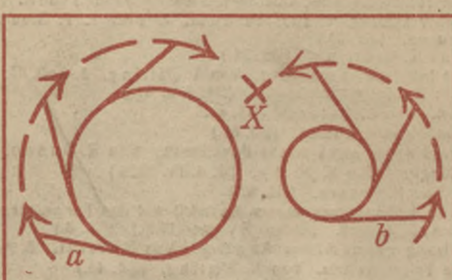
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

BAND 26

B. KERST

METHODEN ZUR LÖSUNG GEOMETRISCHER AUFGABEN

ZWEITE AUFLAGE



VERLAG B.G.TEUBNER LEIPZIG UND BERLIN

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von

Oberstud.-Dir. Dr. **W. Lietzmann** und Oberstudienrat Dr. **A. Witting**
Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je Mk. 1.—
Doppelband Mk. 2.—.

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen

Bisher sind erschienen: (1912/25):

Der Gegenstand der Mathematik im Lichte ihrer Entwicklung. Von H. Wieleitner. (Bd. 50.)

Mathematik und Logik. Von H. Behmann. [In Vorb. 1925.]

Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 2., durchges. Aufl. (Bd. 2.)

Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. II: Die Zahlzeichen im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 1 u. 34.)

Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. 2. Aufl. (Bd. 7.)

Abgekürzte Rechnung. Nebst einer Einführung in die Rechnung mit Logarithmen. Von A. Witting. (Bd. 47.)

Elementarmathematik und Technik. Eine Sammlung elementarmathematischer Aufgaben mit Beziehungen zur Technik. Von R. Rothe. (Bd. 54.)

Finanz-Mathematik. (Zinseszinsen-, Anleihe- und Kursrechnung.) Von K. Herold. (Bd. 56.)

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von O. Meißner. 2. Auflage. I: Grundlehren. (Bd. 4.) II: Anwendungen. (Bd. 33.)

Mengenlehre. Von K. Grelling. (Bd. 58.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. **I: Die Differentialrechnung. II: Die Integralrechnung.** (Bd. 9 u. 41.)

Die Determinanten. Von L. Peters. (Bd. 65.)

Unendliche Reihen. Von K. Fladt. (Bd. 61.)

Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. Von H. Onnen. (Bd. 51.)

Konforme Abbildungen. Von E. Wicke. [U. d. Pr. 1925.]

Vektoranalysis. Von L. Peters. (Bd. 57.)

Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 3. Aufl. [Ersch. Sommer 1925.] (Bd. 3.)

Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. 2. Aufl. (Bd. 26.)

Einführung in die Trigonometrie. Von A. Witting. (Bd. 43.)

Ebene Geometrie. Von B. Kerst. (Bd. 10.)

Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Von W. Dieck. (Bd. 31.)

Der Goldene Schnitt. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 32.)

Darstellende Geometrie.

Darstellende Geometrie d ... **r Methode der kotierten Projektione** ... 36.)

Forts

Verlag von B. ... nd Berlin

MATHEMATISCHE BIBLIOTHEK

HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING

26

METHODEN ZUR LÖSUNG GEOMETRISCHER AUFGABEN

VON

B. KERST

STUDIENRAT AM REALGYMNASIUM IN ZWICKAU I. S.

MIT 136 AUFGABEN UND 46 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE AUFLAGE

LEIPZIG UND BERLIN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

1925

VORWORT

Es handelt sich hier nicht um eine Sammlung im alten Sinne; vielmehr kam es darauf an, möglichst viele, verschiedenartige *Methoden* der Auflösung zu unterscheiden und an einer bescheidenen Zahl von Aufgaben vorzuführen. Zur selbständigen Übung sind den einzelnen Abschnitten weitere Aufgaben angefügt. Bei den Lösungsmethoden wurde versucht, besonders durch die Vorstellung der Beweglichkeit der Figuren den gegenwärtigen Anforderungen einigermaßen gerecht zu werden. Von der benutzten Literatur ist zu erwähnen: Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, 1903; Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geom. Konstruktionsaufgaben, Kopenhagen 1879 (im Buchhandel nicht mehr zu haben); R. von Fischer-Benzon, Programm Kiel, Gymnasium 1884. Einige Aufgaben entstammen dem Aufgaben-Repertorium aus Hoffmanns Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht. Auf eine Benennung der einzelnen Methoden mit Schlagwörtern wurde verzichtet; dafür gibt das Inhaltsverzeichnis die Lösungsmethoden kurz gekennzeichnet an. In den Figuren sind die *gesuchten* Linien strichpunktiert, die *gegebenen* Punkte durch Ringe angezeigt.

Zwickau i. S., Januar 1916.

B. Kerst.

INHALT

EINLEITUNG

Geometrische Konstruktionsaufgaben sind so alt wie die Beschäftigung der Menschen mit Geometrie überhaupt; ja man wird in den einfachsten von ihnen, wie etwa der Halbierung einer gegebenen Strecke, geradezu die Veranlassung zu geometrischer Tätigkeit und zur Entwicklung geometrischer Begriffe zu suchen haben. Handelte es sich nun zunächst in den der wissenschaftlichen Entwicklung vorangehenden Zeiten um rein praktische Aufgaben einfachster Art, so tauchten mit der Erhebung der Geometrie zur Wissenschaft zugleich auch abstraktere und verwickeltere Konstruktionsaufgaben auf. Vor allem in den Händen der Griechen vollzog sich jene Entwicklung der Geometrie zu einer systematischen Wissenschaft, und in die ältesten Zeiten griechischer Mathematik reichen geometrische Aufgaben zurück, die noch heute allgemein bekannt sind; erinnert sei nur an die Quadratur des Kreises, an die Dreiteilung des Winkels, an die Verdoppelung des Würfels, oder auch an die nach Apollonius (um 200 v. Chr.) benannte, schon in ihrer Fassung nicht mehr ganz einfache Aufgabe, Kreise zu konstruieren, welche drei beliebig gegebene Kreise berühren.

Die Hilfsmittel, deren man sich zur geometrischen Konstruktion bediente, waren schon im Altertum hauptsächlich Lineal und Zirkel. Das Lineal ist bereits in den frühesten Zeiten benutzt worden; in dem altägyptischen Rechenbuche des Ahmes, das etwa 2000 Jahre vor unserer Zeitrechnung entstand, finden sich Figuren, die den Gebrauch des Lineals erkennen lassen. Die Verwendung des Zirkels läßt sich nicht ganz so weit zurückverfolgen; die Sage freilich erzählt von Talus, einem Neffen und Lehrling des Dädalus, er habe neben einigen anderen Werkzeugen auch die Säge sowie den Zirkel erfunden; Ovid berichtet hierüber (Metam. VIII, 247—249):

„Primus et ex uno duo ferrea bracchia nodo
Vinxit, ut, aequali spatio distantibus illis,
Altera pars staret, pars altera duceret orbem.“

Daneben verwandte man noch einige andere Instrumente, mit denen man durch die Methode der sogenannten Bewegungsgeometrie Aufgaben löste. So war eine Vorrichtung bekannt, die angeblich von Platon erfunden wurde, um das Problem der Würfelverdoppelung zu lösen.

Merkwürdig ist, daß gerade Platon, dem dieses Instrument zugeschrieben wird, andrerseits als derjenige genannt wird, der zum erstenmal die bis heute noch wichtige Forderung ausgesprochen haben soll, daß zur Lösung geometrischer Aufgaben nur das Lineal und der Zirkel verwendet werden dürfen. Diese Einschränkung des Gebrauchs der Instrumente wurde sehr bald allgemein anerkannt, und noch heute wird jede andere Anordnung als Ausnahme empfunden. Freilich sind solche Ausnahmen seither mehrfach aufgetaucht; einerseits wurden noch weiter Mechanismen ersonnen, um Aufgaben zu lösen, die mit Zirkel und Lineal allein nicht lösbar sind; erwähnt sei hier nur die einfache Vorrichtung (Fig. 1), die zur Konstruktion von Ellipsen dient. Die auf dem Stabe AC festsitzenden Zapfen B und C laufen in zwei zueinander senkrechten, festen Rinnen; der Stift A beschreibt dann eine Ellipse, die je nach der Größe des Verhältnisses $AB:AC$ verschiedene Form erhält.

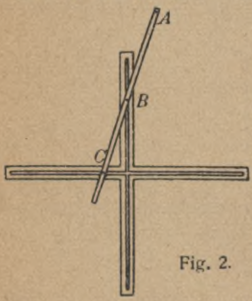


Fig. 2.

Andrerseits wurde der Gebrauch der Hilfsmittel auch noch weiter eingeschränkt; so wurde z. B. untersucht, welche Aufgaben sich mit Hilfe des Lineals allein lösen lassen. Ferner behandelte der Italiener Mascheroni (1750—1800) die geometrischen Konstruktionen unter alleiniger Verwendung des Zirkels; wenn also z. B. ein gesuchter Punkt auf der Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte A und B liegen soll, so darf zu seiner Bestimmung die Gerade AB nicht verwendet werden.[1]) Auch Konstruktionen mit dem Lineal und einem nicht verstellbaren Zirkel hat man, und zwar schon im Altertum, behandelt. — Hier wollen wir uns des Zirkels und Lineals

1) Beispiel: Die gegebene Strecke AB soll verdoppelt werden; wie bestimmt man mittels des Zirkels allein den Endpunkt der doppelten Strecke?

in der üblichen Weise uneingeschränkt bedienen. Bei den grundlegenden Konstruktionen, deren Ausführung sie uns gestatten („eine gegebene Strecke zu halbieren", „auf einer Geraden in gegebenem Punkte das Lot zu errichten" usw.), wollen wir uns nicht aufhalten.

Für die Art nun, wie wir die Lösung einer geometrischen Aufgabe suchen, muß wiederum Platon genannt werden als Urheber des Verfahrens, das man „Analysis" nennt. Die Aufgabe verlangt die Herstellung einer Figur, welche bestimmte Eigenschaften besitzen soll; diese mit Worten ausgedrückten Eigenschaften suchen wir durch ein geometrisches Bild zu veranschaulichen, d. h. wir zeichnen eine Figur, die „so aussieht wie" die verlangte und nur entweder den Fehler besitzt, daß sie die gegebenen Stücke nicht in richtiger Größe enthält, oder den, daß sie nicht exakt gezeichnet ist. So kann man z. B. für das oben erwähnte „Taktionsproblem" („Berührungsaufgabe") des Apollonius eine „Analysisfigur" zeichnen, indem man einen beliebigen Kreis, der den gesuchten darstellt, zuerst zeichnet und nun drei ihn einzeln berührende Kreise an beliebigen Stellen konstruiert; diese vertreten die gegebenen Kreise. Oder man zeichnet zu den drei gegebenen Kreisen einen, der sie berührt, durch Probieren, am besten vielleicht aus freier Hand, wobei man sich geeignete Verbiegungen erlauben darf. Dieser zweite Weg ist sehr bequem und für alle Aufgaben geeignet; der erste Weg bietet dagegen den Vorzug einer exakten Figur, doch erfordert deren Herstellung in manchen Fällen erst eine besondere Überlegung.

Als allgemeine Regeln für die weitere Behandlung der Analysisfigur sind nur die beiden zu beachten: 1. Die in der Aufgabe vorkommenden Stücke müssen in der Figur dargestellt werden. 2. Ein freier Endpunkt einer Strecke ist mit anderen Punkten zu verbinden, ebenso sind die in der Aufgabe vielleicht nicht erwähnten Schnittpunkte irgendwelcher Linien der Figur zu berücksichtigen. Hiernach erscheint es keinesfalls als „Kunstgriff", wenn man für die Konstruktion eines Dreiecks, dessen Umfang mitgegeben ist, in der Analysis etwa die Seite BC über B hinaus um die Strecke $BD = BA$ und über C hinaus um die Strecke $CE = CA$ verlängert, A mit D und E verbindet und nun das Dreieck ADE

zu konstruieren sucht. — In einigen Fällen kann man selbst von diesen allgemeinen Regeln abweichen; ist z. B. für ein gesuchtes Dreieck das Verhältnis zweier Höhen gegeben, so braucht man die Figur nicht unnötig zu belasten durch Einzeichnen dieser Höhen, vielmehr beachtet man von vornherein, daß durch jenes Verhältnis auch das der zugehörigen Seiten bekannt ist.

Weitere allgemeine Regeln lassen sich nun nicht geben. Eine allgemeine Methode, nach der jede geometrische Aufgabe auf rein geometrischem Wege behandelt werden könnte, gibt es nicht; es ist auch nicht zweckmäßig, die verschiedenen Lösungsarten nach äußerlichen Gesichtspunkten zusammenzufassen zu einer möglichst geringen Zahl getrennter Methoden, sondern wir werden versuchen, möglichst viele Wege kennen zu lernen, die zum Ziele führen. Nur über das Wesen der eigentlichen Analysis sei noch einiges vorausgeschickt; die in Platons Schule festgelegte und seither auch beibehaltene Form für die Behandlung geometrischer Aufgaben läßt der Analysis die Beschreibung der eigentlichen Konstruktion und dieser noch einen Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens folgen; wir werden uns hier in der Hauptsache auf die Analysis beschränken können.

Zunächst verfolgt nun die Analysis den Zweck, die von der Aufgabe gestellten Bedingungen für die Punkte und Linien der gesuchten Figur in getrennte Einzelforderungen zu zerlegen. Soll z. B. in dem gegebenen Dreieck ABC ein Punkt X gefunden werden, der von allen drei Ecken gleichweit entfernt ist, so ist diese Aufgabe zu zerlegen in die beiden Forderungen: es soll 1. $XA = XB$ sein, und es soll 2. $XB = XC$ sein. Läßt man nun eine dieser Bedingungen vorläufig ganz außer acht, etwa 2, so kann sich der Punkt X, der nur die Bedingung 1 erfüllen soll, in der Ebene bewegen; er kann nicht an jeder beliebigen Stelle liegen, sondern er muß sich auf einer durch 1 völlig bestimmten Bahn bewegen, und diese nennt man einen geometrischen Ort für X. (Auch dieser wichtige Begriff ist in der platonischen Schule klar entwickelt worden, nachdem er schon vorher gelegentlich benutzt worden war.) In unserm Beispiel bildet die Mittelsenkrechte zu AB diesen „Ort". Auf dieselbe Weise ergibt sich, durch Vernachlässigung der Bedingung 1, als zweiter

Ort für X das Mittellot zu BC. Durch diese beiden Örter ist der Punkt X völlig bestimmt.

In vielen Fällen liefert jedoch diese Zerlegung der Aufgabe als geometrische Örter Linien, die sich nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen[1]), d. h. die weder Geraden noch Kreise sind. Dann hat die Analysis weitere Beziehungen zwischen den Teilen der gesuchten Figur zu ermitteln; je nach der Art, wie dies geschehen kann, werden sich sehr verschiedene Methoden ergeben. Mit diesen haben wir uns später zu beschäftigen; vorläufig betrachten wir solche Aufgaben, in denen die erwähnte Zerlegung sofort auf Bewegungen führt, welche die Lösung ergeben. Das Wesentliche an dieser Gruppe von Methoden wird sich aus einigen Beispielen leichter erkennen lassen als aus allgemeinen Bemerkungen.

§ 1] **Aufg. 1.** *Ein gegebenes Dreieck ABC soll so gelegt werden, daß die Ecken A und B auf eine gegebene Kreislinie fallen, während C auf eine gegebene Gerade zu liegen kommt.*

Lassen wir zunächst die Bedingung für die Ecke C beiseite, so kann sich das Dreieck bewegen, wie aus Fig. 2 zu ersehen ist. Hierbei beschreibt die Ecke C einen zum gegebenen konzentrischen Kreis, und dieser kann gezeichnet werden, da man das Dreieck in irgendeinem Augenblick seiner Bewegung, etwa in der Lage $A_1 B_1 C_1$ konstruieren kann. Die Schnittpunkte des erhaltenen Kreises mit der gegebenen Geraden liefern dann zwei Lagen für den gesuchten Punkt C. Die weitere Bestimmung der Punkte A und B bietet keine Schwierigkeiten.

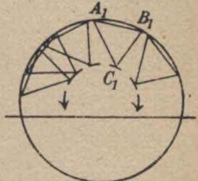


Fig. 2.

Aufg. 2. *Gegeben sind zwei Kreise; ein Punkt ist zu finden, von dem aus die Tangenten an die Kreise die vorgeschriebenen Längen a und b haben.*

---

1) Behandle z. B. die erwähnte „Berührungsaufgabe" des Apollonius in dieser Weise und konstruiere von den Örtern für den Mittelpunkt des ges. Kreises eine Anzahl einzelner Punkte.

