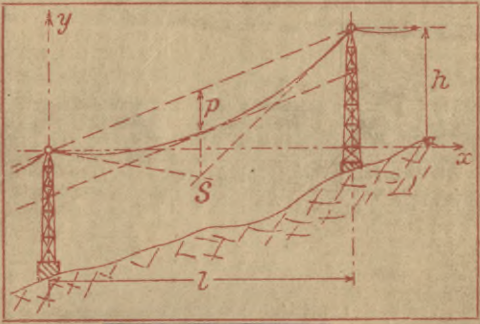
…SCH-
…BLIOTHEK

ELEMENTARMATHEMATIK UND TECHNIK

EINE SAMMLUNG ELEMENTARMATHEMATISCHER AUFGABEN MIT BEZIEHUNGEN ZUR TECHNIK



G B.G.TEUBNER LEIPZIG UND BERLIN

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING

54

ELEMENTARMATHEMATIK UND TECHNIK

EINE SAMMLUNG
ELEMENTARMATHEMATISCHER AUFGABEN
MIT BEZIEHUNGEN ZUR TECHNIK

VON

RUDOLF ROTHE

DR. PHIL., O. PROFESSOR AN DER
TECHN. HOCHSCHULE BERLIN

MIT 70 ABBILDUNGEN

1924

LEIPZIG UND BERLIN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

INHALT

ZUR EINFÜHRUNG

Die nachfolgende Auswahl von Aufgaben ist aus einem Vortrage hervorgegangen, den ich am 23. Januar 1923 in der Berliner Vereinigung zur Förderung des mathematischen Unterrichtes gehalten habe. Über die Notwendigkeit, die Gedanken der Technik nicht nur im physikalischen, sondern auch im mathematischen Unterrichte in angemessener Weise zum Ausdrucke zu bringen, herrscht wohl jetzt in allen sachverständigen Kreisen vornehmlich der Schulmänner eine so allgemeine Übereinstimmung der Ansichten, daß diese oder jene gegnerische Äußerung von anderer Seite, selbst wenn sie unter einem wissenschaftlichen Mäntelchen erscheint, sachlich nicht mehr beachtet zu werden braucht. Denn die Schule darf sich nicht weiter der Tatsache verschließen, daß seit länger als einem Menschenalter die Entwicklung der Zeiten in dem Sinne vor sich geht, daß die Technik an die Spitze zu treten sich anschickt.

Diese Aufgaben sind für die Schüler oberer Klassen und für junge Studenten bestimmt; aber ich hoffe, sie werden vor allem auch den Lehrern Anregung geben, weitere und pädagogisch vielleicht bessere zu suchen. Denn in schulpädagogischer Beziehung halte ich mich nicht für zuständig, mehr zu sagen, als daß mir einige der Aufgaben zu schwer erscheinen, um von einem Schüler ganz ohne Anleitung gelöst zu werden. Jede erfordert übrigens eine kurze Erläuterung des technischen Inhalts, damit der Schüler verstehe, worum es sich handelt, und damit er lerne, den „Ansatz" zu finden. Das ist der erste Zweck solcher Aufgaben. Der zweite ist, den Schüler anzureizen, daß er mit größerer Selbständigkeit die Saiten seines mathematischen Wissens und Könnens spielen läßt, um auch die zahlenmäßige Lösung zu finden. Aus eigner Erfahrung an jungen Studenten weiß ich, mit welchem Eifer sie sich zu Beginn ihres technischen Studiums auf solche Aufgaben zu stürzen pflegen, und welche Schwierigkeiten ihnen dabei begegnen; denn vorher haben sie meist nach eingepaukten Regeln und Rezepten zu arbeiten gelernt und stehen daher oft einer sehr einfachen Fragestellung der angewandten Mathematik hilflos gegenüber.

Die Aufgaben entstammen zum größten Teil unmittelbar den technischen Gebieten, oder sie stehen in der Form der Fragestellung und der Art der Lösung dem Gedankenkreise der Technik nahe. Es sind nicht „eingekleidete“ Aufgaben, wie man die oft seltsamen, am Schreibtisch ausgeheckten Tüfteleien zu bezeichnen pflegt, die unsern Spott herausfordern, der Wertschätzung des mathematischen Unterrichtes nicht immer dienlich sind, jedenfalls mit angewandter Mathematik nichts zu tun haben.

Einige wenige mit * bezeichnete Aufgaben erfordern Differentialrechnung zur Lösung. Mehr von ihnen zu bringen erlaubte der beschränkte Umfang nicht. Auch ermuntern mich meine Erfahrungen wenig, meinerseits einer über die allereinfachsten Sätze hinausgehenden Infinitesimalrechnung auf der Schule Vorschub zu leisten.

Wer aus diesen Aufgaben mit Erfolg etwas lernen will, darf sich nicht scheuen, alle Rechnungen, auch die zahlenmäßigen, auszuführen, die Zeichnungen und Entwürfe mit der erforderlichen Sorgfalt herzustellen und sich Modelle anzufertigen, wo das angeht.

AUFGABEN UND LÖSUNGEN

Aufgabe 1. Ein Blechstreifen soll zu Wellblech geformt werden, dessen Querschnitt (Abb. 1) aus aneinandergefügten Halbkreisen besteht. Wieviel laufende Meter glattes Blech braucht man zu l Meter Wellblech?

Lösung: Da über den Durchmesser der Kreise oder, was dasselbe bedeutet, über die Anzahl Windungen auf das laufende Meter nichts ausgesagt ist, scheint die Aufgabe unbestimmt zu sein. Es sei d dieser Durchmesser und n diese Anzahl, so ist $nd = l$.

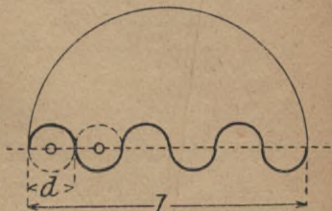


Abb. 1.

Die gesuchte Länge x ist also gleich $n \cdot \frac{\pi}{2} d$, d. h.

$$x = \frac{\pi}{2} l,$$

mithin genau so lang wie der Halbkreis über dem Durchmesser l. Dies trifft zu, wie groß n oder wie klein d auch sein mag.

Aufgabe 2. Wie vorher, aber der Querschnitt des Wellblechs soll aus abwechselnd nach der einen oder andern Seite gekrümmten Kreisbögen vom Öffnungswinkel φ bestehen (Abb. 2).

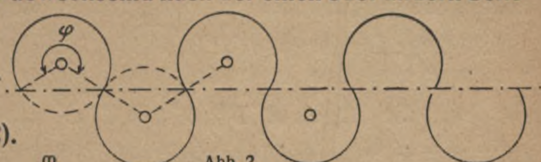


Abb. 2.

Lösung: $x = \dfrac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot l$, unabhängig von der Anzahl der Bögen oder von ihrem Halbmesser. Für $\varphi \to 0$ folgt daraus $x \to l$.

Aufgabe 3. In dem gleichseitigen Dreieck ABC (Abb. 3a) sei um A mit dem Halbmesser $AB = a$ der Kreisbogen $\widehat{BC}$, um B, C ebenso die Bögen $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ geschlagen. Wie groß ist der Umfang des so entstehenden geschlossenen Kurvenzuges $\overset{\frown}{A}\overset{\frown}{B}\overset{\frown}{C}\overset{\frown}{A}$?

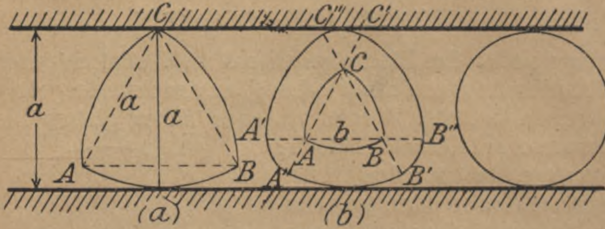


Abb. 3.

Lösung: Der Bogen $\widehat{BC}$ hat den Innenwinkel 60^0 und es ist $\operatorname{arc} 60^0 = \frac{\pi}{3}$, also $\widehat{BC} = \frac{\pi}{3} a$, somit der gesuchte Umfang

$$U = \pi a,$$

genau so groß wie der Umfang des Kreises vom Durchmesser a.

Aufgabe 4. Um das gleichseitige Dreieck ABC in Abb. 3b mit der Seite $AB = b$ sei zuerst der Kurvenzug $\overset{\frown}{A}\overset{\frown}{B}\overset{\frown}{C}\overset{\frown}{A}$ umgeschrieben, wie in der vorhergehenden Aufgabe angegeben ist, und sodann im Abstand $AA' = c$ von diesem der abstandsgleiche Kurvenzug $\overset{\frown}{A'}\overset{\frown}{A''}\overset{\frown}{B'}\overset{\frown}{B''}\overset{\frown}{C'}\overset{\frown}{C''}A'$, der somit aus lauter Kreisbögen besteht. Wie groß ist dessen Umfang?

Lösung: Die Bögen $\widehat{A'A''}$, $\widehat{B'B''}$, $\widehat{C'C''}$ haben den Halbmesser c und den Innenwinkel 60^0, also die Bogenlänge $\frac{\pi}{3} c$, und die Bögen $\widehat{A''B'}$, $\widehat{B''C'}$, $\widehat{C''A'}$ haben den Halbmesser $b + c$ und den Innenwinkel 60^0, also die Bogenlänge $\frac{\pi}{3}(b + c)$. Der gesuchte Umfang ist somit

$$U = \pi (b + 2c),$$

genau so groß wie der Umfang des Kreises vom Durchmesser $a = b + 2c$.

Bemerkung. Die in den Aufgaben 3 und 4 betrachteten Kurvenzüge gehören zu den von Reuleaux entdeckten *Kurven konstanter Breite.* Sie haben die Eigenschaft, sich zwischen zwei festen parallelen Geraden so verschieben und drehen zu lassen, daß sie diese Geraden zwar niemals schneiden, aber doch wenigstens je einen Punkt mit ihnen gemeinsam haben. Der Abstand dieser beiden „Stützgeraden“ heißt die Breite der Kurven. Man kann zeigen, daß der Umfang einer jeden Kurve der konstanten Breite a genau gleich dem Umfang des Kreises vom Durchmesser a ist. Die beiden Stützgeraden geben eine „Kulissenführung“ für die Kurven.

Aufgabe 5. Die Inhalte der drei Flächenstücke x, y, z (Abb. 4) zu bestimmen, wenn die Quadratseite $AB = a$ bekannt ist. Die Bögen sind Kreisviertel.

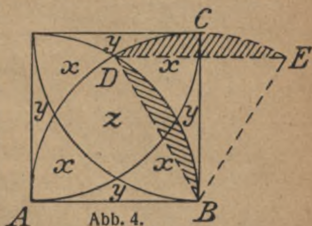


Abb. 4.

Lösung: Wenn man der Reihe nach das ganze Quadrat, einen Viertelkreis ABC und das Dreieck ABD ins Auge faßt, erhält man leicht folgende drei Gleichungen ersten Grades mit den drei Unbekannten x, y, z:

$$4x + 4y + z = a^2$$

$$3x + 2y + z = \frac{\pi}{4} a^2$$

$$2x + y + z = \frac{\pi}{3} a^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\, a^2,$$

die letzte Gleichung am einfachsten dadurch, daß man von dem Drittelkreis ABE mit dem Inhalt $\frac{\pi}{3} a^2$ das gleichseitige Dreieck BED vom Inhalt $\frac{1}{4}\sqrt{3}\, a^2$ wegnimmt und den schraffierten Zipfel über DE um den Punkt D in die angedeutete Lage über DB herunterdreht. Die Auflösung der drei Gleichungen gibt

$$x = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 + \frac{\pi}{12}\right) a^2$$

$$y = \left(1 - \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) a^2$$

$$z = \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) a^2,$$

in Zahlenwerten angenähert $x \approx 0{,}128\, a^2$, $y \approx 0{,}043\, a^2$, $z \approx 0{,}315\, a^2$.

Bemerkung. Bei Maßwerken an Kirchenfenstern u. dgl. kommen solche Anordnungen vor.

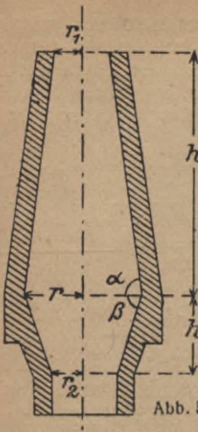


Abb. 5.

Aufgabe 6. Nebenstehend (Abb. 5) ist der Längsschnitt eines *Hochofens* gezeichnet. Der Innenraum besteht aus zwei abgestumpften Kegeln; die obere und die untere Öffnung haben die Halbmesser r_1 und r_2; die Neigungswinkel der Mäntel gegen die wagerechte Ebene sind α und β; der Gesamtinhalt J. Aus diesen gegebenen Stücken ist der Halbmesser r des „Kohlensacks" zu berechnen, desgleichen die Höhen h_1 und h_2. — Zahlenbeispiel: $2r_1 = 4{,}2$ m; $2r_2 = 4{,}9$ m; $\alpha = 86^0$; $\beta = 76^0$; $J = 572{,}6$ cbm.

Lösung: Die Formeln für den Inhalt eines Kegelstumpfes liefern zunächst

$$J = \frac{\pi}{3} h_1 (r^2 + r_1^2 + r r_1) + \frac{\pi}{3} h_2 (r^2 + r_2^2 + r r_2).$$

Außerdem ist

$$h_1 = (r - r_1) \operatorname{tg} \alpha, \quad h_2 = (r - r_2) \operatorname{tg} \beta;$$

führt man diese Werte in J ein, so entsteht eine Gleichung zur Bestimmung von r, aus der sich leicht ergibt:

$$r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{\pi} J + r_1^3 \operatorname{tg} \alpha + r_2^3 \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}}.$$

Nachdem der Wert von r berechnet ist, kann man h_1, h_2 aus den vorstehenden Formeln ermitteln.

Bei der zahlenmäßigen Berechnung benutzt man nicht etwa fünf- oder gar siebenstellige Logarithmen, sondern den Rechenschieber. Man erhält

$$r = 3{,}429 \text{ m}; \quad h_1 = 19{,}06 \text{ m}; \quad h_2 = 3{,}93 \text{ m},$$

wobei die letzten Stellen nur geschätzt sind, überdies kaum noch praktische Bedeutung haben.

Aufgabe 7. Mit welcher Zirkelöffnung muß man auf einer Kugel vom Halbmesser R einen Kreis beschreiben, wenn sein wahrer Halbmesser den Wert r erhalten soll?

Lösung: Es sei $PC = x$ (Abb. 6, Querschnitt der Kugel) die gesuchte Zirkelöffnung. Im Dreieck PDC hat man

$$PD = \sqrt{x^2 - r^2}$$

und daher im rechtwinkligen Dreieck PCP'

$$x^2 = 2R \cdot PD = 2R\sqrt{x^2 - r^2}.$$

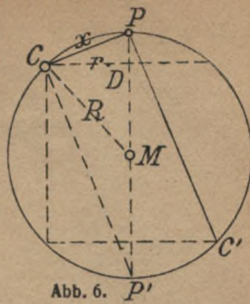


Abb. 6.

Daraus erhält man, da für x nur positive Werte in Betracht kommen,

$$x = \sqrt{2R\left(R \pm \sqrt{R^2 - r^2}\right)}.$$

Wenn man $PD = R - \sqrt{R^2 - r^2}$, $P'D = R + \sqrt{R^2 - r^2}$ beachtet, so erkennt man, daß dem Minuszeichen unter der Quadratwurzel für x die Strecke PC, dem Pluszeichen die Strecke $PC' = P'C$ zukommt. Jede dieser beiden Zirkelöffnungen liefert einen Kreis vom gewünschten Halbmesser.

Diese Aufgabe ist eine Vorbereitung zur folgenden

Aufgabe 8. An einem Stück einer Kugelfläche soll man durch Messungen mit dem Zirkel auf ihr den Kugeldurchmesser in der Weise bestimmen, daß man zuerst mit irgendeiner Zirkelöffnung ρ um irgendeinen Punkt P auf der Kugel einen Kreis schlägt, auf diesem irgend drei Punkte A, B, C annimmt (Abb. 7) und deren gegenseitige Abstände a, b, c mit dem Zirkel und Maßstab mißt. — Zahlenbeispiel: $\rho = 10$ cm, $a = 16{,}75$ cm, $b = c = 10$ cm.

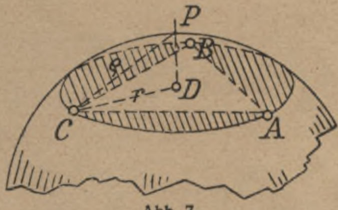


Abb. 7.

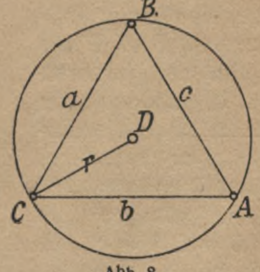


Abb. 8.

Lösung: Nach der vorhergehenden Aufgabe 7 hängt der Kugeldurchmesser d, die Zirkelöffnung ρ und der wahre Halbmesser r des mit ρ geschlagenen Kreises durch die Gleichung

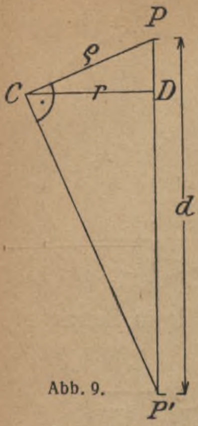


Abb. 9.

$$\rho^2 = d \cdot \sqrt{\rho^2 - r^2}$$

zusammen. Andrerseits ist r der Radius des dem Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c umgeschriebenen Kreises (Abb. 8), daher ist

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

wo $$2s = a + b + c.$$

Mithin ist

$$d = \rho^2 : \sqrt{\rho^2 - \frac{a^2b^2c^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Das Zahlenbeispiel liefert $s = 18{,}375$, $s - a = 1{,}625$, $s - b = s - c = 8{,}375$ cm, $r^2 = 83{,}726$ cm², $d = 24{,}79$ cm. Man kann auch d aus ρ und r zeichnerisch bestimmen, wie die Abb. 9 erkennen läßt, die weiter nichts ist als ein Teil der Abb. 6.

