 \vartheta^{(y)}_{fg}; \qquad M_2(m_2) \mid \vartheta^{(\eta)}_{\varphi\psi} \equiv m_2 \vartheta^{(y)}_{fg}.$$

Dagegen haben die Streckungen $M_1(n_1)$, $M_2(n_2)$ von y_1, y_2 die doppelte Wirkung, daß:

$$(34)\begin{cases} M_1(n_1) \mid \pi_{13} = n_1^2 p_{13}, \quad \pi_{14} + \pi_{23} = n_1(p_{14} + p_{23}), \quad \pi_{24} = p_{24}; \\ M_2(n_2) \mid \pi_{13} = p_{13}, \quad \pi_{14} + \pi_{23} = n_2(p_{14} + p_{23}), \quad \pi_{24} = n_2^2 p_{24}, \end{cases}$$

und zugleich:

$$(35)\quad M_1(n_1) \mid \eta_1 = \frac{y_1}{n_1}, \quad \eta_2 = y_2; \qquad M_2(n_2) \mid \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{n_2},$$

und demnach:

$$(36)\qquad \left.\begin{cases} M_1(n_1) \\ M_2(n_2) \end{cases}\right| \vartheta^{(\eta)}_{\varphi\psi} \equiv \vartheta^{(y)}_{fg}.$$

Zieht man die Formeln (30), (31), (33), (36) zusammen und nimmt das analoge Resultat für $\vartheta^{(x)}_{fg}$ hinzu, so hat man für beliebige S_1, S_2:

$$(\text{VI})\qquad \vartheta^{(\eta)}_{\varphi\psi} \equiv \Delta_1 \vartheta^{(y)}_{fg}; \qquad \vartheta^{(\xi)}_{\varphi\psi} \equiv \Delta_2 \vartheta^{(x)}_{fg}.$$

Den beiden Urformen f, g (16) werde eine dritte, h, mit Koeffizienten c_{ik} zugefügt. Der Matrix $| a_{11}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{22} |$ lassen sich vier dreireihige Determinanten entnehmen; die durch Weglassung der i-ten Kolonne ($i = 1, 2, 3, 4$) entstehende sei T_i. Um zu einer einfachen Invariante von f, g, h zu gelangen, stelle man die Bedingung dafür auf, daß die drei, in nichthomogenen Variabeln $\lambda = \dfrac{x_1}{x_2}$, $\mu = \dfrac{y_1}{y_2}$ geschriebenen Substitutionen $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ (vgl. § 7) ein Elementenpaar (λ, μ) gemein haben. Dies findet dann und nur dann statt, wenn für die den drei Gleichungen

$$(37)\qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{21}z + a_{22}w = 0\,, \\ b_{11}x + b_{12}y + b_{21}z + b_{22}w = 0\,, \\ c_{11}x + c_{12}y + c_{21}z + c_{22}w = 0 \end{cases}$$

genügenden Verhältnisse der Unbekannten x, y, z, w die Relation erfüllt ist:

$$(38)\qquad xw - yz = 0\,.$$

Da die Auflösung von (37) lautet:

$$(39)\qquad x:y:z:w = T_1 : -T_2 : T_3 : -T_4\,,$$

so nimmt (38) die Gestalt an:

$$(40)\qquad T_1 T_4 - T_2 T_3 = 0\,.$$

Denkt man sich diese Bedingung erfüllt, so wird die Tatsache, daß die drei Gleichungen $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ eine gemeinsame Lösung besitzen, nicht geändert, wenn man (x_1, x_2), (y_1, y_2) je einer beliebigen Substitution S_1, resp. S_2 unterwirft. Der Gleichung (40) kommt daher ein S_1, S_2 gegenüber invarianter Charakter zu; sie heißt daher eine „invariante Gleichung".

Man wird mithin erwarten, daß die linke Seite von (40) selbst eine Invariante ist. Man übe zuerst wieder die Schiebungen A (9), (10) aus, etwa $A_1(h_1)$. Die in den neuen Koeffizienten $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ der φ, ψ, χ geschriebenen T_i seien mit T_i bezeichnet. Gemäß (9) kommt:

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathsf{T}_1 \equiv |a_{12}\,,\quad a_{21} + h_1 a_{11}\,,\quad a_{22} + h_1 a_{12}| \equiv T_1 - h_1 T_3\,, \\ \mathsf{T}_2 \equiv |a_{11}\,,\quad a_{21} + h_1 a_{11}\,,\quad a_{22} + h_1 a_{12}| \equiv T_2 - h_1 T_4\,, \\ \mathsf{T}_3 \equiv |a_{11}\,,\quad a_{12}\,,\quad a_{22} + h_1 a_{12}| \equiv T_3\,, \\ \mathsf{T}_4 \equiv |a_{11}\,,\quad a_{12}\,,\quad a_{21} + h_1 a_{11}| \equiv T_4\,. \end{cases}$$

Verfährt man entsprechend mit $A_2(h_2)$, $A_1(l_1)$, $A_2(l_2)$, so ergibt sich in allen vier Fällen:

$$(42)\qquad A\,|\,\mathsf{T}_1 \mathsf{T}_4 - \mathsf{T}_2 \mathsf{T}_3 \equiv T_1 T_4 - T_2 T_3\,.$$

Für eine Streckung, etwa $M_1(m_1)$, erhält man:

$$(43)\quad M_1(m_1)|\mathsf{T}_1 \equiv m_1 T_1,\ \mathsf{T}_2 \equiv m_1 T_2,\ \mathsf{T}_3 \equiv m_1^2 T_3,\ \mathsf{T}_4 \equiv m_1^2 T_4,$$

und damit, unter μ irgend eine der vier Größen m_1, m_2, n_1, n_2 verstanden:

$$(44) \qquad M \mid \mathsf{T}_1\mathsf{T}_4 - \mathsf{T}_2\mathsf{T}_3 \equiv \mu^3(T_1T_4 - T_2T_3)\,.$$

Die Kombinierung von (43) und (44) lehrt, daß allgemein:

$$(\mathrm{VII}) \qquad \mathsf{T}_1\mathsf{T}_4 - \mathsf{T}_2\mathsf{T}_3 \equiv \Delta_1^3\Delta_2^3(T_1T_4 - T_2T_3)\,.$$

Für vier Bilinearformen f, g, h, k ist $T = |a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}|$ eine Invariante, denn die Schiebungen A (9), (10) ändern T gar nicht und bei irgend einer Streckung M nimmt T das Quadrat des Streckungsparameters als Faktor an; mithin ist allgemein:

$$(\mathrm{VIII}) \qquad |\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}| \equiv \Delta_1^2\Delta_2^2\,|a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}|\,.$$

Die Determinante T heißt die „quadrilineare" Invariante von f, g, h, k.

Im obigen sind Invarianten und Kovarianten von f, g, h untersucht worden. Es gibt aber auch Kovarianten, die die Koeffizienten der Urformen gar nicht enthalten, also nur Variable; solche heißen, da sie sich für irgendwelche Urformen invariant verhalten, „identische" Kovarianten*). Eine solche ist z. B. $x_1y_2 - x_2y_1$, deren Verschwinden aussagt, daß die Verhältnisse $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ übereinstimmen. In der Tat ist für kongruente $S_1 = S_2 = S$:

$$(\mathrm{IX}) \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \equiv \Delta^{-1} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

d. i. nichts anderes als das Gesetz für die Multiplikation zweireihiger Determinanten. Für inkongruente S_1, S_2 ist $x_1y_2 - x_2y_1$ nicht invariant.

Die bisherigen Ergebnisse werden zusammengefaßt durch:

Satz II. „Die Determinante D_f (6), (I) einer Bilinearform f, die bilineare Invariante H_{fg} (17), (IV) zweier Formen f, g, die Diskriminante D_ϑ (27), (V) der beiden Funktionaldeterminanten $\vartheta_{fg}^{(x)}$, $\vartheta_{fg}^{(y)}$ (26) von f, g; der in den Koeffizienten dreier Formen f, g, h quadratische Ausdruck $T_1T_4 - T_2T_3$ (40), (VII),

*) Derartige identische Kovarianten sind bereits in den Aufgaben zu § 5 ff. vielfach betrachtet worden.

und die quadrilineare Invariante T (VIII) von vier Formen f, g, h, k sind Invarianten gegenüber beliebigen inkogredienten — im besonderen auch kogredienten — Substitutionen S_1, S_2; die Formen $\vartheta_{fg}^{(x)}$, $\vartheta_{fg}^{(y)}$ (26) sind in diesem Sinne Kovarianten.

Dagegen beschränkt sich die Invarianz der linearen Invariante δ_f (14), (III), sowie der identischen Kovariante $x_1 y_2 - x_2 y_1$ (IX) auf kogrediente S. Auch die bilineare Invariante von $\vartheta_{fg}^{(x)}$, $\vartheta_{fg}^{(y)}$ ist nur gegenüber kogredienten S_1, S_2 invariant."

Aufgabe 1. Es ist zu zeigen, daß die Koeffizientendeterminante ∇ der induzierten S (5) den Wert $\Delta_1^2 \Delta_2^2$ besitzt, entweder mit Hilfe der Laplaceschen Zerlegung der Determinante, oder einfacher mittels der Methode der Fundamentalsubstitutionen A_1, A_2, M_1, M_2. Die letztere Methode reicht auch hin, um den Satz auf eine n-lineare Form (in n homogenen Variabelnpaaren) auszudehnen; die Determinante ∇ der induzierten S hat dann den Wert $(\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n)^{2^{n-1}}$. Denn da bei einer Fundamentalsubstitution entweder β oder γ verschwindet (oder beide zugleich), so verschwinden auch alle Elemente von ∇ auf einer der beiden Seiten der Hauptdiagonale (resp. auf beiden), so daß sich ∇ auf das Hauptdiagonalglied reduziert. Im besonderen führt die nämliche Methode zu dem Ergebnis, daß die Determinante der induzierten S (der Koeffizienten) einer binären Form $n$ter Ordnung f_n den Wert $\Delta^{\frac{n(n+1)}{2}}$ hat.

Aufgabe 2. Die Invarianz von (14), (III) $\delta_f = a_{12} - a_{21}$ gegenüber kogredienten S ist vermöge Anwendung der Fundamentalsubstitutionen abzuleiten.

Aufgabe 3. Die Invarianz der bilinearen Invariante von (26) $\vartheta_{f,g}^{(x)}$, $\vartheta_{f,g}^{(y)}$ gegenüber kogredienten S ist nachzuweisen.

Aufgabe 4. Die in § 3 festgestellte Kombinanteneigenschaft der Funktionaldeterminante θ und der Resultante R zweier quadratischer binärer Formen $f_2(x_1, x_2)$, $g_2(x_1, x_2)$ ordnet sich im Sinne des § 9 der Invarianz gegenüber inkogredienten S in bezug auf die lineo-quadratische Urform $f_{1,2} = y_1 f + y_2 g$ des in § 3 betrachteten f-Büschels unter. Für $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ geht eine kubische binäre Form f_3 hervor, die sich, nebst allen ihren In- und Kovarianten, gegenüber kogredienten S invariant verhält.

Aufgabe 5. Eine trilineare Form $f_{1,1,1} = \sum a_{ikl} x_i y_k z_l$ $(i, k, l = 1, 2)$ besitzt gegenüber inkogredienten S die drei Kovarianten zweiter Ordnung $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$, wo z. B. $\vartheta_x = \begin{vmatrix} f_{y_1 y_2} & f_{y_1 z_2} \\ f_{y_2 z_1} & f_{z_1 z_2} \end{vmatrix}$. Diese drei quadratischen binären Formen haben eine und dieselbe Diskriminante D_ϑ, eine Invariante von f gegenüber inkogredienten S. Schreibt man f in nichthomogener Gestalt $f(x, y, z)$ $(x_1 = x, y_1 = y, z_1 = z, x_2 = y_2 = z_2 = 1)$, und bezeichnet, bei geeigneter Anordnung, mit x', x''; y', y''; z', z'' die Wurzeln von $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$, so ist f, und zwar nur auf eine einzige Art, in der kanonischen Gestalt darstellbar:

$$f = \alpha'(x - x')(y - y')(z - z') + \alpha''(x - x'')(y - y'')(z - z''),$$

aus der die entsprechende homogene Gestalt ohne weiteres hervorgeht.

In dem besonderen Falle, wo sich $f_{1,1,1}$ auf eine kubische binäre Form f_3 reduziert, fallen die drei Kovarianten ϑ zusammen mit der Hesseschen Kovariante Δ und D_ϑ mit der Invariante R (s. die Aufgabe 3 zu § 4, S. 35, und die Aufgabe 6 zu § 6, S. 77).

Aufgabe 6. Liegen zwei trilineare Urformen vor: $f_{1,1,1} = \sum a_{ikl} x_i y_k z_l$, $g_{1,1,1} = \sum b_{ikl} x_i y_k z_l$, so existiert gegenüber inkogredienten S die bilineare Invariante

$$H_{f,g} = \begin{vmatrix} a_{111} & a_{222} \\ b_{111} & b_{222} \end{vmatrix} - \left\{ \begin{vmatrix} a_{211} & a_{122} \\ b_{211} & b_{122} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{121} & a_{212} \\ b_{121} & b_{212} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{112} & a_{221} \\ b_{112} & b_{221} \end{vmatrix} \right\}.$$

Reduzieren sich $f_{1,1,1}$, $g_{1,1,1}$ auf zwei binäre kubische Formen f_3, g_3:

$$f_3 = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3,$$

$$g_3 = b_0 x_1^3 + 3 b_1 x_1^2 x_2 + 3 b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3,$$

so geht $H_{f,g}$ über in die bilineare Invariante $a_0 b_3 - 3 a_1 b_2 - 3 a_2 b_1 + a_3 b_0$.

Konstruiert man aus $f_{1,1,1}$ und $g_{1,1,1}$ eine quadrilineare Urform $f_{1,1,1,1} = u_1 f + u_2 g = \sum a_{iklm} x_i y_k z_l u_m$ $(i, k, l, m = 1, 2)$, so gibt der Ausdruck $H_{f,g}$ Veranlassung zu vier quadratischen Invarianten, die aber alle in eine und dieselbe, J_2, zusammenfallen, wo:

$$
\begin{aligned}
J_2 &= a_{1111}\, a_{2222} + a_{1122}\, a_{2211} + a_{1212}\, a_{2121} + a_{1221}\, a_{2112} \\
&\quad - a_{1112}\, a_{2221} - a_{2112}\, a_{1222} - a_{1211}\, a_{2122} - a_{1121}\, a_{2212} \\
&= \sum (-1)^{\sigma}\, a_{i_1 k_1 l_1 m_1}\, a_{i_2 k_2 l_2 m_2}
\end{aligned}
$$

$$(i_1 + i_2 = k_1 + k_2 = l_1 + l_2 = m_1 + m_2 = 3\,, \quad \sigma = i_1 + k_1 + l_1 + m_1)\,.$$

Reduziert sich die $f_{1,1,1,1}$ auf eine quadrato-quadratische Form $f_{2,2} = x_1^2(a_{00}\, u_1^2 + 2\, a_{01}\, u_1\, u_2 + a_{02}\, u_2^2) + 2\, x_1 x_2$ $(a_{10}\, u_1^2 + 2\, a_{11}\, u_1\, u_2 + a_{12}\, u_2^2) + x_2^2(a_{20}\, u_1^2 + 2\, a_{21}\, u_1\, u_2 + a_{22}\, u_2^2)$, so geht die Invariante J_2 über in:

$$J_2 = a_{00}\, a_{22} + 2\, a_{11}^2 + a_{02}\, a_{20} - 2\, a_{01}\, a_{21} - 2\, a_{10}\, a_{12}\,.$$

Tritt endlich die Reduktion auf eine biquadratische binäre Form f_4 ein:

$$f_4 = a_0\, x_1^4 + 4\, a_1\, x_1^3\, x_2 + 6\, a_2\, x_1^2\, x_2^2 + 4 a_3\, x_1\, x_2^3 + a_4\, x_2^4\,,$$

so spezialisiert sich J_2 zur Invariante $i = a_0\, a_4 - 4\, a_1 a_3 + 3\, a_2^2$ (s. Aufgabe 6 zu § 6, S. 77).

Die $f_{2,2}$ besitzt je eine Diskriminante D_x, D_u bzw. der u resp. x. Diese beiden Formen 4. Ordnung sind Kovarianten gegenüber inkogredienten S und fallen für die f_4 zusammen mit der Hesseschen Form H (Aufgabe 3 zu § 4, S. 35).

Aufgabe 7. Es seien in nichthomogener Schreibweise $f(x; y)$, $g(x; y)$ zwei binäre bilineare Formen und S, T die beiden, durch das Verschwinden von f resp. g dargestellten linearen Substitutionen (§ 7). Was bedeutet das Verschwinden der bilinearen Invariante H_{fg} für die beiden Substitutionen S, T?

Man bezeichne x als Element eines ersten, y als Element eines zweiten „Systems“. Einem beliebigen Elemente y des zweiten Systems entspricht vermöge S resp. T ein Element x_a resp. x_b des ersten Systems. Dann sind bei variierendem y die Elementenpaare (x_a, x_b) selbst an eine gewisse lineare Substitution U gebunden. Diese Substitution U wird dann und nur dann zu einer Involution J, wenn $H_{fg} = 0$. Das Entsprechende gilt, wenn man von einem beliebigen Elemente x ausgeht.

Sei jetzt die Bedingung $H_{fg}=0$ erfüllt, so sind noch die Doppelelemente x_1, x_2 der Involution J zu charakterisieren. Zu dem Behuf konstruiere man das Formenbüschel $f+\lambda g$; diesem gehören (§ 7) zwei zerfallende Formen $f+\lambda_1 g$, $f+\lambda_2 g$ an:

$$f+\lambda_1 g \equiv a(x-x_1)(y-y_1), \quad f+\lambda_2 g \equiv b(x-x_2)(y-y_2).$$

Dann sind die Doppelelemente x_1, x_2 der Involution J eben die Wurzeln der beiden Linearfaktoren $x-x_1$, $x-x_2$.

Läßt man daher vermöge der durch $f+\lambda g=0$ bestimmten Substitution S_λ wiederum einem beliebigen Elemente y ein Element x_λ entsprechen, so sind, falls $H_{fg}=0$, und nur dann, die beiden Elemente x_a, x_b, die den Substitutionen $S=S_0$, $T=S_\infty$ zugehören, stets harmonisch zu den beiden festen, d. h. von der Auswahl des y unabhängigen Elementen $x_1=x_{\lambda_1}$, $x_2=x_{\lambda_2}$, die den beiden uneigentlichen Substitutionen S_{λ_1}, S_{λ_2} zugehören.

Die geometrische Deutung dieser algebraischen Sätze liegt auf der Hand. Deutet man x, y als Elemente zweier einförmiger Grundgebilde u, v, etwa zweier Geraden, so werden die Substitutionen S, T zu projektiven Beziehungen zwischen u, v; U zu einer projektiven Beziehung auf u, und J zu einer ausgezeichneten Involution auf u.

Aufgabe 8. Es seien in einer Ebene E x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3' zwei Reihen von (homogenen) Punktkoordinaten, u_1, u_2, u_3; u_1', u_2', u_3' zwei Reihen von Linienkoordinaten, ferner $f(x;x')=\sum a_{ik}x_i x_k'$, $g(x;x')=\sum \beta_{ik}u_i u_k'$ zwei ternäre bilineare Formen, und $J_2=\sum a_{ik}\beta_{ik}$ ihre bilineare Invariante.

Die Gleichungen $f=0$, $\psi=0$ stellen in E zwei reziproke (lineare) Verwandtschaften dar, die erstere aufgefaßt als Ordnungsgebilde, die letztere als Klassengebilde. Im folgenden sei (x) der Pol der Geraden (u), und (x') der Pol der Geraden (u') in der Verwandtschaft ψ.

Sind (u), (u') zwei beliebige Gerade der Ebene E, so sind die beiden auf (u), (u') gelegenen, bezüglich der Verwandtschaften f resp. ψ konjugierten Punktreihen durch eine projektive Beziehung S resp. T verknüpft. Die bilineare Invariante der, S resp. T darstellenden (mit geeigneten numerischen Faktoren normierten) binären bilinearen Formen sei J_1.

Dann gilt die grundlegende Identität:

$$\text{(I)} \qquad J_1 \equiv J_2 \psi(u;\, u') - f(x;\, x') \,.$$

Man nennt die beiden Verwandtschaften f, ψ apolar, wenn $J_2 = 0$, desgleichen die beiden Projektivitäten S, T apolar, wenn $J_1 = 0$ (vgl. die vorige Aufgabe).

Dann ist in (I) der Hauptsatz über apolare Verwandtschaften f, ψ resp. S, T als spezielle Folgerung enthalten.

Nimmt man nämlich im besonderen $f(x;\, x') = 0$ an, d. h. die Punkte (x), (x') als konjugiert in der Verwandtschaft f, so zieht gemäß (I) die Apolarität von f, ψ diejenige von S, T nach sich, und, solange $\psi(u;\, u') \neq 0$, auch umgekehrt.

Sind speziell f, ψ quadratische Formen $f(x;x)$, $\psi(u;u)$, so erhält man den Hesseschen Satz über apolare Kegelschnitte f, ψ [vgl. Journ. für Math. Band 45 (1853), S. 82]: „Sind zwei Kegelschnitte f, ψ einer Ebene apolar — und nur dann — so existieren ∞^1 eigentliche, dem Kegelschnitte f einbeschriebene Poldreiecke des Kegelschnittes ψ, und jeder Punkt von f ist Ecke eines solchen Dreiecks."

Das Entsprechende gilt dualistisch, und ganz analoge Beziehungen bestehen im Raume.

§ 10. Fortsetzung. Differentialgleichungen und Gewichtsregeln für invariante Bildungen bilinearer und quadratischer Formen.

Auf ähnlichem Wege, wie oben § 9 (23) zum Aronholdschen Prozesse, gelangt man auch zu linearen partiellen Differentialgleichungen für invariante Bildungen bilinearer oder quadratischer — und weiterhin beliebiger — Urformen.

Es werde wieder an die vier Schiebungen A [§ 9, (9), (10)] von (x_1, x_2) resp. (y_1, y_2) angeknüpft, zunächst für den Fall einer einzelnen Bilinearform $f = \sum a_{ik} x_i y_k$.

Sei $J(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = J(a)$ irgend ein in den a ganzrationaler Ausdruck, der gegenüber den A absolut invariant sei, dann gelten die in den Koeffizienten und Parametern identisch erfüllten Relationen:

$$(45)\quad \begin{cases} A_1(h_1) \mid J(a_{11}, a_{12}, a_{21}+h_1 a_{11}, a_{22}+h_1 a_{12}) \equiv J(a), \\ A_2(h_2) \mid J(a_{11}+h_2 a_{21}, a_{12}+h_2 a_{22}, a_{21}, a_{22}) \equiv J(a), \\ A_1(l_1) \mid J(a_{11}, a_{12}+l_1 a_{11}, a_{21}, a_{22}+l_1 a_{21}) \equiv J(a), \\ A_2(l_2) \mid J(a_{11}+l_2 a_{12}, a_{12}, a_{21}+l_2 a_{22}, a_{22}) \equiv J(a); \end{cases}$$

und umgekehrt charakterisieren diese das invariante Verhalten von J gegenüber den A. Versteht man unter a'_{ik} eine zweite Reihe von Koeffizienten, nämlich einer weiteren Form $f'(a'_{ik})$, und unter ϱ einen Parameter, so besitzen die linken Seiten von (45) die gemeinsame Struktur:

$$(46)\qquad J(a_{ik}+\varrho\, a'_{ik}) = J_{f+\varrho f'},$$

also formal ganz wie bei der Determinante D, § 9, (20). Entwickelt man daher wie dort nach dem Maclaurinschen Gesetze:

$$(46')\qquad J(a_{ik}+\varrho\, a'_{ik}) \equiv J(a) + \varrho \sum a'_{ik} \frac{\partial J(a)}{\partial a_{ik}} + \ldots,$$

so müssen, falls der Ausdruck (46′), wie in den vier Fällen (45), für jeden Wert von ϱ mit $J(a)$ identisch sein soll, rechts von (46′) die Koeffizienten von $\varrho, \varrho^2, \ldots$ verschwinden, insonderheit der erste:

$$(47)\qquad \sum a'_{ik} \frac{\partial J(a)}{\partial a_{ik}} = 0.$$

Dies liefert, entsprechend den vier Fällen (45) für J, die vier, für alle Werte der a_{ik} gültigen linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(\mathrm{X})\quad \begin{cases} A_1(h_1) \mid H_1 \equiv a_{11} \dfrac{\partial J}{\partial a_{21}} + a_{12} \dfrac{\partial J}{\partial a_{12}} = 0, \\ A_2(h_2) \mid H_2 \equiv a_{21} \dfrac{\partial J}{\partial a_{11}} + a_{22} \dfrac{\partial J}{\partial a_{12}} = 0, \\ A_1(l_1) \mid L_1 \equiv a_{11} \dfrac{\partial J}{\partial a_{12}} + a_{21} \dfrac{\partial J}{\partial a_{22}} = 0, \\ A_2(l_2) \mid L_2 \equiv a_{12} \dfrac{\partial J}{\partial a_{11}} + a_{22} \dfrac{\partial J}{\partial a_{21}} = 0. \end{cases}$$

Diese vier Gleichungen (X) sind also dann und nur dann gleichzeitig erfüllt, falls $J(a)$ gegenüber beliebigen Schiebungen A der (x_1, x_2), (y_1, y_2) — und damit nach dem Satze (VII) des § 6 zugleich gegenüber beliebigen unimodularen Substitutionen U_1, U_2 der (x_1, x_2), (y_1, y_2) — absolut invariant sein soll.

Wird dagegen die Invarianz von J nur gegenüber kogredienten $U_1 = U_2 = U$ verlangt, so reduzieren sich die vier bisher unabhängigen Parameter h_1, h_2, l_1, l_2 auf zwei: $h_1 = l_1$, $h_2 = l_2$, und damit auch die Anzahl der bezüglichen Differentialgleichungen auf nur zwei.

Man brauchte zu dem Behuf nur die Werte der α_{ik} § 9 (5) für kogrediente Schiebungen $A_1(h_1 = l_1)$, $A_2(h_2 = l_2)$ zu spezialisieren.

Um aber den Zusammenhang der beiden abzuleitenden Gleichungen für J mit den vier Gleichungen (IX) des allgemeinen Falles zu übersehen, wird man, zunächst für inkongruente Substitutionen, die $A_1(h_1)$, $A_1(l_1)$ und $A_2(h_2)$, $A_2(l_2)$ je in eine einzige Operation (ihr „Produkt“, vgl. § 5) zusammenziehen und erst hinterher $h_1 = l_1$, $h_2 = l_2$ nehmen. Man hat:

$$(48\text{a})\quad \left\{\begin{array}{l|l} A_1(h_1)\cdot A_1(l_1) & \alpha_{11} = a_{11}, \\ & \alpha_{12} = a_{12} + l_1 a_{11}, \\ & \alpha_{22} = a_{22} + h_1 a_{12} + l_1 a_{21} + h_1 l_1 a_{11}, \\ & \alpha_{21} = a_{21} + k_1 a_1, \end{array}\right.$$

$$(48\text{b})\quad \left\{\begin{array}{l|l} A_2(h_2)\cdot A_2(l_2) & \alpha_{11} = a_{11} + h_2 a_{21} + l_2 a_{12} + h_2 l_2 a_{22}, \\ & \alpha_{12} = a_{12} + h_2 a_{22}, \\ & \alpha_{22} = a_{22}, \\ & \alpha_{21} = a_{21} + l_2 a_{22}, \end{array}\right.$$

wo beide Formelreihen durch Vertauschung der Indizes 1, 2 auseinander hervorgehen. Für $h_1 = l_1 = 0$ resp. $h_2 = l_2 = 0$ gehen die α_{ik} in die a_{ik} über.

Bildet man von den α_{ik} (48) die partiellen Ableitungen nach den Parametern und setzt alsdann $h_1 = l_1 = 0$ resp. $h_2 = l_2 = 0$, so wird:

$$
(49\,\mathrm{a})\quad (h_1 = l_1 = 0)\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_{11}}{\partial h_1} = 0\,, & \dfrac{\partial \alpha_{12}}{\partial h_1} = 0\,, \quad \dfrac{\partial \alpha_{21}}{\partial h_1} = a_{11}\,, \quad \dfrac{\partial \alpha_{22}}{\partial h_1} = a_{12}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \alpha_{11}}{\partial l_1} = 0\,, & \dfrac{\partial \alpha_{12}}{\partial l_1} = a_{11}\,, \quad \dfrac{\partial \alpha_{21}}{\partial l_1} = 0\,, \quad \dfrac{\partial \alpha_{22}}{\partial l_1} = a_{21}\,, \end{cases}
$$

$$
(49\,\mathrm{b})\quad (h_2 = l_2 = 0)\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_{11}}{\partial h_2} = a_{21}\,, & \dfrac{\partial \alpha_{12}}{\partial h_2} = a_{22}\,, \quad \dfrac{\partial \alpha_{21}}{\partial h_2} = 0\,, \quad \dfrac{\partial \alpha_{21}}{\partial h_2} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \alpha_{11}}{\partial l_2} = a_{12}\,, & \dfrac{\partial \alpha_{12}}{\partial l_2} = 0\,, \quad \dfrac{\partial \alpha_{21}}{\partial l_2} = a_{22}\,, \quad \dfrac{\partial \alpha_{22}}{\partial l_2} = 0\,. \end{cases}
$$

Die Taylorsche Entwicklung für $J(\alpha)$ liefert aber:

$$
(50\,\mathrm{a})\qquad J(\alpha) \equiv J(a) + h_1 \frac{\partial J(\alpha)}{\partial h_1}_{(h_1 = l_1 = 0)} + l_1 \frac{\partial J(\alpha)}{\partial l_1}_{(h_1 = l_1 = 0)} + \ldots
$$

$$
(50\,\mathrm{b})\qquad J(\alpha) \equiv J(a) + h_2 \frac{\partial J(\alpha)}{\partial h_2}_{(h_2 = l_2 = 0)} + l_2 \frac{\partial J(\alpha)}{\partial l_2}_{(h_2 = l_2 = 0)} + \ldots
$$

Soll sich $J(\alpha)$ für alle Werte der h_1, l_1 resp. h_2, l_2 auf $J(a)$ reduzieren, so müssen insbesondere wiederum in (50) die Koeffizienten von h_1, l_1 resp. h_2, l_2 verschwinden: Diese Koeffizienten sind aber, auf Grund von (48), (49), gerade die Bildungen H_1, L_1; H_2, L_2 in (X), wie es sein muß.

Für $h_1 = l_1$, $h_2 = l_2$ addieren sich jeweils die Koeffizienten von h_1, l_1 resp. h_2, l_2 in (50); mithin tritt für kogrediente unimodulare $U_1 = U_2$ an die Stelle von (X):

$$
(\mathrm{X}')\quad \begin{cases} H_1 + L_1 \equiv a_{11}\left(\dfrac{\partial J}{\partial a_{12}} + \dfrac{\partial J}{\partial a_{21}}\right) + \dfrac{\partial J}{\partial a_{22}}(a_{12} + a_{21}) = 0\,, \\[2ex] H_2 + L_2 \equiv a_{22}\left(\dfrac{\partial J}{\partial a_{12}} + \dfrac{\partial J}{\partial a_{21}}\right) + \dfrac{\partial J}{\partial a_{11}}(a_{12} + a_{21}) = 0\,. \end{cases}
$$

Man beachte, daß beim Beweis von (X), (X′) von der Annahme, daß J in den a_{ik} ganzrational sein sollte, kein Gebrauch gemacht wurde; der Beweis bleibt bestehen für beliebige eindeutige Funktionen $J(a)$, falls sie nur die Maclaurinsche resp. Taylorsche Entwicklung (46′) resp. (50) gestatten.

Liegt statt einer einzelnen Bilinearform f ein System solcher vor, f, g, h, ... mit Koeffizienten (a), (b), (c), ..., so lassen die Entwicklungen (46′) resp. (50) unmittelbar erkennen, daß nur die auf die Form f bezüglichen Prozesse H_1, H_2, L_1, L_2 in (X), (X′) jeweils zu ersetzen sind durch die Summen der auf die Formen $f, g, h, \ldots$ bezüglichen analogen Prozesse; man schreibe einfach $\sum\limits_f H_1$ usw.

Damit erweitern sich die Differentialgleichungen (X), (X′) im Falle mehrerer bilinearer Urformen $f, g, h, \ldots$ zu:

$$\text{(Xa)} \qquad \sum_f H_1 = 0\,, \quad \sum_f H_2 = 0\,, \quad \sum_f L_1 = 0\,, \quad \sum_f L_2 = 0\,,$$

$$\text{(Xa}') \qquad \sum_f H_1 + \sum_f L_1 = 0\,, \qquad \sum_f H_2 + \sum_f L_2 = 0\,,$$

und es gilt:

Satz III. „Eine Funktion J der Koeffizienten bilinearer Urformen $f, g, h, \ldots$, die gegenüber beliebigen unimodularen Substitutionen U_1, U_2 der (x_1, x_2), (y_1, y_2) ungeändert bleibt, genügt den vier linearen partiellen Differentialgleichungen (Xa), wo die Prozesse H_1, H_2, L_1, L_2 durch (X) erklärt sind. Ist aber J nur invariant gegenüber kogredienten U_1, U_2, so genügt J auch nur den beiden Gleichungen (Xa′), die durch Addition der ersten und dritten, resp. zweiten und vierten Gleichung (Xa) hervorgehen. Für eine einzelne Urform f reduziert sich (Xa), (Xa′) resp. auf (X), (X′)."

Daß die Existenz dieser Differentialgleichungen für die in Rede stehende Invarianz von J auch hinreichend ist, wird § 11 lehren.

Nunmehr berücksichtige man die Streckungen M [§ 9, (11), (12)] der (x_1, x_2); (y_1, y_2); hinsichtlich der J trete die vorläufige Beschränkung auf ganzrationale Funktionen der (a), (b), (c) ... ein.

Im Falle einer einzelnen Urform $f(a_{ik})$ ist J ein Aggregat einer endlichen Anzahl von Gliedern (Termen) der Art:

$$\text{(51)} \qquad J(a) \equiv \sum c\, a_{11}^{\varepsilon_{11}} a_{12}^{\varepsilon_{12}} a_{21}^{\varepsilon_{21}} a_{22}^{\varepsilon_{22}} = \sum c\,t\,,$$

wo die ε_{ik} natürliche Zahlen (inkl. 0, nur nicht sämtlich verschwindend), und die c Zahlenfaktoren bedeuten.

Man übe auf die x_1, x_2 in f gleichzeitig eine $M(m)$ aus, oder, was dasselbe ist (vgl. § 6), eine „Erweiterung“ $E_1(m)$: $x_1 = m\,\xi_1$, $x_2 = m\,\xi_2$, mit der Determinante m^2. Dann wird $\alpha_{ik} = m\,a_{ik}$, und (51) geht über in:

(52) $$E_1(m) \mid J(\alpha) \equiv \sum m^{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22}}\,c\,t\,.$$

Es soll J eine Invariante von f, also gegenüber beliebigen S_1, S_2 (2) relativ invariant sein:

(XI) $$J(\alpha) \equiv \Delta_1^{\omega_1}\Delta_2^{\omega_2}\,J(a)\,,$$

wo die „Gewichte“ ω_1, ω_2 feste natürliche Zahlen (inkl. 0) sind.

Für $S_1 = E_1(m)$, $S_2 = 1$ wird $\Delta_1^{\omega_1}\Delta_2^{\omega_2} = m^{2\omega_1}$. Soll sich dieser Faktor $m^{2\omega_1}$ aus allen Gliedern der rechten Seite von (52) herausheben, so muß er stets mit $m^{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22}}$ identisch sein, d. h. es ist:

(XIIa) $$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} = 2\,\omega_1\,.$$

Wiederholt man diesen Schluß für die „Erweiterung“ $E_2(n)$: $y_1 = n\,\eta_1$, $y_2 = n\,\eta_2$, so kommt analog:

(XIIb) $$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} = 2\,\omega_2\,,$$

also auch, durch Vergleichung mit (XIIa):

(53) $$\omega_1 = \omega_2\,.$$

Soll also der Ausdruck $J(a)$ auch nur gegenüber einer $E_1(n)$ resp. $E_2(n)$ relativ invariant sein, so fallen beide Gewichte von J zusammen, und J ist eine homogene Funktion der a_{ik} von einer Dimension d, wo

(54) $$d = 2\,\omega_1 = 2\,\omega_2\,.$$

Nunmehr übe man die Streckungen $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$, $M_1(n_1)$, $M_2(n_2)$ einzeln aus. Für $M_1(n_1)$ z. B. ist nach (11) $\alpha_{11} = m\,a_{11}$, $\alpha_{12} = m\,a_{12}$, $\alpha_{21} = a_{21}$, $\alpha_{22} = a_{22}$; somit muß gemäß (XI) stets $m^{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}}$ mit m^{ω_1} übereinstimmen, und analog in den drei anderen Fällen.

Danach bestehen, soll J gegenüber irgend einer der vier Streckungen relativ invariant sein, die Relationen:

(XIII) $$\begin{cases} M_1(m_1) \mid \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \omega_1\,, & M_1(n_1) \mid \varepsilon_{11} + \varepsilon_{21} = \omega_2\,, \\ M_2(m_2) \mid \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} = \omega_1\,, & M_2(n_2) \mid \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} = \omega_2\,. \end{cases}$$

Besteht die Invarianz von J gegenüber $M_1(m_1)$ und $M_2(m_2)$ resp. $M_1(n_1)$ und $M_2(n_2)$ gleichzeitig, so gelangt man durch Addition der bezüglichen Relationen (XIII) zu (XIIa) resp. (XIIb) zurück, und, falls J gegenüber allen vier Streckungen invariant ist, auch zu (53).

Bei Beschränkung auf **kogrediente** $S_1 = S_2 = S$ mit der Determinante Δ ist die Definition (XI) für eine Invariante von f zu ersetzen durch:

(XI′) $$J(\alpha) \equiv \Delta^\omega J(a)\,,$$

wo ω jetzt schlechtweg das „Gewicht" der Invariante J heißt.

Übt man die Streckungen $M_1(m)$ resp. $M_2(n)$ gleichzeitig auf x_1, y_1 resp. x_2, y_2 aus, so wird:

(55) $$\begin{cases} M_1(m) \mid \alpha_{11} = m^2 a_{11}, & \alpha_{12} = m\,a_{12}, \quad \alpha_{21} = m\,a_{21}, \quad \alpha_{22} = a_{22}\,; \\ M_2(n) \mid \alpha_{11} = a_{11}, & \alpha_{12} = n\,a_{12}, \quad \alpha_{21} = n\,a_{21}, \quad \alpha_{22} = n^2 a_{22}\,. \end{cases}$$

Dann liefert das obige Verfahren die Relationen:

(XIII′) $$\begin{cases} M_1(m) \mid 2\,\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = \omega\,; \\ M_2(n) \mid 2\,\varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{12} = \omega\,, \end{cases}$$

und bei gleichzeitiger Invarianz gegenüber $M_1(m)$, $M_2(n)$ durch Addition:

(XII′) $$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} = \omega\,.$$

Die letztere Relation hätte man wiederum direkt durch Anwendung von $E(m)$ auf beide Paare (x_1, x_2), (y_1, y_2) erhalten können.

Die Ausdehnung auf mehrere Urformen f, g, h, ... bedarf nur geringer Modifikationen. Die Darstellung (51) von $J(a)$ erweitert sich zu:

(5α′) $$\begin{cases} J[(a), (b), (c), \ldots] \\ \equiv \sum c\, a_{11}^{\varepsilon_{11}} a_{12}^{\varepsilon_{12}} a_{21}^{\varepsilon_{21}} a_{22}^{\varepsilon_{22}} b_{11}^{\eta_{11}} b_{12}^{\eta_{12}} b_{21}^{\eta_{21}} b_{22}^{\eta_{22}} \ldots = \sum c\,t\,, \end{cases}$$

woraus folgt, daß in (XII), (XIIa), (XIIb), (XIII), (XIII′), (XII′) jedes ε_{ik} durch $\varepsilon_{ik} + \eta_{ik} + \ldots \equiv \sum\limits_f \varepsilon_{ik}$ zu ersetzen ist. Mithin gilt:

Satz IV. „Für eine Invariante $J[(a), (b), (c), \ldots]$ der Bilinearformen f, g, h, ... — gegenüber beliebigen Substitutionen S_1, S_2 — fallen die beiden

Gewichte ω_1, ω_2 bez. S_1, S_2 zusammen, und J ist homogen hinsichtlich aller (a), (b), ... von einer Dimension $d = 2\omega_1 = 2\omega_2$. Sind in irgend einem Terme von J ε_{ik}, η_{ik}, ... die Exponenten von a_{ik}, b_{ik}, ..., so ist

$$\sum(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21}) = \sum_f(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) = \sum_f(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}) = \sum_f(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}) = \omega_1 = \omega_2 \,.$$

Bei kogredienten $S_1 = S_2 = S$ wird die Dimension von J gleich dem Gewichte ω, und die ε, η, ... unterliegen nur den Bedingungen:

$$2\sum_f \varepsilon_{11} + \sum_f(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) = 2\sum_f \varepsilon_{22} + \sum_f(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) = \omega \,.\text{“}$$

Der Inhalt der Formeln $\sum_f(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21}) = \omega$ usw. läßt sich einfacher beschreiben, wenn man auch den Koeffizienten von f, g, ... hinsichtlich der einzelnen „Streckungen „Gewichte“ beilegt. Man nenne „Gewicht“ G_{ik} von a_{ik}, b_{ik}, ... hinsichtlich einer M den jeweils infolge derselben erscheinenden Exponenten der als Faktor hinzutretenden Potenz des betreffenden Streckungsparameters.

Das „Gewicht“ G irgend eines „Potenzproduktes“ t (51a) wird erhalten als die Summe

$$\sum_f(G_{11}\varepsilon_{11} + G_{12}\varepsilon_{12} + G_{21}\varepsilon_{21} + G_{22}\varepsilon_{22}) \,.$$

Damit werden die Formeln (XIII), (XIII′) sämtlich von derselben Struktur:

$$\text{(XIV)} \qquad \sum_f(G_{11}\varepsilon_{11} + G_{12}\varepsilon_{12} + G_{21}\varepsilon_{21} + G_{22}\varepsilon_{22}) = \omega \,,$$

wo jeweils für die G_{ik} die den einzelnen Streckungen resp. Streckungspaaren entsprechenden Werte einzusetzen sind.

Die Tatsache (XIV), daß jedes Glied t (51α) von J jeweils dasselbe Gewicht besitzt, drückt man kurz dahin aus, daß J „isobar“ ist bez. jeder M; das konstante Gewicht deckt sich mit dem Gewichte $\omega_1 = \omega_2$ resp. ω der Invariante.

Über die Homogenität von J in Satz IV läßt sich noch Näheres aussagen. Die bisherigen Beispiele für Invarianten J von f, g, h, ... zeigen, daß J auch hinsichtlich jeder Koeffizientenreihe (a), (b), (c), ... einzeln homogen ist. So war D_f homogen quadratisch in den a, desgleichen D_g in den b, ferner H_{fg} homogen bilinear in den a und b. Umgekehrt liefert aber z. B., unter ϱ, σ, τ drei Zahlen verstanden, das Aggregat $\varrho D_f + \sigma D_g + \tau H_{fg}$ eine Invariante von f, g, die wohl noch in den a und b zusammen homogen ist (mit $d = 2$), nicht aber mehr einzeln homogen.

Es läßt sich indessen allgemein eine beliebige ganzrationale Invariante $J[(a), (b), \ldots]$ beliebiger Urformen als ein Aggregat $J_1 + J_2 + J_3 + \ldots$ von solchen darstellen, die in jeder Reihe der (a), (b), ... einzeln homogen sind, so daß man sich auf derartige Bildungen J beschränken darf.

Man greife zu dem Behufe aus J irgend ein Glied heraus mit einer Dimension d_a bez. der a, und vereinige mit diesem Gliede alle weiteren von J mit derselben Eigenschaft. Dadurch entsteht ein Teilaggregat J_{d_a} von J, das in den a homogen von der Dimension d_a ist.

Irgend ein Glied in J_{d_a} habe in den b die Dimension d_b, so vereinige man wieder alle Glieder von J_{d_a} derselben Art zu einem Aggregate J_{d_a, d_b}, homogen einzeln in den a und b, von der Dimension d_a resp. d_b.

So fortfahrend konstruiere man ein in J enthaltenes Aggregat $J_1 = J_{d_a, d_b, d_c, \ldots}$, das sämtliche Glieder von J umfaßt, die einzeln in den (a), (b), (c), ... homogen sind, von den resp. Dimensionen d_a, d_b, d_c, ...

Sind damit die Glieder von J nicht erschöpft, so wähle man ein weiteres, in J_1 nicht enthaltenes Glied von J zum Ausgangspunkt und verfahre analog. Damit ist die gewünschte Zerlegung $J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots$ erreicht. Es gilt demnach der

Hilfssatz. „Ein beliebiger, in den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... von Urformen $f, g, h, \ldots$ ganzrationaler Ausdruck J läßt sich als ein Aggregat $J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots$ von solchen Ausdrücken J_1, J_2, J_3, ... darstellen, die in jeder Reihe der (a), (b), (c), ... einzeln homogen sind.“

Für den vorliegenden Fall von bilinearen Urformen ist noch zu zeigen, daß jedes der Teilaggregate $J_1, J_2, J_3, \ldots$ für sich die Invarianteneigenschaft (XI) resp. (XI′) besitzt.

Nun bleibt J bei jeder der Schiebungen A (45) ungeändert. Aus der Gestalt von (46): $\alpha_{ik} = a_{ik} + \varrho a'_{ik}$, wo stets einige der a'_{ik} mit gewissen der a_{ik} identisch sind, während die übrigen verschwinden, geht hervor, daß vermöge einer A irgend ein Glied z. B. von J_1 stets wieder nur in ein solches von J_1 [d. h. mit denselben Einzeldimensionen in den (a), (b), (c), ...] übergeht. Das gleiche gilt von J_2, J_3, ...

Die Gewichtsregeln sind aber für alle J_1, J_2, J_3, ... dieselben wie für J selbst. Der Satz IV läßt sich daher einfacher und vollständiger so formulieren:

Satz IV′. „Eine Invariante $J[(a), (b), \ldots]$ von Bilinearformen $f, g, \ldots$ ist darstellbar als Aggregat $J_1 + J_2 + J_3 + \ldots$, wo jedes Teilaggregat in jeder der Koeffizientenreihen (a), (b), ... einzeln homogen ist.

Diese Teilaggregate sind selbst Invarianten von $f, g, \ldots$, und die Gesamtdimension d von J ist gleich $2\omega_1 = 2\omega_2$ resp. gleich ω, je nachdem die Invarianz von J für beliebige oder nur für kogrediente S_1, S_2 in Frage kommt.

Ferner ist J im ersteren Falle hinsichtlich der einzelnen Streckungen M, im letzteren Falle hinsichtlich der gleichzeitigen Streckungen $M_1(m)$ von x_1, y_1 resp. $M_2(n)$ von x_2, y_2 isobar; in beiden Fällen ist das konstante Streckungsgewicht zugleich das Gewicht $\omega_1 = \omega_2$ resp. ω der Invariante selbst.

Die zuerst ausgesprochene Zerlegungseigenschaft von J gilt auch für Urformen beliebiger Ordnung.“

Die angestellten Überlegungen lassen sich ausdehnen auf den Fall, wo die invariante Bildung

$$J = J[(a), (b), \ldots, (x_1, x_2), (y_1, y_2)]$$

auch noch die Variabelnpaare (oder wenigstens eines derselben) enthält: J heißt dann eine „Kovariante“ der $f, g, h, \ldots$ (s. § 4, S. 29).

Man beachte, daß bei einer Kovariante J, gemäß der Definition:

$$(\mathrm{XI}\alpha) \quad \begin{cases} J[(\alpha), (\beta) \ldots, (\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)] \\ \equiv \Delta_1^{\omega_1} \Delta_2^{\omega_2} J[(a), (b), \ldots, (x_1, x_2), (y_1, y_2)], \end{cases}$$

die Bezeichnung der Variabeln irrelevant ist, daß also die Paare (x_1, x_2), (y_1, y_2) ersetzbar sind durch andere (x'_1, x'_2), (y'_1, y'_2), falls letztere nur jeweils denselben Substitutionen S_1, S_2 unterliegen wie die ersteren. Man füge jetzt den Urformen f, g, ... zwei Linearformen l_x, l_y hinzu:

(56) $$l_x \equiv x_1 r_1 + x_2 r_2\,, \quad l_y \equiv y_1 s_1 + y_2 s_2\,,$$

so gehen diese vermöge S_1, S_2 (2) über in neue Linearformen λ_ξ, λ_η:

(57) $$\begin{cases} \lambda_\xi \equiv \xi_1(r_1\alpha_1 + r_2\gamma_1) + \xi_2(r_1\beta_1 + r_2\delta_1) = \xi_1\varrho_1 + \xi_2\varrho_2\,, \\ \lambda_\eta = \eta_1(s_1\alpha_1 + s_2\gamma_2) + \eta_2(s_1\beta_2 + s_2\delta_2) = \eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2\,. \end{cases}$$

Hier hängen die neuen Koeffizienten (ϱ_1, ϱ_2), (σ_1, σ_2) mit den alten (r_1, r_2), (s_1, s_2) zusammen mittels der Substitutionen:

(58) $$\begin{cases} \varrho_1 = r_1\alpha_1 + r_2\gamma_1\,, & \varrho_2 = r_1\beta_1 + r_2\delta_1\,, \\ \sigma_1 = s_1\alpha_2 + s_2\gamma_2\,, & \sigma_2 = s_1\beta_2 + s_2\delta_2\,, \end{cases}$$

wiederum mit den Determinanten Δ_1, Δ_2.

Für das Folgende genügt es, die Substitutionen (2), also auch (58) unimodular anzunehmen $(\Delta_1 = \Delta_2 = 1)$. Dann lautet die Umkehrung von (58):

(58′) $$\begin{cases} r_1 = \varrho_1\delta_1 - \varrho_2\gamma_1\,, & r_2 = -\varrho_1\beta_1 + \varrho_2\alpha_1\,, \\ s_1 = \sigma_1\delta_2 - \sigma_2\gamma_2\,, & s_2 = -\sigma_1\beta_2 + \sigma_2\alpha_2\,. \end{cases}$$

Demnach transformieren sich vermöge S_1, S_2 die Koeffizienten (r_1, r_2), (s_1, s_2) von l_x, l_y (56) linear mit denselben Koeffizienten und Determinanten wie in S_1, S_2, nur daß die ersteren jeweils in gewisser Weise untereinander versetzt sind.

Soll völlige Übereinstimmung von (58′) mit (2) eintreten, so ändere man nur die Schreibweise der Koeffizienten in (57); indem man sie gleichfalls als gewisse — von den (x_1, x_2), (y_1, y_2) unabhängige — Variabeln ansieht, bezeichne man sie mit $(x'_2, -x'_1)$, $(y'_2, -y'_1)$, die transformierten Größen mit $(\xi'_2, -\xi'_1)$, $(\eta'_2, -\eta'_1)$, so lauten die Formeln (56), (57), (58′) nunmehr:

(59) $$\begin{cases} l_x \equiv x_1 x'_2 - x_2 x'_1\,, & l_y \equiv y_1 y'_2 - y_2 y'_1\,, \\ \lambda_\xi \equiv \xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1\,, & \lambda_\eta \equiv \eta_1\eta'_2 - \eta_2\eta'_1\,; \end{cases}$$

(60) $$\begin{cases} x'_1 = \alpha_1\xi'_1 + \beta_1\xi'_2\,, & x'_2 = \gamma_1\xi'_1 + \delta_1\xi'_2\,, \\ y'_1 = \alpha_2\eta'_1 + \beta_2\eta'_2\,, & y'_2 = \gamma_2\eta'_1 + \delta_2\eta'_2\,, \end{cases}$$

wo jetzt die Substitutionen (60) mit resp. S_1, S_2 (2) kogredient sind.

Bei kongruenten Substitutionen $S_1 = S_2 = S$ genügt es, zu den f, g eine einzige Linearform l_x (56) hinzuzunehmen, und einmal mit Koeffizienten x_2', $-x_1'$, das andere Mal mit Koeffizienten y_2', $-y_1'$ zu versehen. Damit ist bewiesen:

Satz V: „Eine Kovariante $J = J[(a), (b), \ldots, (x_1', x_2'), (y_1', y_2')]$ bilinearer Formen $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $g, \ldots,$ — gegenüber beliebigen unimodularen Substitutionen U_1, U_2 der (x_1, x_2), (y_1, y_2) — läßt sich auffassen als simultane Invariante eines Systems, das außer $f, g, \ldots$ noch zwei Linearformen

$$l_x \equiv x_1 x_2' - x_2 x_1', \qquad l_y \equiv y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

enthält. Bei Beschränkung auf kongruente $U_1 = U_2$ genügt eine einzige Linearform $l_x \equiv l_y$ in dem Sinne, daß sowohl (x_1, x_2), (y_1, y_2) wie (x_1', x_2'), (y_1', y_2') zugleich der Substitution U unterliegen."

Nunmehr ziehe man wieder als erzeugende Substitutionen der U_1, U_2 die Schiebungen A (9), (10) heran. Die Substitutionen (60) nebst ihren Umkehrungen reduzieren sich z. B. für $A_1(h_1)$ auf:

$$(61) \qquad \begin{cases} A_1(h_1) \mid x_1' = \xi_1' + h_1 \xi_2', \quad & x_2' = \xi_2', \\ \qquad\qquad \xi_1' = x_1' - h_1 x_2', \quad & \xi_2' = x_2', \end{cases}$$

und entsprechend für die drei andern A.

Dehnt man daher das in (45) bis (IX), (IX′) resp. (X), (X′) niedergelegte Schlußverfahren auf die hinzutretenden neuen Koeffizienten (ξ_1', ξ_2'), (η_1', η_2') aus und läßt hinterher die Akzente wieder beiseite, so ergibt sich, daß bei beliebigen unimodularen U_1, U_2 eine Kovariante $J = J[(a), (b), \ldots, (x_1, x_2), (y_1, y_2)]$ von $f, g, \ldots,$ mit Hilfe der Bezeichnungen (IX), (IX′), den vier Bedingungen genügt:

$$(\mathrm{X}\alpha) \qquad \begin{cases} A_1(h_1) \mid \sum\limits_f H_1 - x_2 \dfrac{\partial J}{\partial x_1} = 0, \quad A_2(h_2) \mid \sum\limits_f H_2 - x_1 \dfrac{\partial J}{\partial x_2} = 0, \\ A_1(l_1) \mid \sum\limits_f L_1 - y_2 \dfrac{\partial J}{\partial y_1} = 0, \quad A_2(l_2) \mid \sum\limits_f L_2 - y_1 \dfrac{\partial J}{\partial y_2} = 0, \end{cases}$$

die sich bei kongruenten $U_1 = U_2$ zusammenziehen auf die beiden:

$$(\mathrm{X}\alpha') \quad \begin{cases} \sum\limits_f H_1 + \sum\limits_f L_1 - \left(x_2 \dfrac{\partial J}{\partial x_1} + y_2 \dfrac{\partial J}{\partial y_1}\right) = 0\,, \\ \sum\limits_f H_2 + \sum\limits_f L_2 - \left(x_1 \dfrac{\partial J}{\partial x_2} + y_1 \dfrac{\partial J}{\partial y_2}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Enthält J im besondern nur eines der beiden Variabelnpaare (x_1, x_2), (y_1, y_2), so kommen von selbst die jeweils auf das andere Paar in $(\mathrm{X}\alpha)$, $(\mathrm{X}\alpha')$ bezüglichen Terme in Wegfall; hängt J gar nicht von den Variabeln ab, wird also zur „Invariante" in engerem Sinne, so reduzieren sich $(\mathrm{X}\alpha)$, $(\mathrm{X}\alpha')$ auf (X), (X′):

Satz VI: „Die linearen partiellen Differentialgleichungen, denen eine Kovariante

$$J = J[(a), (b), \ldots, (x_1, x_2), (y_1, y_2)]$$

der Bilinearformen $f, g, \ldots$ genügt, unterscheiden sich von den in (X) resp. (X′) für Invarianten J der $f, g, \ldots$ aufgestellten nur dadurch, daß die linken Seiten von (X) resp. (X′) jeweils um die Terme

$$-x_2 \frac{\partial J}{\partial x_1}, \quad -x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2}, \quad -y_2 \frac{\partial J}{\partial y_1}, \quad -y_1 \frac{\partial J}{\partial y_2}$$

$$\text{resp.} \quad -\left(x_2 \frac{\partial J}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial J}{\partial y_1}\right), \quad -\left(x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial J}{\partial y_2}\right)$$

zu vermehren sind."

Ähnlich bedürfen auch die Gewichtsregeln für Invarianten nur geringer Abänderungen, um für Kovarianten zu gelten; letztere seien vorderhand in den Koeffizienten wie in den Variabeln ganzrational, und überdies in jedem der Paare (x_1, x_2), (y_2, y_2) homogen, von einer Dimension d_x resp. d_y.

Die Kovariante J ist in Verallgemeinerung von (5α) ein Aggregat von der Struktur:

$$(51\beta) \begin{cases} J = \sum c\, a_{11}^{\varepsilon_{11}} a_{12}^{\varepsilon_{12}} a_{21}^{\varepsilon_{21}} a_{22}^{\varepsilon_{22}} b_{11}^{\eta_{11}} b_{12}^{\eta_{12}} b_{21}^{\eta_{21}} b_{22}^{\eta_{22}} \ldots x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} = \sum c\, t\,, \\ \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 = d_x\,,\ \mu_1 + \mu_2 = d_y)\,. \end{cases}$$

Bei einer Streckung z. B. $M_1(m_1): x_1 = m_1 \xi_1, x_2 = \xi_2$ wird nach (11):

$$\alpha_{11} = m_1 a_{11}, \quad \alpha_{12} = m_1 a_{12}, \quad \alpha_{21} = a_{21}, \quad \alpha_{22} = a_{22}.$$

Bildet man daher irgend ein Glied ct von (51β) in den $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \ldots$, sowie in den neuen Variabeln $\xi_1 = \frac{x_1}{m_1}$, $\xi_2 = x_2$; $\eta_1 = y_1$, $\eta_2 = y_2$, so wird es gleich dem ursprünglichen, multipliziert mit $m_1^{\sum_f(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12})-\lambda_1}$; zufolge (XI$\alpha$) muß dieser Faktor stets mit $m_1^{\omega_1}$ übereinstimmen, d. h. es ist $\sum_f(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}) - \lambda_1 = \omega_1$, und umgekehrt, ist diese Bedingung erfüllt, so verhält sich J auch invariant gegenüber der Streckung $M_1(m_1)$. Verfährt man gemäß (11), (12) analog mit den drei anderen Streckungen, so ergeben sich als Erweiterung von (XIII) die Relationen:

$$(\mathrm{XIII}\alpha)\begin{cases} M_1(m_1) \mid \sum_f(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12})-\lambda_1=\omega_1, & M_2(m_2) \mid \sum_f(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22})-\lambda_2=\omega_1, \\ M_1(n_1) \mid \sum_f(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{21})-\mu_1=\omega_2, & M_2(n_2) \mid \sum_f(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{22})-\mu_2=\omega_2, \end{cases}$$

die also einzeln jeweils aussagen, daß J gegenüber je einer $M_1(m_1)$, $M_1(m_2)$, $M_1(n_1)$, $M_2(n_2)$ relativ invariant ist.

Denkt man sich die Relationen (XIIIα) sämtlich*) erfüllt, so folgen noch einige weitere daraus. Durch Addition der beiden ersteren resp. letzteren kommt als Ausdehnung von (XIIa), (XIIb):

$$(\mathrm{XII}\alpha)\quad\begin{cases} \sum_f(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}) - d_x = 2\,\omega_1, \\ \sum_f(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}) - d_y = 2\,\omega_2. \end{cases}$$

Hier ist die links auftretende konstante Summe $\sum_f$ die Dimension von J hinsichtlich aller Reihen (a), (b), ..., die mit d_k bezeichnet sei. Die beiden Gleichungen (XIIα)

*) Ein Teil der folgenden Schlüsse bleibt gültig, wenn die Relationen (XIIIα) nur zum Teil erfüllt sind.

sind ersetzbar durch die beiden, vermöge Addition und Subtraktion daraus hervorgehenden:

$$(\mathrm{XII}\beta)\quad \begin{cases} 2\,d_k - (d_x + d_y) = 2(\omega_1 + \omega_2)\,, \\ d_y - d_x \qquad\quad = 2(\omega_1 - \omega_2)\,. \end{cases}$$

Subtrahiert man andererseits in (XIIIα) die dritte Gleichung von der ersten, die vierte von der zweiten, so ergibt sich das Paar:

$$(\mathrm{XII}\gamma)\quad \begin{cases} \sum\limits_f (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}) + \mu_1 - \lambda_1 = \omega_1 - \omega_2\,, \\ \sum\limits_f (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{12}) + \mu_2 - \lambda_2 = \omega_1 - \omega_2\,, \end{cases}$$

deren Addition wieder zur zweiten Gleichung (XIIβ) führt, Subtraktion dagegen zu:

$$(\mathrm{XII}\delta)\quad 2\sum_f (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}) + (\mu_1 - \mu_2) - (\lambda_1 - \lambda_2) = 0\,.$$

Aus (XIIα), (XIIβ) erkennt man noch, daß die Differenzen $d_k - d_x$, $d_k - d_y$ (und damit auch $d_y - d_x$) gerade Zahlen sein müssen.

Für kongruente Substitutionen $S_1 = S_2 = S$ mit der Determinante Δ zieht sich die Definition (XIα) einer Kovariante J zusammen zu:

$$(\mathrm{XI}\alpha')\quad \begin{cases} J[(\alpha), (\beta), \ldots; (\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)] \\ \equiv \Delta^{\omega} J[(a), (b), \ldots; (x_1, x_2), (y_1, y_2)]\,, \end{cases}$$

und die zugehörigen Gewichtsregeln resultieren wie bei (XIII$'$) durch Addition der linken Seiten der ersten und dritten resp. zweiten und vierten der Gleichungen (XIIIα), während rechts gemäß (XIα') $\omega_1 + \omega_2$ durch ω zu ersetzen ist:

$$(\mathrm{XIII}\alpha')\quad \begin{cases} \sum\limits_f (2\,\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) - (\lambda_1 + \mu_1) = \omega\,, \\ \sum\limits_f (2\,\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) - (\lambda_2 + \mu_2) = \omega\,. \end{cases}$$

Addition und Subtraktion liefert für $d_k = \sum\limits_k (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})$:

$$(\mathrm{XII}\alpha')\quad \begin{cases} 2\,d_k - (d_x + d_y) = 2\,\omega\,, \\ 2\sum\limits_f (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) - (\lambda_1 + \mu_1) + (\lambda_2 + \mu_2) = 0\,, \end{cases}$$

so daß $d_x + d_y$ gerade sein muß.

Verbindet man diese Regeln mit dem Satze VIII des § 6, wonach eine beliebige Substitution S_1 erzeugbar ist durch $A_1(h_1)$, $A_2(h_2)$, nebst $M_1(m_1)$ — oder auch $M_2(m_2)$ oder auch $E(m)$ — und entsprechend S_2, so ergeben sich weitere Zusammenhänge.

Wählt man z. B. $A_1(h_1)$, $A_2(h_2)$, $E(m)$ für S_1; $A_1(l_1)$, $A_2(l_2)$, $E(n)$ für S_2 als erzeugende Substitutionen, so erkennt man, daß jede in den (a), (b), ...; (x_1, x_2), (y_1, y_2) ganzrationale und in letzteren je homogene Funktion, die einmal gegenüber allen unimodularen U_1, U_2 ungeändert bleibt und sodann die beiden Gewichtsrelationen befriedigt:

$$\text{(XII}\alpha\text{)} \qquad d_k - d_x = 2\,\omega_1\,, \qquad d_x - d_y = 2\,\omega_2\,,$$

bereits eine vollständige Kovariante der f, g, ... ist, so daß die weiteren Gewichtsregeln von selbst erfüllt sind. Entsprechend genügt bei kongruenten Substitutionen $S_1 = S_2$ schon die einzige Gewichtsrelation (XIIα'), und Analoges findet bei Auswahl anderer Fundamentalsubstitutionen statt:

Satz VII. „Eine Kovariante der bilinearen Formen f, g, ... genügt auch den Gewichtsregeln (XIIIα) resp. (XIIIα'), nebst den daraus abgeleiteten. Weiß man, daß ein ganzrationaler, in den (x_1, x_2), (y_1, y_2) je homogener Ausdruck gegenüber unimodularen S_1, S_2 ungeändert bleibt, so genügt, damit der Ausdruck zu einer Kovariante wird, bereits ein Teil der Gewichtsregeln, je nach der Auswahl der Fundamentalsubstitutionen, aus denen man sich S_1, S_2 resp. S erzeugt denkt."

Auch der Satz IV′ über den Isolarismus einer Invariante läßt sich sofort auf eine Kovariante übertragen, wenn man den Potenzen $x_1^{\lambda_1}$, $x_2^{\lambda_2}$, $y_1^{\mu_1}$, $y_2^{\mu_2}$ resp. die Gewichte $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\mu_1$, $-\mu_2$ beilegt — und damit den Potenzprodukten $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}$, $y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2}$ die Gewichte $-(\lambda_1 + \lambda_2)$, $-(\mu_1 + \mu_2)$ — je nach der Streckung $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$, $M_1(n_1)$, $M_2(n_2)$.

Zu einer insbesondere auch für praktische Berechnungen wichtigen Eigenschaft einer Kovariante (Invariante) J gelangt man auf Grund der in § 6 untersuchten reziproken Substitution $R_1: x_1 = \xi_2$, $x_2 = \xi_1$ resp. $R_2: y_1 = \eta_2$, $y_2 = \eta_1$.

Wird R_1 auf f, g, ... ausgeübt, so vertauschen sich a_{11} und a_{21}, a_{12} und a_{22} usw., und analog bei R_2 a_{11} und a_{12},

a_{21} und a_{22} usw., andererseits, wenn man die Bezeichnung der Variabeln beibehält, x_1 mit x_2 resp. y_1 mit y_2. Wird dagegen R_1 zugleich mit R_2 ausgeübt, so vertauschen sich die a_{11} und a_{22}, a_{12} und a_{21}, usw., oder, wie man sagt, je zwei „symmetrisch gelegene" Koeffizienten. Da die Determinante einer R gleich -1 ist, gilt:

Satz VIII. „Vertauscht man in einer Kovariante K der Bilinearformen $f, g, \ldots$ jeweils die a_{11} und a_{21}, a_{12} und a_{22}, usw., und zugleich x_1 mit x_2, so bleibt K ungeändert oder wechselt das Vorzeichen, je nachdem das Gewicht ω_1 bez. (x_1, x_2) gerade oder ungerade ist. Das Entsprechende findet statt bei gleichzeitiger Vertauschung der a_{11} und a_{12}, a_{21} und a_{22}, usw., y_1 und y_2, hinsichtlich des Gewichtes ω_2 bez. (y_1, y_2). Setzt man beide Operationen zusammen, vertauscht also jeweils symmetrisch gelegene Koeffizienten, sowie x_1 und x_2, y_1 und y_2, so bleibt K ungeändert oder wechselt sein Vorzeichen, je nachdem das Gesamtgewicht $\omega = \omega_1 + \omega_2$ gerade oder ungerade ist. Nur der letztere Fall tritt bei kongruenten Substitutionen $S_1 = S_2 = S$ ein: ω bedeutet dann schlechtweg das Gewicht von K. Bei Invarianten hat man sich auf die Vertauschungen der Koeffizienten zu beschränken."

Wie in § 5 heißt eine Kovariante (Invariante) gerade oder schief, je nachdem das bezügliche Gewicht gerade oder ungerade ist.

Aus den für bilineare Formen gewonnenen Ergebnissen lassen sich im besonderen die für quadratische Formen $f(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + a_{22}\, x_2^2$, usw. ableiten, wenn man festsetzt, daß einmal jeweils $a_{12} = a_{21}$, $b_{12} = b_{21}, \ldots$, andererseits $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ und damit von selbst $S_1 = S_2$ sein soll.

Als Vorbereitung für die allgemeinen Untersuchungen des nächsten Abschnittes seien indessen die für quadratische Formen spezifisch Platz greifenden Überlegungen kurz angegeben. Man schreibe lieber wie früher:

$$(62) \quad \begin{cases} f = f(x_1, x_2) \equiv a_0\, x_1^2 + 2\, a_1 x_1 x_2 + a_2\, x_2^2\,, \\ g = g(x_1, x_2) \equiv b_0\, x_1^2 + 2\, b_1 x_1 x_2 + b_2\, x_2^2\,, \ \ldots \end{cases}$$

Vermöge einer Schiebung $A_1(h_1)$: $x_1 = \xi_1 + h_1 \xi_2$, $x_2 = \xi_2$ geht z. B. $f(x_1, x_2)$ über in $\varphi(\xi_1, \xi_2)$:

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) \equiv \alpha_0 \xi_1^2 + 2\alpha_1 \xi_1 \xi_2 + \alpha_2 \xi_2^2 , \tag{63}$$

$$\alpha_0 = a_0 , \quad \alpha_1 = a_0 h_1 + a_1 , \quad \alpha_2 = a_0 h_1^2 + 2 a_1 h_1 + a_2 . \tag{64}$$

Für $h_1 = 0$ werden die α wieder zu den a. Ist $\alpha_i'(0) = \left(\frac{d\alpha_i}{dh_1}\right)_{h_1=0}$, so hat man:

$$\alpha_0'(0) = 0 , \quad \alpha_1'(0) = 1 \cdot a_0 , \quad \alpha_2'(0) = 2 \cdot a_1 . \tag{65}$$

Der Ausdruck $J(a_0, a_1, a_2) = J(a)$ soll gegenüber $A_1(h_1)$ ungeändert bleiben:

$$A_1(h_1) \mid J(\alpha) = J(a) . \tag{66}$$

Die Entwicklung der linken Seite nach Potenzen von h_1 liefert:

$$J(\alpha) \equiv J(a) + h_1 \frac{dJ(\alpha)}{dh_1\ (h_1=0)} + \dots \tag{67}$$

Wegen (66) ist insbesondere:

$$\frac{dJ(\alpha)}{dh_1\ (h_1=0)} \equiv 0 . \tag{68}$$

Da aber

$$\frac{dJ(\alpha)}{dh_1} = \frac{\partial J}{\partial \alpha_0} \frac{d\alpha_0}{dh_1} + \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dh_1} + \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{dh_1} ,$$

so ergibt sich für $h_1 = 0$ gemäß (64), (65), wenn $J(a)$ mit J bezeichnet wird:

$$1 \cdot a_0 \frac{\partial J}{\partial a_1} + 2 \cdot a_1 \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0 . \tag{XV$_1$}$$

Die der zweiten Schiebung $A_2(h_2)$: $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2 + h_2 \xi_1$ korrespondierende Differentialgleichung geht aus (XV_1) durch Vertauschung von a_0 mit a_2 hervor:

$$1 \cdot a_2 \frac{\partial J}{\partial a_1} + 2 \cdot a_1 \frac{\partial J}{\partial a_0} = 0 . \tag{XV$_2$}$$

Bei einer simultanen Invariante J von $f, g, \dots$ (62) treten vermöge (67), (68) an die Stelle der linken Seiten von (XV_1), (XV_2) die entsprechenden, über die Reihen der (a), (b), ... zu summierenden:

$$\text{(XVI)}\quad \begin{cases} \sum\limits_f \left(1\cdot a_0 \dfrac{\partial J}{\partial a_1} + 2\cdot a_1 \dfrac{\partial J}{\partial a_2}\right) = 0\,, \\ \sum\limits_f \left(1\cdot a_2 \dfrac{\partial J}{\partial a_1} + 2\cdot a_1 \dfrac{\partial J}{\partial a_0}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Für eine Kovariante $J[(a), (b), \ldots; x_1, x_2]$ gelten genau die Überlegungen, die bei bilinearen Formen von kogredienten Variabelnpaaren zu (Xα) führten. Die Differentialgleichungen (XVI) erweitern sich daher für eine Kovariante J zu:

$$\text{(XVII)}\quad \begin{cases} \sum\limits_f \left(1\cdot a_0 \dfrac{\partial J}{\partial a_1} + 2\cdot a_1 \dfrac{\partial J}{\partial a_2}\right) - x_2 \dfrac{\partial J}{\partial x_1} = 0\,, \\ \sum\limits_f \left(1\cdot a_2 \dfrac{\partial J}{\partial a_1} + 2\cdot a_1 \dfrac{\partial J}{\partial a_0}\right) - x_1 \dfrac{\partial J}{\partial x_2} = 0\,, \end{cases}$$

und es gilt:

Satz IX. „Eine Kovariante $J[(a), (b), \ldots; x_1, x_2]$ der quadratischen Formen $f, g, \ldots$ genügt den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (XVII); reduziert sich J auf eine Invariante, so kommen die Terme $-x_2 \dfrac{\partial J}{\partial x_1}$, $-x_1 \dfrac{\partial J}{\partial x_2}$ in Wegfall."

Man gehe zu den Streckungen $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ über: $x_1 = m_1 \xi_1$, $x_2 = \xi_2$ resp. $x_1 = \xi_1$, $x_2 = m_2 \xi_2$. Für die neuen Koeffizienten α kommt:

$$(69)\quad \begin{cases} M_1(m_1) \mid \alpha_0 = m_1^2 a_0\,, \quad \alpha_1 = m_1 a_1\,, \quad \alpha_2 = a_2\,, \\ M_2(m_2) \mid \alpha_0 = a_0\,, \quad \alpha_1 = m_2 a_1\,, \quad \alpha_2 = m_2^2 a_2\,. \end{cases}$$

Danach werden den a_0, a_1, a_2 bez. $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ die Gewichte $2, 1, 0$ resp. $0, 1, 2$ beigelegt, und analog den b_0, b_1, b_2, usw.

Eine Invariante J von $f, g, \ldots$ habe die Gestalt:

$$(70)\qquad J \equiv \sum c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} b_2^{\eta_2} \ldots;$$

irgend ein solches Glied von J erhält bez. $M_1(m_1)$ das Gewicht $G_1 = \sum\limits_f (2\,\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$ und bez. $M_2(m_2)$ das Gewicht $G_2 = \sum\limits_f (2\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$.

Die Invariante J soll gegenüber irgendeiner Substitution S von der Determinante Δ vom „Gewichte“ ω sein:

(XVIII) $$J[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^\omega J[(a), (b), \ldots] .$$

Setzt man in einem Gliede von (70) die neuen Koeffizienten ein, so unterscheidet sich das neue Glied vom alten um den Faktor $m_1^{\sum_f (2\varepsilon_0+\varepsilon_1)}$ resp. $m_2^{\sum_f (2\varepsilon_2+\varepsilon_1)}$, der für $S = M_1(m_1)$ resp. $= M_2(m_2)$ mit m_1^ω resp. m_2^ω übereinstimmen muß. Also ist J isobar, d. h. in allen Gliedern bezüglich M_1 und M_2 vom konstanten Gewichte ω, dem Gewichte von J:

(XIX) $$\sum_f (2\,\varepsilon_0 + \varepsilon_1) = \omega\,, \qquad \sum_f (2\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1) = \omega\,.$$

Diese beiden Gewichtsrelationen sind gleichwertig mit den durch Addition und Subtraktion entstehenden:

(XXa) $\sum (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = d_k = \omega\,,$ (XXb) $\sum \varepsilon_0 = \sum \varepsilon_2\,,$

wo d_k wieder die Dimension irgendeines Gliedes von (70) bedeutet. Die Relation (XXa) sagt für sich aus, daß J gegenüber einer Erweiterung $E(m)$ invariant ist; J ist dann hinsichtlich der Gesamtheit der $(a), (b), \ldots$ homogen von der Dimension $d_k = \omega$. Man beweist, wie oben bei bilinearen Urformen, daß J in ein Aggregat einfacherer Invarianten $J_1 + J_2 + J_3 + \ldots$ zerlegbar ist, deren jede in den $(a), (b), \ldots$ einzeln homogen ist.

Ferner gilt wiederum gemäß dem Satze VIII des § 6, daß, wenn ein Ausdruck J gegenüber beliebigen unimodularen S ungeändert bleibt, von den drei Eigenschaften (XIX), (XXa) bereits irgend eine hinreicht, um J zu einer „vollständigen“ Invariante im Sinne von (XVIII) zu machen. Übt man endlich auf die Urformen (62) eine R aus, so daß sich je zwei symmetrisch gelegene Koeffizienten a_0 und a_2, b_0 und b_2 usw. vertauschen, so bleibt eine Invariante J ungeändert oder wechselt das Vorzeichen, je nachdem das Gewicht ω gerade oder ungerade ist; J heißt wiederum dann „gerade“ oder aber „schief“.

Das alles überträgt sich mit geringen Änderungen auf in den x_1, x_2 homogene Kovarianten $J[(a), (b), \ldots; x_1, x_2]$, die also der Definition genügen:

(XVIII′) $$J[(\alpha), (\beta), \ldots; \xi_1, \xi_2] \equiv \Delta^\omega J[(a), (b), \ldots; x_1, x_2] .$$

Ein solcher Ausdruck ist von der Struktur:

(70′) $J \equiv \sum c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} b_2^{\eta_2} \ldots x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}\,, \quad (\lambda_1 + \lambda_2 = d_k)$

wo d_k die Dimension in den Variabeln ist, $d_k = \sum\limits_f (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ die Gesamtdimension in den Koeffizienten.

Da bei $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ $\xi_1 = \dfrac{x_1}{m_1}$, resp. $\xi_2 = \dfrac{x_2}{m_2}$ wird, so tritt an Stelle von (XIX):

(XIX′) $\sum\limits_f (2\,\varepsilon_0 + \varepsilon_1) - \lambda_1 = \omega\,, \qquad \sum\limits_f (2\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - \lambda_2 = \omega\,,$

oder auch, wenn man addiert und subtrahiert:

(XXa′) $2\,d_k - d_x = 2\,\omega\,,$ (XXb′) $2 \sum (\varepsilon_0 - \varepsilon_2) = \lambda_1 - \lambda_2\,,$

so daß d_x (und damit auch $\lambda_1 - \lambda_2$) eine gerade Zahl sein muß. Gibt man den Termen $x_1^{\lambda_1}$, $x_2^{\lambda_2}$ resp. bezüglich $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ die Gewichte $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, also irgendeinem Gliede von J (70′) das Gewicht $\sum\limits_f (2\,\varepsilon_0 + \varepsilon_1) - \lambda_1$, resp. $\sum\limits_f (2\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - \lambda_2$, so ist dieses gemäß (XIX′) für alle Glieder konstant, $= \omega$; J ist wiederum isobar. Bei einer R vertauschen sich in J außerdem a_0 und a_2, b_0 und b_2, ..., auch x_1 und x_2, was zu (XXb′) führt, und J bleibt ungeändert oder wechselt das Vorzeichen (ist gerade oder schief), je nachdem ω gerade oder ungerade ist. Zusammenfassend hat man:

Satz X. „Eine Invariante J quadratischer Urformen $f, g, h, \ldots$ erfüllt die linearen partiellen Differentialgleichungen (XVI), ist homogen, sowie hinsichtlich beider Variabeln isobar, von der Dimension und dem Gewichte ω; von den letzteren drei Eigenschaften genügt bereits irgend eine, um einen ganzrationalen Ausdruck J als Invariante zu charakterisieren, sobald J bei unimodularen Substitutionen ungeändert bleibt. Bei gleichzeitiger Vertauschung symmetrisch gelegener Koeffizienten bleibt J ungeändert oder wechselt das Vorzeichen, je nachdem das Gewicht ω gerade oder ungerade ist. Eine Kovariante J von $f, g, h, \ldots$ genügt den Differentialgleichungen (XVII), ist in den Koeffizientenreihen (a), (b), ... homogen von der Dimension $d_k = \omega - \frac{1}{2} d_x$, wenn die gerade Zahl d_x die

Dimension von J in den Variabeln bedeutet, und ist isobar bezüglich x_1 und x_2 vom Gewichte ω. Für einen bei unimodularen Substitutionen ungeändert bleibenden, in den x_1, x_2 homogenen Ausdruck J genügt wiederum irgend eine jener drei Eigenschaften, um J zur Kovariante zu machen. Das Verhalten gegenüber einer reziproken Substitution R, wobei jetzt auch x_1 und x_2 zu vertauschen sind, ist dasselbe wie bei einer Invariante."

Eine Kovariante darf auch mehrere kogrediente Reihen von homogenen Variabelnpaaren $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$ enthalten (die also sämtlich jeweils derselben Substitution S unterliegen); sind dann $\lambda_1, \mu_1, \ldots$, resp. $\lambda_2, \mu_2, \ldots$ die Grade in $x_1, y_1, \ldots$, resp. $x_2, y_2, \ldots$; ferner $d_x, d_y, \ldots$ die Dimensionen $\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2, \ldots$ bezüglich der Paare $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$, so hat man nur in (XIX'), (XX') $\lambda_1, \lambda_2, d_x$ resp. zu ersetzen durch $\lambda_1 + \mu_1 + \ldots, \lambda_2 + \mu_2 + \ldots, d_x + d_y + \ldots$

Aus den Differentialgleichungen (XVIII) für eine Kovariante J läßt sich für deren Koeffizienten eine Reihe wesentlicher Folgerungen ziehen, auf die allgemein in § 13 näher eingegangen werde.

Die Formeln dieses Paragraphen mögen an einer Reihe von Beispielen illustriert werden. Nachdem man auf Grund der Gewichtsregeln festgestellt hat, was für Potenzprodukte in einer Invariante (Kovariante) auftreten — man nennt dies den litteralen Teil der Aufgabe — dienen die Differentialgleichungen zur Ermittelung der unbekannten numerischen Koeffizienten der Potenzprodukte.

Ist J eine Invariante, μ irgendeine Zahl, so ist auch μJ eine Invariante; man wird daher umgekehrt eine Invariante J noch mit einer geeigneten Zahl μ multiplizieren dürfen, um sie in der einfachsten Gestalt zu repräsentieren.

Es sollen die linearen und quadratischen Invarianten einer quadratischen resp. bilinearen Urform, und die bilinearen Invarianten von zwei solchen ermittelt werden, und zwar bei bilinearen Formen für inkongruente wie für kongruente Substitutionen. Der Grad der jeweiligen Invariante werde als Index angehängt.

(1) Lineare Invarianten J_1 einer f_2.

Nach (XX) ist $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 1$; da J_1 bei Vertauschung von a_0 und a_2 das Zeichen wechseln müßte, könnte J nur gleich $a_0 - a_2$ sein. Nach (XIX) wäre aber $2\,\varepsilon_0 + \varepsilon_1 = 2\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = \omega = 1$, also kann $\varepsilon_0 = \varepsilon_2$ nicht gleich 1 sein. Es gibt also keine lineare Invariante einer f_2.

(2) Quadratische Invarianten J_2 von f_2.

Gemäß (XX) ist $d = 2$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_2$, $2\varepsilon_0 + \varepsilon_1 = 2$, so daß für die Potenzprodukte der a in J_2 nur die beiden Möglichkeiten $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 1$ und $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$ bleiben. J_2 ist somit eine lineare Kombination $\varrho\, a_0\, a_2 + \sigma\, a_1^2$ von $a_0\, a_2$ und a_1^2. Nach (XVI) wird aber $\varrho + \sigma = 0$, mithin wird J_2 zur Diskriminante $D_f = a_0\, a_2 - a_1^2$ [§ 5, (XII), S. 50].

(3) Bilineare Invarianten $J_{1,1}$ von f_2 und g_2.

Es liefert (XX): $d = \omega = 2$, $\varepsilon_0 + \eta_0 = \varepsilon_2 + \eta_2$, und (XIX): $2(\varepsilon_0 + \eta_0) + (\varepsilon_1 + \eta_1) = 2$. Zu $\varepsilon_0 = 1$ gehört $\eta_2 = 1$, $\eta_0 = \eta_1 = 0$, entsprechend zu $\varepsilon_2 = 1$: $\eta_0 = 1$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$, endlich zu $\varepsilon_1 = 1$: $\eta_1 = 1$, $\eta_0 = \eta_2 = 0$. Da ferner $J_{1,1}$ bei gleichzeitiger Vertauschung von a_0 und a_2, b_0 und b_2 ungeändert zu bleiben hat, so muß $J_{1,1}$ die Struktur besitzen: $\varrho(a_0\, b_2 + a_2\, b_0) + \sigma\, a_1 b_1$.

Gemäß (XVI) kommt aber $\sigma + 2\,\varrho = 0$, also etwa für $\varrho = 1$, $\sigma = -2$. Mithin existiert $J_{1,1}$ nur in der bereits bekannten Bildung $H \equiv a_0\, b_2 + a_2\, b_0 - 2\, a_1\, b_1$ [§ 5, (XV), S. 54].

Dieselben drei Aufgaben werden jetzt für bilineare Urformen $f_{1,1}$ resp. $g_{1,1}$ behandelt, zunächst für inkongruente S_1, S_2.

(1α) Lineare Invarianten J_1 von $f_{1,1}$.

Nach (54) wäre $d_k = 1 = 2\,\omega_1 = 2\,\omega_2$, was nicht eintreten kann.

(2α) Quadratische Invarianten J_2 von $f_{1,1}$.