Die Tangente von der Länge a des ersten Kreises lassen wir an diesem entlang gleiten; ihr Endpunkt beschreibt dabei (Fig. 3) einen zu jenem konzentrischen Kreis, dessen Konstruktion sich aus einer beliebigen Lage der Tangente a ergibt; er bildet einen geometrischen Ort für den gesuchten Punkt. Wiederholen wir diese Bewegung am zweiten gegebenen Kreise mit der Tangente b, so erhalten wir ebenfalls einen Kreis als zweiten Ort.

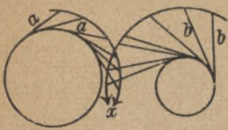


Fig. 3.

Aufg. 3. *Ein Kreis mit gegebenem Radius r soll so gelegt werden, daß sein Mittelpunkt X auf eine geg. Gerade* g_1 *fällt, während auf einer anderen geg. Geraden* g_2 *eine Sehne von vorgeschriebener Länge* $YZ = s$ *abgeschnitten wird.*

Versuchen wir zunächst, unter Vernachlässigung der zweiten Bedingung, nur die erste zu erfüllen; der Kreis kann dann mit seinem Mittelpunkt längs g_1 hingleiten, und man kann ihn auch in beliebigen Augenblicken dieser Bewegung zeichnen. Da wir aber die Lage der Punkte Y und Z auf der Peripherie nicht kennen, so lassen sich deren Bahnen bei dieser Bewegung nicht bestimmen, d. h. wir erhalten für diese Punkte keine geometrischen Örter. Also ist unser Lösungsversuch mißglückt. Daher lassen wir umgekehrt die erste Bedingung (g_1) beiseite und bewegen den Kreis so, daß er auf g_2 stets die Sehne s bildet; hierbei verschiebt sich X auf einer Parallelen zu g_2, wie aus Fig. 4 zu ersehen ist. Da der zu einer beliebigen Lage $Y'Z'$ der Strecke s gehörige Punkt X' einfach bestimmt werden kann, so ist diese Parallele leicht herzustellen; ihr Schnittpunkt mit g_1 ist der gesuchte Punkt X.

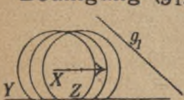


Fig. 4.

Für die weitere Anwendung dieser einfachen Bewegungsmethode seien noch folgende Beispiele erwähnt:

Aufg. 4. Ein Kreis mit geg. Radius soll so gezeichnet werden, daß er zwei gegebene Kreise unter Sehnen von vorgeschriebenen Längen s_1 und s_2 schneidet.

Aufg. 5. In einen geg. Kreis ist eine Sehne von der geg. Länge a so zu legen, daß sie von einer geg. Geraden in dem vorgeschriebenen Verhältnis $m : n$ geteilt wird.

Aufg. 6. Ein geg. gleichseitiges Dreieck ist mit zwei Ecken so auf zwei geg. konzentrische Kreise zu legen, daß die dritte Ecke auf eine geg. Gerade fällt.

Aufg. 7. Ein Kreis mit geg. Radius ρ ist so zu zeichnen, daß er zwei gegebene Kreise berührt.[1])

Bisweilen ist die Bewegung eines Punktes, der eine vorgeschriebene Bedingung beständig erfüllt, nicht so einfach zu überblicken wie in diesen Beispielen. Dann veranlaßt uns die Aufgabe, solche Bewegungen zunächst für sich zu studieren; die Ergebnisse dieser Betrachtungen müssen dann als bekannt vorausgesetzt werden.

§ 2] **Aufg. 8.** *Ein Punkt X ist zu bestimmen, von dem aus zwei geg. Strecken AB und CD unter gegebenen Winkeln α und β erscheinen.*

Vernachlässigen wir die zweite Forderung (CD, β), so kann der Punkt X sich in gewisser Weise bewegen, während beständig $\sphericalangle AXB = \alpha$ bleibt. Wer diese eigenartige Bewegung jemals wirklich gesehen hat[2]) — und das hat jeder, der in der Geometrie über die allerersten Anfänge hinausgekommen ist —, dem wird es nicht schwerfallen, zu erkennen, daß X auf einem Kreisbogen hinläuft; in diesem Bogen bildet AB die Sehne und α den zugehörigen Peripheriewinkel. Auch die Art, wie dieser Bogen gezeichnet wird, darf als bekannt vorausgesetzt werden. Durch dieselbe Betrachtung erhalten wir als zweiten Ort den Bogen mit CD als Sehne und β als zugehörigen Peripheriewinkel.

Aufg. 9. *Gegeben sind drei beliebige Geraden und ein Punkt P; durch diesen soll eine Gerade so gelegt werden, daß ihre drei Schnittpunkte mit jenen Geraden und der Punkt P eine harmonische Punktreihe bilden.*

Lassen wir die Gerade um P sich drehen, so können wir in jeder Lage einen Punkt Y' angeben, der mit P und den auf g_1 und g_3 liegenden Punkten X' und Z' zusammen eine harmonische Reihe bildet, jedoch natürlich nicht auf g_2 liegt.

---

1) Wähle die geg. Kreise so, daß sie sich schneiden; wieviele Lösungen erhält man, wenn ρ hinreichend klein gewählt wird?

2) Vgl. Band 16 dieser Sammlung: Giebel, Anfertigung mathematischer Modelle, S. 14.

Wie bewegt sich Y'? Neben der harmonischen Punktreihe lernt man bekanntlich das harmonische Strahlenbüschel kennen; die Geraden g_1 und g_3, die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit P und die Verbindungslinie desselben Schnittpunktes mit einem augenblicklich festgehaltenen Punkte Y' bilden, wie ohne weiteres ersichtlich, ein solches Büschel; da die drei ersten Strahlen festliegen, liegt auch der vierte fest. Er ist mit Hilfe eines der Punkte Y' bestimmbar und bildet die gesuchte Bahn für den Punkt Y'; sein Schnitt mit g_2 liefert den verlangten Punkt Y und damit die gesuchte Gerade PY.

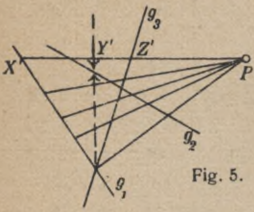


Fig. 5.

Aufg. 10. *Auf einer Geraden liegen vier Punkte. Die drei durch sie begrenzten Strecken sollen von einem gesuchten Punkte aus unter gleichen Winkeln erscheinen.*

Sind A, B, C, D die gegebenen, X der gesuchte Punkt, so ist die erste Bedingung: $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC$. Aus dieser allein ohne alle Vorkenntnisse die Bahn des Punktes X zu ermitteln, dürfte sehr schwierig sein; es ist schon nicht ganz einfach, beliebige einzelne Lagen für X zu konstruieren.[1]) Doch die Bewegung des Punktes X gehört zu denen, die uns in der Planimetrie bekannt werden, sie ergibt sich dort aus den Eigenschaften der Winkelhalbierenden im Dreieck; wir wissen, daß X in unserm Falle einen Kreis beschreibt, der sich konstruieren läßt; der zu B in bezug auf A und C zugeordnete harmonische Punkt B' begrenzt mit B zusammen seinen Durchmesser. Entsprechend liefert die zweite Bedingung $\sphericalangle BXC = \sphericalangle CXD$ einen zweiten solchen Kreis für X.

(Der hier zweimal benutzte geometrische Ort wird bekanntlich „Kreis des Apollonius“ genannt. Da er sehr oft gebraucht wird, wollen wir die beiden Fälle, in denen man sich seiner erinnern muß, an dieser Stelle folgendermaßen aussprechen:

a) Vom Dreieck ABC liegt die Seite BC und auf ihr ein Punkt U fest. Die Halbierungslinie des Winkels bei A soll durch U gehen. Dann bewegt sich A auf dem Kreise, dessen

---

1) Versuche dies! Nimm dabei jedesmal den dem Dreieck AXC umgeschriebenen Kreis zu Hilfe.

Durchmesser durch U und den zu U harmonisch zugeordneten Punkt V [also $UA:UB = VA:VB$] bestimmt ist.

b) Vom Dreieck ABC liegt die Seite BC fest. Die Seiten AB und AC sollen in dem gegebenen Verhältnis $m:n$ stehen. Dann kann sich A auf dem Kreise bewegen, dessen Durchmesser bestimmt wird durch den inneren und äußeren Teilpunkt der Strecke BC nach dem geg. Verhältnis $m:n$.)

Aufg. 11. *Ein geg. Parallelogramm $ABCD$ soll in ein anderes verwandelt werden, dessen Seitenlängen a' und b' gegeben sind.*

Halten wir vorläufig AB fest, so ist uns bekannt, daß die in dem Worte „verwandeln" enthaltene Bedingung der Strecke CD eine Verschiebung in ihrer eignen Geraden erlaubt. Daher können sofort auf dieser Geraden CD die Punkte C'' und D' so gefunden werden, daß $AD' = BC'' = b'$ wird. Halten wir nun AD' fest, so können ebenso die Punkte B und C'' auf der Geraden BC'' verschoben werden in die Lage $B'C'$, so daß $AB' = C'D' = a'$ wird.

Aufg. 12. Im geg. Dreieck ABC ist ein Punkt so zu bestimmen, daß seine Entfernungen von den Ecken in dem geg. Verhältnis $m:n:p$ zueinander stehen.

Aufg. 13. Dreieck aus a, α, h_a.

Aufg. 14. Ein geg. Parallelogramm ist in ein anderes zu verwandeln, von dem die beiden Diagonalen gegeben sind.

Aufg. 15. In einen geg. Kreis ist ein rechtwinkliges Dreieck einzuschreiben, dessen Katheten durch zwei geg. Punkte gehen.

Aufg. 16. Ein Punkt ist so zu bestimmen, daß die von ihm aus an drei geg. Kreise gelegten Tangenten einander gleich werden.

Gerade die letzte Aufgabe zeigt deutlich, wie wir oft durch eine Konstruktionsaufgabe veranlaßt werden, eine neue Art der Bewegung eines Punktes zu untersuchen und dadurch neue geometrische Örter zu finden. Natürlich ist eine solche Untersuchung nicht immer ganz einfach, und es kann nicht von jedermann verlangt werden, sie erfolgreich durchzuführen; hier muß eben die Anleitung, die ein Buch oder ein Lehrer gibt, vorausgesetzt werden. Was dabei an tatsächlichen Kenntnissen gewonnen ist, muß aber fernerhin auch zur Verfügung stehen. Ohne daß wir hiermit die Mathematik zu einer bloßen Gedächtniswissenschaft herabwürdigen, verlangen wir vielmehr die selbständige mathematische Tätigkeit auf einer Grundlage vorhandenen Wissens.

§ 3] **Aufg. 17.** *Gegeben sind zwei Kreise und ein Punkt P. Durch diesen ist eine Gerade XY von der einen Peripherie nach der andern so zu ziehen, daß sie in P halbiert wird* (Fig. 6).

Wir lassen Y auf der geg. Kreislinie wandern und tragen für jede seiner Lagen Y' die Strecke PY' auf der betreffenden Geraden von P aus bis zum Punkte X' ab; wir vernachlässigen also die Bedingung, daß X auf der andern gegebenen Kreislinie liegen soll. Dann beschreibt X' einen Kreis, der leicht zu bestimmen ist: sein Radius ist gleich dem des Kreises M_2, und sein Mittelpunkt M' liegt auf der Geraden M_2P, von P um die Strecke PM_2 entfernt. Die Schnittpunkte des Kreises M' mit dem gegebenen Kreise M_1 liefern die Lösungen.

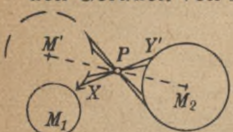


Fig. 6.

Auch wenn statt der Forderung $PX = PY$ verlangt worden wäre, es solle sich $PX : PY = m : n$ verhalten (das Verhältnis $m : n$ gegeben), so hätte man die Bahn für X' bestimmen können; es wäre nämlich ebenfalls ein Kreis, dessen Radius aus dem gegebenen r_2 gefunden wird als $r' = r_2 \cdot \frac{m}{n}$, und dessen Mittelpunkt bestimmt ist durch die Gerade M_2P und durch $M'P = M_2P \cdot \frac{m}{n}$. Wir sagen, dieser Kreis M' ist perspektiv zu dem Kreise M_2; P heißt Ähnlichkeitspunkt; durch ihn und das Verhältnis $m : n$ ist dieser Kreis M' bestimmt. [Beachte die zweite Möglichkeit, daß P die Strecke XY äußerlich teilen soll im Verhältnis $m : n$; beide Arten werden durch das Vorzeichen, das man diesem Verhältnis geben kann, unterschieden.]

Das Wesentliche an dieser Art, eine Aufgabe zu lösen, besteht also in der Erkenntnis, daß ein gesuchter Punkt durch die eine Bedingung gezwungen wird, eine gewisse Linie (hier den Kreis M') zu durchlaufen, welche zu einer gegebenen Linie (Kreis M_2) perspektiv ist.

Aufg. 18. *Durch einen geg. Punkt P ist eine Gerade zu ziehen, die zwei geg. Geraden g_1 und g_2 in X_1 und X_2 so schneidet, daß $PX_1 : PX_2 = m : n$.*

Drehen wir die gesuchte Gerade um P und lassen X_1 auf g_1, so beschreibt X_2, wenn die gegebene Proportion erfüllt bleiben soll, eine leicht bestimmbare Parallele zu g_1.

Aufg. 19. *Durch einen geg. Punkt ist in einem Kreise eine Sehne so zu ziehen, daß sie durch den Punkt in gegebenem Verhältnis geteilt wird.*

Wir können bei der Drehung der Sehne den einen Endpunkt auf dem Kreise wandern lassen, während der andere die Peripherie verläßt und sich so bewegt, daß die durch ihn und jenen begrenzte Strecke stets in dem gegebenen Verhältnis geteilt wird; für diesen zweiten Endpunkt ergibt sich darum wieder ein Kreis, der zum gegebenen perspektiv ist und bestimmt werden kann.

In den folgenden Dreiecksaufgaben soll das gesuchte Dreieck ABC heißen; seine Seitenlängen sind a, b, c, die Seitenhalbierenden (Mitteltransversalen) s_a, s_b, s_c, die Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ. Wir sprechen die Aufgaben in kurzer Form aus.

Aufg. 20. *Dreieck aus b, c, s_a.* (Fig. 7).

Da Bewegungen nur in Beziehung zu festliegenden Punkten betrachtet werden können, so legen wir zuerst etwa die Strecke $AB = c$ fest. Lassen wir zunächst s_a unbeachtet, so kann sich C auf dem Kreise um A mit Radius b[1]) bewegen; dann bewegt sich der Mittelpunkt D von BC auf einem Kreise, der zu jenem perspektiv liegt, wobei B der Ähnlichkeitspunkt ist und das Verhältnis $1:2$ beträgt. Durch diesen Kreis und den Kreis (A, s_a) ist die Mitte von BC und damit auch BC bestimmt.

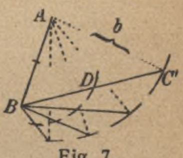


Fig. 7.

Aufg. 21. *Dreieck aus a, α, s_b.*

Wird $BC = a$ festgelegt, so kann sich der Mittelpunkt E von AC auf dem Kreise (B, s_b) bewegen; also bewegt sich A auf dem zu diesem perspektiv liegenden Kreise (Ähnlichkeitspunkt C, Verhältnis $2:1$). Lassen wir dies sodann un-

1) Es empfiehlt sich die kurze Bezeichnung „Kreis (A, b)", die wir weiterhin verwenden wollen.

beachtet und berücksichtigen das gegebene Stück α, so erhalten wir als zweite Bewegung für A den Kreis mit α als Peripheriewinkel über der Sehne BC. Man konnte diesen Kreisbogen auch zuerst verwenden und hat dann für E den zu ihm perspektiv liegenden Kreis (Ähnlichkeitspunkt C, Verhältnis $1:2$).[1])

Aufg. 22. *Dreieck aus a, s_b, $b:c=m:n$.*

Die festgelegte Strecke $BC=a$ und das geg. Verhältnis $m:n$ liefern die Bewegung des Punktes A auf dem Apolloniuskreise, dessen Durchmesser durch die Teilpunkte von BC im Verhältnis $n:m$ bestimmt ist. Die Bahn für E ist sodann der zu jenem perspektive Kreis, wobei wieder C Ähnlichkeitspunkt und $1:2$ das Verhältnis ist. Andrerseits liegt E auf dem Kreise (B, s_b).

Aufg. 23. *Dreieck aus b, c, w_α.*

Wir legen $AW=w_\alpha$ fest und bewegen B auf dem Kreise (A, c). Da bekanntlich W die Strecke BC im Verhältnis $c:b$ innerlich teilt, so bewegt sich C auf dem zu jenem perspektiven Kreise mit dem Mittelpunkt A', wobei W Ähnlichkeitspunkt und das Verhältnis $-\frac{b}{c}$ ist (s. Fig. 8). Andrerseits liefert der Kreis (A, b) den zweiten Ort für C.