Aufgabe 9. Bestimmung des Durchmessers eines Stückes einer Kugelfläche (Linse) mit dem *Sphärometer*. Dieses Werkzeug besteht aus einem Tischchen mit drei scharf zugespitzten Füßen, deren Spitzen ein gleichseitiges Dreieck ABC bilden; ein vierter, senkrecht zur Dreiecksebene in der Höhe verschiebbarer Fuß kann mit seiner Spitze P diese Ebene im Schwerpunkte D des Dreiecks ABC treffen. Man setzt das Sphärometer erst auf die Kugelfläche und verschiebt den Mittelfuß so lange, bis alle vier Fußspitzen A, B, C, P die Kugelfläche berühren (Abb. 10); sodann setzt man es, ohne die Einstellung zu verändern, auf eine Ebene und mißt die Seitenlängen $AB = BC = CA = a$ des Dreiecks und den Abstand $PD = p$ der Fußspitze P von der Ebene. Wie berechnet sich der Kugeldurchmesser aus a und p?

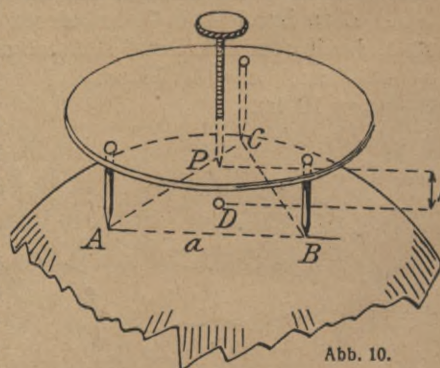


Abb. 10.

Lösung: Aus der Abb. 9 liest man ab: $\rho^2 = pd$ und $\rho^2 = r^2 + p^2$, daher

$$d = \frac{r^2 + p^2}{p}.$$

Hierin ist r als Halbmesser des dem gleichseitigen Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises gleich $\frac{a}{3}\sqrt{3}$; demnach wird

$$d = \frac{a^2 + 3p^2}{3p} = \frac{a^2}{3p} + p.$$

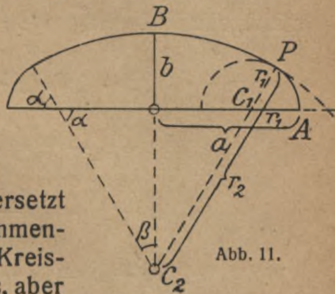


Abb. 11.

In der Technik kann manchmal eine Ellipse durch eine Eilinie ersetzt werden, die aus „*Korbbögen*“ zusammengesetzt ist. Darunter versteht man Kreisbögen verschiedenen Halbmessers, aber so aneinandergefügt, daß sie in den Ansatzpunkten gemeinsame Tangenten haben. Auf solche „Ersatzellipsen“ beziehen sich die folgenden Aufgaben.

Aufgabe 10. Welche Beziehung muß zwischen den Radien $C_1A = r_1$ und $C_2B = r_2$ bestehen, damit der Korbbogen $\widehat{APB}$ ein Viertel einer Ersatzellipse mit den Halbachsen $OA = a$, $OB = b$ darstelle? (Abb. 11.)

Lösung: Das Dreieck C_1OC_2 hat die Hypotenuse $C_1C_2 = r_2 - r_1$ und die Katheten $OC_1 = a - r_1$, $OC_2 = r_2 - b$. Mithin ist $\quad (a - r_1)^2 + (r_2 - b)^2 = (r_2 - r_1)^2,$

was sich auch in der Form

$$(b - r_1)(r_2 - a) = \left(\frac{a - b}{\sqrt{2}}\right)^2$$

schreiben läßt. Da auf der rechten Seite übrigens eine positive Größe steht, so müssen gewiß $b - r_1$ und $r_2 - a$ dasselbe Vorzeichen haben.

Aufgabe 11. Die Öffnungswinkel α und β der Bögen $\widehat{AP}$ und $\widehat{BP}$ seien gegeben, wobei $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Man stelle r_1, r_2 durch a, b, α dar.

Lösung: Es ist

$$\cos\alpha = \frac{a - r_1}{r_2 - r_1}, \quad \sin\alpha = \frac{r_2 - b}{r_2 - r_1},$$

daher wird $$r_1 = \frac{a - a\sin\alpha - b\cos\alpha}{1 - \sin\alpha - \cos\alpha},$$

$$r_2 = \frac{b - b\cos\alpha - a\sin\alpha}{1 - \sin\alpha - \cos\alpha},$$

mithin auch $$b - r_1 = (b-a)\frac{1-\sin\alpha}{1-\sin\alpha-\cos\alpha},$$

$$r_2 - a = (b-a)\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha-\sin\alpha},$$

$$r_2 - r_1 = \frac{b-a}{1-\cos\alpha-\sin\alpha},$$

$$a - r_1 = (b-a)\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha-\sin\alpha},$$

$$r_2 - b = (b-a)\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

Aufgabe 12. Man berechne die Halbmesser der Korbbögen nach den Konstruktionsangaben der Abb. 12 und 13. Wie groß sind die Flächeninhalte der Ersatzellipsen?

Lösungen: a) zu Abb. 12. Es ist $\alpha = 60^0$, $r_1 = r$, $r_2 = 2r$, mithin $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $r_2 - r_1 = r$. Danach wird

$$r_1 = r = \frac{a(2-\sqrt{3}) - b}{1-\sqrt{3}}, \quad r_2 = 2r = \frac{b - a\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}},$$

also nach Division beider Seiten

$$b = \frac{4-\sqrt{3}}{3}\,a \approx 0{,}756\,a,$$

und damit $$r = \frac{2}{3}\,a.$$

Der Flächeninhalt eines Viertels setzt sich aus den Flächen der Kreisausschnitte AC_1P und PC_2B, vermindert um das Dreieck C_1OC_2 zusammen. Danach ist die Gesamtfläche

$$J = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}r^2 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}(2r)^2 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) = \left(2\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$$

oder $$J = \frac{4}{9}\left(2\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)a^2 \approx 2{,}408\cdot a^2.$$

Vergleichsweise ist der Inhalt der wahren Ellipse mit den Halbachsen a und $b = \frac{4-\sqrt{3}}{3}a$ gleich $\pi ab \approx 2{,}375\,a^2$.

b) zu Abb. 13. Es ist $\alpha = 45^0$, $r_1 = r$, $r_2 = 2r$ wie vorher, also $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $r_2 - r_1 = r$. Danach wird

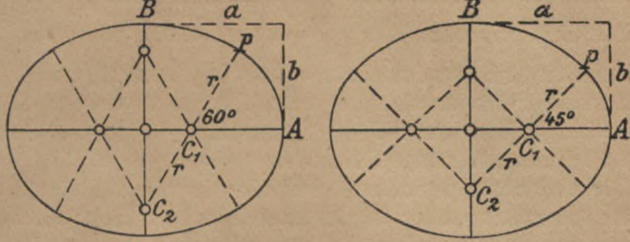


Abb. 12. Abb. 13.

$$r_1 = r = \frac{a(2-\sqrt{2}) - b\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})}, \quad r_2 = 2r = \frac{b(2-\sqrt{2}) - a\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})},$$

woraus $\quad b = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\, a = (5 - 3\sqrt{2})\, a \approx 0{,}757\, a$

und weiter $\quad r = \left(2 - \sqrt{2}\right) a \approx 0{,}586\, a.$

Die Gesamtfläche der Ersatzellipse ist

$$J = 4\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} r^2 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}(2r)^2 - \frac{1}{4} r^2\right) = \left(\frac{5}{2}\pi - 1\right) r^2$$

oder $\quad J = (5\pi - 2)\left(3 - 2\sqrt{2}\right) a^2 \approx 2{,}352\, a^2.$

Vergleichsweise ist der Inhalt der wahren Ellipse mit den Halbachsen a und $b = \left(5 - 3\sqrt{2}\right) a$ gleich $\pi a b \approx 2{,}379\, a^2$.

Ein *Wechselstrom* ist ein elektrischer Strom, dessen Stromstärke sich mit der Zeit in periodischer Wiederkehr ver-

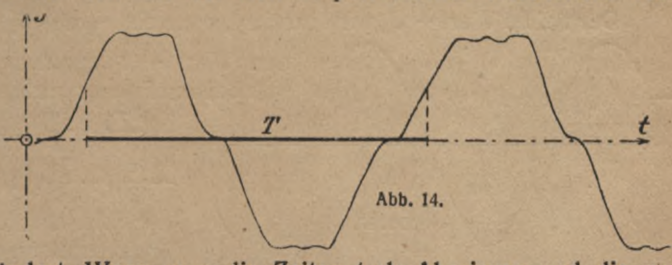


Abb. 14.

ändert. Wenn man die Zeiten t als Abszissen und die zugehörigen Stromstärken J als Ordinaten aufträgt, erhält man die *Stromkurve* des betreffenden Wechselstroms. Die Abb. 14

gibt beispielsweise eine Stromkurve einer Drehstrommaschine wieder. Die Zeitspanne, die verfließt, bis die Stromstärke J ihren Wert zum ersten Male wieder annimmt, heißt die Periodenzeit T; ihr reziproker Wert $\frac{1}{T} = n$ drückt aus, wie oft in der Zeiteinheit (1 Sekunde) diese Wiederkehr eintritt, und heißt daher die Periodenzahl. Bei dem Wechselstrom der Charlottenburger Zentrale ist $T = \frac{1}{50}$ Sekunde, $n = 50$; dieser Strom hat 50 Perioden in der Sekunde.

Die einfachste periodische Funktion ist die Sinusfunktion. Man betrachtet daher in der theoretischen Elektrotechnik zuerst solche Wechselströme, deren Stromkurve eine Sinuskurve ist (sinusförmiger Wechselstrom, Sinusstrom).

Aufgabe 13. Einen Entwurf der Stromkurve

$$J = J_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right)$$

herzustellen, worin die „Scheitelstromstärke“ J_0, die „Periodenzeit“ T und die „Anfangsphase“ φ_0 gegebene Konstanten sind; die Zeichnung ist zu erläutern.

Lösung: Siehe Abb. 15. Die Ordinaten (Stromstärken) erhalten ihren Höchstwert J_0, wenn der Sinus den Wert $+1$ annimmt. Das findet statt, wenn sein Argument (die „Phase“ des Stromes) $\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0$ die Werte $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$ und $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \ldots$ erreicht, d. h. wenn t folgende Werte annimmt: $t' = \frac{T}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \frac{T}{4} - \frac{T}{2\pi}\varphi_0, t''' = 5\frac{T}{4} - \frac{T}{2\pi}\varphi_0, \ldots$

Der tiefste Wert $-J_0$ wird erreicht, wenn $\sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right)$ den Wert -1 annimmt, was bei den Phasenwerten $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots$ der Fall ist. Das findet zu folgenden Zeiten statt: $t'' = 3\frac{T}{4} - \frac{T}{2\pi}\varphi_0, t'''' = 7\frac{T}{4} - \frac{T}{2\pi}\varphi_0, \ldots$

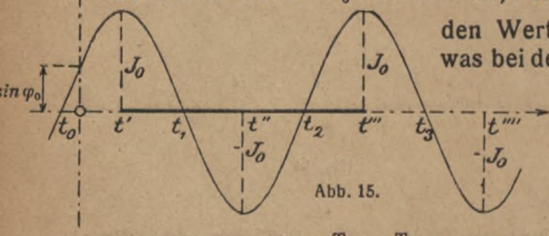


Abb. 15.

Die Stromkurve schneidet die Zeitachse, wenn der Sinus verschwindet. Das ist der Fall, wenn die Phase gleich Null oder irgendein Vielfaches von π ist, z. B. wenn t die Werte $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ annimmt, wo $t_0 = -\frac{T}{2\pi}\varphi_0, t_1 = \frac{T}{2\pi}(-\varphi_0 + \pi) = -\frac{T}{2\pi}\varphi_0 + \frac{T}{2}$, $t_2 = \frac{T}{2\pi}(-\varphi_0 + 2\pi) = -\frac{T}{2\pi}\varphi_0 + T$, $t_3 = \frac{T}{2\pi}(-\varphi_0 + 3\pi) = -\frac{T}{2\pi}\varphi_0 + \frac{3}{2}T, \ldots$ ist. Die Stromkurve schneidet die J-Achse für $t = 0$ und $J = J_0 \sin \varphi_0$. Die Periodenzeit ist T, denn der Sinus ist periodisch mit der Periode 2π des Arguments $\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0$, also mit der Periode T der Zeit t.

Zur Abkürzung werde $\frac{2\pi}{T} = \omega$ gesetzt, so daß $J = J_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ die Gleichung der Stromkurve eines Wechselstromes darstellt.

Zwei Wechselströme $J_1 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$, $J_2 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$, die sich nur durch ihre Anfangsphasen unterscheiden, heißen: in der Phase verschoben; ihre Stromkurven sind völlig kongruent und können durch eine bloße Verschiebung längs der t-Achse zur Deckung gebracht werden. Die Größe dieser Verschiebung ist $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega}$. Wenn zwei oder mehrere Wechselströme durch dieselbe Leitung fließen, so addieren sich in jedem Augenblick ihre jeweiligen Stromstärken, und so entsteht die Stromstärke des Gesamtstromes (Überlagerung der Stromstärken).

Aufgabe 14. Einen Entwurf der Stromkurve herzustellen, die durch Überlagerung zweier Wechselströme $J_1 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $J_2 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$ entsteht, die sich nur in der Phase unterscheiden.

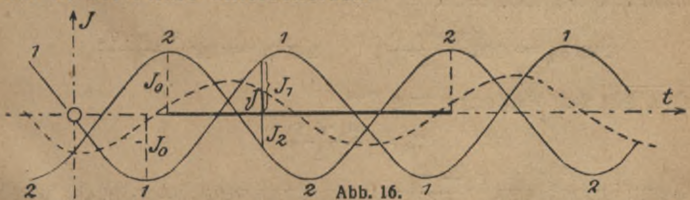


Abb. 16.

Lösung: Siehe Abb. 16. Man füge für genügend viele Abszissen t die zugehörigen Ordinaten J_1 und J_2 mit dem Zirkel aneinander, wobei auf das Vorzeichen von J_1 und J_2

zu achten ist. Es entsteht die gestrichelte Kurve. Sie hat dieselbe Periodenzeit $T = 2\pi/\omega$ wie die beiden gegebenen Stromkurven.

Aufgabe 15. Man soll die Scheitelstromstärke $\mathfrak{J}_0$ und die Anfangsphase φ_0 der Stromkurve berechnen, die durch Überlagerung der beiden Wechselströme $J_1 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $J_2 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$ entsteht.

Lösung: Setzt man $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, so muß sein $\mathfrak{J} = J_1 + J_2$, d. h.

$$\mathfrak{J}_0 (\sin \omega t \cdot \cos \varphi_0 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_0)$$

$$= J_0 (\sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1 + \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2).$$

Da nun diese Gleichung für alle Zeiten, d. h. für beliebige Werte von t bestehen soll, also z. B. für $t = 0$, wo $\sin \omega t = 0$, und für $t = \frac{\pi}{2\omega}$, wo $\cos \omega t = 0$, so müssen sowohl die Faktoren von $\sin \omega t$, wie auch die von $\cos \omega t$ beiderseits übereinstimmen, wodurch man erhält:

$$\mathfrak{J}_0 \cos \varphi_0 = J_0 (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) = 2 J_0 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

$$\mathfrak{J}_0 \sin \varphi_0 = J_0 (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = 2 J_0 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Hieraus läßt sich $\mathfrak{J}_0$ berechnen, indem man beiderseits die Quadrate bildet, addiert und die (positive) Quadratwurzel zieht:

$$\mathfrak{J}_0 = 2 J_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Setzt man diesen Wert wieder ein, so darf man beiderseits durch $2 J_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ dividieren, wenn dies von Null verschieden ist, und erhält

$$\cos \varphi_0 = \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \qquad \sin \varphi_0 = \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

also, bis auf Vielfache von 2π,

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Wenn jedoch $\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0$ ist, dann verschwindet J_0, und für φ_0 ergibt sich gar kein bestimmter Wert. Dieser Fall trifft ein, wenn $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2}$ ist, d. h.

Durch Überlagerung zweier sinusförmigen Wechselströme mit derselben Scheitelstromstärke, derselben Periodenzahl, aber mit dem Phasenunterschiede π entsteht in dem Leiter ein stromloser Zustand (Abb. 17).

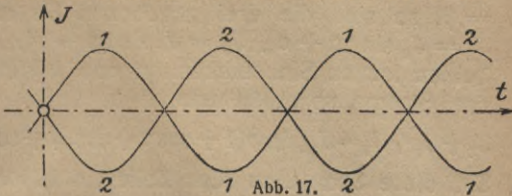


Abb. 17.

Aufgabe 16. Ein *Drehstrom* ist ein System von drei Wechselströmen derselben Periodenzahl mit einem gegenseitigen Phasenunterschiede von 120^0. Man soll zeigen, daß für gleiche Scheitelstromstärken bei Überlagerung der drei Sinusströme in einer Leitung dort kein Strom fließt. Man fertige einen Entwurf an.

Lösung: Die drei Wechselströme, aus denen der Drehstrom zusammengesetzt ist (seine „Phasen"), mögen die Stromkurven $J_1 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$, $J_2 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$, $J_3 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_3)$ haben, wobei $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$ sein soll. Man kann daher schreiben

$$J_1 = J_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$J_2 = J_0 \sin\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= J_0\left(\sin(\omega t + \varphi_1)\cos\frac{2\pi}{3} + \cos(\omega t + \varphi_1)\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$J_3 = J_0 \sin\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= J_0\left(\sin(\omega t + \varphi_1)\cos\frac{2\pi}{3} - \cos(\omega t + \varphi_1)\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Nun ist aber $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Daraus folgt sofort, was zu zeigen war:

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0.$$

Die Abb. 18 zeigt den verlangten Entwurf, ein für die Lehre vom Drehstrom grundlegendes Bild.