Nach (54) hat man

$$d_k = 2 = 2\,\omega_1 = 2\,\omega_2\,, \quad \text{also} \quad \omega_1 = \omega_2 = 1\,.$$

Gemäß (XIII) wird $\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{21}=\varepsilon_{12}+\varepsilon_{22}=1$. Da $\varepsilon_{11}=2$ unmöglich ist, existieren nur die beiden Lösungen:

$$\varepsilon_{11}=0\,; \qquad \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=1\,, \qquad \varepsilon_{22}=0$$

und

$$\varepsilon_{11}=1\,; \qquad \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=0\,, \qquad \varepsilon_{22}=1\,.$$

Es kann also J_2 nur die Glieder $a_{11}\cdot a_{22}$ und $a_{12}\cdot a_{21}$ enthalten, und da J_2 bei Vertauschung von a_{11} mit a_{12}, a_{22} mit a_{21} das Zeichen wechselt, fällt J_2 zusammen mit der Determinante von $f_{1,1}$: $D_f=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ [§ 9, (I), S. 120].

(3α) Bilineare Invarianten $J_{1,1}$ von $f_{1,1}$ und $g_{1,1}$.

Man hat wiederum wegen (54) $d=2=2\,\omega_1=2\,\omega_2$; $\omega_1=\omega_2=1$. Aus (XIII): $\varepsilon_{11}+\eta_{11}+\varepsilon_{12}+\eta_{12}=\varepsilon_{21}+\eta_{21}+\varepsilon_{22}+\eta_{22}=\varepsilon_{11}+\eta_{11}+\varepsilon_{21}+\eta_{21}=\varepsilon_{12}+\eta_{12}+\varepsilon_{22}+\eta_{22}=1$ entnimmt man, daß in $J_{1,1}$ nur die vier Glieder $a_{11}\cdot b_{22}$, $a_{22}\cdot b_{11}$, $a_{12}\cdot b_{21}$, $a_{21}\cdot b_{12}$ auftreten können. Bei Vertauschung von a_{11} mit a_{22}, b_{11} mit b_{22}, a_{12} mit a_{21}; b_{12} mit b_{21} darf sich $J_{1,1}$ nicht ändern, d. h. in $J_{1,1}$ kommen nur die Verbindungen $a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}$, $a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}$ vor. Andererseits wechselt $J_{1,1}$ das Zeichen bei Vertauschung von a_{11} mit a_{12}, a_{22} mit a_{21}, b_{11} mit b_{12}, b_{22} mit b_{21}. Somit ist $J_{1,1}$ die in § 9, (IV), S. 123 untersuchte Bildung $H_{f,g}=a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-a_{12}b_{21}-a_{21}b_{12}$.

Wir gehen zu kongruenten Substitutionen $S_1=S_2=S$ über. Die soeben festgestellten Determinanten D_f, D_g, sowie $H_{f,g}$ sind eo ipso auch jetzt Invarianten in dem engeren Sinne. Es fragt sich daher nur, ob es außer diesen invarianten Bildungen in den Fällen (1α), (2α), (3α) bei kongruenten S noch andere gibt.

(1β) Lineare Invarianten J_1 von $f_{1,1}$.

Nach (XII′) ist $d_k=1=\omega$, nach (XIII′) $2\,\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}=1$, $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}$, also ist $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0$, und hierzu gehören die beiden Lösungen $\varepsilon_{12}=1$, $\varepsilon_{21}=0$ und $\varepsilon_{12}=0$, $\varepsilon_{21}=1$. Damit wird J_1 eine lineare Kombination von a_{12} und a_{21}, und da J_1 bei Vertauschung von a_{12} mit a_{21} das Zeichen wechselt, stimmt J_1 überein mit der bereits bekannten Bildung $\delta_f=a_{12}-a_{21}$ [§ 9, (III), S. 123].

(2β) Quadratische Invarianten J_2 von $f_{1,1}$.

Nach (XII′) ist $d_k = 2 = \omega$, nach (XIII′) $2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = 2$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$. Für $\varepsilon_{11} = 1$ folgt $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0$, $\varepsilon_{22} = 1$; $\varepsilon_{11} = 2$ ist unmöglich; für $\varepsilon_{11} = 0$ (also $\varepsilon_{22} = 0$) bleiben noch die drei Lösungen:

$$\varepsilon_{12} = 1, \quad \varepsilon_{21} = 1; \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{21} = 2; \quad \varepsilon_{12} = 2, \quad \varepsilon_{21} = 0.$$

Danach enthält J_2 nur die Glieder $a_{11} \cdot a_{22}$, $a_{12} \cdot a_{21}$, a_{12}^2, a_{21}^2, und zwar, da bei Vertauschung von a_{11} und a_{22}, a_{12} und a_{21} keine Änderung von J_2 statthaben darf, die Quadrate a_{12}^2 und a_{21}^2 in der Verbindung $a_{12}^2 + a_{21}^2$. Es besitzt also J_2 die Struktur:

$$\begin{aligned} J_2 &= \varrho\, a_{11} a_{22} + \sigma\, a_{12} a_{21} + \tau (a_{12}^2 + a_{21}^2) \\ &= \varrho\, a_{11} a_{22} + (\sigma + 2\tau)\, a_{12} a_{21} + \tau (a_{12} - a_{21})^2 . \end{aligned}$$

Hier ist $(a_{12} - a_{21})^2$ gemäß (1β) selbst eine J_2, also fragt sich nur noch, welche lineare Kombination $\varrho\, a_{11} a_{22} + \sigma' a_{12} a_{21}$ von $a_{11} a_{22}$ und $a_{12} a_{21}$ eine zweite J_2 liefert. Gemäß (IX′) erhält man $\varrho + \sigma' = 0$, kommt also auf die „Determinante“ von $f_{1,1}$: $D_f = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ zurück. Bei kongruenten Substitutionen repräsentieren demnach D_f und $(a_{12} - a_{21})^2$, und damit jede lineare Kombination derselben die sämtlichen quadratischen Invarianten von $f_{1,1}$.

(2γ) Bilineare Invarianten $J_{1,1}$ von $f_{1,1}$ und $g_{1,1}$.

Es existieren nur zwei Invarianten, einmal das Produkt $(a_{12} - a_{21})(b_{12} - b_{21})$ der beiden linearen Invarianten von f und g, andererseits die in (3α) festgestellte Bildung $H_{fg} = a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12}$, und damit wiederum jede lineare Kombination derselben.

Die Ausführung sei dem Leser überlassen.

Aufgabe 1. Der Fall (2γ) des Textes ist auszuführen.

Aufgabe 2. Die Differentialgleichungen und Gewichtsregeln des Textes sind auszudehnen auf eine trilineare Urform $f_{1,1,1}$, sowie auf ein System von Urformen, das sich aus linearen, bilinearen und trilinearen Formen zusammensetzt; andererseits auf eine kubische binäre Urform f_3, sowie auf ein System von Urformen, bestehend aus linearen, quadratischen und kubischen Formen.

Aufgabe 3. Mittels der Differentialgleichungen und Gewichtsregeln für trilineare Urformen ist zu zeigen, daß eine $f_{1,1,1}$ keine lineare Invariante besitzt, weder gegenüber inkogredienten noch gegenüber kogredienten S *); ferner, daß zwei trilineare Formen nur eine einzige bilineare Invariante gegenüber inkogredienten wie kogredienten S haben (s. Aufgabe 3 zu § 10).

Das Entsprechende gilt für eine resp. zwei kubische binäre Formen.

Aufgabe 4. Es ist nachzuweisen, daß auch für die weiteren, in § 9 und den Aufgaben zu § 9 behandelten invarianten Bildungen die bezüglichen Differentialgleichungen und Gewichtsregeln erfüllt sind.

*) Wohl aber gibt es lineare „partielle" Invarianten einer $f_{1,1,1}$; so z. B. sind $a_{112} - a_{121}$, $a_{212} - a_{221}$ invariant gegenüber kogredienten S der (y), (z), während die (x) in Ruhe bleiben.

Anhang.

Symbolische Darstellung.

Es werde an § 7 und § 9 angeknüpft. Nach § 7, Satz IV war die notwendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen einer Bilinearform:

$$(1)\quad \begin{cases} f(x_1, x_2; y_1, y_2) \\ \equiv f(x; y) \equiv a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 \end{cases}$$

in zwei Linearfaktoren, deren jeder nur eine Reihe der Variabeln enthält:

$$(2)\qquad f \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)(a'_1 y_1 + a'_2 y_2)$$

das Verschwinden der Determinante D_f von f:

$$(3)\qquad D_f \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}\,.$$

Trotzdem läßt sich die Darstellung (2) als die einer allgemeinen Form f (mit $D \neq 0$) ansehen, falls man den Koeffizienten a_1, a_2; a'_1, a'_2 der beiden Linearfaktoren:

$$(4)\qquad a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2\,, \qquad a'_y \equiv a'_1 y_1 + a'_2 y_2$$

eine veränderte Bedeutung unterlegt. Es seien die a_1, a_2; a'_1, a'_2 nur Symbole derart, daß, während im übrigen mit ihnen nach den Grundgesetzen*) der vier Spezies gerechnet werde, erst das Produkt eines a mit einem a' eine reale Größe liefert, nämlich einen der Koeffizienten von f, nach den Gesetzen:

$$(\mathrm{I})\quad a_1 a'_1 = a_{11}\,, \quad a_1 a'_2 = a_{12}\,, \quad a_2 a'_1 = a_{21}\,, \quad a_2 a'_2 = a_{22}\,.$$

*) Dabei kommen nur die Gleichheitsgesetze der Arithmetik in Betracht: Ungleichungen zwischen Symbolen oder symbolischen Produkten sind im folgenden ausgeschlossen. Zumeist wird auch von der Division von Symbolen kein Gebrauch gemacht; zuweilen [s. unten bei (32) und (32′)] ist es indessen nützlich, sich derselben zu bedienen.

Damit nimmt in der Tat die Form f die Gestalt an:

$$f \equiv a_x a'_y . \tag{2'}$$

Der Nutzen dieser „symbolischen Schreibweise“ von f äußert sich zuvörderst bei der Ausübung zweier inkongruenter Substitutionen S_1, S_2, mit den Determinanten Δ_1, Δ_2, auf f [vgl. § 9 (2)]:

$$(5) \quad S_1) \begin{cases} x_1 = A_1 \xi_1 + B_1 \xi_2 , \\ x_2 = C_1 \xi_1 + D_1 \xi_2 , \end{cases} \qquad S_2) \begin{cases} y_1 = A_2 \eta_1 + B_2 \eta_2 , \\ y_2 = C_2 \eta_1 + D_2 \eta_2 . \end{cases}$$

Gehen hierdurch die symbolischen Linearfaktoren a_x, a'_y über in α_ξ, α'_η:

$$(6) \begin{cases} \alpha_\xi \equiv \xi_1(a_1 A_1 + a_2 C_1) + \xi_2(a_1 B_1 + a_2 D_1) \equiv \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 , \\ \alpha'_\eta \equiv \eta_1(a'_1 A_2 + a'_2 C_2) + \eta_2(a'_1 B_2 + a'_2 D_2) \equiv \alpha'_1 \eta_1 + \alpha'_2 \eta_2 , \end{cases}$$

so transformiert sich die Form f (2') in die neue Form φ:

$$(7) \begin{cases} \varphi(\xi;\eta) \equiv \alpha_\xi \alpha'_\eta \equiv \alpha_1 \alpha'_1 \xi_1 \eta_1 + \alpha_1 \alpha'_2 \xi_1 \eta_2 + \alpha_2 \alpha'_1 \xi_2 \eta_1 + \alpha_2 \alpha'_2 \xi_2 \eta_2 \\ \qquad\qquad\qquad \equiv \alpha_{11} \xi_1 \eta_1 + \alpha_{12} \xi_1 \eta_2 + \alpha_{21} \xi_2 \eta_1 + \alpha_{12} \eta_2 , \end{cases}$$

da es gleichgültig ist, ob die S_1, S_2 in der entwickelten (ausmultiplizierten) oder aber in der unentwickelten Form f (2') ausgeführt werden.

Demnach sind die α_1, α_2; α'_1, α'_2 die symbolischen Koeffizienten der transformierten Linearformen α_ξ, α'_η (6), so daß, analog zu (I):

$$(\mathrm{I}') \quad \alpha_1 \alpha'_1 = \alpha_{11} , \quad \alpha_1 \alpha'_2 = \alpha_{12} , \quad \alpha_2 \alpha'_1 = \alpha_{21} , \quad \alpha_2 \alpha'_2 = \alpha_{22} ,$$

während auf Grund von (6) die alten Symbole mit den neuen verknüpft sind durch die linearen „induzierten“ Transformationsrelationen, wiederum mit den Determinanten Δ_1, Δ_2:

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \alpha_1 = a_1 A_1 + a_2 C_1 , \\ \alpha_2 = a_1 B_1 + a_2 D_1 ; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha'_1 = a'_1 A_2 + a'_2 C_2 , \\ \alpha'_2 = a'_1 B_2 + a'_2 D_2 . \end{cases}$$

Setzt man in (7) für die α_1, α_2; α'_1, α'_2 ihre Werte aus (II) ein und wendet nach erfolgter Ausmultiplikation die Formeln (I) an, so ergeben sich, wie es sein muß, die in § 9 unter (5) resp. (5') aufgeführten „induzierten“ Transformationsrelationen zwischen den realen Koeffizienten α_{ik} und a_{ik}. Somit gilt:

Satz I. „Auf Grund der symbolischen Darstellung (2'), (I) einer bilinearen Form f wird die Ausübung zweier inkongruenter Substitutionen S_1, S_2 auf f zurückgeführt auf die gesonderte Ausführung der Substitutionen (II) in den symbolischen Linearfaktoren a_x, a'_y von f.“

Der Spezialfall kongruenter Substitutionen $S_1 = S_2$ erledigt sich damit von selbst.

Aus Satz I folgt sofort, daß die durch Zusammenfallen der y mit den x aus $f(x; y)$ hervorgehende binäre quadratische Form [§ 7, (46)]:

$$(8) \qquad f(x; x) \equiv a_x a'_x \equiv a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

eine (absolute) Kovariante von f gegenüber kogredienten $S_1 = S_2$ ist.

Für die „lineare Invariante“ $\delta_f = a_{12} - a_{21}$ [§ 9 (14)] erhält man vermöge (I):

$$(9) \qquad \delta_f \equiv a_{12} - a_{21} \equiv a_1 a'_2 - a_2 a'_1 = (a\, a') \, .$$

Derartige, aus Symbolen gebildete zweireihige Determinanten, wie $(a\, a')$, $(a\, b)$ usw., heißen nach Gordan*) „Klammerfaktoren“.

Bildet man bei kogredienten $S_1 = S_2 = S$ (mit der Determinante Δ) den transformierten Ausdruck

$$\delta_\varphi \equiv \alpha_{12} - \alpha_{21} \equiv (\alpha\, \alpha') \, ,$$

so ergibt sich aus (II) mit Hilfe des Satzes V des § 6, daß $(\alpha\, \alpha') = \Delta (a\, a')$, d. i. die Invarianz von δ_f gegenüber S [vgl. § 9 (III)].

Um die Determinante D_f (3) von f symbolisch darzustellen, genügt die eine Symbolreihe der a_1, a_2; a'_1, a'_2 in (I) nicht mehr, da man verlangen muß, daß der Rückweg von der symbolischen Darstellung zur realen ein eindeutiger sein soll. Es würde aber z. B. das Produkt $a_1 a'_1 a_2 a'_2$ ebensowohl zu $a_{11} a_{22}$ wie zu $a_{12} a_{21}$ führen.

---

*) Gordan hat den Prozeß, der aus einem Produkte von der Gestalt $a_x a'_y$ resp. $a_x b_x$ den Klammerfaktor $(a\, a')$ resp. $(a\, b)$ liefert, als selbständigen Prozeß unter dem Namen „Faltung“ in die Symbolik eingeführt. Vgl. Gordan-Kerschensteiner, Invariantentheorie, Band II. Leipzig 1887, § 1.

Führt man dagegen eine zweite, mit den $a_1, a_2; a_1', a_2'$ gleichwertige Symbolreihe $b_1, b_2; b_1', b_2'$ ein, die den zu (I) analogen Verknüpfungsgesetzen unterliegen, so daß f in der doppelten Gestalt erscheint:

$$(2') \qquad f \equiv a_x a_y' \equiv b_x b_y',$$

so wird die Mehrdeutigkeit der symbolischen Darstellung vermieden, und entsprechend wird man, wenn eine Form vom dritten, vierten, ... Grade in den a_{ik} vorliegt, weitere Symbolreihen (c), (d), ... heranziehen, Hier erhält man für D (3) zunächst $D = a_1 a_1' b_2 b_2' - a_1 a_2' b_2 b_1' = b_1 b_1' a_2 a_2' - b_1 b_2' a_2 a_1' = a_1 b_2 (a'b') = a_2 b_1 (b'a')$, also durch Addition:

$$(10) \qquad D_f \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \equiv \tfrac{1}{2}(ab)(a'b').$$

Nunmehr tritt [vgl. § 9 (I)] der invariante Charakter von D gegenüber inkongruenten S_1, S_2 unmittelbar hervor, denn es ergibt sich sofort:

$$(11) \qquad D_\varphi \equiv \tfrac{1}{2}(\alpha\beta)(\alpha'\beta') \equiv \tfrac{1}{2}\Delta_1(ab)\cdot\Delta_2(a'b') \equiv \Delta_1\Delta_2 D_f.$$

Ebenso ist für eine zweite Bilinearform g:

$$(2'') \qquad \begin{cases} g(x;y) \equiv l_x l_y' \equiv m_x m_y' \equiv b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 \\ \qquad\qquad + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2, \end{cases}$$

$$(9') \qquad \delta_g = (ll'),$$

$$(10') \qquad D_g = \tfrac{1}{2}(lm)(l'm').$$

Für die bilineare Invariante von f und g [§ 9 (17)]:

$$H_{fg} = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}$$

kommt

$$H_{fg} \equiv a_1 a_1' l_2 l_2' + a_2 a_2' l_1 l_1' - a_1 a_2' l_2 l_1' - a_2 a_1' l_1 l_2' = (al)(a'l'),$$

so daß sich H_{fg} in irgend eine der symbolischen Gestalten setzen läßt:

$$(12) \qquad \begin{cases} H_{fg} \equiv (al)(a'l') \equiv (bm)(b'm') \equiv (am)(a'm') \\ \qquad \equiv (bl)(b'l') \equiv \ldots, \end{cases}$$

woraus die Invarianz gegenüber inkogredienten S_1, S_2 erhellt [§ 9 (IV)].

Um die beiden Funktionaldeterminanten $\vartheta^{(x)}$, $\vartheta^{(y)}$ [§ 9 (26)] symbolisch zu schreiben, hat man dies zuvor für die zweireihigen Determinanten p_{ik} [l. c. (24)] der Matrix:

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_1', & a_1 a_2', & a_2 a_1', & a_2 a_2' \\ l_1 l_1', & l_1 l_2', & l_2 l_1', & l_2 l_2' \end{vmatrix}$$

zu tun. Man erhält:

$$(14)\qquad \begin{cases} p_{12} \equiv \begin{vmatrix} a_1 a_1', & a_1 a_2' \\ l_1 l_1', & l_1 l_2' \end{vmatrix} \equiv a_1 l_1 (a' l'), \\ p_{34} \equiv \begin{vmatrix} a_2 a_1', & a_2 a_2' \\ l_2 l_1', & l_2 l_2' \end{vmatrix} \equiv a_2 l_2 (a' l'); \\ p_{13} \equiv \begin{vmatrix} a_1 a_1', & a_2 a_1' \\ l_1 l_1', & l_2 l_1' \end{vmatrix} \equiv a_1' l_1' (a l), \\ p_{24} \equiv \begin{vmatrix} a_1 a_2', & a_2 a_2' \\ l_1 l_2', & l_2 l_2' \end{vmatrix} \equiv a_2' l_2' (a l); \\ p_{14} \equiv \begin{vmatrix} a_1 a_1', & a_2 a_2' \\ l_1 l_1', & l_2 l_2' \end{vmatrix} \equiv a_1 a_1' l_2 l_2' - a_2 a_2' l_1 l_1', \\ p_{23} \equiv \begin{vmatrix} a_1 a_2', & a_2 a_1' \\ l_1 l_2', & l_2 l_1' \end{vmatrix} \equiv a_1 a_2' l_2 l_1' - a_2 a_1' l_1 l_2', \end{cases}$$

und aus den beiden letzten Formeln noch die Verbindungen:

$$(15)\qquad \begin{cases} p_{14} + p_{23} \equiv (a l)(a_1' l_2' + a_2' l_1'), \\ p_{14} - p_{23} \equiv (a' l')(a_1 l_2 + a_2 l_1). \end{cases}$$

Nun waren die beiden Formen $\vartheta^{(x)}$, $\vartheta^{(y)}$:

$$(16)\qquad \begin{cases} \vartheta^{(x)} \equiv x_1^2 p_{12} + x_2^2 p_{34} + x_1 x_2 (p_{14} - p_{23}), \\ \vartheta^{(y)} \equiv y_1^2 p_{13} + y_2^2 p_{24} + y_1 y_2 (p_{14} + p_{23}). \end{cases}$$

Somit entsteht auf Grund von (14), (15):

$$\frac{\vartheta^{(x)}}{(a' l')} \equiv x_1^2 a_1 l_1 + x_2^2 a_2 l_2 + x_1 x_2 (a_1 l_2 + a_2 l_1) \equiv a_x l_x,$$

$$\frac{\vartheta^{(y)}}{(a l)} \equiv y_1^2 a_1' l_1' + y_2^2 a_2' l_2' + y_1 y_2 (a_1' l_2' + a_2' l_1') \equiv a_y' l_y',$$

$$(17)\qquad \vartheta^{(x)} \equiv (a' l') a_x l_x, \qquad \vartheta^{(y)} \equiv (a l) a_y' l_y',$$

und damit die Invarianz von ϑ_x, ϑ_y gegenüber S_1, S_2 [§ 9 (VI)].

Den Darstellungen (17) lassen sich, wie bei (12), solche analoger Struktur anreihen. Die beiden Kovarianten $\vartheta^{(x)}$, $\vartheta^{(y)}$ von f besaßen, auf Grund der Identität [S. 92, Anm. *)] des § 7:

$$(18) \qquad p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} \equiv 0 \text{ *)}$$

die nämliche Diskriminante D_ϑ [§ 9 (27)]:

$$(19) \quad D_\vartheta \equiv 4\,p_{12}\,p_{34} - (p_{14} - p_{23})^2 \equiv 4\,p_{13}\,p_{24} - (p_{14} + p_{23})^2 .$$

Behufs symbolischer Darstellung von D_ϑ sind je zweierlei Symbolreihen (a), (b) resp. (l), (m) zu benutzen. Vermöge (14), (15) liefert der erste Ausdruck von D_ϑ in (19):

$$\begin{aligned} \frac{D_\vartheta}{(a'l')\,(b'm')} &\equiv a_1\,l_1\,b_2\,m_2 + a_1\,l_1\,b_2\,m_2 + a_1\,l_1\,b_2\,m_2 + a_1\,l_1\,b_2\,m_2 \\ &\quad - a_1\,l_2\,b_1\,m_2 - a_1\,l_2\,b_2\,m_1 - a_2\,l_1\,b_1\,m_2 - a_2\,l_1\,b_2\,m_1 \\ &\equiv a_1\,m_2\,(l\,b) + a_1\,b_2\,(l\,m) + l_1\,m_2\,(a\,b) + l_1 b_2\,(am), \end{aligned}$$

oder auch, bei Vertauschung gleichwertiger Symbole:

$$\equiv -a_2\,m_1(l\,b) - a_2\,b_1(l\,m) - l_2\,m_1(a\,b) - l_2\,b_1(a\,m),$$

---

*) Diese Identität spielt gerade in der Symbolik eine wesentliche Rolle, wenn es sich darum handelt, inhaltlich übereinstimmende, aber äußerlich verschiedene symbolische Aggregate ineinander überzuführen. Sind a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 vier gleichwertige Symbolreihen, also Koeffizienten von Linearformen a_x, b_x, c_x, d_x, die kogredienten Substitutionen unterliegen, so ist

$$(18') \qquad (a\,b)\,(c\,d) + (a\,c)\,(d\,b) + (a\,d)\,(b\,c) \equiv 0 .$$

Man erhält diese Identität auch, wenn man aus den drei Gleichungen $a_x \equiv a_1\,x_1 + a_2\,x_2$, $b_x \equiv b_1\,x_1 + b_2\,x_2$, $c_x \equiv c_1\,x_1 + c_2\,x_2$ die x_1, x_2 eliminiert, in der Gestalt

$$(18'') \qquad a_x(b\,c) + b_x(c\,a) + c_x(a\,b) \equiv 0 ,$$

woraus sich wieder (18′) ergibt, wenn man x_1, x_2 durch d_2, $-d_1$ ersetzt. Endlich läßt sich die in Rede stehende Identität auch als Ausdruck des Multiplikationsgesetzes zweireihiger Determinanten [§ 6 (Satz V)]:

$$(18''') \qquad a_x\,b_y - a_y\,b_x \equiv (a\,b)\,(x\,y)$$

ansehen wenn man x_1, x_2; y_1, y_2 resp. ersetzt durch c_2, $-c_1$; d_2, $-d'_1$.

somit durch Addition, nach Hebung des Faktors 2:

(20a) $D_\vartheta \equiv (a'l')(b'm')\{(am)(lb)+(ab)(lm)\} \equiv A'+B.$

Verfährt man ebenso mit dem zweiten Ausdruck für D_ϑ in (19), wobei sich nur die akzentuierten Symbole mit den nichtakzentuierten vertauschen, so kommt für D_ϑ auch:

(20b) $D_\vartheta \equiv (al)(bm)\{(a'm')(l'b')+(a'b')(l'm')\} \equiv A+B'.$

Bildet man andererseits vermöge (10) und (12) den Ausdruck $H_{fg}^2 - 4\,D_f D_g$:

(21) $H_{fg}^2 - 4\,D_f D_g \equiv (am)(bl)(a'm')(b'l') - (ab)(lm)(a'b')(l'm')$,

so lehrt die Vergleichung von (20) mit (21), daß beidemal dieselben Teilprodukte vorkommen, nur jeweils in verschiedener Weise verbunden.

Behufs Überführung von (21) in (20a) resp. (20b) setze man einmal im ersten Gliede rechts von (21) gemäß (18):

$$(am)(bl) \equiv (al)(bm) - (ab)(lm)\,,$$

so geht (21) über in:

$$\begin{aligned} H_{fg}^2 - 4\,D_f D_g \equiv\ & (a'm')(b'l')(al)(bm) \\ & - (ab)(lm)\{(a'b')(l'm') + (a'm')(b'l') \end{aligned}$$

und bei nochmaliger Anwendung von (18) auf den Ausdruck in der geschweiften Klammer in:

(21a) $$H_{fg}^2 - 4\,D_f D_g \equiv -(A+B)\,.$$

Operiert man analog mit dem ersten Gliede rechts von (21), so kommt:

(21b) $$H_{fg}^2 - 4\,D_f D_g \equiv -(A'+B')\,,$$

und durch Addition von (21a), (21b), mit Rücksicht auf (20a), (20b):

$$2(H_{fg}^2 - 4\,D_f D_g) \equiv -(A+B+A'+B') \equiv -2\,D_\vartheta\,,$$

d. i. die Syzygie (XVIII) des § 7:

(22) $$H_{fg}^2 + D_\vartheta \equiv 4\,D_f D_g\,.$$

Man kann weiter nach der realen Bedeutung der invarianten Einzelausdrücke A, B, A', B', sowie nach deren gegenseitigen Beziehungen fragen. Aus (20a) und

(20b) folgt: $A - A' = B - B'$, aus (21a) und (21b): $A - A' = B' - B$, mithin ist:

$$(23) \qquad A \equiv A', \quad B \equiv B', \quad D_\vartheta \equiv A + B .$$

Bildet man ferner die Differenz

$$B - A \equiv (a'l')(b'm')\{(ab)(lm) - (am)(lb)\}$$

und berücksichtigt, daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer gemäß (18) den Wert $(al)(bm)$ besitzt, so hat man auf Grund von (12):

$$(24) \qquad B - A \equiv H_{fg}^2 ,$$

und aus der Vergleichung von (23) mit (24), sowie mit Rücksicht auf (22), ergibt sich einzeln:

$$(25) \qquad B \equiv \tfrac{1}{2}(D_\vartheta + H_{fg}^2) \equiv 2 D_f D_g , \qquad A \equiv \tfrac{1}{2}(D_\vartheta - H_{fg}^2) .$$

Die Gleichheiten $A \equiv A'$, $B \equiv B' \equiv 2 D_f D_g$ lassen sich aber auch leicht direkt ableiten. Vertauscht man in $A \equiv (al)(mb)(a'm')(b'l')$ die Symbole a mit den b, die a' mit den b', wodurch der Wert von A ungeändert bleibt, so entsteht $A \equiv (bl)(ma)(b'm')(a'l')$, d. i. aber A'.

Nimmt man die nämliche Vertauschung in B vor und addiert, so hat man

$$2B \equiv (ab)(lm)\{(a'l')(b'm') + (a'm')(l'b')\}$$

und hier wiederum vermöge (18)

$$2B \equiv (ab)(lm)(a'b')(l'm') \equiv 4 D_f D_g ,$$

und damit folgt zugleich $B = B'$, da sich das Produkt $D_f D_g$ nicht ändert, wenn man die akzentuierten Symbole mit den nichtakzentuierten vertauscht.

Wir gehen über zu drei bilinearen Urformen f, g, h:

$$(2) \quad f \equiv a_x a'_y \equiv b_x b'_y , \quad g \equiv l_x l'_y \equiv m_x m'_y , \quad h \equiv u_x u'_y \equiv v_x v'_y$$

mit den realen Koeffizienten a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}. Aus der Matrix dieser Koeffizienten waren in § 9 (39) die vier Determinanten T_i entnommen:

$$(26) \qquad \begin{cases} T_1 \equiv |a_{12}\, a_{21}\, a_{22}| , & T_2 \equiv |a_{11}\, a_{21}\, a_{22}| , \\ T_3 \equiv |a_{11}\, a_{12}\, a_{22}| , & T_4 \equiv |a_{11}\, a_{12}\, a_{21}| , \end{cases}$$

und l. c. (VII) die Invarianz (gegenüber S_1, S_2) des Ausdrucks bewiesen:

$$27) \qquad D_{fgh} \equiv T_1 T_4 - T_2 T_3 .$$

Ferner soll nachgewiesen werden die Invarianz (gegenüber kogredienten $S_1 = S_2$) von:

(28) $$\delta_{fhg} \equiv T_2 - T_3 .$$

Im Hinblick auf die Bildungen δ_f (9) und D_f (10) wird man eine bilineare Hilfsform $\pi(x; y)$ mit den Koeffizienten T_i (26) konstruieren; von dieser werden die Bildungen (27), (28) die Invarianten D_π und δ_π sein, und π selbst eine Kovariante von f, g, h.

Man suche zu dem Behuf eine Form π, deren bilineare Invarianten $H_{f\pi}$, $H_{g\pi}$, $H_{h\pi}$ mit f, g, h zugleich verschwinden oder, wie man kürzer sagt, die „apolar" („konjugiert") ist zu f, g, h. Setzt man:

(29) $$\pi(x; y) \equiv \pi_{11} x_1 y_1 + \pi_{12} x_1 y_2 + \pi_{21} x_2 y_1 + \pi_{22} x_2 y_2 ,$$

so lautet etwa die erste der drei fraglichen Bedingungen:

(30) $$H_{f\pi} \equiv \pi_{11} a_{22} - \pi_{12} a_{21} - \pi_{21} a_{12} + \pi_{22} a_{11} = 0 .$$

Hieraus folgt für die Verhältnisse der π_{ik} in der Tat:

(31) $$\pi_{11} : \pi_{12} : \pi_{21} : \pi_{22} = T_4 : -T_3 : -T_2 : T_1 ,$$

so daß bis auf einen konstanten Proportionalitätsfaktor, den man gleich Eins setzen mag, π die zu f, g, h apolare Form wird:

(29′) $$\pi(x; y) \equiv T_4 x_1 y_1 - T_3 x_1 y_2 - T_2 x_2 y_1 + T_1 x_2 y_2 .$$

Um zunächst die T_i einzeln symbolisch darzustellen, bedient man sich mit Vorteil nichthomogener Symbole. Es ist z. B. T_1:

$$T_1 = | a_{12}\, a_{21}\, a_{22} | = | a_1 a_2' ,\ a_2 a_1' ,\ a_2 a_2' | .$$

Hebt man hier den Faktor $a_2 a_2' l_2 l_2' u_2 u_2'$ heraus und setzt:

(32) $$\lambda_1 = \frac{a_1}{a_2},\ \lambda_2 = \frac{l_1}{l_2},\ \lambda_3 = \frac{u_1}{u_2};\ \mu_1 = \frac{a_1'}{a_2'},\ \mu_2 = \frac{l_1'}{l_2'},\ \mu_3 = \frac{u_1'}{u_2'},$$

(33) $$| \lambda_i \mu_i 1 |_{(i=1,2,3)} = | \lambda \mu 1 | ,$$

so wird zunächst:

(34) $$T_1 = a_2 l_2 u_2 a_2' l_2' u_2' | \lambda \mu 1 | .$$

Schreibt man ferner zur Abkürzung:

(35) $$\lambda_{ik} = \lambda_i - \lambda_k ,\quad \mu_{ik} = \mu_i - \mu_k \quad (i, k = 1, 2, 3) ,$$

so läßt sich die Determinante (33) in irgend eine der drei Gestalten setzen:

(36) $|\lambda\mu 1| = \lambda_{12}\mu_{13} - \lambda_{13}\mu_{12} = \lambda_{12}\mu_{23} - \lambda_{23}\mu_{12} = \lambda_{13}\mu_{23} - \lambda_{23}\mu_{13}$.

Verfolgt man hier etwa die erste Darstellung, so erhält man gemäß (32):

(37) $$\begin{cases} a_2 l_2 \lambda_{12} = (a\,l)\,, & a'_2 u'_2 \mu_{13} = (a'\,u')\,; \\ a_2 u_2 \lambda_{13} = (a\,u)\,, & a'_2 l'_2 \mu_{12} = (a'\,l')\,, \end{cases}$$

und somit:

(38) $$|\lambda\mu 1| = \frac{(a\,l)\,(a'\,u')}{a_2\,l_2\,a'_2\,u'_2} - \frac{(a\,u)\,(a'\,l')}{a_2\,u_2\,a'_2\,l'_2}\,.$$

Setzt man diesen Wert in (34) ein, so ergibt sich:

(39) $$T_1 = u_2\,l'_2(a\,l)\,(a'\,u') - u'_2\,l_2(a\,u)\,(a'\,l')\,.$$

Verfährt man analog mit den drei anderen Determinanten T_2, T_3, T_4, wobei neben den Größen (32) auch deren reziproke Werte eintreten und berücksichtigt ebenso auch die zweite und dritte Darstellung (36), so gelangt man zu folgenden drei gleichwertigen, symbolischen Darstellungen für die Kovariante π von f, g, h:

(40) $$\begin{cases} -\pi(x\,;\,y) \equiv l_x\,u'_y(a\,u)\,(a'\,l') - l'_x\,u_y(a\,l)\,(a'\,u') \\ \qquad\qquad \equiv \varrho_{gh} - \varrho_{hg} \equiv \varrho_{hf} - \varrho_{fh} \equiv \varrho_{fg} - \varrho_{gf}\,, \end{cases}$$

aus denen man rückwärts die entsprechenden Einzeldarstellungen der T_i sofort ablesen kann. Die Gleichheit der drei Ausdrücke $\varrho_{gh} - \varrho_{hg}$, $\varrho_{hf} - \varrho_{fh}$, $\varrho_{fg} - \varrho_{gf}$ geht auch daraus hervor, daß π bei Vertauschung irgend zweier der Urformen f, g, h sein Vorzeichen ändert.

Man frage wiederum nach der Einzelbedeutung der ϱ. Die Addition z. B. von ϱ_{hf} und ϱ_{hg} liefert

$$u_x(a\,l)\,[a'_y(u'\,l') + l'_y(a'\,u')]$$

oder gemäß (18″) $(a\,l)\,(a'\,l')\,u_x\,u'_y$, also wegen (12):

(41) $$\begin{cases} \varrho_{hf} + \varrho_{hg} \equiv h\,H_{fg}\,, \quad \varrho_{gh} + \varrho_{gf} \equiv g\,H_{fh}\,, \\ \qquad \varrho_{fg} + \varrho_{fh} \equiv f\,H_{gh}\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$-f\,H_{gh} + g\,H_{fh} + h\,H_{fg} \equiv (\varrho_{gh} + \varrho_{hg}) + (\varrho_{hf} - \varrho_{fh}) - (\varrho_{fg} - \varrho_{gf})\,,$$

oder mit Rücksicht auf (40):

$$(42)\qquad \varrho_{gh} + \varrho_{hg} \equiv -f\,H_{gh} + g\,H_{fh} + h\,H_{fg}\,.$$

Durch Kombination von (42) mit der ersten Darstellung (40) folgt endlich:

$$(43)\qquad 2\,\varrho_{gh} \equiv -\pi + \{-f\,H_{gh} + g\,H_{fh} + h\,H_{fg}\}\,,$$

und entsprechend für die fünf übrigen ϱ.

Sodann entnimmt man aus (40) für die Bildung δ_{fgh} (28):

$$(44)\qquad \begin{cases} \delta_{fgh} \equiv T_2 - T_3 \equiv (l\,u')\,(a\,u)\,(a'\,l') - (u\,l')\,(a\,l)\,(a'\,u') \\ \qquad\qquad \equiv \tau_{gh} - \tau_{hg} \equiv \tau_{hf} - \tau_{fh} \equiv \tau_{fg} - \tau_{gf}\,, \end{cases}$$

und hieraus auf Grund von (43):

$$(45)\qquad 2\,\tau_{gh} \equiv \delta_{fgh} + \{-\delta_f\,H_{gh} + \delta_g\,H_{fh} + \delta_h\,H_{fg}\}$$

nebst den entsprechenden Formeln für die fünf übrigen τ.

Aus (44) leuchtet die Invarianz von δ_{fgh} gegenüber kogredienten $S_1 = S_2$ ein.

Es kommt nunmehr die quadratische Invariante (27) $D_{fgh} \equiv T_1\,T_4 - T_2\,T_3$ an die Reihe. Man ziehe die zweite Symbolreihe der b, m, v; b', m', v' in (2) mit heran und setze zur Abkürzung:

$$(46)\qquad \begin{cases} \varrho_1 \equiv (a\,u)\,(a'\,l')\,, \qquad \sigma_1 \equiv (b\,v)\,(b'\,m')\,, \\ \varrho_1' \equiv (a\,l)\,(a'\,u')\,, \qquad \sigma_1' \equiv (b\,m)\,(b'\,v')\,, \end{cases}$$

so daß ϱ_1 mit σ_1, ϱ_1' mit σ_1' gleichwertig ist, so hat man gemäß (40):

$$(47)\qquad \begin{cases} \begin{cases} T_1 \equiv l_2\,u_2'\,\varrho_1 - l_2'\,u_2\,\varrho_1' \equiv m_2\,v_2'\,\sigma_1 - m_2'\,v_2\,\sigma_1'\,, \\ T_4 \equiv l_1\,u_1'\,\varrho_1 - l_1'\,u_1\,\varrho_1' \equiv m_1\,v_1'\,\sigma_1 - m_1'\,v_1\,\sigma_1'\,; \end{cases} \\ \begin{cases} T_2 \equiv l_1\,u_2'\,\varrho_1 - l_1'\,u_2\,\varrho_1' \equiv m_1\,v_2'\,\sigma_1 - m_1'\,v_2\,\sigma_1'\,, \\ T_3 \equiv l_2\,u_1'\,\varrho_1 - l_2'\,u_1\,\varrho_1' \equiv m_2\,v_1'\,\sigma_1 - m_2'\,v_1\,\sigma_1'\,. \end{cases} \end{cases}$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} 2(T_1\,T_4 - T_2\,T_3) \equiv\ & \varrho_1\,\sigma_1(l\,m)\,(u'\,v') + \varrho_1'\,\sigma_1'(u\,v)\,(l'\,m') \\ & - \varrho_1\,\varrho_2'(l\,v)\,(u'\,m') - \varrho_2\,\varrho_1'(u\,m)\,(l'\,v')\,, \end{aligned}$$

oder da die beiden Glieder mit negativem Vorzeichen gleichwertig sind, und unter Einsetzung der ϱ, ϱ' aus (46):

$$(48)\begin{cases} 2D_{fgh} \equiv 2(T_1 T_4 - T_2 T_3) \equiv (a u)(b v)(l m)(a' l')(u' v')(b' m') \\ \qquad + (a l)(u v)(b m)(a' u')(b' v')(l' m') \\ \qquad - 2(a l)(u m)(b v)(a' u')(b' v')(b' m'). \end{cases}$$

Endlich werde noch [§ 9 (VIII)] die quadrilineare Invariante $H_{fghk} \equiv H$ von vier bilinearen Urformen f, g, h, k in Betracht gezogen. Man schreibe jetzt bequemer:

$$(2) \quad f \equiv a_x a'_y, \quad g \equiv b_x b'_y, \quad h \equiv c_x c'_y, \quad k \equiv d_x d'_y.$$

Dann wird H die vierreihige Determinante:

$$(49) \quad H \equiv |a_{11} a_{12} a_{21} a_{22}| \equiv |a_1 a'_1, a_1 a'_2, a_2 a'_1, a_2 a'_2|.$$

Man verfahre wie oben bei T_1 und führe die nichthomogenen Symbole λ_i, μ_i ein:

$$(32')\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{a_1}{a_2}, \quad \lambda_2 = \dfrac{b_1}{b_2}, \quad \lambda_3 = \dfrac{c_1}{c_2}, \quad \lambda_4 = \dfrac{d_1}{d_2}; \\ \mu_1 = \dfrac{a'_1}{a'_2}, \quad \mu_2 = \dfrac{b'_1}{b'_2}, \quad \mu_3 = \dfrac{c'_1}{c'_2}, \quad \mu_4 = \dfrac{d'_1}{d'_2}, \end{cases}$$

so nimmt H die Gestalt an:

$$(50) \quad H \equiv a_2 b_2 c_2 d_2 a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 |\lambda_i \mu_i, \lambda_i, \mu_i, 1|. \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

Die rechts auftretende Determinante war in § 7 (41) mittels der $\lambda_{ik} = \lambda_i - \lambda_k$, $\mu_{ik} = \mu_i - \mu_k$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ ausgedrückt worden:

$$-|\lambda_i \mu_i, \lambda_i, \mu_i, 1| \equiv \lambda_{ik} \lambda_{lm} \mu_{il} \mu_{km} - \lambda_{il} \lambda_{km} \mu_{ik} \mu_{lm}$$
$$(i, k, l, m = 1, 2, 3, 4).$$

Auf Grund von (32′) gewinnt man daher für H die drei gleichberechtigten Darstellungen:

$$(51)\begin{cases} H \equiv (a b)(c d)(a' c')(b' d') - (a c)(b d)(a' b')(c' d') \equiv \eta_4 - \eta'_4, \\ \quad \equiv (a c)(d b)(a' d')(b' c') - (a d)(b c)(a' c')(d' b') \equiv \eta_2 - \eta'_2, \\ \quad \equiv (a d)(b c)(a' b')(c' d') - (a b)(c d)(a' d')(b' c') \equiv \eta_3 - \eta'_3. \end{cases}$$

Um hier noch die symbolischen Ausdrücke η einzeln durch H und die sechs bilinearen Invarianten $H_{fg}, \ldots$ je zweier der vier Urformen auszudrücken, bediene man sich der Abkürzungen:

$$(52) \quad \mathsf{H}_2 \equiv H_{fg} H_{hk}, \quad \mathsf{H}_3 \equiv H_{fh} H_{gk}, \quad \mathsf{H}_4 \equiv H_{fk} H_{gh}.$$

Bildet man z. B. die Summen $\eta_4 + \eta_2'$, $\eta_4 + \eta_3'$, so kommt gemäß (18):

(53) $$\eta_r + \eta_s' \equiv -\mathsf{H}_t \qquad (r, s, t = 2, 3, 4)$$

und hieraus, unter Berücksichtigung der Gleichheit der drei Differenzen $\eta_r - \eta_r'$:

(54)• $$\eta_r - \eta_s \equiv \eta_s - \eta_s' \equiv \mathsf{H}_r - \mathsf{H}_s,$$

oder auch:

(54) $$\eta_r \equiv \mathsf{H}_r + \omega, \qquad \eta_s' \equiv \mathsf{H}_s + \omega',$$

wo ω, ω' zwei neue Unbekannte vorstellen; zwischen diesen besteht vermöge (50) die Relation:

(55) $$H \equiv \omega - \omega',$$

so daß man, unter Ω eine weitere Unbekannte verstanden, setzen kann:

(56) $$\omega = \tfrac{1}{2} H + \Omega, \qquad \omega' = -\tfrac{1}{2} H + \Omega.$$

Damit gehen die Formeln (54′) über in:

(54″) $$\eta_r \equiv \mathsf{H}_r + \tfrac{1}{2} H + \Omega, \qquad \eta_s' \equiv \mathsf{H}_s - \tfrac{1}{2} H + \Omega,$$

und deren Addition liefert, mit Rücksicht auf (53), für Ω den Wert:

(57) $$-2\,\Omega \equiv \mathsf{H}_r + \mathsf{H}_s + \mathsf{H}_t \equiv \mathsf{H}_2 + \mathsf{H}_3 + \mathsf{H}_4.$$

Setzt man dies in (54″) ein, so ergibt sich schließlich:

(58) $$\begin{cases} 2\,\eta_r \equiv H - (-\mathsf{H}_r + \mathsf{H}_s + \mathsf{H}_t), \\ 2\,\eta_r' \equiv -H - (-\mathsf{H}_r + \mathsf{H}_s + \mathsf{H}_t), \end{cases}$$

nebst den beiden entsprechenden Darstellungspaaren, aus denen rückwärts wieder (51) folgt. Da die Gleichung $H = 0$ gemäß (50) nichts anderes besagt, als die Gleichheit der beiden Dv. $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$ und $(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)$, so liefern die vorstehenden Entwicklungen eine wesentliche Ergänzung zur Theorie des Dv. (§ 8).

Es ist wünschenswert, sich auch begrifflich davon zu überzeugen, daß die Invarianten D_{fgh} (27) und δ_{fgh} (28) der Kovariante π (29′) von f, g, h zugleich Invarianten der Urformen selbst sind.

Man übe zunächst etwa eine Schiebung $A_1(h_1)$, kombiniert mit einer Schiebung $A_1(k_1)$, aus: $x_1 = \xi_1 + h_1 \xi_2$,

$x_2 = \xi_2$; $y_1 = \eta_1 + k_1\eta_2$, $y_2 = \eta_2$; sind dann wie in § 9 (4) α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} die Koeffizienten der transformierten Urformen φ, ψ, χ, so wird nach der Definition einer Schiebungskovariante bez. $A_1(h_1)$, $A_1(k_1)$ identisch:

$$(59)\quad \begin{cases} \pi\{\xi_1 + h_1\xi_2\,,\ \xi_2\,;\ \eta_1 + k_1\eta_2\,,\ \eta_2\,;\ (\alpha)\,,\ (\beta)\,,\ (\gamma)\} \\ \equiv \pi\{x_1\,,\ x_2\,;\ y_1\,,\ y_2\,;\ (a)\,,\ (b)\,,\ (c)\}\,. \end{cases}$$

Vergleicht man diese Identität mit den drei entsprechenden für die Urformen selbst und versteht unter T_i die Koeffizienten der transformierten Form π, so leuchtet ein, daß diese Größen T_i eine doppelte Auffassung zulassen: einmal gehen sie aus den ursprünglichen Koeffizienten $T_i[(a), (b), (c)]$ hervor, wenn man deren Argumente (a), (b), (c) resp. durch die (α), (β), (γ) ersetzt, andererseits aber auch direkt als die Koeffizienten der vermöge $A_1(h_1)$ transformierten Form π. Daraus folgt aber, daß überhaupt jede Kovariante (Invariante) von π gegenüber inkongruenten resp. kongruenten Schiebungen der (x), (y) und damit auch gegenüber beliebigen unimodularen inkongruenten resp. kongruenten Substitutionen S_1, S_2 zugleich eine Kovariante (Invariante) der Urformen f, g, h ist.

Noch einfacher verhält es sich bei den Streckungen. Übt man etwa die beiden Streckungen $M_1(m_1)$, $M_1(n_1)$ gleichzeitig aus: $x_1 = m_1\xi_1$, $x_2 = \xi_2$; $y_1 = n_1\eta_1$, $y_2 = \eta_2$, so war sofort ersichtlich [vgl. § 9 (43)], daß $\mathsf{T}_1 \equiv m_1 n_1 T_1$, $\mathsf{T}_2 \equiv m_1 n_1 T_2$, $\mathsf{T}_3 \equiv m_1^2 n_1^2 T_3$, $\mathsf{T}_4 \equiv m_1^2 n_1^2 T_4$, und man erhält ohne weiteres, daß bei inkongruenten $M_1(m_1)$, $M_1(n_1)$ $D_{\varphi\psi\chi} \equiv m_1^3 n_1^3 D_{fgh}$ und bei kongruenten $M_1(m_1)$, $M_1(m_1)$ $\delta_{\varphi\psi\chi} \equiv m_1^2\,\delta_{fgh}$, und entsprechend für die beiden anderen Streckungen M_2.

Später (§§ 13, 15) werden diese Schlüsse eine erhebliche Verallgemeinerung erfahren.

Die symbolische Behandlung binärer quadratischer Urformen f, g, h, ... läßt sich den obigen bilinearen Formen als Spezialfall unterordnen; man hat nur sowohl die beiden Variabelnreihen (x), (y), wie je zwei Symbolreihen (a), (a') usw. zusammenfallen zu lassen:

$$(2\text{a})\quad \begin{cases} f \equiv a_x^2 \equiv a_x'^2 \equiv \ldots\,, \qquad g \equiv b_x^2 \equiv b_x'^2 \equiv \ldots\,, \\ \qquad h \equiv c_x^2 \equiv c_x'^2 \equiv \ldots \quad \ldots \end{cases}$$

Es genüge, die einschlägigen Ergebnisse anzuführen. Die Invariante δ_f verschwindet jetzt identisch. Die Determinante D_f wird zur Diskriminante:

(60) $$D_f \equiv \tfrac{1}{2}(a\,a')^2 ;$$

die bilineare Invariante H_{fg}:

(61) $$H_{fg} \equiv (a\,b)^2 ;$$

die Funktionaldeterminante ϑ_{fg}:

(62) $$\vartheta_{fg} \equiv (a\,b)\,a_x\,b_x ,$$

und deren Diskriminante R_{fg}, die Resultante von f, g:

(63) $$R_{fg} \equiv (a\,b)\,(a'\,b')\{(a\,b')\,(b\,a') + (a\,a')\,(b\,b')\} ,$$

wobei die Syzygie (22) ungeändert bleibt:

(22) $$H_{fg}^2 + R \equiv 4\,D_f\,D_g .$$

Endlich ergibt sich für die trilineare Invariante H_{fgh} von f, g, h:

(64) $$H_{fgh} \equiv (a\,b)\,(a\,c)\,(b\,c) .$$

Die Verallgemeinerung der Symbolik auf höhere Urformen liegt auf der Hand. Eine binäre trilineare Form $f(x;\,y;\,z)$ schreibt sich:

$$f \equiv a_x\,b_y\,c_z \equiv a'_x\,b'_y\,c'_z \equiv \ldots ,$$

eine quadrilineare $f(x\,;\,y\,;\,z\,;\,u)$:

$$f \equiv a_x\,b_y\,c_z\,d_u \equiv a'_x\,b'_y\,c'_z\,d'_u \equiv \ldots$$

Spezialfälle dieser Formen sind z. B. die binäre kubische $a_x^3 \equiv a_x'^3 \equiv \ldots$, die doppeltquadratische $a_x^2 b_y^2 \equiv a_x'^2 b_y'^2 \equiv \ldots$, die biquadratische $a_x^4 \equiv a_x'^4 \equiv \ldots$ Ist $a_x \equiv a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3$ ein ternärer symbolischer Linearfaktor, so stellt $a_x^n \equiv b_x^n \equiv \ldots$ eine ternäre Form n ter Ordnung dar, usw. Stets gilt der Satz I mit geeigneten Modifikationen. Im übrigen sei auf die Aufgaben verwiesen.

Einer der Hauptvorzüge der Symbolik äußert sich darin, daß man bei vorgelegten Urformen eine unbegrenzte Anzahl von Kovarianten und Invarianten sofort hinschreiben kann. Liegt z. B. eine bilineare Urform $f \equiv a_x\,a'_y \equiv b_x\,b'_y \equiv c_x\,c'_y \equiv \ldots$ vor, so bilde man aus den Klammerfaktoren $(a\,b)$, $(a\,c)$, $(b\,c)$, $\ldots$, $(a'\,b')$, $(a'\,c')$, $(b'\,c')$, $\ldots$ sowie den Linearfaktoren symbolische Produkte derart, daß in jedem derselben je eines der Symbolpaare

$a, a'; b, b'; \ldots$ nur einmal vorkommt, so ist jedes solche Produkt und jedes Aggregat von solchen eine Kovariante $n$ten Grades in den realen Koeffizienten a_{ik} von f, wenn n Symbolpaare $a, a'; b, b'; \ldots$ auftreten, während deren Ordnung in (x) resp. (y) durch die Anzahl der bezüglichen Linearfaktoren angegeben wird; eine Kovariante ohne Linearfaktoren reduziert sich auf eine Invariante. Bei einer binären Urform $m$ter Ordnung $a_x^m \equiv b_x^m \equiv c_x^m \equiv \ldots$ muß entsprechend jedes der Symbole $a; b; c; \ldots$ $m$mal vorkommen usf.

Weit schwieriger ist dagegen die Umkehrung, daß auch jede Kovariante und Invariante gegebener Urformen in der angegebenen Art darstellbar ist, worauf im Anhange zum zweiten Abschnitte eingegangen werden soll.

Unter den Nachteilen der Symbolik ist einmal der schon erwähnte zu bezeichnen, daß es oft sehr schwierig ist, formal verschiedene, aber inhaltlich übereinstimmende Aggregate ineinander überzuführen; andererseits sind, wenn man von den leichtesten Fällen absieht, symbolische Ausdrücke einfacher Struktur, wie sich bereits in den obigen Beispielen zeigte, durchaus nicht immer diejenigen, die sich bei den Anwendungen der Invariantentheorie darbieten, und umgekehrt lassen oft invariante Bildungen von begrifflich einfacher Definition, wie z. B. die Resultanten und Diskriminanten, nur eine sehr verwickelte symbolische Darstellung zu.

Aufgaben. Die folgenden Angaben sind mittels symbolischer Rechnungen zu beweisen. Wenn $f \equiv a_x^n$ eine binäre Form $n$ter Ordnung ist, so werde gesetzt:

$$f_i \equiv \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv a_x^{n-1} a_i, \qquad (i, k = 1, 2)$$
$$f_{ik} \equiv \frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \equiv a_x^{n-2} a_i a_k .$$

Aufgabe 1. Die binäre kubische Form

$$f \equiv a_x^3 \equiv b_x^3 \equiv c_x^3 \equiv \ldots \equiv a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_2 x_2^3 .$$

Kovarianten sind 1. die Hessesche Form

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \equiv x_1^2(a_0 a_2 - a_1^2) + \ldots \equiv \tfrac{1}{2}(a b)^2 a_x b_x ;$$

2. die kubische Kovariante

$$Q \equiv 2 \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \varDelta_1 & \varDelta_2 \end{vmatrix} \equiv x_1^2(a_0^2 a_3 - 3\, a_0\, a_1\, a_2 + 2\, a_1^3) + \dots$$
$$\equiv a_x^2 b_x (b\,c)^2 (a\,c)\,.$$

Invariante ist die Diskriminante R von $\varDelta$ (zugleich die Diskriminante von f selbst):

$$R \equiv 4(a_0\, a_2 - a_1^2)\,(a_1\, a_3 - a_2^2) - (a_0\, a_3 - a_1\, a_2)^2$$
$$\equiv \tfrac{1}{2}(a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(a\,c)\,(b\,d)\,.$$

Zwischen den drei Formen von der Ordnung 6 und dem Grade 6:

$$\varDelta^3 \equiv \tfrac{1}{8}(a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(e\,f)^2\, a_x\, b_x\, c_x\, d_x\, e_x\, f_x\,,$$
$$R\,f^2 \equiv \tfrac{1}{2}(a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(a\,c)\,(b\,d)\, e_x^3\, f_x^3\,,$$
$$Q^2 \equiv (a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(b\,e)\,(d\,f)\, e_x^2\, f_x^2\, a_x\, c_x$$

besteht die von Cayley herrührende lineare Identität („Syzygie"):

$$4\,\varDelta^3 + Q^2 + R\,f^2 \equiv 0\,.$$

Die Kovariante $\varDelta f$ kann man (bis auf einen konstanten Faktor) auch auffassen als das Resultat der Elimination der y_1, y_2 aus den beiden Gleichungen $a_x^2\, a_y = 0$, $a_y^2\, a_x = 0$.

Die lineare Kovariante $a_x (b\,c)^2\,(a\,b)\,(a\,c)$ verschwindet identisch. Zwei kubische Formen $f \equiv a_x^3$, $g \equiv b_x^3$ besitzen die bilineare Invariante $H_{fg} \equiv (a\,b)^3$, und die Funktionaldeterminante $\vartheta_{fg} \equiv (a\,b)\, a_x^2\, b_x^2$. Fallen f und g zusammen, so verschwinden H_{fg} und ϑ_{fg} identisch. Zu drei kubischen Formen $f \equiv a_x^3$, $g \equiv b_x^3$, $h \equiv c_x^3$ existiert eine „apolare" („konjugierte") kubische Form π, so daß

$$H_{f\pi} = 0\,, \quad H_{g\pi} = 0\,, \quad H_{h\pi} = 0\,.$$

Bedeuten π_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ die vier Determinanten der Matrix $|\, a_0\, a_1\, a_2\, a_3\,|$, so wird

$$\pi = \pi_3\, x_1^3 + 3\,\pi_2\, x_1^2\, x_2 + 3\,\pi_1\, x_1\, x_2^2 + \pi_0\, x_2^3$$
$$\equiv a_x\, b_x\, c_x (a\,b)\,(b\,c)\,(c\,a)\,.$$

Aufgabe 2. Die trilineare Form

$$f \equiv a_x a'_y a''_z \equiv b_x b'_y b''_z \equiv \ldots \equiv a_{111} x_1 y_1 z_1 + a_{211} x_2 y_1 z_1$$
$$+ a_{121} x_1 y_2 z_1 + a_{112} x_1 y_1 z_2 + a_{122} x_1 y_2 z_2 + a_{212} x_2 y_1 z_2$$
$$+ a_{221} x_2 y_2 z_1 + a_{222} x_2 y_2 z_2 = \sum a_{ikl} x_i y_k z_l \quad (i, k, l = 1, 2).$$

Kovarianten (gegenüber inkogredienten S_1, S_2, S_3) sind einmal die drei Funktionaldeterminanten $\vartheta^{(x)}$, $\vartheta^{(y)}$, $\vartheta^{(z)}$, wo z. B. $\vartheta^{(x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial z_2} \end{vmatrix}$. Sei $f = x_1 f_1 + x_2 f_2$, so bilde man aus dem Schema der Koeffizienten von f_1, f_2: $\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} & a_{221} & a_{222} \end{vmatrix}$ die Determinanten p_{ik} [vgl. (13)], so ist $\vartheta^{(y)} \equiv p_{12} y_1^2 + p_{34} y_2^2 + (p_{14} - p_{23}) y_1 y_2$.

Es ergibt sich:

$$2\,\vartheta^{(x)} \equiv (a'b')(a''b'') a_x b_x, \qquad 2\,\vartheta^{(y)} \equiv (ab)(a''b'') a'_y b'_y,$$
$$2\,\vartheta^{(z)} \equiv (ab)(a'b') a''_z b''_z.$$

Die gemeinsame Diskriminante R dieser drei Formen ist eine Invariante:

$$2R \equiv (ac)(bd)(a'b')(c'd')(a''b'')(c''d'').$$

Man beachte noch die trilineare Kovariante

$$Q \equiv a_x a'_y b''_z (bc)(b'c')(a''c'')$$
$$\equiv x_1 y_1 z_1 \{a_{111}^2 a_{222} + 2\, a_{211} a_{121} a_{112} - a_{111}(a_{211} a_{122} + a_{121} a_{212} + a_{112} a_{221})\} \ldots$$

Zwischen den drei Formen $\vartheta^{(x)} \vartheta^{(y)} \vartheta^{(z)}$, Q^2, Rf^2 besteht die Syzygie:

$$4\,\vartheta^{(x)} \vartheta^{(y)} \vartheta^{(z)} + Q^2 + Rf^2 \equiv 0.$$

Spezialisiert sich f zu einer kubischen Form a_x^3 (s. Aufgabe 1), so fallen $\vartheta^{(x)}$, $\vartheta^{(y)}$, $\vartheta^{(z)}$ zusammen mit Δ, und R, Q gehen in die dortigen Bildungen R, Q über.

Zwei trilineare Formen $f \equiv a_x a'_y a''_z$, $g \equiv b_x b'_y b''_z$, mit den Koeffizienten a_{ikl}, b_{ikl}, besitzen die bilineare Invariante

$$H_{fg} \equiv \begin{vmatrix} a_{111} & a_{222} \\ b_{111} & b_{222} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{211} & a_{122} \\ b_{211} & b_{122} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{121} & a_{212} \\ b_{121} & b_{212} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{112} & a_{211} \\ b_{112} & b_{211} \end{vmatrix}$$
$$\equiv (ab)(a'b')(a''b''),$$

sowie die drei Funktionaldeterminanten $\vartheta^{(xy)}$, $\vartheta^{(yz)}$, $\vartheta^{(xz)}$ als Kovarianten, wo z. B.

$$\vartheta^{(yz)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix} \equiv (a\,b)\,a'_y\,b'_y\,a''_z\,b''_z\,.$$

Aufgabe 3. Die binäre biquadratische Form

$$f \equiv a_x^4 \equiv b_x^4 \equiv \ldots \equiv a_0\,x_1^4 + 4\,a_1\,x_1^3\,x_2 + 6\,a_2\,x_1^2\,x_2^2 + 4\,a_3\,x_1\,x_2^3 + a_4\,x_2^4\,.$$

Kovarianten: 1. die Hessesche Form

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \equiv H_x^4 \equiv (a_0\,a_2 - a_1^2)\,x_1^4 + \ldots \equiv \tfrac{1}{2}(a\,b)^2\,a_x^2\,b_x^2\,;$$

2. die Funktionaldeterminante θ von H und f:

$$\theta \equiv 2\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix} \equiv x_1^6(a_0^2\,a_3 - 3\,a_0\,a_1\,a_2 + 2\,a_1^3) + \ldots \equiv a_x^3\,b_x^2\,c_x(b\,c)^2\,(a\,c)\,.$$

Invarianten*):

1. $i = a_0\,a_4 - 4\,a_1\,a_3 + 3\,a_2^2 \equiv \tfrac{1}{2}(a\,b)^4\,;$

2. $$j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \equiv \tfrac{1}{3}(f\,H)^4 \equiv \tfrac{1}{6}\,(a\,b)^2\,(b\,c)^2\,(a\,c)^2\,.$$

Zwischen den vier Formen von der Ordnung 12 und dem Grade 6:

$$\begin{aligned} \theta^2 &\equiv (a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(e\,b)\,(f\,d)\,e_x^3\,f_x^3\,a_x^2\,c_x^2\,b_x\,d_x\,, \\ H^3 &\equiv \tfrac{1}{8}(a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(e\,f)^2 \quad e_x^2\,f_x^2\,a_x^2\,c_x^2\,b_x^2\,d_x^2\,, \\ j\,f^3 &\equiv \tfrac{1}{6}(a\,b)^2\,(b\,c)^2\,(c\,a)^2 \quad e_x^4\,f_x^4\,d_x^4\,, \\ i\,H\,f^2 &\equiv \tfrac{1}{4}(a\,b)^2\,(c\,d)^4 \quad e_x^4\,f_x^4\,a_x^2\,b_x^2 \end{aligned}$$

besteht die Cayleysche Syzygie (vgl. § 16):

$$\theta^2 + 4\,H^3 - i\,H\,f^2 + j\,f^3 \equiv 0\,.$$

---

*) Manche Autoren bezeichnen $2\,i$ und $6\,j$ mit i resp. j.

Die Kovariante θf kann man (bis auf einen konstanten Faktor) auch auffassen als das Resultat der Elimination der y_1, y_2 aus den beiden Gleichungen

$$a_x^3 a_y = 0\,, \quad a_y^3 a_x = 0\,.$$

Zwei Formen $f \equiv a_x^4$, $g \equiv b_x^4$ besitzen die bilineare Invariante $H_{fg} \equiv (a\,b)^4$ und die Funktionaldeterminante $\vartheta_{fg} \equiv (a\,b)\,a_x^3 b_x^3$.

Aufgabe 4. Die quadrilineare Form

$$f \equiv a_x b_y c_z d_u \equiv a'_x b'_y c'_z d'_u \equiv \sum a_{iklm}\, x_i\, y_k\, z_l\, u_m$$
$$(i\,,\,k\,,\,l\,,\,m = 1,\,2)\,.$$

Eine quadratische Invariante ist:

$$i \equiv a_{1111}\,a_{2222} + a_{1122}\,a_{2211} + a_{1212}\,a_{2121} + a_{1221}\,a_{2112}$$
$$- a_{1112}\,a_{2221} - a_{1121}\,a_{2212} - a_{1211}\,a_{2122} - a_{1222}\,a_{2111} \equiv \tfrac{1}{2}(aa')\,(bb')\,(cc')\,(dd')\,.$$

Ferner existieren gegenüber kogredienten $S_1 = S_2$ drei lineare Invarianten mit der Summe Null:

$$(a\,b)\,(c\,d) \equiv (a_{1212} + a_{2121}) - (a_{1221} + a_{2112})\,,$$
$$(a\,c)\,(d\,b) \equiv (a_{1221} + a_{2112}) - (a_{1122} + a_{2211})\,,$$
$$(a\,d)\,(b\,c) \equiv (a_{1122} + a_{2211}) - (a_{1212} + a_{2121})\,.$$

Dagegen sind gegenüber inkogredienten S_1, S_2 kovariant die sechs doppeltquadratischen Formen $H^{(xy)}$ usw., wo z. B.

$$2\,H^{(xy)} \equiv 2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\,\partial u_k}\right|_{(i,\,k=1,\,2)} \equiv a_x\,a'_x\,b_y\,b'_y\,(c\,c')\,(d\,d')\,.$$

Für eine doppeltquadratische Urform $f \equiv a_x^2\,b_y^2 \equiv a_x'^2\,b_y'^2$ reduziert sich die Invariante i auf $\frac{1}{2}(a\,a')^2\,(b\,b')^2$, die erste der drei linearen Invarianten verschwindet identisch, während die beiden anderen in $(a\,b)^2$ zusammenfallen. Die Formen H reduzieren sich auf die drei:

$$2\,H^{(xx)} \equiv \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial y_k}\right|_{(i,\,k=1,\,2)} \equiv a_x^2\,a_x'^2\,(b\,b')^2\,,$$

entsprechend $2\,H^{(yy)}$, und noch

$$2\,H^{(xy)} \equiv \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial y_k}\right|_{(i,\,k=1,\,2)} \equiv a_x\,a'_y\,b_y\,b'_y\,(a\,a')\,(b\,b')\,.$$

Für $f \equiv a_x^4$ reduziert sich i auf die Invariante i (Aufgabe 3), die Formen H fallen mit der Hesseschen Form zusammen, während eine lineare Invariante nicht mehr existiert.

Aufgabe 5. Die allgemeine binäre Form $n$ter Ordnung

$$f \equiv a_x^n \equiv b_x^n \equiv \dots$$
$$\equiv a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots + a_n x_2^n .$$

Für gerades n existiert die quadratische Invariante

$$i \equiv a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 a_{n-2} - + \dots$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}^2 \equiv \tfrac{1}{2}(a\,b)^n ,$$

die sich für zwei Formen $f \equiv a_x^n$, $g \equiv b_x^n$, bei geradem wie ungeradem n, erweitert zu der „$n$ten Überschiebung $(f, g)^n$ von f über g“ („bilinearen“ Invariante):

$$H_{fg} \equiv a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - + \dots$$
$$+ (-1)^n a_n b_0 \equiv (a\,b)^n .$$

Bei ungeradem n und zusammenfallenden f, g verschwindet H identisch. Zwei Formen $f \equiv a_x^n$, $g \equiv b_x^m$ besitzen als Kovariante die Jacobische Funktionaldeterminante oder „erste Überschiebung“ $(f, g)^1$:

$$\vartheta_{fg} \equiv \frac{1}{m\,n} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix} \equiv (a\,b)\, a_x^{n-1} b_x^{m-1} .$$

Sind f, g im besondern die ersten Ableitungen einer Form $a_x^n \equiv b_x^n$, so geht ϑ über in die Hessesche Form

$$H \equiv \frac{1}{n^2(n-1)^2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k} \right|_{(i,\,k=1,\,2)} \equiv \tfrac{1}{2}(a\,b)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} .$$

Die Funktionaldeterminante θ der Urform und ihrer Hesseschen ist die Kovariante $(a\,b)^2\,(c\,b)\,c_x^{n-1}\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-3}$ $\equiv x_1^{3(n-2)}(a_0^2\,a_3 - 3\,a_0\,a_1\,a_2 + 2\,a_1^3) + \ldots$, die Verallgemeinerung der Form Q bei der f_3 und der Form θ bei der f_4. Allgemein besitzen zwei Formen $f \equiv a_x^n$, $g \equiv b_x^m$ $(m \leq n)$ als Kovariante die „$k$te Überschiebung“

$$(f,\,g)^k \equiv (a\,b)^k\,a_x^{n-k}\,b_x^{m-k}\,. \qquad (k \leq m)$$

Verschwindet für n Urformen $n$ter Ordnung a_{1x}^n, a_{2x}^n, $\ldots$, a_{nx}^n und eine weitere Form π_x^n die $n$te Überschiebung von π mit jeder der n Urformen, so heißt π die zu den Urformen „apolare“ („konjugierte“) Form und ist, bis auf einen konstanten Faktor, den man gleich Eins setzen kann, völlig bestimmt. Man hat:

$$\pi_x^n \equiv a_{1x}\,a_{2x}\ldots a_{nx}(a_1\,a_2)\,(a_1\,a_3)\ldots(a_1\,a_n)\,(a_2\,a_3)\ldots$$
$$(a_2\,a_n)\ldots(a_{n-1}a_n)\,.$$

Aufgabe 6. Ist $f = a_x^4 = b_x^4 = a_0\,x_1^4 + 4\,a_1\,x_1^3\,x_2 + \ldots$ eine binäre biquadratische Form, $H = H_x^4 = (a\,b)^2\,a_x^2\,b_x^2$ $= 2\,[(a_0\,a_2 - a_1^2)\,x_1^4 + \ldots]$ ihre Hessesche Form, ferner $a_x^2\,a_y^2 = a_0\,x_1^2\,y_1^2 + \ldots$ die zweite Polare von f, $H_x^2 H_y^2$ die zweite Polare von H, $(x\,y) = x_1\,y_2 - x_2\,y_1$, so soll die Richtigkeit der Identität nachgewiesen werden:

$$a_x^4\,b_y^4 - a_x^2\,a_y^2\cdot b_x^2\,b_y^2 \equiv 2\,(x\,y)^2 H_x^2 H_y^2\,,$$

die u. a. beim Additionstheorem der elliptischen Funktionen eine wichtige Rolle spielt. Es empfiehlt sich, die genannte Identität auch durch explizite reale Rechnung zu bestätigen.

Aufgabe 7. Sind a_x^2, b_x^2 zwei binäre quadratische Formen, $(a\,b)^2$ ihre bilineare Invariante, so ist $(a\,b\,u)^2$, wo

$$(a\,b\,u) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}\,,$$ und die u_i Linienkoordinaten*)

sind, eine invariante Bildung der beiden ternären quadratischen Formen a_x^2, b_x^2. Geometrisch stellt die Gleichung $(a\,b\,u)^2 = 0$ einen Kegelschnitt dar als Enveloppe der Ge-

---

*) Die u_i heißen auch zu den x_i „kontragredient“, da sie sich, wenn die x_i einer ternären S unterworfen werden, derart linear transformieren, daß die Linearform $u_x \equiv u_1\,x_1 + u_2\,x_2 + u_3\,x_3$ in sich übergeht.

raden (u), die die beiden Kegelschnitte $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ in zwei harmonischen Punktepaaren $[(ab)^2 = 0]$ treffen. Ist dagegen $a_x^2 = b_x^2 = 0$ ein und derselbe Kegelschnitt, so liefert die Gleichung $(a\,b\,u)^2 = 0$ seine Tangenten, d. h. die Geraden (u), die ihn in Punktepaaren mit verschwindender Diskriminante $[(a\,b)^2 = 0]$ treffen.

Das nämliche Prinzip ist anzuwenden auf die Invarianten i und j einer f_4, R einer f_3, indem man jeden binären Klammerfaktor $(a\,b)$ durch einen entsprechenden ternären $(a\,b\,u)$ ersetzt; man wird so zu Kurven geführt, deren Tangenten eine gegebene Kurve 4. Ordnung $a_x^4 = 0$ in vier äquianharmonischen resp. in vier harmonischen Punkten schneiden, andererseits zur Tangentengleichung einer ebenen Kurve 3. Ordnung $a_x^3 = 0$.

Es sind das spezielle Fälle eines allgemeinen, von Clebsch aufgestellten „Übertragungsprinzips" [vgl. A. Clebsch, Journal für Math. 59 (1860), S. 1, und A. Clebsch - F. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, I[1], Leipzig 1875, S. 274].

Zweiter Abschnitt.

Differentialgleichungen für invariante Bildungen binärer Formen.

Kapitel I.

Charakteristische Differentialgleichungen der Invarianz gegenüber Schiebungen und Streckungen.

§ 11. Differentialgleichungen für Schiebungsinvarianten.

Unter einer „binären Form“ $f_n = f$ n-ter „Ordnung“*) in zwei „homogenen“ Variabeln x_1, x_2 versteht man einen Ausdruck von der Gestalt:

$$(1) \quad \begin{cases} f_n \equiv f \equiv f(x_1, x_2) \equiv a_0 x_1^n + n_1 a_1 x_1^{n-1} x_2 + n_2 a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots \\ \qquad + n_2 a_{n-2} x_1^2 x_2^{n-2} + n_1 a_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + a_n x_2^n . \end{cases}$$

Unter $n_1, n_2, \dots$ seien ein für allemal die auf n bezüglichen Binomialkoeffizienten $n_1 = \frac{n}{1}$, $n_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \dots$ verstanden; es erweist sich oft als zweckmäßig, dieselben von vornherein in f einzuführen, weil dadurch eine Reihe von Formeln, insbesondere solcher, die durch Differentiationsprozesse aus (1) hervorgehen, durchsichtiger wird. Es sei $J(a_i) = J(a) = J$ eine — in dem a_i zunächst ganz rational vorausgesetzte — Funktion der Koeffizienten a_i der Urform f, von der besonderen Beschaffenheit, daß sie

*) Das Nullsetzen einer Form f (1) liefert eine Gleichung n-ter „Ordnung“ in der Unbekannten $\frac{x_1}{x_2}$ resp. $\frac{x_2}{x_1}$. Gewöhnlich bedient man sich des Terminus: Gleichung n-ten „Grades“, indessen soll sich im Texte durchweg der Ausdruck „Ordnung“ auf „Variable“ oder „Unbekannte“ beziehen, dagegen der Ausdruck „Grad“ oder „Dimension“ auf Koeffizienten.

sich gegenüber einer auf f ausgeübten „Schiebung" $A_1(h_1)$ resp. $A_2(h_2)$ von x_1 resp. x_2:

$$\text{(2 a)} \qquad A_1(h) \left| \begin{cases} x_1 = \xi_1 + h_1\,\xi_2\,, \\ x_2 = \;\xi_2\,, \end{cases} \right.$$

$$\text{(2 b)} \qquad A_2(h) \left| \begin{cases} x_1 = \xi_1 \\ x_2 = h_2\,\xi_1 + \xi_2\,, \end{cases} \right.$$

absolut invariant verhält. Geht also $f(x_1, x_2)$ (1) vermöge irgend einer der beiden Substitutionen (2) über in die „neue" Form $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \varphi$:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_n \equiv \varphi \equiv \varphi(\xi_1, \xi_2) \equiv \alpha_0 \xi_1^n + n_1 \alpha_1 \xi_1^{n-1} \xi_2 + n_2 \alpha_2 \xi_1^{n-2} \xi_2^2 + \ldots \\ \qquad + n_2 \alpha_{n-2} \xi_1^2 \xi_2^{n-2} + n_1 \alpha_{n-1} \xi_1 \xi_2^{n-1} + \alpha_n \xi_2^n\,, \end{cases}$$

so soll der mittels der α_i gebildete Ausdruck $J(\alpha)$ mit $J(a)$ für alle Werte der a_i und von h_1 resp. h_2 identisch sein:

$$\text{(I)} \qquad J(\alpha) \equiv J(a)\,.$$

$J(a) = J$ heißt dann eine „Schiebungsinvariante" von f bez. x_1 resp. x_2; ist jedoch die Eigenschaft (I) zugleich hinsichtlich beider Schiebungen (2) erfüllt, und damit auch, zufolge des Satzes VII des § 6 hinsichtlich jeder unimodularen Substitution U:

$$(4) \quad U \,|\, x_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2\,, \quad x_2 = \gamma\xi_1 + \delta\xi_2\,, \quad \Delta \equiv \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,,$$

so heiße J eine „unimodulare Invariante" von f.

Das Entsprechende soll gelten, wenn an Stelle einer einzigen Urform f_n ein „System" von Urformen f_n, g_p, $h_q, \ldots$ der resp. Ordnungen $n, p, q, \ldots$ zugrunde liegt; $J[(a), (b), (c), \ldots]$ hängt dann von den Koeffizientenreihen $a_i, b_k, c_l, \ldots$ der $f, g, h, \ldots$ ab, und die Schiebung (2 a) resp. (2 b) erstreckt sich gleichmäßig auf sämtliche Urformen. Die Identität (I) dehnt sich dann, wenn die Koeffizientenreihen der transformierten Urformen mit α_i, $\beta_k, \gamma_l, \ldots$ bezeichnet werden, aus zu der folgenden:

$$\text{(I')} \qquad J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots] \equiv J[(a), (b), (c), \ldots]\,.$$

Der Deutlichkeit halber beschränken wir uns zunächst auf eine einzelne Urform f und die Schiebung (2a); die Ergebnisse lassen sich fast unmittelbar auf den Fall mehrerer Urformen und auf die Schiebung (2b) übertragen.

Statt h_1 schreibe man vorab bequemer h; an Stelle der homogenen Gestalt von (1), (2a), (3) wird, wo es zweckmäßig erscheint, auch die nichthomogene verwendet, die jeweils für $x_1 = x$, $x_2 = 1$; $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = 1$ entsteht.

Faßt man die linke Seite $J(\alpha)$ von (I) als (ganzrationale) Funktion von h auf, so läßt sie sich nach dem Maclaurinschen Gesetze entwickeln:

$$(5)\quad J(\alpha) = J(a) + h\frac{dJ(\alpha)}{dh\ (h=0)} + \frac{h^2}{1\cdot 2}\,\frac{d^2J(\alpha)}{dh^2\ (h=0)} + \ldots$$

Soll gemäß (I) die rechte Seite von (5) für alle Werte von h mit $J(a)$ übereinstimmen, so müssen der Reihe nach die Koeffizienten von $h, h^2, \ldots$ verschwinden, insonderheit also der erste:

$$(6)\qquad \frac{dJ(\alpha)}{dh\ (h=0)} \equiv J'(\alpha)_{(h=0)} = 0\,,$$

wo der Akzent die Differentiation nach h angibt.

Die Funktion $J(\alpha)$ hängt zunächst von den α_i [in (3)] ab, diese hängen wiederum von h ab; somit erhält man für ein beliebiges h:

$$(7)\quad \begin{cases} J'(\alpha) = \dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_0}\,\alpha_0' + \dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_1}\,\alpha_1' + \ldots + \dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_n}\,\alpha_n' \\[2ex] \qquad\;\; = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i}\,\alpha_i'\,. \end{cases}$$

Für $\lim h = 0$ reduzieren sich in $\dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i}$ alle α auf die bezüglichen a, so daß $\dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i\ (h=0)} = \dfrac{\partial J(a)}{\partial a_i} = \dfrac{\partial J}{\partial a_i}$ wird, andererseits gehen die totalen Ableitungen $\alpha_i'(h) = \dfrac{d\alpha_i(h)}{dh}$ über in ihre „Nullwerte“ $\alpha_i'(0)$, und aus (7) entsteht:

$$(8)\quad \begin{cases} J'(\alpha)_{(h=0)} \equiv \dfrac{\partial J}{\partial a_0}\,\alpha_0'(0) + \dfrac{\partial J}{\partial a_1}\,\alpha_1'(0) + \ldots + \dfrac{\partial J}{\partial a_n}\,\alpha_n'(0) \\[2ex] \qquad\qquad\;\; \equiv \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial J}{\partial a_i}\,\alpha_i'(0)\,. \end{cases}$$

Um die $\alpha_i'(0)$ zu erhalten, hat man erst die $\alpha_i(h)$ zu bilden, sodann nach h zu differenzieren und hinterher $h=0$ zu setzen.

Übt man die Schiebung $A_1(h)$ (2a) auf $f(x_1, x_2)$ (1) aus, so entsteht die transformierte Form $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ (3) dadurch, daß in f der Reihe nach die Potenzen $x_1^n, x_1^{n-1}, \ldots$ ersetzt werden durch $(\xi_1 + h\,\xi_2)^n$, $(\xi_1 + h\,\xi_2)^{n-1}, \ldots$; entwickelt man die letzteren nach dem binomischen Satze und ordnet sodann φ nach fallenden Potenzen von ξ_1 — oder entwickelt man kürzer, was auf dasselbe hinauskommt, $f(\xi_1 + h\,\xi_2, \xi_2) = f(\xi + h)$ nach dem Maclaurinschen Gesetze —, so ergibt sich, wenn $f^{(i)}(x)$ die i-te Ableitung von $f(x_1, 1) = f(x)$ nach x bedeutet, für irgend ein $\alpha_i(h)$ die Darstellung:

$$\alpha_i(h) = \frac{1}{n(n-1)\ldots(i+1)} f^{(n-i)}(h) \tag{9}$$
$$(i = 0, 1, \ldots n), \quad (f^{(0)} = f),$$

oder explizite:

$$\alpha_i(h) = a_0 h^i + i_1 a_1 h^{i-1} + i_2 a_2 h^{i-2} + \ldots + i_1 a_{i-1} h + a_i \tag{9'}$$
$$(i = 0, 1, \ldots n).$$

Hieraus entnimmt man ohne weiteres die Nullwerte $\alpha_i'(0)$ der $\alpha_i'(h)$:

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha_0'(0) = 0, \quad \alpha_1'(0) = 1 \cdot a_0, \quad \alpha_2'(0) = 2 \cdot a_1, \ldots, \\ \qquad \alpha_i'(0) = i\,a_{i-1}, \ldots, \\ \alpha_{n-1}'(0) = (n-1)\,a_{n-2}, \quad \alpha_n'(0) = n \cdot a_{n-1}, \end{cases}$$

und desgleichen die Nullwerte der höheren Ableitungen der $\alpha_i(h)$:

$$(10')\quad \begin{cases} \alpha_i''(0) = i(i-1)a_{i-2}, \quad \alpha_i'''(0) = i(i-1)(i-2)a_{i-3}, \ldots, \\ \ldots, \quad \alpha_i^{(r)}(0) = i(i-1)\ldots(i-r+1)\,a_{i-r} \\ (r \leqq i, \quad i = 0, 1 \ldots n). \end{cases}$$

Damit nimmt die Gleichung (6) die Gestalt der linearen, partiellen Differentialgleichung bezüglich der a_i an *):

---

*) Bei Änderung der Schreibweise der Koeffizienten resp. der Variabeln in der Urform $f(x_1, x_2)$ (1) nimmt die Gleichung (IIa) entsprechend andere Gestalten an.

$$\text{(IIa)} \begin{cases} \nabla_1(J) \equiv 0 \cdot \dfrac{\partial J}{\partial a_0} + 1 \cdot a_0 \dfrac{\partial J}{\partial a_1} + 2\, a_1 \dfrac{\partial J}{\partial a_2} + \ldots \\ + i a_{i-1} \dfrac{\partial J}{\partial a_i} + \ldots + n\, a_{n-1} \dfrac{\partial J}{\partial a_n} \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} i a_{i-1} \dfrac{\partial J}{\partial a_i} = 0 . \end{cases}$$

Falls ein derartiger Differentiationsprozeß, wie hier ∇_1, auf eine noch näher zu bestimmende Funktion der a angewendet wird, empfiehlt es sich, die letztere gar nicht zu bezeichnen, also zu schreiben:

$$(\text{II}\alpha) \begin{cases} \nabla_1 \equiv 1 \cdot a_0 \dfrac{\partial}{\partial a_1} + 2\, a_1 \dfrac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + i\, a_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial a_i} + \ldots \\ \qquad + n\, a_{n-1} \dfrac{\partial}{\partial a_n} \equiv \sum\limits_{i=1}^{i=n} i\, a_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial a_i} . \end{cases}$$

Setzt man z. B. f ohne Binomialkoeffizienten an: $f \equiv a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + a_2 x_2^n$, so hat man in (IIa) überall a_i durch $\frac{a_i}{n_i}$ zu ersetzen, so daß (IIa), da $\frac{n_i}{n_{i-1}} = \frac{n-i+1}{i}$, übergeht in

$$\nabla_1 J \equiv \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, a_{i-1} \frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 .$$

Dabei ist es oft zweckmäßiger, die Bezeichnung der Koeffizienten in der Reihenfolge umzukehren und die Variabeln nichthomogen zu schreiben: $f \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$; dann lautet (IIa):

$$\nabla_1 J \equiv \sum_{i=1}^{n} i\, a_i \frac{\partial J}{\partial a_{i-1}} = 0 .$$

Öfters bietet sich auch die Urform in der Gestalt dar, wie sie durch das Maclaurinsche Gesetz entsteht: $f \equiv a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!} x^n$. Dann kommt:

$$\nabla_1 J \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial J}{\partial a_{i-1}} = 0 .$$

Diese Struktur von (IIa) ist u. a. dann am Platze, wenn der Begriff der Invarianten auf transzendente Urformen f erweitert werden soll (s. § 18).

