MATHEMATISCH-
PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

BAND 32

H. E. TIMERDING

DER GOLDENE SCHNITT

DRITTE AUFLAGE

LEIPZIG / B. G. TEUBNER / BERLIN

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von

Oberstud.-Dir. Dr. **W. Lietzmann** und Oberstudienrat Dr. **A. Witting**

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8.

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/29):

Der Gegenstand der Mathematik im Lichte ihrer Entwicklung. Von H. Wieleitner. (Bd. 50)

Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting und M. Gebhardt. I. Teil. [U. d. Pr. 1929.] II. Teil. 2. Aufl. (Bd. 82 u. 15)

Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. I. Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. 3. Aufl. II. Die Zahlzeichen im Mittelalter und in der Neuzeit. 2. Aufl. (Bd. 1 u. 34)

Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 3. Aufl. (Bd. 2)

Wie man einstens rechnete. Von E. Fettweis. (Bd. 49)

Archimedes. Von A. Czwalina. (Bd. 64)

Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. 2. Aufl. (Bd. 7)

Abgekürzte Rechnung. Nebst einer Einführung in die Rechnung mit Logarithmen. Von A. Witting. (Bd. 47)

Interpolationsrechnung. Von B. Heyne. [In Vorb. 1929.] (Bd. 79)

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von O. Meißner. 2. Aufl. I. Grundlehren. II. Anwendungen. (Bd. 4 u. 33)

Korrelationsrechnung. Von F. Baur. (Bd. 75)

Die Determinanten. Von L. Peters. (Bd. 65)

Mengenlehre. Von K. Grelling. (Bd. 58)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. I. Die Differentialrechnung. II. Die Integralrechnung. (Bd. 9 u. 41)

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von K. Fladt. (Bd. 72)

Unendliche Reihen. Von K. Fladt. (Bd. 61)

Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. Von H. Onnen. (Bd. 51)

Konforme Abbildungen. Von E. Wicke. (Bd. 73)

Vektoranalysis. Von L. Peters. (Bd. 57)

Ebene Geometrie. Von B. Kerst. (Bd. 10)

Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 3. Aufl. (Bd. 3)

Der Goldene Schnitt. Von H. E. Timerding. 3. Aufl. (Bd. 32)

Einführung in die Trigonometrie. Von A. Witting. (Bd. 43)

Sphärische Trigonometrie. Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung. Von L. Balser. (Bd. 69)

Methoden zur Lösun[...] 2. Aufl. (Bd. 26)

Nichteuklidische Ge[...] (Bd. 31)

Der vierdimensional[...]

Fo[...]ite

Verlag von [...] und Berlin

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
32

DER GOLDENE SCHNITT

VON

DR. H. E. TIMERDING
PROF. AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

MIT 16 FIGUREN IM TEXT

DRITTE, UNVERÄNDERTE AUFLAGE

1929
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

VORWORT

Die anspruchslose kleine Schrift, die hier vorliegt, bedarf keines langen Vorwortes. Es galt einerseits, die elementarmathematischen Betrachtungen, die sich an das Verhältnis des Goldenen Schnittes anknüpfen, im Zusammenhange darzustellen, gerade weil sie im Schulunterrichte in solcher Geschlossenheit nicht gegeben zu werden pflegen. Dabei sind nur die elementarsten mathematischen Kenntnisse, etwa wie sie mit dem Abschluß der Tertia erreicht sind, vorausgesetzt worden, so daß auch dem mathematisch wenig geschulten Leser keine Schwierigkeiten erwachsen werden. Im zweiten Abschnitt ist dann die ästhetische Bedeutung des Goldenen Schnittes einer kritischen Erörterung unterzogen worden. Diese Erörterung ist, um den Umfang des Bändchens nicht über Gebühr zu erhöhen, so kurz wie möglich gehalten. Vielleicht wird man sogar an manchen Stellen eine ausführlichere Behandlung und das Eingehen auf die verschiedenen Gebiete von Kunst und Natur, sowie die Berücksichtigung einiger neuerer Arbeiten auf dem Gebiete der experimentellen Ästhetik vermissen. Es lag mir aber daran, die Betrachtung nur so weit zu führen, daß die Rolle, die das genaue Verhältnis des Goldenen Schnittes in der Ästhetik spielen kann, klar hervortritt, nicht aber auf das ästhetische Problem der Proportionen in seiner Allgemeinheit einzugehen. Die eingestreuten Literaturangaben werden dem Leser hoffentlich weiterhelfen.

Braunschweig, November 1918.

H. E. TIMERDING.

VORWORT ZUR ZWEITEN UND DRITTEN AUFLAGE

Bei einer Neuauflage war die Versuchung groß, eine weitere Ausführung der kleinen Schrift nach der ästhetischen Seite zu versuchen und die hierin geübte Zurückhaltung aufzugeben, um zu festeren positiven Ergebnissen zu gelangen. Ich glaubte aber der Versuchung widerstehen zu müssen, da sich ein Eingehen auf die psychologische Auffassung der Ästhetik, die hier allein als aussichtsreich erscheint, durch Zweck und Umfang dieser gedrängten Darstellung verbietet. Ich mußte mich daher im wesentlichen auf einen Abdruck der ersten Auflage beschränken, der hoffentlich auch in dieser Form weiter Anklang finden wird.

Braunschweig, Juni 1929.

H. E. TIMERDING.

EINLEITUNG

Der Goldene Schnitt bildet ein sehr einfaches, aber von alters her berühmtes Kapitel der Elementargeometrie. Er behauptet auch eine feste Stellung im Schulunterricht, aber seine volle Eigenart und die Erklärung für die ihm zugeschriebene besondere Bedeutung tritt dabei wohl doch meist nicht voll zutage. Dies liegt vielleicht zum großen Teil daran, daß die Behandlung sich wesentlich nach dem Lehrwerk des Euklid richtet, in diesem Lehrwerk aber die Gesichtspunkte, die ursprünglich zu dem Goldenen Schnitt hinführten, der Eingliederung in eine fortlaufende logische Gedankenkette zuliebe bereits verschoben und verhüllt sind. Es bedarf, um diese Gesichtspunkte hervorzuholen, einer gesonderten Behandlung des Goldenen Schnittes. An solchen gesonderten Behandlungen hat es auch nicht gefehlt, doch sind sie nicht allzuleicht zugänglich und fassen nicht kurz und klar das zusammen, was zur Belehrung über Wesen und Bedeutung des Goldenen Schnittes dienen kann.

Selten ist bei diesen Darstellungen das rein geometrische Interesse maßgebend. Meistens ist mit ihnen eine Nebenabsicht verbunden, nämlich der Gedanke, in dem Goldenen Schnitt eine Erklärung für den ästhetischen Eindruck bestimmter Raumformen, ja eine Erklärung für das Wesen der Schönheit überhaupt, soweit es sich in der sichtbaren Erscheinung offenbart, zu finden. Diese Versuche ziehen sich von den ältesten Zeiten bis in die Gegenwart fort. Bei einer zusammenfassenden Darstellung des Goldenen Schnittes können sie kaum übergangen werden. Jeder, der etwas von ihm erfährt, möchte gerne wissen, was es mit seiner angeblichen ästhetischen Bedeutung auf sich hat. Freilich werden durch die Antwort, die wir heute auf diese Frage geben können, viele Hoffnungen nicht erfüllt, die auf eine einfache Erklärung der ästhetischen Wirkung bestimmter räumlicher Verhältnisse durch die Zurückführung auf das Verhältnis des Goldenen Schnitts gesetzt worden sind. Aber auch dieses negative Ergebnis ist nicht ohne Wert und Interesse. Eine gewisse Klärung des Wesens der sichtbaren Schönheit wird auch so erreicht.

Daß überhaupt der Gedanke aufgetaucht ist, bestimmte Verhältnisse als die ästhetisch wirksamsten herauszuheben, liegt daran, daß die musikalische Harmonie auf solche Verhältnisse in der Tat zurückgeführt werden kann. Die Annahme erscheint dann durchaus natürlich, daß, was für das Ohr gilt, auch für das Auge wahr sein wird, daß, wie von dem Ohr bestimmte Verhältnisse in den Schwingungszahlen der Töne wohltätig empfunden werden, auch das Auge an bestimmten Verhältnissen in den räumlichen Abmessungen Gefallen finden wird. Die zahlenmäßige Begründung der musikalischen Harmonie rührt aber bekanntlich von den Pythagoreern, und zwar vermutlich von dem Stifter der Schule selbst her. Es ist deshalb von vornherein sehr wahrscheinlich, daß wir den Ursprung des Versuches, eine analoge Erklärung auch für die Harmonie in den räumlichen Verhältnissen zu geben, ebenfalls in der pythagoreischen Schule zu suchen haben werden. Das ist auch in der Tat der Fall. Aber so klar die Verhältnisse bei der pythagoreischen Erklärung der musikalischen Harmonie liegen, so schwer ist es, einen erschöpfenden Aufschluß über die Entwicklung der entsprechenden Erklärung für die räumliche Harmonie zu erhalten. Die Verhältnisse liegen hier außerordentlich viel verwickelter, und wenn wir uns nicht in mühsame historische Untersuchungen mit allen den Ungewißheiten und Streitigkeiten, die sie mit sich bringen, einlassen wollen, so müssen wir uns darauf beschränken, einen Gedankengang zu verfolgen, der der historischen Entwicklung vermutlich in gewisser Weise entsprechen wird, ohne daß wir aber mit Gewißheit sagen könnten, die Entwicklung habe sich wirklich in dieser Weise vollzogen.

Die Erklärung der musikalischen Harmonie aus einfachen Zahlenverhältnissen steht in einem klar und scharf umrissenen Zusammenhang mit der pythagoreischen Zahlenlehre. Die Zahl wurde von den Pythagoreern für die Wurzel und das Wesen alles Seins erklärt, und sie fanden für diese Erklärung eine wesentliche Stütze in der Tatsache, daß die musikalischen Harmonien mit bestimmten Zahlenverhältnissen in Zusammenhang stehen. Dieser Zusammenhang führte sie geradezu dahin, außer den natürlichen, ganzen Zahlen auch die gebrochenen Zahlen zu behandeln und sie zum Gegenstand eines besonderen Wissenszweiges zu machen. Dieser wird als Logistik bezeichnet nach dem griechischen Wort Logos, das in der pythagoreischen Kunstsprache das arithmetische Verhältnis bedeutet und in übertragenem Sinne bekanntlich eine große und weitreichende Bedeutung erlangt hat. Da die musikalische Harmonie auf bestimmten Verhältniswerten beruht, knüpfte sich an das Wort Logos unmittelbar der Begriff der Harmonie. Die Harmonie wurde aber von den Pythagoreern nicht bloß im ursprünglichen Sinne auf die musikalischen Töne bezogen, sondern in der Bedeutung von Ebenmaß und Ordnung auf die gesamte Wirklichkeit. Im Bau des Weltalls, in den Abständen und Bewegungen der Gestirne, fanden sie eine dem musikalischen Wohlklang entsprechende Harmonie wieder. Das ist die berühmte Harmonie der Sphären. Indem nun das Wort Logos den Grund der Harmonie bedeutet, schließt es gleichzeitig die Quelle der Schönheit und Ordnung im Weltall, kurz, dessen, was die Pythagoreer Kosmos nannten, ein.

So weit sind uns die Gedanken der Pythagoreer hinreichend klar und verständlich. Viel schwieriger wird es, ihnen zu folgen, wenn es sich um die Grundlegung der Geometrie und damit des Wesens des räumlichen Nebeneinander handelt. Die Geometrie ist von Pythagoras neben der Arithmetik und anscheinend mit gleicher Liebe gepflegt worden. Dabei kam er aber dazu, einen tiefgreifenden begrifflichen Unterschied zwischen der Geometrie und der Arithmetik zu finden. Dieser Unterschied liegt in dem Wesen des Irrationalen. Die Auffindung des Irrationalen ist eine der größten Entdeckungen des menschlichen Geistes überhaupt. Pythagoras hat diese Entdeckung vermutlich an der Diagonale des Quadrates gemacht. Er fand, vielleicht zu seinem großen Erstaunen, daß zwischen der Seite eines Quadrates und seiner Diagonale kein in Zahlen-angebbares Verhältnis bestehe. Diese Tatsache drückte er selbst durch das Wort „alogos“, ohne Verhältnis, aus, das in der lateinischen Übersetzung mit „irrationalis“ wiedergegeben wird, von „ratio“, Verhältnis.

Wie Pythagoras sich mit dieser merkwürdigen Tatsache abfand, darüber können wir nur Vermutungen aufstellen. Es scheint, als ob er darauf eine besondere Auffassung von dem Wesen der geometrischen Größen gegründet habe. Diese Auffassung schließt eine bestimmte Fassung des Unendlichkeitsbegriffes ein. Pythagoras dachte sich nämlich als Erklärung für die Irrationalität des Verhältnisses zwischen der Seite und der Diagonale eines Quadrates, daß diese beiden Strecken nicht wie die Zahlen aus einer bestimmten endlichen Anzahl von Teilen oder Einheiten zusammengesetzt seien, sondern daß die Elemente, auf denen wir sie aufbauen müssen, die Punkte seien, die sie enthalten. Diese Punkte sind aber nicht in endlicher Anzahl vorhanden, sondern ihre Abzählung übersteigt alles menschliche Vermögen, ihre Zahl ist unendlich. Das irrationale Verhältnis wäre also zu deuten als das nicht auf ein Verhältnis endlicher Zahlen zurückführbare Verhältnis von zwei unendlich großen Zahlen. In der Tat kann man ja dem irrationalen Verhältnis beliebig nahekommen durch das Verhältnis zweier endlicher Zahlen, wenn man diese Zahlen groß genug wählt, und der Gedanke liegt nur zu nahe, daß sich das irrationale Verhältnis genau erreichen ließe, wenn man die Zahlen über alle Maßen groß, also unendlich wählen könnte.

Die Auffassung der Linie als zusammengesetzt aus ihren Punkten bedeutet aber einen Schritt weiter auf dieser Bahn, sie bedeutet, daß wir mit der Beschaffenheit der geometrischen Größen eine ganz bestimmte Idee verbinden, die freilich durch die sinnliche Vorstellung nicht zu erreichen und nicht zu begründen ist. Das bildete aber für die Pythagoreer kein Hindernis, ihr nachzugehen, ebensowenig wie für *Giordano Bruno*, *Galilei* und *Cavalieri,* die dieselbe Idee im siebzehnten Jahrhundert unserer Zeitrechnung wieder aufnahmen. Im Gegenteil glaubten die Pythagoreer, auf diesem Wege den Schlüssel zu dem Wesen der räumlichen Welt zu erhalten. Es schien ihnen auf diese Weise begreiflich, warum die Verhältnisse und Bedingungen in der erfahrungsmäßigen Wirklichkeit andere, verwickelter und verworrener seien als die einfachen Harmonien, die sie in den Zahlen wahrnahmen und die für sie eine Art höhere Welt und höhere Wirklichkeit bedeuteten. In den klaren, angebbaren Verhältnissen der Zahlen liegt die göttliche Ordnung und Ruhe, in den einmal angebbaren, das anderemal nur näherungsweise zu fassenden Verhältnissen der Raumgrößen und Zeitstrecken zeigt sich die mangelnde Vollkommenheit des Wirklichen, das neben den Merkmalen der Ordnung und Vernunft doch auch etwas der völligen Klärung Widerstrebendes und darum Unvollkommenes, Unvernünftiges, „Irrationales“ enthält.

Wenn nun aber die göttliche Harmonie auch in der unvollkommenen Wirklichkeit sich, wenngleich in beschränkter Form, abspiegelt, so kann das nur auf die Weise geschehen, daß wir gewisse harmonische Verhältnisse an den Dingen wahrnehmen. Um diese Verhältnisse zu finden, müssen wir die Figuren suchen, die auf uns den Eindruck möglichster Vollkommenheit machen. Als solche Figuren ergeben sich die regelmäßigen Figuren. Diese sind aber von doppelter Art, räumliche und ebene. Von beiden Arten scheinen die Griechen aus dem Orient Kenntnis erhalten zu haben, und sie waren Pythagoras jedenfalls schon bekannt. Es ergibt sich zwischen den beiden Arten nun ein merkwürdiger Unterschied. Während es nämlich in der Ebene unbegrenzt viele regelmäßige Vielecke gibt, nämlich mit jeder Seitenzahl von 3 an, findet sich im Raum nur eine begrenzte Anzahl von regelmäßigen Vielflachen oder Polyedern, nämlich die fünf sogenannten Platonischen Körper. Plato hat sie aus dem Anschauungskreis der pythagoreischen Schule heraus in seinem Timäus behandelt und zur Grundlage für die Entwicklung der räumlichen Wirklichkeit, insbesondere auch der vier Elemente der irdischen Welt zusammen mit einem fünften überirdischen, gemacht.

Gerade diese fünf Körper, deren ebene Begrenzungsflächen drei-, vier- und fünfeckige regelmäßige ebene Vielecke sind, legten die besondere Betrachtung dieser einfachsten Vielecke mit drei, vier und fünf Seiten nahe. Das regelmäßige Dreieck war von den Babyloniern zur Grundfigur erhoben worden, das regelmäßige Viereck, das Quadrat, bietet sich als erste Figur bei jeder geometrischen Betrachtung dar und findet sich so schon bei den Ägyptern allerorten. Das regelmäßige Fünfeck ist verhältnismäßig schwerer zu erreichen. Dafür aber wirkt es, wenn es einmal erschlossen ist, um so überraschender in seinen Eigenschaften. So erklärt es sich, daß die Pythagoreer gerade an das regelmäßige Fünfeck den Gedanken geheimnisvoller Kräfte und Eigenschaften anschlossen. Diese Eigenschaften offenbaren sich aber erst, wenn nicht das einfache regelmäßige Fünfeck genommen wird, sondern die Sternfigur, die entsteht, indem man bei der Verbindung der Ecken eines gewöhnlichen Fünfecks immer eine Ecke überschlägt, die also aus den Diagonalen des gewöhnlichen Fünfecks besteht. Diese Figur ist das sogenannte Pentagramm, das in allen magischen Wissenschaften bis in die Gegenwart hinein eine große Rolle gespielt hat und als Drudenfuß in vielen Gegenden heute noch vom Volk zum Schutz gegen böse Geister, insbesondere um Schlafende vor der Drude, dem Alpdrücken, zu bewahren, benutzt wird. Man wird an die Stelle in Goethes „Faust“ denken, wo Mephistopheles in Fausts Zimmer festgebannt ist durch das Pentagramm auf der Schwelle, dessen eine Spitze nach innen zeigt, während infolge einer kleinen Flüchtigkeit der Zeichnung nach außen zu der eingebuchtete Winkel zufällig ein wenig offen geblieben ist, so daß der Geist wohl in das Zimmer hinein, aber nicht wieder hinaus kann:

„Daß ich hinausspaziere,
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle.“

Nachdem er Faust, der ihn festhalten will, eingeschläfert hat, müssen, damit er das Zimmer verlassen kann, die ihm gehorsamen Ratten und Mäuse die ihn festbannende Spitze des Pentagramms wegnagen.