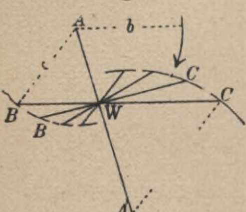


Fig. 8.

Aufg. 24. Ein Parallelogramm ist zu zeichnen, von dem zwei Gegenecken gegeben sind, während die beiden andern Ecken auf einem geg. Kreise liegen sollen.

Aufg. 25. Auf einem Kreise ist der Peripheriepunkt P sowie eine Sehne AB gegeben. Durch P soll eine Sehne gelegt werden, welche durch AB halbiert wird.

Aufg. 26. Durch einen Schnittpunkt zweier gegebenen Kreise soll eine Gerade so gelegt werden, daß die auf ihr entstehenden Sehnen im geg. Verhältnis $m:n$ stehen.

Aufg. 27. Einem geg. Viereck soll ein Parallelogramm eingeschrieben werden, dessen Mittelpunkt gegeben ist.

Aufg. 28. Dreieck aus a, s_b, $\sphericalangle(s_a b)$.

---

1) Man löse diese und die folgende Aufgabe auch dadurch, daß man zuerst $BE=s_b$ festlegt.

Aufg. 29. Dreieck aus a, s_a, $\sphericalangle(s_b b)$.
Aufg. 30. Dreieck aus α, s_b, s_c.
Aufg. 31. Dreieck aus α, s_b, $\sphericalangle(s_c a)$.
Aufg. 32. In Figur 9 ist $AO = OB$; die gestrichelten Linien sind beweglich, und zwar soll C auf dem Kreise wandern, und es soll stets $CD = CB$ sein. Welche Linie durchläuft der Punkt X?

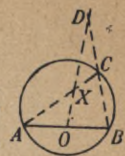


Fig. 9.

§ 4] Oft erlaubt eine der gegebenen Bedingungen einem Punkte eine Bewegung, die durch den Mechanismus der „Parallelführung“ erzeugt wird, d.h. dadurch, daß eine Strecke parallel zu ihrer Richtung verschoben wird. Ist diese Richtung sowie die Bahn des einen Endpunktes der Strecke bekannt, so ist offenbar auch die des anderen Endpunktes bestimmbar, denn sie ist eine zu jener kongruente Linie, um die Länge der gegebenen Strecke verschoben in der gegebenen Richtung. Dies zeigt sich am einfachsten in dem folgenden Beispiel.

Aufg. 33. *Ein Trapez ist aus seinen vier Seiten zu konstruieren.*

Festgelegt wird $AB = a$. Lassen wir zunächst die Seite d außer acht, so kann sich C (Fig. 10) auf dem Kreise (B, b) bewegen; führt der Punkt C hierbei die Strecke $CD' = c$ mit, wobei wir diese Strecke immer parallel zu AB halten, so beschreibt D' einen Kreis, dessen Radius ebenfalls b ist, während sein Mittelpunkt auf $\overrightarrow{BA}$ von B um c entfernt liegt. Sein Schnitt mit dem Kreise (A, d) liefert die Ecke D.

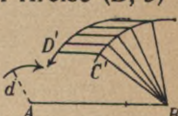


Fig. 10.

Aufg. 34. *Eine geg. Strecke a ist in gegebener Richtung so zu legen, daß ihre Endpunkte auf zwei gegebene Kreise fallen.*

Wir lassen den einen Endpunkt auf dem einen Kreise wandern und führen die Strecke a mit, und zwar beständig parallel zur gegebenen Richtung. Der Kreis, den hierbei ihr zweiter Endpunkt beschreibt, ist leicht zu konstruieren.

Aufg. 35. *Ein Viereck ist zu konstruieren, von dem die Winkel und zwei Gegenseiten bekannt sind* (a, c, α, β, γ).

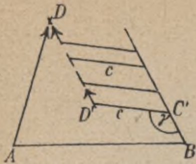


Fig. 11.

Wir zeichnen $AB = a$ und tragen daran die Winkel α und β an (Fig. 11). Am freien Schenkel von β bringen wir den Winkel γ an beliebiger Stelle an, und nun verschieben wir dessen Schenkel, auf dem wir $C'D' = c$ abtragen, parallel mit sich selbst, bis D' auf den Schenkel von α fällt.

Aufg. 36. *Gegeben sind die Geraden g_1 und g_2 und der Punkt P auf g_1. Es soll auf g_1 ein Punkt bestimmt werden, der gleiche Abstände von P und g_2 hat.*

Wir lassen den gesuchten Punkt auf g_1 wandern und tragen in jeder augenblicklichen Lage X' die Strecke $X'Y' = X'P$ auf dem von X' zu g_2 gezogenen Lote ab. Es ist leicht zu sehen, daß Y' hierbei eine gewisse, einfach zu ermittelnde Gerade durchläuft;[1]) diese liefert auf g_2 den Punkt Y, der den gesuchten Punkt X bestimmt. – Verweilen wir noch einen Augenblick bei dieser Aufgabe. Halten wir P sowie g_2 auch ferner fest, während wir die Gerade g_1 sich drehen lassen um P. In jeder Lage von g_1 werde erneut die soeben gelöste Aufgabe wieder gelöst, d. h. also, unser erhaltener Punkt X nehme an der Bewegung teil und bewahre dabei immer die Eigenschaft, gleichweit von P und von g_2 entfernt zu sein. Er beschreibt dann eine Parabel; diese hat g_2 als Leitlinie und P als Brennpunkt. Wir haben also vorhin eine Aufgabe gelöst, die auch in dieser Form ausgesprochen werden kann: „Eine Parabel ist durch Brennpunkt und Leitlinie gegeben. Ihre Schnittpunkte mit einer durch den Brennpunkt gehenden Geraden sind zu bestimmen.“[2])

Die Lösung der

---

1) Dies muß natürlich bewiesen werden!

2) Wie findet man in unserer Konstruktion einen zweiten Punkt X? Verallgemeinere die Lösung für den Fall, daß die Abstände des gesuchten Punktes von P und g_1 in einem gegebenen Verhältnis $m:n$ stehen sollen! Wiederhole auch dann die letzte Betrachtung und stelle die Linie, die statt der Parabel auftritt (es ist entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel), punktweise her. Dabei sind die gegebenen Verhältniswerte $\frac{m}{n} < 1$ und $\frac{m}{n} > 1$ zu unterscheiden.

Aufg. 37: *Ein Viereck ist zu zeichnen aus $a, c, \alpha_1 = \sphericalangle(e, a)$, $\gamma_1 = \sphericalangle(e, c)$ und $\delta_1 = \sphericalangle(f, d)$*[1])

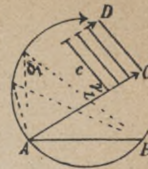


Fig. 12.

ist aus Fig. 12 zu ersehen.

Aufg. 38. Einem geg. Viereck ist ein Parallelogramm einzuschreiben, dessen Seiten gegebene Richtungen haben.

Aufg. 39. Ein Trapez ist zu zeichnen, von dem die beiden parallelen Seiten und die beiden Diagonalen gegeben sind.

Aufg. 40. Viereck aus a, b, c, α, δ.

Aufg. 41. Viereck aus e, f, $\sphericalangle(e, f)$, $\sphericalangle(e, b)$, $\sphericalangle(e, d)$.

Aufg. 42. Einem geg. Dreieck ist ein Rhombus einzuschreiben, der mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat.

Nach dem Bisherigen wird man die folgende

Aufg. 43. *In einen geg. Kreis soll eine Sehne von gegebener Länge und Richtung gezeichnet werden,*

dadurch lösen, daß man den einen Endpunkt der gegebenen Strecke auf dem Kreise hingleiten läßt, während man dabei die Strecke mit der gegebenen Richtung parallel verschiebt. Wir können aber nun auch zunächst einmal die vorgeschriebene Richtung völlig außer acht lassen und die Strecke a mit beiden Endpunkten auf dem Kreise verschieben. Ihr Mittelpunkt beschreibt dabei einen zum gegebenen konzentrischen Kreis, und sie selbst ist Tangente an diesem; wir sagen, die Gerade „umhüllt" diesen Kreis bei ihrer Bewegung. (Führe nun mit Hilfe dieses Kreises die Lösung durch! Man kann nun stets bei einer stetigen Bewegung einer Geraden eine Linie erkennen, die in solcher Weise umhüllt wird; ist eine derartige „Hüllkurve" für eine gesuchte Gerade bekannt, so heißt dies, die gesuchte Gerade muß Tangente an die Hüllkurve werden. Dann stellt die Hüllkurve eine Bestimmung für die Gerade dar, und es kann für deren völlige Ermittelung nur noch eine zweite Bedingung vorgeschrieben werden, etwa ein Punkt, durch den sie noch gehen soll, oder eine zweite „Hüllkurve", die ebenfalls berührt werden soll. Demnach trägt eine solche Hüllkurve zur Bestimmung einer Geraden ebensoviel bei wie ein geometrischer Ort zur Bestimmung eines Punktes, und ebenso wie

1) Wir bezeichnen die Vierecksdiagonalen $AC = e$ und $BD = f$.

ein Punkt ermittelt wird durch zwei Örter, so wird eine Gerade bestimmt durch zwei derartige Kurven, deren gemeinsame Tangente sie sein muß. Für uns kommt als Hüllkurve natürlich nur der Kreis in Betracht. Als Sonderfall einer solchen Bewegung einer Geraden ist der anzusehen, daß der Kreis zu einem Punkte ausartet, d. h. daß die Gerade sich um einen festen Punkt dreht; dieser kann schließlich in einer gegebenen Richtung über alle Grenzen weit entfernt liegen, d. h. die Gerade kann zu dieser Richtung parallel verschoben werden. Somit betrachten wir als gleichberechtigt mit dem „geometrischen Ort für einen Punkt" für eine gesuchte Gerade

einen bekannten Kreis, den sie berühren muß,
einen gegebenen Punkt, durch den sie gehen muß,
eine gegebene Gerade, der sie parallel bleiben muß.

In allen drei Fällen können wir von einem „geometrischen Ort für die Gerade" reden. Und wie wir zur Lösung von Aufgaben die Bewegungen gesuchter Punkte betrachten, so können wir jetzt ebenso untersuchen, welche Bewegung eine gesuchte Gerade ausführt, wenn wir eine der gestellten Bedingungen weglassen.

Hat man zwei Kreise als Örter für die gesuchte Gerade ermittelt, so wird diese gefunden als gemeinsame Tangente beider Kreise; dies erfährt bei den erwähnten Sonderfällen die entsprechenden, ohne weiteres ersichtlichen Abänderungen.

§ 5] **Aufg. 44.** *Durch einen geg. Punkt P ist eine Gerade so zu legen, daß die Abschnitte, die sie auf zwei geg. Strahlen von deren Schnittpunkt S aus bestimmt, in einem geg. Verhältnis stehen.*

Der gegebene Punkt P bildet in dem soeben erörterten Sinne einen geometrischen Ort für die gesuchte Gerade. Andrerseits kann sich diese Gerade, wenn bloß $SX:SY=m:n$ bleiben soll, parallel verschieben, und zwar wird ihre Richtung durch X_1Y_1 angegeben, wenn $SX_1=m$ und $SY_1=n$ gemacht wird.

Aufg. 45. *Von einem geg. Dreieck soll durch eine Gerade ein Viereck abgeschnitten werden, das sowohl Sehnenviereck als auch Tangentenviereck ist.*[1])

1) Man nennt dies ein „bizentrisches Viereck". Kann ein Par-

Der eingeschriebene Kreis des geg. Dreiecks ist auch für das gesuchte Viereck eingeschriebener Kreis, also bildet er einen geometrischen Ort für die gesuchte Gerade. Andrerseits wird durch die Sehnenvierecksbedingung verlangt, daß die gesuchte Gerade mit einer Dreiecksseite einen Winkel bildet, der sich mit dem gegenüberliegenden Dreieckswinkel zu 180^0 ergänzt; hierdurch ist zweitens die Richtung der gesuchten Geraden bestimmt.

Aufg. 46. *Ein Viereck ist zu konstruieren aus a, b, d, γ, δ.*

Wir legen die Strecke $AB = a$ fest (Fig. 13) und lassen die Strecke b um den Punkt B sich drehen; ihr Endpunkt C' beschreibt den Kreis (B, b). In diesem Punkte C' sei nun eine Gerade unter dem Winkel γ starr verbunden mit $C'B$; diese Gerade umhüllt dann einen zu jenem konzentrischen Kreis, der sich aus einer beliebigen Lage unseres Gebildes bestimmen läßt; er bildet einen geometrischen Ort für die Vierecksseite CD. Ebenso lassen wir die Strecke $AD' = d$ sich um A drehen und nehmen eine in D' unter dem Winkel δ starr mit AD' verbundene Gerade mit. Dies liefert auf dieselbe Weise einen Kreis um A als zweiten Ort für CD. Auf der gemeinsamen Tangente beider Ortskreise liegen dann die Ecken C und D.

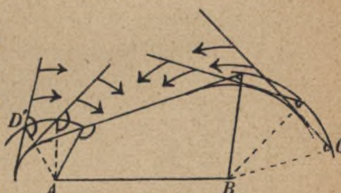


Fig. 13.

Aufg. 47. In einen geg. Kreis ist ein Dreieck, das einem gegebenen ähnlich ist, so einzuschreiben, daß eine Seite durch einen geg. Punkt geht.

Aufg. 48. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise und ein Punkt. Durch diesen soll eine Gerade so gelegt werden, daß ihr zwischen den Peripherien liegender Abschnitt vor

allelogramm diese Eigenschaft besitzen? — Wieviele Stücke de bizentrischen Vierecks kann man beliebig vorschreiben? — Zieh durch einen beliebigen Punkt P im Innern eines Kreises O zw zueinander senkrechte Sehnen und lege in ihren Endpunkten d Tangenten an den Kreis; beweise, daß das entstehende Tangente viereck zugleich ein Sehnenviereck ist! — Man kann auch be weisen, daß der Mittelpunkt seines Umkreises auf der Gerader OP liegt, und daß bei Drehung jenes Sehnenpaares um P di Ecken des Vierecks sich auf diesem Kreise bewegen.

Kreismittelpunkt aus unter einem gegebenen Winkel erscheint.

Aufg. 49. An einen geg. Kreis ist eine Tangente zu legen, von welcher zwei geg. Parallelen eine Strecke von gegebener Länge abschneiden.

Aufg. 50. Durch einen geg. Punkt ist eine Gerade zu ziehen, die von einem geg. Dreieck ein Sehnenviereck abschneidet.

Aufg. 51. Ein Quadrat ist zu zeichnen, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

Aufg. 52. Eine Gerade ist zu ziehen, von der zwei geg. Kreise Sehnen von gegebenen Längen abschneiden.

Aufg. 53. Ein gleichschenkliges Dreieck mit geg. Höhe ist zu zeichnen, dessen Basis auf einer geg. Geraden liegt, während die Schenkel durch zwei geg. Punkte gehen.

Aufg. 54. Gegeben sind drei durch einen Punkt gehende Strahlen und ein Punkt P; durch diesen soll eine Gerade gezogen werden, auf der jene Strahlen zwei Strecken von geg. Verhältnis abschneiden.

§ 6] Durch geeignete Parallelverschiebungen mehrerer gesuchter Linien kann man bisweilen die verlangte Figur so verändern, daß sie ihre Gestalt beibehält; wenn man sie dann in irgendeiner augenblicklichen Lage konstruieren kann, so erhält man hieraus die verlangte Figur meist auf einfache Weise, da die von den Punkten bei jener Bewegung durchlaufenen Bahnen gerade, durch einen Punkt gehende Linien sind; dieser Punkt bildet bekanntlich den Ähnlichkeitspunkt für die einzelnen Lagen der in der Gestalt unveränderten Figur.

Aufg. 55. *Einem geg. Dreieck soll ein Quadrat eingeschrieben werden, d. h. zwei Quadratecken sollen auf einer, die beiden andern auf den andern Dreieckseiten liegen.*

Fig. 14.

Wir verschieben (Fig. 14) das Quadrat, indem wir zugleich seine Größe verändern, parallel und lassen dabei zwei Ecken auf den Dreieckseiten AB und AC laufen; dann bewegen sich die beiden andern Quadratecken auf Geraden, die durch A gehen. Irgendeine Lage des

Quadrats kann nun konstruiert werden; man wählt beliebig $U'V' \quad BC$ und zeichnet über $U'V'$ das Quadrat $U'V'W'X'$. Dann liefern die Geraden AW' und AX' die Ecken W und X auf BC. Die Ecken U und V ergeben sich einfach.

Aufg. 56. *Auf g_1 soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß seine Abstände von P und g_2 in dem geg. Verhältnis $m:n$ zueinander stehen* (Fig. 15).

Wird die Linie XY parallel mit sich verschoben und ebenso die Linie XP, und wird in jeder Lage P' so gewählt, daß $X'P':X'Y' = m:n$ ist, so beschreibt P' eine Gerade, die durch S geht, d. h. er durchläuft die Gerade SP. Zeichnet man nun beliebig $X'Y' \perp g_2$, so kann man die ganze zur gesuchten ähnliche Figur $X'Y'P'$ herstellen; man hat $X'P'$ nach jener Proportion zu bestimmen und mit der erhaltenen Strecke um X' den Kreisbogen zu schlagen, der sodann SP in P' schneidet. Die Linie $P'X'$ ist nun wieder parallel zu sich selbst zu verschieben, so daß man schließlich PX erhält.[1]

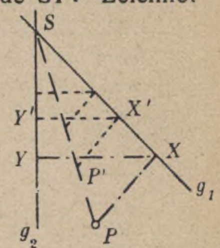


Fig. 15.

Da durch P, g_2 und das Verhältnis $m:n$ ein Kegelschnitt bestimmt ist, so ist hiermit die Aufgabe gelöst: „Die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden g_1 mit einem durch Leitlinie, Brennpunkt und num. Exzentrizität geg. Kegelschnitt sind zu bestimmen."

Aufg. 57. *In einem Kreise sind zwei Radien gegeben. Eine Sehne soll gezeichnet werden, die durch diese Radien gedrittelt wird.*

Zunächst ist sofort zu sehen, daß die Sehne senkrecht zur Halbierungslinie des von den Radien gebildeten Winkels wird. Wir verschieben sie nun parallel und sorgen dafür, daß sie in jeder Lage ähnlich bleibt zur verlangten Anordnung, d. h. daß stets $X'Y' = Y'Z' = Z'W'$ ist (Fig. 16). Dann bewegen sich X' und W' auf Radien des Kreises; wird nun $Y'Z'$ in beliebiger Lage (aber natürlich senkrecht zu jener

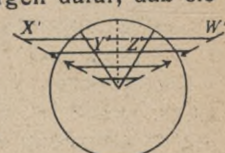


Fig. 16.

---

1) Beachte, daß der verwendete Kreisbogen zwei Punkte auf SP bestimmt, wodurch man zwei Lösungen erhält.

Winkelhalbierenden) gezeichnet und nach beiden Seiten um sich selbst verlängert, so erhält man diese Radien.

Aufg. 58. *Es soll ein Dreieck aus einer Seite und dem ihr gegenüberliegenden Winkel so gezeichnet werden, daß die Halbierungslinie dieses Winkels, die Höhe nach einer zweiten Seite und die Mittellinie nach der dritten Seite durch einen Punkt gehen.*

Gegeben sind a und α, und das Dreieck soll so beschaffen sein, daß w_α, s_b und h_c durch einen Punkt gehen, den wir U nennen wollen. Wir betrachten den Winkel α als festliegend und verschieben nun die Seite BC parallel. Die entstehenden Dreiecke $AB'C'$ haben dann alle dieselbe Eigenschaft, so daß der Punkt U sich auf der Halbierungslinie von α bewegt. Wird er auf dieser in der beliebigen Lage U' angenommen, so liefert das von U' auf einen Schenkel von α gefällte Lot mit dem andern Schenkel den Punkt C'. Der Mittelpunkt D' von AC' ist sodann mit U' zu verbinden, wodurch sich B' ergibt. Nun ist die Strecke $B'C'$ parallel zu verschieben, bis sie die Länge a erhält.

Die letzte Verschiebung verlangt die Lösung der Aufgabe: „Eine Strecke von gegebener Länge und Richtung ist mit ihren Endpunkten auf zwei gegebene Geraden zu legen." Hierzu bedienen wir uns der in § 4 erörterten Methode.

Aufg. 59. In einem geg. Dreieck ist zu einer Seite eine Parallele zu ziehen, welche mittlere Proportionale wird zu den Abschnitten einer andern Seite.

Aufg. 60. Einem geg. Kreissektor ist ein Kreis einzuschreiben.

§ 7] Wir bemerkten, daß zur Bestimmung der Lage eines Punktes oder einer Linie zuerst andere Punkte oder Linien festgelegt sein müssen (s. Aufg. 20); auf der leeren Zeichenebene kann natürlich noch nicht von einem geometrischen Ort gesprochen werden. Wenn daher nicht schon in der Aufgabe Punkte oder Linien als festliegend gegeben waren, so legten wir zuerst eine der gegebenen Strecken oder einen Winkel (vgl. z. B. Aufg. 58) an einer beliebigen Stelle fest und bestimmten die Bewegungen der übrigen Punkte mit Bezug auf dieses festgelegte Stück. Statt bloß ein einziges gegebenes Stück kann man in manchen Aufgaben gleich einen größeren Teil der Figur festlegen, der sich auf einfache Weise aus den gegebenen Stücken herstellen läßt. Die Methode der Untersuchung besteht dann also darin, daß man erkennt, welcher Teil der gesuchten Figur von vornherein bestimmt werden kann, und wie sich in bezug auf ihn die übrigen Punkte noch zu bewegen haben. Meist handelt es sich darum, daß ein Teildreieck in einfachster Weise bestimmt ist, etwa aus seinen drei Seiten oder nach einer anderen der sogenannten Fundamentalkonstruktionen.[1])

Natürlich geschieht ja im Grunde auch die Lösung der Fundamentalaufgaben mittels der in den früheren Abschnitten erörterten Methoden. Aber für die Behandlung einer Aufgabe bedeutet es doch einen Unterschied, ob man von vornherein einen Teil der Figur („Hilfsfigur") festlegen kann, oder ob man alle Punkte (bis auf einen oder zwei) zunächst beweglich denken muß. Deshalb müssen wir in der Benutzung einer einfach bestimmbaren Teilfigur als Grundlage für geometrische Örter eine besondere Methode erblicken.

Aufg. 61. *Ein Sehnenviereck ist zu konstruieren aus* a, α, e, f.

Der bloße Anblick der Analysisfigur läßt sofort erkennen, daß durch α, a und f das Dreieck ABC bestimmt ist. Auf dieses werden nun die Bewegungen des Punktes C bezogen; er kann, da das Viereck Sehnenviereck werden soll, auf dem umgeschriebenen Kreise des Dreiecks ABC wandern, andrerseits auf dem Kreise (A, e).

Aufg. 62. *Dreieck aus* a, h_b, $\sphericalangle(c, s_a) = \delta$.

Durch a und h_b ist (Fig. 17) das rechtwinklige Dreieck BCE bestimmt. Die Gerade CE bildet einen Ort für A. Andrerseits verlangt die durch δ vorgeschriebene Bedingung, daß A auf dem Kreisbogen liegt, der δ als Peripheriewinkel und die Strecke BD als zugehörige Sehne enthält.

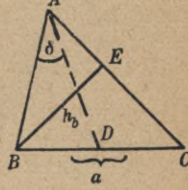


Fig. 17.

1) Man bezeichnet mit S. eine gegebene Seite, mit W. einen geg. Winkel, so daß man die Fundamentalkonstruktionen (Grundaufgaben) kurz bezeichnen kann mit. 1. W. S. W. — 2. S. W. W. — 3. S. W. S. — 4. S. S. W. — 5. S. S. S.

Aufg. 63. *Dreieck aus h_a, s_a, $a:b = m:n$.*

Das durch h_a und s_a bestimmte rechtwinklige Dreieck ADE (Fig. 18) bildet die Grundlage für die Bewegung des Punktes C; denn dieser muß auf der Geraden DE bleiben; einen zweiten Ort für C erhalten wir, da $CE:CA = \frac{m}{2}:n$ verlangt, daß C auf einem Apolloniuskreise wandert. Der Durchmesser dieses Kreises ist bestimmt durch die Teilpunkte der Strecke AE nach dem Verhältnis $n:\frac{m}{2}$.

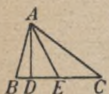


Fig. 18.

Aufg. 64. *Durch O* (Fig. 19) *soll eine Gerade so gelegt werden, daß sie auf g_1 und g_2 von A und B aus Strecken abschneidet, die eine gegebene Summe s besitzen.*

Die gegebene Strecke s muß in der Analysisfigur (Fig. 19) dargestellt werden; dies geschieht, indem wir BY um AX verlängern bis C. Durch $BC = s$ ist C, also auch AC von vornherein festgelegt. Erst jetzt wollen wir uns fragen, wie die gesuchte Linie, bei Vernachlässigung des Punktes O, sich bewegen kann, wenn immer $AX + BY = s$ bleiben soll. Da stets $AX = CY$ bleibt, so dreht sich, wie leicht ersichtlich, XY um die Mitte M der Strecke AC. Also ist M ein Ort für die gesuchte Gerade. OM ist die Lösung.

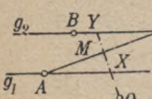


Fig. 19.

Aufg. 65. Dreieck aus a, h_b, s_c.

Aufg. 66. Dreieck aus h_a, r, s_a.

Aufg. 67. Von einem Dreieck sind die drei Punkte gegeben, in welchen die von derselben Ecke ausgehende Höhe, Mittellinie und Winkelhalbierende den Umkreis schneiden. Das Dreieck ist herzustellen.

§ 8] Aus dem Bisherigen wird uns allmählich immer deutlicher, daß die Lösung einer Aufgabe nicht immer durch eine einzige Erkenntnis, gewissermaßen auf e i n e n Schlag gelingt, sondern daß oft mehrere ganz getrennte Schritte ausgeführt werden müssen. Solche Schritte können nach ganz verschiedenen methodischen Gesichtspunkten geschehe , so daß wir uns nicht wundern dürfen, wenn bei der Lösung einer Aufgabe mehrere Methoden nacheinander zur Verwendung kommen. Betrachten wir nochmals die Aufg. 62. Bei oberflächlicher Einordnung in möglichst wenige verschiedenartige Methoden könnte man sie mit zu den in § 2 behandelten Aufgaben werfen; allein die Kenntnis der Bewegung des Punktes A auf dem betreffenden Kreise würde zur Lösung nicht genügen, wenn man nicht erkennt, daß vorher die Punkte B, C und E bestimmt werden. Andrerseits kann unsre Lösung nicht schlechthin als „Methode der Hilfsdreiecke" bezeichnet werden, denn mit dieser Methode allein wird eben nur ein Teil der Aufgabe erledigt. — In diesem Sinne sind alle weiteren methodischen Entwicklungen nicht so aufzufassen, daß die Verwendung einer Methode bei einer bestimmten Aufgabe alle anderen Methoden ausschlösse. Was wir im Folgenden als verschiedene Methoden zu unterscheiden haben, das wird uns daher vor allem zeigen, wie wir zur Lösung einer Aufgabe zunächst verfahren können, während sich dann im weiteren Verlaufe die Verwendung des Bisherigen in irgendeiner Weise nötig macht. Trotzdem wäre es unpassend, die folgenden Methoden etwa unter dem Schlagwort „Reduktion auf einfachere Aufgaben" kurz zusammenzufassen; vielmehr wollen wir uns von dem Gedanken an eine solche „Reduktion" möglichst fernhalten. Denn selbst wenn von ihr die Rede sein kann, so ist methodisch nicht die Tatsache wichtig, daß man sich einer derartigen Zurückführung bedient, sondern vielmehr die Frage, wie man sie bewerkstelligt. Doch nun wieder zu greifbareren Dingen!

Bei unsren zu Anfang angestellten Betrachtungen über das Wesen der Analysis hatten wir schon gesagt, daß die bloße Zerlegung einer Aufgabe in getrennte Einzelbedingungen uns nicht immer zu einfachen geometrischen Örtern für gesuchte Punkte führen werde. Dann suchen wir an der Analysisfigur nach weiteren Beziehungen, die in der Aufgabe nicht ausgesprochen sind, sich aber als Folge der gegebenen herausstellen. Und zwar versuchen wir das zunächst, ohne an unserer Figur irgend etwas zu verändern. Als einfachster Fall ergibt sich der, daß man die Aufgabe nur in ein wenig andrer Form auszusprechen braucht, um auf ihre Lösung zu kommen.

Aufg. 68. *Im geg. Dreieck ABC ist ein Punkt X zu finden, von dem aus alle drei Seiten unter gleichen Winkeln erscheinen.*

Wollte man zunächst den Winkel AXB ganz unbeachtet lassen und X so bewegen, daß immer $\sphericalangle BXC = \sphericalangle CXA$ bleibt, so wäre die Untersuchung der Bewegung von X recht schwierig und hauptsächlich deswegen sehr zwecklos, weil die erhaltene Bahn kein Kreis und keine Gerade wird. Beachten wir hingegen, daß jeder der drei Winkel bei X 120^0 betragen muß, weil ihre Summe 360^0 beträgt, so findet man sofort die Lösung. Auf diese wäre man ohne weiteres gekommen, wenn die Aufgabe in der Form ausgesprochen wäre: „Einen Punkt zu finden, von dem aus jede Dreieckseite unter einem Winkel von 120^0 erscheint."

Aufg. 69. *Im geg. Dreieck ABC ist X so zu bestimmen, daß die drei Dreiecke BXC, CXA und AXB einander gleich werden.*

Sprechen wir die Forderungen so aus: es soll $\Delta BXC = \frac{1}{3}\Delta ABC$ sein, so ergibt sich die Parallele zu BC im Abstande $\frac{1}{3}h_a$ als Ort für X. Entsprechend erhält man aus $\Delta CXA = \frac{1}{3}\Delta ABC$ die Parallele zu CA im Abstande $\frac{1}{3}h_b$.

Aufg. 70. *Ein Dreieck XYZ mit gegebenen Winkeln ist so zu konstruieren, daß Y und Z auf zwei gegebene Kreise fallen und XY und XZ Tangenten an diese werden.*

Von dem Viereck YM_1M_2Z sind (Fig. 20) drei Seiten YM_1, M_1M_2 und M_2Z sowie die beiden Winkel $M_1YZ = 90^0 - \beta$ und $M_2ZY = 90^0 - \gamma$ bekannt; es wird erhalten nach der in Aufg. 46 behandelten Methode. Freilich kann man fragen, wie in aller Welt wir auf dieses Viereck gekommen sind? Nun, wir hatten ja oben gesagt, wir müssen Beziehungen zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken aufsuchen; zu den gegebenen Stücken gehören aber jene drei Strecken, und die ausgesprochene Tangentenforderung heißt nichts anderes, als daß $\sphericalangle M_1YX$ und $\sphericalangle M_2ZX$ je 90^0 betragen sollen!

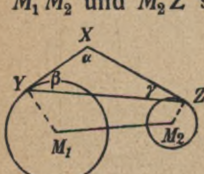


Fig. 20.

Aufg. 71. *Auf zwei Geraden u und v* (Fig. 21) *sind U und V gegeben. X und Y sollen so bestimmt werden, daß der Winkel XUY durch u halbiert wird, und daß $VX = VY$ wird.*

Von dem Dreieck UXY ist die Mittellinie UV, die Winkelhalbierende UW und auch die von U ausgehende Höhe bekannt, da die Lage des Punktes U zur Geraden v gegeben ist. Die Lösung dieser Dreiecksaufgabe aus h_a, s_a und w_α wird uns im nächsten Abschnitt beschäftigen; vorläufig ist für uns die vorliegende Aufgabe wichtig, weil sie uns zeigt, wie man die nach ihrer Lage gegebenen Stücke ersetzt durch drei gegebene Längen.

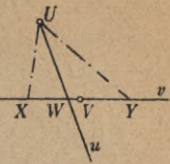


Fig. 21.

Aufg. 72. *Ein Quadrat mit gegebener Seite b ist einem über der Seite a gegebenen Quadrat umzuschreiben.*

In der verlangten Lage werden von dem Quadrat über b durch die Seite des andern vier kongruente rechtwinklige Dreiecke abgeschnitten. Von einem solchen ist die Hypotenuse a und die Summe der Katheten, welche b beträgt, gegeben. Das führt uns auf die ebenfalls im nächsten Abschnitt zu behandelnde Dreiecksaufgabe aus a, α und $b + c$.

Aufg. 73. Einem geg. Kreis soll ein Sechseck eingeschrieben werden, in dem die erste, dritte und fünfte Seite einander gleich sind, während die übrigen Seiten halb so lang sind wie jene.

§ 9] Die Beziehungen, die zwischen den einzelnen Stücken einer Figur bestehen, sind so zahlreich, daß wir selbst beim Dreieck nicht erwarten können, sie alle aufzufinden. Um irgendwelche Vollständigkeit handelt es sich aber für uns auch nicht; vielmehr kommt es uns darauf an, zu sehen, wie man zur Aufdeckung solcher Beziehungen zunächst verfährt. Allerdings wird man es dem Mathematiker nicht übelnehmen dürfen, wenn er dabei manchmal ein ganz bescheidenes Maß von „Findigkeit" beansprucht; hauptsächlich muß man bedenken, daß ja auch sonst im Leben solche „Findigkeit" recht oft nötig ist, und von dieser ist die geometrische Findigkeit nicht wesentlich verschieden. In Feindesland wollte sich jüngst eine Abteilung Soldaten zur Abwechslung einmal Klöße kochen; Kartoffeln waren da, aber kein Reibeisen; dafür fand sich leicht ein Deckel einer leeren Konservenbüchse. Mit einem dicken Nagel schlug man viele Löcher in den Blechdeckel, und das Reibeisen war fertig. Mehr „Findigkeit" werden wir hier auch nicht brauchen, und die Art, wie man „darauf kommt", ist hier wie dort dieselbe.

Aufg. 74. *Dreieck aus h_a, s_a, w_α.*

Die Punkte A, D, E und F (Fig. 22) sind leicht bestimmt, aber wie nun weiter? Der umgeschriebene Kreis des Dreiecks ist uns nicht so fremd, daß wir nicht auch einmal an ihn denken dürften; hauptsächlich erinnern wir uns, daß sein Mittelpunkt auf dem Lote zu DF, in F errichtet, liegt, und daß die Verlängerung von AE durch den Mittelpunkt des Bogens unter BC geht, durch den bekanntlich auch jenes Lot geht. Daß wir den noch freiliegenden Kreismittelpunkt M mit A verbinden, wird auch niemand als Hexerei ansehen, und nun liegt eine wichtige Beziehung zutage: es ist $\sphericalangle DAE = \sphericalangle AGM$ und $\sphericalangle AGM = \sphericalangle GAM$, also ist $\sphericalangle EAM$ bekannt und damit M bestimmt. Der Kreis (M, MA) liefert auf DF die Punkte B und C.

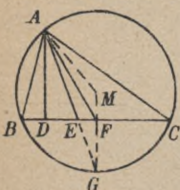


Fig. 22.

Aufg. 75. *Dreieck aus a, $b+c$, α.*

Da die gegebenen Größen in der Analysisfigur dargestellt werden müssen, so verlängern wir CA um $AD = AB$, so daß CD die gegebene Strecke $b+c$ darstellt. In dem Kreise (A, AB) ist α Zentriwinkel, folglich ist $\sphericalangle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Daher ist $\triangle DBC$ einfach herzustellen. Das Mittellot der Sehne DB liefert A.

Aufg. 76. *Dreieck aus a, ρ, α.*

Ist O der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, so könnte man zunächst den Winkel α mit dem Scheitel A festlegen; O ist dann leicht bestimmt, und nun müßte man zwischen die Schenkel von α die Strecke a so legen, daß sie den Kreis (O, ρ) berührt. Leider gelingt das nicht! Daher suchen wir nach weiteren Beziehungen. Durch O gehen alle drei Winkelhalbierenden, daher ist $\sphericalangle OBC = \frac{\beta}{2}$ und $\sphericalangle OCB = \frac{\gamma}{2}$; dies liefert $\sphericalangle BOC = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$. Also erhält man bei festgelegter Strecke $BC = a$ für O den Kreisbogen über BC mit dem Peripheriewinkel $90^0 + \frac{\alpha}{2}$; andrerseits liegt O auf der Parallelen zu BC im Abstande ρ. Die von B und C an den Kreis gelegte Tangenten ergeben das Dreieck.

Eine einfache Rechnung führt auch zum Ziele in der folgenden

Aufg. 77. *Auf einem gegebenen Kreisdurchmesser AB soll ein Punkt Y so gefunden werden, daß die von ihm ausgehende Tangente XY gleich der Sehne AX wird.*

Nach dem Satze vom Tangenten-Sehnenwinkel ist $\sphericalangle BXY = \sphericalangle XAB$, also $\sphericalangle AXY = 90^0 + XAB$, und da $XAB = XYA$, so folgt schließlich $XAB = 30^0$.

Aufg. 78. *Sehnenviereck aus α, e, f und $\sphericalangle(e, b) = \epsilon$.*

Man erkennt leicht, daß $\sphericalangle(f, d) = \epsilon$ ist, also ist das Dreieck ABD bestimmt.

Aufg. 79. *Auf einer Geraden g ist A gegeben, außerhalb die Punkte B und C. Es soll ein durch A und B gehender Kreis gefunden werden, der g in X so schneidet, daß CX Tangente wird.*

Da $\sphericalangle CXB = \sphericalangle XAB$ ist, so liegt X auf dem Kreise, der als Sehne BC und als Peripheriewinkel den von AB und g gebildeten Winkel hat. Wir beachten hierbei, daß zur Bestimmung eines Kreises nicht immer der Mittelpunkt zuerst gesucht werden muß.

Aufg. 80. *An einen geg. Kreis ist eine Tangente so zu legen, daß ihre Abstände von zwei geg. Punkten eine vorgeschriebene Summe s besitzen.*

Zieht man (Fig. 23) in dem Trapez $AXYB$ die Mittelparallele CZ, so ist $CZ = \frac{s}{2}$; die gesuchte Gerade ist also gemeinsame Tangente an den gegebenen und an den mit $\frac{s}{2}$ um den Mittelpunkt von AB geschlagenen Kreis.

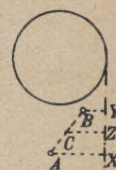


Fig. 23.

Aufg. 81. *Auf einer Dreieckseite ist ein Punkt X so zu bestimmen, daß die nach den beiden andern Seiten in gegebenen Richtungen gezogenen Linien XY und XZ eine vorgeschriebene Summe s besitzen.*

Wir lassen X auf BC wandern (Fig. 24) und ziehen in jedem Augenblick die Linien $X'Y'$ und $X'Z'$ in den vorgeschriebenen Richtungen. Ihre Summe wird stets dargestellt durch $Z'W'$. Es verhält sich nun $BX' : BX'' = X'Y' : X''Y''$, daher auch $BX' : BX'' = W'X' : W''Y''$. Daraus folgt, daß W eine durch B gehende Gerade durchläuft; aus einer beliebigen Lage W' läßt diese sich bestimmen.

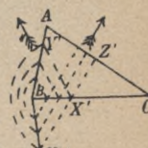


Fig. 24.

Eine einfache Bewegung liefert auch in der folgenden Aufgabe die nötigen Beziehungen.

Aufg. 82. *Die Punkte A und B* (Fig. 25) *sowie P sind gegeben, ebenso ein Kreis durch jene. Die Sehne XY soll so durch P gehen, daß der von AX und BY gebildete Winkel eine vorgeschriebene Größe α besitzt.*

Bewegen wir S so, daß die Größe des Winkels ASB stets α bleibt (also auf einem gewissen Kreisbogen!), so nimmt stets der Winkel SAB um ebensoviel zu, wie SBA abnimmt, und umgekehrt, da beide zusammen stets $180^0 - \alpha$ betragen. Sie sind in unserm Kreise Peripheriewinkel; also nimmt bei jener Bewegung auch der Bogen $\widehat{BX}$ stets um ebensoviel zu, wie $\widehat{AY}$ abnimmt, d. h. der Bogen XY und folglich auch die Sehne XY bleibt von konstanter Länge. Durch eine beliebige Lage des Punktes S ($\sphericalangle ASB = \alpha$!) ist diese Länge bestimmt und daraus der Kreis herstellbar, den XY umhüllt. An ihn ist von P aus die Tangente zu ziehen.

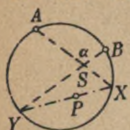


Fig. 25.

Wir wollen nun bloß noch hinweisen auf die vielen Beziehungen, die z. B. am Dreieck entstehen, wenn die vier Kreise, die seine Seiten berühren, gezeichnet sind, oder auf die mit dem „Feuerbachschen Kreise" und der „Eulerschen Geraden" verbundenen Dreieckseigenschaften. Sie können, ebenso wie unzählige andere Zusammenhänge, bei gewissen Aufgaben gebraucht werden; doch kommt ein weiteres Eingehen darauf für uns nicht in Betracht, denn die Art, wie man zur Lösung einer solchen Aufgabe verfahren muß, haben wir im allgemeinen gekennzeichnet. Die methodisch viel wichtigere Frage ist die: wie fängt man's an, um einer Figur neue Eigenschaften zu entlocken? Wir schließen deshalb hier nur einige Aufgaben an, die im wesentlichen denselben Beziehungen entfließen wie die eben behandelten.

Aufg. 83. In einen geg. Kreis soll ein bizentrisches Viereck eingeschrieben werden, von dem eine Diagonale e gegeben ist sowie der Winkel ϵ, den beide Diagonalen einschließen.

Aufg. 84. Dreieck aus $b + c$, $\beta - \gamma$, $p - q$.

Aufg. 85. Durch einen geg. Punkt ist in einem geg. Kreise eine Sehne zu ziehen, für deren Endpunkte die Summe der Abstände von einer geg. Geraden vorgeschrieben ist.

Aufg. 86. Gegeben sind vier Punkte A, B, C und P. Durch P ist eine Gerade zu ziehen, deren Abstände von B und C zusammen gleich ihrem Abstande von A sind.

Aufg. 87. Einem geg. Dreieck ist ein Rechteck von gegebenem Umfang einzuschreiben.

§ 10] Liegen in der Analysisfigur die gegebenen Stücke so, daß ein Zusammenhang zwischen ihnen und den gesuchten nicht zu erkennen ist, so empfiehlt es sich oft, eins der gegebenen Stücke oder auch einen größeren Teil der Figur in eine andere Lage zu bringen; dadurch erhält man häufig eine herstellbare Figur, aus der sich die gesuchte ergibt, wenn man jene Verlegung wieder rückgängig macht. Eine solche Bewegung eines Figurenteils in eine andere Lage ist natürlich streng zu unterscheiden von den früheren, stetigen Bewegungen, die den Zweck hatten, geometrische Örter zu liefern oder neue Beziehungen kennen zu lernen; wir wollen daher eine Bewegung in eine bestimmte Endlage eine „Verlagerung" nennen. Wir werden verschiedene Arten der Verlagerung kennen lernen; zunächst ergibt sich eine Methode aus der Parallelverschiebung.

Aufg. 88. (Fig. 26.) *Die Punkte X und Y auf g sind so zu bestimmen, daß $XB = YB$ und $\sphericalangle XAY$ gleich einem geg. Winkel α wird.*

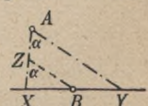


Fig. 26.

Wir verschieben AY parallel in die Lage BZ; dann ist Z der Mittelpunkt von AX. Nun ergeben sich als geometrische Örter für Z die Mittelparallele zwischen A und g und der Kreisbogen mit der Sehne AB und dem Peripheriewinkel $180^0 - \alpha$.

Aufg. 89. *Gegeben sind* (Fig. 27) *die Geraden $h_1 \parallel h_2$ und g sowie P. Durch P soll eine Gerade so gelegt werden, daß $XY : PZ = m : n$.*

Wir verschieben die gesuchte Gerade, bis sie durch Q geht, wobei P, parallel zu g wandernd, nach P' kommt. Diese zur gesuchten parallele Gerade $P'QX'$ ist bekannt, sobald P' gefunden ist. Für P' aber liefert, da $X'Q : QP' = m : n$, eine leicht bestimmbare Parallele zu h_1 den ersten, die Parallele durch P zu g den zweiten geometrischen Ort.

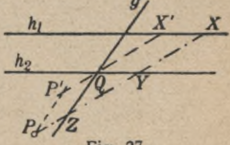


Fig. 27.

Aufg. 90. *Sehnenviereck aus $e, f, \epsilon = \sphericalangle(e, f)$ und $\alpha_1 = \sphericalangle(a, e)$.*

Vor allem liegt der Winkel ϵ unbequem, da für seinen Scheitel keine Beziehung bekannt ist. Daher verlagern wir ihn, indem wir etwa AC parallel verschieben bis D; die erhaltene Linie schneide AB in A', also $DA' \parallel AC$. Dann ist zugleich auch α_1 nach A' verlagert, und das Dreieck $A'BD$ ist konstruierbar. Verlegt man zugleich AC parallel nach $A'C'$, so ist C' auf $A'D$ herstellbar, und die von C' ausgehende Parallele zu $A'B$ ist ein Ort für C. Nun ist noch zu beachten, daß $\sphericalangle BDC = \alpha_1$ die Linie DC als zweiten Ort für C liefert.

Aufg. 91. *Auf einem Kreise* (Fig. 28) *sind A, B, C und D gegeben; X ist so zu bestimmen, daß auf CD die Strecke $YZ = a$ entsteht.*

Natürlich versucht man zunächst die Lösung durch eine einfachere Methode. Man verschiebt etwa $YZ = a$ auf CD und beobachtet die Bahn, die X, der Schnittpunkt der Linien YA und ZB, beschreibt. Sie ergibt sich aber als eine höhere Kurve, ist also für uns nicht verwendbar. Läßt man andrerseits X auf der gegebenen Peripherie wandern, so ändert sich die Lage von YZ, während $\sphericalangle AXB$ unverändert bleibt und bekannt ist als Peripheriewinkel zu AB. Zu diesem Bogen werden wir daher die gegebene Strecke noch in Beziehung bringen, indem wir sie nach BE verlagern, also $BE \# YZ (= a)$ machen. Dann ist E bekannt, und $\sphericalangle AYE = \sphericalangle AXB$ liefert einen Kreisbogen als Ort für Y.

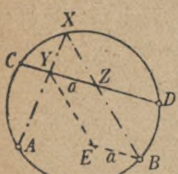


Fig. 28.

Aufg. 92. *Dreieck aus s_a, s_b, s_c.*

Man verlegt eine der drei Mittellinien AD, BE und CF durch den Endpunkt einer andern, also etwa CF durch D; ist G ihr Schnitt mit BS (S Schwerpunkt), so ist Dreieck DGS aus seinen drei Seiten $\frac{1}{3} s_c$, $\frac{1}{3} s_b$ und $\frac{1}{3} s_a$ bestimmt. Diese Art der Verlagerung findet bei vielen Dreiecksaufgaben, in denen Mittellinien vorkommen, Verwendung.

Aufg. 93. *Im geg. Dreieck ABC soll XY* (Fig. 29) *von geg. Länge d so gezogen werden, daß $AX : CY = m : n$.*

Man verlegt XY parallel in die Lage AY_1; da $Y_1Y \# AX$, so ist die Gestalt des Dreiecks Y_1YC, also die Richtung der

Linie CY_1 bekannt; und da $AY_1 = d$, so ist der Punkt Y_1 bestimmt. Die Linie AY_1 ist nun wieder parallel zu verschieben.

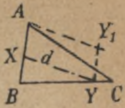


Fig. 29.

Aufg. 94. Parallelogramm aus $a, b, \sphericalangle \epsilon = \sphericalangle (e, f)$.

Aufg. 95. Zwei Strecken von geg. Längen sind so auf eine Gerade zu legen, daß ihre Endpunkte sich gegenseitig harmonisch trennen.

Aufg. 96. Dreieck aus s_a, h_b, h_c.

§ 11] Ein konstruierbarer Figurenteil ergibt sich auch bisweilen dadurch, daß man die Analysisfigur in Verbindung mit einer zu ihr symmetrischen Figur betrachtet. Dabei braucht keineswegs die Art der Aufgabe schon darauf hinzudeuten, daß sich die Verwendung der Symmetrie empfiehlt.

Aufg. 97. *Dreieck aus b, c, $\beta - \gamma$.*

Man legt das Dreieck ABC um das Mittellot zu BC symmetrisch um, so daß also B auf C und C auf B fällt, während A in die Lage A' ($AA' \parallel BC$) kommt. Dann ist $\sphericalangle ABA' = \beta - \gamma$; das Dreieck ABA' ist, da $A'B = b$, herzustellen. C ist dann leicht zu finden.

Aufg. 98. *Tangentenviereck aus a, d, β, δ.*

Ist M der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, so halbiert AM den Winkel bei A; legen wir daher das Dreieck ACD symmetrisch um AM um, so fällt D in D' auf AB, der Kreis fällt mit sich selbst zusammen, und DC kommt in die Lage $D'C'$, welche ebenfalls Tangente an den Kreis wird. Da $AD' = d$, so können die Punkte A, D' und B festgelegt werden. Die in ihnen angetragenen Winkel δ und β liefern zwei Tangenten des Kreises, die zusammen mit der Tangente AB ihn bestimmen.

Aufg. 99. *Sehnenviereck aus r, a, c, $b : d = m : n$.*

Man legt das Teildreieck ABC symmetrisch um mit dem Mittellot zu AC als Symmetrieachse. B' kommt dann wieder auf den Kreis zu liegen. Da $B'C = a$, so sind die Punkte B', C und D auf dem Kreise bestimmt. Da das Verhältnis $AB' : AD$ gegeben ist, so erhält man für A einen Apolloniuskreis als Ort.