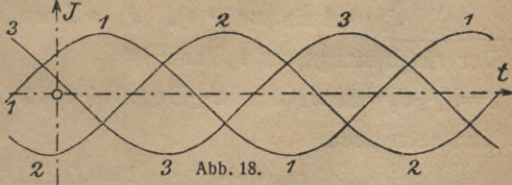


Abb. 18.

Aufgabe 17. Wie groß sind die Phasenunterschiede dreier sinusförmiger Wechselströme derselben Periodenzahl und derselben Scheitelstromstärke, wenn bei ihrer Überlagerung in einer Leitung kein Strom hindurchfließen soll.

Lösung: Man setze $\omega t + \varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha$, $\varphi_1 - \varphi_3 = \beta$, so sind die drei gegebenen Ströme $J_1 = J_0 \sin\varphi$, $J_2 = J_0 \sin(\varphi + \alpha)$, $J_3 = J_0 \sin(\varphi - \beta)$. Zerlegt man die beiden letzten Sinusfunktionen und bildet die Summe der drei Ströme, so erhält man

$$J_1 + J_2 + J_3 = J_0[\sin\varphi(1 + \cos\alpha + \cos\beta) + \cos\varphi(\sin\alpha - \sin\beta)].$$

Soll diese Summe zu allen Zeiten, d. h. für beliebige Werte von t und daher auch von φ, gleich Null sein, so müssen die Faktoren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ beide verschwinden, d. h.

$$1 + \cos\alpha + \cos\beta = 0$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 0.$$

Daher wird bis auf Vielfache von 2π, auf die es hier nicht ankommt, $\beta = \alpha$ und $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, d. h. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Man erhält also den in der vorigen Aufgabe betrachteten Drehstrom als alleinige Lösung.

Aufgabe 18 (Erweiterung der Aufgabe 15). Zu zeigen, daß durch Überlagerung zweier beliebiger sinusförmiger Wechselströme *derselben* Periode wiederum ein sinusförmiger Wechselstrom dieser Periode entsteht. Man bestimme seine Scheitelstromstärke und Anfangsphase, und zeige, daß sich die Scheitelstromstärke aus denen der gegebenen Ströme genau so bestimmen läßt wie die Resultante zweier Kräfte, deren Richtungen überdies durch die Phasen der Ströme festgelegt sind.

Lösung: Die beiden gegebenen Ströme seien

$$J_1 = A \sin(\omega t + \alpha), \quad J_2 = B \sin(\omega t + \beta).$$

Der zusammengesetzte Strom ist

$$J = J_1 + J_2 = \sin\omega t(A\cos\alpha + B\cos\beta) + \cos\omega t(A\sin\alpha + B\sin\beta).$$

Nun setze man

$$A\cos\alpha + B\cos\beta = J_0\cos\varphi_0$$

$$* \quad A\sin\alpha + B\sin\beta = J_0\sin\varphi_0,$$

so wird $$J = J_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

also ein Sinusstrom der Periode ω. Um Scheitelwert J_0 und Anfangsphase φ_0 zu bestimmen, quadriere und addiere man beiderseits die Gleichungen *, so wird

$$J_0 = \sqrt{A^2 + 2AB\cos(\beta - \alpha) + B^2}.$$

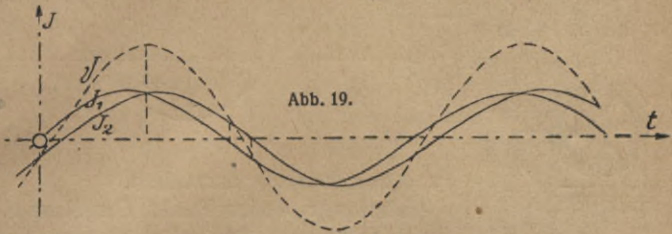


Abb. 19.

Damit ist auch φ_0 durch $\cos\varphi_0$, $\sin\varphi_0$ eindeutig bestimmt. Division von * würde eine einfachere Formel für $\operatorname{tg}\varphi_0$ ergeben, aber man darf nicht vergessen, daß die Kenntnis von $\operatorname{tg}\varphi_0$ allein nicht genügt, um φ_0 eindeutig zu bestimmen (Abb. 19).

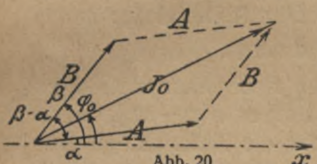


Abb. 20.

Aus dem Kräfteparallelogramm Abb. 20 ergibt sich J_0 sogleich als Größe der Diagonale nach dem Kosinussatze. Man bemerkt, daß J_0 nur von dem Phasen*unterschied* der beiden gegebenen Ströme abhängt.

Aufgabe 19. Unter welchen Bedingungen entsteht bei Überlagerung zweier Sinusströme derselben Periode ein stromloser Zustand?

Lösung: Aus den Formeln * der vorigen Aufgabe folgt wegen $J_0 = 0$

$$\sin(\beta - \alpha) = 0,$$

also $\beta - \alpha$ entweder 0 oder π und demnach entweder $A + B = 0$ oder $A - B = 0$. Beide Ergebnisse führen auf den bei Aufgabe 15 besprochenen Fall.

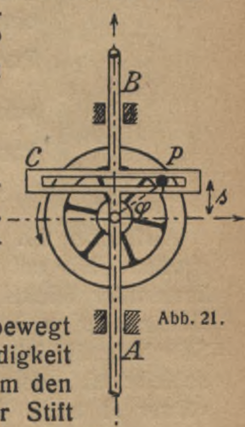


Abb. 21.

Aufgabe 20. Der Punkt P (Abb. 21) bewegt sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreise vom Halbmesser a um den Mittelpunkt O. Ein in ihm angebrachter Stift spielt in dem Schlitz der bei A und B senkrecht geführten *Kurbelschleife*. Man soll die Bewegung irgendeines Punktes der auf- und niederschwingenden Kurbelschleife bestimmen

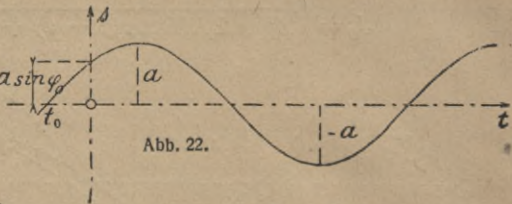


Abb. 22.

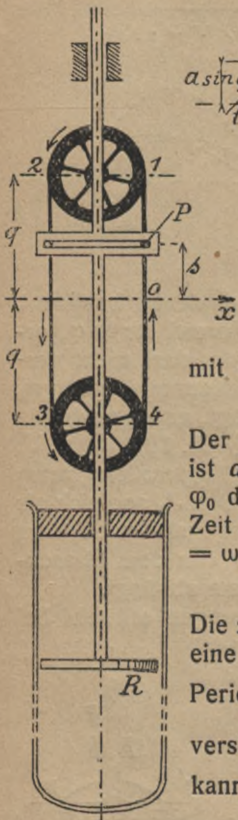


Abb. 23.

und zeichnerisch darstellen.

Lösung: Jeder Punkt der Kurbelschleife bewegt sich genau ebenso, wie sich der lotrechte Abstand s des Punktes P von der Mittellage Ox der Schleife mit der Zeit ändert. Der Abb. zufolge ist

$$s = a \sin \varphi.$$

Der von P in der Zeit t durchlaufene Bogen ist $a\omega t$, andrerseits ist er $a(\varphi - \varphi_0)$, wenn φ_0 der Winkel ist, der die Anfangslage (zur Zeit $t = 0$) von P bestimmt. Daher ist $\varphi = \omega t + \varphi_0$, also

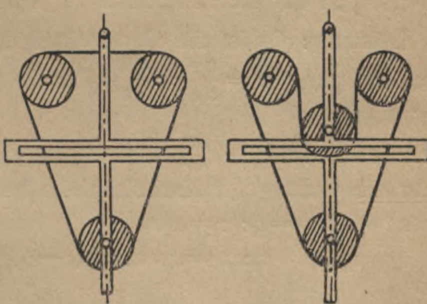
$$s = a \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Die zeichnerische Darstellung (Abb. 22) ergibt eine Sinuslinie vom Scheitelwert a und der Periodenlänge $\frac{2\pi}{\omega}$. Das Argument (die „Phase") verschwindet für t gleich $-\frac{\varphi_0}{\omega} = t_0$, und man kann damit auch schreiben

$$s = a \sin \omega (t - t_0).$$

Aufgabe 21. In der Abb. 23 ist ein Rührwerk mit großem Hub entworfen. Über zwei von einem Motor mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gedrehten Rollen vom Halbmesser a ist ein Band gespannt, an dem bei P ein Stift befestigt ist. Dieser greift in den Schlitz einer Kurbelschleife ein, deren Stange am unteren Ende den Ringrührer R trägt. Man soll die Bewegung dieses Rührers erklären und durch eine Zeit-Weg-Kurve darstellen. (*Verlängerte Kurbelschleife*).

Lösung: Der Ringrührer bewegt sich genau so auf und nieder, wie der lotrechte Abstand s des Punktes P, dessen Bahngeschwindigkeit $a\omega$ ist, von der Mittellage Ox der Schleife angibt. Befindet sich P in der Lage 0 zur Zeit $t = t_0$, so ändert sich s auf dem Wege $\overline{01}$ nach dem Gesetz $s = a\omega\,(t - t_0)$. Da in der Lage 1 $s = q$ ist, so ist der zugehörige Zeitpunkt t gleich $q/a\omega + t_0 = t_1$. Während P den Halbkreis $\overset{\frown}{12}$ beschreibt, ändert sich sein lotrechter Abstand s, den Überlegungen der vorigen Aufgabe entsprechend, nach dem Gesetz $s - q = a \sin\omega\,(t - t_1)$; in der Lage 2 ist $s = q$, und daher der zugehörige Zeitpunkt t gleich $t_1 + \frac{\pi}{\omega} = t_2$. Auf dem geradlinigen Wege $\overline{23}$ befolgt s wieder ein lineares Gesetz: $s - q = -a\omega\,(t - t_2)$; hiernach ist s wieder zu Null geworden zur Zeit t gleich $q/a\omega + t_2 = 2q/a\omega + \frac{\pi}{\omega} + t_0$, und an der Stelle 3, wo s gleich $-q$ ist, ist t gleich $\frac{2q}{a\omega} + t_2 = \frac{3q}{a\omega} + \frac{\pi}{\omega} + t_0 = t_3$. Wenn jetzt P den Halbkreis $\overset{\frown}{34}$ beschreibt, ist $s + q = a \sin\omega\,(t - t_3)$; an der Stelle 4 ist s gleich $-q$, also t gleich $t_3 + \frac{\pi}{\omega} = \frac{3q}{a\omega} + \frac{2\pi}{\omega} + t_0 = t_4$. Schließlich längs der Wege $\overline{40}$ und $\overline{01}$ ist jetzt $s + q = a\omega\,(t - t_4)$, an der Stelle 0 ist s gleich 0 und jetzt t gleich $\frac{q}{a\omega} + t_4 = \frac{4q}{a\omega} + \frac{2\pi}{\omega} + t_0$, an der Stelle 1 ist s gleich q und jetzt t gleich $\frac{5q}{a\omega} + \frac{2\pi}{\omega} + t_0 = t_5$.



Und so geht das Spiel in regelmäßiger Wiederkehr weiter.

Die Zeit-Weg-Kurve besteht aus Geraden und daraufgesetzten Sinuslinien, wie die Abb. 24 zeigt.

Wie ist die Lösung, wenn die beiden Rollen verschiedene Durchmesser haben? Und wie in den beiden umstehend abgebildeten Fällen?

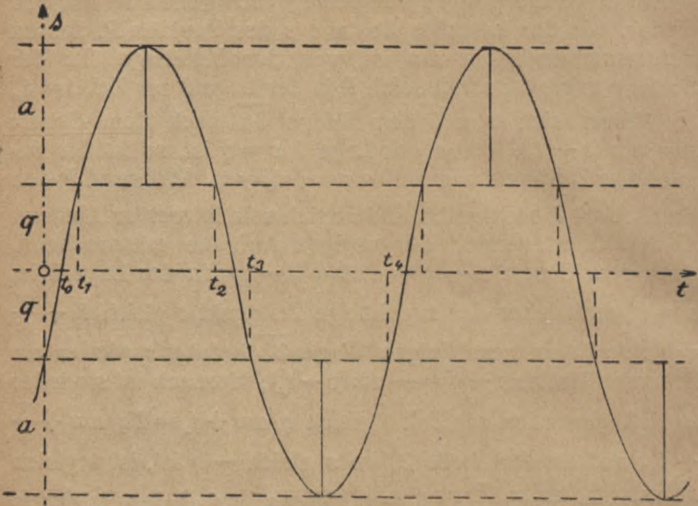


Abb. 24.

*Aufgabe 22. Man soll die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen bestimmen und zeichnerisch darstellen, mit denen die in den Aufgaben 20 und 21 ermittelten Bewegungen der Kurbelschleife vor sich gehen.

Lösung: Es ist die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ und die Beschleunigung $w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. Für die einfache Kurbelschleife wird also

$$v = a\omega \cos \omega (t - t_0), \quad w = -a\omega^2 \sin \omega (t - t_0) = -\omega^2 s.$$

Für die verlängerte Kurbelschleife hat man dagegen

von $t = t_0$ bis $t = t_1$: $v = a\omega \qquad w = 0$

t_1 „ t_2: $v = a\omega \cos \omega (t - t_1), w = -a\omega^2 \sin \omega (t - t_1) = -\omega^2(s - q)$

t_2 „ t_3: $v = -a\omega \qquad w = 0$

t_3 „ t_4: $v = a\omega \cos \omega (t - t_3), w = -a\omega^2 \sin \omega (t - t_3) = -\omega^2(s + q)$

t_4 „ t_5: $v = a\omega \qquad w = 0$

und so fort in periodischer Wiederholung. Vgl. Abb. 25; die Zeit-Beschleunigungskurve ist hier zwar noch stetig, hat aber Ecken.

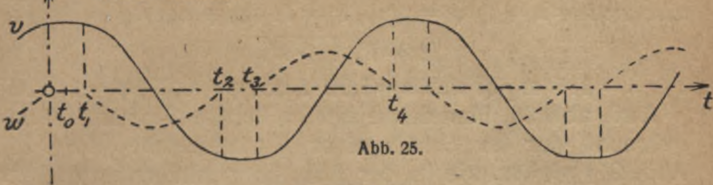


Abb. 25.

Das *Schubkurbelgetriebe* (Abb. 26) besteht aus der um den festen Punkt O drehbaren Kurbelstange OC von der Länge r, aus der Schubstange CK von der Länge l und dem Kreuzkopfe K, der sich auf einer durch O gehenden Geraden bewegt.

Aufgabe 23. Den Weg $OK = s$ des Kreuzkopfes in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel φ darzustellen. Man führe das Längenverhältnis $r:l = \lambda$ ein; bei Dampfmaschinen ist $\lambda \leqq 1:5$. Entwurf einer Zeichnung.

Lösung: Der Kreuzkopfwinkel sei ψ, dann ist aus der Abb. 26 unmittelbar zu entnehmen

$$s = r \sin\varphi + l \cos\psi.$$

Aber in dem Dreieck OCK ist $\lambda = r:l = \sin\psi : \cos\varphi$,

mithin $s = r \sin\varphi + l\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2\varphi}$

oder $s = l\left(\lambda \sin\varphi + \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2\varphi}\right).$

Übrigens unterscheidet sich der Weg des Kreuzkopfes vom Kolbenweg nur um ein konstantes Stück.

Aufgabe 24. Die beiden Totlagen, A die innere, B die äußere, ergeben sich für $\varphi = \mp 90^0$; für welchen Kurbelwinkel steht der Kreuzkopf genau mitten zwischen den beiden Totlagen?

Lösung: Die Mitte von $OA = l - r$ und $OB = l + r$ ist l. Für $s = l$ wird

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\lambda.$$

Für $\lambda = 1:5$ erhält man $\sin\varphi = 1:10$, $\varphi = 5^0 44'$.

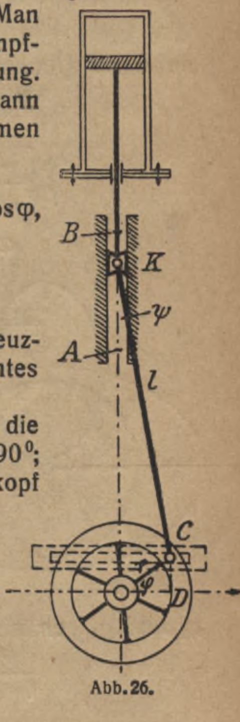


Abb. 26.

Aufgabe 25. Für welche Stellung des Kreuzkopfes ist die Schubstange Tangente des Kurbelkreises?

Lösung: Das Dreieck OCK ist dann bei C rechtwinklig, also $r:l=\lambda=\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\varphi$, $s=l:\cos\varphi$ oder

$$s=l\sqrt{1+\lambda^2}.$$

Für $\lambda=1:5$ ergibt sich $s=1{,}02\cdot l$, $\cos\varphi=0{,}98$, $\varphi=11^0 20'$

Aufgabe 26. Man denke sich im Punkte C einen Stift angebracht, der im Schlitz einer Kurbelschleife (Aufg. 20, Abb. 21) gleitet, wie in der Abb. 26 punktiert angedeutet ist. In welcher Beziehung steht die Schwingung $DC=u$ der Kurbelschleife zur Schwingung $OK=s$ des Kreuzkopfes des Kurbelgetriebes?