Wie es kam, daß dem Pentagramm solche wunderbaren Kräfte zugeschrieben wurden, verstehen wir am besten, wenn wir die wirklichen geometrischen Eigenschaften ins Auge fassen, die es besitzt. Diese Eigenschaften führen auch zu dem Verhältnis des Goldenen Schnittes, und zwar ist diese Herleitung des Goldenen Schnittes die einfachste, natürlichste und anschaulichste. Die Art, wie die Teilung einer Strecke nach dem Goldenen Schnitt bei Euklid (II, 18) eingeführt wird, läßt nicht mehr erkennen, wie man dazu kommt, gerade diese Aufgabe der Teilung zu stellen. Das ist nur zu begreifen aus der Figur des regelmäßigen Fünfecks oder Zehnecks heraus, indem man sich vergegenwärtigt, wie die Gedanken in natürlicher Verbindung entstehen, wenn man von der Erzeugung dieser Figuren ausgeht. Das ist es, was wir im folgenden zunächst versuchen wollen.

ERSTER ABSCHNITT

DIE MATHEMATISCHE THEORIE DES GOLDENEN SCHNITTES

Wir wollen davon ausgehen, daß der Umring eines Kreises in fünf gleiche Teile geteilt sei. Diese Aufgabe läßt sich praktisch lösen, ohne den theoretischen Lösungsweg zu kennen, und so ist in der geschichtlichen Entwicklung sicher auch die erste Ausführung der Konstruktion zustande gekommen. Eine der geometrischen Tatsachen, die man am frühesten kannte, war die, daß sich der Halbmesser des Kreises sechsmal im Umring abtragen läßt. Nimmt man also die Zirkelöffnung zunächst schätzungsweise etwas größer als den Radius, so daß man wenigstens angenähert fünfmal herumkommt, so läßt sich, indem man den verbleibenden Rest wieder schätzungsweise fünfteilt, rasch die genaue Fünfteilung des ganzen Umringes finden.

Denken wir uns dies nun geschehen, so wollen wir, wie wir bereits angedeutet haben, die fünf der Reihe nach auf dem Kreise liegenden Teilpunkte A, B, C, D, E auf zwei verschiedene Arten verbinden, einmal je zwei aufeinander folgende und dann immer mit Überschlagung eines Punktes (Fig. 1). Auf die erste Art gewinnen wir das ge-

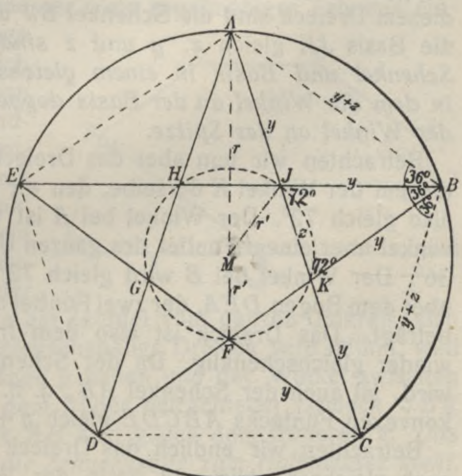

Fig. 1.

wöhnliche konvexe Fünfeck, auf die zweite Art das *Sternfünfeck* oder *Pentagramm.* Von den Seiten des Pentagramms wird jede durch zwei andere Seiten getroffen. Die Treffpunkte bilden zusammengenommen wieder die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks $FGHJK$, dessen Seiten der Lage nach auf die Seiten des Pentagramms fallen. Wir fassen nun beispielsweise die vier Punkte A, J, K, C ins Auge, die auf der Seite AC des Pentagramms liegen. Es ist dann sofort klar, daß die Entfernung AJ gleich der Entfernung KC wird. Wir wollen sie beide mit y bezeichnen. Die Entfernung JK wollen wir z nennen. Die entsprechenden Stücke auf den übrigen Seiten werden natürlich ebenso groß. Z. B. werden die Stücke BJ und BK beide gleich y. Das Dreieck JBK ist also ein gleichschenkliges Dreieck. Darin ist der Winkel bei B ein Umringswinkel des umschriebenen Kreises, dessen zugehöriger Bogen ein Fünftel des ganzen Umfanges bildet. Daraus folgt, daß der Winkel ein Fünftel von 180^0 beträgt, also 36^0. Die Winkel bei J und K, die einander gleich sind, betragen folglich jeder 72^0, mithin das Doppelte von dem Winkel bei B. Wir haben hier also ein gleichschenkliges Dreieck vor uns, in dem die Basiswinkel doppelt so groß sind wie der Winkel an der Spitze. In diesem Dreieck sind die Schenkel BJ und BK gleich y und die Basis JK gleich z. *y und z sind also festgelegt als Schenkel und Basis in einem gleichschenkligen Dreieck, in dem die Winkel an der Basis doppelt so groß sind wie der Winkel an der Spitze.*

Betrachten wir nun aber das Dreieck BAK, so wird in diesem der Winkel K derselbe, den wir schon vorher hatten, also gleich 72^0. Der Winkel bei A ist wieder ein Umringswinkel über einem Fünftel des ganzen Umfanges, also gleich 36^0. Der Winkel bei B wird gleich 72^0, als Umringswinkel über dem Bogen DEA, der zwei Fünftel des ganzen Umfanges beträgt. Das Dreieck ist also dem früheren ähnlich und wieder gleichschenklig. Da der Schenkel AK gleich $y+z$ wird, ist auch der Schenkel AB, d. h. die Seitenlänge des konvexen Fünfecks $ABCDE$ gleich $y+z$.

Betrachten wir endlich das Dreieck ADB, so ist dieses auch gleichschenklig und darin der Winkel an der Spitze D gleich 36^0. Dieses Dreieck ist also den früheren Dreiecken ähnlich, und da jetzt die Schenkel gleich $2y+z$ und die Basis gleich $y+z$ werden, so erhalten wir aus den drei Dreiecken zusammengenommen die Proportion

$$\frac{y+z}{2y+z}=\frac{y}{y+z}=\frac{z}{y}\,. \tag{1}$$

Den gemeinsamen Wert dieser drei Brüche wollen wir mit x bezeichnen.

Fassen wir den letzten Teil der vorstehenden Proportionsgleichung ins Auge, so sehen wir, daß die Strecke $AK=y+z$ durch den Punkt J derart in zwei Teile y und z geteilt wird, daß *die ganze Strecke sich zum größeren Teil verhält wie der größere Teil zum kleineren Teil.* Diese Teilung ist die Teilung nach dem *Goldenen Schnitt* oder stetige Teilung. Wie sie ausgeführt wird, müssen wir noch finden.

Weiter zeigt die Proportion (1), daß die Seite des konvexen Fünfecks, die $=y+z$ ist, sich zu der Seite des Sternfünfecks, die $=2y+z$ ist, verhält wie der größere Teil y der nach dem Goldenen Schnitt geteilten Strecke $AK=y+z$ zu dieser ganzen Strecke oder wie der kleinere Teil z zum größeren Teil y.

Es ist nun auch leicht zu sehen, daß, wenn man in einen Kreis mit dem Halbmesser y ein regelmäßiges Zehneck einbeschreibt, die Länge der Zehneckseite gleich z wird (Fig. 2). Denn verbindet man die Endpunkte A, B einer solchen Zehneckseite mit dem Kreismittelpunkt M, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck AMB, in dem der

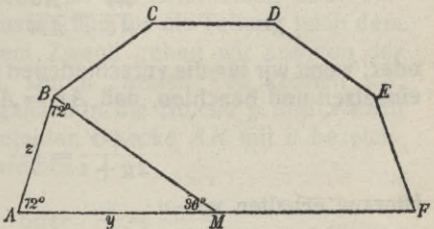

Fig. 2.

Winkel an der Spitze ein Zehntel vom ganzen Umkreis, also 36^0 beträgt. Das gleichschenklige Dreieck wird mithin, weil die Schenkel die Länge y haben und der Winkel zwischen ihnen 36^0 beträgt, dem früher betrachteten Dreieck JBK kongruent, die Seite AB also gleich dem früheren z. *Das Verhältnis, in dem die Zehneckseite zum Halbmesser steht, ist sonach* $\frac{z}{y}=x$.

Für die Ermittlung des Zusammenhanges zwischen dem Halbmesser r des dem Fünfeck $ABCDE$ in Fig. 1 umschriebenen Kreises und der Fünfeckseite beachten wir zunächst, daß der Halbmesser r' des durch das Fünfeck $FGHJK$ gehenden Kreises sich zu r verhält wie die Seitenlänge des Fünfecks $FGHJK$ zu der Seitenlänge des Fünfecks $ABCDE$, d. h. wie JK zu AB, also wie z zu $y+z$. Nun wird aber nach der oben aufgestellten Proportion (1)

$$\frac{z}{y}=x \quad \text{und} \quad \frac{y}{y+z}=x,$$

und durch Multiplikation dieser zwei Gleichungen folgt

$$\frac{z}{y+z}=x^2,$$

also ergibt sich

$$\frac{r'}{r}=x^2. \tag{2}$$

Ziehen wir nun die Verbindungslinie AF und verbinden wir noch den auf dieser Linie enthaltenen Kreismittelpunkt M mit dem Punkt J, so werden die Dreiecke AFC und AJM einander ähnlich, denn sie haben den Winkel bei A (der gleich 18^0 ist) gemeinsam, und der Winkel ACF wird ebenso wie der Winkel AMJ gleich 36^0. Daraus folgt

$$\frac{AF}{AC}=\frac{AJ}{AM}$$

oder, wenn wir für die verschiedenen Entfernungen die Werte einsetzen und beachten, daß $AF=AM+FM=r+r'$ wird:

$$\frac{r+r'}{2y+z}=\frac{y}{r}.$$

Hieraus erhalten wir

$$r(r+r')=y(2y+z)$$

oder, wenn wir für r' den Wert aus (2) einsetzen,

$$r^2(1+x^2)=y(2y+z).$$

Für die rechte Seite in dieser Gleichung ergibt sich noch aus der Proportion

$$\frac{y+z}{2y+z}=\frac{y}{y+z}$$

sofort der Wert

$$y(2y+z) = (y+z)^2.$$

Wir gewinnen also schließlich die Gleichung

$$r^2 + r^2x^2 = (y+z)^2. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist aber einer einfachen geometrischen Deutung fähig. r ist der Halbmesser des dem Fünfeck $ABCDE$ umschriebenen Kreises und gleichzeitig die Seitenlänge des diesem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks. Die Seitenlänge des dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks wird aber gleich rx. Endlich ist $y+z$ die Seitenlänge des dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen konvexen Fünfecks. Es werden also nach der Gleichung (3) die Quadrate der Seitenlängen von Sechseck und Zehneck zusammengenommen gleich dem Quadrate der Seitenlänge des Fünfecks. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz bedeutet das aber: *Die Seitenlängen von Fünfeck, Sechseck und Zehneck lassen sich zu einem rechtwinkligen Dreieck zusammenschließen, in dem die Fünfeckseite die Hypotenuse ist.* Dieser schöne Satz ist vermutlich von dem griechischen Mathematiker *Eudoxos* gefunden und zu sehr fruchtbaren Folgerungen benutzt worden.

Was uns nun noch fehlt, ist die Ermittelung einer einfachen geometrischen Konstruktion für die Teilung nach dem Goldenen Schnitt. Zu dem Zweck gehen wir aus von der Proportionsgleichung (1). Deren zweiten Teil können wir, wenn wir die Länge der ganzen in die Stücke y und z nach dem Goldenen Schnitt geteilten Strecke AK mit u bezeichnen, folgendermaßen schreiben:

$$\frac{y}{u} = \frac{z}{y} \quad \text{oder} \quad \frac{y}{u} = \frac{u-y}{y}$$

oder auch: $\qquad y^2 = (u-y)u.$

Daraus endlich finden wir:

$$y(u+y) = u^2. \tag{4}$$

Aus dieser Beziehung ist die geometrische Konstruktion der stetigen Teilung einer Strecke $AB = u$ sofort herzuleiten (Fig. 3). Es soll das Rechteck aus dem größeren Teil y und der um den größeren Teil vermehrten ganzen Strecke AB dem Inhalt nach gleich u^2, also gleich dem Quadrat $ABCD$ über der ganzen Strecke $AB = u$ werden. Das bedeutet, daß die Seite BC des Quadrats die Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck ECF wird, in dem die Höhenabschnitte auf der Hypotenuse $EB = u + y$ und $BF = y$ sind, und nach dem Satz des *Thales* liegt die Ecke C dieses Dreiecks auf einem Kreis, von dem EF ein Durchmesser ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist aber der Mittelpunkt M von AB, denn es ist $BF = y$, und über A hinaus ist dieselbe Länge $AE = y$ abgetragen. Deshalb ist der Mittelpunkt M des Kreises sofort zu finden, wenn

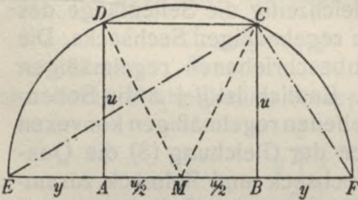

Fig. 3.

die zu teilende Strecke AB vorliegt, und der Halbmesser des Kreises wird gleich der Entfernung MC, die, indem wir auf AB in B das Lot $BC = AB$ errichten, sofort zu finden ist.

Die gefundene Konstruktion läßt sich als geometrischer Satz wie folgt in Worte fassen: *Wenn einem Halbkreis über EF das Quadrat $ABCD$ derart einbeschrieben ist, daß die eine Seite AB in den abschließenden Durchmesser EF fällt, dann stehen die einander gleichen Strecken EA und BF zu AB im Verhältnis des Goldenen Schnittes.*

Die Konstruktion liefert aber noch mehr. Nach dem Satze des Eudoxos ergibt sich, daß, wenn wir dem Kreis mit dem Radius u das regelmäßige Zehneck und das regelmäßige konvexe Fünfeck einbeschreiben, die Seitenlänge des ersteren die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck bildet, dessen eine Kathete gleich dem Radius u des Kreises und dessen andere Kathete gleich der Zehneckseite, also gleich dem größeren Teil bei der Teilung nach dem Goldenen Schnitt, d. h. gleich y ist. Daraus ist sofort zu sehen, daß ein solches Dreieck durch die Punkte CBF gegeben wird und daß sonach CF *die Seitenlänge des einem Kreis vom Halbmesser u einbeschriebenen regelmäßigen konvexen Fünfecks ist.*

Diese Seitenlänge steht zu der Seitenlänge des zugehörigen Sternfünfecks wieder im Verhältnis des Goldenen

Schnittes. Nun steht aber zu CF die andere Kathete CE des rechtwinkligen Dreiecks ECF im Verhältnis des Goldenen Schnittes. In der Tat wird ja

$$\frac{CF}{CE}=\frac{BF}{BC}=\frac{y}{u}.$$

Deshalb *wird CE die Seitenlänge des einem Kreis vom Halbmesser u einbeschriebenen regelmäßigen Sternfünfecks.*

Damit ist die geometrische Behandlung des Goldenen Schnittes der Hauptsache nach erledigt. Auf die sehr merkwürdige Art, wie er bei den regelmäßigen Polyedern in die Erscheinung tritt, wollen wir nicht eingehen. Dagegen wollen wir die arithmetische Behandlung des Goldenen Schnitts ausführlicher geben. Zu dem Zweck formen wir die vorstehende Cleichung (4) um, indem wir sie auf beiden Seiten durch u^2 teilen. Wir erhalten dann:

$$\frac{y}{u}\left(1+\frac{y}{u}\right)=1,$$

mithin, da $\frac{y}{u}=x$ das Verhältnis des Goldenen Schnittes war, für dieses Verhältnis die Gleichung:

$$(5) \qquad x(1+x)=1 \qquad \text{oder} \qquad x^2+x=1. \qquad (6)$$

Dieser Gleichung kann man, wenn man will, die Form geben:

$$1-x=x^2. \tag{7}$$

Wenn die nach dem Goldenen Schnitt zu teilende Strecke die Länge 1 hat, wird die größere Teilstrecke x. Teilt man diese aufs neue nach dem Goldenen Schnitt, so wird der größere Teil dieser Strecke $=x^2$. Die Gleichung (7) sagt nun aus, daß dieser Teil x^2 nichts anderes ist wie der kleinere Teil bei der Teilung der ursprünglichen Strecke.

Gibt man der Gleichung (5) die Form:

$$1+x=\frac{1}{x}, \tag{8}$$

so zeigt sie: Fügt man zu der ganzen Strecke den größeren Teil hinzu, so steht die gesamte so entstehende Strecke zu der ursprünglichen Strecke in demselben Verhältnis wie diese zu ihrem größeren Teil x.

Man sieht so, daß man alle Potenzen von x durch bloßes An- und Übereinanderlegen der bei der Teilung der gegebenen Strecke gewonnenen Teilstrecken gewinnen kann. Z. B. gewinnt man x^3, indem man den kleineren Teil x^2 vom größeren Teil x abzieht. Die Gleichung (7) wird in der Tat, wenn man sie mit x auf beiden Seiten multipliziert:

$$x - x^2 = x^3.$$

Die weitere arithmetische Behandlung des Goldenen Schnittes knüpft am besten an die quadratische Gleichung (6)

$$x^2 + x = 1$$

an. Im Grunde ist die algebraische Auflösung dieser Gleichung schon in der geometrischen Konstruktion der Verhältniszahl x enthalten. Sie beruht darauf, daß auf der linken und der rechten Seite der vorstehenden Gleichung der Bruch $\frac{1}{4}$ addiert wird. Der auf der linken Seite stehende Ausdruck $x^2 + x + \frac{1}{4}$ ist dann ein vollständiges Quadrat, nämlich das Quadrat von $x + \frac{1}{2}$, und die Gleichung nimmt die Form an

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Zieht man aus der linken und aus der rechten Seite dieser Gleichung die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dabei ist auf der rechten Seite nur der positive Wurzelwert zu nehmen, weil das Verhältnis x und damit auch $x + \frac{1}{2}$ notwendigerweise einen positiven Wert hat.