Aufg. 100. Ein Viereck aus seinen vier Seiten ist zu konstruieren, in dem die eine Diagonale einen Winkel halbiert.

Aufg. 101. Dreieck aus a, h_a, $\beta - \gamma$.

§ 12] Die Verlagerung eines Figurenteils kann auch so vorgenommen werden, daß man ihn an irgendeiner anderen, geeigneten Stelle nochmals anbringt und dabei gleichzeitig, unter Beibehaltung seiner Gestalt, seine Größe in einem bestimmten Verhältnis ändert.

Aufg. 102. *Sehnenviereck aus a, b, c, d.*

Das Dreieck ABC wird (Fig. 30) zunächst so vergrößert (bzw. verkleinert), daß sich die Seiten des neuen Dreiecks $AB'C'$ zu denen des alten verhalten wie $d:a$; man sagt, es wird „mit $d:a$ multipliziert". Dann ist $AB'=d$, so daß das neue Dreieck in die Lage ADC_1 gebracht werden kann. Da es sich um ein Sehnenviereck handelt, bildet C_1DC eine Gerade. $DC_1 = b\cdot\frac{d}{a}$ ist bekannt, also können die Punkte C_1, D und C festgelegt werden. Der Kreis (D, d) bildet einen Ort für A, ein zweiter ergibt sich daraus, daß $AC_1:AC=d:a$ ist. – Beachten wir vor allem, weshalb man jene „Multiplikation" des Dreiecks ABC mit $d:a$ ausgeführt hat: durch sie ist erreicht worden, daß die Strecke AB' an die Strecke AD paßt.

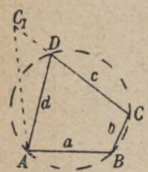


Fig. 30.

Aufg. 103. *Aus a, b, c und d soll ein Viereck hergestellt werden, in dem zwei Gegenwinkel einander gleich sind.*

Es soll etwa $\alpha=\gamma$ sein. Nun liegt der Gedanke nahe, die beiden Dreiecke ABD und BCD mit den übereinstimmenden Winkeln aufeinanderzulegen. Damit hierbei aber wenigstens noch ein Stück des einen auf das des anderen paßt, ändern wir die Größe des Dreiecks BCD so, daß $D'C'=d$ wird, d. h. wir multiplizieren das Dreieck BCD mit $d:c$. Legen wir nun D' auf D und C' auf A, so kommt B' auf AB zu liegen, auf einen Punkt, den wir E nennen wollen. Dieser läßt sich auf der festgelegten Strecke $AB=a$ ermitteln, weil $AE = b\cdot\frac{d}{c}$ ist. Nun ist DE die Strecke $D'B'$, welche ja aus DB durch Multiplikation mit $d:c$ hervorging, also verhält sich $DE:DB=d:c$; ein Ort für D ist also der Apolloniuskreis, dessen Durchmesser EB im Verhältnis $d:c$ harmonisch teilt. Der Kreis (A, d) liefert den zweiten Ort für D.

Zu der hierbei verwendeten Methode sei noch folgendes kurz bemerkt. Die Verwendung des Apolloniuskreises, die uns in einem früheren Abschnitt als besondere Methode beschäftigte, ist gegenwärtig nur von untergeordneter Bedeutung. Methodisch wesentlich ist die Art, wie wir aus der ursprünglichen Figur eine andere herstellen, deren einzelne Punkte sich bestimmen lassen.

Aufg. 104. Viereck aus a, d, β, $\mathfrak{d}$ und dem Verhältnis $b:c=m:n$.

§ 13] **Aufg. 105.** *Ein gegebenes Dreieck DEF soll einem gegebenen Dreieck ABC eingeschrieben werden.*

Wären wir nicht auf die alleinige Verwendung unserer Instrumente angewiesen, so könnten wir das Dreieck DEF auf durchsichtiges Papier zeichnen und dieses nun auf dem Zeichenpapier, auf dem ABC vorliegt, so bewegen, daß E immer auf AC und F auf AB wandert; in dem Augenblick, in dem D zufällig auf BC zu liegen kommt, ist die Aufgabe gelöst. Das wäre zweifellos ein recht praktisches und auf viele andere Aufgaben anwendbares Verfahren;[1]) nur ist es keine „Konstruktion" in unserm Sinne. Verfolgen wir die Bewegung des Punktes D, so ist ohne weiteres zu sehen, daß er weder einen Kreis noch eine Gerade beschreibt; es wird uns also nicht gelingen, seinen Ort mit unsern Mitteln herzustellen.

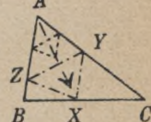


Fig. 31.

Vernachlässigen wir einmal die Größe des einzuschreibenden Dreiecks, so ist ersichtlich, daß unzählig viele ihm ähnliche dem Dreieck ABC eingeschrieben werden können. Für jedes einzelne kann die Richtung einer Seite vorgeschrieben werden; es wird dann nach der in § 6 behandelten Methode gefunden, wie aus Fig. 31 zu sehen ist; es sei also $XYZ \sim DEF$. Ein solches Dreieck XYZ kann auch als eine Verlagerung des gesuchten DEF betrachtet werden; wird es mit $DE:XY$ „multipliziert", so ergibt es das Dreieck in der vorgeschriebenen Größe, aber nicht in der verlangten Lage. Die Multiplikation allein genügt natürlich nicht, man müßte

1) Man findet hierüber Weiteres in „Hjelmslev, Geometrische Experimente", Beihefte zur Ztschr. für math. u. naturw. Unterricht, Verlag B. G. Teubner, 1915.

auch den Bewegungsvorgang kennen, der die verlagerte Figur wieder in die gesuchte überführt. Bei den Beispielen des § 12 war dieser Vorgang so einfach, daß wir ihm gar keine Beachtung schenkten; jetzt erblicken wir in ihm gerade die Hauptschwierigkeit! Also bleibt uns nichts andres übrig, als uns mit diesem Verlagerungsvorgang näher zu befassen, d. h. mit der Frage: „Durch welche Bewegung kann ein Dreieck, bei gleichzeitiger Größenänderung (Multiplikation), auf ein andres, ihm ähnliches, aber beliebig liegendes, gelegt werden?“

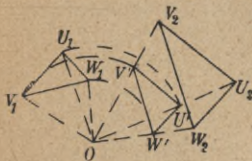


Fig. 32.

Wir gehen aus von einem beliebigen Dreieck $U_1 V_1 W_1$, dessen Ecken (Fig. 32) wir mit einem beliebigen Punkte O verbinden. Um O drehen wir die ganze, starr zu denkende Figur in die Lage $OU'V'W'$, und nun erhalten wir durch Multiplikation mit einem beliebigen Verhältnis die zur ersten ähnliche Figur $OU_2V_2W_2$. Wir können sagen, $U_1V_1W_1$ ist in $U_2V_2W_2$ übergeführt worden durch Drehung um O und Multiplikation mit $U_2V_2 : U_1V_1$. Sind nun die beiden ähnlichen Dreiecke $U_1V_1W_1$ und $U_2V_2W_2$ gegeben, so kann O bestimmt werden mit Hilfe zweier Apolloniuskreise, da die Verhältnisse $OU_1 : OU_2$ und $OV_1 : OV_2$ gleich dem gegebenen Verhältnis $U_1V_1 : U_2V_2$ sind.

Diesen eigenartigen Vorgang, der eine Figur in eine ihr ähnliche überführt, wollen wir noch eingehender verfolgen. Als „ähnliche Figuren“ betrachten wir einfach zwei Strecken $M_1N_1 = a_1$ und $M_2N_2 = a_2$ (Fig. 33). Der zur Überführung der einen in die andre dienende Drehungspunkt O wird gefunden[1]) durch die beiden Apolloniuskreise, welche bestimmt sind durch die Teilpunkte der Strecken M_1M_2 und N_1N_2 nach dem Verhältnis $a_1 : a_2$. Jetzt drehen wir das Dreieck OMN unter Beibehaltung der Gestalt $OM_1N_1 \sim OM_2N_2$ um O, indem M auf der Geraden M_1M_2 wandert, in die Lagen

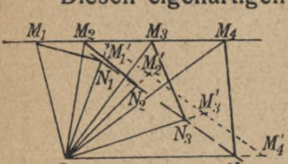


Fig. 33.

1) Eine einfachere Art, O zu bestimmen, ist diese: M_1N_1 und M_2N_2 schneiden sich in P. Die Umkreise der Dreiecke M_1M_2P und N_1N_2P schneiden sich in P und in O. Beweise, daß dieser zweite Schnittpunkt O wirklich unser gesuchter Drehpunkt ist!

OM_3N_3, OM_4N_4 usf. Wie bewegt sich N? Wir legen ein Blatt durchscheinendes Papier über die Figur, zeichnen darauf die Gerade $M_1M_2M_3\ldots$ auf, halten der Punkt O fest und drehen das Papier um den Winkel M_1ON_1, der ja gleich M_2ON_2 usw. ist. Die Punkte M_1, $M_2, \ldots$ fallen dann auf die Linien ON_1, $ON_2, \ldots$ und mögen hier M_1', $M_2' \ldots$ heißen. Da nun aber $OM_1 : ON_2 = OM_2 : ON_2 = OM_3 : ON_3$ usw. ist, so erkennen wir, daß die Punkte N_1, $N_2, \ldots$ auf einer Parallelen zur Geraden $M_1'M_2' \ldots$ liegen. Wir können dies so aussprechen: „Wird eine Strecke einer Drehung und Multiplikation so unterworfen, daß ein Endpunkt eine Gerade beschreibt, so durchläuft der andre Endpunkt ebenfalls eine Gerade.“

Nun endlich zurück zu unsrer Aufg. 105! Wir sehen jetzt, daß alle dem Dreieck ABC eingeschriebenen, zu DEF ähnlichen Dreiecke XYZ in einander übergeführt werden können durch Multiplikation mit Drehung um einen gewissen Punkt O. Dieser kann bestimmt werden, wenn man auf die in Fig. 31 angegebene Weise zwei Dreiecke $X_1Y_1Z_1$ und $X_2Y_2Z_2$ herstellt. Ist er aber gefunden, so liefert uns das Verhältnis $DE : X_1Y_1$ die Strecken OD, OE, OF aus den Strecken OX_1, OY_1, OZ_1. Die Kreise um O mit OD usw. liefern auf den Seiten des Dreiecks ABC die Ecken des gesuchten.

Aufg. 106. In ein gegebenes Dreieck ist ein andres, der Gestalt nach bestimmtes, so einzuschreiben, daß eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

Aufg. 107. In ein gegebenes Viereck ist ein Viereck einzuschreiben, das einem andern gegebenen ähnlich ist.

Aus dem oben Entwickelten kann sofort der Satz geschlossen werden: „Wird ein Dreieck um einen festen Punkt unter gleichzeitiger Multiplikation gedreht, und durchläuft dabei ein Eckpunkt eine Gerade, so durchlaufen auch die andern Eckpunkte Geraden.“ Wir überlassen es dem Leser, unter Verwendung derselben Methode sich von dem entsprechenden Satze zu überzeugen: „Berührt bei jener Drehung mit Multiplikation eine Dreiecksseite beständig einen Kreis, so umhüllen auch die andern Seiten Kreise.“ Sodann wird man folgende Aufgabe lösen können:

Aufg. 108. Ein der Gestalt nach gegebenes Dreieck ist so zu zeichnen, daß seine Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

§ 14] Wir verlegten bisher gesuchte Figurenteile; von der dabei verfolgten Methode möchten wir das Verfahren unterscheiden, das in der Verlagerung gegebener Punkte oder Linien besteht. Es wird sich also jetzt um solche Aufgaben handeln, in denen nicht nur gegebene Größen vorliegen, sondern auch Geraden und Kreise oder Punkte von vornherein festgelegt sind. Mit ihnen kann man natürlich dieselben Verlagerungen vornehmen wie mit den gesuchten Figurenteilen in den zuletzt behandelten Kapiteln. Der in methodischer Hinsicht wesentliche Unterschied, der uns veranlaßt, hier überhaupt eine Trennung vorzunehmen, liegt darin, daß jetzt die verlagerte Figur einem ganz andern Zwecke dient als oben; sie kann stets sogleich als mitgegeben betrachtet werden, und die Art, wie wir nach ausgeführter Verlagerung weiter fortfahren, ist demzufolge jetzt anders.

Es handelt sich also wieder um Parallelverlagerung, symmetrische Umlegung und Drehung mit Multiplikation. Die beiden ersten, offenbar einfacheren Arten behandeln wir im gegenwärtigen Abschnitt, der dritten Art aber möchten wir sodann noch einen besondern Paragraphen widmen; gerade an ihr wird sich am deutlichsten zeigen, daß es berechtigt, ja notwendig ist, die Verlagerung gegebener Linien oder Punkte von obigen Verlagerungen zu unterscheiden.

Aufg. 109. *Gegeben sind zwei Kreise K_1 und K_2 und eine Gerade g. Ein Quadrat ist zu zeichnen, von dem zwei Gegenecken auf die Peripherien, die beiden andern auf g fallen.*

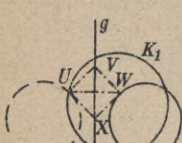


Fig. 34.

Ist $UVWX$ das gesuchte Quadrat (Fig. 34), so benutzen wir g als Symmetrieachse und legen etwa K_2 um sie um in K_2'; da das Quadrat zur Diagonale XV symmetrisch ist, so fällt jetzt W mit U zusammen. Also ist U ein Schnittpunkt des Kreises K_1 mit dem sofort herstellbaren K_2'. Die übrigen Punkte ergeben sich dann einfach.

Aufg. 110. *Gegeben wie in 109. Auf g soll ein Punkt X so gefunden werden, daß zwei von ihm an K_1 und K_2 gelegte Tangenten gleiche Winkel mit g bilden.*

Führen wir dieselbe Umlegung aus wie in der voriger Aufgabe, so fällt die Tangente von X an K_2 nach der Umlegung mit der an K_1 zusammen, d. h. diese ist eine gemeinschaftliche Tangente an K_1 und K_2'.

Aufg. 111. *Auf einer geg. Geraden g ist ein Punkt X so zu bestimmen, daß seine Verbindungslinien XA und XB mit zwei auf derselben Seite von g gegebenen Punkten A und B gleiche Winkel mit g bilden.*[1])

Legen wir B symmetrisch um g um nach B', so bildet XB' offenbar die Verlängerung von AX. Also ist zunächst B' zu konstruieren; seine Verbindung mit A liefert X.

Aufg. 112. *Gegeben sind die Punkte A und B und die Gerade g; auf ihr ist X so zu bestimmen, daß $AX+BX$ gleich einer gegebenen Strecke s wird.*

Zuerst stellt man s dar durch AB_1, also $XB_1 = XB$ (Fig. 35). Nun „spiegeln" wir B an g, wodurch wir B' erhalten; offenbar ist auch $XB' = XB$, d. h. die Punkte B, B_1 und B' liegen auf einem Kreise um X, und es ist leicht zu sehen, daß dieser den Kreis (A, s) in B_1 berührt. Ein beliebiger, durch B und B' gehender Kreis schneide den Kreis (A, s) in M und N; dann wird die durch den zu bestimmenden Punkt B_1 gehende gemeinsame Tangente durch den Schnittpunkt der Geraden BB' und MN gehen. (Weshalb?) Dadurch ist B_1 bestimmt.

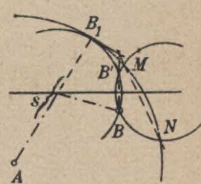


Fig. 35.

Man kann A und B auffassen als Brennpunkte einer Ellipse, für welche s die Leitstrahlensumme bildet. Dann haben wir hiermit die Aufgabe gelöst, die Schnittpunkte einer beliebig gegebenen Geraden mit einer gegebenen Ellipse zu bestimmen. Ganz entsprechend bestimmt man die Schnittpunkte einer Geraden mit einer durch Brennpunkte und Leitstrahldifferenz gegebenen Hyperbel, d. h.:

Aufg. 113. Auf g ist X so zu finden, daß $AX - BX = d$ wird.

Aufg. 114. *Durch einen gegebenen Punkt P ist eine Gerade zu legen, auf der zwei geg. Kreise gleiche Sehnen $X_1Y_1 = X_2Y_2$ abschneiden.*

Obwohl gerade die Linie PX_1 gesucht ist, verwenden wir sie zunächst als Grundlage für unsre Verlagerung, indem wir

1) Das ist die fürs Billardspiel wichtige Frage: „Nach welchem Punkte X der Bande g muß der Ball A gestoßen werden, damit er nach der Zurückwerfung den Ball B trifft?"

den Kreis K_2 parallel zu ihr verschieben, bis seine Sehne $X_2 Y_2$ auf die ihr gleiche $X_1 Y_1$ fällt, er also in die Lage K_2' kommt. In dieser läßt er sich folgendermaßen bestimmen. Man sieht, daß $K_1 K_2' \perp K_2 K_2'$, also ist der Thaleskreis über $K_1 K_2$ ein Ort für K_2'. Andrerseits ist die von P an den Kreis K_2' gelegte Tangente bekannt, nämlich derjenigen gleich, die von P an K_1 gelegt wird (weshalb?). Durch sie aber und den Radius von K_2' wird ein rechtwinkliges Dreieck gebildet, dessen Hypotenuse $K_2'P$ somit bekannt ist; der mit ihr um P geschlagene Kreis ist der zweite Ort für K_2'. Mit dieser Verlagerung ist die Lösung auch gleich beendet, da jetzt X_1 und Y_1 bekannt sind.

