ubert XVIII

Geschichte der Mathematik

I. Teil

Von den ältesten Zeiten bis Cartesius

von

Prof. Dr. Sigmund Günther

G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig

Sammlung Schubert

Sammlung mathematischer Lehrbücher.

Verzeichnis der erschienenen und projektierten Bände.

Erschienen sind bis Februar 1908:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Geb. M. 2.80.

Band II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. Geb. M. 4.80.

Band III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Geb. M. 2.—.

Band IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F Bohnert in Hamburg. Geb. M. 2.40.

Band V: **Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. 2. Aufl. Geb. M. 3.60

Band VI: **Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Geb. M. 4.40.

Band VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. Geb. M. 5.—.

Band VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. Geb. M. 6.—.

Band IX: **Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. Geb. M. 4.—.

Band X: **Differential- und Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung** von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. Geb. M. 9.

Band XI: **Differential- und Integralrechnung II. Teil: Integralrechnung** von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. Geb. M. 10.—.

Band XII: **Darstellende Geometrie I. Teil: Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Geb. M. 5.—.

Band XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Aufl. Geb. M. 8.—.

Band XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. Geb. M. 5.20.

Band XVIII: **Geschichte der Mathematik I. Teil** von Prof. Dr. S. Günther in München. Geb. M. 9.60.

Band XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Geb. M. 8.—.

Band XX: **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Großmann in Wien. Geb. M. 5.—.

Band XXIII: **Geodäsie** von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam. Geb. M. 8.—.

Band XXV: **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zwei**[illegible]n in Straßburg. Geb. M. 4.40[illegible]

Band XXVII: [illegible]**eil: Die projektiven Tra**[illegible]gen von Prof. Dr. Karl Do[illegible]—.

Band XXVIII: **Geometrische Transformationen II. Teil: Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. Geb. M. 10.—.

Band XXIX: **Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen I. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. Geb. M. 4.80.

Band XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Geb. M. 8.50.

Band XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen** von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. Geb. M. 7.—.

Band XXXIV: **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. Geb. M. 12.—.

Band XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. Geb. M. 10.—.

Band XXXVI: **Mehrdimensionale Geometrie II. Teil: Die Polytope** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. Geb. M. 10.—.

Band XXXVII: **Lehrbuch der Mechanik I: Kinematik** von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe. Geb. M. 8.—.

Band XXXVIII: **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil** von Prof. E. Grimsehl in Hamburg. Geb. M. 6.—.

Band XXXIX: **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. Geb. M. 10.—.

Band XL: **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Geb. M. 6.—.

Band XLI: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Geb. M. 5.—.

Band XLII: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Geb. M. 7.—.

Band XLIII: **Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung** von Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. Geb. M. 10.—.

Band XLIV: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. Geb. M. 5.80.

Band XLV: **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Geb. M. 3.80.

Band XLVI: **Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Geb. M. 4.50.

Band XLVIII: **Thermodynamik II. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. Geb. M. 10.—.

Band XLIX: **Nichteuklidische Geometrie** von Prof. Dr. Heinr. Liebmann in Leipzig. Geb. M. 6.50.

Band L: **Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung** von Dr. J. Horn, Professor an der Bergakademie zu Clausthal. Geb. M. 10.—.

Band LI: **Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. Geb. M. 8.—.

Band LII: **Theorie der geometrischen Konstruktionen** von Professor Aug. Adler in Wien. Geb. M. 9.—.

Band LIII: **Grundlehren der neueren Zahlentheorie** von Professor Dr. Paul Bachmann in Weimar. Geb. M. 6.50.
Band LIV: **Analytische Geometrie auf der Kugel** von Studienrat Prof. Dr. Rich. Heger in Dresden. Geb. M. 4.40.

In Vorbereitung bzw. projektiert sind:

Darstellende Geometrie von Prof. Dr. Th. Schmid in Wien.
Geschichte der Mathematik II. Teil von Prof. Dr. A. v. Braunmühl in München.
Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.
Räumliche projektive Geometrie.
Elliptische Funktionen von Dr. Karl Boehm in Heidelberg.
Allgemeine Formen- und Invariantentheorie von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg.
Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung II. Teil von Prof. E. Grimsehl in Hamburg.
Liniengeometrie III. Teil von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.
Elektromagnetische Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.
Gruppen- u. Substitutionentheorie von Prof. Dr. E. Netto in Gießen.
Theorie der Flächen dritter Ordnung.
Mathematische Potentialtheorie von Prof. Dr. A. Wangerin in Halle.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr. ing. H. Reißner in Berlin.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.
Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Wien.
Partielle Differentialgleichungen von Professor J. Horn in Clausthal.
Vektorenanalyse.
Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven von Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer.
Sphärische Astronomie von Dr. von Flotow in Charlottenburg.
Grundlehren der geographischen Ortsbestimmung von Dr. K. Graff in Hamburg.
Theoretische Astronomie von Dr. Gust. Witt in Berlin.
Astrophysik.
Grundlagen der theoretischen Chemie von Dr. Franz Wenzel in Wien.

Sammlung Schubert XVIII

Geschichte der Mathematik

I. Teil

Von den ältesten Zeiten bis Cartesius

Von

Dr. Siegmund Günther
Professor an der technischen Hochschule in München

Mit 56 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1908

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

Vorwort.

In Verbindung mit seinem Freunde und Kollegen Anton v. Braunmühl übernahm es der Unterzeichnete, diese „Geschichte der Mathematik“ für die Schubertsche Sammlung zu liefern. Während der ersten fünfzehn Jahre seines wissenschaftlichen Lebens mit Studien gerade auf diesem Gebiete eifrig beschäftigt, hatte er in späterer Zeit größtenteils anderen Verpflichtungen obzuliegen, ließ aber auch dann die früher mit Vorliebe gepflegte Disziplin niemals außer Augen. Als deshalb seitens des befreundeten Herausgebers der Sammlung die Aufforderung an den Unterzeichneten zur Übernahme des vorliegenden Buches erging, bereitete es diesem Freude, sich wieder einmal gründlicher einem Arbeitsfelde zuwenden zu dürfen, auf welchem in den letzten Jahren so außerordentlich viel geleistet, dessen Beherrschung dadurch freilich auch vielfach erschwert worden ist. Inwieweit es gelang, der gestellten Aufgabe gerecht zu werden, haben die Fachgenossen zu entscheiden.

Vor allem gingen die beiden Verfasser von der Ansicht aus, daß es sich nicht darum handeln könne, ein umfassendes, alle die zahllosen Spezialarbeiten über geschichtliche Fragen berücksichtigendes Werk zu schreiben. In erster Linie ist das vorliegende für Studierende bestimmt, die sich an das Standard Work Moritz Cantors nicht heranwagen können, die aber doch etwas mehr von der Entwicklung ihrer Wissenschaft kennen zu lernen wünschen, als ihnen das in seiner Art vortreffliche Büchlein von Sturm zu bieten vermag. Weiterhin wird an alle diejenigen gedacht, welche im eigenen Studiengange zu einer auch historischen Ausbildung keine Gelegenheit fanden, im Verlaufe ihrer späteren Tätigkeit aber die Notwendigkeit einsahen, ihr Wissen auch nach dieser Seite hin abzurunden und auszugestalten. Unter den

Lehrern der Mathematik sollen also ebenfalls die Leser dieses Buches gesucht werden. Dieses mag man sich als eine Art Mittel zwischen Cantor und Sturm denken, in welcher Eigenschaft es sich den in Deutschland sehr willkommen geheißenen, wiewohl teilweise einer anderen Tendenz huldigenden Schriften von Zeuthen nähert.

Bei solcher Sachlage mußte auf die Beigabe von Zitaten leider verzichtet werden. Schon Gründe des Raumes standen dem mit zwingender Kraft entgegen, weil schon dieser erste Band um mindestens ein Drittel hätte stärker werden müssen, wenn jede einzelne Angabe des Textes mit den entsprechenden Belegen zu versehen gewesen wäre. Es wurde dafür das Auskunftsmittel gewählt, dem Schlusse die allerwichtigsten Literaturnachweisungen anzuhängen, die nach Maßgabe der einzelnen Kapitel geordnet sind.

Einige Schwierigkeit machte die Abgrenzung des Stoffes, nachdem zwischen den Verfassern von Anfang an die Verabredung getroffen war, daß der Unterzeichnete das Altertum und Mittelalter, Herr v. Braunmühl dagegen die Neuzeit zu übernehmen habe. Für die Bestimmung des Zeitpunktes, der in der Geschichte der Mathematik eine ganz neue Entwicklungsphase einleitet, können unmöglich die üblichen Festsetzungen der Weltgeschichte maßgebend sein. Derselbe liegt vielmehr in der ersten Hälfte des XVII. Jahrhunderts; das bewußte Auftreten der Koordinatengeometrie und das Aufkommen infinitesimaler Betrachtungsweisen — Kepler, Fermat, Cavalieri usw. — kennzeichnen den Geist, der sich in der modernen Mathematik Bahn zu brechen beginnt. Wenn sonach für die Titelworte die abkürzende Bezeichnung „Von den ältesten Zeiten bis Cartesius“ gewählt ward, so dürfte damit eine in sich berechtigte und nach außen deutliche Grenzregulierung vorgenommen worden sein.

Noch ein formeller Punkt sei einer kurzen Erörterung unterzogen. Die vielen griechischen Eigennamen, die naturgemäß vorkommen mußten, nach einer einheitlichen Regel zu schreiben, ist keine ganz einfache Sache, und tatsächlich wird auch in dieser Beziehung selten volle Konsequenz geübt. „Platon“ und „Ptolemaeus“ vertragen sich nicht recht gut miteinander. Es wurde deshalb hier strenge an der lateinischen Ausdrucksform der Personennamen festgehalten, die uns Deutschen nun doch einmal am meisten in Fleisch und Blut übergegangen ist, mögen auch „Hero" und „Theo" zuerst etwas fremdartig anmuten. Des ferneren sei noch bemerkt, daß für die indischen und arabischen Worte auf jene diakritischen Zeichen, welche zu schärferer und richtigerer Aussprache unentbehrlich sind, Verzicht geleistet worden ist. Ihre Anbringung erschwert sehr den Druck und wird in einem wesentlich didaktischen Buche kaum vermißt werden, während diese korrektere Schreibart für denjenigen, der sie wirklich kennen zu lernen wünscht, doch erst ein eigentliches Studium darbietet.

Hiermit sei dieser neue Beitrag zur „Sammlung Schubert", bei dessen Bearbeitung der Verfasser von Herrn v. Braunmühl in der entgegenkommendsten Weise unterstützt wurde, deren zahlreichen Freunden bestens empfohlen.

München, im Oktober 1907.

Siegmund Günther.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel I.

Zahl und Maß als Urbesitz der Menschheit.

Ohne einen gewissen Vorrat von Zahlbegriffen läßt sich der Mensch selbst auf der primitivsten Entwicklungsstufe nicht denken, und die vergleichende Ethnologie belehrt uns denn auch in der Tat darüber, daß, bewußt oder unbewußt, jedwedes Volk sich derartige Hilfsmittel geschaffen hat. Hat man doch schon prähistorische Anzeichen dafür gefunden, daß man das Zählen sich durch anschauliche Bilder zu erleichtern wußte; gewisse bemalte Kiesel aus Südfrankreich scheinen durch die Eigenart der darauf angebrachten Zeichnungen hierfür einen Beweis zu erbringen. Und mit dem vorgeschichtlichen Menschen Europas, dessen Existenz sich hier hoch hinauf verfolgen läßt, steht so ziemlich auf gleicher Stufe jener Naturmensch, wie er unseren Forschern in wenig zugänglichen Gebieten Südamerikas, Afrikas, Australiens entgegengetreten ist. Was auf den Gerätschaften der Vergangenheit nur als vieldeutiges Symbol erscheint, das gewinnt Leben und Klarheit, wenn wir ihm bei lebenden Menschen begegnen, wenn wir im Umgange mit ihnen erfahren, wie es der Wilde anstellt, in eine Menge von Gegenständen, mit welchen er zu tun hat, eine gewisse Ordnung zu bringen. Auf die untersten Stufen des Schätzens folgt erst, wie Stoy ausführt, diejenige des Messens und die des Angebens des Ergebnisses in Zahlen. Sogar innerhalb des nämlichen Naturvolkes können individuelle Verschiedenheiten in der Ausbildung dieser Entwicklungsreihen festgestellt werden. So gab es unter den Koin-Koin Südafrikas nach Pott noch vor hundert Jahren besonders zurückgebliebene Gruppen, die zwar Zahlwörter in ihrer Sprache hatten, von ihnen aber fast keinen Gebrauch machten und trotzdem die Schätzung durch das Augenmaß so weit getrieben hatten, daß sie sofort merkten, wenn ein Stück Vieh in der Herde fehlte.

Die naheliegende Vermutung, daß *Finger* und *Zehen* als die sich von selbst darbietenden *Zählmittel* dienen, findet man durchweg bestätigt. Unzulässig aber wäre es, aus dieser Tatsache, wie es wohl geschehen ist, folgern zu wollen, damit sei ganz von selbst ein *quinäres*, *dezimales* oder *vigesimales Zahlensystem* gegeben. K. v. d. *Steinen*, der mit dem noch im Steinzeitalter lebenden Stamme der *Bakaïrí* in Zentralbrasilien so kameradschaftlich verkehrt hat, daß er sich allmählich das geistige Leben dieser harmlosen Naturkinder vollkommen zu eigen machen konnte, beschreibt uns eingehend die Art und Weise, wie ein solches mit den zwei Zahlworten *ahage*, *tokale* Zahlen $\leqq 6$ darstellt, indem es zugleich durch Zusammenlegen gewisser Finger der linken Hand die entsprechende Kombination andeutet; es verfährt ganz im Sinne jener *Digitaldarstellung der Zahlen*, zu welcher uns das Mittelalter zurückführen wird. Eine Zahl >6 ist für die Methode transzendent, aber durch das erläuternde Wort *mera* — dieser — kann der Indianer, indem er die rechte Hand, den linken Fuß und zum Schlusse noch den rechten Fuß zu Hilfe nimmt, auch noch größeren Zahlen gerecht werden. Was ihm zu groß für sein Verfahren vorkommt, ist, wie eine Handbewegung andeutet, gleichbedeutend mit der Anzahl der Haare. So ist also die Zahl 2, die eben mit *ahage* bezeichnet wird, während $6 = 2 \cdot 3$ multiplikativ die Wortbildung *ahage ahage ahage* erhalten hat, als *Grundzahl* anzusehen, und ohne eine gewisse Abstraktion konnten selbst von diesen Kindern des Waldes die Zahlenbildung und der Zahlausdruck nicht jene bescheidene Höhe erreichen, bis zu welcher jene gelangt sind.

Dieses *paarweise erfolgende Zählen* beherrscht aber auch einen sehr beträchtlichen Teil des *malayisch-polynesischen Völkerkreises*; wenn auch die für 2 gebrauchte *Vokabel*, wie es den Anschein gewinnt, vielfach zunächst eine Vielheit überhaupt bedeutete, so ist die eben wiederum einen Akt der Abstraktion kennzeichnende Einschränkung des ursprünglichen Geltungsbereiches erst recht bemerkenswert. Eine Vereinigung von Menschen, die ganz für sich lebte, auch nicht die geringsten Anfänge von

Handels- und Tauschverkehr kannte und auch, wie dies in tropischen Ländern eher der Fall ist, kein Bedürfnis der Zeiteinteilung besaß, mochte mit jenem ureinfachen Zählungsmodus ganz gut auskommen. Aber schon gelegentliche Völkerberührungen und noch mehr die, wie wir jetzt wissen, für fast den ganzen Erdball nachweisbaren Völkerwanderungen mußten über jenes Anfangsstadium hinausführen und zu einer zielbewußteren Verwendung der menschlichen Extremitäten als Zählapparat verhelfen.

Die Hand wird mit der Zahl 5 identifiziert, und so entsteht ein Fünfersystem, welches zumal in Afrika nahezu als das allgemein gebräuchliche betrachtet werden kann. Natürlich tritt der Fuß subsidiär hinzu. Bei nordafrikanischen Berbern stieß Rohlfs auf die ungelenke, aber konsequente Ausdrucksweise: 50 = 4 Hände + 4 Füße + 2 Hände. Auch Geschäftsteilung kommt vor, um durch gemeinsame Arbeit die Schwierigkeit der Wiedergabe einer größeren Zahl zu überwinden. So hat Schrumpf in Südafrika drei Männer zusammenhelfen sehen, um eine Zahl zwischen 100 und 1000 mit Hilfe der Finger wiederzugeben, und zwar zählte der erste die Einer, der zweite die Zehner, der dritte die Hunderter.

Neben den Fingern und Zehen werden aber auch andere, sozusagen künstliche Anschauungsbehelfe nicht verschmäht. Steinchen, Muscheln, Stäbchen, Federn werden nebeneinander gelegt, und das Prinzip der Kerbhölzer, welches für den Staatshaushalt sich im hochkultivierten England bis zum XIX. Jahrhundert erhielt, findet zahlreiche Anhänger. Die Schilluk am oberen Nil benützen Rohrstückchen, die als Einheiten aufgereiht werden. Bekannt sind die Quipos (Gedächtnisschnüre) der alten Peruaner, und im ganzen östlichen Ozeanien sind solche mnemotechnische Behelfe beliebt. Aber die Grundzahlen 5, 10, 20 schlagen doch auch hier immer durch. Die Frage, ob es Zahlsysteme gäbe, die auf einer anderen Normalzahl, als einem Vielfachen von fünf, aufgebaut wären, ist noch nicht völlig spruchreif, und vorab das Elfersystem von Neuguinea, dessen der große Sprachforscher Pott gedenkt, dürfte unter dem Gesichtspunkte der Völkerkunde noch nicht als gesichert anzusehen sein. Zöller wenigstens, einer der besten Kenner der Papuas, weiß nur von fünf-, zehn- und zwanzigteiligen Systemen, so daß jedoch das erstgenannte das weitaus verbreitetste wäre. So zersplittert die Papuasprachen auch sind, so haben sie doch das miteinander gemein, daß sie das Aussprechen auch größerer Zahlen, unter Umständen bis zu 1000, ermöglichen. Sehr auffällig ist das Vorkommen von Fünfersystemen; diese Zählungsweise findet sich in Kamtschatka ebenso, wie bei manchen Eskimostämmen und bei verschiedenen zentralafrikanischen Völkern. Bei den durch ihren Namen auch geographisch bestimmten Wanyassa, also in der Kinyassa zu nennenden Sprache ist nach Stanley 1 = kimodzi, 2 = vioviri, 3 = vitatu, 4 = vinyé, 5 = visiano, 6 = visiano na kimodzi, 9 = visiano na vinyé. Wenn dann auch späterhin noch andere Zahlwörter auftreten, so ist doch, mit Schubert zu sprechen, deutlich erkennbar, daß sich bei fünf der erste Ruhepunkt der Zahlwortbildung befindet. Leicht kann bei dem Verkehre der verschlossenen Eingeborenen mit den der Landessprache nicht vollkommen kundigen Europäern ein Irrtum dadurch entstehen, daß eine heilige Zahl, wie 4 oder 7, mit der Zählbasis verwechselt wird. Indessen mögen Ausnahmen, aber nur für gewisse Zwecke, sehr wohl vorkommen, wie denn auf den Marquesas- und Sandwichinseln neben der Zehnerrechnung noch eine — vielleicht mit Geheimlehren im Zusammenhange stehende — Viererrechnung nachgewiesen ist. Die Herausbildung von Zahlenwerten aus den unbestimmten Begriffen „wenig“ und „viel“ glaubt Frobenius auf verschiedenen Wegen durch die Inselwelt des Stillen Ozeans hindurch verfolgen zu können. Einzelne Zahlformen moderner nordgermanischer Idiome lassen erkennen, daß das Dezimal- auch von einem Duodezimalsystem begleitet ward, und die Einteilung der Maßeinheit, des Fußes, bekundet am besten, welchen Wert die Kulturmenschheit bis auf unsere Tage der durch ihre vielen Teiler ausgezeichneten Zahl zwölf beilegte. Endlich wird im nächsten Kapitel die maßgebende Stellung der Grundzahl sechzig im Altertum und noch später zu würdigen sein.

Durchaus keine Einheitlichkeit besteht auch betreffs der Art und Weise, wie aus der Grundzahl heraus die höheren Zahlen sprachlich gebildet werden. Alle vier

Spezies leisten dazu ihre Mithilfe; die Zahlenbildung setzt folglich gewissermaßen einige Elementarkenntnisse im Rechnen voraus. Es war A. v. *Humboldt*, der in einer viel zu wenig bekannt gewordenen Abhandlung eine *methodische Gliederung* dieser Konstruktionsmethoden durchzuführen versuchte und zu dem Ende *vier* verschiedene Grundgedanken heraushob. Der einfachste ist der der *Juxtaposition*, bei welcher die Ziffernsymbole ohne weiteres addiert werden; als solche galten bei *Griechen* und *Römern* die *Buchstaben*, und zwar bei den letzteren, die ganz quinär dachten, in ziemlich rudimentärer Form. Auch Völker ohne Alphabet, denen aber die Schrift nicht fehlte, sind so zu Werke gegangen; z. B. die *Mexikaner*. Eigentliches Rechnen ist für diesen Anfangsstandpunkt eine sehr beschwerliche Sache. Die zweite Methode besteht nach unserem Gewährsmanne in einer *Veränderung des Wertes durch beigesetzte Zeichen*, was additiv und multiplikativ erfolgen kann; so ist in China

$$\underset{\equiv}{10} = 13; \qquad \overset{\equiv}{10} = 30.$$

Wiederum die Azteken und auch die alten *Ägypter* kannten diese Gepflogenheit. An dritter Stelle steht die *Vervielfältigung des Wertes durch horizontal beigesetzte Zeichen* im Sinne der *tamulischen Inder* und *Armenier*, aber auch der spätesten griechischen Mathematiker. Endlich kann noch ein viertes Hilfsmittel der *Zahlenbewältigung* angegeben werden, welches in der Abteilung von Schichten gipfelt, die nach einer geometrischen Progression angeordnet sind. So haben es, wie sich in *Kapitel* VI zeigen wird, *Archimedes* und *Apollonius* gemacht; in ähnlichem Sinne war, und darauf führt uns das nächste Kapitel zurück, das babylonisch-hellenische Sexagesimal gebildet, indem nur die Exponenten negative Zahlen darstellten.

Die *Addition* bildete bei der Bildung neuer Zahlen und Zahlwörter aus den bereits vorhandenen die Regel. Doch ist auch die *Subtraktion* weder bei Natur- noch bei *Kulturvölkern* unbekannt. Auf der noch viele Probleme darbietenden Insel *Neuguinea* gibt es eine Völkerschaft, welche 7 in der Form $(2 \cdot 2 \cdot 2 - 1)$ ausdrückt; ähnlich, wenngleich umständlicher als der Lateiner, der 18 und 19 als duodevigi nti und undevigi nti kennt. Auch die sprachlich so überaus gewandten Griechen haben keinen Abscheu vor der wirklich langweiligen Sprachform „58 = 60, wenn noch 2 dazu kommen" (*δυοῖν δέοντες ἑξήκοντα*) empfunden. Die germanischen Sprachen weisen ihrerseits ähnliche Bildungen auf.

Weiterhin sei an das sonderbare dänische halvtredsynstive erinnert, welches plötzlich an das Hereinspielen eines sonst längst vergessenen Zwanzigersystemes in die übliche Zählweise gemahnt; der dritte Zwanziger, welcher den Fortschritt von 40—60 markiert, kommt nicht voll, sondern nur halb zur Anrechnung. Diese und ein paar andere Anomalien der dänischen Schriftsprache hat das Norwegische, das sich von jener eigentlich nur mundartlich unterscheidet, durch korrekt dem Sprachgeiste angepaßte Ausdrücke ersetzt. Aber auch die Malayen besitzen eine ähnliche subtraktive Darstellung für 25 und 55, welche Zahlen bei ihnen, wenn wir die Wortbildung analysieren, in der Gestalt

$$\frac{1}{2} \cdot 60 - 5, \quad \frac{1}{2} \cdot 120 - 5$$

erscheinen. Von nicht bloß gelegentlichen, sondern geradezu entscheidendem Einflusse auf die Zahlbildung erweist sich das subtraktive Prinzip in den Sprachen einiger Indianerstämme Nordamerikas.

Auch multiplikative Anklänge spielen mitunter eine Rolle in Zahlsystemen, die sonst ganz korrekt auf der dezimalen Grundlage der konsequenten Addition und Wortbildung aufgebaut sind. So ragt das Wort quatre-vingt für 80 wie ein erratischer Block aus früher, möglicherweise keltischer Vergangenheit in das moderne Französisch hinein. Was die Addition selbst anlangt, so hat der Sprachgebrauch nicht allenthalben dieselbe Gesetzmäßigkeit beobachtet, wie im Deutschen, wo im Bereiche zwischen 10 und 100 immer die kleinere Zahl vorausgeht, die größere folgt. Das Italienische z. B. verbleibt bis 15 und 16 (quindici, sedici) bei derselben Norm, um sodann für 17, 18 und 19 (diciasette, diciotto und dicianove) in das Gegenteil überzugehen. Beim Schreiben allerdings bewahren alle Völker, die das

Wesen des Stellenwertes zur Geltung gebracht haben, das von Hankel bemerkte und von Cantor so benannte Gesetz der Größenfolge, d. h. sie lassen die größere der kleineren Zahl vorausgehen ($24 = 2 \cdot 10 + 4$, nicht $4 \cdot 10 + 2$). Das trifft für unsere abendländische Schrift, die von links nach rechts geht, ganz ebenso wie für die umgekehrt verlaufende morgenländische und nicht minder sogar für die vertikal gerichtete chinesische zu.

Die Erfindung einer diesen Namen verdienenden Zahlschrift könnte man mit einigem Recht als ein Kennzeichen zum Abtrennen der Kulturnationen von den auf niedrigerer Stufe stehen gebliebenen Völkern hinstellen. Die Azteken würden damit, wofür trotz mancher Bedenken eine ganze Anzahl von Erwägungen spricht, in die Reihe der erstgenannten aufrücken. Daß von dem Momente an, da eine Silben- oder Buchstabenschrift sich eingebürgert hatte, die Möglichkeit, den großen Fortschritt einer zielbewußten Schreibung der schon vorhandenen Zahlen einzuleiten, weit näher gerückt war, ist unmittelbar einleuchtend. Und man muß wohl annehmen, daß dieser gewaltige Schritt sich in verschiedenen Teilen der Erdoberfläche spontan vollzogen habe. Wenn Bastian seine Lehre vom Völkergedanken, Ratzel dagegen die Übertragungstheorie formuliert hat, welcher zufolge immer eine Neuerung von einem Zentralpunkte aus sich mehrseitig verbreitet und an anderen Stellen nur Umänderungen erfährt, so wird man in unserem Falle wohl dem erstgenannten grundsätzlich recht geben müssen, ohne im übrigen die zahllosen Möglichkeiten der Verpflanzung anderwärts entstandener Gedanken an entfernte Orte in Abrede stellen zu wollen.

Und was von den Anfängen des Zählens, Zahlenschreibens und Rechnens gilt, das läßt sich auch für diejenigen gewisser einfachster räumlicher Begriffe behaupten. Zu deren Herausbildung zwang gleichmäßig die Notwendigkeit, sich am Himmel und auf der Erde zu orientieren. Die Bewegung der beiden großen Himmelskörper mußte verfolgt und bis zu einem gewissen Grade gemessen werden, und es leuchtet einem jeden, der selbst in einem sozusagen noch unmathematischen Alter die Anfangsgründe der Sternkunde sich zu eigen gemacht hat, ein, daß primitive Astronomie und primitive Geometrie voneinander unzertrennlich sind. Die Bestimmung der vier Weltgegenden, ein Vorgang, der zweifellos bis zu den allerersten Regungen der Zivilisation hinaufreicht, war ohne schärfere Naturbeobachtung und ohne einige Anspannung des Raumsinnes nicht zu erreichen. Ein solcher aber ist dem Menschen von Hause aus mitgegeben. Dafür liefert den untrüglichen Beweis jene oft besprochene Geschicklichkeit, welche manchen Naturvölkern, denen das Schicksal einen ganz besonders harten Kampf mit dem Dasein aufgezwungen hat, in der Wiedergabe natürlicher Linien auf kleinem Raume zu eigen ist. Die Kartographie der Naturvölker bildet ein reizvolles Kapitel der Völkerkunde. Am berühmtesten sind nach dieser Richtung hin die Eskimos, über deren ausgeprägte Naturanlage eine Fülle bestbeglaubigter Zeugnisse von Reisenden vorliegt, welche selbst von dieser eigenartigen Technik den größten Vorteil gezogen haben. Gab man einem dieser wilden Jäger einen Bleistift und ein Stück Papier in die Hand, so entwarf er aus freier Hand das Bild einer Küstenlinie von oft nichts weniger denn einfachem Verlaufe mit allen Golfen und Vorgebirgen, eine Faustskizze, die sich als treu genug erwies, um für mehrere Tage zum Führer in einer noch ganz unbekannten Gegend zu dienen. Was hier nur Gelegenheitstätigkeit war, hat bei anderen, auf der Stufenleiter der Kultur höherstehenden Völkern auch eine entsprechende Ausgestaltung erfahren. Die auf Tierhaut gezeichneten Stadtpläne der Urbewohner von Guatemala überraschen durch das natürliche Verständnis, mit welchem den einzelnen wichtigeren Punkten der Ansiedelung der richtige Ort angewiesen ist. Auch die seit A. v. Humboldt bekannter gewordenen altmexikanischen Landkarten, die wahrscheinlich für den amtlichen Gebrauch in einem schon wohlgeordneten Beamtenstaate entworfen waren, haben wohl nur in etwas verbesserter Form wiederholt, was den Stämmen der Tolteken und Azteken Jahrhunderte zuvor auf ihren weiten Wanderungen durch Steppe und Wüste geläufig geworden war. Und man wird kaum sagen können, daß diese Diagramme, die natürlich nur einzelne auffallende Örtlichkeiten und die zwischen ihnen gezogenen Verbindungslinien enthalten, wesentlich hinter dem zurückstehen, was das hyperzivilisierte, aber freilich schon stark auf der Bahn des Niederganges fortgeschrittene

Römervolk in seiner vielbesprochenen Tabula Peutingeriana zustande gebracht hat.

Gerade der amerikanischen Rasse scheint in dieser Beziehung eine gute Begabung verliehen zu sein, die dann allerdings durch die Verhältnisse des Wohnraumes noch eine nicht zu unterschätzende Weiterbildung erfahren haben mag. Von Indianerstämmen wird berichtet, daß sie ein vermutlich sehr altes, von Generation zu Generation sich fortpflanzendes Verfahren zur Messung der Breite eines Flusses vom Ufer aus im Besitze haben — oder wohl hatten, da durch Verkümmerung solcher Erbbesitz rasch zugrunde zu gehen pflegt. Die Messung erfolgte ungefähr in derselben Weise wie bei den römischen Feldmessern, deren Bekanntschaft wir in Kapitel VIII zu machen haben werden. Man begreift leicht, daß bei Menschen, deren ganzes Leben sich als ein unstetes Herumschweifen in pfadloser Prärie darstellt, solche Kunstgriffe eine ganz andere Rolle als bei den Völkern spielen müssen, deren Sitze in der Hauptsache stabil sind. So wenig Anlagen der Nomade für höhere Kultur mitbringt, so wird er doch manche Fähigkeit unter dem Drucke der Verhältnisse weit mehr auszubilden genötigt sein, als der Seßhafte hierzu Veranlassung hat.

In ganz auffallend drastischer Weise bewahrheitet sich dieser Erfahrungssatz auf dem Meere. Alle jene Völker, welche sich auf den Seeverkehr hingewiesen sehen, entwickeln nicht nur im Schiffbau und im Segeln nach den Sternen eine besondere Geschicklichkeit, sondern sie können sogar nicht umhin, mit den einfachsten Mitteln das schwierige Problem der Ortsbestimmung zu lösen. Schon aus grauer Vorzeit ist wohl den Schiffern des Indischen Ozeans eine Tradition übermittelt worden, die Polhöhe, d. h. eigentlich die trigonometrische Tangente dieses Winkels durch Fingerstellung oder durch Anwendung eines Knotenstrickes obenhin abzuschätzen. Handelte es sich da um eine Verwertung der vom Firmamente dargebotenen Richtpunkte, so sind andererseits rein terrestrisch die in neuester Zeit zu vielseitiger Erörterung gelangten Segelanweisungen der mikronesischen Insulaner, über welche wir hauptsächlich durch Hernsheim und Schück genau unterrichtet worden sind. Die Kleinheit dieser Eilande nötigt deren Bewohner geradezu, sich sehr viel der hohen See anzuvertrauen, und unter dem Einflusse dieses Zwanges hat man jene Apparate angefertigt, die in unseren ethnographischen Sammlungen stets erhöhte Aufmerksamkeit erregen. Man tut diesem Worte kaum Gewalt an, wenn man sagt, daß einem solchen Medo der Grundgedanke des Koordinatensystems unterlegt ist. Immer und immer sich wiederholende Anschauung hat diese Naturkinder darüber vergewissert, daß die Dünung, der stationäre Bewegungszustand der Meeresfläche, sich in parallelen Wellenzügen offenbart, die denn auch durch eine Reihe von Stäbchen nachgebildet wurden. Eine zweite Stabreihe steht auf der ersten ungefähr senkrecht, so daß man damit eine Art von Kartennetz erhalten hat. Auf den Durchschnitten der Stabsysteme werden Steinchen oder Muscheln befestigt, welche die innerhalb des betreffenden Meerbezirkes gelegenen Inseln andeuten sollen. Hält dann der Schiffer die Vorrichtung so, daß die eine Koordinatenachse mit der Dünungsrichtung zusammenfällt, so ist die Karte zum Gebrauch fertig, und es kann der Kurs bestimmt werden, welcher dem angestrebten Ziele sich anpaßt.

Den Übergang zu einer mehr abstrakten Betrachtung räumlicher Beziehungen dürfen wir erst dann als sich vorbereitend annehmen, wenn einige grundlegende Begriffe terminologisch festgelegt sind. Die Beschaffenheit des menschlichen Körpers wird dafür die ersten Anhaltspunkte geliefert haben. So ist es, wie Cantor betont, gewiß kein Zufall, daß das Wort Schenkel in den verschiedensten, nicht etwa bloß indogermanischen Kultursprachen zugleich die beiden einen Winkelraum einschließenden geraden Linien kennzeichnet, und daß die griechischen Worte für Winkel (γωνία, γῶνος) in unverkennbarem Zusammenhange mit dem Ellenbogen oder Knie (γόνυ, γοῦνος) stehen. Hatte man erst einmal die Dinge und eine Bezeichnung dafür, so lag es nahe, mit denselben zu manipulieren, und aus gewöhnlichen Zeichnungen heraus kann sich, zugleich mit der Freude an der Gestalt, welche Clebsch als eine Vorbedingung für die Arbeit des schaffenden Geometers hinstellte, die erste Regung des Sinnes für geometrische Gesetzmäßigkeit entfaltet haben.

Auch der Mitwirkung, welche für diesen Prozeß das geometrische Ornament lieh, darf hier wohl gedacht werden. Auch dies ist ältestes Eigentum der Menschheit und läßt sich an den Überbleibseln vorgeschichtlicher Artefakte bis in eine nicht mehr durch chronologische Zahlen angebbare Vergangenheit zurückverfolgen. Allerdings dürfen wir uns nicht verführen lassen, wahllos jedwedes Bildwerk dieser Art als das Erzeugnis einer frei gestaltenden Phantasie anzusprechen, denn das Studium der Völkerpsyche hat uns einsehen lassen, daß das, was uns als ein willkürliches Durcheinander von Linien und Punkten erscheint, nicht selten in den Augen des Naturmenschen eine Abbildung tatsächlich vorhandener Gegenstände sein soll. In vielen anderen Fällen jedoch tritt der echt geometrische Charakter solch dekorativer Beigaben ganz deutlich zutage. Gerade auch in dieser Beziehung gewähren zumal die zentralamerikanischen Sakralaltertümer nützliche Fingerzeige.

All das, was wir bisher zu besprechen hatten, kann nur als eine Vorahnung, höchstens als eine halb unbewußte Antizipation der Wissenschaft aufgefaßt werden. Deren Auftreten ist an die vorhergehende Existenz einer systematischen Schreibkunst, des für den höher strebenden Menschen entscheidenden Hilfsmittels der Gedankenmitteilung gebunden. Wohl möglich, daß China, wie seine Verehrer glauben, hier wirklich der zeitliche Vorrang gebührt; leider sind wir nicht imstande, die fraglichen Aussagen irgendwie bestätigen zu können. Soweit im Augenblicke unser Wissen reicht, finden sich die Anfänge wissenschaftlicher Bestrebungen bei den großen Kulturvölkern Nordafrikas und Westasiens, und zwar muß im Zweistromlande das älteste Denkmal der Schrift gesucht werden. Hier also hat auch unsere Schilderung einzusetzen.

Kapitel II.

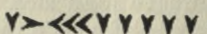
Die Mathematik der Mesopotamier.

Die Forschungsarbeit der Keilschrift- und der semitischen Philologie, gestützt auf umfangreiche und planvoll geleitete Ausgrabungen, hat den Nachweis erbracht, daß das fruchtbare Land zwischen Euphrat und Tigris, welches auch auf des letzteren linkes Ufer hinüberreicht, schon in dem Zeitraume zwischen 5000 und 4000 v. Chr. von einem höher stehenden, schriftkundigen Volke bewohnt gewesen ist. Noch in vorgeschichtlicher Zeit muß die Durchdringung der aus den Steppen Turans eingewanderten Sumerier mit einem von Osten gekommenen, nicht oder nur entfernt stammverwandten Volke stattgefunden haben, und so entwickelte sich auf dem Boden Chaldaeas eine eigenartige Kultur, die man, den nachmals entstandenen politischen Bildungen angepaßt, als assyrisch-babylonische zu bezeichnen gewohnt ist. Daß die sogenannte Keilschrift bereits den Sumeriern nicht fremd war, ist wahrscheinlich, aber erst unter semitischem Einflusse dürfte sie jene hohe Ausbildung und jenen — bei so einfachen Hilfsmitteln — wunderbaren Formenreichtum sich angeeignet haben, der sie weit später befähigte, auch in den Dienst eines grundverschiedenen Idiomes, des arisch-persischen, zu treten. Vor allem ließ sich diese Schrift auch für die Bedürfnisse einer sehr anspruchsvollen Zahlendarstellung trefflich verwenden.

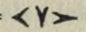
An „handschriftlichem" Materiale zur Beurteilung chaldäischer Geistesarbeit fehlt es der Gegenwart nicht. Ungemein groß ist die Menge der aufgefundenen und in unseren Museen katalogisierten Tontäfelchen, welche nach Hilprecht dann, wenn sie nur dem täglichen Leben, dem Handel und Wandel gewidmet waren, aus ungebranntem Stoffe bestanden, während gebrannter Ton stets gewählt ward, sobald es galt, das Niedergeschriebene besser auszustatten und dauerhaft zu machen. Eine einzige Expedition, eben die des vorgenannten Deutsch-Amerikaners, konnte in den Ruinen des berühmten Bâl-Tempels nicht weniger als 23000 neuere literarische Keilschrifttexte sammeln, welche in der Bibliothek und in den von der Priesterschule eingenommenen Räumen aufgespeichert waren, wozu dann noch 2000 sehr viel ältere aus den untersten Stockwerken des dereinst hochragenden, jetzt in Trümmern liegenden Bauwerkes kamen.

Und diese Funde lassen uns nun Einblicke in den Studienbetrieb einer altersgrauen Vergangenheit tun, wie sie uns leider für unverhältnismäßig spätere Zeiten nur allzuoft versagt bleiben. Gerade der Historiker der Mathematik muß es gar häufig beklagen, daß er sich von der Art des Unterrichtes in seinem Fache zu einer gewissen Epoche gar keine klare Vorstellung machen kann. Die alten Chaldäer waren in dieser Hinsicht entgegenkommender. Wir können wahrnehmen, wie die Zöglinge der heiligen Schule sich ihre Täfelchen selbst herstellen und die Anfangsgründe der Schreibkunst erlernen mußten; wir sehen sie, modern gesprochen, orthographische und Präparierübungen machen; wir empfangen endlich auch einen Einblick in den mathematisch-astronomischen Lehrgang. Daß der zweite Teil desselben der hervortretende und wesentlich derjenige war, um dessen willen der zukünftige Priester auch mit der Rechenkunst vertraut werden mußte, leuchtet ein. Haben doch die „Chaldäer" so ausgesprochen von alten Zeiten her den Ruhm besonderer Einsicht in den Gang der himmlischen Erscheinungen besessen, daß man in Rom späterhin diesen Namen schlechtweg mit dem eines Astrologen identifizieren zu dürfen glaubte. Zwar gehören die — immerhin ersten geschichtlich beglaubigten — Beobachtungen, welche uns Ptolemaeus im „Almagest" überliefert hat, nur dem ersten vorchristlichen Jahrtausend an, aber es ist doch, wie J. Oppert zeigte, kaum zweifelhaft, daß bereits zu den Zeiten vor König Sargon, zu denen des jetzt so viel genannten Hammurabi, astronomische Aufzeichnungen in Babylon gemacht worden sind. Die hohe Bedeutung, welche dem Monde zukam, nötigte die Priesterastronomen, so genau als möglich den Neumondtermin festzulegen, indem sie die Anzahl der Stunden und Minuten ermittelten, welche noch über die bekannten 29 Tage zwischen je zwei solchen konsekutiven Zeitpunkten enthalten waren. Und überdies bot sich eine zweite notwendige Aufgabe dar in der Fixierung des Neulichtes; d. h. man mußte das Intervall zwischen dem theoretisch erhaltenen Eintreten der Neumondkonstellation und dem ersten Erscheinen der schmalen Sichel am Westhimmel auffinden. Mit dem rohen Verfahren der alten Israeliten, diese Erscheinung durch Zeugenaussagen beurkunden zu lassen, begnügte man sich in Babylon nicht, sondern man verlangte rechnerische Exaktheit. Man konstruierte auch wirkliche, für mehrere Jahre Genauigkeit verbürgende Mondtafeln, welche jeweils die Voraussage von Finsternissen ermöglichten, und wagte sich auch an die Ephemeriden der bereits näher bekannten Planeten „Dilbat“ (Venus), „Guttu“ (Jupiter) und „An“ (mutmaßlich „Mars“), indem man vorzugsweise den Konjunktionen dieser Wandelsterne mit bestimmten Fundamentalsternen der Ekliptik Beachtung schenkte. In der Hilprechtschen Kollektion befindet sich u. a. eine Tafel, welche die Beobachtungen von Spika und Antares enthält und allem Vermuten nach dazu bestimmt war, die Bewegung der Planeten im Tierkreisgürtel durch den Vorübergang an bekannten Fixpunkten zu verfolgen. Häufig schließen die hierfür erforderlichen Zahlenrechnungen mit den sich immer wiederholenden Worten: „kiâm nepeschu“ (also ist die Berechnung). Durch die Mühewaltung von Epping, Straßmaier und Kugler ist unser Verständnis der mesopotamischen Astronomie so beträchtlich vervollkommnet worden, daß auch die Schwierigkeiten des Eindringen in die rein mathematischen Dinge eine nicht unwichtige Verminderung erfuhren. Denn wenn überhaupt gar oft die Astronomie den Schlüssel für die aus ihr hervorgewachsene reine Mathematik liefert, so ist dieser Sachverhalt bei Babyloniern und Assyrern vielleicht zur schärfsten Ausprägung gelangt.

Beim Zahlenschreiben der mesopotamischen Völker hat wiederum das uns aus Kapitel I erinnerliche Gesetz der Größenfolge Geltung, was angesichts der semitischen Sitte, von rechts nach links zu lesen und zu zählen, auffällig erscheinen kann und eben wohl damit zusammenhängt, daß von keiner rein semitischen Kultur, sondern nur von einer aufgepfropften die Rede sein kann. Ein Vertikalkeil entsprach der Einheit; ein Keil mit horizontaler Achse trat für die Zahl 100 rechts neben den ersteren. Als Symbol von 10 wurde ein Winkelhaken, der sich nach rechts öffnete, gebraucht, so daß also etwa die Beziehungen zwischen sonst und jetzt durch die Gleichung

 = 135

versinnlicht werden. Bis zur Zahl 199 reichte die einfache Nebeneinanderstellung dieses Beispieles hin, während für die Zahlen $\geqq 200$ eine Abänderung der einfachen und natürlichen, für eine Steinschrift sogar höchst zweckmäßigen Schreibweise Platz griff. Wenn man nämlich sechshundert ausdrücken wollte, so setzte man sechs Vertikalkeile links neben die als 100 bekannte Kombination, bis dann wieder für tausend ein selbständiges Zeichen erschien; es ist

1000 =  .

Besondere Zeichen gab es ferner für 10^4 und 10^5, so daß schon ziemlich große Zahlen graphisch ausgedrückt werden konnten. Ménant scheint 120 000 als die bis jetzt größte Zahl nachgewiesen zu haben, auf welche sich dieses babylonische Verfahren erstreckte.

Über die Bezeichnung gewisser einfacher, sich häufig wiederholender Brüche hat zuerst J. Oppert Licht verbreitet. Doch entbehrte diese Bruchdarstellung des systematischen Gepräges, und zwar wohl nur aus dem natürlichen Grunde, daß man sich ihrer nur gelegentlich, aus Bequemlichkeitsgründen, bediente, wogegen für wissenschaftliche, in erster Linie also astronomische Zwecke ein ganz anderes, rationell ausgedachtes und einheitlich durchgeführtes Prinzip treffliche Dienste leistete. Chaldaea ist das Vaterland des Sexagesimalsystemes, und nicht der semitische Einschlag, der sich in der bisher besprochenen Anwendung dezimalen Zahlenaufbaus zu erkennen gibt, war für diese große Neuerung, die für Jahrtausende nachwirkte, maßgebend gewesen, sondern es war diese sumerischen Ursprunges. Eine Tafel, die von Hincks aufgefunden und von ihm als ein Hilfsmittel der Lunarastronomie erkannt worden war, hat die Forscher zuerst in diesen ganz neuen Gedankenkreis eingeführt, in dem man sich sodann durch die berühmt gewordenen Tafeln von Senkereh noch genauer orientieren konnte. Eine von diesen erwies sich bei Rawlinsons Prüfung als eine Zusammenstellung der Quadrate der natürlichen Zahlen, denn von 1^2 bis 7^2 war die Schreibung die übliche, und als sich von 8^2 an eine ganz andere bemerklich machte, da drängte sich gebieterisch die Annahme auf, man sei auf ein ganz neues Verfahren der Zahlendarstellung gestoßen. Der sonst die Einheit repräsentierende vertikale Keil mußte, wenn die Tabelle einen Sinn geben sollte, die Zahl 60 bedeuten, denn es war z. B. 10^2 = 𒁹𒌋𒌋𒌋𒌋 = $60 + 40$. Zur Gewißheit wurde das aus den Quadraten erschlossene Ergebnis, als sich auch ein Verzeichnis der Kuben hinzugesellte; wenn 𒁹 𒁹 𒁹 𒁹 𒁹 𒁹 𒁹𒌋𒌋𒌋 die dritte Potenz von 30 sein sollte, wie aus dem Orte der Zahl zu schließen war, so blieb nur die Möglichkeit übrig, daß der Rechner, der die Tafel gefertigt hatte, von der Identität

$$30^3 = 27000 = 7 \cdot 60^2 + 30 \cdot 60^1 = 25200 + 1800$$

ausgegangen war. Einen neuen Beweis für die Richtigkeit der Hincks-Rawlinsonschen Deutung brauchten, weil diese eben schon durch innere Gründe gefestigt dastand, Hilprechts großartige Funde nicht mehr zu erbringen; wohl aber haben uns diese in unschätzbarer Klarheit die babylonische Didaktik vor Augen geführt. Der Tempelschüler mußte, so wie bei uns die Jugend das Einmaleins einübt, die mannigfachsten Zahlformen von der Form $(m \cdot 60 + n)$, unter m und n ganze Zahlen < 10 verstanden, auswerten und ineinander überführen lernen, zu welchem Behufe ihm Hilfstabellen, Rechenknechte nach Cantor, in die Hand gegeben waren. In Figur 1 haben wir ein von Hilprecht abgebildetes Exemplar dieser Art vor uns; die dritte Zeile von oben besagt z. B., daß $60 + 9 \cdot 10 = 120 + 3 \cdot 10 = 150$ ist. Ein andermal hat der Beschauer die Werte der Produkte $1 \cdot 6$, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 6$, $4 \cdot 6$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 6$, $7 \cdot 6$, $8 \cdot 6$, $9 \cdot 6$, $10 \cdot 6$ vor sich, und ähnliche Übersichten der Vielfachen gab es noch für viel größere Zahlen als für 6. Neuere Mitteilungen von Hilprecht belehren uns, daß die, von den Paradigmen abgesehen, im Gebrauche vorkommenden Zahlen nur Produkte von der Form $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ dar-

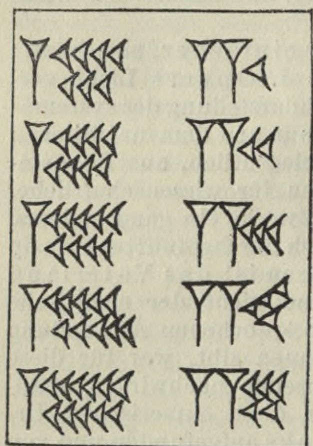


Fig. 1.
(Aus: Hilprecht, Die Ausgrabungen im Bêl-Tempel zu Nippur.)

stellen. Die größte so gebildete Zahl ist 1296000, und die meisten ihrer Teiler sind schon nachgewiesen worden. Analogien mit der uns im nächsten Kapitel entgegentretenden Rechnungsweise der Ägypter sind nach v. Oefele — Hilprecht selbst geht hierauf nicht ein — unverkennbar. Ersterem Autor zufolge ist die Vorliebe für die Zahl 60 die Konsequenz eines die chaldäische Arithmetik beherrschenden Dezimoduodezimalsystemes, welches in gewissem Sinne auch schon dem Nullbegriffe Rechnung getragen hätte. Auch eine Art von Operationszeichen — Plus, Minus, Mal, Durch — war vorhanden, und besondere Symbole drückten Quadrieren, Kubieren und die freilich wohl nur bereits mit Hilfe der vorhandenen Tabellen vorgenommene Wurzelausziehung aus. Durch Hilprecht, so meint v. Oefele, ist für die Kenntnis babylonischer Arithmetik so ziemlich dasselbe geleistet worden, was für die Jurisprudenz durch Auffindung, Übersetzung und Erläuterung des Hammurabi-Gesetzbuches unlängst geschehen ist. Der eigentümliche Charakter des astronomischen Kalkuls verlangte mit Notwendigkeit derartige Erleichterungsmittel, und wir dürfen uns denken, daß der eine Mondrechnung ausführende „Magier“ eine Bücherei von Tontafeln besaß, aus der er, so wie ein Moderner die Logarithmentafel handhabt, die gerade für ihn wichtige Produktenreihe herausnahm. Die Zeit der Entstehung dieser arithmetischen Tabellen läßt sich nicht mit voller Sicherheit angeben, aber allzulange nach dem Jahre 2000 v. Chr. dürften sie nach Erwägungen, welche allerdings nur der Assyriologe vollkommen zu würdigen imstande ist, wohl kaum datiert werden können. Die Frage, ob man auch etwas der Null Entsprechendes zur Verfügung hatte, um also signalisieren zu können, daß in der Reihe $(a \cdot 60^m + b \cdot 60^{m-1} + c \cdot 60^{m-2} + \ldots)$ ein Glied fehle, kann noch nicht abschließend beantwortet werden, aber daß ein gewisser Ersatz dafür existierte, scheint durch Hilprecht wahrscheinlich gemacht zu sein. Für eine sehr späte Zeit ist sie wohl bestimmter zu bejahen, allein damals stand das Zweistromland auch schon so sehr unter auswärtigen Einflüssen, daß ein Import von Osten her sehr im Bereiche der Wahrscheinlichkeit liegt. Man kann, die Resultate von Kapitel XI hinzunehmend, sich den Vorgang vielleicht so denken, daß Indien von Babylon her die ersten schwachen Andeutungen des Stellenwertes empfing, sie in seiner Weise um- und ausbildete und später das reiche Geschenk des fertigen Positionssystemes den Nachkommen jener Geber zurückerstattete.

Was aber die Konsequenz des Sexagesimalsystemes zu einer ganz vollkommenen macht, das ist der von J. Oppert zuerst erschlossene Umstand, daß, in der Ausdrucksweise der Gegenwart gesprochen, auch negative Potenzen in die Reihenbildung aufgenommen wurden, so daß also eine Zahl in der Form

$$a \cdot 60^m + b \cdot 60^{m-1} + \ldots + g \cdot 60 + h + \frac{i}{60} + \frac{k}{60^2} + \ldots + \frac{p}{60^x}$$

erscheinen konnte. Nun erst vermochten die babylonischen Astronomen jene freilich etwas phantastische Genauigkeit zu erreichen, deren sie sich bei ihren Rechnungen beflissen. Übrigens benützte man die Sexagesimaldarstellung auch dazu, zwei in solcher Form geschriebene Zahlen ins Verhältnis zu setzen, und der Wert eines solchen Verhältnisses kann in gewissem Sinne als eine dritte Art der Bruchschreibung aufgefaßt werden, auf welche die astronomischen Bedürfnisse hinführten. Willkommene Aufschlüsse hierüber sind uns von Kugler gegeben worden. Man hatte schon in ziemlich früher Zeit die Ungleichförmigkeit der scheinbaren Sonnenbewegung wahrgenommen, und so trat auch die Verpflichtung hervor, das Verhältnis zweier gleichen Zeiten zugehöriger Bogenwege angenähert in ganzen Zahlen auszudrücken. In einem gewissen Falle ist man so auf die Bruchbeziehung

$$\frac{30 \cdot 60^2}{28 \cdot 60^2 + 7 \cdot 60^1 + 30} = \frac{30 \cdot 2 \cdot 60}{28 \cdot 2 \cdot 60 + 7 \cdot 2 + 1} = \frac{16}{15}$$

gekommen. Man sieht, daß den babylonischen Astronomen neben einer sehr scharfen Beobachtung auch eine große Gewandtheit in der Handhabung ihrer Sexagesimalrechnung eignete.

Dabei finden sich nirgendwo auch nur die schwächsten Anzeichen des Vorhandenseins irgend welcher trigonometrischen Rechnung, wie sie sich sonst, sobald Ort und Ortsveränderung der Himmelskörper den Menschen beschäftigen, ganz von selbst darzubieten pflegt. Es wurde ausschließlich addiert und subtrahiert; die Bildung von Differenzreihen mußte aushelfen, um die in Betracht kommenden Werte möglichst genau zu erhalten. Daß diese Präzision freilich trotz aller Mühe nur eine vermeintliche war, ist, wenn man sich die Schwierigkeiten der Aufgabe und die unzureichenden Mittel vergegenwärtigt, nicht zu verwundern. Fehler von 1 bis 3 Grad, also Fehler von einer nach unseren Begriffen sehr beträchtlichen Größe ließen sich bei der Berechnung der Mondstationen nicht umgehen. Gleichwohl darf man gewiß annehmen, daß die Griechen, die seit der Zeit des Alexanderzuges in lebhafterer Fühlung mit dem alten Kulturlande im Osten standen, die dortigen Methoden kennen gelernt und erst, als sie für ihre Anforderungen versagten, ganz neuen Ideen sich zugewendet haben. Auf eine in diesem Sinne zu interpretierende Tatsache werden wir in Kapitel V zurückkommen.

Natürlich soll hier nicht nur eine Einkleidung assyrisch-babylonischer Mathematik in das Gewand der Jetztzeit ihre Stelle finden, sondern es darf auch ein Hinweis darauf nicht fehlen, welche Ausdrucksweise damals für die Wiedergabe der Zahlen gebräuchlich war. Dafür sind die Studien J. Opperts über das mesopotamische Maß- und Gewichtssystem maßgebend, welche ihrerseits wieder an die älteren, bahnbrechenden von Brandis sich anschließen. Es gelang, den schon von früher her als Zahlenbezeichnungen bekannten Worten Soß, Ner, Sar — von letzterem wußten auch die Griechen — einen klar erkennbaren Wert beizulegen; Soß ist 60, Ner 600, Sar $3600 = 60^2$. Gerade auf diese Entdeckung gestützt, konnte Hincks, wie wir oben erfuhren, das Wesen des Sexagesimalkalkuls zuerst enträtseln. Man wird also, dies ist jetzt so gut wie gewiß geworden, größere Zahlen in der Weise gesprochen haben, daß man sie als Summe von so und so viel Soß und so und so viel Sar bezeichnete, während das minder konsequente Ner mit seinem Zahlenkoeffizienten sozusagen eine Zwischenstation bildete. Wenn man vor einigen Jahren, als man die jetzt mehr und mehr außer Kurs kommenden Vielheitsbezeichnungen noch häufig im Munde führte, die Zahl 163 als aus zwei Schock, drei Dutzend und sieben Einheiten be-stehend beschrieben hätte, so wäre die Ausdrucksweise eine derjenigen Mesopotamiens nahe verwandte gewesen.

Woher die Vorliebe dieser Völker für die Zahl 60 stammte, ist wiederholt Gegenstand der Fragestellung und Erörterung gewesen. Es fehlt nicht an Hinweisen, daß auch bei anderen orientalischen Völkern die gleiche Bevorzugung bestand; ob die verhältnismäßig große Anzahl der ganzzahligen Teiler (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30) dabei eine Rolle spielte, bleibt unentschieden. Näher liegt wohl, obschon auch gegen diese Hypothese Zweifel geäußert worden sind, ein von dem Venetianer Formaleoni bereits 1788 ausgesprochener Gedanke, der wiederum die astronomischen Neigungen der Babylonier zum Ausgangspunkte nimmt. Zu allererst kam es, wenn man zu einer geordneten Zeitrechnung gelangen wollte, darauf an, die Jahreslänge zu ermitteln, und daß das keine so einfache Sache ist, leuchtet ein, weil dann, wenn die sich zwischen den Wendekreisen in ihrer schraubenförmigen Bahn hin und her bewegende Sonne ihre größte Entfernung vom Äquator im Norden und Süden erreicht, ein Solstitium eintritt, während dessen das Tagesgestirn fast unverrückt am nämlichen Orte der Himmelskugel zu verbleiben scheint. Die ältesten Astronomen hätten also das Sonnenjahr, statt mit $365^1/_4$, fälschlich nur mit 360 Tagen in Rechnung gebracht, und das sei auch der Grund dafür, daß der Kreis eine Einteilung in 360 Teile oder Grade empfing; 1^0 habe eben einen „Tagesschritt" der Sonne ausgemacht. Von 360 war aber der Übergang zur Zahlenbasis 60 sehr nahe gelegt, sobald man mit Cantor die sehr plausible Vermutung zuläßt, es sei von ältester Zeit an auch die Einbeschreibung des regelmäßigen Sechseckes in den Kreis bekannt gewesen. Denn jeder Seite als Sehne entsprach dann ein Bogen von 60^0. Damit sind wir jedoch bereits an das dürftige Maß von Kenntnissen herangetreten, welches uns bisher von assyrobabylonischer Geometrie zu erwerben möglich war.

Eine solche hat es unzweifelhaft gegeben, und zwar scheint sie aus zwei verschiedenen Wurzeln herausgewachsen zu sein. Dem Assyriologen Sayce verdankt man die Übersetzung einer Anleitung zur Wahrsagerei, bei welcher gewisse Linienkombinationen das Handwerkszeug abgeben. Die morgenländische Punktierkunst, deren Reste noch in die Gegenwart hereinreichen, steht auf ebendemselben Boden. Parallellinien und ähnliche Dreiecke kommen vor, und da ist man wohl berechtigt, zu glauben, daß derjenige, der solche Figuren mit Vorbedacht zeichnete, sich auch etwas dabei gedacht haben müsse. Ob es mit dieser Linienornamentik zusammenhängt, daß man auch die Sechsteilung des Kreises in Betracht zog, die jedenfalls der Ornamentik der Denkmäler nicht fremd ist, bleibt dahingestellt.

Die zweite der beiden namhaft gemachten Wurzeln ist in der einfachen Vermessungskunde zu suchen. Der Plan der ehemaligen Stadt Khorsabad, der in Rechteckform vorliegt, hat J. Oppert zuerst die Veranlassung zu seinen metrologischen Untersuchungen gegeben; ihm hat er auch die Gewißheit entnommen, daß man assyrischerseits im Besitze verschiedener Flächenmaße sich befand, deren Längeneinheit selbstredend auch wieder dem Sexagesimalsysteme sich einfügte. Nur ausnahmsweise werden allerdings die Flächen, deren Größe man durch jene Normalmaße ausdrücken wollte, die bequeme Gestalt des Rechteckes gehabt haben; aus einem uns erhaltenen Plane, der wohl so etwas wie ein Grundkataster darstellte, erhellt, daß sehr verschiedene Umfangslinien miteinander abwechselten, wie das ja, falls nicht etwa staatlicher Kommunismus eine schematische Aufteilung des Grundeigentumes bewirkt hatte, gar nicht anders sein konnte. Der Feldmesser jener Zeit hat folglich ganz zweifellos die Grundstücke, deren Inhalt auszumitteln seine Amtspflicht war, so gut als tunlich auf Rechtecke zurückgeführt oder in Rechtecke zerlegt, um schließlich deren Inhaltsformel, die bei den verschiedensten Völkern in voller gegenseitiger Unabhängigkeit gefunden werden mußte, zur Anwendung zu bringen.

Ein gewisser eiserner Bestand planimetrischer Kenntnisse muß nach all dem bei den Bewohnern Chaldäas schon in sehr weit zurück reichender Vergangenheit vorausgesetzt werden. Das Rechteck, das Quadrat, vor allem auch das reguläre Sechseck waren bekannt und konnten zeichnerisch hergestellt werden. Daß auch der Würfel für Raummaße die natürliche Normalform bedeutete, geht aus Opperts Darlegungen hervor. So versteht es sich auch wohl von selbst, daß man prismatisch-zylindrische Körper als das Produkt aus Grundfläche und Höhe aufzufassen gewohnt war.

Das wenige, was uns über das mathematische Wissen der alten Hebräer bekannt ist, hat wohl nicht entfernt einen autochthonen, sondern ebenfalls einen mesopotamischen Ursprung, obgleich sie immerhin auch einige hierher gehörige Fertigkeiten aus dem so lange von ihnen bewohnten Nillande mitgebracht haben mögen. Zu der bekannten Stelle im Buche Josua (XVIII, 11), daß die zwölf Sendboten eine genaue Beschreibung des Landes Kanaan zu liefern gehabt hätten, bemerkt schon der Geschichtsschreiber Josephus (richtiger Josepos), daß diese Kundschafter in der Geographie und Kartenzeichnung wohl beschlagen gewesen sein müßten. Wenn die Größe der Levitenstädte ausgesteckt werden sollte, war einige Vertrautheit mit der Linien- und Flächenmessung unumgänglich (Num. XXXV, 4). Viel Anlaß zu Diskussionen hat die Gestalt des sogenannten ehernen Meeres (II. Chron. IV, 2) gegeben. Aus den Originalangaben ist auf die kreisförmige Basis des diesen Namen führenden Zylinders zu schließen, und zwar soll dem Umfange 30 der Durchmesser 10 entsprochen haben. In Übereinstimmung mit anderen älteren und neueren Völkern, in Übereinstimmung auch mit handwerksmäßigen Gepflogenheiten unserer Tage galt für die Israeliten der salomonischen Zeit als Regel: Die Kreisperipherie ist dreimal so groß als der Diameter; π ist gleich 3. Trotz sehr heftiger Angriffe, welche deswegen gegen ihn gerichtet wurden, wird man dem großen Spinoza beipflichten, wenn er in seinem „Tractatus historico-politicus" die Bemerkung einfließen läßt, König Salomo sei zu wenig Mathematiker gewesen, um an jener populären und uralten Kreisrechnung Anstoß nehmen zu können.

Ob es wahr ist, daß schon im Altertum die chaldäische Mathematik in dem sonst nicht näher bekannten Perigenes einen Spezialhistoriker gefunden habe, ist eine offene Frage, weil die einzige auf ihn zu beziehende Stelle eines Scholiasten Bedenken unterliegt. Wäre auch etwas von dieser zweifelhaften Schrift erhalten, es würde uns doch wohl kaum weiter gefördert haben, als wir durch die hingebende Tätigkeit unserer Assyriologen an sich schon gekommen sind. Die Griechen hatten offenbar nur unbestimmte Nachrichten von der chaldäischen Gelehrsamkeit, wenn sie auch in einem sehr wichtigen Punkte von einem Gefühle des Richtigen geleitet waren. Es wird nämlich zum öfteren darauf hingewiesen, daß man in Babylon mehr das zahlenmäßige, in Ägypten mehr das geometrische Element berücksichtigt habe, und wenn auch für uns, die wir die Leistungen beider Nationen viel besser überblicken und vergleichen können, der erwähnte Gegensatz nicht entfernt mehr so schroff sich ausprägt, als er den auf ein sehr karges Tatsachenmaterial beschränkten Griechen erscheinen mochte, so ist er doch an sich nicht in Abrede zu stellen. Für die Bewohner Mesopotamiens bot das Firmament, für diejenigen der Gelände am unteren Nil bot der Erdboden das erste und nächstliegende Substrat zur Ausbildung mathematischen Wissens und Könnens. Diese prinzipielle Verschiedenheit, die sich natürlich immer mehr verwischen mußte, je weiter die beiden Volksgruppen auf ihrer Kulturbahn vorangeschritten, wird uns, während sie einstweilen nur angedeutet werden konnte, zu vollem Bewußtsein kommen, wenn wir nunmehr dazu übergehen, auch die mathematische Eigenart der Ägypter zu würdigen.

Kapitel III.

Die Mathematik der Ägypter.

Schon den alten Griechen stand es, wie zahlreiche schriftstellerische Belege dartun, fest, daß das Nilland als das Heimatland der Geometrie angesehen werden dürfe, und zwar leitete man die Notwendigkeit, daß es sich so verhalten müsse, aus den periodisch wiederkehrenden Nilüberschwemmungen her, welche stets wieder eine neue Vermessung der Kulturländereien, eine Festlegung der Gutstückgrenzen erforderlich gemacht habe. Ohne eine gewisse, wenn auch primitive praktisch-geometrische Technik wäre in diesem Staate, der doch schon im V. vorchristlichen Jahrtausend ein festes Gefüge besaß und sich dieses allen Erschütterungen zum Trotze auch bis zur persischen Eroberung erhielt, gar nicht auszukommen gewesen. Von dem Philosophen Democrit wird uns ein Wort überliefert, dessen Sinn sich dahin deuten läßt, daß sich unter der ägyptischen Priesterkaste eine Gruppe von Leuten befand, welche sich ganz speziell mit Linienabsteckung beschäftigten und deshalb Harpedonapten oder Seilspanner genannt wurden. Immerhin mochte man auf solche Andeutungen hin der Ansicht sein, die geometrische Tätigkeit derer, welchen solche Pflichten übertragen waren, habe sich in einer einfachen Reißkunst erschöpft. Wir werden gleich sehen, daß eine solche, wenn sie auch schon mit einem Mindestmaße von theoretischen Vorkenntnissen arbeitete, wirklich existierte; nicht aber war den griechischen Nachrichten zu entnehmen, daß man über eine schon ziemlich hoch entwickelte Geschicklichkeit im Zahlenrechnen verfügte, die dann natürlich auch auf die räumlichen Operationen ihre Rückwirkung übte. Und zwar geht dieses arithmetische Wissen und Können bis zu einer ziemlich weit zurückliegenden Vergangenheit hinauf, denn erstlich ist das einzige literarische Zeugnis, welches uns in dieser Hinsicht zu Gebote steht, schon ein ziemlich altes, und zum zweiten sind in diesem nur Dinge zur Sprache gekommen, die damals, als das fragliche „Buch" entstand, schon seit unvordenklicher Zeit bekannt waren. Der Verfasser desselben war kein schöpferischer Geist, sondern ein Kompilator. Es gibt zwar auch einige wenige andere Papyrusrollen mathematischen Inhaltes, aber diese stammen aus einem sehr viel späteren Zeitraume und weisen eher auf eine Mischung altägyptischen und hellenistischen Wissens hin.

Der hier in Betracht kommende Papyrus Eisenlohr — vorher als eine Kimelie des Britischen Museums als Papyrus Rhind bekannt — kann in der Tat ein sehr ehrwürdiges Alter in Anspruch nehmen. Er wurde unter dem Regimente der sogenannten Hyksoskönige ungefähr um 1900 oder 1800 v. Chr. niedergeschrieben und liefert den Beweis, daß die Regierung jener Ausländer, die etwa um 1600 wieder einer nationalen weichen mußte, keine eigentlich kulturfeindliche gewesen sein kann. Es ist uns auch der Name des „Schreibers", d. h. Schriftgelehrten erhalten, welcher es unternahm, die umlaufenden mathematischen

Regeln zu einer Art von Lehrbuch zusammenzufassen, welches zweifellos die Bestimmung hatte, der Schreibergilde als ein bequemes Hilfsmittel bei ihren amtlichen Verrichtungen zu dienen. Seinen Namen verwendend, nennt man das Kompendium gewöhnlich das *Rechenbuch des Ahmes* (griechisch *Amasis*); der Heidelberger Ägyptologe *Eisenlohr* hat davon, stets fachlich beraten von M. *Cantor*, eine mustergültige deutsche Bearbeitung veröffentlicht. Seitdem uns diese wahrhafte Fundgrube erschlossen ist, steht unsere Kenntnis altägyptischer Mathematik auf festen Füßen, und es kann so nicht wundernehmen, daß auch dieses Kapitel hauptsächlich in einer Wiedergabe der in jenem Kodex enthaltenen Tatsachen besteht. *Ahmes* selbst war, wie schon bemerkt, kein hervorragender Geist, sondern beschränkte sich auf eine wohl recht unselbständige Wiedergabe seines amtlichen Materiales; ob es jedoch notwendig ist, sein Buch, das ja wahrscheinlich nur in einer Kopie vorliegt, als eine bloße Schülerarbeit zu betrachten, das ist doch strittig. Mag es nun aber sich damit wie immer verhalten, so viel können wir aus dem Papyrus unter allen Umständen ersehen, daß die *altägyptische Rechnungspraxis* einen ganz bestimmten Charakter an sich trug, welchem wir jetzt näher treten wollen.

Ahmes setzt allerdings einige elementare Kenntnis bei denen, die sein Manuale benützen, schon voraus; der Gegensatz zwischen *Brüchen und ganzen Zahlen* muß ihnen geläufig sein. Die *Zahlschreibung* wird ebenfalls nicht erst gelehrt. Was diese anlangt, so pflegte sich die ältere *hieroglyphische* Schrift noch mit den allereinfachsten Mitteln zu behelfen, so daß sie für uns hier überhaupt nicht in Betracht kommt. Anders die vervollkommnete Schrift, welche sich echter *Zahlzeichen* bediente; deren Sinn haben uns *Jomard* und *Champollion* erschlossen. Besondere Zeichen gab es für alle Zahlen der Form 10^n ($n \geqq 0 \lesseqgtr 7$), und da deren Bedeutung festgestellt zu sein scheint, so bedeutet es für uns nur wenig, daß die Symbolik als solche nicht ganz klar zu durchschauen ist. Man stellte die Zahlzeichen so oft nebeneinander, als es der Wert der darzustellenden Zahl verlangte, und faßte nur rein äußerlich je vier derselben durch Aussparen eines Zwischenraumes gegen die übrigen als eine *Sondergruppe* zusammen. Der geniale Champollion hat alsdann auch die hieratische Schreibweise entziffert, die sich weit mehr unserem Zehnersysteme annäherte und deswegen auch nicht mehr so sparsam, wie ihre Vorgängerin, mit den Zahlzeichen selbst umgehen konnte. Die einzelnen Einer, Zehner, Hunderter usw. hatten besondere Symbole; die Schrift selbst ging, das uns bekannte Gesetz der Größenfolge beobachtend, von rechts nach links. Brüche fanden ihren natürlichen Platz neben den ganzen Zahlen.

Höchst bemerkenswert erscheint nun, daß die Ägypter nahezu ausschließlich mit Einheits- oder Stammbrüchen rechneten; eine Gepflogenheit übrigens, die wir später bei den Griechen wiederfinden werden. Nur der anscheinend unentbehrliche Doppelstammbruch $\frac{2}{3}$ fand noch vor ihren Augen Gnade und erfreute sich eines besonderen Sigels. Außerdem gab es ein solches nur für das immer wiederkehrende $\frac{1}{2}$, während sonst durchweg eine planvolle Schreibart Platz gegriffen hatte. Man hatte nämlich ein Zeichen 𓂋 (ägyptisch ro), welches genau das gleiche bedeutete, wie in unserer Bruchdarstellung 1 mit einem darunterstehenden Bruchstriche. War also in der (moderneren) Hieroglyphenschrift 𓍢 $= 100$, so mußte $\frac{1}{100} =$ 𓂋𓍢 gesetzt werden. Es leuchtet ein, daß man solchergestalt Bruchbezeichnung und Bruchrechnung, soweit eine solche Bedürfnis war, ohne große Schwierigkeit durchzuführen vermochte. Häufig tritt noch die spezielle Sigelschreibung für $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ subsidiär ein. Bei Ahmes, der auf eine leicht flüssige Zahlencharakteristik halten mußte und nicht für die folgenden Jahrhunderte auf Steinwände schrieb, hatte sich das Zeichen für ro bereits zu einem einfachen Punkte herabgebildet.

Das, was nun der Rechnung der Ägypter einen typischen Stempel aufdrückt, ist der Umstand, daß man Brüche, deren Zähler die Einheit überstieg, nicht graphisch wiederzugeben imstande war. Der Begriff derartiger Zahlengebilde war ihnen — diese Selbstverständlichkeit wird durch die Sonderstellung von $\frac{2}{3}$ erhärtet — natürlich nicht fremd, aber um sie hinschreiben zu können, mußte erst eine Zerfällung in Einheitsbrüche voran.

gegangen sein. So war also

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},\quad \frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196},\quad \frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}.$$

Man kann die Umständlichkeit nicht weiter treiben, und es leuchtet ein, daß es einer viel geringeren Geistesanstrengung bedurft hätte, eine ganz allgemeine Graphik für gebrochene Zahlen ein- und durchzuführen, als sie nötig war, um solche zum Teil recht mühsame, sonderbar anmutende Zerlegungen ins Werk zu setzen. Wir begegnen bei Ahmes sämtlichen Stammbruchsummen, welche einem Bruche von der Form $2:n$ gleich sind, unter n irgend eine ungerade Zahl $>3<100$ verstanden, und wenn dann kompliziertere Brüche auftraten, deren Zähler >2 war, so konnte man doch wieder einen Zerlegungsmodus finden, bei dem auf jene Grundformen zurückzugreifen war. Nur eine etwas langweilige und langwierige Rechnung wurde erheischt, wie Cantor erweist, um beispielsweise die Identität

$$\frac{7}{29}=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}$$

herauszubringen. Es darf also nicht bezweifelt werden, daß die Hauptaufgabe darin gipfelte, die Zerlegung der vorhin genannten Brüche $2:n$ in solche Partialbrüche zu ermöglichen.

Wie man dabei verfahren habe, ist uns leider in der einstweilen nahezu allein auf uns gekommenen Quellenschrift nicht mitgeteilt worden. Nur wenige Andeutungen sind bei Ahmes vorhanden, allein sie genügen nicht, um uns ein durchsichtiges Bild von den Vorgängen, die sich im Geiste seiner Vorläufer abgespielt haben mögen, zu verschaffen. Daß uns unter diesen Umständen das Recht erwächst, die Frage aufzuwerfen, wie sich zu eben diesem Behufe ein neuerer Algebraiker stellen würde, wird niemand bestreiten, allein freilich dürfen wir niemals vergessen, daß wir bei solcher Tätigkeit nicht sowohl Geschichte, als vielmehr moderne Behandlung historisch merkwürdiger Probleme betreiben, die aber doch immerhin auch der wahren Geschichtsforschung förderlich werden kann. So mag daran erinnert werden, daß Loria von der identischen Gleichung

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{2x-1}{(2n+1)x}$$

ausgeht, um durch passende Wahl der Größe x die Zerlegungen der ägyptischen Zusammenstellung zu erhalten. Für $x = n+1$ hat man so

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} + \frac{2n+1}{(2n+1)(n+1)}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1};$$

wird $n = 2$ oder $= 11$ gesetzt, so ergeben sich die Stammbruchsummen

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}.$$

Ob es so oder anders gemacht ward, muß dahingestellt bleiben. Ahmes hat uns in die Genese seiner Tabelle keinen Einblick zu tun verstattet; wohl aber setzt er deren Benützer in die Lage, die Richtigkeit der einzelnen Angaben nachprüfen zu können, zu welchem Ende er einen unter dem Namen „Ausrechnung" (Smot) kursierenden Beweis beifügte. Diese war gewissermaßen das Korollar einer auf ein weiteres Ziel gerichteten „Vollendungsrechnung" (Seqem), von welcher der Papyrus, und zwar in unmittelbarem Anschlusse an die Bruchtafel, eine ganze Reihe von Beispielen vorführt. Über das Wesen derselben hat sich eine gelehrte Kontroverse zwischen Cantor und dem um die antike Mathematik hoch verdienten L. Rodet entsponnen, auf welche an diesem Orte nicht näher eingegangen werden kann. Wenn wir uns auf des ersteren Seite stellen, so geschieht dies deshalb, weil seine Auffassung, wie auch die Textauslegung erfolgen möge, den Vorzug größerer innerlicher Wahrscheinlichkeit für sich hat. Er hält nämlich dafür, daß die ägyptischen Arithmetiker, deren Lehren sich bei Ahmes zusammengefaßt finden, sich darauf verstanden, die vorliegenden Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner zu bringen. Dessen Größe spielte dabei gar keine Rolle, denn in einem Falle kommt als solcher Hauptnenner die Zahl 5432 vor. An einer ziemlich hohen Geschicklichkeit im Zahlenrechnen hat es diesen Leuten nicht gefehlt; stellten sie sich doch unter anderem die Aufgabe, anzugeben, mit welcher Zahl die Summe $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ multipliziert werden muß, um das Produkt 2 zu erhalten. Sie hatten mithin zu beweisen, daß

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{114}+\frac{1}{228}\right)$$
$$=\frac{19}{12}\cdot\frac{288}{228}=\frac{24}{12}=2$$

ist, was mit den ihnen zu Gebote stehenden Mitteln gar nicht so einfach zu machen war. Einer von Brugsch aufgefundenen Inschrift zufolge sind ähnliche Manipulationen sogar bereits einer Zeit, die weit vor die des Kompendienschreibers zurückgeht, nicht unbekannt gewesen.

Damit jedoch hat es sein Bewenden durchaus noch nicht gehabt. Der Papyrus läßt uns nämlich weiter ersehen, daß man Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten aufzulösen verstand und für diese letztere sowohl ein eigenes Wort, wie auch für die mit ihr vorzunehmenden Manipulationen selbständige Operationszeichen zur Verfügung hatte. Was wir x zu nennen pflegen, heißt bei Ahmes ein Haufen; Addition, Subtraktion und Gleichheit wurden durch feststehende Symbole ausgedrückt. So wird eine Fragestellung z. B. in nachstehender Form gegeben: Addiere zum Haufen $\frac{2}{3}$ von ihm und nimm von der so erhaltenen Zahl deren dritten Teil weg; dann bekommst du 10. In unserer Zeichensprache bedeutet das offenbar:

$$x+\tfrac{2}{3}x-\tfrac{1}{3}(x+\tfrac{2}{3}x)=10; \quad x=9\,.$$

Eine allen Möglichkeiten sich anpassende Lösungsregel nach Art der in unseren Elementarbüchern vorgetragenen kennt Ahmes nicht, sondern er behilft sich in jedem Einzelfalle, wie es ihm am zweckmäßigsten dünkt. In dem oben angegebenen bringt er alle links stehenden Zahlen auf den Generalnenner 9 und findet $\frac{10}{9}x=10$. Auch Anklänge an arithmetische und geometrische Progressionen treten uns entgegen. Es sollen einmal 100 Brote unter fünf Empfänger derart verteilt werden, daß die von den zwei letzten erhaltene Menge den siebenten Teil derjenigen Quantität bildet, welche den mehr begünstigten drei ersten zufällt, indem zugleich jeder um eine bestimmte Zahl weniger als sein Vormann bekommt. Es liegt folglich eine Reihe x, $x-y$, $x-2y$, $x-3y$, $x-4y$ vor, und man hat nach unseren Begriffen x und y den beiden Gleichungen

$$5x - 10y = 100\,, \quad \tfrac{1}{7}(3x - 3y) = 2x - 7y$$

zu entnehmen. Wir finden sofort $x = 38\frac{1}{3}$, $y = 9\frac{1}{6}$, so daß die Reihe aus den fünf Zahlen (ägyptisch geschrieben)

$$38 + \frac{1}{3}\,, \quad 29 + \frac{1}{6}\,, \quad 20\,, \quad 10 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,, \quad 1 + \frac{2}{3}$$

bestehen wird. Soweit darf man nun freilich nicht gehen, den Ägyptern auch Methoden zur Auflösung zweier Gleichungen vom ersten Grade mit zwei unbekannten Größen zu vindizieren. Ahmes geht sozusagen empirisch vor; man kann hier bei ihm den chronologisch ersten Gebrauch der später so oft gebrauchten Regel des falschen Ansatzes aufzeigen. Er setzt nämlich probeweise $x - 4y = 1$ und $y = 5\frac{1}{2}$, so daß die Reihe

$$23\,, \quad 17 + \frac{1}{2}\,, \quad 12\,, \quad 6 + \frac{1}{2}\,, \quad 1$$

herauskommt, die aber eine viel zu kleine Summe hat, nämlich 60 statt 100. Hundert ist jedoch $\frac{5}{3}$ mal sechzig; wenn man also jedes Reihenglied mit $\frac{5}{3}$ multipliziert, so muß man auf das richtige Ergebnis geführt werden. Ein andermal spricht das Rechenbuch von einer Leiter (Sutek) mit fünf Sprossen, als welche die Zahlen 7, 49, 343, 2401, 16 807 angeführt werden, und diese — d. h. die fünf ersten Potenzen von 7 — sollen im Exempel eine Summe bilden. Das hätte natürlich auch auf dem gewöhnlichen Wege gemacht werden können, allein es wird ausdrücklich bemerkt, daß sich die Addition vereinfacht, wenn man das Produkt $7 \cdot 2801$ bildet. Da nun $2801 = \frac{1}{6}(16807 - 1)$ ist, so liegt es gewiß nicht ferne, zu vermuten, daß man eine dem Sachinhalte nach mit dem bekannten Satze

$$a + a q^2 + a q^3 + \dots + (a q^{n-1} = z) = \frac{q z - a}{q - 1}$$

sich deckende Vorschrift kannte und anzuwenden wußte.

So werden wir denn nicht umhin können, anzuerkennen, daß in den Schulen von Theben, Memphis und Heliopolis, welche die Diener der Religion und des Staates heranzubilden hatten, die Arithmetik in einem über die notdürftigsten Ansprüche des praktischen Lebens weit hinausgehenden Ausmaße gelehrt worden sein muß. Weite Volksschichten dürften durch diese esoterischen Doktrinen allerdings nicht beeinflußt worden sein. Für sie mag es, wie einige Abbildungen sehr alter Denkmäler wahrscheinlich machen, eine den Zwecken des Alltagslebens entsprechende Fingerrechnung und, sofern etwa der Händler und Gewerbetreibende damit nicht ausreichte, wohl auch eine Abart des im Orient so verbreiteten instrumentellen Rechnens gegeben haben. Irgend welche Sicherheit hierüber konnte bisher die Inschriften- und Bilderforschung noch nicht gewähren.

Wir deuteten bereits an, daß das griechische Zahlenrechnen eine unverkennbare Ähnlichkeit mit dem ägyptischen bekundet, was ja angesichts der engen wissenschaftlichen und kommerziellen Beziehungen beider Völker nicht auffallen kann. Auch bei den Griechen war der Einheitsbruch die Norm; man nannte ihn schlechtweg den Teil (*τὸ μέρος*) und seine Multipla die Teile (*τὰ μέρη*). Nach Champollion und Young gab es auch ein eigenes demotisches Zeichen für $\frac{2}{3}$, welches to gesprochen ward, und dieses wäre, wie eine geistvolle Hypothese des großen Mathematikers C. G. J. Jacobi will, auch der Folgezeit so in Fleisch und Blut übergegangen gewesen, daß sogar noch im II. nachchristlichen Jahrhundert der Astronom und Geograph Ptolemaeus davon, als von einer selbstverständlichen Sache, Gebrauch gemacht habe. In dessen Landkartenbeschreibungen (Buch VIII der *Γεωγραφικὴ Ὑφήγησις*) wird nämlich wiederholt ein Bruch *γο'* oder *ΓΟ'* verwendet, der gar keinen verständlichen Sinn gibt, wenn man an die übliche griechische Bruchbezeichnung denkt. Liest man dagegen $TO' = \text{to} = \frac{2}{3}$, so werden die exegetischen Schwierigkeiten sofort gehoben. Wäre Jacobi im Rechte, so würde damit eine außerordentliche Lebenszähigkeit der altpharaonischen Zahlengraphik nachgewiesen sein.

Über das Wesen der ägyptischen Feldmeßkunst ist den dürftigen Berichten eines Herodot, Diodor, Strabo usw. nichts zu entnehmen. Dagegen läßt uns auch da der Papyrus Rhind nicht im Stiche, denn Ahmes mußte für seine Klienten doch auch die notwendigsten Anleitungen zu geometrischen Rechnungen mitteilen. Figuren, roh aus freier Hand hingeworfen, bedecken ganze Seiten der Handschrift. Über das Rechteck wird ganz kurz hinweggegangen, was ja auch bei dem axiomatischen Charakter seiner Ausmessung nicht befremden kann. Wichtiger erschien offenbar dem Autor das gleichschenklige Dreieck, dessen Grundlinie Tepro, dessen Schenkel Merit genannt wird. Um den Inhalt zu finden, wird der halbe Tepro mit dem Merit multipliziert. Das ist freilich im allgemeinen sehr falsch, allein Irrtümer der Vergangenheit — darüber wird man sich erst beim Studium römischer und frühmittelalterlicher Mathematik recht klar — muß man, wenn der Text deutlich spricht, eben als solche hinnehmen, und es ist schwerlich gestattet, das gleichschenklige durch das rechtwinklige Dreieck zu ersetzen. Zudem haben die von Ahmes gezeichneten Dreiecke durchweg einen kleinen Winkel an der Spitze, und alsdann mochte der begangene Fehler für ägyptische Ansprüche nicht schwer ins Gewicht fallen. Auch für das Trapez diente eine analoge Berechnungsregel. Ahmes kennt ferner eine angenäherte Kreisquadratur, welche zu dem gar nicht so üblen Werte

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16\ldots$$

führt. Kombinationen über die Entstehung dieses sonst niemals wiederkehrenden Näherungswertes haben noch zu keinem brauchbaren Resultate geführt.

War bisher, wie zu erwarten stand, Planimetrie der Hauptbestandteil im Kompendium unseres ägyptischen Lehrmeisters, so läßt er uns später auch in ein Stück Stereometrie und, wenn man dieses Wort zuläßt, sogar Trigonometrie einen Einblick tun. Es wird der Rauminhalt von Fruchtspeichern ermittelt; allein welche

Körperform der Berechnung zugrunde gelegt war, bleibt uns leider unerfindlich. Weit bemerkenswerter ist die Beschäftigung unseres Schriftstellers mit der vierseitigen Pyramide, mit einem Körper also, der wohl keinem Volke der Welt weniger gleichgültig sein konnte, als gerade dem hier in Betracht kommenden. Von einem Kubaturversuche sieht Ahmes ganz und gar ab, aber an dessen Stelle läßt er Betrachtungen über die Ähnlichkeit und, darin wiederum anschließend, sogar solche über goniometrische Beziehungen treten. Fällt man von der Spitze D einer Pyramide der erwähnten Art auf die quadratisch vorausgesetzte Grundfläche $ABEF$ ein Lot DC und verbindet dessen Fußpunkt mit einer Ecke, so erhält man ein Dreieck ADC (Fig. 2), welches in C rechtwinklig ist. Ein zweites ebenfalls rechtwinkliges Dreieck entsteht durch Fällung einer Senkrechten CD' auf die Quadratseite und Ziehung der Hypotenuse DD'. Aus zweien der so erhaltenen Linien wird eine Verhältniszahl gebildet, welcher im ägyptischen Texte der Name Seqt zukommt. Darüber, was eigentlich damit ausgedrückt werden sollte, ob

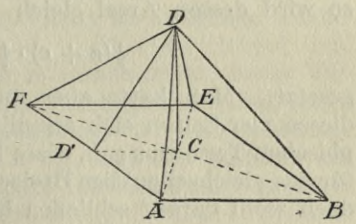


Fig. 2.

$$\frac{CD'}{DD'} = \cos(\sphericalangle\, DD'C) \quad \text{oder} \quad \frac{CD}{AC} = \operatorname{cotang}(\sphericalangle\, ADC)$$

den wirklichen Seqt bedeutete, gehen die Meinungen auseinander, aber soviel steht doch fest, daß dieses Verhältnis dazu dienen sollte, die Steilheit der Pyramide, wenn dieser Ausdruck gestattet wird, zahlenmäßig festzulegen. Nicht bezweifelt kann auch werden, daß eine der vorkommenden Strecken die Bezeichnung pir em us führte, und daß dieses Wort die Grundform des griechischen πυραμίς geworden ist.

Hiermit ist in der Hauptsache der Inhalt des merkwürdigen Werkes abgeschlossen, welches die Nachwelt dem Amtseifer des wackeren Ahmes verdankt. Was sonst noch an positiven Angaben vorhanden ist, trägt dazu bei, die jenem entnommenen Erkenntnisse zu befestigen. Am meisten fallen ins Gewicht die durch Lepsius und Dümichen wissenschaftliches Gemeingut gewordenen Inschriften des auch sonst berühmten Tempels von Edfu, die freilich jenem alten Dokumente gegenüber, als aus dem III. vorchristlichen Jahrhundert herrührend, geradezu modern zu nennen sind, aber gerade deswegen unser volles Interesse in Anspruch nehmen, weil sie dartun, daß noch fünfzig Jahre nach Euklid die Feldmesser Oberägyptens bei den überkommenen, durch die Tradition geheiligten Vorschriften zur Flächenmessung verharrten. Dreieck und Trapez werden ganz im Geiste des Ahmes quadriert, und die Vierecksregel steht auf demselben Boden; wenn a, b, c, d die vier konsekutiven Seiten eines Trapezoides sind, so wird dessen Areal gleich

$$\tfrac{1}{2}(a+c)\cdot\tfrac{1}{2}(b+d)$$

gesetzt. Man hatte aber auch erkannt, daß, wenn eine dieser vier Seiten sich annulliert, wofür es einen hieroglyphischen Terminus gab, diese Formel sich in die altbekannte für das gleichschenklige Dreieck zurückverwandeln läßt, was doch wohl darauf schließen läßt, daß immer nur Vierecke von einer ganz besonderen Gestalt vorgenommen wurden.

Ein Schlußwort möge uns wieder zu den eingangs genannten Harpedonapten zurückführen. Mehrere epigraphische Dokumente lassen uns ersehen, daß man bei Anlegung gottesdienstlicher Gebäude eine regelrechte Anpassung an die Himmelsgegenden erstrebte, indem man die Eckpunkte durch eingeschlagene Pflöcke markierte und diese durch Stricke miteinander verband. Daß man dazu Winkelhaken verwandte, ist unbestreitbar; der Gedanke, daß zur Verzeichnung des rechten Winkels ein Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 diente, kann wenigstens nicht als ein ferne liegender betrachtet werden. Auch die geometrische Ornamentik der Grabdenkmäler und die Sitte, Zeichnungen kleineren Maßstabes entsprechend zu vergrößern, lassen Schlüsse auf einige Übung in der früher von uns angeführten Reißkunst ziehen. Zu vollständigerer Würdigung der mathematischen Kenntnisse der Ägypter verhilft uns vielleicht einmal die Auffindung eines Werkes, welches dem Ahmes, der ja nicht Autor im strengen Sinne, sondern nur Zusammensteller sein wollte, als Vorlage zugänglich war. Die Hoffnung, es könne uns dieses Glück beschieden sein, kann kaum als utopisch gelten.

Kapitel IV.

Die Mathematik der Chinesen und ältesten Inder.

Bereits die jesuitischen Missionare, welche zu Ende des XVI. Säkulums in China festen Fuß faßten und durch die geschickteste Taktik sich beinahe zwei Jahrhunderte dort zu behaupten vermochten, haben uns wertvolle Mitteilungen über die im Lande der Mitte zu findenden mathematischen Kenntnisse gemacht. Matteo Ricci und Ferdinand Verbiest waren es insbesondere, deren Verdienst wir anzuerkennen haben. Aus späterer Zeit liegen die gelehrten Arbeiten von Stanislas Julien, Eduard Biot und Alexander Wylie vor, und des letzteren aus alten und neuen Quellen fließendes Wissen ist uns Deutschen hauptsächlich durch die Mühewaltung L. Matthiessens zugute gekommen. Über das Alter der chinesischen Wissenschaft ist viel gestritten worden, da die Tendenz, mit Jahrhunderten und Jahrtausenden sehr freigebig umzuspringen, im Lande selbst eine sehr verbreitete, die Kritik aber sehr erschwert ist. Hat doch sogar der gelehrte niederländische Sinologe G. Schlegel für die Anfänge chinesischer Astronomie ein geradezu abenteuerliches Alter herausgerechnet. Daß die vorhandene Literatur auf ein solches keinen Anspruch erheben kann, erhellt schon aus der einen Tatsache, daß im Jahre 213 v. Chr. der sehr unhistorisch denkende Kaiser Tsin-she-huâng-ty die berüchtigte Bücherverbrennung anordnete, die zwar sicher nicht radikal vollzogen ward, gleichwohl aber einen furchtbaren Schaden für das altchinesische Schrifttum bedeutete. Schon unter einem seiner nächsten, freilich einer anderen Dynastie angehörigen Nachfolger begann eine systematische Rettungsaktion für noch vorhandene Reliquien, und diesem verständigen Kaiser haben wir es in erster Linie zu danken, daß wir doch leidlich gesicherte Anfänge altchinesischer

Wissenschaft von Zahl und Raum bis hinter das Jahr 1000 v. Chr. zurückverfolgen können.

Das Rechenbrett, der bekannte Swán Pân, der für den ganzen Osten vorbildlich geworden ist, soll um 2600 v. Chr. erfunden worden sein. Das ist recht wohl möglich, denn in jener Zeit hat es am Yangtse- und Si-kiang ohne allen Zweifel schon eine ganz respektable Kultur gegeben, und für Handel und Wandel eines kaufmännisch veranlagten Volkes mußte ja jener einfache Apparat die vorzüglichsten Dienste leisten. Er besteht aus zehn, gelegentlich wohl auch aus fünfzehn Drähten; Cantor hat sogar selbst ein elfdrähtiges Exemplar gesehen, und wirklich spielt auch die Anzahl der in einen rechteckigen Rahmen eingespannten Drähte keine ausschlaggebende Rolle. Ein Querdraht zerlegt das Ganze in zwei Abteilungen; auf der einen Seite trägt der Halbdraht fünf, auf der anderen zwei daran aufgereihte Kügelchen. Ein einziges würde es aber ebensogut tun. Die Kunst, mit diesem Brette zu manipulieren, ist in dem ganzen ungeheuren Reiche gleichmäßig vertreten. Der kleinste Krämer kann nicht ohne ihn auskommen, und es ist mehrfach von Augenzeugen betont worden, daß ein chinesischer Handelsmann durch Kugelverschiebung leichtere Aufgaben aus den vier Spezies mindestens ebenso sicher und rascher zu lösen pflegt, als es einem europäischen Rechner auf dem Papiere gelingt. Dividieren ist natürlich nichts anderes als fortgesetztes Subtrahieren.

Die Chinesen haben sich aber mit dem manuellen Kalkul nicht begnügt, sondern auch eine regelrechte Zahlschreibung ausgebildet und für höhere Zwecke eingerichtet. Daß dabei der syllabarische Charakter der Sprache Schwierigkeiten schaffen mußte, ist leicht einzusehen. Man mußte, um höhere Zahlen zu bilden, die Summanden oder Multiplikatoren einfach juxtaponieren, indem dann das auch hier seine Kraft bewährende Gesetz der Größenfolge darüber entschied, was aus den nebeneinander gestellten Zahlen 10 und 6 werden sollte. Sechs und zehn gibt 16, zehn und sechs gibt 60. Über 10 000 scheint man lange nicht hinausgegangen zu sein, und erst die von Indien her in China eindringende buddhistische Mystik nötigte in ihrem Streben nach dem Gigantischen, Unvorstellbaren zur Konstruktion neuer Zahlformen und

Zahlwörter. Statt der das Schreiben der meisten Völker regelnden Begriffe rechts und links begegnen uns jetzt die Begriffe oben und unten; die Juxtaposition wird durch die Subterposition ersetzt, und nur insofern behalten auch die erstgenannten ihre Bedeutung, als die Vertikalzeilen von rechts nach links gelesen werden müssen. So hat man es vor alters in China gehalten, wogegen eine spätere Zeit dieses etwas unhandliche Verfahren wieder beseitigte. Sowohl bei Geschäftsrechnungen, als auch in wissenschaftlichen Werken erscheint als Norm wieder eine der indischen ähnliche Nebeneinanderstellung der Zahlzeichen, welche die höchsten Ordnungen am weitesten nach links schiebt. Auch eine Art Null ist vorhanden. Diese Neuerungen sind jedoch nicht auf chinesischem Boden gewachsen, sondern weisen auf einen Import von Westen her hin, wie er bei den in manchen Zeiträumen recht lebhaft gewesenen Handelsbeziehungen zwischen Indien und China erklärlich genug ist. Es darf überhaupt als ein überlebter Irrtum hingestellt werden, daß die Chinesen sich von jeher auf das äußerste spröde gegen jede fremde Einwirkung verhalten hätten. Man kann genug Perioden in der Geschichte des äußersten Ostens erkennen, für welche gerade das Gegenteil gilt.

Die Anklänge, deren wir gedachten, können also in gar keiner Weise dafür beansprucht werden, daß die Chinesen von sich aus eine Positionsarithmetik geschaffen hätten. Was als solche zu betrachten ist, kommt nicht vor dem XIII. Jahrhundert n. Chr. vor, wie denn überhaupt — es genügt auf Marco Polo und seinen Schutzherrn Kublai Khan hinzuweisen — gerade die Zeit der Mongolenherrschaft die fremdenfreundlichste gewesen ist. Wie man vor der allgemeinen Einführung des Rechenbrettes sich mit der Zahlendarstellung abgefunden habe, wird uns durch Berichte aus jener frühen Vergangenheit gleichfalls überliefert; man verwendete Knotenschnüre, die wohl in einer gewissen Familienverwandtschaft zu den so ganz eigenartigen Quipos (S. 3) des alten Inkareiches standen. Wir sehen in Fig. 3 eine nach

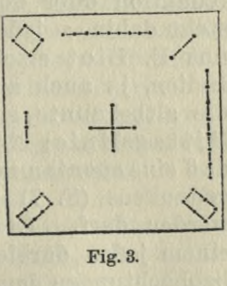


Fig. 3.

quadratischem Schema angeordnete Abbildung der den ersten neun ganzen Zahlen entsprechenden Schnüre vor uns; sie entsprechen, wie der dänische Mathematiker Gram zutreffend bemerkt hat, dem modernen Schema

$$\begin{matrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2, \end{matrix}$$

folglich einem sogenannten Zauberquadrate, dessen Zahlen, ob man nun in Horizontalreihen, Vertikalreihen oder Diagonalen summiert, stets die gleiche Summe (hier 15) ergeben. Die Möglichkeit, daß man sich bereits in China mit dieser — immerhin geistreichen — Zahlenspielerei befaßt habe, ist hiernach kaum abzuweisen. Wie man durch Schnüre die angeblich im III. vorchristlichen Jahrtausend erfundenen Kuas, eine den höheren Verwaltungsbeamten geläufige Geheimschrift, gebildet haben soll, wird wohl niemals ganz aufgeklärt werden. Die darüber lagernde Dunkelheit macht es begreiflich, daß sich die eigentümlichsten Hypothesen daran knüpften, und daß mit Rücksicht auf sie ein Leibniz bei den ältesten Chinesen ein regelrechtes Binärsystem nachgewiesen haben wollte.

Festen Boden unter den Füßen gewinnt unser Studium erst mit dem Ende des XII. Jahrhunderts v. Chr. Damals erschien ein amtliches Handbuch, welches wohl in dieser seiner Eigenschaft den Bücherbrand überdauert hat. Ob es nicht allerdings eine um tausend Jahre spätere Neuredaktion oder doch beträchtliche Zusätze erfahren hat, steht dahin — jedenfalls enthält der Tscheōu ly, wie ihn uns E. Biot erschloß, Dinge, die stark an Babylon, an Indien, ja auch an Griechenland erinnern. Dahin gehört die altbekannte geometrische Methode des Ziehens der Mittagslinie; eine Operation, die freilich so nahe liegt, daß eine spontan-mehrfache Erfindung im Sinne des Völkergedankens (S. 7) nicht zu den Unmöglichkeiten gezählt werden darf. Der Gnomon muß sich eben ungesucht einem jeden darbieten, der mit den einfachsten Himmelsbeobachtungen den Anfang machen will. Neben dem vorhin erwähnten altklassischen Werke gibt es auch noch ein zweites, unter dem Namen Tscheōu pei swan king („heiliges Buch der Rechnung") bekanntes, welches uns auch, und zwar mit einem mehr fachmännischen Gepräge, interessante Einblicke in die Arbeit der chinesischen Mathematiker der alten Zeit eröffnet. Zwei Männer, die unter allen Umständen der vorchristlichen Ära angehört haben, besprechen sich miteinander über astronomische und geometrische Fragen, die hauptsächlich das rechtwinklige Dreieck, einen Spezialfall des pythagoreischen Lehrsatzes und die Kreismessung betreffen. Es zeigt sich, daß das Dreieck mit den Seitenmaßzahlen 3, 4, 5 ein Mittel zur Verzeichnung des rechten Winkels darbot, und daß — einer zuerst von Cantor geäußerten, von Vacca bestätigten Mutmaßung gemäß — ein Anschauungsbeweis für diesen Erfahrungssatz gegeben wird, der wieder lebhaft an indische Gepflogenheiten gemahnt. Daß $\pi = 3$ sei, gehört weiterhin zu den Angaben des heiligen Buches; aus dem Durchmesser $436333\frac{1}{3}$ folgt z. B. die Umfangslänge $= 1309000$.

Das ehrwürdige Werk, aus welchem soeben einige Auszüge mitgeteilt wurden, liegt in vollständiger Übertragung vor, während man sich bezüglich späterer Schriften auf Auszüge angewiesen sieht. Mehrere arithmetische Lehrbücher sind uns so wenigstens den Grundzügen nach bekannt geworden, und durchweg behandeln dieselben auch die einfachen geometrischen Aufgaben des Praktikers. Als beachtenswertere Punkte seien zwei genauere Näherungswerte für π $\left(\frac{22}{7}\right.$, der archimedische Bruch, und $\left.\frac{157}{50} = 3{,}14\right)$ hervorgehoben. Die Arithmetik bringt einfache Gesellschafts- und Mischungsrechnungen, die Geometrie mannigfache Variationen des pythagoreischen Normaldreieckes. Originell Chinesisches tritt nirgendwo hervor; die Regeln können unserer Überzeugung nach zwar recht wohl bei diesem Volke entstanden, sie können aber auch ebensogut von indischen Vorbildern herübergenommen sein.

Ganz anders verhält es sich mit den Gleichungen und Reihen. Hier erschließt sich uns ein von chinesischen Gelehrten selbsttätig beackertes Arbeitsfeld, für welches wir bei den westlichen Nationen kein Analogon finden. Um 1250 n. Chr. schrieb Tsin kiu tschau eine Einführung in die Lehre von den bestimmten und unbestimmten Gleichungen, welches vielleicht in einer Fundamentalsache indischen Einfluß verrät, die Fortbildung aber ohne Anlehnung an ausländische Gedanken durchführte. Es erscheint eine selbständige Unbekannte, yuën, mit einem besonderen Symbole; ihre höheren Potenzen entbehren eines solchen, sind desselben aber auch minder bedürftig, weil die Reihung nach dem Gesetze der Größenfolge den Exponenten sofort erkennen läßt. Positive Größen werden rot (r), negative werden schwarz (s) markiert, und eine fehlende Potenz findet in ihrem Koeffizienten Null ihre Signatur. Wenn wir noch hinzufügen, daß, was bei uns von links gegen rechts fortschreitet, chinesisch von oben nach unten geschrieben werden müßte, so können wir etwa die biquadratische Gleichung $3x^4 - 2x^3 + 11x = 25$ folgendermaßen auf die chinesische Schablone bringen:

$$3_r \quad 2_s \quad 0 \quad 11\,\text{yen}_r \qquad 25\,\text{täe}\,.$$

Dieses letztere Wort kennzeichnet das Absolutglied der Gleichung. Auf ein Gleichheitszeichen konnte ohne weiteres verzichtet werden, weil ja die Gleichung stets nach absteigenden Potenzen geordnet vorlag und der Beisatz täe von selbst die rechte Seite bestimmte. Direkt freilich wagte man sich, obwohl man sich auf das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln verstand, an die Auflösung höherer als linearer Gleichungen nicht heran, sondern blieb bei einer Näherungsmethode stehen, deren Natur vollständig zu durchdringen noch nicht recht gelingen wollte.

Wohl die höchste Entfaltung des mathematischen Geistes der Chinesen sind wir in der Regel Ta yen anzuerkennen verpflichtet, deren wissenschaftliche Bedeutung Matthiessen aus Wylies (S. 35) kurzen Berichten heraus entwickelt hat. Es handelt sich um ein Problem der unbestimmten Analytik, welches späterhin von einem Gauß für wichtig genug erachtet wurde, eine Stelle in den „Disquisitiones Arithmeticae" zu finden. Die $(n+1)$ Unbekannten $x, y_1, y_2 \ldots y_n$ sind durch folgendes lineare System untereinander verbunden:

$$x = m_1 y_1 + r_1\,, \quad x = m_2 y_2 + r_2\,, \quad x = m_3 y_3 + r_3 \ldots$$
$$x = m_n y_n + r_n\,.$$

Die Zahlen m und r sind bekannt. Ohne auf die Auflösung näher einzugehen, bemerken wir nur, daß sie eine andere ist, als sie sich nach bekannten indischen Methoden ergeben würde. Diesmal steht sonach der Chinese auf eigenen Füßen.

Und nicht minder unabhängig ist er zu seiner Darstellung der Binominalkoeffizienten gelangt. Der Algebraiker Tschu schi kih verfaßte bald nach 1300 seinen „Spiegel der vier Elemente“, und in diesem Buche wird völlig das antizipiert, was mehr denn dreihundert Jahre später in Europa Pascal als arithmetisches Dreieck erfand. Es sind hier die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für n und $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ schematisch zusammengeordnet, so daß je eine neue Zahl, von der ersten und letzten abgesehen, durch Addition der beiden zunächst links und rechts über ihr stehenden gebildet wird. Zwischen 0 und 5 hat also dieses Dreieck die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Ganz ebenso erscheint es in einem Rechenbuche aus dem Jahre 1593, worin auch magische Quadrate, Trigonalzahlen, Pyramidalzahlen und mannigfache arithmetisch-geometrische Aufgaben vorkommen. Allein wir möchten doch daran erinnern, daß damals, als diese Enzyklopädie entstand, China bereits in die verschiedensten Beziehungen zu Europäern — Portugiesen, Spaniern, Holländern und Glaubensboten von bunter nationaler Mischung — getreten war. So ist die rein chinesische Herkunft der dort vorgetragenen Lehren nicht mehr zweifellos, mochte sich auch in jenen Tagen schon eine Gegenbewegung seitens chauvinistischer Gelehrten geltend zu machen anfangen, welche behaupteten, die Fremden könnten einem richtigen Sohne des Drachenreiches, der das alles in den alten Büchern finde, gar nichts Neues mehr mitteilen.

Ethnologische Vergleichung hat uns darüber vergewissert, daß der chinesischen Beeinflussung in kultureller

Hinsicht der ganze Osten des Erdteiles im höchsten Maße unterlag. Innerasien, Indochina, Korea, Japan befanden sich da in gleicher Lage. Daß in Japan vor mehr als zweitausend Jahren schon die Rechenkunst nach chinesischen Mustern, wiewohl mit einigen Abänderungen, geübt wurde, steht urkundlich fest. Die Blütezeit japanischer Mathematik begann erst gegen Ende des XVI. Jahrhunderts, als die autochthonen Bildungselemente durch den Verkehr mit den jesuitischen Missionaren und den holländischen Kaufleuten nachhaltig aufgefrischt wurden. In den Zeitrahmen dieses Buches paßt diese höchst originelle Phase einer rasch emporgewachsenen Geistesblüte nicht mehr hinein.

Wir durften nicht unterlassen, darauf hinzudeuten, daß China zwar auch vom arabischen und vom christlichen Westen keineswegs ganz unberührt blieb, daß aber das einzige asiatische Kulturvolk, welches nachhaltig in dieser Hinsicht wirken konnte, das indische war. Es fragte sich nur, welches Alter man den Betätigungen der Inder auf exakt-wissenschaftlichem Gebiete zuzuerkennen habe, und da standen sich denn, seitdem überhaupt die Möglichkeit für die entsprechenden Sprach- und Sachstudien gegeben war, die Ansichten schroff gegenüber. Während Baillys glühende Phantasie (1787) die indische Sternkunde schon in höchst unwahrscheinlich-altersgrauer Vergangenheit zur reinsten Entfaltung gelangen ließ, wollte Bentley (1825) nur eine moderne Ausbildung älterer Keime zugestehen. Die Wahrheit liegt, wie so häufig, in der Mitte. Erst als man das ungemein reichhaltige Material gesichtet hatte, um welch schwierige Pflicht sich Davis (1789), Colebrooke (seit 1791), Warrens (1825) und Wish (1827) besondere Verdienste erworben hatten, war man auch in der Lage, die Streitfragen über Entstehungszeit, Selbständigkeit und allfallsige Abhängigkeit der astronomischen Sanskriturkunden einer von vorgefaßten Meinungen freien Prüfung zu unterziehen. E. Biot studierte die Zusammenhänge chinesischer und indischer Astronomie. Es braucht, da wir uns ja nur der in Kap. II auf chaldäischem Boden gesammelten Erfahrungen zu entsinnen haben, keinen Beweis dafür, daß auch die geschichtliche Entwicklung der reinen Mathematik bei diesen Untersuchungen mit betroffen ward. Die Verbindung beider Disziplinen war damals, wie jetzt, eine sehr feste.

Schon in der sogenannten Vedischen Periode waren nach Thibauts Darstellung die chronologisch-astronomischen Kenntnisse im nördlichen Hindostan ganz achtbare. Babylonische Übertragung in manchen Fällen anzunehmen, liegt nicht ferne. Ohne scharfe Grenze geht jene Periode in das wissenschaftliche Mittelalter über, das keine beträchtlichen Fortschritte gezeitigt hat, und am Eingange der Neuzeit steht der berühmte, in vierzehn Kapiteln ein System aufstellende Sūrya-Siddhānta, welcher sich nicht mehr mit den einfachen Rechnungsarten bescheidet, sondern auch trigonometrische Kenntnis voraussetzt. Inwieweit der als „Dämon", d. h. als übernatürliches Wesen angestaunte Verfasser dieses Werkes griechische Vorbilder kannte, wird noch nicht als ganz genau ermittelt anzusehen sein; leugnen läßt sich nicht, daß einzelne Eigennamen hellenische Inlage in indischer Umhüllung sind, und daß das Wort Kendra (Radius in einem besonderen Falle) eine verräterische Ähnlichkeit mit dem analogen Terminus des Almagestes (ἡ ἐκ κέντρου) bekundet. Manche Anzeichen sprechen dafür, daß dieser Kodex indischer Astronomie nach dem II. und vor dem VI. Jahrhundert unserer Zeitrechnung nicht aus einem Gusse, sondern durch Verschmelzung älterer und neuerer Vorlagen entstanden ist. Mutmaßlich aus späterer Zeit sind noch einige andere Siddhāntas vorhanden, und unter diesen befindet sich auch ein Romaka-Siddhānta, dessen Namen Thibaut zu Rom, oder da diese Stadt — so wie heute Frankistan im ganzen Orient — nur einen Sammelbegriff bezeichnete, eigentlich zu Alexandria in Beziehung setzen möchte. Nicht zu vergessen ist auch, daß die griechische Herkunft der indischen Astrologie, deren Nomenklatur sich aus verketzerten Kunstausdrücken des Westens zusammensetzt, als außer Frage stehend angenommen werden darf.

Die indische Himmelskunde gewährt, wie wir aus dieser gedrängten Übersicht ersehen, eine Reihe von Anhaltspunkten dafür, daß Hindostan sich sein Wissen nicht bloß durch Inzucht gebildet hat, sondern sich auch von außen her befruchten ließ. Angesichts dieser Tatsachen ist es nicht zu verwundern, daß sich bis vor kurzem bei den Fachmännern die Überzeugung festsetzte, indische Mathematik nur in engster Verbindung mit griechischer behandeln zu dürfen. Auch die von Thibaut geleistete Durchmusterung der alten Religionsbücher, der Sulba-Sûtras, in welchen Kultusvorschriften aller Art enthalten sind und mancherlei Mathematisches zur Sprache kommt, brauchte den früher eingenommenen Standpunkt so lange nicht zu verschieben, als nicht das sehr hohe Alter ihrer Herkunft bekräftigt war. Man kannte zwar die Namen einiger Autoren

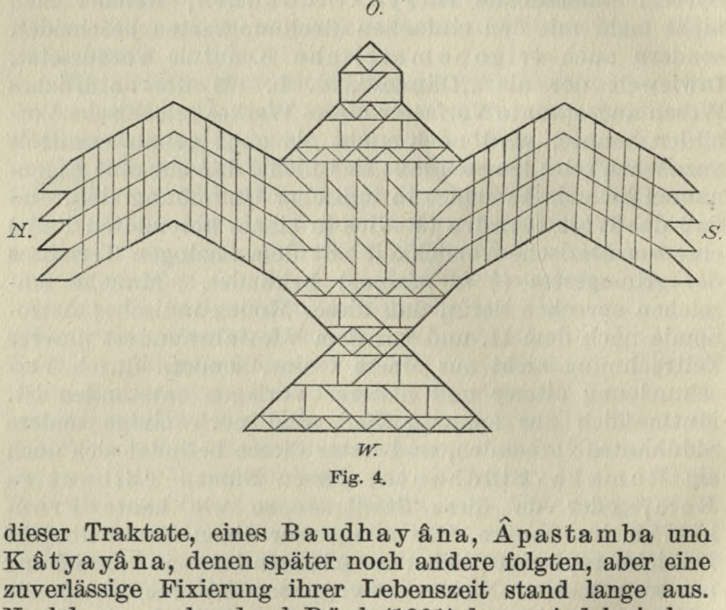


Fig. 4.

dieser Traktate, eines Baudhayâna, Âpastamba und Kâtyayâna, denen später noch andere folgten, aber eine zuverlässige Fixierung ihrer Lebenszeit stand lange aus. Nachdem nun aber durch Bürk (1901) der aus indologischen Erwägungen hervorgegangene Nachweis für ein verhältnismäßig sehr hohes Alter einiger dieser Priesterhandbücher geführt werden konnte, bleibt uns nur übrig einzuräumen: Es hat auch eine sehr frühe national-indische Mathematik gegeben, die bei den Griechen nichts zu entlehnen, denselben vielmehr darzuleihen vermochte. Einige Mitteilungen über dieses bis zum Anfange des I. vorchristlichen Jahrtausends zurückreichenden, für die Folgezeit nur sehr bedingt maßgebend gewesenen Entwicklungsstadium dürfen in diesem Kapitel nicht vermißt werden.

Der altindische Kult legte besonderes Gewicht auf die Herstellung der Altäre, die ganz bestimmten Bedingungen genügen mußten. Von der astronomischen Orientierung kann hier, da sie sich mit der Anleitung der Surya-Siddhânta deckt, abgesehen werden; dafür muß die Absteckung des rechten Winkels unser höchstes Interesse erregen. Man stellte nämlich durch Schnüre, die durch eingeschlagene Stifte auf eine bestimmte Länge gebracht wurden, ein rechtwinkliges Dreieck her, und zwar wählte man nicht das einfachste Dreieck dieser Art mit den Seitenmaßzahlen 3, 4, 5. Man benützte vielmehr, da $13^2 = 12^2 + 5^2$ ist, ein Dreieck mit der Hypotenuse $3 \cdot 13 = 39$ und mit den beiden Katheten $3 \cdot 12 = 36$ und $3 \cdot 5 = 15$. Harpedonapten hat es folglich ebensowohl an den Ufern des Ganges, wie an denjenigen des Nils gegeben, und da Bürks Altersbestimmung von der Sanskritphilologie ratifiziert wurde, so müssen wir weiter eingestehen: Der sogenannte Pythagoreer ist älter als Pythagoras.

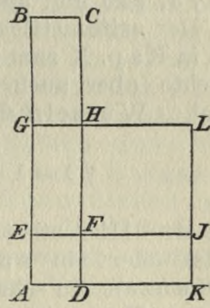


Fig. 5.

Die Grundfläche des Altars konnte nun die eigentümlichsten Gestalten zugewiesen erhalten, z. B. die eines Vogels, und dieser Grundriß war, wie Fig. 4 (nach Bürk) dartut, durch Quadrate, Rhomben und gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke zusammenzusetzen. Wenn dann der Altar vergrößert werden sollte, so mußte die Ähnlichkeit der Basis gewahrt bleiben. Des ferneren hatte man oft Verwandlungsaufgaben durchzuführen, und vor allem zeigt uns Âpastamba, wie man ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandelt. Die mittlere Proportionale, an welche die Schüler Euklids zuerst denken würden, spielt keine Rolle, sondern es wird zuerst, wenn $ABCD$ (Fig. 5) das gegebene Rechteck ist, $AE = EF = FD = AD$ gemacht, EB in G halbiert und hierauf ein Rechteck

$DKJF =$ Rechteck $EFHG = \frac{1}{2}$ Rechteck $EFCB$ angelegt. Offenbar hat man jetzt

$$\text{Rechteck } ABCD = \text{Sechseck } AGHFJK\,.$$

Zugleich aber ist der Figur gemäß

$$\text{Sechseck } AGHFJK = \square AKLG - \square FJLH\,.$$

Ein Quadrat von einem anderen mit Beibehaltung der Gestalt zu subtrahieren, war aber für einen Kenner des pythagoreischen Lehrsatzes nicht mehr schwierig. Quadratwurzeln auszuziehen fällt den Verfassern der Sulba-Sutrâs ebensowenig schwer, weil sie darin ganz eine geometrische Konstruktion erblicken. So werden z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ und andere behandelt.

Der arithmetische Geist der Inder, wie er uns freilich erst in Kap. X zum rechten Bewußtsein kommen wird, erheischte aber auch eine zahlenmäßige Auswertung solcher Wurzeln durch Näherung, und so wird z. B.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

gesetzt. Hier steht rechts eine Teilbruchreihe (nach Heis) oder ein aufsteigender Kettenbruch (nach A. Kunze). Zu sehr beachtenswerten arithmetisch-geometrischen Umformungen gaben auch die Aufgaben Anlaß, Kreise in Quadrate und umgekehrt Quadrate in Kreise umzuwandeln. Als altindischer Wert für π scheint nach Cantors scharfsinniger Interpretation die Zahl $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ angenommen werden zu müssen; dann war die Seite des der Kreisfläche gleichen Quadrates das $\frac{7}{4}$ fache des Halbmessers. Mit dieser Genauigkeit ist jedoch Baudhâyana nicht zufrieden, sondern statt $\frac{7}{4}$ setzt er wieder eine Teilbruchreihe, nämlich

$$\frac{7}{4}\left(1 + \frac{1}{29} - \frac{1}{29 \cdot 6} + \frac{1}{29 \cdot 6 \cdot 8}\right).$$

Auch noch andere Werte von π kommen vor, und die älteste unserer Nachforschung noch erreichbare Zeit scheint sogar den für die älteste Kulturschicht der Menschheit

(s. Kap. II) charakteristischen Wert $\pi = 3$ noch als richtig betrachtet zu haben. Eine stattliche Zunahme mathematischer Einsicht entspricht jedenfalls dem vielleicht langen Zeitraume, welcher die ersten schüchternen Versuche von der Epoche der Sulba-Sûtras scheidet.

Vollzog sich aber dieser Fortschritt spontan auf indischem Gebiete? Wenn wir diesen Satz schreiben, so haben wir offenbar eine Frage von der einschneidendsten Wichtigkeit aufgerollt; eine Frage zugleich, auf die eine befriedigende Antwort sobald noch nicht wird erteilt werden können. Eine ganze Fülle von Einzeltatsachen trat uns entgegen, die uns die Schlußfolgerung nahe legen, daß zwischen Babyloniern, Ägyptern, Chinesen, Indern und nachmals Griechen geistige Fäden gesponnen waren, ohne daß uns eine Entscheidung darüber vergönnt wäre, wer der Gebende, wer der Empfangende gewesen ist. Das eine Moment ist aber doch, soweit es den Anschein hat, als der ruhende Pol in der Erscheinungen Flucht anzusehen, daß Mesopotamien, so wie es geographisch einen Verkehrsmittelpunkt darstellt, auch einen Ausgangspunkt der Übermittlung von Kenntnissen und Fertigkeiten bedeutete. In etwas anderer Form hat diesem Gedanken auch Cantor Ausdruck verliehen. Da die Forschung zur Aufklärung dieser Verhältnisse erst seit wenigen Jahrzehnten kräftiger eingesetzt und schon so viel Wertvolles zutage gefördert hat, so darf die Hoffnung wohl gehegt werden, daß kommenden Generationen noch eine reiche Ernte tieferer Einsichten beschieden sein werde. Was im besondern die Stellung der Griechen zu dem Spruche „ex oriente lux“ und seiner Umkehrung anlangt, so werden wir uns über sie noch näher zu unterrichten haben.

Kapitel V.

Die voralexandrinische Zeit der Griechen.

Die hohe Kultur des Griechenvolkes aus direkten literarischen Quellen zu erschließen, ist uns leider erst von einer ziemlich späten Zeit ab möglich. Wir wissen ja wohl, daß es griechische Schriften über Geschichte der Mathematik gegeben hat; Theophrast, Eudemus, vielleicht auch Xenocrates werden uns als Autoren in dieser Literaturgattung genannt, aber nur von Eudemus sind einige Fragmente auf uns gekommen. Originalien aus den früheren Jahrhunderten fehlen uns nicht minder vollständig, und nur bei den Sammelschriftstellern, vorab bei den erst in unseren Tagen durch Diels in ihrer vollen Bedeutung erkannten Doxographen, stößt man auf verstreute Andeutungen, auf einzelne der Vergessenheit entrissene Bruchstücke. So können wir uns denn nicht einmal ein ganz klares Bild von den Verhältnissen machen, unter denen die griechische Zahlenbezeichnung und Zahlengraphik entstanden und heranwuchsen. Die jetzt noch im Neugriechischen gebrauchten Zahlwörter waren schon lange vor der durch den unsicheren Namen Homer gekennzeichneten Epoche in allgemeinem Gebrauche, und anfänglich soll man sie abkürzend durch die Anfangsbuchstaben (Δ für $\delta\acute{\epsilon}\varkappa\alpha = 10$) ausgedrückt haben. Wenn man diese Zeichen, die durch Lapidarbelege nur selten sichergestellt werden zu können scheinen, herodianische nennt, so ehrt man damit den alexandrinischen Grammatiker Herodian, der uns eine hierauf bezügliche Nachricht gegeben hat. Ganz schablonenhaft war auch die altathenische Sitte, die 24 ersten Zahlen durch die 24 Buchstaben des üblichen griechischen, d. h. altjonischen Alphabetes wiederzugeben.