Lösung: Es ist $u=r\sin\varphi$. Die Elimination von φ aus dem Ergebnis der Aufg. 23 liefert die gewünschte Beziehung

$$\frac{s}{l}\left(\frac{s}{l}-2\,\frac{u}{l}\right)=1-\lambda^2.$$

Wie kann man sie unmittelbar aus dem Dreieck KOC entnehmen? (Anwendung des Kosinussatzes!)

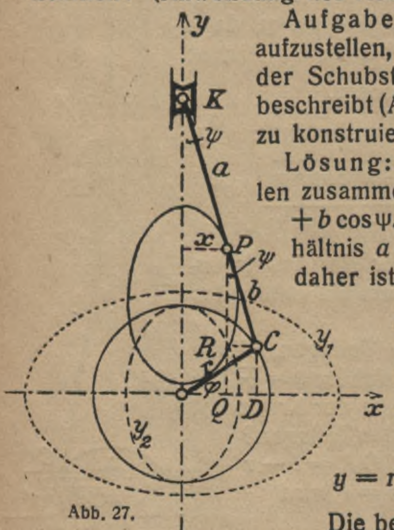


Abb. 27.

Aufgabe 27. Die Gleichung der Kurve aufzustellen, die ein beliebiger Punkt P der Schubstange eines Kurbelgetriebes beschreibt (Abb. 27); danach ist die Kurve zu konstruieren.

Lösung: $PQ=y$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen: $y=QR+RP=r\sin\varphi+b\cos\psi$. Nun ist OD von O aus im Verhältnis $a:b$ geteilt, wo $a+b=l$ ist, daher ist $x:a=r\cos\varphi:l$

oder $\qquad \cos\varphi=\frac{x}{\lambda a}$

für $r:l=\lambda$, und es ist $\sin\psi=\frac{x}{a}$; mithin wird

$$y=r\sqrt{1-\frac{x^2}{(\lambda a)^2}}+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Die beiden Summanden von y seien y_1 und y_2 genannt, dann ist $y=y_1+y_2$,

$$\frac{x^2}{(\lambda a)^2}+\frac{y_1^2}{r^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1.$$

Diese beiden Gleichungen stellen zwei Ellipsen dar, deren Halbachsen bekannt sind, und die sich daher leicht zeichnen lassen. Wenn man die zur selben Abszisse x gehörigen Ordinaten unter Berücksichtigung des Vorzeichens aneinander trägt, erhält man einen Punkt der Kurve des Kurbelgetriebes. Diese selbst ist vom vierten Grade. Die äußersten Werte, die y annehmen kann, entsprechen den beiden Totlagen des Kreuzkopfes K; daher ist $b - r \leqq y \leqq b + r$. Mithin darf der Wurzelausdruck y_1 beide Vorzeichen, y_2 aber nur positive Werte annehmen. Damit keine der beiden Wurzeln imaginär werde, muß $-\lambda a \leqq x \leqq +\lambda a$ sein ($\lambda \leqq 1$ vorausgesetzt).

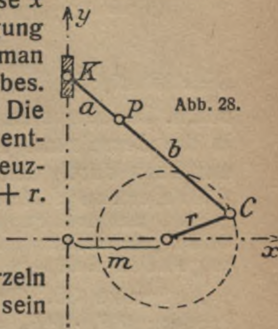


Abb. 28.

Aufgabe 28. Die Gleichung der Kurve aufzustellen, die ein beliebiger Punkt P der Schubstange eines *exzentrischen Kurbelgetriebes* beschreibt (Abb. 28).

Lösung: Man findet ähnlich wie vorher

$$y = r\sqrt{1 - \frac{(x - \mu a)^2}{(\lambda a)^2}} + b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

wobei $a + b = l$, $\lambda = r : l$, $\mu = m : l$ gesetzt ist. Auch diese Kurve läßt sich durch Überlagerung zweier Ellipsen finden. Man zeichne im besondern den Fall, wo $\lambda + \mu = 1$ ist.

Aufgabe 29. Den geometrischen Ort des Punktes P zu bestimmen, der sich in der Mitte der Hängeschiene eines *Dreistabgelenkes* mit gleichen Schenkeln befindet (Abb. 29).

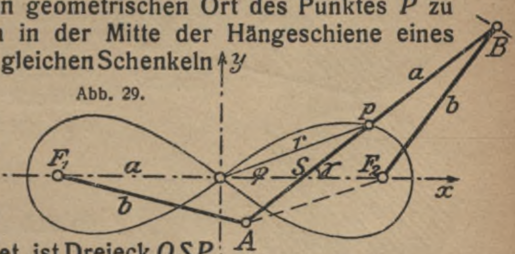


Abb. 29.

Lösung: Die Dreiecke AF_2F_1 und AF_2B sind symmetrisch kongruent, und da $OP = r$ die Seitenmitten verbindet, ist Dreieck OSP gleichschenklig, also $OS = SP\,(= u)$, $\gamma = 2\varphi$. Aus dem Dreieck SAF_1 entnimmt man nun nach dem Kosinussatze

$$b^2 = (a + u)^2 + (a - u)^2 - 2(a + u)(a - u)\cos 2\varphi.$$

Ferner ist $r \sin\varphi = u \sin\gamma = 2u \sin\varphi \cos\varphi$, also $r = 2u \cos\varphi$, falls $\varphi \neq o$; daher folgt

$$b^2 = 4a^2 \sin^2\varphi + 4u^2 \cos^2\varphi = 4a^2 \sin^2\varphi + r^2,$$
$$r^2 = b^2 - 4a^2 \sin^2\varphi.$$

Dies ist die Gleichung des gesuchten Ortes in Polarkoordinaten. Die Kurve heißt *Lemniskatoide* und geht für $b = a\sqrt{2}$ in die *Lemniskate* $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ über. Die Kurve geht nur dann durch den Nullpunkt, wenn $b \leqq 2a$ ist. Warum?

Bemerkung: Man kann sich leicht ein Modell des Dreistabgelenks aus drei Pappstreifen anfertigen, die man bei F_1, F_2 mit Reißnägeln befestigt, und deren Gelenke bei A und B man durch umgedrehte Reißnägel herstellt.

Aufgabe 30. Zu zeigen, daß bei der Lemniskate das Produkt $PF_1 \cdot PF_2$ einen konstanten Wert hat.

Lösung: Aus den Dreiecken POF_1, POF_2 ist ersichtlich:

$$PF_1^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\varphi, \quad PF_2^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi.$$

Daher $$PF_1^2 \cdot PF_2^2 = r^2(r^2 - 2a^2\cos 2\varphi) + a^4.$$

Bei der Lemniskate verschwindet der Klammerausdruck.

Aufgabe 31. *Riementrieb.* Die Länge eines Riemens zu bestimmen, der über zwei Riemenscheiben von den Halbmessern R und r und dem Achsenabstand c straff gelegt werden soll, a) bei offenem (Abb. 30), b) bei gekreuztem Riemen (Abb. 31).

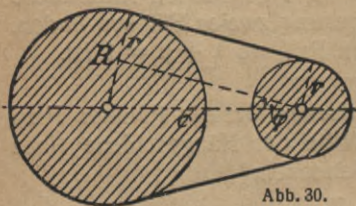


Abb. 30.

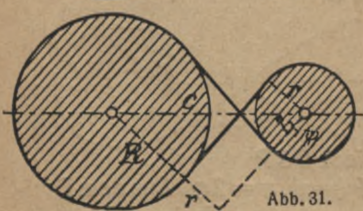


Abb. 31.

Lösung: a) Der spitze Winkel im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c ist gegeben durch

$$\sin\varphi = \frac{R-r}{c},$$

so daß also $\varphi = \arc\sin\frac{R-r}{c}$ ist. Mithin wird die Riemenlänge

$$l = 2\sqrt{c^2 - (R-r)^2} + 2(R-r)\arc\sin\frac{R-r}{c} + \pi(R+r).$$

b) Hier ist der entsprechende Winkel $\psi = \operatorname{arc} \sin \frac{R+r}{c}$,

$$l = 2\sqrt{c^2 - (R+r)^2} - 2(R+r) \operatorname{arc} \sin \frac{R+r}{c} + 2\pi(R+r).$$

Man bemerkt, daß im Falle a) $l - 2\pi r$ eine Funktion der Differenz $R - r$, und im Falle b) l selbst eine Funktion der Summe $R + r$ ist.

Aufgabe 32. Die Länge l eines Riemens und der Achsenabstand der beiden Riemenscheiben seien gegeben. Man soll die Halbmesser R, r der beiden Riemenscheiben als Funktionen der Winkel φ, ψ der vorhergehenden Aufgabe darstellen; a) bei offenem, b) bei gekreuztem Riemen.

Lösung: a) Die Länge der Tangente zwischen den beiden Scheiben (Abb. 30) ist gleich $\frac{1}{2}l - R\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$; aus dem rechtwinkligen Dreieck ersieht man, daß sie gleich $c \cos \varphi$, und daß $R - r = c \sin \varphi$ ist. Daraus folgt

$$2R = \frac{l}{\pi} - 2\frac{c}{\pi}\left(\cos\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi\right)$$

$$2r = \frac{l}{\pi} - 2\frac{c}{\pi}\left(\cos\varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\sin\varphi\right).$$

b) Hier ist entsprechend $\frac{1}{2}l - R(\pi - \psi) - r(\pi - \psi) = c \cos \psi$, $R + r = c \sin \psi$, aber eine Darstellung von R, r durch ψ ist hier nicht möglich. Das konnte schon aus der Schlußbemerkung zur Lösung der vorhergehenden Aufgabe gefolgert werden. Denn danach muß bei festem l und c auch die Summe der Halbmesser $R + r$ konstant bleiben, wenn der Riemen gekreuzt ist. Übrigens ist

$$l = 2c(\cos\psi + (\pi - \psi)\sin\psi),$$

daher bei gegebenen $l:c$ auch ψ bestimmt.

Aufgabe 33. *Stufenscheibe.* Eine antreibende Welle, die u Umdrehungen in der Minute macht, trägt eine Stufenscheibe aus n Einzelscheiben; die Durchmesser der n Scheiben sind, der Größe nach geordnet, $d_1, d_2, \ldots d_n$.

Parallel dazu in richtiger Gegenanordnung (Abb. 32) befindet sich eine zweite Stufenscheibe mit denselben Stufen, aber in entgegengesetzter Reihenfolge. Wenn derselbe gekreuzte Riemen benutzt werden soll, muß nach den beiden vorhergehenden Aufgaben die Summe der Durchmesser je zweier gegenüberliegender Riemenscheiben konstant ($= C$) sein. Die Geschwindigkeit der angetriebenen Welle soll bei jeder folgenden Übersetzung in demselben Verhältnis v wachsen. Wie sind die Durchmesser der Scheiben zu wählen? Welches sind die Umdrehungszahlen? — Zahlenbeispiel: $n = 4$, $v = 2$.

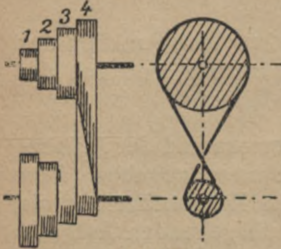


Abb. 32.

Lösung: Sind $u_1, u_2, \dots u_n$ die Umdrehungszahlen der n Scheiben, so ist $ud_1 = u_n d_n$, $ud_2 = u_{n-1} d_{n-1}, \dots ud_n = u_1 d_1$. Daraus durch Multiplikation

$$(1) \qquad u^n = u_1 u_2 \dots u_n, \quad u_\lambda u_{n-\lambda+1} = u^2.$$

Ferner soll $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = v$ sein, daher

$$\frac{u_\lambda}{u_1} = v^{\lambda-1} \quad \text{für } \lambda = 2, 3, \dots n,$$

und weiter $$\frac{u_2 u_3 \dots u_n}{u_1{}^{n-1}} = v^{1+2+\dots+(n-1)} = v^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

also wegen (1) $$u^n = u_1^n v^{\frac{n(n-1)}{2}},$$
$$u = u_1 v^{\frac{n-1}{2}},$$
$$(2) \qquad u_\lambda = u \cdot v^{\lambda - \frac{n+1}{2}}.$$

Hierdurch sind schon die einzelnen Umlaufszahlen bestimmt:

$$u_1 = \frac{u}{\sqrt{v^{n-1}}}, \quad u_2 = \frac{u}{\sqrt{v^{n-3}}}, \dots u_n = \frac{u}{\sqrt{v^{1-n}}} = u\sqrt{v^{n-1}}.$$

Aus $d_1 + d_n = d_2 + d_{n-1} = \dots = d_n + d_1 = C$ folgt wegen $ud_\lambda = u_{n-\lambda+1} d_{n-\lambda+1}$ nach (1):

$$d_\lambda = \frac{Cu_{n-\lambda+1}}{u + u_{n-\lambda+1}} = \frac{Cu}{u + u_\lambda},$$

daher nach (2) $$d_\lambda = \frac{C}{1 + v^{\lambda - \frac{n+1}{2}}},$$

womit die Scheibendurchmesser gefunden sind:

$$d_1 = \frac{C}{1+v^{\frac{1-n}{2}}}, \quad d_2 = \frac{C}{1+v^{\frac{2-n}{2}}}, \ldots d_n = \frac{C}{1+v^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Das Zahlenbeispiel ergibt:

$$u_1 = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}u, \quad u_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}u, \quad u_3 = \sqrt{2}u, \quad u_4 = 2\sqrt{2}u;$$

d. h. $u_1 \approx 0{,}3535\,u$, $u_2 \approx 0{,}707\,u$, $u_3 \approx 1{,}414\,u$, $u_4 \approx 2{,}828\,u$;

$d_1 \approx 0{,}739\,C$, $\quad d_2 \approx 0{,}586\,C$, $\quad d_3 \approx 0{,}414\,C$, $\quad d_4 \approx 0{,}261\,C$.

Aufgabe 34. *Nürnberger Schere.* Was für eine Kurve beschreibt der Punkt P_n, wenn A_0 festgehalten wird und $A_1, A_2, \ldots$ sich auf einer Geraden bewegen (Abb. 33)?

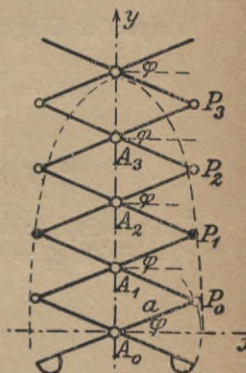


Abb. 33.

Lösung: P_0 hat die Koordinaten $x_0 = a\cos\varphi$, $y_0 = a\sin\varphi$, bewegt sich also auf einem Kreise. P_n hat die Koordinaten $x_n = a\cos\varphi$, $y_n = (2n+1)\,a\sin\varphi$, bewegt sich also auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(2n+1)^2 a^2} = 1.$$

Von ihr kommt praktisch wohl nur ein Bogen in Frage.

*Aufgabe 35. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Punkt A_n, wenn die Schere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω geöffnet wird?

Lösung: Wenn die Zeit t von Beginn der Öffnung gerechnet wird, ist $\varphi = \omega t$; A_n hat die Höhe $s = 2na\sin\varphi = 2na\sin\omega t$, also ist die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = 2na\omega\cos\omega t.$$

Aufgabe 36. Von dem umstehend entworfenen *Parabelträger* (Abb. 34) mit der Spannweite l und der Pfeilhöhe f, der in $2n$ gleichbreite Felder geteilt ist, sind die Längen aller Vertikal- und Diagonalstäbe zu berechnen. Zahlenbeispiel: $l = 20$ m, $f = 5$ m, $n = 4$.

Lösung: Abszissen und Ordinaten werden von der Trägermitte aus gerechnet. Gleichung der Parabel:

$y = f\left(1 - 4\frac{x^2}{l^2}\right).$

Breite eines jeden Feldes $\delta = \frac{l}{2n}$, daher Länge des (von der Mitte aus) λ^{ten} Vertikalstabes:

$y_\lambda = f\left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right).$

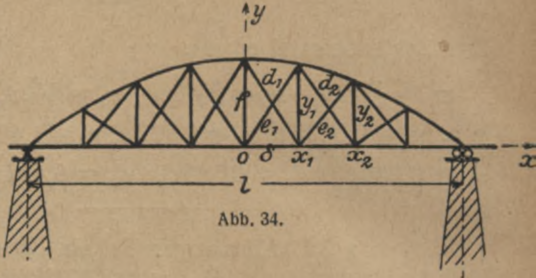


Abb. 34.

Länge der Diagonalen

$$d_\lambda = \sqrt{f^2\left(1 - \frac{(\lambda-1)^2}{n^2}\right)^2 + \frac{l^2}{4n^2}},$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$e_\lambda = \sqrt{f^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right)^2 + \frac{l^2}{4n^2}} = d_{\lambda+1}.$$

Zahlenbeispiel: $\delta = 2{,}5$, $y_1 = 4{,}69$, $y_2 = 3{,}75$, $y_3 = 2{,}19$, $d_1 = 5{,}60$, $d_2 = 5{,}31 = e_1$, $d_3 = 4{,}51 = e_2$, $d_4 = 3{,}32 = e_3$.

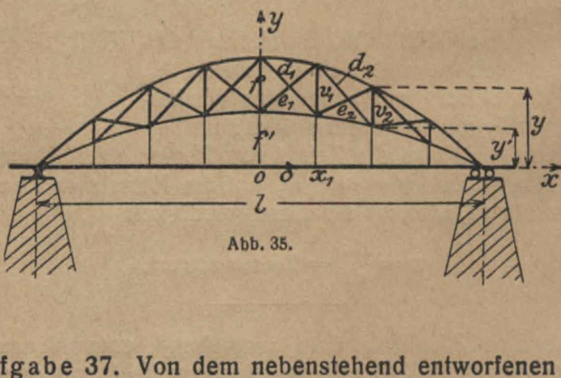


Abb. 35.

Aufgabe 37. Von dem nebenstehend entworfenen parabolischen *Sichelträger* (Abb. 35) sind die Längen aller Vertikal- und Diagonalstäbe zu berechnen ($2n$ Felder). Zahlenbeispiel: $l = 20$ m, $f = 2$ m, $f' = 3$ m, $n = 4$.