Bei der zweiten, oben angegebenen Schreibart: $f \equiv a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n$ geht die Gleichung (IIb) über in:

$$\nabla_2 J \equiv \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\, a_{i+1} \frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 .$$

Setzt man dann eine bestimmte Funktion, z. B. J ein, so läßt man auch die Klammer weg, schreibt also $\nabla_1 J$, usw.

Ganz analog verfährt die Rechnung bei der Schiebung $A_2(h_2)$ (2b); man erkennt sofort, daß sich hierbei nur überall je zwei „symmetrisch gelegene" Koeffizienten a_i und a_{n-i} vertauschen. Versteht man also unter ∇_2 den Differentiationsprozeß:

$$(\mathrm{II}\beta)\quad \left\{\begin{aligned} \nabla_2 &\equiv 1\cdot a_n\frac{\partial}{\partial a_{n-1}} + 2\,a_{n-1}\frac{\partial}{\partial a_{n-2}} + \cdots \\ &\quad + i\,a_{n-i+1}\frac{\partial}{\partial a_{n-i}} + \cdots + n\,a_1\frac{\partial}{\partial a_0} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} i\,a_{n-i+1}\frac{\partial}{\partial a_{n-i}} \equiv \sum_{i=0}^{n}(n-i)\,a_{i+1}\frac{\partial}{\partial a_i}\,, \end{aligned}\right.$$

so lautet die mit (IIa) parallel laufende Gleichung:

$$(\mathrm{II\,b})\qquad \nabla_2 J = 0\,,$$

und es gilt:

Satz I. „**Besitzt eine mit Binomialkoeffizienten geschriebene binäre Urform n-ter Ordnung $f(x_1, x_2)$ (1) die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, und sind die beiden linearen partiellen, auf die a_i bezüglichen Differentiationsprozesse ∇_1 und ∇_2 durch (IIα), (IIβ) erklärt, so genügt eine Schiebungsinvariante von f bez. x_1 resp. x_2 der Bedingung $\nabla_1 = 0$, resp. $\nabla_2 = 0$, während beide Bedingungen zugleich durch eine unimodulare Invariante von f erfüllt werden.**"

Diese „Schiebungsdifferentialgleichungen" (IIa), (IIb) bilden eine erste Verallgemeinerung der in § 10 für Invarianten einer quadratischen Form f unter (XVI) aufgeste lten.

Die Übertragung des Satzes I auf ein System binärer Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots$ der Ordnungen $n, p, q, \ldots$ mit den Koeffizientenreihen $(a_i), (b_k), (c_l), \ldots$ vollzieht sich ohne Schwierigkeit.

Sei $J[(a), (b), (c), \ldots]$ ein in den $a_i, b_k, c_l, \ldots$ ganzrationaler Ausdruck, der sich gemäß (I′) nicht ändern soll, wenn man die $a_i, b_k, c_l, \ldots$ ersetzt durch die bezüglichen Koeffizienten $\alpha_i, \beta_k, \gamma_l, \ldots$ der vermöge einer Schiebung $A_1(h)$ (2a) aus $f_n, g_p, h_q, \ldots$ hervorgehenden Formen φ_n,

$\psi_p, \chi_q, \ldots$ Dann bleibt die Maclaurinsche Entwicklung (5), sowie infolgedessen die Gleichung (6) erhalten, sobald man überall die Zeichen $J(a)$, $J(\alpha)$ ersetzt durch $J[(a), (b), (c), \ldots]$, resp. $J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots]$. Dagegen nimmt (7) jetzt die erweiterte Gestalt an:

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dJ[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots]}{dh} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots]}{\partial \alpha_i} \alpha_i' \\ &+ \sum_{k=0}^{p} \frac{\partial J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots]}{\partial \beta_k} \beta_k' + \sum_{l=0}^{q} \frac{\partial J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots]}{\partial \gamma_l} \gamma_l' + \cdots, \end{aligned}\right.$$

woraus sich die korrespondierende Erweiterung (8′) von (8) von selbst ergibt. Sodann stelle man die Formeln (9), (10) der Reihe nach für die $\alpha_i, \beta_k, \gamma_l, \ldots$ auf und setze die Werte der $\alpha_i(0), \beta_k(0), \ldots$, sowie der $\alpha_i'(0), \beta_k'(0), \ldots$ in (6) ein. Damit erweitern sich die Differentialprozesse ∇_1 (IIα), ∇_2 (IIβ) zu:

$$(\mathrm{II}\alpha')\quad \nabla_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} i\, a_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^{p} k\, b_{k-1} \frac{\partial}{\partial b_k} + \cdots,$$

$$(\mathrm{II}\beta')\quad \left\{\begin{aligned} \nabla_2 &\equiv \sum_{i=1}^{n} i\, a_{n-i+1} \frac{\partial}{\partial a_{n-i}} + \sum_{k=1}^{p} k\, b_{k-p+1} \frac{\partial}{\partial b_{p-k}} + \cdots \\ &\equiv \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\, a_{i+1} \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_{k=0}^{n-1} (p-k)\, b_{k+1} \frac{\partial}{\partial b_k} + \cdots, \end{aligned}\right.$$

und folglich die Schiebungsdifferentialgleichungen (IIa), (IIb) zu:

$$(\mathrm{IIa}')\qquad \nabla_1 J[(a), (b), \ldots] = 0\,,$$

$$(\mathrm{IIb}')\qquad \nabla_2 J[(a), (b), \ldots] = 0\,.$$

Die obigen Termini „Schiebungsinvariante bez. x_1 resp. x_2“ und „unimodulare Invariante“ sind nur mit den Zusätzen „simultane“ und „von $f, g, h, \ldots$“ zu versehen, von denen der erstere auch unterbleibt.

Der Satz I erhält so die erweiterte Fassung:

Satz II. „Sind die, auf die Koeffizientenreihen $(a), (b), (c), \ldots$ eines Systems binärer Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots$ auszuübenden linearen partiellen Differentiationsprozesse ∇_1, ∇_2 durch (IIα'), (IIβ') erklärt, so genügt jede simultane Schiebungsinvariante von $f, g, h, \ldots$ bez. x_1 resp. x_2 der Gleichung $V_1 = 0$, resp. $V_2 = 0$, und jede simultane unimodulare Invariante von $f, g, h, \ldots$ beiden Gleichungen gleichzeitig."

Es erhebt sich jetzt die Frage nach den höheren partiellen Differentialgleichungen, die durch Nullsetzen der Koeffizienten von $h^2, h^3, \ldots$ in (5) entstehen. Sei zunächst wieder eine einzelne Urform f vorgelegt. Bei den in § 10 behandelten Beispielen waren mit der linearen Gleichung (6) stets von selbst jene höheren Gleichungen miterfüllt. Es soll nachgewiesen werden, daß in der Tat allgemein die Gleichungen:

$$(11) \qquad \frac{d^2 J(\alpha)}{dh^2 \;(h=0)} = 0\,, \qquad \frac{d^3 J(\alpha)}{dh^3 \;(h=0)} = 0\,, \qquad \ldots$$

eine Folge der einzigen Gleichung (6) $V_1 \equiv \dfrac{dJ(\alpha)}{dh \;\;(h=0)} = 0$ sind; es wird sich nämlich zeigen, daß die linken Seiten von (11) lediglich durch Ausübung des Prozesses V_1 resp. V_2 auf die linke Seite von (6) hervorgehen.

Zunächst liefert einmalige Wiederholung der Differentiation von (7) nach h:

$$(12) \qquad \frac{d^2}{dh^2} \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} \alpha_i' \alpha_k' + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \alpha_i''\,,$$

woraus für $\lim h = 0$ folgt:

$$(13) \qquad \frac{d^2}{dh^2 \;\;(h=0)} \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \alpha_i'(0)\, \alpha_k'(0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \alpha_i''(0)\,.$$

Andererseits werde auch der Prozeß $V_1 \equiv \dfrac{d}{dh \;\;(h=0)}$ (8) einmal wiederholt und diese Wiederholung mit $V_1(V_1) \equiv V_1^2$ bezeichnet. Dann erhält man:

$$(14) \qquad V_1^2 \equiv \sum_{i=0}^{n} V_1\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right) \cdot \alpha_i'(0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial a_i} \cdot V_1\{\alpha_i'(0)\}\,.$$

Hier führe man zuvörderst das erste Aggregat rechterhand auf Grund von (8) aus, so kommt:

$$(15)\qquad \sum_{i=0}^{n} \nabla_1\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right) \cdot \alpha_i'(0) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial a_i\, \partial a_k} \cdot \alpha_i'(0)\, \alpha_k'(0)\,.$$

Mithin stimmt die rechte Seite von (15) mit dem ersten Aggregate auf der rechten Seite von (13) überein, und zwar ganz unabhängig davon, was für Funktionen von h die α_i sind. Im zweiten Aggregate der rechten Seite von (14) werde, bei festgehaltenem Index i, der Faktor von $\dfrac{\partial}{\partial a_i}$ untersucht. Die Ausführung gemäß (8) ergibt:

$$(16)\qquad \nabla_1\{\alpha_i'(0)\} \equiv \sum_{k=0}^{n} \alpha_k'(0)\, \frac{\partial \alpha_i'(0)}{\partial a_k}\,.$$

Hier greifen die spezifischen Abhängigkeiten (9), (10) ein. Danach war $\alpha_i'(0) = i\, a_{i-1}$, also verschwinden sämtliche $\dfrac{\partial \alpha_i'(0)}{\partial a_k}$ mit Ausnahme des Falles $k = i - 1$, wo $\dfrac{\partial \alpha_i'(0)}{\partial a_{i-1}} = i$ entsteht. Andererseits besaß nach (10) $\alpha_{i-1}'(0)$ den Wert $(i-1)\, a_{i-2}$, so daß (16) übergeht in:

$$(17)\qquad \nabla_1\{\alpha_i'(0)\} \equiv i(i-1)\, a_{i-2}\,,$$

oder auch, zufolge der ersten Gleichung (10′), in:

$$(18)\qquad \nabla_1\{\alpha_i'(0)\} \equiv \alpha_i''(0)\,.$$

Aber $\alpha_i''(0)$ war gerade der Faktor von $\dfrac{\partial}{\partial a_i}$ im zweiten Aggregate der rechten Seite von (13). Vermöge (15) und (18) stimmen daher die rechten, also auch die linken Seiten von (13), (14) völlig überein, und es ergibt sich die Identität der beiden Prozesse:

$$(19)\qquad \frac{d^2}{dh^2\ (h=0)} \equiv \nabla_1[\nabla_1] \equiv \nabla_1^2\,,$$

unabhängig von der Natur der einzusetzenden Funktion (falls sie nur die erforderlichen Ableitungsprozesse zuläßt).

Setzt man an Stelle dieser Funktion im besondern eine Schiebungsinvariante J von f bez. x_1 ein, so daß $\nabla_1 J \equiv 0$ ist, so muß auch die rechte Seite von (19) identisch verschwinden, d. h. die erste Gleichung (11) stellt sich als Folge von (6) dar.

Offenbar bleibt der geführte Beweis Wort für Wort auch für den Prozeß ∇_2 bestehen.

Wir gehen zum nächsten Falle über. Durch abermalige Differentiation von (12) nach h ergibt sich:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^3}{dh^3} &\equiv \sum_{i=0}^{n} \alpha_i''' \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \alpha_i'' \alpha_k' \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} \\ &+ \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \alpha_i' \alpha_k' \alpha_l' \frac{\partial^3}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k \partial \alpha_l}, \end{aligned}\right.$$

also für $h = 0$:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^3}{dh^3\,(h=0)} &\equiv \sum_{i=0}^{n} \alpha_i'''(0) \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \alpha_i''(0)\, \alpha_k'(0) \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_k} \\ &+ \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \alpha_i'(0)\, \alpha_k'(0)\, \alpha_l'(0) \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l}. \end{aligned}\right.$$

Andererseits liefert die nochmalige Ausübung des Prozesses ∇_1 auf ∇_1^2 (14):

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \nabla_1^3 &\equiv \sum_{i=0}^{n} \nabla_1^2\{\alpha_i'(0)\} \frac{\partial}{\partial a_i} + 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \nabla_1\{\alpha_i'(0)\}\, \nabla_1\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right) \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i'(0)\, \nabla_1^2\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right). \end{aligned}\right.$$

Um die rechten Seiten von (21) und (22) ineinander überzuführen, gehe man lieber von (22) aus. Schreibt man kürzer $\sum\limits_i, \sum\limits_k, \ldots$ statt $\sum\limits_{i=0}^{n}, \sum\limits_{k=0}^{n}, \ldots$, so gilt zunächst, wie schon bei (15) benützt wurde:

$$(23)\qquad \nabla_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \equiv \sum_k \alpha_k'(0) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k},$$

und hieraus folgt:

$$(24)\qquad \nabla_1^2 \frac{\partial}{\partial a_i} \equiv \sum_k \sum_l \alpha_k'(0)\,\alpha_l'(0)\,\frac{\partial^3}{\partial a_i\,\partial a_k\,\partial a_l}\,,$$

wiederum unabhängig von der Art der Funktionen $\alpha_i(h)$.

Andererseits war vermöge (16), (17), (18):

$$(25)\qquad \nabla_1\{\alpha_i'(0)\} \equiv \nabla_1(i\,a_{i-1}) = i(i-1)\,a_{i-2} = \alpha_i''(0)\,,$$

und hieraus folgt, wiederum vermöge (9):

$$(26)\qquad \nabla_1^2\{\alpha_i'(0)\} \equiv \nabla_1^2(i\,a_{i-1}) = i(i-1)\,(i-2)\,a_{i-3} = \alpha_i'''(0)\,.$$

Vermöge (26) geht das erste Aggregat rechterhand von (22) in das erste von (21) über, entsprechend das zweite in das zweite auf Grund von (23) und (25), endlich das dritte in das dritte vermöge (24).

Somit resultiert die Identität:

$$(27)\qquad \frac{d^3}{dh^3}_{(h=0)} \equiv \nabla_1^2[\nabla_1] \equiv \nabla_1^3\,,$$

unabhängig von der Natur der einzusetzenden Funktion.

Im besonderen ist daher wiederum für eine Schiebungsinvariante $J(a)$ von f bez. x_1 die zweite Gleichung (11) eine Folge von (IIa). Das Analoge gilt für den Prozeß ∇_2.

Um jetzt die entsprechende Untersuchung allgemein zu führen, bediene man sich der Abkürzungen:

$$(28)\qquad \nabla_1\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right) \equiv D_i\,, \qquad \nabla_1\{\alpha_i'(0)\} \equiv \Delta_i\,,$$

und für die Wiederholungen dieser Operationen der Zeichen D_i^2, D_i^3, ..., Δ_i^2, Δ_i^3, ...

Es bedeute ϱ den r-ten Summationsindex in der Reihe $i, k, l, \ldots$, dann ergibt sich einmal, zufolge der Definition (8) von ∇_1, ohne weiteres vermöge vollständiger Induktion:

$$(\mathrm{III})\qquad D_i^r \equiv \sum_k \sum_l \sum_m \ldots \sum_{\varrho+1} \alpha_k'(0)\,\alpha_l'(0)\ldots\alpha_{\varrho+1}'(0)\,\frac{\partial^{r+1}}{\partial a_i\,\partial a_k\,\partial a_l\ldots\partial a_{\varrho+1}}$$
$$(r = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

andererseits ebenso, auf Grund von (9):

$$(\mathrm{IV})\qquad \Delta_i^r \equiv \alpha_i^{(r+1)}(0) = i(i-1)\,(i-2)\ldots(i-r)\,a_{i-r-1}$$
$$(r = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Man bemerke noch, daß in (III) jedes D_i^r für $r > n$ und in (IV) jedes $\varDelta_i^r$ für $r > i$ identisch verschwindet.

Zieht man ferner die Regel*) für mehrmalige Differentiation eines Produktes zweier Funktionen einer Variabeln heran, und bedeuten $r_1, r_2, \ldots$ die zu r gehörigen Binomialkoeffizienten, so führt die Weiterführung von (12), (21) zu der Darstellung:

$$(\mathrm{V})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^{r+1}}{dh^{r+1}}_{\,|\,(h=0)} &\equiv \sum_i \frac{\partial}{\partial a_i}\cdot \alpha_i^{(r+1)}(0) + r_1 \sum_i\sum_k \frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial a_k}\cdot \alpha_i^{(r)}(0)\,\alpha_k'(0)\\ &+ r_2 \sum_i\sum_k\sum_l \frac{\partial^3}{\partial a_i\,\partial a_k\,\partial a_l}\cdot \alpha_i^{(r-1)}(0)\,\alpha_k'(0)\,\alpha_l'(0) + \ldots\\ &+ r_1 \sum_i\sum_k\sum_l \cdots \sum_\varrho \frac{\partial^r}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l \ldots \partial a_\varrho}\cdot \alpha_i''(0)\,\alpha_k'(0)\,\alpha_l'(0)\ldots\alpha_\varrho'(0)\\ &+ \sum_i\sum_k \cdots \sum_{\varrho+1} \frac{\partial^{r+1}}{\partial a_i\,\partial a_k \ldots \partial a_{\varrho+1}}\,\alpha_i'(0)\,\alpha_k'(0)\ldots\alpha_{\varrho+1}'(0)\,. \end{aligned}\right.$$

Auf Grund der nämlichen Differentiationsregel erscheint andererseits als Verallgemeinerung der Formeln (14), (22):

$$(\mathrm{VI})\quad \left\{\begin{aligned} \nabla_1^{r+1} \equiv \sum_i \frac{\partial}{\partial a_i}\cdot \varDelta_i^r + r_1 \sum_i D_i\,\varDelta_i^{r-1} + r_2 \sum_i D_i^2 \varDelta_i^{r-2}\\ + \ldots + r_1 \sum_i D_i^{r-1}\,\varDelta_i + \sum_i D_i^r\,\alpha_i'(0)\,. \end{aligned}\right.$$

Dann geht in der Tat infolge der Relationen (III), (IV) je ein Aggregat von (VI) über in das korrespondierende von (V). Demnach besteht, wenn man wieder r statt $r+1$ schreibt, die grundlegende Identität der beiden Differentialprozesse**):

$$(\mathrm{VII})\qquad \frac{d^r}{dh^r\ \ (h=0)} \equiv \nabla_1^{r-1}(\nabla_1) \equiv \nabla_1^r\,. \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

Versteht man jetzt unter h den Parameter der Schiebung A_2 (2b), so gilt dieselbe Identität (VII) für den

*) S. z. B. diese Sammlung Band VI „Integralrechnung" von W. Fr. Meyer, § 30, S. 327.

**) Ein kürzerer Beweis für die Identität (VII) wird in § 22 unter Benutzung der Wurzeln der Urform f, resp. der Urformen $f, g, h, \ldots$ gegeben werden.

Prozeß ∇_2, da sich hierbei nur je zwei symmetrisch gelegene Koeffizienten a_i und a_{n-i} vertauschen. Mithin verschwinden im besonderen in (5), resp. in der, der Schiebung A_2 entsprechenden Entwicklung, sobald der Koeffizient von h verschwindet, auch alle folgenden Koeffizienten von $h^2, h^3, \ldots$

Bedeutet aber allgemeiner $J(a)$ einen ganz beliebig vorgelegten Ausdruck in den a, und benützt man kürzer ∇ als gemeinsame Bezeichnung für die beiden Prozesse ∇_1, ∇_2, so geht aus (5) und (VII) hervor, daß infolge einer auf die Urform f ausgeübten Schiebung $A_1(h)$, resp. $A_2(h)$ die grundlegende Doppelentwicklung besteht:

$$\text{(VII')} \quad J(\alpha) \equiv J(a) + h\nabla\{J(a)\} + \frac{h^2}{2!}\nabla^2\{J(a)\} + \frac{h^3}{3!}\nabla^3\{J(a)\} + \ldots$$

Bisher lag nur eine einzelne Urform f_n mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ zugrunde. Tritt jetzt an deren Stelle wiederum ein System von Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots$, mit den Koeffizientenreihen $(a), (b), (c), \ldots$, so sind in den Entwicklungen (III) bis (VII) nur jeweils die einzelnen Aggregatsummen auf die sämtlichen Koeffizientenreihen der $(a), (b), (c), \ldots$ auszudehnen; man fügt dann genauer diesen Summen der Reihe nach den Index $f, g, h, \ldots$ hinzu.

Damit ist der Fundamentalsatz bewiesen, der zugleich die Umkehrung der Sätze I, II enthält:

Satz III. „Liegen eine oder mehrere binäre Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots$ vor, von den Ordnungen $n, p, q, \ldots$ in den Variabeln x_1, x_2, und mit den, mit Binomialkoeffizienten behafteten Koeffizienten $n_i a_i, p_k b_k, q_l c_l, \ldots$, und versteht man unter ∇_1, ∇_2 die beiden linearen partiellen Differentiationsprozesse:

$$\nabla_1 \equiv \sum_{i=0}^{p} i\, a_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_{k=0}^{p} k\, b_{k-1} \frac{\partial}{\partial b_k} + \ldots,$$

$$\nabla_2 \equiv \sum_{i=0}^{p} i\, a_{n-i+1} \frac{\partial}{\partial a_{n-i}} + \sum_{k=0}^{p} k\, b_{p-k+1} \frac{\partial}{\partial b_{p-k}} + \ldots,$$

so ist die Bedingung $\nabla_1 J = 0$ resp. $\nabla_2 J = 0$ notwendig und hinreichend dafür, daß der Ausdruck $J[(a), (b), (c), \ldots]$ eine Schiebungsinvariante von

$f, g, h, \ldots$ bez. x_1 resp. x_2 ist, sowie das gleichzeitige Bestehen beider Bedingungen dafür, daß J eine unimodulare Invariante von $f, g, h, \ldots$ ist. Versteht man aber allgemeiner unter J eine beliebige Funktion der $(a), (b), (c), \ldots$, und bedeuten $(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots$ die Koeffizientenreihen der vermöge der Schiebung $A_1(h)$, resp. $A_2(h)$ transformierten Urformen, so gilt für $\nabla \equiv \nabla_1$ resp. ∇_2 die Doppelentwicklung:

$$\text{(VII')}\quad J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots] \equiv J + h\nabla J + \frac{h^2}{2!}\nabla^2 J + \frac{h^3}{3!}\nabla^3 J + \ldots \text{“}$$

Aufgabe 1. Für die in Anmerkung *) auf S. 186 f. angegebene erste und dritte Schreibweise der Urform f ist der Prozeß ∇_2 umzugestalten.

Aufgabe 2. Die im Beweise des Hauptsatzes auf S. 193 f. verwendete allgemeine Induktion ist im einzelnen auszuführen.

Aufgabe 3. Es ist zu zeigen, daß die Bedingungen $\nabla_1 = 0$, $\nabla_2 = 0$ für die (vgl. Aufg. 6 zu § 6, S. 76) Invarianten R von f_3, i und j von f_4, sowie für die bilineare Invariante von f_n, g_n und die quadratische Invariante von f_{2n} erfüllt sind. Dagegen genügt der erste Koeffizient $a_0 a_2 - a_1^2$ der Kovariante Δ von f_3 nur der Bedingung $\nabla_1 = 0$ und der letzte Koeffizient $a_1 a_3 - a_2^2$ nur der Bedingung $\nabla_2 = 0$. Entsprechendes gilt von der Kovariante $Q = \begin{vmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ \Delta_{x_1} & \Delta_{x_2} \end{vmatrix}$ von f_3, sowie von den Kovarianten H und $\theta = \begin{vmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ H_{x_1} & H_{x_2} \end{vmatrix}$ von f_4 (s. die Aufgaben 1 und 3 zum Anhange von Abschnitt I.

Aufgabe 4. Auf Grund der in Aufg. 7 zu § 6 gemachten Angaben sind die Schiebungsdifferentialgleichungen auf Invarianten J einer ternären Urform $f(x_1, x_2, x_3)$ resp. auf ein System solcher auszudehnen.

Ordnet man f z. B. nach x_3:

$$f = f_0 x_3^n + f_1 x_3^{n-1} + f_2 x_3^{n-2} + \ldots + f_n,$$

wo f_i eine binäre Form $i$ter Ordnung in x_1, x_2 ist, so sagen die den Schiebungen $A_1(h_1) = A_{12}(h_1)$, $A_2(h_2) = A_{21}(h_2)$ bez. x_1 resp. x_2 entsprechenden Differentialgleichungen

$V_{12}J = 0$, $J_{21}J = 0$ aus, daß J eine Schiebungsinvariante des binären Systems der $f_0, f_1, \ldots, f_n$ bez. x_1 resp. x_2 ist, und entsprechend für die beiden weiteren Paare von Gleichungen $V_{23} = 0$, $V_{32} = 0$; $V_{31} = 0$, $V_{13} = 0$.

Aus dem l. c. betonten Zusammenhange zwischen den sechs Schiebungen geht hervor, daß von jenen sechs Gleichungen gewisse drei eine Folge der drei übrigen sind (z. B. von $V_{12} = 0$, $V_{23} = 0$, $V_{31} = 0$). Vgl. § 12.

Analoges gilt für quaternäre, ..., n-äre Urformen (in 4, ..., n homogenen Variabeln) resp. Systeme solcher.

§ 12. Die Gewichtsregeln und Gewichtsdifferentialgleichungen für Streckungsinvarianten binärer Formen. Die Differentialgleichungen für vollständige Invarianten.

Sei wieder $J[(a), (b), (c), \ldots] = J$ irgend eine in den Koeffizientenreihen $(a), (b), (c), \ldots$ der Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots$ ganzrationale Funktion. Liegt zuvörderst nur eine einzige Urform f_n [§ 11, (1)] vor, so ist J ein Aggregat von der Struktur:

$$(1) \qquad J(a) \equiv \sum c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} = \sum c\, t = \sum T,$$

wo rechts eine endliche Summe von Gliedern T steht, die ε_i nichtnegative ganze Zahlen sind, die nicht sämtlich verschwinden, und die c numerische Faktoren.

Auf die Urform $f_n(x_1, x_2)$ werde eine „Streckung“ $M_1(m_1)$ resp. $M_2(m_2)$ von x_1 resp. x_2 ausgeübt:

$$(2\text{a}) \qquad M_1(m_1) \mid x_1 = m_1 \xi_1, \quad x_2 = \xi_2;$$

$$(2\text{b}) \qquad M_2(m_2) \mid x_1 = \xi_1, \quad x_2 = m_2 \xi_2.$$

Dadurch transformiert sich $f_n(x_1, x_2)$ jeweils in eine (wiederum mit Binomialkoeffizienten geschriebene) Form $\varphi_n(\xi_1, \xi_2)$ mit Koeffizienten α_i, wo:

$$(2\alpha)\ M_1(m_1) \mid \alpha_0 = a_0 m_1^n,\ \alpha_1 = a_1 m_1^{n-1},\ \ldots,\ \alpha_i = a_i m_1^{n-i},\ \ldots,\ \alpha_n = a_n,$$

$$(2\beta)\ M_2(m_2) \mid \alpha_0 = a_0,\quad \alpha_1 = a_1 m_2,\ \ \ldots,\ \alpha_i = a_i m_2^i,\ \ \ldots,\ \alpha_n = a_n m_2^n.$$

Der Ausdruck $J(a)$ heißt eine „Streckungsinvariante“ von f bez. x_1 resp. x_2, wenn sich $J(\alpha)$ von $J(a)$ nur um eine natürliche Potenz der Substitutionsdeterminante m_1 resp. m_2 von M_1 resp. M_2 unterscheidet, so daß:

$$(\text{Ia}) \qquad M_1(m_1) \mid J(\alpha) \equiv m_1^{\omega_1} J(a);$$

$$(\text{Ib}) \qquad M_2(m_2) \mid J(\alpha) \equiv m_2^{\omega_2} J(a).$$

Der Exponent ω_1 resp. ω_2 heißt das „Gewicht“ von J bez. x_1 resp. x_2. Einfachste Invarianten der Art (I) sind bereits die a_i selbst; denn gemäß (2) ist $\alpha_i = m_1^{n-i} a_i$ resp. $\alpha_i = m_2^i a_i$, so daß in diesem Falle $\omega_1 = n - i$, $\omega_2 = i$ ist. Ähnlich gilt für ein Produkt $a_i a_k$ irgend zweier Koeffizienten von f (wo i auch gleich k sein darf):

$$M_1(m_1) \mid \alpha_i \alpha_k = m_1^{2n-(i+k)} a_i a_k \; ; \quad M_2(m_2) \mid \alpha_i \alpha_k = m_2^{i+k} a_i a_k \, ,$$

wo jetzt $\omega_1 = 2n - (i+k)$, $\omega_2 = i + k$. Entsprechendes gilt für ein beliebiges Potenzprodukt der α.

Allgemein erhält man für die Transformation irgend eines Gliedes T von J (1) auf Grund von (2), (3), unter T jeweils das transformierte Glied verstanden:

$$\text{(3a)} \quad \begin{cases} M_1(m_1) \mid \mathsf{T} \equiv c\, \alpha_0^{\varepsilon_0} \alpha_1^{\varepsilon_1} \dots \alpha_n^{\varepsilon_n} \\ = m_1^{n\varepsilon_0 + (n-1)\varepsilon_1 + \dots + 1 \cdot \varepsilon_{n-1} + 0 \cdot \varepsilon_n} \cdot c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n} \, , \end{cases}$$

$$\text{(3b)} \quad \begin{cases} M_2(m_2) \mid \mathsf{T} \equiv c\, \alpha_0^{\varepsilon_0} \alpha_1^{\varepsilon_1} \dots \alpha_n^{\varepsilon_n} \\ = m_2^{n\varepsilon_n + (n-1)\varepsilon_{n-1} + \dots + 1 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_0} \cdot c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n} \, . \end{cases}$$

Bedient man sich der Abkürzungen:

$$(3\alpha) \quad n\varepsilon_0 + (n-1)\varepsilon_1 + \dots + 1 \cdot \varepsilon_{n-1} + 0 \cdot \varepsilon_n \equiv \sum_i (n-i)\, \varepsilon_i = G_1 \, ,$$

$$(3\beta) \quad n\varepsilon_n + (n-1)\varepsilon_{n-1} + \dots + 1 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_n \equiv \sum_i i\, \varepsilon_i \qquad = G_2 \, ,$$

so lauten die Relationen (3):

$$\text{(3a)} \quad M_1(m_1) \mid \mathsf{T} = m_1^{G_1} T \; ; \qquad \text{(3b)} \quad M_2(m_2) \mid \mathsf{T} = m_2^{G_2} T \, .$$

Soll die Bedingung (Ia) resp. (Ib) für sämtliche Werte der a_i, sowie von m_1 resp. m_2 erfüllt sein, so muß für jedes Glied T von $J(\alpha)$ die Potenz $m_1^{G_1}$ resp. $m_2^{G_2}$ mit der in (I) auftretenden $m_1^{\omega_1}$ resp. $m_2^{\omega_2}$ übereinstimmen und umgekehrt:

$$\text{(4a)} \qquad M_1(m_1) \mid G_1 \equiv \sum_i (n-i)\, \varepsilon_i = \omega_1 \, ,$$

$$\text{(4b)} \qquad M_2(m_2) \mid G_2 \equiv \sum_i i\, \varepsilon_i \qquad = \omega_2 \, .$$

Mit Rücksicht auf die obige Feststellung über die Streckungsinvarianz eines einzelnen Koeffizienten a_i (2) oder auch eines Potenzproduktes desselben lege man, nach dem Vorgange von § 10, dem Koeffizienten a_i hinsichtlich einer Streckung M_1 resp. M_2 oder kürzer ausgedrückt,

„hinsichtlich (oder auch bezüglich) x_1 resp. x_2“ das „Gewicht“ $n-i$ resp. i bei, und allgemeiner einem einzelnen Gliede T (1) von J das „Gewicht“ G_1 (3a) resp. G_2 (3b) bez. x_1 resp. x_2.

Ist dieses Einzelgewicht G_1 resp. G_2 ein und dasselbe für sämtliche Glieder T von J, so nennt man J „isobar“ bez. x_1 resp. x_2 vom „Gewicht“ G_1 resp. G_2 bez. x_1 resp. x_2.

Dieser Fall tritt nun auf Grund von (4) eben für eine Streckungsinvariante J von f bez. x_1 resp. x_2 ein und das Gewicht G_1 resp. G_2 deckt sich dann mit dem oben als „Gewicht“ der Streckungsinvariante bezeichneten Exponenten ω_1 resp. ω_2 in (I). Es gilt also zunächst:

Satz I. „Eine Streckungsinvariante J von f bez. x_1 resp. x_2 ist isobar, und umgekehrt; ihr Gewicht G_1 resp. G_2 fällt mit dem Exponenten ω_1 resp. ω_2 in der Definition (I) zusammen.“

Durch Addition der beiden Formeln (4) entsteht:

$$n(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) = \omega_1 + \omega_2 \,. \tag{5}$$

Dies sagt aus, daß für eine Streckungsinvariante $J(a)$ bezüglich beider Variabeln die Summe der Exponenten ε_i in jedem Gliede T von J (1) konstant ist, d. h. J ist homogen von der Dimension $d_f = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$, und (5) nimmt damit die Gestalt an:

$$n\, d_f = \omega_1 + \omega_2 \,, \tag{5'}$$

so daß $\omega_1 + \omega_2$ durch n teilbar sein muß. Das liefert den

Satz II. „Eine Streckungsinvariante J von f bezüglich beider Variabeln ist homogen von der Dimension $d_f = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{n}$; hierbei muß $\omega_1 + \omega_2$ eine durch n teilbare ganze Zahl sein.“

Umgekehrt folgt sofort, daß, wenn irgend eine der beiden Bedingungen (4) nebst (5) erfüllt ist, dies auch von der zweiten Bedingung (4) gilt:

Satz II′. „Eine Streckungsinvariante J von f bezüglich irgend einer der beiden Variabeln, die zugleich in den Koeffizienten von f homogen ist, ist auch Streckungsinvariante bezüglich der zweiten Variabeln.“

Das Gewicht von J in bezug auf die letztere bestimmt sich aus (5′) durch $\omega_2 = n\,d_f - \omega_1$ resp. $\omega_1 = n\,d_f - \omega_2$.

Im folgenden beschränken wir uns im wesentlichen auf Ausdrücke J, die den beiden Definitionen (Ia), (Ib) gleichzeitig und zwar unter der Voraussetzung $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ genügen: J heiße dann schlechtweg eine „Streckungsinvariante" von f.

Für diese wird der Inhalt der Formel (5) noch deutlicher, wenn man zwei Streckungen $M_1(m)$, $M_2(m)$ mit demselben Parameter m zu der „Erweiterungssubstitution" $E(m)$: $x_1 = m\,\xi_1$, $x_2 = m\,\xi_2$ zusammensetzt (vgl. § 6, S. 62). Dann wird $\alpha_i = m^n a_i$, und jedes Glied in $J(\alpha)$ unterscheidet sich von dem entsprechenden in $J(a)$ um den Faktor $m^{n(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)}$. Die Substitutionsdeterminante von $E(m)$ hat den Wert m^2.

Nach Voraussetzung soll J der Forderung genügen:

$$\text{(I}'\text{)} \qquad J(\alpha) \equiv (m^2)^\omega J(a) = m^{2\omega} J(a)\,;$$

mithin gilt die Relation:

$$\text{(5}''\text{)} \quad n(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) = 2\,\omega \quad \text{oder} \quad n\,d_f = 2\,\omega\,,$$

d. i. aber die Gewichtsregel (5) für $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Die Sätze I und II übertragen sich sofort auf ein System von Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots$ mit den Koeffizientenreihen $(a), (b), (c), \ldots$

Sei J wieder ein in diesen Größenreihen ganzrationaler Ausdruck:

$$\text{(1}'\text{)} \quad \begin{cases} J = J[(a), (b), (c), \ldots] \equiv \sum c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p} \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \sum c\,t = \sum T\,. \end{cases}$$

Soll J eine Streckungsinvariante bez. x_1 resp. x_2 sein mit den Gewichten ω_1, ω_2:

$$\text{(Ia}'\text{)} \qquad M_1(m_1) \mid J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots] \equiv m_1^{\omega_1} J\,;$$

$$\text{(Ib}'\text{)} \qquad M_2(m_2) \mid J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots] \equiv m_2^{\omega_2} J\,,$$

so dehnen sich die Gewichtsformeln (4), (5) aus zu den folgenden:

$$\text{(4b)} \qquad \sum_{r=1}^{n} (n-r)\,\varepsilon_r + \sum_{s=1}^{p} (p-s)\,\eta_s + \ldots = \omega_1\,,$$

$$\text{(4b}'\text{)} \qquad \sum_{r=1}^{n} r\,\varepsilon_r \qquad + \sum_{s=1}^{p} s\,\eta_s \qquad + \ldots = \omega_2\,,$$

$$\text{(5}'\text{)} \quad n \sum \varepsilon + p \sum \eta + \ldots \equiv n\,d_f + p\,d_g + \ldots = \omega_1 + \omega_2\,.$$

Man nennt J „hinsichtlich sämtlicher Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ...“ isobar bez. x_1 resp. x_2 vom „Gesamtgewichte“ ω_1 resp. ω_2.

Für eine Streckungsinvariante J bez. x_1 und x_2 gilt die Relation (5′).

Der Satz II für eine einzelne Urform f findet aber zunächst nicht etwa dahin seine Erweiterung, daß die Gesamtdimension $\sum\varepsilon + \sum\eta + \ldots \equiv d_f + d_g + \ldots$ konstant wäre.

Man ziehe dagegen den allgemeinen Hilfssatz S. 142 des § 10 heran. Danach war eine ganzrationale Funktion J der (a), (b), (c), ... darstellbar als ein Aggregat $J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots$, wo jedes J_k hinsichtlich jeder einzelnen Reihe der (a), (b), (c), ... homogen ist.

Auf solche Ausdrücke J_k darf man sich daher beschränken, wie es im folgenden in der Regel geschehen soll.

Für derartige Ausdrücke J_k, wenn sie zugleich Streckungsinvarianten bez. x_1 und x_2 sind, sagt die Relation (5″) aus, daß die Summe der Produkte aus den Ordnungen n, p, q, ... der Urformen in die bezügliche Dimension d_f, d_g, d_q, ... von J_k gleich der Summe der beiden Gewichte wird.

Im folgenden kommt wiederum hauptsächlich nur der Fall $\omega_1 = \omega_2$ in Betracht.

Nunmehr werden die Ergebnisse (4′), (5′) mit denen des § 11 kombiniert. Die Variabeln x_1, x_2 in den Urformen f_n, g_p, h_q, ... werden irgend einer eigentlichen Substitution S mit der Determinante Δ unterworfen:

$$(6) \qquad S \left| \begin{cases} x_1 = \alpha\,\xi_1 + \beta\,\xi_2\,, \\ x_2 = \gamma\,\xi_1 + \delta\,\xi_2 \end{cases} \right. \qquad (\Delta = \alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0)\,.$$

Dadurch mögen die Formen f_n, g_p, h_q, ... übergehen in die neuen: φ_n, ψ_p, χ_q, ... mit den Koeffizientenreihen (α), (β), (γ), ... Ein in den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... einzeln homogen vorausgesetzter Ausdruck

$$J = J[(a), (b), (c), \ldots]$$

heißt eine vollständige simultane „Invariante“ der f, g, h, ..., oder auch schlechthin eine „Invariante“ der f, g, h, ..., wenn stets:

$$\text{(II)} \quad J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots] \equiv \Delta^{\omega} J[(a), (b), (c), \ldots] \equiv \Delta^{\omega} J\,.$$

wo ω ein fester ganzzahliger Exponent ist, das „Gewicht" von J. Dann sind sowohl die Gewichtsregeln (4′), (5′) (für $\omega_1 = \omega_2 = \omega$), wie die Schiebungsdifferentialgleichungen (IIa′), (IIb′) des § 11 erfüllt. Damit gilt:

Satz III. „Eine Invariante J (II) der Binärformen f_n, g_p, h_q, ... genügt einmal den linearen partiellen Differentialgleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ — (IIa′), (IIb′) des § 11 —, andererseits den Gewichtsregeln (4′) und damit auch der Dimensionsregel (5′)."

Indessen sind infolge der Sätze des § 6 über die Erzeugung einer beliebigen Substitution S (6) aus Schiebungen und Streckungen als Fundamentalsubstitutionen die Bedingungen des Satzes III nicht unabhängig voneinander. Eine beliebige S (6) war erzeugbar durch die Schiebungen $A_1(h_1)$, $A_2(h_2)$ [§ 11 (2)] unter Hinzunahme entweder einer Streckung $M_1(m_1)$ von x_1, oder aber einer Streckung $M_2(m_2)$ von x_2, oder auch einer Erweiterung $E(m)$ von x_1 und x_2. Andererseits war das Paar $A_1(h_1)$, $A_2(h_2)$ für sich noch ersetzbar durch das Paar $A_1(h_1)$, R resp. $A_2(h_2)$, R, wo R die reziproke Substitution (Vertauschung beider Variabeln) bedeutete. Kombiniert man diese Sätze mit dem weiteren Satze V des § 6 über die Multiplikation der Substitutionsdeterminanten bei Zusammensetzung von Substitutionen, so folgt:

Satz IV. „Damit ein in den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... von Urformen f_n, g_p, h_q, ... ganzrationaler und je homogener Ausdruck

$$J[(a), (b), (c), \ldots] = J$$

eine Invariante (II) der Urformen ist, ist notwendig und hinreichend, daß J einmal den Schiebungsgleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ genügt, und überdies isobar ist hinsichtlich irgend einer der beiden Variabeln x_1, x_2, oder aber die Dimensionsregel (5′) befriedigt. Von den beiden Bedingungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ läßt sich auch irgend eine ersetzen durch die Forderung, daß J bei gleichzeitiger Vertauschung jeweils symmetrisch gelegener Koeffizienten a_i und a_{n-i}, b_k und b_{p-k}, ... ungeändert bleibt oder aber das Vorzeichen wechselt, je nachdem das Gewicht ω der Invariante gerade oder ungerade ist."

Es erhebt sich nunmehr die Frage, ob sich nicht die Gewichtsregeln (4′) für Streckungsinvarianten, ebenso wie in § 11 das invariante Verhalten von Schiebungsinvarianten, durch das Bestehen gewisser linearer partieller Differentialgleichungen charakterisieren lassen. Es genüge die Untersuchung einer Streckung $M_1(m)$ von x_1: $x_1 = m\,\xi_1$, $x_2 = \xi_2$. Wird zunächst wieder eine einzelne Urform f_n mit Koeffizienten a_i zugrunde gelegt, so treten für die neuen Koeffizienten α_i die Relationen (2α) in Kraft:

$$(2\alpha) \qquad M_1(m) \mid \alpha_i = m^{n-i} a_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Gemäß (Ia) soll sein:

$$(\mathrm{I\,a}) \qquad J(\alpha) \equiv m^{\omega} J(a),$$

wo ω jetzt an Stelle von ω_1 steht. Für $m = 1$ reduziert sich die Streckung $M_1(m)$ auf die identische Substitution; man setze daher bei beliebigem m:

$$(7) \qquad m = 1 + h,$$

so daß jetzt der identischen Streckung der Wert $h = 0$ entspricht. Entwickelt man in (Ia) $(1+h)^{\omega}$ nach dem binomischen Satze, und bezeichnet $J(\alpha)$ mit $J(m) = J(1+h)$, so wird:

$$(8) \qquad \begin{cases} J(\alpha) = J(m) = J(1+h) \equiv (1+h)^{\omega} J \\ \qquad = J + \omega_1 h J + \omega_2 h^2 J^2 + \omega_3 h^3 J^3 + \ldots, \end{cases}$$

wo $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ wiederum die sukzessiven Binomialkoeffizienten von ω bedeuten. Links werde, wie in § 11, $J(\alpha)$ nach dem Maclaurinschen Gesetze entwickelt:

$$(9) \quad J(1+h) \equiv J + h \frac{dJ(\alpha)}{dh\ (h=0)} + h^2 \frac{d^2 J(\alpha)}{dh^2\ (h=0)} + \ldots$$

Die rechten Seiten von (8) und (9) sollen gemäß (Ia) identisch in h übereinstimmen, insbesondere also die Koeffizienten von h selbst:

$$(10) \qquad \frac{dJ(\alpha)}{dh\ (h=0)} = \omega J.$$

Behufs Auswertung der linken Seite von (10) führe man wieder m ein, so wird wegen $\frac{dh}{dm} = 1$: $\frac{dJ(\alpha)}{dh} = \frac{dJ(\alpha)}{dm}$, und demnach:

$$\frac{dJ(\alpha)}{dh\ (h=0)} = \frac{dJ(\alpha)}{dm\ (m=1)}. \tag{11}$$

Werden die Differentiationen nach m mit Akzenten bezeichnet, so ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dJ(\alpha)}{dm} &= \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_0} \alpha_0' + \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_0} \alpha_1' + \dots + \frac{\partial J}{\partial \alpha_n} \alpha_n' \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i} \alpha_i'. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Hier ist der Wert $m = 1$ zu substituieren. Dabei reduziert sich jedes $\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i}$ auf $\frac{\partial J(a)}{\partial a_i} = \frac{\partial J}{\partial a_i}$. Andererseits liefern die Formeln (2a):

$$\alpha_i' = (n-i)\, a_i\, m^{n-i-1}, \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{13}$$

also für $m = 1$:

$$\alpha'_{i(m=1)} = (n-i)\, a_i. \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{14}$$

Dann nimmt in der Tat die Bedingung (10) die Gestalt einer linearen partiellen Differentialgleichung bez. der a_i an.

Da der Beweisgang für eine Streckung M_2 ganz analog ist, so genügt, wenn wieder die alten Bezeichnungen m_1, m_2, ω_1, ω_2 eingeführt werden, eine Streckungsinvariante J von f bez. x_1 resp. x_2 mit dem Gewichte ω_1 resp. ω_2 der Streckungsbedingung*):

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{M}_1 &\equiv n\, a_0 \frac{\partial J}{\partial a_0} + (n-1)\, a_1 \frac{\partial J}{\partial a_1} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_{n-1}} - \omega_1 J \\ &\equiv \sum_{i=0}^{n} (n-i)\, a_i \frac{\partial J}{\partial a_i} - \omega_1 J = 0 \end{aligned}\right. \tag{IIIa}$$

*) Man beachte, daß die Struktur von (IIIa), (IIIb) unverändert bleibt, wenn die Urform f ohne Binomialkoeffizienten geschrieben ist.

resp.

$$\text{(IIIb)} \begin{cases} \mathsf{M}_2 \equiv n\, a_n \dfrac{\partial J}{\partial a_n} + (n-1)\, a_{n-1} \dfrac{\partial J}{\partial a_{n-1}} + \ldots + a_1 \dfrac{\partial J}{\partial a_1} - \omega_2 J \\ \quad \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} i\, a_i \dfrac{\partial J}{\partial a_i} - \omega_2 J = 0\,. \end{cases}$$

Wie es sein muß, gehen die beiden Gleichungen (IIIa), (IIIb) durch Vertauschung symmetrisch gelegener Koeffizienten a_i und a_{n-i} auseinander hervor.

Umgekehrt soll wieder nachgewiesen werden, daß die Bedingung (IIIa) resp. (IIIb) auch hinreichend ist, damit J zu einer Streckungsinvariante bez. x_1 resp. x_2 wird. Anstatt jedoch, wie in § 11, zu dem Behufe die Koeffizienten von h^2, h^3, ... in (9) zu untersuchen, gehe man direkt vor.

Sei T wieder irgend ein Glied in J (1):

$$\text{(1)} \qquad T = c\,t = c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_i^{\varepsilon_i} \ldots a_n^{\varepsilon_n}\,.$$

Man übe auf T etwa den Prozeß M_2 (IIIb) aus. Bildet man der Reihe nach $\dfrac{\partial T}{\partial a_1}, \dfrac{\partial T}{\partial a_2}, \ldots, \dfrac{\partial T}{\partial a_n}$, multipliziert sodann resp. mit $1 \cdot a_1$, $2\, a_2$, ..., $n\, a_n$ und addiert, so erscheint der Ausdruck $\mathsf{M}_2(T)$, abgesehen von dem Gliede $-\omega_2 J$, als ein Aggregat von Gliedern, deren jedes den Faktor $c\,t$ enthält, und außerdem sukzessive die Faktoren $1 \cdot \varepsilon_1$, $2\,\varepsilon_2$, ..., $n\,\varepsilon_n$, so daß entsteht:

$$\text{(15)} \qquad \mathsf{M}_2(T) = T \cdot \sum_{r=1}^{n} r\,\varepsilon_r - \omega_2\, T\,.$$

Somit gilt auch für das ganze Aggregat J:

$$\text{(16)} \qquad \mathsf{M}_2(J) \equiv \sum_{r=1} T\, r\,\varepsilon_r - \omega_2 J\,.$$

Nun soll hier die rechte Seite gemäß der Voraussetzung (IIIb) identisch verschwinden: dies ist nur so möglich, daß:

$$\text{(17)} \qquad \sum_{r=1}^{n} r\,\varepsilon_r = \omega_2\,,$$

d. i. aber gerade die zweite der beiden Gewichtsregeln (4). Ebenso ergibt sich für eine Streckungsinvariante J von f bez. x_1 die erste Relation (4).

Die Übertragung auf ein System von Urformen f_n, g_p, h_q, ... bietet keinerlei Schwierigkeit, man hat nur die in M_1, M_2 enthaltenen Differentiationsprozesse der Reihe nach auf die Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... der f, g, h, ... zu erstrecken und jeweils die Summe zu bilden. Damit nehmen die Gleichungen (III) die erweiterte Gestalt an:

$$(\mathrm{III}a') \quad \mathsf{M}_1 \equiv \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\,a_i \frac{\partial J}{\partial a_i} + \sum_{k=0}^{p-1}(p-k)\,b_k \frac{\partial J}{\partial b_k} + \ldots - \omega_1 J = 0\,,$$

$$(\mathrm{III}b') \quad \mathsf{M}_2 \equiv \sum_{i=0}^{n} i\,a_i \frac{\partial J}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^{p} k\,b_k \frac{\partial J}{\partial b_k} + \ldots - \omega_2 J = 0\,,$$

und es gilt*):

Satz V. „Sind die linearen partiellen Differentiationsprozesse M_1, M_2 für ein System von Urformen f_n, g_p, h_q, ... durch (IIIa′) resp. (IIIb′) erklärt, so ist die Bedingung (IIIa′) resp. (IIIb′) notwendig und hinreichend dafür, daß J eine Streckungsinvariante der f, g, h, ... bez. x_1 resp. x_2 mit dem Gewichte ω_1 resp. ω_2 ist, und die Bedingung (IIIa′) resp. (IIIb′) erweist sich als gleichwertig mit der Gewichtsregel (4a′) resp. 4b′). Für die Existenz einer Streckungsinvariante der f, g, h, ... bezüglich beider Variabeln, mit dem Gewicht $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, ist das gleichzeitige Bestehen von (IIIa′) und (IIIb′) — mit $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ — oder auch von (4a′) und (4b′), notwendig und hinreichend."

Desgleichen ist die durch Addition von (IIIa′) und (IIIb′) hervorgehende Gleichung:

$$(\mathrm{III}) \quad (\mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2)\,J \equiv n\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial J}{\partial a_i} + p\sum_{k=0}^{p} b_k \frac{\partial J}{\partial b_k} + \ldots - (\omega_1 + \omega_2)\,J = 0$$

*) Die beiden Schiebungsdifferentialgleichungen (IIa′), (IIb′) des § 11, nebst den beiden Streckungsdifferentialgleichungen (IIIa′), (IIIb′) sind zuerst von A. Cayley, Journ. für Math., Bd. 47 (1854), S. 109, Collected math. Papers II, S. 164, aufgestellt worden. Die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen für invariante Bildungen im Falle von n Variabeln hat S. Aronhold, Journ. für Math., Bd. 62 (1863), S. 281 entwickelt.

gleichwertig mit dem Bestehen der durch Addition der beiden Gewichtsrelationen (4′) entstehenden Gleichung (5′) für eine Streckungsinvariante J bez. x_1 und x_2.

Sei J nach Voraussetzung in jeder Koeffizientenreihe (a), (b), (c), ... einzeln*) homogen, von der resp. Dimension d_f, d_g, d_h, ..., so nahm die Gleichung (5′) die Gestalt an**):

$$(5') \qquad n\,d_f + p\,d_g + q\,d_h + \ldots = \omega_1 + \omega_2 .$$

Andererseits ist aber nach dem Eulerschen Satze über homogene Funktionen $\sum a_i \frac{\partial J}{\partial a_i} = d_f J$, $\sum_k b_k \frac{\partial J}{\partial b_k} = d_g J$, ...; setzt man dies in (III) ein, so kommen die beiden Formeln (III) und (5′) direkt zur Deckung.

Für eine Streckungsinvariante bez. beider Variabeln, mit dem Gewicht ω, ist in (III) und (5′) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ zu setzen.

Mit Hilfe der beiden Streckungsdifferentialgleichungen $\mathsf{M}_1 = 0$, $\mathsf{M}_2 = 0$ (IIIa′), (IIIb′) ist man in der Lage, den in Satz IV betonten Zusammenhang zwischen den beiden Schiebungsbedingungen $\nabla_1 = 0$, $\nabla_2 = 0$ und den beiden Streckungsbedingungen $\mathsf{M}_1 = 0$, $\mathsf{M}_2 = 0$ für eine Invariante der Urformen $f, g, h, \ldots$ in eine durchsichtige analytische Form zu kleiden.

Zu dem Behuf empfiehlt es sich, die beiden Prozesse ∇_1, ∇_2, zunächst wieder für den Fall einer einzelnen Urform f_n, zu ersetzen durch zwei allgemeine lineare partielle Differentiationsprozesse:

$$(18) \qquad A \equiv \sum_0^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad B \equiv \sum_0^n \beta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

*) Tritt die genannte Voraussetzung für J nicht ein, läßt sich aber J, wie es für eine ganzrationale Funktion der (a), (b), (c), ... gemäß Satz (IV′) des § 10 stets der Fall ist, in ein Aggregat $J = J_1 + J_2 + \ldots$ zerlegen, wo nunmehr jedes Glied J_k der rechten Seite wieder in den (a), (b), (c), ... einzeln homogen ist, so hat man nur den soeben angegebenen Prozeß für jedes J_k auszuführen, und hinterher wieder die Summe zu bilden, um die Gleichwertigkeit von (5′) und (III) einzusehen.

**) Sind im besonderen alle Urformen von gleicher Ordnung n, so reduziert sich (5′) auf $n \sum d_f = \omega_1 + \omega_2$, wo $\sum d_f$ die Gesamtdimension in den Koeffizienten bedeutet.

wo die α_i, β_k beliebige Funktionen der $n+1$ unabhängigen Variabeln $x_0, x_1, \ldots, x_n$ seien. Nach dem Vorgange Poissons*) bilde man aus A und B den „Klammerausdruck“ (AB):

$$(AB) \equiv AB - BA, \tag{19}$$

wo z. B. AB bedeutet, daß nach dem Prozesse B der Prozeß A auszuüben ist.

Sei i ein fest herausgegriffener Index, k ein beliebiger, von i verschiedener, so entstehen aus dem Gliede $\beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ in B bei der Bildung von AB vermöge der beiden Teilprozesse $\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ die vier Glieder:

$$\alpha_i \beta_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \alpha_k \beta_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}; \quad \alpha_i \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \alpha_k \frac{\partial \beta_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{20a}$$

und entsprechend aus dem Gliede $\beta_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ die folgenden:

$$\alpha_k \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \alpha_i \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}; \quad \alpha_i \frac{\partial \beta_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \alpha_k \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{20b}$$

Andererseits liefert das Glied $\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ in A, bei Bildung von BA, vermöge der beiden Teilprozesse $\beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\beta_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, die folgenden:

$$\alpha_i \beta_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \alpha_i \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}; \quad \beta_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \beta_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{21a}$$

und analog das Glied $\alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ in A die folgenden:

$$\alpha_k \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \alpha_k \beta_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}; \quad \beta_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \beta_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{21b}$$

---

*) Näheres über den Klammerausdruck s. z. B. Lie-Scheffers, Kontinuierliche Transformationsgruppen, Leipzig 1893, S. 37 ff. Das Verfahren des Textes würde sich mit Hilfe der Lieschen Symbolik kürzer darstellen lassen.

Stellt man mit Hilfe der Formeln (20a), (20b), (21a), (21b), indem man i der Reihe nach die Werte $0, 1, \ldots, n$ beilegt, den Klammerausdruck (AB) (20) explizite her, so zerstören sich die mit partiellen Ableitungen 2. Ordnung nach den x behafteten Glieder, und (AB) nimmt die einfache Gestalt an:

$$\text{(IV)} \qquad (AB) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{vmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} & \dfrac{\partial \beta_i}{\partial x_k} \end{vmatrix},$$

wo nunmehr k, wie i, sämtliche Werte $0, 1, \ldots, n$ durchläuft.

Damit ist der wichtige Hilfsatz bewiesen:

Satz VI. „Sind A, B (18) zwei beliebige, auf dieselben $n+1$ Variabeln x_i bezogene lineare partielle Differentiationsprozesse, so ist auch der Klammerausdruck (AB) (19) ein solcher, und aus A und B explizite gemäß (IV) zusammengesetzt."

Der Satz überträgt sich seiner Herleitung nach ohne weiteres auf den allgemeinen Fall, wo sich A und B in eine gleichgroße Anzahl analoger Prozesse zerlegen:

$$\text{(19')} \qquad \begin{cases} A \equiv \sum\limits_0^n \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \sum\limits_0^p \alpha_i^{(1)} \dfrac{\partial}{\partial x_i^{(1)}} + \ldots, \\ B \equiv \sum\limits_0^n \beta_k \dfrac{\partial}{\partial x_k} + \sum\limits_0^p \beta_k^{(1)} \dfrac{\partial}{\partial x_k^{(1)}} + \ldots, \end{cases}$$

indem die $(x), (x^{(1)}) \ldots$ voneinander unabhängige Systeme von $(n+1)$, $(p+1)$, ... Variabeln bedeuten. Die rechte Seite von (IV) ist dann nur der Reihe nach über die verschiedenen Systeme von Größenreihen $\{(\alpha), (\beta), (x)\}$, $\{(\alpha^{(1)}), (\beta^{(1)}), (x^{(1)})\}$, ... zu erstrecken und sodann zu summieren.

Der Satz VI werde nunmehr im besonderen auf die beiden Prozesse ∇_1, ∇_2 angewendet, so daß, für eine einzelne Urform f, wird:

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} A \equiv \nabla_1 \equiv \sum\limits_{i=0}^n i\, a_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial a_i}, \\ B \equiv \nabla_2 \equiv \sum\limits_{k=0}^n (n-k)\, a_{k+1} \dfrac{\partial}{\partial a_k}, \end{cases}$$

$$\text{(23)} \qquad \alpha_i = i\, a_{i-1}, \qquad \beta_k = (n-k)\, a_{k+1}.$$

Demnach ergibt sich, gemäß (IV), für den Faktor von $\frac{\partial}{\partial a_i}$ in $(\Gamma_1 \Gamma_2)$:

$$(24) \qquad \sum_{k=0}^{n} \begin{vmatrix} (n-k)\, a_{k-1}, & k\, a_{k+1} \\ (n-i)\frac{\partial a_{i-1}}{\partial a_k}, & i\,\frac{\partial a_{i+1}}{\partial a_k} \end{vmatrix}.$$

Hier verschwinden aber sämtliche $\frac{\partial a_{i+1}}{\partial a_k}$, mit Ausnahme des Falles $k = i+1$, wo $\frac{\partial a_{i+1}}{\partial a_{i+1}} = 1$, und desgleichen sämtliche $\frac{\partial a_{i-1}}{\partial a_k}$, mit Ausnahme des Falles $k = i-1$, wo $\frac{\partial a_{i-1}}{\partial a_{i-1}} = 1$.

Es bleiben daher in (24) nur die beiden Fälle $k = i+1$ und $k = i-1$ zu berücksichtigen, wo sich die beiden bezüglichen zweireihigen Determinanten auf $+(i+1)(n-i)\,a_i$ resp. $-i(n-i+1)\,a_i$ reduzieren.

Da aber $(i+1)(n-i) - i(n-i+1) = n - 2i$, so gewinnt man die Identität:

$$(\mathrm{V}) \qquad (\Gamma_1 \Gamma_2) \equiv \Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_2 \Gamma_1 \equiv \sum_{i=0}^{n} (n-2i)\, a_i \frac{\partial}{\partial a_i},$$

und entsprechend für ein System von Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots$:

$$(\mathrm{V}') \qquad (\Gamma_1 \Gamma_2) \equiv \Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_2 \Gamma_1 \equiv \sum_{i=0}^{n} (n-2i)\, a_i \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_{k=0}^{p} (p-2k)\, b_k \frac{\partial}{\partial b_k} + \ldots$$

Bildet man andererseits, für $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, die Differenz der linken Seiten der beiden Streckungsgleichungen (IIIa′), (IIIb′), so fällt das Glied $-\omega J$ heraus, und es ergibt sich*):

$$(\mathrm{VI}) \qquad \mathsf{M}_1 - \mathsf{M}_2 \equiv \sum_{i=0}^{n} (n-2i)\, a_i \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_{k=0}^{p} (p-2k)\, b_k \frac{\partial}{\partial b_k} + \ldots$$

Die Vergleichung von (V′) und (VI) liefert die Fundamentalidentität:

$$(\mathrm{VII}) \qquad (\Gamma_1 \Gamma_2) \equiv \Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_2 \Gamma_1 \equiv \mathsf{M}_1 - \mathsf{M}_2 :$$

---

*) Vgl. W. E. Story, American Math. Soc. Trans. Bd. 8 (1907), S. 33.

Satz VII. „Die nach Satz (IV) bestehende Abhängigkeit zwischen den beiden Schiebungsprozessen ∇_1, ∇_2 und den beiden Streckungsprozessen M_1, M_2 für eine Invariante der Urformen f_n, g_p, h_q, ... findet ihren analytischen Ausdruck in der Identität (VII)."

Verschwinden demnach insbesondere für einen Ausdruck $J = J[(a), (b), (c), \ldots]$ $\nabla_1 J$, $\nabla_2 J$ nebst irgend einer der beiden Bildungen $\mathsf{M}_1 J$ resp. $\mathsf{M}_2 J$, so verschwindet damit auch die andere $\mathsf{M}_2 J$ resp. $\mathsf{M}_1 J$, d. h. eine unimodulare Invariante J der f, g, h, ..., die überdies isobar ist bez. einer der beiden Variabeln vom Gewichte ω, ist auch isobar bez. der anderen Variabeln mit dem gleichen Gewichte ω, und J ist eine (vollständige) Invariante der f, g, h, ...

Entsprechend folgt gemäß (VII) aus $\nabla_1 J = 0$, $\nabla_2 J = 0$ und $(\mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2) J = 0$ auch einzeln $\mathsf{M}_1 J = 0$, $\mathsf{M}_2 J = 0$; um aber diesem Ergebnis eine geeignete Auslegung zu geben, bedarf es noch einer weiteren Vervollständigung des Satzes IV.

Sei $J = J[(a), (b), (c), \ldots]$ vorderhand eine beliebige ganzrationale Funktion der (a), (b), (c), ... Die entwickelte Gestalt von J laute, analog zu (1):

$$J \equiv \sum c\, a_0^{\varepsilon_0} \ldots a_i^{\varepsilon_i} \ldots a_n^{\varepsilon_n}\, b_0^{\eta_0} \ldots b_k^{\eta_k} \ldots b_p^{\eta_p}\, c_0^{\zeta_0} \ldots c_l^{\zeta_l} \ldots c_q^{\zeta_q} \ldots = \sum c\, t\,. \tag{1'}$$

Man übe den Prozeß ∇_1 auf irgend ein Potenzprodukt t von der Dimension $d = \sum \varepsilon_i + \sum \eta_k + \sum \zeta_l + \ldots$ aus, so entsteht:

$$\left\{\begin{aligned} \nabla_1 t \equiv & \sum_{i=1}^{n} i\, \varepsilon_i\, a_0^{\varepsilon_0} \ldots a_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}+1}\, a_i^{\varepsilon_i - 1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}\, b_0^{\eta_0} \ldots b_k^{\eta_k} \ldots b_p^{\eta_p}\, c_0^{\zeta_0} \ldots c_l^{\zeta_l} \ldots c_q^{\zeta_q} \ldots \\ & + \sum_{k=1}^{p} k\, \eta_k\, b_0^{\eta_0} \ldots b_{k-1}^{\eta_{k-1}+1}\, b_k^{\eta_k - 1} \ldots b_p^{\eta_p}\, a_0^{\varepsilon_0} \ldots a_i^{\varepsilon_i} \ldots a_n^{\varepsilon_n}\, c_0^{\zeta_0} \ldots c_l^{\zeta_l} \ldots c_q^{\zeta_q} \ldots \\ & + \ldots \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Man erkennt, daß jedes Glied von $\nabla_1 t$ wiederum die Dimension d besitzt, und das Entsprechende gilt für $\nabla_2 t$.

Dagegen ist, was später (§ 14) zur Verwendung kommt, wenn

$$\omega_1 = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\, \varepsilon_i + \sum_{k=0}^{p-1} (p-k)\, \eta_k + \ldots$$

das Gewicht von t bez. x_1 und

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^{n} i\,\varepsilon_i + \sum_{k=1}^{p} k\,\eta_k + \dots$$

das Gewicht von t bez. x_2 ist, das Gewicht ω_1' resp. ω_2 jedes Gliedes von $V_1 t$ gleich $\omega_1 + 1$ resp. $\omega_2 - 1$; und umgekehrt ist für jedes Glied von $V_2 t$ $\omega_1' = \omega_1 - 1$, $\omega_2' = \omega_2 + 1$.

Nach dem mehrfach benützten Hilfssatze, S. 142 des § 10, läßt sich jede ganzrationale Funktion $J = J[(a), (b), (c), \dots]$ als ein Aggregat $J_1 + J_2 + \dots + J_k + \dots$ einer endlichen Anzahl analoger Funktionen J_k darstellen, deren jede hinsichtlich der einzelnen Größenreihen (a), (b), (c), ... homogen ist, von den resp. Dimensionen $d_f^{(k)}$, $d_g^{(k)}$, $d_h^{(k)}$, ... — so daß keine zwei Systeme dieser Einzeldimensionen völlig übereinstimmen —, während die Gesamtdimension mit d_k bezeichnet sei.

Damit erhalten die Bildungen $V_1 J$, $V_2 J$ die Gestalt:

$$(26)\quad \begin{cases} V_1 J = V_1 J_1 + V_1 J_2 + \dots + V_1 J_k + \dots, \\ V_2 J = V_2 J_1 + V_2 J_2 + \dots + V_2 J_k + \dots, \end{cases}$$

wo gemäß (25) die ganzen Funktionen $V_1 J_k$, $V_2 J_k$ dieselben Einzeldimensionen $d_f^{(k)}$, $d_g^{(k)}$, $d_h^{(k)}$, ..., sowie dieselbe Gesamtdimension d_k besitzen, wie J_k selbst.

Nunmehr greife die Annahme ein, daß J eine unimodulare Invariante der f, g, h, ... sei, so daß die Identitäten $V_1 J \equiv 0$, $V_2 J \equiv 0$ erfüllt sind. Da aber die einzelnen Glieder $V_1 J_k$ resp. $V_2 J_k$ jeder der beiden rechten Seiten von (26) lauter verschiedene Systeme von Einzeldimensionen besitzen, so ist die Annahme $V_1 J \equiv 0$, $V_2 J \equiv 0$ nur so möglich, daß einzeln:

$$(27)\quad \begin{cases} V_1 J_1 \equiv 0, \quad V_1 J_2 \equiv 0, \quad \dots, \quad V_1 J_k \equiv 0, \quad \dots, \\ V_2 J_1 \equiv 0, \quad V_2 J_2 \equiv 0, \quad \dots, \quad V_2 J_k \equiv 0, \quad \dots, \end{cases}$$

und es gilt somit:

Satz VIII. „Man denke sich eine ganzrationale Funktion J der Koeffizienten (a), (b), (c), ... der Urformen f, g, h, ... zerlegt in eine endliche Summe ganzer Funktionen J_k, die hinsichtlich der einzelnen Größenreihen (a), (b), (c), ... homogen sind, mit jeweils verschiedenen Systemen von Einzeldimensionen; ist dann J eine unimodulare Invariante der $f, g, h, \ldots$, so kommt die nämliche Eigenschaft jedem einzelnen J_k zu."

Nun ist aber nach Satz IV, in Übereinstimmung mit der Identität (VII), jedes J_k als eine unimodulare und in den (a), (b), (c), ... einzeln homogene Invariante der $f, g, h, \ldots$ zugleich eine vollständige Invariante der $f, g, h, \ldots$ mit dem Gewichte ω_k, wo:

$$2\,\omega_k = n\,d_f^{(k)} + p\,d_g^{(k)} + q\,d_h^{(k)} + \ldots \tag{28}$$

Damit ist der wichtige Satz bewiesen:

Satz IX. „Jede Teilfunktion J_k des Satzes VIII ist selbst eine vollständige Invariante der Urformen $f, g, h, \ldots$ von der Dimension d_k und vom Gewichte ω_k. Mithin ist jede unimodulare ganzrationale Invariante der $f, g, h, \ldots$ als ein endliches Aggregat von vollständigen Invarianten der $f, g, h, \ldots$ darstellbar."

Die beiden Differentialgleichungen (IIa′), (IIb′) des § 11 für eine Schiebungsinvariante bez. x_1 resp. x_2, und die beiden obigen Differentialgleichungen (IIIa′), (IIIb′) für eine Streckungsinvariante bez. x_1 resp. x_2 — die also für eine vollständige Invariante (mit $\omega_1 = \omega_2$) gleichzeitig erfüllt sind, und umgekehrt eine solche charakterisieren, lassen noch eine andere bemerkenswerte Auffassung zu.

Geht man auf § 11 zurück, so ist ersichtlich, daß das Bestehen von $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ für sich auch dadurch zustande kommt, daß man den jeweiligen Schiebungsparameter h_1 resp. h_2 unendlich klein annimmt, so daß die höheren Potenzen von h_1 resp. h_2 gegen die erste Potenz vernachlässigt werden können, und das Entsprechende findet bei den obigen Gleichungen $\mathsf{M}_1 = 0$, $\mathsf{M}_2 = 0$ (IIIa′), (IIIb′) statt für einen unendlich kleinen Streckungsparameter h_1 resp. h_2.

Man nennt derartige Substitutionen mit unendlich kleinen Parametern, die sich von der identischen Substitution nur unendlich wenig unterscheiden, nach Lie*) „infinitesimale". Unser Doppelsatz, daß die Be-

*) Siehe das obige Zitat auf S. 208, Lie-Scheffers, S. 22.

dingungen $\mathsf{V}_1 = 0$, $\mathsf{V}_2 = 0$, $\mathsf{M}_1 = 0$, $\mathsf{M}_2 = 0$ jeweils das Verschwinden der weiteren Koeffizienten in den bezüglichen Maclaurinschen Entwicklungen nach sich ziehen, sagt demnach, in Verbindung mit dem Satze VII des § 6, daß jede S durch die Fundamentalsubstitutionen A_1, A_2, M_1, M_2 erzeugbar ist, aus, daß man sich bei dieser Erzeugung auf infinitesimale A_1, A_2, M_1, M_2 beschränken darf, so daß endliche Substitutionen A_1, A_2, M_1, M_2, und damit S durch unendlich oftmalige Iteration der jeweils infinitesimalen entstanden gedacht werden können:

Satz X. „Eine beliebige Substitution S ist durch infinitesimale Fundamentalsubstitutionen A_1, A_2, M_1, M_2 erzeugbar.“

Lie schlägt gerade den umgekehrten Weg ein, indem er den Satz X als besonderen Fall eines allgemeinen Satzes über kontinuierliche Gruppen von Transformationen mit einer endlichen Anzahl von Parametern direkt nachweist, und daraus das Bestehen der Differentialgleichungen $\mathsf{V}_1 = 0$, $\mathsf{V}_2 = 0$, $\mathsf{M}_1 = 0$, $\mathsf{M}_2 = 0$ als notwendig und hinreichend für eine vollständige Invariante ableitet.

Aufgabe 1. Das Erfülltsein der Gewichtsregeln und Gewichtsdifferentialgleichungen ist an den in der Aufgabe 3 des § 11 erwähnten Beispielen nachzuweisen.

Aufgabe 2. Es sind die linearen partiellen Differentialgleichungen aufzustellen, die — der Voraussetzung auf S. 201 entsprechend — aussagen, daß eine Bildung J_k hinsichtlich der Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... der Urformen einzeln homogen ist.

Aufgabe 3. Es ist zu zeigen, daß die Differentialgleichungen (IIIa′), (IIIb′) auf S. 206 ihre Struktur nicht ändern, wenn man die Koeffizienten der Urformen f, g, h, ... ohne Binomialkoeffizienten ansetzt. Wie ändern sich aber jene Gleichungen bei Benutzung der weiteren, auf S. 187 angegebenen Schreibweisen der Urformen?

§ 13. Die Differentialgleichungen für Schiebungskovarianten binärer Formen.

Die Urformen seien wieder f_n, g_p, h_q, ..., mit den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... und den Variabeln x_1, x_2. Durch eine Schiebung $A_1(h_1)$ resp. $A_2(h_2)$ [§ 11 (S. 184)] mögen die f_n, g_p, h_q, ... übergehen in φ_n, ψ_p, χ_q, ..., mit den Koeffizientenreihen (α), (β), (γ), ... und den Variabeln ξ_1, ξ_2.

Eine Schiebungskovariante

$$K = K[(a), (b), (c), \ldots; x_1, x_2]$$

bez. x_1 resp. x_2, wo K vorerst in den (a), (b), (c), ...; x_1, x_2 ganzrational und überdies in den x_1, x_2 homogen von einer Dimension $d_x = \lambda$ angenommen werde, ist definiert durch die Forderung, daß K gegenüber A_1 resp. A_2 ungeändert bleibt:

$$\begin{array}{ll} \text{(Ia)} & A_1(h_1) \\ \text{(Ib)} & A_2(h_2) \end{array} \Bigg| \; K[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots; \xi_1, \xi_2] \equiv K[(a), (b), (c), \ldots; x_1, x_2] = K.$$

Sind beide Bedingungen zugleich erfüllt, so bleibt K nach dem Satze (VII) des § 6 bei jeder unimodularen Substitution U absolut invariant und heißt „unimodulare" Kovariante der f, g, h, ...

Da von den Variabeln in K lediglich verlangt wird, daß sie sich ebenso substituieren wie die x_1, x_2 in die ξ_1, ξ_2, so kann man sie auch anders bezeichnen, etwa mit x_1', x_2' und die neuen Variabeln mit ξ_1', ξ_2'. Die x_1', x_2' heißen dann kogredient zu den x_1, x_2, und ebenso die ξ_1', ξ_2' kogredient zu den ξ_1, ξ_2.

Nach Satz V des § 10 darf eine Schiebungskovariante $K[(a), (b), (c), \ldots; x_1', x_2'] \equiv K(x_1', x_2')$ aufgefaßt werden als entsprechende Schiebungsinvariante des Systems von Urformen, das aus den f, g, h, ... unter Hinzunahme der Linearform l:

$$l = x_1 x_2' - x_2 x_1' \tag{1}$$

gebildet wird. Denn bei Ausübung einer A_1 resp. A_2 gehen die Koeffizienten x_1', x_2' von l über in neue Koeffizienten ξ_1', ξ_2' der transformierten Linearform λ, und der Übergang von den x_1', x_2' zu den ξ_1', ξ_2' ist jeweils genau derselbe, wie der von den x_1, x_2 zu den ξ_1, ξ_2.

Dies überträgt sich ohne weiteres auf den Fall, wo $K(x_1', x_2'; y_1', y_2'; \ldots)$ mehrere kogrediente Variabelnreihen $x_1', x_2'; y_1', y_2'; \ldots$ enthält; an die Stelle der einen Linearform l (1) treten dann mehrere, jeweils mit den Koeffizienten $x_1', x_2'; y_1', y_2'; \ldots$, die nunmehr zusammen mit den f, g, h, ... das System von Urformen für die Schiebungsinvariante K ausmachen.

Damit liefern die Sätze II, III des § 11 die jeweils notwendige und hinreichende lineare partielle Differentialgleichung für eine Schiebungskovariante K bez. x_1 resp. x_2. Man schreibe nämlich hinterher wiederum $x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots$ für $x_1', x_2'; y_1', y_2'; \ldots$, so gilt:

Satz I. „Eine Schiebungskovariante

$$K[(a), (b), (c), \ldots; x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots] = K(x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots)$$

der Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots$ bezüglich der Reihen der ersten resp. zweiten Variabeln, die in den kogredienten Variabelnreihen $x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots$ jeweils homogen angenommen werde, genügt der Bedingung:

$$\text{(IIa)} \quad \begin{cases} V_1^{(x)} \equiv \sum\limits_i i\, a_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial a_i} + \sum\limits_k k\, b_{k-1} \dfrac{\partial}{\partial b_k} + \ldots - \sum\limits_x x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \equiv V_1 - \sum\limits_x x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} = 0, \end{cases}$$

resp.

$$\text{(IIb)} \quad \begin{cases} V_2^{(x)} \equiv \sum\limits_i i\, a_{n-i+1} \dfrac{\partial}{\partial a_{n-i}} + \sum\limits_k k\, b_{p-k+1} \dfrac{\partial}{\partial b_{p-k}} + \ldots - \sum\limits_x x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \equiv V_2 - \sum\limits_x x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

wo das Zeichen $\sum\limits_x$ bedeutet, daß über alle Variabelnpaare $x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots$ zu summieren ist. Umgekehrt charakterisiert (IIa) resp. (IIb) eine Schiebungskovariante bezüglich der ersten resp. der zweiten Variabelnreihe. Für eine unimodulare Kovariante ist das gleichzeitige Bestehen von (IIa) und (IIb) notwendig und hinreichend."

Aus den Gleichungen (IIa), (IIb) lassen sich wichtige Folgerungen*) über den gegenseitigen Zusammenhang der Koeffizienten einer Kovariante ziehen.

Dabei beschränken wir uns aber auf Kovarianten $K(x_1, x_2)$ mit nur einem Variabelnpaare x_1, x_2; die Di-

---

*) Vgl. A. Cayley, I Memorir upon Quantics, London Phil. Trans. Bd. 144 (1844), S. 244, abgedruckt in den Collected Math. Papers, Bd. II, S. 221.

mension in den x sei λ. Entwickelt nach fallenden Potenzen von x_1 habe K die Gestalt:

$$(2)\quad \begin{cases} K \equiv C_\lambda x_1^\lambda + C_{\lambda-1} x_1^{\lambda-1} x_2 + \ldots + C_i x_1^i x_2^{\lambda-i} + \ldots \\ \qquad + C_1 x_1 x_2^{\lambda-1} + C_0 x_2^\lambda \equiv \sum_{i=0}^{\lambda} C_i x_1^i x_2^{\lambda-i} \,. \end{cases}$$

In dem Differentiationsprozesse $V_1^{(x)}$ resp. $V_2^{(x)}$ (IIa), (IIb), bezieht sich der erste Teil, V_1 resp. V_2, nur auf die Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ..., der zweite Teil, $x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ resp. $x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$, nur auf die Variabeln x_1, x_2. Einzeln ergibt sich daher:

$$(3a)\qquad V_1 K \equiv \sum_{i=0}^{\lambda} x_1^i x_2^{\lambda-i} V_1 C_i \,;$$

$$(3b)\qquad V_2 K \equiv \sum_{i=0}^{\lambda} x_1^i x_2^{\lambda-i} V_2 C_i \,;$$

$$(3a')\qquad x_2 \frac{\partial K}{\partial x_1} \equiv \sum_{i=1}^{\lambda} x_1^{i-1} x_2^{\lambda-i+1} i\, C_i \,;$$

$$(3b')\qquad x_1 \frac{\partial K}{\partial x_2} \equiv \sum_{i=0}^{\lambda-1} x_1^{i+1} x_2^{\lambda-i-1} (\lambda - i)\, C_i \,.$$

Nun soll gemäß (IIa) resp. (IIb) für eine Schiebungskovariante K bez. x_1 die rechte Seite von (3a) mit der von (3a′) identisch übereinstimmen, und entsprechend für eine Schiebungskovariante bez. x_2 die rechte Seite von (3b) mit der von (3b′). Man kann diese beiden Identitäten, wenn man noch die beiden Symbole $C_{\lambda+1} = 0$, $C_{-1} = 0$ einführt, auch in der Gestalt schreiben:

$$(4a)\qquad V_1^{(x)} K \equiv \sum_{i=0}^{\lambda} x_1^i x_2^{\lambda-i} \{V_1 C_i - (i+1)\, C_{i+1}\} = 0$$
$$(C_{\lambda+1} = 0)\,,$$

$$(4b)\qquad V_2^{(x)} K \equiv \sum_{i=0}^{\lambda} x_1^i x_2^{\lambda-i} \{V_2 C_i - (\lambda - i + 1)\, C_{i-1}\} = 0$$
$$(C_{-1} = 0)\,.$$

Demnach müssen in der Entwicklung (4a) resp. (4b) die Klammergrößen einzeln verschwinden, d. i.:

$$\text{(IIIa)} \quad \nabla_1 C_i \equiv (i+1)\, C_{i+1}\,, \qquad (i=0,1,\ldots\lambda),\ (C_{\lambda+1}=0)$$

$$\text{(IIIb)} \quad \nabla_2 C_i \equiv (\lambda - i + 1)\, C_{i-1}\,, \quad (i=0,1,\ldots\lambda),\ (C_{-1}=0)$$

oder auch explizite:

$$\text{(IIIa)} \begin{cases} \nabla_1 C_0 \equiv 1\cdot C_1\,, \quad \nabla_1 C_1 \equiv 2\,C_2\,, \quad \ldots, \\ \nabla_1 C_i \equiv (i+1)\,C_{i+1},\ \ldots,\ \nabla_1 C_{\lambda-1} \equiv \lambda\, C_\lambda\,,\ \nabla_1 C_\lambda \equiv 0\,; \end{cases}$$

$$\text{(IIIb)} \begin{cases} \nabla_2 C_\lambda \equiv 1\cdot C_{\lambda-1}\,, \quad \nabla_2 C_{\lambda-1} \equiv 2\,C_{\lambda-2}\,, \quad \ldots, \\ \nabla_2 C_i \equiv (\lambda - i + 1)\,C_{i-1},\ \ldots,\ \nabla_2 C_1 \equiv \lambda C_0,\ \nabla_2 C_0 \equiv 0. \end{cases}$$

Umgekehrt ist das System von Bedingungen (IIIa) resp. (IIIb) gleichwertig mit der Identität (4a) resp. (4b) und charakterisiert daher eine Schiebungskovariante K bez. x_1 resp. x_2 von der Dimension λ in den x.

Man nennt C_λ resp. C_0 das „Leitglied" von K bez. x_1 resp. x_2. Dann sagen die beiden letzten Formeln in (IIIa), (IIIb), mit Hilfe der Sätze II, III des § 11, aus, daß das Leitglied C_λ resp. C_0 einer Schiebungskovariante K bez. x_1 resp. x_2 selbst eine Schiebungsinvariante bez. x_1 resp. x_2 ist. Andererseits lehren die Formeln (IIIa), (IIIb), wie aus dem Leitgliede C_0 bez. x_2 resp. aus dem Leitgliede C_λ bez. x_1 einer Schiebungskovariante K bez. x_1 resp. x_2 der Reihe nach durch Anwendung des Prozesses ∇_1 resp. ∇_2, bis auf Zahlenfaktoren, die weiteren Koeffizienten hervorgehen.

Für eine unimodulare Kovariante gelten beide Gesetze zugleich.

Die Relationen (IIIa), (IIIb) lassen sich noch vereinfachen.

Geht man etwa von (IIIa) aus und setzt den Wert von C_1 aus der ersten Relation in die zweite ein, so kommt $\nabla_1^2 C = 2!\, C_2$, das nächstemal $\nabla_1^3 C_0 = 3!\, C_3$. Allgemein wird also sein:

$$\nabla_1^i C_0 = i!\, C_i\,.$$

In der Tat sei dies Gesetz bis zu einem Index i erfüllt, so geht die Relation $\nabla_1 C_i = (i+1)\, C_{i+1}$ über in $\nabla_1^{i+1} C_0 = (i+1)!\, C_{i+1}$.