Eben diese Zeichen dienten um diese Zeit wohl schon im hellenischen Westasien und sodann in Gesamthellas dem nämlichen Zwecke in einem ganz anderen Zusammenhange. Man darf als Tatsache betrachten, daß dieses Alphabet in den wesentlichsten Punkten mit dem phoenikischen übereinstimmte, welches selbst wieder ägyptischen Ursprunges war. Die Zahlwörter jedoch hatten bei dem Handelsvolke mit den Buchstaben nichts zu tun; man kennt keine altphoenikische oder karthagische Inschrift, welche eine solche Deutung zuließe. Kein östlicher Volksstamm hatte sich ein dem Wesen nach die griechische Methode vorwegnehmendes System gebildet, so daß jene einen spezifisch hellenischen Stempel trägt.

Mit den Zahlzeichen α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, ι, $\varkappa$, λ, μ, ν, ξ, o, π, ϱ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω konnte man 24 Zahlen eindeutig ausdrücken. Der Grieche wollte jedoch die Einer 1 bis 10, die Zehner 20 bis 100 und die Hunderter 200 bis 1000 jeweils mit einem bestimmten Buchstaben identifizieren; das sind im ganzen 27 Zahlen, und nur 24 waren im gewöhnlichen Alphabete enthalten. Es mußten folglich drei Ergänzungszeichen (ἐπίσημα) hinzutreten, wenn der obige Zweck erreicht werden sollte, und als solche erscheinen ϛ (Stigma, das auch schriftmäßig verwendete st) für 6, ϙ (Koppa, dem lateinischen Buchstaben Q gleichwertig) für 90 und ϡ (Sampi) für 900. Nun brauchte bloß noch Übereinstimmung darüber zu herrschen, wie man die Zahl vom Buchstaben unterscheiden wollte, und das geschah dadurch, daß man über den letzteren, wenn er arithmetisch zu nehmen war, einen Horizontalstrich setzte, der, wenn mehrere Zahlen nebeneinander standen, entsprechend verlängert wurde. Die Behauptung mehrerer Grammatiken, ein Akut habe diesen Dienst verrichtet, trifft nicht zu. Zahlen bis zur Grenze 999 anzuschreiben, machte dem griechischen Rechner keine Schwierigkeit, wie die nachstehenden Beispiele dartun:

$$\overline{\varepsilon} = 5, \quad \overline{\iota\varsigma} = 16, \quad \overline{\pi\delta} = 84, \quad \overline{\varrho\text{ϙ}\beta} = 192, \quad \overline{\text{ϡ}\text{ϙ}\vartheta} = 999\,.$$

Das Gesetz der Größenfolge ordnet ganz von selbst die Art der Juxtaposition. Für 1000 hatte man die Zahl χίλιοι, deren Anfangsbuchstaben jedoch unberücksichtigt blieben, weil man sich gewöhnt hatte, die Tausender durch einen links unten der Zahl angefügten Akzent zu kennzeichnen. So war

$$\overline{{}_{,}\alpha} = 1000, \quad \overline{{}_{,}\gamma\text{ϡ}\xi\eta} = 3968, \quad \overline{{}_{,}\gamma\zeta} = 3007\,.$$

Für die Zehntausender dagegen trat, weil 10000 soviel wie μυριάς war, wieder ein anderes Auskunftsmittel ein; man schrieb die beiden zusammengehörigen Buchstaben $M\upsilon$ am weitesten links an und konnte nun allen Zahlen bis 100000 gerecht werden:

$$\overline{M\upsilon\beta} \text{ auch } \overline{M_{\upsilon}^{\beta}} = 20000; \quad \overline{M_{\upsilon}^{\delta}{}_{,}\varsigma\sigma\lambda} = 46\,230\,.$$

Sehr große Zahlen zu schreiben, lag dem älteren Griechentum im allgemeinen ferne, obwohl das vorstehend charakterisierte Prinzip sich weiter ausdehnen ließ. Die aus spezifisch mathematischen Beweggründen hervorgegangenen Versuche, für beliebige Zahlen eine bequeme und systematische Darstellung zu finden, haben uns an diesem Orte noch nicht zu beschäftigen. Ein Positionssystem hat es bei den Griechen niemals gegeben, und der Gebrauch der Null blieb ihnen bis in die byzantinische Periode hinein fremd. Es ist übrigens neuerdings darauf hingewiesen worden, daß auch gelegentlich regionale Durchbrechungen der hier geschilderten normativen Zahlschreibung vorgekommen sind. Die Geschichte der Mathematik wird durch diese Abweichungen nicht näher berührt.

Daß bei wissenschaftlichen Arbeiten auch Brüche unentbehrlich waren, erhellt von selbst. Man half sich, da an und für sich die Graphik keinen bequemen Fingerzeig bot, durch Beisetzung eines oberen einfachen und eines oberen doppelten Akuts; ersterer bezeichnete den Zähler, letzterer den Nenner, und um jeder Irrung auszuweichen, schrieb man diesen zweimal an. So wäre etwa

$$\nu\varepsilon'\varrho ϙ\beta''\varrho ϙ\beta'' = 55 : 192 .$$

Ähnlich den Ägyptern (S. 26), zogen auch die Griechen den zusammengesetzten Brüchen grundsätzlich die Einheitsbrüche vor, und wenn bloß diese in die Rechnung eingingen, so ließ sich die angeführte umständliche Schreibweise sehr vereinfachen; der konstante Zähler α' blieb ganz weg und der Nenner wurde nur ein einzigesmal geschrieben: $ς'' = \frac{1}{6}, \pi\delta'' = \frac{1}{84}$. Jeder Bruch ließ sich dann wieder als Summe von Stammbrüchen darstellen:

$$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}; \quad \beta'\varkappa\gamma'' = \iota\beta'' + \cancel{\varkappa\eta\zeta}''. \ \sigma o ς$$

Die Pluszeichen wurden lediglich von uns hier besserer Übersicht halber eingesetzt; die Griechen stellten die Summanden einfach nebeneinander, einen kleinen Zwischenraum zwischen je zwei konsekutiven lassend. Besonders gebildete Symbole besaß man für die weitaus am häufigsten auftretenden Stammbrüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$.

Ein gut ausgedachtes, in seiner Art homogenes System der Zahlendarstellung ist das griechische System gewiß gewesen; ein bequemes Rechnungsinstrument hingegen war es nicht. Wir besitzen aus älterer Zeit keine Urkunde, die uns über den Betrieb des Zahlenrechnens zu orientieren vermöchte, und die Belege, die wir haben, die uns ein Bild von dem Vorgehen geschickter Mathematiker verschaffen, gehören erst den Jahrhunderten nach Christus an. Sonder Zweifel haben in den Jugendjahren des Griechenvolkes Fingerrechnen (S. 31) und Rechenbrett (S. 31, S. 36) das ungelenke Manipulieren mit dem Stifte zu einem großen Teile ersetzen müssen. Auf das Vorhandensein des ersterwähnten Hilfsmittels weisen freilich in der Literatur nur schwache Spuren hin. Daß man andererseits einen *ἄβαξ* zum Verschieben von Rechensteinchen kannte, dessen Kolumnen nicht wagrecht vor dem Rechner vorüber, sondern senkrecht auf ihn zu liefen, wird durch Schriftsteller und archäologische Funde bezeugt. Als der wertvollste von diesen gilt die 1846 ausgegrabene Marmortafel von Salamis, die nach Letronnes, Nagls und Kubitscheks Untersuchungen wohl einem Geldwechsler zur raschen Umrechnung von Münzwerten diente. Ihr Alter muß wohl ein ziemlich hohes sein, weil die alten, noch nicht von der Alphabetbezeichnung verdrängten herodianischen Zahlzeichen (S. 48) auf ihr zu erblicken sind.

All das, was bisher in diesem Kapitel abgehandelt wurde, hat mit wissenschaftlicher Mathematik nur indirekt zu tun. Auch die ältesten geometrischen Handgriffe und Überlieferungslehren, die es in so hochentwickelten Staaten, wie den jonischen und aeolischen, doch notwendig gegeben haben muß, entziehen sich ganz unserer Kenntnis. Wir können indessen sagen, daß bei den Griechen, die ja auch nach dieser Seite hin ganz hervorragend veranlagt waren, die Mathematik mit der Geometrie ihren Anfang nimmt. Das geschah mit dem Auftreten des Thales von Milet (624? bis 548?). Die beiden Fragezeichen sollen nur andeuten, daß uns die exakten Angaben über Geburts- und Todeszeit fehlen, während sich doch die Unsicherheit allerhöchstens über ein paar Jahre erstrecken kann. Wir dürfen wohl glauben, daß der Philosoph, als er sich in der Vaterstadt den Studien hinzugeben begann, bereits einen sozusagen eisernen Bestand von Kenntnissen und Fertigkeiten, sowie nicht minder auch die Ansätze zu einer mathematischen Terminologie vorfand, die er dann natürlich entsprechend vervollkommnete. Durch Tr. Müller und M. C. P. Schmidt ist der sinnlich-realistische Grundzug dieser Nomenklatur in das richtige Licht gestellt worden; die Linie heißt *γραμμή* (die „geritzte", „gezeichnete"), und dem Punkte eignete, ehe Euklid das Kunstwort *σημεῖον* („Zeichen") einführte, die anschauliche, noch von Aristoteles festgehaltene Bezeichnung *στίγμη* („Stich"). Bei *κάθετος* denkt jeder der Sprache Kundige sofort an das Herablassen eines Lotes, bei *ἐπίπεδος* (Ebene, d. h. „auf der Ebene befindlich, sie nicht überragend") an einen auf eine horizontale Fläche herabschauenden Berg, der eben erst durch die Beziehung auf jene als etwas Besonderes erscheint. Es ist auch, wie Schmidt anführt, charakteristisch, daß, mit einer einzigen Ausnahme, alle Wortbildungen der späterhin so reich ausgebildeten hellenisch-mathematischen Kunstsprache nationalen Ursprunges sind. Jenes einzige nicht griechische Wort aber ist, wie schon erwähnt (S. 33) *πυραμίς*; läge da die Hypothese zu ferne, daß gerade Thales es war, der mit diesem Zusatze den von ihm vorgefundenen, auf altjonischem Boden erwachsenen Wortschatz bereicherte?

Denn daß der Milesier in Ägypten war und dort gerade an den Pyramiden ein lebhafteres Interesse nahm, das wird durch die alten Autoren widerspruchsfrei bezeugt. Er soll den Priestern gezeigt haben, wie man durch Schattenmessung die Höhe eines solchen Bauwerkes ermitteln kann, und zwar habe er sich zu dem Ende einer Nachricht zufolge der Proportionen bedient. Vergegenwärtigen wir uns, was unser drittes Kapitel lehrte, so werden wir kaum geneigt sein, den Ägyptern um 600 v. Chr. ein so geringes Maß von Einsicht beizumessen, daß ihre besten Leute erst durch einen Fremdling auf einen so einfachen Kunstgriff hätten aufmerksam gemacht werden müssen. Wir möchten eher dafür halten, daß des Thales Hauptverdienst darin besteht, in Ägypten mancherlei gelernt und es in verbesserter Form seinen Volksgenossen übermittelt zu haben. Denn darin konnte ja der theoretisch veranlagte Grieche seinen Charakter betätigen, daß er, was sich drüben am Nil rein empirisch von Geschlecht zu Geschlecht fortpflanzte, am Ostufer des

Ägäischen Meeres in das Gewand der Erkenntniswahrheit kleidete. Bei dieser Voraussetzung werden die von Proclus dem Thales zugeschriebenen Leistungen wohl verständlich; sachlich die Angaben zu bezweifeln liegt ohnehin kein Grund vor, weil jener Kommentator die ihm damals noch zugängliche Schrift des gewiß gut unterrichteten Eudemus (S. 48) vor sich hatte.

Von geometrischen Lehrsätzen soll danach der Begründer der wissenschaftlichen Geometrie die folgenden sechs gekannt und mit Beweisen versehen haben: Scheitelwinkel sind einander gleich; Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel; Kreise werden durch ihre Durchmesser halbiert; Die Seiten ähnlicher Dreiecke stehen in Proportion; Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein rechter. Zur begriffsmäßigen Erfassung dieser Tatsachen bedurfte es, wie M. C. P. Schmidt hervorhebt, nur einer gewissen Übung in der Reißkunst (S. 24) und induktiven Blickes. Als fraglich erscheint nur der doch schon eine höhere Stufe kennzeichnende sechste Satz, dessen Abstammung von Thales nicht ohne weiteres zugegeben werden kann. Wohl aber mag bereitwillig eingeräumt werden, daß er der Erfinder des ersten historisch beglaubigten, im Mileter Hafen aufgestellten Distanzmessers ist. Sein einfaches Verfahren erregte damals große Bewunderung. Ein auf erhöhtem Punkte (Höhe h) aufgestellter Beobachter bestimmte an einem einfachen Winkelmeßinstrumente den Depressionswinkel (gleich α) der von seinem Auge nach einem entfernten Schiffe gezogenen Gesichtslinie (Fig. 6); die Entfernung (x) des letzteren vom Fußpunkte wäre dann durch $x = h \operatorname{cotang} \alpha$ gegeben. Da Thales solche Symbolik nicht anzuwenden in der Lage war, so zeichnete er ein jenem rechtwinkligen Dreieck ähnliches kleineres Dreieck, bestimmte mittels Maßstabes dessen Seitenlängen und kam damit auf den

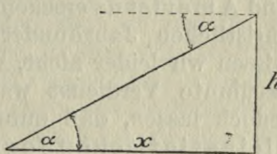


Fig. 6.

fünften der obigen sechs Sätze zurück. Die Krümmung der Wasserfläche brauchte ihn dabei um so weniger zu kümmern, als er von dieser Tatsache noch gar nichts wußte. Die Historiker der Philosophie und Erdkunde sind jetzt darüber einig, daß Thales zwar die Erde frei im Mittelpunkte der Himmelssphäre schweben ließ, an eine Kugelgestalt der ersteren aber so wenig, wie irgend einer seiner unmittelbaren Nachfolger gedacht hat.

Unter diesen ragt sein Landsmann Anaximander (611—545?) am meisten hervor, der erste Kartograph des Griechentums, ein tüchtiger Astronom und vielleicht auch Verfasser eines geometrischen Lehrbegriffes. Die älteren Jonier scheinen vorwiegend nur die Naturphilosophie und nicht die Mathematik gepflegt zu haben. Mit Ehrfurcht ferner wird von dem Sizilianer Mamercus gesprochen, der auch unter den Varianten Mamertinus und Ameristus erscheint und der ersten Hälfte des VI. vorchristlichen Jahrhunderts angehört haben dürfte. Nur wissen wir leider nicht, welches in Wahrheit das ihm nachgerühmte Verdienst war. Nicht unerwähnt wollen wir jedoch lassen, daß nunmehr neben den protagonistischen kleinasiatischen Joniern auch schon großgriechische Dorier als Träger wissenschaftlicher Kultur uns entgegentreten. Beiden Volksstämmen, so möchte man sagen, gehörte jener geniale Mann an, mit dessen Erscheinen die Mathematik den großen Schritt zu einer wirklichen Wissenschaft vollzieht.

Pythagoras von Samos durchlebte einige siebzig Jahre, deren Abgrenzung Schwierigkeiten bereitet, aber durch die Zahlen 580 und 508 vielleicht am zuverlässigsten bestimmt wird. Es ist anzunehmen, daß sein Name von Hause aus *Πυϑαγόρης* war und sich erst nach der Auswanderung in das traditionelle *Πυϑαγόρας* umgestaltete. Daß er in seiner Jugend weite Reisen gemacht hat, dürfen wir gerne glauben, obschon die Quellen in dieser Beziehung nur sehr dürftig fließen. Die Möglichkeit, er habe irgendwie sogar indische Weisheit in sich aufgenommen, darf der Geschichtschreiber der Mathematik im Hinblicke auf ein gewisses Vorkommnis (S. 45) nicht vornehm von der Hand weisen, da zumal die einschlägigen älteren, vielfach waghalsigen Behauptungen Roeths über die Wanderungen des

Philosophen heutzutage in einem ganz anderen Lichte erscheinen. Mag er aber Anregungen welcher Art immer empfangen haben — daß er *aus Eigenem* noch viel hinzugetan habe, wird nicht zu leugnen sein. In reifen Jahren siedelte er nach Unteritalien über und hielt sich nun längere Zeit in *Kroton* und *Metapontum* auf, wo er zum *Begründer einer esoterischen Schule* wurde. Der freisinnige Denker und Forscher Joniens wurde in seiner dorischen Metamorphose der Großmeister eines Geheimbundes, dem aber, mag sonst sein Zeitalter mit ihm nicht immer einverstanden gewesen sein, die Hochhaltung des mathematischen Studiums als ein Ruhmestitel gutgeschrieben werden muß.

Daß mit großer Wahrscheinlichkeit jenes grundlegende Theorem, das mit dem Namen *Pythagoras* unlöslich verknüpft ist, und zu dessen Ehren angeblich eine Hekatombe von Ochsen das Leben lassen mußte, in spezieller Form schon vor seinem Auftreten gefunden war, ist uns (S. 45) bekannt. Und doch hindert nichts, in ihm den *wahren Erfinder des Satzes von der Hypotenuse und den beiden Katheten zu verehren*. Denn was die Brahminen nur am Sonderfalle erkannt hatten, scheint er zu allgemein gültiger Wahrheit erhoben zu haben. Mit *Cantor* führen wir auf ihn das *geregelte mathematische Experiment*, ein zielbewußtes Induktionsverfahren, zurück, dessen Anwendung wir uns hier etwa so vorstellen, daß *Pythagoras*, nachdem er für eine Reihe rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seitenmaßzahlen die Richtigkeit des Satzes erprobt, ihn nun allgemein zu beweisen gesucht und zumal das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck zum Gegenstande seiner Prüfung gemacht habe. Hier springt, wie noch in diesem Kapitel zu erörtern sein wird, die Wahrheit ganz ungesucht ins Auge, und alsdann war für einen architektonischen Kopf die Sache entschieden. Und damit war dieser auch auf eine neue, vordem nicht einmal im Keime existierende Erkenntnis hingeleitet, auf die *Lehre vom Irrationalen*. Dies wird ihm durch jenen zweifellos viel älteren *Katalog der Mathematiker*, den uns der Neuplatoniker *Proclus* gerettet, auf dessen hohen Wert unter den neueren zuerst *Bretschneider* die allgemeine Aufmerksamkeit hingelenkt hat, als wichtige Eigenleistung zuerkannt. Und damit war dann auch die endgültige Loslösung des pythagoreischen Lehrsatzes von der indischen Überlieferung vollzogen, selbst wenn der Meister sich noch nicht im Besitze der Mittel befand, um einen Beweis im Geiste der strengeren Auffassung der Folgezeit zu erbringen. Höchst wahrscheinlich des Pythagoras eigene Erfindung war auch die Lösung der jetzt in den Vordergrund tretenden Aufgabe, beliebige Zahltriaden aufzufinden, deren geometrische Nachbildung die Maßzahlen für Hypotenuse und Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes lieferte. Er fand als eine solche Trias, unter a eine ganz beliebige Zahl verstanden, die aus der einleuchtenden Identität

$$(2a+1)^2 + (2a^2+2a)^2 = (2a^2+2a+1)^2$$

entspringende, welche für $a=1$ das Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 und für $a=2$ das uns von den Indern her bekannte Dreieck mit den Seiten 5, 12, 13 ergab.

Daß es im allgemeinen nicht nur schwierig, sondern oft ganz unmöglich ist, die geistige Produktion des Schulhauptes und der ganz in den Bahnen seiner Denkweise — „αὐτὸς ἔφα“ — verharrenden späteren Schülergenerationen auseinanderzuhalten, ist kein Wunder, denn es folgt eben mit zwingender Notwendigkeit aus der Natur des alle Verhältnisse des menschlichen Lebens souverän beherrschenden Geheimbundes. Man kann demnach vielfach nur von Errungenschaften der pythagoreischen Schule sprechen, ohne daß eine Scheidung der ihren einzelnen Mitgliedern zukommenden Rechte erfolgen könnte. An literarischen Nachrichten über die Pythagoreer mangelt es nicht, aber sie tragen nur zu oft den Stempel des Unglaubhaften, und nur bei Timaeus dem Lokrer, der durch seinen Schüler Plato uns mittelbar eine zuverlässige Überlieferung erschloß, und bei dem Kompendiographen Theo Smyrnaeus, der um 130 n. Chr. sein ernsthaft zu nehmendes mathematisches Werk schrieb, eröffnen sich uns verwertbare Angaben. Den späteren Autoren, welche den Pythagoras zu einer halbmythischen Romanfigur machen, schenkt man am besten gar keine Beachtung.

In neuester Zeit muß einer zwar radikalen, aber durchaus nicht planlos ihre negativen Ziele verfolgenden Richtung

Rechnung getragen werden, welche nach einer ganz anderen Seite hin die Persönlichkeit des Philosophen skeptisch behandelt. G. Junge glaubt aus einer genaueren Prüfung aller einschlägigen Aussagen den Schluß ziehen zu dürfen, die wichtigsten jenem Manne beigelegten Erfindungen rührten gar nicht von ihm her. Neuphythagoreische Überschwenglichkeit habe ihm vielmehr dieselbe nur angedichtet. Daß der berühmte Lehrsatz schon vor Pythagoras bekannt war, wenngleich nur in engem regionalen Kreise, ist uns (S. 45) erinnerlich. Gleichwohl möchte es noch zu früh sein, die Angaben des Mathematikerverzeichnisses, welches nach Tannery und Pesch von Proclus (Kap. X) einem doch gewiß älteren Autor entnommen ward, so vollständig über Bord zu werfen. Junge nimmt auch an dem Worte *ἀλόγων* Anstoß, wofür er *ἀναλόγων* setzen will, so daß auch die Gegenüberstellung von rational und irrational erst einer späteren Zeit angehören würde.

Als gesichert kann gelten, daß die Schule an der vom Meister mit Vorliebe gepflegten Zahlenmystik festhielt, gerade durch sie aber auch zu positiven Ergebnissen geführt wurde. Unter dem systematischen Gesichtspunkte verdient der Umstand besondere Betonung, daß die Zerlegung der Mathematik in vier Disziplinen, wie sie unter dem Namen des Quadruviums noch für das ganze Mittelalter maßgebend blieb, damals zuerst bestimmt formuliert wurde. Arithmetik, Musik, Geometrie und Sphärik waren diese Hauptbestandteile; die sogenannte Musik war erst in zweiter Linie Kunst, in erster dagegen mathematische Erörterung der Tonverhältnisse, zu deren Ergründung Pythagoras ja auch den ersten Apparat der Experimentalphysik, von dem die Geschichte weiß, das sogenannte Monochord, konstruiert hatte. Wenigstens vorbereitet wurde ferner schon frühzeitig die Scheidung der Zahlenlehre in einen praktischen Teil (*λογιστική*), der es wesentlich mit den Rechnungsoperationen zu tun hatte, und in einen theoretischen Teil (*ἀριθμητική*), der sich ganz mit dem uns als Zahlentheorie bekannten Wissenszweige deckte. Theo handelt von diesem Gegensatze als von einer längst eingebürgerten Sache. Dem Pythagoreer Thymaridas wird die Erfindung eines Epanthemes zugeschrieben, d. h. die

Auflösung eines speziellen Systemes linearer Gleichungen. Modern geschrieben hat man n Gleichungen:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = A\,,$$
$$x_1 + x_2 = a_1\,, \quad x_1 + x_3 = a_2 \ldots x_1 + x_{n-1} = a_{n-2}\,,$$
$$x_1 + x_n = a_{n-1}\,.$$

Man addiert sämtliche Gleichungen mit Ausnahme der ersten, zieht letztere von der so entstandenen Summe ab und findet

$$x_1 = \frac{1}{n-2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} - A)\,.$$

Vielerlei wurde mit Reihen und Reihensummierung versucht, und dabei stellten sich wertvolle Tatsachen heraus, die wohl mitunter einem glücklichen Zufalle ihre Entstehung gedankt haben mögen. So kam man auf die Trigonalzahlen durch die Reihe

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

und zu einer neuen Definition der Quadratzahlen mittels der Reihe

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2\,.$$

Wahrscheinlich ist pythagoreischen Ursprunges die Unterscheidung einer arithmetischen, geometrischen und harmonischen oder musikalischen Proportion, womit dann wieder die drei mittleren Proportionalzahlen für zwei ganzzahlige Werte a und b, nämlich das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel (*μεσότης*)

$$\frac{a+b}{2}\,, \quad \sqrt{ab}\,, \quad \frac{2ab}{a+b}$$

gegeben sind. Der spätgriechische Erzähler Jamblichus, der hierüber berichtet, hat zwar manche Bedenken gegen sich, aber was er sagt, fügt sich so zwanglos unserem Wissensstande von pythagoreischer Mathematik ein, daß die sachlichen Gründe die schwächeren historischen genügend stützen können; auch stimmt damit ein von dem Pythagoreer Archytas handelnder Bericht überein. Im V. oder schon VI. Jahrhundert v. Chr. ist auch sicherlich die Begriffsbestimmung befreundeter Zahlen aufgestellt worden, welche die Eigenschaft haben, daß jede der Teilersumme der anderen gleich ist; auch das Wesen der vollkommenen Zahl, die der Summe ihrer eigenen Teiler gleich ist ($6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$) paßt zu den hübschen Zahlenspielereien der von Pythagoras inaugurierten Richtung. Inwieweit von ihm und den Seinigen die von den späteren Griechen sehr geförderte Theorie der Polygonal- und Polyedralzahlen eine über Sonderfälle hinausgehende Pflege erfuhr, läßt sich mit einiger Sicherheit nicht beurteilen.

Auf geometrischem Gebiete ragt, wie schon bemerkt, als unverlierbares Eigentum der Schule der jetzt in seine Rechte eingesetzte berühmte Lehrsatz hervor. Figur und Eigenschaften des Gnomons, d. h. des durch Subtraktion eines kleineren Parallelogrammes von einem größeren ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelogramme entstehenden Liniengebildes $ABCDEF$ (Fig. 7), waren dem Philolaus im V. Jahrhundert wohl bekannt. Der euklidische Beweis für die Winkelsumme des Dreieckes, welcher von der durch einen Eckpunkt zur gegenüberliegenden Seite gezogenen Parallelen Gebrauch macht, gehörte den Pythagoreern an. Auch die Keime zu dem für die Lehre von den Kurven der zweiten Ordnung in planimetrischer Auffassung maßgebend gewordenen Probleme der Flächenanlegung sind pythagoreisch; das folgende Kapitel wird uns hierauf zurückführen. Höchst wahrscheinlich ist es auch, daß man die Existenz der fünf regulären Körper kannte, die man bei molekularphysikalischen Spekulationen notwendig brauchte; daß man sie auch sämtlich nach strenger Vorschrift aufzubauen imstande gewesen sei, soll damit nicht gesagt werden, wenn auch von Jamblichus (S. 58) einem Pythagorasschüler eine erfolgreiche Beschäftigung mit dem Dodekaeder nachgesagt wird. Daß diese Körperform jedoch weit verbreitet war, zeigen uns die von Graf Hugo und Lindemann nachgewiesenen prähistorischen Fundstücke. Bekanntlich

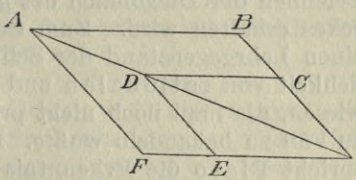


Fig. 7.

kann das regelmäßige Fünfeck, welches in zwölfmaliger Wiederholung die Oberfläche jenes Körpers bildet, nur mittels der als goldener Schnitt bekannten Konstruktion verzeichnet werden, und da uns über dessen erstmaliges Auftreten nichts überliefert, seine Kenntnis aber durch architektonische Beispiele schon für eine ziemlich frühe Zeit wahrscheinlich gemacht ist, so kann die Erfindung des hübschen Kunstgriffes, eine Strecke a nach dem Verhältnis $a : x = x : (a - x)$ zu teilen, den Pythagoreern wohl nicht abgesprochen werden. Verständlicher wird alsdann auch das Gerücht, die Bundesglieder hätten als symbolisches Erkennungszeichen jenes Pentagramm (später Trudenfuß genannt) benützt, welches die Neuzeit als regelmäßiges Sternfünfeck bezeichnet, und welches am einfachsten durch das in einem Zuge zu bewerkstelligende Zeichnen der Diagonalen des gewöhnlichen regulären Fünfeckes erhalten wird. Zum Schlusse sei nochmals auf die einen Lehrgegenstand der Schule ausmachende Gegensätzlichkeit von rationalen und irrationalen Zahlen verwiesen, die man noch nicht prinzipiell, wohl aber von Fall zu Fall zu behandeln wußte. Dem Theodor von Kyrene spricht Plato die Erkenntnis zu, daß

$$\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \sqrt{13},\ \sqrt{14},\ \sqrt{15},\ \sqrt{17}$$

nicht in ganzen Zahlen und Brüchen auszudrücken seien. Vielleicht wußte er mit $\sqrt{2}$ noch nichts anzufangen, allein trotzdem muß auch diese Irrationalzahl der allgemeinen Regel eingefügt worden sein, denn Aristoteles gibt für diese Eigenschaft oder, wenn wir uns korrekter in griechischem Sinne aussprechen wollen, für die Inkommensurabilität von 1 und $\sqrt{2}$ einen strengen Beweis, dessen Autorschaft er nicht für sich beansprucht, der somit aus einer früheren Periode herübergenommen worden sein dürfte.

Daß die pythagoreische Schule oder Kaste, wie wir sie auch zu nennen berechtigt wären, das heilige Feuer der mathematischen Studien auf das sorgsamste gehütet hat, wird ihr stets zum höchsten Verdienste angerechnet werden müssen. Das Volk als solches besaß noch im V. Jahrhundert wenig Sinn für wissenschaftliches Streben und noch weniger wirkliches Verständnis für solche Wahrheiten. Der große Geschichtsschreiber Thucydides scheute sich nicht, die Fläche einer Figur nach deren Umfang abzuschätzen; ein Irrtum, über den man allerdings milder denkt, wenn man erwägt, daß er eben ein landläufiger war und blieb, daß noch fast ein halbes Jahrtausend nachher der Rhetor Quintilian die jungen Rechtsgelehrten ausdrücklich vor ihm zu warnen für nötig fand, und daß er auch heute noch nicht ausgerottet ist. Und sogar ein Socrates war der banausischen Meinung, von Astronomie und Geometrie brauche der Bürger nur so viel zu verstehen, als er für Zeiteinteilung und Feldmessen unmittelbar benötige. So verblieb denn, auch von den Pythagoreern abgesehen, die mathematische Arbeit fast ausschließlich den Philosophen, die darin nur eine Seite ihrer sonstigen Beschäftigung erblickten, dabei aber, wie uns unter anderem die Angriffe des Aristophanes wahrnehmen lassen, ziemlich abseits vom Volksbewußtsein standen und selbst von Gebildeten argwöhnisch angesehen wurden.

Ein solcher Gelehrter war der Philosoph Anaxagoras (ungefähr 500—428 v. Chr.), der sich auf naturwissenschaftlichem Gebiete als selbständiger Denker hervortat und sich auch nachhaltig mit der Kreisquadratur beschäftigt haben soll. Er und der als Mathematiker geschätzte Democrit (S. 24) haben anscheinend als die ersten Vorschriften zu perspektivischer Darstellung entworfen. Oenopides wird um dieselbe Zeit als tüchtiger Astronom genannt, der auch einige sehr einfache planimetrische Aufgaben aufzulösen gelehrt habe. Mit unserem Fache gaben sich auch eifrig ab die von ihren griechischen Gegnern in ein recht ungünstiges Licht gestellten Sophisten, denen indessen eine bedeutende geistige Regsamkeit nicht abgesprochen werden kann. Vor allem verdient hier Hippias von Elis namhaft gemacht zu werden, der ein unbestreitbares schöpferisches Talent an den Tag gelegt und der Mathematik neue Gedanken von dauerndem Werte zugeführt hat.

Drei Probleme waren es von alters her, welche, an sich im üblichen Sinne unlösbar, eben deshalb ganz beträchtlich dazu beigetragen haben, der älteren hellenischen Mathematik einen höheren Aufschwung zu verleihen. Es sind die folgenden drei: Quadrierung des Kreises, Dreiteilung des Würfels, Verdoppelung des Würfels. Gerade weil man ihnen mit den überkommenen Mitteln nicht beizukommen vermochte, suchte man ruhelos nach neuen, ein anderes Gepräge tragenden Verfahrungsweisen, und es ist nicht zuviel behauptet, wenn man sagt: Die ganze höhere Geometrie führt sich auf diese Problemgattung zurück. In diesem Sinne will auch der Versuch des Hippias gewertet werden, eine Kurve einzuführen, durch welche gleichmäßig der Kreis in ein Quadrat verwandelt und der Winkel gedrittelt werden sollte.

Wir nennen diese transzendente krumme Linie Quadratrix, was dem griechischen *τετραγωνίζουσα* (scil. *γραμμή*) nachgebildet ist. Die von Hippias gegebene Konstruktion ist auch als erste Vereinigung rein geometrischer mit kinematischen Überlegungen beachtenswert; eine fortschreitende und eine drehende Bewegung müssen bei ihm zusammenwirken. *ABCD* (Fig. 8) ist ein Quadrat, *BED* ein Quadrant, der die Quadratseite zum Halbmesser und den Eckpunkt *A* zum Zentrum hat. *AB* überstreicht unter Festhaltung des Punktes *A* mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit die Quadrantenfläche, während *BC* ebenfalls gleichförmig sich selbst parallel fortschreitet. Beide Bewegungen beginnen und endigen gleichzeitig. So werden der bewegliche Radius *AG* und die bewegte Quadratseite *B'C'* in jedem Zeitmomente einen Punkt, etwa *F*, gemeinsam haben, und durch Verbindung aller dieser Punkte erhält man den Kurvenast *BFH*. Wie sich Hippias verhielt, um mit Hilfe seiner Kurve, deren Entstehung uns Pappus in der beschriebenen Weise schildert, die ihm vorschwebenden Ziele zu erreichen, wird nicht mitgeteilt, aber daß sie in der Tat auf diesem Wege erreichbar sind, leidet keinen Zweifel.

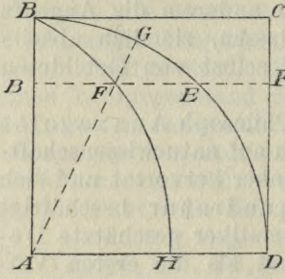


Fig. 8.

Neben Hippias darf auch der etwas ältere Zeno, der Begründer der eleatischen Richtung, nicht vergessen werden. Seinen Namen verewigen die vielgenannten mathematisch-philosophischen Paradoxa, mit deren allseitiger Untersuchung sich unter den Neueren vorzugsweise E. Raab befaßt hat. Am bekanntesten sind Zenos Einwürfe gegen die Bewegunglehre geworden, die auf einer spitzfindigen, aber unrichtigen Auffassung des Infinitesimalbegriffes fußten und unter anderem den Trugschluß hervorriefen, der Schnelläufer Achilles könne unmöglich eine vor ihm einherkriechende Schildkröte erreichen, weil in jedem noch so kleinen Zeitteilchen die Schildkröte doch einen winzigen Fortschritt mache, der dann vom Verfolger erst wieder eingeholt werden müsse. Was jene frühe Zeit frappierte, findet natürlich jetzt, sobald man eine fallende geometrische Progression ansetzt, die denkbarst einfache Erledigung.

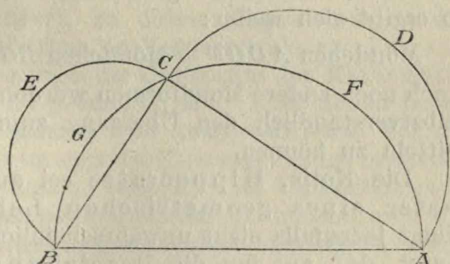


Fig. 9.

Die Persönlichkeiten der — wahrscheinlich den Sophisten zuzuzählenden — Philosophen Antipho und Bryso sind erst von dem Augenblicke an mehr in den Vordergrund getreten, als Bretschneider eine viel zu wenig beachtete Erörterung bei dem Aristoteles-Scholiasten Simplicius in ihrer geschichtlichen Tragweite erkannt hatte. Antipho hatte richtig bemerkt, daß man durch Einbeschreibung regulärer Vielecke von stets wachsender Seitenzahl sich dem Kreisinhalte beliebig nähern könne; Bryso, der auch pythagoreische Ideen in sich aufgenommen hatte, nahm noch die umbeschriebenen Vielecke hinzu und schloß die Kreisfläche zwischen die beiden Flächen je eines Sehnen- und Tangentenpolygones ein. Großzügig faßte das Kreisquadrierungsproblem in der zweiten Hälfte des V. Jahrhunderts Hippocrates von Chios (nicht mit dem gleichnamigen Koer, dem gleichzeitigen Altmeister der Medizin) zu verwechseln. Nach Eudemus ist der Geometer Hippocrates zuerst auf den wichtigen Lehrsatz verfallen: Zwei Kreisflächen stehen zueinander im Verhältnis der Kreisdurchmesser. Von da ausgehend, suchte er krummlinig begrenzte Figuren auszumitteln, die eine exakte Quadratur zuließen, und so gelang es ihm, die nach ihm benannten Möndchen ($\mu\eta\nu\acute{\iota}\sigma\varkappa o\iota$) in eine geradlinige Figur zu verwandeln. Wenn ABC (Fig. 9) ein rechtwinkliges Dreieck ist, so konstruiert man über dessen Seiten die Halbkreise ACB, ADC und BEC; nach dem oben erwähnten Lehrsatze hat man sodann (mit Anwendung des Pythagoreers):

$$\text{Mond } ADCF + \text{Segment } ACF + \text{Mond } BGCE$$
$$+ \text{Segment } BCG = \triangle ABC + \text{Segment } ACF + \text{Segment } BCG\,.$$

Die Segmente heben sich fort, und die Summe der beiden Monde ist dem $\triangle ABC$ gleich. Wird dieses gleichschenklig, so ergibt sich weiter:

$$\text{Möndchen } ADCF = \text{Möndchen } BGCE = \tfrac{1}{2}\triangle ABC\,.$$

Auch noch andere Mondformen wurden durchprobiert, ohne selbstverständlich den Übergang zum Kreise selbst vermitteln zu können.

Die Notiz, Hippocrates sei auch der erste Verfasser eines geometrischen Lehrbuches gewesen, klingt jedenfalls nicht unwahrscheinlich. Minder glaublich lautet, daß auf ihn die Bezeichnung charakteristischer Figurenpunkte durch Buchstaben zurückgehe, denn dieses Mittel der Orientierung bietet sich denn doch allzu ungesucht dar, um nicht schon bei denen um Pythagoras vorausgesetzt zu werden. Vor allem aber kennen wir ihn auch als den ersten Würfelverdoppler. Der Sage nach war den Deliern vom Orakel die Auflage gemacht worden, einen Altar von Kubusform unter Beibehaltung seiner Gestalt noch einmal so groß zu machen — eine Forderung, welche uns stark an ein altindisches Kultusverfahren (S. 45) erinnert, aber sehr viel schwieriger als jenes ist. Hippocrates führte die Aufgabe von drei auf zwei Dimensionen zurück, indem er als neue Problemstellung diese wählte: Zwischen zwei gegebene Strecken sollen zwei mittlere geometrische Proportionalen eingeschaltet werden. Sind nämlich a und $2a$ diese Strecken, so folgt aus der Proportionenkette

$$a : x = x : y = y : 2a$$

durch Berechnung von x und y sofort

$$x^2 = ay\,, \quad y^2 = 2ax\,, \quad x = a\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2a^3}\,.$$

Die Strecke x ist demzufolge die gesuchte Seite des doppelten Würfels. Wie man freilich dieses x geometrisch verzeichnen könne, wurde nicht gezeigt, aber es war doch ein neuer Weg eröffnet, den auch schon die nächste Folgezeit praktikabel machte. Von kulturhistorischer Bedeutung ist die immerhin vertrauenswürdige Erzählung, Hippocrates sei der erste bezahlte Privatlehrer der Mathematik gewesen, was man ihm in pythagoreischen Kreisen, wo man die Wahrheit nur um ihrer selbst ehrte und jede berufsmäßige Ausübung der Wissenschaft als eine Entweihung verwarf, arg verdacht habe.

Im IV. Jahrhundert, zu dessen Beginn wir bereits fortgeschritten sind, stehen im Vordergrunde zwei große Philosophen, deren auch die Geschichte der Mathematik mit hoher Achtung zu gedenken hat. Aber neben ihnen begegnen uns auch Männer von ausgezeichnetem Scharfblicke, die nicht mehr im engsten Zusammenhange mit einer bestimmten Schule standen, wenn auch ihr Unterrichtsgang zunächst noch auf eine solche verwies. So konstatieren wir eine die ganze Gelehrtengeschichte angehende, unser Fach aber besonders nahe berührende Neuerung; der wissenschaftliche Betrieb verliert mehr und mehr den Charakter kastenartiger Abgeschlossenheit, und hervorragende Geister widmen sich dieser Tätigkeit, ohne, wie früher, diese gewissermaßen als eine Folge der Zugehörigkeit zu einem Zweckverbande auszuüben. Dadurch gewinnt die Wissenschaft an Freiheit und Unabhängigkeit. Es sind besonders drei uns im IV. vorchristlichen Jahrhundert beherrschend entgegentretende Namen zu nennen: Plato, Aristoteles, Eudoxus.

Im Gegensatze zu seinem nur auf Sittenlehre und praktische Lebensweisheit bedachten Lehrer Socrates (S. 61) war der Athener Plato (427—347 v. Chr.) eine durchaus theoretisch veranlagte Natur. Die Mathematik war für ihn nur ein Sonderfall seiner Lehre von den Ideen, und es ist wohl glaublich, was Plutarch von ihm aussagt, daß ihm nämlich eine ausgesprochene Abneigung gegen Anwendungen eigen gewesen sei. Eine volle Teilnahme brachte er der mathematischen Methodenlehre entgegen; er soll zuerst mit klarem Bewußtsein für die analytische Untersuchungsmethode und die Berechtigung des indirekten Beweises eingetreten sein, wie er denn auch mehr Nachdruck auf scharfe Definitionen zu legen anfing. Die von seinem Meister gelernte Katechisierungskunst (τέχνη μαιευτική) wandte er erfolgreich auf die geometrische Didaktik an, und die Art und Weise, wie er in dem berühmten Dialoge „Meno" den Socrates aus einem zuvor ganz stumpfsinnigen Sklaven die Lösung der Aufgabe, ein Quadrat mit Beibehaltung der Gestalt zu verdoppeln, herausfragen läßt, ist mustergültig für angehende Lehrer. Der pythagoreischen Methode, rechtwinklige Dreiecke aus Seiten von rationaler Maßzahl herzustellen, setzte er eine zweite zur Seite, indem er, unter a eine gerade Zahl verstanden, für Hypotenuse und Katheten resp. die Werte

$$\frac{a^2}{4}+1\,,\quad a\,,\quad \frac{a^2}{4}-1$$

zu wählen vorschlug. Sehr viel Kopfzerbrechen hat den Auslegern eine Stelle in der „Republik", einer bekannten Schrift Platos, bereitet, welche von einer gewissen, im Staatsleben wichtigen Zahl handelt. Man hat diese platonische Heiratszahl aus den sehr dunklen Andeutungen der Schrift zu konstruieren gesucht, allein es gehen die darüber von bedeutenden Fachmännern — H. Martin, Hultsch, Dupuis u. a. — aufgestellten Vermutungen viel zu weit auseinander, als daß eine kurze Übersicht dem Gegenstande gerecht werden könnte. Wenn man aus dem Originale den Schluß zieht, Plato habe gewußt, daß $\sqrt{2}$ zwar irrational sei, sich aber von $\frac{7}{5}$ nur sehr wenig unterscheide, so wird man kaum vom Wege abirren. Gerade in dieser Richtung kann er leicht von jenem Theodor (S. 60), dessen mathematischen Unterricht er genossen haben soll, nachhaltig beeinflußt worden sein.

Auch dem, was sich schon in jenen Tagen als höhere Geometrie oder Kurvenlehre von der Elementargeometrie loszulösen anschickte, ist Plato näher getreten, wiewohl eigentlich nur diese letztere in seinem Systeme einen Platz gefunden hat. Gerade er ist der Hauptvertreter des noch jetzt feststehenden Axiomes, daß bei geometrischen Aufgaben ausschließlich Lineal und Zirkel gebraucht werden dürften, und wenn er trotzdem in einem eigentümlich gelagerten Falle über diese Regel hinausging, so tat er dies nur mit halbem Herzen und in dem Gefühle, durch seine Unterstützung eines praktischen Zweckes sein mathematisches Ideal beeinträchtigt zu haben. Er gab für die Würfelverdoppelung einen Apparat (Fig. 10) an, welcher auch wirklich das Problem in der ihm durch Hippocrates (S. 64) erteilten Formulierung zu lösen erlaubt. $ABCD$ ist ein Rechteck, dessen Seiten AD und CD sich parallel mit sich selbst verschieben lassen. Um zwischen die beiden in rechtem Winkel zusammengesetzten Strecken AE und EF zwei mittlere Proportionalen einzuschieben, legt man die zur Hälfte starre, zur Hälfte bewegliche rechteckige Linienverbindung derart auf die so erhaltenen Punkte, daß C, der Durchschnittspunkt der Geraden BF und DC, in die Verlängerung von AE zu liegen kommt. Jetzt hat man

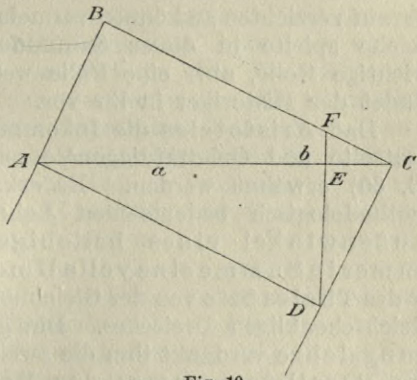


Fig. 10.

$$\triangle ADE \backsim \triangle DCE \backsim \triangle CFE$$

und damit folgende Proportionen:

$$AE : DE = DE : CE = CE : EF\,.$$

Somit sind DE und CE die gesuchten beiden Proportionallinien. — Bekannt ist die Inschrift über Platos Lehrzimmer: „Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω“.

Aristoteles (384—322 v. Chr.) stammte aus der griechisch-mazedonischen Pflanzstadt Stagiros (nicht Stagira) und war so schon durch die Lage seiner Geburtsstadt auf jene nahen Beziehungen zum benachbarten Königshofe eines Philippus hingewiesen, die sein späteres Leben großenteils bestimmten. In Platos „Akademie“ herangebildet, trat er zu dieser Richtung schon frühzeitig in einen gewissen Gegensatz, der sich nachmals bis zur Begründung einer selbständigen, der peripatetischen Schule steigerte. Als der vielleicht größte wissenschaftliche Systematiker, den es je gegeben hat, ordnete er alle Wissenselemente seiner Zeit in eine Enzyklopädie ein, deren inneren Wert allein schon der Umstand bezeugt, daß noch im XVII. Jahrhundert der Hochschulunterricht nicht völlig darauf verzichten zu können vermeinte. Die Mathematik als solche spielte in dieser Sammlung keine hervorragend wichtige Rolle, aber eine Fülle wertvollster Andeutungen findet der Historiker in ihr vor.

Daß Aristoteles die Inkommensurabilität von Quadratseite und Quadratdiagonale nachwies, mußte bereits (S. 60) erwähnt werden. Er erkannte ferner den auch methodologisch bedeutsamen Lehrsatz: Gleichsinnige Außenwinkel eines beliebigen n-Eckes geben immer in Summe eine volle Umdrehung. Auch bewies er des Thales Satz von der Gleichheit der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreieckes. Die geometrische Bewegungslehre verdankt ihm die zweifellos erste Konzeption des Parallelogrammes der Bewegungen und eine freilich verfrühte, aber doch immerhin von viel Neigung zur Aufwerfung schwieriger Fragen Zeugnis ablegende Erörterung über das Rollen eines Kreises auf einer Geraden (Rota Aristotelis). Auch scheinen auf seine feinen logischen Distinktionen, die zur Fixierung einer Reihe von Schlüssen führten, die ersten Anfänge kombinatorischer Betrachtung zurückzugehen; ob hierdurch Xenocrates, des Stagiriten Zeitgenosse, zur Berechnung der Anzahl der Silben angeregt ward, die man aus 26 Buchstaben bilden kann, muß ungewiß bleiben. Jedenfalls kommen seit der Mitte des Jahrhunderts Aufgaben, die in unserer Sprechweise mit Permutationen und Kombinationen zu schaffen haben, mehrfach vor; Chrysippus und Hipparchus waren es angeblich, die nach dieser Seite hin die bei Aristoteles zu findenden Anfänge weiterbildeten. Die beiden größten Denker der alten Welt sind auch die Urheber der für das Griechentum so bezeichnenden Trennung von Theorie und Anwendung; ebenso wie die bewußte Gegenüberstellung von Logistik und Arithmetik erst von Plato ab eine feste Gestalt anzunehmen beginnt (S. 57), so darf als aristotelisch die ausschließliche Reservierung des Wortes *γεωμετρία* für die reine Raumlehre angesehen werden, wogegen die *γεωδαισία* (eigentlich „Erdzerschneidung") den diesem Terminus bis zum heutigen Tage anhängenden Sinn der praktischen Geometrie erhielt. In eine neue Phase trat unter den Händen dieser philosophischen Mathematiker auch die Vorstellung, welche man mit dem Begriffe des Unendlichen verband. Den Pythagoreern, die sich von demselben nicht gänzlich losmachen konnten, war er wenigstens unheimlich, so daß sie das Unendliche für schlimm, das Endliche für gut erklärten, und Plato schaltete ihn überhaupt aus seiner begrenzten Welt aus. Xenocrates (S. 69) muß nach Zeller direkt für einen Gegner der Lehre von der unendlichen Teilbarkeit räumlicher Objekte gelten, und ähnlich war auch das Glaubensbekenntnis des „dunklen" Heraclitus. Demgegenüber bildeten die Peripatetiker die Ansicht aus, es könne jede Raumgröße in stets kleiner werdende Teile ohne Erreichung eines Grenzwertes geteilt werden. Eine aktuelle Unendlichkeit stellt Aristoteles in Abrede; wohl aber gäbe es eine werdende, indem man eine noch so ungeheure Größe doch noch sich vergrößernd vorstellen könne. „*Οὐδὲ μένει ἡ ἀπειρία, ἀλλὰ γένεται*", heißt es in der aristotelischen „Physik". In dieser Auffassung berührt sich also die peripatetische Denkweise mit der modernen, wie sie wenigstens bis zur Einführung des G. Cantorschen Unendlichkeitsbegriffes bestand, und auch der Zusammenhang der ersteren mit der von Archimedes (Kap. VI) zu höchster Entfaltung gebrachten Beweismethode liegt klar zutage.

Gehen wir vom Zeitalter des Aristoteles noch einmal eine kurze Spanne zurück, so ziehen die Namen des Leodamas und Archytas unsere Beachtung auf sich, welche eine Art Mittelstellung zwischen der pythagoreischen Überlieferung und dem augenblicklich überwiegenden Einflusse Platos eingenommen zu haben scheinen. Leodamas muß mit dem athenischen Philosophen Verhandlungen über das analytische Verfahren (S. 66) gepflogen haben; Archytas befaßte sich mit dem delischen Probleme (S. 64) und zeigte, daß man die mittleren Proportionalen geometrisch erhalten kann, wenn man den Durchschnittspunkt eines gegebenen Kreiskegels und zweier gegebener Zylinderflächen aufsucht. Es ist dies wohl der erste nachweisbare Fall, Körperdurchdringungen geometrisch auszunützen. Leider sind die uns gebliebenen Berichte so unvollständig, daß der Vermutung noch ein weiter Spielraum verbleibt, und auch von einem anderen Freunde Platos, von Theaetetus, können wir auf Grund einer Proclusstelle nur so viel erkennen, daß er sich mit der Theorie des Irrationalen abgegeben habe. Vielleicht schrieb er auch über jene fünf regelmäßigen Körper (S. 59), welche die Folgezeit als die platonischen zu bezeichnen sich gewöhnt hat. In den akademischen Kreis gehörten auch die Mathematiker Neoclides und Leo, und eben diesem wird das Verdienst zugeschrieben, bei jeder geometrischen Aufgabe die Notwendigkeit einer strengen Determination (διορισμός) befürwortet zu haben, um festzustellen, unter welchen Umständen überhaupt nur eine Lösung angestrebt werden könne. Tr. Müller hält dafür, die griechische Geometrie sei durch diese Betonung eines exakten Diorismus ebenso vor uferloser Spekulation bewahrt worden, wie die neuere Analysis durch Cauchys Beschränkung des willkürlichen Operierens mit unendlichen Reihen.

Die Person des Eudoxus einstweilen nur streifend, nennen wir aus dem IV. Jahrhundert nur kurz Hippasus, Euphranor und Temnonides wegen ihrer Bemühungen, die Proportionenlehre weiterzubilden; Theydius, Hermotimus und Philippus als Bearbeiter geometrischer Schriften. Philippus Opuntius (auch Mendalus genannt) ragte besonders als Astronom hervor, hat jedoch auch über Polygonalzahlen (S. 59) geschrieben. Diesen und anderen Zahlenverbindungen hat auch Platos Neffe Speusippus ein selbständiges Buch gewidmet. Bedeutender war Dinostratus, der, in des Hippias Fußtapfen tretend, die von ihm mit dem entsprechenden Namen belegte Quadratrix (S. 62) näher erforschte und für ihre beiden Fundamentaleigenschaften einen strengen Beweis führte, dessen Wesen uns Pappus überliefert hat. Am sichersten aber sind wir die Leistung des Menaechmus zu durchschauen befähigt. Er bewies, daß die Auffindung der in den Proportionen $a : x = x : y = y : b$ enthaltenen Größen x und y nicht nur nach Archytas auf den Schnitt räumlicher (wiewohl nicht gewundener), sondern auch auf den Schnitt zweier in derselben Ebene verlaufender Kurven zurückgeleitet werden könne. Die später für diese Linien in Aufnahme gekommenen Kunstwörter besaß Menaechmus noch nicht, aber wenn wir seine Lösungen so aussprechen, wie es uns geläufig ist, so müssen wir sagen: Einmal werden eine Parabel und eine Hyperbel und das andere Mal werden zwei Parabeln zum Durchschnitte gebracht. Auch die Asymptoten der Hyperbel hatte er in ihrer wichtigsten Eigenschaft erkannt, ohne natürlich auch in diesem Falle seine Wahrnehmungen bereits in unserem Sinne terminologisch einkleiden zu können. Von Menaechmus erweist sich sachlich — und damit auch zeitlich — als ein jüngerer Zeitgenosse jener Aristaeus, der die Kegelschnitte jeweils dem spitz-, recht- und stumpfwinkligen Kegel entnahm, worauf im nächsten Kapitel näher eingegangen werden soll. Auch die regulären Körper habe er im Zusammenhange betrachtet, berichtet Hypsicles, dem wir, im Vereine mit Pappus, so ziemlich die einzigen Nachrichten über den vom Mathematikerverzeichnis auffallenderweise ganz mit Stillschweigen übergangenen Geometer zu danken haben. Unter den Schülern des Aristoteles befand sich auch der Geodät und Geograph Dicaearchus, dessen Berghöhenmessungen sich auf ein Dioptra genanntes Instrument stützten. Gewiß war dies eine ähnliche Vorrichtung, wie sie dem Thales (S. 53) für seine Distanzmessung diente. Letzter hatte, wie wir wissen, Depressionswinkel bestimmt, während Dicaearch umgekehrt aus dem Elevationswinkel und der bekannten Distanz vom Fuße der Erhebung deren relative Höhe zu ermitteln gehalten war.

Die hohe Bedeutung des Eudoxus (390—337) hatte bereits C. G. J. Jacobi in jenem Essay über antike Mathematik richtig hervorgehoben, den er für A. v. Humboldts „Kosmos“ handschriftlich geliefert und den in unseren Tagen L. Königsberger wieder ans Licht gezogen hat. Es sei, so wird da bemerkt, Eudoxus unbedingt als Erfinder jenes echt griechischen Grenzüberganges anzuerkennen, der als Exhaustionsmethode hundert Jahre später so gewaltige Triumphe feiern sollte. Und wirklich spricht der Triumphator selber, Archimedes, seinem Vorläufer die Erfindung folgenden Satzes zu: Sind zwei Flächenräume A und B ($A > B$) gegeben, so kann durch Vervielfachung die Differenz ($A - B$) größer als jeder noch so große endliche Flächenraum gemacht werden. Wohl auf diesem Wege fand der Knidier, daß zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich, weil jeweils der dritte Teil eines dieselben Bestimmungsstücke besitzenden Prismas sind. Auch die Proportionenlehre soll Eudoxus vervollkommnet haben, und die Wahrscheinlichkeit, daß der goldene Schnitt in der uns geläufigen Form sein geistiges Eigentum sei, darf als sehr groß bezeichnet werden. Vor allem aber war er es, der die doppelt gekrümmten Kurven in die Wissenschaft einführte, geleitet von astronomischen Beweggründen, auf die hier mit einigen Worten eingegangen werden muß.

Eudoxus ist auch der Begründer des ersten diesen Namen mit Recht führenden Planetensystemes, der Lehre von den homozentrischen Sphären. Um die Erde als gemeinsamen Mittelpunkt ist eine Anzahl von Kugelflächen beschrieben, und jeder einzelne Wandelstern erhält von diesen wieder eine — kleinere — Anzahl zugeteilt, von denen jede eine bestimmte Bewegung ausführt. Gehört also der als Punkt zu denkende Planet n solchen Flächen an, so wirken auf ihn unausgesetzt n Bewegungsimpulse ein, die sich zu einer einzigen Bewegung zusammensetzen, und bei geschickter Auswahl jener gelingt es, sämtliche Anomalien der Planetenbewegung, als da sind Stillstand, Rückläufigkeit, Schleifenbildung, übersichtlich darzustellen. Geahnt hatte man schon früher diesen Charakter der von Eudoxus herrührenden Kosmologie, aber vollständig durchschaut und bis in die Einzelheiten verfolgt hat ihn erstmalig der geniale Mailänder Astronom G. Schiaparelli, dessen Aufschlüsse uns zeigten, daß da ein großartiges geometrisches oder — zutreffender gesagt — kinematisches Problem vorliegt. Im wichtigsten Falle beschreibt der Planet eine sphärische

Lemniskate, deren Projektion auf eine entsprechend gewählte Hauptebene dieselbe Gleichung aufweist, wie man sie für die bekannten Schwingungskurven von Lissajous erhält. Im Originale führt diese Raumkurve den Namen Hippopeda (ἵππου πέδη); so nennt Xenophons „Reitkunst" eine Achterlinie, welche in der hohen Schule des Bereiters eine Rolle spielt. Erzeugt kann die Projektion auch direkt werden durch den Schnitt einer passend gelegten Ebene mit einem Torus (σπεῖρα), der durch Umdrehung eines Kreisbogens um eine seiner Ebene angehörige Gerade zustande gekommene Rotationsfläche, die mutmaßlich auch Archytas (S. 69) zum Gegenstande der Betrachtung gemacht hatte. Diese Leistung des Eudoxus auf dem Gebiete der höheren Geometrie sind wir also in ihrer Tragweite zu würdigen imstande, wogegen uns die von ihm zur Lösung des delischen Problemes (S. 64) verwendeten Bogenlinien (καμπύλαι γραμμαί) undurchsichtig bleiben. Jedenfalls steht er großartig da als ein Bindeglied zwischen dem Kindeszeitalter der griechischen Mathematik und demjenigen der männlichen Reife, in welches einzutreten wir uns nunmehr anschicken.

Kapitel VI.

Das klassische Zeitalter.

Das IV. vorchristliche Jahrhundert ist als das der höchsten Vollendung altgriechischer Mathematik anzusehen, und es ist, da die spätere Zeit doch in der Hauptsache nur Ergänzungen geliefert hat, wohl gestattet, diesem Zeitalter den Stempel der Klassizität aufzudrücken. Vier Namen sind es, mit denen sich für jeden Freund der Gelehrtengeschichte die hohe Bedeutung dieser Periode untrennbar verknüpft zeigt; die Namen Euclides, Eratosthenes, Archimedes und Apollonius. Die beiden erstgenannten haben dauernd in der damals noch erst im Jugendalter ihrer glänzenden Entwicklung stehenden Stadt Alexandria gelebt und gewirkt, und auch Apollonius empfing hier die für sein späteres Leben nachwirkenden Eindrücke, während sein späterer Aufenthalt in Pergamum verbürgt ist. Archimedes war zwar ein dorischer Syrakusaner, aber er stand in nahen Beziehungen zu dem Gelehrtenkreise der neuägyptischen Hauptstadt und empfing zweifellos von dort her Anregungen, die für seine eigene Forscherarbeit nicht gleichgültig waren. So begehen wir keinen Verstoß gegen die historische Wahrheit, wenn wir die glänzendste Epoche, von der diese Schrift zu handeln hat, auch als die alexandrinische bezeichnen.

Die Gründung des Mazedonierkönigs war von Anfang an nicht bloß für Politik und Verkehr, sondern auch für höhere Interessen ein Brennpunkt geworden. Schon unter Ptolemaeus I. Soter entstand der Grundstock für die gar bald so berühmt gewordene Bibliothek, und sein Nachfolger Ptolemaeus II. Philadelphus schuf im Museum eine Zentralanstalt für Forschung und Lehre, der damals und noch lange nachher nichts Gleichwertiges, ja selbst nur Ähnliches zur Seite gestellt werden konnte. Gleich anfangs bildete die Sternkunde einen bevorzugten Gegenstand wissenschaftlicher Tätigkeit; Aristyllus und Timocharis werden uns in den ersten Jahren als eifrige Beobachter namhaft gemacht, und wohl auch des Autolycus kleines Werk über Sphärik darf in diesem Zusammenhange angeführt werden. Dasselbe ist rein geometrisch gehalten und bekundet, daß noch nicht einmal der erste Ansatz zur Trigonometrie vorhanden war, denn indem der Autor eine zahlenmäßige Beziehung zwischen der Zeit und dem Tagesbogen der Sonne auszumitteln trachtet, bedient er sich des einfachen rechnerischen Hilfsmittels der arithmetischen Reihe, hierin eine augenfällige Verwandtschaft mit babylonischen Gedankengängen (S. 19) an den Taglegend.

Die reine Mathematik begründete auf alexandrinischem Boden der große Didaktiker Euclides, der vielleicht (?) ein syrischer Grieche, ganz gewiß aber nicht, wie das ganze Mittelalter wähnte, mit dem bekannten Philosophen von Megara identisch war. Wir wissen auffallend wenig von ihm; fest steht nur so viel, daß er um 300 eine der führenden Persönlichkeiten am Museum war. In dieser Stellung gab er dem Könige Ptolemaeus Philadelphus, der ihn um eine bequemere Unterrichtsmethode befragte, den viel besprochenen Bescheid: Zur Mathematik führt kein

Königsweg. Glücklicherweise sind wir um so besser mit seiner reichen literarischen Wirksamkeit vertraut.

Wir besitzen unter seinem Namen, obschon die Urheberschaft nicht bewiesen werden kann, ein die Anfangsgründe der Statik behandelndes Bruchstück. Seine sphärische Astronomie (φαινόμενα) geht nicht erheblich über Autolycus hinaus, ist jedoch in sachlicher Hinsicht durchaus fehlerfrei. Die ihm zugeschriebene Musiklehre (κατατομὴ κανόνος) ist selbstverständlich (S. 57) rein arithmetischen Inhaltes. Seine Optik und Katoptrik, über welch letztere man lange kein klares Urteil gewinnen konnte, stellen nichts als geometrische Exerzitien dar, wie denn z. B. der wohl schon länger bekannte Satz von der Gleichheit des Einfalls- und Reflexionswinkels zur Lösung feldmesserischer Aufgaben benützt wird. Ungleich höher stehen die geometrischen Werke, deren Besprechung nunmehr an die Reihe kommen soll.

Unter ihnen steht an erster Stelle das große Lehrbuch der „Elemente" (στοιχεῖα), aus welchem, da es in manchen Ländern (England) heute noch in ganz unveränderter Gestalt dem Unterricht zugrunde gelegt zu werden pflegt, sechzig bis siebzig Generationen die ersten Gründe ihres mathematischen Wissens geschöpft haben. Daß von dem Werke, welches später noch Zusätze erhalten hat, dreizehn Bücher als echt und beglaubigt gelten können, ist jetzt allgemeine Überzeugung. Wir wissen sehr wohl, daß auch Euclid nicht ohne Vorarbeiten dasteht, daß z. B. Hippocrates schon das nämliche Ziel angestrebt hat, allein bei alledem muß doch die äußere Form sowohl wie ein sehr beträchtlicher Teil des Inhaltes als geistiges Eigentum des Alexandriners betrachtet werden. Die Unterscheidung aller dargebotenen Tatsachen nach Grundsätzen (ἀξιώματα), Grundforderungen (αἰτήματα), Definitionen (ὅροι), Lehrsätzen (θεωρήματα), Aufgaben (προβλήματα) und Hilfssätzen (λήμματα) darf wohl wesentlich für euklidisch gehalten werden; statt des Wortes Grundsätze war anfänglich auch die Bezeichnung κοιναὶ ἔννοιαι gebräuchlich. Einen Überblick über den Inhalt des Fundamentalwerkes erzielen wir am besten durch summarische Angabe der bemerkenswertesten Bestandteile der einzelnen Bücher.

1. Buch. An der Spitze stehen die unentbehrlichen Erklärungen und die unbeweisbaren Wahrheiten. Von ihnen hat das elfte Axiom, welches den Parallelenbegriff einführt, eine geradezu unermeßliche Literatur entfesselt, deren Anschwellen erst seit einigen Jahrzehnten durch den Aufbau einer nichteuklidischen Geometrie ein Damm entgegengestellt werden konnte. Es folgen die einfachsten Lehrsätze vom Drei- und Viereck, bis mit dem pythagoreischen Theorem und seiner Umkehrung (Proposition 47 und 48) der einstweilige Abschluß erreicht ist. Arithmetische Hilfsmittel, wie Proportionen usw., durften prinzipiell noch nicht Verwendung finden, was dann eben nach Zeuthens Ansicht den Autor zwang, für den Magister Matheseos den in alle neueren Lehrbücher übergegangenen Konstruktionsbeweis zu ersinnen.

2. Buch. Durch stete, geschickte Anwendung eben dieses Satzes werden Flächenverwandlungen von Rechtecken und namentlich von Quadraten vorgenommen, die in ihrer Gesamtheit einer geometrisch eingekleideten Elementaralgebra gleichwertig sind. So finden wir beispielsweise die nachstehenden Identitäten bewiesen:

$$a(b + c + d + \ldots) = ab + ac + ad + \ldots,$$

$$a^2 = b^2 + (a - b)^2 + 2b(a - b), \quad 4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2.$$

Eine Aufgabe ist das geometrische Seitenstück der Auflösung einer unrein-quadratischen Gleichung.

3. Buch. Es ist rein planimetrisch und enthält die Kreislehre. Eigentümlich ist die Definition des einstweilen allerdings noch nicht besonders benannten, in späteren Jahrhunderten viel erörterten Berührungswinkels (bei Proclus *γωνία κερατοειδής*), von dem bewiesen wird, daß er kleiner als jeder noch so kleine spitze Winkel, in Wahrheit folglich gleich Null ist.

4. Buch. Die Theorie der regelmäßigen Sehnen- und Tangentenvielecke. Die Mittel zur Verzeichnung des regelmäßigen Fünfeckes hatte das zweite Buch bereitgestellt.

5. Buch. Hier ist Euclid wohl am wenigsten originell, denn die sehr eingehend abgehandelte Proportionenlehre fand er, wie wir wiederholt erfuhren, bereits in ziemlich abgeschlossenem Zustande vor.

6. Buch. Aus dem fünften fließt ungezwungen die Ähnlichkeitslehre. Gelegentlich stoßen wir auf die erste historisch nachweisbare Maximumaufgabe: $x(a-x)$ wird für $x = \frac{a}{2}$ so groß, als das Produkt überhaupt werden kann. Beim Anlegen eines Parallelogrammes an eine gegebene Strecke begegnen uns die bald nachher zur höchsten Bedeutung gelangten Worte *ἐλλείπειν* und *ὑπερβάλλειν*.

7. Buch. Dasselbe ist, wie nicht minder die beiden nächstfolgenden Bücher es sind, der Zahlentheorie gewidmet. Der Gegensatz zwischen Primzahl (*πρῶτος ἀριθμός*) und zusammengesetzter Zahl (*σύνθετος ἀριθμός*) wird formuliert. Die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen wird in einer von unseren Gepflogenheiten sachlich nicht abweichenden Weise bewirkt.

8. Buch. Die Proportionen werden zur Bildung von Flächen- und Körperzahlen herangezogen, und als deren spezielle Fälle erscheinen dann die Quadrat- und Kubikzahlen.

9. Buch. Am Anfange steht ein an sich ziemlich gleichgültiger zahlentheoretischer Satz, der aber dadurch eine gewisse Wichtigkeit erlangt, weil an ihm zuerst das apagogische Beweisverfahren (S. 66) demonstriert wird. Sonst sind noch hervorzuheben Proposition 20, der zufolge es unendlich viele Primzahlen gibt, und Proposition 35, gleichbedeutend mit der Summierung einer geometrischen Reihe. Zuletzt wird auch wieder der vollkommenen Zahlen (S. 59) Erwähnung getan.

10. Buch. Die hier vorgetragene Systematik der Irrationalgrößen ist ja natürlich auch nicht aus Euclids Haupte, wie Athene aus dem des Zeus, unmittelbar hervorgegangen, aber wir haben gleichwohl vollen Grund zu der Annahme, daß in dieser ganz neue Bahnen einschlagenden Behandlung die originellste Leistung des großen Geometers vorliegt. Lange hat man von dem nicht leicht verständlichen Kapitel nur eine oberflächliche Vorstellung gehabt, und es ist nicht zu leugnen, daß uns erst Nesselmanns kritische Analyse ein volles Verständnis erschlossen hat. Schon oben (S. 60) ward bemerkt, daß der Begriff des Inkommensurablen bei Euclid den uns geläufigen des

Irrationalen vertritt; was in unserer Zeichensprache sich ganz von selbst ergibt, ist in unserer Vorlage, die niemals auf den geometrischen Beweis verzichtet, nur durch mühsame Umschreibung auszudrücken gewesen. Man bedenke, daß mit Ausdrücken, wie

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})\,c}{2}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{a \pm b}\,(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})},$$

Umformungen vorgenommen werden müssen. Über dieses in den „Elementen" erreichte Stadium ist man, wie Nesselmann betont, volle achtzehnhundert Jahre nicht hinausgekommen.

11. Buch. Nunmehr tritt der Raum an die Stelle der bloß ein- und zweidimensionalen Gebilde. Wie in jedem modernen Kompendium der Stereometrie, so werden auch hier die Sätze über die allgemeinen Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen hergeleitet. Von geschlossenen Körpern werden vorläufig Parallelepipedum und Prisma definiert und betrachtet.

12. Buch. Wenn wir sagen, dieser Abschnitt beschäftige sich mit der Volumbestimmung der ebenflächigen und der elementaren krummflächigen Körper, so haben wir zwar dem Sinne, nicht jedoch dem Wortinhalte nach die Wahrheit gesprochen. Denn Euclid kubiert nie wirklich, sondern er bleibt sozusagen beim vorletzten Schritte stehen, so daß dem einigermaßen Erfahrenen auch der letzte Schritt nicht mehr schwer fallen konnte. Aus dem durch Exhaustion bewiesenen Lehrsatze, daß zwei Kugeln sich ihrem kubischen Inhalte nach wie die Würfel ihrer Halbmesser verhalten, folgt z. B. sofort das Volumen, wenn r den Kugelradius, c eine Konstante bedeutet, gleich cr^3. Daß aber $c = \frac{4\pi}{3}$ sei, verriet Euclid seinen Lesern nicht.

13. Buch. Gestützt auf den als bekannt vorausgesetzten und noch etwas erweiterten Inhalt des vierten Buches, beschäftigt sich das den Schluß bildende dreizehnte mit der Konstruktion der fünf regelmäßigen Polyeder (S. 59). Daß es nur so viele geben könne, folgt aus der Tatsache, daß nur $3 \cdot 60 = 180$, $4 \cdot 60 = 240$, $5 \cdot 60 = 300$, $3 \cdot 90 = 270$ und $3 \cdot 108 = 324$, wenn man

diese Zahlen als Grade nimmt, kleiner als 360, womit die Ebene gegeben ist, ausfallen. Es bedarf nicht ausdrücklicher Versicherung, daß Euclides, der noch nichts von Graden wußte, die Tatsache in minder einfacher Darstellungsart wiedergegeben hat.

Hiermit ist unsere Durchmusterung der „στοιχεῖα“ zum Ende gelangt. Moderne Pädagogen werden sich mit der Stoffverteilung nicht sofort einverstanden erklären, sondern an einer unserer Denkweise widerstrebenden Zerreißung verwandter Materien und an anderen Dingen Anstoß nehmen. Indessen wird man dem Autor nicht abstreiten können, daß er mit strenger Konsequenz einen immer wiederkehrenden Gedanken festhält: Jeder Satz kommt erst und gerade dann an die Reihe, wenn alle Mittel zur Erledigung desselben bereit liegen. So war es begreiflich, wenn ältere Schriftsteller dem Gedanken Raum gaben, das ganze Werk sei nur um der platonischen Körper (S. 59) willen geschrieben, welche allerdings äußerlich als eine Krönung des Gebäudes erscheinen mögen. Tatsächlich kann von solcher Absicht keine Rede sein; die „Elemente“ sind um ihrer selbst willen da und können nur als eine mit vollem Zielbewußtsein und vollendetster Sachkenntnis durchgeführte Verarbeitung des gesamten um 300 v. Chr. vorliegenden Materiales aufgefaßt werden, in welche eigene Neuschöpfungen nur insoweit eingingen, als es eben notwendig war. Vieles ist älteren Mustern vollinhaltlich entlehnt, Vieles mit neuen Beweisen versehen worden. Ob die uns vorliegende Redaktion die ursprüngliche war, mag berechtigten Zweifeln unterliegen, und insonderheit wird vielfach das elfte Axiom als Einschiebsel späterer Kommentatoren angesehen, während die alteuklidische Anordnung eine ganz andere und korrektere gewesen sein dürfte. Gewöhnlich spricht man nur von der Geometrie des Alexandriners, während sein Buch doch die ganze Mathematik umschließt, allein diese Ausdrucksweise ist doch insofern berechtigt, als er eben die griechische Tendenz, auch die Zahlenlehre in ein geometrisches Gewand zu hüllen, am reinsten herausgearbeitet, wo nicht auf die Spitze getrieben hat.

Die übrigen geometrischen Schriften Euclids sind leider teils gar nicht, teils nur fragmentarisch unserer Zeit übermittelt worden. So kennen wir gar nicht näher einen wahrscheinlich mathematisch-philosophischen Traktat über die Trugschlüsse (*ψευδάρια*). Ebenso entziehen sich unserer Kenntnis die Oberflächenörter (*τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν*), als deren Zweck Chasles die Behandlung der Kurven und Flächen zweiter Ordnung postulierte. Daß Euclid durch das Problem der Flächenanlegung die drei Kegelschnittslinien in einer Auffassung erörtert hat, welche nach unserer Art, uns auszudrücken, zu einer Diskussion ihrer Scheitelgleichungen führte, ist nach Andeutungen bei Pappus nicht unwahrscheinlich, aber

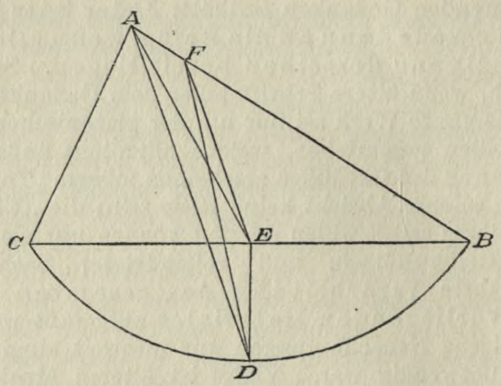


Fig. 11.

keinerlei Anhaltspunkt liegt vor für die Annahme, der erstgenannte habe gewußt, daß diese Kurven auch auf der Oberfläche eines Kegels liegen und durch deren Schnitt mit einer Ebene gewonnen werden können. Sichergestellt ist durch Proclus das dereinstige Vorhandensein einer die Figurenteilung behandelnden Schrift (*περὶ διαιρέσεων*), welche sich M. Cantor als „Aufgabensammlung" denkt. Nach einer arabischen Übersetzung derselben, die freilich recht viel zu wünschen übrig läßt, haben Dee und Commandinus im XVI. Jahrhundert eine lateinische Ausgabe veranstaltet; so liest man wenigstens gewöhnlich, während Eneström dafür eintritt, daß dem Engländer Dee nur die Arbeit des Abschreibers, das eigentlich wissenschaftliche Verdienst dagegen ausschließlich dem in solchen Dingen sehr erfahrenen Italiener Commandino zufiel. Sicherlich ist mindestens ein Teil der Lösungen, die eine hohe Gewandtheit verraten, echt euklidisch; so z. B. die Behandlung der Aufgabe (Fig. 11), die aus einem beliebigen Dreiecke ABC und dem Kreissegmente BCD zusammengesetzte Figur $ABDC$ durch eine Gerade zu halbieren. Es wird BC in E halbiert, das Lot ED bis zum Schnitte mit dem Kreisbogen errichtet und sodann durch E zu AD eine Parallele gezogen, welche die Dreiecksseite AB in F schneidet; die Strecke DF leistet das Verlangte. In neuester Zeit ist man auch auf ein angeblich euklidisches Epigramm der sogenannten Anthologie aufmerksam geworden, welches die Lösung zweier Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten erheischen würde $(2(x-1)=y+1;\ x+1=y-1)$. Daß die geometrische Algebra der „Elemente", mit Zeuthen zu sprechen, mit so einfachen Forderungen leicht fertig werden konnte, ist nicht zu bezweifeln.

Besonders bedauerlich ist der Verlust der sogenannten Porismen (*πορίσματα*). Was wir von ihnen wissen, beruht auf einigen Lemmen, die Pappus in der stattlichen Zahl von 38 Nummern als Hilfsmittel zum Verständnis der drei damals noch erhaltenen Bücher eben dieses Titels zusammengestellt hat. Mit Genauigkeit zu bestimmen, was ein Porisma, im Gegensatze zu Theorem und Problem, bezwecken sollte, sehen wir uns außerstande, aber M. Cantors Begriffsbestimmung verdient unser Vertrauen: Ein Porisma war ein Theorem, welches ein Problem anregte und einschloß. So ist es denn wohl sicher, daß geometrische Örter mit Vorliebe dieser Kategorie zugerechnet wurden. Aber auch eine nahe Verwandtschaft mit einer weiteren, in unserer Aufzählung der letzten Schrift Euclids wird für die Porismen zugestanden werden müssen. Wir meinen die Data (*δεδόμενα*), die mit einer Vorrede des dem V. nachchristlichen Jahrhundert angehörigen Marinus von Neapolis vollinhaltlich auf uns gekommen sind. Nach R. Simson, der sich zuerst um diesen kostbaren Überrest althellenischer Forschungsmethoden gehörig angenommen hat, teilen wir in Schwabs Verdeutschung einige Sätze der „Data" mit:

1. Wenn es drei Größen gibt, die so beschaffen sind, daß der Überschuß der ersten über eine gegebene Größe ein gegebenes Verhältnis zu der zweiten und der Überschuß der zweiten über eine gegebene Größe auch ein gegebenes Verhältnis zu der dritten hat, so wird der Überschuß der ersten über eine gegebene Größe auch ein gegebenes Verhältnis zu der dritten haben.

2. Zieht man von einem Punkte zwei Geraden so, daß sie zwei gegebene Parallellinien schneiden, so kennt man das Verhältnis, in dem das zwischen dem Punkte und einer der Parallelen gelegene Stück einer jeden Geraden zu dem zwischen den Parallelen befindlichen Stücke steht.

3. Wenn die von einem Eckpunkte A auf die gegenüberliegende Dreieckseite gefällte Senkrechte in einem gegebenen Verhältnis zur Grundlinie steht und der Winkel bei A konstant bleibt, so ist das Dreieck der Gattung nach gegeben.

Diese häufig wiederkehrende Wortverbindung „der Gattung nach" soll bedeuten: Die Figur ist gestaltlich gegeben. Im letzten Falle würden wir in der Gegenwart eine uns weit einleuchtendere Formulierung wählen, nämlich diese: Alle Dreiecke, für welche α und das Verhältnis $h_a : a$ gleich sind, stehen zueinander in der Beziehung der Ähnlichkeit. Mit Rücksicht auf unsere Beispiele haben wir das Recht zu folgender Charakteristik gewonnen: In den Data sind nur wirkliche Lehrsätze enthalten, die aber nicht ihrer Eigenart nach besonderes Interesse einflößen können, die vielmehr nur um ihrer Nützlichkeit für Problemlösungen willen Beachtung verlangen. Die ganze Schrift stellt sich somit dar als eine Materialiensammlung oder Rüstkammer für den, der sich viel mit der Auflösung geometrischer Aufgaben zu schaffen zu machen hat.

Ehe wir von Euclides Abschied nehmen, wollen wir noch daran erinnern, daß eben an seine Arbeiten zuerst jene indirekt zur Historie der Mathematik gehörige Literaturgattung angeknüpft hat, welche sich mit der Wiederherstellung verloren gegangener oder nur in Bruchstücken geretteter Schriften der Antike beschäftigt. Diese Art gelehrter Tätigkeit, die man auch als Divination gekennzeichnet hat, darf natürlich keinen Anspruch darauf erheben, ihre Leistungen als exakte Nachbildungen der Originale anerkannt zu sehen, aber sie vermag uns doch sehr wertvolle Fingerzeige für die richtige Würdigung derselben zu erteilen. So sind Ofterdingers Rekonstruktionsversuche für die Figurenteilung und diejenigen Buchbinders für die Porismen sehr zu schätzen, wenn auch nicht zu überschätzen.

Ob der gelehrte Bibliothekar des Museums, ob der Philologe und Mathematiker Eratosthenes noch mit Euclid zusammengelebt hat, wissen wir nicht, da wir ja den Lebensumständen des letzteren so überaus kenntnislos (S. 74) gegenüberstehen. Bei seinem Nachfolger befinden wir uns in einer besseren Lage; er war um 276 im griechischen Nordafrika geboren und starb hochbetagt im Jahre 194 v. Chr. Sein ganzer Standpunkt war der des Polyhistors; als Grammatiker, Archäologe, Chronologe, Geograph erfreute er sich eines geachteten Namens, und die ihm zu verdankende erste Erdmessung hat vor allem gezeigt, wie geschickt er zwischen Astronomie und Geographie zu vermitteln verstand. Als Arithmetiker betätigte er sich durch sein Verfahren zur empirischen Bestimmung der Primzahlen, wofür er das Wort Sieb (*κόσκινον*) gebrauchte. Man schrieb alle ungeraden Zahlen der Reihe nach hin und strich hierauf jede dritte, fünfte, siebente ... $(2n-1)$te Zahl weg, so daß zuletzt die Primzahlen „in dem Siebe darin blieben". Eine recht primitive Methode bleibt dies ja unter allen Umständen, allein man betrachtet sie mit günstigerem Auge, wenn man sich daran erinnert, daß es bis zum heutigen Tage noch nicht geglückt ist, das Gesetz der Primzahlenfolge in independenter Form darzustellen.

Als die für uns wichtigste eratosthenische Reminiszenz haben wir ein Schreiben zu betrachten, welches der Gelehrte an den König Ptolemaeus III. Evergetes gerichtet, und in welchem er über die Würfelverdoppelung wichtige, oben von uns verwertete Nachrichten zusammengetragen hat. Als seine eigene Erfindung beschreibt er einen Mesolabium genannten Apparat zur Auffindung der zwei mittleren Proportionalen, eine durch Kulissenführung zusammengehaltene Kombination dreier rechteckiger Täfelchen, die in normaler Anordnung (Fig. 12a) als $ABCD$, $BEFC$, $EGHF$ nebeneinander liegen. Die größere der beiden Strecken, um welche es sich handelte, wir nennen sie a, wurde mit AC identifiziert, und die kleinere b wurde von H aus auf HG abgetragen ($HJ = b$). Die Tafeln waren so eingerichtet, daß sich die dritte (von links her) unter die zweite und mit dieser unter die erste schieben ließ. Man nahm also eine Verschiebung von rechts nach links vor und setzte diese so lange fort, bis die Punkte, in denen die Diagonale EH die Seite EF und die Diagonale BF die Seite BD durchschnitten, mit A in eine gerade Linie zu liegen kamen. Fig. 12b führt uns diesen Zeitpunkt vor

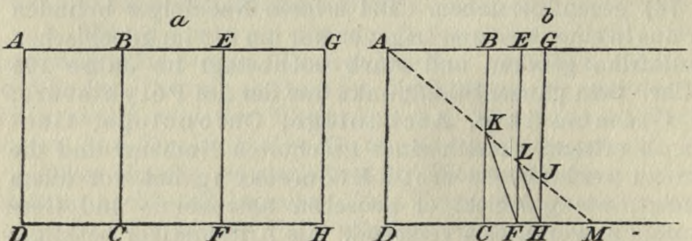


Fig. 12.

Augen; die drei Punkte A, K, L liegen in einer Geraden, deren Verlängerung durch J hindurchgeht und die verlängerte Basis $CDFH$ in M trifft. Nunmehr sind nach der Figur die Dreiecke HJL und FLK ähnlich, und es besteht zu Recht die Proportion $b : FL = HL : FK$. Man hat jedoch auch $\triangle FHL \backsim \triangle CFK$ und damit die zweite Proportion $HL : FK = FL : CK$. Die Komparation ergibt $b : FL = FL : CK$. Ganz analog folgt endlich die Proportion $FL : CK = CK : a$, womit die gewünschte Proportionenkette

$$b : FL = FL : CK = CK : a$$

geschlossen ist. Eratosthenes widmete sein Mesolab als Weihegeschenk einem Tempel.

Von einer flüchtig bei Pappus erwähnten Schrift „Über Mittelgrößen" (περὶ μεσοτήτων) läßt sich genaueres nicht aussagen. Noch schlimmer steht es mit der von Theo (S. 56) genannten Monographie der Proportionen. Leider kennen wir auch von einer anderen Untersuchung, deren die Geschichte der Mathematik sonst nicht zu gedenken pflegt, die aber diese Ignorierung gewiß nicht verdient, nur einige Ergebnisse und nicht den betretenen Weg. Eratosthenes hat Flächenberechnungen in weit größerem Ausmaße als irgend ein Geometer vor ihm ausgeführt. Er ließ sich nämlich bei seinen geographischen Studien über die Größe der bewohnten Erdfeste, der *γῆ οἰκουμένη*, von dem Bestreben leiten, dieses Areal in Teilflächen, *σφραγίδες*, zu zerlegen und deren lineare und quadratische Abmessungen möglichst scharf zu ermitteln. „Er bildete aus ihnen," so äußert sich H. Berger, der beste Eratosthenes - Kenner, „zunächst geometrische Figuren, die er, soweit sein Material es möglich machte, nach Länge, Breite und Flächeninhalt berechnete . . ." Es wäre zu wünschen, daß die „Sphragiden", die man bislang einzig unter dem geographischen Gesichtspunkte betrachtet hat, auch unter demjenigen der mathematischen Geschichtsforschung eine entsprechende Berücksichtigung fänden.

Nur um ein Jahrzehnt älter als Eratosthenes war Archimedes, die überragende Heroengestalt unter den hellenischen Mathematikern (287—212). Abgesehen von längerem Aufenthalte in Ägypten ist er aus seiner Vaterstadt Syrakus (S. 74) niemals dauernd herausgekommen; ihr schenkte er den hohen Ruhm, dessen er sich bei den Zeitgenossen erfreute, und ihr weihte er nicht minder seine Geisteskraft in den Jahren 213 und 212, als er die von einem Römerheere unter Anführung des Marcellus belagerte Stadt, durch Wunderwerke der Ingenieurkunst erfolgreich verteidigte. Die Festung fiel durch Überrumpelung, und Archimedes fand bei diesem Anlasse seinen Tod. Die Sage will, daß er Figuren in den Sand zeichnend in seinem Hofe saß und dem eindringenden Feinde zurief: „Noli turbare circulos meos". Der Konsul Marcellus beklagte den Tod des berühmten Gegners und ließ ihm ein Grabmal setzen, welches später in Vergessenheit geriet, aber weit über hundert Jahre nachher von dem in Beamteneigenschaft auf Sizilien weilenden Cicero unter üppigem Pflanzenwuchse wieder erkannt und in besseren Zustand versetzt wurde.

Der Schwerpunkt der ungeheuren wissenschaftlichen Leistung des Archimedes lag, wie wir mit Zeuthen betonen müssen, in seiner genialen Verwertung des Infinitesimalen. Gewiß, in Eudoxus (S. 72) hatte er einen kongenialen Vorläufer gehabt, allein dieser Umstand kann sein eigenes Verdienst nicht im geringsten schmälern. Beide Männer, so ließ sich schon Jacobi (S. 71) vernehmen, haben tatsächlich integriert, aber selbstredend im Geiste ihrer Zeit und in dem für griechisches Denken maßgebenden Rahmen; „das Zeichen $\int$ besagt: So oft du mich siehst, denke dir jedesmal die zwei Seiten Betrachtungen hinzu, welche Archimedes hier anstellen würde.“ Wir werden die Richtigkeit dieser Behauptung im folgenden bestätigt finden, dürfen aber hier gleich konstatieren, daß ein gütiges Geschick es in der jüngsten Gegenwart ermöglicht hat, in die Geisteswerkstätte dieses Mannes ganz ungleich tiefere Blicke zu werfen, als dies durch noch so sorgfältige Analysierung der schon länger in unserem Besitze befindlichen Werke geschehen konnte. Um jedoch den Wert dieser neuen Errungenschaft voll zu begreifen, wird es sich empfehlen, die vorhandenen Schriften erst einer Durchmusterung zu unterziehen und auf Grund der so gewonnenen Einsichten den ganzen Wert der erwähnten Funde auf uns wirken zu lassen. Wir verfahren ähnlich, wie vorhin bei Euclid, und lassen die einzelnen uns bekannten Arbeiten einander folgen, indem wir dabei nicht chronologisch zu Werke gehen, sondern vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren, vom Leichteren zum Schwereren, zugleich aber auch von der Arithmetik zur Geometrie fortschreiten.

1. Die Sandeszahl. Es ist uns bekannt, daß das altgriechische Zahlensystem (S. 49) sehr großen Zahlen gegenüber zwar nicht versagte, aber doch nur schwierig zu handhaben war. Darüber scheint man auch einmal am syrakusanischen Hofe sich unterhalten zu haben, und im Anschlusse daran richtete Archimedes an den Tyrannen Gelo ein Schreiben mit der Aufschrift Sandrechnung (ψαμμίτης; arenarius), worin er dartat, daß man Mittel besitze, um die größten überhaupt denkbaren Zahlen bequem auszudrücken. Um sich das Modell einer solchen Riesenzahl zu verschaffen, griff er auf die Anschau-

ung des ein wenig älteren Astronomen Aristarchus von Samos zurück, welcher — der einzige dieses Namens unbedingt würdige Vorgänger des Coppernicus — den kühnen Satz aufgestellt hatte, die Sonne stehe still und die Erde bewege sich in einem Kreise um jene. Nicht diesen Kreis wählte Archimedes als Hauptkreis einer Kugel, die er, wie alle früheren Astronomen in ihrer Art, mit der Himmelsphäre identifizierte, sondern als Halbmesser der letzteren definierte er die Entfernung der Sonne von einem Fixsterne. So erhielt er wirklich eine gigantische Hohlkugel von nicht ganz 20000 Erdhalbmessern Radius, und den Erdhalbmesser selber setzte er gleich höchstens 1000000 Stadien. Den ganzen Raum dachte er sich mit Sand angefüllt, und ein Sandkörnchen sollte erst in 10000-facher Vergrößerung ein Kügelchen von der Größe eines Mohnkornes ergeben. Wieviel Sandkörner faßt die so konstruierte Himmelskugel? Das war die Fragestellung, welche eine Ausgestaltung des Zahlensystemes unabweisbar machte. Es ist gar nicht unmöglich, daß Archimedes sich nicht nur an dem Spiele seines Scharfsinnes vergnügen, sondern ganz zielbewußt eine Anwendung gewisser Grundlehren machen wollte, die von ihm in der aus einer Anspielung zu erschließenden Schrift Anfänge (*ἀρχαί*) niedergelegt worden waren. Zunächst teilt er sämtliche Zahlen in Oktaden ab; die erste derselben enthält die Zahlen von 1 bis 10^8, die zweite die Zahlen von $(10^8 + 1)$ bis 10^{16}, die dritte diejenige von $(10^{16} + 1)$ bis 10^{24} usw. Als Schlußstein des Aufbaus erscheint die Zahl 10^{64}, welche bereits größer als die Menge der Sandteilchen ist. Aber davon abgesehen, meint er, könne man die Zahlenbildung natürlich beliebig weiter treiben, etwa bis $10^{800000000}$. Was unter dieser vorläufigen Grenze liege, bilde die erste Periode, an die sich dann eine zweite, dritte usw. anzureihen habe. Solch exzessive Zahlenfreudigkeit, die mehr an indische Liebhabereien gemahnt, mag bei einem nüchternen Griechen überraschen, aber indem Archimedes zeigte, daß man für die neu gebildeten Zahlen auch ganz systematisch neue Wortformen zu bilden vermöge, hat er doch die Arithmetik seines Volkes auf eine höhere Stufe gehoben. Auch ergibt sich bei näherem Zusehen eine große Vertrautheit im Operieren mit geometrischen Progressionen.

2. Kreisrektifikation und Kreisquadratur. Nur wenige Sätze enthält die Abhandlung über die Kreismessung (κύκλου μέτρησις), aber jeder von ihnen ist ein kostbares Denkmal mathematischer Sagazität. Zuerst wird bewiesen, daß die Kreisfläche einem Dreieck gleich ist, dessen Basis der Kreisperipherie, dessen Höhe dem Radius gleichkommt. Der Beweis dafür wird apagogisch (S. 66) geführt. In modernen Ausdrücken ist also, wenn r und π die sich stets wiederholende Bedeutung haben, der Umfang gleich $2r\pi$, die Fläche $= \frac{1}{2} 2r\pi \cdot r = r^2\pi$. Um dieses π, das im Originale natürlich noch nicht in dieser Bezeichnung auftritt, zu ermitteln, beschreibt Archimedes in den Kreis folgeweise ein regelmäßiges 3-, 6-, 12-, 24-, 48-, 96-Eck und berechnet mittels einfacher geometrischer Schlüsse den Perimeter des 96-Ecks, welcher ein wenig, aber nicht viel kleiner als die Peripherie ist; er findet $\pi < \frac{22}{7}$. Hiernächst läßt er unbeschriebene reguläre Polygone an die Stelle der einbeschriebenen treten, schreitet abermals bis zum 96-Eck vor und erhält $\pi > \frac{223}{71}$. So sind für die gesuchte Maßzahl die Ungleichungen

$$3\frac{10}{70} > \pi > 3\frac{10}{71}$$

gewonnen. Vorab der Näherungswert $\frac{22}{7}$ hat seitdem immer entschiedener das uralte $\pi = 3$ (S. 47) verdrängt. Da bei den erwähnten Berechnungen gleichschenkliger Dreiecke unausgesetzt der Pythagoreer zur Verwendung kommt, so kann es auch an Quadratwurzelausziehungen aus Zahlen, die keine vollkommenen Quadrate sind, nicht fehlen. Vielfach erfolgt die Radizierung mit einer sehr anerkennenswerten Genauigkeit. Bedeutet das Ähnlichkeitszeichen $\backsim$ in unserem Falle so viel als „angenähert gleich", so ist beispielsweise

$$\sqrt{3} \backsim \frac{265}{153} \backsim \frac{1351}{1580}, \quad \sqrt{349450} = 591\tfrac{1}{8} \quad \text{usw.}$$

Wie man um 250 v. Chr. solche Irrationalitäten behandelt haben mag, entzieht sich unserer Einsicht. Vielleicht wußte schon die spätgriechische Zeit in diesen Dingen nicht mehr recht Bescheid, denn der Scholiast Eutocius, von dem man sich zuerst Aufschluß zu holen geneigt sein möchte, begnügt sich damit, die Richtigkeit der Näherungen durch unmittelbare Quadrierung zu erweisen. Fast zahllos ist die Menge der Divinationsversuche (S. 83), dem Geheimnis auf die Spur zu kommen, allein so interessant die einschlägigen mathematischen Entwicklungen auch sind, so wenig läßt sich von ihnen behaupten, sie trügen an sich ein echt griechisches Gepräge. So kann nicht geleugnet werden, daß sämtliche Approximationen sich durch Näherungswerte der bekannten Kettenbruchentwicklung

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \cfrac{b}{2a \pm \cfrac{b}{2a \pm \ldots}}$$

darstellen, allein das Vorkommen solcher Algorithmen ist nun einmal unbezeugt. Merkwürdig ist und bleibt es freilich, daß auch bei anderer Gelegenheit ein Anklang an die Kettenbrüche uns begegnet. Zwei Astronomen aus einer weit älteren Zeit, Cleostratus und Meto, waren darauf ausgegangen, den das Verhältnis des synodischen Mondmonates zum tropischen Sonnenjahre ausdrückenden Bruch genähert auf kleinere Zahlen zu reduzieren. Hätten wir dies zu tun, so würden wir die Kettenbruchdarstellung

$$\frac{29{,}5305}{365{,}2467} = \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{78 + \ldots}}}}}}$$

zugrunde legen und die Näherungswerte

$$\frac{1}{12},\ \frac{2}{25},\ \frac{3}{37},\ \frac{8}{99},\ \frac{19}{235},\ \frac{1490}{18429} \cdots$$

bilden. Der vierte derselben deckt sich mit der Oktaeteris des Cleostratus, der fünfte mit der neunzehnjährigen Periode des Meto. Überaus merkwürdig bleibt diese Übereinstimmung unter allen Umständen.

3. Kugel und Zylinder. Diese zwei Bücher (*περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*) ist durchweg Quadrierungs- und Kubierungsaufgaben gewidmet. Hier begegnen wir zuerst der griechischen Formulierung des Fundamentalsatzes, daß die Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser r gleich $4r^2\pi$ sei; hier auch der Volumbestimmung der Kugelhaube. Persönlich legte den höchsten Wert sein Erfinder auf den Satz vom gegenseitigen Verhältnis eines Kugelinhaltes zum Inhalte des umbeschriebenen Zylinder und wiederum zu dem des diesem einbeschriebenen Kegels; sind V_1, V_2, V_3 diese drei Volumina, so bestehen die Proportionen:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \tfrac{4}{3} r^3\pi : 2r^3\pi : \tfrac{2}{3} r^3\pi = 2 : 3 : 1 .$$

Jenes Grabmonument des Archimedes (S. 83) soll Kugel und Umhüllungszylinder veranschaulicht haben, und auch in Pergamum ließ der Mathematiker Nico eine hierauf bezügliche Inschrift an öffentlicher Stelle anbringen. Im großen und ganzen gehen, von der mit Genialität geübten Exhaustionsmethode abgesehen, die hier angewandten Hilfsmittel über das euklidische Manuale nicht hinaus; nur einmal tritt auch ein kubisches Problem hervor. Es soll nämlich die Kugel durch eine Schnittebene so in zwei Kalotten geteilt werden, daß deren Inhalte in gegebenem Verhältnis zueinander stehen. Archimedes spricht sich über die Lösbarkeit der hieraus folgenden Gleichung dritten Grades aus und gibt die Zusage, auf sie zurückkommen zu wollen. Leider ist dies, soweit wenigstens unser Wissen reicht, nicht geschehen.

4. Die Parabelquadratur. Was sich in den bisher besprochenen drei Werken findet, kann noch als elementar bezeichnet werden, und die Hauptsätze des zweiten und dritten sind ja auch in den eisernen Besitzstand der Schulgeometrie übergegangen. Einen Schritt aufwärts führt uns schon das inhaltreiche Schriftchen über die Quadratur der Parabel (*τετραγωνισμὸς παραβολῆς*). Zu ihr hat sich Archimedes durch statische Betrachtungen, von denen weiter unten die Rede sein soll, den Weg gebahnt, indem er die vorgelegte Parabelfläche durch Parallelen zu einer gegebenen Geraden in unendlich dünne Streifen zerfällt und für jeden das statische Moment be-

stimmt. Sein Exhaustionsbeweis läuft in unseren Zeichen auf die Auswertung des Integrales

$$a\int_0^a y\,dx = a\int_0^a f(x)\,dx$$

hinaus, wenn $y = f(x)$ die in schiefwinkligen Koordinaten ausgedrückte Parabelgleichung bedeutet. Gefunden hat der große Mann sein Theorem zugestandenermaßen auf diesem ungewöhnlichen Wege, aber völlig befriedigt hat ihn derselbe offenbar nicht, denn er fügt noch einen rein geometrischen Beweis bei, indem er seinem Parabelsegmente zuerst ein Dreieck, jedem der beiden so entstehenden Segmente ein neues Dreieck usw. einbeschreibt und dartut, daß jedes neu hinzukommende Dreieck den vierten Teil desjenigen größeren ausmacht, mit dem es eine Seite gemeinsam hat. Solchergestalt wird unter P das anfängliche Segment, unter $\triangle$ das diesem zuerst einbeschriebene Dreieck verstanden,

$$P = \triangle\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) = \frac{4}{3}\triangle\,,$$

was zu beweisen war. Eine fallende geometrische Progression zu summieren war für den Mann nicht schwer, der, wie wir gleich sehen werden, weit kompliziertere Aufgaben verwandter Art zu bewältigen gelernt hatte.

5. Die Schneckenlinie. Die neuere Kurvenlehre verwendet mit Vorliebe die in dem Traktate Von den Schneckenlinien (περὶ ἑλίκων) monographisch behandelte archimedische Spirale als Musterbeispiel kinematischer Kurvenerzeugung. Einer solchen sind wir erstmalig bei der Quadratrix (S. 62) begegnet; nunmehr wird uns ein zweites, weit einfacheres Beispiel vorgelegt. Eine Gerade dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen ihrer Punkte, und gleichzeitig schreitet von diesem aus auf ersterer ein beweglicher Punkt gleichförmig fort; so entsteht die Helix. Bildet die Anfangslage die Achse, so ist die Polargleichung der Kurve $r = a\varphi$, unter a eine Konstante verstanden. Archimedes leistet für seine Spirale sowohl die Quadratur als auch die Tangentenkonstruktion;

dazu bedarf es manch neuen Hilfsmittels, wie z. B. der Ableitung der Summenformel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

die freilich nicht in dieser nächstliegenden Form ausgedrückt, sondern umschrieben wird. Durch diese Schrift wird auch eine Persönlichkeit in unseren Gesichtskreis gerückt, die zweifellos unter den Gelehrten jener Epoche eine gewisse Rolle gespielt hat, von der aber nur äußerst wenig bekannt ist. Wir meinen den alexandrinischen Hofmathematiker Cono, einen Samier, der sonst nur genannt zu werden pflegt, weil er den gestirnten Himmel zum Tummelplatze höfischer Streberei („Haar der Berenice") machte, der aber doch mehr bedeutet zu haben scheint. Ihm nämlich legte der syrakusanische Freund die von ihm gefundenen Wahrheiten zur Begutachtung vor.

6. Die Konoide und Sphäroide. Das von diesen Umdrehungsflächen handelnde Werkchen (*περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*) ist als die erste höhere Raumgeometrie anzusehen, die wir kennen. Wie das an fünfter Stelle genannte dem Cono, so war dieses einem gewissen Dositheus zugeeignet gewesen. Sphäroide sind Rotationsellipsoide; der Begriff Konoid ist doppeldeutig, indem er sowohl einem Rotationsparaboloide, als auch einem zweischaligen Rotationshyperboloide entsprechen kann. Das mannigfach variierte Hauptproblem besteht darin, den körperlichen Raum, der von einem Flächenstücke und von einer Schnittebene begrenzt wird, zu bestimmen, was durch Exhaustion oder Integration erreicht wird. Erste Vorbedingung war die Quadratur der Ellipse, die unmittelbar auf die Kreisquadratur zurückgeführt wurde. Bezieht man einen Halbkreis vom Radius a und eine Halbellipse von den Halbachsen a und b auf dasselbe Mittelpunktsachsensystem und zieht eine beliebige Ordinate des Halbkreises $= m$, so wird auf dieser durch die Ellipse gegen die Abszissenachse hin ein Stück $= n$ abgeschnitten, so daß $m : n = a : b$ wird. Zwei benachbarte Ordinaten bestimmen ein unendlich schmales Trapez sowohl für den Kreis als auch für die Ellipse, und so gilt wieder das Flächenverhältnis $a : b$. Durch Addition aller Elementartrapeze erhält man einerseits den Halbkreis H, anderer-

seits die Halbellipse E, womit dann weiter folgende Beziehungen gegeben sind:

$$H : E = \tfrac{1}{2} a^2 \pi : E = a : b; \quad E = \tfrac{1}{2} a b \pi .$$

Gelegentlich wird auch die Summenformel einer arithmetischen Reihe erster Ordnung mitgeteilt, ohne daß wir doch zu glauben ein Recht hätten, diese einfache Sache sei erst durch Archimedes der Wissenschaft einverleibt worden.

Alle die bisher besprochenen Schriften gehören der reinen Mathematik an, obwohl dann und wann auch Anleihen bei der angewandten gemacht wurden. Auch mit letzterer beschäftigen sich auf das eingehendste einige archimedische Abhandlungen, indem allerdings fast durchweg der mathematische Gedanke die Anwendung in den Hintergrund drängt, wie dies recht hübsch Schillers Gedicht „Archimedes und der Schüler" in Worte faßt. Es sollen auch die hierauf bezüglichen literarischen Reliquien der Erörterung unterliegen.

7. Elementare Statik. Einen Ansatz zur Begründung des ihm wohl bekannten Hebelgesetzes kann man schon bei Aristoteles (S. 68) erkennen. Archimedes beweist es im ersten der beiden hier in Frage kommenden Bücher „Vom Gleichgewichte ebener Flächen und von den Schwerpunkten" (*ἐπιπέδων ἰσοῤῥοποιῶν ἢ κεντροβαρῶν ἐπιπέδων βιβλία $\bar{\beta}$*), mit aller Strenge und wendet sich dann der Bestimmung des Schwerpunktes geradliniger Figuren und nächstdem des parabolischen Segmentes (S. 90) zu. Ihm gehört der Satz an, daß der Dreieckschwerpunkt jede Mittellinie im Verhältnis 1:2 teilt.

8. Hydrostatik. Die Geschichte der Physik ist gewohnt, dem Traktate „Von den in Wasser eingetauchten und in ihm schwimmenden Körpern" (*περὶ τῶν ὕδατι ἐφισταμένων ἢ περὶ τῶν ὀχουμένων*) einen besonders hohen Wert beizumessen, und das mit gutem Grunde. Aber auch die mathematische Virtuosität des Verfassers offenbart sich hier in einer ganz eigenartigen Weise. Leider ist die Urschrift in Verlust geraten; uns liegt nur eine arabisch-lateinische Bearbeitung (De iis, quae in humido vehuntur) vor. In ihr treffen wir das jetzt sattsam bekannte Grundgesetz der Hydrostatik an, und mit

dessen Hilfe werden sehr elegant gewisse Sätze über das später so genannte Metazentrum eines schwimmenden Körpers bewiesen. Neben Kugelabschnitten wird insbesondere auch das Umdrehungsparaboloid auf seine Stabilität im Wasser geprüft. Archimedes gibt auch den ersten Beweis für die schon seit Pythagoras herausgefühlte Wahrheit, daß jede freie Flüssigkeitsfläche sphärisch gekrümmt ist und zum Zentrum dasjenige der Erdkugel hat. Mit obigem Theoreme war auch die Bestimmung spezifischer Gewichte sozusagen potentiell gegeben, und praktisch hat dieselbe dessen Urheber durchgeführt, als ihm vom Tyrannen Hiero die Aufgabe gestellt ward, ob sich in einem für diesen angefertigten goldenen Kranze — ein solcher und nicht eine Krone war es — minderwertige Metallbestandteile befänden. Bei dieser Gelegenheit soll Archimedes sein bekanntes „εὕρηκα“ gerufen haben. Nachdem die spezifischen Gewichte ermittelt waren, galt es noch die Lösung einer Frage der Mischungsrechnung; wie das gemacht wurde, müssen wir dahingestellt sein lassen. Für uns käme, wenn x die Gewichtsmenge des Goldes, y die Gewichtsmenge der unerlaubten Beimengung, K das Gesamtgewicht, s_1 und s_2 die Dichten der beiden Stoffe und s die Dichte des Prüfungskörpers sind, die Berechnung von x und y aus den beiden Gleichungen

$$x + y = K\,, \qquad s_1\,x + s_2\,y = s\,K$$

in Betracht. Dergleichen bot einem Archimedes keine Schwierigkeit dar.

Alle die im vorstehenden inhaltlich dargelegten Schriften dürfen als authentisch bezeichnet werden. Nicht ebenso verhält es sich mit einer durch den Namen Hilfssätze (λήμματα) gekennzeichneten Sammlung, die wir nur in lateinischer Übertragung kennen, und von denen wahrscheinlich nur einzelne dem Manne, dessen Name die Flagge abgab, zuzusprechen sind. Ein Hinweis des Pappus spricht dafür, daß Archimedes sich gelegentlich mit aus Halbkreisbogen zusammengesetzten Figuren beschäftigt hat, welche man Arbelos und Salinon nannte. Auch eine Konstruktion, die für die Winkeltrisektion ausgenützt werden kann, ist beachtenswert genug, um als den Stempel dieses Geistes tragend zugelassen zu werden.

Als verloren haben wir oder hatten wir noch vor kurzem einzelne Schriften in Rechnung zu bringen, welche von späteren antiken Autoren da und dort zitiert werden. Dahin gehören die oben erwähnten „Anfangsgründe", dahin eine Beschreibung des geometrischen Geduldspieles, auf dessen Nennung bei dem spätrömischen Metriker Atilius Fortunatus M. Cantor noch mit berechtigter Skepsis aufmerksam machen konnte. Auch die mechanischen Erfindungen des als Techniker gleich groß wie als Forscher dastehenden Mannes, sein Flaschenzug, seine Wasserschraube, seine als Gegenmittel gegen die Sambuca gefürchtete Verteidigungsmaschine und sein Schiffskoloß bleiben uns in Dunkel gehüllt; sonder Zweifel beruhten sie alle nur auf Anwendungen der sieben einfachen mechanischen Potenzen, deren Leistungsfähigkeit der Meister mit dem Satze ausdrückte: „Gib mir einen Stützpunkt, und ich hebe den Erdball aus seinen Angeln." Die Nichtigkeit des um einen riesigen Brennspiegel sich rankenden Mythus hat schon der französische Naturforscher Buffon im Experimente festgestellt. Dagegen ist der archimedische Himmelsglobus besser beglaubigt, indem man sich nur darunter eine hydraulisch bewegte Maschinerie, ein Planetarium, vorzustellen hat, welches die Umdrehung des Fixsternhimmels und der Planeten um die Erde veranschaulichen sollte.

Eine Rückschau auf das, was die Beschäftigung mit Archimedes lehrt, ist notwendiger, als sie bei gar manchem anderen sein würde. Euclides z. B. bietet uns keine Rätsel dar; wir können uns in die Anschauungsweise und Geistesarbeit dieses strengen Synthetikers hinein versetzen, ohne auf Lücken und auf mangelndes Verständnis der Zusammenhänge zu stoßen. Ganz anders der Mann von Syrakus! Freilich, in der Gewandung, welche er der Schlußredaktion seiner geistigen Erzeugnisse angelegt hat, erscheint auch er als Synthetiker strengster Richtung, denn nur solche Beweise legt er uns vor. Es sind Beweise, die, größtenteils den nämlichen Gang an sich tragend, ebensosehr etwas Imponierendes, wie auch etwas Ermüdendes an sich tragen und uns über den Werdegang der Erfindung, der Entdeckung auch nicht die leiseste Andeutung geben, wenn wir den einen oder anderen Fall (S. 91) ausnehmen.

Und doch drängt sich mit elementarer Gewalt jedem Leser archimedischer Werke die Überzeugung auf: Dieser Mathematiker muß Hilfsmittel des Erkennens zu seiner Verfügung gehabt haben, die sich unserer Einsichtnahme völlig entziehen. Manche seiner metrischen Sätze können nur, ehe der methodisch nüchterne Exhaustionsbeweis in seine Rechte trat, durch ein mathematisches Experiment (S. 55) aufgefunden worden sein; bei der Vorbereitung für die stereometrischen Schriften über Kugel und Zylinder, Konoide und Sphäroide hat vielleicht sogar die Wage eine entscheidende Rolle gespielt. Aber damit war es nicht getan; auch analytische Untersuchung muß dem rigorosen, aber undurchsichtigen Verfahren des Verifizierens a posteriori die Bahn gebrochen haben. Gerade wie 1900 Jahre nach ihm Newton, hat Archimedes den Weg verhüllt, der ihn zu seinen genialen Neuerungen empor leitete, und jede Hoffnung, diesen Schleier zu lüften, schien noch vor kurzem illusorisch zu sein. Ein wohlwollendes Geschick hat es anders gefügt und wenigstens zum Teile Licht über Fragen verbreitet, die zu totaler Unlösbarkeit verdammt schienen.

Im Jahre 1906 begab sich der hochverdiente Herausgeber des Archimedes, der Däne J. L. Heiberg, nach Konstantinopel, um in einer dortigen Klosterbibliothek einen Palimpsest zu prüfen, auf dessen voraussichtlich Neues bietenden Inhalt ihn H. Schoene aufmerksam gemacht hatte. Es zeigten sich ansehnliche Teile verschiedener archimedischer Schriften, unter anderen auch ein namhaftes griechisches Stück der bisher (S. 93) nur lateinisch vorhandenen „schwimmenden Körper“, deren Text nun in vielen Punkten angemessen verbessert werden kann. Aber auch der „loculus Archimedius“, der eben erst (S. 95) noch in recht unsicherem Lichte erschien und auch durch einen arabischen Fund Suters noch nicht vollständig gesichert werden konnte, tritt jetzt in die Reihe der authentischen Leistungen des gelegentlich auch zu Glimpf und Scherz geneigten tiefsinnigen Denkers ein. Die Spielbeschreibung führt den Titel *Στομάχιον* („Neckspiel“), und M. Cantors Vermutung, daß es sich um die Zusammensetzung polygonaler Figuren zu einem Quadrate gehandelt haben möge, kann jetzt am Originale nachgeprüft werden. Alle diese Dinge, an und für sich nichts weniger denn gleichgültig, treten aber in den Hintergrund, wenn wir erfahren, daß ein geschlossener Aufsatz folgte, *Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτον πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος* (des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen an Eratosthenes). Heiberg hat denselben, mit Überwindung zahlreicher paläographischer Schwierigkeiten, textlich wiederhergestellt und ins Deutsche übertragen; sein Landsmann Zeuthen hat ihn dabei unterstützt und den höchst wünschenswerten Kommentar beigegeben. So hat das Jahr 1907 die Archimedes-Forschung mehr gefördert, als dies vorher ein Jahrhundert zu tun vermochte.

Beachtung verdient schon der Umstand, daß nunmehr ein freundschaftliches Verhältnis des genialen Mannes zu Eratosthenes (S. 83), wie man es an sich für wahrscheinlich erachten mochte, außer Zweifel gestellt ist. Der Bibliothekar von Alexandria war, wie wir erfahren, ebensowohl Empfänger gelehrter Briefe, wie die minder bekannten Cono, Dositheus, Zeuxippus, welche fast nur ihrem sizilianischen Freunde ein Stückchen Unsterblichkeit zu danken haben. Unverhältnismäßig wichtiger ist der sachliche Inhalt des Sendschreibens, der unter anderen auch Beiträge zu einer zuverlässigeren Chronologie der einzelnen Schriften liefert. Geradezu freudig begrüßt man in der Einleitung einen Satz, der vollauf bekräftigt, was allseitig gefühlt wird, daß nämlich Konzeption und Beweis neuer Wahrheiten auf ganz verschiedenem Boden sich bewegen. Die Mechanik, sagt der Briefsteller, habe sich ihm besonders nützlich in ersterer Beziehung erwiesen, und dann fährt er fort: „Manches, was mir vorher durch die Mechanik klar geworden, wurde nachher bewiesen durch die Geometrie, weil die Behandlung durch jene Methode noch nicht durch Beweis begründet war; es ist nämlich leichter, wenn man durch diese Methode vorher eine Vorstellung von den Fragen gewonnen hat, den Beweis herzustellen, als ihn ohne eine vorläufige Vorstellung zu erfinden.“ Wir erfahren, daß des Eudoxus Kubaturen (S. 72) nur möglich waren, weil Democritus — wie ist er wohl dazu gekommen? (S. 61) — dieselben Sätze bereits beweislos ausgesprochen hatte. Nächstdem stellt Archimedes einige einfache Schwerpunktkonstruktionen zusammen, und zwar tut er dies in einer so geschäftsmäßigen Weise, daß man die Mutmaßung kaum ablehnen kann, der Begriff des Schwerpunktes sei schon vor ihm ein allbekannter gewesen. Nunmehr folgen statische Erörterungen über vierzehn Theoreme: Das Parabelsegment ist $\frac{4}{3}$ mal dem einbeschriebenen Dreieck; Kugel, Zylinder und Kegel von gewissen Eigenschaften (S. 90) stehen in einem angebbaren Verhältnis; ein dem Umdrehungsellipsoide umbeschriebener Kreiszylinder, dessen Höhe mit der großen Achse übereinstimmt, ist $\frac{3}{2}$ mal so groß als jenes; ein Umdrehungsparaboloid ist $\frac{3}{2}$ mal so groß als der einbeschriebene Kegel von gleicher Grundfläche; der Schwerpunkt eben dieses Körpers teilt, von der Basis aus gezählt, die Höhe im Verhältnis 1 : 2; der Schwerpunkt einer Halbkugel teilt ebenso den Achsenradius im Verhältnis 3 : 5; ein Segment von der Basisfläche $\varrho^2 \pi$ und der Höhe h hat zu dem Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe, unter r den Kugelhalbmesser verstanden, ein Verhältnis gleich $(r - h) : (2r - h)$; Korollar hierzu (wie sich aus Text und Figur schließen läßt, während die Fassung des Theoremes selbst vernichtet ist); andere Formulierung für die Schwerpunktbestimmung eines Kugelsegmentes; Kubatur des Segmentes eines einschaligen Hyperboloides (bloß in Andeutung); $ABCDEFGH$ sei ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche, und ihm sei ein Kreiszylinder einbeschrieben, dessen Achse also zugleich die Verbindungslinie MN der Mittelpunkte beider Quadrate ist, und es sei ferner durch die drei Punkte $A\ B\ N$ eine Ebene gelegt, so wird diese vom Zylinder ein dem sechsten Teile des Prismas gleiches Körperstück abschneiden; Erweiterung dieses Satzes in einer wegen Fehlens des Schlusses undurchsichtigen Weise; Vergleichung des vorhin betrachteten Zylinders mit einem Halbzylinder von gleicher Höhe, dessen Basis aber ein mit einem Halbkreise möglichst genau zusammenfallendes Parabelsegment darstellt; weitere Korollare zu dem erstgenannten Zylindersatze. Dies ist das neue Material, zu welchem uns Schoenes erste Wahrnehmung und Heibergs energischer Spüreifer verholfen haben. Die verloren gegangenen Stellen sind um so weniger von Bedeutung, als Zeuthens Rekonstruktionstalent sehr vieles zu ergänzen vermochte.

In diesem Sinne also hat Archimedes seine vorbereitenden Studien betrieben, deren Resultate dann für die Exhaustionsmethode reif erschienen. Uns Epigonen mag es ja wohl so vorkommen, als ob auch diese Art der Analysis etwas umständlich und jedenfalls ziemlich schwierig zu handhaben wäre, allein dadurch wird nichts an dem Umstande geändert, daß der Mann, der die rein geometrische Deduktion auf die höchste erreichbare Stufe gehoben hatte, in solchen statischen Überlegungen ein sehr verwertbares Mittel zur Entdeckung neuer Wahrheiten erblickt hat. Und Zeuthens scharfsinnige Deutung dieser Betrachtungen verschafft uns auch die Gewißheit, daß in ihnen ein neuer, vorher schwerlich vorhanden gewesener Keim infinitesimaler Begriffe enthalten ist. Archimedes schaltet, ohne sich dafür ein Kunstwort gebildet zu haben, frei mit dem, was wir als statisches Moment bezeichnen, und zu dessen Auffindung macht er von der Zerlegung des Körpers in unendlich dünne Platten ungescheut Gebrauch. Bei den Schlußbeweisen, wenn die Kombination von Bedingung, Behauptung und Beweis in elegantester Toilette vor den Leser trat, verschmähte er diese dem strengen Sinne der Griechen widerstrebende Erleichterung, aber dem befreundeten Eratosthenes gegenüber läßt er sich etwas mehr gehen. Auch können wir, von Zeuthen geleitet, die Umwege kontrollieren, welche gemacht werden mußten, wenn der gerade Weg zur Auswertung eines Integrales verschlossen war. Die Parabel z. B. im dreizehnten Satze ist nicht ihrer selbst wegen da, sondern sie figuriert lediglich als Mittelglied, weil ihre Quadratur auf eben jenes Integral führt, dessen der Kubierungsversuch bedarf. Die Art und Weise, wie Archimedes, ganz im Geiste der späteren Geometria indivisibilium, die Körper sich direkt aus Flächen, die Flächenstücke aus Geraden zusammengesetzt denkt, hat etwas entschieden Unhellenisches an sich, allein wir wissen ja, daß der sonst so überstrenge Mann, wenn er einen bestimmten Eindruck zu erzielen beabsichtigte, geradezu radikal, ja fast frivol mit dem Dimensionsbegriffe umspringt, wie z. B., wenn er im „Arenarius" schreibt: Ein Hauptkreis der Himmelskugel verhält sich zum Bahnkreise der Erde wie dieser zum Zentrum. „Die Hauptsache ist, daß er diese Worte“ — gemeint sind eben die Zusammensetzungen — „nur da gebraucht, wo er voraussieht, daß seine Räsonnements sich nachher durch einen Exhaustionsbeweis ratifizieren lassen.“ Die geistige Kraft, welche sich in diesen methodischen Beweisen offenbart, ist gewiß sehr hoch einzuschätzen, wenn wir auch mit Wallner es ablehnen müssen, bei Archimedes bereits eine Vorwegnahme unseres modernen Grenzbegriffes anzuerkennen.

So ist denn unsere Kenntnis des Archimedes und seiner Schöpfungen durch die beiden dänischen Gelehrten um sehr wesentliche Momente, nicht etwa bloß um Einzelheiten, bereichert worden. Er war im Besitze einer zwar nicht methodisch ausgebildeten, aber in der Hand des Meisters ein wunderbar mächtiges Handwerkszeug darstellenden Infinitesimalgeometrie, die er heuristisch gleich gut wie deduktiv, freilich in denkbarst verschiedener Form, anzuwenden wußte. Doch beschränkte er sich fast ausschließlich auf quantitativ-metrische Untersuchung; gestaltliche Eigenschaften, wie sie der Kurvenlehre als Substrat dienen, waren für ihn bloß ein Mittel zum Zweck. Nach dieser Seite hin war sein unmittelbarer Gegensatz der oben angeführte dritte Hauptvertreter der klassischen Periode, der feinsinnigste Geist auf dem Arbeitsfelde der Lehre von den Kegelschnitten.