Lösung: Die Gleichung der oberen Parabel ist

$$y = (f + f')\left(1 - 4\frac{x^2}{l^2}\right),$$

die der unteren $y' = f'\left(1 - 4\frac{x^2}{l^2}\right)$.

Die Länge des λ^{ten} Vertikalstabes ist danach $\left(\text{für } x = \lambda\delta = \lambda\frac{l}{2n}\right)$

$$v_\lambda = y_\lambda - y_\lambda' = f\left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right).$$

Die Längen der Diagonalen sind

$$d_\lambda = \sqrt{(y_{\lambda-1} - y_\lambda')^2 + \delta^2}$$
$$= \sqrt{\left(f\left(1 - \frac{(\lambda-1)^2}{n^2}\right) + f'\frac{(2\lambda-1)}{n^2}\right)^2 + \frac{l^2}{4n^2}}$$
$$e_\lambda = \sqrt{(y_\lambda - y'_{\lambda-1})^2 + \delta^2}$$
$$= \sqrt{\left(f\left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) - f'\frac{(2\lambda-1)}{n^2}\right)^2 + \frac{l^2}{4n^2}}.$$

Zahlenbeispiel: $\delta = 2{,}5$, $y_1 = 4{,}685$, $y_2 = 3{,}75$, $y_3 = 2{,}185$; $y_1' = 2{,}81$, $y_2' = 2{,}25$, $y_3' = 1{,}31$; $d_1 = 3{,}32$, $d_2 = 3{,}485$, $d_3 = 3{,}49$, $d_4 = 3{,}32$; $e_1 = 3{,}02$, $e_2 = 2{,}67$, $e_3 = 2{,}50$, (Sehne) $e_4 = 2{,}82$.

Aufgabe 38. Die Brücke bei Grünenthal über den Kaiser-Wilhelm-Kanal hat etwa die Form des Entwurfes 36. Man soll aus den angeschriebenen Angaben die Gleichung der Parabel und ihre Schnittpunkte mit der Fahrbahnachse bestimmen.

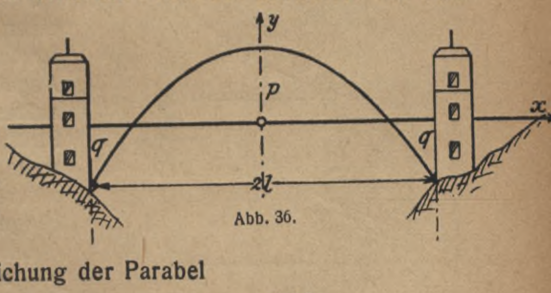


Abb. 36.

Lösung: Gleichung der Parabel

$$y = p - (p + q)\left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

y verschwindet für

$$x = \pm l\sqrt{\frac{p}{p+q}}.$$

Aufgabe 39. Die Längen der Diagonalstäbe und die Winkel, die sie mit der Fahrbahn einschließen, für die nebenstehende Brückenkonstruktion zu berechnen. Spannweite $2l$, Anzahl der gleichbreiten Felder $2n$, Pfeilhöhe p; jede der mittleren Diagonalen überspannt r Felder, jede der äußeren s Felder. (Abb. 37.)

Abb. 37.

Lösung: Mittlere Diagonalenlänge $D = \sqrt{p^2 + \left(\frac{rl}{n}\right)^2}$,

Winkel gegen die Fahrbahn $\alpha = \text{arc tg}\left(\frac{pn}{lr}\right)$;

äußere Diagonalenlänge $d = \sqrt{p^2\left(1 - \frac{(r+s)^2}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{ls}{n}\right)^2}$,

Winkel $\beta = \text{arc tg}\left(\frac{pn}{ls}\left(1 - \left(\frac{r+s}{n}\right)^2\right)\right)$.

Aufgabe 40. Die Gleichung der Durchhangsparabel von der Form

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

einer Hochspannungsfernleitung nach den Angaben des Entw. 38 aufzustellen, wo p die Pfeilhöhe, l die Spannweite, h den Höhenunterschied der Aufhängepunkte bedeuten.

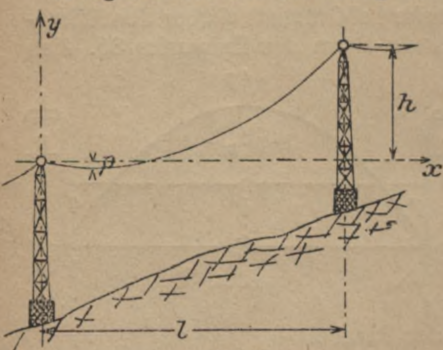


Abb. 38.

Lösung: Die Parabel $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ hat ihren tiefsten Punkt bei

$$x = -\frac{\beta}{2\gamma},\; y_{\min} = \alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}, \text{ wobei } \gamma > 0.$$

Nun ist $y = 0$ für $x = 0$ und $y = h$ für $x = l$, daher

$$\alpha = 0,\; h = \beta l + \gamma l^2.$$

Ferner $y_{\min} = -p$, also $p = \frac{\beta^2}{4\gamma}$, $\gamma = \frac{\beta^2}{4p}$, mithin gilt zur Bestimmung von β

$$(\beta l)^2 + 4p\,(\beta l) - 4ph = 0,$$

woraus
$$\beta l = 2p\,(w-1),$$

wenn zur Abkürzung $w = \sqrt{1 + h/p}$ gesetzt wird. Daher

$$\gamma l^2 = p\,(w-1)^2,$$

also
$$y = 2p\,(w-1)\frac{x}{l} + p\,(w-1)^2\left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

Jedem der beiden Vorzeichen, die die Quadratwurzel w annehmen kann, entspricht eine Parabel, aber nur eine kommt in Frage, wenn der tiefste Punkt eine positive Abszisse haben soll. Denn dann muß

$$-\beta/2\gamma > 0$$

sein, also β und γ entgegengesetztes Zeichen haben. Nun ist $p > 0$, also $\gamma > 0$, daher muß $\beta < 0$ sein. Da aber w dem absoluten Werte nach größer als 1 ist, kann β nur dann negativ sein, wenn w das *negative* Vorzeichen hat. Also gilt hier nur die Parabelgleichung

$$y = -2p\left(1 + \sqrt{1 + h/p}\right)\frac{x}{l} + p\left(1 + \sqrt{1 + h/p}\right)^2\left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

Der tiefste Punkt liegt bei $x = \frac{l}{1 + \sqrt{1 + h/p}}$. Die Parabel schneidet noch einmal die Abszissenachse bei $x = \frac{2l}{1+w}$.

Aufgabe 41. Die Gleichung der Durchhangsparabel von der Form $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ einer Drahtleitung nach den Angaben des Entwurfes 39 aufzustellen, wo p den parallel zur Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte angezielten Durchhang, h den Höhenunterschied der Aufhängepunkte, l die Spannweite bedeuten. Wo liegt der tiefste Punkt?

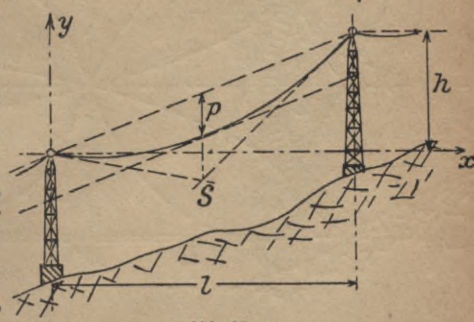


Abb. 39.

Lösung: Die Zielrichtung hat den Anstieg h/l. Die Parabeltangente mit diesem Anstieg berührt im Punkte mit der Abszisse $x = \frac{l}{2}$. Es ist also $\alpha = o$, $h = \beta l + \gamma l^2$, $\frac{h}{2} - p = \beta\frac{l}{2} + \gamma\left(\frac{l}{2}\right)^2$. Daraus bestimmt sich

$$\beta l = h - 4p,$$

$$\gamma l^2 = 4p,$$

somit ist

$$y = (h - 4p)\frac{x}{l} + 4p\left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

Der tiefste Punkt hat die Abszisse

$$x = -\beta/2\gamma = \frac{4p-h}{8p}l$$

und liegt nur dann zwischen o und l, wenn $h < 4p$ ist.

Bemerkung. Zur Konstruktion des Parabelbogens beachte man, daß der Schnittpunkt S der Anfangs- und Endtangente in der Verlängerung des Durchhangs nach unten um sich selbst liegen muß. Beweis?

Aufgabe 42. Ein Tal wird durch eine kreisförmige Sperrmauer abgeschlossen, so daß eine Talsperre entsteht (Wasserseite nach dem Äußeren des Kreisbogens). Zum Heranschaffen der Baustoffe bedient man sich manchmal eines *Kabelkrans*, der aus zwei bei P und R auf Geleisen fahrbaren Gerüsten u. zwischengespanntem Tragseil mit Laufkatze besteht, das den zu erbauenden Kreisbogen an der Baustelle bei B berührt. CC' und DD' sind gerade Geleise, $\widehat{MC}$ und $\widehat{ND}$ Bogenstücke. Die Gestalt

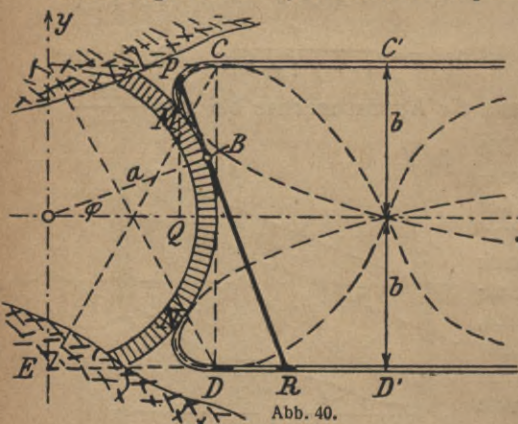


Abb. 40.

dieser Kurven ist aus der Bedingung zu bestimmen, daß PR die konstante Seillänge $2b$ in jeder Stellung beibehalten soll (Abb. 40 im Grundriß). a Halbmesser des Kreises, $CD = C'D' = 2b$ Abstand der geraden Gleisführung.

Lösung: Für die Koordinaten von P gilt längs CM

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = a, \tag{1}$$

$$y + b = 2b \cos \varphi. \tag{2}$$

Denn P liegt auf der Geraden PR mit der Gleichung (1) in der Hesseschen Normalform, während (2) dem rechtwinkligen Dreieck zu entnehmen ist, in dem die Hypotenuse $PR = 2b$ und der $\sphericalangle P = \varphi$ ist. Die Koordinaten von R genügen längs DN denjenigen Formeln, die sich ergeben, wenn man φ mit $-\varphi$ und y mit $-y$ vertauscht. Da y seinen Höchstwert b für $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ annimmt, wozu $x = a$ gehört, ergibt sich der Punkt C, und der Anschluß des gekrümmten Geleises an den geraden Teil CC' geschieht bei C ohne Knick. Um den Punkt M zu finden, in dem die Kurve den Kreis berührt, so muß dort $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ sein, und die Formel (2) liefert $y = 2\frac{b}{a}x - b$. Das ist aber die Gleichung der Geraden CE, deren Schnitt mit dem Kreise also den Punkt M ergibt.

Man kann auch φ aus (1) und (2) wegschaffen, so daß sich die Gleichung vierter Ordnung

$$(x^2 + y^2)(y + b)^2 - 4abx(y + b) + 4b^2(a^2 - y^2) = 0$$

ergibt. Aber für die Rechnung ist damit nicht viel gewonnen. Man entwerfe die Kurve in ihrem weiteren Verlauf auch über $\widehat{MC}$ hinaus. So z. B. wird $y = 0$ für $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $x = 2a$, und wenn $\cos \varphi \to 0$, $\varphi \to \pi/2$, $\sin \varphi \to 1$, so wird $y \to -b$, $x \to \infty$, d. h. die Kurve nähert sich asymptotisch der unteren Gleisgeraden; usw.

Aufgabe 43. Auf einer Landstraße soll eine Stelle P so bestimmt werden, daß von dort aus die Vorderseite AB eines Schloßgebäudes am günstigsten, d. h. unter möglichst großem Gesichtswinkel erscheint (Abb. 41).

1. Lösung (elementar): Zu jedem Punkt P' der Landstraße, von dem aus AB unter dem Winkel φ erscheint, gehört ein zweiter P'' mit derselben Eigenschaft; sie sind die Schnittpunkte des Kreises, der über der Sehne AB den Winkel φ als Randwinkel faßt, mit der Straßenachse. φ nimmt stetig ab, wenn P' und P'' sich nach entgegengesetzten Richtungen entfernen, und nimmt stetig zu, wenn P', P'' einander näher kommen. Ein größter Wert wird in dem Grenzfall eintreten, wenn P' und P'' in einen Punkt P zusammenrücken, d. h. wenn der Kreis über der Sehne AB die Straßenachse berührt. Man muß noch zeigen, daß φ_m wirklich *der* größte aller Gesichtswinkel φ ist. Im Dreieck AQB ist $\sphericalangle Q = \varphi_m$ als Randwinkel desselben Kreises, also ist $\varphi_m + \sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^0$; im Dreieck $AP'B$ ist aber $\varphi + \sphericalangle A + \epsilon + \sphericalangle B = 180^0$, also $\varphi_m = \varphi + \epsilon$; φ_m übertrifft also jeden anderen Sichtwinkel φ.

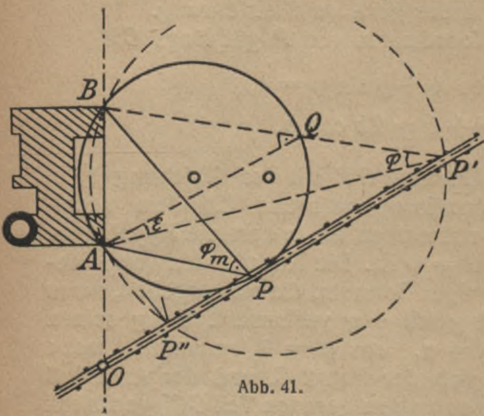


Abb. 41.

*2. Lösung: Aus den Dreiecken OAP', OBP' und ABP' (Abb. 42) liest man der Reihe nach ab

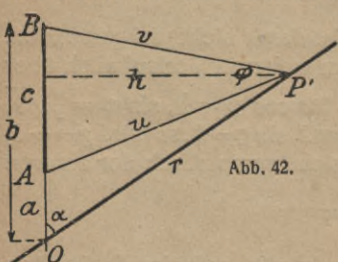


Abb. 42.

$$u^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\alpha$$
$$v^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\alpha$$
$$c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\varphi,$$

daraus ergibt sich durch Addition wegen $c = b - a$

$$uv\cos\varphi$$
$$= r^2 - (a + b)\,r\cos\alpha + ab.$$

Nun ist der Inhalt des Dreiecks ABP' sowohl gleich $\frac{1}{2}uv\sin\varphi$ als auch gleich $\frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cr\sin\alpha$, daher

$$uv\sin\varphi = cr\sin\alpha.$$

Division ergibt

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{r^2 - (a+b)\, r \cos \alpha + ab}{c\, r \sin \alpha}$$

$$= \frac{1}{c \sin \alpha}\left(r + \frac{ab}{r} - (a+b) \cos \alpha\right).$$

Soll φ möglichst groß werden, so muß $\operatorname{ctg} \varphi$ und also $r + \frac{ab}{r} = f(r)$ möglichst klein werden. Es muß daher $f'(r) = 1 - \frac{ab}{r^2} = 0,$

$$r = \sqrt{ab}$$

sein, und weil $f''(r) = 2\,\frac{ab}{r^3}$, $f''\left(\sqrt{ab}\right) = \frac{2}{\sqrt{ab}} > 0$ ist, wird wirklich der kleinste Wert von $f(r)$, der größte von φ erhalten. Das Ergebnis $r = \sqrt{ab}$ tritt auch unmittelbar an der Abb. 41 zutage, wo der Tangentenabschnitt OP die mittlere Proportionale zwischen den beiden Sekantenabschnitten OA und OB ist.

Aufgabe 44. In welchen Abstand von einem auf einem Sockel stehenden Bildwerk muß ein Beschauer treten, damit es ihm unter dem größten Gesichtswinkel erscheint? (Regiomontanus = Johannes Müller aus Königsberg im Herzogtum Coburg, 1436... 1476, hat schon diese Aufgabe gestellt.)

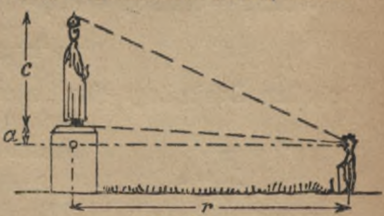


Abb. 43.

Lösung: Die Aufgabe ist ein Sonderfall der vorigen für $\alpha = \pi/2$; c bedeutet die Höhe des Bildwerkes, a den Höhenunterschied zwischen dem Auge des Beschauers und dem Sockel. Ergebnis $r = \sqrt{ab}$, wo $b = a + c$. (Abb. 43.)

Aufgabe 45. Eine Strecke $AB = c = p + q$ gleitet mit ihrem einen Endpunkt A auf der x-Achse, mit dem andern B auf der y-Achse. Mit ihr fest verbunden durch das Lot r ist der Punkt C; was für eine Kurve beschreibt er? (Abb. 44.)

Lösung: Die Koordinaten von C sind $x = p \cos \alpha + r \sin \alpha$, $y = q \sin \alpha + r \cos \alpha$, woraus $qx - ry = (pq - r^2) \cos \alpha$, $rx - py = -(pq - r^2) \sin \alpha$ folgt. Somit ist

$$(qx - ry)^2 + (rx - py)^2 = (pq - r^2)^2$$

die Gleichung der Kurve. Führt man noch die Seiten des Dreiecks, $BC = a$, $AC = b$ ein, so daß $p^2 + r^2 = a^2$, $q^2 + r^2 = b^2$, $a^2b^2 - r^2c^2 = (pq - r^2)^2$, so geht die Gleichung über in

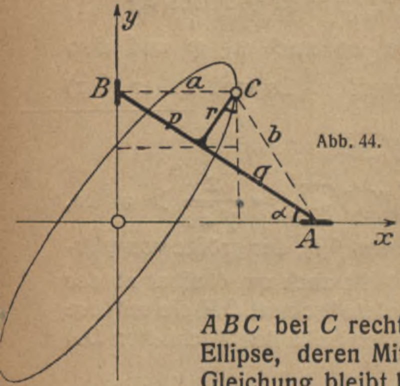


Abb. 44.

$$b^2x^2 - 2crxy + a^2y^2 - (pq - r^2)^2 = 0.$$

Das stellt einen Kegelschnitt dar. Er zerfällt in eine (doppelte) Gerade $y = \frac{b}{a}x$, wenn $pq - r^2 = 0$ ist, d. h. wenn das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist. Sonst ist er eine Ellipse, deren Mittelpunkt in O liegt; denn die Gleichung bleibt bei gleichzeitiger Vertauschung von x mit $-x$ und y mit $-y$ ungeändert.

Wenn $r = 0$, also $p = a, q = b$ ist, wird die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erhalten. Darin liegt eine bekannte Konstruktion der Ellipse: Ox und Oy sind jetzt die Hauptachsen (Ellipsenzirkel).

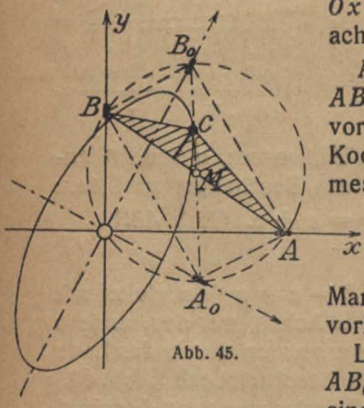


Abb. 45.

Aufgabe 46. Über der Strecke AB, deren Endpunkte wie in der vorhergehenden Aufgabe auf den Koordinatenachsen gleiten, als Durchmesser konstruiere man den Kreis (Mittelpunkt M) und ziehe den Durchmesser A_0MCB_0. Wie bewegen sich die Punkte A_0, B_0? Man benutze die Ergebnisse der vorigen Aufgabe. (Abb. 45.)

Lösung: Da die Dreiecke AA_0B, AB_0B bei A_0 und B_0 rechtwinklig sind, beschreiben die Punkte A_0 und B_0 gerade Linien, die durch O gehen und aufeinander senkrecht stehen.

Folgerung: Da C *auf* der Strecke A_0B_0 liegt, deren Endpunkte auf den beiden zueinander senkrechten Geraden OA_0, OB_0 gleiten, so hat die von C beschriebene Ellipse die Hauptachsenrichtungen OA_0, OB_0 und die Hauptachsenlängen CB_0, CA_0; sie ist danach leicht zu zeichnen.

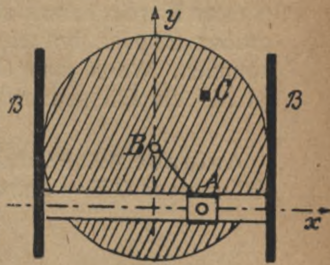


Abb. 46.

Aufgabe 47. *Ovalwerk* von Leonardo da Vinci (1452 ... 1519). Eine Kreisscheibe (Abb. 46) ist exzentrisch bei A in Drehung versetzt und bewegt dabei die beiden Backen 𝔅𝔅, die durch ein Querlineal fest verbunden sind. Das Querlineal gleitet geradlinig durch einen Schieber bei A, der an der Drehung nicht teilnimmt. Auf dem Querlineal kann durch Schraubzwingen ein zu bearbeitendes Werkstück mit ebener, zur Scheibe paralleler Fläche befestigt werden. Die Scheibe trägt bei C einen Stichel. Was für eine Kurve ritzt er in die ebene Fläche ein?

Lösung: Denkt man sich das Werkstück festgehalten, dagegen den Punkt A beweglich, dann gleitet A auf der Mittellinie des Querlineals, während die Mitte der Scheibe, B, die Mittellinie zwischen den Backen durchläuft. Die Strecke AB läuft also mit ihren Endpunkten auf zwei zueinander senkrechten Geraden, und jeder mit ihr festverbundene Punkt C beschreibt nach Aufgabe 45 eine Ellipse, abgesehen von dem Ausnahmefall der Geraden. Der Stichel ritzt also eine Ellipse ein.

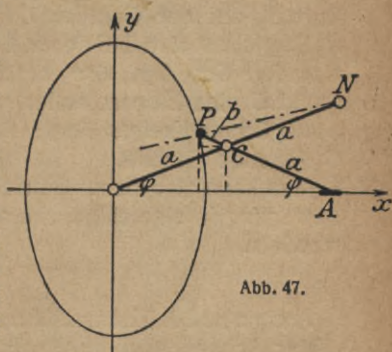


Abb. 47.

Aufgabe 48. *Ellipsenzeichner.* In dem in der Abb. 47 dargestellten Gelenkmechanismus, wo $OC = CA = a$ ist, bewegt sich C auf einem Kreise um O, A gleitet auf der x-Achse. Welche Kurve beschreibt P?

Lösung: C hat die Koordinaten $a \cos \varphi$, $a \sin \varphi$, also hat P die Koordinaten $x = (a - b) \cos \varphi$, $y = (a + b) \sin \varphi$, daher

$$\frac{x^2}{(a-b)^2}+\frac{y^2}{(a+b)^2}=1,$$

das ist eine Ellipse.

Der Ellipsenzeichner ist leicht aus zwei Holzstäben und einigen Nägeln herzustellen und ist besonders zum Aufreißen großer Ellipsen brauchbar, wie sie beim Gewölbebau vorkommen. Wenn man OC bis N um sich selbst verlängert, ist NP die Ellipsennormale in P. Beweis?

Aufgabe 49. *Planetengetriebe.* Ein Kreis (Abb. 48) vom Halbmesser $OM=\frac{1}{2}a$ rollt (ohne zu gleiten) im Innern eines Kreises vom Halbmesser $OA_1 = a$. Was für eine Kurve beschreibt irgendein mit dem rollenden Kreise fest verbundener Punkt C?

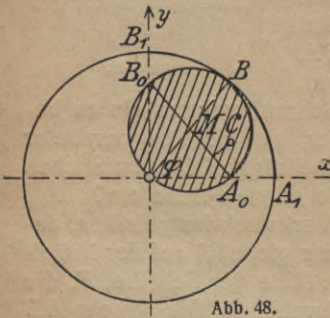


Abb. 48.

Der äußere, feste Kreis ist ein Zahnrad mit inneren Zähnen, der bewegliche Kreis ein gewöhnliches Zahnrad.

Lösung: Wegen der Gleichheit der abgerollten Bögen ist $\sphericalangle A_0MB = 2\varphi$, und da das Dreieck OMA_0 gleichschenklig ist, so ist der Winkel OA_0M auch gleich φ, also liegt A_0 auf der Geraden OA_1. Ebenso liegt B_0 auf der Geraden OB_1. Zwei Punkte der Geraden A_0B_0 gleiten also bei deren Bewegung auf zwei senkrechten Geraden Ox, Oy, also beschreibt nach Aufgabe 45 der Punkt C eine Ellipse, außer wenn er auf dem Umfang des beweglichen Kreises liegt; dann beschreibt er eine durch O gehende Gerade.

Man kann also dieses Getriebe benutzen, um eine drehende Bewegung in eine elliptische oder in eine geradlinige zu verwandeln.

Aufgabe 50. *Zahnradübertragung.* Eine Anzahl (m) paralleler Achsen sind durch $(m-1)$ Paare von Zahnrädern miteinander verkuppelt, wie die Abb. 49 zeigt. Die Anzahlen der Zähne seien n_1, ν_1 für das erste Paar, n_2, ν_2 für das zweite usw., n_{m-1}, ν_{m-1} für das $(m-1)^{\text{te}}$ Paar. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich die m^{te} Achse, wenn die der ersten, ω_1, gegeben ist?

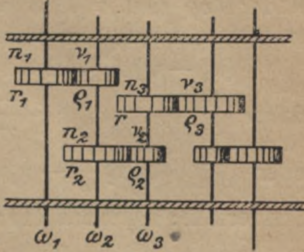


Abb. 49.

Lösung: Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ die Winkelgeschwindigkeiten der Achsen, so ist

$$\omega_1 n_1 = \omega_2 \nu_1,$$
$$\omega_2 n_2 = \omega_3 \nu_2, \ldots$$
$$\omega_{m-1} n_{m-1} = \omega_m \nu_{m-1}.$$

Daraus folgt durch Multiplikation das Übersetzungsverhältnis

$$\frac{\omega_m}{\omega_1} = \frac{n_1 n_2 \ldots n_{m-1}}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{m-1}}.$$

Bemerkung. Im Maschinenbau ist die Zahl der Zähne aus Gründen der Festigkeit nicht unter 10, bei Uhrwerken nicht unter 6, das Übersetzungsverhältnis eines Paares von Zahnrädern in der Regel nicht über 12 : 1. Man kann daraus entnehmen, wieviel Achsen nötig sind. Z. B. wenn man das Übersetzungsverhältnis 1 : 60 (oder 60 : 1) herstellen will, wie es bei Uhrwerken vorkommt, wird man mehr als zwei Achsen nehmen. Wenn bei drei Achsen $n_1 = 6$, $n_2 = 6$, $\omega_3 : \omega_1 = 1 : 60$ sein soll, hat man $1 : 60 = 36 : \nu_1 \nu_2$ oder $\nu_1 \nu_2 = 60 \cdot 36$, also z. B. $\nu_1 = 45$, $\nu_2 = 48$.

Bei Kunstuhren kann das Übersetzungsverhältnis ein Bruch sein, dessen Zähler und Nenner sehr große teilerfremde Zahlen sind, z. B. bei der Straßburger Uhr soll das Verhältnis $\frac{1439}{3485}$ vorkommen, wo sogar 1439 eine Primzahl ist. Ein Rad von 1439 Zähnen würde sehr schwierig herzustellen sein. Man benutzt dann die in der folgenden Aufgabe behandelte epizyklische Zahnradübertragung.

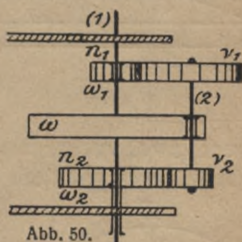


Abb. 50.

Aufgabe 51. *Epizyklische Zahnradübertragung.* Auf einer Achse (1), die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, sitzen fest ein Rad und drehbar zwei Räder mit n_1 und n_2 Zähnen, deren Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 sind. Das feste Rad führt exzentrisch eine zweite, zur ersten parallele Achse (2) mit sich, auf der fest zwei Räder mit ν_1 und ν_2 Zähnen sitzen, die mit den Rädern (n_1) und (n_2) gekuppelt sind. Man soll die Beziehung zwischen den Winkelgeschwindigkeiten aufstellen. (Abb. 50.)

Lösung: Die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die

Achse (2) um sich selbst dreht, sei w; da sie mit der Winkelgeschwindigkeit ω herumgeführt wird, drehen sich die Räder (n_1) und (n_2) in bezug auf sie mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 - \omega$ und $\omega_2 - \omega$. Also ist

$$(\omega_1 - \omega)\, n_1 = w\nu_1 \quad \text{und} \quad (\omega_2 - \omega)\, n_2 = w\nu_2,$$

daher
$$\frac{\omega_2 - \omega}{\omega_1 - \omega} = \frac{\nu_2 n_1}{\nu_1 n_2},$$

oder
$$n_1 \nu_2 \frac{\omega_1}{\omega} - n_2 \nu_1 \frac{\omega_2}{\omega} = n_1 \nu_2 - n_2 \nu_1.$$

Sonderfälle: Wenn das Rad n_2 festgehalten wird, ist $\omega_2 = 0$, also

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{n_1 \nu_2 - n_2 \nu_1}{n_1 \nu_2}.$$

Wenn außerdem $n_1 = \nu_2 = n$, $n_2 = n - 1$, $\nu_1 = n + 1$, so wird

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{n^2}.$$

Zahlenbeispiel: $\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1439}{3485}$ (vgl. Aufgabe 50). Setzt man $n_1 \nu_2 = 3485 = 41 \cdot 85$, so hat man $n_2 \nu_1 = 2046 = 33 \cdot 62$. Man kann also nehmen $n_1 = 41$, $n_2 = 62$, $\nu_1 = 33$, $\nu_2 = 85$.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf „Vermessungen im kleinen".

Aufgabe 52. Den Halbmesser eines gezeichneten flachen Kreisbogens mit unzugänglichem Mittelpunkt durch Messung von Sehne u. Pfeilhöhe zu bestimmen.

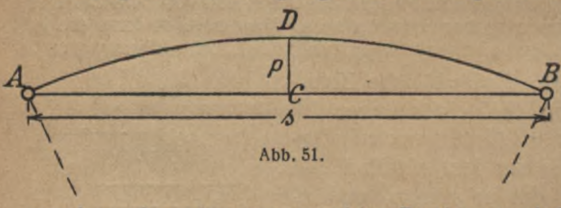


Abb. 51.

Lösung: Man mißt die Sehne s zwischen irgend zwei vorher angemerkten Punkten und die zugehörige Pfeilhöhe p mit dem Zirkel und einem Transversalmaßstab. (Abb. 51.) Aus der Abb. 52 ersieht man

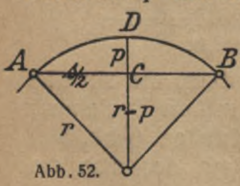


Abb. 52.

$$r^2 = \frac{s^2}{4} + (r - p)^2,$$

daher

$$r = \frac{s^2}{8p} + \frac{p}{2}.$$

Aufgabe 53. Einen gezeichneten flachen Kreisbogen mit unzugänglichem Mittelpunkt von einem gegebenen Anfangspunkte an in Grade einzuteilen.

Lösung: Man bestimmt den Halbmesser nach der vorhergehenden Aufgabe 52, berechnet sodann die zu 1^0 gehörige Sehne

$$\sigma = 2r \sin {}^1\!/_2{}^0 = 0{,}017454 \cdot r$$

und trägt sie von dem gegebenen Punkte aus ab. Zur Probe berechnet man Zwischensehnen für 2^0, 3^0 usw.

Aufgabe 54. *Abstecken eines Kreisbogens.* Zwischen zwei zeichnerisch gegebene Punkte A, B beliebig viele Punkte einzuschalten, die auf einem Kreise von zahlenmäßig gegebenem Halbmesser r, aber unzugänglichem Mittelpunkt gelegen sind.

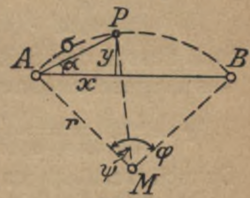


Abb. 53.

Lösung: a) *Durch die Sehne.* Man zieht und mißt zuerst $AB = s$, berechnet sodann aus s und r den zum Bogen $\widehat{AB}$ gehörigen Innenwinkel φ:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2r}\cdot$$

Ist P irgendein Zwischenpunkt und hat der zugehörige Bogen $\widehat{AP}$ den Innenwinkel ψ, so ist der Winkel α als Peripheriewinkel über dem Bogen $\widehat{PB}$, dessen Innenwinkel $\varphi - \psi$ ist, gleich $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$, also (Abb. 53)

$$\sigma = 2r\sin\frac{\psi}{2}\cdot$$

Man trägt demnach den Winkel α in A an die Sehne AB an und auf seinem anderen Schenkel die Strecke $AP = \sigma$ ab, wodurch P bestimmt ist, ohne daß man den Mittelpunkt des Kreises benutzt.

b) *Durch Koordinaten.* Nach der Abb. 53 ist

$$x = \sigma\cos\alpha = 2r\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$y = \sigma\sin\alpha = 2r\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

wodurch die Lage von P bestimmt ist.

c) *Durch die Tangente.* Man bestimmt zuerst die Tangentenrichtung im Punkte A durch Anlegen des Winkels

$BAC = \frac{\varphi}{2}$, wählt den Winkel ψ, berechnet $AC = t = r \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$, trägt an die Tangentenrichtung in C den Winkel ψ an, wodurch die Richtung CP bestimmt ist; das Abtragen von $CP = t$ bestimmt den Punkt P (Abb. 54).

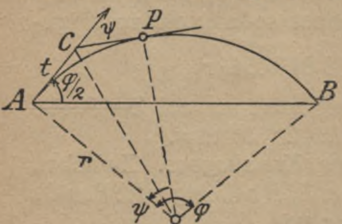


Abb. 54.

Aufgabe 55. Einen flachen Kreisbogen mit unzugänglichem Mittelpunkt abzustecken, wenn drei seiner Punkte zeichnerisch gegeben sind.

Lösung: Man verbindet die drei Punkte zu einem Dreieck, mißt dessen drei Seiten a, b, c und berechnet den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises etwa nach der Formel

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}, \quad \text{wo } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

Danach verfährt man wie in der vorhergehenden Aufg. 54.

Bemerkung. Die Messung der Winkel des Dreiecks, die man sonst benutzen könnte $\left(r = \frac{a}{2 \sin \alpha} \text{ usw.}\right)$ ist hier nicht angängig, weil zwei der Winkel zu klein sind, der dritte sich von einem gestreckten zu wenig unterscheidet.

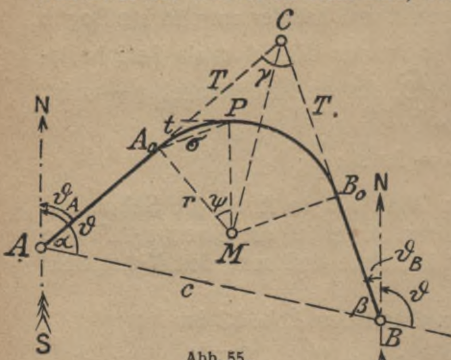


Abb. 55.

Aufgabe 56. *Tunnelabsteckung.* Zwei Punkte des Geländes, A und B, sind durch ihre Koordinaten (x_A, y_A), (x_B, y_B) in bezug auf irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem gegeben, ferner zwei durch sie hindurchgehende Richtungen durch ihre Winkel ϑ_A, ϑ_B mit der positiven Richtung der x-Achse (z. B. dem Meridian SN). Man soll A mit B durch einen Tunnel verbinden, der aus einem Kreisbogen vom Halbmesser r und den beiden gegebenen Richtungen als Tangenten zusammengesetzt ist (Abb. 55).

L ö s u n g: Aus den Koordinatenwerten von A und B findet man zunächst die Entfernung

$$AB = c = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

und den Winkel ϑ, den diese Dreiecksseite mit der positiven x-Achse einschließt:

$$\cos\vartheta = \frac{x_B - x_A}{c}, \quad \sin\vartheta = \frac{y_B - y_A}{c}.$$

In dem Dreieck ABC, wo C den Schnittpunkt der beiden Tangentenrichtungen bedeutet, sind nunmehr bekannt: Seite c und ihr Gegenwinkel $\gamma = \vartheta_A + \vartheta_B$, ferner die Winkel $\alpha = \vartheta - \vartheta_A$, $\pi - \beta = \vartheta + \vartheta_B$. Daher kann man die Seitenlängen

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\,c, \quad b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,c$$

berechnen. Jetzt ist es leicht, die Ansatzpunkte des Kreisbogens, A_0, B_0, festzulegen. Denn für $CA_0 = T = CB_0$ findet man

$$T = r \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = r \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2} = r \operatorname{ctg}\frac{\vartheta_A + \vartheta_B}{2},$$

demnach $AA_0 = b - T$, $BB_0 = a - T$, wodurch A_0 und B_0 bestimmt sind. Nunmehr kann man einen beliebigen Punkt P des Kreisbogens nach Aufgabe 54 Lösung a) oder c) finden; entweder indem man in A_0 an die Richtung AA_0 den Winkel $\frac{\psi}{2}$ anlegt und auf dem andern Schenkel die Sehne

$$\sigma = 2r \sin\frac{\psi}{2}$$

abträgt, oder indem man AA_0 um das Stück

$$t = r \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$$

verlängert, den Winkel ψ anlegt und auf seinem andern Schenkel nochmals t abträgt.

A u f g a b e 57. Wieviel Punkte braucht man mindestens, um einen Kreisbogen vom Halbmesser r und dem Öffnungswinkel φ abzustecken, der die mittlere Führungslinie eines Tunnels der gegebenen Breite h darstellt, ohne den Tunnel zu erweitern; a) bei Benutzung der Sehnen, b) der Tangenten? (Abb. 56.)

Lösung zu a): Ist ψ der Öffnungswinkel eines Bogens $\widehat{AP}$, σ die Sehne AP, p ihre Pfeilhöhe, so ist

$$p = r\left(1 - \cos\frac{\psi}{2}\right).$$

Damit die Sehne noch im Tunnel gezogen werden kann, muß $p \leqq \frac{1}{2}h$ sein, also

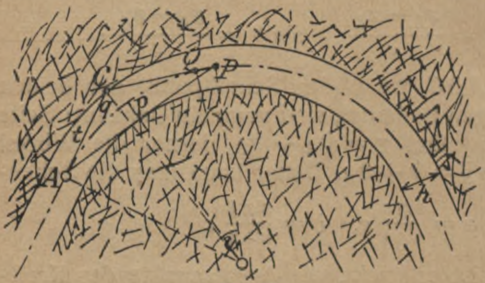


Abb. 56.

$$\cos\frac{\psi}{2} \geqq 1 - \frac{h}{2r}.$$

Die Anzahl der erforderlichen Punkte ist $n \geqq \left[\frac{\varphi}{\psi}\right]$, wo dieses Zeichen entweder die ganze Zahl bedeutet, die gleich $\frac{\varphi}{\psi}$ ist, oder die größte ganze Zahl, die $< \frac{\varphi}{\psi}$ ist.

Zu b): Ist C der Schnittpunkt der beiden Tangenten in A und Q, q seine radiale Entfernung vom Kreisbogen AQ, χ der zugehörige Öffnungswinkel, so ist

$$q = r \cdot \frac{1 - \cos\chi/2}{\cos\chi/2}.$$

Damit noch C innerhalb des Tunnels liegt, muß $q \leqq \frac{1}{2}h$ sein, also

$$\cos\frac{\chi}{2} \geqq \frac{1}{1 + \frac{h}{2r}}.$$

Bemerkung. Weil

$$\frac{1}{1 + \frac{h}{2r}} - \left(1 - \frac{h}{2r}\right) = \frac{\frac{h^2}{4r^2}}{1 + \frac{h}{2r}} > 0$$

ist, muß im Falle der Tangenten der größte zulässige Winkel χ kleiner gewählt werden als im Falle der Sehnen der größte zulässige Winkel ψ, und es sind also in jenem Falle mehr Punkte erforderlich als in diesem.

Eine *Funktionsskala* der Funktion $y = f(x)$ wird hergestellt, indem man auf einer Geraden den Funktionswert $f(x)$ in Längeneinheiten abträgt und den Argumentwert x daranschreibt. Die Skala eines gewöhnlichen Rechenschiebers liefert ein Beispiel dafür.[1])

Aufgabe 58. Eine Strecke $AB = 5$ cm soll mit einer solchen Skala versehen werden, daß an jedem Punkte abgelesen werden kann, in welchem Teilverhältnis der beiden Abschnitte die Strecke durch ihn geteilt wird.

Lösung: Ist P irgendein Punkt der Strecke, $AP = y$, und x die Skalenstelle von P, so soll $y : (AB - y) = x$ sein,

daher ist
$$y = \frac{x}{1+x} \cdot AB.$$

Zur Herstellung der Skala verfährt man entweder rein rechnerisch, oder man stellt sie geometrisch her. In A legt man irgendeine gleichmäßig geteilte Skala AC an, zieht durch B zu ihr die Parallele, macht $BS = A1$ (auf der Skala AC) und verbindet S mit den Teilpunkten der Skala AC. Beweis folgt leicht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SPB und QPA. (Abb. 57.)

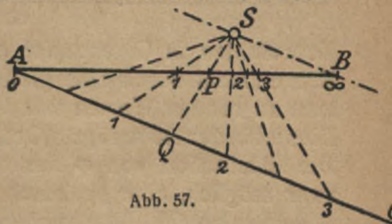


Abb. 57.

Aufgabe 59. Ein horizontal gelagerter zylindrischer Kessel ist mit Flüssigkeit gefüllt. Ein Schwimmer soll nicht nur den jeweiligen Flüssigkeitspegel, sondern auch den Flüssigkeitsinhalt anzeigen. Die Skala ist herzustellen. (Abb. 58.)

Lösung: Die vorhandene Flüssigkeitsmenge V ist das Produkt aus der Länge des Kessels l und dem benetzten Querschnitt, einem Kreisabschnitt vom Öffnungswinkel φ, also

$$V = \frac{1}{2} a^2 (\varphi - \sin \varphi) \cdot l.$$

Die Pegelhöhe ist $z = a\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) \cdot$

1) Einfache Beispiele u. a. in P. Luckey, Einführung in die Nomographie, Bd. 28 dieser Sammlung. Weiteres auch in Bd. 35/36: R. Rothe, Darstellende Geometrie des Geländes, S. 78 u. f.

Um die Skala für die praktische Benutzung brauchbar herzustellen, berechnet man für genügend viele Winkel φ zwischen 0^0 und 360^0 die Werte von z und V, trägt sie als

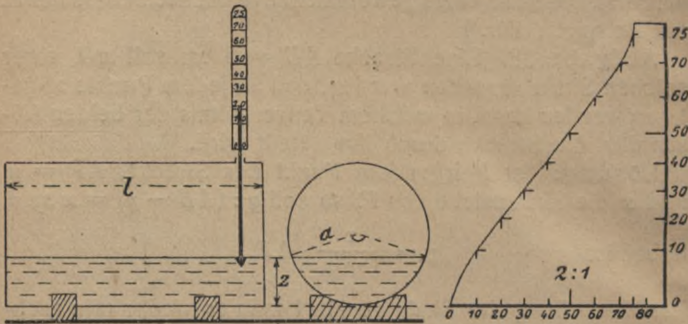


Abb. 58.

Koordinaten in Gitterpapier ein und verbindet sie mit dem Kurvenlineal durch eine glatte Kurve. Aus dieser entnimmt man zu runden Werten von V die zugehörigen Werte von z. Dies ist in der Nebenfigur (Ordinatenmaßstab 2:1) angedeutet. Die Elimination von φ aus den beiden obigen Formeln ist zwar möglich, aber praktisch wertlos.

Aufgabe 60. Wie vorher. Der Behälter ist eine Kugel. Statt des Schwimmers kann man natürlich auch ein Wasserstandsglas annehmen. (Abb. 59.)

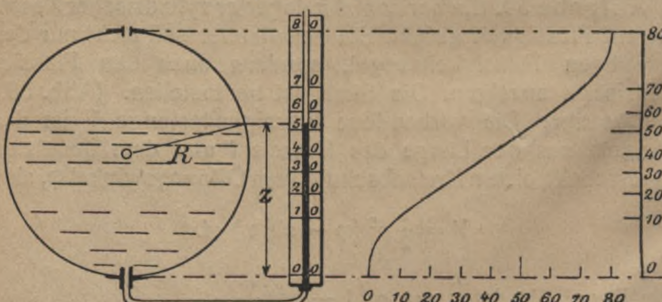


Abb. 59.

Lösung: $V = \pi z^2 (R - \frac{1}{3} z)$. Um zu runden Werten von V die zugehörigen Werte von z zu bestimmen, hätte man eine kubische Gleichung aufzulösen. Dies geschieht zweckmäßig durch Einführung eines Winkels ψ derart, daß für $0 \leqq \psi \leqq \pi$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\psi}{2} = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos\psi)$$

$$z = R\left(1 - 2\cos\frac{\pi + \psi}{3}\right).$$

Vgl. im übrigen die Bemerkungen zur Lösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 61. Wie vorher. Der Behälter besteht aus einer Kugel und einem wagerecht gelagerten Zylinder, die beide durch eine kommunizierende Röhre verbunden sind. Die untersten Punkte der Kugel und des Zylinders haben einen Höhenunterschied h. (Abb. 60.)

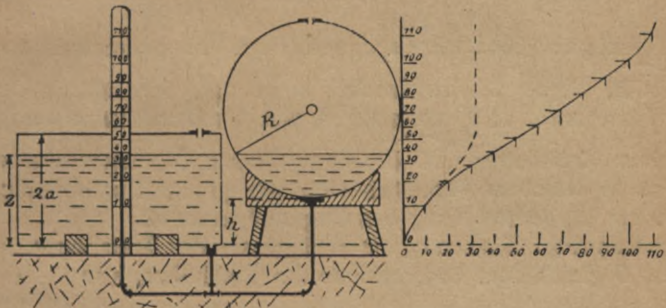


Abb. 60.

Lösung: Man hat sich die Lösungen der beiden vorhergehenden Aufgaben zunutze zu machen, dabei aber auf folgendes zu achten. Für $z = 0 \ldots h$ kommt nur die Kurve mit den Abszissen z und den Ordinaten V der Aufgabe 59 in Frage; für $z = h \ldots 2a$ setzen sich die Ordinaten aus denen der Lösung 59 und denen der Lösung 60 zusammen; und für $z = 2a \ldots h + 2R$ entstehen sie aus den Ordinaten der Lösung 60, vermehrt um den konstanten Wert des Zylindervolumens $\pi a^2 l$.

Aufgabe 62. Der Stollen Wallgau-Sachensee des neuen Walchensee-Kraftwerkes in Oberbayern hat umstehenden Querschnitt, der von einem Parabel- und einem Kreisbogen begrenzt wird. Der Halbmesser des Kreisbogens sei R. Wie groß ist die Querschnittsfläche? $s = 4$ m, $h = 3{,}80$ m, $R = 6$ m.

Lösung: Es seien p, φ Pfeilhöhe und Öffnungswinkel des Kreisabschnitts, so ist

$$p = R - \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}s^2},$$
$$\varphi = 2 \operatorname{arc} \sin (s/2R).$$

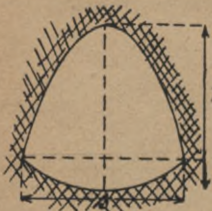


Abb. 61.

Die Höhe des Parabelabschnittes ist $h - p$, die Fläche also $\frac{2}{3} s (h - p)$, mithin der Gesamtquerschnitt

$$Q = \frac{2}{3} s (h - p) + \frac{1}{2} R^2 (\varphi - \sin \varphi).$$

Die Zahlenwerte ergeben $p = 0{,}34$ m, $\varphi = 38^0 56' = 0{,}680$, $Q = 10{,}14$ qm.

Aufgabe 63. Die kreisbogenförmige Mauer einer Talsperre $\widehat{ACB}$, deren Öffnungswinkel α beträgt, wird durch den Wasserdruck so durchgebogen, daß ihre Dammkrone wieder einen Kreisbogen, $\widehat{AC_1B}$, bildet, dessen Öffnungswinkel α_1 ist. In welchem Verhältnis steht die größte Durchbiegung D zur Längenänderung des Bogens? (Abb. 62.)

Lösung: Sind r, r_1 die Halbmesser der Kreisbögen, so ist D gleich dem Unterschiede der Pfeilhöhen, also

$$D = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2r_1 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}.$$

Die Längenänderung ist

$$l = 2\alpha r - 2\alpha_1 r_1.$$

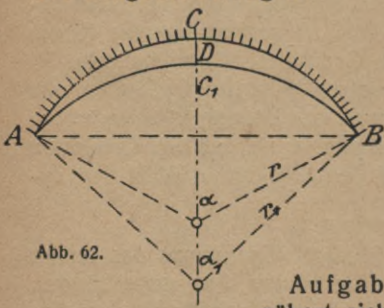


Abb. 62.

Da aber die Sehne AB ungeändert geblieben ist, hat man

$$r \sin \alpha = r_1 \sin \alpha_1.$$

Mithin wird

$$\frac{D}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha_1}{\alpha/\sin \alpha - \alpha_1/\sin \alpha_1}.$$

Aufgabe 64. Welchem Grenzwert nähert sich das Verhältnis D/l der vorhergehenden Aufgabe, wenn der Wasserdruck auf die Sperrmauer allmählich wieder abnimmt?

Lösung: Es wird dann $\alpha_1 \to \alpha$, also $x = \alpha - \alpha_1 \to 0$. Führt man x ein, so wird

$$\frac{D}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}x}{\alpha \sin(\alpha - x) - (\alpha - x)\sin\alpha}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}x}{\alpha \sin\alpha(\cos x - 1) - \alpha\cos\alpha \sin x + x\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\alpha_1 (\sin\frac{1}{2}x : \frac{1}{2}x)}{-\alpha\sin\alpha \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \sin\frac{1}{2}x - \alpha\cos\alpha\frac{\sin x}{x} + \sin\alpha}.$$

Nun ist aber der Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$, wenn x sich der Null nähert, gleich 1, und ebenso der von $\sin\frac{1}{2}x : \frac{1}{2}x$, also nähert sich für $\alpha_1 \to \alpha$, $x \to 0$

$$\frac{D}{l} \text{ dem Grenzwert } \frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}.$$

Reziproke Radien. Zwei Punkte P, P^*, die auf demselben Strahle liegen, und deren Entfernungen, von demselben festen Punkte O gemessen, zueinander umgekehrt proportional sind, heißen zueinander *invers*; zwischen ihnen besteht eine Verwandtschaft oder Beziehung durch *reziproke Radien* oder eine *Inversion*: für $OP = r$, $OP^* = r^*$ ist

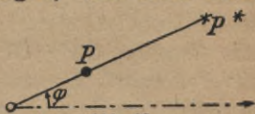


Abb. 63.

$$rr^* = m^2 \quad (m = \text{const.}).$$

Eine Gerade, für die das vom Anfangspunkt O auf sie gefällte Lot die Länge l hat und mit der positiven Anfangsrichtung den Winkel α einschließt, hat in Polarkoordinaten r, φ die Gleichung

(*) $$r\cos(\alpha - \varphi) = l,$$

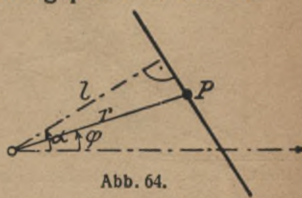


Abb. 64.

und ein Kreis vom Halbmesser c und dem Mittelpunkt mit den Polarkoordinaten r_0, φ_0 hat die Gleichung

(**) $$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0) = c^2;$$

wenn im besonderen der Kreis durch den Nullpunkt geht, vereinfacht sich seine Gleichung wegen $r_0 = c$ zu

(***) $$r = 2c\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Setzt man hierin $r = \frac{m^2}{r^*}$, so erhält man aus der Gleichung (*)

$$r^* = \frac{m^2}{l} \cos(\varphi - \alpha);$$

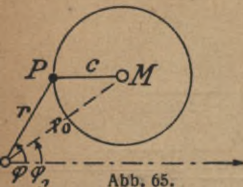


Abb. 65.

das ist eine Gleichung der Form (***); aus (**) wird, falls $c \neq r_0$ ist,

$$r^{*2} + 2r^* \frac{m^2 r_0}{c^2 - r_0^2} \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{m^4}{c^2 - r_0^2},$$

also eine Gleichung derselben Form (**); schließlich wird aus (***)

$$r^* \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{m^2}{2c},$$

und dies ist eine Gleichung von der Form (*). Eine Gerade wird daher in einen durch den Nullpunkt gehenden Kreis, und ein solcher in eine Gerade verwandelt, während jeder andere Kreis wieder in einen Kreis übergeht.

Eine Vorrichtung, die zwei bewegliche Punkte P, P^* in einer solchen Lage hält, daß sie stets auf einer durch einen festen Punkt O gehenden Geraden liegen, und daß ferner das Produkt $OP \cdot OP^*$ einen konstanten Wert hat, heißt ein *Inversor*. Er kann im besondern dazu dienen, eine kreisförmige Bewegung in eine geradlinige zu verwandeln und umgekehrt.

Aufgabe 65. *Inversor von Peaucellier.* In der Abb. 66 sind OA und OB zwei gleichlange Stäbe, die mit dem Gelenkrhombus $APBP^*$ verbunden sind. Die um M drehbare Kurbel MP^* zwingt den Punkt P^*, einen Kreis zu beschreiben. Was für eine Kurve beschreibt Punkt P?

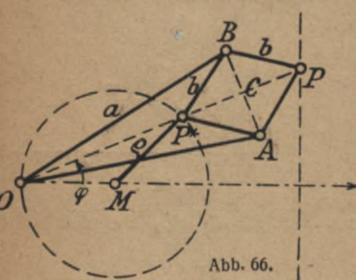


Abb. 66.

Lösung: Da die Dreiecke mit den Spitzen O, P, P^* und der Grundlinie AB alle gleichschenklig sind, liegen O, P, P^* in gerader Linie. Ferner ist $OP \cdot OP^* = (OC + CP)(OC - CP^*) = OC^2 - CP^2 = (OA^2 - AC^2) - (PA^2 - AC^2) = OA^2 - PA^2$. Diese Größe hängt aber nur von den Längen der Stangen des Gelenkmechanismus ab und bleibt daher bei seiner Bewegung konstant. Die Punkte P und P^* sind also zueinander invers. Da P^* einen Kreis beschreibt, durchläuft auch P einen solchen, oder eine Gerade, falls jener Kreis durch O geht.

Man kann offensichtlich die eben behandelte Vorrichtung benutzen, um einen Kreis mit beliebig großem Halbmesser zu zeichnen, den der Punkt P beschreibt.

Aufgabe 66. Es seien $OA = a$, $PA = b$, $MP^* = \rho$ gegeben. Wie groß hat man den Abstand $OM = x$ zu wählen, damit der Punkt P einen Kreis vom vorgeschriebenen Halbmesser c beschreibe? — Zahlenbeispiel: $a = 10$ cm; $b = 4$ cm; $\rho = 6$ cm; $c = 100$ cm.

Lösung: Die Richtung OM sei die Anfangsrichtung der Polarkoordinaten. Dann hat M die Polarkoordinaten x, 0, und der von P^* beschriebene Kreis hat nach der Formel (**) die Gleichung

$$r^{*2} + x^2 - 2r^*x \cos\varphi = \rho^2. \tag{$\dagger$}$$

Ist $OP = r$, so gilt nach dem Ergebnis der vorhergehenden Aufgabe $rr^* = OA^2 - PA^2 = a^2 - b^2 = m^2$. Daher hat der Kreis des Punktes P die Polargleichung

$$\frac{m^4}{r^2} + x^2 - 2\frac{m^2}{r}x\cos\varphi = \rho^2$$

oder, wenn $x \neq \rho$,

$$r^2 - 2\frac{m^2 x}{x^2 - \rho^2} r \cos\varphi = \frac{m^4}{\rho^2 - x^2}.$$

Hat sein Mittelpunkt die Polarkoordinaten r_0, φ_0, und ist sein Halbmesser, wie verlangt, gleich c, so findet man durch Vergleich mit (**)

$$r_0 = \frac{m^2 x}{x^2 - \rho^2}, \quad \varphi_0 = 0, \quad c^2 - r_0^2 = \frac{m^4}{\rho^2 - x^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$x = \sqrt{\frac{m^2}{c}\rho + \rho^2}.$$

Für $c \to \infty$, wo P eine Gerade beschreibt, erhält man $x = \rho$, wie zuvor.

Zahlenbeispiel: $m^2 = 84$; $x = 6{,}41$ cm.

Aufgabe 67. Da bei dem in Abb. 66 dargestellten Inversor weder der Punkt P noch P^* praktisch einen vollen Kreis beschreiben kann, soll der Öffnungswinkel des größtmöglichen Kreisbogens bestimmt werden.

Lösung: Der größtmögliche Radiusvektor von P ist $a+b$, und der kleinstmögliche von P^* ist $a-b$, ihr Produkt, wie es sein muß, m^2. Aus der Gleichung (†) folgt dann

$$\cos\varphi = \frac{(a-b)^2 + x^2 - \rho^2}{2(a-b)x}.$$

Für den Sonderfall $x=\rho$, wo P eine Gerade beschreibt, ergibt sich

$$\cos\varphi = \frac{a-b}{2\rho}.$$

Aufgabe 68. *Inversor von Hart.* Auf einem überschlagenen Gelenkviereck, auf dem $AB = A'B' = a$, $AB' = BA' = b$ ist, liegen die Punkte O, P, P^* auf einer Parallelen zu AA', BB'; O wird festgehalten. Zu zeigen, daß P und P^* zueinander invers sind. (Abb. 67.)

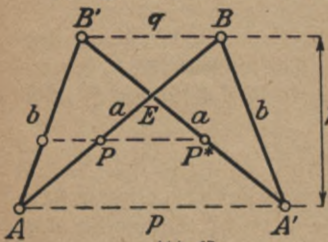


Abb. 67.

Lösung: Man hat

$$p = \sqrt{a^2-h^2} + \sqrt{b^2-h^2},$$

$$q = \sqrt{a^2-h^2} - \sqrt{b^2-h^2}, \text{ also } pq = a^2 - b^2.$$

Andererseits ist für $OP = r$, $OP^* = r^*$

$$r : q = AO : AB', \quad r^* : p = BP : BA,$$

also

$$rr^* = AO \cdot BP \cdot \frac{pq}{ab} = AO \cdot BP \cdot \frac{a^2-b^2}{ab}.$$

AO bestimmt die Lage von O auf der Stange AB', BP die Lage von P auf BA. rr^* bleibt also bei der Bewegung des Gestänges konstant.

Aufgabe 69. Was für eine Kurve beschreibt der Punkt E in dem Gelenkviereck der Abb. 67, wenn die Punkte A und B' festgehalten werden?

Lösung: Die Dreiecke $BB'A$ und $BB'A'$ sind spiegelbildlich kongruent. Daher sind die Winkel $BB'E$ und $B'BE$ einander gleich und das Dreieck $BB'E$ ist gleichschenklig. Mithin ist $AE + B'E = A'E + BE$. Aber es ist

$$\begin{aligned} AE + B'E &= AB - BE + A'B' - A'E \\ &= a - BE + a - A'E, \end{aligned}$$

daher $\quad AE + B'E = a$

konstant. E beschreibt also eine Ellipse mit den Brennpunkten A und B'.

Bemerkung. Selbstverständlich beschreibt E auch eine (andere, der ersten kongruente) Ellipse, wenn die Punkte A' und B festgehalten werden. (Nach dem bekannten Spiegelungsgesetz der Ellipse sind die Winkelhalbierenden der Brennstrahlen AB und $A'B'$ Tangente und Normale der beiden Ellipsen.) Hierauf beruht die Benutzung *elliptischer Zahnräder* zur Übertragung periodisch wechselnder Winkelgeschwindigkeiten. (Abb. 68.)

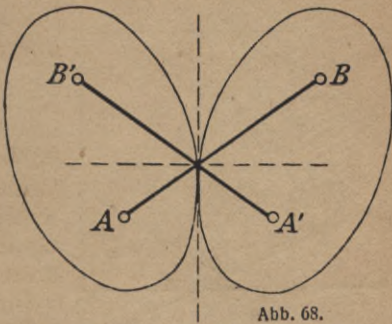


Abb. 68.

Aufgabe 70. Auf einem Reißbrett sind die drei Seiten eines Dreiecks ABC gezeichnet, dessen Ecken jedoch außerhalb des Reißbretts fallen und daher unzugänglich sind. Man soll a) die drei Winkelhalbierenden, b) die drei Schwerlinien, c) die drei Höhen, d) den eingeschriebenen Kreis, e) den umgeschriebenen Kreis, soweit diese Linien auf das Reißbrett fallen, unter alleiniger Benutzung der Reißbrettfläche zeichnen.

Lösungen: Zu *a*) Man zeichnet ein Dreieck $A'B'C'$, dessen Seiten dieselben Abstände von denen des gegebenen Dreiecks haben, und von dem wenigstens zwei Ecken auf das Reißbrett fallen, und in diesem die Winkelhalbierenden. Wenn ein zu großes Stück einer Ecke außerhalb des Reißbretts fällt, zeichnet man sein Spiegelbild an einer geeigneten Geraden, sodann in diesem die Winkelhalbierende, wie Abb. 69 zeigt, wo Dreieck PQC^* das Spiegelbild von PQC ist, d. h. $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle C^*PQ$, $\sphericalangle CQP = \sphericalangle C^*QP$; die

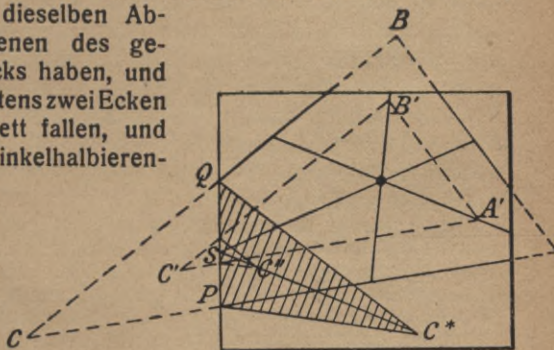


Abb. 69.

Halbierende von $\sphericalangle PC^*Q$ trifft PQ in S, einem Punkte der Winkelhalbierenden des $\sphericalangle C$.

Zu *b*) Man zieht mindestens zwei Parallele zu jeder Seite, die die beiden andern noch treffen, und verbindet ihre Mitten.

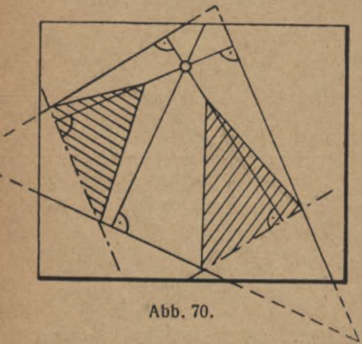


Abb. 70.

Zu *c*) Man zieht zu einer Seite eine geeignete Parallele und spiegelt an ihr die abgeschnittene Spitze; das Lot von dieser auf die Parallele ist ein Stück der gesuchten Höhe. (Abb. 70.)

Zu *d*) Leicht, wenn man vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden die Lote auf die Dreiecksseiten fällen kann; andernfalls fällt man Lote auf geeignete Senkrechte zu den Seiten des Dreiecks, oder benutzt die Spiegelbilder der Ecken an geeigneten Geraden.

Zu *e*) Den Mittelpunkt findet man leicht, wenn die Seitenmitten zugänglich sind. Andernfalls verfährt man so: Da man durch Spiegelung an den Reißbrettkanten oder anderen geeigneten Geraden stets das ganze Dreieck, wenn auch umgefaltet, auf die Zeichenfläche bekommen kann, so kann man auch in dem gebrochenen Linienzug jeder Seite die Mitte angeben, dort das Lot errichten, durch rückwärtige Spiegelung die wahren Lote der Seitenmitten zeichnen und deren Schnittpunkt finden. Schließlich zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck mit einer halben Dreiecksseite als einer Kathete und dem gegenüberliegenden Dreieckswinkel als Gegenwinkel; dessen Hypotenuse ist der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises ($a = 2r \sin \alpha$).

Bemerkung. Da man durch geeignete Spiegelung die Längen aller Seiten finden kann, so kann man durch Verkleinerung in einem beliebigen Verhältnis ein dem gegebenen ähnliches Dreieck zeichnen, das ganz auf der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche gelegen ist. An diesem lassen sich alle gewünschten Konstruktionen ausführen, und durch rückwärtige Vergrößerung lassen sich alle Stücke des gegebenen Dreiecks angeben. Diese Bemerkung gilt für alle derartigen Aufgaben.[1]

1) Über solche Aufgaben vgl. man u. a P. Zühlke, Konstruktionen in begrenzter Ebene, Bd. 11 dieser Sammlung.

Lehrmittel für gewerbliche Berufsschulen. Hrsg. von Oberschulrat Prof. R. Horstmann und Regierungs- und Gewerbeschulrat Prof. W. Hecker.

Bisher liegen vor:

Heft 1: **Rechenbuch für Maschinenbauerklassen an gewerblichen Berufsschulen.** Von Gewerbeschulrat Dir. K. Uhrmann und Ing. F. Schuth. Mit 136 Figuren. 4. Aufl. Kart. M. 1.50

Heft 2/4. **Fachkunde f. Maschinenbauerklassen an gewerblichen Berufsschulen.** Teil I: Rohstoffkunde. Von Gewerbeschulrat Dir. K. Uhrmann u. F. Schuth. Mit 96 Abb. 2. Aufl. Kart. M. 1.—. Teil II: Arbeitskunde. Bearb. v. Ing. Dir. O. Stolzenberg. Mit 364 Abb. 2. Aufl. Kart. M. 1.60. Teil III: Kraftmaschinen. Von K. Uhrmann und Ing. F. Schuth. Mit Abb. [U. d. Pr. 1924.] Ausgabe für die Praxis. 3 Teile in 1 Bande. Geb. M. 2.30

Heft 5: **Buchstabenrechnen für Maschinenbauerklassen an gewerblichen Berufsschulen, für Werkschulen u. verwandte niedere Fachschulen der Maschinenindustrie.** Von Dipl.-Ing. Prof. Dr. S. Jakobi und Maschinenbauschullehrer A. Schlie. Mit 27 Abb. Steif geh. M. —.80

Heft 6: **Fachrechenaufgaben für Maschinenbauer.** Von Dir. Ing. O. Stolzenberg. Mit 44 Abb. im Text. Kart. M. —.70

Heft 9: **Fachkunde f. Schneiderklassen.** Rohstoff- und Arbeitskunde. Von Gewerbeschullehrer H. Nerger. Mit 58 Abb. Kart. M. —.80

Heft 11: **Modellieren u. Ergänzungszeichnen** für Maschinenbauer-, Mechaniker- und Werkzeugmacherklassen an gewerbl. Berufsschulen. I. Teil: Unterstufe. Von Gewerbelehrern H. Leben und H. Seidel. Mit 11 Abb. u. 32 Taf. Kart. M. 2.60

Heft 21/23: **Fachkunde für Holzarbeiterklassen an gewerblichen Berufsschulen.** Teil I: Rohstoffkunde. Von Oberinspektor Studienprof. J. Großmann u. Fachhauptlehrer F. Steininger. M. 57 Abb. Kart. M. —.80. Teil II: Verbindungslehre für Tischler. Von Prof. H. Groth. Mit 26 Textabb. u. 32 Tafeln. Kart. M. 1.—. Teil III: Werkzeuge u. Maschinen. Von Oberinspektor Studienprof. J. Großmann u. Fachhauptlehrer F. Steininger. Mit 222 Abb. Kart. M. 1.10

Demnächst erscheinen:

Heft 8 u. 10: **Fachkunde für Mechanikerklassen.** II. Teil: Arbeitskunde. Von Gewerbelehrer Ing. M. Nelzow. III. Teil: Apparate und Instrumente. Von Direktor Fölmer.

Heft 12: **Rechenbuch für Bauschlosserklassen.** Von W. Bonnemann u. Dir. Ing. F. Schuth.

Heft 13: **Rechenbuch für Elektrikerklassen.** Von Ing. W. Blatzheim, Gewerbeschulrat Dir. K. Uhrmann u. Dir. Ing. F. Schuth.

Teubners kleine Fachwörterbücher. U. a. sind erschienen:

Physikalisches Wörterbuch. Von Prof. Dr. G. Berndt. Mit 81 Figuren im Text. Geb. M. 3.—

Chemisches Wörterbuch. Von Prof. Dr. H. Remy. [U. d. Pr. 1924.] Pappbd. ca. M. 8.80, Halblein. ca. M. 10.—

Wörterbuch der Warenkunde. Von Prof. Dr. M. Pietsch. Geb. M. 3.50

Handelswörterbuch. Von Justizrat Dr. M. Strauß und Handelsschuldirektor Dr. V. Sittel. Zugleich 5-sprachiges Wörterbuch zusammengestellt von V. Armhaus. Geb. M. 3.50

Teubners kleine Sprachbücher enthalten für die Erlernung der Sprache nur für den praktischen Gebrauch geeignete Sprachstoffe. Sie eignen sich deshalb besondere für Kaufleute, Techniker, Reisende usw. Fast alle Bände enthalten Karten und Pläne.

Bisher sind folgende Sprachen erschienen: **Französisch** (Leçons de français). Von Studienrat Dr. E. Madlung. 3. Aufl. M. 2.80. **Englisch** (English Lessons). Von Prof. Dr. O. Thiergen. 8. Aufl. M. 2.80. **Italienisch** (Lezioni Italiane). Von A. Scanferlato. Teil I. 8. Aufl. M. 3.—. Teil II: Ergänzungen. 4. Aufl. [U. d. Pr. 1924.] **Spanisch** für Schule, Beruf und Reise. Von Lehrer C. Dernehl. 2. Aufl. M. 2.60. Lectura española. Von Lehrer C. Dernehl und H. Laudan. I: Familia. M. —.50. II: Patria. M. —.60. III: Alrededor del Mundo. M. —.50. **Portugiesisch** (Lições Portuguezas). Von Lehrer G. Eilers. M. 3.—. **Türkisch.** Von Konsul W. Padel. M. 3.—. **Polnisch** für Schule, Beruf und Reise. Von Prof. Dr. A. Brückner. M. 3.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Anfragen ist Rückporto beizufügen