Die letzte Relation $\nabla_1 C_\lambda = 0$ wird nunmehr zu $\nabla_1^{\lambda+1} C_0 = 0$.

Entsprechend setzt sich die Kette (IIIb) um in die andere:

$$\nabla_2^i C_\lambda = i!\, C_{\lambda-i}\,,$$

die mit $\nabla_2^{\lambda+1} C_\lambda = 0$ abschließt. An die Stelle des Systems (IIIa) resp. (IIIb) tritt somit:

$$\text{(IVa)} \begin{cases} \nabla_1 C_0 = 1!\, C_1\,, \quad \nabla_1^2 C_0 = 2!\, C_2\,, \quad \ldots, \\ \nabla_1^i C_0 = i!\, C_i\,, \quad \ldots, \quad \nabla_1^\lambda C_0 = \lambda!\, C_\lambda\,, \quad \nabla_1^{\lambda+1} C_0 = 0\,; \end{cases}$$

$$\text{(IVb)} \begin{cases} \nabla_2 C_\lambda = 1!\, C_{\lambda-1}\,, \quad \nabla_2^2 C_\lambda = 2!\, C_{\lambda-2}\,, \quad \ldots, \\ \nabla_2^i C_\lambda = i!\, C_{\lambda-i}\,, \quad \ldots, \quad \nabla_2^\lambda C_\lambda = \lambda!\, C_0\,, \quad \nabla_2^{\lambda+1} C_\lambda = 0\,. \end{cases}$$

Umgekehrt gelangt man von hier aus sofort wieder zu (IIIa) resp. (IIIb) zurück. Denn greift man etwa aus (IVa) zwei benachbarte Gleichungen heraus:

$$\nabla_1^i C_0 = i!\, C_i\,, \qquad \nabla_1^{i+1} C_0 = (i+1)!\, C_{i+1}\,,$$

wo die zweite auch geschrieben werden kann:

$$\nabla_1[\nabla_1^i C_0] = i!(i+1)\, C_{i+1}\,,$$

so folgt durch Einsetzung von $\nabla_1^i C_0 = i!\, C_i$, und nach Hebung von $i!$ in der Tat $\nabla_1 C_i = (i+1)\, C_{i+1}$. Damit ist bewiesen:

Satz II. „Für eine Schiebungskovariante K bez. x_1 ist das Leitglied C_λ bez. x_1 eine Schiebungsinvariante bez. x_1. Geht man andererseits von dem Leitgliede C_0 bez. x_2 aus und durchläuft die Koeffizienten von K in der umgekehrten Folge $C_0, C_1, \ldots, C_\lambda$, so geht durch Ausübung des Prozesses ∇_1 auf irgend ein C_i, bis auf den Faktor $i+1$, das nächstfolgende C_{i+1} hervor. Hiermit ist gleichwertig, daß die $i$te Wiederholung ∇_1^i des Prozesses ∇_1 aus C_0, bis auf den Faktor $i!$, die Größe C_i erzeugt. Der Prozeß erreicht dadurch sein Ende, daß die $(\lambda+1)$te Wiederholung von ∇_1, und um so mehr jede weitere, auf C_0 angewandt, das Resultat Null liefert.

Die entsprechenden Gesetze gelten für eine Schiebungskovariante K bez. x_2; an die Stelle von

∇_1 tritt ∇_2, und die Reihenfolge der Koeffizienten ist die umgekehrte.

Umgekehrt charakterisiert jedes der beiden Gesetze eine Schiebungskovariante $K(x_1, x_2)$ bez. x_1 resp. x_2 von der Dimension λ in den x. Eine unimodulare Kovariante ist hierbei als eine Schiebungskovariante bez. x_1 und x_2 anzusehen."

Aus diesem Grunde nennt man auch das Leitglied die Quelle (source, leading term) der Kovariante.

Ob indessen für eine unimodulare Kovariante K nicht bereits ein Teil der angegebenen Bedingungen hinreicht, etwa das System (IIIa) [oder (IVa)] in Verbindung mit $\nabla_2 C_0 = 0$, steht noch dahin und wird erst in § 14 entschieden werden.

Die Relationen (IVa) resp. (IVb) substituiere man nunmehr in die Entwicklung (2) einer Schiebungskovariante K bez. x_1 resp. x_2, dann nimmt K jeweils die Gestalt an:

$$\text{(Va)}\quad \begin{cases} K(x_1, x_2) \equiv C_0 x_2^\lambda + \dfrac{\nabla_1 C_0}{1!} x_2^{\lambda-1} x_1 + \dfrac{\nabla_1^2 C_0}{2!} x_2^{\lambda-2} x_1^2 + \dots \\ \qquad\qquad + \dfrac{\nabla_1^i C_0}{i!} x_2^{\lambda-i} x_1^i + \dots + \dfrac{\nabla_1^\lambda C_0}{\lambda!} x_1^\lambda ; \end{cases}$$

$$\text{(Vb)}\quad \begin{cases} K(x_1, x_2) \equiv C_\lambda x_1^\lambda + \dfrac{\nabla_2 C_\lambda}{1!} x_1^{\lambda-1} x_2 + \dfrac{\nabla_2^2 C_\lambda}{2!} x_1^{\lambda-2} x_2^2 + \dots \\ \qquad\qquad + \dfrac{\nabla_2^i C_\lambda}{i!} x_1^{\lambda-i} x_2^i + \dots + \dfrac{\nabla_2^\lambda C_\lambda}{\lambda!} x_2^\lambda . \end{cases}$$

Die Analogie dieser Entwicklungen mit dem Maclaurinschen Gesetze liegt auf der Hand. Um dieselbe noch deutlicher hervortreten zu lassen, schreibe man etwa im Falle (Va), nichthomogen, $x_1 = x$, $x_2 = 1$. Ist dann $K^{(i)}(x)$ die $i$te Ableitung von $K(x) = K(x, 1)$, so lautet die Maclaurinsche Entwicklung für $K(x)$:

$$(2')\quad \begin{cases} K(x) \equiv K(0) + \dfrac{K'(0)}{1!} x + \dfrac{K''(0)}{2!} x^2 + \dots \\ \qquad\qquad + \dfrac{K^{(i)}(0)}{i!} x^i + \dots + \dfrac{K^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} x^\lambda . \end{cases}$$

Die Vergleichung mit (Va) lehrt somit, daß:

$$(\mathrm{Va}') \qquad \nabla_1^i C_0 \equiv \nabla_1^i K(0) \equiv K^{(i)}(0)\,,$$

und Entsprechendes gilt für (Vb).

Das Spezifische einer Schiebungskovariante $K(x)$ bez. x liegt also darin, daß der lediglich auf die Variable x bezogene Differentiationsprozeß $K^{(i)}(0)$ ersetzbar ist durch den lediglich auf die Koeffizienten a der Urform f bezogenen Differentiationsprozeß $\nabla_1^i K(0)$, und entsprechend bei einer Schiebungskovariante $K(1, x)$ bez. x.

Von größerer Bedeutung ist jedoch folgende Untersuchung. Zunächst geht aus dem Beweise des Satzes II hervor, daß der letztere auch ohne weiteres für ein System von Urformen f_n, g_h, h_q, ... bestehen bleibt; man hat nur die Prozesse ∇_1, ∇_2 in der erweiterten Bedeutung (IIa′), (IIb′) des § 11 zugrunde zu legen.

Man vergleiche daraufhin die Entwicklungen (Va), (Vb) mit den in § 11 (VII′) aufgestellten für eine ganz beliebige, einer Schiebung A_1 resp. A_2 unterworfene ganze Funktion $J = J[(a), (b), (c), \ldots]$:

$$(5\mathrm{a}) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_1(h_1) \mid J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots] \\ & \equiv J + \frac{h_1}{1!}\nabla_1 J + \frac{h_1^2}{2!}\nabla_1^2 J + \ldots + \frac{h_1^i}{i!}\nabla_1^i J + \ldots, \end{aligned} \right.$$

$$(5\mathrm{b}) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_2(h_2) \mid J[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots] \\ & \equiv J + \frac{h_2}{1!}\nabla_2 J + \frac{h_2^2}{2!}\nabla_2^2 J + \ldots + \frac{h_2^i}{i!}\nabla_2^i J + \ldots \end{aligned} \right.$$

Dann ist ersichtlich, wie das Bildungsgesetz der rechten Seiten in (V) und (5) jeweils im wesentlichen das gleiche ist. Dies tritt wiederum deutlicher hervor, wenn man sowohl die Urformen f, g, h, ... wie die betreffende Schiebungskovariante nichthomogen schreibt, indem man $x_1 = x$, $x_2 = 1$ resp. $x_2 = x$, $x_1 = 1$ setzt. Denn gehen die Entwicklungen (V) für eine Schiebungskovariante $K(x, 1)$ resp. $K(1, x)$ bez. x über in:

$$(\mathrm{VIa}) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_1(h_1) \mid K(x, 1) \\ & \equiv C_0 + \frac{\nabla_1 C_0}{1!}x + \frac{\nabla_1^2 C_0}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\nabla_1^\lambda C_0}{\lambda!}x^\lambda\,; \end{aligned} \right.$$

$$(\text{VIb})\left\{\begin{aligned}&A_2(h_2)\mid K(1, x)\\&\equiv C_\lambda + \frac{V_2 C_\lambda}{1!}x + \frac{V_2^2 C_\lambda}{2!}x^2 + \ldots + \frac{V_2^\lambda C_\lambda}{\lambda!}x^\lambda.\end{aligned}\right.$$

Die Vergleichung mit (5a) resp. (5b) lehrt, daß jeweils die Identität besteht*):

$$(\text{VIIa})\qquad A_1(h_1)\mid K(x, 1) \equiv C_0[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots];$$

$$(\text{VIIb})\qquad A_2(h_2)\mid K(1, x) \equiv C_\lambda[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots].$$

Damit ist, wenn man bequemer, wie üblich, C_0 resp. C_λ das „freie Glied" in $K(x, 1)$ resp. $K(1, x)$ nennt, der wichtige Satz bewiesen:

Satz III. „Schreibt man die Urformen f_n, g_p, h_q, ..., sowie eine Schiebungskovariante $K(x_1, x_2)$ derselben bez. x_1 resp. x_2 nichthomogen, indem man $x_1 = x$, $x_2 = 1$ resp. $x_1 = 1$, $x_2 = x$ nimmt, und ersetzt in dem freien Gliede C_0 resp. C_λ von $K(x, 1)$ resp. $K(1, x)$ die ursprünglichen Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... durch die Koeffizientenreihen (α), (β), (γ), ... der vermöge einer Schiebung $A_1(h_1)$ resp. $A_2(h_2)$ transformierten Formen, so geht daraus die Schiebungskovariante $K(x, 1)$ resp. $K(1, x)$ selbst hervor."

Auf Grund der Formeln (9) des § 11 läßt sich dieser Satz noch in eine andere bemerkenswerte Gestalt kleiden. Es genüge die Betrachtung einer Schiebungskovariante $K(x, 1) = K(x)$ bez. $x_1 = x$. Der besseren Übersicht halber ändere man die in § 11 (1) getroffene Bezeichnung der Koeffizienten a_i, b_k, c_l, ... der Urformen f, g, h, ... dahin ab, daß je zwei symmetrisch gelegene Koeffizienten a_i und a_{n-i}, b_k und b_{p-k}, ... vertauscht werden:

$$(6)\left\{\begin{aligned}f_n &\equiv f(x, 1) \equiv f(x) = a_0 + n_1 a_1 x + n_2 a_2 x^2 + \ldots\\&\qquad\qquad\qquad + n_1 a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,\\g_p &\equiv g(x, 1) \equiv g(x) = b_0 + p_1 b_1 x + p_2 b_2 x^2 + \ldots\\&\qquad\qquad\qquad + p_1 b_{p-1} x^{p-1} + b_p x^p,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

*) Vgl. Faà di Bruno, Journ. für Math., Bd. 90 (1880), S. 186; Math. Annalen, Bd. 18 (1881), S. 280.

Bedeutet wieder $f^{(i)}(x)$ die $i$te Ableitung von $f(x)$ nach x, oder, wie man jetzt genauer sagt, die $i$te „einseitige“ Ableitung von f, und bedient man sich der Abkürzungen:

$$(7)\quad \begin{cases} f_0(x)=f(x)\,, \quad f_1(x)=\dfrac{1}{n}f'(x)\,, \quad f_2(x)=\dfrac{1}{n(n-1)}f''(x)\,, \;\ldots, \\ f_i(x)=\dfrac{1}{n(n-1)\ldots(n-i+1)}f^{(i)}(x)\,, \;\ldots,\; (i=0\,,1\,,\ldots,\,n) \end{cases}$$

und entsprechend für die Formen g, h, ..., so gewinnen die Formeln (9) des § 11 das einfache Aussehen:

$$(8)\qquad \alpha_i=f_i(h)\,,\qquad \beta_k=g_k(h)\,,\qquad \gamma_l=h_l(h)\,,\qquad \ldots$$
$$(i=0,1,\ldots,n;\quad k=0,1,\ldots,p;\quad l=0,1,\ldots,q;\quad \ldots)$$

Indem auch $K(x)$ nichthomogen zu schreiben ist:

$$(2')\qquad K(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_\lambda x^\lambda\,,$$

lautet nunmehr die erste Formel (VII):

$$(\mathrm{VII}')\qquad K(x)\equiv C_0[f_i(x),\,g_k(x),\,h_l(x),\,\ldots]\,.$$

Damit erhält Satz III die Fassung:

Satz III′. „Schreibt man die Urformen f, g, h, ... nichthomogen in der Gestalt (6), so geht eine Schiebungskovariante $K(x)$ der f, g, h, ... bez. x aus ihrem freien Gliede C_0 dadurch hervor, daß man die Koeffizienten a_i, b_k, c_l, ... von f, g, h, ... jeweils durch die mit den resp. Zahlenfaktoren $\dfrac{(n-i)!}{n!}$, $\dfrac{(p-k)!}{p!}$, $\dfrac{(q-l!)}{q!}$, ... dividierten einseitigen Ableitungen $f^{(i)}(x)$, $g^{(k)}(x)$, $h^{(l)}(x)$, ... ersetzt. Das Analoge gilt für eine Schiebungskovariante $K(1,x)$ bez. x.“

Mittels der in § 14 aufzustellenden Gewichtsregeln wird dieser Satz noch eine wesentliche Ergänzung erfahren.

Das oben eingeschlagene, zu den Relationen (III) führende Verfahren läßt noch eine weitere Ausdehnung zu. Es genüge wieder die Untersuchung des Falles (IIIa). Um die Entwicklungen nicht zu überladen, werde eine einzige Urform f_n in der alten Schreibweise (1) des § 11 zugrunde gelegt.

Das Leitglied C_λ der Schiebungskovariante $K(x)$ von f bez. x:

(2′) $$K(x) = C_\lambda x^\lambda + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \ldots + C_i x^{\lambda-i} + \ldots + C_1 x + C_0$$

war nach Satz II eine Schiebungsinvariante von f bez. x, genügte also der Bedingung:

(9) $$\begin{cases} \nabla_n \equiv a_0 \dfrac{\partial}{\partial a_1} + 2\, a_1 \dfrac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + (n-1)\, a_{n-2} \dfrac{\partial}{\partial a_{n-1}} \\ \qquad\qquad + n\, a_{n-1} \dfrac{\partial}{\partial a_n} = 0\,. \end{cases}$$

Hier sei die linke Seite, wegen des Folgenden, mit ∇_n bezeichnet, womit ausgedrückt werde, daß der Differentiationsprozeß (9) bis zur Ableitung nach dem letzten Koeffizienten a_n inkl. fortzusetzen ist. Entsprechend werde unter

(10) $$\nabla_i \equiv a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2\, a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + i\, a_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i}$$

$$(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

der aus (9) durch die angegebene Verkürzung entstehende Prozeß verstanden. Dann zerlegt sich der Prozeß ∇_n (9) wie folgt:

(11) $$\nabla_n = \nabla_{n-1} + n\, a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}\,,$$

wo in dem ersten Teile ∇_{n-1} rechterhand der Koeffizient a_n gar nicht vorkommt; und allgemeiner analog der Prozeß ∇_i:

(11′) $$\nabla_i = \nabla_{i-1} + i\, a_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i}\,,$$

wo sich ∇_{i-1} nur auf die i ersten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$ bezieht.

Zunächst nehme man an, daß das Leitglied C_λ von K (2′), eine ganze Funktion der $a_0, a_1, \ldots, a_n$, den letzten Koeffizienten a_n wirklich enthalte, zu einem Grade $\varrho (> 0)$. Man denke sich C_λ seinerseits nach fallenden Potenzen von a_n geordnet:

(12) $$C_\lambda = A_\varrho a_n^\varrho + A_{\varrho-1} a_n^{\varrho-1} + \ldots + A_1 a_n + A_0\,. \quad (\varrho > 0)$$

Nun genügt C_λ der Bedingung $\nabla_n C_\lambda \doteq 0$. Bei der Ausführung der Operation ∇_n (11) beachte man, daß der erste Teilprozeß ∇_{n-1} nur auf die Koeffizienten A (12) auszuüben ist, dagegen die Differentiation $\frac{\partial}{\partial a_n}$ nur auf die Potenzen von a_n in (12); dann wird die Gleichung $\nabla_n C_\lambda = 0$ explizite:

$$(13)\quad \begin{cases} \nabla_n C_\lambda \equiv a_n^\varrho \nabla_{n-1} A_\varrho + a_n^{\varrho-1} \nabla_{n-1} A_{\varrho-1} + \ldots + a_n \nabla_{n-1} A_1 + \nabla_{n-1} A_0 \\ + n a_{n-1} [\varrho a_n^{\varrho-1} A_\varrho + (\varrho - 1) a_n^{\varrho-2} A_{\varrho-2} + \ldots + 2 a_n A_2 + 1 \cdot A_1] = 0 . \end{cases}$$

Da diese Gleichung als in a_n identisch erfüllt anzusehen ist, so ist sie gleichwertig mit der Kette von Relationen:

$$(\mathrm{VIII})\quad \begin{cases} \nabla_{n-1} A_0 = -1 \cdot n a_{n-1} A_1 , \quad \nabla_{n-1} A_1 = -2 n a_{n-1} A_2 , \ldots , \\ \nabla_{n-1} A_i = -(i+1) n a_{n-1} A_{i+1} , \ldots , \\ \nabla_{n-1} A_{\varrho-1} = -\varrho n a_{n-1} A_\varrho , \quad \nabla_{n-1} A_\varrho = 0 . \end{cases}$$

Die Analogie dieses Rekursionsgesetzes mit (IIIa) tritt deutlich hervor: durch bloße Ausübung des Prozesses ∇_{n-1} bestimmt sich der Reihe nach A_1 aus A_0, A_2 aus $A_1, \ldots,$ A_ϱ aus $A_{\varrho-1}$, während schließlich A_ϱ der Bedingung $\nabla_{n-1} A_\varrho = 0$ genügt.

Vermöge des Prozesses ∇_{n-1} ist somit der Ausdruck C_λ (12) bereits durch sein freies Glied (14) $A_0 = C_\lambda(a_n = 0)$ vollständig und eindeutig bestimmt.

Andererseits unterscheiden sich aber die Ketten (IIIa) und (VIII) dadurch, daß die auf den rechten Seiten von (IIIa) auftretenden Faktoren von $C_1, C_2, \ldots$ rein numerisch sind, in (VIII) aber noch den Faktor a_{n-1} selbst enthalten.

Daher ist eine analoge Zusammenziehung von (VIII), wie bei (IIIa) auf (IVa), nicht angängig: durch bloße Iteration des Prozesses ∇_{n-1} lassen sich die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$ in (12) aus A_0 nicht ableiten, da eben in ∇_{n-1} der Koeffizient a_{n-1} selbst noch vorkommt. Man bezeichne ∇_{n-1} als den „ersten (aus ∇_n) reduzierten“ Differentialprozeß, A_ϱ als eine „erste reduzierte Schiebungsinvariante“ von f bez. x, A_0 (14) $= C_\lambda(a_n = 0)$ als „erstes Residuum“ (oder kürzer „Residuum“ schlechtweg) von C_λ bez. a_n. Dann spricht sich die Existenz der Relationen (VIII) aus in:

Satz IV. „Ist die Schiebungsinvariante C_λ bez. x das Leitglied einer Schiebungskovariante $K(x)$ bez. x

— bezogen auf eine Urform $f_n(x)$ mit den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ —, und enthält C_λ den höchsten Koeffizienten a_n, so denke man sich C_λ seinerseits nach Potenzen von a_n entwickelt. Dann sind durch das freie Glied $A_0 = C_\lambda(a_n = 0)$, das (erste) Residuum von C_λ bez. a_n, alle übrigen Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und damit C_λ eindeutig festgelegt. Das Leitglied A_ϱ von C_ϱ ist eine erste reduzierte Schiebungsinvariante bez. x."

Die Modifikation, die dieser Satz erleidet, wenn C_λ den Koeffizienten a_n von f nicht enthält, ist leicht angebbar. Sei alsdann a_h der höchste, in C_λ auftretende Koeffizient von f, so entwickle man analog C_λ, als ganze Funktion eines Grades $\eta (> 0)$, nach fallenden Potenzen von a_h. Die Relationen (VIII) sind dann nur dahin abzuändern, daß der Index n durch den Index h zu ersetzen ist, so daß entsteht:

$$\text{(VIII}'\text{)} \begin{cases} V_{h-1} A_i = -(i+1)\, h\, a_{h-1} A_{i+1}, & (i = 0, 1, \ldots, \eta - 1) \\ V_{h-1} A_\eta = 0\,. \end{cases}$$

Damit erfährt Satz IV die Ergänzung:

Satz IV′. „Ist a_h der höchste, in C_λ vorkommende Koeffizient von f, und $\eta (> 0)$ der Grad von C_λ in a_h, so ist im Satze IV nur überall der Index n durch h und der Grad ϱ durch η zu ersetzen."

Man beachte noch, daß in den Sätzen (IV), (IV′) die Größe C_λ, der lediglich die Forderung $V_n C_\lambda = 0$ auferlegt ist, jede beliebige Schiebungsinvariante bez. x von f sein darf (s. § 14).

Die Kombinierung der Formelsysteme (III) und (VIII) führt zu weiteren bemerkenswerten Folgerungen. Es genüge wiederum, die Wirkung einer Schiebung A_1 zu untersuchen, wobei der Zusatz „bez. x" der Kürze halber unterbleibe. Aus der Definition (Ia) einer Schiebungskovariante $K(x)$ folgt, daß das Produkt zweier Schiebungskovarianten wiederum eine solche ist, wobei sich auch einer der Faktoren (oder auch jeder von beiden) auf eine Schiebungsinvariante reduzieren darf. Besteht daher zwischen einer Anzahl von Produkten aus Schiebungskovarianten eine identische Beziehung — eine „Syzygie" —, deren Koeffizienten Schiebungsinvarianten (oder im besondern auch numerische

Faktoren) sind, so läßt sich eine solche Syzygie stets auffassen als eine **lineare** Identität zwischen einer gewissen Anzahl von Schiebungskovarianten $K(x)$, $K^{(1)}(x)$, ... der nämlichen Ordnung λ in x:

(15) $$K\nu + K^{(1)}\nu^{(1)} + \ldots = 0\,,$$

wo die ν, $\nu^{(1)}$, ... numerisch sind. Bedeuten C_i, $C_i^{(1)}$, ... die Koeffizienten von x^i in $K(x)$, $K^{(1)}(x)$, ..., so kann die Identität (15) nur so erfüllt sein, daß die Gesamtheit der Relationen besteht:

(16) $$C_i\nu + C_i^{(1)}\nu^{(1)} + \ldots = 0\,. \quad (i=0,1,\ldots,\lambda)$$

Insbesondere befriedigen also, für $i=\lambda$, die Leitgleder C_λ, $C_\lambda^{(1)}$, ..., und, für $i=0$, die freien Glieder C_0, $C_0^{(1)}$, ... von K, $K^{(1)}$, ... dieselbe lineare Relation mit den numerischen Faktoren ν, $\nu^{(1)}$, ..., wie die Kovarianten selbst. Aber für die freien Glieder C_0, $C_0^{(1)}$, ... gilt, auf Grund der Relationen (IIIa) resp. (IVa), auch das Umgekehrte. Denn unterwirft man die linke Seite von (16), für $i=0$, der Reihe nach den Prozessen V_1, V_1^2, ..., so resultiert rechterhand stets wieder Null, d. h. die Relation (16) ist dann eo ipso auch für die C_1, $C_1^{(1)}$, ..., C_2, $C_2^{(1)}$, ..., C_λ, $C_\lambda^{(1)}$, ..., und damit für die Kovarianten K, $K^{(1)}$, ... selbst erfüllt. Dies gilt alles ebenso für ein System von Urformen f, g, h, ...

Im Falle einer Schiebung A_2 sind die erforderlichen Modifikationen ohne weiteres angebbar, und für eine unimodulare Kovariante sind die beiderlei Ergebnisse zu vereinigen:

Satz V. „Jede Syzygie (lineare Identität) mit numerischen Koeffizienten, zwischen Schiebungskovarianten bez. x_1 resp. x_2, der nämlichen Ordnung, bezogen auf die Urformen f, g, h, ..., gilt auch für deren freie Glieder bez. x_1 resp. x_2, und umgekehrt. Für unimodulare Kovarianten treten beide Eigenschaften gleichzeitig in Kraft."

Beschränkt man sich wieder auf eine einzelne Urform f, so läßt sich der Satz V vermöge der Relationen (VIII), (VIII′) auf die (ersten) Residuen der freien Glieder ausdehnen. Faßt man eine Schiebung A_1 (bez. $x_1 = x$) ins Auge, und geht von der Relation (16) für $i=0$ aus, entwickelt sodann, wie oben, die C_0, $C_0^{(1)}$, ... nach dem höchsten in ihnen vorkommenden Koeffizienten a_h von f, deren Grad $\eta (> 0)$ ersichtlich für alle Kovarianten der nämliche sein muß, so gilt jene lineare Identität ebenso für deren (durch Nullsetzen von a_h entstehende) freie Glieder A_0, $A_0^{(1)}$, ..., d. h. deren (erste) Residuen bez. a_h.

Umgekehrt, denkt man sich nur die letztere Identität erfüllt, und unterwirft dieselbe dem Prozeß V_{h-1}, so geht daraus, nach Unterdrückung des gemeinsamen Faktors $h a_{h-1}$, die nämliche Identität zwischen den A_1, $A_1^{(1)}$, ... hervor; eine abermalige Ausübung von V_{h-1} führt zu derselben Identität zwischen den A_2, $A_2^{(1)}$, ... usf., bis man zu derjenigen für die A_η, $A_\eta^{(1)}$, ..., und damit für die C_0, $C_0^{(1)}$, ... selbst gelangt:

Satz VI. „Jede lineare Syzygie zwischen Schiebungskovarianten gleicher Ordnung einer Urform f bez. x_1 resp. x_2 findet auch für deren Residuen bez. x_1 resp. x_2 statt, und ist umgekehrt durch die letztere bereits eindeutig bestimmt. Im besondern gilt dies auch von Schiebungsinvarianten bez. x_1 resp. x_2."

Man kann den obigen Prozeß, der zu dem Systeme (VIII′) leitete, von neuem vornehmen, indem man wiederum A_ϱ nach dem höchsten darin vorkommenden Koeffizienten von f entwickelt und die Gleichung $V_{h-1} A_\eta = 0$ zugrunde legt. So kann man fortfahren, bis man zu Koeffizienten gelangt, die nur noch von a_0 und a_1 (oder einem derselben) abhängen.

Die erfüllt gedachte Relation (16) überträgt sich dann auf die sämtlichen Koeffizienten dieser weiteren Entwicklungen.

Aber die in den Sätzen V und VI ausgesprochene Umkehrung läßt sich jetzt nicht mehr erschließen, da bereits bei den A kein direkter Differentiationsprozeß existiert, der aus A_η wieder $A_{\eta-1}$, $A_{\eta-2}$, ..., A_0 zu gewinnen erlaubte. Besteht zwischen den A_η, $A_\eta^{(1)}$, ... eine lineare Identität $\omega A_\eta + \omega^{(1)} A_\eta^{(1)} + \ldots = 0$, so folgt aus der vorletzten Gleichung (VIII′) nur, daß $V_{h-1}(\omega A_\eta + \omega^{(1)} A_\eta^{(1)} + \ldots) = 0$ ist, was selbstverständlich ist.

Aufgabe 1. Das Erfülltsein der Schiebungsdifferentialgleichungen (II) ist, wenn f, g, ... binäre Urformen sind, für folgende Kovarianten zu bestätigen:

1. Eine Urform selber; 2. die Funktionaldeterminante $\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}$; 3. die Hessesche Form $H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$; 4. die Funktionaldeterminante θ von f und H; 5. wenn $f = f_n = a_x^n$, $g = g_{n-1} = b_x^{n-1}$, für die bilineare Invariante der Polare $a_x^{n-1} a_y$ und von b_x^{n-1}, als lineare Kovariante von $f(y)$ und $g(y)$; 6. für die verschiedenen Polaren einer Form: $a_x^{n-1} a_y$, $a_x^{n-2} a_y a_z$, $a_x^{n-2} a_y^2$, usw., falls die verschiedenen Variabelnreihen kogredienten Substitutionen unterliegen.

Insbesondere sind die Gesetze (III), (IV), (VII) für die Kovarianten Δ und Q einer f_3, H und θ einer f_4 (vgl. Aufgabe 1 und 3 zum Anhange von Abschnitt I, S. 176, 178) durchzuführen.

Aufgabe 2. Der Residuensatz über Syzygien ist anzuwenden auf die l. c. betrachteten Cayleyschen Syzygien der f_3 und f_4.

§ 14. Gewichtsgleichungen für Streckungskovarianten. Die Differentialgleichungen für vollständige Kovarianten.

Die Erwägungen, die in § 10 S. 154 zu den Gewichtsgleichungen für Kovarianten quadratischer Urformen f_2, g_2, h_2, ... führten, lassen sich auf Streckungskovarianten $K(x_1, x_2)$ beliebiger Urformen f_n, g_p, h_q, ..., mit den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ..., übertragen.

Sei $K(x_1, x_2)$ zunächst eine beliebige, ganzrationale Funktion der (a), (b), (c), ..., sowie von x_1, x_2, und in letzteren Größen homogen von der Ordnung $d_x = \lambda$. Wie in § 12, werde x_1 resp. x_2 einer Streckung $M_1(m_1): x_1 = m_1 \xi_1$, $x_2 = \xi_2$; resp. $M_2(m_2): x_1 = \xi_1$, $x_2 = m_2 \xi_2$ unterworfen, wodurch die Urformen f_n, g_p, h_q, ... jeweils in neue Formen φ_n, ψ_p, χ_q, ... mit Koeffizientenreihen (α), (β), (γ), ... transformiert werden. Gemäß der Definition (2) des § 12 wird K zu einer „Streckungskovariante" bez. x_1 resp. x_2, wenn sich der in den neuen Koeffizienten und Variabeln gebildete Ausdruck $K[(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots; \xi_1, \xi_2]$ von dem ursprünglichen K nur um eine natürliche ω-te Potenz der Substitutionsdeterminante m_1 resp. m_2 unterscheidet. Der Exponent ω soll von vornherein beidemal als derselbe angenommen werden.

Ein beliebiges Glied T von K hat die Gestalt:

(1) $$T = c\,t = c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p} \ldots x_1^r x_2^{\lambda - r}. \quad (r \leqq \lambda)$$

Werden hier die vermöge $M_1(m_1)$ resp. $M_2(m_2)$ hervorgehenden neuen Koeffizientenreihen (α), (β), (γ), ..., sowie die neuen Variabeln ξ_1, ξ_2 eingesetzt, wodurch T in $\mathsf{T} = c\tau$ übergehe, so muß, soll K zu einer Streckungskovariante bez. x_1 resp. x_2 werden, aus allen Gliedern T stets ein und dieselbe, ω-te Potenz von m_1 resp. m_2 heraustreten. Man erhält so, als Erweiterung der Gewichtsregeln (4′) des § 12:

$$(2\text{a})\quad M_1(m_1)\mid \sum_i (n-i)\,\varepsilon_i + \sum_k (p-k)\,\eta_k + \ldots = r + \omega\,,$$

$$(2\text{b})\quad M_2(m_2)\mid \sum_i i\,\varepsilon_i + \sum_k k\,\eta_k + \ldots = (\lambda - r) + \omega\,,$$

und für eine „Streckungskovariante bez. x_1 und x_2", wenn also beide Relationen (2) zugleich erfüllt sind, überdies durch Addition:

$$(3)\qquad n\sum_i \varepsilon_i + p\sum_k \eta_k + \ldots = \lambda + 2\,\omega\,.$$

Faßt man daher in K jeweils alle Glieder T (1) zusammen, die zu demselben Potenzprodukte $x_1^r x_2^{\lambda - r}$ (bei festgehaltenem r) gehören, deren Gesamtheit also gerade den Koeffizienten C_r in der Darstellung (2) des § 13 für K bildet, so sind die linken Seiten von (2) zugleich mit dem Exponenten r konstant.

Nennt man wieder die linken Seiten von (2) das „Gewicht" von C_r bez. x_1 resp. x_2, so ist C_r „isobar" bez. x_1 resp. x_2, d. h. von dem konstanten Gewichte $\omega + r$ resp. $\omega + \lambda - r$. Die Gewichte der Koeffizienten $C_0, C_1, \ldots, C_\lambda$ von K bilden also beidemal eine arithmetische Reihe mit der Differenz 1 (s. das Zitat auf Cayley, S. 206):

$$\omega\,,\ \omega + 1\,,\ \ldots,\ \omega + \lambda \ \text{ resp. } \ \omega + \lambda,\ \omega + \lambda - 1\,,\ \ldots,\ \omega\,.$$

Wird K überdies wiederum als einzeln homogen in den (a), (b), (c), ... angenommen, von den resp. Dimensionen $d_f = \sum \varepsilon_i$, $d_g = \sum \eta_k$, ..., so ist für jeden Koeffizienten C_r einer Streckungskovariante K bez. x_1 und x_2 gemäß (3) die Summe der Produkte aus Dimension und Ordnung der betreffenden Urform gleich $\lambda + 2\,\omega$. Somit gilt:

Satz I. „Ist $K(x_1, x_2) = C_\lambda x_1^\lambda + C_{\lambda-1} x_1^{\lambda-1} x_2 + \ldots + C_0 x_2^\lambda$ eine Streckungskovariante der Urformen f_n, g_p, h_q, ... bez. x_1 resp. x_2, so ist irgendein Koeffizient C_r von K in den (a), (b), (c), ... isobar bez.

x_1 resp. x_2 vom Gewichte $r+\omega$ resp. $\lambda-r+\omega$; diese Gewichte bilden also beidemal eine arithmetische Reihe von der Differenz Eins mit dem Anfangsgliede $\omega+\lambda$ und dem Endgliede ω, resp. umgekehrt. Für eine Streckungskovariante bez. x_1 und x_2 gelten beide Gesetze gleichzeitig, sowie als Folge davon die Dimensionsregel (3)."

Nunmehr kombiniere man diese Ergebnisse mit denen des § 13, indem K jetzt als „vollständige" Kovariante der $f, g, h, \ldots$ vorausgesetzt werde, die sich also gegenüber beliebigen Substitutionen S der x_1, x_2 gemäß der Definition (I) des § 13 nur um eine feste, natürliche Potenz der Substitutionsdeterminante $\varDelta$ ändere. Dann hat man zunächst den

Satz II. „Eine vollständige Kovariante $K(x_1, x_2)$ von $f, g, h, \ldots$ genügt einmal den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (IIa), (IIb) des § 13, andererseits den Gewichtsregeln des Satzes I."

Die Gewichtsrelationen (2) lassen sich nach dem Muster des § 12 wiederum durch zwei lineare partielle Differentialgleichungen ersetzen. Faßt man etwa eine Streckung $M_1(m)$ ins Auge, so treten zu der rechten Seite der damaligen Entwicklung (12), nunmehr für K gebildet, nur noch die beiden Terme $\frac{\partial K}{\partial x_1}\left(\frac{d\xi_1}{dm}\right)_{m=1}+\frac{\partial K}{\partial x_2}\left(\frac{d\xi_2}{dm}\right)_{m=1}$ hinzu. Es ist aber $\xi_1=x_1 m^{-1}$, $\xi_2=x_2$, somit $\left(\frac{d\xi_1}{dm}\right)_{m=1}=-x_1$, $\left(\frac{d\xi_2}{dm}\right)_{m=1}=0$. Verfährt man analog mit M_2, so ergibt sich als Ausdehnung der Gleichungen (III) des § 12 auf Streckungskovarianten bez. x_1 resp. x_2 das mit den Gewichtsregeln (2a) resp. (2b) gleichwertige Paar von Differentialgleichungen:

$$(2\text{a}')\quad \left\{\begin{aligned} \mathsf{M}_1^{(x)} \equiv \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\,a_i\frac{\partial K}{\partial a_i}+\sum_{k=0}^{p-1}(p-k)\,b_k\frac{\partial K}{\partial b_k}+\ldots \\ -\omega K - x_1\frac{\partial K}{\partial x_1} \equiv \mathsf{M}_1 - x_1\frac{\partial K}{\partial x_1}=0\,, \end{aligned}\right.$$

$$(2\text{b}')\quad \left\{\begin{aligned} \mathsf{M}_2^{(x)} \equiv \sum_{i=1}^{n} i\,a_i\frac{\partial K}{\partial a_i}+\sum_{k=1}^{p} k\,b_k\frac{\partial K}{\partial b_k}+\ldots-\omega K - x_2\frac{\partial K}{\partial x_2} \\ \equiv \mathsf{M}_2 - x_2\frac{\partial K}{\partial x_2}=0\,. \end{aligned}\right.$$

Man bestätigt diese Gleichungen leicht an dem einfachsten Beispiele $K = f$, da f, zufolge der Definition einer Kovariante, offenbar eine Kovariante von sich selbst (mit dem Gewicht $\omega = 0$) ist.

Sodann kombiniere man die Gewichtsregeln (2) mit den Sätzen II und III des § 13. Zu dem Behufe werde die dort aufgeworfene Frage nach dem gegenseitigen Zusammenhange der für eine unimodulare Kovariante in (II) resp. (III) resp. (IV) daselbst aufgestellten Bedingungen wieder aufgenommen. Nach (II) l. c. war eine solche Kovariante $K(x_1, x_2) \equiv C_\lambda x_1^\lambda + \ldots + C_0 x_2^\lambda$ charakterisiert durch die beiden Differentialgleichungen:

$$\text{(Ia)} \quad \begin{cases} \sum\limits_i i\, a_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial a_i} + \sum\limits_k k\, b_{k-1} \dfrac{\partial}{\partial b_k} + \ldots - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \qquad \equiv V_1 - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} = 0\,, \end{cases}$$

$$\text{(Ib)} \quad \begin{cases} \sum\limits_i (n-i) a_{i+1} \dfrac{\partial}{\partial a_i} + \sum\limits_k (p-k) b_{k+1} \dfrac{\partial}{\partial b_k} + \ldots - x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \qquad \equiv V_2 - x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} = 0\,. \end{cases}$$

Nach § 13 (IIIa) war (Ia) gleichwertig mit der Kette von Relationen:

$$\text{(Ia}'\text{)} \quad \begin{cases} V_1 C_0 = C_1\,, \ \ldots\,, \quad V_1 C_{r-1} = r\, C_r\,, \ \ldots\,, \\ \qquad V_1 C_{\lambda-1} = \lambda\, C_\lambda\,, \quad V_1 C_\lambda = 0\,, \end{cases}$$

oder auch nach § 13 (IVa) mit:

$$\text{(Ia}''\text{)} \quad C_r = \frac{V_1^r C_0}{r!} \ (r = 0, 1, \ldots \lambda)\,, \quad V_1^{\lambda+1} C_0 = 0\,.$$

Entsprechend war (Ib) nach § 13 (IIIb) gleichwertig mit der Kette:

$$\text{(Ib}'\text{)} \begin{cases} V_2 C_\lambda = C_{\lambda-1}\,, \ \ldots\,, \quad V_2 C_{r+1} = (\lambda - r)\, C_r\,, \ \ldots\,, \\ \qquad V_2 C_1 = \lambda\, C_0\,, \quad V_2 C_0 = 0\,. \end{cases}$$

Man nehme jetzt für eine Form $K(x_1, x_2)$ lediglich die Bedingungen (Ia′) nebst der letzten Relation (Ib′) $V_2 C_0 = 0$ als erfüllt an.

Wie hat man C_0 zu wählen, damit die weiteren Bedingungen (Ib′) von selbst erfüllt werden? Die erste dieser weiteren Bedingungen lautet:

$$(4) \qquad \nabla_2 C_1 = \lambda C_0 ,$$

oder auch, da nach (Ia′) $C_1 = \nabla_1 C_0$:

$$(4') \qquad \nabla_2 \nabla_1 C_0 = \lambda C_0 .$$

Nun gilt nach § 12 (V) für eine beliebige Funktion C_r der (a), (b), (c), ... die Identität:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (\nabla_2 \nabla_1 - \nabla_1 \nabla_2) C_r \equiv \sum\limits_i (n - 2i) a_i \dfrac{\partial C_r}{\partial a_i} \\ \qquad + \sum\limits_k (p - 2k) b_k \dfrac{\partial C_r}{\partial b_k} + \cdots \end{cases}$$

Nimmt man hier $r = 0$ und berücksichtigt für die obige Funktion C_0 die Annahme $\nabla_2 C_0 = 0$, so reduziert sich (II) auf:

$$\text{(II}'\text{)} \quad -\nabla_2 \nabla_1 C_0 \equiv \sum_i (n - 2i) a_i \frac{\partial C_0}{\partial a_i} + \sum_k (p - 2k) b_k \frac{\partial C_0}{\partial b_k} + \cdots$$

Die in Rede stehende Frage erhält demnach, gemäß (4′) und (II′), die Wendung: für welche Bildungen C_0 nimmt die rechte Seite von (II′) den Wert $-\lambda C_0$ an?

Man lege nunmehr C_0 die weiteren Bedingungen auf, eine bez. x_1 und x_2 isobare ganze Funktion der (a), (b), (c), ... zu sein, mit den Teilgewichten $\omega_1^{(0)} = \omega$, $\omega_2^{(0)} = \omega + \lambda$ $(\lambda \geqq 0)$: jedenfalls trifft das gemäß (2) zu für den Koeffizienten C_0 von x_2^λ in einer Streckungskovariante K bez. x_1 und x_2, vom Gewichte ω und der Dimension λ in den x.

Mit Rücksicht auf § 12 (III) finden die beiden vorausgesetzten Eigenschaften des Isobarismus von C_0 ihren Ausdruck in den Identitäten:

$$(5) \begin{cases} \sum\limits_i (n - i) a_i \dfrac{\partial C_0}{\partial a_i} + \sum\limits_k (p - k) b_k \dfrac{\partial C_0}{\partial b_k} + \cdots \equiv \omega C_0 , \\ \sum\limits_i i\, a_i \dfrac{\partial C_0}{\partial a_i} + \sum\limits_k k\, b_k \dfrac{\partial C_0}{\partial b_k} + \cdots \equiv (\omega + \lambda) C_0 , \end{cases}$$

deren Subtraktion die weitere liefert:

$$(6) \quad \sum_i (n - 2i) a_i \frac{\partial C_0}{\partial a_i} + \sum_k (p - 2k) b_k \frac{\partial C_0}{\partial b_k} + \cdots = -\lambda C_0 .$$

Damit geht aber in der Tat die Identität (II′) über in die verlangte Forderung (4) resp. (4′):

(7) $$\nabla_2 \nabla_1 C_0 \equiv \nabla_2 C_1 = \lambda C_0 .$$

Es soll nun durch vollständige Induktion bewiesen werden, daß zugleich mit (Ia), $\nabla_2 C_0 = 0$, sowie (5) auch alle weiteren Bedingungen (Ib):

(Ib′) $$\nabla_2 C_{r+1} \equiv (\lambda - r) C_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, \lambda - 1)$$

von selbst befriedigt werden.

Es seien diese Relationen bereits bis zu einem Index $r-1$ erfüllt gedacht, so daß:

(8) $$\nabla_2 C_r \equiv (\lambda - r + 1) C_{r-1} . \qquad (r = 1, \ldots)$$

Die C_r genügen den Bedingungen (Ia′), und C_0 sollte bez. x_1 und x_2 isobar sein vom Gewichte ω resp. $\omega + \lambda$. Mit Rücksicht auf den an § 12 (25) angeknüpften Schluß ist dann auch C_r isobar in x_1 und x_2, und zwar von den Gewichten $\omega_1^{(r)} = \omega + r$, $\omega_2^{(r)} = \omega + \lambda - r$. Somit bestehen die zu (5) analogen Identitäten:

(5′) $$\begin{cases} \sum\limits_i (n-i)\, a_i \dfrac{\partial C_r}{\partial a_i} + \sum\limits_k (p-k)\, b_k \dfrac{\partial C_r}{\partial b_k} + \ldots \equiv (\omega + r) C_r , \\ \sum\limits_i i\, a_i \dfrac{\partial C_r}{\partial a_i} + \sum\limits_k k\, b_k \dfrac{\partial C_r}{\partial b_k} + \ldots \equiv (\omega + \lambda - r) C_r , \end{cases}$$

und damit wiederum die durch Subtraktion hervorgehende:

(6′) $$\sum_i (n - 2i)\, a_i \frac{\partial C_r}{\partial a_i} + \sum_k (p - 2k)\, b_k \frac{\partial C_r}{\partial b_k} + \ldots \equiv (2r - \lambda) C_r ,$$

was auf der rechten Seite von (II) einzusetzen ist.

Linkerhand von (II) spalte man in $\nabla_1 \nabla_2 C_r - \nabla_2 \nabla_1 C_r$.

Gemäß (Ia′) ist $(r+1) C_{r+1} \equiv \nabla_1 C_r$, also auch, nach weiterer Ausübung von ∇_2:

(9) $$(r+1) \nabla_2 C_{r+1} \equiv \nabla_2 \nabla_1 C_r .$$

Übt man andererseits auf die als richtig angenommene Identität (8) den Prozeß ∇_1 aus, so kommt:

(8′) $$\nabla_1 \nabla_2 C_r \equiv (\lambda - r + 1) \nabla_1 C_{r-1} ,$$

und da wegen (Ia′) $\nabla_1 C_{r-1} = r C_r$, auch:

(8″) $$\nabla_1 \nabla_2 C_r \equiv r (\lambda - r + 1) C_r .$$

Mit Rücksicht auf (6′) und (8″) nebst (9) verwandelt sich die Identität (II) in:

$$\text{(III)}\left\{\begin{aligned} &\nabla_2 \nabla_1 C_r \equiv (r+1)\nabla_2 C_{r+1} \\ &\equiv C_r\{r(\lambda - r + 1) - (2r - \lambda)\} \equiv C_r(\lambda - r)(r+1)\,, \end{aligned}\right.$$

oder auch, nach Hebung des Faktors $r+1$ in:

$$\text{(IV)} \qquad \nabla_2 C_{r+1} \equiv (\lambda - r)\, C_r\,.$$

Das ist aber gerade die Identität (8) für den nächstfolgenden Wert des Index r. Und da oben, in (7), die Richtigkeit von (8) für $r = 1$ direkt nachgewiesen wurde, so gilt (IV) allgemein, d. h. mit (Ia′), $\nabla_2 C_0 = 0$ und (5) sind auch sämtliche Bedingungen (Ib′) erfüllt, mit (5) aber auch die Bedingungen für eine Streckungskovariante K.

Damit ist zunächst bewiesen:

Satz II. „Ist die Form

$$K(x_1, x_2) \equiv C_\lambda x_1^\lambda + C_{\lambda-1} x_1^{\lambda-1} x_2 + \ldots + C_0 x_2^\lambda$$

eine Schiebungskovariante der Urformen $f, g, h, \ldots$ bez. x_1, und ist überdies das Leitglied C_0 von K bez. x_2 eine Schiebungsinvariante der $f, g, h, \ldots$ bez. x_2, sowie isobar bez. x_1 und x_2 von den Gewichten $\omega_1^{(0)} = \omega$, $\omega_2^{(0)} = \omega + \lambda$ $(\lambda \geqq 0)$, so ist K auch eine vollständige Kovariante der $f, g, h, \ldots$ vom Gewichte ω und von der Dimension λ in den x. Zugleich ist jeder Koeffizient C_r von K isobar bez. x_1 und x_2, von den Gewichten $\omega_1^{(r)} = \omega + r$, $\omega_2^{(r)} = \omega + \lambda - r$, und homogen in den $(a), (b), (c), \ldots$ von der Gesamtdimension $d = 2\omega + \lambda$."

Dieser Satz läßt sich noch nach zwei Richtungen hin vereinfachen. In der Tat läßt sich zeigen, daß von den Bedingungen des Satzes II die eine, $\nabla_1 C_\lambda = 0$, überflüssig ist, insofern sie sich als eine Folge der übrigen herausstellt, und daß überdies stets $\omega_2^{(0)} \geqq \omega_1^{(0)}$ sein muß.

Zuvörderst beachte man, daß bei dem Beweise der Identität (IV) (wo der Index r jetzt lieber mit s bezeichnet sei):

$$\text{(IV)} \qquad \nabla_2 C_{s+1} \equiv (\lambda - s)\, C_s\,, \qquad (s \geqq 0)$$

von der damaligen Voraussetzung $\nabla_1 C_\lambda = 0$ [in (Ia′)] kein Gebrauch gemacht worden ist. Man bilde daher nach

Anleitung von (Ia′) die beliebig weit fortgesetzte Reihe von Größen C_r:

$$(10)\quad \begin{cases} \nabla_1 C_0 = C_1\,, \quad \nabla_1 C_1 = 2\,C_2\,, \ldots, \quad \nabla_1 C_{r-1} = r\,C_r\,, \\ \qquad\qquad \nabla_1 C_r = (r+1)\,C_{r+1}\,, \ldots, \end{cases}$$

wo von der ganzrationalen Funktion C_0 der (a), (b), (c), ... lediglich vorausgesetzt wird, daß $\nabla_2 C_0 \equiv 0$, und daß C_0 bez. x_1 und x_2 isobar ist von den Gewichten $\omega_1^{(0)} = \omega$, $\omega_2^{(0)} = \omega + \lambda$, und selbstredend nicht identisch verschwindet.

Damit ist dann auch C_r für jedes $r > 0$ isobar bez. x_1 und x_2 von den Gewichten $\omega_1^{(r)} = \omega + r$, $\omega_2^{(r)} = \omega + \lambda - r$, und homogen in den (a), (b), (c), ... von der Dimension $d = 2\,\omega + \lambda$.

Zuerst erkennt man leicht, daß $\omega_2^{(0)} \geqq \omega_1^{(0)}$ sein muß, d. h. die Differenz $\omega_2^{(0)} - \omega_1^{(0)} = \lambda$ nicht negativ sein kann. Wäre nämlich λ negativ, $= -\lambda'$, so folgte $\omega_2^{(\omega-\lambda')} = 0$, also auch $C_{\omega-\lambda'} = 0$. Dann liefert aber (IV) sukzessive für $s = \omega - \lambda' - 1$, $\omega - \lambda' - 2$, ... das identische Verschwinden von $C_{\omega-\lambda'-1}$, $C_{\omega-\lambda'-2}$, ..., C_0, wo das letzte ausgeschlossen ist.

Von jetzt ab darf daher $\omega_2^{(0)} \geqq \omega_1^{(0)}$ vorausgesetzt werden. Sodann beweist man ähnlich, daß in der Reihe (10) von den $\lambda + 1$ Größen C_0, C_1, ..., C_λ keine identisch verschwinden kann.

Wäre nämlich $C_r \equiv 0$ $(r \leqq \lambda)$, so folgte aus (IV) wiederum der Reihe nach $C_{r-1} \equiv 0$, $C_{r-2} \equiv 0$, ..., $C_0 \equiv 0$, so daß derselbe Widerspruch entstände wie soeben.

Andererseits ist nachzuweisen, daß in der Reihe (10) alle C_r für $r > \lambda$ identisch verschwinden müssen.

Da für jedes $r \geqq 0$ $\omega_2^{(r)} = \omega + \lambda - r$, so ergibt sich für $r = \omega + \lambda$, daß $\omega_2^{(\omega+\lambda)} = 0$, mithin auch $C_{\omega+\lambda} = 0$.

Die Reihe (10) der C_r bricht also sicher hinter C_λ ab, spätestens mit $C_{\omega+\lambda-1}$, insofern $C_{\omega+\lambda}$ und a fortiori alle weiteren C identisch verschwinden.

Nun ergibt sich aus (IV), da $C_{\omega+\lambda} \equiv 0$, für $s = \omega + \lambda - 1$:

$$(11)\quad \begin{cases} 0 \equiv \nabla_2 C_{\omega+\lambda} \equiv \{\lambda - (\omega + \lambda - 1)\}\,C_{\omega+\lambda-1} \\ \quad \equiv -(\omega - 1)\,C_{\omega+\lambda-1}\,. \end{cases}$$

Mit Ausnahme des Falles $\omega = 1$ folgt also hieraus, daß auch $C_{\omega+\lambda-1} \equiv 0$. Im Falle $\omega = 1$ wäre $\omega_2^{(\lambda+1)} = 0$, also auch $C_{\lambda+1} \equiv C_{\omega+\lambda} = 0$. Dann ließe sich aus (11) nicht mehr erschließen, daß $C_\lambda \equiv C_{\omega+\lambda-1} \equiv 0$; nach obigem weiß man aber, daß letzteres gar nicht eintreten kann.

Indem der hiermit erledigte Fall $\omega = 1$ ausgeschlossen werden kann, zieht die Tatsache, daß $C_{\omega+\lambda-1} \equiv 0$, wiederum nach sich, daß auch $C_{\omega+\lambda-2} \equiv 0$. Denn erteilt man in (IV) dem Index s den Wert $\omega + \lambda - 2$, so kommt:

$$(12)\qquad \begin{cases} 0 \equiv \nabla_2 C_{\omega+\lambda-1} \equiv \{\lambda - (\omega + \lambda - 2)\} C_{\omega+\lambda-2} \\ \equiv -(\omega - 2) C_{\omega+\lambda-2}\,. \end{cases}$$

Für $\omega \neq 2$ folgt hieraus in der Tat, daß $C_{\omega+\lambda-2} \equiv 0$. Im Falle $\omega = 2$ aber würde $\omega_2^{(\lambda+2)} = 0$, also $C_{\lambda+2} \equiv 0$, dann ergibt sich aber direkt aus (IV), indem man $s = \lambda + 1$ nimmt:

$$(13)\qquad 0 \equiv \nabla_2 C_{\lambda+2} \equiv \{\lambda - (\lambda + 1)\} C_{\lambda+1} \equiv -C_{\lambda+1}\,,$$

also die Folgerung $C_{\lambda+1} \equiv 0$, während C_λ nach obigem $\neq 0$ ist.

Sieht man daher von den erledigten Fällen $\omega = 1, 2$ ab, so ist mit $C_{\omega+\lambda} \equiv 0$ auch $C_{\omega+\lambda-1} \equiv 0$, $C_{\omega+\lambda-2} \equiv 0$.

Man gehe abermals einen Schritt weiter. Mit Rücksicht auf $C_{\omega+\lambda-2} \equiv 0$ liefert wiederum (IV):

$$(14)\qquad 0 \equiv \nabla_2 C_{\omega+\lambda-2} \equiv -(\omega - 3) C_{\omega+\lambda-3}\,,$$

also, solange $\omega \neq 3$, auch $C_{\omega+\lambda-3} \equiv 0$. Für $\omega = 3$ ist $C_{\lambda+3} \equiv 0$; setzt man aber in (IV) zuerst $s = \lambda + 2$, so folgt $C_{\lambda+2} = 0$, und sodann für $s = \lambda + 1$, auch $C_{\lambda+1} \equiv 0$.

Um die entsprechende Schlußweise allgemein zu formulieren, nehme man an, daß in (10) bereits $C_{\omega+\lambda} \equiv 0$, $C_{\omega+\lambda-1} \equiv 0, \ldots, C_{\omega+\lambda-t+1} \equiv 0$, so ist zu zeigen, daß dann auch $C_{\omega+\lambda-t} \equiv 0$, $C_{\omega+\lambda-t-1} \equiv 0, \ldots, C_{\lambda+1} \equiv 0$. Dabei unterliegt der positive Index t der Ungleichung: $\omega + \lambda - t + 1 > \lambda + 1$, d. i. $t < \omega$, so daß $\omega - t$ eine natürliche, von Null verschiedene Zahl ist.

Gibt man in (IV) dem Index s den Wert $\omega + \lambda - t$, so entsteht, da $C_{\omega+\lambda-t+1} \equiv 0$ ist:

$$(15)\qquad 0 \equiv \nabla_2 C_{\omega+\lambda-t+1} \equiv -(\omega - t) C_{\omega+\lambda-t}\,,$$

mithin, da $\omega - t \neq 0$, $C_{\omega+\lambda-t} \equiv 0$. Fährt man so fort, so resultiert der Reihe nach das identische Verschwinden von $C_{\omega+\lambda-t-1}, \ldots, C_{\lambda+1}$.

Faßt man zusammen und bedient sich der Darstellung der C_s in (Ib′), so erfährt der Satz II die wesentliche Vereinfachung:

Satz II′. „Versteht man unter C_0 eine in den (a), (b), ... ganzrationale Schiebungsinvariante bez. x_2 der Urformen $f, g, \ldots$, die bez. x_1 und x_2 isobar sei von den Gewichten $\omega_1^{(0)}$, $\omega_2^{(0)}$, mithin auch homogen von der Dimension $d = \omega_1^{(0)} + \omega_2^{(0)}$, so ist stets $\omega_2^{(0)} \geqq \omega_1^{(0)}$. Dann ist C_0 das Leitglied bez. x_2 einer eindeutig bestimmten vollständigen Kovariante $K(x_1, x_2)$ vom Gewichte $\omega = \omega_1^{(0)} = d - \omega_2^{(0)}$, und von der Dimension $\lambda = \omega_2^{(0)} - \omega_1^{(0)} = 2\,\omega_2^{(0)} - d = d - 2\,\omega_1^{(0)}$ in den x_1, x_2:

$$K(x_1 x_2) \equiv C_0 x_2^\lambda + \frac{\nabla_1 C_0}{1!} x_2^{\lambda-1} x_1 + \frac{\nabla_1^2 C_0}{2!} x_2^{\lambda-2} x_1^2 + \ldots + \frac{\nabla_1^\lambda C_0}{\lambda!} x_1^\lambda,$$

so daß die Bedingung $\nabla_1^{\lambda+1} C_0 \equiv 0$ von selbst erfüllt ist.

Der entsprechende Satz gilt mutatis mutandis für das Leitglied C_λ bez. x_1 mit den Gewichten $\omega_1^{(\lambda)}$, $\omega_2^{(\lambda)}$ und der Dimension d: es wird dann

$$\omega = \omega_2^{(\lambda)} = d - \omega_1^{(\lambda)},\quad \lambda = 2\,\omega_1^{(\lambda)} - d = d - 2\,\omega_2^{(\lambda)} = \omega_1^{(\lambda)} - \omega_2^{(\lambda)}.$$

Für $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)}$, resp. $\omega_1^{(\lambda)} = \omega_2^{(\lambda)}$ reduziert sich K auf eine Invariante."

Auf Grund dieses Satzes erfährt nun auch der Satz III′ des § 13 eine wesentliche Ergänzung.

Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf C_0 und schreibt die Variabeln wieder nichthomogen, indem man $x_1 = x$, $x_2 = 1$ setzt, so daß $K(x_1, x_2) \equiv K(x, 1) \equiv K(x)$ die Gestalt (2′) des § 13 annimmt:

$$K(x) \equiv C_0 + \frac{\nabla_1 C_0 x}{1!} + \frac{\nabla_1^2 C_0 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\nabla_1^\lambda C_0 x^\lambda}{\lambda!}; \tag{16}$$

versteht man ferner, wie damals, unter $f_i = f_i(x)$ die mit $\frac{(n-i)!}{n!}$ dividierte i-te „einseitige" Ableitung von f nach x, entsprechend für g_k u.s.f., so gestattete zufolge § 13 (VII′) die Form $K(x)$ die Darstellung:

$$\text{(V)} \qquad K(x) \equiv C_0[f_i, g_k, h_l, \ldots],$$

indem die Argumente $a_i, b_k, c_l, \ldots$ resp. durch $f_i, g_k, h_l, \ldots$ ersetzt sind. Die Bedingung $V_2 C_0 = 0$ [§ 13 (IIIb), S. 218] überträgt sich jetzt auf die Form K selbst:

$$\text{(VI)} \quad V_2 K \equiv \sum_i (n-i) f_{i+1} \frac{\partial K}{\partial f_i} + \sum_k (p-k) g_{k+1} \frac{\partial K}{\partial g_k} + \ldots = 0;$$

entsprechend die Bedingung des doppelten Isobarismus von C_0 dahin, daß K hinsichtlich der $f_i, g_k, h_l, \ldots$ isobar ist bez. x von einem Gewichte ω und homogen von einer Dimension $d = 2\omega + \lambda$, wo dann λ nicht negativ sein kann.

Die fragliche Ergänzung des Satzes III′ des § 13 lautet somit:

Satz III. „Eine in den Argumenten $f_i(x)$, $g_k(x)$, $h_l(x), \ldots$ (bez. x) isobare und homogene ganzrationale Funktion $K(x)$ vom Gewichte ω und von der Dimension d, die der linearen partiellen Differentialgleichung (VI) genügt, ist eine vollständige Kovariante der Urformen $f(x)$, $g(x)$, $h(x), \ldots$, vom Gewichte ω und von der Ordnung $\lambda = d - 2\omega$. Für $d = 2\omega$ reduziert sich K auf eine Invariante.“

Aus den obigen Eigenschaften einer Kovariante läßt sich in Verallgemeinerung der im Anhange zum Abschnitt I, S. 173 gezogenen Schlüsse folgern, daß jede Kovariante einer Kovariante, oder eines Systems von solchen, wiederum eine Kovariante der Urformen ist.

Übt man zunächst eine Schiebung $A_1(h)$ aus:

$$x_1 = \xi_1 + h\,\xi_2, \qquad x_2 = \xi_2,$$

und bezeichnet die Koeffizienten eines Systems von Kovarianten $K, K', K'', \ldots$ der Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots$ mit $c_r, c'_s, c''_t, \ldots$, die vermöge Transformation der $f, g, h, \ldots$ daraus hervorgehenden Koeffizienten mit γ_r, $\gamma'_s, \gamma''_t, \ldots$, so bestehen die Identitäten:

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} K(\gamma_r; \xi_1, \xi_2) \equiv K(c_r; x_1, x_2); \\ K(\gamma'_s; \xi_1, \xi_2) \equiv K(c'_s; x_1, x_2); \quad \ldots \end{cases}$$

Demgemäß lassen die Größen $\gamma, \gamma', \ldots$ eine doppelte Auffassung zu: einmal entstehen sie aus den $c, c', \ldots$, indem man deren Argumente $(a), (b), \ldots$ ersetzt durch die transformierten $(\alpha), (\beta), \ldots$:

$$(18) \qquad \gamma_r = c_r[(\alpha), (\beta), \ldots]; \qquad \gamma'_s = c'_s[(\alpha), (\beta), \ldots], \qquad \ldots;$$

andererseits erhält man die $\gamma, \gamma', \ldots$ direkt als Transformierte der $c, c', \ldots$, wenn man die $K, K', \ldots$ als Urformen unmittelbar der Schiebung $A_1(h)$ unterwirft. Ist daher in letzterem Sinne K eine Kovariante der $K, K', \ldots$, so ist sie auch eine solche der $f, g, h, \ldots$

Das Entsprechende gilt für eine Schiebung $A_2(h)$, und daher überhaupt im Gebiete der unimodularen Kovarianten.

Nunmehr gehe man zu einer Streckung $M_1(m)$: $x_1 = m\xi_1$, $x_2 = \xi_2$ über. Die Bezeichnungen $(a), (b), \ldots; (\alpha), (\beta), \ldots; c_r, c'_s, \ldots; \gamma_r, \gamma'_s, \ldots$ seien beibehalten; ferner verstehe man unter $\lambda, \lambda', \ldots$ die Ordnungen von $K, K', \ldots$, unter $\omega, \omega', \ldots$ ihre Gewichte. Dann bestehen einmal die Relationen:

$$(19) \quad \begin{cases} \gamma_0 = m^{\omega} \cdot m^{\lambda} c_0, & \gamma_1 = m^{\omega} \cdot m^{\lambda-1} c_1, & \ldots, & \gamma_\lambda = m^{\omega} \cdot c_\lambda; \\ \gamma'_0 = m^{\omega'} \cdot m^{\lambda'} c'_0, & \gamma'_1 = m^{\omega'} \cdot m^{\lambda'-1} c'_1, & \ldots, & \gamma'_{\lambda'} = m^{\omega'} \cdot c'_{\lambda'}; \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Sieht man dagegen die $K, K', \ldots$ als selbständige Urformen an und denkt sich auf sie die $M_1(m)$ ausgeübt, so mögen die transformierten Koeffizienten durch $\varepsilon_r, \varepsilon'_s, \ldots$ angegeben sein. Dann hat man die ursprünglichen Transformationsformeln [§ 12 (2α), S. 197] auf die $c, c', \ldots$ zu übertragen und erhält:

$$(20) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 = m^{\lambda} c_0, & \varepsilon_1 = m^{\lambda-1} c_1, & \ldots, & \varepsilon_\lambda = c_\lambda; \\ \varepsilon'_0 = m^{\lambda'} c'_0, & \varepsilon'_1 = m^{\lambda'-1} c'_1, & \ldots, & \varepsilon'_\lambda = c'_{\lambda'}; \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Vergleichung von (19) und (20) lehrt, daß die $\gamma, \gamma', \ldots$ mit den $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ nach dem einfachen Gesetze verknüpft sind:

$$(21) \qquad \gamma_r = m^{\omega} \varepsilon_r, \qquad \gamma'_s = m^{\omega'} \varepsilon'_s, \qquad \ldots$$

Sei nun wiederum K eine Kovariante der als Urformen betrachteten $K, K', \ldots$, mit den Koeffizienten C_u, deren

Transformierte die E_u seien, mit dem Gewichte Ω und der Ordnung Λ, so gilt nach Voraussetzung die Identität:

$$(22)\qquad \mathsf{K}(\mathsf{E}_u; \xi_1, \xi_2) \equiv m^{\Omega} \mathsf{K}(C_u; x_1, x_2).$$

Andererseits mögen die C_u dadurch, daß man ihre ursprünglichen Argumente (a), (b), ... durch die (α), (β), ... ersetzt, übergehen in die Γ_u. Dann sind die Γ_u dieselben (ganzrationalen) Funktionen der γ_r, γ_s', ..., wie die E_u von den ε_r, ε_s', ...

Die Form K als Kovariante der Urformen K, K', ... sei in den Koeffizienten c_r, c_s', ... einzeln homogen, von den (konstanten) Dimensionen D, D', ...

Dann aber folgt aus den Relationen (21), daß auch die Größen Γ_u und E_u proportional sind, d. h. sich nur um ein und dieselbe Potenz von m als Faktor unterscheiden:

$$(23)\qquad \Gamma_u \equiv m^{D\omega + D'\omega' + \cdots} \mathsf{E}_u.$$

Verbindet man diese Relationen mit der Identität (22), so ergibt sich in der Tat:

$$(\mathrm{VII})\quad \begin{cases} \mathsf{K}(\Gamma_u; \xi_1, \xi_2) \equiv m^{D\omega + D'\omega' + \cdots + \Omega} \mathsf{K}(C_u; x_1, x_2) \\ \qquad\qquad \equiv m^{\Omega'} K(C_u; x_1, x_2), \end{cases}$$

d. h. K erscheint auch als Streckungskovariante bez. x_1 der Urformen f, g, ..., nur daß das Gewicht Ω' sich gegenüber dem ursprünglichen Ω um die Summe der Produkte $D\omega$, $D\omega'$, ... geändert hat.

Analog verfährt man mit einer Streckung $M_2(m)$, wo der Kürze halber der Parameter wieder mit m (statt m_2) bezeichnet sei. In den Formeln (19) und (20) hat man alsdann nur jeweils die Reihenfolge der Indizes $0, 1, \ldots, \lambda$; $0, 1, \ldots, \lambda'$; ... umzukehren. Dadurch erleiden aber die Relationen (21) keine Änderung, und ebensowenig die Relationen (22) und (23), da für eine vollständige Kovariante die Dimensionszahlen D, D', ... bez. x_1 und x_2 je dieselben sind.

Verbindet man dies Streckungsergebnis mit dem oben erhaltenen Schiebungsergebnis, so ist der Satz bewiesen:

Satz IV. „Ist ein System vollständiger Kovarianten K, K', ... der Urformen f, g, h, ..., mit den Gewichten ω, ω', ... vorgelegt, so ist jede Kovariante K (speziell auch Invariante) der K, K', ..., vom Gewichte Ω — diese Kovarianten als

Urformen aufgefaßt — auch eine Kovariante der $f, g, h, \ldots$, mit einem Gewichte Ω'.

Hierbei ist vorausgesetzt, daß K in den Koeffizienten der $K, K', \ldots$ einzeln homogen ist, von den Dimensionen $D, D', \ldots$; das Gewicht Ω' ist dann um die Summe $\sum D\omega$ der Produkte $D\omega$, $D\omega'$, ... größer als das Gewicht Ω."

Aufgabe 1. Die Gewichtsregeln und Streckungsdifferentialgleichungen, sowie die Darstellung (16) resp. (V) sind auf die in Aufgabe 1 zu § 13 aufgezählten Kovarianten anzuwenden.

Aufgabe 2. Sind R, Δ, Q die Grundformen einer f_3, H, θ, i, j die einer f_4 [vgl. Aufgabe 1 und 3 zum Anhange von Abschnitt I], so sind die Grundformen von Q resp. H durch die von f_3 resp. f_4 darzustellen, und das Entsprechende ist für die Büschel $f_3 + \lambda Q$, $f_4 + \mu H$ zu leisten.

§ 15. Erweiterungen auf inkongruente Substitutionen.

Die in den §§ 11—14 für In- und Kovarianten abgeleiteten Ergebnisse lassen sich im wesentlichen auch auf den Fall von Urformen mit mehreren homogenen Variabelnpaaren (x_1, x_2), (y_1, y_2), ..., die unabhängigen (inkongruenten, inkogredienten) Substitutionen S_1, S_2, ... unterworfen werden, ausdehnen. Es soll dies wenigstens in den Grundzügen dargelegt werden, indem der Fall zweier Paare als Muster diene. Schon in § 10 waren lineare partielle Differentialgleichungen aufgestellt, denen In- und Kovarianten bilinearer Urformen bei zwei inkongruenten unimodularen S_1, S_2 genügten.

Es werde jetzt direkt an § 11 angeknüpft. Die binäre Urform $f_{n,p} \equiv f(x_1, x_2; y_1, y_2)$ von den Ordnungen n, p in den (x), (y) werde zunächst nach Potenzen von x_1 geordnet, oder, wie es jetzt bequemer ist, nach Potenzen der nichthomogenen Variabeln $x = x_1 (x_2 = 1)$, so daß die Koeffizienten a_i ihrerseits ganze Funktionen p-ter Ordnung von $y = y_1 (y_2 = 1)$ sind:

$$(1)\quad \begin{cases} f_{n,p}(x;y) \equiv a_0\, x^n + n_1 a_1 x^{n-1} + n_2 a_2 x^{n-2} + \ldots \\ \qquad\qquad + n_2 a_{n-2} x^2 + n_1 a_{n-1} x + a_n\,, \\ \quad a_i \equiv a_{i0}\, y^p + p_1 a_{i1} y^{p-1} + p_2 a_{i2} y^{p-2} + \ldots \\ \qquad\qquad + p_2 a_{i,p-2} y^2 + p_1 a_{i,p-1} y + a_{i,p}\,, \\ \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)\,, \end{cases}$$

oder zusammengezogen:

$$(1') \qquad f_{n,p}(x;\,y) \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} a_{ik}\, n_i\, p_k\, x^{n-i}\, y^{p-k}\,,$$

wo wiederum n_i, p_k den i-ten Binomialkoeffizienten von n, resp. den k-ten von p bedeute. Auf f werde zuvörderst eine Schiebung $A_1(h)$ von x ausgeübt:

$$(2) \qquad A_1(h) \mid x = \xi + h\,.$$

Hierdurch geht $f_{n,p}(x;\,y)$ über in eine neue Form $\varphi_{n,p}(\xi;\,y)$:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_{n,p}(\xi;\,y) \equiv \alpha_0\,\xi^n + n_1\,\alpha_1\,\xi^{n-1} + \ldots + n_1\,\alpha_{n-1}\,\xi + \alpha_n\,, \\ \qquad \alpha_i \equiv \alpha_{i0}\,y^p + p_1\,\alpha_{i1}\,y^{p-1} + \ldots + p_1\,\alpha_{i,p-1}\,y + \alpha_{i,p}\,, \end{cases}$$

oder kurz:

$$(3') \qquad \varphi_{n,p}(\xi;\,y) \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} \alpha_{ik}\, n_i\, p_k\, \xi^{n-i}\, y^{p-k}\,.$$

Ein Ausdruck $J(a_{ik}) \equiv J(a) \equiv J$ soll gegenüber $A_1(h)$ unverändert bleiben und dadurch zu einer „Schiebungsinvariante von f bez. $x = x_1$" werden:

$$(\mathrm{I}) \qquad J(\alpha_{ik}) = J(\alpha) \equiv J(a)\,.$$

Man entwickle, wie in § 11, $J(\alpha)$ nach Potenzen von h:

$$(5) \qquad J(\alpha) \equiv J(a) + h\,\frac{d\,J(\alpha)}{dh\;(h=0)} + \ldots$$

Wegen (I) verschwinden rechts die Koeffizienten von h, h^2, ..., also insbesondere der von h:

$$(6) \qquad \frac{d\,J(\alpha)}{dh\;(h=0)} = J'(\alpha)_{(h=0)} \equiv 0\,.$$

Nun ist:

$$(7) \qquad J'(\alpha) \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_{ik}}\,\alpha'_{ik}\,,$$

also für $h = 0$:

$$(8) \qquad J'(\alpha)_{(h=0)} \equiv \sum_{i}\sum_{k} \frac{\partial J(a)}{\partial a_{ik}}\,\alpha'_{ik}(0)\,,$$

wo die $\alpha'_{ik}(0)$ zu ermitteln sind. Zunächst gilt, wie in § 11 ($i = 0, 1, \ldots, n$):

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_0 = a_0\,, \quad \alpha_1 = a_0\,h + a_1\,, \quad \ldots, \\ \alpha_i = a_0\,h^i + i_1\,a_1\,h^{i-1} + \ldots + a_i\,, \quad \ldots, \end{cases}$$

$$(9')\quad \begin{cases} \alpha_0' = 0\,, \quad \alpha_1' = a_0\,, \quad \alpha_2' = 2(a_0 h + a_1)\,, \quad \ldots, \\ \alpha_i' = i\{a_0 h^{i-1} + (i-1)_1 a_1 h^{i-2} + \ldots + a_{i-1}\}\,, \quad \ldots, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha_0'(0) = 0\,, \quad \alpha_1'(0) = 1 \cdot a_0\,, \quad \alpha_2'(0) = 2 \cdot a_1\,, \quad \ldots, \\ \alpha_i'(0) = i\, a_{i-1}\,, \quad \ldots, \end{cases}$$

Nunmehr setze man hier für die α_i und a_i ihre Polynome p-ter Ordnung in y aus (1) und (3) ein und berücksichtige, daß dann die Relationen (10) identisch in y erfüllt sein müssen. Dann ergibt die Koeffizientenvergleichung für alle Werte des Index k von 0 bis p:

$$(10')\quad \begin{cases} \alpha_{0k}'(0) = 0\,, \quad \alpha_{1k}'(0) = 1 \cdot a_{0k}\,, \quad \alpha_{2k}'(0) = 2 \cdot a_{1k}\,, \\ \qquad \ldots, \quad \alpha_{ik}'(0) = i\, a_{i-1,k} \\ \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)\,. \end{cases}$$

Hält man in dem Summenausdruck (8) jeweils den Index i fest und läßt den zweiten Index k von 0 bis p laufen, so kommt gemäß (10′):

$$(8')\quad \begin{cases} J'(\alpha)_{(h=0)} \equiv \sum\limits_i \left\{\dfrac{\partial J}{\partial a_{i0}} \alpha_{i0}'(0) + \dfrac{\partial J}{\partial a_{i1}} \alpha_{i1}'(0) + \ldots + \dfrac{\partial J}{\partial a_{ip}} \alpha_{ip}'(0)\right\} \\ \equiv \sum\limits_i i \left\{a_{i-1,1} \dfrac{\partial J}{\partial a_{i1}} + a_{i-1,2} \dfrac{\partial J}{\partial a_{i2}} + \ldots + a_{i-1,p} \dfrac{\partial J}{\partial a_{ip}}\right\} \\ \equiv \sum\limits_k a_{0k} \dfrac{\partial J}{\partial a_{1k}} + 2 \sum\limits_k a_{1k} \dfrac{\partial J}{\partial a_{2k}} + \ldots + n \sum\limits_k a_{n-1,k} \dfrac{\partial J}{\partial a_{nk}} \\ \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{p} i\, a_{i-1,k} \dfrac{\partial J}{\partial a_{ik}}\,. \end{cases}$$

Die rechte Seite von (8′) verschwindet, auf Grund von (6), identisch, d. h. für alle Wertsysteme der a_{ik}. Hinterher schreibe man wieder h_1 statt h. Verfährt man analog mit der Schiebung $A_2(h_2)$, indem man dann $x_1 = 1$, $x_2 = x$; $y_1 = 1$, $y_2 = y$ setzt, und wiederholt beide Entwicklungen für die Schiebungen $A_1(l_1)$, $A_2(l_2)$ bez. y_1 resp. y_2, so ergibt sich, daß eine „Schiebungsinvariante“ J von f bez. x_1, x_2 resp. y_1, y_2, d. i. eine Invariante J gegenüber resp. einer $A_1(h_1)$, $A_2(h_2)$, $A_1(l_1)$, $A_2(l_2)$ je einer der vier linearen partiellen Differentialgleichungen genügt:

$$(\text{II a}) \qquad A_1(h_1) \mid \nabla_1 J \equiv \sum_i \sum_k i\, a_{i-1,k} \frac{\partial J}{\partial a_{ik}} = 0\,,$$

$$(\text{II b}) \qquad A_2(h_2) \mid \nabla_2 J \equiv \sum_i \sum_k (n-i)\, a_{i+1,k} \frac{\partial J}{\partial a_{ik}} = 0\,,$$

$$(\text{II a}') \qquad A_1(l_1) \mid \epsilon_1 J \equiv \sum_i \sum_k k\, a_{i,k-1} \frac{\partial J}{\partial a_{ik}} = 0\,,$$

$$(\text{II b}') \qquad A_2(l_2) \mid \epsilon_1 J \equiv \sum_i \sum_k (p-k)\, a_{i,k+1} \frac{\partial J}{\partial a_{ik}} = 0\,.$$

Nach Satz VII des § 6 genügt eine unimodulare Invariante bez. (x_1, x_2), d. h. eine Invariante gegenüber allen unimodularen S_1 der x_1, x_2, den beiden Bedingungen $\nabla_1 = 0$, $\nabla_2 = 0$ zugleich, und entsprechend eine unimodulare Invariante bez. y_1, y_2 den beiden Bedingungen $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$ zugleich; endlich erfüllt eine unimodulare Invariante bez. beider Variabelnpaare, oder eine „unimodulare“ Invariante schlechthin, alle vier Bedingungen.

Faßt man etwa die erste der Gleichungen (II) näher ins Auge, so unterscheidet sie sich von der für ein einziges Variabelnpaar $(x_1, x_2) = (x, 1)$ und eine Schiebung $A_1(h_1) : x = \xi + h_1$ gültigen [§ 11, (II a)] nur dadurch, daß irgendeiner der damaligen Terme $a_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial a_i}$ nunmehr ersetzt ist durch eine Summe von Termen analoger Struktur, indem den beiden Indizes $i-1$, i ein zweiter Index k angehängt wird, der seinerseits die Werte $0, 1, \ldots, p$ durchläuft. Entsprechendes gilt für die drei anderen Gleichungen (II).

Nimmt man demgemäß jeweils dieselbe Abänderung vor in dem Beweise des § 11 für den Satz, daß umgekehrt die Bedingung $\nabla_1 = 0$ resp. $\nabla_2 = 0$ auch hinreichend ist für eine Schiebungsinvariante bez. x_1 resp. x_2, und berücksichtigt, daß die Substitutionen S_1, S_2 unabhängig voneinander sind, so erkennt man, wie sich der dort geführte Beweis im übrigen Wort für Wort auf die jetzigen allgemeineren Fälle (II a), (II b), (II a′), (II b′) übertragen läßt.

Damit findet auch die Entwicklung (VII′) des § 11 ihre unmittelbare Erweiterung. Sind h, l, ∇, ϵ gemeinsame Zeichen resp. für h_1, h_2; l_1, l_2; ∇_1, ∇_2; ϵ_1, ϵ_2 in (II), und denkt man sich auf die Variabeln x_1, x_2 resp. y_1, y_2

der Urform f je eine Schiebung $A(h)$, $A(l)$ ausgeübt, ist endlich J ein beliebig gewählter Ausdruck in den Koeffizienten von f, so besteht die identische Entwicklung:

$$(\mathrm{II}\alpha)\quad \begin{cases} J[(\alpha)] = J + (h\,\nabla J + l\,\mathsf{E}J) \\ + \dfrac{1}{2!}(h^2\,\nabla^2 J + hl\,\nabla E J + l^2\,\mathsf{E}^2 J) + \dots \end{cases}$$

Liegen mehrere Urformen $f_{n,p}$, g_{n_1,p_1}, h_{n_2,p_2}, ... in x_1, x_2; y_1, y_2 vor, so ist jeder der Prozesse ∇_1, E_1, ∇_2, E_2 auf die bezüglichen Koeffizientenreihen der a_{ik}, $b_{i_1 k_1}$, ... zu erstrecken ($i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, p$; $i_1 = 0, 1, \dots, n_1$; $k_1 = 0, 1, \dots, p_1$ usw.) und wiederum jeweils die Summe zu bilden.

Endlich tritt, wenn es sich um eine Schiebungskovariante $K(x_1, x_2; y_1, y_2)$ resp. bez. x_1, x_2, y_1, y_2 handelt, nach dem Muster des § 13, gegenüber einer Invariante nur die Abweichung ein, daß den rechten Seiten von (IIa), ..., (IIb′) resp. die Terme $-x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $-x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}$; $-y_2\dfrac{\partial}{\partial y_1}$, $-y_1\dfrac{\partial}{\partial y_2}$ hinzuzufügen sind.

Demnach sind die — auch den Fall der Kovariante mit nur einem Variabelnpaar und der Invariante mit umfassenden — charakteristischen Differentialgleichungen für eine Schiebungskovariante $K(x_1, x_2; y_1, y_2)$ bez. resp. x_1, x_2, y_1, y_2 von Urformen $f_{n,p}$, g_{n_1,p_1}, ...:

$$(\mathrm{III\,a})\qquad A_1(h_1)\mid \sum_f \nabla_1 K - x_2\frac{\partial K}{\partial x_1} = 0\,,$$

$$(\mathrm{III\,b})\qquad A_2(h_2)\mid \sum_f \nabla_2 K - x_1\frac{\partial K}{\partial x_2} = 0\,,$$

$$(\mathrm{III\,a'})\qquad A_1(l_1)\mid \sum_f \mathsf{E}_1 K - y_2\frac{\partial K}{\partial y_1} = 0\,,$$

$$(\mathrm{III\,b'})\qquad A_2(l_2)\mid \sum_f \mathsf{E}_2 K - y_1\frac{\partial K}{\partial y_2} = 0\,,$$

während für eine unimodulare Kovariante bez. x_1, x_2 zugleich die Gleichungen (IIIa) und (IIIb), für eine solche bez. y_1, y_2 zugleich die Gleichungen (IIIa′) und (IIIb′), endlich für eine „unimodulare Kovariante schlechthin" alle vier Gleichungen (III) gleichzeitig charakteristisch sind.

Tritt der besondere Fall ein, daß für eine unimodulare Kovariante schlechthin die beiden Substitutionen S_1, S_2 und damit beide Variabelnpaare kogredient werden, so beweist man, wie in § 10, daß sich die vier Gleichungen (III) auf nur zwei zusammenziehen, die durch Addition von (IIIa) und (IIIa′) resp. (IIIb) und (IIIb′) entstehen. Somit gilt:

Satz I. „Damit ein Ausdruck $K(x_1, x_2; y_1, y_2)$ gegenüber irgendeiner der unabhängigen Schiebungen $A_1(h_1)$, $A_2(h_2)$, $A_1(l_1)$, $A_2(l_2)$ von resp. x_1, x_2, y_1, y_2 ungeändert bleibt, ist notwendig und hinreichend, daß K der entsprechenden Differentialgleichung (III) genügt, wo die Prozesse ∇_1, ∇_2, ϵ_1, ϵ_2 durch die linken Seiten von (II) erklärt sind, und die Summation sich auf die Urformen $f, g, h, \ldots$ erstreckt.