Apollonius von Pergä (in Kleinasien) gehört der zweiten Hälfte des III. und der ersten des II. vorchristlichen Jahrhunderts an; er scheint um 170 gestorben zu sein. In Alexandria herangebildet und wohl auch durch längere Zeit wohnhaft, verlegte er späterhin seinen Wohnsitz nach Pergamum, in welcher Stadt er sein Hauptwerk (*κωνικῶν βιβλία η̅*; Conicorum libri octo) verfaßte. Zum Glücke ist diese kostbare Blüte griechisch-mathematischer Eleganz unverstümmelt auf uns gekommen, und die eben gibt uns den Schlüssel dafür, daß man den Autor im späteren Altertum „den großen Geometer“ nannte, und daß 1609 noch Kepler, als ihn ein unlösbar scheinendes Problem über jene Kurven in Atem hielt, den Ausspruch tat: Wer mir diese Aufgabe löst, „is mihi erit Apollonius magnus“. Natürlich stand auch er auf den Schultern derer, die vor ihm da gewesen waren, und die Arbeiten eines Aristaeus, Menaechmus, Euclides waren ihm zweifelsohne bekannt, wenn er auch, da ja erst unser Zeitalter sich vornehmere Gewohnheiten in der Würdigung und Nennung fremder Geistestätigkeit angeeignet hat, Verweise auf die Vorgänger vermissen läßt. Und ihm blieb wahrlich noch genug selbst zu tun übrig, denn so spärlich auch genauere Angaben über sein eigenes Lebenswerk sind, so reichen sie doch hin, um zu erkennen, daß einige fundamentale Erkenntnisse dem Pergäer selbst angehören. So ist nach Geminus er der erste gewesen, der einsah, daß aus ein und demselben geraden Kegel alle drei Arten von Quadrikurven herausgeschnitten werden können, während früher, so bei Aristaeus (S. 71), die Führung des Schnittes immer senkrecht zu einer Seitenlinie erfolgte, so daß mithin Ellipse, Parabel, Hyperbel als Schnitt des spitzwinkligen, Schnitt des rechtwinkligen, Schnitt des stumpfwinkligen Kegels zu definieren gewesen wären. Einstweilen hatte die Nomenklatur noch keine einheitliche sein können, denn die Identitäten *ἔλλειψις = τομὴ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου*, *παραβολή = τομὴ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου*, *ὑπερβολή = τομὴ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου* waren eben noch nicht klar erkannt. Erst auf Apollonius geht der Nachweis einer doppelten, einer planimetrischen und stereometrischen Erzeugung der Quadrikurven zurück. Wir wollen es ähnlich, wie bei Euclides und Archimedes halten und den wesentlichen Inhalt der einzelnen Bücher kurz registrieren.

1. Buch. Ein Rotationskegel wird zugrunde gelegt; ein durch die Spitze gehender Schnitt bringt ein Dreieck, speziell das Achsendreieck zuwege. Auf dieses werden die übrigen Schnitte bezogen; der Durchmesser eines jeden Schnittes fällt in das genannte Dreieck, und auf einem von dessen Schenkeln liegt der Scheitel der krummen Linie. Durch diesen Punkt zieht Apollonius eine auf der Dreieckfläche senkrecht stehende Gerade, auf welcher er die als *ὀρθία* (latus erectum, bei uns Parameter) bezeichnete Strecke abträgt. Durch stetes Verknüpfen von Proportionen kann er mit den nunmehr verwendbaren Linien ganz ähnlich manipulieren, wie wir es mit unseren x und y tun. Jene geometrische Algebra (nach Zeuthen), die sich das Griechentum (S. 76) gebildet hatte, ersetzte,

freilich nur bis zu einem gewissen Grade, unsere Koordinatengeometrie; man kann es aussprechen, daß die vorgenommenen Operationen dasselbe bezweckten, was wir durch Diskussion der allgemeinen Scheitelgleichung (a große Achse, p Parameter)

$$y^2 = p\,x \mp \frac{p\,x^2}{2\,a}$$

zu erreichen suchen. Der Autor führt auf diese Weise die Definitionen des Mittelpunktes und des konjugierten

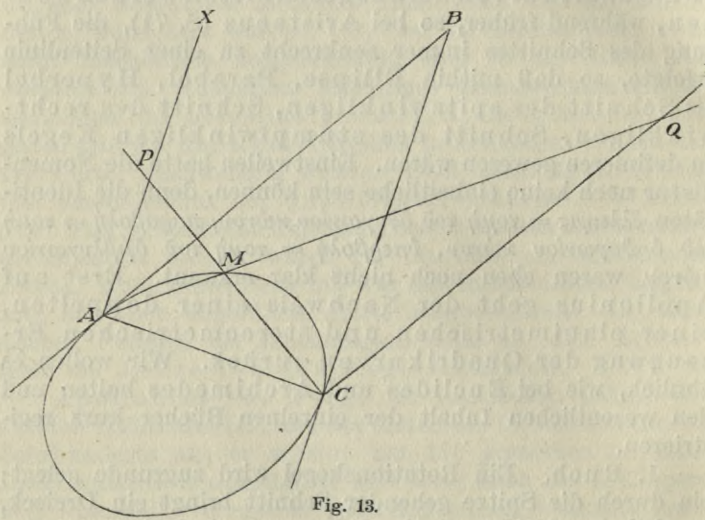


Fig. 13.

Durchmesserpaares ein und beschäftigt sich zum Schlusse auch mit der Kurventangente.

2. Buch. Diese letztere führt dann bei der Hyperbel weiter zur Asymptote. Apollonius kennt nicht nur, wie dies für Archimedes und seine Konoide (S. 92) angenommen werden muß, den einen Hyperbelast, sondern auch den aus dem Scheitelkegel herausgeschnittenen. Wie man Mittelpunkt und Achsen eines gegebenen Kegelschnittes finden könne, wird des näheren gezeigt.

3. Buch. Es enthält eine verallgemeinerte, von der Anlehnung an ausgezeichnete Gerade freiere Betrachtung

der Kurven. Weiterhin wird die Berührungssehne AC (Fig. 13) der von einem außerhalb gelegenen Punkte B an die Linie gezogenen Tangenten BA und BC verzeichnet, um sodann durch A und C die Geraden AX und CY parallel zu jenen Berührenden zu ziehen. Auf AX und CY kann man sich unendlich viele Punktepaare angenommen denken, denen die Relation $AP \cdot CQ =$ Const. entspricht, während zugleich die Verbindungslinien AQ und CP sich in einem Kurvenpunkte M durchschneiden. Ins Genetische übertragen, heißt das nichts anders als: Die Kurve ist das Erzeugnis zweier projektivisch aufeinander bezogenen Büschel, die in A und C ihre Scheitel und die AM und CM als einander entsprechende Gerade haben. Tangenten werden nach verschiedenen Methoden bestimmt. Ziemlich unvermittelt gelangt der Pergäer zu den Brennpunkten, indem er die beiden Punkte F_1 und F_2 der großen Achse A_1A_2 aufsucht, für welche das Produkt (Rechteck) $A_1F_1 \cdot F_1A_2 = A_1F_2 \cdot F_2A_2$ konstant, nämlich gleich $\frac{1}{2}\,ap$ wird. Es ist aber offenbar nur von den beiden Mittelpunktskurven die Sprache; der Brennpunkt der Parabel wird unbeachtet gelassen. Dagegen werden die bekannten Elementarsätze bewiesen, welche sich auf die Brennstrahlen und die von ihnen mit den Berührenden gebildeten Winkel beziehen.

4. Buch. Bestimmung der Anzahl von Schnittpunkten, in denen sich zwei Kegelschnitte begegnen können. Zwischen wirklichem Schnitte und Berührung wird wohl unterschieden. Gerade hier tritt am deutlichsten der Nachteil der den Alten auferlegten Notwendigkeit zutage, Tatsachen, die wir samt und sonders aus einer einzigen Formel herauslesen, mit lauter Einzelbeweisen versehen zu müssen.

5. Buch. Weitaus den höchsten Flug nimmt der feine Geist des großen Geometers bei den hier zusammengestellten, über den elementaren Charakter der vier ersten Abteilungen weit hinaus führenden Maximum- und Minimumproblemen, aus denen zuletzt die Theorie der Normalen hervorgeht. Es handelt sich nämlich darum, von einem inneren oder äußeren Punkte an die Kurve je eine kürzeste und eine längste Gerade zu ziehen. Dieselben werden konstruiert, und dann erst stellt sich heraus,

daß sie die Linie unter rechten Winkeln schneiden. Analytische Behandlung des Normalenproblemes ergibt, daß im allgemeinen vier Normalen möglich sind, daß also die Auflösung einer biquadratischen Gleichung erforderlich wird. In der Tat werden auch zwei Hyperbeln miteinander zum Durchschnitte gebracht, um vier Schnittpunkte zu erhalten. Aber auch Spezialfälle werden nicht unberücksichtigt gelassen, und man kann, freilich nicht ohne eine gewisse Übertreibung, bei Apollonius auch schon den Keim zu der Lehre von den Krümmungsmittelpunkten und Evoluten wahrnehmen.

6. Buch. Als ähnliche Kegelschnitte erscheinen diejenigen, welche von einer konstante Winkel mit einer Seitenlinie bildenden Ebene aus Kegeln gleicher Winkelöffnung herausgeschnitten werden. Man kann aus einem gegebenen Kegel immer eine Ellipse erhalten, welche einer gleichfalls gegebenen Kurve dieser Art nicht nur ähnlich, sondern sogar mit ihr kongruent ist.

7. Buch. In ihm werden verschiedene Theoreme vereinigt, welche es mit Parametern und konjugierten Durchmessern zu tun haben. So z. B.: Sind a_1 und b_1 zwei Durchmesser dieser Art, so ist die Summe $(a_1^2 + b_1^2)$ konstant; gilt noch γ als eingeschlossener Winkel, so ist ebenso konstant die Fläche $a_1 b_1 \sin\gamma$ des so gebildeten Parallelogrammes.

8. Buch. Dasselbe fehlt uns leider, doch setzt uns eine Bemerkung bei Pappus in die Lage, im Geiste den Inhalt nachzubilden, was denn auch der englische Astronom Halley mit wahrscheinlich gutem Erfolge wirklich getan hat. Im siebenten Buche, so wird berichtet, sei eine Reihe von Lehrsätzen zusammengetragen, von denen man bei der Lösung konkreter Aufgaben Gebrauch zu machen habe, und eben diese Aufgaben hätten den Gegenstand des achten Kapitels gebildet.

So kursorisch die Übersicht über den Inhalt der „Conica" auch war, so wird sie doch ausgereicht haben, um den Gegensatz zwischen Arbeitsweise und Leistung der drei Geistesheroen einigermaßen zu klären. Apollonius ist von ihnen der modernste; die Reihe von Berührungspunkten zwischen seiner methodischen Auffassung und derjenigen der Gegenwart ist eine sehr große. Vielleicht würde sie sich noch vergrößern, wenn wir eine etwas vollständigere Kenntnis der verloren gegangenen geometrischen Schriften besäßen, deren Endzweck uns die Angaben des Pappus genau genug erkennen lassen, um den Verlust in seiner ganzen Schwere zu empfinden. Die Divinationsversuche (S. 83) eines Halley, A. Richter, Diesterweg usw. verdienen alle Anerkennung unter dem sachlichen Gesichtspunkte, allein als Geschichtsquellen betrachtet zu werden, erheben sie natürlich keinen Anspruch.

Abgesehen von den durch die bewährte Akribie des Pappus beglaubigten Büchertiteln werden uns auch noch einige andere überliefert. Der im nächsten Kapitel behandelte Hypsicles nennt eine Schrift über reguläre Polyeder und Proclus eine solche über die Schraube; auch über Brennspiegel (*περὶ πυρίων*) soll Apollonius geschrieben haben, was denn auch, da er doch (S. 103) die Brennpunkte zuerst — wenn auch ohne diese Namengebung — entdeckt hat, nicht unbedingt von der Hand gewiesen werden kann. Bezeugt jedoch sind nur die folgenden Abhandlungen: Von den Berührungen (*περὶ ἐπαφῶν*, de tactionibus); Ebene Örter (*ἐπίπεδοι τόποι*, loci plani); Über Neigungen (*περὶ νεύσεων*, de inclinationibus); Der Raumschnitt (*περὶ χωρίου ἀποτομῆς*, sectio spatii; Der bestimmte Schnitt (*περὶ διωρισμένης τομῆς*, sectio determinata). Was diese Überschriften besagen wollen, ist zumeist nicht ohne weiters deutlich; nur der an der Spitze stehende Titel spricht für sich selbst, und in der Tat war da das noch jetzt berühmte Apollonische Berührungsproblem zur Diskussion gestellt: Wenn von Punkten, Geraden und Kreisen irgend drei gegeben sind, so soll ein Kreis beschrieben werden, der durch die Punkte geht, die geraden Linien und Kreisperipherien berührt. Aus dem dritten Buche des Hauptwerkes ergibt sich, daß Apollonius die Grundlagen selbst für den verwickeltsten Fall des Taktionsproblemes, wenn drei Kreise vorliegen, sehr wohl besessen haben kann.

Auch eine arithmetische Reliquie hat uns Apollonius hinterlassen. Der Kommentator Eutocius, mit dem wir (vgl. S. 89) uns später noch mehr zu beschäftigen haben werden, hat eine hierauf bezügliche Bemerkung gemacht, welche in Kästners Verdeutschung etwa folgendermaßen lautet: „Apollonius Pergaeus hat die Kreisrechnung im Okytoboos (*ἐν τῷ Ὠκυτοβόῳ*) in anderen Zahlen dargestellt und zu größerer Näherung gebracht. Das scheint nun wohl schärfer zu sein, aber für Archimeds Absicht war es nicht nötig. Denn er wollte, wie gesagt, nur etwas finden, was der Wahrheit nahe wäre, so wie man es im Leben braucht. Deswegen hat ihn auch Porus Nicaenus mit Unrecht getadelt, daß er die der Peripherie gleiche Strecke nicht genau gefunden habe. Ebenderselbe meldet in seinen *Κηρίοις*, sein Lehrer, Philo von Gadara, habe schärfere Zahlen angegeben, als es die archimedischen, 22 : 7, sind. Alle aber scheinen Archimeds Absicht nicht verstanden zu haben. Sie brauchen Multiplikationen und Divisionen von Myriaden, die niemand leicht versteht, der nicht in des Magnus Logistik (*Μάγνου λογιστικῶν*) geübt ist ...." Was Eutocius mitteilt, ist schon aus dem Grunde für uns wertvoll, weil es von zwei Mathematikern Bericht erstattet, von denen man im übrigen nicht das geringste weiß; der zweitgenannte gehörte seinem lateinischen Namen zufolge wohl einer späten Zeit an. Mit dem Worte *ὠκυτόβοος* wußte nun niemals ein Kenner der Sprache und der Sache etwas anzufangen, und so dachte man selbstverständlich an eine Emendation. Auf den Beirat eines Philologen Nöhde sich stützend, schlug Kästner die Lesart *ὠκυτίμιον* vor, welche sich paläographisch gut rechtfertigen lasse; es wäre dann von einer Schrift zu genauer Abschätzung die Rede. Aus zwei Pariser Handschriften haben dagegen später Knoche und Maerker die jetzt wohl allseitig angenommene Form *ὠκυτόκιον* (Mittel zur Schnellgeburt, also wohl abgekürztes Rechnungsverfahren) herausgelesen. P. Tannery hält es nicht für unmöglich, daß in dieser Schrift der sehr genaue Näherungswert $\pi = 3{,}1416$ enthalten gewesen sei.

Ebenso liegt die Annahme gar nicht ferne, daß einen Abschnitt derselben ein uns von Pappus aufbehaltener Versuch des Apollonius, in der archimedischen Tendenz (S. 87), aber mit teilweise anderen Hilfsmitteln sehr große Zahlen zu bilden, dargestellt habe; immerhin bleibe nicht unerwähnt, daß gerade Nesselmann, der diesen Fragen ein sehr eindringendes Studium zugewendet hat, einen solchen Zusammenhang in Abrede zieht. Eine unverkennbare Ähnlichkeit zwischen den Prinzipien beider Mathematiker ist vorhanden. Während aber Archimedes nach Oktaden gruppiert, begnügt sich sein jüngerer Zeitgenosse mit Tetraden. Und die so gebildeten Zahlen wurden, während der früheren Methode praktische Anwendung fremd blieb, ausgiebig zur Lösung von Multiplikationsexempeln verwertet. Zu dem Ende führt Apollonius die Aufgabe auf die einfachere zurück, die Wurzelzahlen (πυϑμένες) zu multiplizieren, womit auch eine wichtige Annäherung an unser dekadisches System erreicht ist. Der Grieche hatte, wenn er (S. 49) die Zahlen ϛ, ξ, χ hinschrieb, in diesen Zeichen nicht die geringste äußere Andeutung für deren innere Zusammengehörigkeit, wie sie uns beim Anblick der Zahlen 6, 60, 600 ungesucht in die Augen springt, und eben diesen Vorteil suchte der Pergäer auch bei seinen Tetraden zu erzielen. Die Wurzelzahlen wurden in gewöhnlicher Weise miteinander multipliziert, und diesem partiellen Produkte hängte man dann erst die übrigen Bestandteile des Hauptproduktes an.

Auch in einem arabischen Kodex sind von F. Woepcke, dem trefflichen Kenner orientalischer Mathematik, apollonische Spuren aufgedeckt worden. In einer kurzen Geschichte der Lehre vom Irrationalen wird nämlich ausgeführt, der große Geometer habe neben den bis zu seiner Zeit allein beachteten geordneten Irrationalitäten auch die ungeordneten (ἄτακτοι) als der Untersuchung würdig erkannt und zahlreiche Sätze über sie gefunden. Ob darunter Quadratwurzelformen zu verstehen sind, welche über die Normalformen des zehnten euklidischen Buches (S. 77) irgendwie hinausgingen, oder ob allenfalls sogar $\sqrt[n]{a}$ $(n > 2)$ in den Kreis der Betrachtung einbezogen wurde, das wird, wenn nicht vielleicht auch einmal ein neuer Apollonius ebenso, wie ein neuer Archimedes (S. 97), aus dem Staube der Bibliotheken aufersteht, in Dunkel gehüllt bleiben.

Ehe wir von dem genialen Alexandriner Abschied nehmen, dem wir die letzten Seiten gewidmet haben, wollen wir noch zusammenfassend eine hochwichtige Frage zu erledigen suchen, deren Tragweite infolge der geistvollen Untersuchungen Zeuthens erst voll hervorgetreten ist. Wir meinen die Frage: Haben wir ein Recht, in der

Kegelschnittslehre des Apollonius bereits eine bewußte Anwendung des Koordinatenbegriffes zu erkennen? Wir haben selbst (S. 101) betont, daß dieser Geometer mit Durchmesser und Parameter so sicher und planmäßig umgeht, wie dies nur irgend ein Neuerer bei der Diskussion der Scheitelgleichung der Kegelschnitte tun kann, und daß also ein Koordinatensystem sich ganz von selbst dargeboten hat. Dies unbedingt zugebend, möchten wir gleichwohl mit M. Cantor daran erinnern, daß dieses Orthogonalsystem mit der gerade betrachteten Kurve im intimsten Zusammenhange steht und losgelöst von ihr nicht zu denken ist. Dies aber dünkt uns der charakteristische Punkt zu sein. Die wahre Bedeutung des von Cartesius eingeführten Prinzipes bestand doch darin, daß die Achsen ganz willkürlich, ehe noch eine bestimmte Aufgabe vorlag, gewählt werden konnten — eine Vorstellung, die so ungriechisch wie möglich ist. Was für die neue Methode die entscheidende Hauptsache war, entzog sich ganz und gar der in den „Conica“ durchgeführten Methodik. Wir glauben daran festhalten zu müssen, daß der Koordinatenbegriff zwar auch der Antike keineswegs ganz verborgen blieb, aber erst durch die Bedürfnisse der Astronomie eine festere Gestaltung empfing. Hierüber wird im nächsten Kapitel mehr zu sagen sein.

Kapitel VII.

Griechische Mathematik in der Zeit zwischen Apollonius und Ptolemaeus.

Auf Zeiträume höchster Geistesanspannung folgen, das ist ein alter geschichtlicher Erfahrungssatz, regelmäßig solche, in denen die Verarbeitung und Nutzbarmachung der erworbenen Güter als höchste Pflicht erscheint, in denen also die Produktion eine geringere wird. Damit soll keineswegs gesagt sein, daß man es hier mit einer Periode des Niederganges zu tun habe; aus der Reihe der vielen, welche sich in den von den großen Vorkämpfern gebrochenen Bahnen bewegen, werden immer einzelne hervorragen, von denen wiederum neue Ideen und Anregungen ausgehen, und die selbst als Lichter erster Größe angesehen werden würden, wenn nicht die Erinnerung an die erst vor nicht sehr langer Zeit geschiedenen Geisteshelden noch eine allzu lebhafte wäre. Als solche Männer erscheinen uns in den vier Jahrhunderten, die durch den Anfangstermin unserer Zeitrechnung in zwei gleiche Teile getrennt werden und die in diesem Kapitel vereinigt werden sollen, Hipparch, Hero und Ptolemaeus. Indessen mangelt es auch durchaus nicht an anderen Forschern, denen manch schöner Fund, manch folgenreiche Erfindung oder Entdeckung zu danken ist. Davon werden wir uns überzeugen, wenn wir jetzt an die Durchmusterung des Epigonenzeitalters in einer wesentlich chronologischen Stoffanordnung herantreten. Neben anderen Quellen ist uns für die richtige Altersbestimmung der hier auftretenden Gelehrtennamen ein zwar nicht eigentlich mathematisch-historisches, aber doch diesen Gesichtspunkt berücksichtigendes Werk des später zu besprechenden Astronomen Geminus sehr behilflich.

Was den Anfang des Zeitabschnittes besonders kennzeichnet, das ist die Bereicherung des vorhandenen Wissensschatzes durch neue krumme Linien. Diese Seite der Geschichtsforschung haben unter den Neueren namentlich P. Tannery und G. Loria in sehr anerkennenswerter Weise gefördert. Man wolle sich erinnern, daß der Vorrat an höheren Kurven, von den Kegelschnitten natürlich abgesehen, kein besonders reichlicher war. Durch Hippias (S. 62) war man mit der Quadratrix, durch Eudoxus (S. 73) mit der Hippopeda, durch Archimedes (S. 91) mit der einfachsten Spirale bekannt geworden. Höhere algebraische Kurven waren noch fast gänzlich unbekannt.

Hier setzte, wahrscheinlich im zweiten vorchristlichen Jahrhundert, der sonst nicht näher bekannte Nicomedes mit der Konstruktion seiner Konchoide (Muschellinie) ein. Es sei A (Fig. 14) ein fester Punkt, XU eine beliebige Gerade; von A aus sind Gerade gezogen, welche XU bezüglich in den Punkten B_1, B_2, B_3, B_4 ... schneiden, und auf ihnen wird $B_1C_1 = B_1D_1 = B_2C_2 = B_2D_2 = B_3C_3$

$= B_3D_3 = B_4C_4 = B_4D_4 \ldots$ gleich einer gegebenen Strecke m gemacht. Die Proportionen des Nicomedes in unserem Sinne umgehend, fällen wir von A auf XU das Lot $AB = d$, welches die beiden Kurvenzüge $C_1C_2C_3C_4 \ldots$ und $D_1D_2D_3D_4 \ldots$ resp. in C und D schneidet, betrachten BX als positive Abszissen-, BY als positive Ordinatenachse und fällen von den zusammengehörigen Punkten C_i und D_i auf BX die Lote C_i' und D_i'. Wenn noch E den Schnittpunkt von AC_i und BX bezeichnet, so liefern der pythagoreische

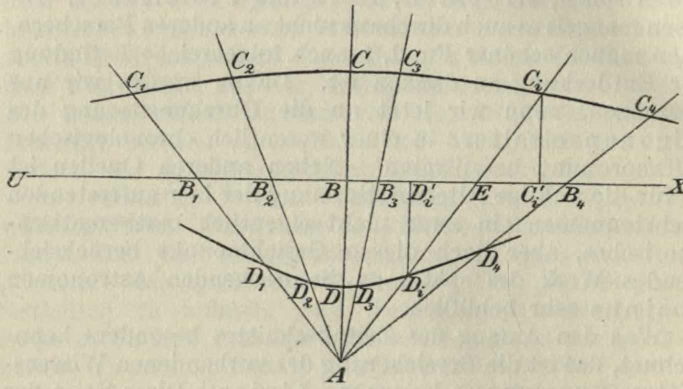


Fig. 14.

Lehrsatz und die Tatsache, daß $\triangle ABE \sim \triangle C_iC_i'E$ ist, die nachstehenden beiden Gleichungen:

$$\frac{BE}{d} = \frac{x - BE}{y},$$

$$m^2 = (x - BE)^2 + y^2.$$

Die Wegschaffung des Parameters BE liefert ersichtlich eine für y biquadratische Gleichung. Die Konchoide ist folglich eine Kurve vierter Ordnung. Höchst gewandt zeigt Nicomedes, daß und wie seine Linie dem Probleme der zwei mittleren Proportionallinien (S. 64) gerecht wird, und die Krone setzt er seinem Scharfsinne auf durch Beschreibung eines Instrumentchens, welches diese Linie nicht nur punktweise, sondern in einem fortlaufenden Zuge zu verzeichnen gestattet. Dies ist sonach der Anfang jenes Zweiges der Raumlehre, für welchen in späterer Zeit der Name organische Geometrie üblich geworden ist. Nicht als urkundlich sichergestellt kann, da eine gewisse Gegensätzlichkeit zwischen den einschlägigen Berichten des Pappus und Proclus vorliegt, die Entscheidung über die Frage werden, ob schon Nicomedes selbst die Muschellinie auch als brauchbar für die Winkeltrisektion (S. 62) erkannt hat. Zutrauen wird man ihm diese nicht einmal besonders fern liegende Ausdehnung seiner Erfindung ohne weiteres.

Wahrscheinlich um die gleiche Zeit lebte Diocles, der zum Zwecke der Lösung des delischen Problemes eine andere Kurve ersann, die Cissoide (Epheulinie). Wenn M (Fig. 15) der Mittelpunkt eines festen Kreises, AB ein Durchmesser desselben ist, und wenn die von ihm bis zur Peripherie reichenden Lote CD und EF einander gleich sind, so kann man A mit F verbinden und den Schnittpunkt G von AF und CD markieren. Wenn sodann CD und EF alle mit der Grundbedingung vereinbaren Lagen annehmen, so beschreibt der Punkt G die in Rede stehende Kurve. Wir setzen $MC = ME = x$, $CG = y$ und finden zunächst $EF = \sqrt{(r+x)(r-x)}$. Ferner haben wir $\triangle ACG \sim \triangle AEF$ und damit die Proportion:

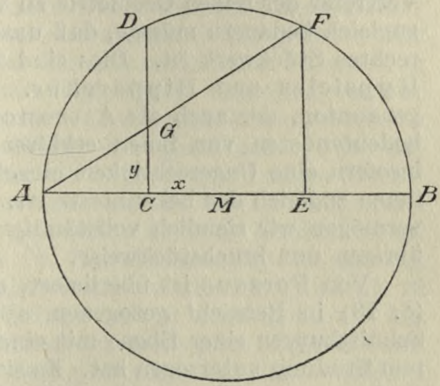


Fig. 15.

$$\frac{y}{r-x} = \frac{\sqrt{(r+x)}\sqrt{(r-x)}}{r+x}.$$

Die Algebra, welche Diocles selbstredend durch seine Proportionen umgeht, führt sofort zu den weiteren Gleichungen:

$$y\sqrt{r+x} = (r-x)\sqrt{r-x},$$

$$x^3 - 3rx^2 + (3r^2 + y^2)x + ry^2 = r^3.$$

Die Cissoide ist eine Kurve dritter Ordnung, die also gleichmäßig für Dreiteilung des Winkels und Verdoppelung des Würfels verwendbar ist. Von Diocles wird uns auch erzählt, er habe jene kubische Aufgabe des Archimedes, deren oben (S. 90) gedacht ward, durch die gemeinsamen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte gelöst.

In das II. vorchristliche Jahrhundert haben wir allem Vermuten nach noch vier andere, in ihrer Art bedeutende Vertreter der reinen Geometrie zu versetzen, indem wir nur zugleich bedauern müssen, daß unser Wissen von ihnen ein rechtes Stückwerk ist. Dies sind Perseus, Zenodorus, Hypsicles und Hipparchus. Wenn wir den letztgenannten, der auch als Astronom hervorragte, für den bedeutendsten von ihnen erklären, so kann dies freilich insofern eine Ungerechtigkeit einschließen, als er eben von ihnen zugleich der bekannteste ist. Denn seine Leistungen vermögen wir ziemlich vollständig zu überblicken, die der übrigen nur bruchstückweise.

Von Perseus ist überliefert, daß er die schon früher (S. 73) in Betracht gezogenen spirischen Linien, die Schnittkurven einer Ebene mit einem Kreiswulste, genauerem Studium unterzogen hat. Es sind dies Kurven vierter Ordnung, die, je nach Lage der Achse und schneidenden Ebene, einen großen Reichtum wechselnder gestaltlicher Verhältnisse erkennen lassen, aber sonst läßt sich leider über diese Episode griechischer Geometrie nichts aussagen. Persönlich wissen wir von Perseus ebensowenig wie von Zenodorus, aber dafür ist uns dessen Abhandlung „Über die isoperimetrischen Figuren" durch Pappus und Theo erhalten worden. Ob wir es mit einer durchaus originalen Arbeit, ob nur mit einer Zusammenstellung mehr oder weniger bekannter Dinge zu tun haben, muß dahingestellt bleiben. Mehrere jetzt in die Lehrbücher übergegangene Sätze kommen hier zuerst vor: Der Kreis besitzt von allen regelmäßigen Figuren gleichen Umfanges den größten Flächeninhalt; Von allen isoperimetrischen Vielecken gleicher Eckenzahl ist das reguläre das größte; Die Kugel hat einen größeren Kubikinhalt als jeder andere Körper von gleicher Oberfläche. Im ganzen sind es vierzehn Theoreme dieser Art, die angeführt und bewiesen werden.

Nicht sehr lange liegt hinter uns eine Zeit, welche die euklidischen „Elemente" aus fünfzehn Büchern bestehen ließ. Als man einzusehen lernte, daß das angeblich vierzehnte und fünfzehnte Buch nicht dem Meister selbst angehören konnten, erblickte man in Hypsicles, einem wahrscheinlich in die zweite Hälfte des II. Jahrhunderts zu versetzenden Alexandriner, den Verfasser dieses Zusatzes, bis dann Friedlein die Autorschaft auf das vierzehnte Buch allein einschränkte. Wann und von wem das andere niedergeschrieben wurde, ist noch unaufgeklärt. Hypsicles teilt uns sechs Lehrsätze über Dodekaeder und Ikosaeder mit, die unter sich und mit dem Würfel verglichen werden; das vermeintliche fünfzehnte Buch enthält bloß einfache Konstruktionsaufgaben über die platonischen (S. 59) Körper. Auch die Arithmetik beschäftigte unseren Mathematiker, denn Diophant führt auf ihn die erste allgemeine Definition der Polygonalzahlen zurück. Endlich ist er, zugleich mit Euclides (S. 75) und Autolycus (S. 74), auch als Schriftsteller über astronomische Sphärik zu nennen. Trigonometrie bringt auch er noch nicht zur Anwendung, was, wenn wir auf die gleich jetzt folgenden Angaben über Hipparch bezug nehmen, fast dazu verleiten könnte, seine Lebenszeit etwas früher, als es hier geschah, anzuberaumen. Vielmehr steht er noch auf dem primitiven Standpunkte des Autolycus und beweist in seinem Schriftchen ἀναφορικός, das die Aufgänge der Gestirne zum Gegenstande hat, die von ihm als Lemmen (S. 75) verwerteten Summensätze der arithmetischen Progressionen. In einem sehr bemerkenswerten Punkte aber hat er einer Neuerung Raum gegeben: Die Sexagesimalteilung des Kreises ist ihm geläufig, während Eratosthenes und Archimedes von derselben noch nichts gewußt zu haben scheinen. Während des II. Jahrhunderts v. Chr. scheint sich somit diese für die Erleichterung der astronomischen Rechnungspraxis so wichtige chaldäische Sitte (S. 20) auch in den westlichen Ländern durchgesetzt zu haben. War es ja doch auch eine höchst mühsame Sache, den gegebenen Winkel als aliquoten Teil der Peripherie anzugeben, so wie dies z. B. Eratosthenes (S. 83) getan hatte, als er den Kreisbogen des Meridianes zwischen Alexandria und Syene gleich $\frac{1}{50}$ des Umfanges gesetzt hatte.

Von den Astronomen des in Rede stehenden Jahrhunderts ist Hipparch der weitaus bedeutendste gewesen, und wer ihn in seinen Verdiensten um die reine Mathematik kennen lernen will, muß auch die astronomischen Beweggründe erfaßt haben, welche ihn bei diesem seinem Beginnen leiteten. Unter seinen Vorgängern auf diesem Gebiete können nur zwei als ihm gleichwertig gelten: Eudoxus (S. 72) und jener Aristarchus (S. 87), von dem wir unter ganz anderem Zusammenhange Notiz zu nehmen hatten. Hier ist er zu nennen wegen seines trigonometrischen Verfahrens, die Erddistanz der Sonne durch die Erddistanz des Mondes auszudrücken. In dem Augenblicke, in welchem der Mond gerade halb erleuchtet ist, hat das Dreieck Sonne-Mond-Erde im Mondmittelpunkte einen rechten Winkel, und wenn folglich der Winkel α an der Erde gemessen wird, so hat man dem Dreiecke EMS (Fig. 16) die Beziehung

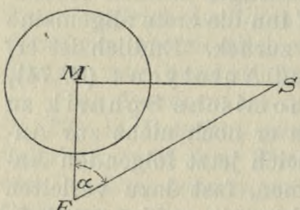


Fig. 16.

$$ES = EM : \cos\alpha$$

zu entnehmen. Aristarch fand, indem er $\sqrt{2}$ (S. 66) durch den Näherungswert $\frac{7}{5}$ ersetzte und $\cos\alpha$ in sehr geschickter Weise zwischen die Grenzen $\frac{1}{18}$ und $\frac{1}{20}$ einschloß, die Seite $ES = 19\,EM$, was ja freilich außerordentlich viel zu klein war, aber doch nur deshalb, weil sich überhaupt eine exakte Bestimmung des Eintrittes unseres Trabanten in die Quadratur nicht ermöglichen läßt. Aristarchs Grundgedanke ist, wie erwähnt, ein trigonometrischer, aber zur Verwirklichung konnte er denselben nur auf einem Umwege bringen, weil ihm eben noch nicht eine wie immer beschaffene goniometrische Algorithmik zu Gebote stand. Diese geschaffen zu haben, war das Verdienst Hipparchs. Daß er dabei an ägyptische Vorbilder (S. 33) angeknüpft habe, ist nicht unmöglich, aber doch wenig wahrscheinlich, weil seine Art, den Winkel durch Linien ausdrückbar zu machen, mit dem Seqt des Ahmes nichts gemein hat.

Geboren in der kleinasiatischen Stadt Nicaea, hat sich der geistvolle Begründer der ersten kalkulatorisch verwertbaren Planetentheorie in der Zeit zwischen 160 und 130 in Rhodus, vielleicht auch in Alexandria aufgehalten; daß von jener Insel seine grundlegenden Beobachtungen datiert sind, steht außer Zweifel. Wenn wir seiner bedeutendsten Arbeit eine besondere Bezeichnung beilegten, so hat das guten Grund. Denn auch die Homozentrik des Eudoxus (S. 72) konnte wohl dazu dienen, qualitativ

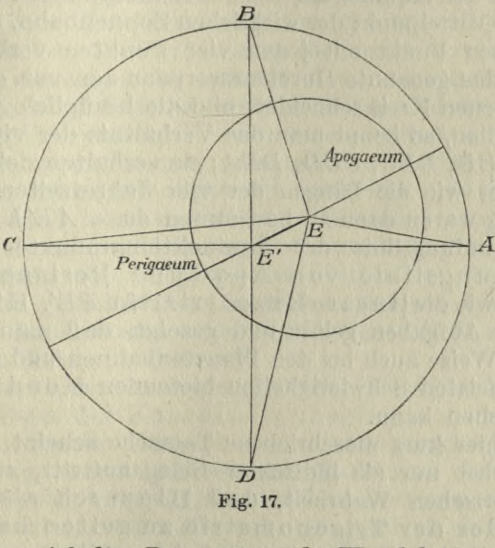


Fig. 17.

von den verwickelten Bewegungen der Wandelsterne Rechenschaft zu geben, aber sie hätte versagen müssen, wenn es jemand unternehmen wollte, auf sie eine Vorausberechnung von Stellungen zu gründen. Das aber hat bis zu einem gewissen Grade Hipparch erreicht. Man hat vielleicht bisher zu wenig Gewicht darauf gelegt, daß schon zur Formulierung der Sonnentheorie ein gewisses Maß von Trigonometrie, und zwar von ebener Trigonometrie, erfordert wurde, obwohl das dritte Buch des Almagestes den damals eingeschlagenen Weg erkennen läßt. Hipparch hatte erfahrungsgemäß die Dauer der vier Jahreszeiten festgestellt und damit zugleich bewiesen, daß — da an einer gleichförmigen Kreisbewegung der Sonne prinzipiell nicht zu zweifeln war — die Erde nicht im geometrischen Mittelpunkte des Sonnenkreises stehen könne, sondern sich exzentrisch an einem anderen Punkte (punctum aequans der späteren Terminologie) der Kreisebene befinden müsse. Diesen Punkt E' galt es trigonometrisch auszumitteln. Um E', die Erde, als Mittelpunkt (Fig. 17) ist der als Ekliptik bekannte größte Kreis konstruiert, dem zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser in den Äquinoktial- und Solstitialpunkten begegnen. E ist der Mittelpunkt der wirklichen Sonnenbahn, und wenn man diesen Punkt mit jenen vier Punkten verbindet, in welchen das genannte Durchmesserpaar den von der Sonne beschriebenen Kreis schneidet, und die bezüglich A, B, C, D heißen sollen, so kennt man das Verhältnis der vier Zentriwinkel AEB, BEC, CED, DEA; sie verhalten sich nämlich zueinander wie die Längen der vier Jahreszeiten. Durch Rechnung waren dann zu bestimmen der $\sphericalangle AE'E$, welchen die Verbindungslinie der Äquinoktionalpunkte mit der Verbindungslinie von Apo- und Perigaeum einschloß, sowie die lineare Exzentrizität EE'. Hipparch hat diese Aufgaben gelöst und gezeigt, daß man in ganz analoger Weise auch bei den Planetenbahnen und sogar bei der die meisten Schwierigkeiten bietenden Mondbahn zu Werke gehen kann.

Die hier kurz umschriebene Tatsache scheint, wiewohl sie zunächst nur als indirekter Beleg auftritt, zugunsten der historischen Wahrheit, daß Hipparch als erster Begründer der Trigonometrie zu gelten habe, mit dem nämlichen Rechte ins Gefecht geführt werden zu können, wie jedes der beiden literarischen Zeugnisse, deren Gewicht v. Braunmühl besonders sorgsam abgewogen hat. Das eine rührt her von dem uns nicht mehr unbekannten Kommentator Theo, der dem Astronomen von Nicaea die Abfassung eines — leider verloren gegangenen — aus zwölf Büchern bestehenden Werkes über Sehnenrechnung zuschreibt; das zweite ist positiver und findet sich in den uns vorliegenden originalen Erläuterungen zu den astrognostischen Schriften des Eudoxus und Aratus (*φαινόμενα καὶ προγνόστικα*). Diese letztere Stelle braucht nach v. Braunmühl nicht notwendig auf den Sehnenkalkul bezogen zu werden, spricht vielmehr nur so viel klar aus, daß man graphisch Aufgaben der Sphärik zu behandeln verstanden habe. Der Urheber dieses unserem Gewährsmanne zufolge als älteste bekannte trigonometrische Methode zu bezeichnenden Konstruktionsverfahrens ist nach den Mitteilungen des Ptolemaeus eben Hipparch gewesen. Wir kommen demnächst auf die wichtige Schrift über das Analemma (περὶ ἀναλήμματος) zurück und konstatieren für jetzt nur so viel, daß darunter die orthographische Abbildung der Himmelskugel auf einer der Hauptebenen des Horizontalsystemes zu verstehen ist. Aus arabischen Quellen scheint aber auch hervorzugehen, daß Hipparch nicht minder die stereographische Projektion und deren beide Fundamentaleigenschaften — Winkeltreue und Kreistreue — gekannt hat. Dies alles zusammennehmend, gelangen wir zu dem Schlusse, daß dieser Mann sich nicht nur im Besitze graphischer, sondern auch rechnerischer Hilfsmittel zur Lösung ebener wie auch sphärischer Probleme befunden hat. Die Abhängigkeit von babylonischen Vorbildern kann jedenfalls nicht grundsätzlich bestritten werden; als Einfluß übender Landsmann könnte höchstens Eratosthenes (S. 83) in Betracht kommen.

Viele werden auch geneigt sein, Hipparch als den wahren Vater des Koordinatenbegriffes anzusprechen, welchem damit ein astronomisch-geographischer Ursprung zuerkannt wäre. Eudoxus behalf sich noch mit sehr unvollkommenen Bestimmungen der Sternörter, und auch die ältesten Alexandriner sind schwerlich über das hinausgekommen. Erst die auf keinen festen Zeitpunkt zu verlegende Erfindung der Armillarsphäre leitete über zu wirklicher Ortsbestimmung, und diese ist vor Hipparch nicht nachzuweisen. Hultsch konnte es aber auch sehr wahrscheinlich machen, daß die demnächst näher zu besprechende Dioptra bereits dem Hipparch astronomische Dienste leistete, freilich auch nicht annähernd noch in der ihr von Hero verliehenen Vollendung, sondern als eine einfache Ausgestaltung des etwas primitiven Verfahrens, von dem Archimedes im „Arenarius" (S. 87) zur Messung des scheinbaren Sonnendurchmessers Gebrauch gemacht hatte. Ihm dürften auch gewiß schon die Worte und Begriffe, mit denen das spätere Griechentum Punkte der Sphäre auf die drei Systeme des Horizontes, des Äquators und der Ekliptik bezog, geläufig gewesen sein, und es ist nicht abzusehen, weshalb nicht auch damals schon Koordinatenverwandlungen auf dem Himmelsglobus vollzogen worden sein sollen. Was die Erdkugel anbetrifft, so hatte allerdings auch Eratosthenes das Bedürfnis einer besseren Fixierung der Ortslagen, als sie die Sphragiden (S. 85) gewährten, nicht verkannt; sein einem Parallelkreise angepaßtes Diaphragma war nichts anderes als eine Abszissenachse. Die naheliegende Ergänzung des Systemes unterließ er jedoch, und Hipparch ist es gewesen, dem wir die seitdem zähe festgehaltenen Definitionen von geographischer Länge und Breite zu danken haben.

Mit ihm sind wir nahe an die untere Grenze des ersten vorchristlichen Säkulums heran gelangt. An der Grenze steht der berühmte stoische Philosoph Posidonius von Apamea, der um 80 v. Chr. in Rom das Zeitliche gesegnet hat. Wäre sein hochgeschätztes Werk über Meereskunde (*περὶ Ὠκεανοῦ*) auf uns gekommen, so würde seiner gewiß auch die Geschichte der Mathematik mehr zu gedenken haben; so begnügen wir uns, an seine neue Erdmessungsmethode zu erinnern, welche den längst erprobten Satz von der Proportionalität der Winkel und Bogenlängen in einem Sinne verwendet, der mit dem der eratosthenischen Gradmessung nicht übereinstimmt. Stark scheint unter der Einwirkung des Posidonius gestanden zu sein der Kosmograph Cleomedes (*κυκλικῆς θεωρίας μετεώρων βιβλία* $\bar{\beta}$), bei dem uns die ersten Spuren eines Finsterniskalkuls auffallen, der aber von uns mehr aus dem Grunde namhaft zu machen ist, weil er uns zeigt, daß selbst in jener späten Zeit der uralte populäre Wert $\pi = 3$ (S. 22) auch noch in gelehrter Schriftstellerei sein Wesen trieb. In diesen Zeitabschnitt verlegt man gewöhnlich auch den Astronomen Geminus (S. 109), dessen sphärisches Hauptwerk (*εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα*) uns zwar keine besondere Ausbeute liefert, der aber auch viel Sinn für geschichtliche Dinge besessen haben muß und sich, falls Proclus beweiskräftig ist, auch sogar an eine Art Methodik der Mathematik herangewagt zu haben scheint, in der er u. a. eine Begriffsbestimmung für konstante Krümmung einer Linie gab. Vorchristlich dürfte auch die Lebenszeit des in der Geschichte der Erdmessung genannten Dionysodorus gewesen sein, der sich mit den Spiren (S. 112) und mit der geometrischen Lösung kubischer Probleme befaßt haben soll. Und endlich ist ein Angehöriger dieses Jahrhunderts der Nordafrikaner Theodosius, von dem wir drei Schriften kennen. Die eine (*σφαιρικῶν βιβλία γ̄*) gibt eine ganz elementare Übersicht über die wichtigsten Eigenschaften der Hauptkreise einer Kugel, und die beiden anderen Elementarbücher behandeln die hier entwickelten Lehren in ihrer Bedeutung für die sphärische Astronomie. Die rudimentären Bestimmungen der Tag- und Nachtlänge eines Erdortes entbehren noch jedweden Hinweises auf die in diesem Falle doch besonders unentbehrlichen Hilfsmittel der Raumtrigonometrie. Hervorragende Geschichtsforscher, P. Tannery und Björnbo, wollen allerdings die Möglichkeit offen halten, daß der Mathematiker und der Astronom Theodosius zwei verschiedene Personen gewesen seien.

Weitaus den vordersten Platz nimmt unter den Vertretern des ersten Jahrhunderts ein Mann ein, über den freilich die Akten noch so wenig geschlossen sind, daß noch immer die heronische Frage das Objekt eifriger Erörterung bildet. Die unermüdliche Arbeit, welche seit vielen Jahren von M. Cantor an die Klärung dieser Frage gesetzt ward, dürfte indessen doch fürs erste außer Zweifel gestellt haben, daß der Mathematiker, Geodät und Ingenieur Hero von Alexandrien in der zweiten Hälfte jenes Jahrhunderts gelebt und unvergängliche Werke geschaffen hat, während zwei andere Gelehrte gleichen Namens, ebenso wie ein gewisser Heronas, erst einer sehr viel späteren Zeit zuzurechnen sind. Unser Hero, ein Schüler des durch seine Mechanismen und Feuerspritzen bekannten Technikers Ctesibius, hat eine selten universelle Tätigkeit entfaltet, auf welche die Untersuchungen und Editionen eines H. Martin, Schoene, Nix, Carra de Vaux, vor allem aber eines Wilhelm Schmidt ein helles Licht geworfen haben, so daß wir ihn, wofern nur die Tatsache der Autorschaft als gesichert angesehen werden darf, den bestbekannten Mathematikern der Antike zuzurechnen ein Recht haben. Auf die uns ziemlich vollständig erhaltenen mechanischen Schriften, die für die Geschichte der Aerostatik und der griechischen Bühnentechnik ein hohes Interesse gewähren, soll an diesem Orte nur so weit eingegangen werden, als unmittelbar Mathematisches zur Sprache zu kommen hat; mehr Nachdruck ist natürlich auf die der reinen und angewandten Geometrie zugeeigneten Arbeiten zu legen.

Sowohl im Gewichtezieher (βαρουλκος), als auch in der Kriegsmechanik (βελοποιικά) kommt Hero auf die Würfelverdoppelung zu sprechen, die bei ihm unter dem Bilde einer Zylinderverdoppelung unter Beibehaltung der Gestalt erscheint. Seine Lösung, die auch von Pappus reproduziert und damit in ihrer Echtheit bekräftigt wird, stützt sich auf den Gebrauch eines beweglichen Lineales, so wie dies auch beim archimedischen Lemma (S. 94) für die nahe verwandte Aufgabe der Winkeltrisektion geschehen könnte. Überhaupt haben die Kriegsschriftsteller oder Poliorketiker die Mathematik niemals außer acht gelassen, und Hultsch konnte in ihren Werken, von denen schon das XVII. Jahrhundert Thévenots gute Ausgabe brachte, sehr charakteristische Näherungsrechnungen aufzeigen.

Das beste, worüber Hero verfügte, hat er uns in seiner Meßkunde (μετρικά) gegeben. Deren erstes Buch führt uns vortrefflich in die um 50 v. Chr. gebräuchlichen Methoden der Flächenberechnung ein, und hier erscheint als Glanzpunkt die berühmte Dreiecksformel

$$\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)},$$

welcher die dankbare Nachwelt den Namen Heroscher Lehrsatz beigelegt hat. Kaum braucht hervorgehoben zu werden, daß diese Schreibweise nicht die des Erfinders war; eine Formulierung konnte nur in der Art erfolgen, daß der Dreiecksinhalt als mittlere Proportionale zwischen zwei Rechtecksflächen dargestellt ward. Höchst scharfsinnig ist der Originalbeweis, den kein Lehrer unserer Zeit seinen Schülern vorenthalten sollte. In das Dreieck ABC (Fig. 18) ist ein Kreis einbeschrieben, und es sind nach dessen Mittelpunkt die Strahlen AM, BM, CM gezogen. Die Radien MD, ME, MF stehen auf den Dreiecksseiten senkrecht.

Man mache $CJ = \frac{1}{2}(a + b + c)$, indem man die Strecke $BJ = AD$ abträgt, und ziehe MJ; dann ist $\triangle CJM = \frac{1}{2} \triangle ABC$. In M errichte man auf MC und in B auf BC eine Senkrechte; beide Lote begegnen sich in H und MH trifft BC in G. CH ist die gemeinsame Hypotenuse für die beiden rechtwinkligen Dreiecke CHB und CHM, so daß die beiden Punkte B und M auf die Peripherie eines über CH als

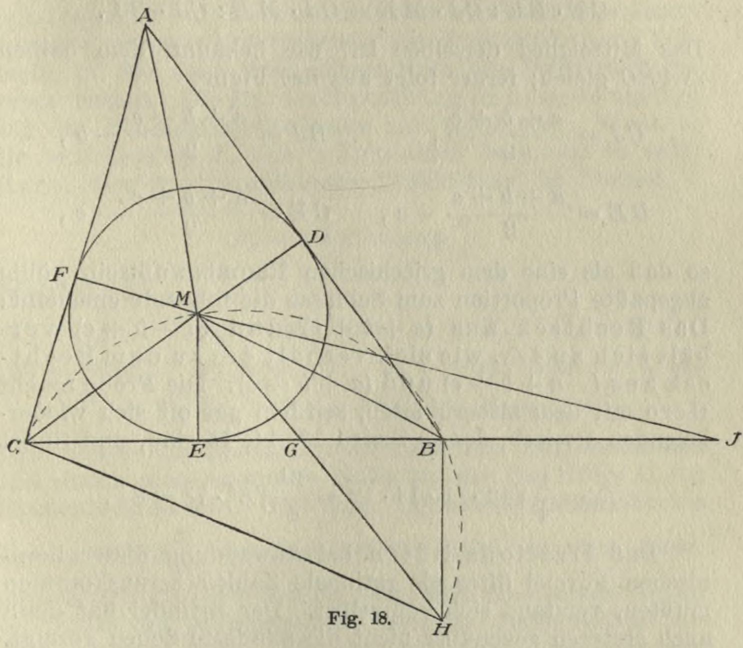


Fig. 18.

Durchmesser errichteten Halbkreises fallen, und $CHBM$ ist ein Sehnenviereck, woraus $\sphericalangle CHB + \sphericalangle CMB = 180^0$ sich ergibt. Die Gleichheit von Peripheriewinkeln auf demselben Bogen läßt erweisen, daß $\triangle BCH \sim \triangle MAD$ ist, und damit hat man

$$BC : BH = AD : MD\,, \quad BC : BJ = BH : ME\,.$$

Weiter bestehen die Gleichungen ($\triangle BGH \sim \triangle EGM$)

$$\frac{BC}{BJ} + 1 = \frac{BG}{GE} + 1\,, \quad \frac{CJ}{BJ} = \frac{BE}{EG}\,.$$

Einfachste Hilfsoperationen ergeben neue Proportionen:

$$\overline{CJ}^2 : BJ \cdot CJ = CE \cdot BE : CE \cdot EG\,,$$

$$\overline{CJ}^2 : BJ \cdot CJ = BE \cdot CE : \overline{ME}^2\,.$$

Abermals umgeformt, geht letztere Proportion in nachstehende über:

$$CE \cdot BE : CJ \cdot ME = CJ \cdot ME : CJ \cdot BJ\,.$$

Das Mittelglied derselben ist, wie bekannt, dem halben $\triangle ABC$ gleich; ferner folgt aus der Figur

$$CJ = \frac{a+b+c}{2}\,, \qquad BJ = \frac{a+b+c}{2} - b\,,$$

$$BE = \frac{a+b+c}{2} - a\,, \qquad CE = \frac{a+b+c}{2} - c\,,$$

so daß als eine dem griechischen Raumbewußtsein völlig angepaßte Proportion zum Schlusse die folgende erscheint: Das Rechteck aus $(a+b+c)$ und $(a-b+c)$ verhält sich zu $4\triangle$, wie sich verhält $4\triangle$ zu dem Rechteck aus $(-a+b+c)$ und $(a+b-c)$. Die Probe macht Hero mit dem altberühmten, seitdem gar oft sich wiederholenden Dreieck, dessen Seiten 13, 14, 15 sind, und findet

$$\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = \frac{2^4}{4}\sqrt{3^2 \cdot 7^2} = 84\,.$$

Daß Irrationalitäten bei Anwendung dieser heronischen Formel öfter als rationale Zahlen herauskommen mußten, verstand sich von selbst. Der Erfinder hat denn auch ersteren gegenüber nicht die mindeste Scheu gezeigt. Er bedient sich eines uns schon früher entgegengetretenen Näherungswertes

$$\sqrt{a^2 \pm b} \backsim a \pm \frac{b}{2a}\,.$$

Reichte dieser nicht aus, so hatte er wohl auch noch andere Auskunftsmittel bereit, wie denn mit Glück Wertheim die später bei den Arabern seit dem XII. Jahrhundert häufiger wiederkehrende Methode des doppelten falschen Ansatzes als eine dem Hero geläufige erkannt haben dürfte. Vielleicht sei er sogar dabei nicht stehen geblieben, sondern habe sie auch auf die Kubikwurzelausziehung ausgedehnt. Dieses Geschäft lag ihm ferner, konnte aber doch auch nicht gänzlich umgangen werden, und in der Tat war er mit der gar nicht üblen Annäherung $\sqrt[3]{100} = \frac{65}{14}$ vertraut.

Die Ausrechnung des Inhaltes von Polygonen hatte kein Geometer vor Hero numerisch durchzuführen unternommen, wenn nicht vielleicht des Eratosthenes' Versuche (S. 85) auch nach dieser Seite hin Fingerzeige gegeben hatten. Die Art der Berechnung ist ganz die unsrige, auf die Elementardreiecke sich stützende. Wenn s_n die n-Ecksseite, J_n den n-Ecksinhalt bedeutet, so setzt Hero, dem in entsprechender Einkleidung die Formel

$$F_n = \tfrac{1}{4} n\, s_n^2 \operatorname{cotang} \frac{\pi}{n}$$

geläufig ist,

$$F_3 = \tfrac{13}{30} s_3^2, \quad F_5 = \tfrac{5}{3} s_5^2 \quad \text{oder} \quad = \tfrac{12}{7} s_5^2, \quad F_6 = \tfrac{13}{5} s_6^2,$$
$$F_7 = \tfrac{43}{12} s_7^2, \quad F_8 = \tfrac{29}{6} s_8^2, \quad F_9 = \tfrac{19}{3} s_9^2 \quad \text{oder} \quad = \tfrac{51}{8} s_9^2,$$
$$F_{10} = \tfrac{15}{2} s_{10}^2, \quad F_{11} = \tfrac{66}{7} s_{11}^2, \quad F_{12} = \tfrac{45}{4} s_{12}^2.$$

Jede dieser Einzelformeln muß durch ein Spezialverfahren und durch eine besondere Näherung des die Höhe h_n des Elementardreieckes liefernden Quadratwurzelausdruckes $h_n = s_n \operatorname{cotang} \frac{\pi}{n}$ gewonnen worden sein; da eben dieser goniometrische Wert damals noch kaum tabellarisch vorlag, so dürfte der pythagoreische Lehrsatz durchgreifend angewandt worden sein. Für das Siebeneck diente der vielleicht bis auf Archimedes zurückzuführende Satz, daß $s_7 = \frac{1}{2} s_6 \sqrt{3}$ ist, was ja eine ganz leidliche Genauigkeit gewährt, während für s_{11} eine ebenfalls heronische Näherung die Grundlage abgab.

Hero gibt weiterhin Vorschriften für Kreisabschnitte, Ellipse und Parabel, sowie für die Oberflächen der elementaren krummflächig begrenzten Körper, indem er durchweg den Archimedes als seinen Führer namhaft macht. Auch die seinen Erkenntnismitteln zugänglichen Körper kubiert er; für die unregelmäßigen empfiehlt er die Menge des durch sie verdrängten Wassers in einem parallelepipedischen Gefäße zu messen. Umfassend behandelt er Teilungsaufgaben, die ihn sogar (S. 123) vor der Ausziehung dritter Wurzeln nicht zurückschrecken lassen. So sind denn die *μετρικά* als ein Handbuch der rechnenden Geometrie mit Fug bezeichnet worden.

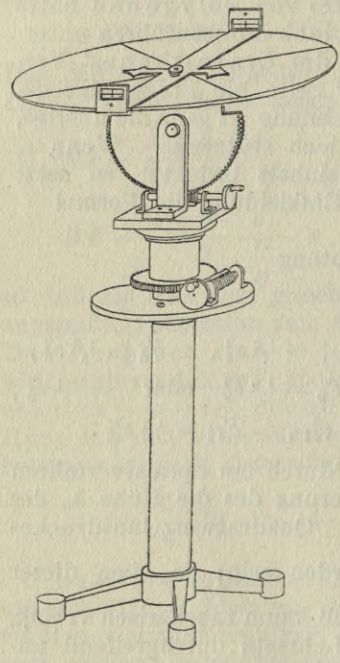


Fig. 19.

Der im engeren Sinne praktischen Geometrie gehören zwei heronische Schriften an. Von nachhaltigem Werte ist diejenige über das Dioptra genannte Meßinstrument (*περὶ διόπτρας*) geworden, von dem Fig. 19 nach Schöne eine ohneweiters verständliche Anschauung vermittelt. Es war, wie wir sagen würden, ein Universalinstrument, Vorläufer des modernen Theodoliten und zur Messung von Horizontal- und Vertikalwinkeln gleich passend eingerichtet. Alles, was sich auf Nivellierung und Distanzmessung bezog, konnte mit der Dioptra anstandslos geleistet werden. Die Dioptra ist sohin als die höchste Vollendung der älteren von Thales (S. 53) und Dicaearch (S. 71) angewandten Meßinstrumente zu betrachten; diese müssen ziemlich verbreitet gewesen sein, da u. a. auch der Militärschriftsteller Polybius (um 150 v. Chr.) von Höhenmessungen als von einer bekannten Sache spricht. Bei der Absteckung von Rechtecken boten sich dem geschickten Feldmesser die rechtwinkligen Koordinaten ungesucht dar, ohne daß natürlich dieser zeichnerische Handgriff eine Beziehung zu analytischer Geometrie gehabt hätte. Apollonius operierte (S. 102) in seiner Art mustergültig mit einem Koordinatensysteme, ohne dieses vom konkreten Figurenbeispiele loslösen zu können, und Hero verwertet beliebig Koordinaten, ohne sich aus seinen nüchternen Anwendungen heraus zur Erfassung des Wesens eines Koordinatensystemes aufschwingen zu können, wozu für ihn auch keine direkte Veranlassung vorlag. So haben es denn die Griechen trotz Apollonius, trotz Hero und, setzen wir hinzu, trotz Hipparch (S. 117) nie zu einer diesen Namen verdienenden Koordinatengeometrie gebracht. Bemerken wollen wir noch, daß in der Dioptraschrift auch das Analemma (S. 117) Erwähnung findet, und daß man darin hübschen arithmetischen Betrachtungen über Zahnradverbindungen begegnet, wie solche bei der Anfertigung eines Wegemessers (Hodometers) den Hauptbestandteil bilden. Gelegentlich erscheint zum zweiten Male der Lehrsatz vom Dreiecksinhalte.

Was bisher als heronisch zur Sprache gebracht wurde, bildet fraglos das geistige Eigentum des großen Geometers, und zwar in authentischer Form. Nicht im gleichen Maße gilt das für die von Cantor durch den Titel heronische Sammlungen gekennzeichneten Schriften, deren Kompilation erst in später Zeit erfolgte und vermutlich Echtes mit Unechtem vermengte. Dahin gehören eine den Lehrbuchcharakter tragende, zum schon Bekannten wenig Neues hinzufügende Geometrie; dahin eine gleichfalls in engerem Rahmen verbleibende Geodäsie; dahin zwei Bücher Stereometrie, die gewisse in der Praxis oft vorkommende Körperformen behandeln; dahin endlich die Ausmessungen (*μετρήσεις*), in denen uns zuerst die später so sehr beliebten Brunnenaufgaben entgegentreten. Ein Brunnen wird durch eine Röhre A in der Zeit t_1, durch eine Röhre B in der Zeit t_2 gefüllt; wie lange dauert es (Zeit x), bis sich bei gleichzeitiger Öffnung von A und B die Füllung vollzieht? Die Gleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$$

war für Hero leicht lösbar, denn er muß eine Art Algebra zur Verfügung gehabt haben, die über die Kenntnis seiner Zeitgenossen hinausging. Wenigstens schreibt der Araber Anaritius seinem Yrinus — die Verstümmelung durchschaut sich leicht — Vertrautheit mit einer „Dissolutio“ und „Compositio“ zu, und diese Ausdrücke können dem

Texte gemäß nur als ein Rechnen mit Klammergrößen gedeutet werden.

Als ganz zuverlässig darf ungeachtet seiner späten Datierung das Buch vom Landbau (γεηπονικὸν βιβλίον, liber geeponicus) angesehen werden. Auch in ihm ist wesentlich von Flächen- und Körpermessung die Rede. Auf den agronomischen Zweck weisen freilich nur einige auf Fruchtmaße bezügliche Fragestellungen hin.

Zwischen den echt und den nur bedingt heronischen Schriften bestehen auch tiefer greifende, sachliche Unterschiede. Die erstgenannte Klasse atmet rein griechischen Geist, wenngleich in vielfach neuartiger Ausprägung; die zweite Kategorie legt den Gedanken nahe, daß der Alexandriner auch von den ägyptischen Praktikern manches herübergenommen hat. Die eingehende Vergleichung Cantors gibt hierüber erwünschten Aufschluß. Derselbe Mann, der uns in seinem Dreieckssatze eine der schönsten Blüten hellenischer Geometrie vermacht hat, läßt als bequeme Regel der Ausmessung von Vierecken mit den Seiten a, b, c, d die ganz unzulängliche Formel des Ahmes (S. 32) zu, welche den Inhalt gleich

$$\tfrac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

setzt! Möglicherweise trägt auch die schöne, durchaus korrekte Lösung der Aufgabe, einem Quadrate ein reguläres Achteck einzubeschreiben, von dem je vier Seiten auf die Quadratseiten fallen, den Stempel ägyptischer Vorbilder. Wie Cleomedes (S. 118), so läßt auch Hero für rohe Anwendungen den Wert $\pi = 3$ gelten. Und wieder derselbe Mann, der sich die ganze Strenge euklidischer Beweistechnik zu eigen gemacht hatte, verfährt, statt vorschriftsmäßig erst dem Diorismus (S. 70) sein Recht angedeihen zu lassen, in der „Stereometrie" mit seinen Bestimmungsstücken so leichtsinnig, daß er plötzlich vor der Quadratwurzel $\sqrt{9^2 - 12^2}$ steht, die er kurzerhand mit $\sqrt{63}$ identifiziert. Dies ist das erste Beispiel einer freilich nur durch einen Fehlschluß entstandenen und im Stile des gordischen Knotens behandelten imaginären Größe.

Wie wir auch Hero betrachten mögen — ganz von Rätseln und Unklarheiten können wir ihn selbst und seine schriftstellerische Wirksamkeit nicht befreien. Als ein

Mathematiker von ungemein großer Vielseitigkeit und Lebhaftigkeit, für den aber neue Methoden und Probleme mehr als rigorose Beweisführung im Vordergrunde stehen, nimmt er eine ausgezeichnete Sonderstellung ein; fast möchte man ihn einen antiken Euler nennen. Als schöpferischer Geist auf dem Gebiete der Planimetrie, als bahnbrechender geodätischer Erfinder, als ein für Algebra und Goniometrie in selbständiger Gestaltung vorbereitend wirkender Mathematiker steht er im Vorhofe einer neuen Epoche. Und sehr einflußreich hat sich seine Geistesarbeit nicht bloß für sein eigenes, sondern, wie wir uns bald überzeugen werden, auch für ein fremdes Volk erwiesen.

Mit Hero verlassen wir nun aber auch die vorchristlich-griechische Zeit, um in das erste Jahrhundert unserer modernen Zeitrechnung einzutreten. Aus ihm zieht übrigens nur ein einziger Mann unsere Aufmerksamkeit auf sich, denn Demetrius von Alexandria und Philo von Tyana, die nach Pappus sich mit höheren Kurven abgegeben haben sollen, sind für uns bloße Namen. Jener Mann ist der Alexandriner Menelaus, dessen Lebenszeit um 100 n. Chr. durch die von ihm damals (genau im Jahre 98) angestellten astronomischen Beobachtungen bezeugt ist. Wie Theodosius (S. 119), so hat auch er über Geometrie der Kugelfläche geschrieben, aber ein gewaltiger Gegensatz waltet zwischen beiden Büchern ob. Ersterer hat Anfänger im Auge; sein Nachfolger bereichert die Wissenschaft mit neuen Wahrheiten. Längst bekannt, hat doch sein Buch (*σφαιρικῶν βιβλία $\bar{\gamma}$*) unter den Händen v. Braunmühls und Björnbos ganz neue Aufschlüsse geliefert. Es enthält eine von völlig selbständigem Denken zeugende sphärische Trigonometrie, und sehr müssen wir es beklagen, daß des gleichen Autors Einführung in die Sehnenrechnung das Schicksal vieler älterer Werke über Mathematik teilen und der Vernichtung anheimfallen mußte.

Sphärischer Winkel und sphärisches Dreieck werden hier erstmalig der Definition teilhaftig. Für Dreiecke werden die Kongruenzsätze angegeben; ihre Winkelsumme ist $> 2\,R$, $< 6\,R$. Das dritte Buch baut sich auf dem bekannten Transversalensatze des Menelaus auf, der für ebenes und sphärisches Dreieck hergeleitet wird. Im letzteren Falle gilt, wenn ein Hauptkreis die drei Seiten (resp. Seitenverlängerungen) AB, BC, CA bezüglich in D, E, F durchschneidet, die Gleichung:

$$\text{chord} 2\, AD \cdot \text{chord} 2\, BE \cdot \text{chord} 2\, CF$$
$$= \text{chord} 2\, DB \cdot \text{chord} 2\, EC \cdot \text{chord} 2\, AF\,.$$

Aus dieser Regula sex quantitatum schöpfte das spätere Griechentum alles, was es für astronomische Zwecke — andere kannte man noch nicht — von räumlicher Trigonometrie nötig hatte. Chasles huldigte der Ansicht, das Theorem sei älter und vielleicht schon in den euklidischen „Porismen“ (S. 81) enthalten gewesen, allein belegen läßt sich dieselbe nicht. Wir treten der Entwicklung der trigonometrischen Regeln aus dem Satze des Menelaus erst dann näher, wenn uns die arabische Mathematik direkt hierzu veranlaßt, und bemerken nur noch, daß gar manch beachtenswerter Fund hier noch zu machen war. So hegte man durchweg die Meinung, erst Regiomontanus habe erkannt, daß eine Winkelhalbierende die Gegenseite a des Kugeldreieckes in zwei Stücke m und n teilt, welche, unter b und c die beiden anderen Seiten verstanden, der Proportion

$$\text{chord} 2\, m : \text{chord} 2\, n = \text{chord} 2\, c : \text{chord} 2\, b$$

genügen. In Wirklichkeit hat das aber schon Menelaus erkannt gehabt.

Nicht viel verschieden darf wohl von dessen Lebenszeit diejenige des Marinus von Tyrus angesetzt werden. Hipparch hatte zwar (S. 117) die stereographische Abbildung der Sternkunde dienstbar gemacht, aber die Erdkunde empfing durch diesen Gräkosyrer die erste brauchbare, nämlich die Plattkartenprojektion. Eine Zone der Erdkugel wurde zylindrisch angenommen und dann in eine Ebene aufgerollt. Hart am Äquator gingen so die Gradtrapeze in Quadrate, anderwärts gingen sie in Rechtecke über, deren Seitenverhältnis mit dem Zunehmen der geographischen Breite sich änderte. Solche Karten, die freilich bei größerer Ausdehnung des aufzunehmenden Landes in meridionaler Richtung starke Verzerrungen ergeben, hat man bis in die Neuzeit herein immer wieder gezeichnet, und an Einfachheit lassen sie ja auch nichts zu wünschen übrig. Der Zeit des Marinus gehört wohl auch an Vettius Valens, dessen Kommentar zum zehnten euklidischen Buche man in arabischem Gewande wiedergefunden hat.

Von Marinus ist uns direkt nichts überliefert, und nur durch Ptolemaeus sind wir mit seinem kartographischen Verfahren bekannt geworden. Damit sind wir also bei dem großen Astronomen angekommen, dessen Position in der Geschichte seiner Wissenschaft eine ganz eigenartige, geradezu beherrschende genannt werden muß. Claudius Ptolemaeus lebte als Vorstand der berühmten Sternwarte in Alexandria und war auch wohl selbst ein hellenistischer Ägypter. Aus den von ihm selbst mitgeteilten Beobachtungen ziehen wir den Schluß, daß seine Blütezeit in die Regierungsjahre der Kaiser Trajan und Hadrian gefallen ist. Seine Weiterführung der Hipparchschen Theorien, welche in der Aufstellung des berühmten Ptolemaeischen Weltsystemes gipfelte, wollen wir nur streifen, um bei seinen rein mathematischen Leistungen etwas länger verweilen zu können. So seien auch die Schriften über Optik und Kanonik (Harmonielehre), Mechanik und Astrologie (τετράβιβλος, quadripartitum) nur genannt, wennschon ihnen sämtlich mathematische Elemente nicht ganz fehlen.

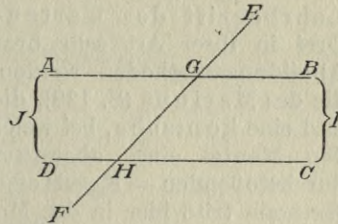


Fig. 20.

Nicht näher bekannt ist der Traktat Von den Ausdehnungen (περὶ διαστάσεων), welcher vielleicht Raumgeometrisches, vielleicht auch, wie eine Andeutung über die drei Dimensionen besagen kann, eine Philosophie der Geometrie enthielt. Hierzu neigte Ptolemaeus; wir treffen, dem Proclus Vertrauen schenkend, bei ersterem den ersten Versuch eines Beweises für das elfte Axiom (S. 76) an. AB und DC (Fig. 20) sind zwei Gerade, die in G und H von einer dritten geraden Linie EF so geschnitten werden, daß $\sphericalangle BGH + \sphericalangle CHG = 2R$ sind. Wäre es trotzdem denkbar, daß GB und HC sich in einem reellen Punkte K durchschnitten, so stelle man sich vor, das Liniengebilde $BGHC$ werde losgetrennt, umgedreht und so auf das Liniengebilde $DHGA$ gelegt, daß GB auf HD und HC auf GA zu liegen kommt, was möglich ist, weil ja auch $\sphericalangle DHG + \sphericalangle AGH = 2R$ sein müssen. Es fällt sodann K auf J, den Schnittpunkt von HD und GA. Zwei getrennte gerade Linien hätten zwei Schnittpunkte K und J gemein, was unmöglich ist, und so war die Annahme falsch, daß überhaupt ein Schnittpunkt vorhanden sein könne.

Vielfach schlägt in das mathematische Gebiet auch ein das erste Buch jener berühmten Gesamtdarstellung der Erdkunde (ὑφήγησις τῆς γεωγραφίας), welche den Namen des Ptolemaeus fast ebenso sicher, wie seine Astronomie, zu verewigen geeignet war. Wir haben hier den ältesten Lehrbegriff der Kartenprojektionslehre vor uns. Drei in ihrer Art sehr brauchbare und wohlberechtigte Abbildungsmethoden werden auseinandergesetzt, nämlich die des Marinus (S. 128), die stereographische (S. 117) und eine konische, bei welch letzterer eine Erdzone durch den Mantel eines abgestumpften — berührenden oder durchstoßenden — Kegels ersetzt wird. Die stereographische Methode tritt hier in der Modifikation auf, daß das Auge nach einem Erdpole verlegt und die Zeichnungsebene parallel zum Äquator angenommen wird; es ist demnach eine Polarprojektion. Man besitzt auch noch eine Spezialschrift des Ptolemaeus, die leider nicht in der Urform auf unsere Zeit gekommen ist; sie wurde aus dem Arabischen ins Lateinische übertragen und als Planisphaerium 1536 zu Basel, 1558 — weit besser — von Commandino zu Venedig veröffentlicht. Proclus und der etwas ältere Bischof Synesius sind darin einig, daß sich der Alexandriner das Verdienst erworben hatte, eine übersichtliche Darstellung der schon fast vergessenen Methode Hipparchs (S. 117) zu liefern. In Fig. 21 sehen wir ein Planisphär abgebildet; die Ekliptik, welche nach der Grundregel der Kreistreue wieder ein Kreis werden muß, berührt die beiden Wendekreise jeweils in den Solstitialpunkten. Ein derartiges Diagramm konnte nun zur graphischen Lösung aller Aufgaben der astronomischen Geographie benützt werden. Nicht selten findet man ein Planisphär auch als Astrolabium oder Analemma bezeichnet; ersteres ist richtig, aber daß das Analemma, dem Ptolemaeus auch seinerseits eine Monographie gewidmet hatte, keine stereographische, sondern eine orthographische Abbildung — und zwar des Firmamentes auf Horizont, Meridian oder ersten Vertikal — gewesen ist, hat, wie wir wissen (S. 116), v. Braunmühl dargetan, und Zeuthen hat auf die Wichtigkeit dieser damals zuerst

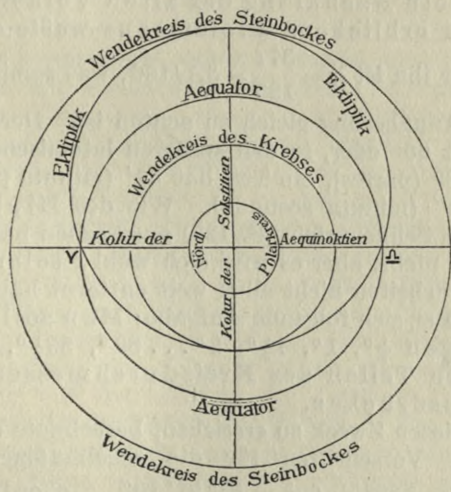


Fig. 21.

sinngemäß durchgeführten Scheidung zweier zwar dem Zwecke nach nahe verwandter, sonst aber sehr voneinander abweichender Kartenkonstruktionen hingewiesen. Sehr zu bemerken ist auch, daß beim Verzeichnen des Analemmas die gesuchten Kreisbogen durch den Sinus gefunden werden, und es hätte, so sollte man meinen, nur eines winzigen Schrittes bedurft, um grundsätzlich den Übergang von der Sehne zur halben Sehne des doppelten Winkels zu vollziehen. Es geschah das nicht; die Griechen bildeten ausschließlich die Trigonometrie der Chorde aus. Vor nichts hat sich anläßlich geschichtlicher Studien ein neuerer Mathematiker mehr als vor der unzutreffenden

Annahme zu hüten, das, was ihm als leicht, naheliegend oder gar selbstverständlich vorkommt, müsse auch in der Vergangenheit anderen so erschienen sein.

Wenn wir die ptolemaeische Goniometrie kennen lernen wollen, so müssen wir zunächst des für uns befremdlichen Umstandes Erwähnung tun, daß, wie der Kreis in 360 Grade, so auch der Durchmesser in 120 gleiche Teile (τμήματα) geteilt wird. Vielleicht ist in dieser Art der Teilung ein Nachklang der alten Volksregel $\pi = 3$ (S. 22) zu erblicken. Ptolemaeus wußte es natürlich besser; für ihn ist $\pi = \frac{377}{120} = 3{,}14166$, was somit einer sehr scharfen Annäherung gleich zu achten ist. Der Kreishalbmesser hat 60^{τ} oder, in den späteren lateinischen Bearbeitungen, 60^{p} (partes), ein Teil hat $60'$ (minuta prima), eine Minute $60''$ (minuta secunda). Wie des Hipparch und Menelaus Sehnentafeln (S. 127) ausgesehen haben mögen, wissen wir nicht, aber es wird sich wohl Ptolemaeus von seinen Vorarbeiten nicht allzu weit entfernt haben. Jedenfalls stellte er sich folgende Aufgabe: Man soll für sämtliche Bogen $\frac{1}{2}{}^{0}$, 1^{0}, $1\frac{1}{2}{}^{0}$, $2^{0} \ldots 89^{0}$, $89\frac{1}{2}{}^{0}$, 90^{0} deren Sehnen in Teilen des Kreisdurchmessers zahlenmäßig ausdrücken.

Um diesen Zweck zu erreichen, berechnete er nach den bekannten Vorschriften für die regelmäßigen Vielecke $\text{chord}\, 90^{0} = \sqrt{60^2 + 60^2} = 84^{p}\, 51' 10''$, $\text{chord}\, 60^{0} = 60^{p}$, $\text{chord}\, 72^{0}$ und $\text{chord}\, 36^{0}$. Damit sind auch die Chorden der zugehörigen Supplementarbogen gegeben. Nächstdem führt er als Lemma jene Eigenschaft des Kreisviereckes ein, welche wir den ptolemaeischen Lehrsatz nennen; danach ist das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten. Damit ist, wenn $\text{chord}\, \alpha$ und $\text{chord}\, \beta$ vorliegen, auch $\text{chord}\, (\alpha + \beta)$ gegeben, denn aus dem Sehnenviereck, dessen eine Diagonale eben diese Größe, dessen andere Diagonale aber den Kreisdurchmesser darstellt, erhält man unverzüglich

$$120\, \text{chord}\, (\alpha + \beta) = \text{chord}\, \alpha \sqrt{120^2 - \text{chord}^2 \beta} + \text{chord}\, \beta \sqrt{120^2 - \text{chord}^2 \alpha}\,.$$

Die Sehne des halben aus der des ganzen Winkels herzuleiten, dient eine Konstruktion, welche einer Umschreibung unserer Formel

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha$$

gleichzuachten ist. So steigt Ptolemaeus nach und nach herab bis chord $\frac{3}{4}{}^0 = 0^p\,47'\,8''$. Ließe sich der Winkel anstandslos in drei gleiche Teile teilen, so wäre die grundlegende Sehne von $\frac{1}{2}{}^0$ bekannt, aber vor einer approximativen Lösung jener Aufgabe, an die man sich höchstens konstruktiv heranwagte, weicht er zurück und behilft sich statt dessen mit einem sehr hübschen Interpolationsverfahren. Den alten Aristarch (S. 114) nachahmend, geht er von der Ungleichheit chord α : chord $\beta <$ arc α : arc β aus und beweist, daß chord $1^0 < 1^p\,2'\,50''$ sein muß. Ebenso jedoch läßt sich umgekehrt zeigen, daß chord $1^0 > 1^p\,2'\,50''$ ist, woraus innerhalb der gezogenen Schranken chord $1^0 = 1^p\,2'\,50''$ folgt. Dem obigen Satze zufolge wird dann chord $\frac{1}{2}{}^0 = 0^p\,31'\,25''$, und jetzt steht nichts mehr im Wege, die Sehnentafel herzustellen. *Μοῖρα* bedeutet ein Sechzigteil der Sehne (*εὐθεία*); eine Minute ist ein *ἑξηκοστὸν πρῶτον*; eine Sekunde ist ein *ἑξηκοστὸν δεύτερον*. Nachprüfung mit den Mitteln der Jetztzeit hat darüber vergewissert, daß die Zahlen der Tabelle in den ersten fünf Dezimalen verlässig sind. Interpolationen wurden genau in der gleichen Weise vorgenommen, wie dies die spätere Zeit bei den Logarithmentafeln machte, und so war das notwendige Rüstzeug für trigonometrisches Rechnen bereit gestellt.

Die Grundlinien des Kalkuls finden sich in dem elften Buche jenes umfänglichen Handbuches niedergelegt, welchem Ptolemaeus selbst die Bezeichnung *μεγάλη σύνταξις* beigelegt hat; die bewundernde Nachwelt machte daraus *μεγίστη σύνταξις*, und so bildete sich bei den ihren bestimmten Artikel al vorsetzenden Arabern die Lesart Almegisti oder Almagest heraus, welche auch die Gelehrten der Folgezeit übernahmen. Nach Erledigung etlicher Lemmen wird gezeigt, wie das Theorem des Menelaus zur Auflösung jener rechtwinklig-sphärischen Dreiecke ausgenützt werden kann, welche bei der Transformation der astronomischen Koordinaten auftreten. Die dabei gebrauchten Sehnenrelationen decken sich mit folgenden trigonometrischen Formeln in der uns geläufigen Bezeichnung:

$$\sin a = \sin c \sin \alpha \ , \quad \operatorname{tang} a = \sin b \operatorname{tang} \alpha \ ,$$

$$\cos c = \cos a \cos b \ , \quad \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} c \cos \alpha \ .$$

Andere als rechtwinklige Kugeldreiecke in Betracht zu ziehen, lag für den Astronomen keinerlei Zwang vor. Auch die Aufgaben, aus den Seiten die Winkel und aus den Winkeln die Seiten zu berechnen, hatten einstweilen keinen Platz finden können.

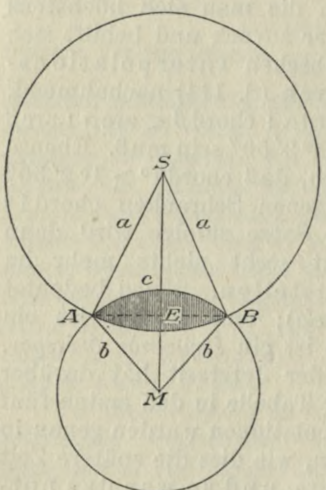


Fig. 22.

Ebene Trigonometrie systematisch abzuhandeln, hatte Ptolemaeus ebensowenig Veranlassung, obwohl er ihr, wenn sie auf seinem Wege lag, auch nicht auswich. So bedient er sich des ebenen rechtwinkligen Dreieckes gelegentlich beim Gnomon. Mit am interessantesten ist die Bestimmung der Verfinsterungsgröße bei einer partiellen Sonnenfinsternis im sechsten Buche des Almagestes. $SA = SB$ (Fig. 22) ist der — als geradlinig anzusehende — Halbmesser der Sonnenscheibe, $MA = MB$ der der Mondscheibe, AB also die gemeinsame Sehne beider Kreise. Außer $AS = a$, $AM = b$ ist auch der momentane Abstand $MS = c$ beider Scheibenmittelpunkte gegeben. Man kennt demgemäß im $\triangle AMS$ die drei Seiten, und wenn $AE = \frac{1}{2} AB = x$, $ME = y$, $SE = z$ gesetzt wird, so liegen für die Berechnung dieser Unbekannten drei Gleichungen vor:

$$x^2 + y^2 = b^2 \ , \quad x^2 + z^2 = a^2 \ , \quad y + z = c \ .$$

Sind x, y, z gefunden, so liefert unsere Figur die folgenden Beziehungen:

$$\operatorname{chord}(2 \cdot \sphericalangle AME) = \frac{2x}{b} \ , \quad \operatorname{chord}(2 \cdot \sphericalangle ASE) = \frac{2x}{a} \ .$$

Bekannt ist der Satz: Zwei Kreissektoren verhalten sich zueinander wie ihre Zentriwinkel. Da letztere der Sehnentabelle zu entnehmen sind, so kennt man auch die Sektoren selbst, und zum Schlusse findet sich für das gesuchte, in der Figur schraffierte Flächenstück der Wert

$$\text{Sektor}\, AMB + \text{Sektor}\, ASB - 2 \cdot \triangle AMS\,.$$

Letzteres aber hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} c x$.

Wir halten dafür, daß es auch der Geschichte der reinen Mathematik wohl anstehe, einen Blick auf die ptolemaeische Epizyklenlehre zu werfen. Daß sie physikalisch sinnlos ist, unterliegt ja, seitdem wir eine Mechanik haben, keinem Zweifel mehr, weil ein materieller Körper unmöglich um ein leeres Zentrum herum eine Kreisbewegung ausführen kann. Unter dem rein geometrischen Gesichtspunkte hingegen ist diese Methode, Naturvorgänge richtig zu beschreiben, wenn man noch nicht zu kausaler Erklärung durchzudringen vermag, der höchsten Anerkennung wert und ein trefflicher Tummelplatz trigonometrischer Technik. Man kann es nach Ptolemaeus dahin bringen, die verwickeltsten Bahnbewegungen der Planeten durch Häufung der Beikreise genau genug für eine befriedigende Tafelkonstruktion darzustellen. Und daß das sich gar nicht anders verhalten könne, bewies im XIX. Jahrhundert der geniale Geometer Moebius, der hierüber eine gründliche Untersuchung anstellte und sich zu nachstehendem Schlußergebnis geführt sah: Die stets weiter zu treibende Nachbildung der wahren Bahnlinien durch Systeme von Epizykeln ist das geometrisch-antike Seitenstück der modern-analytischen Darstellung willkürlicher Funktionen durch trigonometrische Reihen. Was diese letzteren zu leisten imstande sind, wird durch die Namen Lagrange, Fourier, Bessel ausreichend charakterisiert.

Hiermit möge unsere Schilderung der Stellung, welche sich Ptolemaeus in dem Werdegange unserer Wissenschaft errungen hat, ihr Ende erreichen. Man wird die oben ausgesprochene Meinung, daß mit ihm ein vorläufig nicht zu überschreitender Höhepunkt gegeben war, von dem aus sehr leicht ein Abstieg beginnen konnte, nunmehr als zutreffend gelten lassen. Doch wäre es ungerecht, neben ihm die Bedeutung zweier Mathematiker zu verschweigen, die ebenfalls dem II. nachchristlichen Jahrhundert angehören und auf ihrem Sondergebiete, der Arithmetik, Leistungen aufzuweisen haben, die sich immerhin auch neben denjenigen des großen Astronomen sehen lassen können. Diese beiden Männer sind Nicomachus von Gerasa und Theo von Smyrna. Ersterer soll auch über Geometrie und über Zahlenmystik geschrieben haben; uns geht an dieser Stelle einzig und allein seine Einleitung in die Arithmetik (*εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἀριθμητικήν*) an, die uns ein — wohl auch von pythagoreischen Erinnerungen beträchtlich beeinflußtes — wohlgefügtes System der Zahlentheorie vorführt, mit Logistik (S. 57) aber nichts zu tun hat. Über Euclids einschlägige Bücher geht es insofern hinaus, als nunmehr die geometrische Krücke, ohne welche der Verfasser der „Elemente“ nicht hätte auskommen können, ganz fallen gelassen worden ist. Die geraden und ungeraden Zahlen werden in Untergruppen zerlegt; erstere können von der Form $2n$ oder $2(2n-1)$ oder $2^p n$ sein; bei den letzteren werden Primzahlen, zusammengesetzte Sekundärzahlen und unter sich teilerfremde Zahlen unterschieden. Zu den uns bekannten vollkommenen Zahlen treten mangelhafte und überschießende hinzu. Um seine Zahlenmanipulationen anschaulich zu machen, gibt Nicomachus ein Schema, welches Cantor als erste Einmaleinstabelle deutet. Auch finden wir bei ihm die ersten Anspielungen an allgemeine höhere Differenzreihen und eine mehr abgeschlossene Theorie der figurierten Zahlen mit rekurrentem Bildungsgesetze. Neu ist die Darstellung der Kubikzahlen: $n^3 = (2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \ldots + (2n+2n-1)$. In der Proportionenlehre werden zehn Typen behandelt, von denen jedoch die drei gebräuchlichsten (S. 58) eine Vorzugsstellung einnehmen. Ein schöner Einzelsatz, dessen man sich im Mittelalter zur Quadrierung bediente, spricht aus, daß aus der stetigen arithmetischen Proportion $a - b = b - c = d$ die Formel $d^2 = b^2 - ac$ folge.

Der Smyrnäer Theo ist von dem viel späteren Alexandriner, seinem Namensvetter, wohl zu unterscheiden und ihm auch weit überlegen. Denn letzterer will nichts weiter als Erläuterer sein, wogegen der erstere zwar auch in erster Linie eine Kommentierung beabsichtigt, dabei aber auch eigene Ideen zum Worte verstattet. Er geht ausgesprochenermaßen darauf aus, seinem Leser die für das Studium des Plato unentbehrlichen mathematischen Kenntnisse zu vermitteln. So verbreitet auch er sich über zahlentheoretische Dinge, und einer Bemerkung, die er über Quadratzahlen einfließen läßt, eignet eine gewisse Tragweite. Erhebt man nämlich je eine Seitenzahl (πλευρά) und die zu ihr gehörige Diametralzahl (διάμετρος) ins Quadrat, so steht man der Gleichung

Quadrat der Diametralzahl = doppeltem Quadrat der Seitenzahl + 1

gegenüber, und zugleich gelten, wenn man mit $s_1, s_2 \ldots s_n$ die Seitenzahlen, mit $d_1, d_2 \ldots d_n$ die Diametralzahlen bezeichnet, die rekurrenten Bildungsgesetze

$$s_{n-1} + d_{n-1} = s_n, \quad 2\,s_{n-1} + d_{n-1} = d_n.$$

Will man, was freilich immer eine gewisse Gefahr in sich birgt, Theos Angaben in das Gewand der Neuzeit hüllen, so kann man sagen, er habe eine Reihe von Lösungen der Pellschen Gleichung $d_n^2 = 2\,s_n^2 + 1$ gegeben. Behandelt man die linearen Gleichungssysteme in unserer Weise, so stellt sich jeder Quotient $d_n : s_n$ als Näherungsbruch des einfach periodischen Kettenbruches

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}} = \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$$

heraus. Wie bei den Chinesen (S. 38), so kann auch bei Theo Smyrnaeus Kenntnis der magischen Quadrate an einem besonders einfachen Falle nachgewiesen werden.

Von zwei anderen Mathematikern des II. Jahrhunderts, Thrasyllus und Adrastus, wird gemeiniglich nur die Existenz erwähnt. Doch darf nicht übersehen werden, daß der zweitgenannte, dem Schiaparelli (S. 72) in seiner Bearbeitung der Homozentrik die Erstellung einer vollständigen Theorie der Nutation zuschreibt, wirklich auch über achtbare geometrische Kenntnisse verfügt haben muß. Die hier gemeinte „Schwankung der Sonnenbahn“

hat mit der uns durch Bradley und D'Alembert bekannt gewordenen „Schwankung der Erdachse" keine Gemeinschaft, war vielmehr eine irrige Hypothese. Es sollte nach ihr nämlich die wahre Bahn der Sonne nicht mit der einen größten Kreis der Himmelskugel bildenden Ekliptik zusammenfallen, sondern um diese als Normallage mit einer Amplitude von ungefähr $\pm\frac{1}{2}^0$ oszillieren.

Wie bemerkt, beginnt mit Ptolemaeus ein Zeitraum zuerst langsamen, dann rascher sich vollziehenden Niederganges. Ehe wir auch ihn betrachten, haben wir uns zu erinnern, daß inzwischen auch außer den Griechen ein anderes Volk in die Entwicklung einzugreifen angefangen hat. Und wenn auch diese Einflußnahme eine ganz unverhältnismäßig schwächere ist, so darf sie doch nicht mit Stillschweigen übergangen werden.

Kapitel VIII.

Römische Mathematik.

Rein theoretische Spekulationen waren nicht die Sache des tatkräftigen, entschlossenen Römervolkes. Sobald die Gedankenarbeit sich unmittelbar für die realen Aufgaben des Lebens nutzbar machen ließ, trat es gewiß bereitwillig in die Schranken, und es ist kein Zufall, daß wir aus Römerhand das erste System der Rechtswissenschaft, eine treffliche Geschichtschreibung und die wertvollsten Beiträge zu wissenschaftlicher Behandlung der Lehre vom Kriege empfangen haben. Aber statt tiefgründiger Philosophie bietet sich uns der schwächliche Eklektizismus eines Cicero, statt ernster Naturerforschung die Sammeltätigkeit eines Plinius, statt großartiger Lehrgebäude die enzyklopädische Schriftstellerei eines Terentius Varro dar. Lucretius und Seneca waren wenig verstandene Ausnahmen. So kann uns denn auch die Rolle nicht wundernehmen, welche den Römern in der Geschichte unserer Wissenschaft zu spielen beschieden war.

Ohne einiges elementare Rechnen konnte selbst das nüchterne republikanische Rom nicht auskommen.

M. C. P. Schmidt deckt die älteste urkundliche Spur davon in dem von Licinius und Sextus 376 v. Chr. erlassenen Zinsgesetze auf, indem er eine wörtliche Verdeutschung beigibt: Nachdem vom Kopfende das heruntergezogen ist, was an Interessen abbezahlt ward, soll das, was noch oben steht, in drei Jahren mit gleichen Wägungen abgelöst werden. Man verstand sich also auf einfache Prozentrechnung und Teilung; der dritte Teil der Restsumme mußte, weil gemünztes Geld noch eine Seltenheit war, mittels der Wage abgegrenzt werden. Die Ausdrucksweise des Gesetzgebers legt auch den Schluß nahe, daß man beim Addieren die Summanden von unten gegen oben sich folgen ließ, so daß, wie Schmidt hervorhebt, die Identität von Summe und Kopfende sinnenfällig hervortrat. Statt des ersteren Wortes war mithin auch die Bezeichnung Caput natürlich, und aus der Sitte, oben in das Wirtschaftsregister dieses Wort hineinzuschreiben, sind als nicht mehr klar aufgefaßte Überreste die in der neueren Nomenklatur zu so ganz anderer Bedeutung gelangten Begriffe Kapitel und Kapital nach und nach hervorgegangen.

In unserem Sinne gerechnet hat allerdings ein Römer nur selten. Seine gewöhnlichen Zahlzeichen befähigten ihn nur schlecht zu solchem Tun, und mit seinen Bruchzeichen, die einem Zwölfersysteme angepaßt waren, stand es nicht besser. Sie eigneten sich wohl dazu, Zahlverbindungen hinzuschreiben, nicht aber dazu, mit diesen Umwandlungen zu bewerkstelligen. Jede Uncia $\frac{n}{12}$ $(n \geqq 1, \overline{\gtrless} 11)$ hatte ein eigenes Symbol und einen besonderen Namen. Man wird erwarten dürfen, daß neben einem so trägen Zahlenapparate ein regelrechter Digitalkalkul (S. 51) nicht entbehrt werden konnte, und diese Vermutung bestätigt sich auch durch Mitteilungen eines Plinius, Juvenalis, Quintilianus, Macrobius, Marcianus Capella, die uns nur leider nicht zu tieferer Einsicht in die Eigentümlichkeiten des manuellen Rechnens verhelfen. Wenn heute noch rumänische Bauern eine Art komplementärer Multiplikation durch Fingerstellungen ausführen, so mag man in dieser Gepflogenheit einen Rest des dereinstigen engen Zusammenhanges der romanisierten Daker mit der Welthauptstadt erkennen. Auch Kopfrechnen wurde in den Schulen geübt; Horaz beklagt sich über das von den Knaben verursachte Geräusch, wenn sie ihrem Ludimagister ihr stereotypes „unus et unus duo, duo et duo quatuor, bis bina quatuor . . . aufsagen müssen. Alle diese Auskunftsmittel treten aber in den Hintergrund gegen das maschinelle Rechnen. Dies war ebenso die nationale Rechnungsweise, wie sie es den Chinesen (S. 36) bis zum heutigen Tage geblieben ist.

Zwar hat sich kein Originalexemplar des Abacus, wie das altrömische Rechenbrett genannt wird, in unsere Antiquarien herüber gerettet, aber Beschreibungen und Abbildungen verschaffen uns doch die Möglichkeit, uns vorzustellen, wie er aussah, und wie die Hantierung an ihm war. Wollte man in Eile eine Rechnung ausführen, die wir etwa schnell auf einem Blatte Papier entwerfen würden, so zog man die notwendigen Linien auf einer mit Staub bestreuten Platte; der Kaufmann und Staatsbeamte hatte in seinem Bureau eine Metalltafel, auf welcher die Kolumnen eingeritzt waren. Im ersteren Falle behalf man sich mit beliebigen Objekten, etwa mit Steinchen, und diese „Calculi“ sind so die Namengeber für den ganzen Prozeß der Rechnung selbst geworden. Zum Instrumente gehörten Metallknöpfchen, die sich in den eingeritzten Rinnen verschieben ließen. Die Kolumnen liefen auf den Rechner zu, und zwar gab es acht längere und acht kürzere Rinnen; eine von diesen ersteren enthielt fünf, jede der sieben anderen vier Knöpfchen, während in jeden kürzeren Einschnitt nur ein einziges gesteckt wurde. Jede Marke der längeren Rinnen war eine Einheit, jede der kürzeren machte fünf Einheiten aus. Die vier Spezies durch Hinundherschieben der Rechnungsmarken durchzuführen, war eine Übungssache; wir verweilen einstweilen nicht dabei, weil uns das Mittelalter eine gründlichere Beschäftigung mit der Kolumnenrechnung aufnötigen wird. Der sechs Knöpfe tragende Einschnitt eines ganz vollkommen ausgestatteten Abacus war der Unzen- oder Bruchrechnung vorbehalten.

Beim Multiplizieren und Dividieren mußten die Teilprodukte und Teilquotienten besonders für das Gedächtnis fixiert werden, denn an und für sich erlaubt ja das Rechenbrett nur Addition und Subtraktion. Wurden die Zahlen groß, so entstanden dem Gedächtnis Schwierigkeiten, zu deren Überwindung eine spätere Zeit Hilfstabellen erfand. Wie es mit ihnen bestellt war, darüber belehrt uns der von Christ und Friedlein einläßlich behandelte Calculus Victorii, eine aus dem V. Jahrhundert v. Chr. stammende Produktentafel für ganze und gebrochene Zahlen.

Im Bereiche der Zahlen war der Römer ausschließlich praktischer Rechner und im Bereiche der Raumgebilde war er nichts als Feldmesser. Die Mitglieder der vom Staate organisierten Gilde dieses Berufes hießen Agrimensoren, welcher Titel für sich selbst spricht, oder Gromatiker (von dem gleich zu erwähnenden Meßwerkzeuge). Handwerksmäßig waren ihre Verrichtungen, aber daß doch auch damit oft ein höherer Sinn verbunden war, das haben uns die treffliche Ausgabe aller einschlägigen Literaturreste von Blume, Lachmann und Rudorff und ganz besonders die mustergültigen Untersuchungen von M. Cantor zur Genüge bewiesen. Wahrscheinlich war die altrömische Feldmeßkunst in ihrer stark religiösen Umgrenzung ursprünglich ein Ableger etruskischer Kulthandlungen, aber allmählich lehnte man sich enge an griechische Vorbilder an, und es darf insonderheit der Einfluß Heros hoch eingeschätzt werden.

Der Plan einer ersten großen Reichsvermessung ist um 50 v. Chr. im Kopfe Julius Caesars entstanden, aber sein früher Tod verhinderte die Verwirklichung, und erst seinem Neffen, dem nunmehrigen Kaiser Augustus, fiel die Realisierung jener Erbschaft zu. Seine rechte Hand, den Vipsanius Agrippa, und den Straßenbaudirektor Balbus betraute er mit der Aufgabe, mit welcher eine zweite Hand in Hand gehen sollte, nämlich die Herstellung einer auf die Wand einer Halle gemalten Generalkarte des Orbis Romanus. Schweder und Partsch haben uns über diese, die wir uns doch wohl noch als projektionslos zu denken haben, des näheren unterrichtet. Daß man auch den Hero, der bei Beginn von Octavians Regierungsantritt sicher noch lebte (S. 119), für das große Unternehmen zu gewinnen versucht habe, wird durch eine zeitgenössische Nachricht wahrscheinlich gemacht. Jedenfalls haben seine geodätischen Vorschriften, allerdings wohl in ihrer wissenschaftlich herabgeminderten Redaktion (S. 126), bei der Vermessungsarbeit mitgewirkt.

Nicht bloß jedoch als Landmesser hatten die römischen Staats- und Militärgeometer tätig zu sein, sondern es gab für sie noch gar manche andere Arbeit offizieller Prägung. Die Tempel mußten, ähnlich wie voreinst die Pyramiden (S. 33), genau orientiert werden, wie Nissen im einzelnen dargetan hat, und ferner auch für die Lagerabsteckung bedurfte es der vorhergehenden Festlegung zweier geradliniger und orthogonaler Achsen. Die von Ost nach West gehende war der Decumanus, die meridionale der Cardo (Angel, als Projektion der Weltachse gedacht). Für die Bedürfnisse des Tages half die schon erwähnte Groma aus, ein rechtwinkliges Drehkreuz, dessen beide Balken durch Bleisenkel horizontal eingestellt werden konnten; den einen Balken richtete man nach dem — freilich veränderlichen — Aufgangspunkte der Sonne, und damit waren die Grundlinien gegeben. Die ursprünglich nur auf Beschreibungen und auf eine in Eporedia (Ivrea) aufgefundene Steinabbildung sich gründende Vorstellung von dem Apparate hat W. Schmidt als völlig richtig erwiesen, indem er auch ein bei Pfünz (im Altmühltale, nächst dem Limes) ausgegrabenes Fundstück dieser Art hinwies. Doch auch exaktere Bestimmungen der Mittagslinie lagen im Bereiche des Möglichen. Man hatte den Gnomon Chaldaeas und das uralte Verfahren, welches zwei gleiche Schattenlängen benötigt, zur Verfügung; man kannte aber auch ein anderes, wissenschaftlich weit höher stehendes, welches durch die Beleuchtung, die ihm Mollweide und Cantor zuteil werden ließen, als ein sehr kostbares Denkmal römischer — oder doch römisch-griechischer — Geometrie erkannt worden ist. Es wird nämlich gezeigt, daß und wie aus drei willkürlich gewählten Schattenlinien auf die Richtung des Cardo geschlossen werden kann.

Von den berufsmäßig schriftstellernden Vermessungsbeamten seien die bedeutendsten namhaft gemacht. Sextus Julius Frontinus (40—103 n. Chr.) gibt uns genaue Aufschlüsse über die zylindrischen Röhren, in denen die ihm als Oberaufseher unterstellten Wasserleitungen das segensreiche Naß fortführten. Er setzt nach Archimedes

(S. 88) $\pi = 3\frac{1}{7}$. Auch über Vierecksausmessung soll er geschrieben haben. Die in Wolfenbüttel aufbewahrte, von Cantor als wertvollste Quelle erschlossene Handschrift des Codex Arcerianus macht uns mit den Agrimensoren Hyginus, Balbus, Nipsus, Epaphroditus und Vitruvius Rufus bekannt, die durchweg zwischen 100 und 200 n. Chr. gelebt haben dürften; daß dieser Balbus der oben genannte Straßenbaumeister nicht sein kann, steht fest. Ihre Schriften sind ausnahmslos durch heronische Lesefrüchte gekennzeichnet, und namentlich ihre Dreieckssätze, unter denen der berühmte Lehrsatz (S. 120) figuriert, verraten sofort ihre Herkunft. Mancher hat aber auch ein selbständiges Korollar hinzugetan, wie z. B. Nipsus, der, wenn von einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse h und die Fläche F gegeben sind, die Katheten in der Form

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{h^2 + 4F} \pm \sqrt{h^2 - 4F}\right)$$

ausdrückt. Nicht selten sind Aufgaben aus dem Kriegswesen; es soll z. B. die Höhe einer Festungsmauer ermittelt werden. Ein Bogenschütze versieht zwei Pfeile mit Schnüren, ein Geschoß richtet er gegen die Mauerkante, ein zweites gegen den Mauerfuß, und wenn dann die wieder aufgewickelten Schnurteile die Längen a und b $(a > b)$ haben, so ist die gesuchte Höhe gleich $\sqrt{a^2 - b^2}$. Nicht minder erhalten die so weit verbreiteten Messungen der Flußbreite (S. 9) ihren Platz.

Von Epaphroditus haben wir ein Fragment überkommen, welches in zweifacher Beziehung lehrreich erscheint Erstens nämlich wird, von nicht grundsätzlichen Fehlerentstellungen abgesehen, eine korrekte Definition allgemeiner Polygonalzahlen gegeben; zum zweiten wird ein gleichfalls zutreffender Exkurs über Pyramidalzahlen eingeschoben. Die r-te m-eckige Pyramidalzahl steht mit der r-ten m-eckigen Polygonalzahl in einer Zahlenbeziehung, die der römische Gromatiker ganz richtig in der Form

$$\mathrm{Pyr}_m^r = \tfrac{1}{6}(r+1)\,(2\,\mathrm{Pol}_m^r + r)$$

wiedergibt. Und es ist ihm sogar die vielleicht einem Hinweise bei Nicomachus (S. 136) nachgebildete independente Summe der Kubikzahlen, d. h. die Identität

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

ganz geläufig. Wie diese arithmetischen Theoreme in ein geodätisches Werk gekommen sind, würde sich unserer Vermutung entziehen, wenn uns nicht ein verhängnisvoller Irrtum, den sich eine spätere Zeit zuschulden kommen ließ, einen Fingerzeig böte. Es wird auf diesen Punkt also noch einmal zurückzukommen sein.

Neben den Gliedern der Agrimensorenzunft sind Römer, die sich für mathematische Dinge interessierten, recht dünn gesät. Doch dürfen einige Vertreter anderer Stände, die sich in diesem Falle befanden, nicht außer acht bleiben. Varro, der Polyhistor (S. 138), der ein langes Leben (116 bis 27 v. Chr.) ganz mit Federtätigkeit erfüllte, soll als hochbetagter Greis noch ein Sammelwerk über den Vollkreis menschlichen Wissens verfaßt haben, von dem sich angeblich fünf Bücher (unter neun) auf reine und angewandte Mathematik (Arithmetik, Geometrie, Musik, Astrologie, Baukunst) erstreckt hätten.

Weit höher als der Enzyklopädist steht als selbständiger Denker der geniale Baumeister Vitruvius Pollio, dessen zehn Bücher über sein Fach („De Architectura“) dem Historiker der exakten Wissenschaften reichen Stoff bieten. Akustische Betrachtungen von auffallend richtiger Würdigung des Schalles als einer Wellenbewegung leiten über zu einer Darstellung der arithmetisch-musikalischen Theorien nach Aristoxenus. Die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite des Quadrates, das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 und die archimedische Kranzrechnung (S. 94) hatten es dem Autor eigener Aussage zufolge als besonders hervorragende Betätigungen menschlichen Scharfsinnes angetan. Mit Gnomon, Dioptra (S. 124), Hodometer usw. wußte er gut Bescheid, obwohl er in Zahlenrechnungen gerade keine absonderliche Geschicklichkeit, die auch beim Römer verwunderlich gewesen wäre, wahrnehmen läßt. In seiner Kenntnis gewisser Mechanismen bekundet er Abhängigkeit von Hero. Endlich ist neuerdings von Papperitz auf Vitruvs Grundlegung der geometrischen Zeichnungskunst aufmerksam gemacht worden. Nach Val. Roses Übersetzung lautet die am meisten charakteristische Stelle des ersten Buches im Hauptwerke wie folgt: „Die Formen der Entwürfe sind die Ichnographie, die Orthographie und die Szenographie. Aus der Ichnographie" — ἴχνος, Fußtapfe —, „die auf dem Gebrauche des Zirkels und Lineales in angemessenem Zusammenhange beruht, entnimmt man die Zeichnung der Formen auf dem Boden. Die Orthographie aber ist das aufrechte Bild der Stirnfläche, eine nach den Verhältnissen des geplanten Bauwerkes entworfene Zeichnung. Ebenso ist die Szenographie die Umrißzeichnung der Front und der zurückweichenden Seiten, wobei alle ihre (horizontalen) Linien einem Mittelpunkte entsprechen." Man sieht, sogar das Wesen des Fluchtpunktes ist unserem Architekten ebensowenig verschlossen, wie der Gegensatz zwischen Grundriß und Aufriß. Demzufolge ist die Behauptung nicht ungerechtfertigt, Vitruvius verdiene einen Platz in der Vorgeschichte der darstellenden Geometrie.

Vom Rhetor Quintilianus (35—95 n. Chr. nach wahrscheinlichstem Ansatze) erfuhren wir bereits, daß er einen landläufigen Irrtum über die Beziehungen zwischen Inhalt und Umfang einer Figur zu berichtigen bestrebt war (S. 61). Seine Argumentation verrät ein gutes Verständnis geometrischer Wahrheiten. Es ist sehr wohl möglich, daß ihn das Studium des Zenodor (S. 112) zu diesen dem Durchschnittsrömer gewiß unverständlichen Betrachtungen angeregt hat.

Im Alter von Quintilian kaum verschieden dürfte der agronomische Schriftsteller Lucius Junius Moderatus Columella gewesen sein, ein Spanier, dessen aus zwölf Büchern bestehendes Handbuch der Landwirtschaft (De re rustica) den Römern als das vollständigste Werk über diesen Gegenstand galt. Was es im Interesse der Sache über Feldmessung beibringt, bezeichnet der Autor selbst als Entlehnung aus guten Bezugsquellen. Die Aufgaben, welche er lösen läßt, bekräftigen diese Aussage, denn sie sind aus Schriften Heros hergeholt. Am auffallendsten zeigt sich dies bei der Regel für die Berechnung eines Kreisabschnittes aus Sehne und Sagitte.

Aus den nun folgenden Jahrhunderten ist nicht viel zu berichten. Für die Erhaltung einer gewissen Vertrautheit mit rechnerischen Operationen sorgte die Jurisprudenz; Erbteilungsfragen und die Lehre vom Interusurium nötigten gelegentlich dazu, auch über den ganz elementaren

Boden hinauszugehen. Um 150 n. Chr. soll Apulejus, allerdings nach Mitteilungen viel späteren Datums, die Arithmetik des Nicomachus (S. 136) ins Lateinische übersetzt und seine Version mit neuen Beispielen ausgestattet haben. Ein stereometrisches Fragment unbestimmbaren Alters, welches seit 1820 den Sprachforschern Stoff zur Diskussion gegeben hat, beweist wenigstens, daß auch in den Zeiten sinkender Kultur Einzelne sich den Sinn auch für Höheres bewahrt hatten. Aber erst im V. und VI. Jahrhundert stoßen wir auf eine Nachblüte lateinisch-mathematischer Literatur, aus der zwar sachlich nur wenig zu lernen, wohl aber manch Nützliches für den Historiker zu erholen ist.

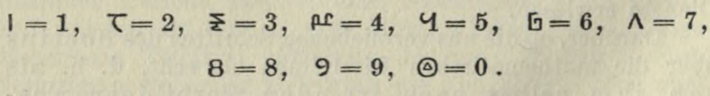
An der Spitze dieses Zeitraumes steht das „Somnium Scipionis", das um 400 entstandene kompilatorische Werk des Mahrobius. Ihm reiht sich an ein gelehrter Roman („De nuptiis Philologiae et Mercurii de septem artibus liberalibus"), die erste gelehrte Arbeit nach Varro (S. 138), in welcher die Gesamtwissenschaft in sieben Disziplinen zerschnitten wird. Von ihnen hat die Mathematik als Ganzes einen Löwenanteil zugewiesen erhalten. Die Arithmetik läßt den Autor als einen Verehrer pythagoreischer Reminiszenzen erkennen; Nicomachus war ihm nicht fremd, aber den feineren Erörterungen desselben hat Marcianus Capella, so hieß der polyhistorisch veranlagte Verfasser, keinen Geschmack abgewinnen können. Das Buch war eines der wenigen Dokumente älterer Wissenschaft, die sich in das Mittelalter gleich anfänglich hinübergerettet hatten, so daß es die beginnende Klostergelehrsamkeit nicht unerheblich beeinflußte. Kompilator im guten Sinne des Wortes war auch Magnus Aurelius Cassiodorius, von seiner Würde „Senator" zubenannt, der während der ostgotischen Periode Italiens eine bedeutende Rolle spielte und zuletzt als Mönch von Monte Cassino eine eifrige literarische Tätigkeit entfaltete, bis um 570 den in den Neunzigern stehenden Gelehrten der Tod abrief. Von verschiedenen Schriften interessiert uns nur seine Enzyklopädie („De artibus ac disciplinis liberalium literarum"), welche im ganzen die Anschauungen des Varro und Marcianus Capella sich zu eigen macht, aber doch einige Änderungen eintreten läßt. Die Siebenzahl muß schon der neu-platonischen Zahlenliebhabereien halber festgehalten werden, aber die einzelnen Wissenschaften sind jetzt in der folgenden Reihe angeordnet: Grammatik, Rhetorik, Dialektik, Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie. Diese Folge ist in den nächsten tausend Jahren, und teilweise noch länger, normativ geblieben. Was Cassiodorius vorträgt, bewegt sich wesentlich im Kreise von Definitionen, und zwar sucht er die griechischen Kunstwörter, so gut es gehen will, in seiner Muttersprache wiederzugeben. Von älteren Schriftstellern zitiert er Euclides, Archimedes, Apollonius, Ptolemaeus, Apulejus und ein paar andere, von den ihm zeitlich näherstehenden nur seinen Freund Boetius. Auch eine Osterrechnung — Computus paschalis oder, in mittelalterlicher Ausdrucksweise, Computus ecclesiasticus — hatte den Cassiodorius zum Verfasser.

Der Mann, den er als Übersetzer des Euclides hoch preist, war der letzte Vertreter römischer Wissenschaft im älteren Sinne, wie man ihn denn auch als „letzten Römer“ gefeiert hat, als letzten geistigen Vorkämpfer gegen die immer kraftvoller hereinbrechende Barbarei des Germanentums. Anicius Manlius Severinus Boetius war wahrscheinlich 481 geboren, erfreute sich, ganz wie Cassiodorius, längere Jahre des Vertrauens des Königs Theodorich und fiel 524, bei dem Fürsten verleumdet, einem Justizmorde zum Opfer. Als Übersetzer und als selbständiger philosophischer Denker hat er in der Tat die Sache des Römertums auf dem Gebiete, das sich nach dem Zusammensturze politischer und kriegerischer Macht allein noch dem Patrioten eröffnete, wacker hochgehalten. Zumal als Übersetzer hat er, wie u. a. aus einem noch erhaltenen Schreiben des Gotenkönigs erhellt, seinen Zeitgenossen große Dienste erwiesen.

Darüber, ob die uns verbliebenen Schriften des Boetius über die mathematischen Disziplinen als echt, d. h. als von ihm selbst nach fremden Vorbildern ausgearbeitet anzusehen sind, haben von jeher Meinungsverschiedenheiten bestanden. Für Astronomie und Musik liegt das ganz unverwerfliche Zeugnis des Cassiodorius vor, neben welches aber auch noch andere Belege gestellt werden können, während allerdings Arithmetik und

Geometrie direkt nur auf dem ersteren beruhen. Doch ist immerhin zu beachten, daß Gelehrte des IX. und X. Jahrhunderts die beiden umstrittenen Bücher selber als solche gekannt haben; aus eben dieser Zeit stammen die geretteten Handschriften der Arithmetik, der Musik, der Geometrie. Auch der Inhalt bietet nichts, was gegen die Autorschaft sprechen würde. Die Arithmetik lehnt sich ganz an Nicomachus an; die numeri primi, die numeri compositi, die numeri figurati sind seitdem in die lateinische Sprache übergegangen. Auch die Musik trägt in jeder Zeile den griechischen Stempel.

Weitaus am lebhaftesten wurde der Streit um das geometrische Werkchen geführt, dessen Authentizität Friedlein und Weißenborn gegen M. Cantor durch lange Jahre bestritten haben. In der Tat sind ja auch die Boetius-Manuskripte sehr verschieden, indem sie bald mehr, bald weniger Material aufweisen, und darin, daß das Meiste untergeschoben ist, kommen auch die Gegner überein, so daß sich eigentlich nur mit zwei Büchern jene bis in die jüngste Gegenwart hereinspielende Erörterung, die man als Boetiusfrage bezeichnen kann, zu beschäftigen hat. Das im engeren Sinne Geometrische würde eine so gründliche und mühselige Untersuchungskette nicht hervorgerufen haben, aber es wird gerade in dieser Schrift, deren Titel das nicht erwarten ließe, ein neuer Abacus (S. 51) als pythagoreische Tafel vorgeführt, auf welcher mit sogenannten Apices gerechnet worden sei. Das aber waren nicht mehr neutrale Marken, denen nur der freie Wille des Rechners einen bestimmten Wert beilegte, sondern darunter sind Rechenzeichen mit sehr charakteristischen Symbolen zu verstehen, die eine neue Art Ziffern darstellten. Im folgenden sind dieselben abgebildet:



Die Ähnlichkeit der meisten dieser Ziffern mit den uns geläufigen fiel, als man im XVIII. Jahrhundert des Boetius wieder eingedenk ward, derart auf, daß der Historiker Mannert sehr bald die arabisch-indischen Ziffern als eine pythagoreische Erfindung proklamierte (De numerorum, quos arabicos vocant, vera origine pythagorica, Altdorf 1801). Wir werden auf das damit berührte Problem später zu sprechen kommen müssen und führen nur noch kurz unsere Inhaltsübersicht zu Ende. Boetius, der auch einen gewissen Architas — ob wohl den Griechen Archytas (S. 70)? — als einen seiner Gewährsmänner anführt, beschreibt eine komplementäre Divisionsmethode, die gerade keinen römischen Eindruck macht, um sodann, zur Geometrie selbst zurücklenkend, zumal die Flächenmessung nach mehr oder weniger genauen, teilweise sogar schlechten Regeln zu lehren. Frontinus scheint von dem Verfasser, mag er nun Boetius oder ein anderer gewesen sein, am meisten benützt worden zu sein. Gewiß bleiben auch nach so tiefgreifender Untersuchung noch Unsicherheiten übrig, und wer eben z. B. jener Architas gewesen, wird immer eine offene Frage bleiben. Soviel aber steht fest: Kein innerer Anhaltspunkt dafür ist gegeben, daß nicht Boetius selbst der Vater dieser Geometrie sein könnte.

Auch für die Methodologie ist dieser Mann von weittragender Bedeutung gewesen. Er nämlich teilte, vielleicht durch Neuplatoniker angeregt, des Cassiodorius Siebenzahl der Wissenschaften noch in der Weise, daß er grundsätzlich die formellen von den realen Bildungsmitteln trennte. So schuf er eine Schablone von einer gewissen inneren Berechtigung:

Trivium	Grammatik Rhetorik Dialektik	Quadruvium (auch Quadrivium)	Arithmetik Musik (d. h. Intervallenlehre) Geometrie Astronomie

Noch in einzelnen Lehrbüchern des XVII. Jahrhunderts lassen sich die Spuren der vier Wege erkennen, von denen abzuweichen alle Stifts- und Klosterschulen des Mittelalters für eine pädagogische Sünde gehalten haben würden, mochten auch gelegentlich andere Gruppierungsversuche sich hervorwagen.

Mit Boetius schließt in der Hauptsache die Geschichte der römischen Mathematik ab. Einige in Chartres aufgefundene Bruchstücke arithmetischen und geometrischen Inhaltes — in einem erscheinen auch die Apices — stammen vielleicht gleicherweise aus dem VI. Jahrhundert; recht spät, weil schon ganz unverdautes Zeug mit richtigen Tatsachen mischend, ist ein Wolfenbütteler Kodex „De metiundis jugeribus“ anzusetzen. Ein bleiernes Zeitalter hielt jeden wissenschaftlichen Fortschritt, ja sogar ernsthafte Bestrebungen zur Bewahrung des Erworbenen in Schranken. Zum Schlusse aber möchten wir mit M. C. P. Schmidt auf den merkwürdigen Umstand hinweisen, daß Rom, obgleich es nie eine nationale Wissenschaft dieser Art besaß, auf die mathematische Kunstsprache den allernachhaltigsten Einfluß ausübte, nicht sowohl ausbildend zwar, aber doch vorbildend. Gerade die Arbeit der wissenschaftlich nicht hoch stehenden Spätlateiner fiel da ins Gewicht. Sind doch z. B. die zur gangbarsten Münze der Gegenwart gehörigen Ausdrücke rational und irrational erst durch Cassiodorius (S. 146) dem Sprachkörper einverleibt worden.

Kapitel IX.

Der Niedergang der griechischen Mathematik.

Einem so vollständigen Verfalle, wie die römische, konnte die griechische Mathematik nicht unterliegen, weil an sie eine Seite des freilich etwas dürftigen byzantinischen Geisteslebens wieder anknüpfte. Gleichwohl kann nicht geleugnet werden, daß von der Zeit des Ptolemaeus ab ein Niedergang sich bemerklich macht, der zwar nicht rasch, aber unaufhaltsam verlief. Nicht aufhalten konnte ihn sogar das Auftreten einzelner hervorragender Geister, von denen zwei, Pappus und Diophantus, einem Cartesius als Genies allerersten Ranges erschienen sind, so wenig erschlossen ihre Werke auch damals noch waren. Einzelne Lichtpunkte, so hell sie strahlen mögen, sind doch nicht imstande, eine allgemeine Dunkelheit zu erhellen. Und je weiter wir fortschreiten, um so entschiedener macht sich der Charakter eines Wissenschaftsbetriebes geltend, der epigonenhaft von den durch die Altvordern aufgehäuften Schätzen zehrt und auf Hervorbringung neuer Werte verzichtet.

Sextus Julius Africanus hatte zwar einen römischen Namen, schrieb aber in griechischer Sprache und gehört mithin in dieses Kapitel. Sein um 225 entstandenes Sammelwerk geht uns im ganzen nichts an, enthält aber brauchbare Notizen. Die von ihm gekennzeichnete, aber nicht als geistiges Eigentum beanspruchte Fackeltelegraphie läßt auf eine Vorahnung des Stellenwertbegriffes bei Zahlen schließen. Wollte ein Feldherr seinen weit entfernten Amts-

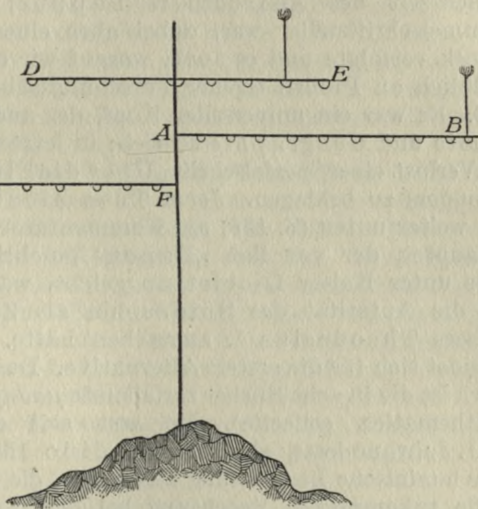


Fig. 23.

genossen eine größere Zahl, etwa die der zu erwartenden Feinde, mitteilen, so ließ er an einer von drei Stangen, welche horizontal an hohem Maste angebracht waren, Fackeln anbringen, welche nach einem vorher festgesetzten Schlüssel Zahlen ausdrücken sollten. Die Stange rechts bedeutete Hunderter, die mittlere Zehner, die links befindliche Einer, und an jedem Horizontalbalken waren Ringe zur Einsteckung von je 9 Fackeln, dem dritten Teile der Anzahl der griechischen Buchstaben entsprechend, angebracht, und selbstredend mußte von links nach rechts gerechnet werden. In Fig. 23 ist AB die Hunderter-, DE die Zehner-, CF die Einerstange, und so wird durch die hier gewählte Kombination der Zahlzeichen ϡπδ die Zahl 984 dargestellt. Bei anderer Gelegenheit werden geodätische Aufgaben abgehandelt, wie sie der Kriegsmann braucht (S. 143), und zwar dienen zu diesem Behufe ebenso die Dioptra (S. 124), wie auch ein Winkelhaken, der, in Verbindung mit Signalstangen, zum Abstecken rechter Winkel auf dem Felde gebraucht werden konnte.

Noch nicht sind die Verhandlungen zu Ende über die Lebenszeit des Alexandriners Pappus, der auch ein Sammelschriftsteller war, dabei aber einen weit höheren Zweck verfolgte und es auch, worauf wir oben anspielten, wahrlich an Proben eigener Forschungsarbeit nicht fehlen ließ. Er war ein universeller Kopf, der auch über Astronomie und Geographie schrieb; in letzterer Hinsicht ist der Verlust einer Spezialschrift „Über die Flüsse Libyens" besonders zu beklagen. Jener Theo Alexandrinus, der uns weiter unten (S. 158) als Kommentator begegnen wird, behauptet, der von ihm „Papos" geschriebene Gelehrte habe unter Kaiser Diocletian gelebt, während man ihn auf die Autorität des Suidas hin als Zeitgenossen des Kaisers Theodosius I. anzusehen hätte. Cantor entscheidet sich für die erstere Alternative. Das uns gebliebene Werk ist die in acht Bücher zerfallende *μαθηματικὴ συναγωγή* (mathematica collectio), die erst seit dem Ende des XVI. Jahrhunderts, als Commandino 1588 eine brauchbare lateinische Bearbeitung herausgab, die ihr in so hohem Maße zukommende Beachtung bei den Fachmännern zu finden begann. Eine Übersicht des Inhaltes gab schon Kästner in seinem bekannten Geschichtswerke, und unserer Zeit wurde die mustergültige Textausgabe (mit lateinischer Übersetzung) von Hultsch zum Geschenke gemacht. Was den gelehrten Sammler besonders fesselte, nahm er in großenteils selbständiger Redaktion und mit eigenen Zutaten in sein Werk auf, dessen einzelne Bestandteile wir jetzt wieder mit kurzen Worten schildern wollen. Freilich ist diese Schilderung keine vollständige, weil auch den besten Handschriften der Anfang fehlt.