Aufg. 115. In gegebener Richtung ist eine Gerade so zu ziehen, daß die Summe der Sehnen, die zwei geg. Kreise auf ihr bilden, gleich einer gegebenen Strecke ist.

Aufg. 116. Ein Rhombus ist zu zeichnen, von dem zwei Seiten auf gegebenen Parallelen liegen, während die beiden andern Seiten durch zwei gegebene Punkte gehen.

Aufg. 117. Ein Kreis ist zu zeichnen, der eine geg. Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und einen gegebenen Kreis unter vorgeschriebenem Winkel schneidet.

§ 15] Zu der Drehung mit „Multiplikation" gehört auch die einfache Drehung einer Figur um einen Punkt, also der besondere Fall, daß die Figur mit 1 : 1 multipliziert wird. Am deutlichsten wird das der Vergleich der beiden Aufgaben 118 und 120 zeigen. Wir wählen daher zunächst zwei Beispiele für diesen einfacheren Fall.

Aufg. 118. *Auf g_1 und g_2 sind X_1 und X_2 in gleicher Entfernung von einem geg. Punkte P so zu finden, daß der Winkel $X_1 P X_2$ die vorgeschriebene Größe α erhält.*

Wir denken uns g_1 (Fig. 36) starr mit PX_1 verbunden und drehen das Ganze um P um den Winkel α; dann fällt X_1 mit X_2 zusammen, g_1 schneidet nach der Drehung g_2 in X_2. Nun können wir aber diese Drehung mit der Linie g_1 auch ausführen, ohne PX_1 zu benutzen. Das geschieht am bequemsten, indem wir von P das Lot PA fällen; dieses drehen wir um den Winkel α in die Lage PA', und das auf

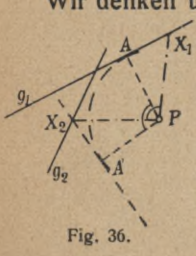


Fig. 36.

PA' in A' errichtete Lot bildet die Gerade g_1 nach der Drehung. Somit ist X_2 gefunden.

Aufg. 119. *Ein gleichseitiges Dreieck ist zu zeichnen, dessen Ecken auf drei gegebenen Parallelen liegen.*

Wir wählen auf der einen Parallelen g_1 die Ecke X_1 beliebig. Um sie drehen wir g_2 um einen Winkel von 60^0; nach der Drehung schneidet g_2 die Gerade g_3 im Eckpunkte X_3.

Aufg. 120. *Auf der Seite BC eines geg. Dreiecks ABC ist P festgelegt. Ein der Gestalt nach bekanntes Dreieck soll so eingeschrieben werden, daß eine Ecke in P fällt.*

Der Winkel δ (Fig. 37), der in P zu liegen kommt, ist gegeben. Drehen wir die Linie AC um P um diesen Winkel δ, indem wir gleichzeitig mit dem bekannten Verhältnis $PY:PX$ multiplizieren, so fällt X auf Y. Da wir diese Drehung mit Hilfe des von P auf AC gefällten Lotes wirklich ausführen können, so ist Y bestimmt.

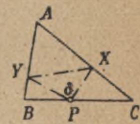


Fig. 37.

Aufg. 121. *Gegeben ist* (Fig. 38) *g mit dem Punkte A und der Kreis M. Der Punkt X auf g ist so zu finden, daß das Verhältnis $XA:XY$ den vorgeschriebenen Wert $m:n$ erhält.*

Drehen wir den Kreis M um den Punkt X und multiplizieren mit $m:n$, so wird, wenn nach der Drehung M' auf g liegt, Y auf A fallen, und es wird $YA \parallel MM'$ sein. Nun ist aber M' leicht zu finden, da $AM':r=m:n$, wenn r der Radius des gegebenen Kreises ist.

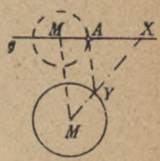


Fig. 38.

Aufg. 122. *Die Linie XY* (Fig. 39) *durch P ist so zu bestimmen, daß $AX:BY=m:n$ wird.*

Wir betrachten die Strecken AX und BY als ähnliche Figuren, die nach der in § 13 behandelten Art durch Drehung und Multiplikation in einander übergeführt werden können. Um den Drehungspunkt O zu bestimmen, wählen wir die „entsprechenden" Punkte X' und Y' beliebig, doch so, daß $AX':BY'=m:n$. Nun ist offenbar $\triangle\, OAB \sim \triangle\, OXY$, also ist $\sphericalangle PXO = \sphericalangle BAO$; dieser Winkel ist durch O bekannt; als Peripheriewinkel zur Sehne PO liefert er den Punkt X.

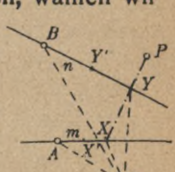


Fig. 39.

Aufg. 123. Einem Segment, auf dessen

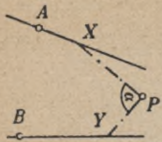


Fig. 40.

Sehne ein Punkt P gegeben ist, soll ein der Gestalt nach gegebenes Dreieck so eingeschrieben werden, daß eine Ecke auf P fällt, während die beiden andern Ecken auf dem Bogen liegen.

Aufg. 124. (Fig. 40.) Die Punkte X und Y sind so zu finden, daß $AX:BY = m:n$ und $\measuredangle XPY = \alpha$ wird.

Aufg. 125. Ein gleichseitiges Dreieck ist zu zeichnen, dessen Ecken auf drei gegebenen, konzentrischen Kreisen liegen.

§ 16] Die Gestalt eines Dreiecks ist bestimmt durch zwei Winkel oder durch einen Winkel und ein Streckenverhältnis oder durch zwei Streckenverhältnisse. Befinden sich daher unter den vorgelegten Stücken eines Dreiecks zwei derartige, „gestaltbestimmende" Stücke, so wird man zunächst aus ihnen ein beliebiges zum gesuchten ähnliches Dreieck herstellen können; eine überdies noch gegebene Strecke gestattet uns dann, das Dreieck selbst zu finden. Diese Methode, die also im wesentlichen darin besteht, daß zuerst eine zur gesuchten ähnliche Figur konstruiert wird, findet bei einer großen Zahl von „Dreiecksaufgaben" Verwendung. Wir wollen uns nicht aufhalten bei solchen Aufgaben, deren bloßer Anblick auf diese „Ähnlichkeitsmethode" hinweist, eben durch das Auftreten zweier gestaltbestimmender Stücke. Daß sich die Ähnlichkeitsmethode auch noch in anderen Fällen anwenden läßt, zeige folgende Lösung der schon in andrer Weise (Aufg. 23) gelösten Aufgabe: *Dreieck aus b, c, w_α.*

Ein zum gesuchten ähnliches Dreieck sei $A'B'C'$, auf $B'C'$ sei W' der Endpunkt der Winkelhalbierenden. Man kann $B'C'$ beliebig lang wählen und festlegen. W' ist bekannt als innerer Teilpunkt der Strecke $B'C'$ nach dem Verhältnis $c:b$. Nun liefert $A'B' : A'W' = c : w_\alpha$ als Ort für A' den Apolloniuskreis, dessen Durchmesser bestimmt wird durch die beiden Teilpunkte der Strecke $B'W'$ nach dem Verhältnis $c:w_\alpha$. Entsprechend liefert $A'W' : A'C' = w_\alpha : b$ einen zweiten Ort für A'. Damit ist $A'B'C'$ bekannt. Trägt man auf $A'B'$ von A' aus c ab bis B, so schneidet die durch B zu $B'C'$ gezogene Parallele die Gerade $A'C'$ in C. Die Ecke A fällt mit A' zusammen.

Die folgenden Beispiele sollen nun zeigen, wie man auch in andern Fällen dadurch zur Lösung gelangt, daß man zunächst versucht, eine der gesuchten ähnliche Figur zu zeichnen.[1])

Aufg. 126. *Ein Quadrat ist so zu zeichnen, daß drei Ecken von einem gegebenen Punkte P die vorgeschriebenen Entfernungen a, b und c haben.*

Wir zeichnen ein beliebiges Quadrat $A'B'C'D'$ und stellen für dieses den zu P entsprechenden Punkt P' folgendermaßen her: $P'A' : P'B' = a : b$ liefert den Apolloniuskreis, dessen Durchmesser $A'B'$ im Verhältnis $a : b$ harmonisch teilt, und $PB' : PC' = b : c$ liefert einen entsprechenden Kreis. Trägt man nun von P' aus auf $P'A'$, $P'B'$ und $P'C'$ die Strecken a, b und c ab, so hat man nur noch nötig, die erhaltene Figur mit P' auf P zu legen.

Aufg. 127. *Die Tangente in Fig. 41 ist so zu ziehen, daß $ZX : ZY = m : n$* wird.

Man sucht eine zur ganzen Figur ähnliche herzustellen, indem man zunächst zur gesuchten Tangente eine Parallele bestimmt. Zu diesem Zwecke wählt man X' auf AM beliebig; der Thaleskreis über MX' ist ein Ort für Z'. Ein zweiter Ort für Z' ist die Parallele zu BM, welche MX' im Verhältnis $n : m$ teilt. Ist Z' bestimmt, so liefert MZ' den Berührungspunkt Z.

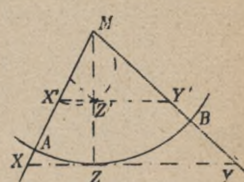


Fig. 41.

Man kann dieselbe Aufgabe auch, und zwar mit derselben Methode, lösen, indem man zuerst eine Strecke $X'Y'$ beliebig zeichnet und auf ihr den Teilpunkt Z' nach dem Verhältnis $m : n$ angibt. Auf dem in Z' errichteten Lote muß der M entsprechende Punkt liegen, und da in der ähnlichen Figur der bei M' liegende Winkel ebenso groß ist wie $\sphericalangle AMB$, so ist für M' ein zweiter Ort der Kreis mit AMB als Peripheriewinkel zur Sehne $X'Y'$. Damit ist die ähnliche Figur bestimmt. Man hat sie noch in die richtige Größe und dann mit der gegebenen zur Deckung zu bringen.

Aufg. 128. *Im gegebenen Dreieck ABC* (Fig. 42) *ist in*

1) Es ist wohl überflüssig, zu erwähnen, daß diese Methode nichts zu tun hat mit der in § 6 behandelten.

vorgeschriebener Richtung die Linie XY so zu ziehen, daß $AX:CY = m:n$ wird.

Offenbar ist die Gestalt des Vierecks $AXYC$ bestimmt; man verfährt am einfachsten so, daß man X' auf AB beliebig wählt und zu AX' eine Strecke v so herstellt, daß sich $AX':v = m:n$ verhält. Auf der Geraden, die in der gegebenen Richtung durch X' geht, verschiebt man nun den einen Endpunkt von v, während man v immer parallel mit BC führt. Der andre Endpunkt kommt dann einmal auf AC zu liegen und liefert hier C', woraus sich auch Y' ergibt. Das Viereck $AX'Y'C'$ hat mit dem gesuchten den Punkt A gemeinsam, und die von A ausgehenden Seiten fallen aufeinander; also ist A Ähnlichkeitspunkt für beide Vierecke, so daß die Linie AY' auf BC den Punkt Y liefert.

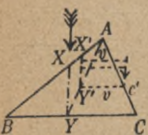


Fig. 42.

Aufg. 129. Durch den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises sind drei beliebige Strahlen gezeichnet. Dem Kreise ist ein Dreieck umzuschreiben, dessen Ecken auf den Strahlen liegen.

Aufg. 130. Ein Tangentenviereck ist zu zeichnen, von dem die Winkel gegeben und zwei gegenüberliegende Eckpunkte festgelegt sind.

§ 17] Wir legen in der Ebene einen Punkt J fest; zu irgendeinem Punkte P konstruieren wir auf der Geraden JP einen zweiten P' so, daß das Produkt $JP \cdot JP'$ einen gegebenen Wert p^2 besitzt, und zwar können wir durch das Vorzeichen von p^2 die beiden Fälle unterscheiden, daß die Strecke PP' vom Punkte J innerlich $(JP \cdot JP' = -p^2)$ oder äußerlich $(JP \cdot JP' = +p^2)$ geteilt wird. Wir sagen dann, die beiden Punkte P und P' sind invers zueinander; durch den festgelegten „Inversionspunkt" J und die gegebene „Potenz" p^2 wird eine „Inversion" bestimmt, d. h. zu jedem Punkte P wird ein andrer, P', zugeordnet. Jene Konstruktion des Punktes P' kann folgendermaßen geschehen: Man trägt auf einer beliebigen, durch J gehenden Geraden von J aus die gegebene Strecke p ab, und zwar nach beiden Seiten, wenn die Potenz negativ, nach einer, wenn sie positiv vorgeschrieben ist. Durch die erhaltenen Endpunkte legt man einen beliebigen (für die praktische Verwendung möglichst großen) Hilfskreis, d. h. im Falle der positiven Potenz einen Kreis, der jene von J ausgehende Strecke p zur Tangente hat. Der Bogen um J mit JP schneidet den Hilfskreis in P_1, und die Gerade JP_1 schneidet den Hilfskreis zum zweiten Male in P_2. Der Bogen um J mit JP_2 schneidet die Gerade JP in P'.

Beschreibt nun P irgendeine Linie, so beschreibt P' eine andre, zu jener invers genannte Linie. Um diese aus jener bequem herzustellen, hat man eine Vorrichtung erfunden, auf die wir uns nicht näher einlassen können; für uns genügt zunächst die Herstellung einzelner Punkte nach obigem Verfahren. Nun werden wir hauptsächlich fragen, wie die Bahn von P' aussieht, wenn P eine Gerade oder einen Kreis durchläuft. Wir wollen zunächst den Fall einer negativen Potenz betrachten und P auf einem Kreise (Fig. 43) beweglich denken. Zu den Endpunkten A und B des durch J gehenden Durchmessers seien die inversen Punkte A' und B', zu einem beliebigen Peripheriepunkte C der Punkt C' konstruiert; also es ist $JA \cdot JA' = JB \cdot JB' = JC \cdot JC' = -p^2$. Da also $JA : JC = JC' : JA'$ und $JB : JC = JC' : JB'$ und $\sphericalangle BJC = \sphericalangle B'JC'$, so ist $\triangle AJC \sim \triangle A'JC'$ und $\triangle BJC \sim \triangle B'JC'$, also ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle JC'B'$ und $\sphericalangle CAJ = \sphericalangle JC'A'$. Da nun nach dem Außenwinkelsatz am rechtwinkligen Dreieck ACB ist: $CAJ - ABC = 90^0$, so folgt, daß auch $\sphericalangle A'B'C' = 90^0$. Daher bewegt sich C' auf dem Kreise, dessen Durchmesser $A'B'$ ist. Wir überlassen es dem Leser, für den Fall einer positiven Potenz die entsprechende Betrachtung anzustellen. Als Ergebnis sehen wir, daß die zu einem Kreise inverse Linie wieder ein Kreis ist; der Inversionspunkt ist ein Ähnlichkeitspunkt beider Kreise. Ferner ist ein oben als Hilfskreis bezeichneter Kreis zu sich selbst invers.

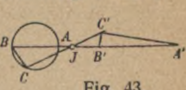


Fig. 43.

Ist zur Geraden g (Fig. 44) die inverse Linie herzustellen, so konstruiert man zunächst zu dem Fußpunkte A des von J auf g gefällten Lotes den zugeordneten Punkt A' und sodann zu einem beliebigen Punkte C auf g den inversen C'. Dann ist $JA \cdot JA' = JC \cdot JC'$, also $JA : JC = JC' : JA'$, so daß $\triangle JAC \sim \triangle JC'A'$; also ist stets $\sphericalangle JC'A' = 90^0$,

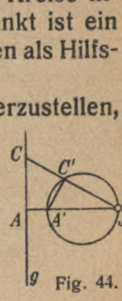


Fig. 44.

d. h. C' durchläuft den Kreis, dessen Durchmesser JA ist. Zu einer Geraden ist also ein durch den Inversionspunkt gehender Kreis invers, und umgekehrt ist das inverse Bild zu einem Kreise, welcher durch den Inversionspunkt geht, eine Gerade.