So erhält man endlich den Wert

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{oder auch} \quad x = \sqrt{1{,}25} - 0{,}5. \qquad (9)$$

Dieser Wert ist notwendigerweise ein irrationaler, d. h. durch keinen Bruch ausdrückbar, weil $\sqrt{1{,}25}$ es ist. Die in dem Ausdruck enthaltene Quadratwurzel wird aber mit sehr guter Annäherung gleich 1,118 (die folgenden Stellen im Dezimalbruch sind 03), und es ist deshalb mit einer in allen Fällen ausreichenden Annäherung

$$x = 0{,}618. \tag{10}$$

Zur Probe kann dienen, daß unter Zugrundelegung dieses Wertes $x^2 = 0{,}3819$ und $1 - x = 0{,}3820$ wird, also diese beiden Werte gemäß der Gleichung (7) so gut wie genau gleich sind.

Viel bedeutsamer als die angegebene algebraische Auflösung der Grundgleichung (6) nach der für quadratische Gleichungen allgemein üblichen Methode ist die Aufsuchung bestimmter rationaler Näherungswerte für x, d. h. die Ermittelung bestimmter echter Brüche, die, für x in die Gleichung eingesetzt, sie angenähert erfüllen. Zu dem Zweck nehmen wir die aus der Gleichungsform (5) sofort folgende Gleichung:

$$x = \frac{1}{1+x} \tag{11}$$

vor. Es liegt dann nahe, wenn für x ein Näherungswert x_0 gefunden ist, diesen in der vorstehenden Gleichung bloß auf der rechten Seite einzuführen. Auf der linken Seite ergibt sich so nicht, wie es der Fall wäre, wenn x_0 eine genaue Lösung wäre, derselbe Wert x_0, sondern ein davon verschiedener Wert x_1, so daß die Gleichung entsteht

$$x_1 = \frac{1}{1+x_0}. \tag{12}$$

Nun läßt sich die Vermutung aussprechen, daß der so gefundene Wert x_1 eine bessere Annäherung an den wahren Wert x darstellen wird als der ursprüngliche Wert x_0. Diese Vermutung können wir in der Tat bestätigen, wenn wir die Gleichungen (11) und (12) voneinander abziehen. Es ergibt sich dann, indem wir die Brüche auf der rechten Seite gleich vereinigen:

$$x - x_1 = \frac{x_0 - x}{(1+x)(1+x_0)}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (11) und (12):

$$x - x_1 = x x_1 (x_0 - x). \tag{13}$$

Diese Gleichung aber zeigt, was wir finden wollten. Es ist nämlich x eine Zahl, die kleiner als $\frac{2}{3}$ ist, x_1 wird nach (12), da für x_0 natürlich ein positiver Wert zu nehmen ist, ebenfalls ein echter Bruch, denn auf der rechten Seite der Gleichung wird der Nenner notwendigerweise größer als der Zähler. Wir finden also

$$x - x_1 < \tfrac{2}{3}(x_0 - x),$$

und daraus ist zu sehen, daß *die Abweichung $x - x_1$ des Näherungswertes x_1 vom wahren Werte x sicher kleiner ist als die Abweichung des Näherungswertes x_0*. Ferner ist unmittelbar zu erkennen, daß, wenn der Wert x_0 größer als x, also $x_0 - x$ positiv ist, auch der Unterschied $x - x_1$ positiv wird, d. h. x_1 kleiner ist als der wahre Wert x. Umgekehrt ist es, wenn x_0 kleiner als x ist. *Die Werte x_0 und x_1 liegen also immer auf verschiedenen Seiten vom wahren Werte x. Ist der eine Wert größer, so ist der andere kleiner als x.*

Es ist nun klar, daß, wenn man von einem ersten Näherungswert x_0 ausgehend einen besseren Näherungswert x_1 gefunden hat, man diesen einer abermaligen Verbesserung unterziehen kann, indem man wieder

$$x_2 = \frac{1}{1 + x_1} \tag{14}$$

setzt und damit einen noch besseren Annäherungswert x_2 ableitet. Alles, was wir für die Näherungswerte x_0, x_1 gesagt haben, gilt natürlich auch für die in dem gleichen Zusammenhang stehenden Näherungswerte x_1, x_2.

Man kann so weiter fortfahren und noch

$$x_3 = \frac{1}{1 + x_2}, \qquad x_4 = \frac{1}{1 + x_3} \tag{14a}$$

setzen usw. Man erhält auf diese Weise immer bessere Näherungswerte x_3, x_4 usw.

Wir wollen nun für x_0 einen gewöhnlichen echten Bruch wählen, die 1 selbst eingeschlossen. Wir nehmen also an

$$x_0 = \frac{n_0}{n_1},$$

wobei n_0, n_1 ganze Zahlen sind und

$$n_0 \leqq n_1.$$

Es wird dann $$x_1 = \frac{1}{1+x_0} = \frac{n_1}{n_1+n_0}.$$

Setzen wir also $$x_1 = \frac{n_1}{n_2},$$

so wird $$n_2 = n_0 + n_1.$$

Wir sehen sofort, daß ganz ebenso
$$x_2 = \frac{n_2}{n_3}$$
wird, indem wir $$n_3 = n_1 + n_2$$
setzen, und so geht es fort. Kurz gesagt, wir erhalten die Folge der Näherungswerte für x:
$$x_0 = \frac{n_0}{n_1}, \quad x_1 = \frac{n_1}{n_2}, \quad x_2 = \frac{n_2}{n_3}, \quad x_3 = \frac{n_3}{n_4} \text{ usw.,} \tag{15}$$
und dabei wird:
$$\begin{aligned} n_2 &= n_0 + n_1, \\ n_3 &= n_1 + n_2, \\ n_4 &= n_2 + n_3 \text{ usw.} \end{aligned} \tag{16}$$

In der Folge der ganzen Zahlen n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 usw. wird also jede von der dritten an die Summe der beiden vorhergehenden.

Damit ist aber ein ganz einfaches Gesetz ausgesprochen, das die Bildung der Näherungsbrüche für das Verhältnis x des Goldenen Schnittes regelt. Die beiden ersten Zahlen n_0, n_1 in der Folge sind an keine andere Bedingung geknüpft, als daß
$$n_0 \leqq n_1$$
werden soll. Durch sie sind die Zahlen der ganzen Folge der Reihe nach bestimmt, und die Zahlen der Folge stellen der Reihe nach immer bessere Annäherungen an das Verhältnis des Goldenen Schnittes dar.

Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, daß die Zahlen n_0 und n_1 teilerfremd anzunehmen sind, um einen überflüssigen, in alle Näherungsbrüche eingehenden gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner zu vermeiden.

Wir wollen nun noch näher untersuchen, in welcher Weise die Näherungsbrüche $\frac{n_0}{n_1}, \frac{n_1}{n_2}, \frac{n_2}{n_3}$ usw. sich mehr und mehr dem gesuchten Wert x annähern.

Wir müssen zu dem Zweck eine wichtige Beziehung ableiten, die zwischen den Zahlen der Zahlenfolge

$$n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 \text{ usw.}$$

besteht. Wir bilden zu dem Zweck den Ausdruck

$$n_1 n_3 - n_2^2.$$

Da in ihm $n_3 = n_1 + n_2$ wird, erhalten wir für ihn den Wert

$$n_1(n_1 + n_2) - n_2^2$$

oder, wenn wir noch $n_2 = n_0 + n_1$ einsetzen:

$$n_1(n_0 + 2n_1) - (n_0 + n_1)^2.$$

Wenn wir die Klammern auflösen, wird daraus

$$n_0 n_1 + 2n_1^2 - n_0^2 - 2n_0 n_1 - n_1^2,$$

und dies vereinfacht sich zu

$$-(n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2)$$

oder zu $-N$, wenn wir

$$N = n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2$$

setzen. Diesen Wert N können wir auch schreiben

$$N = n_0(n_0 + n_1) - n_1^2 \quad \text{oder} \quad N = n_0 n_2 - n_1^2.$$

Wir haben also gefunden, daß

$$n_0 n_2 - n_1^2 = -(n_1 n_3 - n_2^2)$$

wird. Da nun aber die Zahlen n_1, n_2, n_3, n_4 untereinander in derselben Beziehung stehen wie n_0, n_1, n_2, n_3, so ergibt sich auch:

$$n_1 n_3 - n_2^2 = -(n_2 n_4 - n_3^2),$$

und das geht so fort. Wenn wir zusammenfassen, so können wir die Folge von Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} n_0 n_2 - n_1^2 &= +N, \\ n_1 n_3 - n_2^2 &= -N, \\ n_2 n_4 - n_3^2 &= +N, \\ n_3 n_5 - n_4^2 &= -N \text{ usw.} \end{aligned} \tag{17}$$

Diese Gleichungen bilden die Beziehung, die wir ermitteln wollten.

Aus ihnen geht ein einfacher Ausdruck für die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Näherungswerte

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ usw.}$$

hervor. Wir finden nämlich zunächst

$$x_0 - x_1 = \frac{n_0}{n_1} - \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_0 n_2 - n_1^2}{n_1 n_2}$$

oder

$$x_0 - x_1 = \frac{N}{n_1 n_2}, \tag{18}$$

und auf dieselbe Weise weiter

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -\frac{N}{n_2 n_3}, \\ x_2 - x_3 &= +\frac{N}{n_3 n_4}, \\ x_3 - x_4 &= -\frac{N}{n_4 n_5} \text{ usw.} \end{aligned} \tag{18}$$

Aus diesen Gleichungen gewinnen wir ein deutliches Bild von der Art, wie die Näherungswerte aufeinander folgen. Wir sehen, daß die Differenzen abwechselnd positiv und negativ werden. Dementsprechend liegen die Näherungswerte abwechselnd über und unter dem wahren Werte x. Wir sehen ferner daß die Differenzen, weil sie zu den Produkten $n_1 n_2$, $n_2 n_3$, $n_3 n_4$ usw. umgekehrt proportional sind, der absoluten Größe nach rasch abnehmen. Die Näherungswerte rücken also immer dichter aneinander, indem sie sich mehr und mehr von beiden Seiten her dem wahren Werte nähern, der jedesmal zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerten liegt.

Die Aufgabe, die wir uns zu lösen vorgenommen haben, ist aber immer noch nicht in ihrem vollen Umfange erledigt.

Wir haben bis jetzt nur gezeigt, wie wir aus einem irgendwie gefundenen Näherungswert für die Verhältniszahl x des Goldenen Schnittes systematisch immer *bessere* Näherungswerte ableiten können. Wir müssen aber suchen, überhaupt die *besten* Näherungswerte, die möglich sind, zu finden.

Zu dem Zwecke müssen wir uns zunächst überlegen, wie wir überhaupt die Güte eines Näherungswertes beurteilen können. Wenn wir den genauen Wert x haben, so ist die Gleichung (6) genau erfüllt, es wird also in aller Schärfe:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Haben wir aber nicht den genauen Wert x, sondern vielleicht einen etwas zu großen Wert $x + \delta$, so wird der dem Ausdruck $x^2 + x - 1$ analoge Ausdruck für $x + \delta$ nicht genau gleich Null, sondern gleich einer gewissen Zahl ϵ, wir erhalten also

$$(x + \delta)^2 + (x + \delta) - 1 = \epsilon.$$

Wenn wir hierin die linke Seite ausrechnen und die vorhergehende Gleichung berücksichtigen, so finden wir

$$2x\delta + \delta^2 + \delta = \epsilon,$$

und daraus ist sofort zu sehen, daß ϵ mit δ beständig zunimmt, daß also von zwei Näherungswerten der beste, d. h. der x am nächsten kommende der ist, für den der Ausdruck ϵ, d. h. der Ausdruck

$$x^2 + x - 1,$$

wenn man darin statt x den Näherungswert $x + \delta$ einsetzt, am kleinsten wird. Wir haben also in diesem Ausdruck ein Maß für die Güte der Annäherung, zunächst für zu große Näherungswerte $x + \delta$. Nehmen wir aber einen zu kleinen Wert $x - \delta$ und bilden den entsprechenden Ausdruck

$$(x - \delta)^2 + (x - \delta) - 1 = \epsilon,$$

so ergibt sich analog wie oben

$$-2x\delta + \delta^2 - \delta = \epsilon \quad \text{oder auch} \quad (2x + 1 - \delta)\delta = -\epsilon.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht das Produkt zweier Faktoren δ und $2x + 1 - \delta$, deren Summe den festen Wert $2x + 1$ hat. Dieses Produkt nimmt, wenn wir den einen Faktor δ von 0 an wachsen lassen, so lange zu, bis dieser Faktor dem anderen gleich geworden, bis also

$$\delta = 2x + 1 - \delta,$$

d. h. $\delta = x + \frac{1}{2}$ geworden ist. Dann würde aber $x - \delta = -\frac{1}{2}$, also der Näherungswert $x - \delta$ schon negativ sein. Solange wir demnach überhaupt einen positiven Näherungswert nehmen, wächst mit der Abweichung dieses Wertes vom wahren Werte auch dem absoluten Betrage nach der betrachtete Ausdruck

$$x^2 + x - 1,$$

wenn man sich darin für x den Näherungswert eingesetzt denkt.

Wir wollen nun als Näherungswert für x den zunächst beliebig angenommenen Wert

$$x_0 = \frac{n_0}{n_1}$$

wählen. Dann wird der in Rede stehende Ausdruck:

$$\epsilon_0 = x_0^2 + x_0 - 1,$$

und dafür ergibt sich, wenn wir für x_0 seinen Wert einsetzen:

$$\epsilon_0 = \frac{n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2}{n_1^2},$$

d. h. mit Rücksicht auf den Wert des Zählers in diesem Bruch

$$\epsilon_0 = \frac{N}{n_1^2}.$$

Die Antwort auf die Frage, die wir uns vorgelegt haben, ist jetzt unmittelbar zu geben. Nehmen wir an, der Näherungswert $x_0 = \frac{n_0}{n_1}$ sei derart bestimmt, daß n_1 vorgelegt oder wenigstens eine obere Grenze n dafür bestimmt ist. Es würde sich dann darum handeln, den Bruch x_0 zu bestimmen, dessen Nenner die gegebene Grenze nicht überschreitet und der gleichzeitig die bestmögliche Annäherung an die gesuchte Zahl x liefert. Diese Bestimmung ist, wie wir gefunden haben, so zu treffen, daß der Bruch

$$\frac{N}{n_1^2}$$

dem absoluten Betrage nach einen möglichst kleinen Wert annimmt.

Es liegt nun die Aunahme nahe, daß es am günstigsten sein wird, N den kleinstmöglichen Wert zu geben. N ist aber notwendigerweise eine ganze Zahl. Null kann es nicht sein, denn dann wäre

$$n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2 = 0,$$

mithin auch
$$\frac{n_0^2}{n_1^2} + \frac{n_0}{n_1} - 1 = 0$$

oder
$$x_0^2 + x_0 - 1 = 0,$$

also x_0 die genaue Lösung, was unmöglich ist. Der kleinste Wert, den wir annehmen können, ist also

$$N = \pm 1.$$

Wir hätten demnach n_0 und n_1 so zu bestimmen, daß

$$n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2 = \pm 1$$

wird. Daß dann die durch den Bruch $\frac{n_0}{n_1}$ erreichte Annäherung ϵ_0 die bestmögliche ist, bedeutet zunächst, daß nicht durch einen Bruch $\frac{n'_0}{n'_1}$, in dem der Nenner

$$n'_1 < n_1$$

ist, eine bessere Annäherung erreicht werden kann. Dies läßt sich aber sofort zeigen. Denn wäre $\frac{n'_0}{n'_1}$ ein solcher Bruch, so würde für das Maß der Annäherung folgen

$$\epsilon'_0 = \pm \frac{N'}{n'^2_1},$$

wobei N' eine positive ganze Zahl bedeutet. Ist also dem absoluten Betrage nach
$$\epsilon'_0 < \epsilon_0,$$

so folgt
$$\frac{N'}{n'^2_1} < \frac{1}{n_1^2},$$

also
$$N' < \frac{n'^2_1}{n_1^2},$$

was unmöglich ist, wenn $n'_1 < n_1$.

Wenn aber eine Lösung der Gleichung

$$n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2 = \pm 1$$

und damit ein Näherungswert für das Verhältnis des Goldenen Schnittes gefunden ist, so leiten wir daraus nach dem angegebenen Verfahren einen besseren Näherungswert $\frac{n_1}{n_2}$ für dieses Verhältnis ab, indem wir

$$n_2 = n_0 + n_1$$

setzen.

Ebenso finden wir weiter eine noch bessere Annäherung n_2/n_3, indem wir $n_3 = n_1 + n_2$ setzen usw. Wir erhalten eine Zahlenfolge

$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4 \text{ usw.},$$

bei der von der dritten ab jede Zahl die Summe der beiden vorhergehenden ist, und entsprechend die Folge der Näherungswerte

$$x_0 = \frac{n_0}{n_1}, \quad x_1 = \frac{n_1}{n_2}, \quad x_2 = \frac{n_2}{n_3}, \quad x_3 = \frac{n_3}{n_4} \text{ usw.}$$

Die früheren Gleichungen (17) verwandeln sich jetzt, wenn wir für $N = n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2$ den Wert $+1$ wählen, in

$$n_0 n_2 - n_1^2 = +1,$$
$$n_1 n_3 - n_2^2 = -1,$$
$$n_2 n_4 - n_3^2 = +1 \text{ usw.}$$

Suchen wir nun insbesondere die Lösung der Gleichung

$$n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2 = +1$$

in möglichst niedrigen ganzen Zahlen, so wird diese Lösung, wie wir sofort sehen,

$$n_0 = 1, \quad n_1 = 1.$$

Daraus folgen dann die anderen Zahlenpaare

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2;$$
$$n_2 = 2, \quad n_3 = 3;$$
$$n_3 = 3, \quad n_4 = 5 \text{ usw.}$$

Für die Folge der Näherungsbrüche ergibt sich so:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89}\ \text{usw.} \tag{19}$$

Es ist bereits nachgewiesen, daß jeder dieser Brüche die verhältnismäßig beste Annäherung darstellt insofern, als kein Bruch mit kleinerem Nenner gefunden werden kann, der eine bessere Annäherung liefert. Wir wollen aber auch noch zeigen, daß jeder Näherungsbruch, dessen Nenner zwischen den Nennern zweier aufeinanderfolgender Brüche in der vorstehenden Folge liegt, eine schlechtere Annäherung an den wahren Wert x liefert als der voraufgehende Bruch der Folge, trotzdem dessen Nenner kleiner ist. Die Brüche der Folge haben auf diese Weise als die absolut besten Näherungswerte, die möglich sind, zu gelten.