1. Buch. Von ihm ist leider keine Spur erhalten.

2. Buch. Auch dieses ist nur sehr unvollständig vorhanden. Das gerettete Fragment hat die Multiplikation bei Apollonius (S. 106) zum Gegenstande.

3. Buch. Einer Besprechung des Gegensatzes zwischen Aufgabe und Lehrsatz folgt zuvörderst eine Darstellung der von Eratosthenes, Nicomedes, Hero und vom Autor selbst für das delische Problem ersonnenen Methoden, woran sich eine sorgfältige Behandlung der Lehre von den Mitteln (S. 58) anschließt. Eine umsichtige Prüfung aller Möglichkeiten, welche sich ergeben können, wenn man einen inneren Dreieckspunkt mit beliebigen Punkten auf den Seiten verbindet, stellt sich als Erweiterung eines euklidischen, weit einfacheren Satzes (lib. I, prop. 21) heraus. Endlich folgt noch die Einbeschreibung der fünf regulären Polyeder in die Kugel, indem von letzterer — und nicht, wie bei Euclid, von den gegebenen Körpern — ausgegangen wird.

4. Buch. Etwas bunt ist der Inhalt dieser Abteilung. Verschiedene Hilfssätze leiten über zu einer Lösung des apollonischen Taktionsproblemes (S. 105). Die zweite Hälfte gehört der höheren Geometrie an. Berücksichtigt sind die Spirale, die Konchoide mit ausdrücklicher Hervorhebung ihrer gestaltlichen Wandelungen, vor allem aber die Quadratrix (S. 62), deren hohe Verwendbarkeit für alle nur denkbaren Aufgaben von keinem früheren Geometer so klar erkannt worden war. Pappus gibt eine neue Erzeugung dieser Kurve, nachdem er zu dem Behufe vorher die Konstruktion der Schraubenfläche (plektoidischen Fläche) gelehrt hatte.

5. Buch. Hauptsächlich eine Ausdehnung der isoperimetrischen Sätze des Zenodorus (S. 112) auf Raumgebilde. Von den regulären Vielflächnern hat derjenige von größerer Eckenzahl bei gleicher Oberfläche auch den größeren Inhalt.

6. Buch. Um die große Astronomie des Ptolemaeus von ihren Vorgängerinnen zu unterscheiden, hatte sich etwa vom III. Jahrhundert an der Brauch herausgebildet, all das, was für das Vorstudium des Almagestes erwünscht erschien, als kleine Astronomie oder, richtiger gesagt, als kleinen Astronomen (*μικρὸς ἀστρονομούμενος*) zusammenzufassen. Pappus rechnet dahin die einschlägigen Schriften von Autolycus, Euclides, Aristarchus und Theodosius, vielleicht auch des Menelaus; weshalb Hypsicles (S. 113) und Geminus (S. 118) ausgeschlossen

sind, bleibt unentschieden. Wahrscheinlich kamen ihre Arbeiten dem Kommentator, der mit Umsicht und Geschick besonders die geometrischen Vorbereitungslehren bespricht, nicht wichtig genug vor. Eine kleine Betrachtung für sich bildet u. a. die Ellipse als perspektivische Abbildung des Kreises; ebenso eine Vorwegnahme des Guldinschen Kubierungssatzes.

7. Buch. Dessen Inhalt ist die geometrische Analysis (*τόπος ἀναλυόμενος*), wie sie in gewissen älteren Werken (Aristaeus, Euclides, Eratosthenes, Apollonius) zu finden war. Dieselben sollen durch die Wiedergabe empfohlen und in der Erinnerung der Nachwelt aufgefrischt, zugleich aber auch mit den wünschenswerten Erläuterungen versehen werden. Ein Lemma zur Berührungsaufgabe hat in allerdings erweiterter Form viel später als Ottajano-Problem (richtiger Giordano - Problem) einen gewissen Ruf erlangt: Einem Kreise soll ein Dreieck so einbeschrieben werden, daß dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen. Des Pappus Fassung ist insofern einfacher, als diese drei Punkte auf einer Geraden liegen sollen.

8. Buch. Schon der Ankündigung nach kommt hier die Statik zu ihrem Rechte. Abgehandelt werden Schwerpunkt, schiefe Ebene, Zahnräder u. dgl. Pappus beweist, daß, wie aus Heros Regeln folge, durch solche einfache Maschinen das archimedische Problem der Erdverrückung (S. 95) prinzipiell gelöst werden könne. Weiterhin hört der Zusammenhang zwischen den einzelnen Materien auf; es war eben das letzte Buch, welches noch vielerlei aufnehmen sollte. Bemerkt zu werden verdienen die Aufgabe, durch fünf gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, und die weitere, sieben reguläre Sechsecke unter gegebenen Bedingungen in einen Kreis zu zeichnen. Die Schraube ohne Ende macht den Beschluß.

Man wird nicht leugnen können, daß selten nur ein bedeutender Forscher die Resultate seines Denkens in so bescheidener Form der Öffentlichkeit — denn an diese dachte doch auch der Grieche — vorgelegt hat, wie eben Pappus. Seine Person verschwindet ganz hinter der Sache; man muß die eigenen namhaften Leistungen erst mühsam aus der Verbindung herausschälen, in welche sie mit anderen gebracht sind. Als erstklassig stellen wir noch in den Vordergrund: Die Komplanation eines spiralig begrenzten Stückes der Kugeloberfläche, eine approximative geometrische Kubikwurzelausziehung, endlich das historisch gewordene Pappus-Problem. Man hat beliebig viele gerade Linien und einen festen Punkt; durch diesen sollen n Strecken $a_1, a_2 \ldots a_p, a_{p+1} \ldots a_{n-1}, a_n$ unter bestimmten Winkeln so nach jenen Linien gezogen werden, daß das Verhältnis $a_1 a_2 \ldots a_p : a_{p+1} \ldots a_{n-1} a_n$ einen gegebenen Wert annimmt. Diese Forderung war dem Cartesius (S. 150) bekannt und spielte eine Rolle bei der Erfindung der analytischen Geometrie.

Gewaltig fallen gegen diesen Mathematiker alle seine Fachgenossen ab, die mit ihm um die Wende des III. Jahrhunderts und in dessen erster Hälfte gelebt haben. Es war die Zeit, in welcher okkultistische Spekulationen unter dem Deckmantel einer Wiedererweckung der von Pythagoras und Plato herrührenden philosophischen Doktrinen die Geister und Herzen gefangen zu nehmen anfingen; Neupythagoreismus und Neuplatonismus wurden die neuen Schlagworte, und wenngleich unter den Vertretern dieser Schulrichtungen unsere Wissenschaft schon aus geschichtlichen Gründen geachtet bleiben mußte, so geriet sie doch immer mehr auf Abwege. Magie und mystische Zahlenspielerei fanden immer mehr Liebhaber, und die dadurch charakterisierte Literatur weist nur wenig Körner unter der Spreu auf. Plotinus, Porphyrius und dessen Schüler Anatolius und Jamblichus sind Schriftsteller dieser Periode. Von des Anatolius Zahlenphilosophie (*περὶ δεκάδος καὶ τῶν ἐντὸς αὐτῆς ἀριθμῶν*) sind wir durch Heiberg, Tannery und Borghost genügend unterrichtet worden; sie weist in erkenntnistheoretischer Beziehung Anklänge an den jüdischen Hellenisten Philo Alexandrinus (I. Jahrhundert n. Chr.), in mathematischer solche an Theo Smyrnaeus (S. 136) auf, wenn nicht etwa die gerade hier in Betracht kommenden Stellen von dessen Plato-Kommentar nach Tannerys Meinung erst viel später eingefügt sein sollten, wodurch die Originalität des Anatolius gewinnen würde. Von Jamblichus'

Schriften ist ein beträchtlicher Bruchteil verloren gegangen, und die erhaltene, den Grundcharakter der ganzen Periode widerspiegelnde Zahlenmystik (*θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς*) entschädigt nicht für manchen gewiß empfindlichen Verlust. Überstanden hat die Fährlichkeiten der Jahrhunderte auch die kleinere Hälfte einer als Repertorium schätzbaren Sammlung der pythagoreischen Lehren (*συναγωγὴ τῶν πυθαγορικῶν δογμάτων*). Hier ist uns u. a. das alte Sätzchen des Thymaridas (S. 57) aufbewahrt, und nach Theo (S. 137) wird auch von Seiten- und Diametralzahlen gehandelt. Von anderen an sich richtigen, aber nichts weniger als wertvollen Identitäten, die mitgeteilt werden, brauchen wir nicht eigens Akt zu nehmen. Sehr gegen des Autors tiefere Einsicht spricht, daß er mit Euclid über den Primzahlcharakter der Zahl 2 hadern möchte. Dagegen mag für die Geschichte der mathematischen Didaktik angemerkt werden, daß er eine Zweiteilung der vier mathematischen Disziplinen — die in dieser Form hier noch vor Cassiodorius (S. 146) auftreten — nach Anzahl (*πλῆθος*) und Größe (*μέγεθος*) ins Werk setzt, so daß die erste Gruppe *ἀριθμητική* und *μουσική*, die zweite *γεωμετρία* und *σφαιρική* umschließt.

Gestreift mögen sein der Kirchenschriftsteller Hippolytus, der von Siebener- und Neunerprobe spricht, und dessen Werken, als doxographischer Sammlung, Diels wertvolle Angaben über altjonische Kosmologie entnehmen konnte, sowie der zwischen 350 und 400 lebende Chalcidius, der in seinem Kommentare zum platonischen „Timaeus" sich teilweise enge an Anatolius (S. 155) angeschlossen hat. Um diese Zeit sind nach verbreitetster Ansicht auch die arithmetischen Epigramme der Griechen der Mehrzahl nach entstanden, allein da dieselben die uns heute vorliegende Redaktion erst in der byzantinischen Ära empfangen haben, so ziehen wir es vor, auf sie erst im nächsten Abschnitte einzugehen. Der zweiten Halbscheide des IV. Jahrhunderts muß auch Diophant gutgeschrieben werden, dessen Stellung in der Geschichte eine so ungewöhnlich eigen-, ja einzigartige ist, daß wir uns vorbehalten zu sollen glauben, am Ende des Kapitels besonders auf sie einzugehen. Dieses Ende anzusetzen, ist, beiläufig bemerkt, einigermaßen unserer Willkür anheimgestellt. Denn der Übergang von der eigentlich griechischen zu der byzantinischen Wissenschaft vollzieht sich selbstverständlich nicht mit einem jähen Rucke, sondern allmählich, und ein ganz ausgezeichneter Punkt, an dem der Schnitt zu erfolgen hätte, ist nicht erkennbar. Doch scheint die Thronbesteigung des Kaisers Justinianus im Jahre 527 eine ganz gute Grenze abgeben zu können, denn unter seiner Regierung ist den Philosophenschulen von Athen und Alexandria das ohnehin nur noch schwach glimmende Lebenslichtlein für immer ausgeblasen worden. Als letzter Grieche in dem nunmehr festgelegten Sinne gilt uns der nun bald an die Reihe kommende Eutocius.

Noch dem IV. Jahrhundert haben allem Vermuten nach angehört Patricius, Serenus und Theo Alexandrinus. Der erstgenannte, fast gänzlich in Dunkel für uns gehüllt, soll von Eigenem ein paar geometrische Sätze den uns bekannten heronischen Sammlungen (S. 119) beigefügt haben. Sehr undeutlich war lange auch die Position des Serenus, der von Antissa stammen und ein vorchristlicher Geometer sein sollte, bis Heiberg seinen wahren Geburtsort in dem erst von Hadrian gegründeten Antinoia ermittelte, womit also eine erhebliche Altersherabsetzung verbunden war. Pappus, der vielgelehrte, scheint ihn nicht gekannt zu haben, und so hat er doch wohl erst nach diesem gelebt. Wir haben von Serenus zwei sich ergänzende Arbeiten Über den Kegelschnitt (*περὶ κώνου τομῆς*) und Über den Zylinderschnitt (*περὶ κυλίνδρου τομῆς*) erhalten. Die erstere will nicht viel besagen, denn sie bespricht bloß die Dreiecke, welche eine durch die Kegelspitze geführte Ebene aus dem Mantel herausschneidet; seine Vorläufer, meint er, hätten sich um diese Schnittfigur nicht gekümmert, aber sie hielten eine so einfache Sache eben nicht für geeignet zu umfänglichen Betrachtungen. Inhaltreicher ist die andere Abhandlung. Der moderne Mathematiker, dem der Kreiszylinder nur ein Kreiskegel mit unendlich großer Höhe ist, braucht nicht besonders bewiesen zu bekommen, daß ein schiefer Schnitt des Zylindermantels eine Ellipse ergibt, aber dem konkreten Denken der Alten wäre ein solcher Schluß unverständlich gewesen, und darum war es am Platze, daß

Serenus für diese Tatsache den direkten Beweis erbrachte. Eine Zwischenbemerkung zeigt, daß er, durch Menelaus (S. 127) angeregt, auch das Wesen eines harmonischen Punktequadrupels korrekt aufgefaßt hatte. Auch einen Kommentar zum Apollonius hatte Serenus gefertigt, von dem ein Stückchen in mehrere Handschriften des Theo Smyrnaeus (S. 137) übergegangen ist. Es gehört anscheinend zur Theorie der Exzenter (S. 116), denn es ergibt sich aus ihm unmittelbar die Notwendigkeit des Perigaeums und Apogaeums einer Planetenbahn.

Theo, von dem eine astronomische Beobachtung aus dem Jahre 365 konstatiert ist, war ein richtiger Kommentator und hat sich durch diese seine Tätigkeit, die auf Originalität keinen Anspruch erhob, das Vorliegende aber den Lesern mundgerecht zu machen wußte, den Dank späterer Zeiten gesichert. Sein Euklid-Kommentar ist, soweit er vorliegt, weit weniger bedeutsam als der zum ersten (rein mathematischen) Buche des Almagestes (S. 132). Hier werden uns die ausgerechneten Beispiele für Multiplikation, Division und Radizierung von Sexagesimalbrüchen (S. 18) vorgelegt, so daß wir uns ein unzweideutiges Bild davon zu machen befähigt werden, wie in früheren Zeiten das praktische Rechnen geübt wurde. Theo hat sich dabei an eine sonst nicht näher bekannte Anweisung gehalten, und dieser Umstand mag sein schriftstellerisches Verdienst etwas herabdrücken — an dem geschichtlichen Werte des ganzen wird dadurch nichts geändert. Wir nehmen am besten gleich den schwierigsten Fall in Angriff und zeigen, wie $\sqrt{4500^0}$ auf Grund der Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ näherungsweise ermittelt wurde. Theo beschreibt einem Quadrate $= 4500$ ein kleineres Quadrat $= 4489 = 67^2$ ein, indem er auf zwei zusammenstoßenden Seiten vom Schnittpunkte aus eine Strecke $= 67$ abträgt und das so bestimmte Quadrat ergänzt. Der übrig bleibende Gnomon (S. 59) ist gleich $11^0 = 660'$. Da b sehr klein ist, so kann ohne namhaften Fehler $(a+b)^2 - a^2 = 2ab$ gesetzt werden, und man hat $2 \cdot 67\,x = 134\,x = 660$, x fast genau $= 4$. Das neue Gesamtquadrat 4500 ist gleich $67^2 + 2 \cdot 4 \cdot 67 + 4^2$; der erste Summand stellt Grade, der zweite Minuten, der dritte Sekunden vor. So hat man denn, sozusagen im Geiste einer „Exhaustion" des gegebenen Quadrates, für eine erste Annäherung

$$4500^0 - (4489^0 + 8^0 + 56' + 16'') = 2^0 3' 44'' = 7424''.$$

Dies ist wiederum ein Gnomon, und aus der neuen Näherungsgleichung $(134' + 8'')\,y = 7424$ erschließt sich $y = 55''$. Mit erheblicher Genauigkeit darf sonach

$$\sqrt{4500^0} = 67^0 4' 55'' \text{ oder allgemein } \sqrt{4500} = 67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}$$

gesetzt werden. So weit hatte Ptolemaeus selber die Annäherung getrieben.

Eine Tochter Theos war die gelehrte, etwas unweibliche Hypatia, die trotz ihrer freundschaftlichen Beziehungen zu dem christlichen Bischofe Synesius, einem geachteten Schriftsteller über astronomische und physikalische Fragen, im Jahre 415 als Heidin von dem vermeintlich christlichen Pöbel der Stadt Alexandria ermordet wurde. Sie soll nach Suidas den Apollonius und Diophantus kommentiert haben. Trotz der durch dieses schauervolle Ereignis sattsam gekennzeichneten Hindernisse erhielt sich noch eine alexandrinische Schule, an der sich z. B. Ammonius eines gewissen Ansehens erfreute. Er fand den Satz: Numerus Combinationum von n Elementen zur Klasse 2 ohne Wiederholungen ist gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$. Als seine Schüler sind der durch sehr klare Einsichten in die physikalischen Grundgesetze bekannt gewordene Philosoph Johannes Philoponus und Damascius zu nennen, welch letzterer vielleicht als der Verfasser des sogenannten fünfzehnten euklidischen Buches (S. 75) anzusehen ist. Als er einen Ruf an die Athener Hochschule annahm, verlor diejenige von Alexandria, die dann nicht mehr erst auf die Vernichtung durch die Araber zu warten brauchte, ihren letzten bedeutenderen Mann.

Athen hatte sich als letzter Zufluchtsort des Neuplatonismus im V. und beginnenden VI. Jahrhundert noch einen gewissen Ruf erhalten. Es durfte sich auch in jenem Proclus (410—485), dem man als Schulleiter und Nachfolger des weitbekannten Syrianus den Beinamen Diadochus gegeben hatte, eines sehr tüchtigen Mathematikers rühmen, der mehrfach an Pappus (S. 152) erinnert und dies sein Vorbild zwar nicht an schöpferischer Kraft, aber doch an Sammelfleiß und geschichtlich-kritischer Sorgfalt einigermaßen erreicht. Seine meisten Kommentare und sein Lehrgang der Sphärik sind für uns belanglos, aber der Kommentar zum ersten Buche der *στοιχεῖα* (S. 76) ist und bleibt eine höchst verdienstliehe Leistung und läßt bedauern, daß von den Anmerkungen, die er auch zu anderen euklidischen Büchern abgefaßt haben muß, nahezu alles zeitlicher Vernichtung erliegen mußte. Wir hatten schon wiederholt auf das, was er für die Geschichte der Mathematik bietet (S. 55), dankbar Bezug zu nehmen, und dürfen auch seine Studien zur Parallelen- und Kurvenlehre als Zeugnisse eines selbständigen Geistes hinnehmen. So begegnet man auch bei ihm einem neuen geometrischen Orte: Gleiten die Endpunkte einer Strecke auf den Schenkeln eines rechten Winkels, so beschreibt ein beliebiger Punkt jener Strecke eine Ellipse.

Ein Zeitgenosse des Proclus war Domninus (nicht, wie man wohl auch liest, Damianus) von Larissa. Gehört auch, was wir von ihm als tüchtige Errungenschaft kennen, zunächst der Optik an, so will diese doch auch unter dem mathematischen Gesichtspunkte berücksichtigt sein. Er bewies nämlich das bekannte Spiegelungsgesetz durch eine Minimalbetrachtung: Den kürzesten Linienzug zwischen Auge und Objekt erhält man, wenn die von beiden Punkten nach der spiegelnden Ebene gezogenen Geraden mit jener gleiche Winkel bilden.

Unter den auf Proclus folgenden Schulvorständen waren Marinus, ein Samaritaner, und der aus Alexandria gebürtige Isidorus, mit starker Übertreibung „der Große" genannt, geachtete Philosophen. Auf unserem Gebiete betätigte sich nur Marinus durch eine Einführung in die euklidischen Data (S. 81), die jedoch nicht von hohem Verständnis zeugt. War doch, wie wir wissen, Euclides ein Synthetiker von reinstem Wasser, und der Scholist nennt seine Methode eine analytische! Schüler des Isidor war Damascius, und unter diesem starr-konservativen Vertreter des alten Götterglaubens fand jene Auswanderung der christenfeindlichen Gelehrten von Athen zum Neuperserkönige Chosroes statt, welche mit der freiwilligen Rückkehr in sehr tragikomischer Weise endete (533). Sein Schüler und späterer Lehrgenosse wiederum war Simplicius (S. 63), der Kommentator des Aristoteles und Euclides, dem die Geschichte für seine Angaben über ältere Quadraturversuche sehr zu Dank verbunden ist. Überhaupt war er, wie erst neuerdings wieder Rudio bekräftigte, durchaus kein unbedeutender Mensch und eines besseren Schicksales als desjenigen würdig, welches ihm Galilei zuteil werden ließ. Denn dessen „Dialoge über die wichtigsten Weltsysteme" legen einem gewissen Simplicius stets die ungeschicktesten Fragen und Antworten in den Mund.

Ob in unsere Periode auch der oben erwähnte Heronas und der Alexandriner Asclepius Trallianus gehören, ist nicht ganz sicher ausgemacht. Letzterer stammte aus derselben kleinasiatischen Stadt Tralles, wie der Architekt Anthemius, der zusammen mit Isidor von Milet den Bau der Sophienkirche in Byzanz leitete. Ersterer hat sich auch mit Brennspiegeln, sogar mit parabolischen, beschäftigt, und der andere Baumeister soll ein Instrument zu organischer Kurvenerzeugung (S. 111) erfunden haben. Als dieses Isidor Zögling aber galt stets Eutocius von Ascalon (S. 89), dessen reifes Mannesalter man sich etwa mit dem fünften und sechsten Jahrzehnt des VI. Jahrhunderts decken ließ. War er freilich, wofür nach Eneström Gründe sprechen, ein Schüler des Ammonius, so muß seine Blütezeit um mehrere Jahrzehnte früher angenommen werden, was aber auf die Bezeichnung als letzter echt griechischer Mathematiker um so weniger einen Einfluß üben dürfte, weil ja Anthemius und Isidor schon Bürger von Byzanz waren.

Seine Kommentare zu Archimedes und Apollonius sind aus verschiedenen Ursachen für uns wertvoll. Vor allem liefert er allein uns ausgerechnete Multiplikationsexempel in gewöhnlichen Zahlen und Brüchen. Nach Nesselmann sei ein solches hierher gesetzt:

$$\begin{array}{ll} ,\overline{\gamma\iota\gamma}\ \varkappa\ \delta' & 3013+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ ,\overline{\gamma\iota\gamma}\ \varkappa\ \delta' & 3013+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ \hline \overset{\text{ϡ}}{M}\ \overset{\gamma}{M}\ ,\vartheta\ ,\alpha\ \overline{\varphi\psi\nu} & 9000000+30000+9000+1500+750 \end{array}$$

$\overset{\gamma}{M}\ \overline{\varrho\lambda\varepsilon\beta}\ \varkappa$	$+ 30000 + 100 + 30 + 5 + 2 + \frac{1}{2}$
$,\vartheta\ \overline{\lambda\vartheta\alpha}\ \varkappa\ \varkappa\ \delta'$	$+ 9000 + 30 + 9 + 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4})$
$\overline{,\alpha\varphi\varsigma}\ \varkappa\ \delta'\ \eta'$	$+ 1500 + 5 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
$\overline{\psi\nu\gamma}\ \delta'\ \eta'\ \iota\varsigma'$	$+ 750 + 2 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}) + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$
$\overset{\text{ϡ}\eta}{M}\ \overline{,\beta\chi\pi\vartheta}\ \iota\varsigma'$	$9082689 + \frac{1}{16}$

Eutocius hat keinen Versuch gemacht, die archimedischen Quadratwurzeln (S. 89), die ihm sehr zu tun geben, direkt auszuwerten, sondern er läßt es bei mechanischer Verifizierung durch direkte Quadrierung bewenden. Allein gerade durch dieses recht plumpe Verfahren erhalten wir eine treffliche, sonst nirgends zu findende Gelegenheit, die Bildung und Addition der Teilprodukte mit den Mitteln der griechischen Zahlendarstellung zu verfolgen. Und auch sehr viele historische Notizen des Askaloniten haben großen Wert für uns.

Damit tritt an uns die Notwendigkeit heran, die oben (S. 156) für Diophant gegebene Zusage einzulösen. Nicht bloß die Lebenszeit des genialen Algebraikers, des einzigen des Griechentums, war lange ganz ungewiß; selbst hinsichtlich des Namens schwankte man zwischen den Lesarten Diophantes und Diophantus, welch letztere jetzt allseitig für die richtige gilt. Drei Schriften werden als seinem Geiste entsprossen aufgeführt: Die Porismen, die Polygonalzahlen und die am höchsten stehenden Arithmetischen Untersuchungen. Nur durch das letztere Werk (*ἀριϑμητικῶν βιβλία* $\overline{\iota\gamma}$) ist uns auch das erste bekannt, weil es mitunter auf die *πορίσματα* verweist. Sehr unähnlich sind die beiden anderen Werke, und sie beweisen uns, daß Diophant eine Doppelnatur besaß. Zwar werden auch die Vieleckszahlen in einer so allgemeinen Darstellung abgehandelt, daß sich der sonst nur Spezialfälle unterscheidende griechische Durchschnittsmathematiker mit dieser Methode nur schwer abgefunden haben dürfte, aber es ist doch das Beweisverfahren selbst echt hellenisch, indem die Thesis vorangestellt und von einem strengen synthetischen Beweise gefolgt wird. Dabei wird, gerade wie von Euclid, mit Strecken (S. 76) operiert, und einfache arithmetische Wahrheiten werden auf weiten Umwegen hergeleitet; welche Mühe verursacht beispielsweise das Lemma

$$8a(a+b)+(a-b)^2=(2a+a+b)^2\,!$$

Emanzipiert hat sich hier also Diophant von den üblichen Gedankengängen seiner Vorbilder noch gar nicht, wenn er auch ziemlich frei mit ihnen zu schalten versteht.

Ganz anders steht es mit den *ἀριθμητικά*, und das ist wohl auch der Grund gewesen, warum sie nur langsam und allmählich sich durchgerungen haben. Das Mittelalter wußte so gut wie nichts davon. Bemerkt wurde eine Handschrift des Werkes um 1460 durch Regiomontanus; die erste brauchbare Übersetzung lieferte 1571 der Deutsche Holtzmann, eine höchst anerkennenswerte griechische und lateinische Ausgabe 1621 der Franzose Bachet de Méziriac. Im XIX. Jahrhundert haben Poselger und O. Schulz viel für diesen Spätklassiker getan, wogegen Jacobis Kollationierung der Vatikan-Manuskripte leider nicht zu einer Ausgabe den Grund legen konnte. Was an Material verfügbar zu machen war, haben in unseren Tagen Wertheim und der unermüdliche P. Tannery (für seine Gesamtausgabe) verwertet. Von dreizehn Büchern der „Arithmetica" war in allen einschlägigen Kodizes zu lesen, allein nur sechs waren wirklich vorhanden, so daß ein schwerer Defekt vorzuliegen schien. Neuere Studien, vorab von Nesselmann, haben uns zu der Überzeugung verholfen, daß der Verlust nicht so schlimm ist, als man glauben mußte, und daß er sich mutmaßlich mehr auf die elementareren Teile des Ganzen bezieht. Das Bedeutsamste, was Diophant schrieb, hat glücklicherweise den Weg in unsere Zeit gefunden.

Wie schon hervorgehoben ward, ist der Titel der Schrift mit dem sonstigen Sprachgebrauche nicht im vollen Einklange, denn das Zahlentheoretische (S. 57) tritt, ohne gänzlich zu fehlen, sehr gegen das Algebraische in den Hintergrund. Diophant will Gleichungen lösen, bestimmte und unbestimmte. Das kann er nur, wenn er wenigstens eine unbekannte Größe als solche zu unterscheiden imstande ist, und da nun das ganze griechische Alphabet nebst ein paar Zugaben (S. 54) bereits für ganze

Zahlen vergeben war, so verblieb ihm einzig und allein das Schlußsigma ($x = \varsigma$). Dieses Symbol heißt ἀριθμός schlechtweg. Die Potenzen x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 werden durch die Zeichen $\delta^{\bar{v}}$ (δύναμις), $\kappa^{\bar{v}}$ (κύβος), $\delta\delta^{\bar{v}}$ (δυναμοδύναμις), $\delta\kappa^{\bar{v}}$ (δυναμόκυβος) und $\kappa\kappa^{\bar{v}}$ (κυβόκυβος) ausgedrückt. Höhere Exponenten zu markieren, lag kein Bedürfnis vor. An die Möglichkeit, eine größere Anzahl von Unbekannten einzuführen, war schon wegen des Mangels einer geeigneten Bezeichnung nicht zu denken, und so setzte der Autor seine ganze Virtuosität daran, mit einer einzigen Unbekannten zurechtzukommen. Für Addition (ὕπαρξις) gab es eine Operationsbezeichnung nicht, und man schrieb die zu summierenden Zahlen einfach nebeneinander. Dagegen hat Diophant für die Subtraktion (λεῖψις) das erste geschichtlich nachweisbare Operationszeichen eingeführt, den umgekehrten Buchstaben ψ. Auch eine Art Gleichheitszeichen ist schon da, denn wenn ι (der Anfangsbuchstabe von ἴσος, gleich) immer im nämlichen Sinne gebraucht wird, so ist das eben eine Symbolisierung. Es liegt somit, wie Cantor sagt, bereits eine hoch entwickelte Buchstabenrechnung vor, und unser Algebraiker kann Polynome ganz mühelos anschreiben. So wäre, um ein Beispiel anzuführen,

$$\begin{aligned} &\kappa\kappa^{\bar{v}}\,\bar{\beta}\;\delta\kappa^{\bar{v}}\,\bar{\gamma}\;\delta\delta^{\bar{v}}\,\bar{\varepsilon}\;\mu^{\tilde{o}}\,\bar{\alpha}\;\pitchfork\;\delta^{\bar{v}}\,\bar{\vartheta}\;\tilde{\varsigma}\,\overline{\iota\beta} \\ &\equiv 2x^6 + 3x^5 + 5x^4 + 1 - (9x^2 + 12x)\,. \end{aligned}$$

Das Subtraktionssymbol wird immer nur einmal geschrieben, so daß alles, was rechts davon steht, als durch eine Klammer eingeschlossen zu betrachten ist. Die von x freie Größe, in unserem Beispiele $\bar{\alpha} = 1$, wird durch das links von ihr stehende Erkennungszeichen $\mu^{\tilde{o}}$ (μονάς) signalisiert. Von der Bruchdarstellung hat schon (S. 50) gesprochen werden müssen. Natürlich darf Diophant aber auch Brüchen, die Verbindungen der Unbekannten enthalten, nicht aus dem Wege gehen; er versteht mit seinen unvollkommenen Mitteln sogar den Bruch

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

in verständlicher, natürlich aber nicht gerade flüssig lesbarer Weise zum Ausdruck zu bringen.

Nesselmann unterscheidet drei Entwicklungsstufen der Algebra. Die erste, die Wortalgebra, werden wir, da sie bei den Griechen zum mindesten keine klar erkennbare Rolle spielte, erst im XI. Kapitel kennen lernen; die dritte und letzte Etappe ist die uns geläufige. Diophant hat sich seine eigene, zweite Stufe gebildet. Noch sind die Worte, welche die vorzunehmenden Schritte anzugeben haben, nicht entbehrlich, aber die Zeichensprache wirkt doch schon in hohem Grade abkürzend mit. Schroffe Übergänge existieren nicht zwischen den drei Entwicklungsformen, die ja auch nicht chronologisch als solche zu erkennen sind, sofern Diophant dem ersten arabischen Algebraiker um fast ein halbes Jahrtausend vorangeht. Allein das Prinzip dieser Dreiteilung ist ein durchaus zutreffendes.

Methoden in unserem Sinne hat Diophant nicht gekannt oder wenigstens nicht in erkennbarer Weise angewandt; wir drücken uns absichtlich in dieser etwas unbestimmten Art aus, weil wir ja wissen, daß die Griechen (S. 96) nicht selten in ihren für ein größeres Publikum bestimmten Schriften eine ganz andere Form wählten, als es die war, in der sie ihre Gedanken während des Erfindungsaktes eingekleidet hatten. Wer aus ihm lernen wollte, wie man jede Gleichung zu behandeln habe, der würde sich schwer getäuscht sehen. Das auszeichnende Merkmal dieses Mannes ist es ja, daß er mit seinem Stoffe geradezu ringt und jedem Einzelfalle durch alle möglichen Kunstgriffe einen Punkt abzugewinnen sucht, an welchem er seinen Hebel ansetzen kann. Nur anregend, nicht aber durch Erteilen direkter Vorschriften vermochte Diophant zu wirken. Nur für die ganz einfachen, immer wiederkehrenden Normalformen besitzt auch er einen regelrecht arbeitenden Mechanismus.

Nicht, wie eine oberflächliche Bekanntschaft mit seinem Werke früher annehmen ließ, bloß reine, sondern auch gemischte quadratische Gleichungen weiß er systematisch zu behandeln. Um $ax^2 + bx = c$ aufzulösen, gibt er der Gleichung zunächst die Form $a^2x^2 + abx = ac$, woraus

$$ax = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + ac}, \qquad x = \frac{1}{a}\left(-\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + ac}\right)$$

folgt. Ganz evident sagt er, der gerne verschweigt, nicht, daß er es so gemacht habe, aber wahrscheinlich ist es nichtsdestoweniger so. Eine Doppelwurzel hat für ihn, der weder negative noch erst recht imaginäre Größen kennt, keinen Sinn, und nur dann wird eine zweifache Wurzel anerkannt, wenn zwei positive Zahlen sich ergeben. Der Diorismus (S. 70) fehlt auch hier nicht; wenn Diophant eine Möglichkeit, die Lösung zu erzielen, erkannt hat, so bemerkt er: Dieses ist ausführbar (*ἔστι δε τοῦτο πλασματικόν*). Von kubischen Gleichungen läßt sich nur ein einziges Beispiel auffinden: $(x-1)^3 = (x+1)^2 + 2$. Dieselbe ist dem Autor so leicht vorgekommen, daß er nur die Auflösung $x = 4$ hinschreibt (*ὅθεν ὁ ϛ εὑρίσκεται μ͂ο δ̄*). Da er gewohnt ist, alle positiven Glieder der Gleichung links vom *ι*, die negativen als nun gleichfalls positiv geworden rechts vom *ι* zu vereinigen, so hat er sofort:

$$x^3 + x = 4x^2 + 4\,, \quad x(x^2+1) = 4(x^2+1)\,, \quad x = 4\,.$$

Von den Wurzeln $\pm i$ kann keine Rede sein.

Der Schwerpunkt der *ἀριθμητικά* liegt in den unbestimmten Gleichungen, und doch finden sich in dem ganzen Werke nirgends diejenigen, welche unsere Elementarmathematik als diophantisch zu bezeichnen pflegt. Lineare unbestimmte Systeme fehlen, und auch im übrigen kommt es niemals auf ganzzahlige, sondern lediglich auf rationale Lösungen an. Es wird zu ermitteln gesucht, unter welchen Umständen solche für die Gleichung $ax^2 + bx + c = y^2$ möglich sind, und wie, wenn man ein Paar zusammengehöriger Werte besitzt, beliebige weitere Paare gefunden werden können. Auch doppelte Gleichungen, wie er sie nennt, zieht Diophant in Betracht, d. h. zwei Gleichungen mit drei Unbekannten: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = y^2$, $a_2x^2 + b_2x + c_2 = z^2$. Um ein Beispiel hierfür vorzubringen, wählen wir den einfacheren Fall $a_1 = a_2 = 0$ und damit das System $10x + 9 = y^2$, $5x + 4 = z^2$. Die Subtraktion liefert $5x + 5 = (y+z)(y-z)$. Es darf also $y + z = x + 1$, $y - z = 5$ gesetzt werden, und jetzt lassen sich y und z in x ausdrücken, indem durch Addieren und Subtrahieren $y = \frac{x}{2} + 3$, $z = \frac{x}{2} - 2$ resultiert. Wir gehen damit in eine der beiden vorgelegten Gleichungen ein und finden etwa

$$10x + 9 = \tfrac{1}{4}x^2 + 3x + 9\,, \quad x = 28\,,$$

womit $y = 17$, $z = 12$ ebenfalls gegeben sind. Unbedingte Verallgemeinerung läßt das Verfahren freilich nicht zu.

Zwei Beispiele beziehen sich auf die Gleichung

$$ax^2 + bx^3 + cx^2 + dx + e = y^2\,,$$

wobei a und e als quadratisch vorausgesetzt werden. Ebenso kann

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = y^3$$

nur dann direkt aufgelöst werden, wenn a oder d eine Kubikzahl ist. Diophant legt sich die Gleichung $8x^3 + x^2 = 8x + 1 + y^3$ vor, setzt $y = 2x - 1$ und führt jene in die neue Form über:

$$8x^3 + x^2 = 8x + 1 + 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1\,,\ x = \frac{14}{13},\ y = \frac{15}{13}.$$

Als ein drastischer Beleg für die Gewandtheit des Algebraikers möge noch die Behandlung der Aufgabe demonstriert sein: Die Zahl 20 soll in zwei Teile y und z so zerlegt werden, daß $y + x^2 = u^2$, $z + x^2 = v^2$ werde. In dieser unserer Formulierung wären drei Gleichungen mit vier Unbekannten gegeben, während das Original, wie wir (S. 163) wissen, mit einer einzigen Unbekannten auskommen muß. Es muß die Summe $u^2 + v^2 < 20$ sein, also könnte man $u = 2$, $v = 3$ setzen. Ferner ist $(u + \varsigma)^2 = 4 + 4\varsigma + \varsigma^2$, $(v + \varsigma)^2 = 9 + 6\varsigma + \varsigma^2$. Man braucht aber jetzt nur ς^2 wegzunehmen, um in $(4 + 4\varsigma)$ und $(9 + 6\varsigma)$ die Zahlen y und z, wie wir sie uns oben dachten, zu erhalten, und es ist zum Schlusse

$$4 + 4\varsigma + 9 + 6\varsigma = 20,\ 10\varsigma = 7,\ \varsigma = \frac{7}{10},\ y = \frac{66}{10},\ z = \frac{132}{10}.$$

Dieses Beispiel wurde von uns auch deshalb gewählt, um die Kühnheit zu veranschaulichen, mit welcher sich dieser Grieche, radikal wie in einer Zwangslage (S. 99) der sonst so korrekte Archimedes, grundsätzlich von den Schranken der mathematischen Denkweise seines Volkes emanzipiert, indem er rechnerisch Gebilde verschiedener Dimensionen zu einem Ganzen verbindet. Der Gedanke, ein Quadrat und eine Strecke zu addieren, würde einem Normalmathematiker nicht bloß ketzerisch erschienen, er würde ihm überhaupt nicht beigekommen sein.

So steht Diophantus isoliert, ja unverstanden, am Ausgange einer Periode, ohne zugleich zu einer anderen hinüberzuleiten. Erst die Araber zogen seine staunenswerte Leistung aus dem Schutte der Vergangenheit hervor, und der Neuzeit ist der Wert des Begründers der unbestimmten Analytik zu vollstem Bewußtsein gekommen. Erfreulich ist es auch, den schon der Dekadenz verfallenen Geist des Griechenvolkes in diesem Manne noch einmal im alten Glanze aufleuchten zu sehen.

Kapitel X.

Byzantinische Mathematik.

Ein frischer Zug geht durch keine der Wissenschaften, welche im oströmischen Reiche bis zu seiner Zerstörung im Jahre 1453 sich stets einer gewissen Pflege zu erfreuen hatten. Man war zufrieden, der Hüter überkommener Schätze sein und an der Erforschung und Erläuterung des von Altgriechenland überkommenen Schrifttums sich beteiligen zu können. Durch Allatius und Du Cange in früherer, durch Niebuhr, Gelzer und in hervorragendster Weise durch Krumbacher in neuerer Zeit sind wir mit der byzantinischen Gelehrtengeschichte so genau vertraut geworden, daß das Urteil, originelles Schaffen sei überhaupt nicht und am wenigsten auf unserem Gebiete die Sache der mittleren Griechen gewesen, ohne Furcht vor Widerlegung gefällt werden kann.

Ein Zeitgenosse des kriegerischen Kaisers Heraclius (610—641) war jener Stephanus, der als öffentlicher Lehrer (*οἰκουμενικὸς διδάσκαλος*) in Konstantinopel angestellt war und über Philosophie und Mathematik zu lesen hatte. Er repräsentiert auch nach Krumbacher den Übergang vom spezifisch griechischen zum byzantinischen Geistesleben. Vielleicht derselben Epoche gehört an das Rechenbuch von Achmîm, ein in dieser Koptenstadt aufgefundener Papyrus, dessen Verfasser, ähnlich wie sein dreitausend Jahre älterer Kollege Ahmes, viel mit Einheitsbrüchen (S. 26) rechnet und auch einige Regeln zu deren Darstellung liefert. So setzt er etwa, die bequemste Zerlegung aus der Reihe der möglichen Arten auswählend,

$$\frac{239}{6460} = \frac{1}{68} + \frac{1}{85} + \frac{1}{95}.$$

Der Nenner 6000 kommt hier, wie auch in einem Fragmente aus dem X. Jahrhundert, wiederholt vor, was mit der Münzwährung (1 *νόμισμα* in Gold = 6000 *λεπτά*) zusammenhängt. Aus der Mitte des IX. Jahrhunderts ist uns durch Heiberg ein Mathematiker Leo nachgewiesen worden, der dem Studium des Euclid ergeben war. Wieder ein Jahrhundert später nimmt Krumbacher die Zeit der Tätigkeit jener Feldmesser von Byzanz an, deren die Geschichte der Hero - Frage zu gedenken hatte, und denen wohl auch ein jüngerer Hero (S. 119) angehört hat.

Ebenso gehört zeitlich hierher der Enzyklopädist Michael Psellus, den seine Landsleute sehr hoch bewerteten, von dessen mathematischen Probeleistungen, falls sie ihm wirklich zuzusprechen sind, wir uns jedoch keine besonders große Vorstellung zu machen imstande sind. Die vier Disziplinen des Quadruviums (S. 149) soll er in selbständigen Lehrbüchern behandelt haben, aber die ihm beigelegte Astronomie ist sicherlich unecht. Die Arithmetik wiederholt spätgriechische Zahlendefinitionen, die Geometrie steht auf niedrigster Stufe. Spricht sie doch z. B. die Kreisfläche als geometrisches Mittel zwischen ein- und umbeschriebenem Quadrate an, so daß aus der Proportion

$$2r^2 : r^2\pi = r^2\pi : 4r^2 \quad \text{die Zahl} \quad \pi = \sqrt{8} < 3$$

sich berechnen würde, was ja noch weit hinter dem uralten $\pi = 3$ zurückbleibt. Einen Beweis dafür, daß Psellus sich auch mit Diophant befaßt habe, zog Tannery aus einem leider sehr spärlichen Inhalt darbietenden handschriftlichen Bruchstücke.

Äußerst dürftig sind die Anhaltspunkte für die nächsten beiden Jahrhunderte, was freilich angesichts der steten religiösen, bürgerlichen und kriegerischen Wirren — anno 1204 entstand das lateinische Kaisertum — nicht wundernehmen kann. Als einflußreichere Persönlichkeiten treten aus der Masse heraus Johannes Tzetzes (1110—1180?) wegen seiner astronomischen Schriftstellerei, Georg Pachymeres (1242—1310?), dessen Musik und Astronomie Vincent im Drucke herausgegeben hat, und Nicephorus Gregoras (1295—1360?), dessen Name in der Geschichte der Kalenderreform vorkommt. Noch bei Lebzeiten dieses Mannes, und vielleicht unter seiner Mitwirkung, vollzog sich ein kurzlebiger Aufschwung, der zwar in erster Linie der Sternkunde, in zweiter aber auch der übrigen Mathematik Vorteil gebracht hat. Useners Untersuchungen haben über diese Episode viel Licht verbreitet. Beigetragen hat zu dieser schwachen Renaissance der Umstand, daß sich an Stelle des vereinsamten Konstantinopel neue politische und damit auch geistige Zentren bildeten. Insbesondere war es das handelskräftige Trapezunt, welches auch eine innigere Berührung mit dem wissenschaftlich fortgeschrittenen mohammedanischen Osten ermöglichte. Die Perser konnten auf die kleinasiatischen Byzantiner sehr günstig einwirken.

So wurde bereits 1322 ein persisches astronomisches Werk von einem unbekannten Neugriechen seinem Volke zugänglich gemacht, dessen Verfasser unter dem sonderbaren Namen *Σάμψ μπουχαρής* erscheint, in Wirklichkeit aber Shamsaldîn von Buchara war. Persische Wissenschaft war auch das Element, in dem sich um 1300 Gregor Chioniades, um die Mitte des XIV. Säkulums Georg Chrysococces und etwas später sowohl Theodorus Meliteniotes wie auch der Mönch Isaac Argyrus bewegten. Die Angabe, daß letzterer über Feldmeßkunst geschrieben und den Euclid kommentiert habe, ist bei dem um die Geschichte der Mathematik hoch verdienten Montucla zu finden, ermangelt aber der urkundlichen Gewißheit.

Durch die Araber-Perser ließ sich zum Urquell, zu Ptolemaeus ein in der zweiten Hälfte des XIV. Jahrhunderts lebender Gelehrter, Nicolaus Cabasilas, hinleiten, der nachhaltig auf die kurze Zeit einwirkte, die dem Volke in seiner Eigenart noch zu durchleben vergönnt war. Als einer von den Byzantinern, die Mathematik auf Astronomie anzuwenden verstanden, ist der fast in allen Darstellungen mit Schweigen übergangene Georg Amirucius zu betrachten, dessen „Ergänzungen zur Geographie" (des Ptolemaeus) Johann Werner verbessert und zum Drucke befördert hat (Nürnberg 1514). Sein Verfahren sphärischer Distanzberechnung ist das des Albategnius (Kap. XII). Man trifft in dem Traktate die ptolemaeische Sehnentafel und, mit ihrer Hilfe berechnet, eine Tabelle der Längen der Parallelkreise, in Teilen des Äquators ausgedrückt, von Grad 10 bis Grad 63. Die fehlenden Zahlen hat Werner hinzugefügt. Auch sphärische Distanzberechnung wird gelehrt. Bei dieser Gelegenheit darf auch auf Tannerys Nachricht über die Proportionalteile bei den Byzantinern hingewiesen werden.

Ziemlich vereinzelt, nicht im unmittelbaren Zusammenhange mit der erwähnten Reformbewegung, stehen fünf Gelehrte, denen gegenüber wir den Vorteil haben, über ihre Arbeiten genauer unterrichtet zu sein. Es sind dies, wenn wir die Zeitfolge so gut wie möglich einhalten, Maximus Planudes (ungefähr 1260—1310), Manuel Moschopulus (Zeitgenosse des Kaisers Andronicus II., 1282—1328), Barlaam (gestorben 1348), Nicolaus Rhabdas von Smyrna (dessen schriftstellerische Wirksamkeit für das Jahr 1341 sich feststellen läßt) und Johannes Pediasimus, Galenus zubenannt (hoher kirchlicher Beamter unter Andronicus III., 1328—1341). Jeder dieser fünf Männer erheischt eine Besprechung für sich.

Der aus Kleinasien stammende Mönch Maximus Planudes hat ein Rechenbuch (*ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς*) geschrieben, dessen Zweck man nach Cantor als eine Anleitung zur Markenlegung kennzeichnen kann. Bei ihm begegnen wir zuerst, wenn wir die Apices (S. 148) nicht heranziehen, den Zahlzeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, wozu dann noch die „bei den Indern der Null gleichgeachtete Tziphra 0" hinzutritt. In Westeuropa war, wie sich zeigen wird, das dekadische System längst bekannt. Das Zahlenrechnen wird im wesentlichen so betrieben, wie es in älterer Zeit allgemein üblich war, z. B. auch an sechzigteiligen Brüchen (S. 18). Für die Quadratwurzelausziehung wird auf Theos Beispiel zurückgegriffen, indem nur der Autor, worauf er sich etwas zugute tut, 4500^0 in 16 200 000″ verwandelt. Daß von einem Mathematiker, dem eine gewisse Lehrgabe nicht abzusprechen ist, der aber eine an sich einfache Methode, wie die theonische, durch überflüssige Reduktionen verwickelter macht, keine Produktivität erwartet werden darf, ist natürlich. So hat denn auch sein von Holtzmann (S. 163) und Tannery der Presse übergebener Diophant-Kommentar nichts für ein tieferes Verständnis des angeblich erläuterten Werkes geleistet.

Der einzige Byzantiner, der uns das unverhoffte Schauspiel eigener Gedanken vor Augen führt, ist Moschopulus mit seiner Abhandlung über die magischen Quadrate. Gewiß, wir wissen, daß solche Zahlenfiguren den Chinesen (S. 37), den Griechen (S. 137) und, wovon später, auch den Arabern nicht unbekannt waren, aber nirgendwo zeigt sich die Spur einer Vorschrift zu ihrer Bildung, und plötzlich stehen vor uns mehrere sehr schöne Lösungen der einzelnen Teilprobleme. Es wird ein solches Quadrat von n^2 Zellen konstruiert für $n = 2p$ und für $n = 2(p+1)$; weitaus die eleganteste Regel aber bezieht sich auf den Fall $n = 2p+1$. Wir werden deren Wesen am besten ohne viele Worte klarstellen, wenn wir uns auf Fig. 24 beziehen. Auf jede Seite des Quadrates, welches (für $p = 4$) in $n^2 = 81$ Zellen geteilt ist, ist ein Terrassenbau von resp. $(2p-1)$, $(2p-3)$ . . . 3,1 Zellen aufgesetzt, und nun werden alle Quadratchen vom obersten an diagonal, wie hier geschehen, mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . . n^2 ausgefüllt. Nachdem dies geschehen, verschiebt man jedes Terrassengebäude parallel mit sich selbst so lange nach innen zu, bis jede vorher außen stehende Zahl in einen noch leeren Raum gekommen ist. So sind dann alle Zellen gefüllt, und für sämtliche Zeilen, Kolonnen und beide Diagonalen gilt die Tatsache: Die Summe aller dort befindlichen Zahlen ist gleich $\frac{n}{2}(n^2+1)$.

Nicht unerwähnt darf bleiben, daß auf das, was hier „Herumzählen im Kreise“ (*ἀνακυκλεῖν*) ohne Unterlage eines wirklichen Kreises genannt wird, unsere moderne zyklische Anordnung zurückgreift. Falls nicht ernstliche Gegengründe vorgebracht werden, hindert nichts, die Methoden des Moschopulus als dessen geistiges Eigentum gelten zu lassen.

Auch Barlaam war Mönch; er entstammte Kalabrien, in welcher süditalienischen Provinz noch heute griechische Gemeinden existieren. Man hat von ihm arithmetische Noten zum zweiten euklidischen Buche und eine zweimal (1592 und 1600) herausgegebene Logistik (S. 57). Neues ist in den

								1								
							2		10							
						3		11		19						
					4		12		20		28					
				5	54	13	62	21	70	29	78	37				
			6	46	14	63	22	71	30	79	38	6	46			
		7		15	55	23	72	31	80	39	7	47		55		
	8		16	56	24	64	32	81	40	8	48	16	56		64	
9		17		25	65	33	73	41	9	49	17	57		65		73
	18		26	66	34	74	42	1	50	18	58	26	66		74	
		27		35	75	43	2	51	10	59	27	67		75		
			36	76	44	3	52	11	60	19	68	36	76			
				45	4	53	12	61	20	69	28	77				
					54		62		70		78					
						63		71		79						
							72		80							
								81								

Fig. 24.

Produktionen seiner Feder nicht enthalten, aber die Mitwelt war von dem Nutzen seiner Arbeiten überzeugt. So stellt ihm der geistreiche Boccaccio ein sehr ehrenvolles Zeugnis aus.

Von Rhabdas, der auch den Beinamen Artabasdes führte, haben wir einen Lehrbrief über Arithmetik, der zwei bemerkenswerte Momente aufweist. Es wird nämlich die Näherungsformel (S. 89)

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$$

nicht bloß indirekt an Beispielen, sondern auch in direkter Fassung gelehrt, und einige Proportionsbeispiele sind der politischen Arithmetik gewidmet (*μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν*). Des weiteren gibt es von ihm eine Anweisung zum Fingerrechnen (*ἔκφρασις τοῦ δακτυλικοῦ μέτρου*), die uns zuerst etwas mehr von diesem uralten Brauche (S. 51) berichtet und deswegen von Roediger, Marre und Stoy näherer Betrachtung gewürdigt wurde.

Daß Pediasimus eine mehrfach interessante Geometrie verfaßt habe, wurde von Friedlein nachgewiesen; andere Abhandlungen, z. B. über das delische Problem (S. 64), kennen wir gar nicht. In ausgesprochenster Weise zeigt sich dieser Byzantiner von Hero beeinflußt. Was dieser an geometrischen Rechnungen seinen Schriften einverleibt hat, ist kaum verändert in diejenige des Pediasimus übergegangen.

Damit wäre unsere Überschau zu Ende geführt, wenn wir nicht (S. 156) die Verpflichtung übernommen hätten, in diesem Kapitel der Anthologie noch einige Beachtung angedeihen zu lassen. Ebenderselbe Maximus Planudes, mit dem wir soeben Bekanntschaft zu schließen hatten, knüpfte auch an an eine Arbeit, die von einem gewissen Constantinus Cephalas zu dem Zwecke, ältere griechische Rätselgedichte seiner Zeit mundgerecht zu machen, vierhundert Jahre früher unternommen worden war. Durch die Bemühungen beider Männer ist so eine Literaturgattung, der ja kein großer poetischer Wert beizumessen war, die aber den Historiker trotzdem gar nicht gleichgültig läßt, der Vergessenheit entrissen worden. Die arithmetischen Gedichte dieser Blumenlese stammen größtenteils aus den zwei ersten nachchristlichen Jahrhunderten; doch sind auch frühbyzantinische darunter, als deren Verfasser der sonst nicht näher bekannte Metrodorus bezeichnet wird (*προβλήματα ἀριθμητικὰ Μετροδόρου τὰ πλεῖστα*). Durchweg führt die große Mehrzahl auf lineare Gleichungen mit einer Unbekannten, und zwar wiegt die Normalform

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots\right) x + m = x$$

vor. In diese Klasse gehören auch die „Brunnenaufgaben“, deren eine verdeutscht also lautet: Von vier Springbrunnen braucht der erste zum Anfüllen einer Zisterne einen Tag, der zweite zwei Tage, der dritte drei Tage, der vierte vier Tage; wie lange dauert es, wenn alle vier gleichzeitig springen, bis die Füllung erfolgt ist. Eines der Epigramme sollte in eingehüllter Form Lebensdaten über Diophant enthalten; es wäre ihm zu entnehmen, daß der große Algebraiker $65^1/_3$ Jahre alt wurde. Im ganzen kann man diese arithmetische Anthologie als ein den Zeitcharakter tragendes Vorbild jener großen arithmetischen Beispielsammlungen betrachten, wie sie im XIX. Jahrhundert von Meyer Hirsch, Miles Bland und Bardey der lernenden Jugend in höchster Vollendung zur Verfügung gestellt worden sind, und so ist es vorzugsweise die Geschichte der mathematischen Pädagogik (S. 13), welche jener Interesse entgegenzubringen verpflichtet ist.

Nur eine einzige Aufgabe hebt sich als merkwürdiger aus der Fülle der übrigen heraus; das ist das altberühmte Problema bovinum des Archimedes (S. 85). Es war der auch als Literator groß dastehende Lessing, welcher 1773 dieses Gedicht aus einer seiner Wolfenbütteler Handschriften abdrucken ließ. Vom mathematischen Standpunkte aus haben Leiste, J. und K. L. Struve, sowie Nesselmann das Epigramm behandelt, welches, wenn echt, ein kostbares Denkmal der klassischen Periode darstellen würde, denn es trägt die Überschrift: „Ein Problem, welches Archimedes unter anderen Epigrammen aufgefunden hatte, und welches er in einem an Eratosthenes von Cyrene gerichteten Briefe den in Alexandria mit solchen Dingen sich beschäftigenden Gelehrten zuschickte.“ Gerade diese letztere Angabe kann nach dem, was wir jetzt wissen (S. 97), die Möglichkeit, daß der Syrakusaner wirklich der Verfasser gewesen sei, eher verstärken, denn daß dieser mit Eratosthenes korrespondierte, steht ja außer Zweifel. Und während die früheren Bearbeiter auch den Sinn des Gedichtchens für einen ziemlich abstrusen erklärten, sind in späteren Jahren Vincent, sowie Krummbiegel und Amthor, deren Monographie eine erschöpfende genannt werden muß, zu einem anderen Ergebnis gelangt. Wenn sogar Heiberg die Wahrscheinlichkeit, daß der angebliche Verfasser auch der wirkliche sei, für groß hält, so müssen wir den beiden Byzantinern, die uns das „Ochsenproblem“

zugänglich gemacht haben, für ihre erhaltende Tätigkeit Dank wissen.

Der Sache nach soll aus den Daten, welche die Texteinkleidung für die Mengen der weißen, schwarzen, gelben und scheckigen Exemplare beibringt, die Anzahl der die Insel Sizilien bevölkernden Stiere und Kühe berechnet werden. Dreiecks- und Quadratzahlen spielen in der Problemstellung ihre Rolle; die Schlußlösung ist identisch mit derjenigen der unbestimmten Gleichung

$$x^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot y^2 = 1 .$$

Die Lösung einer solchen Aufgabe ging kaum über die Kräfte eines Archimedes hinaus. Man darf also sehr wohl mit der Möglichkeit rechnen, daß durch byzantinischen Sammelfleiß uns auch eine wertvolle antike Reliquie, die dem Untergange geweiht schien, erhalten worden ist.

Kapitel XI.

Die Mathematik der Inder im Mittelalter.

Daß ein gewisses empirisch-mathematisches Wissen bei den Bewohnern Hindostans ein Alter besaß, welches man vor kurzem noch für höchst unwahrscheinlich erachtet haben würde, das ist durch neuere, ihrem Kerne nach oben charakterisierte Untersuchungen (S. 42) zur Gewißheit erhoben worden. Eine wissenschaftliche Mathematik, die ihre Fragen um ihrer selbst willen stellt und löst, war es nicht; eine solche hat sich erst sehr viel später ausgebildet. Auch ist, was wir positiv von diesem späteren Entwicklungsstadium wissen, noch sehr jugendlichen Alters. Man kannte zwar längst das dekadische System und führte es auf Indien als Vaterland zurück; verlassene und halb verfallene Sternwarten wiesen auf ehemaligen eifrigen Betrieb der Himmelsbeobachtung zurück; auch hatte man verbürgte Nachrichten, daß es nicht bloß bei der Beobachtung geblieben war, sondern daß sich mit dieser auch Berechnung verbunden hatte. Mit Erstaunen las man den Bericht des französischen Astronomen Le Gentil, der sich von 1761 bis 1769 an Ort und Stelle, hauptsächlich an der Koromandelküste, aufgehalten hatte und erzählte, daß die Brahminen die Dauer einer Finsternis nach einem wahrscheinlich nur eingelernten und kaum verstandenen Verfahren, aber mit geradezu überraschender Genauigkeit zu ermitteln verstünden. Es wurde schon (S. 43) vermerkt, daß die Bücher, aus denen die Priester ihre in gewisse Satzungen gefaßte Kunde schöpften, etwa im III., IV. und V. Jahrhundert unserer Zeitrechnung entstanden sein mögen. Namen der Verfasser werden, wie das bei heiligen Schriften üblich ist, nur sehr sparsam genannt; auch der für die Himmelskunde begeisterte König Salivagenam (I. Jahrhundert n. Chr.) ist keine historisch klare Figur. Zu bestimmten Anschauungen verhalf der neueren Wissenschaft der uns nicht unbekannte hohe Kolonialbeamte W. T. Colebrooke (S. 42), der 1816 mit einer Studie über altindische Kenntnis der Präzessionsbewegung hervortrat und nunmehr mit einer Reihe grundlegender Abhandlungen die Bahn eröffnete, auf welcher ihm zahlreiche andere Gelehrte — darunter auch einheimische — nachgefolgt sind. All das, was dieses Kapitel enthält, ist von Colebrooke im Keime geschaffen worden; von europäischen Mathematikern haben sich zuerst Playfair, Chasles und Arneth der so überreichlich dargebotenen neuen Stoffe bemächtigt.

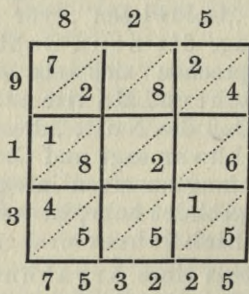
In der Hauptsache sind es nur drei Namen, in denen sich die mittelalterlich-indische Mathematik sozusagen konsolidiert hat, nämlich Âryabhatta, Brahmagupta und Bhâskara Âkârya (Bhâskara „der Gelehrte“). Ersterer, geboren 476, war wesentlich Astronom, so daß er arithmetischen und geometrischen Dingen nur ein subsidiäres Kapitel in seinem — von Rodet 1879 teilweise ins Französische übersetzten — Hauptwerke anzuweisen in der Lage war. Man nennt ihn unter den Vorläufern des Coppernicus, denn aus seinen eigenen Äußerungen und aus denen seines Kommentators Prithûdaca Swamîn Chaturveda geht hervor, daß er sich die vorher feste Erde von einem Luftwirbel von bestimmter Mächtigkeit umgeben dachte, welcher den Erdball in eine gleichförmige Umdrehungsbewegung versetzte. Auch der 598 geborene Brahmagupta war nicht ausschließlich Mathematiker, denn von seinem Werke „Das verbesserte System des

Brahma“ gehören unserem Thema nur der zwölfte und achtzehnte Abschnitt an. Hierzu hat Chaturveda ebenfalls Scholien geliefert. Ähnlich sind aus Bhâskaras „Krönung des Systemes“ nur zwei Kapitel für uns von Bedeutung, Lîlâvatî („die Reizende“) und Vîjaganita („Wurzelrechnung“) genannt. Sie fanden mehrere Kommentatoren im XV., XVI. und XVII. Jahrhundert, die aber nur zum Teile für uns eine gewisse Wichtigkeit haben; der bedeutendste scheint Ganeça gewesen zu sein. Würde man die drei großen Namen tilgen, so könnte zwar noch von indischem Zahlenrechnen und von indischer Astronomie, nicht jedoch von indischer Mathematik gesprochen werden. Denn das erst 1881 aufgefundene, auf Rinde geschriebene Rechenbuch von Bakshâli ist zwar wohl etwas älter als Âryabhatta, enthält aber bei aller Merkwürdigkeit des Inhaltes doch nicht genug, um für sich allein die klaffende Lücke, an die wir denken, ausfüllen zu können.

Und doch ist diese Mathematik von so auszeichnender Eigenart, daß die Beschäftigung mit ihr den höchsten Reiz gewähren muß. Insonderheit fesselt den Beschauer der grundsätzliche Gegensatz zwischen indischer und griechischer Denk- und Betrachtungsweise. Der Grieche ist — und die wenigen Ausnahmen bestätigen nur die Regel — strenger Synthetiker, der auf rigorose Beweisführung das größte Gewicht legt und so durchaus in räumlichen Vorstellungen lebt, daß er selbst arithmetische Dinge fast ausschließlich in ein geometrisches Gewand zu kleiden bestrebt ist. Umgekehrt liegt dem für alles Rechnerische ausnehmend befähigten Inder sehr wenig an der Demonstration; „siehe die Figur“ sagt er und läßt keine anderen als Anschauungsbeweise zu, während er für die imponierenden, aber oft unbehilflichen Anstrengungen eines Euclides und Archimedes, die Überzeugung von der Richtigkeit irgend eines Satzes förmlich einem Widerstrebenden aufzuzwingen, gar keinen Sinn haben konnte. Was also aus Griechenland herübergekommen ist (S. 127), betrifft rechnende Geometrie. Dieser gerade ward vollste Teilnahme entgegengebracht; man rechnete bei den Indern mit Strecken, Flächenräumen und Körperinhalten, wie mit Münzen und Gewichten. Und ihr wunderbar gefügtes Zahlensystem befähigte sie zu solchem Tun am allermeisten.

Wir, die wir von dieser Errungenschaft tagtäglich Gebrauch machen, müssen uns erst wieder durch Vergleichung mit anderen Systemen (Kap. I.) immer von neuem ins Gedächtnis zurückrufen lassen, welches Maß von Scharfsinn in der anscheinend so überaus einfachen und natürlichen Positionsarithmetik enthalten ist. Wie sich die Inder behalfen, ehe ihnen diese grundstürzende Neuerung in Fleisch und Blut übergegangen war, das meldet kein Geschichtschreiber. Schon im X. Jahrhundert erzählt der arabische Reiseschriftsteller Masûdî in seinen „Goldwiesen", vor langer Zeit wären nach indischer Aussage die neun Zahlzeichen erfunden worden; ähnlich sprechen sich ein etwa gleichzeitiger rabbinischer Bericht und Maximus Planudes (S. 171) etwas später aus. Daß die Null, „diese echt indische Erfindung", wie Brockhaus sagt und G. Oppert bestätigt, gleich von allem Anfang an einen integrierenden Bestandteil der Zahlenreihe gebildet habe, ist wenig wahrscheinlich; Erwähnung geschieht ihrer erst 738, also erst nach der Zeit des Auftretens eines Âryabhatta und Brahmagupta. Die Möglichkeit einer mesopotamischen Einwirkung ist oben (S. 47) gestreift worden. Ob eine noch gegenwärtig den Bewohnern der Insel Ceylon geläufige Zahlengraphik ein Rest grauer Vergangenheit ist, muß unentschieden bleiben; dafür zu sprechen scheint der Umstand, daß Âryabhatta sich eines nahe verwandten, noch immer etwas unbequemen Verfahrens befleißigt. Daß er gleichwohl auch der Positionsarithmetik für gewisse Aufgaben ihr Recht einräumt, würde dafür sprechen, daß diese um 500 n. Chr. noch eine jugendliche, nicht schon zur Beherrschung der Rechenkunst durchgedrungene Erfindung war. Bald jedoch hatte sie sich genügend eingebürgert, um alle früheren Konkurrenten endgültig zu verdrängen, und die für Ostasien typische Neigung, selbständige Wortbildungen für ungeheuer große Zahlen — z. B. für 10^{20} — zu schaffen, fand in der Schreibung der Zahlen kein Hindernis mehr. Es kann (S. 47) die Möglichkeit, daß bei der Ausbildung des Zehnersystemes babylonische Einflüsse im Spiele waren, nicht in Abrede gezogen werden, aber noch vor der Zusammenstellung der Sûrya Siddhânta scheint dieses System, die Null mit inbegriffen, den Weg nach dem Westen angetreten zu haben. Es auf dieser Reise zu begleiten, soll später unsere Pflicht sein.

Die vier Spezies ließen sich nunmehr ganz unverhältnismäßig leichter behandeln, als dies bei den Griechen und Römern der Fall war. Schon gibt es mehrere Multiplikationsmethoden, von denen insbesondere die blitzartige unsere Aufmerksamkeit auf sich lenkt. Was darunter zu verstehen, bekundet ohne besondere Beschreibung für die Gewinnung des Produktes $913 \cdot 825 = 753\,225$ das nachstehend abgebildete Schema:



Alle dem nämlichen Diagonalstreifen angehörige Ziffern werden addiert, nachdem man von rechts unten an, wo die Einer stehen, die Halbquadrate durch die Teilprodukte ausgefüllt hatte. Von der Division schweigen die Quellenschriften fast ganz; komplementäre Verfahrungsweisen gab es noch nicht. Hinsichtlich der Brüche stehen die Inder auf einem freieren Standpunkte als alle die bisher behandelten Völker, denn die Stammbrüche (S. 26) spielen bei ihnen keine Ausnahmerolle, und Brüche von der Form $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b}$ — einen Bruchstrich kennt man noch nicht — werden anstandslos den Rechnungsregeln unterzogen. Die Astronomen rechnen natürlich mit den wahrscheinlich aus Babylon überkommenen Sexagesimalbrüchen. Das vorhin (S. 178) erwähnte älteste Rechenbuch geht in der Konsequenz so weit, daß es die Zahl a stets durch den unechten Bruch $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{1}$ ausdrückt. Dieses wertvolle Dokument altindischen Könnens beweist auch, daß man schon um 300 n. Chr. einfache bestimmte und unbestimmte Gleichungen aufzulösen und im Einzelfalle arithmetische Progressionen zu summieren vermochte.

Brahmagupta hat bereits das Rechnen mit der Zahl Null, deren Berechtigung sich zu seiner Zeit vollständig durchgesetzt hatte, auf feste Regeln gebracht, doch ist ihm begreiflicherweise die Bedeutung des Quotienten 0 : 0 noch ganz unklar. Auch der so gewandte Bhâskara stand diesem Paradoxon, daß 0 überhaupt im Nenner auftreten könne, noch ganz ratlos gegenüber, während der Scholiast Krishna schon ganz zutreffend den Bruch $a:0$ als unendlich groß bezeichnet. Die Regeldetri war selbstverständlich bereits das unentbehrliche Handwerkszeug Âryabhattas, und Brahmagupta erweitert sie auf zusammengesetzte Proportionen. Ebenso kennen beide Mathematiker die Anfangsgründe der Zins- und Mischungsrechnung, und nicht minder sind ihnen, sowie dem Chaturveda (S. 177) die Reihen $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, $a + aq + aq^2 + \ldots$ nichts Fremdes. Die Unbekannte umschreibt der alte Astronom noch mit einem Realbegriffe (Kugeln), aber Brahmagupta besitzt für x schon das selbständige Wort yâvattâvat („so viel als"). Hier begegnet man auch der Gegenüberstellung positiver und negativer Zahlen, welche, gerade wie das unsere Elementarbücher tun, Besitz und Schuld zum Vergleiche beizieht. Es sind sogar diese Worte direkt in die algebraische Kunstsprache eingegangen, so daß dhana oder sva (Vermögen) eine Zahl mit dem Vorzeichen $+$, vina oder kohaya (Schuldbetrag) eine Zahl mit dem Vorzeichen $-$ bedeutet. Das Quadrat der Unbekannten heißt va, ihr Kubus gha, und konsequent weitere Zahlformen bildend, setzt der indische Algebraiker $x^6 =$ va va va, $x^9 =$ gha gha. Das Wort karana, in Abkürzung ka, kennzeichnet die irrationale Quadratwurzel. Sobald mehrere unbekannte Größen auftreten, bleibt zwar $x =$ yâvattâvat erhalten, aber y, z, u, v ... sind farbige Objekte und werden durch die ersten Silben der für Farben bestehenden Bezeichnungen (kâ = schwarz, nî = blau, pî = gelb, lo = rot, ha = grün) wiedergegeben. Ein Symbol für $=$, wie es Diophant in seinem ι (S. 164) besitzt, hat der Inder minder nötig, ohne daß ihm aber ein entsprechendes Wort fehlte, denn bei ihm steht einfach, was bei uns die eine Gleichungsseite ist, unter der anderen; da stets gleichviel Glieder vorhanden sein müssen, so würde etwa die Gleichung $4x^4 + 6x - 1 = 2x^3 + 7x^2 - 8x + 20$ gemischt indisch-modern so zu schreiben sein:

$$\begin{array}{l} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 6x - 1 \\ 0x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 8x + 20\,. \end{array}$$

Negative Wurzeln kommen bei den Indern nicht vor.

Die Art, Gleichungen anzusetzen und zu behandeln, hat einige Ähnlichkeit mit der diophantischen. Einfache bestimmte Systeme treten schon in früher Zeit hervor, so bei Âryabhatta ein Analogon des Epanthemes von Thymaridas (S. 58). Die unreine quadratische Gleichung erhält bei Brahmagupta völlig die dem Diophant (S. 165) eigentümliche, aber auch bei Hero erkennbare Auflösung; man multipliziert alle Glieder mit dem Koeffizienten von x^2 und findet so

$$ax^2 + bx = c\,, \quad a^2x^2 + abx = ac\,,$$

$$x = \frac{1}{a}\left(\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}\right).$$

Der Kommentator Cridhara lehrt statt mit a gleich mit $4a$ multiplizieren, um ein bruchfreies Radikal zu erhalten.

Die unbestimmte Analytik nähert sich, verglichen mit der diophantischen, viel mehr der unserigen, indem stets nicht bloß auf rationale (S. 166), sondern gleich auf ganzzahlige Lösungen ausgegangen wird. Und damit erscheint von vornherein eine Problemgattung in dem Vordergrund, die für Diophant nicht existierte und (S. 166) gar nicht existieren konnte, nämlich die Lösung linearer Systeme dieser Art. Sie drängten sich Âryabhatta auf, sie finden eine planmäßige Behandlung bei Brahmagupta, der sein Verfahren als das der Zerstäubung (kuttaka) den folgenden Generationen überlieferte. Wir kommen auf sie in Bälde zurück, wenn wir bei dem hervorragendsten Algebraiker angelangt sind. Auch den zweiten Grad berücksichtigt Brahmagupta, indem er von der

Normalform $axy + bx + cy = d$ zu der schwierigeren Normalform $ax^2 + by^2 = c$ fortschreitet.

Bhâskara steht in jeder Hinsicht auf seines älteren Landsmannes Schultern, geht aber über ihn fast in jeder einzelnen zur Diskussion gestellten Frage gar nicht unbeträchtlich hinaus. Das von der griechischen Anthologie zurückgebliebene Material (S. 175) ist in der Hauptsache auch das seinige, aber er bereichert es mit vielen neuen, hübsch ausgedachten Textaufgaben, die sich mehrfach auf die Gestalt

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{p} + \ldots + a = bx$$

bringen lassen. Das Technische bei der Auswertung der Gleichungen vom zweiten Grade ist in der Lîlâvatî (S. 178) unverändert geblieben, aber die mathematische Auffassung hat in diesem Werke eine höhere Stufe erreicht, denn nunmehr wird betont, daß zwei Wurzeln vorhanden sein können. Natürlich haben sie praktischen Wert nur dann, wenn sie beide positiv ausfallen; die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl (S. 126) wird als unmöglich abgelehnt. Bhâskara kennt auch das sogenannte surdische Binom

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)};$$

so kann er, das zehnte euklidische Buch hinter sich lassend, die Quadratwurzel aus einer Summe von Quadratwurzeln auf eine Summe solcher Irrationalitäten zurückführen und irrationale Bruchnenner rational machen. Vor der Kubikwurzelausziehung nicht zurückscheuend, läßt er sich auch auf solche Gleichungen dritten Grades ein, welche ein Kunstgriff entweder quadratisch oder rein kubisch zu machen gestattet. „In diesem Falle bedarf es des Scharfsinnes“, bemerkt der Autor mit naiver, aber nicht unberechtigter Genugtuung. Die seit ältester Zeit für die Griechen charakteristischen Spekulationen über bestimmte Zahlformen hatten für die an sich gewiß nicht weniger spekulativ gearteten, diesmal aber nüchterneren Inder wenig Anziehungskraft; Âryabhatta berechnet nur einmal die Summe der Trigonalzahlen, um die Anzahl der gleichen, in ein dreieckiges Schema einzupassenden Kugeln zu finden.

Die von Brahmagupta (S. 177) mit diesem Namen belegte Zerstäubungsmethode zur Auflösung der Gleichung $ax \pm by = c$ bringt sein Nachfolger zur höchsten Entfaltung. Ohne den Algorithmus zur Verfügung zu haben, verfährt er ganz ebenso, wie wir es gegenwärtig machen, um einen Quotienten in einen Kettenbruch zu entwickeln. Ein Beispiel wird dies am besten klarstellen. Aus $100x + 90 = 63y$ — dies ist die übliche Normalform, eine unbekannte Größe wird isoliert — ergibt sich $100 = 63q_1 + r_1$; $q_1 = 1$, $r_1 = 37$. Weiter ist $63 = 37q_2 + r_2$; $q_2 = 1$, $r_2 = 26$. Man fahre so im Dividieren fort, um zu

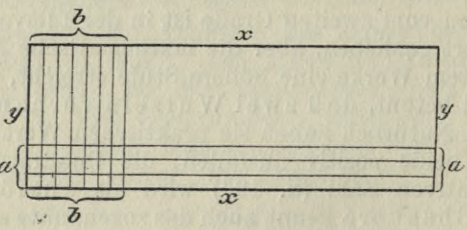


Fig. 25.

erhalten: $q_3 = 1$, $r_3 = 11$; $q_4 = 2$, $r_4 = 4$; $q_5 = 2$, $r_5 = 3$; $q_6 = 1$, $r_6 = 1$; $q_7 = 3$, $r_7 = 0$. Das liefert durch Rückwärtseinsetzen die Identitäten $1 \cdot 90 + 0 = 90$, $2 \cdot 90 + 90 = 270$, $2 \cdot 270 + 90 = 630$, $1 \cdot 630 + 270 = 900$, $1 \cdot 900 + 630 = 1530$, $1 \cdot 1530 + 900 = 2430$. Es ist aber auch $x = 1530 - 24 \cdot 63 = 18$, $y = 2430 - 24 \cdot 100 = 30$, und wirklich hat man zum Schlusse $1800 + 90 = 1890 = 63 \cdot 30$ als einfachste Lösung der Aufgabe.

Sehr hübsch ist die Behandlung der Gleichung $ax + by + c = xy$, und zwar wird da eine geometrische Veranschaulichung nutzbar gemacht, die ausnahmsweise ganz griechisch anmutet. Man denke sich (Fig. 25) aus den Strecken, deren Maßzahlen x und y sind, das Rechteck xy verzeichnet und trage von einem Eckpunkte ab auf zwei zusammenstoßenden Seiten x und y Strecken von den Maßzahlen a und b ab; ergänzt man die so angedeuteten Rechtecke, so bleibt ein Rechteck rechts oben übrig, dessen Fläche $xy - ax - by + ab$ ist. Mithin hat man auch

$$(x - b)(y - a) = ab + c.$$

Man zerlegt, so oft es angeht, die rechtsstehende Größe in zwei Faktoren m und n und bekommt alle möglichen Lösungen in der Form

$$x = m + b, \quad y = n + a$$

ausgedrückt. Hier haben natürlich nur ganze Zahlen Wert.

Mit gutem Grunde nennt Hankel jene zyklische Methode, die Bhâscara zur Lösung der Gleichung $ay^2 + 1 = x^2$ in ganzen Zahlen ersonnen hat, „das Feinste, was in der Zahlenlehre vor Lagrange geleistet worden ist", indem er zugleich hervorhebt, daß von den zwei durch diesen Meister der Neuzeit zum gleichen Zwecke angegebenen Methoden die eine sich nur in der äußeren Form von der indischen unterscheidet. Diese Gleichung, die wir infolge einer eigentümlich falschen, wenn auch historisch erklärlichen Gedankenverbindung nach einem britischen Mathematiker Pell benennen, ist uns bislang nur in einem speziellen Falle bei Theo Smyrnaeus entgegengetreten. Bhâscara hat sich durch einfaches Probieren eine Identität $aq^2 + s = p^2$ verschafft, indem er zur Vereinfachung s tunlichst klein wählte. Weiter sucht er eine ganze Zahl r von der Art auf, daß auch $q' = (p + qr) : s$ ganzzahlig wird, und wiederum soll $(r^2 - a)$ möglichst klein ausfallen. Jetzt ist auch $s' = (r^2 - a) : s$ eine ganze Zahl, und ebenso $p' = (pq' - 1) : q$, so daß jetzt eine neue Gleichung vom selben Typus, wie die ursprüngliche, angeschrieben werden kann: $aq'^2 + s' = p'^2$. Diese wird nach der gleichen Regel behandelt, und immer so fortfahrend, muß man auf eine Gleichung $aq^{(n)2} + s^{(n)} = p^{(n)2}$ geführt werden, in welcher $s^{(n)} = \pm 1$ oder $= \pm 2$ wird. Wie man im ersteren Falle weiterzugehen habe, war bereits vorher gezeigt worden. Für $s^{(n)} = \pm 1$ liefert das Wurzelpaar $x = p^{(n)}$, $y = q^{(n)}$ unverzüglich ein zweites $y = 2p^{(n)}q^{(n)}$, $x = p^{(n)2} + aq^{(n)2}$, und so geht es beliebig weiter. Wenn dagegen $s^{(n)} = \pm 2$ den Schlußpunkt bildet, so sind $y = 2p^{(n)}q^{(n)}$, $x = p^{(n)2} + aq^{(n)2}$ die Lösungen der Gleichung $a\eta^2 + 4 = \xi^2$. Jede der hier vorkommenden Zahlen $a\eta^2$, 4, ξ^2 ist ein Vielfaches von 4, und so ist das Wurzelpaar diesmal durch

$p^{(n)}q^{(n)}$ und $\frac{1}{2}(p^{(n)2} + a\,q^{(n)2})$ gegeben. Auf die Normalform $ay^2 + 1 = x^2$ versteht nun der indische Mathematiker mit größter Findigkeit alle Probleme vom zweiten Grade zu reduzieren.

Gerade dieser Punkt ist es, welcher Diophant und Bhâscara scharf unterscheidet, gewiß nicht zum Nachteile des letzteren. Ersterer besitzt nicht nur, von den allereinfachsten Fällen natürlich abgesehen, keine allgemeinen Methoden, sondern er hat höchst wahrscheinlich nicht einmal deren Mangel als eine Störung bei seiner Arbeit empfunden, die für seine Zwecke flott genug vonstatten ging. Dem Sonderfalle die Sonderlösung abzugewinnen, ist sein einziges Trachten, während dem Inder stets das hohe Ziel eines generellen, alle Möglichkeiten umfassenden Verfahrens vorschwebt. Dieses Ziel hat er, soweit die drei sehr oft wiederkehrenden Gleichungstypen

$$ax + by = c\,, \qquad xy + ax + by = c\,, \qquad x^2 = ay^2 + 1$$

in Frage kommen, in einer Vollständigkeit und zugleich mit so viel Eleganz erreicht, daß wir vor seinem Genie, welches von Âryabhatta und Brahmagupta doch eigentlich nur Anregungen erhalten haben konnte, nur die höchste Achtung bekunden müssen. Er war der geborene Zahlentheoretiker, und man geht auch nicht zu weit, wenn man ihm mit Cantor ein klares Verständnis für quadratische und kubische Reste zuschreibt.

Der arithmetische Sinn war von jeher das den Inder auszeichnende Moment. Dafür ist auch dann die Anekdote vom Brahminen Sissa, dem angeblichen Erfinder des Schachspieles, bezeichnend, wenn sie nicht historisch sein sollte, denn sie trägt eben doch echt indisches Kolorit. Jener Mann forderte bekanntlich für das erste Feld 1 Weizenkorn, für das zweite 2, für das dritte 2^2, für das vierte 2^3 . . . für das vierundsechzigste 2^{63} Körner, so daß von diesen in Summe $(2^{64} - 1)$ herauskamen — eine Zahl, deren gigantische Größe den uns bekannten Neigungen (S. 179) des Volkes zusagen mußte. Vom Schachbrette war der Weg nicht weit zu den wiederholt (S. 37, 41, 137) genannten Zauberquadraten, die allerdings erst ziemlich spät in den Schriften der Kommentatoren auch wirklich erörtert werden. Aus Indien bezog Indochina den einen Teil seiner Bildungselemente, weshalb es keine Verwunderung erregen kann, daß gegen Ende des XVII. Jahrhunderts der französische Reisende Laloubère die Gelehrten Siams nach altbewährter Regel magische Quadrate von ungerader und, was schwieriger, auch gerader Zellenzahl konstruieren sah.

Die Geometrie der Sulba-Sûtras, die zum Teile in altersgraue Vorzeit hinaufragen, zum Teile aber den Übergang von der halbmythischen Priestermathematik zu selbständig-mathematischer Produktion sich vollziehen sahen, hat uns in Kap. IV beschäftigt. Umformung von Quadraten und Verwandlung von Quadraten in Kreise oder umgekehrt waren die wichtigsten Aufgaben, die im Interesse der gottesdienstlichen Gebräuche Erledigung heischten; Reihen aus Stammbrüchen bildeten ein viel verwendetes Hilfsmittel der Rechnung. Auf enge begrenztem Gebiete entfaltet sich ein nicht verächtlicher Scharfsinn, aber der Gedanke, eine Wissenschaft der Geometrie zu schaffen, ist den Kultusschriftstellern nicht gekommen. Auch Âryabhatta ist davon unberührt geblieben; er kennt zwar den sehr genauen Näherungswert $\pi = 62832 : 20000 = 3{,}1416$, haut aber in seinen stereometrischen Regeln zur Berechnung des Kubikinhaltes von Tetraëder und Kugel so stark über die Schnur, daß man an seiner Eignung zum Protagonisten der indischen Mathematik irre werden möchte. Seine Anweisung, Flächen durch Zerlegung in Vierecke auszumessen, ist die altägyptische (S. 34). Hervorragend als Astronom, geschickt als Arithmetiker ist Âryabhatta nur ein ganz mittelmäßiger Geometer gewesen.

Dieses Bild ändert sich mit einem Schlage beim Auftreten Brahmaguptas, dessen oft schwierigen Text aufzuklären neben Colebrooke besonders Chasles sich sehr große Mühe kosten ließ. Zwar läßt auch er die ungenaue Näherungsformel $\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$, die wir wiederholt (S. 34, 126) zu bemerken hatten, noch passieren, aber er verschweigt nicht, daß damit nur eine rohe Annäherung erzielt werde. Gleich darauf gibt er für „das Viereck" die Formel (F = Inhalt)

$$F=\tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Dieser Satz ist richtig für das Kreisviereck, welches also der Inder vor Augen gehabt haben mußte. In merkwürdiger Übereinstimmung mit Hero (S. 120) zeigt er dann, wie man im Dreieck ABC die Höhensegmente

$$s_a = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c}, \quad s_b = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{c}$$

finden kann, um sodann zur Berechnung der Höhe h_c den pythagoreischen Lehrsatz $\left(h_c = \sqrt{a^2 - s_a^2} = \sqrt{b^2 - s_b^2}\right)$ anzuwenden. Auch sonst sind Analogien zwischen Hero und Brahmagupta in regelmäßiger Folge nachzuweisen, wie denn sogar die Terminologie solche hervortreten läßt. Für π wird dem Leser die Wahl gelassen zwischen dem primitiveren Werte 3 (S. 22) und dem besseren $\sqrt{10} = 3,16$. Auf letzteren sind wir noch nicht geführt worden und können ihn also wohl nur für einheimisch halten. Von den mancherlei Deutungsversuchen, die man für dieses Zahlenrätsel angestellt hat, möchte vielleicht Curtzes Vorschlag der plausibelste sein. Danach würde (dasÄhnlichkeitszeichen in bekannter Weise gebraucht)

$$\pi = \frac{22}{7} = \frac{22}{3} \cdot \frac{3}{7} \sim \frac{3}{7}\sqrt{54} = \sqrt{\frac{486}{49}} \sim \sqrt{\frac{490}{49}} = \sqrt{10}$$

sein. $\sqrt{54} \sim \frac{22}{3}$ kommt bei Hero vor. An dieses Vorbild gemahnt auch die Höhenmessung mittels des Schattens. Von den stereometrischen Sätzen ist die Ausrechnung der abgekürzten quadratischen Pyramide hervorzuheben. Es wird die richtige Formel aufgestellt und gezeigt, wie man aus ihr ohne namhaften Fehler eine viel kürzere für den Gebrauch des Praktikers herleiten kann.

Noch nicht als jeder Unklarheit entkleidet kann Brahmaguptas Viereckslehre gelten. Seine Inhaltsformel ist erwähntermaßen nur für Sehnenvierecke korrekt, und man wird also, wenn man nicht an einen bloßen Irrtum denkt, nicht umhin können, zu glauben, daß lediglich diese Form den Betrachtungen zugrunde gelegt ward. Wird ja doch auch ausdrücklich der Umkreisradius für ein solches Viereck zu berechnen gelehrt! Nicht minder ist die Regel vorhanden, Vierecke dieser Art von ganzzahligen Seiten und Diagonalen herzustellen, zu welchem Ende vier rechtwinklige Dreiecke jeweils mit entsprechenden Katheten zusammengesetzt werden. In diesem Falle bestehen z. B. die Proportionen

$$48 : 20 = 36 : 15 = 12 : 5, \qquad 48 : 36 = 20 : 15 = 4 : 3;$$

faßt man die spitzen Dreieckswinkel als Peripheriewinkel auf, so liegt am Tage, daß sich um das Viereck mit den Seiten 52, 25, 39, 60 ein Kreis beschreiben läßt. Auch solche Zusammensetzungen konnte der Inder, wenn man einen Zusammenhang überhaupt zulassen will, von Hero lernen.

Als Arithmetiker war, wie wir ohne jedes Schwanken zu konstatieren hatten, Bhâskara seinem Vorläufer Brahmagupta weit überlegen. Auf geometrischem Gebiete kann das nicht behauptet werden, eher sogar das Gegenteil. Die Lehre vom Kreisviereck, schon zuvor auf nicht ganz festen Füßen stehend, hat sich jetzt ganz verflüchtigt; neue Sachen finden sich nur vereinzelt vor. Dahin gehören, obwohl der Autor auch mit dem Zahlenverhältnis des Âryabhatta nicht unbekannt ist, die Werte

$$\pi = \frac{22}{7}, \qquad \pi = \frac{754}{240} \backsim 3{,}1417\,.$$

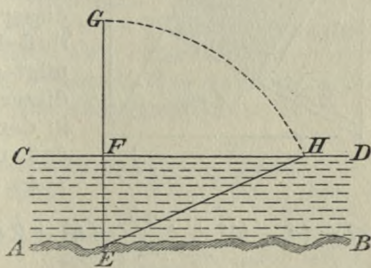


Fig. 26.

Vom pythagoreischen Lehrsatze wird manch hübsche Anwendung gemacht, z. B. die folgende: Auf dem Grunde AB (Fig. 26) wächst ein Baum in E, von dem ein Stück FG über die Wasserfläche CD emporragt. Der Wind dreht denselben, während er geradlinig bleibt, so unter das Wasser, daß dieses von der Baumspitze in H erreicht wird. Man hat $FG = a$ und $FH = b$ gemessen; welches ist die Gesamthöhe $EG = x$? Das Dreieck EFH liefert

$$x^2 = b^2 + (x - a)^2\,, \quad x^2 = b^2 + x^2 - 2ax + a^2\,, \quad x = \frac{a^2 + b^2}{2a}\,.$$

An den Römer Nipsus fühlt man sich erinnert bei der Lösung der beiden Aufgaben, die drei Seiten a, b und c (Hypotenuse) eines rechtwinkligen Dreieckes zu finden, wenn $s = a + b + c$ und zugleich entweder $p_1^2 = ab$ oder $p_2^3 = abc$ gegeben ist. Im ersteren Falle folgt sehr rasch

$$(s-c)^2 = c^2 - 2p_1^2, \quad s^2 - 2cs + c^2 = c^2 - 2p_1^2, \quad c = \frac{s^2 + 2p_1^2}{2s}$$

ganz ähnlich, wie vorhin. Im anderen Falle dagegen erhält man aus den drei Bedingungsgleichungen

$$a + b + c = s\,, \qquad a^2 + b^2 = c^2\,, \qquad abc = p_2^3$$

die quadratische Gleichung für die Hypotenuse

$$c^2 = \frac{s}{2}c + \frac{p_2^3}{2s}\,.$$

Für den Pythagoreer selbst werden zwei Beweise gegeben, deren einer in der Schulmathematik längst Bürgerrecht erhalten hat, der andere es zu erhalten verdiente. Jener ist der bekannte Proportionenbeweis, der die zwei ähnlichen, durch Ziehen der Höhe entstehenden Dreiecke verwendet; dieser ist ein unmittelbarer Ausfluß der Fig. 27. Bhâskara genügt es (S. 178), zum Anblicke dieser Figur aufzufordern, und in der Tat springt in die Augen, daß, da das schraffierte Quadrat $= (a-b)^2$ ist,

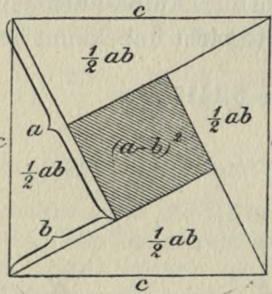


Fig. 27.

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2} = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

sein muß. Dieses Anschauungsmittel muß altorientalischer Besitz sein, denn er tritt uns niemals bei den westlichen Nationen, wohl aber lange vor dem XII. Jahrhundert bei den Arabern entgegen.

Diese Übersicht mag ausreichen, um die Wertbestimmung Bhâskaras gegen Brahmagupta versuchen zu können. Letzterer ist auch hier der gewandte, um

Ausflüchte niemals verlegene indische Mathematiker, der mit einem Minimum von Hilfsmitteln auch verwickeltere geometrische Fragen zu beantworten weiß und auch die Anschauung als kräftiges Beweismittel verwertet. In der Theorie des Sehnenviereckes von Brahmagupta dagegen und in seiner Bildung beliebig vieler rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen, resp. ganzzahligen Seiten verkennt man nicht die Spuren geometrischer Originalität. Zu höherer Blüte freilich konnte sich diese auf dem dafür wenig günstigen Boden Hindostans nicht entwickeln.

Die indische Trigonometrie, welche zum Schlusse an die Reihe kommt, weist nicht allzuviel Neues, wohl aber einen fundamentalen Fortschritt auf, nämlich die Ersetzung der Sehnen- durch die Sinusrechnung. Auf dieser beruht bereits das große astronomische Werk, dessen Kap. IV ausführliche Erwähnung zu tun hatte, aber die in ihm enthaltenen versifizierten Vorschriften geben keinen Aufschluß über den Erfindungsprozeß. Einigermaßen hilft Âryabhatta aus, dem man entnimmt, daß die Inder — hierin ebenso, wie die Griechen (S. 20), Schüler der Babylonier — den Kreis in $360^0 = 21600'$ teilten und als kleinsten Rechnungssinus (kramadiyâ, „geraden Sinus") denjenigen von $3^0 45' = 225'$ wählten. Ptolemaeus, der bis zu $\frac{1}{2}^0$ herabstieg, hatte, wie wir uns erinnern (S. 133), weit höhere Anforderungen an die Genauigkeit gestellt. Nach v. Braunmühl reproduzieren wir nachstehend das Anfangsstück der altindischen Sinustabelle:

Bogen		Indische Sinus				Wahre	Sinus	Sinus in
in Graden u. Minuten	in Minuten	in Min.	I. Diff.	II. Diff.	in Teilen des Radius	Werte in Minuten	versus	Hundertzwanzigsteln des Halbmessers
3° 45′	225′	225′	224		0,065445	224,84′	7′	7′ 51″
7 30	450	449	222	— 2	0,130599	448,72	29	15 40
11 15	675	671	219	— 3	0,195172	607,67	66	23 25
15 00	900	890	215	— 4	0,258871	889,76	117	31 04
18 45	1125	1105	210	— 5	0,321408	1105,03	182	38 34
22 30	1350	1315			0,382489	1315,57	261	45 56

Indisch ist in ihr auch der Sinusversus (utkramadiyâ); die Bemerkungen des modernen Nachprüfers lassen eine recht wackere Bedachtnahme auf Richtigkeit der einzelnen Zahlen wahrnehmen. Wie die Tafel zustande kam, soll uns eine Regel der Sûrya-Siddhânta lehren; es ist zunächst $\alpha = \sin\alpha = 225$ und nachmals

$$\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha + \left[\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha - \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right]$$

gesetzt worden. Allein Davis ist der Meinung, dieser schöne Satz sei erst viel später aus den Zahlenreihen der Tabelle herausgelesen worden, und der ursprüngliche Weg sei ein ganz anderer gewesen. Sucht man ihn zu rekonstruieren, so macht sich wieder die ganze Ungleichartigkeit hellenischer und indischer Denkweise geltend. Die griechischen μοῖραι (Kreisumfang) und τμήματα (Durchmesser) haben gar nichts miteinander gemein, können als krummlinige und geradlinige Linienstücke gar kein gemeinsames Maß haben; die indischen Astronomen ihrerseits berechnen mit Hilfe der Näherung $\pi = 3{,}1416$ (S. 132) aus der Peripherie den Halbmesser in Kreisteilen $= 3438'$ und finden geometrisch $\sin 30^0 = 1719'$, $\sin 60^0 = 2978'$, $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2}$, woraus dann von neuem $\sin 22^0\,30'$ entfloß. Die beiden bekannten Relationen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,, \qquad \sin^2\alpha + \sin^2\operatorname{vers}\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

leisten sodann alles, was man zur Anfertigung der Tabelle brauchte. Die Notwendigkeit, die an und für sich ja viel zu große konstante Differenz von $225'$ zu wählen, lag nach Woepcke in dem Zwange begründet, sich auf Winkelhalbierung zu beschränken. Unterhalb von $225'$ wären sämtliche Sinusse innerhalb der nun einmal gegebenen Genauigkeitsgrenzen den Bogen gleich geworden, es war also nicht mehr zu erreichen. Übrigens besitzen wir auch eine weit genauere Berechnung, die Bhâskara in seinem erst jüngst von Wilkinson herausgegebenen Werke Siddhânta-Çiromâni mitteilt. Er hat sich $\sin 1^0 \backsim 60'$ verschafft und gibt dann dem ihm bekannten Additionstheoreme der Sinus folgende Form:

$$\sin(\alpha \pm 1^0) = \sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{6569} \pm \frac{10\cos\alpha}{573}\,.$$

Soweit die indische Goniometrie, die aber auch schon den Zusammenhang zwischen Funktion und Bogen in Betracht zog und z. B. folgende, freilich nicht sehr genaue Relation zur Verfügung hatte:

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) : \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

Was die Berechnung der Dreiecke anlangt, so können angesichts der rein astronomischen Einkleidung der ganzen Disziplin nur sphärische in Betracht kommen. Es war eine glückliche Idee v. Braunmühls, die Regeln des Surya - Siddhânta mit denjenigen in Beziehung zu setzen, welche die Konstruktion des griechischen Analemmas (S. 117) ermöglichten. Dort war ja, wie mit hoher Wahrscheinlichkeit angenommen werden darf, bereits der Sinus zu finden, den ja auch die Griechen in Händen hatten und sich zu ihrem Schaden durch die Chorde entwinden ließen; unter Betrachtung jener Normalfigur der Hauptkreise der Himmelskugel, welche auch jetzt noch dem Anfänger alle Aufgaben der mathematischen Geographie durch Konstruktionen in der Ebene zu ersetzen erlaubt, kann der Nachweis geführt werden, daß durch Projektion auf gewisse Hauptkreise alle überhaupt vorkommenden Formeln erhalten werden konnten. Man blieb sogar nicht beim rechtwinkligen Kugeldreieck stehen, sondern wandte eine gewisse Orthogonalprojektion an, aus welcher sich ohne weiters der Kosinussatz in seiner gewöhnlichen Fassung herauslesen läßt. Ptolemaeus muß wohl in späterer Zeit auch den Hindus bekannt worden sein; in neuester Zeit hat man dafür einen sprachlichen Beleg ausfindig machen wollen. Der Astronom Jagannatha, „Hofpandit" des Königs Jai Singh, hat im Jahre 1651 sehr gute Polhöhebestimmungen ausgeführt und dabei den „Aber Khas des Yavanalandes" als ein Hilfsmittel für seine Arbeit angeführt. Dieses sonst sinnlose Wort hat man sich als Verketzerung von Almagest (S. 133) zurechtgelegt. Jedenfalls steht die indische Trigonometrie auf einem von der Grundlage der ptolemäischen ganz verschiedenen Boden.

So dürfen wir über den Gesamtinhalt der indischen Mathematik zu einem abschließenden Urteile gelangen, und dieses würde lauten: Vielfach beeinflußt durch chaldäische Vorbilder, auch keineswegs frei von griechischem Importe, hat sich unsere Wissenschaft in dem Tieflande zwischen Indus und Ganges doch in der Hauptsache selbständig zu einem stattlichen Gebäude erhoben. Sehr viele nirgendwo sonst zu entdeckende Sätze, Probleme und vor allem Methoden tragen unverkennbar den Stempel indischen Geistes. Ohne Zweifel ist nicht der gesamte Parallelismus, den es zwischen indischer und spätgriechischer — heronischer — Geometrie aufzudecken gelang, ein Spiel des Zufalles, aber gerade bei zwei so grundverschiedenen Nationen darf doch auch dem Völkergedanken, der spontanen Entstehung verwandter Vorstellungsreihen an distanten Orten (S. 7), sein Recht nicht verweigert werden. Ganz ohne Bedenken dürfen wir hingegen die Wirkung des Übertragungsprinzipes ins Auge fassen, wenn wir nunmehr von den Indern zu deren westlichen Nachbarn fortschreiten.

Kapitel XII.

Die ältere arabische Periode.

Zu den staunenswertesten Erscheinungen im Völkerleben gehört ohne Frage der Eintritt der Araber in die Reihe der Kulturnationen. Bis ins VII. Jahrhundert ohne höhere Kultur und fast ohne Geschichte in den losesten Verbänden dahinlebend, entfalten diese Nomadenstämme unter der Einwirkung einer auf das höchste gesteigerten Religionsbegeisterung auf einmal eine sieghafte Gewalt, welche in kurzer Frist viele mächtige angrenzende Reiche vor den Heeren der Wüstenbewohner in den Staub sinken läßt, und wiederum sind noch nicht zwei Jahrhunderte vergangen, da beginnt unter arabischen Händen für die meisten damals bestehenden Wissenschaften eine Epoche der Wiederauferstehung. Binnen kurzem gab es tüchtige Gelehrte in allen arabischer Herrschaft unterstehenden Ländern, und auf die Übersetzer und Kommentatoren folgten auch Forscher, die mit dem ihnen anvertrauten Pfande zu wuchern verstanden. Es ist ja wahr, diese mohammedanischen Schriftsteller waren nur zum allerwenigsten Teile Araber von der Halbinsel; in ungleich größerer Anzahl finden wir unter ihnen Syrer, Mesopotamier, Perser, Turanier, Ägypter, sonstige Nordafrikaner und Spanier, zuletzt in spärlicher Anzahl auch Türken und indische Muselmänner. Aber sie alle stimmten in der Religion, in der sozialen Kultur, vor allen anderen Dingen endlich in der Sprache überein, wie sich denn diese, die für den Orient mindestens die gleiche Bedeutung, wie die lateinische für den Westen besaß, als das festeste Bindemittel für alle islamitischen Völker durch lange Jahre erwiesen hat und teilweise noch bis zum heutigen Tage erweist. So darf man also mit bestem Rechte auch von einer arabischen Mathematik sprechen. Was man in Europa von dieser wußte, blieb lange Zeit recht geringfügig, denn vereinte Kenntnis der Mathematik und der orientalischen Sprachen war immer ein seltenes Vorkommnis. Im XIX. Jahrhundert ist nach dieser Seite hin durch Sédillot, Wüstenfeld, Woepcke, Steinschneider, Hochheim, Suter, E. Wiedemann, Nallino u. a. außerordentlich viel geleistet worden. Eine erste zusammenfassende Monographie darüber lieferte 1873 H. Hankel.

Eine scharfe Trennung in eine ältere und in eine neuere Zeit läßt sich in diesem Falle so wenig, wie in manchem anderen, exakt durchführen. Immerhin mag das Jahr 1100 als eine Grenze angesehen werden, deren zeitliche Bedeutung durch den Umstand noch erhöht wird, daß ihr zugleich auch eine räumliche Bedeutung nicht fehlt. In den ersten Jahrhunderten überwiegen unter den Mathematikern nach Zahl und Ansehen die Asiaten; nach 1100 beginnen die Afrikaner in den Vordergrund zu treten. Auch das ist selbstredend nur bedingt zu nehmen; war doch im XIII. Jahrhundert noch ein Perser der Stolz des ganzen Islams! Aber die Vorherrschaft geht mehr und mehr auf Ägypten, das Maghreb (Nordwestafrika) und die Khalifate der Pyrenäischen Halbinsel über. Darum kann doch die für dieses und das folgende Kapitel maßgebend gewesene Teilung den Anspruch auf Sachgemäßheit erheben.

In der Natur der Sache liegt es, daß die Gelehrten, deren wir zu gedenken haben, nicht ausschließlich Moslemin gewesen sind. Dank der von Mohammeds Religion mit seltenen Ausnahmen geübten Toleranz finden sich in ihren Reihen auch Andersgläubige vor, besonders christliche Nestorianer und Hebräer. Diese letzteren Angehörigen eines über ungeheure Flächen verstreuten Volksstammes behandeln wir so, wie es ihre Wohnorte erfordern. So werden uns Juden in fast allen noch folgenden Kapiteln begegnen.

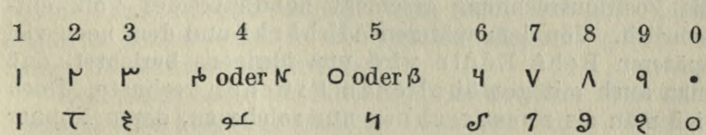
Diejenige Dynastie, welche es beinahe von Anfang an für eine edle Pflicht erachtete, die Wissenschaft nach Kräften zu fördern, war die der in Damaskus residierenden Omaijaden. Der Khalife Abd Almelik (684—705) hatte einen christlichen Schatzmeister, und dieser konnte trotz der Glaubensverschiedenheit seinem Sohne Johannes, Damascius genannt, dem eindringende Bekanntschaft mit Pythagoras, Euclides und Diophantus nachgerühmt wurde, eine treffliche Erziehung angedeihen lassen. Weit energischer griffen, als der Herrschersitz nach Bagdad verlegt worden war, die hervorragenden Regenten Almansûr (754—795), Hârûn Al Raschid (786—809; Freund seines Zeitgenossen Karls des Großen) und Almamûn (813—833) ein. Mit allen Mitteln erwarb man griechische Manuskripte und mit ihnen sprachlich geschickte Männer, die eine Übersetzung zu bewerkstelligen und die Erklärung dazu zu liefern geschickt erschienen. Solchergestalt hat man schon frühzeitig die wichtigsten antiken Mathematiker den Arabern zugänglich gemacht. Aber auch aus dem alten Pehlewî der Neuperser und aus dem Sanskrit der Inder gingen die darin abgefaßten Schriften in das Arabische über. Das uns wohl bekannte astronomische Werk Surya Siddahnta (S. 43, 191) nahm in seiner neuen Gestalt den Namen Sindhind an; schon gegen das Ende des VIII. Jahrhunderts hat man es in Bagdad gekannt, und um 820 lag es in arabischer, von sachkundigster Hand angefertigter Übertragung vor, nachdem schon ein paar Jahrzehnte zuvor astronomische Tafeln auf Grund desselben entstanden waren. Nicht sehr lange freilich konnte es als beste Quelle der Belehrung gelten, denn schon unter Hârûn Al Raschîds Regimente trug dessen erster Minister auch für die Inkorporierung des Hauptwerkes Sorge, welches eben damals auch den, wie uns bekannt, etwas mißbräuchlichen Titel Almagest

(S. 133) empfing. Bald folgte Euclid, von dem zwei Bearbeitungen existierten, eine unter Hârûn und eine unter Almamûn entstandene; dem X. Jahrhundert dürfte der von Curtze edierte, nur lateinisch vorhandene Euclid-Kommentar des Abûl Abbâs An-Nairîzî (S. 125) angehören, des den Westländern als Anaritius bekannten Mathematikers, der sich durch Rettung namhafter Reste von Geminus, Hero, Simplicius um die Herstellung von Beziehungen zwischen griechischer und arabischer Wissenschaft und um unsere bessere Einsicht in die erstere ein Verdienst erworben hat. Ein christlicher Araber, Hunain Ibn Isaac, und dessen Sohn Abû Jacûb Isaac ibn Hunain (ibn = Sohn) machten sich um die Arabisierung griechischer Werke besonders verdient, wenngleich ihr sachliches Wissen nicht auf der Höhe des sprachlichen stand; bis zum Beginn des X. Jahrhunderts waren ein neuer Euclid, Autolycus und ein Teil des Archimedes durch ihre vereinte Mühewaltung in den Osten verpflanzt worden. Gleichzeitig etwa lebte und wirkte Tâbit ibn Kurrah, der auch ein guter Mathematiker war; ihm dankten u. a. Theodosius und Apollonius ihr arabisches Kleid. Unter den Kommentatoren verdient Erwähnung der von Suter behandelte Mohammed ibn Abdelbâquî, weil er seine Tätigkeit dem vielleicht schwierigsten Teile des griechischen Vermächtnisses, dem zehnten euklidischen Buche (S. 77), zugewendet hat. Endlich sind noch der Nestorianer Kusta ibn Luka und, aus der zweiten Hälfte des X. Jahrhunderts, Abul Wafâ zu nennen. Ersterer hat vielleicht den Diophant, sicherlich den Theodosius, Aristarchus, Autolycus, Hypsicles — im wesentlichen „den kleinen Astronomen" (S. 153) — und den „Barulcus" des Hero (S. 120) seinen Landsleuten übermittelt, und der andere ist bestimmt Übersetzer und Erläuterer des Diophant gewesen.

Mit dem ihnen so mundgerecht gemachten literarischen Schatze richteten sich die Araber in der Weise ein, daß sie die hierfür geeigneten Schriften dem Unterrichte der strebsamen Jugend zugrunde legten. Euclid begann hier, wie überall, den Reigen, und ihm folgten die mittleren Bücher, die namentlich für die Erringung eines gewissen Maßes astronomischer Kenntnisse erfordert wurden. Wer dann wollte, wendete sich den höheren Dingen, vorab dem großen Meister Ptolemaeus, zu. Daß Fehler mit unterliefen, daß Worte mißverstanden, Eigennamen verstümmelt wurden (Yrinus statt Hero [S. 125], Milleus statt Menelaus usw.), war eine von der Übersetzungstätigkeit untrennbare Begleiterscheinung. Im ganzen genügte die von den erwähnten berufsmäßigen Translatoren geschaffene Grundlage, die sich allgemach auch auf Nicomachus, Pappus und noch spätere Griechen ausdehnte, zur selbsttätigen Beschäftigung mit einer Wissenschaft, welcher die arabische Periode ein dauerndes Siegel aufgedrückt hat. Des zum Zeugnis sei nur auf die kräftige Beeinflussung der mathematisch-astronomischen Terminologie durch die Araber verwiesen. Könnten wir ohne die ihre Herkunft offen zur Schau tragenden Worte Algebra, Algorithmus, Alhidade, Zenit, Nadir, Almukantarat, um nur einige sich stets wiederholende herauszugreifen, heute unser Auskommen finden? Sogar unser Sinus ist ja nichts als ein arabisches Lehnwort in mißverstandener lateinischer Gestalt. Niemand konnte noch vor nicht sehr langer Zeit die Etymologie des sonderbaren Wortes erklären; am meisten Beifall fand noch die Hypothese, es möge ursprünglich die Schreibart s. ins. = semissis inscriptae (die Hälfte der Sehne scil. des doppelten Bogens) den Anstoß zu der Neubildung gegeben haben. Dann aber erfuhr man, daß die den Sinus geometrisch darstellende Linie den Namen dschiba führte, was beim Wegfallen der Vokalisationszeichen ebensogut dschaib gelesen werden konnte. Dieses Wort ist identisch mit Busen, und damit war der Sinus im Lateinischen fertig, den jetzt niemand mehr zu verbannen Lust haben wird, so falsch auch der unterlegte Sinn sein mag.

Die Schrift der Araber hat sehr viele Veränderungen durchgemacht, und von diesen sind naturgemäß auch die Zahlzeichen betroffen worden. Noch ums Jahr 1000 gab es Schriften, welche, vielleicht aus diesem Grunde, von einer symbolischen Darstellung der Zahlen überhaupt keinen Gebrauch machten, sondern alles in ausgeschriebenen Worten wiedergaben. Doch gewann schon bald, ganz wie bei den Griechen, bei den meisten Semiten und also auch bei den Arabern die Sitte ein Bürgerrecht, Buchstaben und Zahlen zu identifizieren, womit für den

Zahlenraum 1 bis 400 vorgesorgt war. Nur freilich brachte es die Erweiterung des Sprachgebietes als nachteilige Folge mit sich, daß nicht allenthalben der nämliche Buchstabe ein und dieselbe Zahl bedeutete. Zu den 22 an sich gegebenen Symbolen ließ man, um auch Zahlen $\geqq 500$ bequem ausdrücken zu können, die sogenannten diakritischen Punkte der Grammatik als sechs neue Zahlzeichen hinzutreten, und nun war man für das erste Tausend gedeckt. So wenig, wie bei den Griechen, konnte diese Art, die Zahlen zu schreiben, als eine handliche und für Handel und Wandel günstige angesehen werden, und so hat es auch im Morgenlande an Ersatzmitteln nicht gefehlt. Das Fingerrechnen hat man ganz in dem Sinne, wie es Nicolaus Rhabdas (S. 173) uns schildert, zu üben verstanden. Dergleichen war aber doch eben nur Surrogat, und so war der Boden wohl vorbereitet, um das indische Positionssystem (S. 179) aufzunehmen. Der Geograph Albîrûnî, der ums Jahr 1000 längere Zeit in Indien weilte, charakterisiert die dort obwaltenden Verhältnisse so, wie man eben fremde, aber als gut erkannte Einrichtungen behandelt, läßt aber durchblicken, daß indische Zahlzeichen auch bereits in sein persisches Vaterland übergegangen seien. Auf dem Seewege waren eben diese schon früher nach Ägypten und ins Maghreb gelangt, und hier war die Null — as sifr, „das Leere“, wörtliche Nachbildung des indischen sunya (S. 179) — schon früh ein Bestandteil des Zahlensystemes geworden. In Afrika und Spanien waren keine anderen als die sogenannten Gobar- oder Staubziffern, die man dereinst in den mit feinem Sande bedeckten Abakus eingezeichnet hatte (S. 140), herrschend geworden. Es bestand so ein Gegensatz zwischen ost- und westarabischen Ziffern, der sich, wir folgen der Cantorschen Tafel, folgendermaßen leicht überblicken läßt. Die zweite Horizontalreihe enthält die von den Asiaten gebrauchten Ziffern, deren Schreibart von jener des Maximus Planudes (S. 171) nur minimal abweicht, und in der dritten stehen die Gobarziffern.



Die Verschiedenheiten sind offenbar groß genug, um ohne vorhergegangene Kenntnisnahme derselben dem Studium arithmetischer Schriften, die aus der einen oder anderen Volkshälfte hervorgegangen waren, Schwierigkeiten entgegenzustellen.

Wie nun wurde bei solch gesicherter Unterlage mit Ziffern gerechnet? An Rechenbüchern, die uns das zeigen können, mangelt es nicht, und schon bald nach 800 schrieb ein Mann, mit dem wir uns jetzt ziemlich eingehend beschäftigen müssen, ein Kompendium der praktischen Arithmetik, das nicht mit einem anderen von dem gleichen Verfasser herrührenden über spekulative Arithmetik verwechselt werden darf. Im ersteren wird zunächst das Anschreiben der Zahlen auseinandergesetzt; der „Kreis“, d. h. unser obiges Zeichen •, müsse stets da eintreten, wo sonst zwischen den Ziffern eine Stelle leer zu bleiben hätte. Über Addition und Subtraktion wird überraschend schnell hinweggegangen. Hierauf folgen jene zwei neuen sonderbaren Spezies, die bis zum Beginne der Neuzeit und selbst gelegentlich auch dann noch in der Rechenkunst ihr Wesen trieben, das Verdoppeln und Halbieren (später wohl auch Medieren). Das ist wohl eine arabische Errungenschaft gewesen, aber keine begrüßenswerte. Die Multiplikation geht nach indischer Manier vor sich und kann durch die Neunerprobe auf ihre Richtigkeit geprüft werden. Die Division wurde in der Weise ausgeführt, daß die Einzelreste, unter gehöriger Beachtung des Stellenwertes, in vertikaler Anordnung angeschrieben wurden, so daß zu oberst der bei der Division von $a:b$ entstehende Hauptrest $R(a:b)$ seinen Platz angewiesen bekam. Von komplementären Methoden weiß man in jener Zeit nichts. Von Brüchen werden nur die sechzigteiligen als dem indischen Vorbilde sich anschließend vorgeführt. Auch das Rechenbrett kennt weder der hier in Rede stehende noch irgend ein späterer arabischer Schriftsteller, und es war dieser Apparat ja auch für ein die Positionsrechnung geschickt handhabendes Volk entbehrlich. Von dem späteren Alkhârkî und dem noch viel späteren Behâ Eddîn wird uns übrigens berichtet, daß man auch mit gewöhnlichen Brüchen rechnete. Doch ließ man als aussprechbar nur solche zu, deren Nenner

Einer waren; wuchs der Nenner über 9 hinaus, so war der Bruch stumm, und dann gab es für ihn nur eine umschreibende Bezeichnung.

Der Mann, aus dessen Rechenbuche die vorgängigen Mitteilungen größtenteils stammen, war der erste wirklich hervorragend-produktive Mathematiker des Ostens, Mohammed ibn Mûsâ mit dem Beinamen Alchwarizmî. Zwei seiner zwischen 800 und 825 niedergeschriebenen Werke kennen wir bereits; auch seine erst im lateinischen Texte bekannter gewordenen astronomischen Tafeln genossen hohes Ansehen. Was aber seinen Namen unsterblich gemacht hat, das war sein Lehrbuch der Algebra, welches 1831 von F. Rosen im Originale veröffentlicht wurde. Mohammed, Mûsâs Sohn, war ein Chowaresmier; mit diesen geographischen Kollektivnahmen wurden die Bewohner der ostpersischen Provinz Khorassân, des späteren Khanates Chiwa und auch noch anderer Teile Turkestans zusammengefaßt. Auch sein engerer Landsmann Albîrûnî heißt nicht selten Alchwarizmî, was Verwechselungen zwischen beiden zur Folge hatte. Dieser Unterscheidungsname hat nun das merkwürdige Geschick gehabt, der Mathematik eine für die Jetztzeit gar nicht mehr entbehrliche Bezeichnung zu liefern. Man verstümmelte das Wort in Algorismus oder Algorithmus und machte den Träger des Namens zu einer halbmythischen Person, einem Philosophen oder Fürsten im fernen Indien. Ganz von selbst bildete sich im XIX. Jahrhundert die Sitte aus, algebraische Operationsmethoden von selbständigem Charakter ebenso zu benennen, ohne daß jemand einen Grund für die auffällige Namenwahl anzugeben vermocht hätte. Man dachte sogar an einen verstellten Logarithmus. Da gab 1845 der französische Orientalist Reinaud die unerwartete Kunde, die sich zwölf Jahre später durch Angaben eines Kodex von Cambridge vollkommen bewahrheiten ließ. Algorithmus, alias Alchwarizmî, ist der Begründer der arabischen Algebra und zugleich der erste, der sich dieses letzteren Kunstwortes in der seitdem allgemein angenommenen Bedeutung bedient hat.

Sein Buch hatte die Aufschrift: Aldschebr Walmukâbala. Das heißt auf deutsch: Einrichtung — Gegenüberstellung. Ohne daß der Autor selbst eine entsprechende Erläuterung gäbe, weiß man doch späteren Berichten zufolge, daß eine Gleichung dann für eingerichtet galt, wenn auf beiden Seiten ausschließlich positive Glieder standen, während das Wort Gegenüberstellung dem Weglassen gleicher Größen links und rechts entspricht. Noch bis in eine nicht lange hinter uns liegende Zeit hat sich in Spanien, welches so lange unter maurischem Einflusse stand und in seiner Sprache arabische Lehnwörter in Fülle aufweist, das Wort Aldschebr sinngetreu erhalten. Don Quixote rennt den „Spiegelritter" vom Pferde, und dieser wird dann einem Algebrista übergeben, um die gebrochenen Gliedmaßen wieder einzurenken. So heißt ja auch in manchen Teilen Deutschlands der Chirurg noch immer „Einrichter".

Wie man die Gleichung auf die Normalform zu bringen habe, lehrt Mohammed gar nicht, so hohen Wert er den einschlägigen Vorgängen auch durch die Wahl der Titelworte beigelegt zu haben scheint. Er stellt ohne Umschweif die folgenden sechs Hauptformen auf:

$$ax = b\,,\quad ax^2 = bx\,,\quad ax^2 = c\,,\quad x^2 + ax = b\,,$$
$$x^2 + b = ax\,,\quad x^2 = ax + b\,.$$

Eine Zeichensprache hat er noch nicht zur Verfügung, und so erhebt sich sein Verfahren, Gleichungen aufzulösen, nicht über das, was Nesselmann (S. 165) passend Wortalgebra genannt hat. Wenn wir das Prädikat Dirhem als für uns überflüssig weglassen, weil nach unserer Anschauung das von x freie Glied keine benannte Zahl zu sein braucht, so kann Mohammeds Anweisung zur Behandlung der Gleichung $x^2 + 10x = 39$ in der wortgetreuen Übersetzung des vorhin genannten Mathematikers wiedergegeben werden, wie folgt; zum besseren Verständnis lassen wir dem Texte dessen Sinn in der algebraischen Zeichensprache parallel gehen.

„Das Quadrat und zehn seiner Wurzeln sind gleich neununddreißig, d. h. wenn Du zu einem Quadrate zehn Wurzeln addierst, so wird das zusammengenommen	$x^2 + 10x = 39$,

gleich neununddreißig. Die Auflösung besteht darin, daß Du die Anzahl der Wurzeln halbierst, was in diesem Falle	$\frac{10}{2} = 5$,
fünf macht; dann multiplizierst Du dieses in sich selbst,	$5^2 = 25$,
so kommen fünfundzwanzig heraus. Hierauf addierst Du	$25 + 39 = 64$,
dieses zu den neununddreißig, das macht vierundsechzig; daraus ziehst Du die Quadratwurzel, das ist acht, und	$\sqrt{64} = 8$,
subtrahierst davon die Hälfte	$8 - 5 = 3$,
der Anzahl der Wurzeln, nämlich fünf, so bleibt der Rest drei; und das ist die Wurzel des	$x = 3$,
Quadrates, welches Du suchst,	$x^2 = 9$,
und das Quadrat ist neun.“	$9 + 3 \cdot 10 = 39$.

Selbst im Texte wird, wie ersichtlich, kein Zahlzeichen zugelassen. Mohammed unterscheidet, da ihm die Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel nicht entgangen ist, mögliche und unmögliche Lösungen; er hat für die Gleichung $x^2 + ax = b$ die ihren Namen signalisierende Eigenschaft der Diskriminante wohl erkannt und weiß, daß für $(b^2 - 4a) > 0$ zwei mögliche und für $(b^2 - 4a) < 0$ je zwei unmögliche Wurzeln zu unterscheiden sind. Wenn $(b^2 - 4a) = 0$ ist, so gibt es nur die eine Wurzel $x = \frac{b}{2}$, d. h. die Gleichung war nicht eigentlich quadratisch.