Ferner weisen wir noch auf eine sehr wichtige Eigenschaft der Inversion hin: der Winkel, den zwei Linien (also auch Kreise) bilden, bleibt bei der Inversion erhalten, d. h. die inversen Linien bilden einen Winkel von derselben Größe. Hieraus folgt, daß die inversen Linien zu zwei einander berührenden Linien sich wiederum berühren. Einige Konstruktionsaufgaben sollen uns zunächst mit der Anwendung der Inversion vertraut machen.

Aufg. 131. *Durch einen gegebenen Punkt P ist eine Gerade, die zwei gegebene Geraden g_1 und g_2 schneidet, so zu legen, daß das Produkt ihrer durch P gebildeten Abschnitte gleich einer vorgeschriebenen Größe a^2 wird.*

Wir wählen P als Inversionspunkt und a^2 als Potenz für die Inversion. Durch diese wird zu g_1 ein Kreis zugeordnet, und für jede durch P gehende Gerade, vom Schnittpunkt mit dem Kreise bis zu g_1 gerechnet, ist jenes Produkt gleich a^2. Die beiden Schnittpunkte des Kreises mit g_2 bestimmen also zwei Lösungen unsrer Aufgabe.

Aufg. 132. *Durch P ist eine Gerade, die einen Kreis K in X und eine geg. Gerade g in Y schneidet, so zu legen, daß $PX \cdot PY$ die vorgeschriebene Größe a^2 erhält.*

Entweder konstruiert man den zu g inversen Kreis oder den zu K inversen Kreis K', indem man P als Inversionspunkt und a^2 als Potenz der Inversion benutzt. K' schneidet dann g in den Punkten Y_1 und Y_2, die beide Lösungen der Aufgabe liefern.

Aufg. 133. *Einem gegebenen Kreise K soll ein Viereck eingeschrieben werden, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte A, B, C und D gehen.*

Für alle vorkommenden Inversionen verwenden wir K als „Hilfskreis", so daß er stets in sich selbst übergeht. Die gesuchte Ecke X fällt, wenn wir der Reihe nach um A, B, C und D als Inversionspunkte invertieren, nach Y, Z, W und schließlich wieder nach X. Jetzt invertieren wir (Fig. 45) den Punkt D um C, B und A, wobei er nach D_1, D_2 und zuletzt

P fällt; P ist also bekannt. Wenn wir nun die Gerade PX der Reihe nach um A, B, C und D invertieren, so wird sie in eine Linie (zunächst vermuten wir natürlich einen Kreis) übergehen, welche wieder durch X geht und mit K denselben Winkel bildet wie PX, denn man kann K bei allen vier Inversionen mit invertiert denken. Wir können nun leicht erkennen, daß diese neue Linie wieder eine Gerade ist, also mit PX zusammenfallen muß. PX geht nämlich nach Inversion um A über in einen Kreis durch A, dieser nach Inversion um B und C in einen Kreis durch D, weil P nach den drei Inversionen mit D zusammenfällt; dieser Kreis durch D liefert aber, um D invertiert, eine Gerade, und da diese durch X gehen und mit K denselben Winkel bilden muß wie PX, so fällt sie mit PX zusammen.

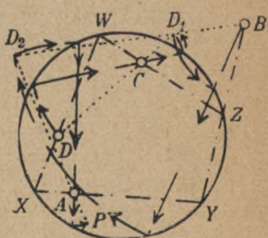


Fig. 45.

Es kommt nun darauf an, von dieser Geraden PX außer P noch einen Punkt zu finden. Sie ging bei Inversion um A über in einen Kreis durch A; wird dieser Kreis weiter invertiert, so muß die erhaltene Linie jedesmal auch den Punkt enthalten, der aus A durch die betreffende Inversion entsteht. D. h. jene Gerade, die ja durch Inversion des erwähnten, durch A gehenden Kreises um B, C und D entstanden ist, enthält auch den Punkt P_1, welcher durch Inversion des Punktes A um B, C und D entsteht. Dieser Punkt P_1 ist also auch bestimmt.

Wir sprechen noch einmal kurz die eigentliche Konstruktion aus: Man stellt die Punkte D_1, D_2 und P her, indem man D der Reihe nach um C, B und A invertiert. Sodann stellt man die Punkte A_1, A_2 und P_1 her, indem man A der Reihe nach um B, C und D invertiert. Die Gerade P_1P liefert zwei Lösungen X und X'.

Freilich begingen wir eine Nachlässigkeit, als wir sagten, die beiden durch X gehenden Geraden müßten zusammenfallen, weil sie mit K den gleichen Winkel bilden. Wir wollen es aber dem Leser überlassen, diesen Umstand näher zu untersuchen und sodann zu versuchen, unsre Methoden anzuwenden auf die

Aufg. 134. Einem gegebenen Kreise ist ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

Ferner verwende man die Inversion zur Lösung der

Aufg. 135. In ein gegebenes Parallelogramm ist ein Rhombus einzuschreiben, dessen Flächeninhalt gegeben ist.

Zum Schluß wenden wir die Methode der Inversion noch an, um eine Lösung des schon erwähnten „Taktionsproblems“ des Apollonius zu zeigen. Wir betonen, daß unsre Lösung keineswegs die „eleganteste“ ist; man hat bessere Lösungen des Problems gefunden, für die aber erst die Entwicklung einiger Begriffe nötig ist, und das würde uns hier zu weit führen. Zunächst sprechen wir die Aufgabe nochmals aus:

Aufg. 136. *Ein Kreis ist zu zeichnen, der drei gegebene Kreise berührt.*

Offenbar hat die Aufgabe im allgemeinen mehrere Lösungen, da jeder gegebene Kreis vom gesuchten einschließend oder ausschließend berührt werden kann. Die gegebenen Kreise sind K_1, K_2 und K_3. Deuten wir durch a_2 z. B. an, daß der gesuchte Kreis mit K_2 in ausschließender, durch i_2, daß er mit K_2 in einschließender Berührung ist, so ergeben sich folgende acht Möglichkeiten:

$$\left.\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} a_1 & a_2 & i_3 \\ i_1 & i_2 & a_3 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} a_1 & i_2 & a_3 \\ i_1 & a_2 & i_3 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} i_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & i_2 & i_3 \end{matrix}\right\}.$$

Ist K_3 der kleinste der gegebenen Kreise, so betrachten wir (Fig. 46) irgend zwei Lösungen, die in obiger Tabelle als zusammengehörig gekennzeichnet sind; wir nennen die gesuchten Kreise U und V, ihre Radien u und v, während r_1, r_2, r_3 die gegebenen Radien sind. Wir lassen jetzt r_3 immer kleiner werden, halten aber den Mittelpunkt K_3 ebenso wie alle übrigen Mittelpunkte fest. Dann wird u um ebensoviel zunehmen und v um ebensoviel abnehmen, wie r_3 abnimmt; um denselben Betrag nimmt auch r_1 zu und r_2 ab (bei einem andern der vier Lösungspaare ist das Verhalten von r_1 und r_2 anders; man untersuche dies!). Ist schließlich der Kreis K_3 zu einem Punkte zusammengeschrumpft, so gehen durch diesen Punkt K_3 zwei Kreise mit den Mittelpunkten U und V

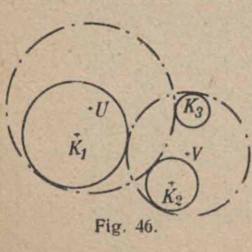


Fig. 46.

und den Radien $u + r_3$ und $v - r_3$, und diese berühren die Kreise um K_1 und K_2 mit den Radien $r_1 + r_3$ und $r_2 - r_3$; aus ihnen sind dann die gesuchten, zu ihnen ja konzentrischen Kreise leicht zu ermitteln. Also wäre unsre Aufgabe gelöst, wenn wir die andre lösen könnten: „Ein Kreis ist zu zeichnen, der zwei gegebene Kreise K_1 und K_2 berührt und durch einen gegebenen Punkt $P\,(K_3)$ geht."

Durch dasselbe Verfahren wie oben kann man diese wieder auf eine einfachere Aufgabe zurückführen; das ist wahrscheinlich auch der Weg, auf dem Apollonius selbst zur Lösung gelangte. Wir wollen ihn jedoch nicht weiter verfolgen, sondern wollen die zuletzt ausgesprochene Aufgabe mit Hilfe der Inversion lösen.

Der gegebene Punkt P sei Inversionspunkt, die Potenz zunächst beliebig gewählt. Ist X ein Kreis, der die gestellten Bedingungen erfüllt, so geht er durch die Inversion in eine Gerade über, die wir x nennen wollen. K_1 und K_2 gehen durch dieselbe Inversion über in zwei Kreise K_1' und K_2', und da K_1 und K_2 von X berührt werden, so werden K_1' und K_2' von x berührt, d. h. x ist gemeinsame Tangente zu K_1' und K_2'. Der Einfachheit halber kann man die Inversionspotenz so wählen, daß K_1' mit K_1 zusammenfällt, d. h. man wählt K_1 als „Hilfskreis". Also hat man zunächst K_2' durch Inversion herzustellen, dann die gemeinsamen Tangenten an K_1 und K_2' zu legen und aus ihnen wieder durch Inversion die gesuchten Berührungskreise zu finden. So ergeben sich für unsre Hilfsaufgabe 4 Lösungen. Man wende dies nun auf die Aufgabe 136 an und untersuche, wie man von den 4 Lösungen auf die gesuchten 8 kommt. Man beachte ferner, daß die allgemeine Berührungsaufgabe eine Anzahl (wieviele?) Sonderfälle enthält, indem die gegebenen Kreise zu Punkten oder Geraden entarten können, und man untersuche, inwieweit sich unser Verfahren in diesen Sonderfällen verwenden läßt.

PHOTOMECHANISCHES GUMMIDRUCKVERFAHREN DER DRUCKEREI
B. G. TEUBNER, LEIPZIG

Lietzmann — Zühlke — Fischer

GEOMETRISCHE AUFGABENSAMMLUNG

Ausgabe A für Gymnasien

Unterstufe: 3. Aufl. Mit 266 Figuren. [VIII u. 173 S.] . . . . . . M. 2.80**)
Oberstufe: 2. Aufl. Mit 51 Figuren. [VI u. 150 S.] . . . . M. 2.40

Ausgabe B für Realanstalten

Unterstufe: 4. Aufl. Mit 288 Fig. [VIII u. 242 S.] . . . . M. 3.80
Oberstufe: 2. Aufl. Mit 36 Figuren. [VIII u. 174 S.] . . . . M. 2.80

C Kurzausgabe: Unterstufe. Mit 149 Abb. i. T. [VI u. 122 S.] M. 2.—

DIESELBE MIT LEITFADEN

Ausgabe A für Gymnasien

Unterstufe: 3. Aufl. Mit 320 Figuren. [VI, 173 u. 40 S.] . . . . . . M. 3.40
Oberstufe: 2. Aufl. Mit 106 Abbildungen. [VI, 150 u. 65 S.] . . . . . . M. 3.40

Ausgabe B für Realanstalten

Unterstufe: 4. Aufl. Mit 359 Figuren. [VII, 242 u. 64 S.] . . . . . . M. 4.60
Oberstufe: 2. Aufl. Mit 144 Figuren. [VIII, 174 u. 108 S.] . . . . . M. 4.40

**) Ergebnisheft in Vorbereitung.

„Man muß dem Verfasser Bewunderung zollen; er hat es verstanden, ins volle Leben hineinzugreifen und alles heranzuziehen, was das Interesse und die Wißbegierde der Jugend zu erwecken geeignet ist. Es ist erstaunlich, welch ein Wissensstoff in den 2635 Aufgaben zusammengetragen ist." **(Zeitschrift f. d. Realschulwesen.)**

Einführung in die Trigonometrie. Von Oberstudienrat Prof. Dr. *A. Witting*, Dresden. Eine element. Darstellung ohne Logarithmen. Mit 26 Fig. u. zahlr. Aufg. [IV u. 47 S.] 8. 1921. (MPhB 43.) M. 1.—

Das Bändchen behandelt in ausführlicher durch sehr viele einfache Beispiele und Aufgaben erläuterter Weise die Grundbegriffe der Trigonometrie. Die Tabellen der natürlichen Winkelfunktionen werden durch Messung zweistellig gewonnen, es wird auch meist mit zwei Dezimalen gerechnet. Das allgemeine Dreieck wird nur mit dem Sinus- und dem Kosinussatz bearbeitet.

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat *P. Crantz*. 3. Aufl. Mit 50 Fig. im Text. [98 S.] 8. 1920. (ANuG Bd. 431.) Geb. M. 2.—

Will in leicht verständlicher Weise mit den Grundlehren der Trigonometrie bekannt machen. Vollständig gelöste Aufgaben und praktische Anwendungen sind zur Erläuterung eingefügt.

Sphärische Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat *P. Crantz*. Mit 27 Fig. im Text. [98 S.] 1920. (ANuG Bd. 605.) Geb. M. 2.—

Behandelt als Ergänzung zur „Ebenen Trigonometrie" die besonderen Eigenschaften des sphärischen Dreiecks und seine Anwendungen in der Erd- und Himmelskunde an zahlreichen ausführlich erklärten Beispielen und Aufgaben.

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat *P. Crantz*. 3. Aufl. Mit 94 Fig. im Text. [IV u. 117 S.] 8. 1921. (ANuG. Bd. 403.) Geb. M. 2.—

Die Darstellung ist einfach und klar gehalten, ohne dabei der wissenschaftlichen Strenge zu entbehren. Zahlreiche Aufgaben mit zumeist durchgeführter Lösung sind beigegeben. Die einzelnen Sätze sind überall mit praktischen Anwendungen verbunden.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Fortsetzung der 2. Umschlagseite

Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühlke. (Bd. 11.)

Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. 2. Aufl. (Bd. 6.)

Funktionen, Schaubilder, Funktionstafeln. Von A. Witting. (Bd. 48.)

Einführung in die Nomographie. Von P. Luckey. I. Die Funktionsleiter. 2. Aufl. (Bd. 28.) II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. (Bd. 37.)

Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes. Von A. Rohrberg. 3. Aufl. (Bd. 23.)

Mathematische Instrumente. Von W. Zabel. I. Hilfsmittel und Instrumente zum Rechnen. II. Hilfsmittel und Instrumente zum Zeichnen. [U. d. Pr. 1925.] (Bd. 59 u. 60.)

Die Anfertigung mathematischer Modelle. (Für mittlere Klassen.) Von K. Giebel. 2. Aufl. (Bd. 16.)

Karte und Kroki. Von H. Wolff. (Bd. 27.)

Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Barneck. (Bd. 29.)

Die mathematischen und physikalischen Grundlagen der Musik. Von J. Peters. (Bd. 55.)

Die mathematischen Grundlagen der Variations- und Vererbungslehre. Von P. Riebesell. (Band 24.)

Mathematik und Biologie. Von M. Schips. (Bd. 42.)

Mathematik und Malerei. 2 Bände in 1 Band. Von G. Wolff. 2. Aufl. (Bd. 20 u. 21.)

Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung. Von H. Schütze. (Bd. 46.)

Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting u. M. Gebhardt. 2. Aufl. (Band 15.)

Archimedes. Von A. Czwalina. (Bd. 64.)

Wie man einstens rechnete. Von E. Fettweis. (Bd. 49.)

Rechnen der Naturvölker. Von E. Fettweis. [In Vorb. 1925.]

Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. 2. Aufl. (Bd. 18.)

Die Quadratur des Kreises. Von E. Beutel. 2. Aufl. (Bd. 12.)

Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 3. Aufl. (Bd. 52.)

Trugschlüsse. Gesammelt von W. Lietzmann. 3. Aufl. (Bd. 53.)

Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 3. Aufl. (Bd. 13.)

Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)

Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 5.)

Kreisel. Von M. Winkelmann. [In Vorb. 1925.]

Optik. Von E. Günther. [In Vorb. 1925.]

Atom- und Quantentheorie. Von P. Kirchberger. I. Atomtheorie. II. Quantentheorie. (Bd. 44 u. 45.)

Ionentheorie. Von P. Bräuer. (Bd. 38.)

Das Relativitätsprinzip. Leichtfaßlich entwickelt von A. Angersbach. (Bd. 39.)

Drahtlose Telegraphie und Telephonie in ihren physikalischen Grundlagen. Von W. Ilberg. (Bd. 62.)

Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. (Bd. 17.)

Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. 2., umgearb. Aufl. (Bd. 8.)

Mathematische Himmelskunde. Von O. Knopf. [U. d. Pr. 1925.] (Bd. 63.)

Beobachtung des Himmels mit einfachen Instrumenten. Von Fr. Rusch. 2. Aufl. (Bd. 14.)

Grundzüge der Meteorologie, ihre Beobachtungsmethoden und Instrumente. Von W. König. [In Vorb. 1925.]

Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. (Bd. 40.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin