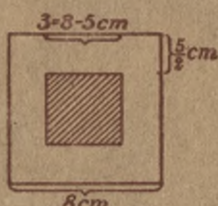
CH-
BLIOTHEK

NER

WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

I. GRUNDLEHREN



RLAG B.G.TEUBNER LEIPZIG UND BERLIN

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING

4

WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

I. GRUNDLEHREN

VON

OTTO MEISSNER

POTSDAM

ZWEITE AUFLAGE

MIT 3 FIGUREN IM TEXT

1919

LEIPZIG UND BERLIN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

VORWORT

Da das Büchlein über „Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen" viel Anklang gefunden hat, vielfach aber, teils in Besprechungen, teils in Schreiben an den Verf. der Wunsch nach etwas größerer Ausführlichkeit ausgesprochen wurde, ist die neue Auflage, mit gütiger Einwilligung der Herausgeber und des Verlags, in zwei Bändchen geteilt worden.

Im vorliegenden 1. Bändchen ist die erste Hälfte wesentlich unverändert geblieben. In der zweiten kommt, auch hier unter Vermeidung jeder abstrakten Formel, der wichtige (Bernouilli-) Laplace-Poissonsche Satz zu der ihm gebührenden Würdigung. Ein Anhang gibt die zum Verständnis der Fachliteratur über Wahrscheinlichkeitsrechnung nötigsten Formeln und Begriffe. Die am Schlusse gegebenen geschichtlichen Bemerkungen über die im Texte erwähnten Mathematiker werden vielleicht für die Kreise, für die das Büchlein hauptsächlich bestimmt ist, nicht ohne Interesse sein.

Es sei noch erwähnt, daß auch das 2. Bändchen der 1. Auflage gegenüber eine bedeutende Bereicherung seines Inhalts erfahren hat, und zwar durch Aufnahme eines umfangreichen Abschnittes über die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Physik (Gastheorie und Wärmelehre) und Kosmologie.

Potsdam, Herbst 1918.

Otto Meißner.

ABKÜRZUNGEN

W. = Wahrscheinlichkeit

W.-R. = Wahrscheinlichkeitsrechnung

? W. = Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit . . .

V. = Variationen

K. = Kombinationen.

o. W. = ohne Wiederholung

mit W. = mit Wiederholung

INHALTSVERZEICHNIS

I. EINLEITUNG

§ 1. **Zufall.** Im gewöhnlichen Leben spielt das Wort „Zufall" eine große Rolle. Was hat man darunter zu verstehen? Es wird gut sein, zur Erläuterung ein Beispiel heranzuziehen. „Es ist ein *Zufall*, daß ich gestern Abend meinen Freund auf der Straße getroffen habe." — Worüber wird hier eine Aussage gemacht? Über das Zusammentreffen zweier Ereignisse, die nicht (direkt) ursächlich miteinander verknüpft sind; in unserem Falle sind die beiden Ereignisse die, daß ich und daß mein Freund gleichzeitig am gleichen Orte waren. Dabei wollen wir gleich anmerken, daß sich hiernach Zufall und Gesetzmäßigkeit keineswegs *ausschließen*: jeder von uns (können wir doch wohl annehmen) hatte bestimmte Gründe, gerade diesen Weg zu wählen, aber jeder von uns verschiedene, voneinander *unabhängige*. Hätten wir uns verabredet, so wäre das Treffen *kein* „Zufall" gewesen.

§ 2. **Vereinbarkeit mit dem allgemeinen Kausalgesetze.** Diese Betrachtung ist jedoch für sich noch nicht zulänglich. — Im Gegensatze zu den antiken Naturforschern, z. B. Aristoteles, nehmen wir vom naturwissenschaftlichen Standpunkte aus *Eindeutigkeit und Notwendigkeit aller wirklich eintretenden Ereignisse* an: da scheint für den Zufall kein Raum mehr zu bleiben. In der Tat wäre dies für einen Geist[1], der alle Vorgänge im Weltall mit beliebiger („unendlicher") Genauigkeit beobachten könnte, *nicht* der Fall; er hätte den Zufall des § 1 wie jeden andern schon beliebige Zeit vorher voraussagen können.

§ 3. **Unzureichendes Wissen.** Aber wir sind unvollkommen: „unser Wissen ist Stückwerk". Und unser *unzureichendes Wissen* allein ist die Ursache, daß wir überhaupt noch von Zufall reden können, dürfen und müssen. Unsere Kenntnis der Vorgänge im Weltall ist räumlich und zeitlich begrenzt. Und: die Möglichkeit der Naturwissenschaft überhaupt beruht darauf, daß wir bei den verwickelten Vorgängen um uns herum „von unwesentlichen Nebenumständen

1) Wie ihn Poincaré in „La science et l'hypothèse" einmal annimmt. Dies Buch (deutsch: Wissenschaft und Hypothese, Leipzig, Teubner, 3. Aufl.) ist überhaupt sehr lesenswert.

absehen" können. Wir verzichten bewußt auf die völlige, aber unmögliche Erfassung *aller* Tatbestände, müssen uns infolgedessen aber auch darauf gefaßt machen, gelegentlich Überraschungen, „Zufällen", zu begegnen. Und das wird stets so bleiben: *dieser* Satz gehört zu den wenigen, die *absolute* Gewißheit beanspruchen können.

§ 4. **Gewißheit – Unmöglichkeit. Zwischenstufen = Wahrscheinlichkeit.** Während für ein vollkommenes Wesen (wie das im § 2 angenommene Poincarésche) alle Ereignisse notwendig geschehen, während es also nur die Extreme der Gewißheit und Unmöglichkeit eines Vorganges kennt, müssen *wir*, obwohl *grundsätzlich auf demselben Standpunkte stehend*, doch mangels ausreichender Kenntnisse *Zwischenstufen* einführen, die wir als „Wahrscheinlichkeiten" bezeichnen. *Gewisse* Sätze, wie der letzte im § 3 oder der: „ich existiere", besitzen allerdings auch *für uns*, wie gesagt, absolute Gewißheit. Erst auf ihnen kann sich die Wissenschaft aufbauen, aber sie selbst können eben deshalb nicht Gegenstand der Wissenschaft sein. Wollte man das leugnen, so hieße das, zum Standpunkt der *Skeptiker*[1]) zurückkehren, die denn auch folgerichtig eine eigentliche Wissenschaft für unmöglich erklärten.

Das Ergebnis unserer bisherigen Betrachtungen läßt sich also kurz etwa so zusammenfassen:

> Alle Ereignisse geschehen notwendig. Infolge unseres mangelhaften Wissens übersehen wir aber manche Glieder der Kausalreihe. In solchen Fällen reden wir vom Zufall. Aus demselben Grunde können wir nie mit voller Bestimmtheit sagen, ob ein Ereignis[2]) eintreffen wird oder nicht, obwohl das Eintreffen entweder sicher oder unmöglich ist. Das führt zum Begriff der *Wahrscheinlichkeit.*[3])

---

1) Philosophisch interessierte Leser seien auch an die Lehre der *Eleaten*, den Pyrrhonismus und Stirners „Solipsismus" erinnert. Als Gegensatz dazu in *unserm* Geiste Descartes, des Geometers: „Cogito, ergo sum".

2) So natürlich nur der Kürze halber gesagt. Daß der und der sterben muß, ist zwar *absolut* gewiß; dieser *Grundsatz* ist aber von dem *Ereignis* des Todes, bei dem es auf das *Wann* und *Wo* noch ankommt, scharf zu unterscheiden.

3) Im Anhang wird eine etwas andere Begründung der Wahrscheinlichkeitslehre gegeben werden.

§ 5. **Klassifikation der Ereignisse.** Es war schon vorhin erwähnt, daß die Wissenschaft genötigt ist, von gewissen Nebenumständen abzusehen. Wann und wie das zu geschehen hat, ist sehr schwierig zu bestimmen; wir müssen uns hier mit der bloßen Feststellung der Tatsache begnügen.

In Wirklichkeit gleichen sich zwei Ereignisse niemals völlig: οὐκ ἂν δὶς ἐς τὸν αὐτὸν ποταμὸν καταβαίνοις, sagt Herakleitos (aus Ephesus). Wir betrachten aber in einem bestimmten Gebiete der Wissenschaft zwei Ereignisse stets dann als gleich, wenn die Umstände, durch die sie sich unterscheiden[1]), für dies bestimmte Gebiet „nebensächlich" sind. Das gilt natürlich nicht nur in der Wissenschaft, sondern auch im täglichen Leben. Für den Statistiker sind die Schüler einer bestimmten Klasse alle „gleich" (es sei denn, daß er sie noch nach dem Alter trennt), für den Lehrer aber nicht: jener „abstrahiert" von der Leistungsfähigkeit der Schüler, die für den Lehrer geradezu wesentlich ist.

Der Meteorologe unterscheidet *zunächst* trockene Tage und Regentage ohne Rücksicht auf die *Menge* des gefallenen Regens. Erst dann werden die Regentage ihrerseits nach der Regenhöhe geordnet, „klassifiziert".

Diese Einteilung der Vorgänge in Klassen führt nun zunächst zu einer Abgrenzung der verschiedenen Gebiete der Wissenschaft und wird innerhalb derselben weiter fortgesetzt; jeder Fortschritt der Wissenschaft beruht im Grunde auf solcher Fortsetzung (genaueren Einteilung nach bisher vernachlässigten Nebenumständen).

§ 6. **Mathematische Definition der Wahrscheinlichkeit.** Nun ist zu bemerken, daß im gewöhnlichen Leben, von dem man ja doch *ausgehen* muß, um zur Wissenschaft zu *gelangen*, die Wahrscheinlichkeit mit der Klassifikation in gewisser Weise zusammenhängt. Ein *häufig* vorkommendes Ereignis wird als *wahrscheinlich*, ein *selten* eintretendes als *unwahrscheinlich* bezeichnet. Es ist „sehr unwahrscheinlich", daß es in Berlin im Juni schneit, weil dies Ereignis sehr selten eingetreten ist. (Das einzige zur gleichen Klasse gehörige Ereignis ist das kontradiktorisch entgegengesetzte, daß es im Juni *nicht* schneit.)

---

1) Mindestens Zeit und Ort, in Wirklichkeit stets noch manches andere.

Das gibt uns die Möglichkeit einer mathematischen Definition der Wahrscheinlichkeit. Ist n die Anzahl von Fällen, in denen ein Ereignis hätte eintreten können (Zahl der *möglichen* Fälle), m die Anzahl, die angibt, wie oft es tatsächlich eingetreten ist (Zahl der *günstigen* Fälle), so setzen wir:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{m}{n},$$

so daß 0 die Unmöglichkeit, 1 die Gewißheit bezeichnet und die Wahrscheinlichkeit, im folgenden meist abgekürzt mit W. bezeichnet, stets ein *echter Bruch* ist, den man natürlich der Bequemlichkeit halber auch dezimal schreiben kann.

Unsere Definition verlangt *nicht*, wie es nach der Herleitung scheinen könnte, daß die n Fälle bereits wirklich eingetreten *sind*: das war nur des besseren Verständnisses halber angenommen. Sie verlangt nur die Kenntnis der günstigen und möglichen Fälle. Da diese Kenntnis aber im allgemeinen nur *angenähert* sein kann, wird auch die Berechnung der W. *selbst* nur *angenähert* sein, und zwar gerade in Fällen zukünftiger Ereignisse (oder ungenau bekannter vergangener), für die hauptsächlich Interesse vorhanden ist. Wir werden dies im nächsten Abschnitte an Beispielen eingehender erörtern; man beachte jedoch, was in § 8 gesagt wird.

Frage 1: Welche (philosophische) Schwierigkeit liegt in der oben gebrauchten Wendung: „in denen ein Ereignis hätte eintreten *können*“?

§ 7. **Gewisse Willkür der W.-Definition.** Ohne Zweifel haftet unserer Festsetzung eine gewisse Willkür an: man hätte es ja auch so einrichten können, daß die Unmöglichkeit mit $-\infty$ (∞ bedeutet „unendlich“), die Gewißheit mit $+\infty$ bezeichnet würde, oder beliebig sonstwie. Doch ist die im vorigen Paragraphen gegebene Definition die einfachste, am meisten naturgemäße, auch allgemein übliche, und deshalb behalten wir sie natürlich bei.

Ebenso wie man es in der Physik vermeidet, von „Kälte“ zu reden, werden wir auch das Wort „unwahrscheinlich“ in der Regel *nicht* anwenden. Nach dem Sprachgebrauche würde man alle W. $< \frac{1}{2}$ („kleiner als“ $\frac{1}{2}$) als „unwahrscheinlich“ zu bezeichnen haben. Wir wollen uns diesen „Vorzeichenwechsel“ ersparen.

§ 8. **Bereich der W.-Rechnung.** Wie schon im § 6 angedeutet, beschränkt sich die Anwendung des W.-Begriffes weder auf vergangene noch auf zukünftige Ereignisse. In vielen Anwendungsgebieten der W.-Rechnung (abgekürzt: W.-R.), z. B. der Ausgleichungsrechnung, der Lehre von den geometrischen Mittelwerten, fehlt überhaupt jede eigentliche zeitliche Beziehung.

§ 9. **Bedeutung der Bezeichnung „günstiger Fall".** Das Wort: günstiger Fall hat hier natürlich *nicht* die ihm im gewöhnlichen Leben zukommende *moralische* Bedeutung: *es gibt keine Werturteile in der Wissenschaft.* Man gebraucht das Wort „in übertragener Bedeutung", da kaum Mißverständnisse vorkommen können, und um eine Häufung von Fachausdrücken zu vermeiden.

§ 10. **Anmerkung über das subjektive Moment in der W.-R.** Das gelegentlich vielgenannte Wort von der „voraussetzungslosen Wissenschaft" ist als *völlig verfehltes Schlagwort* zu bezeichnen, denn ohne Voraussetzungen kann man keine Folgerungen machen. „Gemeint" ist die sog. *Objektivität* der Wissenschaft, die aber auch nur ein ideales, nie ganz streng erreichbares Ziel darstellt (mit „Voraussetzung" meint man: Vorurteil, wohlbegrenzte Begriffe in verschwommenem Denken durcheinander mengend). Das wird in der W.-R. besonders merkbar. „Der Wunsch darf nicht der Vater des Gedankens sein" — „man darf sich nicht von Gefühlen leiten lassen," heißt es, und so fort. Gewiß nicht, soweit Lust- oder Unlustgefühle in Betracht kommen, aber gerade in der W.-R. ist ein gewisses „Taktgefühl" vielfach notwendig. Nur insofern ist die W.-R. streng (exakt), und zwar *völlig* streng, als nach Annahme gewisser Voraussetzungen die sich ergebenden Folgerungen nach mathematischen Regeln im allgemeinen eindeutig gewonnen werden, aber diese Folgerungen *stehen und fallen mit den Voraussetzungen*, zu deren Annahme niemand (logisch) gezwungen werden kann. Grundsätzlich findet dasselbe in *allen* Wissenschaften statt: in gewissem Maße *willkürlich* sind die Voraussetzungen, *streng* die Folgerungen daraus.

II. GRUNDLEHREN DER WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

§ 1. **Würfelversuche.** Wir nehmen einen gewöhnlichen Würfel und werfen einmal — was ist die W., daß er eine Eins zeigt?

Sechs „mögliche Fälle" sind vorhanden. Die Möglichkeit, daß der Würfel aus irgendwelchem Grunde nicht auf eine seiner Flächen fällt, das „Brennen", wie man wohl in Spielerkreisen zu sagen liebt, schließen wir aus: *hier* ist es offenbar, daß dieser Fall mit jenen sechs andern nicht in dieselbe Klasse gehört; oft aber macht eine derartige Ausscheidung große Schwierigkeiten. Schon dieses einfache Beispiel mahnt also zur *Vorsicht* bei allen W.-Betrachtungen und möglichst genauer Erwägung bezüglich richtiger Klassifikation der Ereignisse.

§ 2. **Satz vom mangelnden Grunde; Begriff des Gewichts.** Wir haben hier also sechs mögliche Fälle; welches W.-Maß sollen wir den einzelnen zuerteilen? Es handelt sich augenblicklich nicht um die absolute W., die wir ja erst bestimmen wollen, sondern um die relative, die wir notwendigerweise zuvörderst kennen müssen, um überhaupt zum Ziele gelangen zu können. Wir werden die sechs Fälle „natürlich" als *gleichberechtigt* ansehen, also auch als gleichwahrscheinlich. Statt dessen kann man auch den Fachausdruck gebrauchen: sie haben „gleiches *Gewicht*". Wie im Falle ungleicher Gewichte diese zahlenmäßig zu bestimmen sind, wird später (in Band II) auseinandergesetzt werden. Für die Beantwortung der obigen Frage kommt nur *ein* günstiger Fall in Betracht, also ist die W. $= \frac{1}{6}$. Was *berechtigt* uns nun aber, alle Fälle als gleichwahrscheinlich zu betrachten? Erinnern wir uns daran, daß die W.-R. auf unserem mangelhaften Wissen beruht. Wir haben *keinen zureichenden Grund*, zu vermuten, daß eine Fläche des Würfels bevorzugt sei — es sei denn, daß es sich um einen „falschen Würfel" handle: auch diesen Fall also müssen wir ausscheiden. Wenn wir aber einen uns ganz unbekannten Würfel haben und nichts näheres über ihn wissen, also z. B. wenn wir ihn eben bekommen haben, können wir diese Ausscheidung nicht treffen, müssen also auf einen *Fehlschluß* gefaßt sein. Wir kommen also zu dem Ergebnisse, daß *erst* eine *Prüfung durch die Erfahrung* die *Richtigkeit unseres Ansatzes* gewährleistet oder zum mindesten *wahrscheinlich* macht; *wie* wahrscheinlich, darüber wird noch zu reden sein. Vgl. hierzu auch die §§ 18 und 19 des Anhangs.

Frage 2: Wäre der Würfel ein Quader mit quadratischer Grundfläche, so hätten 2 Zahlen dasselbe Gewicht g_1, die andern 4 unter sich dasselbe, von g_1 verschiedene, Gewicht g_2. Wieso?

§ 3. **„Sehr viele" und „hinreichend viele" Fälle.** Wie kann nun solche Prüfung stattfinden? Offenbar nur durch *Wiederholung* der Versuche unter genau den gleichen Umständen. Für einen bestimmten *Einzelfall* hat ja die Angabe, die W., 1 zu werfen, sei $= \frac{1}{6}$, ersichtlich gar *keinen Sinn*[1]); bedeutet sie doch: im sechsten Teil aller Fälle muß eine 1 erscheinen. Also können wir erwarten, daß in sechs Würfen einmal 1 fällt? Nein, sagt der „gesunde Menschenverstand" und mit ihm die W.-R., die ja nach dem Bonmot eines französischen Gelehrten nur „le bon sens reduit au calcul" ist; das sind noch „zu wenig" Würfe. Erst wenn wir „sehr viele" Würfe gemacht haben, dürfen wir erwarten, im sechsten Teile aller Würfe 1 geworfen zu haben, um so sicherer, je öfter gewürfelt ist. Aber was sind „sehr viele Fälle"? 20, 100, 1000? Und wenn uns die Umstände hindern, „sehr viele" Fälle eintreten zu lassen, was sind „hinreichend viele", und *wie genau* können wir unsern W.-Ansatz bestätigt hoffen? (Vgl. Ende des vorigen §.) Diese Fragen drängen sich uns auf; wir können sie aber erst später beantworten. Einstweilen müssen wir sagen, und dieser Satz wird auch durch unsere späteren Betrachtungen nicht umgestoßen, sondern nur in das Gewand der Formel gekleidet werden, es bedarf eines gewissen Taktgefühls, einer Vertrautheit mit dem Problem, um anzugeben, was im Einzelfalle etwa als „hinreichende Zahl" von Fällen oder Prüfungen anzusehen ist. So wird man unsern Ansatz der gleichen W. aller Würfelzahlen noch nicht als falsch ansehen, wenn zweimal nacheinander die gleiche Zahl gefallen ist; bei dreimaliger Wieder-

---

1) Deshalb beging der alte Kant, der im Mannesalter so scharfe Denker, einen groben Irrtum, wenn er glaubte, aus den Sterblichkeitstafeln entnehmen zu können, wie lange *er* noch leben würde.

holung ist die W., daß der Ansatz hier nicht richtig, größer geworden; man wird deshalb — noch *zahlreiche weitere* Würfe machen, wenn man eine Entscheidung haben will.

§ 4. **Zusammengesetzte W.** Zunächst wollen wir, den Würfelbecher in der Hand, in der Theorie noch einen Schritt vorwärts tun. Wir fragen: wie groß ist die W. (abgekürzt: ? W.), *zweimal hintereinander eine Eins* zu werfen? Unter den 36 möglichen Fällen ist nur *ein* günstiger, also die W. $= \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$, dem Produkte der Einzelw., in einem Wurfe 1 zu erhalten. Nämlich, nur im sechsten Teile aller Fälle ist im ersten Wurfe eine 1 zu erwarten, und nur im sechsten Teile dieses „günstigen" Sechstels auch noch im zweiten Wurfe eine 1. Die Verallgemeinerung liegt auf der Hand. Die Ereignisse können auch *gleichzeitig* sein: die W., mit zwei Würfeln „Einspasch" zu werfen, ist auch $\frac{1}{36}$. Allgemein: die W. $w_{1,2}$, daß zwei Ereignisse mit den Einzelw. w_1 und w_2 zugleich (oder nacheinander) eintreffen, ist

$$w_{1,2} = w_1 \times w_2.$$

Da alle W. echte Brüche sind, wird die „*zusammengesetzte W.*" (dies der Fachausdruck) stets kleiner als die Einzelw.

Frage 3: ? W., mit zwei Würfeln 4 und 5 gleichzeitig zu werfen? Was verleitet wohl den Laien dazu, die W. eines solchen Wurfs gegenüber einem Pasch meist zu überschätzen?

§ 5. **Beispiel aus der Wettervorhersagung. Oftmalige Wiederholung desselben Ereignisses.** Die W. des richtigen Eintreffens einer Wetterprognose ist nach vielfachen Ermittlungen für die drei Elemente: Temperatur, Bewölkung und Wind je $^4/_5$ (80 Prozent sagt man auch), für Niederschlag leider nur $^2/_3$ (67%). ? W., daß die Prognose bezüglich *aller* Elemente stimmt? Unter der (freilich nicht streng richtigen) Voraussetzung der *Unabhängigkeit* der Voraussagung der einzelnen Elemente voneinander wird die W. einfach $= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{128}{375} \sim \frac{1}{3}$, wenn hier wie stets im folgenden $\sim$ „annähernd gleich" bedeutet. Dieser Wert entspricht auch ziemlich gut den wirklichen Verhältnissen. Es wäre sehr gut, wenn sich die Laien bei gelegentlichen Mißerfolgen wissenschaftlicher Voraussagungen daran erinnern wollten, daß man in solchen Fällen ähnliche Betrachtungen anzustellen hätte.

Die *oftmalige Wiederholung* eines Ereignisses mit selbst sehr großer W. wird schließlich wenig wahrscheinlich („unw."). Ein Beispiel: für wieviel Wiederholungen beträgt die W., daß sich ein Ereignis mit der W. 0,95 *einmaligen* Eintritts noch einmal wiederholt, nur noch $\frac{1}{2}$? Wir haben die Gleichung $0{,}95^n = 0{,}5$ zu lösen, also $n \log 0{,}95 = \log 0{,}5$; das ergibt $n \sim 15$. Daß ein Schütze, der in 95% aller Fälle das Ziel trifft, 15 mal hintereinander trifft, dafür ist also die W. nur noch $\frac{1}{2}$ (man kann „1 gegen 1" darauf wetten, vgl. später über Wetten § 14).

§ 6. **Vollständige oder totale W.** Wir stellen jetzt eine andere Frage: ? W., mit einem Würfel bei einmaligem Wurfe 1 oder 2 zu werfen? Jetzt stehen $2 = 1 + 1$ günstige 6 möglichen Fällen gegenüber, die W. wird $= \frac{1}{3}$. *Hier* sind also die W. zu addieren. Wann hat man die Einzelw. zu addieren, wann sie zu multiplizieren? Folgende einfache Regel, die ich zuerst von Prof. Stumpf hörte, gibt zuverlässige Auskunft:

> Stehen zwei Ereignisse E_1 und E_2 mit den W. w_1 und w_2 im Verhältnis des *Sowohl – als auch*, so sind die W. zu *multiplizieren*; stehen sie im Verhältnis des *Entweder – oder*, zu *addieren.*

Es ist üblich, im letztgenannten Falle von *totaler* oder „vollständiger" W., im ersten von *zusammengesetzter W.* zu reden.

§ 7. **Unabhängigkeit der Ereignisse.** Alle unsere Betrachtungen bleiben nur gültig, wenn durch das Eintreten des Ereignisses E_1 nicht etwa die W. von E_2 beeinflußt wird. Gegenseitige Unabhängigkeit der Ereignisse bzw. Ereignisursachen ist also notwendige Bedingung; sonst kann $w_{2,1}$ (d. h. die W., daß erst E_2, dann E_1 eintritt; vgl. § 4) ganz anders werden als $w_{1,2}$. Es mag hier noch darauf hingewiesen werden, daß „in Wirklichkeit" eine solche absolute Unabhängigkeit der Ereignisse natürlich nicht vorhanden ist; wir nehmen sie (nach dem Satze vom zureichenden Grunde) an, wenn wir mit unsern heutigen Mitteln (um uns recht vorsichtig und genau auszudrücken) das Gegenteil nicht nachweisen können. „Quod non est in actis, non est in mundo."

§ 8. **Prüfung durch Versuche stets nur annähernd.** Wir kehren zu § 4 zurück. Sehr ausgedehnte Versuche mit Würfeln hat der Züricher Astronom R. Wolf angestellt. Er machte mit einem weißen und einem roten Würfel 20000 Würfe mit dem Ergebnisse, das in der folgenden Tabelle zusammengestellt ist.

rot \ weiß	1	2	3	4	5	6
1	547	587	500	462	621	690
2	609	655	497	535	651	684
3	514	540	468	438	587	629
4	462	507	414	413	509	611
5	551	562	499	506	658	672
6	563	598	519	487	609	646

Zu erwarten wäre für jede Kombination $\frac{1}{36} \cdot 20000 \sim 556$. *Wie ist eine derartige Prüfung zu deuten?* Werden dadurch die Grundsätze der W.-R. kontrolliert? Eigentlich: nein! Denn die W. von $\frac{1}{36}$ hat zur Voraussetzung die völlige Gleichartigkeit aller Fälle, also absolute Homogenität der Würfel; davon ist in Strenge natürlich nicht die Rede; nur unser unzureichendes Wissen nötigte uns zu dieser *falschen* Voraussetzung, da *jede andere Voraussetzung noch willkürlicher* gewesen wäre.[1])

Wolf muß „schlechte" Würfel gehabt haben. Verf. hat 1905/6 mit vier Würfeln (drei aus Hornmasse, einem aus Marmor) 17280 Würfe gemacht. Für 1800 Würfe mit einem weißen Hornwürfel ergab sich:

Anzahl der	1	2	3	4	5	6
(statt 300)	299	295	303	307	289	307,

also, wie man sich auszudrücken liebt, eine viel bessere Annäherung der Wirklichkeit an die Theorie. Ferner ergab sich die Anzahl der Fälle, in denen

zweimal	hintereinander	293	statt 300
dreimal	dieselbe Zahl	50	„ 50
viermal	erschien[2])	6	„ 8,

also auch hier eine „sehr gute Übereinstimmung".

1) Der Grundsatz, der hier in der W.-R. zur Anwendung kommt, hat gewissermaßen in dem *physikalischen* „Prinzip des kleinsten Zwanges" ein Analogon.

2) Der Fachausdruck lautet hierfür: Sequenzen.

§ 9. **W. a priori und W. a posteriori.** Die nicht stets vorhandene Übereinstimmung zwischen Praxis und „grauer Theorie" führt uns dazu, unsere Voraussetzungen nachzuprüfen. Angenommen, es hätte sich herausgestellt, daß in „hinreichend vielen" Fällen die 4 stets nur halb so oft als die andern Zahlen erschienen wäre, so würden wir *nachträglich* („a posteriori") $w_4 = \frac{1}{2} w_1$ usw. setzen, und da

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = 1 \qquad \text{ist:}$$

$$w_4 = \frac{\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2}} = \frac{1}{11}, \; w_1 = w_2 = w_3 = w_5 = w_6 = \frac{1}{5\frac{1}{2}} = \frac{2}{11}.$$

Eine derartig bestimmte W. nennt man W. *a posteriori*, während die mangels Erfahrung angenommene, für alle Zahlen des Würfels gleiche W. von $\frac{1}{6}$ als W. *a priori* bezeichnet wird. Es sei bemerkt, daß die Angabe, W. „aus Erfahrung" seien als aposteriorische zu bezeichnen, nicht ganz zutrifft, denn *etwas* Wissen oder Erfahrung muß auch vorhanden sein, wenn man W. a priori aufstellen, wenn man überhaupt die W.-R. anwenden will!

§ 10. **Werfen bestimmter Summen mit mehreren Würfeln.** Wir wollen mehrere, etwa 3, Würfel nehmen und fragen, was für „Augen"-Summen man erhalten kann[1]). Offenbar 3 bis höchstens 18, 1 und 2 sind nicht möglich. Die verschiedenen möglichen Summen können nun aber auf verschiedene Weise entstehen: 3 nur durch $1 + 1 + 1$, 4 durch $1 + 1 + 2$ oder $1 + 2 + 1$ oder $2 + 1 + 1$, usf. Man sieht leicht, daß es nur auf *eine* Art möglich ist, daß alle drei Würfel dieselbe Zahl, etwa 3, zeigen; auf *drei* Arten, daß zwei gleiche Zahlen vorkommen, wie oben gezeigt; auf *sechs* Arten, daß drei verschiedene Zahlen gewürfelt werden, etwa 124, 142, 214, 241, 412, 421, in wohl ohne weitere Erläuterung verständlicher Bezeichnungsweise. Folgende Übersicht zeigt die möglichen Arten, mit drei Würfeln eine gewisse Summe zu werfen; dabei bedeutet 122_3, daß das Werfen einer 1 und zweier 2 auf drei Arten möglich ist usw.

1) Dies Problem ist das *erste* in der Literatur auftauchende; es wurde von Galilei (um 1640) gelöst, dem es ein eifriger Würfelspieler vorgelegt hatte. Dieser hatte nämlich bemerkt, daß die Summen 9 und 12 weniger oft als 10 und 11 erschienen.

Summe	Anzahl der Fälle	Verteilung der Summe auf die drei Würfel
3	1	111_1
4	3	112_3
5	6	113_3 122_3
6	10	114_3 123_6 222_1
7	15	115_3 124_6 133_3 223_3
8	21	116_3 125_6 134_6 224_3 233_3
9	25	126_6 135_6 144_3 225_3 234_6 333_1
10	27	136_6 145_6 226_3 235_6 244_3 334_3 usf.

Da es im ganzen $6 \times 6 \times 6 = 216$ mögliche Fälle gibt, ist also die W., die Summe 8 zu werfen, gleich $\frac{21}{216} = \frac{7}{72} \sim \frac{1}{10}$.

Frage 4: Wie ist die obige Tabelle fortzusetzen? („Symmetrisch“. Wie läßt sich die Bemerkung verwerten, daß üblicherweise die Zahlen entgegengesetzter Würfelseiten sich zu 7 ergänzen?)

Frage 5: ? W., mit vier Würfeln eine Summe von 10 zu werfen?

§ 11. **Urnenbeispiele.** Eine Urne enthalte 10 weiße, 15 rote, 5 gelbe, 25 grüne, 25 blaue und 20 schwarze Kugeln; man greife „*blindlings*“ hinein; ? W., eine weiße Kugel zu ziehen?

Damit wir die W.-R. überhaupt anwenden können, müssen wir über ein bestimmtes, aber nicht hinreichendes Maß von Kenntnissen verfügen. Das bloße Wissen über die Anzahl der farbigen Kugeln genügt nun aber *nicht*; vielmehr muß die Annahme einer „gleichmäßigen Mischung“[1]) hinzukommen, denn wenn z. B. die weißen Kugeln alle zu unterst lägen, wäre die Aussicht[2]), eine solche zu erhalten, *im allgemeinen* (denn es kann ja Leute geben, die, um recht „unparteiisch“ zu sein, bis auf den Boden der Urne langen!) *kleiner* als bei jeder anderen Verteilung. Diese Forderung gleichmäßiger Mischung bringt nebst der andern, aufs Geratewohl zu ziehen, jenes *Element der Unbestimmtheit* hinein, das den Aufgaben der W.-R. nun einmal eigen ist. Unter den gemachten Voraussetzungen nehmen wir also die „Chancen“, eine farbige Kugel zu ziehen, proportional ihrer Anzahl; die W., eine weiße zu ziehen, ist somit $\frac{10}{100} = 0{,}1$. Die W., eine weiße oder schwarze zu ziehen, $\frac{10+20}{100} = 0{,}3$; weshalb?

Beim *zweiten* Zuge haben wir *zwei* Möglichkeiten zu unterscheiden:

---

1) Einer „idealen Unordnung“ nach Maxwell. (Vgl. Bd. II S. 39.)
2) Auch „*Chance*“ genannt.

Erstens: Die gezogene Kugel wird wieder zurückgelegt (so sagt man gewöhnlich). Wir wollen zur Sicherheit hinzufügen: und es wird neuerdings, etwa durch Schütteln, gut gemischt. Legte man die Kugel einfach obenauf, so würden die *Chancen* für die weiße Farbe sich ändern; auch dann, wenn von allen Farben „sehr viele" Kugeln vorhanden wären. Unter Beachtung obiger Vorsichtsmaßregel bleibt alles beim alten, die Chancen haben sich nicht geändert.

? W., in drei Zügen mindestens eine weiße Kugel zu erhalten? Es bieten sich folgende Möglichkeiten:

I. Im ersten Zuge weiß: W. $= \frac{1}{10}$.
II. Im ersten Zuge *nicht* weiß: W. $= \frac{9}{10}$.
  Unterfall: 1. Im zweiten Zuge weiß: $\frac{1}{10}$.
    2. Im zweiten Zuge *nicht* weiß: $\frac{9}{10}$.
      Unterfall: 2a. Im dritten Zuge weiß: $\frac{1}{10}$.

Das sind offenbar die günstigen Fälle; wie sind die W. zusammenzusetzen? Nach der in § 6 angegebenen Regel ist die Antwort nicht schwer: 2a steht zu 2 im Verhältnis: Sowohl — als auch; es sind also die W. zu multiplizieren: $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10}$; die Unterfälle 1 und 2 stehen im Verhältnis Entweder — oder, also Summe $\frac{1}{10} + \frac{9}{100}$; der zweite Zug steht zum ersten im Verhältnis Sowohl — als auch, also ist zu multiplizieren und die W. für II. wird: $\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10} + \frac{9}{100}\right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{100} = \frac{171}{1000}$; I. und II. folgen der Entweder — oder-Regel; also ist zu addieren $\frac{171}{1000} + \frac{1}{10}$, so daß $\frac{271}{1000} \sim \frac{1}{4}$ die gesuchte W. darstellt.

Man kann im vorliegenden Falle sich die Sache noch anders verdeutlichen. Es sind, wenn W das Ziehen einer weißen, F das einer andersfarbigen Kugel bezeichnet, folgende Möglichkeiten denkbar:

WWW	WWF	WFF	FFF
	WFW	FWF	
	FWW	FFW	

Die *totale* W. aller acht Fälle ist 1. Die des einen „ungünstigen" Falles (FFF), ist nach der Sowohl-als-auch-Regel $\left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000}$, also bleibt für die günstigen Fälle $1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000} = 0{,}271$; natürlich genau wie oben.

Es überschreitet den Rahmen dieses Werkchens, die Darstellung solcher Einzelfälle zu verallgemeinern; hierzu sind

Kenntnisse der Kombinatorik erforderlich, welche hier nicht vorausgesetzt werden sollten (vgl. den Math. Anhang).

Frage 6: ? sind die W. für das Ziehen einer weißen Kugel, wenn die Urne n_1 weiße, n_2 rote, n_3 gelbe ... n_x schwarze, im ganzen $n_1 + n_2 + \cdots + n_x = n$ Kugeln enthält?

Frage 7: ? W., eine weiße oder eine schwarze Kugel zu ziehen?

Frage 8: ? W., in drei folgenden Ziehungen eine weiße Kugel zu erhalten?

Frage 9: ? W., hintereinander weiß, rot, gelb zu ziehen?

Frage 10: ? W., in drei Zügen je eine weiße, rote und gelbe Kugel zu ziehen?

§ 12. **Möglichkeit von Fehlschlüssen.** Es mag hier nochmals nachdrücklich betont werden, daß die Erörterung der Möglichkeiten mit großer Sorgfalt geführt werden muß, um Fehlschlüsse zu vermeiden. D'Alembert, der berühmte Mathematiker, Mitarbeiter an der französischen „Enzyklopädie" und Freund Friedrichs des Großen, machte einen solchen in folgendem einfachen Falle: Es wird eine Münze zweimal hintereinander auf den Tisch geworfen; ? W., daß sie „Wappen" (oder Kopf: K) zeigt (die andre Seite heißt „Schrift", S)? Er sagte, die möglichen Fälle seien K, SK, SS, also die W. $= \frac{2}{3}$. *Wir* sagen: die möglichen, *gleichberechtigten* Fälle sind KK, KS, SK, SS; W. $= \frac{3}{4}$. Verbessern wir aber d'Alemberts Überlegung, die ihn zu seinem Fehlschlusse führte:

I. Fall: K; W. $= \frac{1}{2}$. II. Fall: S; W. $= \frac{1}{2}$.
Unterfall 1. SS: W. $= \frac{1}{2}$.
2. SK: W. $= \frac{1}{2}$.

Günstig sind I. und II. 2. 2. steht zu II. im Verhältnis Sowohl – als auch, also W. für II. 2.: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, *dazu* nach der Entweder — oder-Regel, die W. für I. mit $\frac{1}{2}$ gibt, $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, und *nicht* $\frac{2}{3}$! Die Stumpfschen *Regeln* leiten uns sicher durch alle Schwierigkeiten der Überlegung, auch wenn sie erheblich größer sind als im vorliegenden einfachen Falle.

§ 13. **Artilleristisches Beispiel.** Die W., daß eine aus einem Geschütz G_1 abgefeuerte Granate vor dem Ziele auftrifft, die W. eines „Kurzschusses", wie der Fachausdruck lautet, sei p_1; die für ein 2. Geschütz G_2 ebenso p_2. Dann ist, die W. eines absolut genauen Treffers als 0 angenommen, die W. eines Weitschusses $1 - p_1$ bzw. $1 - p_2$. Wir fragen, ? W. daß bei gleichzeitigem Feuern

1. 2 Kurzschüsse vorkommen 2. mindestens einer
3. höchstens einer 4. keiner?

Die Antworten sind nach den Regeln des §6 leicht zu geben: für 1. offenbar $p_1 \times p_2$, für 4.: $(1-p_1) \times (1-p_2)$. Zur übersichtlichen Erledigung der beiden anderen Fragen bezeichnen wir einen Weit- bzw. Kurzschuß aus G_1 und G_2 mit $W_1 K_1$ $W_2 K_2$; dann gibt es für die beiden Schüsse die 4 möglichen Fälle $K_1 K_2$ $K_1 W_2$ $W_1 K_2$ $W_1 W_2$
mit den W.en:

$$p_1 p_2 \quad p_1(1-p_2) \quad p_2(1-p_1) \quad (1-p_1)(1-p_2).$$

Dies Schema läßt sowohl die Richtigkeit der Antworten auf Frage 1. und 4. erkennen, wie es die Antworten auf die beiden andern Fragen zu einer leichten Sache macht. Die W. in der 2. Frage ist offenbar gleich der Summe der W. der 3 ersten Fälle, also $= p_1 + p_2 - p_1 p_2$, die der 3. Frage gleich der Summe der beiden mittleren Fälle, $= p_1 + p_2 - 2p_1 p_2$.

Frage 11: ? W., bei je 2 Schüssen aus G_1 und G_2 mindestens 2 Kurzschüsse zu erhalten?

§ 14. **Glücksspiele.** Die „Kavaliere" früherer Zeit liebten das Spiel („Hasard"- oder Glücksspiel; Glück = fortuna = Zufall); ein solcher, namens de Meré, legte 1654 dem berühmten Rechtsgelehrten und Mathematiker P. Fermat[1]) ein Problem vor, das in der Literatur als „Teilungsproblem" bekannt und vielfach bearbeitet ist, und das hier in etwas erweiterter Form beispielsweise behandelt werden soll.

Zwei Spieler, A und B, machen eine Reihe von Spielen, die auf *Geschicklichkeit* beruhen, also etwa Schach, Halma, Salta o. ä. Als Sieger gilt, wer zuerst k Einzelspiele gewonnen hat. (Die Beziehung zur Geschicklichkeit ist bei Glücksspielen bekanntlich ganz ausgeschlossen, beim Skat u. ä. nur zum Teil in Frage kommend; bei Zufallspielen hat nach dem Grundsatz vom mangelnden Grunde jeder Spieler die W. $\frac{1}{2}$, zu gewinnen.) Aus irgendwelchen Gründen muß

1) Der Name dieses Mannes ist neuerdings in weitere Kreise gedrungen, seit der verstorbene Mathematiker Wolfskehl 100000 Mark für den ausgesetzt hat, der den Beweis des „großen Fermatschen Satzes" ($x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ nicht in ganzen Zahlen x, y, z lösbar) lieferte. Zahllose Laien und einige Fachleute(!) haben sich bisher *vergeblich* bemüht. Man vgl. hierüber W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem, Bd. 3 der vorliegenden Sammlung.

vorzeitig abgebrochen werden; wie sind die gemachten Einsätze zu teilen, wenn A noch m, B noch n Partien zum Siege fehlen? Eine *gerechte* Teilung wird entsprechend den Gewinnaussichten beider Spieler zu erfolgen haben. Es sei die Aussicht für A, *ein* Spiel zu gewinnen, p, für B sei sie q; es muß dann $p + q = 1$ sein; bei reinen Glücksspielen ist, wie bereits gesagt, $p = q = \frac{1}{2}$; andernfalls kann man sich p und q aus „vielen" früheren Spielen als W. *a posteriori* bestimmt denken.

Wir überlassen dem Leser die Durchführung des Problems im allgemeinen Falle, der keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bietet, und nehmen als Beispiel folgende Zahlenwerte an: $k = 10$, $m = 6$, $n = 3$, $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$.

Es kann A gewinnen nach 6, 7, 8 Partien. 9 Partien brauchen auf keinen Fall mehr gespielt zu werden. Der für A ungünstigste Fall ist, daß B die 2 nächsten Partien gewinnt, dann sind 8 nötig, wenn A noch gewinnen soll. Der für B ungünstigste Fall ist, daß A die 5 ersten gewinnt, auch dann sind nur 8 Spiele noch zu machen.

Die W., daß A nach 6 Partien gewinnt, ist $(\frac{2}{3})^6 = \frac{64}{729}$.

Soll A nach 7 Partien gewinnen, so muß er eine, aber nicht die letzte, verlieren (sonst hätte er ja schon nach 6 Spielen gewonnen). Es bleiben also 6 Fälle für den Verlust der Partie durch A, also den Gewinn durch B. Jeder Einzelfall hat die zusammengesetzte W. $(\frac{2}{3})^5 \cdot \frac{1}{3}$, alle 6 die totale $6 \cdot (\frac{2}{3})^5 \cdot \frac{1}{3}$; diese ist nun noch mit $\frac{2}{3}$ zu multiplizieren, der W., daß A das letzte Spiel gewinnt. Also ist die W. für A, nach 7 Partien zu siegen: $\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot (\frac{2}{3})^5 \cdot \frac{1}{3}$.

Soll A nach 8 Partien gewinnen, so darf er wieder die letzte nicht verlieren; und wenn mit A bzw. B der Sieg des betreffenden Spielers bezeichnet wird, sind folgende Siegesverteilungen der 7 vorhergehenden Spiele denkbar:

AAAAABB	AAAABAB	AAABAAB
AAAABBA	AAABABA	AABAABA
AAABBAA	AABABAA	ABAABAA
AABBAAA	ABABAAA	BAABAAA
ABBAAAA	BABAAAA	
BBAAAAA		
AABAAAB	ABAAAAB	BAAAAAB
ABAAABA	BAAAABA	
BAAABAA		

in leicht verständlicher Anordnung. Man sieht leicht, daß diese 21 Fälle alle Möglichkeiten erschöpfen; W. also $21 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^5$. Das ist wieder mit der W., daß A das achte Spiel gewinnt, d. h. mit $\frac{2}{3}$ zu multiplizieren. Als totale W. für A, zu gewinnen, ergibt sich somit:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{2}{3} \cdot 21 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left[1 + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 21 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = \frac{64}{729}\left[1 + 2 + \frac{7}{3}\right] = \frac{1024}{2187}.$$

Wir wollen nun noch kurz auf den *Einsatz bei Wetten* eingehen. Hat ein Ereignis die – irgendwie ermittelte – W. $\frac{3}{5}$, und wettet A auf das Eintreffen, B auf das Nichteintreffen, so müssen beider Einsätze im Verhältnis 3 : 2 stehen. In Wirklichkeit pflegen bei Wetten außer subjektiven Gefühlen noch andere, nicht mathematisch berechenbare Einflüsse im Spiele zu sein; und es mag hier, unter nochmaligem Hinweise darauf, daß die W.-R. für ein *bestimmtes* Ereignis (einen „konkreten Fall") *gar keine* Voraussagung liefern kann und will, *nachdrücklichst* davor *gewarnt* werden, durch Beteiligung an Zufallspielen irgendwelcher Art seine finanzielle Lage verbessern zu wollen; es sei, daß man „des guten Zwecks halber" ein Wohltätigkeitslotterielos nimmt!

§ 15. **Unendlich viele mögliche Fälle: Erweiterung des W.-Begriffes.** Bisher haben wir nur Probleme behandelt, in denen die Anzahl der möglichen Fälle *endlich* war. Man hat aber den W.-Begriff auch auf eine *unendliche* Zahl möglicher Fälle erweitert (also auch günstiger; wieso?). Ein einfaches Beispiel: ? W., daß eine beliebige ganze Zahl durch 3 teilbar sei? Über die Größe der Zahl ist nichts bekannt. Wir teilen alle Zahlen bis zu einer *Grenze*, etwa 1 Million, in 3 Klassen: solche, die durch 3 geteilt den Rest 0, 1 oder 2 geben.[1]) Zur ersten Klasse gehören bis zu unserer Grenze 333333, zur zweiten 333334, zur dritten 333333, also zu jeder „nahezu" $\frac{1}{3}$. Je höher wir die Grenze nehmen, um so geringer wird die Abweichung von $\frac{1}{3}$, die bei 1000 in Klasse 2: $\frac{1}{1000}$, bei einer Million $\frac{1}{1\,000\,000}$ usf. beträgt. Die Anzahl der günstigen Fälle beträgt also mit immer größerer Annäherung,

1) In der Zahlentheorie sagt man dafür: die kongruent 0, 1, 2 modulo 3 sind und schreibt $\equiv 0, 1, 2 \pmod 3$.

je mehr Zahlen wir nehmen, $\frac{1}{3}$ der möglichen, also die W. *„im Grenzfalle“* genau $\frac{1}{3}$.

§ 16. **Geometrische Wahrscheinlichkeiten.** Man hat den W.-Begriff auch auf *stetige Mannigfaltigkeiten* ausgedehnt und redet dann von „geometrischer“ W. Besonders Engländer haben viel auf diesem Gebiete und dem – wie hier nicht erörtert werden kann – eng damit zusammenhängenden der „Mittelwerte“ gearbeitet. Als leitender Grundsatz gilt dabei, daß:

gleichlange Strecken,
Flächen gleichen Inhaltes,
Körper gleichen Volumens

als gleichwertig behandelt werden. Da ein näheres Eingehen auf Probleme solcher Art Kenntnisse der Integralrechnung voraussetzt, beschränken wir uns auf zwei einfache Beispiele.

I. ? W., daß ein Punkt der Strecke AB (Fig. 1) in die Teilstrecke ab fällt? Nach unseren Festsetzungen (s. o.) $= \overline{ab} : \overline{AB}$, dem Verhältnis der Maßzahlen beider Strecken.

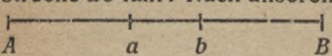


Fig. 1.

II. Ein Ball von 5 cm Durchmesser wird gegen ein Drahtgitter mit quadratischen Maschen von 8 cm Maschenweite geworfen; ? W., daß er hindurchfliegt?

Wir betrachten, was genügt, *eine* Masche (Fig. 2). Der Ball kann nur hindurch, wenn sein Mittelpunkt um den Radius $\frac{5}{2}$ cm von einem Gitterstabe (dessen Dicke wir vernachlässigen wollen!) entfernt bleibt; es ergibt sich so das schraffierte Quadrat als Inbegriff der „günstigen“ Fälle; seine Fläche ist 9 qcm, die des großen 64 qcm; daher die W., daß der Ball hindurchfliegt, gleich $\frac{9}{64} \sim \frac{1}{7}$. Wer Lust hat, kann ja Versuche anstellen, wobei er freilich *nicht beabsichtigen* darf, hindurchzuwerfen.

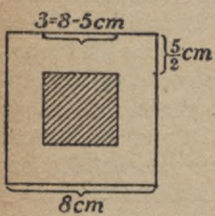


Fig. 2.

Der sachlich ganz ähnliche Fall des Werfens einer Münze auf einen Parkettfußboden und der Bestimmung der W., daß die Münze auf eine Ritze falle (die W. ist hier die *„komplementäre“* wie in unserem Ballbeispiel, d. h. ergänzt die dort berechnete zu 1), ist bereits 1733 von Buffon, dem bekannten französischen Naturforscher, behandelt. Berühmter noch ist sein „Nadelproblem“, wo die Rolle der Münze von einer Nadel übernommen wird.

Frage 12: Wie groß wäre die W., wenn die Drähte des Gitters $\frac{1}{2}$ cm breit wären?

Frage 13: Welchen Durchmesser müßte der Ball haben, damit die W., hindurchzuwerfen, gerade $\frac{1}{2}$ würde?

III. VERWICKELTERE FÄLLE UND GESETZMÄSSIGKEITEN

§ 1. **Vorbemerkung.** Die Aufgaben und Gesetze, die in diesem Abschnitte behandelt werden sollen, erfordern zu *erschöpfender* Erledigung durchaus Kenntnisse der höheren Mathematik, vor allem der Integralrechnung. Es kann sich also hier nur darum handeln, ein Bild in großen Zügen zu entwerfen, ohne daß die Treue (Strenge, mathematisch gesprochen) dabei Schaden leiten soll.[1])

§ 2. **Wahrscheinlichste Verteilung.** Eine Urne enthalte 10 weiße und 20 schwarze Kugeln. Es werden nun 6 Ziehungen mit jedesmaliger Zurücklegung und Mischung gemacht. Die Möglichkeiten des Ergebnisses sind in der folgenden Tabelle (S. 26 oben) übersichtlich dargestellt.

Es ist wohl nicht unangebracht, *eine* Zeile näher zu erläutern, es sei dies etwa die dritte. Von den 6 Kugeln sind 4 weiß und 2 schwarz; die W. *einer* weißen ist $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, die von 4 weißen (Regel: Sowohl – als auch) demnach $\frac{1}{3^4}$; die W. einer schwarzen $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, die für 2 also $\left(\frac{2}{3}\right)^2$. Die W., daß 4 weiße und 2 schwarze Kugeln in einer bestimmten Anordnung erscheinen, ist also $\frac{1}{3^4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3^6}$; der Nenner ist immer 3^6. Wieviel Anordnungen gibt es nun aber? Wir wollen sie hinschreiben, wobei W und S das Erscheinen einer weißen bzw. schwarzen Kugel bedeuten mag:

WWWWSS	WWWSWS	WWWSSW	WWSWWS
WWSWSW	WWSSWW	WSWWWS	WSWWSW
WSWSWW	WSSWWW	SWWWWS	SWWWSW
SWWSWW	SWSWWW	SSWWWW	15 Fälle.

1) Etwas mit mathematischen Formeln vertraute Leser seien auf den Anhang verwiesen, in dem etwa die Kenntnisse der Nr. 7, 9 und 24 dieser Sammlung vorausgesetzt sind.

Anzahl der weißen K.	Anzahl der schwarz. K.	W. des Einzelfalls	Zahl der möglichen Einzelfälle	Zähler der totalen W. (überall Nenner 729)
6	0	$\frac{1}{3^6}$	1	1
5	1	$\frac{1}{3^5}\ \frac{2}{3}$	6	12
4	2	$\frac{1}{3^4}\left(\frac{2}{3}\right)^2$	15	60
3	3	$\frac{1}{3^3}\left(\frac{2}{3}\right)^3$	20	160
2	4	$\frac{1}{3^2}\left(\frac{2}{3}\right)^4$	15	240
1	5	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^5$	6	192
0	6	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	1	64
				Summe: 729

Alle Fälle sind gleichwahrscheinlich (wegen der Zurücklegung der Kugel). Die „totale“ W. ist also $15.\frac{4}{3^6}=\frac{60}{729}$, wie die letzte Spalte der Tabelle angibt. In gleicher Art sind die Zahlen in den übrigen Zeilen entstanden.

Relativ am wahrscheinlichsten ist es also nach der Tabelle, daß 2 weiße und 4 schwarze Kugeln erscheinen werden, d. h. daß ihr Verhältnis (beim Erscheinen) dasselbe ist wie ihre Häufigkeit (in der Urne). Wir können hiernach den Satz allgemein so aussprechen:

Es ist am wahrscheinlichsten, daß die Häufigkeit, mit der zwei (oder mehr) Ereignisse auftreten, genau proportional ihrer W. ist.

§ 3. **Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichsten Verteilung. Abweichung davon.** Die Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichsten Verteilung selbst ist nun nicht groß und nimmt mit steigender Zahl der Wiederholungen stets ab. In unserem Urnenbeispiele ist sie für 6 Ziehungen $\frac{240}{729}\sim\frac{1}{3}$, für 3 aber $\frac{12}{27}\sim\frac{1}{2}$. Für 9 Ziehungen wird sie $\frac{5376}{19683}\sim 0{,}27$ usf. Man braucht aber nicht „le bon sens reduire au calcul“, um einzusehen, daß die W., daß bei 90 Ziehungen *genau* 30 mal weiße und 60 mal schwarze Kugeln gezogen werden, nur „klein" sein kann, und daß sie ständig abnehmen muß.

Lassen wir aber „geringe" *Abweichungen* von der „wahrscheinlichsten Verteilung" zu, so wird die Sache ganz anders. Nach der Tabelle des vorigen Paragraphen ist die W., daß 1 bis 3 mal statt 2 mal weiß gezogen wird, oder, wie man vielfach sagt und schreibt, daß 2 ± 1 mal eine weiße Kugel erscheint, bereits $\frac{592}{729} \sim 0{,}82$. Die W., daß doppelt soviel weiße Kugeln erscheinen, als ihrer Häufigkeit in der Urne entspricht, oder noch mehr, ist nur $\frac{73}{729} \sim \frac{1}{10}$. Bei 12 Ziehungen ist die W., daß 4 ± 2 mal weiß gezogen wird, schon $\sim \frac{43}{49} \sim 0{,}88$ und die W., daß mindestens 8 weiße Kugeln herauskommen nur $\sim 0{,}02$; also jene W. *wächst*, diese *fällt* mit der Zahl der Ziehungen.

§ 4. **Bernouilli-Laplacescher Satz.** Verallgemeinern wir die Ergebnisse, zu denen wir im vorigen Paragraphen auf Grund spezieller Annahmen gelangt sind, so erhalten wir den Inhalt des *Bernouillischen Theorems* (Satzes) in der ihm von Laplace gegebenen Fassung. Wir sprechen ihn unter Vermeidung einer Formel so aus:

Die W. der wahrscheinlichsten Verteilung nimmt mit steigender Zahl der Versuche ab und wird bei genügend großer Versuchszahl „beliebig klein". Die W. einer von der wahrscheinlichsten höchstens um eine gewisse Prozentzahl abweichenden Verteilung nimmt zu und kommt beliebig nahe an 1.

So hatten wir im vorigen Paragraphen eine Abweichung von $\pm 50\%$ zugelassen und als W. dafür bei 6 bzw. 12 Ziehungen 0,82 bzw. 0,88 erhalten, während die W. der wahrscheinlichsten Verteilung selbst von 0,33 auf 0,27 sank.

Der letzte Teil des Satzes von Bernouilli hat eine größere Tragweite, als man zunächst vermutet. Nehmen wir nämlich nur eine *sehr kleine* Abweichung A, etwa $\frac{1}{100}$ Prozent, als zulässig an, so ist die W. hierfür bei kleiner Versuchszahl nicht groß; sie wächst aber ständig. Bezeichnen wir die W. bei Z Versuchen mit $P(Z)$, so nimmt also $P(Z)$ mit Z zu (mit der oberen Grenze 1). Soll $P(Z)$ etwa mindestens $= 0{,}95$ sein, so gibt es daher eine Zahl Z_0 von der Art, daß für alle $Z > Z_0 : P(Z) \geqq 0{,}95$ ist. Bei kleinem A wird diese Zahl Z_0 freilich recht groß ausfallen; aber sie ist ganz eindeutig bestimmbar, so mühsam die Ausrechnung auch werden möge. So ist in unserem Beispiele für

$$A = 50\,\%, \quad P \geq 0{,}88: \quad Z_0 = 12,$$
$$A = 50\,\%, \quad P \geq 0{,}82: \quad Z_0 = 6.$$

§ 5. **Wahrscheinliche Abweichung. Gesetz der großen Zahlen.** Denjenigen Wert A_0 von A, für den (bei einer bestimmten Versuchszahl) P gerade $= \frac{1}{2}$ ist, nennt man die *wahrscheinliche Abweichung*. Es ist also ebenso wahrscheinlich, daß die eintretende Abweichung A größer wie daß sie kleiner als A_0 ist.

Wir sahen im vorigen Paragraphen, daß P bei festgehaltenem A mit der Zahl der Versuche wächst. Halten wir aber $P = \frac{1}{2}$ fest, so müssen diesem Werte bei steigender Versuchsanzahl immer kleinere Werte von A entsprechen, sogar (prozentual!) beliebig kleine, wenn man nur hinreichend viel Versuche macht.

Die in den §§ 4 und 5 ausgesprochenen Gesetzmäßigkeiten bezeichnet man auch als das *Gesetz der großen Zahlen*. Es formuliert nur genauer die von uns bereits im ersten Teile dieses Abschnittes erhobene Forderung, die Zahl der Versuche möglichst groß zu machen.

§ 6. **Durchschnittliche W. Satz von Poisson.** Wir wollen jetzt annehmen, daß sich die W. der Ereignisse im Laufe der Versuche *ändere*. Veranschaulichen können wir uns das so, daß wir uns 2 Urnen, die eine mit 20 weißen und 40 schwarzen, die andere mit je 30 weißen und schwarzen Kugeln gefüllt, annehmen und festsetzen, daß 4 mal aus Urne I, dann 3 mal aus Urne II gezogen wird; hierauf wieder 4 mal aus I usf. Die W. einer weißen Kugel ist für die I. Urne $\frac{1}{3}$, für II. $\frac{1}{2}$; in einer Reihe von 7 Ziehungen ist die W. also 4 mal $\frac{1}{3}$ und 3 mal $\frac{1}{2}$. Man nennt daher $\frac{1}{7}\left(4 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{42} \sim 0{,}40$ die *durchschnittliche W.* für das Ziehen einer weißen Kugel. Streng ist sie das nur für 7, 14, 21 ... Ziehungen; nach 8 Ziehungen ist die tatsächliche durchschnittliche W. etwas $< \frac{17}{42}$, ebenso nach 9, 10, 11 Ziehungen, da ja 4 mal aus der Urne gezogen wird, die eine kleinere W. gibt. In der 12., 13. und 14. Ziehung geht sie dann wieder bis auf $\frac{17}{42}$. Bei sehr vielen Versuchen sind aber die Unterschiede ohne Belang. Nimmt man gar an – und dieser Fall entspricht am meisten der Wirklichkeit – daß bei je 7 Ziehungen *in will-*

kürlicher Folge 4mal aus I und 3mal aus II gezogen wird, so läßt sich die tatsächliche W. einer nicht durch 7 teilbaren Zahl von Ziehungen überhaupt nicht genau bestimmen, und es muß (und *kann* ohne merklichen Fehler) jener Mittelwert der durchschnittlichen W. benutzt werden.

Der Poissonsche Satz besagt nun für solche *Durchschnitts-W.* wörtlich dasselbe wie der Bernouillische für konstante W.; dieser ist somit als Spezialfall des Poissonschen zu betrachten. Im Bilde: nehmen wir nur eine Urne oder lauter Urnen mit (relativ, das genügt!) gleichen Füllungsverhältnissen an, so ergibt sich wieder der Satz Bernouillis. Der Poissonsche nähert sich begreiflicherweise *mehr* den verwickelten Verhältnissen der Wirklichkeit und ist daher wertvoller, obwohl er den tatsächlichen Fällen oftmals auch noch nicht völlig gerecht wird.

Frage 14: Nach wieviel Ziehungen wird die Abweichung der durchschnittlichen W. von dem obigen Mittelwerte $\frac{17}{42}$ auch im ungünstigsten Falle kleiner als 0,01?

§ 7. W. von Ursachen. Satz von Bayes. Es werde angenommen, uns ständen 4 Urnen mit folgender Füllung zur Verfügung:

I:	10	weiße,	30	schwarze Kugeln
II:	5	„	15	„ „
III:	5	„	35	„ „
IV:	4	„	6	„ „ .

Wir greifen „blindlings" in eine *beliebige* Urne und ziehen eine *weiße* Kugel; ? W., daß sie aus einer bestimmten Urne, etwa aus I, ist? Die W. apriori des Ziehens einer weißen Kugel ist für I und II: $\frac{1}{4}$, für III $\frac{1}{8}$, für IV $\frac{2}{5}$. Wegen der verschiedenen Gesamtzahlen von Kugeln sind aber die 4 Urnen nicht „gleichberechtigt". Wir *nehmen* deshalb *an*, es würde am Ergebnis der Ziehung nichts geändert, wenn wir alle Urnen auf die gleiche Kugelzahl bringen, hier also 40 (im allgemeinen das kleinste gemeinsame Vielfache), nur muß dabei selbstverständlich das Verhältnis der Anzahl der schwarzen zu der der weißen Kugeln jedesmal gewahrt bleiben. Wir denken uns nun jede Kugel mit der Nummer ihrer Urne gekennzeichnet und alle in *eine* große Urne zusammengelegt. Um die schwarzen Kugeln brauchen wir uns gar nicht zu kümmern, da ja eine weiße gezogen ist; von diesen aber sind in der großen Urne 10 mit I, 2 mal 5 mit II, 5 mit III, 4 mal 4 mit IV bezeichnete Kugeln vorhanden. Die W., daß die gezogene weiße Kugel die Nr. I trägt, ist nun sehr leicht zu finden: 10 günstigen Fällen stehen $10 + 2 \times 5 + 5 + 4 \times 4 = 41$ mögliche Fälle gegenüber. W. $= \frac{10}{41} \sim \frac{1}{4}$. Schreiben wir diesen Bruch in der Form

$$\frac{\frac{10}{41}}{\frac{10}{41} + 2 \cdot \frac{5}{41} + \frac{5}{41} + 4 \cdot \frac{4}{41}} \sim \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{5}},$$

so sehen wir – und, wie man sich leicht überzeugt, gilt das ganz allgemein – daß im Zähler die W. steht, aus Urne I weiß zu ziehen, im Nenner aber die Summe aller W. (totale W.), aus I, II, III und IV weiß zu ziehen. Bezeichnet man, wie nun einmal üblich, den (eventuellen) Tatbestand („Entstehungsmodus" nach *Stumpf*), daß die Kugel aus I stammt, als *Ursache* U_{I}, so lautet der *Satz von Bayes*:

Die W., daß ein Ereignis, das apriori mit gleicher W. mehrere Ursachen $U_1 U_2 \cdots$ haben könnte, nach seinem Eintreten gerade von der Ursache U_i hervorgerufen ist, ist gleich der W. w_i, die ihm U_i *allein* gibt, geteilt durch die Summe der W. aus allen U_i:

$$w(U_i) = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + \cdots}.$$

Da der Nenner stets derselbe ist, folgern wir gleich: Es ist *am wahrscheinlichsten*, daß *diejenige* Ursache das Ereignis hervorgebracht hat, die es, wenn nur je eine Ursache allein wirksam wäre, *mit der größten* W. hervorbrächte.

Haben die Ursachen U_i selbst *apriori bereits verschiedene W.* $\overline{w}_i$, so ist in der obigen Formel jedesmal $\overline{w}_i\, w_i$ statt einfach w_i zu setzen. Wir können uns etwa denken, daß die Urnen (ganz unabhängig von der Zahl der in ihnen enthaltenen Kugeln!) verschieden große Öffnungen haben und die $\overline{w}_i$ dann bei „blindem Zugreifen" der Größe der Öffnungen proportional setzen. Es ist dann:

$$w(U_i) = \frac{\overline{w}_i w_i}{\overline{w}_1 w_1 + \overline{w}_2 w_2 + \cdots}.$$

Frage 15: Aus welcher Urne ist in dem Beispiel die weiße Kugel am wahrscheinlichsten gezogen, und ? W. hierfür?

§ 8. **Wahrscheinlichkeit und Wirklichkeit.** Als Beispiel aus der Wirklichkeit (im Gegensatze zu den doch nur gedachten, wenn auch leicht zu verwirklichenden Urnenbeispielen) seien wiederum die bereits im vorigen Abschnitte besprochenen Würfelversuche *Wolf*s und des Verf. herangezogen. Folgende W. aposteriori ergeben sich:

Augenzahl	Wolf, weißer W.	Wolf, roter W.	Meißner
1	0,1623	0,1704	0,1661
2	0,1724	0,1816	0,1639
3	0,1449	0,1588	0,1683
4	0,1421	0,1458	0,1706
5	0,1818	0,1724	0,1606
6	0,1966	0,1711	0,1706
	1,0001	1,0001	1,0001

(Infolge der Abrundungen ergeben die Summen zufällig alle eine Einheit der letzten Stelle zuviel). Obwohl *Wolf*s Reihe über 10 mal so umfangreich war wie die andre, sind doch bei ihm die größten Abweichungen vom Mittel ($\frac{1}{6} = 0{,}1667$), oder der W. apriori, die man gewissermaßen als „wahrscheinlichste Ursache" anzusehen hat, $+ 0{,}0299$ und $- 0{,}0246$ gegen $+ 0{,}0039$ und $- 0{,}0061$ bei *Meißner*. Die *durchschnittliche Abweichung*, d. h. das arithmetische Mittel der absoluten Werte der Abweichungen, ist bei

Wolf, weißer W. 0,0159
„ , roter W. 0,0093
Meißner 0,0031.

Nach dem Gesetz der großen Zahlen (§ 5) müßte die Abweichung bei *Wolf kleiner* sein; statt dessen ist sie 3 bis 5 mal so groß. Bei *guten* Würfeln zeigt sich also die *Anwendbarkeit der W.-R. auf die Wirklichkeit* als statthaft.

§ 9. **Warnung vor kritikloser Anwendung.** Man muß sehr beachten, daß die Sätze von *Bernouilli, Poisson* und *Bayes* erstens, wie schon die Bezeichnung: „Gesetz der großen Zahlen" andeutet, nur für eine große Anzahl von Versuchen verwertbar sind, und ferner, daß sie nur *Wahrscheinlichkeitsaussagen* darstellen, die also im *Einzelfalle nicht* erfüllt zu sein brauchen, selbst wenn die zugrundegelegten Voraussetzungen wirklich zuträfen, was obendrein nie der Fall ist.

Man darf auch die Regeln nicht kritiklos anwenden. Es sei z. B. eine Urne mit nur 2 Kugeln gegeben. Eine Ziehung ergibt weiß; ? W., daß beide Kugeln weiß sind? *Bayes'* Satz anwendend bilden wir zunächst die W. der zwei möglichen Ursachen: U_1, daß beide Kugeln weiß sind, ergibt $w_1 = 1$ für das Ziehen von weiß; U_2, daß nur eine weiß ist, ergibt dafür $w_2 = \frac{1}{2}$. Die W. der Ursache U_1 ist also $1 : (1 + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$. Im Ernst wird niemand glauben, daß die *eine* gemachte „Erfahrung" zu diesem Schlusse berechtigt. Eine einzige Ziehung ist eben keine genügend sichere Unterlage zum Ziehen von brauchbaren Schlußfolgerungen. Anders, wenn man etwa dreimal hintereinander eine weiße Kugel gezogen hätte. Die W. nach U_1 ist auch hier natürlich 1, die nach U_2 aber (nach der Sowohl – als auch — Regel) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, also $w(U_1) = 1 : \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) = 1 : \frac{9}{8} = \frac{8}{9} \sim 0{,}89$. Das klingt glaubhafter; was *bedeutet* es? Nach dem Gesetz der großen Zahlen folgendes: Wenn wir sehr viele Urnen mit 2 Kugeln hätten, jedesmal 3 Ziehungen machten und jedesmal eine weiße Kugel zögen, so würden unter, sagen wir, 1000 Urnen bei nachträglicher Prüfung *etwa* 890 *zwei* weiße Kugeln enthalten. Die andern etwa 110 Urnen enthielten eine weiße und eine andersfarbige Kugel; „zufällig" hätten wir aber auch bei ihnen dreimal hintereinander die weiße Kugel gezogen. Stillschweigend ist hierbei vorausgesetzt, daß bei der Füllung dieser 1000 Urnen nach keiner bestimmten Regel verfahren ist!

§ 10. **Empirische W.** Eine Urne enthalte 5 Kugeln. Bei 3 Ziehungen (mit Zurücklegung) ist 2mal eine weiße, 1 mal eine andersfarbige Kugel erschienen. Wir fragen jetzt nach der W., *in Zukunft* eine weiße Kugel zu ziehen.

Der Fall ist nach den Regeln des *Bayes*schen Satzes zu behandeln. Wir geben zunächst gleich das fertige Schema und erläutern es nachher.

Übersicht

Mögliche Ursachen	Urne enthält weiße Kugeln	W. des Ziehens einer w. K.	W. der Ursache
U_1	1	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{5} : (\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}) = 0{,}1$
U_2	2	$\frac{2}{5} = 0{,}4$	0,2
U_3	3	$\frac{3}{5} = 0{,}6$	0,3
U_4	4	$\frac{4}{5} = 0{,}8$	0,4
		$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5}$	

Mögliche Ursachen	W. der Wirksamkeit gerade dieser Ursache
U_1	$0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$
U_2	$0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$
U_3	$0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$
U_4	$0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$
„Empirische“ (= totale) W.	$= 0{,}60 = \frac{3}{5}$.
Dagegen W. der wahrscheinlichsten Ursache (U_4)	$= 0{,}4 = \frac{2}{5}$,
und W. *auf Grund* der wahrscheinlichsten Ursache	$= 0{,}8 = \frac{4}{5}$.

Wir wissen: mindestens eine weiße und mindestens eine farbige Kugel sind in der Urne. Nach der Zahl der weißen Kugeln sind also 4 Ursachen möglich (1. und 2. Spalte der Tabelle). Die W. des „Ziehens von weiß“ (wie kürzehalber gesagt werde) für eine bestimmte Ursache, d. h. Füllung der Urne, steht in der 3. Spalte. Die Summe, $\frac{10}{5}$, gibt nach *Bayes* den Nenner der W. einer bestimmten *Ursache*, deren Zähler die W. ist, mit der *nach* dieser Ursache weiß erscheinen würde. So ergibt sich die 4. Spalte. Diese W. ist nun keineswegs, wie eine oberflächliche Betrachtung es könnte erscheinen lassen, gleich der W., daß die betr. Ursache das „Ereignis“, nämlich das Ergebnis jener 3 Ziehungen, herbeigeführt hat. *Diese* W. ist vielmehr — nach der Sowohl — als auch Regel — als das *Produkt* der W. der *Ursache* mit der W. des Ereignisses *nach eben dieser* Ursache (die ja doch auch ein *anderes* Ergebnis liefern könnte!) anzusetzen. So ergibt sich die *letzte* Spalte der Tabelle, und da die 4 Ursachen alle Denkbarkeiten erschöpfen, ist die Summe die *totale* W., weiß zu ziehen (nach der Entweder — oder Regel). Sie wird, nicht ganz glücklich, als *empirische* W. bezeichnet. Mit besserem Rechte würden die in § 8 gegebenen W.en diesen Namen verdienen. Doch wenn man eine eingebürgerte Ungenauigkeit beseitigen will, so *erhöht* man meist nur die Verwirrung statt sie zu beseitigen.

§ 11. Warnendes Beispiel einer verfehlten Anwendung. Die Sonne ist 10000 mal hintereinander aufgegangen (auch wenn sie zufällig von Wolken bedeckt war, was in unseren Gegenden in über der Hälfte aller Fälle sich ereignet). Da das etwa $27\frac{1}{2}$ Jahre ausmacht, könnte ein 30 Jahre alter Philosoph des strengen Subjektivismus und Skeptizismus folgende Betrachtung anstellen, indem er die früheren Sonnenaufgänge als für ihn und deshalb (nach seiner Ansicht, überhaupt) zweifelhaft nicht in Rechnung zieht. Wie groß, fragt er, ist die W., daß die Sonne morgen wieder aufgeht? Wendet er schematisch die Kenntnisse an, die er sich aus der W.-R. angeeignet hat, so wird er folgendes schließen: Es gibt 10001 „mögliche" Fälle, nämlich die 10000 erlebten und den nächsten. Als Ursachen kommen nur 2 in Betracht: I mit 10000, II mit 10001 „günstigen" Fällen (nämlich, daß die Sonne aufgeht). Daher wird:

$$W(U_{\rm I}) = \frac{10000}{10001} : \left(\frac{10000}{10001} + \frac{10001}{10001}\right) = \frac{10000}{20001}; \quad W(U_{\rm II}) = \frac{10001}{20001}.$$

Nun führt $U_{\rm I}$ mit der W. $w_1 = \frac{10000}{10001}$, $U_{\rm II}$ mit $w_2 = \frac{10001}{10001} = 1$ das Ereignis (des 10001. Sonnenaufganges) herbei; somit ergibt sich dessen empirische W. zu:

$$\frac{10000}{20001} \cdot \frac{10000}{10001} + \frac{10001}{20001} \cdot \frac{10001}{10001} \sim 0{,}99995.$$

Das ist ja immerhin tröstlich und harmoniert noch einigermaßen mit dem „bon sens", der allerdings die W. ohne *jeden* Abzug = 1 setzen würde; betrachten wir aber die Gesamtheit dieser 10001 Fälle als *ein* Ereignis *E* und fragen nach der W. seiner 10maligen Wiederholung, so haben wir die W. nach der Sowohl – als – auch -Regel mit 10 zu potenzieren, was nur mehr $\sim$ 0,9995 ergibt. Für eine 10 bis 15000malige Wiederholung von *E* erhält man nur die W. $\frac{1}{2}$ (das sind etwa 300000 Jahre!), und die W. nimmt dann ständig weiter ab. Ein englischer „Reverend" (Geistlicher) hat nach einem ähnlichen Verfahren sogar *den Eintritt des jüngsten Gerichts* berechnet.

§ 12. **Praktische (moralische, physische) Gewißheit.** Mit Rücksicht auf die fragwürdigen Ergebnisse von Rechnungen, wie sie im vorigen § als abschreckendes Beispiel vorgeführt wurden, hat man mehrfach vorgeschlagen, W. „sehr nahe an 1", sagen wir, von $>$ 0,9999, als „praktisch" oder „physisch" oder „moralisch" *gewiß* anzusehen und in Rechnungen mit (genau) 1 zu bewerten. Das hat indes doch gewisse Bedenken. *Absolut gewiß* ist schließlich nur unsere eigene Existenz unmittelbar, das „cogito – sum" Descartes', des großen Mathematikers und Philosophen. Es ist äußerst unwahrscheinlich, daß ein Mensch von einem Meteorstein erschlagen wird, und doch ist es in geschichtlicher Zeit zwei- oder dreimal vorgekommen. „Es ist unwahrscheinlich, daß das Unwahrscheinliche *niemals* geschehe", das ist, allerdings in angreifbarer Fassung, ein ganz richtiger Gedanke. Vor allem ist daran wieder zu erinnern, daß unser Wissen unzureichend ist; das ist es ja gerade, weshalb überhaupt W.-R. *nötig* ist; das ist es aber auch, was ihre Ergebnisse stets unsicher macht, was sie vor allen Dingen dazu durchaus und immer untauglich macht, in Einzelfällen zur Entscheidung angerufen zu werden.

§ 13. **Noch ein Beispiel falscher Anwendung der W.-R.** Es hat in *Berlin* (der Leser mag dafür nach Belieben seinen Heimatsort oder einen andern mit den mittleren klimatischen Verhältnissen des ebenen binnenländischen Mitteleuropas setzen) 10 Tage hintereinander geregnet. ? W., daß es auch am 11. regnet? Hier tritt es nicht so deutlich hervor, daß wir *nicht* berechtigt sind, nach dem allgemeinen Schema zu rechnen. Dies gäbe nämlich, ganz ähnlich wie in § 11, für die 11 möglichen Fälle zwei Ursachen mit 10 bzw. 11 „günstigen" Fällen (daß es regnet).[1] In den alten Bezeichnungen ist $w_1 = \frac{10}{11}$, $w_2 = \frac{11}{11}$; daher $w(u_1) = \frac{10}{11} : (\frac{10}{11} + \frac{11}{11}) = \frac{10}{21}$, $w(u_2) = \frac{11}{21}$; die empirische W. somit $\frac{10}{21} \cdot \frac{10}{11} + \frac{11}{21} \cdot \frac{11}{11} = \frac{221}{231} \sim 0{,}96$; ein sicher *viel zu hoher* Wert! *Hier* steckt der Fehler in der Annahme der „Unabhängigkeit der Ereignisse" und der *unvollständigen Ausnutzung unseres Wissens*, daß Regenperioden von über 10 Tagen in Berlin[2]) sehr selten sind: unter 319 Perioden mit Niederschlag von über 5 Tagen Dauer sind nur 19 von $\geqq 11$ Tagen Dauer gewesen. 12 hatten gerade 10 Tage angehalten. *Das* sind jetzt einigermaßen brauchbare Unterlagen zur Anwendung der W.-R. Von $12 + 19 = 31$ Regenperioden von mindestens 10tägiger Dauer sind 19 von mindestens 11tägiger Dauer, d. h. auf 31 mögliche kommen 19 günstige Fälle. Das gibt als W. $\frac{19}{31} \sim 0{,}6$, also bedeutend weniger als oben, wenn auch immer noch betrübend viel. Die W. nimmt natürlich weiterhin ab, ist aber selbst bei 15 Tagen noch $\frac{3}{6} = 0{,}5$; aber dies Ergebnis ist wegen des zu kleinen Beobachtungsmaterials nur

---

1) „Günstig" klingt hier wie bittere Ironie; es ist schon früher bemerkt, daß es als Fachausdruck seine spezielle Bedeutung hat.

2) Hellmann, Das Klima von Berlin I (Berlin 1891). S. 110.

von geringem Werte, so daß im letzten Falle das Resultat nicht viel glaubhafter ist als das oben für 10 Tage abgeleitete mit der W.-R. 0,96. Es ist eben nicht ohne weiteres zu entscheiden, wann und wieweit ein vorliegendes Wissen geeignet ist, mit einiger Sicherheit die Anwendung der W.-R. zu gestatten. Hier macht sich auch wieder das subjektive Moment geltend, das auch in der exaktesten Forschung nur verringert, nie völlig beseitigt werden kann.

§ 14. **W. von Zeugenaussagen. Erkenntniswert der W.-Betrachtungen des täglichen Lebens.** Kann man die W. von Zeugenaussagen vor Gericht in ein mathematisches Gewand kleiden? Wir sagen rundweg: nein; jeder Versuch — und deren sind mehrere gemacht — muß scheitern. Es sind zuviel nicht faßbare Faktoren dabei, als da sind: Beeinflussung der Zeugen durch andre, durch Zeitungen durch die Fragestellung des Richters, durch ihr persönliches Verhältnis zum Angeklagten; Irrtümer infolge der Länge der verflossenen Zeit: Gedächtnistäuschungen oft grober Art, denen nachweislich auch der gewissenhafteste Menschunterliegt, und anderes mehr. Der Richter aber *muß* zu einer Entscheidung kommen, muß alles „gegeneinander abwägen", d. h. W.-Betrachtungen anstellen. Es ist klar, daß der *Erkenntniswert* seiner Betrachtung („Urteilsbegründung") nicht null ist, obwohl er keine mathematischen Formeln benutzt, was oft als notwendig angesehen wird, um einer Schätzung Erkenntniswert zu verleihen. Im täglichen Leben ist es nicht viel anders. Verwickelten Verhältnissen bei knapp bemessener Entscheidungsfrist gegenüber versagt die Verwendbarkeit der W.-R. Sitte, Gewohnheit und das bereits mehrfach erwähnte Taktgefühl müssen hier aushelfen. „Irren ist menschlich", und die Anwendung der W.-R. würde ja nicht einmal davor schützen, weil sie eben für den Verlauf eines *bestimmten* Ereignisses keine Voraussage liefern kann und will. Man könnte noch manche Betrachtungen ethischer, gesellschaftlicher, entwicklungsgeschichtlicher Art hier anknüpfen, doch das bleibe dem Belieben des Lesers überlassen.

§ 15. **Verbreitung von Gerüchten.** Weshalb verbreiten sich Gerüchte so rasch? (Man denke an die poetische Schilderung bei Vergil[1]) und Homer!) Und weshalb werden sie da-

1) Aeneis VI 175.

bei meist so entstellt? Der erste Teil der Frage berührt die W.-R. allerdings nicht direkt. Angenommen, jemand erzählt ein Gerücht nach einer halben Stunde 2 Bekannten, jeder dieser beiden nach oder im Verlaufe der nächsten halben Stunde wiederum 2 Bekannten, und das ginge so weiter, so würden bereits nach $5 = \frac{10}{2}$ Stunden $1 + 2 + \cdots + 1024 = 2047$ Leute darum wissen, falls alle verschiedene Personen wären; in der Tat wird es ja mancher „von mehreren Seiten" hören, was, wie man bekanntlich allgemein glaubt, die Zuverlässigkeit erhöht. Unsere Betrachtung lehrt, daß dieser Glaube durchaus unberechtigt ist. Nimmt man nun an, es erzählte jeder der Leute mit der W. $\frac{9}{10}$ die Sache richtig, so wäre die W., daß die Erzählung nach der 10. Wiedergabe *noch* ganz richtig sei, nur $0{,}35 \sim \frac{1}{3}$! „Die Zunge, obwohl ein kleines Glied, richtet doch große Dinge an." Man hat also allen Grund, Gerüchten gegenüber mißtrauisch zu sein: „μέμνασ᾽ ἀπιστεῖν!" Wenn man annimmt, daß bei der bekannten Neigung der Menschen, alles zu übertreiben (wie es A. Daudet von den Tarasconern so meisterhaft humorvoll und doch naturwahr erzählt) eine Zahlenangabe beim Weitererzählen jedesmal nur um 10 Prozent erhöht wird, so ist sie beim 10. Male bereits auf das $2^1/_2$fache angewachsen.

§ 16. **Mathematische Erwartung.** Ein Kaufmann ist an einer Reihe von Unternehmungen beteiligt, die mit einer gewissen W. w_1 $w_2 \ldots$ je einen bestimmten Gewinn $G_1, G_2 \ldots$ erhoffen lassen. Im Falle eines Verlustes ist G negativ anzusetzen, ähnlich wie man ja auch sonst Schulden als negatives Vermögen bei der Rechnung in Ansatz bringt. Man nennt dann $w_1 G_1 + w_2 G_2 + \cdots = E$ seine *mathematische Erwartung* (math. Hoffnung).

Nehmen wir zunächst erst einmal *eine* Unternehmung an, so ist G bei gleicher math. Erwartung E mit w umgekehrt proportional. Es sei z. B. $E = 10000$ Mark, $G = 100000$, also $w = 0{,}1$; ist aber $G = 200000$, so ist w nur 0,05; man kann hier wohl schon von „wilder Spekulation" reden. Man denke an das bekannte Sprichwort von dem Sperling in der Hand ($w = 1$, $G = E$, also verhältnismäßig am kleinsten) und der Taube auf dem Dache!

Für Glücksspieler gilt ähnliches. Ist die W., daß ein solcher gewinnt, 0,1 und der Preis, den er erhalten kann

1000 Mark, so ist seine mathematische Erwartung 100 Mark. Das ist zugleich als sein *Einsatz E* (nur begrifflich, nicht sachlich von der früheren Bezeichnung verschieden) zu betrachten, den er leisten muß, wenn der Unternehmer „bei großer Beteiligung" weder Schaden noch Nutzen haben soll. Denn die „wahrscheinlichste Verteilung" etwa bei 5000 Spielen wird sein, daß er 500 mal 1000 Mark = 500000 Mark auszahlen muß; er muß somit von jedem Spieler $\frac{500000}{5000}$ = 100 Mark erheben. Man bedenke aber dabei: *sicher* ist nur, daß der Spieler 100 Mark einzahlen muß; wahrscheinlich aber bei einmaligem Spiele: *garnichts* – denn die W.-R. sagt für den Einzelfall nichts aus; bei oftmaligem Spielen, daß der Spieler weder Vor- noch Nachteile hat. Da aber *tatsächlich* schon der Unkosten wegen der Einsatz höher sein muß — bei Staatslotterien werden dann noch vom Gewinne Steuerabzüge gemacht — ist die mathematische Erwartung oder Hoffnung stets *kleiner* als der Einsatz.

§ 17. **Mathematisches Risiko.** Diese Abzüge lassen also schon das Spiel als „im allgemeinen nachteilig" erscheinen. Auf *einen* Gewinner müssen viele (in unserm Beispiel mindestens 9) Personen kommen, die nicht gewinnen, also verlieren. Das Spielen ist also in sittlicher und volkswirtschaftlicher Hinsicht nachteilig, denn das Volkswohl wird durch die Bereicherung eines Einzelnen wenig gefördert; zudem pflegen die Gewinner großer Beträge, wenn in bescheidenen Verhältnissen groß geworden, diese äußerst selten auch nur für sich selbst nutzbringend zu verwenden, so daß zuletzt *alle* Beteiligten, Gewinner und Verlierer, Schaden haben.

Ziehen wir jetzt den Menschen aus und den Mathematiker an, der von Sittlichkeit absieht! Die Abzüge wollen wir vernachlässigen, obwohl sie oft einen immerhin merklichen Bruchteil des Gewinnes ausmachen. Der Gewinn des Spielers (1000 Mark im Beispiele des § 16) ist aber noch nicht der *Reingewinn R*, dieser beträgt vielmehr nur 900 Mark:

$$\text{Reingewinn} = \text{Preis minus Einsatz},$$

$$R = G - E = G(1 - w),$$

wenn w, hier $\frac{1}{10}$, die W. des Gewinnes bezeichnet; es ist ja eben $E = wG$. Daher verhält sich $E:R$ wie $\frac{1}{10}:\frac{9}{10}$ (allgemein wie $w : 1 - w$); es ist also

$$-\tfrac{9}{10}E + \tfrac{1}{10}R = 0.$$

In Worten: die *gesamte math. Hoffnung des Spielers ist null* (oder in Wirklichkeit sogar negativ). Das 2. Glied ist schon erläutert, das erste ist die Erwartung, den Einsatz E zu *verlieren* (daher das *Minus*zeichen).

Wir fahren fort und sagen: die *Reingewinnhoffnung* H ist $\frac{1}{10}R$, die *Verlusterwartung* $V = \frac{9}{10}E$; beide sind also gleich:

$$H = \tfrac{1}{10}R = V = \tfrac{9}{10}E.$$

Den Betrag $H = V$ bezeichnet man nach Tetens (1786) als *mathematisches Risiko*; den Bruch $H/E = V/E$ ($= \frac{9}{10}$ in unserm Falle) als *relatives Risiko*; es ist das Maß der *Gewinn- oder Verlusterwartung*; man merke: beide sind gleich! Es wächst, je geringer die W. des Eintreffens (der „Realisierung") des Ereignisses ist; ist doch das relative Risiko nichts anderes als der Bruch, der die W. des Eintretens des Gewinnes zu 1 ergänzt (die *komplementäre* W.).

§ 18. **Prämie.** Wie stellt sich die Sache nun, wenn der Spieler einen Betrag gleich dem mathematischen Risiko, als *Prämie*, wie man zu sagen pflegt, zuzahlt? Dann ist der mögliche Reingewinn R', für den die Hoffnung $H' = \frac{1}{10}R'$ besteht, nur noch $R' = R - \frac{1}{10}R = \frac{9}{10}R$; also $H' = \frac{1}{10}\frac{9}{10}R$ oder $= (\frac{9}{10})^2 E$: es *vermindert* sich also die Reingewinnhoffnung in demselben Maße wie die Verlusterwartung. In unserem Beispiele betrüge de Prämie $\frac{1}{10}R = \frac{1}{10}900 = 90$ Mark, R' also wäre 810 Mark $H = 90$ Mark verringert sich bei der Prämienzahlung auf $H' = 81$ Mark. Bei alledem ist immer nur *sicher*, daß der Spieler *bezahlen* muß.

§ 19. **Moralische Hoffnung.** Die *mathematische* Hoffnung ist für jeden gleich; in Wirklichkeit ist aber auch die *Vermögenslage* des Spielers in Rechnung zu ziehen. Ist das Risiko groß im Verhältnis zu seinem verfügbaren Vermögen, so wird ihm die Vernunft gebieten, Spiel oder Wette zu *unterlassen* — daß nur zu oft die blinde Leidenschaft, die „auri sacra fames", die Stimme der Vernunft übertönt, geht uns hier nichts an.

Daniel Bernouilli nahm (1738) an, ein *kleiner* Vermögenszuwachs habe als *moralischen Wert* seinen Betrag s, dividiert durch das Vermögen S; es ist z. B. der moralische Wert von 10 Mark für einen Talermillionär $10 : 3000000 = \frac{1}{3.10^5}$

$\sim 0{,}000003$. Für größere Änderungen ist dann der moralische Wert

$$M = c \log \frac{S_2}{S_1} = c\,(\log S_2 - \log S_1)$$

zu setzen, wobei S_2 das Vermögen nachher, S_1 das vorher bedeutet, also $S_2 = S_1 + s$ ist; c (= constans) ist eine willkürlich zu wählende „Konstante“. Nach bekannten Eigenschaften des Logarithmus ist M konstant, wenn $\frac{S_2}{S_1}$ es ist: für einen Talermillionär hat also ein Vermögenszuwachs von 1000 M. denselben moralischen Wert wie für einen „Tausend-Taler-Rentier“, wie es früher hieß – jetzt dürfte man mit einem derartigen Vermögen wohl nirgends mehr als Rentier leben können! – *eine* Mark: beidemale ist das Vermögen auf $\frac{3001}{3000}$ gewachsen. Also nur das *prozentische* Verhältnis kommt in Betracht.

Der Logarithmus (es kommt nicht darauf an, welches System man hier wählt; aus Bequemlichkeitsgründen wird man in der Rechnung das „gemeine“ mit 10 als Grundzahl nehmen) ist für Brüche, die kleiner als 1 sind, negativ: der moralische Wert eines Vermögensverlustes ist es also auch, wie ja die mathematische Hoffnung bei Verlusterwartung gleichfalls negativ ist.

Frage 16: Wie groß ist die moralische Hoffnung eines Vermögenszuwachses von 10 % für $c = 1$, und wie groß, wenn sich dieser Zuwachs 10mal wiederholt hat?

§ 20. Beziehungen zwischen math. und moral. Hoffnung. Bei einem „gerechten“ Spiel (Wette o. ä.) ist $H = V$, die *mathematische* Erwartung für Gewinn und Verlust dieselbe. Anders ist es mit der *moralischen* Hoffnung. Hat der Spieler 1000 Mark Vermögen, und gelten die Bedingungen der §§ 16, 17, so ist der moralische Wert des Gewinns (die Konstante der Formel = 1 gesetzt) gleich $\log \frac{1100}{1000}$, der des Verlustes : $\log \frac{900}{1000} = -\log \frac{1000}{900}$ und da $\frac{10}{9} = 1{,}11 > \frac{11}{10} = 1{,}10$ ist, ist die *gesamte moralische* Hoffnung *negativ*, während die gesamte mathematische (theoretisch) gleich null (tatsächlich aber auch schon negativ) ist.

In neuerer Zeit haben Walras und andere den Begriff der moralischen Hoffnung für nationalökonomische Zwecke verwendet. Der Erfinder benutzte ihn zur Erklärung scheinbarer Unstimmigkeiten zwischen W.-R. und „bon sens“ im

§ 21. **Petersburger Problem,** das seinen wenig bezeichnenden Namen von der Äußerlichkeit her hat, zuerst in den Berichten der Petersburger Akademie veröffentlicht zu sein. Nikolaus Bernouilli hatte nämlich ein widersinniges Ergebnis erhalten bei Behandlung einer anscheinend leichten Aufgabe: Peter wirft eine Münze so oft, bis sie Wappen zeigt. Geschieht das im 1. Wurfe, so zahlt er an Paul 2 Mark; wenn erst im 2., 3., 4. . . . je 4 oder 8 oder 16 . . . Mark; wenn erst im n-ten: 2^n Mark. Wie groß ist die *mathematische* Hoffnung Pauls? Es ergibt sich: *unendlich*! Nämlich:

Wurf	W. für Wappen[1])	Paul erhält	Math. Hoffnung
1.	$\frac{1}{2}$	2 Mark	$\frac{1}{2}2 = 1$ Mark
2.	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	4 „	$\frac{1}{4}4 = 1$ „
3.	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	8 „	$\frac{1}{8}8 = 1$ „ usw.

Da man keine bestimmte Zahl n von vornherein angeben kann, bei der das Spiel spätestens aufhören *müßte* (in welchem Falle Pauls math. Hoffnung n Mark betrüge), so ist n beliebig, d. h. unendlich, groß. Das ist offenbar Unsinn! Paul *kann* natürlich keinen „unendlich großen" Einsatz leisten, sowie Peter keine unendlich große Summe auszuzahlen vermag; Paul wird aber auch, wenn er einigermaßen bei Verstande ist, höchstens einen sehr mäßigen Einsatz von etwa 10 Mark leisten wollen. Es gelang nun Daniel Bernouilli, zu zeigen, daß die *moralische* Hoffnung einen endlichen Wert behält.

War dieser Beweis nötig? Nein; denn die *Grundlagen* der Rechnung sind unsinnig, wonach es denn nicht zu verwundern ist, wenn die Ergebnisse es auch sind. Ein Spiel, das möglicherweise sich ins Uferlose ausdehnen kann, wird kein vernünftiger Mensch beginnen. Es ist bekannt, wie man sich hilft. Im Schachspiel wird eine Partie, bei der ein Gegner durch „ewiges Schach" den Mitspieler zur ständigen Wiederholung desselben Zuges zwingt, als *remis* oder unentschieden abgebrochen, wenn dieselben Züge oder Zugfolgen sich 3mal wiederholt haben. *Hier* ist das Spiel naturgemäß späte-

1) D. h., daß das Wappen nicht früher als im 1., 2., 3. . . . Wurfe erscheint.

stens mit *dem* Wurfe zu beenden, bei dem Peter gegebenenfalls sein ganzes, zur Zeit verfügbares Vermögen auszuzahlen hat – wenn denn Peter sich durchaus wirtschaftlich ruinieren will! Angenommen, Peter besitze 1000 M. und könnte sich durch Borgen noch einige 10 Mark (natürlich Scheine, keine Goldstücke, die würden ihm wohl heutzutage niemand borgen!) beschaffen, so wäre das Spiel höchstens bis zum 10. Wurfe, wo $2^n = 1024$ Mark an Paul zu zahlen wären, fortzusetzen; Paul hätte dann $10 \times 1 = 10$ Mark Einsatz zu leisten. Das aber ist nichts widersinniges.

Frage 17: ? W., daß Paul mehr als den Einsatz zurückerhält?

IV. DIE ANWENDUNGSGEBIETE DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Werfen wir zum Schluß nun noch einen kurzen Blick auf die *Anwendungsgebiete* der W.-R.! Sie sind außerordentlich mannigfaltiger Art; das kann uns nicht wundernehmen, denn wir haben ja schon im Anfang gesehen, daß die W.-R. sozusagen die Lehre vom unzureichenden Wissen ist, und unser Wissen *ist* nun einmal Stückwerk.

Die so wichtige, alle menschlichen Gebiete umfassende *Statistik* kann ohne W.-R. nicht auskommen. Das gleiche gilt für das in stets steigendem Maße wichtiger werdende *Versicherungswesen*, speziell für den ältesten Zweig desselben, die *Lebensversicherung*.

Die *Kollektivmaßlehre* gibt eine mathematisch brauchbare Darstellung geeigneter statistischer Unterlagen, der „Kollektivgegenstände", und ist u. a. von größter Wichtigkeit für die *Vererbungslehre* (vgl. Bd. 24 dieser Sammlung: P. Riebesell, Die math. Grundlagen der Variations- und Vererbungslehre).

In den „exakten" Wissenschaften, Astronomie, Geodäsie usw. spielt die auf Grundlage der W.-R. erwachsene *Ausgleichungsrechnung* oder *Theorie der Beobachtungsfehler* eine hervorragende Rolle und ist dort ganz unentbehrlich.

In den Grundlagen der *Physik* und *Chemie* sind statistische, mit den Mitteln der W.-R. zu behandelnde Fragen von grundsätzlicher Bedeutung. Die *Entropie*, eine sehr wichtige, in der Wärmelehre zu behandelnde Größe, der „Schatten der

Weltherrin Energie“, wie man sie genannt hat, die die Richtung aller Vorgänge in der Welt regelt, ist eine W.-Funktion!

Selbst in der *Kosmogonie* spielen Fragen der W.-R. eine wichtige Rolle.

Diesen Anwendungen der W.-R. ist ein weiteres Bändchen (Nr. 33) vorliegender Sammlung gewidmet.

V. MATHEMATISCHER ANHANG

§ 1. Hilfsformeln aus der Kombinatorik. Permutationen. Unter „Permutation“ von n Elementen $a_1\, a_2 \ldots a_n$ versteht man eine *beliebige* Reihenfolge dieser n Elemente, in der jedoch alle *ein- und nur einmal* vorkommen müssen. Wie groß ist die Anzahl der Permutationen? Bei 2 Elementen offenbar 2: $a_1\, a_2$ und $a_2\, a_1$. Bei 3 Elementen setzen wir zunächst das neue a_3 vor: $a_3\, a_1\, a_2$, $a_3\, a_2\, a_1$. Nun kann aber statt a_3 auch jedes der beiden andern Elemente an die 1. Stelle treten, und wieder gibt es dafür je zwei Umstellungen, im ganzen also $3 \cdot 2$; für 4 Elemente findet man durch eine entsprechende Betrachtung als Anzahl $4 \cdot 3 \cdot 2$ usf., allgemein $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots = n!$ gesprochen „*n Fakultät*“. Sind unter den n Elementen n_1 *gleiche*, so nehmen wir sie als zunächst noch unterscheidbar an, haben also $n!$ Permutationen. Lasen wir jetzt aber n_1 Elemente gleich werden, so werden offenbar je $n_1!$ vorher noch verschiedenen Permutationen gleich, und es bleiben $n! : n_1!$ verschiedene. Entsprechend wird, wenn n_1 gleich, n_2 andre wieder gleich, aber von den ersten verschieden sind usf., die Anzahl der möglichen Permutationen auf $\dfrac{n!}{n_1!\; n_2! \ldots}$ reduziert.

Haben wir also 10 Elemente, von denen 3 gleich sind, etwa $= a$, 4 andre $= b$, 2 andre $= c$, eins $= d$, so ist die Anzahl der verschiedenen möglichen Permutationen: $\dfrac{10!}{3!\,4!\,2!\,1!}$ $= \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 7\cdot 4\cdot 9\cdot 10 = 12600.$

§ 2. Variationen mit Wiederholung. Bildet man aus n Elementen Gruppen von je r, in denen aber diesmal jedes Element beliebig oft, also z. B. auch $r$mal vorkommen darf (in welchem Falle also alle übrigen Elemente *nicht* in der Gruppe vorhanden sind!), so ist die Anzahl der „Variationen mit Wiederholung der r-ten Klasse“, wie man sagt, gleich n^r.

Das ist sofort einzusehen, wenn man bedenkt, daß am 1., 2.... r-ten Platze der Gruppe ja *jedes* der n Elemente stehen kann, was also $n \cdot n \ldots n$, eben n^r Fälle ergibt.

§ 3. **Variationen ohne Wiederholung.** Ihre Definition ist aus dem im vorigen Paragraphen gesagten erkennbar: es darf in der Gruppe von je r der insgesamt n Elemente keines mehrfach vorkommen. Ordnen wir die Gruppen so, daß an erster Stelle alle Elemente $a_1 \ldots a_n$ vorkommen, so sind das zunächst n Fälle. An 2. Stelle fällt jedesmal *die* Variation (aus denen mit W.) aus, in der das gleiche Element wie an 1. Stelle stehen würde, das gibt also für jeden der n Fälle noch $(n-1)$ Möglichkeiten. Für die 3. Stelle sind es wieder für jeden der jetzt $n\,(n-1)$ Fälle noch $n-2$ Möglichkeiten, allgemein: $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1) = n!:(n-r)!$

Es sei z. B. die Anzahl der Var. o. W. von 5 Elementen, die wir jetzt kurz mit 12345 bezeichnen wollen, zur 2. Klasse zu bestimmen. Wir wollen sie einzeln hinschreiben:

12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
21	31	41	51	32	42	52	43	53	54

Die Anzahl ist $5!:(5-2)! = 5!:3! = 5 \cdot 4 = 20$.

§ 4. **Kombinationen ohne Wiederholung.** Sie sind wie die Variationen gebildet, nur daß die *Reihenfolge der Elemente gleichgültig* ist. Ihre Anzahl ist deshalb leicht zu finden: es sind (nach § 1) je $r!$ Variationen o. W. gleichwertig mit *einer* Kombination o. W., und umgekehrt gehen aus einer Kombination o. W. durch Permutation $r!$ Variationen der gleichen Klasse hervor. Die Anzahl der Kombinationen o. W. von n Elementen zur r-ten Klasse ist also $n\,(n-1)\ldots(n-r+1):r!$ oder auch

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

gesprochen: „n über r“ oder „n tief r“.

Die Anzahl der Komb. o. W. von 7 Elementen zu 2. Klasse ist also $7!:5!\,2! = 7 \cdot 3 = 21$. Bezeichnen wir die Elemente wieder mit den Ziffern 1 bis 7, so sind die einzelnen Kombinationen o.W.:

12	13	14	15	16	17	Anzahl	6
	23	24	25	26	27	„	5
		34	35	36	37	„	4
			45	46	47	„	3
				56	57	„	2
					67	„	1
						Zus.	21,

wie es sein muß. — Man berechne die Komb. o. W. von 8 Elementen zu 5. Klasse und schreibe sie einzeln hin!

§ 5. **Kombinationen mit Wiederholung.** Sie entstehen aus den Variationen mit W., analog wie die K. o. W. aus den V. o. W., nur ist ihr Bildungsgesetz anders; es ist am einfachsten zu finden, wenn man die K. m. W. „lexikographisch" anordnet, d. h. so, daß rechts von jeder Ordnungsziffer eines Elements nie eins mit kleinerer Ziffer folgt. Wir schreiben wieder statt $a_1 a_2 \ldots$ kurz $1\ 2 \ldots$ und bilden eine zweite Zeile von Kombinationen durch Erhöhung des p-ten Gliedes jeder Kombination um $p - 1$; das nähere ergibt sich aus der Übersicht selbst, in der es sich um Komb. m. W. von 4 Elementen zur 3. Klasse handelt (in der *ersten* Zeile!):

1. Zeile	111	112	113	114	122	123	124	133	134	144
2. „	123	124	125	126	134	135	136	145	146	156
1. Zeile	222	223	224	233	234	244	333	334	344	444
2. „	234	235	236	245	246	256	345	346	356	456

Was steht in der 2. Zeile? Offenbar die Komb. *ohne* W. von 6 Elementen zur 3. Klasse. Allgemein ist die Anzahl der Komb. mit W. von n Elementen zur r-ten Klasse: $n\,(n+1)\ldots(n-r+1):r! = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$, also gleich der Zahl der Komb. *ohne* W. von $(n+r-1)$ Elementen zur r-ten Klasse; den allgemeinen Beweis möge der Leser selbst führen.

§ 6. **Zusammenstellung der Formeln.**

Nr.	Bezeichnung	Anzahl der Elemente	Klasse	Anzahl
1	*Permutationen*	n		$n!$
1a		n_1 gleiche, n_2 andere ... Zusammen n.		$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots}$
2	*Variationen mit* W.	n	r	n^r
3	*Variationen ohne* W.	n	r	$\frac{n!}{(n-r)!}$
4	*Kombinationen ohne* W.	n	r	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
5	*Kombinationen mit* W.	n	r	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

§ 7. **Binomischer Satz.** Wir wollen $(a+b)^n$ „entwickeln“. a und b können beliebige Zahlen sein, n sei positiv ganzzahlig. Die Glieder haben die Form $a^{n-r}b^r$; wie groß aber sind die Koeffizienten? Zu ihrer Bestimmung sehen wir zunächst alle a und b als verschieden an, haben dann, da aus jedem Klammerglied ein Element herausgenommen wird: n Elemente, deren Permutationsanzahl $n!$ ist. Nun sind aber tatsächlich $n-r$ gleich a, r andre gleich b; also ist der Koeffizient von $a^{n-r}\cdot b^r$ gleich $\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}$, weshalb diese (K. o. W.) auch als „Binomialkoeffizienten“ bezeichnet werden. Die Entwicklung lautet also[1]):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots$$

$$= a^n + n a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots$$

Frage 18: Wieso sind die Binomialkoeffizienten „symmetrisch“?

§ 8. **Anwendung auf den Bernouillischen Satz.** Sind in einer Urne a weiße, b schwarze Kugeln, so ist $p = \frac{a}{a+b}$ die W. a priori des Ziehens einer weißen Kugel, $q = \frac{b}{a+b} = 1 - p$ die einer schwarzen. Man sieht nun leicht ein, daß bei s Ziehungen (mit Zurücklegen) die W., daß r_1 weiße, $r_2 = s - r_1$ schwarze Kugeln gezogen werden, gleich $\frac{s!}{r_2!\,r_1!} p^{r_1} q^{r_2}$ ist. Dies Glied ist ein Maximum für die „wahrscheinlichste Verteilung“ (III § 2). Es muß also größer als die Nachbarglieder sein:

$$\frac{s!}{(r_2-1)!\,(r_1+1!)} p^{r_1+1} q^{r_2-1} < \frac{s!}{r_2!\,r_1!} p^{r_1} q^{r_2}$$

$$\frac{s!}{r_2!\,r_1!} p^{r_1} q^{r_2} > \frac{s!}{(r_2+1)!\,(r_1-1)!} p^{r_1-1} q^{r_2+1},$$

$$\text{d.h. } \frac{r_1+1}{r_2}\,\frac{q}{p} > 1,\quad \frac{r_2+1}{r_1}\,\frac{p}{q} > 1,$$

woraus sich für r_1, da $r_2 = s - r_1$ ist, ergibt:

$$sp - q < r_1 < sp + p, \quad \text{oder} \quad p - \frac{q}{s} < \frac{r_1}{s} < p + \frac{p}{s}.$$

1) Wegen der Bezeichnung $\binom{n}{o}$ vgl. Antwort zur folgenden Frage!

Ist s „ziemlich“ groß, so sind $\frac{q}{s}$ und $\frac{p}{s}$ klein und es wird annähernd:

$$r_1 = ps \quad \text{somit auch} \quad r_2 = qs,$$

d. h. es ist am wahrscheinlichsten, daß die Anzahl der gezogenen weißen und schwarzen Kugeln ihrer Häufigkeit in der Urne *genau entsprechend* („proportional“) ist!

§ 9. **Stirlingsche Formel.** Da eine strenge Berechnung großer „Fakultäten“ *physisch unmöglich* ist, benutzt man unter Anwendung der als „Exponentialfunktion“ bezeichneten unendlichen Reihe:

$$e^n = 1 + n + \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^3}{3!} + \cdots + \frac{n^r}{r!} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n^r}{r!}$$

zur näherungsweisen, praktisch trotz sehr großer *absoluter* Fehler stets ausreichend genauen Darstellung die *Stirling*sche Formel: $n! \sim n^n \sqrt{n}\, e^{-n} \sqrt{2\pi}$.

Übrigens gibt es Tafeln sowohl für e^n wie für $n!$ (Näheres in den Büchern, die im Literaturverzeichnis aufgeführt sind.) π ist die „Ludolfsche Zahl“, das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser, $= 3{,}14159265\ldots$

Das größte Glied in der Binomialformel, die W. der wahrscheinlichsten Verteilung darstellend, wird demnach näherungsweise $= 1 : \sqrt{2\pi spq}$.

Frage 19: ? W. der wahrscheinlichsten Verteilung bei 7 Ziehungen aus einer Urne mit 9 weißen und 27 schwarzen Kugeln, a. streng, b. nach Stirlings Formel?

§ 10. **Begriff der Funktion.** Schon im vorigen § war der Name „Funktion“ vorgekommen. Er bezeichnet mathematisch die gesetzmäßige Abhängigkeit einer Größe y von einer andern x; natürlich kann das Gesetz uns auch unbekannt und entweder durch mathematische Methoden oder durch praktische Versuche streng oder annähernd genau auffindbar sein oder auch uns einstweilen unbekannt bleiben. Man schreibt $y = f(x)$ (sprich y = Funktion [von] x) und bezeichnet y als die *abhängige Veränderliche*, x als die *unabhängige* oder auch als das *Argument*. Seinem Wesen nach ist der *Funktionsbegriff umkehrbar*: „abh. und unabh.“ Ver. sind also keine absoluten Definitionen: $x = \varphi(y)$ nennt man die zu $y = f(x)$ „inverse“ Funktion. Das *Kausalverhältnis* spielt also in dieser rein mathematischen Erklärung des Funktionsbegriffs *keine Rolle*; man kann nicht sagen, daß x Ursache, y Wirkung ist.

§ 11. **Mehrdeutigkeit von Funktionen.** Nimmt eine Funktion für verschiedene Werte $x_1, x_2 \ldots$ des Arguments denselben Wert w an (also $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = w$), so ist natürlich die inverse Funktion $x = \varphi(y)$ mehrdeutig: es kann ja $\varphi(w)$ sowohl $= x_1$ wie $= x_2 \ldots$ sein. So nimmt $y = \sin x$ für alle Werte $x_1\ x_2 \ldots$ die sich um Vielfache von 360^0 („im Bogenmaß“ 2π) unterscheiden, denselben Wert an, daher ist die Umkehrungsfunktion $\operatorname{arc} \sin x$ (gesprochen arcus sinus x, d. h. der Bogen des Einheitskreises, dessen Sinus $= x$ ist) sogar *unendlich vieldeutig.*

§ 12. **Differenzen- und Differentialquotient.** Ist $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, so nennt man $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ den Differenzenquotienten. Läßt man x_2 immer näher an x_1 rücken, so bezeichnet man den *Grenzwert* des Quotienten, *falls er existiert,* mit $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ und nennt ihn Differentialquotienten oder (erste) Ableitung von y. Er braucht aber keineswegs vorhanden zu sein, kann auch verschiedene Werte annehmen, wenn man x_1 festhält und x_2 einmal von größeren Werten als x_1, das andremal von kleineren Werten aus sich an x_1 annähern läßt.

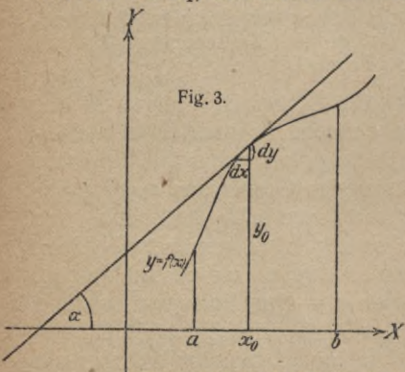


Fig. 3.

§ 13. **Geometrische Deutung der Ableitung.** Bei Anwendung der üblichen rechtwinkligen (Cartesischen) Koordinaten, x als Abszisse positiv nach rechts, y als Ordinate positiv nach oben zählend, ist $y = f(x)$ eine Kurve, $y' = f'(x)$ die trigonometrische Tangensfunktion (Gegenkathete: Ankathete im rechtwinkligen Dreieck) des Winkels α, den die Tangente an die Kurve y im Punkte (x_0, y_0) mit der Abszissenachse bildet (Fig. 3).

§ 14. **Bestimmtes Integral.** Wollen wir den Flächeninhalt der Kurve $y = f(x)$ zwischen 2 Werten a und b des Arguments x (Fig. 3) darstellen, so können wir die Fläche *näherungsweise* als Summe von lauter Rechtecken mit Δx als Breite und y_0, wofür wir einfach y schreiben, als Höhe betrachten; je kleiner Δx, um so weniger weicht diese *Treppensumme* von der wirklichen Fläche F ab. Man schreibt:

$$F = \lim_{\Delta x = 0} \Sigma y \Delta x = \int_a^b y\,dx,$$

gelesen $F =$ „Integral von $y\,dx$ zwischen a und b" oder „von a bis b", wobei man dx „unendlich klein" werden läßt, so daß das Integral also den Grenzwert (Limes, geschrieben: lim) einer Summe unendlich vieler unendlich kleiner Summanden darstellt. Es heißt „bestimmtes Integral", weil beide Grenzen a und b fest sind.

§ 15. **Unbestimmtes Integral.** Halten wir a fest, lassen b beliebig sich verändern; als „unabhängige Veränderliche" sei b nun wieder mit x bezeichnet, so ist zunächst das $\int_a^x y\,dx$ eine „Funktion seiner oberen Grenze"; sie heiße $\varphi(x)$. Man bezeichnet nun

$$\int y\,dx = \varphi(x) + C$$

als „unbestimmtes" Integral; eigentlich ist dabei oben am $\int$-Zeichen noch x zu denken, während C bedeutet, daß sich alle Integrale zwischen a und x bei festem x und variablem a nur um eine Konstante unterscheiden, die für alle x die gleiche ist, denn nach der Definition des vorigen § ist, wie auch die geometrische Anschauung lehrt, $\int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} = \int_a^{a_2}$ usf.

§ 16. **Integral und Ableitung.** Was ist $\int f'(x)\,dx$? Es war $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$, also wird

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{df(x)}{dx}\,dx = \int df(x) = \int dy;$$

aus Figur 3 ersieht man aber, daß die Summe aller Differentiale dy, die doch das Integral bilden, bei festgehaltenem x einfach gleich der *Funktion* $y = f(x)$ selbst ist. — Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß diese sich auf geometrische Anschauung stützenden Überlegungen *keine strengmathematischen Beweise*, sondern mehr als Erläuterungen aufzufassen sind. Als solche dürften sie aber genügen.

§ 17. **Funktionen mehrerer Veränderlicher.** Statt nur von *einer*, kann eine Größe natürlich auch von mehreren Veränderlichen abhängen. In der Wirklichkeit ist dies begreiflicherweise sogar stets der Fall. In solchem Falle ist die „Ableitung" nach einer der Variabeln eine „partielle" und wird deshalb symbolisch mit einem runden ∂ bezeichnet: $\frac{\partial f(x_1\, x_2 \ldots)}{\partial x_1}$ u. ä.

Auf Grund der in den vorstehenden Paragraphen 10—17 angestellten Betrachtungen und Erklärungen dürfte es dem Leser nicht mehr allzu schwer verfallen, die strengmathematische Begründung und Formulierung des *Bernouilli-Lapläce*schen Satzes, dieses „Fundamentaltheorems" der W. R. zu verstehen, etwa wie sie bei Czuber (siehe Literaturverzeichnis) gegeben ist, dessen Bezeichnungsweise ich aus diesem Grunde mich in den Paragraphen 8 und 9 im wesentlichen angeschlossen habe.

Das Vorstehende genügt aber auch, um ein Verständnis zu gewinnen für die interessante

§ 18. **Smoluchowskische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Der unlängst (Herbst 1917) verstorbene polnische Mathematiker hat im „Planck"-Heft der Zeitschrift „Die Naturwissenschaften", Jahrg. 1918, eine objektive Begründung der W.-R. zu geben gesucht, die zwar wohl nicht *so* fundamental von den bisherigen abweicht, wie der geistreiche Verfasser zu glauben scheint, aber immerhin sehr beachtenswert ist.

Nehmen wir einen recht einfachen Fall, das Werfen einer Münze. Die Werte, die die „Funktion" annehmen kann, sind nur 2: Kopf oder Wappen. Aber sie hängt von einer ganzen Reihe „unabhängiger Veränderlicher" ab: der Höhe, aus der sie geworfen wird; dem Winkel, unter dem man sie wirft; der Beschaffenheit der Unterlage; dem Winkel, unter dem sie auftrifft usf. Vereinfachen wir das Beispiel noch weiter: wir lassen die Münze, etwa aus $\frac{1}{2}$ m Höhe, möglichst senkrecht auf den Tisch fallen. Dann wird sie bei einer *sehr* *kleinen* Abweichung von der Vertikalebene auf die eine Seite, bei einer ebenfalls sehr kleinen Abweichung im entgegengesetzten Sinne auf die andre Seite fallen: *kleine Ursachen, große Wirkungen.*

Und ähnlich ist es mit dem Würfel, den wir fallen lassen: fällt er aus einer bestimmten Lage so, daß oben eine 1 zu liegen kommt, so bewirkt bereits eine unmeßbar kleine Änderung dieser „Anfangslage", daß irgend eine der 5 andern Ziffern oben erscheint: der *„Schwankungsbereich"* des Arguments, innerhalb dessen die *Funktion alle möglichen Werte* (hier 6 „diskrete") annimmt, ist *außerordentlich klein* im Verhältnis zu den tatsächlich vorkommenden Argumentwerten: während diese in unserm Falle, soweit es sich um Winkel handelt, um 360^0 schwanken können und tatsächlich schwanken, ist der Schwankungsbereich (vielleicht selbst eine Funktion des Winkels, aber stets) etwa nur $^1/_{100}$ Grad! (Natürlich eine rohe, willkürliche Annahme, nur um ein bestimmtes Bild zu geben.) Die Funktion nimmt also für alle vorkommenden Werte des Arguments ihre (6) Werte sehr oft an; umgekehrt ist somit das Argument als inverse Funktion sehr vieldeutig: *dieselbe Wirkung* kann durch *sehr viele verschiedene Ursachen* hervorgerufen werden. Deshalb kann auch die „Verteilungsfunktion", d. h. die Art und Weise der aufeinanderfolgenden Würfe, beliebig sein; im „Durchschnitt" geben *beliebige Verteilungsfunktionen* gleiche Ergebnisse, weil sie eben viel größeres Ausmaß besitzen als der sehr kleine Schwankungsbereich.

§ 19. **Objektive Wahrscheinlichkeit.** So kommt es, daß trotz der Unsicherheit der Unterlagen, die eben mehr eine *subjektive Ungewißheit* bzw. Unkenntnis aller Ursachen (und des Abhängigkeitsverhältnisses der Wirkung von diesen, d. h. der funktionalen Beziehungen, mathematisch gesprochen) ist, die W.-R. doch objektiv reelle Ergebnisse zeitigt, wie ja schon die Ausführungen im Text erwiesen haben und der 2. Teil, die „Anwendungen", in noch deutlicherem Maße zeigt. (Bd. 33 ds. Slg.) Daher kann man vom *„Gesetz des Zufalls"* sprechen, obwohl dieser Ausdruck *scheinbar* einen *logischen Widersinn* enthält, aber eben nur scheinbar: das „Gesetz" ist objektiv, der „Zufall" subjektiv.

§ 20. **Beispiel: Häufigkeit der Endziffern in der Loga-**

rithmentafel. Haben wir 500 *beliebige* Zahlen, so müssen nach der W.-R. „ungefähr" je 50 Nullen, Einsen usw. vorkommen. Nun sind die Logarithmen aufeinanderfolgender Zahlen gewiß *nicht* beliebige Zahlen, und doch gilt das „Gesetz des Zufalls" — im allgemeinen! — auch für sie! So kommt unter den 500 Endziffern der fünfstelligen Logarithmen der Zahlen von 6000 bis 6500:

die Endziffer	0	1	2	3	4	5
	50	50	46	45	40	44 mal vor;

es bleibe dem Leser die Prüfung und Vervollständigung der Tabelle überlassen. Erheblich *andre* Ergebnisse hätte eine Auszählung zwischen 4300 und 4400 geliefert, wo nur die vier Endziffern 6 bis 9 vorkommen: hier ist der „Schwankungsbereich" *zu groß* im Verhältnis zu dem der Argumente, weil die Differenz je zweier Logarithmen (nahezu) 10 Einheiten der letzten Stelle beträgt: das sind die „systematischen Fehler", von denen im 2. Bd. oft die Rede sein wird.

Frage 20: Welche Stellen sind noch „ungünstig" für solche Zählungen?

§ 21. **Schlußwort.** So ist hiermit gezeigt, daß die Gesetze der W.-R. auch eine von unseren Kenntnissen unabhängige *objektive* Bedeutung haben; daß übrigens die Smoluchowskischen Gedanken mit denen der Einleitung keineswegs im Widerspruche stehen, wird auch der Leser herausgefunden haben.

ANTWORTEN ZU DEN FRAGEN IM TEXTE

Frage 1. Ein Ereignis tritt entweder *notwendig* ein, oder es kann *unmöglich* eintreten.

Frage 2. Die Zahlen auf den beiden quadratischen Flächen sind unter sich gleichberechtigt, haben dasselbe Gewicht G_1; die vier andern Zahlen auf den vier (kongruenten) Rechtecken unter sich dasselbe Gewicht G_2. Im allgemeinen wird $G_1 \gtrless G_2$ sein, nur beim üblichen Würfel sind sie gleich. Vgl. übrigens § 16!

Frage 3. Zwei günstige Fälle: Würfel I: 4, II 5 und I: 5, II 4, gegen 36 mögliche. Also W. $= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Die W. eines *bestimmten* Pasches ist $\frac{1}{36}$, die eines Paschs überhaupt aber 6mal so groß, also $\frac{1}{6}$.

Frage 4. Ersetzt man in der Tabelle im Text jede (große) Zahl durch ihre Ergänzung (ihr „Komplement") zu 7, so erhält man die zweite Hälfte der Tabelle.

Frage 5. Mögliche Fälle $6^4 = 1296$; günstige 1126_{12}, 1135_{12}, 1144_6, 1225_{12}, 1234_{24}, 1333_4, 2224_4, 2233_6, zusammen 80, also W. $= \frac{80}{1296} \sim 0{,}06$.

Frage 6. Für den 1. Zug $n_1 : n$, für das Ziehen mindestens einer weißen Kugel in 3 Zügen $1 - (1 - n_1 : n)^3$.

Frage 7. Im allgemeinen Fall: $(n_1 + n) : n$.

Frage 8. $(n_1 : n)^3$.

Frage 9. $n_1 n_2 n_3 : n^3$.

Frage 10. Die W. für weiß-rot-gelb (WRG) steht in der vorigen Zeile. Hier sind aber auch WGR, RGW, RWG, GRW, GWR günstige Fälle, also W $= 6\, n_1 n_2 n_3 : n^3$.

Frage 11. Bequemer ist die Berechnung der W. des kontradiktorischen Gegenteils, also der komplementären W. Hierfür gibt es folgende günstigen Fälle (die Ereignisse beim 2. Schuß durch einen Strich gekennzeichnet):

$K_1 W_1' W_2 W_2'$ und $W_1 K_1' W_2 W_2'$ mit W. je $= p_1 (1 - p_1) p_2^2$

$W_1 W_1' K_2 W_2'$ und $W_1 W_1' W_2 K_2'$ mit W. je $= p_2 (1 - p_2) p_1^2$.

Totale W. also $= 2 p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2 p_1 p_2)$.

Frage 12. $\frac{25}{256} \sim 0{,}1$. (Die Seitenlänge des „Quadrats der günstigen Fälle" ist um die Gitterbreite, $^1/_2$ cm, kleiner geworden!)

Frage 13. Bezeichnet x den Durchmesser des Balls, y die Maschenweite, so folgt für $w = \frac{1}{2}$ die Gleichung $(y - x)^2 = \frac{1}{2} y^2$, was $x = 0{,}293\, y$ ergibt; also für $y = 8 : x = 2{,}3$ cm.

Frage 14. Die Anzahl der Fälle mit der kleinsten W. sei n, dann muß n durch 7 geteilt den Rest 4 lassen (zahlentheoretisch: $n \equiv 4$ mod. 7, lies: n kongruent 4 modulo 7, sein), also $n = 4, 11, 18$ usf., die zugehörigen W. sind $\frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{6} = 0{,}333$, $\frac{1}{11} \left(\frac{8}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{11} \times \frac{25}{6} = 0{,}379$, dann $\frac{1}{18} \times \frac{42}{6} = 0{,}389$ usf. Es ist jedesmal der Nenner $6 \times (k7 + 4)$, der Zähler $k17 + 8$ (man zeige dies!). Schon für $k = 4$ weicht die W. 0,396 von $\frac{17}{42} = 0{,}405$ nur noch um 0,009 ab. Also Antwort: nach 32 Ziehungen.

Frage 15. Aus Urne 4; $w_4 = \frac{2}{5} = 0{,}4$, ferner $w\ (U_4) = \frac{16}{41} : \frac{41}{41} = \frac{16}{41} = 0{,}39$; es ist dies unmittelbar ersichtlich, wenn man bedenkt, daß 41 weiße Kugeln vorhanden sind, darunter 16 mit IV gezeichnete. Diese leichte Überlegung wäre nicht möglich, wenn nicht zuvor alle Urnen auf gleiche Kugelzahl gebracht wären.

Frage 16. $S_2 = S_1 + 10\%$ von S_1, d. h. $S_2 = \frac{11}{10} S_1$, also für $c = 1 : M = \log \frac{11}{10} = 0{,}04139$. Bei 10maliger Wiederholung wird $M = 0{,}4139$,

S_2 etwa $2{,}6\,S_1$; d. h. während der Zuwachs von S_1 von 10% auf 250%, also um das 25fache, gestiegen ist, hat sich M nur verzehnfacht.

Frage 17. $W. = \frac{1}{16} = 0{,}06$; das Spiel ist also für Paul nicht gerade besonders empfehlenswert. Womit nicht gesagt werden soll, daß irgendwelche andern Glücksspiele, oder daß solche überhaupt empfehlenswert seien!

Frage 18. Dies folgt sowohl aus dem „kommutativen Gesetz" (M.-Ph. B. Nr. 7), der Vertauschbarkeit von a und b in der Klammer, wie direkt aus der Definition von $\binom{n}{r}$ durch die Formel. Hier sei gleich noch bemerkt, daß $0! = 1$ ist, wie aus $(n-1)! = n! : n$ für $n = 1$ folgt, daher im Text der Koeffizient von a^n, der $= 1$ ist, als $\binom{n}{o}$ bezeichnet werden durfte.

Frage 19. Es ist hier $p = \frac{1}{4}$, q also $= \frac{3}{4}$, $s = 7$; $p_0 \sim 2$, somit $r_1 = 2$, $r_2 = 5$. Damit wird die verlangte $W. = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 21 \frac{1}{16} \frac{243}{1024} \sim 0{,}311$; nach der Stirlingschen Formel erhält man $1 : \sqrt{2\pi 7 \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = 4 : \sqrt{42\pi} \sim 0{,}348$, also einen Fehler von wenig über 10%.

Frage 20. Alle, an denen die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Logarithmen durch 5 teilbar ($\equiv 0 \mod 5$) ist. — Man zähle in 7stelligen Tafeln; weshalb? (Die Differenzen der Logarithmen sind größer und ändern sich rascher: der Schwankungsbereich ist kleiner!)

KURZE GESCHICHTLICHE BEMERKUNGEN ÜBER DIE IM TEXTE ERWÄHNTEN MATHEMATIKER

d'Alembert, Jean le Rond, 1717–1783. Freund Friedrichs des Großen, einer der Mitarbeiter an der berühmten französischen Enzyklopädie. Hauptarbeitsgebiete: Differentialgleichungen, Integralrechnung, algebraische Gleichungen.

Bernouilli, Jakob, 1654–1705. Stammt (wie der folgende) aus einer protestantischen Familie, die vor Alba aus den Niederlanden nach Basel geflüchtet war und fünf bedeutende Mathematiker hervorgebracht hat: Jakob und Johann (Brüder), Nikolaus I. (Sohn eines 3. Bruders), Nikolaus II. und Daniel (s. u.), Söhnen von Johann. Der Vater von Johann und Jakob war Theologe; mehrere bedeutende Mathematiker, wie der große Leonhard Euler, waren gleichfalls Pastorensöhne. Nebst dem Bruder vor allem im Ausbau der (von Leibnitz und Newton erfundenen [vgl. Math. phys. Bibl. Bd. 5]) Infinitesimalrechnung tätig, doch stammt auch die erste zusammenfassende Darstellung der W.-R., die „Ars conjectandi", von ihm. Vielfach im Streit mit seinem Bruder, der auf seine Verdienste, wie später auf die seiner Söhne, neidisch war und sich sogar dabei Unwahrheiten zuschulden kommen ließ; ein bei großen Mathematikern sehr seltener Ausnahmefall, da die in der Mathematik nötige Strenge und Klarheit unbewußt auch auf das moralische Gebiet einwirkt.

Bernouilli, Daniel, 1700–1782. Begründer der kinetischen Gastheorie. (Vgl. Math.-phys. Bibl. Nr. 33.)

Buffon, Georg L. L. Graf, 1707–1788. Intendant des Kgl. Gartens in Paris. Vielseitig, suchte u. a. die Abkühlungszeit der Erde zu bestimmen, geriet dabei in Konflikt mit der Kirche. Glänzender Stilist.

Descartes, René (Cartesius), 1596–1650. Jesuitenzögling, dann Kriegsfreiwilliger bei Moritz von Oranien und dem Kurfürsten von Bayern. Entdeckte 10. Nov. 1619 „die Grundlage einer wunderbaren Wissenschaft", nämlich die analytische Methode, die er sowohl auf Mathematik wie auf Philosophie anwandte. Bekannt sein: „Cogito, (ergo) sum", die analytische Koordinatengeometrie, seine Wirbeltheorie der Materie, die noch Thomson (Kelvin) zeitweilig als brauchbares „Modell" der Struktur der Materie ansah.

Fermat, Peter, 1601–1665. Parlamentsrat in Toulouse. Veröffentlichte wenig, fast nur im Briefwechsel mit den bedeutendsten Mathematikern seiner Zeit. Berühmt seine Anmerkungen zur latein. Diophantausgabe, in denen er bedeutende zahlentheoretische Kenntnisse verrät, darunter auch der „große" F.sche Satz: $x^n + y^n = z^n$ für $n > 3$ nie durch ganzzahlige xyz erfüllbar (vgl. Wolfskehl).

Galilei, Galileo, 1564–1642. Vater Musiker, auch er selbst musikverständig. Gegner der Scholastiker, Anhänger der kopernikanischen Lehre von der Erdbewegung, die er 1633 (unter Folterandrohung!) abschwören mußte. Konstruierte selbständig ein Fernrohr, mit dem er z. B. die 4 großen Jupitermonde und die Sonnenflecken entdeckte. Versuchte (vergeblich) die Lichtgeschwindigkeit zu messen. Begründer der Dynamik, erfand auch Baro- und Thermometer (streng: Thermoskop, da eine feste Skala noch fehlte). Seine Schriften erschienen (wegen Zensurschwierigkeiten!) meist in den Niederlanden.

Kant, Immanuel, 1724–1804. Der größte deutsche Philosoph. Hauptwerk: Kritik der reinen Vernunft, auch für die Begründung der Mathematik wichtig: die math. Sätze, sind „synthetische Urteile apriori", d. h. sie geben neues *ohne* Erfahrung, die vielmehr erst durch sie ermöglicht wird. Bekannt sein „kategorischer Imperativ": handle stets so, daß dein Tun allgemeine Regel sein könnte. Schrieb auch: „Zum ewigen Frieden". Mußte, von den Theologen angegriffen, unter Friedrich Wilhelm II. versprechen, nichts (philosophisches) mehr zu schreiben. Wichtig auch seine Theorie über die Entstehung des Sonnensystems (vgl. Arrhenius, Werden der Welten).

Laplace, Peter, 1749–1827. Auch dieser veröffentlichte eine, in den Einzelheiten andre Theorie der Entwicklung des Sonnensystems, im Anhang seiner Himmelsmechanik. Bedeutend auf dem Gebiete der Differentialgleichungen. Schrieb auch eine W.-R.

Ludolf, „van Ceulen“ (= von Köln), bestimmte die Zahl π, das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser schon Mitte des 16. Jahrhunderts auf 35 Stellen genau.

Maxwell, James Clerk, 1831–1879. Großer mathematischer Physiker. Setzte die originellen Faradayschen Ideen in die Formelsprache der Mathematik um. Arbeiten grundlegend für die neueren Ansichten über den Aufbau der Materie. (Vgl. Anwendungen der W.-R. Math.-phys. Bibl. Nr. 33.)

Poincaré, Heinrich, 1854–1912. Vielseitiger Mathematiker, größere Werke über Astronomie, mechanische Physik, W.-R., Elektrizitätslehre, Licht. Sehr empfehlenswert seine populären Werke (4, 3 davon bei Teubner erschienen, die „letzten Gedanken“ bei der Akad. Verlagsges. Leipzig).

Poisson, S. D., 1781–1840. Hauptsächlich math. Physiker, doch auch auf dem Gebiete der Algebra und W.-R. tätig.

Stirling, J., ca. 1696–1770. Schrieb über Kurventheorie, fand eine (eigentlich schon von Newton entdeckte) Interpolationsformel, gab einen Näherungsausdruck für $n!$ (s. im Text).

Tetens, Vertreter der um 1800 in Deutschland blühenden „kombinatorischen Schule“, zu der u. a. auch ein Hindenburg gehörte.

Wolf, Rud., 1816–1893. Historiker der Astronomie. Sehr verdient um die Erforschung der Sonnenfleckenperiode, worin ihm jetzt sein Nachfolger Wolfer in Zürich nacheifert.

Wolfskehl, P., † 1907. Begüterter Privatmann. Setzte für die Lösung des „großen Fermatschen Satzes“ (vgl. Fermat) einen Preis von 100000 M. aus (näheres in Math.-phys. Bibl. Bd. 3).

LITERATUR

Die philosophischen Grundlagen behandelt:

1. J. von Kries, Prinzipien der W.-R. Freiburg 1886, Mohr.

Für geschichtliche Studien empfiehlt sich:

2. E. Czuber, Entwicklung der W.-Theorie und ihrer Anwendungen. Leipzig 1899, Teubner.
3. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Leipzig 1903, Teubner.
4. Jac. Bernouilli, Ars conjectandi. Deutsch in „Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften“ Nr. 107/108. Leipzig, Engelmann.

Kurz stellen alles wesentliche dar:

5. Hack, W.-R. Leipzig 1911, Göschen.
6. Suppantschitsch, Einführung in die W.-R. „Aus Natur und Geisteswelt“ Bd. 580. Leipzig, Teubner.

Sehr ausführlich und vollständig ist:

7. E. Czuber, W.-R. 2. Aufl. Bd. I. Leipzig 1908, Teubner.

Die Hilfswissenschaft der Kombinatorik ist erschöpfend dargestellt in:

8. E. Netto: Lehrbuch der Kombinatorik. Leipzig 1901, Teubner.

Literatur über die Anwendungen findet sich im 2. Bändchen, (Math.-phys. Bibl. Bd. 33), das diese behandelt.