Was er als Regel ausgesprochen, will der Araber, hierin ein treuer Schüler der Griechen, auch beweisen, und zwar, wieder nach Art der Lehrmeister, geometrisch. Er konstruiert sich ein Quadrat $ABCD = x^2$ und legt sodann den beiden Seiten BC und CD die Rechtecke $BCEF$ und $CDGH$ an, indem er hierzu $BF = CE = CH = DG = 5$ macht. Jedes der beiden Rechtecke hat demzufolge den Flächeninhalt $5x$. Nun verlängert er FE und GH, bis sie sich in J schneiden; dann ist das Viereck $CEJH$ ein Quadrat $= 5^2$. Das ganze Quadrat $AFJG$ ist aus vier Teilen zusammengesetzt; es ist mithin

$$x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 \equiv (x + 5)^2 = 39 + 25 = 64; \quad x = 8 - 5 = 3.$$

Daß Mohammed das alles aus sich allein geschöpft, sich nicht auf irgend welche Arbeiten früherer Zeiten gestützt habe, ist nicht recht glaubhaft, weil er doch erst den Anfang einer neuen Epoche bezeichnet. Aus Indien konnte er seine Methoden nicht wohl entlehnt haben, weit eher aus Griechenland, worauf wir soeben schon anspielten. Daß um 800 solche Kenntnisse nicht mehr allzu schwer zu erwerben waren, hat unser Exkurs auf die Übersetzungstätigkeit dargetan. Eine gewisse indische Einwirkung mag ja ebenfalls zugestanden werden, aber wir würden dem ersten arabischen Algebraiker unrecht tun, wollten wir sein ganzes Wissen und Können mit Ausschließlichkeit als fremdländisch hinstellen. Gerade sein algebraischer Auflösungsmodus ist original. Nur wenn geometrische Dinge in Betracht kommen, verleugnet er seine Quellen nicht. So beweist er den Spezialfall des Pythagoreers, in welchem das rechtwinklige Dreieck zugleich ein gleichschenkliges ist, in voller Übereinstimmung mit dem von Plato (S. 66) dem Socrates zugeschriebenen Verfahren, und seine Klassifikation der Vierecke ist die euklidische, nicht die indische. Dagegen weisen nach Westen und nach Osten hin die drei für die Kreiskonstante angegebenen Werte:

$$\pi = \frac{22}{7}, \quad \pi = \frac{62832}{20000}, \quad \pi = \sqrt{10}.$$

Die sehr in Einzelheiten sich verlierenden Erörterungen Mohammeds über juristische Arithmetik, bei denen zumal die Erbteilung eine Rolle spielt, müssen sich hier mit bloßer Erwähnung begnügen. Sie waren zweifelsohne für den Kadi und Anwalt von großem Werte und dienen noch im XIV. Jahrhundert dem Ibn Chaldûn, im XVII. dem Hadschî Chalfa als Anhaltspunkt für eigene Betätigung auf dem Felde der Mathesis forensis. Vielleicht stand mit dieser auch in einiger Verbindung Mohammeds in Verlust geratene Schrift Über Vermehrung und Verminderung, deren Inhalt man aus ähnlich überschriebenen Traktaten späterer, minder bedeutender Verfasser so ziemlich wiederherstellen kann. Die aus Indien stammende Methode, auf die es da hauptsächlich ankommt, erhielt in späteren Zeiten den Namen Methode der Wagschalen oder Vorschrift der zwei Fehler (Regula Elchatayn). Es wird von ihr bei einer späteren Veranlassung zu handeln sein.

Mohammed ibn Mûsâ hat die arabische Mathematik würdig eingeleitet; daß seine Werke viel gelesen wurden, wird durch verschiedene direkte und indirekte Belege bekräftigt. Verbleiben wir fürs erste bei der Arithmetik, so zieht unsere Aufmerksamkeit sehr bald schon der gelehrte Übersetzer Tâbit ibn Kurrah auf sich, der über befreundete Zahlen (S. 58) schrieb und über seine Vorlagen hinausging, indem er die bei Jamblichus fehlende Bildungsregel für derartige Zahlenpaare entdeckte, die allerdings schon dem Euclid nicht fremd war. Wenn

$$p = 3 \cdot 2^n - 1, \qquad q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \qquad r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

Primzahlen vorstellen, so sind

$$2^n p q \quad \text{und} \quad 2^n r$$

befreundete Zahlen. Tâbit ist also der erste arabische Zahlentheoretiker. Später hat man mit solchen Zahlen allerlei magischen Unfug getrieben.

Dem beginnenden X. Jahrhundert gehörte Achmed ibn Jussuf an, dem u. a. eine Abhandlung über Verhältnisse beigelegt wird. Ein Halbjahrhundert später entstand in Basra, der reichen und sich stets lebhaft für Wissenschaft interessierenden Handelsstadt am vereinigten Euphrat und Tigris, die Freimaurersekte der lauteren Brüder, mit deren Tendenzen und Lehren wir durch Dietericis Übersetzung eines Hauptwerkes in nahe Fühlung treten konnten. Auch diese Männer hatten die Schriften des ihrem eigenen Geistesleben verwandten Jamblichus durchforscht und da u. a. für die vollkommenen Zahlen (S. 136) Teilnahme gewonnen; auch begegnet man bei ihnen bemerkenswerten Äußerungen über die Kunst der Pythagoreer — oder Inder? (S. 179) —, ungeheuer große Zahlen leicht aussprechen zu können. Magische Quadrate kennen diese halb mystisch veranlagten, halb rationalistischen Neomohammedaner gleichfalls, und den mit ihnen beschriebenen Amuletten glaubten sie wohl auch einigen Nutzen für diesen oder jenen Zweck zuschreiben zu können. Das solchen etwas abergläubischen

Spielereien gewidmete Werk des Algeriers El Bûnî (XIII. Jahrhundert) kennen wir nur vom Hörensagen.

Den ommajadischen Kalifen folgten im Jahre 945 als Sultane von Bagdad die Bujiden, deren Dynastie dann wieder ein Jahrhundert nachher von den türkischen Seldschuken entthront wurde. Auch die Bujiden, vorab Adud el Daula (978—983), waren Freunde und Beschützer geistiger Bestrebungen, und in erster Linie war es die Astronomie, welche unter ihrem Zepter blühte. Aber auch die unbestimmte Analytik befand sich dazumal in einem Stadium des Fortschrittes. Alsidschî befaßte sich in den siebziger Jahren des X. Jahrhunderts mit der Bildung rationaler Dreiecke; wohl nur wenig später stellte Abû Mahmûd Alchodschandî die richtige Behauptung auf, daß die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ keine rationale Auflösung zulasse. Von diesem Satze und dem dazu gegebenen Beweise erzählt uns Mohammed ibn Alhusain, der auch seinerseits wieder die zwar geometrisch aussehende, tatsächlich jedoch zahlentheoretische Frage als sein Ziel bezeichnete: Ein Quadrat soll, um ein gegebenes vergrößert oder verkleinert, wieder ein Quadrat werden. Zur Lösung derselben wandte er zwei Identitäten an, die wir Neueren in folgender Form schreiben können:

$$(a^2 - b^2 \pm 2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 \pm 4ab(a^2 - b^2).$$

Der gelehrte Enzyklopädist Ibn Sînâ, dem Abendlande als Avicenna weit vertrauter, hat auch zwei arithmetische Schriften hinterlassen, von denen wir allerdings nur eine etwas näher kennen. In ihr rät er u. a., Potenzierungen mit Hilfe der Neunerprobe auf ihre Richtigkeit zu prüfen; er gibt, noch mehr in einer uns geläufigen Ausdrucksweise zu reden, für eine Reihe von Fällen an, wie groß a, b, c, d anzunehmen sei, um die Kongruenzen

$$(9n \pm b)^2 \equiv a\,, \qquad (9n \pm d)^3 \equiv c$$

als richtig anzuerkennen. Avicenna, ein Perser und damit schon landschaftlich den Indern näher gerückt, nennt diese auch unbefangen als Urheber des Prüfungsverfahrens. Nicht minder wird es uns nicht befremden, indischen Eindrücken bei dem Reiseschriftsteller Albîrûnî (S. 201) zu begegnen. Bei ihm liest man z. B., wie man die Summe der oben berührten geometrischen Reihe bilden kann, welche bei der Erfindung des Schachspieles eine gewisse Rolle spielte. Weiter sind der Erwähnung würdig Alnasawî, der zwei Auflagen seines Rechenbuches um 1030 in persischer und arabischer Sprache bearbeitete, und der philosophisch gebildete Alkindî, der auf demselben Gebiete tätig war. Solche Elementarwerke gab es überhaupt im X. und XI. Jahrhundert schon in größerer Anzahl, und der vorgenannte Alnasawî hat sich über mehrere von ihnen in stark kritischer Weise vernehmen lassen. Wir verzeichnen die Bruchbezeichnung dieses Autors als eine zumal für gemischte Zahlen eigentümliche; für ihn war, wenn wir die ostarabischen Ziffern (S. 199) durch die unserigen ersetzen

$$\begin{matrix}14\\2\\9\end{matrix} = 14\tfrac{2}{9},\quad \begin{matrix}0\\1\\3\end{matrix} = \tfrac{1}{3},\quad \begin{matrix}0\\7\\8\end{matrix} = \tfrac{7}{8}.$$

Auch Sexagesimalbrüche weiß er ganz nach Theo Alexandrinus (S. 158) zu behandeln und berechnet z. B. $\sqrt{17^0} \backsim 4^0\, 7'\, 12''$. Fernerhin ist er derjenige Araber, bei dem wir noch am ersten eine geordnete Kubikwurzelausziehung und zugleich ein sich dem unserigen näherndes Verfahren hierfür erkennen. Zwei sehr vollständige Rechenbücher resp. Algebrabücher lieferte etwa 1010 der in Bagdad lebende Alkarkhî; den Al Kâfî fil chisâb hat Hochheim, den Al Fakhrî hat Woepcke uns zugänglich gemacht. Während die Kompendiographen sich mehrenteils als Schüler der Inder geben, tritt Alkarkhî bewußt für die Griechen ein, ohne sich natürlich doch dem indischen Einflusse ganz entziehen zu können. Doch wiegt der westliche weitaus vor, und zumal in dem Exkurse über Multiplikation tritt klar zutage, daß, wer so schrieb, seinen Archimedes, Pappus, Eutocius wohl studiert haben mußte. Die Bruchbehandlung erinnert gleichmäßig an Hero auf der einen und an Ptolemaeus-Theo auf der anderen Seite. Auch die Termini rational und irrational (S. 150) hat er ins Arabische übergeführt. Zu der älteren Neunerprobe kommt bei ihm auch noch eine Elferprobe. Ob die Näherung

$$\sqrt{a^2+b} \backsim a + \frac{b}{2a+1}$$

von Alkarkhî selbst gefunden oder dem Archimedes, allerdings nicht ohne eigene Geistesarbeit, entnommen worden ist, steht dahin. Bedeutsamer ist noch Al Fakhrî, der sich auf Diophant stützt, aber auch Proben selbständiger Ausgestaltung dieser an sich schon so schwer zu bewältigenden Vorlage in sich schließt. Wie jener, so hat sich auch sein arabischer Nachfolger neue Bezeichnungen für x^n $(n \geqq 1, \lesseqgtr 6)$ geschaffen; er weicht auch vor kubischen Irrationalitäten nicht zurück; er gibt die independenten Ausdrücke für $\sum\limits_{m=1}^{m=n} m^p \, (p = 1, 2, 3)$, indem er für den Fall $p = 3$ einen schönen geometrischen Beweis anfügt. Er trägt zu Mohammed ibn Mûsâ die dort vermißten Definitionen von „Einrichtung" und „Entgegenstellung" nach, ändert aber die Begriffe einigermaßen ab. Seine Auflösung quadratischer Gleichungen ist eine doppelte, eine arithmetische und eine geometrische, und an dieser letzteren stellt sich als auffallend heraus, daß sie in dieser Analage bei keinem griechischen Mathematiker nachweisbar ist. Der findige Algebraiker löst auch trinomische Gleichungen beliebigen Grades, die sich auf solche des zweiten reduzieren lassen, und wagt sich sogar daran, die unbestimmte Gleichung

$$a x^2 + b x + c = y^2$$

dann in rationalen Zahlen zu befriedigen, wenn entweder a oder c ein Quadrat ist. Didaktisch ist der neue Gedanke einer Aufgabensammlung anzumerken. In ihr darf das unbestimmte System

$$x^2 \pm a = y^2$$

als etwas Neues hervorgehoben werden, für welches rationale Auflösungen gegeben werden. Zum ersten Male operiert hier auch ein Araber mit zwei Unbekannten; Diophant hatte das aus guten Gründen, nämlich wegen mangelnder Bezeichnungsmöglichkeit, stets vermieden (S. 164), während die Inder (S. 181) sich auch in dieser Richtung frei bewegten. Alkarkhî nennt x die Sache, y das Maß.

Auch die kubischen Gleichungen sind in der Zeit vor 1100 keineswegs unberücksichtigt geblieben. Da aber kein Pfad zu ihrer algebraischen Lösung zu führen schien, so warf man sich mit allem Eifer auf die geometrische Konstruktion. Hierüber soll weiter unten im Zusammenhange gesprochen werden. Am meisten ließ die erstere Forderung sich Alchaijâmî, auch Omar Cheian genannt, in der zweiten Hälfte des XI. Jahrhunderts angelegen sein, der wenigstens den Versuch machte, auch höhere Gleichungen zum Untersuchungsobjekte zu wählen. Wohl bei dieser Arbeit verfiel er darauf, für den binomischen Lehrsatz die Entwicklung in den einfachsten Fällen wirklich anzugeben und in ihm das notwendige, aber auch hinreichende Mittel zur Ausziehung $m$ter Wurzeln zu erblicken.

Die Geometrie war für den der Zeit nach ersten algebraischen Mathematiker noch nicht Selbstzweck. Wohl aber war dies der Fall für die sogenannten drei Brüder, die Söhne eines Hofbeamten Almamûns, denn sie verfaßten gemeinschaftlich einen Traktat, dessen arabische Urschrift wir nicht kennen, der aber lateinisch als „Liber trium fratrum de geometria" die Zeiten überdauert hat. Die drei hießen Mohammed, Hamed und Hassân; der älteste war auch der bedeutendste. Den Glanzpunkt des griechische Muster nachbildenden Werkes bildet der Beweis von Heros Lehrsatz (S. 121), den der gereiste Mohammed vielleicht aus dem Abendlande mit nach Hause gebracht hatte.

Abûl Wafâ hat uns schon als Arithmetiker beschäftigt, aber nachhaltiger war seine Wirksamkeit als Geometer und Astronom, mag auch in letzterer Beziehung Art und Maß seines Verdienstes noch strittig sein. Das sogenannte Buch der geometrischen Konstruktionen geht wenigstens indirekt auf ihn als Urheber zurück und kann, wenn auch nur unvollkommen, über etwaige neue Ideen Aufschluß geben. Fesselnd sind für uns Beiträge zur Geometrie einer einzigen Zirkelöffnung und die sehr hübsche Verdreifachung des Quadrates, die sich ganz auf Anschauung gründet. Es sind I, II, III (Fig. 28) drei gleiche Quadrate, und jedes von ihnen zerfällt in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke von der konstanten Größe IV. Man verlängert eine jede Quadratseite so lange, bis sie der Hypotenuse eines solchen Dreieckes gleich wird, setzt auf jede Hypotenuse ein Dreieck IV auf und zieht die Verbindungslinien der vier rechten Winkelspitzen. Da dann je ein Dreieck V und VI einander kongruent sind, so ist das Zwölfeck 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 einerseits dem neuen Quadrate 1 4 7 10 und andererseits dem Sechsfachen von IV, also dem Dreifachen von I (II, III) gleich. Die spätindische Beweismethode für den pythagoreischen Lehrsatz (S. 190) kommt bereits bei Abûl Wafâ vor; spontane Erfindung scheint uns bei diesem so ungezwungen sich darbietenden Verfahren sowohl beim Araber als auch beim Inder recht wohl möglich zu sein. Die platonischen Körper leiten ersteren dazu über, die Kugelfläche in eine Anzahl kongruenter und regulärer sphärischer Polygone einzuteilen. Für das Siebeneck kennt unser Geometer die — angeblich (S. 123) — archimedische Verzeichnung. Endlich dürfen auch seine Konstruktionen der Parabel durch einzelne Punkte, von denen bei Apollonius nichts zu lesen steht, nicht mit Stillschweigen übergangen werden.

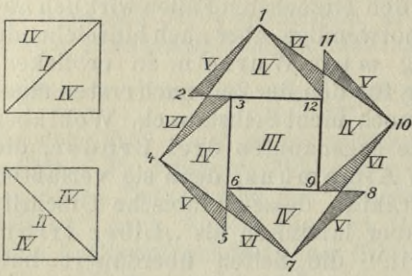


Fig. 28.

Aus der Mitte des IX. Jahrhunderts sind Ibrâhîm ibn Sinân als gelehrter Erklärer und Nachbildner des Pergäers, dessen Berührungsproblem (S. 100) er behandelt, und Abû Sahl Alkûhî mit Ehren zu nennen. Der letztere suchte der Trisektionsaufgabe neue Seiten abzugewinnen und tat dar, daß zugleich mit ihr auch gewisse, eben auf eine kubische Gleichung führende Aufgaben über Kugelsegmente lösbar werden. Der Diorismus (S. 70) wird von ihm sorgsamer als von vielen seiner Landsleute beobachtet. Aus den siebziger Jahren haben wir die Studie eines nach seiner Vaterstadt Alsidschzî oder nach seiner Heimatprovinz Alsindschârî genannten Geometers, der wieder ein neues, theoretisch untadelhaftes Verfahren zur Dreiteilung des Winkels in Vorschlag bringt und zu diesem Behufe die Schnittpunkte von Kreis und gleichseitiger Hyperbel aufsucht. Auch die organische Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung zog ihn an, und es darf angenommen werden, daß seine nur erst unvollständig bekanntgemachten Aufsätze über Kegelschnitte noch wertvolles Material kennen lehren werden.

Von Albîrûnîs geometrischen Leistungen, bei denen wiederum die Trisektion im Mittelpunkte steht, sind wir nur durch oberflächliche Mitteilungen unterrichtet. Aber durch ihn wurde zu gleichen Bestrebungen hingelenkt Abûl Dschûd, der, wenn er wirklich die Beziehungen zwischen den möglichen Gleichungstypen und den Kegelschnitten aufzudecken bestrebt war, eine Ausnahmestellung unter den zumeist sehr stark am konkreten Einzelfalle haftenden Arabern errungen hat. So steht auch dem Anscheine nach isoliert da seine Neuneckkonstruktion, welche auf eine geometrische Einkleidung der Gleichung $x^3 + 1 = 3x$ hinausläuft. Auch bei Alkarkhî gewähren die geometrischen Abschnitte, wenn sie schon nur eine mehr untergeordnete Stellung im Rahmen des Ganzen einnehmen, mannigfaches Interesse, und Alchaijâmî löst biquadratische Gleichungen durch Schnitt von Kreis und Hyperbel. Die Gleichung $x^4 + bx = ax^3 + c$ ist bei ihm das Ergebnis von Überlegungen, welche an die nachstehende Forderung anknüpfen: Ein Trapez soll gezeichnet werden, wenn drei Seiten gleich sind und wenn der Flächeninhalt von gegebener Größe ist.

Eine gesonderte und eingehende Betrachtung macht die arabische Trigonometrie notwendig, denn vielleicht in keiner anderen mathematischen Disziplin tritt die Veranlagung zu selbständigem Eingreifen in den Werdegang der Wissenschaft so deutlich hervor, wie gerade hier. Der äußere Anlaß, der ja so oft entscheidend ist, läßt sich auch da nicht verkennen. Die Araber hielten sehr viel auf Astronomie, und seitdem (S. 196) schon unter Almansûr die Übersetzung des indischen Tafelwerkes in die Wege geleitet war, stand dieser Wissenszweig obenan in ihrer Wertschätzung. Die schönen Arbeiten Sédillots zeigen uns, wie viel Geist und Geschicklichkeit von ihnen der Instrumentenkunde zugewendet wurde; eine nach neuen Grundsätzen vorzunehmende Gradmessung bildete eine der ersten Regierungshandlungen Almamûns. Auch Chronologie und Gnomonik standen in Ansehen und

Flor; war man auch mit kunstreichen Wasseruhren wohl bekannt, wie Hârûns bekanntes Geschenk an den Frankenkaiser bekundet, und wie in allerneuester Zeit E. Wiedemanns Untersuchungen über arabische Maschinentechnik in den Einzelheiten festgestellt haben, so legte man doch immer auf gute Sonnenuhren besonderen Wert. Dies hing teilweise auch mit dem religiösen Kultus zusammen. Keine Moschee ist denkbar ohne Quiblah, d. h. ohne eine Nische, durch welche dem sich zum Gebete niederwerfenden Gläubigen die Richtung, in welcher die heilige Stadt Mekka liegt, angedeutet wird. Diese Richtung anzugeben, war Sache der Astronomen. Aber viele Städte besaßen auch eine nach allen Regeln der Kunst hergestellte öffentliche Sonnenuhr, auf deren Platte neben den sogenannten Stundenlinien auch die nach Mekka zeigende Linie eingetragen war; fiel an jedem hellen Tage, wie solche in den ismaelitischen Ländern die Norm bilden, der Gnomonschatten auf diese Gerade, so gab der auf dem Minareh stationierte Gebetsausrufer dem Volke hiervon Kenntnis, damit jetzt der Schatten eines jeden ihm die vorgeschriebene Richtung anweise. Auch diese Eintragung setzte aber sphärische Trigonometrie voraus. P (Fig. 29) sei der Nordpol der Erdkugel, A der in Betracht kommende Ort, M das mohammedanische Gebetszentrum; A und M sollen bezüglich durch ihre Breiten φ_1 und φ_2 und ihre Längen λ_1 und λ_2 gegeben sein. Denkt man sich dann die drei Hauptkreisbogen PA, PM, AM gezogen, so ist im Dreieck PAM Seite $PA = 90^0 - \varphi_1$, Seite $PM = 90^0 - \varphi_2$, $\sphericalangle APM = \lambda_2 - \lambda_1$ gegeben, und gesucht ist $\sphericalangle PAM = \xi$ gleich dem Azimut, unter dem M für A gelegen ist, minus 180^0. Würde man noch $AM = \eta$ setzen, so hätte man, unsere Bezeichnungsweise vorausgesetzt, die Gleichungen

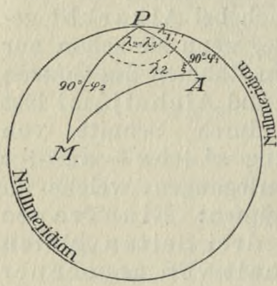


Fig. 29.

$$\cos\eta = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\,,$$

$$\sin\xi = \frac{\cos\varphi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin\eta}$$

zu erledigen. In ihrer Weise verstanden es, wie wir sehen werden, die Araber sehr gut, zu rechnen, und ihre Raumtrigonometrie war demzufolge eine Voraussetzung für richtige Vollziehung ihrer Religionspflichten.

Die erste Regung zu einer autonomen Verarbeitung des von Indern und Griechen bezogenen Wissensstoffes bemerkt man bei Tâbit ibn Kurrah, der eine von Suter näher geschilderte Schrift über den Lehrsatz des Milleus (Menelaus), (S. 128, 198) verfaßt hat. Man trifft da auf ein Lemma, aus dem sich nachmals die sogenannte Regula quatuor quantitatum entwickelte, und Tâbit ist bei Begründung dieses Hilfssatzes dem Sinussatze der sphärischen Trigonometrie jedenfalls überaus nahe gekommen. Aber er streift eben nur dieses Theorem und überläßt die Ehre, die griechische Dreieckslehre um ein erkleckliches Stück weitergebildet zu haben, seinem etwas jüngeren Landsmanne, dem 929 verstorbenen Syrer Mohammed Abu Abdallâh al Battânî, den das Abendland in Albategnius umlatinisierte, und den man nicht ohne Grund auch den arabischen Ptolemaeus zubenannt hat. Nicht als ob er, wie man wohl hört, den Sinus zuerst prinzipiell statt der Chorde (S. 131) eingeführt habe, denn das war ja schon in Indien (S. 193) geschehen. Aber Bürgerrecht hat er dieser goniometrischen Funktion, die er noch „halbe Sehne“ nennt, verschafft, und die ptolemäische Chordentabelle hat er durch eine von $\frac{1}{2}^0$ zu $\frac{1}{2}^0$ fortschreitende Sinustafel verdrängt, so daß jetzt Rechnungen mit ungleich größerer Leichtigkeit und Sicherheit angestellt werden konnten. Noch fehlen zwar im Systeme die Funktionen, in denen bloß Gegen- und Nebenkathete vorkommen, aber indem Albategnius für die Mittagshöhe h der Sonne aus der Länge l_1 des Gnomons und der Schattenlänge l_2 die Relation $l_2 : l_1 = \sin(90^0 - h) : \sin h$ herleitet und die Werte des rechtsstehenden Quotienten tabellarisch bucht, hat er offensichtlich eine erste Kotangententafel angelegt. Je nachdem er mit einer Horizontal- oder Vertikalsonnenuhr zu tun hat, unterscheidet er auch einen Horizontalschatten (umbra extensa beim lateinischen Übersetzer) und einen Vertikalschatten (ebendort umbra versa). Um die Fundamentalaufgaben der astronomischen Koordinatenumwandlung zu lösen, läßt er den Ptolemaeus des Almagestes beiseite und hält sich nur, im Einklange mit den Indern (S. 193), an den Ptolemaeus des Analemmas. Was er hier über rechtwinklige Kugeldreiecke beibringt, läßt sich durchgängig aus der bekannten Normalfigur konstruktiv ablesen. Wir wissen bereits (S. 193), daß der allgemeine Kosinussatz schon früh sozusagen in der Luft lag; Albatânî kennt ihn selbst im Einzelfalle, drückt ihn aber, da es für ihn noch keine Kofunktionen gibt, in einer Form aus, die sein Wesen fast verhüllt. Ist nämlich r die Größe, welche man in der Folge den Sinus totus genannt hat, und die noch von neueren Mathematikern für so unentbehrlich gehalten ward, daß selbst ein Legendre sich nicht von ihr emanzipieren zu dürfen wähnte, so schreibt der arabische Astronom, für den jeder Sinus eine Strecke und nicht etwa ein Streckenverhältnis ist, den Zusammenhang zwischen ω, δ, φ und h in einem Satze an, dessen Einkleidung bei uns diese wäre:

$$\sin(90^0 - \omega) = \frac{r\left[\dfrac{r\sin(90^0-\delta)}{\sin(90^0-\varphi)} - \dfrac{\sin h \sin\varphi}{\sin(90^0-\varphi)}\right]}{\sin(90^0-h)}.$$

Es ist h die Höhe, ω das Azimut, δ die Deklination der Sonne und φ die Polhöhe. Aber der richtige Blick des Historikers nötigt v. Braunmühl zu der Erklärung, daß man trotzdem Albategnius nicht den Erfinder des Kosinussatzes zu nennen ein Recht habe, weil ihm dieser gewiß nur als ein geeignetes Mittel zur Lösung einer bestimmten Aufgabe, nicht aber als allgemeine, für jedes schiefwinklige sphärische Dreieck gültige Wahrheit erschienen sei. Doch vorbereitet hat er, dem die Trigonometrie überhaupt das Seßhaftwerden auf arabischem Boden verdankt, die Errungenschaften der Folgezeit ganz gewiß. Sehr an Umfang und Inhalt hat unser Wissen von Albategnius in allerjüngster Zeit durch Nallino gewonnen, der uns auch in dem etwa gleichaltrigen Habasch einen in trigonometrischen Rechnungen wohlgeübten Geometer vorgeführt hat. Um 912 konstruierte letzterer schon mit Bedacht eine Tangenten- und Kotangententabelle.

Unter den Mathematikern, die den von ihm eröffneten Bahnen folgten, stand in erster Reihe der uns bekannte Abûl Wafâ, dessen arabischer Almagest, durch Carra de Vaux in wesentlichen Teilen unserem Verständnis erschlossen, sich bedeutend über die analogen Abschnitte des griechischen Werkes erhebt. So hat es auch der Autor gewollt, der in seiner Einleitung seine neue Methodik als solche betont und dem Leser bequemere Belehrung verspricht, als sie ihm Ptolemaeus dargeboten habe. Seine Zusage hält er wirklich ein, und zweifellos ist er der erste trigonometrische Systematiker des Orientes. Nachdem er Sinus und Sinusversus durch die Chorden ausgedrückt hat, gibt er das Additionstheorem in der einstweilen noch allein möglichen Form:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta}{r^2}} \pm \sqrt{\sin^2\beta - \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta}{r^2}}.$$

Seine Sinustafel schreitet jetzt schon, was auf erhöhte Genauigkeitsansprüche seitens der Astronomen hinweist, von $\frac{1}{4}^0$ zu $\frac{1}{4}^0$ fort, und sein Wert für $\sin \frac{1}{2}^0$ ist von wahrhaft verblüffender Schärfe. An Albategnius knüpft sich die Einführung des Begriffes der Schatten als selbständiger trigonometrischer Funktionen; es gelten, im Vergleiche mit der Jetztzeit, die Identitäten:

Erster Schatten = umbra versa = Tangente;
Zweiter Schatten = umbra recta = Kotangente.

Ebenso liefert das der Gnomonik (S. 212) angehörige Schattendreieck die Definitionen von Sekante und Kosekante. Nur der Kosinus versteckt sich noch immer unter dem Sinus des Komplementes. Es fehlen nicht die Elementarformeln zur Berechnung einer jeden Funktion aus einer anderen; es fehlt nicht — ein Halbjahrtausend vor Regiomontan — eine Tangententafel. Jetzt war eine ganze Reihe der Schwierigkeiten gefallen, mit denen die sphärische Trigonometrie noch immer zu ringen hatte. Abûl Wafâ vergleicht miteinander zwei in C und C' rechtwinklige Dreiecke, welche die Winkel A und A' gleich haben, und stellt die folgenden Sätze auf:

$$\sin BC : \sin B'C' = \sin AB : \sin A'B',$$

$$\operatorname{tang} BC : \operatorname{tang} B'C' = \sin AC : \sin A'C'.$$

Endlich spricht er — ein Markstein wegen des Überganges vom rechtwinkligen zum allgemeinen Dreieck — den Sinussatz so, wie es uns geläufig ist, aus: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$. Fast gleichzeitig kommt dieser so auch bei den wenig bekannten Mathematikern Abû Nasr und Alchodschendi vor, die aber schwerlich als ernsthafte Konkurrenten Abûl Wafâs betrachtet werden dürfen.

Dieser Mann hat die Trigonometrie und mit ihr die sphärische Astronomie auf die Stufe erhoben, über welche sie wesentlich nicht mehr hinausgekommen sind, solange sie sich in der Pflege der Araber befanden. Manch neuen Gedanken, manch für die Zukunft hodegetisch gewordenes Verfahren haben die nächsten Jahrhunderte hinzugebracht, aber das System als solches war fertig. Zwei hierher gehörige Schriften, eine Darlegung der Eigenschaften der stereographischen Abbildung und ein Lehrbuch („Schlüssel zur Erkenntnis der sphärischen Figuren"), die beide den vielerfahrenen Albîrûnî zum Verfasser haben, sind uns leider zu wenig bekannt, um eine sachliche Würdigung zu ermöglichen, obwohl wir wissen, daß er den Sinussatz für das ebene Dreieck kannte; was ein späterer Gelehrter das dort behandelte Ersatztheorem nennt, vermögen wir nicht zu entschleiern. Dafür aber stehen an der Grenze des X. und XII. Jahrhunderts noch zwei Männer, die in dem Zusammenhange mit dem großen Systematiker wohl genannt werden dürfen.

Der jüngere von ihnen ist Al Hassân ibn Haitam, als Alhazen bei den Okzidentalen wohl bekannt (gestorben vor 1040). Daß diese beiden Namen sich auf ein und dieselbe Person beziehen, hat zuerst Wiedemann als zweifellos erhärtet. Der tyrannische Khalif Ägyptens, Alhâkîm, hatte den Mesopotamier in sein Land berufen, um dort Wasserbauten auszuführen, denn schon um 1000 stand jene hydrotechnische Frage, welche in unseren Tagen durch den Staudamm von Syene eine so glänzende Lösung fand, im Nillande auf der Tagesordnung. Alhazen scheiterte an der Größe der Aufgabe, flüchtete und ergab sich in tiefster Zurückgezogenheit ganz seinen Studien, deren Früchte nach dem von Woepcke aufgefundenen Kataloge seiner Ausarbeitungen in 92 mathematischen und 30 medizinischen

Schriften vorlagen. Er scheint auch die Geschichte der Trigonometrie monographisch dargestellt zu haben. Ins Lateinische übersetzt wurde sein großer, sieben Bücher umfassender Lehrbegriff der Optik, dem ein Anhang über Dämmerungserscheinungen beigegeben ist. Mathematische Elemente sind allenthalben reichlich vorhanden, und insbesondere verrät Vertrautheit mit ebener Trigonometrie die Bestimmung einer unteren Grenze für die Mächtigkeit der Atmosphäre. M ist (Fig. 30) der gemeinsame Mittelpunkt zweier Kreise, deren kleinerer einen Meridian der festen Erdkugel, deren größerer den zugehörigen Meridian der Luftkugel vorstellt. Der Erdort A wird durch eine in W befindliche Wolke gerade noch beleuchtet; alsdann steht die Sonne in der Verlängerung des Strahles WS, welcher den Erdball in B berührt. Zieht man, falls W' der W gegenüberliegende Punkt des scheinbaren Horizontes von A ist, MW', MA, MW und MB, so sind die Dreiecke MAW', MAW, MBW kongruent, und somit ist $\sphericalangle MW'A = \sphericalangle MWA = \sphericalangle MWB = \frac{1}{2}\alpha$. Dieses α folgt aus der Angabe der Zeit, welche zwischen dem Untergange der Sonne und dem Erlöschen des letzten reflektierten Sonnenstrahles verfloß. Schneidet endlich MW den Meridian in C, so ist CW die gesuchte Höhe h der Luftschicht. Das Dreieck AMW, worin AM gleich dem Erdhalbmesser r ist, ergibt diese Beziehungen:

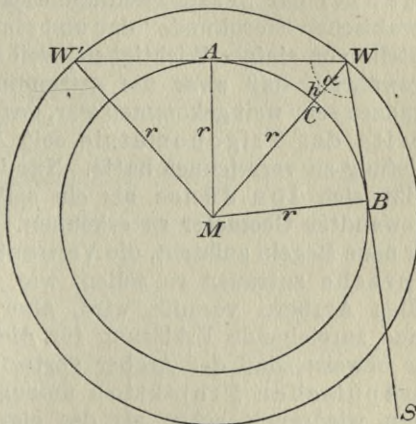


Fig. 30.

$$\frac{r}{r+h} = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,, \qquad r = \frac{h\sin\frac{1}{2}\alpha}{1-\sin\frac{1}{2}\alpha}\,.$$

Alhazens Resultat, $h = 5$ bis 6 arabische Meilen, kann selbstverständlich wegen der ungeheuer vielen Fehlerquellen auf reellen Wert keinen Anspruch machen, was jedoch dem richtigen Grundgedanken keinen Eintrag tut. Als geschickter Geometer betätigt er sich auch bei der Aufsuchung der Glanzpunkte einer Kugelfläche.

Mehr und Wichtigeres wissen wir von Abû Said Abderrachmân ibn Achmed ibn Jûnos (auch Jûnis; gestorben 1009). Auch er war, als geborener Ägypter, ein Untertan des vorhin genannten Herrschers, und mit dessen Namen hat er das von ihm geschaffene Tafelwerk geschmückt. Diese hakemitischen Tafeln stellen nach Hankel das „Fazit zweihundertjähriger Entwicklung der arabischen Sternkunde" dar und sind auch für uns an dieser Stelle von einiger Wichtigkeit, weil sie uns die Überzeugung gewähren, daß zwar die astronomische Wissenschaft im ganzen sehr weit gekommen war, daß aber die theoretische Seite der Trigonometrie seit Abûl Wafâ keine Vertiefung zu verzeichnen hatte. Nur in gewissen Einzelheiten gibt sich Ibn Jûnos als ein selbständiger Denker und gewandter Geometer zu erkennen. Man meinte ihm, weil er neue Regeln aufstellt, die Vertrautheit mit einer Formelsprache zutrauen zu sollen, wie sie sonst durchweg bei allen Arabern vermißt wird, aber v. Braunmühl gibt eine zureichende Erklärung für diese Erscheinung, indem er beweist, daß der Araber vortrefflich mit jener orthographischen Projektion umzugehen weiß, welche wir nun wiederholt schon als das eigentliche Geheimnis der trigonometrischen Gewandtheit wie der Griechen so der östlichen Völker festzustellen hatten. Fig. 31 deckt sich größtenteils mit jener Figur, die für alle mathematisch-geographischen Operationen den Normaltypus abgibt. S ist der Südpunkt, N der Nordpunkt des Horizontes, Z das Zenit, N_a das Nadir, C der Standpunkt des Beobachters, somit SN die Mittagslinie und ZN_a senkrecht zum Gesichtskreise. EE' ist das orthographische Bild des auf die Meridianebene projizierten Äquators, DD'' das Bild eines Tageskreises der Sonne, EH senkrecht auf SN; zieht man CD und CD'', so ist $\sphericalangle DCE = \sphericalangle D''CE' = \delta$ die Deklination jenes Gestirnes. CB steht senkrecht auf EE', und so ist CP die Weltachse, P der Himmelsnordpol, $\sphericalangle NCP = \varphi$ die geographische Breite. Fällt man von D auf die Mittagslinie das Lot DD', so ist, unter r den Radius der Himmelskugel verstanden, $DD' = r\cos(\varphi - \delta)$ und, wenn noch $D''J$ senkrecht auf SN steht, $D''J = r\cos(\varphi + \delta)$. Verlängert man DD', bis es die zu SN parallel gezogene Sehne $D''D'''$ in J' trifft, so hat man

$$DJ' = DD' + D''J = r[\cos(\varphi - \delta) + \cos(\varphi + \delta)].$$

Die Himmelsachse schneidet den Tageskreis DD'' in B, und BG steht senkrecht auf DJ'. Daß $\triangle DBG \sim \triangle ECH$

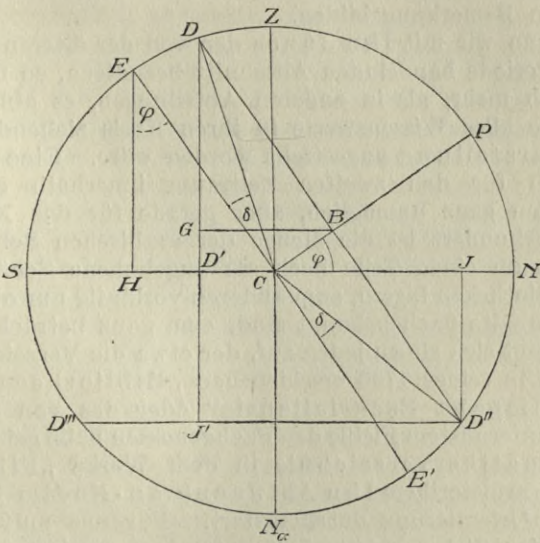


Fig. 31.

ist, leuchtet sofort ein, weil die drei Seiten jeweils parallel sind; damit bestehen die Proportion und Gleichung:

$$BD : DG = CE : EH, \quad DG \cdot CE = BD \cdot EH.$$

BD ist nach der Figur gleich $r\cos\delta$, $EH = r\cos\varphi$, und wir bekommen durch Substitution dieser Werte, weil $DG = \frac{1}{2} DJ'$ ist, die Schlußgleichung

$$r^2 \cos\delta \cos\varphi = \tfrac{1}{2} r^2 [\cos(\varphi - \delta) + \cos(\varphi + \delta)].$$

Diese Gleichheit eines Produktes und einer Summe hat in viel späterer Zeit, wie wir noch sehen werden,

den Namen Prosthaphaeresis (πρόσθεσις = Addition, ἀφαίρεσις = Subtraktion) erhalten; sie ist also bereits eine arabische Errungenschaft. Nur schreibt man sie, $\varphi + \delta = x$ und $\varphi - \delta = y$ setzend, gewöhnlich in der ihren Zweck noch besser zur Schau tragenden Form

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Eben die Art der Verwendung soll den Gegenstand einer späteren Bemerkung bilden.

Wenn wir mit Ibn Jûnos den von der älteren arabischen Periode handelnden Abschnitt beendigen, so müssen wir noch mehr, als in anderen Abteilungen, es ablehnen, daß eine alles Wissenswerte in ihren Kreis ziehende Gesamtdarstellung angestrebt worden wäre. Eine solche ist auch für den zweiten Zeitraum innerhalb engerer Schranken ganz unmöglich, aber gerade für das X. und XI. Jahrhundert ist die Menge der arabischen Schriften, welche zum einen Teile noch als ungehobene Schätze in den Bibliotheken lagern, zum anderen vorläufig nur obenhin ihrem Inhalte nach bekannt sind, eine ganz beträchtliche. Das drängt sich einem jeden auf, der etwa die Verzeichnisse Casiris in seiner 1760 erschienenen „Bibliotheca Arabico-Hispana Escurialiensis" oder das von Suter mit aufopferndstem Fleiße den Fachgenossen nahe gebrachte Mathematikerverzeichnis in dem Werke „Fihrist" des Literarhistorikers Ibn Abî Jacub an-Nadîm behufs näherer Orientierung durchmustert. Für uns mußte als wichtigstes Ziel das festgehalten werden, wenigstens diejenigen arabischen Leistungen, welche über den engeren Umkreis ihres Ursprungslandes für die Fortentwicklung der Mathematik bedeutsam geworden sind, ihrem absoluten Werte nach wie auch hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von den Geistesprodukten des westlichen und östlichen Nachbarvolkes zu kennzeichnen, und in diesen Beziehungen wird sich keine empfindliche Lücke wahrnehmen lassen.

Kapitel XIII.

Die spätere arabische Periode.

Wir haben als ungefähre Grenze zwischen der älteren und jüngeren Entwicklungsperiode arabischer Mathematik oben (S. 195) das Jahr 1100 angenommen und zugleich angedeutet, daß sich von da ab, von einzelnen Ausnahmen selbstverständlich abgesehen, der Schwerpunkt mehr nach dem Westen, nach den marokkanisch-spanischen Ländern, verschiebe. Damit sollte freilich auch nicht gesagt sein, daß nicht auch dort schon in früherer Zeit einzelne Männer von Bedeutung hervorgetreten seien; nur erschien es zur Wahrung des Zusammenhanges wünschenswert, auf diese erst im gegenwärtigen Kapitel näher einzugehen. Daß in Sevilla, Cordova, Fez, Marakesch und anderwärts, in Städten also, welche durch ihre hohen Schulen und reichen Büchersammlungen bereits im X. Jahrhundert eine Rolle spielten, tüchtige Gelehrte tätig waren, haben wir um so weniger Grund zu bezweifeln, weil uns einzelne Namen, z. B. Al Garnâhî, schon verhältnismäßig früh begegnen. Die ersten Persönlichkeiten von Bedeutung jedoch, die den Historiker der Mathematik wirklich fesseln, gehören der zweiten Hälfte des XI. Jahrhunderts an.

Der Astronom Al-Zarkâlî, in der mittelalterlichen Verstümmelung seines Namens als Arzachel weitaus bekannter, muß nach den durch den Spüreifer Steinschneiders gelieferten Aufschlüssen ein ungemein fleißiger Schriftsteller gewesen sein. Obwohl auf spanischem Boden, zumeist in Toledo, lebend, hat er doch mit den östlichen Wissenschaften Fühlung gehabt und persische wie indische Methoden wohl gekannt. Auf seine Anregung hin und unter seiner Oberleitung scheinen jene Toletanischen Tafeln entstanden zu sein, zu deren Ausarbeitung sich Mohammedaner und Juden zusammenfanden; die Einleitung zu dem Tafelwerke ist jedenfalls von ihm selber. Das indische Verfahren, alle Berechnungen auf eine Kardaga, d. h. bei ihm den sechsten Teil des Quadranten, zurückzuführen, wird einheitlich durchgeführt; freilich ist das eben genannte Kunstwort kein eindeutiges, denn während es hier mit $\frac{2r\pi}{24}$ einerlei ist, kommt es anderwärts auch in der Bedeutung von $\frac{2r\pi}{96}$ vor. Arzachel berechnet also rein geometrisch die Sinus von $3\frac{3}{4}^{0}$, $7\frac{1}{2}^{0}$, $11\frac{1}{4}^{0}$, 15^{0}, $18\frac{3}{4}^{0}$ ... $82\frac{1}{2}^{0}$, $86\frac{1}{4}^{0}$; man sieht, daß das völlig auf das Vorgehen des indischen Fundamentalwerkes bei der Tafelkonstruktion (S. 192) hinausläuft. Auch die Saphea des Arzachel muß als eine Art Astrolab (S. 117) mit stereographischem Kreisnetze Erwähnung finden, indem nur diesmal nicht eine Polar-, sondern vielmehr eine Äquatorialprojektion angewandt wurde. Das Instrumentchen war, hierin für spätere Zeiten vorbildlich, nicht nur für sphärische Astronomie, sondern auch für Feldmeßkunst eingerichtet, indem seine Rückseite mit einer — übrigens nicht zirkularen — Teilung und einer Diopter-Alhidade versehen war.

Besser als Arzachel ist uns sein Landsmann und Zeitgenosse Dschâbir ibn Aflah bekannt, den die Lateiner Geber zu nennen und mit einem den gleichen Namen tragenden Chemiker zu verwechseln pflegten. Seine „Neun Bücher über Astronomie“ hat Gerardus Cremonensis in die abendländische Gelehrtensprache übertragen. Ein kritischer Kopf, hat er an der ptolemäischen Grundlegung der Trigonometrie mancherlei auszusetzen. Tâbit ibn Kurrahs „Regel der vier Größen“ will Geber selbst gefunden haben; daß er sie durch eigene Arbeit nach Menelaus (S. 127) für den trigonometrischen Gebrauch zurichtete, wird sich auch nicht unbedingt verneinen lassen. Was ihn uns aber merkwürdiger macht, ist der Umstand, daß er, der ebenen Trigonometrie eine den Orientalen sonst fremde Beachtung zuwendend, hierbei trotz aller Gegnerschaft gegen Ptolemaeus ganz und gar in dessen unbehilflichere Rechnungsweise zurückfällt und Chorden statt der Sinus in seine Ausdrücke eingehen läßt. Immerhin war er der erste, der grundsätzlich die Aufgaben löst, aus drei Stücken eines ebenen Dreieckes die übrigen zu finden.

Da er auf Arzachel mit Achtung hinweist, so muß etwas später als dieser der Marokkaner Abûl Hassan Alî gelebt haben, dessen inhaltreiches Lehrbuch der astronomischen Instrumentenkunde uns durch Sédillot zugänglich gemacht worden ist. Zu seinen Aufgaben gehörte naturgemäß auch die Behandlung der unentbehrlichsten Hilfswissenschaft, der Trigonometrie, die er zwar großenteils nach bewährten Mustern vorträgt, die er aber doch auch nicht als bloßer Kompilator behandelt. So tritt uns bei ihm zuerst eine Bezeichnung für Kosinus (dschaîb fadhal) entgegen. Zu den horizontalen Schatten (S. 215) gibt er die Winkel an — die erste Tabelle für arc cotang. Überhaupt weiß er mit Tangenten und Kotangenten gewandt umzugehen und erledigt die Hauptprobleme der mathematischen Geographie sowohl rechnerisch als graphisch (Analemma). Von den sphärischen Kenntnissen der westlichen Araber liefert uns Abûl Hassan eine respektable Vorstellung.

Das XII. Jahrhundert, zu welchem wir solchergestalt schon so ziemlich vorgedrungen sind, ist besonders deshalb für uns merkwürdig, weil in seinem Verlaufe zu der bereits gegebenen innigen Berührung arabischer und hebräischer Kulturelemente nunmehr auch das christlich-nationalspanische hinzutritt. Von den asturischen Bergen aus waren die jetzt längst romanisierten, zu Kelto-Iberern gewordenen Westgoten erobernd in die maurischen Khalifate eingefallen; Lissabon und Toledo wurden die Residenzen christlicher Herrschergeschlechter. Aber trotz häufiger Waffengänge hielt sich die Wissenschaft stets auf der Höhe, und insbesondere Toledo, wo um 1140 der weise Erzbischof Raimund großen Einfluß ausübte, ward eine berühmte Hochschule — nicht freilich eine Universität mit Privilegien, Statuten und angestellten Professoren, wohl aber das Zentrum ausgedehntester Übersetzungs- und Kommentierungstätigkeit. Wir besitzen von Val. Rose eine ansprechende Schilderung dieser Epoche geistigen Strebens in der später einer Art von Todesschlaf anheimgefallenen kastilischen Königsstadt. Der Geistliche Dominicus Gondisalvi und der Jude Johannes von Sevilla, deshalb Hispalensis zubenannt, waren die namhaftesten Vertreter der Schule, deren Wirksamkeit von kaum hoch genug zu veranschlagender Tragweite war. Wir erfahren, wie man die Übersetzungsarbeit organisiert hatte. So hatte ein gewisser Galipp aus dem Arabischen einen spanischen

Text herzustellen, und dieser ging sofort in die Hände derer über, die ihn lateinisch machten, und unter denen ein Deutscher Hermann und der allseitig geachtete Lombarde Gerhard von Cremona (S. 222) uns als sehr eifrig bezeichnet werden. Neben Toledo hatte auch die Hauptstadt des stets geistig rührigen Volkes der Katalonier (Katalanen) bei der Vermittlung östlichen und westlichen Wissens eine wichtige Rolle zu spielen; hier in Barcelona weilten in den dreißiger Jahren des XII. Jahrhunderts gleichzeitig der des Arabischen und Griechischen gleich kundige Plato von Tivoli und der in allen Sätteln gerechte Abraham bar Chijja, der mit ersterem kooperierte. Steinschneider hat nämlich dargetan, daß dieser jüdische Mathematiker kein anderer als der auch früher schon bekannte Abraham Judaeus oder Abraham Savasorda ist, dessen „Liber Embadorum" eben Plato Tiburtinus latinisiert hat. Es ist eine in erster Linie Kultzwecke berücksichtigende Anweisung zum Feldmessen, die z. B. in ihrer Sehnentafel ($r = 14$), welche nur ganzzahlige Chordenwerte (bis $2r = 28$) enthält und die zugehörigen Bogen sexagesimal im Längenmaße $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ daneben stellt, gar keine Einwirkung von anderer Seite verrät. Cantor weist darauf hin, daß seit 1116, aus welchem Jahre nachweislich die Übersetzung des Plato stammt, das Abendland die Möglichkeit hatte, von dem Vorhandensein einer Doppelwurzel quadratischer Gleichungen und von der Art ihrer Berechnung unterrichtet zu werden. Wahrscheinlich hatte Abraham, der auch in einem rechtwinkligen Parallelepipedum von den Seiten a, b, c die Diagonale $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ setzt, seine nicht unbeträchtliche Erfahrung in algebraisch-geometrischen Dingen von dem hundert Jahre älteren Alkarkhi (S. 207). Beachtung verdient in dem von Schapira deutsch bearbeiteten Traktate Mischnathha-Midoth ein Kriterium, wonach man ohne Winkelmessung erkennen soll, ob ein Dreieck von den Seiten a, b, c ($a > b$, $a > c$) spitz-, recht- oder stumpfwinklig ist. Man richtet sich nämlich nach dem verallgemeinerten Pythagoreer:

$$b^2 + c^2 \gtreqless a^2 .$$

Platos lateinische Versionen des Theodosius (S. 119) und Albategnius (S. 213) waren nicht minder allgemein geschätzt.

Aus dem XI. ragt ins XII. Säkulum hinüber der vielgereiste jüdische Polyhistor Abraham ibn Esra (gestorben 1167). Aus seinen zahllosen Schriften, in denen auch das magische Quadrat (S. 205) vorkommt, eine Auslese zu treffen, wäre hier nicht angängig; erwähnt sei aber die auffallende Tatsache, daß als indisch ein Wert von π, nämlich $3 + \frac{8}{60} + \frac{44}{60^2} + \frac{12}{60^3} = 3{,}1456\ldots$ angeführt wird, der sich in den uns zugänglichen indischen Originalen nicht vorfindet.

Die große Anzahl der zeitgenössischen jüdischen Mathematiker, mit deren Namen und Schrifttiteln uns hauptsächlich der Bienenfleiß Steinschneiders bekannt gemacht hat, kann an dieser Stelle nur gestreift werden, weil genauere Berichte über ihre in den Bibliotheken verwahrten, teils hebräisch, teils auch arabisch geschriebenen Arbeiten noch ausstehen. Astronomie mit ihren Hilfsdisziplinen scheint vorzuwiegen. Noch ist da viel für die Geschichte der Mathematik zu holen. Der große Philosoph Moses ben Maimon oder Maimonides z. B. belehrt uns, daß ein sonst ganz im Dunkeln stehender Araber Ibn Badja bereits die elliptische Bahn der Planeten für wahrscheinlich gehalten habe; der nämliche Mann spricht in seinem tiefgründigen „Führer der Irrenden" davon, man könne $\sqrt{5000}$ nie genau berechnen, „ebenso wie es" — nach Mahlers Übersetzung — „unmöglich ist, das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises anzugeben, da man hier nie zu einer Grenze der Rechnung gelangt."

Wahrscheinlich aus der großen Übersetzungswerkstätte in Toledo ist auch ein dem Johannes Hispalensis zugeschriebenes Rechenbuch hervorgegangen, welches zwar dem großen Chowaresmier (S. 201) zugeschrieben wird, diesen Namen aber vermutlich nur als Aushängeschild trägt. Wesentlich der indischen Tradition folgend, baut sich seine Bruchlehre prinzipiell auf den Sexagesimalbrüchen auf, läßt aber beim Wurzelausziehen auch schon einen Anklang an die Dezimalbrüche erkennen (Anhängen von Nullen). Für die Gleichungen zweiten Grades werden die üblichen drei Möglichkeiten (S. 202) unterschieden; das einfachste, d. h. neunzellige magische Quadrat kann leicht den zweifellos auch auf der Iberischen Halbinsel verbreiteten Schriften „der lauteren Brüder“ entnommen sein. Auch dem Berufsübersetzer Gerhard (S. 224) verdankt man die Übertragung einer arabischen Algebra, welche hier, in korrekter Wiedergabe der ursprünglichen Wortbedeutung, als „liber restauracionis“ erscheint. Im großen und ganzen den Wegen Alchwarizmîs folgend, weist diese Schrift doch auch Abweichungen auf, welche auf eine andere Quelle und vielleicht auch auf eine Regung von Selbsttätigkeit beim Translator hinweisen. Indische Abkunft bekunden möglicherweise die gebrauchten, an ein viel späteres Stadium der algebraischen Darstellungsart erinnernden Wortabkürzungen; okzidentalisches Eigenprodukt dürften die mnemotechnischen Verse sein, welche die Behandlung der quadratischen Gleichungen dem Schüler einpauken sollen. Es wird gestattet sein, in dieser Neuerung das Hereinspielen von Gepflogenheiten der Klosterschule in das wissenschaftliche Treiben der Toledaner zu erkennen.

National-arabische Anleitungen zur Rechenkunst hat uns erst das XII. Jahrhundert überliefert. Eine solche, von Abû Zakarîjâ el Hassar hat uns Suter zugänglich gemacht. Andere Überschriften birgt das literarhistorische Werk des Ibn Chaldûn aus viel späterer Zeit. Ibn Almunim habe eine „Wissenschaft des Rechnens“, Alahdab eine „Der Vollkommene“ genannte Schrift hinterlassen. Was in diesen Büchern wertvoll gewesen, das sei in „Die Aufhebung des Schleiers“ von Ibn Albannâ übergegangen, der auch einen Traktat „Der Kleine Sattel“ aus der Feder eines marokkanischen Landsmannes mit Erläuterungen ausgestattet habe. Wir sind damit bei dem vorletzten arabischen Algebraiker angelangt, der die guten Überlieferungen seines Volkes mit eigener Denkarbeit verbindet. Die für ihn von Marre gesammelten biographischen Daten weisen aus, daß Ibn Albannâ aus der Stadt Marakesch selbst gebürtig war und zwischen 1250 und 1260 das Licht der Welt erblickte. Von seinen vielen

Arbeiten haben wir ausschließlich den Talchys, d. h. den kommentierenden Auszug aus dem „Kleinen Sattel", in einer Oxforder Handschrift überkommen. Eben dieses Werk hat dann in ein um zwei Jahrhunderte späteres zum großen Teile Aufnahme gefunden, und der Verfasser des letzteren, Alkalasâdî, hat den Talchys an dunklen Stellen erklärt, so daß sein Inhalt jetzt gut verstanden werden kann. Bemerkenswerte Punkte sind eine Verschmelzung des heimischen Ziffernrechnens mit dem im nächsten Kapitel zu charakterisierenden Kolumnenrechnen, ferner die Summenformeln für die Reihe der Quadrat- und Kubikzahlen, eine sorgfältigere Begründung der Restrechnung, endlich die approximative Quadratwurzelausziehung, bei welcher, je nachdem $a \geqq b$ oder $a < b$, einer der beiden Näherungswerte (S. 207)

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}, \quad \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a + 1}$$

zum Gebrauche empfohlen wird. Schließlich muß auch noch die Bezeichnung der als „Verfahren der Wagschalen" eingeführten Regula falsi (S. 205) als einer geometrischen Methode hervorgehoben werden; wie sich freilich Ibn Albannâ diese Beziehung gedacht habe, ist mit voller Sicherheit nicht mehr auszumitteln.

Das zurzeit in Rede stehende Jahrhundert ist auch für die Geschichte der Trigonometrie nichts weniger denn gleichgültig gewesen. Schon das um diese Zeit entstandene große Werk der Alfonsinischen Tafeln läßt solches mutmaßen, denn diese von einer Kommission gelehrter Männer in den Jahren 1267 bis 1272 auf Anordnung des Königs Alfons X. von Kastilien ausgearbeiteten astronomischen Tabellen erheischten gründliche Vertrautheit mit der Hilfsdisziplin. Das läßt die von M. Rico y Sinobas veranstaltete Prachtausgabe — Libros del Saber de astronomia de Rey Alfonso X. (Madrid 1863—1867) — klar genug erkennen. Man richtete sich zum einen Teile nach Ptolemaeus, zum anderen nach Albategnius, welch letzterem beispielsweise eine die Kotangenten enthaltende Schattentafel entstammt. Bezeichnend für die sinnlosen Genauigkeitsansprüche des Zeitalters sind die häufig uns begegnenden Winkelberechnungen; so wird für die tägliche Bewegung eines gewissen Elementes in der Mondtheorie nachstehender Betrag angegeben:

$$50^{\mathrm{III}}\ 24^{\mathrm{IV}}\ 48^{\mathrm{V}}\ 59^{\mathrm{VI}}\ 58^{\mathrm{VII}}\ 56^{\mathrm{VIII}}\ 58^{\mathrm{IX}}\ 44^{\mathrm{X}}.$$

Ausrechnung auf Dezimen (60^{-10}), während eine direkte Beobachtung höchstens eine Sicherheit bis zu $\frac{1}{4}^{0}$ liefern konnte! Zu Alfons' Gelehrtenkreise gehörten zumeist arabisch gebildete Juden, und solche standen ihm mindestens auch dann nahe, wenn sie aus anderen spanischen Reichen oder aus Südfrankreich ihren Ursprung herleiteten. Solche sind z. B. der Almagest-Kommentator David ibn Nahmias und Prophatius aus Marseille, der den Geber (S. 222) und Menelaus (S. 127) ins Hebräische übersetzte und bei einer lateinischen Überarbeitung der „Saphea" (S. 222) des Arzachel mit Hand anlegte. Den neuen Text selbst besorgte ein Johannes Brixiensis um 1263, als dessen Heimatsort wir übrigens Brescia und nicht Brixen ansprechen möchten.

Seinem gekrönten Zeitgenossen Alfons war der Staufenkaiser Friedrich II. vielfach ähnlich geartet, und wie jener, so bediente auch er sich für die Hebung der Geistesbildung in seinem Reiche Unteritalien gerne christlicher, jüdischer und, wie man damals sagte, sarazenischer Hilfe bei seinen Bestrebungen. Michael Scotus übersetzte für ihn aristotelische Schriften, Jacob Anatoli (nach 1230) den Almagest. Seinen bedeutendsten Untertanen in seinem Verhältnis zum Arabertum zu schildern, müssen wir uns bis Kap. XV aufsparen.

Zwei geniale, von ihren Zeitgenossen schlecht verstandene Fürsten haben, wie gezeigt, zum Aufschwunge der exakten Wissenschaften im XIII. Jahrhundert namhaft beigetragen. Und was sie dem Westen waren, das wurde dem fernen Osten ein nicht minder bedeutender Sultan, der aus der Mongolendynastie eines unersättlichen Eroberers hervorgegangene, für seine Person aber den Taten des Friedens wohlgeneigte Hûlagû; ihm und seinem Hofastronomen Nasr-Eddîn al-Tûsî (dem Manne aus der persischen Stadt Tuhs) dankt man jene Nachblüte ostarabischer Mathematik, deren früher (S. 195) Erwähnung geschah. Auf der Sternwarte zu Marâga entstanden die in ihrer Art ausgezeichneten Îlchânischen Tafeln, die für den

Orient — bis nach China hinein — das wurden, was die Alfonsinischen für den islamitischen und christlichen Westen waren. Aber Nasr-Eddîn (1201—1274) war auch ein erfinderischer und klar blickender Mathematiker, dessen Verdienst uns v. Braunmühl richtig zu erkennen gelehrt hat. Nur mehr beiläufig wollen wir bemerken, daß er sich schon, und zwar ganz anders, wie Ptolemaeus (S. 129), um die Verbesserung der euklidischen Parallelenlehre bemüht hat; das was ihn allen älteren und zeitgenössischen Geometern gegenüber auszeichnet, ist die seinem Geiste entsprossene Begründung des ersten diesen Namen mit Recht tragenden Systemes der Trigonometrie.

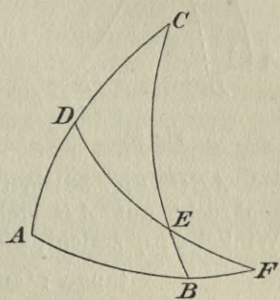


Fig. 32.

Den Grund dazu legte die Abhandlung Schakl el-Katta, welches etwa mit Theorie des vollständigen Viereckes wiedergegeben werden könnte. Diese Figur, die wir als eine Errungenschaft unserer neueren Geometrie anzusehen pflegen, ist also bereits arabisch. Was Nasr-Eddîn seinem ausdrücklich genannten Vorgänger Hussam-Uddîn entlehnt haben mag, entzieht sich unserer Beurteilung, denn von ihm wissen wir nicht mehr, als von den nach Suter ins X. Jahrhundert zu versetzenden Mathematikern Abûl Fazl Ennirizî und Abû Dschafar Al-Châzim, deren Beweise für einige trigonometrische Sätze mitgeteilt werden. Daß die Transversalenfigur des Menelaus (Fig. 32) ein vollständiges sphärisches Viereck mit den vier Seiten ABF, ADC, BEC, DEF ist, leuchtet sofort ein, aber unter diesem Gesichtspunkte war sie noch niemals aufgefaßt worden. Der persische Astronom aber ist sich dessen bewußt, daß jedes der vier Dreiecke ABC, ADF, CDE und BEF als das ursprüngliche betrachtet werden kann, indem dann resp. arc DEF, arc BEC, arc ABF und arc ADC die sphärische Transversale darstellt. Es gibt also vier Hauptgleichungen, deren jede äußerlich 18 verschiedene Formen annehmen kann. Auch für das ebene Dreieck gilt genau, was für das sphärische nachgewiesen worden war, mit den naheliegenden Umsetzungen.

Nasr-Eddîn gibt denn auch, vom rechtwinkligen Dreieck ausgehend, eine wirkliche ebene Trigonometrie, die bisher höchstens (S. 134) nebenher zugelassen worden war. Den Sinussatz spricht er in bestimmter Formulierung nach unserer Art aus. Um dann zur Raumtrigonometrie zu gelangen, variiert er nach Möglichkeit den Transversalensatz und stellt, durch Zeichnungen gestützt, zehn Grundtypen von Kugeldreiecken schematisch zusammen. Das vollständige Viereck genüge zur Behandlung aller Fälle, aber „die Neueren“ — hier sind Abûl Wâfâ (S. 209) und Ibn Jûnos (S. 218) gemeint — erreichten ihr Ziel auf bequemerem Wege. Für das schiefwinklige Dreieck ABC (Fig. 33) gelten, wenn der Hauptkreisbogen CD senkrecht auf AB steht und $\sphericalangle ACB = \gamma$ in die beiden Winkel ξ, η zerlegt, diese Relationen:

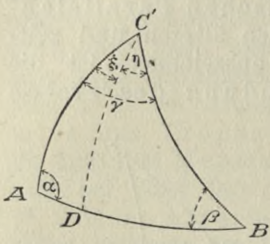


Fig. 33.

$$\operatorname{tang}\alpha : \operatorname{tang}\beta = \sin BD : \sin AD\,,$$

$$\operatorname{tang}\xi : \operatorname{tang}\eta = \operatorname{tang}AD : \operatorname{tang}BD\,.$$

Die sechs Fälle, welche zu unterscheiden sind, wenn es sich um die Lösung konkreter Dreiecksaufgaben handelt, umfassen alle Möglichkeiten: zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel; zwei Seiten und der einer von ihnen gegenüberliegende Winkel; eine Seite und die beiden anliegenden Winkel; eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel; die drei Seiten; die drei Winkel. Obwohl von Hause aus Astronom, läßt der konsequente Nasr-Eddîn die für himmlische Dreiecke absolut gleichgültige Aufgabe der Seitenberechnung aus den Winkeln doch nicht aus dem Auge, und es war ein Irrtum, daß man bisher deren erste Erwähnung bei Regiomontanus finden wollte. Dieser hat zweifellos seinen arabischen Vorläufer gekannt, denn auch die Methode für den sechsten Fall ist bei beiden Autoren die nämliche. An die Stelle des vorliegenden Dreiecks wird einfach das Supplementardreieck gesetzt, welches somit nicht erst im XVII. Jahrhundert vorkommt. In ihm ist, wenn wir zunächst Indices einführen, $a' = 180^0 - \alpha$, $b' = 180^0 - \beta$, $c' = 180^0 - \gamma$, $\alpha' = 180^0 - a$, $\beta' = 180^0 - b$, $\gamma' = 180^0 - c$; setzt man also in den dem fünften Falle entsprechenden Formeln die hieraus folgenden Werte und läßt die Indizes weg, so hat man auch die Lösung des sechsten Falles. Mutatis mutandis ist in diesem Sinne Nasr-Eddîn vorgegangen. Sogar daran hat er gedacht, daß a oder b oder $c \geqq \frac{\pi}{2}$ werden kann.

Hält man diese freilich nur aphoristischen Andeutungen gegeneinander und gegen das, was uns bisher von griechischer, indischer und arabischer Trigonometrie bekannt geworden ist, so müssen wir v. Braunmühl beipflichten: Nasr-Eddîns Stellung in der Geschichte der Trigonometrie ist eine durchaus einzigartige. Diese Disziplin hatte bisher nur insoweit Beachtung und Bewertung gefunden, als es ohne sie keine rechnerische Astronomie gab, aber niemand hatte sich sonst um sie bekümmert. Erst jetzt, im XIII. Jahrhundert, wird sie als ein mathematischer Wissenszweig von selbständigem Interesse behandelt und erhält den ihr zustehenden Platz im Systeme angewiesen. Da verschlägt es sehr wenig, daß in Nasr-Eddîns Lehrgebäude der Kosinussatz, der sich nicht in sein Herleitungsprinzip der allgemeinen Wahrheiten fügt, keinen Raum gefunden hat.

In keinem mathematisch-historischen Werke scheint des Astronomen Mahmûd al-Gagmînî Erwähnung zu geschehen, der gleichfalls ins XIII. Jahrhundert zu versetzen ist und die Trigonometrie in mehrfacher Hinsicht unabhängig erfaßte. So benützt er allein außer Ibn Jûnos das Azimut und die Höhe zur sphärischen Ortsbestimmung. Aus dem von Rudloff und Hochheim gelieferten deutschen Texte schließt man, daß er die Transformation der sphärischen Koordinaten sehr ernstlich betrieben hat. Auch verbessert er durchweg die von dem bekannten Alfraganus gegebenen Zahlen für die Klimagrenzen, welche nach der Dauer des längsten Tages zu berechnen sind. Man mußte, wenn s den zum Aufgangspunkte gehörigen Stundenwinkel der Sonne, δ deren Deklination, φ die Polhöhe bezeichnet, die Gleichung $\cos(180^0 - s) = \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\varphi$ zugrunde legen. Das Werk des Alfraganus

(Al-Fergânî, der Mann von Ferganá) war eines der geschätztesten Kompendien noch zu Anfang der Neuzeit, würde aber für unsere Zwecke wenig Ausbeute gewähren.

Die Geschichte des XIII. Jahrhunderts wollen wir hiermit als abgeschlossen gelten lassen. Was das nächste anlangt, so wollen aus ihm nur einige unter arabischem Einflusse stehende Juden, diese aber allerdings um so entschiedener, berücksichtigt sein. Das Jahr 1310 brachte Isaac ben Joseph Israelis „Weltfundament", nach Steinschneider wohl die bedeutendste in hebräischer Sprache geschriebene, leider jedoch noch nicht edierte Leistung des Mittelalters auf unserem Gebiete. In die Zeit von 1340 bis 1365 fallen die Kommentare des Provenzalen Immanuel ben Jacob, in die letzten Jahre des sechsten Jahrzehntes die zuerst arabisch und viel später auch hebräisch bearbeiteten Tafeln des Sevillaners Joseph ben Wakkar. Weitaus vertrauter sind uns die Arbeiten des Levi ben Gerson, die ohne allen Zweifel den bedeutenderen des Mittelalters zugezählt werden müssen.

Wir kennen von diesem Leo Israelita, wie er nach seinem Übertritte zum Christentum auch genannt wird, nur den Geburtsort Bagnolos in Katalonien, nicht aber auch das Geburtsjahr. Als Christ schrieb er sich selbst Leo de Baneolis, siedelte nach Südfrankreich über und starb 1344 in der damals päpstlichen Stadt Avignon. Seine wohl von ihm selbst für die herrschende Sprache zugerichtete Schrift „De sinibus, chordis et arcubus, item instrumento revelatore secretorum" hat erst in unseren Tagen die gebührende Wertschätzung gefunden, obschon wir jetzt wissen, daß Regiomontan sie in seiner Bücherei besessen und sich, sie entsprechend ausnützend, mit fremden Federn geschmückt hat. Levi operiert gewandt mit Sinus und Sinusversus, der bei ihm den arabischen Namen Pfeil (Sagitte) führt; so beweist er den Satz:

$$\text{chord}^2(\alpha \pm \beta) = (\sin\alpha \pm \sin\beta)^2 + (\text{sag}\,\alpha - \text{sag}\,\beta)^2 .$$

Mittels seiner Formeln konstruiert er eine Sinustafel, als deren kleinste Argumente $\left(15' + \frac{1^0}{128}\right)$ und $\left(15' - \frac{1^0}{64}\right)$ erscheinen. Diese beiden Sinus sind klein genug, um den

Bogen proportional gesetzt werden zu dürfen, und so wird sexagesimal

$$\sin 15' = 0^0 15' 42'' 28''' 12^{IV} 27^{V};$$

aus diesem Elemente wird die Tabelle aufgebaut. An der Hand derselben entwickelt Levi eine autonome ebene Trigonometrie, die, solange das Dreieck rechtwinklig ist, nur den Sinus und das pythagoreische Theorem anwendet und nachher die schiefwinkligen Dreiecke zwar nicht nach einheitlicher Methodik, aber doch korrekt und zweckmäßig behandelt. Nach v. Braunmühl stoßen wir hier auf die erste klare Fassung des Sinussatzes in der westlichen Literatur; Regiomontan hat dieselbe gekannt und muß den Ruhm des Schöpfers einer modernen Trigonometrie in diesem Punkte wenigstens an einen um hundert Jahre älteren Fachgenossen abtreten.

Und nicht besser steht es für ihn bezüglich des „Entschleierers der Geheimnisse". Denn auch dieses Beobachtungswerkzeug wurde, zumal auf die Autorität Breusings hin, ganz allgemein als Erfindung des Regiomontan betrachtet, der es aber nur verbessert hat. Es ist der sogenannte Jakobstab, der auch unter anderen Bezeichnungen, als Baculus astronomicus, Radius geometricus, Balestilha, Gradstock, Hammer — so noch in der deutschen nautischen Literatur des XVIII. Jahrhunderts — der Geodäsie, Astronomie und Navigationskunde bis an die Grenze der neuesten Zeit unschätzbare Dienste geleistet hat. Mit Curtze werden wir uns das Instrument wohl am besten in der aus Fig. 34 ersichtlichen Form vorstellen. Um die Bogendistanz $\operatorname{arc} SS' = \sphericalangle SAS'$ zu messen, unter A das Auge des Beobachters verstanden, hält dieser den geteilten Längsstab AD mit der einen Hand vor sich hin und verschiebt mit der anderen das von jenem normal halbierte Querholz BB' so lange, bis A über die beiden Kanten weg gerade die anvisierten Punkte S und S' erblickt. Das Dreieck ABB' ist gleichschenklig, AC die Höhe auf die Grundlinie, und $\sphericalangle\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arc} SS'$ läßt sich berechnen. Auffälligerweise, für einen Schüler der Araber nämlich, wendet Levi die Tangenten nicht an, sondern findet

$$\sin\alpha = \frac{BC}{\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}},$$

wo AC abgelesen, BC als bekannt angenommen wird. Den sonderbaren üblichsten Namen des Instrumentes bringt Steinschneider mit den geschälten Stäben in Verbindung, deren sich der Erzvater Jakob zu einem ebenfalls sehr eigentümlichen Zwecke bedient haben soll.

Immer schwächer wird, je weiter die Zeit fortschreitet, die Zahl der in arabischer oder persischer Sprache ihren Gedanken Ausdruck gebenden Mathematiker. Gleichwohl gewährt auch das XV. Jahrhundert eine gar nicht ver-

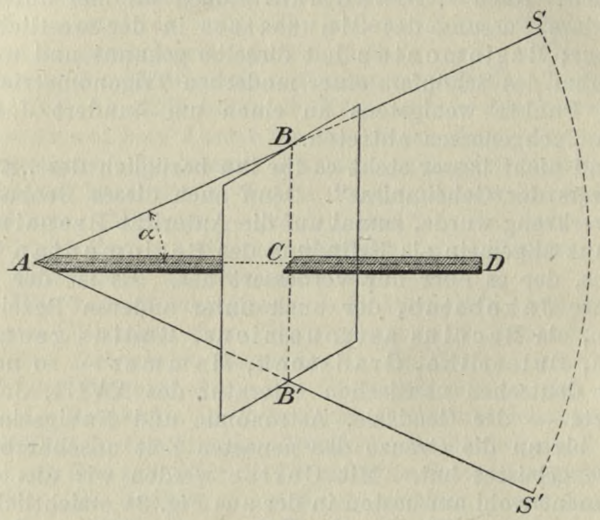


Fig. 34.

ächtliche Nachlese. Jetzt trat im Osten eine tatarische Dynastie an Stelle der mongolischen, und ein Sultan derselben, Ulûg-Beg (1393—1449) machte seine Residenz Samarkand, die bis zum heutigen Tage ein Brennpunkt mosleminischer Wissenschaft geblieben ist, zum Sitze bedeutender Männer, die ihm bei seinem Plane, die Îlchânischen Tafeln (S. 228) noch mehr zu vervollkommnen, behilflich sein sollten. Das Werk gedieh; Sédillot hat es französisch bearbeitet und kommentiert. Die Gefährten Ûlug-Begs erweisen sich als vollständig vertraut mit allen Hilfsmitteln arabischer Trigonometrie. Ganz besonders zieht uns aber die Konstruktion der Sinustafel an, denn sie beruht auf einem Verfahren, welches an Eleganz mit beliebigen griechischen oder indischen Mustern den Vergleich aushalten kann. In dieser Form teilt sie uns später mit der Kommentator Mîram el-Tschelebî, der sie einem dem Kreise Ûlug-Begs angehörigen Gelehrten Dschamschîd zuschreibt. Tschelebî starb nach Suter um 1524. Gemeint ist die Herleitung der die Dreiteilung eines Winkels bedingenden kubischen Gleichung. Als solche ergibt sich die folgende:

$$x^3 - \tfrac{3}{4} r^2 x = -\frac{r^2}{4} \sin 3^0;$$

r ist der Kreishalbmesser, x der (lineare) Sinus von 1^0. Da $\sin 3^0$ durch fortgesetzte Quadratwurzelausziehung gefunden werden kann, so gilt es nur noch, die trinomische Gleichung $(x^3 + Q) : P = x$ aufzulösen, zu welchem Zwecke die einzige reelle Wurzel

$$x_1 = A + \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \frac{a_3}{60^3} + \cdots$$

gesetzt wird. Da x_1 im Verhältnis zu Q nur klein ist, so liefert der Quotient $Q : P$ eine vorläufige Annäherung, und man kann $x_1 = A + y_1$ setzen. Somit ergibt sich weiter

$$A + y_1 = [(A + y_1)^3 + Q] : P$$

und, wenn entsprechend y_3 der Gleichung $x_1 = A + \frac{a_1}{60} + y_1$ entnommen wird, während $y_2 = A + \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + y_1$ sein soll,

$$y_2 = \left[\left(A + \frac{a_1}{60}\right)^3 + Q - P\left(A + \frac{a_1}{60}\right)\right] : P,$$

$$y_3 = \left[\left(A + \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2}\right)^3 + Q - P\left(A + \frac{a_1}{60} + \frac{a_1}{60^2}\right)\right] : P,$$

und so geht es weiter. Durch stetige Division wird (S. 133)

$$\sin 1^0 = 1^p\, 2'\, 49''\, 43'''\, 11^{IV},$$

also ein überaus exaktes Resultat ermittelt, worauf dem Vorgange des Abûl Wafâ (S. 210) folgend, auch $\sin 1'$ gewonnen werden kann. Ûlug-Begs Sinus- und Tangententafel schreiten von Minute zu Minute fort, wogegen bei der Kotangententafel das Intervall nur von Grad zu Grad genommen ist. Kaum bemerkt zu werden braucht, daß die obige Näherungsmethode sich auf jede vom quadratischen Gliede befreite Gleichung des dritten Grades anwenden läßt.

Auch Spanien hat noch in diesem Jahrhundert des Rückganges in Alkalasâdî (auch als Alkalsâwî vorkommend) einen um die Algebra sehr verdienten Mathematiker hervorgebracht, der eigene Gedanken hatte. Er wohnte — gerade wie der erste uns bekannt gewordene Hispano-Araber (S. 222) — in Granada und wandte sich im späteren Leben mit vielen Volksgenossen dem sicheren Afrika zu, wo er 1486 starb, nur sechs Jahre vor der endgültigen Zerschmetterung des letzten Restes maurischer Herrschaft durch das Königspaar von Kastilien-Aragon. Er behandelt sehr eingehend das Staubrechnen (S. 199), wie er das Tafelrechnen im Gegensatze zum Kopfrechnen benennt, und da er hier offenbar nur Althergebrachtes bietet, so ist seine von Woepcke übersetzte Schrift am besten dazu geeignet, den arabischen Kalkul auch im einzelnen kennen zu lernen. Neues dagegen enthält seine Bruchrechnung, welche die zwar schon den alten Indern nicht fremden (S. 46), dann jedoch wenigstens nicht mehr als besonders wichtig betrachteten aufsteigenden Kettenbrüche oder Bruchbrüche zum Gegenstande eines selbständigen Abschnittes macht. Beim Radizieren begegnet uns ein Verfahren, welches die in früheren Fällen (S. 89) nur unbestimmt gehegte Ahnung, daß Kettenbruchmethoden ohne den uns geläufigen Algorithmus schon in älterer Zeit ihre Schuldigkeit getan haben müssen, fast zur Gewißheit erhebt. Wir stellen die gewöhnliche Kettenbruchentwicklung (links) neben Alkalasâdîs Ausdruck (rechts):

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a} = \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{b}{2a}\right)};$$

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}} = \frac{4a^3+3ab}{4a^2+b}.$$

Beide Näherungswerte sind je einander gleich. Unser Algebraiker besitzt auch schon eine Art von Wurzelzeichen und eine in dieser Gestalt vorher nicht auftretende Gleichungssymbolik.

Weit ärmer noch als das XV. ist begreiflicherweise das XVI. Jahrhundert an geistigen Kapazitäten. Eine 1573 niedergeschriebene Anleitung zum Staub- und Luftrechnen (letzteres Kopfrechnen) von unbekanntem Verfasser ist höchstens wegen einer besonderen Art des Subtrahierens erwähnenswert. Dem Schlusse des Jahrhunderts gehört die durch Nesselmann veröffentlichte „Essenz der Rechenkunst" des Beha-Eddîn an, ein unter persischer Einwirkung geschriebenes und in türkischen Kreisen als Lehrbuch verwendetes Werk, welches eine nicht ungewandte Kompilation aus arabischen, indischen und wohl auch abendländischen Vorlagen mit geringen eigenen Zutaten darstellt. Als schriftstellernder Nationaltürke ist uns einzig der Admiral Said bekannt, dem Sultan Suleiman der Große die Abfassung eines für die Piloten der Flotte bestimmten Navigationsbuches (Mohit = Seespiegel) auftrug. Was darin den Geschichtsschreiber der Mathematik anziehen könnte, ist wesentlich die Polhöhenmessung mit Hilfe eines unvollkommenen Jakobstabes (S. 234), dessen Vorbild vielleicht weniger die verhältnismäßig hochstehende Schrift Levis (S. 233) als jene rudimentäre Manier gewesen ist, die wir (S. 9) als bei den Schiffern der Indischen Meere von Generation zu Generation sich fortpflanzend kennen lernten.

Wir nehmen damit vom mohammedanischen Orient für immer Abschied. Davon haben wir uns zur Genüge überzeugt, daß die Araber nicht bloß als Bewahrer der von Griechenland und Indien überkommenen Geistesschätze unsere Wertschätzung verdienen, sondern daß sie auch an originellen Denkern keinen Mangel in ihren Reihen hatten. Die Fortbildung der Algebra und die Erhebung der Trigonometrie auf einen höheren Standpunkt stehen dabei im Vordergrunde. Und dabei darf nicht vergessen werden, daß unsere Einsicht in die arabische Wissenschaft noch alles eher denn abgeschlossen ist.

Kapitel XIV.

Die Bewahrung der Wissenschaft im kirchlichen und höfischen Schulwesen des christlichen Mittelalters.

Vom Jahre 1600, bis zu welchem wir in der Verfolgung des aufsteigenden und rückflutenden Kulturlebens der islamitischen Völker bereits vorgedrungen waren, müssen wir um ein volles Jahrtausend rückwärts schreiten, um wieder den Anschluß an die Wissenschaft des westlichen Christentums zu gewinnen. Cassiodorius und Boetius waren im VI. Jahrhundert die letzten gelehrten Römer gewesen, und für längere Zeit scheidet Italien aus der an und für sich matten literarischen Bewegung des Abendlandes fast gänzlich aus. Die früher den Römern unterworfen gewesenen Länder suchten, insoweit nicht überhaupt die neue Kaiserstadt Konstantinopel (Kap. X) ganz an die Stelle der alten getreten war, zu retten, was sich noch retten ließ.

So heißt es im frühen Mittelalter von einem in Karthago geborenen, nachmals nach dem Wissenschaftsasyle Monte Cassino (S. 146) übergesiedelten Mönche Constantinus Afer: „Gelehrt war er in der Grammatik, Dialektik, Geometrie, Arithmetik, Mathematik (sic!), Astronomie und auch in der chaldäischen Physik" (d. h. Astrologie). Unter den christlichen Spaniern wurde als Geistesheld gefeiert der einem edlen westgotischen Geschlechte entsprossene Isidorus von Sevilla (570—636), dessen Hauptwerk (Origines oder Etymologiae) eine an Marcianus Capella (S. 146) oder Cassiodor (S. 146) erinnernde Enzyklopädie darstellt, Neues aber nur in ihren oft recht geschmacklosen Versuchen, die Herkunft mathematischer Kunstwörter zu ergründen, darzubieten vermag. Positives ist dem Buche sehr wenig zu entnehmen. Auf größere Regsamkeit stoßen wir erst, wenn wir uns den Britischen Inseln zuwenden. Irland vor allem, im V. Jahrhundert von Gallien aus christianisiert, besaß schon frühzeitig Klöster und Bildungsanstalten, welche die spärlich erhaltenen Reste der Antike in Schutz nahmen und selbst nun wieder durch ihre Sendlinge die benachbarte Hauptinsel für idealere Güter begeisterten. Mit Schottland fing es an; dann kam England an die Reihe; und Iren, Schotten, Engländer — sowohl keltischer wie germanischer Volkszugehörigkeit — haben auch auf dem Kontinente für die Verbreitung von Bildung und Gesittung das Beste getan.

Der Mann, mit dem sich unsere Erzählung zuerst etwas eingehender zu befassen hat, war der Northumberländer Beda (672?—735), dem man als großem Kirchenlehrer den Beinamen Venerabilis gegeben hat. Er entwarf einen Lehrplan für die kirchlichen Schulen, in dem Astronomie und Arithmetik nicht vergessen sind; beider Disziplinen bedurfte der Kleriker, um in der Osterrechnung (computus paschalis, computus ecclesiasticus, S. 147) seinen Mann stellen zu können. Für sie, die sich vorzüglich auf Macrobius und Isidorus Hispalensis stützte, war auch die Fingerrechnung nicht zu entbehren, und Beda gibt dafür eine Anweisung, die von derjenigen des Nicolaus Rhabdas (S. 174) nicht eigentlich abweicht. Offenbar gab es für dieses Erleichterungsmittel des Kopfrechnens bereits ein allseitig in den Schulen adoptiertes System solcher Kunst, dessen schärfste Formulierung ein von Muratori herausgegebenes „Komputusbuch des heiligen Cyrillus von Alexandria“, das um 800 entstanden sein mag, zu enthalten scheint. Zwischen Fingerrechnung und bloßer Fingersprache wird ausdrücklich ein Unterschied gemacht.

Bedas an sich angesehener Name gewann noch dadurch an Gewicht, daß er sich als Lehrer tüchtiger Männer bewährte. Ob zwei in mathematischen Dingen wohl beschlagene Lehrer der Yorker Domschule, Egbert und Aelbert, unmittelbare Schüler des Altmeisters waren, ist zwar nicht sichergestellt, aber doch recht wahrscheinlich. Aus ihrer Leitung ging ohne Zweifel hervor der Angelsachse Alcuin oder Albinus (eigentlich Ahlwin, 735—804), der sohin Bedas „wissenschaftlicher Enkel“ gewesen wäre. Frühzeitig brachten ihn kirchliche Aufträge nach dem Festlande, wo er Karls des Großen persönliche Bekanntschaft machen durfte, die für ihn selbst und für das Frankenreich von so hoher Bedeutung werden sollte. Wurde er doch, wie man wohl sagen darf, als ein Nachfolger des Praeceptor Britanniae in Bälde selbst zum Magister Franciae.

Ganz ohne Gelegenheit, sich das für Kirchen- und Staatsdienst erforderliche gelehrte Wissen anzueignen, war schon das Merowingerreich nicht gewesen, so wenig wie Italien. Bischof Ratherius von Verona bezeugt, daß es Klosterschulen, Episkopalschulen und Privatschulen gegeben habe, und durch des Bischofs Chrodegang von Metz Bestrebung, um 760 auch den Kathedralklerus nach einer „Regel von gemeinsamem Leben" zu organisieren, ward auch das Unterrichtswesen vorwärts gebracht, weil an jeder neuen Stiftsschule „nach der Tradition der Römer" ein Lehrgang einzurichten war. Als Alcuin nach Deutschland kam, erhielten die bereits bestehenden Einrichtungen einen neuen Aufschwung. Kaiser Karl behielt den gelehrten Engländer fünfzehn Jahre (781—796) bei sich, ließ sich von ihm in den Artes liberales unterrichten und begründete mit seiner Unterstützung jene Hofschule, in welcher der junge fränkische Adel einer etwas höheren Geistesbildung teilhaftig gemacht wurde. Auch als Alcuin sich später in ein Kloster zu Tours zurückgezogen hatte, unterhielt er mit dem Kaiser einen lebhaften Briefwechsel, der sich großenteils um mathematische und astronomische Gegenstände drehte und von Karls richtiger Auffassung kein übles Zeugnis ablegt; der Abt von St. Martin unterhielt u. a. seinen Korrespondenten auch mit den bei ersterem beliebten mystischen Zahlenspielereien, und da heißt es ausdrücklich: „Improbavit Carolus arithmetica Alcuini ludicra". Das Verhältnis beider Männer ward indessen durch solch kleine Zwischenfälle nicht getrübt, und ihren vereinten Bemühungen gelang es, an einer größeren Anzahl von Bischofssitzen Schulen einzurichten, deren Lehrprogramm wesentlich Trivium und Quadruvium (S. 149) zu bilden hatten. Diese konnten sämtlich von einer — sicherlich in zahlreichen Abschriften verbreiteten — Arbeit Alcuins Nutzen ziehen, welche in erster Linie für den Unterricht an der Palastschule bestimmt war und mit einigem Rechte, wiewohl auch bloße Rätselfragen nicht ausgeschlossen waren, als das erste auf deutschem Boden — in Aachen — entstandene mathematische Werk bezeichnet werden darf. Es sind dies die „Propositiones ad acuendos juvenes". Man hat ihre Authentizität bezweifelt, wird aber mehr und mehr zu der Anschauung gedrängt, daß Alcuins Autorschaft das wahrscheinlichste ist, und daß die Schrift jedenfalls aus der älteren karolingischen Zeit stammt.

Textaufgaben für Gleichungen machen den beachtenswertesten Teil der Sammlung aus; sie sind durchaus ähnlich denen der griechischen Anthologie (S. 174) oder sogar, wie die „Brunnenaufgabe", mit ihnen identisch. Manche machen auch Schülern unserer Zeit noch Schwierigkeiten, wie etwa das Beispiel „De cursu canis ac fuga leporis". Der Hundesprung mißt 9, der Hasensprung 7 Fuß; wenn nun anfänglich der Hase dem Hunde um 150 Fuß voraus ist, wieviel Sprünge muß jedes von beiden Tieren machen, bis der Hase ereilt worden ist? Auch eine arithmetische Progression und ein System von zwei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten werden richtig behandelt. Minder gut kommen einige geometrische Aufgaben und eine Erbteilungsfrage fort. Jedenfalls hat diese Art der „Verstandesschärfung" Beifall gefunden; aus dem IX. Jahrhundert liegen auch sonst noch Sammlungen von Zahlenrätseln vor, deren eine Hagen nach einer Berner Handschrift publiziert hat. Wieviel Tauben, so heißt es da, sitzen auf einer Leiter von 100 Sproßen, wenn, wie wir sagen würden, auf der n ten Sproße n Vögel sitzen? Die Antwort ist richtig: Die Gesamtzahl ist $= \frac{1}{2} 100 (1 + 100) = 5050$. Auch aus den etwas jüngeren „Annales Stadenses" lassen sich interessante Auszüge machen. Zwei Spaßmacher, Firri und Tyrri, legen sich Fragen vor, die schon einen gewissen Grad von Rechenfertigkeit voraussetzen. Eine davon führt ungesucht auf das magische Quadrat mit neun Zellen (S. 38).

Die Palastschule Karls war übrigens nicht so ganz ephemer, wie man es sich gewöhnlich vorstellt, sondern sie hat auch für spätere Zeiten noch nachgewirkt. Ludwig der Fromme, ein Mann von guten astronomischen Kenntnissen, erhielt sie aufrecht und scheint an sie sogar den durch Schriften über Kosmographie und Komputus (S. 147) bekannt gewordenen Irländer Dicuil berufen zu haben. Selbst noch an dem Hofe des schwächlichsten Nachfolgers des großen Karl, Karls des Kahlen, spielte der Mönch Heiric seines mathematischen Wissens halber eine gewisse Rolle. Spuren der vom ersten Kaiser gegebenen

Anregung lassen sich auch bei den Sachsenkaisern und vor allem am Hofe Heinrichs des Löwen erkennen.

Ungleich bedeutungsvoller für die Förderung der Volkserziehung sowohl wie auch für die Bewahrung des Gesamtwissensstandes erwiesen sich jedoch die Klosterschulen, deren Zahl und innerer Wert vom IX. Jahrhundert ab stetig wuchs. Fast ausschließlich war der Benediktinerorden der Träger aller der verdienstlichen Bemühungen, welche den Wissenschaften — und obenan den mathematischen — die Forterhaltung auch in den trübsten Zeiten des Mittelalters ermöglichten. Bildungseifrige Äbte wußten sich stets einen tüchtigen Stamm von Lehrern für ihre äußere (weltliche) und innere (für den klösterlichen Nachwuchs bestimmte) Schule zu erhalten, und die Skriptorien förderten unermüdlich neue Abschriften römischer Vorlagen — griechische kannte man nur wenig — zutage. Was an Bildungsstoff zuhanden war, stammte freilich nicht gerade von Klassikern; Plinius, Marcianus Capella, Isidorus Hispalensis, der dem VI. Jahrhundert angehörige Historiker Orosius galten als Autoritäten. Wie sklavisch man sich vielfach an die alten Texte hielt, beweist u. a. das gegen Ende des IX. Jahrhunderts entstandene Wörterbuch des Bischofs Salomo von Konstanz, eine ungemein viel gebrauchte und hoch gepriesene Enzyklopädie. Was darin gegen die Möglichkeit der Existenz von Antipoden gesagt wird, ist wortwörtlich aus den „Etymologien" des Isidor (S. 238) kopiert.

Besonders rühmende Erwähnung verdienen im IX., X., XI. und XII. Jahrhundert, welch letzteres allerdings schon ganz das des Niederganges ist, die Klosterschulen von Fulda, St. Gallen, Reichenau, Tegernsee, Hirsau (in Schwaben), Prüm (in der Eifel), St. Martin von Tours, Auxerre, Stavelot, Cluny (Zisterzienserabtei), Fleury (Nordfrankreich), Chartres (westlich von Paris), Aurillac (Auvergne). Nur die hervorragendsten finden sich hier mit Namen aufgeführt. Fuldas Stolz war Hrabanus Maurus („primus praeceptor Germaniae"), dessen mathematische Schriften leider in Verlust geraten sind, nebst seinem Lieblingsschüler Sturmi. Erfreuliches mathematisches Leben blühte in St. Gallen, wo Notker der Stammler (IX. Jahrhundert) und Notker Labeo (um 1000) geehrte Lehrer waren. Ein ausdrücklich als verstellbar bezeichneter Erdglobus stand für mathematische Geographie zu Gebote. Daß die Brüder ihr Wissen auch anzuwenden und praktische Mathematik zu treiben verstanden, beweist uns der berühmte Bauriß des Klosters, das einzige Dokument dieser Art aus früherem Mittelalter. Aus dem in Fig. 35 abgebildeten, die Vorratsräume *B* und *C* darstellenden Stücke des Planes ersieht man, daß es sich um einen nach strenger Regel gezeichneten geometrischen Grundriß handelt, und man kann die Schriftsteller begreifen, welche die Fertigung des Risses dem

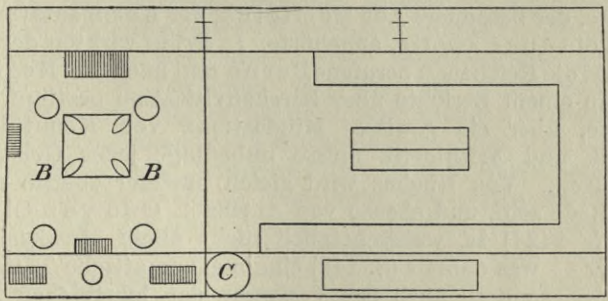


Fig. 35.

Einhard, Karls des Großen Geheimschreiber und Schwiegersohne, zuschreiben, von dem feststeht, daß er sich durch Studium des Vitruvius zum tüchtigen Baumeister herangebildet hatte. Und gerade bei Vitruv (S. 145) war Planzeichnung zu lernen.

Auf der Insel Reichenau genoß schon bald nach 800 Tatto als Lehrer des Quadruviums großes Ansehen, und dasselbe galt später von seinem Schüler Walafried Strabus (fälschlich Strabo). Später, in der ersten Hälfte des XI. Jahrhunderts, blühte allda Wissenschaft und Lehre unter Hermann dem Lahmen, dessen Schriften über den Abacus, über Rhythmimachie und den Gebrauch des Astrolabiums eine sehr achtbare Regsamkeit bekunden. Die an die Tatsache, daß Hermannus Contractus einige arabische Kunstausdrücke richtig anwendet, geknüpften Vermutungen gehen jedenfalls viel zu weit. Aus der ältesten Bibliothek des Benediktinerklosters Tegernsee ist eine Handschrift der „Arithmetik“ des Boetius (S. 147) bis auf uns gekommen, angefertigt von jenem Froumond, dessen Lehrgedicht über die Einteilung der Wissenschaften uns gleichfalls erhalten blieb. Wilhelm von Hirsau (1026—1091) schrieb „Institutiones“, in welchen nach Prantl „das mathematisch-physikalische und medizinische Schulwissen in eine gewisse spekulative Färbung getaucht“ erscheint. Das Kloster von Tours zehrte lange am Ruhme Alcuins, der aber auch achtbare Nachfolger hatte. Aus Auxerre machte der oben erwähnte Heiric, ein Schüler Hrabans, eine glänzende Bildungsstätte, der besonders Abt Remigius, der Kommentator des Marcianus Capella, angehörte. In Prüm wirkten der von da auf die Reichenau berufene Berno und nach ihm Regino, der in einem Berichte über Kirchenvisitation bestimmt erklärte, über ein gewisses Mindestmaß von Kenntnis in Musik und Arithmetik müsse unbedingt jeder Geistliche verfügen. Von Rheims wird gleich nachher ebenso mehr die Rede sein, und ebenso von Aurillac. Odo von Cluny (879?—942?) ist wahrscheinlich nicht allein Musikschriftsteller — was damals (S. 149) eine mathematische Tätigkeit war —, sondern auch der Verfasser der lehrreichen „Regulae Abaci“ gewesen, die uns einen guten Einblick in den Arithmetikbetrieb jener Zeit verstatten. Aus der zweiten Hälfte des X. Säkulums besitzen wir eine Erläuterung des Victorius (S. 141), in welcher ein Werk des Abbo von Fleury erkannt worden ist; man ersieht daraus auch, daß die Klosterschule auf ein rhythmisches Hersagen des Einmaleins Gewicht legte. „Fulbertus Carnotensis Episcopus“ wird als besonders erfahren in den liberalen Künsten gepriesen (X. Jahrhundert).

Auch gelehrte Nonnen fehlen neben den Mönchen nicht gänzlich. Am meisten zeichnete sich aus Hrotsvitha von Gandersheim, die in ihrem Drama „Hadrianus“ (geschrieben um 970) eine Reihe von Exzerpten aus Nicomachus (S. 136) oder Jamblichus (S. 156) zum besten gibt und mit „mangelhaften“, „überschüssigen“, „vollkommenen“ Zahlen ganz wohl Bescheid weiß. Der etwas spätere „Hortus Deliciarum“ der Äbtissin Herrad von

Landsperg ist bedauerlicherweise 1870 mit der Straßburger Bibliothek verbrannt, aber man hatte das Original mit seinem in alle Disziplinen einschlagenden merkwürdigen Inhalte längst wiederholt beschrieben. Auch einen „Komputus“ besitzt man von dieser Verfasserin, worin dieselbe nach Beda eine korrekte und auf rechnerische Gewandtheit hindeutende Definition der chronologischen Begriffe liefert.

Es versteht sich, daß neben Frankreich und dem Deutschen Reiche auch andere Länder eines geordneten Klosterschulwesens sich erfreuten. Neben Monte Cassino standen in Italien Bobbio und Novara in Blüte, wo Gunzo, der später im belgischen Kloster St. Amand sur l'Elnon sich seine literarischen Sporen verdiente, den ersten Unterricht genossen hatte. Sein „Sendschreiben an die Brüder auf der Reichenau“ (um 900) darf wegen mancher ungewöhnlichen Bemerkungen zitiert werden; so definiert er eine Rotationsachse als mathematische Linie ohne jede Körperlichkeit, „wie solche doch noch in einem Spinnenfaden gefunden wird“. Das Alter des englischen Abtes Ethelwold, der über Astronomie geschrieben haben soll, ist nicht genau bekannt. In diesem Lande muß nach der Blüteperiode von Beda - Alcuin ein starker Nachlaß eingetreten sein, denn in dem ältesten angelsächsisch geschriebenen geometrischen Fragmente, welches Haliwell auffinden konnte, heißt es, diese Kunst sei erst zu König Atelstans Zeit, der um 950 regierte, auf die Insel gekommen. Ganz zutreffend dürfte das freilich dem nicht erscheinen, der sich der starken wissenschaftlichen Interessen König Aelfreds (gestorben 901) erinnert.

Den eigentlichen Klosterschulen traten erst etwas später zahlreiche Kathedral- und Stiftsschulen zur Seite; dafür erhielten sich aber manche von diesen in ihrem Rufe, als es mit demjenigen der Klöster im XIII. Jahrhundert stark bergabwärts ging. Die „Rheinstraße“ bewährte sich hier als uralter Kulturweg; Köln (Wolfhelm und Franco der Musiker), Mainz (der schottische Mathematiker Marianus), Speier (Gualterus Spirensis) waren hochberühmt. Das schwer verständliche, aber von Harster nach Möglichkeit geklärte didaktische Gedicht Walters über den Zahlenkampf zeigt uns denselben im

Jahre 983 vertraut mit dem Abakus, mit den drei griechischen Medietäten (S. 58), mit der nicomachischen Zahlencharakteristik. Beiläufig sei eingefügt, daß dieses „Rhythmimachia" genannte Spiel (S. 243) sich lange große Beliebtheit wahrte; um 1100 schrieb darüber Fortolf ein Lehrgedicht, und selbst der so hoch stehende Oresme (Kap. XVI) verschmäht es nicht, sich mit ihm zu beschäftigen. Im deutschen Norden glänzten Hildesheim, dessen Bischof St. Bernward einen arithmetisch ganz inhaltsreichen „Liber mathematicalis" verfaßte, und Herford, wo sich junge Isländer im XI. Jahrhundert die gelehrte Bildung holten, die für höhere kirchliche Stellen unerläßlich war, bis dann auf jener fernen Insel sich ein selbständiges Schulwesen entfalten konnte. Der Süden Deutschlands endlich besaß zu Konstanz, Regensburg, Augsburg — Honorius Augustodunensis? — und namentlich Bamberg berühmte Domschulen. In einem dem Stadtbeschützer, Kaiser Heinrich II. dem Heiligen, anno 1000 überreichten Gedichte des Abtes Gerhard wird der Blüte des Quadruviums an der Domschule der auch mit stattlichen Bibliotheken ausgerüsteten Stadt Babenberg besonders gedacht. Die französisch sprechenden Länder verehrten als ihre Erziehungsstätten in erster Reihe Laôn und Lüttich, wo ein anderer Franco als Mathematiker wirkte.

Weitaus die bedeutendste Persönlichkeit unter allen den vielen Klerikern, denen ein Plätzchen in der Geschichte der Mathematik gebührt, war der Franzose Gerbert, der in der ersten Hälfte des X. Jahrhunderts geborene Auvergnate, der 1003 als Papst in Rom verstarb. Herangebildet im Kloster Aurillac (S. 244), durfte er sich von 967 ab einige Zeit in Katalonien aufhalten, wo er mit arabischer Wissenschaft oberflächliche Beziehungen anzuknüpfen in der Lage war. Im arabischen Teile Spaniens ist er trotz entgegenstehender Behauptungen niemals gewesen. Von 972 bis 982 weilte er in Rheims, wo man seine Befähigung als Scholasticus auszunützen verstand, von da ab kurze Zeit als Abt in Bobbio (S. 245). Später zwang ihm seine Freundschaft mit Kaiser Otto III., der sich seiner gerne zu Sendungen bediente, ein ziemlich unruhiges Wanderleben auf, obwohl er formell die Würde eines Bischofs von Rheims bekleidete. Vier Jahre endlich trug er die Tiara. Sowohl durch einen verzweigten Briefwechsel, als auch durch eigene Schriften griff er in die geistigen Bewegungen seines Zeitalters kräftig ein, und gar manches, was er schrieb, ist auch völlig gesichert. Minder klar liegen die Dinge bezüglich anderer Arbeiten, und so entwickelte sich, nachdem erst um 1790 Kästner wieder auf diesen ganz der Vergessenheit anheimgefallenen Mathematiker aufmerksam gemacht hatte, im XIX. Jahrhundert eine eigene Gerbertfrage, die sich in eigenartiger Weise mit der schon berührten Boetiusfrage (S. 148) verschlingt und kaum von ihr getrennt behandelt werden kann. Olleris, Friedlein, Curtze, Weißenborn, Bubnov, P. Tannery u. a. haben sich mit deren Entwirrung beschäftigt; die zusammenfassende Darstellung M. Cantors dürfte die den Sachverhalt tunlichst einwandsfrei kennzeichnende genannt werden.

Zuvörderst soll kurz das historisch unzweifelhafte Material besprochen werden. Da ist ein 983 aus Bobbio an Adalbero in Rheims gerichtetes Schreiben, worin dem Freunde die Auffindung wichtiger mathematischer Schriften mitgeteilt wird. Unbezweifelt ist ein anderes, welches 990 Remigius von Trier empfing; darin wird die auffallende Ansicht vertreten, keine Zahl könne ihr eigener Teiler genannt werden. Zwei im Jahre 984 an den Bischof von Gerona (Katalonien) und den Abt von Aurillac gesandte Briefe tun eines Spaniers Josephus Erwähnung, von dem eine Schrift über das Multiplizieren und Dividieren existiert haben soll; wer das gewesen sein könnte, das herauszubringen haben sich Weißenborn und Suter viele, aber kaum belohnte Mühe gegeben. Nur ein winziges Fragment ist von einem ungefähr gleichzeitigen Brief an Lupitus vorhanden, worin von diesem Barcelonier ein — vermutlich arabisches — Werk über Sternkunde erbeten wird. Am lehrreichsten ist die Korrespondenz zwischen dem früheren Gerbert, dem nunmehrigen Papste Sylvester II., und dem Bischofe Adelbold von Utrecht. Dieser will wissen, ob sich ganz allgemein ähnliche Körper wie die Kuben homologer Linien verhalten, und wird wohl belehrt worden sein, daß dem in der Tat so sei; die Antwort haben wir leider nicht mehr. Recht charakteristisch für die durch mißverstandene Lektüre römischer Feldmesser entstandene Begriffsverwirrung ist der Umstand, daß Adelbold Polygoninhalte und Polygonalzahlen verwechselt (vgl. S. 144). Ein gleichseitiges Dreieck von der Seite 7 soll nach der bekannten Näherungsformel $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (7 - \frac{1}{7} \cdot 7)$, die Gerbert als Kenner des Wertes $\sqrt{3} \backsim \frac{12}{7}$ zu erklären weiß, gleich 21 sein, während doch die Trigonalzahl $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8) = 28$ wäre. Zweierlei Maßzahlen könne doch die nämliche Fläche nicht haben. Der Papst klärt mit pädagogischem Takte das Mißverständnis auf. Gewiß kommt (Fig. 36) dem Dreieck ABC ($AB = BC = CA = 7$) die Flächenmaßzahl 21 zu; konstruiert man aber die Treppenfigur, welche in der angegebenen Weise das Dreieck umschließt, so treten zu 21 noch 14 kongruente kleine Dreiecke, in unserer Zeichnung schraffiert, hinzu. Der geometrische Wert für den Flächeninhalt ist folglich 21 und der arithmetische Wert ist 28. Der Adressat mußte sich, wollte er ganz unglaublich scheinende Irrtümer richtig stellen, auf ein ziemlich tiefes Niveau herablassen, aber auf anderem Wege hätte er seinen Zweck schwerlich zu erreichen vermocht. Es sei hier festgestellt, daß uns die wissenschaftliche Korrespondenz jener weit zurückliegenden Zeit die für die Gelehrtesten kennzeichnenden Gedanken, Pläne und Triebfedern oft weit besser als irgend ein für Anfänger bestimmtes Werk enthüllen kann. Eine von P. Tannery herausgegebene Briefsammlung eines Wazzo, Adelmann, Ruzegin, Fulbert, Franco Coloniensis u. a. ist nach dieser Seite hin besonders beweiskräftig.

Von dem, was Gerbert zu Lehrzwecken geschrieben hat oder doch geschrieben haben soll, wird die Abhandlung „Regula de abaco computi“ als weniger sicher angesehen. Jedenfalls könnte sie in ihrer Tendenz, sich ganz an römische Vorbilder anzulehnen, für echt gelten, und wenn sie auch dem Stiftslehrer Heriger zuzuschreiben sein sollte, so wäre sachlich doch damit nichts geändert, weil dieser Mann Gerberts Kollege in Rheims war. Ziemlich analogen Inhaltes ist ein „Libellus de numerorum divisone“, dessen Urheberschaft nicht angezweifelt wird. Für beide Schriften ist eine Eigenschaft gemeinschaftlich, welche unsere Verwunderung erregen kann. Sie operieren nämlich beide nur mit den römischen Zahlzeichen (S. 139) und nicht mit jenen neuen Symbolen, deren Einführung eben den

Kern der gelehrten Streitigkeiten über Boetius und Gerbert bildet. Um diesen Punkt in seiner geschichtlichen Tragweite zu würdigen, müssen wir zuvor noch uns Gerberts Geometrie zuwenden, die in allerdings späteren, aus dem XII. Jahrhundert stammenden Kodices vorliegt. Damals hegte man, wie die Eingangsworte „Incipit Geometria Gerberti“ in der besten, der Salzburger Handschrift dartun, keine Bedenken gegen die Autorschaft dieses hoch angesehenen Gelehrten.

Wenngleich nun einzelne Mängel, die aber sehr wohl den Abschreibern zur Last gelegt werden können, mit unter-

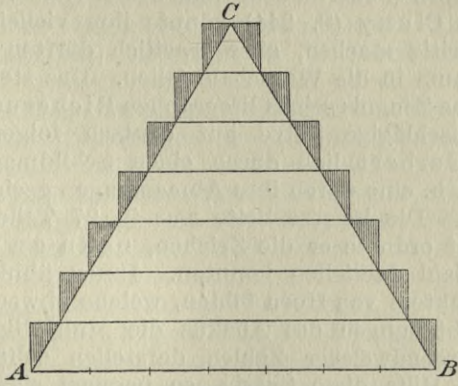


Fig. 36.

laufen, so ist doch der ganze Tenor des Buches so, daß sich ein Schriftsteller des X. Jahrhunderts dieser seiner Leistung wahrlich nicht zu schämen braucht. Sie bekundet vollständige Vertrautheit mit den besten Reliquien römischer Gromatik, so wie sie der Codex Arcerianus (S. 138) auf uns gebracht hat. Aber auch von Pythagoras, Plato, Aristoteles, von der Erdmessung des Eratosthenes (S. 83) hat der Verfasser Kenntnis, so wie auch direkte heronische Reminiszenzen (das regelmäßige Achteck) bemerkt werden. Auch die Formeln für Polygonal- und Pyramidalzahlen, wie sie Epaphroditus (S. 144) gibt, sind hier anzutreffen. Man muß somit zu dem Schlusse kommen, daß ein Mathematiker, der dem X. oder XI. Jahrhundert zuzuweisen ist, diese

„Geometrie“ aus den ihm sich bietenden Quellen zusammengestellt hat, und da erstens die Überlieferung Gerbert als den Kompendiographen nennt und zum anderen in jenen Zeiten kein Gelehrtenname uns entgegentritt, der sich an Gewicht mit jenem messen könnte, so bleibt nur der Schluß übrig, daß der Indizienbeweis für die Echtheit der Gerbertschen Geometrie als ein ziemlich abgeschlossener betrachtet werden könne.

Nunmehr ist noch die hochwichtige Frage zu erledigen, ob eben dieser Mann auch als Wiedererwecker des alten Kolumnenrechnens anzuerkennen sei, und welcher Zahlzeichen er sich zu dem Ende bedient habe. Höchstens Odo von Cluny (S. 244) könnte ihm vielleicht diesen Ruhm streitig machen, aber ernstlich dürften seine Ansprüche kaum in die Wagschale fallen. Uns steht das unverwerfliche Zeugnis seines Biographen Richerus zur Seite, dessen einschlägige Sätze auf deutsch folgendermaßen lauten: „Gerbert ließ durch einen Schildmacher einen Abakus, d. h. eine durch ihre Abmessungen geeignete Tafel anfertigen. Die längere Seite war in 27 Teile abgeteilt, und darauf ordnete er die Zeichen, neun an der Zahl, die jede Zahl darstellen konnten. Ihnen ähnlich ließ er 1000 Charaktere von Horn bilden, welche abwechselnd auf den 27 Abteilungen des Abakus die Multiplikation oder Division irgendwelcher Zahlen darstellen sollten, indem mit deren Hilfe diese Spezies so bequem sich erledigen ließen, daß sie bei der großen Menge von Beispielen viel leichter verstanden, als durch Beschreibung mit Worten erklärt werden konnten.“ Richer sagt, diese Rechnungen seien in der Geometrie vorgekommen, und das würde uns gegen seine ganze Auseinandersetzung einnehmen können, wäre nicht noch ein weiteres zu beachten. Gerbert nämlich hat die vorerwähnten Symbole dem Boetius entnommen, und bei diesem (S. 148) erscheint der bezügliche Abschnitt als ein Bestandteil der Geometrie und nicht der Arithmetik. Die Ängstlichkeit, mit welcher das Mittelalter berühmten Mustern unter allen Umständen Heeresfolge zu leisten pflegte, kann jenen methodologischen Schnitzer begreiflich machen, für den sich aber auch noch eine andere Entschuldigung angeben läßt. Bei den Römern nämlich funktionierte die mit Staub bestreute Tafel (S. 140) ebensowohl als Rechen-, wie als geometrisches Zeichenbrett, weshalb Boetius und Gerbert den Handapparat in die Geometrie verwiesen haben mögen.

Nunmehr ist auch einleuchtend, weshalb diese beiden Gelehrten, deren Lebenszeit doch ziemlich um ein Halbjahrtausend verschieden ist, so oft vereinigt genannt werden. Gerbert hat eben von Boetius seine Charaktere, seine Ziffern überkommen; nach anderer Meinung ist ersterer selbst der Erfinder der Apices, und durch ihn sind sie erst in die Handschriften des Römers hineingekommen. Mit Chasles und Cantor wird hier die Echtheit angenommen. Man darf der Ansicht huldigen, daß schon im V. Jahrhundert, als in Italien sich byzantinische und auch durch dieses Medium indische Einflüsse zu zeigen begannen, die Unbehilflichkeit der römischen Zahlzeichen eine Reform immer dringender herausforderte. Leider hat Gerbert nicht verraten, woher für ihn die Kenntnis dieser Symbole stammte, die ganz gewiß nicht altpythagoreisch (S. 149) sind; auch bedient er sich nicht der in den Boetius - Manuskripten stehenden Ziffernamen: 1 = Igin, 2 = Andras, 3 = Ormis, 4 = Arbas, 5 = Quimas, 6 = Calcis, 7 = Cenis, 8 = Temenias, 9 = Celentis, 0 = Sipos. Die Entstehung dieser dunklen Bezeichnungen hat zur Aufstellung von mehr oder minder scharfsinnigen Hypothesen Anlaß gegeben, kann aber nicht als geklärt betrachtet werden. Die Namen begegnen uns auch im nächstfolgenden XI. Jahrhundert noch nicht, wohl aber im XII. bei dem Scholastikus Radulf (Raoul) von Laôn (gestorben 1131). Dieser singt dem Abakus ein Loblied und rühmt Gerbert und Hermannus Contractus (S. 243) als die verdienten Lehrer, welche diese Rechenkunst erhalten und weitergeführt hätten. Dann legt er Zweck und Einrichtung der Rechentafel dar und gibt eingehend Aufschluß über die neun Rechnungszeichen, deren Ursprung er auf die Chaldaeer zurückleitet. Zehn Gedächtnisverse verhalfen dem Lernenden dazu, sich die fremdartigen Worte einzuprägen. Das Wort sipos für Null mag am ersten an das arabische Ziffer, die τζίφρα des Maximus Planudes (S. 171), erinnern. Bis zu einem gewissen Maße haben sich diese Zeichen und Ausdrücke eingebürgert gehabt; so stoßen wir auf sie bei dem etwas späteren Gerland und noch bei Abazisten des XIII. Jahrhunderts. Je mehr aber die indisch-arabische Rechnung an Boden gewann, um so weniger Gelegenheit war noch zum Gebrauche der Apices gegeben. Damit sind wir so weit gelangt, die Entwicklung der Rechenkunst für die Zeiträume des früheren und des, wenn man so sagen darf, mittleren Mittelalters übersichtlich darzustellen. Die Zeit von 476 bis 1000 ist die der Komputisten; von 1000 bis ungefähr 1200 herrschen die Abazisten („abacista" kommt bei Gerbert und hernach vor); dann aber siegt der moderne Zehnerkalkul, es beginnt die, wenn man will, bis in unsere Tage dauernde Herrschaft der Algorithmiker.

I. Komputisten. So nennen wir die römischen Rechenmeister und deren mittelalterliche Schüler. Wenig Tafelrechnung — das ist die Signatur der merowingischen und karolingischen Periode, als vom Abakus noch keine Rede war. Tabellen, wie die des Victorius (S. 141), halfen der Schwierigkeiten bei den Spezies der zweiten Stufe Herr werden. Die Minutien, die römischen Brüche, wurden wohl nur von ausgebildeten Künstlern des Faches verwendet, wie denn auch von den 24 Symbolen, die es nach Atelhart von Bath für die Aß- und Uncialteile (S. 140) gab, gar manche nicht allgemeiner Verwendung teilhaftig geworden zu sein scheinen. Isidorus Hispalensis kennt ihrer nur 8, das „Vocabularium" des Papias 18. So war das Rechnen eine schwierige und mühsame Sache, der man aber zumal bei Berechnung des Osterfestes und bei zahlreichen Veranlassungen im gewöhnlichen Leben nicht aus dem Wege gehen konnte.

II. Abazisten. So umständlich auch die Manipulation mit dem Brette war und so begreiflich uns die von einem Wissenden herrührende Scherzrede vom „schwitzenden Abazisten" dünkt, so können wir doch nicht umhin, einen namhaften methodischen Fortschritt in dem neuen Verfahren des Kolumnenrechnens zu konstatieren. Wir können hier den Einzelheiten, wie sie in dem Kodex von Ivrea (XI. Jahrhundert), sodann in den Schriften eines Bernelin, Guido Aretinus — des bekannten Musikschriftstellers —, Hermann, Werner und Wilhelm von

Straßburg, Heriger, Helbert, Franco von Lüttich (S. 246), Radulf von Laôn, Atelhart von Bath, Gerland (XII. Jahrhundert) und des vom Musiker Odo (S. 244) wahrscheinlich verschiedenen, ziemlich viel späteren Abazisten Odo uns entgegentreten, nicht weiter nachgehen. Uns muß es genügen, ein paar Rechenexempel wirklich vorzuführen und in moderner Schreibart zu verdeutlichen. Selbstverständlich lassen wir auch unsere Ziffern an die Stelle der Apices treten; die Abazisten verwendeten gelegentlich auch die griechischen Buchstaben.

a) Multiplikation. Was gibt $14 \cdot 24$? Es ist $14 = 1 \cdot 10 + 4$, $24 = 2 \cdot 10 + 4$; wir setzen also, von rechts nach links fortfahrend, die beiden Faktoren in vertikaler Anordnung so in das diesmal nur I, X und C enthaltende Kolumnensystem, wie es Fig. 37 angibt. Nun werden die Teilprodukte gebildet: $4 \cdot 4 = 16 = 1 \cdot 10 + 6$, $4 \cdot 2 \cdot 10 = 8 \cdot 10$, $1 \cdot 10 \cdot 4 = 4 \cdot 10$, $1 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10 = 2 \cdot 10$. In die Kolumne unter I gehört einzig die Zahl 6; die Kolumne unter X hat, was durch Unterstreichen angedeutet worden sein mag, die Zahlen 1, 8 und 4 aufzunehmen; in die Kolumne unter C wird allein das doppelt unterstrichene 2 gesetzt. So ist das Fazit also gleich

$$\underline{\underline{2}} + \underline{1} + \underline{8} + \underline{4} + 6 = 2 \cdot 100 + 13 \cdot 10 + 6$$
$$= 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 = 336.$$

b) Division. Dafür bestanden zwei Methoden, die direkte oder goldene und die komplementäre oder eiserne. Die erstere war die leichtere und natürlichere, die andere war wirklich nichts als eine Umschreibung des Dichterwortes: „Man schafft so gern sich Sorg' und Müh', sucht Dornen auf und findet sie.“ Und hier, in der Häufung selbstgemachter Mühseligkeiten, war das Mittelalter ausnahmsweise originell, denn das eifrige Suchen Cantors nach verwandten Rechnungsoperationen im Oriente hat keinerlei Abhängigkeit dieser Art in die Erscheinung treten lassen. Durch Fig. 37 wird uns veranschaulicht, was für Arbeit erfordert ward, um 5069 : 4 auszurechnen. Diesmal bedarf es einer Vierzahl von Kolumnen (I, X, C, M), und in die Vertikalreihen wird zu unterst der Dividend $9 + 6 \cdot 10 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3$ eingeschrieben, indem die Reihe C, weil ja die Null noch fehlte, leerzulassen war. Über die Zahl 9 kam die Divisorzahl 4 und senkrecht über sie ihr dekadisches Komplement $(10-4=)6$. Dann geht es in den nachstehend unterschiedenen Etappen vorwärts:

Es ist $10-4=6$, $\frac{5000}{10}\cdot 6=3000$, $\left(\frac{3000}{10}=3000\right)\cdot 6=1800$, $\left(\frac{1000}{10}=100\right)\cdot 6=600$, somit 1. $600+800=1400$. Weiterhin hat man wieder $\left(\frac{1000}{10}=100\right)\cdot 6=600$, $\left(\frac{600}{10}=60\right)\cdot 6=360$, $\left(\frac{300}{10}=30\right)\cdot 6=180$, $\left(\frac{100}{10}=10\right)\cdot 6=60$. Die Addition ergibt 2. $60+80+60+60=260$. Nunmehr wird $\left(\frac{200}{10}=20\right)\cdot 6=120$, $\left(\frac{100}{10}=10\right)\cdot 6=60$ und $60+20+60=140$; $\left(\frac{100}{10}=10\right)\cdot 6=60$, $\frac{60}{10}\cdot 6=36$, $\left(\frac{30}{10}=3\right)\times 6=18$, $\left(\frac{10}{10}=1\right)\cdot 6=6$ und $6+8+6+9=29$. Zum Schlusse findet sich $\left(\frac{20}{10}=2\right)\cdot 6=12$, $\left(\frac{10}{10}=1\right)\cdot 6=6$, $6+2+9=17$, $\left(\frac{10}{10}=1\right)\cdot 6=6$, $7+6=13$, $\left(\frac{10}{10}=1\right)\times 6=6$, $3+6=9$. Die letzte Summe ist eine einzifferige, eine Fingerzahl, was auch der Divisor war, und der Divisionsrest findet sich $=9-1\cdot 8=1$. Der ganzzahlige Teil des Quotienten aber, von dem unsere Analyse der Einzelvorgänge zeigte, daß man ihn mit gutem Rechte „numerus divisorum" nannte, ist

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{10}(5000+3000+1000+1000+1000)\\&+\tfrac{1}{10}(600+300+100+200+100+100+100)\\&+\tfrac{1}{10}(60+30+10+20+10+10+10+10)+1=1267.\end{aligned}$$

Der Gesamtquotient $5069:4$ hat den Wert $1267+\frac{1}{4}$. Leicht verständlich ist solch künstliche Weitschweifigkeit gewiß nicht, und wir dürfen den Erläuterern, vorab Friedlein und Treutlein, es Dank wissen, daß sie uns einen Zugang zu diesem Labyrinthe eröffneten.

c) Auch Bruchrechnung konnte, wie schon unser letztes Beispiel zeigte, nicht umgangen werden. In der Regel half man sich mit den Minutien (S. 252), wies ihnen im Kolumnen-Abakus drei Vertikalreihen an und rechnete mit ihnen wie mit ganzen Zahlen. Die „minus periti“ verblieben nach wie vor bei ihrem „Faullenzer“ nach Art des Victorius. Immerhin machen sich doch auch bei den Abazisten bereits die Anzeichen einer neuen Epoche geltend.

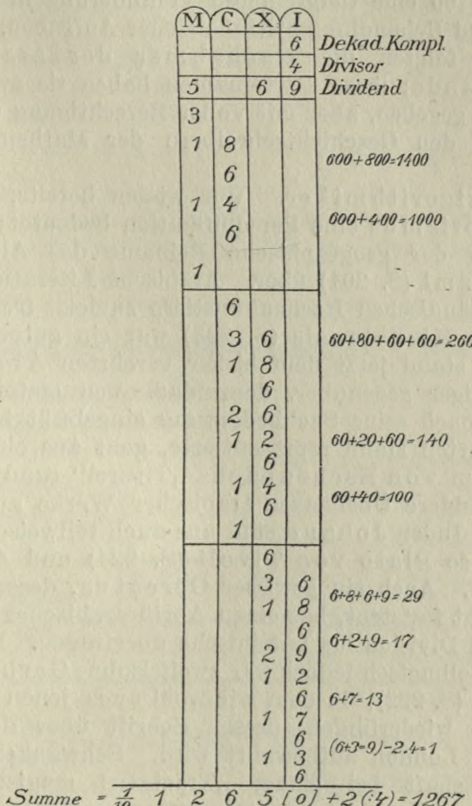


Fig. 37.

So wußte sich Hermannus Contractus in seinem auch sonst bemerkenswerten Traktate über das Astrolabium, als er nach Eratosthenes aus dem Umfange des Meridianes den Erdhalbmesser zu berechnen hatte, schon wirklicher Brüche zu bedienen. Das ging denn freilich, dafür gibt ein Schreiben des Kostnitzer Stiftslehrers Meinzo an seinen

Nachbarn Hermann vom Jahre 1148 einen sprechenden Beweis, einem Durchschnittsabazisten ganz über den Horizont.

Nicht völlig genau, aber doch in der Hauptsache vollzog sich um 1100 eine tiefgreifende Veränderung in der Auffassung und Behandlung arithmetischer Aufgaben. Auf die Abazisten folgten die Nachahmer der arabischen Zahlenkunde; ihren Parteinamen haben sie zwar nicht selbst sich gegeben, aber mit voller Berechtigung wird derselbe von den Geschichtschreibern der Mathematik gebraucht.

III. Algorithmiker. Wir wissen bereits, daß das Wort Algorismus eine Personifikation bedeutet; in diese Form ging der geographische Beiname des Altmeisters Alchwarîzmî (S. 201) über. Arabische Literatur war ja den abendländischen Rechenkünstlern zumeist fremd, aber Johannes Hispalensis (S. 223) war ein guter Mittelsmann. So stand jetzt dem bisher verehrten Abacus ein neuer Heiliger gegenüber, denn daß auch ersteres Wort nach und nach seine Sachbedeutung eingebüßt hatte und einen gelehrten Mann repräsentierte, geht aus einer Stelle in Wolfram von Eschenbachs „Titurel" rund und klar hervor. Andere Übersetzer arabischer Werke außer dem spanischen Juden Johann sind uns auch teilweise bekannt geworden, so Plato von Tivoli (S. 224) und Atelhart von Bath. Auch ein gewisser Ocreatus, dessen Nationalität nicht feststeht, hat einen Abriß arabischer Multiplikation und Division ins Lateinische übertragen. Der allerfleißigste Dollmetsch jedoch war zweifelsohne Gerhard von Cremona (S. 222), in dem wir wohl auch jenen „Meister Gerhard" wiederfinden, dessen Schrift über den Algorithmus in London aufbewahrt wird. Schwankend bleibt die Autorschaft bei einem „Tractatus magistri Gerhardi" über die neue Rechenkunst, zu welchem uns das übernächste Kapitel zurückführen wird. Mit ein paar Worten die Methoden der Algorithmiker zu skizzieren, ist ungleich leichter, als es bei denen der von unseren Gedankenkreisen so himmelweit verschiedenen Abazisten der Fall war.

Addition und Subtraktion vollzogen sich wesentlich in der uns geläufigen Weise, indem nur bei der letzteren ab und zu mit der dem Stellenwerte nach höchsten Ziffer begonnen ward. Die Multiplikation hatte sich — man vergleiche die früheren Mitteilungen über Ibn Albannâ — noch keineswegs ganz von der Kolumnentechnik losgelöst, während doch auch schon zugleich die indoarabische Blitzmultiplikation (S. 180) ihr Recht geltend machte. Nebenher ließ man dem Algorithmus „von Salem“ (im südlichen Baden) zufolge auch ein komplementäres Verfahren zu, dessen Basis der Satz (S. 139)

$$ab = 10\,[a - (10 - b)] + (10 - a)\,(10 - b)$$

für den Fall großer „Fingerzahlen“ abgab. Für die Division besaß man eine noch immer etwas umständliche, das Abakusverfahren indessen doch in jeder Beziehung übertreffende Methode. Sie wird hier am Beispiele 76468 : 257 erläutert, und zwar setzen wir, um den Gebrauch der Zeichensprache zu verallgemeinern, $\mathrm{E}\left(\frac{m}{n}\right)$ gleich der größten bei der Teilung von m durch n sich ergebenden ganzen Zahl. Nachfolgend das Schema:

2 764 : 257	68 $\mathrm{E}\left(\frac{764}{257}\right) = \underline{\underline{2}}$	$2 \cdot 2 = 4,\ 7 - 4 = 3,\ 3 \cdot 10^1 + 6 = 36,\ 2 \cdot 5 = 10,$ $36 - 10 = 26,\ 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4 = 264,$ $2 \cdot 7 = 14, \quad 264 - 14 = 250;$
7 2506 : 257	8 $\mathrm{E}\left(\frac{2506}{257}\right) = \underline{\underline{9}}$	$9 \cdot 2 = 18,\ 25 - 18 = 7,\ 7 \cdot 10^1 + 0 = 70,\ 9 \cdot 5 = 45,$ $70 - 45 = 25,\ 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 = 256,$ $9 \cdot 7 = 63, \quad 256 - 63 = 193:$
7 1938 : 257	7 $\mathrm{E}\left(\frac{1938}{257}\right) = \underline{7}$	$7 \cdot 2 = 14,\ 19 - 14 = 5,\ 5 \cdot 10^1 + 3 = 53,\ 7 \cdot 5 = 35,$ $53 - 35 = 18, \quad 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 = 188,$ $7 \cdot 7 = 49, \quad 188 - 49 = 139.$

So wäre mithin, wenn wir uns die unterstrichenen Ziffern ansehen,

$$76468 : 257 = (2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 7 =)\,297 + (139 : 257).$$

In Gemäßheit dieser Regeln haben die Algorithmiker des XII. und XIII. Jahrhunderts gerechnet, indem sie ihr Fazit immer durch die Neuner- und Elferprobe, die freilich das ihnen geschenkte Vertrauen nicht so recht gewährleisteten, sicherzustellen beflissen waren. Grundsätzlich standen sie ja schon auf einem ziemlich modernen Boden, allein ohne den genialen Mann, dem das nächste Kapitel zugeeignet ist, wäre doch die Arithmetik, richtiger gesagt, die Logistik (S. 57), noch immer erst auf halber Höhe ihrer Entwicklung stehen geblieben.

Kapitel XV.

Lionardo Pisano.

Der größte Algorithmiker, überhaupt eine ganz neuartige Erscheinung in der Geschichte der Mathematik ist Lionardo (damals Leonardo) von Pisa, der mit seiner Lebenszeit das XIII. Jahrhundert würdig einleitet. Ganz genau läßt sich dieselbe allerdings nicht abgrenzen. Sichergestellt ist lediglich der Zeitabschnitt 1202—1228, der Lionardos reiche literarische Wirksamkeit umschließt; Geburts- und Todesdatum bleiben in Nacht gehüllt. Auch der Beruf des Mannes, der später zum Königshofe (S. 228) des Hohenstaufen Friedrich II. in enge Beziehung trat, ist unaufgeklärt, denn darin wird man Eneström beistimmen müssen, daß die gewöhnliche Annahme, er sei Kaufmann gewesen, der festen Stützen entbehrt. Sein Vater, der den etwas satirischen Beinamen Bonaccio führte, und nach dem der Sohn mehrfach auch Lionardo Fibonacci — „filius Bonacij" — genannt wird, diente der damals noch nicht von ihrer Rivalenstellung mit Genua und Venedig herabgesunkenen Handelsrepublik Pisa wahrscheinlich als Konsularbeamter in Tunisien, und hier machte sich der Jüngling vertraut mit arabischer Wissenschaft, um nächstdem sein Wissen auf größeren Reisen in den Mittelmeerländern noch zu erweitern. So wurde er also zunächst zum Algorithmiker, aber freilich nur, um über das, was er vorfand, weit hinauszugehen, denn der gewöhnliche Algorismus kam ihm ebenso wie das Kolumnenrechnen — „die Bogen des Pythagoras" — als ein Irrtum vor, verglichen mit der indischen Methode. So in souveränem Besitze des Gesamtwissens seines und eines jeden vorangegangenen Zeitalters und noch dazu voll eigener Ideen war der Pisaner ganz der Mann dazu, ein überaus triebkräftiges Ferment in die Arithmetik und Geometrie des einer gewissen Stagnation anheimgefallenen Mittelalters hineinzutragen.

Das bedeutendste Werk Lionardos ist sein durch die opferwillige Arbeit des Fürsten Boncompagni der Welt erst neu geschenkter, 1857 im Drucke herausgekommener „Liber Abaci". Derselbe ward abgeschlossen im Jahre 1202, hat dann aber mindestens zwei Jahrzehnte später eine Umarbeitung erfahren — vielleicht der erste erweisbare Fall einer Neuauflage vor Gutenberg. In fünfzehn Abschnitten wird die gesamte Zahlenwissenschaft und Zahlentechnik vorgeführt, soweit ältere und neuere Hilfsmittel zu Gebote standen. Die vier Spezies werden jetzt in ganz moderner Weise gelehrt, wobei das arabische Zephirum, die Null, mit vollem Bewußtsein zur Anwendung kommt; auch die von den Didaktikern der Gegenwart als die österreichische bezeichnete Subtraktion durch Zuzählen ist vorhanden. Ziemlich rasch wird über die Division hinweggegangen, wogegen die Bruchrechnung dem Autor offenbar sehr am Herzen lag. Er hat bereits den Bruchstrich (virgula) und behandelt sorgfältig die aufsteigenden Kettenbrüche (S. 46, 236), indem er etwa

$$\left(\frac{7+\frac{5+\frac{1}{2}}{6}}{10} = \frac{7}{10} + \frac{5}{6\cdot 10} + \frac{1}{2\cdot 6\cdot 10}\right) = \frac{1\;\;5\;\;7}{2\;\;6\;\;10}$$

setzt. Lionardo handhabt das Einrichten gemischter Zahlen als eine sich von selbst verstehende Sache und vermag so Rechnungen, in denen ganze und gebrochene Zahlen vorkommen, leicht und sicher zu erledigen. Die Zerlegung eines Bruches in Stammbrüche (S. 26), die wir bei Ägyptern, Griechen und Römern als eine gegebene, nur hypothetisch erklärbare Sache hinzunehmen hatten, erscheint hier durch feste Identitäten geregelt, wie z. B. durch die folgende:

$$\frac{a+1}{an-1} = \frac{1}{an-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(an-1)}.$$

Für die Regeldetriaufgaben muß es damals zwei verschiedene Wege gegeben haben, denn Lionardo spricht von seinem Verfahren als dem „ad majorem guisam“; er scheint sich auch selbst mit der „minor guisa“ beschäftigt zu haben, bleibt uns aber nähere Nachweisungen darüber schuldig. Kaufmännische Rechnungen werden mit entschiedener Vorliebe abgehandelt, und zwar wird auch die Kettenregel, die somit nicht erst im XVIII. Jahrhundert erfunden worden ist, in geeigneter Weise benützt. Sie eignet sich hier, wie noch in unseren Tagen, besonders gut zu Münzwertumrechnungen. Es sind beispielsweise im neunten Abschnitte unseres Werkes kaiserliche Goldmünzen in katalonischen auszudrücken, und man weiß, daß 12 Imperialen = 31 Pisanern, 23 Pisaner = 12 Genuesern, 13 Genueser = 12 Turonensern, 11 Turonenser = 12 Barcellonesern sind. Wieviel sind nun in dieser letzteren Währung 15 Imperialen wert? Wir sind gewohnt, die Kette vertikal zu bilden, während Fibonacci die horizontale Anordnung wählt; nachstehend erscheinen unser heutiger Kettensatz und der des XIII. Jahrhunderts nebeneinandergestellt:

12	31
23	12
13	12
11	12
x	15

Barc.	Turn.	Januin.	Pisan.	Imper.
	12	13	31	12
12	11	12	23	15
Barc.	Turn.	Januin.	Pisan.	Imper.

Es ist sonach

$$x = 20\,\frac{1180}{3289} = \frac{3\;\;3\;\;8}{11\;13\;23}\,20 = 20 + \cfrac{8 + \cfrac{3 + \cfrac{3}{11}}{13}}{23}.$$

Lionardo stellt regelmäßig den Bruch links vor die ganze Zahl. Auch Gesellschafts- und Münzrechnung tragen bereits ein wenig mittelalterliches Gepräge, und wenn man nicht des Verfassers Originalität als eine allumspannende gelten lassen will, so kann man sich des Eindruckes nicht erwehren, daß der hochentwickelte Verkehr Italiens von sich aus bereits über das von den wissenschaftlichen Abazisten und Algorithmikern erreichte Stadium hinaus in Geschäftskreisen Neuerungen aller Art hervorgerufen hatte.

Das nach Umfang und Inhalt bedeutendste Kapitel ist das zwölfte, worin ohne strenge Systematik Aufgaben verschiedener Art vereinigt sind. Unsere Übersicht kann nur eine sehr gedrängte sein. An der Spitze steht die gewöhnliche arithmetische Progression; es reiht sich an die Summierung der Reihe der Quadratzahlen, die Lionardo, wie er selbst anmerkt, auch noch an einem anderen Orte, zum Gegenstande einer Erörterung gemacht hat. Auch die geometrische Progression wird nicht vergessen. Viel Raum nimmt die Regula falsi ein, die auch zur Auflösung der Gleichung $\frac{19}{20}x = \sqrt{x}$ dient; die geometrische Begründung des nach unseren Begriffen allerdings von selbst sich darbietenden Resultates $x = \frac{400}{361}$ bietet an sich mannigfaches Interesse. Aber auch die Regula recta, d. h. die direkte Auflösung der bestimmten Gleichung vom ersten Grade, ist dem Pisaner vertraut. An den Diorismus der Griechen (S. 70) gemahnt die Ausscheidung von „quaestiones insolubiles“, wenn also die Fragestellung etwas Unmögliches verlangt. Die unbestimmte Arithmetik hat Fibonacci seiner Aussage zufolge mit selbständigen Gedanken bereichert, wie sich bei seiner Lösung eines von dem Byzantiner Muscus herrührenden Problemes kundgibt. Bekannt ist in der theoretischen Arithmetik die Reihe des Lionardo Pisano

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + \ldots,$$

deren rekurrentes Gesetz — jedes Glied ist gleich der Summe der beiden zunächst vorhergehenden Glieder — die Folgezeit durch Bildung der Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung

$$1 + \left(1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}\right)$$

zu bilden lehrte. Ob wir mit Cantor diese einfachste Laméssche Reihe die erste bekannt gewordene rekurrente Reihe nennen dürfen, ist uns im Hinblicke auf Theo Smyrnaeus (S. 137) zweifelhaft. Fibonacci verfiel darauf, als er zu berechnen unternahm, wieviel Kaninchenpaare bei ungestörter Fortpflanzung von einem Elternpaare im Laufe einer gegebenen Zeit ausgehen. Das Ende des Kapitels bildet eine auf geometrische Reihen zurückzuführende Aufgabe, die, von der anderen Texteinkleidung abgesehen, auch bei dem Ägypter Ahmes (S. 31) zu finden ist.

Ganz arabischen Ursprunges ist das dreizehnte Kapitel, welches mehrere Anwendungen der Regula elchatayn, d. h. (S. 205) der Regel des doppelten falschen Ansatzes, bringt. Durch eine liniengeometrische Betrachtung beweist der Verfasser, daß, wenn eine Größe x aus einer Gleichung $f(x) = 0$ zu ermitteln ist, und wenn die Versuchswerte $e_1 > x$ und $e_2 < x$ resp. die von 0 verschiedenen Funktionswerte $f(e_1) = n_1$ und $f(e_2) = n_2$ liefern, mit großer Annäherung

$$x = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}$$

zu nehmen ist; das zwischen die Abszissenwerte e_1 und e_2 fallende Stück der Kurve $f(x) = 0$ wird eben, so würden wir kürzer es ausdrücken, mit einer Geraden vertauscht. Weit autonomer, wenngleich seiner arabischen Vorlagen nicht minder kundig erweist sich Fibonacci bei der Wurzelausziehung im vierzehnten Abschnitte. Wie Alkalasâdî (S. 236) verwertet er eine versteckte Kettenbruchdarstellung, indem er für die Ausrechnung von $\sqrt{a^2 + b}$, je nachdem man geringere oder höhere Genauigkeit verlangt, die Wahl zwischen drei Näherungen läßt:

$$\sqrt{a^2 + b} \backsim a\,, \quad \sqrt{a^2 + b} \backsim a + \frac{b}{2a}\,,$$

$$\sqrt{a^2 + b} \backsim a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{4a^2} : 2\left(a + \frac{b}{2a}\right).$$

Die Theorie des Irrationalen läßt auf Vertrautheit mit dem zehnten euklidischen Buche (S. 77) schließen. Aber dieser fortschrittliche Mathematiker bleibt nicht bei den quadratischen Irrationalitäten und auch nicht bei der schüchternen Behandlung der Kubikwurzel durch die Araber (S. 208, 235) stehen, die er auch gar nicht kannte, sondern spricht es sich — was der bei aller Größe bescheidene Mann nur in Fällen vollster Berechtigung tut — als eigene Leistung zu, die Potenzierung

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a b^2 + b^3$$

umgekehrt für die Radizierung verwertet zu haben. So schließt er, um $\sqrt[3]{a}$ zu finden, diesen Irrationalwert zwischen die empirisch gefundenen Werte m und $(m+1)$ ein, woraus sich

$$0 < a - m^3 < 3\,m(m+1)+1$$

ergibt. Ähnlich wie bei seinem Verfahren der Gleichungsauflösung durch Näherung läßt er kleine Veränderungen von a und $\sqrt[3]{a}$ sich einander proportional vollziehen, so daß also die Zuwachswerte

$$a+1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{3\,m(m+1)+1}$$

sich ungefähr entsprechen. So hat man zuletzt

$$\sqrt[3]{a} \backsim m + \frac{a-m^3}{3\,m(m+1)+1},$$

$$\sqrt[3]{900} \backsim \left(9 + \frac{900-729}{271} \backsim 9\tfrac{2}{3}\right).$$

Weiter seine Annäherung zu treiben, erachtete er aus praktischen Gründen nicht für nötig, aber ein Hindernis, in solchem Sinne noch weiter fortzugehen, besteht nicht.

Bunten Inhaltes ist, sowie das zwölfte, das Schlußkapitel. Da gibt es planimetrische, die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes erheischende Aufgaben; auf der Distanzlinie a der Fußpunkte zweier Türme von den Höhen b und $c\,(b > c)$ ist z. B. ein Punkt zu finden, der von beiden Turmspitzen gleichweit absteht. Ist derselbe vom Fuße des höheren Turmes um x, vom Fuße des niedrigeren um y entfernt, so liefert zweimalige Anwendung jenes Satzes diese Beziehungen:

$$y + x = a\,, \qquad y^2 - x^2 = b^2 - c^2\,,$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\,a}\,, \qquad y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a}\,.$$

Für die Bildung rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seitenmaßzahlen empfiehlt das Werk, falls man schon eine Sonderlösung $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ kennt, stete Anwendung der für ein beliebiges a gültigen Identität

$$\left(\frac{a\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{a\beta}{\gamma}\right)^2 = a^2.$$

Weitere Ausführungen sind, wie die Randbemerkung Maumeht des Autors erkennen läßt, Lesefrüchte aus Mohammed ibn Mûsâ (S. 201), aber auch Alkarchî (S. 207) wird für die quadratischen Gleichungen beigezogen. Wer diese wenigen Worte über Fibonaccis Abakuswerk, das mit dem Abakus selbst so gar nichts gemein hat, mit früheren Buchanalysen zusammenhält, wird nicht in Abrede stellen, daß hier die bisherigen Vorbilder aus Osten und Westen nicht bloß erreicht, sondern weit überholt sind. Die alte Algorithmik hat ihren Höhepunkt erreicht, und eine neue Ära bricht an.

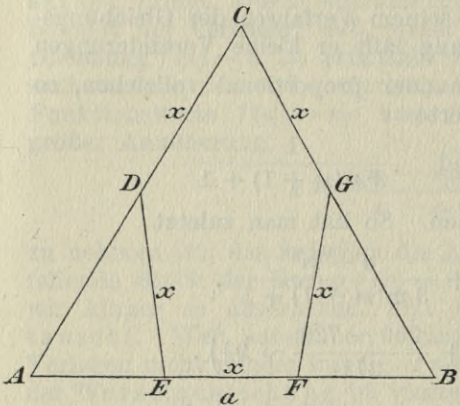


Fig. 38.

Aber auch vom „Liber Abaci" abgesehen, ist Lionardo ein emsiger und glücklicher Schriftsteller gewesen. Da ist zunächst ein Brief an den Magister Theodor zu nennen, offenbar denselben, dessen chemische Geschicklichkeit Friedrich II., wie in v. Raumers „Hohenstaufen" zu lesen, für gastronomische Zwecke ausbeutete. Unter den verschiedenartigen Aufgaben, welche dieses Sendschreiben umschließt, verdienen Einzeichnungen von Figuren in andere unsere Aufmerksamkeit. Es soll z. B., wenn ABC (Fig. 38) ein gleichschenkliges Dreieck ist, ein Fünfeck $CDEFG$ in der aus der Zeichnung ersichtlichen Art so ersterem einbeschrieben werden, daß $CD = DE = EF = FG = GC = x$ wird. Wenn a die Dreiecksseite vorstellt, ergibt sich für den mit Sexagesimalbrüchen rechnenden Pisaner

$$\tfrac{7}{20}x^2 + \tfrac{64}{5}ax = 64a^2; \qquad x = a \cdot 4^0 27' 24'' 40''' 50^{IV}.$$

Viel Reiz mochte der Tafelrunde des Fürsten auch das Vogelproblem bieten: Für 30 Geldstücke hat man 30 Vögel gekauft, x zahme und y wilde Tauben und z Sperlinge. Eine zahme Taube wird mit 2 Münzen bezahlt, während man für 1 Münze zwei wilde Tauben oder auch drei Sperlinge erhält. Diese Forderung gibt, wenn der an sich (S. 166) unzutreffende Ausdruck zugelassen wird, zwei diophantische Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$x + y + z = 30, \qquad 12x + 3y + 2z = 180.$$

An sich gibt es unzählige ganzzahlige Lösungen, aber nur eines dieser Systeme ist wirklich brauchbar, und Fibonacci gibt dieses auch richtig an:

$$x = 11, \qquad y = 10, \qquad z = 9.$$

Der an Theodor gerichtete Brief gibt uns einigen Einblick in die Beschäftigungen am Kaiserhofe, und dieser erweckt einen dem Fürsten und seinen Vertrauten günstigen Eindruck. Wie die Wartburg einen Sängerkrieg sich abspielen sah, so erfreute man sich in Neapel und Palermo mathematischen Wettstreites. Ein Kollege Theodors, Magister Johannes Panormitanus, legte schwierige Aufgaben vor, die, wie man gewißlich im voraus wußte, kein anderer als eben der Gast aus Pisa zu bewältigen imstande war. Als der Kaiser sich vorübergehend in dieser seiner getreuen Stadt aufhielt, fand die Schaustellung statt, deren Held eben Lionardo war, und dieser hat selbst diese Aufgabenzyklen in zwei Schriften gesammelt, welchen er die Titel „Flos“ und „Liber quadratorum“ beilegte. In der „Blume“ wird die Auflösung der Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ verlangt, und nachdem der Herausgeforderte dargetan hat, daß die reelle Wurzel weder rational noch eine der bekannteren Irrationalitäten sein kann, findet er — leider ohne seinen Weg zu verraten — approximativ den außerordentlich genauen Wert

$$x = 1^0 22' 7'' 42''' 33^{IV} 4^{V} 38^{VI} 30^{VII}.$$

Eine andere, juristisch eingekleidete Aufgabe hat das Merkwürdige, daß Lionardos Diorismus auf eine negative Zahl führt. · Als Vermögen, meint er, lasse sich der Gleichung kein einen Sinn gebender Wurzelwert abgewinnen; wohl aber ergebe sich ein solcher, wenn man x als Schuld auffaßte. Sollte der Mann, der sich (S. 258) etwas auf sein den Indern abgelauschtes Wissen zugute tut, bei diesen irgendwie die Antithese Plus und Minus soviel als Soll und Haben in Erfahrung gebracht haben?

Auf das „Quadratbuch" nimmt Fibonacci im „Liber Abaci" selber Bezug. Hier gibt er zuerst für das unbestimmte System

$$x^2 + 5 = y^2, \quad x^2 - 5 = z^2$$

die Lösung $x = 11\frac{97}{144}$, $y = 16\frac{97}{144}$, $z = 6\frac{97}{144}$. Man spricht seitdem nach Lionardo in solchem Falle von einem Zahlenkongruum. Diese und manche ähnliche Aufgabe läßt nach Genocchi vermuten, daß unserem Arithmetiker die — alteuklidischen — Identitäten

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$
$$= (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

nicht unbekannt gewesen sind. Er summiert fernerhin in durchaus originaler Weise die Reihen

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2, \quad 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 4n^2.$$

Einige andere verwickelte Probleme, die sich mit unbestimmten quadratischen Gleichungen zu schaffen machen, sind von Theodor gestellt und von Lionardo mit der ihn stets kennzeichnenden Sagazität gelöst worden.

Auch die Geschichte der Geometrie hat sich mit Lionardo nicht nur wegen der gelegentlich in die bisher besprochenen Schriften betätigten Einstreuungen zu beschäftigen. Die 1220 dem Astrologen Dominicus gewidmete „Practica Geometriae" ist des Geistes ihres Urhebers würdig. Aber nicht sowohl als „praktische Geometrie" in des Wortes landläufiger Bedeutung, sondern gerade ihres theoretischen Wertes halber. Hier wird zuerst die Sitte, Punkte mit Buchstaben zu bezeichnen, konsequent durchgeführt; hier finden sich neue, teilweise ganz indische Beweise für die bekannteren Elementarsätze; hier ist zum ersten Male wieder seit Zenodor (S. 112) von Vierecken mit einem erhabenen Winkel die Rede (figura barbata); hier wird auch eine geschickt aus den besten Vorlagen zusammengearbeitete Stereometrie vorgetragen, die manches Nichtgriechische enthält, wie Savasordas Satz (S. 224) vom Parallelepipedum ($d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, wenn mit d die Diagonale, mit a, b, c die Seiten ausgedrückt werden). Auch der oben erwähnten kongruenten Zahlen wird aufs neue gedacht. Die trigonometrische Behandlung der Feldmeßkunst hatte keiner von Lionardos Vorgängern gleich großzügig aufgefaßt. Sein Quadrant, sowohl mit zirkularer, als mit nichtzirkularer (S. 222) Teilung versehen, kann für astronomische und geodätische Aufgaben gleichmäßige Verwendung finden. Neue Grundsätze allerdings

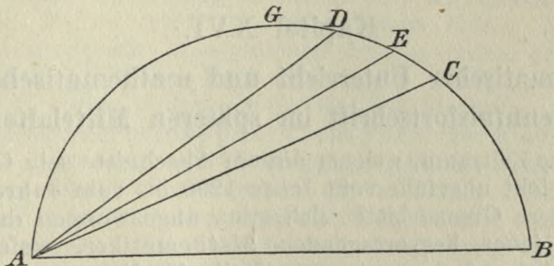


Fig. 39.

sind in diese hauptsächlich dem „Tholomeus" entnommene Trigonometrie nicht eingegangen, indem nur der Autor bei dem Interpolationsprobleme, welches bei Ptolemaeus die Bestimmung der Chorde aus dem Bogen ermöglicht, auch seine eigene Methode verlautbart. Wenn ABG (Fig 39) ein Halbkreis ist, AC und AD zwei willkürliche Sehnen vorstellen, so kann, unter E den Halbierungspunkt des Bogens CD verstanden, der (linear zu nehmende)

$$\text{arc}\,AE = \frac{\text{chord}\,AE(\text{arc}\,AC + \text{arc}\,AD)}{\text{chord}\,AC + \text{chord}\,AD}$$

gesetzt werden. Wenn E von C und D nicht weit entfernt ist, gewährleistet diese Näherungsformel eine ziemlich große Schärfe.

Wohin wir unsere Augen wenden, allenthalben stellt sich uns der Pisaner als vielseitiger Denker und zugleich als ein Gelehrter von umfassendem Wissen dar. Für sein

Zeitalter war er vielfach zu hoch, und seine Einwirkung auf den Fortschritt der von ihm so eifrig gepflegten Wissenschaft ist nur eine bedingte. Man möchte ihn mit dem jungen Gauß ums Jahr 1800 vergleichen. Wie ein glänzendes Meteor, dies ist Cantors treffende Charakteristik, ist Lionardo Pisano erschienen und dahingegangen. Aber als ein weithin sichtbarer Markstein steht er da an der Grenze einer älteren und einer jüngeren Periode mittelalterlicher Mathematik, und diesem Umstande konnte nicht besser Rechnung getragen werden als dadurch, daß ihm ein besonderes Kapitel eingeräumt ward.

Kapitel XVI.

Mathematischer Unterricht und mathematischer Erkenntnisfortschritt im späteren Mittelalter.

Der Zeitraum, welcher diesem Abschnitte sein Gepräge gibt, reicht ungefähr vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1440; als untere Grenze bietet sich ganz ungezwungen das Auftreten jener hervorragenden Mathematiker, welche im XV. Jahrhundert zwar in erster Reihe für die astronomischen Anwendungen ihrer Wissenschaft eine neue Bahn brachen, mittelbar jedoch auch für diese selbst einen Wendepunkt bilden. In diesem Zeitabschnitte darf neben den mancherlei die Umgestaltung aller Verhältnisse vorbereitenden Leistungen auch ein Moment nicht außer acht bleiben, welches von jetzt ab sich weit mehr denn vordem der Beachtung aufdrängt. Dies ist das Unterrichtswesen. Daß dieses während keines Zeitabschnittes vergessen werden darf, ist ja selbstverständlich, und so haben denn auch wir wiederholt (S. 13, 140, 240) auf dasselbe hinzuweisen gehabt. Gerade jetzt aber geht eine tiefer greifende Umgestaltung vor sich, und wir sind verpflichtet, an dieser Stelle einen Vergleich zwischen dem früheren und späteren Mittelalter einzuschieben, um insonderheit den Neuerungen gerecht zu werden, welche sich an die nunmehr immer mehr sich häufende Begründung hoher Schulen ganz von selbst anknüpfen.

In der Zeit zwischen 700 und 1200 war an sämtlichen Kloster- und Domschulen, wie sie uns in Kap. XIV zu beschäftigen hatten, der Lehrgang ein so rigoros geregelter gewesen, daß wir mit unbedingter Sicherheit von den Verhältnissen der einen Anstalt auf die einer anderen, mochte sie noch so weit entfernt und von Klerikern ganz anderen Volkstums bevölkert sein, Schlüsse ziehen dürfen. Man verblieb natürlich mit Einheitlichkeit im Rahmen des Quadruviums. Nur die Reihenfolge der vier Disziplinen war nicht stets die alte des Jamblichus (S. 156) und Cassiodorius (S. 149), sondern hier fanden, wie zahlreiche Manuskripte bekunden, Umstellungen aller Art statt, indem gleichwohl die Mehrzahl der Fälle die übliche und auch verständigste Anordnung — Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie — wahrnehmen läßt. Auf die Unterbringung alles menschlichen Wissens in dem drei- und viergliedrigen Schema legte man hohen Wert; noch 1503 stellt in einer vielgelesenen Realenzyklopädie, in der „Margaritha Philosophica" des Freiburger Karthäusers Gregor Reysch, das Wissenschaftsgebäude einen Turm dar, aus dessen Stockwerken die einzelnen Disziplinen herausschauen, und das herrliche Münster der nämlichen Stadt Freiburg i. B. weist nach Baumgarten in seinem Statuenschmucke die Vertreterinnen der sieben freien Künste auf. Auch den Schülern wurde die Bedeutung der wichtigen Worte katechetisch eingetrichtert, wie uns die Dichtungen der gelehrten Hrotsvitha (S. 244) beweisen: „Warum nennt man die vier Wissenschaften Quadruvium?" „Weil, wie die Wege von einer Straßenkreuzung, so von einem philosophischen Ausgangspunkte die geradlinigen Richtungen dieser Disziplinen ausgehen."

Hatte der Lernende die grundlegende Einteilung begriffen, so begann mit etwas Zahlenmystik der theoretische Teil der Arithmetik, wobei die figurierten Zahlen und die griechische Proportionenlehre die Hauptrolle gespielt haben dürften. Die praktische Rechenkunst wurde, je nach dem Zeitalter, komputistisch (S. 252), abazistisch (S. 252) oder algorithmisch (S. 256) eingeübt. Für theoretische Musik, die neben der arithmetischen Behandlung der Tonintervalle und den Messungen am Monochorde

(S. 57) auch auf die Neumen, diese erste Etappe der Notenschrift, Rücksicht zu nehmen hatte, stützte sich anfänglich ganz auf Boetius, seit der Mitte des X. Säkulums daneben auch auf die Reformversuche des belgischen Mönches Hucbald, welche, wie Ambros ausführt, dazu beitrugen, die starre mathematische Form der Musiklehre künstlerisch aufzulösen. Den geometrischen, nach Marcianus Capella und Isidor von Sevilla gegebenen Unterricht werden wir uns als einen recht dürftigen vorzustellen haben; doch wurden auch Meß- und Berechnungsexerzitien vorgenommen, bei denen, wie Gerbert einmal sagt, die Meßstange — „geometricalis radius" — bald horizontal, bald vertikal angelegt wurde. Die Astronomie begann mit Erklärung der Sternbilder, lehrte die Kugelform der Erde und des Weltganzen, gab die notwendigsten Anhaltspunkte zum Verständnis der Planetenbewegung und gipfelte in der Zeitrechnung, die sich der Schüler (S. 147, 245) am meisten zum vollen geistigen Besitze zu machen verpflichtet war. Etwas Kosmographie — ein Gemisch von physischer Astronomie und Geographie — ging mit der Sternkunde Hand in Hand.

Wenig verändert hat sich dieser Lehrgang in den kirchlichen Schulen auch dann noch forterhalten, als die Klosterschulen ihr früheres Ansehen bereits ganz oder großenteils eingebüßt hatten. Aus religiös zugeschnittenen Anstalten ging die große Menge der teilweise kaum dem Knabenalter entwachsenen Jünglinge hervor, die sich auf der Hochschule den seit dem XII. Jahrhundert diese bestimmtere Form annehmenden Fakultätswissenschaften zu widmen gedachten. Stadtschulen, die zum gleichen Zweck vorbereitet hätten, scheint es vor 1400 überhaupt nicht und auch dann nur in geringer Anzahl und in denkbarst bescheidener Verfassung gegeben zu haben. Die ersten Lehrer des Lesens, Schreibens und Rechnens hießen Schulmeister, Stuhlschreiber oder Modisten. Selbst in dem handelskräftigen Nürnberg, wo schon im XIV. Jahrhundert nachweisbar kaufmännische Arithmetik ein gangbarer Artikel war, datiert die erste Nachricht von der Existenz eines Rechenlehrers von Beruf, der indessen auch nicht offiziell angestellt war, aus dem ersten Dezennium des nächsten Jahrhunderts; das Steuerbuch bemerkt 1409: „Jobs Kapfer stulschreiber dedit $1\frac{1}{2}$ guldein, ist hynnen erlaubt, dieweil er kint leret". Einrichtungen, die irgendwie mit unseren heutigen Mittelschulen verglichen werden könnten, fehlten gänzlich, und der Hochschule mangelte nach unseren Begriffen gänzlich der Unterbau.

Trotzdem mehrte sich seit dem Beginne des XIII. Jahrhunderts rasch die Anzahl der Universitäten, deren soziale Stellung zugleich eine immer angesehenere wurde. Bis dahin waren Bologna, Padua, Pavia und Salerno in Italien, Salamanca, Alcalá und Coimbra auf der Pyrenäischen Halbinsel, Paris, Angers, Orleans und Montpellier in Frankreich, Oxford und Cambridge in England die zugkräftigsten Wissenschaftszentren, natürlich auch für den Deutschen, gewesen; zu geschweigen vieler anderer, teilweise nicht ganz vollständiger hoher Schulen, wie es solcher namentlich in Italien eine Fülle gab. Das XIV. Jahrhundert sah auch auf dem Boden des Römischen Reiches deutscher Nation solche korporative Institute entstehen; 1348 wurde Prag, 1365 — im richtigen Sinne allerdings erst 1384 — wurde Wien, 1386 Heidelberg, 1388 Cöln, 1392 Erfurt, 1409 Leipzig, 1419 Rostock, 1456 Greifswald, 1457 Trier, 1459 Basel, 1472 Ingolstadt (1800 nach Landshut, 1826 nach München verlegt) ins Leben gerufen. Unsere gegenwärtige Periode endigt mit der Begründung von Tübingen und Mainz im Jahre 1477. Wie aber auch die Statuten und Privilegien aussehen, welches die Vaterländer dieser Universitäten sein mochten, deren jede wohl auch den Namen Studium generale oder Academia führte — der Wissenschaftsbetrieb war überall der gleiche. Und zwar hat sich diese Art unerheblich verändert bis in noch viel spätere Zeiten erhalten, so daß erst im XVII. und entschiedener im XVIII. Jahrhundert die Anzeichen einer grundsätzlich anderen Denkweise sich bemerklich machen. Was im folgenden ausgeführt wird, hat in der Hauptsache eine allgemeine, von nationalen Einflüssen nahezu unabhängige Geltung.

Den fundamentalen Gegensatz zwischen den alten und den neuen Universitäten, für welche Halle, Göttingen und Altdorf den Normaltypus bilden, hat kein Geschichtschreiber der Pädagogik so scharf und treffend gezeichnet, wie es Paulsen tat. Die moderne Hochschule ist gleichmäßig für Forschung und Lehre da; die mittelalterliche brauchte ausschließlich für den Unterricht zu sorgen. Ein fest in sich abgeschlossenes Wissenssystem war aus dem Altertum übernommen worden; höchstens unbeträchtliche Einzelheiten konnten verändert und vielleicht verbessert werden; der Student hatte durch Anhören der Vorlesungen, in die er seine Texte mitzubringen gehalten war, und durch fleißige Disputationsübung so viel Wissensstoff in sich aufzunehmen, daß er die vorgeschriebenen Prüfungen als Bachalarius (fälschlich Bakkalaureus), Magister, Lizenziat und Doktor erfolgreich zu bestehen vermochte. Der lesende Magister, für den die Bezeichnung Professor erst nach und nach aufkam, hatte strengen Auftrag, nur seinen Autor vorzutragen und zu erläutern, so daß eigene Zutat nicht nur nicht verlangt, sondern unter Umständen sogar ziemlich übel genommen wurde. Vor allem war auch in den mathematischen Zweigen, deren Studium von jedem auf höhere Würden adspirierenden akademischen Bürger nachgewiesen werden mußte, ein fester Kanon aufgestellt: ein paar Bücher des Euclid (oft nur das erste), etwas Arithmetik (seit 1350 ungefähr nach dem maßgebend gewordenen Kompendium des Johannes de Muris), sphärische Astronomie (nach dem gleich nachher zu schildernden Leitfaden des Sacrobosco). In späteren, der Grenze des gegenwärtigen Zeitabschnittes benachbarten Jahren traten dann noch einige andere, nicht gerade als Pflichtkollegien aufzufassende Vorträge hinzu: Perspectiva (Anfangsgründe der Optik), Theorica planetarum, Latitudines formarum (die noch in diesem Kapitel zu kennzeichnenden Erweiterungskapitel der Geometrie), Algorismus (S. 256), Proportionenlehre. Die Honorare kommen uns auch dann noch niedrig genug vor, wenn wir den energischen Veränderungen des Geldwertes gebührend Rechnung tragen. In der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts war, um eine relativ gut honorierende Hochschule zu nennen, die Leipziger Vorlesungstaxe die folgende: „Pro Euclede“ (sic!) 8 Groschen (20 bis 30 Wochen zu 1 Stunde); Optik 4 Groschen (12 bis 14 Stunden); Planetentheorik 3 Groschen (5 bis 6 Stunden); Arithmetik, Musik und Sphärik 2 Groschen (4 bis 7, 4 bis 7, 5 bis 6 Stunden).

Durchwegs wurden die Materien unter die Magistri legentes ausgeteilt, und wer im einen Semester über Optik zu lesen hatte, bekam vielleicht im nächsten die „Metaphysik“ und im dritten etwa die „Parva naturalia“ des Aristoteles als Lehraufgabe zugewiesen. Hingebung an die Sache, tieferes Sich-hineinarbeiten verbot sich damit von selbst. Nominalprofessuren für Mathematik, deren Inhaber also nur diese und nicht dazwischen auch andere Gegenstände zu dozieren hatten, erscheinen erst mit Beginn des XVI. Jahrhunderts in der Hochschulgeschichte. Die bestehenden Gebräuche mochten folglich zwar eine gewisse Verbreitung elementarer mathematischer Bildung unter den Vertretern des Gelehrtenstandes garantieren, aber der Heranbildung selbsttätiger Mathematiker wurde dadurch kein Vorschub geleistet. Wenn es desungeachtet solche in der fraglichen Zeit gegeben hat, so mußte eigene Arbeit die Lücken des Unterrichtes ausgleichen. Den Männern, welche in solcher Weise die Wissenschaft nicht nur fortgepflanzt, sondern auch gemehrt und vertieft haben, wollen wir uns jetzt zuwenden. Ähnlich, wie Cantor, lassen wir für sie das Prinzip der Nationalitätentrennung Platz greifen. Für das frühere Mittelalter war das nicht erforderlich, weil es noch zu wenig ausgesprochene Individualitäten gab, und in der Neuzeit wurde, großenteils durch die Mitwirkung des Buchdruckes, der literarische Verkehr ein so reger, daß die Völker- und Länderschranken viel an ihrem hemmenden Einflusse verloren. Zwischen 1200 und 1450 dagegen war dieser noch eine Macht, die Berücksichtigung erheischt.

Deutsche Mathematiker. Ein unmittelbarer Zeitgenosse Fibonaccis war Jordanus Saxo oder Jordanus Nemorarius, der aus Norddeutschland stammt, von dem man aber merkwürdig wenig gesicherte Kenntnis besitzt. Fest steht nicht einmal, daß er der zweite General des Dominikaner-Ordens war. Als Mathematiker ist er mehrfach mit Ruhm hervorgetreten. Die Abhandlung „Von den Spiegeln“ ist allerdings niemals an das Tageslicht getreten, und was an einer anderen, „Von den Gewichten“, dem Jordanus selbst zugehört, steht dahin. Eine wiederholt gedruckte Schrift, „Über das Planisphär“, verschärft den Beweis von der Kreistreue der stereographischen Abbildung (S. 117). Ebenso wurde von Faber Stapulensis 1514 im Drucke herausgegeben eine Arithmetik, die sich auf Nicomachus und Boetius stützt. Gerade sie aber hebt sich von diesen Grundschriften und anderweitigen Bearbeitungen scharf ab durch eine neue Praxis der Zahlschreibung, aus welcher der Verfasser selbst gar nicht viel macht, und die dennoch dem folgenreichen Grundsatze, den viel später Vieta einführte, in ihrer Art vorarbeitet. Statt der Zahlen, an denen die arithmetischen Wahrheiten erhärtet werden, treten Buchstaben auf. Der sonstige Apparat der Buchstabenrechnung fehlt allerdings noch, und zumal ohne Gleichheitszeichen kann diese ihre volle Kraft nicht entfalten, aber ein sehr wichtiger Fortschritt ist doch mit zielbewußter Deutlichkeit angebahnt. Eine andere Schrift, die Regiomontanus und Maurolico zu edieren im Sinne hatten, ohne dieses Vorhaben zu verwirklichen, und die erst in neuester Zeit durch Treutlein und Curtze uns erschlossen ward, ist diejenige „De datis“ (auch de lineis). Wieder wird da die Buchstabenbezeichnung durchgeführt, aber nach Art der Patenstelle vertretenden euklidischen Data (S. 81) wird der Forderung, aus gegebenen Bedingungen heraus sollen gewisse Zahlen ermittelt werden, eine andere substituiert: Wenn die fraglichen Bedingungen vorliegen, so sind auch gewisse Zahlwerte gegeben. Unter diesem Gesichtspunkte werden algebraische Gleichungen, Proportionen, Identitäten aller Art abgehandelt. Neben das Buchstabenbeispiel wird mehrenteils ein erläuterndes Zahlenbeispiel (mit römischen Zahlzeichen) gestellt. Die Ähnlichkeit der Entwicklung des Einzelfalles mit der Wortalgebra des Alchwarîzmî ist eine unverkennbare. Ob der erst 1534 unter die Presse gelangte „Algorithmus demonstratus“ ebenfalls ein Werk des Jordanus ist, muß man einstweilen noch dahingestellt sein lassen; gewisse Wahrscheinlichkeitsgründe sprechen allerdings dafür. Und nahezu mit Sicherheit wird man ihn in diese Zeit verlegen. Das Zehnersystem mit der Null („figura nihili“) wird als Voraussetzung für die vier Spezies samt diesen einläßlich behandelt; die eigenartige Vornahme der Division bezeichnet Unger als Überwärtsdividieren. Neu ist der polynomische Lehrsatz für den Exponenten 2. Die Bruchrechnung wird gleichmäßig für gewöhnliche und sechzigteilige Brüche („minutiae philosophicae seu phisicae") gelehrt, und auf die vollständige Zusammenstellung aller Medietäten wird ganz nach griechischem Vorbilde (S. 64) Gewicht gelegt. Eine wenig empfehlenswerte Neuerung besteht darin, daß Medieren und Duplieren (S. 200) als besondere Rechnungsarten eingeführt werden, während Lionardo vernünftigerweise gar nicht beachtet hatte, ob ein Multiplikator und Divisor 2 oder irgend eine andere Zahl ist. Diese Inkonsequenz hat leider Schule bildend gewirkt.

Das bedeutendste unzweifelhaft echte Werk Jordans ist uns dank dem Spüreifer M. Curtzes erschlossen worden, den der Titel eines Florentiner Manuskriptes, „Liber Jordani de Alamania de triangulis", auf die richtige Fährte gebracht hat. Einer allgemeinen Erörterung über Kontinuität folgen vier Bücher, deren erstes von einer elementaren Theorie ebener Dreiecke überhaupt erfüllt wird. Das zweite hat es mit Streckenteilungen nach bestimmten Vorschriften, mit Verwandlungen und Teilungen zu tun. Die Kreislehre bildet das Objekt des dritten Buches, während im vierten außer ein paar isoperimetrischen Sätzen eine verunglückte, an Byzanz (S. 169) erinnernde Kreisquadratur unsere Aufmerksamkeit fesselt. Auch Trisektion und delisches Problem finden mit ihren Näherungskonstruktionen eine Stelle. Von allen uns bislang näher getretenen Werken nachgriechischer Zeit ähnelt das des Jordanus am meisten einem modernen Kompendium der Planimetrie, und unter diesem Gesichtspunkte erscheint uns der „Waldmann" als der weitaus geschickteste didaktische Mathematiker im XIII. — und wohl auch noch XIV. — Jahrhundert. Daß auch Gedanken von überraschender Neuheit unter viel Bekanntem sich finden, sichert der Schrift Jordans einen absoluten Wert; so ist er der Auffindung der Kreiskonchoide (auf kreisförmiger Basis), während Nicomedes (S. 109) nur die geradlinige kannte, überraschend nahe gewesen.

Zwei zusammengehörige Persönlichkeiten sind der „Thuringopolonus" Vitellion und der Vlaming Wilhelm van Moerbeke. Ersteren hat Curtze als einen Deutschen Witelo entlarvt, dessen Vater ein Thüringer und dessen Mutter eine Polin war, und der mit dem Zweitgenannten in Flandern verkehrte. Witelo hat eine Optik geschrieben, die für ihre Zeit eine Musterleistung war und außer Alhazen (S. 215) auch die bedeutendsten griechischen Geometer verwertete, so daß wir dem Autor eine gewaltige Literaturkenntnis zuerkennen müssen. Wilhelm bildete sich in Italien und Griechenland, in welchen Ländern er hohe Kirchenämter bekleidete, zum tüchtigen Übersetzer aus, und ihm sind wir (S. 93) dafür zu Dank verpflichtet, daß noch das Mittelalter von der archimedischen Schrift über schwimmende Körper Notiz nehmen konnte.

Schon dem XIV. Jahrhundert gehören an die beiden ersten mathematischen Universitätslehrer deutscher Abkunft. Diese sind Albert von Sachsen (aus einem jetzt von der Landkarte verschwundenen Orte Riggensdorf im Quedlinburgschen stammend) und Heinrich von Hessen, nach seinem Geburtsorte auch Heinrich von Langenstein genannt. Ersterer lehrte in Paris und kurze Zeit auch in Wien, starb aber als Bischof von Halberstadt im Jahre 1394. Er muß ein sehr geachteter Gelehrter gewesen sein; seine Schriften, so wird berichtet, hätten in Padua als Vorlesebücher gedient, und als Logiker wird er von zuständigster Seite, von Prantl, sehr gerühmt. Eine Proportionenlehre von ihm ist schon 1482, eine Abhandlung „De latitudinibus formarum" 1505 gedruckt worden, und zwar gleichfalls in jener italienischen Stadt. Eine von Suter herausgegebene Schrift über Kreisquadratur ist stark zu scholastischen Distinktionen geneigt, sucht aber durch das Medium der Monde nach Art des Hippocrates (S. 63) die Lösbarkeit der Aufgabe darzutun; eine andere führt den auch durch die angewandte Terminologie bemerkenswerten Nachweis, daß zwischen Seite und Diagonale des Quadrates eine „proportio irrationalis" obwalte, und dehnt diese Betrachtungen auch auf inkommensurable Bewegungen aus. In jüngster Zeit ist eine bisher unerkannte Quelle für die Kenntnis des Mannes aufgedeckt worden, denn Duhem, der geistvolle Geschichtschreiber der Statik, brachte in scharfsinniger Divination heraus, daß jener Albertuccio, von dem Lionardo da Vinci des öfteren spricht, kein anderer als unser Albert ist. Von Henricus Hassianus (1325—1397) wußte man bis vor kurzem zwar, daß er die von ihm in Paris gelehrten mathematischen Wissenschaften 1383 an die junge Universität Wien verpflanzt habe, aber von seiner dortigen Lehrtätigkeit, wie sie sich praktisch gestaltet, schwieg die Geschichte. Curtze aber fand bei seiner Bereisung der deutschen Bibliotheken eine von Planetentheorie, von Exzentern und Epizyklen handelnde Handschrift auf, die mit höchster Wahrscheinlichkeit für das Wiener Kollegienheft des berühmten Hochschullehrers gehalten werden darf. Ihre Herausgabe wäre dringend zu wünschen.

Ein Zeitgenosse beider Männer war der Enzyklopädist Konrad von Megenberg, der, großenteils nach Sacrobosco, „die deutsche Sphära" schrieb; es ist das erste deutsch verfaßte Buch aus dem Bereiche unseres Gebietes und unter diesem Gesichtspunkte merkwürdiger als wegen seines Inhaltes. Von einem anderen Deutschen Johannes Denck (Danck), der dem XIV. Jahrhundert angehört, kennen wir fast nur den Namen und die Tatsache, daß er sich in Eliger von Gondersleben einen tüchtigen Schüler nachgezogen habe. Die Titel der von letzterem (angeblich um 1350) verfaßten Traktate könnten wohl unseren Appetit reizen, und es ist nicht undenkbar, daß die Forschung noch einiges davon ans Licht bringen werde.

Gegen Ende des in Rede stehenden Jahrhunderts ließ der deutsche Hochmeister in Preußen, Konrad von Jungingen, für seine „Lantmesser" einen geometrischen Leitfaden ausarbeiten, zuerst in lateinischer und dann auch in deutscher Redaktion. Diese „Geometria Culmensis" hat Mendthal durch den Druck bekannt gemacht. Der Stoff wurde hauptsächlich dem Euclides, teilweise auch einem Dominicus Parisiensis entnommen, von dem noch die Rede sein wird. Dem Verständnis ungeübter Praktiker ist die Darstellungsweise angepaßt, welche übrigens für die Entwicklung der deutschen geometrischen Nomenklatur ihren Wert besitzt. Wohl erstmalig begegnen wir hier dem Worte „winckelmos" (Winkelmaß).

Wir würden das Jahrhundert nur unvollständig charakterisiert haben, wenn wir verschwiegen, daß auch die geometrische Optik in ihm nicht vernachlässigt worden ist. Eine von Curtze analysierte, ungefähr in diese Zeit zu setzende Thorner Handschrift ist dem Zwecke gewidmet, zu zeigen, daß und wie Hohlspiegel vergrößerte Bilder liefern können. Einen auch über Witelo (S. 276) hinausgehenden Erfolg erzielte um 1310 der in Paris herangebildete deutsche Predigermönch Theodorich von Freiberg i. S. Krebs hat gezeigt, daß wahrscheinlich die sächsische Stadt, und nicht Freiburg i. Br., der Geburtsort war. Sein unter der Aufschrift „De radialibus impressionibus“ uns erhaltenes Werkchen bietet eine korrekte dioptrisch-katoptrische Erklärung von Haupt- und Nebenregenbogen, an der geometrisch nicht viel auszusetzen ist, die aber, was wohl verständlich, eine physikalische Theorie der Farbenerscheinungen gar nicht in Angriff nimmt.

Wenn wir von deutscher Geometrie im Zeitraume von 1200 bis 1400 reden, so dürfen wir nicht vergessen, daß dies die Epoche einer großen Umwälzung in der Architektur war. An die Stelle der einfacheren byzantinisch-romanischen Baukunst trat der für die Entfaltung räumlichen Formensinnes einen unvergleichlich freieren Tummelplatz eröffnende gotische Stil, und mit dessen Siegeszuge ging auch die Ausbildung einer gewissen Geometrie der Bauhütte parallel. Der erste literarische Versuch, dieser einen Handweiser zu liefern, geht allerdings von französischer Seite aus; Villard de Honnecourts Pariser Handschrift, etwa vom Jahre 1230, lehrt noch etwas unvollkommen das Planzeichnen, „les trais ensi comme li ars de jometrie (sic!) les comande et ensaigne“. Mehrere deutsche „Stainmetzbüchlein“ sind etwas späteren Ursprunges, und das nächste Kapitel wird uns dieses viel zu wenig erforschte Schrifttum noch näher kennen lehren.

Spanische Mathematiker. Von ihnen läßt sich, da auf spanisch-portugiesischem Boden die Durchdringung mohammedanischen und christlichen Wesens (S. 223) eine viel zu enge war, jetzt nur noch wenig berichten. Von dem Katalonier Raimundus Lullus (um 1300), einem mystisch-kabbalistischen Schriftsteller mit abenteuerlich spekulativen Neigungen, ist beachtenswert, daß seine logischen und ethischen Begriffsspielereien ihn zur Kombinatorik und zur Betrachtung der Sternvielecke, natürlich in Spezialfällen, geführt haben. Nützlicheres leistete er als mutmaßlicher Begründer der später in Italien „Arte del marteloio“ (richtiger „martologio“) genannten Schiffsrechnung. Seine Landsleute, die Katalanen — und unter diesen wieder hervorragend die Insulaner der Balearen — erwarben sich auch Ruhm als Zeichner von Seekarten. Die lange gehegte Ansicht, diese Kompaßkarten seien nach strengen geometrischen Regeln hergestellt worden, hat übrigens der Kritik H. Wagners nicht standhalten können; es fand sich, daß diese Tafeln aus kleineren, in Plattkartenprojektion (S. 128) angelegten Kärtchen oft ganz verschiedenen Maßstabes zusammengeheftet wurden, um erst nachträglich mit einem Netze von Kompaßrosen überdeckt zu werden. Der balearische Jude Jehuda ben Crespel scheint sich auf alle mathematischen Grundlagen der Schiffahrtskunde besonders gut verstanden zu haben.

Italienische Mathematiker. An den uns schon bekannten älteren Gerardo da Cremona (S. 222) schließt sich sinngerecht an Giovanni Campano da Novara aus der ersten Hälfte des XIII. Jahrhunderts. Was er über die Kreisrektifikation schrieb, kann uns ziemlich gleichgültig lassen; weit wichtiger ist seine Euclidübersetzung, die auch das 14. und 15. Buch der „Elemente“ (S. 113, 159) in sich begreift. Auch hat er nicht gänzlich eigene Bemerkungen zu dem von ihm latinisierten Texte unterdrückt. Er beweist u. a., daß ein Sternfünfeck dieselbe Winkelsumme wie ein Dreieck habe; das zu erkennen, ist auch für einen Anfänger leicht, aber es bedurfte doch vorher der Freimachung von dem engeren Polygonbegriffe der Griechen. Auch den schon von Jordanus (S. 274) erwähnten Kontingenzwinkel (zwischen Peripherie und Tangente eines Kreises) bezeichnet er als etwas vom gewöhnlichen Winkel Grundverschiedenes, und in der Tat ist derselbe ja gleich Null. Campanus streift auch nach Art Jordans die Winkeldreiteilung und beweist, daß eine nach goldenem Schnitte geteilte Strecke und ihre Mediane inkommensurabel sind.

Italien war von allen westlichen Kulturstaaten der dem arabischen Osten nächst benachbarte, wenn auch eine so intime Berührung fehlte, wie sie in dem an sich entlegeneren Spanien statthatte. Ein anonymes Lehrbüchlein der Arithmetik aus der zweiten Hälfte des XIV. Jahrhunderts („Introductorius liber, qui et pulveris dicitur in mathematicum disciplinam") weist schon durch diese Titelworte — pulvis = Gobâr (S. 199) — auf arabische Beeinflussung hin, trägt aber auf der anderen Seite auch noch recht antiquierte römische Reste zur Schau. Höher steht eine gleichfalls anonyme, aber schon in der Landessprache verfaßte Schrift des gleichen Jahrhunderts, in welcher schon bestimmter und konsequenter, als bei Gerardo und selbst bei Lionardo, die Bezeichnungen unseres x = Cosa, x^2 = quadrato censo (auch quadrato und censo für sich), x^3 = censo cubo (oder bloß cubo), x^4 = censo di censo, x^5 = censo di cubo vorkommen, während auch das von x freie Glied die selbständige Benennung numero erhalten hat. Radice, radice cubo, radice di radice, radice relata sind äquivalent $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[5]{x}$. Mit Wurzeln rechnet der Anonymus zwar nur spärlich, aber man sieht doch, daß er die einschlägigen Rechnungsgesetze kennt. Quadratische Gleichungen und solche höhere, die sich auf quadratische zurückführen lassen, werden gewandt erledigt. Dann aber trübt sich der gute Eindruck, den die ersten Abteilungen zurückgelassen haben. Es werden nämlich auch von höheren Gleichungen, ja sogar von einer solchen fünften Grades, die Wurzeln richtig angegeben, was uns wohl oder übel die Meinung aufnötigt, der Verfasser habe solche Werte beliebig gewählt und sich durch Produktbildung $(x - \alpha)(x - \beta) \ldots$ die gleich Null gesetzten Polynome verschafft. Immerhin hat ihm eine Ahnung des Zusammenhanges zwischen den Koeffizienten der in eine algebraische Gleichung eingegangenen Potenzen der Unbekannten und den Wurzelwerten vorgeschwebt. Besser steht es wiederum mit dem geometrischen Teile, der auf Kenntnis des heronischen Satzes und der isoperimetrischen Gebilde schließen läßt.

Ein geschickter Arithmetiker war der Toskaner Paolo Dagomari (1281—1374), „dall' Abaco" geheißen. Seine Schrift über bestimmte und unbestimmte Gleichungen kennen wir nicht, wohl aber seine 52 „Regoluzze", kurzgefaßte Rechnungsregeln, in denen die aufsteigenden Kettenbrüche des Pisaners als „rotti infilzati" (eingeschachtelte gebrochene Zahlen) vorkommen. Giovanni Danti, Zucchero Bencivenni und Raffaele Canacci sind uns als arithmetisch-algebraische Schriftsteller bloße Namen, und auch Biagio Pelacani da Parma (Blasius Parmensis), der 1416 nach langjähriger Lehrtätigkeit an verschiedenen Hochschulen aus dem Leben schied, kann an diesem Orte nur wegen einer — leider nicht näher bekannten — Studie über die „latitudines formarum" gestreift werden. Gleiches gilt für das Ende des Jahrhunderts bezüglich des gelehrten Jacopo dalla Torre aus Forlí, von dem Favaro einen gedruckten „Tractatus de intensione et remissione formarum" zu nennen weiß. Endlich ist noch in diesem Zusammenhange anzuführen Prosdocimo de' Beldomandi aus Padua, der dank Favaros mustergültiger Monographie jetzt als ein ziemlich bekannter Mathematiker vor uns steht. In den siebziger Jahren geboren, ist sein Tod für das Jahr 1428 urkundlich festgelegt. Er schrieb über Musik und Algorithmus und läßt arabische Einwirkungen, jedoch auch solche Fibonaccis und Sacroboscos, wahrnehmen. Sein geistiges Eigentum scheint die Summierungsformel geometrischer Progressionen in der Form

$$a + a q + a q^2 + \dots + a q^{n-1} = a q^{n-1} + \frac{a q^{n-1} - a}{q - 1}$$

zu sein, die er auch für ein gebrochenes q zurichtete. Schon weitaus mehr ins XV. Jahrhundert hinein reichen der national-italienische Übersetzer Jacopo da Cremona und die beiden in Italien naturalisierten Griechen Georg von Trapezunt und Bessarion, der mächtige Kardinallegat für orthodox-katholische Einigungsbestrebungen. Alle drei haben dem Importe mathematischen Wissens wertvolle Dienste geleistet und werden uns deshalb teilweise noch einmal begegnen.

Französische Mathematiker. Als ältester Repräsentant seines Volkes wäre hier zu nennen der berühmte Grammatiker Alexander de Villa Dei, ein im XIII. Jahrhundert lebender Burgunder, von dem Trithemius drei hierher gehörige Schriften (De computo ecclesiastico; De sphaera; De arte numerandi) zitiert. Wenig später dürfte ein von Henry publizierter „Traité de géométrie“ von unbekanntem Verfasser entstanden sein. Auch des Scholastikers Vincenz von Beauvais oder Vincentius Bellovacensis ist zu gedenken, der einen Abschnitt seines „Speculum doctrinale“ (um 1250) der Mathematik eingeräumt hat; dieser bezieht sich großenteils auf Boetius und Isidor, führt aber auch schon die Rechnungsregeln des Algorithmus den Lesern vor. Jean de Meurs (1310?—1360?) ist identisch mit dem uns erinnerlichen Musikschriftsteller Johannes de Muris. Eine von ihm herrührende, in Wien aufbewahrte Handschrift hat ein dem Abacus gewidmetes Kapitel, in welchem dieses Wort, wie auch sonst (S. 256), unter der Maske eines Personennamens auftritt. Ob Johannes de Lineriis ein Franzose war, ob ein Deutscher oder Italiener, wird nie sicher ermittelt werden, aber die erstere Annahme ist doch wohl die wahrscheinlichste. Um 1322 war er Lehrer der Astronomie in Paris. Eine von ihm handschriftlich nachgelassene Sinustafel verdient vollste Beachtung, weil sie nach Curtzes Entdeckung der Archetypus einer solchen der im nächsten Kapitel zu besprechenden älteren Wiener Schule sein muß. Ob die 1483 gedruckte Abhandlung eines Johannes de Liveriis wirklich von einem anderen Autor stammt, oder ob dem Drucker nur eine Verstümmelung des Namens unterlaufen ist, bleibt einstweilen eine offene Frage. Hier verdient auch jener Dominique de Paris eingeschaltet zu werden, auf den uns (S. 277) „die Kulmer Geometrie“ hinführte. Er war zwar ein geborener Piemontese, wie sein wissenschaftlicher Nebenname Dominicus de Clavasio (von Chiavasso) ausweist, darf aber als Hofastrologe des Königs von Frankreich unbedenklich hier mit eingereiht werden. Er war sehr vertraut mit der Tangentenrechnung und hatte die Abfassung eines „Tractatus de umbris et radiis“ in Aussicht genommen ohne doch, wie es wenigstens den Anschein hat, mit der Verwirklichung seines Planes zustande gekommen zu sein.

Die höchste Stellung unter den französischen Mathematikern des Mittelalters nimmt fraglos Nicole d'Oresme (1323?—1382?) aus der Normandie ein. Genötigt, als Kollegiat von Navarra längere Zeit nur lateinisch zu schreiben, hat er in späteren Zeiten auch einen „Traicté de la sphère“ geliefert, der die französische Kunstsprache wesentlich verbessert und so bis zur Gegenwart nachgewirkt hat. Zwei lateinische Schriften von ihm sind auch im Drucke veröffentlicht worden, und diese beiden sind ganz dazu angetan, ihm einen sehr hohen Rang unter den selbständigen Denkern des Mittelalters zu sichern.

Eine Venetianer Druckausgabe des „Tractatus proportionum“ von 1505 ist verhältnismäßig leicht zugänglich. Doch enthält er mehr nur Bekanntes und ist von Wichtigkeit wesentlich als eine Einleitung zu dem von Curtze herausgegebenen „Algorismus proportionum“, der zuerst das später (von Hankel) so genannte Permanenzgesetz der formalen Beziehungen auf Wurzelexponenten verwendet und mit der Definition $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ die ganze Wurzellehre durchführt. Für uns ist $8 = 2^3 = 4^{\frac{3}{2}}$; für Oresme drücken die Symbole

$$\boxed{1^p \frac{1}{2}}\,4 \qquad \text{oder} \qquad \boxed{\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}}\,4$$

denselben Sachverhalt aus. Mittels unserer bequemeren Bezeichnungsweise können die achtzehn Regeln des „Algorismus“ folgendermaßen dargestellt werden:

$$\text{I. } a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \text{II. } a^m : a^n = a^{m-n}; \quad \text{III. } a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}};$$

$$\text{IV. } a^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{1}{p}}; \quad \text{V. } a^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{m}}; \quad \text{VI. } (a^m)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{mp}{n}}\right)^{\frac{1}{q:n}};$$

$$\text{VII. } (a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}}; \qquad \text{VIII. } a \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a^n \cdot b)^{\frac{1}{n}};$$

$$\text{IX. } b^{\frac{1}{n}} : a = (b : a^n)^{\frac{1}{n}}; \qquad \text{X. } a : b^{\frac{1}{n}} = (a^n : b)^{\frac{1}{n}};$$

$$\text{XI. } a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = (a : b)^{\frac{1}{n}}; \qquad \text{XII. } a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{p}{mp}};$$

$$\text{XIII. } a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a^n \cdot b^m)^{\frac{1}{mn}}; \qquad \text{XIV. } a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{n}} = (a^n : b^m)^{\frac{1}{mn}};$$

$$\text{XV. } a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}; \qquad \text{XVI. } (a : b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}};$$

$$\text{XVII. } a^m \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{m+\frac{1}{n}}; \qquad \text{XVIII. } a^m : a^{\frac{1}{n}} = a^{m-\frac{1}{n}}.$$

Diese zahlreichen Unterscheidungen charakterisieren die Schüchternheit, mit welcher sich ein ganz neuer Gedanke herauswagt; nach griechischer Sitte verlangt jeder Einzelsatz einen Sonderbeweis, wo wir mit einem allgemeinen Gesetze alle Möglichkeiten erschöpfen. Auch einige bisher fehlende geometrische Lehrsätze hat Oresme hier den bekannten hinzugefügt, so namentlich den nachstehenden: Beschreibt man in einen Kreis ein regelmäßiges n-Eck und $2n$-Eck von den Flächen A und B, sowie um ihn ein regelmäßiges n-Eck von der Fläche C, so ist B die mittlere geometrische Proportionale zwischen A und C.

Wiewohl der „Tractatus de latitudinibus formarum" vier Druckausgaben (1482, 1486, 1505, 1515) erlebt und erwähntermaßen (S. 272) einen akademischen Lehrgegenstand — offenbar nur für Vorgerücktere — gebildet hat, hat doch erst wieder Curtze in den sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts den Inhalt der einzig in ihrer Art dastehenden Schrift erschließen müssen. Von allen literarischen Erzeugnissen, welche als Anklang an das Koordinatenprinzip des Descartes angesprochen werden können (S. 108, 117), kommen diesem die „latitudines" am nächsten. Denn diese „Breite" ist nichts anderes als eine rechtwinklige Ordinate, und ihr entspricht eine „Länge" (longitudo) als Abszisse. Eine Gleichung zwischen diesen Strecken anzuschreiben, lag allerdings Oresme ferne, aber alle die Beziehungen zwischen Kurvenzug und Koordinaten, welche heutzutage in einer richtigen Propädeutik der analytischen Geometrie diskutiert zu werden pflegen, spielen auch hier eine Rolle. Denn davon z. B., daß proportionales Wachstum von x und y eine gerade, ungleichartiges aber eine krumme Linie ergibt, legen die Worte „uniformis" und „difformis" Zeugnis ab. Sogar die Infinitesimalwahrheit, daß einer Maximalordinate eine minimale Änderung der Geschwindigkeit des die Kurve erzeugenden Punktes entspricht, wird so bestimmt angedeutet, daß man Oresmes Worten keinen Zwang anzutun braucht, um diesen Sinn herauszulesen. Mit einem Worte: Der Traktat ist anzusehen als eine

Vorschule für eine freilich noch nicht bestehende allgemeine Kurvenlehre.

Britische Mathematiker. Auch die Britischen Inseln haben im XIII. und XIV. Jahrhundert tüchtige Vertreter unseres Faches hervorgebracht. Die zwei ältesten Mathematiker unseres Zeitabschnittes sind Johannes Peckham (in latinisierender Verketzerung Pisanus), der um 1292 als Erzbischof von Canterbury starb, und John of Holywood, der ältere aber weitaus berühmtere von beiden. Ob er Niederschotte, anglisierter Ire oder Nordengländer war, bleibt strittig; gemeiniglich betrachtet man das jetzige Halifax, dem er den Namen Johannes Sacrobosco (auch Sacrobusto) verdankt, als seinen Heimatsort. Gelernt und großenteils auch gelebt hat er in Paris, wo sein Grabmal aus dem Jahre 1256 noch erhalten ist. Peckhams Lehrbegriff der Optik, nach Alhazen (S. 512) gearbeitet, hat weit mehr Verbreitung als derjenige des Witelo gefunden, dem er eigentlich an Wert nachsteht. Auch an deutschen Universitäten wurde (S. 272) über seine „Prospectiva" gelesen. Sacroboscos „Sphaera materialis" aber, wie man diese kurze Belehrung über die wichtigen Punkte, Geraden und Kreise der Himmelskngel gewöhnlich nennt, hat als Lehrbuch, wie wir noch sehen werden, einen geradezu beispiellosen Erfolg gehabt, obschon — oder gerade weil — das aufgewendete mathematische Rüstzeug sehr beschränkt ist. Den gleichen Standpunkt nimmt ein das arithmetische Kompendium („Tractatus de arte numerandi"), worin neun Spezies unterschieden werden, indem der Autor zwischen Division und Radizierung noch die — übrigens nur spezielle Fälle umfassende — arithmetische Progression einschiebt. Duplieren und Medieren (S. 200) sind natürlich auch vorhanden.

Nicht darf unbemerkt bleiben, daß auch diejenigen Schriftsteller, welche man mit bestimmter wissenschaftsgeschichtlicher Bezeichnung als die scholastischen kennt, mehr Neigung für rein mathematische Dinge an den Tag legten, als mancher ihrer Kollegen anderer Volkszugehörigkeit. Albertus Magnus hat auf einer ganzen Reihe naturwissenschaftlicher Gebiete Hochachtbares geschaffen; von Thomas Aquinas sind uns feinsinnige

Äußerungen über Physik erhalten — reine Mathematik lag nicht in beider Arbeitsbereiche. Robertus Lincolnensis (Grosseteste), dem eine ungewöhnlich tiefgehende Kenntnis arabischer Wissenschaft zur Seite stand, wählte mit Vorliebe logische Beispiele aus der Geometrie. William Occam interessierte sich für eine genauere Festlegung der mathematischen Grundbegriffe und gab eine ihm besser scheinende Definition der geraden Linie. Schon früher aber hatte der geniale Roger Bacon, der freilich auch vor Abenteuerlichkeiten und Großsprechereien nicht zurückschreckte, und z. B. die Geometrie „in sieben Tagen“ lehren zu wollen sich anheischig machte, wiederholt Beweise seines Verständnisses für schwierigere mathematische Fragen gegeben, und wir möchten es ihm nicht so sehr zur Last legen, daß er bei seinen Spekulationen über die Zusammensetzung der Materie aus Atomen, die sich nach Laßwitz auch an arabische Vorbilder anlehnte, stereometrische Schnitzer begeht. Als Optiker steht er gelegentlich auf eigenen Füßen und weiß u. a. den Brennpunkt eines parabolischen Konkavspiegels zu bestimmen.

Aus den früheren Jahrzehnten des XIV. Jahrhunderts, aus der Zeit also, da die englische Sprache der Gegenwart sich als organisches Ganzes herauszubilden begann, besitzen wir einen in diesem Idiome geschriebenen „Tretis of Geometri“, der uns vorzüglich deshalb bemerkenswert dünkt, weil in ihm noch vor Erfindung des Jakobstabes der im nächsten Kapitel stärker hervortretende Gedanke, zur Winkelmessung neben geteilten Kreisen auch geteilte geradlinige Gebilde zu verwenden, einer einfachen Realisierung teilhaftig geworden ist. Von geachteten britischen Mathematikern aus dieser Zeit, wie dem in der Trigonometrie wohl beschlagenen Oxforder Professor Robert of Wallingford, dem in gleichem Sinne zu nennenden und nur etwas späteren John Maudith, und von Simon Bredon, der ums Jahr 1380 eine Sinustafel konstruiert haben soll, ist wohl mehrfach die Rede, aber wir müssen uns mit v. Braunmühl mangels besserer Einsicht damit bescheiden, daß gegen 1300 schon die arabische Trigonometrie ihren Einzug in England gehalten und im folgenden Jahrhundert Freunde und Kenner geworben hat.

Zu diesen zählt besonders Thomas Bradwardinus (1290?—1349), einer der Amtsnachfolger Peckhams (S. 285) und in seiner wissenschaftlichen Bedeutung für sein Vaterland genau dieselbe Erscheinung, wie es Oresme (S. 282) für Frankreich bald nachher werden sollte. In seinen Hauptwerken kommt zwar Trigonometrie nicht vor, aber eine Notiz in einer Peckham - Handschrift nennt ihn als Erfinder des Satzes $\operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{cotang}\alpha = 1$, der freilich in der arabisierenden, etwas ungefügigen Ausdrucksweise des Zeitalters die umständliche Fassung empfängt: „Inter umbras et umbrosum testis est proportio, quod ipsa res semper est medio loco proportionalis inter umbram suam, rectam scilicet et versam“. Daß diese Grundformel auf Abûl Wafâ zurückgeht, haben wir oben (S. 215) erfahren. Bradwardins für uns wichtigste Schriften sind der „Tractatus de Continuo“ und die „Geometria speculativa“. Andere Sachen aus seiner Feder sind, wenngleich im Drucke vorliegend, noch so gut wie unbekannt.

Die Schrift über das Kontinuum hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einer solchen des bekannten Philosophen und Mathematikers Drobisch, „Synechologische Untersuchungen“ (Zeitschr. f. Phil. XXV) betitelt, was ersterer ein modernes Gepräge verleiht. Spezifisch mittelalterlich ist indessen die Scheidung zwischen bleibend Stetigem (den geometrischen Grundgebilden) und konsekutiv Stetigem (Zeit, Bewegung). Sehr an neueste mathematische Studien (G. Cantors u. a.) erinnert dagegen die Gegenüberstellung des kathetisch und des synkathetisch Unendlichen. An Polemik läßt es der Autor nicht fehlen; sein Gegner ist vor allem der von Quetelet gekennzeichnete Hendrik Goethals aus Gent, hier als Gandavensis erscheinend. Aus der Geometrie verdient als neue Bahnen weisend herausgehoben zu werden eine Theorie der Sternpolygone mit korrekten Angaben über die jeder Eckenzahl zugehörigen verschiedenen Ordnungen (Dreieck, Viereck, Sechseck 1; Fünfeck 2; Siebeneck 3 usw.). Den Zenodor (S. 112) und die griechische Proportionenlehre kennt Bradwardin vollkommen, und die Besprechung der Inkommensurabilität von 1 und $\sqrt{2}$ führt ihn — den ersten Mathematiker, der anscheinend dieses Wort gebraucht

— zur Einführung der Bezeichnung „ratio irrationalis". Allerorts macht auch hier der Doctor profundus, so nennt ihn die Kirchengeschichte, seinem Namen Ehre.

An Bradwardins „Metaphysik der Geometrie", wie man seine Untersuchungen über die Stetigkeit wohl nennen könnte, knüpft der Zisterzienser Suicet (Suisset, Swinshead) um 1350 an. Sein „Calculator", in dem gar nicht gerechnet wird, handelt über „latitudines" und „difformia" in einer Sprache, die an sich etwas dunkel, dem mit Oresmes „Tractatus" Bekannten hingegen sehr geläufig ist. Einen Vorläufer des französischen Geometers wird man ihn kaum nennen können; beide Männer haben aus einem bereits vorhandenen Anschauungskreise sich ihre Anregung geholt, und bei Oresme gelangte diese zur kräftigeren Entwicklung.

Skandinavische Mathematiker. Nur drei solche sind wir vorzuführen in der Lage, und zwar entfällt einer auf jedes der drei nordgermanischen Völker. Petrus de Dacia, mit dem uns Eneström bekannter machte, ragt aus dem XIII. ins XIV. Jahrhundert herein; eine damals nicht seltene geographische Konfusion hat den Dänen zum Daker (unteres Donaugebiet) werden lassen. Seine „Tabula ad inveniendam propositionem cujusvis numeri" enthält das erstbekannte große Einmaleins (bis 49 · 49), während ein ungefähr gleichaltriges Prager Manuskript nur bis 15 · 16 reicht. Schweden vertritt der Pariser Magister Sven (Suenon), um 1340 Privatdozent der Sphärik, die er für sich Meldende in seiner Wohnung las. Als dritter im Bunde erscheint der norwegische Lagman Hauk Erlendsön (1264—1334), der, dem Sacrobosco folgend, einen nicht rein kompilatorischen Lehrbegriff, „Algorismus", verfaßt hat.

Slavische Mathematiker. Auch da ist wenig zu berichten, denn Russen und Südslaven scheiden ganz von selbst aus. Ob der bald nach 1370 in Königgrätz geborene spätere „Doctor et lector ordinarius universitatis studii Pragensis" ein deutscher Johann Schindel oder ein czechischer Jan Szindel war, bleibt unentschieden, doch ist das letztere wahrscheinlicher. Das älteste polnisch-mathematische Dokument nennt Láska die auf der Krakauer Universitätsbibliothek zu findende

„Geometria Regis“ des Martin Król (= König) von 1450, welche praktische Aufgaben aus „Altimetria“, „Planimetria“ und „Profundimetria“ mit Astrolabium, Quadranten, Planisphär, Torquet und „Virga“ (Jakobstab oder Meßrute?) zu behandeln lehrt.

Jüdische Mathematiker. Solche gab es in allen Kulturländern, und vornehmlich waren es zwei Dinge, die ihrem Scharfsinne zu würdig scheinenden Aufgaben verhalfen. Das waren kabbalistische Zahlenspekulationen im Geiste Ibn Esras (S. 225) und exegetische Erörterungen über talmudische Geometrie (Sabbatwege, Anlegung von Begräbnisstätten, Erbteilung). Als namhafte deutsche Juden werden in Beziehung zur Mathematik erwähnt Meir Spira und sein Sohn Isaac aus Speier, Eleasar aus Worms, Moses ben Chisdai aus Tachau (in Deutschböhmen). Das mittelalterliche Judentum rühmte sich seiner Akademie in Rom, wo nach Güdemann der Professor Benjamin ben Jehuda als „der Vater aller Gelehrten auf dem Gebiete der Mathematik“ gefeiert wurde.

Kapitel XVII.

Die Reformperiode Peurbachs und Regiomontans nebst den ihr folgenden Jahrzehnten bis 1500.

Um die Mitte des XV. Jahrhunderts beginnt sich eine große Reformbewegung vorzubereiten, deren Wirkung eine besonders nachhaltige war, weil sie nicht ausschließlich auf mathematischem Gebiete sich vollzog, sondern engste Fühlung mit einer weit allgemeineren und umfassenderen Umgestaltung des geistigen Lebens, der gelehrten Denk- und Arbeitsweise hielt. Dies war der Humanismus, das Bestreben, den Geist des Altertums neu aufleben zu lassen. War auch Italien das Vaterland dieser vielfach revolutionäre Formen annehmenden Reform, als deren Väter ein Petrarcha und Boccaccio anzusehen sind, so hat dieselbe doch gerade im deutschen Sprachbereiche eine besonders kräftige Entwicklung genommen. Und die beiden in der Überschrift genannten Mathematiker hat man ein volles Recht als deutsche Frühhumanisten zu bezeichnen. Der Ort aber, den wir als Ursprung der Bewegung, soweit sie uns angeht, ansprechen dürfen, war Wien, welches für deutsche Lande ziemlich ein Jahrhundert lang die Führung der mathematischen Wissenschaften, dieses Wort im weitesten Sinne genommen, zu übernehmen bestimmt war. Unter dem Einflusse der (S. 276) auf Albertus de Saxonia und Henricus de Hassia zurückweisenden Überlieferung entstand die ältere Wiener mathematische Schule.

Zeitlich steht an ihrer Spitze Johann von Gmünd (1380?—1442). So werden wir den Joannes de Gamundia am richtigsten wiedergeben, nachdem es sehr wahrscheinlich geworden — freilich aber nicht sichergestellt — ist, daß derselbe von Hause aus Wißbier hieß, aus Schwäbisch-Gmünd stammte und seine Bildung sich in Ulm geholt hat. Seit 1406 Magister der Wiener Hochschule, begann er 1412 mit mathematischen Vorträgen, und diese müssen ihrem Zwecke vortrefflich entsprochen haben, weil man den Dozenten von der Pflicht, über Philosophie aller Art zu unterrichten, entband und ihm gestattete, sich ganz auf sein Lieblingsfach zu konzentrieren. So ist Johann von Gmünd, ohne freilich je eine diese Tatsache anerkennende Bestallung zu erhalten, und ohne daß die Mathematik zum Nominalgegenstande erhoben worden wäre, der erste Professor derselben in einer Artistenfakultät geworden — ein an sich unscheinbarer, in Wahrheit jedoch schwerwiegender Vorgang. Er hat über die verschiedensten Zweige gelesen, über Algorismus schlechtweg, Algorismus de Minutiis, Optik, Sphärik, Computus ecclesiasticus, seit 1434 auch über das früher noch nicht in diesem Zusammenhange genannte Astrolabium; eine namhafte Bücherschenkung an die Universitätsbibliothek erhielt sein Andenken auch später noch in Ehren. Neue Wege der Forschung hat er nicht beschritten, aber als Lehrer war sein Verdienst ein großes. Unter seinen Schülern wird Pruner oder Pruneck, mutmaßlich ein Tiroler, als tüchtig genannt; weit wichtiger jedoch war, daß ein junger Gelehrter, von dem es übrigens nicht feststeht, ob er zu Füßen Johanns gesessen, dessen Werk in seinen letzten Lebensjahren kräftig aufnahm und weiterführte. Dies war der — seinem Familiennamen nach unsichere — Oberösterreicher Georg von

Peurbach (Burbach, Peyerbach), der in der kurzen ihm zugemessenen Zeitspanne (1423—1461) eine ausgebreitete schriftstellerische Tätigkeit entfaltete und sich einen Schüler von noch höherer Bedeutung heranzog.

Peurbachs Vorlesungen betrafen zwar auch mathematische, weit mehr aber noch philologische Dinge, so daß die Historiker der Altertumswissenschaft ihm für die Einbürgerung der klassischen Studien in Deutschland ein hohes Lob spenden zu sollen glauben. Dafür aber war er literarisch um so eifriger um die Hebung des mathematischen Wissens bemüht. Sein arithmetisches Lehrbüchlein wird unter drei verschiedenen Titeln zitiert (Algorismus, Introductorium in Arithmeticam, Elementa Arithmetices) und muß, der stattlichen Zahl seiner Druckausgaben zufolge, recht beliebt gewesen sein. Inhaltlich bieten die zwölf Paragraphen (Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio, Radicum extractio quadrata, Radicum extractio cubica, Regula aurea sive de tre, Regula Societatis) keine hervorstechenden Eigentümlichkeiten, aber ein geschickter Lehrer hat das anspruchslose Büchlein geschrieben.

Als ein solcher offenbart sich Peurbach auch in seiner Planetentheorik, die noch viel mehr Auflagen erlebte und für mindestens hundert Jahre das unentbehrliche Supplement zur Sphärik des Sacrobosco (S. 285) werden sollte. Der zugrunde liegende Versuch, ein Kompromißsystem zwischen den homozentrischen Sphären (S. 72) und den Epizykeln (S. 135) zu schaffen, hat den Zeitgenossen jedenfalls sehr gut gefallen. Wenn also auch Peurbachs ausgesprochener oberster Zweck es war, die griechische Astronomie aus den Quellen wiederherzustellen, und wenn infolgedessen ein beträchtlicher Teil seiner Lebensarbeit darauf gerichtet war, einen wirklich korrekten lateinischen Text des Almagestes (S. 133) zu liefern, so wollte er doch nicht sklavisch seine Vorlagen nachbilden, sondern behielt sich eine selbständige Durcharbeitung derselben vor. Daß er hierzu voll befähigt war, beweist am besten sein trigonometrisches Werk, welches man allerdings erst lange nach seinem Tode kennen und schätzen lernte. Regiomontan hatte seinen Plan, es dem Drucke zu überliefern, nicht verwirklichen können, und so erschien es erst 1541 in Nürnberg („Tractatus Georgii Purbachii super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis"), nachdem schon etwas früher 1516 die unbedingt dazu gehörige Anleitung zur Herstellung und Verwendung eines neuen Meßinstruments ebenda aus der Presse hervorgegangen war. Von diesem Instrumente, welches als geometrisches Quadrat, als erster bekannter Distanzmesser, eine weite Verbreitung gefunden hat, soll zunächst die Rede sein.

$ABCD$ (Fig. 40) ist ein massives Quadrat, von dem die Seiten BC und CD mit einer Teilung in gleiche Teile versehen sind. Im Originale waren es 1200; hier nehmen wir an, die Quadratseite a bestehe aus bn Teilen, so daß also n den Abstand zweier Teilstriche (bei Peurbach ungefähr $\frac{1}{2}$ mm) darstellt. Um A bewegt sich als Drehpunkt ein Dipterlineal. Sei etwa die Winkeldistanz S_1S_2, d. h. der Gesichtswinkel $S_1AS_2 = \alpha$ zu messen; nachdem die Seite AB mittels eines Senkels horizontal gestellt ist, visiert man von A aus die Punkte S_1 und S_2 an und findet, daß $DE = cn$, $BF = dn$ die von den Visierlinien abgeschnittenen Teile sind. In der uns geläufigen Formelsprache weiterschließend, würden wir

$$\operatorname{cotang}\alpha = \operatorname{tang}(\beta + \gamma) = \frac{\frac{cn}{a} + \frac{dn}{a}}{1 - \frac{cdn^2}{a^2}} = \frac{b(c+d)}{b^2 - cd}$$

setzen, und ähnlich, wenn etwa beide Durchschnittspunkte auf BC oder CD fielen. Peurbach freilich rechnete noch nicht direkt mit Tangenten, sondern, wenn die Zahl p von der Alhidade berührt wurde, so suchte er den Sinus des Winkels ζ, welchen das Lineal mit der nächst anliegenden Quadratseite einschloß, und berechnete

$$\sin\zeta = p : \sqrt{1200^2 + p^2};$$

richtiger gesprochen, er multiplizierte diesen Bruch noch mit 600 000, um so den linearen Sinus mit recht großer Genauigkeit zu bekommen. Für diese Werte hatte er eine Tafel konstruiert, die, obwohl ein solcher Name ihm noch fehlte, doch als eine Arcustangententafel betrachtet werden darf. Wie er sich bei Interpolationen behalf, verschweigt er uns leider.

Sowohl aus dem weiteren Inhalte des Schriftchens, wie auch aus später erschienenen Büchern können wir uns darüber belehren, daß das geometrische Quadrat eine sehr ausgedehnte feldmesserische und astronomische Anwendung gefunden hat. Kepler hat das zugrunde liegende Prinzip sogar zur Bestimmung der magnetischen Deklination nützlich befunden. Nunmehr fällt auch volles Licht auf die mehrmals (S. 222, 286) von uns gebrauchte Ausdrucksweise, es habe Meßapparate

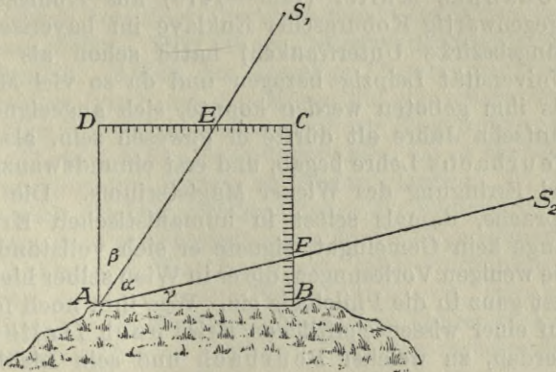


Fig. 40.

mit nicht zirkularer Teilung gegeben. Damit waren Vorläufer der Peurbachschen Erfindung gemeint, von denen dieser, wie man wohl zuverlässig annehmen darf, selbst keinerlei Kenntnis gehabt hat.

Wie man Sinustabellen zu berechnen habe, wird in der 1541 gedruckten Schrift des näheren dargelegt. Peurbach suchte die Hilfsmittel, dieses Rüstzeug des astronomischen Rechners mit größtmöglicher Präzision auszustatten, in zwei Richtungen; er wählte, wie eben erwähnt, einen sehr großen Sinus totus und ließ die Tafelwinkel in kleineren Intervallen, nämlich von zehn zu zehn Minuten, fortschreiten. Auch hielt er sich nicht bloß an sein griechisches Vorbild, an Ptolemaeus, sondern auch arabische Arbeiten waren ihm bekannt, wie er denn den indischen

Wert von π dem Arzachel (S. 221) entlehnt hat. Völlig genau könne freilich dieses Verhältnis niemals berechnet werden, weil Krummes und Gerades heterogen sei. Dieses Wort selbst wird allerdings noch nicht gebraucht; wir werden ihm zuerst bei Kepler begegnen.

Peurbach war ein Mann der neuen Zeit, ein vielseitig unterrichteter und selbstdenkender Gelehrter, der in einer Lebenszeit von nur achtunddreißig Jahren Leistungen von dauerndem Werte hervorbrachte. Allein sein bestes Werk bleibt doch immer der Schüler, dem er den Lebensweg geebnet und das Beste, was er zu eigen besaß, gegeben hat. Johannes Müller (1436—1476) aus Königsberg i. Fr. (gegenwärtig Koburgscher Enklave im bayerischen Regierungsbezirke Unterfranken) hatte schon als Knabe die Universität Leipzig bezogen und da so viel Mathematik, als ihm geboten werden konnte, sich angeeignet. Kaum fünfzehn Jahre alt dürfte er gewesen sein, als er sich in Peurbachs Lehre begab, und erst einundzwanzig zählte er bei Erringung des Wiener Magisteriums. Die griechische Sprache, damals selbst in humanistischen Kreisen noch lange kein Gemeingut, eignete er sich vollständig an, und die wenigen Vorlesungen, die er in Wien selber hielt, schlugen fast ganz in die Philologie ein. Was ihm noch fehlte, sollte auf einer wissenschaftlichen Reise nach Italien erworben werden, zu welcher Peurbach und sein Lieblingsschüler von dem beiden wohlgesinnten Kardinal Bessarion (S. 281) eingeladen worden waren. Der Lehrer erlebte die Erfüllung seines Lieblingswunsches nicht, aber der junge Müller durfte das gelobte Land der Wissenschaft kennen lernen, wo ihm zuerst die persönliche Lehrtätigkeit des Georg von Trapezunt (S. 281) und nächstdem eine überaus eifrige Schreibarbeit in den Bibliotheken zur Meisterschaft verhalfen. Einen Schatz von Handschriften brachte er nach Deutschland zurück. Auch unter den Humanisten Guarini und Theodor von Gaza setzte er in verschiedenen italienischen Städten seine Studien fort, und bald schon war der junge Mann, den man nach seinem Heimatorte Regiomontanus (auch Johannes de Monte Regio, resp. de Regio Monte, Küngsperger) zu nennen pflegte, ein geachteter Vertreter der von ihm gepflegten Wissenszweige geworden, den man nach der herrschenden

Sitte auch gerne zu akademischen Gastrollen zuließ. So hielt er 1464 zu Padua Vorlesungen über die Astronomie des Arabers Alfraganus (S. 231), und in der auf uns gekommenen Einführungsrede betätigte er sich als Kenner der Geschichte seiner Wissenschaft. Im Oktober jenes Jahres war er in Rom, aber seine Entzweiung mit dem Trapezunter, gegen dessen Art zu übersetzen er eine freilich in sehr grobianischem Stile gehaltene Kritik gerichtet hatte, machte ihm den Aufenthalt in Italien unerquicklich. Auf eine nur einjährige zweite Wiener Periode folgte ein Ofener Biennium, dessen Ursache ein ehrenvoller Ruf des Königs Matthias Corvinus war, der seine reiche Bibliothek von einem hervorragenden Gelehrten verwaltet wissen wollte. Hier ist sein astronomisches Hauptwerk entstanden. Allein das damalige Ungarn war noch ein zu unruhiges Land, um den Musen die wünschenswerte Stille gewähren zu können, und so sehen wir Regiomontan im Jahre 1471 nach Nürnberg übersiedeln, wo er für seine Ziele den geeignetsten Boden zu finden glaubte. In der Tat waren auch die hier verlebten Jahre die erfolgreichsten seines Lebens; der Freigebigkeit seines dort bald gewonnenen Freundes Bernhard Walther (gest. 1504) verdankte er Sternwarte, mechanische Werkstätte und Druckerei. Daß ihn aber die Stadt als öffentlichen Lehrer in ihren Sold genommen habe, ist unwahr. Bald war insbesondere ein umfassender Plan, ältere und neuere mathematische Schriften der Öffentlichkeit zu übergeben, der Ausführung nahe; da traf den so rasch berühmt gewordenen Mann 1475 die Berufung des Papstes Sixtus IV., in Sachen der immer dringlicher gewordenen Kalenderverbesserung nach Rom überzusiedeln. Regiomontan folgte dem Rufe und erlag schon im nächstfolgenden Jahre dem Klimafieber oder, was allerdings weit weniger wahrscheinlich ist, der Giftmischerei seiner wissenschaftlichen Feinde, der Nachkommen des so heftig befehdeten Georg. Seine literarische Hinterlassenschaft wurde von Walther pietätvoll gehütet, und das uns überlieferte Verzeichnis muß uns mit tiefem Bedauern darüber erfüllen, daß es nach Walthers Hingang nicht gelang, die durchaus wertvolle Sammlung vor der Zerstreuung zu retten.

Der vorhin erwähnte Editionsplan, den wir glücklicherweise noch besitzen, verdient als ein wahrhaft großartiger bezeichnet zu werden. Die meisten mathematischen Schriften des Altertums, sogar Diophant, standen auf dem Programme, und zwar handelte es sich wesentlich um Übersetzungen, aber auch teilweise um kritisch gereinigte Ausgaben; beim Euclid z. B. wurde zwischen dem wahren Texte und der durch die Fehler des Campanus in diesen hineingetragenen Verderbnis wohl unterschieden. Aber auch von mittelalterlichen Mathematikern, so von Jordanus (S. 273), standen Werke auf der Liste, und endlich gedachte der unermüdliche Mann eine ganze Reihe eigener Geistesprodukte, deren Verlust wir besonders schmerzlich beklagen müssen, aus seiner Offizin hervorgehen zu lassen. Ein geometrisches Aufgabenbuch sollte sich darunter befinden; einen Einblick in seinen mutmaßlichen Inhalt können wir uns ja auf anderem Wege verschaffen, aber gleichwohl ist gerade dieser Verlust für die Geschichte der Didaktik sehr bedauerlich. Wie wir Regiomontan kennen, so wäre von diesem Riesenplane, wären dem Unternehmer vom Schicksale siebzig statt vierzig Jahre zugemessen gewesen, gewiß der größte Teil der Verwirklichung zugeführt worden.

Wenn wir nunmehr einen Blick auf seine literarische Arbeit werfen, der wir natürlich auch einen überaus beachtenswerten Briefwechsel zurechnen, so wollen wir gleich zu Beginn nicht verschweigen, daß der Ruhmeskranz des eine neue Ära einleitenden Mannes infolge der historischen Untersuchungen unserer Tage einigermaßen entblättert worden ist. Nicht nur einzelne Sätze (S. 128, 230), welche man ihm zuzuschreiben gewohnt war, waren schon vor ihm bekannt, sondern auch hinsichtlich zweier ungleich wichtigerer Materien muß ihm die volle Originalität aberkannt werden: Regiomontan ist nicht der Erfinder des Jakobstabes (S. 233), und nicht seine Trigonometrie darf (S. 231) als die erste systematische Darstellung dieser Disziplin gelten. Ja vom modernen Standpunkte aus müßte seine Gleichgültigkeit im Verwenden fremder oder eigener Errungenschaften, die kaum mehr vom Plagiate zu unterscheiden ist, ernstlichen Tadel finden, wüßten wir nicht, daß die Zeitsitte in diesem Punkte die größte Laxheit duldete. Jene vornehme Bescheidenheit in der Betonung eigenen Verdienstes, die wir bei Lionardo Pisano (S. 261) wahrnehmen durften, war noch sehr lange nachher eine Ausnahme von der Regel.

Wir wenden uns den sämtlich erhaltenen Druckschriften zu. Nur kurz sei, als in der Hauptsache unserem Zwecke ferner liegend, die Monographie über den Kometen von 1472 angeführt (De Cometae magnitudine longitudineque ac de loco ejus vero problemata XVI, ed. J. Schoener, Nürnberg 1531); dieses posthume Werk beschäftigt sich ausführlich mit dem Jakobstabe, den der Autor eben direkt von Levi ben Gerson (S. 233) übernommen hatte, der aber überhaupt, wie eine um 1450 niedergeschriebene Münchener Handschrift beweist, schon um die Zeit, als Regiomontan zu studieren anfing, keine unbekannte Sache mehr war. Sein literarischer Erstling war die uns bereits bekannte Universitätsrede, welche wirklich einen vortrefflichen Überblick über die Entwicklung der Mathematik von den ältesten Zeiten an liefert. Im übrigen war seine Wirksamkeit größtenteils eine trigonometrische. Mehrere Tafelwerke („Tabulae directionum", „Tabula primi mobilis" nebst Anhängen) sind der Vervollkommnung des wichtigsten astronomischen Handwerkszeuges gewidmet; während aber Peurbach (S. 293) bei einer Vermengung des dezimalen und sexagesimalen Systemes verharrte, können wir bei seinem Schüler einen fortschreitenden Emanzipationsprozeß beobachten; seine erste Sinustabelle hat als Sinustotus $60 \cdot 10^3$, die zweite $60 \cdot 10^5$, die dritte endlich 10^7; diese letztere Wahl der Grundzahl erleichtere, so heißt es in den „Direktionstafeln", die Rechnung. Auch Regiomontan geht von den Kardagen (S. 221) aus und bedient sich, um zu $\sin 1^0$ herabzusteigen, eines Verfahrens, welches dem Geiste nach mit demjenigen des Abûl Wafâ und Ûlug-Beg (S. 215, 235) übereinstimmt. Es gelingt ihm endlich, den $\sin 1'$ zu ermitteln und so ein Intervall des Fortschrittes von so geringem Betrage zu gewinnen, daß dadurch eine weit größere Genauigkeit des Rechnens verbürgt werden konnte. Die „Direktionstafeln", die der berühmte Buchdrucker Erhard Ratdolt in Augsburg 1490 als ein zumal für Sterndeuterei brauchbares Hilfsbuch erscheinen ließ, enthält aber auch die erste diesen Namen voll verdienende Tangententafel, die ihres Beinamens „Tabula foecunda“ gewiß nicht unwert war. Das arabische Vorbild der Schatten ist unverkennbar (S. 213), aber schon die Loslösung von dieser Hilfsvorstellung und die Behandlung der trigonometrischen Tangente auf gleichem Fuße mit dem Sinus fallen sehr zugunsten der neuen Tabelle ins Gewicht. Was die 1514 von der berühmten Wiener Buchführerfirma Alantsee ans Licht gebrachten Tafeln für sphärische Astronomie — das „primum mobile“ ist eben die Fixsternsphäre — anlangt, so ist für sie charakteristisch, daß sich an sie die späterhin allgemein übliche Bezeichnung „Tafeln von doppeltem Eingange“ knüpft.

Das bedeutendste Werk Regiomontans gerettet zu haben, ist das Verdienst des Nürnberger Patriziers Wilibald Pirckheymer (1470—1530), eines Mannes, der nicht allein als Mäzen und Mittelpunkt des Nürnberger Humanistenkreises die Wissenschaft indirekt sehr gefördert, sondern auch durch seine Bearbeitung des ersten Buches der Geographie des Ptolemaeus (S. 130) als ein selbständiger Arbeiter sich bewährt hat. Dieser Mann erkaufte von Walthers Erben die fünf Bücher „De triangulis omnimodis“ und übergab sie dem Nürnberger Mathematiker Johannes Schoener zur Herausgabe, der damit allerdings erst nach seines Patrons Tode zustande kam. Das 1533 gedruckte Werk galt bis vor kurzem, wie erwähnt, als das chronologisch erste systematische Lehrgebäude der gesamten Trigonometrie, aber die kritische Untersuchung v. Braunmühls hat diese Legende zerstört. Regiomontan war mit allen arabischen Vorarbeiten und mit Levi ben Gerson wohl vertraut und dankt seinen Vorgängern sehr vieles von dem, was man als sein geistiges Eigentum anerkennen zu müssen glaubte. Immerhin sind auch die Anzeichen dafür, daß er nicht bloß reproduzierte, sondern den Stoff auch völlig durchdrungen und durchdacht hatte, reichlich genug vorhanden, um dem Verfasser neben dem Verdienste des geschickten Kompendiographen auch das des schöpferisch veranlagten Schriftstellers und vor allem des gründlichen Sachkenners zu sichern.

Die ebene Trigonometrie, nicht bloß als Hilfsdisziplin, sondern als vollberechtigter mathematischer Wissenszweig behandelt, bildet den Gegenstand des ersten und zweiten Buches. Über Nasr - Eddîn (S. 228) geht hier insbesondere die Erkenntnis hinaus, daß a, b und α nur dann eine eindeutige Dreiecksberechnung ermöglichen, wenn $a \geqq b$ ist. Gar manche Aufgaben begegnen uns hier, die unsere Zeit zum eisernen Bestande der Trigonometrie rechnet, so z. B. die Herleitung des Halbmessers des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises aus den drei Seiten. Den ganz nach unserer Art formulierten Sinussatz dürfte Regiomontan dem Levi entnommen haben. Man kann diesen Abschnitt recht wohl auch als eine Sammlung von Übungen aus der algebraischen Geometrie betrachten, denn da der Kosinussatz als solcher fehlt und auch die Tangente niemals zur Anwendung gelangt, so müssen gar manche Hilfskonstruktionen und Berechnungen Platz greifen, die sich, wenn ein umfänglicherer goniometrischer Apparat zur Verfügung steht, als überflüssig erweisen. Das dritte Buch gibt, natürlich wieder ohne Quellenangabe, die Hauptsätze der Raumtrigonometrie und fußt ganz auf Menelaus (S. 127, 222). Dieser letztere hat auch vorzugsweise die Materialien zum vierten Buche geliefert, aber die Beweise gehören zum Teile dem Verfasser selbst an, der auch in dem Bestreben, die Lehre um ihrer selbst und nicht bloß um der astronomischen Anwendung willen frei auszugestalten, seine eigene Auffassung durchblicken läßt. Ganz unabhängig erscheint er in seiner Behandlung der Aufgabe, α, β, γ aus a, b, c zu berechnen, denn an das Analemma des Albategnius (S. 213) wird nicht appelliert, sondern es wird rein konstruktiv die Lösung erbracht. M (Fig. 41) ist der Mittelpunkt der Kugelfläche, auf welcher das in seinen drei Seiten bekannte Dreieck ABC liegt. Man macht $\operatorname{arc} AD = \operatorname{arc} AE = 90^0$ und zieht die Radien MA, MD, ME. Ferner fällt man aus den Punkten C und B auf MA die Senkrechten CL und BP, sowie aus B auf MD und von C auf ME die Lote BK und CH. Für den Radius r ist jetzt $MH = LC = r \sin b$, $KM = BP = r \sin c$. Wenn $HN = BK$ gemacht und BN sowie BC gezogen wird, so kennt man im ebenen, bei N rechtwinkligen Dreieck BCN

$$BC = r \operatorname{chord} a\,, \quad CN = r(\cos b - \cos c)\,, \quad \sphericalangle BNC = 90^0;$$

man kennt

$$BN = HK = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CN}^2}\,.$$

Jetzt sind in dem Dreieck MHK die drei Seiten durch a, b, c ausgedrückt, und $\sphericalangle KMH = \sphericalangle DME = \alpha$ kann auf bekannte Weise gefunden werden. Während nun aber die vier ersten Bücher, mit v. Braunmühl zu reden, einen in sich abgeschlossenen Abriß der Sinustrigonometrie vorführen, weist das fünfte, offenbar später entstandene und nicht organisch mit dem Hauptteile verschmolzene Buch auf ein in der Zwischenzeit erfolgtes Studium des Albategnius hin, dem als neue Funktion der Sinusversus entnommen ist. Dieser selbst hinwiederum ist nichts als eine Verschleierung des Kosinus, da ja $\cos\alpha = 1 - \operatorname{sin\,vers}\alpha$ ist, und so ergibt sich — zum ersten Male in der sphärischen Trigonometrie — deren Kosinussatz, durch dessen Einführung Regiomontan diese Disziplin um ein gewaltiges Stück vorwärts gebracht hat, ohne daß da von fremder Beeinflussung etwas zu sehen wäre. Sieht man sich die Proportion

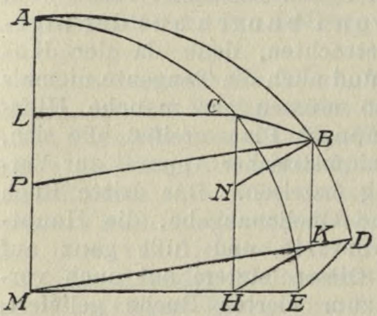


Fig. 41.

$$\operatorname{sin\,vers}\alpha : [\operatorname{sin\,vers} a - \operatorname{sin\,vers}(b - c)] = r^2 : \sin b \sin c$$

nur oberflächlich an, in welcher der neue Lehrsatz uns entgegentritt, so erkennt man ihn kaum als diesen, aber die, für $r = 1$, sich sofort ergebende Umformung

$$(1 - \cos\alpha) \sin b \sin c = 1 - \cos a - 1 + \cos b \cos c + \sin b \sin c$$

läßt unverzüglich die uns natürlicher erscheinende Fassung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

hervortreten. Der Rest des fünften Buches ist minder bedeutend. Alles in allem dürfen wir jedoch die These aufstellen: Diejenige Trigonometrie, die heute in unseren Schulen gelehrt wird, ist, von gar manchem späteren Zusatze abgesehen, prinzipiell identisch mit jenem Systeme, welches Regiomontanus durch kluge Vermischung der arabischen Tradition mit eigenen Erfindungen geschaffen hat.

Indem wir zu den auf anderem Felde gelegenen Leistungen dieses verdienstvollen Mannes übergehen, lassen wir den sonst wohl in solchem Zusammenhange genannten „Algorithmus demonstratus“ beiseite, weil diese Schrift von jenem zwar für die Nachwelt gerettet, keinenfalls jedoch (S. 274) selbst verfaßt ist. Auf die Streitschrift gegen den Cusaner gehen wir besser erst weiter unten ein. Dagegen muß hier erwähnt werden, daß eine der Nürnberger Stadtbibliothek gehörige Handschrift, welche den Euclid nach Atelharts (S. 253) Übersetzung enthält, wertvolle Zusätze des Abschreibers birgt, der eben kein anderer als Regiomontan selbst war. Weit hinausgehend über die Andeutungen bei Campanus (S. 279) und Bradwardin (S. 287), entwickelt er eine dieses Namens würdige Theorie der Sternvielecke, die freilich hier, auf ein paar Blattränder hingeflickt, nur einen aphoristischen Eindruck hervorbringen kann, aber doch so viel erkennen läßt, daß der Schreiber über diese Ausdehnung des elementargeometrischen Pensums sehr ernsthaft nachgedacht haben muß.

Die an Wichtigkeit für die Ergründung innerlicher Geistesarbeit besonders hochstehende Korrespondenz Regiomontans mit seinen drei Freunden Christoph Roder in Erfurt, Jakob von Speier und dem italienischen Astronomen Bianchini (Blanchinus) hat Th. v. Murr schon 1786 aus den handschriftlichen Merkwürdigkeiten der damals in bestem Rufe stehenden Altdorfer Universitätsbibliothek herausgegeben. War uns Joh. Müller bisher hauptsächlich als Beförderer der Trigonometrie und der von ihr kaum zu scheidenden Astronomie bekannt geworden, so zeigt er sich uns in seinen Briefen als ein seine Zeit überragender Algebraiker und Zahlentheoretiker, ohne daß deswegen die Geometrie zu kurz käme. Er widerlegt Bianchinis Ansicht, daß es unmöglich sei, den Inhalt eines einem gegebenen Kreise einzubeschreibenden Viereckes zu finden, dessen Seitenverhältnisse gegeben sind. Er deutet sogar die Auffindung des Schwerpunktes einer solchen Figur an. Eine planimetrische Aufgabe führt ihn auf eine kubische Gleichung, der gegenüber er die Segel streichen muß; aber eben diese Unlösbarkeit mit den vorhandenen Mitteln ist ihm klar und bewußt geworden, denn er, der sich so viele Mühe um die approximative Lösung der Aufgabe, $\sin 1^0$ zu ermitteln, gegeben hat, erklärt ausdrücklich: Gebt Ihr mir die Wurzel einer gewissen Gleichung vom dritten Grade, so gebe ich Euch den Sinus eines Grades ($[\text{chord}\,1^0]^3 + \text{chord}\,3^0 = 3\,\text{chord}\,1^0$). Von 10 Problemen der unbestimmten Analytik, die er freilich nur formuliert, deren Lösbarkeit ihm aber als leicht oder doch als möglich erschienen sein muß, sollen hier nur die drei wiedergegeben werden, auf welche seine Korrespondenten sich näher eingelassen haben. Jakob von Speier gibt für das Gleichungssystem

$$x + y + z = 240, \qquad 97x + 56y + 3z = 16047$$

die Auflösung $x = 114$, $y = 87$, $z = 39$. Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = v^2$ befriedigt ebenderselbe, dessen Lebensumstände bedauerlicherweise unserer Kenntnis ganz entrückt sind, durch $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$, $u = 10$, $v = 11$. Endlich führt Bianchini auch für die zwei Gleichungen mit drei Unbekannten

$$17x + 15 = 13y + 11 = 10z + 3$$

Lösungswerte an.

Schließlich sei noch der Stellung und Beantwortung einer auf ein Maximum bezüglichen Frage gedacht. Auf der Horizontalen AX ist eine Senkrechte errichtet und auf dieser eine Strecke BC abgegrenzt; wo liegt auf AX der Punkt D, von dem aus gesehen BC unter dem größtmöglichen Gesichtswinkel erscheint? Regiomontan wird gewiß die folgende Überlegung zur Leitschnur genommen haben. Wenn E (Fig. 42) irgend einen Punkt auf AX vorstellt, so muß es auf dieser Geraden noch einen anderen Punkt F so geben, daß $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC$ wird; die vier Punkte C, B, E, F liegen auf einer Kreislinie. Ein Maximum kann aber nur isoliert auftreten; d. h. es müssen die beiden Punkte E und F in einen einzigen zusammenfallen, in den Berührungspunkt D des durch B, C und D gehenden Kreises. Dann ist weiter auch $\overline{AD}^2 = AB \cdot AC$. Man suche sonach zu AB und AC die mittlere geometrische Proportionale m und trage die Strecke $AD = m$ auf AX ab; D ist der gesuchte Punkt. Wir werden in Kap. XX mit einem Falle zu tun bekommen, der in ähnlicher Weise durch rein logische Erörterung die Erledigung einer Maximalaufgabe gestattet.

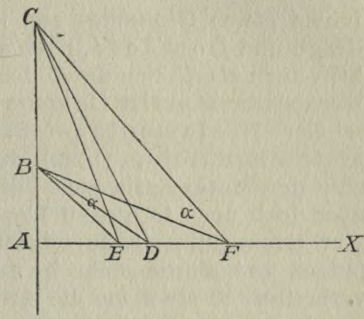


Fig. 42.

So kurz sich unsere Skizze dessen, was Regiomontanus für unsere Wissenschaft geleistet, den Umständen nach auch gestalten mußte, so wird doch, wie zu hoffen, die Erkenntnis daraus zu schöpfen sein, daß dieser am Ausgange des Mittelalters stehende Mann mit Fibonacci, dem vereinzelt gebliebenen bahnbrechenden Geiste einer früheren Epoche, auf gleiche Stufe zu stellen ist. Und ein heller Strahl des von ihm ausgehenden Lichtes fällt auch auf seinen Lehrer Peurbach, den man nicht ohne innere Ursache mit ihm stets zusammen zu nennen pflegt. Beide Männer hatten aber, verglichen mit dem genialen Italiener, das Glück, daß sie nicht unverstanden blieben, daß die Nachwelt vielmehr auf dem von ihnen gelegten Fundamente rüstig weitergebaut hat. Dies nachzuweisen, wird vornämlich die Aufgabe unserer beiden letzten Kapitel sein. Zunächst ist noch über einige Persönlichkeiten zu berichten, die teils ältere, teils jüngere Zeitgenossen der beiden deutschen Mathematiker gewesen sind, ohne jedoch auf ihre Mitwelt einen gleich nachhaltigen Einfluß auszuüben. Es sind dies, wenn wir das Jahr 1500 als vorläufigen Schlußpunkt setzen, uns also wesentlich auf die zweite Hälfte des

XV. Jahrhunderts beschränken, neben einigen minder hervortretenden Namen sechs Männer, nämlich die Deutschen Nicolaus von Cusa und Johannes Widmann, die Italiener Lionardo da Vinci und Luca Paciuolo, die Franzosen Lefèvre und Chuquet. Von anderen Völkern ist aus diesem Zeitraume wenig auszusagen; vor allem schweigt die Pyrenäische Halbinsel ganz. Wir hören zwar, daß um 1480 auf Anordnung des Königs João II. eine Junta dos Mathematicos zusammengetreten war, um die astronomischen Schiffahrtsregeln neu zu bearbeiten, allein wir wissen weder irgend etwas Genaueres von ihren Mitgliedern Dom Rodrigo und Dom José, noch auch von der Art ihrer Tätigkeit, auch als sie sich durch den nach Lissabon gekommenen Nürnberger Martin Behaim, einen präsumtiven Privatschüler Regiomontans (S. 295) und Verfertiger des ersten Erdglobus (1492), vervollständigt hatte. Daß es eine der Mathematik sich bedienende Nautik gab, wird aber doch noch in diesem Kapitel berührt werden müssen. Nur ermangelte sie des eigentlich wissenschaftlichen Gepräges und wurde mehr handwerksmäßig gelehrt und verbreitet, so etwa wie die Arithmetik bei den zünftigen Rechenmeistern, die Geometrie bei den zünftigen Baumeistern. Auch auf diese beiden Kategorien wird demnächst noch zurückzukommen sein.

Nikolaus Chrypffs (Krebs) aus dem Moselstädtchen Cues (1401—1464) latinisierte sich der Zeitsitte gemäß als Cusanus, und so, oder auch als Cusa (Ecusa), wird er regelmäßig in der Geschichte aufgeführt. Er war nicht Mathematiker von Beruf, und dem in hundert Händel seines unruhigen Zeitalters verwickelten kirchlichen Diplomaten, der es bis zum Kardinal brachte, war wenig Zeit vergönnt zu wissenschaftlicher Betätigung, aber sein lebhafter Geist ließ ihn gelegentlich die mannigfaltigsten Probleme angreifen, und so läßt sich seinen 1565 zu Basel in einer Gesamtausgabe gedruckten Schriften manches Goldkorn entnehmen. Ein freier und kühner Denker, fühlte er sich, ähnlich dem ihm vielfach schicksals- und gesinnungsverwandten Bradwardin, zu mathematisch-philosophischen Spekulationen hingezogen. Lange vor Giordano Bruno, den seine weitausgreifende Kosmologie viel später (1600) auf den Scheiterhaufen brachte, hat dieser Kirchenfürst die Unmöglichkeit einer kosmischen Stabilität und die Unbegrenztheit des Weltalls behauptet, womit dann folgerichtig auch die Notwendigkeit der Erdbewegung gegeben war. Über Punkt, Linie, Fläche philosophiert Cusa in der Absicht, den korrekten Stetigkeitsbegriff zu gewinnen. Lebhaft zog ihn, wie leicht zu verstehen, die Kreisquadratur an; indem er ohne viele Umstände die Kreislinie als Vieleck von unendlich vielen Seiten definierte, suchte er die Möglichkeit einer Verwandlung von Krummem in Gerades und umgekehrt von einem neuen Standpunkte aus zu erfassen. Auf schwer verfolgbarem Wege fand er $\pi = 144 : 5\sqrt{84} = 3{,}142337\ldots$, was immerhin der Wahrheit näher als das archimedische $3\frac{1}{7}$ kommt. Die einschlägige Abhandlung „De transformationibus geometricis" widmete Cusa seinem Freunde Paulus Physicus Florentinus, demselben Paolo Toscanelli, der als uralter Mann durch Übersendung einer von ihm gezeichneten Weltkarte die wahre Triebfeder zur ersten Reise des Columbus geworden ist. Auch die Verwendung der Monde zur Kreisvierung (S. 64) beschäftigte den Kardinal, und in seinem Essay „De mathematica perfectione" leitete er eine Näherungsformel zur Berechnung der goniometrischen Funktionen aus dem Bogen her, die später von Snellius wieder gefunden wurde und vollste Beachtung verdient. Es ist nämlich $\varphi \backsim 3 \sin\varphi : (2 + \cos\varphi)$. Dagegen hat man mit Unrecht bei dem Cusaner auch die ersten Spuren der Rollkurven aufzeigen wollen. Bemerkt sei noch, daß Nikolaus Cusanus nicht verwechselt werden darf mit jenem Nikolaus Germanus (fälschlich De Donis), der die Kartensammlung des Ptolemaeus der Vergessenheit entriß. Beide Männer lebten allerdings gleichzeitig in Italien, und die Möglichkeit, beide Namen durcheinander zu bringen, wird noch erhöht durch den Umstand, daß die erste neue Karte in nicht-antiker, in trapezförmiger Projektion, welche Meridiane und Parallelkreise gleichmäßig in gerade Linien überführt, eben von Cusa gezeichnet worden ist. Über hundert Jahre hat sich dieser Cusasche Typus der Karte Mitteleuropas erhalten neben dem geographisch vollkommeneren, geometrisch zurückstehenden Etzlaubschen Typus, welcher nach A. Wolkenhauers Untersuchungen zu Anfang des XVI. Jahrhunderts von Nürnberg ausging und am alten Plattkartenbilde (S. 128, 279) festhielt.

Eine ganz andere Natur ist der Berufsmathematiker Widmann aus Eger, von dem wir eigentlich nur wissen, daß er 1480 unter Ulrich Kalb in Leipzig diese Wissenschaft zu betreiben begann, 1485 dort Magister ward und später selbst Vorlesungen über „Algobre" hielt, die ersten Universitätsvorlesungen dieser Art, die bisher historisch nachgewiesen werden konnten. Sein vielzitiertes Werk („Behende und hubsche Rechnung auf allen kauffmannschaft", Leipzig 1489) ist 1508, 1519 und 1526 neu aufgelegt worden, was für die Beliebtheit des auch wirklich verdienstlichen Buches spricht. Die Algebra war in Deutschland, selbst wenn wir nicht an den eine Ausnahmestellung einnehmenden Regiomontanus denken, doch schon einigermaßen eingebürgert; Gerhardt und Wappler haben uns mit diesen ersten Anfängen bekannt gemacht. Eine aus dem Regensburger Kloster St. Emmeram, einem altberühmten Pflegeorte gelehrten Wissens, stammende Sammelhandschrift enthält ein Bruchstück von dem, was „Machmet in dem puech algebra und almakobula" niedergelegt hatte, darunter die ganz nach Alkhwarîzmî sich richtende Behandlung (S. 202) des Paradigmas $x^2 + 10x = 39$, und ein Dominikaner Aquinas soll in den siebziger und achtziger Jahren auf die Kunst, Gleichungen aufzulösen, förmlich gereist sein. Noch aber gab es kein Lehrbuch der neuen Disziplin in Deutschland, und ein solches eben hat Widmann geschaffen, indem er dabei gewisse Abhandlungen als Muster wählte, welche sich jetzt noch in Dresden vorfinden. Sein Werk geht aber, wie eine Inhaltsangabe dartun wird, teilweise über diesen Zweck hinaus. Im ersten Kapitel wird Zählen und Rechnen gelehrt; die Einmaleinstafel habe in dieser Form ein Jude anzufertigen gelehrt, vielleicht jener Elias Misrachi, der nach Wertheim ein sehr geschickter Arithmetiker des zu Ende gehenden Mittelalters gewesen sein muß. Das zweite Kapitel enthält neben den Proportionen eine Reihe vermischter Aufgaben, und hier stehen wir plötzlich einer Erscheinung gegenüber, die schon frühzeitig die Augen der mathematischen Historiker auf sich gelenkt hat. Die Zeichen + und — treten uns als eine mehr oder minder bekannte Sache entgegen. Wo Widmann sie her hat, sagt er nicht, und verschiedene zu ihrer Erklärung vorgeschlagene Hypothesen können eben nur als solche betrachtet werden. Der Kettensatz wird ähnlich wie (S. 260) bei Fibonacci gehandhabt. Im allgemeinen huldigt der Autor dem Zeitgeschmacke, möglichst viele Regeln zu bilden, nur allzu sehr und scheint z. B. gar nicht dahinter gekommen zu sein, daß seine „Regula lucri“ und seine „Regula excessus“ nur Umschreibungen ein und derselben Sache, der Auflösung einer unrein-quadratischen Gleichung sind. Geometrischen Inhaltes ist der dritte Abschnitt, der u. a. den Satz des Hero in sich schließt, aber auch manch neue Tatsache erscheinen läßt, so die richtige Auflösung der Aufgabe, aus den Höhensegmenten einer Seite und der Höhe selbst den Radius des in das Dreieck beschriebenen Kreises zu berechnen. Wahrscheinlich lag dem Verfasser auch ein oder das andere Werk des Jordanus Nemorarius (S. 274) vor. Die algebraischen Bestandteile von Widmanns Buch bilden keine Abteilung für sich, sondern müssen aus den drei Abschnitten erst zusammengestellt werden. Noch bewegt er sich, da ja keine Buchstabenrechnung zu Gebote steht, nicht frei auf dem Boden der „Regula Cosse“ (Coß = cosa = Ding = x; S. 280), sondern es ist noch eine Mischung von Wortalgebra (S. 165) und symbolischer Algebra, über welche er nicht hinauszukommen vermag. Die lateinische Partie im Dresdener Kodex, dessen vorhin Erwähnung geschah, steht eigentlich schon auf einem etwas höheren Niveau, insofern sie mit vollem Bewußtsein die 24 Gleichungsformen zusammenstellt, denen sich ein Algebraiker um 1480 gewachsen glauben durfte. Gemeinsam ist ihnen selbstredend die Reduzierbarkeit auf lineare und quadratische Gleichungen.

Der Zeit nach müssen der wackere — wenn auch akademische — Schulmeister Widmann in seiner ehrbaren Nüchternheit und der mehr denn geniale Künstler Lionardo da Vinci (1452—1519) in einem Atemzuge genannt werden; sonst freilich könnte der Gegensatz zwischen zwei

Menschen kaum ein größerer sein. Denn der als Maler ja bekanntlich des höchsten Rufes sich erfreuende Toskaner war vielleicht das größte Universalgenie, welches die Welt jemals hervorgebracht hat. Erst nach und nach sind durch die Bemühungen von Ravaisson-Mollien u. a. seine Handschriften, zumal der berühmte „Codice Atlantico“ der Mailänder Ambrosiana, zum großen Teile entziffert worden, worin Lionardo in winziger, linkshändiger Spiegelschrift und unter Beigabe einer Fülle leicht hingeworfener Handskizzen die Ideen zu Papier gebracht hat, welche ihm in des Wortes kräftigster Bedeutung ununterbrochen zuströmten. Mathematik als solche lag ihm, der noch mehr Erfinder als Entdecker war, ferner, aber mittelbar hat er doch auch sie mit seinen neuen Gedanken befruchtet. So wollen wir in Erinnerung an die große Rolle, welche das Schwingungsproblem in der Analysis des XVIII. Jahrhunderts spielte, nicht unerwähnt lassen, daß der prinzipielle Unterschied zwischen translatorischer und oszillatorischer Bewegung zuerst von Lionardo richtig erkannt worden ist. Auch hat er, wie Duhem (S. 276) zeigte, das Parallelogramm der Bewegungen und Kräfte, von dem Spezialfälle bei Aristoteles (S. 68) und Eudoxus (S. 72) zur Anwendung gelangt waren, in seiner vollen Allgemeinheit erfaßt gehabt. Eine interessante Anwendung ist die auf eine Konsequenz der als Tatsache hingenommenen Erdrotation: In welcher Kurve muß sich ein materieller Punkt bewegen, damit er für ein auf der sich drehenden Erde befindliches Auge in gerader Linie fortzuschreiten scheint? Das setzt tiefes kinematisches Verständnis voraus. Er unterscheidet zwischen gewöhnlichen Vielecken und Sternpolygonen; er hat die Unmöglichkeit einer exakten Kreisquadratur durchschaut. Seine Einzeichnungen regulärer Vielecke in den Kreis lassen zwar Cantors rechnerischer Nachprüfung zufolge an Genauigkeit manches zu wünschen übrig, allein andererseits müssen sie sich wiederholt der Bedingung fügen, mit einer einzigen Zirkelöffnung vollzogen zu werden. Alles, was an Rechnung erinnert, liegt ihm, dem geborenen Zeichenkünstler, überhaupt ferner. Seine ganze Originalität tritt zutage in der Vielzahl maschineller Konstruktionen, in denen Th. Beck alle nur möglichen Mechanismen der

Neuzeit im Keime oder schon in recht fortgeschrittener Gestaltung wiederzufinden vermochte.

Ein Freund seines toskanischen Landsmannes war der Franziskaner Luca Pacioli oder, wohl richtiger, Paciuolo, nach seinem Geburtsorte auch Lucas a Borgo Sancti Sepulchri oder kurzweg Fra Luca genannt. Geboren um 1445, muß er, dem Schweigen aller Berichte nach zu schließen, bald nach 1514 verstorben sein. Für seine nahen Beziehungen zu Lionardo da Vinci spricht der Umstand, daß dieser eine Schrift Paciuolos mit fein ausgeführten Figuren zierte. Letzterer hat nachweislich in vielen größeren Städten Italiens Mathematik gelehrt, doch sind seine zu diesem Behufe geschriebenen Lehrbücher der Nachwelt verloren gegangen. Auch andere Literaturprodukte aus seiner Feder sind teils gar nicht mehr, teils bloß handschriftlich vorhanden. Wohl aber kennen wir von ihm eine Euclidausgabe, die zusammen mit derjenigen des Erhard Ratdolt (S. 297) von 1482 und der des Bartolomeo Zamberti von 1505 eine neue Periode im Studium des großen griechischen Lehrmeisters einleitet. Die Ausgabe Paciuolos erschien 1508 und hatte in erster Linie den Zweck, diejenige des Zamberti, an der er vielerlei auszusetzen hatte, überflüssig zu machen.

Als selbständige Werke des fleißigen Mannes, der bei aller umfassenden mathematischen Bildung doch nicht gerade auf der Höhe seiner Zeit stand und zumal vor sprachlichen Mängeln sich wenig in acht nahm, sind zwei zu nennen (Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita, Venedig 1494 und 1523 und Divina Proportione, ebenda 1509). In das erstgenannte sind alle früheren Kompendien des Autors hineingearbeitet, und so stellt es sich als ein nicht sehr wohlgeordnetes Aggregat von Lehrsätzen und Aufgaben dar, dessen Inhalt ebenso bunt wie geschichtlich merkwürdig ist. Die erste „Distinktion“ bringt regellos Angaben über vollkommene und kongruente Zahlen (S. 266), sowie über die regulären Polyeder (S. 59). Weiter schließt sich an das Ziffernrechnen nach den verschiedensten Methoden und, erfreulicherweise, mit ausdrücklicher Beseitigung des Medierens und Duplierens (S. 200). Die Quadratwurzelausziehung ist diejenige des kettenbruchartigen Algorithmus (S. 89). Spät im Systeme, wenn man es so nennen darf, kamen erst die Brüche an die Reihe, und zwar heißt Fibonaccis „virgula" jetzt „riga". Auch die Teilbruchreihen (S. 259) des Pisaners werden reproduziert, wie uns auch das Wort „infalzare" (S. 251) kein neues ist. Zur Algebra übergehend, setzt Bruder Lukas die bekannte Zahl („numero") $=$ *no*, $x = co$ („cosa"), $x^2 = ce$ („censo"), $x^3 = cece$ („censocenso"), $x^9 = cucu$ („cubocubo") usw.; ℞n ist die $n$te Wurzel, indem für $n = 2$ — gerade wie bei unserer $\sqrt{}$ — auch das Symbol ℞ allein ausreicht. x^5 und x^7 sind „primo" und „secundo relato". Sehr ausführlich wird die, wie wir fanden, von allen Rechenkünstlern hoch geschätzte Regula falsi abgehandelt. Etwas mühsam windet sich der Autor durch die Zeichenregeln der Rechnungsarten hindurch; vorab die Wahrheit $(-) \cdot (-) = (+)$ bereitet ihm, da er sie nicht leugnen kann, einiges Kopfzerbrechen. Die quadratischen Irrationalitäten, das surdische Binom $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ mit eingeschlossen, werden in der Hauptsache richtig gemäß dem zehnten euklidischen Buche (S. 77) dargestellt. Für die unrein-quadratische Gleichung unterscheidet Paciuolo die historischen drei Fälle (S. 202), jeden durch vier Hexameter erledigend. Auch die kubische Gleichung kommt vor, muß sich aber mit dem Zusatze „impossibile" — was sie ja einstweilen auch noch war — verbescheiden lassen. Gesellschafts-, Zins- und Legierungsrechnung beanspruchen einen stattlichen Platz, und zwar hat sich da auch ganz unvermittelt eine Exponentialgleichung eingeschlichen, die Lukas mit seinen Hilfsmitteln natürlich nicht als solche einzukleiden und auch nicht zu lösen versteht. Sie würde nämlich lauten: $x \cdot 2^x = 30$. Auch zwei Wahrscheinlichkeitsaufgaben kommen vor, denen gegenüber die Mittel des Autors freilich versagen. Sehr einläßlich wird in der neunten „Distinktion" das Problem „de scripturis" erörtert, wobei sich Lukas als gut mit der doppelten Buchhaltung vertraut erweist. E. Jäger hat ihm in dieser seiner Eigenschaft eine Spezialschrift gewidmet; eigentlicher Erfinder des neuen Verfahrens, an welches auch schon die schachbrettförmige Buchführung der englischen Kaufleute im Mittelalter erinnert, ist Paciuolo jedoch nicht, falls man ihm nicht auch ein

1481 anonym in Florenz gedrucktes Werkchen („Libro di mercatantie et usanze dei paesi“) zuschreiben will. Von ihm aus sind die Bezeichnungen „Memorial“, „Journal“ (im venetianischen Dialekte „zornale“) und „Strazze“ in den Besitzstand der Handelswelt übergegangen. Eine zweite Abteilung des „Proportionenwerkes“ gibt sich mit geometrischen und geometrisch eingekleideten Textaufgaben ab. Hier wird für Heros Formel ein teilweise abweichender Beweis gegeben. Als ein sehr bemerkenswertes Vorspiel zu dem berühmten Probleme Malfattis kann die Aufgabe gedacht werden: Einem Dreiecke sind zwei gleiche Kreise so einzubeschreiben, daß jeder den anderen und zwei Dreieckseiten berührt. Die Lösung ist die einfachste, die man geben kann; ABC (Fig. 43) ist das Dreieck; O und P sind die Mittelpunkte der beiden Kreise vom Halbmesser x. Die Senkrechten OM und ON, PQ und PT sind gleich, jede $= x$. Wenn AH die zu $BC = a$ gehörige Höhe h darstellt, so kann man setzen:

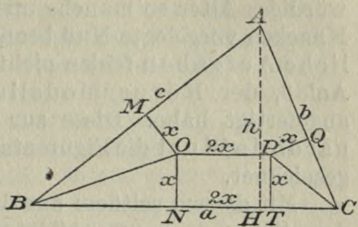


Fig. 43.

$$\triangle ABC = \frac{ah}{2} = \text{Fünfeck}\, AMOPQ + 2\cdot\triangle BMO + 2\cdot\triangle CQP + \square\, OPTN\,,$$

$$\frac{ah}{2} = hx - x^2 + \frac{c}{2}x + \frac{b}{2}x + 2x^2 + \frac{a}{2}x - x^2,$$

$$x = \frac{ah}{a+b+c+2h}.$$

Durchgeführt wird die Rechnung nicht an einem beliebigen, sondern an dem sozusagen klassischen Dreieck ($a = 13$, $b = 14$, $c = 15$). Ja es wird gleich nachher eine Kreiskonstruktion behandelt, die sich noch näher an die Malfattische Aufgabe anschließt. Unter den Textgleichungen erweckt des modernen Schulmannes Teilnahme eine Frage über die Häufigkeit der Begegnungen zweier auf einer Kreisperipherie mit verschiedenen Geschwindigkeiten sich bewegenden Menschen. Heutzutage erscheint sie in der Form der Koinzidenz der beiden Uhrzeiger, was in jener Zeit nicht möglich war, denn das damalige Italien besaß zwar bereits Räderuhren, aber die Taschenuhren wurden erst einige Zeit nach Paciuolos Tode von Peter Henlein in Nürnberg erfunden und entbehrten vorerst des Minutenzeigers. Aber man sieht doch hier wieder, wie bei der Brunnenaufgabe (S. 174, 241) und manchem Rätsel der Lilavâtî (S. 183), ein wie ehrwürdiges Alter so manche unseren Schülern von heute zum Knacken vorgelegte Nuß beanspruchen kann. Auch räumliche Aufgaben fehlen nicht, und sie geben dem Verfasser Anlaß, der Körpermodelle Erwähnung zu tun, die er angefertigt habe. Diese zur Vorlage nehmend, hat Lionardo da Vinci die Figurentafeln zur „Divina Proportione" gezeichnet.

Mit diesem seitdem nur der Ausdrucksweise, nicht aber dem Sinne nach umgebildeten Worte will Bruder Lukas den goldenen Schnitt (S. 60) bezeichnet wissen. Hier handelt es sich vorzüglich um die Anwendung dieser das reguläre Fünfeck bedingenden Konstruktion auf die regelmäßigen Körper, aus denen durch Abschneiden und Ansetzen auch ganz neue Körperformen abgeleitet werden. Paciuolo tritt da vor uns als ein Mann von ausgebildetem Raumsinne, um nicht zu sagen von großer stereometrischer Phantasie. Auch halbregelmäßige Polyeder kommen zur Betrachtung. Im übrigen enthält das Werk auch ein architektonisches Kapitel und eine Art geometrischer Anatomie des menschlichen Körpers. Auf diesen Versuch, die künstlerische Plastik auf Maß und Zahl zu begründen, sowie auf einen analogen, der es mit geometrischer Verzeichnung der Buchstaben zu tun hat, wird uns in Bälde die Behandlung eines Künstlers von hohem geometrischen Interesse zurückführen.

Wir sind bei den Franzosen angelangt und nehmen den minder bedeutenden von beiden voran. Jacques Lefèvre (1455?—1537) ist in der Gelehrtengeschichte unter seinem latinisierten, den Geburtsort Etaples hereinziehenden Namen Faber Stapulensis sehr bekannt. Der Ehrentitel, auf den er mit Fug Anspruch erheben konnte, bestand darin, der bis dahin arg vernachlässigten Mathematik in Frankreich zu sozusagen offizieller Anerkennung verholfen zu haben. Als Professor der berühmten Pariser Universität, der auf diese so stolz wie nur möglich war, fühlte er sich unangenehm berührt durch den Tadel eines fremden Gelehrten, welcher den Betrieb einer so notwendigen Wissenschaft schwer vermißte. Dem abzuhelfen, gab er verschiedene ältere Autoren heraus, unter ihnen den Jordanus Nemorarius (Arithmetik, 1496 und 1514), den Sacrobosco (1507, 1511, 1526, 1531) und zuletzt sogar den Euclid (1516), welch letztere Ausgabe Campanus (S. 279) und Zambertus (S. 309), allerdings unter Weglassung der kritischen Bemerkungen des letzteren, gleichmäßig zu ihrem Rechte kommen zu lassen suchte. Wir dürfen nicht bezweifeln, daß Faber sein Ziel, den französischen Studenten auch einigen Einblick in das mathematische Studium zu verschaffen, erreicht haben wird. Etwas äußerlich scheint man es mit demselben freilich auch noch später genommen zu haben, denn noch aus dem XVI. Jahrhundert wird gemeldet, daß man sich über die Erledigung der den Kandidaten auferlegten Pflicht, gewisse Vorträge zu hören, durch einen Eid, statt — wie in Deutschland — durch eine Prüfung vergewisserte.

Ganz eine andere Natur war der Pariser Nicolas Chuquet, von dessen Leben wir außerordentlich wenig wissen. Ein selbstgemachter Mann, war er Arzt und Apotheker in Lyon, und hier hat er 1484 ein wirklich bedeutendes Werk („Le Triparty en la science des nombres“) zustande gebracht, welches zwar erst dreihundert Jahre nachher mit der Druckerpresse Bekanntschaft machte, handschriftlich dagegen schon früh eine ziemlich große Verbreitung gefunden zu haben scheint. Die das Wesen des Buches kennzeichnende „Dreiteilung“ sieht die folgenden Hauptabteilungen vor: Rechnen mit rationalen Zahlen, Rechnen mit irrationalen Zahlen, Gleichungen. Gleich anfangs überraschen uns neue Worte für die höheren Potenzen von 10, Worte, die bisher größerenteils in der arithmetischen Kunstsprache vermißt wurden. Die Million ist eine ältere italienische Erfindung; der berühmte venetianische Reisende Marco Polo war um 1300 als „il Messer Milione“ bekannt. Aber erst jetzt erscheinen auch „Byllion", „Tryllion" usw. bis zur „Nonyllion", und so könnte, wie bemerkt wird, der Bildungsprozeß der Namen beliebig fortschreiten. Was eine solch bequeme Sprech- und Schreibweise, ohne die wir uns die Arithmetik gar nicht denken können, für jene Zeit besagen wollte, wird uns recht deutlich, wenn wir noch weit später bei dem deutschen Rechenmeister Koebel die Zahl 9 186 357 243 in nachstehendes Wortungeheuer umgesetzt finden: „Neun mal Tausant tausant tausant Hundert tausant tausant Sechsundachzig tausant tausant Drey hundert tausant Sybenundfunfftzig tausant zweyhundert und dreyundfyrtzigk." Von Chuquet stammt, beiläufig gesagt, auch das in unseren Anfangsunterricht übergegangene Wort borgen („emprunter") beim Subtrahieren. Daß die Spezies und die Bruchrechnung ausführliche Behandlung finden würden, war zu erwarten; auch in diesem letzteren Kapitel hat das Buch terminologisch bahnbrechend gewirkt, denn aus ihm stammen Zähler („numérateur"), Nenner („dénominateur"), kürzen („abbrévier"). Chuquet ist ferner der erste, der, was in vergangener Zeit dem Deutschen Stifel zum Verdienste angerechnet ward, geometrische und arithmetische Progression einander zuordnet, wie folgt:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & n-1 & n \\ a & a^2 & a^3 & a^4 \ldots & a^{n-1} & a^n\,. \end{array}$$

Jede Zahl der ersten Reihe ist der Logarithmus der unter ihr stehenden für die Grundzahl a; weiter ausgeführt wird der damit angedeutete Gedanke jedoch nicht. Wieder ein neues Prinzip wird aufgestellt mit der „rigle des nombres moyens". Diese Mittelwerte beruhen auf der auf Pappus zurückgehenden Ungleichung

$$\frac{a_1}{a_2} \gtrless \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \gtrless \frac{b_1}{b_2}\,,$$

deren man sich auch für die Näherungsauflösung von Gleichungen bedienen kann. Chuquets Wurzelzeichen ist das gleiche, wie bei Widmann (S. 306), und er weiß damit sehr gewandt zu operieren, ohne indessen auch für irrationale Kubikzahlen eine allgemeine Vorschrift angeben zu können. Um auch höhere Gleichungen leichter anschreiben zu können, setzt er dem Koeffizienten von x^p die Zahl p als Exponenten bei, so daß auch, was eine durchgreifende Neuerung bedeutet, x^0 und x^{-m} nicht ausgeschlossen sind. Chuquet hat als der erste wahrgenommen, daß eine konsequent durchgeführte Algebra $x^0 = 1$ zu setzen genötigt ist. Ob ihn die Erinnerung an Oresme leitete, der ja (S. 283) diesen Erkenntnissen sehr nahe kam, wird nicht mehr zu entscheiden sein; nach Cantors Ansicht ist eine italienische Quelle hier, wie beim Dresdener Kodex (S. 306), für wahrscheinlich zu erachten. Die Behandlung der Gleichungen, auch das Wegschaffen von Wurzeln mit eingeschlossen, vollzieht sich schon ganz im Geiste der Neuzeit. Die ihm reduzibel erscheinenden Gleichungen höherer Grade stellt Chuquet, auch diesen jetzt so üblich gewordenen Ausdruck gebrauchend, unter vier kanonischen Formen zusammen, doch ist ihm wohl bewußt, daß sein Schema kein erschöpfendes sei. Daß es mögliche und unmögliche Doppelwurzeln geben müsse, ist ihm ebenfalls bekannt; negative Werte scheut er nicht. Endlich machen ihm auch selbst höhere unbestimmte Gleichungen keine Schwierigkeit, wie er denn für die Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = 20$ die Werte $x = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $z = 2\frac{1}{2}$ angibt. Wie Diophant (S. 166) läßt er somit rationale Zahlen als Lösungen zu.

Chuquet steht in diesem Werke, welches die Geschichte der Mathematik erst sozusagen wieder ausgraben mußte, wesentlich auf eigenen Füßen, und er selbst nennt als einen Schriftsteller, dem er einiges zu danken hatte, lediglich einen Mönch Bartholomaeus de Rommans, der aber eben nur hier und nirgendwo sonst Erwähnung findet. Das hohe Verdienst der Originalität, welches dem „Triparty" anhaftet, kann durch gelegentlich gemachte Anleihen nicht geschmälert werden. Von sämtlichen Algebraikern des XV. Jahrhunderts ist Chuquet der modernem Denken und Empfinden nächststehende, und seine Einwirkung auf die Folgezeit kann, wenn sie sich auch nicht auf offen vor Augen liegenden Bahnen vollzog, da ja das Buch nicht publiziert wurde, gleichwohl sich geltend gemacht haben.

Nachdem wir so der Abmachung gemäß (S. 304) die wissenschaftliche Literatur unserer Reform- und Übergangsperiode besprochen haben, greifen wir auf die mehr populären Anleitungen zur Einübung gewisser Kenntnisse und Fertigkeiten zurück, von denen ebenfalls oben die Sprache gewesen ist. An erster Stelle drängt sich uns da jener „Martologio“ auf, dessen erste Spur bei Lullus (S. 278) aufgezeigt werden konnte, die sich aber im XV. Jahrhundert, wie Toaldo und Formaleoni erwiesen, zu einer regelrechten trigonometrischen Distanzberechnung für Schiffer entwickelt hat. Eine Tabelle enthält für den Sinus totus 100 Sinus, Cosinus, Tangente und Sekante — sollte letztere auf Albategnius (S. 213) zurückweisen? — für folgende acht Winkelwerte:

$11^0 15'$, $22^0 30'$, $33^0 45'$, 45^0, $56^0 15'$, $67^0 30'$, $78^0 45'$, 90^0.

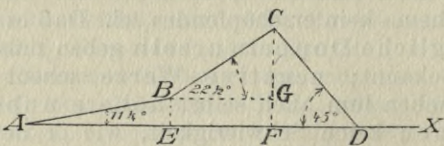


Fig. 44.

Man erkennt in dieser Wahl der Normalwinkel die Teilung der nautischen Strichrose in acht Teile. Von allen Wegen des Schiffes wurde vorausgesetzt, daß ihre Richtung mit der von Ost nach West gehenden Achse einen von diesen Winkeln bilde, so daß also ersichtlich nur eine ziemlich rohe Abschätzung zu erreichen war. Um nun die Länge des Schiffsweges $ABCD$ (Fig. 44) zu finden, der sich in diesem Falle aus drei verschiedenen Stücken zusammensetzte, verfuhr man polygonometrisch und projizierte die drei Strecken AB, BC, CD auf die Achse AX; die Kurswinkel BAD, CBG und CDA (wofür korrekter $\sphericalangle CDX$ zu setzen gewesen wäre) sollten bezüglich $11\frac{1}{4}^0$, $22\frac{1}{2}^0$ und 45^0 sein. AE, EF, FD sind die drei Horizontalprojektionen, und BG steht senkrecht auf CF, BE und CF stehen senkrecht auf AD. Der Pilot hatte die Wege AB, BC und CD gemessen; wie er das machte, da es doch noch kein Log gab, entzieht sich unserer Kenntnis. Er wollte aber ermitteln, wie weit er bei dieser Fahrt in gebrochener Linie tatsächlich längs eines Parallelkreises vorwärts gekommen sei, und setzte

$$\begin{aligned} AD &= AE + BG + FD \\ &= AB\cos 11\tfrac{1}{4}^0 + BC\cos 22\tfrac{1}{2}^0 + CD\cos 45^0 \\ &= 100 \cdot 0{,}98 + 100 \cdot 0{,}92 + 100 \cdot 0{,}58 = 248. \end{aligned}$$

So viel Miglien betrug die zurückgelegte Distanz. Die Seeleute des Mittelländischen Meeres legten also für die goniometrischen Funktionen eine Zentesimalteilung zugrunde. Um dieselbe Zeit hatte ein resoluter Kopf, für den uns freilich jede Bezeichnung fehlt, sogar den Gedanken einer Teilung des Grades in hundert Minuten, der Minute in hundert Sekunden praktisch ausgeführt, wie ein kosmographisches Münchener Manuskript aus dem fünften Jahrzehnt des XV. Jahrhunderts bekundet. Ebendort wird eine sehr bekannte Formel der Koordinatengeometrie antizipiert. Auf einer Plattkarte haben zwei Orte, deren Entfernung d sein soll, die Breiten β_1 und β_2, die Längen λ_1 und λ_2; alsdann wird

$$d = \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2}.$$

Die Ausdrucksweise des anonymen Autors ist, wie sich von selbst versteht, die schleppende, welche um 1450 noch herrschend war.

Den Rechenbüchern unseres Zeitalters sind wir ebenso, wie den von einer höheren Wissenschaftlichkeit zeugenden Werken Beachtung zu schenken verpflichtet, weil auch in ihnen der Zeitgeist einen oft recht bestimmten und charakteristischen Ausdruck findet. Es häuft sich den chronikalischen Aufzeichnungen nach die Menge der gewerbsmäßig ihre Lehraufgabe wahrnehmenden Rechenmeister (Modisten, S. 270); weitsichtige Gemeinwesen, wie das kleine oberpfälzische Naabburg (1480) und Überlingen am Bodensee (1500), nehmen den Rechenunterricht unter die obligatorischen Lehrgegenstände der heranwachsenden Jugend auf; wo sich solche Gelegenheit noch nicht ergab, bestellte man wenigstens einen Wanderlehrer, so wie es der Magistrat der Reichsstadt Nördlingen bereits 1440 in Aussicht nahm. Das handelskräftige Nürnberg hat im Verlaufe des XV. Jahrhunderts nach dem schon genannten Kapfer (S. 271), wie seine Bürgerbücher ausweisen, noch zehn oder elf solche Volkslehrer in seinen Mauern gehabt, die zum Teile noch in das XVI. hinüberreichen. Dort kannte sie der Sprachgebrauch auch als Guldenschreiber, wohl weil Münzumrechnungen zu ihren täglichen Geschäften gehörten. Seit Gutenbergs Auftreten beginnt die Zahl der eine weitere Verbreitung anstrebenden Lehrbüchlein der Rechenkunst sich in allen Ländern stetig zu mehren. Doch kommen von diesen Ländern für gegenwärtiges Kapitel erst zwei in Betracht: Italien und Deutschland.

Die älteste Inkunabel dieser Art ist die 1478 gedruckte Arithmetik von Treviso. Für junge Kaufleute von ihrem in Verborgenheit gebliebenen Verfasser bestimmt, übt sie ihre Leser in den vier Grundrechnungsarten tüchtig ein, von denen besonders das Multiplizieren — auch nach der indisch-arabischen Methode (S. 275) — umständlicher Behandlung teilhaftig wird. Die vierte Operation wird als Übersichdividieren (S. 180) gelehrt, und indem nun alle Reihen, die ihre Schuldigkeit getan haben, durchstrichen werden, erscheint auf dem Papiere ein Bild, welches mit der Frontansicht eines Schiffes eine gewisse Ähnlichkeit haben mag. Man nannte nachher nicht selten dies die „Division nach Art der Galere“. Mischungs- und Kalenderrechnung fehlen nicht, und auch der von einem Hunde verfolgte Hase (S. 241) hat sich ein Plätzchen errungen. Andere italienische Rechenbücher aus ältester Zeit sind diejenigen von Pello, Tedaldo und Borgo (1482, 1484, 1488, 1489). Vor allem aber ist unter diesen federkundigen Rechenmeistern Tagliente zu nennen, von dessen inhaltreichem Sedezbüchlein noch recht wenig in der Literatur die Rede war, so daß ein Verweilen bei demselben gebilligt werden dürfte.

Der Titel „Tesoro universale“ ist dem hier analysierten Exemplare gleichfalls vorgedruckt. Jede Zeitangabe fehlt; doch wird der Buchdrucker Antonio de Uberti in Venedig genannt, und der Inkunabeltypus ist unverkennbar. Endlich nennt sich auch der Verfasser selbst nicht, aber in den Widmungsworten „Magnifici Signori.

Nobilissimi Cittadini. Clarissimi Artesani. et voi Prestantissimi lettori conoscendo io di potere fare una opera di grandissima utilitade . . .“ finden sich nach „io“ mit Tinte beigeschrieben die zwei Worte „Giorolimo Taiente“. Der Besitzer hat anscheinend den Namen nicht recht gekannt, doch ist die Legitimation gewiß genügend. Wörtlich lautet die Aufschrift folgendermaßen: „Dabaco che insegna a fare ogni ragione mercadantile: et a pregare le terre con larte di la geometria: et altre nobilissime vagione (sic!) straordinarie con la Tariffa come respondono li pesi et monede de molte terre del mondo con la inclita citta di Vinegia. El qual Libro se chiama Thesauro universale“. Sehr auffällig ist gleich eingangs die Reihenfolge der Rechnungsarten, die eine Fünfzahl bilden und in der sonst wohl nirgends anzutreffenden Reihe geordnet sind: Numeration, Multiplikation, Division, Addition („riccogliere“), Subtraktion. Einige wenige Worte dienen zur Erläuterung für eine Tafel, welche die Fingerstellungen (S. 51, 174) für alle Zahlen zwischen 1 und 10, 20 und 100, 200 und 1000, 2000 und 9000 zur Anschauung bringt. Übrigens bleibt das Numerieren bei den Millionen stehen. Multipliziert wird „per cholonella“, „per scachier“ (Schachbrett), im Triangel und Quadrat. Starke Raumansprüche macht die Regeldetri mit zahlreichen Anwendungen. An die Stelle des Hasen ist diesmal ein „capriolo“ getreten; die Kurieraufgabe fordert die Bestimmung des Ortes, an dem die nicht gleich schnell reitenden römischen und venetianischen Boten einander begegnen. Auch Scherzrätsel für Unterhaltungsspiele werden eingestreut („quanti danari ha uno in borsa“). Der kurze geometrische Teil, den der Titel etwas zu stark betont, beschäftigt sich nur mit der Inhaltsberechnung von Quadrat, Rechteck, rechtwinkligem Dreieck, gleichschenkligem Dreieck, Kreis und Kugel. Wie groß ist z. B. die Oberfläche einer Wachskugel, die aus drei kleineren Kugeln geknetet wurde? Den Rest des Buches machen Geld- und Warenkalkulationen aus, womit das auch von Paciuolo viel benützte Wort „Tariffa“ zu seinem Rechte gelangt. Denn „Tarif“ ist in jener Zeit gleichbedeutend mit einem zur Vergleichung von Maßen, Gewichten und Münzen eingerichteten Rechenknechte gewesen.

Deutscher Rechenbücher sind uns aus dem XV. Jahrhundert nur drei überkommen, die beiden älteren in Bamberg von dem gleichen Drucker Heinrich Petzensteiner verlegt, während das dritte in Leipzig bei Lotther erschien. Das früheste Dokument dieser Art ist nur fragmentarisch erhalten; sein Verfasser war Ulrich Wagner, Rechenmeister in Nürnberg (1482). Ob derselbe oder vielleicht Petzensteiner selber der Verfasser des nächstjüngeren ist, welches man als Bamberger Rechenbuch (1483) kennt, steht dahin; dieses hat am Schlusse ein bemerkenswertes Register, welches das Rechnen mit Spielmarken zwar streift, sich aber weder hier noch im Hauptinhalte darauf einläßt. Als Besonderheiten seien namhaft gemacht, daß der Verfasser das von Chuquet (S. 313) gewandt gehandhabte Aufsuchen des Generalnenners („réduire") noch nicht kennt, sondern zum ersten Bruche den zweiten, zur Summe den dritten Bruch usw. ziemlich langweilig addiert, und daß er eine „Wanderaufgabe" mittels der Gleichung $1 + 2 + 3 + \ldots + x = \frac{1}{2}(x^2 + x) = 6x$ erledigt, welche den brauchbaren Wert $x = 11$ liefert. Mit Rechenpfennigen (jetons, projectilia, counters) hat es der Leipziger „Algorithmus linealis" von 1490 zu tun, in dem uns zuerst der später zur Regel gewordene Terminus „Tollet" für Rechentafel („tavoletta") entgegentritt. Kap. XIX wird uns diese Rechnungsweise von neuem zu erörtern Anlaß geben.

Zu den drei ältesten deutschen Rechenbüchern können wir noch ein niederländisches hinzunehmen, welches in einer mit deutschem Geistesleben in regster Beziehung stehenden Stadt erschien. Zu Deventer, wo Nikolaus von Cues (S. 304) seine gelehrte Bildung empfangen hatte, gab ein Anonymus 1499 ein „Enchiridion Algorismi" heraus. Dieser „Handweiser" ist zur bibliographischen Seltenheit geworden, und man weiß nicht sicher, ob er noch in mehr als einem einzigen Exemplare existiert. Der wohlbekannte, für jeden Bücherliebhaber wichtige Katalog von M. Chasles' Privatbibliothek verzeichnet auch ein mit einiger Wahrscheinlichkeit auf Holland als Ursprungsland hinweisendes hierher gehöriges Werkchen aus dem gleichen Jahre 1499 („Arithmetica summa tripartita Magistri Georgii de Hungaria"). Sollte die ungewöhnliche Bezeichnung „dreigeteilt" absichtlich an N. Chuquet (S. 313) erinnern wollen?

Volkstümliche oder doch zum mindesten nicht in Gelehrtenkreisen betriebene Raumlehre hat in der Zeit zwischen 1450 und 1500 nicht eben selten literarische Betätigung erlebt. Und zwar sind wir drei Formen solcher Schriftstellerei zu unterscheiden in der Lage: Anwendung auf Malerei, Anwendung auf Architektur, praktische Visierkunst. Einige Worte über dieses vielfache Anregungen darbietende Schrifttum dürfen hier nicht fehlen.

Daß ein Maler die Grundgesetze der Perspektive inne haben und praktisch anwenden müsse, war von dem Augenblicke an einleuchtend, da sich diese Kunst von der steifen byzantinischen Sitte des Goldhintergrundes losgemacht hatte. Verständnis für Linearperspektive zeichnet bereits die Gemälde Jan van Eycks im XIV. Jahrhundert aus, wiewohl nach Doehlemann von wirklicher Kenntnis des Fluchtpunktes noch wenig wahrzunehmen ist. Daß Raffael und Michel Angelo, sei es auch nur halb instinktiv, das Richtige zu treffen wußten, ist bekannt genug. Die Schriften des Leone Battista Alberti, in erster Linie die 1435 vollendeten Drei Bücher über Malerei, und mehrere für Bildhauer geschriebene Anleitungen, wie des Pomponius Gauricus Werk „De sculptura", fassen das darzustellende Bild richtig als Schnitt einer Ebene mit der Sehpyramide, welche das Auge zur Spitze, den Gegenstand zur Basis hat. Noch weiter, besonders auch in der Anerkennung der Bedeutung der Luftperspektive, ging Lionardo da Vincis „Trattato di pittura". Auch Paciuolos (S. 309) „Göttliche Proportion" wird als ein Lehrbuch für angehende Künstler, für der Malerei, Skulptur und Baukunst Beflissene angesprochen werden dürfen.

Wie früher (S. 278) angedeutet, hat die Geometrie der Bauhütte um diese Zeit zwei didaktische Versuche hervorgebracht, die ungefähr als Zusammenfassung der Kenntnisse gelten können, die in einigen von Heideloff gesammelten Reimsprüchen jener Kreise vom Architekten verlangt werden. Matthias Roriczers „Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit" dürfte 1486, Hans Schmuttermayrs „Fialenbüchlein" ungefähr um dieselbe Zeit gedruckt worden sein. Beide widmen sich ausschließlich der Verzeichnung von Rissen für die bekannten gotischen Spitzsäulen, und dabei war der springende Punkt der, je immer ein kleineres Quadrat in ein größeres in symmetrischer „Übereckstellung" einzubeschreiben. Die einfachsten geometrischen Handgriffe und Regeln werden dabei vorausgesetzt. Diese lehrt, allerdings noch in Verbindung mit etwas höheren Aufgaben, eine als „Geometria Deutsch" bekannte, zwischen 1480 und 1490 entstandene Inkunabel ohne Autoren-, Ort- und Zeitangabe. Zehn Stücke bilden den Inhalt, der ein helles Licht auf das geometrische Deutsch jener alten Zeit fallen läßt. Bemerkenswert ist darunter am meisten eine Näherungskonstruktion des regelmäßigen Fünfeckes mit der gegebenen Seite als einziger Zirkelöffnung. AB (Fig. 45) sei diese Seite; man beschreibt um A und B mit AB als Radius je einen Kreis und verbindet die Kreisschnittpunkte C und D durch eine Gerade. Um D wird ein dritter Kreis beschrieben, der durch A und B geht, die beiden Peripherien in F und G, die gemeinsame Sehne in E schneidet. Dann zieht man FE und GE, welche Gerade verlängert den Kreisen um B und A in K und H begegnen. Zwei um diese Punkte als Mittelpunkte beschriebene Kreise müssen sich in dem der verlängerten DC angehörigen Punkte J schneiden, und wenn man jetzt AH, BK, HJ, KJ zieht, so ist $ABKJH$ das gesuchte Fünfeck. Daß die fünf Winkel nicht sämtlich gleich sein können, ist an sich klar, aber Clavius hat sie berechnet und so nachgewiesen, daß für einen kleineren Maßstab die Unterschiede nicht augenfällig werden können.

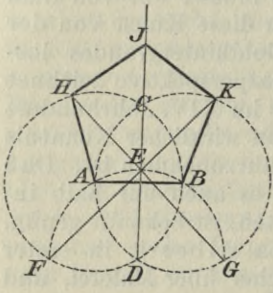


Fig. 45.

Unter Visieren verstand das spätere Mittelalter die Inhaltsbestimmung eines Hohlraumes. Dergleichen vorzunehmen, war Sache eines öffentlichen Beamten; die Stadt Nürnberg stellte um 1500 den Weinhändlern und Wirten drei geschworne Visierer zur Verfügung. Diese bedienten sich gedruckter Anweisungen. Hans Sporer, der sich nach seinem Hauptgewerbe auch Hans Briefmaler nannte und abwechselnd in Nürnberg, Bamberg und Erfurt seinen Wohnsitz hatte, gab 1487 zu solchem Behufe ein „Fisierbüchlein auf allerhand Eich“ heraus und lehrte in ihm den geometrischen Gebrauch der Visierrute. Diese Visierkünstler der Vergangenheit haben sich im Laufe der Zeiten in die Eichmeister der Gegenwart verwandelt.

Kapitel XVIII.

Allgemeine Charakteristik des XVI. und beginnenden XVII. Jahrhunderts.

Ein Jahrhundert großartiger religiöser, politischer und allgemein-kultureller Umwälzungen, wie solche insonderheit durch die großen geographischen Entdeckungen bedingt waren, liegt nunmehr vor uns. Daß auch auf unserem Gebiete das alte Gleis häufig verlassen, diese und jene neue Richtung eingeschlagen wurde, ist auch ohne besondere Hinweise eine selbstverständliche Sache, und auch für den Fernerstehenden reicht es hin, an die Ersetzung der geozentrischen Weltordnung des Ptolemaeus durch die heliozentrische des Coppernicus zu erinnern, um die Tendenz des neuen Jahrhunderts klargestellt zu sehen. Gleichwohl sind es im Bereiche der reinen Mathematik nicht allzu viele Neuerungen von grundstürzender Bedeutung, die wir auf ihre Vorgeschichte und Entstehung zu prüfen haben. Und auch das nächstfolgende Säkulum, dessen erste Dezennien hier mit dem XVI. zusammengenommen werden, gibt anfänglich nur schüchtern jenen völlig neuen Gedankenreihen Raum, welche dazu berufen waren, die mathematische Wissenschaft einer völligen Umgestaltung entgegenzuführen.

Darunter verstehen wir die konsequente Infinitesimalbetrachtung, die uns in mehr oder minder greifbaren Spuren, weitaus am entschiedensten und zielsichersten bei Archimedes (S. 86), auch im Altertum schon entgegengetreten ist, während sie den Orientalen nahezu ganz fremd war und auch im Westen erst spät, bei Bradwardin (S. 287) und Cusanus (S. 304) sich wieder hervorwagte. Das XVI. Jahrhundert wird noch wenig davon berührt; ihm blieben noch zu viele andere, teilweise vorbereitende Aufgaben zu lösen übrig. Aber kaum ist das Jahr 1600 überschritten, so gewinnt, was bislang nur in sehr unvollständiger, ja naiver Form erschien, sofort einen ganz anderen, einen wahrhaft wissenschaftlichen Charakter, und als erst Descartes noch die Arbeitsmethode von Grund aus verbessert hatte, ist jene Entwicklung im raschen Gange, die in Newton und Leibniz die erste Etappe ihrer Vollendung erreichen sollte. Demgemäß bewegen sich zwei ganz verschiedene Ideengänge einander parallel und noch ohne innere Verbindung dahin, und gar nicht selten nimmt an jedem von ihnen ein und dieselbe Persönlichkeit teil. Auf der einen Seite geht es wesentlich in den bisherigen Bahnen weiter; auf der anderen werden ganz neue Pfade beschritten, die folglich auch zu Ergebnissen von ganz grundverschiedenem Wesen hinführen müssen. Wer sich in diese überaus anziehende Periode geistiger Verjüngung zu versenken beabsichtigt, kann gar nicht umhin, auch die späteren Stadien mit zu berücksichtigen; er muß Infinitesimalanalysis und Infinitesimalgeometrie samt ihren Anwendungen im Zusammenhange studieren und darstellen. Das geht über den diesem Bande vorgesteckten Rahmen hinaus, und uns liegt es ob, die Geschichte der Mathematik für den Zeitraum 1500 bis 1637 insoweit zu kennzeichnen, als es ohne Verzicht auf die Kontinuität mit dem vor 1500 in der Wissenschaft herrschenden Geiste geschehen kann.

Dieser Zeitabschnitt trägt vor allem die Signatur einer sehr allseitigen und eindringenden Vervollkommnung des mathematischen Unterrichtes. Derjenige für das Volk blieb freilich noch längere Zeit im argen liegen, aber das Gefühl, daß ein gewisses Mindestmaß von arithmetischen Kenntnissen sogar auf dem platten Lande und erst recht in den Städten ein unabweisliches Bedürfnis geworden sei, hatte sich in verschiedenen Kulturländern

Geistlichen und Staatsmännern gleichmäßig aufgedrängt. Deutschland gehörte ganz besonders zu diesen Ländern. Im Jahre 1524 erregte Martin Luthers Sendschreiben („Schrift an die Ratsherren aller Städte Deutschlands, daß sie christliche Schulen aufrichten und halten sollen") wohlverdientes Aufsehen, und in ihm kommt die bezeichnende Stelle vor: „Wenn ich Kinder hätte und vermöchts, sie müßten mir nicht allein die Sprachen und Historien hören, sondern auch singen und die Musica mit der ganzen Mathematica lernen." Die Zusammenstellung von Musik und Mathematik (S. 147) kann auch im XVI. Jahrhundert noch nicht wundernehmen. Langsam allerdings ging der große pädagogische Fortschritt vor sich, aber wenigstens die größeren Städte besaßen um 1550 durchweg Schulen, in denen auch die Anfangsgründe der Mathematik zu erlernen waren, und für den ganzen Staat machte um dieselbe Zeit „die baierische Schulordnungk" zum wenigsten die Rechenkunst zum pflichtmäßigen Lehrgegenstande. Die furchtbare Katastrophe des Dreißigjährigen Krieges hat zwar auch auf diesem Gebiete schwere Rückfälle mit sich gebracht, aber gänzlich zurückgedämmt vermochte auch durch diese äußeren Störungen der Fortschritt nicht mehr zu werden.

Auch das Mittelschulwesen ist in aufsteigender Bewegung begriffen, und die erste ganz modern angelegte Gelehrtenschule der Neuzeit hat gerade der Mathematik zu einer ihr bis dahin unbekannten Anerkennung und Wertschätzung verholfen. Unter der Ägide Philipp Melanchthons, der erfolgreicher als sein Vorläufer Hrabanus Maurus (S. 242) die Bahn eines „Praeceptor Germaniae" betrat, entstand in Nürnberg, wo Pirckheymers (S. 298) Fürsorge den Boden geebnet hatte, das berühmte, noch heute sich seines Begründers freuende Gymnasium bei St. Aegidien, und an ihm ward 1526 der erste Mittelschulprofessor unseres Faches amtlich angestellt. Nachdem der zuerst in Aussicht genommene Böhme Gelenius abgelehnt hatte, fiel die Wahl auf den durch literarische und technische Arbeiten (Globen) bereits zur Geltung gelangten Dorfgeistlichen Johannes Schoener (1477—1547), der denn auch einundzwanzig Jahre hindurch seinen Posten rühmlich ausfüllte und, als nach einiger Zeit der zuerst große Zulauf beträchtlich nachließ, durch seinen anregenden Unterricht die mathematischen Lehrstunden in Ansehen erhielt. Das Nürnberger Beispiel fand allenthalben Nachfolge, und bald gab es kein Gymnasium — Akademie, Lyzeum — mehr, in welchem nicht etwas Arithmetik, Euclid und Sphaera einen festen Bestandteil des Lehrprogrammes gebildet hätten. Die Doktrinen des selbst der Mathematik mächtigen und ihr wohlgesinnten Melanchthon berührten sich in diesem Punkte ganz und gar mit dem gegen 1600 in den katholischen Staaten zu fast unumschränkter Herrschaft gelangten jesuitischen Studienplane der Laynez und Aquaviva; evangelischen und altgläubigen Schulmännern galt diese Wissenschaft als allerbestes formales Bildungselement, was sie ja freilich auch ist, als welches sie aber im XX. Jahrhundert doch wahrlich nicht mehr ausschließlich gepriesen werden sollte.

Gleicherweise bedeutet die Jahrhundertwende auch einen Wendepunkt in der Ausgestaltung der Hochschule; immer entschiedener heischen die mathematischen Wissenschaften eine regelrechte, nicht mehr bloß nebensächliche Vertretung im Lehrkörper der Universität. Italien sieht diese Bewegung zwar noch langsamer und minder plötzlich sich abspielen, aber von 1550 ab ist doch keine Hochschule von Ruf mehr ohne einen ständigen Lehrer der Mathematik denkbar; an einzelnen Anstalten ist sogar die Stabilität noch früher eingetreten. Unbedingt den Vorrang hat Bologna, wo schon im XIV. Jahrhundert der unglückliche Cecco d' Ascoli (1250—1327), ein Schicksalsgenosse Brunos (S. 304), ein Vorlesungsheft anlegen konnte, dessen Titel, „Praelectiones ordinariae Astrologiae habitae Bononiae“, recht eigentlich einen Lehrauftrag voraussetzt; das Wort „Astrologie“ darf uns nicht stören, denn diese Afterwissenschaft hat nun einmal früher Bürgerrecht im mathematischen Staate besessen und vielleicht nicht unerheblich zur Aufnahme der sphärischen Trigonometrie beigetragen. Spricht doch ein Titel des Justinianschen Pandektenwerkes in eigentümlich anmutender Zusammenwürfelung „De maleficis et mathematicis“, als welche die oft sehr bedenklichen Sterndeuter von Metier zu betrachten sind, und ist doch auch des Sextus Empiricus skeptisches Werk „Adversus mathematicos" großenteils nur als eine Bekämpfung der Astrologia judiciaria hinzunehmen. Gegen 1500 konstatieren wir in Bologna gleich zwei offizielle Lehrer der Astronomie in den Personen eines Scipione da Mantova und Domenico Maria da Novara, des Lehrers unseres Coppernicus, und dabei sogar eines eigenen Dozenten für reine Mathematik. Scipione del Ferro, der im nächsten Kapitel uns beschäftigen wird, wirkte in dieser Eigenschaft von 1496 bis 1526. Die „Rotoli" (Vorlesungskataloge) Bolognas, die uns Gherardi zugänglich gemacht hat, lehren uns in dieser Beziehung viel Bemerkenswertes; sie lassen uns auch Paciuolo als den Mann der Gastrollen erkennen (S. 295), der u. a. auch 1501 bis 1502 mit dem Zusatze „ad mathematicam" im Verzeichnis erscheint. Auch andere romanische Länder nehmen an der Erhebung der Mathematik zu höherer didaktischer und damit auch sozialer Bedeutung teil, doch erst mit einer gewissen „Flutverspätung". So wurde für den trefflichen Mathematiker Pedro Nunes oder Nonius (1492—1577; die Schreibart Nuñez sollte, weil spanisch, nicht angewendet werden) 1544 ein eigens für ihn geschaffener Lehrstuhl an dem altberühmten Generalstudium zu Coimbra geschaffen, und daß in den ersten Jahrzehnten des Jahrhunderts Paris noch eine Nominalprofessur vermißte, hat uns ja schon die einen Ersatz erstrebende Tätigkeit des Faber Stapulensis (S. 312) gezeigt. Erst 1532 trat diese Professur ins Leben, und Oronce Finée, gewöhnlich Orontius Finaeus (1494—1555) genannt, hat es an redlicher Mühe, die neue Kathedra würdig zu verwalten, nicht fehlen lassen.

Im Bereiche der deutschen Sprache knüpfen sich die ersten Anregungen an das Auftreten der zweiten Wiener mathematischen Schule, welche das Erbe der ersten (S. 777) antrat und, ob sie auch nicht Chorführer von der Gewichtigkeit eines Peurbach und Regiomontanus in ihren Reihen hatte, durch eine Vielzahl tüchtiger Männer zweiten Ranges einigen Ersatz hierfür bot. Unter dem Einflusse dieser Gelehrten — eines Konrad Celtis, Cuspinianus, Andreas Stiborius (Stoeberl aus Öttingen), Georg Collimitius (Tannstetter aus

Rain bei Donauwörth) und des Hofmathematikers Johann Stabius (Stab aus Steyr) — begründete der großen Entwürfen stets geneigte Kaiser Maximilian I. im Jahre 1501 in seiner Hauptstadt das „Collegium poëtarum et mathematicorum“. Unsere Zeit findet diese Kombination wunderlich, aber damals sollte dadurch lediglich auf die innige Verbindung humanistischer und mathematischer Studien hingewiesen werden, was vorläufig noch einen guten Sinn hatte. So, wie die Stiftungsurkunde es vorgesehen hatte, war allerdings das nur in lockerem Zusammenhange mit der Universität gedachte Institut nicht lebensfähig, aber indirekt wirkte es doch sehr segensreich, indem gleich nachher die Hochschule zwei ordentliche Professuren der Mathematik und Astronomie erhielt, die denn auch mit zäher Lebenskraft schlimme Zeitläufte überstanden. Stiborius und Rosinus (Stephan Rösel aus Augsburg) übernahmen als die ersten die neuen Lehrstellen. Letzterer behielt die seinige lange Jahre; auf Stiborius folgte schon 1503 sein Freund Collimitius, den 1528 der Heilbronner Johann Voegelin, ein geachteter Euclid- und Theodosius-Interpret, ablöste. Sein geometrisches Lehrbuch stellt eben den Lehrzweck voran; es solle „ad omnium mathematices candidatorum utilitatem“ Dienste leisten, wünschte der Verfasser. Der Umstand, daß Heinrich Schreiber und Christoph Rudolff Angehörige der Wiener Schule waren, zwingt uns die Vermutung auf, daß dort nicht nur die altherkömmlichen, sondern auch neue und wichtigere Dinge, vor allem Algebra, zu lernen waren.

Nur skizzenhaft mögen einige andere Hochschulen unter diesem geschichtlichen Gesichtspunkte betrachtet werden. In Tübingen hatte von 1494 an der Minorit Paul Scriptoris sehr beliebte Kurse über Euclides und Ptolemaeus von freien Stücken zu halten begonnen, wodurch er für die 1510 erfolgte Begründung eines Ordinariates die Stätte bereitet hatte. Johann Stoeffler (1452—1531), von dessen Schriften eine recht gute praktische Geometrie in zahlreichen Auflagen besonders viele Leser erwirkte, war der erste Professor. Wenigstens zeitweise wirkte um dieselbe Zeit in Freiburg i. B. und Basel der zumal um mathematische Geographie verdiente Glareanus

(Heinrich Loriti aus dem Kanton Glarus). Überaus schleppend nur fügten sich der Neuerung die altkonservativen Universitäten Heidelberg, Erfurt und teilweise auch Leipzig, wo aber doch immerhin die Namen Kalbs und Widmanns (S. 306) eine Gewähr dafür bieten, daß Mathematik nicht bloß in Zufallsvorlesungen älteren Zuschnittes (S. 272) Vertretung fand. Ingolstadt verfügte schon 1498 über einen mit fremdartigen Lehrpflichten nicht belasteten „Astronomus", aber erst 1524 trat Peter Apian, wie er selbst wohl als erster seiner Art sich nennt, als „Ordinarius der Astronomie" und damit auch der gesamten Mathematik ein, wobei er den älteren Universitätsmännern gewiß märchenhaft hoch erscheinenden Soldbezug von hundert Gulden erhielt. Wenig Zuverlässiges liegt über Prag vor, wo einzig der Name Schindels (S. 288) eine Reaktion gegen die herkömmliche Sitte anzudeuten scheint. Ein kräftiges Leben pulsierte dagegen in dem halb slavischen, halb deutschen Krakau, dessen Universitätseinrichtungen ein rein deutsches Gepräge trugen. Der Mathematiker Król (S. 289) rief eine astrologische Professur um 1450 ins Leben, während auch für Mathematik als solche schon vorher ein Lehrstuhl bestand, dessen Inhaber seit 1475 auch über astronomische Spezialitäten, wie über Finsterniskalkul, zu lesen hatte. Seit 1476 bekleidete den letzteren eine Kraft ersten Grades, Albert Blar de Brudzewo (Brudzewski), der aber nicht, wie man früher annahm, den jungen Coppernicus in seine Wissenschaft einführen konnte. Brudzewski hatte sich nämlich, als jener immatrikuliert war, bereits ganz auf die Philosophie zurückgezogen. Gleichwohl hat Coppernicus in Krakau den Grund zu dem gelegt, als was ihn die Welt kennt.

Als eine durchaus dem Fortschritte huldigende Universität ist auch das noch jugendliche, erst 1502 in den Besitz der erforderlichen Privilegien gelangte Wittenberg zu nennen. Der erste Mathematiklehrer Volmar ist wenig bekannt, aber 1532 überkam „die mathematische Lectur" dessen vorarlbergischer Landsmann Georg Joachim v. Lauchen (1514—1576), der sich als einen „Rhätier" der Gelehrtenwelt vorstellte und als Rheticus solchen Ruf erlangt hat, daß man sich nicht einmal seines Familiennamens völlig versichert halten darf. Auch die Schreibart Rhaeticus ist nicht selten. Auf Betreiben Melanchthons fand im gleichen Jahre eine Zweiteilung statt; Rheticus hatte „Mathematica inferior" — Arithmetik und Geometrie —, Erasmus Reinhold bekam „Mathematica superior" — Astronomie — zu dozieren. So wenig die spätere Zeit das Motiv dieser Trennung billigen mochte, so hat sie an dieser selbst, und zwar gewiß nicht zum Schaden der Sache, doch bis zur Vereinigung der beiden Universitäten Wittenberg und Halle festgehalten.

Zu einer anderen Unterrichtsfrage uns wendend, ziehen wir die mathematischen Handbücher und Sammelwerke in Betracht, welche in den Zeitraum 1500—1637 fallen, und auf welche wir jetzt schon zu sprechen kommen müssen, weil eine Scheidung nach den Disziplinen, freilich aber nicht die in Wittenberg beliebte, für die beiden letzten Kapitel dieses Bandes zur gebieterischen Notwendigkeit wird. Die von uns beobachtete Reihenfolge kann mit wenigen Worten angedeutet werden. An die Spitze stellen wir Werke, die sich über die verschiedensten Disziplinen und Gegenstände, einerlei ob kompilatorisch oder aphoristisch, verbreiten, indem nur die Lehrtendenz maßgebend bleibt. An die zweite Stelle sollen solche kommen, die wir am besten als vermischte Schriften bezeichnen würden. Ihnen folgt eine Literaturgattung, von der früher schon Spuren, z. B. bei Alcuin (S. 240) bemerkbar waren, die aber jetzt erst ein festeres Gefüge erlangt; das sind die mathematischen Spielereien, denen aber ob dieser Einreihung durchaus nicht der wissenschaftliche Ernst abzugehen braucht. Endlich vereinigen wir unter einer vierten Rubrik die ersten Anfänge mathematischer Geschichtschreibung, welche gleichfalls dem in Rede stehenden Zeitraume angehören.

Im XVI. Jahrhundert gingen Werke der erstbezeichneten Richtung zuerst aus von Finaeus (S. 327) und dem in Antwerpen geborenen, in Lyon lebenden Belgier Ringelberg, wenn wir von der ebenfalls enzyklopädistischen, jedoch noch sehr mittelalterlich angehauchten „Philosophischen Perle" des Reysch (S. 269) absehen. Finées „Protomathesis" (Paris 1532) behandelt in 15 Büchern ausführlich Arithmetik, Geometrie, Kosmographie und

Gnomonik; diese Lehre von den Sonnenuhren, bei den Arabern (S. 212) in hoher Achtung stehend, beginnt sich jetzt wieder zu einem autonomen Wissenszweige zu erheben, der bis gegen 1800 keinem Kompendium fehlen darf. Etwas mehr eigene Gedanken enthält ein nachgelassenes, von seinem Freunde Mizauld veröffentlichtes Werk „De rebus mathematicis hactenus desideratis“ (Paris 1556), eine recht unzureichende Kreisrektifikation enthaltend. Eine solche bietet auch Ringelbergs „Chaos mathematicum“ (Lyon 1531). Kurz vorher hatte Spanien seinen ersten zusammenfassenden Lehrbegriff in Pedro Sanchez Ciruelos „Cursus quatuor mathematicarum artium liberalium“ (Alcalá 1516 und 1518). Weitaus das beste, was nach dieser Seite hin das Jahrhundert zutage förderte, sind die „Scholae mathematicae“ (Paris 1569) des vielbelesenen und weitgereisten, durch sein unglückliches Ende in der Bartholomäusnacht nur zu bekannt gewordenen Pierre de Ramée oder Petrus Ramus (1515—1572). Ein prinzipieller Gegner des Aristoteles und Euclides, deren strenge „Einschnürung des Geistes in spanische Stiefeln“ seiner etwas ungebundenen Weltanschauung nicht zusagte, hat er sich ganz gewiß ein Verdienst um die Losreißung seiner Zeitgenossen von allzu sklavischer Verehrung der Antike erworben, dabei aber doch auch recht kräftig über die Schnur gehauen, indem er gerade die geistvollsten euklidischen Untersuchungen für zwecklos erklärte. Aus dem uns angehenden Drittel des XVII. Jahrhunderts hat man die „Encyclopaedia“ (Herborn 1620) des Alsted, das erste Werk dieser Art von einem Deutschen. Dieses sucht ein System der Wissenschaften zu bieten, ohne zunächst noch dieses allerdings seit kurzem erst aufgekommenen Zuwachses der wissenschaftlichen Begriffssprache sich zu bedienen. Nach O. Ritschl hat der Theologe Keckermann (1611) das griechische Wort σύστημα zuerst in dem jetzt üblichen Sinne gebraucht. England erhielt in Oughtreds „Clavis mathematicus“ (London 1631) ein geschätztes Lehrbuch.

Großenteils von wertvollem Inhalte sind die „Opuscula mathematica“ (Palermo 1575) des Gräko-Sizilianers Francesco Maurolico (1494—1575), eines ebenso gelehrten wie mit eigener Initiative begabten Mannes, der andererseits auch durch sein Urteil, Coppernicus sei „scutica potius seu flagello quam reprehensione dignus", den beschränkten Geist vieler Zeitgenossen nicht verleugnet. Ihm vielfach ähnlich, nur ein noch glühenderer Verehrer klassischer Mathematik war der Urbinate Federigo Commandino (1509—1575). Hatte Maurolico an Euclides, Apollonius, Archimedes — man nannte ihn einen zweiten Archimed —, Autolycus, Theodosius und Menelaus seine Kraft versucht, so ist Commandino vornehmlich das noch schwierigere Werk der Wiedererweckung des Pappus (S. 152) zu verdanken. Mit einigem Rechte, weil das Werk nämlich kein Arbeitsfeld unberührt läßt, darf hier auch Cardanos „De subtilitate" (Nürnberg 1550, Paris 1552) eingeschaltet werden. In ihm kommt erstmalig im Drucke vor die ein gutes statisches Verständnis bekundende, für Schiffslampen und Schiffskompasse bis zum heutigen Tage ein Monopol ausübende Cardanische Aufhängung. Nach Berthelot kommt dieselbe allerdings schon in einer älteren Handschrift und nach Feldhaus bereits bei dem sehr originellen Physiker Philo von Byzanz vor. Viel vom gewöhnlichen Wege Abliegendes findet sich in Jean Buteos (1492—1572) „Opera geometrica" (Paris 1584), denen noch zwei Schriften über Kreisquadratur beizuzählen sind; namentlich spielt die Anwendung der Geometrie auf juridische Fragen eine gewisse Rolle. Mehr noch bietet die Gesamtausgabe der Schriften des Bamberger Jesuiten Christoph Clavius (1537—1602), welche 1612 herauskam; der äußerst unterrichtete Gelehrte hat endlich auch den eingerosteten Irrtum aus der Welt geschafft, daß Euclides von Megara und Euclides von Alexandria die nämliche Person seien. Minder inhaltreich, mehr für die Geschichte der Technik von Bedeutung sind die 1660 in Ulm gedruckten Werke Joseph Furttenbachs (1591—1667). Zum Teile endlich gehört auch noch unserem Zeitabschnitte an der Franziskaner Mersenne (1588—1648), von dessen „Novarum observationum physico-mathematicum tomi tres" die wichtigeren Partien allerdings erst jenseits der uns gesteckten Zeitgrenze liegen. Der Autor war nicht sowohl durch eigene Leistungen als dadurch für seine Fachgenossen wichtig, daß er eine Art von Sammelstelle für wissenschaftliche Neuerungen darzustellen trachtete. Gerade noch in unser Arbeitsgebiet gehört auch die von Albert Girard, einem Lothringer von recht wenig bekannten Lebensumständen (gest. 1633), erst relativ spät unter die Presse gebrachte Ausgabe der Werke des ausgezeichneten belgischen Mathematikers Simon Stevin (1634), über den besonders die Arbeiten von Steichen und Quetelet Licht verbreitet haben, und auf dessen nach allen Seiten ausstrahlende Geistestätigkeit zurückzukommen sich viel Anlaß bieten wird.

Eine erste, auch durch selbständige Gedanken sich auszeichnende Bearbeitung mathematischer Geduldübungen gab Gaspard Bachet de Méziriac in seinen „Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres" (Lyon 1612 und 1624) heraus, der u. a. die Methode des Moschopulus (S. 172) zur Bildung von Zauberquadraten aus eigenem Geiste nacherfunden hat. Im zweitgenannten Jahre trat vor das Publikum mit einem teilweise ähnlichen Werke („Récréations mathématiques", gedruckt in Pont-à-Mousson) der unter dem Namen van Etten schreibende Jesuit Jean Leurechon (1591?—1670); nur kommen jetzt zur Arithmetik und Geometrie auch Kunststücke aus der Physik und Salonmagie hinzu. In dieser Gestalt war „der Franzose" vorbildlich für des Altdorfer Professors Daniel Schwenter (1585—1626) „Mathematisch-Philosophische Erquickstunden oder Deliciae philosophico-mathematicae" (Nürnberg 1626), die aber auch Witz und Scharfsinn ihres Verfassers genugsam bekunden. Auch zu einem zweiten das Original an innerem Werte überragenden Buche hat dasjenige Leurechons Veranlassung gegeben; aus Claude Mydorges (1585—1647) „Examen du livre des récréations mathématiques et de ses problèmes" (Paris 1630) spricht der auch sonst sehr gewandte Mathematiker, der da um eine Stufe herunterzusteigen nicht verschmähte.

Als erster diesen Ehrentitel verdienender Historiker der Mathematik tritt uns Ramus entgegen; der strenge Nesselmann hat den drei ersten, diesem Gegenstande gewidmeten Büchern der „Scholae" (S. 331) dieses Zeugnis ausgestellt, und Cantor erklärt sich einverstanden. Mit Recht hat er den Proclus (S. 159) zum führenden Gewährsmanne gewählt. Spezialistisch bearbeitete Joachim Camerarius (Kammermeister aus Bamberg, 1500—1574) die antike Zahlenlehre (Nürnberg 1557). Umfassenderer Art sind zwei Schriften von Bernardino Baldi (1553—1617), doch konnte man nicht viel Nutzen von seinem anerkennenswerten Fleiße ziehen, weil die zumal für die arabische Periode brauchbaren „Vite dei Matematici“ erst in unseren Tagen, die „Cronica dei Matematici“ auch erst 1707 an die Öffentlichkeit gelangt sind. Viel zu leicht hat es sich Giuseppe Biancani (Blancanus) mit seiner „Clarorum Mathematicorum Chronologia“ (Venedig 1615) gemacht, deren oft grobe Zeitbestimmungsfehler auch durch die Unzulänglichkeit der Quellen nicht entschuldigt werden. Besser ist ausgefallen das Werk „De universae Matheseos natura et constitutione liber“ (Amsterdam 1650) des Gerhard Vossius (1577—1649), das wir hier noch mit aufzuführen uns für berechtigt hielten, weil die Entstehungszeit wohl in die dreißiger Jahre fallen dürfte.

Die meisten unter diesen zahlreichen Schriftstellern werden uns in den beiden Schlußkapiteln wiederholt begegnen. Denn was sie positiv auf mathematischem Gebiete geleistet haben, konnte ja in dieser wesentlich literargeschichtlichen Übersicht nicht mitbehandelt werden.

Kapitel XIX.

Die arithmetischen Disziplinen in der Zeit von 1500 bis 1637.

Die Zunahme der Veröffentlichungen an sich sowohl, wie auch ganz besonders die Häufung neuer Errungenschaften von höherem Werte zwingt uns dazu, von jetzt ab die Wissenschaft in ihre beiden Hauptbestandteile, die Zahlenlehre und die Raumlehre, zu zerlegen. Ganz rigoros wird die Scheidung ja nicht sein können, weil die Berührung zwischen beiden Zweigen oft eine allzu enge ist, aber an dem Prinzipe wird im Interesse der Sache festzuhalten sein. Zunächst wird uns also nunmehr die Arithmetik, das Wort in seiner umfassendsten Bedeutung genommen, zu beschäftigen haben. Es ist an sich klar, daß, wenn eine längere Frist in Frage kommt, wieder Unterabteilungen gemacht werden müssen, und zwar bieten sich dem mit dem eigenartigen Charakter des Zeitraumes vertrauten Historiker deren fünf ungesucht dar. Er hat die namhaften Fortschritte zu verfolgen, welche die Rechenkunst, antikisierende Schwerfälligkeit nach und nach abstreifend, gerade jetzt zu verzeichnen hat; er prüft, wie weit die Algebra als Coß, d. h. als eine Mittelstufe zwischen Wort- und Symbolalgebra, mit diesen ihren eigenen Hilfsmitteln hat kommen können. Dabei faßt er als besonderes, im allgemeinen Entwicklungsgange abseits stehendes Kapitel die isoliert an Italien gebundene Fortbildung der Lehre von den Gleichungen dritten und vierten Grades auf. Sodann bildet die Entstehung einer spezifischen Buchstabenrechnung ein geschichtliches Problem für sich, und gewissermaßen als Krönung des Gebäudes erscheint die Erfindung der Logarithmen.

I. Das Rechnen. Schon aus dem wenigen, was über die gedruckten Rechenbücher (S. 318) des XV. Jahrhunderts beizubringen war, erhellt, daß, als das neue Jahrhundert anbrach, zwei grundverschiedene Verfahrungsweisen förmlich miteinander um den Preis bei der Lösung von Aufgaben der vier Spezies rangen. In etwas modernerer Form ersteht das Abakusrechnen (S. 252) zu erneuter Wirksamkeit, indem es jetzt als Rechnen auf der Linie nicht etwa bloß von handwerksmäßigen Rechenmeistern gepflegt wird; neben ihm ringt sich das eine Weiterführung der Algorithmik darstellende Rechnen mit der Feder zu immer kräftigerer Geltung durch, bis es endlich ganz den Sieg davon trägt und der alte Abakus an die Stätte gelangt, in deren Bereiche er stets Nutzen brachte und immer noch weiter schaffen wird. Dies ist die Elementarschule, deren Zöglinge an der Kugelmaschine (boullier) in die ersten Geheimnisse des Ziffernrechnens eingeführt werden.

Im ganzen ist das XVI. Jahrhundert die gute Zeit einer Gilde der Rechenmeister gewesen, die daneben zugleich im Schön- und Rechtschreiben, sowie im

Geschäftsstile unterrichteten und vielfach zugleich die Pflichten eines „Notarius publicus“ versahen. Viele von ihnen haben sich zugleich auch als Cossisten einen geachteten Namen erworben. Auch sonst blieben sie nicht bei den einfachsten Dingen stehen; zu Anfang des XVII. Jahrhunderts entfaltete der Nürnberger Modist (S. 270) Peter Roth eine gewisse Virtuosität im Anfertigen von Zauberquadraten, und wenn zwei Matadore sich gelegentlich Preisaufgaben vorlegten, so stellten sie nicht sehr mäßige Anforderungen aneinander. Recht gute Nachrichten über die als typisch anzusehenden Rechen- und Schreibkünstler Nürnbergs verdankt man einem handschriftlich hinterlassenen, seitdem zum öfteren publizierten Werke Johann Neudörfers (1547), der selbst einer der erfahrensten war und auch angibt, bei dem Kartographen Etzlaub (S. 306) die Coß gelernt zu haben. Wie Nürnberg, so hatten auch andere große Handelsstädte nicht selten Überfluß an solchen Lehrkräften, die recht oft auch schriftstellerisch tätig waren. Seit dem Jahre 1528, so wird uns von einem Lokalhistoriker gemeldet, sei von den Offizinen Augsburgs „eine wahre Flut von Rechen- und Tarifbüchlein (S. 319) ausgegangen“.

Um zunächst vom Linienrechnen zu sprechen, dem man auch den vornehmeren Namen „Algorithmus linealis“ beilegte, wenn sich die Beschreibung in das Gewand der herrschenden Gelehrtensprache hüllte, so fehlt es, zumal aus Deutschland, nicht an Schriften, die uns das Wesen dieser „Kunst“ kennen lehren. Wir zitieren als bekanntere Autoren Huswirt, Koebel, Boeschenstein (den als Hebraest weit berühmteren Polyhistor), Tzwivel, Reichelstein und vor allem Adam Riese (1492—1559; aus Staffelstein in Oberfranken, später Bergbeamter zu Annaberg i. S.), der ja bekanntlich im Volksmunde heute noch den geschickten Rechner versinnbildlicht; gelehrte Vertreter des Abakusrechnens waren die beiden Leipziger Professoren Balthasar Licht (1514) und Heinrich Stromer von Auerbach (1512, 1514, 1520), der Erbauer von „Auerbachs Hof“. Daß mit großer Vorliebe die Deutschen sich an das Rechnen mit Marken hielten, dürfte aus der Einleitung zum Tzwivelschen Büchlein (1505) hervorgehen, welches besagt, man könne das Rechnen „nach algorithmischer

Weise“ oder auch „durch Wegnahme der Figuren nach Art der Deutschen“ betreiben.

Der Rechner zeichnete seinen Abakus anders, als der Römer ihn anfertigte. Letzterer ließ die Kolumnen gegen seine Person hin zulaufen (S. 140); der Linienrechner legte sich, wie ein Holzschnitt der „Margaritha philosophica“ (S. 269) ersehen läßt, seine Rechenbank („Banckir“, woraus der spätere „Banquier“ entstanden ist) so zurecht, daß die Geraden, auf denen die als Einer, Zehner, Hunderter usw. funktionierenden Rechenpfennige verschoben wurden, wagerecht vor dem Rechner vorüberliefen. Wir wollen die einfacheren Rechnungsarten übergehen und nur dem Dividieren mehr Beachtung zuwenden. War das auch keine so leidige Arbeit mehr wie damals (S. 252), als der Abazist älterer Ordnung darüber schwitzte, so galt es doch immer noch als ein richtiges Problem; in einem seiner eleganten Anschläge am Schwarzen Brette zu Wittenberg forderte Melanchthon die akademische Jugend dringend zum Besuche der arithmetischen Vorlesung mit den Lockworten auf, die Anfänge der Wissenschaft seien ganz leicht, und auch die Division könne mit etwas Fleiß wohl begriffen werden. Daß die Sache ihren Haken hatte, mag aus dem in Fig. 46 versinnlichten Divisionsexempel 207085 : 83 erschlossen werden. Wir bringen unter A die Bank des Dividenden, unter B die sich allmählich erweiternde Bank des Quotienten, unter C die Bank des sich stetig verringernden Dividenden.

Wie A zustande kommt, bedarf keiner Erläuterung. Nachdem die Dividendenbank ausgefüllt ist, dividiert der Rechner im Kopfe mit 83 in 207, was, soweit ganze Zahlen in Betracht kommen, 2 ergibt; dies sind tausender, und mit ihrer Vertretung werden 2 Marken in der obersten Zeile von B beauftragt. Es ist aber $207085 - 166000 = 41085$, und diese Zahl wird, in Marken umgesetzt, der ersten Kammer der Kolumne C eingeschrieben. Jetzt wird, wieder im Kopfe, mit 83 in 410 dividiert, was die neue Zahl 400 für die zweite Kammer von B liefert. Die zweite Differenz ist $41085 - 33200 = 7885$, womit auch die zweite Kammer von C ausgefüllt werden kann. Eine dritte analoge Operation füllt die unteren Kammern von B und C aus, und es ist

$$20785 : 83 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 50 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 5 = 2495$$

gefunden. Bruchrechnen vermied man; es war theoretisch möglich, aber höchst unbequem. Ganz mit Recht sagte der treffliche Mathematiker Stifel, der dem Linienrechnen

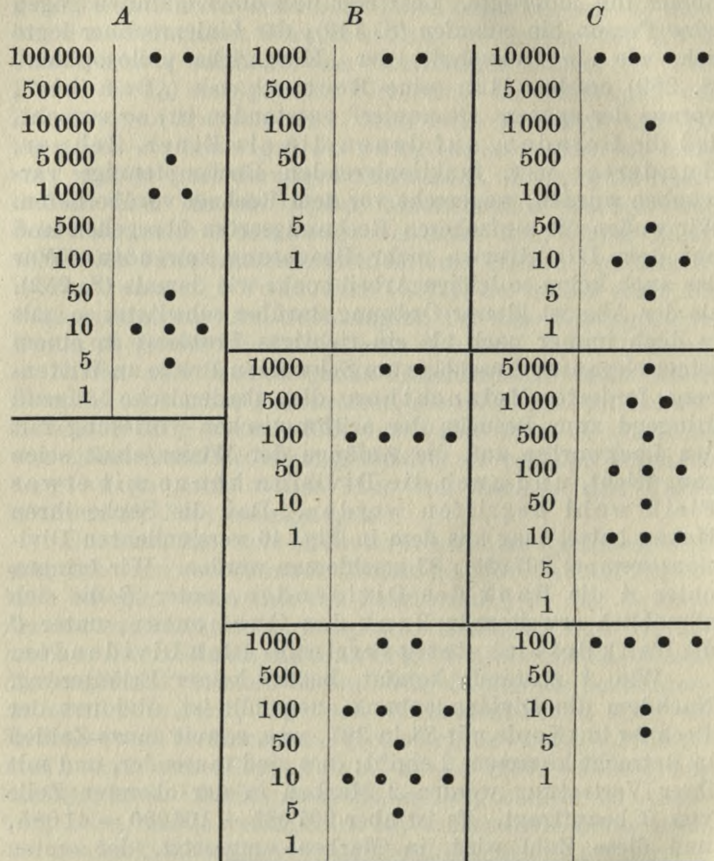


Fig. 46.

innerhalb seiner Grenzen die Berechtigung nicht abzusprechen gewillt war, hierüber: „Die Rechenpfennig und Linihen sind allein eigentlich für gantze Zalen erfunden“. Und in dieser Einschränkung hat sich die Rechenbank bis ins XVII. Jahrhundert hinein erhalten. In ihrer Art war sie die Konkurrentin des Rechenbrettes mit verschiebbaren Kügelchen, wie es bei den Chinesen und anderen Orientalen allein gebräuchlich war und noch gegen 1700, zum höchsten Erstaunen englischer Gesandten, von der kaiserlich russischen Schatzkammer ausschließlich, ohne Zuhilfenahme von Papier, gebraucht wurde.

Ganz unser Rechnen ist das Federrechnen. Die alte Einteilung der Zahlen, wie „Gelenkzahlen" usw., verwirft Ramus (S. 331) als „kindisch"; die neun Zahlzeichen heißen „characteres", „elementa", „notae", wohl auch schon — bei Boeschenstein und Riese — „Ziffern", wogegen letzteres Wort mitunter noch das „Nichts mit Stellenwert" bedeutet und erst bei Rudolff in Deutschland dem in Italien längst eingebürgerten Null weicht. Was die Schreibung der Zahlzeichen anlangt, so scheint die erste Jahreszahl mit arabischen Ziffern im christlichen Europa sich auf einem Grabsteine in Österreichisch-Schlesien von 1007 zu befinden; in Italien wurden jene bald darauf Gemeingut, wenngleich die Kaufleute noch längere Zeit ihre als amtliche Dokumente gültigen Rechnungsbücher in lateinischen Zeichen zu führen hatten. Auf deutschem Boden sind Grabinschriften mit unseren Ziffern für 1371 (Pforzheim) und 1388 (Ulm) gesichert, und um 1500 gab es fast nur noch diese letzteren, indem jedoch 5 und 7 noch hie und da anders geformt vorkommen. Noch ist, weil man eben vom Abakus her das Entfernen und Wiederauflegen der Pfennige gewohnt war, das Ausstreichen der nicht mehr gebrauchten Teilresultate sehr im Schwange, wofür Reysch (S. 269) das minder störende Unterstreichen empfiehlt. Wie eine Multiplikation nach italienischer Manier („nach Art der Gale", S. 318) aussah, zeigt uns (das Beispiel ist 11678020 = 4876 · 2395) Fig. 47.

				8			
			7	~~7~~			
			~~6~~	~~5~~	0		
			~~5~~	~~3~~	~~9~~		
		6	~~3~~	~~7~~	~~4~~		
		~~4~~	~~9~~	~~6~~	~~6~~	2	
1	1	~~1~~	~~2~~	~~2~~	~~2~~	~~9~~	
	~~9~~	~~5~~	~~8~~	0	0	~~5~~	0
	~~8~~	~~2~~	~~6~~	**4**	**8**	**7**	**6**
	2	**3**	**9**	**5**	5	5	5
		2	3	9	9	9	
			2	3	3		
1	1	6	7	8	0	2	0

Fig. 47.

Zusammengezählt wurden, unter Wahrung ihres Stellenwertes, lediglich die oberhalb der feinen Linie stehenden und nicht durch einen Strich eliminierten Ziffern. Ähnlich wurde auch, wiewohl nicht durchgängig, beim Dividieren verfahren. Das „Progredirn“ (S. 285) ist mehr den Mathematikern als den eigentlichen Rechenmeistern geläufig. Zum Radizieren dienen, soweit es überhaupt als elementare Operation anerkannt wird, die binomischen Entwicklungen $(a+b)^2$ und $(a+b)^3$; unser Zeichen $\sqrt{}$ ist die Erfindung Rudolffs (1525). Diesem bewährten Meister entnehmen wir auch das Beispiel einer Kubikwurzelausziehung (A), neben die (unter B) dasselbe in moderner Einkleidung gestellt wird:

A	B
3	
30693	$\sqrt[3]{94\,|\,818\,|\,816} = 400 + 50 + 6 = 456$
94818816 (456	64 000
bacbacba	
	30 818 816 : 3 · 160000
48	480 000
12	60 000
240	2 500
300	542 500 · 50
125	27 125 000
27125	3 693 816 : 3 · 202500
6075	607 500
135	8 100
36405	36
4860	615 636 · 6
216	3 693 816
3693816	0

Die Analogie beider Methoden, von denen nur die ältere die weniger übersichtliche ist, springt in die Augen. Durchweg wird (S. 257) die Richtigkeit eines jeden Ergebnisses geprüft an der Siebener- und Neuner-, dann und wann wohl auch an der Elferprobe.

Die Bruchrechnung bietet wenig Neues. Recht unbehilflich gehen die Meister beim Heben oder Kürzen zuwege (S. 314); wenigstens in Deutschland, denn der Italiener konnte bei seinem Paciuolo die euklidische Staffeldivision zur Ermittlung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen finden. Einheitsbrüche werden noch, wie in grauester Vergangenheit, den übrigen Brüchen vorgezogen; die Tolletrechnung (S. 320) dient vielfach dem Zwecke der Vereinfachung. Das Zeitalter der Sexagesimalbrüche ist zwar so ziemlich abgelaufen, aber der Wittenberger Professor Kaspar Peucer (1525—1602) ließ doch noch hierüber 1556 ein lateinisches Schriftchen erscheinen, weil man eben bei der Lesung älterer Astronomen doch immer auf diese Rechnungsweise geführt wurde, und nicht minder nahm diese Brüche noch 1592 in eine neue Ausgabe der Arithmetik des Ramus (S. 331) auf Lazarus Schoener, der Enkel des Johannes (S. 325).

Gegen Ende des XVI. Jahrhunderts erscheinen endlich die Dezimalbrüche auf dem Plane, deren Aufnahme in das Pensum der elementaren Arithmetik zur Notwendigkeit geworden war. Schon 1579 deutete Vieta eine solche Reform an. Anno 1585 ließ Stevin aus Brügge (S. 333) seinen um ein Jahr früher veröffentlichten Zinstafeln eine „Arithmétique“, eine „Practique d'Arithmétique“, eine Diophant-Bearbeitung und, im gleichen Bande, eine als „La Disme“ bezeichnete Studie nachfolgen, in welch letzterer er den ebenso paradox klingenden, wie tatsächlich richtigen Gedanken ausführte, Brüche seien ganz überflüssig, und man könne jede Rechnung mit ganzzahligen Werten erledigen. Dann werde es keine Schwierigkeit mehr haben, ein alle Kulturvölker umspannendes dezimales Münz-, Maß- und Gewichtssystem herzustellen, so wie es gegenwärtig — von einer einzigen beklagenswerten Ausnahme abgesehen — auch wirklich besteht. Um die Brüche zu vermeiden, brauche man ja zunächst nur solche zuzulassen, die eine Potenz von 10 im Nenner hätten und auf deren Zähler das Gesetz des Stellenwertes anzuwenden, indem solche Zähler durch Beisetzung des Nenner-Exponenten von den echten ganzen Zahlen zu unterscheiden wären. So könne

$$2308 + \frac{9346}{10000} = 2308⓪9①3②4③6④$$

dargestellt werden; man sieht, wie nahe Stevin schon dem Einerstriche und unserer Schreibart 2308,9346 gewesen ist. Zwar nicht den Strich, aber das jetzt nicht selten diesem vorgezogene Pünktchen (auch eine kleine Klammer) hat Keplers Freund, der Toggenburger Jobst Bürgi (1552—1632), zuerst in einer 1592 niedergeschriebenen, nicht im Drucke herausgegebenen „Arithmetica“ eingeführt; „diese Art von Bruchrechnung“, so lesen wir in Keplers deutschem Archimedes von 1616, „ist von Jost Byrgen zu der sinusrechnung erdacht“. Auch die trigonometrischen Tafeln des Pitiscus trugen, unabhängig von Stevin, zur allgemeineren Adoptierung des Trennungszeichens bei. Noch handlicher gestaltete die neue dezimale Graphik Hartmann Beyer (1563—1625) in seiner „Logistica decimalis, das ist Kunstrechnung mit den zehnteiligen Brüchen“ (Frankfurt a. M. 1603). Da haben wir sonach auch die zweckmäßige Wortbildung und zugleich eine fast ganz — nur die Zulassung der Nullen zu den Brüchen fehlt noch — unserer jetzigen Sitte sich anbequemende Form der Darstellung. Bei Beyer ist

$$\overset{\mathrm{v}}{8{,}798} = 8{,}00798; \quad \overset{\mathrm{viii}}{14{,}3761} = 14{,}00003761.$$

Da dieser Schriftsteller mit Stevins Vorgange schwerlich ganz unbekannt war, so darf wohl die Palme des Ruhmes gleichmäßig dem vlämischen und dem schweizerischen Mathematiker zuerkannt werden. Die Ausgestaltung der allgemeinen Zehnerrechnung gehört einer jenseits unserer Zeitgrenze gelegenen Periode an.

Der hiermit abzuschließenden Charakteristik der Rechenkunst als solcher muß noch eine kurze Beschreibung der wichtigsten einschlägigen Werke nachfolgen, welche auch noch einzelne sachliche Bemerkungen nachzutragen und so eine Ergänzung unserer nur die Hauptfragen streifenden Kennzeichnung der Übergangsarithmetik zu liefern hat. Französischen Ursprunges sind die Werke von Etienne de la Roche (Villefranche aus Lyon) und Charles de Bouwelles (Bovillus aus der Pikardie). Während aber die des letzteren noch der Erschließung harren, ist De la Roches „Larismethique“ (1520 und 1538) ein wohlbekanntes und brauchbares Lehrbuch, dessen

Verfasser aus Paciuolo und Chuquet so viel in das seinige herübergenommen hat, als er der Aufnahmefähigkeit seiner Leser zutraute. Er war „maître d'algorisme" und trug sehr zur Verbreitung der Tolletrechnung (S. 320) bei, die nun bald als „wälsche Praktik" in allen Kreisen Eingang findet. Von spanischen Autoren nennen wir Guijeno, Lax, Juan de Ortega und Juan Perez de Moya. Die Arithmetik des Ortega (Composicion de la arte de la arismetica y yuntamente de geometria, Barcelona 1512) strebt etwas höhere Ziele an und verdient namentlich wegen der Formeln

$$\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a+1},$$

$$\sqrt[3]{a^3+b} \sim \left[a + \frac{b}{3a(a+1)} = \frac{3a^3+3a+b}{3a(a+1)}\right]$$

einige Beachtung, während hundert Jahre später Moyas Buch (Aritmetica practica y especulativa, Alcalá 1609) durch eine ungewöhnlich große Zahl von Auflagen seine Brauchbarkeit dokumentierte. Der einzige namhafte portugiesische Schriftsteller über unseren Gegenstand ist wieder Nunes (S. 327), dessen Arithmetik portugiesisch und spanisch (Antwerpen 1567) gedruckt ward. Den Niederlanden gehören an Jodocus Clichtovaeus, Gemma Frisius (1508—1555) und Valentin Menher (ein geborener Kemptener, aber in „Anttorff" oder Antwerpen seßhaft, wo er 1556 seine „Ziffernrechnung" herausgab). Weitaus der bedeutendste von ihnen ist Rainer Gemma aus Dokkum (daher sein Beiname), dessen 1540 zuerst lateinisch erschienenes Kompendium wegen seiner entschiedenen, ja groben Verdammung der obsoleten Begriffe „Duplation" und „Mediation" (S. 200) hervorgehoben zu werden verdient. Stevins wurde (S. 333) schon Erwähnung getan; er ist auch als einer der ersten ihren Gegenstand klar erfassenden Bearbeiter der politischen Arithmetik von Bedeutung, und eine dahin zielende Schrift hat er 1605 dem weitsichtigen französischen Minister Sully zugeeignet, auf den die Gründung des ersten statistischen Bureaus (in Paris) zurückgeht. Britische Vertreter der Arithmetik sind Cutbert Tonstall (1474—1559) und Robert Recorde

(1510—1558). Das lateinisch geschriebene Werk des erstgenannten hat sich auch diesseits des Kanales Freunde erworben und ist 1544 in Straßburg von dem berühmten Didaktiker Johann Sturm neu aufgelegt worden. Von Recorde sind zwei Schriften bekannt: „The Grounde of Artes“ (London 1540 und, in Dees Überarbeitung, 1582), die uns mit einem sehr erfahrenen Lehrer der Rechenkunst bekannt machen, und „The Whetstone of Witte“ (London 1556). Dieser „Wetzstein“ wäre nicht besonders bemerkenswert, enthielte er nicht eine — vom Autor durchaus nicht sehr hoch gewertete — Neuerung: Hier findet sich zuerst das Gleichheitszeichen in der wohlbekannten Form. Als italienische Arithmetiker können Verini (1542), Catani (1546), Uberti (1548), Feliciano (1550) namhaft gemacht werden; Tartaglia, Cardano (S. 332) und Bombelli, die auch zu verzeichnen wären, sollen ebenso wie einzelne Algebraiker des anhebenden XVI. Jahrhunderts später ihre Stelle angewiesen erhalten.

Als Typus des Rechenkünstlers, dem es aber auch an tieferer Einsicht nicht fehlte, ist uns bereits Riese (S. 336) entgegengetreten. Neben zwei älteren verwandten Veröffentlichungen von 1518 und 1522 hat seinen Namen am meisten unter die Leute gebracht sein letztes Werk („Rechnung nach der Lenge auff der Linihen und Feder“, Leipzig 1550), dem etwa für Deutschland dasselbe Lob gebührt, wie es Recorde in England beanspruchen durfte. Rieses Zeitgenosse war der uns auch (S. 328) nicht mehr fremde, in Wien (S. 327) zum Mathematiker herangebildete Schlesier Christoph Rudolff von Jauer, den man leider nur aus seinen schriftstellerischen Leistungen kennt. Er gab den Rechenbüchern die durch Jahrhunderte beibehaltene Einrichtung; seine theoretische Anleitung von 1526 und 1540, sowie seine Aufgabensammlung von 1530 haben im besten Sinne des Wortes hodegetisch gewirkt. Der Erfindung der Dezimalbrüche (S. 341) stand er so nahe als irgend möglich. Höheren Ansprüchen genügen auch die deutsch geschriebenen Rechenbücher von Heinrich Schreiber oder Grammateus (Erfurt 1523) und (S. 329) Peter Apian (Landshut 1527). Aus letzterem Buche ist vorzugsweise die sehr klare Behandlung der Kubikwurzelausziehung erwähnenswert.

Aus späterer Zeit wollen noch die Rechenbücher von Simon Jacob (Frankfurt a. M. 1552) und Wursteisen oder Urstisius (Basel 1579) angeführt sein.

II. Die Algebra im allgemeinen. Eine scharfe Grenze zwischen gewöhnlicher Arithmetik und Algebra läßt sich nicht ziehen, denn sehr viele Arithmetiker unseres Zeitabschnittes sind zugleich, um den in Deutschland noch jahrzehntelang erhalten gebliebenen Ausdruck zu gebrauchen, Cossisten (S. 307) gewesen. Pflege und Fortbildung hat während des XVI. Jahrhunderts diese Disziplin hauptsächlich in Italien und Deutschland gefunden, bis dann zuletzt die Führung für längere Jahre an Gelehrte französischer Zunge überging.

Ferro, von dem uns bereits (S. 327) Kunde ward, betätigte sich nur auf enge begrenzten Arbeitsfeldern, zu denen wir später erst zu kommen haben. Weit universeller sind die beiden großen Algebraiker der Jahrhundertmitte, Hieronymus Cardanus aus Mailand (1501—1576) und Niccolò Tartaglia aus Brescia (auch Tartalea; 1501? bis 1557). Des erstgenannten Hauptwerk („Artis magnae seu de regulis algebraicis liber unus“, Nürnberg 1545) faßt teilweise zusammen, was er schon in früheren Schriften, im „Computus minor“ (1539) und in der gleichzeitig erschienenen „Practica Arithmeticae generalis“ niedergelegt hatte. Wir heben hervor ein Verfahren, unlösbar scheinende Gleichungen durch identische Addition von gemeinsamen Faktoren beider Seiten des Gleichheitszeichens zu befreien und so ihren Grad zu erniedrigen, ferner die hier zuerst auftretende Methode, Gleichungen mit mehreren Unbekannten durch Einführung neuer Unbekannten handlicher zu gestalten, eine Erörterung über vollkommene Zahlen (S. 59) und korrekte Andeutungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich zwei Jahrhunderte später im Petersburger Problem verdichtet haben. Auch die „aurea regula“, eine Näherungsmethode für höhere Gleichungen, steht auf neuer Grundlage. Wie Cardano sich durch unaufhörliche Beschäftigung mit der Sache sogar über den eigenen Standpunkt zu erheben vermochte, beweist sein Verhalten gegen imaginäre Größen, von denen er zuerst überhaupt nichts wissen wollte, mit denen formal zu rechnen er aber später ausdrücklich als erlaubt zugestand. Die von Cardano hinterlassene „Ars magna arithmeticae" enthält bereits eine noch unvollständige, aber doch schon auf eine Durchschauung der Struktur einer Gleichung hinweisende Antizipierung der Descartesschen Zeichenregel. Der wichtigste Bestandteil der „Großen Kunst" soll uns erst später beschäftigen, ebenso wie wir dies auch bei der Behandlung Tartaglias machen werden.

Von ihm hat uns einstweilen wesentlich nur ein einziges Werk zu interessieren („General Trattato di numeri e misure", 1556—1560 zum Teile posthum erschienen); nach Cantor ein vorzügliches Lehrbuch einer nicht am Elementarsten kleben bleibenden Rechenkunst). Man kann hier u. a. die erste ganz zutreffende Beurteilung des Wesens der Zinseszinsrechnung und Aufgaben über Reihensummierung finden, wie sie noch nicht vorgelegt worden waren. Ohne Verwendung einer bestimmten Nomenklatur bestimmt Tartaglia richtig den Numerus Combinationum ohne Wiederholung von n Elementen zur Klasse $k = \binom{n}{k}$, während er den Hauptsatz aus der Lehre von diesen Binomialkoeffizienten mit größter Gleichgültigkeit von Stifel entlehnt, ohne seine Vorlage zu zitieren. Als selbständiger Algebraiker betätigt er sich dagegen wieder beim Rationalmachen von Bruchnennern. Sehr imponieren muß uns die richtige, aber nicht näher motivierte Lösung einer Maximalaufgabe: x soll so bestimmt werden, daß das Produkt $x(8-x)(8-2x)$ den größtmöglichen Wert annehme.

Ein in seiner Art vorzügliches Lehrbuch der Algebra schrieb Raffaele Bombelli („L'Algebra", Venedig 1572, Bologna 1579); es zeichnet sich auch durch eine reichhaltige Beispielsammlung aus. Er operiert auf das freieste, ja kühnste mit beliebigen Wurzelgrößen, zu deren Bezeichnung er sich seine eigene, nicht weiter durchgedrungene Symbolik erdacht hatte. Quadratwurzeln aus negativen Größen hindern ihn so wenig wie den älter gewordenen Cardano, denn er weiß, daß bei richtiger Behandlung das Resultat doch ohne dieses nur vorübergehend eingeführte Rechnungshilfsmittel zutage tritt. Auch Maurolycus (S. 331) darf, wenngleich in einem ganz anderen Zusammenhange, hier als Algebraiker eine Stelle finden. Man hat bei ihm die erste Anwendung der vollständigen Induktion, des Schlusses von n auf $(n+1)$, aufdecken können.

Ein Italiener und ein Deutscher teilen sich in die erste bewußte Verwendung der Kettenbrüche. Ausgegangen sind beide von ganz verschiedenen Punkten, und eines jeden Verdienst ist ein ungetrübtes, aber der Zeit nach geht der Italiener vor in der Durchführung eines Algorithmus, der latent (S. 89, 236) wahrlich schon lange genug vorhanden war, aber jetzt erst das mathematische Bürgerrecht empfing. Die erste Spur findet sich bei Bombelli. Pietro Cataldi setzt ferner in seinem „Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra dei numeri" vom Jahre 1613

$$\sqrt{18} = \sqrt{4^2+2} = 4 \;\&\; \frac{2}{8 \;\&\; \frac{2}{8 \;\&\; \frac{2}{8}}}$$

und berechnet die einzelnen Näherungswerte. Unter verschiedenen Landsleuten, welche nach Favaro in Cataldis Fußtapfen traten, möge als der vielleicht bedeutendste Unicorno angeführt werden. Von Schwenter soll gleich nachher bei den deutschen Cossisten die Rede sein.

Daß es auch solche gab, die nur durch eigene Arbeit sich über die Stufe des Gewerkschaftsrechenkünstlers erhoben, haben wir bei Neudörfer (S. 336) gesehen. Hans Bernecker aus Leipzig, Hans Conrad aus Eisleben, der einem „schwartzen munich aquinas" — ob dem uns von früher her bekannten (S. 306)? — für jede neue durchgerechnete Aufgabe einen Gulden zahlte, und Stephan Brechtel aus Nürnberg werden als solche Männer verzeichnet. Rieses „Coß", abgeschlossen anno 1524, ist zwar Manuskript geblieben, durch Berlets Bemühungen aber der Öffentlichkeit zugänglich gemacht worden. Sie enthält nichts als Regeln und Beispiele für die Auflösung von Gleichungen, diese aber in größtmöglicher Vollständigkeit.

Was die literarische Vertretung der Algebra in deutschen Landen angeht, so darf schon das Rechenbuch des Grammateus (S. 328) als ein den Übergang von rein arithmetischer zu algebraischer Behandlungsweise vermittelndes angesehen werden. Noch entschiedener vollzieht sich dieser bei Rudolff (S. 328). Zur vorläufigen Vollendung kommt er bei Michael Stifel (1487?—1567) aus Eßlingen, von dem drei Werke bekannt sind, sämtlich für die Geschichte der Algebra das höchste Interesse bietend. Im Jahre 1544 erschien die „Arithmetica integra", 1545 eine deutsch verfaßte Arithmetik und 1553 eine Neubearbeitung der Rudolffschen „Coß". Aus derersterwähnten wurde seit je als eine divinatorische Stelle diejenige herausgehoben, welche eine arithmetische und eine geometrische Progression gliedweise parallelisiert. Das hat wohl Chuquet auch getan, aber Stifel geht insofern weiter, als er bei der ersteren Reihe nicht bloß positive und bei der zweiten nicht bloß ganzzahlige Werte hinschreibt, sondern sein Schema folgendermaßen gestaltet:

... -3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6 ...
... $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64 ...

Auch die Begleitworte legen die Annahme nahe, daß damit die Konzeption des Logarithmenbegriffes fast schon gegeben war. Davon ferner, daß Stifel die Binomialkoëffizienten und ihre wichtigsten Eigenschaften kannte, war bereits (S. 346) Notiz zu nehmen; er betrieb ihr Studium wesentlich zur Erleichterung des Wurzelausziehens. Über Fibonacci und Rudolff hinausgehend, gibt er eine Anzahl von Vorschriften zur Prüfung der Teilbarkeit einer Zahl durch eine andere; er weiß auch, wie viele Teiler ein Produkt von n Primzahlen haben muß. Nach Moschopulus (S. 172) ist Stifel der erste Mathematiker, der sich eingehend mit der Konstruktion magischer Quadrate beschäftigt; man hatte überhaupt für dergleichen jetzt mehr Neigung bekommen; Riese hatte ihnen seine Aufmerksamkeit zugewandt; und auf Dürers bekanntem Stiche „Die Melancholie" findet sich folgendes 16zellige Zauberquadrat abgebildet:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Recht gründlich erörtert Stifel auch die Irrationalgrößen, indem er u. a. feststellt, daß $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ für keinen Exponenten n ganzzahlig werden kann; irrationale und rationale Zahlen können folglich niemals gleich sein. Bei seinen Erläuterungen zu den Sätzen des zehnten euklidischen Buches macht der Autor, dem auch Plus- und Minuszeichen geläufig sind, von einer teilweise neuen Wurzelsymbolik Gebrauch; so ist ihm

$$\sqrt{\mathfrak{z}} = \sqrt{}, \quad \sqrt{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} = \sqrt[4]{}, \quad \sqrt{cece} = \sqrt[9]{} \text{ usw.}$$

Diese gestattet ihm, willkürliche Wurzelkombinationen verhältnismäßig leicht zum Ausdrucke zu bringen. Die Algebra, so sagt er beim Eingange des dritten Buches, sei weit einfacher, als törichte „vexatio populi" sie durch eine Häufung von Regeln oftmals erscheinen lasse; ganz nach unserer Art gibt er seiner Gleichung gewöhnlich die Form $x^m = a\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + \ldots + p\,x + q$, läßt sich aber auch eine auf Null gebrachte Gleichung gefallen. Nur vermeidet er es, positive Größen negativen gleichzusetzen; $a + b\,x^2 = -c\,x - d$ hätte für ihn keinen Sinn. Doch läßt er das Negative an sich zu und definiert die negative Zahl als eine solche, welche < 0 sei; daß er diese Zahlgebilde noch als „absurdi" charakterisiert, liegt in der Natur der Sache. Stifel ist mit Cardano (S. 345) bekannt und entlehnt bei ihm namentlich Beispiele von reduktiblen Gleichungen.

Die „Deutsche Coß", welche auch „Hausrechnung" und „Kirchrechnung" in sich begreift, behandelt unerwartet gründlich das Linienrechnen (S. 336), dehnt dieses aber auch, was praktisch vor ihm nur ausnahmsweise geschehen war, auf höhere Radizierungen aus, wobei Stifel eine von der vorerwähnten verschiedene, kaum zweckmäßigere Gestalt für die Wurzelzeichen verwendet. Der Computus ecclesiasticus gibt auch, wie es im XVI. Jahrhundert sehr beliebt war, einen „Cisiojanus", der als Sammlung von Gedächtnisregeln für die Kalenderkunde dieselbe Bedeutung wie der „Mamotrectus" für die Grammatik besaß. Auch die Neuausgabe der Rudolffschen Algebra hat Stifel mit eigenen Zusätzen bereichert. So gibt er eine

Tabelle der Binomialkoeffizienten (bis $n = 7$), führt die Behandlung des surdischen Binomes (S. 183) auch für den allgemeineren Fall

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{y}$$

durch und geht sogar, aufs neue Vertrautheit mit den Italienern bekundend, anhangsweise auf kubische Gleichungen ein. Ganz besonders aber rührt von diesem dritten Stifelschen Werke ein Geschenk her, welches die folgende Zeit kaum hoch genug bewerten konnte, nämlich das noch in der Gegenwart angewendete Wurzelzeichen. Zunächst zwar nur für die Quadratwurzel, bald aber auch für beliebige Radikale. Wir sahen, wie sich die Cossisten abquälten, eine zugleich handgerechte und verständliche Form für die Wurzelausziehung zu finden; auf Rudolff (S. 340) fortbauend, hat endlich Stifel die zweckmäßigste Lösung angebahnt.

Ein Anhang gibt Aufschluß über die dem Gebiete der Zahlenmystik verwandte „Wortrechnung". Ursprünglich Mönch, nachmals protestantischer Geistlicher, hatte sich der sonst so kopfklare Stifel in den Gedanken verrannt, die Geheimnisse gewisser biblischer Bücher — Daniel, Apokalypse — arithmetisch dadurch entschleiern zu können, daß er den Buchstaben des Alphabetes gewisse Zahlenwerte beilegte und so die dunklen Zahlen der Heiligen Schrift lesbar machte. Er hat hierin Nachfolger gehabt. Der geniale Napier, der noch in diesem Kapitel uns zu beschäftigen hat, schrieb ein ganzes Buch von ähnlicher, auch die jüngsten Welthändel mit einbegreifender Tendenz, und der wahrlich auch nicht minderwertige Ulmer Mathematiker Johann Faulhaber (1580—1635) verlor kostbare Zeit mit seiner Wortrechnerei und der dadurch ausgelösten Polemik. Immerhin bewährte er sich dabei als ein überaus gründlicher Kenner der figurierten Zahlen, für die er auch besondere Zahlen — zum Teile freilich Wortungeheuer — zu bilden lehrte.

Zwei dem Ende des Jahrhunderts angehörige deutsche Algebraiker waren der Schlesier Johannes Junge, Rechenmeister in Lübeck, und der Ditmarse Raymarus Ursus, der bekannte Widerpart Tycho Brahes, mit dem er einen unerquicklichen Streit über die Urheberschaft des bekannten Kompromißweltsystemes führte. Beide variierten den Vorschlag, das von x freie Glied einer Gleichung in seine Teiler zu zerlegen und jeden von diesen als Wurzel zu probieren, was ja auch für ein ganzzahliges x zum Ziele führen muß. Auch Bürgi hat (S. 342) ein analoges Verfahren in die rechnerische Praxis eingeführt, von welchem jedoch erst in der Geschichte der Trigonometrie gehandelt werden kann.

Endlich muß auch hier noch rühmend der Bestrebungen gedacht werden, den größten und, richtiger gesagt, einzigen Algebraiker des Altertums dem Besitzstande einer späteren Generation einzuverleiben. Es war Wilhelm Holtzmann (Xylander), Professor des Griechischen an der Heidelberger Hochschule, der 1575 der Welt einen lateinischen Diophant schenkte, während kurz vorher die beiden Italiener Bombelli (S. 346) und Pazzi mit diesem schwierigen Unternehmen nicht zustande gekommen waren. Hat dieser erste Versuch auch wohlbegreifliche Mängel, so stellt das Ergebnis dem, der den kühnen Wagemut hatte, doch ein treffliches Zeugnis aus. Stevins französische Bearbeitung von vier Büchern mußte oben (S. 341) berührt werden. Die erste Originalausgabe lieferte Bachet de Méziriac (Paris 1621), und wir glauben ihm gerne, daß ihm die furchtbar mühevolle Aufgabe nicht gelungen wäre, hätte sich nicht seiner infolge körperlichen Leidens eine melancholische Stimmung bemächtigt gehabt, gegen welche er nur durch angestrengteste Arbeit sich zu schützen vermochte. Er war aber auch, wie seine „Problèmes" beweisen, für unbestimmte Analytik ganz ungewöhnlich veranlagt, und ihm verdanken wir die noch jetzt in allen Schulen gelehrte Auflösung der linearen Gleichung mit zwei unbekannten Größen durch stets wiederholte Division und Rücksubstituierung. Man kann, wie bekannt, diesem Lösungsverfahren auch die elegantere Gestalt der Kettenbruchentwicklung verleihen. Von einer solchen, derjenigen Cataldis, haben wir vorhin (S. 347) vernommen; eine andere, die es ausschließlich auf Kettenbrüche vom Partialzähler 1 abgesehen hat, ist von Schwenter sowohl in seiner „Geometria practica nova et aucta" (Nürnberg 1625), als auch in seinen „Erquickstunden" (S. 333) skizziert worden. Es ist, von der äußeren Form abgesehen, dieselbe, welche noch in unserer Zeit dazu dient (S. 89), unhandliche Brüche angenähert durch solche in kleineren Zahlen zu ersetzen. Von Schwenter wird ganz ebenso, wie das unsere Schulvorschrift verlangt, die Zuhilfenahme der bloß subsidiären Brüche $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ angeraten. Später haben Wallis und Lord Brouncker an Cataldi, Christian Huygens an Schwenter angeknüpft, um eine allgemeinere Theorie der Kettenbrüche in die Wege zu leiten, aber mit diesen späteren Stadien haben wir uns nicht mehr zu befassen.

III. Die kubischen und biquadratischen Gleichungen. Fast möchte es als gewagt erscheinen, eine hochwichtige Episode im Entwicklungsgange der Algebra aus diesem herauszulösen und abgesondert zu behandeln. Es wird sich indessen zeigen, daß es sich in diesem Falle immer nur um einige wenige Personen handelt, die in die Erfindungsgeschichte verflochten waren, und daß, was aus ihrem Geisteskampfe resultierte, erst ziemlich spät wissenschaftliches Gemeingut wurde.

Nur zufällig und gelegentlich hatte man vor 1500 Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade den für diese bestehenden Regeln untertänig zu machen gewußt. Aus Angaben bei Cardano ist zu schließen, daß um 1510 — ein paar Jahre früher oder später tun wenig zur Sache — der Bologneser Professor Scipione del Ferro auf die allgemeine Lösung der Gleichung $x^3 + ax = b$ verfiel, sie aber nicht im Drucke bekannt machte. Nur zwei Leute waren es, die Kenntnis davon erhielten: Ferros Schwiegersohn Della Nave als Erbe des handschriftlichen Nachlasses, und ein gewisser Fiore (Floridus), der dem Erfinder für eine direkte Benachrichtigung zu Dank verpflichtet war. So erzählt Cardano den Hergang, indem er weiter mitteilt, Tartaglia habe anläßlich einer Herausforderung Fiores selbst die Auflösung gefunden und sie dann ihm, dem Berichterstatter, aus Freundschaft bekannt gegeben. Er, Cardano, habe dann den Beweis und verschiedene weitere belangreiche Umstände selbst gefunden. Hören wir dazu die Darlegung Tartaglias. Dieser will zuerst um 1530 durch den ihm bekannten Colla ein paar kubische Gleichungen vorgelegt erhalten haben, worauf er sich für solche eine „regola generale" ausgedacht habe. Jetzt trat, so heißt es weiter, der schon erwähnte Fiore auf den Schauplatz und stellte eine Anzahl von Aufgaben zur Lösung, die sämtlich die Gleichung $x^3 + ax = b$ zum Kerne haben. Tartaglia erledigte sie alle leicht mit Hilfe seiner Generalregel, ohne Collas Wunsch zu erfüllen und die eigene Methode zu publizieren. Nun kam — es war dieser Quelle zufolge im Februar 1539 — auch Cardano mit der gleichen Bitte an jenen heran, ohne doch in der Hauptsache eine zufriedenstellende Antwort zu erhalten. Allein er ließ nicht nach und brachte es schließlich dahin, daß der Freund sein Schweigen brach und dem Bittsteller am 12. Mai 1539 brieflich einige Memorialverse übermittelte, welche die Lösung in einer freilich so stark eingewickelten Form enthielten, daß Cardano aufs neue vor einer Sphinx stand. Am 23. April des gleichen Jahres ließ Tartaglia deshalb den Kommentar folgen, demgemäß die Lösung die noch heute als einfachste anerkannte war. Man setzt $x = u + v$, erhält so $x^3 + ax = b$ in der Form $u^3 + v^3 + (u + v) \times (3uv + a) = b$ und macht den zweiten Summanden zu Null, indem $uv = -\frac{a}{3}$ gewählt wird. Für u und v hat man dann je eine reduktible Gleichung vom sechsten Grade, und x ist gleich der Summe zweier Kubikwurzeln. Schon wenige Monate darauf erkannte Cardano, dessen Schriftstellerei sofort zu besprechen sein wird, daß nicht immer diese Formel auswertbar sei; es lag dann eben der irreduzible Fall vor. Tartaglia nahm es dem Genossen sehr übel, daß er so frei mit dem ihm anvertrauten Geheimnis geschaltet, und auf des ersteren Autorität hin hat sich die Auffassung festgesetzt, daß ein schnöder Vertrauensbruch Cardanos diesem zu der Ehre verholfen habe, eine der wichtigsten algebraischen Regeln durch seinen Namen ausgezeichnet zu sehen.

Jedenfalls kam es nunmehr, worüber uns die von Giordani veröffentlichten „Cartelli" und „Contro-Cartelli" wünschenswerte Klarheit gebracht haben, zu sehr lebhaften, von den Grenzen guten Tones ungemein weit entfernten Auseinandersetzungen zwischen den beiden Konkurrenten, indem für Cardano besonders dessen Schüler und Schildknappe, der selbst nach des Lehrers

Zeugnis einen sehr unliebenswürdigen Charakter darstellende Lodovico Ferrari, eingriff. Tartaglia, so behauptet dieser, durfte gar nicht als eigenes Geheimnis überliefern, was ein solches gar nicht war, denn die erwähnte Methode sei ja viel älter, es sei die des Ferro, welche der Gegner bei Durchsicht der im Verwahre Della Naves befindlichen Papiere kennen gelernt und entwendet habe. Tartaglias etwas gewundene Antwort stellt diesen wichtigsten Punkt nicht so richtig, wie es seine Freunde wünschen mochten. Mehrfach wurde über eine öffentliche Disputation verhandelt, die nach langer Vorbereitung endlich am 10. August 1548 zustande kam und nach Tartaglias Aussage eine Menge von Fragen berührte, durch Ferraris und seiner Spießgesellen Gebaren aber kein rechtes Ende fand; Cardano scheint sich ganz im Hintergrunde gehalten zu haben. Einwandfreie Erfolge hatten solch öffentliche Schaustellungen niemals, wie das berühmte Religionsgespräch zwischen Luther und Eck, ein Vorbild des Mailänder Duelles, zur Genüge beweisen kann. So ging denn jeder Teil heim mit der wenigstens äußerlich zur Schau getragenen Überzeugung, einen Sieg erfochten zu haben, und von sachlichem Gewinne konnte keine Rede sein. Fiore und Colla, die einen Beitrag zur Klarstellung hätten liefern können, haben ihr Schweigen überhaupt nicht gebrochen.

Der Historiker unserer Tage ist demzufolge zu einem endgültigen Urteile über die Prioritätsfrage nicht befähigt. Von den beiden Bewerbern war Tartaglia vielleicht der gelehrtere, Cardano jedenfalls der mathematisch höher veranlagte. Die Vermutung, daß der erstere Ferros Schlüssel besaß, ist nicht abzuweisen, und diesem Manne wird also, was die Auflösung selbst betrifft, immer das Hauptverdienst zugebilligt werden müssen. Cardano hingegen hat sich der neuen Methode bemächtigt und sie so allseitig diskutiert, daß ihm ein Ehrenplatz in diesem Spezialkapitel der Algebra auch dann gesichert bleibt, wenn sein Verhalten gegen Tartaglia, was sehr wahrscheinlich ist, als ein moralisch bedenkliches bezeichnet werden müßte. Um diese Tatsache zu erkennen, bedarf es noch einigen Eingehens auf die absichtlich bisher unbesprochen gelassenen Teile seiner Schriften.

Ausdrücklich geht er in der „Ars magna arithmeticae“ auf die Lehre von den höheren Gleichungen ein als einen von seinem Schüler Ferrari beträchtlich vervollkommneten Teil der Algebra. Die Gleichungen $x^3 + \frac{1}{3} a x^2 \pm ax = b$ bezeichnet er als besonders leicht reduzierbar. Ganz bestimmt spricht er es auch aus, daß mehrfache Wurzeln, darunter auch unmögliche, vorhanden sein könnten. Vor allem aber lehrt er uns, wie man, einer Idee Ferraris Folge gebend, eine biquadratische Gleichung durch eine kubische Resolvente lösen kann, falls nur das Glied mit x^3 entfernt ist. Einen solchen Fall hatte Colla mit $x^4 + a x^2 + c = b x$ vorgelegt. Man addiert auf beiden Seiten $(2\sqrt{c} - a) x^2$ und erhält

$$(x^2 + \sqrt{c})^2 = (2\sqrt{c} - a) x^2 + b x .$$

Links steht ein vollkommenes Quadrat, und in ein solches muß auch der Ausdruck zur Rechten übergeführt werden. Man setzt ihn probeweise gleich einem solchen, nachdem man auch links noch ein paar Summanden beigefügt hat, welche den quadratischen Charakter nicht beeinträchtigen. Diese sind $(2 x^2 y + 2\sqrt{c} y + y^2)$; sie müssen auch rechts zugezählt werden, und als neue Formen stellen sich die folgenden dar:

$$\begin{aligned} x^4 + 2(\sqrt{c} + y) x^2 + (y^2 + 2\sqrt{c} y + c) \\ = (2\sqrt{c} - a + 2y) x^2 + b x + (y^2 + 2\sqrt{c} y), \end{aligned}$$

$$[x^2 + (y + \sqrt{c})]^2 = (2\sqrt{c} - a + 2y) x^2 + b x + (y^2 + 2\sqrt{c} y) .$$

Dieses Trinom rechts kann aber, da ja y jeden beliebigen Wert bekommen darf, quadratisch werden, sobald man darüber derart verfügt, daß

$$4(2\sqrt{c} - a + 2y)(y^2 + 2\sqrt{c} y) = b^2$$

wird. Damit ist aber, wenn ausgerechnet wird, die Resolvente dritten Grades

$$y^3 + \left(3\sqrt{c} - \frac{a}{2}\right) y^2 + (2c - a\sqrt{c}) y = \frac{b^2}{8}$$

gegeben, und eine lineare Substitution für y gestattet dann auch die Beseitigung des quadratischen Gliedes und die ungehinderte Anwendung der Cardanschen Formel. Die biquadratische Gleichung ist sonach durch Ferrari gelöst worden.

In die uns altgewohnte systematische Form hat erst Bombelli alle diese Dinge gebracht. Soweit es seine uns erinnerliche Wurzelbezeichnung (S. 346) gestattet, führt er uns die Wurzel der Gleichung $x^3 + bx = a$ als das Wurzelbinom

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}$$

vor. Wenn aber $\frac{b^3}{27}$ negativ und $> \frac{a^2}{4}$ ist, so ergibt sich anscheinend eine Unmöglichkeit, und diese schafft, wie schon (S. 346) angedeutet, Bombelli dadurch aus der Welt, daß er

$$\sqrt[3]{m \pm \sqrt{-n}} = p \pm \sqrt{-q}$$

setzt und die Summe der beiden dritten Wurzeln mit der reellen Zahl $2p$ identifiziert, während auch für q aus den beiden Gleichungen, in welche die aus reellen und unmöglichen Teilen gemischte Gleichung

$$m \pm \sqrt{-n} = p^3 \pm 3p^2\sqrt{-q} - 3pq \mp q\sqrt{-q}$$

zerfallen muß, ein reeller Wert sich herausrechnet.

So war denn um 1580 die Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen zur vollzogenen Tatsache geworden. Ferro, Cardano und Ferrari teilen sich in den Ruhm, es dahin gebracht zu haben; Tartaglias positives Verdienst dagegen scheint weit geringer zu sein. Und zuletzt bereitet Bombellis Formengeschick eine wissenschaftliche Theorie der komplexen Größen in ihren Grundzügen wenigstens vor.

IV. Die Buchstabenrechnung. Gegen Ende des XVI. Jahrhunderts hatte die Algebra einen hohen Stand erreicht, so unvollständig auch noch immer die Hilfsmittel waren, über welche sie zu gebieten vermochte. Gewiß, die Wortalgebra der Araber (S. 202) und die Anfänge der Symbolik bei Diophant (S. 164) und Jordanus

(S. 273) hatte man längst überwunden, aber noch war ein gewaltiger Schritt zu tun, um arithmetische Wahrheiten in einer allgemein gültigen, jedermann ohne weiteres verständlichen Form aussprechen zu können. Es ging den Algebraikern wie einem Bildhauer voll hoher Entwürfe, dem auch der beste Stoff zu deren Ausführung zu Gebote steht, dessen Handwerkszeug aber in keiner Weise den Anforderungen entspricht. Ein solches mußte auch für die Algebra geschaffen werden, das Universalinstrument der Buchstabenrechnung, auf dessen Erfindung alles hindrängte.

Als deutlichen Beleg dafür, daß es sich in der Tat so verhielt, sind wir eine 1585 gedruckte Schrift des genialen Stevin (S. 333) anzuführen in der Lage („L'arithmetique contenant les computations des nombres arithmetiques ou vulgaires: aussi l'Algebre avec les equations des cinq quantites“). Gerne sagt der Verfasser, hätte er noch mehr als „Lois de Ferrare“ geboten und auch die Gleichungen fünften Grades gelöst, allein hierzu hätten seine Mittel versagt. Uns ist bekannt, daß hieran nicht Unvermögen von seiner Seite die Schuld trug, sondern daß er sachlich Unmögliches angestrebt hatte. Die algebraische Zeichensprache Bombellis (S. 346) war für Stevin maßgebend, aber allerdings mit mehreren Abänderungen, und gerade aus diesen ersehen wir recht deutlich, welche Unbehilflichkeit noch bestand. Unser x, die „quantite proposee“, erschien als ein Ringelchen, in welches der Exponent (n von x^n) eingeschrieben ward; brauchte man noch y, so erschien es in der gleichen Gestalt, aber mit Vorsetzung der Silbe sec (seconde), und ter (tierce) drückte ebenso die Unbekannte z aus. Wenn nun noch der Buchstabe M als Multiplikationszeichen fungierte, D ebenso die Division angab, so konnte etwa der (noch nicht gehobene) Bruch $4\,x^6\,y^3\,z^2 : 13\,x\,y^5\,z^7$ folgendermaßen geschrieben werden:

$$4 \text{⑥} \, M \, \text{sec} \text{③} \, \text{ter} \text{②} \, D \, 13 \text{①} \, \text{sec} \text{⑤} \, \text{ter} \text{⑦} \, .$$

Gewiß ein Fortschritt, und doch — wie untunlich muß uns mit solch mühselig zusammenzusetzenden Gebilden irgend ein größerer Umformungsakt erscheinen! Stevin freilich war der Mann dazu, auch mit einem mangelhaften Hammer den ungefügen Stein zu bearbeiten. Er zeigt, wie man für zwei algebraische Multinomien, welcher Name ebenfalls von ihm stammt, den größten gemeinschaftlichen Divisor finden kann; er gibt eine neue Näherungsmethode für höhere Gleichungen. Auch läßt er unbedenklich negative Gleichungswurzeln zu.

Stevins etwas älterer Zeitgenosse war François Viète de la Bigotière aus dem Poitou (1540—1603), durchgängig als Vieta bezeichnet. Er ist es, der die Mathematik mit dem ihr bisher noch fehlenden Rechnungsinstrumente des Literalkalkuls versah. Von seinen durchaus gehaltvollen Werken, deren Einfluß auf verschiedene Zweige der Wissenschaft kein geringer war, kommt für uns an erster Stelle in Betracht ein 1591 zu Paris gedrucktes („In artem analyticam isagoge"). Es ist ein elementares Lehrbuch, dem es vorzugsweise auf schärfere Begriffsbestimmung ankommt, wie denn hier zuerst das den älteren Griechen selbstverständlich dünkende, von Diophant (S. 168) rücksichtslos übertretene und seitdem nicht klar erkannte Gesetz der Homogeneität klar formuliert wird. Das griechische Wort Logistik (S. 57) für Rechnen erweckt Vieta zu neuem Leben, und zwar ist für ihn Logistica numerosa ≡ Zahlenrechnung, Logistica speciosa ≡ Buchstabenrechnung. Diese letztere hat also damit erstmalig ihre Sonderbezeichnung erhalten. Der Buchstabe bedeutet für den Autor nicht sowohl eine Zahl, als vielmehr eine Größe, aber obwohl die Geometrie, die nur drei Dimensionen kennt, das auslösende Moment abgab, werden doch hier beliebig hohe Dimensionen in Betracht gezogen; tatsächlich allerdings wird nicht über die neunte Potenz („solido — solido — solidum") hinausgegangen. Der Bruchstrich (S. 259) tritt wieder in seine Rechte; auch + und — (S. 307) werden in bekannter Weise verwendet, wogegen = eine unbestimmte Differenz, unserem $\pm$ vergleichbar, charakterisiert. Bekannte Größen sind die Konsonanten; unbekannte die Vokale, und zwar gibt es nur große Buchstaben; den Gebrauch, x, y, z in dem uns in Fleisch und Blut übergegangenen Sinne zu benützen, hat erst Descartes eingeführt.

Eine zweite Schrift Vietas, „Ad Logisticen speciosam notae", die 1591 schon fertig gewesen zu sein scheint, ist erst 1646, und auch da nicht vollständig, an die Öffentlichkeit gekommen. Hier fällt uns als vorteilhafte Neuerung die durch die geometrische Einkleidung in ihrer allgemeinen Bedeutung kaum beeinträchtigte Wortbildung „longitudo coëfficiens" auf; das Partizipium ist nicht wieder aus der mathematischen Kunstsprache verschwunden. Sonst ist noch die Anleitung zur Lösung der unbestimmten Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ (S. 56) bemerkenswert; nach Vieta ist

$$z \text{ mit } A + \frac{B \text{ quadrato}}{A} \left(\text{soviel wie } \frac{A^2 + B^2}{A}\right),$$

$$y \text{ mit } B\,2 \text{ (soviel wie } 2\,B),$$

$$x \text{ mit } A = \frac{B \text{ quadrato}}{A} \left(\text{soviel wie } \pm \frac{A^2 - B^2}{A}\right)$$

zu identifizieren. Gleichfalls 1591 dürften auch die „Zeteticorum libri V" von 1593 entstanden sein, die sich als eine Art Diophantus redivivus zu erkennen geben, und nicht anders verhält es sich mit „Tractatus primus et secundus de aequationum recognitione et emendatione", erst 1615 von Anderson unter die Presse gebracht, dem Vieta testamentarisch seine nachgelassenen Handschriften anvertraut hatte. Diese Traktate zeigen uns, daß man mit dem neuen Kalkul, dessen Potenzdarstellung noch etwas modifiziert wird, leicht algebraische Aufgaben lösen konnte. Neu, wenn auch wohl auf italienische Anschauungsweise zurückweisend ist hier die Betonung des Zusammenhanges von Gleichungen und geometrischen Progressionen. Den irreduziblen Fall der kubischen Gleichung behandelt Vieta nicht, wie Bombelli (S. 356), algebraisch, sondern schiebt ihn in die Lehre von der Winkelteilung hinüber. Endlich begegnen wir da noch der Betonung des Umstandes, daß zwischen Koeffizienten und Wurzeln einer Gleichung ein intimer Zusammenhang obwalte, und einer selbständigen, vom Verfahren Ferraris (S. 355) allerdings nicht prinzipiell abweichenden Herleitung der kubischen Resolvente einer Gleichung vom vierten Grade. Die 1600, also noch zu Lebzeiten des Verfassers, durch Ghetaldi veröffentlichte Abhandlung „De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione“ ist durch die Ausziehung von fünften und sechsten Wurzeln, sowie durch eine neue und verwendbare Näherungsmethode für höhere Wurzeln beachtenswert, indem beides Vieta, der sogar vor der trinomischen Gleichung $x^6 + 6000\,x = 191246976$ nicht Halt macht, neben dem Beherrscher des Buchstabenrechnens auch als höchst gewandten Zahlenrechner kenntlich macht.

Werfen wir noch einen Rückblick auf die hier in Frage kommenden Leistungen dieses Mannes, dessen mathematisches Talent bei einer anderen Gelegenheit noch augenfälligere Triumphe feiert, so werden wir konstatieren müssen, daß nicht sowohl geniale Erfindung, als vielmehr ein ausgeprägter Sinn für Zweckmäßigkeit und Anordnung das Zeichen ist, unter welchem die ganze Neuerung steht. Fast mit einem Schlage gibt der des Zeitbedürfnisses wie kein anderer kundige Mann seinen Fachgenossen das Mittel an die Hand, von allen formellen Verbesserungen Abstand nehmen und sich nun ganz und gar ihrer Sache hingeben zu können. Die wohltätigen Folgen seines Eingreifens werden denn auch bald sichtbar; Girard und Harriot konnten nur in Anlehnung an Vieta das leisten, was ihre Namen berühmt gemacht hat.

Girards (S. 333) „Invention nouvelle en l'algèbre“ von 1629 (Neuauflage von Bierens de Haan, Leiden 1884) ist eine wirklich bedeutende Arbeit. Er versuchte sich auch in der Weiterbildung des algebraischen Formalisums, gab Zeichen für $>$ und $<$, die sich allerdings nicht durchgesetzt haben, und suchte die gebrochenen Exponenten allgemein durchzuführen. Was vor ihm (S. 351) mehr nur geahnt worden, ist ihm restlos klar: Man kann die Wurzeln einer Gleichung nach bestimmten Regeln aus den Koeffizienten zusammensetzen, und eine Gleichung vom $n$ten Grade hat n Wurzeln. Freilich, so erklärt er bestimmt, gelte letzteres nur, wenn man eben auch die komplexen Werte mitzähle. Jene symmetrischen Funktionen hat er für die Gleichungen beliebigen Grades bis zur Grenze 4 wirklich gebildet: Für die Gleichung

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \ldots \mp a_{n-1} x \pm a_n$$
$$\equiv (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n) = 0$$

gibt er die nachstehenden vier Relationen an:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = a_1 \,,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 = a_1^2 - 2a_2 \,,$$
$$x_1^3 + \ldots + x_n^3 = a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3 \,,$$
$$x_1^4 + \ldots + x_n^4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4 \,.$$

Wer diesen Weg beschritten, der hat wohl ein Recht darauf, als einer der Begründer einer allgemeinen Theorie der höheren Gleichungen gefeiert zu werden.

Allgemeinen Charakters waren auch die Untersuchungen Thomas Harriots (1560—1621), dessen „Artis analyticae praxis" erst zehn Jahre nach seinem Tode (London 1631) von W. Warner herausgegeben wurde. Dieser auch als Astronom und Geodät hervorragende Mann hat zwar ersichtlich von Vieta gelernt, dessen er auch ehrende Erwähnung tut, aber er war imstande, das Gelernte selbständig zu verarbeiten und auszugestalten. Seinem Landsmanne Recorde (S. 344) hat er das Gleichheitszeichen entnommen; die Zeichen $>$ und $<$ dagegen, wie wir sie heute noch tagtäglich verwenden, sind sein Eigentum. An die Stelle der großen Buchstaben (S. 358) sind bei Harriot die bequemeren kleinen getreten, dagegen wird z. B. die vierte Potenz von a noch minder empfehlenswert als $aaaa$ angeschrieben. Das Wort „Canon" in dem uns naheliegenden Sinne haben wir früher schon kennen gelernt (S. 358); deswegen kann uns hier die „aequatio canonica" nicht überraschen. So heißt die Gleichung $n$ten Grades dann, wenn x^n nur den Koeffizienten 1 aufweist und rechts vom Gleichheitszeichen das von x freie Glied steht. Weniger fortschrittlich als Harriots Präparierung der Gleichung für den Auflösungsakt ist seine Abneigung gegen negative Wurzeln. Wenn man somit auch dem Werke nicht den gleichen Rang, wie dem Girards, wird zuerkennen können, so verbleibt ihm doch das nicht unerhebliche Verdienst, die allgemeine Behandlung der algebraischen Gleichungen über den von Vieta erreichten Standpunkt hinüber um ein Stück vorwärts gebracht zu haben. In der ihr durch Girard und Harriot erteilten Gestalt geht die Gleichungslehre, nunmehr ohne konsequente Anwendung der Buchstabenrechnung undenkbar, den großen Reformen entgegen, welche ihr noch das XVII. Säkulum bringen sollte.

V. Die Logarithmen. Wohl auf keinem anderen Arbeitsfelde sieht sich der fast durchgängig geltende Erfahrungssatz, daß der geschichtliche Hergang auch den didaktisch gangbarsten Pfad vorzeichne, so gründlich ad absurdum geführt wie in der Erfindungsgeschichte der Logarithmen. Denn da hat sich alles ganz anders abgespielt, als etwa eine philosophisch konstruierende Geschichtswissenschaft erwarten ließe. Der nächstliegende Gedanke wäre offensichtlich der: Zur Summe $a + b = c$ gehören die beiden umgekehrten Operationen $a = c - b$, $b = c - a$; zum Produkte $ab = c$ gehören die beiden umgekehrten Operationen $a : c = b$, $b = c : a$. Zwischen diesen Umkehrungen besteht jeweils kein Unterschied. Soll dagegen, wenn die Potenz $a^b = c$ vorliegt, die Umkehrung vollzogen werden, so ist zwar die als Radizierung bezeichnete Berechnung von a aus b und c längst bekannt, aber ganz eine andere Forderung ist die, b aus a und c zu berechnen. Diese Schlußfolgerung, welche direkt zur Logarithmierung, zu $b = {}^a\log c$, führt, ist niemals bisher von einem Mathematiker gezogen worden. Aber auch der zweimal, bei Chuquet (S. 314) und Stifel (S. 348), hervorgetretenen Nebeneinanderstellung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe blieb jede praktische Ausnützung versagt. Nicht theoretische Erwägung, sondern einzig allein das Bedürfnis, umständlichen Zahlenrechnungen aus dem Wege zu gehen, hat die Arithmetik in die Lage versetzt, den sechs altbekannten Spezies eine neue, siebente Rechnungsoperation hinzuzufügen.

Jenes Bedürfnis war freilich auch ein dringendes geworden. Ihm entgegenzukommen, war, wie das nächste

Kapitel dartun wird, die uns in ihren ersten Spuren bekannt gewordene Prosthaphaeresis (S. 220) erheblich ausgebildet worden. Nicht für unwahrscheinlich halten wir es, daß Antonio Maginis (1555—1615) „Tabula tetragonica“ von 1592, welche die Quadrate aller ganzen Zahlen $\leqq 100000$ enthielt, ähnlich wie die nützlichen Tafeln von Blater in der Gegenwart, der Erleichterung des Multiplizierens mit zu dienen bestimmt waren; ist doch

$$ab = \tfrac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right].$$

Ausgesprochenermaßen waren in den Dienst dieser Aufgabe die „Tabulae Arithmeticae προςθαφαιρεσεως universales“ (Augsburg 1610) des bayerischen Staatskanzlers Georg Herwart von Hohenburg (1553—1622) gestellt, ein voluminöser Band, in dem selbst ernsthafte Schriftsteller einen Vorläufer des Logarithmenrechnens erblicken wollten, der aber doch nur so viel lehrt, daß es höchste

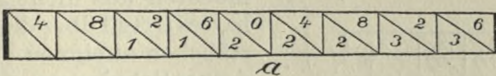


Fig. 48.

Zeit war, ein zweckmäßigeres Hilfsmittel der Produktbildung zu ersinnen, als es die Nachschlagung und Summierung der dort aufgespeicherten Teilprodukte sein wollte.

Auch manche Erleichterungen des Rechnens, die uns für die Jahrhundertwende typisch zu sein scheinen, müssen als Indizien für die herrschende Not im Ziffernrechnen gedeutet werden. Dahin gehört die um 1600 entstandene abgekürzte Multiplikation, eine Erfindung Bürgis (S. 342). Aber auch die Rechenstäbchen des durch diese neue Idee allerdings nicht unsterblich gewordenen Napier (S. 350) müssen in solchem Zusammenhange genannt werden. Die hierher gehörige Schrift („Rhabdologia“, Edinburgh 1617) beschreibt zehn länglich-parallelepipedische Stäbe, von denen jeder in neun Würfelchen zerfällt. Nach Maßgabe von Fig. 48a ist jedes so entstandene kleine Quadrat durch eine Diagonale in zwei Dreiecke geteilt, und in jedes Quadrat sind die Vielfachen der Zahlen zwischen 1 und 9 eingetragen, so zwar, daß zweiziffrige Zahlen von der Diagonale zerschnitten werden. In unserem Falle haben wir: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36. Wenn nun zwei Zahlen multipliziert werden sollen, so wird dies für jede Ziffer des Multiplikanden mit jeder Ziffer des Multiplikators getan, zu welchem Ende man die Stäbe so aneinander legt, daß die für Einer, Zehner usw. bestimmten Quadrate sich gegenseitig entsprechen. Für vorkommende Nullen muß ein leerer Stab, der also auch nicht fehlen darf, hinzugenommen werden. Soll etwa 64 mit 317 multipliziert werden, so ergeben sich, indem zuerst mit 4, dann mit 6 durchmultipliziert wird, die in Fig. 48b vorgeführten Anordnungen, d. h. man hat die Teilprodukte 28, 4, 12 mit der Summe 1268 resp. 1902, und so ist die gesuchte Größe des Produktes gleich 19020 + 1268 = 20288.

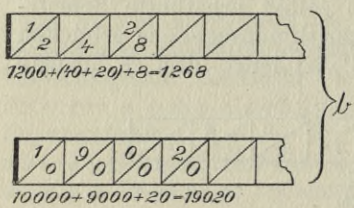


Fig. 48.

Auch die Division kann so bewerkstelligt werden. Wir möchten uns nicht gerne ein hartes Urteil über die Rechenstäbchen aneignen. Ein moderner Schulmann, *Haigenmooser*, läßt sie unter dem pädagogischen Gesichtspunkte als einen recht nützlichen Behelf gelten, und schließlich ist es doch die nämliche Basis, auf welcher der jedem Ingenieur der neuesten Zeit absolut unentbehrliche *logarithmische Rechenschieber* („*Sliding Rule*“) erwachsen sollte.

Aber freilich — es waren das doch nur *Palliativmittelchen*, welche der großen Bedrängnis, zumal des *trigonometrischen Rechners*, keine Abhilfe bringen konnten. Das *große Mittel*, das *Logarithmenrechnen*, war aber bereits im Werden. Wie so oft, wenn irgend eine bedeutende Erfindung oder Entdeckung „in der Luft liegt“, waren mehrere, in diesem Falle *zwei* selbständige Geister gleichzeitig auf dem Wege, das Ziel zu erreichen, und zwar bedarf es keiner besonderen Beweiserhebung, daß *die vollste Unabhängigkeit* vorhanden war. Von allem weiteren abgesehen, spricht dafür schon die *grundverschiedene Art und Weise*, wie beide Männer, *Napier* (S. 350) und *Bürgi* (S. 342), an ihr Problem herangetreten sind.

Lord John Napier of Merchiston (1550—1617), latinisiert als Neperus (S. 350) und kurzweg auch als Neper bekannt, übergab sein grundlegendes Werk („Mirifici Logarithmorum canonis descriptio", Edinburgh 1614) noch vor dem Erscheinen der demselben Ziele nachstrebenden Schrift Bürgis der Welt und mag darum hier an erster Stelle genannt werden. Da er auf die Herleitung seiner „numeri arteficiales" hierin noch nicht näher eingegangen war, so arbeitete er darüber noch eine zweite Schrift („Mirifici Logarithmorum canonis constructio", ebendort 1619) aus, deren Druckvollendung sein Sohn Robert an Stelle des inzwischen verstorbenen Vaters besorgte. Seine Tendenz ging bestimmt dahin, jede der vier Operationen der zweiten und dritten Rechnungsstufe um einen Grad zu erniedrigen und so die Bewältigung lang-

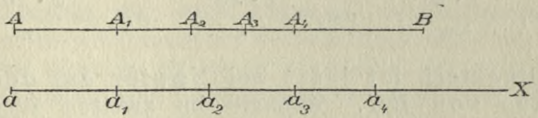


Fig. 49.

wieriger Zahlenrechnungen nach Möglichkeit zu erleichtern. Aber an gewöhnliches Ziffernrechnen dachte er kaum, denn für ihn stand ausschließend die Trigonometrie im Vordergrunde, wie schon seine ganze Auffassung beweist. Es sei (Fig. 49) die Strecke AB der Sinus totus oder Radius; auf ihr bewegt sich von A aus ein Punkt so, daß sich die von ihm zurückgelegten Wege in geometrischer Progression verkleinern; A_1, A_2, A_3, A_4 ... sind die Punkte, in denen er nach Umfluß der ersten, zweiten, dritten, vierten ... Zeiteinheit angelangt ist. Setzt man, wie es für die damaligen Tafeln üblich geworden war, $AB = 10^7$, so ist etwa

$$AA_1 = \frac{10^7}{n}, \quad A_1A_2 = \frac{10^7}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad A_2A_3 = \frac{10^7}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \ldots,$$

woraus weiter folgt:

$$AA_1 = \frac{10^7}{n}, \quad AA_2 = \frac{10^7}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2, \quad AA_3 = \frac{10^7}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 \ldots$$

Bildet man die Differenzen, so wird

$$BA_1 = 10^7\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad BA_2 = 10^7\left(1-\frac{1}{n}\right)^2,$$
$$BA_3 = 10^7\left(1-\frac{1}{n}\right)^3 \ldots$$

Die von B aus gerechneten Strecken werden als die stets kleiner werdenden Sinusse betrachtet. In Fig. 49 ist der Strecke AB aber auch eine von a aus ins Unendliche verlaufende Gerade aX zugeordnet, und von a aus läuft, mit dem vorigen Mobile gleichzeitig beginnend, ein bewegter Punkt in arithmetischer Progression fort, so daß er in gleichen Zeiten auch gleiche Wege zurücklegt, die $a a_1$, $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4 \ldots$ sein sollen. Es ist also

$$a a_1 = \frac{1 \cdot 10^7}{n}, \quad a a_2 = \frac{2 \cdot 10^7}{n}, \quad a a_3 = \frac{3 \cdot 10^7}{n} \ldots$$

Allgemein ist jetzt bei Napier aa_k der Logarithmus von BK. Weshalb im zweiten Werke „die künstliche Zahl" als *λόγον ἀριθμός* definiert ward, ist nicht ganz klar erläutert, aber doch wohl verständlich; jedenfalls hat diese Bezeichnung als Logarithmus Bürgerrecht in der Zahlenkunde erlangt.

Die eine Aushilfsrolle spielende geometrische Reihe wird von Napier in überaus komplizierter, heutzutage überhaupt nicht mehr deutlich zu übersehender Weise aus vier Reihen zusammengesetzt, und es hat mancherlei Bemühungen, an denen sich J. Biot, Matzka, Cantor und v. Braunmühl beteiligten, erfordert, um das Bildungsgesetz, dessen Charakteristik uns hier zu weit führen würde, einigermaßen evident zu machen. Es wird im Originale zuerst eine „Radicalis tabula" hergestellt, aus welcher dann die erste logarithmisch-trigonometrische Tafel erwächst, von welcher die Geschichte weiß.

Unsere Beschreibung konnte nur kurz sein, aber so viel dürfte sie doch mit Sicherheit haben hervortreten lassen, daß es ein Unding ist, die Napierschen mit den natürlichen Logarithmen identifizieren zu wollen. An eine Basis, an ein System ist überhaupt gar nicht gedacht worden; nur in einem von Napier erst sehr spät hinzugesetzten Nachtrage wird die Bemerkung hingeworfen, man werde den Zweck, der dem „Kanon" zugrunde liege, wohl noch besser erreichen, wenn man $\log 1 = 0$ setze und 10^1 oder 10^{-1} zum Ausgangspunkte nehme. Will man von einer Napierschen Grundzahl sprechen, so muß man sie durch Rechnung künstlich in den Ideengang des Erfinders hineinverlegen. Auch dann ist sie aber nicht e, sondern — nicht genau, vielmehr nur angenähert — dessen reziproker Wert.

Wir haben die Zuordnung von arithmetischer und geometrischer Reihe als für diese erste Logarithmen-Publikation maßgebend erkannt, und ebenso, jedoch freilich unter gänzlich abweichenden Gesichtspunkten, war sie es für Bürgi, der keine Umwege aufsucht, sondern unmittelbar zu jeder Zahl deren Logarithmus zu bestimmen sich vorgesetzt hat. Als die erste Schrift Napiers bekannt wurde, war jener längst mit seinen neuen Zahlen, für die er aber niemals ein selbständiges Kunstwort schuf, im reinen, denn es ist so gut wie sicher anzunehmen, daß er die einschlägigen Untersuchungen schon 1603 begonnen und 1611 zum Abschlusse gebracht hatte. Das davon Rechenschaft ablegende Werk („Arithmetische und Geometrische Progreßtabulen") ist aber erst 1620, als der schottische Forscher längst vorangegangen war, zu Prag gedruckt worden. Auf dem Titelblatte schließt sich an die mitgeteilten Worte an: „sambt gründtlichem Unterricht . . .", allein es scheint, daß diese Erläuterung der in ihrer Nacktheit natürlich etwas schwer verständlichen Zahlentafeln überhaupt nicht unter die Presse gekommen ist. Handschriftlich beigebunden hat ihn Gieswald, ein um diese Studien verdienter Gelehrter, in Danzig vorgefunden. Bürgi bezeichnet die Glieder einer arithmetischen Reihe als die roten Zahlen, die Glieder der zugeordneten, nach den Potenzen von 2 fortschreitenden geometrischen Reihe als die schwarzen Zahlen. Da die roten Zahlen, und das sind doch die Logarithmen, zuerst, die schwarzen Zahlen erst nachher kommen, so ist die „Progreßtabul" nicht sowohl eine Logarithmen-, sondern vielmehr eine Antilogarithmentafel.

Nach Deutschland wurde Napiers folgenreiche Erfindung durch Benjamin Behr oder Ursinus übertragen, der schon 1618 zu Köln eine etwas vereinfachte Ausgabe des „Kanons" veranstaltete und sie durch eine Proportionaltafel bereicherte. Dieses kleine Buch bekam Deutschlands hervorragendster Astronom Johannes Kepler (1571—1630) zu sehen, und da es vielleicht keinen Bürger der damaligen Gelehrtenrepublik gab, der — bei seiner Berechnung der Marsbahn — so tief in umständliche Zahlenrechnung verstrickt gewesen wäre, als gerade er, so wurde er, der ohnehin schon durch Bürgi eingeweiht sein mochte, auf die neue Erfindung höchst begierig, ließ sich Napiers Originale kommen und sandte diesem ein begeistertes Dank- und Lobschreiben, das ihn freilich nicht mehr lebend erreichen konnte. Eifrig begann er Propaganda für die Logarithmen zu machen, ohne jedoch konservativere Naturen, wie seinen alten Tübinger Lehrer Michael Maestlin, von deren Nutzen überzeugen zu können. Aber auch die Öffentlichkeit sollte überzeugt werden, und so gewann Kepler seinen gerade damals überaus drückenden Verpflichtungen die Zeit ab, schon 1622 seine „Chilias Logarithmorum" erscheinen zu lassen, welche Frisch in den siebenten Band seiner mustergültigen Gesamtausgabe aller Kepleriana aufgenommen hat. Die paradox anmutende Einrichtung der Napierschen Tafel behält Kepler nicht bei, sondern es schreiten bei ihm die Zahlen, die ebenfalls als Sinusse gedacht sind, von 10 000 bis 10 000 000 fort; seine Berechnungsnorm ist durch die Beziehungen

$$\log a = n d\,, \quad a = 10\,(1 - d)^n$$

gegeben. Obwohl also der trigonometrische Endzweck der für die Konstruktion der Tabellen maßgebende war, sind doch diese Logarithmen zunächst Zahlenlogarithmen und erst in zweiter Linie goniometrische Logarithmen. Ein auch die Gesetze des Logarithmierens darlegender Nachtrag zu dieser Schrift wurde 1624 als „Supplementum Chiliadis Logarithmorum" veröffentlicht, und im gleichen Jahre trat des Ursinus „Magnus Canon logarithmicus" in Cöln a. Rh. ans Licht.

Schon jedoch war in England eine Umgestaltung eingetreten, die den Erfolg, den die Anstrengungen der beiden deutschen Mathematiker unter anderen Umständen hätten haben müssen, nicht zur Reife gedeihen ließ. Der mit Napier befreundete und von ihm persönlich angeregte Oxforder Professor Henry Briggs (1556—1630) griff nämlich den, wie wir sahen, von dem Erfinder der Logarithmen gelegentlich hingeworfenen Gedanken, die Zahl 10 zur Basis eines Systemes zu machen, mit Geschick und Eifer auf („Logarithmorum chilias prima", London 1617; „Arithmetica logarithmica", ebendort 1624; „Trigonometria britannica", posthum erschienen, Gouda 1633). Diese zehnteiligen Logarithmen, welche die mit Recht für solche Erleichterung einer bei Napier und auch noch bei Kepler schwierig sich darstellenden Sache als Briggssche bezeichnet hat, waren bis auf 14 Stellen berechnet.

In Großbritannien drang diese wichtige Verbesserung so entschieden durch, daß Edward Wrights 1616 herausgekommene Napier-Übersetzung ihren Siegeszug nicht mehr zu hindern vermochte. Eine auf sieben Stellen sich beschränkende logarithmisch-trigonometrische Tafel (London 1620) hatte Edmund Gunter zum Autor, der zugleich der eigentliche Vater jener oben (S. 364) erwähnten Idee ist, das Prinzip der Rechenstäbe logarithmisch auszugestalten. Die Praxis, vorab die seemännische, hat Gunters Skale sofort willkommen geheißen. Eine eigenartige Modifikation findet sich in der oben als auf Briggs' Initiative zurückgehend angeführten, von Henry Gellibrand (1597—1637) weitergeführten „Britischen Trigonometrie", die man übrigens nicht mit dem gleich benannten, 1658 edierten Werke des John (nicht Isaac) Newton verwechseln darf. Die Triebfeder zur Herausgabe des älteren Buches war der Holländer Adriaan Vlack, damals Buchhändler in London, später in gleicher Eigenschaft zu Paris und zuletzt bis zu seinem Tode (1655) im Haag tätig. Als junger Mann lebte er in seiner Vaterstadt Gouda, wo er mit seinem Freunde De Decker die gesamte vorhandene Logarithmenliteratur durchstudierte, um daraufhin 1626 dortselbst die erste niederländische Schrift über den Gegenstand („Nieuwe Telkonst") zu verfassen. Im nämlichen Verlage von Rammaseyn wurde 1628 eine „Arithmetica logarithmica" ausgegeben, welche alle Zahlen von 1 bis 100 000 mit ihren Logarithmen enthielt, nach Glaishers Nachprüfung allerdings nicht fehlerfrei. Fünf Jahre später brachte eben diese Druckerei das Briggs-Gellibrandsche Werk und 1633, unter Vlacks eigenem Namen, die „Trigonometria artificialis sive Magnus Canon triangulorum logarithmicus". National englisch war durchaus das Tabellenwerk Nathanael Roes (London 1633), welches insbesondere das Aufsuchen der Logarithmen bequemer gestaltet. Aus Frankreichs Offizinen ging hervor Denis Henrions „Traité des logarithmes" und des Engländers Edmund Wingate „Arithmétique logarithmique" (beide Paris 1626). Deutschland ist mit zwei Namen vertreten. Keplers Schwiegersohn Jakob Bartsch (1600—1633) gab aus den Keplerschen Papieren mit eigenen Zutaten zwei Tafelwerke heraus: „Tabulae novae logarithmico-logisticae" (Sagan 1630); „Tabulae manuales logarithmicae J. Kepleri et J. Bartschii (ebendort 1631). Eine scharfe Trennung der Zahlen- und der goniometrischen Logarithmen, wie wir sie allein gewohnt sind, nahm Peter Crüger in Danzig 1634 in seiner „Praxis trigonometriae logarithmicae cum Logarithmorum tabulis ad triangula tam plana quam sphaerica sufficientibus" vor, indem er, was er denn auch eigens rechtfertigen zu sollen vermeinte, den Übergang von Napier zu Briggs nicht mitmachte. Nach Cantors wohl begründeter Ansicht war es Faulhaber (S. 350), der zuerst als Rechner sich dem Dezimalsysteme anbequemte.

Wir konnten nicht umhin, in dieser letzten Abteilung durchweg auch auf trigonometrische Fragen Rücksicht zu nehmen. Der historische Werdegang wollte es so, denn in letzter Linie sind die Logarithmen nicht aus der Arithmetik, sondern eben aus der Trigonometrie hervorgegangen. Doch ist es jetzt an der Zeit, der arithmetischen Entwicklung, welche diesem Kapitel zu schildern oblag, auch die geometrische zur Seite zu stellen.

Kapitel XX.

Die geometrischen und mechanischen Disziplinen in dem Zeitraume von 1500 bis 1637.

Neben Geometrie und Trigonometrie wird in diesem Abschnitte auch die theoretische Mechanik ein Plätzchen beanspruchen. In vereinzelten Fällen (S. 68, 93, 154) hat das ja auch schon bisher geschehen müssen, aber zu selbständiger Bedeutung ringt sie sich doch erst jetzt durch. Und sie, die etwas später unter den Händen eines L. Euler, D. Bernoulli und Lagrange geradezu eine Unterabteilung der analytischen Mechanik wurde, trägt im XVI. und anfangenden XVII. Jahrhundert noch ganz einen geometrischen Stempel aufgeprägt. Die Geometrie wächst nunmehr eben überhaupt an Umfang und Inhalt ganz beträchtlich, und es läßt sich die Gliederung des Stoffes nach einer Anzahl selbständiger Untertitel nicht umgehen. Der Didaktik, sei es daß sie sich auf wiederbelebte Schriftsteller des Altertums oder auf eigene Produktion stützt, soll die erste Stelle gehören. Alsdann müssen planimetrische und stereometrische Spezialfragen, die damals das gelehrte Publikum fesselten, erörtert werden; ganz für sich indessen erheischen Kreisrechnung und Kreisteilung ihre Behandlung. Nicht sehr viel ist von der Kurvenlehre zu melden, die aber doch immerhin auch ihr Recht fordert. An eine Übersicht über die jetzt mehr und mehr zur Beliebtheit gelangenden Zeichnungsinstrumente schließen sich kurze geschichtliche Darstellungen der Kartenprojektionslehre und praktischen Geometrie. Damit sind wir bei der Trigonometrie angekommen, welche ihrerseits wieder drei Paragraphen umfaßt: Theoretische Weiterbildung, trigonometrische Einzelprobleme und trigonometrische Tafeln. Zum Schlusse sind die noch langsamen Fortschritte auf dem Gebiete der Lehre von Gleichgewicht und Bewegung zu kennzeichnen.

I. Geometrischer Unterricht. Weitaus überwiegend sucht das Reformationszeitalter noch seine Bildung bei den Alten. Demzufolge ist noch immer, ja infolge der durch Buchdruckerkunst und erleichterten Verkehr gebotenen Erleichterungsmittel jetzt erst recht die Ausgabe, Übersetzung und Bearbeitung griechischer Autoren an der Tagesordnung. Unsere Skizze trennt diese einzelnen Erneuerungsformen nicht, sondern erstattet nur von der gesteigerten Versenkung in antike Geistesarbeit summarischen Bericht. Von solchen Gelehrten, die, wie Maurolycus und Commandinus, in der Kommentierung recht eigentlich ihre Lebensaufgabe erblickten, darf mit Rücksicht auf früher Gesagtes Abstand genommen werden.

In größerem Stile arbeitete Simon Grynaeus in Basel, der 1533 den Euclides samt den Scholien des Proclus (S. 159) und fünf Jahre später den Almagest (S. 133) herausgab. Eben auch in Basel kam 1544 Archimedes durch die Mühwaltung des Thomas Jaeger (Venatorius) ans Licht. Was dagegen Tartaglia für den großen griechischen Geometer getan zu haben behauptet, war wenig mehr als ein Wiederabdruck der Übersetzung des Wilhelm von Moerbeke (S. 276). Auch der latinisierte Apollonius (S. 100) des Giambattista Memmo ist nicht von hohem Werte, weil die Sachkenntnis des Translators sehr viel zu wünschen übrig ließ, und überhaupt blieb dieser verhältnismäßig schwierigste Geometer noch lange Zeit im Dunkeln, da auch Vietas „Apollonius Gallus“ zwar als Wiederherstellungsversuch dem Unternehmer ein glänzendes Zeugnis (Taktionsproblem) ausstellt, unmittelbare Einsicht in griechische Denkweise aber nicht vermitteln konnte, was in der Hauptsache auch für Ghetaldis analoge Arbeiten (1607) Geltung behält; nicht minder ist des jüngeren Snellius „Apollonius Batavus“ (1608) nicht eigentlich historisch. Werners deutscher Euclid, abgefaßt auf Veranlassung und Kosten eines Nürnberger Bürgers, der für seinen Sohn ein gutes Lehrbuch haben wollte, ist leider verloren gegangen. Dem gleichen Autor widmeten ihre Kräfte Camerarius (S. 334) im Jahre 1549, Mondoré im Jahre 1551, De la Pène (Optik, Katoptrik und Harmonik) im Jahre 1557, in welchem derselbe auch den Theodosius (S. 119) abdrucken ließ. Im gleichen Jahre trat Jacques Peletier (Peletarius) mit seiner Euclidausgabe hervor. Xylanders Diophant kennen wir bereits (S. 351); der verdiente Gelehrte veranstaltete auch von Psellus (S. 169) eine Ausgabe und von Euclid eine — zeitlich nicht viel spätere, nämlich 1562 in den Druck gegebene — Übersetzung; die erste deutsche, die man hat, und die freilich, weil als Leser „einfältige deutsche Liebhaber dieser Künste" vorausgesetzt waren, nur die Propositionen gab und auf die Beweise verzichtete. Recht eigentlich für Schulzwecke, in erster Linie für Johann Sturms hochberühmte Straßburger Akademie, war der griechisch-lateinische Euclid bestimmt, zu dessen Lieferung sich Konrad Rauchfuß (Dasypodius) und Christian Herlin 1564 bis 1566 verbunden hatten. Francesco Barozzi (Barotius, 1538—1590?) übertrug ins Lateinische den Proclus und einiges von Hero, während François Candalla (Flussates, 1502—1594?) bei seiner Bearbeitung der „Elemente" (1566 und 1578) besonders auf selbstgelieferte Zusätze Gewicht legte. Englische Übersetzer des Hauptwerkes waren (1570) Henry Billingsley und John Dee (1527—1608), der nach arabischer Vorlage die euklidische Schrift von der „Figurenteilung" wiederherstellte, wobei ihm (1570) Commandino zur Seite stand, und 1576 empfing auch Spanien durch Rodrigo Zamorano die sechs ersten Bücher des Altmeisters. Ein musterhafter Übersetzer und Erläuterer desselben war auch Clavius, der von Hause aus nicht Nagler oder Schlüssel, sondern Clau hieß; seine Ausgabe von 1574 erlebte mit Recht mehrere Auflagen, so wie auch sein Kommentar zu Sacrobosco (S. 285) in seiner Art musterhaft war. Giuseppe Auria edierte 1587 den Theodosius, der uns schon bekannte Baldi (S. 334) 1589 mechanische Schriften des Hero. Eine nicht üble Zusammenstellung und Prüfung aller mathematischen Stellen bei Aristoteles hat man (1615 als Anhang zu dem minder gut zu zensierenden Geschichtswerke gedruckt) von Blancanus (S. 334). Claude Hardy dankt man (1625) die erste Originalausgabe der euklidischen „Data" (S. 81). Auch das Mysterium der „Porismen" suchten kongeniale Geister zu ergründen. Um ihre Restitution bemühten sich Girard (S. 333, 360) und ein noch genialerer Mann, der jedoch nur noch mit seinen Jugendjahren, die eben hier in Betracht kommen, unserer Periode zuzurechnen ist. Das war Pierre Fermat, ein Gascogner (1601—1665). Fünf Sätze, die er in jene Kategorie versetzte, sind uns bekannt, unter ihnen der folgende (Fig. 50): Wenn einem Kreise ein Dreieck ABC eingeschrieben ist, und wenn dadurch auf dem Durchmesser DE ($\parallel AC$) eine Strecke FG abgeschnitten wird, so ist das Produktverhältnis

$$DF \cdot EG : DG \cdot EF$$

konstant. Zum Schlusse muß noch David Rivaults (1571—1616) kommentierte Ausgabe des Archimedes genannt werden. Nicht den Titelworten, wohl aber dem Sinne nach gehört hierher auch Pierre Herigones „Cursus mathematicus" (zuerst Paris 1634 und dann wiederholt aufgelegt). Das Buch gibt in seinem ersten Bande Euclides und Apollonius (nach Divinationen) als beste Einleitung in das Studium der Geometrie; diese selbst und die Arithmetik füllen in mehr systematischer Form die anderen fünf Bände, die im übrigen auch in einer originellen, anderwärts allerdings nicht angenommenen Zeichensprache ein auszeichnendes Merkmal besitzen.

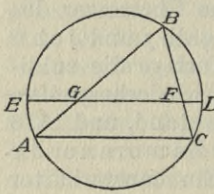


Fig. 50.

Einige weitere Bemerkungen sollen diese Überschau vervollständigen. Die Euclidbearbeitung eines Tübinger Professors Scheubel von 1520 trägt der Schrulle Rechnung, keine Buchstaben zu den Figuren hinzuzusetzen, sondern die charakteristischen Punkte mit Worten zu beschreiben. Das mochte im Schulsaale angehen, wenn der Lehrer mit dem Demonstrationsstabe an der schwarzen Tafel erklärte, würde aber einen Leser oft in die schlimmste Verwirrung gestürzt haben. Das fünfte Buch der στοιχεῖα (S. 75) benützte der Lüneburger Sthen 1564 zu einer eigenartigen mathematischen Übung im Debattieren. Im großen und ganzen war man um 1600 doch zu einer recht guten Einsicht in die griechische Geometrie durchgedrungen, wozu vielleicht am meisten Clavius beigetragen hatte, der auch mit der sonderbaren Lehre aufräumte, von Euclid stammten nur die Sätze, von Theo Alexandrinus (S. 158) aber die Beweise. Solch märchenhafte Hirngespinste über den Begründer der geometrischen Systematik, wie sie noch 1595 Helmreich zum besten gab, sind seit 1600 aus der Literatur verschwunden. Als ein hocherfreuliches Zeichen des Zusammenwirkens mathematischer und antiquarischer Gelehrsamkeit im XVII. Jahrhundert sind dagegen Henry Saviles (1549—1622) an der Universität Oxford gehaltene und dort 1621 veröffentlichte Vorlesungen zur Einführung in die griechische Geometrie zu begrüßen.

Geometrische Lehrbücher, welche sich nicht aufs engste an die antiken Vorbilder anschlossen, gab es im XVI. Jahrhundert kaum (Ramus?) und konnte es auch wohl nicht geben. Die Hochachtung vor den großen Meistern der Vergangenheit duldete in einem doch immer noch vorwiegend humanistischen Zeitalter keine entschiedenere Abweichung von der Norm. Als relativ selbständig sind des Charles Bouvelles „Geometriae introductionis libri sex“ (Paris 1503; in französischer Sprache mehrfach nachgedruckt) anzuerkennen. Wohl gab es für den Unterricht bestimmte Schriften, aber sie hatten ein aus Ungelehrten, aus Praktikern sich zusammensetzendes Leserpublikum im Auge und leisteten auf Strenge Verzicht. Der Typus dieses Schrifttums ist das viel genannte, auch in fremde Sprachen übertragene Werk des großen Künstlers Albrecht Dürer von Nürnberg (1471—1525), der, seinem Kollegen Lionardo da Vinci in jeder Beziehung ähnlich, auch über Befestigungskunst und über die anatomischen Proportionen des Menschen- und Pferdekörpers geschrieben und auch als Zeichner einer Sternkarte sich in Ansehen gebracht hat. Hauptsächlich kommt in Frage „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen und gantzen Corporen, durch Albrecht Dürer zusamen gezogen ...“, Nürnberg 1525. In vier Kapiteln, deren beide letzte die Raumlehre zum Gegenstande haben, wird der Stoff in ganz leidlicher Ordnung und mit pädagogischer Geschicklichkeit abgehandelt. Wir haben im folgenden einzelne wichtigere Punkte herauszuheben. Dürer inauguriert eine gewisse Literaturgattung, die aber kein seiner „Underweysung“ gleichwertiges Erzeugnis aufzuweisen hat. Solche Autoren sind Wolfgang Schmid (1535), Burkhard Mithobius (1544), der insonderheit die Visierkunst (S. 321) umfassender darzustellen trachtet, Hieronymus Rodler (1546), Augustin Hirschvogel (1550). Man darf mit einigem Rechte in diesen populären Büchlein die natürliche Fortsetzung der uns (S. 321) erinnerlichen Baumeisterpraktiken erkennen.

II. Planimetrische Spezialfragen. Einige Punkte, über die man bei den Griechen nur geringe oder gar keine Auskunft sich holen konnte, gaben strebsamen Geistern Veranlassung, selbständigen Ansichten Raum zu lassen. Dahin gehören z. B. die Näherungskonstruktionen, für welche die rigorose Auffassung der hellenischen Geometer (S. 67) nicht viel übrig hatte, da man zumal den fast nur in Betracht kommenden Hero so gut wie gar nicht kannte. Und da ist sogar ein Fortschritt zu verzeichnen, denn Cantor betont zutreffend, daß bei Dürer die ersten bewußten Konstruktionen dieser Art angetroffen würden. Das will sagen, der klar blickende Mann wußte, daß er eine exakte Lösung zu erbringen nicht imstande sei, und begnügte sich mit einer gewöhnlichen Zwecken genügenden Annäherung. So erheischt z. B. seine beliebig weit in der Genauigkeit zu treibende Trisektion des Winkels volle Beachtung.

Fast als ein geometrisches Steckenpferd möchte man für das XVI. Jahrhundert den Kontingenz- oder Berührungswinkel bezeichnen, d. h. den von Kreisperipherie und Tangente eingeschlossenen Winkel. Für unsere Anschauung genügt die Bemerkung, daß derselbe eben gleich Null ist, gar nicht existiert, und dem Sinne nach arbeiteten sich ja auch die damaligen Geometer zu dieser Erkenntnis durch, die sie aber, jeder in seiner Art, mit vielen Worten umschrieben. Cardano, Peletier, Candalla, Clavius, um nur einige bedeutendere Männer zu zitieren, nahmen an den uns eigentümlich berührenden Spekulationen teil.

Die Einzeichnung von Polygonen in einen Kreis und Ähnliches beschäftigte wiederholt die Mathematiker. So beschäftigten sich z. B. Simon Jacob und Giambattista Benedetti (1530—1590) mit der schon früher (S. 302) zur Lösung gestellten Aufgabe, aus vier gegebenen Strecken als Seiten ein Sehnenviereck zu verzeichnen. Da der große, aber eitle

Altertumsforscher Joseph Scaliger auch in dem ihm ziemlich fremden Fache glänzen wollte, und in seinen „Cyclometrica Elementa" (Leiden 1594) für diese, wie manche andere Aufgabe eine ganz falsche Lösung erbrachte, so trat Vieta (S. 358) in einem Anhange zu seinem „Pseudomesolabum et alia quaedam adjuncta capitula" (1596) auf den Plan, widerlegte Scaligers Behauptung durch eine neue, die Symmetrie der die vier Strecken darstellenden Ausdrücke betonende Betrachtung und gab selbst eine elegante Lösung. Von dieser nahm dann Johann Richter oder Praetorius (1537—1616) Akt, als er eine vortreffliche, auch den geschichtlichen Sachverhalt berücksichtigende Monographie (Nürnberg 1598) über das Problem im Drucke erscheinen ließ. Auf ein anderes Gebiet führt uns Faulhabers (S. 350) „Ingenieurschul" (Ulm 1630—1633). Hier wird die Forderung gestellt, aus sieben gegebenen Strecken als Seiten ein Kreissiebeneck herzustellen; den Radius des umbeschriebenen Kreises gibt er an. Wie er es aber gemacht habe, verschweigt er leider.

Die Sternpolygone hatte Regiomontanus (S. 301) zum geometrischen Untersuchungsobjekte erhoben. Nach ihm war es zuerst Bouvelles (S. 375), der die Winkelsumme solcher Vielecke bestimmte. Tiefer drang in diese Spezialfragen ein der Astronom Kepler (S. 368); wir werden davon bei der Kreisteilung, die ja den Untergrund für die generelle Theorie bildet, zu sprechen haben. Sehr abweichend von der gewöhnlichen Herleitung ist die des auch sonst seine eigenen Wege gehenden Polen Jan Brocki (Broscius), dessen „Aristoteles et Euclides defensus contra Petrum Ramum" (Danzig 1652) ihn zwar als Antiramisten (S. 331), dabei aber doch keineswegs als starren Anhänger der Vergangenheit kennzeichnet. Wesentlich standen aber doch nur die regulären Gebilde im Vordergrunde; erst Girard (S. 333) hat in der Einleitung zu seinem Tafelwerke von 1626 das Fundament zu einer ganz unabhängigen gestaltlichen Auffassung auch der unregelmäßigen Vielecke gelegt. Er unterscheidet drei Vierecksformen (das überall konvexe, das mit einem erhabenen Winkel versehene und das überschlagene Viereck) und geht so weiter, sich wahrscheinlich aber doch zu sehr in Einzelheiten verlierend. Als Hauptkriterium gilt ihm, wieviele Diagonalen innerhalb und wieviele außerhalb des n-Eckes liegen.

Als echt moderne Ausgestaltungen der Geometrie betrachtet man die Geometrie des Zirkels von Mascheroni und die Geometrie des Lineales von Lambert. Erstere ist denn fast auch eine „proles sine matre orata"; mit der Tendenz, möglichst viele Aufgaben allein durch den Gebrauch des Lineales aufzulösen, hat es aber schon Schwenters „Geometria practica" und zielbewußter eine „Geometria peregrinans" zu tun, die vermutlich von einem polnischen Offizier aus dem Stabe des Prinzen Wilhelm II. von Oranien zwischen 1630 und 1640 für militärische Vermessungszwecke herrührt. Nahezu koordiniert stellt sich neben beide die auch den Arabern (S. 209) nicht unbekannte Geometrie einer Zirkelöffnung, als deren höchste Vollendung Steiners Geometrie des Lineales und festen Kreises von 1826 zu gelten hat. Mit ihr gaben sich eifrig Ferro (S. 327) und Tartaglia (S. 346) ab, und Benedetti (1530—1590) weihte ihr ein eigenes Werk („De resolutione omnium Euclidis problematum aliorumque una tantummodo circini data apertura", Venedig 1553). Gewiß war das keine gering zu schätzende Gelegenheit, sich in geometrischer Kunstfertigkeit zu üben, wie ein Leser unserer Zeit aus Kuttas Spezialschrift ersehen mag. Ein leichteres Beispiel soll das Wesen der Sache veranschaulichen. Über der Strecke BC (Fig. 51) soll ein gleichseitiges Dreieck konstruiert werden; da macht man $AC = BD$ gleich der gegebenen Zirkelöffnung und verzeichnet die beiden gleichseitigen Dreiecke ACE und BDF. Die Seiten CE und BF schneiden sich in G; BCG ist das gesuchte Dreieck. Schwenter meint, sogar Kreise könne man beliebig zeichnen, wenn man die dritte Dimension beiziehe. Um A (Fig. 52) als Zentrum soll ein Kreis vom Halbmesser a, kleiner als die Zirkelöffnung r beschrieben werden. Man mache $AB = a$, beschreibe um B als Mittelpunkt einen Kreis mit r als Radius, der eine in A auf AB errichtete Senkrechte in C trifft, und ziehe BC, CA. Durch A und C lege man eine zur Zeichnungsebene senkrechte Ebene, mache in ihr $\sphericalangle ACD = 45^0$ und bezeichne mit D den Schnittpunkt von AD mit der auf der Tafel errichteten

Senkrechten. Zieht man jetzt BD, so ist $AD = AC$, $\triangle ABD \cong \triangle ABC$, also auch $BD = BC = r$, und ein Zirkel von der Öffnung r, dessen Spitze in D eingesetzt ist, zeichnet in der Tafelebene einen Kreis, dessen (ebener) Halbmesser $AB = \sqrt{r^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{r^2 - \overline{AC}^2} = a$ selbst ist. Die Hilfskonstruktionen durften als bekannt vorausgesetzt werden.

III. Stereometrische Spezialfragen. Eingehendere Anweisung zu Volumenberechnungen erteilen Tartaglias „Quesiti ed inventioni diverse“ (S. 346). Die Netze der Körper herzustellen hat sich Dürers Hauptwerk angelegen sein lassen, an das sich auch Stifel (S. 348) anschließt. Von den regulären Polyedern, mit denen sich noch ganz zu Ende des XV. Jahrhunderts

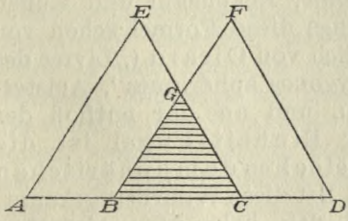


Fig. 51.

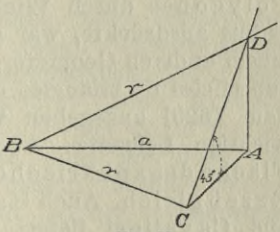


Fig. 52.

Hermolaus Barbarus beschäftigte, wird im folgenden wenig gesprochen; erwähnenswert sind das — freilich nur einem Zufalle zu verdankende — Vorkommen eines regulären Sternpolyeders in der Modellzusammenstellung des Nürnberger Zeichners und Silberschmiedes Wenzel Jamnitzer (auch Jamitzer oder Gamiczer) aus dem Jahre 1568 und Candallas (S. 373) Versuch, neue halbreguläre Körper zu bilden. Sehr gründlich vertraut mit diesem Zweige der Stereometrie erweist sich schon in seinem Erstlingswerke „Mysterium Cosmographicum“ (Graz 1596) Kepler, der sich vor die Notwendigkeit gestellt sah, die Kugeln, welche er jeder der fünf damals bekannten Planetenbahnen zuordnete, als je einem der fünf Platonischen Polyeder ein- und umbeschrieben nachzuweisen. In der „Harmonice Mundi“ (Linz 1619) hat er später den Polyederbegriff auf eine sich selbst durchsetzende Flächenbegrenzung ausgedehnt und von den vier Poinsotschen Sternflächnern zwei — nach Wieners Terminologie das regelmäßige zwölf- und zwanzigeckige Sternzwölfflach — vorweggenommen, ohne daß man etwa diese seine Entdeckung als eine ungewollte bezeichnen könnte. Eine, wenn auch nur beschränkte Modalität dualer Zuordnung räumlicher Gebilde hat Maurolico aufgezeigt, indem er zugleich das Tetraeder mit vier Ecken und Flächen als „sibi respondens" bezeichnete. Broscius (S. 377), durchaus Selbstdenker, warf als der erste die Frage nach der Messung der Drei- und Vielkante auf, die dann erst lange Jahre später wieder durch die atomistischen Studien von Lesage brennend wurde. Als er 1652 die Fläche eines aus Bogen größter Kreise gebildeten Polygones durch Winkelsumme, Eckenzahl und Kugelradius ausdrückte, war allerdings diese Formel schon von einem anderen Geometer, nämlich von Girard („Livret des superficies de triangles et polygones sphériques", Amsterdam 1629) angegeben worden, und aus ihr entfloß der wichtige Lehrsatz: Auf der Einheitskugel ist die Fläche des sphärischen Dreieckes dem sphärischen Exzeß gleich. Auch Harriot hat diese Wahrheit gekannt, und Cavalieri lieferte 1632 den bekannten einfachen Beweis nach. Kaestner führte diese Aufgabe nicht mit Unrecht als einen der seltenen Fälle an, in denen die Elementargeometrie rascher und weit einfacher als die höhere Analysis ein Ziel erreichte. Der Philosoph Joachim Junge (1587—1657) berechnete um 1630 aus den sechs Kanten eines Tetraeders den Radius der umbeshriebenen Kugel.

Als eine Besonderheit darf auch nicht vergessen werden Buteos (S. 332) Plan, den Würfel ohne Zuhilfenahme des Delischen Problemes (S. 64) zu verdoppeln. Zuerst bildet er ein Parallelepipedum von der Höhe der Würfelseite a und der Basis eines Reckteckes mit den Seiten a und $2 \cdot a$, dessen körperlicher Inhalt sohin $2\,a^3$ ist. Ein zweiter Hilfskörper hat die Höhe $a\sqrt{2}$ und die Basisseiten a und $a\sqrt{2}$; das Volumen ist nicht geändert. Dann folgt ein dritter Körper mit den Seiten $a\sqrt{2}$, $a\sqrt[4]{2}$, $a\sqrt[4]{2}$, was wieder den Inhalt $a^3\sqrt[4]{2^4} = 2\,a^3$ liefert. Und so fährt man fort; jedes neue Parallelepipedum wird würfel-ähnlicher, ohne seinen Inhalt zu ändern. Es ist eine Art asymptotischer Annäherung.

IV. Kreisrechnung. Der uralte Wert von $\pi \sim \sqrt{10}$ (S. 188) wird in auffälliger Weise von Bouvelles seiner Vergessenheit entrissen; Nonius (S. 327) und Buteo wandten sich gegen die Richtigkeit seiner Konstruktion. Wenig glücklich war bei seinem Streben Simon Duchesne oder Van der Eycke, dessen Arbeiten in die achtziger Jahre zu setzen sind. Er fand zuerst $\pi \sim 3\frac{69}{484}$ und später, was noch falscher war, $\pi \sim \sqrt{\sqrt{320} - 8}$; Ludolf van Ceulens Widerlegung vermochte ihn seiner Selbstgefälligkeit nicht zu erschüttern. Noch schlimmer war Scaligers (S. 377) Kreisquadratur, die einem Archimedes Fehler nachweisen sollte; als Ludolf, damals Lehrer der Kriegsbaukunst in Leiden, auch ihm zu Leibe rückte, erklärte der hochmütige Gelehrte, mit einem „pugil" (Fechtmeister) könne er sich nicht in eine wissenschaftliche Diskussion einlassen, und erst als auch andere — Jean Errard, Clavius, Vieta, Cataldi (S. 347) — sich gegen ihn erhoben, wurde er etwas kleinlauter, ohne sich doch von seinen Irrtümern überführen zu lassen. Freilich gingen auch die Gegner mitunter zu weit, so der Heidelberger Professor Jakob Christmann, dessen „Tractatus geometricus de quadratura circuli" von 1595 in dem Satze gipfelte, es könne kein einem Kreise wirklich flächengleiches Quadrat geben. Auf Duchesnes Seite trat merkwürdigerweise der Astronom Ursus (S. 350), und gegen ihn wandte sich die „Ideae mathematicae pars prima" (Leiden 1593) des belgischen Mathematikers Adriaan van Roomen (Adrianus Romanus, 1561 bis 1615), der zeitweise auch in Würzburg und Mainz als akademischer Lehrer gewirkt hat.

Ebenderselbe hat auch positive Leistungen aufzuweisen, wie das nicht minder für Vieta und Ludolf gilt. Vieta stellte für π das erste geschichtlich nachweisbare unendliche Produkt auf; es ist ihm zufolge

$$\pi = 2 : \left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} \cdots\right].$$

Praktisch brauchbarer war das Ergebnis, das Ludolf van Ceulen (von Cöln a. Rh., 1540—1610) zutage förderte, indem er konsequent die archimedische Einengung der Kreisfläche zwischen ein- und umbeschriebene Vielecke fortführte. Er berechnete so die Zahl π auf fünfunddreißig Stellen genau, während Adrianus Romanus sich auf siebzehn beschränkt hatte. Auf fünf Stellen abgekürzt, wird $\pi \backsim 3{,}14159$ gar nicht selten als die Ludolfine bezeichnet.

Einen abweichenden Gedankengang bemerken wir bei Adrianus Metius (1571—1635), der aber eingestandenermaßen nur einen Fund seines Vaters Adriaan Antoniszon bekannter machte und vervollkommnete. Letzterer hatte die richtigen Ungleichungen $3\frac{15}{106} > \pi > 3\frac{17}{120}$ ermittelt. Der Sohn bildete — ob in Anlehnung an Chuquet (S. 314)? — einen Mittelwert und fand so

$$\pi \backsim \left(\frac{333+377}{106+120} = \frac{710}{226} = \frac{355}{113}\right).$$

Dieser Wert ist tatsächlich sehr brauchbar.

V. Kreisteilung. Unter den fürs erste ungedruckt gebliebenen, erst 1615 von Anderson herausgegebenen Schriften Vietas (S. 359) befinden sich auch die „Ad angulares sectiones theoremata in tres partes distributa“, allerdings nur bruchstückweise. In ihnen kommen, nach v. Braunmühls Erklärung, zum ersten Male algebraische Rechnungen und Umformungen in der Trigonometrie zur Verwendung. Es werden $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$ für $n = 2, 3, 4, 5, 6$ in $\sin\alpha$ und $\sin 2\alpha$ algebraisch ausgedrückt. Nun hatte Adrianus Romanus 1593 „allen Mathematikern des Erdenrundes“ eine Gleichung vom 45. Grade mit Zahlenkoeffizienten vorgelegt, deren wahre Natur Vieta bald durchschaut hatte; es war die jenem Grade entsprechende Winkelteilungsgleichung. Zwei Dreiteilungen und eine Fünfteilung mußten die Lösung herbeiführen. Man sieht, daß aus der Winkelteilung für den Fall, wenn α irgend ein aliquoter Teil oder Multiplum von π wird, sofort auch die Kreisteilung resultiert.

Dieser selbst haben Bürgi (S. 342) und Kepler ihr besonderes Interesse zugewendet. Ersterer hat die Teilungsgleichung aus sich selbst heraus entwickelt. Gewohnheitsgemäß begnügte er sich damit, das wichtige Ergebnis in seinen Privataufzeichnungen niederzulegen, die aber glücklicherweise von R. Wolf ausgebeutet werden konnten. Und zudem teilt uns Kepler mit, sein Freund habe den Hauptsatz über die Siebenteilung in folgender Weise formuliert gehabt: „Figure nihili aeque valent quantitates hae

$$7^{\mathrm{I}} = 14^{\mathrm{III}} + 7^{\mathrm{V}} - 1^{\mathrm{VII}} \text{ vel } 7 - 14^{\mathrm{II}} + 7^{\mathrm{IV}} - 1^{\mathrm{VI}} \text{“};$$

d. h. in unseren Zeichen: $7 - 14x^2 + 7x^4 - x^6 = 0$. Bürgi hat somit die Gleichung für die in Teilen des Kreishalbmessers ausgedrückte Polygonseite auf Null gebracht. Nunmehr waren Kepler die Mittel an die Hand gegeben zu entscheiden (S. 287), wieviele Polygone verschiedener Gattung einer gegebenen Eckenzahl entsprechen. So viele eben, als die zugehörige Kreisteilungsgleichung reelle und dem absoluten Werte nach verschiedene Wurzeln hat (für Dreieck, Viereck, Sechseck 1; für Fünfeck 2; für Siebeneck 3; für Neuneck 4 usw.).

VI. Kurvenlehre. Die Lehre von den Kegelschnitten fand einen höchst sachkundigen Bearbeiter in J. Werner (S. 171), dessen „Libellus super viginti duobus elementis conicis“ 1522, zusammen mit anderen Abhandlungen, in Nürnberg gedruckt ward; den so entstandenen Sammelband nahm die bekannte Wiener Firma Alantsee in Verlag. Es wird, wie bei Apollonius (S. 101), der Umdrehungskegel zugrunde gelegt, aber die Behandlung der Kurven, von denen bloß die nicht geschlossenen berücksichtigt werden, ist eine anders geartete, wesentlich planimetrische. Die Asymptoten sind „lineae non coincidentes“. Die Arbeit sollte dem Probleme der Würfelverdoppelung dienen, das dann auch, und zwar mit steter Beachtung des Altertums, durch Hyperbel und Parabel — die Ellipse bleibt ausgeschlossen — gelöst wird. Man war sich um diese Zeit also über den Charakter der Aufgabe von den beiden mittleren Proportionalen völlig klar, und es ist unbegreiflich, daß ein so scharfer Denker wie M. Stifel (S. 348) dabei mit Lineal und Zirkel auskommen zu können wähnte. Auch Dürer gibt richtige Vorschriften für die Zeichnung der Kurven zweiter Ordnung, aber eine bequeme Regel, die Ellipse punktweise zu konstruieren, hat man erst von Stevin (1585). Alle bekannten und mehrere neue Sätze stellte Mydorge in seinen beiden Schriften hierüber (Paris 1631 und 1639) zusammen, die u. a. auch zeigen, wie ein gegebener Kegelschnitt auf eine gegebene Kegelfläche gelegt werden kann. Hier einzubegreifen wäre auch ein Werk von Barozzi (1586), welches zwar seinem Titel nach ganz allgemein „De Asymptotis" zu handeln scheint, bei näherem Zusehen sich aber in philosophischen Spekulationen nur über diejenigen der Hyperbel ergeht.

Äußerst unfruchtbar war das Mittelalter auf dem Gebiete der höheren Kurven gewesen; höchstens eine gewisse Vorstellung von der Kreiskonchoide (S. 275) war zu dem von den Alten ererbten Schatze neu hinzugekommen. Dies wurde jetzt besser. Zwar ist die Meinung, Bouvelles habe schon an die Radlinie gedacht, als unhaltbar erwiesen worden, und es dauerte noch fast ein Jahrhundert, bis 1590 Galilei (S. 1564—1642) die von ihm auch so bezeichnete Zykloide in ihrer Eigenart erkannte, während das intensive Studium für sie erst wieder ein Halbjahrhundert später begann. Aber Dürer beschreibt ganz unzweideutig eine mit jener des Nicomedes (S. 109) nicht identische „Muschellini" und des weiteren eine „Spinnenlini", die sich als Epizykloide entpuppt und, wenn a und b zwei Konstante darstellen, die beiden durch den Parameter φ verbundenen Gleichungen

$$x = a \cos\varphi + b \cos 2\varphi\,, \quad y = a \sin\varphi + b \sin 2\varphi$$

besitzt. Nicht mit Stillschweigen darf auch der Schweizer Bartholomaeus Souvey (Soverus, 1577?—1629) übergangen werden, da sein erst nach seinem Tode gedruckter „Tractatus de recti et curvi proportione" Untersuchungen über eine neue Methode, Spiralkurven entstehen zu lassen, enthält. Und auch Keplers „Ovalkurve", die in seiner Arbeit den Übergang zu der Ellipse bildete, als welche er erst nach und nach die Planetenbahnen erkannte, mag Erwähnung finden. Die folgenreichste Vermehrung des vorhandenen Bestandes vollzog jedoch Nonius, als er in seinem Abriß der Nautik (De arte atque ratione navigandi, Coimbra 1546) darauf aufmerksam machte, die von einem stets gleichen Kurs auf der kugelförmigen Erde einhaltenden

Schiffe beschriebene Linie sei nur in Ausnahmefällen ein Kreis, für gewöhnlich aber eine selbständige krumme Linie. Wir wüßten nicht, daß schon vor ihm irgend jemand die Eigenart der Loxodrome aufgefunden gehabt hätte. Die Theorie der neuen Raumkurve (S. 73), deren Name auf Snellius zurückgeht, verbesserten Wright (S. 369), Stevin und vor allem der soeben genannte holländische Mathematiker in seinem „Tiphys Batavus" (Leiden 1624).

VII. Geometrische Zeichnungsinstrumente. Während die meisten griechischen Geometer außer Lineal und Zirkel kein Instrument zulassen wollten, mußten doch schon Plato (S. 67) und Eratosthenes (S. 83) Konzessionen machen, um gewissen Forderungen nachkommen zu können. Im gegenwärtigen Zeitraume sehen wir Commandino (S. 332), Barozzi (S. 384), Scheiner, Aiguillon und Otter eigene Kegelschnittzirkel erfinden, und auch Dürer gibt einen Kurvenzeichner für solche organische Konstruktionen an.

Sobald man nicht mehr bloß schematische Bilder entwarf, sondern für künstlerische und technische Verrichtungen genauere Zeichnungen herzustellen genötigt war, regte sich auch das Bedürfnis sehr genauen Messens. Ihm ist der verjüngte Maßstab von Hommel (1518 bis 1562) und Bartholomaeus Scultetus entsprungen. Wem aber auch damit noch nicht ausreichend gedient war, dem konnte jener Apparat empfohlen werden, den man gewöhnlich dem Burgunder Pierre Vernier (1631) zuschreibt, über den dann auch Hedraeus (1643) und van Gutschoven (1674) geschrieben haben, und den sich die beobachtenden und messenden Naturwissenschaften ganz unhistorisch Nonius zu nennen gewöhnt haben, obschon der von Nunes 1542 gemachte Vorschlag auf ein ganz anderes Ziel hinausläuft. Er war ausdrücklich nur für Kreisteilungen berechnet, eignete sich aber für die astronomische Praxis so wenig, daß Tycho Brahe von ihm absah und das Prinzip des verjüngten Maßstabes direkt auf die Limbusteilung seiner Quadranten übertrug. Der moderne Nonius, den Clavius, wie Breusing dartat, im Jahre 1606 zuerst seinen Fachgenossen vorlegte, eignet sich für geradlinige und zirkuläre Teilung gleichmäßig. An der Hauptteilung hin wird ein Nebenmaßstab so verschoben, daß, wenn die beiden Nullpunkte zusammenfallen, eine weitere Koinzidenz erst später wieder stattfinden kann, indem n Teile des großen $(n+1)$ oder $(n-1)$ Teilen des kleinen Maßstabes gleich sind. Wenn also zwei Hauptteilstriche die Distanz a haben, so besteht zwischen je einem Haupt- und Nebenteilstriche, unter k eine ganze Zahl verstanden, der Abstand

$$k\left(a - a \cdot \frac{n}{n \mp 1}\right) = \frac{\pm a k}{n \mp 1}.$$

So ist die Normaleinheit der Urteilung stets in $(n \pm 1)$ Teile zerlegt.

Großen Geschmack fand man damals an dem Verfahren, Längen von praktisch erprobter Brauchbarkeit auf mehrere feste Ebenen aufzutragen, um sie jederzeit zur Verfügung zu haben und mit ihnen operieren zu können. Als Georg Hartmann, ein Nürnberger Geistlicher (nicht Mechaniker), 1524 den bei Büchsenmeistern sehr beliebten Kaliberstab konstruierte, wurde seine Erfindung allgemein gepriesen. Gleicher Grundgedanke war maßgebend für den Proportionalzirkel, den in Italien Commandino und Del Monte, in Belgien Coignet, in Deutschland der berühmte Fortifikationstechniker Daniel Speckle (1589) erfunden haben wollte. Die Lineale, welche die zum Rechnen zu verbindenden Strecken trugen, waren um einen gemeinschaftlichen festen Punkt drehbar, und bei einer gewissen Apertur dieses Zirkels ließ sich eine mechanische Proportionsrechnung vornehmen. Aus dem Anfange des XVI. Jahrhunderts verzeichnet die Geschichte derartige Apparate von Bürgi, Horcher, Levin Hulsius. Weitaus mehr aber machte von sich reden der verbesserte Proportionalzirkel Galileo Galileis, der 1606 seine Schrift „Le Operazioni del Compasso Geometrico e Militare“ auf einer ihm selbst gehörigen Presse drucken ließ. Sein bisheriger, anscheinend ergebener Schüler Capra ließ zu Anfang des Jahres 1607 eine Gegenschrift „Usus et fabrica circini cujusdam proportionis“ in Padua erscheinen, und nun entspann sich ein heftiger Prioritätsstreit, der durch Galileis sehr animose Replik „Difesa contro alle calumnie et imposture di Baldessar Capra milanese“ (Venedig 1607) — der Titel sagt genug für den Sehenwollenden — entschieden wurde. Die zahllose Einzelschriften darbietende Literatur über das neue Instrument, zu der hauptsächlich Deutsche — Bernegger (1612), Faulhaber (1612), Galgemayr (1615 und 1626), Bürgis Freund Bramer (1617) — Beiträge lieferten, muß es ausreichen, hier skizziert zu haben. Auch Metius (S. 382) und Gunter (S. 369) beschrieben ähnliche Vorrichtungen.

Einigermaßen abweichend sind die Eigenschaften des als Pantograph oder Storchschnabel bezeichneten Instrumentes. Sein Erfinder ist der uns schon bekannte Jesuit (S. 385) Christoph Scheiner (1573—1650), der sich auf seiner bewegten Lebenslaufbahn damals als Professor in Ingolstadt aufhielt. Der Apparat dient dazu, Figuren unter Beibehaltung ihrer Gestalt beliebig zu vergrößern oder zu verkleinern. Durch die Charniere B, C, E, D (Fig. 53) sind vier Stäbe BF, CJ, DG, BH derart miteinander verbunden, daß, wie man mit ihnen auch manipulieren möge, stets ein Parallelogramm $BCED$ erhalten bleibt.

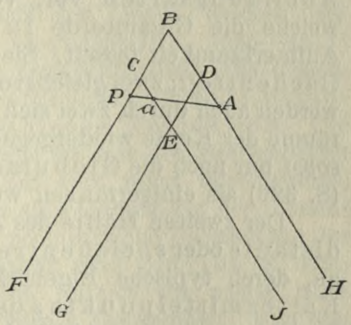


Fig. 53.

In der Verlängerung von BC befindet sich ein Stift P, der im Zeichenbrette fixiert wird. Dann legt man den Punkt A auf BD an den abzubildenden Punkt der Originalzeichnung, und ein in a, dem Schnittpunkte von AP und CE, angebrachter Zeichenstift entwirft dieses Bild. Da $\triangle ABP$ der Bedingung gemäß $\sim \triangle aCP$ ist, so bestehen die Proportionen $Pa : PA = PC : PB = Ca : AB$. Der Punkt A durchwandert die Umfassungslinie der abzubildenden Figur, der Punkt a den Perimeter der Kopie, während unausgesetzt entsprechende Proportionen zustande kommen. AB ist aber konstant, Ca somit desgleichen, und ebenso ändert das Verhältnis $PC : PB$ seinen Wert nicht. Original und Bild sind ähnliche und ähnlich liegende Figuren.

Den geometrischen Instrumenten kann man auch die Vorrichtung beizählen, mittels deren Dürer (S. 375) die Gesetze der theoretischen Perspektive veranschaulichte. Zwischen Auge und Objekt wurden Schnüre gespannt, welche sehr sinnenfällig in einem Rahmen durch die als Bildpunkte zu betrachtenden Stellen hindurchgezogen waren.

VIII. Kartenprojektionslehre. Eine erste nur diesem Gegenstande gewidmete Abhandlung hat man von Werner (S. 383), der sie als Anhang zu seiner Ptolemaeus-Bearbeitung drucken ließ. Sie führt uns, vom Autor selber und von seinem Freunde Stabius (S. 328), ein paar neue Abbildungsarten vor, von denen besonders die eine, welche die Gesamterde in Herzform darstellt, unsere Aufmerksamkeit fesselt. Sie ist nämlich äquivalent oder flächentreu; zwei gleichgroße Flächenräume des Originales werden auch durch zwei sich untereinander gleiche Flächenräume der Kopie wiedergegeben. Aus dieser frühen Zeit ist sonst nur noch die Globularprojektion des Glareanus (S. 329) als einigermaßen wichtig und neu hervorzuheben.

Der zweiten Hälfte des Jahrhunderts gehört die äquidistante oder speichentreue Abbildung des Postellus an, deren typische Eigenschaft darin besteht, daß vom Kartenmittelpunkte aus mit dem Zirkel gemessene Strecken das natürliche Längenverhältnis einhalten. Weit einflußreicher ward eine langsam in Etappen heranreifende Neuerung des Rheinländers Gerhard Mercator oder Kremer (1512—1594), geboren während zufälliger Anwesenheit seiner Eltern in der belgischen Stadt Rupelmonde, gestorben in Duisburg. Sein Endzweck war es, eine Seekarte zu zeichnen, welche die Eigenschaft besitzen sollte, die Loxodrome (S. 385) in eine gerade Linie zu verwandeln und so die bisherige falsche orthodromische Schiffahrt (Kompaßkarte, S. 279) in eine richtige loxodromische überzuführen, die aber tatsächlich doch orthodromisch blieb. Man staunt, zu sehen, wie richtiges Gefühl eine Konstruktion des zylindrischen Netzes ermöglichte, dessen Meridiane zwar in gleichabständige parallele Linien übergehen, dessen geradlinig gewordene Parallelkreise aber durch ein jener Zeit noch ganz unverständliches Gesetz geregelt werden. Unter *c* eine

Konstante, unter φ die Polhöhe verstehend, muß man nämlich den geradlinigen Abstand des jener geographischen Breite entsprechenden Parallels durch

$$c \log \operatorname{tang}(45^{0} - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

ausdrücken. Mercator und sein Sohn Rumold, von dem das unentbehrlich gewordene Wort „Atlas" herrührt, gaben der theoretischen und praktischen Kartographie den Anstoß, dessen Wirkungen die Tätigkeit der niederdeutschen Schule genugsam wahrnehmen läßt. Der stereographischen Projektion (S. 117) stand jetzt eine zweite konforme oder winkeltreue zur Seite.

Für die Terminologie dieses Spezialzweiges wurde bahnbrechend jener Lehrbegriff der Optik, welchen der Jesuit Franz D'Aiguillon (Aquilonius, 1566—1617) im Jahre 1613 zu Antwerpen veröffentlichte. Aus diesem Buche stammen die Ausdrücke stereographische, orthographische und szenographische Projektion. Die letztere Bezeichnung, die einerlei ist mit der gewöhnlichen perspektivischen Abbildung, hat sich nicht durchgesetzt, aber die beiden anderen Worte sind Gemeingut der Wissenschaft geworden. Eine schöne geometrische Behandlung der stereographischen Bilder verdankt man Clavius (S. 373). Die orthographische Projektion hatten wir zuerst beim Analemma (S. 117) kennen zu lernen Gelegenheit. Man war der Meinung, zur Anfertigung von Plänen sei erst wieder gegen Ende des XVII. Jahrhunderts auf jene zurückgegriffen worden. Das trifft nicht zu; Oberhummers Studien über die Entwicklung des Stadtplanes verhelfen uns zur Erkenntnis, daß schon sehr früh regelrechte geometrische Grundrisse — zumal von Wien — hergestellt wurden, und das kann uns nicht verwundern, wenn wir uns der Planzeichnung (S. 243) in der Karolingerzeit erinnern.

Zu Anfang des XVII. Jahrhunderts erscheint auch ein ganz neues, d. h. in der Sonnenuhrkunde (S. 212) doch schon früher zur Anwendung gelangtes Verfahren. Für Himmelskarten brachte der Jesuit Christoph Grienberger (nicht Grimberger, 1561—1636) für Seekarten ein sonst nicht näher bekannter Engländer Sturmy die gnomonische oder zentrale Abbildung in Vorschlag. Bei ihr wird jeder Kugelpunkt aus dem Zentrum auf eine Berührungsebene projiziert; kürzeste sphärische Linien bleiben auch kürzeste Linien in der Ebene, weshalb dieser Manier auch der Name geradwegig beigelegt worden ist.

IX. Praktische Geometrie. Ein Stück Land mit Meßschnur, Kompaß und allenfalls Quadranten auszumessen oder, wie man um 1500 sagte, in Grund zu legen, war damals keine allzu schwierige Sache mehr. Anleitungen dazu erteilten Rheticus (1525) und Tartaglia (S. 346) in seinem Hauptwerke. Auf eine höhere Stufe wurde dieser Teil der Vermessungspraxis erhoben durch Richters (S. 377) Erfindung des Meßtisches (Mensel, Tabula Praetoriana), der sich seit 1590 bis zum heutigen Tage behauptet hat; sein astronomischer, aber auch zu feldmesserischem Gebrauche sehr wohl zu gebrauchender Konkurrent, der bei Peter Apian als Triquetrum, bei Tycho Brahe als eine Kombination von Horizontalkreis und Höhenquadranten erscheint, und sich im XVII. Jahrhundert zum Theodoliten, dem Rechtsnachfolger der heronischen Dioptra (S. 124), ausbildet, war das Meßtischchen niemals ganz zu verdrängen imstande. Wenn der Architekt Schildknecht freilich äußerte, bei einem Brande würde er eher seine Mensel als seine Sinustafeln retten, so fand er mit dieser Ansicht schon zu Kästners Zeiten keine Gegenliebe mehr. Als Distanzmesser konnte, wie erwähnt (S. 292), schon das geometrische Quadrat Verwendung finden; den ersten bloß hierfür ausersehenen Apparat hat aber Peletier („De l'usage de la géométrie", Paris 1573) beschrieben. Kleinere Bücher über Feldmeßkunst — Koebel, Conrat, Rensberger, „der Pfarrherr zu Langenforch", Vischer u. a. — hat es im laufenden Zeitraume gerade genug gegeben; sie entbehren aber durchweg höheren Wertes und reproduzieren sogar vielfach noch die fast unausrottbaren alten Falschregeln (S. 126) zur Flächenberechnung. Ein wirklich Achtung gebietendes, systematisch angelegtes und mit voller Sachkenntnis gearbeitetes Werk ist dagegen des Clavius „Geometria practica" von 1606, und nicht minder verdient Lob (S. 333) Schwenters „Geometria practica nova et aucta" von 1625, die auch bei den Italienern Casati und Raverta Anleihen macht.

Wenn man mit dem Worte Geodäsie nach neuerem Sprachgebrauche jene geometrischen Operationen kennzeichnet, welche sich über einen größeren Teil der Erdoberfläche erstrecken, so enthält von diesem Wissenszweige das XVI. Jahrhundert nur erst schwache Spuren. Immerhin bemerkt man sowohl bei Gemma Frisius (S. 343), als auch in der unzählige Male aufgelegten „Cosmographey" des Sebastian Münster Ansätze zu einer wirklichen Triangulation, und daß auch Philipp Apians „Baierische Landtafeln" von 1565 in letzter Linie auf sehr sorgfältigen Dreiecksverkettungen beruhen, haben Gassers Nachmessungen außer Zweifel gesetzt. Zur Gradmessung erhob die im Keime vorhandene Methode allerdings erst jener Willebrord Snellius (S. 385), der seinem Vater Rudolf (1546—1613) als Professor an der jungen Universität Leiden folgte und 1626 – sein Geburtsjahr kennt man nicht genau – in dieser Stellung verstorben ist. Von ihm, der uns noch des öfteren begegnen wird, ging ein „Eratosthenes Batavus" (Leiden 1617) aus,

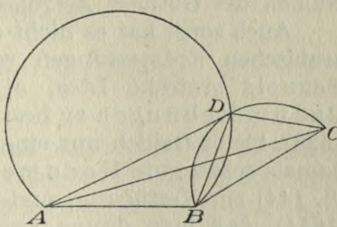


Fig. 54.

der die erste exakte Größenbestimmung der Erdkugel in sich schließt. Für uns kommt hier am meisten in Betracht, daß man auf dieses Werk die erste Lösung jener geometrischen Aufgabe zurückzuführen pflegt, welche ganz irrig nach einem viel späteren französischen Mathematiker Pothenots Problem genannt wird, den Praktikern aber als Rückwärtseinschneiden geläufig ist. Von einem ebenen Vierecke $ABCD$ (Fig. 54) kennt man die Seiten AB, BC, $\sphericalangle ABC$, sowie die beiden Winkel ADB und BDC, welche die Diagonale BD mit den Seiten AD und CD bildet. Von Snellius wurde die elementare Lösung gegeben, zuerst $\triangle ABC$ zu zeichnen und sodann über AB und BC als Sehnen je einen Kreisbogen zu konstruieren, der einen der beiden gegebenen Diagonalwinkel als Peripheriewinkel faßt. Diese beiden Bogen schneiden sich in D, dem vierten Eckpunkte des gesuchten Viereckes. Ganz die gleiche Auflösung gab 1624 der Tübinger Professor Schickhart in einem an seinen Freund Kepler gerichteten Briefe. Nun hat sich aber bei der Prüfung eines Wiener Stadtplanes von 1547 (S. 389) durch Oberhummer und Wellisch herausgestellt, daß dessen Verfertiger Augustin Hirschvogel von Nürnberg, wie seine noch vorhandenen eigenhändigen Notizen bekunden, vom Rückwärtseinschneiden freiesten Gebrauch gemacht hat. Hirschvogel ist folglich der erste, der diese geometrische Aufgabe gestellt und gelöst hat, wodurch er seinem Können ein besseres Zeugnis als durch ein dürftiges Lehrbüchlein (1544) ausgestellt hat. Von Snellius wurde aber diese Aufgabe auch trigonometrisch und zugleich das dem angeblich Pothenotschen verwandte geodätische Problem gelöst, welches den Namen des Gothaer Astronomen Hansen führt.

Auch sonst hat es nicht an Versuchen, die antiken und arabischen Erdmessungen weiterzuführen, gefehlt. Jean Fernels groteske Idee, einen Meridiangrad durch Radumdrehungen zu bestimmen („Cosmotheoria", Paris 1528), bleibt freilich nur eine Kuriosität. Gewiß hatte man damals schon gute Hodometer nach Vitruvs Anweisung (S. 144) zur Verfügung, und Paul Pfinzing zeigte später (1614), daß man davon auch für Feldmessung ganz gut Gebrauch machen könne, allein bei großen Entfernungen mußten solche Apparate versagen. Auch die Vorschläge eines Clavius, Casati, Ghetaldi und anderen, die Erdkugel mit Hilfe elementargeometrischer Berechnungen auszumessen, mußten in diesem Stadium verharren. Glücklicher war hierin Kepler, dessen Methode es nachmals zu praktischer Verwertung gebracht hat, und dem es auch zuerst beifiel, Messungen nicht nur im Meridiane, sondern auch längs Parallelkreisen zu veranstalten.

Den frühesten Versuch, das schon ältere rohe Markscheiden der Bergleute zum Range einer zuverlässigen „Geometria subterranea" zu erheben, konstatiert man für das Jahr 1566 im „Bergwerksbuch" des berühmten Montanisten Georg Agricola. Allerdings wurzeln auch diese geometrischen Verrichtungen schon in weit älterem Boden; Max Schmidt schreibt dem Hero (S. 119) die ersten unterirdischen Ortsbestimmungen zu.

X. Goniometrie und Trigonometrie. Wir haben in diesem Abschnitte anzuknüpfen an die unmittelbaren Nachwirkungen (S. 298) der Reform von Peurbach-Regiomontanus. Ganz unter deren Einfluß steht noch der uns wohlbekannte Werner, dessen Hauptwerk „De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V“ verloren schien, von Björnbo aber in Rom wieder gefunden wurde. Es war nachweislich als Manuskript von dem gerade auf diesem Gebiete so tätigen Rheticus (S. 329, 390) angekauft worden; was dieser uns mitteilt, trägt sonach tatsächlich den Stempel Wernerscher Geistesarbeit. Zweifellos ist eruiert, daß Werner die erste Fixierung der sogenannten Prosthaphaeresis (S. 220) verdankt wird, und daß er diese in eine Form gekleidet hat, welche mit unseren Gleichungen

$$2 \cdot \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}\alpha \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}\beta = \cos(\alpha - \beta) \mp \cos(\alpha + \beta)$$

identisch ist. Bekannt ist ferner aus Werners Zusätzen zu Ptolemaeus-Amirucius (S. 171), daß er die Aufgabe, die kürzeste Entfernung zweier durch ihre Breiten und Längen (β_1, β_2; λ_1, λ_2) gegebenen Kugelpunkte zu berechnen, durch geometrische Betrachtung erledigte; die Regel des Byzantiners erläutert er und dehnt sie auf den Fall aus, daß entweder β_1 oder β_2 einer anderen Halbkugel als β_2 oder β_1 angehört. Endlich berechnete er eine Tafel, um den Längsstab des Radius astronomicus (S. 233) nicht lediglich mit einer äquidistanten, sondern vielmehr mit einer solchen Teilung zu versehen, daß ohne Zwischenrechnung der gewünschte Winkel abzulesen war.

Von Peter Apian, der keinen Fortschritt gegen Regiomontan erkennen läßt, ist eine Vorrichtung („Instrumentum primi mobilis“, Ingolstadt 1534) anzuführen, welches aus dem Winkel mechanisch dessen Sinus und Sinus versus abzuleiten gestatten sollte. Auch hat er das Werk des Arabers Geber (S. 222) seinen Zeitgenossen übermittelt. Mehr eigene Erfindungskraft bewährt sich in dem Reformator der Astronomie, in Nikolaus Coppernicus aus Thorn (1473—1543); die hier gewählte Schreibart ist die von ihm selbst allein gebrauchte und den deutschen Namensformen Koppernic oder Kopperlingk entsprechende. In seinem unsterblichen Werke „De revolutionibus orbium coelestium“ (mit einer entstellenden Vorrede Osianders in Nürnberg kurz vor dem Lebensende des Meisters ausgegeben) entwickeln drei Kapitel (12, 13, 14) die für das Folgende notwendigen trigonometrischen Sätze; zwei dieser Kapitel hatte Rheticus, der im ostpreußischen Frauenburg mehrere Jahre bei seinem viel älteren Freunde geweilt hatte, um sich seine Lehren anzueignen, bereits 1542 zu Wittenberg herausgegeben. Die ebene Trigonometrie weicht von den älteren Vorbildern nur durch konsequente Anwendung der Sinus- statt der Chordenrechnung ab, aber der sphärische Teil stützt sich auf die Transversalen und das vollständige Viereck (S. 229), ohne daß der Autor wohl von Nasr-Eddîn etwas wußte. Auch formuliert und beweist er ganz mit eigenen Mitteln den Sinussatz und läßt überhaupt allenthalben durchblicken, daß er zwar die schon vorhandenen Schriften studiert, den ihnen entnommenen Stoff jedoch frei durchschaltet hat.

Von Rheticus' Bemühungen um die Verbesserung der Tafeln wird gesondert zu sprechen sein. Seine Verbesserung der „barbarischen“ Nomenklatur hat keine Erfolge erzielt; er wollte Sinus durch Perpendiculum, Cosinus durch Basis und Sekante (S. 215) durch Hypotenusa ersetzen. Aber mittelbar liest v. Braunmühl aus diesen Wortneubildungen eine hochwichtige sachliche Verbesserung der Methodik heraus: Es sollte jede Funktion auf das rechtwinklige Dreieck bezogen und als Winkelfunktion, nicht mehr bloß als Bogenfunktion aufgefaßt werden. Durchgeführt hat Rheticus sein damit angedeutetes Prinzip allerdings noch nicht, aber er war doch nahe daran, der Begründer der noch ausstehenden Goniometrie zu werden. Dafür aber, daß er diesen Schritt nicht zu Ende führte, erwarb er sich Indemnität durch den seinem nachgelassenen Tafelwerke einverleibten und mit diesem erst 1596 vor die Öffentlichkeit getretenen „De triquetris rectarum linearum in planitie liber unus“, der die ebene Trigonometrie ganz neuartig zu behandeln lehrt. Wir finden u. a. folgende Formeln ($2s = a + b + c$, ϱ Halbmesser des einbeschriebenen Kreises) vor:

$$\varrho^2 = \frac{1}{s}(s-a)(s-b)(s-c), \quad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}, \quad \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}.$$

Es reihen sich an „De triangulis globi cum angulo recto libri quatuor", worin aus einer einzigen Figur, großenteils nach Coppernicus, vierzig Sätze über das sphärisch-rechtwinklige Dreieck hergeleitet werden. Auf diese wird dann zuletzt das allgemeine Kugeldreieck zurückgeführt, doch hat Rheticus diese Partie nicht mehr selbst vollendet, sondern das seinem Amanuensis Valentin Otho, einer sonst fast ganz unbekannten Persönlichkeit, zu tun überlassen, der denn auch in fünf weiteren Büchern alle Einzelfälle in erdrückender Umständlichkeit durcharbeitete. Nunmehr, erklärte der Bearbeiter, gäbe es keine Möglichkeit mehr, die nicht erschöpfend dargestellt wäre. Darin hatte er recht, aber gerade wegen ihrer Weitschweifigkeit hat die trigonometrische Systematik von Rheticus-Otho nicht die ihr zu gönnende Bedeutung sich errungen — ganz abgesehen von dem Umstande, daß sich ihr Erscheinen („Opus Palatinum") bis zum Jahre 1596 hinauszog, während in der Zwischenzeit auch andere gearbeitet hatten.

Von der Tätigkeit des Maurolico (S. 331) geben seine Sphärik, die er einer Ausgabe des Menelaus (S. 127) beidrucken ließ, und sein handschriftlicher, durch Napoli 1876 publizierter „Tractatus de geometria" ausreichenden Aufschluß. Hervorgehoben darf werden, daß er unbefangener wie irgend jemand vor ihm mit Sekanten und Tangenten rechnete und ausdrücklich die Identität der letzteren mit den arabischen „Schatten" (S. 215) feststellte. Von diesem Italiener hatte viel gelernt der Schleswiger Thomas Finck (1561—1656), dessen „Geometria Rotundi" (Basel 1583) durch zwei Dinge eine historische Rolle zu spielen berufen war: Es werden die bisher zwar benützten, aber in der Terminologie noch schwankenden Funktionen Sekans und Tangens mit diesen bekannten Bezeichnungen belegt, und man begegnet hier der fälschlich nach Mollweide enannten Formel

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2},$$

die freilich schon Vieta kannte, die indessen der Welt noch vorenthalten war, da das betreffende Werk des erstgenannten erst viel später die segensreichen Wirkungen betätigen konnte, die zu üben es so hervorragend geeignet war.

In der Raumtrigonometrie scheint Finck durch Maurice Bressieus (Brescius) Schrift „De Metrices Astronomiae" (Paris 1581) beeinflußt gewesen zu sein, welch letzterer eine derjenigen von Nasr-Eddîn (S. 228) ähnliche Begründung der Haupttheoreme gab. Eine analoge Universalfigur, hier „Bischofsmütze" benannt, bildet auch die Grundlage der sphärischen Trigonometrie in Nathanael Torporleys „Diclides coelometricae" (London 1652). Dieser Figur, deren hier gemeinte Eigenschaft der Autor noch nicht ahnte, hat nach der Ansicht neuerer Forscher ein bedeutenderer Mathematiker die für seinen Namen charakteristischen Sätze entnommen. Dies ist Napier (S. 363), dessen „Descriptio" unser Fach in geistvoller Weise abhandelt. Er ordnet die Bestimmungsstücke „zyklisch" oder „pentagonal" und zieht aus der Betrachtung seines sphärischen Fünfeckes durch Anwendung vieler schon bekannten Sätze und auch der stereographischen Projektion mehrere neue Sätze für das rechtwinklige Dreieck. Vorher waren schon bewiesen worden folgende Proportionen:

$$\operatorname{tang} \frac{a + c}{2} : \operatorname{tang} \frac{b}{2} = \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} : \cos \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

$$\operatorname{tang} \frac{a - c}{2} : \operatorname{tang} \frac{b}{2} = \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} : \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Dies sind die berühmten Neperschen Analogien. Unsere Lehrbücher zählen deren allerdings vier auf, aber die beiden hier fehlenden, deren Herleitung nun nicht mehr sehr schwer war, hat erst Briggs noch hinzugefügt.

In das letzte Jahrzehnt des XVI. Jahrhunderts gehören auch die trigonometrischen Lehrwerke von Bartholomaeus Pitiscus (1561—1613), der zuerst der Astronomie seines Freundes Abraham Scultetus (Heidelberg 1595) einen Nachtrag dieses Inhaltes beigab und daraus alsdann ein umfassendes Kompendium machte, welches vier Auflagen (Frankfurt a. M. 1599, Augsburg 1600, 1608, 1612) und eine englische Übersetzung (London 1600, 1614) erlebte. Vor Pitiscus, erklärt der beste Kenner dieses Schrifttums, v. Braunmühl, sei nirgends das Wort „Trigonometrie" nachzuweisen, und jener Schriftsteller müsse es deshalb aufgebracht haben. Er auch gab zuerst eine bequeme Darstellung des Supplementardreieckes auf der Kugelfläche selbst an. Wegen seiner — aus anderem Grunde schon (S. 389) angeführten — graphischen Behandlung der sphärischen Aufgaben muß auch Clavius, wegen der bei ihm zu findenden Namengebung für Kotangente und Kosekante muß ein Werk (Venedig 1592) von Magini (S. 363), wegen angeblich neuer, uns freilich sehr umständlich erscheinender Fassung der beiden Sätze

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos \alpha\,,$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

muß Philipp van Langsberghs „Geometrie der Dreiecke" (Leiden 1591) eines Platzes teilhaftig werden.

Auch Tycho Brahe (1546—1601), sonst als rechnender Astronom weit weniger denn als beobachtender bekannt, hielt doch die Beschäftigung mit sphärischer Trigonometrie für eine ihm obliegende Pflicht. Seine offenbar für die Uranienborger Sternwarte zum Handgebrauche bestimmte Schrift „Triangulorum planorum et sphaericorum praxis mathematica" hat 1886 Studnička in Prag herausgegeben. An Tychos Observatorium knüpft sich auch eine neue Phase in der Geschichte der Prosthaphaeresis (S. 220). Von 1580 bis 1581 weilte dort nämlich als Praktikant der junge Breslauer Paul Wittich (gest. 1587), der hierauf nach Kassel zum Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen (1532—1592), dem bekannten Beförderer der Sternkunde, ging und mit dessen beiden astronomischen

Beratern, Bürgi (S. 342) und Christoph Rothmann, freundschaftlich verkehrte. Ersterer erfuhr von dem Ankömmling, auf der Uranienborg benütze man regelmäßig eine prosthaphäretische Methode, die sich die dortigen Gelehrten höchst wahrscheinlich durch das Studium Wernerscher Schriften zu eigen gemacht hatten. Tychos Antipode, Raymarus Ursus, gab 1584 die von ihm konstruktiv bewiesenen Regeln bekannt; daß aber seine Beweise nicht ihm selbst, sondern dem viel zu anspruchslosen Bürgi angehörten, ist höchst wahrscheinlich. Immer noch war jedoch das Verfahren ein zu wenig umfassendes, und die unumgängliche Verallgemeinerung vollzogen Clavius (1590) und Melchior Joestel oder Jostelius (1598). In der Fassung der Jetztzeit kommt es auf folgende vier Formeln an:

$$\sin x \sin y = -\tfrac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))\,,$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))\,,$$
$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))\,,$$
$$\cos x \sin y = \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))\,.$$

Die Logarithmen minderten den Rechnungswert dieser Vorschriften, von Produkten zu Summen und Differenzen oder umgekehrt überzugehen, stark herab, obwohl noch 1622 Brahes Lieblingsschüler Christiern Longberg (Longomontanus) in seiner „Astronomia Danica" behauptete, er ziehe das prosthaphäretische Rechnen dem logarithmischen seinerseits vor.

Mit Absicht haben wir, zeitlich sogar hier und da etwas vorgreifend, Vieta bis jetzt zurückgestellt, obwohl oder weil vielmehr sein Verdienst um die Trigonometrie dasjenige, welches er um die Algebra (S. 358) sich erworben, noch überragt. In erster Linie ist, worauf wir schon anspielten, daran festzuhalten, daß er die Goniometrie als solche geschaffen hat. Der größere Teil jenes Vorrates von Identitäten, die ein Schüler abzuleiten gehalten wird, sobald er die Definitionen von sin, cos, tang, cotang, sec, cosec inne hat, erfüllt den Anhang des nur sehr wenig bekannt gewordenen, weil von F. van Schooten nicht in seine Ausgabe Vietascher Werke (Leiden 1646) aufgenommenen „Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus" (Paris 1579), soweit er nicht tabellarischen Inhaltes ist. Dazu gehören die folgenden Sätze:

$$\sin\alpha = \sin(60^0 + \alpha) - \sin(60^0 - \alpha)\,,$$

$$\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{cotang}\frac{\alpha}{2}\,,\qquad \operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cotang}\alpha = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sin\operatorname{vers}\alpha\,,\qquad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Noch umfänglicher ist der goniometrische Apparat im „Variorum de rebus mathematicis responsorum liber (Paris 1593), der Geometrisches (S. 359), Algebraisches und Trigonometrisches umschließt. Hier zeigt sich z. B. eine der elegantesten Beziehungen:

$$(\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta) = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Vor allem aber treten jetzt erst in die richtige Beleuchtung Vietas Lehrsätze über die Winkelteilung, die uns oben ihrer geometrischen Konsequenzen halber beschäftigten. Ganz allgemein werden die Formeln für $\sin n\,\alpha$ und $\cos n\,\alpha$ aufgestellt ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$). Die Drei- und Fünfteilung sind daraus durch Umkehrung leicht zu gewinnen, wie denn auch der irreduzible Fall mit der Relation $(2\cos\alpha)^3 - 6\cos\alpha = 2\cos 3\,\alpha$ in Verbindung gebracht wird.

Der „Canon mathematicus" (1593) gibt das nötige Formelsystem für das rechtwinklige ebene Dreieck. Dem Sinussatze des schiefwinkligen Dreieckes folgt nachstehende Proportionenkette:

$$a : b : c = \left(\operatorname{cotang}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotang}\frac{\gamma}{2}\right) : \left(\operatorname{cotang}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotang}\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$: \left(\operatorname{cotang}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotang}\frac{\beta}{2}\right).$$

Eben damals erteilt Vieta auch dem Cosinussatze die fast ganz moderne Form:

$$2\,b\,c : (b^2 + c^2 - a^2) = 1 : \cos\alpha\,.$$

Auch die sogenannte Mollweidesche Formel erscheint hier vor Finck (S. 396), dessen Werk sie aber erst unter die Leute gebracht zu haben scheint, und nicht minder die schon Brahe bekannte, mitunter nach Gauß benannte: $\operatorname{tang}\gamma = \frac{c\sin\beta}{a - c\cos\beta}$. Obwohl manche Stelle des Autors Bekanntschaft mit Rheticus verrät, ist doch seine Originalität ganz unverkennbar. Das gilt auch für die sphärische Trigonometrie, wo die sechs Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck in handlichem Schema zusammengestellt und gleicherweise präziser als bisher die acht Fälle des allgemeinen Dreieckes durchgearbeitet werden. Je zwei reziproke Dreiecke werden auch durch reziproke Formeln aufgelöst. Der Cosinussatz sieht nunmehr so aus:

$$(\sin a \sin b) : (\cos c - \cos a \cos b) = 1 : \cos\gamma\,.$$

Ganz neu sind die nachstehenden reziprok-polaren Sätze:

$$(\sin\alpha \operatorname{cosec} b) : (\operatorname{cotang} c \mp \cos\alpha \operatorname{cotang} b) = 1 : \operatorname{cotang}\gamma\,,$$

$$(\sin a \operatorname{cosec}\beta) : (\operatorname{cotang}\gamma \pm \cos a \operatorname{cotang}\beta) = 1 : \operatorname{cotang} c\,.$$

Wie Vieta seine Ableitungen durchführte, enthüllt er uns leider nur selten. Jedenfalls half ihm viel sein Prinzip der Vertauschung („ἐναλλαγὴ πλευρογωνικὴ“ nennt er es), welches den Übergang zu dem ihm wohl bekannten Supplementardreieck als besonderen Fall umfaßte.

Aus der Zeit zwischen Vietas Scheiden und Descartes' Hervortreten (1603—1637) haben sich neben den von uns schon (S. 368) besprochenen Bearbeitern der logarithmischen Trigonometrie hauptsächlich Snellius, Cavalieri und Herigone ein Anrecht auf Betonung ihrer Leistungen erworben; zu Gunter (S. 369) haben wir nur nachzutragen, daß seine Gelegenheitsbezeichnung co · sinus für sinus complementi von der Wissenschaft in übereinstimmendem Sinne angenommen worden ist. Aus W. Snellius' posthum gedruckten „Doctrinae triangulorum canonicae libri quatuor“ (Leiden 1627) sind die Summenformeln für $\sin n\alpha$ und $\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}$ bemerkenswert, denen sich die

Identität $1 + 2\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \ldots + 2\sin n\alpha = \operatorname{cotang}\frac{\alpha}{2}$ [für $(n+1)\alpha = 90^0$] anschließt. Auch die zum Teile schon bei Cusanus (S. 305) nachzuweisende Ungleichung

$$\frac{3\sin x}{2+\cos x} < x < \operatorname{tang}\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3}$$

ist nicht unwichtig. Bonaventura Cavalieris „Directorium generale uranometricum" (Bologna 1632) liefert Beweise für mehrere von Napier gefundene Sätze, zu denen aber die Analogien nicht gehören. Eine spätere Schrift desselben Verfassers, die jenseits unserer Zeitgrenze liegt, wäre wegen einer gewissen Vorwegnahme der Summen- und Differenzlogarithmen von Interesse. Der wackere Kompendiograph Herigone (S. 374) endlich mag noch erwähnt werden wegen seines Strebens, auch die Trigonometrie seiner Symbolik zu unterwerfen.

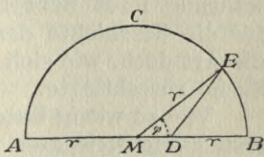


Fig. 55.

XI. Trigonometrische Spezialprobleme. Eine sehr denkwürdige Stelle in Keplers berühmtem Werke Über die Bewegungen des Mars (Frankfurt a. M. 1609; Opera, ed. Frisch, 3. Band) bezieht sich auf ebene Trigonometrie. Das sogenannte Keplersche Problem verlangte, daß der Halbkreis ABC (Fig. 55), dessen Mittelpunkt M ist, von einem Punkt D zwischen B und M aus in einem gegebenen Verhältnis $\mu : \nu\,(\nu < \mu)$ geteilt werden soll. DE ist die Teilungslinie, und es gilt die Proportion:

$$(\text{Sektor}\, AME + \triangle DME) : (\text{Sektor}\, BME - \triangle DME) = \mu : \nu\,.$$

Wenn der Radius $AM = BM = r$, $\sphericalangle BME = \varphi$, $MD = r\varepsilon$ gesetzt wird, wo ε die Exzentrizität (S. 116) bedeutet, so hat man weiter:

$$\left[\frac{\pi r^2(180-\varphi)}{360} + \tfrac{1}{2}r^2\varepsilon\sin\varphi\right] : \left[\frac{\pi r^2\varphi}{360} - \tfrac{1}{2}r^2\varepsilon\sin\varphi\right] = \mu : \nu\,;$$

$$\pi\varphi - 180\,\varepsilon\sin\varphi = \frac{180\,\nu\pi}{\mu+\nu}\,.$$

Eine solche Gleichung könne man, sagt Kepler, nicht lösen „propter arcus et sinus ἑτερογένειαν“, und wer es doch vermöchte, der sei eben (S. 100) ein richtiger Apollonius. Dies ist der erste Fall klarer Einsicht in das Wesen einer transzendenten Gleichung. Eine Näherung führte den zahlengeübten Mann zu einem seinem augenblicklichen Zwecke genügenden Resultate.

Jene Kreisteilungsmethode, die wir (S. 385) als von Nonius herrührend kennen lernten, ist dargelegt in dessen Schrift „De crepusculis liber unus“ (Lissabon 1542). Hier wird die Aufgabe gestellt, für eine gegebene geographische Breite den Zeitpunkt der kürzesten Dämmerung zu ermitteln. Strenge zu lösen war solch schwieriges Problem der sphärischen Trigonometrie Nunes' Zeit noch nicht vermögend; hat dasselbe doch einem Johann Bernoulli I., Monge und D'Arrest noch Anlaß zur Bewährung ihres Scharfsinnes gegeben. Aber sehr wichtig für die Geschichte der betreffenden Spezialdisziplin bleibt die Art doch, wie sich der portugiesische Mathematiker die Sache zurechtlegte.

Viel zu wenig beachtet haben die Historiker bisher den ersten nachweisbaren Fall des Überganges zur sphärischen Tetragonometrie. Wiederum war es die Astronomie, welche dazu drängte. Keplers späterer Lehrer Maestlin wollte als Pfarrherr in Backnang 1572 an der Beobachtung jenes neuen Sternes in der Kassiopeja teilnehmen, welcher damals alle Astronomen, Tycho Brahe voran, in förmlichen Aufruhr versetzte. Dem einsamen Manne standen keine Instrumente zu Gebote, und da kam ihm der glückliche Einfall, je zwei Sternpaare A, C und B, D so zu wählen, daß die Nova S in den Durchschnittspunkt der beiden gespannten Fäden zwischen A und C einerseits, B und D andererseits fiel. Da war dann die Forderung sofort gegeben: Wenn man die Koordinaten der vier Eckpunkte A, B, C, D eines sphärischen Viereckes $ABCD$ kennt, so sollen die Koordinaten des Durchschnittspunktes S der beiden Diagonalen AC und BD berechnet werden. Die numerische Lösung erheischte einen robusten Rechner, aber ein solcher war Maestlin, und man begreift nach dieser Leistung wohl, daß er (S. 368) auch ohne Logarithmen auskommen zu können glaubte. Daß er aber auch richtig rechnete, beweist Tychos Lob, der gerade diese Ortsbestimmung für eine der besten für die Nova erhaltenen erklärte.

XII. Trigonometrische Tafeln. Über die Vielzahl solcher teilweise höchst voluminöser Tabellenwerke kann nur ein summarischer Überblick gegeben werden. Von Peter Apian (1533) stammt eine Sinustafel für den Radius 10^5, die von Minute zu Minute fortschreitet. In Coppernicus' (S. 394) handschriftlicher Hinterlassenschaft hat sich die erste bekannte Sekantentafel vorgefunden. Den Ruhm des eisernsten Fleißes auf diesem Gebiete hat sich Rheticus erworben. Sein „Canon doctrinae triangulorum" (Leipzig 1551), der mit dem Intervalle von $10'$ für den Sinus totus 10^7 alle sechs Funktionen tabellarisch buchte, ist jetzt zur bibliographischen Seltenheit geworden; sein Kollege Reinhold (S. 330) dehnte — der Druck erfolgte posthum 1554 — das Intervall für die Tangente auf $1'$ aus. Die erste gedruckte Sekantentafel („tabula benefica") rührt her von Maurolycus (1558). Vietas „Kanon", dessen Druck schon 1571 begann, läßt eine gewisse Abhängigkeit von dem des Rheticus erkennen, wenn auch seine Berechnungsmethode ihm allein angehört. Minder hoch ist eine die Kofunktionen ausschließende Tafel von Finck (S. 395) einzuschätzen; diejenige des Magini (S. 363) zeichnete sich durch ihre Exaktheit aus. Leider zu spät, in einer schon teilweise über den ursprünglichen Standpunkt der Bearbeitung hinausgegangenen Zeit erschien 1596 das „Opus Palatinum de triangulis" (Neustadt a. H. 1596), über dessen Herstellung sein Begründer Rheticus verstorben war, und an welches dann Otho (S. 395), den jener auf dem Sterbebette zum Nachfolger verpflichtet hatte, viele Jahre seines Lebens wendete. Das Verdienst beider Freunde hat sich, weil nun die Periode handlicherer Nachschlagewerke anbrach, nicht voll bezahlt machen können. Teilweise gilt dies auch für den „Thesaurus Mathematicus" (Frankfurt a. M. 1613) des Pitiscus, zu dem der eine Fülle von Rechnungsdaten enthaltende Nachlaß des Rheticus hatte herangezogen werden können. Die Methodik der Tafelberechnung suchte erfolgreich W. Snellius (S. 391) zu vervollkommen.

Damit sind wir bereits der Epoche der Logarithmen nahe gekommen, welche eine Umwälzung in der Technik der Herstellung trigonometrischer Tafeln bedeutet. Die namhaftesten Werke dieser neuen Zeitrichtung hatten wir schon früher (S. 369) zu kennzeichnen.

XIII. Statik. Die — von Archimedes (S. 93) abgesehen — meist schwächlichen Bestrebungen des Altertums und Mittelalters, die Lehre vom Gleichgewichte wissenschaftlich darzustellen, konnten die Folgezeit nur wenig unterstützen. Des Jordanus Nemorarius angebliche „De ponderibus propositiones XIII“ gab Peter Apian 1533 zu Ingolstadt, die für den praktischen Mechaniker wichtigen Schriften Heros gab Dasypodius (S. 373) 1558 zu Straßburg i. E. heraus, wozu er, der zusammen mit dem Mechaniker Habrecht das einzig dastehende Kunstwerk der astronomischen Straßburger Uhr zustande brachte, wohl besonderen Antrieb empfinden mußte. Mit Schwerpunktsbestimmungen befaßt sich angelegentlich Maurolico (S. 331), der 1548 diese Aufgabe für Pyramide und Kegel, worin ihm Lionardo da Vinci (S. 307) vorangegangen war, aber auch, was als neu gelten mußte, für das Rotationsparaboloid zu lösen wußte. Aus späterer Zeit haben wir den Neapolitaner Luca Valerio, Jean Charles de la Faille, einen Belgier, und Paul Guldin aus St. Gallen (1577—1643) in diesem Zusammenhange anzuführen. Valerios Schrift „De centro gravitatis solidorum“ (Rom 1604) lehnt sich an Archimedes an, wie denn auch seine erst sehr viel später bekannt gewordene Parabelquadratur vom Schwerpunkte ausgeht. Einen in dieser Form neuen Gedanken bringen De la Failles „Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellypsis“ (sic!) (Antwerpen 1632) zum Ausdrucke, insofern auf den Zusammenhang zwischen Schwerpunktsbestimmung und Quadratur hingewiesen wird. Auf eine wirklich höhere Stufe aber hebt diesen Teil der Statik Guldins „Centrobaryca“ (Wien 1635—1641). Denn neben einer Anzahl bisher noch nicht behandelter Beispiele tritt hier vor uns die so überaus für ihren nächsten Zweck, wie auch indirekt für Komplanation und Kubatur verwendbare Guldinsche Regel: Die durch Umdrehung eines Kurvenstückes um eine Achse erzeugte Fläche ist gleich dem Produkte aus jener Länge in den Abstand des Schwerpunktes von der Achse; das durch Umdrehung einer Fläche um eine Achse hervorgebrachte Volumen ist gleich dem Produkte aus der Fläche selbst und dem Umfange des vom Schwerpunkte beschriebenen Kreises (resp. Kreisbogens).

Die „mechanische Potenz" der schiefen Ebene war schon von Pappus (S. 154) in Betracht gezogen worden. Aber das für sie geltende Gleichgewichtsgesetz entdeckte erst Stevin, dessen Gesamtwerke (S. 333) mechanische Untersuchungen enthalten. Durch die nicht eben nahe liegende, geistvoll durchgeführte Betrachtung einer Kette, die er um ein auf der Hypotenuse stehendes rechtwinkliges Dreieck geschlungen dachte, und deren Gleichgewichtszustand er aufsuchte, kam er zu dem Satze: Ein auf schiefer Ebene liegender Körper wird durch eine Kraft in Ruhe gehalten, welche sich zu dessen Gewichte so wie die Höhe jener Ebene zu ihrer Länge verhält. So verschieden von unserer heutigen Gepflogenheit sein Ausgangspunkt war, so vollkommen stimmt die Beweisführung a posteriori mit der gegenwärtigen überein. Die Kräfte werden als Strecken dargestellt, und das Kräfterechteck gibt sofort die gesuchten Gleichgewichtsverhältnisse. Daß Lionardo da Vinci (S. 307) schon ähnlich zu Werke gegangen war, wußte selbstverständlich niemand. Am gleichen Orte begründet Stevin sein berühmtes hydrostatisches Paradoxon, d. h. die Lehre vom Boden- und Seitendrucke tropfbarer Flüssigkeiten.

Wohl noch etwas früher hatte der Marchese Guidobaldo Del Monte (1545—1607), Galileis Gönner, dem auch eine sehr viel geometrischen Scharfsinn bekundende Abhandlung über die Archimedische Schraube (S. 95) verdankt wird, den bei Aristoteles (S. 68) nur embryonal zu findenden Satz klar ausgesprochen (1577): Wird ein im Gleichgewichte befindliches System vorübergehend aus diesem herausgebracht, so verhalten sich die von den Angriffspunkten der Kraft und Last in gleicher Zeit beschriebenen Wege umgekehrt wie jene. Dem Begriffe des statischen Momentes war Del Monte sehr nahe gekommen, aber bestimmt formuliert wird derselbe erst in Benedettis (S. 378) „Speculationes diversae" (Turin 1585).

Die gewaltigen Neuschöpfungen Galileis können hier nur insoweit berührt werden, als sie sich auf seine durchaus aus dem Vollen schöpfende Begründung der Festigkeitslehre beziehen. Daß der große Mann die Statik seines Zeitalters bis ins Einzelste beherrschte, beweist vor allem, nebst der „Bilancetta" von 1596 (?) der „Saggiatore" (Rom 1623). In der ersterwähnten Schrift begegnet man einer exakten Bestimmung spezifischer Gewichte.

XIV. Bewegungslehre. Die eigentliche Dynamik liegt jenseits unserer Arbeitsgrenze, denn die ihren wahren Ursprung charakterisierenden „Dialoghi delle Nuove Scienze" wurden erst 1638 in Leiden gedruckt. Die Schrift „De' corpi gravi naturalmente mossi et de' projetti", welche ihr Autor 1609 an Luca Valerio sandte, um mit diesem Kenner einen Meinungsaustausch einzuleiten, kam nicht in die Öffentlichkeit. In ihr begründete Galilei die Lehre von der Wurfparabel. Wie höchst anregend er auf seine Schüler Baliani, Castelli, Cavalieri, Torricelli, Viviani wirkte, ist bekannt, aber Torricellis tiefgehende Studien über Hydrodynamik und Aërostatik fallen ebenfalls schon in eine spätere Zeit. Nur Benedetto Castellis (1577—1644) fundamentales Werk über den erstgenannten neuen Wissenszweig („Della misura dell' acque correnti", Rom 1628) hat ein Recht darauf, hier noch zitiert zu werden. Auch verdient ihre Stelle Keplers zutreffende Fassung des Gesetzes von der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung siebzig Jahre vor der sozusagen offiziellen, durch Newton vollzogenen Einführung dieser Fundamentalwahrheit in die Wissenschaft.

Das XVI. Jahrhundert kennt nur kinematische Erörterungen. Auch diese sind dünn gesäet; besonderer Hervorhebung würdig mögen erscheinen Ferraris (S. 355) Spekulationen über die Beziehungen krumm- und geradliniger Bewegungen, worin ihm Benedetti nachfolgte, und die ballistischen Studien eines Santbach, Rivius und Tartaglia (S. 346) über die Wurfkurve. Ohne deren wahre Natur ergründen zu können, stellte der letztgenannte doch fest, daß einem Elevationswinkel von 45° ein Maximum der Wurfweite entspreche. Der italienische Mathematiker war erfahren in Maximalaufgaben (S. 346) und hat diesmal wahrscheinlich nach Art Regiomontans (S. 302) argumentiert. Es liegen Gründe dafür vor, daß er wußte, es käme die gleiche Wurfweite AB (Fig. 56) heraus, wenn die Elevationsrichtung mit der Horizontalen AX und der Vertikalen AY gleiche Winkel φ bildet. Dann gehörten jeder Wurfweite zwei Winkel zu; nur einer einzigen, eben der größten AD, entsprach bloß ein einziger. Und dieser mußte aus dem angegebenen Grunde ein halber rechter sein. AA', AA'', AC sind resp. die drei von A ausgehenden Berührenden der Wurfbahnen.

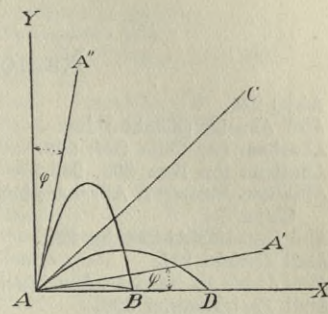


Fig. 56.

Hiermit sind wir an der unserer Darstellung gezogenen Grenze angelangt. Was die uns bekannten Kepler, Cavalieri, Fermat, was die ihnen folgenden Descartes, Desargues, Pascal, Roberval usw. geleistet haben, wird, soweit es nicht ohnehin jenseits unseres Rahmens fällt, ausnahmslos beherrscht von dem großen Gedanken des Infinitesimalen. Und bei diesem sind wir Halt zu machen verpflichtet.

Namen-Index.

Literarische Übersicht*).

Für das Ganze.

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig. 1. Band 1880, 1894, 1907; 2. Band 1894, 1900.

Arneth, Geschichte der reinen Mathematik, Stuttgart 1852.

Charles-Sohncke, Geschichte der Geometrie, Halle a. S. 1839.

Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874.

Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896.

A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Leipzig. 1. Teil 1900; 2. Teil 1903.

Tropfke, Geschichte der Mathematik in systematischer Darstellung, Leipzig. 1. Band 1902; 2. Band 1903.

Sturm, Geschichte der Mathematik, Leipzig 1904. (Sammlung Göschen.)

R. Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877.

M. Cantor, Beiträge zur Geschichte der Mathematik, Halle a. S. 1863.

Fel. Müller, Welche Bedeutung hat für den Lehrer der Mathematik die Kenntnis der Geschichte, Literatur und Terminologie seiner Wissenschaft? Vortrag gehalten auf der 47. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Halle a. S. 1903.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch-literarische Abteilung seit 1875; hierzu Supplementhefte unter dem Titel „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik", Heft 1—25.

Bibliotheca Mathematica, herausgegeben von G. Eneström. 1. Serie von 1884—1886; 2. Serie von 1887—1899; 3. Serie von 1900—1907 (fortlaufend).

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, herausgegeben von Principe Baldaßarre Boncompagni, 1867—1884.

*) Es werden hier, wie das schon die Vorrede andeutete, nur einige besonders wichtige literarische Erscheinungen namhaft gemacht, und zwar in erster Linie solche, auf welche im Texte Bezug genommen worden ist.

Zu Kapitel I.

Schurtz, Urgeschichte der Kultur, Leipzig-Wien 1900.
Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichtes, 1. Teil, Jena 1876 (nicht mehr erschienen).
Frobenius, Die Mathematik der Ozeanier, Berlin 1900.

Zu Kapitel II.

Epping-Straßmaier, Astronomisches aus Babylon, Stimmen von Maria-Laach, 44. Ergänzungsheft, 1889.
F. X. Kugler, Die babylonische Mondrechnung, Freiburg i. B. 1900.
Hilprecht, Die Ausgrabungen der Universität von Pennsylvanien im Bêl-Tempel zu Nippur, Leipzig 1904.

Zu Kapitel III.

Eisenlohr, Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erläutert, Leipzig 1877.
Rodet, Les prétendus problèmes d'Algèbre du manuel du calculateur Égyptien, Paris 1892.
Bobynin, Sur le procédé employé dans le papyrus Rhind pour réduire les fractions en quantièmes, Bibl. Mathem. (2) 4. Band, S. 109ff.
Loria, Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana, ibid., (2) 7. Band, S. 79ff.

Zu Kapitel IV.

Biernatzki*), Die Arithmetik der Chinesen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 52. Band, S. 79ff.
Le Tcheōu Ly ou rites du Tcheōu, traduit par Ed. Biot, Paris 1851.
Thibaut, Astronomie, Astrologie und Mathematik, Grundriß der indisch-arischen Philologie von Bühler-Kielhorn, Straßburg i. E. 1899.
Bürk, Die Apastamba-Sulba-Sutras, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellschaft, 55. Band, S. 543ff.; 56. Band, S. 327ff.

Zu Kapitel V.

Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842. (Auch für die nächsten fünf Kapitel.)
Gow, A short History of Greec Mathematics, Cambridge 1884. (Desgleichen.)
Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom VII. bis XIII. Jahrhundert, Erlangen 1869. (Desgleichen.)

*) Ziemlich unselbständige Bearbeitung schwer zugänglicher Schriften des Missionars Alexander Wylie.

Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euclides, Leipzig 1870.
Allman, Greek Geometry from Thales to Euclid, Dublin 1889.
Diels, Doxographi Graeci, Berlin 1879.
G. Junge, Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt, Halle a. S. 1907. (Aus den Symbola Joachimica.)
Lasswitz, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton, 2 Bände, Hamburg-Leipzig 1890.
M. C. P. Schmidt, Terminologische Studien, Leipzig 1905. (Altphilologische Beiträge, II.)
Künßberg, Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos, 2 Teile, Dinkelsbühl 1889—1890.

Zu Kapitel VI.

Susemihl, Geschichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit, Leipzig 1891—1892. (Auch für die folgenden zwei Kapitel.)
M. Cantor, Euclid und sein Jahrhundert, Leipzig 1867.
Heiberg, Literargeschichtliche Studien über Euclid, Leipzig 1882.
H. Berger, Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen, Leipzig 1903.
Archimedes von Syrakus sämtliche Werke, übersetzt von Nizze, Stralsund 1824.
Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, Leipzig 1892.
Heiberg-Zeuthen, Eine neue Schrift des Archimedes, Bibl. Mathem., (3) 7. Band, S. 321ff.
Apollonii Pergaei Quae Graece exstant cum commentariis antiquis, ed. Heiberg, 2 Bände, Leipzig 1891—1893.
Zeuthen-v. Fischer-Benzon, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen 1886.

Zu Kapitel VII.

P. Tannery, Recherches sur l'histoire de l'astronomie, Paris 1893.
Blaß, Dissertatio de Gemino et Posidonio, Kiel 1883.
Poudra, Histoire de la perspective, Paris 1864. (Auch für die folgenden Kapitel).
Berger, Die geographischen Fragmente des Hipparch, Leipzig 1870.
H. Martin, Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie, Paris 1854.
Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra, griechisch und deutsch von H. Schoene, Leipzig 1903.
Claudii Ptolemaei Syntaxis Mathematica, ed. Heiberg, 2 Bände, Leipzig 1898—1903.

Zu Kapitel VIII.

M. Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst, Leipzig 1875.
Nissen, Das Templum, antiquarische Untersuchungen, Berlin 1869.

Die Schriften der römischen Feldmesser, übersetzt und erläutert von Blume, Lachmann und Rudorff, Berlin 1848—1852.
Weißenborn, Zur Boetiusfrage, Eisenach 1880.

Zu Kapitel IX.

Günther, Antike Nährungsmethoden im Lichte moderner Mathematik, Prag 1878.
Cossali, Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra, Parma 1797. (Auch für die folgenden Kapitel.)
Heath, Diophantus of Alexandria, Cambridge 1885.
Diophanti Opera omnia cum graecis commentariis, ed. P. Tannery, 2 Bände, 1893—1895.
Majer, Proclus über Petita und Axiome bei Euclides, Stuttgart 1875.
H. Martin, Sur l'époche et l'auteur du prétendu XV livre des éléménts D'Euclide, Boncompagni's Bulletino, 7. Band, S. 263ff.

Zu Kapitel X.

Bikélas-W. Wagner, Die Griechen des Mittelalters und ihr Einfluß auf die mittelalterliche Kultur, Gütersloh 1878.
Usener, Ad historiam astronomiae symbola, Bonn 1876.
Upenskij, Byzantinische Feldmesser (russisch), Odessa 1888.
Krumbacher, Geschichte der byzantinischen Literatur, München 1897.

Zu Kapitel XI.

Rodet, Leçons sur le calcul d'Aryabhatta, Journal Asiatique 1871, S. 8ff.
Algebra of the Hindus with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara, translated by Colebrooke, London 1817.
Hunrath, Das Ausziehen der Quadratwurzel bei den Griechen und Indern, Hadersleben 1883.
F. Buchner, De Algebra Indorum, Elbing 1821.

Zu Kapitel XII.

Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Ärzte und Naturforscher, Gotha 1840.
Wenrich, De autorum Graecorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis Persicisque, Leipzig 1842.
Suter, Das Mathematikerverzeichnis im Fihrist des Ibn Abî Jakûb an Nadîm, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 7. Supplementheft.
Hankel, Storia delle matematiche presso gli Arabi, Boncompagni's Bullettino, 5. Band, S. 427ff.
Sédillot, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux, 2 Bände, Paris 1845—1849.

L'Agèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée traduite et accompagnée d'extraits des manuscrits inédits par Woepcke, Paris 1853.

Zu Kapitel XIII.

Sédillot, Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes, Paris 1841.

Woepcke, Indroduction au cacul Gobârî et Hawaiî, Rom 1866.

v. Braunmühl, Nasr-Eddîn Tûsî und Regiomontanus, Abhandl. d. Leop.-Karol. Akad. d. Naturforscher, 1897, S. 36ff.

Zu Kapitel XIV.

Kaestner, Geschichte der Mathematik, 4 Bände, Göttingen 1796 bis 1800. (Auch für die folgenden Kapitel.)

Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, 4 Teile, Paris 1838—1840. (Desgleichen.)

Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877. (Desgleichen.)

Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525, Berlin 1887. (Desgleichen.)

K. Werner, Beda der Ehrwürdige und seine Zeit, Wien 1872.

—, Alcuin und sein Jahrhundert, Paderborn 1876.

Olleris, Les oeuvres de Gerbert, Clermond-Ferrand und Paris, 1867.

Friedlein, Gerbert, Die Geometrie des Boetius und die indischen Ziffern, Erlangen 1861.

Treutlein, Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwicklung der Ansichten über dieselben, Karlsruhe 1875.

P. Tannery, Sur une correspondance mathématique du X^{me} siècle, Paris 1900.

Steinschneider, Die Mathematik bei den Juden, Bibl. Mathem., (2) 8. Band, S. 37ff. (Auch für die folgenden Kapitel.)

Zu Kapitel XV.

Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da B. Boncompagni, 2 Bände, Rom 1857—1862.

B. Boncompagni, Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, Rom 1824.

Eneström, Woher hat Leonardo Pisano seine Kenntnisse der Elemente des Euclides entnommen? Bibl. Mathem., (3) 7. Band, S. 321ff.

Zu Kapitel XVI.

Aschbach, Geschichte der Wiener Universität im ersten Jahrhundert ihres Bestehens, Wien 1865.

Unger, Die Methoden der praktischen Arithmetik in ihrer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, Leipzig 1888.

Halliwell, Rara Mathematica, London 1839.

Curtze, Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme, Berlin 1870.

Nagl, Das Quadripartitum des Joannes de Muris und das praktische Rechnen im XIV. Jahrhundert, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 3. Supplementheft.

Geometria Culmensis, ed. Mendthal, Königsberg i. Pr. 1886.

Suter, Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters, Zürich 1887.

Zu Kapitel XVII.

Aschbach, Die Wiener Universität und ihre Humanisten im Zeitalter Kaiser Maximilians I., Wien 1877.

Wappler, Zur Geschichte der deutschen Algebra im XV. Jahrhundert, Zwickau 1887.

Treutlein, Die deutsche Coß, Zeitschr f. Math. u. Phys., 24. Band, 1. Supplementheft.

Gassendi, Tychonis Brahei vita, accessit Nicolai Copernici, Georgii Purbachii et Joannis Regiomontani astronomorum celeberrimorum vita, Paris 1654.

Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern, Nürnberg 1730.

Drobisch, De Joannis Widmanni Egerani compendio arithmeticae mercatorum, Leipzig 1840.

Schanz, Der Kardinal Nikolaus von Cusa als Mathematiker, Rottweil 1872.

Staigmüller, Lukas Paciuolo, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 34. Band, Hist.-liter. Abt., S. 125ff.

Kutta, Zur Geschichte der Geometrie mit einer Zirkelöffnung, Abhandl. d. Leop.-Karol. Akad. d. Naturforscher, 1897, S. 74ff.

Zu Kapitel XVIII.

Hartfelder, Philipp Melanchthon als Praeceptor Germaniae, Berlin 1889.

Quételet, Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges, Brüssel 1864. (Auch für die beiden folgenden Kapitel.)

Zeuthen-R. Meyer, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert, Leipzig 1903. (Desgleichen.)

Zu Kapitel XIX.

Berlet, Die Coß von Adam Riese, Annaberg i. S. 1860.

Cantor, Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 2. Band, S. 353ff.

Gherardi-Curtze, Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Fakultät der alten Universität Bologna, Berlin 1871.

Große, Historische Rechenbücher des XVI. und XVII. Jahrhunderts, Leipzig 1901.

Giordani, I sei cartelli di matematica disfida intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche . . ., Mailand 1876.

Gieswald, Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen, Danzig 1836.
Masères, Scriptores logarithmici, 6 Bände, London 1791—1807.

Zu Kapitel XX.

Staigmüller, Albrecht Dürer als Mathematiker, Stuttgart 1891.
Steichen, Mémoire sur la vie et les travaux de Simon Stévin, Brüssel 1846.
v. Braunmühl, Christoph Scheiner als Mathematiker, Physiker und Astronom, Bamberg 1891.
Delambre, Histoire de l'astronomie moderne, 2 Bände, Paris 1821.
Keplers Sämtliche Werke, ed. Frisch, 8 Bände, Erlangen 1858—1860.
Galileis Sämtliche Werke, ed. Favaro, 19 Bände, Florenz 1890—1907.
Favaro, Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI. e XVII. con Giovanni Antonio Magini, Bologna 1886.
Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik, Berlin 1873.
Duhem, Les origines de la statique, 1. Band, Paris 1905.

Verbesserung.

Bei Fig. 3 (S. 37) ist eine Richtigstellung vorzunehmen. In der untersten Horizontalreihe fehlt als Mittelglied ein Punkt, wogegen das Mittelglied der Vertikalreihe rechts einen Punkt zuviel enthält.