Die Gesamtheit der Bedingungen (III) charakterisiert eine unimodulare Kovariante K“.

Für die Koeffizienten einer unimodularen Kovariante $K(x_1, x_2; y_1, y_2)$ sollen jetzt analoge Rekursionsgesetze entwickelt werden, wie für die $K(x_1, x_2)$ in § 13.

Es genüge, die Wirkung der Schiebungen $A_1(h_1)$, $A_1(l_1)$, also der Bedingungen (IIIa), (IIIa′) zu untersuchen.

Indem man wieder nichthomogen $x_1 = x$, $x_2 = 1$; $y_1 = y$, $y_2 = 1$ setzt, die Ordnungen von K in x, y resp. mit λ, μ bezeichnet und K einmal nach Potenzen von x, das andere Mal von y ordnet, kommt:

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} K &\equiv C_\lambda x^\lambda + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \ldots + C_i x^i + \ldots + C_1 x + C_0 \\ &\equiv D_\mu y_\mu + D_{\mu-1} y^{\mu-1} + \ldots + D_k y^k + \ldots + D_1 y + D_0 . \end{aligned} \right.$$

Hier ordne man ihrerseits die C_i, D_k nach Potenzen von μ resp. λ:

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} C_i &\equiv C_{i\mu} y^\mu + C_{i,\mu-1} y^{\mu-1} + \ldots + C_{i1} y + C_{i0} \\ &\qquad (i = \lambda, \lambda - 1, \ldots, 0), \\ D_k &\equiv D_{\lambda k} x^\lambda + D_{\lambda-1,k} x^{\lambda-1} + \ldots + D_{1k} x + D_{0k} \\ &\qquad (k = \mu, \mu - 1, \ldots, 0). \end{aligned} \right.$$

Unterwirft man K den Differentiationsprozessen (IIIa), (IIIa′), wo der Kürze halber wieder ∇_1, ϵ_1 statt $\sum\limits_f \nabla_1$,

$\sum\limits_{f} \epsilon_1$ geschrieben werde, so ergeben sich zunächst für die C genau die Relationen (IIIa) des § 13, und entsprechend für die D:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{lll} \nabla_1 C_0 \equiv 1\, C_1\,, & \nabla_1 C_1 \equiv 2\, C_2\,, \;\ldots, & \\ \nabla_1 C_i \equiv (i+1)\, C_{i+1}\,, \;\ldots, & \nabla_1 C_{\lambda-1} \equiv \lambda\, C_\lambda\,, & \nabla_1 C_\lambda \equiv 0\,, \\ \epsilon_1 D_0 \equiv 1\, D_1\,, & \epsilon_1 D_1 \equiv 2\, D_2\,, \;\ldots, & \\ \epsilon_1 D_k \equiv (k+1)\, D_{k+1}\,, \;\ldots, & \epsilon_1 D_{\mu-1} \equiv \mu\, D_\mu\,, & \epsilon_1 D_\mu \equiv 0\,, \end{array}\right.$$

oder auch durch Iteration von ∇_1, ϵ_1, angewandt nur auf C_0, D_0:

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{lll} \nabla_1 C_0 \equiv 1!\, C_1\,, & \nabla_1^2 C_0 \equiv 2!\, C_2\,, \;\ldots, & \\ \nabla_1^i C_0 \equiv i!\, C_i\,, \;\ldots, & \nabla_1^\lambda C_0 \equiv \lambda!\, C_\lambda\,, & \nabla_1^{\lambda+1} C_0 \equiv 0\,, \\ \epsilon_1 D_0 \equiv 1!\, D_1\,, & \epsilon_1^2 D_0 \equiv 2!\, D_2\,, \;\ldots, & \\ \epsilon_1^k D_0 \equiv k!\, D_k\,, \;\ldots, & \epsilon_1^\mu D_0 \equiv \mu!\, D_\mu\,, & \epsilon_1^{\mu+1} D_0 \equiv 0\,. \end{array}\right.$$

Diese Relationssysteme (13) oder auch (14) sind jetzt aber als in den Variabeln y resp. x identisch erfüllt anzusehen und sind in diesem Sinne gleichwertig mit den Differentialgleichungen (IIIa), (IIIa′).

Die Koeffizientenvergleichung liefert die ebenfalls mit (IIIa) resp. (IIIa′) gleichwertige Kette von Rekursionsformeln ($s = 0, \ldots, \mu$; $r = 0, \ldots, \lambda$; $i = 0, 1, \ldots, \lambda$; $k = 0, \ldots, \mu$):

$$(15\text{a})\quad \left\{\begin{array}{l} \nabla_1^i C_{0s} \equiv i!\, C_{is}\,, \\ \nabla_1^{\lambda+1} C_{0s} \equiv 0\,; \end{array}\right. \qquad (15\text{b})\quad \left\{\begin{array}{l} \epsilon_1^k C_{r0} \equiv k!\, C_{rk}\,, \\ \epsilon_1^{\mu+1} C_{r0} \equiv 0\,. \end{array}\right.$$

Im besonderen folgt für $s = 0$ resp. $r = 0$:

$$(16\text{a})\qquad \nabla_1^i C_{00} \equiv i!\, C_{i0}\,, \qquad (i = 0, \ldots, \lambda)$$

$$(16\text{b})\qquad \epsilon_1^k C_{00} \equiv k!\, C_{0k}\,. \qquad (k = 0, \ldots, \mu)$$

Nun sind für eine Schiebungskovariante K bez. x_1 und y_1 die Schiebungen $A_1(h_1)$, $A_1(l_1)$ voneinander unabhängig, also auch vertauschbar, mithin auch die Prozesse ∇_1^i, ϵ_1^k.

Übt man daher auf das „freie“ Glied $C_{00} = K(0, 0)$ von K den kombinierten Prozeß $\nabla_1^i \epsilon_1^k$ aus, so kann man erst ∇_1^i, d. h. die Formel (16a) anwenden, und dann auf deren rechte Seite gemäß (15b) den Prozeß $\mathfrak{E}_1^k$. Dann ergibt sich:

$$V_1^i \mathfrak{E}_1^k C_{00} \equiv \mathfrak{E}_1^k (i!\, C_{i0}) \equiv i!\, \mathfrak{E}_1^k C_{i0} \equiv i!\, k!\, C_{ik}\,,$$

oder umgekehrt:

$$\text{(IV)} \qquad C_{ik} \equiv \frac{V_1^i \mathfrak{E}_1^k C_{00}}{i!\, k!}\,.$$

Damit nimmt die Kovariante K selbst die Gestalt an:

$$\text{(IV}') \quad K \equiv \sum_{i=0}^{\lambda} \sum_{k=0}^{\mu} C_{ik}\, x^i y^k \equiv \sum_{i=0}^{\lambda} \sum_{k=0}^{\mu} \frac{V_1^i \mathfrak{E}_1^k C_{00}}{i!\, k!}\, x^i y^k\,,$$

und wenn K eine vollständige unimodulare Kovariante ist, so existiert eine mit (IV′) parallel laufende Darstellung, die den Differentialgleichungen (IIIb), (IIIb′) korrespondiert.

Die Entwicklung (IV′) von K hat, in Ausdehnung von (Va) des § 13, eine analoge Struktur, wie die Taylorsche Entwicklung einer beliebigen ganzen Funktion $K_{\lambda,\mu}(x, y)$, von den Ordnungen λ, μ in x, y:

$$(17) \quad K(x, y) \equiv \sum_{i=0}^{\lambda} \sum_{k=0}^{\mu} \frac{1}{i!\, k!} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i\, \partial y^k} K(0, 0)\, x^i y^k\,,$$

wo hier aber die Argumente 0, 0 in K bedeuten, daß erst nach erfolgten Differentiationen $x = 0$, $y = 0$ zu setzen ist.

Die Vergleichung von (IV′) mit (17) lehrt, daß für eine Kovariante $K(x, y)$ die spezifischen Zusammenhänge bestehen:

$$(18) \qquad V_1^i \mathfrak{E}_1^k K(0, 0) \equiv \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i\, \partial y^k} K(0, 0)\,.$$

Somit ist zunächst bewiesen:

Satz II. „Soll eine ganze Funktion $K(x, y)$ von den Ordnungen λ, μ in x, y, deren Koeffizienten C_{ik} ganzrational in den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... der Urformen f, g, h, ... sind, gegenüber inkongruenten Schiebungen $A_1(h_1)$, $A_1(l_1)$ von x, y eine Kovariante sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß in der Taylorschen Entwicklung (17) von K die — nur auf die

Variabeln x, y bezüglichen — Differentiationsprozesse $\frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} K(0, 0)$ ersetzbar sind durch die — nur auf die Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... bezüglichen — Differentiationsprozesse $V_1^i \epsilon_1^k K(0, 0)$, wo V_1, ϵ_1 zur Abkürzung steht für $\sum\limits_f V_1$, $\sum\limits_f \epsilon_1$, und die auf eine einzelne der Urformen auszuübenden Prozesse V_1, ϵ_1 durch die linken Seiten von (IIa), (IIa′) erklärt sind.

Ein entsprechender Satz gilt für eine Schiebungskovariante K gegenüber $A_2(h_2)$, $A_2(l_2)$, nur daß jetzt $x_1 = 1$, $x_2 = x$; $y_1 = 1$, $y_2 = y$ zu setzen ist, so daß an die Stelle des freien Gliedes C_{00} das Leitglied $C_{\lambda\mu}$ tritt."

Nunmehr gehen wir an die Aufstellung der Gewichtsregeln bei inkongruenten Streckungen $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$; $M_1(n_1)$, $M_2(n_2)$ bez. der x_1, x_2 resp. y_1, y_2. Es werde gleich der allgemeine Fall einer Streckungskovariante $K[(a), (b), \ldots; x_1, x_2; y_1, y_2]$ bez. x_1, x_2, y_1, y_2 der Urformen $f_{n,p}$, g_{n_1,p_1}, ... von den Ordnungen λ, μ in den x resp. y ins Auge gefaßt, mit dem allgemeinen Gliede:

$$(19)\qquad T = ct \equiv c \prod_{i=0}^{n} \prod_{k=0}^{p} a_{ik}^{\varepsilon_{ik}} \prod_{i_1=0}^{n_1} \prod_{k_1=0}^{p_1} b_{ik}^{\eta_{i_1 k_1}} \ldots x_1^r x_2^{\lambda-r} y_1^s y_2^{\mu-s}.$$

Vermöge der bezüglichen Streckungen werden die neuen Koeffizienten und Variabeln:

$$(20)\quad \begin{cases} M_1(m_1) \mid \alpha_{ik} = a_{ik} m_1^{n-i}, & \beta_{i_1 k_1} = b_{i_1 k_1} m_1^{n_1 - i_1}, \quad \ldots; & \xi_1 = x_1 m_1^{-1}, \\ M_2(m_2) \mid \alpha_{ik} = a_{ik} m_2^{i}, & \beta_{i_1 k_1} = b_{i_1 k_1} m_2^{i_1}, \quad \ldots; & \xi_2 = x_2 m_2^{-1}, \\ M_1(n_1) \mid \alpha_{ik} = a_{ik} n_1^{p-k}, & \beta_{i_1 k_1} = b_{i_1 k_1} n_1^{p_1 - k_1}, \quad \ldots; & \eta_1 = y_1 n_1^{-1}, \\ M_2(n_2) \mid \alpha_{ik} = a_{ik} n_2^{k}, & \beta_{i_1 k_1} = b_{i_1 k_1} n_2^{k_1}, \quad \ldots; & \eta_2 = y_2 n_2^{-1}, \end{cases}$$

während jeweils die drei übrigen Variabeln ungeändert bleiben. Wird etwa $M_1(m_1)$ ausgeübt, so reproduziert sich jedes Glied T (19) von K um eine Potenz von m_1, deren Exponent durch das Aggregat

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} (n-i)\, \varepsilon_{ik} + \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{k_1=0}^{p_1} (n_1 - i_1)\, \eta_{i_1 k_1} + \ldots - r$$

gebildet wird. Dieser Exponent von m_1 muß dann, gemäß der Definition einer Streckungskovariante K bez. x_1:

$$(21) \qquad M_1(m_1) \mid K[(\alpha), (\beta), \ldots; \xi_1] \equiv m_1^{\omega_1} K,$$

und analog der Exponent von m_2, n_1, n_2, mit dem jeweiligen Gewichte ω_1 resp. ω_2 übereinstimmen. Somit gelangt man, wenn eine Doppelsumme von dem Typus $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{p}$ kürzer mit $\sum\limits_{i,k}$ bezeichnet wird, zu den gewünschten Gewichtsregeln:

$$(\mathrm{V}) \quad \begin{cases} M_1(m_1) \mid \sum\limits_{i,k}(n-i)\,\varepsilon_{ik} + \sum\limits_{i_1,k_1}(n_1-i_1)\,\eta_{i_1k_1} + \ldots - r = \omega_1\,, \\ M_2(m_2) \mid \sum\limits_{i,k} i\,\varepsilon_{ik} + \sum\limits_{i_1,k_1} i_1\,\eta_{i_1k_1} + \ldots - (\lambda - r) = \omega_1\,, \\ M_1(n_1) \mid \sum\limits_{i,k}(p-k)\,\varepsilon_{ik} + \sum\limits_{i_1k_1}(p_1-k_1)\,\eta_{i_1k_1} + \ldots - s = \omega_2\,, \\ M_2(n_2) \mid \sum\limits_{i,k} k\,\varepsilon_{ik} + \sum\limits_{i_1k_1} k_1\,\eta_{i_1k_1} + \ldots - (\mu - s) = \omega_2\,. \end{cases}$$

Sind die beiden ersten resp. die beiden letzten Relationen gleichzeitig erfüllt, so liefert Addition:

$$(\mathrm{VI}) \quad \begin{cases} \begin{matrix} M_1(m_1) \\ M_2(m_2) \end{matrix} \Bigg| \; n\sum\limits_{i,k}\varepsilon_{ik} + n_1\sum\limits_{i_1,k_1}\eta_{i_1,k_1} + \ldots = \lambda + 2\,\omega_1\,, \\ \begin{matrix} M_1(n_1) \\ M_2(n_2) \end{matrix} \Bigg| \; p\sum\limits_{i,k}\varepsilon_{ik} + p_1\sum\limits_{i_1,k_1}\eta_{i_1,k_1} + \ldots = \mu + 2\,\omega_2\,. \end{cases}$$

Setzt man wiederum voraus, daß K in den (a), (b), ... einzeln homogen ist, so bedeuten $\sum\limits_{i,k}\varepsilon_{ik}$, $\sum\limits_{i_1,k_1}\eta_{i_1,k_1}$, ... die Dimensionen (Grade) d_f, d_g, ... von K resp. in den (a), (b), ..., und (VI) lautet kürzer:

$$(\mathrm{VI}') \qquad \begin{cases} n\,d_f + n_1 d_g + \ldots = \lambda + 2\,\omega_1\,, \\ p\,d_f + p_1 d_g + \ldots = \mu + 2\,\omega_2\,. \end{cases}$$

Denkt man sich andererseits die erste und dritte resp. die zweite und vierte der Relationen (VI) zugleich erfüllt, so kommt durch Addition:

$$
\text{(VII)}\begin{cases}
\left.\begin{matrix} M_1(m_1) \\ M_1(n_1) \end{matrix}\right| \sum\limits_{i,k}(n+p-i-k)\,\varepsilon_{ik} + \sum\limits_{i_1,k_1}(n_1+p_1-i_1-k_1)\,\eta_{i_1k_1} + \dots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (r+s) + (\omega_1+\omega_2)\,, \\
\left.\begin{matrix} M_2(m_2) \\ M_2(n_2) \end{matrix}\right| \sum\limits_{i,k}(i+k)\,\varepsilon_{ik} \qquad + \sum\limits_{i_1,k_1}(i_1+k_1)\,\eta_{i_1,k_1} + \dots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (\lambda+\mu-r-s) + (\omega_1+\omega_2\,).
\end{cases}
$$

Die Gewichtsregeln (V) lassen sich wiederum, wie in § 12 im Falle eines einzelnen Variabelnpaares (x_1, x_2), ersetzen durch korrespondierende lineare partielle Differentialgleichungen.

Es genüge die Betrachtung der Streckung $M_1(m_1)$, also der Formeln (21) und der ersten Zeile von (V). Schreibt man für den Augenblick m statt m_1 und setzt, wie in § 12:

$$
(22) \qquad m = 1 + h\,,
$$

so geht (21) über in:

$$
(23) \begin{cases} K[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1] \equiv K(1+h) \equiv (1+h)^{\omega_1} K \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \equiv K + h\,\omega_1 K + \dots \end{cases}
$$

Andererseits liefert die Maclaurinsche Entwicklung der linken Seite:

$$
(24) \qquad K(1+h) \equiv K + h\,\frac{dK[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1]}{dh\ (h=0)} + \dots
$$

Da die Koeffizienten von h auf den rechten Seiten von (23), (24) übereinstimmen müssen, so folgt:

$$
(25) \qquad \frac{dK[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1]}{dh\ (h=0)} = \omega_1 K\,.
$$

Wegen $\dfrac{dh}{dm} = 1$ wird:

$$
(26) \begin{cases} \dfrac{dK[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1]}{dh\ (h=0)} \equiv \dfrac{dK[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1]}{dm\ (m=1)} \\ \qquad\qquad \equiv K'[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1]_{(m=1)}\,, \end{cases}
$$

wo der Akzent die Differentiation nach m angibt. Nun ist:

$$
(27) \begin{cases} K'[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1] \equiv \sum\limits_{i,k} \dfrac{\partial K[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1]}{\partial \alpha_{ik}}\,\alpha'_{ik} \\ + \sum\limits_{i_1,k_1} \dfrac{\partial K[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1]}{\partial \beta_{ik}}\,\beta'_{ik} + \dots + \dfrac{\partial K[(\alpha), (\beta), \dots; \xi_1]}{\partial \xi_1}\,\xi'_1\,. \end{cases}
$$

Für $m = 1$ wird

$$\frac{\partial K[(\alpha), (\beta), \ldots; \xi_1]}{\partial \alpha_{ik}} = \frac{\partial K}{\partial a_{ik}}, \quad \frac{\partial K[(\alpha), (\beta), \ldots; \xi_1]}{\partial \xi_1} = \frac{\partial K}{\partial x_1};$$

ferner folgt aus (20):

$$(28)\begin{cases} \alpha'_{ik} = (n-i)\, a_{ik}\, m_1^{n-i-1}, \quad \beta'_{i_1 k_1} = (n_1 - i_1)\, b_{i_1 k_1}\, m_1^{n_1 - i_1 - 1}, \\ \qquad \ldots; \quad \xi'_1 = -x_1\, m_1^{-2}, \\ \alpha'_{ik(m=1)} = (n-i)\, a_{ik}, \quad \beta'_{i_1 k_1 (m=1)} = (n_1 - i_1)\, b_{i_1 k_1}, \\ \qquad \ldots; \quad \xi'_{1(m=1)} = -x_1 . \end{cases}$$

Verfährt man entsprechend mit $M_2(m_2)$, $M_1(n_1)$, $M_2(n_2)$, so erfüllt eine Streckungskovariante K bez. resp. x_1, x_2, y_1, y_2 je eine der vier Bedingungen:

$$(\mathrm{VIII})\begin{cases} M_1(m_1) \mid \mathsf{M}_1 K \equiv \sum\limits_{i,k} \dfrac{\partial K}{\partial a_{ik}} (n-i)\, a_{ik} + \sum\limits_{i_1, k_1} \dfrac{\partial K}{\partial b_{i_1 k_1}} (n_1 - i_1)\, b_{i_1 k_1} \\ \qquad + \ldots - x_1 \dfrac{\partial K}{\partial x_1} - \omega_1 K \equiv 0, \\ M_2(m_2) \mid \mathsf{M}_2 K \equiv \sum\limits_{i,k} \dfrac{\partial K}{\partial a_{ik}}\, i\, a_{ik} + \sum\limits_{i_1, k_1} \dfrac{\partial K}{\partial b_{i_1 k_1}}\, i_1\, b_{i_1 k_1} \\ \qquad + \ldots - x_2 \dfrac{\partial K}{\partial x_2} - \omega_1 K \equiv 0, \\ M_1(n_1) \mid \mathsf{N}_1 K \equiv \sum\limits_{i,k} \dfrac{\partial K}{\partial a_{ik}} (p-k)\, a_{ik} + \sum\limits_{i_1, k_1} \dfrac{\partial K}{\partial b_{i_1 k_1}} (p_1 - k_1)\, b_{i_1 k_1} \\ \qquad + \ldots - y_1 \dfrac{\partial K}{\partial y_1} - \omega_2 K \equiv 0, \\ M_2(n_2) \mid \mathsf{N}_2 K \equiv \sum\limits_{i,k} \dfrac{\partial K}{\partial a_{ik}}\, k\, a_{ik} + \sum\limits_{i_1, k_1} \dfrac{\partial K}{\partial b_{i_1 k_1}}\, k_1\, b_{i_1 k_1} \\ \qquad + \ldots - y_2 \dfrac{\partial K}{\partial y_2} - \omega_2 K \equiv 0 . \end{cases}$$

Umgekehrt ist das Bestehen je einer dieser Gleichungen auch hinreichend dafür, daß K eine Streckungskovariante bez. resp. x_1, y_1, x_2, y_2 ist. Denn gilt z. B. die erste Gleichung (VIII), und übt man den linkerhand stehenden Differentiationsprozeß (mit Weglassung von $\omega_1 K$) auf irgend ein Glied T (19) von K aus, so resultiert T, multipliziert mit der linken Seite der ersten Gewichtsrelation (V). Dieser Faktor muß also, wenn das Verfahren auf das ganze Aggregat K ausgedehnt wird, wegen des Schlußterms $-\omega_1 K$ von (VIII), mit ω_1 übereinstimmen; das ist aber der Inhalt der ersten Gewichtsregel (V).

Ist K von den x resp. von den y resp. von beiden frei — im letzteren Falle wird K zur Invariante —, so fallen die bezüglichen Endterme $x_1 \dfrac{\partial K}{\partial x_1}$ usw. in (VIII) fort.

Endlich lassen sich mehrere der Gleichungen (VIII), falls sie zugleich bestehen, nach dem Muster von (VI), (VII) durch geeignete Addition vereinigen. Insbesondere sagt das Bestehen einer der beiden Gleichungen, wo überdies $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ vorausgesetzt ist:

$$
\text{(IX)} \quad \left\{
\begin{aligned}
&(\mathsf{M}_1 + \mathsf{N}_1) K = \sum_{i,k} (n + p - i - k)\, a_{ik} \frac{\partial K}{\partial a_{ik}} \\
&\quad + \ldots - \left(x_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial K}{\partial y_1} \right) - 2\,\omega K = 0\,, \\
&(\mathsf{M}_2 + \mathsf{N}_2) K = \sum_{i,k} (i + k)\, a_{ik} \frac{\partial K}{\partial a_{ik}} \\
&\quad + \ldots - \left(x_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial K}{\partial y_2} \right) - 2\,\omega K = 0\,,
\end{aligned}
\right.
$$

aus, daß sich K gegenüber den kongruenten Streckungen $M_1(m_1)\, M_2(m_1)$ resp. $M_1(n_1)\, M_2(n_1)$ invariant verhält, genau so, wie die bezüglichen Relationen (VII), falls man auch dort $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ setzt.

Damit ist bewiesen:

Satz III. „Je eine der Gewichtsregeln (V) ist notwendig und hinreichend dafür, daß ein Ausdruck $K[(a), (b), \ldots; x_1, x_2; y_1, y_2]$ für die Urformen $f_{n,p}$, g_{n_1,p_1}, ... eine Streckungskovariante resp. bezüglich der inkongruenten Streckungen $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$, $M_1(n_1)$, $M_2(n_2)$ ist. Diese Gewichtsrelationen (V) sind der Reihe nach gleichwertig mit den linearen partiellen Differentialgleichungen (VIII).

Im besonderen treten bei kongruenten Streckungen $M_1(m_1)$, $M_1(n_1 = m_1)$ resp. $M_2(m_2)$, $M_2(n_2 = m_2)$ diejenigen Gleichungen an die Stelle von (V), (VIII), die durch Addition der ersten und dritten resp. zweiten und vierten jener Gleichungen hervorgehen, wenn überdies die beiden Gewichte ω_1 und ω_2 zusammenfallen."

Für eine vollständige Kovariante sind die sämtlichen Bedingungen sowohl des Satzes III wie des Satzes I gleichzeitig erfüllt und charakterisieren umgekehrt die Kovariante.

Vergleicht man die Formeln (II), (V), (VIII) mit den entsprechenden (II) des § 13, (2) und (2′) des § 14 für ein System von Urformen in einer Variabelnreihe, so erkennt man, daß eine Kovariante K von $f_{n,p}(x, y)$ noch eine andere Auffassung zuläßt. Denkt man sich die Urform $f_{n,p}$, gerade wie die Bildung K in (11), einmal nach Potenzen von x, das andere Mal nach solchen von y entwickelt und bezeichnet wiederum mit $C_i(y)$ den Koeffizienten von x^i, mit $D_k(x)$ den von y^k, so erscheint eine Kovariante K von $f_{n,p}$ als simultane Kovariante desjenigen Systems von Formen, das aus den $C_i(y)$ und $D_k(x)$ zusammengesetzt ist.

Ferner übertragen sich die Schlüsse, die in § 12 zu den Gesetzen (VII), (VII′) führten, auf den jetzt vorliegenden Fall von zwei nichthomogenen Variabeln x, y.

Durch das freie Glied K_{00} der Kovariante K, das lediglich den Bedingungen

$$\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = 0, \quad \mathsf{M}_1 = 0, \quad \mathsf{M}_2 = 0, \quad \mathsf{N}_1 = 0, \quad \mathsf{N}_2 = 0$$

zu genügen hat, ist die Kovariante K eindeutig bestimmt, und es gilt die Darstellung:

$$\text{(IV}\alpha) \qquad K(x\,;\,y) = K_{00}\{f_{ik}(x\,;\,y)\}\,,$$

wo die rechts an Stelle der ursprünglichen Argumente a_{ik}, der Koeffizienten von f, einzusetzenden Argumente $f_{ik}(x; y)$ erklärt sind durch:

$$f_{ik}(x\,;\,y) = \frac{(n-i)!}{n!}\,\frac{(p-k)!}{p!}\,\frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i\,\partial y^k} f(x\,;\,y)\,.$$

Besteht zwischen einer Anzahl von freien Gliedern (resp. Leitgliedern) von Kovarianten eine identische Relation (Syzygie), so besteht dieselbe Relation auch zwischen den Kovarianten selbst; überhaupt ist die Theorie der in § 12 entwickelten Residuen ohne weiteres auf den vorliegenden Fall von zwei Variabelnreihen ausdehnbar.

Die Ausdehnung auf den Fall von mehr als zwei Variabelnpaaren bietet keinerlei prinzipielle Schwierigkeit; es genüge, die Ergebnisse anzuführen.

Sei $f_{n,p,q,\ldots}$ die Urform von den Ordnungen $n, p, q, \ldots$ in den μ (nichthomogenen) Variabeln $x, y, z, \ldots$:

$$(29)\quad \begin{cases} f_{n,p,q,\ldots}(x, y, z, \ldots) \\ = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{k=0}^{p} \sum\limits_{l=0}^{q} \ldots n_i p_k q_l \ldots a_{ikl} \ldots x^{n-i} y^{p-k} z^{q-l} \ldots \end{cases}$$

Eine Invariante J von f gegenüber inkongruenten Substitutionen der $x, y, z, \ldots$ genügt in bezug auf jede der Variabeln, z. B. x, vier linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(\mathrm{X})\quad \begin{cases} \mathit{\Gamma}_x J \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{p} \sum\limits_{l=0}^{q} \ldots i\, a_{i-1,kl\ldots} \dfrac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} = 0\,, \\ \mathit{\Gamma}_{x'} J \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{p} \sum\limits_{l=0}^{q} \ldots (n-i)\, a_{i+1,kl\ldots} \dfrac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} = 0\,; \end{cases}$$

$$(\mathrm{XI})\quad \begin{cases} \mathsf{M}_x J \equiv \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{p} \sum\limits_{l=0}^{q} \ldots (n-i)\, a_{ikl\ldots} \dfrac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} - \omega_x J = 0\,, \\ \mathsf{M}_{x'} J \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{p=0}^{k} \sum\limits_{l=0}^{q} \ldots i\, a_{ikl\ldots} \dfrac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} - \omega_x J = 0\,. \end{cases}$$

Umgekehrt sagt je eine der Gleichungen (X) aus, daß sich J gegenüber einer Schiebung von x_1 resp. x_2, und je eine der Gleichungen (XI), daß sich J gegenüber einer Streckung von x_1 resp. x_2 invariant verhält; dagegen charakterisiert die Gesamtheit der 4μ Bedingungen eine vollständige Invariante J von f, so daß, wenn $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots$ die Determinanten der auf $x, y, z, \ldots$ ausgeübten Substitutionen $S_x, S_y, S_z, \ldots$ sind, J_1 der in den Koeffizienten der — vermöge der S transformierten — Urform gebildete Ausdruck J, die Identität besteht:

$$(\mathrm{XII})\qquad J_1 \equiv \Delta_x^{\omega_x} \Delta_y^{\omega_y} \Delta_z^{\omega_z} \ldots J\,.$$

Die Invariante J ist in den a homogen von einem Grade (Dimension) d, und isobar hinsichtlich der einzelnen Variabeln (oder auch Indizes) von den Teilgewichten $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \ldots$, wo:

$$(30) \qquad d = \frac{2\,\omega_x}{n} = \frac{2\,\omega_y}{p} = \frac{2\,\omega_z}{q} = \ldots$$

Der in Rede stehende Isobarismus bedeutet bei Benutzung der Abkürzungen:

$$(31) \qquad a_{000\ldots} = a_0\,, \quad a_{1000\ldots} = a_1\,, \quad a_{0100\ldots} = b_1\,, \ldots,$$

daß, wenn J als ein Aggregat von der Struktur gedacht ist:

$$(32) \qquad J \equiv \sum c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} b_1^{\eta_1} c_1^{\zeta_1} \ldots a_{rst}^{\varepsilon_{rst\ldots}} \ldots,$$

mit numerischen Faktoren c, zwischen den (nicht negativen ganzzahligen) Exponenten die Relationen bestehen:

$$(33) \qquad \varepsilon_1 + \sum r\,\varepsilon_{rst\ldots} = \omega_x\,, \qquad \eta_1 + \sum s\,\varepsilon_{rst\ldots} = \omega_y\,, \ldots$$

Entsprechendes gilt für Kovarianten K von f. Schreibt man hier homogen, so ist K abhängig von den Argumenten $a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots, a_{rst\ldots}; x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots$ K genügt in bezug auf jedes Variabelnpaar, z. B. x_1, x_2, vier linearen partiellen Differentialgleichungen, die bei Benutzung der Abkürzungen (XI) lauten:

$$(\mathrm{XIII}) \qquad \mathit{V}_x K - x_2 \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0\,, \qquad \mathit{V}_{x'} K - x_1 \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0\,,$$

$$(\mathrm{XIV}) \qquad \mathsf{M}_x K - x_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0\,, \qquad \mathsf{M}_{x'} K - x_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0\,.$$

Umgekehrt charakterisiert jede einzelne dieser Gleichungen wiederum die bezügliche Sonderinvarianz von K, und die Gesamtheit der $4\,\mu$ Bedingungen eine vollständige Kovariante K, so daß, wenn wiederum K_1 der transformierte Ausdruck ist, die Identität besteht:

$$(\mathrm{XV}) \qquad K_1 \equiv \Delta_x^{\omega_x} \Delta_y^{\omega_y} \Delta_z^{\omega_z} \ldots K\,.$$

Denkt man sich K nichthomogen nach steigenden Potenzen der $x; y; z; \ldots$ entwickelt, ist C_0 das freie

Glied und $C_{ikl\ldots}$ der Koeffizient irgendeines Potenzproduktes $x^i y^k z^l \ldots$, so besteht zwischen $C_{ikl\ldots}$ und C_0 die Relation [als Erweiterung von (IV)]:

$$\text{(XVI)} \qquad C_{ikl\ldots} \equiv \frac{\nabla_x^i \nabla_y^k \nabla_z^l \ldots C_0}{i!\,k!\,l!\ldots},$$

und entsprechend, wenn $C_{\lambda\mu\nu\ldots}$ das Leitglied, d. i. der Koeffizient des Produktes $x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots$ der höchsten Potenzen ist:

$$\text{(XVI}'\text{)} \qquad C_{n-i,\,p-k,\,q-l,\ldots} \equiv \frac{\nabla_{x'}^i \nabla_{y'}^k \nabla_{z'}^l \ldots C_{\lambda\mu\nu\ldots}}{i!\,k!\,l!\ldots}.$$

Durch C_0, das den Bedingungen $\nabla_{x'} = 0$, $\nabla_{y'} = 0 \ldots$, $\mathsf{M}_x = 0$, $\mathsf{M}_{x'} = 0$, $\mathsf{M}_y = 0$, $\mathsf{M}_{y'} = 0$, ... genügt, ist die Kovariante K eindeutig bestimmt, und man hat die (nichthomogene) Darstellung:

$$\text{(XVII}\alpha\text{)} \qquad K(x\,y\,z\ldots) \equiv C_0 \{f_{ikl\ldots}(x;\,y;\,z;\,\ldots)\},$$

wo die rechts an Stelle der ursprünglichen Argumente $a_{ikl\ldots}$ einzusetzenden Argumente $f_{ikl\ldots}(x,\,y,\,z,\,\ldots)$ erklärt sind durch:

$$(34)\left\{\begin{aligned} &f_{ikl\ldots}(x;\,y;\,z;\,\ldots)\\ &\equiv \frac{(n-i)!}{n!}\,\frac{(p-k)!}{p!}\,\frac{(q-l)!}{q!}\cdots\frac{\partial^{i+k+l+\ldots}}{\partial x^i\,\partial y^k\,\partial z^l\ldots} f(x;\,y;\,z;\,\ldots).\end{aligned}\right.$$

Besteht zwischen einer Anzahl von Kovarianten eine identische Relation — Syzygie —, so besteht dieselbe Syzygie auch zwischen ihren Leitgliedern, resp. freien Gliedern und umgekehrt.

Dies ist alles in der früher angegebenen Weise auf ein System von Urformen ausdehnbar. Auch die Theorie der Residuen (§ 13, Satz IV ff.) ist auf Formen mit inkongruenten Variabeln übertragbar.

Im Anhange zu diesem Abschnitte sollen für diese Übertragungen kürzere Beweise auf dem Wege symbolischer Rechnung gegeben werden.

Aufgabe 1. Die Gewichte und Streckungsdifferentialgleichungen, sowie die Gewichtsregeln für Invarianten und Kovarianten sind für die besonderen Fälle einer lineoquadratischen Urform $f_{1,2}$ und einer quadrato-quadratischen $f_{2,2}$ explizite zu entwickeln, sowohl für inkongruente als für kongruente Substitutionen.

Aufgabe 2. Der Beweis der Entwicklung (IIα) sowie der Formeln (XVI), (XVII) für den Fall von zwei inkongruenten Variabelnreihen $x_1, x_2; y_1, y_2$ ist im einzelnen auszuführen.

Aufgabe 3. Zwischen vier bilinearen Formen $f_{11}, g_{11}, h_{11}, k_{11}$ besteht eine (lineare) Syzygie. Diese ist aufzustellen und durch die entsprechende der Leitglieder zu charakterisieren.

Aufgabe 4. Ein einfaches Beispiel für die Erscheinung, daß bei kogredienten Variabelnreihen die Rückkehr von der Syzygie der Leitglieder zu der ursprünglichen Syzygie zwischen Kovarianten nicht ohne weiteres statthaft ist, wird durch eine f_{11} geliefert. Es gilt die Syzygie (wegen der Bezeichnungen vgl. § 9):

$$\begin{vmatrix} f_{x_1} f_{x_2} \\ f_{y_1} f_{y_2} \end{vmatrix} \equiv f\,\delta_f + D(x_1 y_2 - x_2 y_1)\,.$$

Hier wird die identische Kovariante $x_1 y_2 - x_2 y_1$ in der entsprechenden Syzygie der Leitglieder durch das Leitglied „Null" repräsentiert.

Kapitel II. Seminvarianz.

§ 16. Die Seminvarianten einer binären Form. Assoziierte Formen.

Unter einer Seminvariante Φ einer binären Urform:

(1) $$f_n(x_1, x_2) \equiv a_0 x_1^n + n_1 a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + n_1 a_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + a_n x_2^n$$

ist eine ganze, homogene und bez. x_1 — und damit auch bez. x_2 — isobare Funktion der a zu verstehen, die der linearen partiellen Differentialgleichung genügt:

(I) $$\begin{cases} V \equiv a_0 \dfrac{\partial}{\partial a_1} + 2\,a_1 \dfrac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + i\,a_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial a_i} + \ldots \\ \qquad + n\,a_{n-1} \dfrac{\partial}{\partial a_n} = 0\,, \end{cases}$$

also gegenüber einer Schiebung $A_1(h)$ von x_1:

(2) $$x_1 = \xi_1 + h\,\xi_2\,, \quad x_2 = \xi_2\,,$$

ungeändert bleibt. Das Leitglied einer Kovariante von f war nach § 14 eine beliebige Seminvariante.

Die einfachsten Fälle $n = 2, 3, \ldots$ zeigen, daß man den Schiebungsparameter h in (2) so wählen kann, daß die Koeffizienten α_i der transformierten Form $\varphi(\xi_1, \xi_2)$:

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_0 = a_0\,, \quad \alpha_1 = a_0 h + a_1\,, \ldots, \\ \alpha_i = a_0 h^i + i_1 a_1 h^{i-1} + \ldots + i_1 a_{i-1} h + a_i\,, \ldots, \end{cases}$$

von einer Potenz von a_0 im Nenner abgesehen, sämtlich Seminvarianten von f werden. Um diese Frage für eine beliebige Ordnung n zu untersuchen, beachte man zunächst, daß gemäß (1) die Relationen bestehen:

$$(4) \qquad \nabla a_i \equiv i\, a_{i-1}\,, \quad \nabla a_0 = 0\,.$$

Hierbei ist $\alpha_0 = a_0$ stets eine Seminvariante von f. Soll auch α_1 zu einer solchen werden, so muß jedenfalls $\nabla \alpha_1 = 0$ sein, also:

$$(5) \qquad \nabla \alpha_1 \equiv a_0 \nabla h + \nabla a_1 \equiv a_0(\nabla h + 1) = 0\,.$$

Somit läßt sich die erste Bedingung, die erfüllt sein muß, damit α_1 zu einer Seminvariante von f wird, unter jeder der beiden Gestalten aussprechen:

$$(\text{II}) \qquad \nabla \alpha_1 \equiv 0\,; \quad \nabla h \equiv -1\,.$$

Geht man zu $\alpha_2 = h a_1 + (a_1 h + a_2)$ über, so erhält man, da

$$\nabla(a_1 h + a_2) = h \nabla a_1 + \nabla a_2 + a_1 \nabla h = h a_0 + 2 a_1 + a_1 \nabla h \;:$$

$$(6) \qquad \nabla \alpha_2 \equiv h \nabla \alpha_1 + \alpha_1 \nabla h + h a_0 + 2 a_1 + a_1 \nabla h\,.$$

Wird jetzt die Bedingung (II) als erfüllt gedacht, so geht (6) über in:

$$(7) \qquad \nabla \alpha_2 \equiv -\alpha_1 + \alpha_1 \equiv 0\,.$$

So fortfahrend überzeugt man sich der Reihe nach, daß auch die Gleichungen $\nabla \alpha_3 = 0, \ldots$ eine Folge von (II) sind. Behufs allgemeiner Entscheidung berücksichtige man zuvörderst, daß wegen (II) auch:

$$(8) \qquad \nabla h^s \equiv s h^{s-1} \nabla h \equiv -s h^{s-1} \qquad (s = 1, 2, \ldots n)$$

gilt. Übt man den Prozeß ∇ (I) auf α_i (3) aus, so kommt:

$$\nabla \alpha_i \equiv a_0 \nabla h^i + i_1 a_1 \nabla h^{i-1} + \ldots + i_r a_r \nabla h^{i-r} + \ldots + i\, a_{i-1} \nabla h$$
$$+ h^i \nabla a_0 + i_1 h^{i-1} \nabla a_1 + \ldots + i_r h^{i-r} \nabla a_r + \ldots + \nabla a_i\,,$$

oder, gemäß (4) und (8):

$$(9)\begin{cases} \nabla \alpha_i \equiv -i a_0 h^{i-1} - i_1(i-1) a_1 h^{i-2} + \ldots - i_r(i-r) a_r h^{i-r-1} - \ldots - i a_{i-1} \\ \quad + i_1 a_0 h^{i-1} + 2 i_2 a_1 h^{i-2} + \ldots + i_{r+1}(r+1) a_r h^{i-r-1} + \ldots + i a_{i-1}. \end{cases}$$

Hier zerstören sich aber je zwei untereinander stehende Glieder, da allgemein die bekannte Relation zwischen Binomialkoeffizienten besteht:

$$(r+1)\, i_{r+1} = \frac{i\,(i-1)\ldots(i-r+1)\,(i-r)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot r} = i_r\,(i-r)\,.$$

Mithin ist in der Tat das Bestehen der Identitäten:

$$(10) \qquad \nabla \alpha_2 \equiv 0\,, \quad \nabla \alpha_3 \equiv 0\,, \ldots, \quad \nabla \alpha_n \equiv 0$$

eine Folge von (II) $\nabla \alpha_1 \equiv 0$, und es ist bewiesen:

Satz I. „Übt man auf eine binäre Urform (1) $f_n(x_1, x_2)$ eine Schiebung (2) $A_1(h)$ bez. x_1 aus, und wählt den Schiebungsparameter h als eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung $\nabla h = -1$, so genügen sämtliche Koeffizienten α_i der vermöge (2) transformierten Urform $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ der linearen partiellen Differentialgleichung $\nabla = 0$.“

Eine partikuläre Lösung von $\nabla h = -1$ ist:

$$(\mathrm{III}) \qquad h = -\frac{a_1}{a_0}\,.$$

Einmal geht das direkt aus $\nabla h = -\frac{1}{a_0} \nabla a_1 = -\frac{a_0}{a_0} = -1$ hervor, andererseits auch daraus, daß für den Wert $h = -\frac{a_1}{a_0}$ der Koeffizient α_1 verschwindet, also sicher $\nabla \alpha_1 = 0$ ist.

In der Tat ist die Substitution (2), mit $h = -\frac{a_1}{a_0}$, in der nichthomogenen Gestalt $x = \xi - \frac{a_1}{a_0}$ in der Algebra der Gleichungen bekannt als diejenige, die bewirkt, daß in der transformierten Gleichung $\varphi(\xi) = 0$ der Koeffizient α_1 der zweithöchsten Potenz von ξ verschwindet.

Nach Einsetzung des Wertes $h = -\frac{a_1}{a_0}$ (3) erhält man für die neuen Koeffizienten α_i:

$$
\text{(IV)}\left\{\begin{aligned}
&\alpha_0 = a_0\,, \quad \alpha_1 = 0\,, \quad \alpha_2 a_0 = a_0 a_2 - a_1^2\,,\\
&\alpha_3 a_0^2 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3\,, \quad \ldots,\\
&\alpha_i a_0^{i-1} = a_0^{i-1} a_i - i_1 a_0^{i-2} a_{i-1} a_1 + i_2 a_0^{i-3} a_{i-2} a_1^2\\
&\qquad - i_3 a_0^{i-4} a_{i-3} a_1^3 + - \ldots + (-1)^{i-2} i_2 a_0 a_2 a_1^{i-2}\\
&\qquad + (-1)^{i-1}(i-1) a_1^i\,.
\end{aligned}\right.
$$

$$(i = 2\,, 3\,, \ldots n)$$

Man wird demnach die $n-1$ Produkte $\alpha_i a_0^{i-1}$ als selbständige Größen einführen, die mit C_i bezeichnet seien:

$$
\text{(V)}\left\{\begin{aligned}
&C_i \equiv \alpha_i a_0^{i-1} = a_0^{i-1} a_i - i_1 a_0^{i-2} a_{i-1} a_1\\
&\quad + i_2 a_0^{i-3} a_{i-2} a_1^2 - + \ldots + (-1)^{i-2} i_2 a_0 a_2 a_1^{i-2}\\
&\quad + (-1)^{i-1}(i-1) a_1^i = \sum_{r=0}^{i-2} (-1)^r i_r a_0^{i-r-1} a_{i-r} a_1^r\\
&\quad + (-1)^{i-1}(i-1) a_1^i \;{}^{*)}\,.
\end{aligned}\right.
$$

$$(i = 2\,, 3\,, \ldots n)$$

Diese Größen C_i sind in den $a_0\,, a_1\,, \ldots, a_n$ ganzrational, homogen von der Dimension i und isobar (bez. x) vom Gewichte i. Mit $\nabla \alpha_i = 0$ (10) ist auch $\nabla(\alpha_i a_0^{i-1}) \equiv \nabla C_i = 0$ erfüllt, also sind die $(n-1)$ Größen C_i (V), zusammen mit $C_0 = a_0$, Seminvarianten der Urform f. Somit ergibt sich, in Verbindung mit Satz I:

Satz II. „Transformiert man eine binäre Urform $f_n(x_1\,, x_2)$ mittels der Schiebung von x_1:

$$x_1 = \xi_1 - \frac{a_1}{a_0}\,\xi_2\,, \qquad x_2 = \xi_2\,,$$

so verschwindet in der transformierten Form $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ der Koeffizient α_1, während die übrigen α_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$, noch je mit a_0^{i-1} multipliziert, zusammen mit dem ersten Koeffizienten $\alpha_0 = a_0 = C_0$

---

*) Hier läßt sich das Endglied auch dem allgemeinen Gesetze der vorangehenden Summe unterordnen, indem man schreibt: $C_i = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r i_r a_0^{i-r-1} a_{i-r} a_1^r$; dann vereinigen sich die beiden letzten Glieder dieser Summe gerade zu dem früheren Endgliede $(-1)^{i-1}(i-1) a_1^i$.

n Seminvarianten (V) C_i $(i = 0, 2, 3, \ldots, n)$ von f liefern."

Die Größen C_i heißen die n „fundamentalen" Seminvarianten von f. Die ursprünglichen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ von (1) f sind als $n+1$ unabhängige veränderliche Größen (Parameter) anzusehen; über den Schiebungsparameter h wurde gemäß (III) so verfügt, daß von den transformierten Koeffizienten α_i der zweite, α_1, den besonderen Wert Null annimmt. Demnach stellen die n Seminvarianten C_i (V) $(i = 0, 2, \ldots, n)$ höchstens n unabhängige Größen dar; daß es aber auch nicht weniger sind, ergibt sich daraus, daß in der Reihenfolge $C_0 C_2 \ldots C_n$ irgendein C_i stets einen Koeffizienten a_i enthält, der in den vorangehenden C noch nicht auftrat:

Satz III. „Die n fundamentalen Seminvarianten C_i (V) $(i = 0, 2, 3, \ldots, n)$ sind voneinander unabhängig."

Für $a_1 = 0$ reduzieren sich, wie die Ausdrücke (V) zeigen, bis auf eine Potenz von $C_0 = a_0$ im Nenner, die C_i $(i = 0, 2, 3, \ldots, n)$ auf die korrespondierenden ursprünglichen Koeffizienten a_i, wie es sein muß, da sich für $a_1 = 0$, d. i. $h = 0$, die Schiebung (2) auf die Identität reduziert.

Sei jetzt $\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ eine beliebig vorgelegte Seminvariante von f (die im besonderen auch eine Invariante sein kann), so bleibt Φ nach der Definition einer Seminvariante ungeändert, wenn man an Stelle der a die vermöge (2) hervorgehenden neuen Koeffizienten α (3) einführt:

$$\text{(VI)} \qquad \Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv \Phi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,.$$

Setzt man also in dem speziellen Falle $h = -\dfrac{a_1}{a_0}$ gemäß (IV), (V) statt der $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ resp. die Größen $C_0, 0, \dfrac{C_2}{C_0}, \dfrac{C_3}{C_0^2}, \ldots, \dfrac{C_n}{C_0^{n-1}}$, so gelangt man zu der grundlegenden Identität:

$$\text{(VII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &\equiv \Phi\left(C_0, 0, \frac{C_2}{C_0}, \frac{C_3}{C_0^2}, \ldots, \frac{C_n}{C_0^{n-1}}\right), \end{aligned} \right.$$

und damit zu:

Satz IV. „Eine beliebig (als homogene und isobare Form der $a_0, a_1, \ldots, a_n$) vorgelegte Seminvariante Φ läßt sich durch die n unabhängigen fundamentalen Seminvarianten C_i (V) ($i = 0, 2, 3, \ldots, n$) rational ausdrücken; man hat nur $a_1 = 0$, $a_0 = C_0$ zu nehmen, und die a_i ($i = 2, 3, \ldots, n$) durch die $\frac{C_i}{C_0^{i-1}}$ zu ersetzen.

Dadurch wird Φ, bis auf eine natürliche Potenz von C_0 im Nenner, eine ganzrationale Funktion der C_i. Eine beliebige binäre Urform f $n$ter Ordnung besitzt genau n unabhängige Seminvarianten; als solche können z. B. die C_i gewählt werden."

So ist z. B.

$$\Phi = C_2 = a_0 a_2 - a_1^2 = \Phi\left(C_0, 0, \frac{C_2}{a_0}\right) = a_0 \frac{C_2}{a_0} = C_2 .$$

Nach § 14, Satz II', ist jede Seminvariante Φ von f das Leitglied einer völlig bestimmten Kovariante K von f, und nach § 13, Satz V, ist jede Syzygie (Identität) zwischen Kovarianten K von f durch die entsprechende Syzygie zwischen deren Leitgliedern Φ ersetzbar und umgekehrt.

Die n fundamentalen Seminvarianten C_i sind daher die Leitglieder von ebenso vielen bestimmten, voneinander unabhängigen Kovarianten Ψ_i, den von Hermite*) eingeführten „assoziierten" Formen, die man auch nach Gordan „Schwesterformen" nennt.

Und da $C_0 = a_0$ das Leitglied der Urform f selbst ist, so zieht Satz IV den Fundamentalsatz nach sich:

Satz V. „Eine beliebige Kovariante (speziell auch Invariante) K von f läßt sich durch n ausgezeichnete unabhängige Kovarianten, die Schwesterformen Ψ_i — mit den Leitgliedern C_0 —, **rational** darstellen, so, daß als Nenner lediglich eine natürliche Potenz von f auftritt; man hat zu dem Behuf nur das Leitglied Φ von K gemäß (VII) durch die n Seminvarianten C_i auszudrücken,

*) Journ. für Math. 52 (1856), S. 1; vgl. Gordan-Kerschensteiner, Invariantentheorie; Band II, § 34.

und in dieser Identität hinterher alle Leitglieder C_i wieder durch die zugehörigen Kovarianten Ψ_i zu ersetzen."

Zu den n unabhängigen Seminvarianten C_i von f hätte man auch von der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen aus gelangen können. Die Gleichung $\nabla\Phi = 0$ (I) ist eine solche, und zwar im besonderen, da kein freies Glied auftritt, eine „homogene" Gleichung in den n unabhängigen Variabeln $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und der abhängigen Variabeln Φ. Eine derartige Differentialgleichung besitzt aber*) n unabhängige partikuläre Lösungen, und jede weitere Lösung ist eine Funktion jener und umgekehrt.

Die Integration einer solchen homogenen Gleichung $\nabla\Phi = 0$ läßt sich zurückführen auf die eines Systemes von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen, das in die Gestalt gesetzt werden kann:

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{d\Phi}{0} = \frac{da_1}{a_0} = \frac{da_2}{2a_1} = \frac{da_3}{3a_2} = \ldots = \frac{da_n}{n\,a_{n-1}}\,.$$

Aus $d\Phi = 0$ folgt zunächst $\Phi = \text{const.}$; als die von den „Variabeln" $a_1, a_2, \ldots, a_n$ unabhängige willkürliche Konstante ist hier $a_0 = C_0$ anzusehen. Sodann liefert $\frac{da_1}{a_0} = \frac{da_2}{2a_1}$ oder auch $a_0\,da_2 - 2a_1\,da_1 = 0$ die weitere partikuläre Lösung $C_2 \equiv a_0 a_2 - a_1^2$; geht man so weiter, so gelangt man gerade zu den $n-1$ Größen C_i (V) $(i = 2, 3, \ldots, n)$.

Nunmehr empfiehlt es sich**), die Seminvarianten C_i (V) in die zweite Schiebungsdifferentialgleichung, der eine Invariante Φ von f nach § 11, (IIb) genügt:

$$\text{(IX)} \qquad \nabla_2\Phi \equiv n\,a_1\frac{\partial\Phi}{\partial a_0} + (n-1)\,a_2\frac{\partial\Phi}{\partial a_1} + (n-2)\,a_3\frac{\partial\Phi}{\partial a_2} + \ldots = 0\,,$$

statt der a als unabhängige Variable einzuführen.

Bezeichnet man die rechte Seite der Identität (VII), als Funktion der $C_0, C_2, \ldots, C_n$, vorübergehend mit

*) Vgl. z. B. Lie-Scheffers, Berührungstransformationen, Leipzig 1896, Abschnitt III.

**) Diesen Weg hat zuerst F. Junker eingeschlagen: Math. Annalen 64 (1907), S. 328.

$\Psi(C_0, C_2, \ldots, C_n)$, so ergibt sich, da a_k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ in der Reihe der $C_2, C_3, \ldots, C_n$ zum ersten Male in C_k auftritt:

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \frac{\partial \Psi}{\partial C_k}\frac{\partial C_k}{\partial a_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial C_{k+1}}\frac{\partial C_{k+1}}{\partial a_k} + \ldots$$
$$(k = 2, 3, \ldots, n).$$

Hierbei sind nach Ausführung der $\frac{\partial C_k}{\partial a_k}, \frac{\partial C_{k+1}}{\partial a_k}, \ldots,$ gemäß (IV), die $a_0, a_2, a_3, \ldots, a_n$ zu ersetzen durch $C_0, \frac{C_2}{C_0}, \frac{C_3}{C_0^2}, \ldots, \frac{C_n}{C_0^{n-1}}$, während a_1 gleich Null zu setzen ist. Aus den C_i (V) ergibt sich für $a_1 = 0$:

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial C_2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial C_3}{\partial a_1} = -3\,C_2, \quad \frac{\partial C_4}{\partial a_1} = -4\,C_3, \quad \ldots, \\ \qquad\qquad \frac{\partial C_n}{\partial a_1} = -n\,C_{n-1}, \end{cases}$$

$$\text{(13)} \qquad \frac{\partial C_2}{\partial a_2} = C_0, \qquad \frac{\partial C_3}{\partial a_3} = C_0^2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial C_n}{\partial a_n} = C_0^{n-1},$$

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial C_{k+1}}{\partial a_k} = \frac{\partial C_{k+2}}{\partial a_k} = \ldots = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Auf Grund von (11) geht (IX), da wegen $a_1 = 0$ der erste Term rechts in Fortfall kommt, zunächst über in:

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} \nabla_2 \Phi \equiv (n-1)\,a_2 \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial C_k}\frac{\partial C_k}{\partial a_1} \\ + (n-2)\,a_3 \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial C_k}\frac{\partial C_k}{\partial a_2} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Setzt man hier die Ergebnisse (11), (12), (13), (14) ein, unterdrückt den gemeinsamen Nenner C_0 und schreibt hinterher wieder Φ statt Ψ, so kommt:

$$\nabla_2 \Phi \equiv -(n-1)\,C_2 \left\{3\,C_2 \frac{\partial \Phi}{\partial C_3} + 4\,C_3 \frac{\partial \Phi}{\partial C_4} + \ldots + n\,C_{n-1}\frac{\partial \Phi}{\partial C_n}\right\}$$
$$+ (n-2)\,C_3 \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} + (n-3)\,C_4 \frac{\partial \Phi}{\partial C_3} + \ldots + C_n \frac{\partial \Phi}{\partial C_{n-1}} = 0,$$

oder, nach den $\frac{\partial \Phi}{\partial C_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial C_3}, \ldots$ geordnet:

$$
\text{(X)} \left\{
\begin{aligned}
&\nabla_2 \Phi \equiv (n-2)\, C_3 \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} + \{(n-3)\, C_4 - 3\,(n-1)\, C_2^2\} \frac{\partial \Phi}{\partial C_3} \\
&\qquad + \{(n-4)\, C_5 - 4\,(n-1)\, C_2\, C_3\} \frac{\partial \Phi}{\partial C_4} + \ldots \\
&+ \{1 \cdot C_{n-1} - (n-1)^2\, C_2\, C_{n-2}\} \frac{\partial \Phi}{\partial C_{n-1}} - n(n-1)\, C_2\, C_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial C_n} = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichung versagt nur in dem Falle $n = 2$, der aber leicht direkt zu behandeln ist; denn $C_2 = a_0\, a_2 - a_1^2$ ist selbst eine Invariante der Urform $f_2 \equiv a_0\, x_1^2 + 2\, a_1\, x_1\, x_2 + a_2\, x_2^2$, und zwar nach § 10 die einzige, indem jede andere nur eine Funktion von C_2 sein kann.

Eine Invariante Φ von f genügte außer den Bedingungen $\nabla_1 \Phi = 0$, $\nabla_2 \Phi = 0$ nach § 12 (III) noch den beiden Gewichtsdifferentialgleichungen $\mathsf{M}_1 = 0$, $\mathsf{M}_2 = 0$ und war umgekehrt durch diese vier Bedingungen (von denen irgendeine der beiden letzteren nach § 14, Satz VII, eine Folge der drei übrigen ist) charakterisiert. Man kann nun auch in $\mathsf{M}_1 = 0$, $\mathsf{M}_2 = 0$ die Größen C_i als unabhängige Variable einführen.

Beschränkt man sich aber auf solche Invarianten Φ, die in den a ganzrational sind:

$$\Phi \equiv \sum A_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}\, a_0^{\varepsilon_0}\, a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}\,, \tag{16}$$

wo die A numerische Faktoren sind, so empfiehlt es sich, die mit $\mathsf{M}_1 = 0$, $\mathsf{M}_2 = 0$ gleichwertigen Gewichtsrelationen (4) des § 12 heranzuziehen, wonach Φ in den a homogen von einer Dimension ϱ und damit auch isobar von einem Gewichte $\omega = \frac{n\,\varrho}{2}$ ist:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = \varrho\,, \tag{17a}$$

$$\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2 + 3\,\varepsilon_3 + \ldots + n\,\varepsilon_n = \omega\,, \tag{17b}$$

$$2\,\omega = n\,\varrho\,. \tag{18}$$

Führt man jetzt in (16) die C (V) direkt ein, so hat man nur die Terme zu berücksichtigen, die a_1 nicht enthalten:

$$(19)\quad \begin{cases} \Phi = \sum A_{\varepsilon_0 0 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n} C_0^{\varepsilon_0} \left(\dfrac{C_2}{C_0}\right)^{\varepsilon_2} \left(\dfrac{C_3}{C_0^2}\right)^{\varepsilon_3} \cdots \left(\dfrac{C_n}{C_0^{n-1}}\right)^{\varepsilon_n} \\ \quad = \sum A \dfrac{C_2^{\varepsilon_2} C_3^{\varepsilon_3} \ldots C_n^{\varepsilon_n}}{C_0^{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + \ldots + (n-1)\varepsilon_n - \varepsilon_0}}, \end{cases}$$

wo A zur Abkürzung steht und auch in den Bedingungen (17) $\varepsilon_1 = 0$ zu setzen ist, so daß diese übergehen in:

$$(17\text{a}')\qquad \varepsilon_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n = \varrho ,$$

$$(17\text{b}')\qquad 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \ldots + n\varepsilon_n = \omega .$$

Damit wird der Exponent von C_0 in den Nennern der rechten Seite von Φ (19):

$$\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + \ldots + (n-1)\varepsilon_n - \varepsilon_0$$

$$= (2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \ldots + n\varepsilon_n) - (\varepsilon_0 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) = \omega - \varrho ,$$

so daß sich die Darstellung (19) von Φ vereinfacht zu:

$$(\text{XI})\qquad \Phi C_0^{\omega - \varrho} = \sum A C_2^{\varepsilon_2} C_3^{\varepsilon_3} \ldots C_n^{\varepsilon_n} .$$

Hier sind rechterhand, da ε_0 explizite nicht mehr auftritt, die $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ nur noch an die Gewichtsrelation (17b′) gebunden, und zwischen ϱ und ω besteht die Relation (18). Umgekehrt führt irgendeine solche Darstellung (XI), wenn man die $C_0, C_2, \ldots, C_n$ wieder in den a ausdrückt, zu einer bestimmten Darstellung (19) zurück. Soll dann ein Ausdruck Φ von der Struktur (XI) eine Invariante von f werden, so ist dazu, da vermöge Einführung der C statt der a die Bedingung $V_1 \Phi = 0$ identisch erfüllt, also überflüssig wird, lediglich notwendig und hinreichend das Bestehen der Differentialgleichung (X) für Φ, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, für die rechte Seite von (XI). Aus diesem Grunde nennt Junker die Gleichung (X) schlechthin die „Differentialgleichung der Invarianten“ (sc. einer binären Urform f_n). Setzt man in $\omega - \varrho$ für ϱ seinen Wert $\dfrac{2\omega}{n}$ aus (18) ein, so wird $\omega - \varrho = \dfrac{\omega(n-2)}{n}$. Man hat also das grundlegende Ergebnis:

Satz VI. „Jede in den fundamentalen Seminvarianten $C_2, C_3, \ldots, C_n$ einer Urform f_n ganzrationale Funktion (XI) $\sum A C_2^{\varepsilon_2} C_3^{\varepsilon_3} \ldots C_n^{\varepsilon_n}$, die in den C

isobar vom Gewichte $\omega = 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \ldots + n\varepsilon_n$ ist und der Differentialgleichung (X) der Invarianten genügt, liefert, mit dem Nenner $C_0^{\frac{\omega(n-2)}{n}}$ versehen, eine Invariante Φ von f, in den a vom Gewichte ω und von der Dimension $\varrho = \frac{2\omega}{n}$, und umgekehrt. Dabei muß 2ω eine durch n teilbare natürliche Zahl sein.“

Nach der Theorie der partiellen Differentialgleichungen besitzt die in den Variabeln $C_2, C_3, \ldots, C_n$ homogene lineare Gleichung (X), von der willkürlichen Konstanten abgesehen, $n-2$ unabhängige Lösungen $J_2, J_3, \ldots, J_n$. Das bedeutet jetzt den

Satz VII. „Eine beliebige binäre Urform f_n besitzt $n-2$ unabhängige Invarianten $J_2, J_3, \ldots, J_n$.“

Auch hier bildet der Fall $n = 2$ eine Ausnahme, da eine f_2 die eine Invariante $J_2 = a_0 a_2 - a_1^2$ besitzt.

Über eine spezifische Schwierigkeit, die sich der richtigen Auffassung der Größe C_0 entgegenstellt, vergleiche die allgemeinere Erscheinung in § 17.

Die obigen Sätze mögen an den Beispielen der f_3 und f_4 illustriert werden. Für $n = 3$ wird die Gleichung $\nabla_2 \Phi = 0$:

$$C_3 \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} - 6\, C_2^2 \frac{\partial \Phi}{\partial C_3} = 0\,.$$

Man bestimme also das Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d C_2}{C_3} = \frac{d C_3}{-6\, C_2^2}\,, \quad \text{d. i.} \quad 12\, C_2^2\, d C_2 + 2\, C_3\, d C_3 = 0\,,$$

und erhält als die einzige unabhängige Invariante Φ_1 von f_3:

(21) $$\Phi_1 = 4\, C_2^3 + C_3^2$$

vom Grade $\varrho = 3$ und Gewichte $\omega = 6$. Das ist die Diskriminante R von f_3 (S. 176).

Für $n = 4$ lautet die Gleichung $\nabla_2 \Phi = 0$:

$$2\, C_3 \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} + (C_4 - 9\, C_2^2) \frac{\partial \Phi}{\partial C_3} - 12\, C_2 C_3 \frac{\partial \Phi}{\partial C_4} = 0\,.$$

Die beiden unabhängigen Invarianten Φ_1, Φ_2 von f_4 sind die Integrale der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dC_2}{2\,C_3} = \frac{dC_3}{C_4 - 9\,C_2^2} = \frac{dC_4}{-12\,C_2\,C_3}\,.$$

Hier liefert die Gleichung

$$\frac{dC_2}{2\,C_3} = \frac{dC_4}{-12\,C_2\,C_3}\,, \quad \text{d. i.} \quad dC_4 + 6\,C_2\,dC_2 = 0$$

das Integral:

$$\Phi_1 = C_4 + 3\,C_2^2 \tag{22}$$

vom Grade $\varrho = 2$ und Gewichte $\omega = 4$. Das ist die Invariante i von f_4 (S. 178). Man integriere sodann die Gleichung $\dfrac{dC_2}{2\,C_3} = \dfrac{dC_3}{C_4 - 9\,C_2^2}$. Nach Einsetzung des Wertes von C_4 aus (22), wobei Φ_1 als Konstante anzusehen ist, ergibt die Gleichung:

$$(\Phi_1 - 12\,C_2^2)\,dC_2 - 2\,C_3\,dC_3 = 0$$

das weitere Integral:

$$\Phi_2 = \Phi_1 C_2 - 4\,C_2^3 - C_3^2 = C_2\,C_4 - C_2^3 - C_3^2 \tag{23}$$

vom Grade $\varrho = 6$ und Gewichte $\omega = 6$. Das ist die Invariante j von f_4 (S. 178).

Das obige Verfahren, um eine Invariante und deren Differentialgleichungen in den Seminvarianten C darzustellen, überträgt sich mit einigen Modifikationen auf eine Kovariante $K(a_0\,, a_1\,, \ldots, a_n\,; x_1\,, x_2)$ von f.

Die Schiebung (2) lautet, nach Einsetzung des Wertes $h = -\dfrac{a_1}{a_0}$ aus (III):

$$x_1 = \xi_1 - \frac{a_1}{a_0}\,\xi_2\,, \qquad x_2 = \xi_2\,. \tag{2'}$$

Vermöge (2′) geht die Kovariante K von f in eine Kovariante der transformierten Form $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ über. Man hat also wiederum $a_0 = C_0$, $a_1 = 0$, a_i $(i = 2\,, \ldots, n)$ $= C_i C_0^{-(i-1)}$ zu setzen und zugleich (wegen $a_1 = 0$) $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$. Damit wird:

$$\text{(XII)} \quad \left\{ \begin{aligned} & K(a_0\,, a_1\,, \ldots, a_n\,; x_1\,, x_2) \\ & \equiv K\left(C_0\,, 0\,, \frac{C_2}{C_0}\,, \ldots, \frac{C_n}{C_0^{n-1}}\,; \xi_1\,, \xi_2\right). \end{aligned} \right.$$

Hier spielt C_0 wieder nur die Rolle einer die C_2, C_3, ..., C_n homogen machenden Variabeln, die man bequemer gleich 1 nimmt.

So z. B. hat (S. 175) eine f_3 die quadratische Kovariante:

$$(24)\quad \Delta = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2 .$$

Gemäß (XII) entsteht:

$$(24')\qquad \Delta = C_2 \xi_1^2 + C_3 \xi_1 \xi_2 - C_2^2 \xi_2^2 ,$$

während die Urform f selbst übergeht in

$$\xi_1^3 + 3 C_2 \xi_1 \xi_2^2 + C_3 \xi_2^3 .$$

Nun hatte nach § 13 (14) eine Kovariante $K(a_0, a_1, \ldots, a_n; x_1, x_2)$ von f, mit einem Gewichte ω, den vier charakteristischen Differentialgleichungen zu genügen:

$$(\text{XIII a})\quad \begin{cases} \mathsf{M}_1 - x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} \equiv n a_0 \dfrac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_1 \dfrac{\partial}{\partial a_1} \\ \qquad\qquad + \ldots - x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - \omega K = 0 , \\ \mathsf{M}_2 - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} \equiv a_1 \dfrac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_2 \dfrac{\partial}{\partial a_2} \\ \qquad\qquad + \ldots - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} - \omega K = 0 ; \end{cases}$$

$$(\text{XIII b})\quad \begin{cases} V_1 - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} \equiv a_0 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + 2 a_1 \dfrac{\partial}{\partial a_2} \\ \qquad\qquad + \ldots - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} = 0 , \\ V_2 - x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} \equiv n a_1 \dfrac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \dfrac{\partial}{\partial a_1} \\ \qquad\qquad + \ldots - x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} = 0 , \end{cases}$$

wo V_1, V_2 mit den unter (I), (IX) aufgeführten Prozessen übereinstimmen. Die beiden Gleichungen (XIII a) werden nach Einführung der C_i, ξ, η zu den folgenden von analoger Struktur:

$$
(\mathrm{XIII\,a'}) \quad \begin{cases} n\,C_0 \dfrac{\partial K}{\partial C_0} + (n-2)\,C_2 \dfrac{\partial K}{\partial C_2} + \cdots \\ \quad + C_{n-1} \dfrac{\partial K}{\partial C_{n-1}} - \xi_1 \dfrac{\partial K}{\partial \xi_1} - \omega K = 0\,, \\ 2\,C_2 \dfrac{\partial K}{\partial C_2} + 3\,C_3 \dfrac{\partial K}{\partial C_3} + \cdots \\ \quad + n\,C_n \dfrac{\partial K}{\partial C_n} - \xi_2 \dfrac{\partial K}{\partial \xi_2} - \omega K = 0\,, \end{cases}
$$

wo, im Vergleich mit (XIIIa), nur je das mit dem Faktor a_1 behaftete Glied herausgefallen ist, während im übrigen einfach die Buchstaben $a_0, a_2, \ldots, a_n$; x_1, x_2 resp. mit $C_0, C_2, \ldots, C_n$; ξ_1, ξ_2 vertauscht sind.

Von den beiden Gleichungen (XIIIb) wird die erstere wieder identisch erfüllt und damit überflüssig.

Bei der zweiten Gleichung (XIIIb) ist die Transformation (X) des Ausdruckes ∇_2, nebst dem von $x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$, zu der Abhängigkeit (2′) zwischen $x_1, \xi_1, \xi_2, a_0, a_1$ in Beziehung zu setzen.

Zunächst wird (für $a_1 = 0$) direkt $x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} = \xi_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2}$.

Bei Δ_2 ist zu beachten, daß bei der Bildung von $\dfrac{\partial}{\partial a_1}$ im zweiten Gliede zu den früher, in (X), erhaltenen Gliedern wegen (2′) noch das folgende (für $a_1 = 0$, $a_0 = C_0 = 1$) hinzuzutreten hat:

$$
\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \xi_2\,,
$$

das dann noch mit $(n-1)\,a_2 = (n-1)\,C_2$ zu multiplizieren ist. Damit geht als transformierte Gleichung (XIIIb) hervor:

$$
(\mathrm{XIII\,b'}) \quad (n-1)\,C_2\,\xi_2 \frac{\partial K}{\partial \xi_1} + \nabla_2 K - \xi_1 \frac{\partial K}{\partial \eta_2} = 0\,,
$$

wo für $\nabla_2 K$ der Ausdruck (X) (mit $\Phi = K$) zu substituieren ist. Sieht man die durch (XIIIa) gemäß § 13 (14) ausgedrückten Gewichtseigenschaften für K bereits als erfüllt an, so ist (XIIIb′) als einzige wesentliche

Bedingung für eine Kovariante K von f zu betrachten; Junker l. c. bezeichnet sie daher als die „Differentialgleichung der Kovarianten" von f.

Diese ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung in den $n+1$ unabhängigen Variabeln ξ, η, $C_2, C_3, \ldots, C_n$, besitzt also nach dem schon oben benützten Hilfssatze n unabhängige Partikularlösungen, die durch Integration des Systems linearer totaler Differentialgleichungen:

$$\text{(XIV)} \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_2}{\xi_1} = \dfrac{d\xi_1}{-(n-1)\,C_2\,\xi_2} = -\dfrac{d\,C_2}{(n-2)\,C_3} \\ = \dfrac{-d\,C_3}{(n-3)\,C_4 - (3n-1)\,C_2^2} = \cdots = \dfrac{d\,C_n}{n(n-1)\,C_2\,C_{n-1}} \end{cases}$$

zu ermitteln sind. Somit gilt:

Satz VIII. „Eine beliebige binäre Urform f_n besitzt n unabhängige Kovarianten, die durch n unabhängige Partikularlösungen des mit der Differentialgleichung (XIIIb′) der Kovarianten gleichwertigen Systems (XIV) repräsentiert werden."

Die Invarianten ordnen sich als spezielle, von x_1, x_2 resp. ξ_1, ξ_2 freie Kovarianten ein.

Andererseits besaß zufolge der Sätze II und III eine f_n auch, mit Einschluß von $C_0 = a_0$, n unabhängige Seminvarianten. Zwischen irgend $n+1$ beliebig ausgewählten Kovarianten K besteht daher eine Syzygie und ebenso zwischen irgend $n+1$ Seminvarianten Φ.

Dies steht durchaus im Einklang mit § 14, Satz II′, wonach eine Kovariante K von f durch ihr Leitglied, eine Seminvariante Φ, eindeutig charakterisiert ist, wo umgekehrt Φ im übrigen ganz beliebig sein kann, so daß eine Syzygie zwischen $n+1$ Kovarianten K dieselbe ist, wie zwischen ihren Leitgliedern Φ und umgekehrt.

Nach Einführung der neuen Argumente C läßt sich eine solche Syzygie durch Eliminationsprozesse gewinnen.

Hat man nach Vorschrift von (VII) $n+1$ vorgelegte Seminvarianten $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n+1}$, die Leitglieder von ebenso vielen Kovarianten $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}$, durch die $C_0, C_2, \ldots, C_n$ ausgedrückt, wobei C_0 jeweils nur in einer gewissen Potenz im Nenner auftritt, so liefert die

Elimination der $C_0, C_2, \ldots, C_n$ die gesuchte Syzygie zwischen den $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n+1}$ und damit zwischen den $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}$.

Als Beispiele mögen die beiden klassischen Syzygien Cayleys*) dienen, die zwischen den einfachsten In- und Kovarianten einer f_3 resp. f_4 bestehen.

Bei einer f_3 (S. 175, 176) sind die Seminvarianten C_0, C_2, C_3 die Leitglieder von f selbst, der quadratischen Kovariante Δ und der kubischen Q.

Die einzige Invariante R, die Diskriminante von f (und zugleich von Δ), war gemäß (21) in Funktion der C dargestellt vermöge:

$$C_0^2 R = C_3^2 + 4\, C_2^3 . \tag{25}$$

Ersetzt man hier die Seminvarianten C_0, C_2, C_3 durch ihre bezüglichen Kovarianten f, Δ, Q, so entsteht die Syzygie (S. 176):

$$4\, \Delta^3 = f^2 R - Q^2 . \tag{25'}$$

Die vier Formen f, Q, Δ, R heißen vier „irreduzible Grundformen" der f_3, da sie nicht weiter durch Kovarianten (Invarianten) von niedrigerer Ordnung und niedrigerem Grade ausdrückbar sind, wie hier nicht bewiesen werden soll.

Bei einer f_4 sind (S. 178) die Seminvarianten C_0, C_2, C_3 die Leitglieder von f selbst, der biquadratischen („Hesseschen") Kovariante H, sowie der Kovariante 6. Ordnung θ, der Funktionaldeterminante von f und H. Außerdem existiert noch eine weitere, von C_0, C_2, C_3 unabhängige Seminvariante C_4. Zwischen den beiden Invarianten i, j und den C bestanden nach (22), (23) die Relationen:

$$C_0^2 i = C_4 + 3\, C_2^2 , \qquad C_0^3 j = C_2 C_4 - C_2^3 - C_3^2 . \tag{26}$$

Hieraus ergibt sich für $C_2 C_4$ die doppelte Darstellung:

$$C_2 C_4 = i\, C_2 C_0^2 - 3\, C_2^3 = j C_0^3 + C_2^3 + C_3^2 ,$$

so daß zwischen C_0, C_2, C_3, i, j die Syzygie herrscht:

$$-i\, C_2 C_0^2 + j C_0^3 + 4\, C_2^3 + C_3^2 = 0 . \tag{27}$$

---

*) Vgl. A. Cayley in seinem V. Memoir upon Quantics, London Phil. Trans. 148 (1858), p. 429, abgedruckt in den Collected Math. Papers, Band II, S. 527.

Substituiert man hier statt der C_0, C_2, C_3 die zugehörigen Kovarianten f, H, θ, so resultiert die Cayleysche Syzygie:

$$(27') \qquad -\theta^2 = jf^3 + 4H^3 - iHf^2 .$$

Die Formen f, H, θ, i, j repräsentieren wiederum fünf irreduzible Grundformen der f_4.

Die Syzygien (25'), (27') lassen sich zu einer „invariantentheoretischen" Auflösung der kubischen resp. biquadratischen Gleichung $f_3 = 0$ resp. $f_4 = 0$ verwenden*).

Aufgabe 1. Es ist zu zeigen, daß man ein vollständiges System unabhängiger Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung (II) $\Delta h = -1$ erhält, indem man die Partikularlösung (III) vermöge willkürlicher Konstanten mit den Größen C_i (V) additiv zusammensetzt.

Aufgabe 2. Die Entwicklungen des Textes sind für eine f_3, f_4 und f_5 im einzelnen durchzuführen. Im Falle der f_4 ist C_4 durch die Größen C_2, C_3, i, j, a_0 rational darzustellen.

Aufgabe 3. Es ist folgender Satz von Hermito (s. das Zitat auf S. 264) zu beweisen. Führt man in eine Form $f_n(x_1, x_2)$ neue Variable ξ_1, ξ_2 ein vermöge der Kovarianten $\xi_1 = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x)$, $\xi_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1$, wo $f_i = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2)$ und die y_1, y_2 mit den x_1, x_2 kogredient sind, so geht die mit $f^{n-1}(x)$ multiplizierte Form $f(y)$ über in

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^n + \Psi_2 n_2 \xi_1^{n-2}\xi_2^2 + \Psi_3 n_3 \xi_1^{n-3}\xi_2^3 + \dots + \Psi_n \xi_2^n ,$$

wo die Ψ_i die Schwesterformen sind.

Aufgabe 4. Zwischen je drei binären Formen der Ordnungen 1, 1, 1; 1, 1, 2; 1, 2, 2; 2, 2, 2 besteht eine Syzygie (vgl. die Aufgabe 2 zu § 3). Diese Syzygien sind aufzustellen und mit den jeweiligen der Leitglieder zu vergleichen.

Aufgabe 5. Es ist zu beweisen, daß jede Seminvariante einer Form f eine simultane Invariante der einseitigen Ableitungen f_i von f ist (vgl. § 13, Satz III'). Das Entsprechende gilt für ein System von Urformen.

*) S. das Zitat auf S. 274.

§ 17. Fortsetzung. Seminvarianten bei unabhängigen Substitutionen.

Wie in § 15 liege eine Urform f in mehreren, nichthomogenen Variabeln $x, y, z, \ldots$ vor, die unabhängigen (inkongruenten) Substitutionen unterworfen werden:

$$(1)\quad \begin{cases} f_{n,p,q,\ldots}(x\,;\,y\,;\,z\,;\,\ldots) \\ \equiv \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{p}\sum\limits_{l=0}^{q}\cdots n_i\,p_k\,q_l\ldots a_{ikl\ldots}\,x^{n-i}\,y^{p-k}\,z^{q-l}\ldots, \end{cases}$$

wo wieder $n_i, p_k, q_l, \ldots$ resp. den $i$ten, $k$ten, $l$ten, ... Binomialkoeffizienten von $n, p, q, \ldots$ bezeichnen. Dann genügte eine Invariante J von f gegenüber unabhängigen Substitutionen der $x; y; z; \ldots$ in bezug auf jede dieser μ Variabeln vier linearen partiellen Differentialgleichungen, z. B. für x den folgenden:

$$(\mathrm{I\,a})\qquad V_x \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}\cdots i\,a_{i-1,kl\ldots}\frac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} = 0\,,$$

$$(\mathrm{I\,b})\qquad V_{x'} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}\cdots (n-i)\,a_{i+1,kl\ldots}\frac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} = 0\,;$$

$$(\mathrm{II\,a})\qquad \mathsf{M}_x \equiv \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}\cdots (n-i)\,a_{ikl\ldots}\frac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} - \omega_x J = 0\,,$$

$$(\mathrm{II\,b})\qquad \mathsf{M}_{x'} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}\cdots i\,a_{ikl\ldots}\frac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} - \omega_x J = 0\,.$$

Umgekehrt charakterisieren diese μ Gleichungssysteme (I), (II) eine Invariante J von f, so daß, wenn J_1 der in den transformierten Koeffizienten gebildete Ausdruck von J ist und $\varDelta_x, \varDelta_y, \varDelta_z, \ldots$ die zu den verschiedenen Substitutionen der $x; y; z; \ldots$ gehörigen Determinanten, die Identität besteht:

$$(\mathrm{III})\qquad J_1 \equiv \varDelta_x^{\omega_x}\,\varDelta_y^{\omega_y}\,\varDelta_z^{\omega_z}\ldots J\,.$$

Dabei ist J in den a homogen von einer Dimension (Grad) d, wo d mit den Gewichten $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \ldots$ durch die Relationen verbunden ist:

$$(2)\qquad 2\,\omega_x = dn\,,\quad 2\,\omega_y = dp\,,\quad 2\,\omega_z = dq\,,\quad \ldots,$$

*) Vgl. A. Cayley, l. c.; E. Study, American Journ. f. Math. 17 (1895), p. 185; Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch und F. Lindemann. I, 1; Leipzig 1875, S. 223, 232; zweite Auflage 1908, S. 432, 452.

und zugleich in den a isobar von den bezüglichen „Teilgewichten“ $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \ldots$

Wir beschränken uns im folgenden auf Invarianten J, die in den a ganzrational sind. Unter einer „Seminvariante“ Φ von f verstehe man eine ganzrationale Funktion der a, homogen von einer Dimension d und isobar von den bezüglichen Teilgewichten $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \ldots$, die den Differentialgleichungen (Ia) $\nabla_x = 0$, $\nabla_y = 0$, $\nabla_z = 0, \ldots$ genügt.

Es sollen die einfachsten Seminvarianten C von f aufgestellt werden, durch die sich alle übrigen rational darstellen lassen. Aus der linken Seite der Gleichung (Ia) entnehme man die Wirkung der Prozesse $\nabla_x, \nabla_y, \ldots$ auf irgendeinen Koeffizienten $a_{ikl\ldots}$ von f:

(IV) $\quad \nabla_x a_{ikl\ldots} = i\, a_{i-1,kl\ldots}, \quad \nabla_y a_{ikl\ldots} = k\, a_{i,k-1,l\ldots};$ usw.

Die Urform (1) f werde jetzt lauter unabhängigen Schiebungen der x; y; z; ... unterworfen:

(3) $\quad x = \xi + h, \quad y = \eta + k, \quad z = \zeta + l, \quad \ldots,$

so lehrt die Taylorsche Entwicklung von $f(\xi + h, \eta + k, \zeta + l, \ldots)$, daß:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} f(\xi + h; \eta + k; \zeta + l; \ldots) = \varphi(\xi; \eta; \zeta; \ldots) \\ = \sum\limits_{r=0}^{n} \sum\limits_{s=0}^{p} \sum\limits_{t=0}^{q} \ldots n_r\, p_s\, q_t \ldots \alpha_{rst\ldots}\, \xi^{n-r} \eta^{p-s} \zeta^{q-t} \ldots, \end{cases}$$

wo die neuen Koeffizienten α bezüglich der $h, k, l, \ldots$ von analoger Struktur sind, wie f selbst hinsichtlich der $x, y, z, \ldots$:

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} \alpha_{rst\ldots} = \sum\limits_{\varrho=0}^{r} \sum\limits_{\sigma=0}^{s} \sum\limits_{\tau=0}^{t} \ldots r_\varrho\, s_\sigma\, t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots}\, h^{r-\varrho} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots \\ = \dfrac{r!}{n!} \dfrac{s!}{p!} \dfrac{t!}{q!} \ldots \dfrac{\partial^{(n+p+q+\ldots)-(r+s+t+\ldots)}}{\partial h^{n-r}\, \partial k^{p-s}\, \partial l^{q-t} \ldots} f(h; k; l; \ldots). \end{cases}$$

Nach dem Muster des in § 16 für eine Urform $f(x)$ eingeschlagenen Verfahrens frage man wiederum, ob sich nicht die Schiebungsparameter $h, k, l, \ldots$ in (3) so wählen lassen, daß sämtliche neuen Koeffizienten $\alpha_{rst\ldots}$ den Bedingungen genügen:

(VII) $\quad \nabla_x \alpha_{rst\ldots} = 0, \quad \nabla_y \alpha_{rst\ldots} = 0,$ usw.

Man bediene sich für das Folgende der Abkürzungen:

$$(4)\quad \begin{cases} a_{0000\ldots} = a_0\,; & a_{1000\ldots} = a_1\,,\ \ a_{01000\ldots} = b_1\,,\ \ a_{00100\ldots} = c_1\,,\ \ldots\,; \\ \alpha_{0000\ldots} = \alpha_0 = a_0\,; & \alpha_{1000\ldots} = \alpha_1\,,\ \ \alpha_{01000\ldots} = \beta_1\,,\ \ \alpha_{00100\ldots} = \gamma_1\,,\ \ldots\,, \end{cases}$$

so hat man für die α_1, β_1, γ_1, ... die Ausdrücke:

$$(5)\quad \alpha_1 = a_0 h + a_1\,,\quad \beta_1 = a_0 k + b_1\,,\quad \gamma_1 = a_0 l + c_1\,,\quad \ldots$$

Gemäß (IV) gilt im besondern:

$$(6)\quad \begin{cases} \nabla_x a_0 = 0\,, \quad \nabla_y a_0 = 0\,, \quad \nabla_z a_0 = 0\,, \quad \ldots\,; \\ \nabla_x a_1 = \nabla_y b_1 = \nabla_y c_1 = \ldots = a_0\,; \\ \nabla_y a_1 = \nabla_z a_1 = \ldots = \nabla_x b_1 = \nabla_z b_1 = \ldots = \nabla_x c_1 = \nabla_y c_1 = \ldots = 0\,. \end{cases}$$

Danach genügt $\alpha_0 = a_0$ allen Gleichungen $\nabla_x = 0$, $\nabla_y = 0$, $\nabla_z = 0$, ... und ist eine Seminvariante von f. Für α_1, β_1, γ_1, ... erhält man zunächst, wegen (6):

$$(7)\quad \begin{cases} \nabla_x \alpha_1 = \nabla_x(a_0 h + a_1) = a_0 \nabla_x h + \nabla_x a_1 = a_0(\nabla_x h + 1)\,, \\ \nabla_y \beta_1 = \nabla_y(a_0 k + b_1) = a_0 \nabla_y k + \nabla_y b_1 = a_0(\nabla_y k + 1)\,, \\ \cdot \\ \nabla_y \alpha_1 = \nabla_y(a_0 h + a_1) = a_0 \nabla_y h\,, \quad \nabla_x \beta_1 = \nabla_x(a_0 k + b_1) = a_0 \nabla_x k\,, \\ \nabla_z \alpha_1 = \nabla_z(a_0 h + a_1) = a_0 \nabla_z h\,, \quad \nabla_z \beta_1 = \nabla_z(a_0 k + b_1) = a_0 \nabla_z k\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\,, \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

Satz I. „Das System der Bedingungen $\nabla_x \alpha_1 \equiv 0$, $\nabla_y \alpha_1 \equiv 0$, ...; $\nabla_x \beta_1 \equiv 0$, $\nabla_y \beta_1 \equiv 0$, ...; $\nabla_x \gamma_1 \equiv 0$, $\nabla_y \gamma_1 \equiv 0$, ...; ... ist gleichwertig mit dem andern:

$$(\mathrm{VIII})\quad \begin{cases} \nabla_x h \equiv \nabla_y k \equiv \nabla_z l \equiv \ldots \equiv -1\,, \\ \nabla_y h \equiv \nabla_z h \equiv \ldots \equiv \nabla_x k \equiv \nabla_z k \equiv \ldots \equiv \nabla_x l \equiv \nabla_y l \equiv \ldots \equiv 0\,.\text{“} \end{cases}$$

Man sehe nunmehr alle diese Bedingungen (VIII) als erfüllt an und frage, ob damit nicht von selbst auch alle übrigen Koeffizienten $\alpha_{rst\ldots}$ den Bedingungen (VII) genügen. Man bilde gemäß (VI), etwa für den ersten Prozeß ∇_x (Ia), indem man kürzer die vielfachen Summenzeichen durch einfache ersetzt:

$$(8)\quad \nabla_x \alpha_{rst\ldots} \equiv \nabla_x \sum r_\varrho\, s_\sigma\, t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots} h^{r-\varrho} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$$

Übt man rechts den Prozeß ∇_x auf irgendein einzelnes Glied aus und beachtet (IV) sowie die mit Rücksicht auf (VIII) geltenden Hilfsformeln:

$$(9)\quad \begin{cases} \nabla_x h^{r-\varrho} \equiv -(r-\varrho)\, h^{r-(\varrho+1)}, \quad \nabla_x k^{s-\sigma} \equiv 0\,, \\ \qquad \nabla_y l^{t-\tau} \equiv 0\,, \quad \ldots, \end{cases}$$

so erhält man:

$$(10)\quad \begin{cases} \nabla_x(r_\varrho s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots} h^{r-\varrho} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots) \\ = -r_\varrho(r-\varrho)\, s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots} h^{r-(\varrho+1)} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} & \text{(a)} \\ +\, \varrho\, r_\varrho s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho-1,\sigma\tau\ldots} h^{r-\varrho} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots, & \text{(b)} \end{cases}$$

wo die beiden Glieder rechter Hand kurz unter (a), (b) angeführt seien. Man kann zeigen, daß sich jedes dieser beiden Glieder gegen ein anderes, in (8) auftretendes, entgegengesetzt gleiches, zerstört.

Was das Glied (a) in (10) angeht, so findet sich in (8) ein weiteres Glied (b′) mit dem Faktor $a_{\varrho\sigma\tau\ldots}$, von der Struktur (b), das vermöge ∇_x aus dem Gliede in $\alpha_{rst\ldots}$:

$$r_{\varrho+1} s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho+1,\sigma\tau\ldots} h^{r-(\varrho+1)} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$$

hervorgeht, nämlich:

$$(11)\quad \text{b}')\ \ +r_{\varrho+1}(\varrho+1)\, s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots} h^{r-(\varrho+1)} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$$

Die Vereinigung der beiden Terme (10a) und (11b′) liefert, abgesehen von dem gemeinsamen Faktor $s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots} h^{r-(\varrho+1)} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$, das Aggregat der beiden numerischen Faktoren:

$$(\varrho+1)\, r_{\varrho+1} - (r-\varrho)\, r_\varrho \equiv \frac{r(r-1)\ldots(r-\varrho)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\varrho} - \frac{r(r-1)\ldots(r-\varrho+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\varrho}(r-\varrho) \equiv 0\,.$$

Andererseits existiert ein weiteres Glied (a′) in (8) mit dem Faktor $a_{\varrho-1,\sigma\tau\ldots}$, von derselben Struktur wie (a) in (10), das vermöge ∇_x aus dem Gliede in $\alpha_{rst\ldots}$:

$$r_{\varrho-1} s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho-1,\sigma\tau\ldots} h^{r-(\varrho+1)} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$$

entspringt, nämlich:

$$(11')\quad \text{a}')\ \ -r_{\varrho-1}(r-\varrho+1)\, s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho-1,\sigma\tau\ldots} h^{r-\varrho} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$$

Die Vereinigung der beiden Terme (10) b) und (11′) a′) liefert wiederum, abgesehen von dem gemeinsamen Faktor $s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho-1,\sigma\tau\ldots} h^{r-\varrho} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$, das verschwindende Aggregat:

$$r_\varrho \varrho - r_{\varrho-1}(r-\varrho+1) \equiv \frac{r(r-1)\ldots(r-\varrho+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(\varrho-1)}$$

$$-\frac{r(r-1)\ldots(r-\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(\varrho-1)}(r-\varrho+1) \equiv 0\,.$$

Somit erfüllt in der Tat, auf Grund der Bedingungen (VIII), jeder der in (V) $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ auf die $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ folgenden Koeffizienten $\alpha_{rst\ldots}$ die Bedingung $\nabla_x = 0$, und ebenso die weiteren Bedingungen $\nabla_y = 0$, $\nabla_z = 0, \ldots$ Es gilt daher:

Satz II. „Hat man die Schiebungsparameter $h, k, l, \ldots$ in (2) gemäß (VIII) so gewählt, daß die Bedingungen $\nabla_x \alpha_1 \equiv 0$, $\nabla_y \beta_1 \equiv 0$, $\ldots$, $\nabla_x \beta_1 \equiv 0$, $\nabla_z \beta_1 \equiv 0, \ldots$ erfüllt sind, so genügen damit sämtliche Koeffizienten $\alpha_{rst\ldots}$ der vermöge (2) transformierten Urform $\varphi(\xi; \eta; \zeta; \ldots)$ (V) den Gleichungen $\nabla_x \alpha_{rst\ldots} \equiv 0$, $\nabla_y \alpha_{rst\ldots} \equiv 0, \ldots$"

Für das Folgende bedarf man nur einer partikulären Lösung der partiellen Differentialgleichungen (VIII) für die $h, k, l, \ldots$, nämlich:

$$\text{(IX)} \qquad h = -\frac{a_1}{a_0}, \quad k = -\frac{b_1}{a_0}, \quad l = -\frac{c_1}{a_0}, \quad \ldots$$

Man erkennt das einmal direkt daran, daß die rechten Seiten der $h, k, l, \ldots$ wegen (6) die Bedingungen (VIII) erfüllen, oder auch daraus, daß die Werte (IX) der Schiebungsparameter $h, k, l, \ldots$ in (2) gerade die sind, die das Verschwinden der neuen Koeffizienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ bewirken, und damit eo ipso das Bestehen der Bedingungen $\nabla_x \alpha_1 \equiv 0$, $\nabla_y \alpha_1 \equiv 0$, $\nabla_z \alpha_1 \equiv 0$ usw.

Vermöge der besonderen Werte der $h, k, l, \ldots$ in (IX) gehen die Ausdrücke $\alpha_{rst\ldots}$ in (VI), wenn man deren Dimension $r+s+t+\ldots$ in den $h, k, l, \ldots$ mit d bezeichnet, und die (sc. mit den $\varrho, \sigma, \tau, \ldots$ variierende) Summe $\varrho+\sigma+\tau+\ldots$ mit δ:

$$\text{(12)} \qquad r+s+t+\ldots = d\,, \quad \varrho+\sigma+\tau+\ldots = \delta\,,$$

über in:

$$(13)\qquad \alpha_{rst\ldots} = \sum (-1)^{d-\delta} r_\varrho s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots} \frac{a_1^{r-\varrho} b_1^{s-\sigma} c_1^{t-\tau} \ldots}{a_0^{d-\delta}}.$$

Für $\varrho = 0$, $\sigma = 0$, $\tau = 0$, ... resultiert das Anfangsglied $\frac{a_1^r b_1^s c_1^t \ldots}{a_0^{d-1}}$. Multipliziert man daher die rechte Seite von (13) mit a_0^{d-1}, so erhält man eine ganzrationale Form der a_0, a_1, b_1, c_1, ..., $a_{\varrho\sigma\tau\ldots}$, die mit $C_{rst\ldots}$ bezeichnet sei:

$$(\mathrm{X})\qquad \begin{cases} C_{rst\ldots} \equiv a_0^{d-1} \alpha_{rst\ldots} \\ \equiv \sum (-1)^{d-\delta} r_\varrho s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots} a_0^\delta \cdot a_1^{r-\varrho} b_1^{s-\sigma} c_1^{t-\tau} \ldots \end{cases}$$

Hier ist $C_{rst\ldots}$ homogen in den a von der Dimension d, bezüglich der einzelnen Variabeln (Indizes) isobar von den Teilgewichten r, s, t, ..., also in bezug auf alle Indizes isobar vom Gesamtgewicht d.

Da überdies zugleich mit $\alpha_{rst\ldots}$ auch $C_{rst\ldots}$ den Bedingungen $V_x \equiv 0$, $V_y \equiv 0$, $V_z \equiv 0$, ... genügt, so sind die $C_{rst\ldots} (d \geqq 2)$, zusammen mit $C_0 \equiv a_0$ selbst, sämtlich Seminvarianten von f.

Diese Größen C sind aber auch unabhängig voneinander: denn ordnet man sie nach steigender Dimension $d = 0, 2, 3, \ldots$, so treten stets neue Koeffizienten $a_{rst\ldots}$ auf, die für die C gleicher Dimension jeweils verschieden sind. Andererseits beträgt die Anzahl der C, da die α_1, β_1, γ_1, ... in $\varphi(\xi; \eta; \zeta; \ldots)$ herausgefallen sind, ebensoviel als die Anzahl $(n+1)(p+1)(q+1) \ldots$ der Koeffizienten a von f, vermindert um die Anzahl der durch (VIII) festgelegten Schiebungsparameter, d. i. die Anzahl μ der Variabeln von f. Demnach beträgt die Anzahl der C (inkl. C_0):

$$(14)\qquad (n+1)(p+1)(q+1) \ldots - \mu .$$

Daß die Anzahl unabhängiger Seminvarianten von f auch nicht größer sein kann, als in (14) angegeben, folgt daraus, daß man eine beliebige Seminvariante Φ von f durch die C ausdrücken kann.

In der Tat ergibt sich auf Grund der Entstehung der C, die der speziellen Wahl der h, k, l, ... in (IX) entsprang, und wegen des Zusammenhanges (X) zwischen den C und α die gewünschte Darstellung. Sei

$$\Phi(a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots; a_{rst\ldots}, \ldots) \qquad (d \geqq 2)$$

die vorgelegte Seminvariante, so hat man nur die $a_1, b_1, c_1, \ldots$ gleich Null zu setzen, und jedes $a_{rst\ldots}$ gleich $\frac{C_{rst\ldots}}{C_0^{d-1}}$ zu nehmen, wo $C_0 \equiv a_0$, da gemäß der obigen Definition einer Seminvariante für beliebige Schiebungen der x; y; z; $\ldots$:

$$(15) \quad \begin{cases} \Phi(a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots; a_{rst\ldots}, \ldots) \\ \equiv \Phi(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots; \alpha_{rst\ldots}, \ldots). \end{cases}$$

Somit wird im vorliegenden Falle:

$$(\mathrm{XI}) \quad \begin{cases} \Phi(a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots; a_{rst\ldots}, \ldots) \\ \equiv \Phi\left(C_0, 0, 0, 0, \ldots; \frac{C_{rst\ldots}}{C_0^{d-1}}, \ldots\right). \end{cases}$$

Sodann war nach § 10 (XVII) jede Seminvariante Φ, also insbesondere jedes der C, das Leitglied einer völlig bestimmten Kovariante K von f, und jede Syzygie zwischen Kovarianten K bestand zugleich zwischen deren Leitgliedern Φ und umgekehrt. Es sind daher die $C_{rst\ldots}$ (inkl. $C_0 \equiv a_0$) die Leitglieder von ebensoviel unabhängigen Kovarianten $\Psi_{rst\ldots}$, die wiederum, wie bei Formen f einer Variabeln x, die „assoziierten“ oder „Schwesterformen“ von f heißen mögen, und die Anzahl unabhängiger Kovarianten K von f wird ebenfalls durch (14) angegeben.

Irgendeine Kovariante K von f mit dem Leitgliede Φ stellt sich somit, bis auf eine natürliche Potenz von f selbst im Nenner, ganzrational in den Ψ dar: man hat nur auf der rechten Seite von (XI) C_0 durch f, und jedes $C_{rst\ldots}$ durch $\Psi_{rst\ldots}$ zu ersetzen. Die C heißen wiederum die „fundamentalen“ Seminvarianten von f. Damit ist der grundlegende Satz bewiesen:

Satz III. „Eine allgemeine binäre Urform $f_{n,p,q\ldots}(x; y; z; \ldots)$ von den Ordnungen $n, p, q, \ldots$ in μ nichthomogenen Variabeln $x, y, z, \ldots$ besitzt genau $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots - \mu$ unabhängige Seminvarianten. Als solche kann man die fundamentalen Seminvarianten $C_{rst\ldots}$ (X), inkl. $C_0 \equiv a_0$, wählen, durch die sich, vermöge (XI), eine beliebige Seminvariante (oder im besonderen auch Invariante) Φ, bis auf eine natürliche Potenz von $C_0 \equiv a_0$ im Nenner, ganzrational darstellen lassen.

Die Größen C stimmen, jeweils bis auf eine gewisse Potenz von $C_0 \equiv a_0$, überein mit den Koeffizienten $\alpha_{rst\ldots}$ der vermöge der Schiebungen (2), (IX) transformierten Urform $\varphi(\xi; \eta; \zeta; \ldots)$, in der die Koeffizienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ der Glieder zweithöchster Dimension verschwinden.

Die C sind die Leitglieder von ebensoviel unabhängigen Kovarianten von f, den assoziierten Formen oder Schwesterformen Ψ, durch die sich, wiederum auf Grund von (XI), bis auf eine Potenz von f selbst als Nenner, jede weitere Kovariante oder Invariante ganzrational ausdrücken läßt.

Die Anzahl unabhängiger Kovarianten von f, dieselbe wie die unabhängiger Seminvarianten oder auch der C, wird durch $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots-\mu$ geliefert."

Aus dem Auftreten der negativen Vorzeichen der Schiebungsparameter $h, k, l, \ldots$ in (XI) einerseits, sowie aus dem der Binomialkoeffizienten in der Urform f (1) resp. ihrer vermöge (2) transformierten Gestalt φ (V) läßt sich noch eine bemerkenswerte Folgerung ziehen. Greift man aus (V) irgendein festes, den Parameter h nicht enthaltendes Potenzprodukt $k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$ heraus, so ist dasselbe multipliziert mit einer binären Form r-ter Ordnung in h, deren numerische Faktoren die zu r gehörigen Binomialkoeffizienten $r_0 = 1, r_1, r_2, \ldots, r_r = 1$ sind.

Wird hier gemäß (IX) h durch $-\dfrac{a_1}{a_0}$ ersetzt und mit a_0^r heraufmultipliziert, so entsteht eine binäre Form r-ter Ordnung in den homogenen Größen a_0, a_1, mit den nämlichen numerischen Faktoren $1, r_1, r_2, \ldots, r_1, 1$, aber alternierenden Vorzeichen. Nun ist aber:

$$(16) \qquad 1 - r_1 + r_2 - r_3 + \ldots + (-1)^r \equiv (1-1)^r \equiv 0 .$$

Das gleiche wiederholt sich für alle weiteren Potenzprodukte von der Struktur $k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$: stets verschwindet die algebraische Summe der numerischen Faktoren in dem als Koeffizient des Potenzproduktes fungierenden Polynome. Daraus folgt, daß, wenn man in irgendeinem der Ausdrücke $C_{rst\ldots}$ (X) alle Argumente $a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots; a_{rst\ldots}, \ldots$ gleich der Einheit nimmt, die algebraische

Summe der so hervorgehenden Glieder gemäß (16) verschwinden muß, und das nämliche gilt für jede natürliche Potenz von $C_{rst\ldots}$.

Nun war gemäß (XI), wo eine Potenz von C_0 nicht isoliert auftreten kann, eine beliebige Seminvariante oder Invariante von f, bis auf eine Potenz von C_0 als Nenner, ganzrational in den C_0, $C_{rst\ldots}$. Es folgt demnach:

Satz IV. „Die algebraische Summe der numerischen Koeffizienten einer Seminvariante (Invariante) der Urform f verschwindet."

Nunmehr sollen die fundamentalen Seminvarianten C (X) inkl. C_0 statt der ursprünglichen Koeffizienten a_0, a_1, b_1, c_1, $\ldots$, $a_{rst\ldots}$, $\ldots$ von f (1) in die Differentialgleichungen (I), (II) für eine Invariante J von f als unabhängige Variable eingeführt werden. Die Gleichungen $V_x = 0$, $V_y = 0$, $V_z = 0$, $\ldots$ werden dabei identisch erfüllt, da ihnen die C genügen und somit überflüssig.

Gemäß (X) und (13) war (für $d = r + s + t + \ldots$, $\delta = \varrho + \sigma + \tau + \ldots$):

$$(\mathrm{X}) \quad \begin{cases} C_{rst\ldots} \equiv C_0^{d-1} \cdot a_{rst\ldots} \\ \equiv \sum (-1)^{d-\delta}\, r_\varrho s_\sigma t_\tau \ldots\; a_{\varrho\sigma\tau\ldots} a_0^{\delta-1} a_1^{r-\varrho} b_1^{s-\sigma} c_1^{t-\tau} \ldots \end{cases}$$

Die C werden in J an Stelle der a dadurch eingeführt, daß man $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0$, $a_0 = C_0$ nimmt und alle übrigen $a_{rst\ldots}$ durch die $C_{rst\ldots} C_0^{1-d}$ ersetzt.

Dann bestehen zuvörderst die Hilfsformeln (für $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0$):

$$(18) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_0} \equiv \dfrac{\partial J}{\partial C_0}, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_1} \equiv \sum \dfrac{\partial J}{\partial C_{rst\ldots}} \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_1}, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b_1} \equiv \sum \dfrac{\partial J}{\partial C_{rst\ldots}} \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial b_1}, \quad \ldots; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_{rst\ldots}} \equiv \dfrac{\partial J}{\partial C_{rst\ldots}} \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_{rst\ldots}} + \sum\limits_{\varrho,\sigma,\tau,\ldots} \dfrac{\partial J}{\partial C_{\varrho\sigma\tau\ldots}} \dfrac{\partial C_{\varrho\sigma\tau\ldots}}{\partial a_{rst\ldots}} \\ (\varrho + \sigma + \tau + \ldots > r + s + t + \ldots). \end{cases}$$

Die Entwicklungen der letzten Zeile in (18) gelten insbesondere deshalb, weil in $C_{rst\ldots}$ der einzige Koeffizient a vom Gewichte $r + s + t + \ldots$ eben $a_{rst\ldots}$ ist, während alle weiteren a in $C_{rst\ldots}$ ein höheres Gewicht besitzen.

Sodann sind die in (18) auftretenden partiellen Ableitungen der C nach den a zu ermitteln.

Nun ist in der Entwicklung (X) von $C_{rst\ldots}$ das einzige Glied, das, abgesehen von einer Potenz von a_0, von den Größen $a_1, b_1, c_1, \ldots$ lediglich a_1 in der ersten Potenz aufweist, $-r\,a_0^{d-2}\,a_1\,a_{r-1,st\ldots}$, während alle übrigen entweder a_1 in einer höheren Potenz mit sich führen oder aber a_1 noch mit mindestens einer der Größen $b_1, c_1, \ldots$ multipliziert. Da aber nach erfolgter Differentiation nach a_1 alle $a_1, b_1, c_1, \ldots$ gleich Null zu setzen sind, so ergibt sich $\frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_1} = -r\,a_0^{d-2}\,a_{r-1,st\ldots}$ oder aber wegen (X) $= -r\,C_{r-1,st\ldots}$. Da sich der entsprechende Schluß für die $\frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial b_1}, \frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial c_1}, \ldots$ wiederholt, kommt zuvörderst:

$$\text{(XII)} \quad \frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_1} = -r\,C_{r-1,st\ldots}, \qquad \frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial b_1} = -s\,C_{r,s-1,t}, \quad \text{usf.}$$
$$(a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0, \quad d = r + s + t + \ldots > 2).$$

Eine Ausnahme von diesem Gesetze tritt nur ein, wenn das Gewicht $d = r + s + t + \ldots$ den Wert Zwei hat. Alsdann tritt z. B. a_1 in der ersten Potenz unter den $a_1, b_1, c_1, \ldots$ isoliert nicht auf, sondern entweder das Quadrat von a_1 oder aber ein Produkt von der Form $a_1 b_1$, $a_1 c_1$ usf. und entsprechend für $b_1, c_1, \ldots$

Somit ergibt sich die Ergänzungsregel zu (XII):

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial b_1} = 0, \qquad \ldots$$
$$(d = r + s + t + \ldots = 2).$$

Für die Ableitung nach einem beliebigen $a_{rst\ldots}$ folgt direkt aus (18) $(a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0)$:

$$\text{(XIVa)} \qquad \frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_{rst\ldots}} = C_0^{r+s+t+\ldots-1} = C_0^{d-1},$$

$$\text{(XIVb)} \qquad \frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_{\varrho\sigma\tau\ldots}} = 0 \qquad (\delta = \varrho + \sigma + \tau + \ldots = d),$$

sobald $\varrho\sigma\tau\ldots$ eine von $rst\ldots$ verschiedene Kombination der Indizes bedeutet, und endlich:

$$\text{(XIVc)} \qquad \frac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_{\varrho\sigma\tau\ldots}} = 0 \qquad (\delta = \varrho + \sigma + \tau + \ldots < d).$$

Die Formeln (XIVa), (XIVb), (XIVc) fließen auch unmittelbar aus (X); insbesondere sagen (XIVb) und (XIVc) nichts anderes aus, als daß die $C_{rst\ldots}$ voneinander unabhängig sind.

Wendet man die Formeln (XII), (XIII), (XIV) zunächst auf die Differentialgleichungen (II) $\mathsf{M}_{x=0}$, $\mathsf{M}_{x'=0}$ usf. an, so erkennt man, daß die mit resp. $\frac{\partial J}{\partial a_1}, \frac{\partial J}{\partial b_1}, \frac{\partial J}{\partial c_1}, \ldots$ behafteten Glieder herausfallen, da sie resp. mit den gleich Null zu setzenden Faktoren $a_1, b_1, c_1, \ldots$ multipliziert sind.

Um indessen das Endergebnis bequem zusammenfassen zu können, führe man noch die symbolischen Koeffizienten $C_{1000\ldots}$, $C_{01000\ldots}$, $C_{00100\ldots}$, ein, die sämtlich den Wert Null haben sollen; dann lauten die transformierten Differentialgleichungen (II):

$$
(\mathrm{II}')\begin{cases}
\mathsf{M}_x \equiv \sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{p}\sum\limits_{l=0}^{q}\ldots(n-i)\,C_{ikl\ldots}\dfrac{\partial J}{\partial C_{ikl\ldots}} - \omega_x J = 0\,,\\[2ex]
\mathsf{M}_{x'} \equiv \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=0}^{p}\sum\limits_{l=0}^{q}\ldots i\,C_{ikl\ldots}\dfrac{\partial J}{\partial C_{ikl\ldots}} - \omega_x J = 0\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Nunmehr gehe man zu den Gleichungen (Ib) $V_{x'} = 0$, $V_{y'} = 0$, $V_{z'} = 0$, ... über. Man beachte hier, daß z. B. in der ersten Gleichung $V_{x'} = 0$ $\frac{\partial J}{\partial a_1}$ den Faktor $(n-1)\,a_{2000\ldots}$ besitzt, dagegen $\frac{\partial J}{\partial b_1}, \frac{\partial J}{\partial c_1}, \ldots$ der Reihe nach die Faktoren $n\,a_{11000\ldots}$, $n\,a_{10100\ldots}$, $n\,a_{100100\ldots}$, ... Dann geht die Gleichung $V_{x'} = 0$, mit Berücksichtigung von (XII), (XIII), (XIV) über in die folgende, wobei die Glieder vom Gewichte Zwei vor den anderen ausgezeichnet sind:

$$
(\mathrm{I}')\begin{cases}
V_{x'} \equiv \sum\limits_{(i+k+l+\ldots=2)}(n-i)\,C_{i+1,kl\ldots}\dfrac{\partial J}{\partial C_{ikl\ldots}} - \sum\limits_{(i+k+l+\ldots>2)}\dfrac{\partial J}{\partial C_{ikl\ldots}}\\[2ex]
\quad\times\{i(n-1)\,C_{2000\ldots}\,C_{i-1,kl\ldots} + k\,n\,C_{11000\ldots}\,C_{i,k-1,l\ldots}\\
\quad + l\,n\,C_{10100\ldots}\,C_{i,k,l-1,\ldots} + \ldots\} = 0\,,
\end{cases}
$$

und entsprechend $V_{y'} = 0$, $V_{z'} = 0$, ... Denkt man sich für eine Funktion J der C die Bedingungen (II′) bereits erfüllt, d. h. J einzeln isobar bezüglich der Variabeln $x, y, z, \ldots$ von den Teilgewichten $w_x, w_y, w_z, \ldots$, so wird J als Invariante von f dadurch charakterisiert, daß es lediglich den Bedingungen (I') $\nabla_{x'} = 0$, $\nabla_{y'} = 0, \ldots$ genügt; letztere verdienen daher, entsprechend dem Falle einer Variabeln x (§ 16), wiederum den Namen „Differentialgleichungen der Invarianten".

Somit gilt der Fundamentalsatz:

Satz V. „Eine in den $C_{rst\ldots}$ bezüglich der einzelnen Indizes isobare ganze Funktion ist dann und nur dann eine Invariante der Urform $f_{n,p,q,\ldots}(x; y; z; \ldots)$ gegenüber inkongruenten Substitutionen der μ nichthomogenen Variabeln x, y, $z, \ldots$, wenn sie den μ linearen partiellen Differentialgleichungen (I') genügt, wo die als unabhängige Argumente auftretenden Größen C die $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots - \mu$ unabhängigen fundamentalen Seminvarianten von f, mit Ausschluß von C_0, sind."

Die Bedingungen (II') für eine Invariante J, als Funktion der C, sollen, wie in § 12 die Bedingungen (II) für J, als Funktion der a, durch arithmetische Gewichts- resp. Dimensionseigenschaften ersetzt werden. Sei J vorgelegt als ein Aggregat von der Gestalt:

$$(19)\quad \begin{cases} J(a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots, a_{rst\ldots}, \ldots) \\ \quad = \sum c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} b_1^{\eta_1} c_1^{\zeta_1} \ldots a_{rst\ldots}^{\varepsilon_{rst\ldots}} \ldots, \end{cases}$$

wo die c numerisch sind und zwischen den nichtnegativen ganzzahligen Exponenten gemäß (II) die Relationen bestehen:

$$(20\text{a})\qquad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \eta_1 + \zeta_1 + \ldots + \sum \varepsilon_{rst\ldots} = d,$$

$$(20\text{b})\quad \varepsilon_1 + \sum r\, \varepsilon_{rst\ldots} = w_x, \qquad \eta_1 + \sum s\, \varepsilon_{rst\ldots} = w_y, \qquad \ldots$$

Es ist also J homogen in den a von einer Dimension d und isobar hinsichtlich der einzelnen Indizes von den Teilgewichten $w_x, w_y, \ldots$, wo diese mit d verknüpft sind durch die Beziehungen:

$$(21)\qquad 2w_x = nd, \quad 2w_y = pd, \quad 2w_z = qd, \quad \ldots$$

Nennt man $W = w_x + w_y + w_z + \ldots$ das „Gesamtgewicht" von J, $N = n + p + q + \ldots$ die „Gesamtordnung“ von f, so folgt durch Addition der Gleichungen (21):

$$(22) \qquad 2W = Nd\,,$$

als die ersichtliche Verallgemeinerung der Relation $2w = nd$ für den Fall einer einzigen Variabeln x.

Führt man jetzt in J die C ein vermöge $a_0 = C_0$, $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0$, $a_{rst\ldots} = C_{rst\ldots} C_0^{-(d-1)}$, so fallen in (19) die mit irgendeinem der $a_1, b_1, c_1, \ldots$ als Faktor behafteten Glieder heraus, und man erhält J in Funktion der C:

$$(23) \quad J(C_0, C_{rst\ldots}, \ldots) = \sum c \frac{C_{rst\ldots}^{\varepsilon_{rst\ldots}} C_{r_1 s_1 t_1\ldots}^{\varepsilon_{r_1 s_1 t_1\ldots}} C_{r_2 s_2 t_2\ldots}^{\varepsilon_{r_2 s_2 t_2\ldots}}}{C_0^{\Sigma(d-1)\varepsilon_{rst\ldots}-\varepsilon_0}}.$$

Die Bedingungen (20a), (20b) gehen jetzt, da $\varepsilon_1 = \eta_1 = \zeta_1 = \ldots = 0$ zu nehmen ist, über in:

$$(20a') \qquad \varepsilon_0 + \sum \varepsilon_{rst\ldots} = d\,,$$

$$(20b') \quad \sum r\,\varepsilon_{rst\ldots} = w_x\,,\ \sum s\,\varepsilon_{rst\ldots} = w_y\,,\ \ldots;\ \sum d\,\varepsilon_{rst\ldots} = W.$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich für den Exponenten von C_0 in den Nennern von (23):

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum(d-1)\,\varepsilon_{rst\ldots} - \varepsilon_0 &= \sum d\,\varepsilon_{rst\ldots} - \left(\sum \varepsilon_{rst\ldots} + \varepsilon_0\right) \\ &= W - d\,. \end{aligned} \right.$$

Somit ist der Exponent von C_0 in den Nennern von (23) konstant, so daß (23) sich vereinfacht zu:

$$(\mathrm{XIV}) \quad \left\{ \begin{aligned} &J(C_0, C_{rst\ldots}, \ldots)\, C_0^{W-d} \\ &= \sum c\, C_{rst\ldots}^{\varepsilon_{rst\ldots}} C_{r_1 s_1 t_1\ldots}^{\varepsilon_{r_1 s_1 t_1\ldots}} C_{r_2 s_2 t_2\ldots}^{\varepsilon_{r_2 s_2 t_2\ldots}} \ldots, \end{aligned} \right.$$

mit den Bedingungen (20) und (21).

Hier ist offenbar der Zähler von J, und damit auch J selbst, wiederum isobar hinsichtlich der einzelnen Indizes von den Einzelgewichten $w_x, w_y, \ldots$, andererseits aber nicht mehr homogen in den $C_{rst\ldots}$, dagegen in diesen von der Gesamtordnung d. Rückwärts geht ein derartiges, im übrigen beliebiges Aggregat J (XIV) nach Einführung der a wieder in einen Ausdruck J von dem ursprünglichen Charakter (19) über. Dabei sondert sich aus dem Zähler von J, d. h. aus der rechten Seite von (XIV) der Faktor a_0^{W-d} von selbst ab, der sich alsdann gegen den gleichen Nenner weghebt. Demnach ist bewiesen:

Satz VI. „Die Differentialgleichungen (II′) sagen für einen Ausdruck J (19), nach Einführung der C an Stelle der a, aus, daß J, abgesehen von einem Nenner C_0^{W-d}, eine nichthomogene ganzrationale Funktion der $C_{rst\ldots}$ (exkl. C_0) ist, von einer Gesamtordnung d und isobar hinsichtlich der einzelnen Indizes von den Teilgewichten w_x, w_y, ..., wo für diese Zahlen die Bedingungen (21) erfüllt sein müssen."

Addiert man indessen je zwei zusammengehörige der Gleichungen (II′), so erhält man z. B. bezüglich x:

$$(25) \qquad n\left[C_0 \frac{\partial J}{\partial C_0} + \sum C_{rst\ldots} \frac{\partial J}{\partial C_{rst\ldots}}\right] = 2\,w_x\,, \qquad \text{usf.}$$

Danach wäre J homogen in den C_0, $C_{rst\ldots}$ von einer Dimension $d = \frac{2\,w_x}{n} = \frac{2\,w_y}{p} = \frac{2\,w_z}{q} = \ldots$, im Widerspruch zu Satz VI. Um diesen Widerspruch zu lösen, beachte man, daß bei Aufstellung der jeweils ersten Gleichungen (II′) stillschweigend vorausgesetzt ist, daß die C_0, $C_{rst\ldots}$ als unabhängige Argumente der Differentialgleichungen in dem Sinne „unabhängig" voneinander sind, daß zwischen ihnen keine Identität besteht, deren Koeffizienten konstant sind oder auch selbst von den C resp. von den a abhängen. Nun tritt aber C_0 in allen $C_{rst\ldots}$ auf, so daß in Wahrheit bei Bildung des ersten Gliedes der Gleichungen $\mathsf{M}_x = 0$, $\mathsf{M}_y = 0$, ... jene Voraussetzung der Unabhängigkeit nicht zutrifft; wollte man sie berücksichtigen, so würde die Struktur der Gleichungen nicht nur wesentlich verwickelter werden, sondern überhaupt einen ganz anderen Charakter annehmen.

Im Hinblick auf Satz VI und die Relationen (25) erklärt sich der Sachverhalt einfach dahin, daß die in den Gleichungen $\mathsf{M}_x = 0$, $\mathsf{M}_y = 0$, ... auftretende Größe C_0 gar nicht die Größe a_0 selbst bedeutet, sondern lediglich eine die $C_{rst\ldots}$ homogenisierende — und damit natürlich von diesen unabhängige — Variable, die genauer mit einem anderen Buchstaben, etwa C_0', zu bezeichnen wäre; am besten setzt man sie hinterher wieder gleich Eins.

Dann deckt sich der Inhalt der Gleichungen (25) vollständig mit der Aussage des Satzes VI, daß J für $C_0 = 1$,

d. i. als nichthomogene Funktion der $C_{rst\ldots}$, von der Gesamtordnung d ist, die mit den Teilgewichten $w_x, w_y, \ldots$ durch (21) verbunden ist.

Der Satz V gewinnt damit die genauere Fassung:

Satz V′. „Sei J eine in den $C_{rst\ldots}$ (für $C_0 = 1$) nichthomogene ganzrationale Funktion von einer Gesamtordnung d und isobar hinsichtlich der einzelnen Indizes von den Teilgewichten $w_x, w_y, w_z, \ldots$ unter den Bedingungen (21), so ist, damit J zu einer Invariante von $f_{n,p,q,\ldots}(x; y; z; \ldots)$ wird, notwendig und hinreichend das Bestehen der „Differentialgleichungen der Invarianten" (I′) $V_{x'} = 0$, $V_{y'} = 0, \ldots$"

Diese μ Differentialgleichungen (I′) $V_{x'} = 0, V_{y'} = 0, \ldots$ sind ihrer Bedeutung nach voneinander unabhängig; es sind homogene lineare partielle Differentialgleichungen in den $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots - \mu - 1$ unabhängigen Argumenten $C_{rst\ldots}$ (exkl. C_0). Nach einem Satze*) aus der Theorie solcher Gleichungen besitzen sie eine Anzahl von unabhängigen gemeinsamen Partikularlösungen, die um $\mu - 1$ geringer ist als die Anzahl der unabhängigen Argumente. Damit ist man in Verallgemeinerung des Satzes VII von § 16 zu dem Ergebnis gelangt:

Satz VII. „Eine beliebige binäre Urform $f_{n,p,q,\ldots}(x; y; z; \ldots)$ in μ nichthomogenen Variabeln $x, y, z, \ldots$, die inkongruenten Substitutionen unterworfen werden, besitzt $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots - 2\mu - 1$ unabhängige Invarianten, unabhängige Partikularlösungen der Gleichungen (I′) $V_{x'} = 0$, $V_{y'} = 0, \ldots$, durch die jede Invariante von f algebraisch ausdrückbar ist."

Wie in dem Falle einer einzigen Variabeln x (§ 16) überträgt sich die oben entwickelte Methode, eine Invariante J von f und deren Differentialgleichungen in den fundamentalen Seminvarianten $C_{rst\ldots}$ darzustellen, mit einigen Abänderungen auf Kovarianten $K(a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots; a_{rst\ldots}, \ldots; x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots)$, wo die Variabeln jetzt zweckmäßig homogen angesetzt werden.

---

*) S. das Zitat auf S. 265.

Die Schiebungen (2) lauten dann, mit Einsetzung der Werte $h = -\frac{a_1}{a_0}$, $k = -\frac{b_1}{a_0}$, ... aus (IX):

$$(2') \quad x_1 = \xi_1 - \frac{a_1}{a_0}\xi_2\,, \; x_2 = \xi_2\,; \quad y_1 = \eta_1 - \frac{b_1}{a_0}\eta_2\,, \; y_2 = \eta_2\,; \; \ldots$$

Vermöge (2′) geht die Kovariante K von f über in eine Kovariante der transformierten Form $\varphi(C_0, C_{rst\ldots}, \ldots; \xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \ldots)$. Man hat also behufs Überführung von K in die neuen Argumente zu setzen:

$$a_0 = C_0\,, \quad a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0\,, \quad a_{rst\ldots} = C_{rst\ldots}\, C_0^{-(d-1)}\,,$$
$$(d = r + s + t + \ldots)$$

und gleichzeitig [wegen $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0$ in (2′)] $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$; $y_1 = \eta_1$, $y_2 = \eta_2$; ... Damit wird identisch:

$$(\mathrm{XV}) \left\{ \begin{aligned} & K(a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots; a_{rst\ldots}, \ldots; x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots) \\ & \equiv K(C_0, 0, 0, 0, \ldots; C_{rst\ldots}\, C_0^{-(d-1)}, \ldots; \xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \ldots)\,, \end{aligned} \right.$$

wo C_0 wiederum lediglich eine die $C_{rst\ldots}$ homogenierende Größe repräsentiert. Schreibt man lieber M_{x_1}, M_{x_2}, ...; V_{x_1}, V_{x_2}, ... für die in (II) resp. (I) als M_x, $\mathsf{M}_{x'}$, ...; V_x, $V_{x'}$, ... aufgeführten Prozesse, so hat nach § 15 (XIII), (XIV) eine Kovariante K von f den beiden, für K charakteristischen Systemen von Differentialgleichungen zu genügen:

$$(\mathrm{XVI}) \quad \mathsf{M}_{x_1}(K) - x_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0\,, \quad \mathsf{M}_{x_2}(K) - x_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0\,, \quad \text{usw.};$$

$$(\mathrm{XVII}) \quad V_{x_1}(K) - x_2 \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0\,, \quad V_{x_2}(K) - x_1 \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0\,, \quad \text{usw.}$$

Hinsichtlich des ersten Systems wird für $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0$ direkt $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}$, $x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}$ usf., und die Ausdrücke M_{x_1}, M_{x_2}, ... erleiden genau die unter (II′) angegebene Umformung. Die transformierten Gleichungen (XVI) lassen sich daher kurz so schreiben:

$$(\mathrm{XVI}') \quad \mathsf{M}_{\xi_1}(K) - \xi_1 \frac{\partial K}{\partial \xi_2} = 0\,, \quad \mathsf{M}_{\xi_2}(K) - \xi_2 \frac{\partial K}{\partial \xi_2} = 0\,, \quad \text{usw.};$$

diese unterscheiden sich von den ursprünglichen (XVI) nur dadurch, daß in M_{x_1}, M_{x_2}, ... die Glieder mit den Faktoren a_1, b_1, c_1, ... in Wegfall gekommen sind und im übrigen die Buchstaben $a_0, a_{rst\ldots}, \ldots; x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots$ resp. mit $C_0(=1)$, $C_{rst\ldots}, \ldots; \xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \ldots$ vertauscht sind.

Von den Gleichungen (XVII) wird wiederum jeweils die erstere nach Einführung der neuen Argumente identisch erfüllt, also überflüssig. Bei den an zweiter Stelle von (XVII) stehenden Gleichungen ist die früher, in (I′) ausgeführte Transformation der Ausdrücke V_{x_2}, V_{y_2}, ... nebst der weiteren von $x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$, $y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}$, ... dahin abzuändern, daß die Funktionalabhängigkeiten (2′) noch zu berücksichtigen sind.

Zunächst kommt wiederum (für $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0$):

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \qquad y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_2}, \qquad \text{usf.}$$

Bei den Ausdrücken V_{x_2}, V_{y_2}, ... ist zu beachten, daß außer den in (I′) erhaltenen Gliedern bei Ausführung der Ableitungen $\frac{\partial}{\partial a_1}, \frac{\partial}{\partial b_1}, \frac{\partial}{\partial c_1}, \ldots$, auf Grund von (2′), die Terme $\frac{\partial}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} = \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial b_1} = \eta_2 \frac{\partial}{\partial \eta_1}$, usf. hinzutreten, die ihrerseits noch mit den Faktoren $(n-1)\,C_{20000\ldots}$, $n\,C_{11000\ldots}$, $n\,C_{10100\ldots}$, ... zu versehen sind. Damit werden die transformierten Gleichungen (XVII) für eine Kovariante K:

$$(\text{XVII}')\left\{\begin{aligned} &(n-1)\,C_{2000\ldots}\,\xi_2 \frac{\partial K}{\partial \xi_1} + n\,C_{11000\ldots}\,\eta_2 \frac{\partial K}{\partial \eta_1} + n\,C_{10100\ldots}\,\zeta_2 \frac{\partial K}{\partial \zeta_1} \\ &\qquad + \ldots + V_{x_2} K - \xi_1 \frac{\partial K}{\partial \eta_2} = 0\,, \quad \text{usw.,}\end{aligned}\right.$$

wo für V_{x_2} ... die Prozesse (I′) einzusetzen sind.

Nimmt man die durch die Gleichungen (XVI) resp. (XVI′) indizierten Gewichts- und Dimensionseigenschaften eines Ausdruckes K als erfüllt an, so sind die Bedingungen (XVII′) als die einzig wesentlichen für eine Kovariante K

von f anzusehen: sie heißen daher, wie in § 15, die „Differentialgleichungen der Kovarianten“ von f. Die Anzahl dieser homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen ist, wie bei den Gleichungen für die Invarianten, gleich μ; als Argumente treten auf einmal die Größen $C_{rst\ldots}$, sodann die 2μ Variabeln $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \ldots$, insgesamt $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots - \mu - 1$ Größen.

Da aber nur solche Kovarianten K in Betracht gezogen werden, die in jedem der Variabelnpaare ξ_1, ξ_2; η_1, η_2; ... homogen sind, etwa von den Ordnungen $d_\xi, d_\eta, \ldots$, so ist der Eulersche Satz über homogene Formen heranzuziehen:

$$\xi_1 \frac{\partial K}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial K}{\partial \xi_2} = d_\xi K, \quad \eta_1 \frac{\partial K}{\partial \eta_1} + \eta_2 \frac{\partial K}{\partial \eta_2} = d_\eta K, \quad \ldots \tag{26}$$

Multipliziert man diese Identitäten resp. mit $\xi_1, \eta_1, \ldots$, so kommt:

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 \xi_2 \frac{\partial K}{\partial \xi_2} &= d_\xi \xi_1 K - \xi_1^2 \frac{\partial K}{\partial \xi_1}, \\ \eta_1 \eta_2 \frac{\partial K}{\partial \eta_2} &= d_\eta \eta_1 K - \eta_1^2 \frac{\partial K}{\partial \eta_1}, \quad \ldots \end{aligned}\right. \tag{26'}$$

Hiermit sind die in (XVII′) auftretenden Produkte $\xi_1 \frac{\partial K}{\partial \eta_2}, \eta_1 \frac{\partial K}{\partial \eta_2}, \ldots$ auf die $\frac{\partial K}{\partial \xi_1}, \frac{\partial K}{\partial \eta_1}, \ldots$ nebst K selbst zurückführbar, und die Differentialgleichungen (XVII′) gehen über in ein System von μ, in den $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots - 2\mu - 1$ unabhängigen Argumenten $C_{rst\ldots}, \ldots, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots$ nichthomogenen linearen partiellen Differentialgleichungen. Ein solches System besitzt aber im ganzen $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots - \mu$ unabhängige Partikularlösungen und folglich eine Urform f gerade ebenso viele unabhängige Kovarianten. Somit gilt:

Satz VIII. „Die Differentialgleichungen (XVI), (XVII) für eine Kovariante von f nehmen nach Einführung der neuen Argumente $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \ldots$; $C_{rst\ldots}, \ldots$ die Gestalten (XVI′), (XVII′) an.

Eine beliebige Urform $f_{n,p,q,\ldots}$ besitzt $(n+1)$ $(p+1)(q+1)\ldots - \mu$ unabhängige Kovarianten, d. i. um μ Einheiten weniger, als die Anzahl der

Koeffizienten in f beträgt, und diese Kovarianten sind gemeinsame unabhängige Partikularlösungen des Systems (XVII′).“

Die Anzahl der unabhängigen Kovarianten ist aber auch direkt einzusehen. Nach § 15 (XVII) ist jede Seminvariante Φ von f Leitglied einer eindeutig bestimmten Kovariante K, und zwischen Leitgliedern bestehen dieselben Syzygien, wie zwischen den zugehörigen Kovarianten selbst, und umgekehrt.

Nach Satz III existieren aber gerade $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots-\mu$ unabhängige Seminvarianten von f, die durch die $C_{rst\ldots}$ nebst C_0 repräsentiert werden: mithin existieren auch gerade ebenso viele unabhängige Kovarianten von f.

Zwischen $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots-\mu+1$ beliebig ausgewählten Kovarianten K wird daher eine Syzygie bestehen. Um diese zu ermitteln, drücke man, gemäß (XI), die Leitglieder Φ der K rational in den $C_{rst\ldots}$ (nebst C_0) aus, wobei jeweils nur eine gewisse Potenz von C_0 als Nenner auftritt, und eliminiere aus diesen $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots-\mu+1$ Gleichungen die $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots-\mu$ Größen $C_{rst\ldots}$ nebst C_0. Ersetzt man dann im Eliminationsresultat die Leitglieder Φ wieder durch die bezüglichen Kovarianten K, so ist man im Besitze der gesuchten Syzygie zwischen den vorgelegten Kovarianten:

Satz IX. „Tritt zu irgend $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots-\mu$ unabhängigen Kovarianten von f eine weitere hinzu, so besteht zwischen solchen $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots-\mu+1$ Kovarianten K eine Syzygie; um diese aufzustellen, drücke man die Leitglieder Φ der K durch die $C_{rst\ldots}$ nebst C_0 aus und eliminiere die letzteren Größen und ersetze schließlich wieder die Φ durch die K.“

Aufgabe 1. Es ist zu zeigen, daß man ein vollständiges System unabhängiger Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen (VIII) gewinnt, indem man die Partikularlösungen (IX) vermöge willkürlicher Konstanten mit den Größen $C_{rst\ldots}$ (X) additiv zusammensetzt.

Aufgabe 2. Die Entwicklungen des Textes sind für die Fälle einer $f_{111}, f_{1111}, f_{12}, f_{22}$ im einzelnen auszuführen.

Aufgabe 3. Der in Aufgabe 3 zu § 16 erwähnte Hermitesche Satz läßt sich auf Formen $f(x_1, x_2; x_1', x_2'; \ldots)$ mit mehreren Reihen inkongruenter Variabeln ausdehnen. Führt man neue Variable $\xi, \xi', \ldots$ ein vermöge:

$$\xi_1 = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \xi_2 = y_1 x_2 - y_2 x_1;$$

$$\xi_1' = y_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} + y_2' \frac{\partial f}{\partial x_2'}, \quad \xi_2' = y_1' x_2' - y_2' x_1'; \quad \text{usf.},$$

wo die y mit den x, die y' mit den x' usf. kogredient sind, so geht die mit $f^{d-1}(x_1, x_2; x_1', x_2'; \ldots)$ multiplizierte Form $f(y_1, y_2; y_1', y_2'; \ldots)$ über in eine Form φ in den $\xi, \xi', \ldots$, wo der Koeffizient des Potenzproduktes höchster Dimension gleich 1 ist, die Koeffizienten der Potenzprodukte zweithöchster Dimension sämtlich verschwinden, während die weiteren Koeffizienten mit den bezüglichen Schwesterformen $\Psi_{rst\ldots}$ übereinstimmen.

Aufgabe 4. Der in Aufgabe 5 zu § 16 angeführte Satz ist auf Urformen f in mehreren unabhängigen Variabeln $x, y, \ldots$ auszudehnen.

Kapitel III.

Erweiterungen des Invariantenbegriffes. Transzendente Kovarianten. Die Waringschen Formeln.

§ 18. Erweiterungen des Invariantenbegriffes.

Unter einer (vollständigen) „Invariante“ J einer oder mehrerer Urformen $f_n(x_1, x_2)$, $g_p(x_1, x_2)$, ..., in zwei homogenen Variabeln mit den Koeffizientenreihen (a), (b), ... wurde bisher eine, in den letzteren Größen ganzrationale — in der Regel auch in den einzelnen Reihen homogene — Funktion verstanden, die gegenüber irgendeiner (eigentlichen) Substitution S von der Determinante Δ die Bedingung erfüllte:

$$\text{(I)} \qquad J[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^w J[(a), (b), \ldots],$$

unter w eine feste ganze Zahl verstanden.

Man wird die Definition (I) zunächst dahin ausdehnen, daß lediglich verlangt wird, das transformierte J solle sich von dem ursprünglichen um einen, im übrigen unbekannten, aber nur von den Substitutionskoeffizienten abhängigen Faktor C unterscheiden:

$$\text{(II)} \qquad J[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv C J[(a), (b), \ldots].$$

Um die neue, allgemeinere Definition (II) einer Invariante auf die alte, (I), zurückzuführen, zerlege man S wieder in Fundamentalsubstitutionen $A_1(h_1)$, $A_2(h_2)$, $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ und weise, auf Grund von (II), die Richtigkeit von (I) in jedem dieser vier Einzelfälle nach: dann gilt (I) auch für jede S.

Ein beliebiger Term T von J sei wie früher:

$$\text{(1)} \qquad T = c t = c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p} \ldots$$

Vermöge einer Streckung $M_1(m_1)$: $x_1 = m_1 \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, wird der in den neuen Koeffizientenreihen (α), (β), ... gebildete Term T gleich dem Produkt aus dem alten, T, in den Faktor $m_1^{\sum\limits_i (n-i)\varepsilon_i + \sum\limits_k (p-k)\eta_k + \ldots}$:

$$\text{(2)} \qquad \mathsf{T} = c\,\tau = c\,t\, m_1^{\sum\limits_i (n-i)\varepsilon_i + \sum\limits_k (p-k)\eta_k + \ldots}.$$

Soll sich nun das Aggregat $J[(\alpha), (\beta), \ldots]$ dieser neuen Terme T für alle Werte der (a), (b), ... nur um einen, allein von m_1 abhängigen Faktor $C(m_1)$ unterscheiden, so ist das nur so möglich, daß die mit den einzelnen Termen ct in (2) multiplizierte Potenz von m_1 mit dem besagten Faktor C übereinstimmt.

Demnach ergibt sich, wenn man denselben Schluß für eine Streckung $M_2(m_2)$ wiederholt:

$$\text{(3)} \qquad C = m_1^{\sum\limits_i (n-i)\varepsilon_i + \sum\limits_k (p-k)\varepsilon_k + \ldots} = m_2^{\sum\limits_i i\varepsilon_i + \sum\limits_k k\eta_k + \ldots},$$

und hieraus, daß der Exponent der variierenden Parameter m_1 und m_2 ein und dieselbe natürliche Zahl sein muß, die mit w bezeichnet sei (wo w im besonderen auch Null sein darf):

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \sum\limits_i (n-i)\,\varepsilon_i + \sum\limits_k (p-k)\,\eta_k + \ldots = w, \\ \sum\limits_i i\,\varepsilon_i \qquad + \sum\limits_k k\,\eta_k \qquad + \ldots = w. \end{cases}$$

Diese Relationen (4) sagen aus, daß ein Ausdruck J mit der Eigenschaft (II) jedenfalls bez. x_1 und x_2 isobar vom Gewichte w ist.

Nunmehr übe man eine Schiebung $A_1(h_1)$ aus. Dann wird der Faktor C in (II) eine ganze Funktion $C(h_1)$ von h_1:

(5) $A_1(h_1) \mid J[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv C(h_1) J[(a), (b), \ldots] \equiv C(h_1) J$.

Andererseits gilt nach § 11 (VII′), wenn unter ∇_1 der Prozeß $\sum_i i\, a_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_k k\, b_{k-1} \frac{\partial}{\partial b_k} + \ldots$ verstanden wird, für einen ganz beliebigen Ausdruck J die Entwicklung:

(6) $A_1(h_1) \mid J[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv J + h_1 \nabla_1 J + \frac{h_1^2}{2!} \nabla_1^2 J + \ldots$

Denkt man sich in (5) $C(h_1)$ nach steigenden Potenzen von h_1 geordnet:

(7) $$C(h_1) = C_0 + C_1 h_1 + C_2 \frac{h_1^2}{2!} + \ldots,$$

wo die C_i numerische Faktoren sind, so lehrt die Vergleichung der Koeffizienten von h_1^0, h_1^1, h_1^2, ... der beiden, für alle Werte von h_1 übereinstimmenden rechten Seiten von (5) und (6), daß:

(8) $$C_0 J = J, \quad C_1 J = \nabla_1 J, \quad C_2 J = \nabla_1^2 J, \ldots$$

Aus der ersten dieser Relationen folgt:

(9) $$C_0 = 1,$$

und es bleibt nachzuweisen, daß die übrigen Relationen (8) nur so erfüllt sein können, daß $C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = 0$ wird.

Jetzt wird von der in (4) festgestellten Eigenschaft von J Gebrauch gemacht, bez. x_1 isobar zu sein. Dann war in § 12 S. 212 gezeigt, daß der Ausdruck $\nabla_1 J$ wiederum isobar bez. x_1 ist, nur von einem um eine Einheit größeren Gewichte, und daß das Analoge für den Prozeß $\nabla_2 = \sum_i (n-i)\, a_{i+1} \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_k (p-k)\, b_{k+1} \frac{\partial}{\partial b_k} + \ldots$ gilt, nur daß das Gewicht von $\nabla_2 J$ gegenüber dem von J um eine Einheit gesunken ist.

Diese Schlüsse sind ersichtlich von der ganzzahligen Natur der Exponenten ε, η, ... unabhängig.

Demnach vermehren der Reihe nach in (8) die Prozesse V_1, V_1^2, V_1^3, ... das Gewicht von J bez. x_1 um 1, 2, 3, ... Damit stoßen aber die zweite, dritte, ... der Relationen (8) auf einen Widerspruch, insofern jeweils links und rechts isobare Ausdrücke von ungleichem Gewichte auftreten würden.

Diese Widersprüche sind nur dadurch lösbar, daß die numerischen Faktoren C_1, C_2, ... sämtlich verschwinden.

Der Faktor $C(h_1)$ in (5) reduziert sich also, wenn man noch (9) berücksichtigt, auf die Einheit, d. h. J bleibt gegenüber einer Schiebung $A_1(h_1)$ ungeändert. Da das gleiche wiederum für $A_2(h_2)$ gilt, so ist bewiesen:

Satz I. „Verlangt man von einem, in den Koeffizientenreihen (a), (b), ... der Urformen f, g, ... ganzrationalen Ausdrucke $J[(a), (b), \ldots]$ nur, daß er nach Transformation der f, g, ... durch eine beliebige Substitution S einen lediglich von den Substitutionskoeffizienten abhängenden Faktor C annimmt, so ist dieser Faktor C eine feste natürliche Potenz der Substitutionsdeterminante."

Weiterhin steigt man hinsichtlich der Urformen f, g, ... zu Invarianten auf, die in den (a), (b), ... gebrochen rational sind.

Sind J_1, J_2 zwei ganzrationale Invarianten der f, g, ... mit den Gewichten w_1, w_2, so daß:

$$(10)\quad J_1[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^{w_1} J_1, \quad J_2[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^{w_2} J_2,$$

und bedeuten r_1, r_2 beliebige ganze Zahlen, so folgt aus (10), daß der rationale Ausdruck $J_1^{r_1} / J_2^{r_2}$ wiederum eine Invariante ist, vom Gewichte $r_1 w_1 - r_2 w_2$:

$$(11)\qquad \frac{J_1^{r_1}[(\alpha), (\beta), \ldots]}{J_2^{r_2}[(\alpha), (\beta), \ldots]} \equiv \Delta^{r_1 w_1 - r_2 w_2} \frac{J_1^{r_1}}{J_2^{r_2}}.$$

Soll $J_1^{r_1} / J_2^{r_2}$ im besonderen zu einer absoluten Invariante werden, so muß $r_1 w_1 = r_2 w_2$ sein. Haben also*) w_1, w_2 den größten gemeinsamen Teiler δ, so daß $w_1 = \delta w_1'$, $w_2 = \delta w_2'$, so ist die Gleichheit $r_1 w_1 = r_2 w_2$ nur dadurch erfüllbar, daß $r_1 = k w_2'$, $r_2 = k w_1'$, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

---

*) Vgl. etwa diese Sammlung Bd. VI „Algebra", von O. Pund, § 17.

Somit tritt der fragliche Fall nur ein für eine beliebige natürliche Potenz von $J_1^{w'_2} / J_2^{w'_1}$ oder deren reziproken Wert.

Andererseits lassen sich noch auf ∞^1 Arten zwei ganze Zahlen r_1, r_2 so bestimmen, daß $r_1 w_1 - r_2 w_2$ ein Vielfaches $s\delta$ von δ wird. Dann wird $J_1^{r_1} / J_2^{r_2}$ eine rationale Invariante vom Gewichte $s\delta$.

Etwas schwieriger ist die Beantwortung der umgekehrten Frage.

Sind F_1, F_2 zwei in den (a), (b), ... ganzrationale Ausdrücke und ist F_1 / F_2 eine Invariante der f, g, ...

$$\frac{F_1[(\alpha), (\beta), \ldots]}{F_2[(\alpha), (\beta), \ldots]} = \Delta^w \frac{F_1}{F_2}, \tag{12}$$

wo w eine feste ganze Zahl ist, sind dann auch der Zähler F_1 und der Nenner F_2 für sich Invarianten?

Offenbar darf w als positive ganze Zahl (inkl. 0) angenommen werden, da man andernfalls nur F_1 mit F_2 zu vertauschen hätte. Irgendein Glied von F_1 resp. F_2 sei gemäß (1) von der Gestalt:

$$(1) \quad \begin{cases} T = c\,t \;= c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p} \ldots, \\ T' = c' t' = c' a_0^{\varepsilon'_0} a_1^{\varepsilon'_1} \ldots a_n^{\varepsilon'_n} b_0^{\eta'_0} b_1^{\eta'_1} \ldots b_p^{\eta'_p} \ldots \end{cases}$$

Man übe auf die Variabeln x_1, x_2 in f, g, ... eine Streckung $M_1(m_1)$ von x_1 aus, so daß $\Delta = m_1$ wird. Nach Heraufmultiplikation der Nenner in (12) erhält man die für alle Wertsysteme der (a), (b), ...; m_1 gültige Relation:

$$(13) \quad \begin{cases} \sum\sum c\,c'\,t\,t'\, m_1^{\sum\limits_i (n-i)\varepsilon_i + \sum\limits_k (p-k)\eta_k + \cdots} \\ = \sum\sum c\,c'\,t\,t'\, m_1^{w + \sum\limits_i (n-i)\varepsilon'_i + \sum\limits_k (p-k)\eta'_k + \cdots}. \end{cases}$$

Hier muß jeder der Exponenten links mit jedem der Exponenten rechts übereinstimmen und damit eine konstante natürliche Zahl G_1 sein. Wiederholt man den nämlichen Schluß hinsichtlich einer Streckung $M_2(m_2)$, so hat man die Relationen:

$$
(14)\qquad \begin{cases}
\sum\limits_i (n-i)\,\varepsilon_i + \sum\limits_k (p-k)\,\eta_k + \ldots = w + G_1\,; \\
\sum\limits_i (n-i)\,\varepsilon_i' + \sum\limits_k (p-k)\,\eta_k' + \ldots = G_1\,; \\
\sum\limits_i i\,\varepsilon_i \qquad + \sum\limits_k k\,\eta_k \qquad + \ldots = w + G_2\,; \\
\sum\limits_i i\,\varepsilon_i' \qquad + \sum\limits_k k\,\eta_k' \qquad + \ldots = G_2\,.
\end{cases}
$$

Demnach sind die Ausdrücke F_1, F_2 in (12) je für sich isobar bez. x_1 und x_2 und damit Streckungsinvarianten bez. x_1 und x_2:

$$
(15)\qquad \begin{cases}
M_1(m_1) \;\big|\; F_1[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^{w+G_1} F_1\,, \\
\qquad\qquad\quad F_2[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^{G_1} F_1\,; \\
M_2(m_2) \;\big|\; F_1[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^{w+G_2} F_1\,, \\
\qquad\qquad\quad F_2[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^{G_2} F_2\,.
\end{cases}
$$

Nunmehr werde eine Schiebung $A_1(h_1)$ (mit $\Delta = 1$) vorgenommen. Wendet man die Identität (VII′) des § 11 auf F_1 und F_2 an, so hat man die Entwicklungen:

$$
(16)\qquad \begin{cases}
F_1[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv F_1 + h_1 \nabla_1 F_1 + \dfrac{h_1^2}{2!} \nabla_1^2 F_1 + \ldots & \Big|\; F_2 \\
F_2[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv F_2 + h_1 \nabla_1 F_2 + \dfrac{h_1^2}{2!} \nabla_1^2 F_2 + \ldots & \Big|\; F_1
\end{cases}
$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit F_2, die zweite mit F_1, subtrahiert sodann, und ordnet nach steigenden Potenzen von h_1, so verschwindet mit Rücksicht auf (12) (für $\Delta = 1$) das von h_1 freie Glied, und nach Division mit h_1 verbleibt eine Identität von der Gestalt:

$$
(16\text{a})\qquad F_2 \cdot \nabla_1 F_1 - F_1 \cdot \nabla_1 F_2 + h_1\,[\;] \equiv 0\,,
$$

wo der Faktor von h_1 durch die eckige Klammer angedeutet ist.

Da auch diese Gleichung in h_1 identisch erfüllt sein muß, so verschwindet im besonderen das von h_1 freie Glied; d. h. es ist:

$$
(17)\qquad \frac{\nabla_1 F_1}{\nabla_1 F_2} = \frac{F_1}{F_2}\,.
$$

Nun darf von vornherein bei Bildung der Gleichung (12) angenommen werden*), daß Zähler und Nenner von F_1/F_2 teilerfremde ganze Funktionen der (a), (b), ... sind, so daß F_1 und F_2 selbst, etwa bis auf einen numerischen Faktor, völlig durch ihren Quotienten bestimmt sind. Dann folgt aus (17), daß die beiden Zähler und ebenso die beiden Nenner bis auf ein und dieselbe ganze Funktion der (a), (b), ..., die mit F bezeichnet sei, übereinstimmen müssen:

$$(18)\qquad \nabla_1 F_1 \equiv F F_1\,,\qquad \nabla_1 F_2 \equiv F F_2\,.$$

Nun vermehrt wiederum der Prozeß ∇_1, auf die nach (14) bez. x_1 isobaren Ausdrücke F_1, F_2 angewandt, deren Gewichte G_1, $w + G_1$, je um eine Einheit.

Danach müßte die ganze Funktion F der (a), (b), ... vom Gewichte Eins sein. Andererseits sind F_1, F_2, weil gemäß (14) isobar bez. x_1 und x_2, auch homogen in der Gesamtheit der (a), (b), ... von einer Gesamtdimension d; diese wird aber nach dem Satze (S. 211) des § 12 nach Ausübung des Prozesses ∇_1 nicht geändert. Mithin wäre F homogen von der Dimension Null und zugleich vom Gewichte Eins (bez. x_1), was nur so möglich ist, daß F identisch verschwindet. Damit verschwinden aber auch $\nabla_1 F_1$ und $\nabla_1 F_2$, also bleiben nach dem Satze (II) des § 11 F_1 und F_2 gegenüber einer Schiebung $A_1(h_1)$ ungeändert.

Noch einfacher gestaltet sich der Schluß bei einer Schiebung $A_2(h_2)$. Dann treten an die Stelle von (18) zwei analoge Gleichungen, indem nur ∇_1 mit ∇_2 zu vertauschen ist, während der Buchstabe F beibehalten werde.

Der Prozeß ∇_2, angewandt auf F_1 und F_2, vermindert nach Satz (S. 212) des § 12 das Gewicht G_2 resp. $w + G_2$ der bez. x_2 isobaren Ausdrücke F_1, F_2 um je eine Einheit; es wäre also die ganze Funktion F der (a), (b), ... vom Gewichte -1, was wiederum nur so möglich ist, daß F identisch verschwindet. Da demnach F_1 ebenso wie F_2 eine (vollständige) Invariante der Urformen ist, müssen auch die beiden Exponenten G_1 und G_2 in (15) übereinstimmen: $G_1 = G_2 = G$, und man hat, gegenüber einer beliebigen Substitution S:

$$(15)\quad F_1[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^{w+G} F_1\,,\ F_2[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^{G} F_2\,.$$

*) Vgl. O. Pund, l. c., § 62.

Damit ist das wichtige Ergebnis gewonnen:

Satz II. „Ist eine rationale Funktion F_1/F_2 der Koeffizientenreihen (a), (b), ... von Urformen $f, g, \ldots$, wo F_1 und F_2 als teilerfremd angenommen werden dürfen, relativ invariant gegenüber einer beliebigen Substitution S der Variabeln x_1, x_2, so gilt dasselbe nach Maßgabe von (15) einzeln von Zähler F_1 und Nenner F_2 der rationalen Funktion.“

Der Begriff der rationalen Invariante (und damit auch Kovariante) wird erweitert zu dem der „irrationalen“ oder „algebraischen“ Invariante (Kovariante); J ist eine solche, wenn sie einer algebraischen Gleichung genügt, deren Koeffizienten ganzrationale Invarianten (Kovarianten) sind. Weiter gelangt man zum Begriff der „analytischen“ oder „transzendenten“ Invariante (Kovariante) J, d. i. einer (in einem gewissen Bereiche) eindeutigen analytischen Funktion der Koeffizienten gegebener Urformen (und ev. der Variabeln), die der Invarianten- (Kovarianten)Definition (I) genügt.

Nimmt man von einer solchen transzendenten Invariante J an, daß sie sich, wenn die Koeffizienten der Urformen ganzrationale Funktionen eines Parameters p sind, in eine Taylorsche Reihe nach steigenden natürlichen Potenzen von p entwickeln läßt, die innerhalb eines gewissen Bereiches konvergiert, und existieren auch die ersten partiellen Abteilungen von J nach den Koeffizienten der Urformen als eindeutige analytische Funktionen derselben, so gelten die Schlüsse des § 11, und J genügt den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

(IIa) $\quad \nabla_1 J \equiv 0\,, \qquad\qquad$ (IIb) $\quad \nabla_2 J \equiv 0\,.$

Gilt die eben bemerkte Eigenschaft auch für die höheren partiellen Abteilungen von J bis zu einer beliebigen Ordnung, so sind die Gleichungen (IIa), (IIb) auch hinreichend dafür, daß J eine Schiebungsinvariante bez. x_1 resp. x_2 ist.

Das Entsprechende gilt für eine transzendente Kovariante $K(x_1, x_2)$. Man setze überdies voraus, daß K hinsichtlich der x_1, x_2 homogen von einer endlichen (im übrigen beliebigen) Dimension d_x sei, so daß für m, als einen variierenden Parameter, die Identität erfüllt sei:

$$K(m x_1, m x_2) \equiv m^{d_x} K(x_1, x_2)\,. \tag{19}$$

Die Differentiation nach m liefert:

$$\frac{\partial K}{\partial (m x_1)} x_1 + \frac{\partial K}{\partial (m x_2)} x_2 \equiv d_x m^{d_x - 1} K ,$$

und damit für $m = 1$ die „Eulersche Identität“:

$$x_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} \equiv d_x K . \tag{20}$$

Die Differentialgleichungen (IIa), (IIb) erweitern sich, wie in § 13, (IIa), (IIb), für die in Rede stehenden transzendenten Kovarianten K zu:

$$\nabla_1 K(x_1, x_2) - x_2 \frac{\partial K(x_1, x_2)}{\partial x_1} \equiv 0 , \tag{IIIa}$$

$$\nabla_2 K(x_1, x_2) - x_1 \frac{\partial K(x_1, x_2)}{\partial x_2} \equiv 0 . \tag{IIIb}$$

Für Anwendungen ist es oft wesentlich, die Gleichungen (IIIa), (IIIb) in nichthomogener Gestalt zu besitzen [vgl. § 19, (18)]. Bezeichnet $K'(x)$ die Ableitung von $K(x) \equiv K(x, 1)$ nach x, so nimmt (IIIa) unmittelbar die Gestalt an:

$$\nabla_1 K(x) - K'(x) = 0 . \tag{IVa}$$

Behufs Umformung von (IIIb) ziehe man die Eulersche Identität (20) heran. Multipliziert man dieselbe mit $x_1 = x$, und setzt überall $x_1 = x$, $x_2 = 1$, so ergibt sich:

$$x \left(\frac{\partial K}{\partial x_2} \right)_{(x_2 = 1,\ x_1 = x)} \equiv x^2 K'(x) - d_x x K(x) . \tag{20'}$$

Dadurch ergibt sich für die nichthomogene Gestalt von (IIIb):

$$\nabla_2 K(x) \equiv d_x x K(x) - x^2 K'(x) . \tag{IVb}$$

Nach Voraussetzung sei $K(x)$ in eine in einem gewissen Bereiche konvergente Potenzreihe entwickelbar:

$$K(x) \equiv D_0 + D_1 \frac{x}{1!} + D_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + D_i \frac{x^i}{i!} + \cdots \tag{21}$$

Übt man auf die rechte Seite von (21) die beiden in (IVa) auftretenden Differentiationsprozesse $\nabla_1 K(x)$ und $K'(x)$ aus und vergleicht die Koeffizienten gleich hoher

Potenzen von x, so gelangt man, wie in § 13, (IIIa), zu der Rekursionsformel für die D_i:

(Va)
$$\nabla_1 D_i \equiv D_{i+1}\,,$$

die sich auch ersetzen läßt durch:

(Va′)
$$D_i \equiv \nabla_1^i D_0\,.$$

Auf Grund von (Va′) geht die Reihe (21) für $K(x)$, da $D_0 = K(0)$, über in die folgende:

(VI)
$$\begin{cases} K(x) \equiv K(0) + \dfrac{x}{1!}\nabla_1 K(0) + \dfrac{x^2}{2!}\nabla_1^2 K(0) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{x^i}{i!}\nabla_1^i K(0) + \ldots \end{cases}$$

Man beachte wiederum, wie in § 13, (Va′), die formale Ähnlichkeit mit der Maclaurinschen Entwicklung:

(VI′)
$$\begin{cases} K(x) \equiv K(0) + \dfrac{x}{1!}K'(0) + \dfrac{x^2}{2!}K''(0) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{x^i}{i!}K^{(i)}(0) + \ldots \end{cases}$$

Hier ist aber erst nach jeweils erfolgter Differentiation von K $x = 0$ zu setzen; gerade dieser Umstand erheischt aber zumeist eine umständliche und dabei überflüssige Rechnung, die die praktische Brauchbarkeit von (VI′) leicht illusorisch machen kann. Demgegenüber ist für Kovarianten $K(x)$ die invariantentheoretische Entwicklung (VI) als eine wesentlich einfachere anzusehen [vgl. § 19, (18)].

Nunmehr ziehe man auch die Differentialgleichung (IVb) heran. Man erhält:

$$\nabla_2 K(x) \equiv \nabla_2 D_0 + \frac{x}{1!}\nabla_2 D_1 + \frac{x^2}{2!}\nabla_2 D_2 + \ldots$$
$$+ \frac{x^i}{i!}\nabla_2 D_i + \ldots,$$

$$x\,d_x K(x) - x^2 K'(x) \equiv x\,d_x D_0 + \frac{x^2}{1!}D_1(d_x - 1) + \ldots$$
$$+ \frac{x^i}{(i-1)!}D_{i-1}\{d_x - (i-1)\} + \ldots,$$

und hieraus durch Koeffizientenvergleichung einmal $\nabla_2 D_0 = 0$, sodann eine zweite Rekursionsformel für die D_i:

$$\text{(Vb)} \qquad \nabla_2 D_{i+1} \equiv (i+1)(d_x - i) D_i \,,$$

die bei praktischer Berechnung der D_i als Kontrolle für (Va) dient. Die Vergleichung von (Va) und (Vb) lehrt noch das Bestehen der Relation zwischen den beiden Prozessen ∇_1 und ∇_2, in ihrer Anwendung auf die D:

$$\text{(V)} \qquad \nabla_2 D_{i+1} \equiv (i+1)(d_x - i) \nabla_1 D_{i-1} \,.$$

Wir fassen die letzten Ergebnisse zusammen:

Satz III. „Eine transzendente Kovariante $K(x_1, x_2)$ genügt den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (IIIa), (IIIb), die, falls $K(x_1, x_2)$ in den x_1, x_2 von einer endlichen Dimension ist, auch die nichthomogene Gestalt (IVa), (IVb) zulassen; läßt sich ferner $K(x, 1) = K(x)$ in eine Potenzreihe nach x entwickeln, so unterliegen deren Koeffizienten den beiden Rekursionsformeln (Va), (Vb)."

Zum Schlusse sei kurz auf die grundlegende Rolle hingewiesen, die der Begriff der Invariante in der höheren Arithmetik spielt. Hier sind die Koeffizienten α, β, γ, δ der anzuwendenden linearen Substitution S:

$$\text{(22)} \qquad x_1 = \alpha\,\xi_1 + \beta\,\xi_2 \,, \qquad x_2 = \gamma\,\xi_1 + \delta\,\xi_2$$
$$(\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma) \,,$$

zumeist nach arithmetischen Gesichtspunkten definiert, z. B. so, daß die α, β, γ, δ beliebige ganze Zahlen von der Determinante 1 sind oder auch der Einheit kongruent nach einer festen ganzen Zahl als Modul: die S wird dann als ganzzahlige unimodulare resp. als ganzzahlige Kongruenzsubstitution bezeichnet; in beiden Fällen bildet die Gesamtheit der S eine Gruppe, die je entsprechend bezeichnet wird.

Das hat zur Folge, daß die Mannigfaltigkeit der als variierend gedachten Parameter α, β, γ, δ zumeist eine „diskret-unendliche" („diskontinuierliche") ist, während in den bisherigen Entwicklungen des Textes gerade die Stetigkeit der Parameter als ein Hauptbeweismoment diente.

Die Theorie der „arithmetischen" Invarianten erhält damit einen ganz spezifischen Charakter.

Als Beleg diene etwa die lineare Grundform $f \equiv f_1 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2$. Bei beliebig gedachten Koeffizienten a_1, a_2 besitzt f nach § 10 keine „algebraische" Invariante. Sind aber die a_1, a_2 ganze Zahlen, und werden die x_1, x_2 in f einer ganzzahligen unimodularen Substitution S (22) unterworfen, so existiert eine unbegrenzte Mannigfaltigkeit arithmetischer Invarianten $\Phi(a_1, a_2)$, so daß:

(VII) $$\Phi(a_1 \alpha + a_2 \gamma\,,\; a_1 \beta + a_2 \delta) \equiv \Phi(a_1, a_2)$$

wird. Man erhält u. a. eine unbegrenzte Reihe solcher Invarianten durch die Doppelreihe:

(VIII) $$\Phi_k \equiv \sum \frac{1}{(a_1 n_1 + a_2 n_2)^k},$$

wo n_1, n_2 alle ganzen Zahlen (exkl. die Kombination $0, 0$) durchlaufen und k ein willkürlicher Parameter ist; es läßt sich beweisen, daß für $k > 2$ die Reihe (VIII) konvergiert und eine eindeutige Funktion der a_1, a_2 darstellt. Diese arithmetischen Invarianten Φ_k beherrschen die moderne Theorie der elliptischen Funktionen*).

Aufgabe 1. Das Dv. der vier Wurzeln einer biquadratischen Form $f_4 = a_0 + a_1 x + \ldots + a_4 x^4$ ist eine irrationale Invariante der f_4; es ist die in den Koeffizienten a_i der f_4 rationale Gleichung 6. Grades aufzustellen, der das Dv. genügt.

Aufgabe 2. Teilt man die vier Wurzeln der f_4 in zwei Paare, so ist das zu diesen zugleich harmonische Paar nach § 3 durch die Funktionaldeterminante θ der bezüglichen quadratischen Formen dargestellt. θ ist eine irrationale Kovariante der f_4 und genügt einer in den Koeffizienten a_i der f_4 rationalen kubischen Gleichung, die zu bilden ist.

Aufgabe 3. Das elliptische Integral 1. Gattung $J(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}} = \int \frac{x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2}{\sqrt{f_4(x_1, x_2)}}$ ist nach F. Klein, Math. Ann. 14 (1879), S. 112, eine transzendente Kovariante der f_4, in den a_i von der Dimension $-\frac{1}{2}$ und vom Gewichte -1, in x_1, x_2 von der Dimension Null (vgl. § 19).

*) Vgl. z. B. H. Poincaré, Journ. für Math. 129 (1905), S. 89.

§ 19. Über eine gewisse Klasse transzendenter Kovarianten.

Als fruchtbare Anwendung des vorigen (§ 18) behandeln wir zunächst die in der Darstellung des endlichen Produktes von der Gestalt:

$$\text{(I)}\qquad F(x_1, x_2) \equiv f_n^{\mu}(x_1, x_2)\, g_p^{\nu}(x_1, x_2)\, h_q^{\pi}(x_1, x_2) \ldots$$

enthaltenen Kovarianten der Urformen f_n, g_p, h_q, ..., von den Ordnungen n, p, q, ..., wo μ, ν, π, ... irgendwelche gegebene (reelle oder komplexe) Exponenten seien.

Daß F eine Kovariante der f, g, h, ... ist, geht aus der Definition einer solchen (§§ 13, 18) hervor. Denn führt man vermöge einer beliebigen Substitution S der x_1, x_2 in neue Variable ξ_1, ξ_2 die Formen f, g, h, ... über in φ, ψ, χ, ..., und bezeichnet wiederum mit (a), (b), (c), ... die Koeffizientenreihen von f, g, h, ..., mit (α), (β), (γ), ... die der transformierten Formen φ, ψ, χ, ..., und ist Φ die in den neuen Variabeln und Koeffizienten gebildete Form F, so ist identisch:

$$\text{(II)}\quad \Phi[\xi_1, \xi_2; (\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots] \equiv F[x_1, x_2; (a), (b), (c), \ldots],$$

d. h. F ist eine Kovariante der f, g, h, ... vom Gewichte Null (absolute Kovariante). Andererseits ist F, wie aus (I) hervorgeht, in den x_1, x_2 homogen von der Dimension (Ordnung) d_x wo:

$$\text{(1)}\qquad d_x = n\mu + p\nu + q\pi + \ldots,$$

und in den Koeffizientenreihen der (a), (b), (c), ... einzeln homogen von den resp. Dimensionen μ, ν, π, ...

Es soll die Funktion F (I) auf Grund ihrer Kovarianteneigenschaft (II) in eine Potenzreihe entwickelt werden.

Zu dem Behuf bediene man sich der nichthomogenen Schreibweise $x_1 = x$, $x_2 = 1$ und setze zugleich die Koeffizienten in den f, g, h, ..., entgegen der bisherigen Bezeichnung, ohne Binomialkoeffizienten und in umgekehrter Reihenfolge der Indizes an:

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} f_n(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \\ g_p(x) \equiv b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p, \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Es wird sich zeigen, daß gerade diese Bezeichnungsweise für das Folgende die zweckmäßigste ist.

Man denke sich $F(x)$ in die Maclaurinsche Reihe*) entwickelt:

$$\text{(III)} \qquad F(x) \equiv D_0 + D_1 \frac{x}{1!} + D_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + D_i \frac{x^i}{i!} + \ldots$$

Um das Gesetz der Koeffizienten D auf Grund von (II) zu ermitteln, wird es genügen, die Betrachtung von zwei Urformen als Muster zu nehmen; der Beweis ist so durchsichtig, daß er sich ohne weiteres auf die Fälle von mehr als zwei Urformen ausdehnen läßt. Man hat zuvörderst:

$$(3) \qquad D_0 \, a_0^{-\mu} \, b_0^{-\nu} = 1 = Z_0 \, .$$

Allgemein setze man:

$$\text{(IV)} \qquad D_i \, a_0^{i-\mu} \, b_0^{i-\nu} = Z_i \, ,$$

und überzeuge sich davon, daß Z_i in den (a), (b) ganzrational ist, je in den (a) und (b) homogen von der Dimension i und in beiden Koeffizientenreihen zusammen isobar vom Gewichte i.

Mit andern Worten, es soll gezeigt werden, daß für irgendein in Z_i auftretendes Potenzprodukt P:

$$(4) \qquad P = a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} \, b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p}$$

die Exponenten ε, η natürliche Zahlen (inkl. 0, nur daß nicht alle zugleich verschwinden) sind, die den drei Relationen genügen:

$$\text{(5a)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \equiv \sum\limits_i \varepsilon_i = i \, , \\ \eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_p \equiv \sum\limits_k \eta_k = i \, , \end{cases}$$

$$\text{(5b)} \begin{cases} 1 \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2 + \ldots + n \, \varepsilon_n + 1 \cdot \eta_1 + 2 \cdot \eta_2 + \ldots + p \, \eta_p \\ \qquad \equiv \sum\limits_r r \, \varepsilon_r + \sum\limits_s s \, \eta_s = i \, . \end{cases}$$

---

*) Bei beliebigen, komplexen Koeffizienten a_i, b_k, ..., Exponenten μ, ν, ... und der Variabeln x konvergiert die Reihe (III) jedenfalls innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, der durch die nächstgelegene Wurzel von $f(x) \cdot g(x) \cdot \ldots$ hindurchgeht. Die Funktion $F(x)$ wird im allgemeinen unendlich vieldeutig sein; man greife indessen unter den unendlich vielen Zweigen von $F(x)$ einen solchen heraus, der zu einem beliebig, aber fest gewählten Werte von D_0 (3) gehört.

Da $F(x)$ eine simultane Kovariante von $f(x)$ und $g(x)$ ist, also im besonderen gegenüber irgendeiner Schiebung von x:

$$x = z + k \tag{6}$$

ungeändert bleibt, so genügt nach § 18 (IVa) $F(x)$ der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\nabla F(x) \equiv F'(x)\,, \tag{V}$$

wo ∇ (früher mit ∇_1 bezeichnet) der Prozeß ist:

$$\nabla \equiv \sum_{i=1}^{n} i\, a_i \frac{\partial}{\partial a_{i-1}} + \sum_{k=1}^{p} k\, b_k \frac{\partial}{\partial b_{k-1}}\,. \tag{VI}$$

Die Identität (V) erweist sich als gleichwertig mit der Rekursionsformel [§ 18 (Va)]:

$$\nabla D_i \equiv D_{i+1}\,. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{VII}$$

Die Funktion Z_i in der Relation (IV) genüge den oben angegebenen Eigenschaften bis zu einem Index i; für $i = 0$ sind sie offenbar erfüllt.

Man unterwerfe beide Seiten von (IV) dem Prozesse ∇, so kommt zunächst, auf Grund von (VII):

$$D_{i+1}\, a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu} + D_i \nabla (a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu}) \equiv \nabla Z_i\,. \tag{7}$$

Hier ist:

$$\begin{aligned}\nabla (a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu}) &= \left(a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial b_0}\right)(a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu}) \\ &= a_0^{i-\mu-1} b_0^{i-\nu-1} [(i-\nu)\, a_0 b_1 + (i-\mu)\, b_0 a_1]\,.\end{aligned}$$

Multipliziert man demnach (7) mit $a_0 b_0$, und führt gemäß der Festsetzung (IV) an Stelle der D_i, D_{i+1} die Z_i, Z_{i+1} ein, so entsteht für letztere die Rekursionsformel:

$$Z_{i+1} = [(\mu - i)\, b_0 a_1 + (\nu - i)\, a_0 b_1]\, Z_i + a_0 b_0 \nabla Z_i\,. \tag{VIII}$$

Jeder der beiden Prozesse $(\mu - i)\, b_0 a_1 + (\nu - i)\, a_0 b_1$, $a_0 b_0 \nabla$ (letzterer nach § 12, S. 211, 212) erhöht sowohl die Dimension irgendeines in Z_i auftretenden Potenzproduktes je in den (a) und (b), wie auch dessen Gesamtgewicht in den (a) und (b), um eine Einheit. Damit sind die Dimensions- und Gewichtseigenschaften (5a), (5b) der Form Z_i in (IV) allgemein bewiesen.

Für mehr als zwei Urformen f_n, g_p, h_q, ... mit den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... erleidet die Formel (VIII) nur die ersichtliche Modifikation:

$$\text{(VIII')} \begin{cases} Z_{i+1} = [(\mu - i)\, a_1\, b_0\, c_0 \ldots + (\nu - i)\, b_1\, a_0\, c_0 \ldots \\ \qquad + (\pi - i)\, c_1\, a_0\, b_0\, d_0 \ldots + \ldots]\, Z_i \\ \qquad + a_0\, b_0\, c_0 \ldots \nabla Z_i\,. \end{cases}$$

Indessen lassen sich die Eigenschaften des Ausdruckes Z_i in (IV) auch direkt, ohne Zuhilfenahme des Prozesses ∇, erkennen.

Die Maclaurinsche Entwicklung (III) von $F(x)$ lehrt, daß die rechte Seite Z_i von (IV) jedenfalls in den (a) und (b) ganzrational und je homogen ist. Die Dimension irgendeines Koeffizienten D_i in (III) in den (a) und (b) muß stets dieselbe sein, wie in F selber, also μ resp. ν; mithin wird die Dimension von Z_i wegen des Faktors $a_0^{i-\mu}\, b_0^{i-\nu}$ von D_i in (IV) je in den (a) und (b) gleich i.

Daß das Gewicht von Z_i, und damit auch von D_i, zusammen in den (a) und (b) gleich i wird, folgt wiederum aus der Invarianz (II) von $F(x)$. Denn unterwirft man die Variable x einer Streckung:

$$(8) \qquad x = m\, z\,,$$

wodurch $f(x)$, $g(x)$ in die neuen Formen $\varphi(z)$, $\psi(z)$ mit den Koeffizientenreihen (α), (β) übergehen mögen, $F(x)$ in $\Phi(z)$, so bleibt $F(x)$ gemäß (II) absolut ungeändert:

$$(9) \qquad \Phi(z) \equiv F(x)\,.$$

Es ist aber:

$$(10) \qquad \alpha_i = m^i\, a_i\,, \quad \beta_k = m^k\, b_k\,.$$
$$(i = 0,\, 1,\, \ldots n;\; k = 0,\, 1,\, \ldots p)$$

Bildet man demnach die in die Reihe (III) entwickelt gedachte Funktion $F(x)$ für die neue Variable z und die neuen Koeffizienten (α), (β), und drückt diese mittels (8), (10) wieder durch die ursprünglichen Größen x resp. (a), (b) aus, so erscheint irgendein — gemäß (IV) noch mit dem Faktor $a_0^{\mu-i}\, b_0^{\nu-i}$ behaftetes — Potenzprodukt P (4) in D_i (III) multipliziert mit einer Potenz von m, deren Exponent den Wert hat: $1\,\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2 + \ldots + n\,\varepsilon_n + 1\,\eta_1 + 2\,\eta_2$

$+ \ldots + p\,\eta_p - i$. Dieser Exponent muß aber infolge der Identität (9) stets verschwinden, und das sagt eben die Gewichtsrelation (5b) aus.

Rechnet man für die niedrigsten Werte des Index i in Z_i die numerischen Faktoren der daselbst auftretenden Potenzprodukte P (4) aus und achtet andererseits auf die Struktur der Rekursionsformel (VIII), so gewinnt man für den Koeffizienten

$$\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \eta_0 \eta_1 \ldots \eta_p} \quad \text{von} \quad a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p}$$

in Z_i den Ansatz:

$$\text{(IX)} \left\{ \begin{aligned} \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \eta_0 \eta_1 \ldots \eta_p} = i!\, & \frac{\mu(\mu-1)\ldots\{\mu-(i-\varepsilon_0-1)\}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!} \\ & \cdot \frac{\nu(\nu-1)\ldots\{\nu-(i-\eta_0-1)\}}{\eta_1!\,\eta_2!\ldots\eta_p!}, \end{aligned} \right.$$

wo die Exponenten ε, η alle natürlichen Zahlen (inkl. 0) durchlaufen, die den drei linearen diophantischen Gleichungen (5) genügen.

So erhält man z. B. für Z_2:

$$\begin{aligned} Z_2 = {} & 2\,\mu\,\nu\,a_0\,a_1\,b_0\,b_1 + 2\,\mu\,a_0\,a_2\,b_0^2 + 2\,\nu\,b_0\,b_2\,a_0^2 \\ & + \mu(\mu-1)\,a_1^2\,b_0^2 + \nu(\nu-1)\,a_0^2\,b_1^2\,. \end{aligned}$$

Um den Beweis der Formel (IX) von i auf $i+1$ zu führen, greife man irgendein Glied aus Z_{i+1} heraus: $\mathsf{A}^{(i+1)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \eta_0 \eta_1 \ldots \eta_p} \cdot a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p}$, wo also jetzt in den Relationen (5) für die ε, η der Index i durch $i+1$ zu ersetzen ist.

Jeder der auf der rechten Seite von (VIII) auftretenden Teilprozesse führt irgendein Potenzprodukt von Z_i jeweils in ein gewisses Potenzprodukt von Z_{i+1} über. Umgekehrt verdankt das vorgelegte Glied in Z_{i+1} seine Entstehung den folgenden Potenzprodukten in Z_i, deren jedes mittels seines numerischen Koeffizienten zu dem gesuchten Koeffizienten $\mathsf{A}^{(i+1)}$ einen gewissen Einzelbeitrag liefert:

$$\text{(a)} \qquad a_0^{\varepsilon_0 - 1} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1 - 1} b_2^{\eta_2} \ldots b_p^{\eta_p}\,,$$

vermöge des Teilprozesses $(\nu - i)\,a_0\,b_1 + b_1 \frac{\partial}{\partial b_0} \cdot a_0\,b_0$, mit dem Teilbeitrage:

$$(\nu - i + \eta_0)\,\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0-1,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\eta_0,\eta_1-1,\ldots\eta_p}. \tag{11a}$$

Diesem Gliede (a) geht parallel das andere:

$$a_0^{\varepsilon_0}\,a_1^{\varepsilon_1-1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}\,b_0^{\eta_0-1}\,b_1^{\eta_1}\ldots b_p^{\eta_p}, \tag{a$'$}$$

das vermöge $(\mu - i)\,b_0\,a_1 + a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} \cdot a_0\,b_0$ den Beitrag beisteuert:

$$(\mu - i + \varepsilon_0)\,\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0\varepsilon_1-1,\ldots\varepsilon_n\eta_0-1\,\eta_1,\ldots\eta_p}. \tag{11a$'$}$$

Sodann ergeben die beiden folgenden Potenzprodukte in Z_i:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0^{\varepsilon_0-1}\,a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}\,b_0^{\eta_0-1}\,b_1^{\eta_1+1}\,b_2^{\eta_2-1}\ldots b_p^{\eta_p}, \\ a_0^{\varepsilon_0-1}\,a_1^{\varepsilon_1+1}\,a_2^{\varepsilon_2-1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}\,b_0^{\eta_0-1}\,b_1^{\eta_1}\ldots b_p^{\eta_p} \end{array}\right. \tag{b}$$

vermöge $2\,b_2 \frac{\partial}{\partial b_1} \cdot a_0\,b_0$ resp. $2\,a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} \cdot a_0\,b_0$ die Beiträge:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 2\,(\eta_1 + 1)\,\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0-1,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\eta_0-1,\eta_1+1,\eta_2-1,\ldots\eta_p} \\ \underline{+ 2\,(\varepsilon_1 + 1)\,\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0-1,\varepsilon_1+1,\varepsilon_2-1,\ldots\varepsilon_n\eta_0-1,\eta_1\ldots\eta_p}}. \end{array}\right. \tag{11b}$$

Geht man so weiter, so erscheinen an $(k+1)$ter Stelle die beiden Potenzprodukte:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0^{\varepsilon_0-1}\,a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}\,b_0^{\eta_0-1}\,b_1^{\eta_1}\ldots b_k^{\eta_k+1}\,b_{k+1}^{\eta_{k+1}-1}\,b_{k+2}^{\eta_{k+2}}\ldots b_p^{\eta_p}, \\ a_0^{\varepsilon_0-1}\,a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_k^{\varepsilon_k+1}\,a_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}-1}\,a_{k+2}^{\varepsilon_{k+2}}\ldots a_n^{\varepsilon_n}\,b_0^{\eta_0-1}\,b_1^{\eta_1}\ldots b_p^{\eta_p}, \end{array}\right. \tag{$k+1$}$$

denen vermöge $(k+1)\cdot\left(b_{k+1}\frac{\partial}{\partial b_k} + a_{k+1}\frac{\partial}{\partial a_k}\right)a_0\,b_0$ die Beiträge entstammen:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad (k+1)\,(\eta_k+1)\,\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0-1,\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\,\eta_0-1,\,\eta_1\ldots\eta_k+1,\,\eta_{k+1}-1,\,\eta_{k+2}\ldots\eta_p} \\ + (k+1)\,(\varepsilon_k+1)\,\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0-1,\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k+1,\,\varepsilon_{k+1}-1,\,\varepsilon_{k+2}\ldots\varepsilon_n\,\eta_0-1,\,\eta_1\ldots\eta_p}. \end{array}\right. \tag{$11^{(k+1)}$}$$

Jede dieser beiden Serien von Beiträgen ist fortzusetzen, bis sie mit $k = p$ resp. $k = n$ von selbst abbricht.

Addiert man diese sämtlichen Einzelbeträge, indem man auf Grund der für den Index i als richtig angenommenen Formel (IX) für die einzelnen $\mathsf{A}^{(i)}$ ihre Werte einsetzt, so gelangt man zum numerischen Koeffizienten $A^{(i+1)}_{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\eta_0\eta_1\ldots\eta_p}$ des Potenzproduktes $a_0^{\varepsilon_0}a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}b_0^{\eta_0}b_1^{\eta_1}\ldots b_p^{\eta_p}$ in Z_{i+1}. Bringt man sämtliche Ausdrücke (11) auf den gemeinsamen Nenner $\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!\,\eta_1!\,\eta_2!\ldots\eta_p!$, so läßt sich bei der Zusammenfassung als gemeinsamer Faktor einmal das Produkt abspalten:

$$(12)\qquad i!\,\frac{\mu(\mu-1)\ldots\{\mu-(i-\varepsilon_0)\}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!}\cdot\frac{\nu(\nu-1)\ldots\{\nu-(i-\eta_0)\}}{\eta_1!\,\eta_2!\ldots\eta_p!},$$

während als weiterer Faktor das Aggregat auftritt:

$$1\cdot\varepsilon_1+2\,\varepsilon_2+\ldots n\,\varepsilon_n+1\cdot\eta_1+2\,\eta_2+\ldots+p\,\eta_p,$$

das gemäß (5b) (für den Index $i+1$) den Wert $i+1$ besitzt.

Damit geht der erste Faktor $i!$ in (12) über in $(i+1)!$, und hierdurch der Ausdruck (12) gerade in die für den Index $i+1$ gebildete rechte Seite von (IX). Damit ist aber die allgemeine Gültigkeit der Formel (IX) erwiesen. Ersichtlich ist die Formel (IX) durch Erweiterung des Beweises auf den Fall einer beliebigen (endlichen) Anzahl von Urformen $f, g, h, \ldots$ ausdehnbar.

Nach zwei Richtungen hin gestattet (IX) eine übersichtlichere Gestaltung. Erweitert man den Bruch

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots\{\mu-(i-\varepsilon_0-1)\}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!}$$

mit $(i-\varepsilon_0)!$, so zerfällt er in das Produkt des $(i-\varepsilon_0)$ten Binomialkoeffizienten von μ, $\binom{\mu}{i-\varepsilon_0}$, in den Bruch $\frac{(i-\varepsilon_0)!}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!}$: der letztere aber ist, da sich gemäß (5a) $i-\varepsilon_0$ aus den Summanden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ zusammensetzt, der dieser Zerlegung entsprechende „Polynomialkoeffizient“ $\binom{i-\varepsilon_0}{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n}$, d. i. der numerische Koeffizient des Potenzproduktes $a_0^{\varepsilon_0}a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}$ in der Entwicklung von

$$(a_0+a_1+\ldots+a_n)^{i-\varepsilon_0}.$$

Verfährt man analog mit den weiteren auf die Urformen $g, h, \ldots$ bezüglichen Brüchen $\dfrac{\nu(\nu-1)\ldots\{\nu-(i-\eta_0-1)\}}{\eta_1!\,\eta_2!\ldots\eta_p!}$ usf., so nimmt (IX) die Gestalt an*):

$$\text{(IXa)}\left\{\begin{aligned}&\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\,\eta_0\,\eta_1\ldots\eta_p\,\zeta_0\,\zeta_1\ldots\zeta_q\ldots}\\&=i!\binom{\mu}{i-\varepsilon_0}\binom{\nu}{i-\eta_0}\binom{\pi}{i-\zeta_0}\cdots\binom{i-\varepsilon_0}{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\binom{i-\eta_0}{\eta_1,\ldots,\eta_p}\binom{i-\zeta_0}{\zeta_1,\ldots,\zeta_q}\cdots\end{aligned}\right.$$

Übrigens hebt sich der Faktor $i!$ bei Einsetzung von (IXa) in die Reihe (III) wieder heraus.

Andererseits empfiehlt es sich, die Urformen $f, g, h, \ldots$ (2) auch in den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... nichthomogen zu schreiben, indem man die nach Voraussetzung von Null verschiedenen ersten Koeffizienten a_0, b_0, c_0, ... gleich 1 setzt.

Da die Dimensionen μ, ν, π, ... von D_i in den (a), (b), (c), ... bekannt sind, kann man jederzeit von dieser nichthomogenen Schreibweise in (III) zur homogenen zurückkehren.

Für $a_0 = b_0 = c_0 = \ldots = 1$ fällt nach (IV) D_i mit Z_i zusammen, die Exponenten ε_0, η_0, ζ_0, ... werden entbehrlich, die Differenzen $i-\varepsilon_0$, $i-\eta_0$, $i-\zeta_0$, ... lassen sich nach (5a) ersetzen durch die Summen

$$\text{(13)}\qquad \sigma_\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n\,,\quad \sigma_\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_p\,,\quad \ldots$$

Damit werden die Dimensionsrelationen (5a) überflüssig, und es bleibt nur noch die Gewichtsrelation (5b) zu berücksichtigen; (IXa) nimmt die Gestalt an:

$$\text{(IXb)}\quad \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\,\eta_1\ldots\eta_p\ldots} = i!\binom{\mu}{\sigma_\varepsilon}\binom{\nu}{\sigma_\eta}\cdots\binom{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\binom{\sigma_\eta}{\eta_1,\ldots,\eta_p}\cdots$$

Durch Einsetzen von (IXa) resp. (IXb) in (III) gewinnt man für $F(x)$ die Darstellungen:

*) Im Falle einer einzigen Urform $f(x)$ führt die Darstellung (IXa) zu der (verallgemeinerten) polynomischen Reihe für f^μ; umgekehrt liefert die Ausführung der Multiplikation der einzelnen polynomischen Reihen für f^μ, g^ν, ... formal die allgemeine Darstellung (IXa), nur daß auf diesem Wege die Aufstellung der Konvergenzbedingung Schwierigkeiten bereitet.

$$\text{(III a)}\left\{\begin{aligned} &F(x) \equiv f_n^\mu(x)\, g_p^\nu(x)\, h_q^\pi(x) \ldots \\ &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon,\eta,\zeta,\ldots} x^i a_0^{\mu-(i-\varepsilon_0)} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} b_0^{\nu-(i-\eta_0)} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p} \ldots \\ &\cdot \binom{\mu}{i-\varepsilon_0}\binom{\nu}{i-\eta_0} \cdots \binom{i-\varepsilon_0}{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\binom{i-\eta_0}{\eta_1,\ldots,\eta_p} \ldots, \end{aligned}\right.$$

resp. für $a_0 = b_0 = c_0 = \ldots = 1$:

$$\text{(III b)}\left\{\begin{aligned} &F(x) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon,\eta,\zeta,\ldots} x^i a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p} \ldots \\ &\cdot \binom{\mu}{\sigma_\varepsilon}\binom{\nu}{\sigma_\eta} \cdots \binom{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\binom{\sigma_\eta}{\eta_1,\ldots,\eta_p} \ldots, \end{aligned}\right.$$

wo im ersteren Falle die Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$; $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_p$; ... den Dimensions- und Gewichtsbedingungen (5a), (5b) unterliegen, im letzteren Falle die Exponenten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$; $\eta_1, \ldots, \eta_p$; ... nur der Gewichtsbedingung (5b).

Eine Hauptanwendung gestatten die Darstellungsformeln (IIIa), (IIIb) auf Integrale von der Form $\int_\alpha^x F(x)\,dx$, wo α eine willkürliche untere Grenze bedeutet; also insbesondere auf alle rationalen, elliptischen und hyperelliptischen Integrale. Denn die Integration der Reihe (III) liefert:

$$\text{(III}'\text{)} \quad \int_\alpha^x F(x)\,dx = C + D_0 \frac{x}{1!} + D_1 \frac{x^2}{2!} + \ldots + D_i \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} + \ldots,$$

wo $C = \int_\alpha^0 F(x)\,dx$ die Integrationskonstante bedeutet. Die Funktionentheorie zeigt, wie sich in jedem Falle, bei gegebenen Exponenten $\mu, \nu, \pi, \ldots$ der Konvergenzbereich der Reihe (III′) bestimmen läßt. Somit gilt:

Satz I. „Versteht man unter $f_n(x)$, $g_p(x)$, $h_q(x)$, ... eine endliche Anzahl von binären Urformen der Ordnungen $n, p, q, \ldots$, unter $\mu, \nu, \pi, \ldots$ beliebig gegebene Exponenten, so läßt sich das Potenzprodukt $F(x) = f_n^\mu(x)\, g_p^\nu(x)\, h_q^\pi(x) \ldots$ gemäß (IIIa) resp. (IIIb) in eine Potenzreihe nach x entwickeln;

durch Integration geht hieraus die entsprechende Reihe (III′) für $\int F(x)\,dx$ hervor."

Nach dem Vorgange von § 18 (IVb) werde nun auch noch der Prozeß ∇_2 berücksichtigt:

$$\text{(X)}\qquad \nabla_2 \equiv \sum_{i=1}^{n}(n-i)\,a_{i-1}\frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^{p}(p-k)\,b_{k-1}\frac{\partial}{\partial b_k} + \dots$$

Die Ordnung (Dimension) d_x von $F(x)$ in x besitzt den Wert:

$$\text{(14)}\qquad d_x = n\mu + p\nu + q\pi + \dots$$

Somit genügt $F(x)$ gemäß § 18 (IVb) der weiteren linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\text{(XI)}\qquad \nabla_2 F(x) \equiv (n\mu + p\nu + q\pi + \dots)\,xF - x^2 F'(x)\,.$$

Wendet man dies auf die Reihenentwicklung (III) von $F(x)$ an, und vergleicht wieder die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x links und rechts, so gelangt man zu der weiteren Rekursionsformel:

$$\text{(XII)}\qquad \nabla_2 D_{i+1} \equiv (i+1)(n\mu + p\nu + q\pi + \dots - i)\,a_0 b_0 c_0 \dots D_i\,,$$

wo sich D_i, D_{i+1} auch durch Z_i, Z_{i+1} ersetzen lassen.

Das Integral $\int^{x} F(x)\,dx$ ist im allgemeinen keine Kovariante der Urformen $f, g, h, \dots$ Denn unterwirft man x einer beliebigen Substitution:

$$\text{(15)}\qquad x = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{Z}{N}\,, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma\,,$$

wodurch die Form $F(x)$, von der Ordnung d_x in x, nach Heraufmultiplikation mit N^{d_x} in die neue Form $\Phi(z)$ übergehe, so ergibt sich aus:

$$\text{(16)}\qquad dx = \Delta N^{-2}\,dz\,,$$

daß vermöge (15), (16) die Identität besteht:

$$\text{(17)}\qquad \int^{x} F(x)\,dx = \Delta \int^{z} \Phi(z)\,dz\,N^{-(d_x+2)}\,.$$

Das Integral rechterhand bleibt also dann und nur dann von derselben Form wie das ursprüngliche, wenn der Exponent von N verschwindet, wenn also:

$$\text{(18)}\qquad d_x = n\mu + p\nu + q\pi + \dots - 2$$

wird. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so geht (17) über in:

(XIII) $$\int^{z} \Phi(z)\,dz = \Delta^{-1}\int^{x} F(x)\,dx\,,$$

d. h. das Integral $\int^{x} F(x)\,dx$ ist eine Kovariante der f, g, h, ... vom Gewichte -1, und in den (a), (b), (c), ... resp. von der Dimension μ, ν, π, ... Setzt man das Integral in homogene Gestalt $\int F(x_1, x_2)\,(x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2)$, so erkennt man, daß es in den x_1, x_2 die Dimension Null besitzt. In diesem Falle genügt daher das Integral $\int F(x)\,dx = J(x)$ selbst den beiden Differentialgleichungen (IVa) und (IVb) (S. 303), die jetzt die spezifische Gestalt annehmen:

(XIV) $$\nabla J(x) = F(x)\,, \quad \nabla_2 J(x) = -x^2 F(x)\,.$$

Somit gilt:

Satz II. „Das Integral $J(x)$ der Funktion $F(x) = f_n^{\mu}(x)\,g_p^{\nu}(x)\,h_q^{\pi}(x)\,\ldots$ ist dann und nur dann eine Kovariante der Urformen f, g, h, ..., wenn

$$n\mu + p\nu + q\pi + \ldots = -2$$

ist. $J(x)$ ist dann in der Variabeln von der Dimension Null, in den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... je von der Dimension μ, ν, π, ... und vom Gesamtgewicht -1. $J(x)$ genügt den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (XIV)."

Aufgabe 1. Es ist zu zeigen, daß das elliptische Integral 1. Gattung $J(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1 x + \ldots + a_4 x^4}}$ durch die Reihenentwicklung charakterisiert ist:

$$J(x) = x\frac{1}{\sqrt{a_0}} + \frac{x^2}{2!}\nabla\frac{1}{\sqrt{a_0}} + \ldots + \frac{x^{i+1}}{(i+1)!}\nabla^i\frac{1}{\sqrt{a_0}} + \ldots$$

Die D_i, Z_i erfüllen die Rekursionsformeln:

$$D_i = a^{\frac{2i+1}{2}} Z_i\,, \qquad Z_{i+1} = -a_1\frac{2i+1}{2} Z_i + a_0 \nabla Z_i\,.$$

Es wird $Z_i = \sum \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_4} a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_4^{\varepsilon_4}$, wo $\sum \varepsilon_k = \sum k\,\varepsilon_k = i$, und $\mathsf{A}^{(i)} = \frac{(-1)^{i-\varepsilon_0}}{2^{i-\varepsilon_0}}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot\{2(i-\varepsilon_0)-1\}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\,\varepsilon_3!\,\varepsilon_4!}\,i!$ ist.

$J(x)$ genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\nabla J = \frac{1}{\sqrt{f_4(x)}}, \qquad \nabla_2 J = -x^2 \frac{1}{\sqrt{f_4(x)}},$$

und die D_i, Z_i erfüllen die beiden weiteren Rekursionsgesetze:

$$\nabla_2 Z_{i+1} = -(i+1)(i+2)\, a_0 Z_i,$$
$$\nabla_2 D_{i+1} = -(i+1)(i+2)\, a_0 D_i.$$

Aufgabe 2. Fortsetzung. Im besonderen ergibt sich für das Legendre-Jacobische Normalintegral

$J(x, k) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, für $k^2 = \varrho$, je nachdem der (stets gerade) Index i von der Form $4n$ oder $4n+2$ ist:

$$\text{(a)}\quad Z_{i(i=4n)} = \sum_{\eta=0}^{n} \frac{(-1)^{n-\eta}\varrho^{n-\eta}(1+\varrho)^{2\eta}}{2^{n+\eta}(2\eta)!\,(n-\eta)!} 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot\{2(n+\eta)-1\}\cdot(4n)!\,,$$

$$\text{(b)}\quad Z_{i(i=4n+2)} = \sum_{\eta=0}^{n} \frac{(-1)^{n-\eta}\varrho^{n-\eta}(1+\varrho)^{2\eta+1}}{2^{n+\eta+1}(2\eta+1)!\,(n-\eta)!} 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot\{2(n+\eta)+1\}$$
$$\cdot(4n+2)!$$

Eine übersichtlichere Entwicklung für $J(x, k)$ gewinnt man nach Potenzen von $\varrho = k^2$:

$$\text{(c)}\qquad J(x, k) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{l} x^{2l+1}\varrho^s \frac{1}{2^{2l}}\cdot\frac{1}{2l+1}\cdot\binom{2(l-s)}{l-s}\binom{2s}{s},$$

die sich für $\varrho = 0$ (d. i. $k = 0$) auf die elementarbekannte des Arkussinusintegrals reduziert.

Aufgabe 3. Fortsetzung. Analog ist das Weierstraßsche Normalintegral zu behandeln:

$$J(x; g_2, g_3) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Man erhält schließlich:

$$\text{(d)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{-g_3}} J(x;\, g_2,\, g_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=E\left(\frac{i}{3}\right)} \frac{x^{i+1}}{i+1} \cdot \frac{(-1)^{i-\varepsilon}}{2^{2(i-3\varepsilon)}} \\ &\qquad \cdot \binom{2(i-2\varepsilon)}{\varepsilon,\, i-2\varepsilon,\, i-3\varepsilon} \cdot g_3^{i+2\varepsilon} g_2^{i-3\varepsilon}, \end{aligned}\right.$$

wo $E\left(\frac{i}{3}\right)$ die größte in $\frac{i}{3}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet.

Sind x, g_2, g_3 reell, so unterscheide man zwei Fälle. Bei negativem g_3 sind alle in (d) auftretenden Größen reell; bei positivem g_3 wird sowohl $\sqrt{-g_3}$, wie $J(x;\, g_2,\, g_3)$ rein imaginär, also das Produkt reell, während auf der rechten Seite von (d) wieder alles reell bleibt.

Bezüglich weiterer Ausführungen vergleiche man des Verfassers Abhandlung: Math. Ann. Bd. 66 (1908), S. 113.

§ 20. Fortsetzung. Die Reihenentwicklung des Logarithmus einer ganzen Funktion. Die Waringschen Potenzsummenformeln und ihre Umkehrung.

Die in § 19 für ein Potenzprodukt binärer Urformen entwickelte invariantive Methode werde jetzt auf den natürlichen Logarithmus einer einzelnen Urform $f_n(x)$ übertragen. Sei wieder:

$$\text{(1)}\quad f_n(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad (a_0 \neq 0,\, a_n \neq 0),$$

so liefert die Maclaurinsche Reihe den Ansatz:

$$\text{(I)}\quad l f(x) \equiv D_0 + D_1 \frac{x}{1!} + D_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + D_i \frac{x^i}{i!} + \ldots$$

Die Koeffizienten D_i sollen wiederum aus der Tatsache abgeleitet werden, daß $l f(x)$ eine absolute Kovariante von $f(x)$ ist. Bedeutet ∇ wieder den Prozeß:

$$\text{(II)}\quad \nabla \equiv a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + 2\, a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + n\, a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}},$$

so ergibt sich auf Grund der allgemeinen Formel (Va) des § 18 als eine Rekursionsformel für die D:

$$\text{(III)}\quad \nabla D_i \equiv D_{i+1}. \qquad (i = 0,\, 1,\, \ldots)$$

Man setze:

$$\text{(IV)}\quad D_i a_0^i \equiv Z_i. \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots)$$

Unterwirft man beide Seiten von (IV) dem Prozesse ∇, so erhält man, als gleichwertig mit (III), die Rekursionsformel für die Z:

$$\text{(V)} \qquad Z_{i+1} \equiv -i\,a_1 Z_i + a_0 \nabla Z_i\,. \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

Hieraus schließt man, wie in § 19, daß Z_i in den a ganzrational ist, von der Dimension i und vom Gewichte i. Demnach ist Z_i ein Aggregat von der Struktur:

$$\text{(VI)} \qquad Z_i \equiv \sum_{\varepsilon} \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}\,,$$

wo die $\mathsf{A}^{(i)}$ numerisch sind und die ε natürliche Zahlen (inkl. 0), die den beiden Bedingungen unterliegen:

$$\text{(2a)} \qquad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = i\,,$$

$$\text{(2b)} \qquad 1 \cdot \varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2 + \ldots + n\,\varepsilon_n = i\,.$$

Rechnet man die Aggregate Z_i für die niedrigsten Werte von i aus und achtet andererseits auf die Struktur der Rekursionsformel (V), so wird man behufs Bestimmung der $\mathsf{A}^{(i)}$ in (VI) zu dem Ansatze geleitet:

$$\text{(VII)} \qquad \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} = (-1)^{i-(\varepsilon_0+1)}\, i!\, \frac{\{i - (\varepsilon_0 + 1)\}!}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!}\,.$$

Der Beweis wird wieder mittels vollständiger Induktion erbracht. Die Formel (VII) gelte bis zu einem Index i. Man greife aus Z_{i+1} irgendein Glied

$$G = \mathsf{A}^{(i+1)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}$$

heraus; dieses ist von der Dimension $i+1$ und vom Gewichte $i+1$ in den a, so daß hinsichtlich der ε in G in (2a), (2b) der Index i durch $i+1$ zu ersetzen ist.

Dann lassen sich auf Grund von (V) diejenigen Glieder von Z_i angeben, aus denen durch Ausübung wenigstens eines der auf der rechten Seite von (V) auftretenden Teilprozesse $-i\,a_1$, $a_0 a_1 \dfrac{\partial}{\partial a_0}$, $2\,a_0 a_2 \dfrac{\partial}{\partial a_1}$, $\ldots$, $n\,a_0 a_n \dfrac{\partial}{\partial a_{n-1}}$ jedesmal das zu G gehörige Potenzprodukt $a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}$ hervorgeht.

Die Summe aller numerischen Koeffizienten $\mathsf{A}^{(i)}$ jener Glieder von Z_i muß den gesuchten Koeffizienten $\mathsf{A}^{(i+1)}$ von G ergeben. Die in Rede stehenden Potenzprodukte sind nebst den zugehörigen Teilprozessen und numerischen Beiträgen in folgender Tabelle zusammengestellt:

(3)

Potenzprodukte in Z_i	Teilprozesse	Numerische Beiträge
$a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1 - 1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}$	$a_1\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_0} - i\right)$	$(\varepsilon_0 - i)\, \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 - 1, \ldots, \varepsilon_n}$
$a_0^{\varepsilon_0 - 1} a_1^{\varepsilon_1 + 1} a_2^{\varepsilon_2 - 1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}$	$2\, a_2\, a_0 \frac{\partial}{\partial a_1}$	$2(\varepsilon_1 + 1)\, \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0 - 1, \varepsilon_1 + 1, \varepsilon_2 - 1, \ldots, \varepsilon_n}$
$a_0^{\varepsilon_0 - 1} a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2 + 1} a_3^{\varepsilon_3 - 1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}$	$3\, a_3\, a_0 \frac{\partial}{\partial a_2}$	$3(\varepsilon_2 + 1)\, \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0 - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2 + 1, \varepsilon_3 - 1, \ldots, \varepsilon_n}$
. . . .	. . . . . .	. . . .
$a_0^{\varepsilon_0 - 1} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_{n-1}^{\varepsilon_{n-1} + 1} a_n^{\varepsilon_n - 1}$	$n\, a_n\, a_0 \frac{\partial}{\partial a_{n-1}}$	$n(\varepsilon_{n-1} + 1)\, \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0 - 1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} + 1, \varepsilon_n - 1}$.

Wendet man auf die einzelnen $\mathsf{A}^{(i)}$ jeweils die Formel (VII) an und bringt jede derselben auf den gemeinsamen Nenner $\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!$, so hebt sich aus der Summe der numerischen Beiträge einmal der gemeinsame Faktor $(-1)^{i - \varepsilon_0} \frac{(i - \varepsilon_0)!\, i!}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!}$ heraus, andererseits verbleibt als Restfaktor das Aggregat $1 \cdot \varepsilon_1 + 2\, \varepsilon_2 + \ldots + n\, \varepsilon_n$, das nach Voraussetzung den Wert $i + 1$ hat. Somit ergibt sich für den gesuchten Koeffizienten $\mathsf{A}^{(i+1)}$:

$$\mathsf{A}^{(i+1)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} = (-1)^{i - \varepsilon_0} (i + 1)!\, \frac{(i - \varepsilon_0)!}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!}, \tag{4}$$

d. i. aber, da $i - \varepsilon_0 = (i + 1) - (\varepsilon_0 + 1)$, der Ausdruck (VII) für den Index $i + 1$.

Die hiermit bewiesene Darstellungsformel (VII) läßt noch zwei Umgestaltungen zu. Da gemäß (2a)

$$i - \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n,$$

so wird

$$\frac{(i - \varepsilon_0 - 1!)}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!} = \frac{(i - \varepsilon_0)!}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!} \cdot \frac{1}{i - \varepsilon_0} = \binom{i - \varepsilon_0}{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} \frac{1}{i - \varepsilon_0},$$

wo der Faktor von $\frac{1}{i - \varepsilon_0}$ der der Zerlegung (2a) von $i - \varepsilon_0$ entsprechende Polynomialkoeffizient von $i - \varepsilon_0$ ist.

Damit geht (VII) über in:

$$\text{(VII}'\text{)}\qquad \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} = (-1)^{i-(\varepsilon_0+1)}\binom{i-\varepsilon_0}{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\frac{i!}{i-\varepsilon_0}\,.$$

Andererseits empfiehlt es sich, wie in § 19, die Urform $f(x)$ auch in den a nichthomogen, mit $a_0 = 1$, zu schreiben, wobei gemäß (IV) D_i mit Z_i zusammenfällt. Setzt man zur Abkürzung:

$$\text{(5)}\qquad \sigma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n\,,$$

und bezeichnet den Koeffizienten (VII) jetzt mit $\mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}$, so kommt:

$$\text{(VII}''\text{)}\quad \mathsf{A}^{(i)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n} = (-1)^{\sigma-1}\frac{(\sigma-1)!}{\varepsilon_1!\ldots\varepsilon_n!}\,i! = (-1)^{\sigma-1}\binom{\sigma}{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\frac{i!}{\sigma}\,,$$

wo nunmehr die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ nur noch an die Gewichtsrelation (2b) gebunden sind. Vermöge (IV), (VI), (VII), (VII′), (VII″) wird die explizite Reihenentwicklung (I) von $l\,f(x)$:

$$\text{(VIII)}\quad l\,f(x) \equiv l\,a_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}(-1)^{i-\varepsilon_0-1}x^i a_0^{\varepsilon_0-i}a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}\binom{i-\varepsilon_0}{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}\frac{1}{i-\varepsilon_0}\,,$$

wo die $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ den Relationen (2a), (2b) unterliegen, resp. für $a_0 = 1$:

$$\text{(VIII}'\text{)}\quad l\,f(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}(-1)^{\sigma-1}x^i a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}\binom{\sigma}{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}\frac{1}{\sigma}$$

$$(\sigma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)\,,$$

wo die $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ lediglich der Gewichtsrelation (2b) zu genügen haben.

Demnach gilt:

Satz I. „Ist $f_n(x)$ (1) eine vorgelegte binäre Urform ($a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$), so gestattet $l\,f(x)$ die Reihenentwicklung (VIII), resp. für $a_0 = 1$ die Entwicklung (VIII′). Hieraus geht durch Differentiation die entsprechende Reihe für $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ hervor, indem man in (VIII) resp. (VIII′) überall x^i durch $i\,x^{i-1}$ ersetzt."

Die Darstellung (VIII) werde zu den Wurzeln von $f(x)$ und deren Potenzsummen in Beziehung gesetzt. Nach dem Fundamentalsatze der Algebra*) hat eine Form $f(x)$ n Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so daß $f(\alpha_r) = 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, und es besteht die Identität:

$$\text{(IX)} \qquad f(x) \equiv a_0\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right).$$

Hieraus ergibt sich durch Logarithmierung:

$$l\,f(x) \equiv l\,a_0 + \sum_{r=1}^{n} l\left(1 - \frac{x}{\alpha_r}\right),$$

und sodann durch Differentiation nach x:

$$\text{(X)} \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} \equiv \sum_{r=1}^{n} - \frac{1}{\alpha_r} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{\alpha_r}},$$

wo auf die linke Seite der Satz I anzuwenden ist.

Man entwickle die rechte Seite ebenfalls in eine Reihe nach steigenden Potenzen von x. Die geometrische Reihe liefert zunächst, unter der Voraussetzung $|\alpha_r| > |x|$, für ein einzelnes Glied $1 - \dfrac{x}{\alpha_r}$:

$$1 - \frac{x}{\alpha_r} \equiv 1 + \frac{x}{\alpha_r} + \frac{x^2}{\alpha_r^2} + \ldots + \frac{x^{i-1}}{\alpha_r^{i-1}} + \ldots,$$

also nach Multiplikation mit $-\dfrac{1}{\alpha_r}$:

$$-\frac{1}{\alpha_r}\,\frac{1}{1 - \dfrac{x}{\alpha_r}} \equiv -\frac{1}{\alpha_r} - \frac{x}{\alpha_r^2} - \frac{x^2}{\alpha_r^3} - \ldots - \frac{x^{i-1}}{\alpha_r^i} - \ldots$$

Summiert man über alle n Wurzeln α_r von $f(x)$, wobei der absolute Betrag von x kleiner anzunehmen ist als der von irgendeinem α_r, und bezeichnet die Summe der $i$ten Potenzen der α mit s_i, die der $(-i)$ten Potenzen mit s_{-i}:

$$\text{(6)} \qquad s_i = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r^i, \qquad s_{-i} = \sum_{r=1}^{n} = \frac{1}{\alpha_r^i}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

*) Vgl. diese Sammlung, Bd. VI „Algebra“, von O. **Pund**, § 93.

so entsteht aus (X) eine zweite Reihenentwicklung für $\frac{f'(x)}{f(x)}$:

$$\text{(XI)} \quad -\frac{f'(x)}{f(x)} \equiv s_{-1} + x s_{-2} + x^2 s_{-3} + \ldots + x^{i-1} s_{-i} + \ldots,$$

d. h. in der Entwicklung von $\frac{f'(x)}{f(x)}$ nach steigenden Potenzen von x ist der Koeffizient von x^i gleich der Summe der $(-i)$ten Potenzen der Wurzeln von $f(x)$.

Andererseits hat man auf Grund von Satz I für den Koeffizienten von x^i in $-\frac{f'(x)}{f(x)}$ einen Ausdruck in den Koeffizienten a von f. Da beide Ausdrücke übereinstimmen müssen, so folgt die Darstellung von s_{-i} durch die a:

$$\text{(XII)} \quad s_{-i} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^i i \sum_\varepsilon (-1)^{\varepsilon_0} a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} \frac{(i-\varepsilon_0-1)!}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!}.$$

Hieraus geht die korrespondierende Formel für die Summe s_i der $i$ten Potenzen der α unmittelbar hervor, indem man je zwei symmetrisch gelegene Koeffizienten a_s und a_{n-s} $(s = 0, 1, \ldots, n)$ vertauscht; denn hierdurch gehen die Wurzeln α in ihre reziproken Werte über und die rechte Seite von (XII) ist in den a homogen von der Dimension Null.

Da man indessen gewöhnt ist, die Darstellung von s_i als die primäre anzusehen, so empfiehlt es sich, die Bezeichnung von $f(x)$ in (1) dahin abzuändern, daß gesetzt wird:

$$(1') \quad f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n. \quad (a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0)$$

Dann wird die rechte Seite von (XII) gerade der Ausdruck für s_i:

$$\text{(XIII)} \quad s_i = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^i i \sum_\varepsilon (-1)^{\varepsilon_0} a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} \frac{(i-\varepsilon_0-1)!}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!},$$

wo die Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Relationen (2a), (2b) durchlaufen; wie oben vereinfacht sich (XIII) für $a_0 = 1$. Umgekehrt, vertauscht man auf der rechten Seite von (XIII) wiederum jedes a_s mit a_{n-s}, so geht linkerhand s_i in s_{-i} über.

Die Fundamentalformel (XIII) heißt die Waringsche Formel*). Es gilt demnach:

Satz II. „Die explizite Darstellung der $i$ten Potenzsumme s_i ($i = 1, 2, \ldots$) der Wurzeln α einer Form $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ vermöge der Koeffizienten a wird durch die Waringsche Formel (XIII) geleistet: durch Vertauschung je zweier symmetrisch gelegener Koeffizienten a_s und a_{n-s} entsteht die korrespondierende Formel für die Summe s_{-i} der $(-i)$ten Potenzen der Wurzeln von f. Die Waringsche Formel ist als eine direkte Folge der Grundtatsache anzusehen, daß $lf(x)$ eine (absolute) Kovariante der Urform $f(x)$ ist."

Der Vollständigkeit halber sei auch der Weg angegeben, der mittels (VIII) direkt zur Waringschen Formel (XIII) für die s_i führt, ohne erst die Formel für s_{-i} zu bilden. Man gehe von der neuen Bezeichnung (1') von f und der dementsprechenden Zerlegung von f in Linearfaktoren $x - \alpha_r$ aus:

$$(1') \qquad f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv a_0 (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n),$$

und benütze daneben die alte Bezeichnung (1), wobei man der Deutlichkeit halber eine andere Variable y und ein anderes Funktionszeichen $\varphi(y)$ wähle:

$$(1) \qquad \varphi(y) \equiv a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n .$$

Unter Annahme der Relation:

$$(7) \qquad x y = 1$$

wird ersichtlich:

$$(8) \qquad f(x) \equiv a_0 (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) \equiv x^n \varphi(y) .$$

Logarithmiert man wieder und differenziert sodann nach x, so kommt, da $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$:

$$(9) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} \equiv \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_r} \equiv \frac{n}{x} - \frac{y}{x} \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)},$$

*) Ed. Waring, Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus, Cambridge 1762, p. 1, und Meditationes algebraicae, Cambridge 1782, p. 1.

so daß die Identität gilt:

$$\text{(XIV)} \qquad \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{\alpha_r}{x}} \equiv n - y\,\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}.$$

Entwickelt man links wieder jedes Glied der Summe nach der geometrischen Reihe, wo jetzt behufs Konvergenz umgekehrt der absolute Betrag von x größer als der irgendeines α_r anzunehmen ist:

$$\frac{1}{1-\frac{\alpha_r}{x}} \equiv 1 + \alpha_r y + \alpha_r^2 y^2 + \ldots + \alpha_r^i y^i + \ldots,$$

und summiert über alle Wurzeln α, so lehrt (XIV), daß der Koeffizient s_i von y^i übereinstimmt mit dem Koeffizienten von $-y^{i-1}$ in $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$; das führt aber auf Grund von (VIII) zur Waringschen Formel (XIII).

Es werde nunmehr die Umkehrung der Formel (XIII) in Angriff genommen, d. i. die Aufgabe, die Koeffizienten a von $f(x)$ durch die Potenzsummen s der Wurzeln α auszudrücken. Zu dem Behuf multipliziere man in (XIII) mit dem Nenner $(-a_0)^i$ herauf, so kommt:

$$\text{(XIII a)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &(-a_0)^i s_i = i\sum(-a_0)^{\varepsilon_0}(i-\varepsilon_0-1)!\,\frac{a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\ldots a_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!} \\ &\qquad\qquad (i=1,2,\ldots), \end{aligned} \right.$$

wo die natürlichen Exponenten $\varepsilon(\geqq 0)$ an die beiden Relationen (2a), (2b) der Homogenität und des Isobarismus gebunden waren:

$$\text{(2a)} \qquad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = i,$$

$$\text{(2b)} \qquad 1\cdot\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2 + \ldots + n\,\varepsilon_n = i.$$

Die rechte Seite von (XIII a), wo ε_0 der Reihe nach der Werte $0, 1, \ldots, i-1$ fähig ist, ordne man nach steigenden Potenzen von $-a_0$:

$$\text{(11)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &(-a_0)^i s_i = P_i^{(i)} - a_0 P_{i-1}^{(i)} + a_0^2 P_{i-2}^{(i)} - \ldots \\ &\qquad + (-1)^r a_0^r P_{i-r}^{(i)} + \ldots + (-1)^{i-1} a_0^{i-1} P_0^{(i)}, \end{aligned} \right.$$

wobei der untere Index irgendeines der Koeffizienten P die Dimension in den $a_1, a_2, \ldots, a_n$ angibt, der obere

Index das konstante Gewicht i. Gemäß (XIII a) ist das Aggregat $P^{(i)}_{i-r} (r = 0, 1, \ldots, i-1)$ bestimmt durch:

(12) $$P^{(i)}_{i-r} = i(i-r-1)! \sum \frac{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1! \, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!},$$

wo nunmehr die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ den beiden Relationen zu genügen haben:

(13a) $$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n = i - r,$$

(13b) $$1 \cdot \varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2 + \ldots + n\,\varepsilon_n = i.$$

Andererseits ziehe man die polynomische Entwicklung *) heran:

(14) $$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{i-r} = (i-r)! \sum \frac{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1! \, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!};$$

hier erstreckt sich die Summe auf alle nichtnegativen, ganzzahligen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, die lediglich der Bedingung (13a) der Homogenität unterliegen. Greift man aus der Entwicklung (14) das Teilaggregat $R^{(i)}_{i-r}$ aller der Glieder heraus, die das feste Gewicht i besitzen, so tritt für dieses Teilaggregat noch die Bedingung (13b) des Isobarismus hinzu; es ist somit:

(15) $$R^{(i)}_{i-r} = (i-r)! \sum \frac{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1! \, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!},$$

mit den beiden Bedingungen (13a), (13b) für die ε. Aus der Vergleichung von (15) mit (12) folgt die Beziehung:

(16) $$P^{(i)}_{i-r} = \frac{i}{i-r} \cdot R^{(i)}_{i-r} (r = 0, 1, \ldots i-1)$$

Mit Einführung der R statt der P nimmt die Waringsche Formel (XIII) resp. (XIII a), wenn man hinterher wieder $a_0 = 1$ nimmt, die Gestalt an:

$$(-1)^i \frac{s_i}{i} = \frac{R^{(i)}_i}{i} - \frac{R^{(i)}_{i-1}}{i-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^r \frac{R^{(i)}_{i-r}}{i-r} + \ldots + (-1)^{i-1} \frac{R^{(i)}_1}{1},$$

*) Vgl. diese Sammlung Bd. V „Niedere Analysis I“, von H. Schubert, § 6.

oder auch, nach Division mit $(-1)^{i-1}$, und vermöge umgekehrter Anordnung der rechten Seite:

$$\text{(XIII b)}\quad \begin{cases} \dfrac{-s_i}{i} = \dfrac{R_1^{(i)}}{1} - \dfrac{R_2^{(i)}}{2} + \dots \\ + (-1)^{r-1}\dfrac{R_r^{(i)}}{r} + \dots + (-1)^{i-1}\dfrac{R_i^{(i)}}{i}. \end{cases}$$

Damit ist zunächst bewiesen:

Satz III. „Bezeichnet man die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ mit A, und bildet die beliebig weit fortgesetzte Entwicklung:

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{1} - \dfrac{A^2}{2} + \dfrac{A^3}{3} - \dots \\ + (-1)^{r-1}\dfrac{A^r}{r} + \dots + (-1)^{i-1}\dfrac{A^i}{i} + \dots, \end{cases}$$

entwickelt hier wiederum jede Potenz von A gemäß (14) und ordnet (17) alsdann nach Aggregaten steigenden Gewichtes $(1, 2, \dots, i, \dots)$, so entsteht die Entwicklung nach Potenzsummen:

$$(18)\quad -\frac{s_1}{1} - \frac{s_2}{2} - \dots - \frac{s_i}{i} - \dots\text{“}$$

Man beachte hierbei, daß in der Entwicklung (14) das kleinste Gewicht vom Gliede a_1^{i-r} herrührt; in der Entwicklung (17) kommen daher Glieder vom Gewichte i höchstens noch in $A^{(i)}$ vor.

Der Satz III ist mit der Waringschen Formel (XIII) gleichwertig, da letztere rückwärts aus ersterem folgt. Nun ist die unbegrenzt gedachte Entwicklung (17) formal die logarithmische Reihe für $l(1+A)$, oder auch, da $1+A=f(1)$, für $l\{f(1)\}$. Nimmt man $|A|<1$, so konvergiert (17) absolut. Der Satz III gestattet daher auch folgende Fassung:

Satz III′. „Entwickelt man für $|f(1)|<2$ $l\{f(1)\}$ nach steigenden Dimensionen in $a_1, a_2, \dots, a_n$, und ordnet sodann nach Aggregaten steigenden Gewichts $(1, 2, \dots i, \dots)$, so entsteht die Reihe:

$$\text{(XV)}\quad -l\{f(1)\} = \frac{s_1}{1} + \frac{s_2}{2} + \dots + \frac{s_i}{i} + \dots\text{“}$$

Auch in dieser Form ist der Satz mit der Waringschen Formel (XIII) äquivalent; denn gilt letztere für alle Wertsysteme der $a_1, a_2, \ldots, a_n$, für die $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| < 1$, so gilt sie auch für beliebige Werte der a.

Behufs Umkehrung von (XIII) hat man somit nur (XV) umzukehren. Damit die Reihe (XV) absolut konvergiere, wähle man die Wurzeln α von $f(x)$ so, daß das Cauchysche Kriterium*) erfüllt ist, daß also von einem genügend hohen m ab der Quotient:

$$(19) \qquad \frac{s_{m+1}}{s_m} = \alpha_1 \frac{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{m+1} + \ldots + \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{m+1}}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{m} + \ldots + \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{m}}$$

unter einen vorgegebenen positiven echten Bruch ε sinkt.

Man unterwerfe daher die α auch noch den Ungleichungen:

$$(20) \quad |\alpha_1| < \varepsilon\,, \quad |\alpha_2| < |\alpha_1|\,, \quad |\alpha_3| < |\alpha_1|\,, \ldots, \quad |\alpha_n| < |\alpha_1|\,.$$

Es bezeichne S die Summe der Reihe (XV):

$$(21) \qquad S = \frac{s_1}{1} + \frac{s_2}{2} + \ldots + \frac{s_i}{i} + \ldots + \frac{s_n}{n} + \ldots,$$

so liefert die Umkehrung von (XV):

$$(\mathrm{XVI}) \qquad A = e^{-S} - 1\,.$$

Hier gestattet die rechte Seite die absolut konvergente Entwicklung:

$$(\mathrm{XVII}) \quad A \equiv e^{-S} - 1 = -\frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} - \frac{S^3}{3!} + \ldots + (-1)^{i-1}\frac{S^i}{i!} \pm \ldots,$$

und es gilt demnach:

Satz IV. „Entwickelt man die rechte Seite von (XVI) gemäß (XVII) nach steigenden Dimensionen der a, indem man jede Potenz der hinreichend weit fortgesetzten Reihe (21) für S nach dem polynomischen Satze entwickelt, und ordnet wiederum nach Aggregaten steigenden Gewichtes $(1, 2, \ldots i, \ldots)$, so ergibt sich $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, wo n beliebig hoch genommen werden darf."

---

*) Vgl. diese Sammlung, Bd. X, § 22, S. 331.

Hieraus geht die gesuchte Umkehrung der Waringschen Formel (XIII) hervor:

Satz V. „Der Koeffizient a_i von x^i in $f(x)$ drückt sich durch die Potenzsummen s der Wurzeln α von $f(x)$ explizite aus nach dem Gesetze:

$$\text{(XVIII)} \quad a_i = \frac{\sum \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\varepsilon_2} \cdots \left(\frac{s_n}{n}\right)^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!}, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wo die natürlichen Zahlen (inkl. 0) ε den Bedingungen (13a), (13b) unterliegen."

Es gilt dabei die analoge Bemerkung wie oben, daß man, um a_i zu erhalten, in der Reihe (XVII) nicht über das Glied mit S^i hinauszugehen braucht.

Der eingeschlagene Weg läßt sich rückwärts durchlaufen und liefert zu (XVIII) wieder die Umkehrung (XIII).

Sieht man von dem Umstande ab, daß bei der obigen Ableitung der Waringschen Formel (XIII) der erkenntnistheoretische Grund darin lag, daß $l f(x)$ eine (absolute) Kovariante von $f(x)$ ist, so kann man zu (XIII) und der Umkehrung (XVIII) kürzer*) so gelangen.

Man gehe direkt von der Gaußschen Zerlegung (8) der Form $f(x)$ (für $a_0 = 1$) aus:

$$(8) \quad \begin{cases} f(x) \equiv x^n \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right) \\ \quad\;\; \equiv x^n \left(1 - \frac{\alpha_1}{x}\right)\left(1 - \frac{\alpha_2}{x}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha_n}{x}\right). \end{cases}$$

Durch Logarithmierung folgt:

$$(9) \qquad l\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right) \equiv \sum_{r=1}^{n} l\left(1 - \frac{\alpha_r}{x}\right).$$

Auf der rechten Seite entwickle man jedes Glied, anstatt wie oben erst zu differenzieren, unmittelbar nach der logarithmischen Reihe**), wobei behufs absoluter Kon-

*) Auf diese Vereinfachung hat mich, nach Kenntnisnahme obiger Entwicklung, Herr L. Saalschütz aufmerksam gemacht.

**) Vgl. diese Sammlung, Bd. X, § 20, S. 270.

vergenz wieder $|x| > \alpha_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ angenommen werde:

$$l\left(1 - \frac{\alpha_r}{x}\right) = -\frac{\alpha_r}{x} - \frac{\alpha_r^2}{x^2} - \ldots - \frac{\alpha_r^i}{x^i} - \ldots$$

Summiert man über alle α_r und schreibt gemäß (7) y für $\frac{1}{x}$, so geht (9) über in:

$$(9') \quad \begin{cases} l(1 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n) \\ \equiv -s_1 y - s_2 y^2 - \ldots - s_i y^i - \ldots \end{cases}$$

Setzt man links zur Abkürzung:

$$(22) \qquad \mathsf{A} \equiv a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n$$

und entwickelt auch $l(1 + \mathsf{A})$ nach der logarithmischen Reihe:

$$(23) \quad \begin{cases} l(1 + \mathsf{A}) \equiv \frac{\mathsf{A}}{1} - \frac{\mathsf{A}^2}{2} + \ldots + (-1)^{r-1} \frac{\mathsf{A}^r}{r} + \ldots \\ \qquad\qquad + (-1)^{i-1} \frac{\mathsf{A}^i}{i} + \ldots, \end{cases}$$

wo behufs absoluter Konvergenz $|y|$ so klein angenommen werde, daß $|\mathsf{A}| < 1$ ausfällt, so liefert die Gleichsetzung der rechten Seiten von (9′) und (23) eine Verallgemeinerung des Satzes III, der formal für $x = 1$ daraus entspringt.

Die Einführung des veränderlichen Elementes x bietet jetzt einmal den Vorteil, daß die Konvergenzbedingungen bez. (9′) und (23) bequemer lauten, sodann den weiteren, daß das in Satz III angegebene Verfahren der Anordnung von (23) (für $x = 1$) nach Aggregaten steigenden Gewichtes $(1, 2, \ldots i, \ldots)$ in den a dadurch ersetzbar wird, daß man (23) nach steigenden Potenzen von y entwickelt und alsdann auf den rechten Seiten von (9′) und (23) die Koeffizienten derselben Potenz y^i vergleicht.

Dies beruht auf dem, aus dem Begriffe des Gewichts unmittelbar folgenden Hilfssatze:

Satz VI. „Entwickelt man $(a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n)^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ nach dem polynomischen Satze (14), und ordnet nach steigenden Potenzen von y, so wird der Koeffizient von y^i gebildet durch das

Aggregat $r! \sum \frac{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1 ! \varepsilon_2 ! \ldots \varepsilon_n !}$, wo über alle nichtnegativen ganzzahligen ε zu summieren ist, deren Summe gleich r, und deren Gewicht $1 \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2 + \ldots + n \varepsilon_n$ gleich i ist."

Vermöge (VI) geht aus (9′) und (23) sofort die Waringsche Formel (XIII) hervor, und wenn man wieder beide rechte Seiten zu Exponenten von e macht:

$$1 + \mathsf{A} = e^{-s_1 y - s_2 y^2 - \ldots - s_i y^i - \ldots}, \tag{24}$$

und rechts nach der Exponentialreihe entwickelt, wiederum auf Grund des Satzes VI, die Umkehrung (XVIII).

Zum Schlusse sei darauf hingewiesen, daß man die Formeln (XIII) und (XVIII) in einer anderen Fassung aussprechen kann, die die Kenntnis des Fundamentalsatzes der Algebra nicht voraussetzt.

Man betrachte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ als n unabhängige Variable und bilde deren „elementarsymmetrische" Funktionen e_i:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= \sum_{r=1}^{n} \alpha_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \\ e_2 &= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \alpha_r \alpha_s = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 + \ldots, \quad (r \neq s) \\ e_3 &= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \alpha_r \alpha_s \alpha_t = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \\ &\qquad + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + \ldots, \qquad (r \neq s \neq t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n. \end{aligned} \right.$$

Bedeutet dann x eine weitere Variable und $f(x)$ die Form $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$, so erscheint jetzt die Gaußsche Zerlegungsidentität (8), wie die Ausmultiplikation lehrt, als unmittelbare Folge der Definitionen (25):

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &\equiv (x - a_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \\ &\equiv x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \ldots \\ &\quad + (-1)^k e_k x^{n-k} + \ldots + (-1)^n e_n. \end{aligned} \right.$$

Demnach gelten nach obigem zwischen den Potenzsummen s_i $(i = 1, 2, \ldots)$ der α und den Größen $(-1)^k e_k$

dieselben Relationen, die in (XIII) und (XVIII) für die s_i und a_k aufgestellt waren, wenn man nichthomogen $a_0 = 1$ setzt. Hierbei tritt in (XIII) noch eine Schwierigkeit auf. Vereinigt man rechterhand in jedem Gliede die von den Größen $(-1)^k e_k$ herrührenden negativen Vorzeichen, so tritt der Faktor $(-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\cdots}$ hinzu.

Um zu entscheiden, wann dieser Faktor die positive resp. negative Einheit darstellt, ziehe man die Relationen (2a), (2b) heran:

(2a) $$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = i\,,$$

(2b) $$1 \cdot \varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2 + \ldots + n\,\varepsilon_n = i\,.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$1 \cdot \varepsilon_2 + 2\,\varepsilon_3 + 3\,\varepsilon_4 + \ldots + (n-1)\,\varepsilon_n = -\varepsilon_0\,,$$

und hieraus, daß die Summe der ε mit geradem Index (inkl. 0) eine gerade Zahl ist. Setzt man dies Ergebnis in (2a) ein, so erkennt man, daß die Summe der ε mit ungeradem Index stets zugleich mit i gerade oder ungerade ist, d. h. man hat:

(27) $$(-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\cdots} = (-1)^i\,.$$

Setzt man $a_0 = 1$, und wie in (5):

(5) $$\sigma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n\,,$$

so geht (XIII) über in:

(XIX) $$s_i = i \sum (-1)^{i-\sigma} (\sigma - 1)!\, \frac{e_1^{\varepsilon_1} e_2^{\varepsilon_2} \ldots e_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!}\,,$$

während (XVIII) ohne weiteres die Umkehrung liefert:

(XX) $$(-1)^i e_i = \sum \frac{\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\varepsilon_2} \cdots \left(\frac{s_n}{n}\right)^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!}\,,$$

wo beidemal die Exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ nur noch an die Gewichtsrelation (2b) gebunden sind. Damit ist bewiesen:

Satz VII. „Die elementarsymmetrischen Funktionen $e_k (k = 1, 2, \ldots n)$ von n Größen α drücken sich durch die Potenzsummen s_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ der α vermöge (XX) aus, und umgekehrt die s_i

$(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ durch die e_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ vermöge (XIX)."

Aufgabe 1. Die Formeln (XII), (XIII), (XVIII) sind der Reihe nach für die Werte $1, 2, \ldots, 6$ des Index i explizite zu entwickeln.

Aufgabe 2. Der polynomische Satz ist der Reihe nach für eine Summe von drei, vier, fünf Gliedern und für die Werte $2, 3, 4, 5$ des Exponenten aufzustellen.

Aufgabe 3. Es werde die zu (XIX) analoge Formel für die s_{-i} auf Grund von (XII) aufgestellt.

Kapitel IV.

Die Invarianten als symmetrische Funktionen der Wurzeln.

§ 21. Symmetrische Funktionen.*)

In § 20 wurden die Potenzsummen $s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + \ldots + \alpha_n^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ von n Größen α_r ganzrational ausgedrückt in den elementarsymmetrischen Verbindungen e_s der α: $e_1 = \sum \alpha_1$, $e_2 = \sum \alpha_1 \alpha_2, \ldots, e_n = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$. Die Größen s_i sind „symmetrische" Funktionen der α, da sie sich nicht ändern, wenn man die α irgendwie permutiert; zugleich heißt s_i „einförmig", da sie aus einer einzelnen Potenz α_r^i dadurch hervorgeht, daß man den Index r die Werte $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen läßt und die Summe dieser n Potenzen bildet.

Analog gelangt man zu einer „zweiförmigen symmetrischen" Funktion s_{ik} der α, wenn man von einem Potenzprodukt $\alpha_r^i\, \alpha_s^k$ ausgeht, wo r, s zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bedeuten, und auch die natürlichen Exponenten i, k vorderhand verschieden seien; läßt man in $\alpha_r^i \alpha_s^k$ das Paar (r, s) alle $n(n-1)$ Variationen der n Elemente $1, 2, \ldots, n$ zur zweiten Klasse durchlaufen und summiert, so wird s_{ik}:

$$(1)\quad \begin{cases} s_{ik} = \alpha_1^i(\cdot + \alpha_2^k + \alpha_3^k + \ldots + \alpha_n^k) \\ \qquad + \alpha_2^i(\alpha_1^k + \cdot + \alpha_3^k + \ldots + \alpha_n^k) + \ldots \\ \qquad + \alpha_n^i(\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_{n-1}^k + \cdot)\,. \end{cases}$$

*) Vgl. diese Sammlung, Bd. VI „Algebra" von O. Pund, § 100.

Füllt man innerhalb der Klammern die durch Punkte angedeuteten Lücken der Reihe nach durch $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_n^k$ aus, wodurch jede Klammer in s_k übergeht, und zieht hinterher die Summe der so in s_{ik} eingeführten Glieder $\alpha_1^{i+k} + \alpha_2^{i+k} + \ldots + \alpha_n^{i+k} = s_{i+k}$ wieder ab, so entsteht das Gesetz:

$$(2) \qquad s_{ik} = s_i s_k - s_{i+k} \text{ *)} ,$$

womit eine zweiförmige Funktion s_{ik} auf einförmige zurückgeführt ist. Ist im besonderen $i = k$, so stimmen in s_{ii} je zwei Glieder $\alpha_r^i \alpha_s^i$ und $\alpha_s^i \alpha_r^i$ überein; bezeichnet man mit σ_{ii} die Summe dieser $\frac{n(n-1)}{2}$ untereinander verschiedenen Potenzprodukte, so erleidet die Formel (2) nur die geringe Modifikation:

$$(2') \qquad s_{ii} = 2\,\sigma_{ii} = s_i^2 - s_{2i} .$$

Damit ist auch jede zweiförmige symmetrische Funktion s_{ik} resp. $s_{ii} = 2\,\sigma_{ii}$ durch die e_s ganzrational darstellbar.

Dies Ergebnis soll allgemein für k-förmige symmetrische Funktionen der α nachgewiesen werden.

Man bilde das Potenzprodukt $\alpha_{r_1}^{i_1} \alpha_{r_2}^{i_2} \ldots \alpha_{r_k}^{i_k}$, wo die $k\,(\leqq n)$ Indizes $r_1, r_2, \ldots, r_k$ irgend k verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bedeuten und die Exponenten $i_1, i_2, \ldots, i_k$ natürliche Zahlen, die vorderhand voneinander verschieden seien.

Läßt man die Komplexion $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ alle $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ Variationen der n Elemente $1, 2, \ldots, n$ zur $k$ten Klasse durchlaufen und addiert sämtliche so entstehenden Potenzprodukte, so erwächst eine „k-förmige symmetrische" Funktion $s_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ der α.

Fallen von den k Exponenten $i_1, i_2, \ldots, i_k$ t zusammen, so daß etwa $i_1 = i_2 = \ldots i_t$, so stimmen in $s_{\underbrace{i_1 i_1 \ldots i_1}_{t} i_{t+1} \ldots i_k}$ jeweils $t!$ Glieder überein, in denen die nämlichen Indizes $r_1, r_2, \ldots, r_t$ nur untereinander permutiert werden. Bezeichnet man das Aggregat der so verbleibenden $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{t!}$

*) Das allgemeine Gesetz rührt von Ed. Waring her, Misc. anal. p. 6, und Med. alg. p. 8 (s. das Zitat auf S. 325).

verschiedenen Glieder mit $\sigma_{\underbrace{i_1 i_1 \ldots i_1}_{t} i_{t+1} \ldots i_k}$, so geht diese k-förmige Funktion durch Multiplikation mit $t!$ in die entsprechende ursprüngliche über.

Dieser Prozeß kann sich wiederholen. Es mögen von den $k-t$ Indizes $i_{t+1} \ldots i_k$ wiederum u zusammenfallen, etwa $i_{t+1} = i_{t+2} = \ldots = i_{t+u}$, so stimmen nunmehr in $s_{\underbrace{i_1 i_1 \ldots i_1}_{t} \underbrace{i_{t+1} \ldots i_{t+u}}_{u} i_{t+u+1} \ldots i_k}$ jeweils $t!\,u!$ Glieder überein, und bezeichnet man das Aggregat der so verbleibenden

$$\frac{n(n-1) \ldots \{n-(k+1)\}}{t!\,u!}$$

verschiedenen Glieder, indem man wiederum den Buchstaben s durch σ ersetzt, so geht der Wert der letzteren Größe durch Multiplikation mit $t!\,u!$ in den der ersteren über usf.

Man nehme jetzt an, daß jede $(k-1)$-förmige symmetrische Funktion, wo die $k-1$ Exponenten auch beliebig teilweise übereinstimmen dürfen, ganzrational durch die e ausdrückbar sei und zeige das Entsprechende für eine k-förmige symmetrische Funktion $s_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Man greife aus dieser irgendein Glied $\alpha_{r_1}^{i_1} \alpha_{r_2}^{i_2} \ldots \alpha_{r_{k-1}}^{i_{k-1}} \cdot \alpha_{r_k}^{i_k}$ heraus, halte die ersten $k-1$ Faktoren fest, während im letzten Faktor $\alpha_{r_k}^{i_k}$ der Index r_k die noch übrigen $n-(k-1)$ Werte r_k, $r_{k+1}, \ldots, r_n$ durchlaufe und addiere diese Potenzprodukte; sodann halte man den Klammerfaktor $\alpha_{r_k}^{i_k} + \alpha_{r_{k+1}}^{i_k} + \ldots + \alpha_{r_n}^{i_k}$ fest und permutiere in dem voranstehenden Potenzprodukte $\alpha_{r_1}^{i_1} \alpha_{r_2}^{i_2} \ldots \alpha_{r_{k-1}}^{i_{k-1}}$ die $k-1$ unteren Indizes auf alle $(k-1)!$ Weisen und bilde wiederum die Summe. Nunmehr ergänze man den Klammerfaktor $\alpha_{r_k}^{i_k} + \alpha_{r_{k+1}}^{i_k} + \ldots + \alpha_{r_n}^{i_k}$ durch Aufnahme der Summe $\alpha_{r_1}^{i_k} + \alpha_{r_2}^{i_k} + \ldots + \alpha_{r_n}^{i_k}$, wodurch er zur Potenzsumme s_{i_k} wird. Wiederholt man dies Verfahren für alle Aggregate analoger Struktur und zieht hinterher die Gesamtheit der so in s eingeschalteten Glieder wieder ab, so nimmt die vorgelegte Funktion die Gestalt an:

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} s_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k} = s_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} s_{i_k} - \{ s_{i_1+i_k, i_2, \ldots i_{k-1}} \\ + s_{i_2+i_k, i_1, i_3, \ldots i_{k-1}} + s_{i_3+i_k, i_1, i_2, i_4, \ldots i_{k-1}} + \cdots \\ + s_{i_{k-1}+i_k, i_1, i_2, \ldots i_{k-2}} \} , \end{cases}
$$

wodurch sie, abgesehen von der einförmigen Funktion s_{i_k}, auf lauter $(k-1)$-förmige zurückgeführt ist. Sooft in den letzteren, sowie in der linken Seite von (I) gewisse Indizesreihen der i zusammenfallen, führe man gemäß der obigen Regel durch Multiplikation bezüglicher Fakultäten jede der „s-Funktionen" in die korrespondierende „σ-Funktion" über.

Damit ist bewiesen:

Satz I. „Jede k-förmige ($k = 1, 2, \ldots \leqq n$) symmetrische Funktion von n Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ läßt sich ganzrational durch die elementarsymmetrischen Verbindungen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ darstellen."

Dieser Satz ist weiter auf eine beliebige ganzrationale symmetrische Funktion S der α ausdehnbar. In S mögen Produkte von höchstens $k \, (\leqq n)$ Potenzen verschiedener α vorkommen.

Man greife irgendein Glied aus S heraus, das ein Produkt von $\lambda \, (\leqq k)$ Potenzen der α sei, so erzeugt dieses Glied nach obigem eine bestimmte λ-förmige symmetrische Funktion, die als Teilaggregat in S enthalten sein muß. Ist damit S noch nicht erschöpft, so fahre man in derselben Weise fort, so zerlegt sich ersichtlich S in eine endliche Anzahl resp. λ-, λ_1-, λ_2-, ... förmiger symmetrischer Funktionen ($\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \leqq k$), auf die der Reihe nach Satz I anwendbar ist. Somit gilt allgemein:

Satz II. „Jede ganzrationale symmetrische Funktion der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ist als ganzrationale Funktion der elementarsymmetrischen Verbindungen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ darstellbar."

Aufgabe 1. Die Formeln (2), (2') sind der Reihe nach auf drei, vier, fünf ungleiche resp. teilweise gleiche Indizes auszudehnen.

Aufgabe 2. Unter den symmetrischen Funktionen einer Reihe (resp. mehrerer Reihen) von Variabeln ist für die Algebra und Geometrie von besonderer Wichtigkeit die spezielle Klasse der identisch verschwindenden, die also ihren Wert Null bei beliebiger Vertauschung der Variabeln (resp. der Variabelnreihen) nicht ändern, da sie eben für willkürliche Werte der Variabeln verschwinden.

Hierher gehört u. a. die in § 8 (III), S. 107 aufgeführte Funktion von vier Variabeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$:

$$(1) \quad \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4) + (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2) \\ \qquad\qquad + (\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_2) \equiv 0 , \end{cases}$$

oder auch, homogen geschrieben, als Funktion der beiden Variabelnreihen x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4, für

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i :$$

$$(1') \qquad p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} \equiv 0 .$$

Von W. Clifford*) rührt eine Verallgemeinerung her, die abgeleitet werden soll.

Es liegen drei Variabelnreihen x_r, y_r, z_r ($r = i, k, l, m, n, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) vor; unter $(i k l)$ z. B. sei die Determinante $|x_r y_r z_r|$ ($r = i, k, l$) verstanden. Dann lautet die in Rede stehende indentisch verschwindende symmetrische Funktion:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} (i k l)(m n p) - (i k m)(l n p) + (i k n)(l m p) \\ \qquad\qquad - (i k p)(l m n) \equiv 0 . \end{cases}$$

Man führt den Beweis entweder so, daß man (I) zunächst in nichthomogener Form schreibt, indem man etwa sämtliche z gleich Eins setzt, und alsdann nach den $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ usf. entwickelt, so daß z. B.

$$(i k l)(m n p) = (p_{ik} + p_{kl} + p_{li})(p_{mn} + p_{np} + p_{pm})$$

wird.

In dem Aggregate dieser $4 \cdot 9 = 36$ Glieder verschwindet einmal der Koeffizient von p_{ik} für sich, andererseits läßt sich das Aggregat der verbleibenden 24 Glieder in 8 Tripel anordnen, deren jedes von der Struktur (1′) ist.

Kürzer und leichter verallgemeinerungsfähig verfährt man indessen so, daß man irgendeines der sechs Größentripel, z. B. $(x_i y_i z_i) = (x)$, als variabel, die übrigen als kon-

---

*) W. Clifford, London Math. Soc. Proc. 2 (1869), S. 3.

stant auffaßt und alsdann die Identität der beiden Linearformen

$$(2)\quad \begin{cases} A \equiv (x\,k\,l)\,(m\,n\,p) - (x\,k\,m)\,(l\,n\,p)\,, \\ B \equiv (x\,k\,p)\,(l\,m\,n) - (x\,k\,n)\,(l\,m\,p) \end{cases}$$

nachweist. Es läßt sich aber auch direkt die linke Seite von (I) als identisch verschwindende vierreihige Determinante schreiben.

Man kann die Verallgemeinerung noch weiter führen.

Hat man, um noch den nächsten Fall zu betrachten, die vier Variabelnreihen x_r, y_r, z_r, u_r $(r = i, k, l, m, n, p, q, r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, und ist entsprechend z. B. $(i\,k\,l\,m)$ die vierreihige Determinante $|x_r\,y_r\,z_r\,u_r|$ $(r = i, k, l, m)$, so lautet die fragliche Verallgemeinerung:

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} (i\,k\,l\,m)\,(n\,p\,q\,r) - (i\,k\,l\,n)\,(m\,p\,q\,r) + (i\,k\,l\,p)\,(m\,n\,q\,r) \\ \qquad - (i\,k\,l\,q)\,(m\,n\,p\,r) + (i\,k\,l\,r)\,(m\,n\,p\,q) \equiv 0\,. \end{cases}$$

Welches ist die geometrische Bedeutung der Identitäten (I), (II)?

§ 22. Binäre Invarianten als Funktionen der Wurzeln der Urformen.

Es sei zunächst wieder eine einzelne Urform $f_n(x)$ mit den (verschiedenen) Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vorgelegt [s. § 20 (1)]:

$$(1)\quad \begin{cases} f_n(x) \equiv a_0\,x^n + n_1\,a_1\,x^{n-1} + \ldots + a_n \\ \qquad\quad \equiv a_0\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \\ \qquad\quad \equiv x^n\,a_n \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\alpha_1}\right)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\alpha_2}\right) \ldots \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\alpha_n}\right). \end{cases}$$

In § 5 wurde der evidente Satz zugrunde gelegt, daß, unter α_i, α_k irgend zwei Werte einer Variabeln x verstanden, die Differenz $\alpha_i - \alpha_k$ gegenüber allen Schiebungen $x = \xi + h$ absolut invariant bleibt, oder in der Sprechweise des § 11, wenn α_i, α_k jetzt irgend zwei Wurzeln von f bedeuten, daß $\alpha_i - \alpha_k$ eine (sc. in den a irrationale) Schiebungsinvariante von f bez. x darstellt.

Allgemeiner wird nach § 11 und § 21 jede ganzrationale Funktion der „Wurzeldifferenzen" $\alpha_i - \alpha_k\,(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, die zugleich in den α symmetrisch ist, und deren Glieder je mit einer geeigneten natürlichen Potenz von a_0 multipliziert sind, eine in den a ganzrationale Schiebungsinvariante von f bez. x sein.

Um auch die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, bemerke man zuvörderst die andere evidente Eigenschaft der Funktion $\alpha_i - \alpha_k$ von α_i, α_k, daß sie der linearen partiellen Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \equiv 0, \tag{2}$$

und das gleiche gilt von jeder (differenzierbaren) Funktion von $\alpha_i - \alpha_k$. Umgekehrt liege eine, der Bedingung (2) identisch genügende Funktion $f(\alpha_i, \alpha_k)$ von α_i, α_k vor. Um zu zeigen, daß f allein von der Differenz $\alpha_i - \alpha_k = \alpha_{ik}$ abhängt, führe man in f statt der α_i, α_k zwei neue Variable ein, von denen die eine, β, eine willkürliche Funktion von α_i, α_k sei, während die andere mit α_{ik} übereinstimme. Dann gelten die identischen Relationen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} &\equiv \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ik}} \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i}, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} &\equiv \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ik}} \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_k}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Nun ist $\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial \alpha_i} = 1$, $\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial \alpha_k} = -1$; die Addition der beiden Relationen (3) liefert daher, mit Rücksicht auf die Voraussetzung (2):

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_k} \right\} \equiv 0. \tag{4}$$

Wählt man demnach β so, daß es die Bedingung (2) nicht erfüllt, so folgt $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$, d. h. f hängt von β gar nicht ab, sondern ist lediglich eine Funktion von $\alpha_{ik} = \alpha_i - \alpha_k$.

Dieser Satz ist auf n Variable $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ausdehnbar. Es sei f eine Funktion der α, die nur von deren Differenzen $\alpha_i - \alpha_k$ abhänge.

Da $\alpha_{ik} = (\alpha_1 - \alpha_k) - (\alpha_1 - \alpha_i) = \alpha_{1k} - \alpha_{1i}$, so lassen sich alle $\frac{n(n-1)}{2}$ Differenzen α_{ik} durch nur $n-1$ derselben, etwa die $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}$ ausdrücken; es genügt daher, f als eine Funktion der $n-1$ Argumente α_{12},

$\alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}$ anzunehmen. Man hat dann einmal die Relationen:

$$(5) \qquad \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial \alpha_1} \equiv 1 , \quad \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial \alpha_i} \equiv -1 , \quad \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial \alpha_k} \equiv 0 .$$
$$(i, k = 2, 3, \ldots, n;\ i \neq k)$$

Andererseits gilt in Erweiterung von (3) das System der Identitäten:

$$(6) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_r} \equiv \frac{\partial f}{\partial \alpha_{12}} \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial \alpha_r} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{13}} \frac{\partial \alpha_{13}}{\partial \alpha_r} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{1n}} \frac{\partial \alpha_{1n}}{\partial \alpha_r} .$$
$$(r = 1, 2, \ldots, n)$$

Summiert man, so verschwinden infolge von (5) die Koeffizienten von $\frac{\partial f}{\partial \alpha_{12}}, \frac{\partial f}{\partial \alpha_{13}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \alpha_{1n}}$; es genügt also f der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} \equiv 0 .$$

Umgekehrt sei f eine Funktion der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, die der Bedingung (I) identisch genüge. Man führe statt der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n Funktionen der α als neue Variable ein, von denen $n-1$ mit $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}$ übereinstimmen mögen, während die letzte, β, willkürlich belassen werde.

Dann erleiden die Relationen (6) nur die Abänderung, daß rechterhand jeweils der Term $\frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_r}$ hinzutritt. Summiert man wiederum, so gelangt man, mit Rücksicht auf die Voraussetzung (I), zu der Identität:

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial \beta} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_2} + \ldots + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_n} \right\} \equiv 0 .$$

Da β stets so wählbar ist, daß der Klammerausdruck in (7) nicht identisch verschwindet, so muß dies mit $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ der Fall sein, d. h. f ist lediglich eine Funktion der α_{12}, $\alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Funktion der Differenzen α_{ik} der α. Damit ist der Hilfssatz bewiesen:

Satz I. „Bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n unabhängige Variable, so genügt jede Funktion der Differenzen $\alpha_{ik} = \alpha_i - \alpha_k$ identisch der linearen partiellen Differentialgleichung (I) $\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} \equiv 0$. Umgekehrt ist jede Funktion der α, die der Bedingung (I) identisch genügt, eine Funktion der Differenzen α_{ik} allein."

Im Abschnitt I haben wir bereits eine Reihe spezieller Invarianten einzelner Urformen f kennen gelernt, die sich, bis auf eine natürliche Potenz von a_0 als Faktor, als ganze Funktionen der Wurzeldifferenzen $\alpha_i - \alpha_k$ darstellten, und damit unmittelbar erkennen ließen, daß sie Schiebungsinvarianten von f bez. x sind; und Entsprechendes trat für einzelne Systeme von Urformen ein.

Ein erstes allgemeineres, für jedes $n\,(\geqq 2)$ bestehendes Beispiel wird geliefert durch die Seminvariante $H_0 \equiv a_0 a_2 - a_1^2$, das Leitglied der Hesseschen Kovariante H von f (vgl. Anhang zu Abschnitt I, Aufgabe 5, S. 180).

Man hat $\frac{H_0}{a_0^2} \equiv \frac{a_2}{a_0} - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2$, oder da

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{e_1}{n}, \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{2\,e_2}{n\,(n-1)},$$

$$\begin{aligned}\frac{H_0}{a_0^2}\, n^2 (n-1) &\equiv 2\,e_2\, n - (n-1)\, e_1^2 \\ &\equiv -\{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + \ldots\}:\end{aligned}$$

$$(8) \qquad -\frac{a_0\, a_2 - a_1^2}{a_0^2}\, n^2 (n-1) \equiv \sum_{i,k} (\alpha_i - \alpha_k)^2 \equiv \sum_{i,k} \alpha_{ik}^2,$$

wo (i, k) alle Kombinationen der Elemente $1, 2, \ldots, n$ zur zweiten Klasse durchläuft.

Analog ist für $n \geqq 3$ die Seminvariante

$$Q_0 = a_0^2\, a_3 - 3\, a_0\, a_1\, a_2 + 2\, a_1^3$$

(l. c.) zu behandeln, das Leitglied der Kovariante Q von f, der Funktionaldeterminante von f und H. Indem man noch $\frac{a_3}{a_0} = -\frac{6\, e_3}{n\,(n-1)\,(n-2)}$ heranzieht, erhält man zunächst:

$$\frac{Q_0}{a_0^3} \cdot \frac{n^3(n-1)(n-2)}{2} \equiv n\{(n-2)e_1 e_2 - 3ne_3\} \\ - (n-2)e_1\{(n-1)e_1^2 - 2ne_2\}.$$

Hier wird $(n-2)e_1 e_2 - 3ne_3 = \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \ldots$; setzt man für $(n-1)e_1^2 - 2ne_2$ gemäß (8) seinen Wert ein und berücksichtigt, daß

$$\begin{aligned} & n(\alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n) - (n-2)e_1 \\ & = (\alpha_3 - \alpha_1) + (\alpha_4 - \alpha_1) + \ldots + (\alpha_n - \alpha_1) \\ & + (\alpha_3 - \alpha_2) + (\alpha_4 - \alpha_2) + \ldots + (\alpha_n - \alpha_2), \end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3} \cdot \dfrac{n^3(n-1)(n-2)}{2} \\ \qquad \equiv \sum(\alpha_{li} + \alpha_{lk})\alpha_{ik}^2; \end{cases}$$

wo das Indextripel (i, k, l) alle Kombinationen zur dritten Klasse von $1, 2, \ldots, n$ passiert.

Um jetzt allgemein zu entscheiden, ob eine beliebige Schiebungsinvariante von f bez. x als alleinige Funktion der Wurzeldifferenzen α_{ik} darstellbar ist, frage man nach dem Zusammenhange zwischen den beiden Differentialprozessen:

$$\nabla_\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha_i}, \quad \text{und} \quad \nabla_a \equiv a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n},$$

(s. § 11, S. 187).

Nach § 20 [(25), (26)] bestehen zwischen den elementarsymmetrischen Verbindungen $e_1 = \sum \alpha_1$, $e_2 = \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots$, $e_r = \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$, $\ldots$, $e_n = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ und den Koeffizienten a_i von f (1) die Relationen:

$$(10) \begin{cases} -n_1 a_1 \equiv a_0 e_1, \quad +n_2 a_2 \equiv a_0 e_2, \quad -n_3 a_3 = a_0 e_3, \quad \ldots, \\ \qquad (-1)^r n_r a_r \equiv a_0 e_r, \quad \ldots, \quad (-1)^n a_n = a_0 e_n, \end{cases}$$

die als identisch erfüllt anzusehen sind, wenn man $a_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ als unabhängige Variable annimmt. Man gelangt daher wiederum zu identischen Relationen, wenn man (10) nach irgendeinem der α, z. B. α_1 partiell differenziert:

$$(11)\quad \begin{cases} -n_1 \dfrac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} \equiv a_0 , \quad + n_2 \dfrac{\partial a_2}{\partial \alpha_1} \equiv a_0 \sum \alpha_2 , \\ -n_3 \dfrac{\partial a_3}{\partial \alpha_1} \equiv a_0 \sum \alpha_2 \alpha_3 , \quad \ldots , \\ (-1)^r n_r \dfrac{\partial a_r}{\partial \alpha_1} \equiv a_0 \sum \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_r , \quad \ldots , \\ (-1)^{n-1} n_1 \dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial \alpha_1} \equiv a_0 \sum \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1} , \\ (-1)^n \dfrac{\partial a_n}{\partial \alpha_1} \equiv a_0 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n , \end{cases}$$

wo die rechts auftretenden Summen nichts anderes sind als die elementarsymmetrischen Verbindungen der α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Entsprechend erhält man $n-1$ zu (11) parallel laufende Systeme, wenn man (10) sukzessive nach $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ differenziert.

Summiert man alsdann in all diesen Systemen die jeweils an derselben, $r$ten, Stelle befindlichen Gleichungen, so tritt rechts die Summe von $n_{r-1}(n-r+1)$ Produkten aus je $r-1$ der Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ auf; da die letzteren aber symmetrisch vorkommen, so resultiert die Verbindung e_{r-1} genau $(n-r+1)$mal, und man hat:

$$(12)\quad \begin{cases} -n_1 \sum\limits_i \dfrac{\partial a_1}{\partial \alpha_i} \equiv n\, a_0 , \quad n_2 \sum\limits_i \dfrac{\partial a_2}{\partial \alpha_i} \equiv (n-1)\, e_1 , \\ -n_3 \sum\limits_i \dfrac{\partial a_3}{\partial \alpha_i} \equiv (n-2)\, e_2 , \quad \ldots , \\ (-1)^r n_r \sum\limits_i \dfrac{\partial a_r}{\partial \alpha_i} \equiv (n-r+1)\, e_{r-1} , \quad \ldots , \\ (-1)^{n-1} \sum\limits_i \dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial \alpha_i} \equiv 2 e_{n-2} , \quad (-1)^n \sum\limits_i \dfrac{\partial a_n}{\partial \alpha_i} \equiv 1 \cdot e_{n-1} , \end{cases}$$

wo der Index i jedesmal von 1 bis n läuft.

Hier drücke man die e gemäß (10) wieder durch die a aus, so geht das System (12) über in:

$$(13)\quad \begin{cases} -n_1\sum\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_i}\equiv a_0 n_1, \quad n_2\sum\frac{\partial a_2}{\partial\alpha_i}\equiv -n_1(n-1)\,a_1, \\ -n_3\sum\frac{\partial a_3}{\partial\alpha_i}\equiv n_2(n-2)\,a_2, \quad \ldots, \\ (-1)^r n_r\sum\frac{\partial a_r}{\partial\alpha_i}\equiv(-1)^{r-1}n_{r-1}(n-r+1)\,a_{r-1}, \quad \ldots, \\ (-1)^n\sum\frac{\partial a_n}{\partial\alpha_i}\equiv(-1)^{n-1}n_1 a_{n-1}. \end{cases}$$

Nun ist $n_{r-1}(n-r+1)=r\,n_r$; somit hebt sich in (13) jeweils links und rechts der Faktor n_r weg, und die Serie (13) zieht sich zusammen auf die folgende:

$$(14)\quad \begin{cases} \sum\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_i}\equiv -a_0, \quad \sum\frac{\partial a_2}{\partial\alpha_i}\equiv -2\,a_1, \quad \ldots, \\ \sum\frac{\partial a_r}{\partial\alpha_i}\equiv -r\,a_{r-1}, \quad \ldots, \quad \sum\frac{\partial a_n}{\partial\alpha_i}\equiv -n\,a_{n-1}. \end{cases}$$

Sieht man jetzt statt der $a_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ als unabhängige Variable an, so gilt:

$$(15)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\equiv\frac{\partial}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha_i}+\ldots+\frac{\partial}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial\alpha_i},$$

und nach Summation über $i=1, 2, \ldots, n$:

$$(15')\quad \sum\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\equiv\frac{\partial}{\partial a_1}\sum\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial}{\partial a_2}\sum\frac{\partial a_2}{\partial\alpha_i}+\ldots+\frac{\partial}{\partial a_n}\sum\frac{\partial a_n}{\partial\alpha_i}.$$

Setzt man hier die Werte (14) ein, so ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zwischen den beiden Prozessen

$$\nabla_\alpha=\sum\frac{\partial}{\partial\alpha_i} \text{ und } \nabla_a=a_0\frac{\partial}{\partial a_1}+2\,a_1\frac{\partial}{\partial a_2}+\ldots+n\,a_{n-1}\frac{\partial}{\partial a_n}$$

in der einfachen Gestalt:

$$(\text{II})\qquad -\nabla_\alpha\equiv\nabla_a.$$

Mit Rücksicht auf Satz I und § 11 gilt daher:

Satz II. „Führt man in einer beliebigen Funktion J der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ einer Urform $f(x)$ die neuen Variabeln $a_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ein, wo die α die Wurzeln von f sind, so geht der linear-partielle Schiebungsprozeß bez. x:

$$V_a \equiv a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2\,a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + n\,a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}$$

über in $-V_\alpha \equiv -\sum \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$. Die Identität $\sum \frac{\partial J}{\partial \alpha_i} \equiv 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $J(a_0;\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ eine Schiebungsinvariante von f bez. x ist, und zugleich dafür, daß J von (a_0 und) den Wurzeldifferenzen $\alpha_{ik} = \alpha_i - \alpha_k$ allein abhängt."

Die Identität (II) läßt sich auf Grund des Begriffes einer Schiebungsinvariante J bez. x einfacher ableiten. Eine solche ändert sich nicht, wenn auf die Urform $f(x)$ eine Schiebung $A_1(h): x = x' + h$ ausgeübt wird. Damit erleidet zugleich jede Wurzel α von f die kogrediente Schiebung $\alpha = \alpha' + h$, während a_0 ungeändert bleibt. Faßt man also J als Funktion der $a_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ auf, so ist J als Schiebungsinvariante von f bez. x charakterisiert durch die Identität:

$$(16)\quad J[a_0;\, \alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n'] \equiv J[a_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]\,.$$

Da aber $\alpha_i' = \alpha_i - h$, so liefert das Maclaurinsche Gesetz für die linke Seite von (16) die in h identische Entwicklung:

$$(17)\quad \begin{cases} J[a_0;\, \alpha_i'] \equiv J - h \sum \dfrac{\partial J}{\partial \alpha_i} + \dfrac{1}{2} h^2 \sum \dfrac{\partial^2 J}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_k} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{3!} h^3 \sum \dfrac{\partial^3 J}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_k\, \partial \alpha_l} + \ldots, \end{cases}$$

wo das Zeichen J die ursprüngliche Funktion

$$J[a_0;\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$$

bedeutet.

Infolge der Voraussetzung (16) muß in (17) zunächst der Koeffizient von h rechterhand identisch verschwinden, d. h. die Bedingung $V_\alpha \equiv \sum \frac{\partial J}{\partial \alpha_i} \equiv 0$ ist notwendig, damit J eine Schiebungsinvariante von f bez. x wird. Aber es erhellt ohne weiteres, daß das Verschwinden von $\sum \frac{\partial J}{\partial \alpha_i}$ zugleich das der Koeffizienten von h^2, h^3, ... in (17) nach sich zieht. Denn übt man den Prozeß $\nabla_\alpha \equiv \sum \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$ bei willkürlich gedachter Funktion abermals auf ∇_α aus usf., so kommt:

$$(18)\quad \begin{cases} \nabla_\alpha(\nabla_\alpha) \equiv \nabla_\alpha^2 \equiv \sum \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_k}, \\ \nabla_\alpha(\nabla_\alpha^2) \equiv \nabla_\alpha^3 \equiv \sum \dfrac{\partial^3}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_k\, \partial \alpha_l}, \quad \ldots, \end{cases}$$

so daß sich für eine beliebige Funktion $J[a_0\,;\ \alpha_i] \equiv J$ nach Ausübung der Schiebung $A_1(h)$ auf $f(x)$ die Entwicklung ergibt:

$$\text{(III)}\quad J[a_0\,;\ \alpha_i'] \equiv J - h\nabla_\alpha J + \frac{h^2}{2!}\nabla_\alpha^2 J - \frac{h^3}{3!}\nabla_\alpha^3 J + \ldots$$

Führt man schließlich die alten Variabeln a_0, $a_1, \ldots, a_n$ wieder ein, so geht vermöge (II) die Reihe (III) über in:

$$\text{(III')}\quad \begin{cases} J[a_0,\ a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_n'] \equiv J + h\nabla_\alpha J + \dfrac{h^2}{2!}\nabla_\alpha^2 J \\ \qquad\qquad + \dfrac{h^3}{3!}\nabla_\alpha^3 J + \ldots, \end{cases}$$

d. i. aber die grundlegende Entwicklung (VII') des § 11, S. 195:

Satz III. „Auf Grund der Entwicklung (III) ergibt sich einmal von neuem die Richtigkeit der Identität (II), zugleich aber auch die der Entwicklung (VII') des § 11."

Die vorstehenden Darlegungen lassen sich unmittelbar auf ein System von Urformen $f_n(x)$, $g_p(x)$, $h_q(x)$, ... mit den Koeffizientenreihen (a), (b), (c), ... und den Wurzelreihen (α), (β), (γ), ... ausdehnen.

Bezeichnet man jetzt genauer nach der Maßgabe:

$$(19)\begin{cases}\sum \dfrac{\partial}{\partial \alpha_i} \equiv \nabla_\alpha\,, \quad \sum \dfrac{\partial}{\partial \beta_i} \equiv \nabla_\beta\,, \quad \ldots,\\ \nabla_a \equiv a_0 \dfrac{\partial}{\partial a_1} + 2\,a_1 \dfrac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + n\,a_{n-1} \dfrac{\partial}{\partial a_n}\,,\\ \nabla_b \equiv b_0 \dfrac{\partial}{\partial b_1} + 2\,b_1 \dfrac{\partial}{\partial b_2} + \ldots + p\,b_{p-1} \dfrac{\partial}{\partial b_p}\,, \quad \ldots,\end{cases}$$

so tritt an die Stelle von (II) das System der Identitäten:

(II′) $$-\nabla_\alpha \equiv \nabla_a\,, \quad -\nabla_\beta \equiv \nabla_b\,, \quad \ldots,$$

deren Addition liefert:

(II″) $$-(\nabla_\alpha + \nabla_\beta + \ldots) \equiv \nabla_a + \nabla_b + \ldots,$$

oder kürzer:

(II″) $$-\sum_f \nabla_\alpha \equiv \sum_f \nabla_a\,.$$

Demnach ist jetzt $\sum\limits_f \nabla_\alpha J \equiv 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$J[a_0\,,\ \alpha_i\,;\ b_0\,,\ \beta_k\,;\ c_0\,,\ \gamma_k\,;\ \ldots]$$

eine simultane Schiebungsinvariante des Systems $f, g, h, \ldots$ bez. x ist, und zugleich dafür, daß J außer von den a_0, b_0, c_0, ... nur von den Differenzen abhängt, die die Reihen der (α), (β), (γ), ... sowohl unter sich, wie miteinander bilden.

Die Erweiterung der Identitäten (III), (III′) ergibt sich von selbst, man hat rechterhand nur den Prozeß ∇_α zu ersetzen durch $\sum\limits_f \nabla_\alpha$.

Legt man andererseits die zweite Produktzerlegung von f in (1) zugrunde und schreibt wieder homogen $f(x_1, x_2)$, so erfordert die Untersuchung der Schiebungsinvarianten von f bez. x_2 nur die Abänderung, daß a_0 mit a_n, und jede Wurzel α mit ihrem reziproken Werte vertauscht wird.

Soll eine Funktion $J[a_0\,;\ \alpha_i] \equiv J\left[a_n\,;\ \dfrac{1}{\alpha_i}\right]$ gleichzeitig eine Schiebungsinvariante von f bez. x_1 und x_2 und damit nach § 11, S. 184 eine unimodulare Invariante von f

sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß sich J sowohl in Funktion von a_0 und den $\alpha_i - \alpha_k$ wie in Funktion von a_n und den $\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_k}$ ausdrücken läßt.

Wir wollen uns im folgenden auf solche Seminvarianten und vollständige Invarianten beschränken, die in den Koeffizienten der Urformen ganzrational sind.

Im Falle einer Urform $f(1)$ war nach § 14, S. 238 eine solche Seminvariante J, von den Gewichten w_1, w_2 bez. x_1, x_2, eine Schiebungsinvariante bez. x_1 von der Struktur:

$$J \equiv \sum c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}, \tag{20}$$

für die die beiden Gewichtsrelationen erfüllt waren:

$$n\,\varepsilon_0 + (n-1)\,\varepsilon_1 + \dots + 1 \cdot \varepsilon_{n-1} \equiv \sum (n-i)\,\varepsilon_i = w_1\,, \tag{21a}$$

$$1 \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2 + \dots + n\,\varepsilon_n \equiv \sum i\,\varepsilon_i = w_2\,, \tag{21b}$$

und damit auch die Dimensionsrelation:

$$n \sum \varepsilon_i = w_1 + w_2\,. \tag{22}$$

Führt man in (20) vermöge (10) die elementarsymmetrischen Funktionen e_i der Wurzeln von f ein — wo letztere jetzt lieber mit $\alpha, \beta, \dots, \nu$ bezeichnet seien — so nimmt die Entwicklung (20) die Gestalt an:

$$J \equiv \sum b\, a_0^{\sum \varepsilon_i} e_1^{\varepsilon_1} e_2^{\varepsilon_2} \dots e_n^{\varepsilon_n}, \tag{23}$$

wo die b wiederum numerische Faktoren sind.

Setzt man hier für die e_i ihre Ausdrücke in den Wurzeln ein, und denkt sich J nach den letzteren entwickelt, so wird (23) zu einem Aggregat von dem Charakter:

$$J \equiv \sum D\, a_0^{\varkappa_0} \alpha^{\varepsilon_\alpha} \beta^{\varepsilon_\beta} \dots \nu^{\varepsilon_\nu}\,. \tag{24}$$

Die Vergleichung mit (23) lehrt einmal, unter Berücksichtigung von (22), die Konstanz des Exponenten $\varkappa_0$:

$$\varkappa_0 = \sum \varepsilon_i\,, \quad n\,\varkappa_0 = w_1 + w_2\,; \tag{25}$$

andererseits, daß der Gesamtgrad in den Wurzeln für jedes Glied von J den gemäß (21b) ebenfalls konstanten Wert besitzt:

$$\sum \varepsilon_\alpha = \sum i\,\varepsilon_i = w_2\,, \tag{26}$$

d. h. daß J in den Wurzeln von f homogen ist von der Dimension w_2.

Nun sollte J zugleich eine Schiebungsinvariante von f bez. x_1 sein, also nach Satz I, und auf Grund der Relationen (10), von der in den Wurzeln symmetrischen Gestalt:

$$J \equiv \sum C\, a_0^{\varkappa_0} (\alpha - \beta)^{\varepsilon_{\alpha\beta}} (\alpha - \gamma)^{\varepsilon_{\alpha\gamma}} (\beta - \gamma)^{\varepsilon_{\beta\gamma}} \ldots \tag{27}$$

Hier ist der Exponent von a_0, da er mit dem in (24) auftretenden übereinstimmen muß, mit $\varkappa_0$ bezeichnet; denkt man sich die Glieder in (27) nach den Wurzeln entwickelt, so muß die Bildung (24) hervorgehen, so daß die Summe der Exponenten $\varepsilon_{\alpha\beta}$ identisch ist mit der Summe der Exponenten ε_α:

$$\sum \varepsilon_{\alpha\beta} = \sum \varepsilon_\alpha = w_2 \,. \tag{28}$$

Für $w_1 = w_2$, und nur dann (vgl. § 12, S. 202) wird J zur vollständigen Invariante.

Die Ausdehnung auf ein System von Urformen f_n, g_p, h_q, ... mit den Koeffizienten a_i, b_k, c_l, ... erfordert einige Modifikationen. Versteht man in der zu (20) analogen Entwicklung von J unter ε_i, η_k, ζ_l, ... jeweils die Exponenten von a_i, b_k, c_l, ..., so erweitern sich nach § 12, S. 200 die Gewichtsrelationen (21) zu:

$$\sum (n - i)\, \varepsilon_i + \sum (p - k)\, \eta_k + \ldots = w_1 \,, \tag{21a'}$$

$$\sum i\, \varepsilon_i \qquad + \sum k\, \eta_k \qquad + \ldots = w_2 \,; \tag{21b'}$$

und die Dimensionsrelation (22) zu:

$$n \sum \varepsilon_i + p \sum \eta_k + \ldots = w_1 + w_2 \,. \tag{22'}$$

Andererseits wird wiederum der Gesamtgrad von J in den Wurzeln von f, g, h, ... die linke Seite von (21b'), mithin gleich w_2, und dieser Gesamtgrad ist derselbe wie der in den Differenzen, welche die Wurzeln der Urformen je unter sich und miteinander bilden.

Damit ist bewiesen:

Satz IV. „Soll eine als ganze Funktion der $a_0, b_0, c_0, \ldots$ und der Wurzeldifferenzen vorgelegte Schiebungsinvariante J eines Systems von Urformen f_n, g_p, h_q, ... bez. x_1 eine in deren Koeffizienten ganzrationale Seminvariante sein, mit den Gewichten w_1, w_2, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß J in den einzelnen Wurzelreihen symmetrisch ist, ferner in den sämtlichen auftretenden Wurzeldifferenzen homogen von der Dimension w_2, endlich, daß die Exponenten $\varkappa_0$, λ_0, μ_0, ... der a_0, b_0, c_0, ... in irgendeinem Gliede von J an die Relation gebunden sind:

$$n\varkappa_0 + p\lambda_0 + q\mu_0 + \ldots = w_1 + w_2 .$$

Für $w_1 = w_2$, und nur dann, wird die Seminvariante zu einer vollständigen Invariante."

Die Kovarianten K ordnen sich, wie in § 13, S. 215, als Spezialfall ein; führt K eine oder mehrere Reihen von kogredienten Variabeln x_1', x_2'; x_1'', x_2''; ... mit sich, so hat man nur dem Systeme der Urformen eine ebenso große Anzahl von Linearformen mit den Koeffizienten x_1', x_2'; x_1'', x_2''; ... zu adjungieren, um K als Invariante des so erweiterten Systems zu erhalten.

Daß für eine vollständige Invariante J neben der in (27) vorliegenden Wurzeldarstellung eine zweite, gleichberechtigte in den reziproken Werten existiert, läßt sich leicht bestätigen, wobei zugleich Satz IV eine Ergänzung erfährt.

Sei wiederum im Falle einer Urform $f_n(1)$ die Darstellung (27) von J zugrunde gelegt. Man bezeichne die reziproken Werte der Wurzeln von f mit ϱ_α, ϱ_β, ..., ϱ_ν. Dann besteht für irgendein Potenzprodukt in J die Identität:

$$(29)\quad \begin{cases} a^{\varkappa_0}(\alpha-\beta)^{\varepsilon_{\alpha\beta}}(\alpha-\gamma)^{\varepsilon_{\alpha\gamma}}(\beta-\gamma)^{\varepsilon_{\beta\gamma}}\ldots \\ \equiv (-1)^{w_2} a_0^{\varkappa_0}\cdot\alpha^{\varepsilon_{\alpha\beta}}\beta^{\varepsilon_{\alpha\beta}}\cdot\alpha^{\varepsilon_{\alpha\gamma}}\gamma^{\varepsilon_{\alpha\gamma}}\cdot\beta^{\varepsilon_{\beta\gamma}}\gamma^{\varepsilon_{\beta\gamma}}\ldots \\ \cdot(\varrho_\alpha-\varrho_\beta)^{\varepsilon_{\alpha\beta}}(\varrho_\alpha-\varrho_\gamma)^{\varepsilon_{\alpha\gamma}}(\varrho_\beta-\varrho_\gamma)^{\varepsilon_{\beta\gamma}}\ldots, \end{cases}$$

wo gemäß (25) und (28) $n\varkappa_0 = w_1 + w_2$, $\sum\varepsilon_{\alpha\beta} = w_2$ ist.

Nun darf sich J (vgl. § 12, Satz IV, S. 202) als vollständige Invariante bei Vertauschung symmetrisch gelegener Koeffizienten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, bei Vertauschung von a_0 mit a_n, α mit ϱ_α, β mit ϱ_β usf. nur um den Faktor $(-1)^{w_2}$ ändern. Somit muß in dem Wurzelprodukt auf der rechten Seite von (29) jede Wurzel gleich oft, nämlich $\varkappa_0$mal, auftreten, es ist also, für $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$ usw.:

$$(30)\quad \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\gamma} + \ldots + \varepsilon_{\alpha\nu} \\ = \varepsilon_{\beta\alpha} + \varepsilon_{\beta\gamma} + \ldots + \varepsilon_{\beta\nu} = \ldots = \dfrac{2w_2}{n} = \varkappa_0 . \end{cases}$$

In der Tat sagt die Gleichheit $n\varkappa_0 = w_1 + w_2 = 2\,w_2$ nichts anderes aus, als $w_1 = w_2 = w$, wie es für eine vollständige Invariante sein muß. Damit erfährt die linke Seite von (29) die verlangte Umformung:

$$(31)\quad \begin{cases} a_0^{\varkappa_0}(\alpha-\beta)^{\varepsilon_{\alpha\beta}}(\alpha-\gamma)^{\varepsilon_{\alpha\gamma}}(\beta-\gamma)^{\varepsilon_{\beta\gamma}}\dots \\ =(-1)^w a_n^{\varkappa_0}(\varrho_\alpha-\varrho_\beta)^{\varepsilon_{\alpha\beta}}(\varrho_\alpha-\varrho_\gamma)^{\varepsilon_{\alpha\gamma}}(\varrho_\beta-\varrho_\gamma)^{\varepsilon_{\beta\gamma}}\dots, \end{cases}$$

und entsprechend die linke Seite von (27).

Die Übertragung auf ein System von Urformen vollzieht sich ohne weiteres. Sind wiederum $\varkappa_0, \lambda_0, \mu_0, \dots$ die Exponenten von $a_0, b_0, c_0, \dots$ in der zu (29) analogen Relation, so muß jede Wurzel von f $\varkappa_0$mal, jede Wurzel von g $\lambda_0$mal usw. auftreten, wo zwischen den $\varkappa_0$, λ_0, $\mu_0, \dots$ und den Ordnungen $n, p, q, \dots$ nur die Relation besteht:

$$(32)\qquad n\varkappa_0 + p\lambda_0 + q\mu_0 + \dots = 2\,w.$$

Der Satz IV vervollständigt sich demnach dahin:

Satz IVa. „Eine vollständige, in den Koeffizienten von Urformen $f_n, g_p, h_q, \dots$ ganzrationale Invariante J läßt sich als ganze Funktion der a_0, $b_0, c_0, \dots$, sowie der Wurzeldifferenzen auf eine solche Normalgestalt bringen, daß in irgendeinem Gliede jede Wurzel irgendeiner Urform gleich oft auftritt, nämlich ebensooft, wie durch den Exponenten des bezüglichen ersten Koeffizienten angegeben wird."

Daß eine derartige Normalgestalt von J nicht immer von vornherein auftritt, ist leicht zu erkennen. Denn liegt umgekehrt J in Normalgestalt vor, so hat man nur z. B. eine Differenz $\alpha-\beta$ durch $(\gamma-\beta)-(\gamma-\alpha)$ zu ersetzen und von neuem nach Differenzen zu ordnen, um die Normaleigenschaft der ersten Darstellung zu zerstören.

Zum Schlusse mögen noch die in § 11, S. 195 und § 12, S. 204 für eine vollständige Invariante J aufgestellten charakteristischen, linearen partiellen Differentialgleichungen in „Wurzelgestalt" dargestellt werden*). Um diese Aufgabe einfach und übersichtlich zu lösen, mache man, wie früher

*) S. F. Brioschi, Ann. fis. mat. 5 (1854), p. 409.

die Variable x, jetzt auch die Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ von f_n homogen, indem man setze:

$$\alpha\,\alpha_2 = \alpha_1\,, \quad \beta\,\beta_2 = \beta_1\,, \quad \ldots, \quad \nu\,\nu_2 = \nu_1\,. \tag{33}$$

Für J liege wiederum die Darstellung (27) in Wurzeldifferenzen zugrunde, wo jede Wurzel von f gleich oft auftritt. Dann schreibt sich J homogen nach der einfachen Vorschrift, daß jede Wurzeldifferenz $\alpha - \beta$ durch den bezüglichen „Klammerfaktor“ $(\alpha\,\beta) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ ersetzt wird:

$$J = a_0^{\varkappa_0} \sum c\,(\alpha\,\beta)^{\varepsilon_{\alpha\beta}}\,(\alpha\,\gamma)^{\varepsilon_{\alpha\gamma}}\,(\beta\,\gamma)^{\varepsilon_{\beta\gamma}} \ldots \tag{34}$$

Als Schiebungsinvariante von f bez. x_1 genügte J der Bedingung:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial \beta} + \ldots + \frac{\partial J}{\partial \nu} = 0\,. \tag{I}$$

Um auch diese Bedingung homogen zu schreiben, fasse man die $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1$ statt der $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ als neue unabhängige Variable auf, während die $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \nu_2$ nur die Rolle von willkürlichen Konstanten spielen. Dann wird z. B. $\dfrac{\partial J}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial J}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} = \alpha_2\dfrac{\partial J}{\partial \alpha_1}$, und (I) lautet in homogener Gestalt:

$$\alpha_2\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} + \beta_2\frac{\partial J}{\partial \beta_1} + \ldots \equiv \sum_\alpha \alpha_2\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} = 0\,. \tag{Ia}$$

Soll zum Ausdruck gebracht werden, daß J auch Schiebungsinvariante bez. x_2 ist, so hat man nur je zwei symmetrisch gelegene Koeffizienten a_i und a_{n-i} zu vertauschen, oder, was hier für die homogenen Wurzeln auf dasselbe hinausläuft, die Indizes 1 und 2. Demnach existiert die zu (Ia) parallele Bedingung:

$$\alpha_1\frac{\partial J}{\partial \alpha_2} + \beta_1\frac{\partial J}{\partial \beta_2} + \ldots \equiv \sum_\alpha \alpha_1\frac{\partial J}{\partial \alpha_2} = 0\,. \tag{Ib}$$

Sodann war J in den $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ homogen von der Dimension w, mithin jetzt auch in den $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1$; dann aber liefert der Eulersche Satz die Bedingung:

$$\alpha_1\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} + \beta_1\frac{\partial J}{\partial \beta_1} + \ldots \equiv \sum_\alpha \alpha_1\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} \equiv wJ\,, \tag{Ic}$$

und, wiederum parallel laufend, bei Vertauschung der Indizes 1 und 2:

$$\text{(Id)} \qquad \alpha_2 \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} + \beta_2 \frac{\partial J}{\partial \beta_2} + \ldots \equiv \sum_\alpha \alpha_2 \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} \equiv w J\,.$$

Bei einem Systeme von Urformen f_n, g_p, h_q, ... tritt nur die Modifikation ein, daß die linken Seiten von (Ia) bis (Id) jeweils der Reihe nach hinsichtlich der Wurzeln der einzelnen Urformen zu bilden und dann zu summieren sind. Es gilt daher:

Satz V. „Den vier charakteristischen, linearen partiellen Differentialgleichungen des Satzes III in § 12 für eine vollständige Invariante J eines Systems von Urformen korrespondieren in Wurzelgestalt die Bedingungen (Ia) bis (Id), wobei die Summen jeweils über die Wurzeln aller Urformen zu erstrecken sind.“

Die Kovarianten ordnen sich wiederum genau wie bei Satz IV als Spezialfall ein.

Beim Satze V ist stillschweigend vorausgesetzt, daß J als ganze Funktion der Wurzelreihen der Urformen je symmetrisch ist; alsdann sind die Bedingungen (Ia) bis (Id) auch charakteristisch für eine in den Koeffizienten der Urformen ganzrationale Invariante.

Hebt man jene Voraussetzung auf, so bleiben zwar die Eigenschaften der Invarianz von J erhalten, nur daß J dann zu einer in den Koeffizienten irrationalen Invariante wird.

Sei etwa J im Falle einer Urform f_n eine ganzrationale Funktion der Wurzeln α, β, ..., ν, die aber nicht mehr symmetrisch in ihnen ist. Vielmehr nehme J bei allen Vertauschungen der Wurzeln λ verschiedene Werte J_1, J_2, ..., J_λ an, so sind die elementarsymmetrischen Funktionen der J_1, J_2, ..., J_λ nach § 21 wieder in den Wurzeln symmetrisch (und ganzrational) und erfüllen im übrigen alle Eigenschaften der Invarianz, sind also nach obigem Invarianten von f, die in deren Koeffizienten ganzrational sind.

Demnach ist J gemäß § 18, S. 302 eine irrationale Invariante, denn sie genügt einer Gleichung λten Grades:

$$\text{(35)} \qquad (J - J_1)(J - J_2) \ldots (J - J_\lambda) = 0\,,$$

deren Koeffizienten rationale Invarianten sind.

Ein entsprechender Satz läßt sich ableiten, wenn J durch eine rationale oder sogar eine irrationale Funktion der Wurzeln bestimmt ist.

Aufgabe 1. Unter der Resultante $R = R_{fg}$ zweier Formen

$$\begin{aligned} f_n &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \\ &= a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n), \\ g_m &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m \\ &= b_0 (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_m) \end{aligned}$$

versteht man den Ausdruck (1) $R = a_0^m b_0^n \prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$, wo sich das Produkt Π auf alle Differenzen je eines α und je eines β erstreckt. $R = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Formen f und g eine gemeinsame Wurzel besitzen (vgl. den besonderen Fall $m = n = 2$ in § 3, S. 19, 20).

R ist eine ganzrationale Funktion der a_i und b_k, in beiden Größenreihen homogen von der Dimension m resp. n. Um R in den a_i, b_k darzustellen, eliminiere man mit J. J. Sylvester*) die Potenzen $x^0, x^1, \ldots, x^{m+n-1}$ aus den $m + n$ Gleichungen $f = 0, xf = 0, \ldots, x^{m-1}f = 0; g = 0, xg = 0, \ldots, x^{n-1}g = 0$, so ergibt sich R, abgesehen vom Vorzeichen, als eine $(m + n)$reihige Determinante von einfachem Aufbau. Die erste Reihe besteht aus a_0, $a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots$; die zweite aus $0, a_0, a_1, \ldots, a_n$, $0, 0, \ldots$ usf. bis zur $m$ten Reihe, die mit $m - 1$ Nullen beginnt, auf die $a_0, a_1, \ldots, a_n$ folgen. Sodann hat man den entsprechenden Prozeß mit den b_k vorzunehmen.

Für $m = n$ gestattet R nach Et. Bézout**) eine einfachere Darstellung als eine n-reihige Determinante. Versteht man unter f_r den Ausdruck $f_r = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r$ $(r < n)$ und entsprechend g_r, so bilde man die n Gleichungen $n$ter Ordnung in x:

$$\begin{gathered} b_0 f - a_0 g = 0, \quad g_1 f - f_1 g = 0, \\ g_2 f - f_2 g = 0, \ \ldots, \ g_{n-1} f - f_{n-1} g = 0, \end{gathered}$$

und eliminiere die Potenzen $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$.

*) Philos. Magazine 1840, Nr. 101; vgl. F. J. Richelot, Journ. für Math. 21 (1840), S. 226.

**) Paris Mém. 1764, S. 286.

Setzt man $p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$, und versteht unter dem Gewichte von p_{ik} die Zahl $i + k$, so erhält man R, wiederum bis auf das Vorzeichen, als eine n-reihige symmetrische Determinante von folgendem Aufbau.

Man rahme die Determinante der Reihe nach durch Quadrate ein. Das erste (äußerste) Quadrat wird gebildet durch die erste und letzte ($n$te) Reihe und Kolonne, das zweite Quadrat durch die zweite und vorletzte [$(n-1)$te] Reihe und Kolonne, usf. Die Elemente, die im Rahmen des $i$ten Quadrates stehen, sind Aggregate von i der Größen p, und zwar befindet sich an der Stelle der $i$ten Reihe und $k$ten Kolonne ($k \geqq i$) das Element

$$d_{ik} = p_{0,i+k-1} + p_{1,i+k-2} + p_{2,i+k-3} + \cdots + p_{i-1,k},$$

wo alle Glieder das Gewicht $i + k - 1$ besitzen, während hieraus das Element $d_{n-i,n-k}$ hervorgeht, indem man in jedem der auftretenden p die beiden Indizes durch ihre Ergänzungen zu n ersetzt. Es ist stets $d_{ik} = d_{ki}$. Hieraus erhellt sofort der Charakter der Resultante von f_n und g_n als Kombinante von f und g (vgl. § 4, S. 28). Danach ist $R_{\lambda_1 f + \mu_1 g, \lambda_2 f + \mu_2 g} = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)^n R_{fg}$, da jede der Größen p_{ik} den Faktor $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ annimmt.

Auf diesen Fall $m = n$ läßt sich der von zwei ungleichen Ordnungen n, m ($n > m$) zurückführen, indem man in der Form g_n die ersten $n - m$ Koeffizienten gleich Null setzt. Alsdann läßt sich aus der Bézoutschen Determinante der Faktor a_0^{n-m} abspalten, und die verbleibende n-reihige Determinante ist wiederum die Resultante R_{fg}.

Aufgabe 2. Unter der Diskriminante D einer Form

$$\begin{aligned} f_n &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \\ &= a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \end{aligned}$$

versteht man den Ausdruck (2) $D = a_0^{2(n-1)} \prod\limits_{i,k} (\alpha_i - \alpha_k)^2$, wo sich das Produkt Π auf alle $\dfrac{n(n-1)}{2}$ Kombinationen i, k der Indizes $1, 2, \ldots, n$ zur zweiten Klasse erstreckt. D ist ganz und homogen in den a_i von der Dimension $2(n-1)$. Um D in der letzteren Gestalt darzustellen, mache man f homogen: $f = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n$

und bilde $f_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $f_2 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Dann stimmt D, bis auf das Vorzeichen, mit der Resultante von f_1 und f_2 überein, und es lassen sich die in Aufgabe 1 angegebenen Regeln anwenden. Im besonderen ist dies Verfahren im Falle $n = 3$ auszuführen, wo D, bis auf einen Zahlenfaktor, mit der in Aufgabe 1 zum Anhange von Abschnitt I erwähnten Invariante R von f_3 übereinstimmt. $D = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Wurzeln von f zusammenfallen.

Aufgabe 3. Die bilineare Invariante H_{fg} (vgl. Aufgabe 5 zum Anhange des Abschnittes I) zweier Formen gleicher Ordnung

$$\begin{aligned} f &= a_0 x^n + n_1 a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \\ &= a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n), \\ g &= b_0 x^n + n_1 b_1 x^{n-1} + \dots + b_n \\ &= b_0 (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n) \end{aligned}$$

läßt sich nach folgendem Gesetz durch die Wurzeln α_i, β_k darstellen.

Man bilde das Produkt

$$P_0 = (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) \dots (\alpha_n - \beta_n), \tag{3}$$

halte hierin die Indizes der α fest und permutiere die Indizes der β auf alle $n!$ Arten. Die mit $a_0 b_0$ multiplizierte Summe aller dieser Produkte stimmt, bis auf das Vorzeichen, mit H_{fg} überein:

$$\pm H_{fg} = a_0 b_0 \sum (\alpha_1 - \beta_{i_1})(\alpha_2 - \beta_{i_2}) \dots (\alpha_n - \beta_{i_n}).$$

Dividiert man mit irgendeinem der Produkte P, etwa dem Ausgangsprodukte P_0 durch, so läßt sich die Gleichung $H_{fg} = 0$ durch lauter Dv. darstellen, die immer aus zweien der α und aus zweien der β gebildet sind.

Wie reduziert sich im Falle einer geraden Ordnung n der Ausdruck (3) für $f = g$, d. h. für die quadratische Invariante einer Form f?

Aufgabe 4. Es sind folgende In- und Kovarianten in Wurzelgestalt zu bilden und an ihnen, sowie an den Leitgliedern der Kovarianten, die Differentialgleichungen des Textes zu bestätigen (vgl. die Aufgaben 1 und 3 zum Anhange des Abschnittes I).

a) Die Invariante $i = 2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2)$ der biquadratischen Form

$$f_4 = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + \ldots + a_4 = a_0 (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_4) \,.$$

Man setze zur Abkürzung $\alpha_{ik} = \alpha_i - \alpha_k$ und führe, wie in § 8, S. 107, die Größen ein:

$$P_2 = \alpha_{12}\alpha_{34} \,, \qquad P_3 = \alpha_{13}\alpha_{42} \,, \qquad P_4 = \alpha_{14}\alpha_{23} \,, \tag{4}$$

so wird

$$\frac{12\,i}{a_0^2} = P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = 2(P_2^2 + P_2 P_3 + P_3^2) \,. \tag{5}$$

b) Die Invariante $j = 6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$ der f_4.

Man erhält:

$$\frac{2 \cdot 6^2 j}{a_0^3} = (P_2 - P_3)(P_3 - P_4)(P_4 - P_2) \,. \tag{6}$$

Für $n > 4$ werden die Bildungen i und j zu Seminvarianten von f_n; wie lautet dann die Darstellung in Wurzelgestalt?

c) Die Diskriminante D der f_4 stellt sich durch i und j vermöge der Beziehung dar:

$$D = 2^2 \cdot 6^3 (i^3 - 6 j^2) \,. \tag{7}$$

d) Die Kovariante zweiter Ordnung

$$\Delta = x^2 (a_0 a_2 - a_1^2) + \ldots$$

der kubischen Form

$$\begin{aligned} f_3 &= a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 \\ &= a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \,. \end{aligned}$$

Man erhält:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{-9}{a_0^2}\Delta &= [(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - x)]^2 \\ &\quad - (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - x)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_3 - x) \\ &\quad + [(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - x)]^2 \,. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Hier stimmt die rechte Seite überein mit der linken Seite der auf Seite 113 unter (14) angegebenen Gleichung.

In der Tat geht die fragliche Gleichung gemäß der Bedeutung von $\Delta = 0$ aus der Gleichung (5) $i = 0$ hervor, indem man eine der vier Wurzeln α, etwa α_4, als variabel ansieht.

e) Die Kovariante dritter Ordnung

$$Q = x^3(a_0^2 a_3 - 3\,a_0\,a_1\,a_2 + 2\,a_1^3) + \ldots$$

der f_3.

Man erhält:

$$(9)\quad \begin{cases} -3^3\dfrac{Q}{a_0^3} = (\alpha_{12}+\alpha_{13})(\alpha_{21}+\alpha_{23})(\alpha_{31}+\alpha_{32}) \\ \qquad = \alpha_{12}^2(\alpha_{31}+\alpha_{32}) + \alpha_{23}^2(\alpha_{12}+\alpha_{13}) \\ \qquad + \alpha_{31}^2(\alpha_{12}+\alpha_{13}). \end{cases}$$

Die rechte Seite stimmt überein mit der linken Seite der auf Seite 113 unter (V) angegebenen Gleichung. In der Tat geht die fragliche Gleichung gemäß der Bedeutung von $Q = 0$ aus der Gleichung (6) $j = 0$ hervor, indem man wiederum eines der vier α, etwa α_4, als variabel ansieht.

f) Die Funktionaldeterminante θ (§ 4, S. 25, 26)

$$\theta = \begin{vmatrix} a_0\,x + a_1\,, & b_0\,x + b_1 \\ a_1\,x + a_2\,, & b_1\,x + b_2 \end{vmatrix}$$

zweier quadratischer Formen f, g mit den Koeffizienten a_i, b_i $(i = 0, 1, 2)$ und den Wurzeln α_k, β_k $(k = 1, 2)$.

Es ist θ durch die Differenzen $x - \alpha_r$, $x - \beta_s$, $\alpha_r - \beta_s$ $(r, s = 1, 2)$ auszudrücken. Zunächst ergibt sich:

$$\frac{4\,\theta}{a_0\,b_0} = \sum(x-\alpha_r)(x-\beta_s)(\alpha_{r_1}-\beta_{s_1})$$

$$(r, s = 1, 2;\; r + r_1 = s + s_1 = 3).$$

Hieraus folgt unmittelbar eine Darstellung von θ durch vier Doppelverhältnisse:

$$\frac{4\,\theta}{a_0\,b_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(\beta_2-\beta_1)} = (x\,\beta_2\,\alpha_2\,\beta_1) + (x\,\beta_2\,\alpha_1\,\beta_1) - (x\,\beta_1\,\alpha_1\,\beta_2) - (x\,\beta_1\,\alpha_2\,\beta_2).$$

Die rechts stehenden vier Dv. lassen sich aber auf Grund der in § 8, S. 106—108 angegebenen Relationen auf nur zwei reduzieren, und es ergibt sich die Darstellung:

$$\frac{2\,\theta\,(\beta_1-\beta_2)}{a_0\,g\,(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)} \equiv (x\,\beta_1\,\beta_2\,\alpha_1) - (x\,\beta_2\,\beta_1\,\alpha_2),$$

die gleichwertig ist mit der folgenden, auch direkt mittels der Regel des § 2, S. 6 ableitbaren:

$$\frac{2\,\theta(\beta_1-\beta_2)}{a_0\,b_0} = (x-\beta_1)^2(\beta_2-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2) - (x-\beta_2)^2(\beta_1-\alpha_1)(\beta_1-\alpha_2)\,.$$

Bedeuten θ_1, θ_2 die Wurzeln von θ, so sagt jetzt das Verschwinden von θ für $x=\theta_1$, θ_2 einfach aus, daß in der Involution, bei der sich β_1 und β_2, α_1 und α_2 entsprechen, θ_1 und θ_2 die Doppelelemente sind, wie es sein muß.

g) Die trilineare Invariante H (§ 4, S. 33) dreier quadratischer Formen f, g, h mit den Koeffizienten a_i, b_i, c_i $(i=0,1,2)$ und den Wurzeln α_k, β_k, γ_k $(k=1,2)$:

$$H = |\,a_0\;a_1\;a_2\,|\,.$$

Es war

$$\frac{-2H}{a_0\,b_0\,c_0} = |\,1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_2\,| = |\,1,\ \alpha_1,\ \alpha_1\alpha_2\,| + |\,1,\ \alpha_2,\ \alpha_1\alpha_2\,|\,.$$

Hier lassen sich die beiden Teildeterminanten rechterhand nach einfacher Umgestaltung durch Wurzeldifferenzen ausdrücken; man erhält:

$$\begin{aligned}\frac{-2H}{a_0\,b_0\,c_0} &= (\alpha_1-\beta_2)(\beta_1-\gamma_2)(\gamma_1-\alpha_2) \\ &\quad+ (\alpha_2-\beta_1)(\beta_2-\gamma_1)(\gamma_2-\alpha_1) \\ &= (\alpha_1-\beta_2)(\beta_1-\gamma_2)(\gamma_1-\alpha_2) \\ &\quad- (\alpha_1-\gamma_2)(\beta_1-\alpha_2)(\gamma_1-\beta_2)\,.\end{aligned}$$

Für $H=0$ folgt hieraus ein in der Geometrie vielfach verwendetes Kriterium dafür, daß drei Elementenpaare ein und derselben Involution angehören. Dies Kriterium läßt sich auch direkt aus der in § 7, S. 97, im Anschlusse an (41) mitgeteilten Dv.-Gleichheit ableiten, wenn man festsetzt, daß sich etwa die Elemente λ_2 und μ_2 gegenseitig entsprechen sollen.

Aufgabe 6. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ sechs beliebige Elemente, so bilde man der Reihe nach die drei Funktionaldeterminanten θ_1, θ_2, θ_3 der quadratischen Formen mit den Wurzeln (λ_1, λ_2), (λ_4, λ_5); (λ_2, λ_3), (λ_5, λ_6); (λ_3, λ_4),

(λ_6, λ_1). Dann findet zwischen den drei Formen θ die lineare Identität statt:

$$(\lambda_3 - \lambda_6)\,\theta_1 + (\lambda_1 - \lambda_4)\,\theta_2 + (\lambda_2 - \lambda_5)\,\theta_3 \equiv 0\,,$$

die aussagt, daß die drei Wurzelpaare der Formen θ ein und derselben Involution angehören.

Deutet man geometrisch die sechs Elemente λ als Punkte eines Kegelschnittes, so ist die in Rede stehende Identität der Ausdruck des Pascalschen Satzes. Wie lautet die entsprechende Übertragung auf kubische Raumkurven?

Anhang.

Der Hauptsatz der binären Symbolik.*)

Die Entwicklungen des § 22 lassen eine fruchtbare Anwendung auf die Symbolik zu (siehe Anhang zu Abschnitt I).

Eine Urform $f_n(x_1, x_2)$ mit den realen Koeffizienten a_i wurde als $n$te Potenz einer symbolischen Linearform a_x, resp. b_x, c_x, ... angesetzt:

(1) $f_n(x_1, x_2) \equiv a_x^n \equiv b_x^n \equiv c_x^n \equiv \ldots,$

(2) $a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2\,,\quad b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2\,,\quad c_x \equiv c_1 x_1 + c_2 x_2\,, \ldots,$

(3) $a_i \equiv a_1^{n-i} a_2^i \equiv b_1^{n-i} b_2^i \equiv c_1^{n-i} c_2^i \equiv \ldots$

Vermöge einer linearen Substitution der x_1, x_2 von der Determinante Δ:

(4) $\qquad x_1 = A\,\xi_1 + B\,\xi_2\,,\qquad x_2 = C\,\xi_1 + D\,\xi_2$

erleiden die Symbolpaare (a), (b); ... die induzierten Substitutionen:

(5) $\qquad \alpha_1 = A\,a_1 + C\,a_2\,,\qquad \alpha_2 = B\,a_1 + D\,a_2\,;$ usw.

Dann transformiert sich irgendein Klammerfaktor $(a\,b) \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1$ gemäß der Regel:

(6) $\qquad (\alpha\,\beta) \equiv \Delta\,(a\,b)\,.$

Somit war irgendein Produkt von w Klammerfaktoren $J = (a\,b)\,(b\,c)\,(c\,a)\ldots$, in dem jedes von d Symbolpaaren

*) Siehe A. Clebsch, Journ. für Math. 59 (1861), S. 1 und S. Aronhold, Journ. für Math. 62 (1863), S. 281.

(a), (b), (c), ... genau $n$mal auftritt, gemäß (3) und (6) eine vollständige Invariante von f, in den realen Koeffizienten a_i ganzrational und homogen vom Gesamtgrade d und vom Gewichte w:

$$(7) \qquad \begin{cases} (\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha)\ldots \equiv \Delta^w (ab)(bc)(ca)\ldots, \\ \text{oder kürzer:} \quad J' \equiv \Delta^w J\,. \end{cases}$$

Da jeder Klammerfaktor zwei Symbolpaare enthält und jedes der letzteren im ganzen $n$mal vorkommt, folgt die Gewichtsrelation (5″) des § 12 (S. 200):

$$(8) \qquad 2w = nd\,.$$

Bildet man andererseits aus Klammerfaktoren und Linearformen ein Produkt von der Struktur

$$K \equiv (ab)(bc)(ca)\ldots a_x^{\eta_1} b_x^{\eta_2} c_x^{\eta_3}\ldots,$$

wo wiederum jedes der d Symbolpaare (a), (b), (c), ... genau $n$mal vorkomme und w die Anzahl der Klammerfaktoren bedeutet, während die Summe der Exponenten η mit λ bezeichnet sei, so ist nach der Definition von § 14 (S. 241):

$$(7\text{a}) \qquad K' \equiv \Delta^w K$$

K eine Kovariante von f, vom Gewichte w, der Ordnung λ und in den a_i homogen von der Dimension d, und es besteht die Relation:

$$(8\text{a}) \qquad 2w = nd - \lambda\,.$$

Es empfiehlt sich im folgenden, neben den homogenen Variabeln und Symbolen auch mit nichthomogenen*) zu operieren, indem man einmal setzt $x_1 = x$, $x_2 = 1$, andererseits

$$a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 1\,, \quad a_2 = a\,, \quad b_2 = b\,, \quad c_2 = c\,, \ldots$$

Dann nehmen die Formeln (2), (3) die vereinfachte Gestalt an:

$$(2') \qquad a_x \equiv x + a\,, \quad b_x \equiv x + b\,, \quad c_x \equiv x + c\,, \ldots,$$

$$(3') \qquad a_i \equiv a^i \equiv b^i \equiv c^i \equiv \ldots,$$

---

*) Vgl. E. Stroh, Math. Annalen 33 (1889), S. 61.

während jeder Klammerfaktor einfach zu einer Symboldifferenz wird:

$$(9) \qquad (a\,b) \equiv b - a\,, \quad \text{usw.}$$

Man übe jetzt auf f zunächst eine Schiebung $A_1(h_1)$ aus:

$$(10) \qquad x = \xi + h_1\,,$$

so erfahren nach (5) die transformierten nichthomogenen Symbole α, β, γ, ... die mit (10) kogredienten Schiebungen:

$$(11) \qquad \alpha = a + h_1\,, \quad \beta = b + h_1\,, \quad \gamma = c + h_1\,, \ldots$$

Sei $J(a, b, c, \ldots)$ eine beliebige ganzrationale Funktion der a, b, c, ..., nur daß die Einzelgrade von J in den a, b, c, ... nicht größer als n ausfallen dürfen. Soll J eine Schiebungsinvariante von f bez. $x = x_1$ sein, d. h. gegenüber $A_1(h_1)$ ungeändert bleiben, so ist dazu nach Satz (II) (S. 345) des § 22 notwendig und hinreichend, daß J allein von den Symboldifferenzen abhängt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß J der linearen partiellen Differentialgleichung identisch genügt:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial J}{\partial a} + \frac{\partial J}{\partial b} + \frac{\partial J}{\partial c} + \ldots \equiv 0\,.$$

Damit ist zuvörderst bewiesen:

Satz I. „Jede in den realen Koeffizienten a_i ganzrationale Schiebungsinvariante J von f bez. $x = x_1$ von einem Gesamtgrade d genügt der Bedingung (I), und ist darstellbar als ganzrationale Funktion der Differenzen von d nichthomogenen Symbolen a, b, c, ..., wobei die Einzelgrade in letzteren den Wert n nicht überschreiten dürfen, und umgekehrt."

Beispiele hierzu werden durch die Bildungen $(a-b)^2$, $(a-b)^4$, $(a-b)^6$, ..., $(a-b)^2(a-c)$, $(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2$, $(a-b)^2(c-d)^2(a-c)(b-d)$ u. a., sowie durch beliebige Funktionen derselben geliefert.

Will man zur homogenen Schreibweise zurückkehren, so ersetze man jede Differenz $b-a$ durch den korrespondierenden Klammerfaktor $(a\,b)$, und wenn irgendein Glied der Funktion J in den a, b, c, ... von den Einzelgraden

$(\leqq n)\ \varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c, \ldots$ war, so füge man stets als Faktor das Potenzprodukt $a_1^{n-\varepsilon_a} b_1^{n-\varepsilon_b} c_1^{n-\varepsilon_c} \ldots$ hinzu; dabei enthält das Glied $d_1 (\leqq d)$ Symbolpaare, wenn es in den a_i vom Gesamtgrade d_1 war.

Nunmehr übe man auf f eine Streckung $M_2(m_2)$ bez. x_2 aus:

(12) $$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = m_2 \xi_2 .$$

Vermöge (5) bleiben die $a_1, b_1, c_1, \ldots$ dabei ungeändert, während die nichthomogenen Symbole $a, b, c, \ldots$ die Substitutionen erfahren:

(13) $$\alpha = m_2 a, \quad \beta = m_2 b, \quad \gamma = m_2 c, \ldots,$$

und damit entsprechend die Symboldifferenzen:

(14) $$\beta - \alpha = m_2 (b - a), \quad \gamma - \alpha = m_2 (c - a), \quad \text{usf.}$$

Die Schiebungsinvariante J von f bez. x sei ein Aggregat von der Gestalt:

(15) $$J \equiv \sum C (b-a)^{\varepsilon_{ab}} (c-a)^{\varepsilon_{ac}} (b-c)^{\varepsilon_{bc}} \ldots \equiv \sum T,$$

wo die C numerische Faktoren sind, dann wird auf Grund von (14) die vermöge (12) transformierte Bildung J':

(16) $$J' \equiv \sum T \cdot m_2^{\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{ac}+\varepsilon_{bc}+\cdots}.$$

Der Schiebungsinvariante J bez. x werde jetzt die weitere Forderung auferlegt, eine Streckungsinvariante bez. x_2 von einem Gewichte w_2 zu sein:

(17) $$J' \equiv m_2^{w_2} J .$$

Die Vergleichung mit (16) lehrt, daß dazu notwendig und hinreichend das Bestehen der Relation ist:

(II) $$\varepsilon_{ab} + \varepsilon_{ac} + \varepsilon_{bc} + \ldots = w_2,$$

d. h. daß J in den Symboldifferenzen homogen ist von der konstanten Dimension w_2, oder, was dasselbe besagt, daß jedes Glied in J w_2 Klammerfaktoren aufweist, oder endlich, daß J in den nichthomogenen Symbolen $a, b, c, \ldots$ oder auch in den $a_2, b_2, c_2, \ldots$ homogen ist von der Dimension w_2.

Drittens werde f einer Streckung $M_1(m_1)$ bez. x_1 unterworfen:

(18) $$x_1 = m_1 \xi_1, \quad x_2 = \xi_2,$$

so bleiben jetzt nach (5) die Symbole a_2, b_2, c_2, ... ungeändert, während die a_1, b_1, c_1, ..., sowie die Klammerfaktoren den zu (18) kogredienten Substitutionen unterliegen:

$$(19) \begin{cases} \alpha_1 = m_1 a_1 , \quad \beta_1 = m_1 b_1 , \quad \gamma_1 = m_1 c_1 , \ldots ; \\ (\alpha\beta) = m_1 (a b) , \ (\alpha\gamma) = m_1 (a c) , \ (\beta\gamma) = m_1 (b c), \ldots \end{cases}$$

Die Bildung J (15) schreibt sich in homogenen Symbolen gemäß der oben angegebenen Regel:

$$(20) \quad J \equiv \sum C (a b)^{\varepsilon_{ab}} (a c)^{\varepsilon_{ac}} (b c)^{\varepsilon_{bc}} \ldots a_1^{\eta_1} b_1^{\eta_2} c_1^{\eta_3} \ldots \equiv \sum T_1 ,$$

wo die Anzahl der Symbolpaare in irgendeinem Gliede die beliebige, aber fest vorgegebene Zahl d nicht überschreitet. Dann nimmt die vermöge (18) transformierte Bildung J' mit Rücksicht auf (19) die Gestalt an:

$$(21) \qquad J' \equiv \sum T_1 m_1^{(\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{ac}+\varepsilon_{bc}+\ldots)+(\eta_1+\eta_2+\eta_3+\ldots)} .$$

Man unterwerfe J der d r i t t e n Forderung, auch gegenüber $M_1(m_1)$ eine Streckungsinvariante vom Gewichte w_1 zu sein:

$$(22) \qquad J' \equiv m_1^{w_1} J .$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür folgt aus der Vergleichung (22) mit (21) die Bedingung:

$$(\mathrm{III}) \quad (\varepsilon_{ab} + \varepsilon_{ac} + \varepsilon_{bc} + \ldots) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots) = w_1 ,$$

oder auch, unter Benützung von (II):

$$(\mathrm{III}') \qquad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots = w_1 - w_2 .$$

Demgemäß wird J (20) auch in den Zusatzfaktoren a_1, b_1, c_1, ... homogen von einer Dimension $\lambda = w_1 - w_2$, wobei $w_1 \geqq w_2$ sein muß, und in den Symbolen a_1, b_1, c_1, ... im ganzen homogen von der Dimension w_1.

In irgendeinem Gliede von J (20) enthält jeder Klammerfaktor zwei von d_1 Symbolpaaren (a), (b), (c), ..., von denen jedes im Gliede $n$mal vorkommen muß, somit wird:

$$2 (\varepsilon_{ab} + \varepsilon_{ac} + \varepsilon_{bc} + \ldots) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots) = n d_1 ,$$

oder mit Rücksicht auf (II) und (III) $w_1 + w_2 = n d_1$. Da aber w_1 und w_2 konstant sind, muß es auch d_1 und folglich gleich der Maximalzahl d sein:

$$(\mathrm{III}'') \qquad w_1 + w_2 = n d ;$$

die Gewichtssumme $w_1 + w_2$ muß demgemäß durch n teilbar sein, und der Quotient liefert dann die Anzahl der in jedem Gliede von J auftretenden Symbolpaare. Aber dieser Zahl d kommt eine noch einfachere Bedeutung zu. Übt man nämlich auf eine Schiebungsinvariante J bez. x gleichzeitig die beiden Streckungen $M_1(m)$ und $M_2(m)$ mit demselben Parameter m aus, d. i. die erweiternde Substitution $E(m)$:

(23) $$x_1 = m\,\xi_1\,, \qquad x_2 = m\,\xi_2\,,$$

so gilt für die transformierte Bildung J' wegen (17), (22) und (III''):

(24) $$J' \equiv m^{w_1} m^{w_2} J \equiv m^{w_1+w_2} J \equiv m^{nd} J\,.$$

Andererseits bewirkt (23) für jedes Symbolpaar die kogredienten Substitutionen:

(25) $$\alpha_1 = m\,a_1\,, \qquad \alpha_2 = m\,a_2\,, \quad \text{usw.}$$

Somit sagt (24) aus, daß J in den Symbolpaaren homogen ist von einer Dimension $n\,d$, oder was nach der Definition (3) der Symbole auf dasselbe hinauskommt, daß J in den realen Koeffizienten a_i homogen ist vom Grade d [in Übereinstimmung mit Satz III und IV des § 12 (S. 202)].

Nun war nach § 16 (S. 259) eine Seminvariante von f definiert als eine Schiebungsinvariante bez. x_1, die zugleich Streckungsinvariante bez. x_1 und x_2 ist, mit Gewichten w_1 und w_2 $(w_1 \geqq w_2)$.

Damit ist bewiesen:

Satz II. „Eine in den realen Koeffizienten a_i ganzrationale Seminvariante J einer Urform $f_n(x_1, x_2)$, mit den Gewichten w_1, w_2 bez. x_1, x_2, ist symbolisch darstellbar als ein Aggregat von der Struktur $J = \sum C\,(a\,b)^{\varepsilon_{ab}}\,(a\,c)^{\varepsilon_{ac}}\,(b\,c)^{\varepsilon_{bc}} \ldots a_1^{\eta_a}\,b_1^{\eta_b}\,c_1^{\eta_c} \ldots$, wo die Summe der natürlichen Exponenten ε gleich w_2, die Summe der natürlichen Exponenten η gleich $w_1 - w_2$ ist. J ist in den ersten Symbolen a_1, b_1, c_1, ... homogen von der Dimension w_1, und entsprechend in den zweiten Symbolen a_2, b_2, c_2, ... homogen von der Dimension w_2. Die Gewichtssumme $w_1 + w_2$ ist durch n teilbar, und der Quotient d gibt die Dimension der in den realen Koeffizienten a_i homogenen Bildung J an.“

Bei der Ableitung des Satzes II hätte man auch die Reihenfolge der beiden Streckungen $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ umkehren können.

Eine Schiebungsinvariante von f bez. $x = x_1$, die außerdem nur noch Streckungsinvariante bez. x_2 von einem Gewichte w_2 sein soll, stellt sich infolge von (II) und Satz II dar als ein Aggregat einer endlichen Anzahl von Seminvarianten mit konstantem zweiten Gewicht w_2, während das erste Gewicht w_1 zugleich mit dem Grade d gemäß der Relation $w_1 + w_2 = n\,d$ variiert. Ein entsprechender Satz gilt bei Vertauschung von M_1 mit M_2.

Ersetzt man nunmehr in der Seminvariante J (20) jeden der Zusatzfaktoren a_1, b_1, c_1, ... jeweils durch die entsprechende Linearform a_x, b_x, c_x, ..., so ist die so hervorgehende Bildung K:

$$(26) \qquad K \equiv \sum C\,(a\,b)^{\varepsilon_{ab}}\,(a\,c)^{\varepsilon_{ac}}\,(b\,c)^{\varepsilon_{bc}} \ldots a_x^{\eta_a}\, b_x^{\eta_b}\, c_x^{\eta_c} \ldots$$

auf Grund der Definition (S. 362) ein Aggregat von Kovarianten von f, die alle von der Ordnung (in den Variabeln) $\lambda = w_1 - w_2$ sind, in den realen Koeffizienten a_i homogen von der Dimension $d = \dfrac{w_1 + w_2}{n}$ und vom Gewichte w_2, mithin selbst eine Kovariante mit diesen Eigenschaften, deren Leitglied (Koeffizient von $x_1^{\eta_1}$) eben durch J geliefert wird. Damit ist der Satz II′ des § 14 (S. 238) aufs neue bewiesen:

Satz III. „Jede in den a_i ganzrationale Seminvariante J von f, von den Gewichten w_1, w_2 und der Dimension $d = \dfrac{w_1 + w_2}{n}$, ist das Leitglied einer völlig bestimmten Kovariante K von der Ordnung λ, von der Dimension d in den a_i und vom Gewichte w_2."

Endlich unterwerfe man die Seminvariante J (20) der vierten Forderung, auch gegenüber einer Schiebung $A_2(h_2)$:

$$(27) \qquad x_1 = \xi_1\,, \quad x_2 = \xi_2 + h_2\,\xi_1$$

ungeändert zu bleiben. Dann ist das Produkt der Zusatzfaktoren in irgendeinem Gliede von J einmal von der Gestalt $a_1^{\eta_a} b_1^{\eta_b} c_1^{\eta_c} \ldots$, andererseits von der Gestalt $a_2^{\eta'_a} b_2^{\eta'_b} c_2^{\eta'_c} \ldots$, so daß die Exponenten η, η' sämtlich verschwinden müssen; da aber die Summe der η gemäß (III′) den Wert $w_1 - w_2$

hatte, muß $w_1 = w_2 = w$ werden, wo dann wegen (III″): (8) $2w = nd$ ist. Damit wird also die Seminvariante J zu einer vollständigen Invariante von f, mit dem Gewichte w, und man gelangt zu dem Clebschschen Fundamentalsatze:

Satz IV. „Jede vollständige Invariante J einer Urform f_n, von einem Gewichte w, ist symbolisch darstellbar als ein Aggregat von Klammerfaktoren, die aus einer konstanten Anzahl d von Symbolpaaren gebildet sind; d ist dann die Dimension von J in den Koeffizienten a_i von f_n, und es besteht die Relation $2w = nd$."

Will man sich mit diesem Satze begnügen, unter Verzicht auf die Sätze II und III über Seminvarianten, so kann man sich zu seiner Ableitung einer wesentlich kürzeren Schlußweise bedienen.

Man gehe von Satz I aus und lege demgemäß die Darstellung einer Schiebungsinvariante J von f bez. $x = x_1$ in der Gestalt (20) zugrunde. Sodann unterwerfe man die Bildung J der zweiten Bedingung, auch gegenüber einer Schiebung $A_2(h_2)$ (27) ungeändert zu bleiben, und folgert, wie soeben, daß in (20) in jedem Gliede die Zusatzfaktoren in Wegfall kommen, so daß J nunmehr lediglich als ein Aggregat von Klammerfaktoren erscheint:

$$J \equiv \sum C\,(a\,b)^{\varepsilon_{ab}}\,(a\,c)^{\varepsilon_{ac}}\,(b\,c)^{\varepsilon_{bc}} \ldots, \tag{28}$$

wo wiederum an jedem Gliede eine Anzahl von $d_1 \leqq d$ Symbolpaaren beteiligt ist, unter d die größte dieser Anzahlen verstanden. Da gemäß § 6, Satz IV (S. 68), jeder gegenüber $A_1(h_1)$ und $A_2(h_2)$ invariante Ausdruck J es auch gegenüber einer beliebigen unimodularen Substitution U bleibt, d. h. eine unimodulare Invariante von f ist, so gilt zunächst:

Satz V. „Jede unimodulare, in den a_i ganzrationale Invariante von f ist als ein symbolisches Aggregat (28) von Klammerfaktoren darstellbar."

Zieht man nunmehr eine Streckung $M_1(m_1)$ (18) heran, und verlangt, daß ihr gegenüber J mit einem Gewichte w invariant bleibe, so daß $J' \equiv m_1^w J$ wird, so erschließt man, wie oben, auf Grund von (19), die Relation:

$$\varepsilon_{ab} + \varepsilon_{ac} + \varepsilon_{bc} + \ldots = w\,. \tag{29}$$

Hieraus folgt, wegen (13), daß dann J, in Übereinstimmung mit § 12, S. 211, von selbst auch gegenüber einer Streckung $M_2(m_2)$ invariant bleibt mit demselben Gewichte w: $J' \equiv m_2^w J$, und wenn man wiederum beide Streckungen für $m_1 = m_2$ zu der erweiternden Substitution $E(m)$ (23) zusammensetzt, daß J in den a_i homogen ist von einer Dimension d, wo (8) $2w = nd$. Damit ist J zu einer vollständigen Invariante von f geworden, für die der Satz IV gilt.

Ordnet man andererseits die unimodulare Invariante J (28) nach Aggregaten von jeweils konstanter Exponentensumme d_1, so ergibt sich, daß, in Übereinstimmung mit Satz IX des § 12 (S. 213), jede unimodulare Invariante von f als ein Aggregat vollständiger Invarianten mit verschiedenen Dimensionen d_1 und Gewichten $w_1 = \dfrac{n\,d_1}{2}$ darstellbar ist.

Die vorstehenden Überlegungen lassen sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten ausdehnen einmal auf ein System von Urformen f_n, g_p, h_q, ..., und damit auch auf Kovarianten, andererseits auch auf Urformen mit mehreren Reihen von Variabeln, die inkongruenten und im besonderen auch teilweise oder ganz kongruenten Substitutionen unterworfen werden (§ 15).

Es liege ein System von Urformen f_n, g_p, h_q, ... vor:

$$\text{(1a)} \qquad \begin{cases} f_n(x_1, x_2) \equiv a_x^n \equiv b_x^n \equiv \ldots, \\ g_p(x_1, x_2) \equiv a_x'^p \equiv b_x'^p \equiv \ldots, \\ h_q(x_1, x_2) \equiv a_x''^q \equiv b_x''^q \equiv \ldots, \end{cases}$$

so gelten die Transformationsformeln (6) nunmehr für alle Klammerfaktoren, mögen sie aus Symbolen derselben Urform oder zweier verschiedener Urformen gebildet sein:

$$\text{(6a)} \quad (\alpha\beta) = \Delta(ab), \quad (\alpha'\beta') = \Delta(a'b'), \quad (\alpha\alpha') = \Delta(aa'), \ldots$$

Führt man nach Anleitung von (2′), (3) die nichthomogenen Symbole a, b, ..., a', b', ..., a'', b'', ... ein, so folgt wiederum aus (II) § 22 als Kriterium einer Schiebungsinvariante J von f, g, h, ... bez. x_1 das identische Erfülltsein der Bedingung:

$$\text{(Ia)} \qquad \sum \frac{\partial J}{\partial a} + \sum \frac{\partial J}{\partial a'} + \sum \frac{\partial J}{\partial a''} + \ldots \equiv 0,$$

wo sich jede Summe auf die Symbole einer und derselben Urform erstreckt. Daraus folgt, daß jede in den realen Koeffizienten a_i, b_k, c_l, ... der Urformen ganzrationale Schiebungsinvariante bez. x_1 von den Maximalgraden d, d', d'', ... in den homogenen Symbolen darstellbar ist als ein Aggregat von der Struktur:

$$\text{(20a)} \begin{cases} J \equiv \sum C\,(a\,b)^{\varepsilon_{ab}}\,(a\,c)^{\varepsilon_{ac}}\,(b\,c)^{\varepsilon_{bc}} \ldots (a'\,b')^{\varepsilon_{a'b'}} \ldots (a\,a')^{\varepsilon_{aa'}} \ldots \\ \qquad a_1^{\eta_a}\,b_1^{\eta_b}\,c_1^{\eta_c} \ldots a_1'^{\eta_{a'}} \ldots a_1''^{\eta_{a''}} \ldots, \end{cases}$$

wo in jedem Gliede die Anzahl der eintretenden Symbolpaare von f, g, h, ... resp. $\leqq d$, $\leqq d'$, $\leqq d''$, ... ist.

Verlangt man weiter, daß J zugleich eine Streckungsinvariante bez. x_1 und x_2 von den Gewichten w_1, w_2, und damit eine Seminvariante von f, g, h, ... (bez. x_1) sein soll, so findet dies statt unter den beiden Bedingungen:

(IIa) $\quad \sum \varepsilon = w_2$, $\qquad$ (IIIa) $\quad \sum \eta = w_1 - w_2$.

Dagegen erweitern sich die Relationen (III''), (24) jetzt zu den folgenden:

(IIIa'') $\qquad w_1 + w_2 = n\,d + p\,d' + q\,d'' + \ldots,$

(24a) $\qquad J' \equiv m^{nd+pd'+qd''+\ldots}\,J$.

Diese sagten in § 12 (S. 201) aus, daß, wenn man in irgendeinem Gliede einer Seminvariante J die Grade in den a_i, b_k, c_l, ... resp. multipliziert mit den Ordnungen der zugehörigen Urformen, die Summe dieser Produkte stets konstant, gleich der Gewichtssumme $w_1 + w_2$ wird; J ließ sich daher als ein Aggregat von Seminvarianten mit verschiedenen Reihen von Einzeldimensionen anordnen, deren jede in den a_i, b_k, c_l, ... einzeln homogen ist, so, daß die Dimensionen stets jener Relation (IIIa'') unterliegen.

In der Symbolik lassen die Relationen (IIIa''), (24a) auf Grund von (6a) die einfachere Deutung zu, daß J in allen Symbolen homogen, von der Dimension $w_1 + w_2$ ist. Der Satz II erweitert sich somit zu:

Satz IIa. „Eine in den realen Koeffizienten a_i, b_k, c_l, ... der Urformen f_n, g_p, h_q, ... ganzrationale Seminvariante J von den Gewichten w_1, w_2 bez. x_1, x_2 ist symbolisch darstellbar als ein Aggregat von Gliedern, deren jedes gebildet wird einmal aus Potenzen von Klammerfaktoren, die durch Verbindung der Symbolreihen der Urformen unter sich und miteinander entstehen, andererseits aus Potenzen von Zusatzfaktoren $a_1, b_1, \ldots,$ $a_1', b_1', \ldots, a_1'', b_1'', \ldots$; die Summe der Exponenten der Klammerfaktoren ist gleich w_2, der Zusatzfaktoren gleich $w_1 - w_2$, so daß J in den ersten resp. zweiten resp. allen Symbolen homogen ist resp. von der Dimension $w_1, w_2, w_1 + w_2$. Und umgekehrt."

Ersetzt man wiederum in einer Seminvariante J des Satzes IIa jeden der Zusatzfaktoren $a_1, b_1, \ldots, a_1', b_1', \ldots,$ $a_1'', b_1'', \ldots$ durch die zugehörige symbolische Linearform $a_x, b_x, \ldots, a_x', b_x', \ldots, a_x'', b_x'', \ldots,$ so geht aus J eine Kovariante K hervor, und Satz III erweitert sich zu:

Satz IIIa. „Jede Seminvariante J des Satzes IIa ist Leitglied einer völlig bestimmten Kovariante K der Urformen, vom Gewichte w_2 und der Ordnung $\lambda = w_1 - w_2$, während für die Grade in den Symbolen resp. Koeffizienten das gleiche gilt wie für J selbst."

Fordert man schließlich, daß die Seminvariante J auch gegenüber einer Schiebung $A_2(h_2)$ (27) ungeändert bleibt, so ergibt sich genau, wie im Falle der einen Urform f, daß nunmehr alle Zusatzfaktoren in Wegfall kommen und demgemäß $w_1 = w_2 = w$ wird, so daß die Relation (24a) übergeht in:

(8a) $$2w = nd + pd' + qd'' + \ldots$$

Demnach lautet der Clebschsche Fundamentalsatz IV für ein System von Urformen:

Satz IVa. „Jede vollständige Invariante J eines Systems von Urformen $f_n, g_p, h_q, \ldots,$ von einem Gewichte w, ist symbolisch darstellbar als ein Aggregat von Gliedern, die aus Klammerfaktoren zusammengesetzt sind. J ist homogen in den ersten wie in den zweiten Symbolen von der Dimension w, in den beiderlei Symbolen von der Dimension $2w$, und wenn an der Bildung irgendeines Gliedes resp. $d, d', d'', \ldots$ Symbolpaare der Urform beteiligt sind, so gilt stets die Relation (8a). Und umgekehrt."

Hier ordnen sich, wie in § 13 (S. 215), die Kovarianten K als Spezialfall ein, wenn man dem System der Urformen eine Linearform $u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2$ adjungiert, und hinterher in den Invarianten des so erweiterten Systems die Größen u_2, $-u_1$ wieder durch die kogredienten Variabeln x_1, x_2 ersetzt. Da für eine Linearform u_x die Symbole u_1, u_2 mit den realen Koeffizienten übereinstimmen, so kommt man mit einer Reihe von Zeichen x_1, x_2 aus, und diejenigen Klammerfaktoren, an denen die u beteiligt waren, nehmen resp. die Gestalt von Linearformen a_x, b_x, ..., a'_x, b'_x, ..., a''_x, b''_x, ... an. Damit gelangt man aber gerade zu Kovarianten von der Struktur des Satzes IIIa, d. h. zu der Umkehrung des letzteren:

Satz IIIb. „Das Leitglied einer Kovariante K ist eine Seminvariante."

Der Beweis des Satzes V überträgt sich ohne weiteres auf Systeme von Urformen, womit auch die entsprechende kürzere Herleitung des Fundamentalsatzes IVa gewonnen ist.

Weiter steige man auf, wie in § 15 (S. 256), zu Urformen mit mehreren Reihen von Variabelnpaaren x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2, ..., die inkongruenten Substitutionen mit den Determinanten Δ_x, Δ_y, Δ_z, ... unterliegen:

$$(1\text{b}) \left\{ \begin{aligned} f_{n,p,q,\ldots}(x; y; z; \ldots) &\equiv a_x^n r_y^p u_z^q \ldots \equiv b_x^n s_y^p v_z^q \ldots \\ &\equiv c_x^n t_y^p w_z^q \ldots, \end{aligned} \right.$$

nebst weiteren $f'_{n',p',q',\ldots}$, $f''_{n'',p'',q'',\ldots}$, ..., die sich äußerlich von f nur durch Hinzufügung von Akzenten an den Zeichen für die Ordnungen und Symbole unterscheiden mögen. Ein Symbol der Art a, b, ..., a', b', ... heiße kurz ein (x)-Symbol usf.

Für eine Schiebungsinvariante J der Urformen bez. x_1 tritt wieder die symbolische Darstellung (20a) ein, und das Entsprechende gilt hinsichtlich der weiteren ersten Variabeln y_1, z_1, ... Demnach erweitert sich für eine Schiebungsinvariante J bez. x_1, y_1, z_1, ... die Darstellung (20a) dahin, daß lauter solche, aber auch nur solche Klammerfaktoren zulässig sind, in die jeweils zu derselben Variabeln gehörige Symbole eingehen, wie z. B. $(a\,b)$, $(a\,c)$, $(b\,c)$, ..., $(a'\,b')$, $(b'\,c')$, ..., $(a\,a')$, ..., während als Zusatzfaktoren irgendwelche ersten Symbole a_1, b_1, ..., r_1,

$s_1, \ldots, u_1, v_1, \ldots, a_1', b_1', \ldots, r_1', s_1', \ldots, u_1', v_1', \ldots, \ldots,$ auftreten dürfen.

Die Differentialgleichung (Ia) ist jetzt in genau so viel Exemplaren aufzustellen, als Variabelnpaare vorhanden sind, also bei der jetzt gewählten Schreibweise von (1b):

$$\text{(Ib)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a} + \dfrac{\partial J}{\partial b} + \ldots + \dfrac{\partial J}{\partial a'} + \dfrac{\partial J}{\partial b'} + \ldots + \ldots = 0\,, \\ \dfrac{\partial J}{\partial r} + \dfrac{\partial J}{\partial s} + \ldots + \dfrac{\partial J}{\partial r'} + \dfrac{\partial J}{\partial s'} + \ldots + \ldots = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases}$$

und umgekehrt charakterisieren diese Bedingungen eine Schiebungsinvariante J bez. $x_1, y_1, z_1, \ldots$

Sodann übe man unabhängig voneinander einmal die Streckungen $M_1(m_1), M_1(n_1), M_1(p_1), \ldots$ bez. $x_1, y_1, z_1, \ldots$, andererseits die Streckungen $M_2(m_2), M_2(n_2), M_2(p_2), \ldots$ bez. $x_2, y_2, z_2, \ldots$ aus, und verlange, daß die Schiebungsinvariante J zugleich gegenüber jeder der Streckungen invariant sei, mit Gewichten $w_1^{(x)}, w_1^{(y)}, \ldots$ resp. $w_2^{(x)}, w_2^{(y)}, \ldots$:

$$\text{(22b)} \quad J' \equiv m_1^{w_1^{(x)}} J\,, \qquad J' \equiv n_1^{w_1^{(y)}} J\,, \qquad J' \equiv p_1^{w_1^{(z)}} J\,, \ldots,$$

$$\text{(17b)} \quad J' \equiv m_2^{w_2^{(x)}} J\,, \qquad J' \equiv n_2^{w_2^{(y)}} J\,, \qquad J' \equiv p_2^{w_2^{(z)}} J\,, \ldots$$

Bezeichnet man den Exponenten irgendeines aus zwei (x)-Symbolen gebildeten Klammerfaktors in J mit $\varepsilon^{(x)}$ usf., den Exponenten irgendeines zu (x_1, x_2) gehörigen Zusatzfaktors $a_1, b_1, \ldots, a_1', b_1', \ldots$ mit $\eta^{(x)}$ usf., die Anzahlen der in irgendeinem Gliede von J auftretenden (x)-Symbole von $f, f', f'', \ldots$ resp. mit $d^{(x)}, d'^{(x)}, d''^{(x)}$ usf., so erweitern sich die Relationen (IIa), (IIIa), (IIIa″), (24a) unmittelbar zu den folgenden:

$$\text{(IIb)} \qquad \sum \varepsilon^{(x)} = w_2^{(x)}, \qquad \sum \varepsilon^{(y)} = w_2^{(y)}, \ldots,$$

$$\text{(IIIb)} \quad \sum \eta^{(x)} = w_1^{(x)} - w_2^{(x)}, \quad \sum \eta^{(y)} = w_1^{(y)} - w_2^{(y)}, \ldots,$$

$$\text{(IIIb″)} \begin{cases} w_1^{(x)} + w_2^{(x)} = n\, d^{(x)} + n'\, d'^{(x)} + n''\, d''^{(x)} + \ldots \\ w_1^{(y)} + w_2^{(y)} = p\, d^{(y)} + p'\, d'^{(y)} + p''\, d''^{(y)} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases}$$

$$\text{(24b)} \qquad J' \equiv m^{w_1^{(x)} + w_2^{(x)}} J\,, \qquad J' \equiv n^{w_1^{(y)} + w_2^{(y)}} J\,, \ldots,$$

wo die Relationen (24b) aussagen, daß J resp. gegenüber einer Erweiterung $E(m)$, $E(n)$, ... invariant ist.

Für eine vollständige Invariante J wird wiederum $w_1^{(x)} = w_2^{(x)} = w^{(x)}$, $w_1^{(y)} = w_2^{(y)} = w^{(y)}$, ..., wo nunmehr $w^{(x)}$, $w^{(y)}$, ... die Gewichte von J hinsichtlich der einzelnen Variabeln sind.

Unter Berücksichtigung dieser Ausdehnungen lassen sich die Sätze I bis V auch für den vorliegenden Fall formulieren, was dem Leser überlassen bleibe.

Zieht man noch die besonderen Fälle in Betracht, daß die Variabeln (x), (y), ... teilweise oder ganz kongruenten Substitutionen unterworfen werden, z. B. die (x) und (y), so treten zu den oben aufgestellten Bildungen J noch solche hinzu, wo auch Klammerfaktoren zulässig sind, die gleichzeitig ein (x)-Symbol und ein (y)-Symbol enthalten; für eine vollständige Invariante fällt dann $w^{(x)}$ und $w^{(y)}$ zusammen usf.

Wie in den §§ 11—15 lassen sich die Eigenschaften der symbolischen Darstellung, die eine Folge der Invarianz resp. gegenüber den beiderlei Schiebungen und Streckungen sind, und umgekehrt jene Invarianz charakterisieren, der Reihe nach durch lineare partielle Differentialgleichungen wiedergeben, wie es für eine Schiebungsinvariante bez. $x = x_1$ in nichthomogenen Symbolen a, b, ... bereits vermöge (I) resp. (Ia), (Ib) geschehen ist.

Zu dem Behuf bediene man sich homogener Symbole. Es genüge die Betrachtung einer Urform $f(1)$.

Um die Gleichung (I) homogen zu schreiben, berücksichtige man die Relationen:

$$(30) \qquad a_2 = a\,a_1\,, \quad b_2 = b\,b_1\,, \quad c_2 = c\,c_1\,, \ \ldots,$$

wo man für eine Schiebungsinvariante J von f bez. $x = x_1$ die a_1, b_1, c_1, ... als nur der Homogenität halber eingeführte, von den a_2, b_2, c_2, ... unabhängige Symbole aufzufassen hat. Aus (30) folgt durch partielle Differentiation, da $\frac{\partial a_2}{\partial a} = a_1$, $\frac{\partial b_2}{\partial b} = b_1$, ...:

$$(31) \qquad \frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a_2} a_1\,, \quad \frac{\partial}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b_2} b_1\,, \ \ldots$$

Damit geht die Bedingung (I) über in die homogene Gestalt:

$$(\mathrm{I}\alpha)\qquad a_1\frac{\partial J}{\partial a_2}+b_1\frac{\partial J}{\partial b_2}+\ldots\equiv 0\,.$$

Für eine Schiebungsinvariante J bez. x_2 vertauschen sich einfach je zwei der Symbole a_1, a_2; b_1, b_2; ..., und es ergibt sich:

$$(\mathrm{I}\beta)\qquad a_2\frac{\partial J}{\partial a_1}+b_2\frac{\partial J}{\partial b_1}+\ldots\equiv 0\,.$$

Vereint charakterisieren die Bedingungen $(\mathrm{I}\alpha)$, $(\mathrm{I}\beta)$ eine unimodulare Invariante.

Die Streckungsinvarianz bez. x_2 fand ihren Ausdruck in der Tatsache, daß in der Darstellung (15) die a, b, c, ..., und damit in (20) die a_2, b_2, c_2, ... homogen in der Dimension $\sum\varepsilon = w_2$ auftraten.

Somit liefert der Eulersche Satz:

$$(\mathrm{I}\gamma)\qquad a_2\frac{\partial J}{\partial a_2}+b_2\frac{\partial J}{\partial b_2}+\ldots\equiv w_2 J\,,$$

und wieder entsprechend für die Streckungsinvarianz bez. x_1:

$$(\mathrm{I}\delta)\qquad a_1\frac{\partial J}{\partial a_1}+b_1\frac{\partial J}{\partial b_1}+\ldots\equiv w_1 J\,.$$

Sind $(\mathrm{I}\gamma)$ und $(\mathrm{I}\delta)$ zugleich erfüllt, so führt die Addition beider Gleichungen wieder zu der Homogenität in allen Symbolen von der Dimension w_1+w_2.

Eine Seminvariante ist durch das Bestehen von $(\mathrm{I}\alpha)$, $(\mathrm{I}\gamma)$, $(\mathrm{I}\delta)$ charakterisiert; eine vollständige Invariante durch alle vier Bedingungen; in letzterem Falle fällt w_1 mit w_2 zusammen:

Satz VI. „Die respektive Invarianz gegenüber den beiderlei Schiebungen und Streckungen findet ihren Ausdruck im identischen Bestehen der symbolischen Differentialgleichungen $(\mathrm{I}\alpha)$, $(\mathrm{I}\beta)$, $(\mathrm{I}\gamma)$, $(\mathrm{I}\delta)$."

Liegt ein System von Urformen vor, so hat man die linken Seiten jener Gleichungen der Reihe nach für die einzelnen Urformen zu bilden, und alsdann wiederum zu summieren. Im Falle inkongruenter Variabelnreihen entspricht einer jeden solchen je eine bezügliche Differentialgleichung usf.

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen und Gewichtsregeln des Textes sind an den im Anhange zum ersten Abschnitte, sowie in den dazugehörigen Aufgaben entwickelten Beispielen zu bestätigen.

Aufgabe 2. Die Sätze I bis V sind für Systeme von Urformen mit mehreren Reihen inkongruenter Variabelnpaare zu formulieren.

Aufgabe 3. Mittels der Symbolik ist das „Hermitesche*) Reziprozitätsgesetz" zu beweisen. Sind f_n, g_p zwei binäre Formen, mit den Koeffizienten (a), (b), so läßt sich jeder Kovariante von f_n, von der Dimension p in den a, eine Kovariante gleicher Ordnung von g_p, von der Dimension n in den b, eineindeutig zuordnen.

*) Ch. Hermite, Cambridge and Dublin Math. Journal 9 (1854), S. 172; vgl. Gordan-Kerschensteiner, Invariantentheorie, Bd. 2, Nr. 93.

160,00

20.–

Dost. e pr. D9/5

24/4. 951.