Um den verlangten Nachweis zu führen, nehmen wir an,

$$\frac{n'_0}{n'_1}$$

sei ein Näherungswert, der besser ist als $\frac{n_0}{n_1}$ und in dem der Nenner n'_1 wohl größer als n_1, aber kleiner als $n_0 + n_1$ ist. Da das Maß der Annäherung für diesen Bruch durch den Ausdruck

$$\epsilon'_0 = \pm \frac{N'}{n'^2_1}$$

gegeben ist, in dem N' eine positive ganze Zahl bedeutet, während das Maß für die durch den Bruch $\frac{n_0}{n_1}$ erreichte Annäherung $\pm \frac{1}{n_1^2}$ ist, so muß, wenn der Bruch $\frac{n'_0}{n'_1}$ eine bessere Annäherung bedeutet als der Bruch $\frac{n_0}{n_1}$, wieder

$$\frac{N'}{n'^2_1} < \frac{1}{n_1^2}$$

sein. Daraus folgt $\qquad N' < \left(\frac{n'_1}{n_1}\right)^2$

und, da $n'_1 < n_0 + n_1$,

$$N' < \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right)^2.$$

Nun sind alle Brüche der Folge (19) mit Ausnahme des ersten

$$< \frac{2}{3}$$

Wenn wir also unter $\frac{n_0}{n_1}$ irgendeinen Bruch der Folge mit Ausnahme des ersten verstehen (was ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich ist, da zwischen $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{2}$ überhaupt keine Näherungswerte liegen können, der Beweis also für dieses Intervall nicht erbracht zu werden braucht), so haben wir $\frac{n_0}{n_1} \leq \frac{2}{3}$, und damit ergibt sich

$$N' < \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{oder} \quad N' < \frac{25}{9},$$

N' kann also nur gleich 1 oder gleich 2 sein. N' kann aber nicht 2 sein, weil der Ausdruck

$$N' = n'_0(n'_0 + n'_1) - n'^2_1$$

für teilerfremde, also jedenfalls nicht beide gerade Zahlen n'_0, n'_1 notwendigerweise eine ungerade Zahl wird. Es bleibt also nur der Wert $N' = 1$ übrig.

Alle Näherungswerte, die sich für $N' = 1$ ergeben, sind aber bereits in der Folge (19) enthalten, so daß zwischen ihnen keine weiteren liegen können und der zu führende Beweis demnach erbracht ist. Daß in der Tat die Folge (19) alle Näherungswerte für $N = \pm 1$ erschöpft, ist leicht zu sehen. Ist nämlich n_0/n_1 einer dieser Werte, so wird auch $\frac{n_1 - n_0}{n_0}$ ein solcher, da ja

$$(n_1 - n_0)^2 + (n_1 - n_0)n_0 - n_0^2 = -[n_0^2 + n_0 n_1 - n_1^2]$$

wird. Es läßt sich also aus jeder Lösung eine solche mit kleinerem Zähler und Nenner ableiten. Aus dieser folgt ebenso wieder eine neue, in der Zähler und Nenner abermals verkleinert sind. So kann man fortfahren, bis man die Lösung in den kleinstmöglichen Zahlen gefunden hat, nämlich $n_0 = 1$, $n_1 = 1$. Aus dieser bauen sich die früheren Werte aber rückwärts in eben der Weise auf, wie wir die Folge (19) gefunden haben. Der ursprünglich angenommene Wert muß also selbst dieser Folge angehören.

Wir haben sonach gezeigt, daß die Folge (19) überhaupt die in Betracht kommenden Näherungswerte erschöpft. Jeder andere Näherungswert kann durch einen besseren Näherungswert der Folge mit kleinerem Nenner ersetzt werden.

Wir können nun die Bildung der Werte (19) folgendermaßen darstellen. Ist x_0 einer von ihnen, so wird der nächste

$$x_1 = \frac{1}{1 + x_0}.$$

Der erste Wert ist aber $\frac{1}{1}$,

der zweite also $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}$,

der dritte $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}},$$

der vierte $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$$

Auf diese Weise geht es fort. Was wir hier vor uns haben, sind sogenannte *Kettenbrüche*. Die allgemeine Form für einen solchen ist

$$\cfrac{1}{m_0+\cfrac{1}{m_1+\cfrac{1}{m_2+\cfrac{1}{m_3+\cfrac{1}{m_4}}}}}$$

oder wie weit wir die Bildung fortsetzen wollen. Im vorliegenden Fall erhalten wir sozusagen den einfachsten Kettenbruch, den es überhaupt gibt, denn in diesem Falle werden ja die ganzen Zahlen m_0, m_1, m_2 usw. alle gleich 1. Dadurch gewinnen die Näherungswerte für das Verhältnis des Goldenen Schnittes eine elementare arithmetische Bedeutung.

Je mehr Glieder in dem Kettenbruch genommen werden, um so genauer wird der daraus zu berechnende Näherungswert. Man gebraucht hierfür wohl den Ausdruck, der genaue Wert x gehe erst aus einer *unbegrenzten* Fortsetzung des Prozesses hervor, und drückt diese unbegrenzte Fortsetzung durch eine Anzahl angehängte Punkte aus. Man schreibt also

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}} \tag{20}$$

Formal hat man so einen Ausdruck für den genauen Wert x selbst gewonnen. Die Bedeutung der angeschriebenen Gleichung ist aber nur die, daß, wenn man die Bildung an irgendeiner Stelle abbricht, der so gewonnene Näherungswert für x um so genauer ist, je weiter zurück die Stelle liegt, an der man die Entwicklung abgebrochen hat.

Für jede praktische Anwendung der Näherungswerte in der Reihe (19) ist es gut, sich die erreichte Annäherung dadurch klarzumachen, daß man sowohl den wahren Wert x wie die Näherungswerte als einen Dezimalbruch schreibt, indem man sich mit einer bestimmten Genauigkeit, etwa bis auf 3 Stellen, begnügt. Es ergibt sich dann

$$x = 0{,}618$$

und

$$\frac{2}{3} = 0{,}667, \qquad \frac{8}{13} = 0{,}615,$$

$$\frac{3}{5} = 0{,}600, \qquad \frac{13}{21} = 0{,}619,$$

$$\frac{5}{8} = 0{,}625, \qquad \frac{21}{34} = 0{,}618.$$

Hier ist also die Übereinstimmung bis auf die angenommene Stellenzahl erreicht.

Auf Grund der Beziehung

$$x^2 = 1 - x$$

lassen sich aus den Näherungswerten (19) sofort auch die Näherungswerte für das Quadrat des Verhältnisses x ableiten:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8}\ \text{usw.}$$

Damit tritt u. a. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ als ein Näherungswert für das Verhältnis x des Goldenen Schnittes selbst auf. In der Tat ist es von x etwa um $^1/_{25}$, also nicht viel, verschieden. Dieses Verhältnis

$$v = 1 : \sqrt{3}$$

ist nun geradezu ein Nebenbuhler des Goldenen Schnittes. Es ist das Verhältnis der halben Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu dessen Höhe und danach geometrisch sehr einfach zu konstruieren. Um es arithmetisch zu analysieren, entwickeln wir es am besten ebenfalls in einen Kettenbruch. Dieser Kettenbruch wird, wie hier ohne ausführliche Ableitung mitgeteilt sein möge:

$$v = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}$$

Er zeigt also ebenfalls ein sehr einfaches Bildungsgesetz.

Als seine Näherungswerte ergeben sich

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{11}{19},\ \frac{15}{26},\ \frac{41}{71}\ \text{usw.}$$

Das Bildungsgesetz dieser Brüche ist folgendes: Bezeichnen wir vier aufeinanderfolgende, und zwar vom zweiten, vierten, sechsten usw., anfangend, mit

$$\frac{m_0}{n_0},\ \frac{m_1}{n_1},\ \frac{m_2}{n_2},\ \frac{m_3}{n_3},$$

so wird
$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_0 + m_1}{n_0 + n_1},\quad \frac{m_3}{n_3} = \frac{m_1 + 2m_2}{n_1 + 2n_2}.$$

Der Näherungswert $\frac{41}{71}$ wird in allen Fällen praktisch ausreichen, meistens wird sogar der Wert $\frac{4}{7}$ schon als genau genug anzusehen sein.

ZWEITER ABSCHNITT

DIE ÄSTHETISCHE BEDEUTUNG DES GOLDENEN SCHNITTES

Was wir bis jetzt entwickelt haben, ist ein kleines, in sich zusammenhängendes Kapitel der Elementarmathematik, das zweifellos eines gewissen Reizes nicht entbehrt. Irgend etwas Wunderbares ist aber nicht daran, jedenfalls nicht mehr, als irgendwelche an eine zweckmäßige Problemstellung anknüpfende mathematische Entwicklung bietet. Nun ist aber doch von alters her der Goldene Schnitt mit dem Zauber des Geheimnisvollen umkleidet gewesen. Auf dem rein mathematischen Gebiet kann dieses Geheimnisvolle nicht liegen. Wo haben wir es dann zu suchen?

Das Wunderbare ist hier wie häufig einer inneren Veranlagung des Menschen entflossen, die ihn treibt, das Rätselvolle der Welt durch eine mystische Versenkung in die letzten Seinsgründe zu lösen. Aus diesem Trieb heraus ist die philosopnische Ausdeutung mathematischer Formen entsprungen, die bei den Babyloniern, vielleicht schon bei den Ägyptern auftritt und bei den Pythagoreern geradezu zum leitenden Prinzip der Welterklärung gemacht wird. In diese Welterklärung fügt sich auch die Figur des Pentagramms ein, an die wir die Entwicklung des Goldenen Schnittes angeknüpft haben.

Die mystische Ausdeutung der geometrischen Formen steht in engem Zusammenhange mit der gleichen Verwendung der arithmetischen Formen, nämlich der Zahlen. Die beherrschende Rolle, welche die Zahlen in der pythagoreischen Welterklärung spielen, ist bekannt. Unserer nüchternen Auffassung sagt sie nicht mehr zu, sie ist dem Wesen nach durchaus verschieden von der Art und Weise, wie die neuzeitliche Naturwissenschaft die Mathematik auf die Naturerscheinungen anwendet. Bei dieser handelt es sich um die bloße Darstellung der quantitativen Beziehungen in der Formelsprache der Mathematik, nach jener Lehre aber soll die

Schönheit und Vollkommenheit der Schöpfung durch die mathematischen Formen erklärt werden, ohne daß wir manchmal recht einsehen können, ob es sich wirklich um eine natürliche Erklärung auf dieser Grundlage oder um eine bloße symbolische Ausdeutung handelt, oder um beides zugleich.

Hierbei hat immer die trügerische Schlußfolgerung eine große Rolle gespielt, die dieser ganzen Gedankenrichtung zugrunde liegt: Je regelmäßiger, um so vollkommener, und je vollkommener, um so sicherer in der Wirklichkeit anzutreffen muß ein Ding sein. Die Welt soll die Verkörperung der vollendeten Weisheit und Schönheit sein, und deshalb muß sie aus unseren Begriffen von Weisheit und Schönheit ihre Erklärung finden können. Das klassische Beispiel einer solchen Ableitung der Weltordnung ist *Platons Timäus*, bewundernswert und befremdlich zugleich in der Unbefangenheit, mit der die Gedanken über den Bau und die Zusammensetzung der Welt auf der Überlegung, wie der Schöpfer sie am schönsten und weisesten machen mußte, aufgebaut werden. Hier bei Platon findet sich auch eine Stelle, die begreiflich macht, wie sich gerade das Verhältnis des Goldenen Schnittes, nachdem es einmal gefunden war, als das vollkommenste für die ästhetische Bildung der Naturformen darbieten mußte.

Die Aufgabe, von der die Betrachtung ausgeht, ist die: Wie können zwei Teile ein Ganzes werden? Wie kann die einmal vorhandene Verschiedenheit und Getrenntheit sich auflösen in einer Einheit? Die Antwort wird bezeichnenderweise so gesucht, daß sofort an die Stelle des allgemeinen Dingbegriffes der besondere Begriff einer mathematischen Größe gesetzt wird, und zwar wird die mathematische Größe ihrerseits wieder unter dem besonderen Bilde einer geradlinigen Strecke aufgefaßt. Das allgemeine metaphysische Problem wird so in der Form zweier zu einer einzigen Strecke zusammengeschlossenen geradlinigen Strecken angeschaut. Damit, daß die beiden Strecken aneinander gelegt werden und zusammen eine neue Strecke bilden, ist für die griechischen Philosophen aber immer noch nicht gesagt, daß die Teile wirklich im Ganzen aufgehen. Dies geschieht erst dadurch, daß sich das Verhältnis (das Wort nun im mathematischen Sinne verstanden) der Teile zueinander in dem Verhältnis des einen Teiles zum Ganzen wiederholt.

„Daß zwei Dinge", sagt Platon (Timäus VII), „sich auf schöne Art vereinigen ohne ein drittes, ist unmöglich. Denn es muß ein Band zwischen ihnen entstehen, das sie vereinigt. Das kann die Proportion am besten vollbringen. Denn wenn von irgend drei Zahlen die mittlere sich zu der kleinsten verhält wie die größte zu der mittleren selbst und umgekehrt die kleinste zu der mittleren wie die mittlere zur größten, dann wird das Letzte und Erste das Mittlere, und das Mittlere Erstes und Letztes, alles wird also mit Notwendigkeit dasselbe, und da es dasselbe wird, bildet es ein Einziges."

Nun wendet freilich Platon selbst diese Überlegung nicht an, um den Goldenen Schnitt abzuleiten und auf den Bau der Welt anzuwenden. Wer bei Platon Aufschluß über das Verhältnis des Goldenen Schnittes und seine vermeintliche Bedeutung für die Weltbildung erwartet, findet sich daher zunächst enttäuscht. Die Enttäuschung wächst noch, wenn man sieht, daß Platon die Welt zwar auf geometrischen Formen aufbaut, aber auf ganz anderen als solchen Figuren, die das Verhältnis des Goldenen Schnittes zeigen. Es sind ebene Figuren, weil, wie Platon meint, der Raum entsteht, indem zu den zwei Dimensionen der ebenen Fläche eine dritte Dimension (die Tiefe) hinzukommt. Die ebene Grundfigur ist aber, sagt Platon, das rechtwinklige Dreieck, und solcher Dreiecke gibt es zwei Arten, eines mit gleichen und eines mit ungleichen Katheten. Von dem ersteren gibt es nur eine Form, von dem letzteren unendlich viele. Unter diesen unendlich vielen müssen wir die schönste aussuchen, wenn wir systematisch vorgehen wollen. Das schönste rechtwinklige Dreieck, erklärt nun Platon, ist das Dreieck, in dem die Hypotenuse doppelt so groß ist wie die kleinere Kathete und das die Hälfte eines gleichseitigen Dreieckes bildet. Damit ist aber ein anderes Verhältnis, nämlich das Verhältnis $1 : \sqrt{3}$ der Katheten in diesem rechtwinkligen Dreieck, angegeben, das geradezu an die Stelle des Goldenen Schnittes treten kann und das in der Tat in gewisser Weise einen Nebenbuhler des Goldenen Schnittes gebildet hat.

Wenn man nun aber näher zusieht, bemerkt man doch, daß die Beseitigung des Goldenen Schnittes nur eine scheinbare ist. Was Platon auf den zwei Arten rechtwinkliger Dreiecke aufbaut, ist nämlich nur die irdische Welt. Er vereinigt die gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke zu Quadraten, die ungleichschenkligen zu gleichseitigen Dreiecken. Aus den Quadraten bildet er die Würfel, aus den gleichseitigen Dreiecken drei regelmäßige Vielflache: Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder. Diese vier Figuren weist er den irdischen Elementen zu, den Würfel der Erde, der festgefügten, unwandelbaren, die übrigen drei den beweglichen, in beständigem Wechsel einander ablösenden Elementen Feuer, Luft und Wasser.

Es bleibt nun aber noch ein regelmäßiger Körper übrig, das Dodekaeder, dessen Seitenflächen regelmäßige Fünfecke sind. Dieser Körper allein versinnbildlicht die Ordnung der himmlischen Welt. und da, wie wir gesehen haben, das Verhältnis des Goldenen Schnittes an das regelmäßige Fünfeck gebunden erscheinen mußte, so wird dieses Verhältnis auch das herrschende in der himmlischen Welt. Die Auffassung, die Platon vorträgt, ist sicher der pythagoreischen wenigstens eng verwandt, sie ist ja auch dem Pythagoreer Timäus in den Mund gelegt. Sie mutet ganz an wie der Ausfluß eines bestimmten Systems. So ist sie auch der Zeit erschienen, die sie mit der Platonischen Philosophie zuerst wieder aufgriff, der italienischen Frührenaissance.

Aus dieser Zeit, nämlich aus den letzten Jahren des fünfzehnten Jahrhunderts stammt die erste selbständige Schrift über den Goldenen Schnitt, die von dem Minoritenfrater *Luca Pacioli* verfaßt ist und den Titel trägt: *Divina proportione*, Das göttliche Verhältnis. Von dem Werk und der angeschlossenen Abhandlung über die Architektur besitzen wir eine allerdings etwas mangelhafte Neuausgabe von C. Winterberg mit deutscher Übersetzung (Quellenschriften für Kunstgeschichte und Kunsttechnik des Mittelalters und der Neuzeit, Neue Folge, 2. Band, Wien 1889, Carl Graeser). Im übrigen wird man sich, wenn man von dem Buche einen selbständigen und wertvollen Inhalt erwartet, enttäuscht finden. Es ist in seiner genauen Wiedergabe einzelner Teile aus den Elementen des Euklid, auf die es sich im wesentlichen beschränkt, vielmehr ein Beweis dafür, wie mühsam man sich in jener Zeit noch mit der Geometrie zurechtfand und wie wenig man sich über das Studium des großen griechischen Lehrmeisters erheben konnte.

Bei Luca Pacioli ist das deutliche Streben vorhanden, der Kunst eine feste geometrische Grundlage zu schaffen, aber über die Wiederholung und Erklärung dessen, was bei Euklid steht, vermag er doch nicht hinauszukommen. Er war persönlich mit *Lionardo da Vinci* befreundet, auf dessen geometrische Studien er sicher nicht ohne Einfluß geblieben ist. Den venetianischen Maler *Jacopo de' Barbari* hat er in der Geometrie unterwiesen, und dieser malte aus Dankbarkeit ein Bild, das ihn selbst neben seinem Lehrer darstellt. Vor den beiden steht auf dem Tische das Dodekaeder, an dem sich das Verhältnis des Goldenen Schnittes offenbart, und in der freien Ecke links oben ist mit großer Liebe und Sorgfalt ein merkwürdiger Körper dargestellt, dessen Begrenzung aus Quadraten und gleichseitigen Dreiecken besteht. Dieser Körper ist durch einen seine Höhe hälftenden Schnitt in zwei Teile geteilt, und dieser Schnitt soll die Kanten, die er trifft, nach dem Verhältnis des Goldenen Schnittes zerlegen.[1])

Die Heraushebung des Goldenen Schnittes ist aber durch kein geometrisches Interesse veranlaßt, sondern durch das Zurückgreifen auf die alte pythagoreische Ausdeutung bestimmter Zahlenverhältnisse als der Grundlagen der Weltordnung. Der Verfasser begründet dies selbst dadurch, daß sich in der Proportion des Goldenen Schnittes wunderbare Eigenschaften finden, die Gott selbst zukommen und von denen er die folgenden fünf heraushebt:

„Die erste ist, daß sie nur allein da sei und nicht mehr: und es ist nicht möglich, andere Arten noch Abweichungen von ihr anzugeben, welche Einheit nach der theologischen wie auch der philosophischen Lehre das höchste Beiwort Gottes selber ist. Die zweite Eigenschaft ist die der Heiligen Dreieinigkeit, d. h. wie in dem Göttlichen ein und dieselbe Substanz zwischen drei Personen, Vater, Sohn und Heiligem Geist, besteht, ebenso muß ein und dieselbe Proportion dieser Art stets zwischen drei Ausdrücken stattfinden und kann sich nie weder bei mehr noch bei weniger Ausdrücken wie-

1) Eine Wiedergabe des Bildes findet sich in G. Wolff, Mathematik und Malerei (Math.-phys. Bibl. 20/21). Leipzig, Teubner, 1916.

derfinden. Die dritte Eigenschaft ist, daß, wie Gott eigentlich nicht definiert noch durch Worte uns verständlich gemacht werden kann, ebensowenig diese unsere Proportion durch eine angebbare Zahl je bestimmt noch durch irgendeine rationale Größe sich ausdrücken läßt, sondern stets verborgen und geheim bleibt und daher von den Mathematikern irrational genannt wird. Die vierte Eigenschaft ist, daß, ebenso wie Gott sich niemals ändern kann und alles in allem und alles in jedem seiner Teile ist, so unsere vorliegende Proportion stets in jeder kontinuierlichen und diskreten Größe, mögen diese Teile groß oder klein sein, dieselbe und stets unveränderlich bleibt und auf keine Art sich verändern noch auch mit dem Verstande auf andere Art aufgefaßt werden kann. Die fünfte Eigenschaft kann nicht mit Unrecht zu den vorgenannten hinzugefügt werden, nämlich: wie Gott das Dasein auf die himmlische Tugend, mit anderem Namen fünfte Substanz genannt, und mittels dieser auf die anderen vier einfachen Körper überträgt, nämlich auf die vier Elemente Erde, Wasser, Luft und Feuer, und mittels dieser das Dasein auf jedes andere Ding in der Natur, so gibt diese unsere heilige Proportion nach Plato in seinem Timäus dem Himmel selbst das formale Dasein, indem sie ihm die Gestalt des Dodekaeder genannten Körpers beilegt, der ohne unsere Proportion unmöglich gebildet werden kann."

Eine solche metaphysische Ausdeutung des Goldenen Schnittes will nun freilich dem modernen kritischen Geiste wenig behagen. Sie schmeckt zu viel nach Aberglauben und zu wenig nach Wissenschaft. Sie erscheint uns nur als eine merkwürdige Verirrung des menschlichen Forschergeistes, aber nicht als eine ernsthafte Erkenntnis. Und doch stellen sich solche metaphysische Hintergedanken, wenn auch in anderer Form, nur zu leicht und zu oft ein, sowie sich das Nachdenken auf den Ursprung und die Bedeutung der Formen des Seins richtet, und gerade der Goldene Schnitt hat immer wieder gelockt, den Weg in das Zauberland der Metaphysik zu suchen.

Es ist nun freilich nicht notwendigerweise mit einem metaphysischen Einschlag verbunden, wenn wir das Verhältnis des Goldenen Schnittes als eine allgemeine Naturnorm feststellen sollten. Vielmehr könnte es sich hierbei um ein Erfahrungsgesetz handeln, das in einer Linie mit anderen Naturgesetzen steht. Allerdings läßt sich von vornherein stark bezweifeln, daß sich durch die Vielgestaltigkeit der Naturformen, deren Abmessungen doch nicht wie das Werk des Künstlers durch ästhetische Erwägungen, sondern durch kausale Zusammenhänge bestimmt sind, ein festes Abmessungsverhältnis hindurchziehen sollte.

Wo der Versuch gemacht wird, ein solches Proportionsgesetz in der Natur zu finden, drängt sich in die Naturerklärung ein anderes Grundprinzip als das der kausalen Verknüpfung ein, und damit tritt die Erklärung doch immer auf den Boden der Metaphysik. Dies zeigt sich deutlich an dem Manne, der die durchgehende Gestaltung nach dem Goldenen Schnitt in den Gebilden der Natur am entschiedensten und folgerichtigsten vertreten hat, ich meine *Zeising* (Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, Leipzig 1854). Er spricht selbst den leitenden Grundgedanken dahin aus, daß in einem auf dem Goldenen Schnitt aufgebauten Verhältnis der Teile „überhaupt das Grundprinzip aller nach Schönheit und Totalität drängenden Gestaltung im Reich der Natur wie im Gebiet der Kunst enthalten ist und daß es von Uranfang an allen Formbildungen und formellen Verhältnissen, den kosmischen wie den individualisierenden, den organischen wie den anorganischen, den akustischen wie den optischen, als höchstes Ziel und Ideal vorgeschwebt, jedoch erst in der Menschengestalt seine vollkommenste Realisation erfahren hat."

In dieser weitgehenden Form ein Proportionsgesetz in der Natur anzunehmen, ist erst möglich, nachdem seine durchgehende Gültigkeit fest und sicher nachgewiesen ist. Das ist aber auch durch die auf Zeising folgende Arbeit von *Franz Xaver Pfeifer* (Der Goldene Schnitt, Augsburg 1885) nicht geschehen, obwohl dieser bereits photographische Aufnahmen natürlicher Gegenstände mit den dazugehörigen Messungen gibt (vgl. Fig. 4) und das Reich der Natur in ziemlicher Ausdehnung durchwandert. In zwei verschiedenen Richtungen erwecken diese Untersuchungen Bedenken. Zunächst sind die Messungen nicht nach einem scharfen und einheitlichen Prinzip ausgeführt. Es liegt auf der Hand, daß dabei ein gewisser Spielraum bleibt in der Aus-

Fig. 4.

wahl der Abstände, die man mißt, und daß man suchen wird, die Messung so auszuwählen, wie sie das gewünschte Verhältnis liefert. Sodann liegt auch die Befürchtung nahe, daß der Messung von vornherein solche Gegenstände unterworfen werden, bei denen nach dem Augenmaß schon das Verhältnis zu mmen scheint. Es ist klar, daß, wenn die vorkommenden Verhältnisse in einem gewissen Spielraum schwanken, gelegentlich auch ein mit dem Goldenen Schnitt übereinstimmendes Verhältnis vorkommen wird. Wenn man daher die Naturformen passend heraussucht und ebenso den Teil, den Zweig oder das Glied, an dem man die Messung ausführt, so ist es nicht zu verwundern, wenn man ein scheinbar günstiges Ergebnis erzielt.

Dazu kommt noch, daß ein mit dem Verhältnis des Goldenen Schnittes zwar nicht übereinstimmendes, aber sozusagen nach derselben Richtung hin liegendes Proportionsgesetz in der Natur tatsächlich erfüllt zu sein scheint. Dieses Gesetz kann so formuliert werden: Bei der Aufeinanderfolge der Größe nach abnehmender, gleichartiger Teile geschieht die Abnahme, wenn keine störenden Einflüsse wirksam sind, in geometrischer Progression, ebenso auch, wo die Teile zunehmen, die Zunahme. Das eine ist an sich dasselbe wie das andere, nur wird die Aufeinanderfolge in der umgekehrten Richtung betrachtet. Die Richtung ist aber in der Natur durch die zeitliche Folge des Wachstums gegeben. Entweder sind die größten oder die kleinsten Teile die ältesten, aus denen die anderen hervorgehen. Man hat dieses Gesetz wohl als das Gesetz des natürlichen Wachstums bezeichnet. Daß, wo es erfüllt ist, gelegentlich auch das Verhältnis des Goldenen Schnittes vorkommt, wenn nicht genau, so doch angenähert, liegt auf der Hand. Daß es aber durchgängig vorkommt, ist sicher eine zu weitgehende Behauptung. Eine Prüfung der Frage würde jedoch die Grenzen, die uns hier gesteckt sind, weit übersteigen.

Ebenso können wir auch das besondere Gebiet nur kurz streifen, auf dem die Anwendung des Goldenen Schnittes am verlockendsten erscheint, die Lehre von den Verhältnissen der menschlichen Gestalt. Wie Zeising die auf dem Goldenen Schnitt beruhenden Zahlenverhältnisse hier anwendet, zeigt die nebenstehende Fig. 5. Der Mensch wird ja von dem bildenden Künstler als das vollkommenste Gebilde der Natur angesehen. Der Mensch ist darum jederzeit auch als der höchste und würdigste Gegenstand der bildenden Kunst betrachtet worden, und es ist deswegen immer als eine der vornehmsten künstlerischen Aufgaben erschienen, den menschlichen Körper auch in seinen Verhältnissen richtig darzustellen.

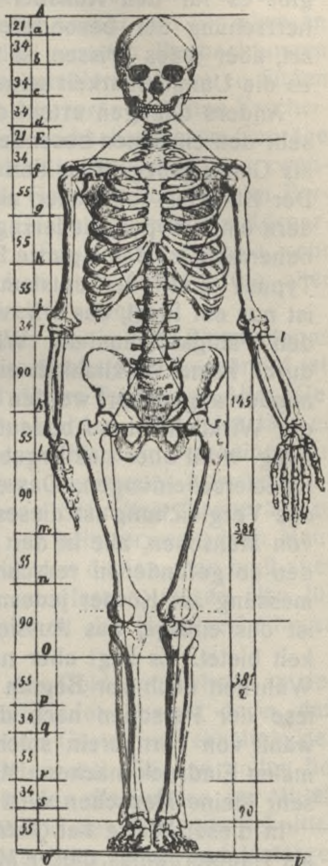

Fig. 5.

Es gehen nun in der Kunst zwei Richtungen scharf auseinander, die als Realismus und Idealismus bezeichnet werden. Nach der realistischen Auffassung, ist es überflüssig und aussichtslos, bestimmte Normen für die Verhältnisse des menschlichen Körpers aufzustellen. Denn was dem Künstler zur Darstellung vorliegt, ist immer der einzelne besondere Körper. Die einzelne Erscheinung aber muß für sich und ohne alle Befangenheit und Voreingenommenheit, wie sie durch eine vorher eingeprägte Norm bedingt wird, aufgefaßt werden. Darum gibt es für den Künstler nur die Beobachtung und Beherrschung der besonderen Technik seiner Darstellungsart, aber jedes Wissen ist für den Künstler gefährlich, weil es die Unmittelbarkeit seiner Beobachtung trübt und fälscht.

Anders dagegen urteilt der Idealismus. Er sieht nicht so sehr den einzelnen besonderen Menschen wie den Menschen als Gattungsbegriff als den Gegenstand der Nachbildung an. Der Künstler soll daher nicht ein bestimmtes Modell, sondern einen Typus wiederzugeben trachten. Diese Auffassung beherrscht z. B. die ganze Renaissance. Was aber ist dieser Typus? Entweder entstammt er der Wirklichkeit oder er ist nur ein Ideal, das wir vermöge einer uns innewohnenden Fähigkeit aus der Wirklichkeit abstrahieren und das durch keine Wirklichkeit erreicht, sondern nur mehr oder minder angenähert werden kann. Entstammt der Typus aber der Wirklichkeit, so bedeutet er nicht die einzelne Erscheinung, wohl aber das Ergebnis der Vergleichung sehr vieler Einzelerscheinungen. Das einfachste Verfahren für eine solche Vergleichung ist dieses: man mißt eine größere Anzahl von Menschen, alle in der gleichen Weise, und nimmt von den so gefundenen verschiedenen Werten für dieselbe Abmessung am Körper jedesmal das Mittel. Dieses Verfahren ist das einzige, das Aussicht auf praktische Durchführbarkeit bietet. Es liegt aber nahe, daß hierbei auch wieder in Wahrheit doch vor Beginn der Messung eine gewisse Auslese der Personen nach dem Augenmaß stattfindet. Man wählt von vornherein solche Personen aus, die einen normalen Eindruck machen. Mißgestaltete und sehr große oder sehr kleine Menschen wird man ausschalten.

In dieser Weise hat *Quételet*[1]) Messungen ausgeführt und als Hauptergebnis dieser Messungen gefunden, daß wenigstens bei der europäischen Rasse die Verhältnisse der Körperteile festbestimmte sind. Zwar seien die Menschen, als Einzelwesen betrachtet, so verschieden, daß es auf den

1) Des proportions du corps humain, Bulletin de l'Académie royale de Belgique, Tome 15, I, p. 583; II, p. 16. Vgl. auch sein Werk: L'anthropométrie, Bruxelles 1871.

ersten Blick unmöglich scheine, nach einem Normaltypus der menschlichen Gestalt zu suchen. Dennoch gebe es einen solchen, und um ihn zu entdecken, brauche man seine Untersuchungen nicht auf eine große Anzahl von Einzelwesen auszudehnen, sondern schon die genauen Beobachtungen von einigen sei hinreichend, um den Normaltypus zu finden und zu erkennen, daß es unter den veränderlichen Erscheinungen vielleicht keine gebe, die von bestimmterem Gepräge sei als der Mensch. Er nahm dreißig Menschen von zwanzig Jahren und teilte sie in drei Gruppen von je zehn Personen, jedoch so, daß bei jeder Gruppe die mittlere Körpergröße annähernd dieselbe war. Dann fand er eine sehr große Übereinstimmung zwischen den Mittelwerten aller Messungsergebnisse bei den drei Gruppen.

Wenn so das Aufsuchen eines bestimmten Normaltypus im menschlichen Körperbau wissenschaftlich begründet ist, so muß doch die Abhängigkeit dieses Typus von Alter, Geschlecht und Körpergröße betont werden. Alles das läßt es von vornherein als nicht sehr aussichtsreich erscheinen, an der menschlichen Gestalt ein ganz bestimmtes Abmessungsverhältnis wie das des Goldenen Schnittes ausgeprägt zu finden. Man wird es natürlich nur beim erwachsenen Menschen mittlerer Körpergröße erwarten dürfen, man muß aber doch beide Geschlechter zusammenfassen, würde also für Mann und Frau die Gemeinsamkeit der Hauptverhältnisse annehmen müssen.

Die einfachste Art, wie man den Goldenen Schnitt an der menschlichen Gestalt ausgeprägt findet, besteht darin, daß die ganze Körpergröße durch den Gürtel im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt werden soll. Ebenso sollen bei herabhängenden Armen und Händen die Spitzen der Mittelfinger die ganze Höhe im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilen. Die bekannte Regel, daß Stirn, Nase und Untergesicht gleich hoch sind, wird dadurch wohl ergänzt, daß der Mund das Untergesicht im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt. Die Augenbrauen sollen die ganze Kopfhöhe im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilen usw.

Alles das sind zunächst offenbar nur Faustregeln, die keinen Anspruch auf strenge Gültigkeit haben, die bloß bewirken, daß, wenn ein Bild ihnen gemäß gezeichnet wird, es einen natürlichen und richtigen Eindruck macht. Sie sind von derselben Art wie die beiden bekannten Sätze des *Vitruv*, daß man dem mit ausgebreiteten Armen stehenden Menschen ein Quadrat umschreiben kann, dessen Mittelpunkt auf die Geschlechtsteile fällt, und daß sich die menschliche Gestalt mit gespreizten Beinen und hochgereckten Armen auch einem Kreis einfügt, dessen Mittelpunkt in den Nabel fällt.

Eine solche geometrische Annäherung an die als Norm geltenden Proportionen scheint sich auf die Dauer als vorteilhafter und der arithmetischen Anwendung des Goldenen Schnittes überlegen zu erweisen. Insbesondere hat der Maler *C. Schmidt* (Proportionsschlüssel, Stuttgart 1849) ein einfaches geometrisches System erdacht, das sehr gut zu stimmen scheint (s. Fig. 6). Es ist von *G. Fritsch* (Die Gestalt des Menschen, Stuttgart 1899) aufgenommen worden. Dagegen haben *Joh. Bochenek* (Die männliche und weibliche Normalgestalt, Berlin 1875; Canon aller menschlichen Gestalten, Berlin 1885) und *A. Goeringer* (Der Goldene Schnitt und seine Beziehung zum menschlichen Körper, Schöpping 1893) an dem Prinzip des Goldenen Schnittes festgehalten.

Wir können offenbar das ganze Proportionsproblem so auffassen: Es handelt sich um eine Annäherung bestimmter Durchschnitts- oder Normalwerte, die sich an der wirklichen Gestalt des Menschen ergeben; diese Annäherung geschieht entweder durch einfache Zahlwerte, wie es z. B. *Dürer* in seiner Schrift Von menschlicher Proportion, 1528, und *Schadow* in seinem Polyklet, 1834, getan haben, oder durch gewisse arithmetische oder geometrische Konstruktionen. Selbst eine noch so gute auf diese Weise erzielte Übereinstimmung gibt aber kein Recht, daraus auf ein „Gesetz" zu schließen, so wenig man z. B. ein Gesetz darin zu erblicken hat, daß die Zahl $\frac{1}{\pi}$ durch den Bruch $\frac{113}{355}$ mit ungeheurer Annäherung dargestellt wird. Bei dem für die Proportionen gewählten Annäherungsverfahren kann gelegentlich auch der Goldene Schnitt auftreten. Alle Versuche aber, den Goldenen Schnitt als das vorherrschende Verhältnis und damit als eine allgemeine Naturnorm zu erklären, müssen sehr skeptisch aufgenommen werden, bis durch die Biometrie, die systematische Messung der Lebewesen, ein Wissenszweig, der gegenwärtig in mächtigem Aufblühen begriffen ist, der bundige Beweis erbracht ist.

Ganz anders liegt dagegen die Frage, ob das Verhältnis

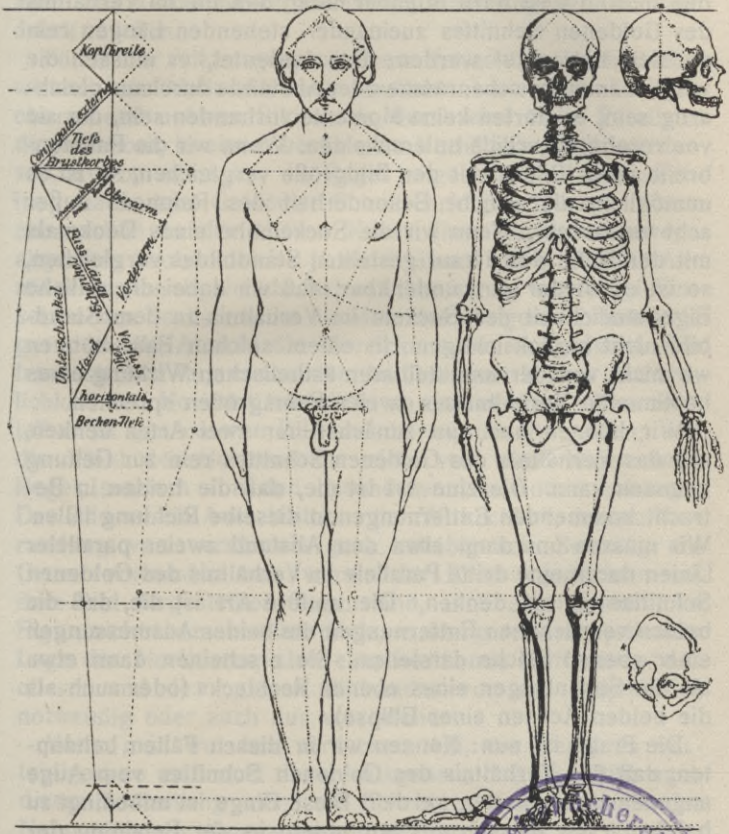

Fig. 6.

des Goldenen Schnittes vermöge einer uns innewohnenden seelischen Veranlagung auf uns, wo wir es antreffen, einen besonders wohlgefälligen Eindruck macht, womit die Verwendung dieses Verhältnisses in der bildenden Kunst in engstem Zusammenhange stehen würde.

Bevor wir aber auf diese Frage eingehen, müssen wir feststellen, wie überhaupt der Goldene Schnitt unmittelbar in die Erscheinung treten kann, derart, daß er wirklich als das ausschlaggebende ästhetische Moment angesehen werden muß. Es ist dazu offenbar nötig, daß die im Verhältnis des Goldenen Schnittes zueinander stehenden Längen rein an sich betrachtet werden. Das bedeutet, es müssen die verglichenen Zwischenräume oder Abstände durchaus gleichartig sein, es dürfen keine Momente vorhanden sein, die sie von vornherein artlich unterscheiden. Wenn wir die Rahmenbreite eines Bildes mit der Bildgröße vergleichen, so ist es unmöglich, die artliche Besonderheit des Rahmens außer acht zu lassen. Wenn wir die Sockelhöhe eines Denkmals mit der Höhe des darauf gestellten Standbildes vergleichen, so ist es wieder ganz undenkbar, daß wir dabei die artliche Eigentümlichkeit des Sockels im Verhältnis zu dem Standbild nicht berücksichtigen. In einem solchen Falle können wir nicht von der unmittelbaren ästhetischen Wirkung eines bestimmten Verhältnisses zweier Raumgrößen sprechen.

Wir können uns nun zunächst nur zwei Arten denken, wie das Verhältnis des Goldenen Schnittes rein zur Geltung kommen kann. Die eine Art ist die, daß die beiden in Betracht kommenden Entfernungen in dieselbe Richtung fallen. Wir müssen uns dann etwa den Abstand zweier paralleler Linien durch eine dritte Parallele im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt denken. Die andere Art ist die, daß die beiden verglichenen Entfernungen die beiden Ausmessungen einer ebenen Fläche darstellen. Sie erscheinen dann etwa als die Seitenlängen eines ebenen Rechtecks (oder auch als die beiden Achsen einer Ellipse).

Die Frage ist nun: Können wir in diesen Fällen behaupten, daß das Verhältnis des Goldenen Schnittes vom Auge angenehm empfunden werde? Diese Frage ist unbedingt zu bejahen. Wir müssen uns nur hüten, in der Bejahung der so gestellten Frage mehr zu sehen, als darin liegt.

Es liegt vor allen Dingen darin nicht, daß das Verhältnis des Goldenen Schnittes das einzige ist, das von dem Auge angenehm empfunden wird, und es liegt deshalb durchaus nicht darin, daß an sich die angenehme ästhetische Wirkung eine besondere Eigentümlichkeit des Goldenen Schnittes sei.

In der Tat können wir bei der Teilung nach nur einer Dimension, etwa wenn wir ein Band abwechselnd in Abschnitte von zwei verschiedenen Farben teilen, feststellen, daß ganz andere Verhältnisse wie das des Goldenen Schnittes, vor allem das Verhältnis der Gleichheit, einen angenehmen Eindruck machen.

Für Bilder mit ausgesprochenem Horizont, bei denen also wirklich der Abstand zweier parallelen Linien, nämlich des oberen und unteren Bildrandes, durch eine dritte Parallele, den Horizont, in einem bestimmten Verhältnis geteilt werden soll, ist von alters her die Regel aufgestellt, daß diese Teilung nach dem Goldenen Schnitt erfolgen müsse. Wenn aber schon in der älteren Kunst diese Regel keineswegs allgemein beobachtet ist, ja nicht einmal mit entfernter Annäherung durchgehends festzustellen ist, so wurde bei Einsetzen des Realismus um die Mitte des vorigen Jahrhunderts geradezu mit Absicht die Abweichung von ihr gesucht. Die französischen Impressionisten brachten mit kecker Absichtlichkeit den Horizont teils dicht an den oberen, teils unmittelbar an den unteren Bildrand heran, um zu zeigen, daß die Wahl der Horizonthöhe nicht von einer allgemeinen Regel, sondern von den besonderen Umständen abhänge. Das Bild sei ein Ausschnitt aus der Wirklichkeit, dessen Umrandung von vornherein ganz beliebig sei. Sowenig ein Grund vorhanden sei, warum der Rand irgendeinen auf dem Bild dargestellten Gegenstand, auch eine menschliche Figur, nicht überschneiden dürfe, so wenig sei eine bestimmte Lage des Horizontes, also eine bestimmte Entfernung des oberen und des unteren Bildrandes von der Augenhöhe, notwendig oder auch nur vorzuziehen.

Wenn man trotzdem versuchen will, die Regel zu verteidigen, so muß man davon ausgehen, daß das Bild nach dieser Auffassung nicht ein beliebiger Ausschnitt aus der Natur, sondern abgesehen von der Beziehung zur Wirklichkeit ein Gebilde in sich, eine künstlerische Komposition in der Fläche, ist. Nehmen wir nun einmal den ganz einfachen Fall eines Seebildes, das nur Meer und Himmel darstellt, beide geschieden durch den geradlinigen Horizont. Dann enthält das Bild zwei Massen, Meer und Himmel, die gegeneinander abgewogen werden sollen. Dabei soll eine überwiegen, denn die artliche Verschiedenheit beider bringt ein Betonen des einen oder anderen Teiles mit sich, weil die innerliche Unähnlichkeit bei äußerlicher Gleichheit der zur Darstellung benutzten Flächen unangenehm, wie etwas Unnatürliches und das Gleichgewicht Störendes, empfunden würde. Das eine, Meer oder Himmel, soll also dem anderen gegenüber bevorzugt werden, aber ohne Übertreibung. Es soll nicht eines gegen das andere völlig vernachlässigt werden. Das führt dazu, einen Mittelweg zu suchen zwischen Gleichheit und übertriebener Verschiedenheit.

Warum wählt man aber bei einer solchen Höhenteilung gerade das Verhältnis des Goldenen Schnittes? Wenn dafür eine Erklärung möglich sein sollte, könnte sie nur in folgendem liegen. Wir müssen uns fragen: wie geschieht überhaupt die Vergleichung der beiden Teile? Jedenfalls so, daß sich das Auge die kleinere Entfernung wie mit dem Zirkel heruntergeholt und auf die größere gelegt denkt. Unbefriedigt fühlen wir uns in den zwei Fällen, wo der dann verbleibende Rest klein gegen die heruntergeholte Entfernung, und wo er groß gegen sie, vielleicht nahezu ebenso groß ist. Wenn wir dagegen das ursprüngliche Verhältnis der beiden Teile, wie es bei dem Goldenen Schnitt der Fall ist, wiederfinden zwischen dem auf den größeren gelegten kleineren Teil und dem verbleibenden Rest, so empfinden wir eine gewisse Ruhe und Sicherheit, den Eindruck des in sich Gefestigten (Fig. 7).

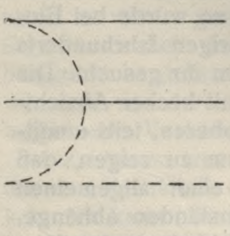

Fig. 7.

Auf ähnliche Weise ließe sich vielleicht auch erklären, daß bei Rechtecken ein Verhältnis der Seiten entsprechend dem Goldenen Schnitt als das angenehmste empfunden wird. Man müßte sich denken, daß, um die beiden Seitenlängen zu vergleichen, in der Vorstellung die kürzere Seite auf die längere heruntergeklappt und dann der verbleibende Rest mit der kürzeren Seite wieder verglichen wird (Fig. 8). Wieder würde dann, wenn hierbei das ursprüngliche Verhältnis wiederkehrt, der ruhige und sichere

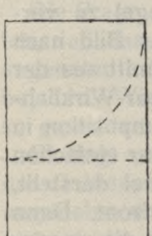

Fig. 8.

Eindruck des sich Gleichbleibenden in der Verschiedenheit erreicht werden, worauf nach *Hogarth* überhaupt der ästhetische Eindruck beruht. Daß überhaupt eine Verschiedenheit angestrebt wird, hat einen ähnlichen Grund wie bei der Teilung des Bildes durch den Horizont. Die Seiten des Rechteckes haben verschiedene Wertigkeit, und das muß sich auch in ihren Abmessungen ausprägen. Nehmen wir nur den Fall eines Buches. Dann ist der Rücken den Schnitträndern gegenüber von vornherein herausgehoben und verlangt meist eine stärkere Betonung. Ebenso ist es bei einem rechteckigen Kasten mit der Seite, die das Scharnier enthält. Bei einem Bildrahmen verlangen die vertikalen und horizontalen Seiten ihrer verschiedenen Bedeutung nach eine verschiedene Betonung. Wo durchaus alle Seiten gleichartig sind, wie bei den Platten einer Fußbodentäfelung oder den Kacheln eines Ofens, wird man gewöhnlich auch die quadratische Form vorziehen.

Nun werden sicher gelegentlich ganz andere Verhältnisse wie das des Goldenen Schnittes gewählt, ja diese kommen so in Gebrauch, daß sie das Verhältnis des Goldenen Schnittes ganz verdrängen. Das ist aber durchaus kein Grund dagegen, daß an sich das Verhältnis des Goldenen Schnittes doch das vorzüglichste ist. Es gibt keinen so mächtigen ästhetischen Eindruck, der nicht durch die Mode zurückgedrängt werden könnte. Bei der Kleidertracht ist das eine ganz gewöhnliche Erfahrung. Fast jede neue Kleidermode wird von der Allgemeinheit zuerst als häßlich und später, wenn sie Verbreitung erlangt hat, als die allein befriedigende empfunden. Anderseits läßt aber gerade der beherrschende Einfluß der Gewöhnung den Verdacht aufkommen, daß es auch nur die Gewöhnung ist, die uns an dem Verhältnis des Goldenen Schnittes festhalten läßt, nachdem er einmal auf Grund einer theoretischen, aber an sich der Ästhetik fremden Erwägung angenommen ist.

In der Tat muß die Gewöhnung sehr stark sein, denn unzählige der Gegenstände, die uns umgeben, zeigen in ihren Abmessungen das Verhältnis des Goldenen Schnittes. So ist es mit den Blättern der Fall, auf denen ich diese Betrachtungen niedergeschrieben habe, und es gilt ebenso von dem Satzspiegel der Bögen, auf denen sie gedruckt sind. Bücherformate, Lichtbilder, Einlaßkarten, Briefbögen, Schiefertafeln, Kisten, Kasten, Schachteln, Mappen, Aktentaschen, Kuchen, alles mögliche wird nach dem Grundsatz des Goldenen Schnittes teils bewußt, teils unbewußt gestaltet. Die Gewöhnung an den Goldenen Schnitt ist daher zweifellos vorhanden, und es kann durch Versuche nicht entschieden werden, wie dieses Verhältnis auf unbefangene Personen einwirkt, man müßte denn schon mit Säuglingen oder Botokuden experimentieren. Wir müssen von vornherein erwarten, daß bei der Auswahl von Rechteckformen durch eine Anzahl von Versuchspersonen eine Bevorzugung des Goldenen Schnittes herauskommen wird. Was aber wichtig bleibt festzustellen, ist, wie stark, wie sicher und wie scharf die Bevorzugung ist. Dies getan zu haben, ist das Verdienst von *G. Th. Fechner* (1876)[1]. Die Ergebnisse, zu denen er gelangte, indem er einer Reihe von Versuchspersonen 10 Rechtecke mit bestimmten Seitenverhältnissen vorlegte und sie das ihnen am meisten zusagende Rechteck auswählen ließ, sind in der Tabelle auf Seite 47 zusammengestellt. Dabei sind folgende Abkürzungen gebraucht: *V* Seitenverhältnis, *Z* Zahl der Vorzugsurteile, *z* Zahl der Verwerfungsurteile, *m.* männliche, *w.* weibliche Versuchspersonen.

Das erste Verhältnis 1 : 1 liefert das Quadrat. Das Verhältnis 34 : 21 ist in genügender Annäherung das Verhältnis des Goldenen Schnittes. Merkwürdigerweise ergeben sich für die diesem Rechteck auf beiden Seiten benachbarten Rechtecke nahezu dieselben Zahlen, wofür der Verfasser, wie er gesteht, keine Erklärung anzugeben vermag. Die Versuchsergebnisse sind an sich für den Goldenen Schnitt sehr günstig. Er erscheint sozusagen wirklich als die Norm, welcher das allgemeine Empfinden zustrebt.

Im einzelnen bemerkt Fechner noch zu den Versuchen: „Nur in sehr wenigen Fällen wurde ein Urteil ganz verwei-

---

1) Vorschule der Ästhetik I 2. A. 1897, S. 190ff. Die Versuche wurden fortgeführt von Witmer, (Philosophische Studien 1894) mit etwas veränderter Anordnung, aber im großen und ganzen ähnlichen Ergebnissen. Dagegen brachte Segal (Archiv f. Psychologie 1906) den von Fechner ausgeschalteten Einfühlungsfaktor hinein und kam daher zu anderen Schlüssen.

V	Z		z		Z in Prozent	
	m.	w.	m.	w.	m.	w.
$\frac{1}{1}$	6,25	4,0	36,67	31,5	2,74	3,26
$\frac{6}{5}$	0,5	0,33	28,8	19,5	0,22	0,27
$\frac{5}{4}$	7,0	0,0	14,5	8,5	3,07	0,00
$\frac{4}{3}$	4,5	4,0	5,0	1,0	1,97	3,36
$\frac{29}{20}$	13,33	13,5	2,0	1,0	5,85	11,35
$\frac{3}{2}$	50,91	20,5	1,0	0,0	22,33	17,22
$\frac{34}{21}$	78,66	42,65	0,0	0,0	34,50	35,83
$\frac{23}{13}$	49,33	20,21	1,0	1,0	21,64	16,99
$\frac{2}{1}$	14,25	11,83	3,83	2,25	6,25	9,94
$\frac{5}{2}$	3,25	2,0	57,21	30,25	1,43	1,68
Summe	228	119	150	95	100,00	100,00

gert, aber auch nur in wenigen Fällen, obwohl es deren einige gab, war das Urteil sehr entschieden und sicher. Meist fand längeres Schwanken statt; und wenn man sich schon für ein Rechteck entschieden hatte, zog man nachher manchmal bei demselben Versuch, sich korrigierend, noch ein anderes vor oder man blieb zwischen zwei, drei oder gar vier Rechtecken schwankend. Wurde der Versuch mit denselben Personen zu einer anderen Zeit, nachdem der Eindruck des Frühern erloschen war, wiederholt, wie es einige Male geschah, so wurde statt des beim vorigen Versuche vorgezogenen Rechtecks nicht selten ein anderes, dem Verhältnisse nach benachbartes, vorgezogen. Trotz dieser Unsicherheit im einzelnen zeigt doch die obige Tabelle sehr entschiedene Resultate im ganzen."

Gerade diese Unsicherheit in der Auswahl, die Fechner hervorhebt, läßt beinahe darauf schließen, daß wir nicht an sich zu der Bevorzugung des durcn den Goldenen Schnitt gegebenen Verhältnisses veranlagt sind. Vielmehr wird es fast wahrscheinlich, daß der Goldene Schnitt zuerst aus Verstandesgründen bevorzugt worden ist. Aber dadurch, daß er dann als Norm bei unzähligen Gebrauchsformen gewählt wurde und auch die Abweichungen von ihm, die durch die Wahl benachbarter bequemer Zahlenverhältnisse naturgemäß gegeben sind, im großen und ganzen sich doch wieder aufheben, hat er sich in der Vorstellung schließlich so festgesetzt, daß auch die unbewußte Auswahl des Abmessungsverhältnisses um ihn gravitiert. Eine Gewißheit ist allerdings in dieser Frage außerordentlich schwer zu erlangen. Als möglich müssen wir es immerhin hinstellen, daß wir aus einer inneren Veranlagung heraus dem Verhältnis des Goldenen Schnittes zustreben.

Zwei Punkte sind aber auf jeden Fall zu beachten. Der erste Punkt ist folgender: Wir müssen bei der Auswahl des Goldenen Schnittes immer nur an solche Fälle denken, wo die beiden Abmessungen, die verglichen werden, auch in gleicher Weise gewertet werden. Erscheint eine gleiche Länge in der einen Abmessung größer als in der anderen, so muß das Verhältnis des Goldenen Schnittes bedeutungslos werden. Damit aber wird die Anwendung des Goldenen Schnittes von vornherein außerordentlich eingeschränkt. Zunächst nämlich wird überhaupt die senkrechte Abmessung anders gewertet wie die wagerechte, das wirkliche Quadrat ist also nicht das scheinbare. Ferner wird bekanntlich durch eine bestimmte Einteilung, etwa eine Streifung der betrachteten rechteckigen Figur, die Wertung der Abmessungen verändert. Es ist eine bekannte optische Täuschung, daß ein nach der wage-

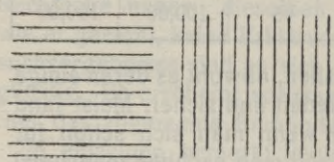

Fig. 9.

rechten Richtung gestreiftes Quadrat uns anders erscheint wie ein senkrecht gestreiftes (vgl. Fig. 9). Wird die Fassade eines Gebäudes, etwa durch Lisenen oder vorgesetzte Pfeiler, vertikal geteilt, so erscheint sie anders, als wenn sie, etwa durch vorspringende Gesimse, in horizontaler Richtung geteilt wird. Diese Teilungen bilden ein wichtiges künstlerisches Moment, um je nachdem an einem Gebäude die Breite, das Wuchtige, Lastende, oder die Höhe, das Leichte, Emporstrebende, zu betonen. Auf solche subjektive Wertungen der Abmessungen müssen wir bei der Beurteilung ihres Verhältnisses hinsichtlich seiner ästhetischen Wirkung unbedingt Rücksicht nehmen. Ferner ist bekannt, daß vertikale Abmessungen an sich anders beurteilt werden als horizontale. Die Höhe eines Gebäudes erscheint nie zu seiner Breite in dem Verhältnis, das beim Entwurf der Aufrißplan zeigt. Als Beispiel eines Falles, wo die gleiche Wertung beider Abmessungen eines Rechtecks nicht vorhanden ist und wir deshalb auch Verhältnisse zu erwarten haben, die von dem Verhältnis des Goldenen Schnitts erheblich abweichen, wählen wir die Ergebnisse, die *Fechner* erhielt, indem er sehr zahlreiche Bilder aus den verschiedensten Sammlungen nach ihrem Format verglich.[1])

Fechner untersuchte genau die Verteilung der Häufigkeiten, in denen die verschiedenen Formate vorkommen. Wir wollen uns damit begnügen, die Mittelwerte für die beiden zu unterscheidenden Arten von Bildformaten, Hoch- und Querformate, wie sie sich für die verschiedenen Sammlungen ergeben, aufzuzeichnen. Sie sind in der auf S. 50 folgenden Tabelle insbesondere für die Genrebilder zusammengestellt. Dabei bezeichnet *h* die Höhe, *b* die Breite und *m* die Anzahl der Bilder.

Wie die Tabelle zeigt, stellen sich anscheinend wenigstens mit einiger Annäherung bestimmte Normalwerte heraus, die bei dem Hochformat ungefähr $1^1/_4$ und bei dem Querformat $1^1/_3$ betragen. Wenn wir auch die verschiedenen Arten von Bildern vergleichen, so ergeben sich folgende Verhältnismittel für alle Sammlungen zusammengenommen:

---

1) Vorschule der Ästhetik II, S. 273 ff.

Ort der Sammlungen	m	$h > b$ Mittelwert $\frac{h}{b}$	m	$b > h$ Mittelwert $\frac{b}{h}$
Dresden	151	1,276	119	1,334
München und Frankfurt	126	1,248	103	1,311
Petersburg	122	1,236	87	1,337
Berlin	74	1,220	60	1,362
Paris	62	1,225	82	1,357
Braunschweig, Darmstadt	57	1,243	58	1,322
Amsterdam, Antwerpen	48	1,241	24	1,332
Wien, Madrid, London	48	1,297	97	1,370
Leipzig.	48	1,287	34	1,315
Brüssel, Dijon, Venedig, Mailand, Florenz	39	1,226	38	1,345

Art der Bilder	Mittelwert $\frac{h}{b}$ $h > b$	Mittelwert $\frac{b}{h}$ $b > h$
Genre	1,250	1,338
Landschaft	1,248	1,380
Stilleben.	1,258	1,388

Das Verhältnis des kleineren zum größeren Bildrande weicht, wie man sieht, besonders beim Hochformat von dem Verhältnis des Goldenen Schnittes (1,618) immerhin erheblich ab. Wir können also nicht sagen, daß auch in diesem Falle das ästhetische Gefühl dem Goldenen Schnitt zustrebt, vielmehr müssen wir annehmen, daß die Besonderheit des Bildcharakters die Auswahl des Formats beeinflußt. Wir haben hier eben nicht gleichmäßig ausgefüllte Rechtecke vor uns, sondern die Aufgabe der bildlichen Darstellung einerseits und die rein dekorative Wirkung der farbigen Fläche anderseits bedingen die Bevorzugung eines anderen Abmessungsverhältnisses. Immerhin ist auffallend, daß für dieses auch hier sich ein fester Normalwert einzustellen scheint.

Der zweite Punkt, den wir bei der ästhetischen Wertung des Goldenen Schnittes zu beachten haben, ist folgender: Daß ein angenehmer Eindruck nur dann hervorgerufen wird, wenn wir in aller Schärfe das Verhältnis des Goldenen Schnittes vor Augen haben, ist eine Behauptung, die schwer zu beweisen sein wird. Denn unsere Beobachtung ist nicht so scharf, die Vergleichung zweier Längen nach dem Augenmaß ist nicht so sicher, daß eine kleine Abweichung sich sofort bemerkbar machen sollte. Wie günstig daher auch die Entscheidung für den Goldenen Schnitt ausfallen mag, auch im besten Falle können wir die ästhetische Wirkung nur einem mehr oder weniger engen Bereich für den Verhältniswert zuschreiben und von diesem Bereich sagen, daß er sich um den Goldenen Schnitt gruppiert.

Folgende einfache Überlegung kann das noch deutlicher zeigen: Wenn wir ein rechteckiges Bild im Rahmen vor uns haben, so kann es fraglich erscheinen, welches Verhältnis auf uns wirkt, das Seitenverhältnis des im Rahmen steckenden Bildes oder das Verhältnis der äußeren Kanten des Rahmens. Wenn aber das eine das Verhältnis des Goldenen Schnittes hat, so hat es das andere ganz gewiß nicht. Nehmen wir an, das Bildformat betrage 40 zu 70 cm. Dann wird ein 5 cm breiter Rahmen noch verhältnismäßig sehr schmal sein. Dadurch werden aber die Abmessungen des eingerahmten Bildes 50 zu 80 cm, also angenähert die des Goldenen Schnittes, während das Bild selbst das abweichende Verhältnis 4:7 zeigt (Fig. 10). Irgend etwas Störendes kann darin nicht liegen.

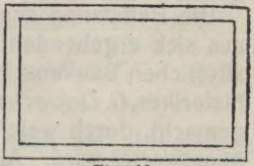
Fig. 10.

Ein vom Goldenen Schnitt nur wenig abweichender Verhältniswert kann so nicht ohne weiteres als ästhetisch weniger wirksam bezeichnet werden. In der Tat hat nun der Goldene Schnitt, wie wir schon hervorgehoben haben, einen wirklichen Nebenbuhler in einem anderen Verhältniswert gehabt, nämlich in dem Verhältnis $1:\sqrt{3}$ oder angenähert $4:7$ das wir zwischen den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks finden, wenn die eine Kathete halb so lang ist wie die Hypotenuse. Dieses Verhältnis empfiehlt sich, namentlich auf einer Kulturstufe, bei der die Kunst des geometrischen

Konstruierens noch nicht voll entwickelt ist, dadurch, daß es leichter herzustellen ist als das Verhältnis des Goldenen Schnittes. Aber vielleicht ist das doch nicht der Grund gewesen, der seine Bevorzugung begründete. Wahrscheinlich sogar ist es, daß dieser Grund in seinem Zusammenhange mit dem gleichseitigen Dreieck lag. Das gleichseitige Dreieck wurde anscheinend von den Babyloniern zu der geometrischen Grundfigur erhoben. Auch die Euklidischen Elemente beginnen mit ihm, und in der Zeichenkunst des Mittelalters, in der das technisch-geometrische Wissen des Altertums, das von Babylon über Kleinasien seinen Weg zu den Griechen nahm, sich unmittelbar fortsetzte, herrschte bis in die Zeit Lionardo da Vincis und Dürers das Streben, alle Konstruktionen nach Möglichkeit auf die Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks zurückzuführen.

Die Benutzung des gleichseitigen Dreiecks und der daraus sich ergebenden Verhältnisse in der antiken und mittelalterlichen Baukunst hat einer unserer bedeutendsten Kunsthistoriker, *G. Dehio*[1]), zum Gegenstand zweier Untersuchungen gemacht, durch welche die Frage so gut wie erschöpfend beantwortet wird. Allerdings kann bei einzelnen Fällen ein Zweifel bestehen bleiben, ob die Konstruktion mit Hilfe des gleichseitigen Dreiecks tatsächlich in dem Entwurf des Baus so angewendet wurde, wie der Verfasser angibt. Im großen und ganzen ist aber nicht daran zu zweifeln, daß hier ein wirkliches Proportionsgesetz vorliegt, das übrigens auch durch historische Zeugnisse belegt wird. Wir wollen unter den zahlreichen Beispielen, die Dehio gibt, nur wenige auswählen, die möglichst bezeichnend sind. Das eine ist das Grabmal des Tantalos in Phrygien (Fig. 11). Das Grabmal hat äußerlich die Form eines

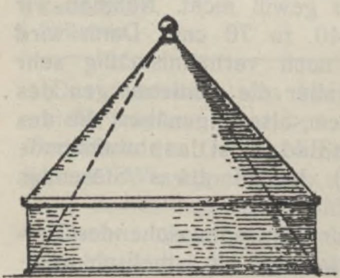

Fig. 11.

1) Untersuchungen über das gleichseitige Dreieck als Norm gotischer Bauproportionen, Stuttgart 1894. Ein Proportionsgesetz der antiken Baukunst und sein Nachleben im Mittelalter und in der Renaissance, Straßburg 1895.

auf einen Zylinder gesetzten Kegels. Bei dem Entwurf wurde über dem Durchmesser der Basis ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet, das bis in die Spitze hinaufreicht. Dann wurde vermutlich unter Abzug der aufgesetzten Spitze die ganze Höhe in drei gleiche Teil geteilt und ein Teil für die Höhe des zylindrischen Grundes genommen. In der zylindrisch gewölbten Grabkammer findet sich das gleichseitige Dreieck genau wieder (Fig. 12).

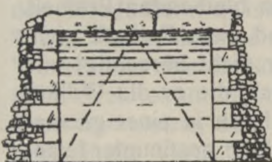

Fig. 12.

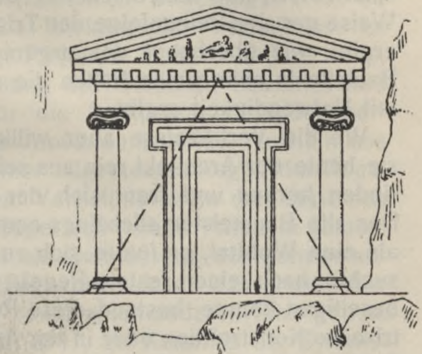

Fig. 13.

An weiteren Beispielen nehmen wir noch ein phrygisches Grab (Fig. 13) und als damit unmittelbar vergleichbar das Markttor in Athen (Fig. 14). Gerade die phrygischen Beispiele können den Weg anzeigen, den wahrscheinlich die Überlieferung von Babylon nach Griechenland genommen hat. Bei dem Tor der athenischen Agora wird man zunächst versucht sein, auch das Verhältnis

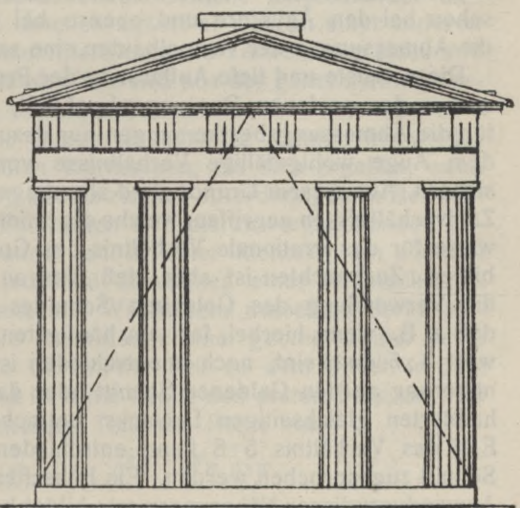

Fig. 14.

des Goldenen Schnittes zu suchen, nämlich in den Abständen der Säulen. Aber abgesehen von dem Widerstreit, der dabei durch die Frage entstehen würde, ob man die Zwischenräume zwischen den Säulen oder die Abstände der Säulenachsen zu vergleichen hat, zeigt gerade dieses Beispiel sofort, daß die Anordnung der Säulen auf natürliche Weise aus der Reihenfolge der Triglyphen und Metopen sich ergibt, wie überhaupt der organische Zusammenhang der Bauteile in sehr vielen Fällen die auftretenden Verhältnisse mit Notwendigkeit ergibt.

Wo die Verhältnisse aber willkürlich bleiben, bestimmt sie heute der Architekt rein aus seinem künstlerischen Empfinden heraus und freut sich der ihm bleibenden Freiheit. Der alte Baumeister allerdings empfand diese Freiheit nicht als eine Wohltat, er fühlte sich zu ihr nicht berechtigt und suchte nach einer festen Regel, durch die er die Willkür beseitigen konnte, bestand diese Regel nun in einer geometrischen Konstruktion oder in der Annahme bestimmter fester Zahlenverhältnisse. Dabei kam noch ein mystisch religiöses Gefühl mit ins Spiel. Man hielt diese Regeln in ihrer Unverbrüchlichkeit für ein Abbild der göttlichen Ordnung. Man schrieb ihnen auch wunderwirkende Kräfte zu. So haben schon bei den Ägyptern und ebenso bei den Babyloniern die Abmessungen der Tempelbauten eine sakrale Bedeutung.

Diese ernste und tiefe Auffassung der Proportionen ist bei uns zu der profanen Deutung abgeblaßt, daß alle Regeln für die Abmessungsbestimmungen nur dazu dienen, gewisse dem Auge wohlgefällige Verhältnisse von vornherein zu sichern. Aus diesem Grunde wird allerdings häufig nach den Zahlverhältnissen gegriffen, welche die rationalen Näherungswerte für das irrationale Verhältnis des Goldenen Schnittes bilden. Zu beachten ist aber, daß dies an sich noch nicht die Verwendung des Goldenen Schnittes selbst bedeutet, daß z. B., wenn hierbei, fast am häufigsten, der Verhältniswert 3 : 5 erscheint, noch unentschieden ist, ob er als Annäherung an den Goldenen Schnitt oder das Verhältnis des halbierten gleichseitigen Dreiecks betrachtet werden soll. Erst das Verhältnis 5 : 8 kann entschieden dem Goldenen Schnitt zugesprochen werden. Ein hübsches Beispiel für die Anwendung dieser Näherungswerte bildet beispielsweise die

Höhenteilung einer Barockurne aus dem Münster zu Salem. Dem Gefäß wird die Höhe 8 zuerteilt, Fuß und Deckel erhalten dann je die Höhe 5 und der Deckelaufsatz die Höhe 3. So ist der gesamte Deckel ebenso hoch wie das Gefäß und steht zu dem Gefäß mitsamt dem Fuß in dem Verhältnis 8 : 13, also des nächstfolgenden Näherungswertes an den Goldenen Schnitt. Die Wirkung der Verhältnisse ist außerordentlich gefällig (vgl. Pfeifer, a. d. S. 57 a. O. S. 116).

Trotzdem ist die Bedeutung des Goldenen Schnittes und seiner Näherungswerte für die Architektur nicht zu überschätzen. Vielmehr ist die Anwendung dieser Verhältnisse nur ein besonderer Fall einer allgemeinen Regel, der Regel der Wiederkehr desselben Verhältnisses in den einzelnen Teilen. Diese allgemeine Regel hebt schon *Vitruv* in seinem Werke über die Baukunst als Quintessenz der ganzen antiken Architektur hervor. Sie wurde durch das griechische Wort Symmetrie, dem wir heute einen anderen Sinn geben, bezeichnet. Vitruv sagt (III, c. 1), die Kenntnis der Symmetrie müßten die Baukünstler aufs genaueste beherrschen. Die Symmetrie aber gehe aus der Proportion hervor, welche auf griechisch Analogia heißt. Proportion bedeute dabei „den Einklang der entsprechenden Bauteile untereinander und mit dem Ganzen". Ähnlich äußert er sich an einer anderen Stelle (I, c. 2). Gemeint ist sicher die Verwendung eines und desselben Verhältnisses, das sich aus der ganzen Anlage ergibt, auch in den einzelnen Teilen.

Die Verwendung dieses Grundsatzes können wir wieder an den beiden Fällen klarmachen, die sich ergeben, wenn wir die einfachsten geometrischen Anordnungen in Betracht ziehen. Im einen Fall reihen sich die zu vergleichenden Abmessungen aneinander an in einer Richtung, im anderen Falle bilden sie jedesmal die Seiten eines Rechtecks. Im ersten Falle bedeutet die Wiederkehr desselben Verhältnisses, daß die Teile die Glieder einer geometrischen Reihe bilden. Steht also der zweite Teil zu dem ersten in dem Verhältnis $q : 1$ und ist a die Größe des ersten Teils, so wird die Größe der einzelnen Teile der Reihe nach

$$a, \quad qa, \quad q^2a, \quad q^3a \text{ usw.}$$

Hierfür ergibt sich folgende sehr einfache geometrische Konstruktion: Es sei AB die Strecke a, BC die Strecke qa, dann errichte man in A auf AB das Lot $AA_1 = AB$, ebenso in B das Lot $BB_1 = BC$ und verbinde A_1, B_1 durch eine gerade Linie. Das Stück CC_1, das durch diese gerade Linie von dem Lote in C abgeschnitten wird, ist dann $= q^2 a$, wird also, in CD umgelegt, die folgende Teilstrecke. So geht es fort, und die ganze geometrische Progression kann derart gefunden werden (Fig. 15).

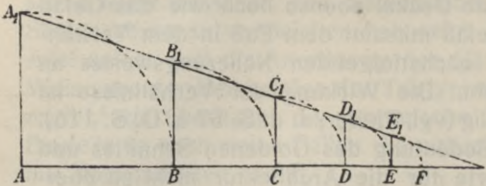

Fig. 15.

Aus der allgemeinen geometrischen Progression geht die Progression des Goldenen Schnittes

$$a, \quad xa, \quad x^2a, \quad x^3a \text{ usw.}$$

hervor, wenn die Forderung hinzugefügt wird, daß das erste Glied und damit auch jedes andere die Summe der beiden nachfolgenden Glieder wird. Diese Bedingung ist in der Tat erfüllt, wenn $1 = x + x^2$ wird. Der Goldene Schnitt würde also auftreten müssen, wenn es gilt, zwei aufeinander folgende gleiche Teile durch eine weitere Unterteilung in eine geometrische Progression zu bringen und so die Wirkung der gleichen Einteilung, der Reihung, mit der Wirkung der stetigen Teilung zusammenzufassen.

Die Wiederkehr desselben Verhältnisses bei den Seitenlängen verschiedener Rechtecke, welche die zweite Art des reinen Auftretens eines Verhältnisses darstellt, bedeutet, daß diese Rechtecke einander ähnlich sind. Nun sind aber in der Architektur die Rechtecke meist nach zwei zueinander senkrechten Grundrichtungen orientiert, eine Seite etwa ist horizontal, die andere vertikal. Dann aber sind auch entsprechend genommene Diagonalen beider Rechtecke entweder parallel oder senkrecht zueinander.

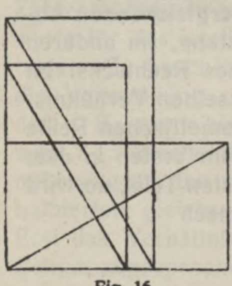
Fig. 16.

Im ersten Falle sind die beiden Rechtecke gleichgestellt, im zweiten Falle ist das eine als liegend, das andere als aufgerichtet aufzufassen (vgl. Fig. 16).

Wie diese Regelmäßigkeiten die ganze Architektur durchziehen, können wir hier nicht verfolgen. Der Leser findet es kurz und klar auseinandergestellt in der Schrift des bekannten Architekten *August Thiersch,* Die Proportionen in der Architektur (Handbuch der Architektur, Vierten Teiles 1. Halbband, Darmstadt 1893). Er möge dazu vergleichen den anderen Band desselben großen Sammelwerkes (Ersten Teiles 3. Band): *Herm. Pfeifer,* Die Formenlehre des Ornaments (Stuttgart 1906). Während Thiersch auf das Verhältnis des Goldenen Schnittes so gut wie gar nicht eingeht, ist Pfeifer ihm sehr viel günstiger gestimmt.[1]) Er findet es an zahlreichen Stellen verkörpert und sieht darin ein wertvolles Mittel, einen schönen und gefälligen Eindruck zu erzielen. Zweifellos behält der Goldene Schnitt in dieser beschränkten Bedeutung, daß er ein gutes und wohlgefälliges Verhältnis der Abmessungen oder Teile zueinander liefert, einen immerhin nicht zu unterschätzenden Wert. Auf der anderen Seite müssen wir uns aber vor einer mystischen Ausdeutung dieses Verhältnisses hüten, die das Verständnis für die wirklichen Gesetze der Kunst und die psychischen Bedingungen des Kunsteindruckes nicht fördert, sondern die Erfassung dieser Bedingungen durch das unberechtigte Hineintragen eines metaphysischen Elementes nur hemmt und auf falsche Wege lenkt.

---

1) S. auch *Matthias,* Die Regel vom Goldenen Schnitt im Kunstgewerbe, Leipzig 1886.

Im ersten Falle sind die beiden Rechtecke, gleich[illegible] im zweiten Falle [illegible] das eine als liegend, das andere als stehend [illegible] (vgl. Fig. [illegible])

Wie diese Regelmäßigkeiten die ganze Architektur durchziehen, können wir hier nicht verfolgen. Der Leser findet es kurz und klar auseinandergestellt in der Schrift des bekannten Architekten August Thiersch, Die Proportionen in der Architektur (Handbuch der Architektur, Vierten Teiles 1. Halbband, Darmstadt 1893). Er möge dazu vergleichen den ersten Band desselben großen Sammelwerkes (Ersten Teiles 4. Band) Herm. Pfeifer, Die Formenlehre des Ornaments (Stuttgart 1906). Während Thiersch[illegible] das Verhältnis des Goldenen Schnittes so gut wie gar nicht eingehend, ist Pfeifer ihm sehr viel günstiger gestimmt.[1] Er findet in ihm [illegible] Verhältnis [illegible] wertvolles Mittel, einen schönen und gefälligen Eindruck zu erreichen. Zweifellos behält der Goldene Schnitt in dieser beschränkten Bedeutung, daß er ein gutes und wohlgefälliges Verhältnis der Abmessungen [illegible] ist [illegible], seinen [illegible] Wert. [illegible] Seite [illegible] oder [illegible] mystischen [illegible] dieses Verhältnis [illegible], wie das Verständnis für das wirklichen [illegible] der Kunst und die psychischen Bedingungen des [illegible] fördern, sondern die [illegible] durch das unbefriedigende [illegible] einer [illegible] Eleganz nur lenkt, und auf falsche Wege lenkt.

Die [illegible]

[1] [illegible] Die Regel vom Goldenen Schnitt im Kunstgewerbe, Leipzig 1898.

Über die Verhältniszahl des Goldenen Schnitts. Die Reihe der mit ihr zusammenhängenden ganzen Zahlen und eine aus dieser abgeleitete Reihe. Von Geh. Reg.-Rat Oberschulrat a. D. Dr. *L. Kaiser*, Kassel. [VIII u. 136 S.] 8. 1929. Geh. *RM* 7.50

In diesem Buch werden die gegenüber der bedeutsamen Auswirkung des Goldenen Schnittes in der elementaren Geometrie bisher nur wenig beachteten arithmetischen Eigenschaften der Verhältniszahl dieser merkwürdigen Teilung näher untersucht. Anschließend wird die hiermit in Zusammenhang stehende Lamésche Reihe eingehend behandelt. Den Schluß bildet die Auflösung der Pellschen Gleichung für einen bestimmten Sonderfall.

Die Quadratur des Kreises. Von Prof. *E. Beutel*, Stuttgart. 2. Aufl. Mit 11 Fig. [57 S.] kl. 8. 1920. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 12.) Kart. *RM* 1.20

Das Bändchen behandelt in anschaulicher Darstellung eines der berühmten Probleme der Mathematik, die Bedeutung des Inhaltes eines Kreises. Es gibt die wichtigsten Lösungsversuche wieder, die die Geistesarbeit von Jahrtausenden hervorgebracht hat, und bietet somit zugleich einen, auch für die Allgemeinheit besonders interessanten Ausschnitt aus der Geschichte der Mathematik dar.

Das Delische Problem. (Die Verdoppelung des Würfels.) Von Dr. *A. Herrmann*, Cöthen. Mit 32 Fig. [52 S.] kl. 8. 1927. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 68.) Kart. *RM* 1.20

Nach einer geschichtlichen Einleitung führt das Bändchen in leichtfaßlicher, reizvoller Darstellung über die lehrreichen algebraischen und geometrischen Grundlagen des Problems zu dem Beweise seiner Unlösbarkeit (bei alleiniger Anwendung von Zirkel und Lineal). Dabei ergeben sich Streiflichter auf die algebraische Behandlung geometrischer Fragen sowie Ausblicke auf Siebenteilung und Quadratur des Kreises.

Einführung in die darstellende Geometrie. Von Studienrat Prof. *P. B. Fischer*, Berlin. Mit 59 Fig. [91 S.] kl. 8. 1921. (ANuG 541.) Geb. *RM* 2.—

Als Anleitung für den Selbstunterricht bietet der Band die Grundlehren an der Hand der wichtigsten Aufgaben, die sich auf alle Gebiete der darstellenden Geometrie erstrecken.

Einführung in die darstellende Geometrie. Von Studiendir. Dr. *W. Kramer*, Altdöbern. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 66/67 u. 85.) Kart. je *RM* 1.20

1. **Teil: Senkrechte Projektion auf eine Tafel.** Mit 71 Fig. [49 S.] kl. 8. 1926.
2. **Teil: Senkrechte Projektion auf zwei Tafeln. Kegelschnitte.** Mit 68 Fig. i. T. [VI u. 53 S.] kl. 8. 1929.
3. **Teil: Schattenkonstruktion. Allgemeine Parallelprojektion. Zentralprojektion.** [In Vorb. 1929]

Während das erste Bändchen der Eintafelprojektion gewidmet ist, bringt das zweite das Grund- und Aufrißverfahren unter fast ausschließlicher Benutzung der Hauptlinien an Stelle der Spuren; damit wird die Ausführung aller Konstruktionen in beschränktem Raum möglich. Die zahlreichen Anwendungen bevorzugen die Kegelschnitte. Das dritte Bändchen soll die Schattenkonstruktion, die allgemeine Parallelprojektion sowie die Zentralprojektion behandeln.

Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Geh. Reg.-Rat Dr. *K. Doehlemann*, weil. Prof. a. d. Techn. Hochschule in München. 3., durchges. Aufl. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. [108 S.] kl. 8. 1928. (ANuG 510.) Geb. *RM* 2.—

Leitet unter Vermeidung aller schwierigen mathematischen Ableitungen die Grundlehren der räumlichen Darstellung ab, indem es die Zeichnung eines seinen Massen und seiner Lage nach bekannten Gegenstandes für einen ebenfalls genau festgelegten Standpunkt entstehen läßt und an Hand zahlreicher Anwendungsbeispiele auch die Gesetze der freien Perspektive ableitet.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Von weil. Prof. Dr. *C. H. Müller*, Frankfurt a. M., und weil. Prof. Dr. *O. Presler*, Wennigsen.
Ausg. A. Mit 233 Fig. [VIII u. 320 S.] gr. 8. 1903. Geb. *RM* 5.—
Ausg. B. Mit 122 Fig. [VI u. 138 S.] gr. 8. 1903. Geb. *RM* 3.—

Projektionslehre. Die rechtwinkl. Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung techn. Gebilde nebst einem Anhang über die schiefwinkl. Parallelprojektion in kurzer, leichtfaßlicher Behandlung für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von Oberschullehrer *A. Schudeisky*, Gleiwitz. 2. Aufl. Mit 165 Fig. [90 S.] kl. 8. 1923. (ANuG 564.) Geb. *RM* 2.—

„Vom Leichten zum Schweren übergehend, baut sich der gewiß nicht einfache Stoff leicht und sicher auf; durch eine Reihe von Aufgaben und eine Anleitung zu deren Lösung wird der Lerneifer wesentlich gefördert. Zudem erleichtert der klare Text das Studium außerordentlich." **(Der Profanbau.)**

Die Erziehung der Anschauung. Von Dr. *H. E. Timerding*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Braunschweig. Mit 164 Fig. [VII u. 241 S.] gr. 8. 1912. Geh. *RM* 6.60

Ein interessanter Beitrag zur erzieherischen Verwertung der Anschauung, ausgehend von der Lehrkraft der mathematischen Figuren und der Frage, was das geometrische Zeichnen für die mathematische Ausbildung leistet, sodann aber auch über die Grenzen der engeren geometrischen Formen hinausgreifend und das Wesen der Anschauung und der Perspektive überhaupt behandelnd.

Elementargesetze der bildenden Kunst. Grundlagen einer praktischen Ästhetik von Prof. Dr. *H. Cornelius*, Frankfurt a. M. 3., verm. Aufl. Mit 247 Abb. i. T. u. 11 (3 farb.) Taf. [X u. 203 S.] 4. 1921. Geh. *RM* 10.—, geb. *RM* 12.—

„Der Gesichtspunkt der ‚Kultur des Auges' läßt auch den darstellenden Geometer für einen großen Teil des Inhalts Interesse gewinnen. Fast jedes der 6 Kapitel bringt Anregungen und Beispiele, die seine Aufmerksamkeit fesseln. . . . Die zur ‚Kultur des Auges' gegebenen Darlegungen und insbesondere die dargebotenen Beispiele und Gegenbeispiele dürften bei vorsichtiger und richtiger Verwendung im (mathematischen und zeichnerischen) Unterricht an ihrem Teile geeignet sein, die Ausbildung der Raumanschauung zu fördern." **(Jahresber. d. dtsch. Math.-Vereinigung.)**

Mathematik und Malerei. Von Studiendir. Dr. *G. Wolff*, Hannover. 2., verb. Aufl. Mit 21 Fig. u. 35 Abb. i. T. u. auf 4 Taf. [85 S.] kl. 8. 1925. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 20/21.) Kart. *RM* 2.40

„In klarer knapper und doch leicht faßlicher Weise werden — unterstützt durch Figuren und Abbildungen — die Grundlehren der Perspektive entwickelt und ihre hohe Bedeutung für die Malerei aufgezeigt. Alle mathematischen Sätze werden durch Heranziehen von geschickt gewählten Beispielen dem Verständnis nahegebracht." **(Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturwiss.)**

Kunstgeschichtliches Wörterbuch. Von Dr. *H. Vollmer*, Leipzig. [VI u. 272 S.] kl. 8. 1928. (Teubn. kl. Fachwörterbüch. Bd. 13.) Geb. *RM* 7.50

In lexikalischer Form werden kurze Abrisse über die wichtigsten historischen und systematischen Fragen der Kunstforschung geboten und Fachausdrücke erklärt. Literaturangaben zeigen Wege für weitere Belehrung und Vertiefung.

„Es ist erstaunlich, was auf diesen 270 Seiten alles abgehandelt wird, und es ist erfreulich, daß das kleine Werk trotz des riesigen inneren Umfanges allen Stichproben auf Genauigkeit standhält und die letzten Ergebnisse der Forschung wiedergibt." **(Königsberger Hartungsche Zeitung.)**

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Fortsetzung von 2. Umschlagseite

Einführung in die darstellende Geometrie. Von W. Kramer. I. Teil. Senkr. Projektion auf eine Tafel. (Bd. 66.) II. Teil. Senkr. Projektion auf zwei Taf. Kegelschnitte. (Bd. 67.) III. Teil. Schattenkonstruktion, allgemeine Parallelprojektion, Zentralprojektion. [In Vorb. 1929.] (Bd. 85)
Darstellende Geometrie des Geländes und verwandte Anwendungen der Methode der kotierten Projektionen. Von R. Rothe. 2., verb. Aufl. (Bd. 35/36)
Einführung in die Kartenlehre (Kartennetze). Von L. Balser. (Bd. 81)
Karte und Kroki. Von H. Wolff. (Bd. 27)
Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühlke. (Bd. 11)
Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. 2. Aufl. (Bd. 6)
Funktionen, Schaubilder, Funktionstafeln. Von A. Witting. (Bd. 48)
Einführung in die Nomographie. Von P. Luckey. 2. Aufl. (Bd. 28)
Nomographie. Praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik. Von P. Luckey. 2., neubearb. u. erweit. Aufl. der „Einführung in die Nomographie", 2. Teil. (Bd. 59/60)
Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes. Von A. Rohrberg. 3. Aufl. (Bd. 23)
Die Anfertigung mathematischer Modelle. (Für Schüler mittlerer Klassen.) Von K. Giebel. 2. Aufl. (Bd. 16)
Mathematik und Logik. Von H. Behmann. (Bd. 71)
Mathematik und Biologie. Von M. Schips. (Bd. 42)
Mathematik und Sport. Mathematische u. physikalische Aufgaben aus dem Gebiete der Leibesübungen. Von E. Lampe. (Bd. 74)
Die mathematischen und physikalischen Grundlagen der Musik. Von J. Peters. (Bd. 55)
Mathematik und Malerei. 2 Bände in 1 Band. Von G. Wolff. 2. Aufl. (Bd. 20/21)
Elementarmathematik und Technik. Eine Sammlung elementarmathematischer Aufgaben mit Beziehungen zur Technik. Von R. Rothe. (Bd. 54)
Finanz-Mathematik. (Zinseszinsen-, Anleihe- und Kursrechnung.) Von K. Herold. (Bd. 56)
Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung. Von H. Schütze. (Bd. 46)
Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25)
Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 3. Aufl. (Bd. 13)
Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 3. Aufl. (Bd. 52)
Trugschlüsse. Gesammelt von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 53)
Flächenland. Eine Geschichte von den Dimensionen. Erzählt v. einem Quadrat (E. A. Abbot). Aus dem Originalwerk „Flatland". Deutsch von W. Bieck. (Bd. 83)
Die Quadratur des Kreises. Von E. Beutel. 2. Aufl. (Bd. 12)
Das Delische Problem (Die Verdoppelung des Würfels). Von A. Herrmann. (Bd. 68)
Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. 2. Aufl. (Bd. 18)
Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 5)
Kreisel. Von M. Winkelmann. [In Vorb. 1929.] (Bd. 80)
Atom- und Quantentheorie. Von P. Kirchberger. I. Atomtheorie. II. Quantentheorie. (Bd. 44 u. 45)
Drahtlose Telegraphie u. Telephonie in ihren physikal. Grundlagen. Von W. Ilberg. (Bd. 62)
Optik. Von E. Günther. [In Vorb. 1929.] (Bd. 78)
Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Barneck. (Bd. 29)
Mathematische Himmelskunde. Von O. Knopf. (Bd. 63)
Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. (Bd. 40)
Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. 2., umgearb. Aufl. (Bd. 8)
Beobachtung des Himmels mit einfachen Instrumenten. Von Fr. Rusch. 2. Aufl. (Bd. 14)
Grundzüge der Meteorologie. Von W. König. (Bd. 70)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin